UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ECONOMÍA

Aplicación del Modelo de Frank P. Ramsey sobre la Economía Mexicana en el Período 1960-2000.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADO EN ECONOMÍA

P R E S E N T A :

Angel Emmanuel Sánchez Macías

DIRECTOR DE TESIS:

Mtro. José Alberto Reyes de la Rosa

Ciudad Universitaria, México D.F., Agosto 2014

DEDICATORIA.

A mis padres, porque la vida no me basta para agradecer todo lo que han hecho por mí, y luego de cinco años de estudio, les entrego el fruto de su esfuerzo, apoyo y comprensión; a ellos dedico este trabajo, con mi mayor reconocimiento y cariño.

A mi hermano Ricardo, porque aun cuando partió de este mundo desde pequeño, sigue presente en nuestra memoria; para él, un gran abrazo hasta donde se encuentre.

A mi hermano Roberto, que es mi mejor amigo y compañero en este largo viaje llamado vida; espero que el presente trabajo sea un incentivo para que siga con sus estudios profesionales; para él va dedicado este trabajo, con todo cariño.

A todos y cada uno de los integrantes de mi familia, porque han estado ahí, siempre constantes; para todos y cada uno de ellos, de verdad, muchas gracias por todo, espero que este trabajo sirva como un reconocimiento a su invaluable apoyo y como un incentivo para las nuevas generaciones de la familia.

A mis más cercanos compañeros de generación, Christian, Eduardo, Héctor, Enrique, Jonatán, Ariel, Javier y Alejandro, porque he tenido el placer de compartir con ellos las aulas, sonrisas y buenos momentos durante cinco años; a todos ellos muchas gracias.

AGRADECIMIENTOS.

A la Universidad Nacional Autónoma de México, especialmente a la Facultad de Economía, por haberme permitido formarme como profesional, porque en sus aulas obtuve la más valiosa herencia que puede tener el ser humano: el conocimiento; y porque no solamente me he formado como economista, sino como ser humano, siendo esta la última fase en mi formación personal.

Al Maestro José Alberto Reyes de la Rosa, quien fue mi asesor en esta investigación, y que siempre estuvo dispuesto a ayudarme con su experiencia y conocimiento en la elaboración de este trabajo; para él, mi mayor reconocimiento es este trabajo que hoy llega a su fin.

Al Doctor Ciro Eduardo Bazán Navarro, profesor en la Escuela de Economía de la Universidad Católica Santo Toribio de Mogrovejo (USAT), Perú, quien me ha ayudado en el proceso de elaboración de este trabajo, sobre todo en los momentos de mayor complejidad teórica y práctica; para él, un gran reconocimiento, plasmado en ese trabajo.

A todos y cada uno de los profesores que conforman el sínodo, por haber aceptado ser parte de este proceso de titulación; para ellos mi mayor reconocimiento.

A todos los profesores con quienes tuve la oportunidad de escuchar dictando cátedra dentro de las aulas, porque los conocimientos adquiridos durante sus clases son los que hoy me permiten concluir con este trabajo; para todos y cada uno de ellos mi mayor respeto y agradecimiento.

ÍNDICE.

	Página.
Introducción	1
Objetivo General	4
Objetivos Particulares	4
Hipótesis de la Investigación	5
Capìtulo I. Fundamentos de la Teoría Neoclásica.	
El Método	7
El Método Inductivo	8
El Método Deductivo	9
El Método en las Ciencias Sociales	9
El Concepto de Economía	10
La Metodología de la Economía	12
El Pensamiento y el Método Económico.	13
Smith, Ricardo y la Teoría del Valor.	13
La Renta de la Tierra	15
Precio Natural y Precio de Mercado.	18
Los Salarios	19
Las Utilidades	21
Efectos de la Acumulación sobre las Utilidades	24
Influencia de la Oferta y la Demanda sobre los Precios	25
La Teoría Neoclásica.	26
Capítulo II. El Modelo de Crecimiento con Optimización del Consumo: El Modelo de Ramsey.	
Las Variables Per Cápita.	33
Mercados Competitivos, Hogares y Empresas en el Modelo de Ramsey.	34
Hogares	34
Empresas	36
Estructura Básica del Modelo	40
El Equilibrio.	40
Importancia de la Condición de Transversalidad.	41
El Comportamiento de la Tasa de Ahorro	42
El Estado Estacionario	42
Comportamiento Alrededor del Estado Estacionario.	44

Capítulo III. Simulación del Modelo.

Población Total, PEA Urbana y PEA Rural	47
Producción Agrícola e Industrial.	48
El Progreso Tecnológico	50
La Depreciación del Capital.	51
Elasticidad de Sustitución Intertemporal Constante.	52
Factor de Preferencia Intertemporal del Consumo.	53
Datos de la Economía Mexicana.	55
Análisis de los Coeficientes de Obtenidos por la Simulación	56
El Caso de la Población Total de México.	56
¿Qué importancia tienen los Eigenvalores y Eigenvectores?	64
Análisis de la Población Total de México, la PEA Urbana y Rural.	69
México en el Período 1960-1970	70
México en el Período 1970-1980	79
México en el Período 1980-1990	88
México en el Período 1990-2000	97

Capítulo IV. Conclusiones

Validez de la Rejilla de Simulación.	106
La Preferencia Intertemporal del Consumo.	109
La Elasticidad de Sustitución Intertemporal.	111
El Ahorro y la Inversión como Fundamento de Crecimiento Económico	112
El Papel del Progreso Tecnológico y la tasa de Crecimiento de la Mano de Obra.	115
La Condición de Transversalidad	117
La Economía Cerrada.	117
Anotaciones Finales.	118

Apéndice Matemático

Variables Per Cápita.	121
Mercados Competitivos.	123
La Función de Utilidad.	125
El Hamiltoniano	126
La Ecuación de Euler	132
Ecuaciones Fundamentales de Ramsey y Equilibrio de la Economía	133
Estado Estacionario.	136
Comportamiento en el Estado Estacionario.	139
Script de Matlab	146

Anexo Estadístico

Sección A. La Población total, Urbana y Rural de México en el Período 1960-2010 148
Sección B. Resultados de la Simulación. 151
Sección C. La Tasa de Crecimiento de la Mano de Obra. 168

Bibliografía. 170

INTRODUCCIÓN.

Desde que Harrod (1939) y Domar (1946) lanzaran su investigación sobre los determinantes del crecimiento económico, donde asignan mayor importancia al ahorro en lugar del consumo como fundamento del crecimiento, la teoría neoclásica ha encontrado una salida elaborada y simple para explicar la forma como una economía puede alcanzar mayores niveles de producción, de ingreso y de bienestar social, fundamentado en un equilibrio paretiano.

Posteriormente, el trabajo de Robert Solow confirió un papel negativo al consumo, pues capta recursos que deberían ser destinados a la inversión. El modelo que presentamos en este trabajo es precisamente un modelo que parte de la idea del ahorro como fuente de crecimiento constante de una economía, modelado bajo los fundamentos del proceso de optimización en el consumo y la producción, donde un agente central es el encargado de diseñar la política económica necesaria para lograr los objetivos de crecimiento, basados en niveles óptimos de consumo, capital e ingreso per cápita, donde el ciclo vital implica una raíz microeconómica en la explicación del crecimiento, basado en el crecimiento del ingreso personal precisamente.

Con el tiempo, la evolución en la modelización del crecimiento ha implicado transformar el concepto de capital, pues ha pasado a adoptar los mismos atributos de los rendimientos decrecientes que manifiesta el factor trabajo para la función de producción neoclásica; de lo anterior, la importancia del ahorro es transitoria, pues al existir precisamente los rendimientos decrecientes, estos actúan como un factor que anula la productividad inicial del capital, y en el caso de la mano de obra sucede lo mismo, el incremento de trabajadores disminuye la productividad por cada elemento ocupado. El progreso tecnológico fue una salida que la teoría neoclásica dio al modelo de crecimiento, donde el capital ahora interviene igualmente en el progreso tecnológico, con lo cual se supera el problema creado por los rendimientos decrecientes, y el ahorro puede continuar como eje explicativo del crecimiento económico, sin que su efecto sea transitorio o de corto plazo.

La idea de que el capital es el encargado de engendrar el ingreso y la riqueza tiene origen en un remoto pasado, donde el ahorro era necesario, como una prevención para enfrentar problemas con el clima, la guerra, etc., y se buscaba acaparar semillas y alimentos que permitieran soportar precisamente un período de sequía, guerra, enfermedades, etc. lo anterior explica por qué se vuelve fundamental para el discursos económico el centrar el ahorro como un factor que pasa de explicar la supervivencia a explicar el crecimiento. A partir de lo anterior, frente a la incertidumbre, los rendimientos decrecientes de los factores productivos de la teoría clásica, el crecimiento de la población, etc., el ahorro se ha mantenido como un concepto fundamental a tratar para poder explicar el crecimiento económico.

Hoy en día la econometría se ha encargado de relacionar la inversión con el crecimiento económico, asumiendo que la causalidad va de la inversión al crecimiento, aunque bien podría pensarse lo contrario y no se estaría violando un comportamiento real de las variables; lo anterior, ha llevado a los teóricos a encontrar fundamentos explicativos en la escuela keynesiana y la escuela neoclásica, donde la primera de éstas asume que el crecimiento es el fundamento de la inversión y, por su parte, la segunda asume que es el caso inverso, es decir, la inversión se encarga de explicar el crecimiento.

El modelo que presentamos adopta el supuesto de una causalidad fuerte entre la inversión como factor explicativo del crecimiento, aunque debemos aceptar que en el proceso económico real podría encontrarse lo contrario, en especial en el caso mexicano, donde posiblemente el proceso de crecimiento económico sea el encargado de explicar los niveles de inversión que permitieron mantener niveles de producción y consumo elevados, mismos que ayudaron al crecimiento económico. Pero para la teoría neoclásica la relación explicativa es muy simple: al igualar el ahorro y la inversión de forma directa, el crecimiento logra dispararse a través del ahorro, pues se disminuye la tasa de interés con el fin de estimular la inversión hasta captar la mayor cantidad de ahorro posible.

Luego de todo lo anterior, la pregunta fundamental que busca responder la teoría neoclásica del crecimiento económico es la siguiente: **¿puede una economía manifestar niveles de crecimiento sostenido, basados en el ahorro y la inversión?**; varios autores comienzan de ésta forma su explicación sobre los modelos que ya hemos mencionado muy brevemente en párrafos anteriores, por lo cual, ahora debemos enfocarnos muy puntualmente en el modelo que hemos decidido simular sobre la economía mexicana, exponiendo un breve resumen del contenido de los diversos capítulos que comprende este trabajo.

En el capítulo I revisamos de forma somera la evolución del pensamiento teórico económico, pasando de la escuela clásica hasta la neoclásica, enfatizando la importancia que asume el método de investigación y análisis dentro de la economía, así como los aspectos más importantes a tomar en cuenta dentro del razonamiento económico, pues hoy en día se encuentran grandes diferencias respecto de los planteamientos teóricos originales, los cuales dieron origen a lo que actualmente definimos como ciencia económica. El objetivo del capítulo no es dar un panorama completo de la historia del pensamiento económico, pues ello requiere mucho mayor tiempo de investigación y un mayor nivel de profundización, que no corresponde con los objetivos fundamentales de este trabajo; por lo anterior, nos conformamos con dar una referencia simple y puntual sobre los tópicos más importantes para la evolución de la ciencia económica.

Para el capítulo II exponemos de forma completa los fundamentos teóricos del modelo de crecimiento económico propuesto por Frank P. Ramsey, el cual se fundamenta en un proceso de optimización dinámica, basado a su vez en el equilibrio económico general y el proceso de maximización de consumidores y productores. La forma de exponer el desarrollo del modelo es diferente al que comúnmente puede encontrarse en los textos especializados; y lo anterior tiene un objetivo: volver más digerible el tratamiento de este tipo de modelos, ya que algunos autores tratan el tema como si fuera algo que cotidianamente estudia un alumno promedio de la carrera de economía, pero desafortunadamente, pocas veces existe ese seguimiento constante a temas que llegan considerarse como “avanzados “ en la enseñanza económica, por lo cual, son relegados a niveles de posgrado. En lo personal, he decidido mantener una línea de explicación y razonamiento que, a mi entender, resulta mucho más sencilla para que, si en el futuro existen alumnos interesados en el tema, encuentren un texto guía que les ayude a continuar con trabajos de mucho mayor nivel y calidad que el presente.

El capítulo III comprende puntualmente la simulación del modelo, a partir de tasas de crecimiento poblacional definidas para la población total de México, así como para la aproximación a la PEA urbana y rural de nuestro país para el período 1960-2000, misma aproximación que nosotros definimos puntualmente dentro del mismo capítulo. La simulación comprende cuatro casos: dos corresponden a la población total del país, y los restantes dos son correspondientes a la PEA urbana y a la PEA rural, cada uno por separado. Para la simulación, hemos propuesto una rejilla de valores que cumple con ciertas condiciones impuestas por el modelo, mismas condiciones que se habrán de explicar puntualmente al comienzo del mismo, para evitar que existan dudas en cuanto a la procedencia de los datos que hemos empleado. El problema fundamental del capítulo III es la inexistencia, hasta el año 2013, de una base de datos que nos permita trabajar la investigación macroeconómica concerniente al crecimiento económico; pero, a pesar de lo anterior, valiéndonos de los valores permitidos para los parámetros estructurales del modelo, empleando las tasas de crecimiento poblacional ya mencionadas, obtendremos una aproximación a datos sobre el consumo privado en México, sin que ello sea referencia de un proceso económico reral, descrito a partir de una rejilla de simulación.

El capítulo IV presenta las conclusiones obtenidas después de la simulación del modelo, donde se alude la importancia de contar con una base de datos suficientemente amplia como para permitir a las futuras generaciones el continuar con las investigaciones macroeconómicas relacionadas con el crecimiento económico y el desarrollo. En este capítulo se puntualiza la dificultad que ya se ha mencionado en el capítulo II, pero infiriendo algunos aspectos importantes a tomar en cuenta para el caso de que se confronten los valores reales con una rejilla de simulación como la que hemos propuesto para este trabajo, la cual cumple con la demostración del funcionamiento del modelo, pero pierde validez para las inferencias de política económica que se puedan hacer a partir de ella, ya que no son datos obtenidos a partir del proceso económico real.

OBJETIVO GENERAL.

El objetivo general de este trabajo es hacer una revisión de la teoría económica neoliberal, pues ésta se ha colocado como el pensamiento hegemónico dentro de la enseñanza económica, fungiendo como el único camino viable para tener crecimiento económico y desarrollo de las fuerzas productivas. Una vez que ésta revisión tenga lugar, pasaremos a la aplicación de dicha teoría en dos períodos distintos mediante la implementación del modelo de Frank P. Ramsey, el cual tiene origen en la escuela del pensamiento neoclásico, que a su vez es fundamento de la teoría neoliberal. Finalmente, en un entorno normativo, evaluaremos la teoría neoliberal a partir de un modelo que le da sustento teórico en sus políticas económicas y sociales, para poder funcionar adecuadamente.

Los objetivos particulares de nuestra investigación son los siguientes:

a) Definir el modelo de Ramsey y los factores que explican el crecimiento económico en un país; identificando las fortalezas y debilidades que dicho marco teórico ofrece para el análisis dinámico de la economía.

b) Estimar un modelo de crecimiento, basado en las proposiciones teóricas de Ramsey y en una rejilla de valores, para la economía Mexicana en el período 1960 - 2000, asociando variables como el consumo, ahorro, stock de capital, etc. para dar una explicación de la dinámica económica de México.

c) Aplicar sobre la economía mexicana el análisis teórico e inferencias que realiza Ramsey en su modelo; empleando las tasas de crecimiento de la población total y las aproximaciones a la PEA urbana y rural como una referencia poblacional a lo largo del período propuesto, interpretando el significado teórico-práctico del modelo.

d) Comparar los resultados prácticos de la implementación del modelo, infiriendo sobre las causas que han determinado un comportamiento real alejado de las propuestas teóricas de Ramsey.

e) Analizar los factores que determinan el comportamiento propio de la economía mexicana; contrastando los coeficientes empleados en la rejilla de valores con los propuestos teóricamente, bajo los cuales, el comportamiento de la economía debería estar ya determinado hacia un estado estacionario.

f) Formular un escenario económico, teórico, favorable a la economía mexicana; modificando las condiciones iniciales a partir de datos reales, para describir nuevamente la dinámica económica de México.

g) criticar el comportamiento de la dinámica económica de México bajo nuestro análisis; justificando los resultados obtenidos por la investigación

HIPOTESIS DE LA INVESTIGACION.

La hipótesis del trabajo presentado parte de los fundamentos de que la economía mexicana ha transitado por dos períodos distintos, a saber: de 1960 a 1980, donde la regulación y control económico del Estado en la economía nacional era clara; el siguiente periodo de 1980 a 2000, donde el neoliberalismo se plantó sobre el Estado mexicano, reconfigurándolo en sus funciones hasta la actualidad. Dado lo anterior y, sabiendo que el pensamiento neoliberal se fundamenta en los preceptos de la teoría neoclásica de la economía, afirmamos lo siguiente:

El modelo de Frank P. Ramsey sobre crecimiento económico, enclavado dentro de la teoría neoclásica, logra aproximarnos de forma normativa a los nivele4s que, en promedio, significó el consumo privado como proporción del PIB, de acuerdo con los cálculos realizados por el Dr. Abraham Aparicio Cabrera para el período propuesto.

CAPÍTULO I. FUNDAMENTOS DE LA TEORÍA NEOCLÁSICA.

La ciencia económica, como una disciplina joven en las ciencias sociales, día a día confronta diversos escenarios y problemas que se presentan como el resultado de la interacción de los agentes económicos en un estadio social lleno de contradicciones y en un modelo productivo que genera interrogantes respecto a su correcto funcionamiento, basado en supuestos y afirmaciones que no son del todo correctas. Estas mismas cuestiones son abordadas de diversas formas con el pasar de los años y las teorías, centrando en el eje de la explicación distintos fundamentos y supuestos que nublan, o aclaran, el panorama real sobre el cual la economía ha de proponer su solución.

El análisis económico cuantitativo actual se deriva de la escuela clásica, denominada como la primera escuela del pensamiento económico moderno; tiene origen en el siglo XVIII, en un entorno fuertemente capitalista, de revolución industrial y contradicciones entre los agentes económicos que se involucran en la producción, distribución y acumulación del capital. De esta manera, hablar hoy en día del aspecto cuantitativo de la economía, es hablar de aquellos años donde los primeros destellos de investigación matemática económica tenían origen en un entorno analítico limitado por las herramientas matemáticas propiamente usadas y por los fundamentos y supuestos teóricos que de igual forma generaban cuestionamientos sobre la validez de las teorías al ser aplicadas en el campo real.

No es el motivo de este trabajo el hacer un desarrollo histórico de todos y cada uno de los teóricos fundamentales, desde la llamada economía clásica hasta la ciencia económica neoclásica –que es la visión adoptada para este trabajo-, pues tendríamos que dedicar bastante tiempo al desarrollo de este tema y la investigación central de nuestro interés no es precisamente dar ese panorama amplio del pensamiento económico; pero si estamos obligados a dar un panorama general del desarrollo que ha tenido la investigación económica y sus fundamentos, que han sido cambiantes con el paso del tiempo.

Como sabemos, el método científico es un procedimiento que nos permite conocer o, por lo menos, aproximarnos a la realidad, pronosticar fenómenos y controlar el comportamiento o aparición de éstos mismos fenómenos en un futuro. Para ello, existe la necesidad de generar engranes entre la teoría y la práctica, cumpliendo los requisitos determinados por cada área del conocimiento, a través de técnicas o procedimientos de carácter general, que son independientes de la persona que los emplea, pues el método se encuentra más allá del capricho personal, del azar o los juicios de valor.

Claro está que hoy en día surgen discusiones en torno al número de métodos existentes en la economía; pero este es un tema que no concierne a nuestro trabajo, pues sería demasiado extenso y nos llevaría a un escenario ajeno a los fines de nuestra investigación. Lo anterior asume gran importancia cuando se reconoce la necesidad que tiene la ciencia económica de justificar la legitimidad de sus análisis, basados precisamente en un método, que nos lleva a encontrar resultados en el campo práctico.

En su etimología, la ciencia alude el “saber” en general, implicando conocimiento que sobrepase al propio conocimiento por observación, aquel conocimiento demostrado por la evidencia, lo cual lo hacía incontestable y universalmente aceptado; frente a lo anterior, el progreso del pensamiento humano llevó el conocimiento a un campo de aceptación relativa, observando la teoría empleada, misma que es susceptible de refutación en el campo real.

En su desarrollo, las ciencias se pueden dividir en dos grandes ramas:

1.- Las ciencias formales, que se alimentan de principios lógicos y matemáticos, lo cual le sirve para aclarar y analizar las verdades propias del objeto de estudio y como una formalización decisiva, que vuelve el conocimiento más comprensible y universal; entre éstas se encuentran la física y la matemática.

2.- Las ciencias factuales o empíricas, que analizan hechos, las relaciones entre los fenómenos observados y buscan una explicación; entre ellas se encuentras las ciencias naturales y las ciencias sociales.

A partir de las ciencias factuales, las ciencias sociales tienen por objeto de estudio aquellos fenómenos que implican a los seres humanos como actores principales, abordando sus explicaciones a través de dos perspectivas fundamentales:

a) Nomotéticas, donde se busca generar leyes.
b) Históricas, donde las manifestaciones de la estructura social en el tiempo tiene mayor relieve.

El Método.

La palabra “método” alude al camino que debe seguirse para llegar a un lugar determinado; cuando se procede de forma metódica sobre el estudio de un hecho o fenómeno, las actividades tienen por principio el ser ordenadas, para generar pronunciamientos teóricos sobre el hecho analizado. En el campo científico, el camino será definido por un conjunto de reglas, siendo el método científico un conjunto de procedimientos de investigación, de conceptos, teorías y principios de razonamiento, utilizados en un área concreta del conocimiento humano.

En el caso de la economía igualmente se tiene por regla el proceder de un modo que nos permita obtener conclusiones válidas, con la garantía de que sea propensa a refutarse; por lo anterior, el método hipotético-deductivo es el método ampliamente utilizado para generar las teorías que hoy en día se estudian dentro de la teoría económica. Este conocimiento generado de forma científica debe garantizar dos cualidades fundamentales:

1.- Objetividad, siendo el resultado de la investigación una imagen impersonal, que no sea válida únicamente para una sola persona, pues la ciencia es elaborada por un conjunto de per5sonas.

2.- Racionalidad, que implica la sistematización de las teorías, fincadas en postulados contrastables, dándole una dimensión temporal y provisional a los aportes realizados.

Fundamentalmente, el rechazo, la eliminación y crítica de las teorías, es perteneciente a una actitud crítica e interpretativa, lo cual distingue a la ciencia de la creencia, alejando a la primera de la segunda a través del abandono de la simple observación pues, aunque esto último es importante, no es lo único que constituye el principio de la ciencia, constituyéndose en un conjunto de procedimientos que dan paso a otras observaciones, surgidas a través de un proceso critico, reflexivo y constructivo.

La tradición asigna el carácter científico a un reducido conjunto de conocimientos, que empleaban procedimientos metodológicos generados en las ciencias puras; pero, para que exista la ciencia, es pertinente que se elabore la teoría, que es una construcción teórica de la realidad, a través del método y de la investigación. Puntualmente, la teoría es una red de proposiciones sobre relaciones singulares, existente entre los acontecimientos o fenómenos observados; la teoría es un procedimiento que busca poner la realidad observada en sintonía con un ordenamiento de la razón.

Precisamente a partir de esto último, la economía busca poner un orden racional en su campo empírico, mediante un conjunto de operaciones encaminadas a hacer inteligible los fenómenos observados, a responder mediante enunciados a las interrogantes y relaciones observadas entre los fenómenos encontrados, a generar nuevos descubrimientos, involucrando otros campos del conocimiento con su campo de estudio propio. La economía no debe olvidar que el fundamento de la verificabilidad es el encargado de marcar la diferencia entre la ciencia y la no ciencia, sujetando la teoría al rechazo cuando la predicción de un fenómeno no se haya dado.

El Método Inductivo.

Surgido en el siglo XVII y atribuido a Francis Bacon, consiste en establecer enunciados universales ciertos a partir de la experiencia, lo cual permite ascender lógicamente a través del conocimiento científico, desde la observación de los fenómenos o sucesos surgidos en la realidad hasta una ley universal fundamentada en las observaciones y que, a su vez, contiene dicho fenómenos. Su carácter es empirista, considerando como teorías aquellas emanadas de la comprobación real; en este método, una teoría no puede ser aceptada hasta que no haya sido probada, pero su fundamental problema surge a partir de la duda sobre si la evidencia inductiva puede emplearse para predecir futuros acontecimientos; es decir, existe cierta incapacidad para explicar fenómenos que van más allá de la evidencia disponible.

El Método Deductivo.

Dentro del mismo siglo XVII, René Descartes fue el primero en considerar este método; su proceso pasa de lo general a lo particular, de tal forma que, partiendo de enunciados universales y empleando procesos científicos, se logren inferir enunciados particulares, tomando así un carácter axiomático-deductivo, que se fundamenta precisamente en premisas iniciales (axiomas) no demostrables o, un carácter hipotético-deductivo cuando las premisas iniciales son hipótesis contrastables.

El proceso del método deductivo se fundamenta en dos pasos:

1.- El planteamiento del conjunto de axiomas de partida, que incorporan los caracteres o cualidades más importantes de los fenómenos, eliminando los aspectos irrelevantes.

2.- Deducción lógica, que es el proceso mediante el cual se infieren las explicaciones y predicciones, fundamentadas en la deducción, donde la explicación es producida a partir del suceso ocurrido y la predicción es completamente apriorística.

3.- Enunciado de leyes generales, que son el resultado final del proceso de inducción.

Este método implica que, dada la dificultad para contrastar empíricamente las hipótesis básicas, se da cada vez un mayor grado de abstracción de las teorías construidas a partir de este procedimiento, lo cual conlleva a la construcción de modelos como una representación simplificada de la realidad, con el riesgo de separar la realidad del modelo empleado.

En la ciencia económica, existe una separación entre el deductivismo y los procedimientos de deducción habituales, pues mientras la deducción, sea axiomática o matemática, puede facilitar el análisis estadístico y las pruebas de hipótesis; el deductivismo implica que el conocimiento estadístico y empírico es transitorio, por lo cual simplemente es necesario un primer análisis deductivo que proporcione información general.

El Método en las Ciencias Sociales.

En general, las ciencias sociales reúnen tres características fundamentales:

1.- La obtención de leyes generales es sumamente compleja.

2.- El hombre forma parte de la sociedad a la cual estudia y en la cual actúa.

3.- Los individuos se encuentran normalmente influidos por las circunstancias de las sociedades a las cuales pertenecen, por lo cual, es difícil ser objetivo y liberarse de los juicios de valor.

El eje fundamental de una ciencia social es el estudio de los hombres y las sociedades, no de las cosas, por lo cual, deben delimitarse los rasgos propios del aspecto económico de la actividad humana. La primera característica es la escasez de los medios empleados para la satisfacción de las necesidades humanas que son ilimitadas; la segunda característica es la necesidad de elección, dado que los recursos o medios disponibles para producir los bienes son escasos y las necesidades son ilimitadas; es la existencia de la escasez y lo ilimitado de las necesidades lo que genera el principio de elección.

Para comprender la actividad económica debemos entonces partir de la escasez de medios productivos, de necesidades ilimitadas, de la elección de fines y costos de oportunidad para satisfacer las necesidades humanas, empleando los medios disponibles conforme el principio del máximo aprovechamiento. Por lo tanto, el objeto de la economía, en una primera aproximación, será la resolución de problemas económicos que originan el hecho de que los recursos de los países sean insuficientes para la producción de bienes y servicios necesarios para los pobladores y sus necesidades.

El Concepto de Economía.

Dar una definición puntual de lo que significa economía es complicado, pues a lo largo de la historia las definiciones han estado en función de las condiciones o el contexto que se vivía, o de las escuelas y doctrinas del pensamiento económico pertenecientes a cada época.

Pero, a partir de lo que hemos descrito en párrafos anteriores, podemos definir a la economía como la ciencia que estudia cómo los recursos escasos se emplean para la satisfacción de las necesidades de los hombres que conforman una sociedad; se interesa en las operaciones esenciales tales como la producción, distribución y consumo de los bienes y, de las instituciones y actividades que tienen por objeto facilitar dichas operaciones.

Claramente, cualquier definición, en la medida que limita o impone fronteras al concepto de economía, es susceptible de ampliación o restricción, lo cual se acentúa en el caso de una ciencia social, que tiene vinculaciones ideológicas e históricas, con un abanico de escuelas y que incorpora la certeza de que sus conclusiones tienen impacto en la realidad. A partir de lo anterior, en el siglo XIX la corriente principal en economía estudiaba problemas como la relación entre el crecimiento de los recursos y el incremento de las necesidades, de las leyes de la distribución de los productos de la tierra, la naturaleza y causa de la riqueza, o las leyes de la evolución del capitalismo; posteriormente, en el siglo XX el estudio se encargó de explicar los principios que gobiernan la asignación eficiente de los recursos cuando tanto estos como las necesidades están dados.

La economía pasó a ser una ciencia del comportamiento en un aspecto de la interacción humana, donde la lógica de la elección se impone en un entorno de escasez. Así entonces, el estudio del proceso de optimización de la conducta de los individuos lleva a considerarlos como decisores racionales, en lugar de seres sociales, eliminando el carácter social y el marco histórico e institucional, lo cual permite pensar en leyes universales. Pero ante todo, no debe perderse de vista que la economía es una ciencia social, que entre sus fundamentos estudia la administración de recursos escasos, susceptibles de usos alternativos para la satisfacción de necesidades humanas que son ilimitadas, utilizando instrumentos de análisis que permitan explicar y predecir fenómenos observados que acontecen día a día.

A partir de lo anterior, el pensamiento económico ha mantenido una preocupación constante por lograr una ciencia económica desprovista de juicios de valor y principios ideológicos, siendo esto último un grave problema, pues al igual que otras ciencias sociales, la economía se encuentra rodeada de juicios de valor. Entre los economistas se ha legado precisamente la idea de que la teoría económica se encuentra libre de los juicios de valor, lo cual no es transferible hacia la política económica, generando una contradicción: admitir que las verdades objetivas del economista se convertirán en juicios morales al ser empleadas en asesoría política.

Lo anterior ha originado la distinción de dos tipos de visiones que, desde el siglo XIX, atendiendo al fin de su estudio, se dividen en: economía positiva, el "ser", referido a los hechos palpables; y la economía normativa, "el deber ser", que estudia los valores y la forma utópica como debe comportarse la economía. De lo anterior, la escuela neoclásica contribuyó con un mayor debate, donde unos proponían la separación entre lo positivo y las conclusiones basadas en juicios éticos o políticos; por otro lado, aquellos que proponían la no separación entre el análisis positivo y lo normativo, pues ello forma parte de un todo llamado ciencia económica; y finalmente, la postura de la economía del bienestar, que intentó aportar una economía normativa, libre de juicios de valor, teniendo como consecuencia la ampliación de la economía positiva que permita incluir a la totalidad de la teoría del bienestar y, dejando a la posición normativa el tratamiento de los problemas específicos de la política.

Así entonces, cuando se estudian los hechos abstractos y de carácter general, se dice que se actúa en el campo de la teoría económica, donde existe la división entre la macroeconomía, que trabaja sobre los agregados económicos, como el consumo total y la producción total; y la microeconomía, que estudia decisiones individuales de las familias y las empresas. Ambas áreas, junto con la econometría, han sido definidas como las únicas encargadas de explicar problemas económicos concretos, así como los procedimientos adecuados de solución, valiéndose de la estadística económica, que se construye a partir de la historia económica, donde se estudia el desarrollo de los procesos económicos concretos a través del tiempo.

La Metodología de la Economía.

Por hipótesis científica se entiende un supuesto contrastable, que puede dar como resultado una ley, que es un enunciado confirmado por la realidad; esas leyes se sistematizan en teorías, las cuales en algunos casos están basadas en simplificaciones y abstracciones de la realidad, dando como resultado un modelo. Una teoría es un sistema de hipótesis que se supone proporciona una explicación de la realidad; cualquier teoría es una abstracción y, a partir de la abstracción se puede acceder a un nivel de simplicidad, que nos permite analizar los hechos reduciendo las complejidades del mundo real.

La contrastación de una hipótesis implica el proceso según el cual, ésta se pone en contacto con los hechos reales, para tratar de determinar la adecuación o no de la misma, siendo un requisito fundamental que el enunciado hipotético esté formulado de forma que sea posible la contrastación. Al respecto de esto último, existen dos tipos de contrastación:

1.- Contrastación empírica, que implica la revisión de los hechos reales, basados en la hipótesis sujeta a evaluación, los cuales se espera respondan de acuerdo con los postulados teóricos fundamentales de la teoría.

2.- Contrastación teórica, que implica la comparación de la hipótesis propia con otras hipótesis que son empíricamente contrastables.

Una teoría trata la realidad con representaciones simbólicas de la realidad y están basadas en modelos; pero, en el caso del funcionamiento de un sistema, esto lleva ligado uno o varios modelos que intentan reflejar las principales relaciones del sistema que se consideran relevantes, por lo tanto, no debe confundirse una teoría como sinónimo de modelo. En la ciencia económica, gran parte de los esfuerzos ha sido enfocada en la elaboración de modelos que tengan una aplicación y validez general sobre un sistema económico concreto, a través del lenguaje matemático, definiendo a estos como “modelos económicos”.

Estos modelos económicos representan un sistema compuesto por un conjunto de conceptos y de relaciones que quedan especificadas por estimación, construyéndose con dos finalidades:

1.- Explicación o descripción de las características y comportamiento de las variables económicas que intervienen en el ámbito económico.

2.- Predicción o capacidad de pronosticar los efectos de los cambios en algunas magnitudes económicas.

Pero la validez de un modelo es juzgada de acuerdo con diversos criterios: la capacidad predictiva, la coherencia y realismos de supuestos, la cantidad de información que proporciona, la generalidad y simplicidad de sus conceptos. Una vez construido un modelo, la necesidad de contrastación con evidencia empírica implica la ratificación o refutación cuando los datos reales escapan de la explicativa del modelo. Estos modelos en general juegan un papel fundamental en la economía, pues permiten la representación de teorías mediante la simplificación de la realidad.

El Pensamiento y el Método Económico.

La economía clásica es definida como la elaboración teórica de un grupo de economistas que expusieron sus razonamientos a finales del siglo XVIII y principios del siglo XIX; estos economistas adoptaron el interés propio de los fisiócratas sobre la investigación acerca del producto neto, pero fueron más allá del límite que impone a la agricultura como única actividad productiva, incluyendo así a la industria como generadora de excedente. A continuación, vamos a dar un panorama con lo más sobresaliente de la escuela clásica de Smith y Ricardo, recordando que nuestro objetivo no es recapitular de forma extensiva la historia, pues ello significa un estudio por demás exhaustivo y que, para fines de nuestro trabajo, significaría prolongar demasiado el tema fundamental: la escuela neoclásica.

Smith, Ricardo y la Teoría del Valor.

David Ricardo (1772-1823) define que el valor de un objeto, entendido como la cantidad de cualquier otro objeto por el cual puede intercambiarse, depende de la cantidad relativa de trabajo que es necesaria para producirlo, más no de la mayor o menor retribución que tiene dicho trabajo. En su discurso, la utilidad brinda a los bienes la posibilidad de obtener un valor en cambio mediante dos formas, la escasez y la cantidad de trabajo requerida para producirlos; pero a diferencia de Smith, para Ricardo la utilidad no es referente del valor en cambio, aunque si es indispensable para este efecto, pues si un objeto no tuviera utilidad, difícilmente tendría asignado un valor en cambio. Para Smith[1] y Ricardo la base del valor en cambio de todas las cosas que existen, o aquello que determina las cantidades que se habrán de cambiar de unos bienes por otros, salvo en el caso de que la producción no involucre la actividad humana, dependen casi exclusivamente de la comparación entre cantidades necesarias de trabajo empleadas para los respectivos productos. En la teoría ricardiana, el valor es directamente proporcional a la cantidad de trabajo, tal que, un aumento de la cantidad de trabajo eleva el valor del bien y, una disminución de la cantidad de trabajo disminuye el valor de este; partiendo de lo anterior, mientras que Smith utilizó los cereales para equiparar el valor de los bienes[2], este tema es fundamental para Ricardo y, desde este punto, comienza a explayar sus razonamientos.

[1] "el precio real de cualquier cosa, lo que realmente le cuesta al hombre que quiere adquirirla, son las penas y fatigas que su adquisición supone. Lo que realmente vale para el que ya la ha adquirido y desea disponer de ella, o cambiarla por otros bienes, son las penas y fatigas de que lo librarán, y que podrá imponer a otros individuos. Smith, *La Riqueza de las Naciones,* 1776, p. 31

[2] "pero ¿de cuál de estas fuentes de fluctuaciones están exentos los cereales? ¿acaso no varían también, por una parte, debido a las mejoras en la agricultura, en la maquinaria e implementos empleados en el cultivo, así como por el descubrimiento de nuevas tierras fértiles en otras naciones que pueden ponerse en cultivo y que afectaran el valor de los cereales en cualquier mercado donde existe la libre importación? ¿no pueden, por otra

Para Ricardo, Smith acierta en su afirmación de que la cantidad comparativa de bienes elaborados o producidos mediante el trabajo es la que en última instancia determina su valor relativo presente o pasado; pero plantea una pregunta fundamental: si dos bienes varían en su valor relativo, ¿en cuál de ellos ocurrió realmente la variación? Si el valor del trabajo se ve reducido de forma considerable respecto a todos los demás bienes, encontrando que tal reducción es el resultado de una mayor oferta generada a partir de la mayor facilidad con que se producen los cereales y otros bienes de consumo para el trabajador, es correcto decir que estos productos tienen un valor más bajo dada la menor cantidad de trabajo requerida para producirlos y que, ésta facilidad que se da para sostenimiento del trabajador es la que ocasiona una disminución del valor del trabajo; para David Ricardo la variación entre los cereales y otros bienes es un efecto derivado de la menor cantidad de trabajo requerido para producirlos; esto mismo lo denominó como la reducción del valor, mas no elevación del valor de los bienes o productos que fueron adquiridos por el trabajador.

La teoría ricardiana señala que las distintas calidades del trabajo son remuneradas de una distinta forma, lo cual no es causa alguna de la variación del valor relativo de los bienes; de lo anterior, otro punto importante para Ricardo es el siguiente: el ahorro en el empleo de trabajadores (mano de obra) siempre tiene una relación estrecha con el valor relativo de un bien, pues, independientemente de la escala donde se realice el ahorro, es decir, en el trabajo inmediato o en los trabajos que auxilian al trabajo inmediato, si se ahorra la cantidad de trabajadores, el valor relativo del producto disminuye; más aún, aquello que debe retribuirse a los trabajadores por concepto de salarios resulta de suma importancia para las utilidades, pues debe entenderse que estas últimas están en función inversamente proporcional a los salarios y su incremento o decremento.

Para Ricardo existió un problema severo al momento de intentar identificar aquella medida invariable del valor que tampoco Smith pudo determinar en su obra; pero, para simplificación de su discurso, Ricardo enfoca el dinero como ese bien y prosigue su explicación aclarando que, para fines prácticos, el dinero se ve influido por las minas de oro y plata que son explotadas y las variaciones de trabajo y producción que cada mina tiene para abastecer el mercado de dicho bien;

Ricardo insiste en que una alteración de la tasa permanente de utilidades es en su mayor parte, el resultado de causas que se van dando en el transcurso de los años, mientras que las alteraciones en la cantidad de trabajo necesario son de incidencia diaria. Toda mejora que se haga en la maquinaria, herramientas o edificios que intervienen en la obtención de materia

---

parte, lograr un mayor valor, debido a las prohibiciones de importación, al incremento de la población y de la riqueza, y a la mayor dificultad para obtener mayores suministros, considerando la cantidad adicional de trabajo que requiere el cultivo de suelos más pobres? ¿acaso el valor del trabajo no es igualmente variable, afectándose no solo como las demás cosas, por la proporción entre la oferta y la demanda, que varía de modo uniforme con cada cambio de situación en la comunidad, sino también por el precio variable de los alimentos y de otros bienes necesarios, en adquirir los cuales se gastan los salarios del trabajo?". Ricardo, *Principios de Economía Política y Tributación,* 1816, p. 12.

prima, da como resultado el ahorro de trabajo y permite producir con mayor facilidad el producto, sobre el cual se aplican los perfeccionamientos, alterando de esta manera su valor. Una consecuencia de esto es que, al tratar de estimar las causas que motivan la variación del valor de los bienes debe tenerse cuidado en cuanto al peso específico que se le da al papel del aumento o reducción del trabajo.

La Renta de la Tierra.

Smith acepta que existe una demanda de tal carácter para algunos de los productos de la tierra, tal que sus precios son siempre capaces de retribuir no sólo lo necesario para producirlos y colocarlos en el mercado, sino que, por encima de ello, rinden un beneficio; los alimentos son uno de tales productos[3]. Para Ricardo esto no es del todo correcto, pues existen países donde hay tierra de tal calidad que no es capaz de brindar producción por encima de la indispensable para reponer el capital que había sido utilizado, al igual que las utilidades ordinarias.

Para Ricardo, la fertilidad relativa de la tierra es la que determina aquella proporción de la producción que debe ser pagada como renta, así como la relativa riqueza de las minas es la que determina la cantidad de su producto que debe ser pagado como renta de la misma. El que la mina menos rica sea la encargada de regular el precio del mineral, -carbón en este caso-, es regla general para Ricardo, algo que Smith analiza en forma inversa: el precio del producto generado en la mina o en la tierra de mejor fertilidad, es el encargado de regular el precio de todas las demás minas o tierras que han lanzado su producto al mercado[4].

Ricardo contempla el papel y la presión que ejerce el aumento de la población respecto a la demanda de productos primarios y, si la tierra donde se cultiva tiene en toda su extensión la misma fertilidad, dado el aumento de la población que crea la necesidad de cultivar tierras de la misma calidad que antes, con el mismo número de hombres, los terratenientes tendrán la misma cantidad de producto que antes, así como el mismo valor de la producción que antes.

[3] "En términos generales, únicamente se pueden llevar al mercado aquellas partes del producto de la tierra cuyo precio corriente alcanza para reponer el capital necesario para el transporte de los bienes, juntamente con sus beneficios ordinarios. Si el precio corriente sobrepasa ese nivel, el excedente irá a parar naturalmente a la renta de la tierra. Si no ocurre así, aun cuando el producto pueda ser llevado al mercado, no rendirá una renta al propietario. Depende de la demanda que el precio sea mayor o menor.
Respecto a determinados productos del suelo, la demanda siempre será de tal naturaleza que permita pagar un precio superior al que sería necesario para llevarlas al mercado; pero existen otras de tal condición que su demanda puede ser o no suficiente para que se consiga ese precio en exceso. Las primeras proporcionaran siempre una renta al dueño del suelo; las segundas, la proporcionaran en unos casos, y en otros no, de acuerdo a la circunstancias." Smith, *La Riqueza de las Naciones*, 1776, p. 141.

[4] "Por lo demás, el precio del cabrón de la mina más rica regula el de todas las otras de los alrededores. Tanto el propietario como el empresario consideran, el uno, que puede obtener una renta mayor, y el otro, un beneficio más crecido, vendiendo a un precio un poco inferior al que venden sus vecinos. Estos se ven muy pronto obligados a vender al mismo precio, aunque no estén en condiciones de hacerlo, y aun cuando al continuar bajando el precio les prive de toda su renta y de todo su beneficio. Algunas minas se abandonan por completo, y otras, al no suministrar renta, únicamente pueden ser explotadas por el propietario." Smith, *La Riqueza de las Naciones*, 1776, p. 162.

El monto de la renta será el mismo, pero las ganancias se incrementarán por causa de los precios de los alimentos y, como una consecuencia, los salarios tendrán un decremento. Las altas utilidades siempre serán favorables para la acumulación de capital; la demanda de mano de obra resultará continuamente incrementada y los terratenientes tendrán beneficios permanentes con una mayor demanda de la tierra.

Lo anterior ayuda a Ricardo en su demostración de que todas aquellas ganancias extraordinarias, por su característica inherente de una limitada duración, en cuanto al producto excedente del suelo se refiere, una vez que han cumplido con la tasa de ganancias moderada que impulsa la acumulación, se dirigen totalmente al terrateniente. Un precio bajo de la mano de obra, causado por la abundancia de producción, no sólo es capaz de generar un mayor volumen de producción en las tierras empleadas, si no que alentarían a los capitalistas a ejercer una inversión adicional de capital, consiguiendo que se extrajera finalmente un valor más grande de la producción. El interés del terrateniente se contrapone con el interés del consumidor y del capitalista, pues a excepción de los terratenientes, todas las clases entre las cuales se divide el producto quedan afectadas por el incremento de los precios de los cereales; Esto justifica la necesidad de suministrar cereales más baratos mediante las importaciones, pues la pérdida que se tendría al no permitir la importación, sería mucho mayor para una clase, de lo que es la ganancia para la otra clase.

Para Ricardo está claro que la renta es aquella parte del producto total de la tierra que se paga al terrateniente por concepto de haber usado las cualidades originarias e indestructibles del suelo, es decir, sólo una porción de lo pagado por parte del capitalista, es por motivo del uso de las cualidades natas de la tierra, la otra parte de la renta se paga por concepto del uso de capital que se ha requerido para elevar la calidad de la tierra, así como para proveer de la infraestructura necesaria para mantener en buenas condiciones el producto. Es así como Ricardo empieza la exposición de la teoría de la renta diferencial en su modo extensivo e intensivo, -definición que se reconoce años después, como el fundamento del marginalismo de Ricardo-.

Sabemos que la tierra no es ilimitada en su extensión, ni es de una calidad uniforme; si aunado a lo anterior, tomamos en cuenta la progresiva marcha de la población y su incremento en cantidad, la tierra de calidad inferior tiene que ser empleada y debe pagarse una renta por su uso; una vez que se ha iniciado el cultivo de esta tierra de calidad inferior, se debe pagar una renta en la tierra de mejor calidad y, el monto de esta renta, depende de la diferencia en la calidad de estas dos porciones de tierra que ha sido necesario poner en cultivo; esto es la *teoría de la renta diferencial extensiva de la tierra* de David Ricardo; pero, la segunda modalidad de esta teoría nos explica que, si antes de iniciar el cultivo de las tierra menos fértiles, -es decir, empleando tan solo la primer dotación de tierra con fertilidad óptima-, pudiera emplearse una mayor inversión de capital en esta porción de tierra, su capacidad productiva se incrementaría. Si se cumpliera el caso de que existiera tierra de la mejor calidad en una cantidad abundante de la que es necesaria para producir alimentos para sostener a la población, o si el capital pudiera ser invertido de forma indefinida sin un ingreso decreciente en la tierra vieja, no podría existir un aumento de la renta, dado que ésta se deriva invariablemente de la necesidad de emplear una cantidad adicional de trabajo, al cual le corresponde un ingreso proporcionalmente menor; esta es la segunda modalidad de la teoría de la renta de David Ricardo, conocida como *teoría de la renta diferencial intensiva de la tierra*, donde el capital invertido no deriva renta alguna. Ricardo supone la conveniencia de que la eficiencia de la maquinaria fuera decreciente y, como resultado, los bienes manufacturados con tales maquinas tendrían siempre un mayor valor en cambio y sería posible pagar renta a cuantos fueran dueños de las maquinas más productivas.

El incremento en la cantidad a pagar por concepto de renta es siempre el resultado de la riqueza creciente de un país, así como de la dificultad para poder abastecer de alimentos a la creciente población; este incremento es un síntoma pero no causa de riqueza, ya que esta ultima aumenta normalmente de forma más rápida si la renta es estacionaria e incluso decreciente; es también el resultado de que la tierra vaya perdiendo sus capacidades productivas inherentes. La riqueza va aumentando de manera más rápida conforme la tierra disponible es más fértil, donde hay menos restricciones a la importación y, donde a causa de mejoras agrícolas, las producciones pueden incrementarse sin que la mano de obra aplicada sea incrementada de igual forma; esto último genera que el progreso del monto de la renta sea más lento que en otros casos.

La población ha de regularse por sí sola de acuerdo a los fondos que sean empleados para proveerla de bienes y alimentos y, a causa de esto, aumenta o disminuye cuando aumenta o disminuye el capital (LEY DE HIERRO DE LOS SALARIOS). Por lo anterior, toda reducción del capital tiene implícita una secuela que es demostrada por la menor demanda efectiva de cereales, el decremento en el precio y la disminución en la extensión de tierras cultivadas y, otra de sus propiedades es que, así como la acumulación de capital va incrementando la renta, su disminución ha de disminuirla.

En la teoría de Ricardo no hay duda alguna en cuanto a que la reducción del precio relativo del producto primario, como un efecto de la mejora en la producción agrícola, que significa en realidad un decremento de la cantidad de trabajo necesario para la producción, producirá naturalmente una constante acumulación, ya que las utilidades del capital invertido se incrementarían. Esta acumulación tendría como efecto una mayor demanda de mano de obra, el incremento de salarios, una población creciente, ampliación de la demanda de productos primarios y el incremento en los cultivos. Sin embargo, a partir del incremento de la población, seria la renta tan alta como antes, es decir, después de que la tierra de menor calidad sea puesta en cultivo y, después de un periodo de tiempo considerable, la renta mantendrá una constante reducción.

Ricardo propone dos tipos de mejoras en la producción agrícola: aquellas que incrementan la fertilidad de la tierra y aquellas que nos permiten obtener su producto con menos trabajo invertido dadas las mejorías en la maquinaria empleada; ambas tienen como efecto un descenso en el precio de los productos primarios y afectan la renta pero no en la misma medida. Las mejoras no son elegibles si no ocasionan un descenso en el precio del producto primario, ya que, la cualidad esencial de tales mejoras consiste en causar una disminución de la cantidad de trabajo requerido para producir un bien, y dicha disminución no puede darse si no hay una reducción de su precio o del valor relativo. Por su parte, las mejoras que versan sobre la elevación de la fertilidad de la tierra son aquellas que permiten obtener la misma cantidad de producto con una menor extensión de tierra.

Precio Natural y Precio de Mercado.

Ricardo considera que lo concerniente a la definición del precio natural y de mercado ha sido expuesto de manera correcta por Adam Smith[5], por lo cual no modifica en nada los criterios del escocés para fines explicativos; ahora bien, sabiendo que el trabajo es la base donde radica el valor de los bienes y, que la regla que determina las cantidades respectivas de bienes que deben ser entregados a cambio de cada uno de los otros está regida por la cantidad comparativa de trabajo que es necesaria en la producción de cada uno, Ricardo no niega las desviaciones de carácter accidental y temporal, que pueden manifestar los precios reales o de mercado, respecto al precio primario o natural. No existe ningún bien que, en el transcurso del tiempo y los acontecimientos que este desarrolla, pueda surtirse de forma ininterrumpida con la suficiencia necesaria para satisfacer las necesidades de los pobladores y, por lo tanto, no existe ningún bien exento de aquellas variaciones accidentales y temporales que sufre el precio de los bienes.

Es a partir de tales variaciones que se aporta el capital en medida de lo necesario para la producción de los diferentes bienes que integran la demanda de la población; con la disminución o aumento del precio, las utilidades se elevan o se reducen respecto al nivel general y, el capital puede tener dos caminos: puede ser estimulado a invertirse en una producción particular donde ocurre la variación o se evita la inversión y abandona dicha producción. Esta decisión de abandonar las producciones menos fructíferas por aquellas que reportan mejores ganancias tiene una fuerte tendencia a nivelar la tasa general de utilidades. En la teoría de Ricardo, este fenómeno de migración colectiva de capitales de una producción a otra, puede ser originado por un capitalista que en ningún momento cambia de área

---

[5] "Cuando el precio de una cosa es ni más ni menos que el suficiente para pagar la renta de la tierra, los salarios del trabajo y los beneficios del capital empleado para obtenerla, prepararla y traerla al mercado, de acuerdo con sus precios corrientes, aquélla se vende por lo que se llama su precio natural.
[…]El precio efectivo a que corrientemente se venden las mercancías es lo que se llama precio de mercado, y puede coincidir con el precio natural o ser superior o inferior a este.
El precio de mercado de cada mercancía en particular se regula por la proporción entre la cantidad de ésta que realmente se lleva al mercado y la demanda de quienes están dispuestos a pagar el precio natural del artículo, o sea, el valor íntegro de la renta, el trabajo y el beneficio que es preciso cubrir para presentarlo en el mercado. "
Smith, *La Riqueza de las Naciones*, 1776, pp. 54-55.

productiva, sino que tan sólo reduce o aumenta la cantidad de capital a invertir de acuerdo con las variaciones que surgen en el precio del bien que se produce.

Cualquier capitalista tiene un razonamiento claro respecto a su inversión, ya que, al procurar un empleo provechoso de su capital, habrá de evaluar todas las ventajas que caracterizan a una ocupación con respecto a otra, por lo cual, estará dispuesto a sacrificar parte de la utilidad monetaria obtenida, considerando la garantía, la sencillez y la facilidad, ya sea real o imaginaria, que la colocación de su capital en una producción específica puede tener por encima de otra. Esta decisión de colocación de capital no sólo altera el curso de las utilidades, sino que afecta también a los salarios de los trabajadores; Ricardo plantea que es la competencia la que ajusta el valor en cambio de los bienes, ya que, una vez pagados los salarios del trabajo necesario en la producción, así como todos los demás gastos derivados de la actividad y, que dan eficiencia al capital, el valor restante en cada industria o producción, es proporcional al valor del capital que ha sido empleado. Esta concordancia de Ricardo con Smith le motiva a dejar de lado el tema de los salarios, mencionando que, cuando se hable de valor en cambio de los bienes, o del poder adquisitivo que posea cada bien, se debe tomar en cuenta, indudablemente, aquel poder que poseería si no hubiera perturbación alguna, ya sea por causa accidental o temporal; es decir, se hablará siempre del precio natural de los bienes.

Los Salarios.

En la teoría ricardiana, la mano de obra es equiparable con todas las demás cosas que se pueden adquirir o vender y que también pueden aumentar o disminuir su cantidad, con lo cual, la mano de obra adquiere de suyo un precio natural y un precio de mercado; el primero de estos, el precio natural, es aquel que permite al trabajador mantener su nivel de vida en condiciones normales, sin incrementar o disminuir el número de familiares. Esta capacidad para abastecer a su familia no es un resultado de la cantidad de dinero, sino de la cantidad de alimentos y bienes que comúnmente consume adquiriéndolos mediante su ingreso monetario; así, el precio natural de la mano de obra es dependiente del precio de los alimentos, así como de los productos necesarios y de aquellas comodidades que el trabajador requiere para sí y para su familia. Con un incremento en el precio de los alimentos y aquellos productos necesarios, el precio natural de la mano de obra se verá incrementado y, por el contrario, al disminuir el precio de todos estos bienes y de los alimentos, se reducirá el precio de la mano de obra.

Sabiendo que un elemento indispensable para el trabajador es el alimento y que el precio de los alimentos tiende a incrementarse con el incremento de la población que demanda tales alimentos y, dada la dificultad para producirlo por las limitantes señaladas antes, es lógico que el precio natural de la mano de obra aumente según la visión de Ricardo. El precio natural de todos los productos, menos en el caso de los productos primarios y la mano de obra, tiende a decrecer conforme haya un progreso en la riqueza y en la población, dado que, en primer lugar, aumentan en su valor real dado un aumento en el precio natural de las materias primas que emplean, pero esto es contrarrestado por la implementación de maquinaria y las mejoras en la división y distribución de la mano de obra, así como por la innovación científica que desarrollen los productores. El segundo de estos precios de la mano de obra, el precio de mercado, actúa bajo la interacción de la oferta y la demanda de mano de obra, puesto que el precio de mercado es aquel que realmente se paga por el empleo del trabajador en la producción; esta mano de obra tiene un valor elevado cuando es escasa y, un valor bajo cuando es abundante; pero, aunque existan estas desviaciones del precio de mercado, en el transcurso del tiempo tal precio tiende a igualarse con el precio natural de la mano de obra.

Para David Ricardo, el proceso o mecanismo de ajuste del precio natural y de mercado de la mano de obra es algo implícito en la población y su crecimiento o decrecimiento; si el precio de la mano de obra se encuentra por encima del precio natural, la condición del trabajador es prospera y cómoda, este puede disponer de una mayor cantidad de los bienes esenciales para distribuirlos entre su familia y acrecentar el número de miembros que la integran; ahora bien, toda vez que con la elevación de los salarios se da un proceso de crecimiento de la población, se incrementa el número de trabajadores disponibles, estos impulsan los salarios a decrecer hasta su tasa natural y, en algunos casos, se colocan por debajo de tal precio natural. En un segundo escenario, si el precio de mercado de la mano de obra está colocado por debajo del precio natural, los trabajadores se encuentran en una condición deplorable, pues se encuentran expulsados por sus ingresos del mercado de bienes que les son indispensables; una vez que se hayan dado estas limitaciones, el número de trabajadores, y de pobladores, disminuirá en cantidad y, si la demanda de mano de obra se incrementa o el precio de mercado de la mano de obra se haya incrementado hasta el precio natural, el trabajador verá incrementarse su nivel de vida por causa de un ingreso que ha elevado su tasa. David Ricardo es puntual al definir el capital como aquella parte de la riqueza de un país que es empleada en la producción de diversos bienes, ya sean alimentos o de cualquier otro tipo; este capital da efectividad al trabajo y puede aumentar en cantidad a la par de que se eleva su valor.

