



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

SISTEMAS INTERACTIVOS DE
PARTÍCULAS:
PROCESO DE CONTACTO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

A C T U A R I A

P R E S E N T A:

ILCE ANAHI MEDINA MENDOZA

DIRECTOR DE TESIS:
Dra. Ana Meda Guardiola



2014



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno

Medina
Mendoza
Ilce Anahi
58 51 75 63
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Actuaría
306098433

2. Datos del tutor

Dra.
Ana
Meda
Guardiola

3. Datos del sinodal 1

Dr.
Fernando
Baltazar
Larios

4. Datos del sinodal 2

M. en C.
Juan Martín
Barrios
Vargas

5. Datos del sinodal 3

Dr.
Sergio Iván
López
Ortega

6. Datos del sinodal 4

Dr.
Daniel
Hernández
Hernández

7. Datos del trabajo escrito

Sistemas Interactivos de Partículas: Proceso de Contacto
98 págs.
2014

A mis padres

AGRADECIMIENTOS

A mi madre por ser la luz de mis días, por enseñarme que hay amores inconmensurables, a mi padre por mostrarme que la fortaleza te hace inquebrantable y el esfuerzo es la clave de cualquier logro. A Jonás porque hace que aun en los días más oscuros sonría. A mi asesora, la Dr. Ana Meda Guardiola por su comprensión y ayuda, por su dedicación y enseñanzas. A mi pulgas que cada noche de esta tesis se desvelo conmigo.

ÍNDICE GENERAL

Agradecimientos	I
Notación	V
Introducción	VII
1. Semigrupos, generadores, núcleos y dualidad.	1
1.1. Proceso de Markov y su semigrupo	2
1.2. Semigrupos y medidas invariantes	7
1.3. Semigrupos y sus generadores	14
1.4. Núcleos	21
1.5. Dualidad	24
2. Sistemas interactivos de partículas y sistemas spin	27
2.1. Sistemas interactivos de partículas	27
2.1.1. Modelo del votante	28
2.1.2. Proceso de exclusión	28
2.1.3. Proceso de contacto	28
2.2. Generadores	29
2.3. Valores importantes	37
2.4. Sistemas spin	43
2.4.1. Ergodicidad de sistemas spin	43
2.4.2. Acoplamiento de sistemas spin	46
2.4.3. Reescribiendo valores importantes.	49
3. Proceso de contacto	51
3.1. Construcción del proceso de contacto	52
3.2. Descripción del proceso.	52
3.3. Herramientas para la representación gráfica	53
3.4. Aditividad	56

3.4.1. Dualidad	56
4. Propiedades: proceso de contacto	59
4.1. Valores importantes en el proceso de contacto.	59
4.2. Propiedades del proceso de contacto	61
4.3. Supervivencia y extinción.	63
A. Análisis Matemático	69
A.1. Análisis Real	69
A.2. Análisis en Espacios de Funciones	70
B. Probabilidad	75
C. Medida e Integración	77
D. Topología	79
E. Teoría de Gráficas	81
Bibliografía	83

NOTACIÓN

X	espacio de estados del proceso,
x, y, z, \dots	elementos en S ,
$G(S, E)$	gráfica con S el conjunto de vertices y E el conjunto de aristas,
$C(X)$	espacio de funciones continuas de X en \mathbb{R} ,
\mathcal{A}	colección de subconjuntos finitos de S ,
\mathcal{P}	conjunto de las medidas de probabilidad en X ,
\mathcal{I}	conjunto de las medidas invariantes en \mathcal{P}
η, ξ, \dots	elementos en X ,
η_t, ξ_t	proceso de Markov particularmente un sistema interactivo de partículas,
δ_0	masa puntual, distribución degenerada o delta de Dirac de $\eta \equiv 0$,
δ_1	masa puntual, de $\eta \equiv 1$,
Ω	generador o pregenerador del proceso,
$\mathcal{D}(\Omega)$	dominio de Ω y
$\mathcal{R}(\Omega)$	rango de Ω .

INTRODUCCIÓN

Las epidemias son eventos ligados íntimamente a la humanidad. Epidemias y pandemias han afectado el curso histórico de poblaciones y civilizaciones completas.

Gracias a los avances en investigación médica hoy en día es posible tratar enfermedades que en el pasado asolaron a la humanidad, pero día a día la aparición de nuevas enfermedades y mutaciones en virus y bacterias conocidas, ponen en riesgo la salud de miles de individuos, a la par que la globalización hace que el riesgo de contagio masivo sea cada vez mayor.

Debido a esto, nos pareció importante estudiar un modelo matemático que nos permitiera entender a gran escala cómo se comporta una epidemia sin dejar de lado los supuestos principales que permiten que un modelo sea realista y además permita llevar a cabo algunas predicciones.

Buscando modelos para infecciones, nos topamos con modelos aleatorios y modelos deterministas. Entre los modelos probabilistas que revisamos están algunos de los desarrollados por Linda J. S. Allen en el capítulo 3 de [BvdDW08], los cuales a pesar de contemplar en alguna medida los eventos de contacto infecciosos entre los individuos como aleatorios, son modelos simples y sus resultados poco apegados a la realidad. A la par revisamos modelos epidemiológicos deterministas, primordialmente básicos, como los modelos (SIR) y (SIS), con las hipótesis usuales, por lo cual se trabaja con una población constante y no se contempla la transmisión vertical de la enfermedad o muertes. A pesar de las hipótesis en estos últimos modelos, las conclusiones obtenidas en los modelos simples no son tan realistas como quisiéramos. Por lo anterior decidimos buscar un modelo más complejo.

Finalmente logramos dar con un modelo más realista respecto al tipo de contacto necesario para transmitir una enfermedad y bastante más complejo que los anteriores que encontramos, y decidimos trabajar con él. Este modelo es un proceso de contacto, que es un caso particular de un sistema interactivo de partículas (IPS por sus siglas en inglés). En este modelo el contagio se da de manera local por cercanía, y no homogéneo entre todos los habitantes (o puntos).

En probabilidad un sistema interactivo de partículas (IPS) es un proceso estocástico

η_t con $t \in [0, \infty)$ en $X = \{0, 1\}^S$ donde S es el conjunto de vértices de una gráfica.

Los Sistemas Interactivos de Partículas son una rama de la teoría de probabilidad que tiene numerosas conexiones con múltiples áreas de la ciencia, primordialmente física y áreas como biología y las ciencias sociales.

Los procesos estocásticos de esta clase son muy útiles para modelar fenómenos complejos que involucran un gran número de componentes interrelacionadas. Han sido utilizados para modelar la propagación de epidemias o incendios, el flujo del tráfico en carreteras, mercados financieros, sistemas económicos, dinámica de opinión, quimiotaxia, crecimiento de tumores, migración colectiva y magnetismo, por mencionar algunos ejemplos.

Matemáticamente los componentes se modelan como partículas confinadas en una gráfica. Los movimientos e interacción entre estos se rigen por normas locales, es decir, dependen del entorno más allegado a cada partícula, se quiere estudiar el fenómeno completo y por esto se eligió modelarlos como un proceso estocástico.

Debido a la gran variedad de temas que se abarcan desde el comienzo de la tesis y a la dificultad de los mismos se decidió abocar la tesis a una adecuada construcción del proceso de tal manera que esta misma construcción sirviera también para cualquier modelo general de IPS's. Nos basamos en el texto de Thomas M. Liggett [Lig85] el cuál exige para su comprensión una gran cantidad de temas de análisis, topología y probabilidad. Por esto se dejó solo para la parte final un poco del tratamiento a los temas que fueron el incentivo para trabajar este modelo es decir, las epidemias. En el último capítulo se pueden encontrar cotas interesantes que permiten matemáticamente dar los factores necesarios para que se presente una pandemia.

Finalmente podemos concluir que esta tesis es una introducción a los sistemas interactivos de partículas. Consta de la construcción de los mismos, y aun más se estudia un de los modelos más importantes y básicos en estos temas dando un tratamiento formal a estos temas.

El primer capítulo se encuentra dedicado a construir teoría que será necesaria en los siguientes capítulos, dando la base para la construcción de los sistemas spin, en este se tratan los temas de semigrupos, generadores, núcleos y dualidad. Es en el segundo capítulo donde se da la construcción de los sistemas interactivos de partículas y los sistemas spin a través de semigrupos y generadores de Markov. En el tercer capítulo construimos un caso particular de los sistemas spin, el proceso de contacto que es el modelo que incitó a esta tesis. Finalmente el último capítulo se encuentra dedicado a observar características particulares del proceso de contacto, como modelo para una enfermedad.

SEMIGRUPOS, GENERADORES, NÚCLEOS Y DUALIDAD.

Para abordar rigurosamente el tema de Sistemas de Partículas es necesario conocer y trabajar con diferentes ramas de la matemática, sobre todo análisis. Conceptos como semigrupo, proceso de Feller, medidas invariantes y generadores de Markov nos serán indispensables, por esto para construir el proceso de contacto CP; dedicamos este capítulo a trabajar con este material.

Este primer capítulo se basa principalmente en la primera parte del primer capítulo del libro [Lig85] de Thomas M. Liggett. Se tomó este libro como referencia principal porque en la mayoría de los libros y documentos que encontramos posteriores al año 1985 respecto a sistemas interactivos de partículas y procesos de contacto, se hace referencia a la construcción dada por Liggett en este libro, y este autor es particularmente citado al hablar del tema. También se usaron el [FG96], [Wei80], [Kre78], entre algunos más para la construcción pues facilitaba en algunos casos la teoría o la ampliaban, aunque en la parte de dualidad y en la última parte de medidas invariantes se usó principalmente el libro de Thomas M. Liggett [Lig10] pues aborda de forma más certera algunos temas y proposiciones que nos interesan.

Cabe mencionar que la mayoría de los textos consultados sobre el tema dan por sentado que el lector maneja adecuadamente los temas abordados en el primer y segundo capítulo de esta tesis, pues en algunas ocasiones simplemente se abstienen de mencionar la construcción saltando propiamente a la teoría de su interés o solo mencionan los resultados más relevantes, por lo cual esta tesis ayudara a comprender la construcción formal de los sistemas interactivos a un lector inexperto.

Para comenzar necesitamos definir algunos elementos. Sea X un espacio métrico compacto. X se tomará con estructura medible dada por la σ -álgebra de los conjuntos de Borel, es decir los abiertos.

También, definimos $D[0, \infty)$ como el conjunto de todas las funciones cadlag, es decir $\eta : [0, \infty) \rightarrow X$ continuas por la derecha y con límite por la izquierda. Este espacio así definido es el espacio canónico para las trayectorias de un proceso de Markov con espacio de estados X .

Finalmente, para $s \in [0, \infty)$, definimos el mapeo $\pi_s : D[0, \infty) \rightarrow X$ como $\pi_s(\eta) = \eta_s$ y \mathcal{F} será la más pequeña σ -álgebra en $D[0, \infty)$ que hace que todos los mapeos π_s sean medibles. Sea \mathcal{F}_t la más pequeña σ -álgebra tal que π_s es medible para toda $s \leq t$.

1.1. Proceso de Markov y su semigrupo

Habiendo definido los elementos anteriores comenzaremos dando la definición de proceso de Markov que usaremos durante este trabajo.

Definición 1.1. *Definimos un **proceso de Markov** en X como una colección de medidas de probabilidad $\{P^\eta, \eta \in X\}$ en el conjunto $D[0, \infty)$ indexada por X , que cumplen las siguientes propiedades:*

1. El mapeo $\eta \rightarrow P^\eta(A)$ de $X \rightarrow [0, 1]$ es medible para toda $A \in \mathcal{F}$,
2. $P^\eta[\xi \in D[0, \infty) : \xi_0 = \eta] = 1$, para toda $\eta \in X$, es decir P^η normaliza todas las trayectorias con condición inicial $\xi_0 = \eta$,
3. $P[\eta_{s+} \in A | \mathcal{F}_s] = P^{\eta_s}(A)$ c.s. para toda $\eta \in X$, toda $A \in \mathcal{F}$ y $s \geq 0$.

Notemos que la última propiedad dada en la definición anterior es precisamente la propiedad de Markov.

También definimos la esperanza E^η correspondiente a P^η :

Definición 1.2. *Sea Y una función medible en $D[0, \infty)$ integrable respecto a la medida de probabilidad P^η . Entonces*

$$E^\eta Y := \int_{D[0, \infty)} Y dP^\eta.$$

También definimos el conjunto $C(X, \mathbb{R}) := \{f | f : X \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ continua}\}$, con la norma uniforme

$$\|f\|_\infty = \sup_{\eta \in X} |f(\eta)|.$$

Usualmente escribiremos $C(X)$ en lugar de $C(X, \mathbb{R})$.

Notemos que por la proposición (A.14) tenemos que el conjunto $C(X)$ es subespacio de las funciones acotadas de X (A.12) en \mathbb{R} , es decir

$$C(X, \mathbb{R}) \subset C_a(X, \mathbb{R}), \quad (1.1)$$

y usando la proposición (A.18) obtenemos que $C(X, \mathbb{R})$ es de *Banach*, con la norma uniforme.

Definición 1.3. Para toda $f \in C(X)$, $\eta \in X$ definimos el operador $S(t)$, con $t \geq 0$ como

$$S(t)f(\eta) := E^\eta f(\eta_t).$$

Notemos que por definición de $S(t)$ el operador es *lineal*.

En general, si $f \in C(X)$ no implica $S(t)f \in C(X)$ para $t \geq 0$, por lo cual tenemos la siguiente definición.

Definición 1.4. Decimos que un proceso de Markov $\{P^\eta, \eta \in X\}$ es un **proceso de Feller** si para toda $f \in C(X)$ y $t \geq 0$, tenemos

$$S(t)f \in C(X).$$

Notemos que si tenemos un proceso de Feller, entonces $S(t) : C(X) \rightarrow C(X)$ para toda $t \geq 0$ y el operador lineal $S(t)$ muestra el valor esperado de la función f sobre el conjunto X al tiempo t para el proceso de Markov η .

Para facilitarnos la escritura en algunas demostraciones y para concordar con la notación usual, definiremos la función $1 \in C(X)$ como $1(\eta) = 1$ para toda $\eta \in X$ y análogamente la función identidad $I \in C(X)$ como $I(\eta) = \eta$ para toda $\eta \in X$.

Proposición 1.5. Sea $\{P^\eta, \eta \in X\}$ un proceso de Feller en X , entonces la familia de operadores lineales $\{S(t), t \geq 0\}$ en $C(X)$ definidos por (1.3) tiene las siguientes propiedades:

1. $S(0)f = f$ para toda $f \in C(X)$, es decir $S(0) = I$.
2. $S(t+s)f = S(t)S(s)f$ para toda $s, t \geq 0$ y toda $f \in C(X)$,
3. el mapeo $t \rightarrow S(t)f$ que va de $[0, \infty) \rightarrow C(X)$ es continuo por la derecha para toda $f \in C(X)$,
4. $S(t)1 = 1$ para toda $t \geq 0$,
5. $S(t)f \geq 0$ para toda función $f \in C(X)$ no negativa.

Demostración. 1. Sea $f \in C(X)$ y $\eta \in X$. Por la definición (1.3)

$$S(t)f(\eta) = E^\eta f(\eta_t)$$

tomando $t = 0$, tenemos

$$S(0)f(\eta) = E^\eta f(\eta_0),$$

dado que estamos trabajando con un proceso de Feller, este es a su vez un proceso de Markov, por lo cual usando la propiedad de Markov, tenemos

$$S(0)f(\eta) = Ef(\eta) = f(\eta)$$

como esto se cumple para cualquier $\eta \in X$, $S(0)f = f$ es decir

$$S(0) = I.$$

2. Sea $\eta \in X$, $s, t \geq 0$ y $f \in C(X)$.

$$\begin{aligned} S(s+t)f(\eta) &= E^\eta f(\eta_{s+t}) && \text{por la definición (1.3)} \\ &= E^\eta [E[f(\eta_{s+t}) | \mathcal{F}_s]] && \text{por propiedades de esperanza} \end{aligned}$$

dado que $\{P^\eta, \eta \in X\}$ es un proceso de Feller y por consiguiente un proceso de Markov

$$\begin{aligned} &= E^\eta [E^{\eta_s} [f(\eta_t)]] \\ &= E^\eta [S(t)f(\eta_s)] && \text{usando nuevamente la definición (1.3)} \\ &= E^\eta [S(t)f](\eta_s) && \text{como una función de } \eta_s. \end{aligned}$$

Ya que $S(t)f \in C(X)$ pues $\{P_\eta, \eta \in X\}$ es de Feller, y usando nuevamente la definición (1.3), tenemos

$$= S(s)S(t)f(\eta),$$

por lo tanto

$$S(s+t)f = S(s)S(t)f.$$

3. Sea $a \in [0, \infty)$, $\eta \in X$ y $f \in C(X)$. Por la definición del operador lineal $S(t)$, tenemos

$$\lim_{t \downarrow a} S(t)f(\eta) = \lim_{t \downarrow a} E^\eta [f(\eta_t)]$$

dado que f es una función acotada recordando la ecuación (1.1), existe $K \in \mathbb{R}$ tal que

$$|f(\eta)| < K, \quad \forall \eta \in X \text{ y entonces } |f(\eta_t)| < K, \quad \forall t \in [0, \infty).$$

Por otra parte dado que η es continua por la derecha, pues $\eta \in D[0, \infty)$, y f es continua, tenemos el límite puntual

$$f(\eta_t) \rightarrow f(\eta_a)$$

por lo cual

$$\mathbb{P}(\lim_{t \downarrow a} f(\eta_t) = f(\eta_a)) = 1 \text{ y } f(\eta_t) \rightarrow f(\eta_a) \text{ c.s.}$$

análogamente, como la sucesión constante

$$K \rightarrow K \text{ c.s., y } \lim_{t \downarrow a} E^\eta [K] = K,$$

por el teorema de convergencia dominada (B.1)

$$\lim_{t \downarrow a} E^\eta[f(\eta_t)] = E^\eta[f(\eta_a)] = S(a)f(\eta),$$

por lo tanto

$$\lim_{t \downarrow a} S(t)f(\eta) = S(a)f(\eta),$$

dado que esto se cumple para toda $\eta \in X$, tenemos

$$\lim_{t \downarrow a} S(t)f = S(a)f.$$

por lo tanto el mapeo $t \rightarrow S(t)f$ es continuo por la derecha para toda $f \in C(X)$.

4. Tomamos la función $1 \in C(X)$, $\eta \in X$ y $t \geq 0$.

$$\begin{aligned} S(t)1(\eta) &= E^\eta[1(\eta_t)] && \text{por la definición (1.3)} \\ &= E^\eta[1] \\ &= 1. \end{aligned}$$

Dado que igualdad anterior se cumple para toda $\eta \in X$, tenemos

$$S(t)1 = 1.$$

5. Sea $f \in C(X)$, f no negativa, $\eta \in X$ y $t \geq 0$. Usando la definición (1.3)

$$S(t)f(\eta) = E^\eta f(\eta_t)$$

y por hipótesis $f(\eta_t) \geq 0$ por lo tanto $E^\eta f(\eta_t) \geq 0$, es decir

$$S(t)f(\eta) \geq 0$$

dado que esta desigualdad se cumple para cualquier $\eta \in X$,

$$S(t)f \geq 0.$$

□

Definición 1.6. Llamaremos a una colección de operadores lineales $\{S(t), t \geq 0\}$ en $C(X)$ un **semigrupo de Markov** si cumple todas las condiciones de la proposición (1.5).

Las definiciones anteriores y las características que definen cada proceso nos serán de gran ayuda más adelante en este capítulo al igual que en el siguiente.

Dada la bibliografía o el material que se use la siguiente proposición puede o no ser de relevancia.

Proposición 1.7. *El semigrupo $\{S(t), t \geq 0\}$ es fuertemente continuo.*

Demostración.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} S(t)f(\eta) &= \lim_{t \downarrow 0} S(t)f(\eta) && \text{dado que } t \geq 0 \text{ por definición de } S(\cdot) \\ &= \lim_{t \downarrow 0} E^\eta[f(\eta_t)] && \text{usando la definición (1.3).} \end{aligned}$$

Usando la demostración del tercer inciso de la proposición (1.5) tenemos

$$\begin{aligned} &= E^\eta[f(\eta_0)], \\ &= E[f(\eta)] && \text{dado que } S(t) \text{ es de Markov} \\ &= f(\eta). \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\lim_{t \rightarrow 0} S(t)f(\eta) = f(\eta),$$

por lo cual el semigrupo $\{S(t), t \geq 0\}$ es fuertemente continuo.

□

La siguiente proposición es interesante pues nos muestra una más de las propiedades del semigrupo de Markov con el cual estamos trabajando.

Proposición 1.8. *El operador lineal $S(t)$ es Lipschitz continuo, para toda $t \geq 0$.*

Demostración. Demostraremos que $S(t)$ es acotado por lo que tendremos que es continuo usando el teorema A.28.

Sea $f \in C(X)$, y $t \geq 0$.

$$\begin{aligned} \|S(t)f\|_\infty &= \sup_{\eta \in X} |S(t)f(\eta)| \\ &= \sup_{\eta \in X} |E^\eta[f(\eta_t)]| \\ &\leq \sup_{\eta \in X} E^\eta[|f(\eta_t)|] \\ &\leq \sup_{\eta \in X} |f(\eta_t)| \\ &= \|f\|_\infty \end{aligned}$$

Por lo tanto $S(t)$ es un operador acotado y usando la proposición (A.28) $S(t)$ es un operador Lipschitz continuo.

□

Una observación muy simple de la proposición anterior es que el operador lineal $S(\cdot)$ es continuo.

El siguiente es un teorema de existencia, que sólo enunciaremos pues nos es de mayor interés conocer la construcción y propiedades del proceso. Si se desea mayor referencia se puede encontrar en [Lig85].

Teorema 1.9. *Sea $\{S(t), t \geq 0\}$ un semigrupo de Markov en $C(X)$, existe un único proceso de Markov $\{P^\eta, \eta \in X\}$ tal que para toda $f \in C(X)$, $\eta \in X$ y $t \geq 0$ se cumple*

$$S(t)f(\eta) = E^\eta f(\eta_t).$$

La importancia de los semigrupos de Markov se hace presente cuando nos percatamos de que a cada semigrupo le corresponde un proceso de Markov (por el teorema de extensión de Kolmogorov), por lo que dentro de los procesos de Feller el problema de construirlo se puede simplificar a sólo construir su correspondiente semigrupo.

1.2. Semigrupos y medidas invariantes

En esta sección trataremos la relación que existe entre los semigrupos de Markov y algunas medidas invariantes. Este tema tomará real importancia dentro de esta tesis cuando busquemos algunas cotas para conocer el comportamiento del proceso de contacto. Comenzaremos con algunas definiciones y observaciones.

Definición 1.10. *Llamaremos \mathcal{P} al conjunto de todas las medidas de probabilidad en X con la topología de la convergencia débil. Es decir,*

$$\mu_\eta \rightarrow \mu \text{ en } \mathcal{P}$$

si y sólo si para toda $f \in C(X)$

$$\int_X f d\mu_n \rightarrow \int_X f d\mu.$$

Observemos que las medidas en el conjunto \mathcal{P} son de Borel pues la estructura medible dada en X es la de los conjuntos de Borel; así lo asumimos al principio de este capítulo. También observemos que con esta topología, \mathcal{P} es un conjunto compacto cuando X es compacto.

