



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
INGENIERÍA ELÉCTRICA – CONTROL

SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIA PARA ROBOTS MÓVILES
CON RESTRICCIONES NO HOLONÓMICAS POR MEDIO DE
REDISEÑO DE LYAPUNOV

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:

JUAN CARLOS TRUJILLO FLORES

TUTOR PRINCIPAL

Dr. MARCO ANTONIO ARTEAGA PÉREZ, FACULTAD DE INGENIERÍA

MÉXICO, D. F. AGOSTO 2014



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Maya Ortiz Paul Rolando

Secretario: Dr. Tang Xu Yu

Vocal: Dr. Arteaga Pérez Marco Antonio

1^{er.} Suplente: Dr. Benítez Pérez Héctor

2^{do.} Suplente: Dr. Aranda Bricaire Eduardo

Lugar o lugares donde se realizó la tesis: Universidad Nacional Autónoma de México

TUTOR DE TESIS:

Dr. Arteaga Pérez Marco Antonio

FIRMA

(Segunda hoja)

Agradecimientos

Primeramente agradezco a Dios todo poderoso, el cual nos brinda la oportunidad y los medios para vivir y lograr nuestras metas.

Agradezco a mis padres que durante mi vida me han apoyado en cada decisión que tomo y siempre están junto a mí.

Agradezco al proyecto PAPIIT IN109611 ” *Control de robots con restricciones no holonómicas y modelo dinámico desconocido*” por brindarme la oportunidad de trabajar en su proyecto y poner en disposición el material necesario para desarrollarlo.

Agradezco a Conacyt por su apoyo económico, ya que sin él no sería posible que realizará mis estudios de posgrado.

Agradezco a mis hermanas que siempre me han apoyado y me dan palabras de aliento y consejo.

Agradezco a mi novia por siempre estar junto a mí y apoyarme en mi camino aunque en ocasiones nos distanciamos por mis metas.

Agradezco a mi tutor Dr. Marco Arteaga Pérez por brindarme parte de su conocimiento y darme la oportunidad de ser su alumno.

Agradezco a mis compañeros que siempre me brindan su amistad y su apoyo.

Agradezco a mis amigos que siempre me alientan y aconsejan positivamente en mi camino.

Agradezco a la UNAM por brindarme la oportunidad de superación y con ello lograr ser un mejor mexicano.

Resumen

En este trabajo primero se busca llegar al modelo matemático que describa las características de la cinemática y dinámica de un robot móvil de configuración diferencial.

Apoyados en los modelos matemáticos anteriores a continuación se diseña una ley de control no lineal robusta ante incertidumbre paramétrica basada en el método de Rediseño de Lyapunov; se parte de una ley diseñada por el método de Backstepping.

El algoritmo de control propuesto se implementa con éxito en un robot móvil experimental.

Índice general

Agradecimientos	2
Resumen	4
1. Robots móviles	10
1.1. Introducción	10
1.2. Planteamiento del problema	13
1.3. Objetivos	14
1.3.1. Objetivo general	14
1.3.2. Objetivos particulares	14
1.4. Alcance del trabajo	14
1.5. Justificación del trabajo	15
1.6. Estado del arte	15
1.6.1. Configuraciones cinemáticas de los robots móviles con ruedas .	16
1.6.2. Control de los robots móviles con ruedas	19
1.6.3. Estructura del documento	20
2. Modelado	22
2.1. Introducción	22
2.2. Modelado del robot móvil	22
2.2.1. Modelo cinemático	23
2.2.2. Modelo dinámico	25
3. Control Robusto	39
3.1. Introducción	39

3.2. Control Backstepping	39
3.2.1. Control para el subsistema cinemático	41
3.2.2. Control para el subsistema dinámico del robot móvil	45
3.2.3. Estabilidad en lazo cerrado del sistema completo	50
3.3. Rediseño de Lyapunov	51
3.3.1. Rediseño de Lyapunov para el subsistema dinámico del robot móvil	51
3.3.2. Estabilidad en lazo cerrado del sistema completo con el Rediseño de Lyapunov	55
4. Resultados experimentales	59
4.1. Introducción	59
4.2. Parametrización de la trayectoria deseada	59
4.2.1. Trayectoria Parametrizada	59
4.3. Experimentos en tiempo real	61
4.3.1. Experimento 1	61
4.3.2. Experimento 2	66
4.3.3. Experimento 3	70
5. Conclusiones	74
5.1. Objetivos cubiertos	75
5.2. Aportaciones	76
5.3. Trabajos futuros	76
A. Características del robot móvil experimental RM10	77
A.1. Tarjeta de Control	79
A.2. Llantas actuadas y de locomoción	80
A.3. Actuadores (motores de corriente directa de imán permanente) y encoders magnéticos	80
A.4. Interfaz gráfica	82
Bibliografía	84

Índice de figuras

1.1. Robot Shakey.	11
1.2. Robot Sojourner.	12
1.3. Configuraciones de los robots móviles con ruedas.	16
1.4. Tipos de ruedas de locomoción de los robots móviles con ruedas.	17
2.1. Sistema del robot móvil.	23
3.1. Estructura del control cinemático.	41
3.2. Error de seguimiento.	42
3.3. Estructura del control dinámico.	46
4.1. Trayectoria parametrizada	60
4.2. Posición deseada y real (Experimento 1)	63
4.3. Error en X (Experimento 1)	64
4.4. Error en Y (Experimento 1)	64
4.5. Error en θ (Experimento 1)	65
4.6. Velocidades de los motores (Experimento 1)	65
4.7. Posición deseada y real (Experimento 2)	67
4.8. Error en X (Experimento 2)	68
4.9. Error en Y (Experimento 2)	68
4.10. Error en θ (Experimento 2)	69
4.11. Velocidades de los motores (Experimento 2)	69
4.12. Posición deseada y real (Experimento 3)	71
4.13. Error en X (Experimento 3)	72
4.14. Error en Y (Experimento 3)	72

4.15. Error en θ (Experimento 3)	73
4.16. Velocidades de los motores (Experimento 3)	73
A.1. Robot móvil experimental.	78
A.2. Tarjeta de control RoboClaw.	79
A.3. Llantas actuadas.	80
A.4. Llantas tipo caster.	80
A.5. Curvas de operación del motor EMG49.	81
A.6. Motor EMG49.	81
A.7. Interfaz gráfica.	82

Índice de cuadros

4.1. Parámetros nominales	61
4.2. Valores para la trayectoria parametrizada (Experimento 1)	62
4.3. Resultados del Experimento 1	62
4.4. Valores para la trayectoria parametrizada (Experimento 2)	66
4.5. Resultados del Experimento 2	66
4.6. Valores para la trayectoria parametrizada (Experimento 3)	70
4.7. Resultados del Experimento 3	70

Capítulo 1

Robots móviles

1.1. Introducción

La robótica ha jugado un papel preponderante durante el desarrollo de la humanidad, y su evolución ha ido siempre de la mano con la construcción de artefactos que materialicen el deseo de crear entes que faciliten el trabajo. En antiguas civilizaciones, como la griega, se hablaba de seres mecánicos con vida que eran movidos por mecanismos contruidos con poleas y bombas hidráulicas. Sin embargo, el concepto de robot como tal comenzó a hilvanarse en la civilización árabe, donde se le dio sentido a dichos mecanismos en beneficio del ser humano. Es así como da inicio la sorprendente evolución de la robótica [Barberá01][Urdiales01]. Aunque con el paso del tiempo fueron desarrolladas un gran número de figuras dotadas de partes móviles, no se tenía un concepto general de cómo definir las; en 1920 el escritor checo Capek, en su obra dramática *Rossum's Universal Robots* [Capek01], acuñó el término robot a partir de la palabra checa *robota*, que significa servidumbre o trabajo forzado. Por su parte, Asimov introdujo, por primera vez, el término robótica, en la historia Runaround de su obra; *I, Robot* [Asimov61], incluyendo en ese mismo trabajo, las tres leyes de la robótica. Fue así que, como consecuencia de los trabajos que hasta entonces se habían realizado aunados al éxito de las obras mencionadas, la robótica acaparó la atención no sólo de aficionados a la ciencia ficción, sino también de científicos e investigadores que fueron adentrándose al estudio de la misma.

En la actualidad, los robots no sólo se asemejan a los seres humanos, sino que han

tomado formas diversas para satisfacer ciertas necesidades de la mejor manera. A consecuencia de la aparición de la computadora y de la alta integración de circuitos, se pudieron desarrollar los primeros intentos de un verdadero robot en 1940 en el MIT [Craig06]. En 1952 aparece la primera máquina de control numérico para automatizar algunas tareas industriales. Por su parte, la compañía Unimates [Selig92], introdujo el primer robot industrial en la *General Motors* en 1961. Con la venida de nuevas tecnologías de planificación y razonamiento automático, entre 1966 y 1972 se desarrolló en el SRI el primer Vehículo Guiado Automáticamente (VGA, por sus siglas en español), llamado Shakey, véase la Figura 1.1, que era una plataforma móvil independiente, controlada por visión mediante una cámara y dotada con un detector táctil. Shakey era capaz de navegar en entornos cerrados estructurados de forma autónoma. En tiempos más actuales, uno de los eventos que marcó la historia de los vehículos guiados automáticamente, fue el aterrizaje del Sojourner, véase la Figura 1.2, en la superficie de Marte, el 5 de julio de 1997.



Figura 1.1: Robot Shakey.

Particularmente, gran parte de los desarrollos de la robótica se han enfocado a los robots de tipo manipulador ya que tienen un amplio campo de aplicación principalmente en líneas de producción automatizadas en la industria, *e.g.* robots soldadores, pintores, de manejo de materiales o de ensamble. Sin embargo, existe toda una gama de formas y aplicaciones diversas de los robots, dependiendo de la tarea que deban

realizar. De esta manera se pueden considerar diferentes criterios para su clasificación como son [Contreras03]: por su arquitectura, por su generación, por el nivel de inteligencia, por el nivel de control o por el nivel del lenguaje de programación.



Figura 1.2: Robot Sojourner.

Dentro de las subespecialidades de la robótica, los vehículos guiados automáticamente o robots móviles son un tema de investigación interesante por varias razones: Primero, porque debido al grado de inteligencia y todo lo que implica su implementación, se requiere de la aplicación de conocimientos y técnicas de varias disciplinas, tales como física, matemáticas, mecánica, electrónica, control automático y computación. Segundo, porque los vehículos guiados automáticamente son una aproximación muy cercana a la creación de un agente inteligente [Russell03], sistema capaz de procesar la información de su entorno y establecer un comportamiento similar al del ser humano. Tercero, porque las aplicaciones de los vehículos guiados automáticamente son innumerables, tales como: exploración planetaria, minera y marítima, reconocimiento de terreno, inspección y vigilancia, misiones de búsqueda, y rescate de personas, limpieza de desechos peligrosos y ambientes diversos, asistencia médica, ocio y entretenimiento, investigación y desarrollo, investigación militar, industria metalmeccánica, industria química, agricultura, transporte, entre otros. En complemento y con el objetivo de conformar una herramienta más eficaz, también son utilizados como plataformas móviles en aplicaciones que requieren de la integración con otros tipos de robots; tal es el caso de los vehículos que incorporan un brazo manipulador, utilizados como elementos de seguridad en la inspección y manejo de paquetes sospechosos, neutralización de dispositivos explosivos, manipulación de productos químicos peligrosos y materiales radiactivos, etc. Y finalmente, debido al elemento

estético y artístico que se le puede dar a la estructura física de los robots móviles. Un vehículo guiado automáticamente se define como un sistema electromecánico capaz de desplazarse en forma autónoma de un punto a otro en determinado espacio de trabajo (nave industrial, laboratorio, hogar, corredor, oficinas, hospital, etc.). Se entiende como autonomía de un robot móvil, al dominio que tiene este para terminar su curso de acción, mediante su propio proceso de razonamiento basado en sensores que le permiten percibir el espacio de trabajo.

De acuerdo al tipo de locomoción que los vehículos guiados automáticamente emplean para desplazarse, se clasifican en tres categorías: robots de ruedas [Muir87] [Campion96], robots de patas [Raibert83] [Todd85] y robots de orugas [Iwamoto83] [Granosik05]. En las últimas décadas, el control de los robots móviles con ruedas ha sido objeto de interés continuo. Estos se enmarcan dentro de la teoría de control en el área que se conoce como control de sistemas no holonómicos, los cuales se caracterizan por estar sujetos a restricciones no integrales en las velocidades, es decir su plano de velocidades está restringido [Murray93]. Otros ejemplos de sistemas no holonómicos son los satélites y las manos robotizadas. Desde el punto de vista de la teoría de control, los principales problemas asociados a los robots móviles son: la regulación a un punto de equilibrio del móvil, el seguimiento de trayectorias, y la evasión de obstáculos.

1.2. Planteamiento del problema

Hoy en día, el tema del control de robots móviles ha venido acaparando la atención de gran cantidad de investigadores. Desde el punto de vista de la teoría de control, estos se encuentran en el área que se conoce como control de sistemas no holonómicos; se caracterizan por tener un número menor de grados de libertad controlables respecto al número de grados de libertad totales. En el caso de un vehículo de tracción diferencial, el número total de grados de libertad son 3 (posición x , y , orientación θ). Sin embargo, únicamente se puede controlar el desplazamiento hacia adelante y hacia atrás así como la orientación, quedando como incontrolable el desplazamiento transversal. Matemáticamente se dice que el sistema está sujeto a restricciones no integrables en las velocidades, es decir, su plano de velocidades está restringido. El

control del movimiento de este tipo de robots se puede clasificar en cuatro tareas fundamentales: localización, planificación de trayectoria, seguimiento de trayectoria y evasión de obstáculos. El planteamiento del problema consiste en diseñar una estrategia de control robusta ante incertidumbre paramétrica que controle el movimiento del robot móvil para lograr seguimiento de trayectoria y orientación deseada. En particular se plantea el problema de controlar en tiempo real un vehículo de tres grados de libertad guiado automáticamente y experimentar con él tareas de seguimiento de trayectorias.

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo general

Diseñar una estrategia de control no lineal robusta ante incertidumbre paramétrica que controle el movimiento de robots móviles para lograr seguimiento de trayectoria deseada.

1.3.2. Objetivos particulares

1. Obtener los modelos matemáticos que describan el comportamiento cinemático y dinámico del vehículo guiado automáticamente de configuración diferencial.
2. Implementar la ley de control obtenida en un robot móvil experimental.
3. Validación del esquema de control propuesto.

1.4. Alcance del trabajo

1. Se obtendrá el modelo cinemático y dinámico del vehículo guiado automáticamente.
2. Se aportará una ley de control no lineal robusta ante incertidumbre paramétrica para lograr seguimiento de trayectoria deseada.

3. Se validará la ley de control diseñada implementandola en un robot móvil experimental.

1.5. Justificación del trabajo

Las aplicaciones de los vehículos guiados automáticamente se encuentran en una etapa de crecimiento. En los próximos años los vehículos móviles serán cada día más comunes conforme la tecnología avance y los costos de construcción disminuyan. Por esto, la importancia de trabajar en esta apasionante área de la robótica.

En la Sección 1.1, se mencionaron algunas aplicaciones de los robots móviles. Otra aplicación de los vehículos guiados automáticamente con alto impacto y beneficio social, son los vehículos de transporte y asistencia al usuario. En específico se trata de vehículos móviles que funcionan como sillas de ruedas robotizadas con asistencia a pacientes parapléjicos y cuadripléjicos. Este tipo de vehículos se encuentran aún muy limitados en cuanto a su inteligencia y son costosos.

1.6. Estado del arte

La mayoría de los robots móviles que se han reportado en artículos, construidos y evaluados, utilizan ruedas para su locomoción. Esto se debe a que los robots móviles con ruedas son más eficientes en energía que los robots de patas o de orugas en superficies lisas y firmes [Bekker60][Bekker69]. Por otro lado, los vehículos con ruedas requieren un número de partes menor y menos complejas, en comparación con aquellos de patas o de orugas, lo que permite que su construcción sea más fácil. Adicionalmente, el control de las ruedas es menos complejo que la actuación de las patas o de las orugas, además que causan menor desgaste de la superficie en comparación con las bandas de las orugas [Holland83]. En lo referente a las partes de las que se compone un robot móvil de ruedas, se tiene un arreglo cinemático y un sistema de actuadores, que dotan de movimiento a la estructura cinemática. Ambos sistemas están íntimamente ligados y son dignos de estudiarse en conjunto; no obstante, se ha logrado un mayor avance, en el estado del arte, al estudiarlos por separado.

1.6.1. Configuraciones cinemáticas de los robots móviles con ruedas

Existen diferentes configuraciones cinemáticas para los vehículos móviles que dependen principalmente de la aplicación del vehículo [Azcon03]. No obstante, de manera general se tienen las que se muestran en la Figura 1.3, *e.g.* Ackerman, triciclo clásico, tracción diferencial, skid steer, síncrona y tracción omnidireccional.

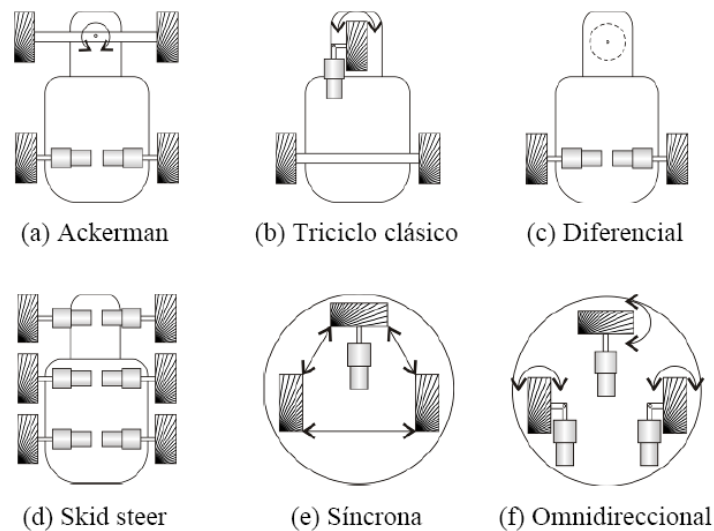


Figura 1.3: Configuraciones de los robots móviles con ruedas.

Dependiendo de la configuración cinemática que lo conforme, los robots móviles utilizan cuatro tipos de ruedas para su locomoción que son [Goris05]: convencionales, tipo castor, ruedas de bolas y omnidireccionales, como se observa en la Figura 1.4. En el marco de las configuraciones cinemáticas posibles y las ruedas que éstas utilizan, los robots más documentados en la literatura emplean comúnmente la configuración de tracción diferencial con ruedas convencionales, como ruedas motrices y una o dos ruedas tipo castor, de bola u omnidireccionales, para proveer de estabilidad al vehículo. De esta manera, los robots con dichas características más conocidos en la literatura son: Shakey [Nilsson84], Newt [Holis97], y Hilare [Giralt79].

Por otro lado, en la literatura se tienen algunos ejemplos de robots móviles con ruedas con estructuras cinemáticas más complejas, tales como: Terregator [Wallace85],



Figura 1.4: Tipos de ruedas de locomoción de los robots móviles con ruedas.

Gemini [Helmes85], Neptune [Schempf95], Uranus [Martin98], CMU Rover4 [Moravec83] y el Stanford Cart [Moravec80]. Es destacable el caso particular de los robots de péndulo invertido balanceados en dos ruedas [Grasser00] o en una sola [Lauwers06] y que son capaces de mantener el equilibrio ante perturbaciones externas. Referente al empleo de ruedas omnidireccionales, se han generado nuevas configuraciones cinemáticas de los vehículos móviles. En un principio fueron utilizadas en sillas de ruedas que eran impulsadas manualmente [Holland83], pero en la actualidad, no sólo se emplean para dar estabilidad a plataformas móviles, sino que inclusive, se emplean como único tipo de ruedas en ciertas configuraciones cinemáticas [Spenko04] y [Oetomo03]. Las configuraciones cinemáticas tienen aplicación en diversas áreas, sin embargo, para este trabajo es conveniente una variante de la configuración de tracción diferencial que incorpora un par de ruedas de tipo castor. Esta configuración es apropiada debido a que cuenta únicamente con dos ruedas motrices, a diferencia de otras configuraciones, con lo que se reducen costos de desarrollo y complejidad de control porque es suficiente un par de actuadores para lograr movimiento. Por otro lado, al poseer dos ruedas de tipo castor, que se encuentran en la parte frontal del vehículo, se brinda estabilidad al móvil y, aún más conveniente, el movimiento de giro total se simplifica a sólo invertir el sentido de giro de las ruedas motrices, por

lo que no es necesaria propiamente la rotación y por lo tanto el control de ese movimiento es bastante más sencillo. Aunado a lo anterior, se consigue un mejor balance del robot móvil al contar con cuatro puntos de apoyo sobre la superficie donde se mueve, dos de las ruedas motrices y dos de las ruedas de tipo castor.

