UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ZARAGOZA

PSICOLOGÍA

EL PAPEL DEL CARTEL MULTIPLICATIVO EN EL DOMINIO DE LOS HECHOS MULTIPLICATIVOS BÁSICOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

LICENCIADAS EN PSICOLOGÍA

P R E S E N T A N

JESÚS ADRIANA ARRIETA BUENDÍA

LAURA ISABEL GARCÍA FILIO

JURADO DE EXAMEN

TUTOR: DR. ÁLVARO VIRGILIO BUENROSTRO AVILÉS

COMITÉ: DR. JOSÉ GABRIEL SÁNCHEZ RUIZ

LIC. REYNA MARÍA NIEVES VALENCIA

MTRA. XÓCHITL ALEJANDRA BECERRIL PLASCENCIA

MTRA. LORENA IRAZUMA GARCÍA MIRANDA

MÉXICO, D.F. AGOSTO 2014

Agradecimientos

Al Dr. Álvaro Buenrostro por ser nuestro mentor en el proceso de investigación así como por su invaluable ayuda y constante apoyo para llevar a cabo este proyecto.

Al Dr. Gabriel Sánchez por el tiempo concedido, su infinita paciencia y los acertados consejos para enriquecer este trabajo.

A las Mtras. Lorena García, Reyna Nieves y Alejandra Becerril ya que con sus observaciones y recomendaciones hicieron posible culminar este proyecto.

A los niños que en su momento formaron parte del PABRE quienes fueron pieza clave en este proyecto. Y que con sus risas hacían más amenas cada una de las sesiones.

A cada uno de los maestros que contribuyeron en nuestra formación académica.

Adriana e Isabel

Dedicatoria

A mi familia, sabiendo que no existirá jamás una forma de agradecerles el haberme dado la oportunidad de lograr este sueño, sólo deseo que comprendan que mis logros son suyos y que mi esfuerzo siempre estará inspirado en ustedes.

A mis padres Mario y Jesús, por su cariño, guía y apoyo durante mi formación personal y académica. Pero especialmente por los esfuerzos y sacrificios realizados para llevarme hasta donde estoy hoy.

A mis hermanos Gloria, Arcelia, Rodolfo, Mónica, Fabiola, Areli y Florentino quienes directa o indirectamente me han brindado su ayuda desde siempre. A Guadalupe, por acompañarme en cada etapa y por sus palabras de aliento.

A mis sobrinas Odalis y Diane, por las lecciones compartidas y los momentos divertidos.

A mis amigos Adriana, Jesús, Liliana y Viridiana por su amistad, apoyo incondicional y por los grandes momentos vividos. Un reconocimiento especial a mi amiga Isabel por su ayuda, sus aportaciones y por dar lo mejor de sí misma haciéndola una excelente compañera de trabajo.

Adriana

Agradecida con Dios por permitirme llegar a este momento tan importante en mi vida.

Gracias a mis padres por estar siempre conmigo, por su ejemplo, su exigencia pero sobre todo su amor incondicional. Las palabras me son insuficientes para expresar todo mi amor y agradecimiento, pido a Dios bendiga cada uno de sus días. Mamita, eres la mejor de las maestras. Papito eres mi héroe. Los amo.

A mis hermanos agradezco todo su apoyo, los consejos y las infinitas risas en cada reunión… Ustedes iluminan mi vida desde que nacieron. Lupita gracias por ser mi hermana-amiga (la mejor), por tu ejemplo que día a día me invita a superarme personal y profesionalmente. Nabor gracias por tener siempre una sabia respuesta para todo, por hacer cada uno de mis días más divertidos. Los amo.

“Un amigo fiel es una protección segura; el que lo encuentra ha encontrado un tesoro”. Selene, Francisco, Adri Carrillo, Barbarita, Pepe. Gracias por estar conmigo en las buenas y en las malas, por traspasar el tiempo y la distancia. Adri gracias por ser una excelente compañera en este trabajo, por tu paciencia, tu compromiso, por confiar en mí y por un sin fin de cosas, pero sobre todo gracias por tu amistad. Los quiero mucho.

A todos aquellos quienes han formado y aún son parte de la comunidad de hermanas y hermanos de los Misioneros Servidores de la Palabra, gracias por todo… ¡Que Dios los bendiga siempre!

Laura Isabel

ÍNDICE

RESUMEN

En la escuela primaria una de las dificultades que presentan los estudiantes sobre todo en los primeros grados, es lograr el dominio de los hechos multiplicativos básicos. Es por ello que los objetivos de este trabajo son promover el uso de el Cartel Multiplicativo como una herramienta que facilite el dominio de estos hechos, detectar las dificultades que tuvieron los niños cuando realizaron las actividades propuestas en el Cartel y favorecer el empleo de las estrategias contenidas en él para resolver problemas multiplicativos de agrupamiento y precio. Se realizaron dos pruebas informales y se llevaron a cabo sesiones de trabajo con 15 niños que cursaban los primeros grados de nivel primaria, los cuales pertenecían al Programa de Atención al Bajo Rendimiento Escolar (PABRE) de la FES Zaragoza, UNAM. El análisis de datos se llevó a cabo en dos niveles y para ello se utilizó la clasificación de estrategias canónicas propuestas por Sherin y Fuson (2005). Los resultados mostraron que las estrategias sugeridas en el Cartel Multiplicativo posibilitan lograr el dominio de los hechos multiplicativos básicos y la resolución de problemas multiplicativos de agrupamiento y precio.

INTRODUCCIÓN

Las matemáticas son consideradas como una de las asignaturas más difíciles de acreditar en cualquier nivel educativo ya sea en primaria, secundaria, bachillerato o educación superior. Las causas por las que un estudiante puede tener problemas en esta área son diversas: algunas de ellas pueden ser la complejidad misma de la asignatura, poco apoyo en casa, falta de una didáctica apropiada en la escuela, etcétera.

Orrantia (2006) considera al aprendizaje de las matemáticas como fundamental en la educación básica debido al carácter instrumental de sus contenidos; sin embargo, puede presentar algunas dificultades, lo que tendría como consecuencia que los alumnos presenten un bajo nivel en matemáticas. Puntualiza que es en la aritmética, particularmente en los sistemas de numeración verbal y escrito junto con el dominio de las cuatro operaciones básicas: adición, sustracción, multiplicación y división; donde los alumnos pueden tener mayores dificultades, dado que son los primeros contenidos a los que se enfrentan. Debido a ello, comprender las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas se ha convertido en uno de los temas que preocupan cada vez más a profesionales relacionados con el ámbito educativo. Además, si se considera el hecho de que la sociedad actual demanda constantemente niveles altos de competencia matemática; entonces, se hace prioritario buscar herramientas que permitan que los contenidos aritméticos sean más accesibles a los alumnos. Debido a la importancia de las matemáticas, su enseñanza debe ser clara y accesible para que el estudiante pueda desarrollar sus habilidades y enfrentarse a nuevos retos.

En el caso de la escuela primaria, una de las dificultades se presenta en el campo de las multiplicaciones, ya que muchos estudiantes se enfrentan a nuevas situaciones que requieren el empleo de conocimientos y habilidades propias del pensamiento multiplicativo, cuando la mayoría de ellos solamente están acostumbrados a resolver situaciones aritméticas a través de un pensamiento aditivo. Además, es necesario subrayar que uno de los contenidos matemáticos que constantemente se les demanda a los estudiantes, sobre todo a partir del segundo grado de primaria es aprender las tablas de multiplicar; dicha demanda proviene de los profesores quienes pretenden que sus alumnos logren dicho objetivo ya que es un contenido curricular que debe cubrirse.

En este trabajo se describe y evalúa un material que pretende contribuir a generar una forma accesible para que los estudiantes tengan un dominio de los hechos multiplicativos básicos a través de un Cartel Multiplicativo. Es por ello que uno de los propósitos de este trabajo es promover el uso del Cartel como una herramienta que facilite el dominio de esos hechos. Con lo cual se verán beneficiados los alumnos de los primeros grados escolares especialmente quienes aún no han logrado dominarlos.

El trabajo contiene en la primera parte un marco teórico compuesto por cuatro capítulos. En el primero se plantea la importancia de las matemáticas en la sociedad actual, el rendimiento académico de los estudiantes mexicanos en esta área y los principales factores asociados al logro cognitivo; en el segundo se brinda un panorama general de las concepciones que se tienen sobre la multiplicación y sus propiedades; en el tercero se abordan los hechos numéricos, las etapas por las que los estudiantes transitan para adquirir estos hechos, así como las diferentes estrategias y actividades que se han puesto en práctica para lograr el dominio de los hechos multiplicativos. Finalmente, en el cuarto apartado se exponen los diferentes tipos de problemas multiplicativos y las estrategias que los niños utilizan para resolverlos.

Posteriormente se da paso a la descripción del diseño de investigación empleado para el desarrollo de este trabajo, se describe el tipo al que pertenece, los propósitos, las preguntas de investigación, los participantes, el escenario, el Cartel Multiplicativo, la obtención, tratamiento y análisis de los datos. Después se describen detalladamente los resultados de la investigación y se destaca el estudio de dos casos. En la última parte, se plantean las conclusiones de la investigación.

1

EL NIÑO Y LAS MATEMÁTICAS

A lo largo de este capítulo se aborda el papel que juegan las matemáticas en la sociedad actual así como la necesidad de una alfabetización matemática. También se brinda un breve panorama sobre el rendimiento académico en matemáticas de estudiantes mexicanos para, después abordar los principales factores asociados al logro cognitivo de los estudiantes y finalmente, exponer algunas consideraciones acerca de las dificultades de aprendizaje.

Las matemáticas en la sociedad actual

La pregunta que la mayoría de las personas –tanto niños como adultos– se hacen es ¿para qué aprender matemáticas?, la respuesta corta y sencilla es para comprender el mundo que nos rodea (Nunes y Bryant, 1997). Para profundizar un poco más sobre esta respuesta a continuación se exponen algunas de las principales razones del por qué es necesario aprender matemáticas.

Las matemáticas implican más que contar, son un conjunto de conceptos, principios y relaciones que nos brindan un sistema de símbolos el cual nos permite describir y analizar nuestro entorno (Díez, 2004), además, nos ayuda a estructurar nuestra experiencia del mundo, a articular imágenes e ideas sobre éste y ver las contradicciones en él (Jimeno, 2002). Algunas actividades que se realizan diariamente no serían posibles si no se tienen nociones de los principios y técnicas matemáticas, no sólo de las que se aprenden en la escuela sino también de aquellas que se aprenden en la vida cotidiana (Nunes y Bryant, 1997).

Dentro de una perspectiva histórica y contemporánea, Niss (1996, citado en Jimeno, 2002) expone tres razones para enseñar matemáticas, las dos primeras giran en torno a la sociedad dado que contribuirían al desarrollo socioeconómico y tecnológico de ésta, además, de favorecer su desarrollo y sostenimiento cultural, ideológico y político; mientras que la tercera implica al individuo, ya que las matemáticas pueden proporcionarle prerrequisitos que le permitan afrontar la vida en sus diferentes esferas (educativa, profesional, vida personal, etcétera).

Existe una dicotomía en torno a las matemáticas, por un lado se cree que son difíciles, que no “todos” pueden aprenderlas y por otra parte, existe una conciencia social sobre su importancia y utilidad. Considerando esto se esperaría que la educación matemática no sólo se centre en los contenidos matemáticos, sino en la utilidad de éstos y en el papel que juegan en la sociedad (Jimeno, 2002).

La meta fundamental de la educación matemática es desarrollar un pensamiento crítico y poder de actuación que permita modificar a la sociedad (Jimeno, 2002). Para alcanzar dicha meta hay que considerar, primero, el desmitificar las matemáticas, esto es, no sólo hacerlas accesibles a todos, sino que aquellos que han sido relegados descubran que pueden ser participes en la creación matemática y hacerlas suyas (Volmink, 1994 citado en Jimeno, 2002). Segundo, al enseñar matemáticas es de suma importancia considerar dos cosas, una de ellas es cómo aprenden los estudiantes todo lo relacionado con los números y las operaciones aritméticas y la otra es comprender cómo es que razonan matemáticamente de manera cada vez más compleja (Nunes y Bryant, 1997).

Nunes y Bryant (1997) mencionan que en el caso de los niños, la idea que tienen sobre las matemáticas así como la comprensión que tienen sobre éstas van surgiendo conforme crecen. Estos autores enfatizan que los niños son más que máquinas lógicas y receptoras de la enseñanza, es importante tomar en cuenta que adquieren las herramientas matemáticas principalmente por dos vías, una como resultado de aquello que se les enseña y la otra a través de experiencias informales (fuera de la escuela). También argumentan que sólo se puede pensar en términos matemáticos ayudándonos de conceptos que resulten significativos para cada uno de nosotros. En seguida se abordan algunas concepciones sobre la alfabetización matemática.

Alfabetización matemática

Dado que un objetivo que han perseguido diferentes sistemas educativos desde hace algunos años es lograr la alfabetización de los ciudadanos, saber leer y escribir se consideraba como un requisito mínimo e indispensable. Sin embargo, en la actualidad se necesitan algunas otras habilidades que tienen que ver con la llamada alfabetización numérica o matemática para conseguir desenvolverse en la sociedad (Jimeno, 2002). Dichos términos se definen a continuación: la alfabetización matemática o numérica, "se refieren a los requisitos mínimos en matemáticas que todo individuo debe adquirir para poder desenvolverse en la sociedad" (p. 26). En el informe Cockroft (1985, citado en Jimeno, 2002) se entiende por alfabetización numérica o alfabetización en matemáticas al dominio de dos atributos:

> …el primero de ellos es una familiaridad con los números y la capacidad de usar las destrezas matemáticas que permiten afrontar las exigencias matemáticas prácticas de la vida cotidiana. El segundo es cierta apreciación y comprensión de la información que se presenta en términos matemáticos, por ejemplo, en gráficos, mapas o tablas, o referencias al aumento o disminución de porcentajes (p. 26).

Considerando estos atributos, Jimeno (2002) señala que "una persona numéricamente competente (numerate), tendría que ser capaz de apreciar y comprender algunos usos de las matemáticas como medio de comunicación" (p. 26). Entonces, si el objetivo es que los estudiantes logren dicha competencia, habría que prestar atención a aspectos más amplios de las matemáticas no solamente al desarrollo de destrezas de cálculo (Cockroft, 1985 citado en Jimeno, 2002). La competencia numérica va más allá de lograr hacer operaciones aritméticas, Nunes y Bryant (1997) consideran que dicha competencia conlleva una serie de elementos:

> …tener aptitudes numéricas implica razonar matemáticamente las situaciones. Para razonar matemáticamente necesitamos conocer *sistemas matemáticos de representación* que podamos utilizar como herramientas. Estos sistemas deben tener significado, es decir, deben *relacionarse con situaciones* en las que puedan utilizarse. Y necesitamos poder comprender

> la lógica de estas situaciones, *las invariantes,* para poder elegir las formas apropiadas de las matemáticas. Por lo tanto, no basta con aprender procedimientos: es necesario convertirlos en herramientas del pensamiento (pp. 32-33).

En la comunidad científica internacional se ha pasado de utilizar el término de alfabetización numérica a utilizar alfabetización matemática*.* Esto se debe a que cada vez es más aceptado que saber matemáticas no hace referencia únicamente a los números o a la obtención de competencias elementales, sino que existen otros aspectos que también forman parte de ese “saber matemáticas” como la adquisición de una comprensión, de un uso y de una práctica crítica de las matemáticas en los diversos ámbitos de nuestras vidas; dado que incluso se pueden utilizar (de manera formal o no) para solucionar problemas o situaciones de la vida cotidiana (Díez, 2004).

Por las razones anteriores, Dingwall (2000, citado en Díez, 2004) considera de suma importancia:

> …desarrollar un conjunto de conocimientos (*knowledge*), habilidades (*skills*), estrategias y actitudes necesarias para resolver las situaciones matemáticas que se nos plantean en la vida cotidiana. En este sentido, señala tanto la necesidad de disponer de conocimientos matemáticos (*mathematical knowledge*)*,* como habilidades para resolver problemas (*problem-solving skills*)*,* habilidades de alfabetización (*literacy skills*) o creencias, actitudes y experiencia adquirida (*beliefs, attitudes and background experience*) (pp. 60-61).

Entonces, la alfabetización matemática no sólo hace referencia a los contenidos formales si no que también incluye elementos procedimentales y actitudinales (Díez, 2004). Por su parte Alcalá (2002, citado en Díez, 2004) explica:

> Las matemáticas… son un lenguaje diferenciado que tiene sus significados y su simbología y que sirve para comunicarnos entre nosotros, pero también es un método de resolución de problemas (a través de estrictas reglas lógico-deductivas). Una persona es alfabeta matemáticamente hablando cuando es capaz de utilizar ese lenguaje, con todas las dimensiones que contiene (p. 65).

A continuación se muestran los resultados obtenidos por estudiantes mexicanos de nivel Primaria en el área de Matemáticas, en el Segundo Estudio Regional Comparativo y Explicativo (SERCE).

Rendimiento académico de estudiantes mexicanos de tercer y sexto grado

Para fines de esta investigación se retoman sólo los resultados que obtuvo México en el área de Matemáticas en el Segundo Estudio Regional Comparativo y Explicativo (SERCE), éste es una evaluación del desempeño de estudiantes de tercero y sexto grado de primaria procedentes de 16 países de América Latina y el Caribe, en el estudio se evaluaron los aprendizajes en Lenguaje, Matemáticas y Ciencias.

El estudio se llevó a cabo en el año 2006, en México participaron en total 157 escuelas, donde se evaluaron 218 aulas de tercer grado con 4,753 estudiantes y de sexto grado 214 aulas con 4,825 estudiantes. La evaluación del área de Matemáticas estuvo conformada por los conocimientos y el uso o aplicación que los estudiantes hacen o pueden hacer de dichos conocimientos, para comprender e interpretar el mundo en una variedad de situaciones y contextos de la vida real (Valdés, Treviño, Acevedo, Castro, Carrillo, Costilla, Bogoya y Pardo, 2008). Esta área comprende dos dimensiones: a) los dominios conceptuales (conocimientos específicos de Matemáticas) y b) los procesos cognitivos (operaciones mentales que el estudiante realiza para establecer relaciones entre objetos, situaciones y fenómenos) (Díaz y Flores, 2008).

Retomando a Valdés et al. (2008) junto a Díaz y Flores (2008) en seguida se presentan los resultados obtenidos en el SERCE por los alumnos mexicanos de tercer y sexto grado de primaria en el área de Matemáticas. Los resultados se presentan de acuerdo con los siguientes puntos:

I. Medias de desempeño por país (dan cuenta de las posiciones de los países).
II. Niveles de desempeño (clasifican a los estudiantes de acuerdo a lo que son capaces de hacer).

III. Comparaciones de estudiantes en contextos urbano y rural, además, del rendimiento en Matemáticas por género.

IV. La relación entre los resultados de aprendizaje y el producto interno bruto percápita de cada país y la distribución del ingreso (usando el índice de Gini).

En cuanto a las medias de desempeño de los estudiantes de tercero y sexto grado de primaria, México obtuvo una puntuación media de 532 puntos y de 542 respectivamente –las puntuaciones medias de los países estaban concentradas respecto al *Promedio países* en 500 puntos, con una desviación estándar de 100– (Díaz y Flores, 2008).

Si bien estos datos permiten establecer en qué posición se ubica México, la información más relevante se encuentra en la distribución de los estudiantes en los Niveles de desempeño. El SERCE consideró cuatro niveles más el nivel identificado como por *debajo del nivel 1,* los estudiantes aquí clasificados no cuentan con las habilidades y conocimientos evaluados en el estudio (Díaz y Flores, 2008). En las tablas 1 y 2 se describen algunos de los conocimientos en Matemáticas que los alumnos deben dominar y que identifican a cada nivel para tercer y sexto grado de primaria.

Tabla 1. *Niveles de desempeño en Matemáticas para tercer grado de primaria*

Nivel	Descripción
Nivel 1	Reconocen la relación de orden entre números naturales. Interpretan tablas y gráficas para extraer información directa.
Nivel 2	Son capaces de reconocer la organización decimal y posicional del sistema de numeración. Resuelven problemas en el campo aditivo o que requieren una multiplicación con sentido de proporcionalidad en el campo de los números naturales.
Nivel 3	Resuelven problemas en el campo multiplicativo o que incluyen una ecuación aditiva o que requieren dos operaciones. Reconocen la regla de formación de una secuencia gráfica o numérica aditiva para poder continuarla.
Nivel 4	Reconocen la regla de formación de una secuencia numérica e identifican su enunciado. Resuelven situaciones problemáticas en el campo multiplicativo que involucran una incógnita en uno de los factores o que requieren aplicar equivalencia entre medidas usuales de longitud.

Tabla 2. *Niveles de desempeño en Matemáticas para sexto grado de primaria*

Nivel	Descripción
Nivel 1	Ordenan números naturales de hasta cinco cifras y expresiones decimales de hasta milésimos. Resuelven problemas que requieren una sola operación, en el campo aditivo y en el campo de los números naturales.
Nivel 2	Resuelven problemas referidos al campo aditivo, en diferentes campos numéricos incluidas fracciones en sus usos frecuentes o equivalencias de medidas. Resuelven problemas que requieren multiplicación o división, o dos operaciones con números naturales o que incluyen relaciones de proporcionalidad directa.
Nivel 3	Comparan fracciones, usan el concepto de porcentaje en el análisis de la información y en la resolución de problemas que requieren calcularlo. Resuelven problemas que involucran propiedades de los ángulos de triángulos y cuadriláteros, que integran áreas de diferentes figuras o dos operaciones entre números decimales.
Nivel 4	Encuentran promedios y resuelven cálculos, combinando las cuatro operaciones básicas en el campo de los números naturales. Resuelven problemas que involucran el concepto de fracción.

En México, el porcentaje de estudiantes de tercer grado por *debajo del nivel 1* no supera el 5% y para sexto de primaria es del 1%. En el Nivel 1 se encuentra el 29% de los estudiantes de tercero de primaria, en el Nivel 2 está el 31%; si bien más de un tercio se ubica en los Niveles 3 (20%) y 4 (16%), el Nivel 2 concentra la mayor proporción de estudiantes de tercero de primaria en México (Díaz y Flores, 2008).

Respecto a los estudiantes de sexto de primaria, un 8% está en el Nivel 1 mientras que en el Nivel 2 se ubica un 32%, Valdés et al. (2008) apuntan que México es uno de los países de América Latina y el Caribe que logró ubicar a más del 50% de sus estudiantes en los niveles superiores de desempeño (el Nivel 3 y 4 con un 39% y 20% respectivamente). Sin embargo, al analizar los niveles por separado, el Nivel 3 reúne el mayor porcentaje de los estudiantes evaluados (Díaz y Flores, 2008).

Otro de los factores que genera diferencias en el desempeño de los estudiantes es la ubicación de la escuela, en el caso de América Latina y el Caribe los estudiantes que cursan tercero y sexto grado en escuelas rurales obtienen desempeños más bajos que aquellos que asisten a escuelas situadas en zonas urbanas. Tal es el caso de México, el cual se ubicó entre los países con mayores disparidades urbano-rurales (Valdés et al., 2008).

También se analizaron las diferencias en el desempeño por género, en el caso de México, tanto en tercero como en sexto grado de primaria no se encontraron diferencias estadísticamente significativas entre las medias de desempeño de los niños y niñas (Díaz y Flores, 2008). Por último, en el cuarto análisis los resultados obtenidos en el SERCE muestran que cuanto más desigual económicamente es un país, menor es su rendimiento promedio, esto es, a mayor desigualdad de los países se encontraron resultados más bajos en la prueba de Matemáticas de tercer y sexto grado de primaria (Valdés et al., 2008). Entre los resultados obtenidos del SERCE se enlistan también los principales factores asociados al logro, mismos que se explican a continuación.

Factores asociados al logro

Dentro de las conclusiones expuestas en el SERCE, una de las más importantes son los factores que son decisivos e influyen en el rendimiento de los estudiantes. Entre estos se encuentra la escuela como un factor clave, a continuación se mencionan cuáles son las variables que lo conforman.

A partir de los resultados del SERCE, Valdés et al. (2008) y Treviño, Valdés, Castro, Costilla, Pardo y Donoso (2010) concluyen que en América Latina y el Caribe las variables asociadas a la escuela como el clima escolar, la segregación escolar y los recursos escolares contribuyen de manera significativa para disminuir las desigualdades de aprendizaje asociadas a disparidades sociales, en las siguientes líneas se retoma la breve semblanza que estos autores realizaron para cada una de estas variables.

En el Segundo Estudio Regional se encontró que el clima escolar es la variable que mayor influencia ejerce sobre el rendimiento de los estudiantes, esto concuerda con lo descubierto en el Primer Estudio Regional Comparativo y Explicativo (PERCE). Por ello es indispensable crear un ambiente de respeto, acogedor y positivo entre los estudiantes y el docente que permita promover el aprendizaje.

La segunda variable de mayor importancia es la segregación escolar por condiciones socioeconómicas y culturales de los estudiantes, se observó que es en el área de Lectura donde tiene mayor incidencia. Si bien no es una variable que competa al ámbito educativo, es importante considerar el hecho de que toda acción que permita disminuirla puede tener una repercusión importante en los logros y aprendizajes de los estudiantes.

La última variable son los recursos escolares, que implica diversos elementos como la infraestructura, los servicios básicos y materiales educativos que de forma conjunta contribuyen al rendimiento escolar y a la creación de oportunidades educativas para los estudiantes. Es importante entender que estos recursos por sí solos no son suficientes para el adecuado funcionamiento de las escuelas o incluso para promover el aprendizaje y mejorar el rendimiento académico, pues es necesario combinarlos de forma óptima con los procesos educativos y con productivas intervenciones pedagógicas.

Se han abordado a lo largo de este capítulo diversos tópicos referentes a las matemáticas, en algunos de ellos se enfatizan los motivos por lo que pueden resultar difíciles, la importancia que tienen en la vida de cada persona y el rendimiento académico de los estudiantes de tercer y sexto grado en esta área. Sin embargo, es en los primeros grados escolares donde los niños presentan ciertas dificultades que afectan su rendimiento escolar y por ello se les etiqueta con términos tales como "niños con dificultades de aprendizaje" o "niños con bajo rendimiento escolar" y siendo más específicos "niños con dificultades de aprendizaje en matemáticas".

Pero, ¿qué concepción, criterios o parámetros se utilizan para que tanto profesores, como padres de familia e incluso los especialistas lleguen a dicho diagnóstico o conclusión?, ¿cómo pueden intervenir los especialistas? y ¿cuáles son las repercusiones que trae a los niños ser catalogados de esta manera?; cuestionamientos de este tipo resultan relevantes porque de acuerdo a la manera de concebir dichas dificultades serán también los lineamientos a seguir para realizar una intervención adecuada.

Es por ello que a continuación se retoman algunas reflexiones elaboradas por Buenrostro (2013) acerca de las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas en los primeros grados escolares que permitirán dar respuesta a los cuestionamientos anteriores y obtener mayor claridad acerca de dichas dificultades. Al hablar de dificultades de aprendizaje valdría la pena dar una definición de éstas, Kirk (1962, citado en Buenrostro, 2013) considera a las dificultades de aprendizaje como “una alteración o retraso en el desarrollo en uno o más de los procesos del lenguaje, habla, deletreo, escritura, o aritmética que se produce por una disfunción cerebral y/o trastorno emocional o conductual y no por un retraso mental, deprivación sensorial o factores culturales o instruccionales” (p. 263).

En cuanto a las dificultades de aprendizaje en matemáticas, Geary (2004, citado en Buenrostro, 2013) indica que los niños con estas dificultades tienen un conocimiento inmaduro de los principios de conteo, utilizan estrategias elementales para resolver problemas semejantes a las empleadas por niños más pequeños y cometen un mayor número de errores de procedimiento, aunque esto mejora con el tiempo. Lo que les resulta más difícil de recuperar es el recuerdo de hechos numéricos almacenados en la memoria a largo plazo, estas dificultades están asociadas con el control de la atención, una deficiente inhibición de asociaciones irrelevantes y problemas en la representación y manipulación de la información en el sistema del lenguaje.

El primer punto que aborda el autor, es la existencia de un desacuerdo en la definición, clasificación, en los procedimientos de diagnóstico, evaluación y en la naturaleza de la instrucción impartida a los niños que son ubicados en la categoría dificultades de aprendizaje (Lyon et al., 2001 citados en Buenrostro, 2013). Puntualiza que esta situación se aplica también al terreno de las dificultades de aprendizaje en matemáticas, ya que es un campo complejo y da lugar a varias concepciones y prácticas que pueden complicar la vida escolar de los alumnos. Por ello, cree conveniente tener una visión amplia respecto a todos los enfoques que abordan dicha problemática y a partir de este conocimiento crear líneas de investigación y de intervención psicoeducativa que favorezcan el pensamiento numérico de los niños.

El segundo punto que revisa es cómo se concibe la categoría dificultades de aprendizaje en el ámbito educativo y cómo utilizan dicha terminología los profesores, los padres de familia, los especialistas (psicólogos y pedagogos) e incluso los mismos alumnos. Así mismo, advierte de las consecuencias que tiene sobre el aprendizaje y el auto concepto de los niños el catalogarlos como alumnos con problemas de aprendizaje.

La escuela se plantea expectativas sobre el rendimiento de los alumnos, expectativas que, de alguna u otra forma se transforman en exigencias. Entre estas expectativas se encuentran que los alumnos tanto en el salón de clases como en el hogar cumplan con las tareas asignadas por el profesor, además, que acrediten las evaluaciones parciales y que como resultado del trabajo realizado durante un año acrediten el grado escolar.

Pero, qué sucede con aquéllos alumnos que no cumplen con tales exigencias, estos se ven inmersos en lo que denomina como una cultura de *patologización del aprendizaje o del rendimiento escolar* en la que se ven involucradas etiquetas, prácticas y atribuciones que tienen consecuencias negativas en el aprendizaje de los estudiantes y dificultan su vida escolar. Señala que esta visión patologizante tiene componentes con los cuales se genera un cuerpo de creencias y prácticas que desvalorizan el aprendizaje de los alumnos, estos son: la imposición de etiquetas, los procesos de atribución del desempeño escolar, la transformación de las diferencias en desventajas y la uniformidad de los ritmos de aprendizaje. En seguida se describe brevemente en qué consiste cada componente:

a) La imposición de etiquetas. Aquí el profesor juzga que determinados comportamientos y aprendizajes del niño no se ajustan a las expectativas escolares y lo incluye en una categoría que puede ir desde dificultades de aprendizaje hasta un trastorno de déficit de atención, lo que equivale a imponerle una etiqueta. Esta asignación dependerá básicamente de la información que el maestro posea sobre estas categorías y la vigencia que en un momento determinado tenga una categoría o etiqueta. Estos diagnósticos en la mayoría de los casos, no son exclusivos del maestro sino que son compartidos por los padres, los alumnos y desafortunadamente por los niños etiquetados.

b) Los procesos de atribución del desempeño escolar. Estas etiquetas llevan irremediablemente a responsabilizar a los niños del bajo aprovechamiento escolar definido por el profesor. Las consecuencias de esta atribución influyen en la forma en que se vinculan los alumnos con diferentes aspectos de la enseñanza siendo palpables comportamientos de evitación hacia las actividades escolares, incluso de rechazo a la escuela y generalmente la percepción que tienen de sí mismos como aprendices está disminuida.

c) La transformación de las diferencias en desventajas. En el ámbito escolar las diferencias se convierten en desventajas, así que tener un ritmo diferente de aprendizaje conduce a estar en desventaja con todas las consecuencias que esto implica.

d) La uniformidad de los ritmos de aprendizaje. La escuela espera que los ritmos de aprendizaje de los alumnos sean uniformes, por lo que aquéllos que se rezagan o que tienen un ritmo diferente al de la mayoría de los niños son a los que se les imponen las etiquetas. Por tanto, se ven inmersos en un ambiente en el que su aprendizaje es considerado fuera de la norma.

El autor afirma que una vez identificados estos componentes es necesario contribuir a reducir sus consecuencias a través de acciones alternativas que ubiquen a los niños etiquetados en un lugar diferente al que se les ha impuesto. Para lograr dicho objetivo, es necesario tener cierta precaución al incluir a los alumnos en la categoría dificultades de aprendizaje, la recomendación es reservar el término para aquellas personas que rotundamente no responden a una intervención intensiva (Lyon et al., 2001 citados en Buenrostro, 2013). Por ello es conveniente reflexionar si a todos esos niños a los que se les ha etiquetado como alumnos con dificultades de aprendizaje se les ha proporcionado la instrucción adecuada para desarrollar su potencial de aprendizaje. En este sentido, el papel que pueden jugar los psicólogos educativos es determinante ya que se les coloca en la disyuntiva de avalar una visión patologizante o generar vías de comprensión diferentes, procedimientos de evaluación e intervención que incluyan la diversidad de factores que interactúan en los aprendizajes escolares.

Por último, en el tercer punto menciona las medidas que se deben tomar para evitar la trampa de la patologización de los aprendizajes escolares, puntualiza que es necesario adoptar una óptica que centre su atención en la comprensión de diferentes aspectos del pensamiento numérico de los niños, así como en enfoques y procedimientos de evaluación e intervención que favorezcan este pensamiento. Para lograrlo, sugiere tres directrices que configuran una aproximación para el trabajo con niños que, socialmente, han sido catalogados como alumnos con dificultades de aprendizaje en las matemáticas, éstas son:

1. Evitar caer en la patologización de los procesos de aprendizaje de estos niños. No realizar evaluaciones o diagnósticos que conduzcan a una etiqueta cuyo uso responsabilice al niño del supuesto bajo rendimiento escolar.

