



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Caracterización Hidrodinámica y
Gravitacional de Colisiones de Objetos
Compactos y de sus Consecuencias como
Progenitores de Eventos Transitorios

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
FÍSICO

PRESENTA:
PABLO BOSCH GÓMEZ



DIRECTOR DE TESIS:
DR. WILLIAM HENRY LEE ALARDÍN



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Bosch
Gómez
Pablo
56 11 99 83
Universidad Nacional Autónoma de
México
Facultad de Ciencias
Física
409003316

2. Datos del Tutor

Dr.
William Henry
Lee
Alardín

3. Datos del sinodal 1

Dr.
Dany Pierre
Page
Rollinet

4. Datos del sinodal 2

Dr.
Axel Ricardo
de la Macorra
Petterson

5. Datos del sinodal 3

Dr.
Roelof
Bijker

6. Datos del sinodal 4

Dr.
Carlos
Málaga
Iguñiz

7. Datos del trabajo escrito

Caracterización Hidrodinámica y Gravitacional de Colisiones de Objetos Compactos
y de sus Consecuencias como Progenitores de Eventos Transitorios
2014



Caracterización Hidrodinámica y
Gravitacional de Colisiones de Objetos
Compactos y de sus Consecuencias como
Progenitores de Eventos Transitorios

Pablo Bosch Gómez

Tutor:
Dr. William Henry Lee Alardín

2014

*A mi abuela Lydia
y a mi abuela Conchita*

Agradecimientos

Quiero agradecer profundamente al doctor William Lee: mi maestro, mi asesor, y mi mentor, por todo el apoyo que me ha brindado a lo largo de los años y en especial para este trabajo. Gracias por transmitirme tu conocimiento y la pasión que tienes por la astronomía. Siempre estaré en deuda contigo por abrirme las puertas a este maravilloso universo.

Agradezco a mis sinodales, Dr. Dany Page, Dr. Axel de la Macorra, Dr. Roelof Bijker, y Dr. Carlos Málaga, por su gran apoyo y sus valiosos consejos.

Quiero agradecer a todos los maestros de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México con los que llevé clases. Gracias a ustedes mi formación como físico fue amena, divertida y desafiante. Todas sus clases, comentarios y observaciones sirvieron para moldear mi carácter de manera profesional y también personal.

Quiero agradecer a toda mi familia, a todos mis amigos y a mis padrinos, por el gran apoyo y el enorme entusiasmo que me han brindado a lo largo de los años. Gracias por todo el cariño y confianza que me han obsequiado.

Agradezco a Nayeli Galindo por su apoyo incondicional y por creer en mi día con día. Siempre estaré agradecido por manternerte a mi lado, en la buenas y en las malas, a lo largo de este divertido camino.

Quiero agradecer a Carlos, a Claudia y a Sofía por apoyarme no sólo en mis momentos de cordura y lucidez sino también por patrocinar mis ideas un tanto locas y excéntricas. Sin ellos no sería la persona que soy. Gracias por inculcarme los valores con los que hoy vivo y por permitirme tener una opinión y una voz propia. Pero sobre todo, gracias por mostrarme el increíble mundo de la ciencia

Agradezco al Instituto de Astronomía de la Universidad Nacional Autónoma de México por todo el apoyo que me ha brindado durante mi estancia como becario y por recibirme con los brazos abiertos desde el primer día. En particular, quiero agradecer a Dr. José Franco por incluirme

en su proyecto de CONACyT. De la misma manera, quiero agradecer a Dr. Dany Page y al comité organizador de la escuela: “*International Astrophysics School: Look & Listen*”, por aceptarme y brindarme el apoyo necesario para poder asistir.

Quiero agradecer a la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México por permitirme realizar mi carrera de manera plena y de la mejor forma posible. Asimismo, agradezco el apoyo que me dieron para realizar un semestre de intercambio académico en la universidad de McGill en Montreal, Canadá.

Índice general

Resumen	xv
1. Introducción	1
1.1. Cúmulos globulares	1
1.2. Evolución estelar	5
1.2.1. Secuencia principal	7
1.2.2. Sección superior de la secuencia principal	8
1.2.3. Sección inferior de la secuencia principal	9
1.2.4. La fase de gigantes	11
1.2.5. Rama de gigantes asintótica	12
1.2.6. El final de la etapa gigante	13
1.2.7. Etapa final de la evolución estelar	16
1.3. Agujero negro de masa estelar y estrella de neutrones	17
2. Esferas de gas politrópicas	21
2.1. Campo gravitacional	21
2.2. Equilibrio hidrostático	22
2.3. Relación politrópica	24

2.4. Modelos estelares politrópicos	26
2.4.1. Propiedades de la solución	27
2.4.2. Modelos con K fija	28
2.5. Estrellas de neutrones	30
2.5.1. Ecuación de Estado	31
2.5.2. Modelo de una estrella de neutrones	33
2.6. Agujeros negros	36
2.6.1. Introducción	36
2.6.2. Agujero negro de Schwarzschild	37
2.6.3. Agujero negro de Kerr	38
2.6.4. Agujeros negros en el universo	39
3. Smooth Particle Hydrodynamics	43
3.1. Detalles del método numérico	43
3.1.1. Motivación	43
3.1.2. Requisitos del método	44
3.1.3. Formulación Lagrangiana vs. Euleriana	45
3.1.4. Interpolación mediante un kernel	47
3.1.5. Ecuaciones y conservación de cantidades físicas	50
3.1.6. Resolución adaptativa	55
3.1.7. Viscosidad Artificial	56
3.1.8. El término “grad-h”	60
3.2. SPH para resolver Lane–Emden	62
4. Dinámica de las colisiones	65

4.1. Trayectorias parabólicas	65
4.2. Potenciales gravitacionales	67
4.3. Parámetro de impacto	69
4.4. Emisión de ondas gravitacionales	74
4.4.1. Fuentes de ondas gravitacionales	74
4.4.2. Características de las ondas gravitacionales	76
5. Resultados	81
5.1. Condiciones iniciales y detalles del SPH	81
5.1.1. Condiciones iniciales	81
5.1.2. Detalles del SPH	83
5.2. Resultados	85
5.2.1. Parámetro de impacto $\eta = 1$	85
5.2.2. Parámetro de impacto $\eta = 2$	95
5.2.3. Parámetro de impacto $\eta = 3$	103
5.2.4. Resumen de los resultados	110
6. Conclusiones	113

Resumen

En este trabajo se presentan los cálculos detallados de una colisión entre una estrella de neutrones y un agujero negro de masa estelar. En un inicio los dos objetos compactos siguen trayectorias parabólicas; la estrella de neutrones no está ligada al agujero negro hasta después del primer pasaje por periastro. Se estudian la pérdida y eyección de masa de la estrella que en algunos casos forman un disco de acreción y una cola alrededor del agujero negro. Asimismo, se estudia la pérdida de momento angular durante los pasajes por periastro que se traducen en emisión de ondas gravitacionales. Para las simulaciones se utilizaron tres parámetros de impacto, $\eta = 1, 2$ y 3 , donde el parámetro de impacto se definió como el cociente entre la frecuencia interna de la estrella y la frecuencia orbital. Igualmente, se utilizaron tres potenciales gravitacionales: el potencial Newtoniano, el potencial de Nowak–Wagoner y el potencial de Paczyński–Wiita. Los dos últimos son potenciales pseudo-Newtonianos que incluyen ciertas propiedades dinámicas características del espacio-tiempo de Schwarzschild; por ejemplo, la precesión de las órbitas. Se utiliza un código tridimensional *smooth particle hydrodynamics* (SPH), y la estrella de neutrones es modelada mediante una ecuación politrópica suave, $P = K\rho^\gamma$, con índice adiabático $\gamma = 2$. El agujero negro es modelado como una masa puntual envuelta en una frontera en el radio gravitacional y su cociente de masas es $q = M_{\text{NS}}/M_{\text{BH}} = 0.31$. Se encontró que entre más grande sea el parámetro de impacto más parecidas son las configuraciones finales. En cambio, para una colisión directa, $\eta = 1$, las configuraciones finales dependen fuertemente del potencial que se esté utilizando.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Cúmulos globulares

Un cúmulo globular es un sistema estelar masivo con distribución esférica que contiene $N \simeq 10^4\text{--}10^6$ estrellas. Los cúmulos globulares son estructuras viejas; los de baja metalicidad son de las estructuras más viejas de la galaxia y tienen edades de ~ 12 Gyr, en otras palabras, los cúmulos globulares se formaron cuando el universo tenía 1 Gyr de edad. Puesto que son estructuras viejas, no contienen ni gas, ni polvo, ni estrellas jóvenes. Nuestra galaxia contiene ~ 150 cúmulos globulares; éstos están situados en el halo estelar. Aproximadamente 80 % de los cúmulos globulares de la galaxia son de baja metalicidad, presentan muy poca o nada de rotación, tienen una distribución esférica, y están asociados al halo estelar; el 20 % son de alta metalicidad, están bastante aplanados y presentan una alta rotación, éstos están asociados con el disco y el bulbo de la galaxia, es decir, están cerca del plano galáctico. La bimodalidad de las metalicidades presente en nuestra galaxia también aparece en otras. La cantidad de cúmulos globulares aumenta entre más grande sea la galaxia que los contiene, galaxias elípticas grandes, tales como M87, tienen hasta 10000 cúmulos globulares [1].

La densidad estelar en el centro de un cúmulo globular es muy elevada, el valor utilizado comúnmente es: $\rho_c \sim 10^4 M_{\odot}\text{pc}^{-3}$. Con el fin de comparar, en la vecindad solar la densidad de estrellas es $0.05 M_{\odot}\text{pc}^{-3}$. Dicho de otro

modo, es como situar 10 000 estrellas, distribuidas de manera esférica, en una distancia no mayor a la que hay entre el Sol y Alpha Centauri. Ésta es la estrella más cercana a nuestro astro rey y está a una distancia $\simeq 1$ pc. Algunos cúmulos globulares son muy luminosos y tienen ciertas particularidades, que los hacen distinguibles con respecto a los otros, y se cree que son los centros densos de galaxias desbaratadas por fuerzas de marea; éste es el caso de ω -Centauri el cual se cree que fue el centro denso de una galaxia enana [1].

Como ya vimos los cúmulos globulares son de los sistemas estelares más simples: son esféricos, no contienen gas, ni polvo, ni estrellas jóvenes, no contienen materia oscura y son dinámicamente viejos. Un sistema con estas características es el laboratorio perfecto para estudiar la dinámica estelar, en otras palabras, es el mejor ejemplo del problema gravitacional de N-cuerpos¹ [1].

Para caracterizar a los cúmulos se utilizan tres radios. El radio del núcleo es el radio en el cual el brillo superficial es la mitad del valor central. El radio de media luz es el radio de una esfera que contiene la mitad de la luminosidad total. Finalmente, el radio de marea o el radio límite, es el radio que se encuentra al exterior del cúmulo y en el cual la densidad se va a cero [1].

Los cúmulos abiertos, a diferencia de los cúmulos globulares, son sistemas estelares irregulares que contienen $N \simeq 10^2$ – 10^4 estrellas. Por lo general, los cúmulos abiertos se encuentran en el disco galáctico y la mayoría de los que conocemos tienen menos de 1 Gyr de edad. Es raro encontrar cúmulos abiertos viejos, ya que son propensos a ser disueltos por choques gravitacionales con nubes de gas interestelar. Es probable que la mayoría de las estrellas del disco galáctico se hayan formado en cúmulos abiertos que han sido disueltos desde entonces.

En los cúmulos, globulares o abiertos, existe el fenómeno de relajación de dos cuerpos el cual consiste en el intercambio de energía y momento entre dos estrellas por medio de una “colisión”. Como consecuencia, la distribución de velocidad toma la forma de una distribución de Maxwell y provoca que algunas estrellas se escapen del cúmulo; a esto se le conoce como la *evaporación*

¹Problema gravitacional de N-cuerpos: comprender la evolución de un sistema de N masas puntuales que interactúan únicamente por medio de fuerzas gravitacionales.

del cúmulo. En un tiempo de *evaporación* el cúmulo pierde una gran parte de sus estrellas. El tiempo de *evaporación* para un cúmulo abierto es $t_{\text{evap}} \sim 1$ Gyr. Por otro lado, el tiempo de *evaporación* para un cúmulo globular es mayor a la edad del universo; no obstante, el fenómeno de relajación de dos cuerpos tiene como consecuencia la segregación de masa. Las estrellas de mayor masa se reúnen cerca del centro del cúmulo y las estrellas menos masivas son expulsadas hacia la periferia del cúmulo. Si inicialmente las estrellas de diferente masa están distribuidas homogéneamente en el cúmulo, con velocidades orbitales similares, entonces las más masivas tendrán mayor energía cinética. Sin embargo, una distribución Maxwelliana de las velocidades implica que las energías cinéticas tienen que ser iguales. Entonces, en general, las estrellas más masivas se moverán más lento después de la colisión y como resultado ocuparán una órbita de menor energía. Mediante este mecanismo el núcleo del cúmulo globular comenzará a poblarse de estrellas más masivas, incrementar su densidad, y a vaciarse de las más ligeras; éstas últimas desplazándose a los alrededores del cúmulo y formando un halo que se expande. Casi todos los cúmulos globulares han sido afectados por la segregación de masa. Los sistemas binarios fuertemente ligados se comportan como estrellas masivas y también se aglutinan en núcleo del cúmulo. A medida que el núcleo se contrae, se hace más denso, mientras que las partes exteriores se vuelven más difusas. Después de $\sim 10^9$ – 10^{10} yr, el radio del núcleo tiende a cero y su densidad aumenta sin límites: es el colapso del núcleo [18].

En el artículo de Lee, Ramirez- Ruiz y Van de Ven de 2010, aparece una estimación de la tasa de encuentros entre objetos compactos en el núcleo colapsado de un cúmulo globular. Suponiendo una distribución esférica homogénea de las estrellas dentro de un núcleo de radio r_c y que las estrellas siguen una distribución de velocidad Maxwelliana con dispersión σ_c , junto con el efecto dominante del enfoque gravitacional², los autores aproximan la

²En inglés: *Gravitational focusing*

tasa total de colisiones como

$$\begin{aligned} \nu_{col} = & 2.1 \times 10^{-3} \text{ Gyr}^{-1} \frac{f_1 f_2}{1 + \delta_{12}} \\ & \times \left(\frac{n_c}{10^6 \text{ pc}^{-3}} \right)^2 \left(\frac{r_c}{0.1 \text{ pc}} \right)^3 \left(\frac{\sigma_c}{10 \text{ km s}^{-1}} \right)^{-1} \\ & \times \left(\frac{M_1 + M_2}{1 M_\odot} \right) \left(\frac{R_{\min}}{10 \text{ km}} \right), \end{aligned} \quad (1.1)$$

donde f_i es la fracción del tipo de objeto estelar i , n_c es el número total de densidad, $\delta_{12} = 1$ si las estrellas son del mismo tipo y es 0 en otro caso, M_i es la masa del objeto estelar i , y la distancia mínima a la cual pueden estar los dos objetos es la suma de sus radios $R_{\min} = R_1 + R_2$. El enfoque gravitacional es un efecto que aumenta la probabilidad de colisión entre dos partículas por la atracción gravitacional que hay entre ellas; entonces, la sección transversal es mayor que en ausencia del campo gravitacional. Se consideraron los casos en el cual las estrellas pasan suficientemente cerca y forman una binaria por medio de la transferencia de energía orbital en energía interna oscilatoria. La sección transversal para la captura por fuerzas de marea que se utilizó tiene la forma

$$\Sigma_{\text{tid}} = a \left(\frac{v_{\text{inf}}}{v_{\star,2}} \right)^{-\beta} R_2^2, \quad (1.2)$$

donde v_{inf} es la velocidad relativa en infinito y $v_{\star,2} = (2GM_2/R_2)^{1/2}$ es la velocidad de escape en la superficie de la secundaria, es decir la estrella capturada. El valor de la amplitud a depende del tipo de estrellas involucradas en el encuentro y se obtuvo por medio de una función de ajuste; en todos los casos utilizaron $\beta \simeq 2.2$. Para los casos en donde el efecto de enfoque gravitacional dominaba las colisiones se utilizó $\beta = 2$. Entonces, la tasa de encuentros por fuerzas de marea se puede expresar de la misma manera que en la Ecuación (1.1), cambiando la distancia de mínimo acercamiento por

$$R_{\min} = \Gamma \left(2 - \frac{\beta}{2} \right) \frac{a}{\pi} \frac{M_2}{M_1 + M_2} \left(\frac{2\sigma_c}{v_{\star,2}} \right)^{2-\beta} R_2, \quad (1.3)$$

donde Γ es la función gamma completa. En este artículo se propusieron otros canales de formación para las colisiones de objetos compactos: interacciones de tres cuerpos, interacción entre estrellas simples y binarias primordiales³,

³Sistemas binarios formados desde antes que el núcleo del cúmulo colapsara.

doble intercambio de estrellas en una binaria y binarias compactas primordiales. La tasa de encuentros entre un agujero negro de masa estelar y una estrella de neutrones dentro del núcleo colapsado de un cúmulo globular es de $\nu_{\text{enc}} \simeq 200 \text{ yr}^{-1} \text{ Gpc}^{-3}$ [10]. Vemos, entonces, que es interesante situar las colisiones de objetos compactos dentro de los núcleos colapsados de cúmulos globulares debido a las altas densidades en estas regiones comparadas con las que hay en el disco galáctico o en los cúmulos abiertos.

Más adelante, para las simulaciones numéricas, utilizaremos trayectorias parabólicas ($E_{\text{tot}} = 0$) para las órbitas de los objetos compactos. Estrictamente deberíamos de utilizar órbitas hiperbólicas ($E_{\text{tot}} > 0$) puesto que la velocidad promedio dentro de un cúmulo globular es de 10 km s^{-1} , es decir, es diferente de cero. Para tener una órbita parabólica necesitamos que la energía sea cero en infinito. Comparemos la energía cinética de la estrella a la velocidad media dentro del cúmulo con la energía cinética al momento de la colisión; al hacer ésto veremos qué tan parabólica es la órbita. La velocidad media en el cúmulo es $v_{\text{CG}} \simeq 10 \text{ km s}^{-1}$ y es la que tomaremos cuando la estrella está en infinito, y al momento de la colisión es $v_{\text{col}} \simeq \frac{2}{3}c$. Entonces, haciendo una estimación con órdenes de magnitud, el cociente de energías es

$$\frac{E_{\text{inf}}}{E_{\text{col}}} = \left(\frac{v_{\text{inf}}}{v_{\text{col}}} \right)^2 \simeq \left(\frac{10^4}{10^8} \right)^2 = 10^{-8}. \quad (1.4)$$

Es tan pequeño el cociente de energías que la aproximación de la órbita por una parábola es razonable. Si hubiéramos elegido otro tipo de estrellas que no fueran estrellas compactas esto no seguiría siendo verdad. Hagamos el mismo cálculo pero para una colisión entre una estrella con las características del Sol, $1M_{\odot}$ y $1R_{\odot}$, y una gigante roja, $5M_{\odot}$ y $100R_{\odot}$. Entonces la velocidad al momento de la colisión es $v_{\text{col}2} \sim 10^4 \text{ m s}^{-1}$ y el cociente de energías será cercano a 1. En este segundo caso no podemos aproximar la órbita hiperbólica por una parabólica.

1.2. Evolución estelar

A lo largo de esta sección nos apoyaremos fuertemente en los diagramas HR, denominado así por Hertzsprung y Russell que estudiaron la relación entre la magnitud absoluta y los tipos espectrales de las estrellas. En otras

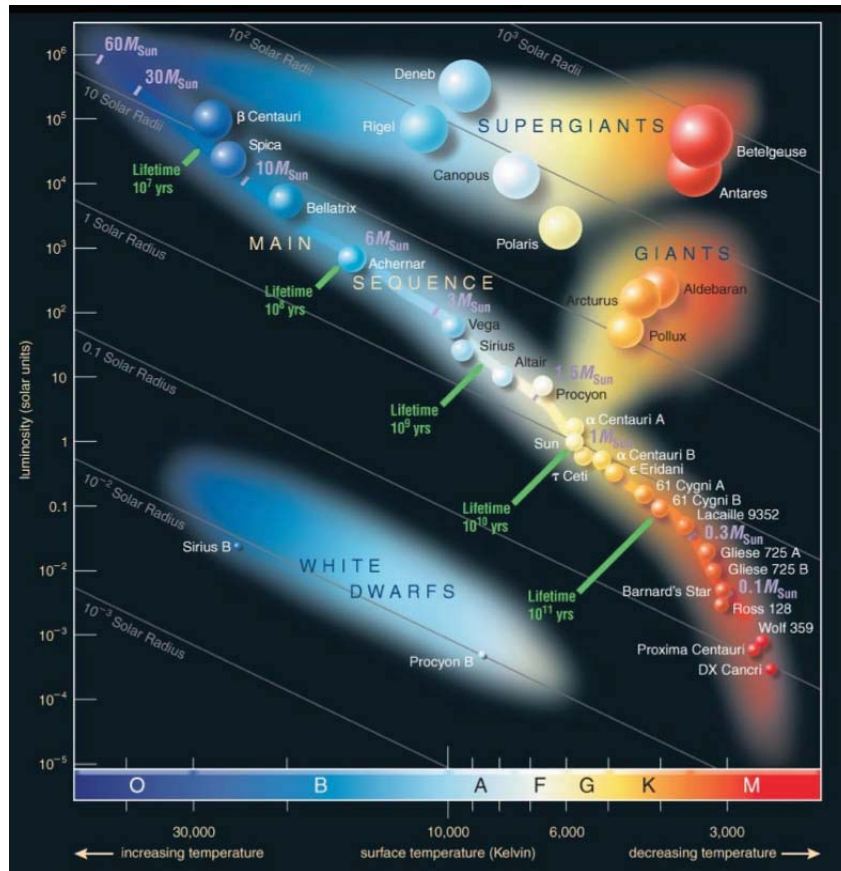


Figura 1.1: Diagrama HR. (La imagen es de European Southern Observatory, ESO, <http://www.eso.org/public/images>)

palabras, una gráfica que muestra la luminosidad y la temperatura efectiva de las estrellas es un diagrama HR. Uno esperaría que las estrellas estén distribuidas de manera uniforme en esta gráfica dadas las variedades, las luminosidades y las temperaturas. No obstante, se encontró que la mayoría de las estrellas se sitúan en una diagonal que se denomina la secuencia principal. La parte superior izquierda está poblada por las estrellas más masivas y la parte inferior derecha está poblada por las menos masivas. El Sol se sitúa, aproximadamente, a la mitad de la secuencia principal.

1.2.1. Secuencia principal

La fase denominada secuencia principal es la etapa evolucionaria en la cual la producción de energía mediante el quemado de hidrógeno en el núcleo es la única fuente de energía estelar. Durante esta etapa la estrella está en equilibrio hidrostático y su estructura sólo cambia debido a la modificación de la composición química por las reacciones nucleares. Entonces, la evolución sucede en una escala de tiempo nuclear, esto quiere decir que la etapa de secuencia principal toma la mayor parte de la vida de una estrella. La escala de tiempo nuclear es el tiempo en el cual la estrella radía toda la energía que se puede producir por medio de reacciones nucleares y está dado por

$$t_{\text{nuc}} = \frac{M/M_{\odot}}{L/L_{\odot}} \times 10^{10} \text{ yr} . \quad (1.5)$$

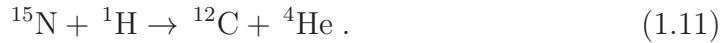
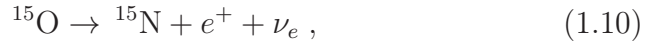
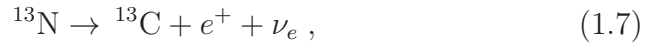
Estrellas más masivas evolucionan más rápido puesto que radían más energía, la fase de secuencia principal: para una estrella de $30M_{\odot}$ es de 2 millones de años, para una de $15M_{\odot}$ son 10 millones de años. Comparemos esos valores con los de una estrella de masa solar que dura 10000 millones de años en su fase de secuencia principal, o con los de una aún menos masiva que tienen todavía más tiempo en secuencia principal: para $0.25M_{\odot}$ dura 70000 millones de años. En general las estrellas más masivas son menos abundantes como consecuencia de su corta estancia en la etapa de secuencia principal.

Si la masa de una estrella es superior a un cierto límite, la presión de radiación ya no puede sostener a la estrella de las fuerzas gravitacionales en forma estable; las estrellas superiores a este límite no pueden formarse. Cálculos teóricos sitúan este límite en $120M_{\odot}$ pese a que las estrellas más masivas que se han detectado observacionalmente son de $150M_{\odot}$. De igual manera, hay un límite inferior para la masa de una estrella el cual es de $0.08M_{\odot}$; las estrellas con esta masa no se calentarían lo suficiente para iniciar el quemado del hidrógeno. No obstante, pueden generar un poco de luminosidad quemando deuterio, pero este combustible se acaba muy rápido. Las estrellas en las cuales sucede esto se llama Enanas Cafés y tienen $M > 0.015M_{\odot}$ la cual es la masa mínima para quemar deuterio [3].

1.2.2. Sección superior de la secuencia principal

Las estrellas en la sección superior de la secuencia principal son tan masivas y su temperatura central es tan alta que el ciclo CNO⁴ puede operar. La cadena pp⁵ o el ciclo CNO son igual de eficientes a 18 millones de grados, lo cual corresponde al interior de una estrella de $1.5M_{\odot}$. Esta es, aproximadamente, la masa que divide las secciones superiores e inferiores de la secuencia principal.

El ciclo CNO se vuelve dominante puesto que la tasa de reacciones aumenta más rápido con la temperatura. En el ciclo CNO el carbono, nitrógeno y oxígeno actúan como catalizadores. Mediante estos catalizadores se quema hidrógeno en helio; se transforman cuatro protones en un núcleo de helio, dos positrones, dos neutrinos y radiación. Las reacciones involucradas en este proceso son las siguientes



La reacción Ec. (1.9) es la más lenta de todas las otras reacciones por lo cual determina la tasa del ciclo CNO; a una temperatura de 20 millones de grados el tiempo para que suceda, Ec. (1.9), es un millón de años.

La producción de energía debido al ciclo CNO está muy concentrada en el núcleo de la estrella. El flujo de energía saliente ya no puede ser transportado por radiación. Entonces, las estrellas de la sección superior de la secuencia principal tienen núcleos convectivos, es decir, que la energía es transportada por medio de material en movimiento. Gracias a este fenómeno los materiales están mezclados y la abundancia de hidrógeno disminuye uniformemente en toda la región convectiva.

Afuera del núcleo la energía es transportada por la radiación y no hay reacciones nucleares. Entre la sección radiativa y la convectiva hay una región

⁴En inglés: *CNO cycle*

⁵En inglés: *pp-chain*

de transición en donde la abundancia de hidrógeno disminuye entre más cerca estemos del núcleo.

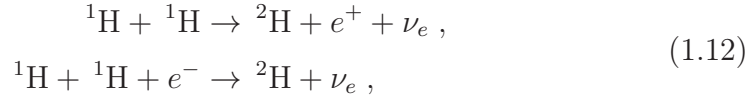
El núcleo convectivo de la estrella comenzará a contraerse a medida que el hidrógeno del núcleo comienza a consumirse. En el diagrama HR, Fig. 1.1, la estrella se desplazará lentamente a la zona de arriba a la derecha, es decir, su luminosidad aumentará pero su temperatura superficial disminuirá. Cuando todo el hidrógeno central sea consumido, el núcleo comenzará a contraerse rápidamente. La temperatura superficial aumentará y la estrella se desplazará nuevamente a la región superior izquierda en el diagrama HR. Puesto que el núcleo se contrae, la temperatura del cascarón de hidrógeno rodeando el núcleo comenzará a aumentar hasta que se encienda el quemado del hidrógeno nuevamente.

1.2.3. Sección inferior de la secuencia principal

La sección inferior de la secuencia principal es debajo de $1.5M_{\odot}$. La reacción dominante en los núcleos estelares es la cadena pp ya que la temperatura central es menor que en las estrellas masivas. Dado que la tasa de producción de energía en la cadena pp no es tan sensible a los cambios de temperatura, como el ciclo CNO, entonces la región de producción está mucho más esparcida comparado con estrellas más masivas. Como consecuencia de esto el núcleo se vuelve inestable convectivamente, pero sigue siendo radiativo. Por otro lado, las capas externas de la estrella son opacas por las bajas temperaturas y entonces la radiación no puede transportar toda la energía y comienza la convección. La estructura de una estrella de la sección inferior de la secuencia principal es opuesta a la de la sección superior: tiene un núcleo radiativo y una envoltura convectiva. Puesto que no hay convección en el centro entonces el hidrógeno en el núcleo es consumido muy rápidamente y su abundancia aumenta hacia el exterior de la estrella.

El proceso que le da energía a estas estrellas, de menos de $1.5M_{\odot}$, es la cadena pp y consiste de los siguientes pasos

ppI:

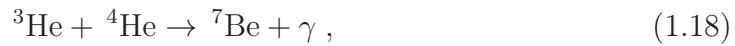


Para cada reacción Ec. (1.14) es necesario que las reacciones Ecs. (1.12), (1.13) tengan lugar dos veces. La probabilidad de que la primera reacción pase es muy pequeña. A la temperatura y densidad central del Sol el tiempo esperado para que un protón colisione con otro es de 10^{10} yr en promedio. Gracias a la lentitud de este proceso nuestro Sol sigue brillando. La segunda reacción, donde el deuterio y un protón se unen para formar un isótopo de helio, es mucho más rápida comparada con la reacción anterior. De ahí que la abundancia de deuterio dentro de las estrellas es pequeña. La última reacción puede tomar tres caminos diferentes, el presentado en la ecuación (1.14) es el más probable y se le adjudica el 91 % de la energía producida dentro del Sol. Los otros dos procesos son

ppII:



ppIII:



Mientras la estrella se acaba su reserva de hidrógeno, en el núcleo, aumenta su temperatura y su luminosidad, en otras palabras, comienza a subir en el diagrama HR siguiendo la línea de secuencia principal. Su radio cambia muy poco. La traza evolucionaria de la estrella comenzará a tomar la dirección

hacia la derecha entre menos hidrógeno quede en su núcleo. Eventualmente el núcleo será puro helio y el cascarón de hidrógeno alrededor del núcleo comenzará a ser quemado.

Estrellas entre $0.08M_{\odot}$ y $0.26M_{\odot}$ tienen una evolución bastante sencilla. Durante toda su vida en secuencia principal son completamente convectivas lo que quiere decir que la totalidad de su contenido de hidrógeno puede ser utilizado como combustible. Finalmente cuando todo su hidrógeno es quemado en helio se contraen y se convierten en enanas blancas [3].

1.2.4. La fase de gigantes

La etapa de secuencia principal en la evolución estelar termina cuando el hidrógeno se ha agotado en el centro. La estrella está en un estado en donde un cascarón de hidrógeno se está quemando alrededor del núcleo de helio. Para las estrellas inferiores de secuencia principal la transición es lenta, aproximadamente 10^9 yr, y da lugar a la rama de las Subgigantes en un diagrama HR. Por otro lado, en el caso de las estrellas superiores de secuencia principal es un salto bastante rápido, aproximadamente 10^6 yr.

La masa del núcleo de helio aumenta por el quemado del cascarón de hidrógeno que lo envuelve. Como consecuencia la envoltura comienza a crecer; mientras el radio comienza a crecer también lo tiene que hacer su luminosidad. En este punto la estrella se ha convertido en una gigante.

En estrellas de baja masa, $M \leq 2.3M_{\odot}$, la densidad del núcleo crece tanto que eventualmente se hará degenerado. La temperatura comenzará a aumentar, y ésta será uniforme en el núcleo gracias a la alta conductividad del gas degenerado. Si la masa de la estrella es mayor a $0.26M_{\odot}$ la temperatura central llegará a 100 millones de grados, lo cual es suficiente para quemar helio en carbono por medio de una reacción triple alpha. Se encenderá el quemado de helio en toda la región central y la temperatura se elevará. Pese a que la temperatura estará aumentando, el núcleo no se va a expandir puesto que la presión de un gas degenerado no depende de ella. La consecuencia es el aumento en la tasa de reacciones nucleares que tienen lugar. La temperatura seguirá aumentando hasta que el núcleo de la estrella deje de ser degenerado y comenzará a expandirse violentamente. Unos cuantos segundos después que el helio se encendió hay una explosión: es el flash de helio. La energía

del flash de helio es absorbida por las capas externas de la estrella, entonces no provoca la disrupción total de la estrella. De hecho la luminosidad de la estrella disminuye durante el flash ya que el núcleo aumenta y la envoltente se contrae. Después de este episodio, la estrella llega a un estado de equilibrio, nuevamente, en el cual quema el helio en su núcleo no-degenerado.

Después del flash de helio la estrella se sitúa en la rama horizontal de las gigantes. Su posición exacta es sensible a la cantidad de masa restante en la envoltente. Lo cual depende fuertemente de la masa perdida durante el flash de helio, y es aleatorio de estrella a estrella. La luminosidad no cambia mucho en la rama horizontal; sin embargo la temperatura depende de cuánta masa hay en la envoltente, y es mayor para las que tienen más.

La distribución de las estrellas en la rama horizontal depende de la metalicidad de éstas. Una menor metalicidad en las estrellas se traduce en una abundancia mayor en la región azul de la rama horizontal. Como vimos anteriormente, algunos cúmulos globulares tienen baja metalicidad, entonces el diagrama HR del cúmulo tendría una población prominente en la región azul de la rama horizontal. En el caso de altas metalicidades la estrella se situaría en la región roja de la rama horizontal.

Para estrellas de masa intermedia, $2.6M_{\odot} < M \leq 8M_{\odot}$, la temperatura central es más alta y la densidad central es menor, así que el núcleo no va a ser degenerado. Ahora, el quemado del helio se puede hacer de una manera menos catastrófica a medida que la región central se contrae. En las estrellas más masivas el quemado del helio comienza antes de que puedan llegar a la rama de las gigantes rojas. Algunas continuarán moviéndose hacia la derecha en el diagrama HR, en cambio otras perderán masa debido a los fuertes vientos estelares. Si la estrella puede conservar su envoltente entonces formará parte de las super gigantes rojas. De lo contrario, se regresará a la parte azul del diagrama HR y terminará como una estrella de Wolf-Rayet. Éstas son estrellas muy calientes y muy masivas que han perdido sus capas externas por causa de fuertes vientos estelares.

1.2.5. Rama de gigantes asintótica

Como ya vimos la evolución de la estrella después de que el núcleo de helio se enciende dependerá de la masa de la estrella. Ésta determina la tempera-

tura central de la estrella y el grado de degeneración del núcleo. Cuando el helio central se haya agotado, el helio comenzará a quemarse en un cascarón después de que el cascarón de hidrógeno se haya extinguido. En el diagrama HR la estrella se moverá hacia temperaturas efectivas menores pero aumentará en luminosidad. Esta etapa es similar a la fase de gigantes rojas para las estrellas de baja masa; no obstante las temperaturas son mayores. Por esta razón se le conoce por el nombre de rama de gigantes asintótica. Una vez que el cascarón de helio alcanza al cascarón extinto de hidrógeno la estrella entra en la fase pulsante térmica. Esto es, el quemado de los cascarones de hidrógeno y de helio se van alternando. Una estrella con dos cascarones quemándose alternadamente es una configuración inestable, es por eso que en esta etapa el material estelar puede mezclarse o puede ser eyectado en forma de cascarones, como una nebulosa planetaria. Las pulsaciones continúan hasta que todas las capas externas de la estrella son expulsadas en una nebulosa planetaria debido a la presión de radiación. Las gigantes de masa baja e intermedia, $M \leq 8M_{\odot}$, nunca llegan a calentarse suficiente para encender el núcleo de carbono, el cual continuará su vida como una enana blanca.

