



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
ELÉCTRICA – CONTROL

GENERALIZACIÓN DEL ALGORITMO GRADIENTE PARA ESTIMACIÓN DE  
PARÁMETROS

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:  
JUAN GUSTAVO RUEDA ESCOBEDO

TUTOR  
Dr. JAIME ALBERTO MORENO PÉREZ  
INSTITUTO DE INGENIERÍA, UNAM

MÉXICO, D.F. JULIO DE 2014



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: Dr. Gerardo René Espinoza Pérez

Secretario: Dr. Marco Antonio Arteaga Pérez

1<sup>er</sup> Vocal: Dr. Jaime Alberto Moreno Pérez

2<sup>do</sup> Vocal: Dr. Luis A. Álvarez Icaza Longoria

3<sup>er</sup> Vocal: Dr. Leonid Fridman

Lugar donde se realizó la tesis:  
INSTITUTO DE INGENIERÍA, UNAM

**TUTOR DE TESIS:**

Dr. JAIME ALBERTO MORENO PÉREZ

-----  
**FIRMA**

(Segunda hoja)

*A mis padres, por su apoyo y paciencia.*

*A mis abuelos, por siempre creer en mí y porque sé  
que siempre estoy en sus pensamientos.*

*A mis hermanos de quienes espero se sientan orgullosos  
de mí así como yo de ellos.*

*A mi novia, Adriana, por su cariño, comprensión, paciencia  
y porque siempre ha estado a mi lado.*

*Y en general, a toda mi familia por estar conmigo siempre.*

## **Agradecimientos**

*Agradezco al Dr. Jaime Moreno por su guía, apoyo y por el conocimiento que me ha brindado, sin el cual no hubiera concluido este trabajo.*

*Al Dr. Leonid Fridman por sus consejos y por motivarme a alcanzar más.*

*A mis profesores del posgrado por sus enseñanzas, dedicación y tiempo, son parte importante de este logro.*

*Al CONACyT por el apoyo económico brindado durante estos dos años.*

*Por último, agradezco al Instituto de Ingeniería de la UNAM por el espacio y las facilidades que me proporcionó para desarrollar esta tesis.*

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>7</b>
1.1. Motivación . . . . .	7
1.2. Estado del arte . . . . .	8
1.3. Resultados y contribuciones de la tesis . . . . .	8
<b>2. Marco teórico</b>	<b>9</b>
2.1. Estabilidad en los sistemas variantes con el tiempo . . . . .	9
2.1.1. Teoría de Lyapunov para sistemas variantes con el tiempo . . . . .	10
2.2. Identificación de sistemas . . . . .	10
2.2.1. Sistemas y modelos en tiempo continuo . . . . .	10
2.2.2. El problema de identificación . . . . .	12
2.2.3. Identificabilidad de sistemas lineales . . . . .	13
2.2.4. Sistemas dinámicos lineales y modelos paramétricos . . . . .	14
2.2.5. Algoritmo del gradiente descendente . . . . .	16
2.2.6. Estabilidad y convergencia del algoritmo gradiente . . . . .	17
2.2.7. Identificación de parámetros en tiempo discreto . . . . .	20
<b>3. Algoritmo no lineal para la identificación de parámetros</b>	<b>23</b>
3.1. Caso escalar . . . . .	24
3.1.1. Prueba del Teorema 3.1 . . . . .	25
3.1.2. Combinación de términos con diferente exponente $p$ . . . . .	27
3.1.3. Estimación de un parámetro variante con el tiempo . . . . .	29
3.1.4. Ejemplos académicos . . . . .	30
3.2. Estimación de $n$ parámetros con una medición . . . . .	32
3.2.1. Prueba del Teorema 3.4 . . . . .	34
3.2.2. Combinación de términos con diferente exponente . . . . .	41
3.2.3. Ejemplos académicos para la estimación de $n$ parámetros con una medición . . . . .	42
3.2.4. Algoritmo discontinuo, $p = 0$ . . . . .	43
3.3. Estimación de $n$ parámetros con $m$ mediciones . . . . .	45
3.3.1. Prueba del Teorema 3.6 . . . . .	47
3.3.2. Ejemplos académicos para la estimación de $n$ parámetros con $m$ mediciones . . . . .	50
<b>4. Discretización del algoritmo</b>	<b>52</b>
4.1. Discretización . . . . .	53
4.2. Prueba del Teorema 4.1 . . . . .	55
4.3. Ejemplos académicos . . . . .	58
<b>5. Conclusión</b>	<b>60</b>
5.1. Resumen General . . . . .	60
5.2. Conclusiones . . . . .	61
5.3. Trabajo a futuro . . . . .	61
<b>Bibliografía</b>	<b>63</b>

<b>6. Anexos</b>	<b>65</b>
6.1. Anexo A: Desigualdades clásicas . . . . .	65
6.1.1. Desigualdad de Jensen . . . . .	65
6.1.2. Desigualdad de Hölder . . . . .	65
6.1.3. Desigualdad de Minkowski . . . . .	66
6.2. Anexo B: Desarrollos . . . . .	66
6.2.1. Demostración de la proposición 3.1 . . . . .	66
6.2.2. Demostración de la proposición 3.2 . . . . .	67
6.2.3. Demostración de la proposición 3.3 . . . . .	67
6.2.4. Demostración de la proposición 3.4 . . . . .	67
6.2.5. Demostración de la proposición 3.5 . . . . .	68
6.2.6. Prueba de la proposición 3.7 . . . . .	68
6.2.7. Prueba de la proposición 3.8 . . . . .	69

# Capítulo 1

## Introducción

Los modelos matemáticos son usados para representar la realidad, aunque ésta es siempre más compleja que lo que se puede expresar por medio de las matemáticas. Un modelo es capaz de representar a toda una familia de sistemas y, el que lo haga para un elemento en particular de ella, depende de los valores numéricos que se asignen a sus parámetros.

En muchas aplicaciones, en particular de ingeniería, se ha encontrado que un modelo paramétrico lineal es útil para representar sistemas. Los sistemas en ingeniería, por lo general, pueden ser tratados como sistemas lineales invariantes en el tiempo. Para poder ajustar el sistema al modelo paramétrico es necesario el uso de filtros o de derivadores, ya que, esta clase de modelos, representan sistemas algebraicos y no a sistemas dinámicos.

Para la clase de sistemas descritos, bajo las consideraciones hechas, se ha encontrado que el algoritmo de estimación del gradiente descendente puede estimar los parámetros adecuados para que un modelo caracterice satisfactoriamente a un sistema en particular y, la velocidad de convergencia del error de estimación, será exponencial si el conjunto de señales entrada-salida del sistema cumple con la condición de excitación persistente, en otras palabras, si poseen suficiente información para determinar unívocamente a los parámetros. En caso contrario, el error permanece acotado pero no convergerá a cero.

El que la velocidad de convergencia que proporciona el algoritmo sea exponencial, a pesar de tener suficiente información para determinar a los parámetros, implica que el algoritmo desperdicia información y que esto se intensifica mientras más cerca está de lograr su objetivo, por esto, se desea un método que sea más eficiente en ésta dirección.

### 1.1. Motivación

En general, en un proceso de identificación es deseable que el estimado de los parámetros converja a los parámetros reales en el menor tiempo posible y de forma robusta. Se ha mostrado que es necesario que el regresor cumpla con la condición de excitación persistente para que exista convergencia y, en el caso del algoritmo del gradiente descendente, la velocidad de convergencia será exponencial. El que, teóricamente, el algoritmo nunca converja a los parámetros reales, a pesar de tener la información disponible, es muestra de que “disipa” información y un mejor método es deseable.

Para controles y observadores adaptables, el tiempo de convergencia es crucial, ya que, el reducir este factor, permite disminuir transitorios y, en general, mejorar el desempeño del esquema de control y/u observación.

Para el caso de observadores por modos deslizantes de orden superior, se ha mostrado que poseen propiedades importantes, como la convergencia del error de observación en tiempo finito y en tiempo fijo, así como la insensibilidad ante cierta clase de perturbaciones. Estas propiedades son deseables en un proceso de identificación ya que permitirían estimar los parámetros en menos tiempo y de forma exac-

ta, e incluso estimar parámetros variantes con el tiempo bajo ciertas restricciones, esto debido a que la variación paramétrica puede ser tratada como una perturbación.

## 1.2. Estado del arte

Recientemente se han realizado trabajos que buscan estimar parámetros en tiempo finito [1], [6], la estrategia que se sigue es monitorear el Gramiano de identificabilidad y, una vez que se vuelve invertible, se pueden estimar los parámetros. Esto ocurre en tiempo finito.

Por otra parte, para sistemas inestables en donde se necesita identificar parámetros, se ha mostrado que, un esquema de control por modos deslizantes, permite estabilizar al sistema y al mismo tiempo estimar parámetros en tiempo finito [19].

Haciendo uso de modos deslizantes y del concepto de control equivalente, en [4] se muestra una forma de realizar estimación paramétrica, aunque ésta no se lleva a cabo en tiempo finito.

En [12] hacen uso de términos similares a los usados en el algoritmo super-twisting, el cual se usa para control, observación y diferenciación, y se logra la estimación de parámetros en tiempo finito para sistemas lineales de un estado y  $n$  parámetros. En esta dirección, en [5] se muestra la aplicación de este algoritmo en control adaptable.

## 1.3. Resultados y contribuciones de la tesis

En este trabajo, se presenta una familia de algoritmos para estimación de parámetros que otorgan velocidades de convergencia del error de estimación superiores a la que brinda el algoritmo lineal, es decir, el algoritmo del gradiente descendiente, esto bajo las mismas condiciones que garantizan la convergencia del último, de forma específica, que el regresor cumpla con la condición de excitación persistente.

Además, si el regresor satisface lo que en este trabajo se denomina como condición de excitación persistente fuerte, entonces, se puede asegurar la convergencia del error de estimación de los parámetros a cero en tiempo finito para una sub clase de los algoritmos que aquí se tratan. Si se combinan dos (o más) términos de diferente potencia se puede mostrar que existe una cota para el tiempo de convergencia en el peor caso (error inicial arbitrariamente grande), es decir, se tiene convergencia en tiempo fijo.

Debido a que en toda aplicación real, los algoritmos de estimación paramétrica, son implantados en computadoras digitales, se desarrolla una versión discreta adecuada para implementar cualquier miembro de la familia de algoritmos presentada. Es importante señalar que los algoritmos discretos funcionan para cualquier paso de muestreo y cualquier valor inicial de error.

# Capítulo 2

## Marco teórico

### 2.1. Estabilidad en los sistemas variantes con el tiempo

Los sistemas variantes en el tiempo son descritos por ecuaciones diferenciales que dependen explícitamente del tiempo, además de depender del estado. Se pueden expresar de manera general de la siguiente forma:

$$\dot{x} = f(t, x). \quad (2.1)$$

Por facilidad, pero sin perder generalidad, se considera que  $t \in [0, \infty)$ . La función  $f(t, x)$  puede estar definida para todo  $x$  o solo ser válida en alguna vecindad,  $x \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ , que contenga al origen,  $x = 0$ . Además, se requiere que  $f(t, x)$  sea por lo menos continua a tramos en  $t$  y localmente Lipschitz en  $x$ .

**Definición 2.1.** [10] *El origen del sistema (2.1),  $x = 0$ , es un punto de equilibrio si:*

$$f(t, 0) = 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Además se dirá que:

- *Es estable si, para cada  $\epsilon > 0$  y cualquier  $t_0 \geq 0$ , existe  $\delta = \delta(\epsilon, t_0)$  tal que:*

$$\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq t_0. \quad (2.2)$$

- *Uniformemente estable, respecto a  $t$ , si para cada  $\epsilon$  y para cualquier  $t_0 \geq 0$ , existe  $\delta = \delta(\epsilon)$  (independiente de  $t_0$ ) que satisfaga (2.2).*
- *Inestable si no es estable.*
- *Asintóticamente estable si es estable y además hay una constante positiva  $c = c(t_0)$  tal que  $x(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$  para toda  $\|x(t_0)\| < c$ .*
- *Uniforme y asintóticamente estable si es uniformemente estable y, además, existe una constante positiva  $c$  independiente de  $t_0$  tal que, para toda  $\|x(t_0)\| < c$ ,  $x(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$  de manera uniforme en  $t_0$ , esto último se entiende de la siguiente manera:*

- *Para cada  $\eta > 0$ , existe  $T = T(\eta) > 0$  tal que:*

$$\|x(t)\| < \eta, \quad \forall t \geq t_0 + T(\eta), \quad \forall \|x(t_0)\| < c,$$

*T solo depende de  $\eta$ .*

△

### 2.1.1. Teoría de Lyapunov para sistemas variantes con el tiempo

Las definiciones de estabilidad ayudan a establecer el concepto más no aportan un método para determinar si el punto de equilibrio de un sistema cumple, o no, con alguna de las definiciones. En general será de interés determinar si un punto de equilibrio es, o no, estable y que tipo de estabilidad posee.

Para facilitar la tarea de determinar las propiedades de estabilidad de un punto de equilibrio de un sistema variante con el tiempo, se ha extendido la teoría de Lyapunov, desarrollada para sistemas invariantes con el tiempo, a este caso.

Se citan los siguientes dos teoremas que son de utilidad en el estudio de las propiedades de estabilidad de los sistemas variantes con el tiempo y que, además, se usarán en las secciones posteriores de este trabajo:

**Teorema 2.1.** [10] Sea  $x = 0$  un punto de equilibrio de (2.1) y  $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$  que contiene a  $x = 0$ . Sea  $V : [0, \infty) \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continuamente diferenciable tal que:

$$\begin{aligned} W_1(x) &\leq V(t, x) \leq W_2(x), \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \cdot f(t, x) &\leq 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$\forall t \geq 0$  y  $\forall x \in \mathcal{D}$ , donde  $W_1(x)$  y  $W_2(x)$  son funciones continuas y positivas definidas sobre  $\mathcal{D}$ . Entonces,  $x = 0$  es uniformemente estable.

△

**Teorema 2.2.** [10] Háganse las mismas suposiciones que en el teorema anterior pero ahora, considere la siguiente desigualdad:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \cdot f(t, x) \leq -W_3(x), \quad (2.4)$$

$\forall t \geq 0$  y  $\forall x \in \mathcal{D}$ , donde  $W_3(x)$  es una función continua, definida positiva sobre  $\mathcal{D}$ . Entonces,  $x = 0$ , es uniforme y asintóticamente estable. Además, si  $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$  y  $W_1(x)$  es radialmente no acotada, entonces  $x = 0$  es global, uniforme y asintóticamente estable.

△

## 2.2. Identificación de sistemas

### 2.2.1. Sistemas y modelos en tiempo continuo

Un modelo matemático se puede usar para representar a un sistema físico. En términos generales, un modelo no representa a un sistema en particular, sino, a una familia. Por ejemplo, el modelo lineal de un motor de corriente directa es el mismo para cualquier motor de esta clase:

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= -\frac{R}{L}i - \frac{k}{L}\omega + \frac{1}{L}u(t), \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{k}{J}i - \frac{\beta}{J}\omega, \\ y &= \omega(t), \end{aligned}$$

dónde  $i$  es la corriente eléctrica que circula a través de la bobina del rotor,  $\omega$  es la velocidad angular del rotor,  $u(t)$  representa un voltaje variable aplicado a las terminales del motor y las constantes  $R$ ,  $L$ ,  $J$ ,  $\beta$  y  $k$  representan respectivamente a la resistencia del embobinado del rotor, la inductancia del embobinado del rotor, la inercia del rotor, la fricción viscosa en el eje y la constante de conversión entre energía eléctrica y mecánica.

Para que el modelo anterior represente a un motor (sistema) en particular es necesario conocer los parámetros que lo caracterizan ( $R$ ,  $L$ ,  $J$ ,  $\beta$  y  $k$ ). En este modelo, la variable  $u(t)$  representa una señal exógena al sistema y se asume que puede ser estipulada por el usuario; por otra parte, la variable  $y(t)$  representa a una señal de interés o una señal que está disponible a través de la medición directa, por medio de un sensor, por ejemplo. En este caso, corresponde a la velocidad angular del eje del motor.

Una forma de clasificar a los sistemas es en sistemas sin memoria y sistemas con memoria [17, p. 50]. La primera de estas clases se caracteriza porque el valor de la señal  $y(t)$  solo depende del valor de la señal  $u(t)$  en el mismo instante de tiempo, por esta razón, también se denominan sistemas instantáneos. En los sistemas con memoria, la señal de salida,  $y(t)$ , depende no solo de la señal  $u(t)$  en el mismo instante, sino, de todos los valores de dicha señal en el pasado.

En general, los sistemas sin memoria pueden ser representados por ecuaciones algebraicas que dependen de la señal de entrada y de los parámetros.

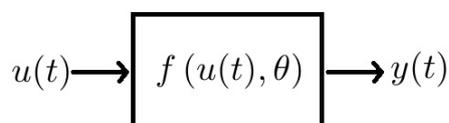


Figura 2.1: Diagrama del modelo de un sistema sin memoria

En la imagen se utiliza a  $\theta$  para representar al conjunto de parámetros que requiere el modelo, generalmente se escriben en un solo vector. Cabe señalar que tanto la señal de entrada,  $u(t)$ , como la de salida,  $y(t)$ , no tienen por qué ser variables escalares, por el contrario, comúnmente son vectoriales, i.e.  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  y  $y(t) \in \mathbb{R}^r$ .

Por otro lado, los sistemas con memoria son típicamente representados por ecuaciones diferenciales. La señal de entrada afecta a la derivada de las variables que caracterizan al sistema (variables de estado), mientras que la señal de salida es una función algebraica de éstas, y, posiblemente, de la entrada. Lo anterior puede ser esquematizado como en la imagen que se presenta a continuación:

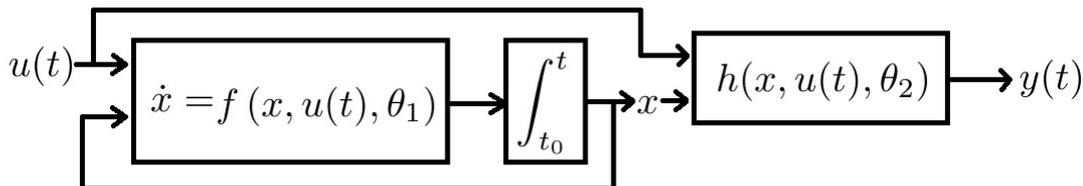


Figura 2.2: Diagrama del modelo de un sistema con memoria

La variable  $x$  puede pertenecer a un espacio vectorial, i.e.  $x \in \mathbb{R}^n$ , así como también las señales de entrada y de salida. Variaciones de esta representación se dan cuando la función  $h$  no depende de  $u$  o cuando la medición es una combinación lineal de  $x$ , en el último caso la señal de salida puede ser representada por  $y(t) = Cx$  donde  $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$ , donde  $y(t) \in \mathbb{R}^r$

Otra forma de clasificar a los sistemas es por su comportamiento respecto al tiempo, aquí surgen dos categorías, sistemas invariantes y sistemas variantes con el tiempo [17, p. 48]. En este contexto se entiende por sistema variante aquel cuyos parámetros no son constantes, es decir, el valor de éstos depende del instante de tiempo en el que se estudien. En contraste, en los sistemas invariantes con el tiempo, los parámetros del modelo no cambian. Las dos figuras anteriores, (2.1) y (2.2), corresponden, respectivamente, a un sistema sin memoria invariante en el tiempo y a un sistema con memoria invariante en el tiempo.

Para escribir de forma explícita que una función varía con el tiempo, basta con escribir la dependencia de los parámetros respecto de esta variable:

$$y(t) = f(u(t), \theta(t)).$$

Algo análogo puede hacerse para los sistemas con memoria.

Este trabajo se centrará en sistemas sin memoria, tanto variantes como invariantes en el tiempo, siendo estos últimos el principal sujeto de estudio.

### 2.2.2. El problema de identificación

Como ya se mencionó, para que un modelo represente a un sistema en particular, es necesario conocer el valor de los parámetros involucrados. En el caso de que se contara con un modelo perfecto, es decir, que fuese capaz de representar todos los pormenores involucrados en el comportamiento del sistema, entonces, existe el conjunto de parámetros que logran que la respuesta predicha por el modelo iguale a la observada en el sistema. En la práctica esto no sucede, ya que, de poder escribirse dicho modelo, sería demasiado complejo e impráctico trabajar con él. Lo más que se puede esperar es el encontrar un modelo y un conjunto de parámetros que sean óptimos en algún sentido. En particular es de interés el conjunto que minimiza el error entre el comportamiento predicho por el modelo y el observado en el sistema.

Antes de embarcarse en la búsqueda del conjunto de parámetros deseados, es importante analizar la información disponible sobre el sistema, pues, dependiendo de esta, será o no posible cumplir con la meta. Un modelo para el cual se pueden determinar unívocamente los parámetros, asumiendo que el modelo es ideal y que se posee suficiente información, se dice que es estructuralmente identificable. Aunque un modelo sea identificable, si la información aportada por las señales de entrada y salida del sistema no es adecuada, no será posible determinar los parámetros. Este tema será tratado a detalle en la siguiente sección.

Discutido lo anterior, el problema de identificación puede ser formulado de la siguiente manera:

*Dado un sistema físico y un modelo matemático que representa las generalidades de su comportamiento, siendo posible la identificación de los parámetros que caracterizan al último y teniendo sólo disponible la medición de las señales de entrada al sistema y las de respuesta del mismo, determinar unívocamente dichos parámetros.*

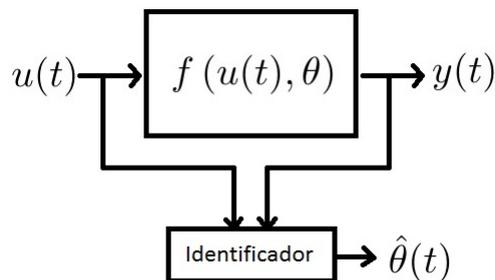


Figura 2.3: Esquema de identificación

Por facilidad se considerará a un sistema sin memoria. Aquí  $\hat{\theta}$  representa al valor estimado de los parámetros. Se pretende ajustar continuamente a  $\hat{\theta}$  de tal forma que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\theta}(t) = \theta.$$

El algoritmo de estimación de los parámetros se da en términos de la forma en que se pretende adaptar a  $\hat{\theta}$ . En sistemas de tiempo continuo, lo anterior equivale a fijar una estructura para su dinámica:

$$\dot{\hat{\theta}} = f(u(t), y(t), \hat{\theta}).$$

### 2.2.3. Identificabilidad de sistemas lineales

Para poder hablar de identificabilidad es necesario fijar un marco de trabajo ideal [18]. Este marco consta de las siguientes suposiciones:

- El proceso y el modelo tienen estructura idéntica (no hay error de caracterización).
- La información está libre de ruido.
- La señal de entrada y los tiempos de medición pueden ser elegidos a voluntad.

En lo sucesivo, se denotará al modelo como  $\mathcal{M}$  y, al modelo evaluado en un conjunto particular de parámetros, como  $\mathcal{M}(p)$ . Para un sistema en particular,  $p^*$  denotará a los parámetros verdaderos.

Bajo las suposiciones hechas, siempre es posible ajustar los parámetros del modelo para que el comportamiento entrada-salida del modelo y del proceso sean idénticos, para cualquier tiempo y cualquier entrada (por ejemplo, si se escoge el estimado de los parámetros,  $\hat{p}$ , igual a  $p^*$ ). Se hará referencia a este comportamiento de la siguiente forma:  $\mathcal{M}(\hat{p}) = \mathcal{M}(p^*)$ .

De interés son los casos donde  $\mathcal{M}(\hat{p}) = \mathcal{M}(p^*)$  implica que  $\hat{p} = p^*$ . Para tratar ésto de manera más precisa, se realizan las siguientes definiciones:

**Definición 2.2.** *El parámetro  $p_i$  será **estructural y globalmente (unívocamente) identificable (e. g. i.)** [18] si, para casi toda  $p^* \in \mathbb{P}^1$ ,*

$$\mathcal{M}(\hat{p}) = \mathcal{M}(p^*) \Rightarrow \hat{p}_i = p_i^*.$$

*El modelo  $\mathcal{M}$  será **estructural y globalmente (unívocamente) identificable** [18] si todos sus parámetros también lo son.*

△

Si no se puede probar que  $\mathcal{M}$  es globalmente identificable, entonces se puede tratar de determinar si al menos lo es de forma local.

**Definición 2.3.** *El parámetro  $p_i$  será **estructural y localmente identificable (e. l. i.)** [18] si, para casi toda  $p^* \in \mathbb{P}$ , existe una vecindad  $\mathbb{V}(p^*)$  tal que:*

$$\hat{p} \in \mathbb{V}(p^*) \text{ y } \mathcal{M}(\hat{p}) = \mathcal{M}(p^*) \Rightarrow \hat{p}_i = p_i^*.$$

*Identificabilidad local es una condición necesaria para identificabilidad global. El modelo  $\mathcal{M}$  será e. l. i. [18] si todos sus parámetros son e. l. i.*

△

La definición faltante, y que se presenta a continuación, corresponde a la situación en donde los parámetros no son identificables.

**Definición 2.4.** *El parámetro  $p_i$  será **estructuralmente no identificable (e. n. i.)** [18] si, para casi todo  $p^* \in \mathbb{P}$ , no existe una vecindad  $\mathbb{V}(p^*)$  tal que:*

$$\hat{p} \in \mathbb{V}(p^*) \text{ y } \mathcal{M}(\hat{p}) = \mathcal{M}(p^*) \Rightarrow \hat{p}_i = p_i^*.$$

*El modelo  $\mathcal{M}$  será e. n. i. [18] si, al menos uno de sus parámetros es e. n. i.*

---

<sup>1</sup>En este caso,  $\mathbb{P}$  denota a  $\mathbb{R}^n$ , o a un subconjunto de él, donde,  $n$  es el número de parámetros.

