



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

TORNEOS LINEALMENTE COLOREADOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICA

P R E S E N T A:

CARMEN ASTRID LARA ORTEGA



**DIRECTOR DE TESIS:
DRA. HORTENSIA GALEANA SÁNCHEZ
2014**



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Lara

Ortega

Carmen Astrid

5537822866

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Matemáticas

410074163

2. Datos del tutor

Doctora

Hortensia

Galeana

Sánchez

3. Datos del sinodal 1

Doctora

María del Rocío

Sánchez

López

4. Datos del sinodal 2

Matemática

Laura

Pastrana

Ramírez

5. Datos del sinodal 3

Doctora

Mucuy-Kak del Carmen

Guevara

Aguirre

6. Datos del sinodal 4

Doctora

Eugenia

O'Reilly

Regueiro

Índice general

1.. <i>Introducción</i>	II
2.. <i>Definiciones</i>	VII
2.0.1. Definiciones sobre digráficas m-coloreadas	XIII
2.0.2. Relaciones	XIV
3.. <i>Torneos m-coloreados linealmente.</i>	1
4.. <i>Torneos coloreados con COPOS.</i>	13
5.. <i>Torneos coloreados con digráficas.</i>	24
5.0.3. Accesibilidad Monocromática.	25
5.0.4. El número de coloración para un COPO finito.	29
5.0.5. El número de coloración de torneo para una digráfica transitiva.	30
5.0.6. El número de coloración de torneo para una gráfica. . .	40
5.0.7. Prueba del Teorema 1.0.	41
5.0.8. Jerarquía de Problemas de Accesibilidad	53
5.1. La clasificación de \mathcal{B}_2	60
5.1.1. Problemas Abiertos	60
6.. <i>Bibliografía</i>	62

1. INTRODUCCIÓN

Los torneos en teoría de digráficas han sido punto de partida para diferentes investigaciones. En el presente trabajo tendremos como objetivo estudiar aquellos torneos cuyas flechas han recibido una coloración, a medida que avanzamos en el trabajo, dicha coloración se vuelve especial, pues utilizamos ya sea un COPO ó una digráfica para colorear; además exhibiremos algunos de los principales resultados sobre torneos linealmente coloreados así como la existencia (en el torneo) de un conjunto de vértices que sea capaz de absorber a los vértices que se encuentren fuera de él, vía ciertas condiciones.

Si regresamos el reloj a un resultado dado por Camion en 1959 [6], que quizá sea uno de los resultados más básicos sobre Torneos: Todo Torneo T , contiene una trayectoria hamiltoniana. Esto nos ayudará a notar posteriormente a que si las flechas de un torneo T están coloreadas con un solo color, existirá un sólo vértice x en T tal que para cualquier otro vértice $y \neq x$ en T existe una trayectoria monocromática de y a x (tomando x como el último vértice en la trayectoria hamiltoniana de T).

En el primer capítulo notamos que en 1982 [1]; Sands, Sauer y Woodrow probaron que cada torneo 2-coloreado, tiene un vértice v tal que para cualquier otro vértice x del torneo hay una trayectoria dirigida monocromática de x a v , diremos que una digráfica D es m - coloreada si las flechas de dicha

digráfica están coloreadas con m colores distintos o equivalentemente que D está linealmente coloreada con m colores distintos, además diremos que una trayectoria es monocromática si las flechas de la trayectoria están coloreadas con un solo color, como no todos los torneos 3-coloreados contienen un vértice con la propiedad antes mencionada se planteó lo siguiente: si T es un torneo 3-coloreado que no contiene a C_3 (entenderemos a C_3 como ciclo dirigido de orden tres, 3-coloreado) ¿ T debería tener un vértice v tal que para cualquier otro vértice x de T , existe una trayectoria dirigida monocromática de x a v ? En 1986 [8], Shen Minggang prueba que si T es un torneo m -coloreado que no contiene ningún torneo de orden 3 tal que sus flechas esten coloreadas con colores distintos entonces existe un vértice v tal que para cada x en $T - \{v\}$ hay una trayectoria monocromática de v a x , es decir, Minggang nota que si pedimos que T no contenga a T_3 , entenderemos a T_3 como el torneo transitivo de orden tres, 3-coloreado, o a C_3 la respuesta sería positiva a la pregunta de Sands, Sauer y Woodrow.

Más aún En el 2003 la Dra. Hortensia Galeana y la Dra. Rocío Rojas [2] construyeron una familia de contraejemplos para responder la siguiente pregunta: ¿Si T es un torneo 4-coloreado que no contiene a C_3 , entonces T tiene un vértice v tal que para cualquier otro vértice x de T , existe una trayectoria dirigida monocromática? Probaron así, que para cada $n \geq 6$, existe un torneo T de orden n , 4-coloreado, tal que satisface dos condiciones: 1) T no contiene a C_3 y 2) No existe ningún vértice v en T tal que para cualquier otro vértice x de T , existe una trayectoria dirigida monocromática de x a v . Planteando el siguiente teorema: *Para cada $n \geq 6$, existe un torneo 4-coloreado de orden n que satisface las siguientes dos condiciones: 1) T no contiene a C_3 y 2) No existe ningún vértice v en T tal que para cualquier otro vértice x de T , existe una trayectoria dirigida monocromática de x a v .*

En el segundo capítulo damos resultados de Sands y Linek (1994) [9] extendiendo los de Sands, Sauer y Woodrow en [1], además plantean 3 problemas. El primero de los problemas que aún sigue abierto es el siguiente:

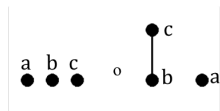
Problema 1 ¿Para cada $n > 2$, existirá un entero positivo, $f(n)$, tal que para cada torneo cuyas flechas esten coloreadas con n colores contiene un conjunto S de cardinalidad a lo más $f(n)$ vértices con la propiedad de que para cada vértice v que no esté en S , hay una trayectoria monocromática de v a un vértice de S ?

En la extensión que dan Sands y Linek del resultado de Sands, Sauer y Woodrow, las flechas del torneo T están coloreadas con los elementos de un conjunto P parcialmente ordenado. A una trayectoria dirigida $\tau = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ la llamaremos *monótona* si en P $\text{color}(v_i, v_{i+1}) \leq \text{color}(v_{i+1}, v_{i+2})$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, n-2\}$.

Definimos *el número de coloración de un torneo*, $tc(P)$, de un COPO P como el entero positivo más pequeño, tal que para cualquier coloración de las flechas con los elementos de P de cualquier Torneo T , existe un conjunto S de a lo más $tc(P)$ vértices de T con la propiedad de que existe una trayectoria monótona de cualquier vértice de $T-S$ a un vértice de S , además, Sands y Linek caracterizan a estos COPOS finitos con número de coloración 1, de la siguiente forma:

Los siguientes enunciados son equivalentes para un COPO finito P :

- (i) $tc(P) = 1$;
- (ii) P no contiene un subconjunto isomorfo a:



(iii) P es una suma lineal de anticadenas de 1 y 2 elementos.

En el capítulo 3 enlistamos y probamos una serie de resultados en los que se trata de definir el número de coloración de una digráfica:

Lema Si D es una digráfica reflexiva, la cual contiene una digráfica reflexiva, simétrica, completa H y $tc(D)$ existe, entonces $tc(D/H)$ existe, más aún $tc(D/H) \leq tc(D)$.

Corolario Supongamos que D es una digráfica reflexiva que contiene una digráfica reflexiva, simétrica, completa H tal que no hay flechas de D entre vértices de H y vértices que no están en H , entonces, $tc(D)$ existe si y sólo si $tc(D/H)$ existe y en su caso $tc(D) = tc(D/H)$.

Corolario Si D es una digráfica completa, reflexiva y simétrica, entonces $tc(D) = 1$.

Lema Si H es una subdigráfica generadora reflexiva de una digráfica D tal que $tc(H)$ existe, entonces $tc(D)$ existe y $tc(D) \leq tc(H)$.

Corolario Si D es reflexiva en dos vértices entonces $tc(D) = 1$.

Lema Si H es una subgráfica reflexiva e inducida de una digráfica reflexiva D tal que $tc(D)$ existe, entonces $tc(H)$ existe y $tc(H) \leq tc(D)$.

Teorema Sea D una digráfica reflexiva en 3 vértices:

- 1) Si D contiene un 2-ciclo entonces $tc(D) = 1$.
- 2) Si D no contiene un 2-ciclo pero D contiene un vértice de ingrado 2 o exgrado 2, entonces $tc(D) = 1$.

En el capítulo 3 se revisa lo que Reid en el año 2000 en [4] discute; como algunos resultados obtenidos en 1994 por Linek y Sands en [10], por ejemplo: si D es la digráfica de anticadena de dos elementos (es decir, D es reflexiva, disconexa con dos vértices) entonces $tc(D) = 1$. Hasta ahora no se sabe que si

$tc(D)$ existe cuando D es la digráfica de la anticadena de 3 o más elementos. Más adelante se discutirán algunos resultados concernientes a dichas ideas y también se investigará acerca de $tc(D)$ para digráficas reflexivas con tres vértices.

En el capítulo notamos algunas observaciones dadas por Arpin y Linek en el 2004, donde tratan de hallar una manera de unificar resultados mencionados anteriormente. Nos introducen a los \mathcal{B}_i con $i=\{1,2,3\}$ y dan resultado no solo para torneos sino para digráficas en general como el hecho de tomar cualquier digráfica (ya no solo un torneo) y con sus vértices colorear las flechas de una multidigráfica.

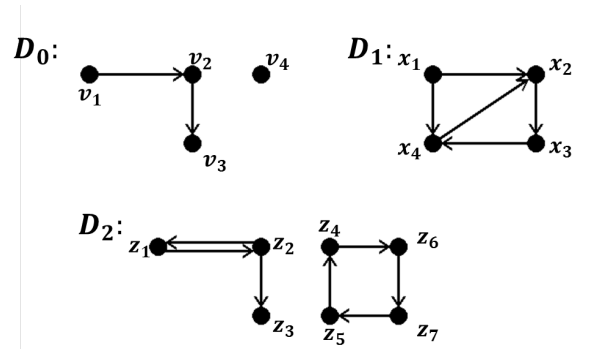
2. DEFINICIONES

Con el fin de que se familiarice con el lenguaje del presente trabajo, introduciré algunas definiciones.

Definición 0.1 Una *gráfica* G es un par ordenado $(V(G), A(G))$ donde $V(G)$ es un conjunto finito no vacío de elementos, llamados los vértices de G y $A(G)$ es un subconjunto del conjunto de pares de elementos de $V(G)$, a los elementos de $A(G)$ los llamaremos las aristas de G .

Definición 0.1.1 Sea G una gráfica, sean x y $y \in V(G)$, si tenemos una arista entre ellos, es decir $(x,y) \in A(G)$, entonces diremos que x y y ó y y x son *vértices adyacentes*.

Definición 1.1 Una *digráfica* D es un par ordenado $(V(D), A(D))$ donde $V(D)$ es un conjunto finito no vacío de elementos, llamados los vértices de D y $A(D)$ es un subconjunto del conjunto de pares ordenados de distintos elementos de $V(D)$, a los elementos de $A(D)$ los llamaremos las flechas de D . A continuación mostramos algunos ejemplos de digráficas.



Definición 1.1.1 Sea D una digráfica, sean x y $y \in V(D)$, si tenemos una flecha que los une, digamos $(x, y) \in A(D)$ entonces diremos que x y y ó y y x son *vértices adyacentes*, además la flecha de x hacia y la denotaremos (x, y) , el vértice inicial de la flecha es x , mientras que el vértice final es y .

Definición 1.1.2 Sea D una digráfica, sea $x \in V(D)$, el *ingrado* de x es el número de flechas que tienen a x como su vértice final.

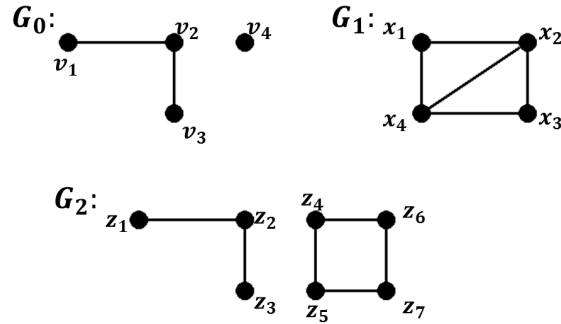
Definición 1.1.3 Sea D una digráfica, sea $x \in V(D)$, el *exgrado* de x es el número de flechas que tienen a x como su vértice inicial.

Definición 1.1.4 Sea D una digráfica. Una *subdigráfica* D^* de D es un par ordenado $(V^*(D^*), A^*(D^*))$ donde $V^*(D^*) \subseteq V(D)$ y $A^*(D^*) \subseteq A(D)$.

Definición 1.2 Sea D una digráfica. La *gráfica subyacente* de D , $G(D)$, es un par ordenado $(V(G(D)), A(G(D)))$ tal que $V(G(D)) = V(D)$ y $A(G(D))$ es un conjunto de pares no ordenados de distintos elementos de $V(G(D))$, llamados las aristas de $G(D)$, tal que $[u_i, u_j] \in A(G(D))$ si $(u_i, u_j) \in A(D)$ ó $(u_j, u_i) \in A(D)$.

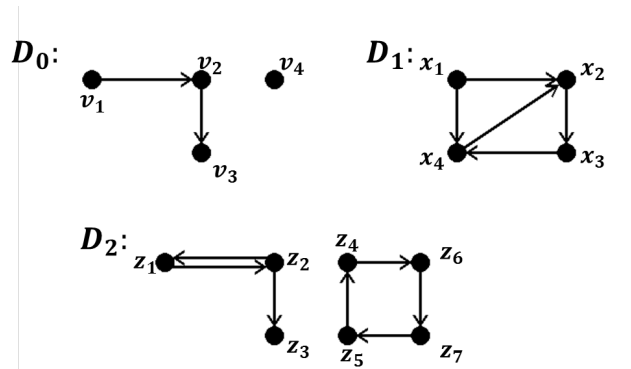
A continuación mostramos las gráficas subyacentes de las digráficas mostradas

como ejemplos en la **Definición 1.1**.



Definición 1.3 Sea $D=(V(D), A(D))$ una digráfica. Si $(x,y) \in A(D)$, entonces diremos que x domina a y lo denotaremos: $x \rightarrow y$ de ser necesario.

Consideremos los ejemplos de digráficas dados en la **Definición 1.1**



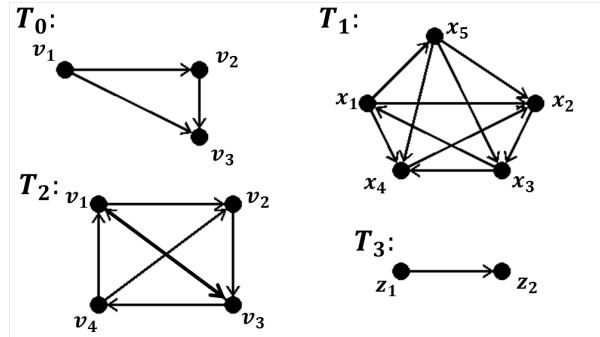
En D_0 : v_1 domina a v_2 , v_2 domina a v_3

En D_1 : x_1 domina a x_2 y a x_4 , x_4 domina a x_2 , x_2 domina a x_3 y x_3 domina a x_4

En D_2 : z_1 domina a z_2 , z_2 domina a z_1 y a z_3 , z_5 domina a z_4 , z_4 domina a z_6 , z_6 domina a z_7 y z_7 domina a z_5 .

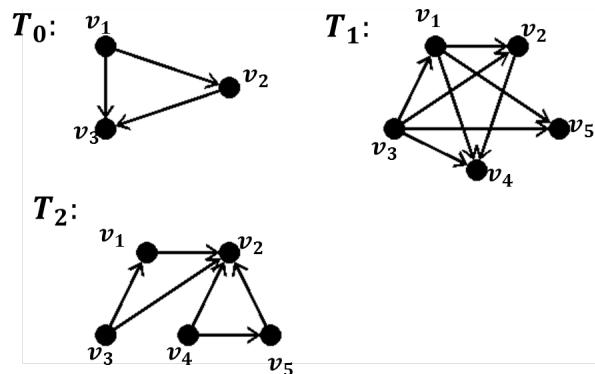
Definición 1.4 Un *torneo* T es una digráfica en la que cada par de vértices están conectados por exactamente una flecha.

A continuación damos algunos ejemplos de digráficas que son torneos.



Definición 1.5 Sea T un torneo, diremos que T es un *torneo transitivo* si para cualesquiera 3 vértices de T , v_1, v_2, v_3 , se cumple que: $\{(v_1, v_2), (v_2, v_3)\} \subset A(T)$ tales que $(v_1, v_3) \in A(T)$.

A continuación se muestran algunos torneos transitivos.



Definición 1.6 Sea D una digráfica. Un *camino* en D es una sucesión de vértices $C=(u_0, \dots, u_n)$ tal que cada u_i es adyacente a u_{i+1} en D , $0 \leq i \leq n-1$. Supongamos que $u_0=u$ y $u_n=v$, entonces diremos que C es un *uv-camino*. El camino C será llamado *camino cerrado* si $u_0=u_n$.

Consideremos los ejemplos de las digráficas de la definición 1.1, algunos ejemplos de caminos son: $\alpha_1=(v_1, v_2, v_3)$ es un camino en D_0 , $\alpha_2=(x_1, x_2, x_3, x_4, x_2)$ es un camino en D_1 y $\alpha_3=(z_1, z_2, z_1, z_2, z_3, z_2)$ es un camino en D_2 .

Definición 1.7 Sea D una digráfica. Un *camino dirigido* en D es una sucesión de vértices $C=(u_0, \dots, u_n)$ tal que hay una flecha de u_i hacia u_{i+1} , para todo i con $0 \leq i \leq n-1$. El camino C será un *camino dirigido cerrado* si $u_0=u_n$.