Con el objeto de hacer más tratable el problema del modelado en las configuraciones cinemáticas, se suelen establecer algunas suposiciones de diseño y de operación [Muir92]. En el lado del diseño generalmente se hacen tres suposiciones. La primera va dirigida a considerar que las partes dinámicas del vehículo son insignificantes, es decir; que no contiene partes flexibles. De esta manera pueden aplicarse mecanismos de cuerpo rígido para el modelado cinemático. La segunda limita que la rueda tenga a lo más un eslabón de dirección, con la finalidad de reducir la complejidad del modelado. La tercera es asumir que todos los ejes de dirección son perpendiculares a la superficie para reducir todos los movimientos a un sólo plano. Con respecto a las suposiciones de operación, se tienen igualmente tres suposiciones. Una de ellas descarta toda irregularidad de la superficie donde se mueve el vehículo. Otra, considera que la fricción de traslación en el punto de contacto de la rueda con la superficie donde se mueve, es lo suficientemente grande para que no exista un desplazamiento de traslación del móvil. Como complemento a lo anterior, una tercer suposición de operación establece que la fricción rotacional en el punto de contacto de la rueda con la superficie donde se mueve, es lo suficientemente pequeña para que exista un desplazamiento rotatorio. Aunque las suposiciones mencionadas son realistas, el deslizamiento que ocurre en el punto de contacto de las ruedas con la superficie se ha convertido en un tópico importante debido a las repercusiones que tiene sobre el vehículo. Principalmente, el deslizamiento se presenta debido a las irregularidades del terreno e influencia al sistema esencialmente en dos factores [Chakraborty03], el primero ocasiona errores de posicionamiento en los robots móviles que utilizan odometría para su localización [Borenstein96] y el segundo provoca desperdicio de energía que es un aspecto fundamental en algunas aplicaciones, como la exploración planetaria. Es así como algunos investigadores han dedicado esfuerzos para desarrollar modelos matemáticos complejos para los robots móviles con ruedas convencionales, donde se toma en cuenta el deslizamiento que existe en el punto de contacto entre la rueda y

la superficie de movimiento [Shekhar97] [Balakrishna95] [Scheding99].

1.6.2. Control de los robots móviles con ruedas

Existen diversos trabajos donde se describen diferentes técnicas de control para los robots móviles con ruedas, se mencionarán algunos de los más relevantes que se encuentran en la literatura y se pondrá especial énfasis en los trabajos referentes a los robots móviles de tipo diferencial y seguimiento de trayectoria debido a la naturaleza de este trabajo. Sobre la localización en los robots móviles se han aplicado técnicas basadas en visión artificial [Aguiar00] [Borenstein95] [Jaquez05]. Así mismo, técnicas para planificación de trayectorias, se reportan en [Payne04]. Algunos trabajos abarcan tanto la planificación como el seguimiento de trayectoria, tal es el caso de [Fabio05], en donde además de la planificación de trayectoria se aplicaron técnicas de inteligencia artificial para el seguimiento de la misma. De igual forma en [Guzmán03] además de la planificación de la trayectoria, se llevó a cabo el seguimiento de esta mediante el método de persecución pura.

En relación puntual al tópico de seguimiento de trayectoria, existen diferentes métodos para lograr esta tarea. Por una parte en [Barea05] se utilizan técnicas de electroculografía para enviar comandos que son interpretados por el robot móvil; en otras palabras, el control se realiza mediante la posición del ojo dentro de su órbita. Así mismo, un control mediante campos adaptativos de velocidad y un controlador diferenciable se propuso en [Dixion05]. Esta técnica se basa en el control de campos de velocidad (VFC, por sus siglas en inglés) junto con un control adaptativo. La trayectoria deseada se describe por un vector de velocidad tangente y la principal ventaja del VFC reside en el hecho de que el error en el control del campo de velocidad impide eficientemente que el robot deje la trayectoria deseada. En el trabajo [Seyr05] se muestra un método basado en control predictivo para solucionar el problema del control no holonómico por medio de un algoritmo de Gauss-Newton que permite minimizar el error de posición. Por otro lado, en [Dongbing06] se presenta un controlador de modelo predictivo o Receding Horizon (RH). Este tipo de control es frecuentemente utilizado en la optimización de técnicas de control en la industria. Se diseña principalmente para tratar el problema de restricciones y se trata de un algoritmo de mejora que predice las salidas del sistema con base en los estados que

en ese momento estén presentes y al modelo propio del sistema. Uno de los métodos más empleados en el seguimiento de trayectoria es el de persecución pura (*pure pursuit*) [Amidi90]. Este método genera arcos entre el punto de desplazamiento del robot móvil y los puntos de la trayectoria a seguir. Los arcos se generan de 10 a 15 veces por segundo, lo que resulta en un seguimiento suave y con muy buenos resultados. Otro método para el seguimiento de trayectoria es conocido como ajuste de polinomios de quinto orden (*Quintic Polynomial Fit*).

Otro trabajo interesante se encuentra en [X-Li05], donde se propuso un control lineal por retroalimentación proporcional para lograr que el robot móvil empujara una pelota sobre una trayectoria preestablecida. Cabe mencionar los trabajos con robots móviles que se enfocan al control a través de Internet [Khamis03]. En [Solea09] se reporta una técnica de control basada en modos deslizantes para seguimiento de trayectoria. En [Fierro97] se utiliza una técnica de control basada en el método de Backstepping. Un trabajo donde se utiliza un vehículo guiado automáticamente como plataforma móvil para transportar un brazo robótico se encuentra en [Holmberg03].

1.6.3. Estructura del documento

En el **Capítulo 1** se muestra un panorama general de los vehículos guiados automáticamente o robots móviles. Se describe el planteamiento del problema, objetivos y alcances del trabajo.

En el **Capítulo 2** se muestra la obtención del modelo cinemático y dinámico del robot móvil.

En el **Capítulo 3** se desarrolla el diseño de la ley de control no lineal robusta ante incertidumbres paramétricas basada en el método de Rediseño de Lyapunov, así como también el desarrollo del diseño de la ley base apoyada en el método de Backstepping.

En el **Capítulo 4** se implementa la ley de control obtenida en un robot móvil experimental y se obtienen gráficas que muestran errores de seguimiento de diversas

trayectorias deseadas. También se obtiene el índice de desempeño del controlador por medio del error cuadrático medio.

En el **Capítulo 5** se presentan conclusiones.

Capítulo 2

Modelado

2.1. Introducción

En este capítulo se desarrolla el modelo matemático del sistema que conforma al robot móvil, y que es necesario para diseñar esquemas de control.

Se considera un vehículo guiado automáticamente o robot móvil con dos ruedas de tracción en configuración diferencial. Básicamente consiste de dos ruedas en un eje común, donde cada rueda se controla independientemente, cuyos movimientos son

- Línea recta
- En arco
- Vuelta sobre su propio eje.

En primer lugar, se obtiene el modelo cinemático a partir de la teoría de la mecánica clásica. Posteriormente se obtiene el modelo dinámico bajo ciertas consideraciones no holonómicas y con base en las ecuaciones de movimiento de Lagrange.

2.2. Modelado del robot móvil

El modelado del robot móvil se divide en dos; el modelo cinemático y el modelo dinámico. Se considera que las ruedas motrices del vehículo son no deformables y que giran sin deslizarse sobre la superficie en que se mueve, el espacio de trabajo es

perfectamente plano y sin inclinaciones. En la Figura 2.1, se muestra el diagrama que representa al sistema en el plano y las variables que lo caracterizan.

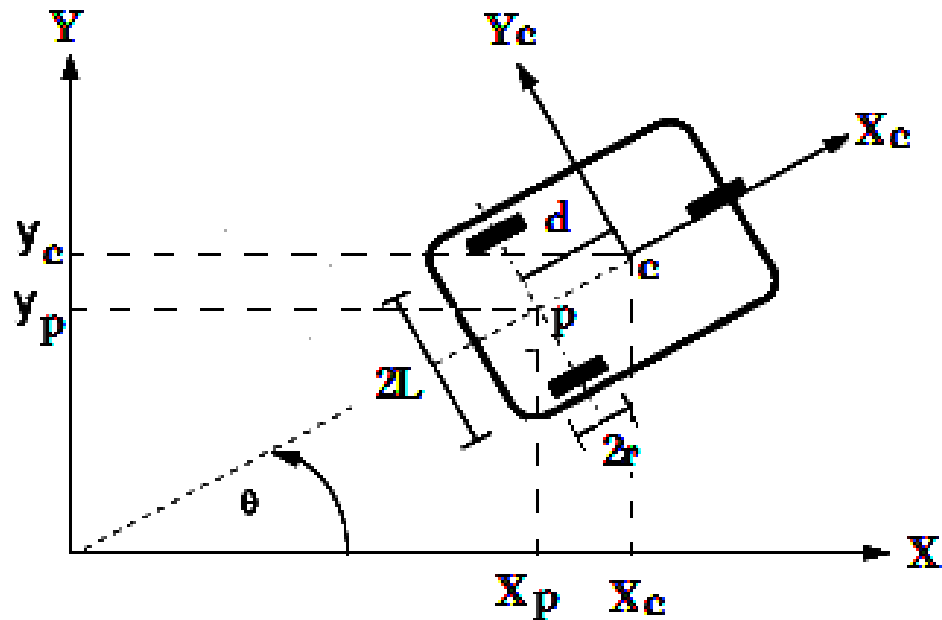


Figura 2.1: Sistema del robot móvil.

2.2.1. Modelo cinemático

La cinemática es el estudio del movimiento del vehículo sin considerar las fuerzas que lo ocasionan. Su análisis se basa en las variables de posición junto con sus derivadas (velocidad, aceleración, etc.). Existen dos enfoques dentro de la cinemática, llamados cinemática directa e inversa. El primer paso consiste en calcular la posición y orientación del vehículo respecto a un marco de coordenadas fijo, que sin pérdida de generalidad es el origen del plano XY. A diferencia de los brazos manipuladores, donde se utilizan matrices de transformación homogénea para determinar los movimientos básicos del brazo manipulador, en la robótica móvil la cinemática directa

puede verse como una transformación que mapea pares de trayectorias de velocidad $[v_p(t), w(t)]$ del vehículo, en trayectorias recorridas por el vehículo en el espacio cartesiano, es decir;

$$\Psi : [v_p(t), w(t)] \rightarrow X(t) = [x_c(t), y_c(t), \theta(t)] \quad (2.1)$$

donde

x_c es la posición en el plano del centro de masa del robot móvil con respecto al eje X ,

y_c es la posición en el plano del centro de masa del robot móvil con respecto al eje Y ,

θ es el ángulo de orientación que forma el vehículo con respecto al eje X en el plano

Se emplea la Figura 2.1, para tener mayor claridad de la posición del robot móvil en el plano. La velocidad lineal v_p está formada por las proyecciones de v_p según los ejes X e Y , es decir \dot{x}_p y \dot{y}_p . La velocidad angular w es igual a la razón de cambio de θ con respecto al tiempo, y se denota como $\dot{\theta}$. Por inspección, de la Figura 2.1 y por el método del paralelogramo para la suma de vectores puede encontrarse \dot{x}_c , \dot{y}_c y $\dot{\theta}$. La velocidad lineal del centro de masa del robot móvil cuenta con dos componentes, la proporcionada por la propia velocidad lineal del vehículo y la proporcionada por la velocidad angular, que aparece al encontrarse el centro de masa del robot móvil fuera del eje de las ruedas. Dicha velocidad lineal es igual a $\dot{\theta}d$, donde d es la distancia del centro del eje de las ruedas al centro de masa (ver Figura 2.1). Por lo tanto pueden escribirse las siguientes ecuaciones

$$x_c = x_p + d \cos \theta. \quad (2.2)$$

Derivando se obtiene

$$\dot{x}_c = \dot{x}_p - d \sin \theta \dot{\theta}. \quad (2.3)$$

Por lo tanto

$$\dot{x}_c = v_p \cos \theta - d \sin \theta \dot{\theta}. \quad (2.4)$$

De igual forma

$$y_c = y_p + d \sin \theta, \quad (2.5)$$

y

$$\dot{y}_c = \dot{y}_p + d \cos \theta \dot{\theta}. \quad (2.6)$$

Por lo tanto

$$\dot{y}_c = v_p \sin \theta + d \cos \theta \dot{\theta}. \quad (2.7)$$

Finalmente

$$\dot{\theta} = w. \quad (2.8)$$

El modelo cinemático del robot móvil en forma matricial queda entonces de la siguiente manera

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{y}_c \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -d \sin \theta \\ \sin \theta & d \cos \theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_p \\ w \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

2.2.2. Modelo dinámico

El modelo dinámico del vehículo guiado automáticamente considera la evolución de su posición $(x_c[\text{m}], y_c[\text{m}])$ y orientación $\theta[\text{rad}]$, así como la evolución de sus velocidades líneal $(v_p[\frac{\text{m}}{\text{s}}])$ y angular $(w)[\frac{\text{rad}}{\text{s}}]$ y sus respectivas aceleraciones $(\dot{v}_p[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}], \dot{w}[\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}])$. Todo ello en respuesta a las entradas del sistema, que son los pares que efectúan los actuadores en cada rueda y son representados como $\tau_l[\text{Nm}]$ para la rueda izquierda y $\tau_r[\text{Nm}]$ para la rueda derecha.

Se asume lo siguiente:

- El plano XY sobre el cual se desplaza el vehículo es completamente uniforme y sin pendientes.
- El coeficiente de fricción entre las ruedas y el piso puede ser despreciado
- La velocidad y área frontal del vehículo son pequeñas por lo que la resistencia aerodinámica se puede despreciar.

Bajo las consideraciones anteriores, el formalismo de Lagrange puede ser aplicado para encontrar el modelo dinámico del vehículo, el cual puede ser descrito por la siguiente forma de ecuaciones dinámicas:

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{B}(\mathbf{q})\boldsymbol{\tau} + \mathbf{A}^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda} \quad (2.10)$$

donde,

$\mathbf{H}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de inercia, simétrica y definida positiva

$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de las fuerzas de Coriolis y centrífugas

$\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de fuerzas gravitacionales

$\mathbf{B}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times p}$ es la matriz de transferencia de las entradas

$\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^p$ es el vector de fuerzas generalizadas

$\mathbf{A}^T(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ matriz Jacobiana de las restricciones de movimiento

$\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ es el vector de restricciones de fuerzas (multiplicador de Lagrange)

n es el número de coordenadas generalizadas del sistema

p es el número de entradas del sistema

m es el número de restricciones no holónomicas con las que cuenta el sistema.

El esquema del modelo dinámico dado en (2.10) es similar al utilizado de forma general con los robots manipuladores. Las diferencias se encuentran en el miembro derecho de la ecuación, donde se tiene en cuenta el hecho de que en los robots móviles existen restricciones no holónomicas.

Para obtener el modelo dinámico del sistema se necesita primero establecer las coordenadas generalizadas como

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ \theta \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Las fuerzas generalizadas que actúan en el sistema son los pares τ_l y τ_r .

La restricción no holonómica del robot establece que la base móvil satisface la condición de que las llantas no patinan sobre la superficie donde se mueven (*pure rolling*) y que la plataforma no tiene movimiento perpendicular a la dirección de movimiento de las llantas (*non slipping*), se obtiene al tomar en cuenta (2.2)-(2.7). Al despejar de (2.3) a \dot{x}_p y de (2.6) a \dot{y}_p se obtiene

$$\dot{x}_p = \dot{x}_c + d \sin \theta \dot{\theta} \quad (2.12)$$

$$\dot{y}_p = \dot{y}_c - d \cos \theta \dot{\theta}, \quad (2.13)$$

y tomando en cuenta lo siguiente

$$v_p = \frac{\dot{x}_p}{\cos \theta} = \frac{\dot{y}_p}{\sin \theta}, \quad (2.14)$$

se tiene

$$-\dot{x}_p \sin \theta + \dot{y}_p \cos \theta = 0. \quad (2.15)$$

Sustituyendo a (2.12) y (2.13) en (2.15) se obtiene la ecuación (2.16) que es la restricción no holonómica

$$\dot{y}_c \cos \theta - \dot{x}_c \sin \theta - d \dot{\theta} = 0. \quad (2.16)$$

A continuación se obtiene $\mathbf{A}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$ a partir de (2.16), que de igual forma representa a la restricción no holonómica

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -\sin \theta & \cos \theta & -d \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} = 0. \quad (2.17)$$

El siguiente paso es calcular la co-energía cinética del robot móvil que en este caso se divide en dos, la que se presenta por la velocidad lineal del robot móvil

$$U_v^* = \frac{1}{2}mv_p^2 \quad (2.18)$$

y la que se presenta por la velocidad angular del móvil

$$U_\omega^* = \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (2.19)$$

donde;

$m[\text{Kg}]$ es la masa del robot móvil

$v_p[\frac{\text{m}}{\text{s}}]$ es la velocidad lineal del robot móvil en el punto p

$I[\text{Kgm}^2]$ es el momento de inercia en el punto p del robot móvil

$\omega[\frac{\text{rad}}{\text{s}}]$ es la velocidad angular del robot móvil.

Tomando en cuenta (2.2)-(2.8), la co-energía cinética total del robot móvil en coordenadas generalizadas es la siguiente

$$U^* = \frac{1}{2}m[(\dot{x}_c + d\dot{\theta} \sin \theta)^2 + (\dot{y}_c - d\dot{\theta} \cos \theta)^2] + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 \quad (2.20)$$

El Lagrangiano de un sistema está dado por $L(q, \dot{q}) = U^*(\dot{q}) - T(q)$ donde $T(q)$ es la energía potencial correspondiente que en este caso $T(q) = 0$ ya que no hay ningún elemento almacenador de esfuerzo. Por lo tanto el Lagrangiano es

$$L = U^* \quad (2.21)$$

Para obtener el modelo dinámico del sistema se emplea la siguiente ecuación

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial J}{\partial \dot{q}} = \mathbf{f} + \mathbf{A}^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda} \quad (2.22)$$

J es energía disipada por el sistema. En este caso $J = 0$ ya que no hay ningún elemento disipador. Por lo tanto

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_c} = m\dot{x}_c + md\dot{\theta} \sin \theta \quad (2.23)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_c} = m\ddot{x}_c + md\dot{\theta}^2 \cos \theta + md\ddot{\theta} \sin \theta \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_c} = 0 \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_c} = m\dot{y}_c - md\dot{\theta} \cos \theta \quad (2.26)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_c} = m\ddot{y}_c + md\dot{\theta}^2 \sin \theta - md\ddot{\theta} \cos \theta \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_c} = 0 \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m\dot{x}_c \sin \theta - m\dot{y}_c \cos \theta + md^2\dot{\theta} + I\dot{\theta} \quad (2.29)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m\ddot{x}_c \sin \theta - m\ddot{y}_c \cos \theta + (I + md^2)\ddot{\theta} + m\dot{x}_c\dot{\theta} \cos \theta + m\dot{y}_c\dot{\theta} \sin \theta \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = md\dot{\theta}\dot{x}_c \cos \theta + md\dot{\theta}\dot{y}_c \sin \theta \quad (2.31)$$

Por lo tanto se puede llevar al sistema a la siguiente forma tomando en cuenta a (2.10) y (2.22).