Lo anterior no insinúa que el precio natural de la mano de obra, estimado en la cantidad de alimentos y productos necesarios que pueda adquirir, sea fijo y constante; esto depende únicamente de los hábitos y costumbres que se hayan desarrollado en la sociedad. Así, tenemos como efecto que los salarios estarán encadenados a las elevaciones o disminución debido a dos causas principales: la oferta y la demanda de mano de obra y el precio de aquellos bienes en los cuales el trabajador gaste su salario. Aunque es sumamente probable para Ricardo el hecho de que, dadas unas circunstancias más favorables, la producción pueda elevarse aún más por encima de la población, no puede serlo de forma ilimitada, ya que, como se ha explicado, la tierra es limitada en su extensión y cantidad, motivo por el cual, al existir estas diferencias en la calidad de la tierra, con cada porción de capital que se decida emplear, se encontrará un índice menor de producción, en tanto que la población sigue ejerciendo siempre su mismo poder. Ricardo hace entonces una puntualización respecto al papel del gobierno y la ignorancia que existe en un país, puesto que, si en este territorio se cuenta con tierras fértiles y aún así los habitantes quedan expuestos a pasar hambrunas y necesidad, los gobiernos no han sido capaces de fortalecer la propiedad privada y la educación de sus habitantes.

Toda vez que la teoría de Ricardo tiene raíces profundas en el papel que ejerce la población sobre los medios de subsistencia, presenta dos salidas viables a este problema constante: el primero es el disminuir la población y el segundo es propiciar una acumulación de capital cada vez más fuerte. Al aumentar la población, los artículos necesarios aumentarán continuamente su precio, dado que será inminente el incorporar una mayor cantidad de mano de obra a las producciones de todos esos diversos bienes que son demandados. Esa misma causa que hace crecer la renta pagada al terrateniente, es decir la dificultad de proveer la cantidad adicional de alimentos mediante la misma cantidad proporcional de trabajo, incrementara de igual forma los salarios y, como un resultado directo, si el dinero tuviera en efecto un valor invariable, tanto los salarios como la renta, mantendrían una tendencia a la elevación, aunado al aumento de la riqueza del país y el aumento de la población.

Ricardo encuentra aquí que el aumento de los salarios no es causa de un incremento en el precio de los productos y hace una clara referencia a la regulación de los salarios como un sinónimo de garantía que tienen los trabajadores para mantener su nivel de vida y garantizar un crecimiento armonioso de la población; así mismo, aboga porque al igual que todos los demás bienes, los salarios entren en un proceso de liberalismo en un mercado competitivo donde nunca debe haber regulación o intervención alguna.

Las Utilidades.

El supuesto más importante que hace Ricardo al respecto del tema es que, el dinero, como patrón de comparación, se mantiene invariable en su valor y, como resultado, toda variación registrada en el precio debe explicarse a partir de una alteración en el valor del producto. Ahora bien, el precio de los cereales, así como el de aquellos productos manufacturados, es determinado por la cantidad de mano de obra necesaria para su producción; una mano de obra que es empleada por aquella porción del capital que no paga renta alguna al terrateniente.

Suponiendo un precio uniforme de venta tanto para los bienes agrícolas, como para los productos manufacturados, las utilidades de ambos tipos de capitalistas serán incrementadas o reducidas de acuerdo con la elevación o disminución de los salarios; si en determinado momento el precio del cereal se incrementa, dado que requiere mayor cantidad de trabajo en la producción, esto no dará como resultado el incremento en el precio de aquellos bienes manufacturados en cuya producción no sea necesaria la implementación de una cantidad adicional de mano de obra; dado lo anterior y, suponiendo que los salarios se mantuvieran en su mismo nivel, las utilidades percibidas por los fabricantes permanecerán iguales, aunque en realidad, si los salarios aumentaran a causa de esta alza de precio en los cereales, en tal caso las utilidades deben disminuir forzosamente.

Uno de los postulados más importantes es que el precio debe aumentar de forma inversamente proporcional a la cantidad en existencia; es decir, si la cantidad disminuye, el precio debe aumentar y si la cantidad aumenta, el precio debe disminuir; partiendo de la afirmación anterior y, sin considerar las variaciones accidentales, resulta que las utilidades obtenidas tanto en la agricultura como en la manufactura, deben reducirse si existe un incremento en los precios del producto primario, presentándose de igual forma una elevación en los salarios que complementa lo anterior, ya que, si el capitalista no obtiene un valor adicional por el cereal que le queda una vez que ha pagado la renta y, si el fabricante no obtiene un valor adicional por aquellos bienes que produce, teniendo que pagar ambos un valor más alto por concepto de salarios, ¿Cómo es que podrían aumentar las utilidades o mantenerse iguales?.

Si el capitalista adoptara por un momento el papel del consumidor, sabiendo su necesidad de productos primarios y otros bienes, este tendrá el mismo interés en mantener bajo el precio de tales bienes; materialmente será más afectado con un alto precio del cereal dada su relación con los salarios, ya que, con cada elevación en el precio, tendrá que pagar, a partir de una cantidad fija de producto obtenido, una cantidad adicional para remunerar los salarios a la mano de obra que ha empleado constantemente en un nivel creciente.

Existen en realidad muy pocos productos que no sean afectados en su precio por el alza de los precios del producto primario; en todos y cada uno de ellos el alza del precio de los productos es originado por que se ha requerido invertir una mayor cantidad de trabajo y no porque el valor del trabajo empleado tenga un valor más alto. Es imposible concebir que haya una reducción en el precio de los salarios o que estos se mantengan estacionarios si el precio de los artículos necesarios aumenta gradualmente y, de todo esto, debemos aceptar que en circunstancias normales nunca podrá presentarse un aumento permanente en el precio de los artículos necesarios, sin que esto cause o sea el resultado, de un alza en los salarios. En otro caso, las utilidades se verán igualmente reducidas si se registra un aumento cualquiera en los precios de aquellos bienes, con excepción de los alimentos, en los cuales ha sido invertida una proporción mayor de salarios para la mano de obra

Si el precio de mercado de un bien oscila alrededor del precio natural, dada la necesidad de emplear mayor o menor cantidad de mano de obra, el efecto es temporal; unas utilidades elevadas sobre el capital empleado atraerán capital a la producción y, una vez que se haya abastecido la demanda de dicho bien aumentando la cantidad de productos, el precio no tiene otra dirección más que el descenso y las utilidades se colocarán de nuevo en su nivel general. Ricardo expone un pensamiento lineal que resume bien los fenómenos analizados hasta este momento: el precio de los productos alimenticios se impone a los precios de aquellos artículos necesarios para la manutención del trabajador; a su vez, estos artículos necesarios y su precio conforman los fenómenos variables en los salarios y, finalmente, las utilidades dependen de las variaciones que se dan en el pago de los salarios, ya que si sabemos que existen otros productos necesarios a parte de los alimentos, estos no ejercen la misma presión y pueden ser producidos de manera casi ilimitada.

La trayectoria de las utilidades es decreciente conforme lo explicado en cuanto a la riqueza de un país y el progreso de la sociedad; esta tendencia es contrarrestada por la mejoría en la maquinaria empleada en la producción de artículos indispensables, así como el avance científico en el campo agrícola, lo cual, evita la introducción de una cantidad cada vez mayor de mano de obra en la producción y, por ende, disminuye el precio de los artículos indispensables y alimentos que el trabajador y la población en su conjunto requieren. Los incrementos en los precios de los artículos indispensables y los salarios de la mano de obra, siempre tendrán un límite en su trayectoria ascendente, pues en el instante que los salarios alcancen un valor igual a la totalidad de los ingresos del capitalista, debe hacerse un freno en la acumulación, dado que ningún capital estará en condiciones de producir alguna utilidad ni podrá solicitar mano de obra adicional; esto es a su vez un freno poblacional, pues se ha alcanzado la mejor distribución posible dado el capital, la tierra y la mano de obra disponible en el país. Para aquellos bienes que conforman el consumo de la población, exceptuando los alimentos, su precio creciente seria una consecuencia del mayor valor de aquellas materias primas que conforman su producción y que, por tal motivo, incrementarían con toda seguridad los salarios y disminuirían las ganancias.

No es posible tener acumulación de capital si no hay un motivo provechoso y, de la misma forma que para el trabajador es indispensable su salario, el capitalista agrícola y el manufacturero no pueden vivir sin su utilidad respectiva y, sus motivos para acumular se disiparán conforme vayan disminuyendo las ganancias, hasta llegar al punto límite donde deben detenerse por causa de que, el nivel de utilidades es tan bajo que, ya no podrán proporcionar una compensación adecuada y serán mayores los riesgos enfrentados en las ramas productivas de la economía.

Aún cuando se ha producido un valor mayor, los consumidores podrán consumir una mayor porción del remanente de tal valor toda vez que haya sido pagada la renta; es esto en su distinción más pura lo que rige las utilidades en la teoría de Ricardo. Mientras la tierra sea capaz de dar una producción abundante, los salarios podrán incrementarse en determinado período de tiempo y los productores podrán consumir una mayor proporción respecto a lo habitual; sin embargo, al ser necesaria e inminente la producción de tierras menos productivas, o siendo necesario implementar capital y mano de obra sobre tierra ya cultivada con un rendimiento menor, el efecto es permanente. Una proporción mayor de la parte de aquel producto que constituye el restante a distribuir, toda vez que la renta haya sido pagada, entre los capitalista y los trabajadores será proporcional a esta última. Las leyes que rigen la naturaleza se hacen presentes en todo momento y, con ello, crean que estos efectos de decrecimiento de la utilidad se vuelvan permanentes en el tiempo.

Ricardo insiste en la libre importación, argumentando que un país de extensión limitada, con fertilidad en sus campos, una vez que sea permitida la entrada de productos alimenticios de forma desregulada, podrá realizar una fuerte acumulación de capital, sin que haya una disminución en la tasa de utilidades, ni se de la necesidad de pagar grandes sumas en concepto de renta. Así, la teoría ricardiana intenta demostrar dos cosas fundamentales: un incremento en los salarios no solo afecta el nivel de precios, sino que generalmente, afecta las utilidades; y lo otro es que, si los precios de todos los artículos se pudieran incrementar, el efecto que esto tenga sobre las utilidades sería idéntico, con la única peculiaridad de que habría una baja en el valor con el cual se estiman los precios y las utilidades.

Efectos de la Acumulación sobre las Utilidades.

Dicho está que ninguna acumulación de capital podrá reducir de forma permanente las utilidades, salvo en el caso de que haya alguna causa de índole permanente que propicie un incremento de los salarios, dada la tan mencionada dificultad para abastecer de alimentos a la población. Si aquellos bienes indispensables para el consumo del trabajador pudieran ser incrementados de forma constante con la misma facilidad, no hay porque pensar en una alteración de la tasa de utilidades, ó salarios, sin importar cuál sea la cantidad del capital acumulado. Smith relaciona estrechamente la baja de utilidades a la constante acumulación de capital y a la competencia que se deriva de ella, sin la menor preocupación sobre el hecho inherente a la población y la dificultad creciente de producción de alimentos que esta demanda[6].

En un país se acumulará capital que sea productivo, de lo contrario, es decir acumular capital inútil, no puede haber un incremento de los salarios como consecuencia del alza de productos de primera necesidad, tal que su resultado sea un decremento de las ganancias hasta que este decremento erradique el motivo de la acumulación; mientras existan utilidades altas, los hombres encuentran motivos para acumular capital. Entonces, mientras exista algún deseo insatisfecho en el individuo, éste habrá de demandar más mercancías, siendo esto una demanda efectiva siempre y cuando se disponga de algún nuevo valor que dar a cambio de tal bien. Una producción se compra siempre mediante otra producción o con servicios, siendo el dinero únicamente un medio por el cual se realiza tal cambio.

Los gustos de la población siempre serán diversos, motivo por el cual, siempre habrá demanda de la mayoría de los bienes producidos. El hecho de que tales demandas incrementadas y la elevación de la producción disminuyan o acrecienten las utilidades, es algo que está en función de la elevación de los salarios; a su vez, esta elevación, depende de la

[6] "El aumento de capital, que hace subir los salarios, propende a disminuir el beneficio. Cuando los capitales de muchos comerciantes ricos se invierten en el mismo negocio, la natural competencia que se hacen entre ellos tiende a reducir su beneficio; y cuando tiene lugar un aumento del capital en las diferentes actividades que se desempeñan en la respectiva sociedad, la misma competencia producirá efectos similares en todas ellas." Smith, *La Riqueza de las Naciones*, 1776, p. 85.

facilidad para poder producir alimentos y artículos indispensables; y el carácter temporal de este suceso está dado por la oferta de trabajadores que será una función de la disponibilidad de medios para su manutención. Para Ricardo, solo existe un posible escenario donde la acumulación de capital, dado un precio bajo en los alimentos, puede ocasionar una baja de utilidades y es que, cuando los fondos para manutención de la mano de obra aumentan de forma mucho más rápida que la población, en este caso, los salarios serán altos y las utilidades bajas. Entonces, si los hombres dejaran de consumir, se dejaría de producir. Ricardo deduce que, al no existir limites para tales demandas, no puede existir limitante alguna al capital que decida emplearse para producir estos bienes, excepto aquel principio que restringe la capacidad para mantener a los trabajadores que participan en la producción.

Influencia de la Oferta y la Demanda sobre los Precios.

Ricardo era consciente de las opiniones que influían el estudio de la Economía Política de su tiempo y, una de las opiniones rotundas era que el precio de un bien estaba determinado totalmente por el principio de la oferta y la demanda; es decir, la diferencia que existe entre la cantidad producida de un bien y, la cantidad que realmente se ha demandado. A este respecto, señala de manera clara que el costo de producción es el único factor que realmente debe determinar el precio de un bien determinado. Si se disminuye el costo de producción de determinado bien, su precio baja finalmente hasta el nuevo precio natural, independientemente de que la demanda resulte incrementada; este caso es, para Ricardo, aplicable al caso de la mano de obra, pues argumenta que, si disminuye el costo de subsistencia de los trabajadores, reduciéndose el precio natural del alimento y los bienes indispensables, los salarios habrán de bajar, sin que tenga la menor importancia la demanda de trabajadores y su incremento considerable.

De igual forma, los límites de consumo humano y los satisfactores que este tiene para saciar sus demandas imponen un límite a la influencia de la oferta y la demanda sobre los precios; es decir, pongamos por caso que el precio del pan tenga una disminución como efecto de una mejora en la producción agrícola, esto no incrementaría la demanda porque nadie estaría dispuesto a consumir más de lo que ya le es suficiente para satisfacer sus necesidades, por lo cual, si no hay incremento de la demanda, no tiene porque incrementar la oferta. Ricardo precisa entonces que no hay motivo para suministrar mercancía alguna tan sólo porque esta pueda ser producida, sino porque tiene una demanda en el mercado. Por lo tanto, en un contexto competitivo de la producción, los precios de los bienes que pueden aumentar su porción en grado moderado, dependerán siempre del costo aumentado o disminuido de la producción, mas no del estado de la oferta y la demanda.

La Teoría Neoclásica.

Fundamentalmente, la teoría neoclásica abandonó la teoría del valor-trabajo creada por los economistas clásicos, sustituyéndola por la llamada utilidad marginal; es decir, para los neoclásicos, lo que da valor a un producto o servicio no es la satisfacción total proporcionada por su posesión o uso, sino la satisfacción y el goce (utilidad) procedente de la última y menos deseada adición realizada en el consumo de un individuo; lo anterior es compartido por el caso de la producción, donde los costos marginales influyen en la oferta.

Asumiendo la homogeneidad de la fuerza de trabajo y omitiendo diferencias de habilidad y diligencia en el trabajo, el salario es fijado por la contribución del último trabajador disponible a la producción y los rendimientos; de este modo, nadie puede pedir una remuneración superior a su contribución marginal a la producción. Por otro lado, el interés del capitalista se explica en forma similar: su interés queda definido por la última y menos rentable unidad de inversión.

El análisis neoclásico intenta demostrar que el libre mercado, aplicado en los bienes y factores productivos, es capaz de maximizar las preferencias de los agentes, teniendo en cuenta las limitaciones de los recursos iniciales disponibles. Su análisis es descriptivo, dado que asume la organización social en torno a los mercados; y normativo, pues el libre funcionamiento de los mercados permite acceder al “óptimo social”. Se puede considerar entonces al mercado como el centro de atención teórica, donde los agentes económicos realizan operaciones, definidas como maximizaciones de sus preferencias, bajo un escenario de escasez.

Uno de los mayores cuestionamientos surgidos en torno a la teoría neoclásica es su alejamiento de los problemas prácticos, los cuales no siempre responden a sus postulados teóricos; pero a comienzo del siglo XX, la ciencia económica recobró su prestigio a través de explicaciones consideradas como coherentes y sólidas, ordenándose en torno a diversos temas fundamentales, uno de los cuales es el crecimiento económico.

El estudio del crecimiento económico y el desarrollo desde la perspectiva keynesiana dio origen a modelos como los propuestos por Harrod y Domar, donde se trataba de determinar una tasa estable de crecimiento equilibrado del ingreso. En esta misma línea de investigación del crecimiento económico, surgieron otros teóricos como Robert Solow y Frank P. Ramsey, en cuyos trabajos se presentaban perspectivas diferentes de las abordadas inicialmente por Keynes.

La llamada economía de la oferta, que surgía como una respuesta ante la fallida teoría de la demanda, buscaba solucionar aquellos conflictos teóricos y prácticos que no se habían podido corregir precisamente a partir de la política enfocada a la demanda. Los fundamentos de ésta economía de la oferta proponen que el nivel y la tasa de crecimiento de la producción pueden incrementarse de forma significativa mediante la implementación de políticas diseñadas para promover un incremento en la eficiencia económica, una menor regulación, el incremento de la oferta de trabajo y los mayores niveles de formación de capital, derivados del ahorro y la inversión.

Lo anterior estaba basado en un supuesto muy atractivo: las expectativas racionales, donde los individuos pueden cometer errores en sus predicciones, pero dichos errores se limitan exclusivamente a aquellos sucesos incontrolables y que no pueden ser previsibles, de tal forma que las expectativas se forman siempre a partir de la información disponible en el mercado. Los neoclásicos fueron apegados a un deductivismo económico, heredado por David Ricardo, cambiando la teoría del valor-trabajo por la teoría de la utilidad marginal, del equilibrio general que supone un perfecto acuerdo entre todos los agentes económicos y de la introducción del cálculo diferencial y, más recientemente, de la optimización dinámica, que es precisamente el fundamento del modelo que hemos propuesto simular en nuestra investigación.

El deductivismo de los neoclásicos abarca los principios de la revolución marginalista, donde los símbolos matemáticos pasaron a expresar la teoría subjetiva del valor, construyendo el marco teórico necesario para introducir tres elementos principales:

1.- Los agentes individuales, que venían a sustituir a la colectividad.

2.- Contemplación de bienes exclusivamente escasos, lo cual implica el proceso de decisión maximizadora y optimizadora.

3.- La asignación precisamente de los recursos escasos, como una forma de obtener los máximos niveles posibles de consumo y bienestar para cada agente económico.

A partir de la teoría ricardiana, algunos economistas comenzaron a elaborar edificios teóricos basados precisamente en los fundamentos de Ricardo, contemplando la posibilidad de expandir o “generalizar” el uso de dicha teoría; surge así la llamada “revolución marginalista”, que fue aplicada desde el proceso de consumo hasta el proceso productivo y de distribución, abandonando los limites ricardianos de los rendimientos decrecientes de la tierra y el trabajo como factores fundamentales. El proceso de acumulación de capital pasó a ser el centro de atención de los economistas, basado fundamentalmente en los preceptos derivados de la teoría marginalista. La creación del fundamento de la “variación de proporciones” vino a fortalecer la versión del principio marginal intensivo de Ricardo, que ya no era solamente aplicado al caso de la tierra, pues se reconocía la existencia de otros factores productivos; lo anterior requería la creación de supuestos que brindaban a los diversos factores productivos las mismas características de la tierra.

La presencia de la matemática dentro del análisis marginalista trajo consigo la elaboración de edificios teóricos elegantes, tales como la suposición de una función de grado uno, lineal, que permitiera retribuir a cada factor productivo lo necesario para continuar produciendo, haciendo extenso este caso para la generalidad de análisis económicos de la producción y la distribución del producto[7]. A partir de lo anterior, las funciones de producción serían sujetas precisamente al precepto teórico de la homogeneidad de grado uno, lo cual era innovador para su época, pasando de la función propuesta por Wicksell y Böhm-Bawerk, a la función de Cobb y Douglas, que hasta nuestros días mantiene validez en el campo académico.

De lo anterior, la teoría neoclásica hereda la elegancia analítica y formal, junto con la satisfacción de ver aplicados los métodos y procedimientos matemáticos que le dan un toque más “científico”a sus procesos de solución; pero sobre todo, la impresión de haber encontrado “justicia” en el proceso distributivo, dentro de un sistema económico que funciona con “eficiencia”. Lo anterior es la respuesta satisfactoria ante el cuestionamiento de la distribución del ingreso nacional, algo que el análisis ricardiano había heredado a la posteridad, pero ahora era adaptado a un sistema de perfecta competencia económica, con un factor productivo en plena ocupación, dado que existen infinitas posibilidades de combinaciones entre este y otros tantos factores productivos, con una retribución marginal a los factores, correspondiente a su contribución tecnológica dentro de la producción, pero sobre todo, con la homogeneidad entre el trabajo y cualquier otro factor productivo, lo cual es sin duda atractivo, aunque sea solamente en el campo académico.

Con el tiempo fueron surgiendo las teorías que dieron seguimiento precisamente a la distribución del ingreso, aunque nunca dejaron la sensación de completitud en sus argumentos, dado que existían carencias al momento de aterrizar la propuesta teórica en el campo práctico[8]. A partir de lo anterior, el retorno al pensamiento neoclásico como teoría dominante era inminente, luego de que Robert Solow[9] propusiera una salida al modelo Harrod-Domar, empleando suposiciones que se desviaban de los fundamentos originales de este último modelo. Solow era el encargado de regresar el tema de la distribución del ingreso a la teoría neoclásica, empleando una función de producción tipo Cobb-Douglas capaz de absorber distintos escenarios para el progreso tecnológico. Para la teoría neoclásica, el modelo de Solow representó una salida ante el problema de asumir el progreso tecnológico como algo inherente a la marcha misma de la economía en el tiempo, involucrándolo sobre

[7] Puntualmente, el aporte fue hecho por el matemático Leonard Euler, a través del famoso “Teorema de Euler”.

[8] Los trabajos sobre crecimiento económico, redactados por Roy Harrod en 1939 y Evsey Domar en 1946, son considerados por algunos autores como las investigaciones precursoras en el interés contemporáneo por el crecimiento económico. Ambos autores tienen aspectos keynesianos, pues emplean factores como el ahorro y la inversión para explicar los niveles de crecimiento sostenido que puede mostrar una economía, siendo necesario encontrar las condiciones que equilibren ambas variables, proponiendo al Estado como el responsable de dirigir el ahorro y la inversión, de tal forma que se pueda contrarrestar el desempleo a través de la inversión suficiente, ya que las economías son generalmente inestables en cuanto al mercado, volviendo imperativo un factor o agente externo que pueda nivelar el rumbo y dirigir la economía hacia el crecimiento. Para mayor información, puede revisarse: Franco González, Humberto; Ramírez Hassan, Andrés; *“El modelo Harrod-Domar: implicaciones teóricas y empíricas”*; Ecos de Economía No. 21. Medellín, octubre 2005, pp. 127-151.

[9] El modelo de Solow propone una solución de equilibrio con plena utilización de los factores productivos K y L, a partir de una dotación inicial determinada de entre las infinitas posibilidades de combinación que hay para ambos factores, asumiendo una función de producción neoclásica que precisamente actúe en este sentido y redituando a cada factor productivo de acuerdo con su productividad marginal.

todo en el proceso productivo, donde puede beneficiar a la mano de obra, al capital o ambos. Para este último punto, la función de producción del tipo Cobb-Douglas es fundamental, pues permite involucrar los tres tipos de progreso tecnológico en la producción, sin que haya necesidad de modificar la estructura funcional de la propia ecuación de la función de producción, lo cual se consideró como un mayor logro aun, colocando a la teoría neoclásica como teoría dominante sin cuestionamiento alguno.

Pero, a pesar de la presunción que supuso el haber encontrado una forma de reunir bajo un mismo esquema diversas perspectivas teóricas, los cuestionamientos no tardarían en volver al seno de la teoría neoclásica, pues la función de producción, hasta hoy en día, no ha dejado de ser cuestionada por su poca validez en el campo económico real, pues su forma funcional se asume como un caso particular de producción, sin que exista la posibilidad de englobar en una sola función el proceso productivo general de una rama industrial o agrícola, por lo cual, una nueva tormenta se avecinó sobre la teoría neoclásica.

La teoría de la distribución del producto, basada en la igualación que se hizo entre el trabajo y el capital, no era del todo satisfactoria, pues había pocos indicios de que en realidad dicho fundamento se cumpliera, asignando a cada trabajador y a cada “maquina” su correspondiente retribución con base en su productividad marginal. Lo anterior hace alusión precisamente a lo que hemos mencionado anteriormente: al no existir homogeneidad entre ambos factores productivos, así como tampoco existe la homogeneidad dentro de cada tipo de factor productivo, la búsqueda de criterios que permitieran pensar precisamente lo contrario comenzó a generarse en discusiones teóricas dentro de las universidades. Incluso, algunos economistas neoclásicos hicieron extensa la problemática de la homogeneización de factores, causada según ellos por el proceso de agregación, hasta el factor trabajo y el producto neto, pues ambos de igual forma se evalúan en la escala agregada; por lo anterior, se optó por diferir los procesos de agregación del capital, buscando eliminar los problemas concernientes a la distribución del ingreso, evitando incurrir en los mismos fallos. Pero poco pudo hacerse para responder satisfactoriamente los cuestionamientos sobre la homogeneidad de factores productivos, generándose más dudas al respecto.

Luego de un tiempo, el tema de la distribución del ingreso y la homogeneidad de factores productivos fue dejado de lado, sin que hubiera respuesta alguna de por medio; simplemente el tema había pasado a formar parte de los archivos de las universidades, sin que se volviera a decir una sola palabra al respecto. La única salida que se dio a los cuestionamientos sobre los problemas de la heterogeneidad entre factores productivos comprendía tres opciones: la primera implica adoptar la heterogeneidad de factores productivos como un caso anormal, bizarro o extraño, por lo cual es simplemente un caso que “difícilmente” se presenta en los casos prácticos; la segunda opción era mantener la búsqueda de criterios que logren dar como resultado las cualidades que deben cumplir los factores productivos para considerarse como homogéneos; la tercera implica adaptar el problema agregado a un problema de carácter individual, donde cada componente es tratado por separado, tomando como referencia su propio marginalismo.

La desaparición de los análisis pertinentes a la distribución del ingreso tuvo repercusiones sobre la propia teoría en cuestión, pues perdió credibilidad en cuanto a los diversos casos que se presentan en un entorno económico real, proponiendo una solución para todos los casos analíticos, planteada a partir del esquema Arrow-Debreu[10]. La solución propuesta consiste en abordar todo caso práctico partiendo de las mismas instancias, con una distribución dada del ingreso, con una asignación dada para los factores productivos, sin que haya aclaraciones respecto al origen de las condiciones que propician el caso que se debe analizar. Todo lo que se presenta como un recurso dentro del problema, es un recurso dado, que solamente espera la asignación de precio y cantidad que satisface las condiciones de equilibrio general. Se olvidó el problema fundamental que Ricardo había planteado a la economía clásica, todo bajo un esquema matemático formal, generalizador, que solamente propone encontrar los precios y cantidades que satisfacen los equilibrios pertinentes para que el sistema funciones de forma idónea.

Una vez que quedó determinado el proceso de solución mediante el cual todo era reducido a condiciones dadas, la preocupación por explicar el crecimiento económico y las condiciones o determinantes endógenos que ayudan en su explicación, regresó a formar parte delas discusiones teóricas; los modelos de crecimiento económico venían a ocupar un lugar importante dentro del estudio de la economía, pero sobre todo fueron de gran trascendencia cuando la tecnología se convirtió en un factor endógeno, es decir, cuando la tecnología pasó a ser un factor explicado por el modelo mismo. Se trata de modelos de crecimiento económico con una refinación elevada, empleando instrumentos analíticos que permitían actuar sobre versiones simplificadas de la realidad. De entre todos los modelos, Frank P. Ramsey había heredado un modelo capaz de actuar con las condicionantes de optimización en el consumo y en la producción, dirigido desde la perspectiva de un planificador social, todo ello para un período de tiempo definido, es decir, intertemporal. El punto en contra de este tipo de modelos era que, de entre todas las simplificaciones de la realidad que se asumía como parte del modelo, el volver a emplear una función de producción de tipo neoclásico traía de nuevo a colación viejos problemas no resueltos por los teóricos neoclásicos.

A la par de que se volvieron a emplear viejos conceptos, la creación de otros nuevos como la “cantidad física de capital humano” eran algo que muchos cuestionaban y pocos podían explicar, dado que cuantitativamente existían formas de representar dicha variable, pero se necesitaba de consenso para adoptar una u otra forma de representación numérica. Más aun, el “micro-fundamento” de análisis, basado en un agente representativo, trajo mayor elegancia

[10] Para una mayor explicación véase la bibliografía original: *“Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy”*; Kenneth J. Arrow; Gerard Debreu; en *Econometrica*, Vol. 22, No. 3. (Jul., 1954), pp. 265-290.
O también: *"El modelo Arrow-Debreu es un modelo estático"*;Francisco Lozano G., Edgar Villa P., Sergio Monsalve G. Cuadernos de *Economia,* V. XVI, n. 26, Bogotá, 1997, páginas 21-46.

y simplicidad al análisis del crecimiento económico, limitando el papel de un planificador social y otorgando a los propios habitantes la determinación del crecimiento económico mediante su propio comportamiento maximizador, definido a partir del comportamiento de un sólo miembro de la población, denominado como agente representativo, quien goza de todas las características deseables en un consumidor, y también en un productor, así como se encuentra rodeado del mejor entorno económico de competencia que la teoría puede señalar.

Respecto al entorno económico, el proceso productivo cumple con la cualidad de tener pleno empleo, tanto para el capital como para la mano de obra, lo cual es difícil de encontrarse en un contexto real; lo anterior atrajo la mirada de más autores, generando un obvio cuestionamiento, que se une al ya generado por la falta de respuesta ante la teoría de la distribución del ingreso. Fue así como transcurrió el tiempo, dando como resultado la teoría neoclásica actual, de la cual nosotros seleccionamos un modelo de crecimiento para aplicarlo en el campo empírico. Lo expuesto anteriormente es considerado como los rasgos más importantes de lo acontecido dentro de la creación de la teoría neoclásica; pero debemos recordar una vez más al lector que el motivo de ésta investigación no es redactar la historia del pensamiento económico neoclásico, pues eso resulta mucho más extenso de lo que ya es este trabajo.

El siguiente capítulo explica de forma mucho más detallada lo que ya hemos explicado de manera somera en párrafos anteriores, pero no debe perderse de vista que los razonamientos realizados en el modelo de Ramsey son resultado precisamente de una época, de una teoría sumamente cuestionada y que, en su búsqueda de respuestas, fue causando mayores lagunas en su explicativa, al grado de preferir la evasión de dichos cuestionamientos, asumiendo las incongruencias teóricas y prácticas como casos anormales, que solamente se dan cuando la economía no funciona de acuerdo a los fundamentos teóricos, asumiendo que, fuera de estos casos, todo quedará explicado de forma rotunda por la teoría neoclásica, empleando un modelo u otro, de acuerdo a la necesidad que exista de explicar puntualmente ciertos tópicos.

CAPITULO II. EL MODELO DE CRECIMIENTO CON OPTIMIZACIÓN DEL CONSUMO. EL MODELO DE RAMSEY.

Este capítulo presenta una estructura muy similar a lo que el lector podrá encontrar cuando consulta bibliografía especializada en el crecimiento económico, donde generalmente la exposición comienza con una explicación del modelo propuesto por Solow, dado que es el modelo más sencillo en este sentido y, a partir de dicha estructura básica, la explicación se va complementando con supuestos que nos llevan a revisar los modelos donde la optimización de los agentes económicos está presente y nos ayuda a definir la forma como debe comportarse la economía, de acuerdo con la teoría neoclásica, para alcanzar un punto optimo de crecimiento.

Esta estructura que guarda el tema en los textos especializados es la que hemos decidido obedecer en este trabajo, por la facilidad con que el autor podrá revisar los temas y pasar de un modelo simple a uno más complejo; no hemos introducido la explicación del modelo de Solow por lo extenso que sería el trabajo, aunque si el lector se interesa en ésta temática, puede consultar literatura especializada para comprender de mejor manera el modelo propuesto por Solow, pues no es el tema fundamental de nuestro trabajo, pero si es el primer paso a dar para indagar en el tema del crecimiento económico.

Antes de comenzar, el lector debe tener en cuenta que los modelos neoclásicos de crecimiento económico vienen a intentar responder una cuestión muy sencilla: ¿es posible que la economía tenga tasas de crecimiento positivas, de carácter permanente, a través del ahorro y la inversión en stock de capital? Ésta pregunta es el eje central de todo modelo de crecimiento económico, que busca responder ésta interrogante dado el marco teórico neoclásico; cabe mencionar que cada modelo propuesto hasta hoy en día, alimenta los supuestos con que inicialmente se proponía responder el tema de crecimiento económico, con el objetivo de acercarnos un poco más al objetivo central de la teoría neoclásica en estos modelos, es decir, dar una respuesta contundente y clara.

Otro punto que debemos aclarar al lector es que, como veremos en párrafos posteriores, la aplicación rigurosa del modelo contempla trabajar con una tasa de crecimiento poblacional, que puede verse influida, o no, por el factor tecnológico; es decir, desde la perspectiva de este modelo, sólo hay dos opciones en cuanto a las posibilidades de introducir el factor tecnológico en la explicación: el primero es dejar de lado totalmente dicho progreso o, en segundo lugar, incluirlo dentro de la explicación, pero asumiendo que esto influye de igual forma en la tasa de crecimiento de la población.

Lo anterior no admite un término medio, donde el factor tecnológico esté presente en el desarrollo de la economía, pero sin afectar la tasa de crecimiento de la población, incrementándola para efectos de los cálculos correspondientes a los estados estacionarios. Desde nuestra perspectiva, lo anterior puede desviarnos de los datos reales sobre la población, que en este caso se asume como mano de obra; por lo cual, una vez hecha la aclaración de que no desconocemos la propuesta original del modelo, vamos a trabajar la tasa de crecimiento de la mano de obra a partir de la tasa de crecimiento de la población, sin que el progreso tecnológico influya. Sobre las diferencias que puedan existir entre un cálculo y otro hablaremos en el capítulo IV de nuestro trabajo, mostrando algunos cálculos como ejemplo del caso de la aplicación rigurosa del modelo.

Las Variables Per Cápita[11].

Se propone trabajar con variables per cápita que incorporen el factor tecnológico[12], denominando a estas variables como unidad de trabajo efectivo:

$$\hat{y} = \frac{Y}{\hat{L}}$$

$$\hat{k} = \frac{K}{\hat{L}}$$

Podemos entonces expresar la función de producción en su forma intensiva:

$$\hat{y} = f(\hat{k}) \dots (1)$$

Donde $f(0) = 0$ y, para encontrar sus productos marginales, expresando $Y = \hat{L} \cdot f(\hat{k})$, derivamos primero a Y respecto a K, manteniendo L y t constantes, obtenemos:

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = f'(\hat{k}) \dots (2)$$

Después, si se deriva Y con respecto a L, manteniendo K y t constantes, obtenemos:

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = \left[f(\hat{k}) - \hat{k} \cdot f'(\hat{k})\right] e^{xt} \dots (3)$$

11 Todas las ecuaciones mostradas en este capítulo son desarrolladas en el apéndice matemático, que es mostrado al final del trabajo, pues consideramos necesario mostrar el origen de las inferencias matemáticas, propias del modelo.

12 Ya hemos aclarado que, para efectos de nuestra investigación, trabajaremos con un parámetro L, donde la tecnología no influye en el crecimiento de la mano de obra.

Mercados Competitivos, Hogares y Empresas en el Modelo de Ramsey.

La necesidad de presentar este subtema es la siguiente: el modelo de crecimiento de Ramsey puede ser resuelto desde dos perspectivas: la solución individual (familia representativa) o, la solución del planificador social (el gobierno); pero ambas soluciones son paralelas en cuanto a las inferencias que nos permiten hacer respecto al comportamiento de la economía en un marco teórico neoclásico. La diferencia es que en la primera perspectiva la solución depende exclusivamente de la familia representativa, que nos permite generalizar el comportamiento de los demás agentes económicos y, en el segundo caso, la solución es propuesta por un agente encargado de decidir el futuro de todas las familias, mismo agente que puede identificarse como el gobierno.

Aunque en nuestro trabajo desarrollaremos la solución del planificador social, no podemos desconocer los fundamentos que sirven para ambas perspectivas ya mencionadas; por ello, consideramos necesario incluir este subtema, que dará una mayor referencia al lector en cuanto al origen de las ecuaciones que emplearemos más adelante para definir el comportamiento dinámico del modelo.

Hogares.

Ramsey presenta a los hogares integrantes de la economía interactuando bajo las siguientes condiciones:

a) Ofrecen trabajo a cambio de salarios
b) Reciben ingresos en forma de intereses por los activos que poseen.
c) Adquieren bienes para su consumo y ahorran acumulando activos.
d) Todos los hogares son idénticos, por lo cual la representatividad de un solo agente es empleada para determinar el comportamiento de los demás elementos[13].
e) Cada hogar es conformado por uno o más trabajadores adultos de la generación actual.
f) Cuando se planifica el hogar, los adultos toman en cuenta el bienestar y los recursos que tendrán sus descendientes.
g) Existe una relación intergeneracional dentro de la familia, suponiendo que la generación actual busca maximizar su utilidad, incorporando una restricción presupuestaria en un horizonte de tiempo finito[14].
h) Los individuos de la familia se vinculan entre sí mediante una red de transferencias intergeneracionales, basadas en un principio de altruismo.

[13]En este punto, la teoría neoclásica cuestiona si el comportamiento del hogar "representativo" es de verdad el equivalente al comportamiento que obtiene la economía si se promedia el comportamiento de un grupo de familias heterogéneas; ya que, si las diferencias entre los hogares que conforman la economía radican en su nivel de riqueza o productividad y si sus preferencias son basadas en tasas de descuento y parámetros idénticos, en tal caso el consumo, los activos, el ingreso y el capital promedio de los hogares se comportarán exactamente igual que el del hogar representativo. Por lo anterior, el modelo basado en el agente representativo, da a la teoría neoclásica una descripción correcta de las variables promedio de una economía formada por agentes heterogéneos.

[14] El horizonte de tiempo infinito se explica como el hecho de que los padres entienden la descendencia como algo infinito, como una dinastía que se extiende a lo largo del tiempo.

i) Los adultos de la generación actual proyectan el crecimiento de la familia a una tasa n.
j) La tasa de crecimiento, n, se mantiene como exógena y constante en el tiempo, con lo cual, el número de adultos de la familia en el momento t es igual a:

$$L(t) = e^{nt} \quad \dots (4)$$

k) El factor tecnológico[15] crece igualmente a una tasa exponencial:

$$T(t) = e^{xt} \quad \dots (5)$$

Ahora bien, se nos propone maximizar la utilidad total de acuerdo con lo siguiente:

$$\int_{o}^{\infty} U[c(t)]\, e^{-\rho t}\, dt \quad \dots (6)$$

Donde:

a) La función $U[c(t)]$ es creciente con respecto a c.
b) La función se vuelve cóncava dado que $u^{'}(c) > 0$ y $u^{''}(c) < 0$. Este supuesto de concavidad relaciona una preferencia por el consumo regular en el transcurso del tiempo, es decir, existe la preferencia por un patrón de consumo relativamente uniforme a otro donde c sea muy bajo en determinado período y después se vuelva muy alto para otro tiempo.
c) el factor $e^{-\rho t}$ relaciona la tasa de preferencia temporal, donde $\rho > 0$ y este valor positivo implica que las utilidades son menos valoradas cuanto más tarde se perciben. Un motivo por el cual ρ es positivo es que, las utilidades que se perciben en momentos lejanos en el tiempo, corresponden al consumo de las generaciones futuras; Ramsey propone distinguir la tasa a la cual los individuos descuentan su flujo de utilidad en distintos momentos del tiempo, pero, por simplificación, establece que dicha tasa de descuento en la vida de una persona es la misma que entre todas las generaciones.

Se deduce que la preferencia por el consumo regular rige el comportamiento del ahorro de los hogares, dado que éstos podrían pedir dinero prestado en los momentos para los cuales su ingreso sea bajo y, podrían ahorrar en los momentos donde su ingreso sea alto. Cabe destacar que la función $u(c)$ actúa de acuerdo con las condiciones de Inada.

Aunque nuestra economía nunca ha sido del todo cerrada al sector externo, expondremos el caso de México como una economía cerrada, para simplificar la explicación de los demás factores que intervienen en la economía; así pues, sabiendo que los hogares poseen activos en forma de derechos de propiedad sobre el capital ó en forma de préstamos concedidos a otros, estos préstamos representan una deuda y el hogar representativo tiene préstamo neto igual a cero; dado que se han supuesto dos tipos de activo:

a) Capital.

[15] Recuerde la aclaración que hemos hecho respecto a la contribución que tiene el progreso tecnológico sobre el crecimiento de la mano de obra.

b) Préstamos.

Ambos son sustitutivos perfectos como depósitos de valor, generando la misma tasa de rendimiento real $r(t)$; los activos netos per cápita del hogar se denotan como $a(t)$, activos medidos en términos reales, es decir, unidades de bienes de consumo.

El entorno de competencia está presente en el modelo de Ramsey, incluyendo el caso de los hogares, los cuales también se desempeñan en este sentido, tomando el tipo de interés $r(t)$ y el salario pagado por cada unidad de trabajo, $w(t)$, como dados; por lo anterior, el ingreso total que reciben el total de los hogares es la suma del ingreso salarial y el ingreso de los activos:

$$w(t) \cdot L(t) + r(t) \cdot activos$$

Recuérdese que el ingreso que no se emplea en consumo es utilizado para acumular más activos, por lo cual entonces:

$$\frac{d(activos)}{dt} = r \cdot (activos) + wL - C \ldots (7)$$

Si a representa los activos per cápita:

$$\dot{a} = \left(\frac{1}{L}\right) \cdot \left[\frac{d(activos)}{dt}\right] - na \ldots (8)$$

Si se divide la ecuación (7) entre L, se obtiene la restricción presupuestaria per cápita:

$$\dot{a} = w + ra - c - na \ldots (9)$$

Empresas.

Interactúan bajo las siguientes condiciones:

a) Producen bienes.
b) Pagan salarios por el factor trabajo
c) Pagan renta por el factor capital
d) Todas tienen acceso a la tecnología para producir.

Esto se reúne bajo la ecuación:

$$Y(t) = F[K(t), L(t), T(t)]$$

Donde:

1) Y representa el flujo de producción.
2) K es el factor capital medido en unidades de bienes.
3) L es el factor trabajo medido en horas per cápita al año.
4) Las empresas arriendan los servicios del capital a los hogares, que son los propietarios del capital.

5) T es el nivel tecnológico[16] que se supone crece a una tasa constante $x > 0$; por lo cual, $T(t) = e^{xt}$, donde se normaliza al valor de 1 para el tiempo $T(0)$.

De esta función sabemos que cumple con las propiedades neoclásicas. A partir de esto, sabemos que el estado estacionario coexiste con progreso tecnológico a una tasa constante, sólo si el progreso tecnológico es de tal carácter que aumenta la eficiencia del trabajo:

$$Y(t) = F[K(t), L(t) \cdot T(t)]$$

Como hemos visto al comienzo de ese capítulo, las variables fundamentales del modelo están definidas en términos de trabajo efectivo; ahora bien, para estas funciones debemos recordar las condiciones de Inada, mencionadas a partir de la función de producción neoclásica.

Si denominamos como $R(t)$ a la renta que se paga por una unidad de capital, el múltiplo RK determinará el costo total del capital de una empresa; sabemos que los servicios de capital pueden aumentar o disminuir sin que se incurra en gastos adicionales, como la instalación de una maquina u otros cambios. Partimos de un modelo con la producción de un único sector en donde la unidad de producción puede ser utilizada para generar una unidad de consumo C o una unidad de capital K; entonces, cuando la economía no se encuentra en una solución de esquina donde toda la producción se dedica al consumo o al nuevo capital, el precio de una unidad de K se fijará en términos de una unidad de C. Dado que $C \neq 0$ en el equilibrio, la teoría neoclásica contempla únicamente la posibilidad de que no exista una fracción de la producción que se dedique al nuevo capital; es decir, que la inversión bruta sea igual a cero. También aceptaremos que la inversión es irreversible.

Si el stock de capital se deprecia a una tasa constante $\delta > 0$, la tasa neta de rendimiento de un hogar que posee una unidad de capital es $R - \delta$; recordemos que la teoría neoclásica señala que los hogares también pueden percibir un tipo de interés r por los fondos prestados a otros hogares. Dado que el capital y los préstamos son sustitutivos perfectos en tanto depósitos de valor, entonces $r = R - \delta$ o, lo que es lo mismo, $R = r + \delta$. El flujo de ingresos netos o beneficios de una empresa representativa para cualquier momento del tiempo queda expresado de la siguiente forma:

$$\pi = F(K, \hat{L}) - (r + \delta)K - wL \ldots (10)$$

El problema de maximizar el valor actual del beneficio se reduce en este caso a un problema de maximización del beneficio para cada periodo, sin tener en cuenta las consecuencias que haya sobre otros períodos. Entonces el beneficio queda expresado como:

$$\pi = \hat{L} \cdot [f(\hat{k}) - (r + \delta)\hat{k} - we^{-xt}] \ldots (11)$$

Una empresa competitiva, que toma a r y w como dados, maximiza su beneficio para un $\hat{L}$ dado cuando:

$$f'(\hat{k}) = r + \delta \ldots (12)$$

[16] Una vez más, hacemos un llamado a recordar la aclaración concerniente al caso de progreso tecnológico; para efectos de la función de producción, la forma intensiva comprenderá solamente el caso de la población, sin que el factor tecnológico influya en dicha mano de obra.

Para un equilibrio de mercado, w es igual al producto marginal del trabajo correspondiente al valor de $\hat{k}$ que cumple con la ecuación (12):

$$[f(\hat{k}) - \hat{k}f'(\hat{k})]e^{xt} = w \ldots (13)$$

La condición anterior es la que garantiza precisamente que el beneficio sea igual a cero para cualquier valor de $\hat{L}$.

A partir de la restricción presupuestaria de activos per cápita (9), para el modelo de Ramsey es posible construir una ecuación fundamental que determine el comportamiento de $\hat{k}$e $\hat{y}$; y a su vez, dicha ecuación será sumamente importante para definir el problema de asignación óptima que enfrenta el planificador social.

La construcción de ésta ecuación fundamental a partir de la restricción presupuestaria es propuesta por diversos autores, dado que ello implica resaltar las cualidades de ambas ecuaciones, ya sea en su forma centralizada (cuando hay un planificador social encargado del proceso de optimización, generalmente visto como el gobierno cumpliendo sus funciones de dirección económica) o descentralizada (cuando la optimización es realizada por los hogares que conforman la economía).

A partir de la restricción de activos per cápita, obtenemos la siguiente ecuación fundamental:

$$\dot{\hat{k}} = f(\hat{k}) - \hat{c} - (\delta + n + x)\hat{k} \ \ldots (14)$$

En la perspectiva de la planificación social, la asignación intertemporal de recursos es resuelta de manera exógena por un planificador social, quien tiene la función de maximizar el bienestar social en todo momento. La elección que corresponde a dicho planificador social responde una sencilla pregunta: **¿Cuánto debe consumir una familia representativa y en cuanto se debe incrementar el stock de capital para proporcionar consumo a futuras generaciones?**Para responder ésta incógnita, partiendo de las ecuaciones (6) y (14), el problema se define de la siguiente manera[17]:

$$Max\ U = \int_{o}^{\infty} U[c(t)]\, e^{-\rho t}\ dt$$

s.a: $\dot{\hat{k}} = f(\hat{k}) - \hat{c} - (\delta + n + x)\hat{k}$

$$\hat{k} \geq 0$$

$$\hat{c} \geq 0$$

$$\hat{k}(0)\ es\ dado$$

[17] El proceso de solución del Hamiltoniano empleado en este trabajo es propuesto por el Doctor Ciro Bazán, el cual designa un peso específico al factor tecnológico manejado por el modelo de Ramsey.

En lo anterior, la restricción dinámica es la ecuación de estado o de movimiento de la variable de estado; es decir, para este problema de optimización dinámica, la variable de estado es $\hat{k}$ y la variable de control es $\hat{c}$. Pero también emplearemos una variable de co-estado, λ, que indica el precio sombra. El problema del planificador consiste en la elección de aquella trayectoria de c que maximiza U en la ecuación (6), dada la restricción presupuestaria de la economía en la ecuación (14), con un valor inicial $\hat{k}(0)$ y las inecuaciones o desigualdades $\hat{c} \geq 0$ y $\hat{k} \geq 0$. De lo anterior, dado que $\hat{c} = ce^{-xt}$, la ecuación de Hamilton para el problema del planificador social es:

$$H = \frac{c^{(1-\theta)} - 1}{1-\theta} e^{-\rho t} + \lambda\left[f(\hat{k}) - ce^{-xt} - (\delta + n + x)\hat{k}\right]$$

De lo anterior, obtenemos las Condiciones de Primer Orden necesarias para resolver nuestro problema:

1.- $\frac{\partial H}{\partial c} = \left[c^{-\theta} e^{-\rho t}\right] e^{xt} = \lambda$

2.- $\frac{\partial H}{\partial \hat{k}} = \dot{\lambda} = -\lambda\left[f'(\hat{k}) - (\delta + n + x)\right]$

3.- $\lim_{t\to\infty} \left\{\hat{k} \cdot \lambda(0) e^{-\int_0^t [f'(k) - \delta - n - x] d\lambda}\right\} = 0 \ \ldots (a)$

4.- $\frac{d\lambda}{dt} = \dot{\lambda} = \left\{(x - \rho)c^{-\theta} - \theta c^{-\theta-1}\dot{c}\right\} e^{xt} e^{-\rho t}$

Si sustituimos las ecuaciones de las condiciones 1 y 4 en la condición 2, entonces encontraremos la ecuación para definir el comportamiento de $\dot{\hat{c}}$; es decir:

$$\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = \left(\frac{1}{\theta}\right)\left[f'(\hat{k}) - (\delta + n + \rho + \theta x)\right] \ \ldots (15)$$

La ecuación anterior es la ecuación de Euler, la cual nos permite completar el sistema de ecuaciones diferenciales que implica la solución del modelo de Ramsey.

Estructura Básica del Modelo.

Ramsey nos permite tener una imagen más completa del proceso de crecimiento económico, puesto que permite la determinación del consumo y la tasa de ahorro por parte de los hogares y las empresas, que ante todo son agentes optimizadores interactuando en un entorno de mercados competitivos. La primera conclusión importante de Ramsey es que la tasa de ahorro no se mantiene constante[18], siendo entonces una función del stock de capital per cápita, k.

En el modelo de Ramsey se proponer que **la economía es propensa a crecer más rápido en términos per cápita cuanto más lejos se encuentra de su propio estado estacionario.** Los libros de teoría neoclásica del crecimiento señalan que, la práctica del modelo sobre economías reales indica que, durante la transición hacia el estado estacionario, las tasas de ahorro muestran un incremento conforme se incrementa el ingreso per cápita; el modelo de Ramsey tiene congruencia con tal comportamiento y permite evaluar las repercusiones del comportamiento del ahorro durante la dinámica de transición.

El Equilibrio.

Una vez que hemos visto el comportamiento de los hogares competitivos que se enfrentan a un tipo de interés r y un salario w dados; así como también hemos visto el comportamiento de las empresas competitivas que se enfrentan a valores dados de r y w; entonces, es pertinente evaluar el equilibrio que surge de la combinación de hogares y empresas en un mercado competitivo. Hablamos de una economía cerrada, por lo cual, la deuda neta del conjunto de la economía es nula: los activos per cápita, a, equivalen al capital por trabajador, k. Esta igualdad entre las variables se explica porque, la totalidad del stock de capital de la economía debe ser propiedad de alguien y, en nuestro caso, los dueños son precisamente los residentes de la economía cerrada. Si fuera el caso de que se analizara una economía abierta, entonces la diferencia que se podría dar entre k y a pertenece a la deuda exterior neta del país en cuestión.

La restricción presupuestaria que se argumentó en la ecuación (9) determina a la variable $\dot{a}$. A partir de la igualdad $a = k$, $\hat{k} = ke^{-xt}$ y las definiciones de r y w en las ecuaciones (12) y (13) obtenemos lo siguiente:

$$\dot{\hat{k}} = f(\hat{k}) - \hat{c} - (x + n + \delta)\hat{k}$$

Donde $\hat{c} \equiv \frac{C}{\hat{L}} = ce^{-xt}$ y $\hat{k}(0)$ vienen dados. Esta ecuación (14) plantea la restricción de recursos del conjunto de la economía: la variación en el stock de capital es igual a la producción menos el consumo y la depreciación; y, la variación de $\hat{k} \equiv \frac{K}{\hat{L}}$ también toma en cuenta el crecimiento de $\hat{L}$a una tasa $x + n$.

[18] Para Solow, la tasa de ahorro y el coeficiente de consumo con respecto al ingreso son exógenos y constantes; de tal manera que, al no permitir al consumidor el optimizar su elección, no es posible analizar la forma como afectan los incentivos al comportamiento de la economía, es decir, no podemos evaluar la reacción de una economía frente a las variaciones que pueden surgir en el tipo de interés, las tasas impositivas de impuestos, etc.

Como lo hemos visto, ésta ecuación diferencial es básica para determinar la evolución de $\hat{k}$ y, en consecuencia, de $\hat{y} = f(\hat{k})$ en el tiempo; pero, el análisis de equilibrio aún se encuentra incompleto, ya que es necesario determinar la variable $\hat{c}$. Si tuviéramos una ecuación diferencial que determinara la evolución de $\hat{c}$, entonces se tendría una dinámica completa de la economía, porque en su defecto, sería importante conocer la relación existente entre $\hat{c}$ y $\hat{k}$ (o $\hat{y}$). Solow suplía esta relación a partir de la tasa de ahorro constante, lo cual implicaba la función de consumo lineal $\hat{c} = (1 - s) \cdot f(\hat{k})$; para Ramsey, mediante el comportamiento optimizador de los hogares, la variable c es determinada por:

$$\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = \left(\frac{1}{\theta}\right)\left[f'(\hat{k}) - (\delta + n + \rho + \theta x)\right]$$

Esta ultima ecuación (15), junto con la ecuación (14) constituyen entonces un sistema de dos ecuaciones diferenciales en $\hat{c}$ y $\hat{k}$; junto con la condición inicial $\hat{k}(0)$ y la condición de transversalidad, establecen la trayectoria temporal de $\hat{c}$ y $\hat{k}$. Pero también tenemos una condición de transversalidad:

$$\lim_{t\to\infty}\left\{\hat{k}\cdot\lambda(0)e^{-\int_0^t[f'(k)-\delta-n-x]d\lambda}\right\} = 0$$

A partir de la ecuación que determina la condición de transversalidad, la ecuación (a), sabemos que $\hat{k}$ alcanza asintóticamente un valor constante de estado estacionario, $\hat{k}^*$; como resultado, la condición de transversalidad de la ecuación (a) plantea que $f'\left(\hat{k}^*\right) - \delta$, que es la tasa de rendimiento en el estado estacionario, sea superior a $x + n$, que es la tasa de crecimiento de K en estado estacionario.

Importancia de la Condición de Transversalidad.

Para el cálculo del equilibrio único, la condición de transversalidad es sumamente importante; dado que $a(t) = k(t)$, la condición de transversalidad se puede expresar de la siguiente forma:

$$\hat{k}(T) = 0 \ldots (16)$$

Esta condición de transversalidad exige que la condición inicial de $\hat{c}(0)$ sea tal, que el stock de capital se iguale a cero en el momento T; es decir, la optimización exige que la economía toque el eje de las ordenadas exactamente en el momento T. Respecto al sistema de ecuaciones dinámicas, éstas seguirán cumpliendo su función de conducir al equilibrio, ya sea en un tramo estable o cualquier otro, dependiendo exclusivamente de la condición de transversalidad.

El Comportamiento de la Tasa de Ahorro.