Consideremos los ejemplos de las digráficas de la definición 1.1, algunos ejemplos de caminos son: en la digráfica D_0 $\alpha_1=(v_1, v_2, v_3)$ es un camino dirigido, en D_1 $\alpha_2=(x_1, x_2, x_3, x_4, x_2)$ es un camino dirigido y en D_2 $\alpha_3=(z_1, z_2, z_1, z_2)$ es un camino dirigido.

Definición 1.8 Sea D una digráfica. Un *paseo* en D es un camino en el cual no se repiten flechas.

Definición 1.9 Sea D una digráfica. Un *paseo dirigido* en D es un camino dirigido en el cual no se repiten flechas.

Definición 1.10 Sea D una digráfica. Un *ciclo* en D es un camino cerrado $C=(u_0, \dots, u_{n-1}, u_0)$ tal que $u_i \neq u_j$ siempre que $i \neq j$.

Definición 1.11 Sea D una digráfica. Un *ciclo dirigido* en D es un camino dirigido cerrado $C=(u_0, \dots, u_{n-1}, u_0)$ tal que $u_i \neq u_j$ siempre que $i \neq j$.

Definición 1.12 Sea D una digráfica. Una *trayectoria* en D es un camino en el cual no se repiten vértices.

Definición 1.13 Sea D una digráfica. Una *trayectoria dirigida* en D es un camino dirigido en el cual no se repiten vértices.

Definición 1.14 Sea $C=(u_0, \dots, u_n)$ un camino dirigido. Definimos a la *longitud* de C como el número n .

Definición 1.15 Sea D una digráfica. Una *digráfica simétrica* es una digráfica en la cual para cada par de vértices u, v en $V(D)$ tales que $(u,v) \in A(D)$ se tiene que $(v,u) \in A(D)$. Diremos que una flecha entre dos vértices u y v es simétrica si $(u,v) \in A(D)$ si y sólo si $(v,u) \in A(D)$.

Definición 1.16 Sea D una digráfica. Diremos que D es una *digráfica completa* si para cada par de vértices u, v de $V(D)$ tenemos que $(u,v) \in A(D)$ y $(v,u) \in A(D)$.

Definición 1.17 Sea $D=(V(D), A(D))$ una digráfica. Diremos que $H=(V(H), A(H))$ es una *subdigráfica generadora* de D si $V(D)=V(H)$ y $A(D) \subseteq A(H)$.

Definición 1.18 Sea $D=(V(D), A(D))$ una digráfica. H es una *subdigráfica inducida* de D si H es una subdigráfica de D tal que $(u,v) \in A(H)$ siempre que $(u,v) \in A(D)$.

Definición 1.19 Sea $D=(V(D), A(D))$ una digráfica. Diremos que D es una *digráfica reflexiva* si para todo vértice $x \in V(D)$ se tiene que $(x,x) \in A(D)$.

Definición 1.20 Sean $D=(V(D), A(D))$ y $C=(V(C), A(C))$. Definimos el *producto lexicográfico* de D con C como la digráfica $D[C]$ donde $V(D[C])=$

$V(D) \times V(C)$, $(x, y) \sim (x', y')$ si y sólo si x es adyacente a x' en D o $x = x'$ e y es adyacente a y' en C .

2.0.1. Definiciones sobre digráficas m -coloreadas

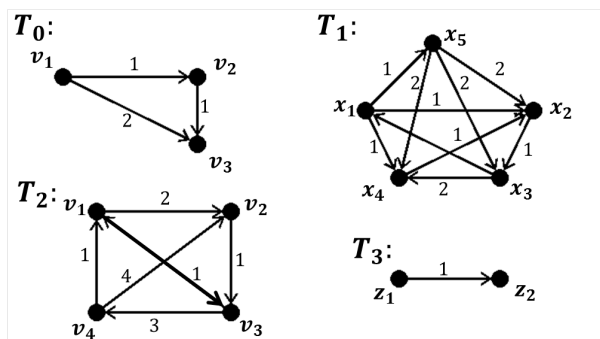
Ahora abordaremos definiciones sobre digráficas m -coloreadas que nos servirán durante el desarrollo del presente trabajo.

Definición 1.21 Sea D una digráfica, diremos que D es una digráfica m -coloreada si D está coloreada con m colores.

Definición 1.22 Sea D una digráfica, sea τ una trayectoria dirigida en D , diremos que τ es una *trayectoria dirigida monocromática* si es una trayectoria dirigida coloreada con un solo color.

Definición 1.23 Un torneo T es m -coloreado si las flechas de T están coloreadas con m colores.

A continuación damos una coloración para torneo.



Aquí T_0 es un torneo 2-coloreado, T_1 es un torneo 2-coloreado, T_2 es un torneo

4-coloreado, T_3 es un torneo 1-coloreado. Denotaremos como T_3 al torneo transitivo de orden tres 3-coloreado y C_3 al ciclo dirigido de orden tres, 3-coloreado.

A partir de este punto las trayectorias monocromáticas, las entenderemos como trayectorias *dirigidas* monocromáticas a menos que se diga lo contrario.

Como parte final de la sección de definiciones, vamos mencionar algunos puntos de la teoría de relaciones que se pueden ver desde el punto de vista de la teoría de digráficas.

2.0.2. Relaciones

Para una digráfica $D=(V(D),A(D))$, el conjunto de flechas $A(D)$, es también una relación sobre $V(D)$, y escribiremos xAy siempre que $(x,y) \in A(D)$. Para esta relación A sobre V consideraremos cuatro axiomas:

- i) xAx para todo $x \in V(D)$. (Reflexividad)
- ii.i) xAy y yAx implica que $x=y$ para todo $x,y \in V(D)$. (Antisimetría)
- ii.ii) xAy implica que yAx para todo $x,y \in V(D)$. (Simetría)
- iii) xAy y yAz implica xAz para todo $x,y,z \in V(D)$. (Transitividad)

Un *cuasi orden* A , satisface i) y iii) y A es un *orden parcial* si además satisface ii.i). Un *Orden Parcial* A se dice que es un *Orden Total* si para cada $x \neq y$ exactamente pasa uno de los dos: xAy ó yAx . Si A es un orden parcial o cuasi orden entonces xAy se escribe como $x \leq y$ ó $y \geq x$, y $x \not\leq y$ significa que $x \geq y$ pero $x \neq y$. Podemos observar algunas definiciones en digráficas pero pensando en relaciones sobre conjuntos; por ejemplo, un *conjunto independiente* en un orden parcial o en un cuasi orden es una *Anticadena*, la cual se ha definido en

capítulos anteriores. Si \leq es un orden parcial sobre $V(D)$ entonces un elemento $x \in V(D)$ es un maximal si no existe $y \in V(D)$ tal que $x \not\leq y$, $x \in V(D)$ es un minimal si no existe $y \in V(D)$ tal que $y \not\leq x$. Una relación de equivalencia satisface: i), ii.ii) y iii).

Un cuasi orden, \preceq sobre $V(D)$ da paso a una relación de equivalencia de manera natural, y subsecuentemente existen dos maneras de asociar un orden parcial a un cuasi orden dado. Sea xAy , esto significa que $x \preceq y$ y $y \preceq x$, entonces A es una relación de equivalencia en $V(D)$, y la *clase de equivalencia de x módulo A* es $[x]_A = \{y \in V(D) : xAy\}$. Definamos el *Cociente de V módulo A* como $V/R = \{[x]_A : x \in V(D)\}$. Si definimos $[x]_A \leq [y]_A$ siempre que $x \preceq y$ entonces \leq es un orden parcial sobre V/A , el *Cociente del orden parcial* del cuasi orden \preceq .

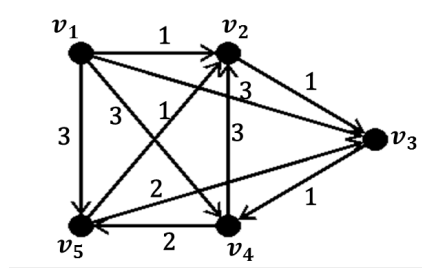
3. TORNEOS M-COLOREADOS LINEALMENTE.

En este primer capítulo abordaremos de los primeros acercamientos y resultados en torneos linealmente coloreados (con colores sin ninguna restricción). En 1982, Sands, Sauer y Woodrow probaron en [1] que cada torneo 2-coloreado tiene un vértice v tal que para cualquier otro vértice x del torneo hay una trayectoria dirigida monocromática de x a v . Como no todo torneo 3-coloreado T contiene un vértice v tal que para cualquier otro vértice x de T existe una trayectoria monocromática de x a v , entonces Sands, Sauer y Woodrow plantearon el siguiente problema:

Sea T un torneo 3-coloreado que no contiene a C_3 ¿ T debería tener un vértice v tal que para cualquier otro vértice x de T , existe una trayectoria dirigida monocromática de x a v ?

Observemos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1 La siguiente digráfica 3-coloreada, no contiene a C_3 y existe un vértice v tal que para cualquier otro x existe una trayectoria monocromática de x hacia v .



Obsérvese que el vértice v_4 satisface que para cualquier otro vértice x de T hay una trayectoria monocromática dirigida de x hacia v_4 .

En 1986, Shen Minggang prueba en [8] que si T es un torneo m -coloreado que no contiene a T_3 ni a C_3 , entonces existe un vértice v tal que para cada x en $T - \{v\}$ hay una trayectoria monocromática de x hacia v . Con esto Shen Minggang da una respuesta positiva a la pregunta de Sands, Sauer y Woodrow bajo ciertas condiciones.

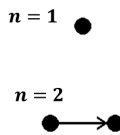
Así obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 1.1 Sea T un torneo m -coloreado que no contiene a C_3 , ni a T_3 , entonces hay un vértice $v \in V(T)$ tal que para cualquier otro vértice $x \in V(T) - \{v\}$ hay una trayectoria monocromática de x hacia v .

Demostración.

Procederemos por inducción sobre la cardinalidad de los vértices del torneo.

1) Para $n=1$ y $n=2$ es claro.



2) Hipótesis de inducción: Sea T' un torneo m -coloreado de orden menor que n tal que no contiene a C_3 ni a T_3 , entonces hay un vértice $v \in V(T')$ tal que para cualquier otro vértice $x \in V(T') - \{v\}$ hay una trayectoria monocromática de x hacia v .

3) Por hipótesis de inducción por cada vértice v en T existe un vértice $f(v)$ en T tal que para cada vértice x de $T - \{v\}$ hay una trayectoria monocromática de x hacia $f(v)$.

Consideremos 3 casos sobre $f(v)$ y v :

Caso 1) Si existe una trayectoria dirigida monocromática de v a $f(v)$.

Por hipótesis $f(v)$ tiene la propiedad de que para cada vértice x de $T - \{v\}$ existe una trayectoria dirigida monocromática de x a $f(v)$ y como existe una trayectoria dirigida monocromática de v hacia $f(v)$, entonces para todo $x \in V(T) - \{v\}$ existe una trayectoria monocromática de x a v y la afirmación queda demostrada.

Caso 2) Si $f(u) = f(v)$ para algún $u \neq v$.

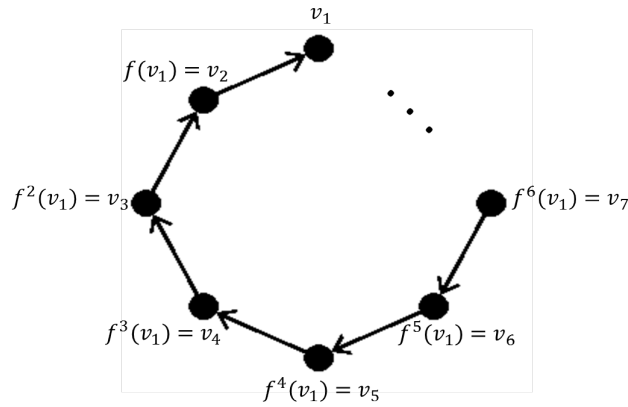
Notemos que por hipótesis de inducción $f(u)$ tiene la propiedad de que para cada vértice x de $T - \{u\}$ existe una trayectoria dirigida monocromática de x a $f(u)$, en particular existe una trayectoria dirigida monocromática de v a $f(u)$, pero $f(u) = f(v)$ entonces también existe una trayectoria dirigida monocromática de v a $f(v)$ y por el Caso 1) se sigue la afirmación.

Caso 3) Si $f(u) \neq f(v)$ siempre que $u \neq v$ y no existe una trayectoria dirigida monocromática de v a $f(v)$.

Notemos que f es inyectiva pues $f(u) \neq f(v)$ siempre que $u \neq v$, además el conjunto de vértices es un conjunto finito por lo que f es una función inyectiva de un conjunto finito en sí mismo, por lo tanto, f es una biyección. Es decir, f es una permutación.

Afirmación. Se pueden reetiquetar los vértices de T de la siguiente manera $f(v_i)=v_{i+1}$ y de esta forma, estos se parten en ciclos (con respecto a la permutación f) $\gamma_1 = (v_1, v_2, \dots, v_{n_1}), \gamma_2 = (v_{n_1+1}, v_{n_1+2}, \dots, v_{n_2}), \dots$ donde $f(v_1) = v_2, \dots, f(v_{n_1}) = v_1, f(v_{n_1+1}) = v_{n_1+2}, \dots, f(v_{n_2}) = v_{n_1+1}$

Demostración de la afirmación.



Notemos que no existe trayectoria monocromática de v_1 a $f(v_1)$ en particular no existe flecha de v_1 a $f(v_1)$, pero como T es un torneo, entonces entre cada par de vértices existe exactamente una flecha por lo que $(f(v_1), v_1) \in A(T)$. Ahora observemos a $f(v_1)$, sabemos de igual forma que no existe flecha de $f(v_1)$ a $f(f(v_1))=f^2(v_1)=v_3$ por lo que $(f(v_3), f(v_1)) \in A(T)$. Observemos de igual manera a $f^2(v_1)=f(v_3)$, de forma análoga a los anteriores $(f(f(v_3)), f(v_3)) \in A(T)$. Así, siguiendo el proceso anterior y como la gráfica es finita $v_1=f(f^i(v_1))$ para algún $i > 1$ y como no existe trayectoria de $f^i(v_1)$ a $v_1=f(f^i(v_1))$ entonces $(f(f^i(v_1)), f^i(v_1)) \in A(T)$ pues T es torneo.

Sea $\gamma_1 = (v_1, f^i(v_1), f^{i-1}(v_1), \dots, f(v_1), v_1)$. Si $|V(\gamma_1)| = |V(T)|$ entonces la afirmación queda demostrada. Si $|V(\gamma_1)| < |V(T)|$, entonces sea $w_1 \in V(T) - V(\gamma_1)$.

Sabemos que no existe una trayectoria monocromática de w_1 a $f(w_1)$ y en particular $(w_1, f(w_1))$ no pertenece a $A(T)$, entonces $(f(w_1), w_1) \in A(T)$, notemos que $f(w_1)$ no pertenece $V(\gamma_1)$ pues si $f(w_1) \in V(\gamma_1)$, $f^j(v_1)=f(w_1)$ pero f es biyección y en particular es inyectiva, entonces $f^{j-1}(v_1)=w_1$ lo cual es una contradicción pues $w_1 \in V(T)-V(\gamma_1)$. De esta manera hemos formado un ciclo que inicia en w_1 ajeno a γ_1 . Si $|V(\gamma_1)|+|V(\gamma_2)|=|V(T)|$ hemos terminado si no, continuamos formando ciclos y el procedimiento termina pues $V(T)$ es finito.

Afirmación. Existe un solo ciclo.

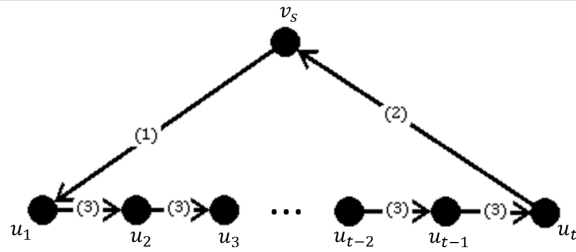
Demostración de la afirmación.

Supongamos que hay más de un ciclo.

Por hipótesis de inducción sabemos que para un torneo de orden menor que n se tiene que existe x en T tal que para cualquier otro vértice v de T existe una trayectoria monocromática de v a x ; podemos pues, aplicar la hipótesis de inducción a un ciclo, sin pérdida de generalidad se lo aplicamos al ciclo γ_1 . Ahora observemos a $f^k(v_1)$ en γ_1 vértice distinguido tal que para todo vértice $x \in V(\gamma_1)-\{ f^k(v_1) \}$ existe una trayectoria monocromática de x a $f^k(v_1)$, en particular existe una trayectoria monocromática de $f^{k-1}(v_1)$ a $f^k(v_1)$ lo cual no puede ser por la construcción del ciclo pues no hay trayectoria de v a $f(v)$, por lo tanto existe exactamente un ciclo.