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{B}(\mathbf{q})\boldsymbol{\tau} + \mathbf{A}^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda}. \quad (2.32)$$

Donde

$$\mathbf{H}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m & 0 & md \sin \theta \\ 0 & m & -md \cos \theta \\ md \sin \theta & -md \cos \theta & I + md^2 \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} md\dot{\theta}^2 \cos \theta \\ md\dot{\theta}^2 \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{0} \quad (2.35)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{q}) = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos \theta \\ \sin \theta & \sin \theta \\ L & -L \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_r \\ \tau_l \end{bmatrix}. \quad (2.37)$$

$r[\text{m}]$ es el radio de las ruedas del robot móvil

$L[\text{m}]$ es la distancia entre cada rueda y el centro del eje.

Para verificar que el vector $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$ obtenido anteriormente es correcto, se hará uso del método de los símbolos de Christoffel, los cuales están dados por

$$c_{kji} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial h_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial h_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial h_{kj}}{\partial q_i} \right) \quad (2.38)$$

donde $k, j, i = 1, 2, \dots, n$. Desarrollando todos los términos y aprovechando la propiedad $c_{kji} = c_{jki}$, se tiene

$$c_{111} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial h_{11}}{\partial q_1} + \frac{\partial h_{11}}{\partial q_1} - \frac{\partial h_{11}}{\partial q_1} \right) = 0 \quad (2.39)$$

$$c_{112} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial h_{21}}{\partial q_1} + \frac{\partial h_{21}}{\partial q_1} - \frac{\partial h_{11}}{\partial q_2} \right) = 0 \quad (2.40)$$

$$c_{113} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial h_{31}}{\partial q_1} + \frac{\partial h_{31}}{\partial q_1} - \frac{\partial h_{11}}{\partial q_3} \right) = 0 \quad (2.41)$$

$$c_{121} = c_{211} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial h_{12}}{\partial q_1} + \frac{\partial h_{11}}{\partial q_2} - \frac{\partial h_{12}}{\partial q_1} \right) = 0 \quad (2.42)$$

$$c_{122} = c_{212} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial h_{22}}{\partial q_1} + \frac{\partial h_{21}}{\partial q_2} - \frac{\partial h_{21}}{\partial q_2} \right) = 0 \quad (2.43)$$

$$c_{123} = c_{213} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial h_{32}}{\partial q_1} + \frac{\partial h_{31}}{\partial q_2} - \frac{\partial h_{12}}{\partial q_3} \right) = 0 \quad (2.44)$$

$$c_{131} = c_{311} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial h_{13}}{\partial q_1} + \frac{\partial h_{11}}{\partial q_3} - \frac{\partial h_{13}}{\partial q_1} \right) = 0 \quad (2.45)$$

$$c_{132} = c_{312} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial h_{23}}{\partial q_1} + \frac{\partial h_{21}}{\partial q_3} - \frac{\partial h_{13}}{\partial q_2} \right) = 0 \quad (2.46)$$

$$c_{133} = c_{313} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial h_{33}}{\partial q_1} + \frac{\partial h_{31}}{\partial q_3} - \frac{\partial h_{13}}{\partial q_3} \right) = \frac{1}{2} (md \cos \theta - md \cos \theta) = 0 \quad (2.47)$$

$$c_{221} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial h_{12}}{\partial q_2} + \frac{\partial h_{12}}{\partial q_2} - \frac{\partial h_{22}}{\partial q_1} \right) = 0 \quad (2.48)$$

$$c_{222} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial h_{22}}{\partial q_2} + \frac{\partial h_{22}}{\partial q_2} - \frac{\partial h_{22}}{\partial q_2} \right) = 0 \quad (2.49)$$

$$c_{223} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial h_{32}}{\partial q_2} + \frac{\partial h_{32}}{\partial q_2} - \frac{\partial h_{22}}{\partial q_3} \right) = 0 \quad (2.50)$$

$$c_{231} = c_{321} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial h_{13}}{\partial q_2} + \frac{\partial h_{12}}{\partial q_3} - \frac{\partial h_{23}}{\partial q_1} \right) = 0 \quad (2.51)$$

$$c_{232} = c_{322} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial h_{23}}{\partial q_2} + \frac{\partial h_{22}}{\partial q_3} - \frac{\partial h_{23}}{\partial q_2} \right) = 0 \quad (2.52)$$

$$c_{233} = c_{323} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial h_{33}}{\partial q_2} + \frac{\partial h_{32}}{\partial q_3} - \frac{\partial h_{23}}{\partial q_3} \right) = \frac{1}{2} (md \sin \theta - md \sin \theta) = 0 \quad (2.53)$$

$$c_{331} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial h_{13}}{\partial q_3} + \frac{\partial h_{13}}{\partial q_3} - \frac{\partial h_{33}}{\partial q_1} \right) = \frac{1}{2} (md \cos \theta + md \cos \theta) = md \cos \theta \quad (2.54)$$

$$c_{332} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial h_{23}}{\partial q_3} + \frac{\partial h_{23}}{\partial q_3} - \frac{\partial h_{33}}{\partial q_2} \right) = \frac{1}{2} (md \sin \theta + md \sin \theta) = md \sin \theta \quad (2.55)$$

$$c_{333} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial h_{33}}{\partial q_3} + \frac{\partial h_{33}}{\partial q_3} - \frac{\partial h_{33}}{\partial q_3} \right) = 0. \quad (2.56)$$

Para calcular la matriz de Coriolis con los símbolos de Christoffel, se tiene la siguiente ecuación

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n c_{kji} \dot{q}_k \quad (2.57)$$

con $i, j = 1, 2, \dots, n$, con ello se tiene lo siguiente

$$c_{11} = c_{111} \dot{q}_1 + c_{211} \dot{q}_2 + c_{311} \dot{q}_3 = 0 \quad (2.58)$$

$$c_{12} = c_{121} \dot{q}_1 + c_{221} \dot{q}_2 + c_{321} \dot{q}_3 = 0 \quad (2.59)$$

$$c_{13} = c_{131} \dot{q}_1 + c_{231} \dot{q}_2 + c_{331} \dot{q}_3 = md \cos \theta \dot{\theta} \quad (2.60)$$

$$c_{21} = c_{112} \dot{q}_1 + c_{212} \dot{q}_2 + c_{312} \dot{q}_3 = 0 \quad (2.61)$$

$$c_{22} = c_{122} \dot{q}_1 + c_{222} \dot{q}_2 + c_{322} \dot{q}_3 = 0 \quad (2.62)$$

$$c_{23} = c_{132} \dot{q}_1 + c_{232} \dot{q}_2 + c_{332} \dot{q}_3 = md \sin \theta \dot{\theta} \quad (2.63)$$

$$c_{31} = c_{113} \dot{q}_1 + c_{213} \dot{q}_2 + c_{313} \dot{q}_3 = 0 \quad (2.64)$$

$$c_{32} = c_{123}\dot{q}_1 + c_{223}\dot{q}_2 + c_{323}\dot{q}_3 = 0 \quad (2.65)$$

$$c_{33} = c_{133}\dot{q}_1 + c_{233}\dot{q}_2 + c_{333}\dot{q}_3 = 0, \quad (2.66)$$

por lo que finalmente la matriz de Coriolis queda de la siguiente forma

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & md\dot{\theta} \cos \theta \\ 0 & 0 & md\dot{\theta} \sin \theta \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{y}_c \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}. \quad (2.67)$$

Finalmente la representación matricial del sistema es la siguiente

$$\begin{bmatrix} m & 0 & md \sin \theta \\ 0 & m & -md \cos \theta \\ md \sin \theta & -md \cos \theta & I + md^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_c \\ \ddot{y}_c \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} md\dot{\theta}^2 \cos \theta \\ md\dot{\theta}^2 \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} = \quad (2.68)$$

$$\frac{1}{r} \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos \theta \\ \sin \theta & \sin \theta \\ L & -L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_r \\ \tau_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ -d \end{bmatrix} \lambda.$$

Algunas propiedades del modelo dinámico del robot móvil bien conocidas y muy importantes son las siguientes

Propiedad 1 La matriz de inercia $\mathbf{H}(\mathbf{q})$ es simétrica positiva definida.

Propiedad 2 La matriz $\mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es antisimétrica.

Para obtener el multiplicador de Lagrange se puede derivar (2.17),

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{A}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = 0, \quad (2.69)$$

y despejar $\ddot{\mathbf{q}}$ de (2.32) como

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})[\mathbf{B}(\mathbf{q})\boldsymbol{\tau} + \mathbf{A}^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{C}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}]. \quad (2.70)$$

Después se sustituye (2.70) en (2.69)

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})[\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})[\mathbf{B}(\mathbf{q})\boldsymbol{\tau} + \mathbf{A}^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{C}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}]] + \dot{\mathbf{A}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = 0. \quad (2.71)$$

A partir de (2.71) se obtiene el multiplicador de Lagrange

$$\boldsymbol{\lambda} = [\mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{A}^T(\mathbf{q})]^{-1}[-\mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{B}(\mathbf{q})\boldsymbol{\tau} + \mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{C}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{A}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}]. \quad (2.72)$$

Desarrollando

$$\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q}) = \frac{1}{I} \begin{bmatrix} m^{-1}I + d^2 - d^2 \cos^2 \theta & -d^2 \cos \theta \sin \theta & -d \sin \theta \\ -d^2 \cos \theta \sin \theta & m^{-1}I + d^2 - d^2 \sin^2 \theta & d \cos \theta \\ -d \sin \theta & d \cos \theta & 1 \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -m^{-1} \sin \theta & m^{-1} \cos \theta & 0 \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{A}^T(\mathbf{q}) = m^{-1} \quad (2.75)$$

$$[\mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{A}^T(\mathbf{q})]^{-1} = m \quad (2.76)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{B}(\mathbf{q})\boldsymbol{\tau} = 0 \quad (2.77)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{C}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} = 0 \quad (2.78)$$

$$\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = -\dot{x}_c \dot{\theta} \cos \theta - \dot{y}_c \dot{\theta} \sin \theta = -\dot{\theta}(\dot{x}_c \cos \theta + \dot{y}_c \sin \theta). \quad (2.79)$$

Por lo tanto

$$\lambda = m(\dot{x}_c \cos \theta + \dot{y}_c \sin \theta)\dot{\theta}. \quad (2.80)$$

Se pueden escribir las ecuaciones que representan la dinámica del sistema desarrollando (2.32)

$$m\ddot{x}_c + md\ddot{\theta} \sin \theta + md\dot{\theta}^2 \cos \theta = \frac{\cos \theta}{r}(\tau_r + \tau_l) - \sin \theta(m(\dot{x}_c \cos \theta + \dot{y}_c \sin \theta)\dot{\theta}). \quad (2.81)$$

Si se define

$$U_1 = \tau_r + \tau_l, \quad (2.82)$$

se obtiene

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_c &= \frac{\cos \theta}{r}U_1 - md\ddot{\theta} \sin \theta - md\dot{\theta}^2 \cos \theta - m\dot{x}_c\dot{\theta} \cos \theta \sin \theta - m\dot{y}_c\dot{\theta} \sin^2 \theta \\ &= \frac{\cos \theta}{r}U_1 - md\ddot{\theta} \sin \theta + m\dot{\theta}(-d\dot{\theta} \cos \theta - \dot{x}_c \cos \theta \sin \theta - \dot{y}_c \sin^2 \theta). \end{aligned}$$

Utilizando la restricción no holonómica (2.16) se tiene que $\dot{x}_c \sin \theta = \dot{y}_c \cos \theta - d\dot{\theta}$ de tal forma que

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_c &= \frac{\cos \theta}{r}U_1 - md\ddot{\theta} \sin \theta + m\dot{\theta}(-d\dot{\theta} \cos \theta - \cos \theta(\dot{y}_c \cos \theta - d\dot{\theta}) - \dot{y}_c \sin^2 \theta) \\ &= \frac{\cos \theta}{r}U_1 - md\ddot{\theta} \sin \theta - m\dot{y}_c\dot{\theta} \\ \ddot{x}_c &= \frac{\cos \theta}{mr}U_1 - d\ddot{\theta} \sin \theta - \dot{y}_c\dot{\theta}. \end{aligned}$$

Si se define

$$\alpha = \frac{U_1}{mr}, \quad (2.83)$$

se tiene

$$\ddot{x}_c = \alpha \cos \theta - d\ddot{\theta} \sin \theta - \dot{y}_c \dot{\theta}. \quad (2.84)$$

El mismo procedimiento se puede aplicar para \ddot{y}_c

$$m\ddot{y}_c - md\ddot{\theta} \cos \theta + md\dot{\theta}^2 \sin \theta = \frac{\sin \theta}{r}(\tau_r + \tau_l) + \cos \theta(m(\dot{x}_c \cos \theta + \dot{y}_c \sin \theta)\dot{\theta}). \quad (2.85)$$

Volviendo a utilizar (2.82) se obtiene

$$\begin{aligned} m\ddot{y}_c &= \frac{\sin \theta}{r}U_1 + md\ddot{\theta} \cos \theta - md\dot{\theta}^2 \sin \theta + m\dot{y}_c \dot{\theta} \cos \theta \sin \theta + m\dot{x}_c \dot{\theta} \cos^2 \theta \\ &= \frac{\sin \theta}{r}U_1 + md\ddot{\theta} \cos \theta + m\dot{\theta}(-d\dot{\theta} \sin \theta + \dot{y}_c \cos \theta \sin \theta + \dot{x}_c \cos^2 \theta). \end{aligned}$$

Utilizando la restricción no holonómica (2.16) se tiene que $\dot{y}_c \cos \theta = \dot{x}_c \sin \theta + d\dot{\theta}$ de tal forma que

$$\begin{aligned} m\ddot{y}_c &= \frac{\sin \theta}{r}U_1 + md\ddot{\theta} \cos \theta + m\dot{\theta}(-d\dot{\theta} \sin \theta + \sin \theta(\dot{x}_c \sin \theta + d\dot{\theta}) + \dot{x}_c \cos^2 \theta) \\ &= \frac{\sin \theta}{r}U_1 + md\ddot{\theta} \cos \theta + m\dot{x}_c \dot{\theta} \end{aligned}$$

$$\ddot{y}_c = \frac{\sin \theta}{mr}U_1 + d\ddot{\theta} \cos \theta + \dot{x}_c \dot{\theta}.$$

Empleando nuevamente (2.83) se tiene

$$\ddot{y}_c = \alpha \sin \theta + d\ddot{\theta} \cos \theta + \dot{x}_c \dot{\theta}. \quad (2.86)$$

Finalmente, para $\ddot{\theta}$ se tiene

$$md\ddot{x}_c \sin \theta - md\dot{y}_c \cos \theta + (I + md^2)\ddot{\theta} = \frac{L}{r}(\tau_r - \tau_l) - d(m(\dot{x}_c \cos \theta + \dot{y}_c \sin \theta)\dot{\theta}). \quad (2.87)$$

Si se define

$$U_2 = \tau_r - \tau_l, \quad (2.88)$$

se obtiene

$$\begin{aligned} (I + md^2)\ddot{\theta} &= -md\ddot{x}_c \sin \theta + md\dot{y}_c \cos \theta + \frac{L}{r}U_2 - md\dot{x}_c \dot{\theta} \cos \theta - md\dot{y}_c \dot{\theta} \sin \theta \\ &= -md\ddot{x}_c \sin \theta + md\dot{y}_c \cos \theta + \frac{L}{r}U_2 - md(\dot{x}_c \dot{\theta} \cos \theta + \dot{y}_c \dot{\theta} \sin \theta) \\ &= md(-\ddot{x}_c \sin \theta + \dot{y}_c \cos \theta) + \frac{L}{r}U_2 - md(\dot{x}_c \dot{\theta} \cos \theta + \dot{y}_c \dot{\theta} \sin \theta) \\ \ddot{\theta} &= \frac{md}{I + md^2}(-\ddot{x}_c \sin \theta + \dot{y}_c \cos \theta - \dot{x}_c \dot{\theta} \cos \theta - \dot{y}_c \dot{\theta} \sin \theta) + \frac{L}{Ir + md^2r}U_2. \end{aligned}$$

Si se define

$$\beta = \frac{L}{Ir + md^2r}U_2, \quad (2.89)$$

y

$$\Gamma = \frac{md}{I + md^2}. \quad (2.90)$$

Se obtiene

$$\ddot{\theta} = \Gamma(-\ddot{x}_c \sin \theta + \ddot{y}_c \cos \theta - \dot{x}_c \dot{\theta} \cos \theta - \dot{y}_c \dot{\theta} \sin \theta) + \beta. \quad (2.91)$$

Entonces (2.84), (2.86) y (2.91) forman el conjunto de ecuaciones que describen la dinámica del sistema

$$\ddot{x}_c = \alpha \cos \theta - d\ddot{\theta} \sin \theta - \dot{y}_c \dot{\theta} \quad (2.92)$$

$$\ddot{y}_c = \alpha \sin \theta + d\ddot{\theta} \cos \theta + \dot{x}_c \dot{\theta} \quad (2.93)$$

$$\ddot{\theta} = \Gamma(-\ddot{x}_c \sin \theta + \ddot{y}_c \cos \theta - \dot{x}_c \dot{\theta} \cos \theta - \dot{y}_c \dot{\theta} \sin \theta) + \beta. \quad (2.94)$$

Capítulo 3

Control Robusto

3.1. Introducción

En este capítulo se desarrolla el método de control que se aplicará al modelo del robot móvil. Primero se desarrolla el control basado en el método de Backstepping, el cual será utilizado como base ya que la aportación principal será mejorar el algoritmo previo empleando el método de rediseño de Lyapunov.

3.2. Control Backstepping

De acuerdo con la ecuación (2.10) se sabe que la dinámica del robot móvil está descrita por

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})[\mathbf{B}(\mathbf{q})\boldsymbol{\tau} + \mathbf{A}^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}]. \quad (3.1)$$

De igual forma la cinemática del mismo está descrita por la ecuación (2.9)

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{y}_c \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -d \sin \theta \\ \sin \theta & d \cos \theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_p \\ w \end{bmatrix} \triangleq \mathbf{S} \begin{bmatrix} v_p \\ w \end{bmatrix} = \mathbf{S}\mathbf{v}. \quad (3.2)$$

Para aplicar la técnica de Backstepping se toman en cuenta los dos sistemas anteriores.

Al sistema dinámico del robot móvil, que es subactuado, se le involucra la cinemática del robot, por lo que al final se obtiene un sistema formado por dos subsistemas. Al primero se le llama subsistema maestro (la cinemática), y al segundo subsistema esclavo (dinámica del robot móvil). Para llegar a dicho sistema se premultiplica la ecuación (3.1) por \mathbf{S}^T , con lo que se obtiene

$$\mathbf{S}^T[\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}] = \mathbf{S}^T[\mathbf{B}(\mathbf{q})\boldsymbol{\tau} + \mathbf{A}^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda}]. \quad (3.3)$$

Como $\mathbf{S}^T\mathbf{A}^T = \mathbf{0}$ se satisface entonces

$$\mathbf{S}^T\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{S}^T\mathbf{C}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{S}^T\mathbf{B}(\mathbf{q})\boldsymbol{\tau}. \quad (3.4)$$

Por otro lado, al derivar (3.2) se obtiene

$$\ddot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{S}}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{S}\ddot{\mathbf{v}}. \quad (3.5)$$

Sustituyendo (3.2) y (3.5) en (3.4) se obtiene

$$\mathbf{S}^T\mathbf{H}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{S}}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{S}^T\mathbf{H}(\mathbf{q})\mathbf{S}\ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{S}^T\mathbf{C}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\mathbf{S}\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{S}^T\mathbf{B}(\mathbf{q})\boldsymbol{\tau}. \quad (3.6)$$

Definiendo

$$\bar{\mathbf{H}} \triangleq \mathbf{S}^T\mathbf{H}(\mathbf{q})\mathbf{S} \quad (3.7)$$

$$\bar{\mathbf{C}} \triangleq \mathbf{S}^T\mathbf{H}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{S}} + \mathbf{S}^T\mathbf{C}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\mathbf{S} \quad (3.8)$$

$$\bar{\mathbf{B}} \triangleq \mathbf{S}^T\mathbf{B}(\mathbf{q}), \quad (3.9)$$

se puede expresar (3.6) de la siguiente manera

$$\bar{\mathbf{H}}\dot{\mathbf{v}} + \bar{\mathbf{C}}\mathbf{v} = \bar{\mathbf{B}}\boldsymbol{\tau}. \quad (3.10)$$

Finalmente el sistema obtenido después de la transformación es el siguiente

$$\Sigma = \begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{S}\mathbf{v} \\ \boldsymbol{\tau} = \bar{\mathbf{B}}^{-1}[\bar{\mathbf{H}}\dot{\mathbf{v}} + \bar{\mathbf{C}}\mathbf{v}] \end{cases} \quad (3.11)$$

3.2.1. Control para el subsistema cinemático

En la Figura 3.1, se muestra un diagrama de bloques con la estructura del control cinemático.