△

La pregunta que queda abierta es cómo establecer si  $\mathcal{M}$  es estructural y globalmente identificable o, por lo menos, estructural y localmente identificable. Para los sistemas lineales invariantes con el tiempo se puede dar una respuesta por medio de una transformación de similitud [18].

Suponga que  $\mathcal{M}(p^*)$  tiene la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x^* &= A(p^*)x^* + B(p^*)u, \quad x^*(0) = x_0(p^*), \\ y_m &= C(p^*)x^* + D(p^*)u. \end{aligned}$$

Sea  $\hat{x} = Tx^*$ , donde  $T$  es la matriz de una transformación de similaridad y, además, es invertible. Las ecuaciones transformadas son:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{x} &= TA(p^*)T^{-1}\hat{x} + TB(p^*)u, \quad \hat{x}(0) = Tx_0(p^*), \\ y_m &= C(p^*)T^{-1}\hat{x} + D(p^*)u. \end{aligned}$$

Este sistema tiene el mismo comportamiento entrada-salida que  $\mathcal{M}(p^*)$ . Esto se corresponderá a un modelo  $\mathcal{M}(\hat{p})$  si y solo si:

$$\begin{aligned} A(\hat{p}) &= TA(p^*)T^{-1}, \\ B(\hat{p}) &= TB(p^*), \\ C(\hat{p}) &= C(p^*)T^{-1}, \\ D(\hat{p}) &= D(p^*), \\ x_0(\hat{p}) &= Tx_0(p^*), \end{aligned}$$

entonces, la respuesta de ambos sistemas será idéntica,  $\mathcal{M}(\hat{p}) = \mathcal{M}(p^*)$ .

La identificabilidad estructural de  $\mathcal{M}$  puede ser probada buscando soluciones para  $(\hat{p}, T)$  del conjunto de ecuaciones anterior. Si para casi cualquier  $p^*$ , la única solución es  $(\hat{p}, T) = (p^*, \mathbb{I})$ , entonces,  $\mathcal{M}$  es **e. g. i.** Si para casi toda  $p^*$  el conjunto de soluciones es finito o numerable, entonces,  $\mathcal{M}$  es **e. l. i.**

#### 2.2.4. Sistemas dinámicos lineales y modelos paramétricos

Se dice que un sistema es lineal si cumple con el principio de superposición [3, p. 8]. La superposición implica que el sistema es homogéneo de grado uno y cumple con la propiedad de aditividad. Para el caso de sistemas, la propiedad de aditividad implica que, para dos conjuntos de estados iniciales, señales de entrada y señales de salida, el sumar los estados iniciales y las señales de entrada implica que la señal de salida será la suma de las señales de salida del conjunto:

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} x_i(t_0) \\ u_i(t) \end{array} \right\} &\rightarrow y_i(t), \quad i : \{1, 2\}, \\ \left. \begin{array}{l} x_1(t_0) + x_2(t_0) \\ u_1(t) + u_2(t) \end{array} \right\} &\rightarrow y_1(t) + y_2(t). \end{aligned}$$

La homogeneidad de grado uno supone que al multiplicar el estado inicial y la señal de entrada por un escalar  $\alpha$  arbitrario, la señal de salida también será escalada por el mismo factor:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha x_i(t_0) \\ \alpha u_i(t) \end{array} \right\} \rightarrow \alpha y_i(t), \quad i : \{1, 2\}.$$

La superposición comprende ambas propiedades de manera simultanea:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_1 x_1(t_0) + \alpha_2 x_2(t_0) \\ \alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t) \end{array} \right\} \rightarrow \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t).$$

Una forma típica de representar un sistema dinámico lineal es la siguiente [3, p. 15], [7, p. 12]:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t),\end{aligned}\tag{2.5}$$

dónde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}^r$ ,  $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C(t) \in \mathbb{R}^{r \times n}$  y  $D(t) \in \mathbb{R}^{r \times m}$ . Además, si el sistema es invariante en el tiempo, entonces  $A(t) = A$ ,  $B(t) = B$ ,  $C(t) = C$  y  $D(t) = D \forall t \geq t_0$ .

Una representación más conveniente, en lo que respecta a un proceso de identificación, es un modelo de entrada salida. En el caso de sistemas lineales, a este tipo de modelo se le conoce como función de transferencia, para el caso SISO (single-input single-output), y como matriz de transferencia para el caso MIMO (multiple-input multiple-output). El modelo de entrada salida, para un sistema invariante en el tiempo, puede ser obtenido haciendo uso de la representación en variables de estado [7, p. 73], (2.5):

$$\begin{aligned}Y(s) &= G(s)U(s), \\ G(s) &= C(s\mathbb{I} - A)^{-1}B + D.\end{aligned}\tag{2.6}$$

En la expresión anterior  $G \in \mathcal{S}^{r \times m}$ , donde  $\mathcal{S}$  denota al espacio de funciones racionales de variable compleja. La dependencia de  $s$  indica que se ha aplicado la transformada de Laplace a una función, y en este caso, a la respuesta de estado cero del sistema, i.e.  $x(t_0) = 0$ .

Como se mencionó antes, la identificabilidad estructural es una propiedad del modelo, por lo tanto hay modelos más adecuados que otros para la tarea de identificación. Un modelo paramétrico lineal es aquel que tiene la siguiente estructura [9, p. 49]:

$$Y(t) = U^T(t)\theta,$$

dónde  $Y(t) \in \mathbb{R}^m$  y representa a las señales de salida o señales medidas,  $\theta \in \mathbb{R}^n$  es el vector que contiene los parámetros a estimar y  $U(t) \in \mathbb{R}^{m \times n}$  es la matriz de señales de entrada o regresor, que también se asume conocido. Para este tipo de modelos hay resultados claros sobre la posibilidad de identificarlos [9, p. 48].

El análisis de identificabilidad estructural que se realizó en la sección anterior fue para sistemas lineales. Un modelo paramétrico puede ser visto como el modelo de un sistema lineal donde  $A = 0$ ,  $B = 0$ ,  $C = 0$  y  $D = \theta$ , de tal manera que  $Y = U^T(t)D$ . Como la matriz  $D$  es independiente de la transformación de similitud, entonces, un modelo paramétrico siempre es e. g. i.

Los modelos de entrada-salida (función/matriz de transferencia) para sistemas lineales se asemejan a un modelo paramétrico, sin embargo, las señales de entrada y salida no se encuentran expresadas en función del tiempo, he ahí la complicación. Para analizar el cómo puede ser usada la representación anterior, se presenta el modelo en ecuación diferencial de un sistema SISO:

$$\frac{d^n}{dt^n}y(t) + \alpha_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t) + \dots + \alpha_0y(t) = \beta_m\frac{d^m}{dt^m}u(t) + \beta_{m-1}\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}u(t) + \dots + \beta_0u(t)$$

Si agrupamos todos los parámetros  $\alpha_i$  y  $\beta_i$  en un solo vector, podemos llegar a la siguiente representación:

$$\begin{aligned}\theta &= [\alpha_{n-1} \ \alpha_{n-2} \ \dots \ \alpha_0 \ \beta_m \ \beta_{m-1} \ \dots \ \beta_0]^T, \\ U(t) &= \left[ -\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t) \quad -\frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}}y(t) \quad \dots \quad -y(t) \quad \frac{d^m}{dt^m}u(t) \quad \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}u(t) \quad \dots \quad u(t) \right]^T, \\ \frac{d^n}{dt^n}y(t) &= U^T(t), \theta\end{aligned}$$

la cual tiene la estructura del modelo paramétrico [9, p. 49]. Sin embargo, es necesario contar con un diferenciador de orden  $n$  para la señal  $y(t)$  y con un diferenciador de orden  $m$  para la señal  $u(t)$ , así como los diferenciadores intermedios correspondientes para poder general el vector de señales  $U(t)$ . Una alternativa para esto es emplear un Diferenciador por modos deslizantes de orden superior.

En la práctica se prefiere el uso de filtros en lugar de diferenciadores. Para ello se emplea un filtro estable generado de la forma siguiente:

$$F(s) = \frac{1}{\Lambda(s)},$$

dónde  $\Lambda(s)$  es un polinomio estable de grado  $n$ . Si se aplicara el filtro a la  $n$ -ésima derivada de  $y$  se tendría:

$$z \triangleq \frac{1}{\Lambda(s)} \frac{d^n}{dt^n} y(t) = \frac{s^n}{\Lambda(s)} y(s).$$

De forma similar, se puede repetir el proceso para el resto de las señales:

$$\begin{aligned} \phi_{yi} &\triangleq -\frac{1}{\Lambda(s)} \frac{d^i}{dt^i} y(t) = -\frac{s^i}{\Lambda(s)} y(s), \\ \phi_{ui} &\triangleq \frac{1}{\Lambda(s)} \frac{d^i}{dt^i} u(t) = \frac{s^i}{\Lambda(s)} u(s). \end{aligned}$$

Como se puede observar, cada señal  $\phi_{yi}$  o  $\phi_{ui}$  puede ser generada usando un filtro diferente a las señales que sí pueden ser medidas de forma directa. De esta manera, se forma el nuevo vector de señales medidas,  $\phi$ , con la salida de cada uno de los filtros:

$$\phi = [\phi_{y,n-1} \quad \phi_{y,n-2} \quad \cdots \quad y(t) \quad \phi_{u,m} \quad \phi_{u,m-1} \quad \cdots \quad u(t)]^T$$

El modelo paramétrico a usar después de los filtros es  $z = \phi^T \theta$ , el cual puede ser generado con el único conocimiento de  $y(t)$  y  $u(t)$  y la salida de los filtros correspondientes. Para el caso MIMO se puede llegar a expresiones similares, pero ahora,  $z$  sería un vector.

### 2.2.5. Algoritmo del gradiente descendente

Cuando se cuenta con un modelo paramétrico lineal y se desea identificar parámetros invariantes en el tiempo, la aproximación clásica para resolver el problema es el algoritmo del gradiente descendente. Dicho algoritmo es lineal y se ha demostrado que el estimado de los parámetros converge a los reales de manera exponencial si, la señal de excitación o regresor, cumple con una condición denominada de excitación persistente. Esta condición es necesaria y suficiente para que exista dicha convergencia.

Se retoma la estructura del modelo paramétrico lineal:

$$y(t) = u^T(t)\theta,$$

dónde  $y(t) \in \mathbb{R}^m$  es el conjunto de señales medidas,  $\theta \in \mathbb{R}^n$  es el vector que contiene a los parámetros a estimar y  $u(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$  es la matriz de señales de entrada/excitación o regresor.

Una forma de determinar los parámetros es tomar muestras de las señales  $(u(t), y(t))$  en diferentes instantes de tiempo, con esta información se forma la siguiente matriz:

$$\Phi \triangleq \begin{bmatrix} u^T(t_1) \\ u^T(t_2) \\ \vdots \\ u^T(t_p) \end{bmatrix},$$

en dónde  $u(t_i)$  denota la muestra de  $u$  en el instante  $t_i$ , además, se hace notar que  $\Phi \in \mathbb{R}^{mp \times n}$ . Si se garantiza que el rango de la matriz  $\Phi$  es  $n$ , entonces, la siguiente ecuación tiene solución:

$$\begin{aligned} \Phi \hat{\theta} &= Y, \\ Y &\triangleq [y^T(t_1) \quad y^T(t_2) \quad \cdots \quad y^T(t_p)]^T, \quad Y \in \mathbb{R}^{mp}. \end{aligned}$$

Dicha solución es :

$$\hat{\theta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y.$$

A la matriz  $(\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T$  se le conoce como pseudoinversa de Moore-Penrose por la izquierda y es óptima en el sentido de que minimiza  $\|Y - \Phi \hat{\theta}\|_2^2$  [16, Capítulo 6].

Sin embargo, de existir ruido en las mediciones de  $u(t)$  y  $y(t)$ , entonces el resultado de este procedimiento no será preciso, además, la inversión de la matriz  $\Phi^T \Phi$  debe realizarse cada vez que se obtiene una nueva muestra. Por estas razones se prefieren algoritmos que actualicen de forma dinámica el valor estimado de los parámetros y que tengan la posibilidad de determinarlos exactamente con el paso del tiempo.

El algoritmo del gradiente descendente resulta de seguir la dirección contraria al gradiente de una función de costo convexa [15, p. 101]. Considere a  $\hat{\theta}$  como el valor estimado de  $\theta$ , entonces, el estimado de la salida puede ser calculado de la forma siguiente:

$$\hat{y}(t) = u^T(t) \hat{\theta}(t).$$

La diferencia entre el estimado y los parámetros reales puede ser evaluada a partir de la diferencia entre la salida estimada y la real:

$$\begin{aligned} e(t) &\triangleq \hat{y}(t) - y(t) = u^T(t) (\hat{\theta} - \theta) = u^T(t) x(t), \\ x(t) &= \hat{\theta}(t) - \theta. \end{aligned}$$

Ahora se pretende minimizar a  $e$ , para ello se propone la siguiente función de costo:

$$J(\hat{\theta}) \triangleq \frac{1}{2} e^T e = \frac{1}{2} \left( u^T(t) \hat{\theta}(t) - y(t) \right)^T \left( u^T(t) \hat{\theta}(t) - y(t) \right).$$

Esta función tiene un mínimo en cualquier punto donde  $e = 0$ , los cuales no forzosamente corresponden a  $\hat{\theta} = \theta$ , aunque ésta es una posibilidad. Se calcula el gradiente de la función respecto a  $\hat{\theta}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \hat{\theta}} J(\hat{\theta}) &= \frac{1}{2} \left( u(t) \left( u^T(t) \hat{\theta} - y(t) \right) + \left( u^T(t) \hat{\theta} - y(t) \right)^T u^T(t) \right), \\ &= u(t) \left( u^T(t) \hat{\theta} - y(t) \right) = u(t) e(t). \end{aligned}$$

La dirección hacia la cual debemos mover el estimado de los parámetros,  $\hat{\theta}$ , es en contra del gradiente, para que, en algún momento, llegue al mínimo de la función  $J(\hat{\theta})$ . Para que esto suceda, la forma de actualizar a  $\hat{\theta}$  es la siguiente:

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = -u(t) e(t) = -u(t) u^T(t) (\hat{\theta}(t) - \theta) = -u(t) u^T(t) x(t). \quad (2.7)$$

Es importante señalar que el mínimo de  $J(\theta)$  no es único. Se presenta si  $u$  y  $x$  son ortogonales o, siempre que alguno de los vectores corresponde al vector cero. De estas opciones, la de interés es cuando  $x = 0$ .

### 2.2.6. Estabilidad y convergencia del algoritmo gradiente

En esta sección se analizará el comportamiento del error de estimación de los parámetros,  $x$ , en términos del algoritmo presentado en (2.7). Se comienza con buscar la dinámica del error de estimación:

$$\begin{aligned} x(t) &= \hat{\theta}(t) - \theta, \\ \dot{x}(t) &= \dot{\hat{\theta}}(t) = -u(t) u^T(t) x(t). \end{aligned} \quad (2.8)$$

En este caso, el sistema resulta ser variante con el tiempo. Para mostrar estabilidad uniforme del punto de equilibrio  $x = 0$ , se propone la siguiente función de Lyapunov:

$$V(x) = \frac{1}{2} x^T x,$$

cuya derivada a lo largo de las trayectorias del sistema (2.8) es:

$$\dot{V}(x, t) = \dot{x}^T x = -x^T u(t) u^T(t) x = -\|u^T(t) x\|^2.$$

Resulta que la derivada de la función de Lyapunov es negativa semi-definida, ya que  $\dot{V}(t) = 0$  no implica  $x = 0$ . Por lo tanto, se concluye que el origen del sistema (2.8) es uniformemente estable [10, p. 151] más no de forma asintótica, es decir, el error inicial puede decrecer en magnitud o permanecer igual pero no hay certeza de que en algún momento llegue a cero.

Para asegurar la convergencia de (2.8) al origen,  $x = 0$ , es necesario poner condiciones sobre el regresor  $u(t)$ . La condición natural que surge se denomina de excitación persistente, abreviada PE por sus siglas en inglés, y está relacionada con que la señal  $u(t)$  brinde la información para determinar unívocamente a  $\theta$ . Una definición conveniente de excitación persistente es la siguiente [13]:

**Definición 2.5.** *Suponga que  $u(t)$  es continua a tramos. Se dice que  $u(t)$  es de Excitación Persistente (PE) si existe  $T_1 > 0$  y  $\epsilon > 0$  tales que:*

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \|u^T(\tau) w\| d\tau \geq \epsilon, \\ \forall T \geq T_1, \forall w \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } \|w\| = 1, \|u(t)\| \leq u_m.$$

△

Si  $u(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$  entonces, su norma se entiende de la siguiente forma:

**Definición 2.6.** *La norma inducida de una matriz  $A$ , tal que  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , se define como:*

$$\|A\|_q = \sup \{ \|Aw\|_q, w \in \mathbb{R}^m \mid \|w\|_q = 1 \}.$$

△

La condición de excitación persistente indica que el producto  $u^T(t)w$ , para todo  $w$  unitario y fijo en  $\mathbb{R}^n$ , no permanece en cero si se observa al menos un tiempo  $T$ . Otra interpretación que se puede dar a dicha condición es que, el valor de la integral crece cuando menos como una función lineal en  $t$  después de un tiempo inicial  $t_0$ .

La prueba de que la condición de PE es suficiente para asegurar que el algoritmo gradiente logra que el error de estimación de los parámetros converja a cero se puede encontrar en [13]. Sin embargo, una versión más compacta de la misma prueba, y por ello más conveniente, tomada de [15, p. 72], se reproduce a continuación ya que las ideas básicas se generalizarán en el próximo capítulo de esta tesis:

**Teorema 2.3.** *Las siguientes condiciones, (a)-(d), son equivalentes y aseguran la estabilidad uniforme y asintótica del punto de equilibrio  $x = 0$  del sistema (2.8):*

a) *Existen constantes positivas  $t_0, T$  y  $\epsilon_1$  tales que, para todo vector unitario  $w \in \mathbb{R}^n$ :*

$$\int_t^{t+T} w^T u(s) u^T(s) ds \geq \epsilon_1, \forall t \geq t_0.$$

b) *Existen constantes positivas  $t_0, T$  y  $\epsilon_2$  tales que, para todo vector unitario  $w \in \mathbb{R}^n$ :*

$$\int_t^{t+T} \|u(s) u^T(s) w\| ds \geq \epsilon_2, \forall t \geq t_0.$$

c) *Existen constantes positivas  $t_0, T$  y  $\epsilon_3$  tales que, para todo vector unitario  $w \in \mathbb{R}^n$ :*

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \|u^T(s) w\| ds \geq \epsilon_3, \forall t \geq t_0.$$

d) Existen constantes positivas  $t_0$ ,  $T$  y  $\epsilon_4$  tales que:

$$\lambda_i \left[ \int_t^{t+T} u(s)u^T(s) ds \right] \geq \epsilon_4, \quad i : 1, 2, \dots, n, \quad \forall t \geq t_0,$$

dónde  $\lambda_i[A]$  denota el  $i$ -ésimo valor propio de la matriz  $A$ .

Asúmase además que  $u(t)$  está acotada en magnitud de forma uniforme por una constante, es decir  $\|u(t)\| \leq u_m$ .

*Demostración.* **i)** Sea  $u_m$  una constante tal que  $\|u(t)\| \leq u_m$ . Si  $w$  es cualquier vector unitario, se tiene lo siguiente:

$$w^T u(t)u^T(t)w \leq \|u(t)u^T(t)w\| \leq \|u^T(t)w\|u_m,$$

entonces a)  $\Rightarrow$  b) y b)  $\Rightarrow$  c). Además, de la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se tiene que:

$$\int_t^{t+T} w^T u(s)u^T(s)w ds \geq \frac{1}{T} \left( \int_t^{t+T} \|u^T(s)w\| ds \right)^2,$$

por lo tanto c)  $\Rightarrow$  a).

El valor propio más pequeño de la matriz:

$$\bar{Q} \triangleq \int_t^{t+T} u(s)u^T(s) ds \quad (2.9)$$

es igual a:

$$\inf_{\|w\|=1} w^T \bar{Q} w = \inf_{\|w\|=1} \int_t^{t+T} w^T u(s)u^T(s)w ds,$$

entonces d)  $\Leftrightarrow$  a).

**ii)** Sea  $t_1 \geq t_0$ . Si  $V(x) = \frac{1}{2}x^T x$ , su derivada a lo largo de las trayectorias del sistema (2.8) es  $\dot{V} = -\|u^T x\|^2$ . Integrando a  $\dot{V}$  sobre el intervalo  $[t_1, t_1 + T]$  se obtiene lo siguiente:

$$\int_{t_1}^{t_1+T} -\dot{V}(x, s) ds = \int_{t_1}^{t_1+T} \|u^T(s)x(s)\|^2 ds \geq \frac{1}{T} \left( \int_{t_1}^{t_1+T} \|u^T(s)x(s)\| ds \right)^2,$$

o, equivalentemente:

$$\int_{t_1}^{t_1+T} \|u^T(s)x(s)\| ds \leq \sqrt{T}(V(t_1) - V(t_1 + T))^{1/2}. \quad (2.10)$$

El lado izquierdo de la desigualdad (2.10) puede también expresarse como:

$$\int_{t_1}^{t_1+T} \|u^T(s)x(s)\| ds \geq \int_{t_1}^{t_1+T} \|u^T(s)x(t_1)\| ds - \int_{t_1}^{t_1+T} \|u^T(s)(x(t_1) - x(s))\| ds. \quad (2.11)$$

De la condición **c)** se sigue que:

$$\int_{t_1}^{t_1+T} \|u^T(s)x(t_1)\| ds \geq \|x(t_1)\|T\epsilon_3.$$

El segundo término de la desigualdad (2.11) se puede acotar de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_1+T} \|u^T(s)(x(t_1) - x(s))\| ds &\leq u_m T \sup_{s \in [t_1, t_1+T]} \|x(t_1) - x(s)\|, \\ &\leq u_m T \int_{t_1}^{t_1+T} \|\dot{x}\| ds. \end{aligned}$$

Esto debido a que la distancia entre dos puntos,  $x(t_1)$  y  $x(s)$  para  $s \in [t_1, t_1 + T]$ , es menor que la longitud de arco de la trayectoria de  $x$  entre  $x(t_1)$  y  $x(t_1 + T)$ . Entonces, evaluando  $\dot{x}$  de la ecuación diferencial (2.8), la desigualdad (2.11) se convierte en:

$$\int_{t_1}^{t_1+T} \|u^T(s)x(s)\| ds \geq \|x(t_1)\| T \epsilon_3 - u_m^2 T \int_{t_1}^{t_1+T} \|u^T(s)x(s)\| ds,$$

por lo tanto:

$$\int_{t_1}^{t_1+T} \|u^T(s)x(s)\| ds \geq \frac{\|x(t_1)\| T \epsilon_3}{1 + u_m^2 T}. \quad (2.12)$$

De la desigualdad (2.10) se concluye:

$$V(t_1 + T) \leq (1 - \gamma)V(t_1), \text{ donde } \gamma = 1 - \frac{2T\epsilon_3^2}{(1 + u_m^2 T)^2}.$$

Ya que  $\epsilon_3$  se puede hacer arbitrariamente pequeña, siempre se logra satisfacer  $u_m \geq \epsilon_3$ , y con ello  $\gamma \in (0, 1)$ , entonces, el origen de (2.8) es uniforme y asintóticamente estable.  $\square$

Esta forma de determinar la estabilidad uniforme y asintótica del origen de un sistema variante en el tiempo es muy particular y difícilmente será de utilidad en otros casos.

Un resultado más general que sí es útil para establecer la estabilidad uniforme y asintótica del origen de sistemas variantes con el tiempo puede encontrarse en [14, Teorema 5]. Se reproduce a continuación sin prueba:

**Teorema 2.4.** *Sea el sistema:*

$$\dot{x} = f(x, t), \quad f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

dónde  $f(0, t) = 0$ . El punto de equilibrio  $x = 0$  de  $f(x, t)$  es uniforme y asintóticamente estable si existe una función  $V(x, t)$  definida para toda  $x$  y  $t$  con  $V(0, t) = 0$  tal que, sea positiva definida, no decreciente, radialmente no acotada y  $\dot{V}(x, t)$ , evaluada a lo largo de las trayectorias del sistema, sea por lo menos negativa semi-definida y cumpla con lo siguiente:

$$\int_t^{t+T} \dot{V}(x(s), s) ds \leq -\gamma(\|x(t)\|) < 0,$$

para algún  $T > 0$  y para todo  $t \geq t_0$ , donde  $\gamma(\cdot)$  es una función positiva, monótonamente creciente y  $\gamma(0) = 0$ .  $\triangle$

### 2.2.7. Identificación de parámetros en tiempo discreto

Debido a que, en general, los algoritmos de control, observación e identificación son implementados, en la actualidad, en computadoras digitales, y que esto implica que las señales de entrada-salida sólo pueden ser medidas en instantes de tiempo específicos, casi siempre, igualmente espaciados, es necesario desarrollar versiones discretas adecuadas.

Para una aplicación real, donde sea necesario realizar identificación de parámetros, el esquema del proceso sería el siguiente:

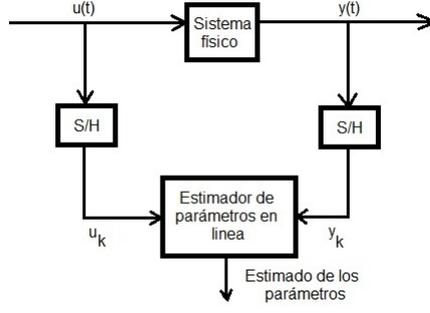


Figura 2.4: Esquema de identificación con computadora digital

Donde las siglas “S/H” representan a un dispositivo de “sample and hold”. El subíndice  $k$  denota que el valor de la señal corresponde al instante  $t = kh$  donde  $h$  es el espaciamiento entre muestras, así, por ejemplo,  $u_k = u(kh)$ .

