UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EXISTENCIA DE SOLUCIONES DÉBILES DE UN PROBLEMA ELÍPTICO NOLINEAL

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A:

CARLOS EDUARDO RUBIO BECERRA

DIRECTOR DE TESIS:
DRA. MÓNICA ALICIA CLAPP JIMÉNEZ LABORA

2014

Existencia de soluciones débiles de un problema elíptico nolineal

Carlos Eduardo Rubio Becerra

2014

Índice general

Capítulo 1

Introducción

1.1. El amanecer de las ecuaciones diferenciales

Para muchos de los matemáticos del mundo (en particular para quien escribe estas líneas), la historia de las matemáticas podría dividirse en dos grandes capítulos, donde Sir Isaac Newton (1643-1727) es quien marca el final del primero y el principio del segundo. Comparte el crédito con Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) de haber creado el cálculo infinitesimal. Sin embargo, la obra cumbre de Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, donde describió la ley de gravitación universal y estableció las bases de la mecánica clásica mediante las leyes que llevan su nombre. Ha sido lo que lo ha llevado a trascender más allá del tiempo, pues incluso el matemático Joseph Louis Lagrange (1736–1813), dijo que "Newton fue el más grande genio que ha existido y también el más afortunado dado que sólo se puede encontrar una vez un sistema que rija al mundo".

Como dijimos, el cálculo infinitesimal es el punto en la línea del tiempo que muchos consideran un parteaguas en la historia de las matemáticas. Revolucionó completamente el universo matemático a tal grado que incluso llevó a una crisis de fundamentos que comenzó a ser resuelta hasta mediados del siglo XIX, gracias al trabajo de célebres matemáticos como Augustin Louis Cauchy (1789-1857), Bernard Bolzano (1781-1848), y Karl Weierstrass (1815-1897), quienes le dieron fundamentos sólidos al cálculo al precisar sus conceptos, en particular los de límite y continuidad, que a pesar de ser muy intuitivos, realmente es complicado definirlos. Simplemente a cada estudiante que se le presenta por primera vez la definición de límite, conocida como "definición ε-δ", le resulta un poco complicado ver que esta definición encierre la idea de cercanía. Y han sido este tipo de momentos de crisis los que han llevado a las matemáticas a alturas insospechadas, pues se crean teorías maravillosas para resolver problemas muy particulares, que tiempo después se aplican en otro tipo de situaciones que en apariencia no tienen relación alguna; así como sentar sobre bases sólidas, toda nuestra teoría. Y, en esta tesis, se expone un poco de lo primero.

Las ecuaciones diferenciales aparecen en el momento en el que nace el Cálculo, aunque lo correcto es decir que el Cálculo las trajo de la mano. Recordemos la segunda ley de Newton, $F = ma$, que aparece en *Principia.* "La fuerza es directamente proporcional a la aceleración". Escribiendo esta ecuación con la notación que hoy conocemos, obtenemos

$$F = m\frac{d^2s}{dt^2},$$

donde $s = s(t)$ es una función que a cada tiempo t le asigna una distancia s y m es una constante que representa la masa de un cuerpo. Este es uno de los primeros ejemplos de ecuaciones diferenciales que aparecieron en la historia y describe un fenómeno físico. Puede decirse que el estudio de las ecuaciones diferenciales es tan viejo como el cálculo mismo y a la vez, es uno de los campos más amplios que existen y que sigue aportando frutos a las matemáticas, ya que actualmente hay muchos matemáticos investigando y publicando interesantes trabajos acerca de las mismas desde diferentes enfoques y puntos de vista.

1.2. Las ecuaciones diferenciales como objeto de estudio

Mencionamos que una de las primeras apariciones históricas de las ecuaciones diferenciales fue describiendo un fenómeno físico. La mayoría de los ejemplos clásicos de éstas surgen de problemas relacionados con la física (potencial electrostático), química (concentraciones químicas), biología (dinámicas de población) e incluso de la economía (finanzas), modelando matemáticamente dichos fenómenos. Y un modelo matemático es una herramienta esencial para poder entenderlos, pues entendiendo el modelo matemático podremos comprender mejor el fenómeno. Debido a la extensa gama de campos donde aparecen las ecuaciones diferenciales, el interés por estudiarlas es enorme. Sin embargo, también han sido enormes los retos que han traído. Así como el Último Teorema de Fermat en la Teoría de Números llevó al Álgebra desarrollarse ampliamente intentando probarlo, las ecuaciones diferenciales han logrado desarrollar las matemáticas de una manera muy extensa, creando ramas tales como el Análisis Funcional, ampliando el Álgebra Lineal y los Métodos Numéricos. En esta tesis veremos un poco de eso, es decir, se resolverá una ecuación diferencial utilizando varias herramientas que nos brindan diferentes campos de las matemáticas, como el ya mencionado análisis funcional y algo que se denomina "métodos variacionales". El Cálculo de Variaciones es un campo de las matemáticas consistente en buscar máximos y mínimos de funcionales continuos definidos sobre algún espacio de funciones. Es una generalización del cálculo elemental de máximos y mínimos de funciones reales de una variable real. Utilizando estas ideas, probaremos que el problema planteado en esta tesis tiene solución.

1.3. El operador de Laplace

Una de las ecuaciones diferenciales parciales más importantes y conocidas es la *ecuación de Laplace*

$$-\Delta u = 0 \quad en\ \Omega\ .$$

Una solución de esta ecuación es una función $u : \Omega \to \mathbb{R}$ de clase C^2 que satisface esta ecuación, donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un conjunto abierto y

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

es el *operador de Laplace* en $\mathbb{R}^N$. Las soluciones de esta ecuación se llaman *funciones armónicas* y un ejemplo de ellas se encuentra en el análisis complejo, pues la parte real y la parte imaginaria de una función analítica son funciones armónicas. Esta ecuación es el ejemplo más sencillo de una ecuación elíptica. Para conocer cómo se clasifican las ecuaciones diferenciales parciales, véase [2]. Este operador y sus propiedades serán cruciales en el desarrollo de la tesis, pues serán el puente que nos lleven a la resolución de nuestro problema.

1.4. El problema

Consideremos el problema elíptico nolineal

$$(P)\left\{\begin{array}{ll} -\Delta u = |u|^{p-2}\, u & en\ \Omega \\ u = 0 & en\ \partial\Omega \end{array}\right.$$

con las siguientes hipótesis:

1. Ω es abierto y acotado en $\mathbb{R}^N$ y $\partial\Omega$ es de clase C^∞.
2. $N \geq 3$.
3. $2 < p < 2^*$ donde $2^* = \frac{2N}{N-2}$ es el exponente crítico de Sobolev.

La condición que se pide en la frontera, es conocida como *condición de Dirichlet.*

Lo que haremos en los subsecuentes capítulos es construir las herramientas necesarias para poder hallar soluciones de (P), aunque en realidad lo lograremos a través de lo que definiremos más adelante como "soluciones débiles". Como se ha mencionado a lo largo de este capítulo introductorio, muchas de estas herramientas en un principio no parecen tener relación alguna entre sí, algunas otras nos presentan las dificultades de generalizar los conceptos que se tienen para espacios de dimensión finita. Sin embargo, es realmente sorprendente que las ideas originales del cálculo infinitesimal y del álgebra lineal siguen allí. Por todas estas razones, es que el autor de esta tesis siente fascinación por el tema, pues emplea herramientas que provienen de muchas de las ramas matemáticas.

Capítulo 2

Espacios de Sobolev

En este capítulo, introducimos los espacios donde vamos a trabajar, los llamados espacios de Sobolev. En la primera sección definimos algunos conceptos que nos servirán para introducir estos espacios de funciones y en la segunda, demostramos algunos teoremas fundamentales que se cumplen en espacios de Sobolev.

2.1. Nociones básicas

Definición 2.1 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto y sea $k \geq 0$.*

1) El espacio de funciones de prueba está dado por

$$C_c^\infty(\Omega) := \{\varphi \in C^\infty(\Omega) : \operatorname{sop}(\varphi) \text{ es compacto}\},$$

donde $\operatorname{sop}(\varphi) := \overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}} \cap \Omega$.

2) El espacio de funciones localmente integrables en Ω está dado por

$$L^1_{loc}(\Omega) := \{u : \Omega \to \mathbb{R} : u \text{ es medible y } \int_\omega |u| \, dx < \infty \text{ para todo abierto acotado } \omega \text{ con } \overline{\omega} \subset \Omega\}.$$

3) Denotamos por $C^k(\overline{\Omega})$ al conjunto de funciones continuas $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ que son k veces continuamente diferenciables en Ω y cada una de sus derivadas parciales de orden $\leq k$ tiene una extensión continua en la cerradura de Ω.

La fórmula de integración por partes motiva el concepto de derivada débil.

Definición 2.2 *Sean $u, v_i \in L^1_{loc}(\Omega)$. Decimos que v_i es la i-ésima derivada débil de u en Ω, la denotamos $D_i u := v_i$, si*

$$\int_\Omega u\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega v_i\varphi, \quad \textit{para toda } \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Decimos que u es débilmente diferenciable en Ω si existe $D_i u$ para toda $i = 1, \cdots, N$. Definimos el gradiente débil de u como $\nabla u := (D_1 u, D_2 u, \cdots, D_N u)$.

Proposición 2.3 *(a) Si $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ es débilmente diferenciable en Ω, entonces $D_i u$ es única para casi todo $x \in \Omega$, $i = 1, ..., N$.*
(b) Si u, $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ son débilmente diferenciables en Ω y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha u + \beta v$ es débilmente diferenciable en Ω y

$$D_i(\alpha u + \beta v) = \alpha D_i u + \beta D_i v \quad \textit{para toda } i = 1, ..., N.$$

(c) Si $\Omega_0 \subset \Omega$ es abierto y $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ es débilmente diferenciable en Ω, entonces $u\mid_{\Omega_0}$ es débilmente diferenciable en Ω_0 y

$$D_i(u\mid_{\Omega_0}) = (D_i u)\mid_{\Omega_0}.$$

Demostración: *(a)* Supongamos que existen v,$w \in L^1_{loc}(\Omega)$ tales que

$$\int_\Omega u\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega v\varphi = -\int_\Omega w\varphi, \quad \text{para toda } \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Entonces

$$\int_\Omega (v - w)\varphi = 0, \qquad \text{para toda } \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

y por el [3, Corolario 19.20] $v = w$ para casi todo $x \in \Omega$.

(b) Sabemos que $L^1_{loc}(\Omega)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ por lo que para cualesquiera $v, w \in L^1_{loc}(\Omega)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha v + \beta w \in L^1_{loc}(\Omega)$. Sean $D_i v, D_i w \in L^1_{loc}(\Omega)$ las i-ésimas derivadas débiles v y w respectivamente en Ω, y $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Entonces

$$\begin{aligned}\int_\Omega (\alpha v + \beta w)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} &= \alpha\int_\Omega v\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + \beta\int_\Omega w\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \\ &= -\alpha\int_\Omega (D_i v)\,\varphi - \beta\int_\Omega (D_i w)\,\varphi \\ &= -\int_\Omega (\alpha D_i v + \beta D_i w)\,\varphi.\end{aligned}$$

Por lo tanto $\alpha v + \beta w$ tiene i-ésima derivada débil en Ω $\alpha D_i v + \beta D_i w$ para $i = 1, ..., N$. De lo que se concluye por el inciso anterior que $\alpha u + \beta v$ es débilmente diferenciable en Ω.