Sea $\gamma = (v_1, v_2, \dots, v_{n_1})$ el ciclo en T . Como no hay una trayectoria monocromática de v_i hacia v_{i+1} por la construcción del ciclo, esto implica que hay flechas $(v_2, v_1), (v_3, v_2), \dots, (v_n, v_{n-1}), (v_1, v_n)$ y digamos que dichas flechas están coloreadas con colores a_1, a_2, \dots, a_n respectivamente. Si $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ entonces v_n puede alcanzar a v_1 mediante la siguiente trayectoria monocromática

$\rho = (v_n, v_{n-1}, \dots, v_2, v_1)$ con color a_1 , lo cual contradice nuestra suposición que no hay trayectorias monocromáticas de v_n hacia v_1 , entonces, a_1, a_2, \dots, a_{n-1} no pueden ser todos iguales. Deben existir a_s y a_{s-1} distintos. Sin pérdida de generalidad supongamos que $a_{s-1} = 1$ y $a_s = 2$. Existe un color b de tal manera que existe una trayectoria monocromática de v_{s-1} a v_{s+1} . Notemos ahora que $b \neq 1$ pues si $b=1$, entonces existe una trayectoria monocromática de v_s a v_{s+1} , lo cual es una contradicción, además, $b \neq 2$ pues si $b=2$, entonces existe una trayectoria monocromática de v_{s-1} a v_s , lo cual también es una contradicción, entonces $b=3$. Tomemos ahora $\tau = (u_1, u_2, \dots, u_t)$ la trayectoria monocromática más corta de v_{s-1} a v_{s+1} con color 3, aquí $u_1 = v_{s-1}$ y $u_t = v_{s+1}$.

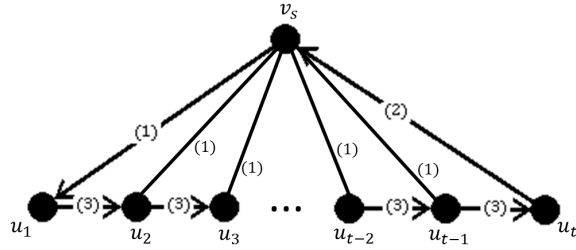


Consideremos el color de la flecha que conecta a v_s con u_2 :

Caso 1) Si la flecha va de u_2 hacia v_s . Notemos que la flecha no puede ser de color 3 pues habría una trayectoria monocromática de color 3 de v_{s-1} a v_s lo cual es una contradicción. Notemos también que la flecha no puede ser de color 2 pues de lo contrario tendríamos a C_3 y también sería una contradicción.

Caso 2) Si la flecha va de v_s hacia u_2 . Notemos que la flecha no puede ser de color 3 pues tendríamos una trayectoria monocromática de v_s hacia v_{s+1} lo cual es una contradicción. Notemos además que no puede ser de color 2 pues de lo contrario tendríamos a T_3 en \mathbb{T} , lo cual es una contradicción.

Por lo tanto que dicha flecha que conecta a v_s con u_2 tiene que ser de color 1.



Consideremos ahora el color de la flecha que conecta a v_s con u_3 de manera análoga a los casos de la flecha anterior, notemos que no puede ser de color 3 pues habría una trayectoria monocromática de color 3 de v_{s-1} a v_s lo cual es una contradicción. Además observemos que no puede ser de color 2 pues si $(v_s, u_3) \in A(T)$ entonces tendríamos a T_3 en T lo cual es una contradicción y si $(u_3, v_s) \in A(T)$ entonces tendríamos a C_3 y también tendríamos una contradicción; por lo que dicha flecha tiene que ser de color 1 en T . Podemos seguir con este proceso, afirmando que toda flecha que entre v_s y u_i con, $1 \leq i \leq t-1$ es de color 1. Finalmente notemos que si $(v_s, u_{t-1}) \in A(T)$ entonces (v_s, u_{t-1}, u_t, v_s) es un ciclo de orden tres, 3-coloreado lo cual es una contradicción a la hipótesis, ahora bien, si $(u_{t-1}, v_s) \in A(T)$ entonces (v_s, u_{t-1}, u_t, v_s) es un torneo de orden tres 3 coloreado lo cual también es una contradicción a la hipótesis. Así el teorema queda demostrado. ■

Una vez demostrado lo anterior podemos notar el siguiente corolario:

Corolario 1.1 Supongamos que T, H_1, H_2, \dots, H_n son torneos m -coloreados que no contienen a C_3 ni a T_3 , donde $V(T) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$. Sea T' un torneo formado de la siguiente manera: reemplazamos cada u_i con H_i y dejamos que las flechas entre H_i y H_j sean del mismo color que la flecha entre u_i y u_j pero con direcciones arbitrarias, esto implicará que T' contiene un vértice v tal que

para cualquier otro vértice x de T' existe una trayectoria monocromática de x a v .

Demostración.

Notemos que para cualesquiera tres vértices v_j, v_k y v_l en T' el ciclo con 3 vértices que se pudiese formar entre ellos no es 3-coloreado pues:

Caso 1) Supongamos que v_j, v_k y v_l se encuentran en H_i para algún $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, como H_i es un torneo m -coloreado que no contienen a C_3 ni a T_3 , entonces el triángulo formado por v_j, v_k y v_l no puede ser C_3 ni T_3 .

Caso 2) Sin pérdida de generalidad, supongamos que v_j se encuentra en H_i y v_k, v_l están en H_t para algún $i, t \in \{1, 2, \dots, n\}$ y $t \neq i$. Notemos que la flecha entre v_j y v_k está coloreada del mismo color que la flecha entre v_j y v_l entonces el triángulo formado por v_j, v_k y v_l tiene al menos dos flechas del mismo color por lo que no es ni C_3 ni T_3 .

Caso 3) Supongamos que v_j, v_k, v_l están en H_i, H_t y H_s , notemos que el triángulo formado por estos tres vértices no es C_3 , ni T_3 pues en caso contrario esto implicaría que T (el torneo original) es un torneo m -coloreado que contiene a C_3 y a T_3 lo cual es una contradicción.

De esta forma por el **Teorema 1.2** el resultado se obtiene. ■

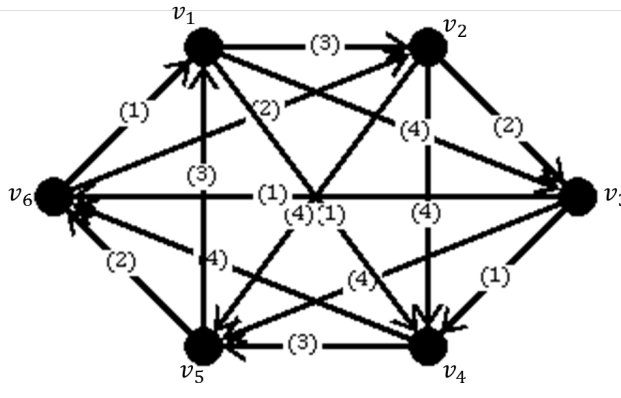
En un resultado más reciente, en 2003 la Dra. Hortensia Galeana y la Dra. Rocío Rojas en [2] probaron que para cada $n \geq 6$, existe un torneo T de orden n , 4-coloreado, tal que satisface dos condiciones: 1) T no contiene a C_3 y 2) No existe ningún vértice v en T tal que para cualquier otro vértice x de T , existe una trayectoria dirigida monocromática de x a v . Construyeron una familia de contraejemplos para responder la siguiente pregunta: ¿Si T es un torneo 4-coloreado que no contiene a C_3 , entonces T contiene un vértice v tal que para cualquier otro vértice x de T , existe una xv -trayectoria dirigida mono-

cromática? Planteando el siguiente teorema:

Teorema 1.2 *Para cada $n \geq 6$, existe un torneo 4-coloreado de orden n que satisface las siguientes dos condiciones: 1) T no contiene a C_3 y 2) No existe ningún vértice v en T tal que para cualquier otro vértice x de T , existe una trayectoria dirigida monocromática de x a v .*

Demostración.

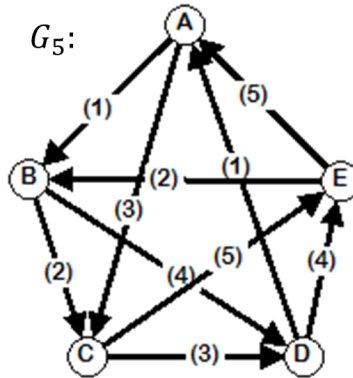
Para $n=6$, notemos que el siguiente torneo T , 4-coloreado, no contiene un ciclo de longitud 3 que sea 3-coloreado y no contiene un vértice v , tal que para cualquier otro vértice x en T exista una trayectoria monocromática de x a v .



De hecho notemos que v_{i+1} no puede alcanzar a v_i vía trayectorias monocromáticas, donde la notación es tomada módulo 6, con $i = \{1, 2, \dots, 6\}$. Por ejemplo, las trayectorias de v_2 hacia v_1 son: $\alpha_1 = \{v_2, v_3, v_4, v_5, v_1\}$, $\alpha_2 = \{v_2, v_3, v_5, v_6, v_1\}$, $\alpha_3 = \{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_1\}$, $\alpha_4 = \{v_2, v_3, v_4, v_6, v_1\}$, $\alpha_5 = \{v_2, v_4, v_6, v_1\}$, $\alpha_6 = \{v_2, v_4, v_5, v_1\}$, $\alpha_7 = \{v_2, v_5, v_6, v_1\}$, $\alpha_8 = \{v_2, v_5, v_1\}$ de las cuales ninguna es trayectoria monocromática. Podemos construir torneos más grandes 4-coloreados con las mismas propiedades que el torneo construido anteriormente. Simplemente añadiendo un vértice a T y conectando dicho vértice a todos los vértices

anteriores y coloreando las flechas de color 1. ■

Por otro lado observemos que es importante pedir en las hipótesis del **teorema 1.2** que el torneo no contenga a T_3 , ni a C_3 . Si solamente pedimos que T no contenga a C_3 en el teorema, el resultado no sería cierto, pues notemos por ejemplo el siguiente torneo, llamémoslo G_5 :



Notemos que G_5 es 5-coloreado, de orden 5, no contiene a C_3 y contiene a T_3 , sin embargo no existe vértice v tal que para cualquier otro vértice x de G_5 hay una trayectoria monocromática de x a v . Se pueden construir contraejemplos más grandes con $m=5$ añadiendo un vértice a G_5 , conectando el nuevo vértice con flechas de color 1 a todos los vértices anteriores.

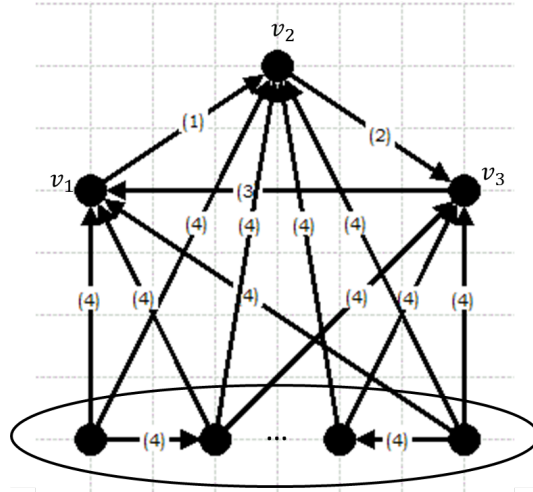
De igual forma si solamente pedimos que T no contenga a T_3 el resultado no se tendría. Por ejemplo: Sea D_n el torneo 4-coloreado con vértices v_1, v_2, \dots, v_n tal que las flechas (v_1, v_2) , (v_2, v_3) y (v_3, v_1) están coloreadas de color 1, 2 y 3 respectivamente y todas las demás flechas están coloreadas de color 4 y dirigidas (v_i, v_j) si $i \geq j$.

Afirmación. D_n es un torneo 4-coloreado, no contiene a T_3 y contiene a C_3 pero no contiene ningún vértice v tal que para cualquier otro vértice x haya

una trayectoria monocromática de x a v .

Demostración de la afirmación.

A D_n lo podemos ver de la siguiente manera, separando los vértices de D_n-C_3 y C_3 :



Notemos que el vértice distinguido, es decir el que absorbe, digamos v , no puede ser v_1 , v_2 o v_3 , pues si $v=v_1$, entonces tendría que haber una trayectoria monocromática de cualquier otro vértice de D_n hacia v_1 , notemos que no hay trayectoria monocromática de v_2 a v_1 .

Si $v=v_2$, entonces tendría que haber una trayectoria monocromática de cualquier otro vértice de D_n hacia v_2 , notemos que no hay trayectoria monocromática de v_3 a v_2 .

Si $v=v_3$ entonces tendría que haber una trayectoria monocromática de cualquier otro vértice de D_n hacia v_3 , notemos que no hay trayectoria monocromática de v_1 a v_3 .

Notemos ahora que $v_i \in D_n-C_3$ no puede ser el vértice distinguido v , pues no hay flechas que vayan de C_3 a D_n-C_3 entonces no hay trayectorias dirigidas de los vértices de C_3 a los vértices de D_n-C_3 .

4. TORNEOS COLOREADOS CON COPOS.

Tratando de extender a los torneos linealmente coloreados, en este segundo capítulo tocaremos a los torneos coloreados linealmente por conjuntos parcialmente ordenados, introduciremos el número de coloración del torneo y daremos una caracterización para cuando éste es uno, $tc(P)=1$.

En 1994, Sands y Linek en [10] dieron una extensión del resultado de Sands, Sauer y Woodrow en [1], además plantean 3 problemas, el primero de ellos, que aún sigue abierto, no es de su autoría, en realidad fue planteado por Paul Erdős sin embargo la primera vez que se publicó (impreso) fue en [1].

Problema 1 ¿Para cada $n>2$, existirá un entero positivo, $f(n)$, tal que para cada torneo cuyas flechas esten coloreadas con n colores contiene un conjunto S de vértices de cardinalidad a lo más $f(n)$ con la propiedad de que para cada vértice v que no esté en S hay una trayectoria monocromática de v hacia un vértice de S ?

En la extensión que dan Sands y Linek del resultado de Sands, Sauer y Woodrow, las flechas del torneo T están coloreadas con los elementos de un conjunto P parcialmente ordenado (ó COPO por sus siglas). A continuación vamos a recordad la definición de un COPO.

Sea R una relación binaria sobre un conjunto P , diremos que (P,R) es un conjunto parcialmente ordenado si R que cumple las siguientes tres propiedades:

- i) xRx para todo $x \in P$. (Reflexividad)
- ii) xRy y yRx implica que $x=y$ para todo $x,y \in P$.(Antisimetría)

iii) xRy y yRz implica xRz para todo $x, y, z \in P$. (Transitividad)

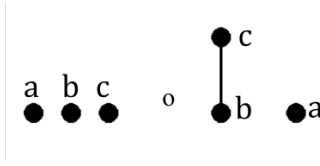
A una trayectoria dirigida $\tau = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ la llamaremos *monótona* si $\text{color}(v_i, v_{i+1}) \leq \text{color}(v_{i+1}, v_{i+2})$ bajo el orden parcial sobre P , para cada $i \in \{1, 2, \dots, n-2\}$. Notemos que las trayectorias monocromáticas son monótonas y coinciden cuando P es una anticadena, recordando que una anticadena, A , se define en un COPO P y es un subconjunto de P , $A \subseteq P$, tal que cada par de miembros de A son incomparables con relación al orden sobre P , es decir, para cualesquiera x, y en A , se tiene que ni $x \leq y$ ni $y \leq x$.

Definamos ahora el número de coloración de un torneo, $tc(P)$, de un COPO P como el entero positivo más pequeño, tal que para cualquier coloración de las flechas con los elementos de P de cualquier torneo T , existe un conjunto S de a lo más $tc(P)$ vértices de T con la propiedad de que existe una trayectoria monótona de cualquier vértice de $T-S$ a un vértice de S . Retomando [1] Sands, Sauer y Woodrow probaron que cada torneo 2-coloreado tiene un vértice v tal que para cualquier otro vértice x del torneo hay una trayectoria dirigida monocromática de x a v lo cual nos dice que $tc(P)=1$ cuando P es una anticadena de dos elementos y notemos entonces que el **Problema 1** nos pregunta si $tc(P)$ existe para P una anticadena finita con más de dos elementos.

Sands y Linek caracterizan a estos COPO's finitos con número de coloración 1.

Teorema 2.1 Los siguientes enunciados son equivalentes para un COPO finito P :

- (i) $tc(P) = 1$;
- (ii) P no contiene un subconjunto isomorfo a:



(iii) P es una suma lineal de anticadenas de 1 y 2 elementos.

La suma lineal de 2 COPO's disjuntos P_1 y P_2 es el COPO con elementos $P_1 \cup P_2$ y relaciones de orden, la unión de las relaciones de orden de P_1 y P_2 junto con $x_1 \leq x_2$ para todo $x_1 \in P_1, x_2 \in P_2$. La suma lineal de n COPO's se define inductivamente.

Para poder demostrar el teorema anterior necesitaremos utilizar el siguiente teorema fuerte:

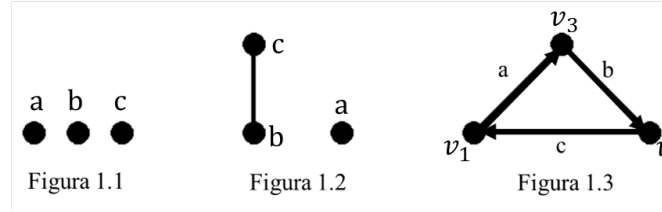
Teorema 2.2 (Sands, Sauer, Woodrow) [1] Sea D una digráfica finita cuyas flechas están coloreadas con 2 colores. Entonces existe un conjunto S de vértices de D que satisface:

- a) Para cada vértice v de $D-S$ existe una trayectoria monocromática de v hacia un vértice de S ;
- b) No existe una trayectoria monocromática en D entre cualesquiera 2 vértices de S .

Notemos que si D es un torneo, S debe consistir en un sólo vértice.

Demostración del Teorema 2.1

(i) **implica** (ii) La demostración se hará por contraposición, es decir, demostraremos que: Existe un torneo (T) y una coloración de las flechas de T con los elementos de P tal que no existe un vértice v con la propiedad de que existe una trayectoria monótona de cualquier vértice de $T-\{v\}$ hacia v . Supongamos que P contiene una copia de alguna de las gráficas exhibidas en las figuras 1.1 y 1.2. Consideremos T un torneo de 3 vértices y coloreado como se muestra en la figura 1.3.