Para poder implementar el algoritmo del gradiente es necesario discretizarlo. La ley de adaptación mostrada en (2.7) toma su forma más general al incluir una ganancia que permita ajustar la velocidad de convergencia:

$$\dot{\hat{\theta}} = -\Gamma u(t)(u^T(t)\hat{\theta} - y),$$

dónde  $\Gamma = \Gamma^T > 0$ .

La forma práctica y clásica de realizar la discretización es usando el método de Euler de solución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\theta}} &\simeq \frac{\hat{\theta}_{k+1} - \hat{\theta}_k}{h} = -\Gamma \cdot u_k (u_k^T \hat{\theta}_k - y_k), \\ \hat{\theta}_{k+1} &= \hat{\theta}_k - h \cdot \Gamma \cdot u_k (u_k^T \hat{\theta}_k - y_k). \end{aligned}$$

La dinámica que se obtiene para el error  $x_k \triangleq \hat{\theta}_k - \theta$  es la siguiente:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \hat{\theta}_{k+1} - \theta = \hat{\theta}_k - \theta - h \cdot \Gamma \cdot u_k (u_k^T \hat{\theta}_k - y_k) \\ &= x_k - h \cdot \Gamma \cdot u_k u_k^T x_k = (\mathbb{I} - h \cdot \Gamma \cdot u_k u_k^T) x_k. \end{aligned}$$

Se asumirá, además, que  $u_k \in \mathbb{R}^n$  y, como se verá a continuación, la matriz  $\Gamma$  no es del todo arbitraria.

Para asegurar que el error permanecerá acotado, se utilizará la siguiente función de Lyapunov:

$$V_k = x_k^T x_k,$$

cuyo valor, para el instante siguiente de tiempo, puede ser estimado de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} V_{k+1} &= x_{k+1}^T x_{k+1} = x_k^T \left( \mathbb{I} - h\Gamma u_k u_k^T - h u_k u_k^T \Gamma + h^2 u_k u_k^T \Gamma^2 u_k u_k^T \right) x_k \\ &= V_k - 2h x_k^T (\Gamma u_k u_k^T) x_k + h^2 (u_k^T x_k)^2 \cdot u_k^T \Gamma^2 u_k \\ &\leq V_k - 2h \|\Gamma u_k\| \|u_k\| V_k + h^2 \|u_k\|^4 \lambda_{\max}(\Gamma)^2 V_k \\ &\leq \left( 1 - 2h \|\Gamma\| \|u_k\|^2 + h^2 \|u_k\|^4 \lambda_{\max}(\Gamma)^2 \right) V_k \\ &\leq \left( 1 - 2h \|\Gamma\| u_m^2 + h^2 u_m^4 \lambda_{\max}(\Gamma)^2 \right) V_k, \end{aligned}$$

dónde  $\|u_k\| \leq u_m$ . Es obvio que, para que el algoritmo sea estable, es necesario que:

$$h \frac{u_m^2 \lambda_{\max}(\Gamma)^2}{\|\Gamma\|} < 2.$$

Aquí, la norma de una matriz se entiende en el sentido de la Definición 2.6.

Hasta este momento sólo se han dado condiciones para que el error no crezca. Si, además, se desea que efectivamente decrezca exponencialmente en magnitud, es necesario introducir la condición de excitación persistente para señales discretas y pedir que el regresor la satisfaga [8, Lema 4.1.1].

El concepto de excitación persistente, en éste contexto, se entiende de la siguiente forma;

**Definición 2.7.** [11, 3.a] *Se dice que el vector  $u$ , en  $\mathbb{R}^n$ , es de excitación persistente sobre el intervalo  $\{i : i_1 \leq i \leq i_1 + l_1 - 1\}$  si,  $\forall w \in \mathbb{R}^n$ , con  $\|w\| = 1$ , existe alguna constante  $\epsilon > 0$  tal que la siguiente expresión es cierta:*

$$\frac{1}{l_1} \sum_{i=i_1}^{i_1+l_1-1} \|u_i^T w\| \geq \epsilon. \quad (2.13)$$

*Una condición equivalente es que,  $\forall w \in \mathbb{R}^n$  con  $\|w\| = 1$ , existe una constante  $\epsilon'_1$  y, por lo menos un instante  $i \in \{i : i_1 \leq i \leq i_1 + l_1 - 1\}$ , tales que:*

$$\|u_i^T w\| \geq \epsilon'_1.$$

△

## Capítulo 3

# Algoritmo no lineal para la identificación de parámetros

La idea del algoritmo gradiente surge de minimizar una función de costo cuadrática del error de estimación de la salida, i. e. la diferencia entre la salida estimada y la medida. A este proceso se le puede dar una interpretación geométrica. Para ello, se retoma la expresión que describe la dinámica del error de estimación de los parámetros:

$$\dot{x}(t) = -u(t) (u^T(t)x(t)).$$

Por el momento se asume que tanto  $u(t)$  como  $x(t)$  son vectores de la misma dimensión,  $n$ , entonces, el producto  $u^T(t)x(t)$  es un escalar que puede ser representado por  $|u^T(t)x(t)|\text{sign}(u^T(t)x(t))$ . La dinámica del error se puede reescribir de la manera siguiente:

$$\dot{x}(t) = -|u^T(t)x(t)|u(t)\text{sign}(u^T(t)x(t)).$$

Escrito de esta forma se observa que el error  $x(t)$  cambia en la dirección contraria a  $u(t)$  escalado por un factor de magnitud  $|u^T(t)x(t)|$ . Si el valor de este factor no cambia y fuese unitario, la dinámica del error estaría descrita por  $\dot{x} = -u(t)\text{sign}(u^T(t)x(t))$ . Imagínese ahora que el sistema cambia en intervalos discretos de tiempo. Si se observaran dos instantes distintos, en el segundo en ocurrir el vector error  $x$  formaría un ángulo más cercano a  $\pi/2$  con respecto al vector  $u$  que en el primero. Esto es fácil de ver en el plano y se ilustra a continuación:

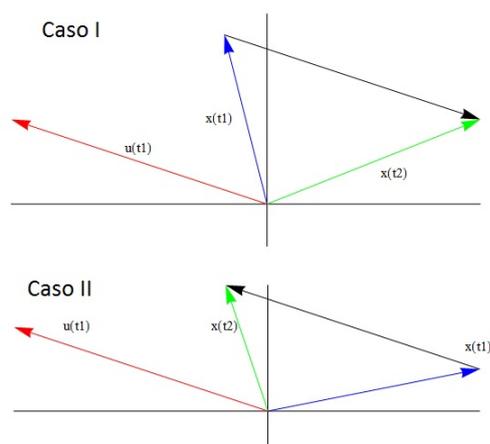


Figura 3.1: Efecto de restar  $u(t)$  de  $x(t)$

En la imagen, el vector azul representa al error  $x$  en el instante  $t_1$  mientras que el vector rojo representa a  $u$  en el mismo instante. En el primer caso el ángulo entre  $x$  y  $u$  es agudo, por lo que el signo del

producto interno entre ambos vectores es positivo, en  $x(t_2)$  sucede lo contrario. El vector que resulta de operar  $x(t_1) - u(t_1)\text{sign}(u^T(t_1)x(t_1))$ ,  $x(t_1 + \Delta t)$ , forma un ángulo más próximo a  $\pi/2$  con respecto a  $u(t_1)$  que el original,  $x(t_1)$ .

Generalizando ésta misma idea se propone el siguiente algoritmo para estimación de parámetros:

$$\dot{\hat{\theta}} = -u(t)|u^T(t)\hat{\theta}(t) - y(t)|^p \text{sign}(u^T(t)\hat{\theta}(t) - y(t)), \quad (3.1)$$

asumiendo que  $\theta, u(t) \in \mathbb{R}^n$  y  $p > 0$ . De esta manera la dinámica del error está definida por la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{\hat{\theta}} \\ &= -u(t)|u^T(t)(\hat{\theta}(t) - \theta)|^p \text{sign}(u^T(t)(\hat{\theta}(t) - \theta)) \\ &= -u(t)|u^T(t)x(t)|^p \text{sign}(u^T(t)x(t)). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Aquí la lógica es la misma: el error se actualizará en la dirección contraria a  $u$  pero escalada por un factor de  $|u^T(t)x(t)|^p$ , lo cual genera un algoritmo no lineal para los casos  $p \neq 1$ , mientras que el algoritmo clásico lineal se recupera cuando  $p = 1$ .

Otra razón para escoger de esta forma al algoritmo de estimación es porque, la dinámica del error de estimación que induce es homogénea respecto al error mismo. Para sistemas homogéneos invariantes en el tiempo, se ha mostrado que, dependiendo del grado de homogeneidad, la velocidad de convergencia puede ser en tiempo finito y, en general, son robustos ante perturbaciones. Sin embargo la dinámica de error (3.2) es variante en el tiempo, por lo que estas propiedades no se extienden automáticamente.

### 3.1. Caso escalar

Antes de analizar la forma más general del algoritmo, se comenzará por establecer algunos resultados importantes que se observan cuando tanto  $u$  como  $\theta$  son escalares, es decir, cuando sólo se necesita estimar un parámetro.

Para el caso escalar reescribiremos la dinámica del error definida en (3.2) adecuándola a la situación:

$$\dot{x}(t) = -u(t)|u(t)x(t)|^p \text{sign}(u(t)x(t)). \quad (3.3)$$

Esta dinámica es inducida por el siguiente algoritmo:

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = -u(t)|u(t)\hat{\theta}(t) - y(t)|^p \text{sign}(u(t)\hat{\theta}(t) - y(t)). \quad (3.4)$$

Las propiedades que posee este algoritmo son las siguientes:

**Teorema 3.1.** *El algoritmo representado en (3.4), que induce la dinámica de error (3.3), mantiene la magnitud del error acotada. Además, si  $u(t)$  cumple con la condición de excitación persistente, Definición 2.5, entonces, la magnitud del error convergerá, al menos, de forma uniforme y asintótica a cero para toda  $p \geq 0$ ,  $y$ , se distinguen los siguientes casos:*

- Si  $p \in [0, 1)$  la convergencia será en tiempo finito.
- Para  $p = 1$  la velocidad de convergencia será exponencial.
- Para  $p > 1$ , la convergencia del error será asintótica, sin embargo, puede reducir condiciones iniciales infinitas a un valor acotado en tiempo finito.

△

Es importante señalar que, para  $p = 1$ , se tiene el algoritmo del gradiente descendiente y, como ya se sabe, este converge de manera exponencial y esta afirmación se recupera del teorema.

La importancia de los demás valores de  $p$  radica en que permiten tener velocidades de convergencia mayores que exponencial, al menos, en ciertas regiones. Por ejemplo, para  $0 \leq p < 1$ , la velocidad de convergencia es mayor cerca del origen mientras que, lejos, la velocidad que proporciona el algoritmo lineal es superior. Esto se invierte para  $p > 1$ , es decir, este algoritmo supera, en cuanto a la velocidad de convergencia, al lineal lejos de cero pero no lo hace en la vecindad de este valor. Para poder tener una velocidad de convergencia superior en todas partes, es necesario usar un término con  $0 \leq p < 1$  y otro con  $p > 1$  y como se verá después, esto siempre es posible.

### 3.1.1. Prueba del Teorema 3.1

Primero se mostrará la estabilidad uniforme del origen, para ello se propone una función de Lyapunov cuadrática en  $x$ :

$$V = \frac{1}{2}x^2. \quad (3.5)$$

La derivada de  $V$  a lo largo de la trayectoria del sistema es:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= -|u(t)x(t)|^{p+1} = -|u(t)|^{p+1}|x(t)|^{p+1} \\ &= -2^{\frac{p+1}{2}}|u(t)|^{p+1}V^{\frac{p+1}{2}}(t) \\ &= -\gamma|u(t)|^{p+1}V^{\frac{p+1}{2}}(t), \quad \gamma \triangleq 2^{\frac{p+1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Esta función es negativa semi-definida debido a que toma el valor cero siempre que  $u(t) = 0$  y no exclusivamente cuando  $x = 0$ . La ecuación diferencial (3.6) puede resolverse por integración haciendo una separación de variables:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{V^\alpha} &= -\gamma|u(s)|^{2\alpha} ds, \\ \int_{V(t_0)}^{V(t)} \frac{dV}{V^\alpha} &= -\gamma \int_{t_0}^t |u(s)|^{2\alpha} ds, \\ \alpha &\triangleq \frac{p+1}{2}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

La solución de la expresión anterior para  $p \geq 0, p \neq 1$  es la siguiente:

$$V(t) = \left( V^{1-\alpha}(t_0) - \gamma(1-\alpha) \int_{t_0}^t |u(s)|^{2\alpha} ds \right)^{1/(1-\alpha)}.$$

Para  $p > 1$ , implica  $\alpha > 1$ , entonces la solución es válida para todo  $t \geq t_0$ , sin embargo, para  $p \in [0, 1)$ , la situación es diferente, en este caso la solución es válida siempre que el término  $V(t_0)^{1-\alpha} - \gamma(1-\alpha) \int_{t_0}^t |u(s)|^{2\alpha} ds$  sea positivo, ya que la función de Lyapunov no puede tomar valores complejos.

La solución de  $V$ , cuando  $p \in [0, 1)$ , se mantiene si:

$$\int_{t_0}^t |u(s)|^{2\alpha} ds \leq \frac{1}{\gamma(1-\alpha)} V^{1-\alpha}(t_0),$$

el que se invierta el signo de comparación implica que  $V$  toma el valor de cero y permanece en él para todo tiempo futuro.

En ambos casos,  $p \in [0, 1)$  y  $p > 1$ , para asegurar la convergencia asintótica al origen,  $V = 0 \Rightarrow x = 0$ , se requiere que la integral de  $u(t)$  diverja:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t |u(s)|^{2\alpha} ds = \infty, \quad (3.8)$$

en el caso  $0 \leq p > 1$  esto asegura la globalidad.

La condición de excitación persistente asegura que así suceda y para mostrarlo recordemos que el único “vector” unitario en  $\mathbb{R}$  es el número 1, la definición 2.5 en el caso escalar corresponde a:

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} |u(s)| ds \geq \epsilon,$$

o, en una forma más conveniente:

$$\int_{t_0}^t |u(s)| ds \geq T\epsilon.$$

Entonces, si se toman  $k$  intervalos de tiempo de longitud  $T$ , con  $k \in \mathbb{N}$ , el valor que se puede asegurar para la integral es  $kT\epsilon$ , de esta forma se puede ver que la integral no deja de crecer.

Ahora, utilizando la desigualdad de Hölder, mostraremos que la condición de excitación persistente implica que la integral (3.8) diverge:

$$\begin{aligned} \int_t^{t+T} |u(s)| ds &\leq \left( \int_t^{t+T} |u(s)|^{2\alpha} ds \right)^{1/2\alpha} \left( \int_t^{t+T} 1^{\frac{2\alpha}{2\alpha-1}} ds \right)^{\frac{2\alpha-1}{2\alpha}}, \\ \int_t^{t+T} |u(s)|^{2\alpha} ds &\geq \frac{1}{T^{2\alpha-1}} \left( \int_t^{t+T} |u(s)| ds \right)^{2\alpha}, \end{aligned}$$

dónde  $\alpha = \frac{p+1}{2}$ ,  $2\alpha = p+1$  y  $\frac{1}{2\alpha} + \frac{2\alpha-1}{2\alpha} = \frac{1}{p+1} + \frac{p}{p+1} = 1$ , continuando:

$$\begin{aligned} \int_t^{t+T} |u(s)| ds &\geq T\epsilon, \\ \frac{1}{T^{2\alpha-1}} \left( \int_t^{t+T} |u(s)| ds \right)^{2\alpha} &\geq \frac{T^{2\alpha}}{T^{2\alpha-1}} \epsilon^{2\alpha}, \\ \int_t^{t+T} |u(s)|^{2\alpha} ds &\geq T\epsilon^{2\alpha} = T\epsilon_p. \end{aligned}$$

Se buscará ahora, para  $0 \leq p < 1$ , el múltiplo de  $T$  que se requiere para asegurar que el valor de la integral alcanza la condición inicial:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_0+kT} |u(s)|^{2\alpha} ds &\geq kT\epsilon_p \geq \frac{1}{\gamma(1-\alpha)} V^{1-\alpha}(t_0), \\ k &\geq \frac{1}{T\epsilon_p\gamma(1-\alpha)} V^{1-\alpha}(t_0). \end{aligned}$$

Se puede concluir que, para todo  $t \geq t_0 + kT$  el valor de  $V$  es cero y hay convergencia en tiempo finito. El valor  $kT$  es un estimado del tiempo de convergencia del algoritmo. La convergencia del error en tiempo finito no ocurre para  $p > 1$ ; si embargo, se puede observar que la convergencia será asintótica.

Es interesante ver qué sucede con el tiempo de convergencia cuando la condición inicial de  $V$  es arbitrariamente grande. Cuando  $p > 1$  la solución se puede reescribir de la siguiente forma:

$$V(t) = \frac{1}{\left( \frac{1}{V^{\alpha-1}(t_0)} + \gamma(\alpha-1) \int_{t_0}^t |u(s)|^{2\alpha} ds \right)^{\frac{1}{\alpha-1}}}.$$

A continuación, se estimará el tiempo que se requiere para que la función  $V$  decrezca hasta un valor  $\bar{V} < \infty$ . Se asumirá que  $\bar{V}$  es el valor de  $V$  en  $t$  y que se conoce la condición inicial:

$$\begin{aligned}\bar{V}^{\alpha-1} &= \frac{1}{\bar{V}^{\alpha-1}(t_0) + \gamma(\alpha-1) \int_{t_0}^t |u(s)|^{2\alpha} ds}, \\ \gamma(\alpha-1) \int_{t_0}^t |u(s)|^{2\alpha} ds &= \frac{1}{\bar{V}^{\alpha-1}} - \frac{1}{V^{\alpha-1}(t_0)}, \\ \int_{t_0}^t |u(s)|^{2\alpha} ds &= \frac{1}{\gamma(\alpha-1)} \left( \frac{1}{\bar{V}^{\alpha-1}} - \frac{1}{V^{\alpha-1}(t_0)} \right).\end{aligned}$$

El peor caso se presenta cuando la condición inicial es arbitrariamente grande, para estudiar esto se toma el siguiente límite:

$$\lim_{V(t_0) \rightarrow \infty} \frac{1}{\gamma(\alpha-1)} \left( \frac{1}{\bar{V}^{\alpha-1}} - \frac{1}{V^{\alpha-1}(t_0)} \right) = \frac{1}{\gamma(\alpha-1)\bar{V}^{\alpha-1}}.$$

Ya que la integral diverge  $\exists t \mid t_0 < t < \infty$  para el cual se satisface:

$$\int_{t_0}^t |u(s)|^{2\alpha} ds = \frac{1}{\gamma(\alpha-1)\bar{V}^{\alpha-1}}.$$

Haciendo  $t = t_0 + kT$  se puede tener un estimado:

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_0+kT} |u(s)|^{2\alpha} ds &\geq kT\epsilon_p \geq \frac{1}{\gamma(\alpha-1)\bar{V}^{\alpha-1}}, \\ k &\geq \frac{1}{T\epsilon_p\gamma(\alpha-1)\bar{V}^{\alpha-1}}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, el algoritmo con  $p > 1$  es capaz de atraer condiciones iniciales infinitas a un conjunto acotado en tiempo finito (escape de infinito en tiempo finito), lo cual no sucede para  $p \in [0, 1]$ . Si  $0 \leq p < 1$  la expresión correspondiente es la siguiente:

$$\int_{t_0}^t |u(s)|^{2\alpha} ds = \frac{1}{\gamma(1-\alpha)} (V^{1-\alpha}(t_0) - \bar{V}^{1-\alpha}).$$

El límite del lado derecho de la expresión anterior cuando  $V(t_0) \rightarrow \infty$  es  $\infty$ , por lo tanto, no existe  $t < \infty$  que haga que la integral alcance tal valor.

Es importante señalar que los resultados mostrados, escape de infinito en tiempo finito ( $p > 1$ ) y convergencia en tiempo finito para condiciones iniciales finitas ( $0 \leq p < 1$ ), son globales. Cuando  $p = 1$  la convergencia a  $x = 0$  es exponencial y no se presenta ninguna de las dos características mencionadas, esto se puede observar de la solución correspondiente:

$$\begin{aligned}V(t) &= e^{\ln(V(t_0)) - \gamma \int_{t_0}^t u^2(s) ds} \\ &= V(t_0) e^{-\gamma \int_{t_0}^t u^2(s) ds}\end{aligned}$$

En conclusión, la estabilidad uniforme y asintótica del origen del sistema (3.3) se puede garantizar para  $p \geq 0$  si la señal  $u(t)$  cumple con la condición de PE.

### 3.1.2. Combinación de términos con diferente exponente $p$

Se demostró en la sección anterior que el origen del sistema (3.3) es uniforme y asintóticamente estable para valores de  $p$  mayores o iguales a cero. También se mostraron particularidades sobre el tiempo de convergencia dependiendo del valor de  $p$ . En esta sección se analizará qué sucede si se combinan dos términos con diferente exponente.

**Teorema 3.2.** *Si se usa el algoritmo (3.4) con dos o más términos de diferente exponente  $p$ , el algoritmo resultante mantiene la magnitud del error acotada y, si además, la señal de excitación cumple con la definición 2.5, entonces, la velocidad de convergencia del error será la combinación de la velocidad que proporcionaría cada término de forma individual.*

*De forma más específica, si al menos un término tiene exponente  $0 \leq p_1 < 1$  y al menos otro tiene exponente  $p_2 > 1$ , entonces, el error converge a cero en tiempo fijo uniforme, es decir, con independencia del tiempo inicial.*

△

El que se puedan mezclar términos con diferente exponente permite que el algoritmo compuesto otorgue una velocidad de convergencia del error de estimación superior a la exponencial en todas partes, para ello por lo menos debe haber un término con exponente en  $[0, 1)$  y otro con exponente  $> 1$ .

La convergencia del error en tiempo fijo uniforme se refiere a que, para el peor caso, es decir, condiciones iniciales arbitrariamente grandes, el tiempo de convergencia está acotado por una constante independiente del tiempo inicial. Esto si y sólo si el regresor cumple con la condición de excitación persistente.

El siguiente algoritmo ejemplifica lo que se enuncia en el Teorema 3.2 para la combinación de dos términos:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\theta}}(t) &= -u(t) (|e(t)|^{p_1} + |e(t)|^{p_2}) \text{sign}(e(t)), \\ e(t) &= u(t)\hat{\theta}(t) - y(t), \quad p_1, p_2 \in \mathbb{R}^+.\end{aligned}$$

Esto induce la siguiente dinámica de error de estimación:

$$\dot{x}(t) = -u(t) (|u(t)x(t)|^{p_1} + |u(t)x(t)|^{p_2}) \text{sign}(u(t)x(t)). \quad (3.9)$$

Se puede usar la misma función de Lyapunov que en (3.5), en este caso, su derivada a lo largo de las trayectorias del sistema (3.9) es la siguiente:

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &= -|u(t)x(t)|^{p_1+1} - |u(t)x(t)|^{p_2+1}, \\ &= -\gamma_1|u(t)|^{2\alpha_1}V^{\alpha_1}(t) - \gamma_2|u(t)|^{2\alpha_2}V^{\alpha_2}(t), \\ \alpha_i &= \frac{p_i + 1}{2}, \quad \gamma_i = 2^{\alpha_i}, \quad i : \{1, 2\}.\end{aligned} \quad (3.10)$$

En general, para una composición de  $m$  términos con diferente exponente, se puede escribir la dinámica del error de estimación:

$$\dot{x} = -u(t)\text{sign}(u(t)x(t)) \sum_{i=1}^m |u(t)x(t)|^{p_i}.$$

Para esta situación, la derivada de  $V = \frac{1}{2}x^2$  queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= -\sum_{i=1}^m |u(t)x(t)|^{p_i+1} \\ &= -\sum_{i=1}^m \gamma_i |u(t)|^{2\alpha_i} V^{\alpha_i}(t), \\ \alpha_i &= \frac{p_i + 1}{2}, \quad \gamma_i = 2^{\alpha_i}, \quad i : \{1, 2, \dots, m\}.\end{aligned}$$

A pesar de que es posible combinar cualquier cantidad de términos con diferente exponente, el resultado interesante se obtiene cuando, en particular, son sólo dos términos, tales que  $0 \leq p_1 < 1$  y  $p_2 > 1$ . Aquí, la derivada de la función de Lyapunov es simultáneamente menor que la derivada que aparece cuando

cada término se usa de forma individual:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= -\gamma_1|u(t)|^{2\alpha_1}V^{\alpha_1}(t) - \gamma_2|u(t)|^{2\alpha_2}V^{\alpha_2}(t) \\ &\leq -\gamma_1|u(t)|^{2\alpha_1}V^{\alpha_1}(t) \\ &\leq -\gamma_2|u(t)|^{2\alpha_2}V^{\alpha_2}(t).\end{aligned}$$

Del lema de comparación [10, Lema 3.4, pag. 102] sabemos que, la solución de  $V$  tiene que ser simultáneamente menor a la solución correspondiente a cada término, por lo tanto, puede escapar de infinito en tiempo finito y converger en tiempo finito a cero, en otras palabras, el tiempo de convergencia es uniforme respecto a la condición inicial y se puede estimar una cota superior para el peor caso, el cual se presenta si  $V(t_0) \rightarrow \infty$ . Además, este comportamiento es uniforme con respecto al tiempo inicial.

### 3.1.3. Estimación de un parámetro variante con el tiempo

En el caso escalar la inyectividad del sistema solo se pierde en los puntos donde  $u = 0$ , esto es independiente de si el parámetro varía o no:

$$\begin{aligned}y(t) &= u(t)\theta(t) \\ \theta(t) &= \frac{y(t)}{u(t)}, \quad u(t) \neq 0\end{aligned}$$

Por lo tanto, casi siempre, es posible determinar al parámetro si  $u$  cumple con PE.

