UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ECONOMÍA

Optimización Dinámica: una guía metodológica para el estudiante de economía

TESINA
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO
DE LICENCIADA EN ECONOMÍA
PRESENTA:

Miriam Del Valle Morales

DIRECTORA DE TESINA
Dra. Alejandra Patiño Cabrera

México, Ciudad Universitaria, Agosto 2014

Agradecimientos

Quiero agradecer a mi papá por todo el apoyo que siempre me ha dado, por su paciencia, cariño y comprensión, por ser un ejemplo y una guía, sin él no hubiera podido llegar hasta aquí. También le doy gracias por sus consejos, orientación y aportes conceptuales en la elaboración de esta tesina.

A mi mamá y a mi hermana por la motivación y el amor que siempre he recibido de ellas.

A mi familia y amigos por siempre estar al pendiente, darme ánimos y festejar mis logros.

Especialmente quiero dar gracias a la Dra. Alejandra Patiño por aceptar ser mi asesora, por el seguimiento y la supervisión que realizó durante la elaboración de este trabajo. Por su disponibilidad y gentileza.

Al Dr. Francisco Castillo por el soporte profesional que me brindó y por todas sus recomendaciones que fueron de gran ayuda.

A mis sinodales –que también han sido mis maestros–, por su dedicación, experiencia y principalmente por haber sido parte de mi formación académica.

Finalmente a la Facultad de Economía y a la UNAM, por el respaldo académico que me brindaron durante estos cinco años, les doy gracias por esta gran experiencia.

Contenido

Introducción

En la actualidad la optimizacion dinámica ha cobrado una gran relevancia en economía cuantitativa. Prueba de ello, es la inclusión de esta materia en los planes de estudio de otras instituciones desde el nivel licenciatura (UAM, ITAM, ITESM); a diferencia de los planes de estudio en la UNAM donde únicamente se trata lacónicamente como un sólo tema entre varios tópicos de la materia Matemáticas IV. El presente trabajo tiene como objetivo principal proveer al estudiante de una guía metodológica y autocontenida para introducir, a nivel licenciatura, algunos de los temas más relevantes de la optimización dinámica en economía, y presentar una perspectiva general de esta potente herramienta matemática al estudiante de esta carrera –que al no estar incluida como una materia *per se* en nuestra facultad, por lo general desconoce por completo– y pueda en un futuro profundizar, si así lo desea, en esta apasionante rama de la economía cuantitativa a nivel posgrado o la aplique directamente en su desarrollo profesional como economista.

La mejor forma de comprender la necesidad de que un estudiante de economía aprecie la importancia que tiene la teoría de optimización dinámica, es mostrando el tipo de problemas que se pueden plantear y resolver mediante esta herramienta matemática. Comenzamos, entonces, con dos problemas representativos que pertenecen, respectivamente, al cálculo de variaciones y a la teoría de control óptimo; los temas principales de esta guía. Únicamente se hará el planteamiento matemático y posteriormente, en las secciones 6.3 y 10.2, se resolverán por completo ambos problemas.

Dinámica de un monopolista

Una empresa monopolista produce una sola mercancía, con un costo total por unidad de tiempo que es una función cuádratica de la cantidad producida por unidad de tiempo, u:

$$q(u) = Au^2 + Bu + C,$$

con A, B y C constantes positivas. La cantidad demandada por unidad de tiempo, y, está en función del precio $p(t)$ y de su tasa instantánea de cambio $\dot{p}(t)$ de acuerdo a la relación

$$y = ap + b + h\dot{p}$$

donde $a < 0$, $b > 0$ y $h \neq 0$. Puesto que la empresa tiene el monopolio del producto, $u = y$ y la ganancia, por unidad de tiempo, está entonces dada por

$$\begin{aligned}
\pi &= pu - q \\
&= py - q \\
&= p(ap + b + h\dot{p}) - (Au^2 + Bu + C) \\
&= p(ap + b + h\dot{p}) - A(ap + b + h\dot{p})^2 - B(ap + b + h\dot{p}) + C
\end{aligned}$$

Luego, la ganancia total en un intervalo de tiempo $[0, T]$ es

$$J(p) = \int_0^T (p(ap + b + h\dot{p}) - A(ap + b + h\dot{p})^2 - B(ap + b + h\dot{p}) + C)dt$$

El objetivo es encontrar una función $p = p(t)$ para hacer máxima la ganancia de la firma en el intervalo $[0, T]$ si el precio inicial es p_1 y el final es p_2; es decir,

$$\begin{array}{ll}
\text{maximizar} & J(p) = \displaystyle\int_0^T (p(ap + b + h\dot{p}) - A(ap + b + h\dot{p})^2 - B(ap + b + h\dot{p}) + C)dt \\
\text{sujeto a} & \left\{ \begin{array}{lcl} p(0) & = & p_1 \\ p(T) & = & p_2 \end{array} \right.
\end{array}$$

Un problema de inversión

Una firma tiene una producción que depende únicamente de su reserva de capital K dada por

$$Q(K) = K - aK^2$$

donde $a > 0$ y $Q(K)$ es la cantidad producida por unidad de tiempo. Suponiendo que el capital se deprecia a una razón δ, entonces el ritmo de variación del capital está dado por

$$\dot{K} = I - \delta K$$

donde I es la inversión de la firma. Si el precio unitario de producción de la firma es de una unidad monetaria y el costo de inversión es de I^2 unidades monetarias, entonces la ganancia instantánea de la firma es

$$\pi = K - aK^2 - I^2$$

La firma desea conocer las funciones $K = K(t)$ e $I = I(t)$ que debe establecer para maximizar su ganancia en un intervalo de tiempo de longitud T si tiene un capital inicial K_0. Entonces, en un intervalo de tiempo $[t, t + dt]$ la firma tiene una ganancia dada por $dJ = (K - aK^2 - I^2)dt$ y, por tanto, la ganancia total en el intervalo $[0, T]$ es $\int_0^T (K - aK^2 - I^2)dt$. Así, la firma debe encontrar una par de funciones $K = K(t)$ y $I = I(t)$ que hagan máximo el valor de esta integral; es decir, resolver el problema

$$\begin{array}{ll}
\text{maximizar} & J(K, I) = \displaystyle\int_0^T (K - aK^2 - I^2)dt \\
\text{sujeto a} & \left\{ \begin{array}{lcl} \dot{K} & = & I - \delta K \\ K(0) & = & K_0 \end{array} \right.
\end{array}$$

□

Para asimilar el material de esta tesina se requiere sólo un mínimo de conceptos matemáticos por parte del lector que son: cálculo diferencial e integral de una variable y conocimiento elemental de derivación parcial. Ya que la primera parte de este texto –*elementos básicos*– contiene el desarrollo de los temas matemáticos necesarios y suficientes para la comprensión de la optimización dinámica; estos son: espacios y subespacios vectoriales, espacios normados, matrices, determinantes, sistemas lineales, valores y vectores propios, y ecuaciones diferenciales. Naturalmente, el lector puede omitir los temas que él considere o consultarlos en el momento que los requiera; sin embargo, se sugiere por lo menos una lectura rápida de este apartado con el fin de conocer las notaciones y jerga básica que se emplea en todo el resto del texto. Este segmento no es un simple compendio de resultados a manera de resumen; sino que consta de cuatro capítulos escritos con detalle y suficientes ejemplos para su total comprensión.