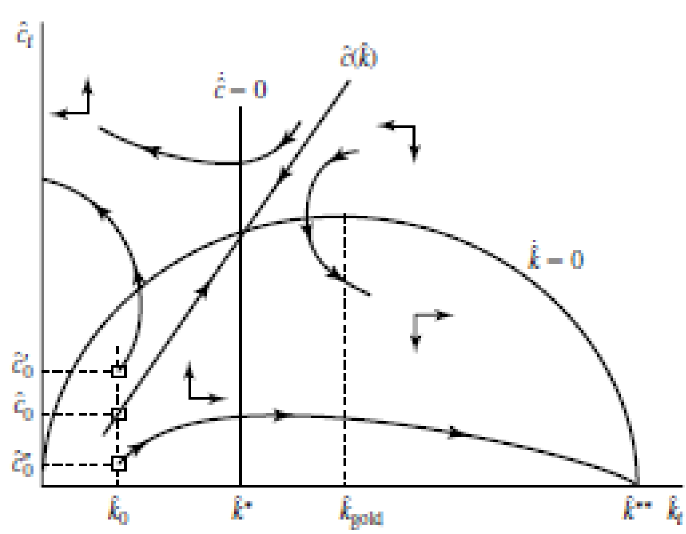
Ramsey admite que, en presencia de consumidores optimizadores, la tasa de ahorro puede seguir una trayectoria complicada que incluye tramos crecientes y decrecientes, conforme la economía se desarrolla y se aproxima al estado estacionario. El comportamiento es incierto por causa del efecto sustitución y el efecto ingreso, los cuales muestran signos contrarios; estos efectos determinan el siguiente comportamiento:

Al aumentar $\hat{k}$, el decremento de $f'(\hat{k})$ causa una disminución de la tasa de rendimiento del ahorro r. La disminución del incentivo al ahorro, que es un efecto intertemporal de sustitución, tiende a disminuir la tasa de ahorro a medida que se desarrolla la economía.El ingreso por trabajador efectivo en una economía de bajos recursos $f(\hat{k})$ se encuentra por debajo del ingreso permanente o a largo plazo de la economía; suponiendo que los hogares prefieren un consumo regular, cuando sus ingresos sean bajos, preferirán consumir mucho más que antes en relación con su ingreso; es decir, cuando $\hat{k}$ es bajo, la tasa de ahorro es baja.Si se incrementa $\hat{k}$, entonces, el diferencial entre el ingreso permanente y el ingreso corriente disminuye; por lo cual, el consumo tiende a disminuir en relación al ingreso actual y la tasa de ahorro tiende a incrementarse; esta influencia, debida al efecto ingreso, tiende a incrementar la tasa de ahorro conforme la economía se desarrolla.En realidad, el comportamiento de la tasa de ahorro durante el periodo de transición depende de cuál de los dos efectos predomine en el escenario; aunque, la teoría neoclásica insiste en afirmar que la trayectoria del ahorro puede ser sumamente compleja.

El Estado Estacionario.

En el estado estacionario, se debe cumplir que las variables per cápita k, c e y, crezcan a una tasa x y que las variables agregadas K, C e Y crezcan en el estado estacionario a una tasa $x+n$. Los valores de estado estacionario de las variables $\hat{c}$ y $\hat{k}$ se determinan igualando a cero las ecuaciones (14) y (15). Observe la siguiente gráfica:

Gráfica 2.1. Diagrama de Fase.



La curva de la gráfica pertenece a la ecuación:

$$\hat{c} = f(\hat{k}) - (x + n + \delta)\hat{k} \ \ldots (17)$$

En la gráfica anterior se muestra el par ordenado $(\hat{k}, \hat{c})$ que cumple la condición $\dot{\hat{k}} = 0$ dada en la ecuación (14); dicha curva alcanza su máximo en $f'(\hat{k}) = (x + n + \delta)$, por lo cual, el tipo de interés se iguala con la tasa de crecimiento de la producción $f'(\hat{k}) - \delta = x + n$. Dicha igualdad se corresponde con el nivel de $\hat{k}$ de la regla de oro propuesta por Solow, dado que conduce a un punto máximo de la función de $\hat{c}$ en el estado estacionario. El valor de $\hat{k}$ que corresponde a la regla de oro se denomina como $\hat{k}_{oro}$.

Dada la ecuación (15), junto con la condición $\dot{\hat{c}} = 0$, nos da el siguiente resultado:

$$f'(\hat{k}^*) = \delta + n + \rho + \theta x \ldots (18)$$

Esta ecuación nos indica que el tipo de interés de estado estacionario $f(\hat{k}) - \delta$, se iguala a la tasa efectiva de descuento $n + \rho + \theta x$; el término θx representa el efecto de la utilidad marginal decreciente del consumo debida al crecimiento de c a una tasa x; la recta vertical en $\hat{k}^*$ representa dicha condición. La clave para calcular $\hat{k}^*$ en la ecuación (18) son los rendimientos decrecientes del capital, los cuales provocan que $f'(\hat{k}^*)$ se vuelva una función monótona y decreciente de $\hat{k}^*$.

La gráfica anterior muestra el cálculo de los valores de estado estacionario $(\hat{k}^*, \hat{c}^*)$ en el punto de intersección de la curva con la recta vertical; si $\hat{k}^*$ se calcula a partir de la ecuación (18), el valor de $\hat{c}^*$ procede de igualar a cero la ecuación (14):

$$\hat{c}^* = f(\hat{k}^*) - (x + n + \delta)\hat{k}^* \ldots (19)$$

Observe que:

$$\hat{y}^* = f(\hat{k}^*) \ \ldots (20)$$

Lo anterior es el valor de estado estacionario de $\hat{y}^*$.

Ahora bien, al maximizar la ecuación (19) con respecto al capital, podremos encontrar la "regla de oro", que es el punto donde se maximiza el consumo por unidad efectiva de trabajo en el estado estacionario. Esto es lo siguiente:

$$\frac{d\hat{c}^*}{dk} = f'(\hat{k}^*) - (x + n + \delta)$$

$$f'(\hat{k}^*) = x + n + \delta \ldots (21)$$

Así pues, a diferencia de la ecuación (18) la regla de oro solamente involucra la tasa de progreso tecnológico, la depreciación y la tasa de crecimiento poblacional, con lo cual asume un valor mayor al determinado mediante la ecuación (18) precisamente. La diferencia entre los estados estacionarios definidos mediante (18) y (21) es determinada por la preferencia intertemporal, que implica evitar la reducción del consumo actual en busca de mayor consumo futuro, calculado precisamente a partir de (21).

Este modelo optimizador propuesto por Ramsey, limita el exceso de ahorro ineficiente. Debemos notar que el hogar optimizador no ahorra lo suficiente como para acceder al valor de la regla de oro $\hat{k}_{oro}$; el motivo de esto radica en que la impaciencia recogida en la tasa efectiva de descuento, $\rho + \theta x$, hace que no valga la pena sacrificar más consumo actual a fin de alcanzar el máximo de $\hat{c}$ de estado estacionario, $\hat{c}_{oro}$.

Las tasas de crecimiento en estado estacionario no tienen dependencia de los parámetros que caracterizan la función de producción, o de ρ y θ, que son los parámetros de preferencia que caracterizan las actitudes de los hogares en lo que respecta al consumo y al ahorro. Estos parámetros si muestran efectos a largo plazo sobre los niveles de las variables. Para mostrar lo anterior, observemos la gráfica anterior y razonemos las siguientes condiciones:

a) Un aumento en la disposición a ahorrar, que es representado por una disminución de ρ o θ, desplaza $\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = 0$ hacia la derecha y $\dot{\hat{k}} = 0$ no varia. Este desplazamiento motiva valores más altos de $\hat{c}^*$ y $\hat{k}^*$ y, como resultado, un mayor valor de $\hat{y}^*$.
b) Un desplazamiento proporcional ascendente de la función de producción o una disminución de la tasa de depreciación, δ, desplaza hacia arriba la curva $\dot{\hat{k}} = 0$ y la recta $\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = 0$ a la derecha. Estos desplazamientos provocan incrementos en $\hat{c}^*$, $\hat{k}^*$ e $\hat{y}^*$.
c) Un incremento de x causa un aumento en el término que expresa la preferencia temporal afectiva, $\rho + \theta x$, de la ecuación (18) y también disminuye el valor de $\hat{c}^*$ que corresponde a un valor dado de $\hat{k}^*$ en la ecuación (19). En la gráfica anterior, estos cambios originan un desplazamiento descendente de $\dot{\hat{k}} = 0$ y $\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = 0$ se desplaza hacia la izquierda, generando que se reduzcan los valores de $\hat{c}^*$, $\hat{k}^*$ e $\hat{y}^*$; aunque $\hat{c}$ disminuye, la utilidad aumenta dado que el aumento en x causa un incremento en la tasa de crecimiento de c en relación con $\hat{c}$.
d) Si se mantiene fijo al parámetro ρ, el efecto de n sobre $\hat{k}^*$ e $\hat{y}^*$ es nulo; la ecuación (19) implica que $\hat{c}^*$ disminuye; si una n mayor causa una tasa de preferencia temporal mayor, entonces un incremento de n reducirá a $\hat{k}^*$ e $\hat{y}^*$.

Comportamiento Alrededor del Estado Estacionario.

De acuerdo con el Dr. Ciro Bazán, para observar el comportamiento de las variables $\hat{k}$ y $\hat{c}$ en el estado estacionario, es necesario realizar una aproximación lineal del sistema dinámico conformado por las ecuaciones:

$$\dot{\hat{k}} = f(\hat{k}) - \hat{c} - (x + n + \delta)\hat{k}$$

$$\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = \left(\frac{1}{\theta}\right)\left[f'(\hat{k}) - (\delta + n + \rho + \theta x)\right]$$

De este sistema y, mediante regla de Taylor, podemos conformar un sistema de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas que nos permita definir las ecuaciones de comportamiento para llegar al estado estacionario, ya determinado por estas mismas ecuaciones en párrafos anteriores. El proceso para llegar a estas ecuaciones es mostrado en el apéndice matemático incorporado en el apéndice matemático, por ahora, dejamos asentado que estas ecuaciones de comportamiento son las siguientes:

$$f(\hat{k}, \hat{c}) \approx f(\hat{k}^*, \hat{c}^*) + \frac{\partial f(\hat{k}^*, \hat{c}^*)}{\partial \hat{k}} \cdot [\hat{k} - \hat{k}^*] + \frac{\partial f(\hat{k}^*, \hat{c}^*)}{\partial \hat{c}} \cdot [\hat{c} - \hat{c}^*]$$

$$g(\hat{k}, \hat{c}) \approx g(\hat{k}^*, \hat{c}^*) + \frac{\partial g(\hat{k}^*, \hat{c}^*)}{\partial \hat{k}} \cdot [\hat{k} - \hat{k}^*] + \frac{\partial g(\hat{k}^*, \hat{c}^*)}{\partial \hat{c}} \cdot [\hat{c} - \hat{c}^*]$$

Teniendo como solución el siguiente desarrollo:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{k}} \\ \dot{\hat{c}} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \beta & -1 \\ \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{k} - \hat{k}^* \\ \hat{c} - \hat{c}^* \end{bmatrix} \equiv A \begin{bmatrix} \tilde{\hat{k}} \\ \tilde{\hat{c}} \end{bmatrix}$$

Donde finalmente:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{k}} \\ \dot{\hat{c}} \end{bmatrix} = c_1 \binom{a_1}{b_1} e^{\lambda_1 t} + c_2 \binom{a_2}{b_2} e^{\lambda_2 t}$$

Donde:

λ_1 y λ_2 son las raíces características o autovalores de una matriz A.

a_1, a_2, b_1 y b_2 son constantes a determinar.

Y, para encontrar el nivel de consumo perteneciente al nivel inicial de capital por unidad de trabajo efectivo, tenemos la ecuación:

$$\hat{c} = \hat{c}^* - \frac{u_1}{v_1}(\hat{k} - \hat{k}^*)$$

O viceversa, para determinar el nivel de capital correspondiente al nivel inicial de consumo se emplea la ecuación:

$$\hat{k} = \hat{k}^{*} - \frac{v_1}{u_1}(\hat{c} - \hat{c}^{*})$$

Por su parte, el comportamiento en el tiempo del consumo por unidad efectiva de trabajo se determina por:

$$\hat{c}_t = \hat{c}^{*} + (\hat{c}_0 - \hat{c}^{*})e^{\lambda_2 t}$$

Finalmente, el comportamiento del capital en el tiempo queda definido por:

$$\hat{k}_t = \hat{k}^{*} + \left(\hat{k}_0 - \hat{k}^{*}\right)e^{\lambda_2 t}$$

Para efectos de la simulación propuesta en este trabajo, emplearemos el software **Matlab R2012a**, donde se elaborará un script[19] a partir de las ecuaciones expuestas en este segundo apartado del trabajo, las cuales fueron desarrolladas en el apéndice matemático de ésta investigación; posteriormente, el script se complementa con las últimas ecuaciones que hemos expuesto para el comportamiento alrededor del estado estacionario.

El proceso de cálculo que hemos usado al comienzo del siguiente capítulo, para ejemplificar nuestros resultados mostrados en la sección B del anexo estadístico, define todas y cada una de las ecuaciones a usar dentro de la simulación, mismas que fueron introducidas como comandos al script de Matlab, para generar un programa que logre dar como resultado la dinámica completa del modelo, de acuerdo con los valores asignados a los parámetros estructurales.

[19] El script (m-file) de Matlab será mostrado al final de apéndice matemático; al respecto, su aplicación en Matlab no debe representar ningún problema para el lector, salvo en el caso de que la versión empleada sea atrasada y la forma de introducir los comandos sea distinta respecto de la última versión, la cual fue empleada para este trabajo.

CAPITULO III. SIMULACIÓN DEL MODELO.

Toda vez que hemos revisado las directrices generales del modelo de Ramsey, debemos comenzar la lectura de este capítulo recordando que un modelo es la abstracción de los elementos más indispensables dentro del universo de variables que ayudan a explicar un fenómeno observable en el campo real y que, generalmente, la simulación de los modelos neoclásicos de crecimiento sobre una economía real es sumamente complicado, ya que existen limitantes propias del modelo y otras derivadas de los datos disponibles para resolver los coeficientes que se proponen en la teoría neoclásica;. Por lo anterior, antes de pasar a la aplicación pura del modelo, debemos transitar un poco sobre el perfil real del mismo para el caso mexicano y de los coeficientes que emplearemos en este trabajo.

Población Total, PEA Urbana y PEA Rural.

Como ya lo hemos visto, el modelo propone asumir el total de la población y su tasa de crecimiento como un sinónimo de la mano de obra, que crece de forma exponencial y que es homogénea en cuanto a las cualidades necesarias para desempeñar labores productivas; pero como sabemos, este supuesto es claramente arbitrario en cuanto a nuestro país, pues difícilmente podemos observar un nivel homogéneo de población, sabiendo que fundamentalmente nuestro territorio se compone de dos tipos de ésta, a saber: la población rural y la población urbana.

Pero, para fines de una explicación cualitativa y cuantitativa del modelo, vamos a asumir en un primer momento a la población total como el total de mano de obra disponible, empleando la tasa de crecimiento exponencial del total de la población en México, lo cual nos permite evaluar los valores de estado estacionario correspondientes al conjunto de la economía de acuerdo con la teoría de Ramsey; posteriormente evaluaremos precisamente a los dos núcleos poblacionales que ya hemos mencionado anteriormente, calculando una aproximación a la PEA urbana y rural, de acuerdo con los criterios establecidos por el INEGI[20].

Si delimitamos dos tipos de producción fundamentales para la economía: agrícola e industrial, necesitamos que ambos tipos de labores sean llevadas a cabo por dos tipos de población: rural y urbana respectivamente; por lo tanto, a partir de los censos nacionales de población

[20] El Instituto Nacional de Estadística Geografía e Informática ha cambiado su definición y el rango de edad concerniente a la Población Económicamente Activa; en 1990 su definición era "Total de personas de 12 años y más que en la semana de referencia se encontraban ocupadas o desocupadas.", mientras que en 2010 se redefinió como "Personas de 12 y más años de edad que tuvieron vínculo con la actividad económica o que lo buscaron en la semana de referencia, por lo que se encontraban ocupadas o desocupadas". Pero recientemente, el 12 de Febrero de 2014, mediante el boletín de prensa 60/14, el INEGI ha vuelto a definir a la PEA como "Población de 14 o más años de edad que durante el periodo de referencia realizó una actividad económica (población ocupada) o buscó activamente hacerlo (población desocupada en las últimas cuatro semanas), siempre y cuando haya estado dispuesta a trabajar en la semana de referencia"

realizados en nuestro país, aproximaremos la PEA urbana y la PEA rural, a partir de la población con 15 años de edad en adelante, calculando la tasa de crecimiento anual para cada núcleo poblacional. Lo anterior es una simplificación que nos puede acercar un poco más al escenario real para simular el modelo neoclásico, lejos de la suposición de una población y una labor homogénea; aunque debemos aceptar que siguen existiendo características que escapan a las previsiones que la teoría del crecimiento ha hecho respecto de la población y los sectores productivos.

El referente de ambas poblaciones fue tomado de la siguiente forma: a partir de los núcleos poblacionales por número de habitantes, se delimitó a la población rural como aquellas concentraciones poblacionales con un máximo de 2,500 habitantes, de los cuales, tomamos en cuenta solamente a los habitantes de 15 años de edad en adelante; por su parte, la población urbana fue definida con núcleos que contienen más de 2,500 habitantes, extrayendo igualmente a los pobladores de 15 años en adelante. La tasa de crecimiento calculada para cada población fue realizada de forma exponencial cada diez años, de acuerdo con los censos poblacionales de México.

Ahora bien, el hecho de asumir únicamente dos tipos de población y dos tipos de producción no significa que desconozcamos la importancia que día a día toma el sector servicios dentro de nuestra economía; simplemente, presentamos un panorama básico sobre dos tipos de producción fundamental para el país, implementando dos tipos de población.

Producción Agrícola e Industrial.

Ya hemos visto lo que implica el trabajar dos tipos de población para nuestra simulación, pero ahora, dentro de un contexto nacional, debemos preguntarnos lo siguiente: ¿puede haber un nivel de homogeneidad dentro de todos los sectores que integran la producción agrícola e industrial?, ¿siempre se emplea capital y trabajo en la producción?, pero sobre todo, ¿puede una función de producción reunir la homogeneidad de todos los sectores productivos? Claramente, la respuesta a la primera y segunda incógnita es un rotundo no, pues cada producción emplea diversos niveles de capital y trabajo y, en algunos otros casos, se produce únicamente con uno sólo de estos, recordando que en nuestro país no es desconocido el hecho de que siguen existiendo modos de producción pre capitalista, sobre todo dentro de la producción agrícola.

Respecto a la tercera pregunta y, derivado de lo anterior, asumir que una función de producción reúne dentro de sus coeficientes a la generalidad de producciones, tanto agrícolas como industriales, es arbitrario, pues no podemos asegurar que la participación del capital y la mano de obra exista en las mismas proporciones para todos las situaciones; en todo caso, para aseverar tal escenario, requeriríamos estudiar a fondo cada producción, lo cual exige un tiempo mayor de estudio e investigación de campo, un estudio que debe ir más allá de los datos disponibles en las bases de datos en México y los alcances de esta investigación.

Sabido es que sigue existiendo una marcada diferencia entre los dos sectores que hemos propuesto simular y, sobre todo, sigue habiendo brechas al interior de cada sector, lo cual aumenta la divergencia entre capacidades productivas, mismas que no pueden definirse exclusivamente bajo una función de producción del tipo Cobb-Douglas. Esta última función de producción es la que generalmente se emplea para el modelo de Ramsey, dada la sencillez con que trabaja, pero sobre todo, por sus aportes a nivel académico, lo cual claramente puede diferir de las funciones de producciones efectivamente empleadas en los sectores productivos mexicanos.

Por sencillez, adoptaremos una función de tipo Cobb-Douglas, en su modalidad intensiva, para cada tipo de producción, aun cuando ya hemos hablado de las limitaciones que ofrece su incorporación al esquema neoclásico[21], pero reconociendo que existen otras funciones como la Función CES[22], que se desarrolla bajo los mismos parámetros neoclásicos, aunque bajo otras implicaciones que originalmente no son abordadas por la función Cobb-Douglas. Por lo

[21] La forma agregada de la función de producción neoclásica del tipo Cobb-Douglas es la siguiente:

$$Y = K^{\alpha} L^{1-\alpha}$$

Si se propusiera una revisión exhaustiva de las actividades económicas que se realizan en el país, el intento de homogeneizar los parámetros y coeficientes de la función es complicado, pues seguramente existirían variaciones considerables no sólo entre los sectores industrial y agrícola, sino también al interior de cada uno de los sectores, dado que tampoco puede asumirse la homogeneidad de la eficiencia con que se produce; por lo tanto, quizá el único caso en el cual pudiera ser completamente válida la función de producción Cobb-Douglas sería aquel donde se estudia solamente una actividad productiva, involucrando solamente el total de personas empleadas en dicha labor o, relacionadas estrictamente a dicha producción.

[22] La función de Elasticidad de Sustitución Constante (CES por sus siglas en inglés), viene a aportar a la teoría de la producción un avance, pues aquellos casos que no son abordados por la función Cobb-Douglas, si pueden ser referidos por la función CES, que es un "caso general" de la producción. Su forma funcional es la siguiente:

$$Y = [\alpha K^{\rho} + (1-\alpha) L^{\rho}]^{\frac{\mu}{\rho}}$$

La función CES cumple con los rendimientos constantes a escala, los rendimientos marginales de los factores productivos y el agotamiento del producto entre las remuneraciones realizadas a los factores productivos. Puntualmente, la función nos ayuda con tres casos específicos:

1.- Cuando se demandan factores productivos en función de su costo individual de uso, lo que viene a ser reflejado por una función Cobb-Douglas.

2.- Cuando existe la posibilidad de que únicamente podamos producir usando un determinado factor u otro, pero no ambos, lo que conlleva a sospechar una perfecta sustitución entre los mismos, por lo que pensaríamos en una función lineal.

3.- podríamos suponer que necesitamos de una combinación o ratio fijo de K y L para producir, por lo que cualquier ratio o combinación distinta es inútil; por lo que podríamos deducir una relación de complementos perfectos (ecuación Leontief).

Lo anterior refiere el hecho de que cada tipo producción puede variar de forma radical, por lo cual no es posible homogeneizar todos los sectores productivos bajo un mismo criterio y, si bien es cierto que la función CES también cambiará conforme el tipo de producción lo requiere, también lo es que sirve precisamente como un caso general, donde se pueden abordar los diversos escenarios dependiendo del valor que asuman los coeficientes.

anterior, la forma funcional intensiva de la función de producción Cobb-Douglas es la siguiente:

$$\hat{y} = \hat{k}^{\alpha}$$

Donde:

$\hat{y}$= producto por trabajador efectivo.

$\hat{k}$= es el capital por trabajador efectivo.

α= elasticidad de la producción ante una variación de una unidad porcentual en el coeficiente capital-trabajo.

Como lo hemos mencionado, en ésta simulación vamos a distinguir dos tipos de producción y, para cada una, vamos a definir un coeficiente α distinto; en el caso de la producción agrícola nuestro coeficiente será $\alpha = 0.3$ y, para el caso industrial $\alpha = 0.5$. A manera de simplificar nuestro análisis y, dado que el tema de la función de producción y sus inferencias para la teoría del crecimiento es muy amplio, vamos a mantener fijos los valores para ambas funciones de producción durante nuestro período de simulación; posteriormente haremos inferencias sobre los efectos que tendría un movimiento en el coeficiente α.

El Progreso Tecnológico.

Uno de los coeficientes involucrados en nuestra simulación es el progreso tecnológico, el cual, en una primera aproximación, refleja la importancia de la inversión en investigación y desarrollo (I+D) dentro del territorio mexicano, sin aclarar la procedencia de dicha inversión, ya sea privada o pública. Este coeficiente, que se asume como exógeno y que crece de forma de exponencial, es difícil de definir, pues también debemos tomar en cuenta que el progreso tecnológico no es el resultado únicamente de inversiones físicas, estereotipadas como resultado de unas cuantas áreas de conocimiento científico; sino que también es el resultado de un proceso de renovación en la forma de administrar los factores productivos, distribuir los bienes, dirigir las empresas y, sobre todo, la administración de un gobierno.

Es decir, si entendemos que la tecnología es una clave del grado de crecimiento y competitividad productiva, entonces podemos comprender la necesidad de su implementación para generar interacciones apropiadas entre los diversos agentes económicos y los sectores productivos. Un cambio tecnológico bien orientado puede permitir el crecimiento y desarrollo económico sustentable; aunque también podría tener efectos indeseables de tipo económico, ambiental, distributivo, etc. Pero sobre todo, debemos comprender el progreso tecnológico con carácter sistémico, donde el carácter autónomo de los agentes puede minar el desempeño del sistema en su conjunto.

Como ya hemos observado en el capitulo anterior, la teoría neoclásica ha creado una estructura analítica que emplea diversas herramientas para tratar los temas de asignación eficiente de recursos, siendo el factor tecnológico el más limitado en esta visión, pues en general se le considera como un elemento exógeno que influye en el equilibrio intertemporal a cargo de un planeador social. Por lo anterior, entendamos que la tecnología no es una peculiaridad o un factor que interviene de forma exógena en la producción, pues es ante todo un factor dinámico y sistémico; si pensamos en décadas pasadas en nuestro país, claro está que lo hecho en el pasado afecta las capacidades actuales y futuras en los sectores productivos, condicionando su funcionamiento y su desempeño; el carácter sistémico del progreso tecnológico nos lleva a entender que las acciones aisladas, enfocadas a un sólo sector o una determinada industria, producen divergencias respecto al total de los sectores y que, cuando menos, requiere una acción conjunta del sistema económico y social.

Finalmente, podemos entonces decir que un coeficiente empleado por el modelo exige un estudio demasiado amplio como para ser abordado en una tesis de estas características; pero más aún, el empleo de este coeficiente como representante del progreso tecnológico en nuestro país es arbitrario desde nuestra perspectiva, pues no nos permite ver la amplia definición que ya hemos tratado párrafos más arriba, donde se involucra la tecnología tangible y la no tangible. Para cumplir con nuestra simulación, dadas las complejidades que enfrenta la medición del progreso tecnológico, hemos decidido trabajar con tres valores para la tasa de crecimiento del progreso tecnológico: 1%, 5% y 9% anualmente; en forma decimal: 0.01, 0.05 y 0.09

La Depreciación del Capital.

Otro de los componentes del modelo de Ramsey es el factor de depreciación del capital, que asumiéndose lineal y constante en el tiempo, nos indica la fracción del valor de un activo empleado en la producción que se va perdiendo con el paso de tiempo hasta que llega al final de su periodo de vida útil. La implicación de dos sectores productivos en nuestra simulación del modelo neoclásico de crecimiento requiere encontrar los diversos activos empleados en cada producción, así como su periodo de vida útil y su precio inicial, lo cual nos llevará a encontrar el porcentaje de depreciación que cada activo posee.

Este proceso de investigación para cada caso particular es igualmente extenso, pues en realidad, no solamente podemos hablar de máquinas empleadas en la producción, dado que existen activos complementarios en el proceso productivo que igualmente influyen; por tal motivo, encontrar los datos necesarios para el cálculo de dicho coeficiente implica evaluar cada diez años el periodo de vida útil y el precio de la maquinaria empleada dentro de cada tipo de producción, algo que está fuera de los limites de nuestra investigación.

Por tal motivo, siguiendo a la teoría neoclásica, la cual señala la existencia de un criterio de homogeneidad entre todos los tipos de activos, tal que se pueda llegar a un coeficiente único que denote la depreciación para los activos agrícolas e industriales por separado, debemos reconocer las complicaciones reales que surgen al intentar medir dicha depreciación. Por lo anterior y, dado el alcance de este trabajo, nos limitaremos a trabajar con un valor de depreciación de 10% (0.10 en forma decimal) anual para ambos tipos de maquinaria, tanto agrícola como industrial.

Elasticidad de Sustitución Intertemporal Constante.

La expresión sugerida por Sala-i-Martin y Barro, es la siguiente:

$$U(c) = \frac{c^{(1-\theta)} - 1}{1-\theta}$$

Definida como la Elasticidad de Sustitución Intertemporal Constante, donde $\theta > 0$, de tal forma que la elasticidad de la utilidad marginal es igual a la constante $-\theta$. La elasticidad de sustitución en ésta función de utilidad es la constante $\sigma = \frac{1}{\theta}$; por lo tanto, cuanto mayor sea el valor de θ, más rápida será la disminución proporcional de $u'(c)$en respuesta a incrementos en en c, o lo que es lo mismo, existe una menor disposición a la sustitución intertemporal del consumo y, en consecuencia, menos dispuestos estarán los hogares a aceptar desviaciones del patrón regular del consumo c a lo largo del tiempo; por otra parte, si c se aproxima a cero, entonces los hogares serán indiferentes a consumir en un momento u otro del tiempo.

En nuestra simulación vamos a trabajar precisamente a partir de la forma funcional propuesta por los autores en su desarrollo teórico del modelo de Ramsey; sin embargo, debemos reconocer que el debate en torno al cálculo más apropiado dela ESIC en el campo real va mucho más allá de una sola función o de un solo criterio, pues existen autores con propuestas distintas para abordar este coeficiente. Para algunos autores, este es uno de los parámetros de preferencias más importantes que existen para los modelos macroeconómicos actuales, pues nos permite conocer lo efectos de la política económica, sobre todo en lo referente al ahorro; pero su estimación implica ciertas complejidades empíricas[23], pues en algunos casos las funciones de utilidad y los datos empleados quedan limitados en la comprensión del total de factores que intervienen en tal coeficiente.

Por otro lado, en términos generales, siguiendo la idea de José Alberto Molina Chueca[24], *"las funciones de consumo permiten modelar decisiones de los agentes relativas a la distribución del gasto total entre distintos períodos, mientras que la elasticidad de sustitución intertemporal permite medir la sensibilidad de los consumidores en lo que respecta a cambios en la distribución intertemporal del gasto total."*De lo anterior se sigue que, para este autor, la ESIC

[23] Una referencia de ello lo tenemos en Márquez de la Cruz, Elena; et. al; *"La Elasticidad de Sustitución Intertemporal con Preferencias no Separables Intratemporalmente: los casos de Alemania, España y Francia"*

[24] Molina Chueca, José Alberto, 1998, *"La Elasticidad de Sustitución Intertemporal en el consumo: Evidencia Empírica en países representativos de la OCDE"*; en "Estudios de Economía Aplicada", Universidad de Zaragoza, España, páginas 119-131.

está en función de la forma funcional bajo la cual se representará el consumo, por lo tanto, reducir el criterio de cálculo a una sola función deja de lado aspectos que en un momento determinado pueden influir en el cálculo mismo.

A partir de las dos visiones teóricas presentadas anteriormente, encontramos que existen puntos en común respecto de la dificultad que representa, en el campo empírico, ajustar un modelo a los datos reales; lo anterior debido a tres causas fundamentales:

1) Uso de funciones de utilidad inadecuadas, de las cuales se buscan características deseables.
2) Datos de consumo inadecuados, basados casi exclusivamente en el consumo de bienes no duraderos, lo cual deja de lado la relevancia que tiene la utilidad de los bienes duraderos y de los servicios; esto es una causa de que los modelos de ESIC presenten parámetros sesgados.
3) En algunas ocasiones y, contrario a lo anterior, se han realizado estimaciones de ESIC sobre un único bien de consumo no duradero, dando como resultado valores sumamente bajos para este parámetro.

Dado lo anterior, debemos entender que la asignación de un único valor es realizada a través de un modelo que reúne dentro de sus argumentos una amplia gama de bienes interactuando bajo relaciones funcionales; por lo tanto, el cálculo de tales modelos propuestos es algo mucho más complejo y escapa a las posibilidades de esta investigación. Pero sabemos que, para el caso del modelo de Ramsey, donde se asume una función de utilidad CRRA[25], existe un intervalo de valores que permiten a esta función de utilidad ayudarnos en nuestras inferencias; dicho intervalo es $0 < \theta < 1$, el cual será abordado para esta simulación propuesta sobre dos sectores productivos distintos. Puntualmente, los valores que asume el coeficiente son 0.10, 0.50 y 0.90.

Factor de Preferencia Intertemporal del Consumo.

Para el modelo de Ramsey, analizado mediante las propuestas de Barro y Sala-i-Martin, el parámetro ρ es de suma importancia, pues asigna un peso especifico a la preferencia del consumo presente por encima del consumo futuro, asumiendo que las utilidades percibidas en el futuro corresponden a los descendientes de las familias actuales, por lo cual, el consumo presente se vería sacrificado a cambio del bienestar que se puede garantizar para los descendientes.

A partir de lo anterior, siguiendo la idea de Jorge Iván González[26] y otros autores, entendemos que existen dos supuestos sumamente restrictivos: primero, la tasa de preferencial temporal

[25] Función de Aversión Relativa al Riesgo Constante, donde los incrementos en el valor del parámetro θ implican un incremento en la aversión al riesgo.

[26] González, Jorge I. y Pecha, Arcenio, "Tasa de preferencia intertemporal, equilibrio y estabilidad en los modelos de crecimiento neoclásicos", *Cuadernos* de *Economía,* v. XIX, n. 32, Bogotá, 2000, páginas 61-76.

no se modifica a lo largo del tiempo, con lo cual se desconoce el hecho de que la utilidad puede cambiar, modificando así la preferencia intertemporal; y segundo, que dicha tasa es idéntica para todos los agentes, lo cual la vuelve independiente del nivel de ingreso, negándose así la curva de Engel.

Como sabemos, cotidianamente se toman decisiones que no corresponden con los supuestos racionales que sustentan el modelo neoclásico, por lo cual, parece no ser idóneo el asumir la estabilidad de las preferencias en el consumo como un símil de racionalidad en los agentes. Para la teoría neoclásica, es fundamental mantener la independencia intertemporal, pues de lo contrario, sería difícil aplicar la teoría del consumidor, misma que sustenta a la tasa de preferencia intertemporal

Sabemos que existe un agente representativo, mismo que eclipsa dos tipos de población, la urbana y la rural, lo cual es obviamente arbitrario; si por el contrario, ahora asumimos que existen dos agentes representativos, uno rural y uno urbano, entonces tendremos que definir una tasa de preferencia intertemporal para cada uno, misma que, de acuerdo con la teoría económica, pone en una relación de dependencia a la utilidad respecto al consumo. Lo anterior nos permite entonces acercarnos un poco más de lo que nos permite la observación original que se hace en la perspectiva de Barro y Sala-i-Martin, generando una clara diferencia entre los dos tipos de población ya mencionados.

Es muy importante remarcar que en los textos referentes a modelos de crecimiento económico, no se considera una forma explícita para determinar dicha tasa de preferencia intertemporal, la cual es un aspecto neurálgico de la elección social; simplemente se adopta la postura de asignar dicha decisión al planificador social y, en algunos casos, se asume que para cada grupo social se define una tasa diferente que el planificador propone de acuerdo a la modificación que existe en el consumo de la población en cuestión; esta decisión se toma a partir del supuesto de que las personas prefieren su consumo por encima del consumo de las futuras generaciones, por ello el valor de dicha tasa debe ser positivo.

Pero también hay que notar el hecho de que las tasas de preferencia intertemporal no pueden ser diferentes al interior de la población, puesto que el equilibrio sólo es asequible cuando ambas tasas son idénticas; lo anterior significa que ambas poblaciones modifican su respectiva tasa de preferencia de la misma forma, lo cual es improbable para el caso mexicano. De lo anterior, debemos comprender que no existe dentro de la literatura consultada, un consenso que señale la mejor forma de asignar un valor, que ante todo surge de consideraciones subjetivas que hace el planificador social y, en el mejor de los casos, cada poblador. Por lo tanto, para mantener nuestra línea de simulación, manejaremos una tasa de preferencia intertemporal con valores 0.10, 0.50 y 0.90 para cada población, manejando cada caso de optimización por separado.

Datos de la Economía Mexicana.

La necesidad de datos reales y suficientes para simular un modelo de crecimiento económico es obvia, puesto que precisamente la teoría neoclásica busca comprobarse y validarse en el campo real de todos los procesos económicos; sin embargo, las limitantes propias de cada sistema estadístico nacional, imponen serias restricciones sobre la posibilidad de observar el comportamiento de una economía real bajo los supuestos del modelo neoclásico de crecimiento económico.

En el caso del sistema estadístico de México, la falta de series estadísticas en series largas y homogéneas, que contengan los indicadores pertinentes a la formación de acervos de capital, residencial y no-residencial, son un serio impedimento para simular un modelo de crecimiento económico, pues al no poderse calcular un coeficiente capital-trabajo correspondiente para cada tipo de actividad productiva en nuestro país, poco se puede hacer para comprobar precisamente la teoría neoclásica en el campo real. Algunos autores como Abelardo Mariña Flores[27] y Abraham Aparicio Cabrera[28], advierten en sus trabajos de investigación estadística la imposibilidad que representa el sistema estadístico nacional, sobre todo cuando se trata de temas macroeconómicos puntuales, como lo son el crecimiento y el desarrollo económico; y es que, ante la falta de datos, bien se podría implementar procesos como la interpolación y extrapolación de datos, pero se corre el riesgo de sesgar la información, de tal forma que podrían estar usando valores irreales.

Frente a lo anterior, este trabajo se presenta como una simple simulación teórica del modelo de crecimiento de Ramsey, basado en una rejilla de valores que se supone fija durante todo el período de tiempo evaluado; pero, dada la necesidad de contrastación que requieren los modelos de crecimiento, hemos empleado los trabajos estadísticos de Abraham Aparicio Cabrera como el mejor referente posible para este fin y claramente debemos distinguir que los datos aportados por el situado autor son resultado de la economía real, de los procesos productivos y de consumo que se dieron en el país durante el período de tiempo propuesto para el análisis. Los datos son tomados del trabajo mencionado en la bibliografía de este trabajo. Una aclaración más que debemos hacer es en cuanto a los valores de estado estacionario que obtendremos en la simulación, pues en ningún momento nos hablan al respecto de los procesos inflacionarios que se dieron en nuestro país durante el período de tiempo analizado; lo anterior es relevante porque los datos de Cabrera toman en cuenta precisamente cifras que han sido trabajadas con el año 1980 como año base. Por lo anterior, nuestro análisis es limitado en este sentido y debemos aceptarlo como tal, pues la poca

[27] Mariña Flores, Abelardo, “Formación y acervos de capital en México, 1949-1999”; en Análisis Económico, vol. XVII, núm. 34, segundo semestre, 2001, pp. 231-256, Universidad Autónoma Metropolitana Azcapotzalco, México.

[28] Aparicio Cabrera, Abraham, “Series Estadísticas de la Economía Mexicana en el Siglo XX”; en Economía Informa, núm. 369, Julio-Agosto de 2011; pp.63-85, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad Universitaria, México.

disponibilidad de otras fuentes de información confiables y que sean de ayuda a este trabajo es un factor a tomar en cuenta.

Análisis de los Coeficientes de Obtenidos por la Simulación.

Ya con las tasas de crecimiento poblacional calculadas y mostradas en la sección A del anexo estadístico de este trabajo, vamos a presentar los resultados obtenidos tras la simulación del modelo, de acuerdo con la rejilla de valores asumida para el total de períodos evaluados; primero lo haremos para la población total y posteriormente para las poblaciones rural y urbana por separado, recordando que nuestros cálculos para estos núcleos poblacionales son una aproximación a la PEA de nuestro país para el período 1960-2000.

Para abordar los siguientes temas, debe consultarse la sección B del anexo estadístico, pues ahí se incluyen todos los cuadros citados en los siguientes párrafos. La sección B tiene el siguiente orden: para cada período de tiempo se han separado los cuadros respectivos de cada tipo de población, presentándose inicialmente los resultados para la población en general, luego se presentan los datos de la población urbana y finalmente, los resultados de la población rural; es decir, por ejemplo, para el período 1960-1970, los cuadros B.1.A y B.1.B presentan la simulación respectiva a la tasa de crecimiento de la población total de México; posteriormente, se presenta el cuadro B.2.A, donde se muestran los datos obtenidos en la simulación del modelo tomando como referencia la población urbana con edad de 15 año en adelante; finalmente, el cuadro B.2.B hace lo propio para el caso de la población rural; este orden expuesto se guarda para todos y cada uno de los períodos, a manera de que sea más fácil contrastar los resultados.

El Caso de la Población Total de México.

En párrafos anteriores hemos reconocido ya la primera aproximación del modelo, asumiendo la homogeneización de la población total con la mano de obra disponible, lo cual permite suponer que las cualidades de la mano de obra son similares entre todos los trabajadores. Si llevamos tal supuesto al caso de la economía mexicana, entonces la teoría nos exige trabajar la tasa de crecimiento exponencial de la población total del país.

Primero debemos definir el valor de los coeficientes del modelo de la siguiente forma:

La población total en el período 1960-1970 creció a una tasa anual $n = 0.032273$

La función de producción emplea un coeficiente $\alpha = 0.5$

La Preferencia Intertemporal del Consumo es $\rho = 0.1$

La Elasticidad de Sustitución Intertemporal Constante fue $\theta = 0.1$

El Progreso Tecnológico anual es $x = 0.01$

Ya hemos presentado las ecuaciones para definir el valor de los coeficientes de consumo, capital e ingreso de estado estacionario en el capítulo II de este trabajo, así como se han explicado en el apéndice matemático; por lo tanto, procedemos ahora al cálculo que se debe realizar para encontrar dichos valores.

Si realizamos los cálculos con los valores antes mencionados, obtendremos el siguiente coeficiente:

$$\left(\frac{0.5}{(0.1 + 0.032273 + 0.1 + 0.001)}\right)^{\frac{1}{1-0.5}} = \hat{k}^*$$

$$\left(\frac{0.5}{0.233273}\right)^{\frac{1}{1-0.5}} = \hat{k}^*$$

$$4.594212 = \hat{k}^*$$

Que es el capital óptimo por unidad de trabajo efectivo.

El Ingreso Per Cápita de Estado Estacionario es:

$$\hat{y}^* = (4.594212)^{0.5}$$

$$\hat{y}^* = 2.143411$$

Para el caso del consumo de Estado Estacionario resolvemos:

$$\hat{c}^* = \hat{y}^* - (\delta + n + x)\hat{k}^*$$

$$\hat{c}^* = 2.143411 - (0.142273316)(4.594212)$$

$$\hat{c}^* = 2.143411 - 0.653633776$$

$$\hat{c}^* = 1.489777$$

Los valores de Estado Estacionario son entonces $(4.594212\,, 1.489777)$.

Para calcular los Eigenvalores y Eigenvectores, partimos de la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{k}} \\ \dot{\hat{c}} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\hat{k}^*, \hat{c}^*)}{\partial \hat{k}} & \frac{\partial f(\hat{k}^*, \hat{c}^*)}{\partial \hat{c}} \\ \frac{\partial g(\hat{k}^*, \hat{c}^*)}{\partial \hat{k}} & \frac{\partial g(\hat{k}^*, \hat{c}^*)}{\partial \hat{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{k} - \hat{k}^* \\ \hat{c} - \hat{c}^* \end{bmatrix} \equiv A \begin{bmatrix} \tilde{\hat{k}} \\ \tilde{\hat{c}} \end{bmatrix}$$

Donde:

$$\frac{\partial f(\hat{k}^*, \hat{c}^*)}{\partial \hat{k}} = \beta = \rho + (\theta - 1)x$$

$$\beta = 0.1 + (0.1 - 1) * 0.01$$

$$\beta = 0.0910$$

$$\frac{\partial f(\hat{k}^*, \hat{c}^*)}{\partial \hat{c}} = c = -1$$

$$\frac{\partial g(\hat{k}^*, \hat{c}^*)}{\partial \hat{k}} = \tau = \frac{\hat{c}^*}{\theta}[\alpha(\alpha - 1)Ak^{\alpha-2}]$$

$$\tau = \frac{1.489777}{0.1}[0.5(0.5 - 1)(4.594212)^{0.5-2}]$$

$$\tau = -0.378220$$

$$\frac{\partial g(\hat{k}^*, \hat{c}^*)}{\partial \hat{c}} = 0$$

Sustituyendo los valores obtenemos:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{k}} \\ \dot{\hat{c}} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \beta & -1 \\ \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{k} - \hat{k}^* \\ \hat{c} - \hat{c}^* \end{bmatrix} \equiv A \begin{bmatrix} \tilde{\hat{k}} \\ \tilde{\hat{c}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{k}} \\ \dot{\hat{c}} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.0910 & -1 \\ -0.378220 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{k} - \hat{k}^* \\ \hat{c} - \hat{c}^* \end{bmatrix} \equiv A \begin{bmatrix} \tilde{\hat{k}} \\ \tilde{\hat{c}} \end{bmatrix}$$

La matriz anterior es precisamente la encargada de generar los eigenvalores y eigenvectores correspondientes a cada conjunto de valores asignados mediante las ecuaciones ya expuestas y, para efectos de simplificación, el proceso de cálculo es realizado mediante Matlab, a través de comandos ya definidos por el programa[29]. Así obtenemos entonces la siguiente solución:

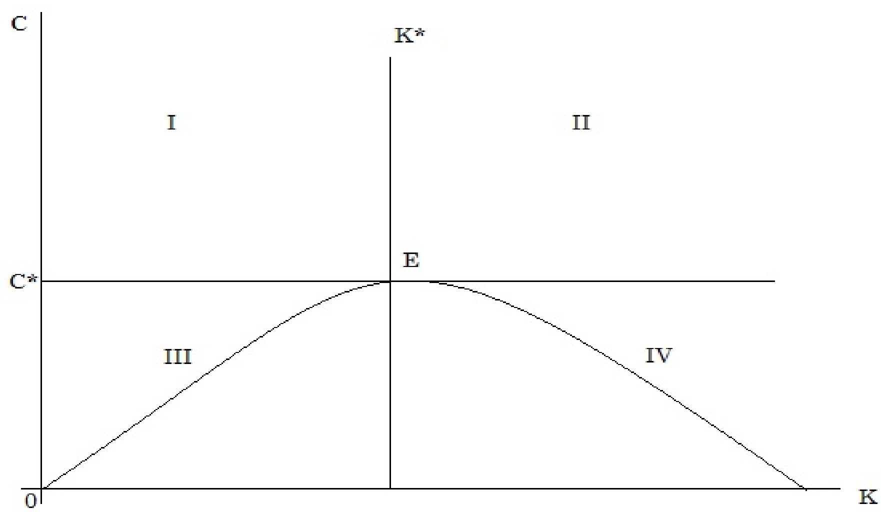
$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{k}} \\ \dot{\hat{c}} \end{bmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 0.8683 \\ -0.4960 \end{pmatrix} e^{0.6622t} + c_2 \begin{pmatrix} 0.8338 \\ 0.5521 \end{pmatrix} e^{-0.5712t}$$

[29] Hemos decidido corroborar los cálculos realizados por Matlab, realizando el procedimiento de forma manual y, al término del mismo, hemos obtenido valores distintos a los arrojados por el proceso de cálculo del software aunque, en la comprobación, tanto los datos obtenidos por cálculo manual y el cálculo de Matlab son iguales, lo cual no nos permite asumir que una u otra forma de cálculo sea incorrecta, simplemente son distintas forma de resolver los eigenvalores y eigenvectores necesarios para el problema de optimización.

En términos teóricos, ésta solución se encarga de describir el comportamiento del consumo y el capital por unidad de trabajo efectivo en torno al estado estacionario correspondiente a la rejilla de valores aplicada; como se puede observar, faltan dos variables por calcular: c_1 y c_2, las cuales sólo pueden ser definidas cuando existen condiciones iniciales para $\hat{k}$ y $\hat{c}$. Tales condiciones iniciales son los puntos de partida desde los cuales se busca definir la trayectoria optima para lograr un estado estacionario.

Por ahora, debemos tener presente que el proceso de cálculo anteriormente presentado es el mismo para todos los datos con que se elaboraron los cuadros de resultados presentados en la sección B del anexo estadístico de este trabajo; y para observar lo que implica gráficamente el cálculo anterior, presentamos el siguiente diagrama de fase:

Gráfica 3.1. Estado Estacionario.



A partir de la gráfica 1 del capítulo anterior, donde se presentó el diagrama de fase correspondiente al análisis gráfico del modelo de Ramsey, sabemos que existe un punto con las coordenadas pertenecientes al estado estacionario que, es este caso, está definido en:

$$\hat{k}^* = 4.594212$$

$$\hat{c}^* = 1.489777$$

En la gráfica 3.1, el punto "E" denota el estado estacionario correspondiente a los valores anteriormente mencionados; dicho estado estacionario nos permite definir cuatro regiones delimitadas por la igualación a cero de las ecuaciones de capital y consumo (algo que ya se ha visto en el capítulo II), las cuales nos dan como resultado los niveles óptimos de consumo y capital que debe ser empleado en la economía para mantener un crecimiento constante y sostenido.

A partir de lo anterior, el análisis gráfico del modelo de Ramsey nos indica que, dadas las condiciones iniciales de la economía, éstas pueden ser ubicadas en una de las cuatro secciones en que se divide el diagrama de fases; dos de ellas, las secciones II y III, son aquellas que permiten una convergencia de la economía hacia el estado estacionario; por su parte, las otras dos secciones, I y IV, divergen de la solución de estado estacionario, por lo cual no son candidatas a fungir como punto de partida de las condiciones iniciales de la economía.

Hasta este momento, es necesario mantener en mente que el proceso de solución del modelo de Ramsey ha sido ya definido hasta el diagrama de fase, pues a partir de los parámetros estructurales de la economía, hemos encontrado el punto E, donde teóricamente la economía encuentra los valores de consumo y capital de estado estacionario que le permitan crecer de forma sostenida. Luego, a partir de las cuatro regiones definidas en el diagrama de fase, de acuerdo con lo expuesto en el capítulo II, la posibilidad matemática de convergencia al estado estacionario se rige por:

1.- Si$\hat{c} < \hat{c}^*$; $\hat{k} < \hat{k}^*$, existe la posibilidad de convergencia al estado estacionario al incrementar el consumo y el capital; esto corresponde a la sección I.

2.- Si $\hat{c} > \hat{c}^*$; $\hat{k} < \hat{k}^*$, no hay posibilidad de convergencia; esto corresponde a la sección II.

3.- Si $\hat{c} > \hat{c}^*$; $\hat{k} > \hat{k}^*$, vuelve a existir la posibilidad de convergencia al disminuir el consumo y el capital; esto corresponde a la sección III.

4.- Si $\hat{c} > \hat{c}^*$; $\hat{k} > \hat{k}^*$, se anula la posibilidad de convergencia al estado estacionario; esto corresponde a la sección IV.

De esta forma, basados en el diagrama de fase, encontramos que sólo la primera y tercera opción pueden converger al estado estacionario mediante la senda estable definida a partir de los eigenvalores y eigenvectores calculados; por lo tanto, dentro del modelo es sumamente importante encontrar dichas condiciones iniciales que cumplen precisamente con el precepto teórico de la convergencia mediante la trayectoria estable.

A continuación, vamos a realizar el análisis pertinente para evaluar la correspondencia de los resultados con los preceptos teóricos que definen el comportamiento de la simulación; posteriormente tendremos oportunidad de contrastar los datos obtenidos contra datos reales, para determinar cómo es que la política económica se define a partir de un modelo neoclásico de crecimiento, buscando alcanzar precisamente los niveles de estado estacionario que permiten el crecimiento constante de la economía de forma óptima.

Los datos presentados en los cuadros de la sección B del anexo estadístico tienen una doble forma de ser analizados: la primera de ellas es estrictamente teórica, ya que al revisar los distintos valores de estado estacionario, así como los eigenvalores y eigenvectores obtenidos a partir de la rejilla propuesta, podemos observar si efectivamente se cumple lo señalado por los postulados teóricos del modelo; la segunda forma de análisis se deriva de la primera forma, ya que en esta segunda fase se contrastan los datos obtenidos en la simulación, empleando datos reales de la economía mexicana, lo cual nos ayudará a observar más de cerca la forma como se involucra la política económica para lograr el estado estacionario propuesto por la teoría neoclásica. Puntualmente, en nuestro trabajovamos a contrastar el porcentaje que representa el consumo respecto del PIB, a fin de resaltar las bondades que permite nuestra rejilla de valores, sin pretender asumir que dicha rejilla es precisamente un reflejo de los parámetros estructurales que predominaron durante el período de tiempo evaluado; los datos de la economía mexicana fueron calculados por el Dr. Abraham Aparicio Cabrera, quien en su texto trabaja diversas series fundamentales para la investigación macroeconómica, dejando en claro que nuestro sistemaestadístico presenta serias deficiencias, motivo por el cual, es difícil ir más allá en tópicos como el crecimiento económico, evaluado mediante modelos neoclásicos.

Ahora bien, de acuerdo con la teoría neoclásica del crecimiento económico, el modelo debe responder de dos formas ante las variaciones que existan en los diversos coeficientes empleados:

1.- **Incremento en los valores de estado estacionario**; causado por tres motivos específicos: desplazamiento ascendente de la función de producción, disminución de los parámetros rho y theta, lo cual implica mayor preferencia por el ahorro, y una disminución de la tasa de depreciación del capital.

Si observamos el cuadro B.1.A, correspondiente a la simulación para el período 1960-1970, nos daremos cuenta que el coeficiente alpha asume el valor 0.5, que da como resultado distintos niveles de consumo, ingreso y capital de estado estacionario; por su parte, el cuadro B.1.B, implica un coeficiente alpha de 0.3 y de igual forma nos da como resultado diversos niveles de consumo, ingreso y capital de estado estacionario; lo anterior nos indica que, al comparar la primera fila de cada cuadro, si mantenemos constantes los valores de todos los demás coeficientes del modelo, la función de producción asume un gran peso, ya que es la encargada de definir la cantidad de producto que se obtendrá al trabajar de forma intensiva sobre los factores productivos; por lo tanto, el cambio en el coeficiente alpha de 0.3 a 0.5, nos demuestra precisamente el hecho de que, al existir un desplazamiento ascendente de la función de producción, podemos encontrar niveles cada vez mayores para los valores de estado estacionario.

Más aún, si recordamos la teoría de la producción, una función de producción intensiva, que mantiene al capital como insumo fijo y al trabajo como insumo variable, al graficarse nos muestra dos tipos de desplazamiento: cuando se incrementa el trabajo, tendremos un desplazamiento a lo largo de la curva de producto total, hasta llegar a un punto donde el producto deja de incrementarse y comienza a volverse negativo, dado que se produce de forma ineficiente; pero, el segundo desplazamiento de la función es debido a la inversión en capital y al progreso tecnológico propio del sector productivo en cuestión, lo cual le permite a la función intensiva volverse más eficiente y obtener una mayor producción con la misma relación K/L, reflejándose en un desplazamiento ascendente de la misma función de producción.

En cuanto a los coeficientes ρ (rho) y θ (theta), ya han sido definidos como coeficientes que reflejan la preferencia por el consumo o el ahorro y que están en función de la riqueza y su variación en el tiempo; si observamos de nuevo nuestros cuadros de referencia para el período 1960-1970, podemos encontrar que, cuando rho se incrementa de 0.1 a 0.5, para ambos valores de alpha, el valor de estado estacionario disminuye, dado que la impaciencia por consumir actúa en contra de las necesidades de ahorro que son necesarias para la inversión en capital. Por lo tanto, los coeficientes rho y theta seleccionados para nuestra rejilla de simulación coinciden con lo señalado por la teoría neoclásica representada por el modelo de Ramsey.

Una vez definido el parámetro rho y el coeficiente alpha, si el valor del coeficiente theta disminuye, aproximándose a 0, esto implica que existe la preferencia por el consumo futuro por encima del consumo presente; por lo tanto, al recorrer el valor de theta de 0.9 a 0.1 sigue confirmándose el precepto teórico de mayores valores de estado estacionario conforme la preferencia por el ahorro se acentúa

Finalmente la depreciación, que en su forma más sencilla es el resultado de dividir el costo total de un bien de capital entre el número de años que abarca su período de vida útil, puede verse disminuida de tresformas: en primer lugar se incrementa el período de vida útil del bien de capital, en segundo se puede disminuir el costo de tal bien y, finalmente, podríamos asumir que existe un costo de mantenimiento sobre el capital empleado, lo cual los modelos de crecimiento económico no observan dentro de su funcionamiento. Lo anteriormente mencionado impacta de forma menos fuerte sobre los ingresos brutos generados por la función de producción, permitiendo que una mayor cantidad de recursos sean destinados a la creación de nuevo capital. Pero no perdamos de vista lo siguiente: el modelo asume que existe una plena utilización del capital y que la tasa de depreciación es determinada de forma exógena, equivalente a una proporción constante del stock de capital; sin embargo, la realidad puede ser muy distinta, ya que no siempre existe la plena utilización de capacidad instalada y generalmente existe una inversión con el fin de mantener el capital en condiciones de producción.

Por último, vamos a observar lo siguiente:

Si el lector es minucioso en su revisión de todos los cuadros presentados en la sección B del anexo estadístico, podrá observar que en nuestra simulación existen escenarios que comparten los mismos niveles de capital e ingreso de estado estacionario, pero no es así con el nivel de consumo, lo cual se atribuye al peso que tiene el factor tecnológico en la determinación del consumo de estado estacionario. Revisemos por ejemplo el cuadro B.1.A, y veamos el siguiente caso

Cuando el factor de preferencia intertemporal $\rho = 0.1$, el nivel de capital e ingreso de estado estacionario será igual para dos casos: cuando $\theta = 0.1$ y $x = 0.05$, pero también en el caso donde $\theta = 0.5$ y $x = 0.01$; para los dos casos anteriores, a pesar de que existe el mismo nivel de capital por trabajador y de ingreso por trabajador, el consumo habrá de diferir, siendo mayor en el segundo caso en comparación con el primero.

Por lo anterior y, de acuerdo con nuestra rejilla de valores, siempre que el capital e ingreso de estado estacionario sea igual para dos escenarios, el nivel de consumo habrá de ser mayor en el caso donde el parámetro x sea el menor. Esta observación no pretende establecer que hemos encontrado generalización para el comportamiento del modelo, pues el planteamiento teórico de Ramsey incluye un punto explicativo al respecto, el cual se presenta a continuación.