Una observación importante es que para una medida $\mu \in \mathcal{P}$ y $\{P^\eta, \eta \in X\}$ un proceso de Markov, el correspondiente proceso de Markov con distribución inicial μ es un proceso que denotaremos por η_t cuya distribución se encuentra dada por

$$P^\mu = \int_X P^\eta \mu(d\eta).$$

Por lo cuál

$$E^\mu f(\eta_t) = \int_X E^\eta f(\eta_t) \mu(d\eta) = \int_X S(t)f(\eta) \mu(d\eta) \quad \forall f \in C(X). \quad (1.2)$$

Ahora nos hace falta una definición para la distribución al tiempo t del proceso η_t .

Definición 1.11. Sea $\{S(t), t \geq 0\}$ un semigrupo de Markov en $C(X)$ y $\mu \in \mathcal{P}$ una medida de probabilidad. La medida de probabilidad $\mu S(t) \in \mathcal{P}$ se define en términos de la igualdad

$$\int f d[\mu S(t)] = \int S(t)f d\mu \text{ para toda } f \in C(X).$$

Interpretaremos la medida de probabilidad $\mu S(t) \in \mathcal{P}$ como la *distribución del proceso al tiempo t* con distribución inicial μ ; en palabras: si μ es una medida de probabilidad en X , la distribución del proceso al tiempo t , cuando μ es la distribución inicial, será $\mu S(t)$.

Finalmente observemos que $E^\mu f(\eta_t) = \int f d[\mu S(t)]$.

Las siguientes definiciones serán de gran importancia en el último y penúltimo capítulo cuando investiguemos el comportamiento del proceso de contacto.

Definición 1.12. Diremos que una medida μ , $\mu \in \mathcal{P}$, es *invariante* o *estacionaria* para el proceso con semigrupo de Markov $\{S(t), t \geq 0\}$ si

$$\mu S(t) = \mu \text{ para toda } t \geq 0.$$

En el siguiente capítulo nos será de vital importancia la siguiente definición.

Definición 1.13. El conjunto de todas las medidas invariantes μ , $\mu \in \mathcal{P}$ se denota por \mathcal{I} .

En la siguiente proposición veremos algunas de las características del conjunto \mathcal{I} .

Proposición 1.14. Sea $\{S(t), t \geq 0\}$ el semigrupo de un proceso de Feller en X . Entonces,

1. $\mu \in \mathcal{I}$ si, y solo si

$$\int_X S(t)f d\mu = \int_X f d\mu, \text{ para toda } f \in C(X) \text{ y } t \geq 0.$$

2. el conjunto de todas las medidas invariantes \mathcal{I} es un subconjunto compacto de \mathcal{P} .

3. si $\nu = \lim_{t \rightarrow \infty} \mu S(t)$ existe para algún $\mu \in \mathcal{P}$, entonces $\nu \in \mathcal{I}$.

Demostración. 1. Sea $\mu \in \mathcal{I}$, $f \in C(X)$ y $t \geq 0$. Por la definición (1.11) tenemos que

$$\int S(t)f d\mu = \int f d[\mu S(t)],$$

y dado que $\mu \in \mathcal{I}$,

$$\mu = \mu S(t) = \int f d\mu.$$

Sea $\int S(t) f d\mu = \int f d\mu$ para toda $f \in C(X)$ y $t \geq 0$. Ya que $\mu \in \mathcal{P}$, y usando la definición (1.11), obtenemos

$$\int f d[\mu S(t)] = \int S(t) f d\mu$$

por lo tanto

$$\int f d[\mu S(t)] = \int S(t) f d\mu = \int f d\mu$$

es decir

$$\int f d[\mu S(t)] = \int f d\mu$$

por lo tanto $\mu S(t) = \mu$ y $\mu \in \mathcal{I}$.

2. Dado que \mathcal{P} es un conjunto compacto, y $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}$, usaremos la proposición (A.25) para demostrar que \mathcal{I} es compacto.

Para usar la proposición (A.25) es necesario que \mathcal{I} sea cerrado, en vista de esto usaremos la proposición (A.8). Sea $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en \mathcal{I} , tal que $\mu_n \rightarrow \mu$, demostraremos que $\mu \in \mathcal{I}$ para demostrar que \mathcal{I} es cerrado.

Ya que $S(t)f \in C(X)$ para toda $f \in C(X)$ (pues $\{S(t), t \geq 0\}$ es el semigrupo de transición de un proceso de Feller) y usando la definición (1.10), tenemos

$$\mu_n \rightarrow \mu \iff \int S(t) f d\mu_n \rightarrow \int S(t) f d\mu \quad (1.3)$$

para toda $f \in C(X)$.

Ya que $\mu_n \in \mathcal{I}$ y $\mu_n \rightarrow \mu$, usando la expresión (1.3), tenemos

$$\int f d\mu_n \rightarrow \int S(t) f d\mu. \quad (1.4)$$

Dado que la expresión (1.3) se cumple para toda $f \in C(X)$ y $t \in \mathbb{R}$ podemos decir

$$\int f d\mu_n \rightarrow \int f d\mu. \quad (1.5)$$

Por lo tanto, por las expresiones (1.4) y (1.5), tenemos

$$\int S(t)fd\mu = \int fd\mu.$$

Usando el primer inciso de la proposición (1.14), concluimos que $\mu \in \mathcal{J}$ por lo tanto, \mathcal{J} es cerrado y compacto.

(1.6)

3. Sea $\nu = \lim_{t \rightarrow \infty} \mu S(t)$ para $\mu \in \mathcal{P}$, $s \geq 0$ y $f \in C(X)$.

Dado que $\mu \in \mathcal{P}$, tenemos $\mu S(t) \in \mathcal{P}$ para toda $t \geq 0$ y como \mathcal{P} es compacto, (por el segundo inciso) $\nu \in \mathcal{P}$.

Además, ya que $S(t)f \in C(X)$ para toda $f \in C(X)$, pues $\{S(t), t \geq 0\}$ es el semigrupo de transición de un proceso de Feller, y dado que \mathcal{P} tiene la topología de la convergencia débil, tenemos

$$\begin{aligned} \int S(s)fd\nu &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int S(s)fd[\mu S(t)] \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int S(s)S(t)fd\mu && \text{usando la definición (1.11)} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int S(s+t)fd\mu && \text{por propiedades de semigrupo} \end{aligned}$$

dado que s es fija y el proceso es de Markov

$$\begin{aligned} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int S(t)fd\mu \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int fd[\mu S(t)] && \text{por la definición (1.11)} \end{aligned}$$

usando la topología de la convergencia débil

$$= \int fd\nu$$

por lo tanto

$$\int S(s)fd\nu = \int fd\nu.$$

Y usando el primer inciso de la proposición (1.14) concluimos $\nu \in \mathcal{J}$.

□

Una observación de utilidad es que la igualdad del primer inciso de la proposición (1.14) se puede escribir como $\mu(S(t)f) = \mu(f)$ para toda $f \in C(X)$.

Definición 1.15. Diremos que un proceso de Markov con semigrupo $\{S(t), t \geq 0\}$ es *ergódico* si:

1. $\mathcal{I} = \{v\}$ es decir, el conjunto \mathcal{I} es un unitario, y
2. $\lim_{t \rightarrow \infty} \mu S(t) = v$ para toda $\mu \in \mathcal{P}$.

Notemos que la primera condición de la definición anterior nos dice que la medida estacionaria entonces es única y la segunda condición nos da la convergencia al equilibrio.

Teorema 1.16. Sea $\{S(t), t \geq 0\}$ un semigrupo de Markov para el proceso de Feller. Si X es compacto, entonces $\mathcal{I} \neq \emptyset$.

Demostración. Sea $\mu \in \mathcal{P}$.

Definimos

$$v_n = \frac{1}{n} \int_0^n \mu S(r) dr.$$

Sea $f \in C(X)$. Usando la definición (1.11)

$$\begin{aligned} \int_X f d(v_n S(t)) &= \int_X S(t) f d v_n \\ &= \int_X S(t) f d \left(\frac{1}{n} \int_0^n \mu S(r) dr \right) \\ &= \frac{1}{n} \int_0^n \left(\int_X S(t) S(r) f d \mu \right) dr \end{aligned}$$

usando el inciso dos de la proposición (1.5)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{n} \int_0^n \left(\int_X S(t+r) f d \mu \right) dr \\ &= \frac{1}{n} \int_t^{n+t} \left(\int_X S(r) f d \mu \right) dr. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Además

$$\int f d v_n - \int S(t) f d v_n = \int f d v_n - \int f d(v_n S(t)).$$

Usando la igualdad (1.7)

$$\begin{aligned} &= \int f d \left(\frac{1}{n} \int_0^n \mu S(r) dr \right) - \frac{1}{n} \int_t^{n+t} \left(\int_X S(r) d \mu \right) dr \\ &= \frac{1}{n} \int_0^n \left(\int_X S(r) f d \mu \right) dr - \frac{1}{n} \int_t^{n+t} \left(\int_X S(r) d \mu \right) dr \\ &= \frac{1}{n} \left[\int_0^n \left(\int_X S(r) f d \mu \right) dr - \int_t^{n+t} \left(\int_X S(r) d \mu \right) dr \right]. \end{aligned}$$

Notemos que los términos de ambas integrales son los mismos, y solamente difieren en los límites de integración, por lo tanto para $n > t$

$$\int f d\nu_n - \int S(t) f d\nu_n = \frac{1}{n} \left[\int_0^t \left(\int S(r) f d\mu \right) dr - \int_n^{n+t} \left(\int_X S(r) d\mu \right) dr \right].$$

La última igualdad tiende a cero cuando n tiende a infinito, pues el primer sumando va a cero al ser acotado y estar multiplicado por $\frac{1}{n}$ y el segundo converge a cero porque el operador $S(r)$ es acotado, la medida μ es medida de probabilidad y por lo tanto es también acotado donde la cota no depende de n . Por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f d\nu_n - \int_X S(t) f d\nu_n = 0. \quad (1.8)$$

Queremos usar el teorema de Prohorov (A.42), por lo que es necesario ver si se cumplen las hipótesis necesarias. Definimos el siguiente conjunto

$$\Pi := \left\{ \nu_n \mid \nu_n = \frac{1}{n} \int_0^n \mu S(r) dr, \text{ para } \mu \in \mathcal{P} \right\}. \quad (1.9)$$

Por hipótesis X es compacto, por lo tanto, por el teorema (A.23) X es completo, y usando la proposición (A.39), tenemos que X es separable. Ahora demostraremos que Π es tenso. Usaremos propiedades de semigrupo y del conjunto de medidas invariantes.

Sea $\varepsilon > 0$ y $\nu_n \in \Pi$. Notemos que

$$\nu_n(X) = \int_X d(\nu_n)$$

por la proposición (1.5) inciso 4, tenemos

$$= \int_X S(t) 1 d\nu_n$$

usando el desarrollo en la igualdad (1.7)

$$= \frac{1}{n} \int_t^{n+t} \left(\int_X S(r) 1 d\mu \right) dr$$

usando nuevamente la proposición (1.5) inciso 4

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{n} \int_t^{n+t} \left(\int_X 1 d\mu \right) dr \\ &= \frac{1}{n} \int_t^{n+t} 1 dr \end{aligned}$$

dato que lo anterior se cumple para cualquier t , tomamos $t = 0$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{n} \int_0^n dr \\ &= 1 \end{aligned} \tag{1.10}$$

es decir

$$\nu_n(X) = 1 \tag{1.11}$$

por lo tanto

$$\nu_n(X) > 1 - \varepsilon \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Por otra parte dado que X es compacto y $X \subset X$, podemos observar que cumplimos las hipótesis del teorema de Prohorov (A.42), por lo tanto, el conjunto Π es tenso. Dado que Π es tenso, existe una subsucesión ν_{n_k} y $\nu \in \mathcal{P}$, tal que

$$\nu_{n_k} \rightarrow \nu$$

donde n_k va para infinito; por la topología de la convergencia débil,

$$\nu_{n_k} \rightarrow \nu \iff \int_X f d\nu_{n_k} \rightarrow \int_X f d\nu,$$

por lo tanto, ya que $S(f)f, f \in C(X)$ y por (1.8)

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X f d\nu_{n_k} - \int_X S(t)f d\nu_{n_k} &= \int_X f d\nu - \int_X S(t)f d\nu \\ &= 0, \end{aligned}$$

con lo cual, tenemos

$$\int_X f d\nu = \int_X S(t)f d\nu$$

y usando el primer inciso de la proposición (1.14),

$$\nu = \nu S(t),$$

es decir ν es invariante, por lo tanto $\nu \in \mathcal{I}$.

□

1.3. Semigrupos y sus generadores

Los generadores de Markov son de gran utilidad dentro de los procesos estocásticos pues permiten caracterizarlos. Comenzaremos definiendo un pregenerador de Markov.

Definición 1.17. Diremos que un operador lineal Ω en $C(X)$, con dominio $\mathcal{D}(\Omega)$ es un **pregenerador de Markov** si satisface las siguientes propiedades:

1. $1 \in \mathcal{D}(\Omega)$ y $\Omega 1 = 0$,
2. $\mathcal{D}(\Omega)$ es denso en $C(X)$,
3. si $f \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\lambda \geq 0$ y $f - \lambda \Omega f = g$, entonces

$$\min_{\xi \in X} f(\xi) \geq \min_{\xi \in X} g(\xi).$$

La siguiente proposición nos ayudara más adelante en esta subsección, facilitándonos las cuentas.

Proposición 1.18. Sea Ω un operador lineal en $C(X)$. Si Ω satisface que

$$\text{si } f \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ y } f(\eta) = \min_{\xi \in X} f(\xi) \text{ entonces } \Omega f(\eta) \geq 0, \quad (1.12)$$

entonces Ω satisface la última propiedad de la definición (1.17), esto es $\min_{\xi \in X} f(\xi) \geq \min_{\xi \in X} g(\xi)$.

Demostración. Sean $f \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\lambda \geq 0$, $f - \lambda \Omega f = g$. Además

$$\text{si } f(\eta) = \min_{\xi \in X} f(\xi), \text{ entonces } \Omega f(\eta) \geq 0.$$

Notemos que existe un punto $\eta \in X$ donde f alcanza su mínimo pues X es un conjunto compacto no vacío y f es continua. Sea η tal que $\min_{\xi \in X} f(\xi) = f(\eta)$.

Dado lo anterior y (1.12) tenemos que $\Omega f(\eta) \geq 0$. Ya que $\lambda \geq 0$, se cumple que

$$f(\eta) \geq f(\eta) - \lambda \Omega f(\eta) = g(\eta)$$

y es claro que

$$g(\eta) \geq \min_{\xi \in X} g(\xi).$$

Por lo tanto, $\min_{\xi \in X} f(\xi) \geq \min_{\xi \in X} g(\xi)$.

□

Proposición 1.19. Si Ω es un pregenerador de Markov, $f \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\lambda \geq 0$ y $f - \lambda\Omega f = g$, entonces

$$\|f\| \leq \|g\|.$$

Demostración. Sean $f \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\lambda \geq 0$ y $f - \lambda\Omega f = g$. Ya que Ω es un operador lineal, $\mathcal{D}(\Omega)$ es un espacio vectorial, por lo tanto $-f \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Además ya que Ω es un pregenerador de Markov por la última propiedad de la definición (1.17) $\min_{\xi \in X} f(\xi) \geq \min_{\xi \in X} g(\xi)$ por lo tanto

$$\max_{\xi \in X} (-f)(\xi) \leq \max_{\xi \in X} (-g)(\xi). \quad (1.13)$$

Análogamente para $-f$ que como ya mostramos se encuentra en $\mathcal{D}(\Omega)$, tomamos \tilde{g} como $\tilde{g} = -f - \lambda\Omega(-f)$ y dado que Ω es un operador lineal

$$\tilde{g} = -f + \lambda\Omega f. \quad (1.14)$$

Por la última propiedad de la definición (1.17) $\min_{\xi \in X} -f(\xi) \geq \min_{\xi \in X} \tilde{g}(\xi)$ por lo tanto

$$\max_{\xi \in X} f(\xi) \leq \max_{\xi \in X} -\tilde{g}(\xi) \quad (1.15)$$

usando la expresión (1.14) y la hipótesis $g = f - \lambda\Omega f$, tenemos

$$-f = \lambda\Omega(-f) + \tilde{g} = -g - \lambda\Omega(f)$$

esto sucede si y solo si

$$-\tilde{g} = g + \lambda\Omega f + \lambda\Omega(-f), = g + \lambda\Omega(f - f) = g,$$

por lo tanto

$$g = -\tilde{g}.$$

Usando la igualdad anterior y las expresiones (1.15) y (1.13), llegamos a que

$$\min_{\xi \in X} f(\xi) \geq \min_{\xi \in X} g(\xi) \quad \text{y} \quad \max_{\xi \in X} f(\xi) \leq \max_{\xi \in X} g(\xi).$$

Por lo tanto para toda $\xi \in X$ tenemos $|f(\xi)| \leq |g(\xi)|$ es decir

$$\|f\|_{\infty} \leq \|g\|_{\infty}.$$

□

Para la siguiente proposición usaremos la definición de cerradura (A.31).

Proposición 1.20. *Si Ω es un pregenerador de Markov, entonces Ω tiene una cerradura $\overline{\Omega}$ que es a su vez un pregenerador de Markov.*

Demostración. Comenzaremos demostrando que $\Omega f_n \rightarrow 0$, y usando la proposición (A.33) tendremos que Ω es cerrable, es decir, la cerradura de la gráfica de Ω es la gráfica del operador lineal $\overline{\Omega}$ y además $\overline{\Omega}$ es único.

Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones en $\mathcal{D}(\Omega)$ tal que, $f_n \rightarrow 0$ y $\Omega f_n \rightarrow h$. También tomamos $g \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Notemos que dado que $\mathcal{D}(\Omega)$ es un espacio vectorial y $g, f_n \in \mathcal{D}(\Omega)$, entonces $f_n + \lambda g \in \mathcal{D}(\Omega)$. Usando lo anterior y la proposición (1.19) tenemos

$$\|(I - \lambda\Omega)(f_n + \lambda g)\| \geq \|f_n + \lambda g\| \quad \text{para } \lambda \geq 0$$

ya que Ω es un operador lineal, y $D(\Omega)$ es un espacio vectorial

$$\|f_n + \lambda g - \lambda\Omega(f_n) - \lambda^2\Omega g\| \geq \|f_n + \lambda g\|$$

haciendo tender n a infinito, tenemos

$$\|\lambda g - \lambda h - \lambda^2\Omega g\| \geq \|\lambda g\|$$

dividiendo entre λ

$$\|g - h - \lambda\Omega g\| \geq \|g\|$$

haciendo tender λ a 0, obtenemos

$$\|g - h\| \geq \|g\|.$$

Ya que la función $g \in \mathcal{D}(\Omega)$ es arbitraria y h es fija, se debe cumplir

$$\sup_{\xi \in X} |g(\xi) - h| \geq \sup_{\xi \in X} |g(\xi)|$$

para cualquier $g \in \mathcal{D}(\Omega)$, por lo tanto podemos concluir que $h = 0$, de donde concluimos que $\Omega f_n \rightarrow 0$.

Ahora hace falta demostrar que $\overline{\Omega}$ es un pregenerador de Markov.

Ya que Ω es pregenerador de Markov $1 \in \mathcal{D}(\Omega)$ pero $\mathcal{D}(\Omega) \subset \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ por lo tanto $1 \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ y $\overline{\Omega}1 = \Omega 1 = 0$. Dado que $\mathcal{D}(\Omega) \subset \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \subset C(X)$ y el $\mathcal{D}(\Omega)$ es denso en $C(X)$ esto implica que $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ es denso en $C(X)$, cumpliendo así el primer y segundo inciso de la definición de pregenerador de Markov (1.17).

Ahora, sean $f \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$, $\lambda \geq 0$ y $f - \lambda \bar{\Omega}f = g$. Ya que $\bar{\Omega}$ es un operador lineal cerrado

$$G(\bar{\Omega}) = \{(f, \bar{\Omega}f) : f \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})\}$$

es cerrado en $C(X) \times C(X)$, por lo cual existe una sucesión $(f_n, \Omega f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in G(\Omega)$ tal que $(f_n, \Omega f_n) \rightarrow (f, h) \in G(\bar{\Omega})$ para toda $(f, g) \in G(\bar{\Omega})$. Entonces, por el teorema (A.32) $\bar{\Omega}f = h$, por lo tanto $(f_n, \Omega f_n) \rightarrow (f, \bar{\Omega}f)$. Definimos $g_n = f_n - \lambda \Omega f_n$ por el inciso 3 de la definición (1.17)

$$\min_{\xi \in X} f_n(\xi) \geq \min_{\xi \in X} g_n(\xi)$$

pero $f_n \rightarrow f$ y $g_n \rightarrow g$ en $C(X)$, por lo tanto

$$\min_{\xi \in X} f(\xi) \geq \min_{\xi \in X} g(\xi)$$

con lo cual podemos concluir que $\bar{\Omega}$ es un pregenerador de Markov. \square

A partir de este momento denotaremos por $\mathcal{R}(\Omega)$ al rango del operador Ω .

Proposición 1.21. *Sea Ω un pregenerador de Markov cerrado. Entonces para $\lambda > 0$ el rango de $I - \lambda \Omega$ es un subconjunto cerrado de $C(X)$.*

Demostración. Sea $g_n \in \mathcal{R}(I - \lambda \Omega)$ tal que $g_n \rightarrow g$. Demostraremos que $g \in \mathcal{R}(I - \lambda \Omega)$, con lo cual tendríamos que el conjunto $\mathcal{R}(I - \lambda \Omega)$ es cerrado.

Definimos f_n como $f_n - \lambda \Omega f_n = g_n$, es decir $f_n = (I - \lambda \Omega)^{-1} g_n$ y esto es posible debido a que $g_n \in \mathcal{R}(I - \lambda \Omega)$. Notemos que $f_n \in C(X)$.

Entonces

$$\begin{aligned} g_n - g_m &= (f_n - \lambda \Omega f_n) - (f_m - \lambda \Omega f_m) \\ &= f_n - f_m - (\lambda \Omega f_n - \lambda \Omega f_m) \\ &= (f_n - f_m) - \lambda \Omega (f_n - f_m) \end{aligned}$$

y usando la proposición (1.19)

$$\|f_n - f_m\| \leq \|g_n - g_m\| \tag{1.16}$$

ya que g_n es de Cauchy pues $g_n \rightarrow g$ y dada la expresión (1.16), obtenemos que f_n también es de Cauchy, y dado que $C(X)$ es de Banach, existe el límite para esta sucesión, llamémosle f :

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n.$$

Por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Omega f_n = \lambda^{-1} \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n - g_n) = \lambda^{-1} (f - g).$$

Puesto que Ω es cerrado, usando el teorema (A.32)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Omega f_n = \Omega f = \frac{f - g}{\lambda},$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n - \lambda \Omega f_n = f - (f - g) = g, = f - \lambda \Omega f$$

con lo cual $g \in \mathcal{R}(I - \lambda \Omega)$ y $\mathcal{R}(I - \lambda \Omega)$ es cerrado.

□

Definición 1.22. Diremos que Ω un operador lineal es un **generador de Markov** si es un pregenerador de Markov cerrado, que además satisface

$$\mathcal{R}(I - \lambda \Omega) = C(X)$$

para toda $\lambda > 0$ suficientemente pequeña.

Proposición 1.23. 1. Si Ω es un pregenerador de Markov acotado, entonces Ω es un generador de Markov.

2. Sea Ω un generador de Markov, entonces cumple

$$\mathcal{R}(I - \lambda \Omega) = C(X)$$

para toda $\lambda \geq 0$.

Demostración. 1. Por hipótesis Ω es un operador lineal acotado, por la proposición (A.28), Ω es continuo.

Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{D}(\Omega)$ tal que $f_n \rightarrow f$ y $\Omega f_n \rightarrow y$ entonces $y = \Omega f$, pues Ω es un operador lineal continuo. Observemos además que $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ pues

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \Omega f_n &= \Omega \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right) && \text{pues } \Omega \text{ es continuo} \\ &= \Omega f \end{aligned}$$

con lo cual obtenemos $f \in \mathcal{D}(\Omega)$. Por lo tanto usando el teorema (A.32) Ω es un operador lineal cerrado.

Ahora, para ver que el rango del operador $I - \lambda \Omega$ satisface que $\mathcal{R}(I - \lambda \Omega) = C(X)$ para toda $\lambda \geq 0$ suficientemente pequeña, basta resolver que para todo $g \in C(X)$ existe $f \in \mathcal{D}(\Omega)$, tal que:

$$f - \lambda \Omega f = g$$

es decir, encontrar $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ tal que $f - \lambda\Omega f = g$.

Sea $g \in C(X)$, definimos

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \Omega^n g,$$

y tenemos

$$f - \lambda\Omega f = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \Omega^n g - \lambda\Omega \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \Omega^n g$$

dado que Ω es un operador lineal

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \Omega^n g - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1} \Omega^{n+1} g$$

notando que las sumas parciales son sumas telescópicas

$$= g$$

es decir

$$f - \lambda\Omega f = g$$

con lo cual tenemos la igualdad de conjuntos, $\mathcal{R}(I - \lambda\Omega) = C(X)$.

2. Notemos que por hipótesis Ω es un generador de Markov, por lo tanto existe una $\lambda > 0$ suficientemente pequeña tal que $\mathcal{R}(I - \lambda\Omega) = C(X)$.

Por lo tanto para probar este inciso demostraremos que si para σ , $0 < \lambda < \sigma$ se cumple $\mathcal{R}(I - \lambda\Omega) = C(X)$ entonces $\mathcal{R}(I - \sigma\Omega) = C(X)$.

Sea $g \in C(X)$, busquemos $f \in \mathcal{D}(\Omega)$, tal que

$$f - \sigma\Omega f = g$$

Sea $k \in C(X)$, definimos $T : C(X) \rightarrow \mathcal{D}(\Omega)$ como:

$$Tk = \frac{\lambda}{\sigma}(I - \lambda\Omega)^{-1}g + \frac{\sigma - \lambda}{\sigma}(I - \lambda\Omega)^{-1}k,$$

que está bien definida para $\mathcal{R}(I - \lambda\Omega) = C(X)$. Ahora, sean $j, k \in C(X)$

$$\begin{aligned}
\|Tk - Tj\| &= \left\| \frac{\lambda}{\sigma}(I - \lambda\Omega)^{-1}g + \frac{\sigma - \lambda}{\sigma}(I - \lambda\Omega)^{-1}k \right. \\
&\quad \left. - \frac{\lambda}{\sigma}(I - \lambda\Omega)^{-1}g - \frac{\sigma - \lambda}{\sigma}(I - \lambda\Omega)^{-1}j \right\| \\
&= \left\| \frac{\sigma - \lambda}{\sigma}(I - \lambda\Omega)^{-1}(k - j) \right\| \\
&= \frac{\sigma - \lambda}{\sigma} \|(I - \lambda\Omega)^{-1}(k - j)\| && \text{pues } \lambda < \sigma \\
&\leq \frac{\sigma - \lambda}{\sigma} \|k - j\|
\end{aligned}$$

la última desigualdad es resultado de la proposición (1.19), ya que Ω es un generador de Markov, y $T \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Ya que $0 < \lambda < \sigma$ por hipótesis, tenemos $\frac{\sigma - \lambda}{\sigma} \in (0, 1)$ por lo tanto T es una contracción y como $C(X)$ es no vacío y completo, por ser de Banach, podemos usar el teorema (A.21), entonces tenemos que T tiene un único punto fijo el cual llamaremos h , es decir $Th = h$, por lo tanto $h \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Entonces,

$$h = \frac{\lambda}{\sigma}(I - \lambda\Omega)^{-1}g + \frac{\sigma - \lambda}{\sigma}(I - \lambda\Omega)^{-1}h.$$

Entonces, ya que $h \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$(I - \lambda\Omega)h = (I - \lambda\Omega) \left(\frac{\lambda}{\sigma}(I - \lambda\Omega)^{-1}g + \frac{\sigma - \lambda}{\sigma}(I - \lambda\Omega)^{-1}h \right)$$

usando que $(I - \lambda\Omega)$ es un operador lineal, tenemos:

$$= \frac{\lambda}{\sigma}g + \frac{\sigma - \lambda}{\sigma}h$$

por lo tanto $h - \lambda\Omega h = \frac{\lambda}{\sigma}g + h - \frac{\lambda}{\sigma}h$

finalmente multiplicando por $\frac{\sigma}{\lambda}$, obtenemos $h - \sigma\Omega h = g$. Con lo cual tenemos

$$\mathcal{R}(I - \lambda\Omega) = C(X) \Rightarrow \mathcal{R}(I - \sigma\Omega) = C(X),$$

por lo tanto el generador de Markov Ω satisface $\mathcal{R}(I - \sigma\Omega) = C(X)$ para toda $\sigma \geq 0$.

□

El siguiente teorema tiene gran importancia dentro de la teoría de IPS y de procesos de Markov en general.

Teorema 1.24. (Hille-Yosida) *Existe una correspondencia uno a uno entre los generadores de Markov en $C(X)$ y los semigrupos de Markov en $C(X)$. Esta correspondencia está dada por las siguientes propiedades,*

1. *podemos dar el dominio del generador de Markov Ω en termino del semigrupo de Markov $S(t)$ de la siguiente forma*

$$\mathcal{D}(\Omega) = \left\{ f \in C(X) : \lim_{t \downarrow 0} \frac{S(t)f - f}{t} \text{ existe} \right\}$$

y, el generador en términos del semigrupo como

$$\Omega f = \lim_{t \downarrow 0} \frac{S(t)f - f}{t}$$

para toda $f \in \mathcal{D}(\Omega)$,

2. *podemos dar la correspondencia entre el semigrupo de Markov y el generador de Markov tomando $S(t)f = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(I - \frac{t}{n}\Omega \right)^{-n} f$ para $f \in C(X)$ y $t \geq 0$,*
3. *si $f \in \mathcal{D}(\Omega)$, entonces $S(t)f \in \mathcal{D}(\Omega)$ y $\frac{d}{dt}S(t)f = \Omega S(t)f = S(t)\Omega f$.*

Entonces, dada esta correspondencia, Ω es llamado **generador** de $S(t)$, y $S(t)$ es el **semigrupo generado** por Ω .

1.4. Núcleos

Comenzaremos a definir el núcleo de un generador de Markov. Los núcleos de los generadores de Markov son importantes porque como veremos determinan el generador de Markov, y esto es de vital importancia cuando no se puede expresar de manera explícita el dominio de estos.

Definición 1.25. *Sea Ω un generador de Markov en $C(X)$. D un subespacio lineal de $\mathcal{D}(\Omega)$ es llamado el **núcleo** de Ω si Ω es la cerradura del operador restricción de Ω en D es decir, el operador*

$$\Omega|_D : D \rightarrow C(X)$$

tal que

$$\Omega|_D(w) = \Omega(w) \quad \forall w \in D \subset \mathcal{D}(\Omega)$$

cumple que

$$\overline{\Omega}|_D = \Omega.$$

Enunciaremos el siguiente teorema y no llevamos acabo su demostración pues es posible encontrarla en un libro de análisis.

Teorema 1.26. (Trotter-Kurtz) Sean Ω_n y Ω los correspondientes generadores de los semigrupos de Markov $S_n(t)$ y $S(t)$. Si hay un núcleo D para Ω tal que $D \subset \mathcal{D}(\Omega_n)$ para toda n y $\Omega_n f \rightarrow \Omega f$ para toda $f \in D$, entonces $\forall f \in C(X)$

$$S_n(t)f \rightarrow S(t)f$$

converge uniformemente para t en un conjunto compacto.

Proposición 1.27. Sea D un núcleo para el generador Ω con semigrupo de Markov $S(t), t \geq 0$. Entonces

$$\mathcal{I} = \left\{ \mu \in \mathcal{P} : \int_X \Omega f d\mu = 0 \text{ para toda } f \in D \right\}$$

donde recordamos \mathcal{I} es el conjunto de las medidas invariantes.

Demostración. Sea $\mu \in \mathcal{I}$ y $f \in \mathcal{D}(\Omega)$. Entonces,

$$\int \Omega f d\mu = \int \lim_{t \downarrow 0} \frac{S(t)f - f}{t} d\mu \quad \text{por el teorema (1.24)}$$

Por el teorema de convergencia dominada (B.1), ya que $S(t)f$, y f son funciones acotadas pues pertenecen a $C(X)$

$$\begin{aligned} &= \lim_{t \downarrow 0} \int \frac{S(t)f - f}{t} d\mu \\ &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{\int S(t)f d\mu - \int f d\mu}{t} \end{aligned}$$

usando que $\mu \in \mathcal{I}$ y el primer inciso de la proposición (1.14) tenemos,

$$\begin{aligned} &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{\int f d\mu - \int f d\mu}{t} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ahora, sea μ tal que $\int \Omega f d\mu = 0$, para toda $f \in D$.

Observemos que D es un núcleo de Ω , $\Omega = \overline{\Omega|_D}$ y $\overline{G(\Omega|_D)} = G(\Omega)$, por lo tanto si $(f, \Omega f) \in G(\Omega)$, por definición de cerrado existe una sucesión $(f_n, \Omega f_n) \in G(\Omega|_D)$, tal que $(f_n, \Omega f_n) \rightarrow (f, \Omega f)$ cuando n tiende a infinito, por lo tanto para toda $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ existe una sucesión $\{f_n\} \subset D$ tal que si $f_n \rightarrow f$, entonces $\Omega f_n \rightarrow \Omega f$.

Notemos que para toda $f \in D$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \Omega f_n d\mu = 0 = \int \Omega f d\mu.$$

dada la observación anterior. Si $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ y $f - \lambda \Omega f = g$, entonces,

$$\begin{aligned} \int g d\mu &= \int f - \lambda \Omega f d\mu \\ &= \int f d\mu - \lambda \int \Omega f d\mu \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\int g d\mu = \int f d\mu.$$

Ahora

$$f - \lambda \Omega f = (I - \lambda \Omega)f = g$$

Con lo cual tenemos:

$$f = (I - \lambda \Omega)^{-1}g. \quad (1.17)$$

Por lo tanto para todo $g \in C(X)$ y $\lambda \geq 0$

$$\int (I - \lambda \Omega)^{-1}g d\mu = \int f d\mu = \int g d\mu. \quad (1.18)$$

Ahora, nombremos $g_1 = (I - \lambda \Omega)^{-1}g$. Notemos que por la forma en la que está definida g_1 , esta se encuentra en $C(X)$, y usando que $\mathcal{R}(I - \lambda \Omega) = C(X)$ podemos aplicar análogamente el procedimiento anterior a g_1 , con lo cual obtenemos:

$$\int (I - \lambda \Omega)^{-1}g_1 d\mu = \int g_1 d\mu.$$

Desarrollando un poco lo anterior, observamos

$$\int (I - \lambda \Omega)^{-2}g d\mu = \int (I - \lambda \Omega)^{-1}g_1 d\mu = \int g_1 d\mu = \int (I - \lambda \Omega)^{-1}g d\mu$$

finalmente, usando la igualdad (1.18), tenemos

$$\int (I - \lambda\Omega)^{-2} g d\mu = \int (I - \lambda\Omega)^{-1} g d\mu = \int g d\mu$$

por lo cuál, iterando de esta forma obtenemos

$$\int (I - \lambda\Omega)^{-n} g d\mu = \int g d\mu.$$

Digamos que $\lambda = \frac{t}{n}$, entonces

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int (I - \frac{t}{n}\Omega)^{-n} g d\mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int g d\mu \\ &= \int g d\mu. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Usando el segundo inciso del teorema (1.24) y la igualdad (1.19)

$$S(t)g = \lim_{n \rightarrow \infty} (I - \frac{t}{n}\Omega)^{-n} g$$

por lo cual

$$\begin{aligned} \int S(t)g d\mu &= \int \lim_{n \rightarrow \infty} (I - \frac{t}{n}\Omega)^{-n} g d\mu \\ &= \int g d\mu. \end{aligned}$$

y usando el primer inciso de la proposición (1.14) $\mu \in \mathcal{J}$.

□

1.5. Dualidad

Una de las técnicas más importantes y útiles en los sistemas interactivos de partículas es la dualidad, pues nos permite realizar cálculos de un proceso en términos de otro proceso (el dual).

Definición 1.28. Sean ζ_t y η_t procesos de Feller en X_1 y X_2 respectivamente. Dada una función H continua y acotada en el espacio $X_1 \times X_2$, los procesos se llaman **duales con respecto a H** si

$$E^\eta H(\eta_t, \zeta) = E^\zeta H(\eta, \zeta_t)$$

para toda $t \geq 0$, $\eta \in X_1$ y $\zeta \in X_2$.

Teorema 1.29. Sean η_t y ζ_t procesos de Feller con sus respectivos generadores Ω_1 y Ω_2 y H una función acotada y continua en $X_1 \times X_2$. Si

$$\Omega_1 H(\eta_t, \zeta_t)(\eta) \text{ y } \Omega_2 H(\eta, \zeta_t)(\zeta)$$

están bien definidos y son iguales para toda $\eta \in X_1$ y $\zeta \in X_2$, entonces η_t y ζ_t son duales respecto a H .

Es posible encontrar una idea de la prueba en [Lig10], página 115.

SISTEMAS INTERACTIVOS DE PARTÍCULAS Y SISTEMAS SPIN

En este capítulo ahondaremos en la teoría de sistemas interactivos de partículas y hacia el final del mismo seremos más específicos, tratando un caso particular de estos: los procesos spin.

Gran parte de este capítulo se basa al igual que el capítulo anterior en el libro de Thomas M. Liggett [Lig85] específicamente en la segunda parte de su primer capítulo. Como en algunos casos tiende a ser confuso buscamos literatura que nos permitiera hacer una presentación más clara del material y sirviera para hacer más explícita la teoría dada en [Lig85]. De esta forma llegamos a una tesis de doctorado, [Kla08], que nos fue de ayuda para entender a fondo la teoría que da Liggett en su libro, así mismo esta tesis fue de gran ayuda en una demostración de este capítulo. Finalmente, para la parte de sistemas spin se consultó el libro [Lig10] pues la teoría expuesta en este libro se concentra en sistemas spin, lo cuál nos es de mayor utilidad porque el proceso de contacto es un sistema spin.

2.1. Sistemas interactivos de partículas

El modelo que vamos a desarrollar es un sistema interactivo de partículas (IPS por sus siglas en ingles) el cual es un proceso de Markov en tiempo continuo η_t con espacio de estados $X = \{0, 1\}^S$ donde S es un conjunto contable de "sitios". Usualmente S será \mathbb{Z}^d , con $d \geq 0$, o un árbol. X será el espacio de estados del proceso y tal como se ha manejado en capítulos anteriores X es compacto en la topología producto.

Dado que las características anteriores son propias de un IPS, una configuración de $\eta \in X$ tiene diferentes interpretaciones dependiendo del tipo de modelo a tratar; a continuación veremos los tres ejemplos principales de IPS, estos procesos son de los más estudiados en el campo, y tiene la virtud de una relativa simplicidad en su descripción,

lo que permite abordar cuestiones fundamentales sobre su comportamiento sin tratar con complicaciones adicionales como las de otros modelos de aplicaciones específicas.

Las dinámicas de estos tres procesos se encuentran dadas por *tasas de transición*.
 $c_A(\eta, d\xi)$

2.1.1. Modelo del votante

La interpretación de este proceso es que existe un individuo (es decir un votante) en cada $x \in S$ que en cualquier momento puede tener una de dos opiniones, llamadas 0 y 1. Alternativamente, cada sitio es ocupado por un individuo de uno de los dos tipos, etiquetados con 0 o 1. De forma que el votante x adopta la opinión de uno de sus vecinos a través de la tasa de transición.

2.1.2. Proceso de exclusión

En cualquier momento, un sitio x se encuentra ocupado por una partícula si $\eta(x) = 1$ o se encuentra vacante si $\eta(x) = 0$.

2.1.3. Proceso de contacto

Un individuo (planta o célula) en S se considera como un sitio en S (es decir un elemento en S). Asumiremos que $x \in S$ está infectado si $\eta(x) = 1$ y es saludable si $\eta(x) = 0$, por lo cual podemos escribirlo como un mapeo $\eta : S \rightarrow \{0, 1\}$.

Por lo tanto el proceso de contacto es un proceso usado para modelar la dispersión de una infección. Para este proceso la tasa de transición está expresada por el salto en x de 0 a 1 o a la inversa, es decir de 1 a 0 y como mencionamos esta tasa de transición se encuentra dada por la función

$$c(\eta, d\xi)$$

con lo cual diremos que la tasa de transición corresponde al movimiento de la infección o de la ausencia de la infección en un sitio dado.

Dentro de esta construcción los sitios infectados vuelven a ser sanos de forma espontáneamente después de una unidad de tiempo exponencial, y a su vez los individuos se pueden enfermar con una tasa proporcional al número de vecinos infectados, y una constante de proporcionalidad la cual llamaremos λ . Una forma fácil de observar la dinámica del proceso es observar como ocurren las transiciones es

$$\begin{aligned} P(\eta_{t+h}(x) = 0 | \eta_t = \eta) &= 1 * h + o(h) && \text{si } \eta(x) = 1 \text{ y} \\ P(\eta_{t+h}(x) = 1 | \eta_t = \eta) &= \lambda |\{y \in S : y \sim x, \text{ y } \eta(y) = 1\}| && \text{si } \eta(x) = 0 \end{aligned}$$

pero es necesario especificar el proceso de Markov descrito por estas tasas sobre todo cuando X es infinito, es decir cuando la gráfica $G = (S, E)$ es infinita.

2.2. Generadores

En esta sección construiremos el generador de Markov para una gran cantidad de Sistemas Interactivos de Partículas. Para construirlo W tomará el rol de espacio fase para cada sitio en S . El espacio de estados será $X = W^S$ con la topología producto. El espacio X deberá ser, por lo tanto, completo y metrizable.

Los elementos en S los denotaremos por las letras usuales x, y, z, \dots mientras que para los elementos de X por η, ξ, \dots

Definición 2.1. Definimos el conjunto $\mathcal{A} := \{A : A \subset S \text{ y } |A| < \infty\}$.

Las dinámicas locales que se buscan modelar con los IPS son descritas por colecciones de medidas de transición $c_A(\eta, d\xi)$.

Para $\eta \in X$ y $A \in \mathcal{A}$, sea

$$c_A(\eta, d\xi) \quad (2.1)$$

una medida positiva y finita en W^A y asumimos que c_A es una función continua como una función de η , es decir, el mapeo

$$\eta \rightarrow c(\eta, d\xi)$$

de X al espacio de las medidas finitas en W^A con la topología de la convergencia débil es continuo. Y la familia de medidas como funciones de η es uniformemente acotada.

Interpretaremos η como la configuración actual del sistema y $c_A(\eta, W^A)$ como la tasa a la cual una transición ocurrirá envolviendo a las coordenadas en A , finalmente pensaremos en $\frac{c_A(\eta, d\xi)}{c_A(\eta, W^A)}$ como la restricción en A de la nueva configuración dado que la transición tuvo lugar.

Para ilustrar los elementos que acabamos de definir tomemos como ejemplo el *proceso de contacto*. Sea $X = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$, y $A \subset S$. Si $|A| \geq 2$ (i.e. si el conjunto A tiene más de un elemento) $c_A(\eta, d\xi) = 0$, en cambio si $|A| = 1$ y $A = \{x\}$ entonces $c_A(\eta, d\xi)$ acumula masa 1 en el elemento $\{0\} \subset W$ si $\eta(x) = 1$ y $c_A(\eta, d\xi)$ acumula masa

$$\lambda \sum_{y:|y-x|=1} \eta(y)$$

en el elemento $\{1\} \subset W$ si $\eta(x) = 0$.

Definición 2.2. Sea $f \in C(X)$ y $x \in S$ definimos el valor $\Delta_f(x) \in \mathbb{R}^+ \cup 0$ como

$$\Delta_f(x) = \sup \{|f(\eta) - f(\xi)| : \eta, \xi \in X \text{ y } \eta(y) = \xi(y) \text{ para toda } y \neq x\}.$$

Esta definición nos da una medida del grado en el que f depende de la coordenada $\eta(x)$ pues Δ_f depende del conjunto de los elementos en X que difieren en la x -ésima coordenada.

Definición 2.3. Definiremos al conjunto $\mathcal{D}(X)$ como

$$\mathcal{D}(X) := \left\{ f \in C(X) \mid \|f\| := \sum_{x \in S} \Delta_f(x) < \infty \right\}. \quad (2.2)$$

Comenzamos por ver algunas propiedades de interés del conjunto $\mathcal{D}(X)$.

Proposición 2.4. El conjunto $\mathcal{D}(X)$ es denso en $C(X)$.

Demostración. Para demostrar esta proposición usaremos el teorema de Stone-Weierstrass (A.35), por lo tanto debemos demostrar que $\mathcal{D}(X)$ es una sub-álgebra unitaria que que separa puntos de X .

1. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $g, h \in \mathcal{D}(X)$; por demostrar que $ag + bh \in \mathcal{D}(X)$, es decir, por demostrar que

$$\sum_{x \in S} \Delta_{ag+bh}(x) < \infty.$$

Ya que

$$\begin{aligned} \Delta_{ag+bh}(x) &= \sup\{|(ag + hb)(\eta) - (ag + bh)(\xi)| : \eta, \xi \in X \text{ y } \eta(y) = \xi(y) \forall y \neq x\} \\ &= \sup\{|ag(\eta) + bh(\eta) - ag(\xi) - bh(\xi)| : \eta, \xi \in X \text{ y } \eta(y) = \xi(y) \forall y \neq x\} \\ &= \sup\{|a(g(\eta) - g(\xi)) + b(h(\eta) - h(\xi))| : \eta, \xi \in X \text{ y } \eta(y) = \xi(y) \forall y \neq x\} \end{aligned}$$

ya que g y h son acotadas y continuas

$$\begin{aligned} &= |a| \sup\{|(g(\eta) - g(\xi))| : \eta, \xi \in X \text{ y } \eta(y) = \xi(y) \forall y \neq x\} \\ &\quad + |b| \sup\{|(h(\eta) - h(\xi))| : \eta, \xi \in X \text{ y } \eta(y) = \xi(y) \forall y \neq x\} \\ &= |a| \Delta_g(x) + |b| \Delta_h(x). \end{aligned}$$

Dado el desarrollo anterior, tenemos

$$\sum_{x \in S} \Delta_{ag+bh}(x) = |a| \sum_{x \in S} \Delta_g(x) + |b| \sum_{x \in S} \Delta_h(x).$$

Usando que $\sum_{x \in S} \Delta_g(x) < \infty$ y $\sum_{x \in S} \Delta_h(x) < \infty$, la fórmula anterior es finita y por lo tanto $\sum_{x \in S} \Delta_{ag+bh}(x) \in \mathcal{D}(X)$.

2. Hay que demostrar que la función $1 \in \mathcal{D}(X)$, es decir, que

$$\sum_{x \in S} \Delta_1(x) < \infty.$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \Delta_1(x) &= \sup\{|(1)(\eta) - (1)(\xi)| : \eta, \xi \in X \text{ y } \eta(y) = \xi(y) \forall y \neq x\} \\ &\text{pero como } 1(\eta) = 1 \text{ para toda } \eta \in X \\ &= \sup\{|0| : \eta, \xi \in X \text{ y } \eta(y) = \xi(y) \forall y \neq x\} = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $0 = \sum_{x \in S} \Delta_1(x) < \infty$, por lo cual $1 \in \mathcal{D}(X)$.