Observemos que a partir del vértice v_1 no hay trayectoria monótona hacia v_2 , a partir del vértice v_3 no hay trayectoria monótona hacia v_1 y a partir de v_2 no hay trayectoria monótona hacia v_3 . Así, T muestra que $tc(P) \geq 2$.

(ii) **implica** (iii) Sea M el conjunto de los elementos minimales de P.

Afirmación $|M| \leq 2$.

Demostración de la afirmación.

Supongamos por contradicción que $|M| \geq 3$, esto es, M tiene al menos 3 elementos, digamos $\{m_0, m_1, m_2\} \subseteq M$. Como los tres elementos son minimales, entonces no existe elemento en P estrictamente menor que cualquiera de ellos, por lo que estos elementos no están relacionados entre sí, por lo tanto estos son 3 puntos aislados en P, lo cual es una contradicción pues P no tiene subconjunto isomorfo al exhibido en la figura 1.1, por lo tanto $|M| \leq 2$.

Primero que $|M|=1$, entonces consideremos lo siguiente:

Afirmación: Podemos ver a P como suma lineal de M y P-M. Probaremos que si $\{m_0\} = M$, entonces m_0 está relacionado con cada elemento de P-M. Por contradicción, supongamos que existe algún elemento, p_0 , en P-M que no está relacionado con m_0 .

Afirmación. $|P-M| \geq 2$.

Demostración de la afirmación. Si $\{p_0\} = P-M$, entonces p_0 tendría que ser elemento minimal pues recordemos que estamos suponiendo que existe un elemento en P-M que no está relacionado con m_0 , es decir, $p_0 \in M$, lo cual es una contradicción por lo tanto $|P-M| > 1$. Tomemos pues $x_0 \in P-M$, $x_0 \neq$

p_0 , podemos considerar los siguientes dos casos. Probaremos primero que x_0 está relacionado con m_0 , supongamos por contradicción que x_0 no está relacionado con m_0 :

Caso 1) Si p_0 no está relacionado con x_0 .

Entonces $\{x_0, p_0, m_0\}$ sería un subconjunto de P isomorfo a la figura 1.1, lo cual sería una contradicción a nuestra hipótesis. Si p_0 sí está relacionado con x_0 tendríamos un subconjunto isomorfo a la figura 1.2.

Caso 2) Si p_0 está relacionado con x_0 .

Entonces tendríamos en P un subconjunto isomorfo a la 1.2, lo cual también es una contradicción a nuestra hipótesis. Por lo tanto en este caso p_0 está relacionado con x_0 , entonces por transitividad podemos notar que x_0 está relacionado con m_0 y como x_0 fue tomado arbitrariamente entonces cualquier x_0 en $P-M$, está relacionado con m_0 lo cual es una contradicción pues supusimos que x_0 no está relacionado con m_0 .

Por lo que si $\{m_0\}=M$, entonces m_0 está relacionado con cada elemento de $P-M-\{p_0\}$.

(i) Si $x_0 < p_0$.

Por un lado sabemos que x_0 está relacionado con m_0 , más aún x_0 no es más chico que m_0 . Como $x_0 < p_0$ este último no es más chico que m_0 pues este último es un elemento minimal, entonces $m_0 < p_0$ por lo tanto m_0 está relacionado con p_0 , lo cual es una contradicción pues m_0 no está relacionado con p_0 .

(ii) Si $p_0 < x_0$.

Notemos que $p_0 < x_0$ para todo x_0 en $P-M-\{p_0\}$, por lo que p_0 es un elemento minimal, lo cual es una contradicción pues $|M|=1$.

(iii) Si p_0 no está relacionado con algún x_0 .

Como m_0 está relacionado con x_0 entonces tendríamos en P un subconjunto

isomorfo a la figura 1.2, lo cual es una contradicción. Si $|M|=2$, digamos $\{m_0, m_1\}=M$, sea $p_0 \in P-M$, si m_0 y m_1 no están relacionados con p_0 entonces $\{m_0, m_1, p_0\}$ es un subconjunto de P isomorfo a la figura 1.1; si p_0 sólo estuviese relacionado con un elemento de M , sin pérdida de generalidad digamos m_0 , entonces existiría en P un subconjunto isomorfo a la figura 1.2, lo cual sería una contradicción a nuestra hipótesis. Por lo tanto P es suma lineal de P y $P-M$, así (ii) implica (iii).

(iii) implica (i) Lo que se quiere demostrar es que para cualquier coloración de las flechas de cualquier torneo T con elementos de P , existe un conjunto S de cardinalidad a lo más 1 con la propiedad de que existe una trayectoria monótona de cualquier vértice de $T-S$ hacia S . Para esta implicación procederemos por inducción sobre la cardinalidad de P .

a) $|P|=2$ y $|M|=1$, recordemos que M es el conjunto de los elementos minimales de P , sabemos que P es suma lineal de M y $P-M$. Sea T un torneo cuyas flechas están coloreadas con P , entonces las flechas están coloreadas con 2 colores. Consideremos a la subdigráfica generadora D de T tal que las flechas de D son todas las flechas en T con color M , entonces podemos aplicar el Teorema 2.2 y encontramos a S un subconjunto de vértices de D tal que: a) Para cada vértice v de $D-S$ existe una trayectoria monocromática de v hacia un vértice de S ; b) No existe una trayectoria monocromática en D entre cualesquiera dos vértices de S . Fijémonos en $T[S]$ como subtorneo de T , notemos que sus flechas están coloreadas con un solo color, a saber, el color es el único elemento de $P-M$. Entonces existe un vértice $z \in V(T[S])$ tal que para cada $u \in V(T[S])-\{z\}$ existe una uz -trayectoria dirigida monocromática en $T[S]$.

Afirmación Para cada $x \in V(T)-\{z\}$ existe una xz -trayectoria monótona en T .

Demostración de la afirmación

Esto es pues, la trayectoria monocromática está coloreada con un elemento en M , es decir un elemento minimal y después por un color de $P-M$, el cual no es un elemento menor que el minimal, por lo cual tenemos una trayectoria monótona en T .

b) $|P|=2$ y $|M|=2$.

Este hecho se sigue del teorema probado por Sands, Sauer y Woodrow, dado en el primer capítulo, que si se tenía una 2-coloración en un torneo, entonces un vértice v tenía la propiedad de que para cualquier otro vértice u existía una trayectoria monocromática de u hacia v . Notemos que esta trayectoria es monótona pues como $|M|=2$ quiere decir que T está coloreado con una anticadena pues tiene dos elementos minimales (sin relación entre ellos).

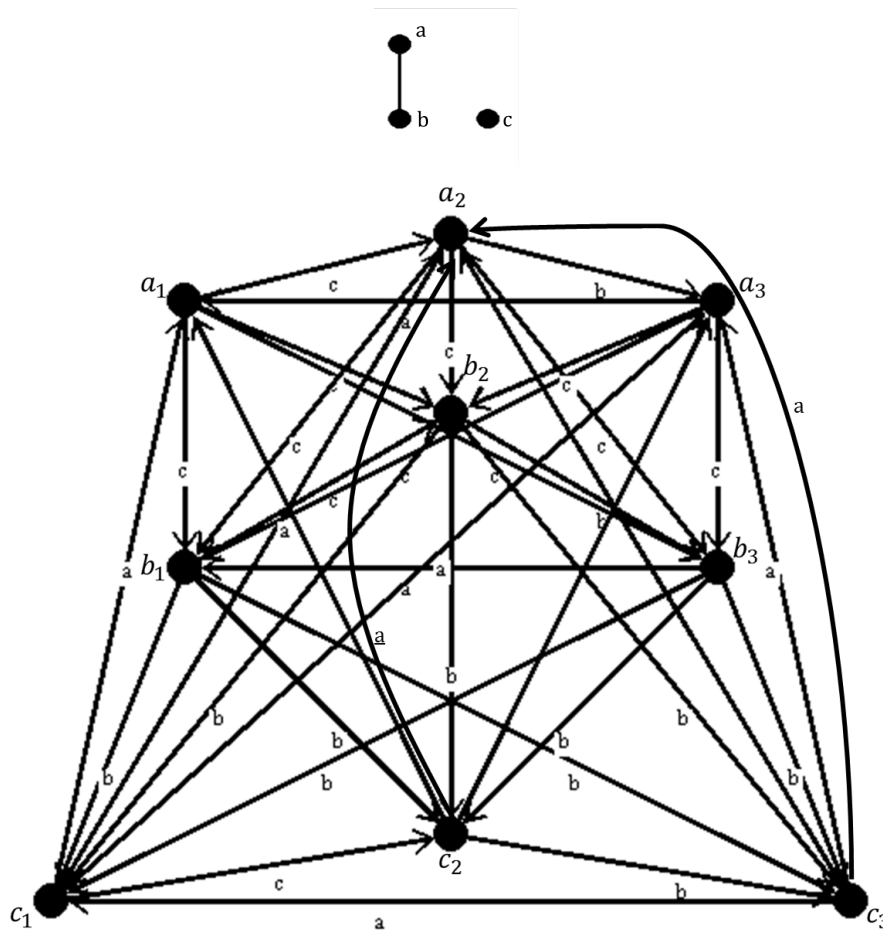
2. Hipótesis de Inducción. Para $|P| \leq n$, si P es suma lineal de anticadenas de 1 y 2 elementos, entonces $tc(P)=1$.

3. Por demostrar. Para $|P|=n$, Si P es suma lineal de anticadenas de 1- y 2-elementos entonces $tc(P)=1$.

Sea T un torneo, P un COPO, M conjunto de minimales. Coloreamos las flechas de T con los elementos de P . Por otro lado, sabemos que $|M| \leq 2$, entonces consideremos D la subgráfica generadora de T cuyas flechas son todas las flechas de T con color en M . Podemos aplicar a D el teorema 2.2 y así podemos encontrar un subconjunto S de D tal que: a) Para cada vértice v de $D-S$ existe una trayectoria monocromática de v hacia un vértice de S ; b) No existe una trayectoria monocromática en D entre cualesquiera dos vértices de S . Consideremos ahora a $T[S]$ como subtorneo de T , notemos que las flechas de $T[S]$ están coloreadas con elementos de $P-M$; aplicamos pues, la hipótesis de inducción con lo cual existe s en $T[S]$ tal que existe una trayectoria monótona dirigida de cualquier otro vértice de $T[S]$ a s . Tomemos ahora un vértice cualquiera v de $T-\{s\}$, por el inciso a) del teorema 2.2, sabemos que existe una trayectoria

monocromática (coloreada por un elemento de M) de v hacia un vértice w de $T[S]$, cuando $v \in V(T)-T[S]$, digamos $\tau_1=(v=u_0, \dots, w=u_k)$ y una trayectoria monótona de w a s , digamos $\tau_2=(w=u_k, \dots, s=u_{k+l})$, por lo que $\tau_1 \cup \tau_2$ es un vs -camino el cual contiene una vs -trayectoria monótona de v hacia s . Por lo tanto $tc(P)=1$. ■

El siguiente torneo de 9 vértices dado en [1] demuestra que $tc(P) \geq 3$: Donde el COPO P es:



vértices: $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$
 flechas: $(a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2)$ Coloreadas con c
 $(a_2, a_3), (b_2, b_3), (c_2, c_3)$ Coloreadas con b

$(a_3, a_1), (b_3, b_1), (c_3, c_1)$ Coloreadas con a

(a_i, b_j) Coloreadas con c $\forall i, j$

(b_i, c_j) Coloreadas con b $\forall i, j$

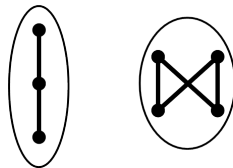
(c_i, a_j) Coloreadas con a $\forall i, j$

Pues, notemos que $tc(P) \not\leq 3$. Supongamos que $tc(P)=1$; $\{a_1\} \neq S$ pues a_2 no alcanza a a_1 vía una trayectoria monótona, $\{a_2\} \neq S$ pues a_3 no alcanza a a_2 vía una trayectoria monótona y $\{a_3\} \neq S$ pues a_1 no alcanza a a_3 vía una trayectoria monótona. Del mismo modo $\{b_1\} \neq S$ pues b_2 no alcanza a b_1 vía una trayectoria monótona, $\{b_2\} \neq S$ pues b_3 no alcanza a b_2 vía una trayectoria monótona y $\{b_3\} \neq S$ pues b_1 no alcanza a b_3 vía una trayectoria monótona. Además $\{c_1\} \neq S$ pues c_2 no alcanza a c_1 vía una trayectoria monótona, $\{c_2\} \neq S$ pues c_3 no alcanza a c_2 vía una trayectoria monótona y $\{c_3\} \neq S$ pues c_1 no alcanza a c_3 vía una trayectoria monótona. Por otro lado supongamos que $tc(P)=2$; si $\{a_1, a_2\} \neq S$, b_2 no alcanza a a_1 o a a_2 vía una trayectoria monótona, por la misma razón $\{a_3, a_2\} \neq S$ y $\{a_1, a_3\} \neq S$. Si $\{b_1, b_2\} \neq S$, entonces c_2 no alcanza a b_1 o a b_2 vía una trayectoria monótona, por la misma razón $\{b_3, b_2\} \neq S$ y $\{b_1, b_3\} \neq S$. Si $\{c_1, c_2\} \neq S$, entonces a_2 no alcanza a c_1 o a c_2 vía una trayectoria monótona, por la misma razón $\{c_3, c_2\} \neq S$ y $\{c_1, c_3\} \neq S$.

Así, el siguiente problema no pasa desapercibido; **Problema 2:** ¿Existe el número de coloración del COPO con el que se coloreó la digráfica anterior? ¿Será 3 el número de coloración de dicho COPO? Por cierto, podemos notar que el teorema 2.1 y el ejemplo anterior muestra que no existe un COPO P tal que $tc(P)=2$, pues notemos que el teorema 2.1 nos dice que si $tc(P)=1$ si y sólo si P no contiene subconjuntos isomorfos a la figura 1.1 y 1.2, si pensamos

en que $tc(p)$ fuese dos entonces P podría contener subconjuntos isomorfos a las figuras antes mencionadas, sin embargo las flechas del torneo anterior están coloreadas arbitrariamente con un COPO isomorfo a la figura 1.2 y $tc(P) \not\geq 3$. Se puede dar una observación más fuerte en la cual reemplazamos el COPO P por una digráfica D (con un lazo en cada vértice), coloreamos las flechas de un torneo T con los vértices de D y en lugar de tomar trayectorias monótonas consideramos "D-trayectorias". Una D-trayectoria es una trayectoria $\tau=(v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$ que satisface que $((\text{color}(v_i, v_{i+1}), \text{color}(v_{i+1}, v_{i+2}))$ es una flecha o un lazo de D para toda $i \in \{1,2,\dots,n-2\}$. Aquí los cambios de color en la trayectoria están permitidos sólo si los vértices de D correspondientes a estos colores son adyacentes. Definiremos el número de coloración de D de la misma forma que lo definimos anteriormente para un COPO. Hasta ahora no sabemos cuáles digráficas D satisfacen que $tc(D)=1$. Ni siquiera sabemos cuáles gráficas G satisfacen que $tc(G)=1$, donde las aristas de G las tomamos como flechas simétricas.

Observemos que para cualquier C_n , donde éste es un ciclo de n vértices, tenemos que $tc(C_3)=1=tc(C_4)$, porque el número de coloración de las siguientes figuras es el mismo, más aún, éste es 1, por teorema 2.1, pues no contienen subconjuntos isomorfos a las figuras 1.1 y 1.2.



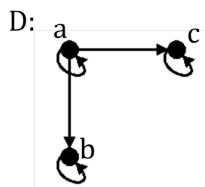
y además $tc(D) \geq 3$ siempre que D contenga un conjunto independiente de tres vértices, pues el número de coloración de la figura 1.1 es mayor o igual a tres. Entonces $tc(C_n) \geq 3$ para $n \geq 6$. Sin embargo podemos darnos cuenta que C_5 no ha sido mencionado, ¿será cierto que $tc(C_5)=1$?

5. TORNEOS COLOREADOS CON DIGRÁFICAS.

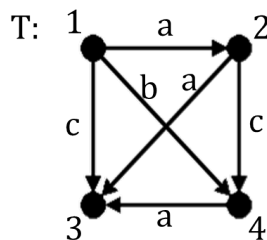
En el presente capítulo ya no solo colorearemos linealmente los torneos con conjuntos parcialmente ordenados sino que ahora será con digráficas, incluso algunas de ellas reflexivas.

Recordemos algunas definiciones que se revisaron en el capítulo anterior. Si D es una digráfica reflexiva y T es un torneo cuyas flechas están coloreadas con los vértices de D , una D -trayectoria monótona en T es una trayectoria dirigida Q en T , en la cual $(\text{color}(x,y), \text{color}(y,z))$ es una flecha en D para cualesquiera dos flechas consecutivas (x,y) y (y,z) en Q ; enseguida expondremos un ejemplo para que quede más clara dicha definición.

Consideremos la siguiente digráfica reflexiva D :



Consideremos un torneo T y coloreamos sus flechas con los vértices de D .



Las trayectorias en T son: $Q_1=(1,4)$, $Q_2=(1,2)$, $Q_3=(1,3)$, $Q_4=(2,4)$, $Q_5=(2,3)$, $Q_6=(4,3)$, $Q_7=(1,2,4)$, $Q_8=(1,4,3)$, $Q_9=(1,2,4,3)$, $Q_{10}=(1,2,3)$, $Q_{11}=(2,4,3)$. Las trayectorias monótonas son: $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6, Q_7, Q_{10}$.