(c) Sea $\varphi \in C_c^\infty(\Omega_0)$. Extendemos φ a todo Ω poniendo $\varphi(x) = 0$ para cada $x \in \Omega\backslash\Omega_0$. De esta manera se tiene que $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Si D_iu es la i-ésima derivada débil de u en Ω entonces

$$\int_{\Omega_0} u\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = \int_\Omega u\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega (D_iu)\,\varphi = -\int_{\Omega_0} (D_iu)\,\varphi \quad \text{para toda } \varphi \in C_c^\infty(\Omega_0).$$

Por lo tanto, $u\mid_{\Omega_0}$ es débilmente diferenciable en Ω_0 y por a), $D_i(u\mid_{\Omega_0}) = (D_iu)\mid_{\Omega_0}$. ∎

Proposición 2.4 *Sean* $\varphi \in C_c^1(\Omega)$ *y* $f \in C^1(\Omega)$. *Entonces*

$$a)\int_\Omega \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = 0\ \forall i = 1, ..., N.$$

$$b)\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}\varphi + \int_\Omega f\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = 0\ \forall i = 1, ..., N.$$

Demostración: Para probar *a)*, identificamos a φ con su extensión trivial a $\mathbb{R}^N$, así que $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$ y como Ω es acotado, podemos elegir $a > 0$ tal que $sop(\varphi) \subset [-a, a]^N$. Sin pérdida de generalidad podemos elegir que $i = 1$. El teorema fundamental del cálculo asegura que

$$\int_{-a}^a \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x_1, \widehat{x})dx_1 = \varphi(a, \widehat{x}) - \varphi(-a, \widehat{x}) = 0\ \forall\widehat{x} = (x_2, ..., x_N) \in \mathbb{R}^{N-1}.$$

Por tanto si aplicamos el teorema de Fubini se tiene que

$$\int_\Omega \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_{-a}^a \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x_1, \widehat{x})dx_1 d\widehat{x} = 0.$$

Ahora para demostrar *b)* notemos que el producto $f\varphi \in C_c^1(\Omega)$, entonces si aplicamos *a)* a dicho producto se tiene que

$$0 = \int_\Omega \frac{\partial(f\varphi)}{\partial x_i} = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}\varphi + \int_\Omega f\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = 0\ \forall i = 1, ..., N$$

tal y como se quería demostrar. ∎

Proposición 2.5 *Sea $u \in C^1(\Omega)$. Entonces u es débilmente diferenciable en Ω con i-ésima derivada débil $D_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i}$.*

Demostración: Claramente $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Dado $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, escogemos un abierto $\omega \subset \Omega$ tal que $\partial\omega$ es de clase C^1 y $sop(\varphi) \subset \omega$. Por la proposición anterior tenemos que

$$\int_\omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi + \int_\omega u\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0, \quad \forall i = 1, ..., N,$$

de lo cual se sigue que

$$\int_\Omega u\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \int_\omega u\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi, \quad \forall i = 1, ..., N$$

es decir, u es débilmente diferenciable en Ω con derivada débil $D_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i}$. ■

No todas las funciones débilmente diferenciables son diferenciables, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.6 *Sea $u(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$. Notamos que $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Se afirma que u es débilmente diferenciable en $\mathbb{R}$ y que su derivada débil para casi todo $x \in \mathbb{R}$ es la función*

$$v(x) = \begin{cases} 1 & si \quad 0 < x \\ -1 & si \quad x \leq 0. \end{cases}$$

Demostración: Si $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ existe $a > 0$ tal que $sop(\varphi) \subset [-a, a]$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_\mathbb{R} u\varphi' + \int_\mathbb{R} v\varphi &= \int_{-a}^a u\varphi' + \int_{-a}^a v\varphi \\ &= \int_{-a}^0 -x\varphi'(x)\,dx + \int_{-a}^0 -\varphi(x)\,dx + \int_0^a x\varphi'(x)\,dx + \int_0^a \varphi(x)dx. \end{aligned}$$

Dado que $\varphi(a) = \varphi(-a) = 0$, integrando por partes obtenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^a x\varphi'(x)\,dx + \int_0^a \varphi(x)dx &= a\varphi(a) - 0\varphi(0) = 0, \\ \int_{-a}^0 -x\varphi'(x)\,dx + \int_{-a}^0 -\varphi(x)dx &= -0\varphi(0) + a\varphi(-a) = 0. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\int_\mathbb{R} u\varphi' + \int_\mathbb{R} v\varphi = 0 \qquad \text{para toda } \varphi \in C_c^\infty(\Omega),$$

es decir, $Du(x) = v(x)$. ■

Damos ahora un ejemplo de una función que no es débilmente diferenciable.

Ejemplo 2.7 *La función característica $1_{(-\infty,0)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no es débilmente diferenciable en $\mathbb{R}$.*

Demostración: Argumentando por contradicción, supongamos que existe $v \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} 1_{(-\infty,0)}\varphi' = -\int_{-\infty}^{\infty} v\varphi \quad \text{para toda } \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}),$$

entonces se cumple, en particular, que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{0} v\varphi &= -\int_{-\infty}^{0} \varphi' = 0 \quad \text{para toda } \varphi \in C_c^\infty(-\infty,0) \\ \int_{0}^{\infty} v\varphi &= -\int_{0}^{\infty} 1_{(-\infty,0)}\varphi' = 0 \quad \text{para toda } \varphi \in C_c^\infty(0,\infty). \end{aligned}$$

Estas dos identidades implican que $v = 0$ para casi todo $x \in \mathbb{R}$. En consecuencia,

$$\varphi(0) = \int_{-\infty}^{0} \varphi' = \int_{-\infty}^{\infty} 1_{(-\infty,0)}\varphi' = 0 \quad \text{para toda } \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$$

Lo cual es una contradicción. ■

Definición 2.8 *El espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$ se define como sigue:*

$H^1(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega) :$ *u es débilmente diferenciable y* $D_i u \in L^2(\Omega)$ *para toda* $i = 1, \ldots, N\}$.

Si $u, v \in H^1(\Omega)$, definimos

$$\langle u, v\rangle_1 := \int_\Omega uv + \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega (D_i u)(D_i v) = \int_\Omega uv + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v. \tag{2.1}$$

Claramente la función $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ define un producto interior en $H^1(\Omega)$ y la norma inducida por (2.1) es

$$\|u\|_1 := \left(\int_\Omega u^2 + \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega (D_i u)^2 \right)^{1/2} = \left(\int_\Omega u^2 + \int_\Omega |\nabla u|^2 \right)^{1/2}. \tag{2.2}$$

A continuación probaremos un resultado sumamente importante para la realización de este trabajo.

Teorema 2.9 $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_1)$ *es un espacio de Hilbert.*

Demostración: Sea (u_n) una sucesión de Cauchy en $H^1(\Omega)$ con respecto a la norma $\|\cdot\|_1$. Entonces las sucesiones (u_n) y $(D_i u_n)$ son de Cauchy en $L^2(\Omega)$ para $i = 1, ..., N$. Como $L^2(\Omega)$ es completo, existen u, v_i en $L^2(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ y $D_i u_n \to v_i$ en $L^2(\Omega)$ para cada $i = 1, ..., N$. Sea $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Usando la continuidad del producto escalar en $L^2(\Omega)$ se tiene que

$$\begin{aligned} \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \int_\Omega v_i \varphi &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \lim_{n\to\infty} \int_\Omega (D_i u_n)\varphi \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\int_\Omega u_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \int_\Omega (D_i u_n)\varphi \right) = 0, \end{aligned}$$

es decir, u es débilmente diferenciable y $v_i = D_i u$, para cada $i = 1, ..., N$. Por tanto, $u \in H^1(\Omega)$. Además

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_1^2 = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |u_n - u|^2 + \sum_{i=1}^N \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |D_i u_n - D_i u|^2 = 0.$$

En consecuencia, $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_1)$ es completo. ■

Definición 2.10 *El espacio $H_0^1(\Omega)$ se define como la cerradura de $C_c^\infty(\Omega)$ en $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_1)$.*

Como todo subespacio cerrado de un espacio de Hilbert es completo, $H_0^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert. Por definición, $C_c^\infty(\Omega)$ es denso en $H_0^1(\Omega)$. Dado que la completación de un espacio métrico es única, $H_0^1(\Omega)$ es justamente el espacio de la Definición 2.10.

Podemos pensar al espacio $H_0^1(\Omega)$ como el espacio de las funciones de $H^1(\Omega)$ que se anulan en la frontera en un sentido que precisamos a continuación. Esto lo convierte en el espacio adecuado para el problema nolineal que consideraremos en esta tesis.

Teorema 2.11 *Si Ω es de clase C^1 y $u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, entonces $u \in H_0^1(\Omega)$ si y sólo si $u(x) = 0$ para todo $x \in \partial\Omega$.*

Demostración: Véase, por ejemplo, [1, Teorema IX.17]. ■

Definición 2.12 *Sean X y Y espacios de Banach y sea $K : X \to Y$ una función lineal y continua. Se dice que K es un operador compacto si, para toda sucesión acotada (u_n) en X la sucesión (Ku_n) contiene una subsucesión convergente en Y.*

Proposición 2.13 *Sean X, Y espacios de Banach con normas $\|\cdot\|_X$ y $\|\cdot\|_Y$ respectivamente. Una función lineal $T : X \to Y$ es continua en X si y sólo si existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X \qquad \text{para todo } x \in X. \tag{2.3}$$

Demostración: Supongamos que $T : X \to Y$ es continua en X, en particular en 0_X,entonces existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } \|x\|_X < \delta \text{ entonces } \|Tx\|_Y < 1.$$

Si $x \neq 0_X$ tenemos que

$$\left\| \frac{\delta x}{2\|x\|_X} \right\|_X = \frac{\delta}{2} < \delta, \text{ lo cual implica que } \left\| T\frac{\delta x}{2\|x\|_X} \right\|_Y < 1 \text{ para todo } x \in X \setminus \{0_X\},$$

de lo que se sigue que

$$\|Tx\|_Y < C\|x\|_X \quad \text{ para todo } x \in X \setminus \{0_X\}$$

donde $C := \frac{2}{\delta}$. Si $x = 0_X$, por ser T lineal, $\|Tx\|_Y = \|x\|_X = 0$, así que se tiene la igualdad.

Por lo tanto existe $C > 0$ tal que $\|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X \quad \forall x \in X$.

Ahora supongamos que existe $C > 0$ tal que $\|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X$ para todo $x \in X$. Sean $x_0 \in X$ y $\varepsilon > 0$ arbitrarios. Como T es lineal tenemos que

$$\begin{aligned} \|Tx - Tx_0\|_Y &= \|T(x - x_0)\|_Y \\ &\leq C\|x - x_0\|_X \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

si $\|x - x_0\|_X < \delta := \frac{\varepsilon}{C}$. Notemos que de hecho T es uniformemente continua.
■

Definición 2.14 *Sean X, Y espacios de Banach con normas $\|\cdot\|_X$ y $\|\cdot\|_Y$ respectivamente y $T : X \to Y$ una función lineal. Decimos que una función T es un* operador acotado *si y sólo si existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X \qquad \text{para todo } x \in X. \tag{2.4}$$

2.2. Teoremas fundamentales

A continuación enunciamos algunos resultados fundamentales que usaremos en esta tesis. Una demostración de ellos se encuentra, por ejemplo, en [1, Teorema IX.9] o [2, 5.6.Theorem 1].

Notación 2.15 *Sea $p \in [1, \infty)$ y sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un subconjunto abierto. Denotamos por $L^p(\Omega)$ al espacio de Banach*

$$L^p(\Omega) := \{u : \Omega \to \mathbb{R} : u \text{ es medible y } \int_\Omega |u|^p < \infty\}$$

con la norma

$$|u|_p := \left(\int_\Omega |u|^p \right)^{1/p}.$$

Teorema 2.16 (Desigualdad de Sobolev) *Sea $N \geq 3$. Existe una constante $C > 0$, que sólo depende de N, tal que*

$$|u|_{2^*} \leq C \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \right)^{1/2} \qquad \text{para todo } u \in H^1(\mathbb{R}^N),$$

donde $2^* := \frac{2N}{N-2}$.

Para dominios acotados se tiene el siguiente resultado.

Corolario 2.17 (Desigualdad de Poincaré) *Sea $N \geq 3$ y sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto y acotado tal que $\partial\Omega$ es de clase C^1. Entonces, para cada $p \in [1, 2^*]$, existe una constante $\overline{C} > 0$ que depende de Ω y de p tal que*

$$|u|_p \leq \overline{C} \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \right)^{1/2} \qquad \text{para todo } u \in H_0^1(\Omega),$$

En consecuencia, $H_0^1(\Omega)$ es un subespacio de $L^p(\Omega)$ y la inclusión $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ es continua.

Demostración: Dada $u \in H_0^1(\Omega)$, podemos extender la función a todo $\mathbb{R}^N$ como sigue

$$\overline{u}(x) = \begin{cases} u & \text{si} \quad x \in \Omega; \\ 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases}$$

Para poder aplicar la Desigualdad de Sobolev, primero demostraremos que $\overline{u} \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Si $u \in C_c^\infty(\Omega)$ entonces, observamos que $\overline{u} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ y

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial x_i}(x) = \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_i} & \text{si} \quad x \in \Omega; \\ 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R}^N \backslash \Omega. \end{cases},$$

es decir, $\frac{\partial \overline{u}}{\partial x_i} = \overline{\frac{\partial u}{\partial x_i}}$, de lo cual se deduce que $\overline{u} \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Supongamos ahora que $u \in H_0^1(\Omega) \backslash C_c^\infty(\Omega)$. Sea (u_n) una sucesión en $C_c^\infty(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ en $H_0^1(\Omega)$. Entonces de la norma que tenemos en definida en $H^1(\mathbb{R}^N)$ se infiere que

$$\overline{u_n} \to \overline{u} \text{ en } L^2(\mathbb{R}^N) \quad \text{y} \quad \overline{\frac{\partial u_n}{\partial x_i}} \to \overline{D_i u} \text{ en } L^2(\mathbb{R}^N).$$

Sea $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. De la continuidad del producto escalar en $L^2(\mathbb{R}^N)$ y de la Proposición 2.5 tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \overline{u} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \overline{u_n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[- \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial \overline{u_n}}{\partial x_i} \varphi \right] = \left[- \int_{\mathbb{R}^N} \overline{D_i u} \ \varphi \right], \end{aligned}$$

es decir $D_i(\overline{u}) = \overline{D_i u}$ y $\overline{u} \in H^1(\mathbb{R}^N)$.