Hasta el momento se ha supuesto que el parámetro no cambia con el tiempo. Para estimar un parámetro que variase con el tiempo, la versión más adecuada del algoritmo es la discontinua, con  $p = 0$ . Para poder estimar al parámetro, es necesario suponer que su velocidad de cambio está acotada, i.e.  $|\dot{\theta}| \leq L$ .

**Teorema 3.3.** *Si  $u(t)$  cumple con la condición de excitación persistente, Definición 2.5, y, además, no cruza por cero, será posible estimar, en tiempo finito, a un parámetro variante en el tiempo, si su derivada está acotada, usando el algoritmo (3.4) con  $p = 0$  y  $K \text{sign}(u(t))$  en lugar de  $u(t)$ , con  $K > L \geq |\dot{\theta}|$ .*

△

Si el parámetro varía con el tiempo, su derivada aparecerá en la dinámica del error como un término aditivo. El algoritmo con  $p = 0$  puede compensar dicho término si y solo si la magnitud de  $u$  es más grande que él, en caso contrario el error puede crecer. Para evitar esto, se usa al signo de  $u$  multiplicado por una constante que tenga un valor superior al de la cota de la derivada del parámetro, así, se puede garantizar que se compensa dicho término siempre que  $u$  no tome el valor de cero.

Para demostrar la afirmación hecha en el Teorema 3.3 es necesario empezar por escribir la dinámica del error de estimación cuando hay variación en el parámetro  $\theta$ :

$$\begin{aligned}x(t) &= \hat{\theta}(t) - \theta(t), \\ \dot{x}(t) &= \dot{\hat{\theta}}(t) - \dot{\theta}(t) \\ &= -u(t)\text{sign}(u(t)x(t)) - \dot{\theta}(t).\end{aligned}$$

Aquí, la derivada de la función de Lyapunov también cambia:

$$\begin{aligned}V(x) &= \frac{1}{2}x^2, \\ \dot{V}(t, x) &= -|u(t)x(t)| - \dot{\theta}(t)x(t) \\ &= -\left(|u(t)| + \dot{\theta} \text{sign}(x(t))\right)|x(t)|.\end{aligned}$$

El caso más favorable se presenta cuando  $\text{sign}(\dot{\theta}) = \text{sign}(x)$ , si esto no sucede, es necesario que  $|u| > |\dot{\theta}|$  para que la función de Lyapunov decrezca. Es obvio que, mientras  $u = 0$ , no se puede determinar al parámetro pues hace falta información.

Una modificación del algoritmo que puede ayudar a estimar al parámetro es el siguiente:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\theta}}(t) &= -K \text{sign}(u(t)) \text{sign}(u(t)\hat{\theta}(t) - y(t)) \\ &= -K \frac{u(t)}{|u(t)|} \text{sign}(u(t)\hat{\theta}(t) - y(t)), \\ K &\triangleq L + \delta, \quad \delta > 0.\end{aligned}$$

Así, se puede asegurar que sólo se dejará de estimar al parámetro cuando  $u = 0$ :

$$\dot{x}(t) = -K \frac{u(t)}{|u(t)|} \text{sign}(u(t)x(t)) - \dot{\theta}.$$

$$\begin{aligned}V(x) &= \frac{1}{2}x^2, \\ \dot{V}(t, x) &= -K \frac{|u(t)x(t)|}{|u(t)|} - \dot{\theta}x(t), \\ &= \begin{cases} -(K + \dot{\theta} \text{sign}(x(t))) |x(t)| & \text{si } u(t) \neq 0. \\ -\dot{\theta}(t)x(t) & \text{si } u(t) = 0. \end{cases}\end{aligned}$$

Esto porque  $K + \dot{\theta} \text{sign}(x(t)) > 0$ . Además, si  $u$  nunca cruza por cero, entonces  $\dot{V} = -\gamma V^{1/2}(t)$  con  $\gamma = \sqrt{2}(K + \dot{\theta} \text{sign}(x(t))) > 0$  y la convergencia al valor del parámetro será en tiempo finito.

### 3.1.4. Ejemplos académicos

Se presentarán, en este apartado, una serie de simulaciones para ilustrar el comportamiento del algoritmo.

#### Estimación de un parámetro constante

Las gráficas que se muestran en estos ejemplos corresponden al comportamiento de la función de Lyapunov, vista como función del tiempo, para diferentes versiones del algoritmo, en particular cuando  $p : 0, \frac{1}{2}, 1, 2$ .

Los parámetros comunes entre simulaciones son los siguientes:

$$\begin{aligned}t &\in [0, 30][s], \\ u(t) &= \sin(t), \\ \hat{\theta}(0) &= 0.\end{aligned}$$

Para la primera simulación se considera  $\theta = -0.7$ :

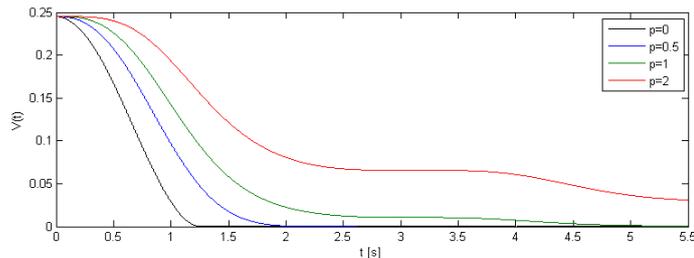


Figura 3.2: Comportamiento de los algoritmos cerca del origen

Para la segunda simulación se considera  $\theta = 5$ :

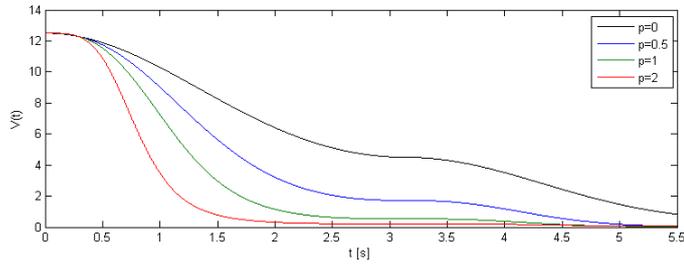


Figura 3.3: Comportamiento de los algoritmos lejos del origen

Se puede observar que para un error inicial pequeño los algoritmos con  $p < 1$  permiten converger más rápidamente, mientras que, si el error inicial es grande, se aprecia un decrecimiento mayor para  $p = 2$ . El algoritmo lineal proporciona la misma velocidad de decrecimiento del error independientemente de la condición inicial de éste.

Por último, se mostrará como se comporta el algoritmo compuesto de dos términos con diferente exponente, en este caso, el primero con  $p = 0.5$  y el segundo con  $p = 2$ , y se contrastará con el lineal. El parámetro a estimar es  $\theta = 10$ :

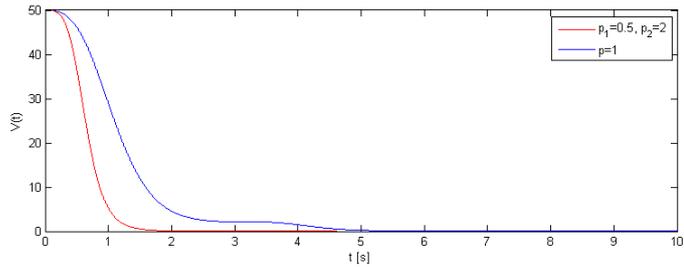


Figura 3.4: Contraste entre la convergencia exponencial y la convergencia en tiempo fijo (a)

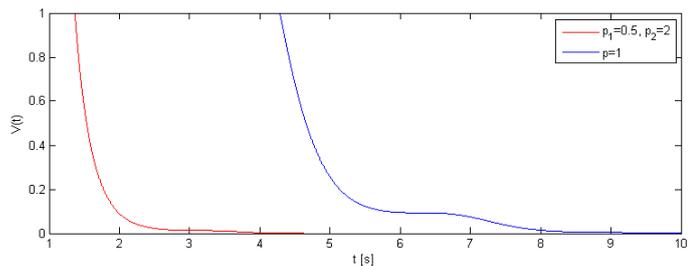


Figura 3.5: Contraste entre la convergencia exponencial y la convergencia en tiempo fijo (b)

Un término con  $p > 1$  hace decrecer más rápidamente a la función de Lyapunov, cuando se está lejos de  $x = 0$ , que los términos con  $p \leq 1$ . Los papeles se invierten en la cercanía de  $x = 0$ , por ello, un término con  $0 \leq p < 1$  hace decrecer a la función de Lyapunov de forma más rápida en la cercanías del origen. La mayor velocidad de decrecimiento se logra combinando términos con  $0 \leq p < 1$  y con  $p > 1$ .

### Estimación de un parámetro variante con el tiempo

Ahora se ejemplificará, por medio de una simulación, cómo funciona el algoritmo discontinuo para la estimación de un parámetro variante en el tiempo. Los parámetros de la simulación son como se muestran

a continuación:

$$\begin{aligned} t &\in [0, 10][s], \\ u(t) &= \sin(t), \\ \hat{\theta}(0) &= 0, \\ \theta(t) &= 3 \sin(4t) - \sin(t). \end{aligned}$$

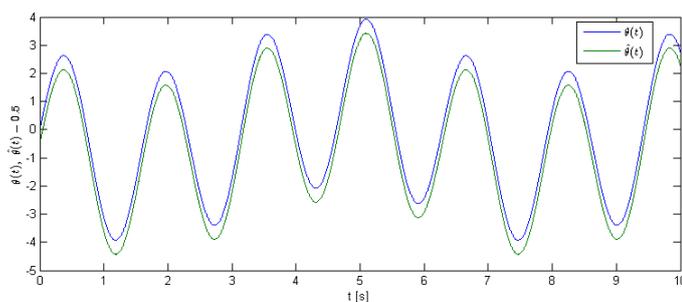


Figura 3.6: Comparación entre el parámetro real y el estimado, el desfase es intencional para poder distinguir ambas gráficas

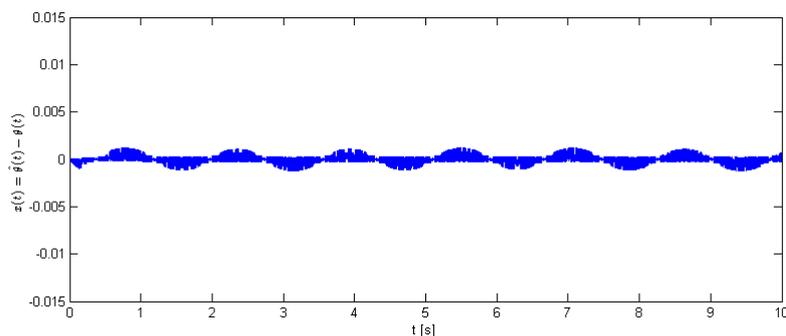


Figura 3.7: Gráfica del error de estimación

## 3.2. Estimación de $n$ parámetros con una medición

En esta sección se retomará al sistema representado por el modelo paramétrico que se ha manejado. Ahora se considerará que se quiere estimar  $n$  parámetros condensados en el vector  $\theta$ , los cuales no varían con el tiempo. Además se asumirá que se tiene una única medición  $y$ . El esquema a tratar es el siguiente:

$$y(t) = u^T(t)\theta,$$

dónde  $u(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\theta \in \mathbb{R}^n$  y  $y(t) \in \mathbb{R}$ . Asumiremos que  $u(t)$  cumple con la Definición 2.5. Para este sistema el algoritmo de estimación que se propone es el siguiente:

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = -u(t)[u^T(t)\hat{\theta}(t) - y(t)]^p, \quad p > 0. \quad (3.11)$$

Por facilidad, se introduce la siguiente notación:

$$[a]^\alpha \triangleq |a|^\alpha \text{sign}(a), \quad a \in \mathbb{R}.$$

Esta operación se define para obtener la potencia  $\alpha$  de  $a$  y conservar el signo.

La dinámica del error de estimación que induce este algoritmo es la siguiente:

$$\begin{aligned} x(t) &\triangleq \hat{\theta} - \theta, \\ \dot{x}(t) &= -u(t)[u^T(t)(\hat{\theta} - \theta)]^p \\ &= -u(t)[u^T(t)x(t)]^p. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Primero se establecerá que esta ley de estimación no incrementa el error inicial. Para ello mostraremos que el origen de (3.12) es uniformemente estable. Con este fin se usará como función de Lyapunov una forma cuadrática en  $x$ :

$$V(x) = \frac{1}{2}x^T x.$$

La derivada de  $V$  a lo largo de las trayectorias del sistema (3.12) es:

$$\dot{V}(t, x) = -|u^T(t)x(t)|^{p+1}. \quad (3.13)$$

Nótese que la derivada no es siempre negativa, se puede presentar la situación en donde  $u$  y  $x$  sean ortogonales, en cuyo caso la derivada es cero o, aun más simple, si  $u$  es el vector cero se tiene la misma situación, por ello de aquí no se puede concluir estabilidad asintótica.

A diferencia del caso escalar, ahora no se puede separar el producto entre  $u$  y  $x$ . Por lo tanto, no se puede proceder como en el caso anterior para mostrar la convergencia del error de estimación a cero.

Antes de presentar los resultados de esta sección, es necesario introducir la siguiente definición:

**Definición 3.1.** *Se dice que una señal  $u(t)$ , continua a tramos, cumple con la condición de excitación persistente fuerte si existe  $\mathcal{T}_1 > 0$ ,  $\tau_1 > 0$  y  $\delta > 0$  tales que, para todo  $t \geq t_0 \geq 0$ , existe un intervalo  $\Omega : [t'_1, t'_2]$  contenido en  $[t, t + \mathcal{T}]$  y de longitud  $t'_2 - t'_1 = \tau \leq \mathcal{T}$ , con  $\mathcal{T} \geq \mathcal{T}_1$  y  $\tau \geq \tau_1$ , tal que:*

$$\int_{t'_1}^{t'_2} \|u^T(s)w\| ds \geq \delta(t_2 - t_1),$$

para todo  $w \in \mathbb{R}^n$  con  $\|w\| = 1$ ,  $\|u(t)\| \leq u_m$  y para todo  $t_1 < t_2$  tal que  $t_1, t_2 \in \Omega$ .

△

Si  $u \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , su norma se entiende en el sentido de la Definición 2.6.

Lo que se quiere implicar es que, en el intervalo  $\Omega$ , la integral del producto entre  $u$  y cualquier vector unitario constante siempre crece más que una función lineal sin importar en que parte del intervalo se estudie. Además, es importante enfatizar que, si se cumple la condición de excitación persistente fuerte, entonces se cumple la condición de excitación persistente, lo contrario no es cierto. Esta definición cobrará importancia más adelante.

Para el algoritmo en (3.11) se tienen los siguientes resultados:

**Teorema 3.4.** *Que el regresor  $u(t)$  cumpla con la condición de excitación persistente, Definición 2.5, es suficiente para garantizar que el error de estimación de los parámetros converge, por lo menos, de manera uniforme y asintótica al origen para toda  $p > 0$ . Para  $p = 1$  la convergencia será exponencial.*

Además, si  $u(t)$  satisface la condición de excitación persistente fuerte, Definición 3.1, se tienen las siguientes propiedades adicionales:

- Para  $p \in (0, 1)$  la convergencia será en tiempo finito uniforme.

- Para  $p > 1$  la velocidad de convergencia del error será uniforme y asintótica. Además, para condiciones iniciales infinitamente grandes, el tiempo que tarda el error en llegar a una vecindad acotada alrededor del origen es finito e independiente del tiempo inicial.

△

En general, la velocidad de convergencia del error será superior que la exponencial cerca del origen para  $p \in (0, 1)$  e inferior lejos. Lo contrario es cierto para  $p > 1$ , es decir, la velocidad de convergencia será mayor a la exponencial lejos y menor cerca del origen. Esto si no se puede garantizar la condición de excitación persistente fuerte, mientras que, si se satisface, los resultados son más claros, pues hay convergencia en tiempo finito y escape de infinito en tiempo finito, en ambos casos, ocurre de manera uniforme respecto al instante inicial.

La condición de excitación persistente fuerte aparece debido a que, toda la familia de algoritmos, parece que reducen el valor de la función de Lyapunov de manera proporcional, generando una serie geométrica. Lo que cambia es el tiempo que se requiere para ello, y, debido a esto, es necesario poder colapsar o expandir el tiempo. De manera más específica, para  $p \in (0, 1)$ , el tiempo que se necesita para reducir el valor de la función de Lyapunov en una proporción fija disminuye al disminuir  $V$ , caso contrario para  $p > 1$ , en donde el tiempo aumenta al disminuir  $V$  y es menor para valores mayores. Para  $p = 1$ , el tiempo que requiere para disminuir a  $V$  en una proporción dada es independiente del valor de  $V$ .

En el apartado siguiente, se desarrolla la prueba del Teorema 3.4.

### 3.2.1. Prueba del Teorema 3.4

#### Convergencia uniforme y asintótica

A continuación se desarrolla la prueba del Teorema 3.4 correspondiente a la afirmación de convergencia uniforme y asintótica del error, para evitar la pérdida de secuencia, las demostraciones de las proposiciones que se plantean en el desarrollo se remiten al Anexo B.

Para mostrar la convergencia al origen, primero se evaluará la integral de (3.13) en un intervalo de tiempo que asumiremos fijo:

$$\int_t^{t+T} -\dot{V}(s) ds = \int_t^{t+T} |u^T(s)x(s)|^{p+1} ds = V(t) - V(t+T).$$

**Proposición 3.1.** La suma  $|f+g|$ , donde  $f, g \in \mathbb{R}^+$ , elevada a una potencia  $q$ , para  $q > 1$ , puede acotarse de la siguiente forma:

$$|f + g|^q \leq 2^{q-1} (|f|^q + |g|^q).$$

△

Esta proposición será de utilidad para descomponer la integral de  $-\dot{V}$  en dos integrales más favorables. De la Proposición 3.1 se desprende lo siguiente:

**Proposición 3.2.** La integral del término  $|u^T(t)x(t)|^{p+1}$  tiene la siguiente cota inferior:

$$\int_t^{t+T} |u^T(s)x(s)|^{p+1} ds \geq \frac{1}{2^p} \int_t^{t+T} |u^T(s)x(t)|^{p+1} ds - \int_t^{t+T} |u^T(s)(x(t) - x(s))|^{p+1} ds.$$

△

Se comenzará por analizar la primera integral del lado derecho de la desigualdad. Para ello es necesario tomar en cuenta la condición de PE y de ella, derivar una expresión adecuada que permita acotar por debajo a dicha integral.

**Proposición 3.3.** *La condición de excitación persistente, Definición 2.5, implica lo siguiente:*

$$\frac{1}{2^p} \int_t^{t+T} |u^T(s)x(t)|^{p+1} ds \geq \frac{T}{2^p} \varepsilon_p \|x(t)\|^{p+1}.$$

△

Al combinar los resultados de las Proposiciones 3.2 y 3.3 se obtiene que:

$$\int_t^{t+T} -\dot{V}(s) ds \geq \frac{T}{2^p} \varepsilon_p \|x(t)\|^{p+1} - \int_t^{t+T} |u^T(s)(x(t) - x(s))|^{p+1} ds. \quad (3.14)$$

Resta una integral del lado derecho de la desigualdad y, en la forma que se presenta, no permite obtener ninguna conclusión aun. Para continuar, se establece una cota superior de la integral en cuestión y se sustituye en la desigualdad.

**Proposición 3.4.** *La integral de  $|u^T(s)(x(t) - x(s))|^{p+1}$ , con  $s \in [t, t+T]$ , puede acotarse por encima con la longitud de arco de la trayectoria de  $x$  en el mismo intervalo, multiplicada por el intervalo de integración:*

$$\int_t^{t+T} |u^T(s)(x(t) - x(s))|^{p+1} ds \leq T u_m^{p+1} \left( \int_t^{t+T} \|\dot{x}(s)\| ds \right)^{p+1}.$$

△

Para poder utilizar este resultado se debe calcular la norma de  $\dot{x}(t)$ :

$$\begin{aligned} \|\dot{x}(t)\| &= \left\| -u(t)[u^T(t)x(t)]^p \right\| \\ &= |u^T(t)x(t)|^p \|u(t)\|. \end{aligned}$$

Es fácil ver que:

$$\begin{aligned} -\dot{V}(t) &\geq \frac{1}{u_m^{(p+1)/p}} \|\dot{x}(t)\|^{\frac{p+1}{p}}, \\ |u^T(t)x(t)|^{p+1} &\geq \frac{\|u(t)\|^{\frac{p+1}{p}}}{u_m^{(p+1)/p}} |u^T(t)x(t)|^{p+1}, \\ \int_t^{t+T} -\dot{V}(s) ds &\geq \frac{1}{u_m^{(p+1)/p}} \int_t^{t+T} \|\dot{x}(s)\|^{\frac{p+1}{p}} ds. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Es conveniente poder dejar la desigualdad en (3.14) sólo en términos de la integral de  $-\dot{V}$ . Como se acaba de mostrar, la norma de  $\dot{x}$  esta relacionada con  $-\dot{V}$ , por ende, se puede vincular la longitud de arco de la trayectoria de  $x$  con la integral de  $-\dot{V}$ , esto se define en la siguiente proposición:

**Proposición 3.5.** *La integral de  $-\dot{V}$  acota por arriba a una función de la longitud de arco de la trayectoria de  $x$ :*

$$\int_t^{t+T} -\dot{V}(s) ds \geq \frac{1}{T^{1/p} u_m^{(p+1)/p}} \left( \int_t^{t+T} \|x(s)\| ds \right)^{\frac{p+1}{p}}.$$

De donde se puede concluir lo siguiente:

$$u_m T^{\frac{1}{p+1}} \left( \int_t^{t+T} -\dot{V}(s) ds \right)^{\frac{p}{p+1}} \geq \int_t^{t+T} \|\dot{x}(s)\| ds.$$

△

La Proposición 3.5 permite reescribir a (3.14) en términos de la integral de  $-\dot{V}$  y de la norma de  $x$  al inicio del intervalo de integración:

$$\int_t^{t+T} -\dot{V}(s)ds \geq \frac{T\varepsilon_p}{2^p} \|x(t)\|^{p+1} - T^2 u_m^{2(p+1)} \left( \int_t^{t+T} -\dot{V}(s)ds \right)^p. \quad (3.16)$$

Por la forma en que está definida la función de Lyapunov,  $V$ , en la expresión anterior podemos sustituir el término de la norma de  $x$  por uno en términos de  $V$ :

$$\int_t^{t+T} -\dot{V}(s)ds \geq 2^{\frac{1-p}{2}} T\varepsilon_p V^{\frac{p+1}{2}}(t) - T^2 u_m^{2(p+1)} \left( \int_t^{t+T} -\dot{V}(s)ds \right)^p. \quad (3.17)$$

Ahora, estimaremos cuanto decrece la función de Lyapunov en el intervalo de tiempo  $T$ , para ello definiremos al decremento,  $V(t) - V(t+T) = \int_t^{t+T} -\dot{V}(s)ds$ , como  $z$ :

$$\begin{aligned} z &\triangleq V(t) - V(t+T), \\ \alpha_1 &\triangleq 2^{\frac{1-p}{2}} T\varepsilon_p, \\ \alpha_2 &\triangleq T^2 u_m^{2(p+1)}. \end{aligned}$$

Así, podemos reescribir a (3.17) como una desigualdad en  $z$ :

$$\begin{aligned} z &\geq \alpha_1 V^{\frac{p+1}{2}}(t) - \alpha_2 z^p, \\ z + \alpha_2 z^p &\geq \alpha_1 V^{\frac{p+1}{2}}(t). \end{aligned}$$

La función  $h(z) = z + \alpha_2 z^p$  es monótonamente creciente para toda  $p > 0$  y cero en  $z = 0$ , por lo tanto, existe la función inversa y tiene las mismas propiedades, es decir,  $h^{-1}$  es monótonamente creciente y  $h^{-1}(0) = 0$ . Este análisis es de utilidad pues no se puede escribir de forma explícita la solución de la desigualdad para una  $p$  arbitraria. Aplicando  $h^{-1}$  a la desigualdad se obtiene:

$$\begin{aligned} h^{-1}(h(z)) &= z \geq h^{-1}\left(\alpha_1 V^{\frac{p+1}{2}}(t)\right), \\ V(t) - V(t+T) &\geq h^{-1}\left(\alpha_1 V^{\frac{p+1}{2}}(t)\right), \\ \int_t^{t+T} \dot{V}(s)ds &\leq -h^{-1}\left(\alpha_1 V^{\frac{p+1}{2}}(t)\right), \\ \int_t^{t+T} \dot{V}(s)ds &\leq -h^{-1}\left(\frac{T\varepsilon_p}{2^p} \|x(t)\|^{p+1}\right). \end{aligned} \quad (3.18)$$

De (3.18) se puede escribir:

$$V(t+T) \leq V(t) - h^{-1}\left(\alpha_1 V^{\frac{p+1}{2}}(t)\right).$$

Como  $h^{-1}$  sólo es cero si  $V(t)$  es cero, siempre habrá un decrecimiento a intervalos de tiempo de longitud  $T$ , aunque éste será cada vez menor con forme  $V$  decrezca. La sucesión de intervalos darán valores cada vez más pequeños de  $V$  y, cuando el número de intervalos tienda a infinito, entonces,  $V$  tenderá a cero.

Cabe señalar que la función inversa puede encontrarse de forma explícita para algunos valores de  $p$ , por ejemplo  $p = \frac{1}{2}$ ,  $p = 1$  y  $p = 2$ .

De cualquier manera, de (3.18) se puede ver que se cumple con los requisitos de [14, Teorema 5] y se puede concluir la estabilidad uniforme y asintótica del origen del sistema (3.12).

### Estimación del tiempo de convergencia

Para estimar la velocidad de convergencia del error se asumirá primero que  $u$  satisface la condición de excitación persistente fuerte siempre, es decir, para todo  $t \geq t_0$  y no exclusivamente por intervalos. Posteriormente, se relajará esta suposición.