2.- **Decremento en los valores de estado estacionario**; causado por dos motivos específicos: un incremento en el parámetro tecnológico x; o un incremento de la población, manteniendo fijo el parámetro rho de preferencia intertemporal.

Para entender mejor lo que implica un incremento en el valor del parámetro tecnológico, vamos a observar el cuadro B.1.A; cuando asignamos un valor de 0.1 al coeficiente rho y theta, el incremento en el valor del progreso tecnológico da como resultado que se reduzcan los valores de estado estacionario, ya que dicho progreso tecnológico afecta a la tasa de preferencia temporal efectiva.

Por otra parte, para comprender el efecto que tiene un incremento en la población, a partir de una preferencia intertemporal constante, recordemos que en el cuadro A.3, se nos muestra una tasa de crecimiento poblacional de 0.032273 para el período 1960-1970, mientras que para el período 1970-1980, la tasa de crecimiento poblacional fue de 0.032653; es decir, el crecimiento en el segundo de los períodos referidos fue ligeramente mayor.

Si revisamos la primera fila correspondiente al cuadro B.3.A, donde simulamos el modelo para el período 1970-1980, observaremos que los valores de estado estacionario correspondientes al período 1960-1970 son mayores a los calculados para el período 1970-1980, pues como ya se ha explicado en el párrafo anterior, la tasa de crecimiento de la población propicia un decremento de los valores de estado estacionario, siempre y cuando la tasa de preferencia intertemporal, rho, se mantenga en el mismo nivel; por lo tanto, este último precepto teórico del modelo se cumple.

¿Qué importancia tienen los Eigenvalores y Eigenvectores?

Los eigenvalores y eigenvectores son el resultado de someter el modelo de Ramsey a una linealización, fundamentada en el Teorema de Taylor, que nos permite aproximarnos a las soluciones del modelo de una manera mucho más sencilla a comparación de otros métodos; por lo tanto, su importancia reside en ser el resultado de los parámetros estructurales que denota una economía en determinado momento.

Específicamente, de acuerdo con el Dr. Ciro Bazán, el valor absoluto del eigenvalor λ_2 es un indicador de la velocidad de convergencia hacia el estado estacionario, ya que, cuanto mayor sea la elasticidad de sustitución, θ, mayor ha de ser la disposición de los habitantes por evitar el consumo presente a favor de encontrar un mayor consumo futuro, lo cual teóricamente posibilita un mayor ahorro y una mayor acumulación de capital, que permite precisamente la convergencia de la economía hacia el estado estacionario definido por los parámetros estructurales.

Para efectos del análisis general, encontraremos que, en todos los cuadros presentados, el valor de λ_2 no guarda un orden específico, es decir, no crece o decrece de forma constante; por lo tanto, para cada valor de rho, las propiedades de velocidad de convergencia son distintas. Por ejemplo, si observamos el cuadro B.1.A, cuando $\rho = 0.1$ y $\theta = 0.1$, λ_2 decrece conforme se incrementa el valor del parámetro tecnológico$x$; pero, si trabajamos con los otros dos valores de θ, entonces la velocidad de convergencia se incrementa conforme se incrementa el valor de x. Lo anterior es algo que se presenta para todos los cuadros donde $\alpha = 0.5$, sin importar el valor que asume el parámetro ρ. Ahora bien, para el caso donde se ha trabajado con un coeficiente $\alpha = 0.3$, la velocidad de convergencia sigue sin tener un orden específico pero, a diferencia del caso expuesto en el párrafo anterior, para todos los valores del parámetro θ la velocidad de convergencia se incrementa conforme se incrementa el valor de x.

Por otra parte, observemos que, para todos los valores de ρ, cuando $\theta = 0.1$, la velocidad de convergencia es la mayor posible en ese escenario específico, no siendo posible la comparación entre distintos valores de la preferencia intertemporal ρ, lo cual es señalado por Ramsey como una simplificación del análisis, donde cada nivel de preferencia intertemporal nos remite a un escenario particular, en el cual las generaciones se comportan de la misma forma en cuanto a elegir su consumo presente y su consumo futuro; por ello no es posible comparar dos valores distintos de ρ, ya que se estaría violando el supuesto de un criterio homogéneo de descuento del consumo futuro entre las diversas generaciones que integran las familias.

Ahora bien, desde la perspectiva del planificador social, los autovalores y autovectores implican la forma en que se debe definir el nivel de consumo o capital en un momento inicial, tal que se pueda converger, por una trayectoria estable, hacia el estado estacionario.

Precisamente en este sentido, ya hemos explicado en los cálculos realizados anteriormente que faltan por ser determinadas dos variables: las constantes c_1 y c_2, mismas que no pueden ser arbitrarias, pues ante todo el modelo linealizado exige que, a partir del diagrama de fase, éstas deben estar incluidas en una trayectoria estable para poder alcanzar el nivel de estado estacionario.

El procedimiento de cálculo que mostramos a continuación es válido para todos los datos obtenidos a partir de las diversas simulaciones; por lo tanto, es un proceso guía para comprender las inferencias que haremos para las poblaciones urbana y rural en posteriores párrafos. Por ahora, veamos el procedimiento de cálculo de las condiciones iniciales correspondientes al comportamiento del capital y el consumo dentro de la senda estable y la aproximación lineal a la trayectoria hacia el estado estacionario.

Vamos a continuar nuestro proceso de cálculo para el período 1960-1970, donde ya han sido determinados los valores de estado estacionario, así como los eigenvalores y eigenvectores correspondientes. Ahora bien, a partir de la matriz:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{k}} \\ \dot{\hat{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\hat{k}} \\ \hat{\hat{c}} \end{bmatrix}$$

La cual nos ayuda a determinar las ecuaciones de movimiento de ambas variables cuando existen condiciones iniciales, acomodamos los eigenvectores para conformar la matriz modal; posteriormente, empleando álgebra lineal, obtenemos la inversa de dicha matriz, resultando lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{k}} \\ \dot{\hat{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8683 & 0.8338 \\ -0.1960 & 0.5521 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8683 & 0.8338 \\ -0.1960 & 0.5521 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{k} - \hat{k}^* \\ \hat{c} - \hat{c}^* \end{bmatrix}$$

$$r^{-1} = \begin{bmatrix} 0.858880892 & -1.297110827 \\ 0.304909716 & 1.350781161 \end{bmatrix}$$

Donde se comprueba que:

$$\lambda_1 = -\frac{u_1}{v_1}$$

$$\lambda_2 = -\frac{u_2}{v_2}$$

Ahora bien, para calcular el nivel de consumo inicial del capital, correspondiente al capital inicial, tal que se sujeten a la trayectoria estable, empleamos la siguiente ecuación, donde se sustituyen los valores de estado estacionario:

$$\hat{c} = \hat{c}^* - \frac{u_1}{v_1}\left(\hat{k} - \hat{k}^*\right)$$

Como un ejemplo, asumimos que $\hat{k}_0 = 4$, entonces:

$$\hat{c} = 1.489777 - \left(\frac{0.858880892}{-1.297110827}\right)(4 - 4.594212)$$

$$\hat{c} = 1.489777 + 0.6621765(-0.594212)$$

$$\hat{c}_0 = 1.096303778$$

De esta forma, las condiciones iniciales a partir de las cuales podemos acceder al estado estacionario, mediante la senda estable, son:

$$\hat{k}_0 = 4$$

$$\hat{c}_0 = 1.096303778$$

Luego entonces, si deseamos observar el comportamiento del consumo y el capital en el tiempo, debemos sujetarnos a las ecuaciones expuestas en el capítulo II, siendo esto lo siguiente:

Para el caso del capital, tenemos que:

$$\hat{k}_t = \hat{k}^* + \left(\hat{k}_0 - \hat{k}^*\right)e^{\lambda_2 t}$$

De tal forma que, al sustituir los valores:

$$\hat{k}_t = 4.594212 + (4 - 4.594212)e^{-0.5712\,t}$$

$$\hat{k}_t = 4.594212 - 0.594212e^{-0.5712\,t}$$

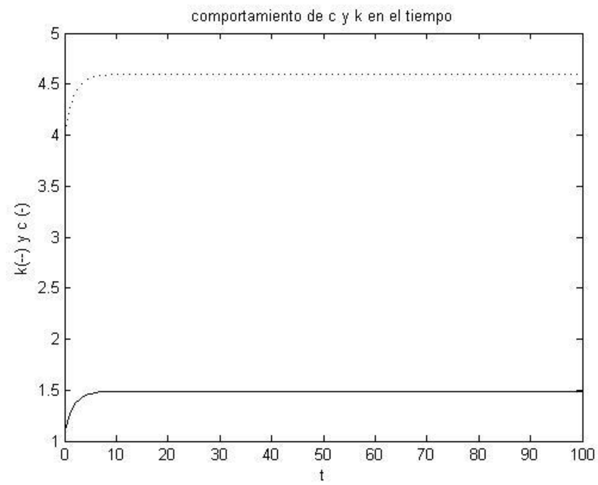
Luego, en el caso del consumo:

$$\hat{c}_t = \hat{c}^* + (\hat{c}_0 - \hat{c}^*)e^{\lambda_2 t}$$

$$\hat{c}_t = 1.489777225 + (1.096303778 - 1.489777225)e^{-0.5712\,t}$$

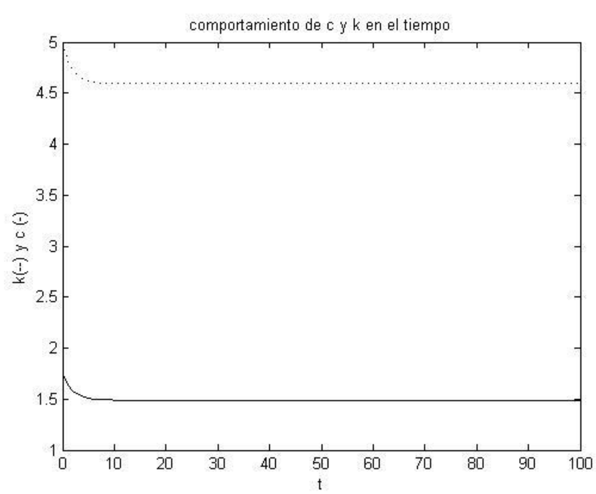
$$\hat{c}_t = 1.489777225 - 0.393473447e^{-0.5712\,t}$$

Gráficamente, las dos ecuaciones determinadas anteriormente tienen la siguiente forma:



En la gráfica anterior el capital es una línea punteada que comienza a crecer desde la condición inicial $\hat{k}_0 = 4$ hasta llegar al estado estacionario definido por $\hat{k}^* = 4.5942$, a partir del cual se vuelve estable; por su parte, el consumo es una línea solida que comienza a crecer desde la condición inicial $\hat{c}_0 = 1.0963$ hasta llegar al estado estacionario definido por $\hat{c}^* = 1.4897$, a partir del cual se vuelve estable. Lo anterior muestra entonces que, a partir de las condiciones iniciales, donde $\hat{c} < \hat{c}^*$; $\hat{k} < \hat{k}^*$, se cumplen los preceptos de crecimiento de ambas variables hasta llegar al punto de estado estacionario, donde se vuelven constantes.

Si ahora comenzamos desde de las condiciones $\hat{c} > \hat{c}^*$; $\hat{k} > \hat{k}^*$, donde $\hat{k}_0 = 5$, mediante las ecuaciones ya expuestas, obtendremos un nivel inicial de consumo de $\hat{c}_0 = 1.7584$, lo cual gráficamente se comporta de la siguiente forma:



Entonces, el capital es una línea punteada que comienza a decrecer desde la condición inicial $\hat{k}_0 = 5$ hasta llegar al estado estacionario definido por $\hat{k}^* = 4.5942$, a partir del cual se vuelve estable; por su parte, el consumo es una línea solida que comienza a decrecer desde la condición inicial $\hat{c}_0 = 1.7584$ hasta llegar al estado estacionario definido por $\hat{c}^* = 1.4897$, a partir del cual se vuelve estable. Lo anterior muestra entonces que, a partir de las condiciones iniciales, donde $\hat{c} > \hat{c}^*$; $\hat{k} > \hat{k}^*$, se cumplen los preceptos de decrecimiento de ambas variables hasta llegar al punto de estado estacionario, donde se vuelven constantes.

Queda entonces finalizado el proceso de cálculo correspondiente al estado estacionario analizado dentro del período 1960-1970, siendo posible observar el proceso correspondiente para cada uno de los datos obtenidos dentro de nuestra simulación. Como ya lo habíamos propuesto, en primera instancia hemos hablado del caso de la población total de México; pero ahora debemos analizar el caso de la población urbana y rural, las cuales ya hemos definido con anterioridad.

Debemos tomar en cuenta que el análisis anterior se hace extensivo para todos los casos simulados en este trabajo, por lo cual, el lector puede hacer una primera aproximación por su cuenta sobre la situación que, de acuerdo con la rejilla de valores empleada, predomina para cada población, contrastando los casos de la población total con los casos urbanos y rurales. Respecto a lo anterior, nuestro análisis ha implicado únicamente el cuadro B.1.A, pero es extensivo para todos los cuadros donde se simula el modelo sobre la población total de México. Así entonces, damos paso al tema de las poblaciones urbana y rural, esperando que nuestra explicación haya sido clara y detallada, de tal forma que podamos comprender lo que a continuación viene.

Para los casos de la población urbana y rural ya hemos definido las tasas de crecimiento poblacional y cada población se sujeta a una función de producción donde el coeficiente alpha difiere; en el caso urbano asumimos que la población está enteramente dedicada a la producción industrial y la función de producción implica que $\alpha = 0.5$; por su parte, la población rural se asume como dedicada absolutamente a actividades agrícolas y la función de producción implica que $\alpha = 0.3$. Basado en lo anterior, hemos simulado el modelo de Ramsey mediante la rejilla de valores para cada caso en específico, mostrando los resultados en diversos cuadros incluidos en el anexo estadístico de este trabajo.

En los cuadros correspondientes a la simulación realizada sobre la población rural, podemos observar que ésta de se apega a los preceptos teóricos del modelo, cumpliendo con el comportamiento de los valores de estado estacionario de acuerdo con la teoría, incrementando o disminuyendo su valor de acuerdo con el papel que asume cada coeficiente en el modelo. Pero, para el caso de la población urbana podemos observar un comportamiento distinto respecto del caso rural, una anomalía que se hace extensiva a todos los cuadros que abordan la simulación realizada sobre la población urbana para cada período y que ya ha sido expuesta en párrafos anteriores.

Análisis de la Población Total de México, la PEA Urbana y Rural.

Desafortunadamente, el servicio estadístico de México tiene grandes problemas con la información necesaria para implementar una simulación como la que nosotros hemos realizado, pues las fuentes de información no son homogéneas y los procesos de medición difieren entre un trabajo y otro; pero, a pesar de lo anterior, los trabajos del Dr. Abraham Aparicio Cabrera nos permiten observar algunas variables necesarias para la contrastación de nuestra simulación con los datos reales calculados por el ya mencionado autor. Si recordamos el proceso de cálculo ya expuesto, es posible definir $\hat{c}_0$ dado $\hat{k}_0$ siempre y cuando exista una serie estadística que incluya el coeficiente $\frac{K}{L}$ para cada sector productivo y para cada año.

El proceso de cálculo anterior es entonces difícil de realizarse, puesto que no contamos con la información necesaria; pero por otro lado, también es posible definir un cálculo de la forma inversa, es decir, encontrar el nivel de $\hat{k}_0$ dado $\hat{c}_0$, y es precisamente la forma como habremos de trabajar nuestra siguiente simulación. Puntualmente, para nuestro trabajo hemos utilizado el cálculo del consumo privado, como porcentaje del PIB Real, que ha logrado homogeneizar el Dr. Aparicio, siendo necesario encontrar, de acuerdo con nuestras ecuaciones, el nivel de capital por trabajador correspondiente al nivel de consumo presentado en los cálculos reales, para posteriormente trazar las trayectorias del comportamiento del consumo y el capital hasta los estados estacionarios.

Como sabemos, hemos trabajado una simulación con tres tipos de población: la población total de México, una aproximación a la PEA urbana y otra aproximación a la PEA rural; luego se definieron dos valores para el coeficiente α, que varía según el sector productivo. Los parámetros estructurales de la economía se desarrollan en torno a un eje principal, que es la preferencia intertemporal del consumo, la cual define únicamente tres casos posibles: $\rho = 0.1$ que implica una preferencia muy elevada por el consumo futuro, $\rho = 0.5$ que es un término intermedio donde existe igual preferencia por el consumo presente o futuro y, $\rho = 0.9$ que es una preferencia sumamente elevada por el consumo presente.

A partir de lo anterior, uno de nuestros cálculos, incluido dentro de uno de los tres escenarios anteriores, será el de mayor aproximación al cálculo real de Cabrera, lo cual nos sujetará a simular la dinámica económica únicamente tomando en cuenta el valor de la preferencia intertemporal implicada. Esto nos servirá de guía para contrastar el caso de la población total de México contra cada núcleo de población en particular, observando lo que implica una política económica generalizada o enfocada, según sea el caso.

De esta forma, una vez explicada la forma de nuestro trabajo, vamos entonces a simular la dinámica económica en cada período de tiempo, contrastando el caso de la población total con los casos específicos de la PEA urbana y rural, encontrando la forma como la política económica se define desde la teoría neoclásica del crecimiento.

México en el Período 1960-1970[30].

De acuerdo con los cálculos obtenidos por el Dr. Abraham Aparicio Cabrera, el consumo promedio de la población representó el 68.89% del PIB Real para el período 1960-1970; este dato será fijo para todo el período y lo emplearemos como referencia para obtener los resultados pertinentes de acuerdo con la simulación del modelo de Ramsey para cada caso específico, de acuerdo con las distintas tasas de crecimiento poblacional obtenidas.

A partir de nuestros cálculos para el período 1960-1970, la tasa de crecimiento de la población total de México (3.22% anual) fue superada por la tasa de crecimiento de la PEA urbana (4.45% anual); por su parte, la tasa de crecimiento de la PEA rural (0.969% anual) fue la menor dentro de este período. Por lo anterior y, de acuerdo con el capítulo II, sabemos que manteniendo los valores de nuestra rejilla de simulación el cambio en la tasa de crecimiento de la población habrá de dar como resultados diferentes niveles de estado estacionario, lo cual mostraremos a continuación.

Observemos el cuadro B.1.A; si empleamos la tasa de crecimiento de la población total, sujeta a una función de producción con un coeficiente $\alpha = 0.5$, el nivel del consumo promedio se sitúa en una simulación donde la preferencia intertemporal del consumo es $\rho = 0.5$, cuyo nivel máximo de estado estacionario está definido por los valores:

$$\hat{c}^* = 0.7009$$

$$\hat{k}^* = 0.6234$$

Ahora bien, a partir de las condiciones iniciales:

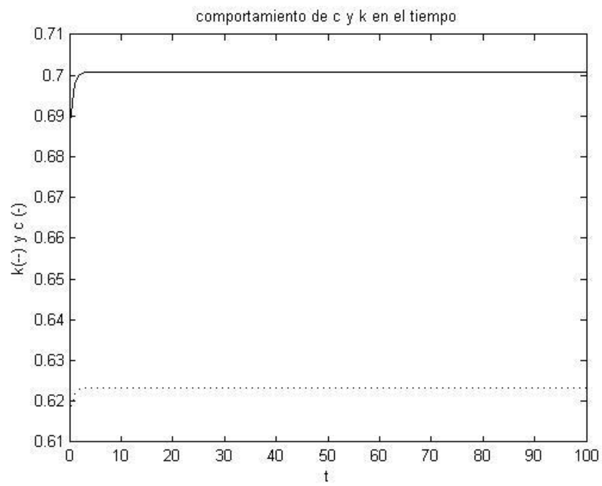
$$\hat{c}_0 = 0.6869$$

$$\hat{k}_0 = 0.6169$$

---

30 Fue la década del denominado “Desarrollo Estabilizador”, heredera de un proceso de exportaciones e industrialización propiciado por la Segunda Guerra Mundial, del cual la economía mexicana manifestaba una etapa de crecimiento, con sustitución de importaciones y con procesos inflacionarios que reducían los salarios reales. Desde 1958 y hasta 1970, Antonio Ortiz Mena fue el hombre encargado de dirigir la política económica en México, fundamentada en la generación de ahorro y la asignación eficiente de recursos de inversión, lo cual permitía tener un bajo nivel de desempleo, el rápido crecimiento económico y control de la inflación.
La inversión del Estado permitió el crecimiento de la población urbana y rural, la creación de infraestructura y la producción de bienes y servicios básicos para la producción, protegiendo a la industria nacional, aunque para 1960 el proteccionismo ya no estaba justificado para algunas empresas que seguían cobijadas bajo la sustitución de importaciones y que obtenían grandes ganancias, dados los costos de los factores productivos.
La contrapartida del proceso de crecimiento fue la concentración del ingreso a favor de las utilidades, pues la inflación terminó por causar estragos y jugar en contra del salario de los trabajadores y el ingreso de las familias; pero a pesar de lo anterior, las utilidades no implicaron un incremento en la propensión a ahorrar y la consiguiente reinversión. Las protestas en contra de los procesos inflacionario fueron absorbidos por la CTM, quien tenía el control total de los trabajadores, sometiéndolos a un principio rígido: primero debe elevarse la producción y después se produce el crecimiento económico, la equidad y la justicia social.

El comportamiento del consumo y el capital debe ser creciente hasta encontrar los valores de estado estacionario, a partir de los cuales muestra un comportamiento constante:



Por su parte, el nivel mínimo de estado estacionario se localiza en los puntos:

$$\hat{c}^* = 0.5918$$

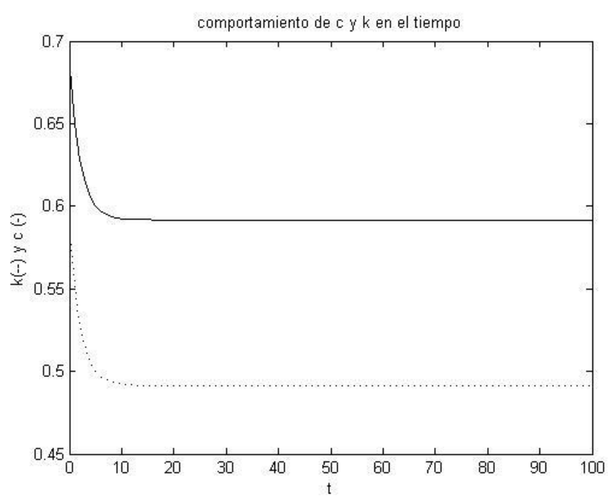
$$\hat{k}^* = 0.4914$$

Y, a partir de las condiciones iniciales:

$$\hat{c}_0 = 0.6869$$

$$\hat{k}_0 = 0.5886$$

Se entiende que la trayectoria debe ser descendente hasta encontrar dicho nivel de estado estacionario.



Si observamos el cuadro B.1.A, el nivel de estado estacionario más próximo al cálculo del consumo promedio es de 69.32% respecto del PIB, y se encuentra situado en un escenario donde la población total del país labora de acuerdo a una función de producción neoclásica donde $\alpha = 0.5$, con una preferencia intertemporal $\rho = 0.5$, cuya elasticidad de sustitución es $\theta = 0.9$, y con un progreso tecnológico $x = 0.01$.

Si se asume la necesidad de encontrar el valor más próximo de estado estacionario, a partir del nivel de consumo intermedio, entonces estrictamente debe cumplirse que el nivel de la intensidad de capital tendrá que ser menor a 0.6079, pues de otra forma la economía no podrá converger hacia dicho estado estacionario; lo anterior puede ser mostrado si se realizan los cálculos con que hemos ejemplificado al comienzo de este capítulo. Esto implica que, a partir de las condiciones iniciales, sabiendo que el consumo y el capital deben ser estrictamente menores que los niveles estado estacionario, la política económica estaría dirigida a fomentar los niveles de consumo y de la relación capital trabajo.

Ahora bien, de acuerdo con el cuadro B.2.A, si empleamos la tasa de crecimiento de nuestra aproximación a la PEA urbana, empleando un coeficiente $\alpha = 0.5$ dentro de la función de producción, el nivel de consumo promedio se sitúa en un escenario donde la preferencia intertemporal es $\rho = 0.5$ y cuyo nivel máximo de estado estacionario se encuentra en los puntos:

$$\hat{c}^* = 0.6818$$

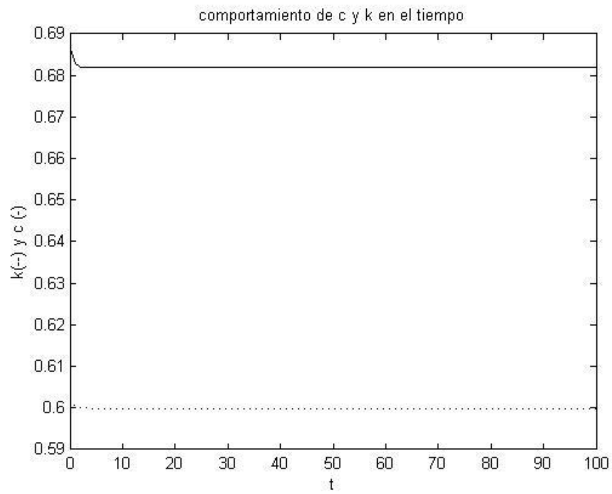
$$\hat{k}^* = 0.5999$$

Luego entonces, a partir de las condiciones Iniciales:

$$\hat{c}_0 = 0.6869$$

$$\hat{k}_0 = 0.6023$$

El comportamiento del capital y el consumo debe ser decreciente hasta alcanzar el nivel de estado estacionario:



Si observamos los cuadros B.1.A y B.2.A, encontraremos que, en concordancia con lo estipulado por el modelo de Ramsey, los niveles de estado estacionario son menores en el caso de la PEA urbana, por lo cual, de acuerdo con la rejilla de valores que hemos seleccionado para nuestra simulación, al trazar las trayectorias desde el nivel de consumo medio hasta el nivel de estado estacionario máximo, en el caso de la población total dicha trayectoria será creciente; pero, para el caso de la PEA urbana, la trayectoria deberá ser decreciente hasta encontrar dicho nivel máximo.

Por su parte y, como veremos a continuación, en el caso de buscar los niveles mínimos de estado estacionario, en ambos casos la trayectoria deberá ser decreciente; pero, para el caso de la PEA urbana el descenso será mayor, dadas las diferencias entre las tasas de crecimiento poblacionales.

Por otra parte, el nivel mínimo de estado estacionario se ubica en los niveles:

$$\hat{c}^* = 0.5778$$

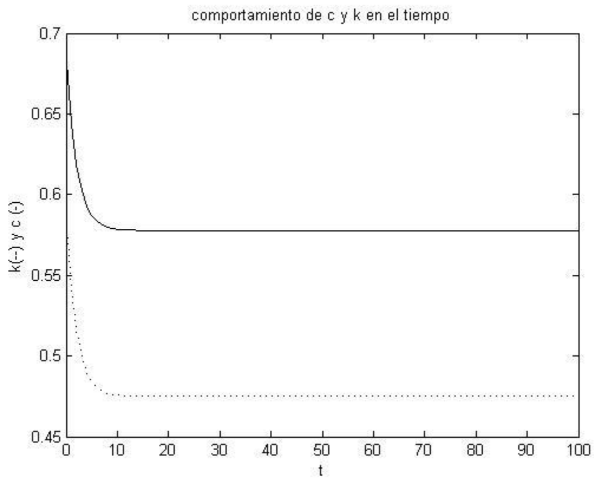
$$\hat{k}^* = 0.4749$$

Y, partiendo de las condiciones Iniciales:

$$\hat{c}_0 = 0.6869$$

$$\hat{k}_0 = 0.5854$$

La trayectoria vuelve a ser decreciente hasta encontrar los valores de estado estacionario.



En el cuadro B.2.A encontramos que el nivel de estado estacionario más próximo al cálculo del consumo promedio es de 68.18% respecto del PIB, y se encuentra situado en un escenario donde la PEA urbana labora sujeta a una función de producción neoclásica donde $\alpha = 0.5$, con una preferencia intertemporal $\rho = 0.5$, cuya elasticidad de sustitución es $\theta = 0.1$, y con un progreso tecnológico $x = 0.01$.

Si se asume la necesidad de encontrar el valor más próximo de estado estacionario, a partir del nivel de consumo intermedio, entonces estrictamente debe cumplirse que el nivel de la intensidad de capital tendrá que ser mayor a 0.5999, pues de otra forma, la economía no podrá converger hacia dicho estado estacionario; lo anterior puede ser mostrado si se realizan los cálculos con que hemos ejemplificado al comienzo de este capítulo. Esto implica que, a partir de las condiciones iniciales, sabiendo que el consumo y el capital deben ser estrictamente mayores que los niveles estado estacionario, la política económica estaría dirigida a disminuir el nivel de consumo y de la relación capital trabajo.

Pasemos ahora al cuadro B.1.B; si retomamos el caso de la población total y su tasa de crecimiento, sujetándola a una función de producción con un coeficiente $\alpha = 0.3$, el nivel de consumo promedio se aproxima a una simulación donde $\rho = 0.5$, donde el nivel máximo de estado estacionario queda definido por:

$$\hat{c}^* = 0.6771$$

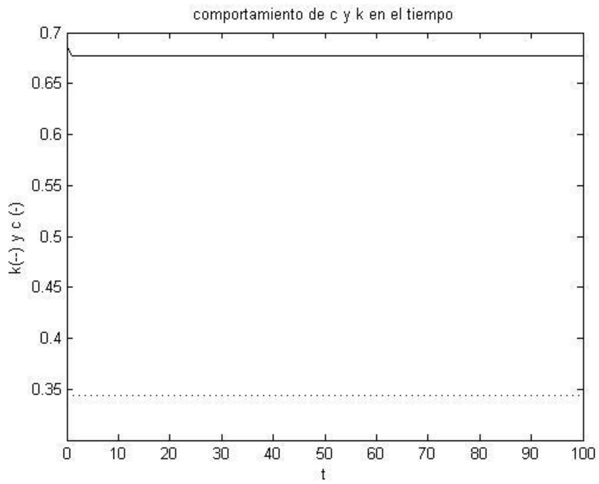
$$\hat{k}^* = 0.3439$$

Si partimos de las condiciones iniciales:

$$\hat{c}_0 = 0.6869$$

$$\hat{k}_0 = 0.3470$$

La trayectoria del consumo y el capital será ligeramente decreciente hasta encontrar los valores de estado estacionario.



Ya hemos definido anteriormente que un cambio en el valor del coeficiente alpha (en este caso menor a 0.5) dentro de la función de producción, implica que la elasticidad del producto cambia ante variaciones del 1% en el coeficiente capital-trabajo. En este caso, al someter a la población total a una función de producción donde se obtiene menor producción, los estados estacionarios habrán de disminuir respecto a un valor más elevado para dicho coeficiente, por lo tanto, los niveles calculados por la rejilla de valores donde $\alpha = 0.3$ tendrán que disminuir obligatoriamente, de acuerdo con los postulados teporicos del modelo de Ramsey.

Si observamos estos dos escenarios presentados hasta hora en los cuadros B.1.A y B.1.B, ambos suponen que la población total genera distintos niveles de producto, lo cual se puede deber a una falta de inversión para generar capital, a la tecnología rezagada o al empleo de técnicas ineficientes de producción; pero en todo caso, la función de producción sigue sumiendo su papel dentro del crecimiento economico, siendo la encargada de generar los ingresos brutos necesarios para cubrir los niveles de consumo presentes y futuros.

Por otro lado, el nivel mínimo de estado estacionario se ubica en los niveles:

$$\hat{c}^* = 0.6254$$

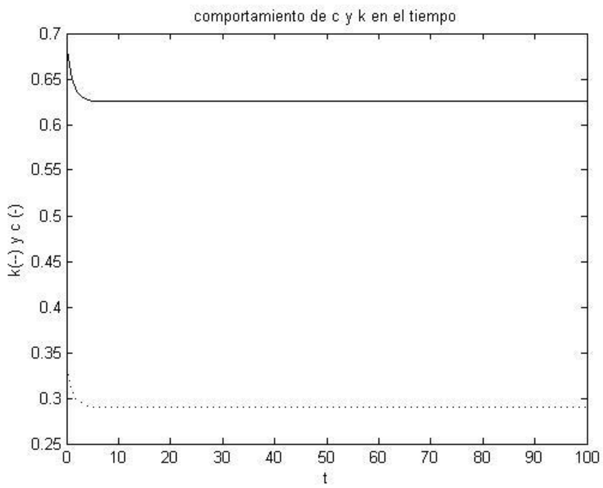
$$\hat{k}^* = 0.2902$$

Tal que, a partir de las condiciones Iniciales:

$$\hat{c}_0 = 0.6869$$

$$\hat{k}_0 = 0.3352$$

La trayectoria vuelve a ser decreciente hasta colocarse en los niveles de estado estacionario.



De acuerdo con el cuadro B.1.B, el nivel de estado estacionario más próximo al cálculo del consumo promedio es de 67.71% respecto del PIB, y se encuentra situado en un escenario donde la población total del país labora sujeta a una función de producción neoclásica donde $\alpha = 0.3$, con una preferencia intertemporal $\rho = 0.5$, cuya elasticidad de sustitución es $\theta = 0.1$, y con un progreso tecnológico $x = 0.01$.

Si se asume la necesidad de encontrar el valor más próximo de estado estacionario, a partir del nivel de consumo intermedio, entonces estrictamente debe cumplirse que el nivel de la intensidad de capital tendrá que ser mayor a 0.3439, pues de otra forma, la economía no podrá converger hacia dicho estado estacionario; lo anterior puede ser mostrado si se realizan los cálculos con que hemos ejemplificado al comienzo de este capítulo. Esto implica que, a partir de las condiciones iniciales, sabiendo que el consumo y el capital deben ser estrictamente mayores que los niveles estado estacionario, la política económica estaría dirigida a disminuir el nivel de consumo y de la relación capital trabajo.

Observemos ahora el cuadro B.2.B; al trabajar con la tasa de crecimiento de nuestra aproximación a la PEA rural, empleando un coeficiente $\alpha = 0.3$ dentro de la función de producción, el nivel de consumo promedio se sitúa en un escenario donde la preferencia intertemporal es $\rho = 0.5$, cuyo nivel máximo de estado estacionario se encuentra en los puntos:

$$\hat{c}^* = 0.6940$$

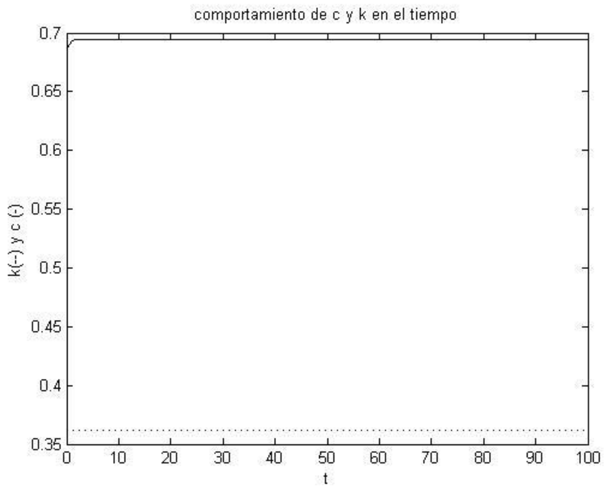
$$\hat{k}^* = 0.3622$$

Y a partir de las condiciones Iniciales:

$$\hat{c}_0 = 0.6869$$

$$\hat{k}_0 = 0.3600$$

La trayectoria deberá ser ligeramente ascendente hasta localizarse en los valores de estado estacionario.



Ya hemos aclarado al comienzo de este capítulo que, al suponer que la PEA rural trabaja de acuerdo con un coeficiente $\alpha = 0.3$, esto implica un rezago productivo en el sector agrícola, no habiendo comparación con el caso industrial, donde la productividad es mayor, aunque en algunos casos sólo ligeramente, que el caso del sector agrícola; por lo anterior, las comparaciones entre los cuadros B.2.A y B.2.B no tienen lugar, dado que hablamos de dos tipos de producción y dos tasas de crecimiento poblacional distintas.

Si observamos los cuadros B.1.B y B.2.b, encontraremos que, en concordancia con lo estipulado por el modelo de Ramsey, los niveles de estado estacionario son mayores para el caso de la PEA rural, por lo cual, de acuerdo con la rejilla de valores que hemos seleccionado para nuestra simulación, al trazar las trayectorias desde el nivel de consumo medio hasta el nivel de estado estacionario máximo, en el caso de la población total dicha trayectoria será decreciente; pero, para el caso de la PEA rural, la trayectoria deberá ser creciente hasta encontrar dicho nivel máximo.

Por su parte, el cálculo del nivel mínimo de estado estacionario define los siguientes valores:

$$\hat{c}^* = 0.6388$$

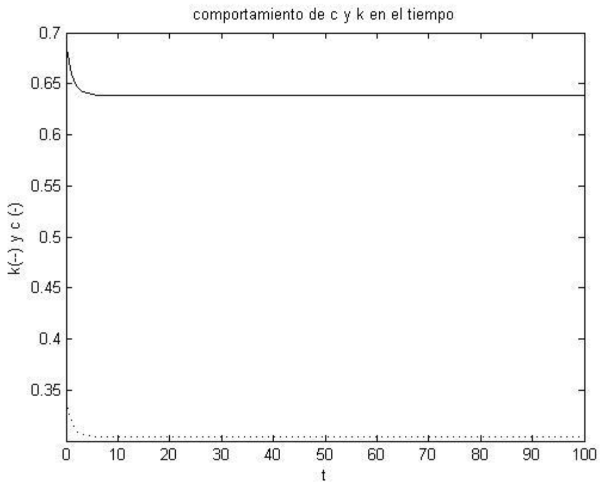
$$\hat{k}^* = 0.3038$$

El cual, partiendo de las condiciones iniciales:

$$\hat{c}_0 = 0.6869$$

$$\hat{k}_0 = 0.3398$$

Es alcanzado luego de que el consumo y el capital sean decrecientes hasta colocarse en dichos niveles.



De acuerdo con el cuadro B.2.B, el nivel de estado estacionario más próximo al cálculo del consumo promedio es de 69.07% respecto del PIB, y se encuentra situado en un escenario donde la PEA rural labora sujeta a una función de producción neoclásica donde $\alpha = 0.3$, con una preferencia intertemporal $\rho = 0.5$, cuya elasticidad de sustitución es $\theta = 0.9$, y con un progreso tecnológico $x = 0.01$.

Si se asume la necesidad de encontrar el valor más próximo de estado estacionario, a partir del nivel de consumo intermedio, entonces estrictamente debe cumplirse que el nivel de la intensidad de capital tendrá que ser menor a0.3556, pues de otra forma, la economía no podrá converger hacia dicho estado estacionario; lo anterior puede ser mostrado si se realizan los cálculos con que hemos ejemplificado al comienzo de este capítulo. Esto implica que, a partir de las condiciones iniciales, sabiendo que el consumo y el capital deben ser estrictamente menores que los niveles estado estacionario, la política económica estaría dirigida a incrementar el nivel de consumo y de la relación capital trabajo.

México en el Período 1970-1980[31].

A partir de los cálculos obtenidos por el Dr. Abraham Aparicio Cabrera, el consumo promedio de la población representó el 67.75% del PIB Real para el período 1970-1980; este dato será fijo para todo el período y lo emplearemos como referencia para obtener los resultados pertinentes de acuerdo con la simulación del modelo de Ramsey para cada caso específico, de acuerdo con las distintas tasas de crecimiento poblacional obtenidas.

Mediante los cálculos realizados para el período 1970-1980, encontramos que la tasa de crecimiento de la población total de México (3.26% anual) fue nuevamente superada por la tasa de crecimiento de la PEA urbana (5.05% anual); mientras que la tasa de crecimiento de la PEA rural (1.50% anual) fue la más baja de las tasa de las tres tasas de crecimiento poblacional. Por lo anterior y, de acuerdo con el capítulo II, sabemos que manteniendo los valores de nuestra rejilla de simulación el cambio en la tasa de crecimiento de la población habrá de dar como resultados diferentes niveles de estado estacionario, lo cual mostraremos a continuación.

Revisemos el cuadro B.3.A; si empleamos la tasa de crecimiento de la población total, sujeta a una función de producción con un coeficiente $\alpha = 0.5$, el nivel del consumo promedio queda incluido en una simulación donde la preferencia intertemporal del consumo es $\rho = 0.5$ y donde el nivel máximo de estado estacionario está definido por los valores:

$$\hat{c}^* = 0.7003$$

$$\hat{k}^* = 0.6226$$

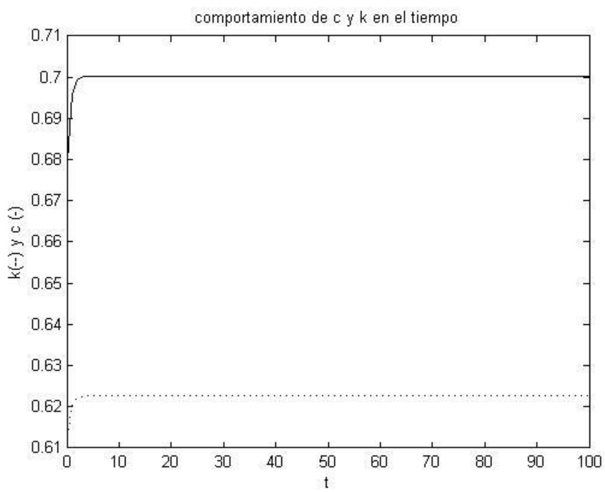
[31] Fue la época del "Populismo", con un estancamiento económico notorio e inflación; el incremento en los precios del petróleo, surgido en 1973, fue una válvula de escape ante los conflictos económicos, pues el gobierno optó por realizar un gasto exorbitante que tuvo como resultado llevar el déficit público a un nivel inaudito. Había insuficiencia **del sistema alimentario mexicano para cumplir con la estabilidad que lo había caracterizado durante la década de los años sesenta**, ya que la descapitalización del campo y la falta de apoyo a zonas de riego, así como el ostracismo y la falta de organización de los agricultores que se mantenían en la producción de subsistencia, potenciaron la caída en los niveles productivos manifestados al comienzo del Desarrollo Estabilizador.La forma como había sido planteado el modelo original en la década de los sesenta planteaba que al generarse un mayor **excedente social**, mayor seria el nivel de acumulación, dando impulso a las fuerzas productivas; pero gran parte del excedente fue empleado para mantener un **nivel de consumo exagerado** por parte de una minoría depobladores. En las zonas urbanas el salario decaía, junto con el ingreso de las familias y la contracción del mercado interno que había progresado años antes; una explicación implicaba la falta de prevención sobre el crecimiento de la población, pues al salir al mercado laboral en busca de un empleo, presionaban los ingresos a la baja. La tasa de crecimiento de la productividad general de la economía fue mayor que la tasa media de crecimiento de los salarios , explicando el porqué se asumía que el excedente social podría manifestar una tendencia de crecimiento, pero el único futuro de tal política era una grave crisis económica.

Partiendo de las condiciones Iniciales:

$$\hat{c}_0 = 0.6775$$

$$\hat{k}_0 = 0.6121$$

La trayectoria debe ser ascendente hasta encontrar precisamente los valores de estado estacionario.



En el caso del nivel mínimo, sus valores están definidos en:

$$\hat{c}^* = 0.5913$$

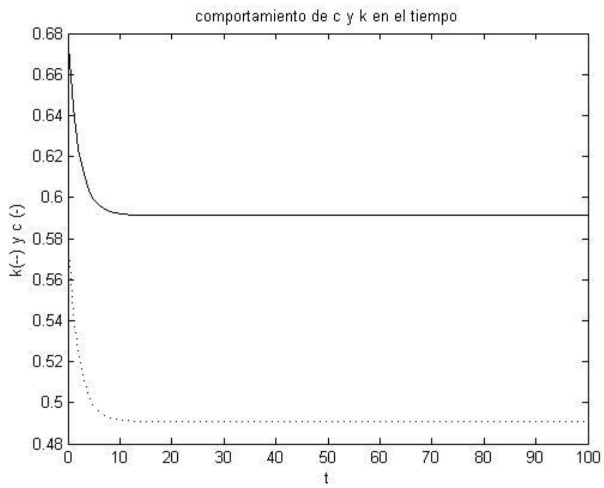
$$\hat{k}^* = 0.4909$$

Y, a partir de las condiciones iniciales:

$$\hat{c}_0 = 0.6775$$

$$\hat{k}_0 = 0.5789$$

La trayectoria deberá ser descendente hasta llegar a dicho estado.



Si observamos el cuadro B.3.A, el nivel de estado estacionario más próximo al cálculo del consumo promedio es de 67.18% respecto del PIB, y se encuentra situado en un escenario donde la población labora sujeta a una función de producción neoclásica donde $\alpha = 0.5$, con una preferencia intertemporal $\rho = 0.5$, cuya elasticidad de sustitución es $\theta = 0.1$, y con un progreso tecnológico $x = 0.05$.

Si se asume la necesidad de encontrar el valor más próximo de estado estacionario, a partir del nivel de consumo intermedio, entonces estrictamente debe cumplirse que el nivel de la intensidad de capital tendrá que ser mayor a 0.6149, pues de otra forma, la economía no podrá converger hacia dicho estado estacionario; lo anterior puede ser mostrado si se realizan los cálculos con que hemos ejemplificado al comienzo de este capítulo. Esto implica que, a partir de las condiciones iniciales, sabiendo que el consumo y el capital deben ser estrictamente mayores que los niveles de estado estacionario, la política económica estaría dirigida a disminuir los niveles de consumo y de la relación capital trabajo.

Ahora observemos el cuadro B.4.A; si empleamos la tasa de crecimiento de nuestra aproximación a la PEA urbana, empleando un coeficiente $\alpha = 0.5$ dentro de la función de producción, el nivel de consumo promedio se aproxima a un escenario donde la preferencia intertemporal es $\rho = 0.5$, y cuyo nivel máximo de estado estacionario se encuentra en los puntos:

$$\hat{c}^* = 0.6728$$

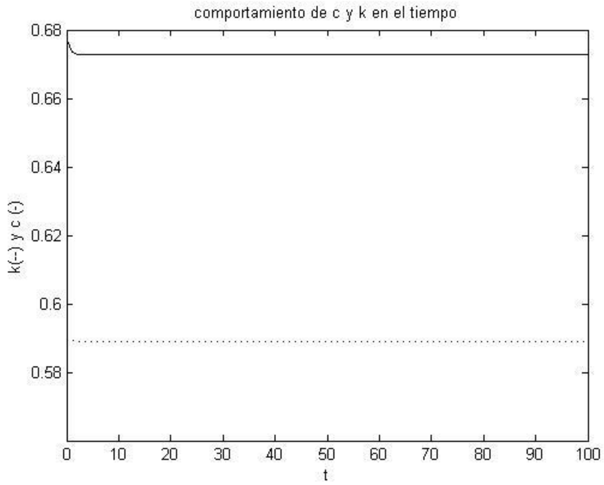
$$\hat{k}^* = 0.5888$$

Luego, a partir de las condiciones iniciales:

$$\hat{c}_0 = 0.6775$$

$$\hat{k}_0 = 0.5910$$

La trayectoria del consumo y el capital debe ser ligeramente descendente hasta colocarse en dichos valores de estado estacionario.



Si observamos los cuadros B.3.A y B.4.A, encontraremos que, en concordancia con lo estipulado por el modelo de Ramsey, los niveles de estado estacionario son menores en el caso de la PEA urbana, por lo cual, de acuerdo con la rejilla de valores que hemos seleccionado para nuestra simulación, al trazar las trayectorias desde el nivel de consumo medio hasta el nivel de estado estacionario máximo, en el caso de la población total dicha trayectoria será creciente; pero, para el caso de la PEA urbana, la trayectoria deberá ser decreciente hasta encontrar dicho nivel máximo.

Por su parte y, como veremos a continuación, en el caso de buscar los niveles mínimos de estado estacionario, en ambos casos la trayectoria deberá ser decreciente; pero, para el caso de la PEA urbana el descenso será mayor, dadas las diferencias entre las tasas de crecimiento poblacionales.

Por su parte, el nivel mínimo de estado estacionario se encuentra en los puntos:

$$\hat{c}^* = 0.5711$$

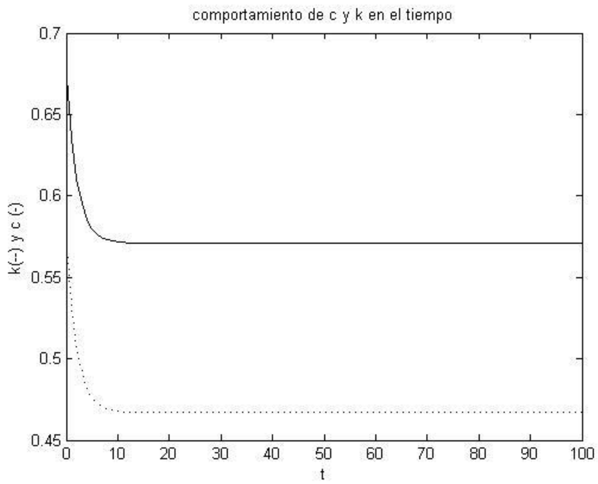
$$\hat{k}^* = 0.4671$$

Y la convergencia del consumo y el capital queda sujeta a las condiciones iniciales:

$$\hat{c}_0 = 0.6775$$

$$\hat{k}_0 = 0.5744$$

Donde la trayectoria debe ser decreciente hasta que se alcance el nivel de estado estacionario.



En el cuadro B.4.A se observa que el nivel de estado estacionario más próximo al cálculo del consumo promedio es de 67.28% respecto del PIB, y se encuentra situado en un escenario donde la PEA urbana labora sujeta a una función de producción neoclásica donde $\alpha = 0.5$, con una preferencia intertemporal $\rho = 0.5$, cuya elasticidad de sustitución es $\theta = 0.1$, y con un progreso tecnológico $x = 0.01$.

Si se asume la necesidad de encontrar el valor más próximo de estado estacionario, a partir del nivel de consumo intermedio, entonces estrictamente debe cumplirse que el nivel de la intensidad de capital tendrá que ser mayor a 0.5888, pues de otra forma, la economía no podrá converger hacia dicho estado estacionario; lo anterior puede ser mostrado si se realizan los cálculos con que hemos ejemplificado al comienzo de este capítulo. Esto implica que, a partir de las condiciones iniciales, sabiendo que el consumo y el capital deben ser estrictamente mayores que los niveles de estado estacionario, la política económica estaría dirigida a disminuir los niveles de consumo y de la relación capital trabajo.

Pasemos ahora al cuadro B.3.B; si retomamos e caso de la población total y su tasa de crecimiento, sujetándola a una función de producción con un coeficiente $\alpha = 0.3$, el nivel de consumo promedio se aproxima a una simulación donde $\rho = 0.5$, y cuyo nivel máximo de estado estacionario queda definido por:

$$\hat{c}^{*} = 0.6768$$

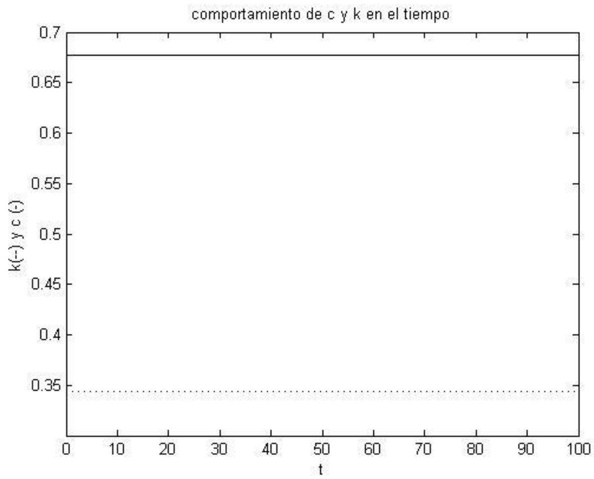
$$\hat{k}^{*} = 0.3436$$

A partir de las condiciones iniciales:

$$\hat{c}_0 = 0.6775$$

$$\hat{k}_0 = 0.3439$$

La trayectoria del comportamiento del consumo y el capital debe ser mínimamente decreciente hasta alcanzar el nivel de estado estacionario.



Ya hemos definido anteriormente que un cambio en el valor del coeficiente alpha (en este caso menor a 0.5) dentro de la función de producción, implica que la elasticidad del producto cambia ante variaciones del 1% en el coeficiente capital-trabajo. En este caso, al someter a la población total a una función de producción donde se obtiene menor producción, los estados estacionarios habrán de disminuir respecto a un valor más elevado para dicho coeficiente, por lo tanto, los niveles calculados por la rejilla de valores donde $\alpha = 0.3$ tendrán que disminuir obligatoriamente, de acuerdo con los postulados teporicos del modelo de Ramsey.

Si observamos estos dos escenarios presentados hasta hora en los cuadros B.3.A y B.3.B, ambos suponen que la población total genera distintos niveles de producto, lo cual se puede deber a una falta de inversión para generar capital, a la tecnología rezagada o al empleo de técnicas ineficientes de producción; pero en todo caso, la función de producción sigue sumiendo su papel dentro del crecimiento economico, siendo la encargada de generar los ingresos brutos necesarios para cubrir los niveles de consumo presentes y futuros.

Por su parte, el nivel mínimo de estado estacionario se encuentra localizado en los niveles:

$$\hat{c}^* = 0.6252$$

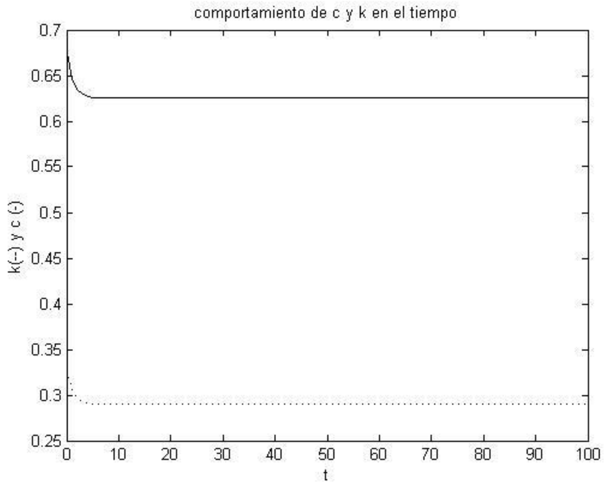
$$\hat{k}^* = 0.2900$$

Partiendo de las condiciones iniciales:

$$\hat{c}_0 = 0.6775$$

$$\hat{k}_0 = 0.3282$$

La trayectoria deberá ser descendente hasta encontrarse en los niveles óptimos de consumo y capital.



De acuerdo con el cuadro B.3.B, el nivel de estado estacionario más próximo al cálculo del consumo promedio es de 67.68% respecto del PIB, y se encuentra situado en un escenario donde la población labora sujeta a una función de producción neoclásica donde $\alpha = 0.3$, con una preferencia intertemporal $\rho = 0.5$, cuya elasticidad de sustitución es $\theta = 0.1$, y con un progreso tecnológico $x = 0.01$.

Si se asume la necesidad de encontrar el valor más próximo de estado estacionario, a partir del nivel de consumo intermedio, entonces estrictamente debe cumplirse que el nivel de la intensidad de capital tendrá que ser mayor a 0.3436, pues de otra forma, la economía no podrá converger hacia dicho estado estacionario; lo anterior puede ser mostrado si se realizan los cálculos con que hemos ejemplificado al comienzo de este capítulo. Esto implica que, a partir de las condiciones iniciales, sabiendo que el consumo y el capital deben ser estrictamente mayores que los niveles de estado estacionario, la política económica estaría dirigida a disminuir los niveles de consumo y de la relación capital trabajo.

Finalmente, revisemos el cuadro B.4.B; al trabajar con la tasa de crecimiento de nuestra aproximación a la PEA rural, empleando un coeficiente $\alpha = 0.3$ dentro de la función de producción, el nivel de consumo promedio se incluye en un escenario donde la preferencia intertemporal es $\rho = 0.5$, y cuyo nivel máximo de estado estacionario se encuentra en los puntos:

$$\hat{c}^* = 0.6899$$

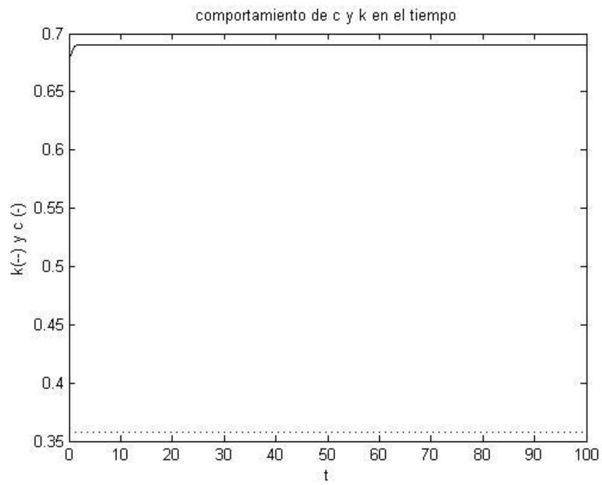
$$\hat{k}^* = 0.3577$$

Partiendo de las condiciones iniciales:

$$\hat{c}_0 = 0.6775$$

$$\hat{k}_0 = 0.3538$$

La trayectoria del consumo y el capital deberá ser ligeramente ascendente hasta encontrarse en dicho estado estacionario.



Ya hemos aclarado al comienzo de este capítulo que, al suponer que la PEA rural trabaja de acuerdo con un coeficiente $\alpha = 0.3$, esto implica un rezago productivo en el sector agrícola, no habiendo comparación con el caso industrial, donde la productividad es mayor, aunque en algunos casos sólo ligeramente, que el caso del sector agrícola; por lo anterior, las comparaciones entre los cuadros B.4.A y B.4.B no tienen lugar, dado que hablamos de dos tipos de producción y dos tasas de crecimiento poblacional distintas.