La segunda y tercera parte contienen los temas principales de este trabajo: calculo variacional y control óptimo; desarrollados de manera formal con la estructura de los textos de matemáticas[1] en esta área, con definiciones, teoremas, ejemplos, ilustraciones geométricas y aplicaciones a la economía. Únicamente se han omitido las demostraciones y resultados que por su dificultad están fuera del alcance de un trabajo como éste; remitiendo al lector a la bibliografía para su consulta.

La parte IV, contiene los resúmenes didácticos de la segunda y tercera parte, a manera de esquemas matemáticos simplificados de los métodos de cálculo variacional y control óptimo para la solución directa de problemas sin recurrir al material teórico del texto.

[1]De hecho, todos los capítulos de esta tesina están escritos con esta estructura formal.

Parte I

Elementos básicos

Capítulo 1

Espacios vectoriales

Los problemas que se resuelven en optimización tienen solución en subconjuntos de ciertos conjuntos –generalmente espacios de funciones– que tienen una estructura algebraica análoga a la que poseen el plano cartesiano y el espacio tridimensional, llamados espacios vectoriales; al estudio de sus principales características está dedicado este capítulo.

1.1 Definiciones y ejemplos

Definición 1.1 *Un espacio vectorial es un conjunto no vacío,* $\mathbf{E}$*, en el cual se han definido dos operaciones, suma entre sus elementos,* $u + v$*, y producto de escalares con los elementos de* $\mathbf{E}$*,* λu*, que satisfacen las siguientes propiedades:*

1. *La suma es cerrada:* $u + v \in \mathbf{E} \;\; \forall\, u, v \in \mathbf{E}$.
2. *Asociatividad en la suma:* $u + (v + w) = (u + v) + w \quad \forall\, u, v, w \in \mathbf{E}$.
3. *Conmutatividad de la suma:* $u + v = v + u \;\; \forall\, u, v \in \mathbf{E}$.
4. *Existencia del neutro aditivo: existe* $0_{\mathbf{E}} \in \mathbf{E}$ *tal que* $u + 0_{\mathbf{E}} = u \quad \forall\, u \in \mathbf{E}$.
5. *Existencia del inverso aditivo: para cada* $u \in \mathbf{E}$ *existe* $-u \in \mathbf{E}$ *tal que* $u + (-u) = 0_{\mathbf{E}}$.
6. *El producto con escalares es cerrado:* $\lambda u \in \mathbf{E} \;\; \forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \forall\, u \in \mathbf{E}$.
7. *Asociatividad del producto por escalares:* $\lambda(\beta u) = (\lambda\beta)u \quad \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}, \forall\, u \in \mathbf{E}$.
8. *Distributividad del producto con respecto a la suma de vectores:* $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v \; \forall \lambda \in \mathbb{R}, \; \forall\, u, v \in \mathbf{E}$.
9. *Distributividad del producto con respecto a la suma de escalares:* $(\lambda + \beta)u = \lambda u + \beta u \; \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}, \; \forall u \in \mathbf{E}$.
10. *Preservación de la escala:* $1u = u \; \forall\, u \in \mathbf{E}$.

A los elementos de un espacio vectorial les diremos vectores o puntos; mientras que a los números reales, en contraposición, les llamaremos escalares. Se puede probar que $0_{\mathbf{E}}$ es el único elemento que cumple la propiedad 4 y que, para cada $u \in \mathbf{E}$, $-u$ es único. Además, si u y v son cualquier par de elementos de un espacio vectorial $\mathbf{E}$, se define $u - v$, el vector diferencia, como $u + (-v)$.

Ejemplo 1.1 (el espacio $\mathbb{R}^n$) *Sea n un entero positivo dado, se define*

$$\mathbb{R}^n = \{\vec{u} = (x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, .., n\}$$

El número real x_i es la i-ésima coordena del vector $\vec{u}$. Si $\vec{u}$ y $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{u} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, $\vec{v} = (y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n)$, $\vec{u} = \vec{v}$ sí y sólo sí $x_i = y_i \; \forall i = 1, .., n$. Se definen, si $\vec{u} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\vec{v} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \vec{u} + \vec{v} &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \\ \lambda\vec{u} &= (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n). \end{aligned}$$

Es fácil comprobar que con estas operaciones $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial; donde $\vec{0}_{\mathbb{R}^n} = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n})$ es el neutro aditivo y, para cada $\vec{u} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $-\vec{u} = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$.

Geométricamente $\mathbb{R}^2$ es plano cartesiano y $\mathbb{R}^3$ el espacio tridimensional en el que *habitamos* como se ilustra en la figura 1.1

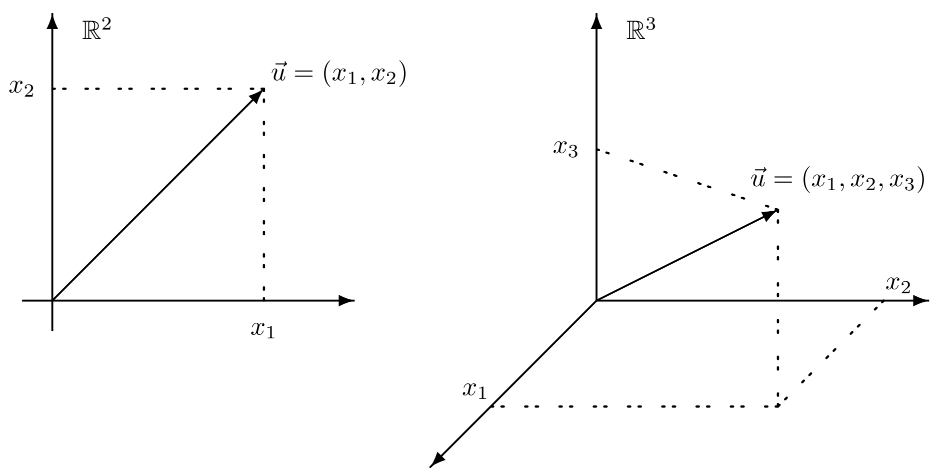


Figura 1.1: Los espacios vectoriales $\mathbb{R}^2$ (el plano cartesiano) y el espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 1.2 (espacio de matrices) *Se denota por* $\mathcal{M}_{m\times n}$ *al conjunto de matrices reales de tamaño* $m \times n$ *con las operaciones usuales, esto es*[1]*, si* $A = [a_{ij}]$*,* $B = [b_{ij}]$ *son elementos de* $\mathcal{M}_{m\times n}$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$*:*

$$\begin{aligned} A + B &= [a_{ij} + b_{ij}]\,, \\ \lambda A &= [\lambda a_{ij}]\,. \end{aligned}$$

Entonces $\mathcal{M}_{m\times n}$ *es un espacio vectorial. En este caso el neutro aditivo de* $\mathcal{M}_{m\times n}$ *es la matriz de tamaño* $m \times n$ *que tiene todas sus componentes nulas, y el inverso aditivo de una matriz* $A = [a_{ij}]$ *es la matriz* $-A = [-a_{ij}]$*.*

Espacios de funciones

Sean A y B un par de conjuntos no vacíos; una función con dominio A y valores en B es una regla que a cada elemento a de A le asigna un único elemento $b = f(a)$ del conjunto B. Para representar que f es una función con dominio A y valores en B utilizaremos la notación $f : A \to B$ o también $a \mapsto f(a)$. Si $f, g : A \to B$, $f = g$ si y sólo si $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A$.