Considerando un intervalo de análisis entre  $t_1$  y  $t_2$ , con  $t_2 > t_1 \geq t_0$ , y suponiendo que la siguiente expresión es cierta para todo  $t \geq t_0$ :

$$\int_{t_1}^{t_2} |u^T(s)w| ds \geq \delta(t_2 - t_1), \quad (3.19)$$

para todo  $w \in \mathbb{R}^n$ , con  $\|w\| = 1$ ,

entonces, se puede llegar a una expresión análoga a (3.17) siguiendo el mismo procedimiento que en el apartado anterior. La diferencia radica en que, ahora, la desigualdad tiene una nueva variable, la longitud del intervalo de integración,  $t_2 - t_1$ . La expresión (3.17) se transforma en:

$$\int_{t_1}^{t_2} -\dot{V}(s) ds + u_m^{2(p+1)}(t_2 - t_1)^2 \left( \int_{t_1}^{t_2} -\dot{V}(s) ds \right)^p \geq 2^{\frac{1-p}{2}} \delta^{p+1} V^{\frac{p+1}{2}}(t_1)(t_2 - t_1).$$

Por facilidad, nuevamente se define a la integral de  $-\dot{V}$  como  $z$ , además, denominaremos por  $\tau$  a la longitud del intervalo de integración. Se reescribe la desigualdad anterior en estos términos:

$$\begin{aligned} z + u_m^{2(p+1)} \tau^2 z^p &\geq 2^{\frac{1-p}{2}} \delta^{p+1} V^{\frac{p+1}{2}}(t_1) \tau, \\ z + a \tau^2 z^p &\geq b V^{\frac{p+1}{2}}(t_1) \tau. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Lo ideal sería poder resolver explícitamente la desigualdad anterior para  $z$  en términos de  $V(t_1)$  y  $\tau$ , sin embargo, esto no es posible para valores arbitrarios de  $p$ . En su lugar, se analizará la igualdad, lo que equivale a buscar la frontera de la región en donde se satisface la desigualdad, y se resolverá en términos de  $\tau$  pues, respecto a esta variable, la ecuación es cuadrática. La solución tiene como resultado una función bi-valuada:

$$\tau = \frac{1}{2az^p} \left( bV^{\frac{p+1}{2}}(t_1) \pm \sqrt{b^2V^{p+1}(t_1) - 4az^{p+1}} \right). \quad (3.21)$$

A continuación, se presenta una gráfica esquemática de ésta función respecto a  $z$ :

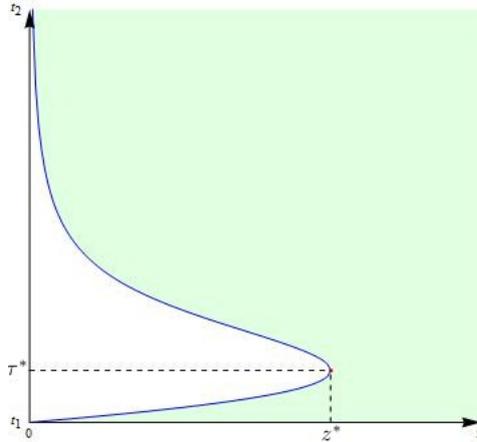


Figura 3.8: Frontera de la desigualdad (3.20) respecto a  $z$

La región resaltada de verde es donde la desigualdad se satisface. Al girar los ejes la gráfica cobra significado:

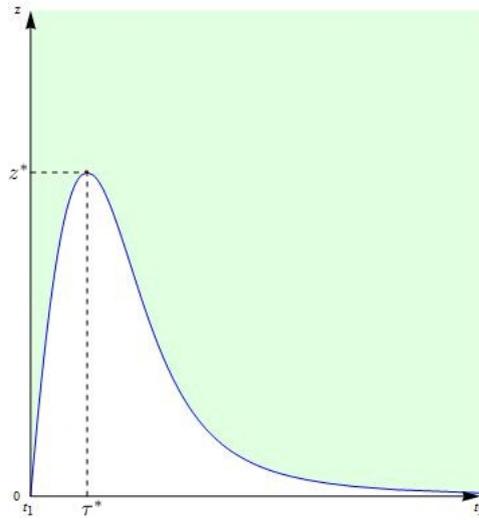


Figura 3.9: Frontera de la desigualdad (3.20) respecto a  $\tau$

Sabemos que  $z$  puede crecer o permanecer igual, debido a que el argumento de la integral que la define solamente puede ser positivo o cero, es por esto que, el que la cota decrezca, no aporta información y el valor de (3.21) con la raíz positiva no tiene significado. Una forma más adecuada del gráfico anterior es el siguiente:

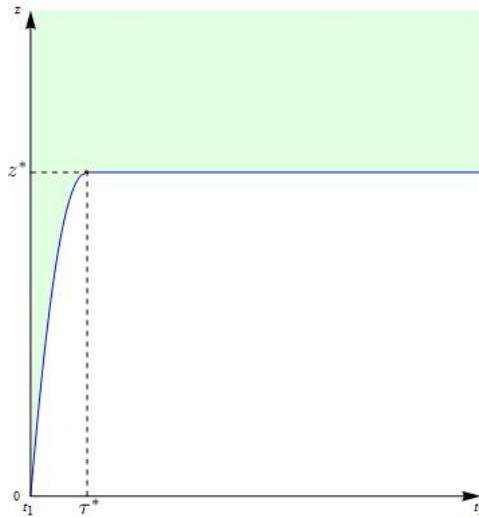


Figura 3.10: Frontera de la desigualdad (3.20) considerando sólo la raíz negativa de (3.21).

El valor real de  $z$ , en general, puede encontrarse en cualquier punto de la región verde para un  $\tau$  dado, sin embargo, el valor más grande que la cota predice es  $z^*$ , el cual ocurre en un tiempo  $t_1 + \tau^*$ . De (3.21) se puede determinar tanto  $z^*$  como  $\tau^*$ . El primero corresponde al valor de  $z$  que hace que el discriminante de (3.21) sea cero, el segundo se obtiene de remplazar  $z^*$  en (3.21). Los valores correspondientes son los

siguientes:

$$z^* = \left(\frac{b^2}{4a}\right)^{\frac{1}{p+1}} V(t_1) \quad , \quad \tau^* = \frac{b^{\frac{1-p}{p+1}}}{2^{\frac{1-p}{p+1}} a^{\frac{1}{p+1}}} V^{\frac{1-p}{2}}(t_1),$$

$$z^* = \frac{\delta^2}{2u_m^2} V(t_1) \quad , \quad \tau^* = \frac{\delta^{1-p}}{2^{\frac{1-p}{2}} u_m^2} V^{\frac{1-p}{2}}(t_1),$$

$$z^* = \alpha V(t_1) \quad , \quad \tau^* = \gamma V^{\frac{1-p}{2}}(t_1),$$

con  $\frac{\delta^2}{2u_m^2} < 1$ . Si se escoge  $t_2 = t_1 + \tau^*$  entonces  $V(t_2) = V(t_1) - z^* = (1 - \alpha)V(t_1)$ . Si reiniciamos la cota cada vez que se llega a  $t_2 = t_1 + \tau^*$  se puede armar la siguiente secuencia:

$i$	$t$	$V(t)$	$\tau_i^*$
0	$t_0$	$V(t_0)$	$\gamma V^{\frac{1-p}{2}}(t_0)$
1	$t_0 + \tau_0^*$	$(1 - \alpha)V(t_0)$	$\gamma ((1 - \alpha)V(t_0))^{\frac{1-p}{2}}$
2	$t_0 + \tau_0^* + \tau_1^*$	$(1 - \alpha)^2 V(t_0)$	$\gamma ((1 - \alpha)^2 V(t_0))^{\frac{1-p}{2}}$
3	$t_0 + \sum_{i=0}^2 \tau_i^*$	$(1 - \alpha)^3 V(t_0)$	$\gamma V^{\frac{1-p}{2}}(t_0)(1 - \alpha)^{3 \frac{1-p}{2}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$t_0 + \sum_{i=0}^{n-1} \tau_i^*$	$(1 - \alpha)^n V(t_0)$	$\gamma V^{\frac{1-p}{2}}(t_0)(1 - \alpha)^{n \frac{1-p}{2}}$

Es obvio que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \alpha)^n V(t_0) = 0,$$

para toda  $p > 0$ . El tiempo total para que esto suceda, es decir, para que hayan transcurrido  $n$  intervalos, se puede calcular de la suma de los  $\tau^*$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma V^{\frac{1-p}{2}}(t_0) \sum_{i=0}^{n-1} \left( (1 - \alpha)^{\frac{1-p}{2}} \right)^i.$$

Si  $0 < p < 1$  entonces  $(1 - \alpha)^{\frac{1-p}{2}} < 1$  y la suma converge a:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma V^{\frac{1-p}{2}}(t_0) \sum_{i=0}^{n-1} \left( (1 - \alpha)^{\frac{1-p}{2}} \right)^i &= \gamma V^{\frac{1-p}{2}}(t_0) \frac{1}{1 - (1 - \alpha)^{\frac{1-p}{2}}} \\ &= \frac{\delta^{1-p}}{2^{\frac{1-p}{2}} u_m^2} \cdot \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{\delta^2}{2u_m^2}\right)^{\frac{1-p}{2}}} \cdot V^{\frac{1-p}{2}}(t_0). \end{aligned}$$

De aquí se puede concluir la convergencia en tiempo finito para toda  $p \in (0, 1)$ . Si  $p = 1$  el término  $(1 - \alpha)^{\frac{1-p}{2}}$  es uno, la suma diverge e indica que la función de Lyapunov siempre tarda el mismo tiempo en decrecer la proporción  $\alpha$ . Para  $p > 1$  se tiene  $(1 - \alpha)^{\frac{1-p}{2}} > 1$ , la suma diverge y se observa que, con forme  $V$  disminuye, se requiere cada vez más tiempo para asegurar un decrecimiento de  $\alpha$  veces el valor de  $V$  al inicio del periodo.

Ahora se realizará el mismo ejercicio pero en el sentido contrario del tiempo. Se asumirá que se conoce el valor de  $V$  en el instante  $t_1$  y se tratará de estimar  $t_0 < t_1$  tal que  $V(t_0) = \infty$ . Para ello se arma la secuencia anterior pero en dirección contraria al avance del tiempo:

$i$	$t$	$V(t)$	$\tau_i^*$
0	$t_1$	$V(t_1)$	$\gamma \left( \frac{V(t_1)}{1-\alpha} \right)^{\frac{1-p}{2}}$
1	$t_1 - \tau_0^*$	$\frac{V(t_1)}{(1-\alpha)}$	$\gamma V(t_1)^{\frac{1-p}{2}} \left( \frac{1}{(1-\alpha)^2} \right)^{\frac{1-p}{2}}$
2	$t_0 - \tau_0^* - \tau_1^*$	$\frac{V(t_1)}{(1-\alpha)^2}$	$\gamma V(t_1)^{\frac{1-p}{2}} \left( \frac{1}{(1-\alpha)^{\frac{1-p}{2}}} \right)^2$
3	$t_0 - \sum_{i=0}^2 \tau_i^*$	$\frac{V(t_1)}{(1-\alpha)^3}$	$\gamma V(t_1)^{\frac{1-p}{2}} \left( \frac{1}{(1-\alpha)^{\frac{1-p}{2}}} \right)^3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$t_0 - \sum_{i=0}^{n-1} \tau_i^*$	$\frac{V(t_1)}{(1-\alpha)^n}$	$\gamma V(t_1)^{\frac{1-p}{2}} \left( \frac{1}{(1-\alpha)^{\frac{1-p}{2}}} \right)^n$

Nuevamente, se hará tender  $n$  a infinito. Para ese caso:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1-\alpha)^n} V(t_1) = \infty.$$

Que es lo que se quería. Para calcular la distancia entre  $t_1$  y  $t_0$  hay que tomar la suma de los  $\tau^*$ :

$$\gamma V(t_1)^{\frac{1-p}{2}} \sum_{i=0}^{n-1} \left( \frac{1}{(1-\alpha)^{\frac{1-p}{2}}} \right)^i.$$

Si  $0 < p \leq 1$  el término  $\frac{1}{(1-\alpha)^{\frac{1-p}{2}}}$  es mayor a uno y la suma diverge, por lo tanto, los algoritmos cuyo exponente se encuentre en este intervalo, no puede hacer que el error de estimación escape de infinito en tiempo finito. Para  $p > 1$  el término  $\frac{1}{(1-\alpha)^{\frac{1-p}{2}}} = (1-\alpha)^{\frac{p-1}{2}}$  es menor a uno y la suma converge a un valor, en específico:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \left( (1-\alpha)^{\frac{p-1}{2}} \right)^i = \frac{1}{1 - (1-\alpha)^{\frac{p-1}{2}}},$$

y:

$$\begin{aligned} t_1 &= t_0 + \gamma V(t_1)^{\frac{1-p}{2}} \cdot \frac{1}{1 - (1-\alpha)^{\frac{p-1}{2}}} \\ &= t_0 + \frac{\delta^{1-p}}{2^{\frac{1-p}{2}} u_m^2} \cdot \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{\delta^2}{2u_m^2}\right)^{\frac{p-1}{2}}} \cdot V^{\frac{1-p}{2}}(t_1). \end{aligned}$$

Por lo tanto, hay escape de infinito en tiempo finito.

Ahora se supondrá que (3.19) solo se satisface durante un periodo  $\tau_1$  iniciando en  $t_1$  y que esto ocurre de manera periódica, con un periodo mínimo de  $\mathcal{T}_1$ . La convergencia en tiempo finito solo ocurrirá si:

$$V(t_1) \leq \left( \frac{2^{\frac{1-p}{2}} u_m^2 \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{\delta^2}{2u_m^2}\right)^{\frac{1-p}{2}}\right)}{\delta^{1-p}} \cdot \tau_1 \right)^{\frac{2}{1-p}}.$$

Como ya se determinó que la función de Lyapunov decrece de forma asintótica para toda  $p > 0$ , siempre existe  $t_1 \geq t_0$  tal que se satisface la desigualdad anterior. Como (3.19) se cumple de manera periódica, siempre llegará una ventana de tiempo en la cual, la función de Lyapunov podrá converger a cero.

Para el escape de infinito lo que se tiene que determinar es a qué valor llega la función de Lyapunov. Para ello se tiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \frac{\delta^{1-p}}{2^{\frac{1-p}{2}} u_m^2} \cdot \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{\delta^2}{2u_m^2}\right)^{\frac{p-1}{2}}} \cdot V^{\frac{1-p}{2}}(t_1), \\ V(t_1) &= \left( \frac{2^{\frac{1-p}{2}} u_m^2 \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{\delta^2}{2u_m^2}\right)^{\frac{p-1}{2}}\right)}{\delta^{1-p}} \cdot \tau_1 \right)^{\frac{2}{1-p}}.\end{aligned}\quad (3.22)$$

El cual representa un valor finito. Así, se concluye la estimación del tiempo de convergencia y se sostiene lo enunciado en el Teorema 3.4.

### 3.2.2. Combinación de términos con diferente exponente

En este apartado se pretende mostrar que, combinar dos o más términos con diferente exponente, también genera un algoritmo de estimación que permite reducir la diferencia entre el estimado de los parámetros y el valor real a cero.

**Teorema 3.5.** *Si se combinan dos o más términos con diferente exponente entonces, el error de estimación de los parámetros permanecerá acotado. Si, además,  $u$  satisface la condición de excitación persistente, Definición 2.5, o la condición de excitación persistente fuerte, Definición 3.1, el error convergerá a cero con una velocidad que será la combinación de la que otorgaría cada término de forma individual.*

*Además, si  $u$  satisface la condición de excitación persistente fuerte y el algoritmo posee por lo menos un término con exponente  $p_1$  que se encuentre en el intervalo  $(0, 1)$  y, al menos otro término con exponente  $p_2 > 1$ , entonces, la convergencia se dará en tiempo fijo uniforme respecto al instante inicial.*

△

Nuevamente, el combinar de forma aditiva dos o más algoritmos con diferente potencia, genera un nuevo algoritmos que otorga las propiedades de convergencia en conjunto que cada término tendría de forma individual. La situación más interesante se presenta al combinar dos términos, uno con exponente menor a 1 y otro con exponente mayor a 1, para este caso, el tiempo de convergencia del error en el peor caso (condición inicial arbitrariamente grande) está acotado, esto se entiende como convergencia en tiempo fijo.

Para demostrar que la afirmación que se acaba de hacer es cierta, se presenta a continuación la dinámica del estimado de los parámetros para la situación en que se combinan dos términos con diferente exponente:

$$\dot{\hat{\theta}} = -u(t) \left( [u^T(t)\hat{\theta}(t) - y(t)]^{p_1} + [u^T(t)\hat{\theta}(t) - y(t)]^{p_2} \right).$$

Este algoritmo induce la siguiente dinámica para el error:

$$\dot{x}(t) = -u(t) \left( [u^T(t)x(t)]^{p_1} + [u^T(t)x(t)]^{p_2} \right).$$

Utilizando la misma función de Lyapunov, una forma cuadrática en  $x$ , su derivada lo largo de las trayectorias del sistema queda expresada como sigue:

$$\begin{aligned}V(x) &= \frac{1}{2} x^T x, \\ \dot{V}(t, x) &= -|u^T(t)x(t)|^{p_1+1} - |u^T(t)x(t)|^{p_2+1} \leq 0.\end{aligned}$$

Nuevamente,  $\dot{V}$  es simultáneamente menor a la derivada de cada caso aislado, por lo tanto, la trayectoria tiene que estar por debajo de las trayectorias correspondientes a la de cada término cuando se presenta de forma independiente; lo anterior se concluye del principio de comparación para desigualdades diferenciales. Este análisis puede ser extendido de forma análoga a la combinación arbitraria de  $m$  términos, en cuyo caso, las conclusiones serán totalmente análogas.

Las propiedades de convergencia y las condiciones para las cuales se presentan ya fueron estudiadas en la sección anterior y la afirmación del Teorema 3.5 se sostiene del resultado del Teorema 3.4.

### 3.2.3. Ejemplos académicos para la estimación de $n$ parámetros con una medición

En esta sección se ejemplificará el comportamiento del algoritmo por medio de simulaciones numéricas. Se harán observaciones cualitativas con base en las gráficas que se presentan para cada ejemplo. En cada caso se muestra la gráfica de la función de Lyapunov como función del tiempo. Se prefiere esto pues es más significativo que mostrar el error en cada parámetro.

Los parámetros para esta primera simulación son:

$$\begin{aligned} u^T(t) &= [\sin(2t) \quad \sin(5t) \quad \sin(7t)], \\ \theta^T &= [1 \quad 2 \quad -1], \\ t &\in [0, 10], \\ \hat{\theta}(0) &= [0 \quad 0 \quad 0]^T, \\ p &= [0.5 \quad 1 \quad 2]. \end{aligned}$$

El comportamiento de las funciones de Lyapunov correspondientes:

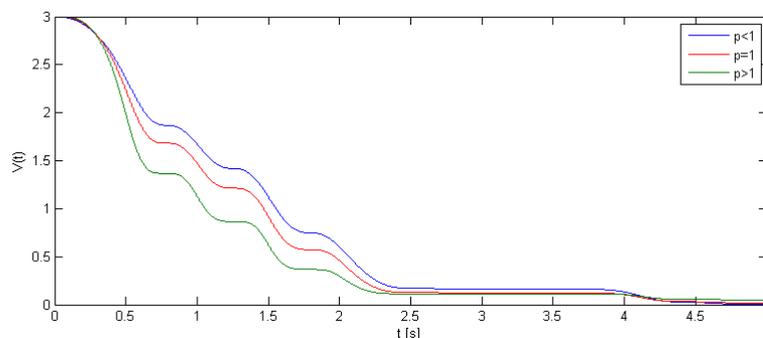


Figura 3.11: Gráfica de la función de Lyapunov para algoritmos con diferente exponente, comportamiento lejos del origen.

Se observa que, para la región mostrada, el algoritmo con  $p > 1$  otorga la mayor velocidad de convergencia mientras que para  $0 < p < 1$  se obtiene la menor. A continuación se muestra la misma gráfica pero para un tiempo mayor:

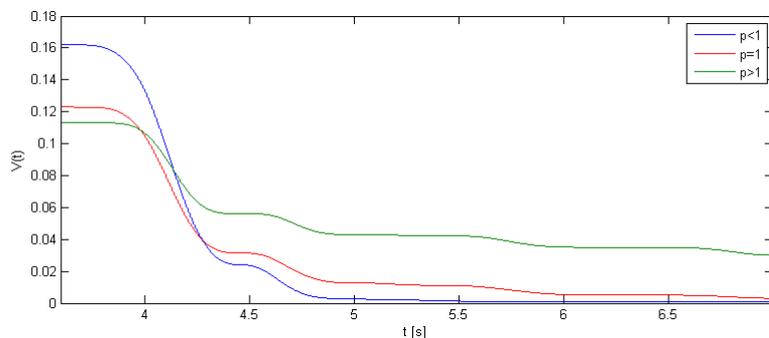


Figura 3.12: Gráfica de la función de Lyapunov para algoritmos con diferente exponente, comportamiento cerca del origen.

Como se había predicho, aquí los papeles se invierten y el algoritmo que permite la mayor velocidad de convergencia del error a cero es aquel cuyo exponente es menor a uno; el que proporciona la menor

velocidad de convergencia es el algoritmo con  $p > 1$ .

En esta segunda simulación se comparará el desempeño del algoritmo lineal contra un algoritmo compuesto, donde un término tiene exponente menor a uno y el otro mayor a uno. Los parámetros para esta simulación son los siguientes:

$$\begin{aligned} u^T(t) &= [\sin(4t) \quad \sin(7t) \quad \sin(13t)], \\ \theta^T &= [1 \quad -2 \quad -1], \\ t &\in [0, 10], \\ \hat{\theta}(0) &= [0 \quad 0 \quad 0]^T, \\ p &= [1 \quad 0.5 \quad 2]. \end{aligned}$$

A continuación se presenta la gráfica de las funciones de Lyapunov correspondientes:

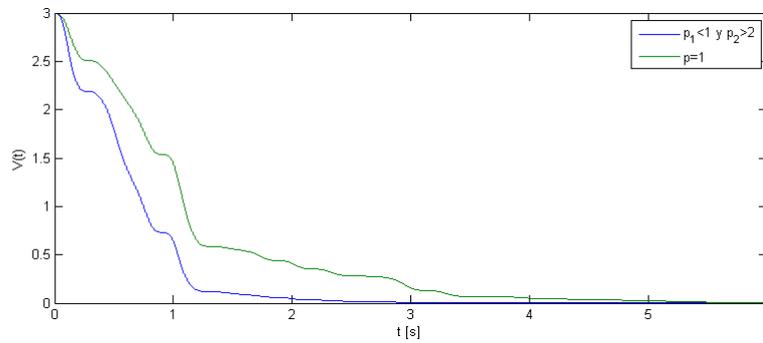


Figura 3.13: Gráfica de la función de Lyapunov para algoritmos con diferente exponente, comportamiento lejos del origen.

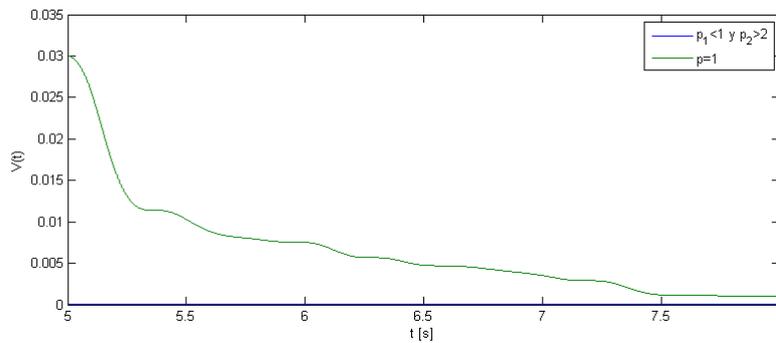


Figura 3.14: Gráfica de la función de Lyapunov para algoritmos con diferente exponente, comportamiento lejos del origen.

Como se observa, el algoritmo compuesto proporciona una velocidad de convergencia del error mayor siempre, que es el resultado esperado.

### 3.2.4. Algoritmo discontinuo, $p = 0$

Hasta este punto no se ha tratado el algoritmo resultante con  $p = 0$ , principalmente porque la prueba que se desarrolló para establecer la estabilidad uniforme y asintótica del origen de (3.12) sólo es válida para  $p > 0$ .

Como se verá en lo subsecuente, para la versión discontinua del algoritmo, es decir, para  $p = 0$ , y en contraste con el caso de la estimación de un parámetro escalar, la condición de excitación persistente no es suficiente para garantizar la convergencia. Para mostrarlo, se desarrollará un contraejemplo, en el cual, a pesar de que  $u$  cumpla con la condición de excitación persistente, el error de estimación no converge a cero. Este algoritmo consigue que el error,  $x$ , permanezca ortogonal a  $u$  a pesar de que ésta varíe.