Ahora, como $\overline{u} \in H^1(\mathbb{R}^N)$ por la Desigualdad de Sobolev

$$|\overline{u}|_{2^*} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \overline{u}|^2 \right)^{1/2},$$

es decir,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\overline{u}|^{2^*} \right)^{1/2^*} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \overline{u}|^2 \right)^{1/2}.$$

Como Ω es acotado y $p \in [1, 2^*]$, sabemos que $L^{2^*}(\Omega) \subseteq L^p(\Omega) \subseteq L^1(\Omega)$ y por [3, Corolario 19.7]

$$[Vol(\Omega)]^{-1/p} |\overline{u}|_p \leq [Vol(\Omega)]^{-1/2^*} |\overline{u}|_{2^*},$$

reescribiendo

$$|\overline{u}|_p \leq [Vol(\Omega)]^{\frac{2^*-p}{2^*p}} |\overline{u}|_{2^*}.$$

De esta manera vemos que

$$|\overline{u}|_p \leq [Vol(\Omega)]^{\frac{2^*-p}{2^*p}} |\overline{u}|_{2^*} \leq C [Vol(\Omega)]^{\frac{2^*-p}{2^*p}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \overline{u}|^2 \right)^{1/2}.$$

Pero

$$|\overline{u}|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\overline{u}|^p\right)^{1/p} = \left(\int_\Omega |u|^p\right)^p \quad \text{y} \quad \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \overline{u}|^2\right)^{1/2}. = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)^{1/2},$$

de esta manera se tiene el resultado donde $\overline{C} := C\,[Vol(\Omega)]^{\frac{2^*-p}{2^*p}}$ depende de Ω y de p.

Claramente se sigue que $H_0^1(\Omega)$ es un subespacio de $L^p(\Omega)$, pues $0 \in H_0^1(\Omega)$ y para cualesquiera $u, v \in H_0^1(\Omega)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y la Proposición 2.3 nos garantiza que $\alpha u + \beta v$ es débilmente diferenciable y si tomamos $x \in \partial\Omega$,

$$(\alpha u + \beta v)(x) = \alpha u(x) + \beta v(x) = 0,$$

es decir, $\alpha u + \beta v \in H_0^1(\Omega)$.

Finalmente, la inclusión $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ es lineal, pero por lo demostrado anteriormente existe una constante $\overline{C} > 0$ tal que

$$|u|_p \leq \overline{C}\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)^{1/2}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} |u|_p &\leq \overline{C}\left(\int_\Omega u^2 + \int_\Omega |\nabla u|^2\right)^{1/2} \\ &= \overline{C}\,\|u\|_1, \text{ para todo } u \in H_0^1(\Omega), \end{aligned}$$

como se quería demostrar. ■

La desigualdad anterior nos permite definir un nuevo producto escalar en $H_0^1(\Omega)$ que es equivalente al original y que usaremos en el Capítulo 4.

Corolario 2.18 *Se cumple que*

$$\langle u, v\rangle := \sum_{i=1}^N \int_\Omega (D_i u)(D_i v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$$

es un producto escalar en $H_0^1(\Omega)$ *y la norma inducida*

$$\|u\| := \left(\sum_{i=1}^N \int_\Omega (D_i u)^2\right)^{1/2} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)^{1/2}$$

es equivalente a la norma $\|u\|_1$ *definida en* (2.2).

Demostración: Demostraremos que $\langle u, v\rangle$ es un producto escalar en $H_0^1(\Omega)$.

Sean $u, v \in H_0^1(\Omega)$. Por definición $H_0^1(\Omega)$ es la cerradura de $C_c^\infty(\Omega)$ en $H^1(\Omega)$ y el producto escalar en $H^1(\Omega)$ es

$$\langle u, v\rangle_1 := \int_\Omega uv + \sum_{i=1}^N \int_\Omega (D_i u)(D_i v) = \int_\Omega uv + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v.$$

Se tiene entonces que $\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v < \infty$. Por lo tanto $\langle u, v\rangle$ está bien definido.

Tenemos que para cualesquiera $u, v, w \in H_0^1(\Omega)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\langle u, v\rangle := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u =: \langle v, u\rangle,$$

por la simetría del producto escalar usual de $\mathbb{R}^N$;

$$\begin{aligned} \langle \lambda u, v\rangle &:= \int_\Omega \nabla(\lambda u) \cdot \nabla v = \int_\Omega \lambda(\nabla u) \cdot \nabla v \\ &= \lambda \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v =: \lambda \langle u, v\rangle, \end{aligned}$$

por las propiedades del gradiente débil y la linealidad de la integral;

$$\begin{aligned} \langle u + w, v\rangle &:= \int_\Omega \nabla(u+w) \cdot \nabla v = \int_\Omega (\nabla u + \nabla w) \cdot \nabla v \\ &= \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + \nabla w \cdot \nabla v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega \nabla w \cdot \nabla v \\ &=: \langle u, v\rangle + \langle w, v\rangle, \end{aligned}$$

nuevamente por las propiedades del gradiente débil y de la integral; finalmente

$$\langle u, u\rangle := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u = \int_\Omega |\nabla u|^2 \geq 0.$$

Sólo nos falta ver que $\langle u, u\rangle = 0$ si y sólo si $u \equiv 0$. Supongamos que $\int_\Omega |\nabla u|^2 = 0$, entonces usando el corolario anterior para $p = 2$, se tiene que

$$|u|_2 = 0,$$

lo cual implica que $u \equiv 0$ pues $u \in L^2(\Omega)$.

Por lo tanto $\langle u, v\rangle$ es un es un producto escalar en $H_0^1(\Omega)$.

Ahora probaremos que existen $C_1, C_2 > 0$ tales que $C_1 \|u\|_1 \leq \|u\| \leq C_2 \|u\|_1$ para toda $u \in H_0^1(\Omega)$.

Claramente vimos que

$$\|u\|^2 = \langle u, u\rangle := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u \le \int_\Omega u^2 + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u =: \langle u, u\rangle_1 = \|u\|_1^2\,,$$

es decir

$$\|u\| \le \|u\|_1\,.$$

Aplicando la desigualdad del corolario anterior para $p = 2$, existe una constante $\overline{C} > 0$

$$|u|_2 \le \overline{C}\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)^{1/2} \qquad \text{para todo } u \in H_0^1(\Omega).$$

Elevando al cuadrado y sumando $\int_\Omega |\nabla u|^2$ a cada miembro de la desigualdad, tenemos que

$$\int_\Omega |u|^2 + \int_\Omega |\nabla u|^2 \le \overline{C}^2 \int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega |\nabla u|^2 = (\overline{C}^2 + 1)\int_\Omega |\nabla u|^2\,.$$

Así se sigue que

$$\|u\|_1^2 \le (\overline{C}^2 + 1)\,\|u\|^2 \ \text{ para todo } u \in H_0^1(\Omega).$$

Despejando $\|u\|$ y haciendo $C_1 = (\overline{C}^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}$ llegamos a que

$$C_1\,\|u\|_1 \le \|u\| \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Por lo tanto, ambas normas son equivalentes en $H_0^1(\Omega)$. ■

Teorema 2.19 (Rellich, Kondrakov) *Para todo $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto y acotado, $N \ge 3$ y $1 \le p < 2^* := \frac{2N}{N-2}$, la inclusión*

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

es un operador compacto.

Demostración: Véase [6]. ■

Un corolario muy útil del Teorema de Rellich-Kondrakov es el siguiente.

Corolario 2.20 *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto y acotado, $N \ge 3$ y $1 \le p < 2^*$. Entonces toda sucesión (u_n) acotada en $H_0^1(\Omega)$ contiene una subsucesión, a la que por simplicidad denotaremos también (u_n), con las siguientes propiedades:*

$$\begin{array}{rcl} u_n & \rightharpoonup & u \quad \textit{débilmente en } H_0^1(\Omega), \\ u_n & \to & u \quad \textit{fuertemente en } L^p(\Omega), \\ u_n(x) & \to & u(x) \quad \textit{para casi todo } x \in \Omega. \end{array}$$

Demostración: Sea (u_n) una sucesión acotada en $H_0^1(\Omega)$. Por [3, Teorema 21.8] existe una subsucesión $(u_{n_k}) \subseteq (u_n)$ tal que $u_{n_k} \rightharpoonup u$ débilmente en $H_0^1(\Omega)$. Como esta subsucesión es también acotada en $H_0^1(\Omega)$, por el teorema de Rellich-Kondrakov existe una nueva subsucesión $(u_{n_l}) \subseteq (u_{n_k})$ tal que $u_{n_l} \to v$ fuertemente en $L^p(\Omega)$. Observemos que forzosamente $u_{n_l} \rightharpoonup u$ débilmente en $H_0^1(\Omega)$.Entonces denotando nuevamente a esta subsucesión (u_n) tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u \quad \text{débilmente en } H_0^1(\Omega) \text{ y} \\ u_n &\to v \quad \text{fuertemente en } L^p(\Omega). \end{aligned}$$

Ahora tenemos que demostrar que $v = u$. Sea $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, y consideremos el funcional $\mathcal{L} : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$\mathcal{L}w := \int_\Omega \varphi w.$$

Para cualesquiera $w_1, w_2 \in L^p(\Omega)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\alpha w_1 + \beta w_2) &= \int_\Omega \varphi(\alpha w_1 + \beta w_2) = \int_\Omega \alpha\varphi w_1 + \int_\Omega \beta\varphi w_2 \\ &= \alpha \int_\Omega \varphi w_1 + \beta \int_\Omega \varphi w_2 \\ &= \alpha\mathcal{L}w_1 + \beta\mathcal{L}w_2, \end{aligned}$$

entonces $\mathcal{L}$ es lineal. Ahora, utilizando la Desigualdad de Hölder y el hecho de que $C_c^\infty(\Omega) \subset L^q(\Omega)\ \forall q \geq 1$

$$\left| \int_\Omega \varphi w \right| \leq |w|_p \, |\varphi|_q \,, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

lo cual nos dice que $\mathcal{L}$ es acotada y en consecuencia continua. Por el Corolario 2.17 $\imath : H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ es lineal y continua entonces $\mathcal{L}\circ\imath : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ también es lineal y continua. Por lo anterior, sabemos que $u_n \rightharpoonup u$ débilmente en $H_0^1(\Omega)$ si sólo si $\mathcal{L}\circ\imath u_n \to \mathcal{L}\circ\imath u$ fuertemente en $\mathbb{R}$,es decir,

$$\int_\Omega \varphi u_n \to \int_\Omega \varphi u.$$

Por otro lado, al ser $\mathcal{L}$ continua y $u_n \to v$ fuertemente en $L^p(\Omega)$, $\mathcal{L}u_n \to \mathcal{L}v$ fuertemente en $\mathbb{R}$,es decir,

$$\int_\Omega \varphi u_n \to \int_\Omega \varphi v.$$

Entonces por la unicidad del límite en $\mathbb{R}$ llegamos a que

$$\int_{\Omega} \varphi\,(u-v) = 0 \qquad \forall \varphi \in C_c^{\infty}(\Omega),$$

lo cual implica que $u = v$ para casi todo $x \in \Omega$ ya que $C_c^{\infty}(\Omega)$ es denso en en $L^p(\Omega)$. Por lo tanto, $u_n \rightharpoonup u$ débilmente en $H_0^1(\Omega)$ y $u_n \to u$ fuertemente en $L^p(\Omega)$.

Sólo nos falta probar que $u_n(x) \to u(x)$ para casi todo $x \in \Omega$. Por [1, Teorema IV.9], Si $u_n \to u$ fuertemente en $L^p(\Omega)$, existe $(u_{n_k}) \subset (u_n)$ subsucesión tal que $u_{n_k}(x) \to u(x)$ para casi todo $x \in \Omega$. Aplicando la unicidad tanto del límite débil como del límite fuerte, podemos denotar (u_n) a esta nueva subsuseción y así concluímos la demostración. ■

Capítulo 3

Diferenciabilidad en espacios de Banach

En este capítulo, haremos una generalización del concepto de diferenciabilidad a funciones entre espacios de Banach, probaremos algunas propiedades análogas a las que se tienen para funciones diferenciables de $\mathbb{R}^N$ en $\mathbb{R}^M$ y al final calcularemos las derivadas de dos funciones que serán muy importantes para este trabajo. En la siguiente sección, introduciremos las nociones de variedad de Hilbert y su espacio tangente en cada punto, así como una caracterización muy útil de éste.