Si observamos los cuadros B.3.B y B.4.B, encontraremos que, en concordancia con lo estipulado por el modelo de Ramsey, los niveles de estado estacionario son mayores para el caso de la PEA rural, por lo cual, de acuerdo con la rejilla de valores que hemos seleccionado para nuestra simulación, al trazar las trayectorias desde el nivel de consumo medio hasta el nivel de estado estacionario máximo, en el caso de la población total dicha trayectoria será decreciente; pero, para el caso de la PEA rural, la trayectoria deberá ser creciente hasta encontrar dicho nivel máximo.

Por otro lado, el nivel mínimo de estado estacionario queda determinado por los niveles:

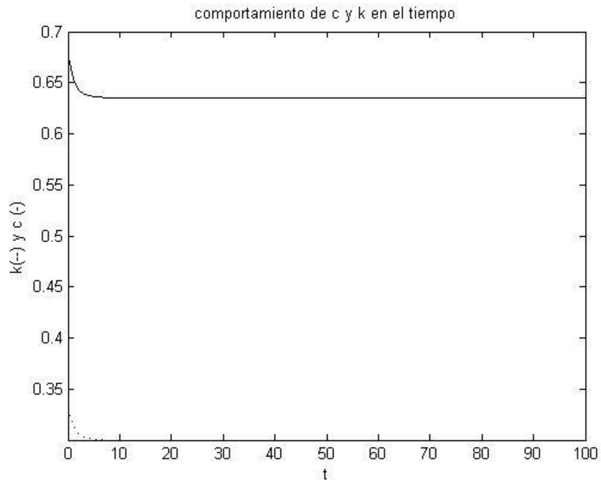
$$\hat{c}^* = 0.6356$$

$$\hat{k}^* = 0.3005$$

Y, a partir de las condiciones iniciales:

$$\hat{c}_0 = 0.6775$$

$$\hat{k}_0 = 0.3317$$



Mediante el cuadro B.4.B, se determina que el nivel de estado estacionario más próximo al cálculo del consumo promedio es de 67.41% respecto del PIB, y se encuentra situado en un escenario donde la población labora sujeta a una función de producción neoclásica donde $\alpha = 0.3$, con una preferencia intertemporal $\rho = 0.5$, cuya elasticidad de sustitución es $\theta = 0.1$, y con un progreso tecnológico $x = 0.05$.

Si se asume la necesidad de encontrar el valor más próximo de estado estacionario, a partir del nivel de consumo intermedio, entonces estrictamente debe cumplirse que el nivel de la intensidad de capital tendrá que ser mayor a 0.3544, pues de otra forma, la economía no podrá converger hacia dicho estado estacionario; lo anterior puede ser mostrado si se realizan los cálculos con que hemos ejemplificado al comienzo de este capítulo. Esto implica que, a partir de las condiciones iniciales, sabiendo que el consumo y el capital deben ser estrictamente mayores que los niveles de estado estacionario, la política económica estaría dirigida a disminuir los niveles de consumo y de la relación capital trabajo.

México en el Período 1980-1990[32].

Según los datos calculados por el Dr. Abraham Aparicio Cabrera, el consumo promedio de la población representó el 63.42% del PIB Real para el período 1980-1990; este dato será fijo para todo el período y lo emplearemos como referencia para obtener los resultados pertinentes de acuerdo con la simulación del modelo de Ramsey para cada caso específico, de acuerdo con las distintas tasas de crecimiento poblacional obtenidas.

A partir de los censos de población realizados para el período 1980-1990, obtenemos que la tasa de crecimiento de la población total de México (1.95% anual) fue superada por la tasa de crecimiento de la PEA urbana (3.44% anual), mientras que la tasa de crecimiento de la PEA rural (0.801% anual) fue nuevamente la más baja de las tres tasas calculadas. Por lo anterior y, de acuerdo con el capítulo II, sabemos que manteniendo los valores de nuestra rejilla de simulación el cambio en la tasa de crecimiento de la población habrá de dar como resultados diferentes niveles de estado estacionario, lo cual mostraremos a continuación.

Revisemos el cuadro B.5.A; si empleamos la tasa de crecimiento de la población total, sujeta a una función de producción con un coeficiente $\alpha = 0.5$, el nivel del consumo promedio se sitúa en una simulación donde la preferencia intertemporal del consumo es $\rho = 0.5$, cuyo nivel máximo de estado estacionario está definido por los valores:

$$\hat{c}^{*} = 0.7217$$

$$\hat{k}^{*} = 0.6493$$

Y, a partir de las condiciones iniciales:

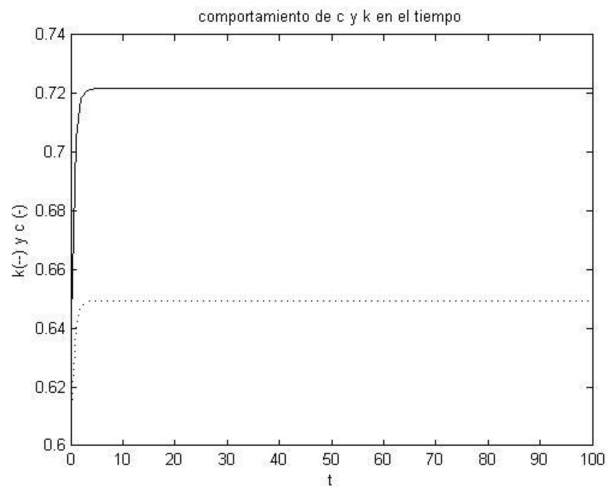
$$\hat{c}_0 = 0.6342$$

$$\hat{k}_0 = 0.6080$$

[32] En general, la década de los años ochenta es vista como el período donde comenzó un nuevo modelo en la economía mexicana: el neoliberalismo, que vendría a poner fin a la intervención del gobierno en la economía, desincorporando empresas públicas, desregulando las actividades productivas, permitiendo la apertura del sector financiero y, en general, de toda la economía mexicana. Hablar de la década de los años ochenta implica recordar antes que nada el Consenso de Washington, cuyas reformas alterarían de forma significativa toda la estructura de la economía; el objetivo de las reformas era claro: privatizar las empresas públicas, desregular las actividades económicas, mantener la disciplina fiscal mediante la reducción del gasto público e implementar una reforma tributaria que descansaría sobre los impuestos indirectos.

México era tierra fértil para implementar un nuevo paradigma, impulsado por el gobierno de los Estados Unidos y el capital nacional, aprovechando la decadencia de un modelo económico que mostraba limitantes, deficiencia y contradicciones dentro de sus planes de acción; se buscaba una reforma financiera que permitiera generar una mayor cantidad de ahorro nacional y las actividades en áreas prioritarias o estratégicas se redujeron por parte del Estado, pues se puso un freno a la banca de desarrollo que durante décadas había financiado la labor gubernamental.

La trayectoria del consumo y el capital deberá ser ascendente hasta localizarse en dicho estado estacionario.



Por su parte, el nivel mínimo queda definido por lo niveles:

$$\hat{c}^* = 0.6070$$

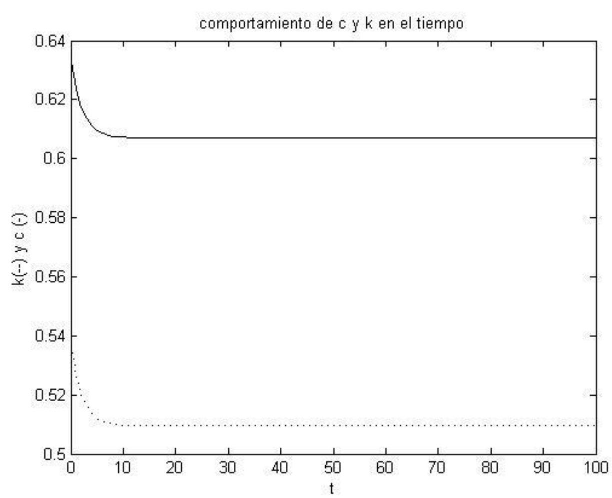
$$\hat{k}^* = 0.5095$$

Y la convergencia está determinada por las condiciones iniciales:

$$\hat{c}_0 = 0.6342$$

$$\hat{k}_0 = 0.5375$$

Siendo entonces una trayectoria decreciente la que colocará al consumo y al capital en su nivel de estado estacionario.



Al observar el cuadro B.5.A, se determina que el nivel de estado estacionario más próximo al cálculo del consumo promedio es de 63.38% respecto del PIB, y se encuentra situado en un escenario donde la población labora sujeta a una función de producción neoclásica donde $\alpha = 0.5$, con una preferencia intertemporal $\rho = 0.5$, cuya elasticidad de sustitución es $\theta = 0.5$, y con un progreso tecnológico $x = 0.09$.

Si se asume la necesidad de encontrar el valor más próximo de estado estacionario, a partir del nivel de consumo intermedio, entonces estrictamente debe cumplirse que el nivel de la intensidad de capital tendrá que ser mayor a 0.5662, pues de otra forma, la economía no podrá converger hacia dicho estado estacionario; lo anterior puede ser mostrado si se realizan los cálculos con que hemos ejemplificado al comienzo de este capítulo. Esto implica que, a partir de las condiciones iniciales, sabiendo que el consumo y el capital deben ser estrictamente mayores que los niveles de estado estacionario, la política económica estaría dirigida a disminuir los niveles de consumo y de la relación capital trabajo.

Observemos ahora el cuadro B.6.A; si empleamos la tasa de crecimiento de nuestra aproximación a la PEA urbana, empleando un coeficiente $\alpha = 0.5$ dentro de la función de producción, el nivel de consumo promedio queda comprendido en el escenario donde la preferencia intertemporal es $\rho = 0.5$, y cuyo nivel máximo de estado estacionario se encuentra en los puntos:

$$\hat{c}^* = 0.6974$$

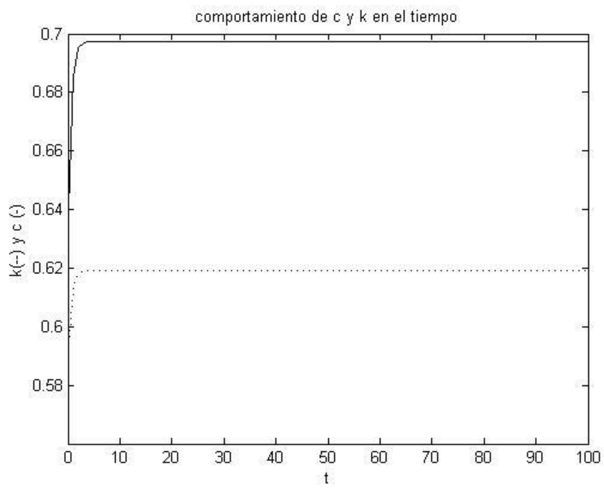
$$\hat{k}^* = 0.6192$$

Luego entonces, a partir de las condiciones iniciales:

$$\hat{c}_0 = 0.6342$$

$$\hat{k}_0 = 0.5898$$

El comportamiento del consumo y el capital deberá ser creciente hasta encontrarse con dicho estado estacionario.



Si observamos los cuadros B.5.A y B.6.A, encontraremos que, en concordancia con lo estipulado por el modelo de Ramsey, los niveles de estado estacionario son menores en el caso de la PEA urbana, por lo cual, de acuerdo con la rejilla de valores que hemos seleccionado para nuestra simulación, al trazar las trayectorias desde el nivel de consumo medio hasta el nivel de estado estacionario máximo, en el caso de la población total dicha trayectoria será creciente; pero, para el caso de la PEA urbana, la trayectoria deberá ser decreciente hasta encontrar dicho nivel máximo.

Por su parte y, como veremos a continuación, en el caso de buscar los niveles mínimos de estado estacionario, en ambos casos la trayectoria deberá ser decreciente; pero, para el caso de la PEA urbana el descenso será mayor, dadas las diferencias entre las tasas de crecimiento poblacionales.

Por su parte, el nivel mínimo es determinado por los valores:

$$\hat{c}^{*} = 0.5893$$

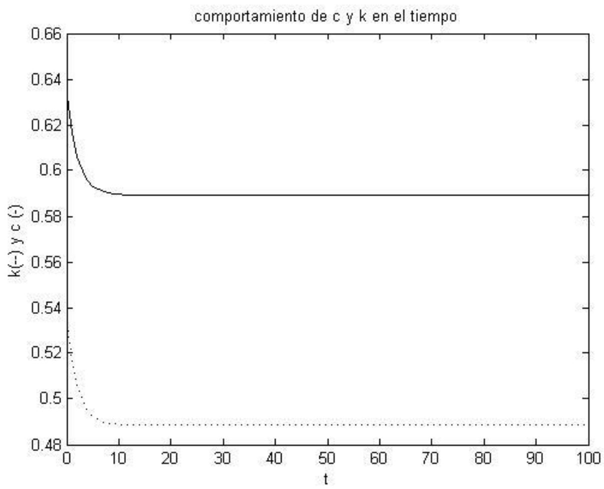
$$\hat{k}^{*} = 0.4884$$

Luego, tomando como condiciones iniciales:

$$\hat{c}_0 = 0.6342$$

$$\hat{k}_0 = 0.5343$$

La trayectoria del consumo y el capital deberá ser decreciente hasta encontrarse en su estado estacionario.



En el cuadro B.6.A, se observa que el nivel de estado estacionario más próximo al cálculo del consumo promedio es de 63.42% respecto del PIB, y se encuentra situado en un escenario donde la PEA urbana labora sujeta a una función de producción neoclásica donde $\alpha = 0.5$, con una preferencia intertemporal $\rho = 0.5$, cuya elasticidad de sustitución es $\theta = 0.9$, y con un progreso tecnológico $x = 0.05$.

Si se asume la necesidad de encontrar el valor más próximo de estado estacionario, a partir del nivel de consumo intermedio, entonces estrictamente debe cumplirse que el nivel de la intensidad de capital tendrá que ser menor a 0.5416, pues de otra forma, la economía no podrá converger hacia dicho estado estacionario; lo anterior puede ser mostrado si se realizan los cálculos con que hemos ejemplificado al comienzo de este capítulo. Esto implica que, a partir de las condiciones iniciales, sabiendo que el consumo y el capital deben ser estrictamente menores que los niveles de estado estacionario, la política económica estaría dirigida a incrementar los niveles de consumo y de la relación capital trabajo.

Revisemos ahora el cuadro B.5.B; si regresamos al caso de la población total y su tasa de crecimiento y la sujetamos a una función de producción con un coeficiente $\alpha = 0.3$, el nivel de consumo promedio es cercano a una simulación donde $\rho = 0.5$, y cuyo nivel máximo de estado estacionario queda definido por:

$$\hat{c}^* = 0.6865$$

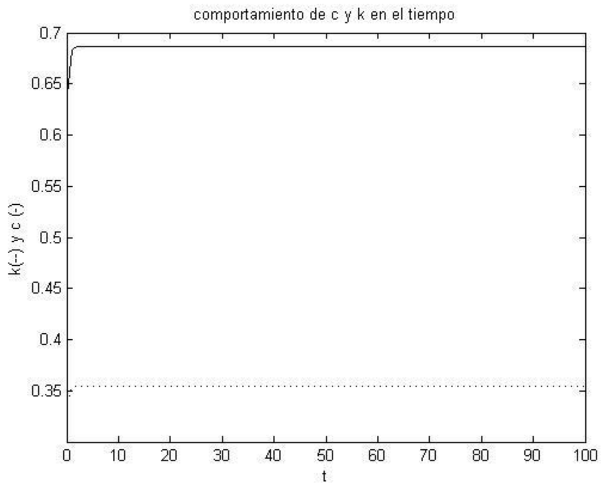
$$\hat{k}^* = 0.3541$$

Partiendo de las condiciones iniciales:

$$\hat{c}_0 = 0.6342$$

$$\hat{k}_0 = 0.3375$$

El consumo y el capital deberán tener una trayectoria ascendente hasta encontrarse en su nivel óptimo.



Ya hemos definido anteriormente que un cambio en el valor del coeficiente alpha (en este caso menor a 0.5) dentro de la función de producción, implica que la elasticidad del producto cambia ante variaciones del 1% en el coeficiente capital-trabajo. En este caso, al someter a la población total a una función de producción donde se obtiene menor producción, los estados estacionarios habrán de disminuir respecto a un valor más elevado para dicho coeficiente, por lo tanto, los niveles calculados por la rejilla de valores donde $\alpha = 0.3$ tendrán que disminuir obligatoriamente, de acuerdo con los postulados teporicos del modelo de Ramsey.

Si observamos estos dos escenarios presentados hasta hora en los cuadros B.5.A y B.5.B, ambos suponen que la población total genera distintos niveles de producto, lo cual se puede deber a una falta de inversión para generar capital, a la tecnología rezagada o al empleo de técnicas ineficientes de producción; pero en todo caso, la función de producción sigue sumiendo su papel dentro del crecimiento economico, siendo la encargada de generar los ingresos brutos necesarios para cubrir los niveles de consumo presentes y futuros.

Por otro lado, el nivel mínimo queda definido en los niveles:

$$\hat{c}^* = 0.6329$$

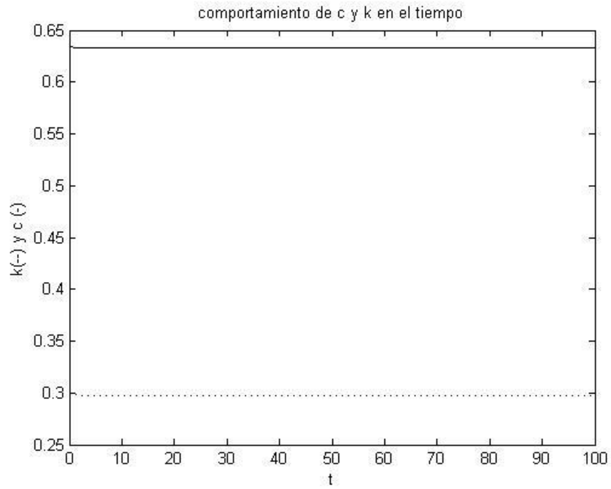
$$\hat{k}^* = 0.2978$$

Y el comportamiento del consumo y el capital se sujeta a las condiciones iniciales:

$$\hat{c}_0 = 0.6342$$

$$\hat{k}_0 = 0.2987$$

Lo cual implica una trayectoria ligeramente descendente hasta encontrar el estado estacionario.



En el cuadro B.5.B, se observa que el nivel de estado estacionario más próximo al cálculo del consumo promedio es de 63.29% respecto del PIB, y se encuentra situado en un escenario donde la población labora sujeta a una función de producción neoclásica donde $\alpha = 0.3$, con una preferencia intertemporal $\rho = 0.5$, cuya elasticidad de sustitución es $\theta = 0.9$, y con un progreso tecnológico $x = 0.09$.

Si se asume la necesidad de encontrar el valor más próximo de estado estacionario, a partir del nivel de consumo intermedio, entonces estrictamente debe cumplirse que el nivel de la intensidad de capital tendrá que ser mayor a 0.2978, pues de otra forma, la economía no podrá converger hacia dicho estado estacionario; lo anterior puede ser mostrado si se realizan los cálculos con que hemos ejemplificado al comienzo de este capítulo. Esto implica que, a partir de las condiciones iniciales, sabiendo que el consumo y el capital deben ser estrictamente mayores que los niveles de estado estacionario, la política económica estaría dirigida a disminuir los niveles de consumo y de la relación capital trabajo.

Finalmente, observemos el cuadro B.6.B; al trabajar con la tasa de crecimiento de nuestra aproximación a la PEA rural, empleando un coeficiente $\alpha = 0.3$ dentro de la función de producción, el nivel de consumo promedio se aproxima a en un escenario donde la preferencia intertemporal es $\rho = 0.5$, y cuyo nivel máximo de estado estacionario se encuentra en los puntos:

$$\hat{c}^* = 0.6953$$

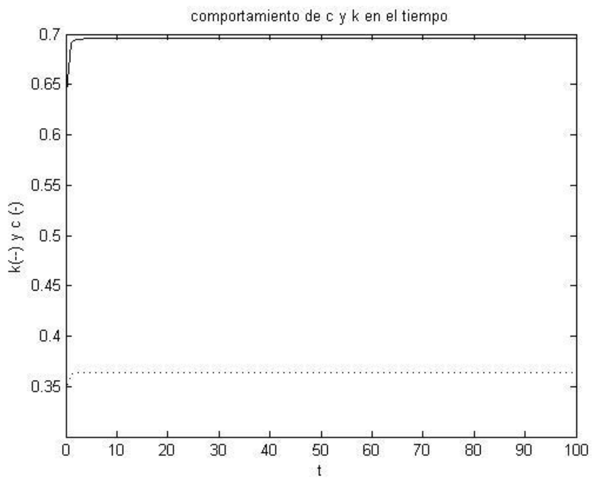
$$\hat{k}^* = 0.3637$$

Luego, a partir de las condiciones iniciales:

$$\hat{c}_0 = 0.6342$$

$$\hat{k}_0 = 0.3440$$

La trayectoria deberá ser ascendente hasta localizarse en el nivel de estado estacionario.



Ya hemos aclarado al comienzo de este capítulo que, al suponer que la PEA rural trabaja de acuerdo con un coeficiente $\alpha = 0.3$, esto implica un rezago productivo en el sector agrícola, no habiendo comparación con el caso industrial, donde la productividad es mayor, aunque en algunos casos sólo ligeramente, que el caso del sector agrícola; por lo anterior, las comparaciones entre los cuadros B.6.A y B.6.B no tienen lugar, dado que hablamos de dos tipos de producción y dos tasas de crecimiento poblacional distintas.

Si observamos los cuadros B.5.B y B.6.B, encontraremos que, en concordancia con lo estipulado por el modelo de Ramsey, los niveles de estado estacionario son mayores para el caso de la PEA rural; pero, a pesar de lo anterior, de acuerdo con nuestra rejilla de simulación empleada, tanto en el caso de la población total como en el caso de la PEA rural, las trayectorias desde el nivel de consumo medio hasta el nivel de estado estacionario máximo, serán crecientes en ambos casos.

Respecto al nivel mínimo, sus valores son los siguientes:

$$\hat{c}^* = 0.6399$$

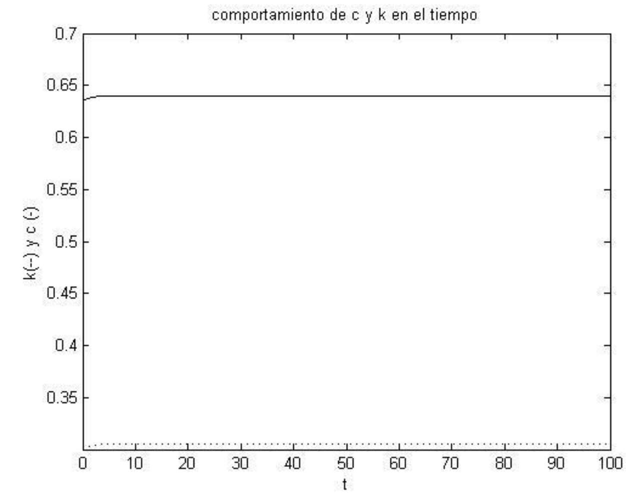
$$\hat{k}^* = 0.3049$$

Y las condiciones iniciales deben ser:

$$\hat{c}_0 = 0.6342$$

$$\hat{k}_0 = 0.3006$$

Y la trayectoria del comportamiento del consumo y el capital habrá de ser ligeramente ascendente hasta llegar a su nivel óptimo.



Si observamos el cuadro B.6.B, encontramos que el nivel de estado estacionario más próximo al cálculo del consumo promedio es de 63.99% respecto del PIB, y se encuentra situado en un escenario donde la PEA rural labora sujeta a una función de producción neoclásica donde $\alpha = 0.3$, con una preferencia intertemporal $\rho = 0.5$, cuya elasticidad de sustitución es $\theta = 0.9$, y con un progreso tecnológico $x = 0.09$.

Si se asume la necesidad de encontrar el valor más próximo de estado estacionario, a partir del nivel de consumo intermedio, entonces estrictamente debe cumplirse que el nivel de la intensidad de capital tendrá que ser menor a 0.3049, pues de otra forma, la economía no podrá converger hacia dicho estado estacionario; lo anterior puede ser mostrado si se realizan los cálculos con que hemos ejemplificado al comienzo de este capítulo. Esto implica que, a partir de las condiciones iniciales, sabiendo que el consumo y el capital deben ser estrictamente menores que los niveles de estado estacionario, la política económica estaría dirigida a incrementar los niveles de consumo y de la relación capital trabajo.

México en el Período 1990-2000[33].

Tomando como referencia los cálculos del Dr. Abraham Aparicio Cabrera, el consumo promedio de la población representó el 66.61% del PIB Real para el período 1990-2000; este dato será fijo para todo el período y lo emplearemos como referencia para obtener los resultados pertinentes de acuerdo con la simulación del modelo de Ramsey para cada caso específico, de acuerdo con las distintas tasas de crecimiento poblacional obtenidas.

Los cálculos realizados para el período 1990-2000 muestran que la tasa de crecimiento de la población total de México (1.82% anual) fue nuevamente superada ´por la tasa de crecimiento de la PEA urbana (2.74% anual), mientras que la tasa de crecimiento de la PEA rural (1.11% anual) fue nuevamente la más baja de las tres. Por lo anterior y, de acuerdo con el capítulo II, sabemos que manteniendo los valores de nuestra rejilla de simulación el cambio en la tasa de crecimiento de la población habrá de dar como resultados diferentes niveles de estado estacionario, lo cual mostraremos a continuación.

Consultemos el cuadro B.7.A; si empleamos la tasa de crecimiento de la población total, sujeta a una función de producción con un coeficiente $\alpha = 0.5$, el nivel del consumo promedio se sitúa en una simulación donde la preferencia intertemporal del consumo es $\rho = 0.5$, y cuyo nivel máximo de estado estacionario está definido por los valores:

$$\hat{c}^* = 0.7239$$

$$\hat{k}^* = 0.6520$$

A partir de las condiciones iniciales:

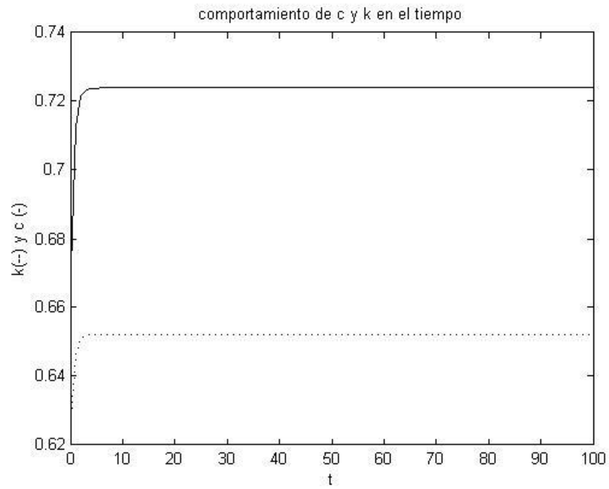
$$\hat{c}_0 = 0.6661$$

$$\hat{k}_0 = 0.6247$$

33 La década de los años noventa en México vio la mayor profundidad neoliberal, pues se pregonaba lograron imponer la idea generalizada de que todo lo público es “ineficiente”, que el estado es intrínsecamente perverso, que la única manera para que las empresas de servicios funcionen es privatizándolas, que así se reducirán gastos y se eliminará la corrupción; de la necesidad de achicar el estado, bajar el gasto público, abrir los mercados, incrementar la producción de artículos destinados a la exportación, flexibilizar y “modernizar” los mercados laborales, quebrar el poder de los sindicatos supuestamente interesados solamente en enriquecer a sus cúpulas, y reducir los gastos sociales, entre tantos otros postulados.

Se impuso la idea de que el programa económico liberal era el producto de un saber absoluto de carácter científico, encontrando un terreno fértil para sus críticas, –especialmente en lo que respecta al sector público–, porque en la mayoría de los países latinoamericanos este se encontraba profundamente desprestigiado por su corrupción e ineficiencia. El discurso presentaba un modelo económico con postulados simplistas, como si los países industrializados más desarrollados hubieran accedido al lugar que ocupan hoy en día combatiendo el proteccionismo y el estatismo.

La trayectoria del consumo y el capital deberá ser ascendente hasta alcanzar su nivel óptimo.



Por su parte, el nivel mínimo de estado estacionario se encuentra en los valores:

$$\hat{c}^* = 0.6086$$

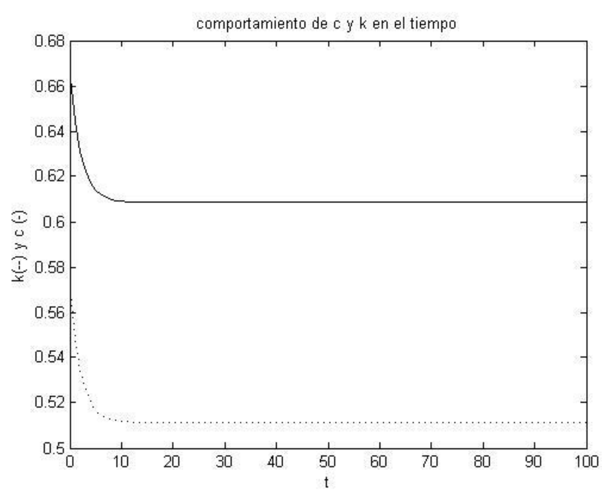
$$\hat{k}^* = 0.5113$$

Y a partir de las condiciones iniciales:

$$\hat{c}_0 = 0.6661$$

$$\hat{k}_0 = 0.5707$$

Se determina una trayectoria descendente hasta que el consumo y el capital se coloquen en sus niveles óptimos.



Si observamos el cuadro B.7.A, encontramos que el nivel de estado estacionario más próximo al cálculo del consumo promedio es de 66.49% respecto del PIB, y se encuentra situado en un escenario donde la población labora sujeta a una función de producción neoclásica donde $\alpha = 0.5$, con una preferencia intertemporal $\rho = 0.5$, cuya elasticidad de sustitución es $\theta = 0.1$, y con un progreso tecnológico $x = 0.09$.

Si se asume la necesidad de encontrar el valor más próximo de estado estacionario, a partir del nivel de consumo intermedio, entonces estrictamente debe cumplirse que el nivel de la intensidad de capital tendrá que ser mayor a0.6355, pues de otra forma, la economía no podrá converger hacia dicho estado estacionario; lo anterior puede ser mostrado si se realizan los cálculos con que hemos ejemplificado al comienzo de este capítulo. Esto implica que, a partir de las condiciones iniciales, sabiendo que el consumo y el capital deben ser estrictamente mayores que los niveles de estado estacionario, la política económica estaría dirigida a disminuir los niveles de consumo y de la relación capital trabajo.

Pasemos ahora al cuadro B.8.A; si empleamos la tasa de crecimiento de nuestra aproximación a la PEA urbana, empleando un coeficiente $\alpha = 0.5$ dentro de la función de producción, el nivel de consumo promedio queda comprendido en el escenario donde la preferencia intertemporal es $\rho = 0.5$, y cuyo nivel máximo de estado estacionario se encuentra en los puntos:

$$\hat{c}^* = 0.7086$$

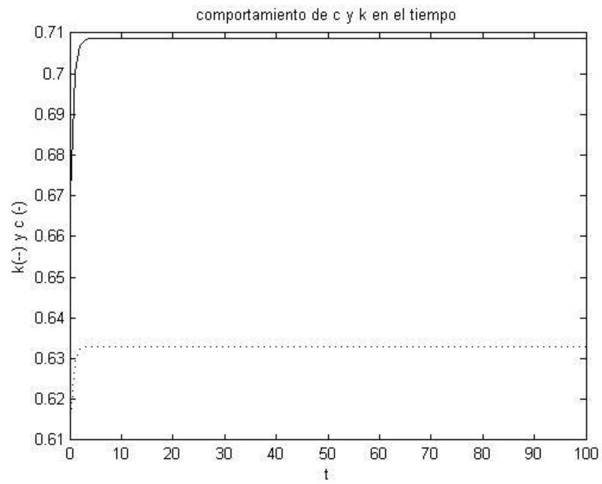
$$\hat{k}^* = 0.6330$$

Partiendo de las condiciones iniciales:

$$\hat{c}_0 = 0.6661$$

$$\hat{k}_0 = 0.6131$$

La trayectoria del consumo deberá ser creciente hasta encontrar sus niveles óptimos.



Si observamos los cuadros B.7.A y B.8.A, encontraremos que, en concordancia con lo estipulado por el modelo de Ramsey, los niveles de estado estacionario son menores en el caso de la PEA urbana, por lo cual, de acuerdo con la rejilla de valores que hemos seleccionado para nuestra simulación, al trazar las trayectorias desde el nivel de consumo medio hasta el nivel de estado estacionario máximo, en el caso de la población total dicha trayectoria será creciente; pero, para el caso de la PEA urbana, la trayectoria deberá ser decreciente hasta encontrar dicho nivel máximo.

Por su parte y, como veremos a continuación, en el caso de buscar los niveles mínimos de estado estacionario, en ambos casos la trayectoria deberá ser decreciente; pero, para el caso de la PEA urbana el descenso será mayor, dadas las diferencias entre las tasas de crecimiento poblacionales.

Por otra parte, el nivel mínimo corresponde a los valores:

$$\hat{c}^* = 0.5975$$

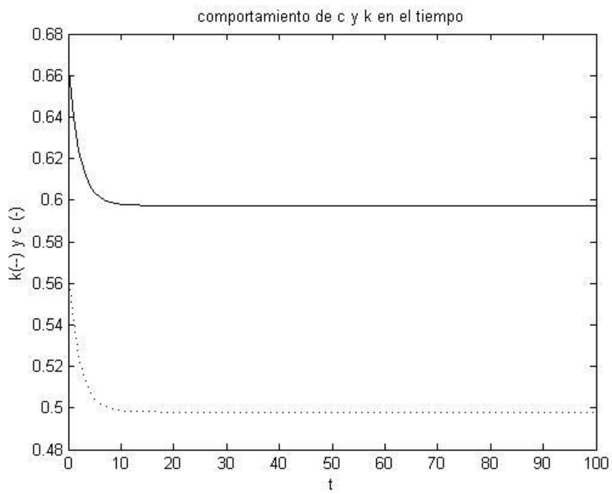
$$\hat{k}^* = 0.4981$$

Y, partiendo de las condiciones iniciales:

$$\hat{c}_0 = 0.6661$$

$$\hat{k}_0 = 0.5685$$

El comportamiento del consumo y el capital deberá ser decreciente hasta encontrar el estado estacionario.



De acuerdo con el cuadro B.8.A, el nivel de estado estacionario más próximo al cálculo del consumo promedio es de 66.21% respecto del PIB, y se encuentra situado en un escenario donde la PEA urbana labora sujeta a una función de producción neoclásica donde $\alpha = 0.5$, con una preferencia intertemporal $\rho = 0.5$, cuya elasticidad de sustitución es $\theta = 0.5$, y con un progreso tecnológico $x = 0.05$.

Si se asume la necesidad de encontrar el valor más próximo de estado estacionario, a partir del nivel de consumo intermedio, entonces estrictamente debe cumplirse que el nivel de la intensidad de capital tendrá que ser mayor a 0.5873, pues de otra forma, la economía no podrá converger hacia dicho estado estacionario; lo anterior puede ser mostrado si se realizan los cálculos con que hemos ejemplificado al comienzo de este capítulo. Esto implica que, a partir de las condiciones iniciales, sabiendo que el consumo y el capital deben ser estrictamente mayores que los niveles de estado estacionario, la política económica estaría dirigida a disminuir los niveles de consumo y de la relación capital trabajo.

Veamos ahora el cuadro B.7.B; si retomamos el caso de la población total y su tasa de crecimiento, sujetándola a una función de producción con un coeficiente $\alpha = 0.3$, el nivel de consumo promedio que comprendido en una simulación donde $\rho = 0.5$, y cuyo nivel máximo de estado estacionario queda definido por:

$$\hat{c}^* = 0.6875$$

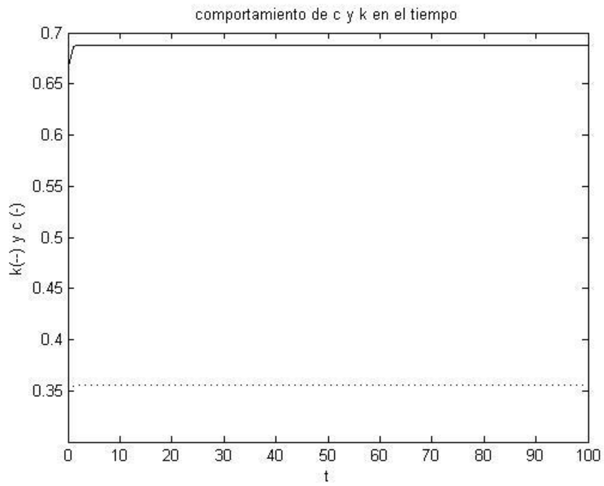
$$\hat{k}^* = 0.3551$$

Al sujetarse a las condiciones iniciales:

$$\hat{c}_0 = 0.6661$$

$$\hat{k}_0 = 0.3484$$

La trayectoria deberá ser ligeramente creciente hasta que el consumo y el capital encuentren su estado estacionario.



Ya hemos definido anteriormente que un cambio en el valor del coeficiente alpha (en este caso menor a 0.5) dentro de la función de producción, implica que la elasticidad del producto cambia ante variaciones del 1% en el coeficiente capital-trabajo. En este caso, al someter a la población total a una función de producción donde se obtiene menor producción, los estados estacionarios habrán de disminuir respecto a un valor más elevado para dicho coeficiente, por lo tanto, los niveles calculados por la rejilla de valores donde $\alpha = 0.3$ tendrán que disminuir obligatoriamente, de acuerdo con los postulados teporicos del modelo de Ramsey.

Si observamos estos dos escenarios presentados hasta hora en los cuadros B.7.A y B.7.B, ambos suponen que la población total genera distintos niveles de producto, lo cual se puede deber a una falta de inversión para generar capital, a la tecnología rezagada o al empleo de técnicas ineficientes de producción; pero en todo caso, la función de producción sigue sumiendo su papel dentro del crecimiento economico, siendo la encargada de generar los ingresos brutos necesarios para cubrir los niveles de consumo presentes y futuros.

Por otro lado, el nivel mínimo se determina por los niveles:

$$\hat{c}^* = 0.6337$$

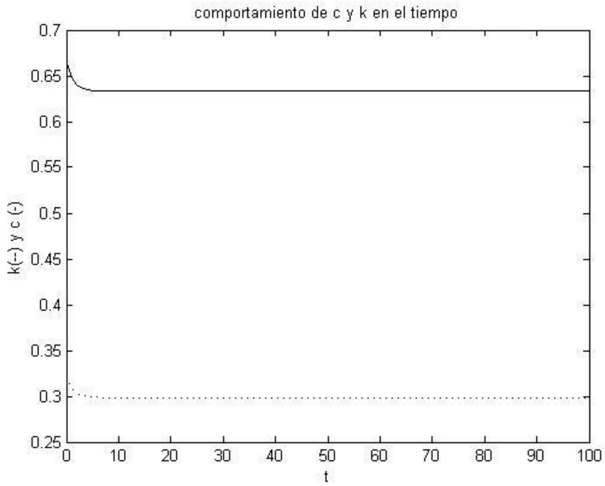
$$\hat{k}^* = 0.2985$$

Partiendo de las condiciones iniciales:

$$\hat{c}_0 = 0.6661$$

$$\hat{k}_0 = 0.3226$$

La trayectoria del consumo y el capital deberá ser nuevamente decreciente hasta lograr su estado estacionario.



Si observamos el cuadro B.7.B, el nivel de estado estacionario más próximo al cálculo del consumo promedio es de 66.46% respecto del PIB, y se encuentra situado en un escenario donde la población labora sujeta a una función de producción neoclásica donde $\alpha = 0.3$, con una preferencia intertemporal $\rho = 0.5$, cuya elasticidad de sustitución es $\theta = 0.5$, y con un progreso tecnológico $x = 0.05$.

Si se asume la necesidad de encontrar el valor más próximo de estado estacionario, a partir del nivel de consumo intermedio, entonces estrictamente debe cumplirse que el nivel de la intensidad de capital tendrá que ser mayor a 0.3364, pues de otra forma, la economía no podrá converger hacia dicho estado estacionario; lo anterior puede ser mostrado si se realizan los cálculos con que hemos ejemplificado al comienzo de este capítulo. Esto implica que, a partir de las condiciones iniciales, sabiendo que el consumo y el capital deben ser estrictamente mayores que los niveles de estado estacionario, la política económica estaría dirigida a disminuir los niveles de consumo y de la relación capital trabajo.

Finalmente, revisemos el cuadro B.8.B; al trabajar con la tasa de crecimiento de nuestra aproximación a la PEA rural, empleando un coeficiente $\alpha = 0.3$ dentro de la función de producción, el nivel de consumo promedio queda comprendido en un escenario donde la preferencia intertemporal es $\rho = 0.5$, y cuyo nivel máximo de estado estacionario se encuentra en los puntos:

$$\hat{c}^* = 0.6922$$

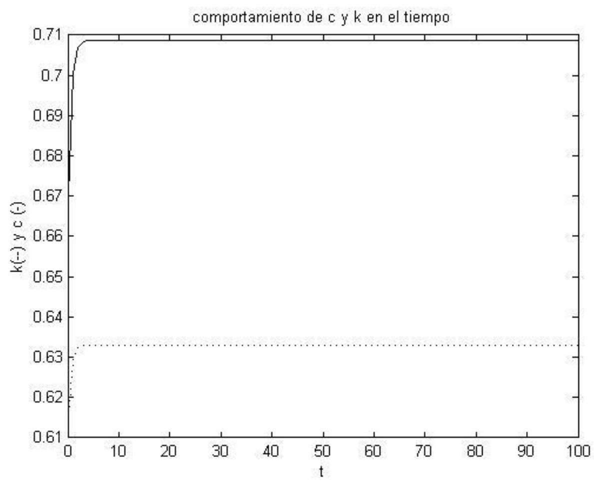
$$\hat{k}^* = 0.3603$$

Si partimos de las condiciones iniciales:

$$\hat{c}_0 = 0.6661$$

$$\hat{k}_0 = 0.3519$$

La trayectoria del consumo y el capital deberá ser creciente hasta que el estado estacionario sea alcanzado.



Ya hemos aclarado al comienzo de este capítulo que, al suponer que la PEA rural trabaja de acuerdo con un coeficiente $\alpha = 0.3$, esto implica un rezago productivo en el sector agrícola, no habiendo comparación con el caso industrial, donde la productividad es mayor, aunque en algunos casos sólo ligeramente, que el caso del sector agrícola; por lo anterior, las comparaciones entre los cuadros B.8.A y B.8.B no tienen lugar, dado que hablamos de dos tipos de producción y dos tasas de crecimiento poblacional distintas.

Si observamos los cuadros B.7.B y B.7.B, encontraremos que, en concordancia con lo estipulado por el modelo de Ramsey, los niveles de estado estacionario son mayores para el caso de la PEA rural; pero, a pesar de lo anterior, de acuerdo con nuestra rejilla de simulación empleada, tanto en el caso de la población total como en el caso de la PEA rural, las trayectorias desde el nivel de consumo medio hasta el nivel de estado estacionario máximo, serán crecientes en ambos casos.

Por su parte, el nivel mínimo se encuentra definido en los valores:

$$\hat{c}^* = 0.6374$$

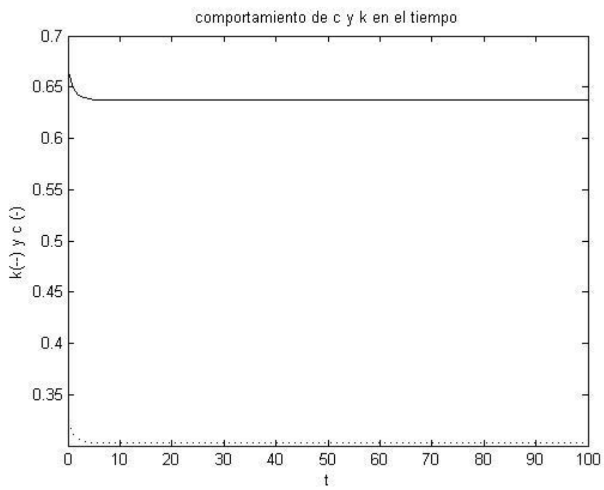
$$\hat{k}^* = 0.3024$$

Si empleamos las condiciones iniciales:

$$\hat{c}_0 = 0.6661$$

$$\hat{k}_0 = 0.3238$$

Entonces el comportamiento del consumo y el capital deberá ser decreciente hasta poder colocarse en sus niveles de estado estacionario.



Mediante el cuadro B.8.B, se observa que el nivel de estado estacionario más próximo al cálculo del consumo promedio es de 66.89% respecto del PIB, y se encuentra situado en un escenario donde la población labora sujeta a una función de producción neoclásica donde $\alpha = 0.3$, con una preferencia intertemporal $\rho = 0.5$, cuya elasticidad de sustitución es $\theta = 0.5$, y con un progreso tecnológico $x = 0.05$.

Si se asume la necesidad de encontrar el valor más próximo de estado estacionario, a partir del nivel de consumo intermedio, entonces estrictamente debe cumplirse que el nivel de la intensidad de capital tendrá que ser menor a 0.3411, pues de otra forma, la economía no podrá converger hacia dicho estado estacionario; lo anterior puede ser mostrado si se realizan los cálculos con que hemos ejemplificado al comienzo de este capítulo. Esto implica que, a partir de las condiciones iniciales, sabiendo que el consumo y el capital deben ser estrictamente menores que los niveles de estado estacionario, la política económica estaría dirigida a incrementar los niveles de consumo y de la relación capital trabajo.

CAPÍTULO IV. CONCLUSIONES.

Validez de la Rejilla de Simulación.

Al revisar los resultados obtenidos por las simulaciones anteriores encontramos que nuestra rejilla de valores funciona de acuerdo con los preceptos teóricos del modelo de Ramsey y esto es válido para los tres casos que se proponen en cada período de tiempo, desde la población total hasta las aproximaciones a la PEA urbana y rural. Pero hay una aclaración que debemos hacer en cuanto a una condición necesaria dentro de la simulación del modelo de Ramsey. De acuerdo con el texto original, que sirvió de guía a nuestro trabajo, los autores proponen la existencia de una desigualdad que debe cumplirse de forma tajante, pues de lo contrario, el planteamiento del modelo será incorrecto y la dinámica no podrá ser descrita, dado que el problema de optimización no está bien planteado. Puntualmente, la desigualdad es:

$$\rho > n + (1 - \theta)x$$

Si observamos, nuestro valor más pequeño de la preferencia intertemporal (ρ) es de 0.1, siendo un valor mayor que cualquiera de las tasas de crecimiento calculadas para los diversos tipos de población que hemos empleado en nuestro trabajo; por lo anterior, se cumple que este fundamento teórico es válido para nuestra rejilla de valores y ello nos permite trabajar con los demás valores de la preferencia intertemporal. Pero, también podemos señalar lo siguiente: a partir de las diversas tasas de crecimiento poblacional, se entiende que basta con cumplir la desigualdad presentada anteriormente para asignar valores a la preferencia intertemporal, observando que se cumpla el precepto teórico que nos permita continuar con la simulación.

Lo anterior sirve como una guía para la asignación de valores al parámetro de preferencia intertemporal, pues al no existir un procedimiento puntual para su cálculo[34], hemos decidido emplear los tres valores ya referidos en el capítulo III de nuestro trabajo, considerando precisamente la desigualdad como punto de referencia para mostrar el funcionamiento del modelo de Ramsey. De lo anterior se entiende que nuestra simulación, realizada a partir de una rejilla de valores, corresponde con las directrices generales del modelo y, por tanto es válida, aún cuando no está construida a partir de datos de la economía mexicana, lo cual marca profundas diferencias, pues uno de los objetivos originales de ésta investigación era evitar el deductivismo propio de la teoría neoclásica, llevando la simulación al campo económico real.

La existencia de condiciones que limiten un patrón de consumo regular en el tiempo es algo que puede limitar el correcto funcionamiento de la teoría neoclásica plasmada en el modelo de

[34] Nuestra consulta bibliográfica no ha definido una forma específica para calcular la preferencia intertemporal, por lo cual, no podemos asegurar que nuestros valores del parámetro ρ sean los mejores, dado que en ejercicios propuestos para el alumno y algunos casos de aplicación, se asumen valores mayores a 1, pero sin quedar especificado del todo la forma como se llegó a ese valor.

Ramsey; pensemos en el caso concreto del factor de preferencia intertemporal. Al existir una condición que defina el correcto funcionamiento del modelo, ello nos sujeta a cumplir precisamente con la elección de un valor que vaya de acuerdo con las especificaciones; pero ahora pensemos en una preferencia intertemporal especificada a partir de estudios estadísticos que no sesgan la información. Existe la posibilidad de que la estadística señale un valor por debajo de la tasa de crecimiento poblacional, lo cual obviamente señalaría la imposibilidad de simulación del modelo, de acuerdo con la desigualdad estricta que debe cumplirse.

Nosotros hemos elegido 0.1 como el valor más pequeño a tratar en la rejilla de valores, pero sería suficiente con imponer un valor de 0.006 para que se librara la condición impuesta precisamente por la condición de desigualdad estricta, generando otra rejilla de valores de acuerdo con el último valor que hemos mencionado, tal que el valor máximo de la rejilla para el coeficiente rho fuera de 0.1.

Ahora bien, a partir de lo que hemos mostrado en el capítulo anterior, vamos a revisar lo que implica nuestra simulación, asumiendo que nuestra rejilla de valores corresponde con los parámetros estructurales obtenidos a partir de los datos reales de la economía mexicana. No obstante, aclaramos que es un análisis normativo, pues la falta de datos dentro del sistema estadístico nacional implica graves limitantes a un trabajo de investigación como el nuestro; por lo tanto, esto es una guía para entender más a fondo el significado real de un modelo de crecimiento con optimización del consumo.

La búsqueda de series estadísticas homogéneas para construir los parámetros estructurales de la economía mexicana en el periodo propuesto,tiene el fin de evitar incurrir en algo que ya hemos mencionado en el primer capítulo sobre el deductivismo de la teoría neoclásica, que resta importancia a la praxis y propone la búsqueda de axiomas perfectamente definidos, que sean universales e infalibles en la lógica formal de la teoría neoclásica. Desafortunadamente, la falta de series de datos homogéneos evita avanzar en el sentido del método deductivo, confrontando nuestros resultados con los postulados de la teoría neoclásica, orillándonos a actuar en un sentido deductivista, donde la rejilla de valores propuesta actúa como un sustituto precisamente de los datos que no nos ha sido posible encontrar, pero ya hemos hechos algunas aclaraciones al respecto.

Como ya lo hemos explicado, el promedio del consumo privado respecto del PIB real, calculado a partir de los datos de Aparicio Cabrera, varía para los distintos períodos propuestos en nuestra simulación; si trabajamos con la tasa de crecimiento de la población total, asumiendo dos valores para el coeficiente alpha, el valor de referencia se mueve dentro de nuestra rejilla de valores, aproximándose en todos los casos vistos a un escenario donde la preferencia intertemporal es de 0.5.

Para los casos particulares de la aproximación a la PEA urbana y rural, cada caso debe ser tratado por separado, pues corresponde a distintas poblaciones, sujetas a distintos valores para el coeficiente alpha; pero esto no implica que no haya posibilidad de evaluar el comportamiento de la población bajo otra rejilla de valores,pues únicamente nos hemos remitido a tratar un conjunto de ellos, existiendo la posibilidad de que la economía mexicana implique otros tantos escenarios fuera de lo que hemos asumido en este trabajo. Desde luego queda la trabajar con una rejilla que sea más próxima a los parámetros estructurales de la economía mexicana, o incluso la opción de generar una base de datos que nos permita trabajar de forma puntual sobre el proceso económico real, acercándonos al verdadero objetivo de poner en práctica la teoría neoclásica.

Hemos observado a través de nuestros cálculos el comportamiento que han tenido la población total y la aproximación a la PEA urbana y rural en México, mostrando un fuerte crecimiento en las primeras dos décadas analizadas en este trabajo y, reduciéndose posteriormente. Esto asume una gran relevancia dado el fundamento teórico del modelo, donde se especifica que, dado un factor de preferencia intertemporal fijo, la presión demográfica orilla los niveles de estado estacionario a disminuir conforme se incrementa la población,pues se asume que todos los habitantes desean consumir en la misma proporción. Lo anterior encuentra su raíz más profunda precisamente en los postulados poblacionales que observó David Ricardo, aunque ciertamente la presencia del progreso tecnológico fue algo que pasó por alto el citado autor; pero indudablemente, el concepto ricardiano de la presión ejercida por la población sobre los alimentos, es algo que encuentra en el modelo de Ramsey una fuerte analogía, obedeciendo las premisas deductivas de la teoría neoclásica, transfiriendo el caso de los alimentos al problema de los medios productivos, donde la insuficiencia de inversión causa graves problemas al esquema productivo.

Los valores asumidos por nuestra rejilla de valores muestran un caso muy simple: conforme la tasa de crecimiento poblacional disminuye, los niveles de estado estacionario se van incrementando para cada caso donde se asume un nivel distinto en la preferencia intertemporal; lo anterior es aplicable para las tres poblaciones evaluadas en todo el período de tiempo. Pero esto implica que no existe movimiento alguno en los parámetros empleados por el modelo, lo cual es difícilmente sostenible por la realidad económica, no solamente en el caso mexicano, sino en la totalidad de naciones, dado que el entorno económico influye indudablemente sobre el proceso de elección; pero recordemos una vez más que el fundamento de la elección intertemporal única e intergeneracional es uno de los mayores pilares que tiene la teoría neoclásica expresada en el modelo de Ramsey, por lo cual, la aplicación rigurosa del modelo no desconoce la existencia de casos como el ya mencionado.

Como lo hemos indicado en varias ocasiones, la primera aproximación del modelo de Ramsey concierne a la incorporación del total de la población como mano de obra, definiendo el ingreso per cápita en función del capital per cápita; pero, ¿qué pasa si abandonamos el conjunto de la población y evaluamos solamente a la PEA urbana y rural? Claramente debemos reconocer que no siempre el total de la población se encuentra en condiciones de producir, aun cuando actualmente en México existen personas de la tercera edad y menores de edad que se incorporan al sector productivo; ahora bien, si entendemos que la producción recae sobre la PEA urbana y rural, son precisamente estos trabajadores los encargados de generar la producción y obtener ingresos para proveer a sus familia el consumo necesario para subsistir.

A partir de lo anterior, si observamos las aproximaciones a la PEA urbana y rural de nuestro país, mantener un coeficiente alpha fijo para cada tipo de producción donde intervienen dichas fuerzas laborales es un caso utópico, pues ya hemos señalado lo que implica la homogeneización de cada sector productivo bajo un sólo parámetro o coeficiente, siendo que pueden existir divergencia dentro de una misma rama productiva; es decir, en México no puede pensarse que la generalidad de las industrias trabaja apegada a un solo principio de eficiencia, al igual que tampoco se puede asumir con la producción agrícola, donde incluso las diferencias son mucho mayores que en el primer caso. Pero, en caso de realizarse una homogeneización de los factores productivos, posiblemente encontraríamos que el coeficiente alpha tendría un valor bajo, reduciendo el nivel de la curva de producto total, jalando consigo los niveles de estado estacionario.

Por lo tanto, aunque exista un decremento de las tasas poblacionales, la disminución del coeficiente alpha traería una reducción de los niveles de estado estacionario propuestos por el modelo; lo anterior se vuelve importante si pensamos en el período 1980-2000, donde el liberalismo económico actuó en detrimento de los pequeños productores industriales y agrícolas, limitando su acceso al crédito, a la tecnificación y, alejando al Estado de las actividades de inversión productiva que lograban subsanar de alguna forma las deficiencias mostradas por la empresa privada. Pero pensemos un poco más en el caso de la producción agrícola; dado el crecimiento de la mano de obra y la disponibilidad de tierra, bien se puede pensar en las ventajas que implica para el sistema alimentario mexicano la reactivación de la producción agrícola, que funge como punto de apoyo para todas las demás ramas productivas; y cuenta de ello fue el desarrollo estabilizador, donde la garantía de alimentos era fundamental para lograr la creación de empleos.

La Preferencia Intertemporal del Consumo.

En nuestra investigación hemos propuesto una rejilla de valores para el coeficiente ρ, siendo el primer paso a tomar en cuenta dentro de nuestros resultados mostrados en la sección B del anexo estadístico, lo cual tiene fines completamente académicos, didácticos, normativos, pues al no existir un consenso entre la bibliografía consultada sobre la manera como debe construirse el coeficiente, poco podemos hacer al respecto. Este parámetro estructural, junto con la ESIC es un parámetro encargado de mostrar la discriminación entre el consumo futuro y el consumo presente, donde teóricamente el parámetro θ (ESIC) es menos subjetivo que el parámetro ρ, siendo el resultado de la evaluación estadística que existe entre el consumo, los bienes y sus precios en un determinado momento del tiempo; mientras que la preferencia intertemporal no queda puntualmente definida como un parámetro construido a partir de determinadas variables; y sobre ello vamos a profundizar un poco más.