Denotamos $\mathcal{F}(A)$ al conjunto de las funciones $f : A \to \mathbb{R}$, siendo A un conjunto no vacío. Si $f, g \in \mathcal{F}(A)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, se definen $f + g : A \to \mathbb{R}$ y $\lambda f : A \to \mathbb{R}$ como

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x) + g(x)\ \forall x \in A \\ (\lambda f)(x) &= \lambda f(x)\ \forall x \in A. \end{aligned}$$

Se puede probar que $\mathcal{F}(A)$ con las operaciones $f+g$ y λf es un espacio vectorial. En este espacio el neutro aditivo, θ, es la función constante cero en el conjunto A; es decir, $\theta(x) = 0$ para todo $x \in A$; mientras que, para cada $f \in \mathcal{F}(A)$, $-f$ es la función dada por $(-f)(x) = -f(x)$ para todo $x \in A$.

1.2 Subespacios vectoriales

Los ejemplos de espacios vectoriales que se vieron en la sección anterior son muy generales y, por lo mismo, demasiado *grandes* para que sean de utilidad. Son ciertos subconjuntos particulares que, con las mismas operaciones son también espacios vectoriales, los que se utilizan en las aplicaciones y a su estudio nos enfocamos en esta sección.

Definición 1.2 *Sea* $\mathbf{E}$ *un espacio vectorial y* $\mathbf{S}$ *un subconjunto no vacío de* $\mathbf{E}$*.* $\mathbf{S}$ *es un* ***subespacio*** *de* $\mathbf{E}$ *si con las mismas operaciones de suma y producto por un escalar de* $\mathbf{E}$ *restringidas a los elementos de* $\mathbf{S}$*, es también un espacio vectorial.*

Se utiliza la notación: $\mathbf{S} < \mathbf{E}$, para indicar que $\mathbf{S}$ es un subespacio de $\mathbf{E}$. Para probar que $\mathbf{S} < \mathbf{E}$, necesitamos mostrar que los elementos de $\mathbf{S}$, con la suma y

[1] Cf. sección 3.1, pp. 25

la multiplicación por un escalar definidos en $\mathbf{E}$, satisfacen las diez condiciones anteriormente dadas en la definición de espacio vectorial. Sin embargo, las propiedades de asociatividad para la suma y el producto por un escalar, las de distributividad, conmutatividad y preservación de la escala, son propiedades que se heredan de $\mathbf{E}$, ya que $\mathbf{S} \subset \mathbf{E}$. Por lo tanto, para que un subconjunto $\mathbf{S}$ de un espacio vectorial $\mathbf{E}$ sea un subespacio y, por ende, un espacio vectorial, es necesario y suficiente que se cumplan las siguientes tres condiciones:

1. $0_{\mathbf{E}} \in \mathbf{S}$.
2. la suma es cerrada en $\mathbf{S}$: $u + v \in \mathbf{S}, \forall u, v \in \mathbf{S}$.
3. la multiplicación por un escalar es cerrada en $\mathbf{S}$: $\lambda u \in \mathbf{S}\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall u \in \mathbf{S}$.

Ejemplo 1.3 *Sea m un número real y $\mathbf{S} = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^2 \mid \vec{u} = (x, mx); x \in \mathbb{R}\}$; esto es, $\mathbf{S}$ es una línea recta que pasa por el origen. Entonces:*

1. $\vec{0}_{\mathbb{R}^2} = (0,0) = (0, m \cdot 0) \in \mathbf{S}$.
2. *Si* $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbf{S}$, $\vec{u} = (x, mx)$, $\vec{v} = (y, my)$,
   $\vec{u} + \vec{v} = (x, mx) + (y, my) = (x + y, mx + my) = (x + y, m(x + y)) \in \mathbf{S}$.
3. *Si* $\lambda \in \mathbb{R}$ *y* $\vec{u} = (x, mx) \in \mathbf{S}$, $\lambda u = \lambda(x, mx) = (\lambda x, \lambda mx) = (\lambda x, m(\lambda x)) \in \mathbf{S}$.

Por tanto $\mathbf{S} < \mathbb{R}^2$. Es decir, toda línea recta que pasa por el origen es un subespacio de $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 1.4 *Sea $\mathbf{S} = \left\{\vec{u} \in \mathbb{R}^2 \mid \vec{u} = (x, y),\ x \in \mathbb{R} \text{ y } y = 4x + 1\right\}$. Puesto que $\vec{0}_{\mathbb{R}^2} = (0,0) \neq (0, 4(0) + 1) = (0,1)$, $\vec{0}_{\mathbb{R}^2} \notin \mathbf{S}$ y, entonces, $\mathbf{S}$ no es un subespacio de $\mathbb{R}^2$.*

Los espacios $C^k[a,b]$

Definimos $C[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ es continua en todo punto de } [a,b]\}$. Puesto que la función constante cero es una función continua, la suma de funciones continuas y el producto de un escalar por una función continua dan como resultado también funciones continuas, $C[a,b] < \mathcal{F}([a,b])$.

Sea k un entero no negativo y $C^k[a,b]$ el conjunto de funciones $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ que son derivables con continuidad hasta el orden k en el intervalo $[a,b]$. Es decir, $f \in C^k[a,b]$ si y sólo si f y todas sus derivadas hasta el orden k son funciones continuas en todo punto del intervalo $[a,b]$; sin embargo, ya que derivabilidad implica continuidad, basta que la función $f^{(k)} = \frac{d^k f}{dt^k}$ exista y sea continua en todo punto del intervalo $[a,b]$ para que f pertenezca a este espacio. Por otra parte: la k-ésima derivada de la función constante cero es también la función constante cero, que es una función continua en todo punto, luego $\theta \in C^k[a,b]$; si $f, g \in C^k[a,b]$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces las funciones $x \mapsto f^{(k)}(x)$ y $x \mapsto g^{(k)}(x)$, las k-ésimas derivadas de f y g, respectivamente, son funciones continuas en todo punto de $[a, b]$ y, puesto que $(f+g)^{(k)}(x) = f^{(k)}(x) + g^{(k)}(x)$, $(\lambda f)^{(k)}(x) = \lambda f^{(k)}(x)$, la suma de funciones continuas es una función continua y el producto de un escalar por una función continua es una función continua, se tiene que $\theta, f+g, \lambda f \in C^k[a, b]$; esto es, $C^k[a, b]$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{F}([a, b])$ y, por tanto, $C^k[a, b]$ es un espacio vectorial, con las operaciones usuales, para todo entero no negativo k (por conveniencia $C^0[a, b]$ se define como $C[a, b]$). Geométricamente $C[a, b]$ es el conjunto de todas las funciones continuas cuyas