3.1. Funciones diferenciables

Definición 3.1 *Sean X,Y espacios de Banach con normas $\|\cdot\|_X$ y $\|\cdot\|_Y$. Denotamos por*

$$\mathcal{L}(X,Y) := \{T : X \to Y \mid T \text{ es lineal y acotado}\},$$

Este es un espacio de Banach con la norma

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \|T\| := \sup_{\|x\|_X=1} \|Tx\|_Y.$$

A $X' := \mathcal{L}(X,\mathbb{R})$ se le llama el dual topológico de X.

Definición 3.2 *Sean U un subconjunto abierto de X, $u_0 \in U$ y $F : U \to Y$ una función. Decimos que F es* Gâteaux-diferenciable en u_0 *si existe $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que para todo $v \in X$, se tiene*

$$\lim_{t\to 0} \frac{F(u_0+tv) - F(u_0)}{t} = T_{u_0}v.$$

A T se le llama la derivada de Gâteaux de F en u_0 y se denota por $F'(u_0) := T$. Decimos que F es de clase C^1 *en U si es Gâteaux-diferenciable en todo punto de U, y la función*

$$F' : U \to \mathcal{L}(X, Y), \qquad u \mapsto F'(u),$$

es continua.

Proposición 3.3 *Toda función lineal y acotada $T : X \to Y$ es de clase C^1 en X y su derivada de Gâteaux en x es $T'(x) = T$ para todo $x \in X$.*

Demostración: Sean $x, v \in X$ arbitrarios.

$$\begin{aligned} T'(x)v &= \lim_{t\to 0} \frac{T(x+tv) - T(x)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{T(x) + tT(v) - T(x)}{t} \\ &= T(v), \end{aligned}$$

Entonces tenemos que $T : X \to Y$ es Gâteaux-diferenciable en u_0 y su derivada es $T'(x) = T$, es decir, la derivada de Gâteaux de T en x es constante, y sabemos que las funciones constantes son continuas. Por lo tanto T es de clase C^1 y $T'(x) = T$ para todo $x \in X$. ■

Proposición 3.4 *Sean X, Y espacios de Banach, U un subconjunto abierto de X, $u_0 \in U$, y $F, K : U \to Y$ funciones. Si F y K son Gâteaux-diferenciables en $u_0 \in U$ entonces para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha F + \beta K$ es Gâteaux-diferenciable en u_0. Además,*

$$[\alpha F(u_0) + \beta K(u_0)]'\, v = \alpha F'(u_0)v + \beta K'(u_0)v.$$

Demostración: Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $v \in X$ arbitrarios. Entonces

$$\begin{aligned} [\alpha F(u_0) + \beta K(u_0)]'\, v \quad &: \; = \lim_{t\to 0} \frac{(\alpha F + \beta K)(u_0 + tv) - (\alpha F + \beta K)(u_0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \left[\alpha \frac{F(u_0+tv) - F(u_0)}{t} + \beta \frac{K(u_0+tv) - K(u_0)}{t} \right] \\ &= \alpha F'(u_0)v + \beta K'(u_0)v \\ &= [\alpha F'(u_0) + \beta K'(u_0)]\, v. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\alpha F + \beta K$ es Gâteaux-diferenciable en u_0 y $[\alpha F(u_0) + \beta K(u_0)]'\, v = \alpha F'(u_0)v + \beta K'(u_0)v$. ■

Proposición 3.5 *Sean X, Y espacios de Banach, U un subconjunto abierto de X, y $F, K : U \to Y$ funciones. Si F y K son de clase C^1 entonces para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha F + \beta K$ es de clase C^1, es decir, el espacio de funciones de clase C^1 en U es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.*

Demostración: Si F y K son de clase C^1, en particular son Gâteaux-diferenciables en todo punto de U, y por la proposición anterior, $\alpha F + \beta K$ es Gâteaux-diferenciable para todo $u \in U$. Además F', K' son continuas , entonces $\alpha F' + \beta K'$ es continua en U. Por lo tanto $\alpha F + \beta K$ es de clase C^1 en U. ■

También existe la versión análoga de la regla de la cadena para funciones diferenciables entre espacios de Banach, cuya demostración puede encontrar en [7].

Proposición 3.6 (Regla de la Cadena) *Sean X,Y y Z espacios de Banach y sean $U \subset X$, $V \subset Y$ suconjuntos abiertos. Si $F : U \to Y$ y $G : V \to Z$ son de clase C^1 en U y V respectivamente y $F(U) \subset V$ entonces $G \circ F : U \to Z$ es de clase C^1 en U y*

$$(G \circ F)'(u) = G'(F(u)) \circ F'(u), \text{ para toda } u \in U.$$

Proposición 3.7 *Sea H un espacio de Hilbert con producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y la correspondiente norma $\| \cdot \|$. La función*

$$F : H \to \mathbb{R}, \qquad F(u) = \|u\|^2,$$

es de clase C^1 en H y $F'(u) = 2 \langle u, \cdot \rangle$ para toda $u \in H$.

Demostración: Primero mostraremos que F es Gâteaux-diferenciable en $u_0 \in H$ arbitrario. Sean $v \in H$, $t \in \mathbb{R}$ arbitrarios. Como

$$\|u_0 + tv\|^2 = \|u_0\|^2 + 2t \langle u_0, v \rangle + \|tv\|^2 ,$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
F'(u_0)v \quad : \quad &= \lim_{t \to 0} \frac{F(u_0 + tv) - F(u_0)}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{2t \langle u_0, v \rangle + t^2 \|v\|^2}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} 2 \langle u_0, v \rangle \\
&= 2 \langle u_0, v \rangle .
\end{aligned}$$

Por propiedades del producto interior, el funcional $T : H \to \mathbb{R}$ dado por $Tv := 2\langle u_0, v\rangle$ es lineal. Falta probar que T es acotado. La desigualdad de Cauchy-Schwarz asegura que

$$|Tv| = |2\langle u_0, v\rangle| \leq 2\|u_0\|\|v\| \qquad \text{para toda } v \in H.$$

es decir, haciendo $C = 2\|u_0\|$, T es acotado. En consecuencia, $T \in H'$ y F es Gâteaux diferenciable en u_0 con derivada de Gâteaux $F'(u_0)v := 2\langle u_0, v\rangle$.
Vamos a probar ahora que el operador

$$H \to H', \qquad u \mapsto 2\langle u, \cdot\rangle,$$

es acotado y por lo tanto continuo. Nuevamente, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$|F'(u)v| = |2\langle u, v\rangle| \leq 2\|u\|\|v\| \qquad \text{para cualesquiera } u, v \in H.$$

Entonces

$$\|F'(u)\| := \sup_{\|v\|=1} |F'(u)v| \leq 2\|u\| \qquad \text{para toda } u \in H.$$

Así concluimos que $F(u) = \|u\|^2$ es de clase C^1 en H y $F'(u) = 2\langle u, \cdot\rangle$. ■

Proposición 3.8 *Sea $p \in (2, \infty)$ y sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto. La función $K : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}$ dada por*

$$K : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}, \qquad K(u) = \int_\Omega |u|^p =: |u|_p^p$$

es de clase C^1 en $L^p(\Omega)$ y

$$K'(u)v = p\int_\Omega |u|^{p-2}uv \text{ para todo } u, v \in L^p(\Omega).$$

Demostración: Veamos primero que K es Gâteaux-diferenciable en $u \in L^p(\Omega)$. Sean $v \in L^p(\Omega)$, $t \in \mathbb{R}$. Mostramos a continuación que

$$\begin{aligned} K'(u)v \quad &: = \lim_{t\to 0} \frac{K(u+tv) - K(u)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{|u+tv|_p^p - |u|_p^p}{t} \\ &= p\int_\Omega |u|^{p-2}uv. \end{aligned}$$

Sea $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) := |a + bt|^p$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Calculemos su derivada.

Notemos que

$$f(t) = |a+bt|^p = \left[(a+bt)^2\right]^{\frac{p}{2}},$$

entonces

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{p}{2}\left[(a+bt)^2\right]^{\frac{p}{2}-1} 2\,(a+bt)\,b \\ &= p\,|a+bt|^{p-2}\,(a+bt)b, \end{aligned}$$

así $f'(t) \in C((-1,1))$ ya que $p > 2$ de lo cual se deduce que $f \in C^1((-1,1))$.

Aplicando el Teorema del Valor Medio para $0 < |t| < 1$, sabemos que existe $\alpha = \alpha(t)$ entre 0 y t tal que

$$f'(\alpha) = \frac{f(t) - f(0)}{t - 0},$$

es decir,

$$p\,|a+b\alpha|^{p-2}\,(a+b\alpha)b = \frac{|a+bt|^p - |a|^p}{t}.$$

Ahora tomemos $u, v \in L^p(\Omega)$ y $x \in \Omega$. Como $u(x), v(x) \in \mathbb{R}$, podemos sustituir a y b por $u(x)$ y $v(x)$ respectivamente, entonces tenemos que

$$\begin{aligned} f(t) &= |u(x) + v(x)t|^p\,, \\ f(0) &= |u(x)|^p \\ \text{y} \quad f'(\alpha) &= p\,|u(x) + v(x)\alpha|^{p-2}\,(u(x) + v(x)\alpha)v(x). \end{aligned}$$

Aplicando el Teorema del Valor Medio tenemos que para $0 < |t| < 1$ existe $\alpha = \alpha(x,t)$ entre 0 y t tal que

$$p\,|u(x) + v(x)\alpha|^{p-2}\,(u(x) + v(x)\alpha)v(x) = \frac{|u(x) + v(x)t|^p - |u(x)|^p}{t}.$$

Aplicando valor absoluto,

$$p\,|u(x) + v(x)\alpha|^{p-1}\,|v(x)| = \left|\frac{|u(x) + v(x)t|^p - |u(x)|^p}{t}\right|.$$

Pero $|\alpha| \in (0,1)$, entonces

$$|u(x) + v(x)\alpha| \leq |u(x)| + |\alpha|\,|v(x)| \leq |u(x)| + |v(x)|\,,$$

por lo que

$$\left|\frac{|u(x) + v(x)t|^p - |u(x)|^p}{t}\right| \leq p\,(|u(x)| + |v(x)|)^{p-1}\,|v(x)|\,.$$

En otras palabras, la familia de funciones

$$f_t(x) := \frac{|u(x)+v(x)t|^p - |u(x)|^p}{t},\ t \in (-1,1),$$

está dominada por la función

$$g(x) := p\,(|u(x)|+|v(x)|)^{p-1}\,|v(x)| \qquad \text{para todo } x \in \Omega.$$

Además $u, v \in L^p(\Omega)$,entonces $u+tv \in L^p(\Omega)$ para $0 < |t| < 1$ pues sabemos que $L^p(\Omega)$ es un espacio de Banach. Todo esto implica que

$$\int_\Omega |u+tv|^p < \infty \quad \text{ y } \quad \int_\Omega |u|^p < \infty,$$

es decir, $|u+tv|^p, |u|^p \in L^1(\Omega)$.Usando un argumento similar al anterior, deducimos que

$$\frac{|u(x)+v(x)t|^p - |u(x)|^p}{t} \in L^1(\Omega).$$

Deseamos aplicar el Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue, por lo que mostraremos que $g \in L^1(\Omega)$.

Observemos que

$$\int_\Omega \left[(|u|+|v|)^{p-1}\right]^{\frac{p}{p-1}} = \int_\Omega (|u|+|v|)^p < \infty,$$

y como $\left|(|u|+|v|)^{p-1}\right|_{\frac{p}{p-1}}^{\frac{p}{p-1}} = \int\limits_\Omega \left[(|u|+|v|)^{p-1}\right]^{\frac{p}{p-1}}$, se infiere que $(|u|+|v|)^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$.