3. Sean $f, g \in \mathcal{D}(X)$; por demostrar que $fg \in \mathcal{D}(X)$, es decir, que

$$\sum_{x \in S} \Delta_{fg}(x) < \infty.$$

Ya que

$$\begin{aligned} \Delta_{fg}(x) &= \sup\{|(fg)(\eta) - (fg)(\xi)| : \eta, \xi \in X \text{ y } \eta(y) = \xi(y) \forall y \neq x\} \\ &= \sup\{|f(\eta)g(\eta) - f(\xi)g(\xi)| : \eta, \xi \in X \text{ y } \eta(y) = \xi(y) \forall y \neq x\} \\ &= \sup\{|f(\eta)g(\eta) - f(\eta)g(\xi) + f(\eta)g(\xi) - f(\xi)g(\xi)| : \\ &\quad \eta, \xi \in X \text{ y } \eta(y) = \xi(y) \forall y \neq x\} \\ &\leq \sup\{|f(\eta)g(\eta) - f(\eta)g(\xi)| + |f(\eta)g(\xi) - f(\xi)g(\xi)| : \\ &\quad \eta, \xi \in X \text{ y } \eta(y) = \xi(y) \forall y \neq x\} \\ &= \sup\{|f(\eta)||g(\eta) - g(\xi)| + |(f(\eta) - f(\xi))|g(\xi)| : \\ &\quad \eta, \xi \in X \text{ y } \eta(y) = \xi(y) \forall y \neq x\} \\ &= \sup\{|f(\eta)||g(\eta) - g(\xi)| : \eta, \xi \in X \text{ y } \eta(y) = \xi(y) \forall y \neq x\} \\ &\quad + \sup\{|(f(\eta) - f(\xi))|g(\xi)| : \eta, \xi \in X \text{ y } \eta(y) = \xi(y) \forall y \neq x\} \end{aligned}$$

entonces, como f y g son acotadas, existen constantes c_1 y $c_2 \in \mathbb{R}$ tales que $\|f\|_\infty \leq c_1$ y $\|g\|_\infty \leq c_2$, y entonces

$$\begin{aligned} &\leq c_1 \sup\{|g(\eta) - g(\xi)| : \eta, \xi \in X \text{ y } \eta(y) = \xi(y) \forall y \neq x\} \\ &+ c_2 \sup\{|f(\eta) - f(\xi)| : \eta, \xi \in X \text{ y } \eta(y) = \xi(y) \forall y \neq x\} \\ &= c_1 \Delta_f(x) + c_2 \Delta_g(x). \end{aligned}$$

Usando las igualdades anteriores obtenemos

$$\sum_{x \in S} \Delta_{fg}(x) \leq c_1 \sum_{x \in S} \Delta_f(x) + c_2 \sum_{x \in S} \Delta_g(x) < \infty,$$

por lo tanto $fg \in \mathcal{D}(X)$.

4. Sean $\eta, \xi \in X$, con $\eta \neq \xi$, (es decir, existe un elemento $s \in S$, tal que $\eta(s) \neq \xi(s)$). Por demostrar que $\mathcal{D}(X)$ separa puntos, es decir existe una función $f \in \mathcal{D}(X)$ tal que $f(\eta) \neq f(\xi)$. Tomemos $f_{\eta, \xi} : X \rightarrow \mathbb{R}$, como

$$f_{\eta, \xi}(\zeta) := \frac{d_W(\pi_s(\zeta), \pi_s(\eta))}{1 + d_W(\pi_s(\zeta), \pi_s(\eta))},$$

con $\pi_s : X \rightarrow W$ una proyección.

Ahora, por definición de f , $f_{\eta, \xi}(\eta) = 0$ y

$$f_{\eta, \xi}(\xi) = \frac{d_W(\xi(s), \eta(s))}{1 + d_W(\xi(s), \eta(s))}.$$

Como $0 < f_{\eta, \xi}(\xi) < 1$, claramente $f_{\eta, \xi}(\eta) \neq f_{\eta, \xi}(\xi)$ lo que necesitábamos y como claramente f es continua, hemos exhibido la función que buscábamos.

Dadas las demostraciones anteriores y el teorema de Stone-Weierstrass (A.35) podemos concluir que $\mathcal{D}(X)$ es denso en $C(X)$. \square

Definición 2.5. Definiremos la función $\eta^\xi : W^S \times W^A \rightarrow W^S$, de la siguiente manera. Sea $\eta \in W^S = X$ y $\xi \in W^A$. Entonces,

$$\eta^\xi(x) := \begin{cases} \eta(x) & \text{si } x \in S \setminus A, \\ \xi(x) & \text{si } x \in A. \end{cases}$$

Definición 2.6. Definimos el valor c_A como

$$c_A := \sup_{\eta \in X} \{c_A(\eta, W^A)\}.$$

Notemos que la tasa c_A es siempre mayor o igual a cero.

Definición 2.7. Definiremos al conjunto $\mathcal{A}(B)$ como

$$\mathcal{A}(B) := \{A \in \mathcal{A} : B \cap A \neq \emptyset\}.$$

Proposición 2.8. El mapeo

$$\eta \rightarrow \int_{W^A} (f(\eta^\xi) - f(\eta)) c_A(\eta, d\xi)$$

es continuo.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$.

Dado que $c_A(\eta, d\xi)$ es una medida finita por hipótesis, existe un $K \in \mathbb{N}$, tal que $\int_{W^A} c_A(\eta, d\xi) < K$.

Usando que f es una función continua, existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } d_X(\eta, \eta') < \delta_1 \Rightarrow |f(\eta) - f(\eta')| < \frac{1}{3} \frac{\varepsilon}{K}$$

y como por hipótesis el mapeo $\eta \rightarrow c_A(\eta, d\xi)$ es continuo, existe δ_2 , tal que

$$\text{si } d_X(\eta, \eta') < \delta_2 \Rightarrow |c_A(\eta, d\xi) - c_A(\eta', d\xi)| < \frac{1}{3} \frac{\varepsilon}{K}.$$

Veamos la siguiente desigualdad,

$$\begin{aligned} & \int_{W^A} (f(\eta^\xi) - f(\eta)) c_A(\eta, d\xi) - \int_{W^A} (f(\eta^{\xi'}) - f(\eta)) c_A(\eta', d\xi) = \\ & \int_{W^A} (f(\eta^\xi) - f(\eta)) c_A(\eta, d\xi) - (f(\eta^{\xi'}) - f(\eta)) c_A(\eta', d\xi) + ((f(\eta^{\xi'}) - \\ & - f(\eta)) c_A(\eta, d\xi) - (f(\eta^{\xi'}) - f(\eta)) c_A(\eta, d\xi)) = \\ & \int_{W^A} [f(\eta^{\xi'}) - f(\eta^{\xi'}) + f(\eta') - f(\eta)] c_A(\eta, d\xi) \\ & \quad - (f(\eta^{\xi'}) - f(\eta')) [c_A(\eta', d\xi) - c_A(\eta, d\xi)] < \\ & \left(\int_{W^A} \frac{\varepsilon}{3} c_A(\eta, d\xi) + \frac{\varepsilon}{3} c_A(\eta, d\xi) \right) + \frac{\varepsilon}{3} = \\ & \quad \frac{2}{3} \frac{\varepsilon}{K} \int_{W^A} c_A(\eta, d\xi) + \frac{\varepsilon}{3} \\ & \leq \frac{2}{3} \frac{\varepsilon}{K} K + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

Si $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, se ve que el mapeo

$$\eta \rightarrow \int_{W^A} (f(\eta^\xi) - f(\eta)) c_A(\eta, d\xi)$$

es continuo. □

Entendemos $A \ni x$ como los conjuntos que contienen a x .

Proposición 2.9. Si $c_A = \sup_{\eta \in X} \{c_A(\eta, \Omega^A)\}$

$$\sup_{x \in S} \sum_{A \ni x} c_A < \infty, \tag{2.3}$$

entonces:

1. si $f \in \mathcal{D}(X)$, la serie

$$\Omega f(\eta) = \sum_{A \in \mathcal{A}} \int_{W^A} [f(\eta^\xi) - f(\eta)] c_A(\eta, d\xi)$$

converge uniformemente, $\Omega \in C(X)$ y

$$\|\Omega f\|_\infty \leq \left(\sup_{x \in \mathcal{S}} \sum_{x \in A} c_A \right) \|f\|.$$

2. Ω es un pregenerador de Markov.

Demostración. 1. Sean $f \in C(X)$ y $A \in \mathcal{A}$ un conjunto fijo. Definiremos para cada $\eta \in X$,

$$\Omega_T f(\eta) := \int_{W^T} (f(\eta^\xi) - f(\eta)) c_T(\eta, d\xi).$$

Es importante notar que para $f \in \mathcal{D}(X)$ el operador Ω puede ser reescrito como:

$$\Omega f(\eta) = \sum_{A \in \mathcal{A}} \Omega_A f(\eta).$$

Observemos que para $A \in \mathcal{A}$ fijo, existe un máximo finito en el número de elementos en los que es posible que difieran η y η^ξ . Numeraremos estos elementos como $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{|A|}$. Ahora definiremos η_i como un elemento en X

Notemos que $\bar{\eta}_i$ puede diferir de η en a lo más i elementos.

Usando la desigualdad del triángulo en \mathbb{R} , tenemos

$$\begin{aligned} |f(\eta^\xi) - f(\eta)| &= |f(\eta) - f(\eta^\xi)| \\ &= |f(\eta) - f(\bar{\eta}_1) + f(\bar{\eta}_1) - f(\bar{\eta}_2) + f(\bar{\eta}_2) + \dots \\ &\quad - f(\bar{\eta}_{|A|-1}) + f(\bar{\eta}_{|A|-1}) + f(\eta^\xi)| \\ &\leq |f(\eta) - f(\bar{\eta}_1)| + |f(\bar{\eta}_1) - f(\bar{\eta}_2)| + \dots + |f(\bar{\eta}_{|A|-1}) - f(\eta^\xi)| \\ &\leq \Delta_f(x_1) + \Delta_f(x_2) + \dots + \Delta_f(x_{|A|-1}) + \Delta_f(x_{|A|}) \\ &= \sum_{x \in A} \Delta_f(x) \end{aligned}$$

Entonces podemos concluir que

$$|f(\eta^\xi) - f(\eta)| \leq \sum_{x \in A} \Delta_f(x). \quad (2.4)$$

Usando (2.4) concluimos que,

$$\|\Omega_A f\| = \int_{W^A} |f(\eta^\xi) - f(\eta)| c_A(\eta, d\xi) \leq c_A \sum_{x \in A} \Delta_f(x). \quad (2.5)$$

tras tomar supremos concluimos que Ωf converge uniformemente.

Para cada $A \in \mathcal{A}$, por la proposición (2.8) el mapeo $\eta \rightarrow c_A(\eta, d\xi)$ es continuo, lo cual implica que $\Omega_A f$ es continuo, por lo cual el mapeo $\Omega f = \sum_{A \in \mathcal{A}} \Omega_A f$ es continuo, es decir $\Omega f \in C(X)$.

Tenemos,

$$\|\Omega f\| = \left\| \sum_{A \in \mathcal{A}} \Omega_A f \right\|$$

por definición de $\Omega_A f$

$$\begin{aligned} &= \sum_{A \in \mathcal{A}} \|\Omega_A f\| \\ &= \sum_{A \in \mathcal{A}} \sum_{x \in \mathcal{A}} \Delta_f(x) \\ &= \sum_{x \in S} \sum_{A \in \mathcal{A}} c_A \Delta_f(x) \\ &= \sum_{A \in \mathcal{A}(x)} \sum_{x \in S} c_A \Delta_f(x) \\ &\leq \sup_{x \in S} \sum_{A \in \mathcal{A}(x)} \sum_{x \in S} c_A \Delta_f(x) \\ &= \sup_{x \in S} \sum_{A \in \mathcal{A}(x)} c_A \sum_{x \in S} \Delta_f(x) \\ &= \left(\sup_{x \in S} \sum_{A \in \mathcal{A}(x)} c_A \right) \|f\| \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\|\Omega f\| \leq \left(\sup_{x \in S} \sum_{A \in \mathcal{A}(x)} c_A \right) \|f\| \quad \forall f \in C(X)$$

Dado que (2.3) y que $f \in \mathcal{D}(X)$, es decir $\|f\| \leq \infty$, podemos concluir

$$\|\Omega f\| < \infty.$$

2. Primero notemos que por el inciso anterior Ω es un operador en $C(X)$.

Por demostrar que Ω es lineal, es decir, que para $g, f \in \mathcal{D}(X)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\Omega(f + g) = \Omega f + \Omega g \quad \text{y} \quad \Omega(\alpha f).$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \Omega(f + g) &= \sum_{A \in \mathcal{A}} \int_{W^A} ((f + g)(\eta^\xi) - (f + g)(\eta)) c_A(\eta, d\xi) \\ &= \sum_{A \in \mathcal{A}} \int_{W^A} (f(\eta^\xi) + g(\eta^\xi) - f(\eta) - g(\eta)) c_A(\eta, d\xi) \end{aligned}$$

como tenemos que $f, g \in \mathcal{D}(X)$, tenemos $\|f\|$ y $\|g\|$ son finitas, por lo tanto

$$\begin{aligned} &= \sum_{A \in \mathcal{A}} \int_{W^A} (f(\eta^\xi) - f(\eta)) c_A(\eta, d\xi) + \sum_{A \in \mathcal{A}} \int_{W^A} (g(\eta^\xi) - g(\eta)) c_A(\eta, d\xi) \\ &= \Omega f + \Omega g. \end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{aligned} \Omega \alpha f &= \sum_{A \in \mathcal{A}} \int_{W^A} (\alpha f(\eta^\xi) - \alpha f(\eta)) c_A(\eta, d\xi) \\ &= \sum_{A \in \mathcal{A}} \int_{W^A} \alpha (f(\eta^\xi) - f(\eta)) c_A(\eta, d\xi) \\ &= \alpha \sum_{A \in \mathcal{A}} \int_{W^A} (f(\eta^\xi) - f(\eta)) c_A(\eta, d\xi) \\ &= \alpha \Omega f. \end{aligned}$$

Por lo cual podemos concluir que Ω es un operador lineal.

Por demostrar que Ω es un pregenerador de Markov, es decir, cumple la definición (1.17).

Dado lo anterior.

i) Por demostrar $1 \in \mathcal{D}(X)$ y $\Omega 1 = 0$.

Comenzaremos por demostrar que la función $1 \in \mathcal{D}(X)$, es decir, por demostrar

$$\sum_{x \in S} \Delta_1(x) < \infty.$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \Delta_1(x) &= \sup\{|(1)(\eta) - (1)(\xi)| : \eta, \xi \in X \text{ y } \eta(y) = \xi(y) \forall y \neq x\} \\ &= \sup\{|0| : \eta, \xi \in X \text{ y } \eta(y) = \xi(y) \forall y \neq x\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo que $0 = \sum_{x \in S} \Delta_1(x) < \infty$, por lo cual $1 \in \mathcal{D}(X)$.

Ahora por demostrar que $\Omega 1 = 0$. Notemos que por definición, para toda $\eta \in X$

$$\begin{aligned} \Omega 1(\eta) &= \sum_{A \in \mathcal{A}} \int_{W^A} [1(\eta^\xi) - 1(\eta)] c_A(\eta, d\xi) \\ &= \sum_{A \in \mathcal{A}} \int_{W^A} [0] c_A(\eta, d\xi) \\ &= 0. \end{aligned}$$

- II) Por demostrar $\mathcal{D}(X)$ es denso en $C(X)$, es decir Ω es un operador densamente definido. Por la proposición (2.4) el conjunto $\mathcal{D}(X)$ es denso en $C(X)$.
- III) Sea $f \in \mathcal{D}(X)$, $\lambda \geq 0$ y $f - \lambda\Omega f = g$, por demostrar,

$$\min_{\xi \in X} f(\xi) \geq \min_{\xi \in X} g(\xi). \quad (2.6)$$

Usaremos la proposición (1.18). Sea $f \in \mathcal{D}(X)$ y $f(\eta) = \min_{\xi \in X} f(\xi)$, por demostrar $\Omega f(\eta) \geq 0$.

Ya que $f(\eta) = \min_{\xi \in X} f(\xi)$, esto implica que $f(\xi) \geq f(\eta)$ para toda $\xi \in X$, y por lo tanto $f(\eta_\xi) - f(\eta) \geq 0$.

Ya que $c_A(\eta, d\xi)$ es una medida positiva y $A \in \mathcal{A}$ es un conjunto fijo, tenemos

$$\int_{W^A} (f(\eta_\xi) - f(\eta)) c_A(\eta, d\xi) \geq 0$$

por lo tanto

$$\Omega f(\eta) = \sum_{A \in \mathcal{A}} \int_{W^A} (f(\eta_\xi) - f(\eta)) c_A(\eta, d\xi) \geq 0.$$

Por lo cual con la proposición (1.18) se cumple (2.6) y por lo tanto Ω es un pregenerador de Markov.

□

2.3. Valores importantes

En esta sección definiremos y usaremos algunos elementos que nos serán de gran utilidad tanto para llegar a la construcción formal del generador. Esto nos permitirá ver algunas propiedades del proceso de contacto.

Definición 2.10. Sea $x, u \in S$ y $A \in \mathcal{A}$,

$$c_A(u) := \sup_{y \in S; y \neq u} \{ \|c_A(\eta_1, d\xi) - c_A(\eta_2, d\xi)\|_A : \eta_1(y) = \eta_2(y) \}, \quad (2.7)$$

$$\Upsilon(x, u) := \begin{cases} \sum_{A \ni x} c_A(u) & \text{si } x \neq u, \\ 0 & \text{si } x = u, \end{cases} \quad (2.8)$$

y

$$\begin{aligned} \tau := \inf_{u \in S} \inf \{ \sum_{A \in \mathcal{A}(x)} c_A(\eta_1, \{\xi : \xi(u) = \eta_2(u)\}) + c_A(\eta_2, \{\xi : \xi(u) = \eta_1(u)\}) : \\ \eta_1(v) = \eta_2(v) \forall v \neq u \text{ y } \eta_1(u) \neq \eta_2(u) \text{ con } \eta_1, \eta_2 \in X \} \end{aligned} \quad (2.9)$$

La norma $\|\cdot\|_A$ hace referencia a la variación total de una medida en W^A . Vale la pena resaltar que los elementos en X que se toman para calcular c_A solo difieren en una entrada. Otra observación es que la condición $A \ni x$ es equivalente a $A \in \mathcal{A}(x)$

Proposición 2.11. *Supongamos que se cumple la desigualdad (2.3),*

1. $f \in \mathcal{D}(X)$ y $f - \lambda \Omega f = g$ para algún $\lambda \geq 0$ Entonces para cualquier $u \in S$,

$$\Delta_f(u)[1 + \lambda \tau] \leq \Delta_g(u) + \lambda \sum_{x \neq u, x \in S} \Upsilon(x, u) \Delta_f(x). \quad (2.10)$$

2. y que $\sum_{A \in \mathcal{A}} c_A < \infty$, de forma que Ω será un generador acotado en $C(X)$. Entonces el inciso (1) se cumple para cualquier $f \in C(X)$.

Demostración. 1. Sea $u \in S$ fijo. Por hipótesis f es una función continua y acotada (pues X es compacto) y por lo tanto alcanza su mínimo y máximo, existen $\eta_1, \eta_2 \in X$ que cumplen que para toda $x \in S$ $x \neq u$, $\eta_1(x) = \eta_2(x)$ y $\eta_1(u) \neq \eta_2(u)$ tales que

$$\Delta_f(u) = f(\eta_1) - f(\eta_2).$$

Tenemos $f(\eta_1) \geq f(\eta_2)$, pues $\Delta_f(u)$ se define como supremo de las diferencias en valor absoluto de elementos en X tales que son iguales en todas sus entradas excepto en la u -ésima entrada.