1.2.6. El final de la etapa gigante

Al final del quemado de helio la evolución de la estrella tiene algunos cambios, esto se debe a que la escala de tiempo nuclear en el centro es menor a la escala de tiempo térmica de las capas externas. La escala de tiempo térmica es el tiempo en el cual la estrella radiaría toda su energía térmica si repentinamente la producción de energía nuclear se detuviera. Éste también es el tiempo que le toma a la radiación para ir del centro de la estrella hasta su superficie. La escala de tiempo térmica puede ser estimada como

$$t_t \approx \frac{(M/M_{\odot})^2}{R/R_{\odot} L/L_{\odot}} \times 2 \times 10^7 \text{ yr} . \quad (1.22)$$

Además, la energía producida en el centro de la estrella será extraída por medio de neutrinos los cuales no contribuyen a la presión de radiación. Entonces, pese a que el quemado termonuclear sigue los mismos pasos que para el hidrógeno y el helio, la estrella no tiene tiempo de reaccionar inmediatamente.

Para estrellas de $\sim 10M_{\odot}$, el carbono o el oxígeno se pueden encender de

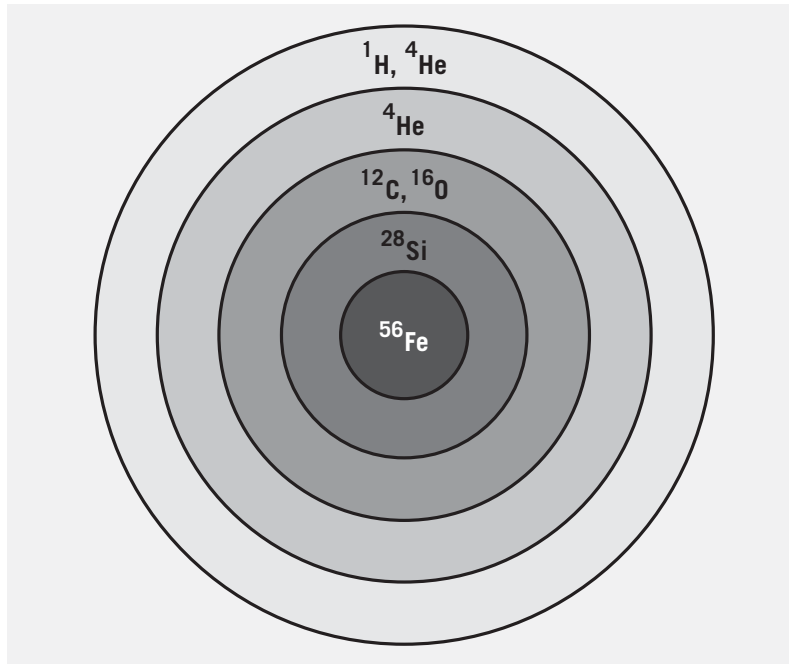


Figura 1.2: Configuración de capas de diferentes composiciones en una estrella masiva ($30M_{\odot}$).

manera explosiva como pasa para el helio en estrellas de baja masa, esto es que hay un flash de carbono o de oxígeno. Éstos son mucho más energéticos que el flash de helio y pueden hacer que la estrella explote como una supernova. Para masas mayores, el núcleo sigue siendo no-degenerado y se puede encender el núcleo de manera no catastrófica. El núcleo comenzará a contraerse y a calentarse, primero se quemará el carbono, después el quemado de oxígeno y silicón comenzará. A medida que cada combustible nuclear se agota en el centro de la estrella, éste seguirá quemándose en forma de cascarón como lo vimos anteriormente para el hidrógeno. Entonces, la estrella estará constituida de varias capas de quemado; finalmente, para estrellas más masivas que $15M_{\odot}$ estarán compuestas de capas de diferentes elementos hasta llegar a un núcleo de hierro, Fig. 1.2.

Las regiones centrales de estrellas masivas, más de $15M_{\odot}$, quemarán su combustible hasta llegar al hierro ^{56}Fe ; después de esto todas las fuentes de energía nuclear se habrán agotado. El quemado del hierro, ^{56}Fe , es endotérmico, en otras palabras, es necesario tomar energía del sistema para que la

reacción tenga lugar. Todas las reacciones mencionadas anteriormente eran exotérmicas, es decir, que cedían energía al sistema. En la figura 1.2, podemos ver la estructura en capas para una estrella de $30M_{\odot}$; está compuesta de cascarones concéntricos de diferentes elementos y a medida que nos acercamos al núcleo estos elementos son cada vez más pesados (^{16}O , ^{28}Si) hasta llegar al núcleo de hierro. Sin embargo, esta no es una configuración estable y si las reacciones nucleares se detienen en el centro de la estrella la presión central disminuirá y el núcleo colapsará. Una porción de la energía se utiliza en disociar los núcleos de hierro en núcleos de helio y después en protones y neutrones. El colapso tiene una duración que va como la escala de tiempo dinámica. La escala de tiempo dinámica es la más corta de las tres escalas de tiempo. Es el tiempo en el cual la estrella colapsaría si quitáramos la presión que la sostiene de su auto-gravedad. Para nuestro trabajo ésta será la escala de tiempo que utilizaremos y más adelante entraremos en detalles. La escala de tiempo dinámica es

$$t_d \simeq (G\rho)^{-1/2} \quad (1.23)$$

En el denso núcleo estelar de una estrella masiva, como en la Fig. 1.2, la escala de tiempo dinámica corresponde a una fracción de segundo. Las capas exteriores también colapsarán pero más lentamente y como consecuencia la temperatura aumentará en las capas que aún tienen combustible sin quemar. Éstas se encenderán y se quemarán de manera explosiva generando una cantidad muy grande de energía, principalmente en forma de neutrinos.

Entonces la etapa final de la evolución estelar puede ser vista como una implosión, es decir un colapso gravitacional del núcleo, el cual se detiene por unos momentos cada vez que una nueva fuente de energía nuclear es disponible para el quemado. Sigue siendo un problema abierto entender cómo la emisión de energía durante el colapso es transformada en la disrupción total de la estrella y la expulsión de sus capas externas. Pese a que el mecanismo final de evolución estelar no está completamente comprendido, el punto final para estrellas más masivas que $8M_{\odot}$ es que las capas exteriores exploten en una supernova. En el núcleo denso, los protones y electrones se combinan para formar neutrones. El núcleo estará compuesto casi únicamente de neutrones, los cuales van a ser degenerados por las altas densidades. La presión de degeneración detendrá el colapso gravitacional para un núcleo de pequeña masa. No obstante, si la masa del núcleo es suficientemente grande, es probable que un agujero negro de masa estelar se forme [3].

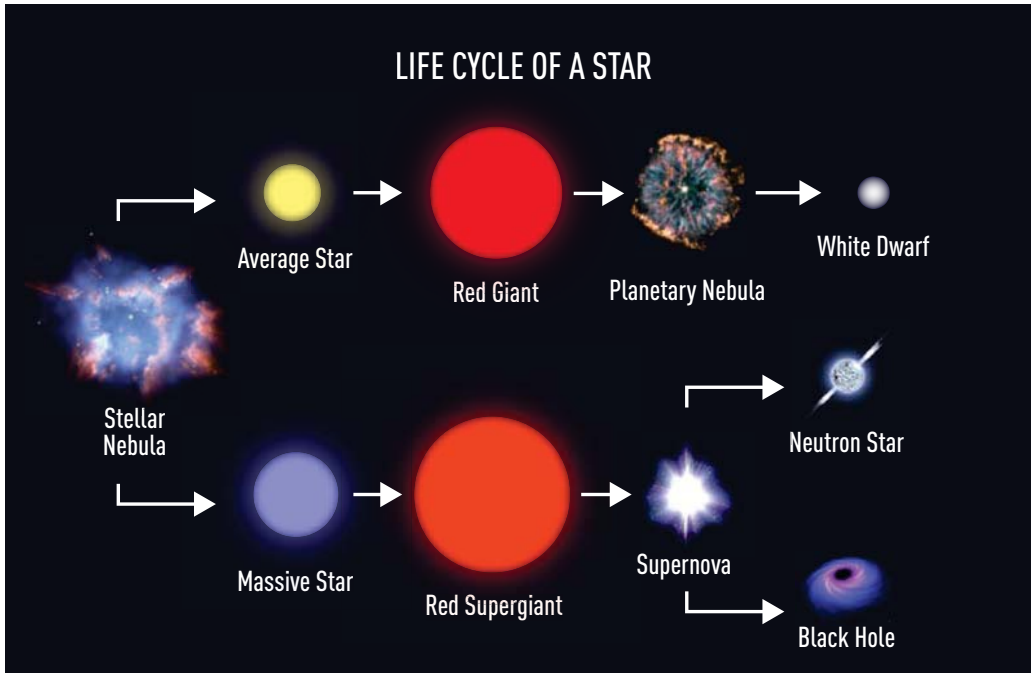


Figura 1.3: Ciclo de vida de una estrella. La etapa final de la vida de una estrella depende fuertemente de la masa inicial de la estrella.

1.2.7. Etapa final de la evolución estelar

La etapa final de la evolución estelar es cuando un cuerpo masivo se ha enfriado y llega a un estado de equilibrio. Hay dos masas particulares durante la etapa de enfriamiento: la masa de Chandrasekhar, $M_{\text{Ch}} \approx 1.2\text{--}1.4M_{\odot}$, y la masa de Oppenheimer-Volkoff, $M_{\text{OV}} \approx 1.5\text{--}3M_{\odot}$ [3, 4]. Consideremos una estrella con menos masa que M_{Ch} , que no cambia. Cuando su combustible se agote la estrella será una enana blanca. A medida que la estrella se enfria, comenzará a contraerse. Finalmente llegará a una temperatura final cero y su estado final de equilibrio será una enana negra completamente degenerada. Si la masa de la estrella es $M_{\text{Ch}} < M < M_{\text{OV}}$, entonces la estrella llegará a un punto final de equilibrio estable que corresponde a una estrella de neutrones completamente degenerada. En el caso de estrellas con masa más grande a M_{OV} seguirán enfriándose y pasarán el punto de equilibrio que corresponde a una estrella de neutrones. No se conoce otro punto de equilibrio después de éste, ni otra fuerza, como la presión de degeneración de neutrones, que

detenga la contracción de la estrella. Se tendrá que seguir contrayendo hasta formar un agujero negro. Entonces, como podemos ver los únicos puntos finales, predichos por la teoría, para el final evolutivo de una estrella son los dos puntos estables mencionadas anteriormente: una enana negra completamente degenerada o una estrella de neutrones completamente degenerada, y los dos casos extremos: la disrupción total de la estrella, sin dejar un remanente, por medio de una explosión o el colapso gravitacional a un agujero negro de masa estelar. Definitivamente el factor más importante para el final evolutivo de una estrella es la pérdida de masa. Por ejemplo, en una supernova hay una disrupción total de la estrella; sin embargo, no es claro si el remanente será una estrella de neutrones, un agujero negro o nada.

1.3. Agujero negro de masa estelar y estrella de neutrones

Las colisiones que vamos a estudiar en este trabajo pudieron hacerse con otros tipos de estrellas. La pregunta es por qué elegimos una estrella de neutrones y un agujero negro de masa estelar. Ya se han hecho trabajos de colisiones de una estrella de secuencia principal, como nuestro Sol, con un agujero negro super masivo [19]. ¿Qué hay, en realidad, detrás de la elección de estas dos estrellas pertenecientes a la categoría de objetos compactos?

Además de hacer la caracterización hidrodinámica y gravitacional de las colisiones, también estamos interesados en los posibles eventos transitorios que esta colisión pueda desencadenar. Los eventos transitorios en los cuales estamos interesados son la emisión de ondas gravitacionales y la producción de ráfagas cortas de rayos gamma (sGRB)⁶ [10, 8, 7, 6]. Para esto es necesario que, como consecuencia de la colisión, se forme un disco de acreción alrededor de alguno de los dos objetos. Para esto necesitamos la disrupción total de una de las dos estrellas. Un agujero negro está rodeado por su radio gravitacional dado por $2G^{M_{\text{BH}}}/c^2$ y el radio de marea está dado por

$$R_{\text{tid}} = R_2 \left(2 \frac{M_1}{M_2} \right)^{1/3}, \quad (1.24)$$

⁶En inglés: short Gamma Ray Burst

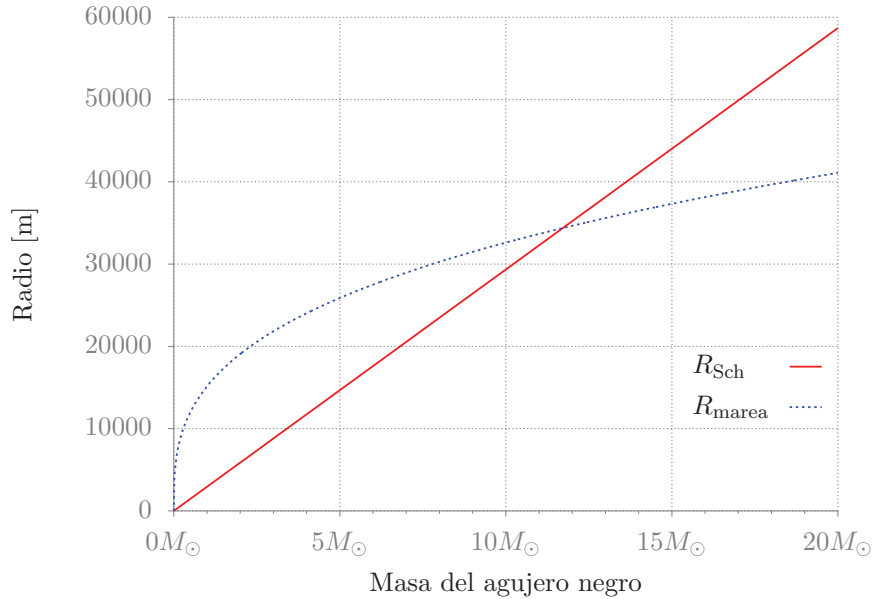


Figura 1.4: Comparación del radio gravitacional y el radio de marea para una estrella de neutrones de $1.4M_{\odot}$, con respecto a la masa del agujero negro. Vemos que a partir de $12M_{\odot}$ el radio de marea para la estrella de neutrones es menor que el radio gravitacional. Esto quiere decir, que un agujero negro de más de $12M_{\odot}$ se tragaría a la estrella de neutrones completa sin antes desbaratarla.

donde los subíndices 1 y 2 se refieren a la estrella primaria y la secundaria respectivamente. Estos dos radios están representados en la figura 1.4. Si elegimos estudiar la colisión entre un agujero negro super masivo ($M_{\text{SMBH}} \sim 10^6 - 10^9 M_{\odot}$) y una estrella de neutrones; entonces, el radio de marea quedaría al interior del radio gravitacional, en otras palabras, el agujero negro super masivo se tragaría a la estrella de neutrones completa sin desbaratarla primero. La región en la cual el radio de marea está afuera del radio gravitacional corresponde, precisamente, a los agujeros negros de masa estelar; en la figura 1.4 vemos que va de 0 a un poco más de $10M_{\odot}$.

Por otro lado, elegimos una estrella de neutrones en lugar de cualquier otra estrella porque es la que tiene el menor radio y una densidad alta. En el marco de eventos transitorios, la emisión de ondas gravitacionales necesita eventos muy intensos: eventos violentos. En particular, la luminosidad de las ondas gravitacionales es inversamente proporcional a la quinta potencia de la

separación entre las estrellas, lo cual veremos con más detalle en el Capítulo 4. La mínima separación que pueden tomar dos estrellas es la suma de sus radios, así que entre más pequeños sean más intensa va a ser la emisión de las ondas gravitacionales. Si tomáramos una estrella de radio Solar y un agujero negro de masa estelar, la luminosidad de las ondas gravitacionales sería 10^{20} veces menor que para una estrella de neutrones.

Capítulo 2

Esferas de gas politrópicas

2.1. Campo gravitacional

Dentro de un cuerpo esféricamente simétrico, el valor absoluto de la aceleración gravitacional, g , a una distancia r del centro no depende del elemento de masa fuera de esta distancia. Depende únicamente de r y de la masa, m , dentro de la esfera concéntrica de radio r :

$$g = \frac{Gm}{r^2}, \quad (2.1)$$

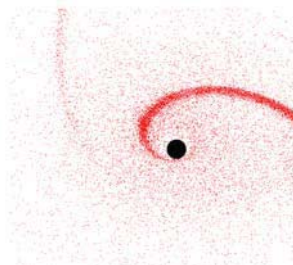
donde $G = 6.673 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ es la constante gravitacional. Entonces la masa gravitante sólo depende de m . El campo gravitacional dentro de la estrella puede ser descrito por un potencial gravitacional Φ , el cual es solución de la ecuación de Poisson gravitacional,

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho, \quad (2.2)$$

donde ∇^2 es el operador de Laplace. Para simetría esférica, la ecuación (2.2), se reduce a

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = 4\pi G \rho. \quad (2.3)$$

El vector de la aceleración gravitacional apunta hacia el centro estelar y lo podemos escribir, en coordenadas esféricas, como $\mathbf{g} = (-g, 0, 0)$ con $0 < g = |\mathbf{g}|$. Se obtiene de Φ por la relación vectorial, $\mathbf{g} = -\nabla\Phi$; en nuestro caso,



en donde estamos suponiendo simetría esférica, sólo la componente radial es diferente de cero y así

$$g = \frac{\partial\Phi}{\partial r} . \quad (2.4)$$

Entonces, la ecuación (2.4) junto con Ec. (2.1) nos da

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r} = \frac{Gm}{r^2} , \quad (2.5)$$

la cual es una solución de la ecuación (2.16). Esto lo podemos verificar haciendo una substitución directa en la ecuación y utilizando la ecuación de la masa contenida en un cascarón esférico de espesor dr ,

$$\frac{\partial m}{\partial r} = 4\pi r^2 \rho . \quad (2.6)$$

Entonces, podemos ver al potencial de la siguientes manera

$$\Phi = \int_0^r \frac{Gm}{r^2} dr + \text{constante} . \quad (2.7)$$

Fijaremos la constante de integración de tal manera que Φ se haga cero cuando $r \rightarrow \infty$.

2.2. Equilibrio hidrostático

Como ya vimos anteriormente, las estrellas pasan la mayor parte de su evolución en etapas donde no se percibe ningún cambio en ellas. Entonces, todas las fuerzas actuando, en un elemento de masa de la estrella, se compensan. A este equilibrio mecánico de fuerzas al interior de una estrella se le denomina “equilibrio hidrostático”. Supongamos que tenemos una estrella hecha de gas, que no está en rotación, sin campos magnéticos, ni compañeras cercanas, entonces los únicos dos agentes actuando en ella son la gravedad y el gradiente de presión.

Para un tiempo fijo, consideramos un cascarón de masa esférico con un espesor infinitesimal dr y un radio r , dentro de la estrella. Para un elemento del cascarón, la masa es ρdr y el peso escala con $-g\rho dr$. El peso es la fuerza gravitacional actuando sobre la masa con dirección al centro de la estrella.

Para prevenir que la masa se acelere en esta dirección, es necesario que una fuerza neta debido a la presión sea ejercida con la misma magnitud y dirección opuesta, es decir, hacia el exterior de la estrella. Esto quiere decir que el cascarón tiene que sentir una presión mayor P_i en su superficie interior que la presión P_e en su superficie exterior. Entonces, la fuerza neta por unidad de área que actúa sobre el cascarón debido a la diferencia de presiones es

$$P_i - P_e \simeq -\frac{\partial P}{\partial r} dr . \quad (2.8)$$

La suma de las fuerzas por unidad de volumen que tienen lugar gracias a la gravedad y a la presión tiene que ser cero,

$$\frac{\partial P}{\partial r} + g\rho = 0 , \quad (2.9)$$

de la cual obtenemos la relación de equilibrio hidrostático

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -g\rho . \quad (2.10)$$

Ésto muestra el balance de fuerzas de la presión y la gravedad, por unidad de volumen del cascarón. Sustituyendo, con la ecuación (2.1), en Ec. (2.10) obtenemos

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{Gm}{r^2}\rho . \quad (2.11)$$

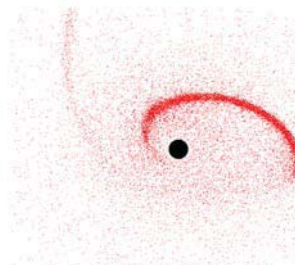
Las ecuaciones (2.6) y (2.11) son las dos primeras ecuaciones básicas para describir la estructura estelar de manera Euleriana, es decir, con r como variable independiente. En el Capítulo 3 veremos por qué la descripción Lagrangiana es la que más nos conviene. En la formulación Lagrangiana la ecuación (2.6) es

$$\frac{\partial r}{\partial m} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho} . \quad (2.12)$$

Ahora, multiplicando Ec. (2.11) por Ec. (2.12) tenemos como resultado

$$\frac{\partial P}{\partial m} = -\frac{Gm}{4\pi r^4} \quad (2.13)$$

Entonces las ecuaciones (2.12) y (2.13) son las dos primeras ecuaciones básicas de estructura estelar en la formulación Lagrangiana [4].



Tenemos dos ecuaciones diferenciales para tres funciones desconocidas r , P y ρ . Si pudiéramos expresar una en términos de la otras, por ejemplo ρ como función de P , podríamos resolver el problema. En general, éste no será el caso; sin embargo, hay situaciones particulares donde ρ es una función conocida de P . Así pues, podríamos tratar las ecuaciones como ecuaciones diferenciales ordinarias, puesto que no contienen al tiempo de manera explícita. Un ejemplo un tanto artificial es utilizar $\rho = \rho(m)$, en particular $\rho = c$, con c constante, para una esfera de gas homogéneo. Soluciones más realistas se pueden obtener para el caso barotrópico, en el cual la densidad es función únicamente de la presión: $\rho = \rho(P)$. Un ejemplo sería un gas ideal a temperatura constante. Dentro de la categoría de las soluciones barotrópicas existe una categoría para los modelos de esferas de gas llamados politropos [4].

En general, la densidad no es función de la presión solamente, sino que también depende de la temperatura T . Para un gas con una composición química dada, su comportamiento termodinámico sugiere una ecuación de estado con la forma $\rho = \rho(P, T)$. Un caso conocido es la ecuación de estado para un gas ideal

$$\rho = \frac{\mu P}{\mathfrak{R} T}, \quad (2.14)$$

con la constante de los gases $\mathfrak{R} = 8.315 \times 10^7 \text{ erg K}^{-1} \text{ g}^{-1}$ (nótese que está definida por g y no por mol), y μ es el peso molecular medio adimensional, es decir, el número de masas atómicas por partícula. Una vez que la temperatura aparece en la ecuación de estado no se puede quitar por medio de otras condiciones, y entonces se vuelve mucho más complicado determinar la estructura interna de la esfera de gas auto-gravitante. La estructura mecánica también es determinada por la distribución de temperaturas, que a su vez está ligada al transporte y a la generación de energía en la estrella. De ser el caso nuevas ecuaciones serían necesarias, por ejemplo, las de transporte y generación de energía.

2.3. Relación politrópica

Como vimos anteriormente, en las ecuaciones mecánicas (2.12) y (2.13) no aparece explícitamente la temperatura. En ciertas ocasiones es posible separar la parte “termo-energética” de las ecuaciones. Para esto utilizaremos

el potencial gravitacional como lo definimos previamente y suponemos que las estrellas están en equilibrio hidrostático. Para esto utilizaremos las ecuaciones (2.4) y (2.10), reemplazando las derivadas parcial por ordinarias ya que vamos a considerar soluciones independientes del tiempo únicamente. De ahí, obtenemos la ecuación de equilibrio hidrostático

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{d\Phi}{dr}\rho, \quad (2.15)$$

y la ecuación de Poisson

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = 4\pi G \rho \quad (2.16)$$

En general, la temperatura aparece cuando la densidad es reemplazada por una ecuación de estado del tipo $\rho = \rho(P, T)$, en la ecuaciones (2.15) y (2.16). No obstante, ya hemos visto ejemplos más simples donde la densidad depende únicamente de la presión, $\rho = \rho(P)$. En estos casos, al reemplazar la densidad en las ecuaciones (2.15) y (2.16) obtenemos un sistema de dos ecuaciones para P y Φ que puede ser resuelto sin necesidad de otras ecuaciones de estructura estelar.

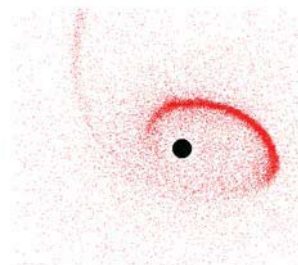
Supongamos que existe una sencilla relación entre P y ρ del tipo

$$P = K\rho^\gamma \equiv K\rho^{1+\frac{1}{n}}, \quad (2.17)$$

donde K , γ y n son constantes. A una relación con la forma de la ecuación (2.17) se llama relación politrópica. K es la constante politrópica y γ el exponente politrópico. Es frecuente utilizar el índice politrópico n en lugar de γ , el cual se define como

$$n = \frac{1}{\gamma - 1}. \quad (2.18)$$

La constante K , en algunos casos, está fija y se calcula mediante constante naturales. Veremos más adelante que en el caso de un gas degenerado, su ecuación de estado tiene la forma de la Ec. (2.17), y la K está dada por constantes naturales. En otros casos, K es un parámetro libre el cual es constante para una estrella particular, es decir, puede cambiar de una estrella a la otra. Por ejemplo, si consideramos un gas ideal isotérmico con temperatura $T = T_0$ y peso molecular medio μ , su ecuación de estado es $\rho = \mu P / \mathfrak{R}T$. Ésta puede



ser escrita con la forma Ec. (2.17), con $\gamma = 1$, y $n = \infty$. Aquí la constante K no está determinada por constantes naturales sino que depende de T_0 y μ , así que utilizamos esta ecuación politrópica en las ecuaciones de estructura estelar y le podemos dar a K cualquier valor positivo para cierta estrella.

2.4. Modelos estelares politrópicos

Independientemente de que si K es una constante con valor fijo o un parámetro libre, con ayuda de la relación politrópica Ec. (2.17), podemos reescribir la ecuación (2.15)

$$\frac{d\Phi}{dr} = -\gamma K \rho^{\gamma-2} \frac{d\rho}{dr}. \quad (2.19)$$

Si $\gamma \neq 1$, entonces podemos integrar la ecuación (2.19)

$$\rho = \left(\frac{-\Phi}{(n+1)K} \right)^n, \quad (2.20)$$

donde utilizamos la ecuación (2.18) y elegimos que la constante de integración hiciera que $\Phi = 0$ en la superficie ($\rho = 0$). Al interior de nuestro modelo para la estrella tenemos que $\Phi < 0$, así que $\rho > 0$. Ahora, si introducimos la ecuación (2.20) en la ecuación de Poisson, Ec. (2.16), obtenemos un ecuación diferencial ordinaria para Φ ,

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\Phi}{dr} = 4\pi G \left(\frac{-\Phi}{(n+1)K} \right)^n. \quad (2.21)$$

Ahora, definimos las variables adimensionales z , w como

$$z = Ar, \quad A^2 = \frac{4\pi G}{(n+1)^n K^n} (-\Phi_c)^{n-1} = \frac{4\pi G}{(n+1)K} \rho_c^{\frac{n-1}{n}}, \quad (2.22a)$$

$$w = \frac{\Phi}{\Phi_c} = \left(\frac{\rho}{\rho_c} \right)^{1/n}, \quad (2.22b)$$

donde el subíndice c hace referencia a los valores en el centro de la estrella. Ahí, en $r = 0$, tenemos que $z = 0$, $\Phi = \Phi_c$, $\rho = \rho_c$, y entonces $w =$

1. Utilizando las variables adimensionales, Ec. (2.22), podemos reescribir la ecuación (2.21) como

$$\frac{d^2w}{dz^2} + \frac{2}{z} \frac{dw}{dz} + w^n = 0, \quad (2.23a)$$

$$\frac{1}{z^2} \frac{d}{dz} \left(z^2 \frac{dw}{dz} \right) + w^n = 0. \quad (2.23b)$$

Ésta es la famosa ecuación de Lane–Emden [4]. Estamos interesados únicamente en las soluciones que son finitas en el centro, es decir, $z = 0$. Entonces necesitamos que $\frac{dw(0)}{dz} \equiv w'(0) = 0$, como lo podemos ver en la primera forma de la ecuación de Lane–Emden, Ec. (2.23a). Supongamos que conocemos una solución $w(z)$ que cumple con los requerimientos anteriores. Entonces, según la ecuación (2.22b), tenemos que la densidad es

$$\rho(r) = \rho_c w^n, \quad \rho_c = \left(\frac{-\Phi_c}{(n+1)K} \right)^n. \quad (2.24)$$

Ahora, utilizando la ecuación (2.17) tenemos que la presión es

$$P(r) = P_c w^{n+1}, \quad P_c = K \rho_c^\gamma. \quad (2.25)$$

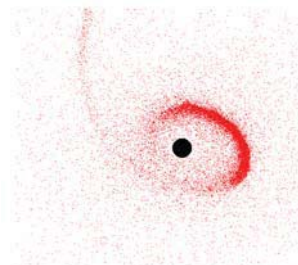
2.4.1. Propiedades de la solución

La ecuación de Lane–Emden, Ec. (2.23), tiene una singularidad regular para $z = 0$. Expandimos la solución en su serie de potencias alrededor de $z = 0$, para poder entender mejor el comportamiento de ésta

$$w(z) = 1 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots, \quad (2.26)$$

donde los coeficientes a_i corresponden a $a_1 = w'(0)$, $a_2 = w''(0)/2$, $a_3 = w'''(0)/3!$ así sucesivamente. La aceleración gravitacional, $|g| = \frac{d\Phi}{dr} \sim \frac{dw}{dz}$, tiene que ser cero en el centro de la estrella, es decir, $a_1 = 0$. Si utilizamos la expansión en serie de potencias, Ec. (2.26), en la ecuación de Lane–Emden, Ec. (2.23), y comparamos los coeficientes obtenemos

$$w(z) = 1 - \frac{1}{6} z^2 + \frac{n}{120} z^4 + \dots, \quad (2.27)$$



donde nuevamente excluimos la esfera isotérmica ($\gamma = 1$, que es lo mismo que $n = \infty$). Podemos ver que la ecuación (2.27) tiene un máximo en $z = 0$. Únicamente para tres valores de n hay una solución analítica, en el resto de los casos la solución se tiene que calcular numéricamente. El primer caso,

$$n = 0 : \quad w(z) = 1 - \frac{1}{6}z^2 \quad (2.28)$$

corresponde a una esfera homogénea de gas, en otras palabras, una esfera de densidad constante. Utilizando la ecuación (2.24), podemos ver que en efecto la densidad es constante para $n = 0$. Los otros dos casos son

$$n = 1 \quad w(z) = \frac{\sin(z)}{z}, \quad (2.29)$$

$$n = 5 \quad w(z) = \frac{1}{\left(1 + \frac{z^2}{3}\right)^{1/2}}. \quad (2.30)$$

2.4.2. Modelos con K fija

Supongamos un gas de electrones con temperatura cero, es decir, todos los electrones están en el menor nivel energético posible. El principio de exclusión de Pauli nos dice que cada casilla cuántica del espacio fase seis-dimensional, (x, y, z, p_x, p_y, p_z) , no puede contener más de dos electrones; ya que los electrones son fermiones, al igual que los protones y los neutrones. Dicho de otro modo, el estado del sistema en el cual todos los electrones pueden tener la energía más baja sin violar el principio de exclusión de Pauli es que todas las casillas del espacio fase se ocupen por dos electrones, hasta cierto valor del momento el cual es el momento de Fermi, p_F . Todas las casillas del espacio fase con un momento mayor a p_F están vacías.

La ecuación de estado de un gas de electrones completamente degenerados es

$$P_e = \frac{1}{20} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} \frac{h^2}{m_e(m_u \mu_e)^{5/3}} \rho^{5/3}, \quad (2.31)$$

donde h es la constante de Planck, m_e es la masa del electrón, μ_e es el peso molecular medio por electrón y m_u es la unidad de masa atómica [4, 3]. Claramente la ecuación de estado de un gas de electrones completamente

degenerados es una relación politrópica, con índice $n = 3/2$ y constante politrópica

$$K = \frac{1}{20} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{2/3} \frac{h^2}{m_e (m_u \mu_e)^{5/3}}, \quad (2.32)$$

suponiendo que la composición química está dada, en otras palabras, μ_e está dado. En este caso la K está determinada por constantes naturales y no hay lugar para un parámetro libre. Las siguientes relaciones son válidas para $n < 5$; para $n \geq 5$ el radio de los modelos politrópicos para la estrella es infinito.

Supongamos un modelo politrópico con índice n y densidad central conocida ρ_c . Supongamos, también, que conocemos $w(z)$ y $w'(z)$ por medio de la integración de la ecuación de Lane–Emden, Ec. (2.23). Entonces $\rho = \rho_c w^n$ es una función conocida de z . Según la ecuación (2.22a), la relación entre r y z es

$$\left(\frac{r}{z} \right)^2 = \frac{1}{4\pi G} (n+1) K \rho_c^{\frac{1-n}{n}}. \quad (2.33)$$

De este modo, podemos obtener la densidad en función de r , donde el radio del modelo es $R = z_n/A$ y el valor de z_n lo obtenemos por medio de la integración. Utilizando el valor de A que depende de la densidad central ρ_c , Ec. (2.22a), obtenemos

$$R \sim \rho_c^{\frac{1-n}{2n}}. \quad (2.34)$$

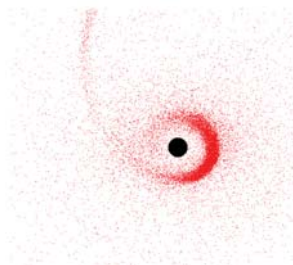
Vemos que para $n > 1$ el radio R disminuye a medida que la densidad central, ρ_c , crece. Si la densidad central es infinita entonces el radio R se hace cero.

En el caso de la masa tenemos que

$$m(r) = \int_0^r 4\pi \rho r^2 dr = 4\pi \rho_c \int_0^r w^n r^2 dr = 4\pi \rho_c \frac{r^3}{z^3} \int_0^z w^n z^2 dz, \quad (2.35)$$

donde hicimos uso de las ecuaciones (2.24) y (2.22a), además del hecho que r^3/z^3 es constante y puede salir de la integral. Ahora, la ecuación de Lane–Emden en su segunda forma, Ec. (2.23b), nos dice que lo que está dentro de la integral es una derivada entonces puede ser integrada directamente. La integral se convierte en $-z^2 dw/dz$, y así obtenemos

$$m(r) = 4\pi \rho_c r^3 \left(-\frac{1}{z} \frac{dw}{dz} \right), \quad (2.36)$$



donde una vez más podemos utilizar la relación entre r y z : $r/z = 1/A = R/z_n$. Para el caso en el que nos encontramos en la superficie, obtenemos

$$M = 4\pi\rho_c R^3 \left(-\frac{1}{z} \frac{dw}{dz} \right)_{z=z_n} . \quad (2.37)$$

Es claro que la masa, M , del modelo varía con respecto a ρ_c de la siguiente manera

$$M \sim 4\pi\rho_c R^3 . \quad (2.38)$$

Si ponemos a ρ_c en función del radio, R , del modelo utilizando la ecuación (2.34), y la reemplazamos en la ecuación (2.38) obtenemos

$$R \sim M^{\frac{1-n}{3-n}} \quad (2.39)$$

Para $1 < n < 3$ entre más grande sea la masa más pequeño será el radio. Ahora, para $0 < n < 1$ y $3 < n < 5$ entre más grande sea la masa más grande será el radio. El caso límite es para $n = 1$ donde el incremento en masa no afectará el tamaño del radio.

Vemos que para una K y una n dadas hay una variedad unidimensional de modelos únicamente, donde el parámetro es M , R o ρ_c . No obstante, si K es un parámetro libre entonces tenemos una variedad bidimensional de modelos con M y R como parámetros.