Como $|v| \in L^p(\Omega)$ y $\frac{1}{p} + \frac{p-1}{p} = 1$, aplicando la desigualdad de Hölder y multiplicando por p, llegamos a que

$$p\,(|u|+|v|)^{p-1}\,|v| \in L^1(\Omega).$$

Sea $x_0 \in \Omega$ fijo, como $0 < |t| < 1$ existe $\alpha = \alpha(x_0,t)$ tal que $0 < \alpha(x_0,t) < t$ entonces $\alpha = \alpha(x_0,t) \to 0$ cuando $t \to 0$, así

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} f_t(x_0) &= \lim_{\alpha \to 0} p\,|u(x_0)+v(x_0)\alpha|^{p-2}\,(u(x_0)+v(x_0)\alpha)v(x_0) \\ &= p\,|u(x_0)|^{p-2}\,u(x_0)v(x_0). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$f_t(x) \to p\,|u(x)|^{p-2}\,u(x)v(x) \;\text{ cuando } t \to 0 \text{ para casi todo } x \in \Omega.$$

Como se satisfacen las hipótesis del Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue podemos decir que $f(x) = p\,|u(x)|^{p-2}\,u(x)v(x)$ es integrable y ademas $\lim\limits_{t\to 0}\int\limits_{\Omega} f_t(x) = \int\limits_{\Omega} f(x)$.

Entonces

$$\begin{aligned} K'(u)v &= \lim_{t\to 0}\int\limits_{\Omega} f_t(x)dx \\ &= \int\limits_{\Omega} f(x) \\ &= \int\limits_{\Omega} p\,|u(x)|^{p-2}\,u(x)v(x)dx. \end{aligned}$$

Denotemos por $T : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}$ a la función dada por

$$Tv := \int\limits_{\Omega} p\,|u_0|^{p-2}\,u_0 v, \qquad v \in L^p(\Omega). \tag{3.1}$$

Evidentemente T es lineal. Probaremos que existe $C > 0$ tal que

$$|Tv| \leq C\,|v|_p \qquad \forall v \in L^p(\Omega).$$

Observemos que, como $u \in L^p(\Omega)$, la función $|u_0|^{p-2}\,u_0 \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$, ya que

$$\int\limits_{\Omega} \left||u_0|^{p-2}\,u_0\right|^{\frac{p}{p-1}} = \int\limits_{\Omega} \left(|u_0|^{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}} = \int\limits_{\Omega} |u_0|^p < \infty.$$

Elevando esta igualdad a la $\frac{p-1}{p}$, obtenemos

$$\left||u_0|^{p-2}\,u_0\right|_{\frac{p}{p-1}} = \left(|u_0|_p^p\right)^{\frac{p-1}{p}} = |u_0|_p^{p-1}.$$

Como $\frac{p-1}{p} + \frac{1}{p} = 1$, podemos aplicar la Desigualdad de Hölder para obtener

$$\begin{aligned} \left|\int\limits_{\Omega} p\,|u_0|^{p-2}\,u_0 v\right| &\leq p\int\limits_{\Omega} \left||u_0|^{p-2}\,u_0 v\right| \\ &\leq p\left||u_0|^{p-2}\,u_0\right|_{\frac{p}{p-1}} |v|_p = p\,|u_0|_p^{p-1}\,|v|_p \qquad \text{para todo } v \in L^p(\Omega). \end{aligned}$$

Esto demuestra (3.1). En consecuencia, K es Gâteaux-diferenciable con derivada

$$K'(u)v := \int_\Omega p\,|u|^{p-2}\,uv, \qquad \text{para cualesquiera } u, v \in L^p(\Omega).$$

Podemos aplicar el Teorema de Representación de Riesz ya que $1 < p < \infty$, sabemos que $(L^p(\Omega))' := \mathcal{L}(L^p(\Omega), \mathbb{R}) \cong L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$, y existe $u \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$ tal que el isomorfismo está dado por

$$R(u)v = \int_\Omega uv \quad \text{para todo } v \in L^p(\Omega)$$

por lo que podemos ver a K' como una función $\Phi : L^p(\Omega) \to L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$ dada por $u \longmapsto |u|^{p-2}\,u$, así que ahora tenemos que mostrar que Φ es continua.

Sea $(u_n) \subset L^p(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ en $L^p(\Omega)$ cuando $n \to \infty$. Supongamos que $|u_n|^{p-2}\,u_n \nrightarrow |u|^{p-2}\,u$ en $L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$, entonces esto quiere decir que existe $\varepsilon_0 > 0$ y una subsucesión $(v_n) \subset (u_n)$ tales que

$$\left| |v_n|^{p-2}\,v_n - |u|^{p-2}\,u \right|_{\frac{p}{p-1}} \geq \varepsilon_0. \tag{3.2}$$

Vamos a probar que existe $(w_n) \subset (v_n)$ tal que $|w_n|^{p-2}\,w_n \to |u|^{p-2}\,u$ en $L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$. Como $(v_n) \subset (u_n)$, $v_n \to u$ en $L^p(\Omega)$, así que por [1, Teorema IV.9], tenemos que existe $(w_n) \subset (v_n)$ tal que

$$w_n(x) \to u(x) \text{ para casi todo } x \in \Omega.$$

Además, como (u_n) es de Cauchy en $L^p(\Omega)$, se sigue que (w_n) también es de Cauchy en $L^p(\Omega)$ y gracias a ésto podemos elegir una subsucesión que satisfaga que

$$|w_{n+1} - w_n|_p < \frac{1}{2^n} \text{ para toda } n \geq 1.$$

Definimos $\widetilde{w_n} := |w_1| + \sum_{j=1}^{n-1} |w_{j+1} - w_j|$. Entonces $\widetilde{w_n} \in L^p(\Omega)$, ya que $(w_n) \subset L^p(\Omega)$. Además para $m > n$,

$$\begin{aligned}
|\widetilde{w_m} - \widetilde{w_n}|_p &= \left| |w_1| + \sum_{j=1}^{m-1} |w_{j+1} - w_j| - |w_1| - \sum_{j=1}^{n-1} |w_{j+1} - w_j| \right|_p \\
&\leq \sum_{j=n}^{m-1} |w_{j+1} - w_j|_p \\
&\leq \sum_{j=n}^{m-1} \frac{1}{2^j},
\end{aligned}$$

es decir, $(\widetilde{w_n})$ es de Cauchy en $L^p(\Omega)$ y por lo tanto existe $\widetilde{w} \in L^p(\Omega)$ tal que $\widetilde{w_n} \to \widetilde{w}$ en $L^p(\Omega)$. Además, por unicidad del límite tenemos que

$$\widetilde{w} = |w_1| + \sum_{j=1}^{\infty} |w_{j+1} - w_j| \in L^p(\Omega).$$

Por otro lado, dado que podemos ver que $w_n = w_n - w_{n-1} + w_{n-1} - w_{n-2} + ... + w_2 - w_1 + w_1$, entonces

$$\begin{aligned} |w_n| &\leq |w_n - w_{n-1}| + |w_{n-1} - w_{n-2}| + ... + |w_2 - w_1| + |w_1| \\ &= \widetilde{w_n} \leq \widetilde{w}, \end{aligned}$$

de lo que se sigue que

$$|u(x)| \leq \widetilde{w}(x) \qquad \text{para casi todo } x \in \Omega.$$

Hemos llegado a que:

1) $|w_n|^{p-2} w_n - |u|^{p-2} u \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de lo que se sigue que

$$\int_{\Omega} \left| |w_n|^{p-2} w_n - |u|^{p-2} u \right|^{\frac{p}{p-1}} < \infty \ \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

es decir, $\left| |w_n|^{p-2} w_n - |u|^{p-2} u \right|^{\frac{p}{p-1}} \in L^1(\Omega)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

2) $\left| |w_n(x)|^{p-2} w_n(x) - |u(x)|^{p-2} u(x) \right|^{\frac{p}{p-1}} \to 0$ para casi todo $x \in \Omega$; ya que $w_n(x) \to u(x)$ para casi todo $x \in \Omega$.

3) $\left| |w_n(x)|^{p-2} w_n(x) - |u(x)|^{p-2} u(x) \right|^{\frac{p}{p-1}} \leq 2 \left| \widetilde{w(x)} \right|^p$ para casi todo $x \in \Omega$, porque

$$\begin{aligned} \left| |w_n(x)|^{p-2} w_n(x) - |u(x)|^{p-2} u(x) \right| &\leq \left| |w_n(x)|^{p-2} w_n(x) \right| + \left| |u(x)|^{p-2} u(x) \right| \\ &\leq |w_n(x)|^{p-1} + |u(x)|^{p-1} \\ &\leq 2 \left| \widetilde{w(x)} \right|^{p-1} \qquad \text{para casi todo } x \in \Omega. \end{aligned}$$

Entonces se satisfacen las hipótesis del Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue, por lo que en este caso tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} \left| |w_n(x)|^{p-2} w_n(x) - |u(x)|^{p-2} u(x) \right|^{\frac{p}{p-1}} = 0,$$

es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \left| |w_n(x)|^{p-2} w_n(x) - |u(x)|^{p-2} u(x) \right|_{\frac{p}{p-1}} = 0.$$

De esta manera se concluye que $|w_n(x)|^{p-2} w_n(x) \to |u(x)|^{p-2} u(x)$ en $L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$ contradiciendo (3.2), por lo que Φ es continua.

Por lo tanto $K(u) = |u|_p^p$ es de clase C^1 y su derivada es $K'(u)v = p\int_\Omega |u|^{p-2}uv$ para todo $u, v \in L^p(\Omega)$. ∎

3.2. Variedades de Hilbert

Definición 3.9 *Sean H un espacio de Hilbert, U un subconjunto de H abierto, $F : U \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 en el sentido de la definición 3.2 y $a \in \mathbb{R}$. Decimos que $u \in U$ es un punto crítico de F si $F'(u)v = 0$ para toda $v \in H$. Decimos que a es un valor crítico de F si existe $u \in U$ punto crítico de F tal que $F(u) = a$. Decimos que a es un valor regular de F si a no es un valor crítico de F,es decir, si $F'(u) \neq 0 \in \mathcal{L}(H, \mathbb{R})$ para todo $u \in F^{-1}(a)$.*

Definición 3.10 *Sean H un espacio de Hilbert y M un subconjunto de H.Decimos que M es una variedad de Hilbert de clase C^1 si existen $U \subset H$ abierto, una función $F : U \to \mathbb{R}$ de clase C^1 y un valor regular $a \in \mathbb{R}$ de F tal que $M = F^{-1}(a)$. El espacio tangente a M en un punto $u \in M$ se define como*

$$T_uM := \{v \in H : \langle F'(u), v\rangle = 0\},$$

donde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es el producto interior de H.

Observación 3.11 *De las definiciones anteriores, tenemos*

$$T_uM = núcleo\,(F'(u)).$$

Además, como $F'(u) \neq 0 \in \mathcal{L}(H, \mathbb{R})$, T_uM es un subespacio vectorial cerrado de codimensión 1 de H, de modo que por [1, Teorema 21.4]

$$H = T_uM \oplus \langle u_0\rangle,$$

donde $u_0 \in H$ es cualquier elemento tal que $F'(u)u_0 \neq 0$ y $\langle u_0\rangle := \{tu_0 : t \in \mathbb{R}\}$. Pero por la manera en que se definió T_uM, también podemos caracterizar a H como

$$H = T_uM \oplus \langle F'(u)\rangle.$$

El siguiente resultado, es un caso particular del Teorema de la Función Implícita (véase, por ejemplo [4]) y nos dará una descripción de T_uM independiente de F.

Teorema 3.12 *Sean M una variedad de Hilbert de clase C^1, $u \in M$ y $u_\tau \in T_uM$ la proyección ortogonal de u en T_uM. Entonces existe una vecindad abierta V en T_uM que contiene a u_τ y una función $f : V \to \mathbb{R}$ de clase C^1, con las siguientes propiedades.*

a) $u_\tau + f(u_\tau)F'(u) = u$.

b) $F(v + f(v)F'(u)) = a$ para toda $v \in T_uM$, donde a es el valor regular de F tal que $M = F^{-1}(a)$.

c) $F'(u_\tau)\, v = 0$ para toda $v \in T_uM$.

Demostración: Como dijimos, es un caso particular del Teorema de la Función Implícita (véase, por ejemplo [4, Teorema 10.2.1]) aplicado a la descomposición $T_uM \oplus \langle F'(u)\rangle$. ■

Una aplicación de este teorema se da en el siguiente resultado, que nos caracteriza el espacio tangente T_uM.

Proposición 3.13 *Sean M una variedad de Hilbert de clase C^1 y $u \in M$. Entonces*

$$T_uM = \{\gamma'(0) : \gamma \in \Gamma\},$$

donde Γ es el conjunto de todas las curvas $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to H$ de clase C^1, $\varepsilon > 0$ tales que $\gamma(0) = u$ y $\gamma(t) \in M$ para toda $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Demostración: Sea $\gamma \in \Gamma$. Por definición de variedad de Hilbert, existen $U \subset H$ abierto, una función $F : U \to \mathbb{R}$ de clase C^1y un valor regular $a \in \mathbb{R}$ de F tal que $M = F^{-1}(a)$. Entonces $F \circ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ es de clase C^1 y $(F \circ \gamma)(t) = a$ para toda $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Derivando de ambos lados y aplicando la regla de la cadena

$$(F \circ \gamma)'(t) = F'(\gamma(t))\gamma'(t) = 0 \quad \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Tomando $t = 0$, se tiene que $F'(u)\gamma'(0) = 0$, es decir, $\gamma'(0) \in \textit{núcleo}\,(F'(u)) =: T_uM$. Por lo tanto, tenemos que $\{\gamma'(0) : \gamma \in \Gamma\} \subset T_uM$.