2. Proporcionar a los niños experiencias educativas que favorezcan su aprendizaje y no catalogarlos como alumnos con dificultades de aprendizaje hasta que no se hayan agotado todos los recursos disponibles. Dentro de este punto es importante la reconceptualización de los errores que cometen los niños al resolver algunas situaciones aritméticas y considerarlos como estrategias que fueron útiles en momentos y situaciones distintas. De la misma forma, las intervenciones para favorecer el pensamiento numérico de los niños deben centrarse en las fortalezas más que en las debilidades o supuestos déficits de los niños.

3. El estudio de las concepciones, creencias y estrategias que los niños se forman respecto a los números, junto con el análisis de las diferentes situaciones que tienen que resolver, son pieza fundamental en el diseño e implementación de experiencias educativas que favorecen su pensamiento numérico.

Como ya se ha mencionado existen diversas causas que impiden a los niños aprender con facilidad las matemáticas, entre ellas sobresale la faltad de una didáctica apropiada. Por ello, a continuación se exponen algunas recomendaciones extraídas del National Council of Teachers of Mathematics

(2000), de la Secretaria de Educación Pública (2004) y de Buenrostro (2012) las cuales buscan facilitar el aprendizaje de las matemáticas.

Las decisiones que toman los profesionales de la educación respecto al contenido y carácter de las matemáticas escolares son decisivas y acarrean importantes consecuencias tanto para los alumnos como para la sociedad misma. Considerando esto el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) en el año 2000 sugiere seis *principios* que constituyen una guía para la mejora continua de la educación matemática y de esta manera, otorgarles a los estudiantes una educación de calidad; a continuación se exponen brevemente estos *principios*:

- *Equidad.* Implica hacer modificaciones razonables y apropiadas e incluir contenidos desafiantes para que todos los estudiantes tengan acceso a las matemáticas.
- *Plan de estudios.* Un plan de estudios es más que una colección de actividades; éste debe ser coherente, eficaz y estructurado en todos los grados.
- *Enseñanza.* Para una enseñanza eficaz de las matemáticas es necesario entender primero qué es lo que los alumnos saben y necesitan aprender para después desafiarlos y apoyarlos para que lo aprendan bien.
- *Aprendizaje.* Los estudiantes deben aprender matemáticas comprendiendo y construyendo activamente nuevos conocimientos a partir de experiencias y conocimientos previos.
- *Evaluación.* La evaluación debe proporcionar información útil a los alumnos e informar y orientar a los profesores para tomar las decisiones pertinentes entorno a la instrucción.
- *Tecnología.* La tecnología es esencial en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; influye en lo que se enseña de las matemáticas y brinda opciones para mejorar el aprendizaje de los estudiantes.

Por otro lado, la Secretaria de Educación Pública (2004) sugiere algunas recomendaciones didácticas generales que promueven el aprendizaje matemático, el desarrollo de la capacidad de razonamiento de los alumnos, la construcción de conocimientos matemáticos y el fortalecimiento de estos; entre las recomendaciones se encuentran:

- Favorecer la evolución de los procedimientos utilizados inicialmente por los alumnos para después aproximarlos hacia los procedimientos convencionales de las matemáticas.
- Los problemas planteados deben permitir que los alumnos construyan sus conocimientos a través de la búsqueda de estrategias convencionales y no convencionales que los resuelvan.
- Los problemas deben representar un reto y la solución de las situaciones presentadas debe encontrarse en los conocimientos que los alumnos posean.
- Proponer problemas que tengan diferentes respuestas correctas y formular situaciones en los que las operaciones adquieran distintos significados.
- Proponer un programa de actividades en las que los alumnos resuelvan diferentes problemas (suma, resta, multiplicación o de reparto) que les permitan desarrollar su capacidad para explorar y comprender las relaciones entre los datos de un problema.
- Plantear situaciones problemáticas en las que el uso del material concreto tenga sentido, esto es que los alumnos lo vean como un recurso que les ayude a resolver el problema.
- Conforme los alumnos avancen en el proceso de aprendizaje, se puede retirar progresivamente el uso del material y entregarlo sólo para verificar los resultados.
- Es conveniente que sean los alumnos quienes reconozcan si el procedimiento que emplearon los llevó a la solución del problema, que verifiquen sus resultados y localicen el error, si es que lo hay.
- Aprovechar los juegos matemáticos, las situaciones problemáticas asociadas a la fantasía, a los animales y mascotas, a la literatura infantil, así como los problemas puramente numéricos o geométricos.
- Seleccionar juegos matemáticos que les permitan a los alumnos desarrollar habilidades y destrezas, construir y profundizar los conocimientos.

Respecto a este último punto, Buenrostro (2012) menciona que se puede aprovechar el ingrediente motivacional que poseen los juegos para favorecer diversas acciones que promuevan el pensamiento numérico. Por ejemplo, algunos juegos tienen un componente numérico intrínseco como el dominó, turista, la perinola, el juego del uno y otros más se pueden adaptar para favorecer alguna habilidad matemática (la oca, la lotería, serpientes y escaleras).

En este capítulo se expuso de manera breve la importancia que tiene el aprender matemáticas y la necesidad de una alfabetización matemática; además, se abordaron los resultados que obtuvo México en el SERCE, así como algunas consideraciones en torno a las dificultades de aprendizaje. En el siguiente capítulo se aborda la multiplicación, tema del área de las matemáticas que generalmente toma mayor relevancia en los primeros grados escolares.

2

MULTIPLICACIÓN

En este capítulo se abordan los principales conceptos que giran en torno a la multiplicación como operación aritmética, exponiendo las dos concepciones que generalmente se tienen sobre ésta; se describe en qué consisten sus propiedades y el papel que asumen el cero y el uno en esta operación.

Definición

Existen diversas concepciones del término multiplicación, entre las cuales sobresalen aquellas que la consideran como una adición sucesiva o como producto cartesiano. A continuación se presentan estas concepciones detalladamente.

Entre las concepciones que entienden a la multiplicación como una adición sucesiva se encuentran las siguientes: para Castro, Rico y Castro (1995) multiplicar es reiterar una cantidad en su nivel más intuitivo, ya que los dos términos del producto responden a contextos diferentes: uno es la cantidad que se repite (multiplicando) y el otro nos dice las veces que se repite la cantidad inicial (multiplicador). La multiplicación es una operación aritmética, multiplicar dos cantidades consiste en sumar reiteradamente la primera, tantas veces como indica la segunda. Por ejemplo, $4 \times 3 = 4 + 4 + 4$. Esta idea subyace a muchos de los modelos en los que se emplea material o representaciones gráficas.

Isoda y Olfos (2009) mencionan que en 1983 Freudenthal ya planteaba una distinción entre el modelo aditivo y multiplicativo, ellos explican detalladamente la diferencia entre estos modelos:

> El modelo aditivo es agregativo, incluyendo la repetición donde un número va al lado del otro como en las sumas sucesivas. Tareas como agregar y trasladar se vinculan con la adición y la sustracción. En el modelo aditivo todos son de una misma especie y no constituyen una combinación. El modelo multiplicativo es de interacción, un número en función de otro, “esto

según esto otro". La multiplicación modela situaciones de proporcionalidad, áreas y combinatoria, entre otras. Permite representar situaciones concretas y más abstractas como representaciones gráficas, arreglos bidimensionales de filas y columnas, diagramas de árbol, círculos concéntricos y diagonales paralelas (pp. 45-46).

Otra definición más amplia es la que se refiere a los números enteros en la que el producto $n \cdot x$ aparece como una adición reiterada: $nx = x + x + x ... + x.$ Nesher (1992, citado en Caballero, 2005) consideró que para evitar hablar de la regla "x por y" se debe enseñar la multiplicación como una suma repetida de tal forma que la multiplicación sería una operación unitaria y no binaria.

Aprender la multiplicación como una suma repetida es muy común, pues resulta ser una descripción familiar para quien está aprendiendo los pasos fundamentales de esta operación. Si en la vida cotidiana queremos saber cuántas flores hay en cinco floreros (ver figura 1), en primera instancia atendiendo la noción básica de la multiplicación (suma reiterada) es claro que trataremos de contar cada elemento de los cinco floreros, de esta manera se tiene que sumar cinco veces dos es decir $2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10$; para posteriormente representarlos así $2 \times 5 = 10$.

Figura 1. Multiplicación como suma reiterada.

A continuación se mencionan otras definiciones las cuales difieren de considerar a la multiplicación como una adición. Fernández (2007) menciona como una práctica común que la multiplicación se introduce didácticamente como una suma de sumandos iguales, sin embargo, hace hincapié en que una suma no es una multiplicación. De esta manera, mientras en las situaciones sumativas sólo aparece un conjunto (manzanas y manzanas, estanterías y estanterías), en las situaciones en que interviene la multiplicación aparecen dos conjuntos definidos claramente y con una relación constante (cajas y manzanas, estanterías y libros). Así, cuando se les enseña a los niños que sólo se pueden sumar cosas iguales aunque en la multiplicación aparezcan cosas diferentes se insiste en que se realice como una suma y se aplique para ambos casos un pensamiento aditivo aún en diferentes situaciones.

La multiplicación es interpretada por Holmes (1985, citado en Hernández y Soriano, 1997) de cuatro formas:

> 1) es la unión de colecciones equivalentes, 2) es una adición repetida, 3) es un producto cartesiano y 4) es una razón. Las dos primeras interpretaciones son las que se suelen acentuar en los cursos elementales. El producto cartesiano se trabaja más tarde. La razón aunque puede ser introducida en los años de los cursos elementales, sobre todo se trabaja en los cursos superiores (p. 77).

Siguiendo esta propuesta se comienza con la instrucción para la enseñanza-aprendizaje de la multiplicación orientando a los estudiantes al concepto de la multiplicación juntando colecciones de igual tamaño. Al inicio del estudio algunos niños son capaces de internalizar el concepto con situaciones significativas más que con la manipulación de símbolos. Aquellos niños que demuestren comprender que la multiplicación es la unión de colecciones de igual tamaño pueden hacer la generalización de hechos bajo la guía o incluso sin la ayuda del profesor (Holmes, 1985 citado en Hernández y Soriano, 1997).

Otra de las concepciones de la multiplicación, se define a partir de la teoría de los conjuntos, mediante el producto cartesiano, Peterson y Hashisaki (1969) lo mencionan de la siguiente manera:

> El producto cartesiano de los conjuntos *A* y *B* es el conjunto formado por todos los pares ordenados (*a, b*). De esta manera los elementos del producto cartesiano no son elementos de *A* ni elementos de *B* sino que más bien son pares ordenados donde el primer elemento del conjunto *A* se asocia con cada uno de los elementos del conjunto *B* (pp. 53-54).

Cuando se quiere conocer las distintas combinaciones que se pueden hacer con 2 blusas y 3 pantalones, primero puede formarse un conjunto de 2 blusas y otro de 3 pantalones y formar todos los pares ordenados de blusa y pantalón (ver figura 2), el total de pares ordenados dará el resultado del producto 2 × 3, este es un ejemplo de la representación mediante producto cartesiano de dos conjuntos (Castro et al., 1995).

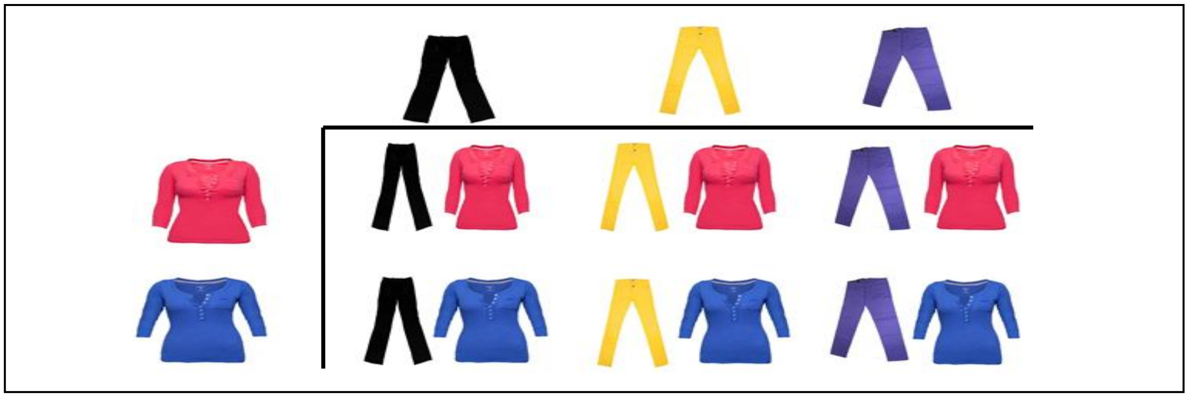


Figura 2. Representación del producto cartesiano.

Finalmente, la multiplicación es considerada una operación aritmética binaria ya que se efectúa entre dos números, a los cuales se les llama factores e individualmente multiplicando (número a sumar) y multiplicador (veces que se suma el multiplicando), el tercer factor llamado producto es el resultado de la multiplicación.

Propiedades de la multiplicación

Considerando que la multiplicación es una operación aritmética, ésta posee las siguientes propiedades: cerradura, conmutativa, asociativa y distributiva. Retomando a Peters y Schaaf (1972), Peterson y Hashisaki (1969) y Cedillo, Isoda, Chalini, Cruz y Vega (2012), se ofrece a continuación una breve descripción de cada una de éstas.

Propiedad de cerradura

Esta propiedad indica que al realizar una multiplicación entre dos números naturales (números enteros positivos) el resultado o producto siempre será un número natural. Por ejemplo, si tenemos 4 y 3 que son números naturales y realizamos 4 × 3 el resultado será 12, un número natural.

Lo anterior no se aplica en las operaciones de sustracción y división puesto que al efectuar dichas operaciones entre dos números naturales, no siempre obtenemos otro número natural. Así, por ejemplo, 3 - 8 = -5 y 5 ÷ 3 = 1.666666 por lo que el conjunto de números naturales es cerrado con respecto a la multiplicación.

Propiedad conmutativa

La propiedad conmutativa de la multiplicación indica que el orden en que se multiplican dos números naturales no cambiará el producto, por ejemplo, si se multiplica 2 × 5 se obtendrá el mismo resultado que al multiplicar 5 × 2, por lo que el producto para ambas será 10.

Esta propiedad se representa de la siguiente manera*: a • b = b • a* (Cedillo, Isoda, Chalini, Cruz y Vega, 2012) y puede resumirse con la siguiente consigna *el orden de los factores no altera el producto.*

Propiedad asociativa

Si se quisiera multiplicar 2, 3 y 5 se podría optar por cualquiera de las dos siguientes opciones: primero habría que multiplicar 2 y 3, después el resultado se multiplicaría por 5. Para facilitar la comprensión de esta propiedad se utiliza generalmente un paréntesis que indica el agrupamiento entre los números a multiplicar, entonces, el agrupamiento para esta operación es *(2 × 3) × 5* desarrollándolo se obtendría 2 × 3 = 6 × 5 = 30.

La segunda manera de obtener el mismo resultado es multiplicar por 2 el producto de 3 y 5, es decir, agrupando los factores de la siguiente forma *2 × (3 × 5)* obteniendo 2 × 15 = 30. Es evidente que los dos agrupamientos dan el mismo resultado, se realiza de esta manera dado que la multiplicación es una operación binaria (esto es, que se efectúa entre dos números).

Cedillo et al. (2012) representan esta propiedad de la siguiente manera: “a • (b • c) = (a • b) • c, cuando se multiplican tres o más números, el producto es el mismo sin importar como se agrupan los factores" (p. 71). Precisamente se le llama a esta propiedad asociativa dado que la palabra indica agrupamiento (Peters y Schaaf, 1972).

Propiedad distributiva

La propiedad distributiva es un puente que enlaza dos operaciones la suma y la multiplicación. Se puede ejemplificar de la siguiente manera, si se pidiera calcular el perímetro de un rectángulo como el que se muestra en la figura 3 se podría hacer de dos formas.

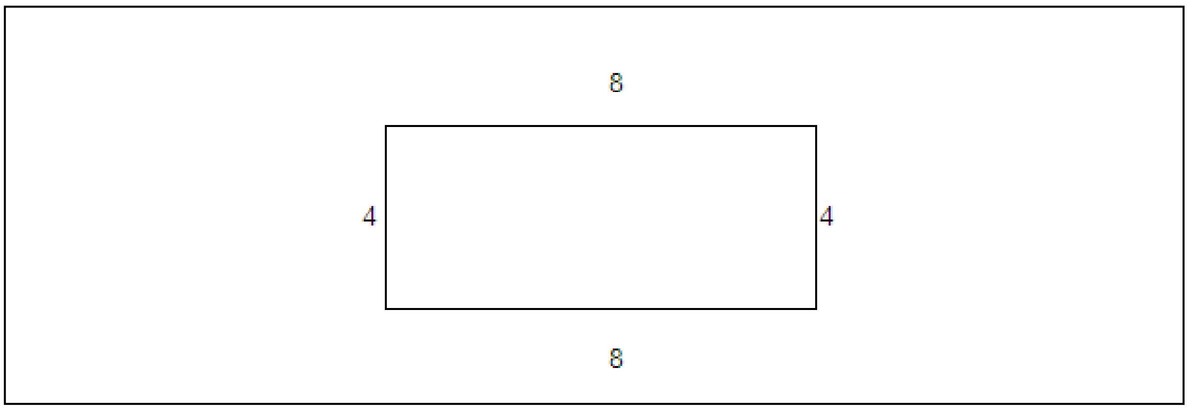


Figura 3. Representación de la propiedad distributiva.

Primero, la suma de 4 + 8 representa la mitad del perímetro, para calcularlo todo puede utilizarse la expresión 2 × (4 + 8). Por otra parte, dado que el perímetro de un rectángulo es la suma de dos largos y dos anchos, la segunda forma en que se puede calcular es con la expresión (2 × 4) + (2 × 8).

Los resultados de ambas expresiones deben ser iguales puesto que se mide el perímetro del mismo rectángulo, por tanto se tiene: *2 × (4 + 8) = (2 × 4) + (2 × 8)*. Donde 2 × (12) = 8 + 16 por lo que el producto en ambas expresiones es 24. Cedillo et al. (2012) representan esta propiedad así: "a • (b + c) = a • b + a • c, la suma de dos números por un tercero es igual a la suma de cada sumando por el tercer número" (p. 71).

Al igual que las propiedades, los números cero y uno juegan un papel importante dentro de las multiplicaciones. Cedillo et al. (2012) denominan al número 1 como elemento neutro de la multiplicación porque al multiplicar cualquier número natural *(a)* con 1 el producto es el mismo número natural *(a),* lo representan así: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, por ejemplo, en $1 \times 4 = 4 \times 1 = 4$.

Por otro lado, Peterson y Hashisaki (1969) consideran que el número 1 juega un papel especial como miembro de un sistema numérico. Se le llama *elemento idéntico multiplicativo*, ya que es aquel elemento del sistema que multiplicado por cualquier número da un resultado que es idéntico con dicho número.

En cuanto al papel del cero, Cedillo et al. (2012) lo expresan de la siguiente forma “todo número multiplicado por 0 da por resultado 0” (p. 71) por ejemplo: $0 \times 3 = 3 \times 0 = 0$. Por su parte, Guerrero y Camargo (2004) denominan como propiedad anulativa y modulativa al papel que juegan los números 0 y 1 respectivamente.

Una vez planteadas las diferentes concepciones que se tienen sobre la multiplicación y sus propiedades, en el siguiente capítulo se abordan los hechos numéricos profundizando especialmente en los hechos multiplicativos básicos.

3

HECHOS NUMÉRICOS

En este capítulo se abordan los hechos numéricos correspondientes a tres operaciones básicas: adición, sustracción y multiplicación. Se pone un énfasis especial en ésta última, también se mencionan las etapas por las que transitan los niños para dominar los hechos multiplicativos básicos así como las estrategias que utilizan para resolver estos hechos. Finalmente, se revisan diversas actividades que se han puesto en práctica para facilitar el aprendizaje y dominio de los hechos multiplicativos básicos.

Definición

Antes de comenzar con la definición de hechos numéricos es conveniente describir, de acuerdo con Castro et al. (1995) el proceso de aprendizaje de las operaciones aritméticas y el papel que en éste juegan los hechos numéricos. Estos autores distinguen seis etapas, las cuales se describen a continuación poniendo especial atención en la etapa de los hechos numéricos, que es el tema que nos ocupa en este capítulo.

La primera etapa que da inicio al proceso de aprendizaje es denominada por los autores como *acciones* que son consideradas junto con las transformaciones (como agregar, separar, reiterar y determinar las veces que uno abarca al otro, entre algunas más) ambas tienen lugar en diferentes contextos numéricos ya sea de cantidad, de orden o medida. En esta etapa es primordial considerar aquellos contextos que presenten rasgos comunes pues serán éstos los que permitirán dar paso a un concepto operatorio (Castro et al., 1995, p. 18).

La segunda etapa se caracteriza por el *uso de modelos, "un modelo es una esquematización abstracta de la realidad*" (Castro y Castro, 1997, p. 12) el cual nos permite describir las relaciones de un hecho o un fenómeno. En el caso de las operaciones aritméticas cada operación tiene sus propios modelos en forma de esquemas o materiales estructurados. Los modelos surgen al abstraer las diferentes relaciones y transformaciones que ocurren en los contextos numéricos y permiten mostrar la particularidad de cada operación.

La *simbolización*, como tercera etapa del aprendizaje presenta como rasgo característico la expresión o notación simbólica de la operación aritmética (composiciones, desarrollos, sentencias abiertas, sucesor, anterior, mayor que y menor que). Esta notación representa todos los posibles modelos y situaciones en los que se pueden involucrar los elementos. Los símbolos matemáticos permiten generalizar ideas y éstas a su vez aplicarlas a diferentes situaciones facilitando la trasferencia del aprendizaje (Castro y Castro, 1997). Por lo que es en esta etapa donde se estudia la red completa de relaciones en que pueden verse implicados los números.

En el caso de la cuarta etapa designada *Hechos numéricos y tablas,* se da el aprendizaje ya sea memorístico o no de los hechos numéricos que son básicos en cada operación, por ejemplo, en el caso de 5 × 2 el hecho numérico es conocer que el resultado es 10. Para obtener el resultado se utilizan algunas destrezas básicas las cuales pueden ser descubiertas, inventadas o utilizadas junto con la memorización de algunos hechos básicos. Para lograr la memorización de estos hechos comúnmente se utiliza como una herramienta útil las *tablas* de cada operación aunque hay que considerar que no siempre es posible aprender todos los hechos que ahí aparecen.

En la quinta etapa denominada *algoritmo*, se da la adquisición del mismo, el cual corresponde a cada operación y que es posible al conjugar el conocimiento de los hechos numéricos, el empleo de algunas destrezas y reglas básicas que permitan calcular el resultado de una operación. La utilidad del algoritmo al realizar una operación radica en la simplificación que se hace de ésta en casos donde la operación es compleja, gracias a las propiedades que lo caracterizan: a) nitidez, la cual implica que la realización del algoritmo se transforma en un proceso mecánico; b) eficacia, que lleva a los resultados deseados mediante un número limitado de pasos simples y c) universalidad, la cual indica que el mismo algoritmo se aplica a situaciones de una misma clase.

Para finalizar, la sexta etapa es la *aplicación de las operaciones a la resolución de problemas,* Castro et al. (1995, p. 20) insisten que el colocar a los problemas como última etapa en el proceso de aprendizaje no necesariamente implica que los estudiantes no puedan resolver problemas sin que hayan pasado por las etapas ya descritas, pues incluso pueden utilizarse desde la primera etapa.

Una vez que ya se conocen las etapas que intervienen en el proceso de aprendizaje de las operaciones, a continuación, se presenta la definición de los hechos numéricos considerados como básicos. Los llamados hechos numéricos básicos se presentan cuando "el sujeto prescinde del conteo o recuento verbal para apelar a la recuperación de cálculos almacenados en su memoria a largo plazo" (Balbi y Dansilio, 2010, p. 8).

El Ministry of Education (2006) menciona que los cálculos realizados con un sólo dígito suelen ser denominados como "hechos básicos", en los que se incluyen la adición, sustracción, multiplicación y división de números del 0 al 9. Sin embargo, algunos autores (Kilpatrick, Swafford y Findell, 2001 citados en Ministry of Education, 2006) también denominan a estos hechos básicos como combinaciones numéricas básicas.

Finalmente, un hecho numérico es considerado como el resultado de cierta operación sin la necesidad de recurrir a alguna estrategia para solucionarlo, es decir cuando éste se obtiene de manera automática. En seguida se abordan los hechos aditivos y multiplicativos básicos.

Hechos aditivos y multiplicativos básicos

La suma y la resta sobresalen como las representantes más sencillas de la estructura aditiva, su desarrollo abarca desde la transición de los recuentos informales así como las estrategias que los niños utilizan al margen de su instrucción hasta finalmente, utilizar los hechos numéricos básicos junto con los algoritmos de la adición y la sustracción (Castro et al., 1995).

Maza (1989) afirma que la suma y la resta son definidas como operaciones, esto es, acciones que permiten transformar numéricamente unas cantidades en otras. La suma como operación aritmética generalmente se entiende como "la acción por la cual se parte de… [dos] cantidades simultáneamente y [éstas] se 'reúnen' formando una cantidad mayor que las dos originales" (p. 9). También señala que es común que en la escuela a la suma se le interprete auxiliándose del verbo "añadir".

En el caso de la resta, se le considera como la operación inversa de la adición, sin embargo, no se puede reducir únicamente a dicha implicación, ya que con esta operación se pueden resolver tres tipos de situaciones: la primera es la situación de "quitar", la segunda implica buscar un complemento y la tercera consiste en comparar dos magnitudes (Holmes, 1985 citado en Hernández y Soriano, 1997).

El aprendizaje de la suma y la resta, según Maza (1989) implica lograr dos objetivos, el primero de ellos es entender estas operaciones como objetos de conocimiento, puesto que su estructura conceptual integra acciones de la vida cotidiana. El segundo objetivo es considerarlas como instrumentos de transformación de la realidad, a través de la resolución de situaciones problemáticas utilizando sumas y restas elementales (hechos aditivos básicos) así como el uso de algoritmos propios de estas operaciones.

Este apartado se enfoca particularmente en los hechos aditivos por lo que es necesario conocer su definición. Maza (1989) define a los hechos numéricos, como "la relación existente entre ternas de números, dos de los cuales se suman o restan y no sobrepasan el nueve" (p. 21), generalmente el procedimiento que se utiliza para el aprendizaje de estos hechos ha sido la memorización.

Para Castro et al. (1995) las relaciones que se establecen entre sumandos de 0 a 9 son considerados hechos numéricos de la adición. En el caso de la sustracción aparecen como datos básicos las restas desde 9 - 9 hasta 0 - 0. Estas relaciones entre los números se profundizan generalmente en la tercera etapa del aprendizaje de las operaciones, la cual ya ha sido descrita, por lo que únicamente se mencionarán cuáles son las relaciones, mismas que se abordan a través de expresiones simbólicas, la primera de ellas son las composiciones del número (por ejemplo, para el número 5, estas son sus composiciones: 0 + 5 = 5, 1 + 4 = 5, 2 + 3 = 5, 3 + 2 = 5, 4 + 1 = 5, 5 + 0 = 5 y 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5), la segunda son los desarrollos del número, que tiene gran relevancia pues es aquí donde se da un primer paso para la inversión o reversibilidad de las operaciones (por ejemplo, si 1 + 4 = 5 resulta que 5 = 4 + 1), la tercera son las sentencias abiertas, así en este caso se necesita conocer todas aquellas que tengan por resultado 5, o el número que se quiera abordar (por ejemplo, para 5, las sentencias implican: 3 + ? = 5, ? + 2 = 5 y 2 + 3 = ?), existen otro tipo de relaciones que también deben estudiarse como son el caso de los llamados sucesores (3 + 1 = 4, por eso 4 es el sucesor a 3), los anteriores (5 – 1 = 4, por eso 4 es el anterior a 5) por último los mayor y menor que, por ejemplo, 4 es mayor que 0, 1, 2, 3 y menor que 5, 6, 7 (Castro et al., 1995).

Por su parte O'Connell y SanGiovanni (2011a) señalan que las operaciones con sumandos de 0 a 10 son consideradas como hechos básicos. Debido al énfasis en que los estudiantes usen diversas estrategias para aprender los hechos básicos, es que los autores han incluido el 10 como un sumando. Así, al sumar 9 + 7, un estudiante puede razonar que 10 + 7 = 17, así que 9 + 7 es 1 menos, por lo que el resultado es 16. Este razonamiento no sería posible sin la comprensión del 10 como un sumando.

Como parte de los procedimientos que utilizan los niños para resolver problemas verbales tanto de adición como de sustracción, Carpenter y Moser (1982, citados en Díaz y Bermejo, 2007) mencionan tres tipos de estrategias: *modelado directo*, *conteo* y *hechos numéricos*. La estrategia de hechos numéricos puede ser de dos tipos, el primero son los denominados hechos numéricos conocidos, aquí el niño recuerda el resultado de la adición o sustracción de dos números y el segundo tipo son los llamados hechos numéricos derivados, donde el niño recurre a procedimientos de composición y descomposición para obtener el resultado (Díaz y Bermejo, 2007).

Para enseñar los hechos aditivos básicos existen diversas estrategias, sin embargo, regularmente se construyen tablas para aprenderlos y memorizarlos. Castro et al. (1995) mencionan que en estas tablas los hechos aditivos se disponen en un cuadro de doble entrada en donde tanto las filas como las columnas vienen señaladas de 0 a 9 y en el cruce de cada fila se encuentra el resultado de sumar los dígitos correspondientes. Estas tablas permiten conocer el resultado de una suma donde los sumandos sean menores que 10, esto es aquellos hechos que van desde 0 + 0 hasta 9 + 9. A la memorización de estos resultados los autores le llaman el "aprendizaje de la tabla de sumar", en casos donde los sumandos sean mayores que 10 se utiliza el algoritmo de esta operación.

Los autores aplican el mismo procedimiento para la resta, en la tabla de esta operación se consideran los hechos que van desde 9 - 9 a 0 - 0, no se incluyen aquellos casos en los que el minuendo sería menor que el sustraendo. Finalmente, Castro et al. (1995) hacen énfasis en que cada número debe aparecer como un sistema integrado de relaciones y no como algo puramente estático, conocer 5 implica saber que 5 = 4 + 1, 3 + 2, 9 - 4, etc. De esta manera, el estudio de la adición y sustracción se realiza de modo integrado.

Una vez que se han definido los hechos aditivos se continuará con los hechos multiplicativos básicos. De acuerdo con Maza (1991b) uno de los objetivos en la enseñanza de la multiplicación es el aprendizaje y memorización de los hechos multiplicativos básicos. Estos hechos son fundamentales para el desarrollo numérico posterior del estudiante, como por ejemplo, al utilizar el algoritmo e incluso después en todos los conceptos relacionados con la multiplicación (Maza, 1991a). Este autor entiende "por tales hechos las multiplicaciones entre números [factores] del 1 al 10" (p. 69).

Algunos autores como O'Connell y SanGiovanni (2011b) incluyen los valores de 0 y 10, para ellos los cálculos con factores de 0 a 10 son considerados como hechos básicos. Esto es, debido a la importancia de las multiplicaciones ×10, ya que su comprensión proporciona un punto de referencia importante para conocer las multiplicaciones ×5, o podría sugerir una estrategia para determinar las multiplicaciones ×9. La inclusión de las multiplicaciones de ×0 y ×10 se basa en proporcionar una comprensión sólida de los números como base del estudio de los hechos básicos.

Al igual que para los hechos aditivos, el procedimiento comúnmente asociado para aprender los hechos multiplicativos básicos ha sido la memorización, sin embargo, no es el único por lo que en un apartado posterior se presentan algunas actividades alternativas para lograr el dominio de estos hechos.

Ya que se han definido los hechos numéricos básicos, los hechos aditivos y multiplicativos, a continuación se mencionan las etapas –desde la perspectiva de Crawford (2007), Baroody (2006), Baroody, Bajwa y Eiland (2009)– por la que los niños pasan para aprender estos hechos.

Etapas para dominar los hechos básicos

De acuerdo con Baroody (2006), Baroody, Bajwa y Eiland (2009) y Crawford (2007) los niños generalmente progresan a través de tres etapas para dominar los hechos básicos. Según estos autores cada etapa presenta ciertos rasgos distintivos, por lo que es necesario describir en qué consiste cada una de ellas.

Etapa 1 Estrategias de conteo

En esta etapa los niños utilizan objetos para contar (por ejemplo, bloques, dedos, marcas) o conteo verbal para determinar las respuestas.

Crawford (2007) llama a esta primera etapa como “calculando los hechos básicos”, también ha sido caracterizada por ser una etapa de “comprensión”, “conceptual” o de “procedimiento” ya que en esta etapa los niños utilizan el conteo, o el conocimiento procedimental para calcular los hechos básicos. De esta manera, para calcular hechos simples los estudiantes deben haber dominado ya un procedimiento, Garnett (1992, citado en Crawford, 2007) menciona que éste puede ser a través del conteo, de adiciones sucesivas o algún otro procedimiento para calcular la respuesta a un hecho. Así mismo, se recomienda que los estudiantes desarrollen una comprensión conceptual o conocimiento de los procedimientos de conteo antes de proceder a la automaticidad.