2.5. Estrellas de neutrones

Como ya vimos la evolución estelar tiene varios caminos en su etapa final, algunos más extremos que otros. En este último periodo de la evolución estelar se producen densidades muy altas en las regiones centrales. Por otro lado, la materia estelar puede ser eyectada de la estrella y se han identificado de manera observacional: pérdida de masa, nebulosas planetarias y explosiones. Hay casos en los cuales la estrella explota sin dejar ningún remanente. No obstante, seguido sucede que la envoltura no sobrevive pero el núcleo condensado sí; a éste, le denominamos objeto compacto. Estos objetos se caracterizan por tener radios pequeños, densidades altas y una gravedad superficial bastante alta comparado con las estrellas “normales”. Los objetos

Objeto	Masa ^a (M)	Radio ^b (R)	Densidad Promedio (kg m ⁻³)	Velocidad de Escape (m s ⁻¹)	Potencial Superficial (GM/Rc ²)
Sol	M_{\odot}	R_{\odot}	1400	$\sim 10^{-3}c$	10^{-6}
Enana Blanca	$\lesssim M_{\odot}$	$\sim 10^{-2}R_{\odot}$	$\lesssim 10^{10}$	$\sim 10^{-2}c$	$\sim 10^{-4}$
Estrella de Neutrones	$\sim 1 - 3M_{\odot}$	$\lesssim 10^{-5}R_{\odot}$	$\lesssim 10^{18}$	$\sim \frac{c}{3}$	$\sim 10^{-1}$
Agujero Negro	Arbitraria	$\frac{2GM}{c^2}$	$\sim \frac{M}{R^3}$	c	~ 1

$$^a M_{\odot} = 1.989 \times 10^{30} \text{ kg}$$

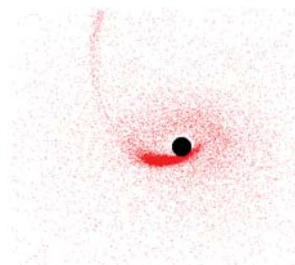
$$^b R_{\odot} = 6.9599 \times 10^8 \text{ m}$$

Tabla 2.1: Rasgos Característicos de los Objetos Compactos [17, 4].

compactos se dividen en tres grupos: las enanas blancas, las estrellas de neutrones y los agujeros negros, podemos ver algunos rasgos característicos de éstos en la Tabla 2.1. En las enanas blancas y las estrellas de neutrones la presión que combate la auto-gravedad y el colapso gravitacional es la presión de degeneración de electrones y de neutrones, respectivamente, en lugar de la presión térmica en las otras estrellas. En una estrella de neutrones, los neutrones son la especie dominante puesto que los núcleos ya no pueden existir a partir de cierta densidad, es por eso que podemos pensar en la estrella de neutrones como un núcleo gigante de 10^{57} bariones.

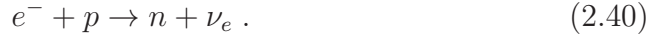
2.5.1. Ecuación de Estado

Las estrellas de neutrones nacen calientes, $T > 10^{10}\text{K}$, del colapso gravitacional de una estrella bastante evolucionada. Dentro de la estrella de neutrones las temperaturas disminuyen radicalmente debido a la emisión de neutrinos. Los neutrinos tienen un camino libre medio por lo general más grande que el radio de la estrella; entonces pueden extraer energía de la



región central sin interactuar con la envoltura y así sucesivamente se va enfriando la estrella. Después de un día la temperatura llega a 10^9K ; después de 100 años aproximadamente a 10^8K [4]. Podemos considerar que esto ya es frío ($kT \approx 10\text{keV}$) en comparación a los neutrones degenerados casi relativistas ($E_f \approx 1000\text{MeV}$). Entonces, la ecuación de estado es básicamente la misma que para $T \approx 0$.

Con el incremento en la densidad, la energía de Fermi del electrón también se incrementa y proporciona un camino para la neutronización mediante la captura electrónica, igualmente conocida como el proceso β inverso,



Mediante este proceso los núcleos se “enriquecen” en neutrones, como el ^{118}Kr [4], es decir, son isótopos de un elemento y contienen una gran cantidad de neutrones; a densidades $\rho_{\text{dr}} \approx 4.3 \times 10^{14}\text{kg m}^{-3}$ estos núcleos enriquecidos comienzan a soltar neutrones libres. A esto se le conoce como el goteo de neutrones¹. En este punto la materia es constituida por núcleos, por lo general en una red cristalina, suficientes electrones para que la carga total sea neutra y neutrones libres. El número de neutrones libre n_n aumenta a medida que la densidad aumenta y como consecuencia también aumenta la presión de degeneración P_n . Cuando la densidad es $\rho = \rho_{\text{dr}}$, la presión que domina es todavía la presión de los electrones degenerados, es decir, $P \approx P_e \gg P_n$. Para $\rho \approx 4 \times 10^{15}\text{kg m}^{-3}$, la presión de los neutrones degenerados ya es responsable de la mitad de la presión total, $P_n \approx P/2$, aquí la red ya comienza a ser disuelta; para $\rho \gtrsim 1.5 \times 10^{16}\text{kg m}^{-3}$ tenemos que $P_n > 0.8P$, hasta que finalmente $P \approx P_n$. Los neutrones son altamente degenerados pero aún no-relativistas ya que su energía de Fermi sigue siendo bastante más grande que la energía de su masa en reposo.

Mientras que el goteo de neutrones continúa el número de nucleos comienza a disminuir debido a la fusión nuclear. A densidades nucleares, $\rho_{\text{nuc}} \approx 2.3 \times 10^{17}\text{kg m}^{-3}$, los núcleos se fusionan y se disuelven dejando un gas degenerado (o un líquido) de neutrones con un pequeño agregado de e^- y p . La concentración de estas partículas puede ser calculada como el equilibrio entre los intercambios de la reacción $n \rightleftharpoons e^- + p$, no consideramos a los neutrinos ya que abandonan el sistema casi inmediatamente.

¹En inglés: *neutron drip*

Cuando la presión de neutrones degenerados, P_n , domina podemos suponer que el gas consiste en neutrones ideales (que no interactúan), completamente degenerados. Los neutrones son fermiones, como los electrones, así que podemos utilizar la misma ecuación (2.31) cambiando m_e por m_n y μ por 1 (ya que tenemos un nucleón por fermión). Entonces la ecuación de estado para neutrones degenerados sería

$$P_n = K_\gamma \rho_0^\gamma, \quad (2.41)$$

en el casos no-relativista $\rho_0 \ll 6 \times 10^{18} \text{kg m}^{-3}$, y así

$$\gamma = \frac{5}{3}, \quad K_{5/3} = \frac{1}{20} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{2/3} \frac{h^2}{m_n^{8/3}}, \quad (2.42)$$

con $m_u \approx m_n$. En la ecuación (2.41), el valor utilizado para ρ_0 es la densidad de la masa en reposo $\rho_0 = n_n m_n$. Para el caso relativista no podemos utilizar ρ_0 sino que hay que utilizar la densidad de la masa-energía total $\rho = \rho_0 + u/c^2$. Para neutrones no-relativistas $\rho_0 \gg u/c^2$, así que $\rho \approx \rho_0$; para neutrones relativistas, $\rho_0 \ll u/c^2$, entonces $\rho \approx u/c^2$. Para partículas relativistas tenemos que $P = u/3 \approx \rho c^2/3$. Entonces podemos decir que

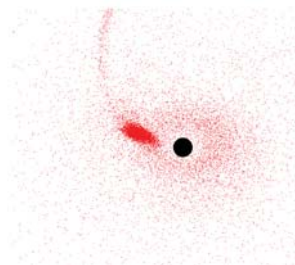
$$P_n \sim \rho^\kappa, \quad (2.43a)$$

$$\kappa = \frac{5}{3} \quad (\text{no-relativista}), \quad (2.43b)$$

$$\kappa = 1 \quad (\text{relativista}). \quad (2.43c)$$

2.5.2. Modelo de una estrella de neutrones

Definir la masa máxima de una estrella de neutrones es de suma importancia, ya que en algunos casos la manera de distinguir entre un agujero negro de masa estelar y una estrella de neutrones es mediante la masa del objeto observado. Los cálculos de la masa máxima dependen de la ecuación de estado utilizada, y en general cambia bastante de una a la otra. Las ecuaciones de estado están divididas en las suaves y las rígidas. Si cambiamos una ecuación de estado suave por una rígida, la materia será menos compresible y uno esperaría un radio R mayor y una menor densidad central ρ_c para una masa M dada. Las ecuaciones de estado rígidas permiten una masa máxima de un poco más de $3M_\odot$. El rango máximo aceptado para la masa de las



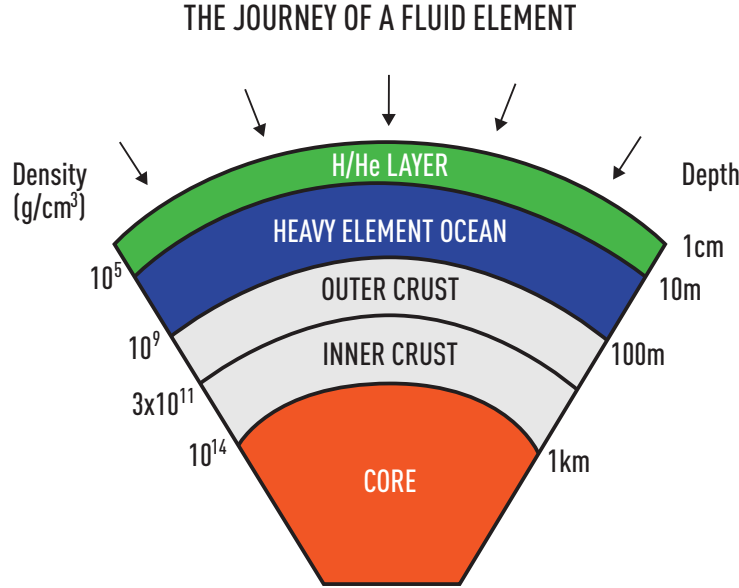


Figura 2.1: Estratificación de la materia dentro de una estrella de neutrones.

estrellas de neutrones es de $1M_{\odot}$ a $3M_{\odot}$ [17, 4]. El pulsar de *Hulse–Taylor*² es un sistema binario de dos estrellas de neutrones, que gracias a su descubrimiento y a su estudio les valió el premio Nobel en 1993 a estos investigadores. Las masas de estas dos estrellas de neutrones fueron determinadas con gran precisión, $M_{\text{HT}} = 1.442M_{\odot}$ con una incertidumbre muy pequeña que tiende a cero. Este resultado discrimina a todas las ecuaciones de estado suaves que tienen una masa máxima, $M_{\text{máx}}$, menor a $1.44M_{\odot}$. Más adelante veremos otras consecuencias interesantes del pulsar de *Hulse–Taylor* en cuanto a emisión de ondas gravitacionales se refiere.

Una ecuación de estado rígida, con $R = 13.5\text{km}$ y $\rho_c = 1.5 \times 10^{18}\text{kg m}^{-3}$, da una masa máxima $M_{\text{máx}} = 2.7M_{\odot}$. En comparación, una ecuación de estado suave, con $R = 9\text{km}$ y $\rho_c = 3.3 \times 10^{18}\text{kg m}^{-3}$, produce una masa máxima de $M_{\text{máx}} = 2M_{\odot}$. Actualmente no hay ecuaciones de estado que puedan ser consideradas realistas y que den un valor para $M_{\text{máx}}$ bastante mayor a $3M_{\odot}$; esto incluye cálculos que toman en cuenta relatividad general.

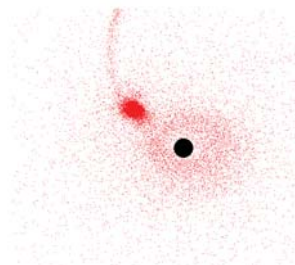
²PSR B1913+16

La estructura de una estrella de neutrones es muy compleja y todavía sigue siendo un misterio en su región central. En la figura 2.1 podemos ver la estratificación de materia dentro de una estrella de neutrones.

La atmósfera de una estrella de neutrones está muy caliente y excesivamente comprimida; las temperaturas son del orden de 10^6K y su extensión es aproximadamente de 1cm , esto se debe a la alta gravedad superficial $g_0 \sim 10^{12}\text{m s}^{-2}$. En las capas superficiales la densidad es de $\rho \lesssim 10^9\text{kg m}^{-3}$, y su comportamiento es influenciado por la temperatura y los fuertes campos magnéticos de la estrella.

Bajo la capa superficial está un “océano” de elementos pesados y la corteza de la estrella de neutrones. El océano está compuesto por el resultado del quemado de la capa superficial; qué tan pesados serán estos elementos depende del proceso de quemado. Enseguida, hay una corteza sólida que tiene un espesor de aproximadamente 0.9km y una densidad de $10^9 \lesssim \rho \lesssim 10^{17}\text{kg m}^{-3}$ y consiste de dos partes: la corteza interior y la exterior. La materia en la corteza exterior está compuesta de núcleos, los cuales en su mayoría son de hierro, Fe, cerca de la superficie y tiene un espesor de algunos cientos de metros. Estos núcleos se acomodan en forma de red cristalina para minimizar la energía de la interacción Coulombiana. Además de estos núcleos, la corteza exterior también está compuesta de un gas de electrones relativistas degenerados hasta la región donde el “goteo de neutrones”, $\rho_{\text{dr}} \approx 4 \times 10^{14}\text{kg m}^{-3}$, puede tener lugar. A partir de ahí comienza la corteza interior, $4 \times 10^{14} \lesssim \rho \lesssim 2 \times 10^{17}\text{kg m}^{-3}$, constituida por un líquido de neutrones libres, núcleos que siguen estando en una red cristalina y cada vez están más enriquecidos de neutrones, y electrones. Entre más cerca estemos del centro de la estrella, los neutrones se vuelven más abundantes y los núcleos comienzan a fusionarse y a disolverse. Esto define el límite inferior de la corteza interna, el cual se encuentra en $\rho_{\text{nuc}} = 2.3 \times 10^{17}\text{kg m}^{-3}$, a 1km de la superficie. En este punto los núcleos se habrán disuelto y tendremos materia nuclear con una proporción dominante de neutrones.

Después de la corteza está el núcleo que es en donde las ecuaciones de estado no están bien definidas. La parte externa del núcleo, donde $\rho \gtrsim 2.4 \times 10^{17}\text{kg m}^{-3}$, está constituida por neutrones en equilibrio, protones, electrones y muones. Todos estos constituyentes son altamente degenerados y los muones interactúan mediante fuerzas nucleares. Los neutrones serán superfluidos y los protones superconductivos [4].



La existencia de un núcleo sólido al interior de la estrella es incierta. Éste estaría constituido por neutrones que forman un sólido debido a su fuerza repulsiva a distancias pequeñas. La densidad central de nuestro modelo es de $\rho_c \sim 10^{18} \text{kg m}^{-3}$.

2.6. Agujeros negros

2.6.1. Introducción

Ya vimos que el final evolutivo de una estrella puede ser una enana blanca, una estrella de neutrones, un agujero negro o una explosión supernova que no deje remanente. Vimos que las enanas blancas y las estrellas de neutrones tienen una masa límite a partir de la cual ya no pueden soportar el colapso gravitacional mediante la presión de degeneración. Qué pasaría si una estrella de neutrones acreta materia y excede su límite o si el núcleo de una estrella masiva colapsa y su masa es demasiado grande para formar una estrella de neutrones? Según la teoría de la relatividad general no hay nada que pueda detener el colapso. El campo gravitacional se va haciendo cada vez más grande cerca del objeto colapsado, hasta que nada, ni la luz, puede escapar. Esto es un agujero negro.

Un agujero negro es una región del *espacio-tiempo* aislada del universo exterior, por una frontera que se le llama el horizonte de eventos. La frontera se sitúa a un radio

$$r_g = \frac{2GM_{\text{BH}}}{c^2} . \quad (2.44)$$

Si se extrapolan las ecuaciones de Einstein dentro del agujero negro encontraremos una singularidad. Mientras la singularidad esté rodeada por el horizonte de eventos, no podrá tener alguna influencia en el mundo exterior: está causalmente desconectada. Podemos seguir utilizando relatividad general para describir el mundo exterior, aunque al interior del agujero negro exista esta singularidad. Las ecuaciones de Einstein, utilizando unidades geométricas ($G=c=1$), son

$$G^{\mu\nu} = 8\pi T^{\mu\nu} , \quad (2.45)$$

donde G es el tensor de Einstein y T el tensor de energía momento. La ecuación (2.45) tiene que verse como un sistema de 10 ecuaciones diferenciales

acopladas (no son 16 puesto que $T^{\mu\nu}$ y $G^{\mu\nu}$ son simétricos). Utilizando las identidades de Bianchi, las diez ecuaciones de Einstein no son independientes. Entonces, sólo son seis ecuaciones diferenciales independientes para las seis funciones, de las diez $g_{\mu\nu}$, que caracterizan a la geometría indistintamente de las coordenadas. Las ecuaciones de Einstein relacionan la curvatura del *espacio-tiempo*, el tensor de Einstein, con la densidad y el flujo de *energía-momento*, el tensor de *energía-momento*. El tensor T es la fuente de campo gravitacional en las ecuaciones de campo de Einstein.

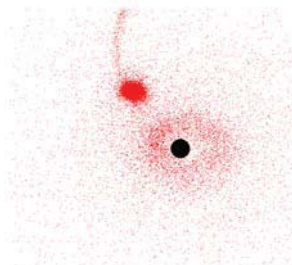
Se podría pensar que la solución de las ecuaciones de Einstein que describen un agujero negro en equilibrio van a ser muy complicadas. Sin embargo, la solución más general para un agujero negro estacionario se conoce analíticamente. Ésta depende de tres parámetros: la masa M , el momento angular J y la carga Q del agujero negro, y son las únicas cantidades observables independientes con las cuales podemos caracterizar a un agujero negro estacionario; se les denomina *agujeros negros de Schwarzschild*, en honor a su gran contribución.

Es interesante notar que desde 1795 Laplace se dio cuenta que una consecuencia de la teoría gravitacional de Newton y la teoría corpuscular de la luz de Newton era que la luz no podía escapar de un objeto de masa grande y radio pequeño [17]. La idea no fue muy popular y no tuvo muchos seguidores, aún después de la formulación de relatividad general. En 1916, a menos de un año que Einstein publicara sus cuatro artículos describiendo la teoría de la relatividad general, Karl Schwarzschild encontró la solución relativista para el campo gravitacional alrededor de una masa esférica. La solución de Schwarzschild contiene la descripción completa del campo externo de un agujero negro esférico, eléctricamente neutro y estático [17].

2.6.2. Agujero negro de Schwarzschild

Un agujero negro con $J = Q = 0$ es un agujero negro de Schwarzschild y es el más sencillo. La métrica de Schwarzschild [17, 4], en unidades geométricas ($G=c=1$), es

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi . \quad (2.46)$$



Un observador estático en este campo gravitacional es el que está fijo para r , θ , ϕ . El paso del tiempo propio para este observador estaría dado por

$$d\tau^2 = -ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2. \quad (2.47)$$

Esto muestra la dilatación del tiempo gravitacional para un reloj en el campo gravitacional comparado con un reloj en infinito. La ecuación (2.47) se va a cero en $r = 2M$, que en unidades geométricas es el radio de Schwarzschild (que es lo mismo que el horizonte de eventos), Ec. (2.44). Un observador no puede existir en $r = 2M$; éstos son tragados por el agujero negro y caen hacia la singularidad central.

La métrica parece tener una singularidad en $r = 2M$. En realidad, esta es un singularidad inducida por la coordenadas que estamos utilizando. Al escribir la métrica en el sistema de coordenadas de Kruskal, la singularidad en $r = 2M$ desaparece. No obstante la singularidad en $r = 0$ permanece para las dos coordenadas: la singularidad central es una singularidad física de métrica [17].

2.6.3. Agujero negro de Kerr

La métrica más general para agujeros negros estacionarios, con parámetros M , J y Q , es la métrica de Kerr–Newman. La métrica de Kerr ($Q = 0$), la métrica de Reissner–Nordstrom ($J = 0$) y la métrica de Schwarzschild ($J = Q = 0$) son casos especiales de ésta.

En general podemos suponer que los objetos astrofísicos con carga rápidamente se vuelven neutros por el plasma que los está rodeando. Podemos asumir que los agujeros negros cargados no tienen una gran importancia desde un punto de vista astrofísico. No obstante, todos los objetos astrofísicos rotan, así que esperamos que, por conservación de momento angular, los agujeros negros formados por el colapso de una estrella estén rotando. Después del colapso el campo gravitacional tiende asintóticamente a la métrica de Kerr.

En 1963 Kerr descubrió la solución a las ecuaciones de Einstein, pero no fueron reconocidas como una solución para un agujero negro. Utilizando las

coordenadas de Boyer–Lindquist [17] sus propiedades son más transparentes

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & - \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma} \right) dt^2 + \frac{4aMr \sin^2 \theta}{\Sigma} dt d\phi + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 \\
 & + \Sigma d\theta + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \right) \sin^2 \theta d\phi ,
 \end{aligned} \tag{2.48}$$

con

$$a \equiv \frac{J}{M}, \quad \Delta \equiv r^2 - 2Mr + a^2, \quad \Sigma \equiv r^2 + a^2 \cos^2 \theta . \tag{2.49}$$

Donde el agujero negro está rotando en la dirección de ϕ .

La métrica es estacionaria (independiente de t) y axisimétrica con respecto al eje polar (independiente de ϕ). Cuando el momento angular por unidad de masa vale cero, $a = 0$, recuperamos la métrica de Schwarzschild.

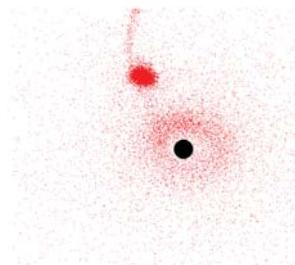
El horizonte de evento está en donde la función Δ se va a cero. Esto ocurre primero en la primera raíz de la ecuación cuadrática $\Delta = 0$,

$$r_+ = M + (M^2 - a^2)^{1/2} . \tag{2.50}$$

Es necesario que $a < M$ para que el agujero negro exista. Si a fuera más grande que M , tendríamos un campo gravitacional con una singularidad “desnuda”, es decir, la singularidad no está cubierta por un horizonte de eventos. No se conoce ningún mecanismo que pueda hacer girar a un agujero negro de Kerr con $a < M$ y que incremente a hasta que sea mayor que M . Un agujero negro con $a \equiv M$ se le llama un agujero negro rotando al máximo.

2.6.4. Agujeros negros en el universo

Los agujeros negros no pueden ser observados de manera directa. Sin embargo, pueden ser detectados por la gran influencia que tienen en sus alrededores. Por un largo tiempo, los agujeros negros se quedaron en el dominio teórico sin pruebas de su existencia. En las últimas décadas esto ha cambiado y se ha probado su existencia en dos rangos de masas completamente diferentes.



Los agujeros negros de escala galáctica se encuentran en el centro de muchas galaxias y tienen masas de $10^6 \lesssim M_{\text{BH}}/M_{\odot} \lesssim 10^9$. Estos son agujeros negros supermasivos y se detectan analizando la dinámica de las estrellas en su vecindad.

En el centro de nuestra Vía Láctea hay un agujero negro supermasivo. Mediante observaciones del centro de la galaxia en el infrarrojo cercano se determinó que la fuente que emite en el radio, Sagitario A*, coincide con un agujero negro supermasivo de 3.6 millones de masas solares. Esto se probó monitoreando el movimiento de veinte estrellas a lo largo de una década [4].

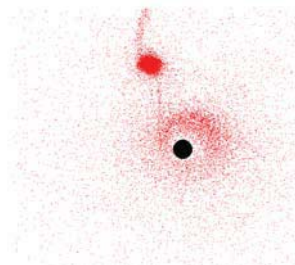
El origen de los agujeros negros supermasivos no está completamente descifrado. Sin embargo, los modelos para la creación de agujeros negros de masa estelar están más desarrollados, como ya lo vimos. Su rango de masas está entre $3M_{\odot} \lesssim M_{\text{BH}} \lesssim 50M_{\odot}$ y se cree que son los remanentes: de una supernova donde el núcleo colapsó, de la acreción tanta masa a una estrella de neutrones que supera su límite para sostener el colapso gravitacional o de la fusión de estrellas de neutrones³. Los agujeros negros de masa estelar son detectados utilizando el hecho que cuando están en sistemas binarios y la estrella compañera llena su lóbulo de Roche, hay transferencia de masa hacia el agujero negro. Por conservación de momento angular se forma un disco de acreción alrededor del agujero negro. Debido a que el pozo de potencial del agujero negro es tan profundo, la energía de materia cayendo en él es tan grande que cualquier proceso disipativo del disco produce emisión de fotones de rayos-X. Los sistemas binarios de rayos-X son los lugares ideales para ir en busca de una prueba de agujeros negros de masa estelar. El argumento final para aceptar que estos objetos sean agujeros negros es que tienen que ser objetos compactos, a comparación de una estrella ordinaria que debería de ser visible, y que la masa debe de ser mayor a la masa máxima para estrellas de neutrones.

El caso más famoso de un agujero negro de masa estelar es el de Cygnus X-1, ya que fue el primer objeto en un sistema binario de rayos-X en ser aceptado como un candidato de agujero negro. Ha sido el centro de muchos estudios y se ha determinado que su masa es de $14.8M_{\odot}$. Cygnus X-1 está acretando material que le es transferido mediante vientos estelares, de su compañera, una estrella azul supergigante variable. Se han detectado más de

³En inglés: *neutron star mergers*

veinte agujeros negros de masa estelar hasta ahora [4].

Se cree que hay agujeros negros de masa intermedia que corresponderían al rango de masas entre los estelares y los supermasivos, $50M_{\odot} \lesssim M_{\text{BH}} \lesssim 10^5M_{\odot}$, sin embargo, su existencia y su origen siguen siendo inciertos. Un mecanismo de formación sería mediante la fusión de agujeros negros de masa estelar. Otra propuesta es una colisión de estrellas masivas en un cúmulo estelar masivo. Los agujeros negros de masa intermedia han sido propuesto como mecanismo para explicar las fuentes de rayos-X ultraluminosos [4].



Capítulo 3

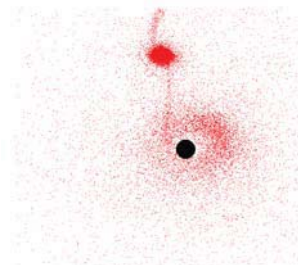
Smooth Particle Hydrodynamics

En este capítulo describiré las ideas fundamentales detrás del método de *Smooth Particle Hydrodynamics* (SPH). El método consiste en utilizar una formulación Lagrangiana de un fluido ideal y después utilizar una ecuación de interpolación para resolver el sistema de ecuaciones. El método SPH tiene la particularidad de conservar cantidades físicas a través de la simulación de manera espectacular; es decir, la conservación numérica de los invariantes físicos es excelente. Para este trabajo se utilizó, como base, la implementación del SPH, hecha por el Dr. William Lee [10]. Se modificó ligeramente este código y se complementó con uno que calcula las condiciones iniciales de la estrella de neutrones y el agujero negro para que al cambiar los potenciales el parámetro de impacto fuera el mismo y las interacciones fueran comparables.

3.1. Detalles del método numérico

3.1.1. Motivación

La mayoría de los objetos que constituyen nuestro universo existen por procesos dinámicos de fluidos. La interacción entre la gravedad, la dinámica de gases y procesos físicos como la radiación, reacciones nucleares y campos magnéticos han sido los principales actores en la formación de objetos a diferentes escalas: desde cúmulos de galaxias hasta propios constituyentes como



los son estrellas y planetas. Muchos de los problemas astrofísicos son ejemplos perfectos de rompecabezas multi-escala y que involucran varias ramas de la física. En cuanto a multi-escala, me refiero a que las escalas de tiempo y de distancia pueden ser dramáticamente diferentes. Por lo general, la complejidad de los procesos físicos y la falta de simetría no nos permiten hacer un procedimiento analítico y la resolución mediante métodos numéricos es la única opción.

El SPH para simular fenómenos astrofísicos hidrodinámicos fue utilizado por primera vez por Lucy y Gingold–Monaghan[2]. Fenómenos como discos de acreción, explosión de supernovas, colapsares, colisiones de objetos compactos y formación de galaxias han sido simulados satisfactoriamente con un código SPH; sin embargo, no sólo ha sido utilizado para procesos astrofísicos también para procesos que involucran dinámica de fluidos como la simulación de las olas en el océano.

3.1.2. Requisitos del método

Los requerimientos de una simulación de dinámica de fluidos y una simulación astrofísica son fundamentalmente diferentes y es aquí donde el diseño del método numérico entra en juego. No todos los métodos numéricos son adecuados para todos los problemas y no todos pueden cumplir con las necesidades del problema igual de bien. Por esa razón seleccionar bien el método numérico puede ser crucial para obtener resultados satisfactorios.

Los requerimientos típicos para una simulación astrofísica incluyen una gran adaptabilidad espacial desde un punto de vista de hidrodinámica astrofísica. Esto es que el método se tiene que adaptar a complicadas geometrías de los flujos debido a la falta de fronteras en el problema. Por lo general las geometrías de los flujos están determinadas por auto-gravedad y dinámica de gases. La inclusión de choques también es de suma importancia ya que, por lo general, determinan cómo va a evolucionar el sistema; las supernovas son un buen ejemplo de objetos cósmicos en los cuales los choques son sumamente importantes para la evolución del proceso. Por otro lado, un requerimiento muy importante es la conservación numérica de invariantes físicos si queremos que la simulación tenga éxito, es decir, que el resultado de la simulación sea cualitativamente correcto; como lo mencionamos anteriormente, el SPH

es particularmente bueno para hacer esto. Dado que en los problemas de astrofísica, por lo general, hay que tratar con más procesos que sólo dinámica de gases y auto-gravedad es necesario que el método sea flexible y físicamente intuitivo para poder incorporar los nuevos pedazos de física a la formulación numérica, en otras palabras, facilitar la inserción de nuevos módulos de física en el código ya existente. El SPH cumple de manera satisfactoria con todos los requerimientos, por eso, para algunas simulaciones es el método preferido.

3.1.3. Formulación Lagrangiana vs. Euleriana

El método SPH, como lo mencioné anteriormente, es un método puramente Lagrangiano. Es decir, es una formulación libre de malla contrario a la formulación Euleriana (método basado en una malla). En la formulación Euleriana estamos viendo puntos fijos en un malla y vemos a las partículas pasar. Sin embargo, en la formulación Lagrangiana el sistema de coordenadas está montado sobre cada partícula; en otras palabras seguimos a cada partícula individualmente. Una analogía pertinente sería: al mirar un estanque con peces considerar un punto fijo del estanque y ver a los peces que pasan por ahí (descripción Euleriana) o fijarnos en el pez que más nos gusta y seguirlo por todo el estanque (descripción Lagrangiana). La derivada temporal Lagrangiana ($\frac{d}{dt}$), o también conocida como derivada material, se relaciona con la derivada temporal Euleriana ($\partial/\partial t$) de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dt} = \frac{dx^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial}{\partial t} = \mathbf{v} \cdot \nabla + \frac{\partial}{\partial t} . \quad (3.1)$$

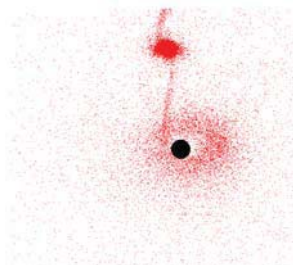
Ecuación de Continuidad

Si utilizamos la ecuación de continuidad Euleriana:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (3.2)$$

y la juntamos con (3.1) obtenemos la forma Lagrangiana

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v} . \quad (3.3)$$



Ecuación de Conservación de Momento

La ecuación de conservación de momento de un fluido no viscoso, o la ecuación de Euler es:

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} + \nabla P + \mathbf{f} = 0, \quad (3.4)$$

en forma Lagrangiana es:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \mathbf{f}, \quad (3.5)$$

donde \mathbf{f} representa las fuerzas de cuerpo como la gravedad y los campos magnéticos.

Ecuación de Energía

La ecuación de energía se sigue directamente de la primera ley de la termodinámica adiabática:

$$dU = dQ - PdV, \quad (3.6)$$

al restringirlo a un procesos adiabático el término dQ desaparece. Ahora lo vemos en esquema “por masa” es decir $\frac{dU}{m} = -P\frac{dV}{m}$ lo cual nos da:

$$du = \frac{P}{\rho^2} d\rho \quad y \quad \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} \right)_s = \frac{P}{\rho^2} \quad (3.7)$$

y de ahí obtenemos:

$$\frac{du}{dt} = \frac{P}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} \quad (3.8)$$

Utilizando la Ec. (3.3) tenemos:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{P}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (3.9)$$

Las ecuaciones (3.3), (3.5) y (3.9) necesitan una ecuación de estado para que sean cerradas. Esta ecuación de estado va a relacionar cantidades como la

presión, P , o la velocidad del sonido, c_s , a cantidades macroscópicas del fluido como densidad, ρ , o temperatura, T . Toda la microfísica está contenida en la ecuación de estado; por ejemplo, si la presión es producida por colisiones de un gas de Maxwell-Boltzmann o está dada por electrones degenerados debido al principio de exclusión de Pauli. La ecuación de estado puede ser tan simple como una ecuación de estado politrópica o puede estar en forma de tablas para materia nuclear caliente. En nuestro caso utilizaremos una ecuación de estado politrópica similar a la ecuación (2.17).

3.1.4. Interpolación mediante un kernel

Función de Interpolación

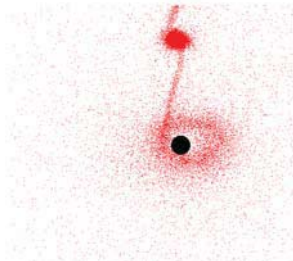
Los puntos de interpolación, que llamaremos partículas, en el método SPH se mueven a la velocidad local del fluido. Sin tener que utilizar el método de diferencias finitas, podemos calcular las derivadas utilizando una aproximación mediante un kernel que veremos más adelante; de esta manera las ecuaciones diferenciales parciales Lagrangianas se transforman en ecuaciones diferenciales ordinarias.

Hay cierta libertad en la manera de discretizar las ecuaciones. No obstante, es necesario asegurar que las cantidades físicas conservadas sean conservadas por construcción en la ecuación discretizada, para esto es necesario que la ecuación tenga las simetrías adecuadas en los índices de cada partícula.

La base del método SPH es una aproximación mediante un kernel en la cual se puede aproximar una función $f(\mathbf{r})$ por:

$$\tilde{f}_h(\mathbf{r}) = \int f(\mathbf{r}') W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) d^3 r', \quad (3.10)$$

donde W es el kernel suavizador o función ventana (del inglés “*window function*”) y h es la longitud de suavizamiento que determina lo ancho del kernel. El límite en donde tuviéramos longitud de suavizamiento infinitamente pequeña deberíamos de recuperar la función original y es por eso que el kernel



debe de cumplir con la siguiente propiedad:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \tilde{f}_h(\mathbf{r}) &= f(\mathbf{r}) \\ &\text{y} \\ \int W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) d^3 r' &= 1, \end{aligned} \quad (3.11)$$

esto es, además de estar normalizado, el kernel debe de tener una distribución δ en el límite donde la longitud de suavizamiento se hace cero. Podemos escribir la integral de la siguiente forma para llegar a la aproximación discreta:

$$\tilde{f}_h(\mathbf{r}) = \int \frac{f(\mathbf{r}')}{\rho(\mathbf{r}')} W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) \rho(\mathbf{r}') d^3 r', \quad (3.12)$$

donde ρ es la densidad y entonces podemos cambiar la integral por una suma sobre los puntos de interpolación, es decir las partículas, cuyas masas m_b salen del término $\rho(\mathbf{r}') d^3 r'$. Para el desarrollo que sigue ya no utilizaremos el subíndice h , utilizaremos la misma notación para la función que queremos interpolar y la interpoladora y utilizaremos la notación A_b para hacer referencia al valor en la posición de una partícula, esto es $A_b \equiv A(\mathbf{r}_b)$. Así pues, la ecuación discretizada es

$$f(\mathbf{r}) = \sum_b \frac{m_b}{\rho_b} f_b W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_b, h). \quad (3.13)$$

Si utilizamos la ecuación (3.13) para la densidad entonces tenemos

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_b m_b W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_b, h). \quad (3.14)$$

En muchas aplicaciones la diferencia entre la densidad integrada y la suma es despreciable. Sin embargo, la forma de la suma es mucha más robusta numéricamente, la forma integral puede producir densidades negativas en regiones con poca resolución. Por otro lado, al utilizar la forma de la suma no es necesario asumir que la densidad es una función diferenciable. Es una práctica común en SPH fijar la masa de las partículas, entonces, la conservación de masa es perfecta y no hay necesidad de resolver la ecuación de continuidad.