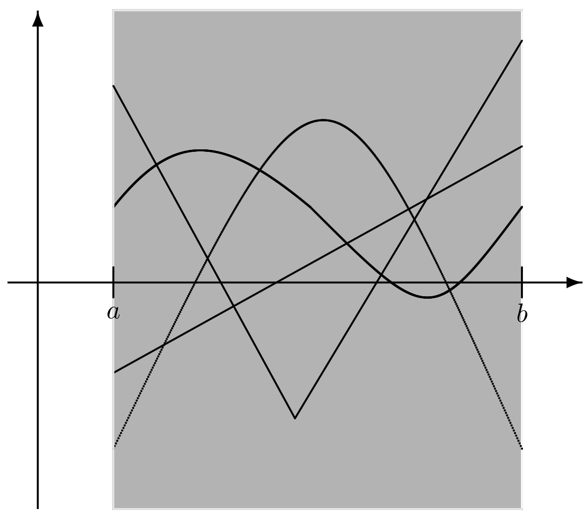


Figura 1.2: Algunos elementos del $C[a, b]$.

gráficas están contenidas en la franja $[a, b] \times \mathbb{R}$ del plano cartesiano $\mathbb{R}^2$, como se ilustra en la figura 1.2. Así, la función θ, el neutro aditivo de este espacio, corresponde al segmento de recta entre a y b; mientras que el neutro aditivo de una función f se obtiene reflejando la gráfica de esta función sobre el eje de las abscisas como se muestra en la figura 1.3. El espacio $C^k[a, b]$ tiene una interpretación análoga, excepto que todas las gráficas corresponden a funciones suaves hasta el orden k; por ejemplo, la función cuya gráfica tiene un pico en la figura 1.2, aunque pertenece a $C[a, b]$, no pertenece a $C^1[a, b]$, porque en la abscisa de ese punto no es derivable.

Finalmente, es costumbre decir que una función es de clase C-k en $[a, b]$ cuando pertenece al espacio $C^k[a, b]$; también es conveniente observar que

$$C^k[a, b] \subset C^{k-1}[a, b] \subset \cdots \subset C^1[a, b] \subset C[a, b]$$

para todo entero positivo k.

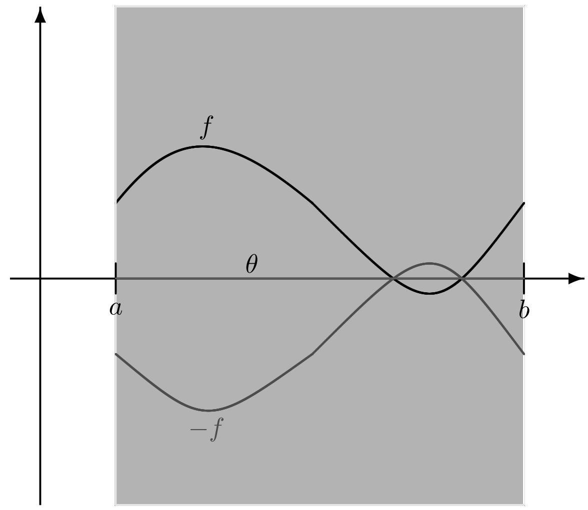


Figura 1.3: Representación del neutro e inverso aditivos en $C[a, b]$.

Capítulo 2

Espacios Normados

Para establecer el concepto de extremo relativo es necesario primero definir con precisión el significado de proximidad entre vectores de un espacio; esto se puede realizar de manera análoga a como se hace en el plano y en el espacio tridimensional: por medio de la idea de distancia entre vectores; lo cual es posible efectuar generalizando el concepto de norma (magnitud) a espacios vectoriales abstractos. A estos conceptos está dedicado el presente capítulo.

2.1 Normas

Definición 2.1 *Sea* $\mathbf{E}$ *un espacio vectorial. Una norma en* $\mathbf{E}$ *es una función que a cada* $u \in \mathbf{E}$ *le asigna un número real, denotado por* $\|u\|$*, que satisface las siguientes propiedades:*

1. $\|u\| \geq 0 \ \forall u \in \mathbf{E}$.
2. $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0_{\mathbf{E}}$.
3. $\|\lambda u\| = |\lambda| \, \|u\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall u \in \mathbf{E}$.
4. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad \forall u, v \in \mathbf{E}$.

Al número real no negativo, $\|u\|$, se le llama norma o módulo del vector u y, cuando es conveniente, para representar diferentes normas en un mismo espacio, se utilizan subíndices. Si en un espacio vectorial se ha definido una norma, se dice que éste es un espacio vectorial normado.

Norma euclidiana o canónica

En $\mathbb{R}^n$ se define, para cada $\vec{u} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$,

$$\|\vec{u}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}$$

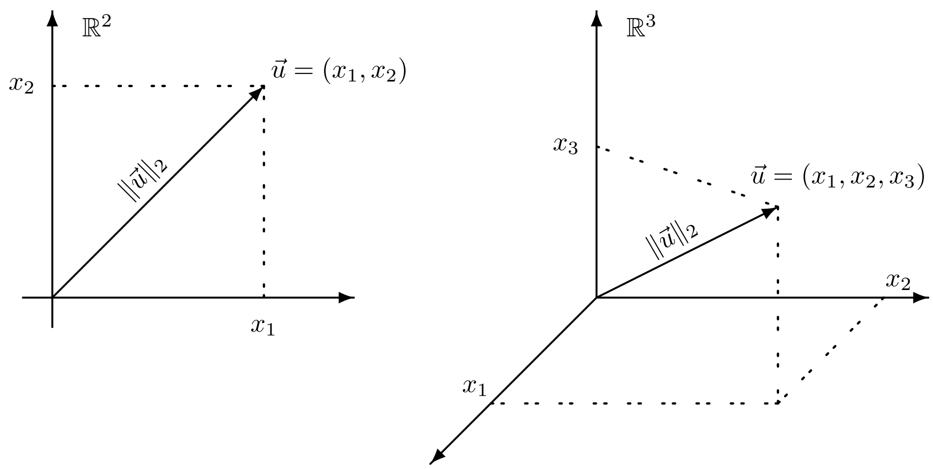


Figura 2.1: $\|\vec{u}\|_2$ en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ es la longitud del segmento de línea que une al origen con el punto $\vec{u}$.

Entonces $\|\vec{u}\|_2$ es una norma en $\mathbb{R}^n$, la norma **euclidiana o canónica** (cf. referencia bibliográfica [26], pp. 2-4).

En $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ la norma euclidiana de un vector no es otra cosa que la longitud del mismo, como se ilustra en la figura 2.1

Ejemplo 2.1 *En* $\mathbb{R}^4$*,*

$$\|(-1, 2, -3, 4)\|_2 = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (-3) + (4)^2} = \sqrt{1 + 4 + 9 + 16} = \sqrt{30}$$

En general, se puede probar[1] que si $p > 1$ es cualquier número real,

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} | \ x_i \ |^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

es una norma en $\mathbb{R}^n$, llamada la norma p.