Etapa 2 Estrategias de razonamiento

En ésta se utiliza la información conocida (por ejemplo, hechos conocidos y relaciones) para determinar lógicamente, es decir, deducir la respuesta de un hecho desconocido.

La característica principal de las estrategias de conteo (etapa 1) y de las estrategias de razonamiento (etapa 2) es que éstas son conscientes o deliberadas por lo que los procesos cognitivos son relativamente lentos. Es generalmente a través de la práctica que la mayoría de las estrategias de razonamiento (ideadas en la etapa 2) se convierten en semiautomáticas o automáticas.

Crawford (2007) señala que en la segunda etapa los niños utilizan estrategias para recordar los hechos básicos, las cuales pueden incluir pares de hechos relacionados (por ejemplo, para 5 + 6, pensando que 5 + 5 = 10, entonces, 5 + 6 = 11), la propiedad conmutativa (8 × 5 = 5 × 8 = 40) y también pueden incluir a las familias de hechos tales como: 2 + 3 = 5, 3 + 2 = 5, 5 – 2 = 3, 5 -2 = 3. Esta etapa consiste básicamente en el desarrollo de formas de "recordar" los hechos básicos a través de las relaciones con hechos conocidos, por lo tanto el objetivo a lograr es el desarrollo de precisión (exactitud) más que la fluidez o automaticidad, mientras los alumnos sean exactos en sus respuestas la estrategia se considera un éxito, ya que en esta etapa no es relevante la “velocidad” con que se responda y por lo tanto no se tienen expectativas respecto a un rendimiento altamente fluido.

En esta etapa los estudiantes exitosos regularmente aciertan pronto sobre una estrategia para recordar los hechos simples, mientras los estudiantes menos exitosos carecen de dicha estrategia y simplemente pueden adivinar (Thorton, 1978; Carnine y Stein, 1981 citados en Crawford, 2007). Al parecer cualquier estrategia que permita al niño recordar la respuesta correcta asegura que la práctica será una "práctica perfecta" que permitirá optimizar el aprendizaje, por ejemplo, enseñar a los estudiantes los hechos en un orden lógico que haga hincapié en las relaciones permitirá que sean más fáciles de recordar (Crawford, 2007).

Las investigaciones han encontrado repetidamente que la enseñanza de una serie de hechos relacionados cuyas respuestas se pueden derivar de una regla de algún tipo son “aprendidos” con mayor rapidez que los hechos seleccionados y presentados al azar (Carnine y Stein, 1981; Van Houten, 1993 citados en Crawford, 2007). Así mismo, se señala que ayudar a los estudiantes a desarrollar estrategias de pensamiento es un paso importante entre el desarrollo de conceptos –con materiales manipulativos e imágenes– y el dominio de los hechos –con actividades como ejercicios y prácticas– (Suydam, 1984 citado en Crawford, 2007). Lo que implica la necesidad de añadir la práctica de actividades (después de la enseñanza de estrategias de pensamiento) con el objetivo de desarrollar la recuperación automática y directa de los hechos.

Etapa 3 Dominio

Esta etapa es definida como la producción eficiente -rápida y exacta- de respuestas a partir de una red de memoria. Una de las características principales de la etapa 3, es que es automática por lo que no es consciente, debido a ello los procesos cognitivos son relativamente rápidos. Al ser automática se puede aplicar con rapidez, eficacia y sin deliberación.

Crawford (2007) señala que la tercera etapa del aprendizaje de los hechos básicos es llamada como dominio o desarrollo de la automaticidad y es donde tiene lugar el "conocer" o la recuperación directa de los hechos básicos (conocimiento declarativo), por lo que en esta etapa los niños desarrollan la capacidad de simplemente recordar las respuestas a los hechos sin recurrir a nada más que la recuperación directa de la respuesta. Stein, Silbert y Carnine (1997, citados en Crawford, 2007, p. 17) consideran al "dominio de un hecho básico como la capacidad de los estudiantes para responder inmediatamente al preguntar un hecho". Un componente esencial de la automaticidad de los hechos matemáticos es que la respuesta debe venir por recuperación directa, en lugar de seguir un procedimiento, por lo que uno de los rasgos que más destacan en el desarrollo de la automaticidad es la velocidad de procesamiento (Crawford, 2007).

Para lograr esta última etapa Baroody et al. (2009) mencionan dos posibles alternativas: por un lado la enseñanza tradicional (que sigue las directrices de la perspectiva de almacenamiento pasivo) la cual pone énfasis en memorizar numerosos hechos "aislados" sólo por repetición, sin embargo, esto supone a los niños un reto difícil causando que renuncien a lograr el dominio de los hechos básicos o que olviden y confundan la mayoría de los hechos que aprenden. Este tipo de enseñanza promueve un "conocimiento rutinario" (*routine expertise*) el cual puede ser aplicado de manera eficiente y adecuado a tareas familiares o habituales pero no puede ser aplicado de manera flexible a tareas nuevas, por lo que se logra un *dominio con fluidez limitada*, además, dificulta el dominio de los hechos básicos y desanima a los estudiantes a buscar patrones y relaciones necesarios para lograr un rico sentido numérico y el dominio con fluidez.

La segunda alternativa es a través de la memorización significativa. Ésta proporciona una rica e interrelacionada red de conocimiento factual, estratégico (procesal) y conceptual la cual produce un “conocimiento adaptable” (a*daptive expertise),* conocimiento que una vez comprendido se puede aplicar de manera eficiente –con precisión y rapidez–, apropiada –de forma reflexiva tanto en tareas familiares como en tareas nuevas o desconocidas– y con flexibilidad –con inventiva en situaciones nuevas–; logrando así un *dominio con fluidez* (Baroody, 2006). Es por ello que se debe promover la memorización significativa de los hechos básicos que implica descubrir patrones o relaciones, permitiendo reducir la cantidad de tiempo y práctica necesarios para lograr el dominio, esto mantendrá la eficiencia al reducir el olvido y los errores en la recuperación que además, facilitará la aplicación de conocimientos existentes a hechos desconocidos o que aún no se han practicado (Baroody, 1985; Carpenter et al., 1989 citados en Baroody et al., 2009).

Por su parte Crawford (2007) a través de una revisión sobre las investigaciones acerca de la tercera etapa del aprendizaje de los hechos básicos, encontró que éstas coinciden en que la automaticidad se logra cuando los estudiantes pueden contestar los hechos matemáticos sin vacilación o con no más de un segundo de retraso. Además, notó que coinciden en algunos puntos, entre ellos que para que los estudiantes desarrollen la automaticidad requieren de un tipo de práctica particular, aquella centrada en pequeños conjuntos de hechos realizada bajo tiempos de respuesta limitados donde la atención se centre en recordar la respuesta rápidamente en lugar de averiguarla. Y que la introducción de hechos nuevos o adicionales debe ser retenida hasta que los alumnos puedan demostrar la automaticidad con todos los hechos presentados previamente.

Existen dos perspectivas bajo las cuales las etapas anteriormente descritas adquieren mayor o menor relevancia, la primera es la perspectiva de almacenamiento pasivo y la segunda es la perspectiva de sentido numérico. Es por ello que se expondrán a continuación algunos puntos relevantes partiendo del análisis llevado a cabo por Baroody (2006) y Baroody et al. (2009) acerca de las etapas para lograr el dominio los hechos básicos.

La perspectiva de almacenamiento pasivo considera que la etapa 3 consiste en un sólo proceso, esto es, recordar un hecho lo que implica la recuperación automática de una respuesta asociada a una expresión. De esta manera, la etapa 3 viene a reemplazar a las “ineficientes” estrategias conceptuales basadas en el conteo o razonamiento (etapas 1 y 2), a las que se les considera como innecesarias para lograr el dominio, pues éste se puede obtener a través de ejercicios y prácticas extensas sin necesidad de pasar por las otras etapas lográndolo en un tiempo relativamente corto.

Utilizando un enfoque basado en esta perspectiva se puede ayudar a los niños a alcanzar el dominio de los hechos numéricos básicos pero sólo con un considerable esfuerzo y dificultad. Por otra parte, este enfoque puede ayudar a los niños a lograr la eficacia, pero no otros aspectos del dominio con fluidez como los son una aplicación adecuada y flexible, o incluso algunos aspectos de la competencia matemática que incluyen la comprensión conceptual –búsqueda de modelos y relaciones–, pensamiento matemático estratégico –esfuerzos para razonar las respuestas–, una productiva disposición hacia el aprendizaje y uso de las matemáticas. Incluso es probable que siguiendo este tipo de enfoque se cree inflexibilidad y ansiedad hacia las matemáticas.

Por otro lado la perspectiva de sentido numérico considera que las etapas 1 y 2 son esenciales para cimentar las bases conceptuales, (que implican el descubrimiento de patrones y relaciones) ya que proporcionan estrategias de razonamiento creando así una rica red de conocimiento factual, relacional y estratégico que subyace al logro del dominio con fluidez de los hechos básicos en la etapa 3 (Baroody, 2006 y Baroody et al., 2009). Por lo tanto, el dominio con fluidez surge del desarrollo de sentido numérico, definido como los conocimientos significativos e interrelacionados que se tienen acerca de los números.

La construcción de una estructura de sentido numérico (significativa e interrelacionada), es un proceso complejo y a largo plazo que en el fondo, requiere la búsqueda de patrones y relaciones. Por lo que no es posible asegurar que el dominio de los hechos básicos se logre en un tiempo relativamente corto, dado que intervienen otras variables como por ejemplo, el desarrollo del niño (conocimiento formal e informal).

Ya que el sentido numérico no es algo que los adultos puedan imponer fácilmente, los niños suelen adoptar estrategias más eficaces conforme su sentido numérico se amplía o cuando tienen una necesidad real de hacerlo (Baroody, 2006). Una opción para lograrlo podría ser a través de una instrucción directa y eficaz, esto es, siempre y cuando el niño esté listo en su desarrollo, sea receptivo o cuando la instrucción directa sea clara y basada en lo que el niño sabe.

Si se utiliza la instrucción directa sin tomar en cuenta estas recomendaciones y se trata de modelar estrategias de razonamiento o lograr el dominio de los hechos básicos, puede resultar contraproducente, porque los niños no entienden la lógica del procedimiento impuesto y por lo tanto no suelen tener éxito (Baroody et al., 2009). Por ello es importante ayudar a los niños a construir de forma gradual nuevas reglas o nociones tales como la composición y la descomposición (Baroody, 2006).

Cabe mencionar que si en la enseñanza se usan directrices significativas, basadas en el descubrimiento y utilizando un enfoque con propósito puede ayudar a los estudiantes a alcanzar algunos aspectos de la competencia matemática. Además, se tiene una mayor posibilidad de adquirir el dominio con fluidez de los hechos numéricos básicos, que permitirá a los niños tener la capacidad de utilizar este conocimiento básico de manera eficiente, apropiada y con flexibilidad.

Existen diversas explicaciones acerca de por qué los niños tienen dificultades para dominar los hechos básicos, sin embargo, sólo se abordarán las que son mencionadas por la perspectiva de almacenamiento pasivo y la perspectiva de sentido numérico.

Baroody et al. (2009) señalan que las dificultades en la memorización de los hechos numéricos básicos tienden a ser más agudas entre niños en situación de riesgo por bajo rendimiento en matemáticas (los indicadores de riesgo son los bajos ingresos económicos, nivel educativo, padres adolescentes, condición de minoría, una discapacidad física o dificultades emocionales), o en niños que ya presentan dificultades matemáticas (como la incapacidad de aplicar o transferir incluso de forma moderada el conocimiento existente a nuevas tareas o problemas, la falta de memoria y confusión).

La perspectiva de almacenamiento pasivo señala que las dificultades de aprendizaje se presentan por una práctica inadecuada o en los casos en que se les proporciona a los niños una práctica adecuada y ésta no funciona entonces, puede deberse a que el alumno presenta algunas deficiencias cognitivas o retrasos (velocidad de procesamiento lento, déficits en la memoria de trabajo, déficit en el desarrollo neurológico, etc.). Si bien es cierto algunos niños presentan dificultades con las matemáticas por estas deficiencias cognitivas, muchos otros tienen dificultades debido a que no tienen la oportunidad de desarrollar un rico sentido numérico (Baroody, 1996 citado en Baroody et al., 2009) lo cual sucede en gran parte por una enseñanza inadecuada (Baroody, 2006).

La perspectiva de sentido numérico argumenta a favor de esto último, ya que consideran que los rasgos comúnmente asociados a niños con dificultades en matemáticas son generalmente el subproducto de un débil sentido numérico y de un conocimiento rutinario (*routine expertise*) (Baroody et al., 2009). Por lo que básicamente los niños tienen dificultades para dominar los hechos básicos por dos razones: la primera es que, a diferencia de sus pares más exitosos, los niños con dificultades carecen de un adecuado conocimiento informal, que es una base fundamental para conseguir con éxito la comprensión y aprendizaje de las matemáticas formales, para diseñar estrategias de resolución de problemas y de razonamiento eficaces. La segunda razón es que el enfoque tradicional fomenta una enseñanza ineficaz en la escuela (conocimiento formal) al hacer que el aprendizaje de los hechos numéricos básicos sea excesivamente difícil lo cual puede provocar ansiedad en los niños.

Seguir un enfoque tradicional altera el dominio con fluidez y genera ineficiencia, aplicaciones inapropiadas y falta de flexibilidad; respecto a la primera al ser los hechos individuales más difíciles de recordar que los interrelacionados, los niños olvidan la mayoría de los hechos o algunos no comprenden ciertas reglas o nociones impuestas por el profesor viéndose obligados a depender de estrategias informales (de conteo) utilizándolas de forma furtiva y rápida, por lo que son propensos a errores.

En la segunda cuando los niños se centran exclusivamente en la memorización de los hechos básicos por repetición son más propensos a aplicar de forma inadecuada este conocimiento debido a que no le dan un sentido a las matemáticas escolares ni tratan de relacionarlas con conocimientos existentes, perdiendo de esta forma la oportunidad de comprobar por ellos mismos que los resultados son aplicables a su vida diaria. Finalmente, la tercera si no se enseña o ánima a los niños a construir conceptos y a buscar patrones o relaciones, se tienen menos probabilidades de ingeniar estrategias de razonamiento por lo tanto seguirán confiando en estrategias de conteo.

Para evitar algunas de estas situaciones Baroody (2006) recomienda que los niños construyan un sentido numérico, por lo que se les debe motivar a inventar, compartir o mejorar las estrategias informales; se debe, así mismo, promover la memorización significativa o dominio de los hechos básicos motivando a los niños a centrarse en la búsqueda de patrones y relaciones, para permitirles construir estrategias de razonamiento que puedan compartir, comprobar, cuestionar y proporcionándoles a su vez un mayor sentido numérico.

Según el autor, es importante invitar a los niños a construir sobre conocimientos previos, por ejemplo, relacionando hechos nuevos (desconocidos) con hechos aprendidos previamente, esto ayudará a reducir la práctica necesaria para dominar los hechos básicos; la práctica es importante, si se utiliza sabiamente y debe ser una gran oportunidad para descubrir patrones y relaciones. Por lo tanto se tendrá que centrar en que las estrategias de razonamiento se vuelvan automáticas, siempre y cuando el niño haya descubierto y comprendido los patrones y relaciones.

Sin lugar a duda la práctica juega un papel muy importante ya que promueve el dominio de los hechos, pero esto no significa que sea el factor clave o incluso el más relevante (Baroody et al., 2009). Por último, se hace hincapié en que el dominio de un hecho numérico básico va más allá de la simple recuperación de un hecho, por lo tanto el dominio debe definirse de forma más amplia incluyendo cualquier estrategia eficiente. Bajo esta nueva concepción los niños deben ser motivados y no desalentados de utilizar una variedad de estrategias de manera flexible para mejorar su aprendizaje.

Una vez planteada la definición de los hechos numéricos básicos así como las etapas por la que los niños progresan para su dominio es importante para fines de esta investigación conocer las estrategias que los niños utilizan para resolver específicamente los hechos multiplicativos básicos.

Estrategias canónicas

Para resolver un hecho multiplicativo básico los niños utilizan diversas estrategias de solución, en este apartado se retoma a Sherin y Fuson (2005) quienes trabajaron exclusivamente con los hechos multiplicativos básicos y a partir de ello elaboraron una clasificación de estrategias que denominaron como *Estrategias canónicas*, se hace alusión a ellas debido a que son sustento en el tratamiento de los datos de esta investigación.

Dentro de esta clasificación se encuentran las siguientes estrategias: Contar todo, Cálculo aditivo, Conteo de…, Basada en patrones, Producto aprendido e Híbridas junto con sus respectivas variaciones mismas que se describen en seguida.

Contar todo

En esta primera estrategia los estudiantes al realizar el cálculo multiplicativo comienzan a contar desde el uno hasta llegar al resultado. Para utilizar esta estrategia es necesario coordinar tres conteos: el conteo del número de grupos, el conteo de las entidades de un grupo y el conteo del total.

Considerando lo anterior una de las desventajas de utilizar esta estrategia es que no es tan eficiente pues su ejecución requiere de un tiempo considerable, además, puede dificultarse cuando los factores son grandes.

Dentro de la estrategia *Contar todo* existen cuatro variaciones las cuales a continuación se describen de forma breve.

Contar después de dibujar. Dibujo semi-situacional

En esta variación los estudiantes dibujan una figura que representa los elementos de la situación, cuentan por separado a cada grupo y finalmente cuentan del uno hasta el total.

Por ejemplo, si al estudiante se le plantea la siguiente situación:

Hay 3 mesas en el salón de clases y 4 niños están sentados en cada mesa. ¿Cuántos niños hay en total?

Él la resolverá dibujando cada mesa con los niños y posteriormente los contará de uno en uno hasta obtener el resultado.

Contar después de dibujar. "Dibujo matemático"

Esta variación sigue el mismo procedimiento, sin embargo, a diferencia de la anterior en ésta los estudiantes utilizan "dibujos matemáticos" los cuales son menos directos en la representación de los elementos de la situación.

Para ilustrar esta estrategia se tiene el siguiente problema:

Martin compra 4 cajas de lápices. En cada caja hay 8 lápices. ¿Cuántos lápices compró Martin?

El estudiante puede hacer un dibujo utilizando marcas (I) que representen esta situación, después contar cada marca desde el uno al total.

Contar todo con los dedos

Los estudiantes cuentan en voz alta desde uno al total, utilizando los dedos como una ayuda. Los dedos se utilizan para realizar el conteo dentro de los grupos y el conteo total se hace verbalmente, puede o no haber un conteo visible del número de grupos. Un ejemplo es el siguiente:

Si hay 3 mesas en el salón de clases y 4 niños están sentados en cada mesa. ¿Cuántos niños hay en total?

La forma en que un estudiante lo resuelve es la siguiente: él cuenta “1, 2, 3” colocando tres dedos, en su mano izquierda y un dedo en su mano derecha (el cual representará el número de grupos a contar). Después él dice “4, 5, 6” una vez más él coloca tres dedos y un segundo dedo en su mano derecha, continúa de esa forma hasta llegar a 12.

Conteo rítmico

En el *Conteo rítmico*, el estudiante cuenta desde uno hasta el total diciendo cada valor, pero a diferencia de las variaciones anteriores en este conteo el estudiante enfatiza cada valor asociado con el complemento del grupo.

Por tanto, si un estudiante multiplica 3 × 4 podría decir, “uno dos tres cuatro, cinco seis siete ocho, nueve diez once doce” enfatizando en este caso a cuatro, ocho y doce.

Conteo rítmico con los dedos

Una de las variaciones de esta estrategia es el *Conteo rítmico con los dedos*, que es más factible cuando el tamaño del grupo es pequeño. Para realizar esta variación se cuenta en voz alta con énfasis verbal en cada múltiplo del tamaño del grupo, mientras que con los dedos se realiza un seguimiento del número de grupos.

Cálculo aditivo

Algunas estrategias se basan en técnicas relacionadas con la adición, como es el caso de la denominada *Cálculo aditivo*, ya que los estudiantes poseen los recursos necesarios que les permiten constituir la base de estas estrategias debido a que tienen experiencias previas de aprendizaje en relación con la adición.

Las estrategias de *Cálculo aditivo* requieren de menos tiempo para su ejecución y son más fáciles de realizar que las estrategias anteriores, además, el estudiante puede escribir los componentes de las tareas aditivas usando notaciones estándares. A continuación se presentan dos variantes de esta estrategia.

Adición repetida

En la *Adición repetida*, el estudiante realiza adiciones secuenciales añadiendo cada vez el tamaño del grupo en el valor actual del total. Por lo que el problema se transforma en una secuencia aditiva al sumar repetidamente el tamaño del grupo, en esta variación pueden aparecer notaciones aritméticas estándar.

Un ejemplo es el siguiente:

Hay 3 mesas en salón de clases y 3 niños están sentados en cada mesa. ¿Cuántos niños hay en total?

La forma de resolverlo con esta estrategia es sumar dos 3s, una vez que se tiene como resultado 6 se suma otro 3 y da como resultado 9.

Colapsar grupos y sumar

En esta variación el estudiante suma los grupos (usualmente en pares) después suma las cantidades resultantes, por lo general usando técnicas de varias columnas. En algunos casos las cantidades resultantes pueden ser colapsadas por pares nuevamente antes de que se sumen utilizando técnicas de varias columnas.

Para ilustrar esta variante se tiene el siguiente problema:

Martin compró 4 cajas de lápices. Hay 8 lápices en cada caja. ¿Cuántos lápices compró Martin?

El estudiante realiza un diagrama (ver figura 4), etiquetándolo con dos 16s luego escribe y resuelve el problema con la adición de varias columnas.

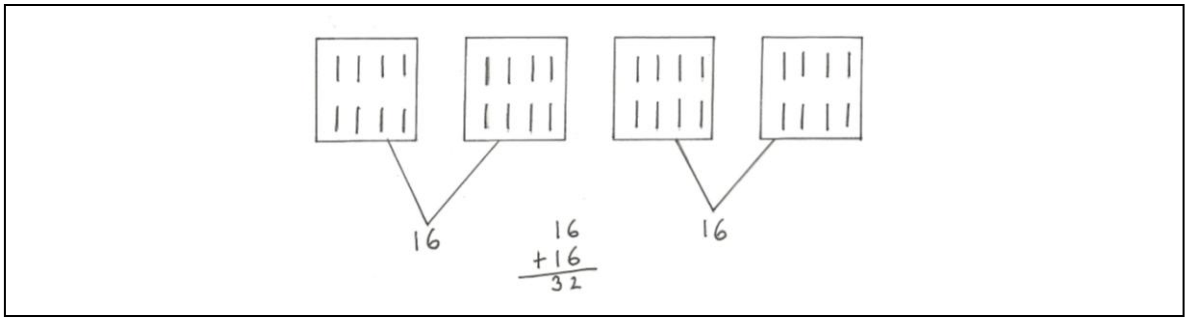


Figura 4. Variación *Colapsar grupos y sumar* para resolver 4 × 8.

Conteo de…

Los estudiantes aprenden a decir secuencias como “2, 4, 6, 8…” ó “5, 10, 15, 20…” estas son un recurso importante que utilizan frecuentemente, ya que las secuencias de conteo hacen posible las estrategias de cálculo a las que los autores se refieren simplemente como estrategias de *Conteo de…*

En el caso del *Conteo de…*, sólo dos secuencias de conteo deben coordinarse (contar el total y el número de grupos contados) lo que reduce en gran medida la dificultad de realizar con precisión las estrategias de *Conteo de…* sin embargo, es importante considerar que el estudiante debe aprenderse para cada número la secuencia de conteo correspondiente. A continuación se presentan tres variantes.

Conteo de… con dibujo completo

El estudiante realiza un dibujo completo como en la estrategia de *Contar todo*, pero en este caso el producto es encontrado mediante el empleo de una secuencia de conteo señalando a cada grupo en el dibujo.

Por ejemplo, para resolver el hecho multiplicativo de 7 × 4 el estudiante realizará un dibujo que represente la situación (ver figura 5) y empleará una secuencia de conteo de 7 en 7 señalando a cada grupo en el dibujo: “7, 14, 21, 28”.

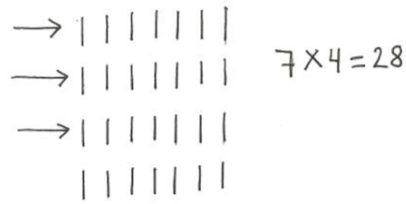


Figura 5. Variación *Conteo de 7 en 7 con dibujo completo* para resolver 7 × 4.

Conteo de… con grupos escritos

Para esta variante el alumno escribe un número para cada grupo, después dice la secuencia de conteo mientras señala a cada número.

Si se quiere conocer el resultado del hecho multiplicativo de 7 × 5 el estudiante puede escribir siete 5s y posteriormente decir la secuencia de conteo de 5 en 5 mientras señala cada número 5 que escribió hasta llegar al resultado.

Conteo de… utilizando los dedos

El estudiante dice la secuencia de conteo en voz alta y hace el seguimiento del número de grupos con los dedos, puede comenzar con el dedo pulgar, el índice o el meñique.

Para resolver 8 × 3 el estudiante cuenta de 3 en 3 en voz alta, realiza el seguimiento del número de grupos con los dedos diciendo: "3, 6, 9… 24" (ver figura 6).

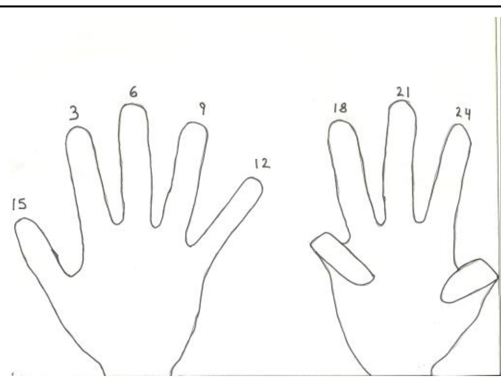


Figura 6. Variación *Conteo de 3 en 3 utilizando los dedos* para resolver 8 × 3.

Basada en patrones

Algunos patrones como $N \times 1 = N$ y los patrones de 9 a menudo se aprenden paralelamente con las secuencias de conteo (*Conteo de…*). En el caso del patrón de 0, el patrón de 1 y el patrón de 10 les permiten a los estudiantes producir ciertos resultados rápidamente y sin un esfuerzo visible.

Debido a que estas estrategias se asocian con una respuesta muy rápida de los estudiantes, pueden resultar difíciles de distinguir de las estrategias de producto aprendido.

Reglas del 0, 1 y 10

En esta variante no es visible el uso de dedos o dibujos, por lo que la respuesta es rápida sin cálculo visible.

Al usar esta variante pueden darse situaciones como la siguiente: al presentarle al alumno 1 × 7 éste inmediatamente contesta 7 y al cuestionarle cómo lo sabe, él simplemente dice que sabe la respuesta.

Técnica del 9 con los dedos

Para multiplicar $9 \times N$, el estudiante mantiene ambas manos levantadas y dobla el dedo número N, contando desde la izquierda. El digito de las decenas del resultado está dado por el número de dedos a la izquierda del dedo que fue puesto hacia abajo y el digito de las unidades viene dado por el número de dedos a la derecha (ver figura 7).

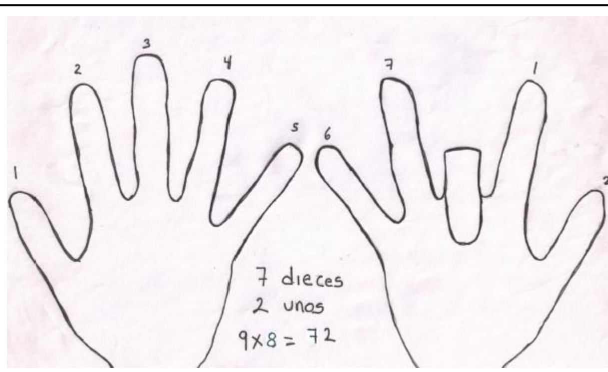


Figura 7. Variación *Técnica del 9 con los dedos* para resolver 9 × 8.

Producto aprendido

La estrategia de *Producto aprendido* está asociada con las tríadas de multiplicar –asociaciones entre los pares de factores con sus productos– para que los estudiantes aprendan estas tríadas de multiplicar normalmente se requiere de una gran cantidad de tiempo y esfuerzo. Aunque algunas tríadas pueden aprenderse fácilmente antes que otras, por ejemplo, los hechos que involucran a los factores 2 y 5, son las más accesibles.

Una de las características principales de esta estrategia, es que no es visible el uso de dedos o dibujos y la respuesta es rápida sin cálculo visible. Por lo que las soluciones generalmente son rápidas y no hay verbalización excepto para el resultado.

Estrategias híbridas

Las *Estrategias híbridas* se basan en combinaciones de las estrategias anteriores, si bien es cierto existe una amplia gama de posibles formas en que las estrategias ya mencionadas pueden combinarse para formar estrategias híbridas, las más comunes que los autores observaron utilizan *Conteo de…* o técnicas de *Producto aprendido* para obtener hasta la mitad del resultado y luego se utiliza *Contar todo* o el *Cálculo aditivo* para obtener el resto.

Conteo de… + Contar todo

Los estudiantes utilizan una secuencia de conteo (*Conteo de…*) para llegar hasta la mitad del total y luego utilizan *Contar todo* para conocer el producto.

Por ejemplo, si se quiere resolver el hecho multiplicativo de 7 × 6 el estudiante puede utilizar una secuencia de conteo de 6 en 6 hasta llegar a 36 ("6, 12, 18, 24, 30, 36") y a partir de ahí puede contar de uno en uno hasta el total ("37, 38, 39… 42").

Producto aprendido + Contar todo

El estudiante inicia con un producto aprendido por debajo del total, después utiliza la estrategia *Contar todo* (en alguna de las variaciones anteriores) para llegar al total.

Para resolver el hecho multiplicativo de 9 × 7 el alumno puede partir del producto aprendido de 9 × 5, una vez teniendo el 45 realiza un conteo de uno en uno hasta el total (9 × 5 = 45, "46, 47, 48, 49… 63").

Producto aprendido + Cálculo aditivo

Al igual que en la estrategia anterior el estudiante comienza con un producto aprendido para obtener la primera mitad de la solución y para obtener el total utiliza la estrategia de *Cálculo aditivo* (adición repetida o colapsar grupos y sumar).

Para ejemplificar esta estrategia considere el siguiente problema:

Pedro compra 7 bolsas de canicas. Si hay 8 canicas en cada bolsa ¿Cuántas canicas tiene en total?

El estudiante puede resolverlo partiendo del producto aprendido de 7 × 6 = 42 y sumando dos 7s más, (42 + 7 = 49 + 7 = 56) por lo que el resultado final es 56.

Factor dividido + Producto aprendido + Cálculo aditivo

El estudiante divide uno de los factores por lo que el problema se descompone en dos partes. Los dos sub-productos los encuentra utilizando la estrategia de *Producto aprendido*, éstos después se suman utilizando un *Cálculo aditivo.*

La siguiente situación ejemplifica esta estrategia:

Las paredes de una habitación tienen mosaicos muy bonitos. Si hay 7 filas y 8 columnas de mosaicos en cada pared. ¿Cuántos mosaicos hay en total?

El estudiante inicialmente puede haber memorizado el resultado de 7 × 4 que es 28 y añadirle 28 para llegar al resultado final que es 56.

Antes de concluir este capítulo se mencionaran las diferentes actividades que se han utilizado para lograr el dominio de los hechos multiplicativos básicos.

Actividades para dominar los hechos multiplicativos básicos

Para enseñar y dominar con fluidez los hechos multiplicativos básicos se han puesto en práctica diversas actividades. Algunas de éstas se usan cuando se inicia a los niños en la concepción de la multiplicación, otras van encaminadas a que los niños descubran las relaciones entre los hechos multiplicativos, a que utilicen diversas estrategias para conocer los productos de los hechos multiplicativos y algunas más se enfocan en el dominio de estos hechos.

A continuación se mencionan algunas actividades cuyo objetivo es enseñar y dominar con fluidez los hechos multiplicativos básicos. Cabe señalar que algunas de estas actividades se han utilizado durante mucho tiempo lo que hace difícil encontrar al o los creadores de una u otra actividad. Por lo que las referencias incluidas sólo indican la fuente de donde se retomó la información sobre las actividades. Estas actividades podrían ser divididas en dos grupos, ya que algunas tienen como eje central el uso de modelos y otras giran en torno a poner en práctica estrategias de razonamiento. Antes de comenzar a describir las actividades es importante considerar en qué consisten los modelos y las estrategias.

En el caso del primer grupo, los modelos y representaciones permiten a los estudiantes desarrollar el significado de las operaciones y disminuir la abstracción de éstas, es en este grupo donde los estudiantes pueden utilizar diversos objetos o materiales (como fichas, arreglos rectangulares, papel cuadriculado, rectas numéricas, etc.) para hacer modelos que les ayudarán a dar sentido a las operaciones y entender lo que los símbolos significan en éstas; resumiendo, los modelos permiten a los estudiantes relacionar símbolos y palabras, cuando los estudiantes logren la automaticidad dejarán de depender de estas representaciones visuales (Ministry of Education*,* 2006).