Para  $n = 2$  y  $p = 0$ , se obtiene la siguiente dinámica:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -u_1(t)\text{sign}(u_1(t)x_1(t) + u_2(t)x_2(t)) \\ \dot{x}_2 &= -u_2(t)\text{sign}(u_1(t)x_1(t) + u_2(t)x_2(t)).\end{aligned}\tag{3.23}$$

Se utiliza la siguiente función de Lyapunov:

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2),$$

cuya derivada respecto al tiempo es la siguiente:

$$\dot{V}(t, x) = -|u_1(t)x_1(t) + u_2(t)x_2(t)|.$$

Si el error no decrece de forma continua implica que la función de Lyapunov deja de decrecer a partir de un instante  $t_1 \geq t_0$  y que  $V(t) = c$ ,  $\forall t \geq t_1$ , al mismo tiempo, esto quiere decir que  $\dot{V}(t) = 0 \forall t \geq t_1$ , o, en otras palabras,  $x$  permanece ortogonal a  $u$  para cualquier instante posterior a  $t_1$ . La trayectoria que debe seguir cada componente de  $x$ , dadas las condiciones ya enunciadas, se puede obtener del siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned}x_1^2 + x_2^2 &= 2c, \\ u_1x_1 &= -u_2x_2.\end{aligned}$$

La solución de dicho conjunto es la siguiente:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= \pm \frac{\sqrt{2c}}{\sqrt{u_1^2(t) + u_2^2(t)}}u_2(t), \\ x_2(t) &= \mp \frac{\sqrt{2c}}{\sqrt{u_1^2(t) + u_2^2(t)}}u_1(t), \\ &\forall t \geq t_1.\end{aligned}$$

Para demostrar que estas trayectorias son factibles, se derivará cada una y luego se comparará con la correspondiente en (3.23), se asumirá que cada  $u_i$  es diferenciable:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2c} u_1(t) (\pm u_1(t)\dot{u}_2(t) \mp u_2(t)\dot{u}_1(t))}{(u_1^2(t) + u_2^2(t))^{3/2}} &= -u_1(t)\text{sign}(0) \\ \frac{\sqrt{2c} u_2(t) (\pm u_1(t)\dot{u}_2(t) \mp u_2(t)\dot{u}_1(t))}{(u_1^2(t) + u_2^2(t))^{3/2}} &= -u_2(t)\text{sign}(0).\end{aligned}$$

En este contexto se entiende que  $\text{sign}(0) \in [-1, 1]$ . Para que las trayectorias anteriores realmente aparezcan, la función  $\text{sign}(0)$  deben tener el mismo valor en cada una de las expresiones:

$$\begin{aligned}\text{sign}(0) &= \frac{\sqrt{2c} (\mp u_1(t)\dot{u}_2(t) \pm u_2(t)\dot{u}_1(t))}{(u_1^2(t) + u_2^2(t))^{3/2}} \\ \text{sign}(0) &= \frac{\sqrt{2c} (\mp u_1(t)\dot{u}_2(t) \pm u_2(t)\dot{u}_1(t))}{(u_1^2(t) + u_2^2(t))^{3/2}}.\end{aligned}$$

Como se observa, en ambos casos el signo de cero tendrá el mismo valor, por lo tanto, dicha trayectoria aparecerá en el sistema sin importar que  $u(t)$  cumpla, o no, con la condición de excitación persistente.

Para concluir el contraejemplo se presenta una simulación en donde se puede apreciar que el error no decrece en magnitud a pesar de que el regresor,  $u$ , satisface la definición 2.5. Los parámetros de la simulación son los siguiente:

$$\begin{aligned}\theta &= [-6 \ 5]^T, \\ t &\in [0, 30][s], \\ \hat{\theta}(0) &= [0 \ 0]^T, \\ u^T(t) &= [\cos(t) \ \cos(2t)],\end{aligned}$$

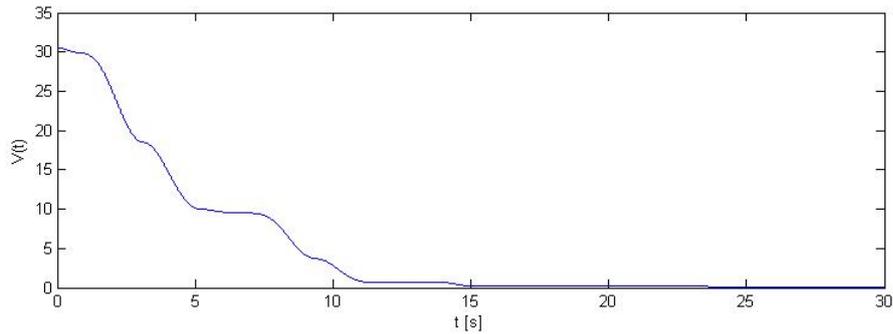


Figura 3.15: Gráfica de  $V$  como función del tiempo.

Casi al final de la gráfica,  $V$  es prácticamente constante.

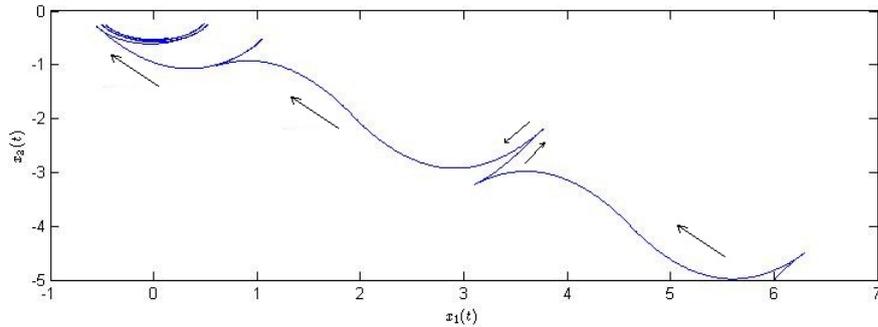


Figura 3.16: Trayectoria del error en el espacio de estados, las flechas indican la dirección del recorrido al incrementar  $t$ .

En esta ultima imagen se puede observar que las trayectorias quedan atrapadas en una vecindad del origen y no siguen aproximándose a él.

### 3.3. Estimación de $n$ parámetros con $m$ mediciones

En la sección anterior se desarrolló un algoritmo que permite la estimación de parámetros asumiendo que el sistema es representado por un modelo paramétrico lineal. Para ello se consideró que sólo se contaba con una medición y, por lo tanto, el regresor  $u$  era un vector. En general puede que se tenga más de una medición, lo cual ayuda a estimar los parámetros debido a que la condición de excitación persistente no debe cumplirla cada columna del regresor, sino, la matriz en conjunto.

Vamos a considerar al mismo sistema representado por un modelo paramétrico lineal, con la diferencia de que ahora asumiremos que la señal de excitación  $u(t)$  pertenece a  $\mathbb{R}^{n \times m}$ :

$$y(t) = u^T(t)\theta,$$

así  $y(t) \in \mathbb{R}^m$ , mientras que  $\theta$  sigue siendo un vector de  $n$  componentes.

Haciendo un símil con el algoritmo introducido en la sección anterior, se propone para esta situación la siguiente ley de adaptación para el estimado de los parámetros:

$$\dot{\hat{\theta}} = -u(t)\|u^T(t)\hat{\theta}(t) - y(t)\|_1^p \text{sign}(u^T(t)\hat{\theta}(t) - y(t)), \quad (3.24)$$

En donde  $\|\cdot\|_1^1$  representa a la norma  $\mathcal{L}_1$  de un vector y  $\text{sign}(a)$ , para  $a \in \mathbb{R}^n$ , se entiende como el vector cuyos elementos son el signo del elemento correspondiente de  $a$ :

$$\text{sign}(a) = [\text{sign}(a_1) \quad \text{sign}(a_2) \quad \cdots \quad \text{sign}(a_n)]^T.$$

Es importante señalar que, si  $y$  es un escalar, se obtiene exactamente el mismo algoritmo que en (3.11).

La dinámica del error de estimación que induce el algoritmo propuesto se escribe a continuación:

$$\dot{x} = -u(t)\|u^T(t)x\|_1^p \text{sign}(u^T(t)x).$$

Introduciendo la siguiente notación:

$$[a]^p = \|a\|_1^p \text{sign}(a), \quad a \in \mathbb{R}^n,$$

el algoritmo se puede escribir de forma compacta:

$$\dot{x} = -u(t)[u^T(t)x]^p. \quad (3.25)$$

Primero mostraremos que el origen del sistema (3.25) es uniformemente estable y, para ello propondremos una función de Lyapunov cuadrática en  $x$ :

$$V(x) = \frac{1}{2}x^T x,$$

cuya derivada a lo largo de las trayectorias del sistema es:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, x) &= \dot{x}^T x = -\|u^T(t)x\|_1^p \left[ \text{sign}^T(u^T(t)x) \right] \left[ u^T(t)x \right] \\ &= -\|u^T(t)x\|_1^{p+1}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Note que  $x^T \text{sign}(x) = \text{sign}^T(x)x = \|x\|_1$ . Este resultado es el análogo al obtenido en la sección anterior, falta demostrar que, además de ser uniformemente estable, también converge de forma asintótica y uniforme a  $x = 0$ , para ello se seguirá un procedimiento semejante al ya mostrado.

Primero, enunciaremos el resultado principal de esta sección:

**Teorema 3.6.** *La condición de excitación persistente, Definición 2.5, garantiza la estabilidad uniforme y asintótica del origen del sistema (3.25), es decir, el algoritmo (3.24) puede estimar los parámetros y permite que el error de estimación converja a cero, de forma asintótica, para toda  $p > 0$ . Si  $p = 1$ , entonces la convergencia será exponencial.*

*Además, si  $u$  satisface la condición de excitación persistente fuerte, definición 3.1, la convergencia será en tiempo finito uniforme para  $p \in (0, 1)$  y uniforme y asintótica para  $p > 1$ , en este último caso, se presenta el fenómeno de escape de infinito en tiempo finito.*

---

<sup>1</sup>En esta sección, si se omite el subíndice de la norma, se debe asumir que se trata de la norma euclidiana

El combinar dos o más términos con diferente exponente genera un algoritmo que presenta una velocidad de convergencia que conjuga las velocidades de convergencia que se presentarían si cada término apareciera de forma individual. Además, si  $u$  satisface la condición de excitación persistente fuerte y, hay por lo menos un término con exponente  $0 < p_1 < 1$  y, por lo menos otro con exponente  $p_2 > 1$ , entonces, la convergencia será en tiempo fijo uniforme.

△

Nuevamente, el que el regresor  $u$  satisfaga la condición de excitación persistente es necesaria y suficiente para asegurar la convergencia al origen, al menos de forma asintótica. Señalamos que, a diferencia del caso anterior, donde sólo se tiene una medición, si  $p = 1$ , no se recupera el algoritmo clásico del gradiente.

En general, para  $p > 1$  se tendrá que el error de estimación convergerá a cero con una velocidad mayor que exponencial en una región lejana al origen. Caso contrario, si  $p \in (0, 1)$ , se tendrá una velocidad de convergencia mayor que exponencial cerca del origen. Cuando se puede satisfacer la condición de excitación persistente fuerte, estas afirmaciones son más claras.

La convergencia en tiempo fijo se entiende en el sentido de que el tiempo de convergencia del error de estimación a cero, para el peor caso, es decir, cuando se presentan condiciones iniciales arbitrariamente grandes, esta acotado.

Para este algoritmo, la derivada de la función de Lyapunov a lo largo de las trayectorias del sistema queda definida en términos de la norma  $\mathcal{L}_1$  y no de la norma Euclidiana, como en el algoritmo tradicional. La norma  $\mathcal{L}_1$  mantiene la congruencia con el desarrollo mostrado en la sección anterior ya que, en dicha situación, la derivada de la función de Lyapunov respecto al tiempo queda en términos de la función valor absoluto.

### 3.3.1. Prueba del Teorema 3.6

Para comenzar la prueba es necesario derivar una expresión a partir de la condición de excitación persistente que se ajuste al algoritmo. Se parte de la siguiente proposición:

**Proposición 3.6.** *Que se satisfaga la condición de excitación persistente implica lo siguiente:*

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \|u^T(s)w\| ds \geq \epsilon \Rightarrow \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \|u^T(s)w\|_1^{p+1} ds \geq \epsilon_p.$$

*Demostración.* Se inicia estableciendo una comparación entre las normas, para ello haremos uso de la definición de cada una y de su cuadrado:

$$\|a\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2},$$

$$\|a\|_2^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 \leq \sum_{i=1}^n |a_i|^2 + 2 \sum_{i,j,i \neq j} |a_i||a_j| = \left( \sum_{i=1}^n |a_i| \right)^2,$$

por lo tanto:

$$\|a\|_2^2 \leq \|a\|_1^2,$$

$$\|a\|_2 \leq \|a\|_1.$$

Entonces:

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \|u^T(s)w\|_1 ds \geq \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \|u^T(s)w\|_2 ds \geq \epsilon.$$

Ahora, con la desigualdad de Hölder, (6.1.2), podemos completar la prueba:

$$\begin{aligned} \left( \int_t^{t+T} 1 ds \right)^{p/p+1} \left( \int_t^{t+T} \|u^T(s)w\|_1^{p+1} ds \right)^{1/p+1} &\geq \int_t^{t+T} \|u^T(s)w\|_1 ds \geq T\epsilon, \\ \int_t^{t+T} \|u^T(s)w\|_1^{p+1} ds &\geq \frac{T^{p+1}}{T^p} \epsilon^{p+1}, \\ \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \|u^T(s)w\|_1^{p+1} ds &\geq \epsilon^{p+1} \triangleq \epsilon_p. \end{aligned}$$

□

Para poder determinar una cota inferior para el decrecimiento de la función de Lyapunov es necesario primero establecer una cota adecuada para el término  $\|u^T(t)x\|_1^{p+1}$ , para ello se presenta la siguiente proposición cuya prueba puede ser encontrada en el anexo B:

**Proposición 3.7.** *La función  $\|u^T(t)x(t)\|_1^{p+1}$  puede ser acotada de la siguiente manera:*

$$\|u^T(t)x(t)\|_1^{p+1} \geq \frac{1}{2^p} \|u^T(t)x(t_1)\|_1^{p+1} - \|u^T(t)(x(t_1) - x(t))\|_1^{p+1}, \quad t_1 \leq t.$$

△

Ahora se calcula el decrecimiento de la función de Lyapunov y se relaciona con la cota que se establece en la Proposición 3.7:

$$\begin{aligned} V(t) - V(t+T) &= - \int_t^{t+T} \dot{V}(s) ds = \int_t^{t+T} \|u^T(s)x(s)\|_1^{p+1} ds, \\ \int_t^{t+T} \|u^T(s)x(s)\|_1^{p+1} ds &\geq \frac{1}{2^p} \int_t^{t+T} \|u^T(s)x(t)\|_1^{p+1} ds - \int_t^{t+T} \|u^T(s)(x(t) - x(s))\|_1^{p+1} ds. \end{aligned}$$

La primera integral del lado derecho puede acotarse por debajo con el resultado de la Proposición 3.6, mientras que para acotar a la segunda, se necesita la siguiente proposición:

**Proposición 3.8.** <sup>2</sup> *Se puede establecer la siguiente cota:*

$$\int_t^{t+T} \|u^T(s)(x(t) - x(s))\|_1^{p+1} ds \leq u_m^{p+1} T \left( \int_t^{t+T} \|\dot{x}(s)\|_1 ds \right)^{p+1},$$

dónde  $u_m$  es el valor máximo que puede tomar la norma de  $u$  y se entiende en el sentido de la definición 2.6.

△

Con ayuda de esto se obtiene lo siguiente:

$$\int_t^{t+T} \|u^T(s)x(s)\|_1^{p+1} ds \geq \frac{\epsilon_p}{2^p} \|x(t)\|_1^{p+1} T - u_m^{p+1} T \left( \int_t^{t+T} \|\dot{x}(s)\|_1 ds \right)^{p+1}. \quad (3.27)$$

De la dinámica del sistema (3.25) podemos calcular la norma de  $\dot{x}$ :

$$\|\dot{x}\|_1 = \|u^T(t)x\|_1^p \|u^T(t)\text{sign}(u^T(t)x)\|_1 \leq \|u^T(t)x\|_1^p \|u(t)\|_1 \|\text{sign}(u^T(t)x)\|_\infty \leq \|u^T(t)x\|_1^p \|u(t)\|_1.$$

<sup>2</sup>La prueba de esta proposición se encuentra en el Anexo B

Para tratar con este término se hará una comparación con la derivada respecto al tiempo de la función de Lyapunov:

$$\begin{aligned} -\dot{V}(t) &= \|u^T(t)x\|_1^{p+1} \geq \frac{1}{u_m^p} (\|u^T(t)x\|_1^p \|u(t)\|_1)^{\frac{p+1}{p}} \\ -\dot{V}(t) &\geq \frac{1}{u_m^p} \|\dot{x}(t)\|_1^{\frac{p+1}{p}} \end{aligned}$$

Integrando:

$$\int_t^{t+T} -\dot{V}(s) ds \geq \frac{1}{u_m^p} \int_t^{t+T} \|\dot{x}(s)\|_1^{\frac{p+1}{p}} ds.$$

Escribimos la desigualdad de Hölder para la integral de  $\|\dot{x}\|_1$ :

$$T^{\frac{1}{p+1}} \left( \int_t^{t+T} \|\dot{x}(s)\|_1^{\frac{p+1}{p}} ds \right)^{\frac{p}{p+1}} \geq \int_t^{t+T} \|\dot{x}(s)\|_1 ds,$$

de donde podemos concluir lo siguiente:

$$\begin{aligned} \int_t^{t+T} -\dot{V}(s) ds &\geq \frac{1}{T^{1/p} u_m^p} \left( \int_t^{t+T} \|\dot{x}(s)\|_1 ds \right)^{\frac{p+1}{p}} \\ T^{1/(p+1)} u_m \left( \int_t^{t+T} -\dot{V}(s) ds \right)^{\frac{p}{p+1}} &\geq \int_t^{t+T} \|\dot{x}(s)\|_1 ds. \end{aligned}$$

Sustituyendo este resultado en (3.27):

$$\begin{aligned} \int_t^{t+T} \|u^T(s)x(s)\|_1^{p+1} ds &\geq \frac{\epsilon_p}{2^p} \|x(t)\|_1^{p+1} T - u_m^{2(p+1)} T^2 \left( \int_t^{t+T} -\dot{V}(s) ds \right)^p \\ \int_t^{t+T} -\dot{V}(s) ds &\geq \frac{\epsilon_p}{2^p} \|x(t)\|_1^{p+1} T - u_m^{2(p+1)} T^2 \left( \int_t^{t+T} -\dot{V}(s) ds \right)^p. \end{aligned}$$

Como ya se había demostrado,  $\|a\|_2 \leq \|a\|_1$  y:

$$\int_t^{t+T} -\dot{V}(s) ds + u_m^{2(p+1)} T^2 \left( \int_t^{t+T} -\dot{V}(s) ds \right)^p \geq \frac{\epsilon_p}{2^p} \|x(t)\|_2^{p+1} T.$$

Así recuperamos la misma expresión que en (3.17) y los argumentos para demostrar la convergencia uniforme y asintótica al origen, la convergencia en tiempo finito uniforme y la propiedad de escape de infinito en tiempo finito son exactamente iguales a los ya desarrollados en la Sección 3.2.1.

Al mismo tiempo, si se combinan dos términos con diferente exponente, tal que el primero este en el intervalo  $(0, 1)$  y el otro sea mayor a 1, entonces también se puede obtener convergencia en tiempo fijo uniforme. Ésto se puede concluir de la derivada de la función de Lyapunov pues, para una suma arbitraria de términos con diferente exponente, esta derivada siempre es menor en magnitud a la correspondiente para cada término si éste apareciera de forma individual:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= - \left( \sum_{i=1}^k \|u^T(t)x\|_1^{p_i} \right) u(t) \text{sign}(u^T(t)x), \\ \dot{V}(t) = \dot{x}^T x &= - \left( \sum_{i=1}^k \|u^T(t)x\|_1^{p_i} \right) \cdot [\text{sign}(u^T(t)x)] [u^T(t)x] \\ &= - \sum_{i=1}^k \|u^T(t)x\|_1^{p_i+1}. \end{aligned}$$

### 3.3.2. Ejemplos académicos para la estimación de $n$ parámetros con $m$ mediciones

Aquí se presentarán simulaciones donde se compara la velocidad de decrecimiento de la función de Lyapunov para diferentes algoritmos en simulación numérica. La primera simulación muestra el comportamiento para algoritmos simples, mientras que la segunda involucra algoritmos compuestos.

Las condiciones para la primera simulación son las siguientes:

$$u(t)^T = \begin{bmatrix} \cos(t) & \cos(2t) & \cos(t) \\ \cos(2t) & \cos(4t) & \cos(4t) \end{bmatrix},$$

$$\theta^T = [2 \quad 3 \quad -5],$$

$$t \in [0, 16],$$

$$\hat{\theta}(0) = [0 \quad 0 \quad 0]^T.$$

Los algoritmos que se compararán son: para  $p = 0.5$ ,  $p = 1$ , algoritmo clásico y  $p = 2$ . Nótese que ninguna de las columnas de la matriz  $u$  cumple con la condición de excitación persistente. El resultado es el siguiente:

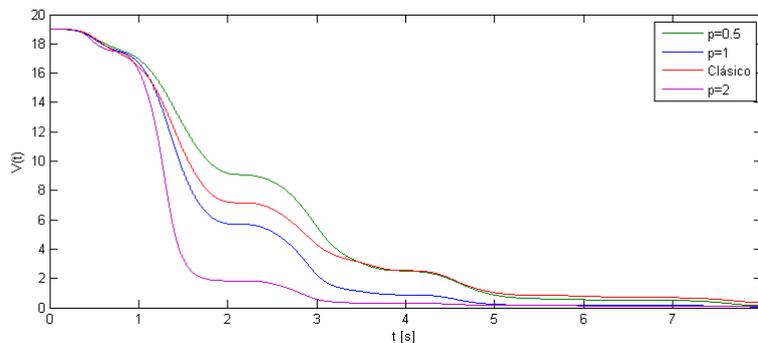


Figura 3.17: Gráfica de la función de Lyapunov para algoritmos con diferente exponente, comportamiento lejos del origen.

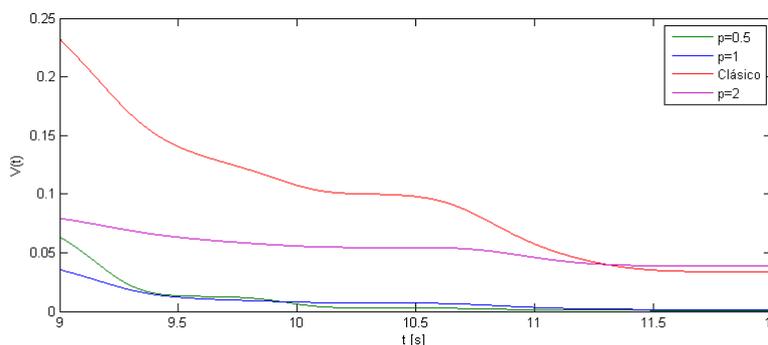


Figura 3.18: Gráfica de la función de Lyapunov para algoritmos con diferente exponente, comportamiento cerca del origen.

Como era de esperarse, lejos del origen, el algoritmo con  $p = 2$  permite que la función de Lyapunov decrezca de forma más rápida. Una vez que  $V$  se acerca al origen, el algoritmo que hace que su función de Lyapunov decrezca más rápidamente es el que tiene exponente igual a 0.5. Algo interesante que sucede es que, el algoritmo con  $p = 1$  otorga una velocidad de decrecimiento de su función de Lyapunov mayor

que el algoritmo clásico, esto a pesar de que para ambos se espera que la velocidad de convergencia sea exponencial.

Para la siguiente simulación los parámetros son los mismos, sin embargo, ahora se comparará a un algoritmo compuesto por un término con exponente de 0.5 y otro con exponente de 2 contra el algoritmo clásico y el algoritmo con  $p = 1$ . Los resultados se muestran a continuación:

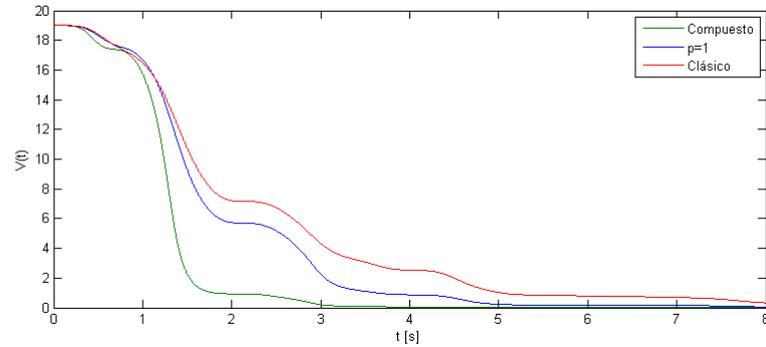


Figura 3.19: Gráfica de la función de Lyapunov para algoritmos con diferente exponente, comportamiento lejos del origen.

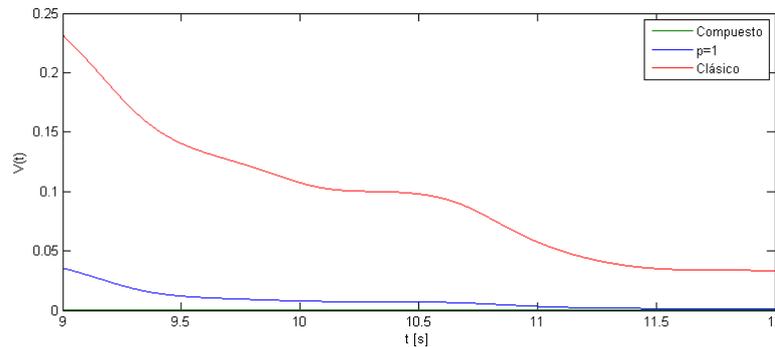


Figura 3.20: Gráfica de la función de Lyapunov para algoritmos con diferente exponente, comportamiento cerca del origen.

Como se espera, el algoritmo compuesto logra que su función de Lyapunov decretezca con mayor velocidad siempre.

## Capítulo 4

# Discretización del algoritmo

Debido a que en la actualidad la manera más fácil y versátil de implementar las cosas es haciendo uso de computadoras digitales es importante estudiar la manera de realizar el algoritmo (3.11) como un sistema discreto. Cuando se hace uso de sistemas digitales para adquirir señales analógicas se toman muestras que, en general, estarán igualmente espaciadas. Durante el intervalo entre muestra y muestra se desconoce que sucede con la señal, una forma de llenar ese espacio es suponer que la señal permaneció constante.