Ejemplo 2.2 *En* $\mathbb{R}^3$*,* $\|(1, -1, 2)\|_5 = (|1|^5 + |-1|^5 + |2|^5)^{1/5} = 34^{1/5}$.

Norma cúbica

Para cada $\vec{u} = (x_{1,}x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, se define

$$\|\vec{u}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

(el valor máximo del conjunto de los números reales $\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$). $\| \, \|_\infty$ es una norma en $\mathbb{R}^n$, llamada **norma cúbica**. En efecto:

[1]Cf. referencia bibliográfica [26], p. 7 y pp. 175-177.

1. Si $\vec{u} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\|\vec{u}\|_\infty = \text{máx}\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\} \geq 0$.

2. $\|\vec{0}_{\mathbb{R}^n}\|_\infty = \|(0, 0, \ldots 0)\|_\infty = \text{máx}\{|0|, |0|, \ldots, |0|\} = 0$. Si $\vec{u} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $\|\vec{u}\|_\infty = 0$, $0 \leq |x_k| \leq \text{máx}\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\} = \|\vec{u}\|_\infty = 0$ $\forall k = 1, 2, \ldots, n$; por tanto, $|x_k| = 0$ $\forall k$ y, entonces, $\vec{u} = \vec{0}_{\mathbb{R}^n}$.

3. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\vec{u} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,
$$\begin{aligned}
\|\lambda\vec{u}\|_\infty &= \max_{1\leq i\leq n} |\lambda x_i| \\
&= \max_{1\leq i\leq n} |\lambda|\,|x_i| \\
&= |\lambda| \max_{1\leq i\leq n} |x_i| \\
&= |\lambda|\,\|u\|_\infty.
\end{aligned}$$

4. Por las propiedades del valor absoluto ($|a+b| \leq |a| + |b|\,\forall a, b \in \mathbb{R}$), si $\vec{u} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $\vec{v} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ son dos vectores en $\mathbb{R}^n$,
$$|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i| \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n.$$
Dado que para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, se tiene $|x_i| \leq \|\vec{u}\|_\infty$ y $|y_i| \leq \|\vec{v}\|_\infty$,
$$|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i| \leq \|\vec{u}\|_\infty + \|\vec{v}\|_\infty$$
para todo i; de donde
$$\max_{1\leq i\leq n} |x_i + y_i| \leq \|\vec{u}\|_\infty + \|\vec{v}\|_\infty$$
es decir,
$$\|\vec{u} + \vec{v}\|_\infty \leq \|\vec{u}\|_\infty + \|\vec{v}\|_\infty.$$

Ejemplo 2.3 *En* $\mathbb{R}^4$, $\|(-1, 2, -3, 4)\|_\infty = \text{máx}\{|-1|, |2|, |-3|, |4|\} = 4$.

Norma $\|\cdot\|_1$

Sea $\vec{u} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, se define $\|\vec{u}\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$. Entonces $\|\cdot\|_1$ es una norma en $\mathbb{R}^n$:

1. Si $\vec{u} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\|\vec{u}_1\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \geq 0$.

2. Claramente $\|\vec{0}_{\mathbb{R}^n}\|_1 = 0$. Si $\vec{u} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $\|\vec{u}\|_1 = 0$, entonces
$$0 \leq |x_k| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \|\vec{u}\|_1 = 0;$$
de donde $|x_k| = 0$ $\forall k = 1, 2, \ldots, n$, por lo tanto, $\vec{u} = \vec{0}_{\mathbb{R}^n}$.

3. Sean $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\vec{u} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces:

$$\begin{aligned} \|\lambda u\|_1 &= \|(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)\|_1 \\ &= \sum_{i=1}^{n} |\lambda x_i| \\ &= \sum_{i=1}^{n} |\lambda|\,|x_i| \\ &= |\lambda| \sum_{i=1}^{n} |x_i| \\ &= |\lambda|\,\|\vec{u}\|_1. \end{aligned}$$

4. Si $\vec{u} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\vec{v} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \|\vec{u} + \vec{v}\|_1 &= \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|) \\ &= \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i| \\ &= \|\vec{u}\|_1 + \|\vec{v}\|_1 \end{aligned}$$

Ejemplo 2.4 *Si* $(-1, 2, -3, 4) \in \mathbb{R}^4$, $\|\vec{u}\|_1 = \|(-1, 2, -3, 4)\|_1 = |-1| + |2| + |-3| + |4| = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$.

Norma uniforme

Si f es una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f alcanza su valor máximo en este intervalo. Puesto que la función valor absoluto es una función continua, la función $x \mapsto |f(x)|$ es continua en todo punto; así que ésta alcanza su valor máximo en el intervalo $[a, b]$. Sea

$$\|f\|_\infty = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)| = \max \{|f(x)| : x \in [a, b]\}$$

Mostremos que $\|\cdot\|_\infty$ es una norma en $C[a, b]$, el espacio de funciones continuas en el intervalo $[a, b]$:

1. Si $f \in C[a, b]$, $\|f\|_\infty = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)| \geq 0$.

2. Claramente $\|\theta\|_\infty = 0$ donde θ es la función constante cero. Supongamos que $f \in C[a, b]$ y que $\|f\|_\infty = 0$, entonces, puesto que para todo $x \in [a, b]$,

$$|f(x)| \leq \max_{a \leq x \leq b} |f(x)| = \|f\|_\infty = 0$$

se tiene

$$|f(x)| = 0 \quad \forall x \in [a, b].$$

Por tanto, $f = \theta$ la función constante cero en $[a, b]$.

3. Sean $f \in C[a, b]$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned}
\|\lambda f\|_\infty &= \max_{a \le x \le b} |\lambda f(x)| \\
&= \max_{a \le x \le b} |\lambda|\,|f(x)| \\
&= |\lambda| \max_{a \le x \le b} |f(x)| \\
&= |\lambda|\,\|f\|_\infty
\end{aligned}$$

4. Si $f, g \in C[a, b]$, entonces, para cada $x \in [a, b]$,

$$|f(x) + g(x)| \le |f(x)| + |g(x)| \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

Por tanto,

$$\|f + g\|_\infty = \max_{a \le x \le b} |f(x) + g(x)| \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

A $\|f\|_\infty$ se le dice la **norma uniforme** de la función f. Geométricamente $\|f\|_\infty$ es la máxima ordenada que alcanza la función $x \mapsto |f(x)|$ en el intervalo $[a, b]$, como se muestra en la figura 2.2