Para probar la otra contención, sea $v \in T_uM$. Existe una vecindad abierta V en T_uM que contiene a u_τ y una función $f : V \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tales que $F(v + f(v)F'(u)) = a$ para toda $v \in T_uM$. Tomando t suficientemente pequeño para que $u_\tau + tv \in V$, se tiene que

$$F(u_\tau + tv + f(u_\tau + tv)F'(u)) = a,$$

por lo que si definimos $\gamma(t) := (u_\tau + tv + f(u_\tau + tv)F'(u))$, $\gamma \in \Gamma$, ya que $\gamma(0) := (u_\tau + f(u_\tau)F'(u)) = u$ por la proposición anterior, además $\gamma'(t) := (v + f'(u_\tau + tv)vF'(u))$. Tomando $t = 0$,

$$\gamma'(0) := (v, 0),$$

es decir, $v \in \{\gamma'(0) : \gamma \in \Gamma\}$. Por lo que hemos probado la otra contención.

Por lo tanto $T_uM = \{\gamma'(0) : \gamma \in \Gamma\}$. ■

Para finalizar este capítulo, demostramos un teorema que será crucial para resolver el problema que hemos planteado para esta tesis.

Teorema 3.14 *Sean M una variedad de Hilbert de clase C^1 y $F : U \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 definida en un abierto U de H que contiene a M. Si $u_0 \in M$ es un mínimo de F en M (es decir, $F(u_0) \leq F(v)$ para toda $v \in M$) entonces u_0 es un punto crítico de $F|_M$.*

Demostración: Sea $v \in T_uM$. Tenemos que probar que $F'(u)v = 0$. Por la proposición anterior existe $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to H$ de clase C^1tal que $\gamma(0) = u$, $\gamma(t) \in M$ y $\gamma'(0) = v$. Como u_0 es mínimo de F en M, $(F \circ \gamma)'(0) = 0$, entonces

$$(F \circ \gamma)'(0) = F'(\gamma(0))\gamma'(0) = F'(u)v = 0.$$

■

Capítulo 4

Existencia de soluciones para un problema elíptico nolineal

Después de haber construido las herramientas suficientes, en este capítulo probaremos la existencia de soluciones débiles para nuestro problema, definiendo previamente los conceptos de solución clásica y solución débil en la primera sección. Y en la segunda sección, haremos el planteamiento variacional del problema que nos llevará a hallar soluciones débiles del problema.

4.1. Soluciones clásicas y soluciones débiles

Consideremos nuevamente el problema

$$(P) \begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-2}\, u & en\ \Omega \\ u = 0 & en\ \partial\Omega \end{cases}$$

con las siguientes hipótesis:

1. Ω es abierto y acotado en $\mathbb{R}^N$ y $\partial\Omega$ es de clase C^1.

2. $N \geq 3$.

3. $2 < p < 2^*$ donde $2^* = \frac{2N}{N-2}$ es el exponente crítico de Sobolev.

Definición 4.1 *Decimos que u es solución clásica de (P) si $u \in C^2(\overline{\Omega})$ y satisface (P).*

Queremos encontrar una solución clásica de (P). Con este objetivo, veamos qué condiciones tiene que satisfacer ésta en caso de existir.

Proposición 4.2 *Sean $u \in C^2(\overline{\Omega})$, $\varphi \in C_c^\infty(\overline{\Omega})$ entonces*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = -\int_\Omega \Delta u \varphi dx.$$

Demostración: Sea $f_i := \frac{\partial u}{\partial x_i}$ con $i = 1, ..., N$, entonces se tiene que $f_i \in C^1(\Omega)$ para toda $i = 1, ..., N$ y además notemos que $f_i\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ para toda $i = 1, ..., N$. Ahora utilizando la Proposición 2.4 se tiene que

$$\int_\Omega \frac{\partial f_i}{\partial x_i}\varphi + \int_\Omega f_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0 \ \forall i = 1, ..., N.$$

Sumando todas las igualdades tenemos que

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^N f_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right) \varphi,$$

pero $\frac{\partial f_i}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2}$, por lo que al sustituir se obtiene

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = -\int_\Omega \Delta u \varphi dx.$$

como se quería demostrar. ■

Proposición 4.3 *Si $u \in C^2(\overline{\Omega})$ es una solución clásica de (P), entonces*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_\Omega |u|^{p-2}\, uv dx \qquad \text{para toda } v \in H_0^1(\Omega).$$

Demostración: Sean $u \in C^2(\overline{\Omega})$ y $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Entonces, multiplicando (P) por φ e integrando, obtenemos

$$-\int_\Omega (\Delta u)\, \varphi dx = \int_\Omega |u|^{p-2}\, u\varphi dx.$$

Usando el resultado anterior obtenemos

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = -\int_\Omega (\Delta u)\, \varphi dx = \int_\Omega |u|^{p-2}\, u\varphi dx \qquad \text{para toda } \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

y, como $C_c^\infty(\Omega)$ es denso en $H_0^1(\Omega)$, se obtiene el resultado. ■

Definición 4.4 *Decimos que u es una solución débil de (P) si $u \in H_0^1(\Omega)$ y satisface*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_\Omega |u|^{p-2} uv dx \qquad \textit{para toda } v \in H_0^1(\Omega).$$

4.2. El problema variacional

Consideremos el funcional $J : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p \\ &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{p}|u|_p^p. \end{aligned}$$

Por la Desigualdad de Poincaré, la inclusión $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ es continua para todo $p \in (2, 2^*)$ y en consecuencia $\displaystyle\int_\Omega |u|^p < \infty$ y J está bien definida para todo $u \in H_0^1(\Omega)$.

Proposición 4.5 *J es de clase C^1 y su derivada de Gâteaux en $u \in H_0^1(\Omega)$ está dada por*

$$J'(u)v = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_\Omega |u|^{p-2} uv dx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Demostración: Esto es consecuencia inmediata de las Proposiciones 3.7 y 3.8, pues podemos ver que $J(u) = \frac{1}{2}F(u) - \frac{1}{p}K(u)$, entonces , por el Corolario 3.5, J es de clase C^1, ya que F y K son de clase C^1, y por la Proposición 3.4 se tiene que,

$$\begin{aligned} J'(u)v &= \frac{1}{2}F'(u)v - \frac{1}{p}K'(u)v \\ &= \langle u, v\rangle - \int_\Omega |u|^{p-2}uv \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Y como el producto escalar que estamos usando es $\langle u, v\rangle := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$, se concluye que,

$$J'(u)v = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_\Omega |u|^{p-2} uv dx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

terminando la demostración. ■

Recordemos que $u \in H_0^1(\Omega)$ es punto crítico de J si $J'(u)v = 0$ para todo $v \in H_0^1(\Omega)$. De la proposición anterior se sigue inmediatamente que

Corolario 4.6 *Dada $u \in H_0^1(\Omega)$ es solución débil de (P) si y solamente si u es punto crítico de J.*

Lo que nos proponemos ahora es demostrar la existencia de puntos críticos del funcional J. Analizaremos su gráfica tomando $u \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}$ fijo, y estudiaremos su comportamiento sobre la recta generada por u.

Sea $J_u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $J_u(t) := J(tu)$, es decir

$$J_u(t) := J(tu) = \frac{1}{2}\|tu\|^2 - \frac{1}{p}|tu|_p^p = \left(\frac{1}{2}\|u\|^2\right)t^2 - \left(\frac{1}{p}|u|_p^p\right)|t|^p .$$

Lema 4.7 *Si $a, b > 0$ y $p > 2$ la función $f(t) = at^2 - b|t|^p$ tiene exactamente tres puntos críticos: un mínimo local en 0 y dos máximos en $t = \pm\left(2ap^{-1}b^{-1}\right)^{\frac{1}{p-2}}$ y tiene exactamente tres ceros en 0 y en $t = \pm\left(ab^{-1}\right)^{\frac{1}{p-2}}$. Además,*

$$\lim_{|t|\to\infty} f(t) = -\infty.$$

Demostración: Notemos que $f(-t) = f(t)$, así que podemos restringir nuestro análisis para $t \geq 0$. Tenemos que $f'(t) = 2at - pbt^{p-1}$, entonces $f'(t) = 0$ si y sólo si $t = 0$ o $2a - pbt^{p-2} = 0$, es decir $t = 0$ y $t = \pm\left(2ap^{-1}b^{-1}\right)^{\frac{1}{p-2}}$ son los puntos críticos de f. Dado que $f''(t) = 2a - p(p-1)bt^{p-2}$, entonces

$$f''(0) = 2a > 0,$$

así que en $t = 0$ tenemos un mínimo local. Tomando el otro punto crítico

$$\begin{aligned} f'(\left(2ap^{-1}b^{-1}\right)^{\frac{1}{p-2}}) &= 2a - p(p-1)b\left(\left(2ap^{-1}b^{-1}\right)^{\frac{1}{p-2}}\right)^{p-2} \\ &= 2(2-p)a < 0, \end{aligned}$$

así que, por la simetría, en $t = \pm\left(2ap^{-1}b^{-1}\right)^{\frac{1}{p-2}}$ se encuentran dos máximos. Hallemos los ceros de $f(t)$ Tenemos que $t^2\left(a - bt^{p-2}\right) = 0$ si y sólo si $t = 0$ o $a - bt^{p-2} = 0$, es decir $t = 0$ y $t = \pm\left(ab^{-1}\right)^{\frac{1}{p-2}}$. Ahora probaremos que $\lim_{|t|\to\infty} f(t) = -\infty$. Sea $M > 0$, si elegimos $N = máx\left\{\left(\frac{a+M}{b}\right)^{\frac{1}{p-2}}, 1\right\}$ se tiene que

$$\text{si } |t| > N \text{ entonces } b|t|^{p-2} - a > M$$

y de esta manera

$$at^2 - b\,|t|^p < -Mt^2 < -M,$$

de lo cual se concluye que

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = -\infty.$$

Y usando nuevamente el hecho de que f es par se tiene que

$$\lim_{|t|\to\infty} f(t) = -\infty.$$

■

Observación 4.8 *Ahora apliquemos el lema anterior a la función*

$$J_u(t) = \left(\frac{1}{2}\,\|u\|^2\right)t^2 - \left(\frac{1}{p}\,|u|_p^p\right)|t|^p \tag{4.1}$$

para determinar el comportamiento su gráfica para cada dirección $u \neq 0$. La función $J_u(t)$ tiene

i) *un mínimo local y un cero en $t = 0$,*

ii) *dos máximos en $t = \pm\left(\frac{\|u\|^2}{|u|_p^p}\right)^{\frac{1}{p-2}}$,*

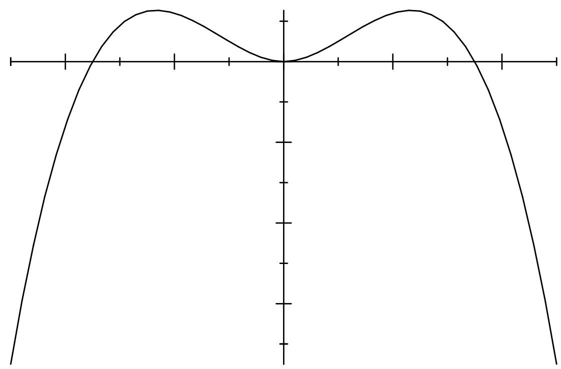
iii) *dos ceros en $t = \pm\left(\frac{p\|u\|^2}{2|u|_p^p}\right)^{\frac{1}{p-2}}$, además*

iv) $\lim_{|t|\to\infty} f(t) = -\infty$.