En el segundo grupo, los maestros pueden ayudar a los estudiantes a desarrollar estrategias eficaces para la recuperación de hechos multiplicativos alentándoles a utilizar habilidades de razonamiento, buscando patrones y relaciones entre los números, estas estrategias deben estar basadas en el conocimiento previo de los estudiantes para poder determinar los hechos desconocidos. Por otra parte, algunos estudiantes podrían tener sus propias estrategias o no tenerlas en absoluto pues les resulta más fácil memorizar los hechos multiplicativos, sin embargo, es importante considerar que las estrategias pueden dotar a los estudiantes con herramientas adicionales para ayudarles a ser más eficientes en sus cálculos mentales y obtener una comprensión más profunda de los números y de las relaciones entre ellos (Ministry of Education, 2006).

Según señalan Miller y Lee (1997) los primeros acercamientos de los niños a la multiplicación se dan a través de actividades para formar grupos del mismo tamaño, utilizando materiales manipulables como semillas, fichas, cubos, monedas hasta lápices de colores, vasos, abatelenguas o cualquier otro objeto que pueda ser fácilmente agrupado y contado por conjuntos. Para obtener el producto de la multiplicación es necesario contar el número de objetos que conforman cada grupo, por ejemplo, para conocer el producto de 2 × 3 los niños pueden formar dos grupos con tres frijoles en cada uno, para posteriormente contar todos frijoles para encontrar que 2 × 3 = 6.

Además, los autores mencionan que para complementar el modelo de la multiplicación es necesario utilizar arreglos rectangulares –éstos son definidos como una disposición rectangular de objetos en filas y columnas– normalmente elaborados para calcular el área estimando el producto de la multiplicación. Para que los niños elaboren arreglos rectangulares pueden utilizar cualquier objeto manipulable e incluso papel cuadriculado que resulta ser también un material apropiado para elaborarlos. De esta manera, para encontrar el producto de 4 × 3 los niños pueden hacer un arreglo pegando en una cartulina 4 filas de fichas con 3 columnas, para después contar las fichas que forman el arreglo, encontrando así el producto.

Una actividad semejante a los arreglos rectangulares es el *tachado*, que consiste en trazar líneas en hojas blancas de acuerdo a los productos que se quieran conocer. Por ejemplo, para mostrar 6 × 4 los niños trazan 6 líneas horizontales, sobre estas líneas trazadas dibujan 4 líneas verticales después deben marcar con una “×” o un punto las intersecciones para finalmente contar el total de marcas, que en este caso son 24.

Por su parte, Castro et al. (1995) opinan que el aprendizaje de la multiplicación debe llevar a la construcción de la tabla de multiplicar, en donde se debe ir trabajando de forma sistemática con todos los productos que tienen el mismo multiplicador, se puede comenzar a partir de 0: desde 0 × 1 hasta 0 × 10, aunque ellos prefieren iniciar con 2 (2 × 1 a 2 × 9).

Recomiendan que en un inicio no se utilice el símbolo "×" o el punto "·", sino el término "veces", ya que conforme se avance en el aprendizaje se irá sustituyendo por el símbolo. Indican que la construcción de una tabla se hace con todos los productos obtenidos con un mismo multiplicador al variar el multiplicando, en este caso para obtener los productos se utiliza la suma reiterada y una vez que se llega a la tabla del 5 sugieren utilizar la propiedad conmutativa para construir la tabla de los números restantes.

Estos autores manifiestan que carece de sentido exigir la memorización mecánica de todos los productos de la tabla, por lo que el énfasis no debe ser colocado en la repetición sino en la comprensión, aún así, es conveniente que el niño recuerde la mayor cantidad posible de productos o por lo menos sepa cómo poder obtenerlos. Para elaborar la tabla de multiplicar se hace una tabla de doble entrada colocando en la primera fila y en la primera columna los números de 0 a 10 después ésta se rellena de forma ordenada ya sea por filas o por columnas. Al finalizar la construcción quedará una tabla como la que se muestra en la figura 8 y para conocer el producto de dos números se buscará el número colocado en el punto de encuentro de la fila y la columna encabezadas por los dos factores que componen el producto.

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Figura 8. Tabla de multiplicar.

La tabla de multiplicar puede ser rellenada de diferentes maneras, el criterio utilizado para ello depende del docente, puede seguir un orden diferente al tradicional (de 0 a 10), o poner en práctica una estrategia para cada una de las tablas. Para el primer caso, por ejemplo, Fernández (2007) sugiere que los niños construyan las tablas de multiplicar en el siguiente orden: 1, 10, 5, 2, 4, 3, 6, 8, 9, 7; de esta forma se comienza por las tablas más fáciles para darle seguridad a los estudiantes y se complementa, de ser necesario, con algún material manipulativo.

Otra opción (O'Connell y SanGiovanni, 2011b) consiste en iniciar con hechos sencillos y una vez que los estudiantes los dominen tomarlos como base para los hechos más complicados, por lo que la secuencia comienza con los hechos ×2, ×10, ×5, ×1 y ×0 los cuales son considerados como sencillos, una vez que se dominen pueden servir como una base sólida para después tratar de conectarlos con un nuevo conjunto de hechos de ×3, ×4, ×6, ×9, ×8 y ×7; finalmente, una posible estrategia que puede emplear el profesor en el caso de los hechos ×2, ×5 y ×10 puede ser trabajarlos a través del conteo salteado, un procedimiento que a los alumnos les resulta familiar.

Una actividad diferente para construir las tablas de multiplicar puede ser elaborar folletos donde los niños puedan escribirlas (Miller y Lee, 1997). Para realizar esta actividad se requiere para cada tabla, hojas con diferentes patrones, es importante decirles a los niños que el patrón utilizado debe coincidir con la tabla que se quiere elaborar, los patrones pueden ser una mariposa, un triángulo, una estrella de cinco picos, un hexágono, un pulpo con ocho brazos, etc. Por ejemplo, para la tabla del 2 los estudiantes pueden utilizar un patrón de una mariposa ya que tiene dos alas; después deben trazar y cortar 11 copias de ésta, posteriormente escribir en cada una las tablas desde el 0 hasta el 10 respectivamente, una vez elaborado este material se debe sujetar con una grapa o un hilo, uno de los objetivos de estos folletos es que los estudiantes puedan ocuparlos para estudiar en casa o en sus ratos libres.

Según señala Goldish (1991) los hechos multiplicativos deben ser enseñados de forma significativa, por lo que propone utilizar cuentos o crear historias de animales u objetos para elaborar problemas multiplicativos. Por ejemplo, pueden utilizar el cuento de *Los tres cochinitos, Ricitos de Oro y los tres ositos* para los hechos ×3, o *Blanca Nieves y los siete enanos* para los hechos ×7, o crear una historia para los hechos ×8 sobre un pulpo, etc. El autor sugiere que los niños escriban en su cuaderno los problemas, la expresión matemática y dibujos que los representen. A continuación se presentan ejemplos de los problemas que se pueden elaborar con los cuentos o historias:

Cada uno de *Los tres cochinitos* compró una cerradura para ponerla enfrente de su puerta, ¿cuántas cerraduras compraron en total? (5 × 3 = 15); *Los tres ositos* tenían seis tazones de avena en su lugar, ¿cuántos tazones tenían entre todos? (6 × 3 = 18). También pueden dibujar un pulpo en el pizarrón y elaborar problemas como éstos: Oliver el pulpo lleva un reloj en cada brazo. ¿Cuántos relojes lleva en total?, 8 brazos × 1 reloj en cada brazo = 8 relojes en total (8 × 1 = 8); Oliver tiene cinco uñas en cada brazo. ¿Cuántas uñas tiene en total?, 8 brazos × 5 uñas en cada brazo es igual a 40 uñas en total (8 × 5 = 40); Oliver tiene 6 pecas en cada brazo. ¿Cuántas pecas tiene en total?, 8 brazos × 6 pecas en cada brazo es igual a 48 pecas en total (8 × 6 = 48).

Se ha mencionado ya acerca de la utilidad de la propiedad conmutativa para la construcción de la tabla de multiplicar, sin embargo, también es importante que los niños descubran y conciban a las propiedades de la multiplicación como estrategias de pensamiento que les permiten resolver problemas. Para poner en práctica estas propiedades Miller y Lee (1997) sugieren establecer en el aula una actividad como *la regla del 1* para la multiplicación, en ésta se solicita a los estudiantes encontrar ejemplos de esa regla en el aula. Para ello se les puede cuestionar ¿cuántos escritorios hay en 1 grupo de 4 escritorios?, ¿cuántas sillas hay en 1 grupo de 2 sillas?, etc. Se puede hacer lo mismo para la *propiedad nula*, por ejemplo, preguntarles que si un aula cuenta con 28 mesas y hay 0 elefantes sentados en cada mesa, ¿cuántos elefantes habrá en el aula?; de esta manera podrá plantearles diversos cuestionamientos.

Una actividad más (Flowers y Rubenstein, 2010) es solicitar a los estudiantes dibujar rectángulos en papel cuadriculado con las dimensiones apropiadas para los *hechos que necesitan aprender*. Estas imágenes pueden ayudar a los estudiantes a visualizar las propiedades, por ejemplo, para ilustrar la conmutatividad de 3 × 4 el rectángulo puede mostrar 3 grupos (columnas) de 4 cuadros cada uno, así como 4 grupos (filas) de 3 cuadros cada uno. El arreglo rectangular también puede representar la propiedad distributiva, por ejemplo, 7 grupos de 3 pueden ser vistos como 5 grupos de 3, más 2 grupos de 3, sombreando este segundo segmento que se sumó a la cuadricula. Otra opción es pedir a los estudiantes que una vez enmarcadas las dimensiones de los productos de los diferentes hechos multiplicativos en el papel cuadriculado, corten estos arreglos rectangulares, los rotulen con los hechos que representan y los giren para comprender esta propiedad (Miller y Lee, 1997).

Los niños pueden construir algunas tablas de multiplicar una vez que han comprendido las propiedades de la multiplicación, como en el siguiente caso, para la construcción de la tabla del 10 son necesarias dos tablas de 5 y para encontrar sus productos es necesario utilizar la propiedad distributiva, así para encontrar el producto de 6 × 10 se hace de la siguiente forma $6 \times 10 = 6 (5 + 5) = (6 \times 5) + (6 \times 5) = 30 + 30 = 60$, tal vez después se puede construir la tabla del 1 haciendo hincapié en la propiedad del neutro de la multiplicación para luego construir la tabla del 3 a partir de las ya construidas (10, 5 y 1) estableciendo sus posibles relaciones y así hasta lograr construir las tablas faltantes (Correaz, 2009).

Ahondando un poco en esto último, es importante señalar a los estudiantes las relaciones existentes entre los hechos multiplicativos básicos. Dado que es posible observar algunas relaciones entre cada una de las tablas de multiplicar los estudiantes pueden realizar comparaciones, ya sea utilizando carteles o el pizarrón donde se les presenten las tablas desde la de 2 hasta la de 9 (comenzando por $a \times 0$ hasta $a \times 10$) y cuestionarlos acerca de las relaciones que más resalten entre las tablas como en los casos de los productos comunes entre 2, 4, 8 en 3, 6, 9 ó en 2, 3, 6, etc. (Xavier, 2003). Fernández (2007) insiste en que se estudien dichas relaciones, esto es que los estudiantes conozcan y se guíen por las siguientes reglas:

> Los resultados de la tabla del 4 son dobles de los resultados de la tabla del 2; los resultados de la tabla del 8 son dobles de los resultados de la tabla del 4; los resultados de la tabla del 9

> son los resultados de la tabla del 10 menos los resultados de la tabla del 1; la tabla del 7 coincide con la tabla del 5 más la tabla del 2 (p. 128).

Existen algunos juegos que son útiles para practicar los hechos multiplicativos y al mismo tiempo establecer las relaciones numéricas, *En fila ordenada* es uno de este tipo que además, utiliza como herramienta la recta numérica (O'Connell y SanGiovanni, 2011b). Este juego requiere de una rueda dividida en 10 partes y enumeradas del 1 al 10 donde cada jugador debe disponer de una hoja con una recta numérica con seis casillas vacías.

La dinámica a seguir se describe a continuación: por ejemplo, para los hechos ×3, primero los jugadores se turnan para hacer girar la rueda y multiplicar el número resultante por 3, después, el jugador escribe su producto en una de las seis casillas vacías, los números deben ser colocados en orden de menor a mayor en la recta numérica. Si el producto no tiene cabida en la recta numérica pierde su turno (por ejemplo, si un jugador tiene en sus tres primeras casillas 6, 12, 18 y en su siguiente turno al girar la rueda el producto resulta ser un 3 ya no puede jugar), gana el juego el primero en completar la recta numérica.

Para Fosnot (2007) el razonamiento proporcional es el sello distintivo de un verdadero pensamiento multiplicativo y una forma de explorarlo es utilizando como herramienta la tabla de proporción para la resolución de algunos problemas, por ejemplo: si se tiene 1 auto que utiliza 4 neumáticos y se quiere saber ¿cuántos neumáticos son necesarios para 6 autos?, este problema involucra un razonamiento acerca de la proporcionalidad, ya que si 4 neumáticos son necesarios para 1 coche, entonces, se necesitan 8 para 2 autos y 24 neumáticos serán necesarios para 6; de esta manera los estudiantes pueden apoyarse en la noción de productos parciales y usarlos para calcular otros productos e incluso puede ser útil para los alumnos de los primeros grados resolver problemas sencillos construyendo tablas de proporción antes de presentarles formalmente las tablas de multiplicar.

El profesor puede presentar a los alumnos problemas donde sea necesario utilizar las tablas de proporción vinculándolas con las tablas de multiplicar, por ejemplo, para vincular las tablas de 2, 3 y 4 se les pide a los estudiantes que construyan una tabla que permita conocer la respuesta a la siguiente situación, ¿cuántas ruedas son necesarias para 12 bicicletas (tabla del 2), triciclos (tabla del 3) y autos (tabla del 4)? (Xavier, 2003).

Otra forma de enseñar los hechos multiplicativos es utilizando herramientas didácticas, una de ellas elaborada por Ruiz (2012), en la que se utilizan *polidiscos,* que son círculos de madera de diferentes colores (verde, azul, amarillo y rojo) y tamaños (siendo el rojo el más grande) que son utilizados para practicar las tablas de 6, 7, 8 y 9. Para utilizar los polidiscos, Ruiz (2012) sugiere los siguientes pasos: en el caso de la tabla del 9, primero se deben colocar los polidiscos rojos de forma horizontal enumerándolos de izquierda a derecha del 1 al 10.

De esta manera, si se quiere saber el producto de 9 × 3, se escoge un polidisco (verde, azul, o amarillo) y se coloca encima del polidisco rojo que corresponda al número 3. La fila de polidiscos rojos queda dividida en dos, se considera la división en el punto en que ambos polidiscos se encuentren, así en el lado izquierdo se tienen las decenas y del lado derecho las unidades, el siguiente paso es sumar las decenas y las unidades (20 + 7 = 27) para conocer el producto.

Para 6 × 6 en adelante, se sigue esta dinámica: por ejemplo, en el caso de 6 × 7 primero se forman dos columnas (pueden ser señaladas como *A* y *B)* con cinco polidiscos rojos en cada una, después se enumeran los polidiscos de ambas columnas del 6 al 10 (comenzando de abajo hacia arriba). Se colocará los polidiscos de color encima de los polidiscos rojos de cada una de las columnas que representan los números a multiplicar, en este caso se coloca un polidisco de color en el polidisco que representa a 6 en la columna *A* y dos encima de los polidiscos que representan a 6 y 7 en la columna *B*.

Cada polidisco rojo que tenga colocado encima algún polidisco de color tiene el valor de decenas éstas se suman y los círculos que quedan libres tanto en la columna *A* como en la columna *B* son las unidades, éstas se multiplican entre sí; para este ejemplo en la columna *A* quedarían 1 decena y 4 unidades y en la columna *B* quedarían 2 decenas y 3 unidades siguiendo las instrucciones anteriores se tendría 10 + 10 + 10 = 30 y 4 × 3 = 12, finalmente, se suman las decenas y las unidades para obtener el resultado, en este caso 30 + 12 = 42.

Una herramienta instrumental retomada de Guerrero (2011) para memorizar las tablas de multiplicar es el denominado *método autorueda*, que está formado por 5 ruedas con dos tablas de multiplicar en cada una de ellas (desde la tabla del 1 hasta la de 10), dentro de éstas va otra rueda interior cuyo contenido es visible a través de unos huecos o ventanas realizados en la rueda exterior. Esta actividad señala el autor se guía por la siguiente estructura: primero se parte de una pregunta, después el niño piensa una respuesta y pueden suceder dos situaciones: a) si acierta, la autocomprobación reforzará el aprendizaje y b) si falla, la respuesta correcta aparece inmediatamente, en ambas situaciones se incluye un dibujo a modo de refuerzo. Por ejemplo, en las ventanas aparece una pregunta: $3 \times 2 = ?$, al girar la rueda interior aparece la misma pregunta (3×2) con la solución (6) en la ventana inferior, acompañada de un dibujo en la ventana derecha.

También se pueden utilizar tarjetas que contengan la multiplicación junto con su producto para practicar las tablas y ayudar a memorizarlas, ya sea de manera individual, en parejas o en forma grupal; incluso las tarjetas pueden tener algunas variaciones en su diseño, a continuación se describe un juego para su uso individual y una opción para hacer el diseño de las tarjetas de forma diferente al tradicional. En el caso del juego *Adivina y multiplica jugando* (Rodríguez, 2010), se utilizan 100 tarjetas con la multiplicación (adivinanza) al frente y el producto (resultado) al reverso, cada tabla de multiplicar tiene un color diferente.

Este juego tiene 4 niveles, cada nivel tiene un objetivo diferente, los dos primeros niveles permiten que los niños se familiaricen y practiquen los hechos multiplicativos sin resultar aburrido, el tercer nivel (para avanzados) tiene como objetivo que reduzcan el número de errores y de esta manera, permitir que sus respuestas sean cada vez más exactas, el cuarto nivel (para expertos) busca que acierten en sus respuestas con rapidez y precisión. Por ejemplo, para jugar el primer nivel, el niño elije diez tarjetas de una tabla de multiplicar y las mezcla quedando la *adivinanza* al frente y el resultado al reverso, lee la primera multiplicación, después adivina diciendo en voz alta y de forma rápida la respuesta. Posteriormente voltea hacia adelante la tarjeta compartiendo la respuesta, si adivina la tarjeta la coloca al frente en el lado derecho y si no adivina la coloca al frente en el lado izquierdo diciendo verbalmente la operación correcta; al terminar de jugar debe contar las tarjetas que no ha adivinado y jugar nuevamente hasta adivinar todas.

Por otra parte, el profesor Tanaka (2007, citado en Isoda y Olfos, 2009) propone el uso de naipes ilustrados para un aprendizaje significativo esto es posible al elaborar y utilizar lo que el profesor llama *Cartas de tablas de multiplicar ilustradas* que tienen arreglos rectangulares de las expresiones de la multiplicación (procedimiento operatorio), que ayudan a los niños a formarse una imagen de las cantidades y en el reverso de las cartas se encuentra dibujada la silueta del arreglo y el número que corresponde a la respuesta (producto). De esta manera, se desarrolla una amplia sensibilidad numérica, al hacer que números, expresiones, arreglos y cantidades se vinculen. La forma de jugar es colocando las cartas con la cara hacia arriba, un niño debe leer la expresión de la multiplicación mientras los demás niños deben buscar la carta que corresponda a dicha expresión, finalmente gana el niño que haya juntado el mayor número de cartas.

Para aquellos alumnos que aún no logran retener eficazmente los hechos multiplicativos les puede ser útil aprender los patrones de los dedos, por ejemplo, para conocer los productos de la tabla del 9 se pueden utilizar los dedos de las manos, aunque existen diversas versiones para llevar a cabo este procedimiento, los pasos que a continuación se describen son retomados de Ministry of Education (2006), Goldish (1991) y Guerrero (2011). Primero, se extienden los dedos de ambas manos con las palmas a la vista; después se enumera cada uno de los dedos, comenzando con el dedo pulgar de la mano izquierda que representa al número 1, el índice sería el 2 y así sucesivamente hasta llegar al dedo pulgar de la mano derecha que representa al 10.

De esta manera, si se desea conocer algún producto se dobla el dedo que representa al número multiplicado por 9, el producto de la multiplicación queda conformado por el número de dedos que se encuentran a la izquierda del dedo doblado a cada uno se les otorga el valor de 10, más el número de dedos que quedan a la derecha del dedo doblado, que se les asigna el valor de 1. Por ejemplo, para conocer el producto de 9 × 4, se dobla el dedo número cuatro (dedo anular de la mano izquierda) el producto de la multiplicación está representado por los tres dedos que quedan a la izquierda del dedo doblado los cuales valen 10 cada uno por lo que si los sumamos (10 + 10 + 10) nos da un total de 30 y añadimos los seis dedos que quedaron a la derecha recordando que éstos valen 1, entonces, tenemos 30 + 6 = 36, por lo que el producto de 9 × 4 = 36.

Para los productos de 6 × 6, 6 × 7, 6 × 8, 6 × 9, 7 × 7, 7 × 8, 7 × 9, 8 × 8, 8 × 9 y 9 × 9; también se pueden utilizar los dedos de las manos, para realizar este procedimiento es necesario dominar los hechos numéricos de la tabla del 1 hasta la tabla del 5, una vez cumplido este requisito Hernández y Soriano (1997) proponen seguir estos pasos: cada dedo tanto de la mano izquierda como la derecha está asociado a un número comenzando con el 6 (dedo meñique) hasta el número 10 (dedo pulgar) para multiplicar dos de esos números se juntan los dedos correspondientes de cada mano hasta tocarse. Los dedos que se tocan y los que quedan por arriba valen 10 cada uno, mientras los que quedan por debajo se multiplican los de una mano por los de la otra y al final se suman los resultados obtenidos.

Ya que los hechos multiplicativos se pueden obtener utilizando diferentes estrategias y cada una de ellas debería estar al alcance del alumno, Maza (1991a) enlista algunas estrategias que considera como las formas más sencillas para obtener los hechos multiplicativos: la *Mitad* (para los hechos 10-5), el *Doble* (para hechos como 2-4-8 y 3-6), *Uno más* (para los hechos 2-3, 3-4, 4-5, 5-6, 6-7, 7-8 y 8-9), *Dos más* (sólo para los hechos 5-7) y *Uno menos* (para los hechos 10-9); denominó *Uno más* a la estrategia de sumar el multiplicando y *Uno menos* o *Dos menos* (según sea el caso) a la de restar el multiplicando.

Además, deduce que para poder utilizar estas estrategias la secuencia a seguir tendría que ser: 1, 2, 3, 4, 10, 9, 5, 6, 8, 7 y 0. Hace hincapié en que para memorizar los hechos multiplicativos es necesario un método multi-estratégico, conjugado con actividades de repaso y con una organización adecuada, es decir, se hace necesario repasar ya que no es suficiente aprender una sola vez el resultado de una multiplicación para que siempre se recuerde, de la misma forma lo es encontrar de forma repetida la necesidad de recordar y utilizar ese resultado.

Para complementar lo antes expuesto, en la tabla 3 se muestran algunas estrategias que podrían ayudar a los niños a ser más eficientes en su búsqueda de los hechos multiplicativos básicos, estas se retoman de Ministry of Education (2006) y de O'Connell y SanGiovanni (2011b).

Tabla 3. *Estrategias para solucionar hechos multiplicativos básicos*

Hechos multiplicativos	**Estrategias**
×2	Se considera que los hechos ×2 deben estar vinculados a los conocimientos previos del alumno acerca de la adición de dobles. Por ejemplo, 2 × 4 = 4 + 4 = 8.
×3	Multiplicar por 3 sería como multiplicar por 2 y luego sumar 1 grupo más.
×4	Multiplicar por 4 puede ser pensado como duplicar un doble. El dominio previo de los hechos ×2 permite a los estudiantes duplicar los productos para encontrar los hechos ×4.
×6	Multiplicar por 6 puede ser pensado como: a) Duplicar un múltiplo de 3. El dominio de los hechos ×3 le permite a los estudiantes ver que 4 × 6 puede ser pensado como el doble de 4 × 3 o (4 × 3) (4 × 3). b) La mitad luego el doble (Van de Walle, 2001, p. 143 citado en Ministry of Education, 2006). Si un estudiante no recuerda el producto de 6 × 7, puede reducir a la mitad uno de los factores (3 × 7 = 21) y a continuación, obtener el doble del producto, en este caso el doble de 21 es 42.
×9	Los profesores pueden ayudar a los estudiantes a reconocer algunos patrones: a) Todos los dígitos en los productos de los hechos ×9 son iguales a 9 si se suman (4 × 9 = 36 y 3 + 6 = 9). b) Las decenas del producto son siempre una menos que el multiplicador, como puede notarse en 8 × 9 = 72, aquí el dígito de las decenas es uno menos que el multiplicador 8. c) Una vez que los niños saben los hechos ×10 pueden relacionarlos con los hechos ×9 de la siguiente manera, por ejemplo, para 9 × 7 saben que 10 × 7 es 70, por lo que 9 × 7 es 70 menos un 7 lo que da como resultado 63.

Continuación Tabla 3. *Estrategias para solucionar hechos multiplicativos básicos*

×8	Pueden duplicarse los productos de los hechos ×4. Para 8 × 4, se sabe que 4 × 4 = 16, entonces, se duplica 16 y el producto es 32.
×7	Para multiplicar por 7: a) Los estudiantes pueden fragmentar los 7s, utilizando la propiedad distributiva. Por ejemplo, al realizar la suma de 5 veces el factor y 2 veces el factor, de esta manera, 7 × 4 es (5 × 4) (2 × 4) = 20 + 8 = 28. b) Puede resultar más eficiente utilizar la propiedad conmutativa (excepto en 7 × 7).

Para poner en práctica la estrategia *Dobles*, Guerrero (2011) propone dos actividades que se pueden llevar a cabo de forma grupal, en la primera se pide a los niños multiplicar un número por 10 y por 5, una vez obtenidos los productos se les indica que observen las relaciones entre éstos, preguntando por ejemplo, ¿qué relación hay entre 70 y 35?, ¿entre 50 y 25? y así para cada uno de los hechos. Al mismo tiempo se les ayuda a los niños a expresar conclusiones tales como al multiplicar un número por 10 resulta el doble de lo que se obtiene si se multiplica ese número por 5; o el resultado de multiplicar un número por 5 es igual a la mitad del que se obtiene si se multiplica ese número por 10.

La segunda actividad la denomina *El sombrero multiplicador* en donde el profesor muestra a los niños el sombrero multiplicador de…(nombre de los objetos que se quieren duplicar) ya sean fichas, monedas, o cualquier otro material; el profesor coloca en el sombrero los objetos que se van a duplicar, por ejemplo, puede colocar primero 3 fichas, después le pone "polvos mágicos", entonces, aparecen en el sombrero 6 fichas; luego se vuelve a poner "polvos mágicos" y esta vez aparecen 12 fichas. Al terminar la demostración se recomienda preguntarle a los estudiantes: si en lugar de 3 fichas, se hubieran colocado 5 en el sombrero, ¿cuántas fichas habrían aparecido al final?; y así el profesor puede cuestionarlos sobre diferentes hechos multiplicativos.

Otra actividad para conocer los *Dobles* es la que propone Goldish (1991) utilizando espejos, cada estudiante debe de contar con un espejo y un número suficiente de fichas u objetos que quieran duplicar; el estudiante debe colocar en su mesa de trabajo los objetos a duplicar y una vez hecho esto pondrá el espejo en frente para ver reflejada la imagen, después contará tanto los objetos que se encuentran en la mesa como los que están reflejados para conocer el total de objetos. El estudiante puede intentar "adivinar" el resultado antes de colocar el espejo y comprobar sus resultados al contar el total de objetos, para ello se les cuestiona ¿es correcta tu adivinanza? o ¿4 fichas se convirtieron en 8?, al final de cada experimento el estudiante puede escribir sus resultados y la expresión del problema.

En caso de que un estudiante presente dificultades con un hecho en particular, el maestro puede utilizar las *preguntas de duplicar*; éstas se centran en las relaciones matemáticas y conducen a fortalecer el razonamiento de los estudiantes para que puedan actuar de manera independiente (Flowers y Rubenstein, 2010). Por ejemplo, en el caso de 8 × 7, el maestro puede preguntar ¿qué hecho conoces que puedas utilizar para encontrar ocho 7s?, ¿ayuda el conocer cuatro 7s?, o ¿conocer dos 7s ayuda?; el objetivo es que el estudiante al encontrarse en situaciones similares pueda hacerse este tipo de preguntas mentalmente sin necesitar la guía del maestro utilizando el razonamiento de que el doble de 7 es 14, el doble 14 (cuatro 7s) es 28, por último, el doble de 28 (ocho 7s) es 56.

Las actividades y estrategias descritas anteriormente son importantes pues permiten conocer diversas opciones para enseñar y dominar los hechos multiplicativos básicos, sin embargo, también es relevante estar al tanto del progreso de los niños, por lo que a continuación se mencionan dos actividades que permitirán monitorear sus avances y a su vez trabajar en los hechos multiplicativos que aún no han dominado.

La primera de estas actividades retomada de Isoda y Olfos (2009) se lleva a cabo de forma grupal, se necesita una hoja o libreta donde puedan registrarse los avances, éstas se utilizan para aumentar el entusiasmo de los estudiantes al memorizar las tablas y confirmar sus progresos, la hoja de registro contiene diez filas en las que aparecen todas las tablas de multiplicar y tres columnas donde están las formas en que los estudiantes las han practicado (en orden, de abajo hacia arriba y en desorden) la hoja de registro puede ser modificada de acuerdo a las circunstancias de cada estudiante.

Los pasos sugeridos por estos autores son los siguientes: cuando los estudiantes consideren que han memorizado una tabla y puedan decírsela al maestro (de cualquiera de las tres formas), éste confirma el logro al firmar el registro del estudiante en la casilla correspondiente, probando así que ha pasado el *desafío.* Los estudiantes que recibieron la firma del maestro obtienen el papel de *estudiantes monitores* lo que les permite escuchar el desafío de sus compañeros en lugar del maestro y una vez que confirman que sus compañeros pasaron el desafío pueden otorgarles su firma, es importante que el maestro verifique lo aprobado por el monitor.

Si los estudiantes cometen errores en la memorización de alguna tabla, el maestro les hace recomendaciones para practicar, por ejemplo, decir toda la tabla más de dos veces antes de volver a desafiar. Una acotación importante es que el monitor puede escuchar el desafío de sus compañeros únicamente para las tablas y las formas en las que él recibió la firma del maestro, por lo tanto los demás buscarán al monitor que tenga la firma del maestro en la casilla que ellos quieran desafiar. El maestro debe de recoger constantemente las hojas de registro para comprobar los progresos de los estudiantes y darles orientación si tienen dificultades para avanzar. Una vez que los estudiantes obtengan las firmas del maestro o del estudiante monitor en todas las casillas pueden recibir un diploma.

Para la segunda actividad Flowers y Rubenstein (2010) sugieren que los niños elaboren un *inventario* que contenga los hechos que ya conocen (dominan) y los que les producen mayor dificultad. Para elaborarlo los niños deben de dibujar una tabla dividida en dos columnas, en la del lado izquierdo se anota *hechos que ya conozco* y en la columna del lado derecho *hechos que necesito conocer*. Para llenar el inventario el profesor debe preguntar al estudiante todas las tablas de multiplicar, esto para identificar las que aún desconoce y anotarlas en el lado derecho de la tabla, de esta forma se asegura que el inventario esté completo; los niños deben llenar su inventario en cada clase, para que cada vez tengan más hechos en la columna de *hechos que ya conozco* que en la columna de *hechos que necesito aprender*.

Hasta este momento se ha hecho mención de diversas actividades para la memorización y dominio de los hechos multiplicativos básicos, sin embargo, antes de concluir este apartado es importante considerar algunas recomendaciones generales retomadas de Ministry of Education (2006), que si se hacen parte de la instrucción podrían ayudar a los estudiantes a tener una práctica eficiente, consolidar su dominio de los hechos multiplicativos y desarrollar una comprensión más profunda de las operaciones:

- Resolver problemas podría ser una opción para practicar los hechos multiplicativos.
- No deje de utilizar modelos y materiales didácticos manipulables.
- Para que los estudiantes puedan auto-corregirse utilice líneas numéricas, calculadoras así como otros materiales.
- Proporcione a los estudiantes las oportunidades para modelar concretamente las estrategias.
- Recomiende a los estudiantes practicar las estrategias dentro de un contexto.
- No presente a los estudiantes las estrategias como una serie de procedimientos para ser memorizados, sino como herramientas que se utilizarán para el cálculo mental y la resolución de problemas.
- Es de suma importancia reconocer que el nivel de desarrollo de las estrategias para recordar los hechos multiplicativos no siempre es el mismo para todos los estudiantes.
- Para que se pueda individualizar el desarrollo de estrategias utilice juegos, la repetición de actividades o canciones y dispositivos mnemotécnicos.
- El profesor debe asegurarse de que cualquier práctica hecha a través de ejercicios esté centrada en el uso de estrategias, no sólo en el recuerdo memorístico.
- Considere agrupar los hechos alrededor de las estrategias.

- Los estudiantes encontrarán que sólo seis hechos son importantes que memoricen: $6 \times 6 = 36$, $6 \times 7 = 42$, $7 \times 7 = 49$, $7 \times 8 = 56$, $8 \times 8 = 64$, pues los demás pueden recordarlos a través de alguna estrategia.
- Puede pedir a los estudiantes hacer su propia lista de estrategias para los hechos que encuentren más difíciles.
- Los juegos de *tarjetas* pueden ser una herramienta apropiada para que los estudiantes compartan las estrategias que utilizan para encontrar una respuesta.