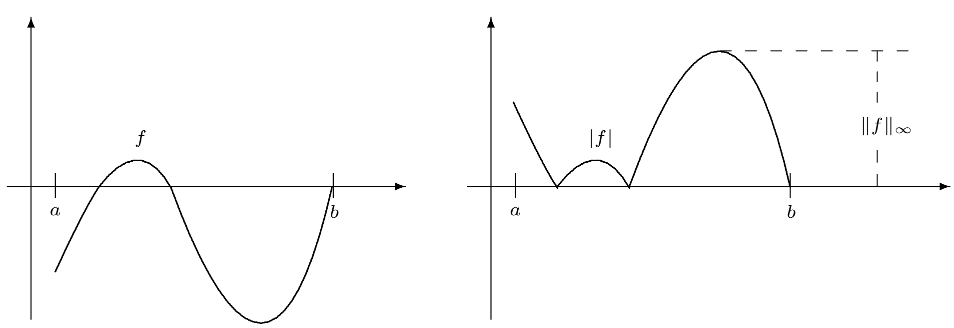


Figura 2.2:

Método para calcular $\|f\|_\infty$

Si f es una función derivable en todos los puntos del intervalo (a,b) y continua en todo punto del intervalo $[a,b]$, se puede hallar $\|f\|_\infty$ de la siguiente manera:

1. Si f tiene puntos críticos en el intervalo (a,b), digamos, $c_1, c_2, \ldots, c_m$,
$$\|f\|_\infty = \text{máx}\{|f(a)|, |f(c_1)|, |f(c_2)|, \ldots, |f(c_m)|, |f(b)|\}.$$

2. Si f no tiene puntos críticos en (a,b), entonces
$$\|f\|_\infty = \text{máx}\{|f(a)|, |f(b)|\}.$$

Ejemplo 2.5 *Sea $f(x) = 3x - x^3 \in C[-2,2]$. Entonces $\dot{f}(x) = 3 - 3x^2$; así, los puntos críticos en $(-2,2)$ son $x = \pm 1$. Puesto que $f(-2) = 2$, $f(-1) = -2$, $f(1) = 2$ y $f(2) = -2$,*

$$\begin{aligned} \|f\|_\infty &= \text{máx}\{|f(-2)|, |f(-1)|, |f(1)|, |f(2)|\} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Ejemplo 2.6 *Si $f(x) = xe^{x^2}$, $f \in C[-1,1]$. Ya que $\dot{f}(x) = (1+2x^2)e^{x^2}$, f no tiene puntos críticos en $(-1,1)$, por tanto*

$$\|f\|_\infty = \text{máx}\{|f(-1)|, |f(1)|\} = \text{máx}\{|-e|, |e|\} = e.$$

Norma en $C^k[a,b]$

Es fácil probar que si $\| \|_I$ y $\| \|_{II}$ son dos normas en un mismo espacio $\mathbf{E}$, entonces $\|u\| = \|u\|_I + \|u\|_{II}$ y $\|u\| = \text{máx}\{\|u\|_I, \|u\|_{II}\}$ son también normas en el espacio $\mathbf{E}$.

Sea $f \in C^k[a,b]$, entonces, $f\dot{f}, \ddot{f}, \ldots, f^{(k)}$ (la función f y sus primeras k derivadas) son funciones continuas en $[a,b]$, por tanto las funciones $|f|$, $|\dot{f}|$, $|\ddot{f}|$, ... , $|f^{(k)}|$ alcanzan su valor máximo en el intervalo $[a,b]$. Se define, para cada $f \in C^k[a,b]$,
$$\|f\| = \text{máx}\{\|f\|_\infty, \|\dot{f}\|_\infty, \|\ddot{f}\|_\infty, \ldots, \|f^{(k)}\|_\infty\}$$

Por lo precedente, $f \mapsto \|f\|$ es una norma en $C^k[a,b]$. En todo lo que sigue, ésta será la norma con la que trabajaremos en el espacio $C^k[a,b]$ aún si no se hace explícito este hecho[2]

[2] Una norma que también se emplea usualmente en este espacio es $\|f\| = \sum_{m=0}^{k} \|f^{(m)}\|_\infty$, que es equivalente, para los fines de optimización dinámica, a la norma que se ha decidido usar en este trabajo.

Método para calcular $\|f\|$ en $C^k[a,b]$

Para calcular la norma de una función clase C-k se procede de la siguiente manera:

1. Se encuentran $\|f\|_\infty, \|\dot{f}\|_\infty, \|\ddot{f}\|_\infty, \ldots, \|f^{(k)}\|_\infty$, utilizando el método de la página 18 para calcular $\|g\|_\infty$.

2. $$\|f\| = \text{máx}\{\|f\|_\infty, \|\dot{f}\|_\infty, \|\ddot{f}\|_\infty, \ldots, \|f^{(k)}\|_\infty\}$$

Ejemplo 2.7 *Sea $f(x) = xe^{-x}$, entonces*

$$\begin{aligned}
\dot{f}(x) &= -e^{-x}(x-1), \\
\ddot{f}(x) &= e^{-x}(x-2) \;\; y \\
\dddot{f}(x) &= -e^{-x}(x-3).
\end{aligned}$$

Claramente $f \in C^2[-4,5]$. El único punto crítico de f en $(-4,5)$ es $x=1$; por lo que

$$\begin{aligned}
\|f\|_\infty &= \text{máx}\{|f(-4)|, |f(1)|, |f(5)|\} \\
&= \left\{4e^4, e^{-1}, 5e^{-5}\right\} \\
&= 4e^4.
\end{aligned}$$

El único punto crítico se $\dot{f}$ en $(-4,5)$ es $x=2$; por tanto,

$$\begin{aligned}
\|\dot{f}\|_\infty &= \text{máx}\left\{|\dot{f}(-4)|, |\dot{f}(2)|, |\dot{f}(5)|\right\} \\
&= \text{máx}\left\{5e^4, e^{-2}, 4e^{-5}\right\}. \\
&= 5e^4
\end{aligned}$$

El único punto crítico de $\ddot{f}$ en $(-4,5)$ es $x=3$, por lo que

$$\begin{aligned}
\|\ddot{f}\|_\infty &= \left\{|\ddot{f}(-4)|, |\ddot{f}(3)|, |\ddot{f}(5)|\right\} \\
&= \left\{6e^4, e^{-3}, 3e^{-5}\right\} \\
&= 6e^4.
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
\|f\| &= \text{máx}\left\{\|f\|_\infty, \|\dot{f}\|_\infty, \|\ddot{f}\|_\infty\right\} \\
&= \text{máx}\left\{4e^4, 5e^4, 6e^4\right\} \\
&= 6e^4
\end{aligned}$$

en $C^2[-4,5]$.

2.2 Distancia en espacios vectoriales normados

Definición 2.2 *Si* **E** *es un espacio vectorial normado, con norma* $\| \|$, *y* $u, v \in$ **E**, *se define la distancia entre u y v como*

$$\mathrm{d}(u,v) = \|u - v\|.$$

Puesto que $\|v - u\| = \| - 1(u - v)\| = | - 1| \, \|u - v\| = \|u - v\|$, se tiene $\mathrm{d}(u,v) = \mathrm{d}(v,u)$.