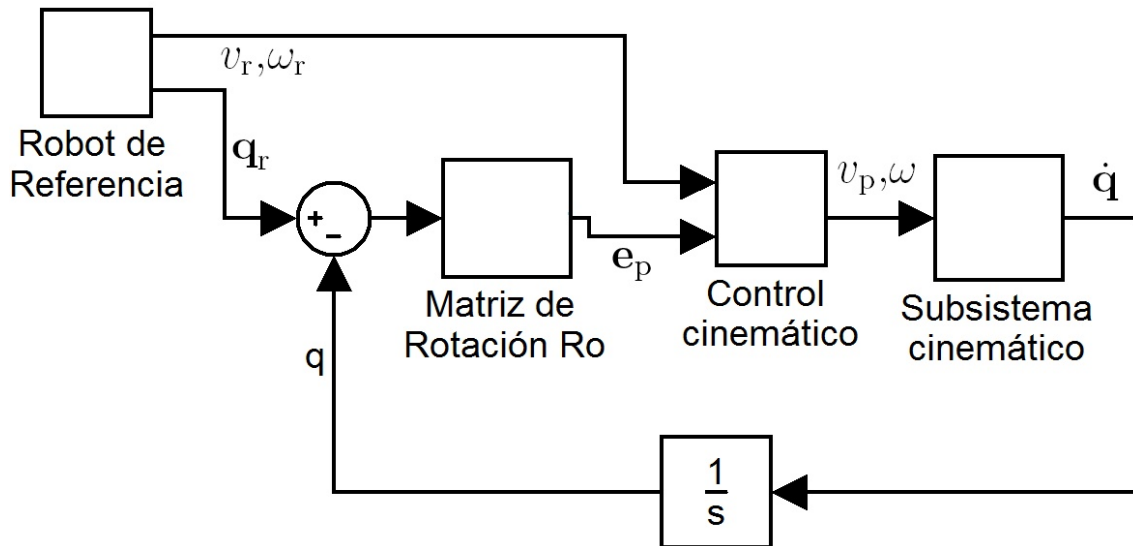


Figura 3.1: Estructura del control cinemático.

Como primer paso se diseña la ley de control para el subsistema cinemático de (3.11) con lo que se busca que $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{q}_r$ donde

$$\mathbf{q}_r = \begin{bmatrix} x_r \\ y_r \\ \theta_r \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

Estos son los valores de referencia que se desea seguir y se asume que la velocidad lineal de referencia $v_r > 0$ ya que se desea que el robot siempre vaya hacia adelante. La Figura 3.2 muestra un sistema del modelo del error. Se puede usar una matriz de rotación ortogonal para mapear el error del sistema de coordenadas globales hacia el error del sistema de coordenadas locales del carrito. Esto también puede deducirse

de la relación geométrica de la Figura 3.2, con lo que los errores se pueden establecer de la siguiente forma

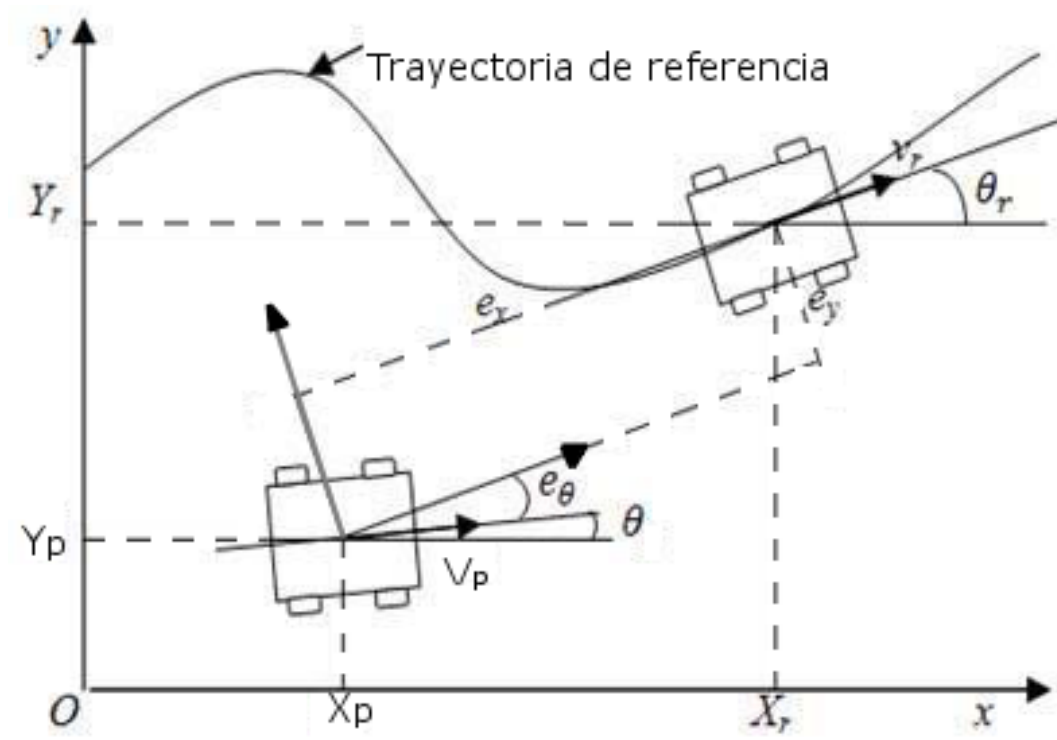


Figura 3.2: Error de seguimiento.

$$\mathbf{e}_p = \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_\theta \end{bmatrix} = \mathbf{R}_o(\mathbf{q}_r - \mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_r - x_p \\ y_r - y_p \\ \theta_r - \theta \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

Por facilidad, para obtener la ley de control se define el error de seguimiento con respecto al punto \$p\$ del robot, que es el centro del eje de las ruedas. Esto se hace por que conociendo la velocidad tanto lineal como angular de dicho punto se pueden conocer las velocidades de cualquier otro punto del robot. La derivada de (3.13) es la siguiente

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_p &= \begin{bmatrix} \dot{e}_x \\ \dot{e}_y \\ \dot{e}_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\theta\dot{\theta} & \cos\theta\dot{\theta} & 0 \\ -\cos\theta\dot{\theta} & -\sin\theta\dot{\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_r - x_p \\ y_r - y_p \\ \theta_r - \theta \end{bmatrix} + \\ &\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_r - \dot{x}_p \\ \dot{y}_r - \dot{y}_p \\ \dot{\theta}_r - \dot{\theta} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Desarrollando

$$\begin{aligned} \dot{e}_x &= -\sin\theta(x_r - x_p)\dot{\theta} + \cos\theta(y_r - y_p)\dot{\theta} + \cos\theta(\dot{x}_r - \dot{x}_p) + \sin\theta(\dot{y}_r - \dot{y}_p) \\ &= \dot{\theta}e_y + \cos\theta(\dot{x}_r - \dot{x}_p) + \sin\theta(\dot{y}_r - \dot{y}_p) \\ &= \dot{\theta}e_y + \cos\theta(\cos\theta_r v_r - \cos\theta v_p) + \sin\theta(\sin\theta_r v_r - \sin\theta v_p) \\ &= \dot{\theta}e_y - \cos^2\theta v_p - \sin^2\theta v_p + \cos\theta \cos\theta_r v_r + \sin\theta \sin\theta_r v_r \\ &= \dot{\theta}e_y - v_p + v_r(\cos\theta \cos\theta_r + \sin\theta \sin\theta_r). \end{aligned}$$

Por lo tanto se obtiene

$$\dot{e}_x = \dot{\theta}e_y - v_p + v_r \cos e_\theta. \quad (3.15)$$

De igual forma

$$\begin{aligned} \dot{e}_y &= -\cos\theta(x_r - x_p)\dot{\theta} - \sin\theta(y_r - y_p)\dot{\theta} - \sin\theta(\dot{x}_r - \dot{x}_p) + \cos\theta(\dot{y}_r - \dot{y}_p) \\ &= -\dot{\theta}e_x - \sin\theta(\dot{x}_r - \dot{x}_p) + \cos\theta(\dot{y}_r - \dot{y}_p) \\ &= -\dot{\theta}e_x - \sin\theta(\cos\theta_r v_r - \cos\theta v_p) + \cos\theta(\sin\theta_r v_r - \sin\theta v_p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\dot{\theta}e_x + \sin \theta \cos \theta v_p - \sin \theta \cos \theta v_p - \sin \theta \cos \theta_r v_r + \cos \theta \sin \theta_r v_r \\
&= -\dot{\theta}e_x + v_r(-\sin \theta \cos \theta_r + \cos \theta \sin \theta_r).
\end{aligned}$$

Finalmente

$$\dot{e}_y = -\dot{\theta}e_x + v_r \sin e_\theta. \quad (3.16)$$

De manera directa se tiene también

$$\dot{e}_\theta = \dot{\theta}_r - \dot{\theta}. \quad (3.17)$$

Por lo que se obtiene la dinámica del error cinemático como

$$\dot{\mathbf{e}}_p = \begin{bmatrix} \dot{e}_x \\ \dot{e}_y \\ \dot{e}_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}e_y - v_p + v_r \cos e_\theta \\ -\dot{\theta}e_x + v_r \sin e_\theta \\ \dot{\theta}_r - \dot{\theta} \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

El objetivo es que el robot siga la trayectoria deseada, y que los errores converjan a cero. Para ello se propone la siguiente función candidata de Lyapunov positiva definida para el subsistema cinemático

$$V_1 = \frac{1}{2}e_x^2 + \frac{1}{2}e_y^2 + (1 - \cos e_\theta), \quad (3.19)$$

cuya derivada es la siguiente

$$\dot{V}_1 = e_x \dot{e}_x + e_y \dot{e}_y + \sin e_\theta \dot{e}_\theta. \quad (3.20)$$

Sustituyendo (3.13) y (3.18) en (3.20) se obtiene

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1 &= e_x(\dot{\theta}e_y - v_p + v_r \cos e_\theta) + e_y(-\dot{\theta}e_x + v_r \sin e_\theta) + \sin e_\theta(\dot{\theta}_r - \dot{\theta}) \\
&= e_x \dot{\theta}e_y - e_x v_p + e_x v_r \cos e_\theta - e_y \dot{\theta}e_x + e_y v_r \sin e_\theta + \sin e_\theta \dot{\theta}_r - \sin e_\theta \dot{\theta} \\
&= -e_x v_p + e_x v_r \cos e_\theta + e_y v_r \sin e_\theta + \sin e_\theta \dot{\theta}_r - \sin e_\theta \dot{\theta}.
\end{aligned}$$

Puesto que v_p y w son las entradas de control para el subsistema cinemático (ver la Figura 3.1) se proponen las siguientes leyes

$$v_p = v_r \cos e_\theta + k_1 e_x v_r \quad (3.21)$$

y

$$\omega = \dot{\theta} = \dot{\theta}_r + e_y v_r + k_3 \sin e_\theta v_r \quad (3.22)$$

donde k_1 y $k_3 > 0$, de este modo (3.20) se convierte en

$$\dot{V}_1 = -k_1 v_r e_x^2 - k_3 v_r \sin^2 e_\theta \leq 0. \quad (3.23)$$

Eligiendo las leyes de control (3.21)-(3.22), la dinámica del error (3.18) queda de la siguiente manera

$$\dot{\mathbf{e}}_p = \begin{bmatrix} \dot{e}_x \\ \dot{e}_y \\ \dot{e}_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_r e_y + v_r e_y^2 + k_3 v_r e_y \sin e_\theta - k_1 v_r e_x \\ -\dot{\theta}_r e_x - v_r e_x e_y - k_3 v_r e_x \sin e_\theta + v_r \sin e_\theta \\ -v_r e_y - k_3 v_r \sin e_\theta \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$

Ahora bien, es claro que $\dot{V}_1 \leq 0$, es negativa semidefinida y $\dot{V}_1 = 0$ si y sólo si $e_x = \sin e_\theta = 0$. Usando el Teorema de LaSalle se tiene de (3.24)

$$\dot{e}_\theta = -v_r e_y - k_3 v_r \sin e_\theta, \quad (3.25)$$

como $\sin e_\theta = \dot{e}_\theta = 0$ y $v_r > 0$ se concluye que $e_y = 0$. Por otro lado, $\sin e_\theta = 0$ si $e_\theta = 0, \pm\pi, \pm2\pi, \dots$. Como $e_\theta \in [-\pi, \pi]$, esto significa que para garantizar que $e_\theta \rightarrow 0$ se requiere que $|e_\theta(0)| < \frac{\pi}{2}$. De esta forma el subsistema será asintóticamente estable.

3.2.2. Control para el subsistema dinámico del robot móvil

En la Figura 3.3, se muestra un diagrama de bloques con la estructura del control dinámico.

A continuación se diseña la ley de control para el subsistema dinámico del robot

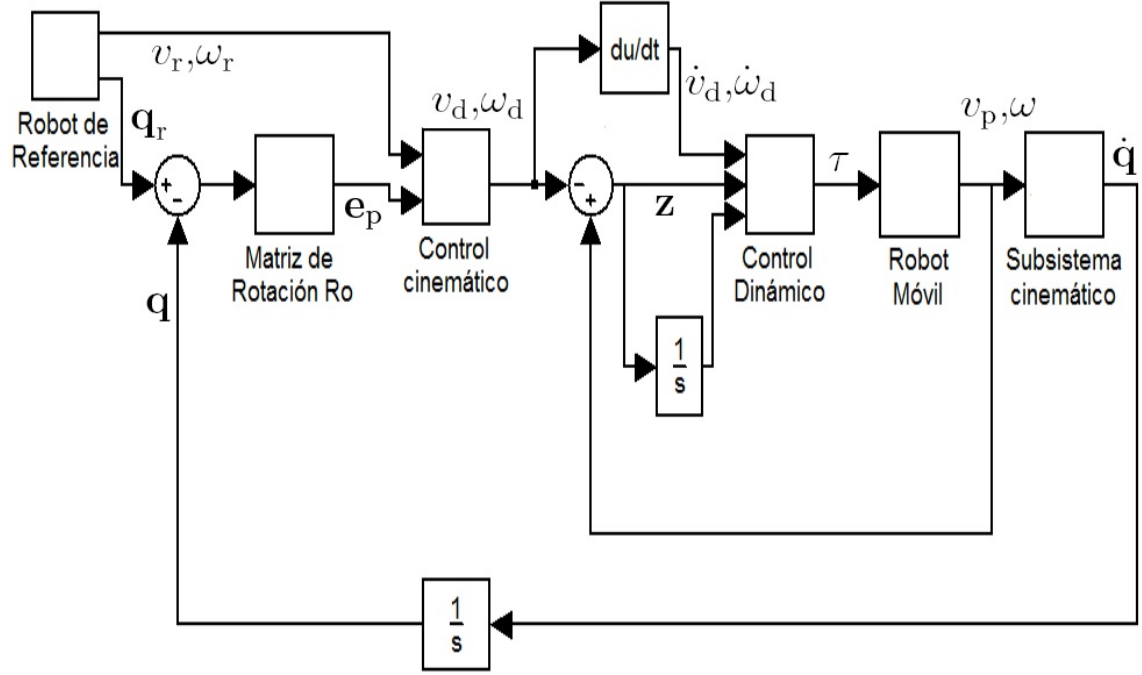


Figura 3.3: Estructura del control dinámico.

móvil con lo que se busca que $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}_d$ donde \mathbf{v}_d son las velocidades deseadas. Es importante notar que si se elige \mathbf{v}_d conforme a las leyes de control (3.21) y (3.22), entonces si $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}_d \implies \mathbf{q} \rightarrow \mathbf{q}_r$. Es decir, se propone

$$\mathbf{v}_d = \begin{bmatrix} v_{pd} \\ \omega_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_r \cos e_\theta + k_1 e_x v_r \\ \omega_r + e_y v_r + k_3 \sin e_\theta v_r \end{bmatrix}. \quad (3.26)$$

Para calcular la ley de control se restan las velocidades reales y deseadas de acuerdo con (3.10)

$$\bar{\mathbf{B}}\boldsymbol{\tau} - \bar{\mathbf{H}}\dot{\mathbf{v}}_d = \bar{\mathbf{H}}\dot{\mathbf{v}} + \bar{\mathbf{C}}\mathbf{v} - \bar{\mathbf{H}}\dot{\mathbf{v}}_d. \quad (3.27)$$

Si se define

$$\mathbf{z} \triangleq \mathbf{v} - \mathbf{v}_d = \begin{bmatrix} e_v \\ e_\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_p - v_{pd} \\ w - w_d \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

y

$$\dot{\mathbf{z}} \triangleq \dot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{v}}_d = \begin{bmatrix} \dot{e}_v \\ \dot{e}_\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{v}_p - \dot{v}_{pd} \\ \dot{w} - \dot{w}_d \end{bmatrix}. \quad (3.29)$$

Entonces

$$\bar{\mathbf{B}}\boldsymbol{\tau} - \bar{\mathbf{H}}\dot{\mathbf{v}}_d = \bar{\mathbf{H}}\dot{\mathbf{z}} + \bar{\mathbf{C}}\mathbf{v}. \quad (3.30)$$

De (3.30) se puede despejar a $\dot{\mathbf{z}}$ como

$$\dot{\mathbf{z}} = \bar{\mathbf{H}}^{-1}[\bar{\mathbf{B}}\boldsymbol{\tau} - \bar{\mathbf{H}}\dot{\mathbf{v}}_d - \bar{\mathbf{C}}\mathbf{v}]. \quad (3.31)$$

Para diseñar una ley de control $\boldsymbol{\tau}$ que logre que el sistema (3.31) sea asintóticamente estable se emplea la siguiente función candidata de Lyapunov positiva definida

$$V_2 = \frac{1}{2}\mathbf{z}^T\mathbf{z}. \quad (3.32)$$

cuya derivada a lo largo de (3.31) es

$$\dot{V}_2 = \mathbf{z}^T[\bar{\mathbf{H}}^{-1}[\bar{\mathbf{B}}\boldsymbol{\tau} - \bar{\mathbf{H}}\dot{\mathbf{v}}_d - \bar{\mathbf{C}}\mathbf{v}]]. \quad (3.33)$$

Si se propone

$$\boldsymbol{\tau} = \bar{\mathbf{B}}^{-1}[\bar{\mathbf{H}}[\dot{\mathbf{v}}_d - \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{z}] + \bar{\mathbf{C}}\mathbf{v}], \quad (3.34)$$

con

$$\boldsymbol{\Gamma} > \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\Gamma} = \begin{bmatrix} k_4 & 0 \\ 0 & k_5 \end{bmatrix}. \quad (3.35)$$

Entonces la derivada de \dot{V}_2 satisface

$$\dot{V}_2 = -\mathbf{z}^T\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{z} < 0. \quad (3.36)$$

Por lo tanto el subsistema es asintóticamente estable.