Ya que se conocen cuáles son los hechos numéricos, específicamente los hechos multiplicativos básicos, las tres etapas por la que pasan los niños para el dominio de éstos, las diferentes estrategias de solución que se utilizan para resolverlos y las actividades que se pueden emplear para su enseñanza-aprendizaje en el siguiente capítulo se dará a conocer la clasificación de los problemas multiplicativos y las estrategias de solución que generalmente utilizan los niños.

4

PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS Y ESTRATEGIAS DE SOLUCIÓN

Una vez que se conocen los tópicos más relevantes relacionados con los hechos numéricos básicos específicamente de la multiplicación, es necesario ahondar en los diferentes tipos de problemas multiplicativos y en las estrategias de solución que los niños suelen utilizar para resolverlos.

Clasificación de problemas multiplicativos

Si bien es cierto que existen diversas clasificaciones de los problemas multiplicativos, el presente capítulo sólo se enfoca en la clasificación realizada por Carpenter, Fennema, Franke, Levi y Empson (1999) quienes dividen a los problemas en asimétricos y simétricos, los cuales se describen brevemente a continuación.

Problemas asimétricos

Estos problemas presentan números que están relacionados con referentes específicos, por lo tanto los referentes no se pueden intercambiar. Dentro de éstos se puede encontrar a los problemas de agrupamiento, razón, precio y comparación multiplicativa.

Agrupamiento

En estos problemas se agrupan colecciones –de objetos discretos y que se pueden contar– en grupos equivalentes (grupos del mismo tamaño) sin que haya residuos. Considere el siguiente ejemplo como un problema de este tipo:

Luis tiene 3 cajas de chocolates. Si cada caja tiene 9 chocolates. ¿Cuántos chocolates tiene Luis en total?

En el ejemplo puede notarse que los problemas multiplicativos de este tipo presentan datos como el número de grupos y el número de objetos que hay en cada grupo por lo tanto lo que se desconoce es el número total de objetos, el objetivo a alcanzar entonces, es conocer este total.

Razón

Estos problemas aunque no involucran a grupos de objetos contables, las cantidades que se mencionan pueden representarse con contadores. Un ejemplo de este tipo de problema es el siguiente:

Karen camina 2 kilómetros por hora. ¿Cuántos kilómetros camina Karen en 3 horas?

Como puede deducirse del ejemplo, estos problemas implican una razón, a diferencia de los problemas de agrupamiento, que incluyen a una serie de objetos. Aunque los problemas de razón suelen ser más difíciles para los niños que aquellos problemas que involucran a grupos de objetos contables, no necesariamente están fuera de su alcance.

Precio

Pueden considerarse a estos problemas como un tipo especial de problema de razón, pero en este caso la razón es dada por el precio asignado al artículo o producto, como en el siguiente ejemplo:

Una paleta cuesta 2 pesos. Si compras 6 paletas ¿Cuánto pagarás en total?

Los niños resuelven esta clase de problemas con facilidad debido a que en su vida cotidiana están familiarizados con los precios y el dinero, ya que continuamente se les presentan situaciones como la anterior.

Comparación multiplicativa

Como su nombre lo indica implican una comparación entre dos cantidades, donde una de las cantidades es descrita como un múltiplo de la otra y la relación que hay entre ambas se da en términos de cuántas veces es una más grande que la otra.

Lo anterior se demuestra en el siguiente ejemplo, la cantidad de canicas que tiene cada niño puede medirse, pero la otra cantidad (tres veces más que) simplemente describe la relación entre estas dos cantidades medibles.

Juan tiene 9 canicas y su primo Mario tiene tres veces más canicas que Juan. ¿Cuántas canicas tiene Mario?

Como se puede observar en el ejemplo anterior términos semejantes a “tres veces más que”, son conceptos importantes que los niños deben entender para resolver los problemas de comparación multiplicativa ya que en los problemas de agrupamiento y razón no se utiliza ésta terminología.

Problemas simétricos

A diferencia de los problemas asimétricos, los simétricos se caracterizan porque sus factores juegan papeles equivalentes, lo que significa que pueden ser intercambiados. Los problemas de este tipo son los de área, arreglos rectangulares y los problemas de combinación.

Área

La multiplicación es utilizada en diferentes situaciones y el calcular el área de una región rectangular no puede ser la excepción, esto se logra multiplicando el largo de la región por el ancho. Lo que en palabras de los autores implica una concepción de la multiplicación muy diferente a la que utilizaron con los problemas anteriores.

La diferencia de este tipo de problemas a los ya mencionados, consiste en que en un problema de área los dos factores que en éste aparecen –llamados generalmente “ancho” y “largo”– no juegan papeles distintos y no están asociados a un referente específico, por lo que juegan básicamente el mismo papel al calcular el área de un rectángulo. Como en el siguiente problema:

Un jardín, con forma rectangular, mide 5 metros de largo y 7 metros de ancho. ¿Cuántos metros cuadrados mide el jardín?

De esta forma los problemas de área constituyen un nuevo tipo de problema de multiplicación, dado que tanto el largo como el ancho son intercambiables (juegan un papel equivalente) no es necesario saber si el dato que se desconoce para calcular el área es el largo o el ancho.

Arreglos rectangulares

En este tipo de problemas, encontrar el número de elementos que hay en un arreglo, implica fundamentalmente tener la misma concepción de la multiplicación que para calcular el área de un rectángulo.

La diferencia principal entre estos problemas y los de área, es que los arreglos rectangulares pueden estar formados con objetos discretos tales como manzanas en una caja o filas de sillas, entre otros. Por ejemplo:

Una caja de chocolates trae 9 chocolates en las filas y 4 chocolates en las columnas ¿Cuántos chocolates trae en total la caja?

Estos problemas se pueden moldear de manera sistemática construyendo un número dado de filas de contadores con el mismo número de contadores en cada fila. También pueden ser utilizados para entender la propiedad conmutativa de la multiplicación.

Si bien, los arreglos ofrecen una representación natural para algunos tipos de problemas de multiplicación y división, los autores apuntan que los niños pequeños no suelen construir arreglos a menos que le sea requerido o se hable de una disposición de este tipo en el enunciado del problema.

Problemas de Combinación

Finalmente, este tipo de problemas implica las diferentes combinaciones que pueden realizarse con varios conjuntos de objetos, como en este ejemplo:

Cecilia tiene 3 faldas de diferente color y tiene 4 blusas de distintos colores. ¿De cuántas formas puede combinar las faldas y blusas?

Este problema podría solucionarse al identificar los tres colores diferentes de faldas (por ejemplo, gris, negra y azul) las cuatro blusas (rosa, amarilla, verde y roja) y haciendo todas las posibles combinaciones (por ejemplo, falda gris con blusa rosa, falda gris con blusa amarilla, etcétera).

En el siguiente apartado se mencionan y ejemplifican algunas estrategias que los niños utilizan para resolver los problemas multiplicativos.

Estrategias de solución

Los niños generalmente utilizan diversas estrategias para resolver los problemas de multiplicación, Carpenter et al. (1999) las agrupan de la siguiente manera.

Estrategias de Modelado Directo

Inicialmente los niños dan solución a los problemas multiplicativos modelando cada uno de los grupos, para lo cual pueden usar contadores –fichas, marcas de conteo, objetos o representaciones– y después contar el número total de objetos.

La siguiente situación ejemplifica esta estrategia, a Luis se le presenta el siguiente problema:

Susana compró 3 cajas de crayones. Si había 6 crayones en cada caja. ¿Cuántos crayones compró Susana en total?

Luis cuenta seis cubos y forma un conjunto, sigue el mismo procedimiento para formar los dos conjuntos restantes. Una vez que ha formado los tres grupos con seis crayones en cada uno de ellos cuenta el total de cubos y dice, “18” ella compró 18 crayones.

Estrategias de Conteo

Los niños cambian de forma gradual de las estrategias de modelado directo a las estrategias de conteo en las operaciones de suma y resta, pero en el caso de la multiplicación es más difícil llevarlo a cabo, debido a ello es poco común que los niños inicialmente utilicen esta estrategia en problemas de agrupamiento.

Las estrategias de conteo utilizadas en la resolución de problemas multiplicativos, algunas veces necesitan de alguna clase de conteo salteado, como se ejemplifica en la siguiente situación presentada a Carmen:

Hay 2 flores en cada florero. ¿Cuántas flores hay en 4 floreros?

Carmen [hablando entre dientes levanta uno a uno sus dedos hasta tener 4], dice “hay 8 flores”, la maestra le pide que le muestre como averiguó que eran

8, Carmen responde “conté 2, 4, 6, 8” [cada vez que nombra un número extiende un dedo para llevar la cuenta del número de grupos que lleva].

A los niños a menudo se les facilita el conteo salteado para algunos números, por ejemplo, para 3 ó 5 pero sucede lo contrario para 7, el cual se les dificulta. También les es difícil reconocer que podrían utilizar el conteo salteado para cualquier número dado en un problema multiplicativo. Cabe señalar que algunos niños sólo son competentes en el conteo salteado para los tres o cuatro primeros números de una serie y para completar su resultado deben utilizar conteo de uno en uno, como lo hace Karina en el siguiente ejemplo:

La profesora tiene 5 tiras de estrellitas. Hay 4 estrellitas en cada tira. ¿Cuántas estrellitas tiene la profesora?

Karina contó: 4, 8, 12, [hace una pausa] 13, 14, 15, 16 [pausa] 17, 18, 19, 20; 20 estrellitas. En esta situación Karina logró contar de cuatro en cuatro hasta llegar a doce, sin embargo, después de doce tuvo que contar de uno en uno, en dos segmentos.

Los autores observaron que los niños utilizan el conteo salteado a partir del número de objetos que hay en cada grupo y no por el número de grupos, además, de que el seguimiento del número de grupos lo realizan utilizando sus dedos o algún otro recurso. Esto puede considerarse como una cuestión derivada de la estrategia de modelado directo que tiene que ver con cómo los niños cuentan los objetos que hay en cada grupo cuando resuelven un problema a través del modelado.

Las estrategias de suma también son utilizadas por los niños, esto es, en lugar de realizar el conteo salteado, algunos niños suman repetidamente el número que representa la cantidad de objetos que hay en cada grupo. Es importante señalar que el conteo salteado es en esencia una suma repetida, sin embargo, algunos niños se inclinan a buscar la solución en términos de conteo mientras que otros lo hacen en términos de suma. Como lo hace Mercedes en la siguiente situación:

Con una botella de agua se pueden llenar 6 vasos. ¿Cuántos vasos se pueden llenar con 7 botellas de agua?

Mercedes realiza un esquema en su cuaderno y responde “42”, la maestra le pide que explique cómo encontró el resultado. Mercedes explica “sumé 6 y 6 tres veces, sumé 12 + 12 y otro 12 y me dio 36, después sumé el último 6 para obtener 42”.

Hechos Derivados

Una vez que los niños dominan algunos hechos numéricos básicos, pueden utilizarlos para derivar otros más. Un ejemplo de esta estrategia, es el siguiente:

A Carlos se le presentó el siguiente problema: Hay 7 fresas en una caja. ¿Cuántas fresas habrá en 6 cajas?

Carlos responde [casi de inmediato] 42, la profesora dijo “eso fue muy rápido, ¿cómo es que lo hiciste tan rápido?” Carlos contestó “sé que cinco 7s son 35, luego con un 7 más, me dio 42”.

De manera similar a lo que sucede con la suma y la resta, los niños aprenden algunos hechos multiplicativos antes que otros dado que hay patrones para algunos hechos multiplicativos que son más fáciles de aprender, por ejemplo, los múltiplos de 5 y 9 siguen patrones regulares. Generalmente los hechos derivados implican una combinación de hechos numéricos conocidos con la suma o el conteo, además, de que el hecho conocido siempre involucra uno de los números dados en el problema.

Ya que se abordaron los diferentes tipos de problemas multiplicativos y las estrategias que los niños utilizan para poder resolverlos se concluye la parte teórica que sustenta esta investigación, por lo que se dará paso al diseño para profundizar en el procedimiento llevado a cabo.

DISEÑO DE INVESTIGACIÓN

Orientación metodológica

A continuación se exponen algunos conceptos que dan claridad respecto a la orientación metodológica de la presente investigación, de tipo cualitativo en el sentido que Sandín (2003) la define como:

> Una actividad sistemática orientada a la comprensión en profundidad de fenómenos educativos y sociales, a la transformación de prácticas y escenarios socioeducativos, a la toma de decisiones y también hacia el descubrimiento y desarrollo de un cuerpo organizado de conocimientos (p. 123).

Respecto al papel del investigador, la autora señala que "el propio investigador se constituye en el *instrumento* principal que a través de la interacción con la realidad recoge datos sobre ésta" (p. 126). En torno a la validez en la investigación cualitativa, Jaworski (1998, citado en Buenrostro, 2003, p. 29) menciona que:

> …la validez no tiene el significado objetivo que tiene en la investigación positivista… El papel central del investigador y las implicaciones que resultan deben juzgarse a través de la validez de lo que es ofrecido en éste y otros escritos, dado que la validez reside, en última instancia, en el grado en el que un lector informado es convencido de lo que está escrito (p. 127).

Respecto a la interpretación, Buenrostro (2003) menciona que en una "investigación de corte cualitativo… la información obtenida se analiza e interpreta más en términos de procesos y eventos que en términos de datos sujetos a cuantificación…" (p. 29).

Esta investigación se guío por la metodología de la investigación-acción la cual está orientada a la *práctica educativa* y respecto a ella Sandín (2003) señala:

> La finalidad esencial de la investigación no es la acumulación de conocimientos sobre la enseñanza o la comprensión de la realidad educativa, sino, fundamentalmente, aportar información que guíe la toma de decisiones y los procesos de cambio para la *mejora de la misma* (p. 161).

En esta investigación se realizó el estudio de dos casos, respecto a ello Stake (1998) subraya que los casos de interés en la educación y en los servicios sociales son generalmente personas y programas, ya que éstos poseen rasgos semejantes pero a su vez también resultan ser únicos:

> De un estudio de casos se espera que abarque la complejidad de un caso particular… El estudio de casos es el estudio de la particularidad y de la complejidad de un caso singular, para llegar a comprender su actividad en circunstancias importantes (p. 11).

Propósitos

1. Promover el uso del Cartel Multiplicativo como una herramienta que facilite el dominio de los hechos multiplicativos básicos.
2. Detectar las dificultades que tienen los niños cuando realizan las actividades propuestas en el Cartel Multiplicativo.
3. Favorecer el empleo de las estrategias[1] contenidas en el Cartel Multiplicativo para resolver problemas multiplicativos de agrupamiento y precio.

Preguntas de investigación

1. ¿Las estrategias sugeridas en el Cartel Multiplicativo son empleadas en el dominio de los hechos multiplicativos básicos?
2. ¿Cuáles son las dificultades que se presentan cuando los niños aprenden el manejo del Cartel Multiplicativo?

[1] El término de estrategia se utiliza a lo largo del trabajo. Se retoma la definición dada por Wright, Martland, Stafford y Stanger (2004): “El término ‘estrategias’ se refiere a los procedimientos que un niño puede utilizar para resolver diversos tipos de tareas numéricas tempranas” (p. 7).

3. ¿Las estrategias sugeridas en el Cartel Multiplicativo son empleadas en la solución de problemas multiplicativos de agrupamiento y precio?

Participantes

Se contó con la participación de 15 niños que cursaban los primeros grados escolares de la escuela primaria, 12 de ellos eran hombres y 3 mujeres; de estos 1 se encontraba en segundo grado, 7 en tercer grado, 6 en cuarto grado y 1 en quinto grado; los cuales fueron remitidos por sus profesores al Programa de Atención al Bajo Rendimiento Escolar (PABRE) que se ofrece en la Clínica Multidisciplinaria Zaragoza de la Facultad de Estudios Superiores (FES Zaragoza) de la UNAM, debido a su bajo desempeño académico.

Escenario

La investigación tuvo lugar en un salón de la Clínica Multidisciplinaria de la FES Zaragoza, en el que había 4 mesas de forma circular de las cuales se ocuparon únicamente 2 para las sesiones de trabajo. Además, se contaba con aproximadamente 30 sillas pequeñas las cuales eran ocupadas de acuerdo al número de niños que asistieran a cada sesión. Debido a que el salón era utilizado para otro programa, en él también había algunos materiales como libros infantiles, juguetes, material didáctico, etc., sin embargo, éstos no fueron utilizados para la intervención.

Materiales

Los materiales que se utilizaron fueron los siguientes:

Cinco Carteles Multiplicativos del tamaño de una hoja carta e impresos a color.

Hojas de trabajo con problemas multiplicativos de agrupamiento y precio.

Quince plumones de agua.

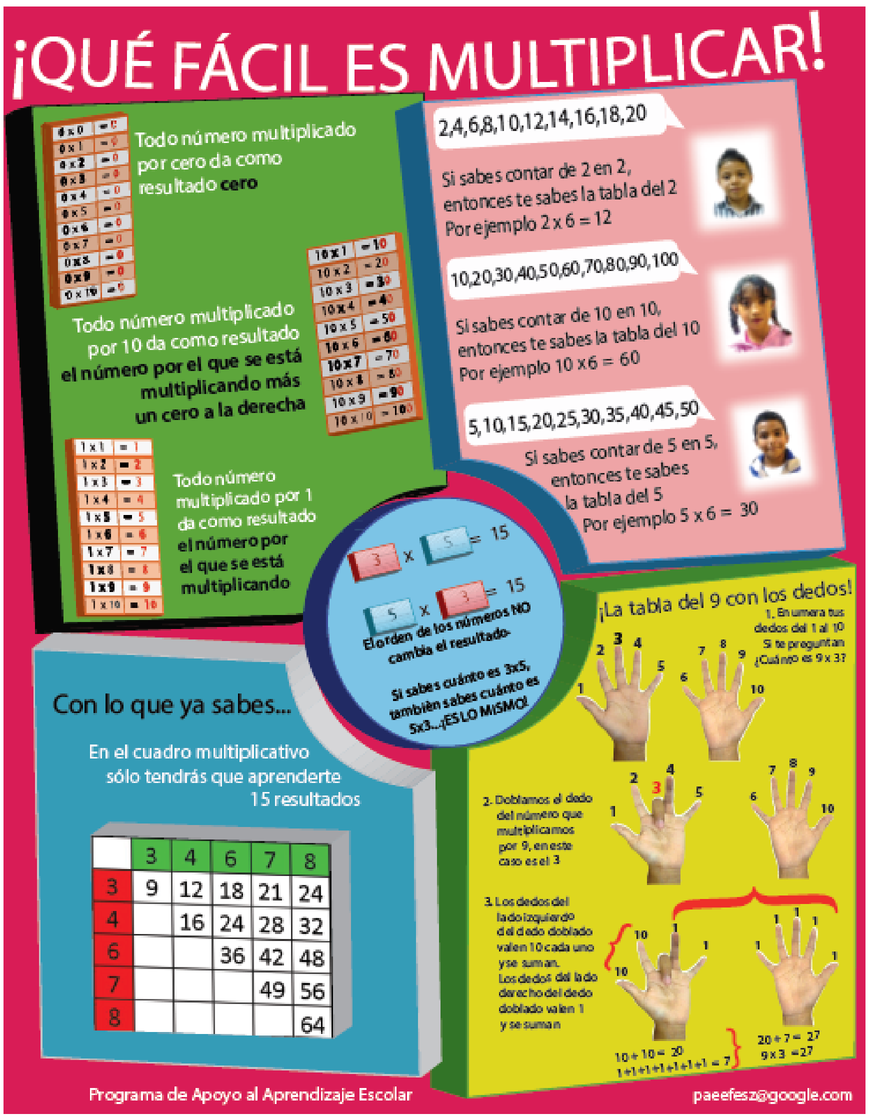
Quince lápices.

Ciento cincuenta hojas cuadriculadas.

Procedimiento de aplicación del Cartel Multiplicativo

Descripción del Cartel Multiplicativo

La herramienta que fue utilizada para que los niños lograran dominar con fluidez los hechos multiplicativos básicos es el denominado “Cartel Multiplicativo” (ver figura 9) cuyo autor es Álvaro Buenrostro y el diseño estuvo a cargo de José Antonio Bonilla, éste forma parte del material utilizado en el PABRE. A continuación se describen brevemente los elementos que lo constituyen.



	3	4	6	7	8
3	9	12	18	21	24
4		16	24	28	32
6			36	42	48
7				49	56
8					64

Figura 9. Cartel Multiplicativo.

En la parte superior izquierda (en color verde) se encuentran las reglas básicas de los hechos multiplicativos de 0, 1 y 10, que el niño debe tomar en cuenta cada vez que se encuentre con alguno de esos hechos multiplicativos. En la parte inferior del mismo lado (color azul) se encuentra un “Cuadro Multiplicativo”, que muestra sólo 15 resultados que el niño debe aprenderse, pues los demás los puede conocer utilizando alguna de las estrategias del Cartel.

En la parte superior derecha (color rosa) se encuentran tres ejemplos del uso del conteo salteado que se vinculan con los hechos multiplicativos de 2, 5 y 10, pues la consigna es que sí el niño sabe contar de 2 en 2, entonces, se le facilita el dominio de la tabla del 2, lo mismo sucede con la tabla del 5 y la del 10. En la parte inferior (color amarillo) se encuentra la estrategia denominada “La tabla del 9 con los dedos”, que se enseña al niño siguiendo los pasos descritos en ese apartado.

En el centro del Cartel (círculo de color azul) se puede encontrar la propiedad conmutativa de la multiplicación, la cual se resume con la siguiente consigna “el orden de los factores no cambia el resultado” y que se ilustra con un ejemplo.

Contexto de uso

El Cartel Multiplicativo se utilizó durante 18 sesiones de intervención grupal que se llevaron a cabo en el PABRE; éstas tuvieron lugar dos días a la semana (miércoles y jueves) con una duración de 45 minutos cada una. Cabe mencionar que fueron en total 20 las sesiones de trabajo, sin embargo, se ocuparon dos de ellas para realizar la prueba informal, una en el mes de septiembre y la segunda en noviembre.

Como ya se mencionó, se realizó una prueba informal antes y después de la intervención con la finalidad de observar si hubo una variación en las estrategias de los niños. La primera de estas pruebas constó de 17 hechos multiplicativos básicos, 4 problemas multiplicativos de agrupamiento y 1 de precio con 3 preguntas. La segunda prueba informal constó de 22 hechos multiplicativos básicos y 6 problemas multiplicativos de agrupamiento.

En las sesiones de los miércoles durante los primeros 15 minutos se trabajó junto a los niños el Cartel Multiplicativo de la siguiente forma: se dedicaron 3 minutos a cada una de las actividades contenidas en el Cartel (conteo salteado, tabla del 9 con los dedos, Cuadro Multiplicativo y las reglas de 0, 1 y 10); es decir, se explicaron y practicaron cada una de las estrategias. Además, cada actividad del Cartel se vinculó con la propiedad conmutativa de la multiplicación. En los siguientes 30 minutos se les entregaron hojas de trabajo con problemas multiplicativos de agrupamiento y precio, así como hojas cuadriculadas para escribir sus cálculos. Además, se les permitió consultar el Cartel Multiplicativo ya que cuando tuvieron dudas respecto a cómo resolver un hecho multiplicativo básico las investigadoras los remitieron a alguna de las secciones del Cartel lo que le ayudó a resolverlo. Cabe mencionar que la mayoría de los niños consultó específicamente la sección del Cuadro Multiplicativo, que contenía 15 resultados de algunos hechos multiplicativos, lo que les permitía resolver los problemas.

Las sesiones de los jueves se trabajaron de manera similar, la única diferencia fue que no se les dio la oportunidad de consultar el Cartel Multiplicativo; esto con la finalidad de que cada vez dependieran menos del Cartel y pudieran recordar las estrategias contenidas en él para poder solucionar los problemas multiplicativos. Cuando no pudieron resolver algún hecho multiplicativo, las investigadoras hicieron alusión a las estrategias expuestas en el Cartel sin mostrárselo físicamente.

Obtención de los datos

Los datos se obtuvieron a partir de tres fuentes:

- De la prueba informal sobre los hechos multiplicativos básicos, que se realizó tanto antes como después de la intervención y las observaciones que las investigadoras realizaron durante estas pruebas.
- A través de las ejecuciones escritas, que quedaron como evidencia en las hojas cuadriculadas que los niños utilizaron al resolver problemas multiplicativos de agrupamiento y precio.

- Las anotaciones de las investigadoras, las cuales dan cuenta de lo observado durante las pruebas informales y las sesiones, específicamente de las ejecuciones de los niños. Las observaciones se registraron, en un primer momento, individualmente en una libreta; posteriormente, se transcribieron en computadora siguiendo un formato propio que contenía el nombre del niño, la fecha, la situación, las estrategias utilizadas y la descripción de la ejecución.

Tratamiento de los datos

Para el tratamiento de los datos se utilizaron las categorías propuestas por Sherin y Fuson (2005) mencionadas en el capítulo 3, lo que permitió clasificar las respuestas y ejecuciones de los niños. En los casos en que alguna categoría no estuviera contemplada, las investigadoras elaboraban y denominaban una nueva categoría. Finalmente, se llevó a cabo un análisis de los casos más representativos para dar cuenta de la evolución y la variación de las estrategias que estos niños tuvieron en el transcurso de la intervención.

Análisis de las respuestas

El análisis se llevó a cabo en dos niveles, en ambos se registraron: a) las estrategias que utilizaron los niños al responder si conocen diversos hechos multiplicativos, b) las dificultades que presentaron al comprender y aplicar las estrategias sugeridas en el Cartel Multiplicativo y c) las estrategias que emplearon al resolver problemas multiplicativos de agrupamiento y precio.

En el primer nivel el análisis se llevó a cabo a través del registro de los tres aspectos anteriores en los niños que participaron en la investigación. El énfasis se colocó en el tipo y variedad de las estrategias y dificultades encontradas. Conforme se analizaron las respuestas, se agruparon de acuerdo con sus características comunes, de tal manera que se pudo contar con un conjunto amplio de respuestas agrupadas en categorías.

La información que se utilizó para dar respuesta al inciso a, sobre las estrategias que utilizaron los niños al responder si conocen diversos hechos multiplicativos, se obtuvo de las dos pruebas informales ya descritas; para el inciso b, referente a las dificultades que presentaron al comprender y aplicar las estrategias sugeridas en el Cartel Multiplicativo, se consideraron las dificultades que presentaron los niños al utilizarlo a lo largo de la intervención; para el inciso c, que corresponde a las estrategias que emplearon al resolver problemas multiplicativos de agrupamiento y precio, la información se retomó de las observaciones registradas durante las 18 sesiones de trabajo.

En el segundo nivel se llevó a cabo el estudio de casos con dos niñas que al inicio del estudio desconocían los hechos multiplicativos básicos y que con ayuda del Cartel lograron dominar la mayoría. Para lograrlo, se analizaron los cambios a lo largo del estudio de los tres aspectos señalados anteriormente. Lo anterior permite obtener una cronología que da cuenta de la variación de las estrategias observadas para conocer los avances y comprobar la efectividad del Cartel Multiplicativo.

6

DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Este apartado está centrado en el análisis que se llevó a cabo considerando los tres aspectos señalados en el apartado *Tratamiento de los datos*:

a) las estrategias que utilizaron los niños al responder si conocen diversos hechos multiplicativos;

b) las dificultades que presentaron al comprender y aplicar las estrategias sugeridas en el Cartel Multiplicativo, y

c) las estrategias que emplearon al resolver problemas multiplicativos de agrupamiento y precio.

Así mismo, se describe el estudio de casos llevado a cabo con dos de las participantes.

Estrategias empleadas por los niños al responder a preguntas sobre hechos multiplicativos

Para conocer las estrategias utilizadas por los participantes al responder diversos hechos multiplicativos se retomó la clasificación de estrategias propuesta por Sherin y Fuson (2005) misma que ya ha sido descrita en el capítulo 3. La información utilizada para realizar el análisis del primer aspecto fue retomada de las dos pruebas informales, la primera de ellas realizada los días 21 y 27 de septiembre de 2012 y la segunda se llevó a cabo los días 15 y 21 de noviembre de 2012.

En la tabla 4 se enlistan las estrategias y variaciones encontradas durante el análisis de ambas pruebas informales, así como dos nuevas estrategias que no están contempladas en la clasificación de Sherin y Fuson (2005).

Tabla 4. *Estrategias y variaciones identificadas en las pruebas informales*

Estrategia	Variación
Contar todo	Contar todo con los dedos
Cálculo aditivo	Adición repetida Colapsar grupos y sumar
Conteo de…	Conteo de… utilizando los dedos
Basada en patrones	Reglas del 0, 1 y 10 Técnica del 9 con los dedos
Producto aprendido	
Híbridas	Producto aprendido + Contar todo Producto aprendido + Cálculo aditivo Factor dividido + Producto aprendido + Cálculo aditivo
Nuevas Estrategias	
	Producto aprendido + Resta
	Enunciar la tabla de multiplicar

En seguida se describen y analizan las estrategias que utilizaron los participantes al resolver los hechos multiplicativos en ambas pruebas. Es importante resaltar que únicamente se colocan algunos ejemplos que son representativos de cada una de las estrategias las cuales pudieron ser observadas durante la aplicación de las pruebas, esto con la finalidad de que la información no resulte repetitiva.

La primera prueba informal fue aplicada a 14 participantes, ésta contenía 17 hechos multiplicativos básicos. Es importante mencionar que sólo 12 participantes se mantuvieron constantes desde el inicio hasta el final de la intervención. Las razones por las que dos participantes no fueron considerados en cada una de las pruebas fueron: a) aún no asistían al PABRE cuando se realizó la primera prueba informal y b) dejaron de asistir al PABRE cuando se llevó a cabo la segunda prueba informal.

En el análisis realizado se identificaron las siguientes estrategias:

Estrategia: Contar todo

Variación: Contar todo con los dedos

Niño 10

Hecho Multiplicativo: 4 × 4

Resultado: Correcto

Ejecución: Levanta 4 dedos de la mano izquierda y comienza a contar en voz alta desde 1 hasta 4 y con su mano derecha lleva el conteo del número de grupos levantando uno de sus dedos, nuevamente cuenta los dedos de la mano izquierda (“5, 6, 7, 8”) y agrega un dedo más en la mano derecha repite este procedimiento dos veces para llegar a 16.

Análisis: Esta estrategia revela el uso de un doble conteo: de los elementos de cada grupo y de los grupos que se van añadiendo conforme avanza el primer conteo.

Niño 4

Hecho Multiplicativo: 4 × 8

Resultado: Correcto

Ejecución: Al momento de contar levanta 4 dedos de la mano izquierda, comenzando con el dedo índice cuenta cada uno de los dedos (“1, 2, 3, 4”) después repite esta acción nuevamente (“5, 6, 7, 8”) sigue el mismo procedimiento varias veces hasta llegar a 32.

Análisis: El participante en este ejemplo únicamente utiliza los 4 dedos de una mano para realizar el conteo del 1 al 32. Sin embargo, se infiere que el segundo conteo lo lleva a cabo mentalmente.

Estrategia: Cálculo aditivo

Variación: Adición repetida

Niño 15

Hecho Multiplicativo: 7 × 9

Resultado: Incorrecto

Ejecución: Escribió siete veces el número 9 de manera vertical, a partir de 9 cuenta con los dedos de uno en uno repetidamente, se equivoca al contar el último 9 dando como resultado 62. Cada vez que terminaba de contar un 9 lo marcaba.
Análisis: Realiza adiciones secuenciales, utiliza una notación aritmética estándar y para realizar el conteo de uno en uno emplea sus dedos.

Estrategia: Conteo de…

Variación: Conteo de… utilizando los dedos

Niño 7

Hecho Multiplicativo: 10 × 7

Resultado: Correcto

Ejecución: Coloca 7 dedos y cuenta en voz alta de 10 en 10.

Análisis: Enuncia la secuencia y hace el seguimiento con sus dedos del número de veces que ha contado.

Niño 8

Hecho Multiplicativo: 5 × 6

Resultado: Correcto

Ejecución: Coloca 6 dedos y cuenta en voz alta de 5 en 5 señalando cada uno de sus dedos.

Análisis: Enuncia la secuencia y realiza el seguimiento con ayuda de sus dedos.

Estrategia: Basada en patrones

Variación: Reglas del 0, 1 y 10

Niño 7

Hecho Multiplicativo: 10 × 10

Resultado: Correcto

Ejecución: Coloca el número 100 en su prueba.

Análisis: Se le preguntó ¿por qué colocaba ese número?, mencionó que sólo aumenta un 0 al 10 porque así se hace al multiplicar por 10.

Niño 8

Hecho Multiplicativo: 1 × 6

Resultado: Correcto

Ejecución: Escribe el número 6 en su prueba.

Análisis: Al cuestionarla sobre su respuesta menciona que todos los números multiplicados por uno siempre dan como resultado el mismo número.

Estrategia: Producto aprendido

Niño 6

Hecho Multiplicativo: 2 × 3

Resultado: Correcto

Ejecución: Escribe el número 6 como respuesta, no se observó que realizara algún cálculo.

Análisis: Responde de manera automática.

Niño 13

Hecho Multiplicativo: 5 × 6

Resultado: Correcto

Ejecución: Escribe 30 en su prueba sin utilizar algún cálculo.

Análisis: Responde de manera automática.