Sea $A \notin \mathcal{A}\{u\}$. Como $\Delta_f(u) = f(\eta_1) - f(\eta_2)$ y por la forma en que elegimos η_1 y η_2 , si $\xi \in W^A$, tenemos

$$\begin{aligned} f(\eta_1) - f(\eta_2) &\geq |f(\eta_1^\xi) - f(\eta_2^\xi)| \\ \Rightarrow f(\eta_1) - f(\eta_2) &\geq f(\eta_1^\xi) - f(\eta_2^\xi) \\ \Rightarrow f(\eta_1) - f(\eta_1^\xi) &\geq f(\eta_2) - f(\eta_2^\xi) \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\int_{W^A} (f(\eta_1^\xi) - f(\eta_1)) c_A(\eta_1, d\xi) \leq \int_{W^A} (f(\eta_2^\xi) - f(\eta_2)) c_A(\eta_1, d\xi).$$

de modo que

$$\begin{aligned} &\int_{W^A} (f(\eta_1^\xi) - f(\eta_1)) c_A(\eta_1, d\xi) - \int_{W^A} (f(\eta_2^\xi) - f(\eta_2)) c_A(\eta_2, d\xi) \\ &\leq \int_{W^A} (f(\eta_2^\xi) - f(\eta_2)) c_A(\eta_1, d\xi) - \int_{W^A} (f(\eta_2^\xi) - f(\eta_2)) c_A(\eta_2, d\xi) \\ &= \int_{W^A} (f(\eta_2^\xi) - f(\eta_2)) (c_A(\eta_1, d\xi) - c_A(\eta_2, d\xi)). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Por la desigualdad (2.4), sabemos $|f(\eta_2^\xi) - f(\eta_2)| \leq \sum_{x \in A} \Delta_f(x)$, y por lo tanto $f(\eta_2^\xi) - f(\eta_2) \leq \sum_{x \in A} \Delta_f(x)$, por la definición de $c_A(u)$ tenemos,

$$\int_{W^A} (f(\eta_2^\xi) - f(\eta_2))(c_A(\eta_1, d\xi) - c_A(\eta_2, d\xi)) \leq c_A(u) \sum_{x \in A} \Delta_f(x). \quad (2.12)$$

Ahora tomaremos un $A \in \mathcal{A}(\{u\})$, y $\xi, \in W^A$, observemos que $\xi(x)$ es un elemento de W^A . Denotaremos por $\eta^{\xi(u)}$ al elemento

$$\eta^{\xi(u)}(x) = \begin{cases} \xi(u) & \text{si } x = u, \\ \eta(x) & \text{si } x \neq u; \end{cases}$$

y a h , como $h = f(\eta_i^\xi) - f(\eta_i^{\xi(u)})$. Notemos que $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ y por la forma que tomamos η_1 y η_2 , $\eta_1^{\xi(u)} = \eta_2^{\xi(u)}$, pues

$$\eta_i^{\xi(u)}(x) = \begin{cases} \xi(u) & \text{si } x = u \\ \eta(x) & \text{si } x \neq u. \end{cases}$$

Ahora observaremos que

$$\sup_{\xi \in W^A} |h(\xi)| \leq \sum_{x \in A; x \neq u} \Delta_f(x).$$

Para mostrarlo comenzaremos usando un razonamiento análogo al que se hizo para obtener la desigualdad (2.4). Ya que enumeraremos los elementos en A , sea $u = x_1$, por lo tanto

$$\begin{aligned} |f(\eta^\xi) - f(\eta^{\xi(u)})| &= |f(\eta) - f(\eta^\xi)| \\ &= |f(\eta^{\xi(u)}) - f(\bar{\eta}_1) + f(\bar{\eta}_1) - f(\bar{\eta}_2) + f(\bar{\eta}_2) + \dots \\ &\quad - f(\bar{\eta}_{|A|-1}) + f(\bar{\eta}_{A-1}) + f(\eta^\xi)| \\ &\leq |f(\eta^{\xi(u)}) - f(\bar{\eta}_1)| + |f(\bar{\eta}_1) - f(\bar{\eta}_2)| + \dots \\ &\quad + |f(\bar{\eta}_{|A|-1}) - f(\eta^\xi)| \end{aligned}$$

ahora, notemos que el elemento $|f(\eta^{\xi(u)}) - f(\bar{\eta}_1)|$ es igual a 0, por definición de $\bar{\eta}_1$ y $\eta^{\xi(u)}$ por lo tanto

$$\begin{aligned} &= |f(\bar{\eta}_1) - f(\bar{\eta}_2)| + \dots + |f(\bar{\eta}_{|A|-1}) - f(\eta^\xi)| \\ &\leq \Delta_f(x_2) + \dots + \Delta_f(x_{|A|-1}) + \Delta_f(x_{|A|}) \\ &= \sum_{x \in A; x \neq u} \Delta_f(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto, llegamos a

$$|f(\eta^\xi) - f(\eta^{\xi(u)})| \leq \sum_{x \in A; x \neq u} \Delta_f(x). \quad (2.13)$$

Notemos que como $f \in C(X)$, f es acotada, y para la desigualdad anterior tomamos un $\xi \in W^A$ arbitrario, por lo que podemos concluir

$$\begin{aligned} \sup_{\xi \in W^A} |f(\eta^\xi) - f(\eta^{\xi(u)})| &\leq \sum_{x \in A; x \neq u} \Delta_f(x) \\ \therefore \sup_{\xi \in W^A} |h(\xi)| &\leq \sum_{x \in A; x \neq u} \Delta_f(x). \end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned} &\int_{W^A} (f(\eta_1^\xi) - f(\eta_1)) c_A(\eta_1, d\xi) - \int_{W^A} (f(\eta_1^\xi) - f(\eta_1)) c_A(\eta_1, d\xi) \\ &= \int_{W^A} (f(\eta_1^\xi) - f(\eta_1) + f(\eta_1^{\xi(u)}) - f(\eta_1^{\xi(u)})) c_A(\eta_1, d\xi) \\ &\quad - \int_{W^A} (f(\eta_2^\xi) - f(\eta_2) + f(\eta_2^{\xi(u)}) - f(\eta_2^{\xi(u)})) c_A(\eta_1, d\xi) \\ &= \int_{W^A} (f(\eta_1^\xi) - f(\eta_1^{\xi(u)})) c_A(\eta_1, d\xi) - \int_{W^A} (f(\eta_2^\xi) - f(\eta_2^{\xi(u)})) c_A(\eta_1, d\xi) \\ &\quad + \int_{W^A} (f(\eta_1^{\xi(u)}) - f(\eta_1)) c_A(\eta_1, d\xi) - \int_{W^A} (f(\eta_2^{\xi(u)}) - f(\eta_2)) c_A(\eta_1, d\xi) \\ &= \int_{W^A} h(\xi) c_A(\eta_1, d\xi) - \int_{W^A} h(\xi) c_A(\eta_2, d\xi) \\ &\quad + \int_{W^A} (f(\eta_1^{\xi(u)}) - f(\eta_1)) c_A(\eta_1, d\xi) - \int_{W^A} (f(\eta_2^{\xi(u)}) - f(\eta_2)) c_A(\eta_2, d\xi) \\ &= \int_{W^A} h(\xi) (c_A(\eta_1, d\xi) - c_A(\eta_2, d\xi)) \\ &\quad + \int_{W^A} (f(\eta_1^{\xi(u)}) - f(\eta_1)) c_A(\eta_1, d\xi) - \int_{W^A} (f(\eta_2^{\xi(u)}) - f(\eta_2)) c_A(\eta_2, d\xi). \end{aligned}$$

Usando la desigualdad (2.13) y la definición de $c_A(u)$, obtenemos

$$\begin{aligned} &\leq c_A(u) \sum_{x \in A; x \neq u} \Delta_f(x) \\ &\quad + \int_{W^A} (f(\eta_1^{\xi(u)}) - f(\eta_1)) c_A(\eta_1, d\xi) - \int_{W^A} (f(\eta_2^{\xi(u)}) - f(\eta_2)) c_A(\eta_2, d\xi) \\ &\leq c_A(u) \sum_{x \in A; x \neq u} \Delta_f(x) \\ &\quad - [f(\eta_1) - f(\eta_2)] [c_A(\eta_1, \{\xi : \xi(u) = \eta_2(u)\}) + c_A(\eta_2, \{\xi : \xi(u) = \eta_1(u)\})]. \end{aligned}$$

Observemos que por hipótesis $f(\eta_2) \leq f(\eta_1)$, además η_2 difiere de η_1 solo en la u -ésima coordenada y $\eta_1^{\xi(u)}$ puede diferir a lo más en la u -ésima coordenada de

estas dos.

Por lo tanto, si $f(\eta_i^{\xi(u)}) > f(\eta_1)$,

$$\Rightarrow f(\eta_i^{\xi(u)}) - f(\eta_2) > f(\eta_1) - f(\eta_2),$$

lo cual contradice las hipótesis, análogamente, si $f(\eta_i^{\xi(u)}) < f(\eta_2)$, obtenemos

$$\Rightarrow f(\eta_2) - f(\eta_i^{\xi(u)}) > f(\eta_1) - f(\eta_2).$$

Por lo tanto podemos concluir,

$$f(\eta_2) \leq f(\eta_i^{\xi(u)}) \leq f(\eta_1).$$

También notemos que, por hipótesis

$$\begin{aligned} \Delta_f(u) &= f(\eta_1) - f(\eta_2) \\ &= f(\eta_1) - \lambda \Omega f(\eta_1) - f(\eta_2) + \lambda \Omega f(\eta_2) + \lambda \Omega f(\eta_1) - \lambda \Omega f(\eta_2) \\ &\leq \Delta_g(u) + \lambda \sum_A c_A(u) \sum_{x \neq u; x \in A} \Delta_f(u) - \lambda \tau \Delta_f(u) \end{aligned}$$

por lo tanto

$$(1 + \lambda \tau) \Delta_f(u) \leq \Delta_g(u) + \lambda \sum_x \Upsilon(x, u) \delta_f(x). \quad (2.14)$$

2. Para demostrar el inciso (2), notemos que $D(X)$ es denso en el conjunto $C(X)$ por lo cual por el inciso (1), el inciso (2) se cumple inmediatamente.

□

Definición 2.12. Definiremos $\mathcal{L}_1(S)$ como el espacio de todas las funciones $\beta : S \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$\|\beta\|_{\mathcal{L}_1(S)} := \sum_{x \in S} |\beta(x)| < \infty.$$

Notemos que \mathcal{L}_1 es un espacio de Banach. Además cuando $f \in \mathcal{D}(X)$, entonces Δ_f puede pensarse como un elemento de $\mathcal{L}_1(S)$, con

$$\|f\| = \|\Delta_f\|_{\mathcal{L}_1(S)}.$$

Proposición 2.13. Supongamos que se cumple la desigualdad (2.3). Denotaremos por \mathcal{C}

$$\mathcal{C} := \sup_{x \in S} \sum_{A \ni x, u \neq x} c_T(u) = \sup_{x \in S} \sum_{u \in S} \Upsilon(x, u) < \infty, \quad (2.15)$$

1. entonces $\Gamma\beta(u) = \sum_{x \in S} \beta(x) \Upsilon(x, u)$ define un operador acotado en el espacio $\mathcal{L}_1(S)$ con la norma \mathcal{C} .

2. si $f - \lambda \Omega f = g$ para $f, g \in \mathcal{D}(X)$ y $\lambda \in \mathbb{R}^+ \cup 0$ tal que

$$\frac{\lambda \mathcal{C}}{1 + \lambda \tau} < 1$$

entonces se cumple

$$\Delta_f \leq [(1 + \lambda \tau)I - \lambda \Gamma]^{-1} \Delta_g$$

punto a punto.

Demostración. Para la parte a), tomemos $\beta \in \mathcal{L}_1$ y calcula

$$\sum_u |\Gamma \beta(u)| \leq \sum_u \sum_x |\beta(x)| \Upsilon(x, u) \leq M \sum_x |\beta(x)|$$

tal que $\|\Gamma\| \leq M$.

Para probar que la norma de Γ es M , fija una $v \in S$ y sea

$$\beta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = v, \\ 0 & \text{si } x \neq v. \end{cases} \quad (2.16)$$

Entonces $\|\Gamma \beta\|_{\mathcal{L}_1(S)} = 1$ y

$$\|\Gamma \beta\|_{\mathcal{L}_1(S)} = \sum_u \Gamma \beta(u) = \sum_u \Upsilon(v, u)$$

, que podemos hacerla tan cercana a M como deseemos con la adecuada elección de v .

Para probar la parte de esta proposición suponemos las hipótesis de la proposición (2.11) y reescribimos la primera parte de esta, es decir

$$\Delta_f(u)[1 + \lambda \tau] \leq \Delta_g(u) + \lambda \sum_{x \neq u, x \in S} \Upsilon(x, u) \Delta_f(x).$$

es equivalente a escribir

$$\Delta_f \leq \frac{1}{1 + \lambda \tau} \Delta_g + \frac{\lambda}{1 + \lambda \tau} \Gamma \Delta_f.$$

dado que Γ es un operador positivo y $\Delta_f, \Delta_g \in \mathcal{L}_1(S)$, esta relación puede iterarse hasta obtener

$$\Delta_f \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{(1 + \lambda \tau)^{k+1}} \Gamma^k \Delta_g + \frac{\lambda^n}{(1 + \lambda \tau)^n} \Gamma^n \Delta_f.$$

dado que $\frac{\lambda M}{1 + \lambda \tau} < 1$, el último termino converge a cero cuando n va a infinito, de donde

$$\begin{aligned} \Delta_f &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(1 + \lambda \tau)^{k+1}} \Gamma^k \Delta_g \\ &= [(1 + \lambda \tau)I - \lambda \Gamma]^{-1} \Delta_g. \end{aligned}$$

□

Enunciaremos el siguiente teorema que nos será de ayuda más adelante, la demostración detallada puede encontrarse en [Lig85].

Teorema 2.14. *Si las desigualdades (2.3) y (2.15) se cumplen,*

1. *la cerradura $\overline{\Omega}$ del operador Ω es un generador de Markov para un semigrupo de Markov $S(t)$.*
2. *$\mathcal{D}(X)$ es el núcleo de $\overline{\Omega}$.*
3. *y sea $f \in \mathcal{D}(X)$, entonces*

$$\Delta_{S(t)f} \leq e^{-\tau t} \exp(t\Gamma) \Delta_f.$$

4. *y sea $f \in \mathcal{D}(X)$, entonces $S(t)f \in \mathcal{D}(X)$ para toda $t \geq 0$ y*

$$\|S(t)f\| \leq \exp[(\mathcal{C} - \tau)t] \|f\|.$$

Corolario 2.15. *Sean $c_A^{(n)}(\eta, d\xi)$ y $c_A(\eta, d\xi)$ tasas de transición, que satisfacen las desigualdades (2.3) y (2.15) y tomemos sus correspondientes pregeneradores de Markov $\Omega^{(n)}$ y Ω definidos en $\mathcal{D}(X)$, como los tomamos en el inciso uno de la proposición (2.9) y análogamente sean $S_n(t)$ y $S(t)$ los semigrupos de Markov generados por $\Omega^{(n)}$ y Ω .*

Sea

$$\Omega f = \lim_{n \rightarrow \infty} \Omega^{(n)} f, \quad \forall f \in \mathcal{D}(X).$$

Entonces

$$S(t)f = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(t)f, \quad \forall f \in C(X),$$

uniformemente para t en un conjunto compacto.

Demostración. Para llevar a cabo la prueba del corolario se usan los teoremas 1.26 y 2.14, del cual sale directo. \square

2.4. Sistemas spin

La mayoría de los sistemas interactivos de partículas son sistemas spin, es decir, sistemas que solo pueden tomar dos estados. Un ejemplo de sistema spin es el proceso de contacto, el cual puede tomar el estado 0 ó el estado 1, por lo cual ahondaremos en este tipo particular de sistema interactivo de partículas.

2.4.1. Ergodicidad de sistemas spin

Uno de los temas más importantes a tratar cuando hablamos de sistemas spin es la ergodicidad, de ahí la importancia de esta sección.

La métrica que metriza la topología producto en un sistema spin, está dada por

$$d(\eta, \xi) := \sum_{x \in S} \alpha(x) |\eta(x) - \xi(x)|.$$

Donde α es una función estrictamente positiva y sumable, particularmente en el caso de sistemas spin se tiene la relación:

$$\alpha(x) := \sup_{\eta \in X} |f(\eta_x) - f(\eta)|,$$

donde η_x es la configuración obtenida de η , por el cambio de valor de la coordenada $\eta(x)$ a $1 - \eta(x)$ mientras las otras coordenadas no cambian.

Dada la definición (1.15) un sistema spin η con semigrupo se dice *ergódico* si para cualquier medida $\nu \in \mathcal{P}$, $\nu S(t)$ converge a μ cuando t converge a infinito, y tiene una medida estacionaria única.

Por el teorema (1.16) tenemos que cualquier proceso de Feller en el espacio $\{0, 1\}^S$, tiene una distribución estacionaria, en particular un sistema spin, es decir $\mathcal{I} \neq \emptyset$, donde recordamos que \mathcal{I} es el conjunto de las medidas invariantes en \mathcal{P} .

El siguiente teorema nos será de gran utilidad.

Teorema 2.16. *Si $\mathcal{C} < \tau$, con τ y \mathcal{C} definidas como en (2.9) y (2.15) respectivamente, entonces el proceso η_t es ergódico.*

Demostración. Sean $\eta, \xi \in X$, con $\eta(x) \neq \xi(x)$ y $\eta(y) = \xi(y)$ para toda $y \in S$, $y \neq x$.

Observemos que para $\eta, \xi \in X$ es posible llegar de η a ξ cambiando una coordenada a la vez, por lo cual tomemos una secuencia $\eta_i^{x_i} \in X$, de forma que $x_i \in S$ y x_i es diferente de x_j si $i \neq j$. Tales que $\eta = \eta_0$ y $\eta_i^{x_i}$

$$\eta_i^{x_i} = \begin{cases} \eta(x) & \text{si } x \in S \setminus \bigcup_{j=1}^i x_j, \\ \xi(x) & \text{si } x \in \bigcup_{j=1}^i x_j. \end{cases}$$

Por lo tanto $\lim_{i \rightarrow \infty} \eta_i^{x_i}$. Sea $f \in C(X)$, entonces

$$\begin{aligned} |f(\eta) - f(\xi)| &= \left| \lim_{i \rightarrow \infty} (f(\eta_0) - f(\eta_i^{x_i})) \right| \\ &= \left| \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^i [f(\eta^{j-1}) - f(\eta^j)] \right| \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \left| \sum_{j=1}^i [f(\eta^{j-1}) - f(\eta^j)] \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} |f(\eta^{j-1}) - f(\eta^j)| \\ &\leq \sum_{x \in S} \Delta_f(x) \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \sup_{\eta, \xi} |f(\eta) - f(\xi)| &\leq \sum_{x \in S} \Delta f(x) \\ &= \|f\|. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Usando la desigualdad (2.17) y que $S(t)f \in C(X)$ (pues estamos trabajando con un proceso de Feller), tenemos

$$\begin{aligned} \sup_{\xi, \eta \in X} |S(t)f(\eta) - S(t)f(\xi)| &\leq \sum_{x \in S} \Delta_{S(t)f}(x). \\ &= \|S(t)f\| \end{aligned} \quad (2.18)$$

Por el inciso cuatro del teorema (2.14)

$$\leq e^{(\mathcal{C}-\tau)t} \|f\|. \quad (2.19)$$

Sean $\mu \in \mathcal{J}$ y $\nu \in \mathcal{P}$ y $f \in \mathcal{D}(X)$, con \mathcal{J} , \mathcal{P} y \mathcal{D} como en (1.13), (1.10), (2.3) respectivamente. Utilizando el primer inciso de la proposición (1.14)

$$\begin{aligned} \left| \int f d\mu - \int f d(\nu S(t)) \right| &= \left| \int S(t)f d\mu - \int S(t)f d\nu \right| \\ &= \left| \int S(t)f(\eta) d\mu(\eta) - \int S(t)f(\xi) d\nu(\xi) \right| \end{aligned}$$

donde en la primera identidad usamos la proposición (1.14). Como $\nu, \mu \in \mathcal{P}$ y \mathcal{P} es el espacio de medidas de probabilidad en X

$$\int_X d\nu(\xi) = 1 \quad \text{y} \quad \int_X d\mu(\eta) = 1$$

y entonces

$$\begin{aligned} \left| \int f d\mu - \int f d(\nu S(t)) \right| &= \left| \int S(t)f(\eta) \left[\int d\nu(\xi) \right] d\mu(\eta) - \int S(t)f(\xi) \left[\int d\mu(\eta) \right] d\nu(\xi) \right| \\ &= \left| \int \left(\int S(t)f(\eta) d\nu(\xi) \right) d\mu(\eta) - \int \left(\int S(t)f(\xi) d\mu(\eta) \right) d\nu(\xi) \right| \\ &= \left| \int S(t)f(\eta) d(\mu \times \nu) - \int S(t)f(\xi) d(\mu \times \nu) \right| \\ &= \left| \int (S(t)f(\eta) - S(t)f(\xi)) d(\mu \times \nu) \right| \\ &\leq \sup_{\eta, \xi \in X} |S(t)f(\eta) - S(t)f(\xi)| \left| \int_X d(\mu \times \nu) \right| \\ &= \sup_{\eta, \xi \in X} |S(t)f(\eta) - S(t)f(\xi)| \end{aligned}$$

y por la desigualdad (2.19), esto queda acotado por

$$\leq e^{(\mathcal{C}-\tau)t} |||f|||.$$

Por hipótesis $\mathcal{C} < \tau$ y $f \in \mathcal{D}(X)$; por lo tanto $|||f||| < \infty$. Si hacemos tender t a infinito ∞ entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{(\mathcal{C}-\tau)t} |||f||| = 0$$

y esto pasa si y solo si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int f d(\nu S(t)) = \int f d\mu.$$

Notemos que $\nu S(t), \mu \in \mathcal{P}$. Por la topología débil

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int f d(\nu S(t)) = \int f d\mu.$$

si y solo si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \nu S(t) = \mu.$$

Por lo tanto $\forall \nu \in \mathcal{P}$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \nu S(t) = \mu$$

y $\mathcal{J} \neq \emptyset$ y $\mu \in \mathcal{J}$, por lo tanto \mathcal{J} es un unitario. Por lo tanto el proceso η_t es ergódico.

□

Notemos que en el proceso de contacto tenemos que $\tau = 1$ y $M = 2d\lambda$, por lo cual aplicando el teorema (2.16) el proceso de contacto es ergódico para $\lambda < \frac{1}{2d}$ y entonces $\frac{1}{2d}$ es una cota inferior para el valor crítico λ_d .

2.4.2. Acoplamiento de sistemas spin

Otro tema importante a tratar de los sistemas spin es el acoplamiento de dos de estos procesos. El acoplamiento consiste en la construcción de dos procesos en un espacio de probabilidad común y para que la evolución conjunta de ambos procesos sea de utilidad esta debe ser elegida adecuadamente. Usaremos acoplamiento para probar atractividad.

Diremos que $\eta \leq \xi$ para $\eta, \xi \in X$ si $\eta(x) \leq \xi(x)$ para toda $x \in S$.

Teorema 2.17. Sean η_t y ξ_t sistemas spin con tasas de salto $c_1(x, \eta)$ y $c_2(x, \xi)$ respectivamente. Si $\eta \leq \xi$, y

$$\begin{aligned} c_1(x, \eta) &\leq c_2(x, \xi) && \text{para } \eta(x) = 0 \text{ y } \xi(x) = 0, \text{ y} \\ c_1(x, \eta) &\geq c_2(x, \xi) && \text{para } \eta(x) = 1 \text{ y } \xi(x) = 1. \end{aligned}$$

entonces, existe un acoplamiento (η_t, ξ_t) para la configuración inicial $\eta \leq \xi$ tal que

$$P^{(\eta, \xi)}(\eta_t \leq \xi_t \text{ para toda } t \geq 0) = 1.$$

Demostración. El acoplamiento se encuentra definido en términos de las tasas de transición, las cuales dictaminan el cambio en las coordenadas $(\eta(x), \xi(x))$ en cada sitio x si $\eta \leq \xi$.

Si partimos del estado $(0, 0)$, entonces solo nos es posible llegar a los estados $(0, 1)$ y $(1, 1)$ pues por hipótesis $\eta \leq \xi$, por lo tanto

$$(0, 0) \rightarrow \begin{cases} (1, 1) & \text{con tasa } c_1(x, \eta) \text{ pues basta que } \eta(x) = 1 \text{ para obligar a que,} \\ & \xi(x) = 1 \\ (0, 1) & \text{con tasa } c_2(x, \xi) - c_1(x, \eta) \geq 0 \text{ pues } \xi \text{ en la coordenada } x \text{ debe} \\ & \text{cambiar, pero en } \eta \text{ debe permanecer siendo 0.} \end{cases}$$

análogamente, sucede con el estado $(0, 1)$

$$(0, 1) \rightarrow \begin{cases} (0, 0) & \text{con tasa } c_2(x, \xi), \\ (1, 1) & \text{con tasa } c_1(x, \eta). \end{cases}$$

y finalmente para el estado $(1, 1)$

$$(1, 1) \rightarrow \begin{cases} (0, 0) & \text{con tasa } c_2(x, \xi) \\ (0, 1) & \text{con tasa } c_1(x, \eta) - c_2(x, \xi). \end{cases}$$

Notemos que por hipótesis todas estas tasas de transición son mayores o iguales a 0 y dado que las tasas marginales del proceso son respectivamente $c_1(x, \eta)$ y $c_2(x, \eta)$ los procesos η, ξ evolucionan adecuadamente.

Formalmente, el acoplamiento (η_t, ξ_t) es un proceso de Feller con espacio de estados $\{(0, 0), (0, 1), (1, 1)\}^S$ con un generador análogo al generador usado en el teorema (2.14) solo que con más estados de transición, pues hay más tipos de transición, y la construcción del proceso es esencialmente la misma. \square

Definición 2.18. Un sistema spin es *atractivo* si ambos procesos η_t, ξ_t tienen la misma tasa de transición

$$\begin{aligned} c(x, \eta) &\leq c(x, \xi) && \text{para } \eta(x) = 0 \text{ y } \xi(x) = 0, \text{ y} \\ c(x, \eta) &\geq c(x, \xi) && \text{para } \eta(x) = 1 \text{ y } \xi(x) = 1. \end{aligned}$$

cuando $\eta \leq \xi$

Corolario 2.19. *Para un sistema spin atractivo, existe un acoplamiento (η_t, ξ_t) de dos copias del proceso para una configuración inicial que satisfaga $\eta \leq \xi$ con la propiedad*

$$P^{(\eta, \xi)}(\eta_t \leq \xi_t \text{ para toda } t \geq 0) = 1.$$

Demostración. Notemos que este corolario se demuestra al ver que es solo un caso particular del teorema (2.17) que ya demostramos. \square

Definición 2.20.