Tomando en cuenta la manera general en que operan los sistemas digitales, para analizar el algoritmo se asumirá que la señal de excitación  $u(t)$  es una señal constante a tramos y, además, cada tramo tendrá la misma duración, esto debido al muestreo. La longitud de cada intervalo será denominada con  $h$ . Para simplificar el análisis solamente se considerará el caso donde se desea estimar parámetros constantes.

Se buscará la respuesta del sistema (3.11) ante señales de entrada constantes. Para  $0 < p < 1$  y para  $p > 1$  se presenta la forma adecuada de actualizar al estimado del estado con cada nueva muestra:

- Se define el error de estimación de la salida para la muestra  $k$ -ésima:

$$e_k \triangleq u_k^T \hat{\theta}_k - y_k = u_k^T x_k.$$

- El algoritmo discreto para  $0 < p < 1$  es:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \hat{\theta}_{k+1} = \hat{\theta}_k & \text{si } u_k = 0 \text{ o } e_k = 0 \\ \hat{\theta}_{k+1} = \hat{\theta}_k - \frac{1}{\|u_k\|^2} u_k \left( e_k - \text{sign}(e_k) (|e_k|^{1-p} - (1-p)\|u_k\|^2 h)^{\frac{1}{1-p}} \right) & \text{si } u_k \neq 0 \text{ y } e_k \neq 0 \\ & \text{y } h < \frac{|e_k|^{1-p}}{(1-p)\|u_k\|^2} \\ \hat{\theta}_{k+1} = \hat{\theta}_k - \frac{1}{\|u_k\|^2} u_k e_k & \text{si } u_k \neq 0 \text{ y } e_k \neq 0 \\ & \text{y } h \geq \frac{|e_k|^{1-p}}{(1-p)\|u_k\|^2} \end{array} \right. \quad (4.1)$$

- Y para  $p > 1$ :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \hat{\theta}_{k+1} = \hat{\theta}_k & \text{si } u_k = 0 \text{ o } e_k = 0 \\ \hat{\theta}_{k+1} = \hat{\theta}_k - \frac{1}{\|u_k\|^2} u_k \left( e_k - \text{sign}(e_k) \left( \frac{1}{|e_k|^{p-1}} + (p-1)\|u_k\|^2 h \right)^{-\frac{1}{p-1}} \right) & \text{si } u_k \neq 0 \text{ y } e_k \neq 0 \end{array} \right. \quad (4.2)$$

Se desestima el caso  $p = 1$  debido a que la respuesta es exponencial y para los otros valores de  $p$  se tendrán velocidades de convergencia mayores, al menos por regiones, del error de estimación.

Debido a que esto se corresponde con la solución exacta de la dinámica del algoritmo para la situación descrita, si  $u(t)$  satisface la condición de excitación persistente, presentará las propiedades de estabilidad y convergencia que se mostraron para el algoritmo (3.11) en el Teorema 3.4. Es importante mencionar

que una señal constante a tramos no puede satisfacer la condición de excitación persistente fuerte.

En ambos casos, el algoritmo puede ser dividido en una parte lineal y en otra no lineal. Para  $0 < p < 1$  la parte no lineal desaparece cuando:

$$h \geq \frac{|e_k|^{1-p}}{(1-p)\|u_k\|^2},$$

lo cual ocurre de manera permanente para valores de  $x_k$  muy pequeños. Para  $p > 1$  la parte no lineal tiende a disminuir para valores de  $e_k$  muy grandes, o, de manera indirecta, para valores de  $x_k$  equivalentes en magnitud. En ambos casos, la parte que beneficia para disminuir de manera drástica al error de estimación es la parte lineal.

Si despreciamos el término no lineal en ambos algoritmos, se obtiene un nuevo algoritmo que es independiente del exponente  $p$  que se haya elegido. El algoritmo correspondiente es el siguiente:

$$\begin{cases} \hat{\theta}_{k+1} = \hat{\theta}_k & \text{si } u_k = 0 \text{ o } e_k = 0 \\ \hat{\theta}_{k+1} = \hat{\theta}_k - \frac{1}{\|u_k\|^2} u_k e_k & \text{si } u_k \neq 0 \text{ y } e_k \neq 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

Este algoritmo induce la siguiente dinámica en el error de estimación:

$$\begin{aligned} x_k &= \hat{\theta}_k - \theta, \\ x_{k+1} &= \left( \mathbb{I} - \frac{1}{\|u_k\|^2} u_k u_k^T \right) x_k \end{aligned} \quad (4.4)$$

El comportamiento de este algoritmo se resume en el siguiente teorema:

**Teorema 4.1.** *Si  $u_k$  satisface la condición de excitación persistente en el sentido de la Definición 2.13, entonces el origen del sistema (4.4) es uniforme y exponencialmente estable.*

Además, si se presenta alguna de las siguientes situaciones:

- En cualquier instante, el error de estimación  $x_k$  es paralelo a  $u_k$ .
- La sucesión  $\{u_1 \ u_2 \ u_3 \ \cdots \ u_n\}$  está conformada por vectores que sean ortogonales entre sí.

El error de estimación,  $x_k$ , converge en tiempo finito.

△

Como se mencionó, una señal constante a tramos no satisface la condición de excitación persistente fuerte, sin embargo, esto no implica que el algoritmo (4.3) o inclusive el algoritmo (4.1) no puedan converger en tiempo finito uniforme. Debido a que las condiciones donde se presenta la convergencia en tiempo finito son muy restrictivas, el que suceda, es más bien un caso raro que la generalidad.

En las siguientes secciones se mostrará cómo se obtuvieron los algoritmos (4.1) y (4.2) a partir de la dinámica que induce el algoritmo (3.11) en el error así como la prueba del Teorema 4.1.

## 4.1. Discretización

En lugar de analizar al algoritmo 3.11 directamente, se analizará la dinámica de error que induce, esto debido a que se quiere que el algoritmo discreto tenga el mismo efecto.

Se retoma la dinámica de (3.12), para  $p \neq 1$ , y se sustituye  $u(t)$  por una señal  $u$  constante en el intervalo  $t \in [t_0, t_1]$ :

$$\dot{x} = -u[u^T x]^p.$$

Se define la variable auxiliar  $z$  de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} z &\triangleq u^T x, \\ \dot{z} &= u^T \dot{x} = -\|u\|^2 [u^T x]^p = -\|u\|^2 [z]^p. \end{aligned}$$

Esta ecuación diferencial escalar se puede resolver de manera analítica por integración. Se hace notar que el signo de  $z$  nunca cambia, pues no puede cruzar por cero, ya que al llegar a este valor, su derivada es nula.

Ahora, se separan las variables y se integra:

$$\text{sign}(z(t_0)) \int_{z(t_0)}^{z(t)} \frac{dz}{|z|^p} = -\|u\|^2 \int_{t_0}^t dt,$$

la solución de  $z$  es la siguiente:

$$z(t) = \left( |z(t_0)|^{1-p} - (1-p)\|u\|^2(t-t_0) \right)^{\frac{1}{1-p}} \text{sign}(z(t_0)),$$

Lo anterior es cierto para  $z(t_0) \neq 0$ . Además, si  $p \in (0, 1)$ , existe un tiempo  $t'_1$  para el cual  $t \geq t'_1 \Rightarrow z(t) = 0$ :

$$t'_1 = \frac{1}{(1-p)\|u\|^2} |z(t_0)|^{1-p} + t_0.$$

En otras palabras, si mantenemos a  $u$  constante el tiempo suficiente,  $x$  se volverá ortogonal a ella ya que  $z = 0 \Rightarrow u^T x = 0$ . Para  $p \geq 1$ , esto no sucede.

Con la solución de  $z(t)$  podemos encontrar la solución de  $x(t)$ :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -u [z(t)]^p \\ &= -u \left( |z(t_0)|^{1-p} - (1-p)\|u\|^2(t-t_0) \right)^{\frac{p}{1-p}} \text{sign}(z(t_0)) \\ &= -u \left( |u^T x(t_0)|^{1-p} - (1-p)\|u\|^2(t-t_0) \right)^{\frac{p}{1-p}} \text{sign}(u^T x(t_0)). \end{aligned}$$

La función que se obtiene es integrable, procediendo se obtiene la solución de  $x(t)$ :

$$\begin{aligned} x(t) - x(t_0) &= -u \text{sign}(u^T x(t_0)) \int_{t_0}^t \left( |u^T x(t_0)|^{1-p} - (1-p)\|u\|^2(t-t_0) \right)^{\frac{p}{1-p}} dt, \\ x(t) &= x(t_0) - u \frac{1}{\|u\|^2} \left( u^T x(t_0) - \text{sign}(u^T x(t_0)) \left( |u^T x(t_0)|^{1-p} - (1-p)\|u\|^2(t-t_0) \right)^{\frac{1}{1-p}} \right). \end{aligned}$$

Si  $p \in (0, 1)$  es necesario definir la dinámica a tramos, esto debido a que el término  $|u^T x(t_0)|^{1-p} - (1-p)\|u\|^2(t-t_0)$  puede hacerse cero o, incluso, tomar valores negativos:

$$x(t) = \begin{cases} x(t_0) - u \frac{1}{\|u\|^2} \left( u^T x(t_0) - \text{sign}(u^T x(t_0)) \left( |u^T x(t_0)|^{1-p} - (1-p)\|u\|^2(t-t_0) \right)^{\frac{1}{1-p}} \right) & \text{si } t \leq \frac{1}{(1-p)\|u\|^2} |u^T x(t_0)|^{1-p} + t_0 \\ \left( \mathbb{I} - \frac{1}{\|u\|^2} uu^T \right) x(t_0) & \text{si } t \geq \frac{1}{(1-p)\|u\|^2} |u^T x(t_0)|^{1-p} + t_0 \end{cases}$$

Ahora, se calculará el valor de  $x$  en el instante  $t_1$ . Si la diferencia entre  $t_1$  y  $t_0$  es  $h$ , entonces, para  $0 < p < 1$  se tiene:

$$x(t_1) = \begin{cases} x(t_0) - u \frac{1}{\|u\|^2} \left( u^T x(t_0) - \text{sign}(u^T x(t_0)) \left( |u^T x(t_0)|^{1-p} - (1-p)\|u\|^2 h \right)^{\frac{1}{1-p}} \right) & \text{si } h \leq \frac{1}{(1-p)\|u\|^2} |u^T x(t_0)|^{1-p} \\ \left( \mathbb{I} - \frac{1}{\|u\|^2} uu^T \right) x(t_0) & \text{si } h \geq \frac{1}{(1-p)\|u\|^2} |u^T x(t_0)|^{1-p}, \end{cases}$$

y para  $p > 1$ :

$$x(t_1) = x(t_0) - u \frac{1}{\|u\|^2} \left( u^T x(t_0) - \text{sign}(u^T x(t_0)) \left( |u^T x(t_0)|^{1-p} - (1-p)\|u\|^2 h \right)^{\frac{1}{1-p}} \right).$$

Si se analiza el intervalo de tiempo  $[kh, (k+1)h]$ , asumiendo  $u(kh) \neq 0$  ( $u(kh) = u_k$ ) así como  $u^T(hk)x(hk) \neq 0$  ( $x(hk) = x_k$  y  $x(kh+h) = x_{k+1}$ ), la dinámica del error se puede reescribir de la siguiente forma:

Para  $0 < p < 1$ :

$$x_{k+1} = \begin{cases} x_k - u_k \frac{1}{\|u_k\|^2} \left( u_k^T x_k - \text{sign}(u_k^T x_k) \left( |u_k^T x_k|^{1-p} - (1-p)\|u_k\|^2 h \right)^{\frac{1}{1-p}} \right) & \text{si } h \leq \frac{1}{(1-p)\|u_k\|^2} |u_k^T x_k|^{1-p} \\ \left( \mathbb{I} - \frac{1}{\|u_k\|^2} u_k u_k^T \right) x_k & \text{si } h \geq \frac{1}{(1-p)\|u_k\|^2} |u_k^T x_k|^{1-p} \end{cases}, \quad (4.5)$$

y para  $p > 1$ :

$$x_{k+1} = x_k - u_k \frac{1}{\|u_k\|^2} \left( u_k^T x_k - \text{sign}(u_k^T x_k) \left( |u_k^T x_k|^{1-p} - (1-p)\|u_k\|^2 h \right)^{\frac{1}{1-p}} \right). \quad (4.6)$$

Los algoritmos discretos que inducen las dinámicas de error (4.5) y (4.6) son (4.1) y (4.2), respectivamente.

## 4.2. Prueba del Teorema 4.1

Si se asume que  $h$  siempre es lo suficientemente grande, la dinámica del error (4.5) estará descrita por el siguiente sistema discreto, lineal y variante en el tiempo:

$$x_{k+1} = \left( \mathbb{I} - \frac{1}{\|u_k\|^2} u_k u_k^T \right) x_k.$$

Vale la pena aclarar aquí que, cuando  $u_k = 0$ ,  $x_{k+1} = x_k$ . La ley de adaptación que induce la dinámica de error anterior, bajo la suposición de que los parámetros son constantes, es (4.3).

Para comenzar el análisis de estabilidad propondremos una función de Lyapunov cuadrática:

$$V_k(x) = \|x_k\|^2.$$

El valor siguiente de  $V$ ,  $V_{k+1}$ , puede ser calculado de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} V_{k+1}(x, k) &= \|x_{k+1}\|^2 = x_k^T \left( \mathbb{I} - \frac{1}{\|u_k\|^2} u_k u_k^T \right)^2 x_k \\ &= x_k^T \left( \mathbb{I} - \frac{1}{\|u_k\|^2} u_k u_k^T \right) x_k \\ &= x_k^T x_k - \frac{(u_k^T x_k)^2}{\|u_k\|^2} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Ya que la matriz  $\mathbb{I} - \frac{1}{\|u_k\|^2} u_k u_k^T$  es simétrica e idempotente pues es un proyector.

Recordando la definición geométrica del producto punto:

$$\begin{aligned} V_{k+1} &= x_k^T x_k - \frac{\|u_k\|^2 \|x_k\|^2 \cos^2(\alpha)}{\|u_k\|^2} \\ &= \|x_k\|^2 - \|x_k\|^2 \cos^2(\alpha) = V_k (1 - \cos^2(\alpha)) \\ &= V_k \sin^2(\alpha), \end{aligned}$$

dónde  $\alpha$  es el ángulo entre  $u_k$  y  $x_k$ . Esto demuestra la estabilidad del algoritmo más no la convergencia. Para poder mostrar que el error de estimación converge a cero es necesario pedir que  $u_k$  satisfaga la condición de excitación persistente en el sentido de la definición 2.13.

Assumiendo que  $u_k$  es de excitación persistente, se retoma (4.7) y se acomoda para reflejar el decremento de la función de Lyapunov, además se suman todos los decrementos después de una sucesión de  $T$

muestras:

$$V_k - V_{k+1} = \frac{(u_k^T x_k)^2}{\|u_k\|^2},$$

$$\sum_{i=k}^{k+T} (V_i - V_{i+1}) = \sum_{i=k}^{k+T} \frac{(u_i^T x_i)^2}{\|u_i\|^2}.$$

Por convexidad se tiene la siguiente desigualdad:

$$(u_i^T x_k)^2 = (u_i^T (x_k - x_i) + u_i^T x_i)^2 \leq 2 \left( (u_i^T (x_k - x_i))^2 + (u_i^T x_i)^2 \right),$$

$$(u_i^T x_i)^2 \geq \frac{1}{2} (u_i^T x_k)^2 - (u_i^T (x_k - x_i))^2,$$

$$\sum_{i=k}^{k+T} (u_i^T x_i)^2 \geq \frac{1}{2} \sum_{i=k}^{k+T} (u_i^T x_k)^2 - \sum_{i=k}^{k+T} (u_i^T (x_k - x_i))^2.$$

Con ella se puede acotar por debajo a la suma de los decrecimientos de la función de Lyapunov en el intervalo:

$$\begin{aligned} \sum_{i=k}^{k+T} (V_i - V_{i+1}) &\geq \frac{1}{2} \sum_{i=k}^{k+T} \frac{(u_i^T x_k)^2}{\|u_i\|^2} - \sum_{i=k}^{k+T} \frac{(u_i^T (x_k - x_i))^2}{\|u_i\|^2} \\ &\geq \frac{1}{2u_m^2} \sum_{i=k}^{k+T} (u_i^T x_k)^2 - \frac{1}{u_m^2} \sum_{i=k}^{k+T} (u_i^T (x_k - x_i))^2 \\ &\geq \frac{1}{2u_m^2} \sum_{i=k}^{k+T} (u_i^T x_k)^2 - \sum_{i=k}^{k+T} \|x_k - x_i\|^2. \end{aligned}$$

Se busca ahora acotar por arriba a la segunda suma del lado derecho de la desigualdad:

$$\|x_k - x_i\| \leq \sum_{j=k}^{k+T} \|x_{j+1} - x_j\| = \sum_{j=k}^{k+T} \left\| x_j - \frac{u_j^T x_j}{\|u_j\|^2} u_j - x_j \right\| = \sum_{j=k}^{k+T} \frac{|u_j^T x_j|}{\|u_j\|},$$

$$\|x_k - x_i\|^2 \leq \left( \sum_{j=k}^{k+T} \frac{|u_j^T x_j|}{\|u_j\|} \right)^2.$$

De la desigualdad de Cauchy-Schwarz para normas en espacios de dimensión finita:

$$\left( \sum_{i=k}^{k+T} \frac{|u_i^T x_i|}{\|u_i\|} \right)^2 \leq T \sum_{i=k}^{k+T} \frac{(u_i^T x_i)^2}{\|u_i\|^2},$$

y:

$$\sum_{i=k}^{k+T} \|x_k - x_i\|^2 \leq T^2 \sum_{i=k}^{k+T} \frac{(u_i^T x_i)^2}{\|u_i\|^2}.$$

Regresando a la desigualdad original:

$$\begin{aligned} \sum_{i=k}^{k+T} (V_i - V_{i+1}) &\geq \frac{1}{2u_m^2} \sum_{i=k}^{k+T} (u_i^T x_k)^2 - T^2 \sum_{i=k}^{k+T} \frac{|u_i^T x_i|^2}{\|u_i\|^2} \\ &\geq \frac{1}{2u_m^2} \sum_{i=k}^{k+T} (u_i^T x_k)^2 - T^2 \sum_{i=k}^{k+T} (V_i - V_{i+1}), \\ (1 + T^2) \sum_{i=k}^{k+T} (V_i - V_{i+1}) &\geq \frac{1}{2u_m^2} \sum_{i=k}^{k+T} (u_i^T x_k)^2, \\ \sum_{i=k}^{k+T} (V_i - V_{i+1}) &\geq \frac{1}{2u_m^2(1 + T^2)} \sum_{i=k}^{k+T} (u_i^T x_k)^2. \end{aligned}$$

De la condición de excitación persistente y de la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned}\sum_{i=k}^{k+T} (u_i^T x_k)^2 &\geq \frac{1}{T} \left( \sum_{i=k}^{k+T} |u_i^T x_k| \right)^2 \\ &\geq \frac{1}{T} T^2 \epsilon^2 \|x_k\|^2 = T \epsilon^2 \|x_k\|^2.\end{aligned}$$

Continuando con el desarrollo:

$$\sum_{i=k}^{k+T} (V_i - V_{i+1}) \geq \frac{T \epsilon^2}{2u_m^2 (1 + T^2)} \|x_k\|^2.$$

Finalmente, desarrollando la suma:

$$\begin{aligned}V_k - V_{k+T+1} &\geq \frac{T \epsilon^2}{2u_m^2 (1 + T^2)} V_k, \\ V_{k+T+1} &\leq \left( 1 - \frac{T \epsilon^2}{2u_m^2 (1 + T^2)} \right) V_k.\end{aligned}$$

Como  $\epsilon$  se puede hacer arbitrariamente pequeña, siempre se puede garantizar que  $u_m > \epsilon$  y el término que acompaña a  $V_k$  siempre será menor a uno. Aquí podemos asegurar la convergencia exponencial al origen en presencia de excitación persistente.

Para completar la prueba del teorema, considérese una situación hipotética donde  $x = \alpha u$ , en tal situación el valor de error siguiente sería:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= \left( \mathbb{I} - \frac{1}{\|u_k\|^2} u_k u_k^T \right) x_k, \\ &= \alpha u_k - \frac{\alpha}{\|u_k\|^2} u u_k^T u_k, \\ &= \alpha u - \alpha u = 0.\end{aligned}$$

Se puede concluir que, si en cualquier instante la señal  $u$  es paralela al error de estimación de los parámetros  $x_k$ , entonces, en el intervalo siguiente,  $k + 1$ , dicho error convergerá a cero.

Por otra parte, si el error es perpendicular a  $u$ , éste no disminuirá:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= \left( \mathbb{I} - \frac{1}{\|u_k\|^2} u_k u_k^T \right) x_k, \\ &= x_k - \frac{1}{\|u_k\|^2} u_k (u_k^T x_k) = x_k.\end{aligned}$$

La segunda situación en la que el error puede converger en tiempo finito se presenta si, en una sucesión de  $n$  elementos de  $u$ , todos ellos son ortogonales entre sí. El error después de las  $n$  muestras se puede calcular de la siguiente forma:

$$x_{k+n} = \left( \prod_{i=k}^{k+n} \left( \mathbb{I} - \frac{1}{\|u_i\|^2} u_i u_i^T \right) \right) x_k$$

Como todas las  $u_i$  son ortogonales entre sí, los productos mixtos se anula y la matriz que resulta es:

$$\mathbb{I} - \sum_{i=k}^{k+n} \frac{1}{\|u_i\|^2} u_i u_i^T = 0$$

Entonces,  $x_{k+1} = 0$ . Con esto se concluye la prueba del Teorema 4.1.

### 4.3. Ejemplos académicos

En esta sección se pretende comparar al algoritmo discreto clásico mostrado en la Sección 2.2.7 contra el algoritmo lineal (4.3) por medio de simulación. La comparación es complicada pues el algoritmo del gradiente descendente necesita una ganancia  $\Gamma$  que hay que diseñar para que sea estable, mientras que, el algoritmo que se propone en esta tesis no requiere de ella.

Para esta primera simulación los parámetros son los siguientes:

$$\begin{aligned} h &= 0.1[s], \\ u_k^T &= [\cos(3kh) \ \cos(7kh) \ \cos(10kh)], \\ \theta^T &= [-2 \ 3 \ 1], \\ t &\in [0, 15], \\ \hat{\theta}_0^T &= [0 \ 0 \ 0], \\ \Gamma &= \mathbb{I}_3. \end{aligned}$$

Se presenta la gráfica de la función de Lyapunov correspondiente a cada caso como una función del tiempo:

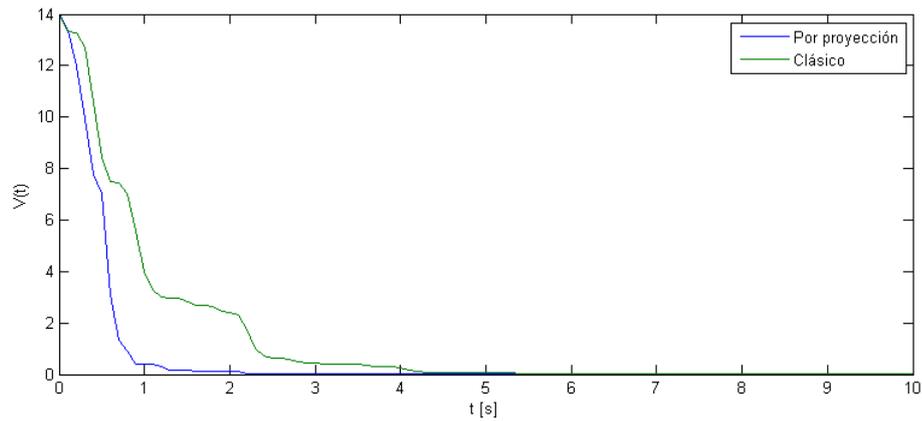


Figura 4.1: Gráfica de la función de Lyapunov para algoritmos discretos.

Y a continuación, el comportamiento del estimado de los parámetros en cada algoritmo:

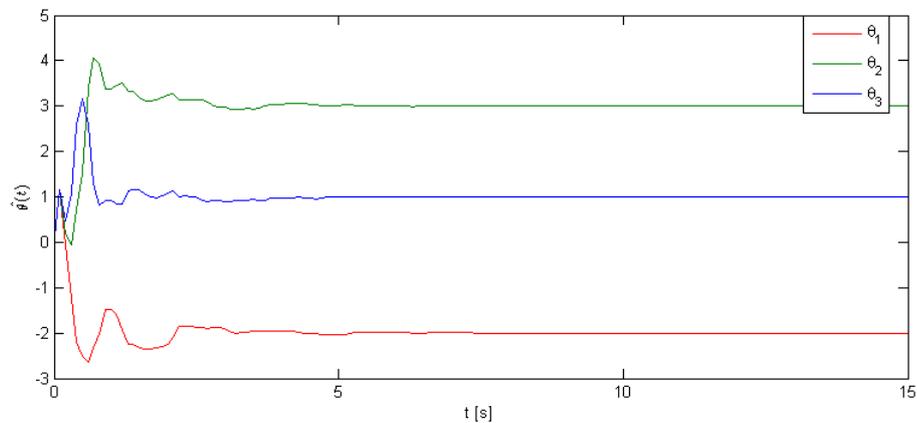


Figura 4.2: Gráfica del comportamiento de los parámetros para el algoritmo por proyección (4.3).