Ejemplo 2.8 *En* $\mathbb{R}^2$, *con la norma euclidiana* $\| \|_2$, *si* $\vec{u} = (-1,2)$ *y* $\vec{v} = (2,-2)$,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(\vec{u},\vec{v}) &= \|\vec{u} - \vec{v}\|_2 \\ &= \|(-1,2) - (2,-2)\|_2 \\ &= \|(-3,4)\|_2 \\ &= \sqrt{(-3)^2 + (4)^2} \\ &= 5 \end{aligned}$$

que es la longitud del segmento de recta que une a los puntos $\vec{u} = (-1,2)$ *y* $\vec{v} = (-3,4)$.

En general, en $\mathbb{R}^2$ (y en $\mathbb{R}^3$) $\mathrm{d}(\vec{u},\vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\|_2$ es la longitud del segmento de recta que une a los puntos $\vec{u}$ y $\vec{v}$ como se ilustra en la figura 2.3.

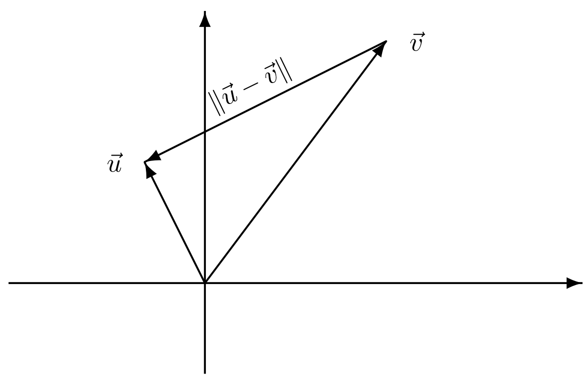


Figura 2.3:

En $C[a,b]$, $\mathrm{d}(f,g) = \|f - g\|_\infty$ es el valor máximo de las distancias entre las ordenadas de los puntos $(x, f(x))$, $(x, g(x))$ en la gráficas de las funciones f y g en el intervalo $[a,b]$ como se muestra en la figura 2.4. Dado que $|f(x) - g(x)| \leq \text{máx}_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x))| = \|f - g\|_\infty$, si $\mathrm{d}(f,g) = \|f - g\|_\infty$ es pequeña, entonces los valores $f(x)$ y $g(x)$ serán cercanos entre sí; es decir, las gráficas de las funciones f y g son próximas puntualmente y, por tanto, mientras más pequeña sea $\mathrm{d}(f,g)$, más próximos serán los valores $f(x)$ y $g(x)$ para cada $x \in [a,b]$. Esta es la razón por la cual la distancia inducida por la norma uniforme mide la cercanía entre funciones en $C[a,b]$.

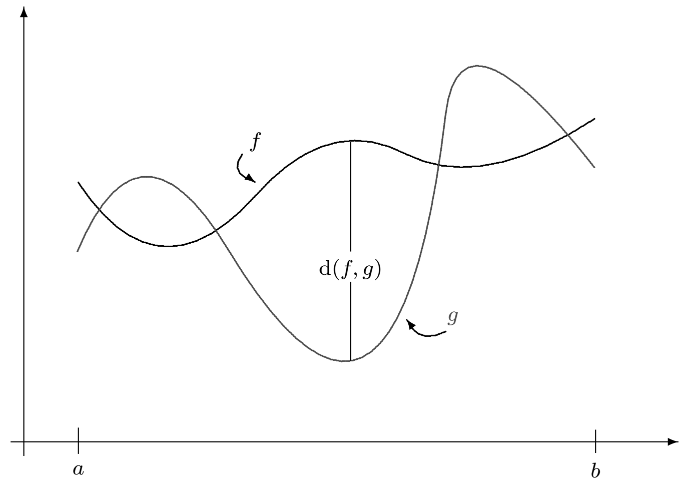


Figura 2.4: En $C[a,b]$, $\mathrm{d}(f,g) = \|f-g\|_\infty = \max_{a\le x\le b} |f(x)-g(x)|$.

Ejemplo 2.9 *Sean $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x}$, $f,g \in C[0,1]$. Entonces, si $h(x) = f(x) - g(x) = x^2 - \sqrt{x}$, $h'(x) = 2x - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$, por lo que el único punto crítico de h en $(0,1)$ es $x = (\frac{1}{4})^{\frac{2}{3}}$, luego*

$$\|h\|_\infty = \max\{|h(0)|\,, |h((1/4)^{\frac{2}{3}})|, |h(1)|\} = |(\frac{1}{4})^{\frac{4}{3}} - (\frac{1}{4})^{\frac{1}{3}}| = \frac{3}{16}4^{2/3}$$

Por tanto,

$$\mathrm{d}(f,g) = \|f-g\|_\infty = \frac{3}{16}4^{2/3}$$

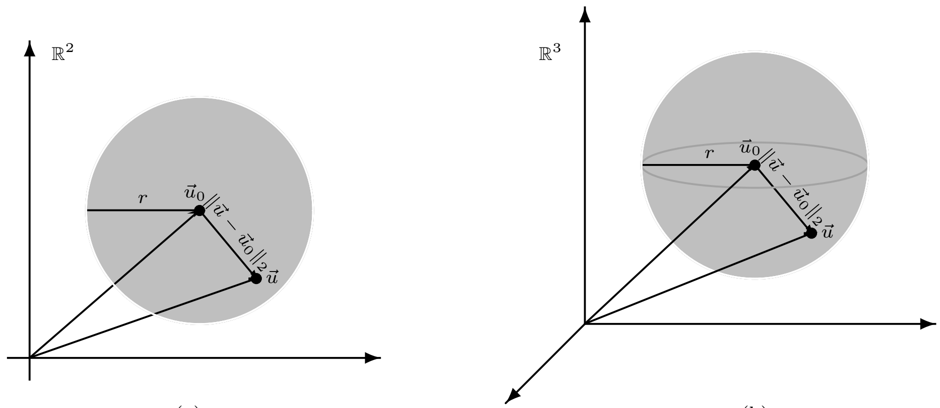
Bolas en espacios vectoriales

Definición 2.3 *Sea u_0 un vector del espacio normado $\mathbf{E}$ y $r > 0$ un número real, el conjunto*

$$B(u_0, r) = \{v \in \mathbf{E} : \ \|u_0 - v\| < r\}$$

*es la **bola abierta** de centro u_0 y radio r.*

En $\mathbb{R}^2$, $B(\vec{u}_0, r)$ es el conjunto de puntos cuya distancia a $\vec{u}_0$ son inferiores a r, por tanto, este conjunto consiste en todos los puntos dentro del círculo de centro $\vec{u}_0$ y radio r como se ilustra en la figura 2.5 (a); de manéra análoga, en $\mathbb{R}^3$ la bola de centro $\vec{u}_0$ y radio r es el conjunto de todos los puntos dentro de la esfera de centro $\vec{u}_0$ y radio r que se muestra en la figura 2.5 (b). Debido a la forma esférica que tiene este conjunto en $\mathbb{R}^3$ es que, por generalización, a $B(u_0, r)$ en cualquier espacio vectorial normado se le dice bola de centro u_0 y radio r.