Sea $f \in C(\{0, 1\}^S)$. Diremos que f es **creciente** si $f(\eta) \leq f(\xi)$ cuando $\eta \leq \xi$.

Denotaremos por M al conjunto de todas las funciones crecientes en $C(\{0, 1\}^S)$

Definición 2.21. *Diremos que dos medidas están **estocasticamente ordenadas** si*

$$\int f d\mu \leq \int f d\nu \quad \forall f \in M.$$

Denotaremos esta propiedad como $\mu \leq \nu$.

Definición 2.22. *Las medidas o masas puntuales para $\eta \equiv 0$ y $\eta \equiv 1$ las llamaremos respectivamente δ_0 y δ_1*

El siguiente teorema es importante dentro de la teoría de IPS, pero dado que solo nos interesa usar uno de los incisos de este, solo damos la siguiente referencia para el lector interesado en su demostración [Lig85].

Teorema 2.23. *Sea $S(t), t \geq 0$ el semigrupo de un sistema spin atractivo. Entonces*

1. $\delta_0 S(t) \leq \delta_0 S(t)$ y $\delta_1 S(t) \geq \delta_1 S(t)$ para $s \leq t$,
2. los límites $\underline{\nu} := \lim_{t \rightarrow \infty} \delta_0 S(t)$ y $\bar{\nu} := \lim_{t \rightarrow \infty} \delta_1 S(t)$ existen y son medidas estacionarias y
3. $\delta_0 S(t) \leq \mu S(t) \leq \delta_1 S(t)$ para cualquier $\mu \in \mathcal{P}$.

Las medidas $\underline{\nu}$ y $\bar{\nu}$ son llamadas respectivamente *distribución estacionaria inferior* y *superior*.

Corolario 2.24. *Un sistema spin atractivo es ergódico si y solo si $\underline{\nu} = \bar{\nu}$.*

Demostración. Observemos que si tenemos un proceso ergódico el conjunto \mathcal{J} es un unitario (por la definición (1.15)), es decir hay una única medida estacionaria que denotaremos ν . Recordado el inciso 2 del teorema (2.23), tenemos que $\bar{\nu}$ y $\underline{\nu}$ existen y son estacionarias, por lo tanto $\nu = \bar{\nu}$ y $\nu = \underline{\nu}$ es decir $\bar{\nu} = \underline{\nu}$.

Para el regreso notemos que por el inciso 3 del teorema (2.23) tenemos que para cualquier medida $\mu \in \mathcal{P}$ $\lim_{t \rightarrow \infty} \mu S(t) = \underline{\nu} = \bar{\nu}$ y ya que $\bar{\nu}$ es estacionaria (al igual que $\underline{\nu}$) tenemos que el conjunto \mathcal{J} es un unitario, por lo tanto el proceso es ergódico. \square

Existen algunas otras condiciones interesantes para ver si un sistema es ergódico, una de ella es demostrar que es monótono y usar el corolario que acabamos de demostrar, si se desea investigar más al respecto puede buscarse más información en la sección dos del capítulo tres de [Lig85].

2.4.3. Reescribiendo valores importantes.

En esta subsección reescribiremos algunos valores que usamos en la sección de sistemas interactivos de partículas para el caso específico de sistemas spin, hacemos esto porque la notación será más sencilla y el espacio de estados de los sistemas spin permite observar de manera más sencilla algunas propiedades.

Tomaremos $X = \{0, 1\}^S$ y dada $\eta \in X$ denotemos a η_x como el elemento en X obtenido del salto del estado $x \in S$, es decir tendremos $\eta_x(x) = 1 - \eta(x)$. Con lo anterior, podemos reescribir $\Delta_f(x)$ dada en la definición (2.2) de la siguiente manera.

Dada $f \in C(X)$ y $x \in S$

$$\Delta_f(x) := \sup \{ |f(\eta) - f(\xi)| : \eta, \xi \in X \text{ y } \eta(y) = \xi(y) \text{ para toda } y \neq x \}$$

dado que nos encontramos en un sistema interactivo de partículas, y dado que los elementos en S solo pueden tomar el estado 0 ó el estado 1, entonces necesariamente

$$\begin{aligned} &= \sup \{ |f(\eta) - f(\eta_x)| : \eta, \eta_x \in X \} \\ &= |f(\eta) - f(\eta_x)|. \end{aligned}$$

Con lo cual concluimos que

$$\Delta_f(x) = |f(\eta) - f(\eta_x)|. \quad (2.20)$$

Y usando lo anterior en la definición (2.3) tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(X) &:= \left\{ f \in C(X) \mid \|f\| := \sum_{x \in S} \Delta_f(x) < \infty \right\} \\ &= \{ f \in C(\{0, 1\}^S) \mid \|f\| := \sum_{x \in S} |f(\eta) - f(\eta_x)| < \infty \} \end{aligned}$$

por lo cual

$$\mathcal{D}(X) = \{ f \in C(\{0, 1\}^S) \mid \|f\| := \sum_{x \in S} |f(\eta) - f(\eta_x)| < \infty \}. \quad (2.21)$$

Ahora bien, debido a que en un sistema spin, cada elemento en S solo puede tomar dos estados, también puede usarse notación más sencilla para denotar a las tasas de transición, en este caso usaremos la siguiente notación en el caso de una transición en un conjunto de tamaño uno $c(\eta, d\xi) = c(x, \eta)$. Por otra parte como mostramos al principio de este capítulo para el proceso de contacto dada (2.1) tenemos que $c_A(\eta, d\xi) = c_A(x, \eta)$ tenemos que esta tasa es mayor que cero solo si la cardinalidad del conjunto A es uno y por lo tanto en caso contrario es igual a 0, de manera análoga puede mostrarse que sucede lo mismo para todos los sistemas spin, por lo cual dado $x \in S$, $A \in \mathcal{A}$, y $|A| = 1$ en (2.7)

$$\begin{aligned}
c_A(u) &:= \sup_{y \in S; y \neq u} \{ \|c_A(\eta_1, d\xi) - c_A(\eta_2, d\xi)\|_A : \eta_1(y) = \eta_2(y) \} \\
&= \sup_{\eta \in X} |c(x, \eta_u) - c(x, \eta)|.
\end{aligned}$$

Con lo anterior concluimos que en el caso de sistemas spin

$$c_A(u) = \sup_{\eta \in X} |c(x, \eta_u) - c(x, \eta)|. \quad (2.22)$$

Reescribiendo valores importantes de los sistemas spin, tenemos que para $x \neq u$ ambos en S para (2.8) tenemos

$$\Upsilon(x, u) := \sum_{A \ni x} c_A(u)$$

dado que solo nos interesan los conjuntos con cardinalidad 1, y el único conjunto de cardinalidad 1 que contiene al elemento x es el unitario de x , tenemos

$$= \sup_{\eta \in X} |c(x, \eta_u) - c(x, \eta)|.$$

De donde concluimos que

$$\Upsilon(x, u) = \sup_{\eta \in X} |c(x, \eta_u) - c(x, \eta)|. \quad (2.23)$$

Analogamente a la forma en que logramos reescribir el valor de Υ , llegamos a que (2.9) también debe ser igual a

$$\tau = \inf_{u, \eta} [c(u, \eta) - c(u, \eta_u)]. \quad (2.24)$$

PROCESO DE CONTACTO

En este capítulo describimos y mostramos algunas propiedades para el proceso de contacto además que se da un acercamiento a la construcción gráfica del proceso de contacto, cabe mencionar que la teoría desarrollada en este capítulo solo es aplicable al proceso de contacto. Para el estudio de este capítulo se usaron principalmente los libros de Thomas M. Liggett [Lig99], [Lig85], [Lig10] y [Lig] además de [Fre11], [Gro09], [vEdH] y [Gri10]. Toda esta literatura fue de gran ayuda para demostrar algunos puntos cruciales intuitiva y formalmente en el proceso de contacto.

Como mencionamos en la sección (2.1.3) el proceso de contacto es comúnmente usado para modelar la propagación de una enfermedad, pero a pesar de esto el proceso de contacto puede ser utilizado en contextos diferentes como el de alta energía en física.

Según [Lig85] la primera vez que se presentó y estudió el proceso de contacto fue en 1974 por Harris, en el artículo [Har74]. En este artículo se trabajó en el proceso de contacto con un enfoque básicamente analítico, que trabajaba con el proceso de contacto como un proceso de Feller particular, estudiando el semigrupo asociado y su generador asociado.

Es en 1978 cuando Harris también presenta en su artículo [Har78] un enfoque constructivo para el estudio del proceso de contacto y otros procesos de Markov que cuentan con características similares, este nuevo enfoque permite la construcción del proceso de contacto para todas las configuraciones iniciales simultáneamente como función de una cantidad numerable de procesos de Poisson independientes. Esta construcción es denominada representación gráfica.

El proceso de contacto es un modelo utilizado frecuentemente como un caso prueba en nuevas técnicas para obtener resultados que puedan aplicarse en general. Ha sido objeto de una intensa investigación rigurosa dentro de la comunidad matemática, y numérica en la literatura física. Durante este trabajo interpretaremos los resultados obtenidos y la construcción del proceso de contacto en términos de la propagación de una infección.

3.1. Construcción del proceso de contacto

Sea $G = (S, E)$, una gráfica infinita, conexa y de grado acotado; de no contar con un grafo conexo las características del proceso de contacto pueden ser estudiadas en cada componente conexa. Dados dos elementos x, y en S diremos que son vecinos, en terminos de teoría de graficas, con $x \sim y$.

Cabe recordar que en una gráfica el grado de un vértice x es el número de vértices que están conectados a x por una arista. Un árbol homogéneo T_d es un árbol en el que cada vértice tiene el mismo grado por lo cual tenemos que el árbol tendrá grado $d + 1$, y en la red entera \mathbb{Z}^d todos los vértices tienen grado

$$2d. \tag{3.1}$$

En este trabajo siempre supondremos que los grados de los vértices están acotados. Finalmente para poder observar el movimiento en la gráfica S es importante recordar que una trayectoria a través de S es una secuencia de aristas consecutivas en la gráfica, la longitud de la trayectoria es igual al número de vértices usados y la distancia entre dos vértices $x, y \in S$ es la longitud de la trayectoria mínima entre x y y (se denota por $|y - x|$).

3.2. Descripción del proceso.

Denotaremos a $X = \{0, 1\}^S$ como el espacio de estados del proceso de contacto. Recordando, vimos en el capítulo 2 sección 2.1.3, que una configuración de la enfermedad se encuentra dada en terminos de $\eta \in X$: un individuo en la gráfica, es decir un elemento $x \in S$, se encuentra saludable si $\eta(x) = 0$ y por otra parte se encuentra infectado si $\eta(x) = 1$. El conjunto de los individuos se toma como el conjunto de vértices en la gráfica no dirigida G . Por lo cual el proceso de contacto corresponde a vectores de la forma $\eta = (\eta(x) : x \in S)$.

El proceso de contacto cuenta con un parámetro λ que se entiende como la tasa de contagio del individuo x al individuo y cuando x es un individuo infectado y y es un vecino sano de este. Supondremos que cada vecino se recupera a tasa constante igual a 1 de forma independiente del resto de los vertices. Si denotamos a $\eta_t \in X$ como el estado del proceso al tiempo t entonces tenemos que intuitivamente las transiciones se llevan acabo de la siguiente manera:

1. si $\eta_t(x) = 1$, el sitio x se encuentra infectado al momento t , y por lo tanto pasara a ser un estado saludable de manera independiente a los demás estados en un tiempo exponencial de tasa 1, es decir:

$$P(\eta_{t+h}(x) = 0 | \eta_t(x) = 1) = h + o(h),$$

2. por otra parte si $\eta_t = 0$, el sitio x se encuentra saludable al tiempo t y por lo tanto x será contagiado con tasa λ y de manera independiente por cada uno de sus vecinos infectados, es decir:

$$P(\eta_{t+h}(x) = 1 | \eta_t(x) = 0) = \lambda * |\{y : y \sim x, \text{ y } \eta_t(y) = 1\}| * h + o(h).$$

donde $|A|$ es la cardinalidad del conjunto A y $y \sim x$ denota la relación de equivalencia "x es vecino de y".

Es muy importante notar que el proceso de contacto es entonces un sistema interactivo de partículas, de forma específica es un sistema spin, por lo cual las propiedades demostradas en los dos capítulos anteriores para IPS's y sistemas spin se cumplen para el proceso de contacto.

Por la construcción anterior y usando la notación analítica de los IPS tiene sentido dar las tasas de transición del proceso de contacto de la siguiente manera.

Definición 3.1. *El proceso de contacto en X se caracteriza por la tasa de salto*

$$c(x, \eta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \eta(x) = 1, \\ \lambda \sum_{y:|y-x|=1} \eta(y) & \text{si } \eta(x) = 0. \end{cases}$$

En palabras lo que estaríamos diciendo es que un individuo infectado se recupera de una infección después de un tiempo exponencial con media o tasa igual a 1 sin importar el estado de salud de sus vecinos, a su vez los individuos saludables se infectan con una tasa proporcional al número de vecinos infectados.

Una característica clave de estas tasas es que la infección no puede aparecer espontáneamente, es decir si la infección no existe en un momento t en s , $s > t$, la infección no existirá; por lo cual el 0 es un estado *absorbente* para el proceso.

Es importante notar que formalmente la conexión entre la tasa c y el proceso η_t está dada por el generador de Markov Ω de η_t .

3.3. Herramientas para la representación gráfica

Para la construcción formal de la representación gráfica usaremos dos colecciones de procesos Poisson. Para la primera colección, a cada vértice x en el conjunto S le asignamos un proceso Poisson de tasa 1 que denotaremos por N_x , este es el proceso de cura. Para la segunda, a cada par ordenado de vértices vecinos x, y en el conjunto S le asignamos un proceso Poisson $N_{x,y}$ de tasa λ , este es el proceso de contagio. Supondremos que todos los procesos son independientes. Ahora nos interesa definir cuales son las trayectorias de contagio del proceso por lo cual necesitamos las siguientes definiciones.

Definición 3.2. Una *trayectoria dirigida* en el espacio tiempo $S \times [0, \infty)$ de (x, s) a (y, t) con $s < t$ es una secuencia

$$(x, 0) = (x_0, t_0), (x_1, t_1), (x_2, t_2), \dots, (x_n, t_n) = (y, t)$$

donde $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$, $x_i \in S$ y x_k, x_{k+1} son vecinos para toda $k \in 0, 1, \dots, n$.

Notemos que en la definición anterior necesariamente $0 = t_0$ por lo cual $t_k \in [0, \infty)$.

Definición 3.3. Diremos además, que es una *trayectoria activa* si

1. $t_k \in N_{x_k, x_{k+1}}$ para toda $k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$, es decir t_k es un tiempo de contagio entre los vecinos x_k y x_{k+1} , y
2. $(x_k, s) \notin N_{x_k}$ si $t_{k-1} < s < t_k$ es decir el tiempo de contagio no se encuentra entre los tiempos de cura de los vecinos x_k y x_{k+1} en ese tiempo.

Para ilustrar las definiciones anteriores observemos el siguiente ejemplo. Sea $t \in [0, \infty)$, si t es un tiempo en N_x entonces el punto $(x, t) \in S$ indica cura o recuperación del individuo x al tiempo t y dentro de la gráfica lo denotaremos por el símbolo $*$, en cambio si t es un tiempo en $N_{(x,y)}$ lo denotaremos por \rightarrow a la cual llamamos una flecha de infección de (x, t) a (y, t) e indica un posible contagio del individuo x al individuo y al tiempo t . Un posible escenario de esta construcción en $S = \mathbb{Z}$, dado que los individuos 0 y 3 son los únicos infectados al tiempo $t = 0$, es el de la Figura 3.1.

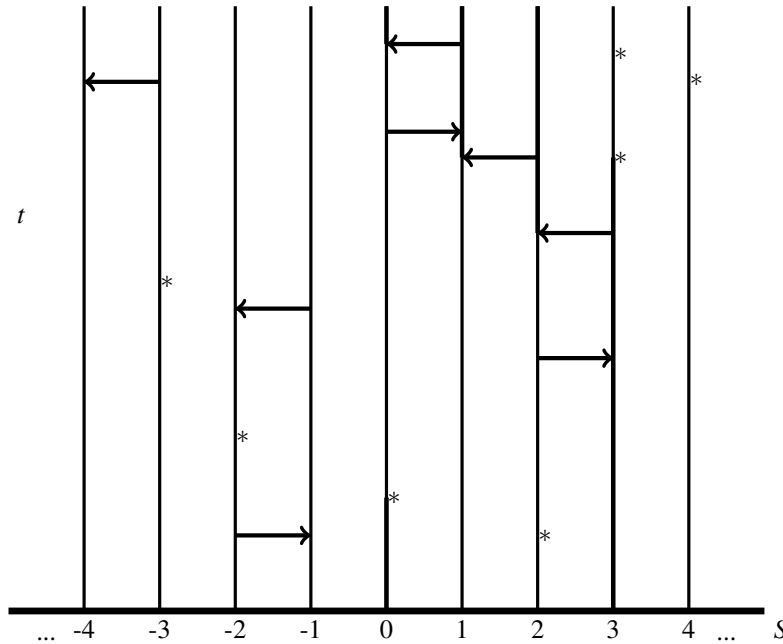


Figura 3.1: Ejemplo

Entonces, en la Figura 3.1 las flechas de infección que pueden provocar una nueva infección son aquellas que provienen de un individuo infectado y esto lo representamos con líneas verticales más oscuras a través del tiempo. Entonces dada la definición (3.3) una trayectoria de x a y se encuentra *activa* en $S \times [0, \infty)$ si existe una trayectoria dirigida sobre las flechas de infección \rightarrow (siguiendo el sentido de estas) que conecta a x con y a través del tiempo t , sin dar saltos hacia atrás en t , y que no cruza ningún símbolo de recuperación $*$, en la figura anterior una trayectoria activa es la que encontramos de $(3, 0)$ a $(0, t)$, es decir la trayectoria que va del individuo 3 al tiempo 0 al individuo 0 al tiempo t .

Ahora bien nos encontramos interesados en identificar dentro de una configuración $\eta \in X$ a los elementos $x \in S$ infectados, es decir aquellos tales que $\eta(x) = 1$, por lo cual definimos el conjunto A como

$$A := \{x \in S \mid \eta(x) = 1\}, \quad (3.2)$$

con lo cual los elementos en $S \setminus A$ son los elementos saludables. Ahora bien, con lo anterior notemos que tenemos una nueva forma de entender las tasas de transición pues

$$A \rightarrow A \setminus \{x\} \text{ para } x \in A \text{ con tasa } 1, \text{ y}$$

$$A \rightarrow A \cup \{x\} \text{ para } x \notin A \text{ con tasa } \lambda * (|\{y \in A : |y - x| = 1\}|).$$

Denotaremos el estado inicial del proceso por el superíndice A , de manera que el conjunto de sitios infectados al tiempo t para el sistema con estado inicial A se denota por A_t^A , el proceso de contacto mediante su construcción gráfica se encuentra definido en términos de este. Podemos entonces definir al proceso A_t^A antes descrito como

$$A_t^A = \{y \in S \mid \text{existe una trayectoria activa de } (x, 0) \text{ a } (y, t) \text{ para algun } x \in S\}. \quad (3.3)$$

Como ejemplo, en la Figura 3.1 $A_t^{\{0,1,2\}} = \emptyset$ y $A_t^{\{3\}} = \{0\}$.

Una ventaja de la construcción gráfica es que provee un acoplamiento conjunto del proceso con estados iniciales arbitrarios. Dado que nos encontramos interesados en comparar los procesos A_t^A y A_t^B , si construimos cada uno usando colecciones de procesos Poisson independientes, habrá poco que decir acerca de la relación entre ambos, por lo cual usaremos la misma colección de procesos Poisson con diferente condición inicial.

Corolario 3.4.

$$A \subset B \Rightarrow A_t^A \subset A_t^B.$$

Demostración. Como mencionamos arriba ambos procesos provienen de la misma colección solo que con condiciones iniciales diferentes por lo cual es inmediato, a partir de la construcción gráfica, que si $A \subset B$ entonces $A_t^A \subset A_t^B$ para t pues si para $x \in A$ existe un camino activo de $(x, 0)$ a (y, t) entonces el mismo camino nos dice que $y \in A_t^B$ pues $x \in B$. \square

Observemos que la condición anterior nos da un cierto tipo de monotonía.

3.4. Aditividad

Análogamente, la construcción es aditiva en el sentido

Corolario 3.5.

$$A_t^{A \cup B} = A_t^A \cup A_t^B.$$

Demostración. Supongamos que $y \in A_t^{A \cup B}$ entonces existe una trayectoria activa de $(x, 0)$ a (y, t) con $x \in A \cup B$, dado esto entonces sin pérdida de generalidad supongamos que $x \in A$ entonces tenemos que $y \in A_t^A$, de esta manera obtenemos $A_t^{A \cup B} \subset A_t^A \cup A_t^B$. Por otra parte, sin pérdida de generalidad sea $y \in A_t^A$, entonces existe una trayectoria activa de $(x, 0)$ a (y, t) con $x \in A \subset A \cup B$ de donde tenemos que $y \in A_t^{A \cup B}$ es decir $A_t^A \subset A_t^{A \cup B}$. De lo anterior concluimos $A_t^{A \cup B} = A_t^A \cup A_t^B$. \square

La representación gráfica puede extenderse de varias formas y aplicarse a parejas de procesos con diferentes reglas de evolución siempre y cuando se encuentren dentro del mismo espacio de probabilidad. Por ejemplo supongamos que buscamos el acoplamiento de los procesos de contacto A_t y B_t con parámetros λ_A y λ_B respectivamente con $\lambda_A < \lambda_B$, en este caso tomamos de esta forma usando el mismo procesos N_x para A_t y B_t , es decir $N_x^A = N_x^B = N_x$. Pero definiremos el proceso de infección del proceso B_t como

$$N_{x,y}^B = N_{x,y}^A + M_{x,y},$$

donde $(M_{x,y} : x, y \in S \text{ y } y \sim x)$ denota a la familia de procesos Poisson de parámetro $\lambda_B - \lambda_A$ que supondremos independiente entre si e independientes de $N_{x,y}^A$.

Proposición 3.6. *El proceso de contacto es atractivo*

Demostración. Si $\eta \geq \xi$, es decir $\eta(x) \geq \xi(x)$ para toda x , y $\eta(x) = 1 = \xi(x)$ eso implica que $c(x, \eta) = 1 = c(x, \xi)$, por otra parte, si $\eta(x) = 0 = \xi(x)$ tenemos $c(x, \eta) = \lambda |\{y : \eta(y) = 1\}|$ pero dado que $\eta \leq \xi$ (lo cual implica que el elemento ξ tiene más individuos infectados que el elemento η), tenemos $c(x, \eta) \leq c(x, \xi)$ y el proceso es atractivo dada la definición (2.18). \square

Notemos que debido a su construcción los conjuntos A_t^A son *crecientes* en el sentido que

$$\{A_{t+s}^A \neq \emptyset\} \subset \{A_t^A \neq \emptyset\}. \quad (3.4)$$

3.4.1. Dualidad

En la sección (1.5) del capítulo 1 la dualidad es una de las características primordiales dentro de los IPS, en este caso trataremos con la propiedad de dualidad, o auto-dualidad del proceso, que es como se denomina a la igualdad (3.5) desde un enfoque gráfico.

Proposición 3.7. *Dada una gráfica $G = (S, E)$ de grado acotado y con un proceso de contacto en ella, para $A, B \subset S$ tenemos*

$$P^A(A_t \cap B \neq \emptyset) = P^B(A_t \cap A \neq \emptyset) \quad (3.5)$$

para toda $t > 0$.