Aproximando las derivadas

Tomamos la Ec. (3.13) y calculamos la derivada exacta de la función de aproximación

$$\nabla f(\mathbf{r}) = \sum_b \frac{m_b}{\rho_b} f_b \nabla W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_b, h). \quad (3.15)$$

Puesto que conocemos el kernel, W , analíticamente no es necesario emplear el método de diferencias finitas. Para procesos de difusión o conducción térmica es necesario utilizar la segunda derivada. La calculamos de la misma manera que antes utilizando la Ec. (3.15).

$$(\nabla^2 f)_a = 2 \sum_b \frac{m_b}{\rho_b} (f_a - f_b) \frac{w_{ab}}{r_{ab}} \quad (3.16)$$

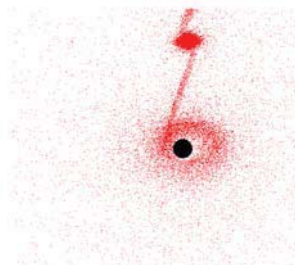
donde w_{ab} está relacionado con el kernel de la siguiente manera: $\nabla W_{ab} = \hat{e}_{ab} w_{ab}$, con \hat{e}_{ab} el vector unitario de la partícula b a la partícula a , es decir $\hat{e}_{ab} = \mathbf{r}_{ab}/\|\mathbf{r}_{ab}\|$ y $\mathbf{r}_{ab} = \mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b$. Sin embargo, esta estimación es sensible a que las partículas estén desordenadas y por eso no es recomendada para el uso práctico. Más adelante veremos cual es una mejor formulación para la segunda derivada.

Kernel

Para restringir el número de partículas que contribuyen en la Ec. (3.13) y que la suma no se extienda sobre las n partículas y sea necesario hacer n^2 operaciones, lo cual es muy ineficiente, el kernel necesita tener soporte compacto. Pese a que para algunas geometrías un kernel de tipo no-radial puede ser natural, por ejemplo discos aplanados, tiene problemas asegurando la conservación de momento angular. Debido a esto, en SPH se acostumbra utilizar kernels radiales que cumplen $W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) = W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, h)$.

La precisión de la interpolación mediante un kernel puede ser difícil de calcular a menos que se hagan suposiciones muy fuertes que no siempre se cumplen en la realidad. Podemos expandir $f(\mathbf{r})$ en su serie de Taylor alrededor de \mathbf{r} de la Ec. (3.12) de la siguiente manera:

$$f(\mathbf{r}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k h^k f^{(k)}(\mathbf{r})}{k!} \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{h} \right)^k. \quad (3.17)$$



Escribiendo las integrales de los diferentes términos de la serie de Taylor del lado derecho y comparándolo con el lado izquierdo podemos determinar qué tan buena es nuestra aproximación con respecto a la función original. Al pedir que los términos de error tiendan a cero podemos construir nuestros propios kernels del orden deseado. Se ha invertido una cantidad apreciable de trabajo tratando de construir nuevos kernels que sean más precisos que el que se utiliza como estándar. Sin embargo, estos kernels de orden superior a veces producen valores negativos lo que se traduce en cantidades físicas negativas que no tienen sentido, por ejemplo densidades negativas. El kernel utilizado como estándar en casi todas las simulaciones de SPH es un kernel de spline cúbico:

$$W(q) = \frac{1}{\pi h^3} \begin{cases} 1 - \frac{3}{2}q^2 + \frac{4}{3}q^3 & \text{para } 0 \leq q \leq 1 \\ \frac{1}{4}(2 - q)^3 & \text{para } 1 < q \leq 2 \\ 0 & \text{para } q > 2 \end{cases}, \quad (3.18)$$

donde $q = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/h$. Puesto que este kernel es *radial* entonces únicamente depende de $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$. En la Fig. 3.1 podemos ver la forma que tiene el spline cúbico. Si hacemos la aproximación mediante la ecuación de la integral Ec. (3.10) tenemos lo siguiente:

$$\tilde{f}_h(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) + Ch^2 + O(h^4), \quad (3.19)$$

donde C contiene las segundas derivadas de la función f . De esta manera podemos ver que no tenemos error al reproducir funciones lineales y constantes: la aproximación en la formulación integral reproduce exactamente estas funciones. También hay otros kernels radiales que se puede utilizar, por ejemplo Gingold y Monaghan utilizan un kernel Gaussiano [2]. Nosotros utilizaremos el kernel de spline cúbico el cual es más comúnmente utilizado pese a que es un poco más difícil de comprender.

3.1.5. Ecuaciones y conservación de cantidades físicas

Ecuación de momento

Si discretizamos de manera directa la Ec. (3.5) obtenemos:

$$\frac{d\mathbf{v}_a}{dt} = -\frac{1}{\rho_a} \sum_b \frac{m_b}{\rho_b} P_b \nabla_a W_{ab}, \quad (3.20)$$

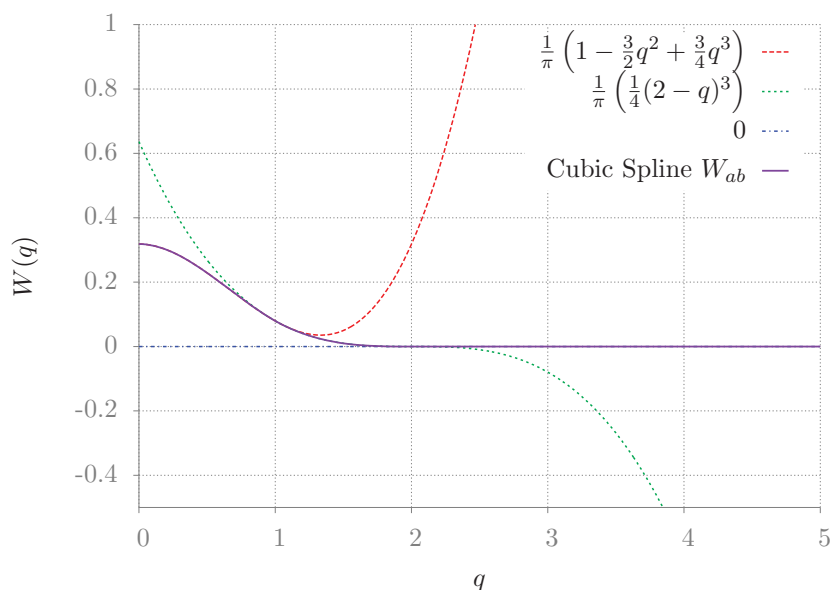


Figura 3.1: Gráfica del spline cúbico y sus componentes que se utiliza como kernel para el SPH. Hay que tomar en cuenta que el kernel es completamente simétrico con respecto al eje y . Esta gráfica es en una dimensión y con $h = 1$; no obstante está implementado en tres dimensiones en el código numérico del SPH.

ésta cumple la ecuación de Euler, al orden de aproximación del método, pero no conserva el momento. Para evidenciar esto calculemos la fuerza que ejerce la partícula b sobre la a ,

$$\mathbf{F}_{ba} = \left(m_a \frac{d\mathbf{v}_a}{dt} \right)_b \quad (3.21)$$

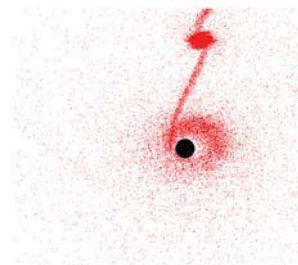
$$= -\frac{m_a m_b}{\rho_a \rho_b} P_b \nabla_a W_{ab} . \quad (3.22)$$

Ahora de la partícula a sobre la b ,

$$\mathbf{F}_{ab} = \left(m_b \frac{d\mathbf{v}_b}{dt} \right)_a \quad (3.23)$$

$$= -\frac{m_b m_a}{\rho_a \rho_b} P_a \nabla_b W_{ab}$$

$$= \frac{m_a m_b}{\rho_a \rho_b} P_a \nabla_a W_{ab} . \quad (3.24)$$



En el último paso utilizamos la siguiente propiedad del kernel

$$\nabla_a W_{ab} = -\nabla_b W_{ab} . \quad (3.25)$$

Ahora, puesto que en general $P_a \neq P_b$ las ecuaciones (3.22) y (3.24) no son iguales y entonces la ecuación de momento no cumple con la tercera ley de Newton por la manera en que fue discretizada, de ahí que el momento total no se conserva. Si abordamos el problema de una manera más sofisticada, como lo dice Stephan Rosswog[16], entonces obtenemos conservación por construcción. Si comenzamos por

$$\nabla \left(\frac{P}{\rho} \right) = \frac{\nabla P}{\rho} - P \frac{\nabla \rho}{\rho^2} , \quad (3.26)$$

y de ahí despejamos el término $\nabla P/\rho$ y utilizamos la fórmula del gradiente, Ec. (3.15), entonces la ecuación de momento es

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}_a}{dt} &= -\frac{P_a}{\rho_a^2} \sum_b m_b \nabla_a W_{ab} - \sum_b \frac{m_b}{\rho_b} \frac{P_b}{\rho_b} \nabla_a W_{ab} \\ &= -\sum_b m_b \left(\frac{P_a}{\rho_a^2} + \frac{P_b}{\rho_b^2} \right) \nabla_a W_{ab} . \end{aligned} \quad (3.27)$$

Puesto que la parte de la ecuación que contiene la presión es simétrica con respecto a a y b y tenemos la propiedad del gradiente del kernel Ec. (3.25), esto hace entonces que las fuerzas ahora sí sean iguales y opuestas y entonces el momento total y el momento angular se conserven por construcción. Hay algunas consideraciones que tenemos que tener, pese a que ya tenemos conservación del momento por construcción. Hasta ahora no hablamos de longitudes de suavizamiento, h , variables lo cual puede introducir complicaciones. Utilizar una h constante va a garantizar la conservación; sin embargo, es mala idea en la práctica. La conservación también está garantizada si el término $\nabla_a W_{ab}$ es simétrico en las longitudes h y esto lo podemos obtener utilizando una $h_{ab} = h_a + h_b/2$ o reemplazando el gradiente por $[\nabla_a W(\mathbf{r}_{ab}, h_a) + \nabla_a W(\mathbf{r}_{ab}, h_b)]/2$. Como ya vimos, la conservación está dada por la simetría que hay en la fuerza con respecto a las partículas a y b por el vector unitario \hat{e}_{ab} (hay que tener en cuenta que $\nabla_a W_{ab} \propto \hat{e}_{ab}$). El gran éxito del SPH reside en sus fabulosas propiedades de conservación lo cual, como ya vimos, está íntimamente ligado con las simetrías en los índices de las partículas; si éstas son correctas tendremos la conservación garantizada.

Ecuación de energía

Contrario a la ecuación de momento, la ecuación de energía sí la podemos construir de un manera directa partiendo de la Ec. (3.8) :

$$\frac{d\mathbf{u}_a}{dt} = \frac{P_a}{\rho_a^2} \frac{d\rho_a}{dt} = \frac{P_a}{\rho_a^2} \frac{d}{dt} \left(\sum_b m_b W_{ab} \right) = \frac{P_a}{\rho_a^2} \sum_b m_b \mathbf{v}_{ab} \cdot \nabla_a W_{ab} , \quad (3.28)$$

donde utilizamos la Ec. (3.14) y la siguiente propiedad de la derivada temporal del kernel¹

$$\frac{dW_{ab}}{dt} = \mathbf{v}_{ab} \cdot \nabla_a W_{ab} . \quad (3.29)$$

Las ecuaciones (3.14), (3.27) y (3.28) junto con una ecuación de estado, que en nuestro caso será de tipo politrópica como Ec. (2.17), forman el conjunto completo de ecuaciones SPH.

Propiedades de conservación

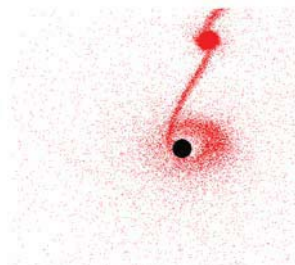
Podemos verificar la conservación numérica de cantidades físicas de manera sencilla. Es importante hacerlo ya que, como lo mencionamos anteriormente, el éxito del SPH está en sus excelentes propiedades de conservación.

Hagámoslo para el momento total por partícula

$$\begin{aligned} \sum_a m_a \frac{d\mathbf{v}_a}{dt} &= \sum_a \sum_b \mathbf{F}_{ab} = \frac{1}{2} \left(\sum_a \sum_b \mathbf{F}_{ba} + \sum_a \sum_b \mathbf{F}_{ba} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{a,b} \mathbf{F}_{ab} + \sum_{b,a} \mathbf{F}_{ba} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{a,b} (\mathbf{F}_{ab} + \mathbf{F}_{ba}) \right) = 0 . \end{aligned}$$

Los índices se renombraron en la tercera línea y para las fuerzas se utilizó la misma notación que en las ecuaciones (3.21) y (3.23) además de $\mathbf{F}_{ab} = -\mathbf{F}_{ba}$.

¹Para una derivación formal de las propiedades de las derivadas del kernel, Ecs.(3.25), (3.29), (3.50) y (3.44), ver [16].



La prueba del momento angular es completamente análoga, la torca en la partícula a es

$$\mathbf{M}_a = \mathbf{r}_a \times \mathbf{F}_a = \mathbf{r}_a \times \left(m_a \frac{d\mathbf{v}_a}{dt} \right) = \mathbf{r}_a \times \sum_b \mathbf{F}_{ba}$$

y entonces

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}}{dt} &= \sum_a \mathbf{M}_a = \sum_{a,b} \mathbf{r}_a \times \mathbf{F}_{ba} = \frac{1}{2} \left(\sum_{a,b} \mathbf{r}_a \times \mathbf{F}_{ba} + \sum_{a,b} \mathbf{r}_a \times \mathbf{F}_{ba} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{a,b} \mathbf{r}_a \times \mathbf{F}_{ba} + \sum_{b,a} \mathbf{r}_b \times \mathbf{F}_{ab} \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{a,b} (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b) \times \mathbf{F}_{ba} \right) = 0 . \end{aligned}$$

Utilizamos el mismo procedimiento de renombrar los índices y utilizar $\mathbf{F}_{ab} = -\mathbf{F}_{ba}$. Finalmente, la fuerza entre las partículas actúa sobre la recta que las une, es decir: $\mathbf{F}_{ab} \propto \nabla_a W_{ab} \propto \hat{e}_{ab} \propto (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b)$, y el producto cruz de dos vectores colineales es cero de ahí que el momento angular se conserva. Ahora, para mostrar la conservación en energía comencemos viendo el cambio en la energía total

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \sum_a \left[\frac{P_a}{\rho_a^2} \sum_b m_b \mathbf{v}_{ab} \cdot \nabla_a W_{ab} - \mathbf{v}_a \cdot \sum_b m_b \left(\frac{P_a}{\rho_a^2} + \frac{P_b}{\rho_b^2} \right) \nabla_a W_{ab} \right] \\ &= \sum_{a,b} m_a m_b \frac{P_a}{\rho_a^2} \mathbf{v}_a \cdot \nabla_a W_{ab} - \sum_{a,b} m_a m_b \frac{P_a}{\rho_a^2} \mathbf{v}_b \cdot \nabla_a W_{ab} \\ &\quad - \sum_{a,b} m_a m_b \frac{P_a}{\rho_a^2} \mathbf{v}_a \cdot \nabla_a W_{ab} - \sum_{a,b} m_a m_b \frac{P_b}{\rho_b^2} \mathbf{v}_a \cdot \nabla_a W_{ab} \\ &= - \sum_{a,b} m_a m_b \left(\frac{P_a \mathbf{v}_b}{\rho_a^2} + \frac{P_b \mathbf{v}_a}{\rho_b^2} \right) \cdot \nabla W_{ab} . \end{aligned}$$

Esta ecuación es otra posibilidad de escribir la energía utilizando la energía “termocinética”, $\hat{e}_a = u_a + \frac{1}{2}v_a^2$ en lugar de la energía térmica específica u_a . Stephan Rosswog propone esta otra alternativa a la ecuación de energía [16] ya que la transición a las ecuaciones relativistas será mucho más suave. En nuestro caso la utilizamos para probar la conservación de la energía total utilizando el mismo procedimiento que en los otros dos casos. Puesto que tenemos una doble suma sobre una cantidad simétrica en los índices y una cantidad anti-simétrica, por la Ec. (3.25), entonces ésta se hace cero y la energía total es conservada.

3.1.6. Resolución adaptativa

Hasta este punto habíamos considerado la h como un término constante. Sin embargo, es recomendado no fijar la longitud de suavizamiento. Si las densidades y longitudes tienen escalas que varían mucho entonces es necesario adaptar la longitud de suavizamiento en el espacio y tiempo. Esto lo podemos lograr de diferentes maneras, en particular, se ha propuesto dejar el número de vecinos de cada partícula aproximadamente constante o integrar una ecuación adicional que utiliza la ecuación de continuidad. Podemos hacer una elección afortunada

$$\frac{h(t)}{h_0} = \left(\frac{\rho_0}{\rho(t)} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (3.30)$$

donde el índice 0 representa los valores al inicio de la simulación. Si tomamos la derivada temporal Lagrangiana Ec. (3.1) de ambos lados junto con la Ec. (3.3) obtenemos

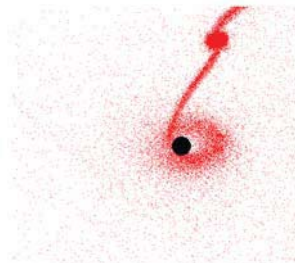
$$\frac{dh_a}{dt} = \frac{1}{3} h_a (\nabla \cdot \mathbf{v})_a. \quad (3.31)$$

Otra manera de evolucionar h es de la siguiente forma

$$h_a = \eta \left(\frac{m_a}{\rho_a} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (3.32)$$

donde η está entre 1.2 y 1.5. Las ecuaciones que acabamos de derivar se hicieron bajo la hipótesis que h es constante. Sin embargo, evolucionar h según estas ecuaciones, estrictamente, es inconsistente. Es necesario introducir un nuevo término para poder evolucionar la h y utilizar estas ecuaciones. El término que hay que considerar lo llamaremos “grad- h ” y es un término correctivo. La importancia de éste depende según el problema que tengamos.

Finalmente, la manera en la que nosotros evolucionaremos h es dejando el número de vecinos constante. Definimos vecino como una partícula cuya longitud de suavizamiento, h_i , se traslapa con la h de nuestra partícula de interés. Esto lo podemos hacer gracias a que el kernel tiene soporte compacto; esto asegura que será finito el número de vecinos que traslapen su longitud de suavizamiento con el de la partícula en cuestión.



3.1.7. Viscosidad Artificial

Propósito de la viscosidad artificial

Es común en astrofísica que obtengamos como resultado soluciones discontinuas o “choques” en dinámica de gases pese a que comencemos con condiciones iniciales suaves. En escalas de longitud comparables al camino libre medio del gas, estas soluciones son suaves; no obstante, a escala macroscópica, es decir órdenes de magnitud más grande, los gradientes cuya pendiente es muy pronunciada parecen discontinuidades. De manera general hay dos formas de abordar numéricamente los choques: la primera es utilizar la solución analítica de un problema de Riemann entre dos partículas en nuestro caso y la segunda opción es aumentar la discontinuidad a una longitud que se pueda resolver numéricamente y en la cual se puedan calcular los gradientes. Un problema de Riemann consiste en que en una función que contiene una discontinuidad haya una ley de conservación. La ecuación de Euler Ec. (3.2) es una ecuación diferencial parcial hiperbólica donde las propiedades de choques y de ondas de rarefacción están dadas por las curvas características y para esto es útil comprender el problema de Riemann.

Hay variantes, de las implementaciones del SPH, que utilizan un solucionador de Riemann el cual es un método numérico para resolver problemas de Riemann. Sin embargo, es más común que los códigos SPH utilicen la segunda opción que consiste en añadir de manera explícita términos, similares al de presión, a las ecuaciones del fluido. Otra manera de hacerlo es utilizando un esquema de discretización que resuelva únicamente las ecuaciones de medio continuo que sean similares a las originales y que contengan términos de orden superior desviatorios. Un ejemplo de esto es el esquema de Lax que consiste en tomar el promedio espacial de cantidad en lugar de tomar los valores sobre el punto de interés; es decir, reemplazar $u_i \rightarrow \frac{1}{2}(u_{i+1} + u_{i-1})$ suponiendo que u_i es una cantidad física de la partícula i , esto es en una dimensión, para el caso de tres dimensiones la complejidad aumenta.

Discontinuidades reales con gradientes infinitos, estrictamente hablando, no son una solución apropiada de las ecuaciones de hidrodinámica ideales (3.3), (3.5) y (3.9). La viscosidad artificial distribuye la discontinuidad en una distancia que se pueda resolver numéricamente, es decir, del orden de la separación de las partículas y preferiblemente todavía más. La viscosidad

física puede servir como guía; sin embargo, la viscosidad artificial no trata de hacer el mismo papel que ésta. Es un método “*ad-hoc*” para hacer que los efectos de escala pequeña sean resueltos por la resolución numérica. Lo podemos pensar como si fuese un modelo de sub-malla. La viscosidad artificial no debe introducir efectos no-físicos a la simulación y debe de contar con ciertas propiedades. Siempre tiene que ser disipativa, es decir que transfiera energía cinética en energía interna y nunca en la otra dirección. La viscosidad artificial no debe de estar presente en rotación diferencial rígida ni sin choque, ni en compresión uniforme. En cierto sentido estamos diciendo que la viscosidad artificial tiene que ser inteligente y poder diferenciar entre una compresión uniforme y un choque. Esto se puede lograr de dos maneras: utilizando la formulación tensorial de la viscosidad artificial o mediante “limitadores” que detectan el tipo de movimiento y activan o suprimen su efecto.

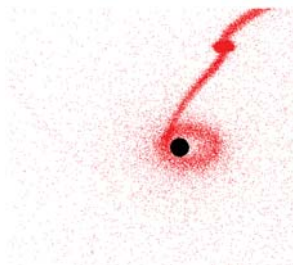
La viscosidad artificial no debe de jugar ningún papel para la expansión y se tiene que ir de manera suave a cero cuando la compresión desaparece gradualmente. Al introducir este término no queremos que altere la fortaleza del SPH: la conservación de las cantidades físicas por construcción. Para esto la viscosidad artificial tiene que estar implementada de manera consistente en las ecuaciones de momento y energía para asegurar la conservación de energía, momento y momento angular.

Viscosidad de bulto y de von Neumann–Richtmyer

Von Neumann y Richtmyer propusieron una viscosidad artificial que cumpliera con las siguientes propiedades: que no ocurrieran discontinuidades reales, que el grueso de la capa del choque sea del orden de la escala de longitudes l que se puede resolver numéricamente, que no haya efectos notorios lejos de la capa de choque y finalmente que las condiciones de Rankine–Hugoniot se cumplan considerando escalas de longitudes grandes con respecto a al gruesa de la capa de choque. Las condiciones de Rankine–Hugoniot sirven para describir los estados de un lado y del otro del choque; son tres relaciones las cuales expresan conservación de masa, de momento y de energía [5].

Von Neumann y Richtmyer propusieron una presión artificial con la forma

$$q_{NR} = c_2 \rho l^2 (\nabla \cdot \mathbf{v})^2 , \quad (3.33)$$



donde c_2 es un parámetro adimensional del orden de la unidad, que se agregará a la presión hidrodinámica. Para choques fuertes este acercamiento daba buenos resultados; no obstante, permitía oscilaciones en la región *post-choque*. Para evitar esto se introduce un término adicional que tiene la forma de la viscosidad de bulto y se va a cero menos rápidamente,

$$q_b = -c_1 \rho c_s l (\nabla \cdot \mathbf{v}) . \quad (3.34)$$

Con c_s la velocidad del sonido y c_1 , nuevamente, un parámetro del orden de la unidad. En algunas ocasiones, se combinan las dos contribuciones para tener una presión artificial viscosa,

$$q_{visc} = -c_1 \rho c_s l (\nabla \cdot \mathbf{v}) + c_2 \rho l^2 (\nabla \cdot \mathbf{v})^2 . \quad (3.35)$$

Donde el término $l(\nabla \cdot \mathbf{v})$ sirve como una estimación del salto de velocidades entre partículas adyacentes.

Para traducir esta ecuación a una viscosidad artificial de SPH tendríamos que utilizar las ecuaciones Ecs. (3.3) y (3.29) para obtener

$$(\nabla \cdot \mathbf{v})_a = -\frac{1}{\rho_a} \frac{d\rho_a}{dt} = -\frac{1}{\rho_a} \sum_b m_b \mathbf{v}_{ab} \cdot \nabla_a W_{ab} . \quad (3.36)$$

Y ésta introducirla en Ec. (3.35) para utilizar las propiedades de las partículas para la densidad y la velocidad del sonido e identificar la resolución de la escala de longitud l con la longitud de suavizamiento h . Esta formulación de la viscosidad artificial se ha utilizado; sin embargo, hay otra formulación que es más popular entre los códigos SPH y se le hace referencia como la “viscosidad estándar”. Consiste en aumentar los términos de presión en la ecuación de momento, Ec. (3.27), por una contribución artificial Π_{ab} en lugar de sólo incrementar la presión hidrodinámica P_a con las contribuciones de q_{visc} . La ecuación de momento se modificará de la siguiente manera:

$$\left(\frac{P_a}{\rho_a^2} + \frac{P_b}{\rho_b^2} \right) \longrightarrow \left(\frac{P_a}{\rho_a^2} + \frac{P_b}{\rho_b^2} + \Pi_{ab} \right) \quad (3.37)$$

Por simplicidad nos restringiremos a una dimensión y consideraremos la contribución de la viscosidad de bulto primero. La contribución de bulto a Π_{ab} es

$$-c_1 c_s \left(\frac{h}{\rho} \right) \frac{\partial v}{\partial x}$$

y la expansión en serie de Taylor del campo de velocidades $v(x_a + (x_b - x_a))$ es

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_a = \frac{v_b - v_a}{x_b - x_a} + O((x_b - x_a)^2) .$$

Insertando esta aproximación en la anterior y reemplazando las propiedades de las partículas por sus promedios, es decir $\bar{A}_{ab} = (A_a + A_b)/2$, utilizando la siguiente notación $x_{ab} = x_a - x_b$ y $v_{ab} = v_a - v_b$ y finalmente reemplazando el denominador que posiblemente puede divergir por

$$\frac{1}{x_{ab}} \longrightarrow \frac{x_{ab}}{x_{ab}^2 + \epsilon \bar{h}_{ab}^2} ,$$

entonces la receta SPH para la viscosidad en bulto es

$$\Pi_{ab, \text{ bulto}} = \begin{cases} -c_1 \frac{\bar{c}_{s,ab}}{\bar{\rho}_{ab}} \mu_{ab} & \text{para } x_{ab} v_{ab} < 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} , \quad (3.38)$$

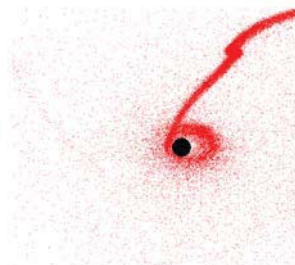
$$\text{donde } \mu_{ab} = \frac{\bar{h}_{ab} x_{ab} v_{ab}}{x_{ab}^2 + \epsilon \bar{h}_{ab}^2} .$$

Si el producto $x_{ab} v_{ab}$ es negativo esto nos dice que las partículas se están acercando y activa la viscosidad artificial. El término μ_{ab} reemplazó a la cantidad $l(\nabla \cdot \mathbf{v})$ en la fórmula original de von Neumann–Richtmyer. Ahora podemos hacer lo mismo con la viscosidad de von Neumann–Richtmyer, q_{NR} , de la misma manera. Adaptando la notación a la manera del SPH cambiaremos $c_1 \rightarrow \alpha$ y $c_2 \rightarrow \beta$, entonces obtenemos lo siguiente para el término de viscosidad artificial

$$\Pi_{ab} = \Pi_{ab, \text{ bulto}} + \Pi_{ab, \text{ NR}} = \begin{cases} \frac{-\alpha \bar{c}_{s,ab} \mu_{ab} + \beta \mu_{ab}^2}{\bar{\rho}_{ab}} & \text{para } \mathbf{r}_{ab} \cdot \mathbf{v}_{ab} < 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} ,$$

$$\text{con } \mu_{ab} = \frac{\bar{h}_{ab} \mathbf{r}_{ab} \cdot \mathbf{v}_{ab}}{\mathbf{r}_{ab}^2 + \epsilon \bar{h}_{ab}^2} . \quad (3.39)$$

Nótese que las cantidades escalares han sido reemplazadas por cantidades vectoriales puesto que lo estamos haciendo para tres dimensiones. Por medio de experimentos numéricos se han encontrado los valores sugeridos para los



parámetro involucrados: $\alpha \sim 1$, $\beta \sim 2$ y $\epsilon \sim 0.01$. Tomando en cuenta el término de viscosidad artificial la ecuación de momento es

$$\frac{d\mathbf{v}_a}{dt} = - \sum_b m_b \left(\frac{P_a}{\rho_a^2} + \frac{P_b}{\rho_b^2} + \Pi_{ab} \right) \nabla_a W_{ab} . \quad (3.40)$$

Para que la formulación sea consistente hay que modificar la ecuación de energía de la siguiente manera

$$\frac{du_a}{dt} = \frac{P_a}{\rho_a^2} \sum_b m_b \mathbf{v}_{ab} \cdot \nabla_a W_{ab} + \frac{1}{2} \sum_b m_b \Pi_{ab} \mathbf{v}_{ab} \cdot \nabla_a W_{ab} . \quad (3.41)$$

Estas ecuaciones modificadas con el término de viscosidad artificial aún cumplen con conservación de energía, de momento linear y angular por construcción; las pruebas son completamente análogas a las que se hicieron en la sección 3.1.5 anteriormente.

3.1.8. El término “grad-h”

Hasta ahora habíamos ignorado los términos provenientes de longitudes de suavizamiento variables. De ahora en adelante utilizamos la longitud de suavizamiento específica de cada partícula en la suma de la densidad,

$$\rho_a = \sum_b m_b W(r_{ab}, h_a) , \quad (3.42)$$

y utilizamos la Ec. (3.32) para adaptar la longitud de suavizamiento. Entonces ρ_a depende de h_a y *vice versa*, lo cual requiere de iteraciones para obtener consistencia. Si tomamos en cuenta los cambios de h entonces la derivada temporal Lagrangiana de la densidad es

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_a}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\sum_b m_b W_{ab}(h_a) \right) = \sum_b m_b \left(\frac{\partial W_{ab}(h_a)}{\partial r_{ab}} \frac{dr_{ab}}{dt} + \frac{\partial W_{ab}(h_a)}{\partial h_a} \frac{dh_a}{dt} \right) \\ &= \sum_b m_b \frac{\partial W_{ab}(h_a)}{\partial r_{ab}} \hat{\mathbf{e}}_{ab} \cdot \mathbf{v}_{ab} + \sum_b m_b \frac{\partial W_{ab}(h_a)}{\partial h_a} \cdot \frac{\partial h_a}{\partial \rho_a} \frac{d\rho_a}{dt} \\ &= \sum_b m_b \mathbf{v}_{ab} \cdot \nabla_a W_{ab}(h_a) + \frac{\partial h_a}{\partial \rho_a} \frac{d\rho_a}{dt} \sum_b m_b \frac{\partial W_{ab}(h_a)}{\partial h_a} , \end{aligned} \quad (3.43)$$

donde utilizamos la propiedad de la derivada de kernel Ec. (3.25) y

$$\frac{dr_{ab}}{dt} = \hat{e}_{ab} \cdot \mathbf{v}_{ab} . \quad (3.44)$$

Agrupamos los términos $d\rho_a/dt$ de Ec. (3.43) y así podemos definir el siguiente término

$$\Omega_a \equiv \left(1 - \frac{\partial h_a}{\partial \rho_a} \sum_b m_b \frac{\partial W_{ab}(h_a)}{\partial h_a} \right) , \quad (3.45)$$

entonces la derivada temporal de densidad es

$$\frac{d\rho_a}{dt} = \frac{1}{\Omega_a} \sum_b m_b \mathbf{v}_{ab} \cdot \nabla_a W_{ab}(h_a) . \quad (3.46)$$

De una manera similar, podemos calcular las derivadas espaciales

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_a}{\partial \mathbf{r}_{ab}} &= \sum_k m_k \left(\nabla_a W_{bk}(h_b) + \frac{\partial W_{bk}(h_b)}{\partial h_b} \frac{\partial h_b}{\partial \rho_b} \frac{\partial \rho_b}{\partial \mathbf{r}_a} \right) \\ &= \frac{1}{\Omega_b} \sum_k m_k \nabla_a W_{bk}(h_b) . \end{aligned} \quad (3.47)$$

Entonces, si tomamos en cuenta las derivadas de la longitud de suavizamiento h hay que corregir, por un factor de $1/\Omega$, las expresiones “estandar” de SPH para las derivadas de la densidad utilizando la Ec. (3.45), como se hizo en las Ecs. (3.43) y (3.47).

No hay necesidad de resolver la ecuación de continuidad puesto que mantenemos las masas fijas a través del tiempo. Si insertamos la Ec. (3.46) en la ecuación de la energía, Ec. (3.28), obtenemos la nueva ecuación para la energía,

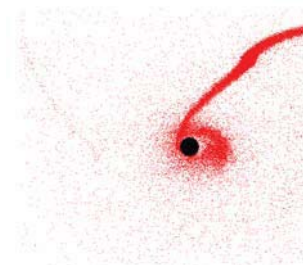
$$\frac{du_a}{dt} = \frac{1}{\Omega_a} \frac{P_a}{\rho_a^2} \sum_b m_b \mathbf{v}_{ab} \cdot \nabla_a W_{ab}(h_a) . \quad (3.48)$$

Para la ecuación de momento comenzaremos por

$$m_a \frac{d\mathbf{v}_a}{dt} = - \sum_b m_b \frac{P_b}{\rho_b^2} \frac{\partial \rho_b}{\partial \mathbf{r}_a} , \quad (3.49)$$

la cual se obtiene por medio del Lagrangiano de un fluido perfecto y la ecuación de Euler–Lagrange. Asimismo, utilizaremos la propiedad del gradiente del kernel con respecto a una partícula arbitraria

$$\nabla_a W_{bk} = \nabla_b W_{kb} (\delta_{ba} - \delta_{ka}) . \quad (3.50)$$



Ahora insertamos la Ec. (3.47) en la Ec. (3.49) y obtenemos

$$m_a \frac{d\mathbf{v}_a}{dt} = - \sum_b m_b \frac{P_b}{\rho_b^2} \left(\frac{1}{\Omega_b} \sum_k m_k \nabla_a W_{bk}(h_b) \right). \quad (3.51)$$

Así utilizando la Ec. (3.50) tenemos

$$\begin{aligned} m_a \frac{d\mathbf{v}_a}{dt} &= - \sum_b m_b \frac{P_b}{\rho_b^2} \frac{1}{\Omega_b} \sum_k m_k \nabla_b W_{kb}(h_b) (\delta_{ba} - \delta_{ka}) \\ &= -m_a \frac{P_a}{\rho_a^2} \frac{1}{\Omega_a} \sum_k m_k \nabla_a W_{ka}(h_a) + \sum_b m_b \frac{P_b}{\rho_b^2} \frac{1}{\Omega_b} m_a \nabla_b W_{ab}(h_b) \\ &= -m_a \frac{P_a}{\rho_a^2} \frac{1}{\Omega_a} \sum_b m_b \nabla_a W_{ab}(h_a) - m_a \sum_b m_b \frac{P_b}{\rho_b^2} \frac{1}{\Omega_b} \nabla_a W_{ab}(h_b) \\ &= -m_a \sum_b m_b \left(\frac{P_a}{\Omega_a \rho_a^2} \nabla_a W_{ab}(h_a) + \frac{P_b}{\Omega_b \rho_b^2} \nabla_a W_{ab}(h_b) \right). \end{aligned}$$

Entonces la ecuación final del momento es

$$\frac{d\mathbf{v}_a}{dt} = - \sum_b m_b \left(\frac{P_a}{\Omega_a \rho_a^2} \nabla_a W_{ab}(h_a) + \frac{P_b}{\Omega_b \rho_b^2} \nabla_a W_{ab}(h_b) \right). \quad (3.52)$$

Hay que remarcar que en esta ocasión no utilizamos ninguna arbitrariedad como lo habíamos hecho antes con la Ec. (3.26). Los términos de “grad-h” ayudan a que el SPH tenga mejor precisión y propiedades de conservación en presencia de longitudes de suavizamiento que varían. En la práctica, su importancia depende fuertemente del tipo de problema que estemos abordando y la resolución numérica que necesitamos.