Sean T un torneo y D una digráfica tal que las flechas de T están coloreadas con los vértices de D . Diremos que $S \subseteq V(T)$ es un *conjunto absorbente por D -trayectorias monótonas* si para cada vértice $x \in V(T) - S$ existe una D -trayectoria monótona de x a algún vértice de S . El número de coloración del torneo T respecto a D , denotado por $tc(D)$, es el menor entero positivo (si existe) tal que para cualquier coloración de las flechas de cualquier torneo por los vértices de D , existe un conjunto S absorbente de a lo más $tc(D)$ vértices. Ried en el año 2000 en [4] discute algunos resultados obtenidos en 1994 por Linek y Sands en [10], por ejemplo: si D es la digráfica de anticadena de dos elementos (es decir, D es reflexiva, disconexa con dos vértices), entonces $tc(D)=1$. Hasta ahora no se sabe que si $tc(D)$ existe cuando D es la digráfica de la anticadena de 3 o más elementos. Más adelante se discutirán algunos resultados concernientes a dichas ideas y también se investigará acerca de $tc(D)$ para digráficas reflexivas con tres vértices.

5.0.3. Accesibilidad Monocromática.

Tal vez el teorema más básico sobre torneos es el siguiente:

Teorema 3.1: Todo torneo T , contiene una trayectoria hamiltoniana.

Demostración.

Lo probaremos por inducción sobre la cardinalidad del conjunto de los vértices

de T .

1) Base de Inducción $|V(T)|=2$.

Entonces T está conformado por dos vértices y una flecha entre ellos, entonces existe una trayectoria hamiltoniana.

2) Si T' es un torneo tal que $|V(T')|=n$, entonces T' contiene una trayectoria hamiltoniana.

3) **Demostración.**

Sea T un torneo con $|V(T)|=n + 1$ vértices. Demostraremos que T contiene una trayectoria hamiltoniana. Consideremos $T' = T - \{v\}$ donde v es cualquier vértice del torneo. Como T' es un torneo con n vértices entonces podemos aplicar nuestra hipótesis de inducción, de esa forma T^* tiene una trayectoria hamiltoniana digamos $Q=(v_1, v_2, \dots, v_n)$. Consideremos el último vértice v_j de la trayectoria tal que existe la flecha (v_j, v) , notemos que si todas la flechas salieran de v tendríamos ya una trayectoria hamiltoniana $Q^*=(v, v_1, v_2, \dots, v_n)$. Por otro lado si $v_j=v_n$, entonces tomamos la trayectoria $Q^*=(v_1, v_2, \dots, v_n, v)$. Así que para v_{j+1} , con $j \neq n$, tenemos la flecha (v, v_{j+1}) , podemos tomar la trayectoria $Q'=(v_1, v_2, \dots, v_j, v, v_{j+1}, \dots, v_n)$, la cual es una trayectoria hamiltoniana para cuando $|V(T)|=n + 1$ y así queda demostrado. ■

Esto implica que si las flechas de un torneo T están coloreadas con un solo color, existirá un solo vértice x en T tal que para cualquier otro vértice $y \neq x$ en T existe una trayectoria monocromática de y a x (tomando x como el último vértice en la trayectoria hamiltoniana de T).

Como se ha mencionado antes, en 1982, B. Sands, Sauer y Woodrow, probaron lo siguiente para dos colores:

Teorema 1.0 Si las flechas de un torneo T son coloreadas con dos colores, entonces existe un vértice x en T tal que para cada vértice $y \neq x$ en T hay

una trayectoria monocromática de y a x .

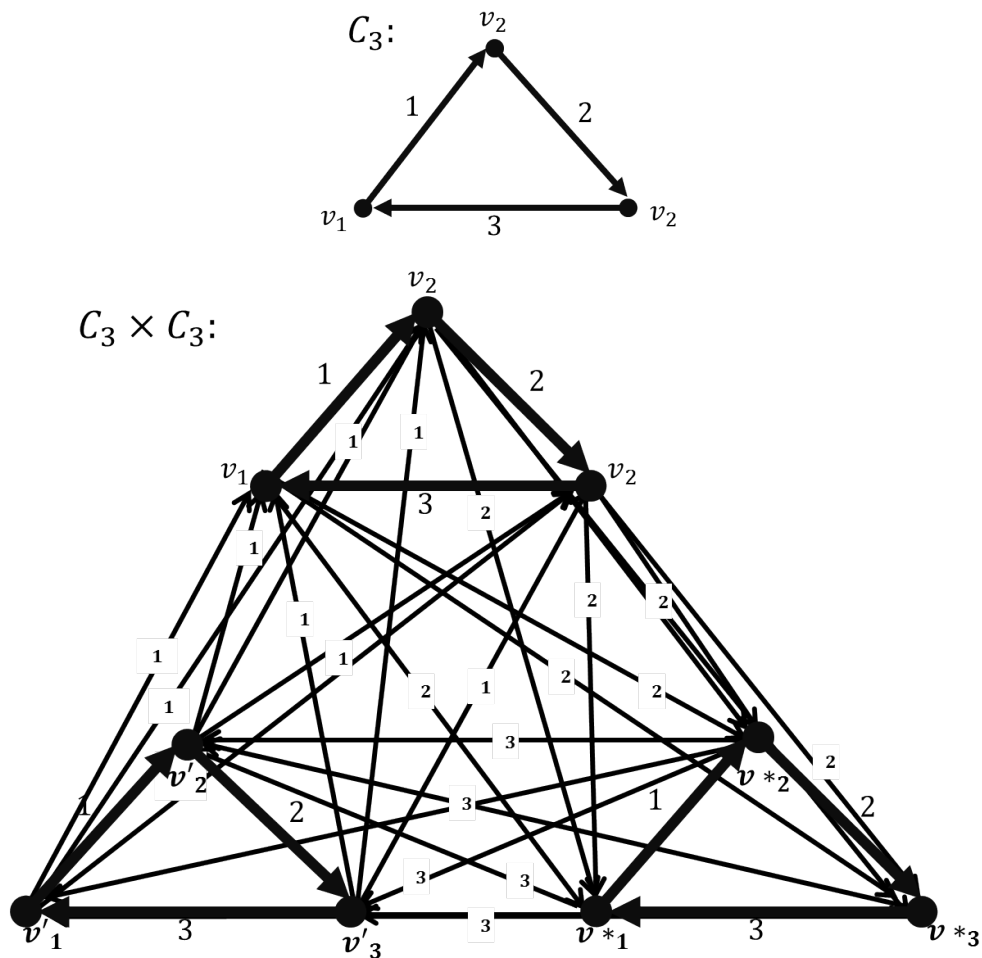
Este **teorema 1.0**, como ya se había hecho notar anteriormente, es un corolario del resultado de Shen Minggang en [8]. Más adelante se esbozará una prueba del teorema 1.0, dada por Bisalostocki. Sin embargo se debe hacer notar que no es necesariamente cierto que un sólo vértice del torneo T es un conjunto absorbente por trayectorias monocromáticas, si se usan tres o más colores para colorear las flechas de T , esto se puede ver más claro con el siguiente ejemplo:

Ejemplo. Considérese a C_3 un ciclo dirigido de orden tres, 3-coloreado. Sean $D \cong C_3$ y $T=D[C_3]$, el producto lexicográfico de C_3 con C_3 , con la coloración inducida, es decir, cada vértice de C_3 es reemplazado por una copia de C_3 y siempre que se tenga una flecha (x, y) en D entonces las 9 flechas que unen a la copia de C_3 que reemplazó al vértice x de D y a la copia de C_3 que reemplazó al vértice y de D son del mismo color que la flecha (x, y) en D . Entonces un sólo vértice no puede funcionar como conjunto absorbente por trayectorias monocromáticas, por lo siguiente.

Sea S un conjunto absorbente vía trayectorias monocromáticas. Si $S = \{ v_i \}$, entonces al menos v_{i+1} no alcanza a v_i vía trayectoria monocromática, donde $1 \leq i \leq 3$ (notación módulo 3). Análogamente para v'_i y v^*_i . Si $S = \{ v_i, v_j \}$, entonces al menos v^*_k no alcanza a S vía trayectoria monocromática, donde $1 \leq i, j \leq 3$ y $1 \leq k \leq 3$. Análogamente para $S' = \{ v'_i, v'_j \}$ y $S^* = \{ v^*_i, v^*_j \}$. Si $S = \{ v_i, v'_j \}$, entonces al menos v_{i+1} no alcanza a S vía trayectoria monocromática, donde $1 \leq i, j \leq 3$. Análogamente para $S' = \{ v'_i, v^*_j \}$ y $S^* = \{ v_i, v^*_j \}$. Si denotamos $C_3 [C_3] := C_3^2$, notaremos entonces que para $n \geq 3$, C_3^m que, como lo hemos denotado, sería $C_3 [C_3^{n-1}]$ muestra que existen torneos arbitrariamente grandes cuyas flechas están coloreadas con 3 colores para los cuales no existe un

conjunto de 1 o 2 vértices que sirva como conjunto absorbente vía trayectorias monocromáticas.

A continuación se puede observar a C_3 con un ejemplo de coloración con tres colores distintos, además construimos el producto de C_3 con C_3 para dicha coloración.



No se sabe para $k \geq 3$, si existe un entero positivo fijo $f(k)$ tal que las flechas de cualquier torneo T están coloreadas con k colores, entonces existe un

conjunto S de a lo más $f(k)$ vértices en T tal que para cada vértice y en T que no pertenece a S existe una trayectoria monocromática de y a S . Incluso si $f(3)$ existe, no se sabe si $f(3)=3$ o no. Bialistocki mostró que cualquier contraejemplo para $f(3)=3$ debe tener al menos 19 vértices.

Por otro lado, si T es transitivo, entonces un solo vértice basta para absorber a los demás vértices vía trayectorias monocromáticas, sin importar cuántos colores estemos usando, esto pasa gracias a la transitividad de torneo y que además las flechas pueden ser tomadas como trayectorias monocromáticas.

Ha habido cierto progreso en algunas condiciones para asegurar la existencia de un solo vértice que funcione como conjunto absorbente para todos los demás vértices, vía trayectorias monocromáticas.

En 1996 Hortensia Galeana Sánchez [4] define un ciclo linealmente coloreado que sea un *ciclo casi-monocromático* si con a lo más una excepción todas sus flechas están coloreadas con el mismo color y probó lo siguiente:

Teorema 3.3 Si T es un torneo cuyas flechas están coloreadas con m colores tal que cada ciclo de longitud a lo más 4 es un ciclo casi-monocromático, entonces existe un vértice x en T tal que para cada vértice $y \neq x$ en T existe una trayectoria monocromática de y a x .

5.0.4. El número de coloración para un COPO finito.

Si X es un conjunto y T un torneo con conjunto de flechas $F(T)$, entonces una función de $F(T)$ a X decimos que es una coloración de las flechas de T por los elementos de X . Si (P, \leq) es un COPO finito y T es un torneo cuyas flechas

están coloreadas por los elementos de P , una P -trayectoria monótona en T es una trayectoria dirigida, Q , en el cual $\text{color}(x,y) \leq \text{color}(y,z)$ en P para cualesquiera dos flechas consecutivas (x,y) y (y,z) en Q . El número de coloración de P , denotado como $tc(P)$, es el entero positivo más pequeño (si existe) tal que para cualquier coloración dada por los elementos de P , de cualquier torneo T , existe un conjunto S de a lo más $tc(P)$ vértices de T con la propiedad de que para cada vértice x que no está en S existe una P -trayectoria monótona de x a S . Estas definiciones fueron dadas por Linek y Sands en [9].

Linek y Sands notaron que la coloración de C_3 [C_3] en el ejemplo de la sección, muestra que si $P_{1,2}$ denota el orden parcial de 3 elementos que consiste de un orden lineal de dos elementos y un elemento aislado, entonces $tc(P_{1,2})$, si existe, tiene que ser al menos 3. Entonces se plantearon lo siguiente:

Problema: ¿Existirá $tc(P_{1,2})$? Si existe, será cierto que $tc(P_{1,2})=3$?

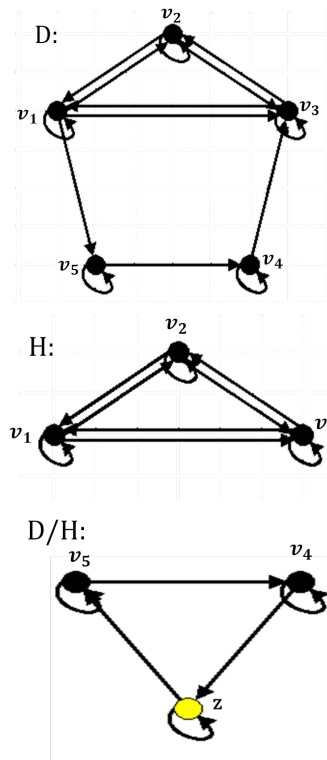
5.0.5. El número de coloración de torneo para una digráfica transitiva.

Si D es una Digráfica reflexiva y T es un torneo cuyas flechas están coloreadas por los vértices de D , una D -trayectoria monótona en T es una trayectoria dirigida Q en T para la cual $(\text{color}(x,y), \text{color}(y,z))$ es una flecha en D para cualesquiera dos flechas consecutivas (x,y) y (y,z) en Q . Por supuesto, los lazos en cada vértice de D son considerados como flechas en D , así que en una D -trayectoria monótona, cualquier color puede repetirse en flechas consecutivas. El número de coloración de D , denotado $tc(D)$, es el entero positivo más pequeño (si existe) tal que para cualquier coloración de las flechas de T por lo vértices de D , existe un conjunto S de a lo más $tc(D)$ vértices de T con

la propiedad de que para cada vértice y de T que no esté en S existe una D -trayectoria monótona de y a S . Así que si D es la digráfica de un COPO P , entonces $tc(D)=tc(P)$.

Supongamos que D es una digráfica reflexiva que contiene una digráfica reflexiva, simétrica completa H . Crearemos ahora una nueva digráfica a partir de D , denotada por D/H , de la siguiente manera: Tomamos a D y borramos a H de D , así como todas las flechas de D incidentes con al menos un vértice x de $V(H)$, añadimos un nuevo vértice z , creamos un lazo en z y por cada vértice x de $\{V(D)-V(H)\}$, si algún vértice de H domina a x , añadimos la nueva flecha (z,x) a D/H , si algún vértice de H es dominado por x , añadimos la nueva flechas (x,z) a D/H .

A continuación, se ha construido un ejemplo de D/H , dada D .



Lema 1. Si D es una digráfica reflexiva, la cual contiene una digráfica reflexiva, simétrica, completa H y $tc(D)$ existe, entonces $tc(D/H)$ existe, más aún $tc(D/H) \leq tc(D)$.

Demostración.

Sea T un torneo cuyas flechas están coloreadas con los vértices de D . Sea Q una D -trayectoria monótona en T . Consideremos D/H , como la hemos construido en el párrafo anterior. Ahora reemplazamos con el color z todas las ocurrencias de los colores de H que hayan sido usados sobre una flecha de T . Entonces T esá coloreado con los vértices de D/H , además:

Afirmación. Q es una (D/H) -trayectoria monótona de T .

Demostración de la afirmación.

Caso (i) La trayectoria Q , como D -trayectoria monótona, está solamente coloreada con colores de H , entonces Q , como (D/H) -trayectoria está coloreada sólo con el color z , entonces Q es monótona.

Caso (ii) Q , como D -trayectoria, está coloreada con colores (vértices) de $D-H$, como cuando construimos a (D/H) los colores de esta trayectoria no cambian, es decir, sigue siendo del mismo color, entonces Q es una (D/H) -trayectoria monocromática.

Caso(iii) Q , como D -trayectoria monótona está coloreada con colores de D (es decir también tiene colores de H), no sabemos cómo están dichos colores acomodados, pero sabemos que $(\text{color}(x,y), \text{color}(y,z)) \in A(D)$, siempre que (x,y) y (y,z) sean flechas consecutivas, por ser Q monótona. También sabemos que para construir D/H , si algún vértice de H domina a x , añadimos la nueva flecha (z,x) a D/H y si algún vértice de H es dominado por x , añadimos la nueva flecha (x,z) a D/H , esto nos obliga a que el orden de los colores en la trayectoria se preserve, entonces Q es una trayectoria monótona.

Esto implica que si S es un conjunto de $tc(D)$ vértices de T que sirven como con-

junto absorbente por D-trayectorias monótonas de los vértices de T-S, también absorbe por (D/H)-trayectorias monótonas, entonces $tc(D/H) \leq |S| = tc(D)$. ■

Corolario 1. Si D es una digráfica reflexiva que contiene una digráfica reflexiva, simétrica, completa H tal que no hay flechas de D entre vértices de H y vértices que no están en H, entonces, $tc(D)$ existe si y sólo si $tc(D/H)$ existe y en su caso $tc(D) = tc(D/H)$.

Demostración.

Sea D una digráfica reflexiva que contiene una digráfica reflexiva, simétrica completa H tal que no hay flechas de D entre vértices de H y vértices que no están en H, construimos D/H como anteriormente.

Primero vamos a demostrar que:

1) Si $tc(D/H)$ existe, entonces $tc(D)$ existe.

Demostración. Sea T cualquier torneo cuyas flechas están coloreadas con los vértices de D/H. Supongamos que $tc(D/H)$ existe, esto es, para cualquier coloración de cualquier torneo con los vértices de D/H, $tc(D/H)$ es el menor entero positivo tal que existe un conjunto $S \subseteq T$ con cardinalidad $tc(D/H)$, que absorbe a todos los vértices de T-S vía (D/H)-trayectorias monótonas. Recordemos que en la construcción de D/H hemos añadido un vértice z . Notemos que éste es un vértice aislado en D/H pues no había flechas entre vértices de H y vértices de D-H en D, entonces en la construcción de D/H no se añadieron flechas entre z y los vértices de D-H, por lo que cualquiera de las (D/H)-trayectorias monótonas de T que use una flecha coloreada con z , debe tener todas las flechas coloreadas con z , pues no hay relación entre z y otro color, entonces la única manera de tener una trayectoria monótona que lo involucre es comparándolo consigo mismo. Así, si reemplazamos cada ocurrencia del color z en las flechas de T con cualquier vértice de H, por lo que estas (D/H)-trayectorias monótonas son

ahora D -trayectorias monótonas y S es un conjunto que absorbe a los vértices de $T-S$ vía D -trayectorias monótonas, así $tc(D)$ existe y $tc(D) \leq |S| = tc(D/H)$ y por el lema anterior $tc(D/H) \leq tc(D)$ entonces $tc(D/H) = tc(D)$.