A pesar de que la ley de control (3.34) garantiza la convergencia asintótica del error \mathbf{z} a cero, la respuesta transitoria no es completamente satisfactoria. Para mejorarla, de manera empírica se ha observado que conviene incluir un término integral. Considerese la siguiente función candidata de Lyapunov positiva definida

$$V_2 = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{z} + \xi^T \mathbf{z} + \frac{1}{2} \xi^T \xi + \frac{1}{2} \xi^T \mathbf{\Gamma} \xi + \frac{1}{2} \xi^T \mathbf{\Psi} \xi, \quad (3.37)$$

donde

$$\mathbf{\Psi} > \mathbf{0}, \quad \mathbf{\Psi} = \begin{bmatrix} k_6 & 0 \\ 0 & k_7 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

$$\xi = \int_0^t \mathbf{z}(\sigma) \partial \sigma = \begin{bmatrix} e_{iv} \\ e_{i\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^t e_v(\sigma) \partial \sigma \\ \int_0^t e_\omega(\sigma) \partial \sigma \end{bmatrix}, \quad (3.39)$$

y por lo tanto

$$\dot{\xi} = \mathbf{z}. \quad (3.40)$$

Para demostrar que (3.37) es positiva definida se puede llevar a la siguiente forma

$$V_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{z} & \xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & [\mathbf{I} + \mathbf{\Gamma} + \mathbf{\Psi}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \xi \end{bmatrix}, \quad (3.41)$$

donde

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.42)$$

Se tiene el equivalente de (3.41)

$$V_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e_v & e_\omega & e_{iv} & e_{i\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & (1 + k_4 + k_6) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & (1 + k_5 + k_7) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_v \\ e_\omega \\ e_{iv} \\ e_{i\omega} \end{bmatrix}. \quad (3.43)$$

Para que V_2 sea positiva definida la siguiente matriz simétrica tiene que ser positiva

definida

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & (1 + k_4 + k_6) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & (1 + k_5 + k_7) \end{bmatrix}. \quad (3.44)$$

Para ello todos los menores principales de \mathbf{Q} deben ser positivos.

Se tiene que

$$\mathbf{M}_1 = \det(1) = 1 > 0 \quad (3.45)$$

$$\mathbf{M}_2 = \det \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 1 > 0 \quad (3.46)$$

$$\mathbf{M}_3 = \det \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & (1 + k_4 + k_6) \end{bmatrix} \right) = k_4 + k_6 > 0 \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_4 = \det(\mathbf{Q}) &= \det \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & (1 + k_4 + k_6) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & (1 + k_5 + k_7) \end{bmatrix} \right) \\ &= (k_4 + k_6)(k_5 + k_7) > 0. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Por lo tanto V_2 es positiva definida.

A continuación, en vez de (3.34) se propone

$$\boldsymbol{\tau} = \bar{\mathbf{B}}^{-1} \bar{\mathbf{H}} [\dot{\mathbf{v}}_d - \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{z} - \mathbf{z} - \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\xi}] + \bar{\mathbf{B}}^{-1} \bar{\mathbf{C}} \mathbf{v}. \quad (3.49)$$

Sustituyendo (3.49) en (3.31) se obtiene

$$\dot{\mathbf{z}} = -\mathbf{\Gamma}\mathbf{z} - \mathbf{z} - \mathbf{\Psi}\xi. \quad (3.50)$$

Derivando (3.37)

$$\dot{V}_2 = \mathbf{z}^T \dot{\mathbf{z}} + \xi^T \dot{\mathbf{z}} + \dot{\xi}^T \mathbf{z} + \xi^T \dot{\xi} + \xi^T \mathbf{\Gamma} \dot{\xi} + \xi^T \mathbf{\Psi} \dot{\xi}, \quad (3.51)$$

y sustituyendo a (3.50)

$$\dot{V}_2 = \mathbf{z}^T [-\mathbf{\Gamma}\mathbf{z} - \mathbf{z} - \mathbf{\Psi}\xi] + \xi^T [-\mathbf{\Gamma}\mathbf{z} - \mathbf{z} - \mathbf{\Psi}\xi] + \dot{\xi}^T \mathbf{z} + \xi^T \dot{\xi} + \xi^T \mathbf{\Gamma} \dot{\xi} + \xi^T \mathbf{\Psi} \dot{\xi}. \quad (3.52)$$

Se obtiene

$$\dot{V}_2 = -\mathbf{z}^T \mathbf{\Gamma} \mathbf{z} - \xi^T \mathbf{\Psi} \xi < 0. \quad (3.53)$$

Por lo tanto el subsistema es asintóticamente estable.

3.2.3. Estabilidad en lazo cerrado del sistema completo

Para demostrar la estabilidad del sistema en lazo cerrado completo se usa la función candidata de Lyapunov total sumando V_1 en (3.19) y V_2 en (3.37)

$$V_T = V_1 + V_2, \quad (3.54)$$

cuya derivada es igual a

$$\dot{V}_T = \dot{V}_1 + \dot{V}_2. \quad (3.55)$$

Por lo tanto, de (3.23) y (3.53) se obtiene

$$\dot{V}_T = -k_1 v_r e_x^2 - k_3 v_r \sin^2 e_\theta - \mathbf{z}^T \mathbf{\Gamma} \mathbf{z} - \xi^T \mathbf{\Psi} \xi. \quad (3.56)$$

Ahora bien, es claro que $\dot{V}_T \leq 0$, es negativa semidefinida y $\dot{V}_T = 0$ si y sólo si $e_x = \sin e_\theta = 0$ y $\mathbf{z} = \xi = \mathbf{0}$ con $e_y \neq 0$. Usando el Teorema de LaSalle y utilizando

(3.24), con $\sin e_\theta = \dot{e}_\theta = 0$, se concluye que $e_y = 0$. Por otro lado, $\sin e_\theta = 0$ si $e_\theta = 0, \pm\pi, \pm2\pi, \dots$. Como $e_\theta \in [-\pi, \pi]$, esto significa que para garantizar que $e_\theta \rightarrow 0$ se requiere que $|e_\theta(0)| < \frac{\pi}{2}$. De esta forma el subsistema será asintóticamente estable.

Lo anterior se puede resumir en el siguiente Teorema

TEOREMA 3.1

Dado el sistema (3.11), (3.40) y (3.50). Si se aplica la ley de control (3.49) al subsistema dinámico se garantiza que $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}_d$ donde \mathbf{v}_d está dado por (3.26). Con lo anterior y cumpliendo con $|e_\theta(0)| < \frac{\pi}{2}$ se garantiza que $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{q}_r$. Por lo que se concluye que el punto de equilibrio $\mathbf{e}_p = \mathbf{z} = \xi = \mathbf{0}$ del sistema en lazo cerrado es asintóticamente estable.

3.3. Rediseño de Lyapunov

3.3.1. Rediseño de Lyapunov para el subsistema dinámico del robot móvil

A continuación se asume que se tiene incertidumbre paramétrica acoplada a la entrada en el subsistema dinámico del robot. En ese caso se puede emplear la ley de control propuesta en (3.49) parametrizándola como

$$\boldsymbol{\tau} = \bar{\mathbf{B}}^{-1} \bar{\mathbf{H}} [\dot{\mathbf{v}}_d - \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{z} - \mathbf{z} - \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\xi}] + \bar{\mathbf{B}}^{-1} \bar{\mathbf{C}} \mathbf{v} = \boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{\theta}, \quad (3.57)$$

donde

$\boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ es el regresor de la parametrización.

$\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^{p \times 1}$ es un vector de parámetros.

n es el número de estados.

p es el número de parámetros, constantes asociadas.

Supóngase ahora que el vector de parámetros $\boldsymbol{\theta}$ es incierto y en su lugar se tiene un vector con valores nominales dado por $\boldsymbol{\theta}_o$. De esta forma se implementa en realidad

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\theta}_o = \boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\gamma}\tilde{\boldsymbol{\theta}}, \quad (3.58)$$

donde

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\theta}_o - \boldsymbol{\theta}. \quad (3.59)$$

Para compensar el efecto de $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ se incluye en la ley de control un término adicional de la forma $\boldsymbol{\gamma}\mathbf{F}$. Por lo tanto se propone

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\gamma}[\tilde{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{F}]. \quad (3.60)$$

Empleando nuevamente (3.37)

$$V_2 = \frac{1}{2}\mathbf{z}^T\mathbf{z} + \xi^T\mathbf{z} + \frac{1}{2}\xi^T\xi + \frac{1}{2}\xi^T\boldsymbol{\Gamma}\xi + \frac{1}{2}\xi^T\boldsymbol{\Psi}\xi, \quad (3.61)$$

y calculando la correspondiente derivada y tomando en cuenta a (3.60) se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = & \mathbf{z}^T[\bar{\mathbf{H}}^{-1}[\bar{\mathbf{B}}[\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\gamma}[\tilde{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{F}]] - \bar{\mathbf{H}}\dot{\mathbf{v}}_d - \bar{\mathbf{C}}\mathbf{v}]] + \xi^T[\bar{\mathbf{H}}^{-1}[\bar{\mathbf{B}}[\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\gamma}[\tilde{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{F}]] - \bar{\mathbf{H}}\dot{\mathbf{v}}_d - \bar{\mathbf{C}}\mathbf{v}]] \\ & + \dot{\xi}^T\mathbf{z} + \xi^T\dot{\xi} + \xi^T\boldsymbol{\Gamma}\dot{\xi} + \xi^T\boldsymbol{\Psi}\dot{\xi}. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Como $\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\theta}$ es la ley de control originalmente obtenida (ver (3.49)), la derivada es de la siguiente forma

$$\dot{V}_2 = -\mathbf{z}^T\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{z} - \xi^T\boldsymbol{\Psi}\xi + [\mathbf{z}^T\bar{\mathbf{H}}^{-1}\bar{\mathbf{B}}\boldsymbol{\gamma} + \xi^T\bar{\mathbf{H}}^{-1}\bar{\mathbf{B}}\boldsymbol{\gamma}][\tilde{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{F}], \quad (3.63)$$

es decir que debido a la incertidumbre paramétrica surge el siguiente término $[\mathbf{z}^T\bar{\mathbf{H}}^{-1}\bar{\mathbf{B}}\boldsymbol{\gamma} + \xi^T\bar{\mathbf{H}}^{-1}\bar{\mathbf{B}}\boldsymbol{\gamma}][\tilde{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{F}]$ y se debe encontrar un valor \mathbf{F} para compensarla y lograr que la derivada sea negativa.

Para un mejor manejo de aquí en adelante se define

$$\boldsymbol{\beta}^T = \mathbf{z}^T \bar{\mathbf{H}}^{-1} \bar{\mathbf{B}} \boldsymbol{\gamma} + \xi^T \bar{\mathbf{H}}^{-1} \bar{\mathbf{B}} \boldsymbol{\gamma}. \quad (3.64)$$

Supóngase que se conoce una cota para la incertidumbre paramétrica tal que se satisface

$$\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\| \leq \rho \quad \forall t. \quad (3.65)$$

Desarrollando

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\beta}^T [\tilde{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{F}] &= \boldsymbol{\beta}^T \tilde{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{F} \\ &\leq \|\boldsymbol{\beta} \tilde{\boldsymbol{\theta}}\| + \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{F} \\ &\leq \|\boldsymbol{\beta}\| \|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\| + \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{F} \\ &\leq \frac{\|\boldsymbol{\beta}\|^2 \|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\|}{\|\boldsymbol{\beta}\|} + \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{F} \\ &\leq \frac{(\boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{\beta}) \rho}{\|\boldsymbol{\beta}\|} + \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{F} \\ &\leq \boldsymbol{\beta}^T \left[\frac{\boldsymbol{\beta} \rho}{\|\boldsymbol{\beta}\|} + \mathbf{F} \right]. \end{aligned}$$

Se puede proponer entonces

$$\mathbf{F} = - \frac{\boldsymbol{\beta} \rho}{\|\boldsymbol{\beta}\|}. \quad (3.66)$$

Al sustituir el valor de \mathbf{F} en la derivada de la función candidata de Lyapunov (3.61) se obtiene

$$\dot{V}_2 \leq -\mathbf{z}^T \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{z} - \xi^T \boldsymbol{\Psi} \xi < 0. \quad (3.67)$$

Por lo tanto el subsistema es asintóticamente estable. Sin embargo, \mathbf{F} es discontinuo por lo que se propone que en vez (3.66)

$$\mathbf{F} = \begin{cases} -\frac{\boldsymbol{\beta}\rho}{\varepsilon} & \text{si } \|\boldsymbol{\beta}\| \leq \varepsilon \\ -\frac{\boldsymbol{\beta}\rho}{\|\boldsymbol{\beta}\|} & \text{si } \|\boldsymbol{\beta}\| > \varepsilon \end{cases}, \quad (3.68)$$

con $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeño. Al desarrollar la parte de $\boldsymbol{\beta}^T \left[\tilde{\boldsymbol{\theta}} - \frac{\boldsymbol{\beta}\rho}{\varepsilon} \right]$ en (3.63) se obtiene

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\beta}^T \left[\tilde{\boldsymbol{\theta}} - \frac{\boldsymbol{\beta}\rho}{\varepsilon} \right] &\leq \|\boldsymbol{\beta}\| \left[\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\| - \frac{\|\boldsymbol{\beta}\|\rho}{\varepsilon} \right] \\ &\leq \|\boldsymbol{\beta}\| \left[\rho - \frac{\|\boldsymbol{\beta}\|\rho}{\varepsilon} \right] \\ &= \rho \left[\|\boldsymbol{\beta}\| - \frac{\|\boldsymbol{\beta}\|^2}{\varepsilon} \right]. \end{aligned}$$

Si se deriva el término anterior con respecto a $\|\boldsymbol{\beta}\|$ para obtener su máximo

$$\frac{\partial}{\partial \|\boldsymbol{\beta}\|} \left[\|\boldsymbol{\beta}\| - \frac{\|\boldsymbol{\beta}\|^2}{\varepsilon} \right] = 1 - \frac{2\|\boldsymbol{\beta}\|}{\varepsilon}. \quad (3.69)$$

Por lo tanto el máximo está en

$$\|\boldsymbol{\beta}\| = \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.70)$$

Sustituyendo este valor en $\rho \left[\|\boldsymbol{\beta}\| - \frac{\|\boldsymbol{\beta}\|^2}{\varepsilon} \right]$ se obtiene que (3.63) está dada por

$$\dot{V}_2 \leq -\mathbf{z}^T \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{z} - \xi^T \boldsymbol{\Psi} \xi + \frac{\rho\varepsilon}{4}, \quad (3.71)$$

para $\|\boldsymbol{\beta}\| \leq \varepsilon$. Nótese que en realidad (3.71) es válida para cualquier $\boldsymbol{\beta}$, por lo que en adelante se trabajará con ella. Si se define ahora

$$\mathbf{e}_m \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \xi \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

y

$$\boldsymbol{\chi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Gamma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\Psi} \end{bmatrix}. \quad (3.73)$$

Se concluye entonces que

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &\leq -\mathbf{e}_m^T \boldsymbol{\chi} \mathbf{e}_m + \frac{\rho\varepsilon}{4} \\ &\leq -\lambda_{\min}(\boldsymbol{\chi}) \|\mathbf{e}_m\|^2 + \frac{\rho\varepsilon}{4}, \end{aligned} \quad (3.74)$$

o su equivalente

$$\dot{V}_2 \leq -\frac{1}{2}\lambda_{\min}(\boldsymbol{\chi}) \|\mathbf{e}_m\|^2 - \frac{1}{2}\lambda_{\min}(\boldsymbol{\chi}) \|\mathbf{e}_m\|^2 + \frac{\rho\varepsilon}{4}. \quad (3.75)$$

En caso de que

$$\frac{\rho\varepsilon}{4} \leq \frac{1}{2}\lambda_{\min}(\boldsymbol{\chi}) \|\mathbf{e}_m\|^2, \quad (3.76)$$

\dot{V}_2 será negativa. Esto equivale a

$$\frac{\rho\varepsilon}{2\lambda_{\min}(\boldsymbol{\chi})} \leq \|\mathbf{e}_m\|^2, \quad (3.77)$$

o bien

$$\mu \triangleq \sqrt{\frac{\rho\varepsilon}{2\lambda_{\min}(\boldsymbol{\chi})}} \leq \|\mathbf{e}_m\|. \quad (3.78)$$

Por lo tanto, si $\|\mathbf{e}_m\| \geq \mu$

$$\dot{V}_2 \leq -\frac{1}{2}\lambda_{\min}(\boldsymbol{\chi}) \|\mathbf{e}_m\|^2 < 0. \quad (3.79)$$

Por lo que las trayectorias del subsistema están finalmente acotadas.

3.3.2. Estabilidad en lazo cerrado del sistema completo con el Rediseño de Lyapunov

Para demostrar estabilidad del sistema en lazo cerrado completo se usa la función candidata de Lyapunov total sumando V_1 en (3.19) y V_2 en (3.37)

$$V_T = V_1 + V_2, \quad (3.80)$$

cuya derivada es igual a

$$\dot{V}_T = \dot{V}_1 + \dot{V}_2. \quad (3.81)$$

Por lo tanto, de (3.23) y (3.71)

$$\dot{V}_T \leq -k_1 v_r e_x^2 - k_3 v_r \sin^2 e_\theta - \mathbf{z}^T \mathbf{\Gamma} \mathbf{z} - \xi^T \mathbf{\Psi} \xi + \frac{\rho \varepsilon}{4}. \quad (3.82)$$

Si

$$\mathbf{e}_s \triangleq \begin{bmatrix} e_x \\ \sin e_\theta \\ \mathbf{z} \\ \xi \end{bmatrix} \quad (3.83)$$

y

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} k_1 v_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_3 v_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{\Gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{\Psi} \end{bmatrix}, \quad (3.84)$$

se tiene

$$\begin{aligned} \dot{V}_T &\leq -\mathbf{e}_s^T \mathbf{\Omega} \mathbf{e}_s + \frac{\rho \varepsilon}{4} \\ &\leq -\lambda_{\min}(\mathbf{\Omega}) \|\mathbf{e}_s\|^2 + \frac{\rho \varepsilon}{4}, \end{aligned} \quad (3.85)$$

o su equivalente

$$\dot{V}_T \leq -\frac{1}{2} \lambda_{\min}(\mathbf{\Omega}) \|\mathbf{e}_s\|^2 - \frac{1}{2} \lambda_{\min}(\mathbf{\Omega}) \|\mathbf{e}_s\|^2 + \frac{\rho \varepsilon}{4}. \quad (3.86)$$

En caso de que

$$\frac{\rho\varepsilon}{4} \leq \frac{1}{2}\lambda_{\min}(\mathbf{\Omega}) \|\mathbf{e}_s\|^2. \quad (3.87)$$

\dot{V}_T será negativa. Esto equivale a

$$\frac{\rho\varepsilon}{2\lambda_{\min}(\mathbf{\Omega})} \leq \|\mathbf{e}_s\|^2, \quad (3.88)$$

o bien

$$\varsigma \triangleq \sqrt{\frac{\rho\varepsilon}{2\lambda_{\min}(\mathbf{\Omega})}} \leq \|\mathbf{e}_s\|. \quad (3.89)$$

Por lo tanto, si $\|\mathbf{e}_s\| \geq \varsigma$

$$\dot{V}_T \leq -\frac{1}{2}\lambda_{\min}(\mathbf{\Omega}) \|\mathbf{e}_s\|^2 < 0. \quad (3.90)$$

Por lo que las trayectorias de \mathbf{e}_s están finalmente acotadas. Sin embargo, de aquí no se puede decir nada de e_y . Ahora, de (3.24) se tiene

$$\dot{e}_\theta = -e_y v_r - k_3 \sin e_\theta v_r. \quad (3.91)$$

Como

$$e_\theta \approx \sin e_\theta, \quad (3.92)$$

a la ecuación (3.91) se puede aproximar por

$$\dot{e}_\theta + k_3 e_\theta v_r = -e_y v_r. \quad (3.93)$$

Esto se puede ver como un filtro lineal estable donde la salida e_θ está finalmente acotada por lo que la entrada también debe de estarlo, por lo que e_y es también finalmente acotado.

Lo anterior se puede resumir en el siguiente Teorema

TEOREMA 3.2

Dado el sistema (3.11),(3.40) y (3.50). En lazo cerrado con las leyes de control (3.49) y (3.68), se garantiza que la ley de control total es robusta ante incertidumbre paramétrica para el subsistema dinámico. Si además se elige a \mathbf{v}_d conforme (3.26) con $|e_\theta(0)| < \frac{\pi}{2}$, se concluye que el punto de equilibrio $\mathbf{e}_p = \mathbf{z} = \xi = \mathbf{0}$ del sistema en lazo cerrado es finalmente acotado con cota final arbitrariamente pequeña.

Capítulo 4

Resultados experimentales

4.1. Introducción

La estrategia de control propuesta es implementada y analizada en este capítulo. Este análisis del desempeño de la ley de control se lleva a cabo mediante experimentos en tiempo real con un robot móvil experimental.