3.2. SPH para resolver Lane–Emden

Un ejemplo en el que podemos ver rápidamente la potencia del SPH es resolviendo la ecuación de Lane–Emden, Ec. (2.23), que utilizamos para construir la estrella. Esto se hizo de dos maneras distintas, la primera resolviendo la ecuación mediante el método de Euler y la segunda utilizando el SPH, con el afán de comparar las soluciones y comprobar que el SPH fuese consistente.

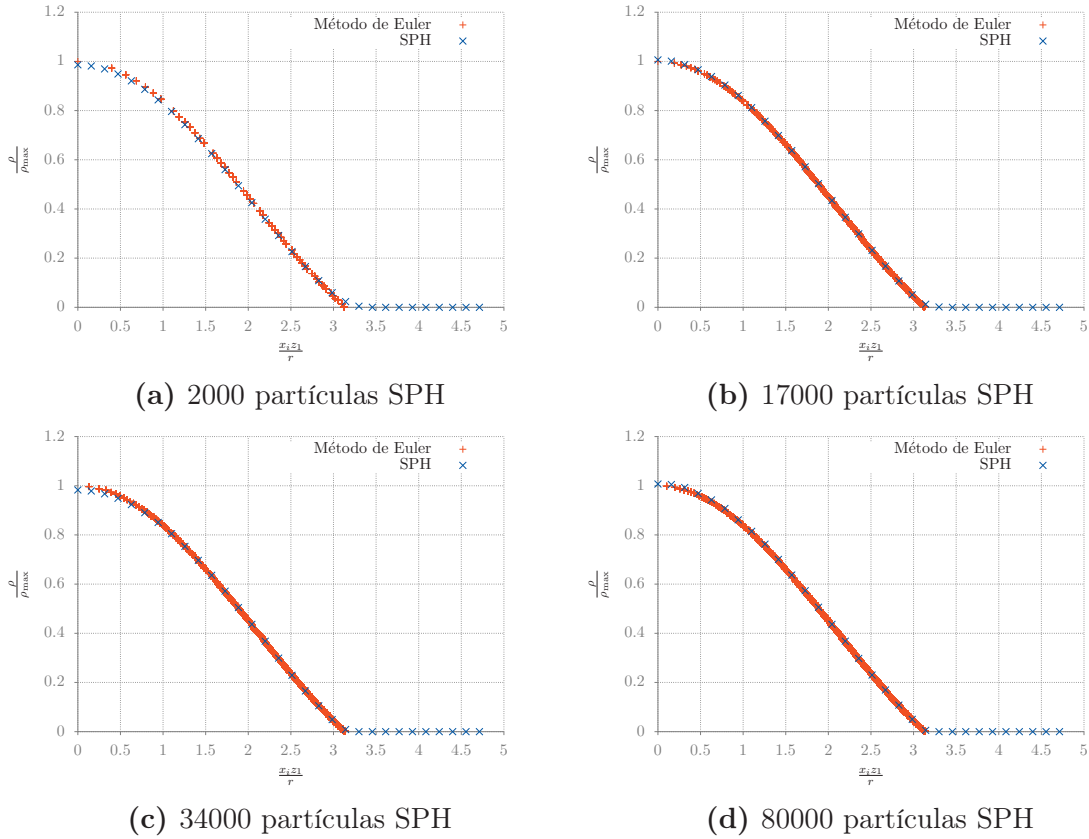
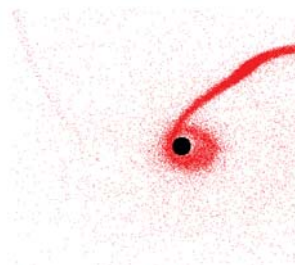


Figura 3.2: Soluciones numéricas de la ecuación de Lane–Emden mediante el método de Euler y SPH, con $\gamma = 2$ ($n = 1$). Cada una de la gráficas fue resuelta con un número diferente de partículas SPH. Vemos como al aumentar el número de éstas obtenemos una mejor resolución a cambio de una labor computacional más pesada.

En este código se utiliza una longitud de suavizamiento variable, es decir, cada partícula tiene su h_a . Como se había dicho antes, en la Sec. 3.1.6, modificamos la h de cada partícula para que tuvieran 64 vecinos. Debido a esto las soluciones difieren un poco en la cola de la densidad. Cuando tenemos pocas partículas las que estén en el borde de la estrella van a necesitar una h grande. No obstante la h grande en la frontera de la estrella provoca un pequeño error en la cola, como lo vemos en la Fig. 3.2a, ya que de un lado están todas las partículas y del otro lado no hay nada. Sin embargo, mientras vamos elevando el número de partículas, como en las Figs. 3.2b, 3.2c y 3.2d,



vemos cómo la cola se va acercando cada vez más a la solución por método de Euler. Esto es porque ya no necesitamos una h grande para reunir a los 64 vecinos en la frontera de la estrella. El tener más partículas SPH hace que tengamos una mejor resolución en el borde pero también es necesario más tiempo de cómputo: es un compromiso entre las dos.

Dado que la solución numérica mediante SPH es consistente, con respecto a la solución mediante el método de Euler, es ésta la que utilizaremos para resolver de manera computacional nuestro problema. Utilizaremos 80000 partículas para tener una buena resolución y que el trabajo computacional no sea eterno. En este trabajo se utilizan tres implementaciones del SPH: la primera, que es la presentada anteriormente, es para resolver la ecuación de Lane–Emden y generar la estrella que será nuestra condición inicial, la segunda es para relajar la estrella y la tercera es para resolver la colisión de la estrella de neutrones con un agujero negro de masa estelar.

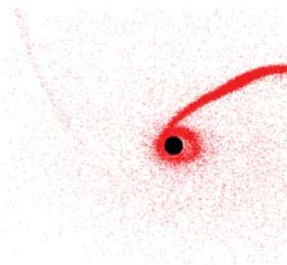
Capítulo 4

Dinámica de las colisiones

Para las colisiones utilizaremos diferentes potenciales gravitacionales pseudo-newtonianos, al igual que el newtoniano. La trayectoria inicial que seguirán los objetos involucrados en la colisión serán órbitas parabólicas. De esta manera, como se mencionó anteriormente en el Capítulo 1, podemos situar a estos eventos en el colapso del núcleo de un cúmulo globular. Al tener trayectorias parabólicas los objetos no están ligados inicialmente, sino hasta después de la colisión. A continuación veremos los detalles de las trayectorias que los objetos toman y los potenciales utilizados. También veremos la importancia del parámetro de impacto en nuestras simulaciones y mediante éste podemos comparar la intensidad de los potenciales, y emisión de ondas gravitacionales como consecuencia de la colisión.

4.1. Trayectorias parabólicas

Como ya habíamos mencionado, utilizaremos trayectorias parabólicas, contrario a utilizar órbitas elípticas, ya que esto implica que los objetos que van a colisionar no están ligados. Es decir, las simulaciones que haremos no son lo que se le conoce como “*mergers*” de objetos compactos. Esto es un sistema binario de objetos compactos cuyas órbitas, por pérdida de momento angular debido a la emisión de ondas gravitacionales, van haciéndose más chicas hasta que los dos objetos se juntan en uno solo. En cambio, en



la colisión de una estrella de neutrones y un agujero negro, la estrella será perturbada por las fuerzas de marea y comenzará a desbaratarse cada vez que pase por el periastro dejando un disco de materia alrededor del agujero negro. Otra diferencia notable entre los dos tipos de trayectorias que pueden tener estos objetos es la curva caracterísitca de emisión de ondas gravitacionales, que analizaremos más adelante. Más aún, en el contexto de cúmulos globulares la dispersión de velocidades es insignificante comparada a la que adquieren los cuerpos de masa estelar mediante la aceleración gravitacional inducida mutuamente; entonces es razonble pensar que los encuentros van a ser parabólicos en un inicio [10].

Una trayectoria parabólica es una órbita kepleriana con excentricidad $\varepsilon = 1$. Si no hay pérdida de energía ésta es una órbita de escape de mínima energía. La energía orbital para una trayectoria parabólica es $E = 0$, como lo podemos ver en la Tabla 4.1. La ecuación que utilizamos es

$$E_k + U_i(r) = 0 , \quad (4.1)$$

donde E_k es la energía cinética y $U_i(r)$ es uno de los potenciales que utilizaremos más adelante. En nuestro caso, no será una órbita de escape ya que durante la caída orbital se tranfiere energía orbital a la energía interna de la estrella. Esto hace que el sistema quede ligado después del primer pasaje por periastro es decir $E < 0$ (ya que teníamos $E = 0$ y le quitamos energía a la órbita) y una excentricidad $\varepsilon < 1$. El apoastro está en infinito para una trayectoria parabólica pero, después de la primera pasada por el periastro, éste se vuelve finito.

El punto en el cual tenemos la distancia mínima entre un objeto y el otro en una órbita elíptica es el periastro; por otro lado, el apoastro es en el cual tenemos la distancia máxima. Como veremos más adelante, el parámetro de impacto está relacionado con el periastro de la órbita. Se fijó, arbitrariamente, que la primera pasada por el periastro coincidiera con el eje- y , es decir $x = 0$ para el centro de masa. De manera que cuando utilicemos diferentes potenciales el periastro va a cambiar pero siempre va a coincidir con el eje- y . Esto es de suma importancia para el código auxiliar que calcula las posiciones y velocidades iniciales para la estrella de neutrones y el agujero negro.

La manera más fácil de obtener las ecuaciones de un cuerpo orbitando en el campo gravitacional de un masa esférica, en la teoría Newtoniana, es utilizando la conservación de energía y de momento angular, ya que éstas

Excentricidad	Energía	Tipo de órbita
$\varepsilon > 1$	$E > 0$	Hipérbola
$\varepsilon = 1$	$E = 0$	Parábola
$0 < \varepsilon < 1$	$V_{min} < E < 0$	Elipse
$\varepsilon = 0$	$E = V_{min}$	Círculo

Tabla 4.1: Valores de la excentricidad, energía y tipo de órbita para diferentes órbitas keplerianas. V_{min} es el valor mínimo del potencial efectivo. Éste no es el mismo que el potencial gravitacional ya que contiene un término centrífugo. La manera de interpretar este potencial efectivo es como el potencial en un marco de referencia rotando con la órbita.

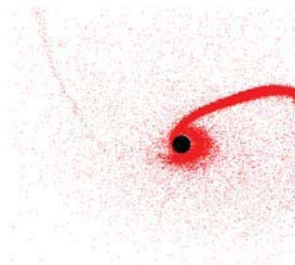
son constantes de movimiento. Fijaremos $E = 0$ para calcular, mediante el programa auxiliar y los valores del periastro encontrados, las posiciones y velocidades iniciales para que los objetos compactos sigan trayectorias parabólicas. Procederemos de la misma forma, indistintamente, tanto para el potencial Newtoniano como para los pseudo-newtonianos.

4.2. Potenciales gravitacionales

Es claro que para el tipo de eventos, es decir colisión de una estrella de neutrones y un agujero negro, que estamos simulando deberíamos tomar en cuenta el fuerte campo gravitacional en la vecindad de estos objetos relativistas. Para aproximar y reproducir el *espacio-tiempo* de Schwarzschild utilizaremos potenciales pseudo-Newtonianos¹. Utilizaremos, de igual manera, el potencial gravitacional Newtoniano como referencia para poder comparar los otros potenciales [7, 8].

Al utilizar un potencial pseudo-Newtoniano estamos aproximando de una mejor manera ciertas características específicas de relatividad general a costa de reproducir otras propiedades con menos precisión. Es decir, no hay un potencial pseudo-Newtoniano que sea mejor que todos los demás; sin embargo, es bueno saber cuales son sus fortalezas y sus debilidades para poder elegir

¹Utilizamos el término pseudo-Newtoniano para indicar que el potencial no cumple la ecuación de Poisson gravitacional (2.2)



el apropiado según el problema que se esté abordando. Un requerimiento importante para los potenciales pseudo-Newtonianos es que reproduzcan ciertas órbitas características del *espacio-tiempo* de Schwarzschild; éstas son: la órbita circular marginalmente estable, marginalmente ligada y la órbita circular límite de fotones [17]. Para un cuerpo que no está en rotación, sin carga, esféricamente simétrico, es decir, la solución de Schwarzschild, la órbita más adentrada marginalmente estable está situada en $r_{\text{ms}} = 6 \frac{GM}{c^2}$. Puesto que esta órbita es únicamente marginalmente estable una partícula en esta órbita la cual es perturbada ligeramente hacia el interior caerá hacia r_g inevitablemente. La órbita marginalmente ligada está situada en $r_{\text{mb}} = 4 \frac{GM}{c^2}$. Para $r \geq 6 \frac{GM}{c^2}$ existen órbitas circulares estables y todas son ligadas; para $r < 6 \frac{GM}{c^2}$ las órbitas circulares son inestables. No obstante, de $4 \frac{GM}{c^2} < r < 6 \frac{GM}{c^2}$ las órbitas inestables están ligadas. La órbita circular límite de fotones está en $r_{\text{ph}} = 3 \frac{GM}{c^2}$, esto es debido a que si $r \rightarrow 3 \frac{GM}{c^2}$ entonces E y L tienden a infinito y sólo partículas sin masa, es decir fotones, pueden orbitar a ese radio. En el rango $3 \frac{GM}{c^2} \leq r \leq 4 \frac{GM}{c^2}$ las órbitas son inestables y no están ligadas, cualquier perturbación expulsaría a la partícula. Ésta es una característica no-Newtoniana del campo gravitacional fuerte y que se intenta aproximar mediante los potenciales pseudo-Newtonianos. Por el contrario, en gravedad Newtoniana, a cualquier radio pueden existir órbitas circulares sin importar cuán chicas sean y siempre están ligadas [14].

De manera sorprendente, trabajos esencialmente Newtonianos que incorporaban efectos relativistas incluidos “a mano” probaron ser exitosos en modelar una variedad de sistemas de acreción. Por ejemplo, Paczyński y Wiita en 1980 modificaron el potencial Newtoniano,

$$\Phi_{\text{N}}(r) = -\frac{GM}{r}, \quad (4.2)$$

para modelar discos de acreción gruesos. Esto lo hicieron introduciendo un término extra en el denominador. El potencial modificado, que denominaremos Paczyński-Wiita (de ahora en adelante PW), es

$$\Phi_{\text{PW}}(r) = -\frac{GM}{(r - r_g)}. \quad (4.3)$$

Donde r_g es el radio gravitacional o el radio de Schwarzschild, definido como $r_g = 2GM/c^2$, Ec. (2.44). Vemos como el potencial ya no tiene una singularidad en $r = 0$ sino que la tiene en todo un radio: el de Schwarzschild. El potencial

Φ_{PW} no sólo reproduce de manera exacta las órbitas marginalmente estables y las marginalmente ligadas alrededor de un agujero negro de Schwarzschild sino que también da una aproximación razonable para otras cantidades por ejemplo la energía de amarre (porcentaje de error (p.e.) $\leq 13\%$), frecuencia orbital Ω (p.e. $\leq 50\%$), frecuencia epicíclica Ω^{\parallel} (p.e. $\leq 84\%$) y el avance del periastro (p.e. $\sim 30\%$) [19].

Existen otros potenciales pseudo-Newtonianos para dar mejores aproximaciones a ciertos aspectos específicos de relatividad general, como ya se había mencionado. El potencial pseudo-Newtoniano propuesto por Nowak y Wagoner en 1991 (NW de ahora en adelante),

$$\Phi_{\text{NW}}(r) = -\frac{GM}{r} \left(1 - \frac{3r_g}{2r} - \frac{3r_g^2}{r^2} \right), \quad (4.4)$$

reproduce con mejor precisión la frecuencia angular orbital, Ω , y epicíclica, Ω^{\parallel} (p.e. $\leq 14\%$ y p.e. $\leq 42\%$, respectivamente) que Φ_{PW} y dando el valor correcto de r_{ms} . No obstante, la precisión no es tan buena para r_{mb} ($\sim 3.5 \frac{GM}{c^2}$) ni para el avance del periastro (p.e. $> 80\%$) [19].

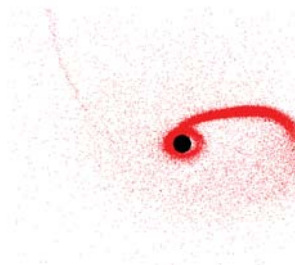
En la Fig. 4.1 se pueden comparar los tres potenciales; el de PW sitúa a la singularidad en $r = 2 \frac{GM}{c^2}$ mientras que los otros dos en $r = 0$. Podemos ver como el potencial propuesto por NW es más intenso que el Newtoniano pero menos que el de PW.

4.3. Parámetro de impacto

El parámetro de impacto, en nuestro trabajo, es muy importante ya que es lo que dictará la intensidad de las interacciones entre los dos objetos compactos durante la colisión y lo que nos permitirá comparar a los diferentes potenciales. El parámetro de impacto es definido por Tejeda y Rosswog [19] como

$$\beta = \frac{r_t}{r_P} \quad (4.5)$$

donde r_t es el radio de marea y r_P es el radio al cual se encuentra el periastro. No obstante, el parámetro de impacto que nosotros utilizaremos es un poco diferente; éste lo definiremos como el cociente entre la frecuencia de oscilación



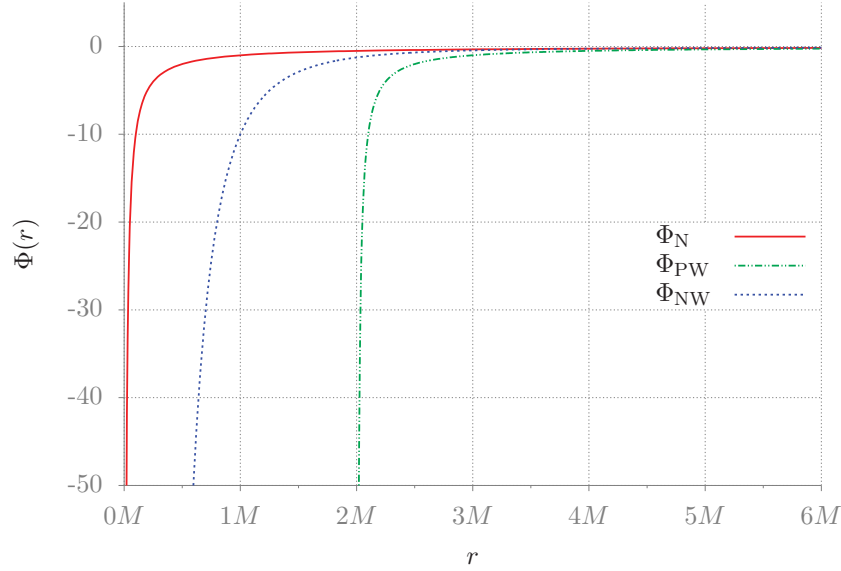


Figura 4.1: En esta gráfica se están utilizando unidades geométricas, es decir $G = c = 1$. Podemos ver como Φ_{PW} tiende a infinito cuando $r \rightarrow 2M$ a diferencia de Φ_N y Φ_{NW} que se indeterminan cuando $r \rightarrow 0$.

interna de la estrella y la frecuencia orbital en el periastro, es decir

$$\eta = \frac{\Omega_{\text{int}}}{\Omega_{\text{orb}}} \quad (4.6)$$

donde Ω_{int} es, justamente, la frecuencia de oscilación interna de la estrella y Ω_{orb} es la frecuencia orbital en el periastro. La frecuencia de oscilación interna de la estrella la definimos como

$$\Omega_{\text{int}} = \left(\frac{GM_{\text{NS}}}{R_{\text{NS}}^3} \right)^{1/2}. \quad (4.7)$$

La frecuencia orbital es

$$\Omega_{\text{orb}} = \left(\frac{GM_{\text{BH}}}{R_{\text{P}}^3} \right)^{1/2}. \quad (4.8)$$

Esta formulación nos permite interpretar al parámetro de impacto como un término de acoplamiento entre las oscilaciones internas de la estrella y la

frecuencia orbital. Visto desde el punto energético, es un parámetro que indica cuanta energía orbital es transferida a la estrella. Es una comparación entre la fuerza producida por el campo de marea producido por el agujero negro y la auto-gravedad de la estrella de neutrones. El parámetro, η , también puede ser interpretado como el cociente del tiempo dinámico de la estrella (o el periodo rotacional a la cual la estrella se desbarata) y la duración del evento. Para que el spin de la estrella fuera relevante en estos cálculos tendría que estar girando cerca del límite Kepleriano. No obstante, las estrellas de neutrones que giran más rápido, detectadas en nuestra galaxia y en cúmulos globulares están por debajo de este límite por un factor de 3–5, según la ecuación de estado que se esté utilizando [10]. Entonces, podemos ignorar la rotación de la estrella de neutrones para las interacciones que estamos simulando.

La escala de tiempo dinámica, o el tiempo de caída libre, es la escala de tiempo en la cual la estrella reacciona a perturbaciones del equilibrio hidrostático. El tiempo de caída libre es el tiempo que le tomaría a la estrella colapsar en ausencia de cualquier presión interna. Ya que la estrella de neutrones la modelamos con gravedad Newtoniana entonces el tiempo de caída libre es

$$t_{\text{c.l.}} = t_{\text{dyn}} \propto \left(\frac{R^3}{GM} \right)^{1/2} \propto (G\bar{\rho})^{-1/2} \quad (4.9)$$

donde $\bar{\rho}$ es la densidad promedio. La escala de tiempo dinámica, t_{dyn} puede ser interpretada como un periodo característico de oscilación radial. Si pensamos en las oscilaciones como ondas acústicas estacionarias esperamos que el periodo esté dado, aproximadamente, por el tiempo que le toma cruzar la estrella a la velocidad del sonido, es decir,

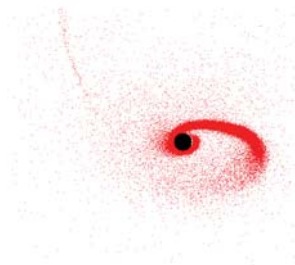
$$\Pi \propto \frac{R}{\bar{c}}, \quad (4.10)$$

donde \bar{c} es el promedio de la velocidad del sonido. Si aproximamos la densidad por la densidad promedio y por medio de la ecuación de equilibrio hidrostático, Ec. (2.13), tenemos

$$\rho \propto \frac{M}{R^3} \quad \text{y} \quad P \propto \frac{GM^2}{R^4}. \quad (4.11)$$

La velocidad del sonido está dada por

$$\bar{c}^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s, \quad (4.12)$$



el subíndice s indica que la derivada hay que tomarla adiabáticamente, es decir, a entropía por unidad de masa constante. Utilizando la Ec. (4.12) y la ecuación de estado politrópica, Ec. (2.17), obtenemos

$$\bar{c} = \left(\frac{\gamma P}{\rho} \right)^{1/2} \quad (4.13)$$

Finalmente, en la Ec. (4.13) reemplazamos con las Ecs. (4.11) y lo introducimos en la Ec. (4.10) para obtener

$$\Pi \propto \left(\frac{R^3}{GM} \right)^{1/2} = t_{\text{dyn}} . \quad (4.14)$$

Vemos que entonces la escala de tiempo dinámica de la estrella la podemos pensar también como las oscilaciones internas de la estrella.

Entonces, para el caso Newtoniano, la Ec. (4.6) se convierte en

$$\eta = \left(\frac{M_{\text{NS}} R_{\text{P}}^3}{M_{\text{BH}} R_{\text{NS}}^3} \right)^{1/2} , \quad (4.15)$$

donde M_{NS} y M_{BH} son las masas de la estrella de neutrones y del agujero negro, respectivamente, R_{NS} es el radio de la estrella de neutrones y R_{P} es el periastro. Definimos el cociente de masas como

$$q = \frac{M_{\text{NS}}}{M_{\text{BH}}} \leq 1 \quad (4.16)$$

Con q constante un encuentro con $\eta \gg 1$ tiene un parámetro de impacto grande mientras que para $\eta \simeq 1$ tenemos una colisión en la cual la estrella de neutrones será desbaratada porque las fuerzas de marea son tan intensas como la fuerza que mantienen a la estrella junta. Una diferencia importante entre los eventos con objetos de masa similar y en los cuales $q \ll 1$, como la perturbación de estrellas por un agujero negro supermasivo en núcleos activos de galaxias [19], es que la distancia al periastro es mucho más pequeña en el primer caso: de hecho es comparable al radio de la estrella de neutrones. Si despejamos al periastro en la ecuación (4.15) tenemos

$$R_{\text{P}} = R_{\text{NS}} \eta^{2/3} q^{-1/3} . \quad (4.17)$$

Entonces, si consideramos un evento que desbarate a la estrella de secuencia principal por un agujero negro super-masivo sólo hay que cambiar la masa y el

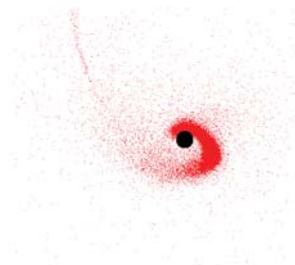
Newton	Schwarzschild	Paczyński–Wiita	Nowak–Wagoner
Ω_{orb}^2	$\frac{GM}{r^3}$	$\frac{GM}{r^3}$	$\frac{GM}{r(r-r_g)^2}$
			$\frac{GM(r^2-3r_g r+9r_g^2)}{r^5}$

Tabla 4.2: Valores de la frecuencia orbital para cada uno de los potenciales. Éstas las utilizamos en la Ec. (4.6) para calcular el radio a periastro numéricamente.

radio de la estrella de neutrones por la de secuencia principal. Consideremos $\eta \sim 1$, un agujero negro super masivo con $M_{\text{BH}} \sim 10^6$ y una estrella de secuencia principal con $M_* \sim M_\odot$ y $R_* \sim R_\odot$, como lo hacen Tejeda y Rosswog [19], entonces $q \sim 10^{-6}$ y de ahí que $R_P \sim 10^2 R_\odot$. Ahora para los objetos compactos con los cuales estamos trabajando tenemos que $q = 0.31$ y de ahí $R_P \sim 2R_{\text{NS}}$ para $\eta \sim 1$. La diferencia que podemos ver es que en el primer caso la interacción es únicamente gravitacional; sin embargo, en el segundo caso además de la interacción gravitacional tenemos un contacto directo entre los dos objetos celestes. Esta colisión directa puede cambiar drásticamente el cociente de masas, q , durante el encuentro; una fracción de masa puede ser eyectada y estar completamente desligada del sistema y otra fracción de masa será absorbida por la frontera del agujero negro.

Cuando tenemos una interacción, entre objetos compactos, con $\eta \simeq 1$ las perturbaciones provocadas por la fuerza de marea producen una aceleración del material dentro de la estrella con respecto a su centro de masa. La estrella gana energía interna, la cual es tomada de la energía cinética del movimiento con respecto al agujero negro. Si suficiente energía es absorbida y sustenta las oscilaciones de la estrella entonces, los dos objetos compactos, quedarán ligados. Cuando sucede la colisión aparece una perturbación radial, y además rotación de la estrella. El tipo de oscilaciones que estamos considerando son únicamente radiales. Sin embargo, el campo de marea induce modos de oscilación no-radiales en los cuales no profundizaremos nuestro estudio.

En la Tabla 4.2 podemos ver los valores de las frecuencias orbitales para cada uno de los potenciales que fueron utilizados junto con la Ec. (4.6), para calcular el radio a periastro, R_P , fijando el valor de η . Para el caso Newtoniano podemos despejar de la Ec. (4.15) al periastro y obtenemos la Ec. (4.17). Sin embargo, para los demás potenciales no es posible encontrar



una expresión analítica para R_P así que, en lugar de aproximar la solución mediante expansiones, resolvimos el problema de manera numérica.

Por otro lado, a escalas pequeñas, puesto que estamos trabajando con objetos compactos con masas estelares, la emisión de ondas gravitacionales es elevada y puede extraer una fracción considerable de la energía cinética total y del momento angular, durante un pasaje por el periastro.

4.4. Emisión de ondas gravitacionales

Las ondas gravitacionales no han sido detectadas directamente; no obstante estamos a unos años (menos de 5 años) de tener la instrumentación necesaria para lograrlo [11]. La primera detección de ondas gravitacionales será de gran importancia ya que será una confirmación directa de una predicción de relatividad general: en las palabras de John Wheeler, el *espacio-tiempo* le dice a la materia cómo moverse y la materia le dice al *espacio-tiempo* qué curvatura tomar².

Las observaciones de ondas gravitacionales tendrán gran interés para la astronomía ya que abrirán una nueva ventana observacional a través de la cual podremos analizar algunos de los eventos más dinámicos del universo. Por ejemplo, fusiones de objetos compactos (NS-NS, NS-BH), supernovas y posiblemente radiación gravitacional primordial. La mayoría de las fuentes de radiación gravitacional son muy débiles por lo cual se tienen que utilizar técnicas estadísticas muy elaboradas para poder detectarlas. Estas técnicas hacen uso de unas plantillas de la forma de la onda esperada y la comparan con los datos adquiridos. Entonces, es necesario entender qué tipo de sistemas pueden emitir ondas gravitacionales y qué forma tendrá su onda característica de emisión.

4.4.1. Fuentes de ondas gravitacionales

Exploremos qué tipos de variaciones produce la radiación gravitacional expandiéndola en sus momentos multipolares y comparándola con su contra-

²“*Spacetime tells matter how to move; matter tells spacetime how to curve.*”

parte electromagnética. En electromagnetismo no hay radiación monopolar electromagnética pero si hay radiación dipolar eléctrica y magnética. Para el caso gravitacional veremos que el orden más bajo que permite radiación es el momento cuadrupolar.

Sea $\rho(\mathbf{r})$ la densidad de masa-energía. El momento monopolar es $\int \rho(\mathbf{r}) d^3r$, que es simplemente la masa-energía total. Como ésta es constante entonces no puede haber radiación monopolar gravitacional. El momento dipolar estático es $\int \rho(\mathbf{r})\mathbf{r} d^3r$; éste es el centro de masa-energía del sistema. En el marco de referencia del centro de masa-energía este momento no cambia entonces no puede haber radiación en este marco de referencia; si no hay radiación en este marco no la hay en ninguno otro ya que la radiación es independiente del marco de referencia. El equivalente al momento dipolar magnético es $\int \rho(\mathbf{r})\mathbf{r} \times \mathbf{v}(\mathbf{r}) d^3r$, el cual es el momento angular total del sistema. Como éste se conserva entonces tampoco tenemos radiación de tipo momento magnético dipolar gravitacional. El siguiente momento estático es el momento cuadrupolar

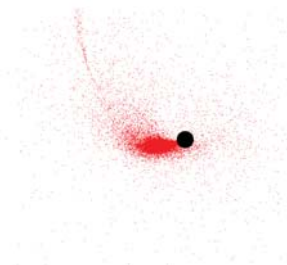
$$I_{ij} = \int \rho(\mathbf{r}) r_i r_j d^3r . \quad (4.18)$$

Puesto que no hay una ley de conservación específica para éste, entonces podemos tener radiación gravitacional cuadrupolar [12].

Con lo anterior podemos concluir qué tipo de movimiento puede generar radiación gravitacional . Una variación esféricamente simétrica es únicamente monopolar, por lo cual no produce radiación. Entonces, tan violenta sea una explosión o un colapso, no habrá radiación gravitacional si la simetría esférica se mantiene a lo largo del evento. Más aún, un movimiento rotacional que es axisimétrico (sin contracción ni expansión) tampoco genera radiación gravitacional porque el momento cuadrupolar y de órdenes superiores no son alterados. Por ejemplo, una estrella de neutrones puede rotar arbitrariamente rápido sin emitir radiación gravitacional mientras la simetría axial se preserve.

Las categorías generales para emisión de ondas gravitacionales son 4: sistema binario, fuentes continuas (por ejemplo, estrellas en rotación con un bulto no-axisimétrico), ráfagas³ (como colapsos asimétricos), y fuentes estocásticas (una de las más interesantes podría ser la radiación gravitacional

³En inglés: *bursts*



de fondo de principios del universo).

Los sistemas binarios tienen un momento cuadrupolar grande y se sabe que emiten radiación gravitacional al nivel esperado gracias a las observaciones de sistemas binarios de dos estrellas de neutrones; uno de estos sistemas es el pulsar de *Hulse–Taylor* [4, 13]. Su estudio hizo de Hulse y Taylor acreedores del premio Nobel en 1993. En la categoría de fuentes continuas, una fuente rotando en principio puede emitir ondas gravitacionales con una misma frecuencia por un periodo largo de tiempo. Fuentes de ondas continuas son interesantes porque en principio pueden ser vistas incluso con amplitudes pequeñas. Las ráfagas provienen de eventos de corta duración y que no poseen ninguna periodicidad particular. Para las fuentes estocásticas hay que pensar en un amplio espectro de frecuencias proveniente de múltiples fuentes. Podemos pensar en la enorme radiación de primer plano en nuestra galaxia debido a los sistemas binarios de dos estrellas enanas blancas, o en la radiación de fondo proveniente del universo temprano. Hasta ahora, las fuentes binarias son las únicas que conocemos a nivel detectable [13].

4.4.2. Características de las ondas gravitacionales

Primero hay que darnos una idea de los rangos de frecuencia disponible para sistema binario. Éste, evidentemente, no tiene un límite inferior ya que basta con agrandar el eje semimayor tanto como uno quiera; sin embargo, sí existe el límite superior. Como ya vimos anteriormente, la frecuencia máxima a la cual puede rotar una estrella sin desbaratarse es $f_{\text{máx}} = (G\rho)^{1/2}$. Entonces una binaria que contiene estrellas de secuencia principal no puede tener una frecuencia mayor a $\sim 10^{-3} - 10^{-6}$ Hz, dependiendo de la masa. Una binaria de estrellas enanas blancas no pueden tener una frecuencia mayor a $\sim 0.1 - 10$ Hz, también dependiendo de la masa. Finalmente, para un par de estrellas de neutrones el límite superior para su frecuencia es $1000 - 2000$ Hz. En particular para agujeros negros el límite de la frecuencia es del orden de $10^4 (M_{\odot}/M)$ Hz en el horizonte de eventos, r_{g} . Como ya vimos, Sec. 4.2, las órbitas son inestables a partir de r_{ms} ; para un agujero negro no-rotante la frecuencia orbital en este radio es $f_{r_{\text{ms}}} = 2200 (M_{\odot}/M)$ Hz.

La amplitud de una onda gravitacional es una cantidad adimensional que representa el cambio de una distancia entre la distancia original, es decir,

$h \sim \frac{\Delta d}{d}$, donde d es la distancia entre dos masas de prueba. Entonces, dicha amplitud resulta ser

$$h \sim \frac{G^2}{c^4} \frac{1}{r} \frac{\mu M}{R}, \quad (4.19)$$

donde $M = M_1 + M_2$ es la masa total, $\mu = M_1 M_2 / M$ es la masa reducida, R es la separación orbital y r es el radio al que estamos detectando la señal [12]. El flujo del campo a través de una superficie esférica a un radio r resulta ser $F(r, \theta, \phi) \propto A^2(r, \theta, \phi)$. Supongamos que la amplitud del campo es esféricamente simétrica, es decir $A(r, \theta, \phi) = A(r)$ entonces la luminosidad es

$$L(r) \propto 4\pi r^2 A^2(r). \quad (4.20)$$

Además, el flujo es proporcional al cuadrado de la amplitud y al cuadrado de la frecuencia: $F \sim h^2 f^2$. Si reemplazamos la amplitud de la onda gravitacional, Ec. (4.19), en la de la luminosidad, Ec. (4.20) y utilizando $f \sim (M/R^3)^{1/2}$, obtenemos

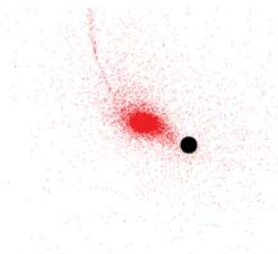
$$\begin{aligned} L &\sim 4\pi r^2 f^2 h^2 \\ &\sim \frac{\mu^2 M^3}{R^5}, \end{aligned}$$

es decir, suponiendo masas constantes,

$$L \sim R^{-5}. \quad (4.21)$$

Lo que podemos deducir del procedimiento anterior para órbitas circulares, es que la radiación emitida es mucho más fuerte cuando la separación es pequeña, por la Ec. (4.21). Para una órbita muy excéntrica, la radiación sería emitida en su mayoría en el periastro, entonces tendría la característica de una fuerza impulsiva. Con una fuerza de este tipo, la órbita regresaría a donde fue impartido el impulso. Esto implica que el periastro se quedaría aproximadamente constante mientras que las pérdidas de energía disminuirán la distancia al apoastro. Entonces podemos esperar que la radiación gravitacional disminuya la excentricidad de una órbita; esto sucedería cada vez que se pase por el periastro [13].