2) Si $tc(D)$ existe, entonces $tc(D/H)$ existe.

Demostración. Supongamos que $tc(D)$ existe, entonces por lema 1, $tc(D/H)$ existe y además $tc(D/H) \leq tc(D)$. Pero en la primera parte de la prueba teníamos que $tc(D) \leq tc(D/H)$, entonces $tc(D) = tc(D/H)$. ■

Corolario 2. Si D es una digráfica completa, reflexiva y simétrica, entonces $tc(D) = 1$.

Demostración. Sea D una digráfica completa, reflexiva y simétrica.

Afirmación: D/D es un sólo vértice con un lazo.

Demostración de la afirmación. $D \subseteq D$, construyamos D/D , esto es, borramos todos los vértices de D y todas las flechas que inciden en D , entonces nos hemos quedado sin vértices y sin flechas. Agregamos un nuevo vértice z y creamos un lazo en z .

Notemos ahora que $tc(D/D) = 1$ pues como sólo tenemos un vértice con un lazo para colorear un torneo T y sabemos que un torneo contiene una trayectoria hamiltoniana (ver teorema 3.1) entonces tomamos el último vértice de la trayectoria hamiltoniana como conjunto absorbente. Además por corolario 1 sabemos que $tc(D)$ existe si y sólo si $tc(D/D)$ existe y en su caso $tc(D) = tc(D/D)$, entonces $tc(D) = 1$. ■

Lema 2. Si H es una subdigráfica generadora reflexiva de una digráfica D tal que $tc(H)$ existe, entonces $tc(D)$ existe y $tc(D) \leq tc(H)$.

Demostración. Sea T cualquier torneo cuyas flechas están coloreadas con los vértices de D . Como H es subdigráfica generadora de D , esta coloración en particular es una coloración con los vértices de H . Como $tc(H)$ existe, entonces

existe un conjunto S de $tc(H)$ vértices de T que absorbe a los vértices de $T-S$ vía H -trayectorias monótonas, pero cada H -trayectoria monótona en general es una D -trayectoria monótona, pues H es subdigráfica generadora de D y el conjunto de las flechas de H está contenido en el conjunto de las flechas de S . Entonces $tc(D)$ existe y además $tc(D) \leq |S| = tc(H)$. ■

Corolario 3. Si D es reflexiva con dos vértices entonces $tc(D) = 1$.

Demostración. Sea D digráfica reflexiva con dos vértices. Notemos que si D es completa, reflexiva y simétrica no hay nada que hacer pues por **corolario 2** tenemos que $tc(D) = 1$. Si solamente es reflexiva, entonces D es la gráfica con uno de los dos ordenes parciales con dos elementos, es decir:

- 1) El primero es una anticadena de dos elementos.
- 2) El segundo es un orden lineal con dos elementos.

Notemos que en cualquiera de los dos casos D contiene una anticadena generadora, es decir, una subdigráfica generadora, H , con dos elementos. Así $tc(H)$ existe y además $tc(H) = 1$ por **teorema 1.0** entonces $tc(D) \leq tc(H)$ por **lema 2** y como $tc(H) = 1$, concluimos que $tc(D) = 1$. ■

Lema 3. Si H es una subdigráfica reflexiva e inducida de una digráfica reflexiva D tal que $tc(D)$ existe, entonces $tc(H)$ existe y $tc(H) \leq tc(D)$.

Demostración. Sea T cualquier torneo cuyas flechas están coloreadas con los vértices de H , notemos que esta coloración es una coloración que utiliza algunos de los vértices de D . Como $tc(D)$ existe, entonces existe un conjunto S con $|S| = tc(D)$ vértices de T que sirve como conjunto absorbente de D -trayectorias monótonas de vértices de $T-S$, como sólo los colores de H utilizados para colorear las flechas de T y cada flecha de D entre vértices de H es también una flecha de H , cualquier D -trayectoria monótona también es una H -trayectoria monótona entonces S sirve como conjunto absorbente de H -trayectorias monótonas de

vértices de T que no están en S , entonces $tc(H) \leq |S| = tc(D)$. ■

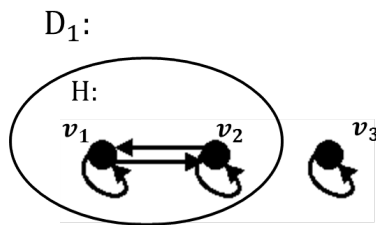
Una vez teniendo los resultados anteriores, estamos listos para poder tratar las digráficas reflexivas con 3 vértices.

Teorema 3.2 Sea D una digráfica reflexiva con 3 vértices:

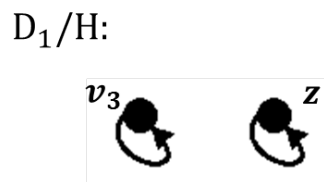
- 1) Si D contiene un ciclo dirigido de longitud 2, entonces $tc(D)=1$.
- 2) Si D no contiene un ciclo dirigido de longitud 2 pero D contiene un vértice de ingrado 2 o exgrado 2, entonces $tc(D)=1$.

Demostración.

- 1) Sea D digráfica reflexiva con 3 vértices. Sea D_1 una digráfica reflexiva que tiene dos componentes: la primer componente, la denotaremos como H y ésta contendrá un ciclo dirigido de longitud 2 y 2 lazos y la segunda contendrá un vértice aislado con un lazo.



Consideremos D_1/H que a continuación se ha construido.



Afirmamos que D_1/H es la digráfica de una anticadena de 2 elementos pues son dos puntos con sus respectivos lazos y no hay flechas entre ellos, por lo que no son comparables. Entonces $tc(D_1/H)$ existe, mas aún $tc(D_1/H)=1$ por **lema 1** y por el Teorema de Sands, Sauer y Woodrow. Además por **corolario 1** $tc(D_1)$ existe y $tc(D_1)=tc(D_1/H)$ pero $tc(D_1/H)=1$, entonces $tc(D_1)=1$.

Supongamos ahora que D contiene un ciclo dirigido de longitud 2, entonces D contiene a D_1 como subdigráfica generadora y hemos probado que $tc(D_1)$ existe. Entonces por Lema 2 $tc(D)$ existe y además $tc(D) \leq tc(D_1)$, como $tc(D_1)=1$, entonces $tc(D)=1$.

Nota: Si D fuera completa, simétrica y reflexiva con 3 vértices, entonces $tc(D)=1$ por el Corolario 2.

2) Si D no contiene un ciclo dirigido de longitud 2 pero contiene un vértice de ingrado 2 o exgrado 2, entonces D es una de las siguientes 3 digráficas:

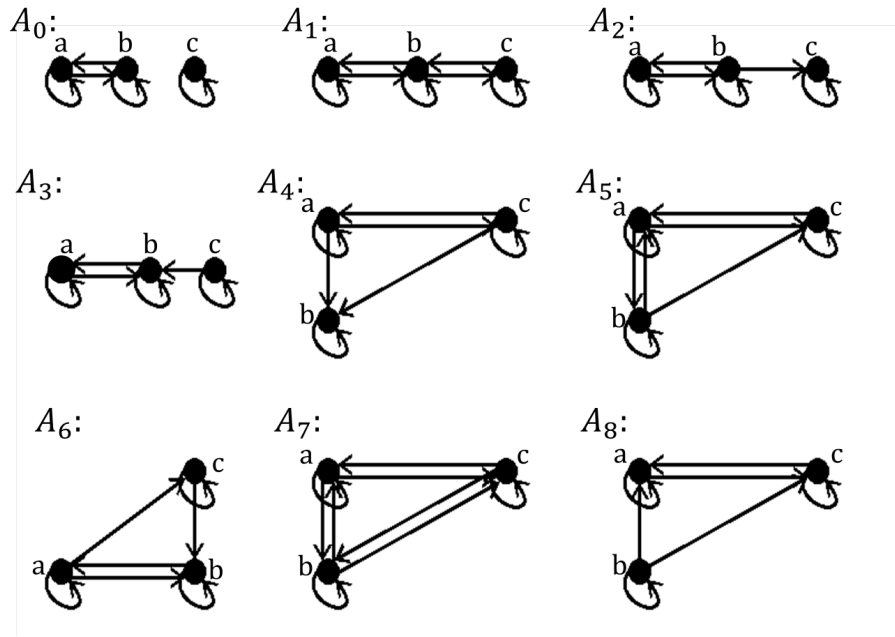
a) La digráfica del orden parcial obtenida de tomar la suma lineal de una anticadena con 2 elementos y una anticadena de un elemento (Si D tiene un vértice de ingrado 2).

b) La digráfica del orden parcial obtenida por tomar la suma lineal de una anticadena de un elemento y una anticadena con dos elementos (si D tiene un vértice de exgrado 2).

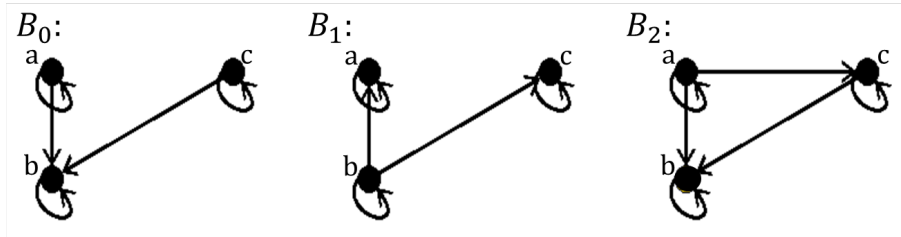
c) La digráfica de un orden lineal obtenido por tomar la suma lineal de tres anticadenas y las tres con un sólo vértice.

En cualquier caso, D es la digráfica de una suma lineal de anticadenas de 1 o 2 elementos, entonces por teorema 2.1 del Capítulo 2 tenemos que $tc(D)=1$. ■

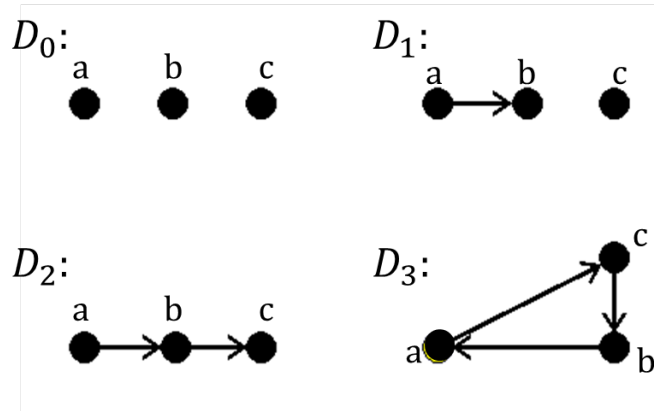
Existen 27 diferentes digráficas etiquetadas que son reflexivas con 3 vértices pero sólo 16 que no son isomorfas. El **teorema 3.2(1)** trata 9 de estos 16, que a continuación mostramos:



Por otro lado el **teorema 3.2(2)** trata 3 más de estas 16 digráficas no isomorfas, que son las siguientes:



Finalmente, si ignoramos los lazos por un momento, podemos considerar la existencia y el valor de $tc(D)$ para las siguientes 4 digráficas con 3 vértices (indexados por el número de flechas que tienen):



El problema de la existencia y el valor de $tc(D_0)$ es el problema de determinar si existe una clasificación para una versión de tres colores del Teorema 1.0. El problema de la existencia y el valor de $tc(D_1)$ es sólo determinar la existencia y el valor de $tc(P_{1,2})$, recordando que $P_{1,2}$ denota el orden parcial de 3 elementos que consiste de un orden lineal de dos elementos y un elemento aislado. El ejemplo que dimos anteriormente en este capítulo, donde se dio una coloración de flechas de $T=C_3 [C_3]$ con tres colores también demuestra que si $tc(D_3)$ existe, entonces $tc(D_3) \geq 3$. Si $tc(D_0)$ existe, entonces por lema 2, $tc(D_1)$, $tc(D_2)$, $tc(D_3)$ existen y $3 \leq tc(D_3) \leq tc(D_2) \leq tc(D_1) \leq tc(D_0)$, pues D_0 es subdigráfica generadora de D_1 , D_1 es subdigráfica generadora de D_2 y D_2 es subdigráfica generadora de D_3 .

Problema 1. ¿ $tc(D_3)=3$?

Problema 2. ¿ $tc(D_2)=3$?

Problema 3. ¿ $tc(D)$ existe para toda digráfica reflexiva D que no contiene ciclos dirigidos de longitud mayor a dos y conjuntos independientes de 3 o más vértices?

5.0.6. El número de coloración de torneo para una gráfica.

Si G es una gráfica, denotemos como D_G la digráfica reflexiva obtenida de G al reemplazar cada arista $[x, y]$ de G por las dos flechas (x, y) y (y, x) y añadir un lazo en cada vértice de G . Entonces el número de coloración de G , denotado por $tc(G)$, que estará definido por $tc(D_G)$, es decir el entero positivo más chico, k , tal que para cualquier coloración de cualquier torneo T con los vértices de G , existe un conjunto S con a lo más k vértices de T con la propiedad de que para cada vértice y de $T-S$ existe una D_G -trayectoria monótona de y a S . Estas definiciones fueron dadas por Linek y Sands y notaron que $tc(C_3)=tc(C_4)=1$ y para $n \geq 6$, y toda vez que $tc(C_n)$ exista, $tc(C_3) \geq 3$. Entonces se preguntaron: **Problema** ¿ $tc(C_5)$ existe? ¿Será que $tc(C_5)=1$?

Sólo para dejar constancia, afirmamos lo siguiente:

Lema 4. a) $tc(K_n)=1$

b) $tc(K_{1,2})=1$

c) $tc(K_{2,2})=1$

Prueba. a) Es resultado de corolario 2.

b) Se sigue del teorema 3.2(1).

c) Fue notado por Linek y Sands, como hemos dicho anteriormente. ■

5.0.7. Prueba del **Teorema 1.0.**

A. Prueba de Bialostocki del Teorema 1.0: Si las flechas de un torneo T están coloreadas con dos colores, entonces existe un vértice x en T tal que para cada vértice $y \neq x$ en T hay una trayectoria monocromática de y a x .

Demostración.

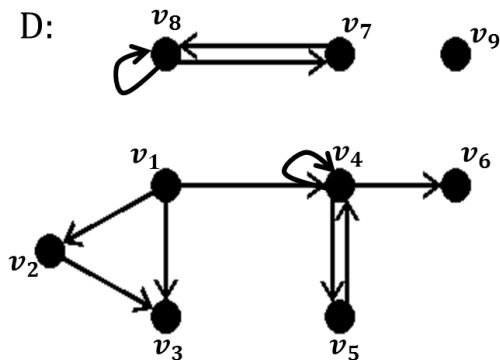
Sea T un torneo, supongamos que las flechas de T están coloreadas con dos colores, digamos rojo (R) y azul (A). Diremos que un vértice x en T es un *pozo monocromático* para T si por cada vértice $y \neq x$ en T existe una trayectoria monocromática de y a x . Supongamos que en T no existe un pozo monocromático. Consideremos un vértice en T , digamos x_1 . Como T no tiene un pozo monocromático, en particular x_1 no es un pozo monocromático, entonces debe haber otro vértice x_2 tal que no hay una trayectoria monocromática de x_2 a x_1 , pero al ser T torneo debe existir una flecha entre ellos, entonces x_1 domina a x_2 , es decir, (x_1, x_2) es una flecha en T . Como x_2 tampoco es un pozo monocromático, debe haber otro vértice x_3 tal que no hay una trayectoria monocromática de x_3 a x_2 , entonces una vez más x_2 domina a x_3 . Como T es una digráfica finita, si repetimos el proceso anterior, obtenemos un ciclo $C=(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m, x_1)$, tal que no hay una trayectoria monocromática de x_k a x_{k-1} , donde $2 \leq k \leq m$, además no hay trayectoria monocromática de x_1 a x_m , a este tipo de ciclo se le llama *NMPB* ciclo (No Monochromatic Path Back, ó, Sin trayectoria monocromática hacia atrás). Asumamos que C es el ciclo *NMPB* más pequeño. Notemos que $m \geq 3$, pues si coloreamos las flechas de un ciclo de 3 vértices con 2 colores tendremos una trayectoria monocromática de longitud 2, es decir, si $C_3=(a, b, c)$ es el ciclo dirigido de longitud tres, podemos suponer que las flechas coloreadas del mismo color son (a, b) y (b, c) .