4.2. Parametrización de la trayectoria deseada

En esta sección se define la trayectoria que debe seguir el robot móvil en el plano horizontal. En particular, se parametriza una trayectoria que es una función suave del tiempo. La trayectoria es un círculo.

4.2.1. Trayectoria Parametrizada

La trayectoria parametrizada es un círculo, dado por

$$x_r(t) = a \sin\left(\frac{2\pi t}{p}\right) \quad (4.1)$$

$$y_r(t) = a \cos\left(\frac{2\pi t}{p}\right), \quad (4.2)$$

donde

a [m] es el radio del círculo.

p [s] es el tiempo que se desea en que se lleve a cabo la trayectoria.

t [s] es el tiempo transcurrido.

Para la orientación deseada se utiliza la siguiente función

$$\theta_r(t) = \text{atan2}(\dot{y}_r(t), \dot{x}_r(t)). \quad (4.3)$$

Con esta parametrización la trayectoria comienza en $(0, a)$ y $\theta_r = 0$ y se desplazará sobre el perímetro de la curva hasta alcanzar su punto de inicio. Es decir, el robot móvil cruzará por el punto $(a, 0)$, seguirá hasta llegar al punto $(0, -a)$, de ahí sigue al punto $(-a, 0)$ y llega al punto de partida, todo en un tiempo p (ver la Figura 4.1).

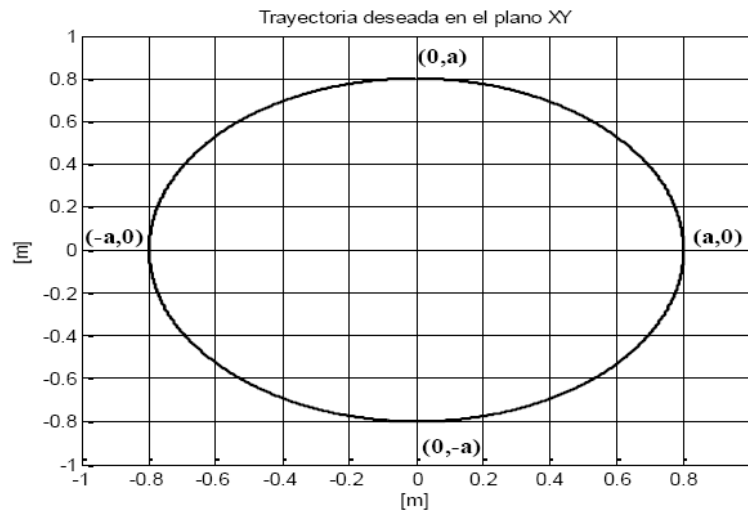


Figura 4.1: Trayectoria parametrizada

4.3. Experimentos en tiempo real

En esta sección se presentan los resultados obtenidos en tiempo real. Se experimentó con el esquema de control propuesto en el Capítulo 3. Los experimentos fueron implementados en el robot móvil experimental RM10 (ver Apéndice A) y se propone el uso de un índice de desempeño para comparar el comportamiento del esquema de control en cada caso. En este trabajo el índice de desempeño propuesto está basado en el Criterio Integral del Error Cuadrático (CIEC) que utiliza una función de la desviación de la salida del sistema respecto a la entrada [Ogata98]. De acuerdo al CIEC la calidad de comportamiento del sistema se evalúa por medio de la siguiente integral

$$CIEC = \int_0^t e^2(t)dt, \quad (4.4)$$

es decir por

$$CIEC = \int_0^t [e_x^2(t) + e_y^2(t) + e_\theta^2(t)]dt. \quad (4.5)$$

para este trabajo. Para medir la posición en el plano y la orientación del robot móvil experimental se utilizan encoders magnéticos localizados en cada motor de cada rueda del robot móvil (ver Apéndice A), por medio de los encoders se obtiene la velocidad angular de cada rueda y estas velocidades angulares se introducen en la cinemática directa para obtener la posición y orientación reales del robot móvil.

4.3.1. Experimento 1

El Experimento 1 se realiza con la trayectoria parametrizada dada por (4.1)-(4.3). Los parámetros nominales que se tienen del robot móvil experimental son los siguientes

m[Kg]	37
I[Kgm ²]	2
r[m]	0.0625
L[m]	0.18

Cuadro 4.1: Parámetros nominales

Los valores para la parametrización de la trayectoria son

a[m]	0.8
p[s]	60

Cuadro 4.2: Valores para la trayectoria parametrizada (Experimento 1)

El Cuadro 4.3 resume los resultados

	Control Robusto
Condición inicial en x[m]	0
Condición inicial en y[m]	0.8
Condición inicial en θ [°]	0
Ganancia k_1	5
Ganancia k_3	40
Ganancia k_4	2
Ganancia k_5	2
Ganancia k_6	2
Ganancia k_7	2
Error máximo en x[m]	0.1419
Error máximo en y[m]	0.0136
Error máximo en θ [°]	-9.687
Error final en x[m]	-0.0015
Error final en y[m]	-0.0016
Error final en θ [°]	0.4244
CIEC	0.0848

Cuadro 4.3: Resultados del Experimento 1

Graficamente, las Figuras (4.2)-(4.6) muestran el comportamiento de las variables de interés con respecto al tiempo, así como también la trayectoria deseada y la trayectoria real seguida por el robot móvil experimental. En el Experimento 1, donde el robot móvil tuvo condiciones iniciales idénticas a la de la trayectoria deseada, el seguimiento fue bueno, lo que se observa claramente dados los errores máximos y finales, así como también el buen resultado del CIEC. Cabe destacar que el control fue suave sin muchos picos.

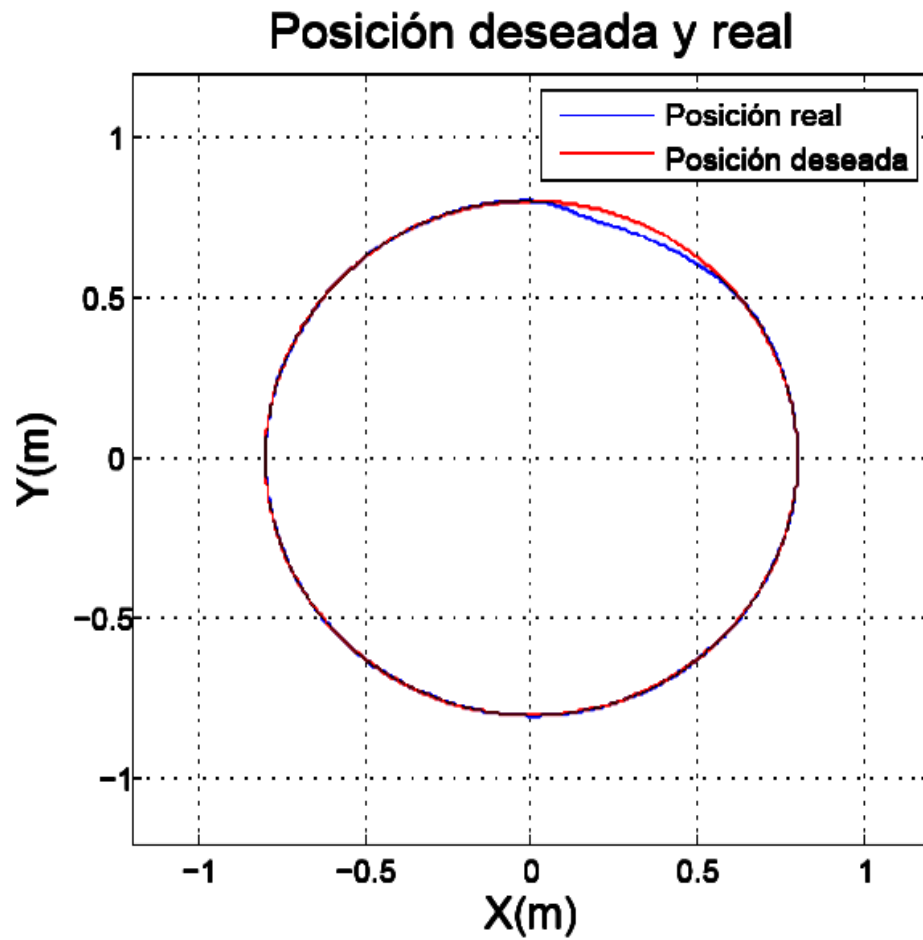


Figura 4.2: Posición deseada y real (Experimento 1)

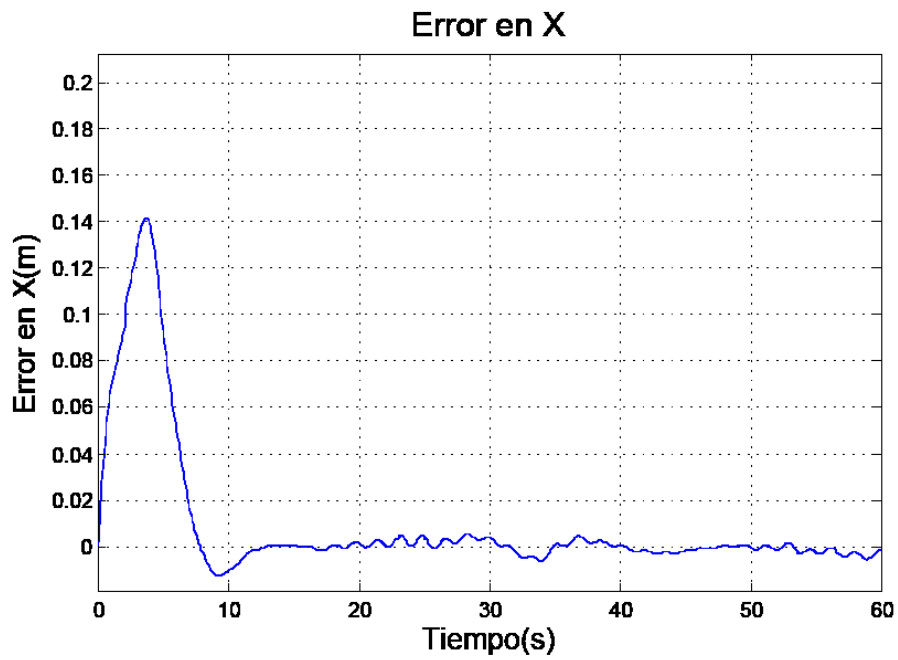


Figura 4.3: Error en X (Experimento 1)

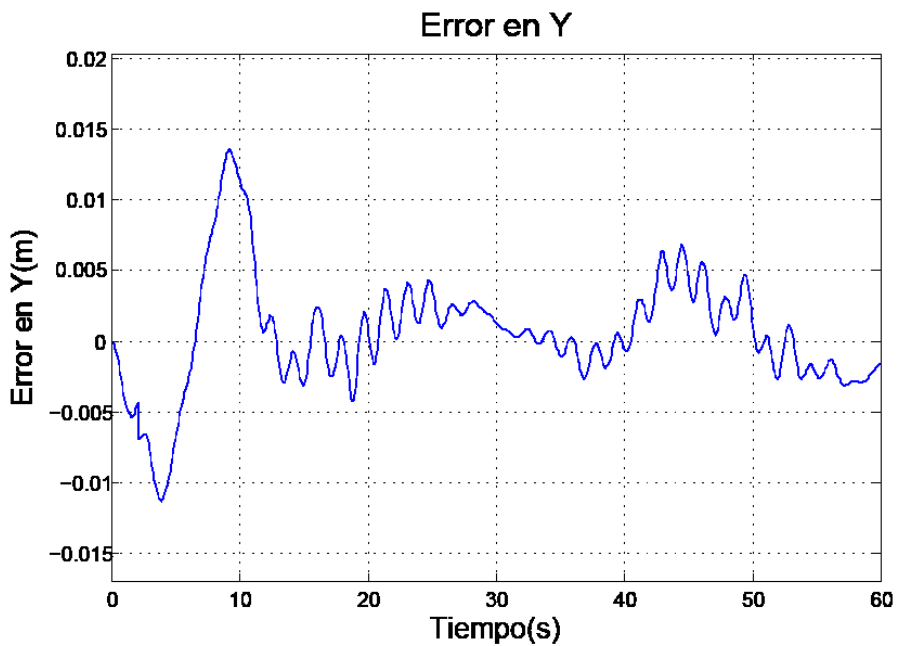


Figura 4.4: Error en Y (Experimento 1)

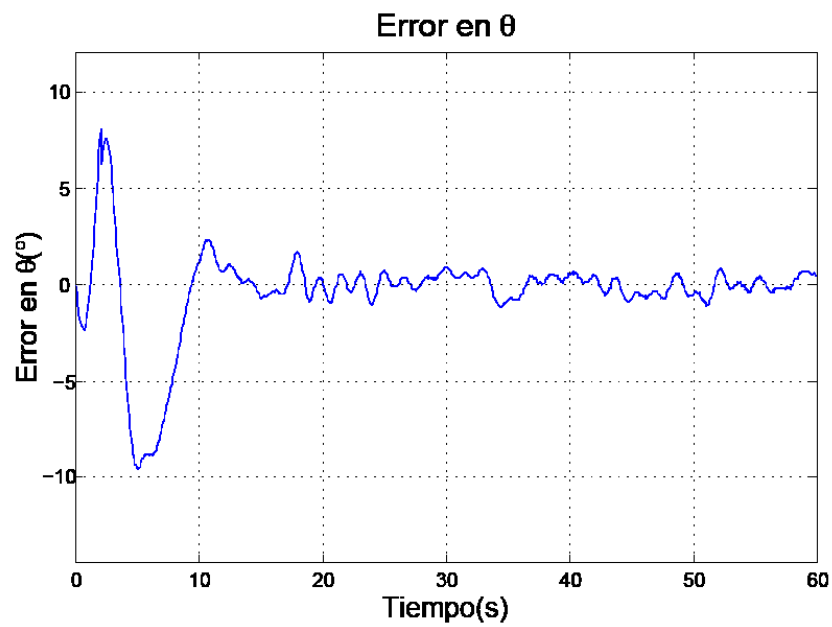


Figura 4.5: Error en θ (Experimento 1)

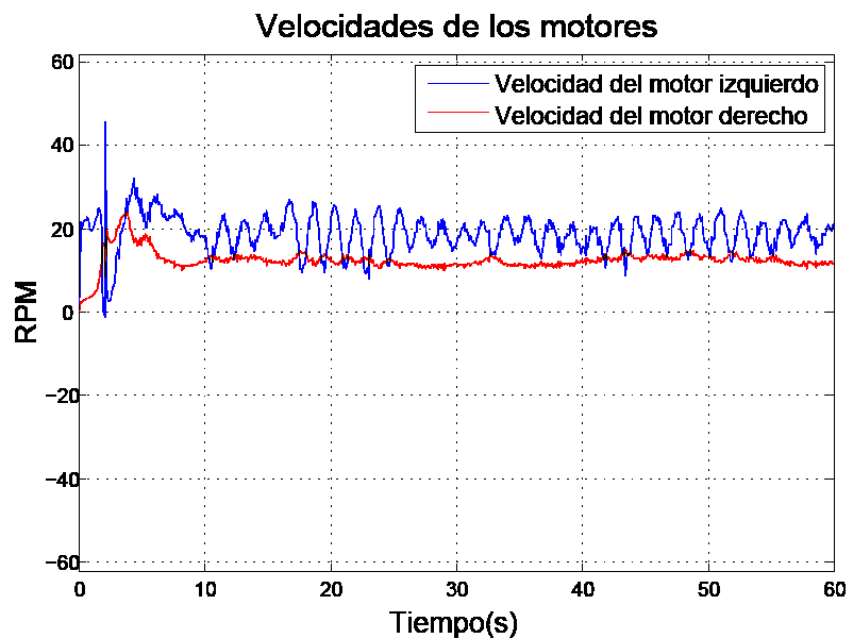


Figura 4.6: Velocidades de los motores (Experimento 1)

4.3.2. Experimento 2

El Experimento 2 se realiza de nuevo con la trayectoria parametrizada dada por (4.1)-(4.3), pero ahora con condiciones iniciales distintas.

Los valores para la parametrización de la trayectoria son los siguientes

a[m]	0.8
p[s]	60

Cuadro 4.4: Valores para la trayectoria parametrizada (Experimento 2)

El Cuadro 4.5 resume los resultados

	Control Robusto
Condición inicial en x[m]	0
Condición inicial en y[m]	0.5
Condición inicial en θ [°]	0
Ganancia k_1	5
Ganancia k_3	40
Ganancia k_4	2
Ganancia k_5	2
Ganancia k_6	2
Ganancia k_7	2
Error máximo en x[m]	0.2183
Error máximo en y[m]	0.3043
Error máximo en θ [°]	-56.46
Error final en x[m]	-0.0057
Error final en y[m]	-0.0026
Error final en θ [°]	-0.195
CIEC	1.0683

Cuadro 4.5: Resultados del Experimento 2

Graficamente, las Figuras (4.7)-(4.11) muestran el comportamiento de las variables de interés con respecto al tiempo, así como también la trayectoria deseada y la trayectoria real seguida por el robot móvil experimental. En el experimento 2, donde el robot móvil tuvo condiciones iniciales distintas a la de la trayectoria deseada, el seguimiento fue bueno ya que el robot móvil alcanzó la trayectoria deseada de una

forma rápida. Los errores máximos y finales también fueron buenos, así como también el buen resultado del CIEC que por lógica es mayor al del Experimento 1. Cabe destacar que el control fue suave sin muchos picos; solamente algunos al inicio de la trayectoria cuando el robot móvil intentaba alcanzar la trayectoria deseada.