Mantener los tres valores de la rejilla para la preferencia intertemporal nos ayuda a mostrar que los resultados se mantienen en sintonía con lo asumido por Ramsey en cuanto al crecimiento poblacional, sin que sea sinónimo de que la realidad económica se desempeñe de tal forma, pues el mismo autor asevera que la preferencia intertemporal puede cambiar entre individuos y entre generaciones, volviendo más compleja la determinación de trayectorias optimas del consumo; más aún, en el caso de que sea un planificador social quien asume la tarea de definir las trayectorias que debe seguir el consumo y la formación de capital, se debe observar la protección y el consumo de futuras generaciones sin descuidar lo que se hace para generaciones presentes, por lo cual, encontrar un consenso sobre la manera como se discrimina el consumo presente y futuro es igualmente una tarea complicada, que podría no encontrar un símil en el campo empírico.

Por otra parte, la forma como hemos presentado los resultados de nuestra simulación en la sección B del anexo estadístico implica que el primer parámetro estructural a observar es precisamente la preferencia intertemporal, pues ésta define específicamente un único escenario, donde los demás parámetros se habrán de insertar y donde se asume homogéneo el comportamiento de la población, lo cual nos permite entender el peso que tiene dicho coeficiente para la teoría neoclásica en el modelo de Ramsey. Es decir, ya hemos recalcado el hecho de no poder comparar dos valores de la preferencia intertemporal, pues ello asume dos formas de discriminar el consumo presente y futuro, cuando el principio del modelo es asumir un criterio homogéneo dentro de la población.

Para fines explicativos, hemos empleado el consumo promedio como porcentaje del PIB real, calculado a partir de los datos proporcionados por Abraham Aparicio Cabrera, el cual hemos contrastado con nuestros resultados de simulación y obtuvimos que dicho valor es capturado o se aproxima siempre a un escenario donde la preferencia intertemporal tiene un valor de 0.5; pero lo anterior no pretende ser una regla para la economía mexicana, donde se justifique que trabajar una rejilla de valores entre 0.1 y 0.9 sea lo mejor para simulaciones donde existe optimización del consumo. De lo anterior debe considerarse que los datos de la economía mexicana pueden ser muy cercanos o muy distantes de lo que aquí hemos presentado, aproximando o alejando nuestra economía de los procesos que describe Ramsey como explicativos del crecimiento económico.

Si pensamos un poco en lo que implica la elección de la preferencia intertemporal, ello exige aceptar que, al ser resultado en última instancia de procesos estadísticos donde se busca capturarla discriminación existente entre el consumo presente o futuro, es una variable propensa a la manipulación que sesga datos o resultados dentro de la investigación económica; y ello puede ser precisamente un factor en contra de nuestro trabajo, pero no olvidemos que ya hemos justificado el uso de una rejilla de valores en ausencia de datos suficientes para la economía mexicana, y a partir de dicha rejilla de simulación hemos logrado aproximarnos al dato proporcionado por Abraham Aparicio Cabrera, observando el incremento o decremento de los niveles de estado estacionario de acuerdo con las propuestas teóricas del modelo, sin que ello signifique que hemos hecho la mejor elección de valores para nuestra rejilla.

Así entonces, como resultado empírico de nuestra simulación, se mantiene constante la observación sobre el nivel de consumo promedio de Aparicio Cabrera, que se encuentra fluctuando dentro de un escenario donde la preferencia intertemporal oscila entre 0.4 y 0.5, lo cual teóricamente propone que el parámetro de preferencia intertemporal del consumo en México se mantiene en niveles muy similares dentro del periodo 1960-2000, asumiendo una homogeneidad de criterios de discriminación del consumo entre generaciones, ya sea por un patrón de consumo heredado o, por un entorno económico que presenta siempre las mismas características, donde las restricciones que existen al consumo se manifiestan y dan la impresión de conservar el comportamiento de los consumidores. A este respecto, podemos cuestionarnos sobre las implicaciones de un entorno económico reflejado precisamente por un parámetro estructural como lo es la preferencia intertemporal, pues siendo el consumo el resultado de una serie de características del sistema productivo, relacionado fundamentalmente con el ingreso, habría que reflexionar sobre las condiciones que atraviesa una economía durante un período de tiempo determinado, donde obviamente el ingreso de los habitantes (trabajadores) puede variar, atrayendo consigo una variación precisamente en la valoración que se hace del consumo presente frente al consumo futuro.

La Elasticidad de Sustitución Intertemporal.

Como ya lo hemos definido en los capítulos II y III, es uno de los parámetros capaces de reflejar la preferencia por el consumo presente y el consumo futuro, construyéndose a partir de la estadística. Con antelación hablamos sobre la divergencia que existe en el cálculo de dicho coeficiente, pues algunas veces los datos y la forma funcional influyen para que cambie el valor del mismo entre los distintos procesos de cálculo. Lo anterior nos lleva a pensar que su determinación y empleo en los modelos de crecimiento está sujeto a una problemática similar a la que envuelve la determinación de la preferencia intertemporal, pues el coeficiente θ queda sujeto igualmente a un posible sesgo de información que no logre reflejar las preferencias de la población de forma cercana a la realidad.

Esto asume relevancia si observamos los cuadros de resultados mostrado en la sección B del anexo estadístico, pues es el segundo parámetro estructural a tomar en cuenta dentro de la simulación, permitiéndonos reducir aún más el escenario donde se ubica el valor de referencia que hemos adoptado para contrastación de nuestros datos. Si recordamos un poco, en el capítulo III hemos hablado de la función CRRA, que es la empleada en este trabajo; dicha función es utilizada cuando el valor del parámetro θasume valores inferiores a 1, y eso es precisamente lo que hemos asumido en ésta simulación. Pero queda otra posibilidad ante la forma funcional que debe adoptarse en el modelo de Ramsey.

La función de Aversión Absoluta al Riesgo Constante (CARA, por sus siglas en inglés) es una forma alterna de trabajar la utilidad en el modelo de Ramsey, mostrando una forma funcional distinta y es la siguiente:

$$u(c_t) = -\frac{e^{-\alpha c_t}}{\alpha}$$

Donde $\alpha > 0$.

Esta función desde luego modifica el desarrollo del apéndice matemático que hemos mostrado en este trabajo e implica que el comportamiento de los resultados de nuestra rejilla de simulación habrán de verse modificado, dado que existe una aversión al riesgo creciente conforme se incrementa el nivel de consumo. Hemos decidido no emplear los dos tipos funcionales dentro de nuestra simulación por lo que implica desarrollar y comprender el modelo en cada sentido, reduciendo nuestra investigación a un sólo caso, donde la utilidad es definida por una función CRRA; pero lo anterior no implica que no pueda o no deba trabajarse el modelo a partir de una ecuación distinta, pues ello enriquece precisamente la comprensión de los modelos de crecimiento económico.

Si el lector así lo decide, puede tomar la forma funcional propuesta anteriormente e introducirla en su lugar respectivo dentro del hamiltoniano, luego desarrollar las derivadas parciales propuestas y encontrar la forma funcional completa para la ecuación de Euler, que ayuda a determinar el comportamiento del consumo y el capital en el tiempo. Su forma inicial es la siguiente:

$$Hc = -\frac{e^{-\alpha c_t}}{\alpha} \cdot e^{-\rho t} + \lambda\left[f\left(\hat{k}\right) - ce^{-xt} - (\delta + n + x)\hat{k}\right]$$

A partir del hamiltoniano anterior, se debe seguir el procedimiento que ya hemos mostrado.

El Ahorro y la Inversión como Fundamento de Crecimiento Económico.

Hemos deicidio comenzar este capítulo hablando sobre la importancia del consumo y los parámetros estructurales que lo implican directamente en el modelo, porque su papel es dicotómico para el crecimiento: en primer lugar, es el encargado de desplazar el ahorro, restringiendo la capacidad de inversión que tiene la economía; en segundo lugar, es capaz de estimular la inversión dado que es un factor fundamental del mercado, donde tendrá salida toda la producción. Así entonces, el consumo es un estímulo del mercado, que compite con la necesidad de ahorro suficiente para la inversión.

Generalmente, la teoría económica prefiere la primera perspectiva, donde el consumo es una restricción financiera, por lo cual, podemos observar la importancia de la determinación de una tasa óptima de consumo que evite incurrir en problemas de inversión insuficiente para el proceso productivo. Pero lo anterior genera una pregunta: ¿siempre debe asumirse que el ahorro es sinónimo de inversión? Para la teoría económica, especialmente derivada de la escuela keynesiana, existe una salida frente a los modelos neoclásicos como el que hemos simulado en este trabajo, proponiendo los llamados "modelos de demanda", que asumen al consumo precisamente como el motor del crecimiento, sin el cual, los procesos de inversión y ahorro serían inexistentes; es decir, desde la teoría neoclásica, se asume que el ahorro y la inversión son los motores, o causas, del crecimiento económico, mientras que en los modelos de demanda, el ahorro y la inversión son el resultado de permitir el consumo, como ese motor que alienta precisamente el crecimiento económico.

Nuestro trabajo ha conllevado únicamente el razonamiento neoclásico del crecimiento económico, pero no desconocemos la existencia de otras teorías, mismas que pueden robustecer de mayor forma las líneas de investigación que realicen las futuras generaciones; por ahora, nuestro trabajo es limitado, pero permite abrir una perspectiva para aquellos compañeros que quieran continuar trabajando sobre el crecimiento económico, confrontando diversos modelos mediante la aplicación, o simulación, de los mismos, empleando series estadísticas homogéneas que, llevadas a los cálculos como los que hemos mostrado, habrán de definir valores teóricos a cumplir por la economía mexicana, lo cual permite realizar mayores inferencias, en comparación con las que hemos realizado en esta investigación.

El núcleo del modelo neoclásico se encuentra definido por la restricción financiera que impone el consumo, los rendimientos decrecientes del trabajo y la igualdad innegable entre el ahorro y la inversión, una inversión que se traduce en formación de capital como plataforma de crecimiento. Lo anterior implica que el proceso de crecimiento ya está dado, ya ha sido definido, sin saber cómo, es simplemente un proceso ya con inercia propia, y el ahorro es una consecuencia más que una causa. El modelo de Ramsey cumple precisamente con la visión neoclásica, y era obvio, ya que da continuidad a los trabajos de Solow y, más aun, a los trabajos de Harrod y Domar, donde la demanda no era factor explicativo del crecimiento; es decir, con los cálculos realizados para encontrar nuestros estados estacionarios, a partir de una rejilla de simulación, hemos obedecido los fundamentos teóricos planteados desde el modelo Harrod-Domar, donde el crecimiento se sustenta en la necesidad de incrementar el stock de capital con base en el ahorro, en la propensión al ahorro, y el consumo es definido precisamente a partir de la importancia que tiene dicha variable, asumiendo que el mercado tendrá la suficiente demanda a partir de los niveles de consumo que traza el planificador social.

Siendo el ahorro y la inversión un tema fundamental para explicar el crecimiento económico a partir de la teoría neoclásica, no podemos dejar de lado el hacer mención especial sobre algunos aspectos generales de lo que implica la presencia de una política de fomento al ahorro, pues gran parte del papel que asume el planificador social implica elegir de, forma implícita, una política económica que permita crear el ahorro suficiente para transformarlo posteriormente en inversión, pero sin castigar el nivel de consumo que se observa de acuerdo con los parámetros estructurales del consumo; es decir, aunque el proceso de optimización propuesto en el modelo de Ramsey involucra precisamente un nivel de consumo y ahorro definido como "óptimo" en términos matemáticos, las condiciones o entorno económico sobre el cual se impone puede ser muy distinto, reduciendo la oportunidad de llevar a cabo una planificación social más apegada a lo normativo.

Al respecto de lo anterior, para el modelo de Ramsey ya se ha presentado un diagrama de fase, el cual nos permite obtener dos tipos de soluciones: la solución gráfica y la solución analítica; la primera de éstas soluciones implica la observación de los estados estacionarios obtenidos a partir de los cálculos pertinentes, y entonces definir el camino a seguir para lograr que el consumo y el capital se sitúen precisamente en los niveles deseables que señala la teoría neoclásica; la segunda opción es más rigurosa, pues implica la definición matemática de las condiciones que exclusivamente han de llevar el sistema económico a una condición de estado estacionario, sin que haya la posibilidad de incurrir en una trayectoria inestable.

Claramente, la primera solución es menos drástica pues, en términos de política económica, permite la libertad de determinar el mejor camino a seguir sin que exista una condición estricta de convergencia, encausada desde dos posibles áreas del diagrama de fase; es decir, en la práctica resultaría deseable emplear una solución analítica, que permita flexibilidad en cuanto a las opciones a elegir, sobre todo tomando en cuenta que el entorno económico real es mucho más complejo de lo que se traza en la teoría neoclásica. Por otro lado, la segunda solución implica las condiciones iniciales a una posición estricta, generando un incremento o disminución súbita en la distribución inicial de factores productivos e ingreso, que permita al sistema converger al estado estacionario.

Tristemente, al no existir datos puntuales que nos permitan hablar sobre el comportamiento de los parámetros estructurales involucrados, el realizar inferencias sobre el modelo de Ramsey aplicado en la economía mexicana, vendría a reforzar el deductivismo bajo el cual se ha desarrollado este trabajo, por lo cual no podemos hablar de los distintos períodos que atravesó nuestra economía entre los años 1960 y 2000, ya que no hay datos que avalen nuestros parámetros estructurales.

El Papel del Progreso Tecnológico y la tasa de Crecimiento de la Mano de Obra.

Como ya lo hemos aclarado antes, nuestros resultados van de la mano con una tasa de crecimiento poblacional donde el progreso tecnológico no está presente; lo anterior fue realizado para observar las implicaciones que tiene evaluar los estados estacionarios con una tasa que solamente incluya el crecimiento natural de la población; por lo tanto, ahora debemos hablar sobre lo que representa incluir el progreso tecnológico dentro del crecimiento de la mano de obra.

A partir de lo anterior, sabiendo que tenemos tres tasas de progreso tecnológico, al incluir la más baja de ellas (0.01) dentro de nuestro crecimiento poblacional, lógicamente dará como resultado una tasa de crecimiento poblacional mayor en todos los casos y, si mantenemos nuestra rejilla de valores para todos los demás parámetros, la teoría indica que nuestros niveles de estado estacionario habrán de descender, pues el factor poblacional explica la diminución de los estados estacionarios cuando se mantiene fijo el valor de la preferencia intertemporal del consumo; de tal forma que, al trabajar con una tasa de progreso tecnológico mayor, los niveles tendrán decrementos más considerables en comparación con el primer caso.Si fuera el caso de trabajar con dichas tasas de crecimiento poblacional, influidas por el progreso tecnológico, las inferencias que hemos presentado al comienzo de nuestro análisis en el capítulo III siguen siendo validas para nuestra rejilla de valores, toda vez que hayamos calculado éstas últimas tasas de crecimiento poblacional. Pero, al contrastar ambos tipos de cálculo, podemos llegar a un escenario interesante, pues en nuestra simulación, el progreso tecnológico influye exclusivamente en la determinación de estados estacionarios, mas no en el crecimiento poblacional.

Si recordamos, las ecuaciones $\dot{\hat{k}} = f(\hat{k}) - \hat{c} - (\delta + n + x)\hat{k}$ y$\hat{c}^* = \hat{y}^* - (\delta + n + x)\hat{k}^*$ incluye el término $n + x$, que es el crecimiento “real” de la mano de obra para el modelo de Ramsey cuando se incluye el progreso tecnológico; por otro lado, dentro del mismo modelo, un planteamiento teórico donde no se incluye tal factor, tiene las siguientes ecuaciones: $\dot{\hat{k}} = f(\hat{k}) - \hat{c} - (\delta + n)\hat{k}$ y $\hat{c}^* = \hat{y}^* - (\delta + n)\hat{k}^*$. Lo anterior, implica una rigidez teórica en el modelo: si se incluye el progreso tecnológico, este habrá de influir en el crecimiento poblacional; pero, si no se incluye, entonces la población crecerá de forma natural y no habrá ninguna referencia a las implicaciones de dicho progreso tecnológico.

De lo anterior se sigue que no existe un término intermedio entre ambas perspectivas, donde el progreso tecnológico exista y no influya en el crecimiento poblacional; precisamente esto último es lo que hemos hecho de una forma arbitraria, eliminando el progreso tecnológico del crecimiento poblacional e incorporándolo únicamente en la determinación de estados estacionarios. Es decir, para efectos prácticos, hemos estimado los estados estacionarios concernientes a una población que crece a un ritmo superior al calculado; por ejemplo, en el período 1960-1970, la tasa de crecimiento poblacional fue de 0.032273316, la cual, si se aunara al progreso tecnológico, sería de 0.042273316; precisamente este último dato es el que ha definido los valores de estado estacionario, por encima de los correspondientes a una población que crece sin la intervención del progreso tecnológico.Estos resultados los hemos mostrado en el apartado C del anexo estadístico, donde calculamos las tasas de crecimiento del factor trabajo empleando la tasa de crecimiento poblacional y el progreso tecnológico.

¿Qué implicaciones tiene la diferencia entre ambas tasas de crecimiento?; en términos simples, hemos sobrestimado los niveles de estado estacionario correspondientes a la tasa de crecimiento natural de la población en el período 1960-1970, la cual no implica el factor tecnológico; lo que esto implica en el campo real de la economía, es definir un margen de maniobra en la asignación de capital, ingreso y consumo para la población en México, por encima del correspondiente a su crecimiento natural y sin progreso tecnológico. Esta diferencia es corregida, como ya lo hemos explicado, si volvemos a calcular los estados estacionarios a partir de una tasa de crecimiento poblacional de 0.042273316, donde los niveles ahora serán estrictamente asignados, sin que exista precisamente un margen de maniobra.

Por otro lado, debemos hablar de lo que implica para la política económica derivada del modelo de crecimiento. Aunque el progreso tecnológico es un parámetro que actúa en contra del nivel de consumo de estado estacionario, dado que conforma la tasa efectiva de descuento, también es un factor que habla de la búsqueda de innovación y progreso en la eficiencia productiva, administrativa y distributiva del ingreso en un país, dejando de lado el estereotipo de progreso tecnológico como algo limitado a la obtención de bienes y servicios cada vez más “modernos”.

En nuestro país, el progreso tecnológico, la actividad científica e innovadora que dé frutos a la producción y productividad mexicana, es un tema reciente, que históricamente nunca ha rebasado una inversión del 1% como proporción del PIB; de lo anterior, asumir que en México hemos mantenido una tasa de progreso tecnológico mayor del 1% anual sería descabellado, toda vez que entendemos que no se reduce a un fenómeno productivo y que atraviesa por temas sumamente relevantes, como la administración de los factores productivos; por lo anterior, encontrar o construir un indicador que permita capturar precisamente este tipo de progreso es una tarea pendiente dentro de la estadística mexicana, si es que se quiere trabajar simulaciones como la que hemos presentado en nuestro trabajo.

Ya hemos expuesto en el capítulo III la importancia de coeficientes como la relación capital-trabajo, que nos ayuda precisamente a considerar condiciones iniciales para la dinámica económica en el contexto propuesto por Ramsey; y ha sido un freno la falta de series estadísticas homogéneas que nos permitan aproximarnos a dicha relación de una manera confiable, por lo cual, consideramos que incluso la modernización del sistema estadístico nacional es tema relevante para el progreso tecnológico y científico el país, siendo la principal base de datos a consultar dentro de la investigación económica nacional, permitiendo la elaboración de estudios y aplicaciones que refutan o apoyan la teoría económica, como la que hemos empleado en nuestra investigación.

La Condición de Transversalidad.

De acuerdo con el capítulo II, la condición de transversalidad juega un papel muy importante en el modelo de Ramsey, al garantizar la inexistencia de juegos Ponzi en el consumo; por lo tanto, su cumplimiento indica que la especificación del modelo es correcta. Puntualmente, la condición de transversalidad se cumple si $r^* > x + n$, es decir:

$$f'\left(\hat{k}^*\right) - \delta > x + n$$

Al realizar este cálculo con los datos obtenidos en nuestra simulación, se comprueba que todos y cada uno de ellos cumplen con la condición de transversalidad; por lo tanto, aunado al caso del cumplimiento de la desigualdad estricta presentada en párrafos anteriores, se valida el uso de nuestra rejilla, permitiendo realizar inferencias teóricas respecto al comportamiento del modelo.

Claramente debemos conservar la distancia entre los datos de la economía mexicana y nuestra rejilla de valores, pues cabe la posibilidad de que, al emplear datos obtenidos en la economía mexicana, el modelo deje de cumplirse al no poderse plantear de forma correcta el problema de optimización. Lo anterior no sería del todo raro, pues el proceso económico real es finalmente el encargado de validar las teorías, representadas a través de modelos como el que hemos presentado en este trabajo.

La Economía Cerrada.

Hemos trabajado un modelo de crecimiento donde la economía es cerrada, pero no podemos omitir el hecho de que el caso de la economía mexicana nunca ha sido de estricto cierre respecto al exterior, pues aún en la década de los años sesenta y setenta, el país importó diversos productos del exterior. Al respecto de lo anterior, oportunamente tocamos el tema en los apartados anteriores del trabajo, reconociendo que existe una ampliación del modelo de Ramsey que precisamente abarca una economía abierta; pero este último modelo resulta mucho más extenso y complejo de lo que resulta el que hemos presentado en nuestro trabajo.

Al asumir una economía abierta y su modelación bajo los criterios de Ramsey, debemos pensar en las restricciones que impone de igual forma el sistema estadístico mexicano, pues queda entendido que es necesario contar con suficientes series estadísticas homogéneas que nos permitan calcular algunos coeficientes como la relación capital-trabajo para diferentes sectores productivos, lo cual facilitaría mucho la simulación del modelo de Ramsey a partir de datos registrados por el INEGI. Hasta este punto, nuestro trabajo ha sido realizado con base en una rejilla de valores que, si bien ha logrado capturar los valores de consumo privado calculados por Abraham Aparicio Cabrera, tampoco implica que sean los únicos coeficientes que pueden aproximarnos a la economía real de México, pues ante todo, el trabajar con datos fehacientes nos permitirá definir si nuestra economía puede calificarse como dinámica en el sentido de Ramsey, quedando esa labor para investigaciones mucho más rigurosas.

Volviendo al tema de la economía abierta, si revisamos el texto guía de nuestro trabajo, nos daremos cuenta de que Sala-i-Martin y Barro han tomado en cuenta una ampliación inevitable del modelo, involucrando parámetros que, hasta donde podemos observar, son de difícil obtención en nuestro sistema estadístico; pero lo anterior no significa que alguien más pueda simular el modelo de acuerdo con los postulados de una economía abierta, pues ante todo, este trabajo busca ser precisamente una guía para las futuras generaciones y sus trabajos respecto al crecimiento económico en México bajo la perspectiva de la optimización del consumo. Al respecto de ello, debemos entender que actualmente nuestro país actúa bajo un régimen de liberalización del sistema financiero mundial, donde los movimientos financieros entre naciones, la eliminación de restricciones de actuación impuestas a las entidades financieras, que les permite actuar como banca comercial, industrial, etc., y la creación de activos financieros que se sostienen sobre otras operaciones financieras, debilitan las inferencias que el modelo neoclásico de crecimiento puede aportar, pues su visión queda restringida al momento de buscar explicaciones al comportamiento de los parámetros estructurales que intervienen en los modelos de economías abiertas.

Si el crecimiento económico se fundamenta en la inversión, debe ponerse especial atención sobre el papel del gobierno como un agente regulador del crédito y la inversión, siendo ambos fundamentales, entendiendo que los modelos de crecimiento económico no especifican de forma concreta la procedencia de la inversión ni el tipo puntual de fondos que se solicitan para llevar a cabo la producción, por ello es importante identificar que un modelo puede determinar el monto de la inversión, pero no la procedencia y solidez de los fondos con que se lleve a cabo la misma.

Anotaciones Finales.

Hasta este punto, nuestro trabajo ha cumplido con el objetivo de mostrar el funcionamiento del modelo neoclásico de crecimiento que, si bien es cierto no está elaborado a partir de bases de datos homogéneos, si logra poner de relieve que una contrastación con los datos reales es posible, aunque sea difícilmente alcanzable el acercarse a las condiciones reales de la economía cuando no se han empleado parámetros estructurales derivados del proceso económico real; por lo anterior, hemos presentado un trabajo que se encuentra dentro de nuestras posibilidades, entendiendo que las pretensiones de nuestro trabajo han sido disminuidas, dada la disponibilidad de datos y el bagaje teórico necesario para que, en caso de ser posible, se proponga una base de datos homogéneos que nos sirvan para estos fines, siendo esto último un tópico correspondiente al nivel de posgrado, donde precisamente se profundiza en la elaboración de este tipo de investigaciones. Así entonces, no podemos presumir de una entera satisfacción, dado que ya hemos mencionado las dificultades que implica la investigación macroeconómica en cuanto al crecimiento económico.

La pertinencia de remarcar lo que hemos comentado anteriormente es que, en el caso de que existiera una base de datos que nos permita simular un modelo neoclásico de crecimiento, específicamente en el caso del modelo de Ramsey, la evaluación del impacto que tienen las políticas públicas y la intervención del gobierno sobre el mercado y las empresas sería mucho más amplio de lo que es ahora; es decir, hoy hablamos de la intervención que el gobierno tiene sobre la economía, pues va delimitando cada vez menos espacios para la intervención pública, a favor de la empresa privada, y ello es algo que claramente tiene impacto en una economía.

Si observamos el modelo de Ramsey, el supuesto del pleno empleo se mantiene firme para todo momento de la explicación, asumiendo que el capital está verdaderamente empleado a su máxima capacidad; pero hoy en día, el panorama neoclásico ha cambiado su visión, prefiriendo el control de la inflación sobre la creación de empleos, pues se argumenta que la inflación causa un gran estrago al crecimiento económico, disminuyendo la inversión, sin lo cual el pleno empleo queda lejano en la realidad de un sistema productivo. Así entonces, siendo la fijación de precios un objetivo fundamental de la política económica, vale la pena preguntarnos sobre las inferencias que ofrece el modelo neoclásico de crecimiento económico, toda vez que se asume una distribución del ingreso de acuerdo con la productividad marginal de cada factor productivo, por lo cual, un parámetro estructural correcto nos permite pensar un poco sobre lo que implica la diferencia entre el poder adquisitivo de los salarios y el nivel de precios asumido como óptimo.

Por otro lado, mediante el modelo de crecimiento se asume a la inversión como una forma de combatir el desempleo, absorbiendo una mano de obra homogénea, generando empleos que después consumen lo que se ha producido, asumiendo una demanda igualmente homogénea para todos los productos que se hayan llevado al mercado. Frente a lo anterior, poco nos puede decir el modelo sobre el tipo de contratación que debe tener la mano de obra; pero hoy en día la flexibilización laboral, surgida en la teoría neoliberal, es una respuesta rotunda frente a los problemas de desempleo, incluso antes de hablar de inversión, pues se asume que el bajo costo de la mano de obra es lo que resulta verdaderamente atrayente para la misma; dicha flexibilización incluye la revisión de los niveles de salario mínimo, la protección social, los subsidios al desempleo que permiten mantener niveles de consumo mínimos indispensables, y sobre todo, la acción sindical como un mecanismo que propicia algunos de los puntos mencionados anteriormente. De todo lo anterior, el crecimiento exponencial de la mano de obra asumido por el modelo resulta en cierta forma insuficiente, pues la simple definición de algunos términos como empleo y subempleo es cambiante, permitiendo que dicha mano de obra se vea absorbida por un mercado laboral que, en la mayor parte de los casos, no genera los suficientes ingresos para las familias, mismos que les permitan vivir de forma aceptable.

Precisamente a partir del último punto tocado en el párrafo anterior, donde los ingresos de los trabajadores y familias se ve afectado tras el tipo de empleo al cual se encuadran, encontramos un punto fundamental que viene a desafiar de nuevo los parámetros estructurales del modelo neoclásico de crecimiento; la liberalización de algunos sectores claves para la economía es algo que juega en contra del ingreso de los trabajadores, siendo el sector agropecuario un tema obligado a revisar en este sentido, dado que en México, las décadas de los años sesenta y setenta mostraron cierta solidez en el tema alimentario, asignando una alimentación garantizada a la población en México, permitiendo que los ingresos de los trabajadores pudieran dedicarse a otro tipo de consumos, sin que la canasta básica fuera descuidada.

Lo anterior toma relevancia si recordamos que el ahorro se genera justamente después de haber cubierto las necesidades mínimas indispensables, por lo cual es posible observar que en México el ahorro que sirvió a la inversión productiva durante la etapa del Desarrollo Estabilizador se basó en ahorro interno. Un modelo de crecimiento neoclásico puede definir una tasa de ahorro a partir de parámetros estructurales, pero si queremos ser más puntuales, existe la imperiosa necesidad de revisar el sistema alimentario mexicano, como un tema fundamental en el consumo y el ahorro, para posteriormente pensar en las implicaciones de una política económica que fomenta o disminuye el consumo, pensando precisamente en los niveles óptimos a seguir.

Todo lo anterior implica que, si observamos el modelo neoclásico de crecimiento, la determinación de los niveles de estado estacionario conlleva simplemente a una determinación matemática, fundamentada en parámetros estructurales, pero hoy en día incluso la teoría neoclásica dirige sus esfuerzos explicativos en otras direcciones, distintas a las que originalmente fueron guía de sus investigaciones. Así entonces, la aplicación o simulación de un modelo de crecimiento es un buen ejercicio de aproximación a la realidad económica, siempre y cuando existan los datos estadísticos necesarios para calcular los parámetros estructurales, pues de otro modo, simplemente el trabajo queda cortado, como ha sido nuestro caso, y difícilmente nos permite avanzar en el análisis económico más fuerte, que surge en la verificación de los resultadoscon el entorno económico real.

APÉNDICE MATEMÁTICO.

Variables Per Cápita.

Recordemos que para Ramsey, el factor tecnológico no es exógeno y se hace presente en el proceso productivo, por lo cual, se emplean unidades de trabajo efectivo. Dada la función $Y = F[K, L, T]$, sabiendo que la tecnología potencializa la fuerza de trabajo, entonces la función se transforma de la siguiente forma: $Y = F[K, L \cdot T]$, donde se habla de trabajo efectivo. Esto lo podemos expresar de forma intensiva como:

$$\frac{Y}{L \cdot T} = F\left[\frac{K}{L \cdot T}, 1\right] \; \rightarrow \frac{Y}{L \cdot T} = F\left[\frac{K}{L \cdot T}\right]$$

Donde $\hat{y} \equiv \frac{Y}{L \cdot T}$ y $\hat{k} \equiv \frac{K}{L \cdot T}$, o bien podemos escribirlas como $\hat{y} \equiv \frac{Y}{\hat{L}}$ y $\hat{k} \equiv \frac{K}{\hat{L}}$

Entonces, $\hat{y} = f(\hat{k}) \ldots (1)$

Para encontrar sus productos marginales debemos considerar el factor tecnológico que implica la función a la cual hemos llegado.

Para el caso del capital tenemos lo siguiente:

$$Y = (L \cdot T) \cdot F\left[\frac{K}{L \cdot T}\right] \; \rightarrow \; \frac{dY}{dK} = 0 \cdot F\left[\frac{K}{L \cdot T}\right] + F' \left[\frac{K}{L \cdot T}\right] \cdot (L \cdot T)$$

Reducimos los términos:

$$\frac{dY}{dK} = F' \left[\frac{K}{L \cdot T}\right] \cdot (L \cdot T)$$

Y ahora derivamos por segunda ocasión:

$$\frac{dY}{dK} = (L \cdot T) \cdot \left[\frac{1 \cdot F' \left[\frac{K}{L \cdot T}\right] \cdot (L \cdot T) - 0 \cdot F\left[\frac{K}{L \cdot T}\right] \cdot K}{(L \cdot T)^2}\right] \; \rightarrow \; \frac{dY}{dK} = (L \cdot T) \cdot \left[\frac{(L \cdot T) \cdot F' \left[\frac{K}{L \cdot T}\right]}{(L \cdot T)(L \cdot T)}\right]$$

Luego entonces:

$$\frac{dY}{dK} = \frac{(L \cdot T)}{(L \cdot T)} \cdot \left[\frac{(L \cdot T) \cdot F' \left[\frac{K}{L \cdot T}\right]}{(L \cdot T)}\right] \; \rightarrow \; \frac{dY}{dK} = F' \left[\frac{K}{L \cdot T}\right]$$

Por lo tanto, tenemos que finalmente:

$$\frac{dY}{dK} = f'(\hat{k}) \ldots (2)$$

Ahora bien, en el caso de la fuerza de trabajo tenemos lo siguiente:

$$Y = (L \cdot T) \cdot F\left[\frac{K}{L \cdot T}\right] \;\rightarrow\; \frac{dY}{dL} = T \cdot F\left[\frac{K}{L \cdot T}\right] + F'\left[\frac{K}{L \cdot T}\right] \cdot (L \cdot T)$$

Derivamos por segunda ocasión:

$$\frac{dY}{dL} = T \cdot F\left[\frac{K}{L \cdot T}\right] + (L \cdot T) \cdot \left[\frac{0 \cdot F'\left[\frac{K}{L \cdot T}\right] \cdot (L \cdot T) - T \cdot F'\left[\frac{K}{L \cdot T}\right] \cdot K}{(L \cdot T)^2}\right]$$

Reducimos lo términos:

$$\frac{dY}{dL} = T \cdot F\left[\frac{K}{L \cdot T}\right] + (L \cdot T) \cdot \left[-\frac{T \cdot K \cdot F'\left[\frac{K}{L \cdot T}\right]}{(L \cdot T)^2}\right] \;\rightarrow\; \frac{dY}{dL} = T \cdot F\left[\frac{K}{L \cdot T}\right] - \frac{(L \cdot T)}{(L \cdot T)} \cdot T \cdot \frac{K}{(L \cdot T)} \cdot F'\left[\frac{K}{L \cdot T}\right]$$

Luego entonces:

$$\frac{dY}{dL} = T \cdot F\left[\frac{K}{L \cdot T}\right] - T \cdot \frac{K}{L \cdot T} \cdot F'\left[\frac{K}{L \cdot T}\right]$$

Por lo tanto, tenemos que finalmente:

$$\frac{dY}{dL} = T \cdot f(\hat{k}) - T \cdot \hat{k} \cdot f'(\hat{k}) \;\rightarrow\; \frac{dY}{dL} = \left[f(\hat{k}) - \hat{k} \cdot f'(\hat{k})\right] \cdot T$$

Pero, sabemos que $T(t) = e^{xt}$, por lo tanto:

$$\frac{dY}{dL} = \left[f(\hat{k}) - \hat{k} \cdot f'(\hat{k})\right] \cdot e^{xt} \;\ldots (3)$$

Mercados Competitivos.

La perspectiva de Ramsey atribuye un gran peso a la determinación del ahorro en función de un comportamiento maximizador de los consumidores. Comenzaremos entonces por exponer la variación de los activos per cápita. Sabiendo que los hogares poseen activos financieros, los cuales dan un rendimiento, así como un salario por su trabajo, entonces el ingreso de las familias se compone de la siguiente forma:

$$(act) \cdot r(t) + \; w(t) \cdot L(t)$$

Es decir, en el transcurso del tiempo los ingresos de la familia se definen por:

$$\frac{d(act)}{dt} = [(r(t) \cdot a) + w(t) \cdot L(t)] - C \ldots (7)$$

Para definir esta ecuación en términos per cápita, dividimos entre L, donde a serán los activos per cápita. De tal forma que:

$$\frac{\frac{d(act)}{dt}}{L} = \frac{r(t) \cdot activos}{L} + \frac{w \cdot L}{L} - \frac{C}{L}$$

Luego entonces:

$$\frac{\dot{a}}{L} = (r \cdot a + w) - c$$

Donde: $a = \frac{act}{L}$ y $\frac{d\left(\frac{a}{L}\right)}{dt}$

De lo anterior, la variación de los activos per cápita es la siguiente:

$$\frac{\frac{d\left(\frac{a}{L}\right)}{dt}}{L} = \frac{\dot{a}L - \dot{L}a}{LL} \;\; \rightarrow = \frac{\dot{a}L}{LL} - \frac{\dot{L}a}{LL} \;\; \rightarrow = \frac{\dot{a}}{L} - \frac{\dot{L}}{L} \cdot a$$

Donde: $\frac{\dot{L}}{L} = n$

Ahora tenemos que:

$$\dot{a} = \frac{\dot{a}}{L} - n \cdot a$$

Sustituyendo $\frac{\dot{a}}{L} = (r \cdot a + w) - c$, obtenemos lo siguiente:

$$\dot{a} = (r \cdot a + w) - c - na \ldots (9)$$

$$\dot{a} = (r - n) \cdot a + w - c$$

Lo anterior es precisamente la variación de activos per cápita. Ahora bien, para abordar el caso de los beneficios, recordando el factor tecnológico endógeno y empleando unidades de trabajo efectivo:

$$\pi = F(K, \hat{L}) - (r + \delta)K - wL \ \ldots(10)$$

Luego tenemos lo siguiente:

$$\pi = \hat{L}\left[f(\hat{k}) - (r + \delta)\hat{k} - we^{-xt}\right] \ \ldots(11)$$

De tal forma que, sustituyendo lo siguiente:

$$f'(\hat{k}) = r + \delta \ \ldots(12)$$

$$\frac{dY}{d\hat{L}} = w = \left[f(\hat{k}) - \hat{k} \cdot f'(\hat{k})\right]e^{xt} \ \ldots(13)$$

En la ecuación (22), obtendremos que los beneficios son nulos para el nivel de trabajo empleado:

$$\pi = \hat{L}\left[f(\hat{k}) - (r + \delta)\hat{k} - we^{-xt}\right]$$

$$\pi = \hat{L}\left[f(\hat{k}) - f'(\hat{k}) \cdot \hat{k} - \left\{\left[f(\hat{k}) - \hat{k} \cdot f'(\hat{k})\right]e^{xt}\right\}e^{-xt}\right]$$

$$\pi = \hat{L}\left[f(\hat{k}) - f'(\hat{k}) \cdot \hat{k} - \left[f(\hat{k}) - \hat{k} \cdot f'(\hat{k})\right]e^{xt} \cdot e^{-xt}\right]$$

$$\pi = \hat{L}\left[f(\hat{k}) - f'(\hat{k}) \cdot \hat{k} - \left[f(\hat{k}) - \hat{k} \cdot f'(\hat{k})\right]\right]$$

$$\pi = \hat{L}\left[f(\hat{k}) - f'(\hat{k}) \cdot \hat{k} - f(\hat{k}) + \hat{k} \cdot f'(\hat{k})\right]$$

$$\pi = \hat{L}[0]$$

$$\pi = 0$$

La Función de Utilidad.

Sabemos que $C(t)$ es el consumo total, por lo cual $c(t) \equiv \frac{C(t)}{L(t)}$ es el consumo por persona adulta.

Ahora bien, la utilidad de cada hogar debe maximizarse en el modelo de Ramsey; y para ello, se emplea la siguiente ecuación:

$$U = \int_0^\infty U\,[c(t)]e^{-\rho t}\,dt$$

Donde:

$e^{-\rho t}$ es la tasa de preferencia intertemporal, donde $\rho > 0$, pues las utilidades son menos valoradas cuanto más tarde se perciban.

El término $u(c)$ es creciente respecto a c y asocia el flujo de utilidad per cápita con la cantidad de consumo per cápita; luego, para $u_{(c)}(0)$, tenemos la suma ponderada de todos los flujos de utilidad futuros $u(c)$. De lo anterior se obtiene que $u'(c) > 0$ y $u''(c) < 0$, es decir, existe una preferencia por el consumo regular a lo largo del tiempo.

La función de utilidad empleada para este caso es la siguiente:

$$U(c) = \frac{c^{(1-\theta)} - 1}{1-\theta}$$

Ahora bien, la primera derivada de $U(c)$ respecto de c es:

$$\frac{dU(c)}{dc} = \frac{(1-\theta)c^{(1-\theta-1)}(1-\theta) - 0\left[c^{(1-\theta)} - 1\right]}{(1-\theta)^2}$$

$$\frac{dU(c)}{dc} = \frac{(1-\theta)c^{-\theta}(1-\theta)}{(1-\theta)(1-\theta)}$$

Entonces, finalmente:

$$\frac{dU(c)}{dc} = c^{-\theta} = U'(c)$$

Luego, la segunda derivada es:

$$\frac{d^2U(c)}{dc^2} = -\theta c^{-\theta-1} = U''(c)$$

El Hamiltoniano[35].

El problema se resuelve por la teoría de control óptimo, de tal forma que:

$$Max\ U = \int_0^{\infty} \frac{c^{(1-\theta)} - 1}{1-\theta} \cdot e^{-\rho t} dt$$

$$s.a\colon\ \dot{\hat{k}} = f(\hat{k}) - \hat{c} - (\delta + n + x)\hat{k}$$

$$\hat{k} \geq 0$$

$$\hat{c} \geq 0$$

$$\hat{k}_0\ es\ dado$$

Donde $\hat{c} = \frac{C}{\hat{L}} = ce^{-xt}$

Se plantea un Hamiltoniano a valor presente de la siguiente forma:

$$Hc = \frac{c^{(1-\theta)} - 1}{1-\theta} \cdot e^{-\rho t} + \lambda\left[f(\hat{k}) - ce^{-xt} - (\delta + n + x)\hat{k}\right]$$

Reescribiendo el problema tenemos lo siguiente:

$$\frac{e^{-\rho t} \cdot c^{(1-\theta)}}{1-\theta} - \frac{e^{-\rho t}}{1-\theta} + \lambda\left[f(\hat{k}) - ce^{-xt} - (\delta + n + x)\hat{k}\right]$$

Ahora se buscan las condiciones de primer orden, cumpliendo con una serie de pasos ya definidos en la teoría.

1.- Comenzamos derivando parcialmente respecto al consumo:

$$\frac{\partial H}{\partial c} = \frac{(1-\theta)c^{(1-\theta)-1} e^{-\rho t}}{1-\theta} - \lambda e^{-xt} = 0$$

$$c^{-\theta} \cdot e^{-\rho t} - \lambda e^{-xt} = 0$$

$$c^{-\theta} e^{-\rho t} = \lambda e^{-xt}$$

$$c^{-\theta} e^{-\rho t} e^{xt} = \lambda e^{-xt} e^{xt}$$

$$\left[c^{-\theta} e^{-\rho t}\right] e^{xt} = \lambda$$

---

[35] El proceso de solución del Hamiltoniano es tomado de Ciro Bazán.

Derivando λ respecto al tiempo obtenemos lo siguiente:

$$\frac{d\lambda}{dt} = \dot{\lambda} = xe^{xt}\left[c^{-\theta}e^{-\rho t}\right] - \theta c^{-\theta-1}\dot{c}e^{-\rho t}e^{xt} - \rho e^{-\rho t}c^{-\theta}e^{xt}$$

Factorizando por e^{xt} obtenemos:

$$\left\{xc^{-\theta}e^{-\rho t} - \theta c^{-\theta-1}e^{-\rho t} - \rho e^{-\rho t}c^{-\theta}\right\}e^{xt}$$

Factorizando respecto a $c^{-\theta}$ encontramos que:

$$\left\{(xe^{-\rho t} - \rho e^{-\rho t})c^{-\theta} - \theta c^{-\theta-1}e^{-\rho t}\right\}e^{xt}$$

Finalmente, factorizando respecto a $e^{-\rho t}$ se obtiene:

$$\frac{d\lambda}{dt} = \dot{\lambda} = \left\{(x-\rho)c^{-\theta} - \theta c^{-\theta-1}\dot{c}\right\}e^{xt}e^{-\rho t}$$

2.- La siguiente derivada es respecto a $\hat{k}$:

$$\frac{\partial H}{\partial \hat{k}} = \lambda\left[f'\left(\hat{k}\right) - (\delta + n + x)\right] = 0$$

Más adelante obtendremos que:

$$\frac{\partial H}{\partial \hat{k}} = -\dot{\lambda}$$

3.- El siguiente paso es derivar respecto de λ:

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = f\left(\hat{k}\right) - ce^{-xt} - (\delta + n + x)\hat{k} = \dot{\hat{k}}$$

La última derivada es la más compleja, pues involucra el factor tiempo y la notación de Newton. Para facilitar su comprensión, resolveremos los términos por separado y reuniremos las ecuaciones finales.

4.- Finalmente, debemos derivar respecto al tiempo:

Para el término $\frac{e^{-\rho t}\cdot c^{(1-\theta)}}{1-\theta}$ tenemos lo siguiente:

$$\frac{\partial Hc}{\partial t} = \frac{-\rho e^{-\rho t}c^{(1-\theta)}}{(1-\theta)} + \frac{(1-\theta)c^{(1-\theta)-1}\dot{c}e^{-\rho t}}{(1-\theta)}$$

$$\frac{\partial Hc}{\partial t} = -\frac{\rho}{(1-\theta)}e^{-\rho t}c^{(1-\theta)} + c^{-\theta}\dot{c}e^{-\rho t}$$

Para el segundo término $-\frac{e^{-\rho t}}{1-\theta}$ resolvemos:

$$\frac{\partial Hc}{\partial t} = -\left(\frac{-\rho e^{-\rho t}}{(1-\theta)}\right) = \frac{\rho}{(1-\theta)} e^{-\rho t}$$

En el caso del tercer término $\lambda\left[f\left(\hat{k}\right) - ce^{-xt} - (\delta + n + x)\hat{k}\right]$, dado que podemos escribir la ecuación como $\lambda f\left(\hat{k}\right) - \lambda ce^{-xt} - (\delta + n + x)\lambda\hat{k}$, haremos lo siguiente:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \dot{\lambda} f\left(\hat{k}\right) + \dot{\hat{k}}\lambda f'\left(\hat{k}\right) - \dot{\lambda} ce^{-xt} - \dot{c}\lambda e^{-xt} + x\lambda e^{-xt}c - (\delta + n + x)\hat{k}\dot{\lambda} - (\delta + n + x)\lambda\dot{\hat{k}} = 0$$

Ahora factorizamos $\dot{\lambda}$:

$$\dot{\lambda}\left[f\left(\hat{k}\right) - ce^{-xt} - (\delta + n + x)\hat{k}\right]$$

Entonces, dado que $\dot{\hat{k}} = f\left(\hat{k}\right) - ce^{-xt} - (\delta + n + x)\hat{k}$, tenemos que lo anterior es igual a $\dot{\lambda}\dot{\hat{k}}$.

Si ahora factorizamos respecto a $\dot{\hat{k}}$:

$$\dot{\hat{k}}\left[\lambda f'\left(\hat{k}\right) - (\delta + n + x)\lambda\right] = 0$$

$$\dot{\hat{k}}\left\{\lambda\left[f'\left(\hat{k}\right) - (\delta + n + x)\right]\right\} = 0$$

Luego, si $\frac{\partial H}{\partial \hat{k}} = \lambda\left[f'\left(\hat{k}\right) - (\delta + n + x)\right]$, entonces:

$$\dot{\hat{k}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \hat{k}} = 0$$

Reacomodando los términos obtenemos lo siguiente:

$$\dot{\lambda}\dot{\hat{k}} + \dot{\hat{k}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \hat{k}} + \lambda[xce^{-xt} - \dot{c}e^{-xt}]$$

Juntando todos los componentes del Hamiltoniano:

$$\frac{\rho}{(1-\theta)} \cdot e^{-\rho t} - \frac{\rho}{(1-\theta)} \cdot e^{-\rho t} \cdot c^{(1-\theta)} + c^{-\theta} \cdot \dot{c} \cdot e^{-\rho t} + \dot{\lambda}\dot{\hat{k}} + \dot{\hat{k}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \hat{k}} + \lambda[xce^{-xt} - \dot{c}e^{-xt}]$$

Si en la ecuación anterior factorizamos $\dot{\hat{k}}$ obtendremos:

$$\dot{\hat{k}}\left[\dot{\lambda} + \frac{\partial H}{\partial \hat{k}}\right] = 0$$

$$\dot{\lambda} + \frac{\partial H}{\partial \hat{k}} = 0$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial \hat{k}} \;\; \rightarrow \;\; \frac{\partial H}{\partial \hat{k}} = -\dot{\lambda}$$

Lo cual, ya se había mencionado en el segundo apartado del hamiltoniano.

Podemos entonces plantear las condiciones de primer orden como sigue:

1.- $\frac{\partial H}{\partial c} = \left[c^{-\theta} e^{-\rho t}\right] e^{xt} = \lambda$

2.- $\frac{\partial H}{\partial \hat{k}} = \dot{\lambda} = -\lambda\left[f'\left(\hat{k}\right) - (\delta + n + x)\right]$

3.- $\lim_{t\to\infty} \left\{\hat{k} \cdot \lambda(0) \cdot e^{-\int_0^t [f'(k) - \delta - n - x] d\lambda}\right\} = 0$

Dado que:

$$\frac{\partial Hc}{\partial a} = -\dot{\lambda} \;\; \rightarrow \;\; \dot{\lambda} = -\lambda(r - n)$$

Separamos las variables e integramos de forma directa ambos miembros de la ecuación:

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\lambda(r - n) \;\; \rightarrow \;\; \frac{d\lambda}{\lambda} = -(r - n)dt$$

$$\int_0^t \frac{d\lambda}{\lambda} = \int_0^t -(r - n)dt$$

En el caso de la integral de lado izquierdo obtenemos lo siguiente:

$$\int_0^t \frac{d\lambda}{\lambda} = \ln \lambda \, \Big| \begin{matrix} t \\ 0 \end{matrix} \;\; \rightarrow = \ln \lambda(t) - \ln \lambda(0) \;\; \rightarrow \;\; = \frac{\ln \lambda(t)}{\ln \lambda(0)} \;\; \rightarrow \; = \ln\left[\frac{\lambda(t)}{\lambda(0)}\right]$$

Para la integral del lado derecho obtenemos lo siguiente:

$$\int_0^t -(r - n)dt \;\; \rightarrow \; = \int_0^t -rdt + \int_0^t ndt \;\; \rightarrow \; = -r\int_0^t dt + n\int_0^t dt$$

$$= \frac{r^2}{2} \, \Big| \begin{matrix} t \\ 0 \end{matrix} + nt \, \Big| \begin{matrix} t \\ 0 \end{matrix}$$

La integral anterior es sustituida por la siguiente:

$$-\int_0^t [r(\lambda)-n]d\lambda \;\rightarrow\; \int_0^t -r(\lambda)d\lambda + \int_0^t n d\lambda \;\rightarrow\; \int_0^t -r(\lambda)d\lambda + n\int_0^t d\lambda$$

$$= -\frac{r^2}{2}\Big|\begin{matrix} t \\ 0 \end{matrix} + nt\Big|\begin{matrix} t \\ 0 \end{matrix} \;\rightarrow = -\frac{r^2}{2}\Big|\begin{matrix} t \\ 0 \end{matrix} + nt$$

Ahora, sabemos que:

$$\ln\left[\frac{\lambda(t)}{\lambda(0)}\right] = -\int_0^t [r(\lambda)-n]d\lambda$$

Dado que:

$$-\int_0^t [r(\lambda)-n-x]d\lambda \;\rightarrow\; \int_0^t -r(\lambda)d\lambda + \int_0^t n d\lambda + + \int_0^t x d\lambda \;\rightarrow\; \int_0^t -r(\lambda)d\lambda + n\int_0^t d\lambda + x\int_0^t d\lambda$$

$$= \frac{r^2}{2}\Big|\begin{matrix} t \\ 0 \end{matrix} + nt\Big|\begin{matrix} t \\ 0 \end{matrix} + xt\Big|\begin{matrix} t \\ 0 \end{matrix} \;\rightarrow\; = \frac{r^2}{2}\Big|\begin{matrix} t \\ 0 \end{matrix} + nt + xt$$

Entonces:

$$-\int_0^t [r(\lambda)-n]d\lambda = -xt - \int_0^t [r(\lambda)-n-x]d\lambda$$

Aplicando e en ambos lados de la ecuación obtenemos:

$$\ln\left[\frac{\lambda(t)}{\lambda(0)}\right] = -xt - \int_0^t [r(\lambda)-n-x]d\lambda$$

$$e^{\ln\left[\frac{\lambda(t)}{\lambda(0)}\right]} = e^{-xt-\int_0^t [r(\lambda)-n-x]d\lambda} \;\rightarrow\; \frac{\lambda(t)}{\lambda(0)} = e^{-xt-\int_0^t [r(\lambda)-n-x]d\lambda}$$

$$\frac{\lambda(t)}{\lambda(0)} = e^{-xt}\cdot e^{-\int_0^t [r(\lambda)-n-x]d\lambda} \;\rightarrow\; \lambda(t) = \lambda(0)\cdot e^{-xt}\cdot e^{-\int_0^t [r(\lambda)-n-x]d\lambda}$$

Por las condiciones de primer orden sabemos lo siguiente:

$$\frac{\partial Hc}{\partial r} = \lambda \cdot a = 0$$

$$\lim_{t\to\infty}(\lambda\cdot a) = 0$$

Si $a = \mathscr{k}$, $\hat{\mathscr{k}} = \mathscr{k}e^{-xt}$ y $f'(\mathscr{k}) - \delta = r$, tenemos entones lo siguiente:

$$\lim_{t\to\infty}(\lambda\cdot a) = \lim_{t\to\infty}\left\{\mathscr{k}e^{-xt}\cdot\lambda(0)\cdot e^{-\int_0^t [r(\lambda)-n-x]d\lambda}\right\} = 0$$

$$\lim_{t\to\infty}\left\{\hat{k}\cdot\lambda(0)\cdot e^{-\int_0^t[f'(k)-\delta-n-x]d\lambda}\right\}=0$$

Puntualmente debemos observar el siguiente componente:

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\int_0^t[f'(k)-\delta-n-x]d\lambda}=0$$

Sabemos que $\lambda(0)>0$ y que $k\to\ k^*$; por lo tanto, escribiendo lo anterior de la siguiente forma:

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\int_0^t[f'(k)]-[\delta+n+x]d\lambda}=0$$

Observamos que:

$$[f'(k)]-[\delta+n+x]>0$$

$$[f'(k)]>[\delta+n+x]$$

Si por otro lado, expresamos la ecuación como:

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\int_0^t[f'(k)-\delta]-[n+x]d\lambda}=0$$

Observamos que:

$$[f'(k)-\delta]-[n+x]>0$$

$$[f'(k)-\delta]>[n+x]$$

La Ecuación de Euler.

De acuerdo con el Dr. Ciro Bazán, el desarrollo es el siguiente:

Sabemos que $\frac{\partial H}{\partial c} = \left[c^{-\theta} e^{-\rho t}\right] e^{xt} = \lambda$ y que $\frac{d\lambda}{dt} = \dot{\lambda} = \left\{(x-\rho)c^{-\theta} - \theta c^{-\theta-1}\dot{c}\right\} e^{xt} e^{-\rho t}$

Sustituyendo los valores de λ y $\dot{\lambda}$ en la condición $\frac{\partial H}{\partial \hat{k}} = \dot{\lambda} = -\lambda\left[f'\left(\hat{k}\right) - (\delta + n + x)\right]$ obtenemos:

$$\left\{(x-\rho)c^{-\theta} - \theta c^{-\theta-1}\dot{c}\right\} e^{xt} e^{-\rho t} = -\left[f'\left(\hat{k}\right) - (\delta + n + x)\right]\left(c^{-\theta} e^{-\rho t} e^{xt}\right)$$

$$\left\{(x-\rho)c^{-\theta} - \theta c^{-\theta-1}\dot{c}\right\} e^{xt} e^{-\rho t} = c^{-\theta} e^{-\rho t} e^{xt}\left[-f'\left(\hat{k}\right) + (\delta + n + x)\right]$$

Si multiplicamos toda la ecuación por $\frac{1}{e^{xt} e^{-\rho t}}$ reducimos como sigue:

$$\left\{(x-\rho)c^{-\theta} - \theta c^{-\theta-1}\dot{c}\right\} = c^{-\theta}\left[-f'\left(\hat{k}\right) + (\delta + n + x)\right]$$

Sabemos que $c^{-\theta-1}$ es igual a $c^{-\theta} c^{-1}$, entonces:

$$\left\{(x-\rho)c^{-\theta} - \theta c^{-\theta} c^{-1}\dot{c}\right\} = c^{-\theta}\left[-f'\left(\hat{k}\right) + (\delta + n + x)\right]$$

Si multiplicamos toda la ecuación por $\frac{1}{c^{-\theta}}$ obtenemos:

$$\{(x-\rho) - \theta c^{-1}\dot{c}\} = \left[-f'\left(\hat{k}\right) + (\delta + n + x)\right]$$

Despejando $\theta c^{-1}\dot{c}$ encontramos que:

$$\left\{f'\left(\hat{k}\right) - (\delta + n + x) + x - \rho\right\} = \theta c^{-1}\dot{c}$$

$$\left\{f'\left(\hat{k}\right) - (\delta + n + \rho)\right\} = \theta c^{-1}\dot{c}$$

$$\left\{f'\left(\hat{k}\right) - (\delta + n + \rho)\right\} = \theta \frac{\dot{c}}{c}$$

$$\left\{f'\left(\hat{k}\right) - (\delta + n + \rho)\right\}\left(\frac{1}{\theta}\right) = \frac{\dot{c}}{c}$$

Esta última es precisamente la ecuación de Euler que complementa el sistema propuesto por el modelo de Ramsey.

Ecuaciones Fundamentales de Ramsey y Equilibrio de la Economía.