La masa total del sistema y las velocidades relativas en una colisión parabólica son comparables a los de un sistema binario cercano, entonces podríamos pensar que la frecuencia, la amplitud y la fuerza de las ondas gravitacionales son comparables. La diferencia más notable es que los componentes



de un sistema binario se van acercando, siguiendo una espiral, sobre varios periodos orbitales. Esto hace que la señal característica de las ondas gravitacionales tenga una forma de “*chirp*”, es decir la frecuencia de la onda gravitacional va aumentando poco a poco a medida que los dos objetos se van acercando; este fenómeno sería detectado viendo como la frecuencia de la onda barre de forma continua el espectro del interferómetro. La señal gravitacional detectable de la colisión, contrario al del sistema binario, tendrá un comportamiento tipo ráfaga. Podemos describir la amplitud de la onda con la Ec. (4.19). No obstante, utilizaremos otra formulación la cual incluye cantidades características de la colisión [10], que son de nuestro interés, para describir la amplitud de las ondas gravitacionales

$$h \sim \frac{GM_{\text{NS}}}{c^2 D R_{\text{P}}} \quad (4.22)$$

$$\sim 10^{-22} \eta^{-2/3} \left(\frac{r}{100\text{Mpc}} \right)^{-1} \left(\frac{M_{\text{BH}}}{10M_{\odot}} \right)^{2/3} \left(\frac{R_{\text{NS}}}{10\text{km}} \right)^{-1} \left(\frac{M_{\text{NS}}}{1.4M_{\odot}} \right)^{4/3} \quad (4.23)$$

y la frecuencia

$$f \sim \left(\frac{GM_{\text{BH}}}{R_{\text{P}}^3} \right)^{1/2} \quad (4.24)$$

$$\sim 1.4 \times 10^4 \text{Hz} \times \eta^{-1} \left(\frac{R_{\text{NS}}}{10\text{km}} \right)^{-3/2} \left(\frac{M_{\text{NS}}}{1.4M_{\odot}} \right)^{1/2}. \quad (4.25)$$

Entonces, podemos esperar que cada vez que pase por el periastro veremos un máximo en la amplitud de las ondas gravitacionales.

Dada la dirección de propagación, las ondas gravitacionales tienen dos tipos de polarización, las cuales no son lineales como en electromagnetismo; éstas llevan el nombre de polarización “más” y polarización “cruz” por la forma que tienen, y son representadas por h_+ y h_{\times} respectivamente. La naturaleza cuadrupolar de las ondas gravitacionales se refleja en que las dos polarizaciones son representadas de la mejor manera observando la influencia que tienen en un círculo de masas de prueba orientado de forma perpendicular a la dirección de propagación de la onda. La polarización “+” estira en la dirección arriba-abajo mientras que apachurra en la dirección izquierda-derecha y vice versa. La polarización “ \times ” hace lo mismo únicamente que rotado 45° .

Las amplitudes de estas polarizaciones [7, 17], para un observador en r_0 sobre el eje del sistema binario, están dadas por

$$r_0 h_+ = \frac{G}{c^4} \left(\ddot{Q}_{xx} - \ddot{Q}_{yy} \right) \quad (4.26)$$

y

$$r_0 h_\times = \frac{2G}{c^4} \ddot{Q}_{xy} ; \quad (4.27)$$

la luminosidad de la onda gravitacional es

$$L_{\text{GW}} = \frac{dE}{dt} = \left(\frac{G}{5c^5} \right) \left\langle \left(\frac{d\ddot{Q}_{jk}}{dt} \right) \left(\frac{d\ddot{Q}_{jk}}{dt} \right) \right\rangle , \quad (4.28)$$

donde el momento de inercia reducido, transversal y sin traza es

$$\ddot{Q}_{jk} = \ddot{I}_{jk} - \frac{\delta_{jk} \ddot{I}}{3} . \quad (4.29)$$

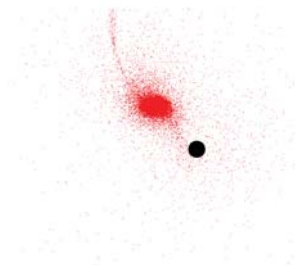
La segunda derivada temporal del momento de inercia reducido está dada por

$$\ddot{I}^{jk} = \ddot{I}_{\text{BH}}^{jk} + \ddot{I}_{\text{fluido}}^{jk} , \quad (4.30)$$

Las dos partes de la ecuación (4.30) se podrían calcular mediante dos derivadas numéricas consecutivas, más aún, para la luminosidad tendríamos que hacer tres. Las derivadas numéricas introducen ruido así que para reducir el número de derivadas numéricas que se tienen que hacer Rasio y Shapiro, en su artículo de 1992, encontraron una manera ingeniosa de calcular la segunda derivada temporal del momento de inercia reducido [15]. Calculan la primera derivada del momento cuadrupolar, Ec. (4.18), utilizando la ecuación de continuidad, (3.2), para reemplazar la derivada temporal de la densidad. Esto se integra por partes y se le calcula la derivada temporal nuevamente. Asimismo, utilizamos la ecuación de continuidad y la ecuación de Euler, Ecs. (3.2) y (3.4); de nueva cuenta, este resultado se integra por partes. De este modo obtenemos la segunda derivada temporal del momento de inercia reducido como función de una integral. En SPH, reemplazamos las integrales por una suma sobre todas las partículas y el resultado es

$$\ddot{I}_{\text{fluido}}^{jk} = \sum_i m_i \left(2v_i^j v_i^k + \frac{2P_i}{\rho_i} \delta^{jk} + x_i^k g_i^j + x_i^j g_i^k \right) , \quad (4.31)$$

$$\ddot{I}_{\text{BH}}^{jk} = M_{\text{BH}} \left(2v_{\text{BH}}^j v_{\text{BH}}^k + x_{\text{BH}}^k g_{\text{BH}}^j + x_{\text{BH}}^j g_{\text{BH}}^k \right) . \quad (4.32)$$



El índice i sobre el cual se está sumando, en la Ec. (4.31), son las partículas SPH y los superíndices son las componentes Cartesianas, el término g_i es la aceleración gravitacional sobre la partícula i . La contribución por la presencia del agujero negro es añadida como la contribución de una masa puntual [7, 17, 15]. Vemos que las ecuaciones (4.31) y (4.32) dependen de cantidades que ya conocemos por el SPH, así que no hay que calcular dos derivadas numéricas que introducen ruido numérico.

Capítulo 5

Resultados

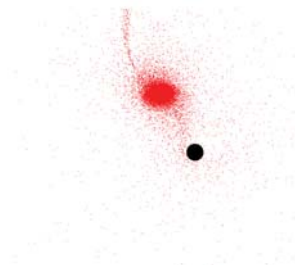
5.1. Condiciones iniciales y detalles del SPH

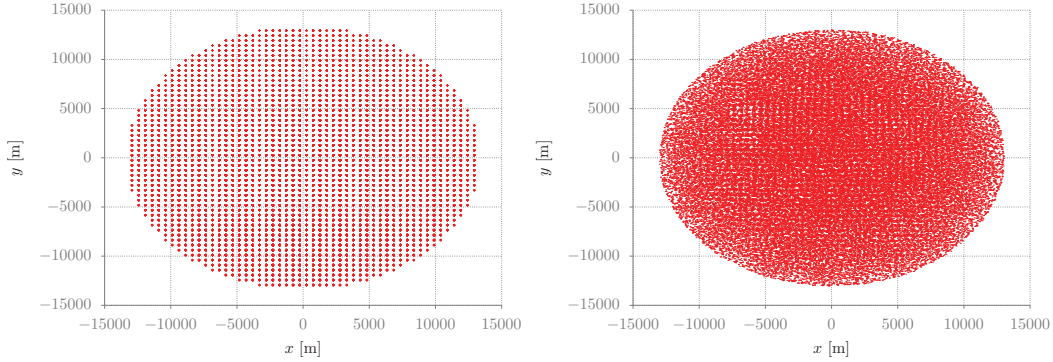
5.1.1. Condiciones iniciales

El agujero negro será modelado por una masa puntual rodeado de una frontera en r_g para los potenciales Newtoniano y NW; para el potencial PW la frontera estará en $^3GM/c^2$ para poder cubrir la singularidad. Por otro lado, la estrella sí es modelada como un cuerpo extendido y es por eso que utilizamos el método numérico SPH, Capítulo 3, para construir la estrella, relajarla y eventualmente evolucionar el sistema dinámico.

El primer programa construye la estrella mediante una malla cúbica de puntos. Después, se toman todos los puntos que estén dentro de una esfera del radio de la estrella que queremos construir. Finalmente, mediante el SPH se le asigna una masa, m_i , a cada punto, que en el contexto del SPH son partículas. Finalmente, obtenemos una esfera con partículas espaciadas de manera uniforme y con una densidad asignada. La masa y radio que utilizamos son: $M_{\text{NS}} = 1.4M_{\odot}$ y $R_{\text{NS}} = 13.4\text{km}$.

Por la manera en la que fue construida, la estrella no está en equilibrio hidrostático. El trabajo del segundo programa es relajar la estrella para que esté en equilibrio. En este programa se utilizó la ecuación politrópica, Ec. (2.17), como la ecuación de estado para evolucionar la estrella. Se utilizó el





(a) Estrella generada mediante la malla (b) La estrella generada después de una relajación de $80 t_{\text{din}}$.
cúbica y sin relajación

Figura 5.1: En la primera figura se utilizaron pequeñas cruces para representar cada punto. En la segunda figura, para que fuera más claro que está pasando durante la relajación, se utilizaron pequeños puntos

índice adiabático $\gamma = 2$, que corresponde a un índice politrópico $n = 1$.

Para poder comparar los tres potenciales en las corridas dinámicas se eligió utilizar al parámetro de impacto como referencia, Sección 4.3. Se utilizó un programa auxiliar que calcula el periastro, las posiciones y velocidades iniciales de los dos objetos para cada potencial gravitacional para un valor fijo del parámetro de impacto η . En este programa auxiliar se aproximan a los dos objetos compactos con masas puntuales y se integran las ecuaciones de movimiento con el método de Euler. Esto es en cuanto a las posiciones y velocidades iniciales del centro de masa que serían utilizadas en la corrida dinámica. Las corridas con los potenciales pseudo-Newtonianos comienzan con una separación inicial de $5.5R_{\text{NS}}$ para que tengan un poco más de tiempo para interactuar con el agujero negro, ya que los potenciales son más intensos. Por otro lado, para la corrida con el potencial Newtoniano la separación inicial es de $3.7R_{\text{NS}}$.

Finalmente, todos los ingredientes anteriores constituyen las condiciones iniciales para el último programa. Éste calcula las interacciones dinámicas entre el agujero negro y la estrella de neutrones. En esta corrida dinámica cambiaremos la ecuación de estado politrópica por la ecuación de estado de

un gas ideal, donde la presión está dada por

$$P = \rho u (\gamma - 1) , \quad (5.1)$$

y u es la energía interna específica sin mecanismos de enfriamiento ni de calentamiento, para poder seguir la termodinámica del gas.

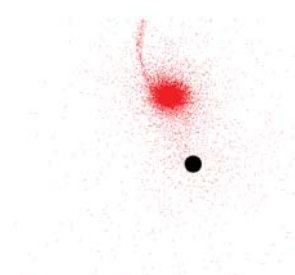
Las condiciones iniciales, en cuanto a la estructura interna de la estrella y las ecuaciones de estado que se utilizan en los diferentes programas, son idénticas para todas las corridas; la única diferencia en las corridas son los potenciales gravitacionales y las posiciones y velocidades iniciales dependiendo del parámetro de impacto que se esté usando.

Por último, se utilizó un programa auxiliar para determinar si una partícula pertenecía al disco de acreción o a la cola, y si estaba ligada al agujero negro o no. Para determinar si la partícula estaba ligada o no, se utilizó el criterio de la energía negativa, es decir, si la energía total de la partícula es negativa entonces está ligada al agujero negro; de lo contrario, si la energía es positiva, entonces pertenece a la masa eyectada. Para discriminar entre las partículas que pertenecen a la cola y al disco, se utilizó el criterio de la excentricidad. Se calculó la excentricidad de la órbita de cada partícula y con un valor de corte elegido arbitrariamente se clasificaron a las partículas. La condición para ser parte de la cola es $e > 0.35$, de este modo las partículas clasificadas como pertenecientes al disco seguirán órbitas casi circulares.

A continuación veremos unas ligeras modificaciones que se le hicieron al método numérico para que tuviera un mejor desempeño en cuanto al cálculo de la viscosidad artificial. Con esta modificación se mejora su implementación y así sólo se introduce cuando realmente la hay.

5.1.2. Detalles del SPH

Para estas simulaciones se utilizó el método de vecinos cercanos constantes, descrito en Sec. 3.1.6, para evolucionar la longitud de suavizamiento h . En todos los programas se utilizó un número de vecinos constante de 64. Como se menciona al final de Capítulo 3, las longitudes de suavizamiento serán más chicas al interior de la estrella que en los bordes ya que la densidad de partículas SPH es mayor en el centro. Los términos “grad-h”, Sec. 3.1.8, son



términos correctivos de segundo orden. Estos términos aseguran la conservación de las cantidades físicas y mejoran la precisión del SPH. No obstante, su importancia depende directamente del tipo de problema y la resolución numérica requerida. En nuestro caso no están implementados los términos de “grad-h”.

Modificamos la prescripción de la viscosidad artificial y utilizamos la forma propuesta por Balsara en 1995 e implementada por Lee en 2000 [6]. Solamente modificaremos la ecuación (3.39) por la siguiente:

$$\Pi_{ab} = \left(\frac{P_a}{\rho_a^2} + \frac{P_b}{\rho_b^2} \right) (-\alpha \mu_{ab} + \beta \mu_{ab}^2) \quad (5.2)$$

con

$$\mu_{ab} = \begin{cases} \frac{\mathbf{v}_{ab} \cdot \mathbf{r}_{ab}}{h_{ab} (|\mathbf{r}_{ab}|^2/h_{ab}^2) + \eta^2} \frac{f_a + f_b}{2c_{ab}} & \mathbf{v}_{ab} \cdot \mathbf{r}_{ab} < 0 \\ 0 & \mathbf{v}_{ab} \cdot \mathbf{r}_{ab} \geq 0 \end{cases}, \quad (5.3)$$

y donde f_a es la forma funcional para la partícula a , también conocido como el "*Balsara-switch*", definida como

$$f_a = \frac{|\nabla \cdot \mathbf{v}|_a}{|\nabla \cdot \mathbf{v}|_a + |\nabla \times \mathbf{v}|_a + \eta' c_a/h_a}. \quad (5.4)$$

El término $\eta' \simeq 10^{-4}$ es para prevenir que tengamos divergencias numéricas. La velocidad del sonido en la posición de la partícula a es c_a , y α y β son constantes como lo eran anteriormente [6, 16]. La divergencia y el rotacional del campo de velocidades lo calculamos mediante

$$(\nabla \cdot \mathbf{v})_a = \frac{1}{\rho_a} \sum_b m_b \mathbf{v}_{ba} \cdot \nabla_a W_{ab} \quad (5.5)$$

y

$$(\nabla \times \mathbf{v})_a = \frac{1}{\rho_a} \sum_b m_b \mathbf{v}_{ba} \times \nabla_a W_{ab}. \quad (5.6)$$

Utilizamos esta nueva viscosidad porque se va a cero en regiones de vorticidad elevada, es decir cuando $\nabla \times \mathbf{v} \gg \nabla \cdot \mathbf{v}$. Este interruptor distingue entre un “shock” y un movimiento cortante o de cizallamiento y detiene la viscosidad artificial en el último caso. Este interruptor reduce la viscosidad artificial donde no es necesaria. Puesto que en las simulaciones numéricas se forman

Primaria	Secundaria	γ	$\frac{M_1}{M_\odot}$	$\frac{M_2}{M_\odot}$	$q = \frac{M_2}{M_1}$	η	Potencial	$\frac{R_p}{R_2}$
BH	NS	2	4.51	1.4	0.31	1.0	N	1.5
BH	NS	2	4.51	1.4	0.31	1.0	NW	1.85
BH	NS	2	4.51	1.4	0.31	1.0	PW	2.20
BH	NS	2	4.51	1.4	0.31	2.0	N	2.35
BH	NS	2	4.51	1.4	0.31	2.0	NW	2.5
BH	NS	2	4.51	1.4	0.31	2.0	PW	3.05
BH	NS	2	4.51	1.4	0.31	3.0	N	3.07
BH	NS	2	4.51	1.4	0.31	3.0	NW	3.04
BH	NS	2	4.51	1.4	0.31	3.0	PW	3.76

Tabla 5.1: Lista de parámetros iniciales utilizados para las corridas dinámicas.

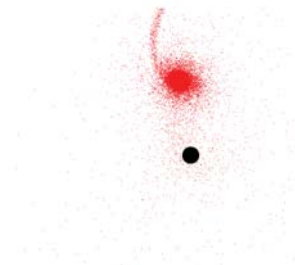
estructuras de acreción, en las cuales los esfuerzos cortantes están presentes, es importante limitar el efecto de la viscosidad artificial para su evolución. Sin embargo, es necesario tener una viscosidad artificial para lidiar con los fuertes choques en regiones de alta compresión, $\nabla \cdot \mathbf{v} \gg \nabla \times \mathbf{v}$, en el cual el “*Balsara-switch*” es cercano a 1. Para esta prescripción los valores que se recomienda utilizar $\alpha \simeq \beta \simeq \gamma/2$; en este caso particular eso corresponde a $\alpha = \beta = 1$.

5.2. Resultados

5.2.1. Parámetro de impacto $\eta = 1$

Con todos los ingredientes anteriores y un parámetro de impacto $\eta = 1$ hicimos una corrida dinámica en la cual un agujero negro y una estrella de neutrones interactúan mediante una colisión directa durante un poco más de 22 ms. Se implementaron los potenciales mencionados en el Capítulo 4 en un código SPH. El código monitorea cantidades físicas continuas, ya que éstas son las adecuadas debido a la discretización inducida por el mismo SPH.

De la figura 5.2 vemos que las interacciones entre los dos objetos compactos son tan fuertes que los núcleos no logran hacer más que un sólo pasaje por periastro. En los tres casos los núcleos de la estrella de neutrones está



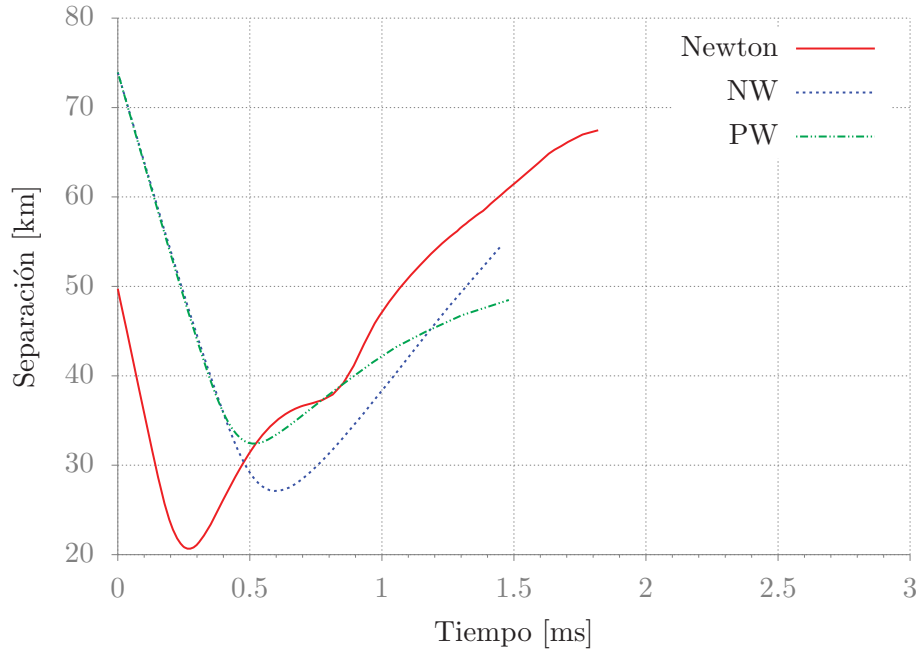


Figura 5.2: Gráfica de la separación entre los dos objetos en función del tiempo, con $\eta = 1$. Las líneas se cortan cuando la estrella está desbaratada y ya no tiene núcleo.

desbaratado completamente.

En la figura 5.3 podemos ver curvas de nivel que representan la densidad de la estrella en el plano orbital. Los ejes están en metros y cada gráfica es una “fotografía” a un cierto tiempo de la interacción entre los objetos compactos. Con un parámetro de impacto tan pequeño, la colisión entre el agujero negro y la estrella de neutrones es prácticamente una colisión directa. Podemos ver que en el tiempo $t = 1.1\text{ms}$ en las figuras 5.3a, 5.3b y 5.3c la estrella ya está desbaratada, es decir, ya no hay un núcleo definido de la estrella. En la tres figuras vemos la formación de una cola debido a las fuerzas de marea; éstas son tan intensas que expulsan materia de la estrella de neutrones por su punto exterior de Lagrange.

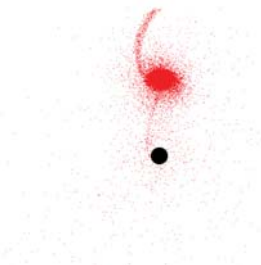
En la corrida utilizando PW, Figs. 5.3c, 5.3f, 5.3i y 5.3l, la colisión es de tal magnitud que después de $t = 4\text{ms}$ prácticamente toda la estrella de neutrones es absorbida por el agujero negro. Por otro lado, utilizando NW,

Figs. 5.3b, 5.3e, 5.3h y 5.3k, la estrella sí sobrevive la colisión y se forma una cola que se extiende un poco más de 200 km. Esta cola está completamente ligada al agujero negro, Fig 5.8d, es decir, que eventualmente tendrá que caer hacia él. La cola tiene una masa de $M_{\text{cola}} \simeq 10^{-2} M_{\odot}$. Si pudiéramos continuar la simulación probablemente una parte de la masa de la cola formaría un disco de acreción. En la corrida Newtoniana, Figs. 5.3a, 5.3d, 5.3g y 5.3j, gracias a la disrupción total de la estrella se forma una estructura de disco con una cola larga que se extiende algunos cientos de kilómetros. Al final de la simulación, una parte de la cola sigue ligada al agujero negro y se une con la estructura de disco que rodea al agujero negro. La masa del disco, la cual está ligada al agujero negro, es de $M_{\text{disco}} \simeq 0.1 M_{\odot}$. Aquí prácticamente toda la cola ya cayó hacia el agujero negro ya que su masa al final de la simulación $M_{\text{cola}} \simeq 10^{-2} M_{\odot}$.

Podemos ver en la figura 5.5 cómo para las tres simulaciones la pérdida de masa es brutal, puesto que es una colisión directa entre los dos objetos, provocando una pérdida de energía y de momento angular de la estrella. En los tres casos el núcleo es desbaratado en el primer pasaje por periastro. En el caso Newtoniano el núcleo tiene $\simeq 0.1 M_{\odot}$ cuando es totalmente desbaratado, de igual manera para NW, Figs. 5.5 y 5.6. Sin embargo, para PW el núcleo tiene $\simeq 0.01 M_{\odot}$ cuando es desbaratado y es absorbida en su totalidad por el agujero negro, es decir, no hay ningún remanente de la colisión.

Puesto que la colisión es entre objetos compactos de masa estelar, la escala de distancia es pequeñas, lo cual provoca una emisión más intensa de ondas gravitacionales, como lo vimos en el Capítulo 4. Éstas se pueden llevar una fracción importante de la energía cinética total y del momento angular total en un sólo pasaje por periastro. En la figura ?? vemos cómo para los potenciales pseudo-Newtonianos hay una caída abrupta en el momento angular después del primero y único pasaje por periastro. La razón principal de esta caída es la pérdida de masa debido a la colisión directa con el agujero negro: al perder masa también se pierde momento angular y energía. Ahora, como efecto de segundo orden la emisión de ondas gravitacionales también participa, pero a menor medida, en la pérdida de momento angular de la estrella. Para el caso Newtoniano también hay una fuerte pérdida de momento angular pero no de la misma manera que para los otros dos.

Debido a que la estrella sólo sobrevive un pasaje por periastro y la pérdida de masa y momento angular es grande, podemos intuir que la emisión de on-



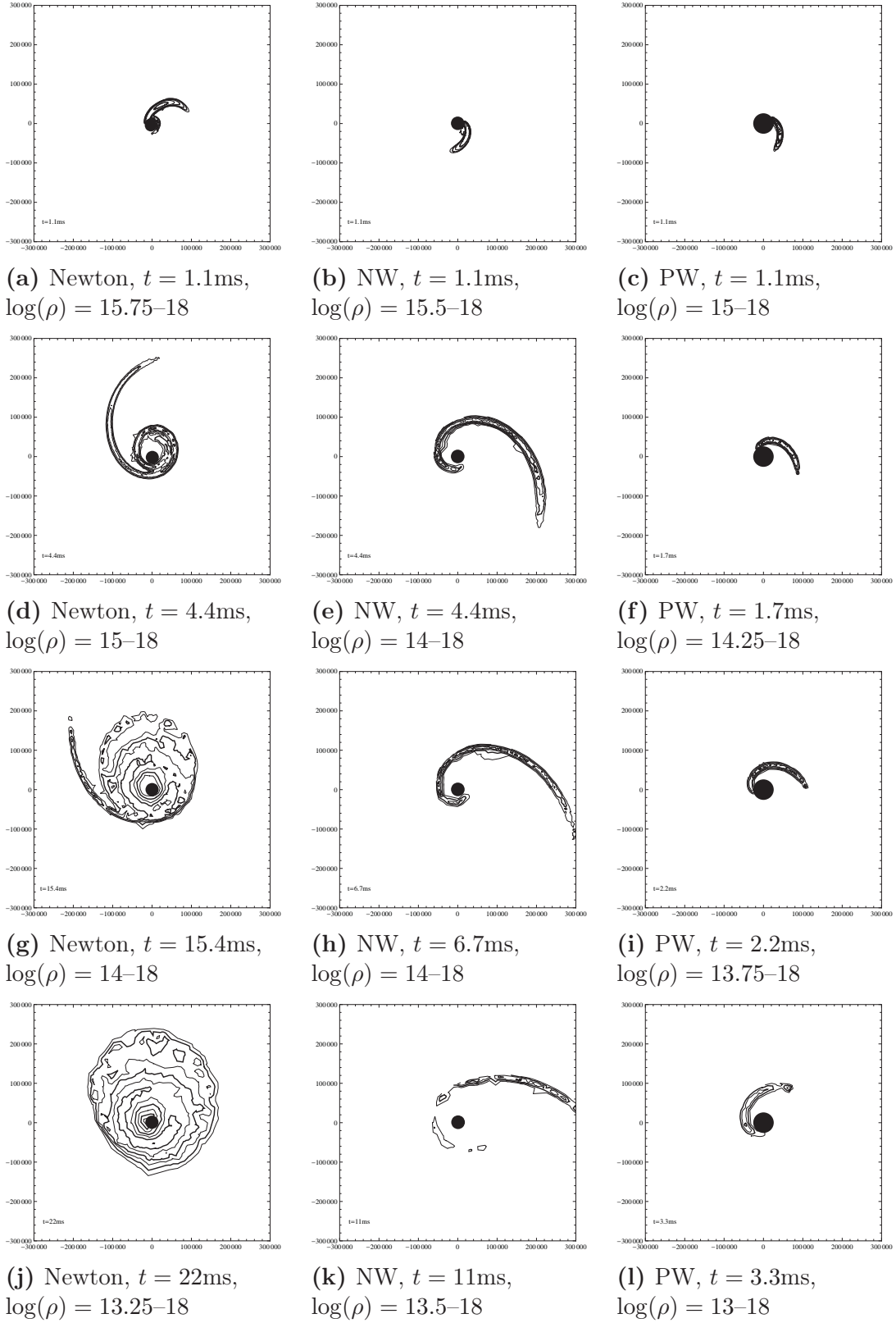
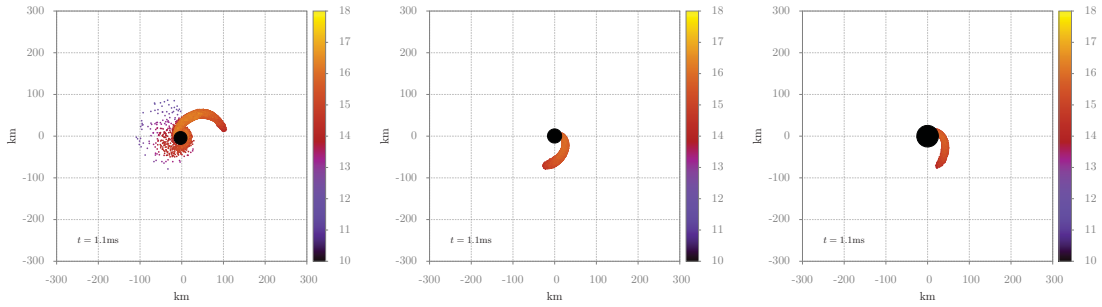


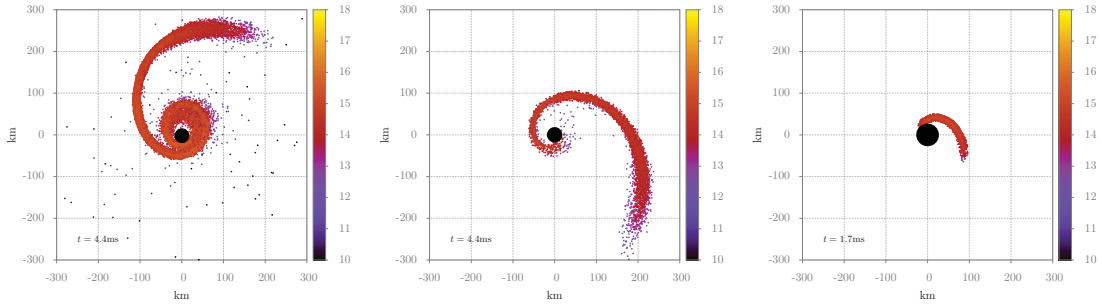
Figura 5.3: Curvas de nivel del plano orbital durante la simulación entre la estrella de neutrones y el agujero negro, con $\eta = 1$. En cada columna tenemos un potencial diferente: la primera columna es con el potencial Newtoniano, la segunda con NW y la tercera con PW. Las curvas de nivel están en escala logarítmica y espaciadas de manera uniforme cada 0.25 dex. La escala en los ejes x y y están en metros y es la misma en todos los casos.



(a) Newton, $t = 1.1\text{ms}$

(b) NW, $t = 1.1\text{ms}$

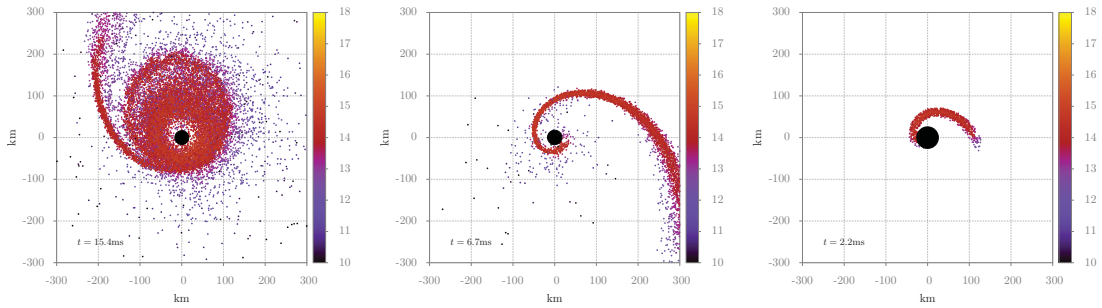
(c) PW, $t = 1.1\text{ms}$



(d) Newton, $t = 4.4\text{ms}$

(e) NW, $t = 4.4\text{ms}$

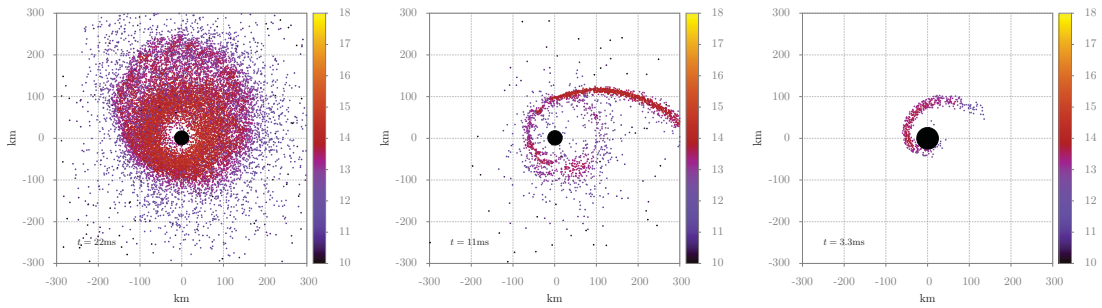
(f) PW, $t = 1.7\text{ms}$



(g) Newton, $t = 15.4\text{ms}$

(h) NW, $t = 6.7\text{ms}$

(i) PW, $t = 2.2\text{ms}$



(j) Newton, $t = 22\text{ms}$

(k) NW, $t = 11\text{ms}$

(l) PW, $t = 3.3\text{ms}$

Figura 5.4: Densidad respecto a cada partícula SPH en el plano orbital durante la simulación entre la estrella de neutrones y el agujero negro, con $\eta = 1$. En cada columna tenemos un potencial diferente: la primera columna es con el potencial Newtoniano, la segunda con NW y la tercera con PW. La escala de colores corresponde a $\log(\rho)$.

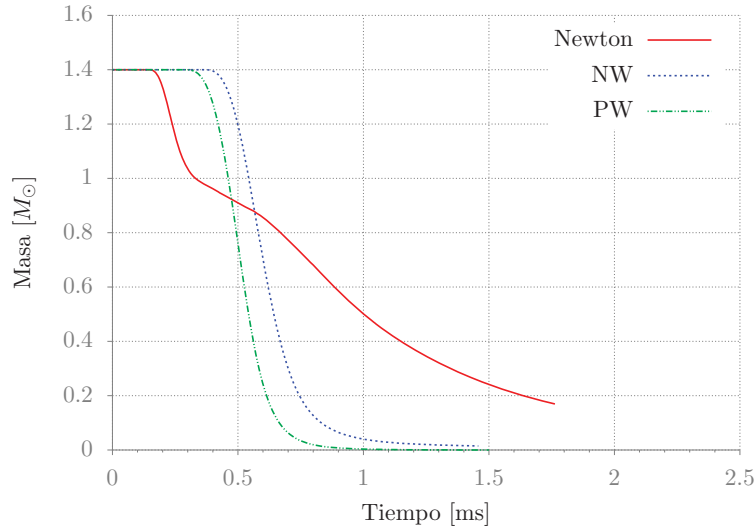


Figura 5.5: Masa del núcleo de la estrella de neutrones en masas solares contra el tiempo, con $\eta = 1$. Parte de la masa que pierde la estrella de neutrones es debido a la colisión directa; no obstante, también pierde masa debido a las fuerzas de marea. Las líneas se detienen cuando ya no tenemos núcleo de la estrella.