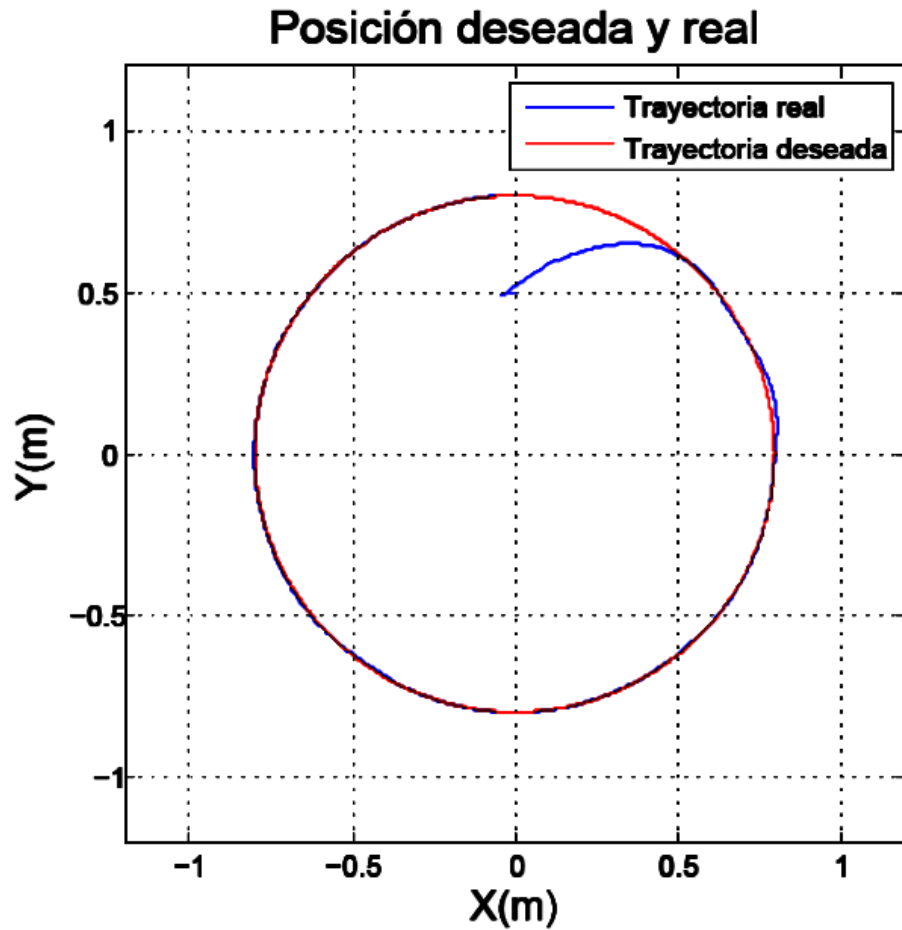


Figura 4.7: Posición deseada y real (Experimento 2)

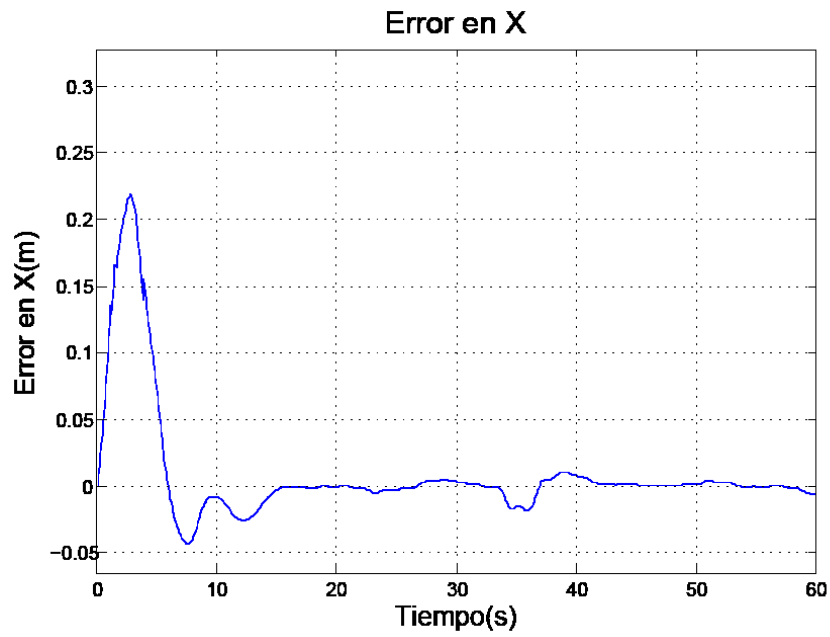


Figura 4.8: Error en X (Experimento 2)

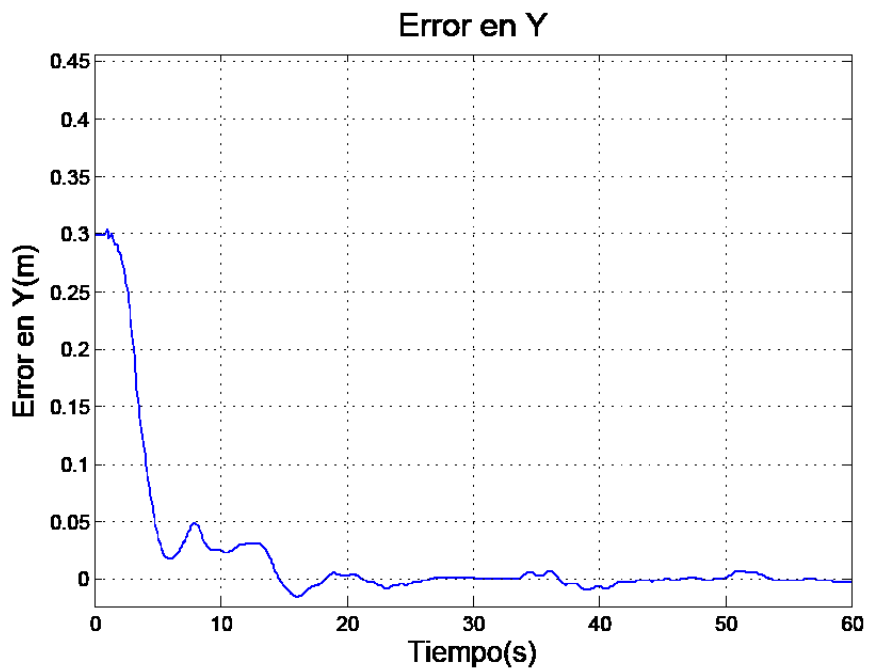


Figura 4.9: Error en Y (Experimento 2)

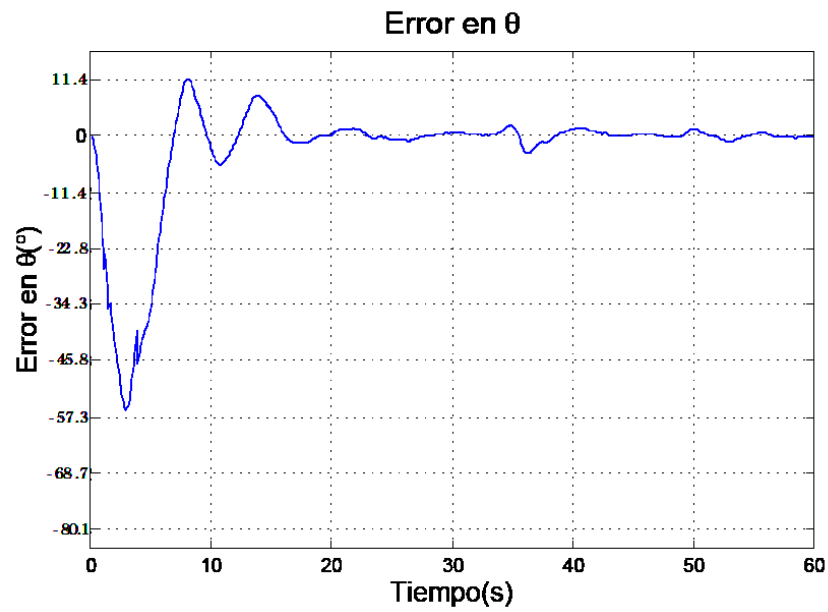


Figura 4.10: Error en θ (Experimento 2)

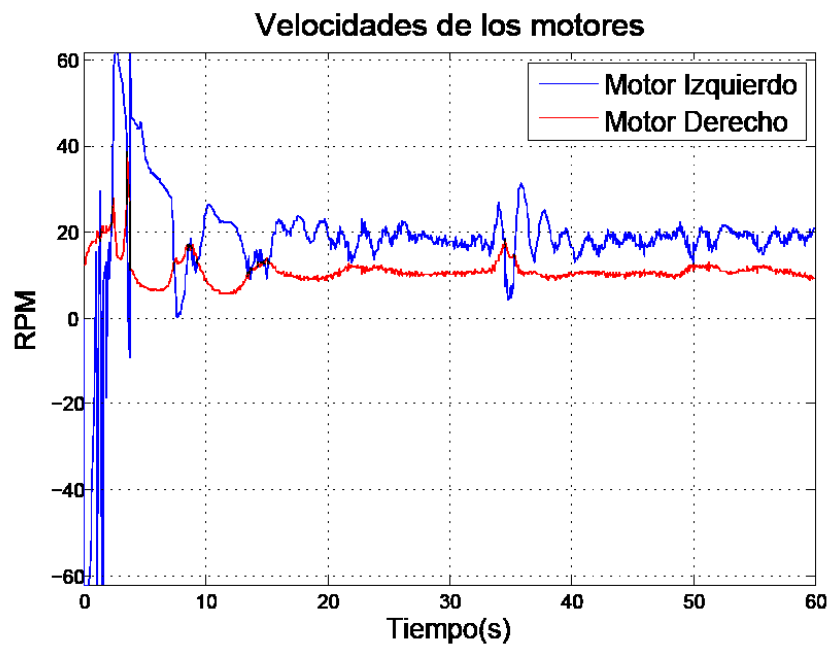


Figura 4.11: Velocidades de los motores (Experimento 2)

4.3.3. Experimento 3

El Experimento 3 se realiza con la trayectoria parametrizada dada por (4.1)-(4.3), pero se formarán dos círculos; el primero como en los experimentos anteriores formando el círculo en sentido horario, al finalizar comenzará inmediatamente otro círculo pero en sentido antihorario y con el signo contrario en las coordenadas en Y , por lo que la trayectoria formará una especie de ocho.

Los valores para la parametrización de la trayectoria de cada círculo de la trayectoria total son los siguientes

a[m]	0.8
p[s]	100

Cuadro 4.6: Valores para la trayectoria parametrizada (Experimento 3)

El Cuadro 4.7 resume los resultados

	Control Robusto
Condición inicial en x[m]	0
Condición inicial en y[m]	0.5
Condición inicial en θ [°]	0
Ganancia k_1	5
Ganancia k_3	30
Ganancia k_4	2
Ganancia k_5	2
Ganancia k_6	2
Ganancia k_7	2
Error máximo en x[m]	0.220
Error máximo en y[m]	0.3123
Error máximo en θ [°]	-51.811
Error final en x[m]	0.00124
Error final en y[m]	-0.000765
Error final en θ [°]	-0.4344
CIEC	1.6852

Cuadro 4.7: Resultados del Experimento 3

Graficamente, las Figuras (4.12)-(4.16) muestran el comportamiento de las varia-

bles de interés con respecto al tiempo, así como también la trayectoria deseada y la trayectoria real seguida por el robot móvil experimental. En el Experimento 3, el seguimiento fue bueno, como se observa con los errores máximos y finales, así como también el buen resultado del CIEC. Cabe destacar que el control fue suave sin muchos picos; solamente algunos al inicio de la trayectoria cuando el robot móvil intentaba alcanzar la trayectoria deseada y en el cambio de círculo.

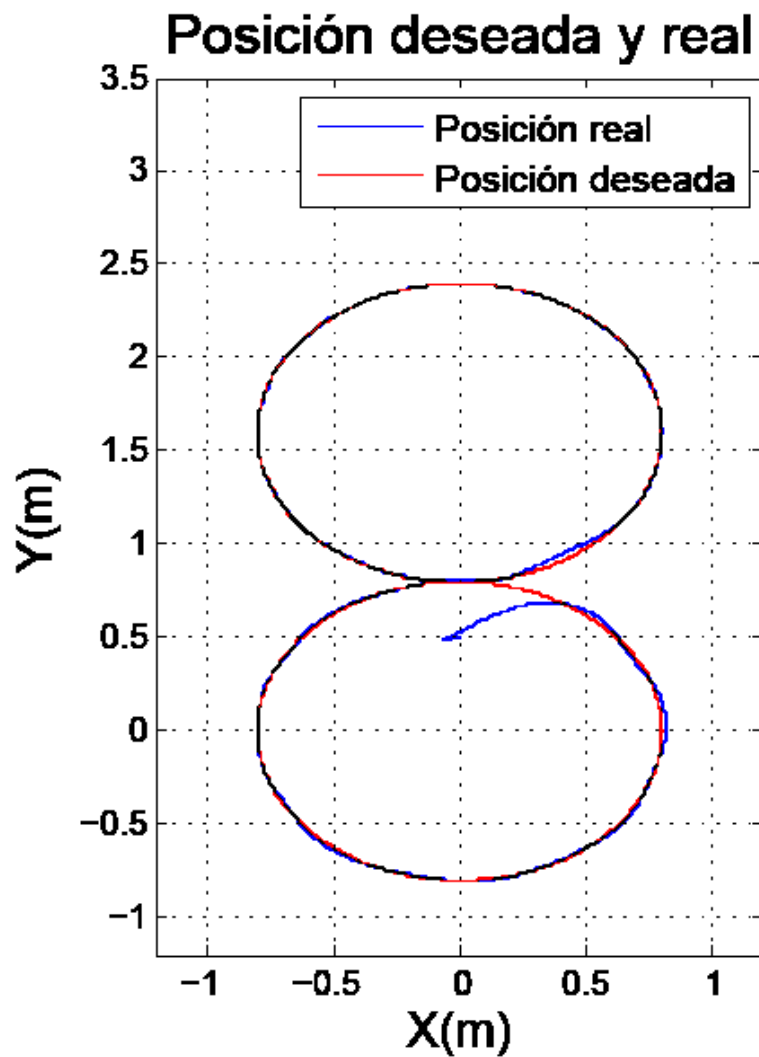


Figura 4.12: Posición deseada y real (Experimento 3)

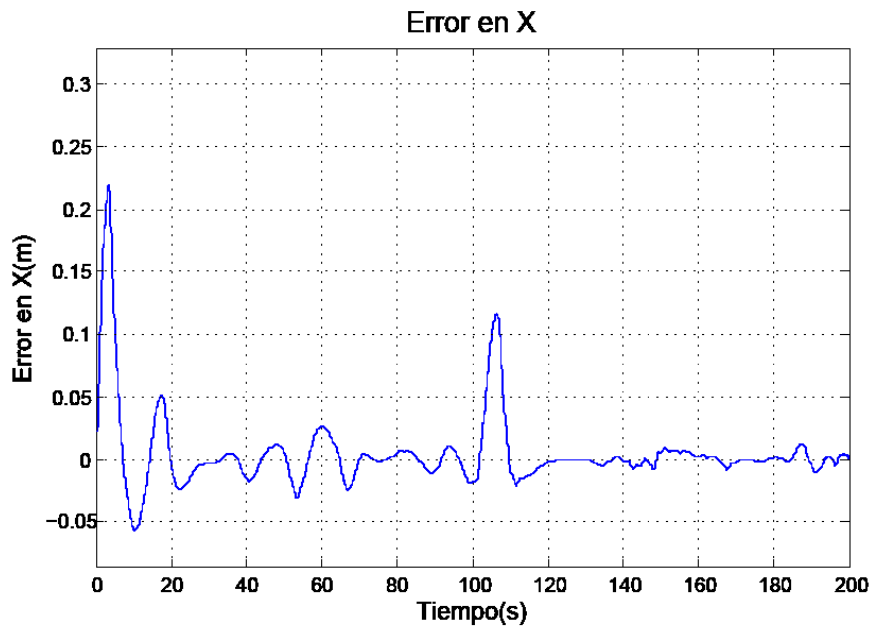


Figura 4.13: Error en X (Experimento 3)

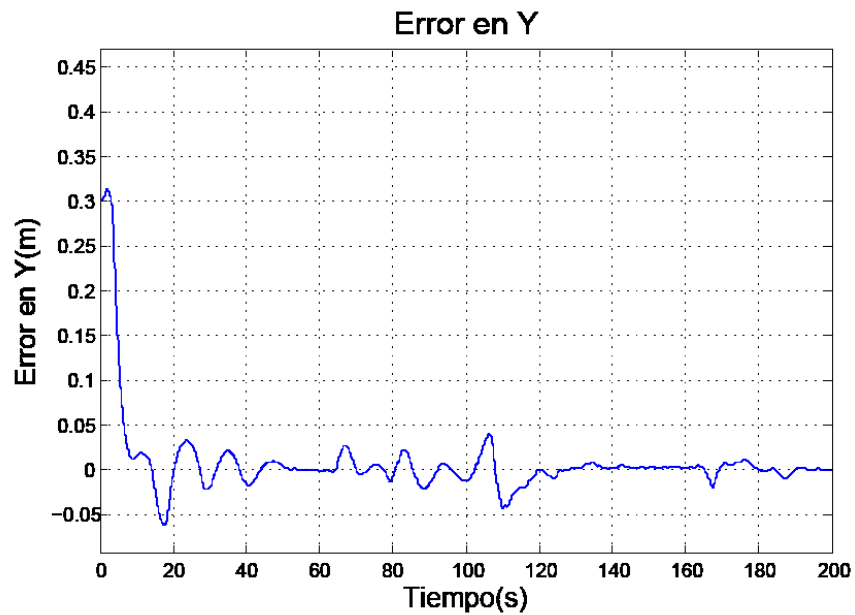


Figura 4.14: Error en Y (Experimento 3)

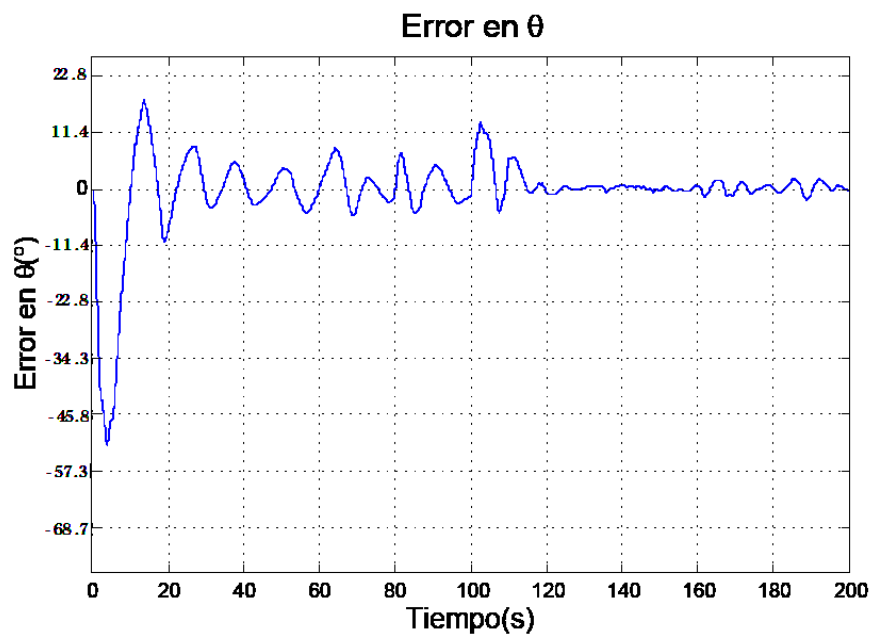


Figura 4.15: Error en θ (Experimento 3)

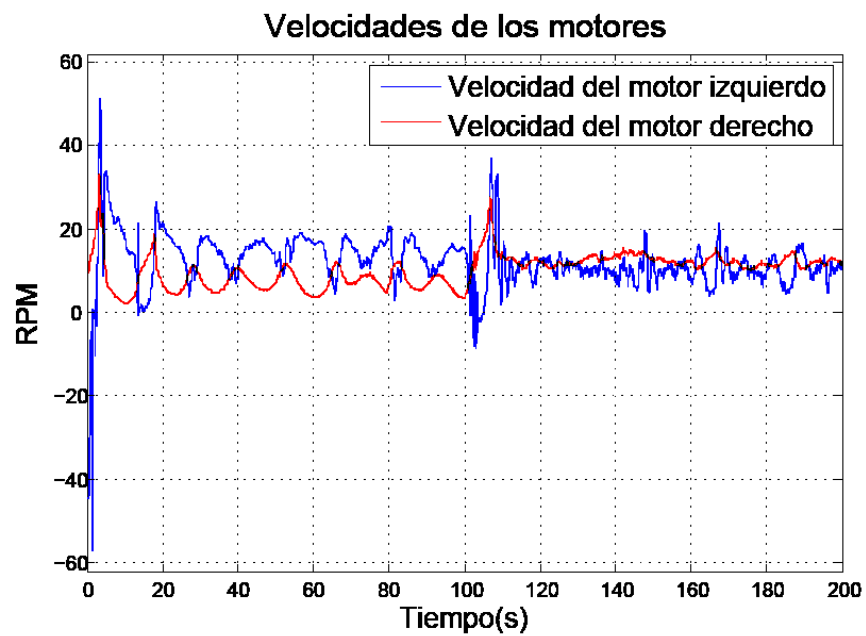


Figura 4.16: Velocidades de los motores (Experimento 3)

Capítulo 5

Conclusiones

Con el fin de aportar nuevas soluciones tecnológicas se controló un robot móvil de tipo diferencial que sirvió como banco de pruebas para el desarrollo de técnicas de control avanzado. En particular, en este trabajo se presenta la aplicación de una ley de control no lineal robusta ante incertidumbre paramétrica para el seguimiento de trayectorias parametrizadas sobre el plano XY.

El diseño de la ley de control se inició a partir del estado del arte sobre los robots móviles y su control para tener una base sólida de la cual partir. Posteriormente, se desarrollaron matemáticamente los modelos cinemático y dinámico del robot con el propósito de estudiar su comportamiento, propiedades y características. Después se diseñó una ley de control no lineal robusta ante incertidumbre paramétrica y al final se hicieron las pruebas experimentales sobre un robot móvil experimental.

El modelo dinámico del robot móvil, si bien más complejo que el modelo cinemático, proporciona un panorama más amplio del sistema. Otra cosa que hay que hacer notar es que el modelo dinámico necesita conocer exactamente los valores de los parámetros físicos del robot móvil para que el modelo matemático reproduzca fielmente el comportamiento del sistema real. El modelo cinemático desarrollado es más simple, ya que solo hace referencia a las relaciones geométricas que existen en el sistema.

Además, este modelo no necesita conocer todos los parámetros del sistema.