Ramsey propone un sistema conformado por dos ecuaciones, una de ellas nos explica la dinámica de las variables $\hat{k}$ e $\hat{y}$ y la otra ecuación complementa a la anterior, describiendo el comportamiento de $\hat{c}$. Esto es lo siguiente, para llegar a la primera ecuación fundamental, dada la ecuación de restricción $\dot{a} = (w + r \cdot a) - c - na \; \dots (4)$, siendo $a = k$, $\dot{a} = \dot{k}$ y $\hat{k} = ke^{xt}$ y empleando las siguientes ecuaciones:

$$w = \left[f\left(\hat{k}\right) - \hat{k} \cdot f'\left(\hat{k}\right)\right] \cdot e^{xt} \; \dots (13)$$

$$f'(k) = r + \delta \; \dots (12)$$

$$f'(k) - \delta = r$$

Generaremos la ecuación dinámica que nos indica el comportamiento de $\hat{k}$ e $\hat{y}$. Resolvemos entonces de la siguiente forma: tomamos como condiciones básicas lo siguiente: $a = k$ y $\dot{a} = \dot{k}$

Dado que:

$$\hat{k} = ke^{-xt}$$

$$e^{xt} \cdot \hat{k} = ke^{-xt} \cdot e^{xt}$$

$$e^{xt} \cdot \hat{k} = ke^{(x-x)t}$$

$$e^{xt} \cdot \hat{k} = k$$

Derivamos k respecto al tiempo:

$$\frac{dk}{dt} = \dot{k} = \dot{\hat{k}} \cdot e^{xt} + x \cdot \hat{k} \cdot e^{xt}$$

Factorizando:

$$\frac{dk}{dt} = \left[\dot{\hat{k}} + x\hat{k}\right] e^{xt}$$

$$\dot{k} = \left[\dot{\hat{k}} + x\hat{k}\right] e^{xt}$$

$$\frac{\dot{k}}{e^{xt}} = \left[\dot{\hat{k}} + x\hat{k}\right]$$

Ahora podemos sustituir las ecuaciones (23) y (24) en la ecuación (4):

$$\frac{\dot{k}}{e^{xt}} = \left\{\left[f\left(\hat{k}\right) - \hat{k} \cdot f'\left(\hat{k}\right)\right] \cdot e^{xt}\right\} + [f'(k) - \delta]k - c - nk$$

Ahora debemos poner todos los componentes de la ecuación en términos de unidades de trabajo efectivo:

$$\frac{\dot{k}}{e^{xt}} = \left\{\left[f\left(\hat{k}\right) - \hat{k} \cdot f'\left(\hat{k}\right)\right] \cdot e^{xt}\right\} + [f'(k) - \delta]k - c - nk$$

$$\frac{\dot{k}}{e^{xt}} = \left[\frac{f\left(\hat{k}\right) \cdot e^{xt}}{e^{xt}} - \frac{\hat{k} \cdot f'\left(\hat{k}\right) \cdot e^{xt}}{e^{xt}}\right] + \left[\frac{f'(k) \cdot k}{e^{xt}} - \frac{\delta \cdot k}{e^{xt}}\right] - \frac{c}{e^{xt}} - \frac{nk}{e^{xt}}$$

$$\frac{\dot{k}}{e^{xt}} = f\left(\hat{k}\right) - \hat{k} \cdot f'\left(\hat{k}\right) + f'(k)\hat{k} - \delta\hat{k} - \hat{c} - n\hat{k}$$

Reduciendo términos y, sabiendo que $\frac{\dot{k}}{e^{xt}} = \left[\dot{\hat{k}} + \hat{k}\right]$ obtenemos finalmente:

$$\dot{\hat{k}} + \hat{k} = f\left(\hat{k}\right) - \delta\hat{k} - \hat{c} - n\hat{k}$$

$$\dot{\hat{k}} = f\left(\hat{k}\right) - \delta\hat{k} - \hat{c} - n\hat{k} - x\hat{k}$$

Factorizando:

$$\dot{\hat{k}} = f\left(\hat{k}\right) - \hat{c} - (\delta + n + x)\hat{k} \ \ldots (14)$$

Donde $\hat{c} = \frac{c}{\hat{L}} = ce^{-xt}$

La ecuación (14) indica precisamente el comportamiento de $\hat{k}$ e $\hat{y}$, pero aún nos falta saber el comportamiento de $\hat{c}$ ya que Ramsey se basa en el comportamiento optimizador del consumidor para definir una ecuación que puntualice la trayectoria del ahorro.

Comportamiento del Consumo.

Sabemos que $\hat{c} = \frac{c}{\hat{L}} = ce^{-xt}$ y de ello podemos encontrar la ecuación dinámica del consumo de acuerdo al siguiente procedimiento:

$$\hat{c} = ce^{-xt}$$

$$e^{xt}\hat{c} = ce^{-xt}e^{xt}$$

$$e^{xt}\hat{c} = ce^{(x-x)t}$$

$$e^{xt}\hat{c} = c$$

Si derivamos la ecuación anterior respecto al tiempo obtenemos lo siguiente:

$$\frac{dc}{dt} = \dot{c} = \dot{\hat{c}}e^{xt} + x\hat{c}e^{xt}$$

Factorizando:

$$\dot{c} = \left[\dot{\hat{c}} + x\hat{c}\right]e^{xt}$$

$$\frac{\dot{c}}{c} = \dot{\hat{c}} \cdot e^{xt} + x \cdot \hat{c} \cdot e^{xt}$$

$$\frac{\dot{c}}{e^{xt} \cdot \hat{c}} = \frac{\dot{\hat{c}} \cdot e^{xt}}{e^{xt} \cdot \hat{c}} + \frac{x \cdot \hat{c} \cdot e^{xt}}{e^{xt} \cdot \hat{c}}$$

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} + x \quad \rightarrow \quad \frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = \frac{\dot{c}}{c} - x$$

Como sabemos:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \left(\frac{1}{\theta}\right)\left\{f'\left(\hat{k}\right) - (\delta + n + \rho)\right\}$$

Entonces ahora sustituimos los valores de $\frac{\dot{c}}{c} = \frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} + x$

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} + x\left(\frac{1}{\theta}\right)\left\{f'\left(\hat{k}\right) - (\delta + n + \rho)\right\}$$

$$\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = \frac{\dot{c}}{c} - x = \left(\frac{1}{\theta}\right)\left\{f'\left(\hat{k}\right) - (\delta + n + \rho)\right\} - x$$

$$\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = \frac{\dot{c}}{c} - x = \left(\frac{1}{\theta}\right)\left\{f'\left(\hat{k}\right) - (\delta + n + \rho)\right\} - x$$

$$\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = \left(\frac{1}{\theta}\right)\left[f'\left(\hat{k}\right) - (\delta + n + \rho + \theta x)\right] \ldots (15)$$

Esta es, finalmente, la ecuación necesaria para completar el sistema que determina el comportamiento de $\hat{k}$, $\hat{y}$ y $\dot{\hat{c}}$ en el modelo de Ramsey.

Estado Estacionario.

Dadas las ecuaciones de Ramsey que definen el comportamiento de las variables per cápita (unidades de trabajo efectivo):

$$\dot{\hat{k}} = f(\hat{k}) - \hat{c} - (\delta + n + x)\hat{k} \;\ldots (14)$$

$$\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = \left(\frac{1}{\theta}\right) \cdot [f'(k) - \delta - \rho - \theta x] \;\ldots (15)$$

Así como la condición inicial $\hat{k}(0)$ y la condición de transversalidad:

$$\lim_{t\to\infty} \left\{\hat{k} \cdot \lambda(0) \cdot e^{-\int_0^t [f'(k) - \delta - n - x] d\lambda}\right\} = 0$$

Tenemos lo siguiente:

Partiendo de las siguientes ecuaciones:

$$\dot{\hat{k}} = f(\hat{k}) - \hat{c} - (\delta + n + x)\hat{k} \;\ldots (14)$$

$$\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = \left(\frac{1}{\theta}\right) \left[f'(\hat{k}) - (\delta + n + \rho + \theta x)\right] \;\ldots (15)$$

Dada la función de producción del tipo:

$$\hat{y} = k^{\alpha}$$

Sustituimos y obtenemos lo siguiente:

$$\dot{\hat{k}} = k^{\alpha} - \hat{c} - (\delta + n + x)k$$

$$\dot{\hat{c}} = \left(\frac{\hat{c}}{\theta}\right) [\alpha k^{\alpha - 1} - (\delta + n + \rho + \theta x)]$$

Si en (14) $\dot{\hat{k}} = 0$, entonces:

$$\hat{c} = f(\hat{k}) - (\delta + n + x)\hat{k} \ldots (17)$$

$$\hat{c} = k^{\alpha} - (\delta + n + x)k$$

Ahora, si en (15) $\dot{\hat{c}} = 0$, entonces:

$$f'(\hat{k}) - (\delta + n + \rho + \theta x) = 0 \ldots (18)$$

$$\alpha k^{\alpha - 1} - (\delta + n + \rho + \theta x) = 0$$

A partir de esta ultima ecuación, despejamos la variable $\hat{k}$ para poder encontrar los valores de $\hat{k}$ y c que satisfacen el estado estacionario, $(\hat{k}^*, \hat{c}^*)$.

$$\alpha k^{\alpha-1} = (\delta + n + \rho + \theta x)$$

$$k^{1-\alpha}(\alpha k^{\alpha-1}) = (\delta + n + \rho + \theta x)k^{1-\alpha}$$

$$\alpha = (\delta + n + \rho + \theta x)k^{1-\alpha}$$

$$\frac{\alpha}{(\delta + n + \rho + \theta x)} = k^{1-\alpha}$$

$$(\frac{\alpha}{(\delta + n + \rho + \theta x)})^{\frac{1}{1-\alpha}} = (k^{1-\alpha})^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$(\frac{\alpha}{(\delta + n + \rho + \theta x)})^{\frac{1}{1-\alpha}} = \hat{k}^*$$

Este es el valor del capital de estado estacionario; sustituyendo en la ecuación $\hat{c} = k^{\alpha} - (\delta + n + x)k$ obtendremos el nivel de consumo perteneciente al estado estacionario:

$$\hat{c}^* = \left(\frac{\alpha}{(\delta + n + \rho + \theta x)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} - (\delta + n + x)\left(\frac{\alpha}{(\delta + n + \rho + \theta x)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Ahora bien, respecto a los niveles de consumo y capital de oro, asumimos un procedimiento similar al anterior, partiendo de la siguiente ecuación:

$$\hat{c} = f(\hat{k}) - (\delta + n + x)\hat{k}$$

$$\hat{c} = k^{\alpha} - (\delta + n + x)k$$

Si derivamos $\hat{c}$ respecto a $\hat{k}$ e igualamos a cero obtenemos lo siguiente:

$$\frac{d\hat{c}}{d\hat{k}} = f'(\hat{k}) - (\delta + n + x)$$

Es decir:

$$\frac{d\hat{c}}{d\hat{k}} = \alpha k^{\alpha-1} - (\delta + n + x)$$

$$0 = \alpha k^{\alpha-1} - (\delta + n + x)$$

$$\alpha k^{\alpha-1} = (\delta + n + x)$$

$$(\mathcal{k}^{1-\alpha})\alpha\mathcal{k}^{\alpha-1} = (\delta + n + x)(\mathcal{k}^{1-\alpha})$$

$$\alpha = (\delta + n + x)\mathcal{k}^{1-\alpha}$$

$$\frac{\alpha}{(\delta + n + x)} = \mathcal{k}^{1-\alpha}$$

$$\left(\frac{\alpha}{(\delta + n + x)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = (\mathcal{k}^{1-\alpha})^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$\left(\frac{\alpha}{(\delta + n + x)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \mathcal{k}_{oro}$$

Comportamiento en el Estado Estacionario.

De acuerdo con el Dr. Ciro Eduardo Bazán, la primera forma de aproximarnos al comportamiento de estado estacionario es mediante el polinomio de Taylor; es decir, sean:

$$\dot{\hat{k}} = f(\hat{k}) - \hat{c} - (\delta + n + x)\hat{k}$$

$$\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = \left(\frac{1}{\theta}\right) \cdot [f'(k) - \delta - \rho - \theta x]$$

De acuerdo con la regla de Taylor, calculamos las derivadas de primer orden para cada caso:

$$f(\hat{k}, \hat{c}) \approx f(\hat{k}^*, \hat{c}^*) + \frac{\partial f(\hat{k}^*, \hat{c}^*)}{\partial \hat{k}} \cdot [\hat{k} - \hat{k}^*] + \frac{\partial f(\hat{k}^*, \hat{c}^*)}{\partial \hat{c}} \cdot [\hat{c} - \hat{c}^*]$$

$$g(\hat{k}, \hat{c}) \approx g(\hat{k}^*, \hat{c}^*) + \frac{\partial g(\hat{k}^*, \hat{c}^*)}{\partial \hat{k}} \cdot [\hat{k} - \hat{k}^*] + \frac{\partial g(\hat{k}^*, \hat{c}^*)}{\partial \hat{c}} \cdot [\hat{c} - \hat{c}^*]$$

Donde:

$$f(\hat{k}^*, \hat{c}^*) = \dot{\hat{k}}^*$$

$$g(\hat{k}^*, \hat{c}^*) = \dot{\hat{c}}^*$$

En estado estacionario:

$$\dot{\hat{k}}^* \equiv f(\hat{k}^*, \hat{c}^*) = 0$$

$$\dot{\hat{c}}^* \equiv g(\hat{k}^*, \hat{c}^*) = 0$$

Ahora debemos calcular las derivadas como nos indica la regla de Taylor y evaluarlas en el estado estacionario, recordando que en estado estacionario $f'(\hat{k}) = (\delta + n + \rho + \theta x)$.

En el caso de $\dot{\hat{k}} = f(\hat{k}) - \hat{c} - (\delta + n + x)\hat{k}$:

$$\frac{\partial f(\hat{k}^*, \hat{c}^*)}{\partial \hat{k}} = f'(\hat{k}) - (\delta + n + x)$$

$$\frac{\partial f(\hat{k}^*, \hat{c}^*)}{\partial \hat{k}} = \alpha k^{\alpha - 1} - (\delta + n + x)$$

$$\frac{\partial f(\hat{k}^*, \hat{c}^*)}{\partial \hat{c}} = -1$$

$$\left[\dot{\hat{k}} - \dot{\hat{k}}^*\right] \approx \left[f'(\hat{k}) - (\delta + n + x)\right]\left[\hat{k} - \hat{k}^*\right] - [\hat{c} - \hat{c}^*]$$

$$\left[\dot{\hat{k}} - \dot{\hat{k}}^*\right] \approx [(\delta + n + \rho + \theta x) - (\delta + n + x)]\left[\hat{k} - \hat{k}^*\right] - [\hat{c} - \hat{c}^*]$$

La eliminación de términos similares nos da como resultado $\rho + (1 - \theta)x = \beta$

Entonces, finalmente:

$$\left[\dot{\hat{k}} - \dot{\hat{k}}^*\right] \approx \beta\left[\hat{k} - \hat{k}^*\right] - [\hat{c} - \hat{c}^*]$$

Para $\dot{\hat{c}} = \left(\frac{\hat{c}}{\theta}\right) \cdot [f'(k) - \delta - \rho - \theta x]$:

$$\frac{\partial g(\hat{k}^*, \hat{c}^*)}{\partial \hat{k}} = \frac{\hat{c}^*}{\theta} \cdot f''(\hat{k}^*)$$

$$\frac{\partial g(\hat{k}^*, \hat{c}^*)}{\partial \hat{k}} = \frac{\hat{c}^*}{\theta}[\alpha(\alpha - 1)Ak^{\alpha-2}]$$

Donde:

$$\frac{\hat{c}^*}{\theta}[\alpha(\alpha - 1)Ak^{\alpha-2}] = \tau$$

Pero sabemos que $f''(\hat{k}^*) < 0$; entonces $\tau < 0$.

$$\frac{\partial g(\hat{k}^*, \hat{c}^*)}{\partial \hat{c}} = \frac{1}{\theta}\left[f'(\hat{k}) - (\delta + n + \rho + \theta x)\right]$$

$$\frac{\partial g(\hat{k}^*, \hat{c}^*)}{\partial \hat{c}} = \frac{1}{\theta}[(\delta + n + \rho + \theta x) - (\delta + n + \rho + \theta x)]$$

$$\frac{\partial g(\hat{k}^*, \hat{c}^*)}{\partial \hat{c}} = \frac{1}{\theta}[0]$$

$$\frac{\partial g(\hat{k}^*, \hat{c}^*)}{\partial \hat{c}} = 0$$

$$\left[\dot{\hat{c}} - \dot{\hat{c}}^*\right] \approx \tau\left[\hat{k} - \hat{k}^*\right]$$

La linealización de las ecuaciones de movimiento en el estado estacionario es la siguiente:

$$f(\hat{k}, \hat{c}) \equiv \dot{\hat{k}} = \beta\left[\hat{k} - \hat{k}^*\right] - [\hat{c} - \hat{c}^*]$$

$$g(\hat{k}^*, \hat{c}^*) \equiv \dot{\hat{c}} = \tau\left[\hat{k} - \hat{k}^*\right]$$

Desarrollado en forma matricial tenemos lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{k}} \\ \dot{\hat{c}} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(\hat{k}^*, \hat{c}^*)}{\partial \hat{k}} & \dfrac{\partial f(\hat{k}^*, \hat{c}^*)}{\partial \hat{c}} \\ \dfrac{\partial g(\hat{k}^*, \hat{c}^*)}{\partial \hat{k}} & \dfrac{\partial g(\hat{k}^*, \hat{c}^*)}{\partial \hat{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{k} - \hat{k}^* \\ \hat{c} - \hat{c}^* \end{bmatrix} \equiv A \begin{bmatrix} \tilde{\hat{k}} \\ \tilde{\hat{c}} \end{bmatrix}$$

Es decir:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{k}} \\ \dot{\hat{c}} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \beta & -1 \\ \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{k} - \hat{k}^* \\ \hat{c} - \hat{c}^* \end{bmatrix} \equiv A \begin{bmatrix} \tilde{\hat{k}} \\ \tilde{\hat{c}} \end{bmatrix}$$

Donde:

$$\tilde{\hat{k}} = \hat{k} - \hat{k}^* \;\; \rightarrow \;\; \dot{\tilde{\hat{k}}} = \dot{\hat{k}}$$

$$\tilde{\hat{c}} = \hat{c} - \hat{c}^* \;\; \rightarrow \;\; \dot{\tilde{\hat{c}}} = \dot{\hat{c}}$$

El sistema anterior tiene la siguiente solución:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{k}} \\ \dot{\hat{c}} \end{bmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} + c_2 \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} e^{\lambda_2 t}$$

Donde:

λ_1 y λ_2 son las raíces características o autovalores de una matriz A.

a_1, a_2, b_1 y b_2 son los autovectores.

c_1 y c_2 son constantes que se definen cuando existen condiciones iniciales en el problema.

Para calcular los autovalores, por álgebra lineal, a partir de la siguiente matriz:

$$p(\lambda) = [A - \lambda I]$$

$$p(\lambda) = \begin{bmatrix} \beta & -1 \\ \tau & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Obtenemos que:

$$p(\lambda) = \begin{bmatrix} \beta - \lambda & -1 \\ \tau & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - \lambda\beta + \tau$$

Y mediante la fórmula para solucionar ecuaciones de segundo grado encontramos:

$$\frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\tau}}{2}$$

Donde:

$\Delta = \beta^2 - 4\tau$ es el discriminante.

Sabiendo que $\tau < 0$, entonces $\Delta > 0$, por lo cual las raíces o autovalores son reales y distintos, tal que:

$$\lambda_1 = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\tau}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\tau}}{2}$$

Entonces, $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 < 0$, lo cual implica que el sistema de ecuaciones tiene un brazo estable; pero, la presencia de una raíz positiva causa que, para cualquier condición inicial arbitraria el sistema tenga divergencia respecto del estado estacionario, por lo tanto existe un único valor que permite tal convergencia al sistema anterior.

Ahora bien, a partir del sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{k}} \\ \dot{\hat{c}} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \beta & -1 \\ \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{k} - \hat{k}^* \\ \hat{c} - \hat{c}^* \end{bmatrix} \equiv A \begin{bmatrix} \tilde{\hat{k}} \\ \tilde{\hat{c}} \end{bmatrix}$$

Sabemos que, cuando existen condiciones iniciales, $\hat{k}(0)$ e $\hat{y}(0)$, el problema puede ser resuelto de acuerdo a la siguiente estructura:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{k}} \\ \dot{\hat{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\hat{k}} \\ \hat{\hat{c}} \end{bmatrix}$$

Donde la primer matriz es denominada "matriz modal", la cual contiene a los eigenvectores ya definidos anteriormente; luego tenemos la matriz λI; la tercer la matriz es la matriz inversa de la matriz modal y finalmente, el vector columna, que se define como:

$$\hat{\hat{k}} = \hat{k} - \hat{k}^*$$

$$\hat{\hat{c}} = \hat{c} - \hat{c}^*$$

Dado que $x_1 \neq 0$, entonces tenemos que:

$$x_1 \lambda_1 \left(u_1 \hat{\hat{k}} + v_1 \hat{\hat{c}} \right) = 0$$

$$u_1 \hat{\hat{k}} + v_1 \hat{\hat{c}} = 0$$

$$u_1 \left(\hat{k} - \hat{k}^* \right) + v_1 (\hat{c} - \hat{c}^*) = 0$$

$$v_1(\hat{c}-\hat{c}^*) = -u_1(\hat{k}-\hat{k}^*)$$

$$(\hat{c}-\hat{c}^*) = -\frac{u_1}{v_1}(\hat{k}-\hat{k}^*)$$

La ecuación anterior define que el nivel inicial de consumo correspondiente al nivel de capital inicial, tal que haya convergencia hacia el estado estacionario, sea determinado por:

$$\hat{c} = \hat{c}^* - \frac{u_1}{v_1}(\hat{k}-\hat{k}^*)$$

Donde ya hemos calculado los valores de estado estacionario de consumo y capital, siendo necesario solamente asignar un valor a $\hat{k}$, que es el nivel inicial de capital por unidad de trabajo efectivo. Pero también, la ecuación anterior nos permite realizar el cálculo contrario, es decir, podemos encontrar el nivel de capital inicial, dado el nivel de consumo; todo esto operando de forma inversa el despeje de la ecuación, obteniendo lo siguiente:

$$\hat{k} = \hat{k}^* - \frac{v_1}{u_1}(\hat{c}-\hat{c}^*)$$

Por último, para definir la dinámica completa del modelo, es necesario encontrar las ecuaciones que nos muestren la forma como habrán de comportarse el consumo y el capital en el tiempo; por lo tanto, de acuerdo con el Dr. Bazán, a partir de:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\hat{k}} \\ \tilde{\hat{c}} \end{bmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} + c_2 \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} e^{\lambda_2 t}$$

Se define la forma completa del sistema como:

$$\hat{k}-\hat{k}^* = c_1 a_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 a_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$\hat{c}-\hat{c}^* = c_1 b_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 b_2 e^{\lambda_2 t}$$

Donde:

$$w = c_1 a_1$$

$$x = c_2 a_2$$

$$y = c_1 b_1$$

$$z = c_2 b_2$$

Entonces:

$$\hat{k} - \hat{k}^* = we^{\lambda_1 t} + xe^{\lambda_2 t}$$

$$\hat{c} - \hat{c}^* = ye^{\lambda_1 t} + ze^{\lambda_2 t}$$

Como ya se ha mencionado en párrafos anteriores $\lambda_1 > 0$, por lo cual, debe ser eliminado el efecto explosivo que dicho eigenvalor causa sobre el sistema. Esto se resuelve imponiendo la condición de que $w = y = 0$ y, si asignamos como condiciones iniciales las variables $\hat{k}$ y $\hat{c}$, podemos resolver de la siguiente forma:

$$\hat{k} - \hat{k}^* = xe^{\lambda_2 t} \;\; \rightarrow \;\; \hat{k} = \hat{k}^* + xe^{\lambda_2 t}$$

Y para el momento cero:

$$\hat{k}_0 = \hat{k}^* + xe^{\lambda_2 0} \;\; \rightarrow \;\; x = \hat{k}_0 - \hat{k}^*$$

Finalmente, sustituyendo en la ecuación inicial, tenemos que:

$$\hat{k}_t = \hat{k}^* + \left(\hat{k}_0 - \hat{k}^*\right)e^{\lambda_2 t}$$

Y ésta es la ecuación encargada de definir el comportamiento del capital en el tiempo, sujeta a la convergencia hacia el estado estacionario ya calculado anteriormente.

Por un razonamiento análogo, la ecuación que define el comportamiento del consumo en el tiempo, sujeto a la convergencia hacia el estado estacionario es:

$$\hat{c}_t = \hat{c}^* + (\hat{c}_0 - \hat{c}^*)e^{\lambda_2 t}$$

Si despejamos $e^{\lambda_2 t}$ en ambas ecuaciones, obtendremos lo siguiente:

$$e^{\lambda_2 t} = \frac{\hat{k} - \hat{k}^*}{\hat{k}_0 - \hat{k}^*} = \frac{\hat{c} - \hat{c}^*}{\hat{c}_0 - \hat{c}^*}$$

Luego, despejando $\hat{c}^*$:

$$\hat{c} - \hat{c}^* = \frac{\hat{k} - \hat{k}^*}{\hat{k}_0 - \hat{k}^*}(\hat{c}_0 - \hat{c}^*) \quad \rightarrow \quad \hat{c} - \hat{c}^* = \left(\frac{\hat{c}_0 - \hat{c}^*}{\hat{k}_0 - \hat{k}^*}\right)\left(\hat{k} - \hat{k}^*\right)$$

$$\hat{c} = \left(\frac{\hat{c}_0 - \hat{c}^*}{\hat{k}_0 - \hat{k}^*}\right)\left(\hat{k} - \hat{k}^*\right) + \hat{c}^*$$

Luego, debemos resolver la ecuación:

$$\hat{c} = \left(\frac{\hat{c}_0 - \hat{c}^*}{\hat{k}_0 - \hat{k}^*}\right)\hat{k} - \left[\frac{\hat{k}^*(\hat{c}_0 - \hat{c}^*)}{\hat{k}_0 - \hat{k}^*}\right] + \hat{c}^*$$

$$\frac{\hat{c}^*}{1} - \left[\frac{\hat{k}^*\hat{c}_0 - \hat{k}^*\hat{c}^*}{\hat{k}_0 - \hat{k}^*}\right] = \frac{\hat{c}^*\hat{k}_0 - \hat{c}^*\hat{k}^* - \hat{k}^*\hat{c}_0 + \hat{k}^*\hat{c}^*}{\hat{k}_0 - \hat{k}^*}$$

$$= \frac{\hat{c}^*\hat{k}_0 - \hat{k}^*\hat{c}_0}{\hat{k}_0 - \hat{k}^*}$$

Finalmente, la aproximación lineal de la senda óptima en los alrededores del estado estacionario es:

$$\hat{c} = \left(\frac{\hat{c}_0 - \hat{c}^*}{\hat{k}_0 - \hat{k}^*}\right)\hat{k} + \left(\frac{\hat{c}^*\hat{k}_0 - \hat{k}^*\hat{c}_0}{\hat{k}_0 - \hat{k}^*}\right)$$

Script de Matlab.

Para correr el programa, necesitamos copiar la siguiente lista de comandos, abrir un m-file nuevo y pegar el script. No se debe cambiar nada de la lista de comandos, salvo en el caso de que la versión empleada de Matlab sea atrasada y especifique una forma de terminar cada línea de comando; fuera de lo anterior, nada debe cambiarse. Proporcionamos al lector el script original que hemos empleado, sin incluir el valor de los parámetros estructurales.

Recuerde que hemos elegido una rejilla de valores que, al ser introducidos en el script, dan como resultado los coeficientes que pueden observarse en la sección B del anexo estadístico; por tal motivo, existen líneas de comando donde no hay valor alguno después de la variable; el simular queda a decisión del lector.

```
%ramsey.m
%modelo de Ramsey; optimización intertemporal;nos ayuda a encontrar el estado estacionario
%parámetros del modelo
%contribución del capital en la producción
alpha=;
%tasa de crecimiento poblacional
n=;
%depreciación
delta=;
%progreso tecnológico
x=;
%tasa de preferencia intertemporal
rho=;
%elasticidad de sustitución intertemporal (ESIC)
theta=;
%c=consumo por unidad de trabajo efectivo
%k=capital por unidad de trabajo efectivo
%ks=capital de estado estacionario
ks=[alpha/(delta+n+rho+(theta*x))]^[1/(1-alpha)];
%Ingreso de estado estacionario
ys=ks^(alpha);
%cs=consumo de estado estacionario
cs=ys-((delta+n+x)*ks);
%de acuerdo con el proceso de linealización, se deben calcular los eigenvalores y
eigenvectores de las funciones cs y ks
%Dadas las ecuaciones de movimiento de c y k, encontraremos una matriz A,
%donde:
format short
beta=rho+(theta-1)*x
c=-1;
epsilon=(cs/theta)*(alpha*(alpha-1))*ks^(alpha-2)
gamma=0;
%definimos la siguiente matriz:
A=[beta c;epsilon gamma]
```

```
%para calcular eigenvalores y eigenvectores tecleamos lo siguiente:
[Eigenvectores,Eigenvalores]=eig(A)
%los eigenvectores conforman la "matriz modal", de la cual debemos calcular su matriz
inversa.
a=inv(Eigenvectores);
%de acuerdo con la teoría, la inversa de la matriz modal debe cumplir con -(u1/vi)=lambda 1;
entonces, b=lambda 1:
b=a(1,2)/a(1,1);
```

En este punto haremos una aclaración: las líneas de código que a continuación se dan, pertenecen a la definición de condiciones iniciales, por lo cual, debemos recordar que existen dos casos: encontrar el nivel de capital inicial a partir del nivel de consumo inicial o viceversa; y aunque las ecuaciones son semejantes, debemos especificar qué tipo de condición inicial tenemos y cual habremos de determinar.

Así entonces, el script se complementa con los siguientes comandos, que deben ser pegados inmediatamente después de la última línea:

```
%ahora debemos asignar el valor de K(0)para el cual vamos a definir el nivel de consumo c(0)
%k=;
%ahora vamos a determinar el nivel de consumo c(0) mediante la ecuación:
%c=cs-b*(k-ks)
%para encontrar el capital correspondiente al nivel de consumo c(0),
%definimos el valor de c(0):
c=;
%tenemos la siguiente ecuación:
k=ks-b*(c-cs)
%Generación de las ecuaciones del comportamiento para el consumo y el capital en el tiempo
%determinamos el período de tiempo:
t=0:1:100;
%vamos a emplear el segundo eigenvalor, por lo tanto:
l=Eigenvalores(2,2);
%en matlab, el número euler se escribe "exp(x)", por ello la siguiente notación:
%escribimos la ecuación de trayectoria del capital
%la estructura de la ecuación del capital es k=ks+[(k-ks)*e^lambda2*t];
k=ks+[(k-ks)*exp(l*t)];
%la ecuación de k será distinguida por el color rojo
plot(t,k,'k:')
grid off
hold on
%escribimos la ecuación de trayectoria del consumo
%la estructura de la ecuación es c=cs+[(c-cs)*e^lambda2*t]
c=cs+[(c-cs)*exp(l*t)];
%la ecuación de c será distinguida por el color azul
plot(t,c,'k-')
```

```
grid off
%el eje de las abcisas será el tiempo
xlabel('t')
%el eje de las ordenadas será capital y consumo
ylabel('k(--) y c (-)')
title('comportamiento de c y k en el tiempo')
```

Para mayor información sobre el trabajo y funcionamiento de los scripts en Matlab, puede consultar el manual proporcionado por Mathworks, disponible en la página: http://www.mathworks.com/

ANEXO ESTADÍSTICO.

SECCIÓN A. La Población total, Urbana y Rural de México en el Período 1960-2010.

En ésta primera sección del anexo estadístico abordaremos las tasas de crecimiento exponencial que fueron usadas para la simulación del modelo, pues es un tema sumamente importante en cuanto a los fundamentos del crecimiento económico, los cuales proponen evaluar las variables per cápita como un sinónimo de bienestar para cada individuo que integra la economía en cuestión; por lo tanto, vamos a explicar de forma somera la manera como se llegó a los resultados con los cuales se decidió simular el modelo de Ramsey. Partiendo de las poblaciones totales, a partir de los censos de población en México, obtenemos el siguiente cuadro resumen.

Cuadro A.1. Población Total de México y de las Zonas Urbana y Rural; Población con 15 años de Edad en Adelante para las Zonas Urbanas y Rurales del País

Año	Población Total Nacional	Población Total Urbana	Población Total Rural	Pob. Urb. (15 años y más)	Pob. Rur. (15 años y más)
1960	34,923,129.00	17,705,118.00	17,218,011.00	10,041,821.00	9,315,658.00
1970	48,225,238.00	19,916,682.00	28,308,556.00	15,674,898.00	10,263,660.00
1980	66,847,833.00	44,299,729.00	22,548,104.00	25,996,403.00	11,932,007.00
1990	81,249,645.00	57,959,682.00	23,289,963.00	36,683,008.00	12,927,868.00
2000	97,483,412.00	72,759,771.00	24,723,641.00	48,266,897.00	14,575,741.00
2010	112,336,538.00	86,286,769.00	26,049,769.00	61,156,600.00	17,266,736.00

Fuente: Cuadro de Elaboración propia, basado en información proporcionada por los Censos Nacionales de Población en México, realizados por INEGI, para el Período 1960-2010.

El cuadro anterior muestra el crecimiento que ha tenido la población total de nuestro país en tan solo cincuenta años, pero sobre todo, nos da un indicio de la forma como se han incrementado las poblaciones urbana y rural, donde ésta última muestra un crecimiento mucho menor en comparación con lo sucedido en los centros urbanos del país. Ahora bien, a partir de ésta información, obtenemos los porcentajes que representan las poblaciones presentadas en el mismo; la información se presenta a continuación.

Cuadro A.2. Porcentaje que Representa la Población Total Urbana y Rural respecto del Total Nacional y Porcentaje que Representa la Población de 15 años en adelante Respecto del Total Nacional, Urbano y Rural						
Año	Población Urbana Total como % del Total Nacional.	Población Rural Total como % del Total Nacional.	Población Urbana. (15 años y más) como % del Total Urbano	Población Rural (15 años y más) como % del Total Rural	Población Urbana (15 años y más) como % del Total Nacional.	Población Rural. (15 años y más) como % del Total Nacional.
1960	50.6974	49.3026	56.7171	54.1041	28.7541	26.6748
1970	41.2993	58.7007	78.7024	36.2564	32.5035	21.2828
1980	66.2695	33.7305	58.6830	52.9180	38.8889	17.8495
1990	71.3353	28.6647	63.2906	55.5083	45.1485	15.9113
2000	74.6381	25.3619	66.3373	58.9547	49.5129	14.9520
2010	76.8110	23.1890	70.8760	66.2836	54.4405	15.3705
Fuente: Cuadro de elaboración propia, basado en las cifras totales presentadas por los censos de población en México para el período 1960-2010.						

En la primera y segunda columna del cuadro A.2. se observa, ahora en porcentajes, la forma como se ha comportado la población urbana y rural dentro de nuestro país, pasando de encontrarse en una situación de equilibrio, a otra donde la población urbana prácticamente triplica en peso porcentual a la población rural para el año 2010; por su parte, la tercera y cuarta columna nos indican que, de acuerdo con los cálculos realizados, la población con 15 años de edad en adelante siempre ha representado más de la mitad de la población en las zonas urbanas, lo cual es compartido por el mismo núcleo poblacional pero en el ámbito rural, salvo para el año 1970, donde dicho núcleo estuvo por debajo del 50% respecto al total de la población rural del país; finalmente, en la quinta y sexta columna se observa que la población con 15 años de edad en adelante ha llegado a representar poco más de la mitad de la población total en nuestro país, mientras que su homónimo en zonas rurales solo ocupa un 15% del total de la población para el año 2010.

Así pues, ya que hemos visto de forma somera lo que nos han mostrado los cálculos, finalmente vamos a pasar las tasas de crecimiento, calculadas cada diez años, que emplearemos en nuestra simulación; la fórmula empleada, y que se muestra a continuación, es propuesta por el Dr. Arnaldo Torres-Dregó[36].

[36]Torres-Degró, A. (2011). Tasas de crecimiento poblacional (*r*): Una mirada desde el modelo lineal, geométrico y exponencial. *CIDE digital, 2*(1),142-160. Recuperado de http://soph.md.rcm.upr.edu/demo/index.php/cide-digital/publicaciones.

$$r = \frac{lnP^{t+n} - lnP^{t}}{a}$$

Donde:

r, Tasa de crecimiento anual exponencial.
P^{t+n}, Población en el momento actual.
P^{t}, Población al momento inicial o población base.
a, Amplitud o distancia en tiempo entre las dos poblaciones.
ln, Logaritmo Natural.

Cuadro A.3. Tasas de Crecimiento de la Población Total y de la Población con 15 Años de Edad en Adelante.

Período.	Población Total.	Población Urbana.	Población Rural.	Tasa de Crecimiento de la Población Total.	Tasa de Crecimiento de la Población Urbana.	Tasa de Crecimiento de la Población Rural.
1960-1970	34923129	10041821	9315658	0.03227332	0.04453021	0.00969129
1970-1980	48225238	15674898	10263660	0.03265364	0.05058976	0.01506150
1980-1990	66847833	25996403	11932007	0.01951076	0.03443555	0.00801608
1990-2000	81249645	36683008	12927868	0.01821558	0.02744323	0.01199733
2000-2010	97483412	48266897	14575741	0.01418169	0.02366918	0.01694233

Fuente: Cuadro de elaboración propia, con información recopilada de los censos de población, sometida a la fórmula de crecimiento exponencial.

Las tasas de crecimiento mostradas en el cuadro anterior son precisamente las encargadas de definir la variable n dentro del modelo de Ramsey, pues nos indican el ritmo al cual crece la mano de obra con que se alimenta el modelo; en las últimas tres columnas del cuadro A.3 se han definido las tasas de crecimiento para cada período que simularemos de acuerdo con la rejilla de valores elegida.

Al igual que lo hemos observado en los anteriores dos cuadros, los ritmos de crecimiento de la población urbana siguen siendo mayores a lo mostrado por las tasas de la población rural ya que, de acuerdo a nuestros cálculos, la población de 15 años en adelante ubicada en zonas rurales, nunca ha logrado crecer a un ritmo mayor de 2% anual, mientras que la población en el mismo rango de edad, pero ubicada en zonas urbanas, ha logrado alcanzar incluso el 5% de crecimiento anual. Por lo anterior, es lógico encontrar marcadas diferencias dentro de los cuadros que serán presentados en la sección B de este anexo, ya que, como se podrá ver en el capítulo III de este trabajo, existe un determinante poblacional que influyen en los niveles de estado estacionario calculados a partir de determinados valores de los demás coeficientes del modelo; es decir, si los parámetros del modelo se asumen como constantes, la población puede desplazar los valores de los coeficientes de estado estacionario de forma descendente, a través de la tasa de preferencia intertemporal, pero todo esto será mostrado al lector en la explicación que proporciona precisamente el tercer capítulo de nuestro trabajo.

SECCIÓN B. Resultados de la Simulación.

Los cuadros que se presentan en las siguientes páginas son los encargados de mostrar los resultados obtenidos por la simulación del modelo de Ramsey para la economía mexicana en el período 1960-2000, empleando la rejilla de valores explicada al comienzo del capítulo III y las tasas de crecimiento exponencial calculadas para la población total de México, la aproximación a la PEA urbana y rural, mostradas en la sección anterior.

Como ya se ha explicado en el comienzo del capítulo III, hemos decidido emplear precisamente la población con 15 años de edad en adelante por ser una aproximación a la Población Económicamente Activa de México, sin desconocer que en fechas recientes el Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática ha recorrido el rango de edad mínima de la PEA de 15 a 14 años, por lo cual queda un pequeño porcentaje no captado dentro de nuestros cálculos.

El proceso de cálculo tiene como base lo anterior, sin incluir el efecto que tiene la tasa de crecimiento del progreso tecnológico sobre la tasa de crecimiento poblacional; por lo tanto, los resultados mostrados a continuación tiene que cambiar al ser influidos por dicha la tasa de progreso tecnológico anual que, para los fines de ésta investigación, hemos decidido emplear entres distintos niveles.

Las inferencias respectivas a la inclusión de la tasa de progreso tecnológico serán mostradas en el capítulo IV de este trabajo, donde se concluye el análisis de los resultados de simulación y su interpretación para el caso mexicano, dentro de un contexto normativo, académico, pues la limitante que impone la disponibilidad de datos de la economía mexicana juega un papel preponderante. Así pues, vamos a mostrar los resultados de nuestra simulación.

Cuadro B.1.A Cálculo de Estados Estacionarios para la Población Total de México en el Período 1960-1970.											
NACIONAL INDUSTRIA						EIGENVECTORES				EIGENVALORES	
Rho	Theta	X	K*	C*	Y*	a1	a2	b1	b2	lambda 1	lambda 2
0.1	0.1	0.01	4.5942	1.4898	2.1434	0.8683	0.8338	-0.4960	0.5521	0.6622	-0.5712
		0.05	4.4406	1.2979	2.1073	0.8718	0.8510	-0.4899	0.5251	0.6170	-0.5620
		0.09	4.2946	1.1178	2.0723	0.8759	0.8688	-0.4825	0.4952	0.5699	-0.5509
	0.5	0.01	4.4406	1.4755	2.1073	0.9730	0.9490	-0.2309	0.3153	0.3323	-0.2373
		0.05	3.7770	1.2550	1.9435	0.9685	0.9490	-0.2492	0.3153	0.3323	-0.2573
		0.09	3.2518	1.0805	1.8033	0.9636	0.9490	-0.2672	0.3153	0.3323	-0.2773
	0.9	0.01	4.2946	1.4613	2.0723	0.9859	0.9657	-0.1673	0.2595	0.2687	-0.1697
		0.05	3.2518	1.2106	1.8033	0.9812	0.9600	-0.1929	0.2800	0.2916	-0.1966
		0.09	2.5474	1.0298	1.5961	0.9759	0.9539	-0.2182	0.3001	0.3146	-0.2236
0.5	0.1	0.01	0.6234	0.7009	0.7895	0.5167	0.4220	-0.8562	0.9066	2.1482	-1.6572
		0.05	0.6156	0.6724	0.7846	0.5179	0.4288	-0.8555	0.9034	2.1069	-1.6519
		0.09	0.6079	0.6446	0.7797	0.5192	0.4358	-0.8547	0.9000	2.0652	-1.6462
	0.5	0.01	0.6156	0.6970	0.7846	0.8433	0.6620	-0.5374	0.7495	1.1323	-0.6373
		0.05	0.5787	0.6552	0.7607	0.8357	0.6620	-0.5493	0.7495	1.1323	-0.6573
		0.09	0.5450	0.6171	0.7383	0.8280	0.6620	-0.5608	0.7495	1.1323	-0.6773
	0.9	0.01	0.6079	0.6932	0.7797	0.9170	0.7308	-0.3989	0.6826	0.9340	-0.4350
		0.05	0.5450	0.6389	0.7383	0.9081	0.7227	-0.4188	0.6911	0.9563	-0.4613
		0.09	0.4914	0.5918	0.7010	0.8988	0.7147	-0.4383	0.6994	0.9786	-0.4876
0.9	0.1	0.01	0.2342	0.4506	0.4839	0.3430	0.2656	-0.9393	0.9641	3.6298	-2.7388
		0.05	0.2324	0.4397	0.4820	0.3435	0.2684	-0.9392	0.9633	3.5893	-2.7343
		0.09	0.2306	0.4289	0.4802	0.3440	0.2712	-0.9390	0.9625	3.5484	-2.7294
	0.5	0.01	0.2324	0.4490	0.4820	0.6941	0.4596	-0.7199	0.8881	1.9323	-1.0373
		0.05	0.2236	0.4321	0.4729	0.6872	0.4596	-0.7265	0.8881	1.9323	-1.0573
		0.09	0.2154	0.4163	0.4641	0.6803	0.4596	-0.7329	0.8881	1.9323	-1.0773
	0.9	0.01	0.2306	0.4474	0.4802	0.8187	0.5299	-0.5742	0.8481	1.6004	-0.7014
		0.05	0.2154	0.4249	0.4641	0.8086	0.5247	-0.5883	0.8513	1.6225	-0.7275
		0.09	0.2017	0.4043	0.4491	0.7986	0.5195	-0.6019	0.8545	1.6447	-0.7537

Fuente: Cuadro de elaboración propia, empleando los coeficientes $\alpha = 0.5$ y $n = 0.032273316$, que es la tasa de crecimiento poblacional calculada a partir de los censos de población realizados por el INEGI en los años 1960 y 1970. La población total no contempla ningún núcleo de población específico o ni rango de edad.

Cuadro B.1.B Cálculo de Estados Estacionarios para la Población Total de México en el Período 1960-1970.

NACIONAL AGRICOLA						EIGENVECTORES				EIGENVALORES	
Rho	**Theta**	**X**	**K***	**C***	**Y***	**a1**	**a2**	**b1**	**b2**	**lambda 1**	**lambda 2**
0.1	0.1	0.01	1.4325	0.9100	1.1138	0.7163	0.6845	-0.6977	0.7290	1.0650	-0.9740
		0.05	1.3981	0.8509	1.1058	0.7148	0.6954	-0.6993	0.7186	1.0333	-0.9783
		0.09	1.3651	0.7944	1.0979	0.7135	0.7068	-0.7006	0.7074	1.0010	-0.9820
	0.5	0.01	1.3981	0.9068	1.1058	0.9223	0.8894	-0.3865	0.4572	0.5141	-0.4191
		0.05	1.2454	0.8411	1.0681	0.9095	0.8828	-0.4157	0.4697	0.5321	-0.4571
		0.09	1.1191	0.7856	1.0343	0.8961	0.8761	-0.4438	0.4821	0.5502	-0.4952
	0.9	0.01	1.3651	0.9036	1.0979	0.9561	0.9267	-0.2930	0.3757	0.4054	-0.3064
		0.05	1.1191	0.8304	1.0343	0.9423	0.9118	-0.3348	0.4106	0.4503	-0.3553
		0.09	0.9400	0.7727	0.9816	0.9271	0.8961	-0.3749	0.4439	0.4953	-0.4043
0.5	0.1	0.01	0.3439	0.6771	0.7260	0.3452	0.2974	-0.9385	0.9547	3.2098	-2.7188
		0.05	0.3409	0.6619	0.7241	0.3446	0.3000	-0.9388	0.9539	3.1796	-2.7246
		0.09	0.3378	0.6470	0.7221	0.3439	0.3027	-0.9390	0.9531	3.1491	-2.7301
	0.5	0.01	0.3409	0.6756	0.7241	0.6710	0.5300	-0.7415	0.8480	1.6001	-1.1051
		0.05	0.3261	0.6551	0.7145	0.6586	0.5258	-0.7525	0.8506	1.6176	-1.1426
		0.09	0.3125	0.6360	0.7054	0.6465	0.5217	-0.7629	0.8531	1.6352	-1.1802
	0.9	0.01	0.3378	0.6741	0.7221	0.7890	0.6163	-0.6145	0.7875	1.2778	-0.7788
		0.05	0.3125	0.6485	0.7054	0.7706	0.6033	-0.6373	0.7975	1.3220	-0.8270
		0.09	0.2902	0.6254	0.6899	0.7525	0.5906	-0.6586	0.8069	1.3662	-0.8752
0.9	0.1	0.01	0.1709	0.5643	0.5886	0.2187	0.1836	-0.9758	0.9830	5.3528	-4.4618
		0.05	0.1700	0.5566	0.5876	0.2184	0.1846	-0.9759	0.9828	5.3229	-4.4679
		0.09	0.1690	0.5491	0.5867	0.2181	0.1857	-0.9759	0.9826	5.2928	-4.4738
	0.5	0.01	0.1700	0.5634	0.5876	0.4873	0.3488	-0.8732	0.9372	2.6868	-1.7918
		0.05	0.1654	0.5527	0.5828	0.4797	0.3468	-0.8774	0.9379	2.7042	-1.8292
		0.09	0.1610	0.5424	0.5782	0.4722	0.3449	-0.8815	0.9386	2.7217	-1.8667
	0.9	0.01	0.1690	0.5626	0.5867	0.6238	0.4214	-0.7816	0.9069	2.1518	-1.2528
		0.05	0.1610	0.5488	0.5782	0.6095	0.4145	-0.7928	0.9101	2.1957	-1.3007
		0.09	0.1536	0.5359	0.5701	0.5956	0.4077	-0.8033	0.9131	2.2397	-1.3487

Fuente: Cuadro de elaboración propia, empleando los coeficientes $\alpha = 0.3$ y $n = 0.032273316$, que es la tasa de crecimiento poblacional calculada a partir de los censos de población realizados por el INEGI en los años 1960 y 1970. La población total no contempla ningún núcleo de población específico o ni rango de edad.

Cuadro B.2.A. Cálculo de Estados Estacionarios para la Población Urbana de 15 años en Adelante en el Período 1960-1970.											
CCOEFICIENTES DEL MODELO						EIGENVECTORES				EIGENVALORES	
Rho	Theta	X	K*	C*	Y*	a1	a2	b1	b2	lambda 1	lambda 2
0.1	0.1	0.01	4.1470	1.3956	2.0364	0.8579	0.8231	-0.5138	0.5679	0.6899	-0.5989
		0.05	4.0151	1.2227	2.0038	0.8615	0.8405	-0.5078	0.5417	0.6445	-0.5895
		0.09	3.8894	1.0600	1.9722	0.8657	0.8585	-0.5006	0.5128	0.5973	-0.5783
	0.5	0.01	4.0151	1.3833	2.0038	0.9702	0.9455	-0.2421	0.3257	0.3445	-0.2495
		0.05	3.4413	1.1856	1.8551	0.9655	0.9455	-0.2602	0.3257	0.3445	-0.2695
		0.09	2.9823	1.0275	1.7269	0.9605	0.9455	-0.2781	0.3257	0.3445	-0.2895
	0.9	0.01	3.8894	1.3711	1.9722	0.9844	0.9635	-0.1760	0.2676	0.2778	-0.1788
		0.05	2.9823	1.1468	1.7269	0.9795	0.9576	-0.2015	0.2880	0.3007	-0.2057
		0.09	2.3592	0.9827	1.5360	0.9740	0.9514	-0.2267	0.3080	0.3237	-0.2327
0.5	0.1	0.01	0.5999	0.6818	0.7746	0.5103	0.4175	-0.8600	0.9087	2.1765	-1.6855
		0.05	0.5926	0.6545	0.7698	0.5115	0.4241	-0.8593	0.9056	2.1351	-1.6801
		0.09	0.5853	0.6278	0.7651	0.5128	0.4311	-0.8585	0.9023	2.0933	-1.6743
	0.5	0.01	0.5926	0.6782	0.7698	0.8386	0.6580	-0.5447	0.7531	1.1445	-0.6495
		0.05	0.5577	0.6383	0.7468	0.8310	0.6580	-0.5563	0.7531	1.1445	-0.6695
		0.09	0.5258	0.6018	0.7251	0.8233	0.6580	-0.5677	0.7531	1.1445	-0.6895
	0.9	0.01	0.5853	0.6746	0.7651	0.9140	0.7276	-0.4057	0.6860	0.9428	-0.4438
		0.05	0.5258	0.6228	0.7251	0.9050	0.7195	-0.4255	0.6945	0.9651	-0.4701
		0.09	0.4749	0.5778	0.6892	0.8957	0.7115	-0.4447	0.7027	0.9875	-0.4965
0.9	0.1	0.01	0.2287	0.4429	0.4782	0.3399	0.2637	-0.9405	0.9646	3.6583	-2.7673
		0.05	0.4323	0.4323	0.4764	0.3404	0.2664	-0.9403	0.9639	3.6177	-2.7627
		0.09	0.2252	0.4218	0.4746	0.3409	0.2693	-0.9401	0.9631	3.5768	-2.7578
	0.5	0.01	0.2270	0.4413	0.4764	0.6898	0.4573	-0.7240	0.8893	1.9445	-1.0495
		0.05	0.2186	0.4250	0.4675	0.6830	0.4573	-0.7305	0.8893	1.9445	-1.0695
		0.09	0.2106	0.4095	0.4589	0.6762	0.4573	-0.7367	0.8893	1.9445	-1.0895
	0.9	0.01	0.2252	0.4398	0.4746	0.8153	0.5278	-0.5790	0.8494	1.6092	-0.7102
		0.05	0.2106	0.4179	0.4589	0.8052	0.5226	-0.5929	0.8526	1.6313	-0.7363
		0.09	0.1973	0.3980	0.4442	0.7952	0.5175	-0.6064	0.8557	1.6536	-0.7626

Fuente: Cuadro de elaboración propia, calculado a partir de $n = 0.044532011$ y con la rejilla de valores especificada en el capítulo III, asignando un valor de 0.5 al coeficiente alpha.

Cuadro B.2.B. Cálculo de Estados Estacionarios para la Población Rural de 15 años en Adelante en el Período 1960-1970.

CCOEFICIENTES DEL MODELO						EIGENVECTORES				EIGENVALORES	
Rho	**Theta**	**X**	**K***	**C***	**Y***	**a1**	**a2**	**b1**	**b2**	**lambda 1**	**lambda 2**
0.1	0.1	0.01	1.6567	0.9652	1.1635	0.7498	0.7165	-0.6617	0.6976	0.9736	-0.8826
		0.05	1.6128	0.8966	1.1542	0.7481	0.7279	-0.6636	0.6857	0.9420	-0.8870
		0.09	1.5708	0.8314	1.1451	0.7467	0.7397	-0.6651	0.6729	0.9097	-0.8907
	0.5	0.01	1.6128	0.9611	1.1542	0.9353	0.9038	-0.3539	0.4279	0.4734	-0.3784
		0.05	1.4201	0.8842	1.1110	0.9232	0.8975	-0.3844	0.4410	0.4913	-0.4163
		0.09	1.2635	0.8204	1.0727	0.9104	0.8910	-0.4137	0.4539	0.5094	-0.4544
	0.9	0.01	1.5708	0.9571	1.1451	0.9639	0.9363	-0.2662	0.3513	0.3752	-0.2762
		0.05	1.2635	0.8709	1.0727	0.9510	0.9220	-0.3091	0.3873	0.4201	-0.3251
		0.09	1.0461	0.8047	1.0136	0.9366	0.9068	-0.3503	0.4217	0.4650	-0.3740
0.5	0.1	0.01	0.3622	0.6940	0.7374	0.3558	0.3054	-0.9346	0.9522	3.1179	-2.6269
		0.05	0.3589	0.6780	0.7353	0.3551	0.3081	-0.9348	0.9514	3.0877	-2.6327
		0.09	0.3556	0.6623	0.7333	0.3544	0.3109	-0.9351	0.9505	3.0574	-2.6384
	0.5	0.01	0.3589	0.6924	0.7353	0.6847	0.5398	-0.7289	0.8418	1.5596	-1.0646
		0.05	0.3428	0.6706	0.7253	0.6720	0.5355	-0.7406	0.8445	1.5771	-1.1021
		0.09	0.3280	0.6502	0.7157	0.6596	0.5313	-0.7516	0.8472	1.5946	-1.1396
	0.9	0.01	0.3556	0.6907	0.7333	0.8004	0.6253	-0.5995	0.7804	1.2480	-0.7490
		0.05	0.3280	0.6634	0.7157	0.7820	0.6120	-0.6233	0.7908	1.2921	-0.7971
		0.09	0.3038	0.6388	0.6995	0.7637	0.5992	-0.6456	0.8006	1.3363	-0.8453
0.9	0.1	0.01	0.1764	0.5731	0.5942	0.2231	0.1867	-0.9748	0.9824	5.2607	-4.3697
		0.05	0.1754	0.5652	0.5932	0.2228	0.1878	-0.9749	0.9822	5.2309	-4.3759
		0.09	0.1744	0.5574	0.5922	0.2225	0.1888	-0.9749	0.9820	5.2009	-4.3819
	0.5	0.01	0.1754	0.5722	0.5932	0.4958	0.3535	-0.8684	0.9354	2.6464	-1.7514
		0.05	0.1706	0.5610	0.5882	0.4880	0.3515	-0.8729	0.9362	2.6637	-1.7887
		0.09	0.1660	0.5503	0.5834	0.4803	0.3495	-0.8771	0.9370	2.6812	-1.8262
	0.9	0.01	0.1744	0.5713	0.5922	0.6330	0.4263	-0.7742	0.9046	2.1221	-1.2231
		0.05	0.1660	0.5569	0.5834	0.6183	0.4192	-0.7859	0.9079	2.1660	-1.2710
		0.09	0.1582	0.5435	0.5751	0.6042	0.4123	-0.7969	0.9111	2.2099	-1.3189

Fuente: Cuadro de elaboración propia, calculado a partir de $n = 0.009691286$ y con la rejilla de valores especificada en el capítulo III, asignando un valor de 0.3 al coeficiente alpha.