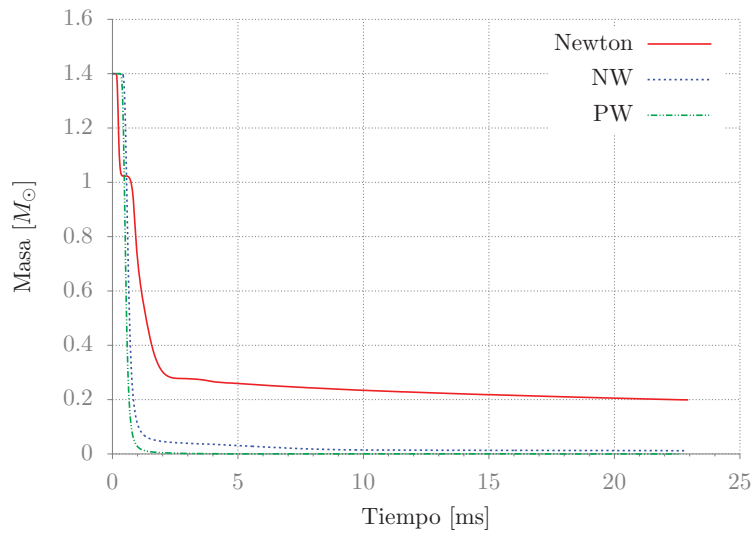


Figura 5.6: Masa total de la estrella, que no ha sido absorbida por el agujero negro, es decir, esto incluye la masa expulsada, la masa del disco y la masa de la cola, con $\eta = 1$.

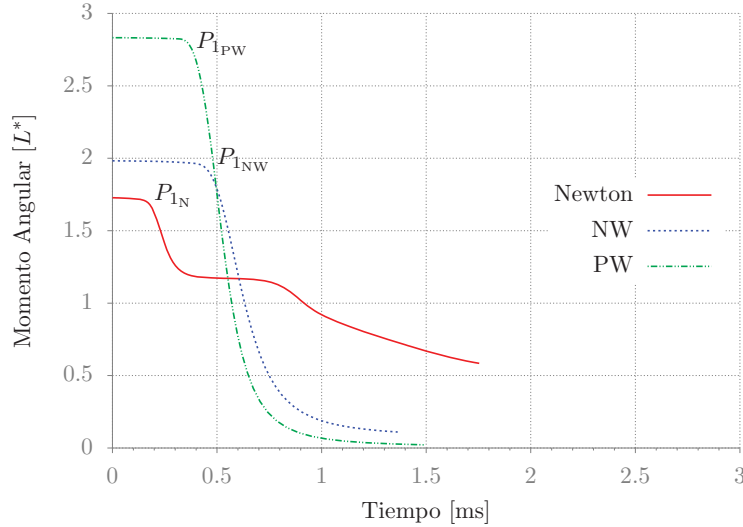
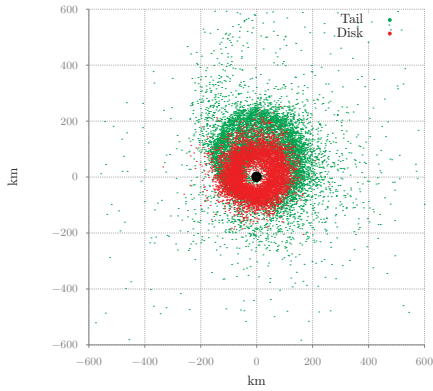


Figura 5.7: Momento angular total como función del tiempo de los tres potenciales con $\eta = 1$. Las unidades del momento angular están en $L^* = \mu (G M_{\text{tot}} R_{\text{NS}})^{1/2}$, donde M_{tot} es la masa total y μ es la masa reducida. Los periastrós están marcados como $P_{1\text{Pot}}$, $P_{2\text{Pot}}$, etc.

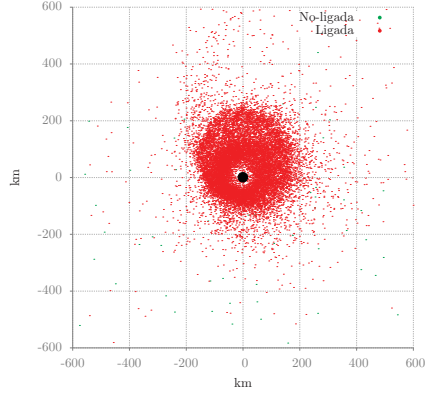
das gravitacionales será de tipo ráfaga. En la figura 5.9 se muestra una de las polarizaciones de las ondas gravitacionales emitidas durante la interacción. En la figura 5.10 podemos ver la luminosidad de las ondas gravitacionales emitidas durante la colisión. Vemos cómo los picos más intensos de la amplitud, h_+ , y de la luminosidad, corresponden a los pasajes por periastró. Como era de esperarse, la amplitud de las ondas gravitacionales es mayor entre más intenso sea el potencial. Es importante ver el cambio de escalas de tiempo entre la figura 5.7 y 5.9; vemos cómo en efecto el máximo (o mínimo) de la amplitud de la onda gravitacional corresponde al pasaje por periastró en los tres casos. Pese a que la amplitud de las ondas gravitacionales es muy pequeña, $h \sim 10^{-22}$, su luminosidad es muy grande del orden de $\sim 10^{56} \text{ergs}^{-1}$, Fig. 5.10. Este comportamiento es debido a que las ondas gravitacionales interactúan de manera muy débil con la materia y como consecuencia es muy complicado detectarlas.

Finalmente, el remanente de la colisión para el potencial PW es únicamente el agujero negro de masa estelar y unas cuantas partículas orbitándolo. Prácticamente toda la masa de la estrella de neutrones es absorbida por el

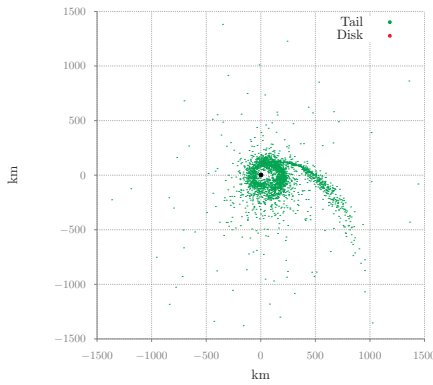




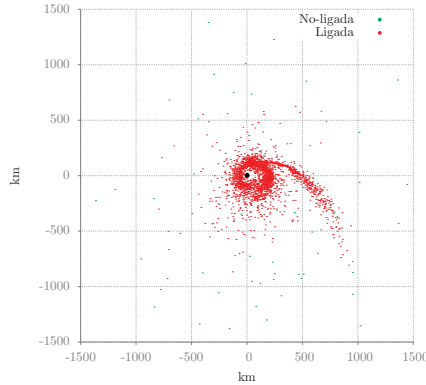
(a) Newton



(b) Newton



(c) NW



(d) NW

Figura 5.8: En las figuras de la columna izquierda podemos ver qué partículas son pertenecientes al disco y cuales a la cola. En las figuras de la columna derecha podemos ver qué partículas están ligadas al agujero negro. En la simulación con el potencial PW la estrella de neutrones es completamente absorbida por el agujero negro y no termina con una configuración similar a las otras dos, por esta razón no se incluyó en las gráficas.

agujero negro.

En los tres casos muy poca masa fue eyectada del sistema, $\sim 10^{-4}M_{\odot}$. Para el caso Newtoniano la masa del disco es $\sim 0.1M_{\odot}$ y de la cola $\sim 10^{-2}M_{\odot}$. En el caso de NW todavía no tenemos la formación de un disco, aunque podemos pensar que sí se llegará a formar cuando la masa de la cola, $\sim 10^{-2}M_{\odot}$, termine de caer. Es necesario tener $\sim 10^{-3}M_{\odot}$ en el disco para poder suponer que algún tipo de evento transitorio tendrá lugar, por ejemplo un sGRB¹. En el caso Newtoniano hay más que suficiente masa. Ahora para el caso NW tendríamos que evolucionar más tiempo la simulación y ver si la configuración final será similar a la Newtoniana. Si sólo una pequeña fracción de la cola forma el disco de acreción, entonces no habrá suficiente masa para tener un sGRB. Un sGRB por lo general emite una energía de 10^{50} erg. Supongamos que el mecanismo de acreción tiene una eficiencia del 10%, es decir, sólo el $0.1M_{\text{disco}}$ va a ser el combustible para el sGRB, entonces la masa requerida en el disco tiene que ser aproximadamente $10^{-3}M_{\odot}$ [9].

¹Por sus siglas en inglés: *short Gamma Ray Burst*, es decir una ráfaga de rayos gamma corta.



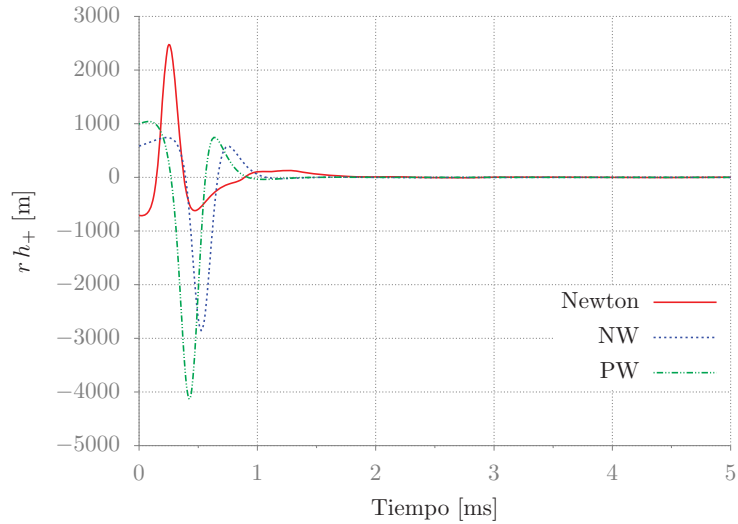


Figura 5.9: Ondas gravitacionales emitidas como función del tiempo, con $\eta = 1$. En esta gráfica sólo se muestra la polarización h_+ . Es claro el primer pasaje por periastro porque es el máximo (o mínimo) en la amplitud. Después de esto ya no hay emisión de ondas gravitacionales ya que la estrella está completamente desbaratada.

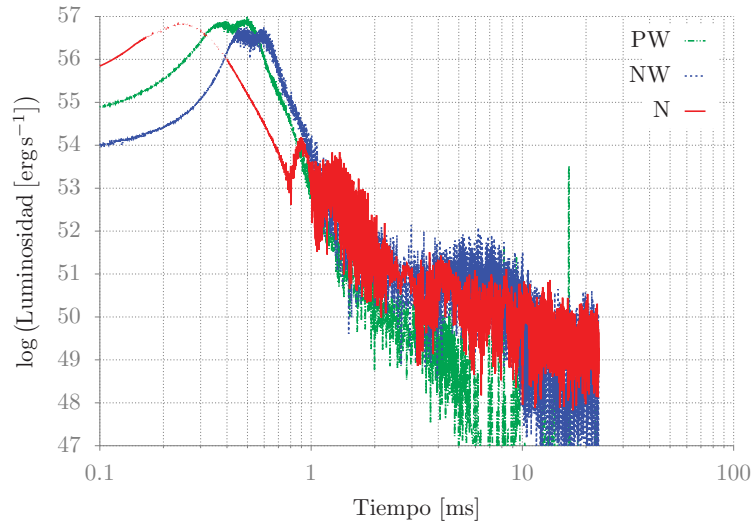


Figura 5.10: Luminosidad de las ondas gravitacionales emitidas como función del tiempo, con $\eta = 1$.

5.2.2. Parámetro de impacto $\eta = 2$

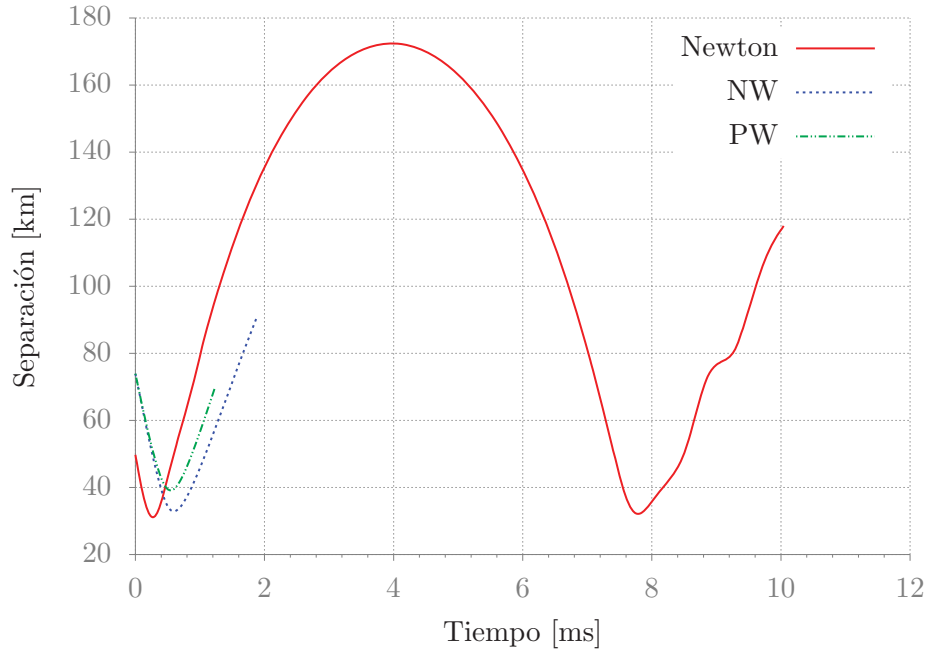


Figura 5.11: Separación entre el núcleo de la estrella de neutrones y el agujero negro de masa estelar en función del tiempo, con $\eta = 2$. Las líneas se detienen cuando ya no hay un núcleo presente en la estrella.

Ahora veamos los resultados con un parámetro de impacto $\eta = 2$. La colisión entre el agujero negro de masa estelar y la estrella de neutrones será menos intensa y por eso podemos esperar que el núcleo sobreviva más pasajes por el periastro y que al final de la simulación habrá más masa distribuida entre el disco, la cola y la masa expulsada del sistema.

En la corrida dinámica con $\eta = 2$ vemos, de la figura 5.11, que utilizando el potencial Newtoniano la estrella hace dos pasajes por periastro. No obstante, con los potenciales pseudo-Newtonianos la estrella sólo alcanza a hacer un pasaje por periastro antes de ser completamente desbaratada.

En la figura 5.12 tenemos las curvas de nivel proyectadas en el plano orbital. El orden de las figuras es igual que el anterior: las columnas, de izquierda a derecha, son los potenciales Newtoniano, NW y PW respectivamente. Cada



renglón corresponde a un tiempo diferente y los tiempos no están espaciados de manera uniforme. Se puede apreciar cómo el núcleo sobrevive dos pasajes por periastro, Fig. 5.11, y eso se ve reflejado en la curvas de nivel en el caso Newtoniano. Para los potenciales pseudo-Newtonianos la interacción con el agujero negro es tan intensa nuevamente que la estrella se desbarata por las fuerzas de marea. Sin embargo, como la colisión ya no es totalmente un impacto directo entonces mucha más materia sobrevive al primer pasaje por periastro y se forma una gran cola bastante más masiva que en el caso anterior y que se extiende un poco más de 1500 km. Podemos ver, en la figura 5.8, como para los dos potenciales pseudo-Newtonianos parte de la extensa cola está ligada al agujero negro. Además, al final de la simulación la única estructura presente en estos dos casos es la de cola. Al final de la simulación, en el caso Newtoniano, podemos observar la formación de dos colas y un disco de acreción. Se puede apreciar en la figura 5.8b, que todo el disco y una buena parte de las colas están ligadas al agujero negro. La masa ligada, para el caso Newtoniano, es aproximadamente $0.34M_{\odot}$, de ahí una fracción corresponde a la masa del disco y otra a la masa de la cola ligada: $M_{\text{disco}} \simeq 3 \times 10^{-2}M_{\odot}$ y $M_{\text{cola}} \simeq 0.31M_{\odot}$. En el caso de NW, la masa de la cola ligada es $M_{\text{cola}} \simeq 6.5 \times 10^{-2}M_{\odot}$. Finalmente, la masa de la cola ligada, para el potencial PW, es $M_{\text{cola}} \simeq 6 \times 10^{-2}M_{\odot}$. Entonces, para en los tres casos, tenemos grandes posibilidades que un sGBR tenga lugar.

En la figuras 5.12a, 5.12d y 5.12g podemos diferenciar entre el núcleo de la estrella de neutrones y dos colas de materia. Una de ellas sale por el punto interior de Lagrange hacia el agujero negro y la otra se forma de la materia expulsada por el punto exterior de Lagrange de la estrella. El remanente de la colisión en el caso Newtoniano es una estructura de disco con un radio de ~ 100 km, con una densidad de $\rho \simeq 10^{14} - 10^{16} \text{ kg m}^{-3}$, y una cola aún bastante masiva: $0.43M_{\odot}$ (incluye la cola ligada y la no ligada, Fig. 5.8a). Comparando con el caso de $\eta = 1$, puesto que la colisión es menos fuerte, las masas cuando los núcleos se desbaratan y la masa total que todavía no es absorbida por el agujero negro es más grande, Figs 5.14, 5.15.

En el caso del potencial NW una pequeña y poco densa estructura de disco se comienza a formar al final de la simulación. La cola se extiende hasta 1500 km y es más densa que el disco. La masa total al final de la simulación es de $0.1M_{\odot}$ lo cual nos hace pensar que si dejamos que el sistema evolucione otra decena de milisegundos tal vez el resto de la cola termine de caer al disco y

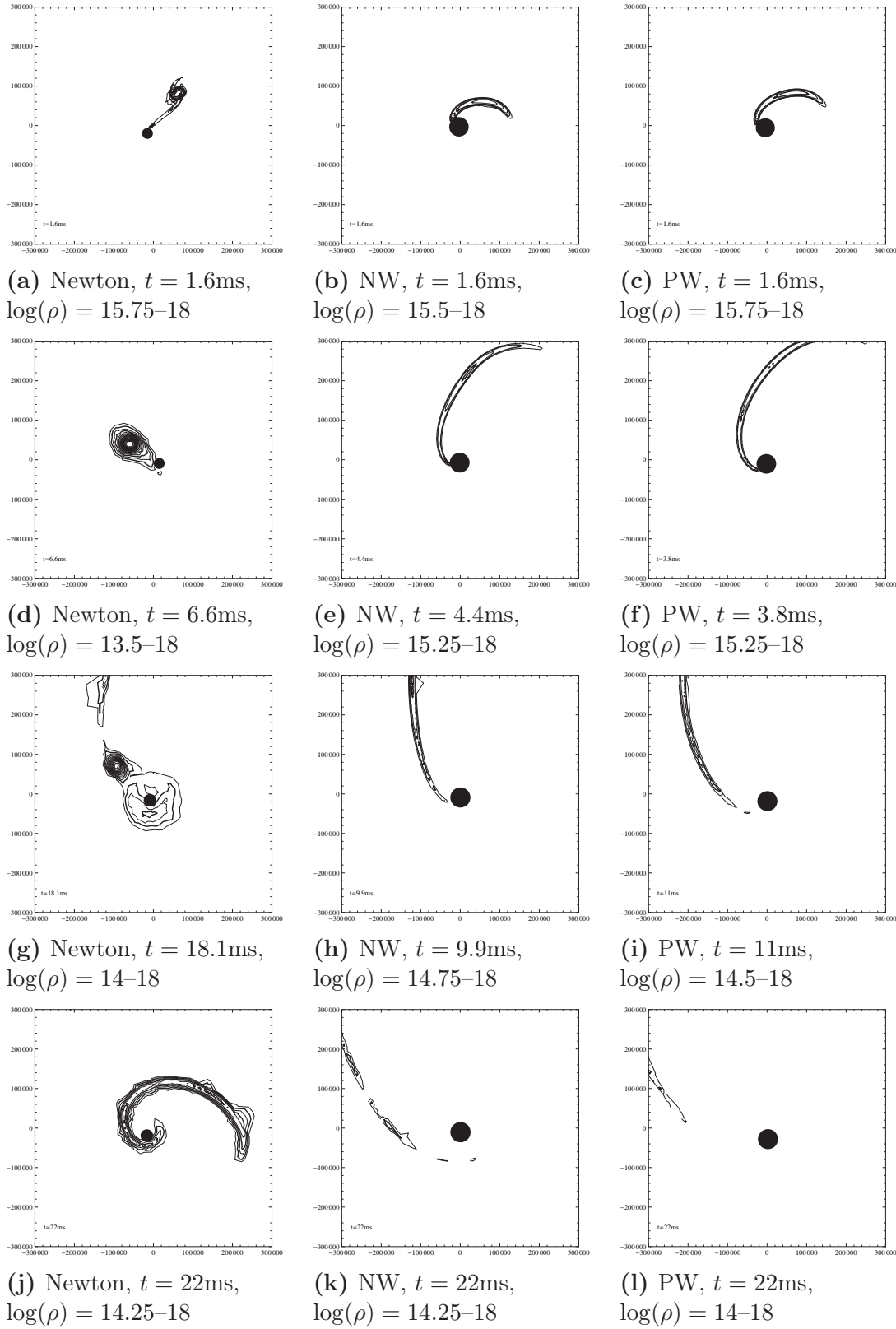
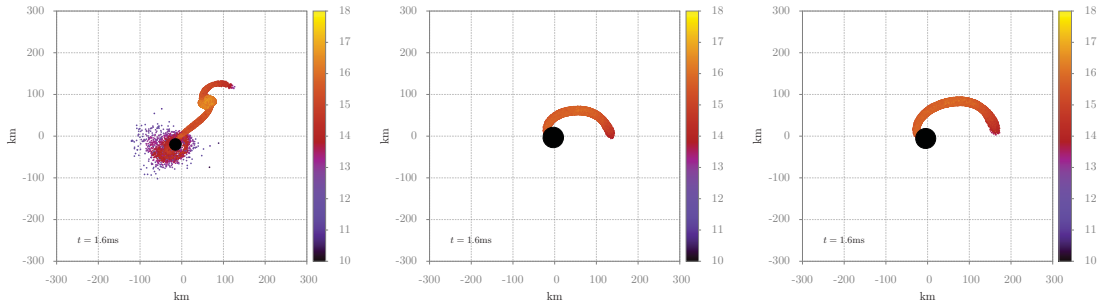


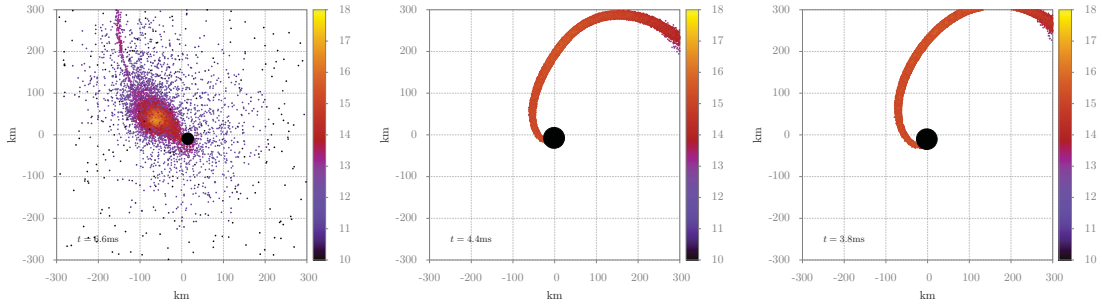
Figura 5.12: Curvas de nivel del plano orbital durante la simulación de la colisión entre la estrella de neutrones y el agujero negro, con $\eta = 2$. En cada columna tenemos un potencial diferente: la primera columna es con el potencial Newtoniano, la segunda con NW y la tercera con PW. La escala en los ejes x y y están en metros y es la misma en todos los casos.



(a) Newton, $t = 1.6\text{ms}$

(b) NW, $t = 1.6\text{ms}$

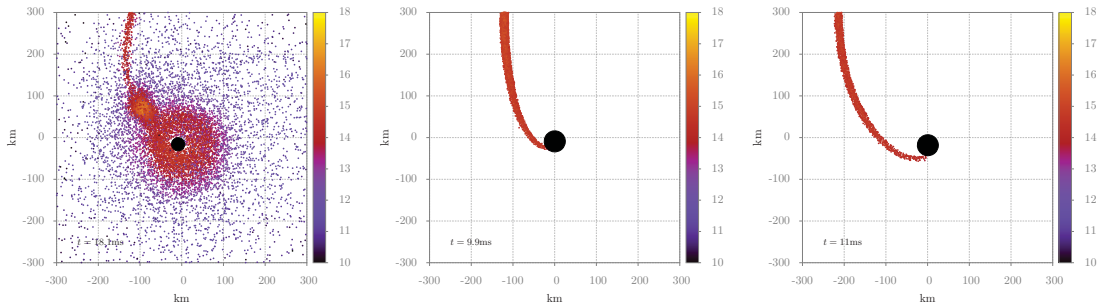
(c) PW, $t = 1.6\text{ms}$



(d) Newton, $t = 6.6\text{ms}$

(e) NW, $t = 4.4\text{ms}$

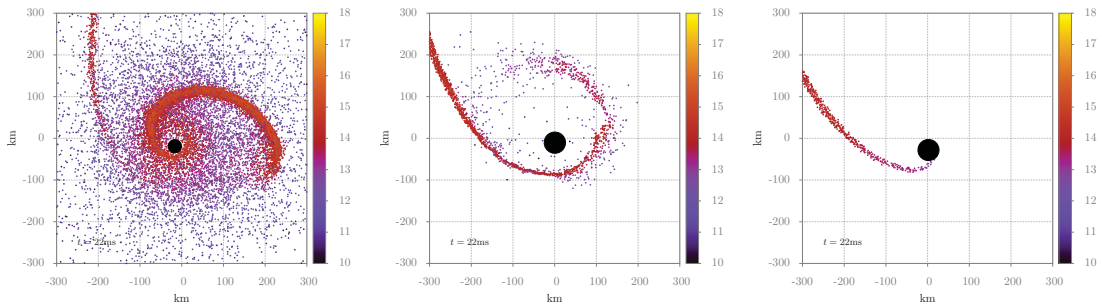
(f) PW, $t = 3.8\text{ms}$



(g) Newton, $t = 18.1\text{ms}$

(h) NW, $t = 9.9\text{ms}$

(i) PW, $t = 11\text{ms}$



(j) Newton, $t = 22\text{ms}$

(k) NW, $t = 22\text{ms}$

(l) PW, $t = 22\text{ms}$

Figura 5.13: Densidad respecto a cada partícula SPH en el plano orbital durante la simulación entre la estrella de neutrones y el agujero negro, con $\eta = 2$. En cada columna tenemos un potencial diferente: la primera columna es con el potencial Newtoniano, la segunda con NW y la tercera con PW. La escala de colores corresponde a $\log(\rho)$.

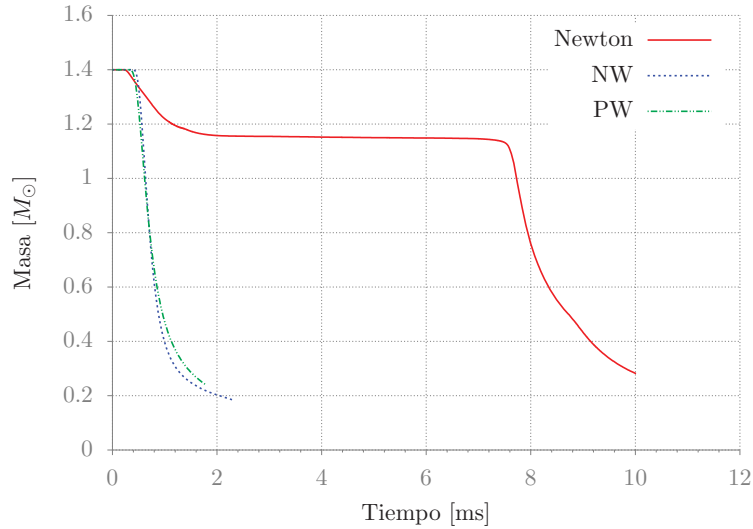


Figura 5.14: Masa del núcleo de la estrella de neutrones en unidades de masas solares en función del tiempo, con $\eta = 2$. Para el caso Newtoniano es claro en donde son los pasajes por periastro; para los otros dos potenciales sólo hay un pasaje por periastro.

se forma un proto disco de acreción mucho más masivo y denso. Podemos ver en la figura 5.13 que a medida que pasa el tiempo el de radio de inyección de la cola crece más rápido que el horizonte de eventos del agujero negro, y entonces podemos iniciar de que se formará un disco de acreción. Si el disco tuviese el 10% de la masa de la cola ligada, $6.5 \times 10^{-2} M_{\odot}$, entonces sería viable pensar en sGRB.

Para el potencial PW la masa total al final de la simulación es $\sim 0.1 M_{\odot}$. En este caso todavía no hay indicios de formación de una estructura de disco; vemos que hasta el último momento de la simulación tenemos una cola que se extiende un poco más de 1500 km y tiene una densidad de $\rho \simeq 10^{14} - 10^{15} \text{ kg m}^{-3}$ y masa $0.14 M_{\odot}$. Podríamos hacer las mismas suposiciones que para el caso NW y pensar que en efecto se podría formar un disco. Sin embargo, no es claro que el radio de inyección, hasta el punto en el que la simulación termina, esté creciendo más rápido que el horizonte de eventos. Sería necesario dejar que la simulación siguiera otra decena de milisegundos para poder determinarlo.



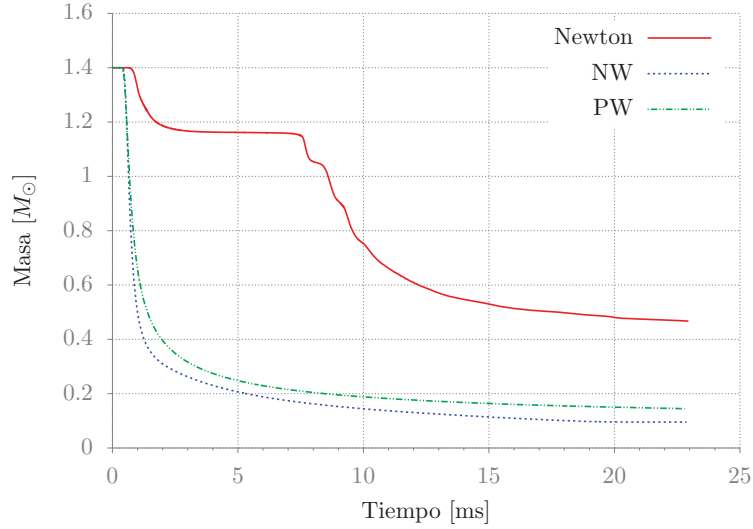


Figura 5.15: Masa total de la estrella, que no ha sido absorbida por el agujero negro, es decir, esto incluye la masa expulsada, la masa del disco y la masa de la cola, con $\eta = 2$.

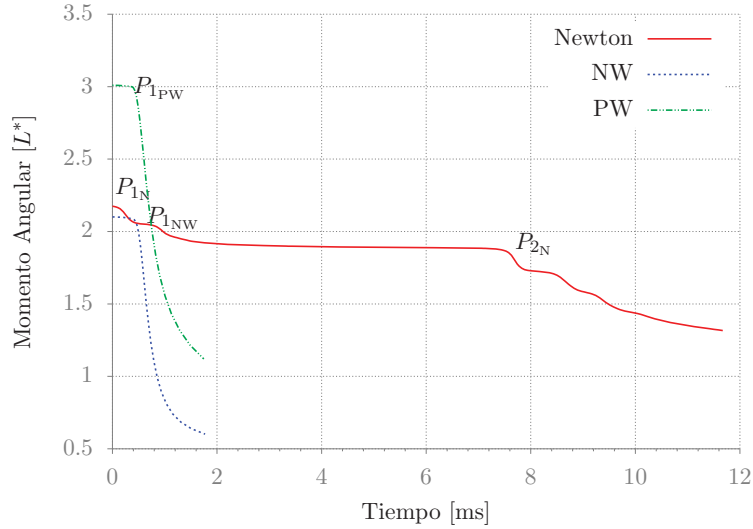
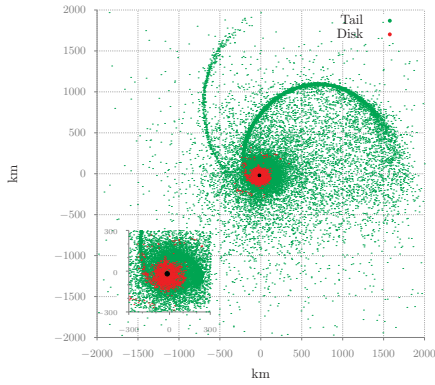
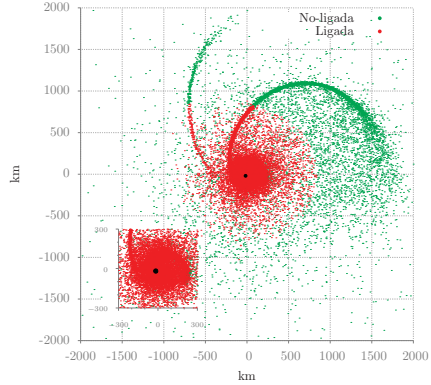


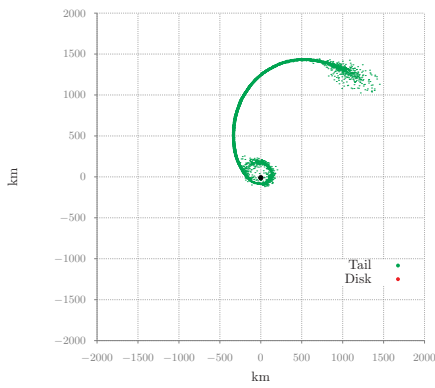
Figura 5.16: Momento angular total en función del tiempo, con $\eta = 2$. Las unidades del momento angular están en $L^* = \mu (G M_{\text{tot}} R_{\text{NS}})^{1/2}$, donde M_{tot} es la masa total y μ es la masa reducida. Los periastrós están marcados como $P_{1\text{Pot}}$, $P_{2\text{Pot}}$, etc. Vemos que para el caso Newtoniano tenemos dos pasajes por periastró.



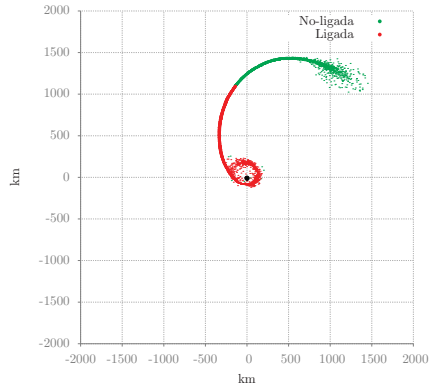
(a) Newton



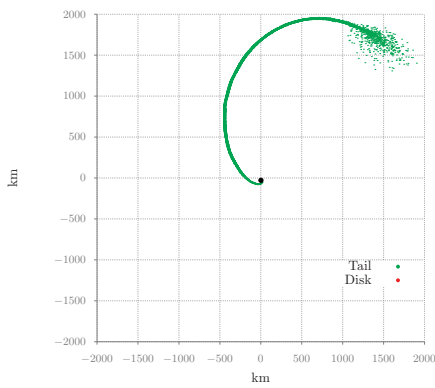
(b) Newton



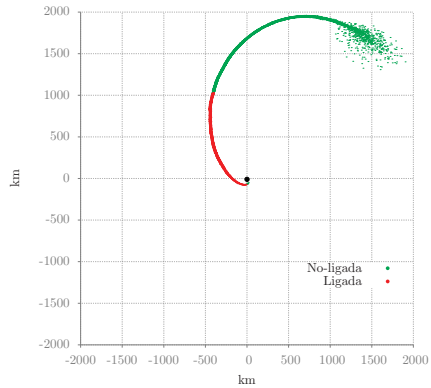
(c) NW



(d) NW



(e) PW



(f) PW

Figura 5.17: En las figuras de la columna izquierda podemos ver qué partículas son pertenecientes al disco y cuales a la cola. En las figuras de la columna derecha podemos ver qué partículas están ligadas al agujero negro. En la simulación con el potencial PW la estrella de neutrones es completamente absorbida por el agujero negro y no termina con una configuración similar a las otras dos, por esta razón no se incluyó en las gráficas.