Estrategia: Híbridas

Variación: Producto aprendido + Contar todo

Niño 2

Hecho Multiplicativo: 7 × 7

Resultado: Correcto

Ejecución: Parte del hecho multiplicativo de 5 × 7 = 35 y cuenta dos veces 7 con ayuda de sus dedos.

Análisis: El niño desconoce los hechos multiplicativos de 7, sin embargo, conoce el resultado de 5 × 7 por lo que parte de este producto y realiza un conteo.

Niño 5

Hecho Multiplicativo: 4 × 8

Resultado: Correcto

Ejecución: Comienza con el producto aprendido de 4 × 5 para ello utiliza la *Propiedad conmutativa* transformándolo en 5 × 4 y con ayuda de sus dedos cuenta tres veces 4.

Análisis: El niño desconoce los hechos multiplicativos de 4, por lo que utiliza el producto de 5 × 4 = 20 (*Propiedad conmutativa*) y realiza un conteo.

Variación: Producto aprendido + Cálculo aditivo

Niño 6

Hecho Multiplicativo: 5 × 5

Resultado: Correcto

Ejecución: Enuncia que 5 × 4 son 20 más 5 da 25.

Análisis: Parte de un *Producto aprendido* y le suma a éste un número más.

Las siguientes estrategias fueron identificadas al analizar la segunda prueba informal que fue aplicada a 14 participantes y que contenía 21 hechos multiplicativos básicos.

Estrategia: Contar todo

Variación: Contar todo con los dedos

Niño 15

Hecho Multiplicativo: 3 × 3

Resultado: Correcto

Ejecución: La participante levanta 3 dedos de su mano izquierda (comenzando con el dedo índice) y señalando cada uno los comienza a contar “1, 2, 3” manteniendo los dedos cuenta dos veces más “4, 5, 6 (pausa) 7, 8, 9”.

Análisis: En este ejemplo la participante únicamente lleva a cabo el conteo del 1 al 9 utilizando los dedos de su mano izquierda.

Niño 15

Hecho Multiplicativo: 6 × 3

Resultado: Correcto

Ejecución: El participante levanta 3 dedos de su mano izquierda y cuenta cada uno “1, 2, 3” manteniendo los dedos arriba sigue contando “4, 5, 6” repite estas acciones hasta llegar a 18.

Análisis: El participante realiza el conteo del 1 al 18 utilizando los dedos de su mano izquierda.

Estrategia: Cálculo Aditivo

Variación: Colapsar grupos + Sumar

Niño 15

Hecho Multiplicativo: 7 × 7

Resultado: Incorrecto

Ejecución: Escribe en la prueba siete veces el número 7 y comienza a sumar agrupándolos por pares. Para sumar por pares utiliza sus dedos, sin embargo, cuando llega al tercer grupo se equivoca al momento de escribir el número 42 en su lugar coloca 52 por lo que al sumar un 7 más su resultado es 59.

Análisis: Agrupa y forma tres parejas de números 7 y los suma utilizando una notación aritmética estándar, además, utiliza sus dedos para llevar a cabo el conteo.

Niño 15

Hecho Multiplicativo: 8 × 8

Resultado: Incorrecto

Ejecución: Escribe en la hoja ocho veces el número 8 y comienza a sumar agrupándolos por pares. Para sumar por pares utiliza sus dedos, sin embargo, cuando llega al segundo grupo se equivoca al sumar de 24 a 50 en lugar de 48 por lo tanto el resultado es incorrecto.

Análisis: Agrupa y forma cuatro parejas de números 8 y los suma utilizando una notación aritmética estándar. Utiliza sus dedos para realizar el conteo.

Estrategia: Conteo de…

Variación: Conteo de… utilizando los dedos

Niño 16

Hecho Multiplicativo: 2 × 4

Resultado: Correcto

Ejecución: Realiza un conteo de 2 en 2 utilizando sus dedos.

Análisis: Enuncia la secuencia de conteo utilizando la estrategia *Conteo de 2 en 2* expuesta en el Cartel Multiplicativo.

Estrategia: Basada en patrones

Variación: Reglas del 0, 1 y 10

Niño 5

Hecho Multiplicativo: 1 × 3

Resultado: Correcto

Ejecución: Escribe como respuesta el número 3.

Análisis: Domina la estrategia *Regla del 1* expuesta en el Cartel Multiplicativo.

Variación: Técnica del 9 con los dedos

Niño 16

Hecho Multiplicativo: 7 × 9

Resultado: Correcto

Ejecución: Como no conoce los hechos multiplicativos de 7 utiliza la *Propiedad conmutativa* de esta manera, lo transforma en el hecho multiplicativo de 9 × 7 hecho que resuelve utilizando la *Técnica del 9 con los dedos*.

Análisis: Domina la *Técnica del 9 con los dedos* propuesta en el Cartel Multiplicativo.

Estrategia: Producto aprendido

Niño 5

Hecho Multiplicativo: 5 × 5

Resultado: Correcto

Ejecución: Responde de forma automática.

Análisis: Dominio de este hecho multiplicativo.

Niño 2

Hecho Multiplicativo: 7 × 8

Resultado: Correcto

Ejecución: Responde de forma automática.

Análisis: Dominio de este hecho multiplicativo.

Estrategia: Estrategias híbridas

Variación: Producto aprendido + Contar todo

Niño 11

Hecho Multiplicativo: 8 × 8

Resultado: Correcto

Ejecución: Conoce el resultado de 7 × 8 y posteriormente cuenta 8 más con ayuda de sus dedos.

Análisis: Parte de un *Producto aprendido* y realiza un conteo.

Niño 10

Hecho Multiplicativo: 8 × 3

Resultado: Correcto

Ejecución: Conoce el producto de 8 × 2 y cuenta un 8 más utilizando sus dedos.

Análisis: Parte de un *Producto aprendido* y realiza un conteo.

Variación: Factor dividido + Producto aprendido + Cálculo aditivo

Niño 15

Hecho Multiplicativo: 4 × 4

Resultado: Correcto

Ejecución: Al dividir los factores queda el hecho multiplicativo de 2 × 2, suma dos veces el producto (4 + 4) y nuevamente suma dos veces el resultado de la

operación anterior (8 + 8) en ambos casos conoce el producto de estos hechos aditivos, por lo que responde de manera automática.
Análisis: Divide los factores del hecho multiplicativo y suma los resultados.

Analizando los ejemplos ya descritos se observó que la mayoría de los participantes utiliza la variación *Conteo de… utilizando los dedos* y *Adición repetida* como una primera aproximación para resolver los hechos multiplicativos. Se puede observar también que los participantes resuelven con mayor facilidad los hechos multiplicativos de 2 y 5 así como los que implican la variación: *Reglas del 0, 1 y 10* lo cual ocurrió en ambas pruebas. La variación *Producto aprendido + Contar todo* fue utilizada en ambas pruebas principalmente en aquellos hechos donde el multiplicando y el multiplicador son el mismo y resultan ser mayores a 6 (por ejemplo, 6 × 6, 7 × 7, 8 × 8, etcétera).

Además, en el análisis se encontró que los participantes utilizaban la *Propiedad conmutativa* propuesta en el Cartel Multiplicativo. Su empleo se puede observar en los ejemplos descritos de la variación *Producto aprendido + Contar todo* (Niño 5) y en la variación *Técnica del 9 con los dedos* (Niño 16).

Al analizar las respuestas de la primera prueba informal se encontraron dos soluciones que no están contempladas dentro de la clasificación de Sherin y Fuson (2005) por lo que las investigadoras las denominaron y describieron de la siguiente forma:

Estrategia: Producto aprendido + Resta

El estudiante parte de un producto aprendido mayor al total y le resta el multiplicador para obtener el resultado.

Estrategia: Producto aprendido + Resta

Niño 2
Hecho Multiplicativo: 7 × 9
Resultado: Correcto

Ejecución: Parte del producto aprendido de 7 × 10 y le resta el multiplicando (7) utilizando sus dedos para llegar al resultado final.
Análisis: El participante al dominar el hecho multiplicativo de 7 × 10 lo utiliza para restarle a su producto 7 y de esta forma obtener el producto de 7 × 9.

Estrategia: Enunciar la tabla de multiplicar

El estudiante enuncia desde *a* × 1 hasta *a* ×… para encontrar el resultado del hecho multiplicativo.

Estrategia: Enunciar la tabla de multiplicar

Niño 11
Hecho Multiplicativo: 7 × 9
Resultado: Correcto
Ejecución: Enuncia la tabla del 7 comenzando desde 7 × 1 hasta llegar a 7 × 9.
Análisis: El niño desconoce este hecho multiplicativo por lo que tiene que enunciar toda la tabla.

De acuerdo al análisis antes descrito, se puede afirmar que las estrategias sugeridas en el Cartel Multiplicativo sí fueron empleadas por los participantes para lograr el dominio de los hechos multiplicativos básicos.

En el siguiente apartado se describen las dificultades que presentaron los participantes al emplear el Cartel Multiplicativo.

Dificultades que presentaron los niños al comprender y aplicar las estrategias sugeridas en el Cartel Multiplicativo

Al analizar la información retomada de las observaciones registradas a lo largo de la intervención se encontraron tres principales dificultades que los participantes presentaron con mayor frecuencia al aprender el manejo del Cartel Multiplicativo, éstas se denominaron como: *a) equivocaciones de un nuevo aprendizaje, b) uso excesivo del Cuadro Multiplicativo y c) generalizar la tabla del 9 con los dedos*, las cuales se describen a continuación:

a) Equivocaciones de un nuevo aprendizaje. Durante las primeras sesiones se presentaba continuamente esta dificultad principalmente en la estrategia *Tabla del 9 con los dedos* ya que para algunos participantes era una estrategia desconocida por lo que las investigadoras instruían a los participantes respecto al procedimiento a seguir, sin embargo, durante las sesiones de trabajo posteriores a la instrucción los participantes tenían complicaciones al recordar los pasos a seguir para emplear esta estrategia, se cometían errores como el desconocer cuál era el dedo que se doblaba y/o cuál era la forma correcta de realizar el conteo de unidades y decenas.

b) Uso excesivo del Cuadro Multiplicativo. Esta dificultad se presentó a lo largo de toda la intervención, ya que algunos participantes para resolver ciertos hechos multiplicativos utilizaban solamente el Cuadro Multiplicativo (que presentaba sus resultados) y se limitaban a consultarlo, aún cuando ya habían logrado el dominio de esos hechos multiplicativos o incluso cuando podían utilizar diversas estrategias, tanto las propuestas en el Cartel Multiplicativo como algunas de sus propias combinaciones para resolverlos.

c) Generalizar la Tabla del 9 con los dedos. Cuando los participantes lograban exitosamente aplicar la *Tabla del 9 con los dedos* surgió una complicación pues los participantes pensaban que esta estrategia se podía emplear para resolver cualquier hecho multiplicativo aún cuando éste no implicara la tabla del 9 o en el que apareciera el número 9 como uno de sus factores, por ejemplo, creían poder utilizarla para resolver 3×4, por lo que cada vez que esto sucedía se les explicaba nuevamente la estrategia y se les reiteraba que únicamente era de utilidad para resolver los hechos multiplicativos de 9.

Estrategias empleadas por los niños al resolver problemas multiplicativos de agrupamiento y precio

Para conocer las estrategias empleadas por los participantes al momento de resolver problemas multiplicativos de agrupamiento y precio se retomó nuevamente la clasificación de estrategias canónicas ideada por Sherin y Fuson (2005). La información para realizar el análisis de este tercer y último aspecto fue retomada de dos fuentes: a) las ejecuciones escritas realizadas por los participantes en hojas cuadriculadas al resolver los problemas multiplicativos de agrupamiento y precio y b) de las observaciones registradas por las investigadoras durante 18 sesiones de trabajo en las que los participantes resolvieron ambos tipos de problemas multiplicativos.

Este análisis da cuenta de la evolución en general de las estrategias y de las variaciones que los participantes empleaban al momento de resolver problemas de agrupamiento y precio a lo largo de la intervención, para ello se describen los hallazgos más significativos al analizar las dos fuentes de información durante los meses de septiembre, octubre y noviembre de 2012 así como la descripción y ejemplificación de nuevas estrategias que fueron registradas por las investigadoras durante esos meses retomando únicamente los ejemplos que resultaron más representativos.

De acuerdo al análisis de las dos fuentes de información se observó en el mes de septiembre que la mayoría de los participantes resolvían los problemas multiplicativos de agrupamiento y precio utilizando algunas estrategias del Cartel Multiplicativo como la *Tabla del 9 con los dedos,* el *Cuadro Multiplicativo* y las *Reglas de 0 y 10*. Se registró el empleo de un par de variaciones de la estrategia *Contar todo* (*Contar después de dibujar. "Dibujo matemático*" y *Contar todo con los dedos*) como una primera aproximación a la multiplicación. Además, se utilizó la variación *Conteo de… utilizando los dedos* para conteos de 5 en 5 y de 10 en 10 principalmente. Es importante mencionar que algunos de los participantes al enfrentarse a un problema multiplicativo de agrupamiento o precio lograban identificarlo como un problema que se resolvía con una multiplicación, sin embargo, no podían darle solución porque desconocían los hechos multiplicativos correspondientes.

En el mes de octubre se puede encontrar que la estrategia *Producto aprendido,* junto con las variaciones *Contar todo con los dedos* y *Producto aprendido + Contar todo* (con los dedos) eran frecuentemente utilizadas por participantes. Por otra parte, a lo largo de la intervención se insistió constantemente a los participantes para que emplearan las estrategias propuestas en el Cartel Multiplicativo lo cual se vio reflejado en las soluciones registradas durante este mes pues entre las estrategias más empleadas se encuentran las *Reglas del 0, 1 y 10,* la *Tabla del 9 con los dedos,* el *Conteo de…* (2 en 2 y de 5 en 5), el *Cuadro Multiplicativo* y la *Propiedad conmutativa.*

En este mes también se observó el empleo de una nueva estrategia que no está contemplada en la clasificación de Sherin y Fuson (2005) la cual se denominó como *Producto aprendido de la adición* ésta se define y ejemplifica a continuación:

Estrategia: Producto aprendido de la adición

El estudiante recuerda el resultado de un hecho numérico aditivo sin recurrir a alguna estrategia para resolverlo, así su respuesta es rápida y sin cálculo visible.

Estrategia: Producto aprendido de la adición

Niño 2

Problema multiplicativo de precio:

Figura 10. Extracto de la hoja de trabajo No. 26 realizada por el participante.

¿Cuánto pagarías si compras 4 tijeras?

Resultado: Correcto

Ejecución: Para resolver 7 × 4 (ver figura 10) el participante menciona que 7 + 7 son 14 y posteriormente dice “dos”, entonces, son 28.

Análisis: El participante mentalmente fragmenta el hecho multiplicativo de 7 × 4 de tal manera que su solución está en función de conocer el producto de (7 × 2) + (7 × 2) para ello él ya ha dominado el hecho numérico aditivo de 7 + 7 por lo que únicamente procede a decirlo para después recordar el hecho numérico aditivo de 14 + 14 y así obtener el resultado final.

Durante este mes se concentra una gran variedad de estrategias empleadas por los participantes donde se observa un cambio significativo comparado con el mes anterior, ya que una vez que los participantes aprendieron algunas de las estrategias del Cartel Multiplicativo algunos las utilizaron para combinarlas con sus propias soluciones dando lugar así a nuevas combinaciones.

Los ejemplos que se describen a continuación son combinaciones que lograron realizar algunos de los participantes durante el mes de octubre algunas de ellas se utilizaban frecuentemente y algunas más sólo hicieron su aparición una vez.

Estrategia: Propiedad conmutativa + Conteo de 5 en 5 utilizando los dedos

Niño 4

Problema multiplicativo de agrupamiento:

Una bolsa tiene 50 gelatinas. Si compran 6 bolsas, ¿cuántas gelatinas habrá en total?

Resultado: Correcto

Ejecución: El participante al tratar de resolver el hecho multiplicativo de 6 × 5 (el cual está implicado en la operación 50 × 6) menciona a la investigadora que no conoce la tabla del 6, por lo que ésta le sugirió utilizar la *Propiedad conmutativa* propuesta en el Cartel Multiplicativo, de esta manera, el hecho se convirtió en 5 × 6 el cual resuelve empleando la variación *Conteo de 5 en 5 utilizando los dedos*, para comenzar el conteo levantó el dedo pulgar diciendo “5” después levantó el dedo índice y dice “10”, continúa el conteo hasta llegar a 30 (dedo meñique de la mano izquierda).

Análisis: El participante al enfrentarse con un hecho desconocido (6 × 5) en un primer momento intentó desertar, sin embargo, al sugerirle utilizar la *Propiedad conmutativa* el hecho paso a ser 5 × 6 un hecho que sabía resolver empleando la variación *Conteo de 5 en 5 utilizando los dedos*.

Estrategia: Propiedad conmutativa + Producto aprendido

Niño 10

Problema multiplicativo de agrupamiento:

Un paquete tiene 45 galletas ritz. Si se tienen 4 paquetes, ¿cuántas galletas habrá en total?

Resultado: Correcto

Ejecución: El participante al tratar de resolver el hecho multiplicativo de 4 × 5 (incluido en la operación 45 × 4) menciona no saber cuánto es, pero en cambio dice que sí sabe que 5 × 4 son 20 (*Propiedad conmutativa*) utilizando así un *Producto aprendido* lo cual le permite obtener el resultado correcto.

Análisis: El participante desconoce el hecho multiplicativo de 4 × 5, sin embargo, sabe que no es la única forma de resolver este hecho y recurre a la *Propiedad conmutativa* así resulta en un hecho multiplicativo que es ya de su dominio.

Estrategia: Propiedad conmutativa + Producto aprendido + Contar todo con los dedos

Niño 5

Problema multiplicativo de agrupamiento:

Una bolsa tiene 18 pelones. Si se tienen 39 bolsas, ¿cuántos pelones habrá en total?

Resultado: Correcto

Ejecución: El participante escribe en su hoja cuadriculada la operación 18 × 39, sin embargo, para describir el procedimiento utilizado y analizar la ejecución sólo se considera la estrategia empleada por el participante para conocer el producto del hecho multiplicativo 3 × 8. Para resolver éste hecho el participante menciona que es más fácil resolver 8 × 3, dice que ya tiene 16 (8 × 2) entonces, levanta 8 dedos y comienza a contarlos “17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24”.

Análisis: El participante utiliza como primer paso la *Propiedad conmutativa,* estrategia con la cual está familiarizado, posteriormente procede a resolver el hecho 8 × 3, debido a que conoce el resultado del hecho multiplicativo 8 × 2

(*Producto aprendido*) parte de éste para utilizar la estrategia de *Contar todo con los dedos* para llegar al resultado.

Estrategia: Enunciar la tabla de multiplicar + Contar todo con los dedos

Niño 10

Problema multiplicativo de agrupamiento:

Un paquete tiene 45 galletas ritz. Si se tienen 4 paquetes, ¿cuántas galletas habrá en total?

Resultado: Correcto

Ejecución: Para resolver el hecho multiplicativo de 4 × 4 (incluido en la operación 45 × 4) el participante comienza a enunciar la tabla de multiplicar de 4 “4 × 1 = 4, 4 × 2 = 8” después levanta 4 de sus dedos y procede a contarlos dos veces para obtener el resultado.

Análisis: En esta ejecución el participante realiza una combinación de estrategias para resolver un hecho multiplicativo que él desconoce.

Estrategia: Grupos escritos + Contar después de dibujar. “Dibujo matemático” + Producto aprendido de la adición

Niño 7

Problema multiplicativo de agrupamiento:

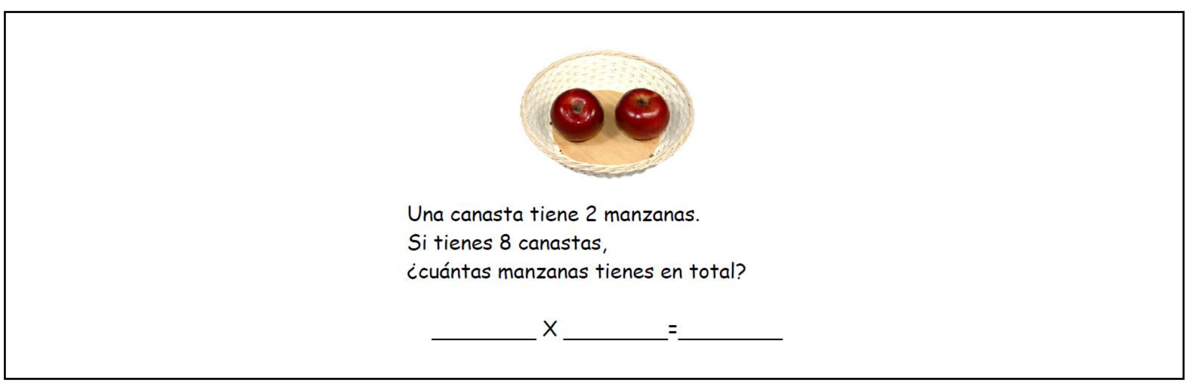


Figura 11. Extracto de la hoja de trabajo No. 4 realizada por el participante.

Resultado: Correcto

Ejecución: Al resolver el hecho multiplicativo de 2 × 8 (ver figura 11), el participante escribe en su hoja cuadriculada los números del 1 al 4 después dibuja dos palitos debajo del número 1 y mientras lo hace dice “1, 2” dibuja dos palitos más en el número 2 y dice “3, 4” realiza lo mismo en los números 3 y 4 (ver figura 12) finalizando el conteo con el número 8 después dice “8 y 8 son 16”.

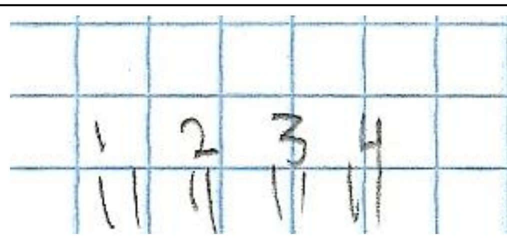


Figura 12. Estrategia empleada por el participante.

Análisis: El participante escribe los grupos con números del 1 al 4 y dibuja los elementos representándolos con palitos para contarlos, al terminar de dibujarlos hace alusión a un hecho numérico aditivo el cual domina para conocer el resultado.

Estrategia: Conteo de 5 en 5 utilizando los dedos + Contar todo con los dedos

Niño 7

Problema multiplicativo de agrupamiento:

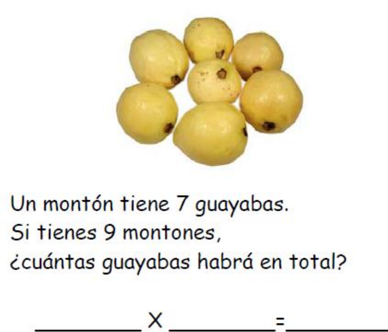


Figura 13. Extracto de la hoja de trabajo No. 4 realizada por el participante.

Resultado: Correcto

Ejecución: Para resolver el hecho multiplicativo de 7 × 9 (ver figura 13) el participante primero levantó 7 dedos para hacer un conteo de 5 en 5 comenzó con el dedo pulgar de la mano izquierda diciendo “5, 10, 15, 20, 25, 30, 35” se detiene al alcanzar el resultado de 7 × 5, después con los 7 dedos que ya tenía levantados procedió a contarlos de uno en uno “36, 37, 38, 39, 40, 41, 42” repitió esta acción tres veces más hasta llegar a 63.

Análisis: En el ejemplo anterior el participante utilizó el *Conteo de 5 en 5*, estrategia propuesta en el Cartel Multiplicativo que además, combinó con la variación *Contar todo con los dedos*.

Estrategia: Propiedad conmutativa + Tabla del 9 con los dedos

Niño 7

Problema multiplicativo de agrupamiento:

Una caja tiene 4 colores.
Si se tienen 9 cajas, ¿cuántos colores habrá en total?

____ X ____ = ____

Figura 14. Extracto de la hoja de trabajo No. 3 realizada por el participante.

Resultado: Correcto

Ejecución: El participante para resolver el hecho multiplicativo 4 × 9 (ver figura 14) utiliza la *Propiedad conmutativa* para convertirlo en 9 × 4 y así poder utilizar la estrategia de la *Tabla del 9 con los dedos*.

Análisis: Para resolver este problema donde está implicado el hecho multiplicativo de 4 × 9 el participante utiliza la *Propiedad conmutativa* ya que desconoce los hechos multiplicativos de 4 por lo que lo resuelve el hecho 9 × 4 a través de la *Tabla del 9 con los dedos*, es importante señalar que ambas estrategias están propuestas en el Cartel Multiplicativo.

Estrategia: Propiedad conmutativa + Contar todo con los dedos

Niño 7

Problema multiplicativo de agrupamiento:

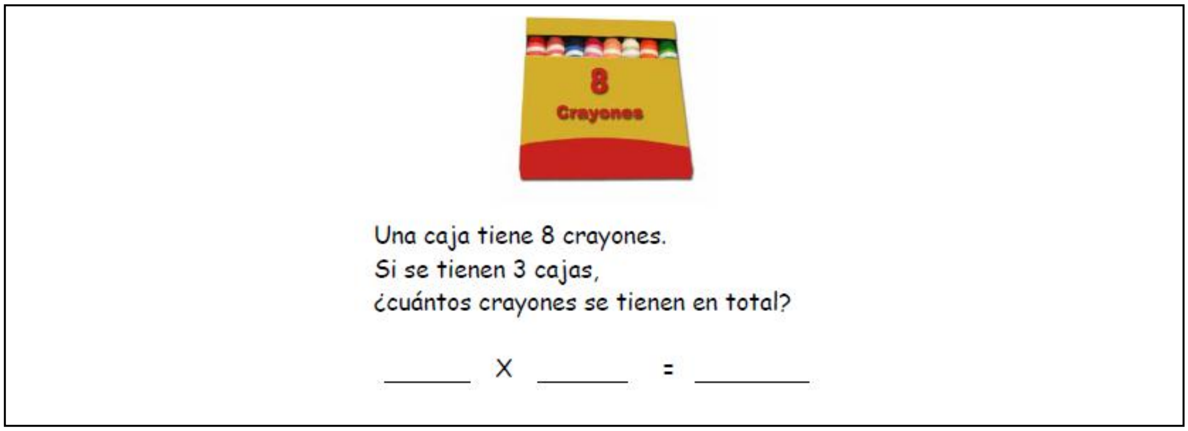


Figura 15. Extracto de la hoja de trabajo No. 3 realizada por el participante.

Resultado: Correcto

Ejecución: Para resolver este problema (ver figura 15) que implica el hecho multiplicativo de 8 × 3 el participante levanta 8 de sus dedos y procede a contarlos 3 veces hasta llegar a 24 con esta acción convirtió el hecho multiplicativo inicial a 3 × 8.

Análisis: El participante utiliza la *Propiedad conmutativa* para facilitarse la resolución de este problema y una vez invertidos los números contó 3 veces 8 con sus dedos para llegar a la solución final.

Es importante mencionar que también durante este mes los participantes una vez que aprendieron y dominaron las estrategias propuestas en el Cartel Multiplicativo lograron utilizar los principios que las regían para derivar de éstas mismas otras estrategias, un ejemplo de ello son los conteos pues en el Cartel se hace la propuesta de utilizar el *Conteo de 2 en 2, de 10 en 10 y de 5 en 5* que llevó a algunos de los participantes a realizar *Conteo de 3 en 3 y/o de 4 en 4* de lo cual se puede deducir que las estrategias del Cartel Multiplicativo resultaron significativas para resolver problemas multiplicativos ya que los participantes contaban con más herramientas para solucionarlos.

En el mes de noviembre se observó que la estrategia de *Producto aprendido* y la variación *Producto aprendido + Contar todo* (con los dedos) fueron utilizadas frecuentemente por los participantes junto con algunas de las estrategias del Cartel Multiplicativo como las *Reglas de 0, 1 y 10*, la *Propiedad conmutativa* y la *Tabla del 9 con los dedos;* además, los participantes seguían utilizando la estrategia de *Conteo de…* (2 en 2 o de 5 en 5). Durante este mes los participantes ya tenían algunas estrategias consolidadas y con ellas realizaban combinaciones para resolver los diferentes problemas multiplicativos entre ellos los de precio, algunos ejemplos significativos de estas combinaciones se describen a continuación.

Estrategia: Propiedad conmutativa + Enunciar la tabla de multiplicar

Niño 6

Problema multiplicativo de precio:

Figura 16. Extracto de la hoja de trabajo No. 27 realizada por el participante.

¿Cuánto pagarías si compras 7 plumas?

Resultado: Correcto

Ejecución: Para resolver este problema que implica al hecho multiplicativo de 7 × 5 (ver figura 16) el participante utilizó la *Propiedad conmutativa* convirtiendo el hecho a 5 × 7 para después enunciar la tabla de multiplicar diciendo “5 × 1 = 5, 5 × 2 = 10, 5 × 3 = 15… 5 × 7 = 35”.

Análisis: El participante al desconocer los hechos multiplicativos de 7 específicamente 7 × 5 utilizó la *Propiedad conmutativa* (estrategia propuesta en el

Cartel Multiplicativo) la cual combinó con la estrategia *Enunciar la tabla de multiplicar de 5*.

Estrategia: Producto aprendido + Enunciar la tabla de multiplicar

Niño 12

Problema multiplicativo de precio:

Figura 17. Extracto de la hoja de trabajo No. 36 realizada por el participante.

¿Cuánto pagarías si compras 7 paquetes de plumas?

Resultado: Correcto

Ejecución: Para el hecho multiplicativo de 7 × 7 (ver figura 17) el participante dice que 7 × 5 son 35 posteriormente enunció la tabla de multiplicar "7 × 6 = 42, 7 × 7 = 49".

Análisis: El participante parte de un *Producto aprendido* en este caso el de 7 × 5 y para conocer el resultado de 7 × 7 recurre a la estrategia *Enunciar la tabla de multiplicar* para completar su resultado.

Los resultados presentados en este apartado, dan cuenta de que las estrategias sugeridas en el Cartel Multiplicativo sí fueron empleadas por los participantes para solucionar los problemas multiplicativos de agrupamiento y precio. Con esto se finaliza el primer nivel del análisis de resultados y en el siguiente apartado se describirá el estudio de casos.

Estudio de casos

En este segundo nivel se llevó a cabo el estudio de casos con dos niñas que al inicio del estudio desconocían los hechos multiplicativos básicos y que con ayuda del Cartel lograron dominar la mayoría. Para lograrlo, se analizaron los cambios a lo largo del estudio de los tres aspectos ya señalados: a) las estrategias que utilizaron los niños al responder si conocen diversos hechos multiplicativos, b) las dificultades que presentaron al comprender y aplicar las estrategias sugeridas en el Cartel Multiplicativo y c) las estrategias que emplearon al resolver problemas multiplicativos de agrupamiento y precio; lo cual permitió obtener una cronología que da cuenta de la variación de las estrategias observadas para conocer los avances y comprobar la efectividad del Cartel Multiplicativo.

A continuación se muestra detalladamente la evolución de cada una de las participantes, describiendo los resultados que obtuvieron durante la primera prueba informal, las estrategias que utilizaron al resolver problemas multiplicativos de agrupamiento y precio durante las sesiones de trabajo, los resultados de su segunda prueba informal y se realizan algunos comentarios finales. Cabe mencionar que el nombre de las participantes fue cambiado sólo para fines de esta investigación.

Cecilia

Cecilia asistía al PABRE desde hace algún tiempo donde trabajaba en actividades relacionadas con el área de Adición y Sustracción logrando dominar esta área, por ello y entre otras razones –por el grado escolar que cursaba– pasó al área de Multiplicación y División en donde las investigadoras llevaron a cabo la intervención. Cecilia cursaba el tercer grado de primaria y contaba con 8 años de edad al momento de llevar a cabo la intervención.

Primera prueba informal

A Cecilia se le aplicó la primera prueba informal que contenía 17 hechos multiplicativos básicos, 4 problemas multiplicativos de agrupamiento y 1 problema multiplicativo de precio con 3 preguntas. En seguida se muestran los resultados obtenidos por Cecilia así como las estrategias que utilizó para resolver cada una de las secciones que conformaban esta prueba.

- Hechos multiplicativos básicos

Cecilia obtuvo 5 reactivos correctos de 17 que contenía la prueba, los reactivos correctos fueron los hechos de 1 × 6, 2 × 3, 10 × 7, 1 × 1 y 2 × 2 (ver figura 18) y en tres de ellos utilizó la variación *Regla del 1 y 10.* También se observó que al resolver hechos tales como 3 × 3, 4 × 4, 5 × 5, 6 × 6 y 10 × 10 únicamente procedía a sumar los factores, por ejemplo, para 5 × 5 decía “2 veces 5” y procedía a realizar un conteo diciendo “5” para después levantar cinco de sus dedos y contar “6, 7, 8, 9, 10” con lo cual sus respuestas resultaron incorrectas.

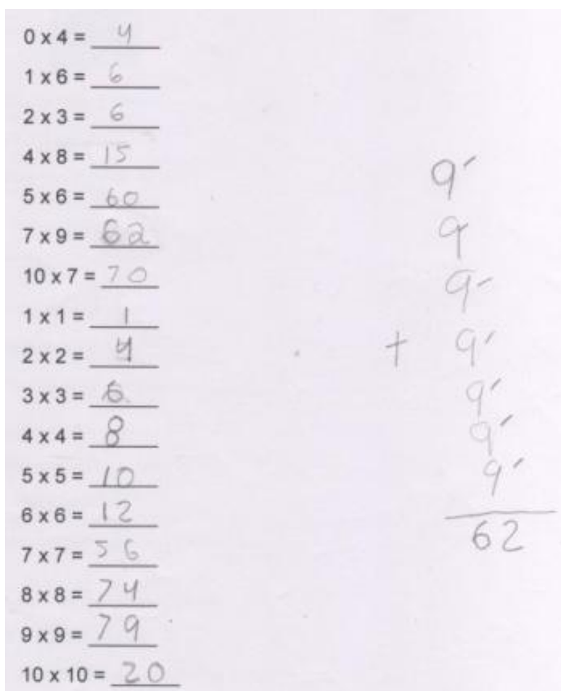


Figura 18. Hechos multiplicativos de la primera prueba informal de Cecilia.