Por el lema anterior, $t = 0$ y $t = \pm\left(\frac{p\|u\|^2}{2|u|_p^p}\right)^{\frac{1}{p-2}}$, son los ceros de J_u, por continuidad, el signo de $J_u\left(\left(\frac{\|u\|^2}{|u|_p^p}\right)^{\frac{1}{p-2}}\right)$ nos determinará el comportamiento de la gráfica en $\left[0, \left(\frac{p\|u\|^2}{2|u|_p^p}\right)^{\frac{1}{p-2}}\right]$.

$$\begin{aligned}
J_u\left(\left(\frac{\|u\|^2}{|u|_p^p}\right)^{\frac{1}{p-2}}\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\|u\|^p}{|u|_p^p}\right)^{\frac{2}{p-2}} - \frac{1}{p}\left(\frac{\|u\|^p}{|u|_p^p}\right)^{\frac{p}{p-2}} \\
&= \left(\frac{p-2}{2p}\right)\left(\frac{\|u\|^p}{|u|_p^p}\right)^{\frac{2p}{p-2}} > 0,
\end{aligned}$$

es decir, si $t \in \left[0, \left(\frac{p\|u\|^2}{2|u|_p^p}\right)^{\frac{1}{p-2}}\right]$, $J_u(t) \geq 0$. *De esta manera, los incicsos i)-iv) nos indican que para cada dirección* $u \neq 0$, *la gráfica de* J_u *es de la siguiente forma:*



.

Definición 4.9 *Definimos* $\mathcal{N} := \{u \in H_0^1(\Omega) \mid u \neq 0 \text{ y } J'(u)u = 0\}$.

Observación 4.10 *Sea* $u \in H_0^1(\Omega) \backslash \{0\}$,

$$\|u\|^2 - |u|_p^p = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u - \int_\Omega |u|^{p-2} u^2 = J'(u)u = 0, \tag{4.2}$$

si y solamente si $u \in \mathcal{N}$. *Así llegamos a que* $\mathcal{N} = \left\{u \in H_0^1(\Omega) \mid u \neq 0 \text{ y } \|u\|^2 = |u|_p^p\right\}$.

Observación 4.11 *Si* $u \in H_0^1(\Omega) \backslash \{0\}$ *es punto crítico de* J *entonces* $u \in \mathcal{N}$, *pues* $J'(u)v = 0$ *para todo* $v \in H_0^1(\Omega)$, *simplemente hacemos* $v = u$.

Observación 4.12 *Sea* $u \in H_0^1(\Omega) \backslash \{0\}$. *Por la Observación 4.8, para cada* $u \in H_0^1(\Omega)$ *existe una única* $t_u > 0$ *tal que* t_u *es un máximo* J_u, *ya que 4.1 y 4.2 implican que*

$$0 = J_u'(t_u) = \|u\|^2 |t_u|^2 - |u|_p^p |t_u|^{p-2} = J'(t_u u)tu,$$

en particular

$$J'(t_u u)t_u u = 0,$$

es decir, $t_u u \in \mathcal{N}$. *En resumen, para cada* $u \in H_0^1(\Omega)$ *existe una única* $t_u > 0$ *tal que* $t_u u \in \mathcal{N}$.

Teorema 4.13 *Sea* $u \in H_0^1(\Omega)$. *Entonces* $u \in \mathcal{N}$ *si y sólo si* $\text{máx}\{J(tu) : t \geq 0\} = J(u)$

Demostración: Supongamos que $\|u\|^2 = |u|_p^p$. Por la Observación 4.8, sabemos que J_u tiene un máximo en $t_0 = \pm \left(\frac{\|u\|^2}{|u|_p^p} \right)^{\left(\frac{1}{p-2}\right)} = \pm 1$. Por lo que se tiene que $max \{J(tu) : t \geq 0\} = J(u)$. Supongamos que $max \{J(tu) : t \geq 0\} = J(u)$. Esto implica que

$$J'(tu)|_{t=1} = J'(u) = \|u\|^2 - |u|_p^p = 0,$$

de lo que se concluye que $\|u\|^2 = |u|_p^p$.

Por lo tanto $u \in N$. ■

Teorema 4.14 *$\mathcal{N}$ es una variedad de clase C^1 y se le conoce como la variedad de Nehari.*

Demostración: Definimos $F : H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(u) = J'(u)u = \|u\|^2 - |u|_p^p.$$

Por el teorema anterior claramente se tiene que $\mathcal{N} = F^{-1}(0)$.

Por las Proposiciones 3.7 y 3.8, sabemos que $K(u) = \|u\|^2$ y $L(u) = |u|_p^p$ son de clase C^1 en $H_0^1(\Omega)$ y además que

$$F'(u)v = 2\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v - p\int_\Omega |u|^{p-2} uv \qquad \text{para todo } v \in H_0^1(\Omega).$$

Si $v = u$ y $u \in \mathcal{N}$, entonces

$$\begin{aligned} F'(u)u &= 2\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u - p\int_\Omega |u|^{p-2} uu \\ &= 2\|u\|^2 - p|u|_p^p \\ &= (2-p)\|u\|^2 \neq 0 \end{aligned}$$

pues $u \neq 0$ y $p > 2$. En consecuencia, 0 es valor regular de F.

Por lo tanto $\mathcal{N}$ es una variedad de clase C^1. ■

Teorema 4.15 *El campo vectorial $u \longmapsto u$ en $H_0^1(\Omega)$ es transversal a $\mathcal{N}$, es decir, $u \notin T_u\mathcal{N}$ para todo $u \in \mathcal{N}$.*

Demostración: Por la Observación 3.11 sabemos que $T_u\mathcal{N} := núcleo F'(u)$.

Sea $u \in \mathcal{N}$, por el teorema anterior $F'(u)u \neq 0$, por lo que se tiene que $u \notin núcleo F'(u)$.

Por lo tanto $u \notin T_u\mathcal{N}$. ■

Definición 4.16 *Sea $u \in \mathcal{N}$. Decimos que u es punto crítico de $J|_{\mathcal{N}} : \mathcal{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ si y sólo si $J'(u)v = 0$ para todo $v \in T_u\mathcal{N}$.*

Teorema 4.17 *Sea $u \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}$. Entonces u es punto crítico de $J : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ si y sólo si $u \in \mathcal{N}$ y u es punto crítico de $J|_{\mathcal{N}} : \mathcal{N} \longrightarrow \mathbb{R}$..*

Demostración: Supongamos primero que $J(u)v = 0$ para toda $v \in H_0^1(\Omega)$. Tenemos que demostrar que $u \in \mathcal{N}$ y $J'(u)v = 0$ para toda $v \in T_u\mathcal{N}$.
Por la Observación 4.11, si $u \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}$ es punto crítico de J entonces $u \in \mathcal{N}$. Además, por la Observación 3.11 $H_0^1(\Omega) = T_u\mathcal{N} \oplus \langle u \rangle$, ya que u es valor regular de F. Entonces, si $J'(u)v = 0$ para toda $v \in H_0^1(\Omega)$, en particular se cumple $J'(u)v = 0$ para toda $v \in T_u\mathcal{N}$.
Ahora supongamos que $u \in \mathcal{N}$ y que $J'(u)v = 0$ para toda $v \in T_u\mathcal{N}$. Sea $w \in H_0^1(\Omega)$. Usando nuevamente el hecho que $H_0^1(\Omega) = T_u\mathcal{N} \oplus \langle u \rangle$ existen $v \in T_u\mathcal{N}$ y $\alpha(w) \in \mathbb{R}$ tales que $w = v + \alpha u$. Entonces

$$\begin{aligned} J'(u)w &= J'(u)\,(v + \alpha u) \\ &= J'(u)v + \alpha J'(u)u \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto $J'(u)w = 0$ para toda $w \in H_0^1(\Omega)$. ■

El Teorema 4.17 nos da una nueva dirección para la búsqueda de soluciones débiles de (P): Hay que probar la existencia de puntos críticos de $J|_{\mathcal{N}}$. Pero al restringir J a $\mathcal{N}$. se tiene que $\forall u \in \mathcal{N}$

$$\begin{aligned} J|_{\mathcal{N}}(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{p}|u|_p^p \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\|u\|^2 = \left(\frac{p-2}{2p}\right)\|u\|^2 . \end{aligned}$$

O bien,

$$J|_{\mathcal{N}}(u) = \left(\frac{p-2}{2p}\right)|u|_p^p .$$

Como $J|_{\mathcal{N}} \geq 0$, $J|_{\mathcal{N}}$ está acotada inferiormente, por lo que es natural preguntarnos si J alcanza su mínimo en $\mathcal{N}$. Sabemos que $\mathcal{N}$ es homeomorfa a la esfera unitaria en $H_0^1(\Omega)$ y por [1, Teorema IV.5], la esfera unitaria nunca es compacta en un espacio de dimensión infinita, así que en este caso no podemos aplicar algún argumento que utilice el concepto de compacidad. Sin embargo, ésto no es impedimento para que J alcance su mínimo en $\mathcal{N}$, pero para poder probarlo, necesitamos un pequeño, pero muy importante resultado, que enunciamos a continuación.

Lema 4.18 *Existe $\rho_0 > 0$ tal que $\|u\| \geq \rho_0$ para toda $u \in \mathcal{N}$. En consecuencia, $\mathcal{N}$ es un subconjunto cerrado de $H_0^1(\Omega)$.*

Demostración: Por el corolario 2.17, existe una constante $D > 0$ tal que

$$\frac{1}{D^2} \leq \frac{\|u\|^2}{|u|_p^2} = \frac{\|u\|^2}{\left(|u|_p^p\right)^{\frac{2}{p}}} = \|u\|^{2(1-\frac{2}{p})} \quad \text{para todo } u \in \mathcal{N},$$

entonces

$$\rho_0 \leq \|u\| \quad \forall u \in \mathcal{N},$$

donde $\rho_0 = D^{\frac{2}{p}-1} > 0$. Por lo tanto, tenemos que

$$\mathcal{N} = \left\{ u \in H_0^1(\Omega) \mid \|u\| \geq \rho_0 \ y \ \|u\|^2 - |u|_p^p = 0 \right\},$$

el cual podemos observar que es un subconjunto cerrado de de $H_0^1(\Omega)$. ■

Por fin, tenemos todas las herramientas necesarias para probar el último teorema de este trabajo, y cuya demostración engloba los resultados más sobresalientes de cada capítulo. Así pues, lo enunciamos como sigue.

Teorema 4.19 *J alcanza su mínimo en $\mathcal{N}$.*

Demostración: Sea $\alpha := \text{ínf}\,\{J(v) \mid v \in \mathcal{N}\}$ (tiene sentido hablar de α ya que $J(v) \geq 0$). Tenemos que $\alpha \geq 0$ por definición de ínfimo.

a) $\alpha > 0$

Como $\alpha := \text{ínf}\,\{J(v) \mid v \in \mathcal{N}\}$, por definición de ínfimo existe una sucesión $(u_n) \in \mathcal{N}$ tal que $J(u_n) \to \alpha$, dicho de otra manera $\left(\frac{p-2}{2p}\right) \|u_n\|^2 \to \alpha$.

Si $\alpha = 0$ entonces $\left(\frac{p-2}{2p}\right) \|u_n\|^2 \to 0$, por lo que $\|u_n\| \to 0$, es decir, $u_n \to 0$ en $H_0^1(\Omega)$, pero como $\mathcal{N}$ es cerrado, tendríamos que $0 \in \mathcal{N}$, lo cual no puede ser por la manera en que se definió $\mathcal{N}$.

Por lo tanto $\alpha > 0$.

b) (u_n) está acotada en $H_0^1(\Omega)$

Sea $b_n := \left(\frac{p-2}{2p}\right)\|u_n\|^2$. Entonces $b_n \to \alpha$ en $\mathbb{R}$,de lo que se sigue que existe $M > 0$ tal que $|b_n| = \left(\frac{p-2}{2p}\right)\|u_n\|^2 \leq M\ \forall n \in \mathbb{N}$, de esta manera se tiene que

$$\|u_n\| \leq \sqrt[2]{\frac{2pM}{p-2}} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto (u_n) está acotada en $H_0^1(\Omega)$.

Entonces por el Corolario 2.20 (u_n) contiene una subsucesión, a la que por simplicidad denotaremos también (u_n), tal que $u_n \rightharpoonup u$ débilmente en $H_0^1(\Omega)$ y por el Teorema de Rellich-Kondrakov $u_n \to u$ fuertemente en $L^p(\Omega)$. Entonces

$$J(u_n) = \left(\frac{p-2}{2p}\right)|u_n|_p^p \to \left(\frac{p-2}{2p}\right)|u|_p^p.$$

lo cual implica que $\left(\frac{p-2}{2p}\right)|u|_p^p = \alpha$, entonces

$$|u|_p = \sqrt[p]{\frac{2p\alpha}{p-2}},$$

es decir, $u \neq 0$.