Demostración. Sea $t > 0$, y el suceso $A_t^A \cap B \neq \emptyset$, por lo tanto por definición (3.3) existe una trayectoria activa del conjunto A al conjunto B , es decir, existe un elemento $y \in B$ tal que existe $x \in A$ tal que existe una trayectoria activa del elemento $(x, 0)$ a (y, t) , es decir el conjunto

$$\{y : y \in B, \exists x \in A \text{ tal que existe una trayectoria activa de } (x, 0) \text{ a } (y, t)\}.$$

Notemos que es posible ver de una manera equivalente estos sucesos, si revertimos el sentido del tiempo, y la dirección de las flechas de infección en A_s^A tenemos una nueva versión del proceso de contacto para $s \in [0, t]$ que denotaremos por \check{A} .

Con nuestra nueva forma de ver el proceso, una trayectoria activa en A_s^A que va del conjunto $A \times \{0\}$ a $B \times \{t\}$ se transforma en una trayectoria activa del conjunto $B \times \check{0}$ al conjunto $A \times \check{t}$, donde \check{s} denota el tiempo del proceso revertido, es decir:

$$\check{s} = t - s$$

donde

$$\check{0} = t \text{ y } \check{t} = 0.$$

Dado lo anterior tenemos, que el evento $\{A_t^A \cup B \neq \emptyset\}$ es el mismo que $\{\check{A}_t^B\}$.

Es importante notar que el proceso de recuperación y el proceso de infección cumplen las siguientes propiedades tanto para A_t como para \check{A}_t . Sea $s \in [0, t]$, entonces

$$\check{N}_x(s) = N_x(t) - N_x(t-s) \stackrel{\delta}{=} \check{N}_x(s),$$

es importante hacer notar que, la última igualdad se cumple por la definición del proceso Poisson (B.3) y análogamente, podemos obtener

$$\check{N}_{x,y}(s) = N_{x,y}(t) - N_{x,y}(t-s) \stackrel{\delta}{=} \check{N}_{x,y}(s).$$

Por lo tanto, observando lo anterior, es posible construir un proceso que tenga la misma distribución que obtenemos con \check{A}_s y la misma representación gráfica que A_s . A este proceso lo nombraremos \check{A}_s , por lo tanto:

$$\begin{aligned} \check{N}_x &= N_x & \text{y} \\ \check{N}_{x,y} &= N_{x,y} \end{aligned}$$

con lo cual, tenemos que las distribuciones que nos permiten observar \check{A}_s y A_s son la misma.

Dado que sabemos que el evento $\{A_t^A \cup B \neq \emptyset\}$ es el mismo que $\{\check{A}_t^B\}$, tenemos las siguientes igualdades:

$$P(A_t^A \cap B \neq \emptyset) = P(\check{A}_t^B \cap A \neq \emptyset)$$

dado que \dot{A}_s cumple con la misma distribución que \check{A}_s

$$= P(\dot{A}_t^B \cap A \neq \emptyset)$$

y ya que \dot{A}_s tiene la misma representación gráfica que A_s tenemos:

$$= P(A_t^B \cap A \neq \emptyset)$$

por lo tanto

$$P(A_t^A \cap B \neq \emptyset) = P(A_t^B \cap A \neq \emptyset).$$

□

Dado que $N_{x,y}$ y $N_{y,x}$ tienen las mismas tasas que el dual de este proceso es nuevamente un proceso de contacto. Además es importante que el conjunto inicial de sitios infectados tenga cardinalidad finita, es decir si tenemos el proceso A_t^A entonces A debe ser finito para que A_t^A sea una cadena de Markov no explosiva en el conjunto de subconjuntos finitos de S aunque esto ya no lo mostraremos.

PROPIEDADES: PROCESO DE CONTACTO

Este capítulo es quizá el más interesante en términos del análisis que se obtiene de los resultados. En este se interpretan resultados obtenidos en capítulos anteriores que nos permiten entender propiedades del proceso de contacto que derivan en su extinción así como también es en este capítulo donde se muestra que tan grande debe ser la tasa de infección en un árbol homogéneo para que el proceso tenga probabilidad positiva de sobrevivir. Este capítulo está basado en los resultados obtenidos en capítulos anteriores así como en los libros [Lig99], [Lig85], [Lig10] y en la tesis [Fre11], esta última fue de gran utilidad en el último teorema del capítulo.

4.1. Valores importantes en el proceso de contacto.

Como mencionamos en el capítulo anterior la tasa de contagio λ del proceso de contacto se encuentra íntimamente ligada con la *tasa de salto* dada en la definición (3.1). A la par de esto están las variables τ , Υ y \mathcal{C} , definidas en el capítulo 2 en la sección 2.3 para IPS y en la sección 2.4.3 para sistemas spin como el proceso de contacto, por lo cual usaremos las formas sencillas de las variables τ , Υ y \mathcal{C} dadas en 2.4.3, esto con el fin de tener los valores exactos de estas en el caso de un proceso de contacto.

Comencemos, en el caso de la v.a. τ por la igualdad (2.24) del capítulo 2 tenemos

$$\tau = \inf_{x \in \mathcal{S}; \eta \in X} |c(x, \eta) + c(x, \eta_x)|$$

por definición, η y η_x difieren solo en un elemento, que es precisamente en x .

Caso 1. $\eta(x) = 1$

$$\tau = \inf_{x \in \mathcal{S}; \eta \in X} (1 + \lambda) |\{y \sim x : \eta(y) = 1\}|.$$

Caso 2. $\eta(x) = 0$

$$\tau = \inf_{x \in S; \eta \in X} (\lambda) |\{y \sim x : \eta(y) = 1\}| + 1|$$

de donde

$$\tau = \inf_{x \in S; \eta \in X} (1 + \lambda) |\{y \sim x : \eta(y) = 1\}|,$$

por lo tanto notemos que el ínfimo se alcanza cuando x no tiene vecinos y infectados, por lo tanto

$$\tau = 1. \quad (4.1)$$

Por otra parte dado (2.23) tenemos que

$$\Upsilon(x, u) = \sup_{\eta \in X} |c(x, \eta_u) - c(x, \eta)|,$$

en este caso, si $u \neq x$ $\eta(x) = \eta_u(x)$ y tenemos los siguientes casos: si $\eta(x) = 1$, por definición de η_u , $c(x, \eta) = 1 = c(x, \eta_u)$, por lo cual $\Upsilon(x, u) = 0$, por otra parte, si $\eta(x) = 0$ y u no es vecino de x , entonces

$$\begin{aligned} c(x, \eta) &= \lambda |\{y \sim x : \eta(y) = 1\}| \\ &= \lambda |\{y \sim x : \eta_u(y) = 1\}| \\ &= c(x, \eta_u). \end{aligned}$$

Finalmente, si $\eta(x) = 0$ y x es vecino de u tenemos que $\eta^x(x) = 1$, por lo tanto

$$\begin{aligned} c(x, \eta) &= \lambda |\{y \sim x : \eta_u(y) = 1\}| + 1| \\ &= \lambda |\{y \sim x : \eta_u(y) = 1\}| + \lambda \end{aligned}$$

por lo tanto

$$c(x, \eta) = \lambda + c(x, \eta_u),$$

y dado que por definición $\lambda > 0$

$$\lambda = |c(x, \eta) - c(x, \eta_u)|$$

de donde concluimos

$$\Upsilon(x, u) = \lambda.$$

Por definición de Υ si $x = u$ entonces $\Upsilon = 0$, por lo cual dada la definición (2.15) y como $\Upsilon(x, u)$ depende de $u \sim x$ y de $u \neq x$, tenemos que

$$\mathcal{C} = \sup_{x \in S} \sum_{u: x \neq u} \Upsilon(x, u)$$

y si denotamos por $\text{máx}_{x \in S} \text{deg}(x)$ al grado máximo de los elementos x en la gráfica S , tenemos

$$= \lambda \text{máx}_{x \in S} \text{deg}(x).$$

es decir, concluimos:

$$\mathcal{C} = \lambda \text{máx}_{x \in S} \text{deg}(x). \quad (4.2)$$

Usando la definición (1.15) y el teorema (2.16) tenemos que el proceso de contacto es ergódico si

$$\lambda < \frac{1}{\text{máx}_{x \in S} \text{deg}(x)} \quad (4.3)$$

es decir si λ cumple la anterior propiedad, entonces \mathcal{J} es un unitario, y aun más:

$$\mathcal{J} = \{\delta_0\}, \quad (4.4)$$

donde recordamos que δ_0 se encuentra dada en la definición (2.22).

Por la ecuación (4.3) es posible observar que el proceso está bien definido cuando S tiene grado acotado, por lo cual siempre se supondrá que S tiene grado acotado y es conexa. Aunque la condición de conexidad que se le pide a la gráfica se puede dejar de lado y la teoría se puede llevar a cabo en cada una de las componentes conexas.

Algunas de las ventajas de la construcción gráfica es que permite la construcción del proceso de contacto para todas las configuraciones, dado que estas se realizan de manera simultánea, como funciones de un proceso independiente Poisson, que a su vez muestran propiedades importantes de aditividad y dualidad del proceso de contacto.

4.2. Propiedades del proceso de contacto

Dadas los resultados que hemos obtenido en otros capítulos obtendremos algunos resultados importantes para el proceso de contacto.

Una propiedad que podemos observar usando propiedades demostradas en el capítulo 1 y 3 es la siguiente. Si tomamos $f \in C(X)$ como $f(\eta) = 1_{\{\eta_t=0 \text{ en } A\}}$, usando el semigrupo de Markov definido en (1.3) en el capítulo 1 obtenemos

$$\begin{aligned} S(t)f(\eta) &= E^\eta f(\eta_t) \\ &= E^\eta 1_{\{\eta_t=0 \text{ en } A\}} \\ &= P^\eta (\eta_t \equiv 0 \text{ en } A) \end{aligned}$$

por lo tanto, por la propiedad de dualidad o autodualidad del proceso de contacto (3.5) del capítulo 3

$$= P^A(\eta \equiv 0 \text{ en } A_t)$$

es decir

$$S(t)f(\eta) = P^A(\eta \equiv 0 \text{ en } A_t). \quad (4.5)$$

Ahora, tenemos que

$$\begin{aligned} \sup_{\eta \in X} |S(t)f(\eta_x) - S(t)f(\eta)| &= \sup_{\eta \in X} |P^A(\eta_x \equiv 0 \text{ en } A_t) - P^A(\eta \equiv 0 \text{ en } A_t)| \\ &= \sup_{\eta \in X} |P^A(\eta(y) = 0 \forall y \neq x \text{ y } \eta(x) = 1 \text{ en } A_t) \\ &\quad - P^A(\eta \equiv 0 \text{ en } A_t)| \end{aligned}$$

notemos que los conjuntos a los cuales queremos calcularles la probabilidad son casi iguales, de hecho solo difieren en el elemento x , ya que en el primer conjunto queremos que exista una trayectoria activa de algún elemento $y \in A$ a x al tiempo t , es decir que el elemento x este infectado al momento t , por lo cual pensando a los individuos de forma individual

$$\begin{aligned} &= \sup_{\eta \in X} P^A(x \in A_t) \\ &= P^A(x \in A_t). \end{aligned}$$

De donde

$$\sup_{\eta \in X} |S(t)f(\eta_x) - S(t)f(\eta)| = P^A(x \in A_t). \quad (4.6)$$

Con lo anterior tenemos

$$\begin{aligned} |||S(t)f||| &= \sum_{x \in S} \Delta_f(x) \\ &= \sum_{x \in S} \sup_{\eta \in X} |S(t)f(\eta_x) - S(t)f(\eta)| \\ &= \sum_{x \in S} P^A(x \in A_t) \\ &= \sum_{x \in S} E^A 1_{\{x \in A_t\}} \end{aligned}$$

dado que nos encontramos sumando sobre cada elemento $x \in S$, tenemos

$$= E^A[|A_t|]$$

por lo tanto

$$|||S(t)f||| = E^A |A_t|. \quad (4.7)$$

Si en el resultado anterior usamos el último inciso del teorema (2.14) y las igualdades (4.1), (4.2) obtendremos que

$$\begin{aligned} E^A |A_t| &= |||S(t)f||| \\ &\leq \exp[(\mathcal{C} - \tau)t] |||f||| \\ &= \exp[(\lambda \max_{x \in S} \deg(x) - 1)t] |||1_{\eta \equiv 0 \text{ en } A}|||, \end{aligned}$$

es decir obtenemos la siguiente desigualdad

$$E^A |A_t| \leq \exp[(\lambda \max_{x \in S} \deg(x) - 1)t] |||1_{\eta \equiv 0 \text{ en } A}||| \quad (4.8)$$

4.3. Supervivencia y extinción.

Nos interesa saber cuales son las condiciones necesarias para que el proceso se extinga o sobreviva, pues de esta manera sabremos cuando la enfermedad prevalecerá y cuando esta se extinguirá, por lo cual en esta sección daremos estas condiciones.

Comencemos haciendo algunas observaciones. Notemos que si aplicamos la relación de dualidad (3.5) del capítulo 3 obtenemos la siguiente igualdad

$$P^S(A_t \cap A \neq \emptyset) = P^A(A_t \neq \emptyset). \quad (4.9)$$

Daremos una definición que nos ayudara a comprender mejor el proceso de extinción.

Definición 4.1. Sea $A \subset S$, con A de cardinalidad finita. Definimos la **la probabilidad de supervivencia** $\phi(A)$ de la siguiente manera:

$$\phi(A) := \bar{\nu}\{\eta : \eta(x) = 1 \text{ para algún } x \in A\}. \quad (4.10)$$

Ahora bien observemos que $\phi(A) : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, donde recordamos que habíamos denotado como \mathcal{A} al conjunto de los subconjuntos finitos de S . Por la definición de ϕ notemos que esta es creciente en A .

Ahora bien observemos que con la definición anterior

$$\begin{aligned} \phi(A) &= \bar{\nu}\{\eta : \eta(x) = 1 \text{ para algún } x \in A\} \\ &= P^S(A_t \cap A \neq \emptyset \text{ para toda } t > 0) \\ &= P^A(A_t \neq \emptyset \text{ para toda } t > 0) \end{aligned}$$

es decir

$$\phi(A) = P^A(A_t \neq \emptyset \text{ para toda } t > 0). \quad (4.11)$$

Como S es una gráfica conexa, $\phi(A)$ es positiva para un $A \neq \emptyset$ si solo si es positiva para toda $A \neq \emptyset$. Si esto pasa diremos que el proceso sobrevive y si no diremos que se

extingue. Debe ser claro que el proceso se extingue si y solo si $\mathcal{J} = \{\delta_0\}$.

Por la construcción del proceso, su ergodicidad, y representación gráfica, si el proceso de contacto sobrevive para un valor λ entonces el proceso sobrevive para cualquier valor mayor a este.

Como una consecuencia de la representación gráfica y formalmente del teorema de acoplamiento (2.17) del capítulo 2 tenemos que si para un valor λ de infección el proceso sobrevive, entonces para valores más grandes también lo hará, lo anterior fomenta la siguiente definición.

Definición 4.2. Definimos *el valor crítico* $\lambda_c \in [0, \infty]$, como el valor tal que el proceso sobrevive para toda $\lambda > \lambda_c$ y muere para $\lambda < \lambda_c$, es decir:

$$\lambda_c := \inf \{ \lambda > 0 : P(A_t^A \neq \emptyset \text{ para todo } t > 0 > 0) \}$$

a este comportamiento se llama *transición de fase*.

Proposición 4.3. En el proceso de contacto, el valor crítico cumple

$$\lambda_c > \frac{1}{\max_x \deg(x)} > 0. \quad (4.12)$$

Demostración. Dada la definición de valor crítico y que un proceso se extingue si y solo si $\mathcal{J} = \{\delta_0\}$ es decir si y solo si es ergódico tenemos que

$$\lambda_c > \sup \{ \lambda \geq 0 \text{ el proceso es ergódico} \}$$

por lo tanto usando la desigualdad (4.3), tenemos

$$\lambda_c > \frac{1}{\max_x \deg(x)} > 0.$$

□

Una observación muy interesante es que para el proceso de contacto sobre cualquier gráfica que cumpla con las hipótesis que supusimos al principio, tenemos que el proceso es ergódico es decir se extingue si la tasa de infección entre los individuos cumple $0 < \lambda < \frac{1}{\max_x \deg(x)}$.

Ahora bien, demostrar que $\lambda_c < \infty$ requiere más trabajo, y dependiendo de quien sea S cambia la técnica a implementar para demostrar esto. Según Thomas M. Liggett la primera prueba para el caso $S = \mathbb{Z}$ fue dada por Harris en el artículo [Har74] en 1974 en base a ideas de percolación.

También cabe destacar que dar una cota superior para el valor crítico no es un trabajo trivial y en el caso de Z^d requiere resultados no triviales.

A continuación abordaremos el problema anterior en el caso de un proceso de contacto en que G es un árbol homogéneo y como sabemos entonces todos los vértices de la gráfica tienen el mismo grado que es $d + 1$.

Teorema 4.4. *El valor crítico en un árbol homogéneo satisface*

$$\frac{1}{d+1} \leq \lambda_c \leq \frac{1}{d-1}.$$

Demostración. Notemos que por la proposición 4.12, dado que estamos trabajando en un árbol homogéneo tenemos,

$$\frac{1}{d+1} \leq \lambda_c.$$

Para la segunda parte, definimos la función $f_\rho : \mathcal{A} \rightarrow \infty$ definida de la siguiente manera $f_\rho(A) = \rho^{|A|}$ para alguna constante $0 < \rho < 1$. También denotaremos por h^A a la función tal que $h^A(t) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $h_\lambda^A(t) := E^A f_\rho(A_t) = E^A[\rho^{|A_t|}]$ notemos que en este caso que las definiciones concuerden depende de tomar un λ tal que la probabilidad de que el proceso de contacto sobreviva es nula.

Observemos que si t converge a 0 por la derecha obtenemos:

$$\begin{aligned} P(f_\rho(A_t) = \rho^{|A|-1}) &= t|A| + o(t) \\ P(f_\rho(A_t) = \rho^{|A|+1}) &= \lambda t |\{(x, y) : x \in A, y \notin A, y \sim x\}| + o(t) \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$P(f_\rho(A_t) = \rho^{|A|}) = 1 - t|A| - \lambda t |\{(x, y) : x \in A, y \notin A, y \sim x\}| + o(t)$$

pues por construcción la función f_ρ depende de las tasas de transición (3.1) dadas en el capítulo 3 pues el proceso A_t depende de estas. De donde obtenemos

$$\begin{aligned} h_\lambda^A(t) &= E_\lambda^A[f_\rho(A_t)] \\ &= \rho^{|A|-1} P(f_\rho(A_t) = \rho^{|A|-1}) + \rho^{|A|+1} P(f_\rho(A_t) = \rho^{|A|+1}) + \rho^{|A|} P(f_\rho(A_t) = \rho^{|A|}) \end{aligned}$$

para facilitar la notación, denotamos por $C_A = |\{(x, y) : x \in A, y \notin A, y \sim x\}|$, por lo tanto

$$\begin{aligned} &= \rho^{|A|-1} t|A| + \rho^{|A|+1} \lambda t C_A + \rho^{|A|} (1 - |A|t - \lambda t N_A) + o(t) \\ &= \rho^{|A|} \rho^{-1} t|A| + \rho^{|A|} \rho \lambda t C_A + \rho^{|A|} (1 - |A|t - \lambda t N_A) + o(t) \\ &= f_\rho(A) \rho^{-1} t|A| + f_\rho(A) \rho \lambda t C_A + f_\rho(A) (1 - |A|t - \lambda t N_A) + o(t) \end{aligned}$$

es decir

$$h_\lambda^A(t) = f_\rho(A) \rho^{-1} t|A| + f_\rho(A) \rho \lambda t C_A + f_\rho(A) (1 - |A|t - \lambda t N_A) + o(t) \quad (4.13)$$

Por otra parte notemos que el grado de un árbol homogéneo es $d + 1$ por lo cual

$$\sum_{x \in A, y \sim x} 1 = |A|(d + 1) \quad (4.14)$$

y dado que nos encontramos en árbol homogéneo este es un grafo acíclico

$$\sum_{x,y \in A, y \sim x} 1 \leq 2(|A| - 1). \quad (4.15)$$

finalmente

$$\{(x, y) : x \in A, y \notin A, y \sim x\} = \{x \in A, y \sim x\} \setminus \{x, y \in A, y \sim x\}$$

por lo cual

$$\begin{aligned} C_A &= \{(x, y) : x \in A, y \notin A, y \sim x\} \\ &= |\{x \in A, y \sim x\}| - |\{x, y \in A, y \sim x\}| \\ &\geq |A|(d+1) - 2(|A| - 1) \\ &= |A|(d-1) + 2. \end{aligned}$$

es decir:

$$C_A \geq |A|(d-1) + 2. \quad (4.16)$$

Retomando (4.13)

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} h_\lambda^A(t) \right|_{t=0} &= f_\rho(A) \rho^{-1} |A| + f_\rho(A) \rho \lambda C_A + f_\rho(A) (-|A| - \lambda N_A) \\ &= \frac{|A|}{\rho} f_\rho(A) + \lambda C_A \rho f_\rho(A) - |A| f_\rho(A) - f_\rho(A) \lambda C_A \\ &= f_\rho(A) \left(\frac{|A|}{\rho} + \lambda C_A \rho - |A| f_\rho(A) - \lambda C_A \right) \\ &= f_\rho(A) \left(\frac{|A|}{\rho} - \lambda C_A - |A| f_\rho(A) + \lambda C_A \rho \right) \\ &= f_\rho(A) \left(\frac{|A|}{\rho} - \lambda C_A \right) (1 - \rho), \end{aligned}$$

notemos que por (4.16) tenemos

$$-\lambda C_A \leq -\lambda |A|(d-1) - 2\lambda$$

de donde

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} h_\lambda^A(t) \right|_{t=0} &\leq f_\rho(A) \left(\frac{|A|}{\rho} - \lambda |A|(d-1) - 2\lambda \right) (1 - \rho) \\ &= f_\rho(A) (1 - \rho) \left(\frac{|A|}{\rho} (1 - \rho \lambda |A|(d-1)) - 2\lambda \right) \end{aligned}$$

si $\lambda \rho (d-1) \geq 1$ entonces

$$\left. \frac{d}{dt} h_\lambda^A(t) \right|_{t=0} \leq -2\lambda (1 - \rho) f_\rho(A) < 0. \quad (4.17)$$

Ahora bien, por (4.17)

$$\frac{d}{du} h_\lambda^A(u) = \frac{d}{du} E^A(f_\rho(A_u^A)) = E^A\left(\frac{d}{dt} g^{A_u^A}(t) \Big|_{t=0}\right) < 0, \quad (4.18)$$

con lo anterior obtenemos que $h_\lambda^A(u)$ es una función decreciente en u .

Sea $A = \{0\}$ y sea $h_\lambda^{\{0\}}$. Como demostramos que la función $h_\lambda^{\{0\}}$ es decreciente y por construcción es positiva y además $h_\lambda^{\{0\}}(0) = \rho$, por lo tanto como supusimos que $\lambda\rho(d-1) \geq 1$ tenemos que por el teorema de convergencia dominada el límite existe

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) \leq g(0) = \rho. \quad (4.19)$$

Como recordamos, desde el comienzo de la demostración supusimos que λ fuera tal que la probabilidad de que el proceso sobreviva sea nula, es decir $A_t^{\{0\}} = \emptyset$ para valores grandes de t por lo cual por el teorema de convergencia dominada

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h_\lambda^{\{0\}}(t) = 1. \quad (4.20)$$

De donde, si existe $\rho \in (0, 1)$ tal que $\lambda\rho(d-1) \geq 1$ el proceso sobrevivirá con probabilidad positiva.