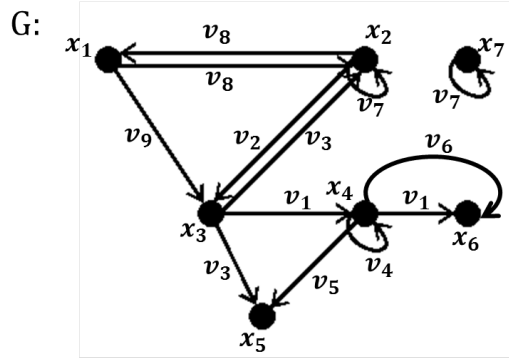
Entonces encontraríamos un pozo monocromático. Además notemos que C no es monocromático ya que de lo contrario habría una trayectoria monocromática de v_2 a v_1 , lo cual es una contradicción, pues entonces v_1 sería un pozo monocromático. Entonces debe haber una arista de color distinto conforme se avanza en el ciclo C . Sin pérdida de generalidad, digamos que (x_1, x_2) es R y (x_2, x_3) es A . Notemos ahora x_3 no domina a x_1 pues de ser así existe una trayectoria monocromática roja de longitud 2 de x_3 a x_2 , si la flecha (x_3, x_1) es de color rojo ó una trayectoria monocromática azul de x_2 a x_1 si la flecha (x_3, x_1) es color azul), lo que sería una contradicción a la construcción de C . Así que x_1 domina a x_3 . Como C era el ciclo NMPB más pequeño, el nuevo ciclo $C'=(x_1, x_3, \dots, x_m, x_1)$ no es un ciclo NMPB. Esto último no es por las flechas de C' pues todas son flechas de C , entonces, es por la flecha (x_1, x_3) , esto es, debería haber una trayectoria monocromática P de x_3 a x_1 . Si P es una trayectoria monocromática roja ó una trayectoria monocromática azul en su caso, entonces añadiendo la flecha roja (x_1, x_2) (la flecha azul (x_2, x_3) respectivamente) a P , produce una trayectoria monocromática roja de x_3 a x_2 (una trayectoria monocromática azul de x_2 a x_1), lo cual es una contradicción por como escogimos x_3 (por la elección de x_2 , respectivamente), entonces debe existir un pozo de trayectorias monocromáticas en T . ■

MULTIDIGRÁFICAS COLOREADAS CON DIGRÁFICAS.

Con el fin de ahondar más allá de los torneos y finalizar con una extensión, en el presente capítulo ya no solo colorearemos torneos linealmente sino ahora consideraremos multidigráficas para colorear, introduciremos algunas nuevas definiciones y cerraremos mencionando un par de problemas que aún siguen abiertos.

Consideremos una digráfica D y sea M una multidigráfica cuyas flechas están coloreadas con los vértices de D . A continuación damos un ejemplo de una digráfica D y una multidigráfica M cuyas flechas están coloreadas con $V(D)$.





Diremos que un camino dirigido W en G es un D -camino si los colores consecutivos que encontremos sobre W también forman un camino dirigido en D , por ejemplo, dadas la digráfica y multidigráfica anteriores algunos D -caminos dirigidos son: $W_0=(x_1, x_2, x_2)$, $W_1=(x_3, x_4, x_4, x_6)$, $W_2=(x_4, x_4, x_5)$.

Diremos que un subconjunto $S \subseteq V(G)$ es un D -pozo si todo vértice $x \in V(G) - S$ alcanza a algún vértice $y \in S$, vía un D -camino. Dado el ejemplo anterior, consideremos el conjunto de vértices $\theta = \{ x_7, x_6, x_5, x_1 \}$, el cual es un ejemplo de un D -pozo.

Diremos que S es un *conjunto independiente* si para cualesquiera dos vértices distintos en S no existe una flecha que los una. Algunos ejemplos de *conjuntos independientes* en G son: $\Gamma_0 = \{ x_1, x_4, x_7 \}$, $\Gamma_1 = \{ x_2, x_5, x_6 \}$, $\Gamma_2 = \{ x_3, x_7, x_6 \}$.

Diremos que S es *conjunto D -independiente* si para cualesquiera dos vértices distintos en S no existe un D -camino entre ellos. Como ejemplo de *conjunto D -independiente* en G , tenemos a $\Gamma_0 = \{ x_1, x_4, x_7 \}$, pues entre cualesquiera dos vértices en Γ_0 , no existe un D -camino que los una.

Diremos que $D \in \mathcal{B}_2$ si para toda multidigráfica finita G , cuyas flechas estén coloreadas con los vértices de D , G siempre contiene un D -pozo independiente. Diremos que $D \in \mathcal{B}_3$ si para toda multidigráfica finita G , cuyas flechas

estén coloreadas con los vértices de D , entonces G siempre contiene un D -pozo D -independiente. Diremos que $D \in \mathcal{B}_1$ si para todo torneo finito T , cuyas flechas están coloreadas con los vértices de D , entonces T siempre tiene como D -pozo a un solo punto. En [1] Sands demostró que si D tiene un conjunto de vértices $V(D)=\{\text{rojo, azul}\}$ y conjunto de flechas $A(D)=\{(\text{rojo,rojo}), (\text{azul, azul})\}$, entonces $D \in \mathcal{B}_3$, tomando un D -camino como un camino dirigido monocromático.

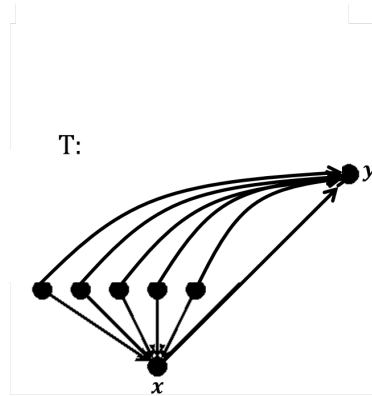
Daremos una caracterización de \mathcal{B}_2 , y algunos avances en las caracterizaciones de \mathcal{B}_3 y de \mathcal{B}_1 , además probaremos las siguientes contenciones $\mathcal{B}_3 \subsetneq \mathcal{B}_2 \subsetneq \mathcal{B}_1$.

Rédei probó que cada torneo tiene una trayectoria hamiltoniana y nosotros en el capítulo anterior hemos dado una prueba. Landau en [5] probó que cada torneo tiene un 2-Rey y definió un 2-Rey de la siguiente manera: Sea T un torneo, sea $x \in T$, se dice que x es un 2-Rey si es alcanzado por todo vértice de T vía una trayectoria de longitud a lo más 2, en seguida daremos la prueba.

Teorema 4.1 Todo torneo tiene un 2-Rey.

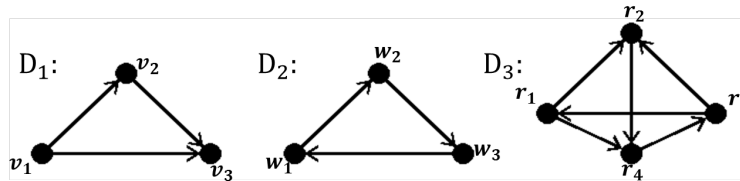
Demostración.

Sea T un torneo. Sea $x \in T$ tal que x es un vértice de ingrado máximo. Supongamos por contradicción que x no es un 2-rey. Entonces existe un vértice $y \in T$ tal que y no domina a x y y no domina a ningún vértice que domine a x , esto significa que y es dominado por cada vértice que domina a x y x domina a y .



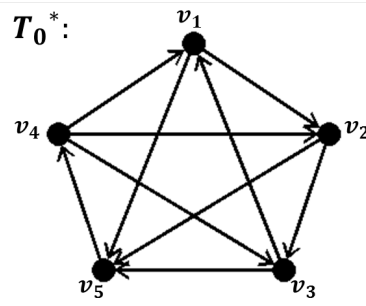
Por lo tanto, $\delta^-(y) > \delta^-(x)$, lo cual es una contradicción pues x era un vértice con ingrado máximo. Entonces, x es un 2-rey en T . ■

En seguida damos tres ejemplos de torneos D_1 , D_2 y D_3 con uno, tres y tres 2-reyes respectivamente.



D_1 tiene un 2-rey que es el vértice v_3 , D_2 tiene dos 3-reyes que son los vértices w_3, w_1 y D_3 tiene tres 2-reyes que son los vértices r_3, r_2 y r_4 .

Notemos que hay algo que nos impide incrementar el número de tales estructuras, es decir de 2-reyes y de trayectorias hamiltonianas, pero ¿Cuál es ese impedimento? Notemos que si no tenemos vértices de ingrado cero, entonces tenemos al menos tres 2-reyes y trayectorias hamiltonianas. En seguida daremos un ejemplo de tal manera que podamos notar más claro lo dicho.



Señalemos los 2-Reyes del torneo, sin vértices de ingrado cero, anterior; v_1, v_2, v_3, v_4 y v_5 , son 2-Reyes. Veamos ahora que T_0^* tiene al menos 3 trayectorias hamiltonianas dirigidas $\tau_1=(v_1, v_2, v_3, v_5, v_4)$, $\tau_2=(v_5, v_4, v_2, v_3, v_1)$ y $\tau_3=(v_1, v_2, v_5, v_4, v_3)$.

Estos resultados deberían mitigar la sorpresa de un resultado dado por Sands: Si las flechas de un torneo están coloreadas por dos colores, entonces siempre existe un vértice que absorbe a todos los demás vía trayectorias monocromáticas. Si las flechas de un torneo reciben ciertos tipos de m -coloraciones entonces existe un vértice que absorbe a los demás vía trayectorias monocromáticas. Siguiendo esa línea de investigación, Minggang mostró que si un torneo no contiene a C_3 , ni a T_3 , entonces existe un vértice que sirve como pozo, es decir, que absorbe por trayectorias monocromáticas a los demás vértices. La Dra. Hortensia Galeana mostró que si todos los k -ciclos tienen al menos $k - 1$ colores idénticos para $k=3,4$, entonces existe un vértice que sirve como pozo. Recientemente Hahn ha unificado y generalizado estos resultados. En [9] las flechas de un torneo se colorearon con los vértices de un COPO y un camino (trayectoria) es monótono (monótona) si los colores encontrados obre el camino (trayectoria) forman una sucesión no decreciente en el orden parcial (esto se ha explicado con mayor detalle en el capítulo 2). Se ha probado tam-

bién que los conjuntos 1-sumergibles, es decir aquellos para los cuales existe siempre un sólo vértice como pozo en el torneo sobre trayectoria monótonas, son precisamente la suma lineal de anticadenas de 1 y 2 elementos.

Algunos de estos resultados son casos especiales de resultados más generales que han sido aplicados a torneos. De hecho Chvátal y Lovasz en 1972 [9] mostraron que cada digráfica tiene un conjunto independiente que puede ser alcanzado desde cualquier vértice por trayectorias de longitud 1 ó 2. Sands probó que cualquier multidigráfica cuyas flechas están coloreados con 2 colores (aunque con algunas restricciones para el caso infinito) contiene un conjunto S que es alcanzado por cualquier otro vértice vía trayectorias monocromáticas tal que los distintos vértices de S no tienen trayectorias monocromáticas entre ellos.

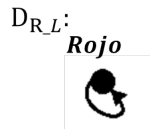
A continuación se tratará de hallar una manera para unificar y tratar todos los resultados mencionados anteriormente.

Coloreemos las flechas de G con los vértices de una digráfica D y consideremos los D -caminos en G , es decir, caminos $W=(v_1, v_2, \dots, v_n)$ tal que $(\text{color}(v_i, v_{i+1}), \text{color}(v_{i+1}, v_{i+2}))$ es una flecha o un lazo en D , para todo i . Aquí los cambios de colores en el camino sólo están permitidos si los vértices de D correspondientes a estos colores son adyacentes. Retomemos las definiciones del inicio del capítulo, un conjunto de vértices es *D -independiente* si no existe algún *D -camino* entre ellos, un *D -pozo* en G tiene la propiedad de que todo vértice v que no esté en el pozo está conectado a un vértice del pozo por un *D -camino*. Sea \mathcal{B}_3 la clase de todas las digráficas D tal que cualquier multidigráfica G linealmente coloreada con los vértices de D tiene un *D -independiente D -pozo*. El resultado de Sands, Sauer y Woodrow entonces diría que si D_S tiene como

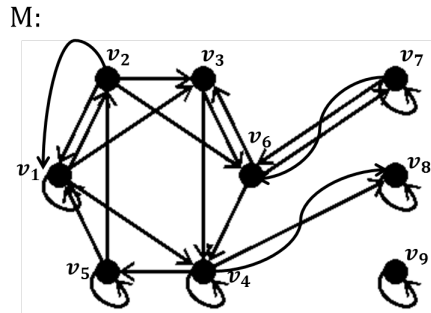
conjunto de vértices $V(D_S)=\{\text{rojo, azul}\}$ y conjunto de flechas $A(D_S)=\{(\text{rojo,rojo}), (\text{azul,azul})\}$, entonces $D_S \in \mathcal{B}_3$.



Sea \mathcal{B}_2 la clase de todas las digráficas D tal que cualquier multidigráfica G linealmente coloreada con los vértices de D tiene un D -pozo independiente. Al final tenemos a \mathcal{B}_1 , la clase de todas las digráficas D tal que cualquier torneo linealmente coloreado con los vértices de D tiene un solo vértice como D -pozo. Uno podría interpretar algunos de los resultados mostrando que la digráfica $D_{R,L}$ con $V(D_{R,L})=\{\text{rojo}\}$ y $A(D)=\{(\text{rojo,rojo})\}$ es 1-sumergible ó \mathcal{B}_1 .



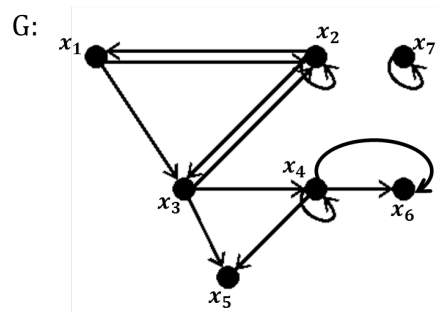
Anteriormente ya hemos dado un ejemplo de Multigráfica sin embargo para que quede mejor cimentado el concepto de daremos un ejemplo más:



Con el ejemplo podemos notar que en una Multidigráfica podemos tener más de una flechas en la misma dirección entre dos vértices, por ejemplo las flechas: (v_1, v_2) , (v_7, v_6) y (v_4, v_8) .

Siguiendo una línea de definiciones, sea G una multidigráfica, si $S \subseteq V(G)$ entonces a la multidigráfica inducida de S la denotaremos $\langle S \rangle_G$ y tiene $V(\langle S \rangle_G) = S$ y $A(\langle S \rangle_G) = \{(x, y) \in A(G) : x, y \in S\}$.

Por ejemplo consideremos la siguiente multidigráfica G :



Tomemos al conjunto S como: $S = \{x_1, x_7, x_4, x_6\}$, el cual es un subconjunto de $V(G)$, la multidigráfica inducida por S , en este caso, es:



Adicionalmente diremos que un subconjunto $S \subseteq V(G)$ es *independiente* si las únicas flechas en $\langle S \rangle_G$ son los lazos. Así, en el ejemplo anterior, S no es *independiente*.

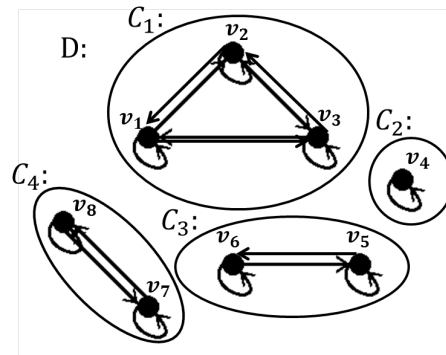
Añadamos una definición más, sea D una digráfica en la cual todos sus vértices tienen lazos, es decir, reflexiva, supóngase que:

- i) $V(D) = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n$ donde cada C_i es no vacío y $C_i \cap C_j = \emptyset$ siempre que $i \neq j$,
- ii) $(x, y) \in A(D)$ siempre que $x \neq y$ y $x, y \in C_i$, para algún i ,
- iii) $C_i \times C_j \subseteq A(D)$ siempre que $i \neq j$ y $(C_i \times C_j) \cap A(D) \neq \emptyset$ o $i = j$ y $(x, x) \in A(D)$ para algún x en C_i .

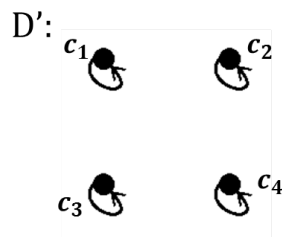
Entonces a la digráfica D' con $V(D') = \{ C_1, \dots, C_n \}$ y $(C_i, C_j) \in A(D')$ si y sólo si $(C_i \times C_j) \cap A(D) \neq \emptyset$ será llamada una *contracción* de D .

A continuación consideremos dos digráficas D y H justo como nos la describe la definición anterior, así como a su *contracción*:

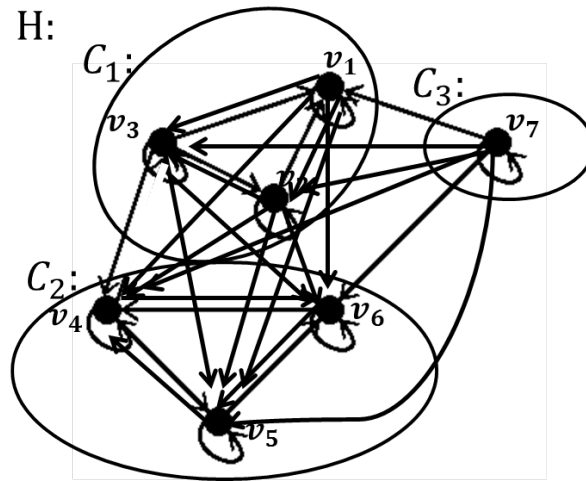
Consideremos la siguiente digráfica D con la siguiente partición de sus vértices:



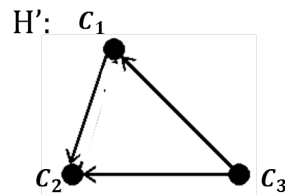
Entonces la contracción de D son los cuatro vértices C_1, C_2, C_3, C_4 con sus respectivos lazos.