Ahora, sabemos que $u_n \rightharpoonup u$ si y solamente si $\|u\| \leq \liminf_{n\to\infty}\|u_n\|$ por [3, Teorema 21.9], entonces tenemos que $\|u\|^2 \leq \liminf_{n\to\infty}\|u_n\|^2$ y $|u|_p^p = \lim_{n\to\infty}|u_n|_p^p$. Reescribiendo

$$J(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{p}|u|_p^p \leq \liminf_{n\to\infty}\frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{p}|u|_p^p.$$

Sabemos por la Observación 4.12 que existe una única $t_u > 0$ tal que $t_u u \in \mathcal{N}$, entonces

$$\begin{aligned}
\alpha &\leq J(t_u u) = \frac{1}{2}\|t_u u\|^2 - \frac{1}{p}|t_u u|_p^p \\
&\leq \liminf_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\|t_u u_n\|^2\right) + \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{p}|t_u u_n|_p^p\right) \\
&\leq \liminf_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}\|t_u u_n\|^2 - \frac{1}{p}|t_u u_n|_p^p\right] \\
&= \liminf_{n\to\infty} J(t_u u_n) \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} J(u_n) = \alpha,
\end{aligned}$$

por el Teorema 4.13 y usando el hecho de que J es continua. Entonces tenemos que $J(t_u u) = \alpha$ y $t_u u \in \mathcal{N}$, de lo cual se sigue que

$$J(t_u u) = \left(\frac{p-2}{2p}\right) |t_u u|_p^p = \alpha = \left(\frac{p-2}{2p}\right) |u|_p^p ,$$

es decir, $t_u = 1$, $u \in \mathcal{N}$ y $J(u) = \alpha$.

Por lo tanto J alcanza su mínimo en $\mathcal{N}$. ■

Finalmente, hemos demostrado la existencia de $u \in \mathcal{N}$ que minimiza al funcional $J|_{\mathcal{N}}$, es decir, encontramos u punto crítico de $J|_{\mathcal{N}} : \mathcal{N} \longrightarrow \mathbb{R}$. De esta manera, todo nuestro trabajo puede resumirse en el siguiente resultado, con el cual terminamos esta tesis.

Corolario 4.20 *El problema (P) tiene una solución débil en $u \in H_0^1(\Omega)$.*

Demostración: Por el Teorema anterior existe $u \in \mathcal{N}$ que minimiza al funcional $J|_{\mathcal{N}}$, es decir, u es punto crítico de $J|_{\mathcal{N}} : \mathcal{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, y por el Corolario 4.17, u es punto crítico de $J : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$. Ahora, por el Corolario 4.6, u es solución débil de (P), ya que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_\Omega |u|^{p-2} uv dx \ = J'(u)v = 0 \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

lo cual implica que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_\Omega |u|^{p-2} uv dx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Es decir, u es una solución débil de (P). ■

Capítulo 5

Conclusiones

Hemos llegado hasta el final de esta jornada. Por ello, es prudente hacer un breve recuento de todo lo que hemos hecho para llegar hasta aquí, pues se dice que todo gran viaje comienza con un primer paso y resulta natural el pensar que para llegar a nuestro destino, todos los pasos subsiguientes fueron de vital importancia y que no se puede pensar en que alguno de ellos es más importante que los demás. Pero antes, comentaremos algunos aspectos que no se abordaron en esta tesis.

5.1. Lo que no se vió

Dado que nuestro problema tiene una solución débil, resulta natural hacerse dos preguntas:

1. ¿Esta solución débil es una solución clásica?
2. ¿Existen más soluciones débiles de (P)?

El objetivo primordial de esta tesis fue mostrar la existencia de soluciones débiles del problema (P) y las dos preguntas anteriores quedaron en segundo plano. Sin embargo, ofrecemos al lector un camino para responder la primera: existe toda una teoría de regularidad para problemas elípticos ampliamente desarrollada y una referencia muy completa para consultar este tipo de resultados es el libro *Elliptic partial differential equations of second order* de Gilbarg y Trudinger [5], en el que se estudian las condiciones que deben cumplir los operadores elípticos para garantizar que las soluciones débiles sean soluciones clásicas. Otra gran referencia es el libro *Partial differential equations* de Evans [2], el cual podemos catalogar como un excelente libro de texto para aquellos que desean iniciarse en el tema y que recomendamos ampliamente.La segunda pregunta queda sin respuesta, al menos en esta tesis, pero esperamos retomarla en un futuro cercano.

5.2. Resumen final

Para finalizar este último capítulo y así concluir la tésis, expondremos un resumen acerca de qué fue lo que se vió en cada capítulo y tratando de ver en perspectiva todo el camino que se recorrió para llegar hasta el final, que fue el demostrar la existencia de soluciones débiles. De esta manera se podrá apreciar de mejor manera qué fue lo que se tuvo que hacer para llegar a nuestro objetivo. Por tratarse de un resumen, no se enunciarán los teoremas de manera fiel, si no que serán nombrados de manera informal.

En el capítulo 1, **se presentó el problema elíptico nolineal** (P) que se iba a tratar en la tesis.

En el capítulo 2, introdujimos los espacios de funciones $\boldsymbol{C_c^\infty(\Omega)}$ y $\boldsymbol{L^1_{loc}(\Omega)}$, para definir el concepto de **derivada débil** y probar algunas propieades relacionadas con ésta. Esto nos dió paso para definir el espacio de Sobolev $\boldsymbol{H^1(\Omega)}$ y se probó que es un espacio de Hilbert con la norma inducida por el producto escalar $\langle u, v\rangle_1$ (**Teorema 2.9**). Como $\boldsymbol{C_c^\infty(\Omega)}$ está contenido en $\boldsymbol{H^1(\Omega)}$, se definió $\boldsymbol{H_0^1(\Omega)}$ como la cerradura de $\boldsymbol{C_c^\infty(\Omega)}$ en $\boldsymbol{H^1(\Omega)}$. Así, dado que la completación de un espacio es única y por el **teorema 2.11**, $\boldsymbol{H_0^1(\Omega)}$ es el espacio adecuado para trabajar en esta tesis.

En la segunda sección de este capítulo, se probaron varios resultados importantes que eran necesarios para ver que en $\boldsymbol{H_0^1(\Omega)}$, la norma inducida por el producto escalar $\langle u, v\rangle$ era equivalente a la norma inducida por $\langle u, v\rangle_1$. Utilizamos el **teorema de Rellick-Kondrakov** para demostrar el **Corolario 2.20** que jugaría un papel determinante al final del capítulo 4.

En la primera sección del capítulo 3, caracterizamos a los **operadores acotados** entre espacios de Banach como operadores continuos (**Teorema 2.13**). Luego definimos el espacio $\boldsymbol{L(X, Y)}$, donde $\boldsymbol{X}$ y $\boldsymbol{Y}$ son espacios de Banach, para después definir la **derivada de Gâteaux** y el concepto de **función de clase $\boldsymbol{C^1}$** y se probaron varias propiedades relacionadas con ellas. Las **proposiciones 3.7** y **3.8** probaron la diferenciabilidad de la norma inducida por el producto escalar en un espacio de Hilbert y de la norma en $\boldsymbol{L^p(\Omega)}$ vistas como funciones de sus respectivos espacios en $\mathbb{R}$, llegando a que, vistas como funciones eran de clase $\boldsymbol{C^1}$.

En la siguiente sección, se introdujo la noción de **variedad de Hilbert** y **espacio tangente a una variedad.** Se dió una caracterización de este último y se probó el **teorema** 3.14, que se usó en el Capítulo 4.

Al inicio del Capítulo 4, se definieron las nociones de **solución clásica** y **solución débil.** En la sección 4.2 se hizo el **planteamiento variacional del problema** (P) a través de un funcional $\boldsymbol{J}$ definido en $\boldsymbol{H_0^1(\Omega)}$ con valores reales y se vió que **los puntos críticos de $\boldsymbol{J}$ eran las soluciones débiles de nuestro problema.** Luego estudiamos el comportamiento de la gráfica de $\boldsymbol{J(tu)}$ para cada dirección fija $\boldsymbol{u}$ y se introdujo la **variedad de Nehari.** Se utilizó lo primero para ver que los puntos críticos de $\boldsymbol{J}$ se encuentran en la variedad de Nehari y que además eran puntos críticos de $J|_{\mathcal{N}}$ (**Corolario 4.17**). Esto fue lo que nos condujo al último resultado, el **teorema 4.19, que demuestra la existencia de un mínimo de** $J|_{\mathcal{N}}$, y con ello, **que nuestro problema tiene al menos una solución débil.**

Apéndice A

La variedad de Nehari es homeomorfa a la esfera unitaria en $\boldsymbol{H_0^1(\Omega)}$

Definición A.1 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto. Se define la esfera unitaria en $\boldsymbol{H_0^1(\Omega)}$*

$$\boldsymbol{S}^1 := \left\{ u \in H_0^1(\Omega) \mid \|u\| = 1 \right\}.$$

Teorema A.2 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto. Las variedades $\boldsymbol{S}^1$y $\mathcal{N}$ son homeomorfas.*

Demostración: Definimos $g : \mathcal{N} \longrightarrow \boldsymbol{S}^1$dada por

$$g(u) := \frac{u}{\|u\|} \quad \forall\, u \in \mathcal{N}.$$

Nótese que esta función hace unitario a cada $u \in \mathcal{N}$ y esta función es continua.

Por otro lado, se construye la función $h : \boldsymbol{S}^1 \to \mathcal{N}$ de la siguiente manera:

Si tomamos $u \in \boldsymbol{S}^1$ necesitamos $t_u u \in \mathcal{N}$ que satisfaga

$$\|t_u u\|^2 = |t_u u|_p^p \text{ con } t_u \in (0, \infty)$$

entonces

$$\|u\|^2 = t_u^{p-2} |u|_p^p$$

despejando t_u y recordando que $\|u\|^2 = 1$ se tiene que

$$t_u = \left(\frac{1}{|u|_p^p} \right)^{\frac{1}{p-2}}.$$

De lo anterior podemos definir $h : \boldsymbol{S}^1 \longrightarrow \mathcal{N}$ como

$$h(u) := \left(\frac{1}{|u|_p^p} \right)^{\frac{1}{p-2}} u \quad \forall\, u \in \boldsymbol{S}^1$$

y al igual que en el caso de la función g, h es continua. Ahora sólo hay que demostrar que las composiciones $g \circ h$ y $h \circ g$ son en realidad las funciones identidad en $\boldsymbol{S}^1$ y $\mathcal{N}$ respectivamente.
Sea $u \in \boldsymbol{S}^1$, aplicando $g \circ h$ se tiene que

$$\begin{aligned}
(g \circ h)(u) &= g\left(\left(\frac{1}{|u|_p^p} \right)^{\frac{1}{p-2}} u \right) \\
&= \frac{\left(\frac{1}{|u|_p^p} \right)^{\frac{1}{p-2}} u}{\left\| \left(\frac{1}{|u|_p^p} \right)^{\frac{1}{p-2}} u \right\|} \\
&= u
\end{aligned}$$

pues recordemos que $\|u\|^2 = 1$. Por otro lado, tomemos $u \in \mathcal{N}$ entonces

$$\begin{aligned}
(h \circ g)(u) &= h\left(\frac{u}{\|u\|} \right) \\
&= \left(\frac{1}{\left| \frac{u}{\|u\|} \right|_p^p} \right)^{\frac{1}{p-2}} \frac{u}{\|u\|} \\
&= \left(\frac{\|u\|^p}{|u|_p^p} \right)^{\frac{1}{p-2}} \frac{u}{\|u\|}
\end{aligned}$$

pero usando el hecho que $\|u\|^2 = |u|_p^p$

$$\begin{aligned}
(h \circ g)(u) &= \left(\frac{\|u\|^p}{\|u\|^2} \right)^{\frac{1}{p-2}} \frac{u}{\|u\|} \\
&= \left(\frac{\|u\|^p}{\|u\|^2 \, \|u\|^{p-2}} \right)^{\frac{1}{p-2}} u \\
&= u.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la variedad de Nehari y la Esfera Unitaria son homeomorfas en $\boldsymbol{H}_0^1(\boldsymbol{\Omega})$.

■

Bibliografía

[1] H. Brezis, *Análisis funcional,* Alianza Editorial, Madrid 1984.

[2] L. C. Evans, *Partial differential equations,* GSM 19, Amer. Math. Soc. 1998.

[3] J. Jost, *Postmodern analysis,* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 2003

[4] J. Dieudonné, *Foundations of modern analysis,* Academic Press, 1969

[5] D. Gilbarg, N.S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Grundelheren **224**, Sprigner-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokio 1983

[6] M. Clapp, *Introducción al Análisis Real*, Notas de Clase, UNAM, 2012

[7] K. Long, *Gâteaux differentials and Fréchet derivatives*, Notas de Clase, Texas Tech University, 2009

Un libro abierto es un cerebro que habla; cerrado, un amigo que espera; olvidado, un alma que perdona; destruido, un corazón que llora.

Proverbio hindú