Cuadro B.3.A Cálculo De Estados Estacionarios para la Población Total de México en el Período 1970-1980.											
NACIONAL INDUSTRIA						EIGENVECTORES				EIGENVALORES	
Rho	**Theta**	**X**	**K***	**C***	**Y***	**a1**	**a2**	**b1**	**b2**	**lambda 1**	**lambda 2**
0.1	0.1	0.01	4.5793	1.4867	2.1399	0.8680	0.8334	-0.4965	0.5526	0.6630	-0.5720
		0.05	4.4264	1.2954	2.1039	0.8714	0.8507	-0.4905	0.5256	0.6178	-0.5628
		0.09	4.2811	1.1159	2.0691	0.8756	0.8685	-0.4831	0.4957	0.5708	-0.5518
	0.5	0.01	4.4264	1.4725	2.1039	0.9729	0.9489	-0.2312	0.3156	0.3327	-0.2377
		0.05	3.7659	1.2527	1.9406	0.9684	0.9489	-0.2495	0.3156	0.3327	-0.2577
		0.09	3.2429	1.0788	1.8008	0.9635	0.9489	-0.2675	0.3156	0.3327	-0.2777
	0.9	0.01	4.2811	1.4584	2.0691	0.9859	0.9657	-0.1676	0.2598	0.2690	-0.1700
		0.05	3.2429	1.2085	1.8008	0.9812	0.9599	-0.1932	0.2802	0.2919	-0.1969
		0.09	2.5412	1.0283	1.5941	0.9758	0.9538	-0.2185	0.3004	0.3149	-0.2239
0.5	0.1	0.01	0.6226	0.7003	0.7891	0.5165	0.4219	-0.8563	0.9066	2.1490	-1.6580
		0.05	0.6149	0.6718	0.7841	0.5177	0.4286	-0.8556	0.9035	2.1078	-1.6528
		0.09	0.6072	0.6440	0.7792	0.5190	0.4357	-0.8548	0.9001	2.0660	-1.6470
	0.5	0.01	0.6149	0.6964	0.7841	0.8432	0.6618	-0.5376	0.7496	1.1327	-0.6377
		0.05	0.5780	0.6547	0.7603	0.8355	0.6618	-0.5495	0.7496	1.1327	-0.6577
		0.09	0.5444	0.6166	0.7378	0.8278	0.6618	-0.5610	0.7496	1.1327	-0.6777
	0.9	0.01	0.6072	0.6926	0.7792	0.9169	0.7307	-0.3991	0.6827	0.9342	-0.4352
		0.05	0.5444	0.6384	0.7378	0.9080	0.7226	-0.4191	0.6912	0.9565	-0.4615
		0.09	0.4909	0.5913	0.7006	0.8987	0.7146	-0.4385	0.6995	0.9789	-0.4879
0.9	0.1	0.01	0.2340	0.4503	0.4837	0.3429	0.2655	-0.9394	0.9641	3.6307	-2.7397
		0.05	0.2322	0.4394	0.4819	0.3434	0.2683	-0.9392	0.9633	3.5901	-2.7351
		0.09	0.2304	0.4287	0.4800	0.3439	0.2712	-0.9390	0.9625	3.5493	-2.7303
	0.5	0.01	0.2322	0.4487	0.4819	0.6939	0.4596	-0.7201	0.8882	1.9327	-1.0377
		0.05	0.2235	0.4319	0.4727	0.6870	0.4596	-0.7266	0.8882	1.9327	-1.0577
		0.09	0.2153	0.4160	0.4640	0.6802	0.4596	-0.7330	0.8882	1.9327	-1.0777
	0.9	0.01	0.2304	0.4471	0.4800	0.8186	0.5298	-0.5744	0.8481	1.6006	-0.7016
		0.05	0.2153	0.4247	0.4640	0.8085	0.5246	-0.5884	0.8513	1.6228	-0.7278
		0.09	0.2016	0.4041	0.4490	0.7985	0.5195	-0.6020	0.8545	1.6450	-0.7540

Fuente: Cuadro de elaboración propia, empleando los coeficientes $\alpha = 0.5$ y $n = 0.032653639$, que es la tasa de crecimiento poblacional calculada a partir de los censos de población realizados por el INEGI en los años 1970 y 1980. La población total no contempla ningún núcleo de población específico o ni rango de edad.

Cuadro B.3.B Cálculo De Estados Estacionarios para la Población Total de México en el Período 1970-1980.

NACIONAL AGRICOLA						EIGENVECTORES				EIGENVALORES	
Rho	Theta	X	K*	C*	Y*	a1	a2	b1	b2	lambda 1	lambda 2
0.1	0.1	0.01	1.4291	0.9092	1.1131	0.7158	0.6840	-0.6983	0.7295	1.0666	-0.9756
		0.05	1.3949	0.8502	1.1050	0.7143	0.6949	-0.6999	0.7191	1.0348	-0.9798
		0.09	1.3620	0.7939	1.0971	0.7130	0.7062	-0.7012	0.7080	1.0025	-0.9835
	0.5	0.01	1.3949	0.9060	1.1050	0.9221	0.8891	-0.3871	0.4577	0.5148	-0.4198
		0.05	1.2428	0.8404	1.0674	0.9092	0.8825	-0.4163	0.4702	0.5328	-0.4578
		0.09	1.1169	0.7850	1.0337	0.8959	0.8759	-0.4443	0.4825	0.5509	-0.4959
	0.9	0.01	1.3620	0.9028	1.0971	0.9560	0.9266	-0.2934	0.3761	0.4059	-0.3069
		0.05	1.1169	0.8297	1.0337	0.9421	0.9116	-0.3352	0.4110	0.4508	-0.3558
		0.09	0.9384	0.7722	0.9811	0.9269	0.8959	-0.3753	0.4442	0.4958	-0.4048
0.5	0.1	0.01	0.3436	0.6768	0.7258	0.3450	0.2973	-0.9386	0.9548	3.2113	-2.7203
		0.05	0.3406	0.6617	0.7239	0.3444	0.2999	-0.9388	0.9540	3.1811	-2.7261
		0.09	0.3375	0.6468	0.7219	0.3438	0.3025	-0.9391	0.9531	3.1507	-2.7317
	0.5	0.01	0.3406	0.6753	0.7239	0.6707	0.5298	-0.7417	0.8481	1.6008	-1.1058
		0.05	0.3259	0.6548	0.7143	0.6584	0.5257	-0.7527	0.8507	1.6183	-1.1433
		0.09	0.3122	0.6357	0.7052	0.6462	0.5216	-0.7631	0.8532	1.6359	-1.1809
	0.9	0.01	0.3375	0.6738	0.7219	0.7888	0.6161	-0.6147	0.7876	1.2783	-0.7793
		0.05	0.3122	0.6482	0.7052	0.7704	0.6031	-0.6375	0.7976	1.3225	-0.8275
		0.09	0.2900	0.6252	0.6898	0.7523	0.5905	-0.6588	0.8070	1.3667	-0.8757
0.9	0.1	0.01	0.1708	0.5641	0.5885	0.2186	0.1836	-0.9758	0.9830	5.3543	-4.4633
		0.05	0.1699	0.5565	0.5875	0.2183	0.1846	-0.9759	0.9828	5.3244	-4.4694
		0.09	0.1689	0.5489	0.5866	0.2181	0.1856	-0.9759	0.9826	5.2944	-4.4754
	0.5	0.01	0.1699	0.5633	0.5875	0.4872	0.3487	-0.8733	0.9372	2.6875	-1.7925
		0.05	0.1653	0.5526	0.5827	0.4795	0.3468	-0.8775	0.9380	2.7049	-1.8299
		0.09	0.1609	0.5423	0.5781	0.4721	0.3448	-0.8816	0.9387	2.7224	-1.8674
	0.9	0.01	0.1689	0.5625	0.5866	0.6237	0.4214	-0.7817	0.9069	2.1523	-1.2533
		0.05	0.1609	0.5487	0.5781	0.6094	0.4144	-0.7929	0.9101	2.1962	-1.3012
		0.09	0.1535	0.5358	0.5700	0.5955	0.4076	-0.8034	0.9132	2.2402	-1.3492

Fuente: Cuadro de elaboración propia, empleando los coeficientes $\alpha = 0.3$ y $n = 0.032653639$, que es la tasa de crecimiento poblacional calculada a partir de los censos de población realizados por el INEGI en los años 1970 y 1980. La población total no contempla ningún núcleo de población específico o ni rango de edad.

Cuadro B.4.A. Cálculo de Estados Estacionarios para la Población Urbana de 15 años en Adelante en el Período 1970-1980.											
COEFICIENTES DEL MODELO						EIGENVECTORES				EIGENVALORES	
Rho	**Theta**	**X**	**K***	**C***	**Y***	**a1**	**a2**	**b1**	**b2**	**lambda 1**	**lambda 2**
0.1	0.1	0.01	3.9496	1.3531	1.9874	0.8527	0.8179	-0.5223	0.5754	0.7036	-0.6126
		0.05	3.8270	1.1886	1.9563	0.8563	0.8353	-0.5165	0.5497	0.6581	-0.6031
		0.09	3.7099	1.0335	1.9261	0.8606	0.8534	-0.5094	0.5213	0.6109	-0.5919
	0.5	0.01	3.8270	1.3417	1.9563	0.9689	0.9437	-0.2476	0.3308	0.3506	-0.2556
		0.05	3.2917	1.1540	1.8143	0.9641	0.9437	-0.2657	0.3308	0.3506	-0.2756
		0.09	2.8613	1.0031	1.6915	0.9590	0.9437	-0.2835	0.3308	0.3506	-0.2956
	0.9	0.01	3.7099	1.3303	1.9261	0.9836	0.9624	-0.1802	0.2716	0.2822	-0.1832
		0.05	2.8613	1.1176	1.6915	0.9786	0.9565	-0.2057	0.2919	0.3052	-0.2102
		0.09	2.2737	0.9609	1.5079	0.9730	0.9501	-0.2308	0.3118	0.3282	-0.2372
0.5	0.1	0.01	0.5888	0.6728	0.7674	0.5071	0.4153	-0.8619	0.9097	2.1904	-1.6994
		0.05	0.5817	0.6460	0.7627	0.5083	0.4219	-0.8612	0.9066	2.1490	-1.6940
		0.09	0.5746	0.6198	0.7580	0.5097	0.4287	-0.8604	0.9034	2.1071	-1.6881
	0.5	0.01	0.5817	0.6693	0.7627	0.8363	0.6560	-0.5483	0.7548	1.1506	-0.6556
		0.05	0.5477	0.6302	0.7401	0.8286	0.6560	-0.5598	0.7548	1.1506	-0.6756
		0.09	0.5167	0.5945	0.7188	0.8209	0.6560	-0.5710	0.7548	1.1506	-0.6956
	0.9	0.01	0.5746	0.6658	0.7580	0.9125	0.7260	-0.4090	0.6877	0.9472	-0.4482
		0.05	0.5167	0.6152	0.7188	0.9034	0.7180	-0.4287	0.6961	0.9695	-0.4745
		0.09	0.4671	0.5711	0.6834	0.8941	0.7100	-0.4479	0.7042	0.9919	-0.5009
0.9	0.1	0.01	0.2261	0.4392	0.4755	0.3383	0.2627	-0.9410	0.9649	3.6723	-2.7813
		0.05	0.2244	0.4287	0.4737	0.3388	0.2655	-0.9408	0.9641	3.6317	-2.7767
		0.09	0.2227	0.4183	0.4719	0.3394	0.2683	-0.9407	0.9633	3.5908	-2.7718
	0.5	0.01	0.2244	0.4376	0.4737	0.6877	0.4562	-0.7260	0.8899	1.9506	-1.0556
		0.05	0.2161	0.4215	0.4649	0.6809	0.4562	-0.7324	0.8899	1.9506	-1.0756
		0.09	0.2083	0.4063	0.4564	0.6742	0.4562	-0.7386	0.8899	1.9506	-1.0956
	0.9	0.01	0.2227	0.4361	0.4719	0.8136	0.5268	-0.5814	0.8500	1.6135	-0.7145
		0.05	0.2083	0.4146	0.4564	0.8036	0.5216	-0.5952	0.8532	1.6357	-0.7407
		0.09	0.1952	0.3949	0.4419	0.7935	0.5165	-0.6086	0.8563	1.6579	-0.7669

Fuente: Cuadro de elaboración propia, calculado a partir de $n = 0.05058970$ y con la rejilla de valores especificada en el capítulo III, asignando un valor de 0.3 al coeficiente alpha.

Cuadro B.4.B. Cálculo de Estados Estacionarios para la Población Rural de 15 años en Adelante en el Período 1970-1980.											
COEFICIENTES DEL MODELO						**EIGENVECTORES**				**EIGENVALORES**	
Rho	**Theta**	**X**	**K***	**C***	**Y***	**a1**	**a2**	**b1**	**b2**	**lambda 1**	**lambda 2**
0.1	0.1	0.01	1.5982	0.9512	1.1510	0.7417	0.7088	-0.6707	0.7055	0.9953	-0.9043
		0.05	1.5569	0.8850	1.1420	0.7401	0.7201	-0.6725	0.6939	0.9637	-0.9087
		0.09	1.5173	0.8221	1.1332	0.7387	0.7318	-0.6740	0.6816	0.9314	-0.9124
	0.5	0.01	1.5569	0.9473	1.1420	0.9323	0.9004	-0.3618	0.4350	0.4831	-0.3881
		0.05	1.3749	0.8733	1.1002	0.9200	0.8941	-0.3920	0.4480	0.5010	-0.4260
		0.09	1.2264	0.8117	1.0631	0.9071	0.8875	-0.4210	0.4608	0.5191	-0.4641
	0.9	0.01	1.5173	0.9435	1.1332	0.9621	0.9340	-0.2726	0.3572	0.3824	-0.2834
		0.05	1.2264	0.8607	1.0631	0.9490	0.9196	-0.3153	0.3929	0.4273	-0.3323
		0.09	1.0191	0.7967	1.0057	0.9344	0.9042	-0.3562	0.4270	0.4722	-0.3812
0.5	0.1	0.01	0.3577	0.6899	0.7346	0.3532	0.3035	-0.9355	0.9528	3.1398	-2.6488
		0.05	0.3544	0.6741	0.7326	0.3525	0.3061	-0.9358	0.9520	3.1096	-2.6546
		0.09	0.3512	0.6586	0.7306	0.3519	0.3089	-0.9360	0.9511	3.0792	-2.6602
	0.5	0.01	0.3544	0.6883	0.7326	0.6814	0.5374	-0.7319	0.8433	1.5692	-1.0742
		0.05	0.3387	0.6668	0.7227	0.6688	0.5332	-0.7435	0.8460	1.5867	-1.1117
		0.09	0.3242	0.6468	0.7132	0.6564	0.5290	-0.7544	0.8486	1.6043	-1.1493
	0.9	0.01	0.3512	0.6867	0.7306	0.7977	0.6231	-0.6031	0.7821	1.2551	-0.7561
		0.05	0.3242	0.6597	0.7132	0.7793	0.6099	-0.6267	0.7924	1.2992	-0.8042
		0.09	0.3005	0.6356	0.6972	0.7610	0.5971	-0.6487	0.8022	1.3434	-0.8524
0.9	0.1	0.01	0.1750	0.5710	0.5928	0.2220	0.1860	-0.9750	0.9826	5.2826	-4.3916
		0.05	0.1741	0.5631	0.5919	0.2217	0.1870	-0.9751	0.9824	5.2528	-4.3978
		0.09	0.1731	0.5554	0.5909	0.2214	0.1881	-0.9752	0.9822	5.2228	-4.4038
	0.5	0.01	0.1741	0.5701	0.5919	0.4938	0.3524	-0.8696	0.9359	2.6560	-1.7610
		0.05	0.1693	0.5590	0.5869	0.4860	0.3504	-0.8740	0.9366	2.6734	-1.7984
		0.09	0.1648	0.5484	0.5822	0.4784	0.3484	-0.8782	0.9374	2.6908	-1.8358
	0.9	0.01	0.1731	0.5692	0.5909	0.6308	0.4251	-0.7760	0.9051	2.1292	-1.2302
		0.05	0.1648	0.5550	0.5822	0.6162	0.4180	-0.7876	0.9084	2.1731	-1.2781
		0.09	0.1571	0.5417	0.5739	0.6021	0.4112	-0.7984	0.9116	2.2170	-1.3260

Fuente: Cuadro de elaboración propia, calculado a partir de $n = 0.015061465$ y con la rejilla de valores especificada en el capítulo III, asignando un valor de 0.3 al coeficiente alpha.

Cuadro B.5.A Cálculo De Estados Estacionarios para la Población Total de México en el Período 1980-1990.											
NACIONAL INDUSTRIA						EIGENVECTORES				EIGENVALORES	
Rho	Theta	X	K*	C*	Y*	a1	a2	b1	b2	lambda 1	lambda 2
0.1	0.1	0.01	5.1414	1.6016	2.2675	0.8791	0.8448	-0.4767	0.5350	0.6333	-0.5423
		0.05	4.9598	1.3863	2.2271	0.8824	0.8619	-0.4706	0.5071	0.5883	-0.5333
		0.09	4.7877	1.1850	2.1881	0.8864	0.8794	-0.4630	0.4761	0.5414	-0.5224
	0.5	0.01	4.9598	1.5847	2.2271	0.9757	0.9526	-0.2191	0.3044	0.3195	-0.2245
		0.05	4.1816	1.3361	2.0449	0.9714	0.9526	-0.2375	0.3044	0.3195	-0.2445
		0.09	3.5732	1.1417	1.8903	0.9668	0.9526	-0.2557	0.3044	0.3195	-0.2645
	0.9	0.01	4.7877	1.5680	2.1881	0.9874	0.9680	-0.1583	0.2510	0.2593	-0.1603
		0.05	3.5732	1.2846	1.8903	0.9829	0.9624	-0.1840	0.2716	0.2822	-0.1872
		0.09	2.7683	1.0838	1.6638	0.9778	0.9565	-0.2094	0.2919	0.3052	-0.2142
0.5	0.1	0.01	0.6493	0.7217	0.8058	0.5235	0.4268	-0.8520	0.9043	2.1187	-1.6277
		0.05	0.6410	0.6920	0.8006	0.5247	0.4337	-0.8513	0.9011	2.0775	-1.6225
		0.09	0.6329	0.6629	0.7955	0.5260	0.4409	-0.8505	0.8976	2.0359	-1.6169
	0.5	0.01	0.6410	0.7176	0.8006	0.8482	0.6662	-0.5297	0.7458	1.1195	-0.6245
		0.05	0.6018	0.6738	0.7758	0.8405	0.6662	-0.5417	0.7458	1.1195	-0.6445
		0.09	0.5662	0.6338	0.7524	0.8329	0.6662	-0.5535	0.7458	1.1195	-0.6645
	0.9	0.01	0.6329	0.7136	0.7955	0.9201	0.7342	-0.3917	0.6789	0.9247	-0.4257
		0.05	0.5662	0.6565	0.7524	0.9112	0.7261	-0.4119	0.6876	0.9470	-0.4520
		0.09	0.5095	0.6070	0.7138	0.9021	0.7180	-0.4315	0.6960	0.9694	-0.4784
0.9	0.1	0.01	0.2401	0.4589	0.4900	0.3463	0.2676	-0.9381	0.9635	3.6002	-2.7092
		0.05	0.2382	0.4477	0.4880	0.3468	0.2705	-0.9379	0.9627	3.5597	-2.7047
		0.09	0.2363	0.4366	0.4861	0.3473	0.2734	-0.9377	0.9619	3.5189	-2.6999
	0.5	0.01	0.2382	0.4572	0.4880	0.6985	0.4620	-0.7156	0.8869	1.9195	-1.0245
		0.05	0.2291	0.4399	0.4787	0.6915	0.4620	-0.7223	0.8869	1.9195	-1.0445
		0.09	0.2206	0.4235	0.4697	0.6847	0.4620	-0.7288	0.8869	1.9195	-1.0645
	0.9	0.01	0.2363	0.4555	0.4861	0.8222	0.5321	-0.5691	0.8467	1.5912	-0.6922
		0.05	0.2206	0.4323	0.4697	0.8122	0.5268	-0.5834	0.8500	1.6133	-0.7183
		0.09	0.2064	0.4111	0.4543	0.8021	0.5217	-0.5972	0.8532	1.6355	-0.7445

Fuente: Cuadro de elaboración propia, empleando los coeficientes $\alpha = 0.5$ y $n = 0.019510756$, que es la tasa de crecimiento poblacional calculada a partir de los censos de población realizados por el INEGI en los años 1980 y 1990. La población total no contempla ningún núcleo de población específico o ni rango de edad.

Cuadro B.5.B Cálculo De Estados Estacionarios para la Población Total de México en el Período 1980-1990.											
NACIONAL AGRICOLA						EIGENVECTORES				EIGENVALORES	
Rho	**Theta**	**X**	**K***	**C***	**Y***	**a1**	**a2**	**b1**	**b2**	**lambda 1**	**lambda 2**
0.1	0.1	0.01	1.5523	0.9400	1.1410	0.7351	0.7024	-0.6780	0.7118	1.0134	-0.9224
		0.05	1.5130	0.8758	1.1323	0.7335	0.7136	-0.6797	0.7005	0.9817	-0.9267
		0.09	1.4753	0.8146	1.1237	0.7321	0.7252	-0.6812	0.6885	0.9494	-0.9304
	0.5	0.01	1.5130	0.9363	1.1323	0.9297	0.8976	-0.3683	0.4408	0.4911	-0.3961
		0.05	1.3393	0.8646	1.0916	0.9173	0.8912	-0.3982	0.4537	0.5091	-0.4341
		0.09	1.1970	0.8046	1.0554	0.9043	0.8846	-0.4270	0.4663	0.5272	-0.4722
	0.9	0.01	1.4753	0.9327	1.1237	0.9606	0.9322	-0.2779	0.3620	0.3883	-0.2893
		0.05	1.1970	0.8525	1.0554	0.9473	0.9176	-0.3204	0.3975	0.4332	-0.3382
		0.09	0.9976	0.7903	0.9993	0.9325	0.9022	-0.3611	0.4314	0.4782	-0.3872
0.5	0.1	0.01	0.3541	0.6865	0.7324	0.3511	0.3019	-0.9363	0.9533	3.1579	-2.6669
		0.05	0.3508	0.6709	0.7304	0.3504	0.3045	-0.9366	0.9525	3.1277	-2.6727
		0.09	0.3477	0.6555	0.7284	0.3498	0.3072	-0.9368	0.9516	3.0973	-2.6783
	0.5	0.01	0.3508	0.6849	0.7304	0.6787	0.5355	-0.7344	0.8446	1.5772	-1.0822
		0.05	0.3354	0.6637	0.7206	0.6661	0.5313	-0.7458	0.8472	1.5947	-1.1197
		0.09	0.3211	0.6439	0.7112	0.6538	0.5271	-0.7566	0.8498	1.6122	-1.1572
	0.9	0.01	0.3477	0.6833	0.7284	0.7954	0.6214	-0.6061	0.7835	1.2610	-0.7620
		0.05	0.3211	0.6568	0.7112	0.7770	0.6082	-0.6295	0.7938	1.3051	-0.8101
		0.09	0.2978	0.6329	0.6953	0.7588	0.5954	-0.6513	0.8034	1.3493	-0.8583
0.9	0.1	0.01	0.1740	0.5692	0.5917	0.2212	0.1854	-0.9752	0.9827	5.3008	-4.4098
		0.05	0.1730	0.5614	0.5907	0.2209	0.1864	-0.9753	0.9825	5.2709	-4.4159
		0.09	0.1720	0.5537	0.5898	0.2206	0.1874	-0.9754	0.9823	5.2409	-4.4219
	0.5	0.01	0.1730	0.5683	0.5907	0.4921	0.3514	-0.8705	0.9362	2.6640	-1.7690
		0.05	0.1683	0.5573	0.5859	0.4843	0.3494	-0.8749	0.9370	2.6814	-1.8064
		0.09	0.1638	0.5468	0.5811	0.4768	0.3475	-0.8790	0.9377	2.6988	-1.8438
	0.9	0.01	0.1720	0.5675	0.5898	0.6290	0.4242	-0.7774	0.9056	2.1350	-1.2360
		0.05	0.1638	0.5534	0.5811	0.6145	0.4171	-0.7889	0.9089	2.1789	-1.2839
		0.09	0.1562	0.5402	0.5729	0.6004	0.4103	-0.7997	0.9120	2.2229	-1.3319

Fuente: Cuadro de elaboración propia, empleando los coeficientes $\alpha = 0.3$ y $n = 0.019510756$, que es la tasa de crecimiento poblacional calculada a partir de los censos de población realizados por el INEGI en los años 1980 y 1990. La población total no contempla ningún núcleo de población específico o ni rango de edad.

Cuadro B.6.A. Cálculo de Estados Estacionarios para la Población Urbana de 15 años en Adelante en el Período.1980-1990.											
COEFICIENTES DEL MODELO						EIGENVECTORES				EIGENVALORES	
Rho	Theta	X	K*	C*	Y*	a1	a2	b1	b2	lambda 1	lambda 2
0.1	0.1	0.01	4.5102	1.4723	2.1237	0.8665	0.8319	-0.4992	0.5549	0.6671	-0.5761
		0.05	4.3608	1.2840	2.0882	0.8700	0.8492	-0.4931	0.5281	0.6218	-0.5668
		0.09	4.2186	1.1071	2.0539	0.8741	0.8670	-0.4858	0.4983	0.5748	-0.5558
	0.5	0.01	4.3608	1.4584	2.0882	0.9725	0.9484	-0.2329	0.3172	0.3344	-0.2394
		0.05	3.7143	1.2422	1.9273	0.9680	0.9484	-0.2511	0.3172	0.3344	-0.2594
		0.09	3.2017	1.0708	1.7893	0.9631	0.9484	-0.2691	0.3172	0.3344	-0.2794
	0.9	0.01	4.2186	1.4446	2.0539	0.9856	0.9654	-0.1689	0.2610	0.2703	-0.1713
		0.05	3.2017	1.1988	1.7893	0.9809	0.9596	-0.1944	0.2814	0.2932	-0.1982
		0.09	2.5126	1.0212	1.5851	0.9756	0.9535	-0.2197	0.3015	0.3162	-0.2252
0.5	0.1	0.01	0.6192	0.6974	0.7869	0.5155	0.4212	-0.8569	0.9070	2.1532	-1.6622
		0.05	0.6114	0.6692	0.7819	0.5167	0.4280	-0.8562	0.9038	2.1119	-1.6569
		0.09	0.6039	0.6416	0.7771	0.5180	0.4350	-0.8554	0.9004	2.0701	-1.6511
	0.5	0.01	0.6114	0.6936	0.7819	0.8425	0.6613	-0.5387	0.7502	1.1344	-0.6394
		0.05	0.5749	0.6522	0.7582	0.8348	0.6613	-0.5505	0.7502	1.1344	-0.6594
		0.09	0.5416	0.6144	0.7359	0.8271	0.6613	-0.5620	0.7502	1.1344	-0.6794
	0.9	0.01	0.6039	0.6899	0.7771	0.9165	0.7303	-0.4001	0.6832	0.9355	-0.4365
		0.05	0.5416	0.6360	0.7359	0.9075	0.7222	-0.4200	0.6917	0.9578	-0.4628
		0.09	0.4884	0.5893	0.6989	0.8983	0.7141	-0.4394	0.7000	0.9802	-0.4892
0.9	0.1	0.01	0.2332	0.4492	0.4829	0.3424	0.2653	-0.9395	0.9642	3.6349	-2.7439
		0.05	0.2314	0.4384	0.4810	0.3429	0.2680	-0.9394	0.9634	3.5943	-2.7393
		0.09	0.2296	0.4277	0.4792	0.3435	0.2709	-0.9392	0.9626	3.5534	-2.7344
	0.5	0.01	0.2314	0.4476	0.4810	0.6933	0.4592	-0.7206	0.8883	1.9344	-1.0394
		0.05	0.2227	0.4309	0.4719	0.6864	0.4592	-0.7272	0.8883	1.9344	-1.0594
		0.09	0.2146	0.4151	0.4632	0.6796	0.4592	-0.7336	0.8883	1.9344	-1.0794
	0.9	0.01	0.2296	0.4460	0.4792	0.8181	0.5295	-0.5751	0.8483	1.6019	-0.7029
		0.05	0.2009	0.4236	0.4632	0.8080	0.5243	-0.5891	0.8515	1.6241	-0.7291
		0.09	0.2009	0.4032	0.4483	0.7980	0.5192	-0.6027	0.8547	1.6463	-0.7553

Fuente: Cuadro de elaboración propia, calculado a partir de $n = 0.034435547$ y con la rejilla de valores especificada en el capítulo III, asignando un valor de 0.5 al coeficiente alpha.

Cuadro B.6.B. Cálculo de Estados Estacionarios para la Población Rural de 15 años en Adelante en el Período 1980-1990.											
COEFICIENTES DEL MODELO						EIGENVECTORES				EIGENVALORES	
Rho	Theta	X	K*	C*	Y*	a1	a2	b1	b2	lambda 1	lambda 2
0.1	0.1	0.01	1.6757	0.9697	1.1675	0.7523	0.7189	-0.6588	0.6951	0.9668	-0.8758
		0.05	1.6310	0.9003	1.1581	0.7506	0.7304	-0.6607	0.6830	0.9352	-0.8802
		0.09	1.5882	0.8344	1.1489	0.7493	0.7422	-0.6623	0.6702	0.9029	-0.8839
	0.5	0.01	1.6310	0.9656	1.1581	0.9362	0.9049	-0.3514	0.4256	0.4704	-0.3754
		0.05	1.4347	0.8877	1.1144	0.9242	0.8986	-0.3820	0.4388	0.4883	-0.4133
		0.09	1.0757	0.8232	1.0757	0.9114	0.8921	-0.4114	0.4518	0.5064	-0.4514
	0.9	0.01	1.5882	0.9614	1.1489	0.9645	0.9370	-0.2642	0.3495	0.3730	-0.2740
		0.05	1.2755	0.8742	1.0757	0.9516	0.9227	-0.3072	0.3855	0.4178	-0.3228
		0.09	1.0547	0.8073	1.0161	0.9373	0.9075	-0.3485	0.4200	0.4628	-0.3718
0.5	0.1	0.01	0.3637	0.6953	0.7383	0.3566	0.3060	-0.9343	0.9520	3.1111	-2.6201
		0.05	0.3603	0.6793	0.7362	0.3559	0.3087	-0.9345	0.9512	3.0809	-2.6259
		0.09	0.3569	0.6635	0.7341	0.3552	0.3115	-0.9348	0.9502	3.0506	-2.6316
	0.5	0.01	0.3603	0.6937	0.7362	0.6857	0.5405	-0.7279	0.8413	1.5566	-1.0616
		0.05	0.3441	0.6718	0.7261	0.6730	0.5362	-0.7396	0.8441	1.5740	-1.0990
		0.09	0.3292	0.6513	0.7165	0.6606	0.5320	-0.7508	0.8467	1.5916	-1.1366
	0.9	0.01	0.3569	0.6920	0.7341	0.8012	0.6260	-0.5984	0.7798	1.2458	-0.7468
		0.05	0.3292	0.6645	0.7165	0.7828	0.6127	-0.6222	0.7903	1.2899	-0.7949
		0.09	0.3049	0.6399	0.7002	0.7646	0.5998	-0.6446	0.8002	1.3341	-0.8431
0.9	0.1	0.01	0.1768	0.5738	0.5946	0.2234	0.1870	-0.9747	0.9824	5.2539	-4.3629
		0.05	0.1758	0.5658	0.5936	0.2231	0.1880	-0.9748	0.9822	5.2241	-4.3691
		0.09	0.1748	0.5580	0.5926	0.2228	0.1891	-0.9749	0.9820	5.1941	-4.3751
	0.5	0.01	0.1758	0.5729	0.5936	0.4965	0.3538	-0.8680	0.9353	2.6434	-1.7484
		0.05	0.1710	0.5616	0.5887	0.4886	0.3518	-0.8725	0.9361	2.6607	-1.7857
		0.09	0.1663	0.3498	0.5838	0.4809	0.3498	-0.8768	0.9368	2.6782	-1.8232
	0.9	0.01	0.1748	0.5720	0.5926	0.6336	0.4266	-0.7736	0.9044	2.1199	-1.2209
		0.05	0.1663	0.5576	0.5838	0.6190	0.4195	-0.7854	0.9077	2.1638	-1.2688
		0.09	0.1585	0.5441	0.5755	0.6048	0.4126	-0.7964	0.9109	2.2077	-1.3167

Fuente: Cuadro de elaboración propia, calculado a partir de $n = 0.008016084$ y con la rejilla de valores especificada en el capítulo III, asignando un valor de 0.3 al coeficiente alpha.

Cuadro B.7.A Cálculo De Estados Estacionarios para la Población Total de México en el Período 1990-2000.

NACIONAL INDUSTRIA						EIGENVECTORES				EIGENVALORES	
Rho	**Theta**	**X**	**K***	**C***	**Y***	**a1**	**a2**	**b1**	**b2**	**lambda 1**	**lambda 2**
0.1	0.1	0.01	5.2023	1.6138	2.2809	0.8801	0.8459	-0.4747	0.5333	0.6304	-0.5394
		0.05	5.0175	1.3960	2.2400	0.8834	0.8630	-0.4686	0.5052	0.5854	-0.5304
		0.09	4.8424	1.1923	2.2006	0.8874	0.8805	-0.4610	0.4741	0.5385	-0.5195
	0.5	0.01	5.0175	1.5967	2.2400	0.9760	0.9529	-0.2179	0.3032	0.3182	-0.2232
		0.05	4.2263	1.3449	2.0558	0.9717	0.9529	-0.2363	0.3032	0.3182	-0.2432
		0.09	3.6084	1.1483	1.8996	0.9671	0.9529	-0.2545	0.3032	0.3182	-0.2632
	0.9	0.01	4.8424	1.5797	2.2006	0.9875	0.9682	-0.1574	0.2502	0.2584	-0.1594
		0.05	3.6084	1.2926	1.8996	0.9831	0.9627	-0.1831	0.2707	0.2812	-0.1862
		0.09	2.7924	1.0896	1.6710	0.9780	0.9567	-0.2085	0.2910	0.3042	-0.2132
0.5	0.1	0.01	0.6520	0.7239	0.8075	0.5242	0.4273	-0.8516	0.9041	2.1157	-1.6247
		0.05	0.6437	0.6940	0.8023	0.5254	0.4342	-0.8509	0.9008	2.0745	-1.6195
		0.09	0.6355	0.6649	0.7972	0.5267	0.4414	-0.8501	0.8973	2.0329	-1.6139
	0.5	0.01	0.6437	0.7198	0.8023	0.8487	0.6666	-0.5289	0.7454	1.1182	-0.6232
		0.05	0.6043	0.6757	0.7773	0.8410	0.6666	-0.5410	0.7454	1.1182	-0.6432
		0.09	0.5684	0.6356	0.7539	0.8334	0.6666	-0.5527	0.7454	1.1182	-0.6632
	0.9	0.01	0.6355	0.7157	0.7972	0.9204	0.7345	-0.3910	0.6786	0.9238	-0.4248
		0.05	0.5684	0.6583	0.7539	0.9116	0.7264	-0.4112	0.6872	0.9461	-0.4511
		0.09	0.5113	0.6086	0.7151	0.9024	0.7184	-0.4308	0.6957	0.9684	-0.4774
0.9	0.1	0.01	0.2407	0.4597	0.4906	0.3466	0.2678	-0.9380	0.9635	3.5972	-2.7062
		0.05	0.2388	0.4485	0.4887	0.3471	0.2707	-0.9378	0.9627	3.5567	-2.7017
		0.09	0.2369	0.4374	0.4868	0.3477	0.2736	-0.9376	0.9619	3.5159	-2.6969
	0.5	0.01	0.2388	0.4580	0.4887	0.6989	0.4623	-0.7152	0.8867	1.9182	-1.0232
		0.05	0.2297	0.4406	0.4793	0.6920	0.4623	-0.7219	0.8867	1.9182	-1.0432
		0.09	0.2212	0.4242	0.4703	0.6851	0.4623	-0.7284	0.8867	1.9182	-1.0632
	0.9	0.01	0.2369	0.4564	0.4868	0.8226	0.5323	-0.5686	0.8465	1.5902	-0.6912
		0.05	0.2212	0.4331	0.4703	0.8125	0.5271	-0.5829	0.8498	1.6124	-0.7174
		0.09	0.2069	0.4118	0.4549	0.8025	0.5219	-0.5967	0.8530	1.6346	-0.7436

Fuente: Cuadro de elaboración propia, empleando los coeficientes $\alpha = 0.5$ y $n = 0.018215578$, que es la tasa de crecimiento poblacional calculada a partir de los censos de población realizados por el INEGI en los años 1990 y 2000. La población total no contempla ningún núcleo de población específico o ni rango de edad.

Cuadro B.7.B Cálculo De Estados Estacionarios para la Población Total de México en el Período 1990-2000.

NACIONAL AGRICOLA						**EIGENVECTORES**				**EIGENVALORES**	
Rho	**Theta**	**X**	**K***	**C***	**Y***	**a1**	**a2**	**b1**	**b2**	**lambda 1**	**lambda 2**
		0.01	1.5655	0.9432	1.1439	0.7370	0.7042	-0.6759	0.7100	1.0081	-0.9171
	0.1	0.05	1.5255	0.8785	1.1351	0.7354	0.7155	-0.6776	0.6986	0.9764	-0.9214
		0.09	1.4873	0.8168	1.1265	0.7340	0.7271	-0.6791	0.6865	0.9441	-0.9251
		0.01	1.5255	0.9395	1.1351	0.9305	0.8984	-0.3664	0.4391	0.4888	-0.3938
0.1	0.5	0.05	1.3495	0.8671	1.0941	0.9181	0.8920	-0.3964	0.4520	0.5067	-0.4317
		0.09	1.2055	0.8067	1.0577	0.9051	0.8855	-0.4252	0.4647	0.5248	-0.4698
		0.01	1.4873	0.9358	1.1265	0.9610	0.9327	-0.2764	0.3606	0.3866	-0.2876
	0.9	0.05	1.2055	0.8549	1.0577	0.9478	0.9182	-0.3189	0.3962	0.4315	-0.3365
		0.09	1.0037	0.7921	1.0011	0.9331	0.9028	-0.3597	0.4301	0.4765	-0.3855
		0.01	0.3551	0.6875	0.7330	0.3517	0.3024	-0.9361	0.9532	3.1526	-2.6616
	0.1	0.05	0.3519	0.6718	0.7310	0.3510	0.3050	-0.9364	0.9524	3.1224	-2.6674
		0.09	0.3487	0.6564	0.7290	0.3504	0.3077	-0.9366	0.9515	3.0920	-2.6730
		0.01	0.3519	0.6859	0.7310	0.6795	0.5360	-0.7337	0.8442	1.5749	-1.0799
0.5	0.5	0.05	0.3364	0.6646	0.7212	0.6669	0.5318	-0.7452	0.8469	1.5924	-1.1174
		0.09	0.3220	0.6447	0.7118	0.6546	0.5276	-0.7560	0.8495	1.6099	-1.1549
		0.01	0.3487	0.6843	0.7290	0.7961	0.6219	-0.6052	0.7831	1.2593	-0.7603
	0.9	0.05	0.3220	0.6576	0.7118	0.7777	0.6087	-0.6287	0.7934	1.3034	-0.8084
		0.09	0.2985	0.6337	0.6958	0.7595	0.5959	-0.6505	0.8030	1.3476	-0.8566
		0.01	0.1743	0.5697	0.5921	0.2214	0.1856	-0.9752	0.9826	5.2955	-4.4045
	0.1	0.05	0.1733	0.5619	0.5911	0.2211	0.1866	-0.9752	0.9824	5.2656	-4.4106
		0.09	0.1723	0.5542	0.5901	0.2208	0.1876	-0.9753	0.9822	5.2356	-4.4166
		0.01	0.1733	0.5688	0.5911	0.4926	0.3517	-0.8703	0.9361	2.6616	-1.7666
0.9	0.5	0.05	0.1686	0.5578	0.5862	0.4848	0.3497	-0.8746	0.9369	2.6790	-1.8040
		0.09	0.1641	0.5473	0.5814	0.4772	0.3477	-0.8788	0.9376	2.6965	-1.8415
		0.01	0.1723	0.5680	0.5901	0.6295	0.4244	-0.7770	0.9055	2.1333	-1.2343
	0.9	0.05	0.1641	0.5538	0.5814	0.6150	0.4174	-0.7885	0.9087	2.1772	-1.2822
		0.09	0.1564	0.5406	0.5732	0.6009	0.4105	-0.7993	0.9118	2.2212	-1.3302

Fuente: Cuadro de elaboración propia, empleando los coeficientes $\alpha = 0.3$ y $n = 0.018215578$, que es la tasa de crecimiento poblacional calculada a partir de los censos de población realizados por el INEGI en los años 1990 y 2000. La población total no contempla ningún núcleo de población específico o ni rango de edad.

Cuadro B.8.A. Cálculo de Estados Estacionarios para la Población Urbana de 15 años en Adelante en el Período 1990-2000.											
COEFICIENTES DEL MODELO						EIGENVECTORES				EIGENVALORES	
Rho	Theta	X	K*	C*	Y*	a1	a2	b1	b2	lambda 1	lambda 2
0.1	0.1	0.01	4.7905	1.5303	2.1887	0.8724	0.8380	-0.4888	0.5457	0.6513	-0.5603
		0.05	4.6271	1.3300	2.1511	0.8758	0.8552	-0.4827	0.5184	0.6061	-0.5511
		0.09	4.4718	1.1423	2.1147	0.8799	0.8728	-0.4752	0.4880	0.5591	-0.5401
	0.5	0.01	4.6271	1.5151	2.1511	0.9740	0.9503	-0.2264	0.3112	0.3274	-0.2324
		0.05	3.9229	1.2845	1.9806	0.9696	0.9503	-0.2448	0.3112	0.3274	-0.2524
		0.09	3.3681	1.1029	1.8352	0.9648	0.9503	-0.2629	0.3112	0.3274	-0.2724
	0.9	0.01	4.4718	1.5000	2.1147	0.9865	0.9666	-0.1639	0.2563	0.2652	-0.1662
		0.05	3.3681	1.2376	1.8352	0.9819	0.9609	-0.1896	0.2768	0.2881	-0.1931
		0.09	2.6278	1.0497	1.6210	0.9766	0.9549	-0.2149	0.2970	0.3111	-0.2201
0.5	0.1	0.01	0.6330	0.7086	0.7956	0.5192	0.4238	-0.8546	0.9057	2.1370	-1.6460
		0.05	0.6250	0.6797	0.7906	0.5204	0.4306	-0.8539	0.9025	2.0958	-1.6408
		0.09	0.6172	0.6514	0.7856	0.5217	0.4377	-0.8531	0.8991	2.0541	-1.6351
	0.5	0.01	0.6250	0.7047	0.7906	0.8452	0.6636	-0.5345	0.7481	1.1274	-0.6324
		0.05	0.5873	0.6621	0.7664	0.8375	0.6636	-0.5464	0.7481	1.1274	-0.6524
		0.09	0.5529	0.6233	0.7436	0.8298	0.6636	-0.5580	0.7481	1.1274	-0.6724
	0.9	0.01	0.6172	0.7008	0.7856	0.9182	0.7321	-0.3962	0.6812	0.9305	-0.4315
		0.05	0.5529	0.6455	0.7436	0.9093	0.7240	-0.4162	0.6898	0.9528	-0.4578
		0.09	0.4981	0.5975	0.7058	0.9001	0.7160	-0.4357	0.6981	0.9751	-0.4841
0.9	0.1	0.01	0.2364	0.4537	0.4862	0.3442	0.2664	-0.9389	0.9639	3.6186	-2.7276
		0.05	0.2345	0.4427	0.4843	0.3447	0.2692	-0.9387	0.9631	3.5781	-2.7231
		0.09	0.2327	0.4318	0.4824	0.3453	0.2720	-0.9385	0.9623	3.5373	-2.7183
	0.5	0.01	0.2345	0.4521	0.4843	0.6957	0.4605	-0.7183	0.8876	1.9274	-1.0324
		0.05	0.2257	0.4350	0.4751	0.6888	0.4605	-0.7249	0.8876	1.9274	-1.0524
		0.09	0.2174	0.4190	0.4662	0.6820	0.4605	-0.7314	0.8876	1.9274	-1.0724
	0.9	0.01	0.2327	0.4504	0.4824	0.8200	0.5307	-0.5723	0.8475	1.5969	-0.6979
		0.05	0.2174	0.4277	0.4662	0.8100	0.5255	-0.5864	0.8508	1.6190	-0.7240
		0.09	0.2035	0.4068	0.4511	0.7999	0.5203	-0.6001	0.8540	1.6412	-0.7502

Fuente: Cuadro de elaboración propia, calculado a partir de $n = 0.027443231$ y con la rejilla de valores especificada en el capítulo III, asignando un valor de 0.5 al coeficiente alpha.

Cuadro B.8.B. Cálculo de Estados Estacionarios para la Población Rural de 15 años en Adelante en el Período 1990-2000.											
COEFICIENTES DEL MODELO						EIGENVECTORES				EIGENVALORES	
Rho	**Theta**	**X**	**K***	**C***	**Y***	**a1**	**a2**	**b1**	**b2**	**lambda 1**	**lambda 2**
0.1	0.1	0.01	1.6312	0.9591	1.1581	0.7463	0.7132	-0.6656	0.7010	0.9829	-0.8919
		0.05	1.5884	0.8916	1.1489	0.7447	0.7245	-0.6674	0.6892	0.9513	-0.8963
		0.09	1.5475	0.8274	1.1400	0.7433	0.7363	-0.6690	0.6767	0.9190	-0.9000
	0.5	0.01	1.5884	0.9551	1.1489	0.9340	0.9024	-0.3573	0.4309	0.4775	-0.3825
		0.05	1.4004	0.8794	1.1063	0.9218	0.8960	-0.3876	0.4440	0.4955	-0.4205
		0.09	1.2474	0.8166	1.0686	0.9090	0.8895	-0.4169	0.4569	0.5136	-0.4586
	0.9	0.01	1.5475	0.9512	1.1400	0.9631	0.9353	-0.2690	0.3538	0.3783	-0.2793
		0.05	1.2474	0.8665	1.0686	0.9502	0.9209	-0.3118	0.3897	0.4231	-0.3281
		0.09	1.0343	0.8012	1.0102	0.9357	0.9057	-0.3529	0.4240	0.4681	-0.3771
0.5	0.1	0.01	0.3603	0.6922	0.7362	0.3547	0.3046	-0.9350	0.9525	3.1273	-2.6363
		0.05	0.3570	0.6763	0.7342	0.3540	0.3073	-0.9353	0.9516	3.0971	-2.6421
		0.09	0.3537	0.6607	0.7321	0.3533	0.3100	-0.9355	0.9507	3.0668	-2.6478
	0.5	0.01	0.3570	0.6906	0.7342	0.6832	0.5388	-0.7302	0.8425	1.5637	-1.0687
		0.05	0.3411	0.6689	0.7242	0.6706	0.5345	-0.7418	0.8452	1.5812	-1.1062
		0.09	0.3263	0.6487	0.7147	0.6582	0.5303	-0.7528	0.8478	1.5987	-1.1437
	0.9	0.01	0.3537	0.6890	0.7321	0.7992	0.6244	-0.6011	0.7811	1.2511	-0.7521
		0.05	0.3263	0.6618	0.7147	0.7808	0.6111	-0.6248	0.7915	1.2951	-0.8001
		0.09	0.3024	0.6374	0.6985	0.7626	0.5983	-0.6469	0.8013	1.3393	-0.8483
0.9	0.1	0.01	0.1758	0.5722	0.5936	0.2226	0.1864	-0.9749	0.9825	5.2701	-4.3791
		0.05	0.1748	0.5643	0.5926	0.2223	0.1874	-0.9750	0.9823	5.2403	-4.3853
		0.09	0.1738	0.5565	0.5916	0.2220	0.1885	-0.9750	0.9821	5.2103	-4.3913
	0.5	0.01	0.1748	0.5713	0.5926	0.4950	0.3530	-0.8689	0.9356	2.6505	-1.7555
		0.05	0.1700	0.5601	0.5877	0.4871	0.3510	-0.8733	0.9364	2.6679	-1.7929
		0.09	0.1654	0.5495	0.5829	0.4795	0.3490	-0.8776	0.9371	2.6853	-1.8303
	0.9	0.01	0.1738	0.5704	0.5916	0.6320	0.4258	-0.7750	0.9048	2.1251	-1.2261
		0.05	0.1654	0.5561	0.5829	0.6174	0.4187	-0.7866	0.9081	2.1690	-1.2740
		0.09	0.1577	0.5427	0.5746	0.6033	0.4118	-0.7975	0.9113	2.2130	-1.3220

Fuente: Cuadro de elaboración propia, calculado a partir de $n = 0.011997328$ y con la rejilla de valores especificada en el capítulo III, asignando un valor de 0.3 al coeficiente alpha.

SECCIÒN C. La Tasa de Crecimiento de la Mano de Obra.

En la sección A del anexo estadístico hemos desarrollado las tasas de crecimiento poblacional con que simulamos el modelo de Ramsey; en este apartado, vamos a sumar la tasa de progreso tecnológico a la tasa de crecimiento poblacional, cumpliendo con el fundamento teórico del modelo de Ramsey en cuanto al crecimiento de la mano de obra, la cual se define mediante la siguiente ecuación:

$$\hat{L} = e^{(x+n)t}$$

Lo que vamos a presentar en los siguientes cuadros, corresponde precisamente al coeficiente $x + n$, donde la tasa n ya es conocida por nosotros, por lo cual, sólo es necesario agregar la tasa de progreso tecnológico$x$, siendo pertinente distinguir los tres distintos casos a que se da origen de acuerdo con nuestra rejilla de valores. El primer caso implica la menor tasa de progreso tecnológico que hemos utilizado para simular el modelo de Ramsey, correspondiente a $x = 0.01$, lo cual coincide con lo que normalmente se plantea en los ejercicios propuestos para macroeconomía dinámica siendo entonces:

Cuadro C.1 Tasas de Crecimiento del Factor Trabajo, donde x=0.01

Período	POBLACIÓN.			Tasa de Crecimiento Exponencial con x+n		
	TOTAL	Urbana (15 años en adelante)	Rural (15 años en Adelante)	Pob. Total	Pob. Urbana	Pob. Rural
1960-1970	34923129	10041821	9315658	0,042273	0,054530	0,019691
1970-1980	48225238	15674898	10263660	0,042654	0,060590	0,025061
1980-1990	66847833	25996403	11932007	0,029511	0,044436	0,018016
1990-2000	81249645	36683008	12927868	0,028216	0,037443	0,021997
2000-2010	97483412	48266897	14575741	0,024182	0,033669	0,026942

Fuente: Cuadro de elaboración propia, con información recopilada de los censos de población, sometida a la fórmula de crecimiento exponencial, añadiendo la tasa de progreso tecnológico del 0.01 anual.

Al tomar la segunda tasa de progreso tecnológico, la notoriedad en la diferencia que existe entre los valores originales y los ahora propuestos es mayor, puesto que calculamos a partir de $x = 0.05$, que es un valor intermedio en la rejilla de simulación propuesta por nosotros, dando como resultado las siguientes tasas de crecimiento de la mano de obra:

Cuadro C.2 Tasas de Crecimiento del Factor Trabajo, donde x=0.05						
Período	**POBLACIÓN.**			**Tasa de Crecimiento Exponencial con x+n**		
	TOTAL	**Urbana (15 años en adelante)**	**Rural (15 años en Adelante)**	**Pob. Total**	**Pob. Urbana**	**Pob. Rural**
1960-1970	34923129	10041821	9315658	0,082273	0,094530	0,059691
1970-1980	48225238	15674898	10263660	0,082654	0,100590	0,065061
1980-1990	66847833	25996403	11932007	0,069511	0,084436	0,058016
1990-2000	81249645	36683008	12927868	0,068216	0,077443	0,061997
2000-2010	97483412	48266897	14575741	0,064182	0,073669	0,066942
Fuente: Cuadro de elaboración propia, con información recopilada de los censos de población, sometida a la fórmula de crecimiento exponencial, añadiendo la tasa de progreso tecnológico del 0.05 anual.						

Finalmente, la tercera tasa de progreso tecnológico da como resultado las siguientes tasas de crecimiento de la mano de obra:

Cuadro C.2 Tasas de Crecimiento del Factor Trabajo, donde x=0.09						
Período	**POBLACIÓN.**			**Tasa de Crecimiento Exponencial con x+n**		
	TOTAL	**Urbana (15 años en adelante)**	**Rural (15 años en Adelante)**	**Pob. Total**	**Pob. Urbana**	**Pob. Rural**
1960-1970	34923129	10041821	9315658	0,122273	0,134530	0,099691
1970-1980	48225238	15674898	10263660	0,122654	0,140590	0,105061
1980-1990	66847833	25996403	11932007	0,109511	0,124436	0,098016
1990-2000	81249645	36683008	12927868	0,108216	0,117443	0,101997
2000-2010	97483412	48266897	14575741	0,104182	0,113669	0,106942
Fuente: Cuadro de elaboración propia, con información recopilada de los censos de población, sometida a la fórmula de crecimiento exponencial.						

BIBLIOGRAFIA.

1.- Aparicio Cabrera, Abraham.

Series Estadísticas de la Economía Mexicana en el Siglo XX.

Economía Informa, núm. 369, Julio-Agosto de 2011; pp.63-85, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad Universitaria, México.

2.- Barro, Robert; Sala-i-Martín, Xavier.

Crecimiento Económico.

España, Editorial Reverté, 2a. edición, traducción de Gotzone Pérez Apilanez, 2009, 660 págs.

3.- Blank, Leland.

Ingeniería Economica.

4.- Burmeister, Edwin et al.

Teorías Matemáticas de Crecimiento Económico.

España, Casa Editorial BOSCH, 1a. edición, traducción de Manuel Jordán Navarro, 1973, 517 págs.

5.- Cabrera Adame, Carlos Javier (coordinador).

Cambio Estructural de la Economía Mexicana.

México, Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Economía, 1a. edición, 2006, 503 págs.

6.- Chiang, Alpha et al.

Métodos Fundamentales de Economía Matemática.

México, Editorial McGraw-Hill/Interamericana, 4a. edición, traducción de Francisco Sánchez Fragoso, Raúl Juárez, 2006, 688 págs.

7.- David N. Weil

Crecimiento Económico.

8.- Fiorito, Alejandro.

La Lógica de la Teoría Clásica y Neoclásica: Diferencias y Criticas Teóricas.

9.- Franco González, Humberto; Ramírez Hassan, Andrés

El modelo Harrod-Domar: implicaciones teóricas y empíricas

Ecos de Economía No. 21. Medellín, octubre 2005, pp. 127-151

10.- González, Jorge; Pecha, Arcenio.

Tasa de Preferencia Intertemporal, Equilibrio y Estabilidad en los Modelos de Crecimiento Neoclásicos.

Cuadernos de Economía, v. XIX, n. 32, Bogotá, 2000, páginas 61-76.

11.- Gujarati, Damodar et al.

Econometría.

México, Editorial McGraw-Hill/Interamericana, 5a. edición, traducción de Pilar Carril Villarreal, 2010, 921 págs.

12.- Harvey, David.

Breve Historia del Neoliberalismo.

México, Ediciones Akal, 1a. edición, traducción de Ana Varela Mateos, 2007, 256 págs.

13.- Hernández Sampieri, Roberto

Metodología de la Investigación.

14.- Kenneth Arrow, J; Debreu, Gerard.

Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy.

Econometrica, Vol. 22, No. 3. (Jul., 1954), pp. 265-290.

15.- Kregel, J. A.

Teoría del Crecimiento Económico.

16.- Kuznets, Simón Smith

Investigación Cuantitativa del Crecimiento Económico.

17.- Lozano G, Francisco; Villa P. Edgar; Monsalve G. Sergio.

El Modelo Arrow-Debreu es un Modelo Estático

Cuadernos de Economia, V. XVI, n. 26, Bogotá, 1997, páginas 21-46.

18.- Mariña Flores, Abelardo.

Formación y Acervos de Capital en México, 1949-1999.

Análisis Económico, vol. XVII, núm. 34, segundo semestre, 2001, pp. 231-256, Universidad Autónoma Metropolitana Azcapotzalco, México.

19.- Márquez de la Cruz, Elena; et. Al.

La Elasticidad de Sustitución Intertemporal con Preferencias no Separables Intratemporalmente: los casos de Alemania, España y Francia.

20.- Molina Chueca, José Alberto.

La Elasticidad de Sustitución Intertemporal en el consumo: Evidencia Empírica en países representativos de la OCDE.

Estudios de Economía Aplicada, Universidad de Zaragoza, España, 1998, páginas 119-131.

21.- Molina López, Evaristo.

Construcción de Indicadores y Parámetros.

22.- Mulligan, Casey B.

A Note on the lime-Elimination Method for Solving Rccursivc DynamicEconomic Models

Manuscript, University of Chicago, September15, 1991 4:59 PM.

23.- Pasinetti, Luigi.

Crítica de la Teoría Neoclásica del Crecimiento y la Distribución.

Italia, en Banca Nazionale de Lavoro Quaterly Review No. 215, traducción de Gustavo Murgal, 2000, págs. 383 - 431.

24.- Sala-i-Martín, Xavier. (a)

Apuntes de Crecimiento Económico.

España, Casa Editorial BOSCH, 2a. edición, traducción de Elsa Vila Artadi, 2000, 250 págs.

25.- Sala-i-Martín, Xavier. (b)

Algunas Lecciones de 10 Años de Literatura Empírica sobre Crecimiento.

CLM Economía, no. 2, Primer Semestre de 2003. Págs. 35 - 53

26.- Screpanti, Ernesto et al.

Panorama de Historia del Pensamiento Económico.

España, Editorial Ariel. 1a. edición, traducción de Francisco J. Ramos, 1997, 447 págs.

27.- Tello, Carlos.

Estado y Desarrollo Económico: México 1920 - 2006.

México, Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Economía, 2a. edición, 2008, 776 págs.

28.- Tinbergen, Jan

Modelos matemáticos del Crecimiento Económico.

29.- Valencia, Germán Darío et al.

Critica a las Bases Teóricas de la Teoría Neoclásica en la Propuesta del Bienestar Social de Amartya Sen.

Colombia, Universidad de Antioquía, Departamento de Economía, en Lecturas de Economía No. 51, 1999, págs. 113 - 148.