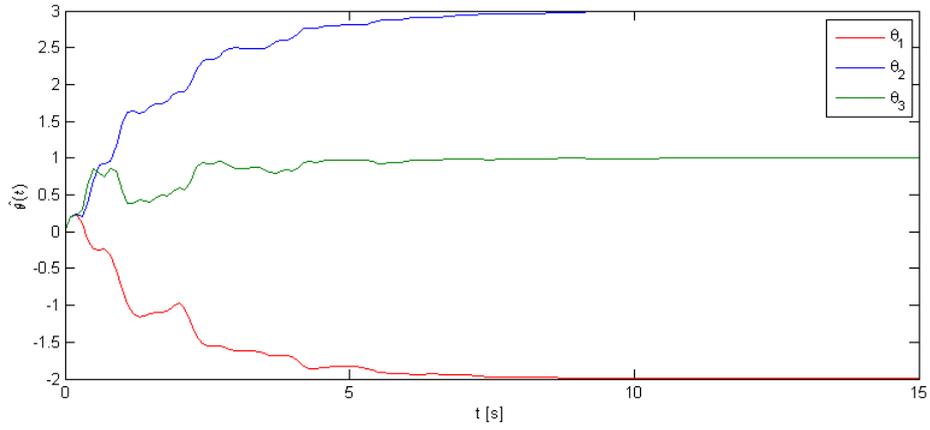


Figura 4.3: Gráfica del comportamiento de los parámetros para el algoritmo clásico.

Para esta simulación el comportamiento del algoritmo que se propone en (4.3) es siempre mejor que el clásico, sin embargo, esta comparación debe ser tomada con reserva. El desempeño de ambos algoritmos esta sujeto a las características de  $u$  y de la ganancia  $\Gamma$  que se haya escogido para el algoritmo clásico. Las verdaderas ventajas del algoritmo (4.3) radican en que es independiente del periodo de muestreo,  $h$ , y que no quita de la mesa la convergencia en tiempo finito.

# Capítulo 5

## Conclusión

### 5.1. Resumen General

A lo largo del trabajo se estudió un método que permite determinar los parámetros de un sistema representado por un modelo paramétrico lineal, cuya estructura es la siguiente:

$$y = u^T(t)\theta.$$

Para este sistema se estudiaron dos situaciones, en ambas se consideró que los parámetros, condensados en el vector  $\theta$ , eran constantes. La primera de ellas asumía que sólo se contaba con una medición y por ello  $u(t) \in \mathbb{R}^n$ , mientras que, en la segunda, se supuso que  $y \in \mathbb{R}^m$  y por lo tanto  $u(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ . Con independencia del número de mediciones, la dinámica propuesta para el estimado de los parámetros, i.e. el algoritmo de estimación, fue la siguiente:

$$\dot{\hat{\theta}} = -u(t)[u^T(t)\hat{\theta} - y]^p$$

Se introdujo la notación  $\lceil v \rceil^q \triangleq \|v\|_1^q \text{sign}(v)$  para poder expresar el algoritmo en forma compacta.

Si se asume que el regresor  $u(t)$  cumple con la condición de excitación persistente, Definición 2.5, entonces, los resultados obtenidos son los siguientes:

- Si sólo se desea estimar un parámetro y se tiene una medición:
  - El algoritmo con  $p \in [0, 1)$  puede estimar el parámetro en tiempo finito uniforme.
  - El algoritmo con  $p = 1$  corresponde al algoritmo clásico y la convergencia es exponencial.
  - El algoritmo con  $p > 1$  converge de forma uniforme y asintótica pero puede escapar de infinito en tiempo finito, esto es útil cuando el error de estimación inicial puede ser muy grande.
  - Si se combinan dos términos, uno con  $0 \leq p < 1$  y otro con  $p > 1$ , el tiempo de convergencia del error para el peor caso, está acotado por una constante independiente del tiempo inicial.
  - Además, si el parámetro varía con el tiempo y su velocidad de cambio está acotada, el algoritmo con  $p = 0$  y  $\text{sign}(u(t))$ , en lugar de  $u(t)$ , puede estimarlo siempre que el regresor no cruce por o permanezca en cero.
- Si se desea estimar más de un parámetro, sin importar si se cuenta con una o más mediciones:
  - El algoritmo converge, por lo menos, de manera uniforme y asintótica para  $p > 0$ .
  - Con  $p \in (0, 1)$  la velocidad de convergencia será mayor que para  $p = 1$  en una vecindad muy cercana al origen.
  - Con  $p = 1$  la convergencia del algoritmo es exponencial. Si, además, se tiene una única medición, el algoritmo se corresponde con el algoritmo del gradiente descendente, en caso contrario no.

- Con  $p > 1$  la velocidad de convergencia será mayor que exponencial si el error se encuentra lejos del origen y menor, si se encuentra cerca de él.
- Al utilizar dos términos, uno con  $0 < p < 1$  y otro con  $p > 1$ , se puede asegurar una velocidad de convergencia mayor a exponencial en todas partes.
- Para  $p = 0$  no se puede asegurar la convergencia del algoritmo inclusive si  $u(t)$  satisface con la condición de excitación persistente. Sin embargo, para esta situación, el error de estimación permanece acotado.

Si a  $u(t)$  se le pide que cumpla con la condición de excitación persistente fuerte, Definición 3.1, se tienen estos resultados adicionales:

- Para  $p \in (0, 1)$ , la convergencia del algoritmo es en tiempo finito uniforme.
- Para  $p > 1$  la convergencia es uniforme y asintótica, sin embargo, presenta la propiedad de escape de infinito en tiempo finito uniforme.
- Al combinar dos términos, uno con  $0 < p < 1$  y otro con  $p > 1$ , se puede acotar el tiempo de convergencia para el peor caso, es decir, se tienen convergencia en tiempo fijo y uniforme respecto al instante inicial de tiempo.

Además, en general, es necesario implementar los algoritmos de estimación en computadoras digitales, por ello se derivó una versión discreta del algoritmo para  $y \in \mathbb{R}$ . El algoritmo discreto, si bien su velocidad de convergencia es exponencial, no elimina la posibilidad de converger en tiempo finito. Para esto último se ilustraron dos casos en donde se sabe que puede haber convergencia en tiempo finito. Es importante aclarar que, para garantizar la convergencia al origen, también es necesario que  $u_k$  cumple con la versión discreta de la condición de excitación persistente, Definición 2.13.

Otro punto favorable que presenta el algoritmo discreto es que, su formulación, es independiente del periodo de muestreo de las señales y por ello no requiere ser ajustado en términos de este factor.

El algoritmo discreto es el siguiente:

$$\hat{\theta}_{k+1} = \hat{\theta}_k - \frac{1}{\|u_k\|^2} u_k \left( u_k^T \hat{\theta}_k - y_k \right).$$

## 5.2. Conclusiones

Se logró generalizar al algoritmo gradiente que se usa para estimación de parámetros. Lo que se obtiene es una familia de algoritmos, con dinámicas no lineales que tienen ventajas sobre el algoritmo clásico en lo que respecta a la velocidad de convergencia.

Las variantes no lineales del algoritmo presentan velocidades de convergencia mayores que en el caso lineal en regiones diferentes del espacio de estado. Para que esta velocidad sea mayor en todas partes, se encontró que es necesario combinar dos algoritmos, uno con  $0 < p < 1$  y otro con  $p > 1$ .

Para poder garantizar la convergencia en tiempo finito ( $0 < p < 1$ ), en el caso más general, es suficiente pedir que el regresor,  $u(t)$ , cumpla con lo que se denominó condición de excitación persistente fuerte. Esta condición también garantiza el escape de infinito en tiempo finito para  $p > 1$  y la convergencia en tiempo fijo si se utilizan dos algoritmos en conjunto, uno con  $0 < p < 1$  y otro con  $p > 1$ .

En general, siempre se desea conocer los valores de los parámetros lo más rápido posible, es por esto que los resultados obtenidos son significativos.

## 5.3. Trabajo a futuro

Los resultados de esta tesis no contemplan el hecho de que, en general, hay ruido en las mediciones y, por lo mismo, no se estudian los efectos que este factor tiene sobre la respuesta. El análisis de las repercusiones que tiene el ruido sobre la dinámica del error de estimación es importante y queda pendiente

para trabajos futuros.

Cuando sólo se requiere estimar un parámetro se mostró que el algoritmo con  $p = 0$  también permite que haya convergencia en los parámetros, y ésta se da en tiempo finito. Además, resultó de utilidad si el parámetro varía con el tiempo. Para el caso general, donde  $\theta \in \mathbb{R}^n$ , se encontró que la condición de excitación persistente no es suficiente para garantizar que el error converja al utilizar el algoritmo discontinuo,  $p = 0$ ; al respecto, se tiene la hipótesis de que es necesario que  $u(t)$  sea también discontinua para que la convergencia se dé. Aún así, si se combinan dos términos, uno con  $p = 0$  y otro con  $p > 0$ , el algoritmo debe de converger bajo la única suposición de que  $u(t)$  satisface la condición de excitación persistente, hace falta estudiar qué fenómenos se presentan para el caso descrito y si, al tener el término discontinuo, permite también tener un mejor estimado para parámetros que varíen con el tiempo.

Para poder tener convergencia en tiempo finito, escape de infinito en tiempo finito o convergencia en tiempo fijo, se tuvo que pedir que  $u(t)$  satisficiera una condición más restrictiva que la de excitación persistente. Es necesario entender si, la condición que se pidió, es necesaria, en caso contrario, determinar la condición necesaria y suficiente que garantiza las propiedades ya mencionadas.

Es necesario estudiar y determinar que tipo de señales cumple la condición de excitación persistente fuerte que se pidió a  $u(t)$  para poder asegurar la convergencia en tiempo finito y en tiempo fijo y si esta condición es necesaria para asegurar tal tipo de convergencia de los algoritmos.

Para la versión discreta del algoritmo se demostró la convergencia exponencial del error si  $u_k$  cumple con la versión discreta de la condición de excitación persistente. También se demostró que el error puede converger en tiempo finito si alguna de las siguientes condiciones se cumple:

- Si en cualquier instante, el error de estimación  $x_k$  es paralelo a  $u_k$ .
- Si la sucesión  $\{u_1 \ u_2 \ u_3 \ \cdots \ u_n\}$  está conformada por vectores que sean ortogonales entre sí.

Esto da la posibilidad de que el error converja en tiempo finito, sin embargo, al ser tan restrictivas estas condiciones, parece ser que, el que suceda, es más bien un caso raro; falta hacer un estudio a detalle que determine si existen condiciones más generales que también aseguren la convergencia en tiempo finito.

Por otra parte, el algoritmo discreto sólo se presentó para  $y \in \mathbb{R}$  y falta derivar la variante adecuada que permita estimar parámetros cuando  $y \in \mathbb{R}^m$ .

En general, los resultados sólo se aplicaron a ejemplos en simulación numérica, hace falta validar que este algoritmo es efectivo en problemas reales.

# Bibliografía

- [1] V. Adetola and M. Guay. Finite-time parameter estimation in adaptive control of non-linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53(3):807–811, 2008.
- [2] E. F. Beckenbach and R. Bellman. *Inequalities*. Springer, Alemania, 1ra edición, 1961.
- [3] Chi-Tsong Chen. *Linear System: Theory and design*. Oxford University Press, New York-Oxford, 3ra edición, 1999.
- [4] J. Davila, Leonid Fridman, and A. Poznyak. Observation and identification of mechanical systems via second order sliding modes. *International Journal of Control*, 79(10):1251, 2006.
- [5] Eder Guzmán and Jaime Alberto Moreno. A new finite-time convergent and robust direct model reference adaptive control for siso linear time invariant systems. *50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, December 2011.
- [6] M. Hartman, N. Bauer, and A. R. Teel. A hybrid algorithm for finite-time parameter estimation. *American Control Conference*, June-July 2010.
- [7] E. Hendricks, O. Jannerup, and R. P. Haase. *Linear System Control: Deterministic and stochastic methods*. Springer, Berlin Heidelberg, 2008.
- [8] P. Ioannou and B. Fidan. *Adaptive Control Tutorial*. SIAM, 3600 University City Science Center, Philadelphia, PA 19104-2688, 2006.
- [9] P. Ioannou and J. Sun. *Robust Adaptive Control*. Dover Publications, 2012.
- [10] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey 07458, 3ra edición, 2002.
- [11] Tong-Heng Lee and K. S. Narendra. Robust adaptive control of discrete-time systems using persistent excitation. *Automatica*, 24(6):781–788, 1988.
- [12] Jaime Alberto Moreno and Eder Guzmán. A new recursive finite-time convergent parameter estimation algorithm. *18th IFAC World Congress*, August 2010.
- [13] A. P. Morgan and K. S. Narendra. On the uniform asymptotic stability of certain linear nonautonomous differential equations. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 15(1):5–24, Enero 1977.
- [14] K. S. Narendra and A. M. Annaswamy. Persistent excitation in adaptive systems. *International Journal of Control*, 45(1):127–160, 1987.
- [15] K. S. Narendra and A. M. Annaswamy. *Stable Adaptive Systems*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 07632, 1989.
- [16] Alexander S. Poznyak. *Advanced Mathematical Tools for Automatic Control Engineers: Deterministic Techniques*. Elsevier, Linacre House, Jordan Hill, Oxford OX2 8DP, UK, 1st ed., 2008.
- [17] S. S. Soliman and M. D. Srinath. *Señales y Sistemas: continuos y discretos*. Prentice hall Iberia, Madrid, 2da edición, 1999.

- [18] E. Walter and L. Pronzto. *Identification of Parametric Models from Experimental Data*. Springer/Masson, Capítulo 2, sección 6, 1997.
- [19] Jian-Xin Xu, Ya-Jun Pan, and Tong-Heng Lee. A VSS identification scheme for time-varying parameters. *Automatica*, 39:727–734, 2003.

# Capítulo 6

## Anexos

### 6.1. Anexo A: Desigualdades clásicas

A lo largo de este trabajo se ha hecho uso extensivo de desigualdades clásicas en sus dos presentaciones, para sumas finitas de elementos y para integrales, es por esto que se decide agregar este apartado a manera de referencia rápida para consultarlas.

A continuación se escriben las generalidades de cada desigualdad y se remite a [2] para consultar la demostración correspondiente.

#### 6.1.1. Desigualdad de Jensen

##### Suma finita

Sea  $f$  una función convexa y sean  $x_i$ , para  $i : \{1, 2, 3, \dots, n\}$ , valores en el dominio de definición de  $f$ , entonces:

$$f\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i).$$

Si la función es cóncava, entonces el signo de comparación se invierte.

##### Integral

Sea un espacio de medida  $(\Omega, A, \mu)$  tal que  $\mu(\Omega) = 1$ , una función  $g$  de valor real y  $\mu$ -integrable, y una función convexa  $f$  sobre la línea real, entonces:

$$f\left(\int_{\Omega} g d\mu\right) \leq \int_{\Omega} f \circ g d\mu.$$

#### 6.1.2. Desigualdad de Hölder

##### Suma finita

Sean  $p$  y  $q$  valores reales en el intervalo  $(1, \infty)$  tal que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , y sean los conjuntos  $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ ,  $\{y_1, y_2, y_3, \dots, y_n\}$  donde  $x_i$  y  $y_i$  son valores reales o complejos, entonces:

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \geq \sum_{i=1}^n |x_i y_i|.$$

## Integral

Sea  $(\Omega, A, \mu)$  un espacio de medida y sean  $p, q \in [1, \infty]$  tales que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , en donde  $1/\infty = 0$ . Entonces, para cualesquiera funciones  $f$  y  $g$  de valor real o complejo que sean medibles en  $\Omega$  se cumple:

$$\left( \int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \int_{\Omega} |g|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \geq \int_{\Omega} |fg| d\mu.$$

## Desigualdad de Cauchy-Schwarz

La desigualdad de Cauchy-Schwarz es un caso particular de la desigualdad de Hölder para  $p = q = 2$ , reescribiendo las expresiones anteriores para los exponentes mencionados se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{1/2} &\geq \sum_{i=1}^n |x_i y_i|, \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i^2 &\geq \left( \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \right)^2. \end{aligned}$$

Y, para el caso de espacios de dimensión infinita:

$$\int_{\Omega} |f|^2 d\mu \cdot \int_{\Omega} |g|^2 d\mu \geq \left( \int_{\Omega} |fg| d\mu \right)^2.$$

### 6.1.3. Desigualdad de Minkowski

Sea  $\Omega$  un espacio de medida y  $p \in (1, \infty)$ , sean  $f$  y  $g$  elementos de  $\mathcal{L}^p$ , entonces  $f+g$  también pertenece a  $\mathcal{L}^p$  y se tiene la siguiente desigualdad triangular:

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Para espacios de dimensión infinita se entiende lo siguiente:

$$\|f\|_p = \left( \int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Por otro lado, si el espacio es de dimensión finita:

$$\|f\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |f_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

## 6.2. Anexo B: Desarrollos

### 6.2.1. Demostración de la proposición 3.1

Sean  $f, g, q \in \mathbb{R}$ , tal que  $q \geq 1$ , se busca una cota superior para:

$$|f + g|^q.$$

La función  $h(a) = |a|^q$  con  $q \geq 1$  es convexa sobre los reales, por lo tanto, podemos auxiliarnos de la desigualdad de Jensen para buscar una cota:

$$\begin{aligned} \left| \frac{f + g}{2} \right|^q &\leq \frac{1}{2} (|f|^q + |g|^q), \\ |f + g|^q &\leq 2^{q-1} (|f|^q + |g|^q). \end{aligned}$$

### 6.2.2. Demostración de la proposición 3.2

Se toma el término  $u^T(s)x(t)$  y se descompone en  $u^T(s)x(t) - u^T(s)x(s) + u^T(s)x(s)$ , luego aplicamos (3.1):

$$|u^T(s)x(t)|^{p+1} \leq 2^p \left( |u^T(s)x(t) - u^T(s)x(s)|^{p+1} + |u^T(s)x(s)|^{p+1} \right),$$

despejamos a  $|u^T(s)x(s)|^{p+1}$ :

$$|u^T(s)x(s)|^{p+1} \geq \frac{1}{2^p} |u^T(s)x(t)|^{p+1} - |u^T(s)x(t) - u^T(s)x(s)|^{p+1},$$

e integramos de  $t$  a  $t+T$ , respecto de  $s$ :

$$\int_t^{t+T} |u^T(s)x(s)|^{p+1} ds \geq \frac{1}{2^p} \int_t^{t+T} |u^T(s)x(t)|^{p+1} ds - \int_t^{t+T} |u^T(s)(x(t) - x(s))|^{p+1} ds.$$

### 6.2.3. Demostración de la proposición 3.3

El vector  $x(t)$  se puede descomponer en  $\|x(t)\|w(t)$ , donde  $w(t)$  es el vector unitario en la dirección de  $x(t)$ . De (2.5) sabemos que la integral del producto de  $u(t)$  por un vector unitario fijo crece por lo menos de forma lineal con el tiempo, se usará la desigualdad de Hölder para demostrar que la integral de  $|u(t)w|^{p+1}$ ,  $p > 0$  también crece por lo menos de forma lineal:

$$\begin{aligned} \int_t^{t+T} |u^T(s)w| ds &\leq \left( \int_t^{t+T} |u^T(s)w|^{p+1} ds \right)^{\frac{1}{p+1}} \left( \int_t^{t+T} 1^{\frac{p+1}{p}} ds \right)^{\frac{p}{p+1}}, \\ \int_t^{t+T} |u^T(s)w|^{p+1} ds &\geq \frac{1}{T^p} \left( \int_t^{t+T} |u^T(s)w| ds \right)^{p+1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_t^{t+T} |u^T(s)w| ds &\geq T\varepsilon, \\ \left( \int_t^{t+T} |u^T(s)w| ds \right)^{p+1} &\geq T^{p+1}\varepsilon^{p+1}, \\ \frac{1}{T^p} \left( \int_t^{t+T} |u^T(s)w| ds \right)^{p+1} &\geq T\varepsilon_p, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_t^{t+T} |u^T(s)w|^{p+1} ds &\geq T\varepsilon_p, \\ \int_t^{t+T} |u^T(s)x(t)|^{p+1} ds &\geq \|x(t)\|^{p+1} T\varepsilon_p. \end{aligned}$$

### 6.2.4. Demostración de la proposición 3.4

El término  $|u^T(s)(x(t) - x(s))|$  en el intervalo  $s \in [t, t+T]$  se puede acotar por el máximo valor que tome la norma de la diferencia entre  $x(t)$  y  $x(s)$  multiplicado por el valor más grande que puede tomar la norma de  $u$ :

$$\begin{aligned} |u^T(s)(x(t) - x(s))| &\leq u_m \sup_{s \in [t, t+T]} \|x(t) - x(s)\|, \\ |u^T(s)(x(t) - x(s))|^{p+1} &\leq u_m^{p+1} \left( \sup_{s \in [t, t+T]} \|x(t) - x(s)\| \right)^{p+1}. \end{aligned}$$

Ahora, dicho valor máximo debe ser menor que la longitud de arco de la trayectoria entre  $x(t)$  y  $x(t+T)$ :

$$\sup_{s \in [t, t+T]} \|x(t) - x(s)\| \leq \int_t^{t+T} \|\dot{x}(s)\| ds,$$

así:

$$|u^T(s)(x(t) - x(s))|^{p+1} \leq u_m^{p+1} \left( \int_t^{t+T} \|\dot{x}(s)\| ds \right)^{p+1}.$$

Si consideramos el término del lado derecho de la desigualdad anterior constante durante el intervalo de integración, podemos obtener la conclusión de la Proposición (3.4):

$$\int_t^{t+T} |u^T(s)(x(t) - x(s))|^{p+1} ds \leq T u_m^{p+1} \left( \int_t^{t+T} \|\dot{x}(s)\| ds \right)^{p+1}.$$

### 6.2.5. Demostración de la proposición 3.5

Para los conjugados de Hölder  $\frac{p+1}{p}$  y  $p+1$  se plantea la desigualdad correspondiente para la integral de  $\|\dot{x}(t)\|$ :

$$\begin{aligned} T^{\frac{1}{p+1}} \left( \int_t^{t+T} \|\dot{x}(s)\|^{\frac{p+1}{p}} ds \right)^{\frac{p}{p+1}} &\geq \int_t^{t+T} \|\dot{x}(s)\| ds, \\ \int_t^{t+T} \|\dot{x}(s)\|^{\frac{p+1}{p}} ds &\geq \frac{1}{T^{\frac{1}{p}}} \left( \int_t^{t+T} \|\dot{x}(s)\| ds \right)^{\frac{p+1}{p}}. \end{aligned}$$

De (3.15):

$$\int_t^{t+T} -\dot{V}(s) ds \geq \frac{1}{u_m^{(p+1)/p}} \int_t^{t+T} \|\dot{x}(s)\|^{\frac{p+1}{p}} ds$$

se sigue que:

$$\int_t^{t+T} -\dot{V}(s) ds \geq \frac{1}{T^{\frac{1}{p}} u_m^{(p+1)/p}} \left( \int_t^{t+T} \|\dot{x}(s)\| ds \right)^{\frac{p+1}{p}}.$$

### 6.2.6. Prueba de la proposición 3.7

Primero se descompone el término  $u^T(t)x(t_1)$ :

$$\|u^T(t)x(t_1)\| = \|u^T(t)(x(t_1) - x(t)) + u^T(t)x(t)\|,$$

ahora se hace uso de la desigualdad de Minkowski:

$$\|u^T(t)x(t_1)\| \leq \|u^T(t)(x(t_1) - x(t))\| + \|u^T(t)x(t)\|.$$

Elevamos ambos lados de la desigualdad anterior a la  $p+1$ :

$$\|u^T(t)x(t_1)\|^{p+1} \leq (\|u^T(t)(x(t_1) - x(t))\| + \|u^T(t)x(t)\|)^{p+1}.$$

En virtud de que la función  $(\cdot)^{p+1}$  es convexa y de la desigualdad de Jensen:

$$(\|u^T(t)(x(t_1) - x(t))\| + \|u^T(t)x(t)\|)^{p+1} \leq 2^p (\|u^T(t)(x(t_1) - x(t))\|^{p+1} + \|u^T(t)x(t)\|^{p+1}).$$

Despejando al término de interés:

$$\|u^T(t)x(t)\|^{p+1} \geq \frac{1}{2^p} \|u^T(t)x(t_1)\|^{p+1} - \|u^T(t)(x(t_1) - x(t))\|^{p+1}.$$

Esto es valido para cualquier norma  $\mathcal{L}_p$ .

### 6.2.7. Prueba de la proposición 3.8

El término  $\|u^T(s)(x(t) - x(s))\|_1$  puede ser acotado por arriba con  $u_m\|x(t) - x(s)\|_1$ , en donde  $\|u(t)\|_1 \leq u_m$  y su norma se entiende en el sentido de la definición 2.6. Entonces:

$$\|u^T(t)(x(t) - x(s))\|_1^{p+1} \leq u_m^{p+1}\|x(t) - x(s)\|_1^{p+1}.$$

La integral sobre el intervalo  $[t, t+T]$  del término de la derecha esta acotada por arriba con:

$$u_m^{p+1} \int_t^{t+T} \|x(t) - x(s)\|_1^{p+1} ds.$$

La norma de la diferencia entre  $x(t)$  y  $x(s)$  para  $s \in [t, t+T]$  tiene un valor máximo, y la integral anterior puede ser acotada haciendo uso de éste valor y el intervalo de integración:

$$u_m^{p+1} \int_t^{t+T} \|x(t) - x(s)\|_1^{p+1} ds \leq u_m^{p+1} T \sup_{s \in [t, t+T]} \|x(t) - x(s)\|_1^{p+1},$$

al mismo tiempo, el valor máximo de la diferencia tiene que ser menor que la longitud de arco de la trayectoria de  $x$  entre  $t$  y  $t+T$ :

$$\begin{aligned} \sup_{s \in [t, t+T]} \|x(t) - x(s)\|_1 &\leq \int_t^{t+T} \|\dot{x}(s)\|_1 ds, \\ \left( \sup_{s \in [t, t+T]} \|x(t) - x(s)\|_1 \right)^{p+1} &\leq \left( \int_t^{t+T} \|\dot{x}(s)\|_1 ds \right)^{p+1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\int_t^{t+T} \|u^T(s)(x(t) - x(s))\|_1^{p+1} ds \leq u_m^{p+1} T \left( \int_t^{t+T} \|\dot{x}(s)\|_1 ds \right)^{p+1}.$$