Ahora ilustremos la digráfica H , con su respectiva partición de vértices:

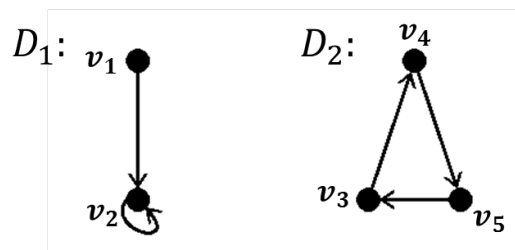


Entonces la contracción de H es:

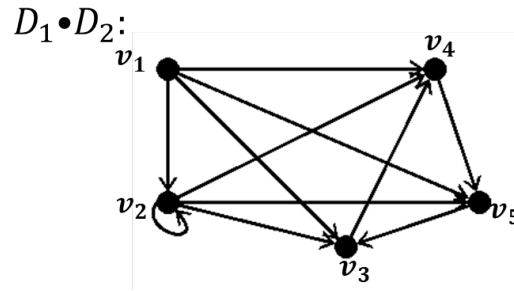


Retomemos las definiciones en multidigráficas con una definición más, la multidigráfica $D_1 \bullet D_2$ es la suma lineal de D_1 y de D_2 y lo definimos de la siguiente manera: $V(D_1 \bullet D_2) = V(D_1) \uplus V(D_2)$ (unión disjunta) y $A(D_1 \bullet D_2) = A(D_1) \cup A(D_2) \cup (V(D_1) \times V(D_2))$. Una suma lineal de 2 órdenes parciales o dos cuasi órdenes es otra vez un orden parcial o un cuasi orden.

Consideremos las siguientes dos digráficas:



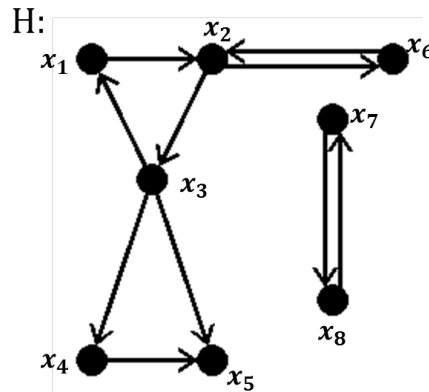
La suma lineal de las digráficas anteriores es:



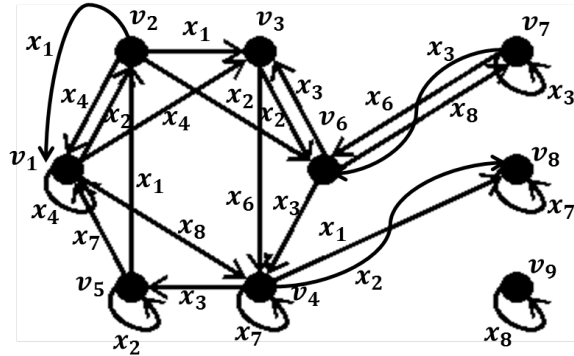
5.0.8. Jerarquía de Problemas de Accesibilidad

Sea D una digráfica y sea G una multidigráfica cuyas flechas están coloreadas con los vértices de D . Sea $\Phi: A(G) \rightarrow V(D)$. Un camino o una trayectoria $(u_0, u_1 \dots, u_n)$ en G es un D -camino o una D -trayectoria si y sólo si $(\phi((u_0, u_1)), \phi((u_1, u_2)), \dots, \phi((u_{n-1}, u_n)))$ es un camino en D . En este caso debemos también decir que el camino o la trayectoria es D -admisibile.

Ilustremos lo anterior con una digráfica H con cuyos vértices coloreamos las aristas de una multidigráfica M , quedando de esta forma definida Φ :

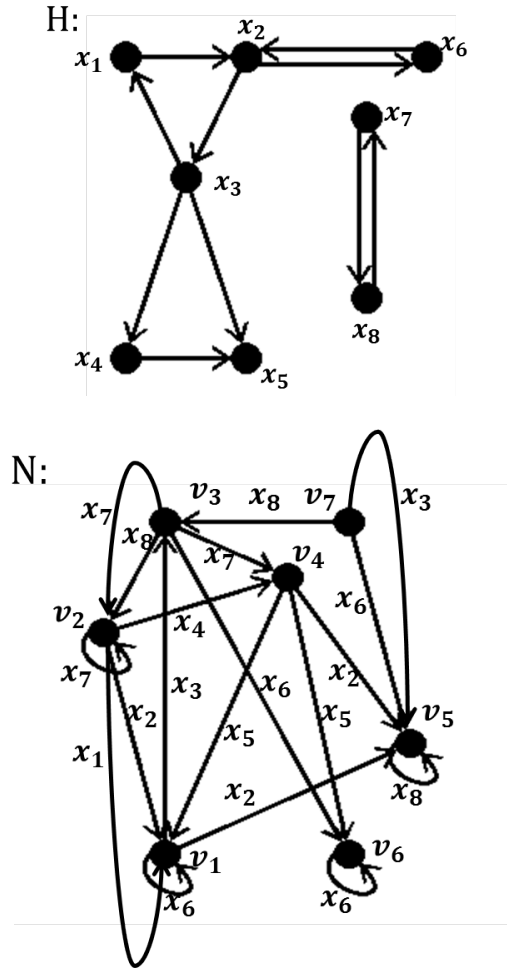


M:



Consideremos las trayectorias $\lambda_1:(v_2,v_3,v_6)$, $\lambda_2:(v_5,v_1,v_4)$, $\lambda_3:(v_5,v_2,v_6,v_4)$ y $\lambda_4:(v_5,v_2,v_6)$, las cuales en efecto son H-trayectorias y así también son H-admisibles. Consideremos las trayectorias $\lambda_{1*}:(v_1,v_3,v_6,v_7,v_7)$, $\lambda_{2*}:(v_4,v_4,v_8,v_8)$, $\lambda_{3*}:(v_2,v_1,v_4,v_4)$, las cuales no son ni H-caminos, ni H-trayectorias de acuerdo con nuestra definición. Si consideramos una vez más una digráfica D y G una multidigráfica. Un conjunto de vértices $S \subseteq V(G)$ es D-pozo si para cada $x \in V(G)-S$ existe un D-camino de x a algún punto de S. De la misma forma $S \subseteq V(G)$ es D-fuente si para cada $x \in V(G)-S$ existe un D-camino de algún punto de S a x , lo cual nos recuerda de manera dual a un D-pozo, que hemos definido anteriormente.

Ilustremos lo anterior con una digráfica H con cuyos vértices coloreamos las aristas de una multidigráfica N, en la cual una H-fuente es $S = \{ v_2, v_7 \}$;



Nuevamente, consideremos una digráfica D y M una multidigráfica; un conjunto $S \subset V(G)$ es *D-independiente* si no existe un D -camino entre cualesquiera dos vértices distintos de S y S es *independiente* si no existe una flecha de G entre cualesquiera dos vértices distintos de S . En el ejemplo anterior podemos ver que $S = \{ v_2, v_7 \}$ es un conjunto independiente, sin embargo no es D -independiente pues notemos la siguiente trayectoria $\tau^* = (v_7, v_3, v_2)$, la cual es una D -trayectoria entre v_2 y v_7 . Debemos hacer notar que en general la existencia de un D -camino entre dos vértices no garantiza la existencia de una D -trayectoria entre esos mismos vértices, aunque para algunas digráficas D ,

esto es cierto.

Además, existen ejemplos donde la concatenación de dos D-trayectorias es un D-camino, pero no existe una D-trayectoria entre los puntos terminales, de ahí nuestra preferencia por los D-caminos en las definiciones.

A continuación recordemos la definición del número de coloración de un torneo para que después notemos un lema. Sea D una digráfica, diremos que ésta tiene *número de coloración de un torneo*, k , si cualquier D-coloración de flechas de cualquier torneo finito siempre tiene un D-pozo de tamaño a lo más k , si este número es alcanzado, escribimos $tc(D)=k$ en este caso, y $tc(D)=\infty$ en cualquier otro caso. También diremos que D es k -sumergible si $tc(D)=k$. De esta manera tendremos:

Lema 4.1 La afirmación uno implica la segunda y la afirmación dos implica la tercera. Sea D una digráfica y G una multidigráfica.

- 1) Cualquier multidigráfica G , D-linealmente coloreada, contiene un D-pozo D-independiente.
- 2) Cualquier multidigráfica G , D-linealmente coloreada, contiene un D-pozo independiente.
- 3) D es 1-sumergible.

Demostración.

1) implica 2) Es claro pues, sea G una multidigráfica, D-linealmente coloreada. Como ésta ya contiene un D-pozo D-independiente entonces, sea S dicho D-pozo, entonces no existe un D-camino entre cualesquiera dos vértices en S , en particular podemos notar que una flechas es un D-camino. Por lo cual, entre cualesquiera dos vértices en S no existe flecha entre ellos. Por lo tanto S es

independiente.

2) implica 3) Sea T un torneo y D una digráfica, donde T está D -linealmente coloreado, con un D -pozo independiente, llamémosle S^* a dicho D -pozo. Recordemos qué significa que D sea 1-sumergible, que D sea 1-sumergible significa que el número de coloración de D es 1, es decir, que cualquier torneo coloreado linealmente con los vértices de D , tiene un D -pozo de cardinalidad uno. La afirmación 2) nos está asegurando que existe un D -pozo, es decir, que existe un conjunto S de vértices de T que absorbe a los demás vértices, la cardinalidad de ese conjunto es uno pues si fueran dos o más vértices querría decir que no existen flechas entre ellos, lo cual es una contradicción pues en un torneo entre cualesquiera dos vértices existe exactamente una flecha. ■

La clase de todas las digráficas D que satisfacen la primera propiedad del lema 4.1, recordando la definición, denotan a \mathcal{B}_3 . A esas digráficas D que satisfacen la segunda afirmación constituyen a \mathcal{B}_2 y a esas digráficas D que satisfacen la última propiedad forman a \mathcal{B}_1 . Entonces tenemos la jerarquía $\mathcal{B}_3 \subseteq \mathcal{B}_2 \subseteq \mathcal{B}_1$.

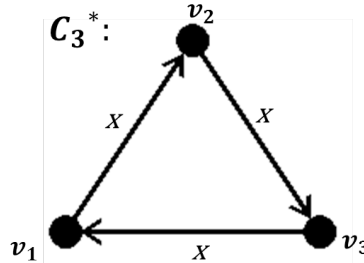
Lema 4.2 Las siguientes propiedades se preservan:

1. Si $D \in \mathcal{B}_i$, $i=1,2,3$, entonces cada vértice de D tiene un lazo.
2. Si $D \in \mathcal{B}_i$, $i=1,2,3$ y D_1 es una subdigráfica inducida de D entonces $D_1 \in \mathcal{B}_i$.
3. Sea D' una contracción de D . Entonces $D \in \mathcal{B}_i$ si y sólo si $D' \in \mathcal{B}_i$, $i=1,2,3$.
4. Si $D \in \mathcal{B}_i$, $i=1,2$ y $V(D_1)=V(D)$, $A(D) \subseteq A(D_1)$ entonces $D_1 \in \mathcal{B}_i$.

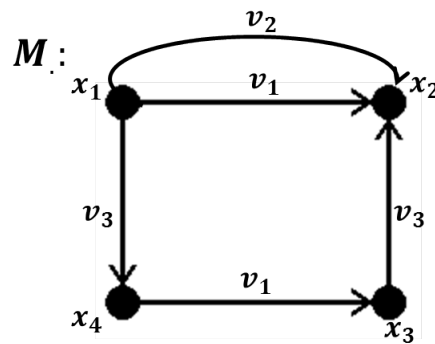
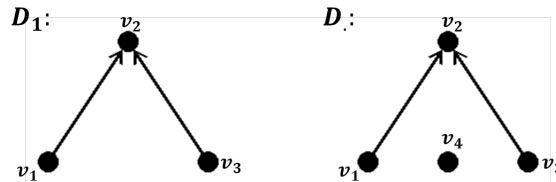
Demostración.

- 1) Si $x \in V(D)$ y $(x,x) \notin A(D)$, entonces coloreando cada flecha de C_3 con x ,

nos muestra que $D \notin \mathcal{B}_3$, entonces $D \notin \mathcal{B}_i$, $i=1,2,3$, por Lema 4.1.



2) Se debe notar que cualquier contraejemplo que demuestre que $D_1 \notin \mathcal{B}_i$ también muestra que $D \notin \mathcal{B}_i$, $i=1,2,3$. Es decir, se probará por contraposición, pues que $D_1 \notin \mathcal{B}_i$ quiere decir que la subdigráfica inducida de D , donde los $V(D_1)=V(D)$ y $A(D_1) \subseteq A(D)$ no esté contenida en \mathcal{B}_i lo cual de manera intuitiva reduce el problema a estudiar una digráfica de cierta forma, más "pequeña" (por las flechas). Por ejemplo, sea D_1 subdigráfica inducida de D y sea M una multigráfica tal que está coloreada con D_1 :



Notemos que con la forma en la que hemos coloreado a M con D_1 ; $D_1 \notin \mathcal{B}_i$.

3) Sean D una digráfica y D' su contracción. Sea $V(D)=C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n$ la partición tal que $V(D')=\{ C_1, \dots, C_n \}$. Sea G una multidigráfica, supongamos que las flechas de dicha multidigráfica G están coloreadas con los vértices de D' . Si una flecha de G está coloreada con $C_i \in V(D')$, entonces recoloreamos esta flecha con (cualquier) $c \in C_i$. Es claro que existe un D' -camino de x a y respecto a la primer coloración si y solo si existe un D -camino de x a y con la nueva coloración. Conversamente, sean las flechas de la multidigráfica G coloreadas con los vértices de D . Si una flecha de G está coloreada con $c \in V(D)$, entonces recoloreamos esta flecha con el único C_i tal que $c \in C_i$. Claramente existe un D -camino de x a y con respecto a la vieja coloración si y sólo si existe un D' -camino de x a y en la nueva coloración. De estas dos observaciones obtenemos que $D \in \mathcal{B}_i$ si y solo si $D' \in \mathcal{B}_i$, $i=1,2,3$.

4) Es claro pues cualquier D -camino es también un D_1 -camino, pues si existe un D -camino, donde D es una digráfica contenida en D_1 o dicho de otra forma como $V(D_1)=V(D)$ y $A(D) \subseteq A(D_1)$ entonces este D -camino es claramente un D_1 -camino, es decir, la accesibilidad de D_1 es mayor que la accesibilidad de D .

Lo que se acaba de demostrar es que cada \mathcal{B}_i es cerrado bajo contracciones y subdigráficas inducidas, mientras que \mathcal{B}_2 y \mathcal{B}_1 son cerrados bajo la operación de añadirle flechas a cualquiera de sus puntos.

5.1. La clasificación de \mathcal{B}_2

Es mucho más claro estudiar a \mathcal{B}_2 al iniciar el análisis de los \mathcal{B}_i por la razón de que la clasificación de \mathcal{B}_2 está completa y la caracterización no es difícil de determinar.

A continuación daremos dos resultados, sin prueba, con respecto a la clasificación de \mathcal{B}_2 , los cuales fueron presentados con más detalle en [5] por Arpin y Linek.

Lema 4.3 Si $D_1, D_2 \in \mathcal{B}_2$ entonces $D_1 \bullet D_2 \in \mathcal{B}_2$.

Teorema 4.2 Son equivalentes:

1. $D \in \mathcal{B}_2$.
2. D^c , el complemento de D , no tiene ciclos impares.
3. D es generado por un cuasi-orden cuyo orden parcial cociente es una suma lineal de anticadenas de uno y dos elementos.

Notemos también que hemos dado ya varios resultados tanto para \mathcal{B}_2 como para \mathcal{B}_3 , no así para \mathcal{B}_1 que es donde se encuentran involucrados los objetos de estudio del presente trabajo, los torneos.

5.1.1. Problemas Abiertos

Por último cerraremos con un par de problemas que dieron Arpin y Linek y que involucran torneos que a la fecha son problemas abiertos.

1. Si T es un torneo 3-coloreado tal que ningún C_3 contenido en T está coloreado con 3 colores distintos, entonces ¿tendrá T un pozo vía trayectorias monocromáticas de un solo vértice? (Recordemos que la respuesta es no si más de cuatro colores están involucrados).
2. Clasificar los lenguajes 1-sumergibles en un alfabeto de dos letras. Esto es, encontrar todos los $L \subseteq \{r, b\}$ tal que cualquier torneo cuyas flechas estén coloreadas con r y b tiene un pozo vía L -camino.

6. BIBLIOGRAFÍA

Bibliografía

- [1] B. Sands, N. Sauer y R. Woodrow. (1982). On monochromatic paths in edge-coloured digraphs. *J. Combinatory Theory Ser.* 271-275.

- [2] H. Galeana, R. Rojas. (2004). A counterexample to a conjeture on edge-coloured tournaments. *Discrete Mathematics* 282, 275-276.

- [3] K. B. Ried. (2004). Domination and irredundance in tournaments. *Australasian Journal of Combinatorics* Volume 29, Pages 157–172.

- [4] K. B. Ried. (2000). Monotone Reachability in Arc-Colored Tournaments. *Congressus Numerantium*. Page 131-142.

- [5] P. Arpin, V. Linek. (2013). Reachability problems in edge-colored digraphs. *Discrete Mathematics*. Page 2276-2280.

- [6] P. Camion. (1959). Chemins et circuits hamiltoniens des graphes complets, *C. R. Acad. Sci. Paris* 249 , 2151–2152.

-
- [7] R. Sánchez. (2013). H-trayectorias y H-caminos en digráficas H-coloreadas. Tesis para obtener el grado a Doctora en Ciencias. Page 27-50.
- [8] S. Minggang. (1986). On Monochromatic Paths in m-Coloured Tournaments. *J. of Combinatory Theory. Series B* 45, 108-111
- [9] V. Chvátal, L. Lovasz. (1972). Every directed graph has a semi-kernel, *Hypergraph Seminar, lecture Notes in Mathematics*, vol. 411, Springer, Berlin, Page 175.
- [10] V. Linek, B. Sands. (1994). A Note on Paths in Edge-Coloured Tournaments. *Ars Combinatoria*. Volume 44.