Además, utilizó frecuentemente la variación *Adición repetida* (ver figura 19) sobre todo al resolver los hechos multiplicativos de 7 × 9, 7 × 7, 8 × 8 y 9 × 9, sin embargo, no obtiene los resultados correctos ya que comete algunos errores al llevar a cabo el conteo con sus dedos. Por ejemplo, al resolver el hecho 7 × 9 primero trató de utilizar la estrategia *Producto aprendido + Resta* partiendo del producto aprendido de 7 × 10 = 70, al restar intenta utilizar sus dedos y realizar un conteo pero no sabía cómo hacerlo. Por lo que en su lugar emplea nuevamente la variación *Adición repetida* en la cual falla al realizar el conteo con sus dedos pues obtiene como respuesta en su conteo final 62 en lugar de 63.

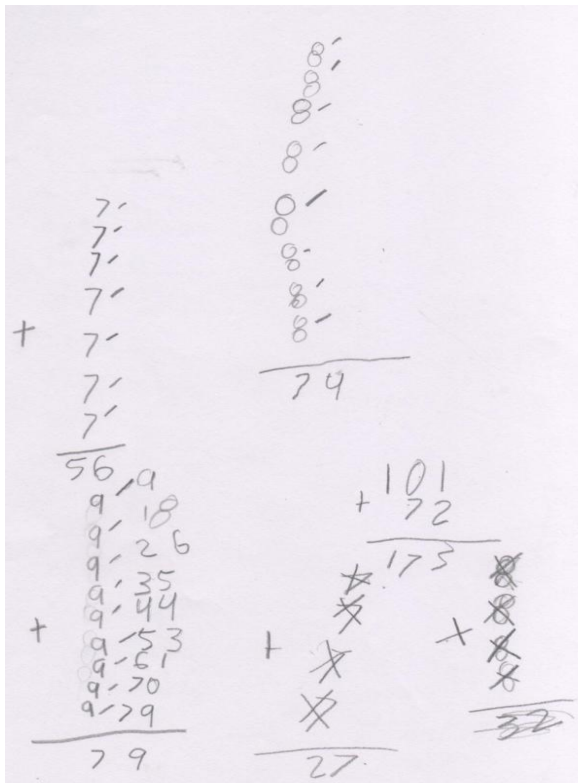


Figura 19. Cecilia utilizó la variación *Adición repetida.*

- Problemas multiplicativos de agrupamiento

Al resolver los problemas multiplicativos de agrupamiento, en el primero de ellos Cecilia logra identificar qué tipo de problema es, ya que en él está impreso el signo de la multiplicación "×" por lo que resuelve el hecho de 5 × 9 empleando la variación *Conteo de 5 en 5 utilizando los dedos* obteniendo una respuesta correcta. En los tres siguientes problemas al no contar con alguna "pista visual" como en el primer problema, los resuelve como si fueran problemas de adición –

sumando los dos factores del problema (13 + 7, 18 + 39 y 101 + 72) – obteniendo resultados erróneos (ver figura 20).

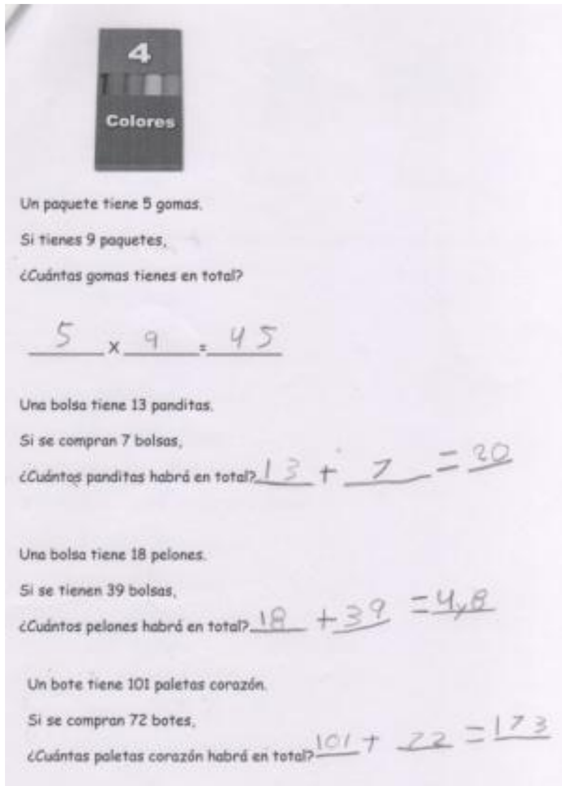


Figura 20. Problemas multiplicativos de agrupamiento del 1° al 4° de la primera prueba informal de Cecilia.

- Problema multiplicativo de precio

Cecilia logra identificar este último problema como un problema multiplicativo ya que dos de las preguntas tenían el signo de la multiplicación "×" y la tercera tenía una redacción similar a las primeras. Se observó que para contestar las preguntas que involucraban al hecho multiplicativo de 4 × 7 y 8 × 4 utilizó la variación *Adición repetida,* aunque para el primero su respuesta fue incorrecta pues se equivocó al llevar a cabo el conteo y para el hecho de 5 × 3 (segunda pregunta) utilizó la variación *Conteo de 5 en 5 utilizando los dedos* obteniendo un resultado correcto (ver figura 21).

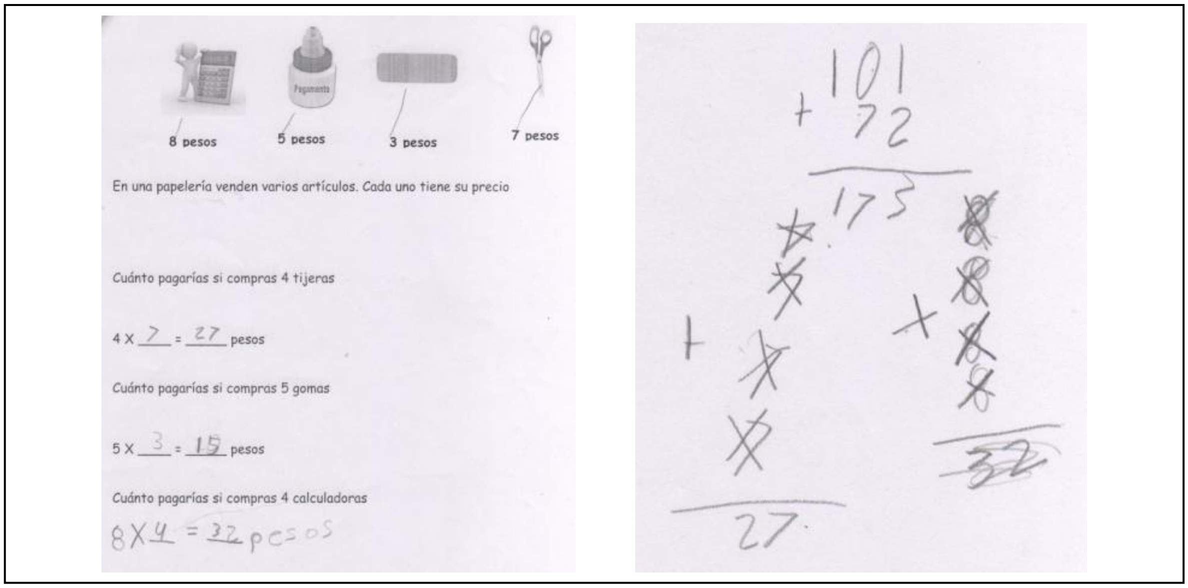


Figura 21. Problema multiplicativo de precio de la primera prueba informal y operaciones realizadas por Cecilia.

Sesiones de trabajo

A continuación se describen y en ciertos casos se ejemplifican algunas de las estrategias y variaciones más significativas que utilizaba Cecilia al resolver problemas multiplicativos de agrupamiento y precio durante las 12 sesiones de trabajo a las que asistió durante la intervención.

En el mes de septiembre cuando a Cecilia se le dio a conocer el Cartel Multiplicativo ella mencionaba que la estrategia de conteo (*Conteo de 2 en 2, de 5 en 5 y de 10 en 10*) sugerida en el Cartel Multiplicativo le resultaba familiar porque ella “antes” ya había aprendido cada uno de esos conteos pero que no sabía que podía resolver las “multiplicaciones” utilizándolos. En las sesiones de trabajo de este mes se observó que Cecilia utilizaba la variación de *Conteo de 5 en 5* y *de 10 en 10 utilizando los dedos,* además, en una sesión para mostrarle la diferencia entre un problema de adición y un problema multiplicativo se utilizó la variación *Contar después de dibujar*. “*Dibujo matemático”.*

También durante este mes Cecilia utilizó una combinación que las investigadoras denominaron *Enunciar la tabla* + *Contar todo con los dedos* que se ejemplifica a continuación:

Estrategia: Enunciar la tabla de multiplicar + Contar todo con los dedos

Niño 15. Cecilia

Problema multiplicativo de agrupamiento:

Un paquete tiene 24 cucharas. Si se compran 3 paquetes, ¿cuántos paquetes habrá en total?

Resultado: Correcto

Ejecución: Para resolver el problema Cecilia en su hoja cuadriculada escribe la operación 24 + 3 en lugar de 24 × 3 confundiendo el problema con una adición, sin embargo, para resolver la operación comienza por obtener el resultado de 3 × 4 para ello enuncia la tabla de multiplicar de 3: “3 × 1 = 3, 3 × 2 = 6” después levanta 3 dedos y los cuenta dos veces para obtener el resto “7, 8, 9”; “10, 11, 12”.

Análisis: Cecilia desconoce el resultado del hecho multiplicativo 3 × 4 y para obtenerlo comienza a *Enunciar la tabla de multiplicar de 3,* sin embargo, como estos hechos multiplicativos aún no los dominaba por completo procede a utilizar la estrategia *Contar todo con los dedos*.

Durante el mes de octubre Cecilia fue una de los participantes que utilizó una amplia gama de estrategias, variaciones y combinaciones para resolver los problemas multiplicativos. Ella utilizó las variaciones *Contar todo con los dedos, Conteo de… utilizando los dedos, Producto aprendido* + *Contar todo con los dedos,* las *Reglas del 0, 1 y 10,* la *Tabla del 9 con los dedos* y ocasionalmente utilizaba el *Cuadro Multiplicativo*. También utilizaba la estrategia que las investigadoras denominaron como *Producto aprendido de la adición*, en cuanto a las combinaciones utilizaba la *Propiedad conmutativa* + *Producto aprendido*, *Propiedad conmutativa* + *Contar todo con los dedos.*

Otras combinaciones que Cecilia empleaba durante este mes y que en ocasiones sólo utilizaba una vez para resolver los problemas multiplicativos se ejemplifican a continuación:

Estrategia: Producto aprendido + Conteo rítmico

Niño 15. Cecilia

Problema multiplicativo de agrupamiento:

Una bolsa tiene 30 paquetes de malvavisco. Si se compran 7 bolsas, ¿cuántos paquetes habrá en total?

Resultado: Correcto

Ejecución: Para resolver el hecho multiplicativo de 7 × 3 (incluido en la operación 30 × 7), Cecilia conocía el resultado de 7 × 1 = 7 y partiendo de éste contó dos veces 7 con sus dedos haciendo énfasis al llegar a 14 y 21 respectivamente, de la siguiente forma: levanta siete de sus dedos y procede a contarlos “8, 9, 10, 11, 12, 13, 14” “15, 16, 17, 18, 19, 20, 21” para obtener el resultado.

Análisis: Cecilia parte de un *Producto aprendido* para después realizar un *Conteo rítmico* para obtener el resultado.

Estrategia: Conteo de 10 en 10 con grupos utilizando los dedos + Conteo de 5 en 5 utilizando los dedos

Niño 15. Cecilia

Problema multiplicativo de agrupamiento:

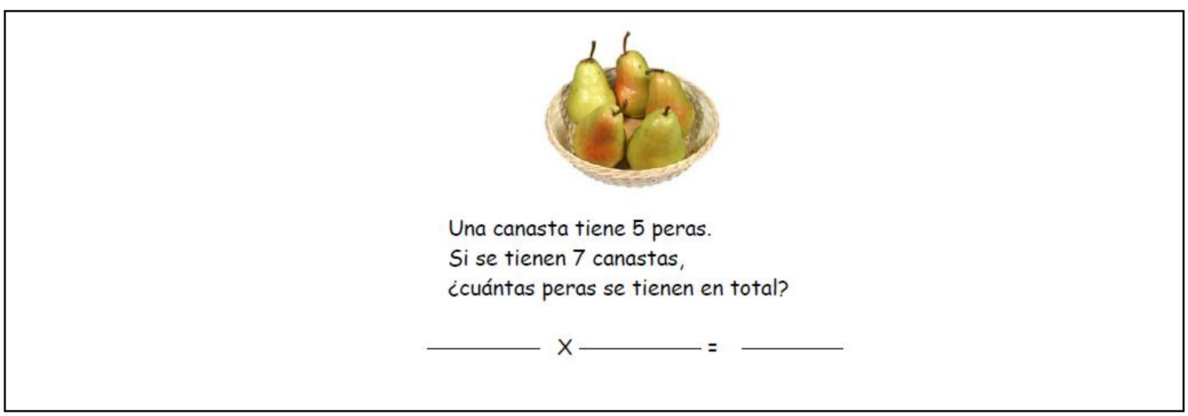


Figura 22. Extracto de la hoja de trabajo No. 4 realizada por Cecilia.

Resultado: Correcto

Ejecución: Para resolver este problema (ver figura 22) debe resolver el hecho multiplicativo de 7 × 5, Cecilia levanta 7 de sus dedos y los agrupa de la siguiente forma: junta 2 de sus dedos y dice “10” junta los dos que le siguen y dice “20”, a los 3 dedos restantes los denomina como “25, 30 y 35” respectivamente otorgándoles así el valor de 5 a cada uno.

Análisis: En este ejemplo Cecilia primero agrupa sus dedos (que normalmente tendrían el valor de 5 cada uno) para realizar un *Conteo de 10 en 10* para posteriormente realizar un *Conteo de 5 en 5* que le permite llegar al resultado.

Finalmente, en el mes de noviembre para resolver los problemas multiplicativos Cecilia empleó la estrategia de *Producto aprendido* además, de seguir utilizando algunas variaciones como *Producto aprendido* + *Contar todo con los dedos,* las *Reglas del 0, 1 y 10,* la *Tabla del 9 con los dedos* y la combinación denominada *Propiedad conmutativa* + *Conteo de 2 en 2 utilizando los dedos,* ésta última se describe en seguida:

Estrategia: Propiedad conmutativa + Conteo de 2 en 2 utilizando los dedos

Niño 15. Cecilia

Problema multiplicativo de agrupamiento:

Una caja tiene 12 sopas marucha. Si se tienen 4 cajas, ¿cuántas sopas habrá en total?

Resultado: Correcto

Ejecución: Para resolver el hecho multiplicativo de 4 × 2 (el cual está implicado en la operación 12 × 4), Cecilia comienza a realizar un conteo de 2 en 2 con sus dedos lo cual nos indica que utilizó la *Propiedad conmutativa* transformando así el hecho multiplicativo a 2 × 4.

Análisis: En este ejemplo Cecilia utilizó la *Propiedad conmutativa* con la cual ya estaba familiarizada y la complementa con la variación *Conteo de… utilizando los dedos* logrando llegar al resultado correcto.

En cuanto a las dificultades que presentó Cecilia al emplear las estrategias sugeridas en el Cartel Multiplicativo la principal se dio en la estrategia de la *Tabla* *del 9 con los dedos,* ya que ella desconocía totalmente el procedimiento por lo que las investigadoras la instruyeron para que lo aprendiera. En el proceso surgieron algunas dificultades ya que en un inicio no lograba identificar el orden para contar las unidades y decenas o el dedo que debía doblar, además, otra dificultad fue que Cecilia generalizó esta estrategia, es decir, ella creía que podía resolver cualquier hecho multiplicativo con la *Tabla del 9 con los dedos* sin importar si en este hecho había o no un número 9 como factor. Al concluir la intervención logró realizar y emplear con éxito esta estrategia.

Un rasgo distintivo de Cecilia es que si alguna estrategia no le "funcionaba" o tenía algunos problemas trataba de simplificarla y acomodarla de tal forma que hacía su "propia versión", por ejemplo, al realizar los conteos o realizar las adiciones sucesivas; esto le permitía tener un aprendizaje más significativo. Además, cuando se equivocaba y obtenía un resultado erróneo seguía intentando con otras estrategias hasta encontrar el resultado correcto.

Segunda prueba informal

Al final de la intervención se le aplicó a Cecilia una segunda prueba informal que estaba conformada por 22 hechos multiplicativos básicos y 6 problemas multiplicativos de agrupamiento, a continuación se muestran los resultados que obtuvo, así como las estrategias que empleó durante la prueba.

- Hechos multiplicativos básicos.

De 22 reactivos Cecilia obtuvo 16 correctos (ver figura 23), para resolver algunos de estos hechos utilizó diversas variaciones entre las que se encontraban las *Reglas de 0, 1 y 10* para 0 × 2, 1 × 3 y 10 × 6; el *Conteo de 5 en 5 utilizando los dedos* para 5 × 5*, Contar todo con los dedos* para los hechos multiplicativos de 3 × 3 y 3 × 6, *Producto aprendido* + *Contar todo con los dedos* para resolver 7 × 3, 7 × 4 y 8 × 3, *Factor dividido* + *Producto aprendido* + *Cálculo aditivo* para 4 × 4, además, Cecilia combinó la *Propiedad conmutativa* + *Tabla del 9 con los dedos* para resolver 7 × 9.

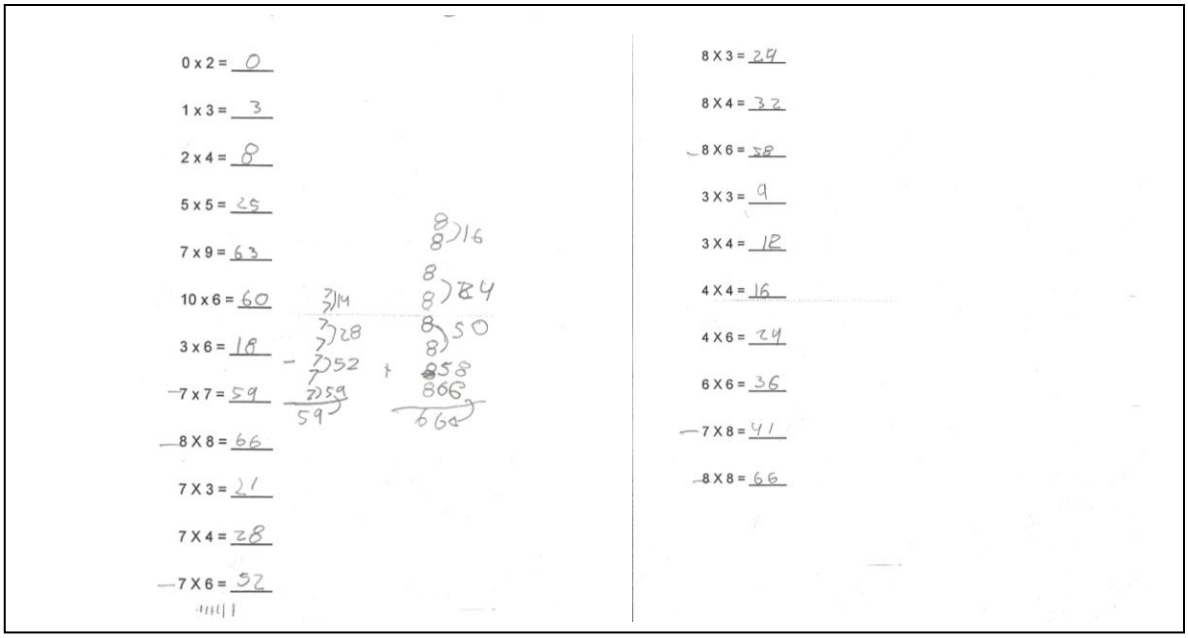


Figura 23. Hechos multiplicativos de la segunda prueba informal de Cecilia.

Dentro de las variaciones que utilizó Cecilia se encontró la variación *Colapsar grupos* + *Sumar* para resolver 7 × 7 y 8 × 8 (ver figura 24), sin embargo, en ambos comete algunos errores al realizar el conteo por lo que los resultados que obtiene son incorrectos.

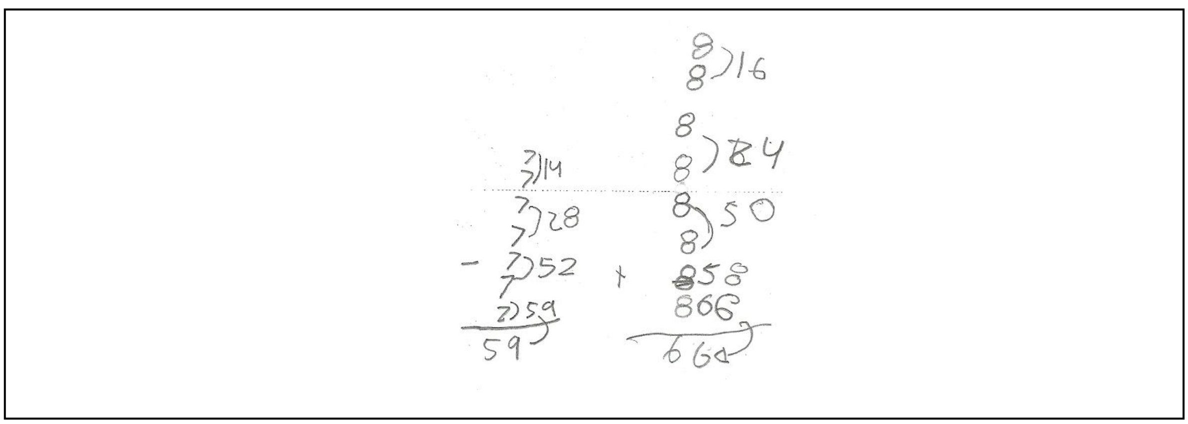


Figura 24. Variación *Colapsar grupos* + *Sumar.*

Por último, empleó la estrategia denominada como *Contar todo con grupos escritos*, la cual se describe a continuación:

Estrategia: Contar todo con grupos escritos

Niño 15. Cecilia

Hecho Multiplicativo: 7 × 6

Resultado: Incorrecto

Ejecución: Primero levanta 7 de sus dedos y comienza a contarlos diciendo “1, 2, 3, 4, 5, 6, 7” al llegar a 7 en su prueba coloca una marca (I) con la que señala el número de veces que ha realizado el conteo, al finalizar en su prueba hay 6 marcas (ver figura 25) y el resultado del conteo es 52.

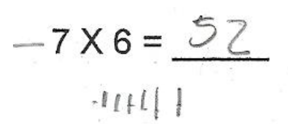


Figura 25. Estrategia *Contar todo con grupos escritos.*

Análisis: Cecilia en este ejemplo utilizó las marcas para saber el número de veces que ha contado 7 pero al realizar el conteo con sus dedos cometió un error obteniendo un resultado incorrecto.

- Problemas multiplicativos de agrupamiento

Al resolver los 6 problemas multiplicativos, Cecilia utilizó la variación *Contar todo con los dedos* para resolver el primer problema donde estaba involucrado el hecho multiplicativo de 3 × 3, en los dos siguientes problemas se observó que Cecilia tenía dificultades al identificar qué clase de problema se le presentaba si multiplicativo o de adición por lo que al resolver los problemas que implicaban a los hechos de 6 × 6 y 4 × 4 ella mencionaba que “6 + 6 = 12 y 4 + 4 = 8” identificándolos así como problemas de adición obteniendo respuestas incorrectas (ver figura 26).

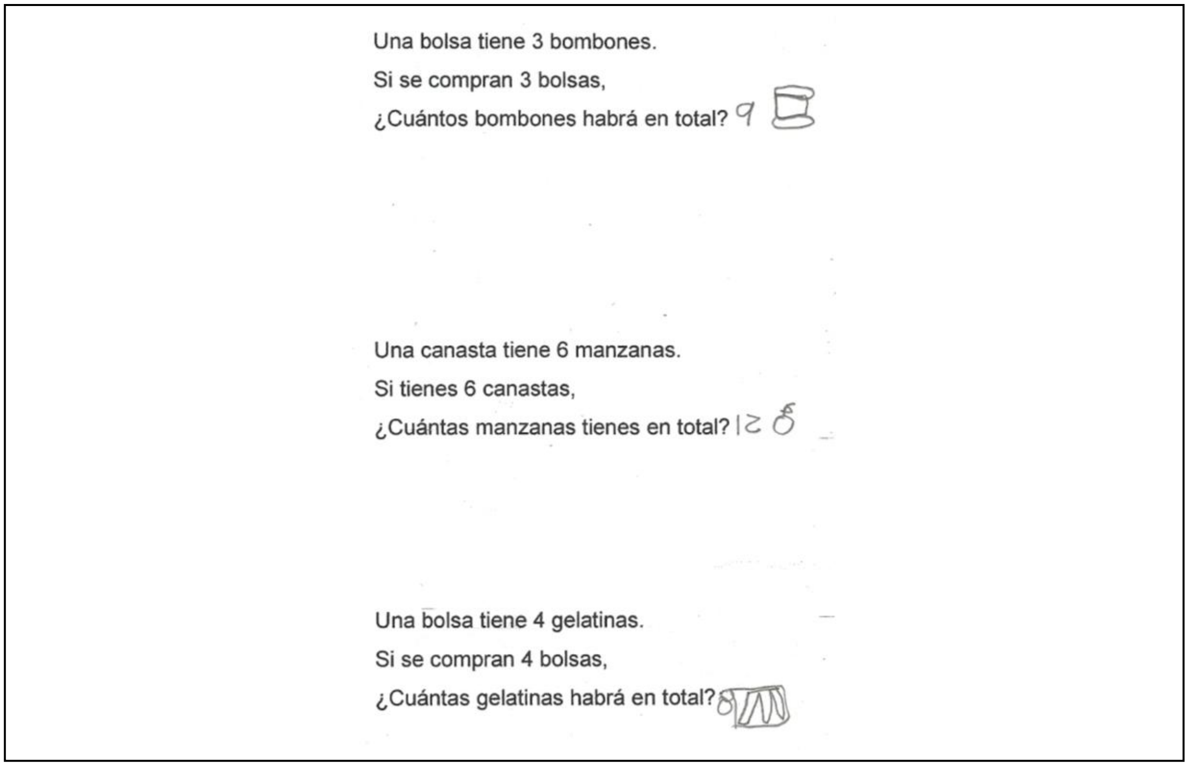


Figura 26. Problemas multiplicativos de agrupamiento del 1° al 3° de la segunda prueba informal de Cecilia.

En el caso del cuarto problema que se resolvía con la operación 45 × 4, Cecilia utilizó la combinación de *Propiedad conmutativa* + *Producto aprendido* para resolver el hecho multiplicativo 4 × 5 (contenido en esa operación), pues mencionó que 5 × 4 son 20. Para el hecho de 4 × 4 que también aparece en la operación utilizó la variación *Contar todo con los dedos*, esta variación además, la utilizó para resolver el hecho multiplicativo 3 × 4 presente en la operación 24 × 3 del quinto problema. Finalmente, en el sexto problema que se resolvía con la operación 24 × 6, Cecilia empleó nuevamente la variación *Contar todo con los dedos* para resolver el hecho multiplicativo de 6 × 4 y para 6 × 2 únicamente enunció que “6 + 6 son 12” empleando así un *Producto aprendido de la adición*, estos tres últimos problemas Cecilia los resolvió de manera correcta (ver figura 27).

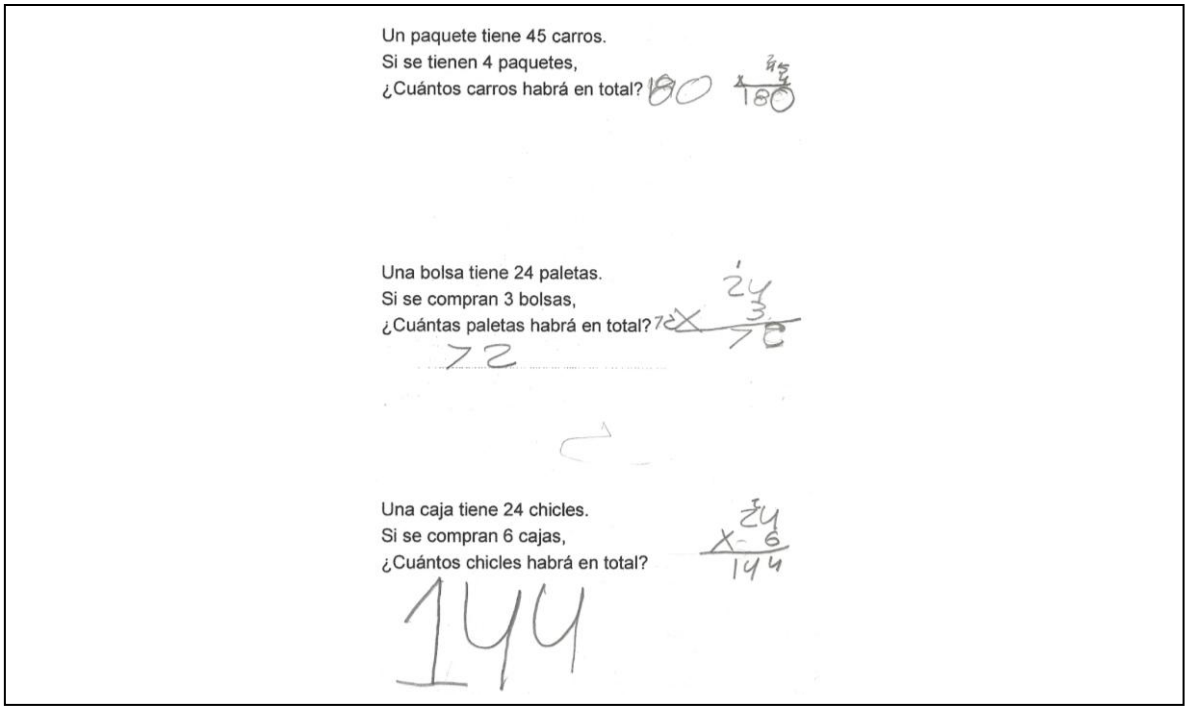


Figura 27. Problemas multiplicativos de agrupamiento del 4° al 6° de la segunda prueba informal de Cecilia.

Comentarios finales

Entre los avances más significativos que tuvo Cecilia se encuentran los siguientes: logró dominar algunos hechos multiplicativos, en su primera prueba informal obtuvo sólo 6 aciertos y en la segunda llegó a obtener 16 aciertos, además, su primera prueba informal se caracterizó por utilizar continuamente *Adiciones repetidas* y por tratar de resolver los hechos multiplicativos únicamente sumando sus factores, mientras que en la segunda prueba utilizó una gran variedad de estrategias entre ellas algunas del Cartel Multiplicativo.

También superó las dificultades que tenía al emplear la estrategia *Tabla del 9 con los dedos* propuesta en el Cartel Multiplicativo, así al finalizar la intervención la empleaba correctamente. Por último, a lo largo de las sesiones Cecilia consiguió diferenciar (la mayoría de las veces) entre un problema multiplicativo y uno de adición lo cual representa un avance significativo, una vez que lo identificaba empleaba una amplia gama de estrategias, entre las que se encontraban algunas propuestas en el Cartel Multiplicativo (por ejemplo, la *Propiedad conmutativa*) combinadas con “sus propias” estrategias o con hechos multiplicativos que ya dominaba para obtener los productos de aquellos hechos que aún no se “aprendía”.

Valentina

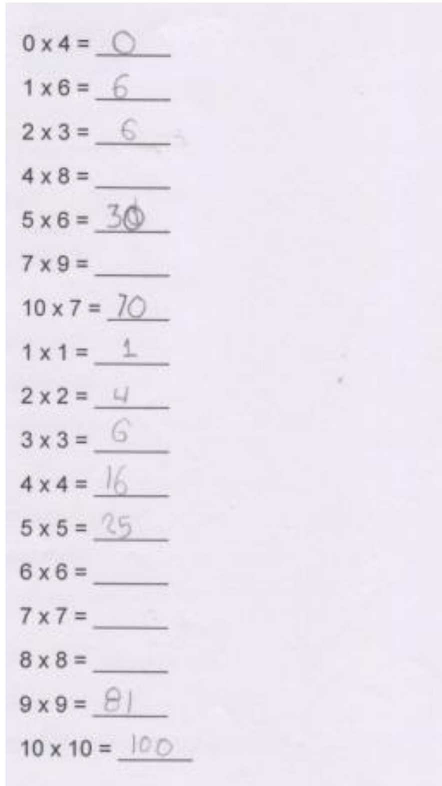
Valentina era una de las participantes de nuevo ingreso al PABRE, desde su ingreso se observó que era una niña que expresaba abiertamente sus emociones respecto a las labores escolares y las actividades que realizaba durante las sesiones de trabajo. Por ejemplo, cuando no podía resolver una “multiplicación” se mostraba ansiosa o triste y cuando se le preguntaba si había otra forma de resolverlas ella sólo contestaba “no sé”. Valentina cursaba el tercer grado de primaria y contaba con 7 años al momento de la intervención.