Finalmente si tenemos $\lambda(d-1) > 1$ entonces podemos elegir un $\rho \in (0, 1)$ tal que

$$\frac{1}{\lambda(d-1)} \leq \rho < 1, \quad (4.21)$$

de donde

$$\lambda \leq \frac{1}{d-1}. \quad (4.22)$$

□

Este teorema es muy importante porque nos da cotas en el caso de un árbol homogéneo para el valor crítico λ_c , es decir, sabemos entre que valores se encuentra la tasa a la cual el proceso de contacto no se extingue, es decir la enfermedad prevalece. En el caso de $d = 1$ notemos que nos encontramos con $S = \mathbb{Z}$ y en este caso tendremos que

$$\frac{1}{2} \leq \lambda_c \leq 1$$

es decir si $\lambda < \frac{1}{2}$ el proceso es ergódico y el proceso se extingue en la gráfica \mathbb{Z} c.s. y si además el valor crítico es decir el valor sobre el cual el proceso tiene probabilidad positiva de sobrevivir es mayor a $\frac{1}{2}$ pero menor a 1 esto nos dice que no necesitamos una tasa de contagio muy grande para que el proceso tenga probabilidad positiva de no extinción.

ANÁLISIS MATEMÁTICO

Para comenzar es necesario recordar algunos conceptos preliminares de análisis por lo cual este apéndice está dedicado a tratar estos conceptos. Sólo se demostraran algunos resultados, y algunos más sólo serán enunciados, adjuntandose al final de este capítulo hay una sección de notas donde se dan referencias para encontrar las demostraciones que no se llevaron acabo y para consultar los temas expuestos en estos preliminares.

A.1. Análisis Real

Al hablar de X un espacio métrico, denotamos al conjunto X con su métrica d_X , es decir $X = (X, d_X)$.

Comencemos recordando que, si V es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} y X es un conjunto, el conjunto de los mapeos de $X \rightarrow V$ es un espacio vectorial, con las siguientes operaciones. Sean las funciones f y g en el conjunto de los mapeos de $V \rightarrow X$, y $\lambda \in \mathbb{R}$

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \text{ y } (\lambda f)(x) := \lambda(f(x)) \text{ para toda } x \in X.$$

Definición A.1. Sea X un conjunto. Una **métrica** (o **distancia**) en X es una función $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ que tiene las siguientes tres propiedades. Sean $x, y, z \in X$

1. $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$,
2. $d(x, y) = d(y, x)$, y
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Definición A.2. Un **espacio métrico** es un conjunto X con una métrica dada d .

Definición A.3. Un espacio métrico X lo llamamos **completo**, si toda sucesión de Cauchy en X converge en X .

Definición A.4. Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{R} . Una **norma** en V es una función $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ que tiene las siguientes propiedades:

1. $\|v\| = 0$ si y solo si $v = 0$,
2. $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$ para todos $v \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y
3. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ para todos $v, w \in V$.

Definición A.5. Un **espacio normado** es un espacio vectorial V con una norma dada $\|\cdot\|$. Lo denotaremos por $(V, \|\cdot\|)$, o como usualmente se denota en los textos como V .

Definición A.6. Decimos que X es un **espacio de Banach**, si X es un espacio normado y completo con la métrica inducida por su norma.

Proposición A.7. Todo espacio normado en \mathbb{R} es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} .

Proposición A.8. Sea X un espacio métrico y $A \subset X$. El conjunto A es cerrado si para toda sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en A , si $a_n \rightarrow a$ entonces $a \in A$.

Definición A.9. Decimos que una función es **continua por la derecha** en el punto a si

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a).$$

Definición A.10. Una función tiene **límite por la izquierda** en a si existe

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \in \mathbb{R}.$$

A.2. Análisis en Espacios de Funciones

Definición A.11. Sean X y Y espacios métricos. Definimos el espacio $C(X, Y)$ como:

$$C(X, Y) := \{f : f : X \rightarrow Y, f \text{ es continua}\}.$$

Además definiremos el conjunto $C_a(X, Y)$.

Definición A.12. Sean X y Y espacios métricos. Definimos el espacio

$$C_a(X, Y) := \{f : f : X \rightarrow Y, f \text{ es continua y acotada}\}.$$

Notemos que en $C_a(X, Y)$ es métrico. En algunas circunstancias puede llegarse a obviar el conjunto Y y simplemente escribir $C(X)$ en lugar de $C(X, Y)$.

Proposición A.13. Sean V un espacio normado y X un espacio métrico, el conjunto

$$B(X, V) := \{f : f : X \rightarrow V, f \text{ acotada}\}$$

es un espacio normado.

Proposición A.14. Sea X un espacio métrico compacto no vacío y f una función continua, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces f alcanza su mínimo y su máximo en X y por lo tanto f es acotada.

Proposición A.15. *Sea X un espacio métrico compacto, Y un espacio de Banach y $f : X \rightarrow Y$ una función continua. Entonces f es una función acotada.*

La proposición anterior nos dice que

$$C(X, Y) \subset C_a(X, Y) \quad (\text{A.1})$$

Es decir, $C(X, Y)$ es subconjunto del espacio de funciones acotadas con la métrica uniforme.

Proposición A.16. *Sea Y un espacio métrico completo y X un espacio métrico compacto, entonces $C(X, Y)$ es un espacio métrico completo.*

Proposición A.17. *Sean X, Y espacios métricos con la norma infinito. Entonces $C_b(X, Y)$ (el espacio de las funciones acotadas y continuas) es un subespacio cerrado de $C_a(X, Y)$ con la norma infinito.*

Proposición A.18. *Si V es un espacio de Banach y X es un espacio métrico entonces $C_b(X, V)$ es un espacio de Banach.*

Definición A.19. *Una función $f : X \rightarrow X$ es llamada una **contracción** si existe $\beta \in (0, 1)$, tal que*

$$d(f(x), f(y)) \leq \beta d(x, y), \quad \forall x, y \in X.$$

Definición A.20. *Un punto \hat{x} es llamado **punto fijo** de la función $f : X \rightarrow X$ si $f(\hat{x}) = \hat{x}$.*

Teorema A.21. Banach *Sea X un espacio métrico, completo y no vacío; sea $f : X \rightarrow X$ una contracción. Entonces se cumple que f tiene un único punto fijo.*

Definición A.22. *Sea (X, d_x) un espacio métrico. $D \subset X$ es **totalmente acotado** si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número finito de puntos $d_1, d_2, \dots, d_n \in D$ tal que*

$$D \subset B_X(d_1, \varepsilon) \cup B_X(d_2, \varepsilon) \cup \dots \cup B_X(d_n, \varepsilon).$$

Donde $B_X(d_i, \varepsilon)$ denota a la bola abierta con centro en d_i y radio ε con la métrica d_x .

Teorema A.23. *Sea (X, d_x) un espacio métrico, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. X es compacto.
2. X es completo y totalmente acotado

Definición A.24. *Sea A un conjunto cualquiera y X un espacio métrico. Una sucesión de funciones $\{f_k\}$, $f_k : A \rightarrow X$ se dice que converge **uniformemente** en A a una función $f : A \rightarrow X$, si dada $\varepsilon > 0$, existe un $k_0 \in \mathbb{N}$, que depende de ε , tal que*

$$d_X(f_k(y), f(y)) < \varepsilon, \quad \text{para toda } k \geq k_0 \text{ y } y \in X.$$

Proposición A.25. *Sea X es un espacio métrico y $A \subset X$ compacto. Si B es cerrado y $B \subset A$ entonces B es compacto.*

En los espacios vectoriales y en particular en los espacios normados, un mapeo es llamado un **operador**.

Definición A.26. Un operador lineal T es un operador tal que:

1. El dominio $\mathcal{D}(T)$ es un espacio vectorial en y el rango $\mathcal{R}(T)$ se encuentra en un espacio vectorial, sobre el mismo campo.
2. Para toda $f, g \in \mathcal{D}(T)$ y α en el campo,

$$\begin{aligned} T(f+g) &= T(f) + T(g) & \text{y} \\ T(\alpha f) &= \alpha T(f). \end{aligned}$$

Definición A.27. Sean B_1 y B_2 espacios normados y $T : \mathcal{D}(T) \rightarrow \mathcal{R}(T)$ un operador lineal, donde $\mathcal{D}(T) \subset B_1$ y $\mathcal{R}(T) \subset B_2$. El operador T se dice **acotado** si existe un número $c \in \mathbb{R}$ tal que para toda $f \in \mathcal{D}(T)$,

$$\|Tf\| \leq c\|f\|.$$

Proposición A.28. Sea $T : \mathcal{D}(T) \rightarrow B_2$ un operador lineal, $\mathcal{D}(T) \subset B_1$, B_1 y B_2 espacios de Banach, las siguientes afirmaciones son equivalentes

1. T es acotado,
2. T es continuo,
3. T es continuo en el 0,
4. T es Lipschitz continuo.

Sea T un operador en B_1 , la **gráfica** de T es el conjunto

$$G(T) := \{(f, Tf) \in B_1 \times B_2 : f \in \mathcal{D}(T)\}.$$

Las dos operaciones básicas de un espacio vectorial en $B_1 \times B_2$ se definen como

$$(f_1, g_1) + (f_2, g_2) = (f_1 + f_2, g_1 + g_2)$$

y

$$\alpha(f, g) = (\alpha f, \alpha g).$$

Proposición A.29. Un subconjunto $G \in B_1 \times B_2$ es la gráfica de un operador T de B_1 en B_2 si, y sólo si G es un subconjunto lineal que posee la siguiente propiedad: si $(0, f) \in G$ entonces $f = 0$. En este caso el operador T es único.

Definición A.30. Un operador $T : B_1 \rightarrow B_2$, B_1 y B_2 espacios normados, es **cerrado** si su gráfica G es un subconjunto cerrado del espacio normado $B_1 \times B_2$, además diremos que T es **cerrable** si $\overline{G(T)}$ es una gráfica.

Notemos que si T es cerrable, entonces por la proposición (A.29) existe un único operador lineal al que denotaremos por \overline{T} tal que

$$G(\overline{T}) = \overline{G(T)}$$

es claro que \overline{T} es un operador lineal cerrado y $T \subset \overline{T}$.

Definición A.31. El operador \bar{T} es llamado la **cerradura** de T . Observemos que T es cerrado si y sólo si $T = \bar{T}$.

Teorema A.32. Operador Lineal Cerrado. Sea $T : \mathcal{D}(T) \rightarrow B_2$ un operador lineal, donde $\mathcal{D}(T) \subset B_1$, B_1 y B_2 espacios normados. El operador T es cerrado si y sólo si se cumple la siguiente propiedad; si $f_n \rightarrow f$, donde $f_n \in \mathcal{D}(T)$, y $Tf_n \rightarrow y$ entonces $f \in \mathcal{D}(T)$ y además $y = Tf$.

Proposición A.33. T es cerrable si, y sólo si sucede lo siguiente: si (f_n) es una secuencia en $\mathcal{D}(T) \subset B_1$ tal que $f_n \rightarrow 0$ y la secuencia $T(f_n)$ en B_2 es convergente, entonces el límite $\lim_{n \rightarrow \infty} T(f_n) = 0$.

Notemos que la anterior proposición es una reformulación de la definición de operador cerrable.

Definición A.34. Sea X un espacio métrico compacto y métrico. Tomemos el álgebra de Banach

$$C(X) := \{f \mid f : X \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ continua.}\}.$$

con la norma supremo, es decir

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Entonces

1. \mathcal{A} es una **sub-álgebra unitaria** si $1 \in \mathcal{A}$ y si $f, g \in \mathcal{A}$, $a, b \in \mathbb{R}$ entonces $af + bg \in \mathcal{A}$ y $fg \in \mathcal{A}$.
2. \mathcal{A} **separa puntos de X** si para cualquier $x, y \in X$ con $x \neq y$, existe $f \in \mathcal{A}$ tal que $f(x) \neq f(y)$.

Donde el producto fg en $C(X)$ lo definimos como $(fg)(x) = f(x)g(x)$, pues al definir este producto le damos al espacio vectorial $C(X)$ la estructura de una álgebra en \mathbb{R} . También hacemos notar que la función $1 \in C(X)$, la definimos como $1(x) = 1$ para todo $x \in X$.

Teorema A.35. Stone-Weierstrass. Sea X un espacio métrico compacto y $\mathcal{A} \subset C(X)$ una sub-álgebra unitaria que separa puntos de X . Entonces \mathcal{A} es denso en $C(X)$.

Definición A.36. Una familia de operadores $\{T(t)\}$, $t \geq 0$ en un espacio de Banach B_1 , tal que $T(0) = I$ y $T(s+t) = T(s)T(t)$ se dice **fuertemente continua** si

$$\lim_{t \rightarrow 0} T(t)f = f, \text{ para toda } f \in B_1.$$

Teorema A.37. Sean (X, Ω, μ) y (Y, Υ, ν) dos espacios de medida σ -finita. La función $\psi : \Omega \times \Upsilon \rightarrow \mathbb{R}$, con

$$\psi(F) := \int \nu(F_X) d\mu = \int \mu(F_Y) d\nu.$$

Es una medida σ -finita y es lam única medida en $\Omega \times \Upsilon$ que cumple que para todo $A \times B \in \Omega \times \Upsilon$, $\psi(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$, a esta medida se le llama **medida producto**.

Definición A.38. Un conjunto X se dice **separable** si contiene un subconjunto a lo más numerable que es denso en X .

Proposición A.39. Sea X un espacio métrico compacto, entonces X es separable.

Definición A.40. Sea X un espacio métrico.

1. Si μ y μ_n son medidas de los conjuntos de Borel en X , entonces μ_n converge débilmente a μ si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f d\mu_n = \int f d\mu$$

y se denota como $\mu_n \rightarrow \mu$.

2. Si X_1, X_2, \dots es una sucesión de variables aleatorias en X , entonces X_n converge débilmente a X si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E f(X_n) = E f(X)$$

para toda $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ acotada.

A este último tipo de convergencia, también se le llama convergencia en distribución.

Definición A.41. 1. Una familia de medidas de probabilidad Λ se dice **relativamente compacta** si cualquier sucesión en Λ contiene una subsucesión que converge débilmente.

2. Una familia de medidas de probabilidad Λ se nombra **tensa** si para todo $\varepsilon > 0$ existe un compacto $A \subset X$ tal que $\mu(A) > 1 - \varepsilon$ para toda $\mu \in \Lambda$.

Teorema A.42. (Prohorov) Sea X un espacio métrico completo y separable, entonces Λ es tensa si y solo si es relativamente compacta.

Se puede consultar la demostración en ([Lig10]) pág. 254

Definición A.43. Para $X = \{0, 1\}^S$, f es una **función cilindro** si existe $B \subset S$, B finito, tal que $f(\eta^x) = f(\eta)$ para toda $x \notin B$, con $\eta \in X$. En palabras f dependerá de un conjunto finito de coordenadas.

PROBABILIDAD

Teorema B.1. Convergencia Dominada. Supongamos que

$$|X_n| \leq |Y_n| \text{ para } n = 1, 2, \dots, X_n \rightarrow X \text{ c.s.}, Y_n \rightarrow Y \text{ c.s. y } \lim_{n \rightarrow \infty} E[Y_n] = E[Y].$$

Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[X_n] = E[X].$$

Teorema B.2. Convergencia Dominada. Sea $\{X_n, n \geq 1, Y, Z\} \subset L^1(\Omega, \Sigma, P)$ y X una variable aleatoria en (Ω, Σ) . Si $\mathfrak{B} \subset \Sigma$ es una σ -álgebra, $Y \leq X_n \leq Z$ c.s. y $X_n \rightarrow X$ c.s., entonces

$$\lim_n E^{\mathfrak{B}}(X_n) = E^{\mathfrak{B}}(X) \text{ y en } L^1 \text{ c.s.}$$

Una medida de probabilidad μ en X se dice que tiene **correlación positiva** si

$$\int fg d\mu \geq \int f d\mu \int g d\mu.$$

Definición B.3. proceso Poisson

1. $N_0 = 0$,
2. si $s \leq t$ entonces $N_s \leq N_t$,
3. para $n > 0$ y $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ las variables $N_{t_1}, N_{t_2} - N_{t_1}, N_{t_3} - N_{t_2}, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$ son independientes,
4. para toda $h > 0$ y $t \in \mathbb{R}^+$, N_h tiene la misma distribución de N_{t+h} ,
5. $P\{N(h) = 1\} = \lambda h + o(h)$ y
6. $P\{N(h) = 2\} = o(h)$

Recordemos que $o(h)$ se encuentra definido por el limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h} = 0.$$

MEDIDA E INTEGRACIÓN

El objetivo de este apéndice es enunciar algunos resultados y definiciones que se usaron durante el transcurso de este trabajo.

Diremos que X es un conjunto no vacío y fijo y $\mathcal{P}(X) = \{A : A \subset X\}$.

Definición C.1. Una clase (no vacía) $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ se llama una σ -álgebra de subconjuntos de X si,

1. $A, B \in \mathcal{S} \Rightarrow A - B \in \mathcal{S}$,
2. Si (A_n) es una sucesión de elementos de \mathcal{S} , entonces

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{S}$$

y

3. $X \in \mathcal{S}$.

Teorema C.2. Sea $A \subset \mathcal{P}(X)$ arbitrario, existe una única σ -álgebra $\mathcal{S}(A) \subset \mathcal{P}(X)$ tal que:

1. $A \subset \mathcal{S}(A)$,
2. si \mathcal{S} es una σ -álgebra contenida en $\mathcal{P}(X)$, de forma que $A \subset \mathcal{S}$, entonces $\mathcal{S}(A)$ se llama la σ -álgebra generada por A .

Definición C.3. Decimos que (X, \mathcal{S}) es un espacio medible si X es un conjunto no vacío y \mathcal{S} es una σ -álgebra de conjuntos de X .

Definición C.4. Sean (X_1, \mathcal{S}_1) y (X_2, \mathcal{S}_2) dos espacios medibles. Una función $f : X_1 \rightarrow X_2$ es llamada **medible** (respecto a las σ -álgebras \mathcal{S}_1 y \mathcal{S}_2) si $f^{-1}(\mathcal{S}_2) \subset \mathcal{S}_1$, más explícitamente si $B \in \mathcal{S}_2$ entonces $f^{-1}(B) \in \mathcal{S}_1$. En este caso escribimos $f \in \mathcal{S}_1 / \mathcal{S}_2$.

Definición C.5. Sea (X, \mathcal{S}) un espacio medible. Una medida μ en el espacio medible (X, \mathcal{S}) es una función

$$\mu : \mathcal{S} \rightarrow \overline{\mathbb{R}},$$

que cumple lo siguiente:

1. $\mu(\emptyset) = 0$,
2. $\mu(A) \geq 0$ para todo $A \in \mathcal{S}$,
3. μ es σ -aditiva. Es decir si A_n es una sucesión de elementos disjuntos entre si de \mathcal{S} , entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Una medida \mathbb{P} tal que $\mathbb{P}(X) = 1$ es llamada **medida de probabilidad** y el correspondiente espacio $(X, \mathcal{S}, \mathbb{P})$ es llamado **espacio de probabilidad**.

TOPOLOGÍA

Definición D.1. Sea $X = (X, d_X)$ un espacio métrico, $x_0 \in X$ y $\varepsilon \geq 0$. Definimos la **bola abierta** $B_X(x_0, \varepsilon)$ como:

$$B_X(x_0, \varepsilon) := \{x : x \in X \text{ y } d_X(x, x_0) < \varepsilon\}.$$

Definición D.2. Sea $X = (X, d_X)$ un espacio métrico. Una topología T es **generada** por la métrica d_X el conjunto de bolas abiertas $B_X(x, \varepsilon)$ para toda $x \in X$ y $\varepsilon \geq 0$ es una base para T .

Definición D.3. Sea (X, T) un espacio topológico. Si T es una topología en X puede ser generado por alguna métrica en X , decimos que el espacio (X, T) es metrizable.

Proposición D.4. (Teorema de Tychonoff) producto numerable de compactos es compacto

TEORÍA DE GRÁFICAS

Definición E.1. Dado un conjunto de vértices V y uno de aristas $E \subset V \times V$ definimos la **gráfica** como el conjunto $G = (V, E)$.

Definición E.2. Decimos que una gráfica es una **gráfica no dirigida** si $(x, y) \in E$ si y solo si $(y, x) \in E$ para todo $x, y \in V$.

Definición E.3. Definimos el **grado de un vértice** como el número de vecinos que tiene.

Definición E.4. Decimos que dos vértices son **vecinos** si la distancia entre ellos es 1.

Definición E.5. Decimos que una gráfica es **conexa** si es regular y todos los vértices están unidos a la gráfica por al menos un vértice.

BIBLIOGRAFÍA

- [BvdDW08] Fred Brauer, Pauline van den Driessche, and Jianhong Wu. *Mathematical Epidemiology*. Springer, 2008.
- [Cla10] Mónica Clapp. *Introducción al Análisis Real*. 2010. <http://www.matematicas.unam.mx/tamariz/notas/notasam2011-1.pdf>.
- [EK86] S.N. Ethier and T.G. Kurtz. *Markov Processes Characterization and Convergence*. John Wiley and Sons, New Jersey, 1986.
- [FG96] Bert E. Fristedt and Lawrence F. Gray. *A Modern Approach to Probability Theory*. Birkhauser Boston, 1996.
- [Fre11] Nicolás Frevenza. *El proceso de contacto*. 2011. Universidad de la República.
- [Gra09] G. Grabinsky. *Teoría de la Medida*. Facultad de Ciencias, UNAM, México, D.F., 1a edition, 2009.
- [Gri10] Geoffrey Grimmett. *Probability On Graphs*. Cambridge University Press, Reino Unido, 2010.
- [Gro09] Stefan Grosskinsky. *Interacting particle systems*. 2009. <http://www2.warwick.ac.uk/fac/sci/math/people/staff>.
- [Har74] T. E. Harris. Contact interactions on a lattice. In *The Annals of Probability*, pages 969 – 988. 1974.
- [Har78] T. E. Harris. Additive set-valued markov process and graphical methods. In *The Annals of Probability*, pages 355–378. 1978.
- [Kal97] Olav Kallenberg. *Foundations of Modern Probability*. Springer, New York, 1997.
- [Kla08] Tobias Klauss. *An Interacting Particle System for Collective Migration*. PhD thesis, Dresden University of Technology, 2008.

- [Kre78] E. Kreyszig. *Introductory Functional Analysis with Applications*. Wiley, Nueva York, 1978.
- [Lig] Thomas M. Liggett. Interacting particle systems an introduction. In *The Annals of Probability*.
- [Lig85] T. M. Liggett. *Interacting Particle Systems*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Germany, 1985.
- [Lig99] T. M. Liggett. *Stochastic Interacting Systems: Contact, Voter and Exclusion Processes*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Germany, 1999.
- [Lig10] T. M. Liggett. *Continuous Time Markov Processes An Introduction*. American Mathematical Society, 2010.
- [Lig11] Thomas M. Liggett. Contributions to interacting particle systems and percolation. In *The Annals of Probability*, volume 39, pages 407 – 416. 2011.
- [vEdH] Aernout van Enter and Frank den Hollander. *Interacting Particle Systems and Gibbs Measures*. <http://websites.math.leidenuniv.nl/probability/lecturenotes/IPSGM.pdf>.
- [Wei80] J. Weidmann. *Linear Operators in Hilbert Spaces*. Graduate Text in Mathematics. Springer-Verlag, Nueva York, 1980.