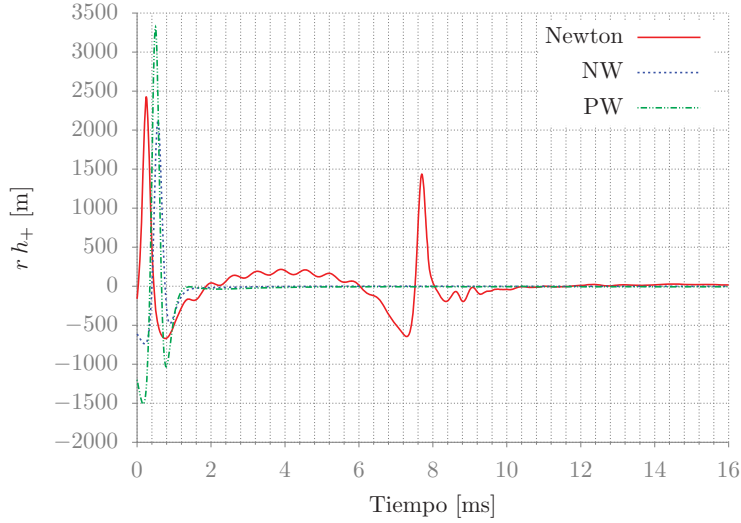


Figura 5.18: Ondas gravitacionales emitidas como función del tiempo, con $\eta = 2$. En esta gráfica sólo se muestra la polarización h_+ . Es claro el primer pasaje por periastro porque es el máximo en la amplitud. Entre el primer pasaje por periastro y el segundo, en el caso Newtoniano, vemos unas pequeñas oscilaciones. Éstas son por la excitación de los modos de oscilación radiales.

Nuevamente vemos cómo la pérdida de mass se traduce en pérdida momento angular, durante los pasajes por el periastro, y viene acompañada de emisión de ondas gravitacionales, Figs. 5.16 y 5.18. Para el caso de los potenciales pseudo-Newtonianos nuevamente encontramos un comportamiento de ráfaga. Sin embargo, para el caso Newtoniano, debido a los dos pasajes por periastro, vemos que tenemos dos picos en la emisión de ondas gravitacionales. Entre estos dos pasajes por periastro, es decir, entre 1 ms y 6 ms, vemos unas pequeñas oscilaciones cuya frecuencia es de ~ 1500 Hz. Éstas no son resultado de la rotación de la estrella de neutrones sino de la excitación de sus modos radiales de vibración por el primer pasaje por el periastro. La frecuencia de estas oscilaciones es cercana a la dada por el equilibrio hidrostático, es decir por el tiempo de caída libre, y es $\nu_{\text{osc}} = (GM/R^3)^{1/2}/2\pi \simeq 1400$ Hz. Después del segundo pasaje por el periastro vemos este comportamiento de nueva cuenta pero se detiene ya que la estrella se desbarata completamente unos milisegundos después.

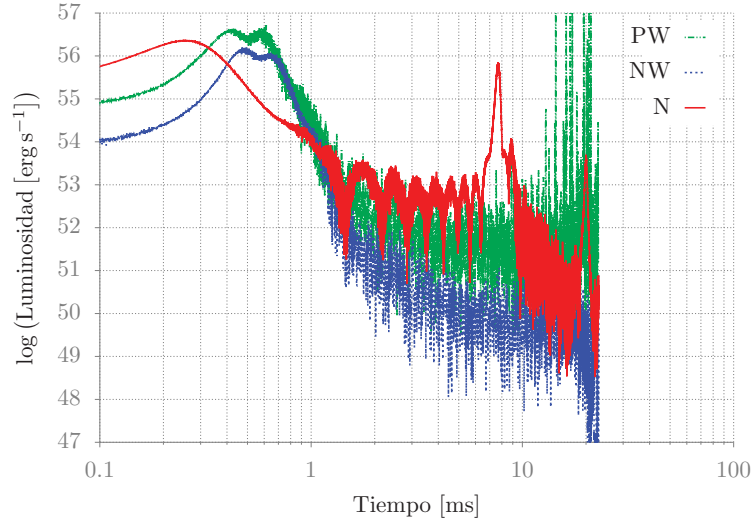


Figura 5.19: Luminosidad de las ondas gravitacionales emitidas como función del tiempo, con $\eta = 2$.

5.2.3. Parámetro de impacto $\eta = 3$

En los dos casos anteriores es notoria la diferencia entre los potenciales pseudo-Newtonianos y el Newtoniano en prácticamente todos los sentidos. Sin embargo, entre más grande sea el parámetro de impacto más chica será esta diferencia. En este caso utilizaremos un valor de $\eta = 3$ lo cual se puede considerar como una colisión de baja intensidad. Las tres simulaciones dinámicas tienen comportamientos bastante similares pese a que los potenciales utilizados para cada una son diferentes. Un aspecto que es claro, debido a que el núcleo de la estrella sobrevive al primer pasaje por periastro en todos los casos, es que para los potenciales pseudo-Newtonianos las órbitas precesan. En cambio para el potencial Newtoniano el periastro y el apoastro se encuentra sobre el eje y . En las figuras 5.21g, 5.21h y 5.21i podemos ver cómo el apoastro, en el caso Newtoniano, en efecto está sobre el eje y , y para los otros dos potenciales éste se desplazó en el sentido de la rotación. En este aspecto, los potenciales pseudo-Newtonianos introducen la precesión de las órbitas: una de las características de relatividad general. En los dos casos anteriores no era evidente que esto sucediera ya que el núcleo no sobrevivía más de un pasaje por periastro y no estamos siguiendo órbitas independientes dentro

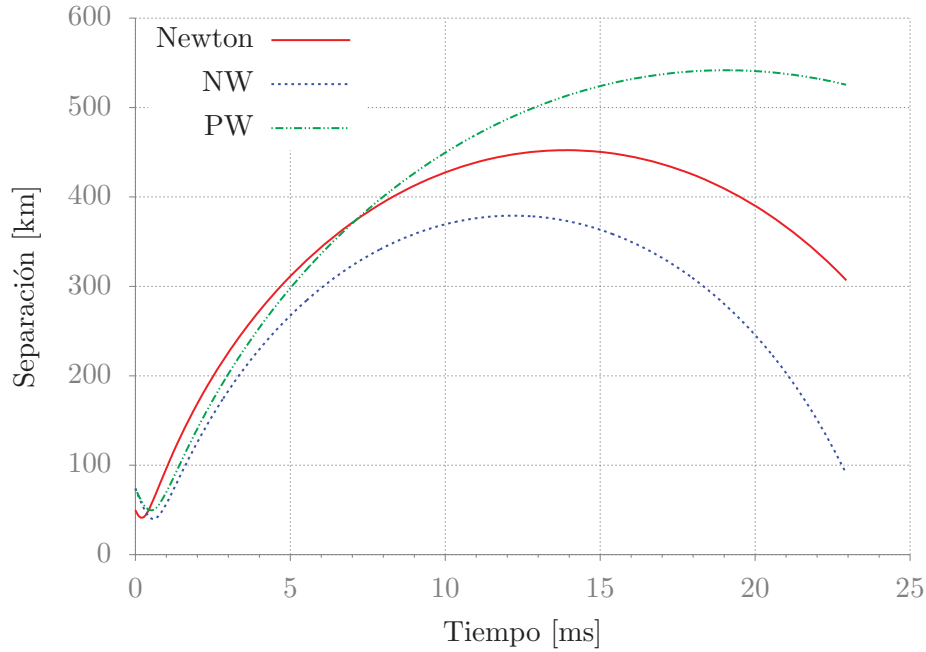


Figura 5.20: Separación entre el núcleo de la estrella de neutrones y el agujero negro de masa estelar en función del tiempo, con $\eta = 3$. Las líneas se detienen cuando ya no hay un núcleo presente en la estrella.

de la simulación.

Las simulación en los tres casos son similares; sin embargo, para el potencial PW hay una notoria diferencia. Al igual que en el caso Newtoniano con $\eta = 2$, hay materia expulsada por fuerzas de marea por los puntos interiores y exteriores de Lagrange de la estrella. No obstante la cola trasera desaparece poco después ya que las fuerzas de marea no son tan intensas como en los casos anteriores. Esto lo podemos ver de manera explícita ya que, en las tres simulaciones, el núcleo de la estrella sobrevivió al primer pasaje por periastro y sigue siendo bastante masivo, Fig. 5.23. En el caso Newtoniano la masa permanece casi intacta, en el primer pasaje por periastro pierde unas centésimas de M_{\odot} ; para los casos con los potenciales pseudo-Newtonianos la masa del núcleo es de $\sim 0.9M_{\odot}$ y la masa total, es decir la que no ha sido absorbida por el agujero negro, es de $\sim 1.1M_{\odot}$. El núcleo de la estrella sigue siendo suficientemente masivo y podría probablemente sobrevivir otro pasaje por periastro. En el caso de NW casi se da otro pasaje por periastro

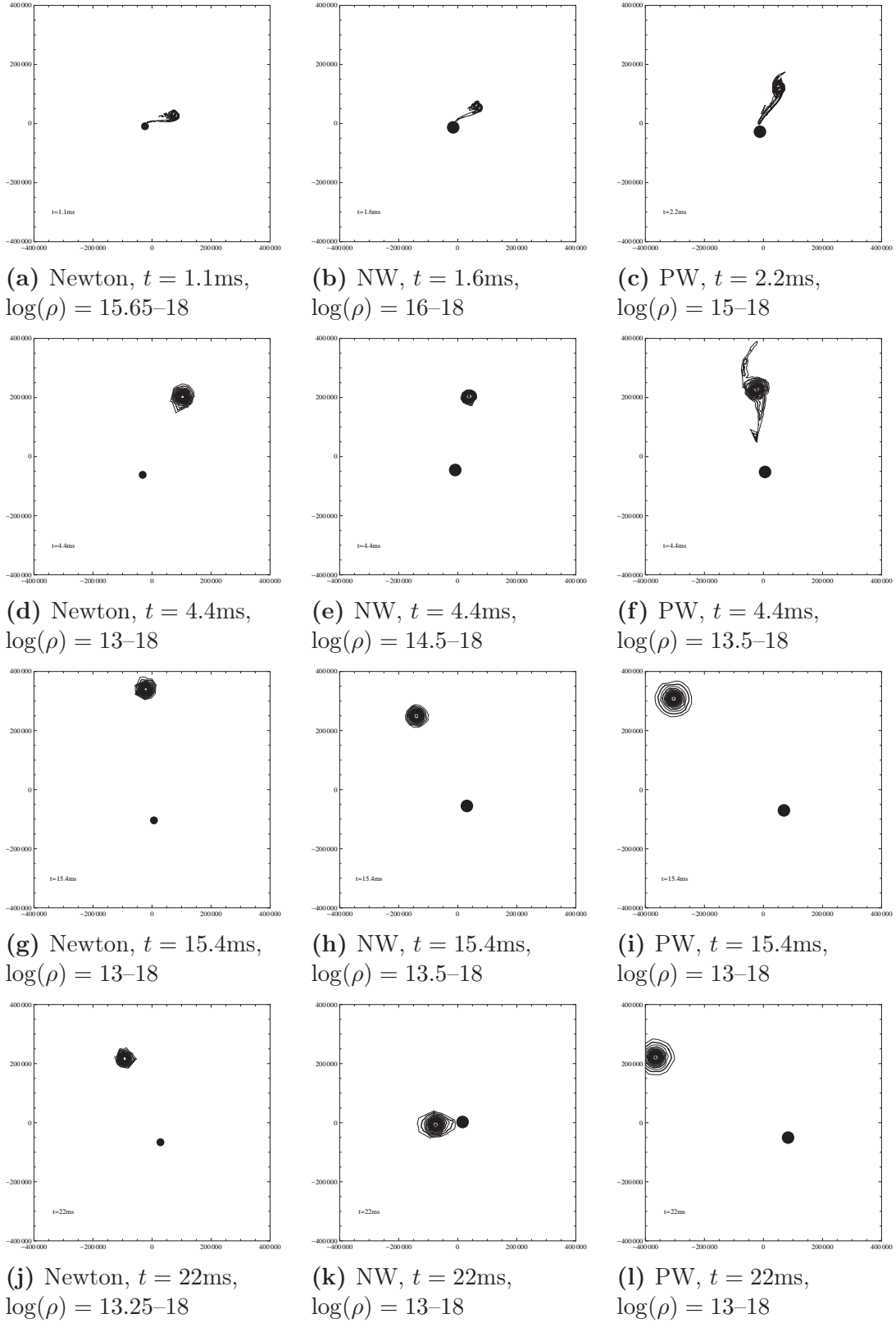
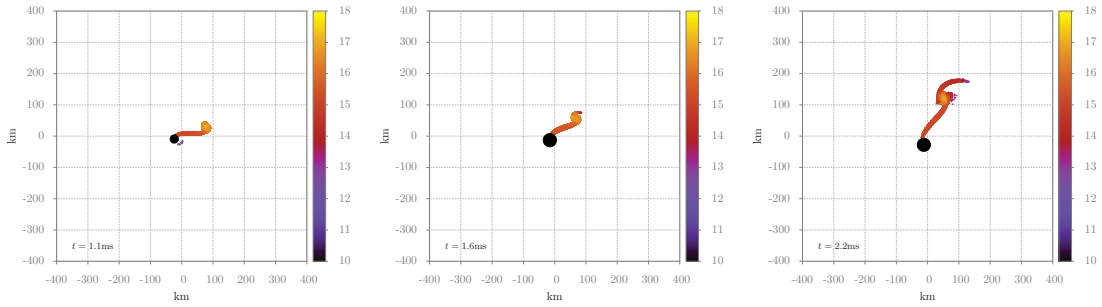


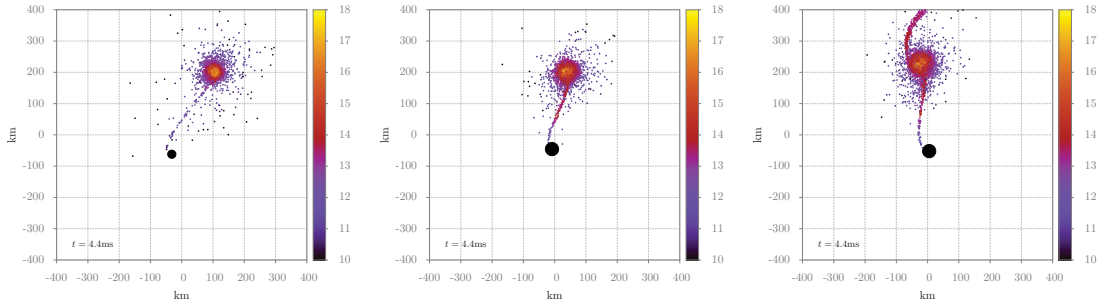
Figura 5.21: Curvas de nivel del plano orbital durante la simulación entre la estrella de neutrones y el agujero negro, con $\eta = 3$. En cada columna tenemos un potencial diferente: la primera columna es con el potencial Newtoniano, la segunda con NW y la tercera con PW. La escala en los ejes x y y están en metros y es la misma en todos los casos.



(a) Newton, $t = 1.1\text{ms}$

(b) NW, $t = 1.6\text{ms}$

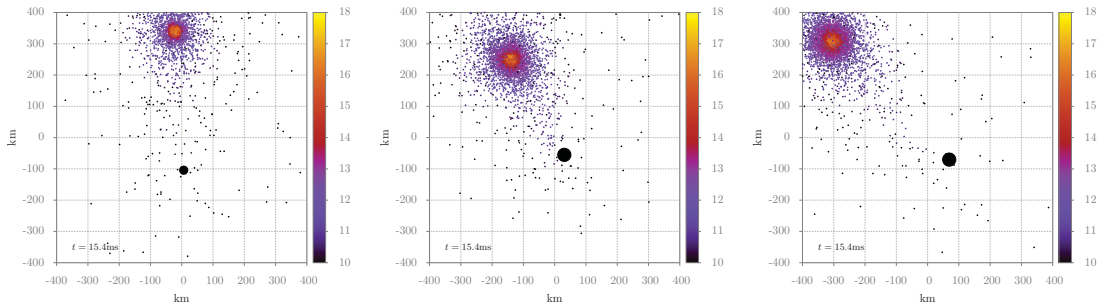
(c) PW, $t = 2.2\text{ms}$



(d) Newton, $t = 4.4\text{ms}$

(e) NW, $t = 4.4\text{ms}$

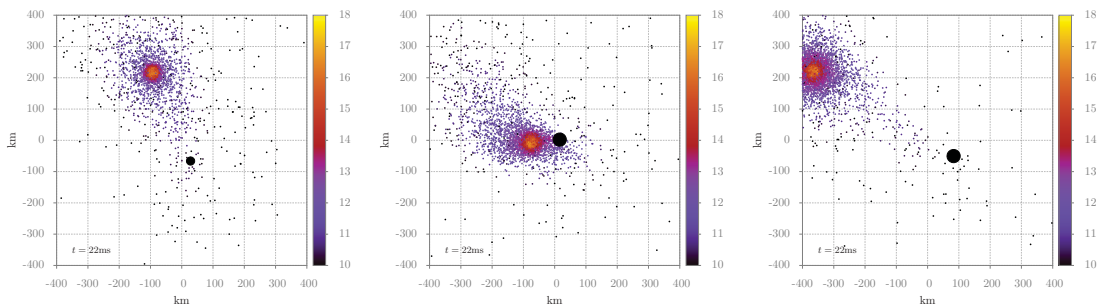
(f) PW, $t = 4.4\text{ms}$



(g) Newton, $t = 15.4\text{ms}$

(h) NW, $t = 15.4\text{ms}$

(i) PW, $t = 15.4\text{ms}$



(j) Newton, $t = 22\text{ms}$

(k) NW, $t = 22\text{ms}$

(l) PW, $t = 22\text{ms}$

Figura 5.22: Densidad respecto a cada partícula SPH en el plano orbital durante la simulación entre la estrella de neutrones y el agujero negro, con $\eta = 3$. En cada columna tenemos un potencial diferente: la primera columna es con el potencial Newtoniano, la segunda con NW y la tercera con PW. La escala de colores corresponde a $\log(\rho)$.

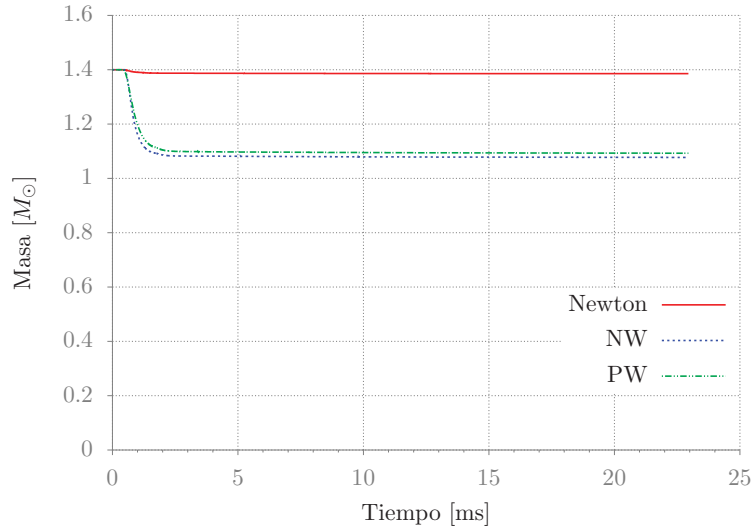


Figura 5.23: Masa del núcleo de la estrella de neutrones en unidades de masas solares en función del tiempo, con $\eta = 3$. La pérdida de masa del núcleo como consecuencia del pasaje por el periastro, en este caso, es mínima ya que la colisión no es tan intensa como en los casos anteriores.

durante el tiempo de la simulación, para los otros dos potenciales todavía faltaría seguir evolucionando el sistema por unas decenas de milisegundos más, Fig. 5.20. Es importante notar que la escala de la separación para las figuras 5.2, 5.11 y 5.20 es diferente por un orden de magnitud cada vez y es consecuencia de los diferentes parámetros de impacto que se han utilizado.

Para los tres potenciales, los núcleos siguen siendo bastante masivos y todavía no hay formación de una estructura de disco, ni de cola, entonces no es necesario hacer las gráficas similares a las figuras 5.8 y 5.17.

En la figura 5.21 podemos ver como al final de la simulación no se ha formado aún ninguna estructura de disco alrededor del agujero negro sino que el núcleo de la estrella sigue vivo y aún bastante masivo. Podemos observar que al final de la simulación el radio de la estrella es ~ 25 km lo cual nos hace pensar que después del segundo pasaje por periastro materia del borde de la estrella será arrancada por las fuerzas de marea y podría formar una estructura de disco e incluso el núcleo podría sobrevivir otro pasaje por periastro.

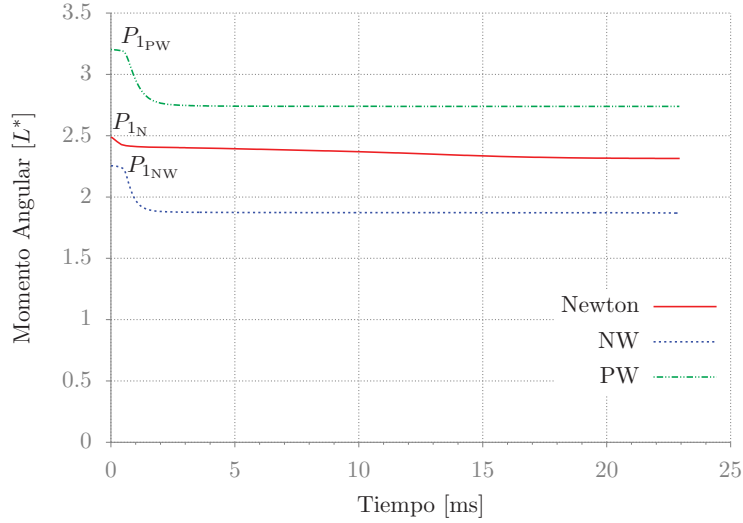


Figura 5.24: Momento angular total en función del tiempo, con $\eta = 3$. Las unidades del momento angular están en $L^* = \mu (G M_{\text{tot}} R_{\text{NS}})^{1/2}$, donde M_{tot} es la masa total y μ es la masa reducida. Los periastrós están marcados como $P_{1\text{Pot}}$, $P_{2\text{Pot}}$, etc.

La caída del momento angular ya no es tan abrupta como en los casos anteriores. Esto se debe a que el impacto es menos intenso y la pérdida de masa es mucho menor que para los otros valores de η . No obstante, la emisión de ondas gravitacionales sigue presente, Figs. 5.26 y 5.25. En la figura 5.24 están marcados los pasajes por periastró de cada potencial respectivamente y observamos que éstos corresponden a los picos en la emisión de las ondas gravitacionales, Fig. 5.25. De nueva cuenta vemos el comportamiento del núcleo debido a la excitación de sus modos de vibración radiales como consecuencia del primer pasaje por periastró. Como ya lo habíamos mencionado, con un parámetro de impacto grande, $\eta = 3$, los potenciales tienen comportamientos similares: vemos pequeñas oscilaciones en la amplitud de las ondas gravitacionales para los potenciales pseudo-Newtonianos también. En el caso Newtoniano la oscilación interna de la estrella tiene una frecuencia de ~ 1750 Hz y para los potenciales pseudo-Newtonianos la frecuencia es de ~ 1500 Hz; lo cual concuerda con el valor de $\nu_{\text{osc}} \simeq 1400$ Hz que obtuvimos anteriormente de manera teórica.

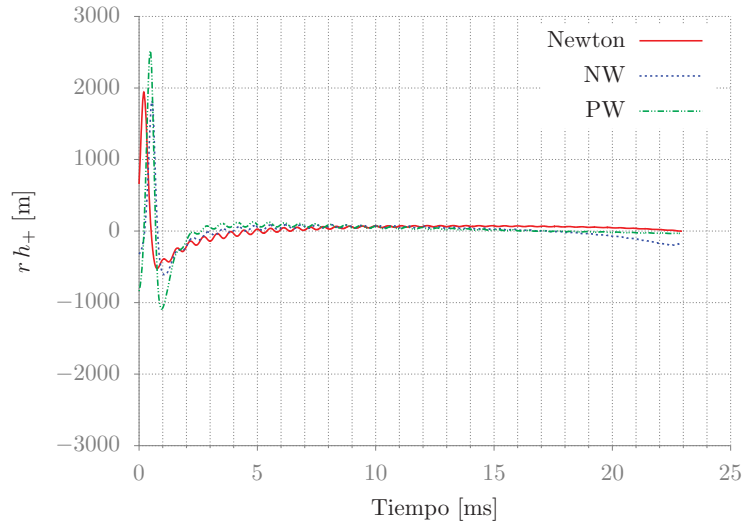


Figura 5.25: Ondas gravitacionales emitidas como función del tiempo, con $\eta = 3$. En esta gráfica sólo se muestra la polarización h_+ . Es claro el primer pasaje por el periastro porque es el máximo en la amplitud. Ahora podemos ver las pequeñas oscilaciones como en el caso anterior.

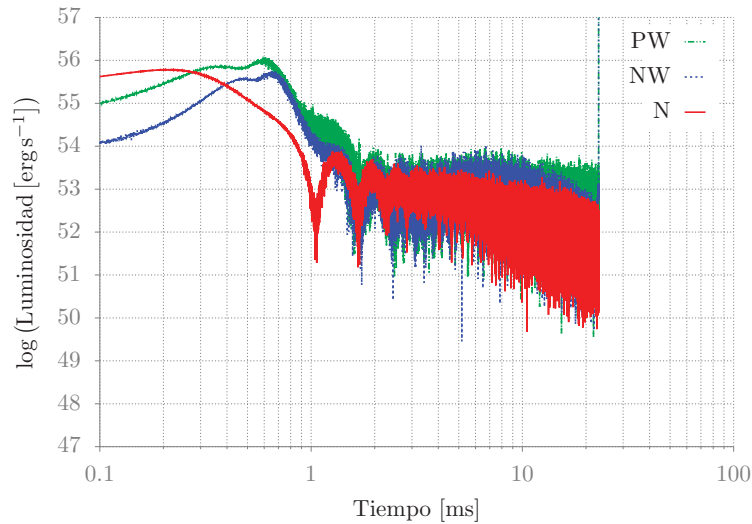


Figura 5.26: Luminosidad de las ondas gravitacionales emitidas como función del tiempo, con $\eta = 2$.

Los potenciales pseudo-Newtonianos siguen siendo más intensos; sin embargo, las tres simulaciones tienen varias similitudes como consecuencia de un parámetro de impacto grande: $\eta = 3$. Vemos cómo el núcleo en los tres casos sobrevive al primer pasaje por el periastro y la curva característica de la amplitud de las ondas gravitacionales tienen un comportamiento muy parecido.

5.2.4. Resumen de los resultados

Para los tres diferentes potenciales, en las simulaciones con $\eta = 1$, tenemos configuraciones finales bastante distintas, Figs. 5.3, 5.4 y 5.8. No obstante, en los tres casos vimos que hay emisión de ondas gravitacionales, Figs. 5.9 y 5.10, y para el caso Newtoniano y NW podría haber sGRB. Las cantidades de masa restante, al final de la simulación, son diferentes en los tres casos.

Con un parámetro de impacto, $\eta = 2$, las simulaciones utilizando los potenciales pseudo-Newtonianos tienen configuraciones finales similares, pero diferentes a la del Newtoniano. En los tres casos vemos emisión de ondas gravitacionales; de nueva cuenta, para los potenciales pseudo-Newtonianos las curvas características de la emisión tienen un comportamiento similar, Figs. 5.18 y 5.19. Finalmente, los tres casos son candidatos a que un evento de sGRB tenga lugar. Sin embargo, el caso más claro es el Newtoniano debido a la formación de una estructura de disco de $\sim 10^{-2}M_{\odot}$ alrededor del agujero negro, Figs. 5.12, 5.13 y 5.17.

Finalmente, en el caso de un parámetro de impacto grande, $\eta = 3$, las configuraciones finales son muy similares: el núcleo de la estrella de neutrones no ha sido desbaratado aún, y su masa es $\sim 0.9M_{\odot}-1.1M_{\odot}$, Figs. 5.21, 5.22. Las curvas de emisión de ondas gravitacionales y la luminosidad muestran, en los tres casos, el pasaje por el periastro y las pequeñas oscilaciones internas de la estrella, Figs. 5.25 y 5.26. Los tres potenciales comienzan a tener efectos ser similares.

En la tabla 5.2 podemos encontrar todos los valores que se obtuvieron mediante las simulaciones numéricas utilizando diferentes potenciales y diferentes parámetros de impacto. Recordemos que todas las simulaciones iniciaron con los parámetros de la tabla 5.1.

η	Potencial	$\frac{R_P}{R_{NS}}$	$\frac{M_{\text{disco}}}{M_\odot}$	$\frac{M_{\text{cola}}}{M_\odot}$	$\frac{M_{\text{eyect.}}}{M_\odot}$	$L_{\text{máx, GW}}$ [erg s ⁻¹]	Núcleo desbaratado
1	N	1.5	0.12	7.7×10^{-2}	6.2×10^{-4}	$\sim 10^{56}$	Sí
1	NW	1.85	0	1.2×10^{-2}	3.9×10^{-4}	$\sim 10^{56}$	Sí
1	PW	2.20	–	–	–	$\sim 10^{57}$	Sí
2	N	2.35	2.86×10^{-2}	0.31	0.13	$\sim 10^{56}$	Sí
2	NW	2.5	0	6.5×10^{-2}	3×10^{-2}	$\sim 10^{56}$	Sí
2	PW	3.05	0	6×10^{-2}	8.5×10^{-2}	$\sim 10^{56}$	Sí
3	N	3.07	–	–	–	$\sim 10^{55}$	No
3	NW	3.04	–	–	–	$\sim 10^{55}$	No
3	PW	3.76	–	–	–	$\sim 10^{56}$	No

Tabla 5.2: Resultados finales que se obtienen por medio de las simulaciones numéricas, utilizando potenciales iniciales y parámetros de impacto diferentes, de una colisión entre una estrella de neutrones y un agujero negro

Capítulo 6

Conclusiones

Mediante el uso de simulaciones hidrodinámicas detalladas hemos explorado la colisión de un agujero negro de masa estelar con una estrella de neutrones utilizando tres parámetros de impacto y tres potenciales gravitacionales diferentes. Mostramos que en las nueve simulaciones realizadas los encuentros cercanos entre la estrella de neutrones y el agujero negro de masa estelar eran responsables de la emisión de ondas gravitacionales, con una curva característica de tipo ráfaga, y de la formación de un disco de acreción alrededor del agujero negro en ciertas ocasiones. En algunos casos la cola expulsada por las fuerzas de marea sobre la estrella de neutrones seguía interactuando, varios tiempos dinámicos después de la disrupción total de la estrella, con el disco de acreción formado.

Pudimos apreciar que los cambios en el potencial gravitacional eran más notorios cuando se utilizaba un parámetro de impacto cercano a $\eta \simeq 1$. Por lo contrario, con $\eta = 3$ los potenciales gravitacionales tienen efectos similares en la colisión de los dos objetos compactos, por ejemplo, el núcleo no es desbaratado al primer pasaje por el periastro.

Puesto que utilizamos tres parámetros de impacto y tres potenciales gravitacionales obtuvimos una variedad de configuraciones al final de las simulaciones, recordando que la ecuación de estado de la estrella de neutrones fue la misma en todos los casos. La formación de discos de acreción sólo se dió utilizando el potencial Newtoniano y con $\eta = 1, 2$. Exceptuando la simulación dinámico con el potencial PW y $\eta = 1$, donde el agujero negro absorbió a

toda la estrella de neutrones, todas tienen alguna estructura final: núcleo no ha sido desbaratado, configuración de disco con cola o únicamente una cola. Entre más grande es el parámetro de impacto las curvas características, de la amplitud y la luminosidad, de la emisión de las ondas gravitacionales eran más parecidas.

El trabajo no termina aquí, todavía hay muchas configuraciones adicionales que se pueden explorar. Puesto que un sistema NS-BH¹ no se ha encontrado de manera observacional es de suma importancia hacer un barrido exhaustivo por las configuraciones posibles para que, cuando los interferómetros de ondas gravitacionales estén en funcionamiento, los podamos identificar de manera más sencilla. Podríamos comenzar por cambiar el índice adiabático de la ecuación de estado politrópica, $\gamma = 2$, por $\gamma = 5/3$. De esta manera el núcleo de la estrella sería más compresible y resistiría más pasajes por periastro [10, 8, 19]. Más aún, Tejeda y Rosswog propusieron un nuevo potencial pseudo-Newtoniano el cual reproduce muchas de las propiedades dinámicas del espacio-tiempo de Schwarzschild de manera exacta [19]; éste se puede implementar en el código SPH actual sin tener que hacer grandes modificaciones.

¹Sistema estrella de neutrones-agujero negro

Bibliografía

- [1] J. Binney and S. Tremaine. *Galactic Dynamics: (Second Edition)*. Princeton Series in Astrophysics. Princeton University Press, 2011.
- [2] R. A. Gingold and J. J. Monaghan. Smoothed particle hydrodynamics - Theory and application to non-spherical stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 181:375–389, November 1977.
- [3] Hannu Karttunen, Pekka Kröger, Heikki Oja, Markku Poutanen, and Karl Johan Donner. *Fundamental Astronomy*. Springer, 2007.
- [4] R. Kippenhahn, A. Weigert, and A. Weiss. *Stellar Structure and Evolution*. Astronomy and Astrophysics Library. Springer, 2012.
- [5] L.D. Landau and E.M. Lifshitz. *Fluid Dynamics*. Course of Theoretical Physics. Butterworth-Heinemann, 1995.
- [6] William H. Lee. Newtonian hydrodynamics of the coalescence of black holes with neutron stars- iii. irrotational binaries with a stiff equation of state. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 318:606–624, June 2000.
- [7] William H. Lee and Włodzimierz Kluźniak. Newtonian hydrodynamics of the coalescence of black holes with neutron stars. i. tidally locked binaries with a stiff equation of state. *The Astrophysical Journal*, 526:178–199, November 1999.
- [8] William H. Lee and Włodzimierz Kluźniak. Newtonian hydrodynamics of the coalescence of black holes with neutron stars – ii. tidally locked binaries with a soft equation of state. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 308(3):780–794, 1999.

BIBLIOGRAFÍA

- [9] William H. Lee and Enrico Ramirez-Ruiz. The progenitors of short gamma-ray bursts. *New Journal of Physics*, 9, January 2007.
- [10] William H. Lee, Enrico Ramirez-Ruiz, and Glenn Van De Ven. Short gamma-ray bursts from dynamically assembled compact binaries in globular clusters: Pathways, rates, hydrodynamics, and cosmological setting. *The Astrophysical Journal*, 720:953–975, September 2010.
- [11] Cole Miller. Detection of gravitational radiation. In *International Astrophysics School: Look & Listen*, Playa del Carmen, January 2014. Instituto de Astronomía, UNAM.
- [12] Cole Miller. Overview of gravitational radiation. In *International Astrophysics School: Look & Listen*, Playa del Carmen, January 2014. Instituto de Astronomía, UNAM.
- [13] Cole Miller. Sources of gravitational radiation. In *International Astrophysics School: Look & Listen*, Playa del Carmen, January 2014. Instituto de Astronomía, UNAM.
- [14] D.J. Raine and E.E.G. Thomas. *Black Holes: An Introduction*. Black Holes: An Introduction. Imperial College Press, 2010.
- [15] F. A. Rasio and S. L. Shapiro. Hydrodynamical evolution of coalescing binary neutron stars. *Astrophysical Journal*, 401(1):226–245, December 1992.
- [16] Stephan Rosswog. *Astrophysical smooth particle hydrodynamics*. 2009.
- [17] Stuart L. Shapiro and Saul A. Teukolsky. *Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects*. Wiley, 2008.
- [18] L.S. Sparke and J.S. Gallagher. *Galaxies in the Universe: An Introduction*. Cambridge University Press, 2007.
- [19] Emilio Tejeda and Stephan Rosswog. An accurate newtonian description of particle motion around a schwarzschild black hole. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 433(3):1930–1940, 2013.