Primera prueba informal

Los resultados que obtuvo Valentina así como las estrategias que empleó al resolver las secciones que integraban la primera prueba se muestran a continuación.

- Hechos multiplicativos básicos

En esta sección de la prueba Valentina no contestó todos los hechos multiplicativos, de 17 reactivos únicamente contestó 12 y de éstos sólo el reactivo de 3 × 3 lo tuvo incorrecto (ver figura 28). Las variaciones que utilizó para resolver los hechos multiplicativos son principalmente las *Reglas del 0, 1 y 10* (para 0 × 4, 1 × 6, 10 × 7, 1 × 1 y 10 × 10) y el *Conteo de 2 en 2 y de 5 en 5 utilizando los dedos* para los hechos de 2 × 3, 2 × 2, 5 × 6 y 5 × 5. En cuanto a los hechos multiplicativos que no contestó se le preguntó si conocía alguna otra forma resolverlos, pero ella dijo que no sabía cómo hacerlo.



0 x 4 = 0
1 x 6 = 6
2 x 3 = 6
4 x 8 = ____
5 x 6 = 30
7 x 9 = ____
10 x 7 = 70
1 x 1 = 1
2 x 2 = 4
3 x 3 = 6
4 x 4 = 16
5 x 5 = 25
6 x 6 = ____
7 x 7 = ____
8 x 8 = ____
9 x 9 = 81
10 x 10 = 100

Figura 28. Hechos multiplicativos de la primera prueba informal de Valentina.

- Problemas multiplicativos de agrupamiento

En esta segunda sección de la prueba Valentina realizó los 4 problemas de agrupamiento, ella identificó que tenía que resolverlos a través de la multiplicación. En el primer problema (5 × 9) acertó en su respuesta al obtenerla utilizando la variación *Conteo de 5 en 5 utilizando los dedos*; para resolver los problemas posteriores escribe las operaciones de la siguiente forma: 13 × 7, 18 × 39 y 101 × 72 pero al tratar de resolverlas falla en sus respuestas debido a que no conoce los pasos a seguir para realizar el algoritmo de la multiplicación, de tal manera que por ejemplo, para resolver la operación 101 × 72, Valentina la divide en tres "multiplicaciones" 2 × 1, 2 × 0 y 7 × 1 así su resultado 702 queda conformado por los resultados de estos hechos (ver figura 29).

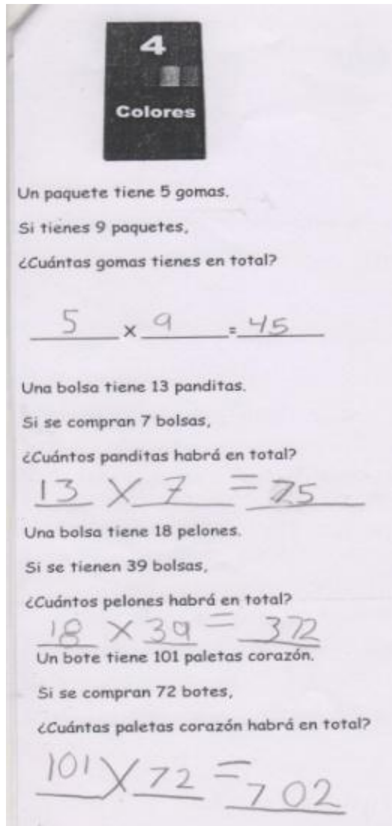


Figura 29. Problemas multiplicativos de agrupamiento del 1° al 4° de la primera prueba informal de Valentina.

- Problema multiplicativo de precio

Para resolver dos de las preguntas del problema de precio que involucraban a los hechos multiplicativos de 4 × 7 y 4 × 8 Valentina utilizó la combinación de *Grupos escritos + Contar después de dibujar. “Dibujo matemático”,* sin embargo, al resolver el primer hecho no obtuvo el resultado correcto debido a que cometió algunos errores al realizar el conteo. Para 4 × 8 realizó el procedimiento correctamente, éste se ejemplifica a continuación:

Estrategia: Grupos escritos + Contar después de dibujar. “Dibujo matemático”

Niño 15. Valentina

Hecho Multiplicativo: 4 × 8

Resultado: Correcto

Ejecución: Valentina realizó el siguiente procedimiento: primero escribió los números del 1 al 8, después en cada uno dibujó 4 palitos contándolos al mismo tiempo, es decir, ella en el número 1 dice “uno, dos, tres, cuatro” (al mismo tiempo que escribe las marcas), luego escribe el número 2 y dice “cinco, seis, siete, ocho”; esta acción la sigue realizando hasta llegar al número 8 donde el conteo final resulta en 32 (ver figura 30), obteniendo así un resultado correcto.

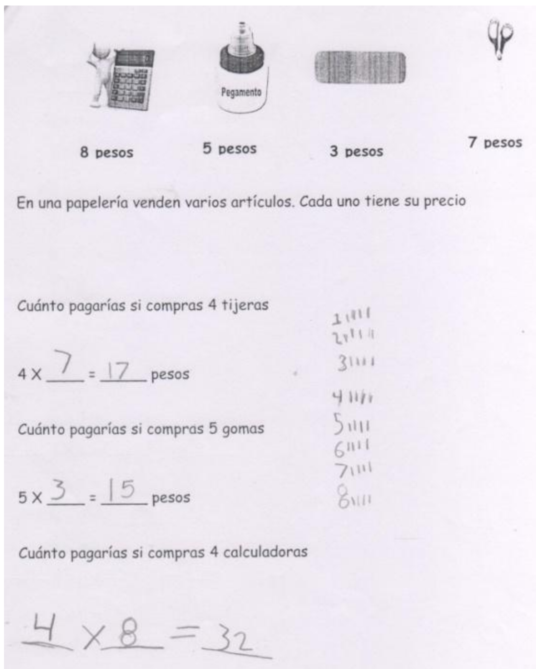


Figura 30. Problema multiplicativo de precio de la primera prueba informal de Valentina.

Análisis: Valentina escribe los grupos con números del 1 al 8 para después dibujar los 4 elementos representándolos con palitos y al tiempo que hace esto va contando cada uno de ellos, de esta manera, al llegar al final de los grupos ella obtiene el producto del hecho multiplicativo.

Sesiones de trabajo

En seguida se describen y mencionan ejemplos de algunas de las estrategias y variaciones que utilizaba Valentina para resolver problemas de agrupamiento y precio durante las 14 sesiones a las que se presentó.

Durante el mes de septiembre en las primeras sesiones con Valentina ella comentaba que ya conocía las *Reglas del 0, 1 y 10* así como el *Conteo de 2 en 2 y 5 en 5*, que se encontraban en el Cartel Multiplicativo, sin embargo, no sabía que estos últimos los podía utilizar como estrategia para resolver hechos multiplicativos. Además, se observó que Valentina utilizaba la variación *Conteo de 5 en 5 utilizando los dedos* y seguía utilizando las *Reglas de 0 y 1* como estrategias principales para resolver los diversos problemas multiplicativos,

En el mes de octubre Valentina como algunos de los participantes empleó una gran variedad de estrategias para resolver los problemas de agrupamiento y precio. Fue durante las sesiones de este mes que Valentina generalizó la estrategia *Conteo de 2 en 2, de 5 en 5 y de 10 en 10* propuesta del Cartel, esto es, una vez que dominó el principio que regía a esta estrategia, entonces, realizaba *Conteo de 3 en 3* y *de 4 en 4 utilizando los dedos* e incluso en una ocasión intentó realizar un *Conteo de 7 en 7 utilizando los dedos*, pero debido a que era un número muy grande tuvo algunas dificultades para recordar la secuencia de conteo a seguir por lo que se buscó otra estrategia para resolver los hechos multiplicativos que contenían el número 7. A continuación se ejemplifica la variación de la estrategia *Conteo de…* que Valentina llevó a cabo.

Estrategia: Conteo de…

Variación: Conteo de 4 en 4 utilizando los dedos

Niño 8. Valentina

Problema multiplicativo de agrupamiento:

Una caja tiene 24 cubiertos. Si se tienen 57 cajas, ¿cuántos cubiertos habrá en total?

Resultado: Correcto

Ejecución: Valentina escribe en su hoja cuadriculada la operación 24 × 57, sin embargo, para la ejecución sólo se considera el hecho multiplicativo 7 × 4. Para resolverlo realiza un conteo de 4 en 4 con ayuda de sus dedos, ella levanta siete dedos y comienza su conteo nombrando a cada uno de los dedos como “4, 8, 12, 16, 20, 24, 28” para obtener el resultado correcto.
Análisis: Valentina utilizó una de las variaciones de la estrategia *Conteo de…* para resolver este problema (*Conteo de 4 en 4 utilizando los dedos*) logrando llegar al resultado correcto.

Durante este mes Valentina utilizó las siguientes variaciones: las *Reglas del 0, 1 y 10, Conteo de 2 en 2* y *de 5 en 5 utilizando los dedos,* utilizaba la *Tabla del 9 con los dedos* y la estrategia *Producto aprendido*. Además, cuando ella desconocía algún hecho multiplicativo se le hacia la sugerencia para utilizar la *Propiedad conmutativa* y accedía a utilizarla obteniendo resultados correctos.

Para el mes de noviembre Valentina ya había consolidado algunos hechos multiplicativos (*Productos aprendidos)*, además, utilizaba la estrategia *Producto aprendido + Resta,* algunos *Productos aprendidos de la adición*, seguía utilizando las *Reglas del 0, 1 y 10,* el *Conteo de 4 en 4 utilizando los dedos*. Es importante mencionar que en este mes Valentina realizó una combinación en la cual nuevamente utiliza un producto aprendido. A esta combinación se le denominó *Factor dividido + Producto aprendido + Algoritmo de la multiplicación*, la cual se ejemplifica a continuación:

Estrategia: Factor dividido + Producto aprendido + Algoritmo de la multiplicación

Niño 8. Valentina

Problema multiplicativo de agrupamiento:

Un paquete tiene 70 pañales. Si se compraron 28 paquetes, ¿cuántos pañales habrá en total?

Resultado: Correcto

Ejecución: Valentina al resolver 8 × 7 (incluido en la operación 70 × 28) dice que desconoce este hecho multiplicativo, se le pregunta si sabe algún hecho que pueda utilizar para resolverlo y dice que puede ser 7 × 4, pero que no sabe cuánto es, después de un momento dice “pero si sé cuánto es 4 × 7 = 28” (*Propiedad conmutativa*), ya que 4 es la mitad de 8 ella escribe en su hoja cuadriculada la operación 28 × 2 obteniendo como resultado 56, cabe destacar que puede resolverlo gracias a que domina los hechos multiplicativos de 2.
Análisis: Valentina en un primer momento divide uno de los factores del hecho multiplicativo 8 × 7 de tal manera que su producto puede obtenerse al resolver (7 × 4) + (7 × 4), para ello utiliza la *Propiedad conmutativa* para convertir este hecho en 4 × 7 un hecho que ya domina, después emplea el algoritmo de la multiplicación que llevo a cabo utilizando la estrategia *Producto aprendido*.

En cuanto a las dificultades al emplear el Cartel Multiplicativo, Valentina no presentó ninguna dificultad, aún cuando Valentina no estaba familiarizada con la *Tabla del 9 con los dedos* la aprendió con facilidad y no surgieron dificultades durante el proceso de instrucción, además, la ocupaba de manera oportuna, pero al generalizar la estrategia de *Conteo de…* expuesta en el Cartel surgió una dificultad ya que Valentina una vez que dominó los conteos de 2, 3, 4 y 5 intentó hacer lo mismo con números mayores a éstos como 7, sin embargo, el “aprenderse” la secuencia de conteo le resultaba mucho más difícil y aunque ella siempre usaba el conteo como la primera opción se le hacia la sugerencia de usar otra estrategia a lo cual accedía sin ninguna dificultad.

Es importante mencionar que en cada sesión a la que Valentina asistía se le preguntaba por su desempeño en clase y siempre comentaba la forma en que resolvía una “multiplicación”, cuando ella no lograba resolverla en clase se le preguntaba cuál no había podido resolver y entonces, se le ayudaba en la sesión de trabajo donde se le sugerían diversas formas para que solucionara las “multiplicaciones”.

Evaluación final

Al final de la intervención no fue posible aplicarle a Valentina la segunda prueba informal debido a que no se presentó ese día, sin embargo, en sustitución de ésta para describir sus avances se mencionaran los resultados obtenidos de una evaluación final que se le aplicó días antes de la segunda prueba informal, esta evaluación contenía 11 hechos multiplicativos de los cuales obtuvo todos correctos (ver figura 31). Ella los resolvió utilizando la *Tabla del 9 con los dedos,* la variación *Conteo de 3 en 3, de 4 en 4, de 5 en 5 y de 2 en 2 utilizando los dedos,* la estrategia *Producto aprendido* y la combinación *Producto aprendido* + *Conteo de 5 en 5 utilizando los dedos*.

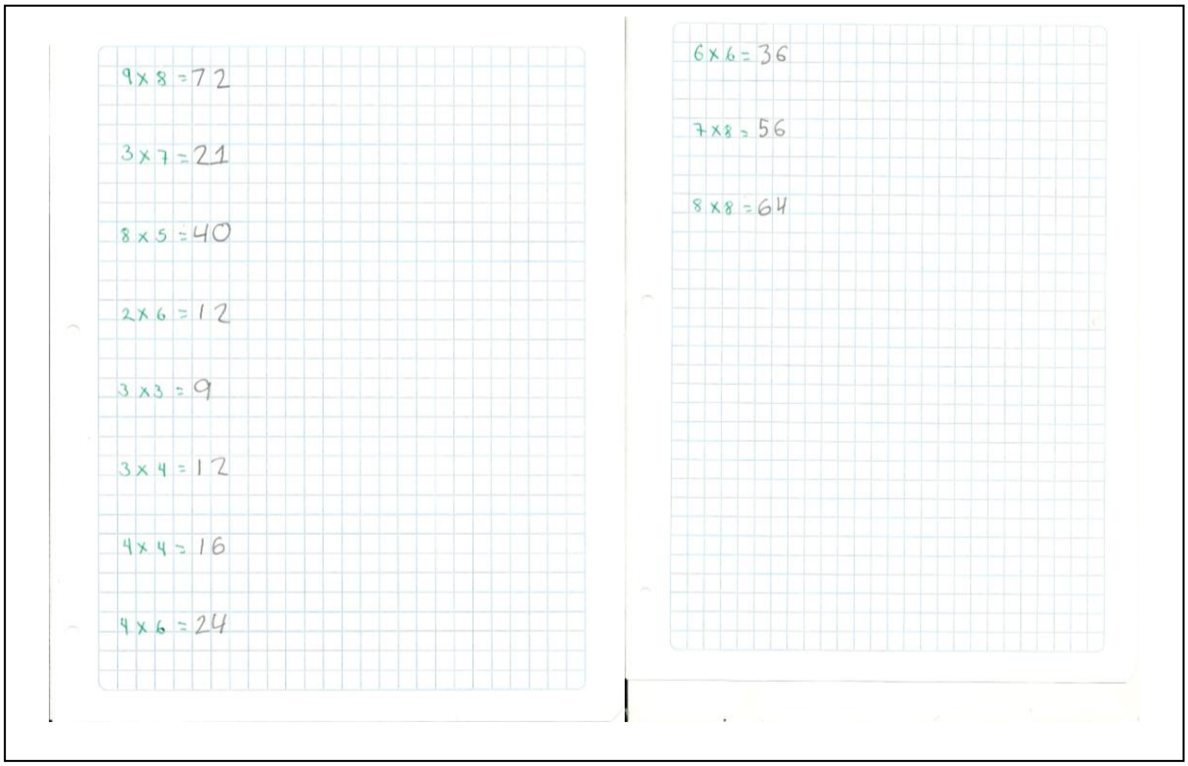


Figura 31. Evaluación final de Valentina.

En esta última evaluación, Valentina utilizó una nueva combinación de estrategias la cual se denominó como *Conteo de 6 en 6* + *Contar todo con los dedos,* la cual se describe a continuación:

Estrategia: Conteo de 6 en 6 utilizando los dedos + Contar todo con los dedos

Niño 8. Valentina

Hecho Multiplicativo: 6 × 6

Resultado: Correcto

Ejecución: Valentina al momento de resolver 6 × 6 realizó un conteo de 6 en 6 utilizando sus dedos, al llegar a 18 ella intenta seguir contando de acuerdo con la serie, pero debido a que no recuerda muy bien la secuencia de conteo (ya que es un número grande) ella comienza a contar de 1 en 1 ayudándose de los dedos de la mano derecha, de tal forma que en la mano izquierda lleva el número de veces que ha contado y en la derecha cuenta los seis elementos.

Análisis: En esta ejecución se observó que Valentina en un principio utiliza la variación *Conteo de… utilizando los dedos*, aún cuando la secuencia a seguir es difícil de recordar ya que pertenece a un número grande (6), sin embargo, al no recordar toda la secuencia tiene que combinarla con la variación *Contar todo con los dedos* para poder obtener el resultado correcto.

Comentarios finales

Entre los avances más significativos que tuvo Valentina se encuentran los siguientes: logró dominar la mayoría de los hechos multiplicativos, en su primera prueba informal obtuvo 12 aciertos y en su segunda evaluación obtuvo todos los resultados correctos. Una de las características más sobresalientes de Valentina es que una vez que se le expuso en el Cartel Multiplicativo que podía utilizar algunos conteos (salteados) como una forma de dominar los hechos multiplicativos ella lo llevo más allá de los conteos de 2, 5 y 10 pues logró con éxito aprenderse la secuencia de conteo de 3 y 4.

A lo largo de las sesiones se observó que el estado de ánimo de Valentina mejoró, se le observaba más alegre cuando comentaba que había podido resolver las multiplicaciones en la escuela o durante la sesiones de trabajo, cuando ella no podía resolver algún hecho multiplicativo seguía mostrándose triste pero no por ello dejaba de intentarlo como al inicio, además, para evitar esto se le sugería buscar estrategias para que pudiera resolverlo y al finalizar la sesión se le preguntaba nuevamente sobre el nuevo hecho que había aprendido para reforzar su aprendizaje.

Al inicio de la intervención Valentina tampoco podía realizar el algoritmo de la multiplicación por lo que también se trabajó con ella este aspecto para que poco a poco pudiera llevarlo a cabo y al final de la intervención se logró que ella realizara el algoritmo de la multiplicación con dos factores. De esta manera, se concluye el segundo nivel de análisis y el apartado *Descripción y análisis de los resultados*.

CONCLUSIONES

La multiplicación es uno de los contenidos aritméticos que implican cierta dificultad tanto en su enseñanza como en su aprendizaje. Sin embargo, los conceptos involucrados son básicos para desarrollar conocimientos aritméticos de mayor profundidad. Uno de los componentes de la multiplicación son los hechos multiplicativos; el dominio de estos hechos es fundamental para avanzar en el conocimiento tanto de la multiplicación como de otros contenidos tales como el de la razón y la proporción por mencionar algunos. De ahí el énfasis que los maestros ponen en la enseñanza de las llamadas tablas de multiplicar.

Con base en lo anterior, en esta investigación se consideró conveniente indagar las estrategias que utilizaron un grupo de niños que asistieron al PABRE para responder a las preguntas de cuánto es un número multiplicado por otro (ambos números de una cifra) teniendo de por medio el uso del Cartel Multiplicativo, así como cuáles fueron las estrategias empleadas para resolver problemas multiplicativos de agrupamiento y precio. A continuación se exponen una serie de reflexiones producto del trabajo realizado y que sirven como conclusiones de esta investigación.

Es interesante destacar la facilidad de manejo y la comprensión del contenido del Cartel por parte de los participantes. El diseño, tanto en la disposición de sus elementos como en su contenido, facilitó su uso y comprensión. Además, las estrategias ahí propuestas resultaron familiares y sencillas de aprender ya que el lenguaje es claro y las ilustraciones fueron atractivas para los niños. Los resultados obtenidos permitieron dar respuesta a las preguntas de investigación y se concluye que las estrategias sugeridas en el Cartel Multiplicativo sí fueron empleadas por los participantes para lograr el dominio de los hechos multiplicativos básicos así como para solucionar problemas multiplicativos de agrupamiento y precio. Las dificultades encontradas al emplear el Cartel Multiplicativo fueron *a) equivocaciones de un nuevo aprendizaje, b) uso excesivo del Cuadro Multiplicativo* y *c) generalizar la tabla del 9 con los dedos*.

Un aspecto a destacar es que una vez que los participantes manejaban apropiadamente los contenidos del Cartel, ellos lograron realizar algunas combinaciones entre las estrategias ahí propuestas (por ejemplo, *la Propiedad conmutativa* + *Conteo de 5 en 5 utilizando los dedos* o la *Propiedad conmutativa* + *Tabla del 9 con los dedos*) e incluso utilizar algunas de los principios de las estrategias para "hacer" sus propias estrategias (por ejemplo, la *Propiedad conmutativa* + *Enunciar la tabla de multiplicar*) y así resolver tanto los hechos como los problemas multiplicativos que se les presentaban.

Un fenómeno que pudo observarse es que los participantes no realizaban abiertamente los conteos, es decir, algunos de ellos al realizar la estrategia *Conteo de… utilizando los dedos* les causaba cierta "pena" que los vieran ocupando sus dedos para llevarla a cabo por lo que realizaban los conteos por debajo de la mesa de trabajo para que así nadie pudiera ver que los estaban utilizando, sin embargo, esta situación cambió conforme pasaron los días y se trabajaba con el Cartel. Probablemente este cambio se debió a que una de las estrategias (*Tabla del 9 con los dedos)* les alentaba a utilizarlos.

También es importante mencionar que durante la intervención se lograron identificar algunas estrategias que no están consideradas dentro de la clasificación de Sherin y Fuson (2005) entre ellas se encuentran *Producto aprendido* + *Resta, Enunciar la tabla de multiplicar* y *Producto aprendido de la adición* éstas fueron utilizadas por los participantes en las evaluaciones informales así como en las sesiones de trabajo.

Otro de los aspectos que dan cuenta del avance obtenido por los participantes es que en un inicio no identificaban los problemas multiplicativos, por lo que los solucionaban utilizando los hechos multiplicativos sólo si había alguna pista visual (signo de multiplicación) de lo contrario aunque algunos de los participantes conocían los hechos multiplicativos que les permitían resolverlos ellos no identificaban el problema y utilizaban la suma, al finalizar la intervención los participantes lograron identificar los problemas multiplicativos.

Una de las dificultades que se presentaron fue en torno a la redacción de los problemas multiplicativos ya que los elementos ahí presentados no eran significativos o eran totalmente desconocidos por los participantes, por ejemplo, *diskets, Cd´s, barras de granola, clips de mariposa,* entre otros, esto impedía que los participantes comprendieran totalmente el problema ya que era algo que no les resultaba familiar para poder resolverlo sobre todo cuando pasaban de un pensamiento aditivo a uno multiplicativo. Por ello se debe evaluar el contexto de los participantes para adecuar los problemas multiplicativos que se les presenten y así hacer que estos sean significativos para obtener mejores resultados.

Cabe resaltar que aún cuando los participantes de esta investigación estaban catalogados por sus profesores como niños con bajo rendimiento escolar, dicha etiqueta diagnóstica no limitó en modo alguno a los niños para emplear las estrategias propuestas en el Cartel Multiplicativo ya que durante la intervención se les animaba a emplear todas las herramientas y conocimientos que poseían, los “errores” eran vistos como oportunidades para saber cómo concebían las estrategias empleadas para resolver los hechos y problemas multiplicativos, además, se fomentaba el utilizar diferentes estrategias para llegar al resultado pues no existía sólo un procedimiento “correcto”.

Con los resultados obtenidos se puede continuar con otras líneas de investigación, por lo que se sugiere configurar materiales como el Cartel Multiplicativo utilizando estrategias sencillas que puedan poner en práctica los estudiantes tanto los que comienzan sus primeros acercamientos con los hechos multiplicativos como aquellos que aún no los han aprendido y que por ello quedan rezagados. También se sugiere centrarse en los 15 hechos multiplicativos que están dentro del Cuadro Multiplicativo y que generalmente resultan ser difíciles para los estudiantes, para ello sería conveniente emplear algunas estrategias que faciliten el dominio de estos hechos.

Es necesario reflexionar acerca del papel que juegan los especialistas al diagnosticar, evaluar e intervenir a niños que presentan ciertas dificultades de aprendizaje en cualquier área de éste ya sea español, matemáticas o ciencias; ya que el diagnóstico trae repercusiones en todos los ámbitos de la vida de los niños (personal, escolar, hogar, etc.) y marca la pauta a seguir en la intervención que realizan los especialistas en colaboración con los padres de familia. Por ello es importante que los especialistas generen o diseñen diferentes y variados procedimientos de evaluación e intervención que permitan a los niños catalogados con ciertas dificultades de aprendizaje tener una amplia gama de opciones que se adapten a sus necesidades, que les brinden experiencias educativas enriquecedoras y que favorezcan su aprendizaje para así ofrecerles una atención oportuna y eficaz.

REFERENCIAS

Balbi, A., y Dansilio, S. (2010). Dificultades de aprendizaje del cálculo: Contribuciones al diagnóstico psicopedagógico. *Ciencias Psicológicas, 4* (1), 7-15. Recuperado de: http://www.scielo.edu.uy/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1688-40942010000100002

Baroody, A. J. (2006). Why Children Have Difficulties Mastering the Basic Number Combinations and How to Help Them. *Teaching Children Mathematics, 13* (1), 22-31.

Baroody, A. J., Bajwa, N. P., & Eiland, M. (2009). Why can't Johnny remember the basic facts?. *Developmental Disabilities Research Reviews, 15* (1), 69-79.

Buenrostro, A. (2003). *Aritmética y bajo rendimiento escolar: Diseño e implementación de dos modelos de enseñanza.* Tesis de Doctorado. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN: México.

Buenrostro, A. (2012). *Una aproximación para fomentar el pensamiento numérico en niños de los tres primeros grados de la escuela primaria.* Manuscrito no publicado.

Buenrostro, A. (2013). Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas en los primeros grados escolares. En: J. G. Sánchez, y E. A. Escotto (Eds.), *Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas: Factores neuropsicológicos, afectivos y socioepistemológicos* (pp. 73-88). México: UNAM. ISBN: 9786070241055.

Caballero, R. S. (2005). *Un estudio transversal y longitudinal sobre los conocimientos informales de las operaciones aritméticas básicas en niños de educación infantil.* Tesis de Doctorado. Universidad Complutense de Madrid: España.

Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L., & Empson, S. B. (1999). *Children's Mathematics: Cognitively Guided Instruction.* Portsmouth, NH: Heinemann-NCTM.

Castro, E., y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En: L. Rico et al. (Eds.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 1-27). Barcelona: ICE-Universidad de Barcelona-Horsori. Recuperado de http://cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/CastroE97-2531.PDF

Castro, E., Rico, L., y Castro, E. (1995). *Estructuras aritméticas elementales y su modelización.* Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cedillo, T., Isoda, M., Chalini, A., Cruz, V., y Vega, E. (2012). *Aritmética: Guía para su aprendizaje y enseñanza.* México: SEP.

Correaz, S. (2009). Las tablas de multiplicar: Memoria y propiedades conviven. *Revista Quehacer Educativo,* 97, Federación Uruguaya de Magisterio, Montevideo, 46-51.

Crawford, D. B. (2007). *The third stage of learning math facts: Developing automaticity.* Manuscrito no publicado.

Díaz, J. J., y Bermejo, V. (2007). Nivel de abstracción de los problemas aritméticos en alumnos urbanos y rurales. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 10* (3), 335-364. Recuperado de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?pid=S1665243620070003000003&script=sci_arttext

Díaz, M., y Flores, G. (2008). *Resultados Nacionales: Segundo Estudio Regional Comparativo y Explicativo 2006 (SERCE).* México: Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.

Díez, F. (2004). *La enseñanza de las matemáticas en la educación de personas adultas: Un modelo dialógico.* Tesis de Doctorado. Universidad de Barcelona: España.

Fernández, B. J. A. (2007). La enseñanza de la multiplicación aritmética: Una barrera epistemológica. *Revista Iberoamericana de Educación,* 43, 119-130.

Flowers, J. M., & Rubenstein, R. N. (2010). Multiplication Fact Fluency Using Doubles. *Mathematics Teaching in the Middle School, 16* (5), 296-301.

Fosnot, C. T. (2007). *The big dinner: Multiplication with the ratio table.* Portsmouth, NH: Firsthand Heinemann, 1-11.

Guerrero, F. J. (2011). La importancia de las estrategias de cálculo mental en las operaciones matemáticas básicas II: A multiplicar y a dividir. *Innovación y experiencias educativas,* 41, 1-10.

Guerrero, O. M., y Camargo, U. E. (2004). *Conexiones Matemáticas 4: Libro de actividades.* Colombia: Grupo Editorial Norma.

Goldish, M. (1991). *Making Multiplication Easy: Strategies for Mastering the Tables through 10, (Grades 2-4).* New York: Scholastic Professional Books.

Hernández, P. F., y Soriano, A. E. (1997). *La enseñanza de las matemáticas en el primer ciclo de la educación primaria: Una experiencia didáctica.* Murcia: Servicio de Publicaciones, Universidad de Murcia.

Isoda, M., y Olfos, R. (2009). *La enseñanza de la multiplicación.* Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Jimeno, M. (2002). *Al otro lado de las fronteras de las matemáticas escolares: Problemas y dificultades en el aprendizaje matemático de los niños y niñas de tercer ciclo de Primaria.* Tesis de Doctorado. Universidad de Málaga: España.

Maza, C. (1989). *Sumar y restar: El proceso de enseñanza/aprendizaje de la suma y de la resta.* Madrid: Visor.

Maza, C. (1991a). *Enseñanza de la multiplicación y división.* Madrid: Síntesis.

Maza, C. (1991b). *Multiplicar y dividir: A través de la resolución de problemas.* Madrid: Visor.

Miller, M., & Lee, M. (1997). *The Mega-Fun Multiplication Facts Activity Book.* New York: Scholastic Professional Books.

Ministry of Education. (2006). *A Guide to Effective Instruction in Mathematics, Kindergarten to Grade 6: Vol. 5. Teaching Basic Facts and Multidigit Computations.* Ontario, Canada: Autor. Recuperado de: http://eworkshop.on.ca/cfmx/edu/core.cfm?p=guides

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Portland, Oregon: Autor.

Nunes, T., y Bryant, P. (1997). *Las matemáticas y su aplicación: La perspectiva del niño.* México: Siglo XXI.

O'Connell, S., & SanGiovanni, J. (2011a). *Mastering the Basic Math Facts in Addition and Subtraction.* Portsmouth, NH: Heinemann.

O'Connell, S., & SanGiovanni, J. (2011b). *Mastering the Basic Math Facts in Multiplication and Division.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Orrantia, J. (2006). Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas: Una perspectiva evolutiva. *Revista Psicopedagogía, 23* (71), 158-180.

Peters, M., y Schaaf, W. L. (1972). *Álgebra y Trigonometría.* España: Reverté.

Peterson, J. A., y Hashisaki, J. (1969). *Teoría de la aritmética.* México: Limusa.

Rodríguez, J. E. (2010). *Adivina y Multiplica jugando.* Látika publicidad.

Ruiz, M. (2012). *Ingeniosos polidiscos en la enseñanza de las tablas de multiplicar, juegos y más.* VIII Festival Internacional de Matemática. Sede Chorotega, Universidad Nacional en Liberia, Costa Rica.

Sandín, E. M. P. (2003). *Investigación cualitativa en educación: Fundamentos y tradiciones.* Madrid: McGraw-Hill.

Secretaria de Educación Pública. (2004). *Matemáticas. Segundo grado.* México: Autor.

Sherin, B., & Fuson, K. (2005). Multiplication Strategies and the Appropriation of Computational Resources. *Journal for Research in Mathematics Education, 36* (4), 347-395.

Stake, R. E. (1998). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Morata.

Treviño, E., Valdés, H., Castro, M., Costilla, R., Pardo, C., y Donoso, F. (2010). *Factores asociados al logro cognitivo de los estudiantes de América Latina y el Caribe.* Santiago, Chile: Oficina Regional de Educación para América Latina y el Caribe de la UNESCO, Laboratorio Latinoamericano de Evaluación de la Calidad de la Educación.

Valdés, H., Treviño, E., Acevedo, C. G., Castro, M., Carrillo, S., Costilla, R., Bogoya, D., y Pardo, C. (2008). *Los aprendizajes de los estudiantes de América Latina y el Caribe: Resumen Ejecutivo del Primer Reporte de Resultados del Segundo Estudio Regional Comparativo y Explicativo.* Santiago, Chile: Oficina Regional de Educación para América Latina y el Caribe de la UNESCO, Laboratorio Latinoamericano de Evaluación de la Calidad de la Educación.

Wright, R. J., Martland, J., Stafford, A. K., & Stanger, G. (2004). *Teaching Number: Advancing children's skills and strategies.* London: Paul Chapman Publishing Ltd.

Xavier, A. (2003). Nuevas miradas a viejas prácticas. Enseñar las tablas de multiplicar. *Revista Quehacer Educativo,* 59, Federación Uruguaya de Magisterio, Montevideo.