Con el conocimiento de los modelos matemáticos se diseñó una ley de control no lineal robusta ante incertidumbre paramétrica. Partiendo de la técnica de Backstepping se desarrolla un controlador para la cinemática y un controlador para la dinámica del robot móvil. A continuación estas leyes de control se modifican por medio de la técnica de Rediseño de Lyapunov para compensar la incertidumbre paramétrica que pueda existir en el modelo del robot móvil.

Se evaluó el desempeño del esquema de control diseñado. Esta evaluación se llevó a cabo mediante experimentación en tiempo real. Los resultados indican que el esquema funciona satisfactoriamente.

5.1. Objetivos cubiertos

Dados los resultados anteriores y de acuerdo con las pruebas experimentales realizadas para seguimiento de distintas trayectorias parametrizadas sobre el plano XY; se puede decir que el controlador diseñado y basado en el formalismo del Rediseño de Lyapunov cumplió con las expectativas esperadas en la hipótesis del trabajo.

Por otro lado, se cumplieron tanto los objetivos particulares planteados como las metas propuestas, al modelar, controlar y validar el desempeño del controlador y se cubrió el objetivo general que consistió en el diseño de una ley robusta ante incertidumbre paramétrica.

En general, se puede decir que se cubrieron los objetivos planteados al inicio de este trabajo.

5.2. Aportaciones

Las aportaciones de investigación son las siguientes:

1. Se diseñó y comprobó de modo práctico el esquema de control no lineal robusto ante incertidumbre paramétrica en un sistema físico no holonómico.
2. Se desarrolló en Matlab-Guide, programas base e interfaz gráfica de usuario para el control del robot móvil experimental. Estas herramientas computacionales sirven para implementar fácilmente nuevas estrategias de control en el robot móvil.

5.3. Trabajos futuros

Algunos trabajos futuros que se pueden realizar en esta línea de investigación son los siguientes:

1. Utilizar visión en el robot móvil experimental para su localización, así como también para la evasión de obstáculos.
2. Utilizar el robot móvil experimental junto con otros para llevar a cabo distintas formaciones.
3. Diseñar leyes de control que mejoren el desempeño de la ley de control propuesta en este trabajo.
4. Diseñar leyes de control que doten al robot móvil experimental con la capacidad de evasión de obstáculos.
5. Diseñar leyes de control que doten al robot móvil experimental con la capacidad de llevar a cabo distintas formaciones con otros robots móviles.

Apéndice A

Características del robot móvil experimental RM10

Para este trabajo los componentes principales del robot móvil con el que se hicieron las pruebas experimentales son las siguientes:

1. Tarjeta de control de los actuadores del móvil.
2. Llantas actuadas y de locomoción.
3. Actuadores (motores de corriente directa de imán permanente) y encoders magnéticos.
4. Interfaz gráfica.



Figura A.1: Robot móvil experimental.

A.2. Llantas actuadas y de locomoción

El robot móvil cuenta con dos llantas actuadas cada una de 125mm de diametro y dos llantas de locomoción de tipo caster en la parte frontal del robot para brindar estabilidad.



Figura A.3: Llantas actuadas.



Figura A.4: Llantas tipo caster.

A.3. Actuadores (motores de corriente directa de imán permanente) y encoders magnéticos

El robot tiene dos actuadores que son motores de corriente directa de imán permanente EMG49. Cuentan con una caja reductora de velocidad de 49 : 1, además de un encoder magnético de 588 cuentas por vuelta de la flecha de la carga, con las siguientes especificaciones:

- 24V de alimentación.
- Torque de 16 kg/cm.
- 122rpm velocidad máxima con carga.

- 143rpm velocidad máxima sin carga.
- 2.1A de corriente nominal con carga.
- 0.5A de corriente nominal sin carga.
- 13A de corriente a rotor bloqueado.
- 34.7W de potencia.

Los motores trabajan con las siguientes curvas de operación

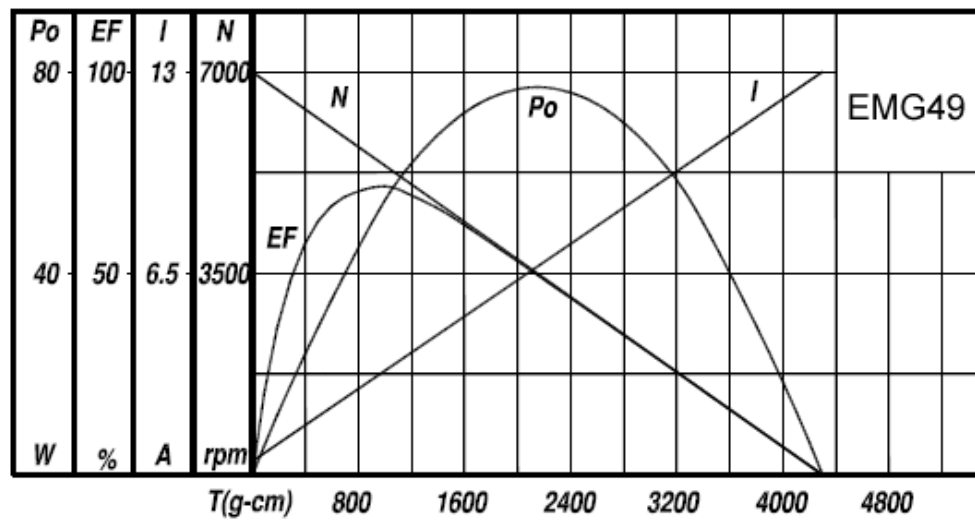


Figura A.5: Curvas de operación del motor EMG49.



Figura A.6: Motor EMG49.

A.4. Interfaz gráfica

La interfaz gráfica fue programada en GUIDE que es un entorno de programación visual disponible en MATLAB para realizar y ejecutar programas que necesiten ingreso continuo de datos. Tiene las características básicas de todos los programas visuales como Visual Basic o Visual C++.

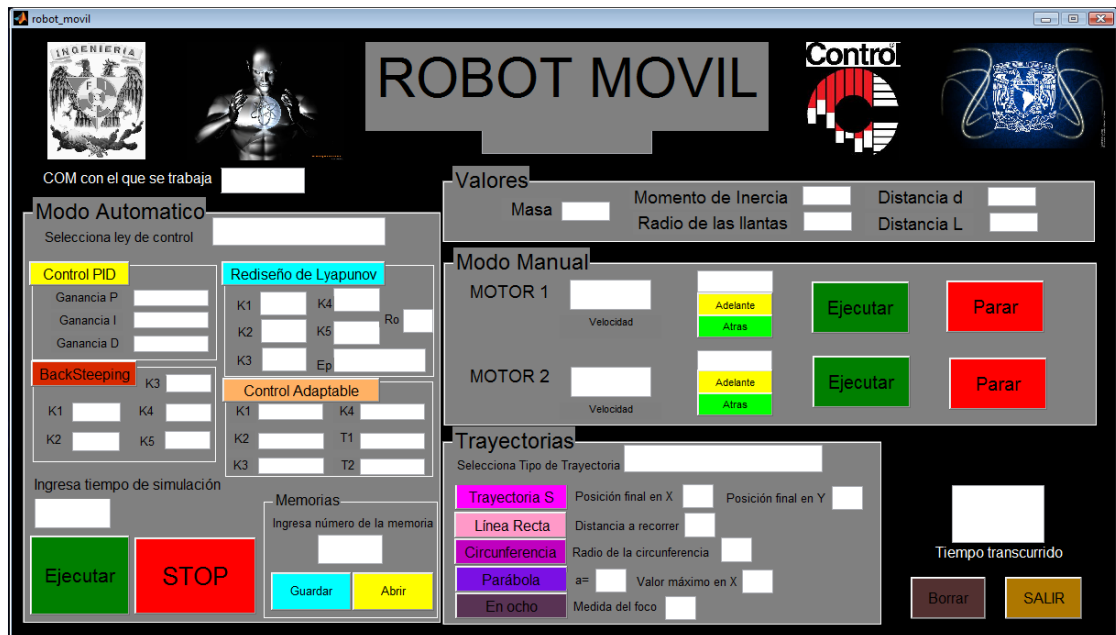


Figura A.7: Interfaz gráfica.

La comunicación de la PC que cuenta con la interfaz gráfica hacia el controlador de los actuadores es por medio de comunicación serial. Desde la interfaz gráfica se puede seleccionar el tipo de operación del robot ya sea manual o automática. En modo automático se puede seleccionar alguna de las leyes de control que se encuentren programadas, así como manipular los valores de las ganancias y otros valores involucrados en dichas leyes. De igual forma se puede seleccionar la trayectoria deseada a seguir así como sus dimensiones. En la interfaz se introducen los valores de los parámetros del robot móvil. Al final de la ejecución se imprimen gráficas diversas

A.1. Tarjeta de Control

La tarjeta de control es una RoboClaw 2x30A de la marca Orion Robotics, la cual cuenta con las siguientes características

- 2 canales de 30A cada uno, 60A pico.
- Alimentación de 5V para control.
- Alimentación de 12V para potencia.
- Protección contra sobrecorriente.
- Protección térmica.
- 2 canales de decodificación de cuadratura.
- Comunicación Serial.
- Comunicación USB.
- Varios modos de operación.
- Indicadores de error.

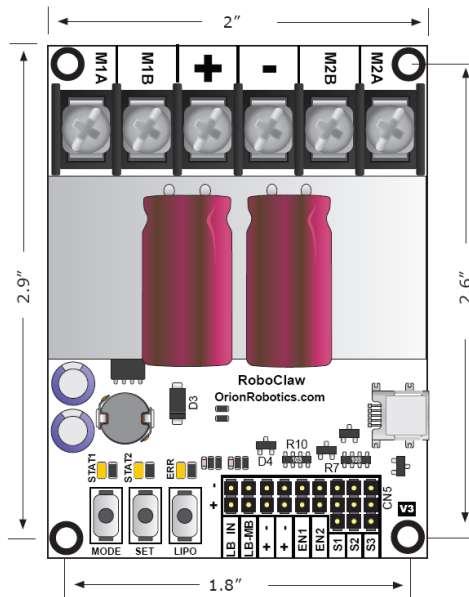


Figura A.2: Tarjeta de control RoboClaw.

que muestran valores de errores de seguimiento, así como también la trayectoria deseada contra la trayectoria real seguida por el robot móvil y las gráficas del valor de las velocidades de los motores.

Bibliografía

[**Aguiar00**] Aguiar, A. Atassiz and A. Pascoal, Regulation of a nonholonomic dynamic wheeled mobile robot with parametric modeling uncertainty using Lyapunov functions, presented at the 39th IEEE Conf. decision and control, Sydney, Australia, 2000.

[**Amidi90**] O. Amidi, "Integrated Mobile Robot Control", Robotics Institute, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, PA, Tech. Rep. CMU-RI-TR-90-17, 1990.

[**Asimov61**] Asimov, I, Robot, Doubleday 1961.

[**Azcon03**] Bañó Azcon, Análisis y diseño del control de posición de un robot móvil con tracción diferencial, Tesis profesional, Escuela Técnica Superior de Ingeniería (ETSE) de la Universidad de Valencia, 2003.

[**Balakrishna95**] R. Balakrishna and A. Ghosal, Modeling of slip for wheeled mobile robots, IEEE Trans. Robot. Automat., vol. 11, pp. 126-132, 1995.

[**Barea05**] R. Barea, L. Boquete, M. Mazo, E. López y L.M. Bergasa, Guiado de robots móviles utilizando electro-oculografía, Universidad de Alcalá, Madrid España, 2005.

[**Bekker60**] M.G. Bekker, Off The-Road Locomotion, the University of Michigan Press, Ann Arbor, MI, 1960.

[**Bekker69**] M. G. Bekker, Introduction to Terrain-Vehicle Systems, the University of Michigan Press, Ann Arbor, MI, 1969.

[**Borenstein96**] J. Borenstein and L. Feng, Measurement and correction of systematic odometry errors in mobile robots, IEEE Trans. Robot Automat., vol. 12, pp. 869-880, 1996.

[**Campion96**] G. Campion, G. Bastin and B. DAndreaNovel, Structural properties and classification of kinematic and dynamic models of wheeled mobile robots, IEEE Transactions on Robotics and Automation, vol. 12, pp. 47-62, 1996.

[**Capek01**] K. Capek, R.U.R (Rossums Universal Robots), New York, Dover Publications Inc., 2001.

[**Chakraborty03**] N. Chakraborty and A. Ghosal, Dynamic modeling and simulation of a wheeled mobile robot for traversing uneven terrain without slip, Department of Mechanical Engineering, Indian Institute of Science, 2003.

[**Contreras03**] L. Contreras, Estudio e implementación de algunos comportamientos básicos de un animal en un robot de tipo genérico, Tesis profesional, UDLA, Puebla, 2003.

[**Craig06**] Craig John J. Roba, Pearson Education, 3^a edición, México, 2006.

[**Dixon05**] W.E. Dixon, T. Galluzo, G. Hu, and C. Crane, Adaptive velocity field control of a wheeled mobile robot, University of Florida, Gainesville, FL, 2005.

[**Dongbing06**] Dongbing Gu and Huosheng Hu, Receding horizon tracking control of wheeled mobile robots, IEEE Transactions on control systems technology, vol.14, No.4, 2006.

[**Fabio05**] González Fabio y J. Barrero, Algoritmos genéticos aplicados al planea-

miento de trayectorias de robots móviles. Modelado y simulación, Grupo CEMOS, Escuela de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Telecomunicaciones, Universidad Industrial de Santander, 2005.

[Fierro97] R. Fierro and F. Lewis, "Control of a Nonholonomic Mobile Robot: Backstepping Kinematics into Dynamics", *Journal of Robotic Systems*, 14(3), 149-163, 1997.

[Giralt79] G. Giralt, R. Sobek and R. Chatila, "A multi-level planning and navigation system for a mobile robot; A first approach to Hilare", in *Proc. 1979 IJCAI*, Tokyo, Japan, pp. 335-338.

[Goris05] K. Goris, *Autonomous mobile robot mechanical design*, These elektrotechnisch ingenieur, Vrije Universiteit Brussel, 2005.

[Granosik05] G. Granosik and J. Borenstein, "Integrated joint actuator for serpentine robots", *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 10, pp. 473-481, 2005.

[Grasser00] Grasser, A. Darrigo, S. Colombi, A. Rufer, *JOE: A mobile, inverted pendulum*, Laboratory of Industrial Electronics, Swiss Federal Institute of Technology Lausanne, Lausanne, Switzerland, 2000.

[Guzmán03] J.L. Guzmán, M. Berenguel, F. Rodríguez y S. Dormido, *Herramienta interactiva para robótica móvil*, Universidad de Almería, Almería España, 2003.

[Helmes85] C. Helmes, "Photo Essay: A first glimpse at gemini", *Robotics Age*, vol. 7, pp. 12-13, 1985.

[Holmberg03] R. Holmberg and O. Khatib, "Development and control of a holonomic mobile robot for mobile manipulation tasks", *International Journal of Robotics Research*, vol. 19, pp. 1066-1074, 2003.

[Holland83] J. M. Holland, Basic robotics concepts, Howard W. Sams Co., Indianapolis, INN, pp. 107-170, 1983.

[Hollis97] R. Hollis, Newt: a mobile, cognitive robot, Byte vol. 2, pp. 30-45, 1997.

[Iwamoto83] T. Iwamoto, H. Yamamoto and K. Honma, Transformable crawler mechanism with adaptability to terrain variations, in Proc. 1983 International Conference on Advanced Robotics Conf., Tokyo, Japan, pp. 285-292.

[Jaquez05] V. M. Jaquez, Construcción de mapas y localización simultanea con robots móviles, Tesis de Maestría, ITESM Cuernavaca, 2005.

[Khalil96] Khalil, H. K. (1996). Nonlinear systems. 2nd ed. Prentice-Hall.

[Khamis03] M. Khamis Rashwan, Interacción remota con robots móviles basada en internet Tesis Doctoral, Universidad Carlos III de Madrid, España, 2003.

[Lauwers06] T. B. Lauwers, G. A. Kantor, and R. L. Hollis, A dynamically stable single-wheeled mobile robot with inverse mouse-ball drive, in Proc. 2006 IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, Orlando, FL.

[Martin98] C. Martin, Breaking out of the black box: A new approach to robot perception, Robotics Institute, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, PA, 1998.

[Moravec80] H. P. Moravec, Obstacle avoidance and navigation in the real world by a seeing robot rover, PhD Thesis, Department of Computer Science, Stanford University, 1980.

[Moravec83] H. P. Moravec, The Stanford cart and the CMU rover, in Proc. 1983 IEEE vol. 71, pp. 872-884.

[Muir87] P. F. Muir and C. P. Neuman, Kinematic modeling of wheeled mobile ro-

bots, *Journal of Robotic Systems*, vol. 3, pp. 281-340, 1987.

[Muir92] P. F. Muir and C. P. Neuman, Kinematic modeling of wheeled mobile robots, Robotics Institute, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, PA, Tech. Rep. CMU-RI-TR-86-12, 1992.

[Murray93] R. M. Murray, Nonholonomic motion planning: steering using sinusoids, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 38, pp. 700-716, 1993.

[Nilsson84] N. J. Nilsson, Shakey the robot. Technical note 323, Artificial Intelligence Center, Computer Science and Technology Division, SRI International, Menlo Park, CA, 1984.

[Oetomo03] D. Oetomo, M.H. Ang Jr., L. Chee and T. Khim, Modeling and analysis of omnidirectional mobile robot toward isotropic design, National University of Singapore, 2003.

[Ogata98] Ogata Katsuhiko, Ingeniería de control moderna, tercera edición, editorial Prentice Hall, México, 1998.

[Payne04] Payne, Design and construction of a pair of cooperating autonomous mobile robots Thesis Master of Science, University of Waikato, 2004.

[Raibert83] M. H. Raibert, H. Brown, M. Chepponis, E. Hastings, J. Koechling, K. N. Murphy, S. S. Murthy and A. Stentz, Dynamically stable legged locomotion Robotics Institute, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, PA, Tech. Rep. CMU-RI-TR-83-20, 1983.

[Russell03] S. Russell and P. Norvig, Artificial intelligence a modern approach, Prentice Hall. Second Edition, 2003.

[Sandin03] P. E. Sandin, Robot mechanisms and mechanical devices illustrated Mc-

Graw-Hill, 2003.

[Sheding99] S. Scheduling, G. Dissanayake, E. M. Nebot and H. Durrant-Whyte, Experiment in autonomous navigation of an underground mining vehicle IEEE Trans. Robot. Automat., vol. 15, pp. 85-95, 1999.

[Schempf95] H. Schempf, B. Chemel, N. Everett, Neptune: Above-Ground storage tank inspection robot system Robotics Institute, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, PA, 1995.

[Selig92] J.M. Selig, Introductory robotics, Prentice Hall, 1992, pp. 2-4

[Seyr05] M. Seyr and S. Jakubek, Mobile robot predictive trajectory tracking Institute of Mechanics and Mechatronics, Vienna University of Technology, 2005.

[Shekar97] S. Shekar, Wheel rolling constraints and slip in mobile robots in Proc. 1997 IEEE Int. Conf. Robotics and Automation, vol. 3, pp. 2601-2607.

[Solea09] Razvan Solea, Adrian Filipescu, and Urbano Nunes, "Sliding-Mode Control for Trajectory-Tracking of a Wheeled Mobile Robot in Presence of Uncertainties", Proceedings of the 7th Asian Control Conference, Hong Kong, China, August 27-29, 2009.

[Spenko04] H. Yu, M. Spenko and S. Dubowsky, Omni-directional mobility using active split offset castors Transactions of the ASME, vol. 126, pp. 822-829, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, USA, 2004.

[Todd85] D. Todd, Walking machines: An introduction to legged robotics, Kogan-Page, London, 1985.

[Urdiales01] Introducción a la robótica, ETSI Telecomunicación, Universidad de Málaga, 2001.

[Wallace85] R. Wallace, A. Stentz, C. Thorpe, H. Moravec, W. Whittaker and T. Kanade, First results in robot road-following in Proc. 1985 IJCAI, Los Angeles, CA, pp.1089-1095.

[X-Li05] X. Li and A. Zell, Path following control for a mobile robot pushing a ball
Wilhelm-Schickard-Institute, University of Tübingen, Tübingen, Germany, 2005.