(a) (b)

Figura 2.5: Bolas abiertas en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

Por otra parte, si $\vec{u}_0 = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $r > 0$ y $\vec{u} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, entonces

$$\begin{aligned} \|\vec{u}-\vec{u}_0\|_\infty &= \|(x-a, y-b)\|_\infty < r \\ &\Leftrightarrow |x-a| < r \;\text{ y }\; |y-b| < r \\ &\Leftrightarrow a-r < x < a+r \;\text{ y }\; a-r < x < a+r \end{aligned}$$

es decir, respecto a $\| \, \|_\infty$,

$$\vec{u} \in B((a, b), r) \Leftrightarrow a-r < x < a+r \quad \text{y} \quad a-r < x < a+r$$

Lo precedente significa que el punto (x, y) debe estar dentro del cuadrado de centro (a, b) y lado $2r$ que se ilustra en la figura 2.6. Análogamente, la bola de centro $\vec{u}_0$ y radio r en el espacio $\mathbb{R}^3$ consiste de todos los puntos que están dentro del cubo de centro $\vec{u}_0$ y arista $2r$. Esta es la razón por la que $\| \, \|_\infty$ se llama norma cúbica.

Bolas en $C[a, b]$

Sean $f_0, f \in C[a, b]$ y $r > 0$. Entonces, ya que $\|f - f_0\|_\infty < r$ equivale a $|f(x) - f_0(x)| < r$ para todo $x \in [a, b]$, lo cual significa, a su vez, que $f_0(x) - r < f(x) < f_0(x) + r$ para todo $x \in [a, b]$, se tiene: $f \in B(f_0, r)$, respecto a la norma uniforme, si y sólo si la gráfica de f está entre las gráficas de las funciones $f_0 - r$ y $f_0 + r$. Así, la bola de centro f_0 y radio r en $C[a, b]$ es la región entre las gráficas de las funciones $f_0 - r$ y $f_0 + r$ que se muestra en la figura 2.7.

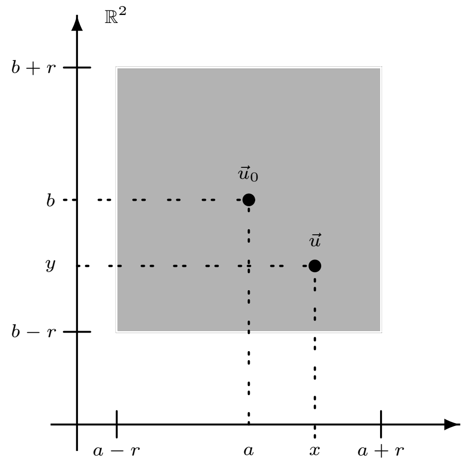


Figura 2.6: Bola abierta en $\mathbb{R}^2$ respecto a la norma $\| \|_\infty$.

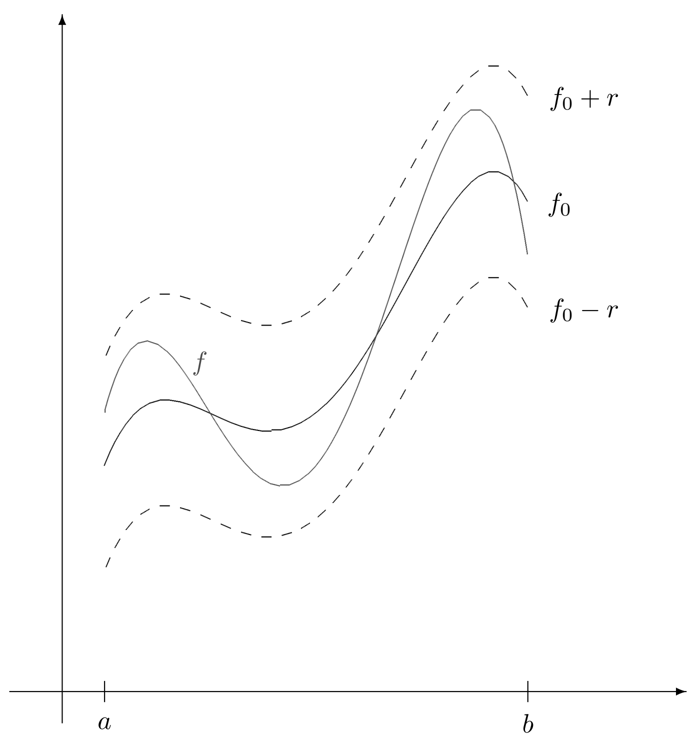


Figura 2.7: Bola de centro f_0 y radio r respecto a la norma uniforme $\| \|_\infty$ en $C[a, b]$.

Capítulo 3

Matrices, determinantes, sistemas, valores y vectores propios

3.1 Matrices

Una matriz A de tamaño $m \times n$ es un arreglo rectangular de mn números reales a_{ij} con m filas y n columnas de la forma

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Así, con esta notación, el número a_{ij} representa la componente de la matriz A que se encuentra en la fila i y en la columna j. Para escribir en forma compacta la matriz A se utiliza la notación

$$A = [a_{ij}]$$

Ejemplo 3.1 *La matriz*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 7 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

es una matriz de tamaño 4×3*; y, en este caso,* $a_{11} = -1$*,* $a_{23} = 2$*,* $a_{31} = 1$*, etc.*

Suma

Si $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ son matrices del mismo tamaño, se define la suma de estas matrices como

$$A = [a_{ij} + b_{ij}]\,.$$

Por ejemplo, si $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$, entonces

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 5 & -5 & -2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Producto de un escalar con una matriz

Si $\alpha \in \mathbb{R}$ es un escalar y $A = [a_{ij}]$ es una matriz, se define el producto αA como

$$\alpha A = [\alpha a_{ij}]$$

Así, por ejemplo,

$$-4 \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -8 \\ 20 & -12 \end{bmatrix}.$$

Producto de una matriz fila con una matriz columna

Si $F = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$ es una matriz fila y $C = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ es una matriz columna, ambas con el mismo número de componentes, se define el producto FC como

$$\begin{aligned} FC &= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n. \end{aligned}$$

Por ejemplo,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} &= (-1)(2) + (2)(1) + (4)(2) \\ &= -2 + 2 + 8 \\ &= 8. \end{aligned}$$

Multiplicación de matrices

Si $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ son matrices de tamaños $m \times n$ y $n \times p$, respectivamente; esto es, el número de columnas de la matriz A es igual al número de filas de la matriz B, se define el producto (o multiplicación) de la matriz A con la matriz B como

$$AB = [c_{ij}]$$

donde cada c_{ij} es el resultado de multiplicar la fila i de la matriz A con la columna j de la matriz B; es decir,

$$c_{ij} = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, si las filas de la matriz A se denotan por F_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ y las columas de la matriz B por C_j, $j = 1, 2, \ldots, p$,

$$AB = \begin{bmatrix} F_1C_1 & F_1C_2 & \cdots & F_1C_p \\ F_2C_1 & F_2C_2 & \cdots & F_2C_p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ F_mC_1 & F_mC_2 & \cdots & F_mC_p \end{bmatrix}$$

y la matriz producto tiene tamaño $m \times p$. Por jemplo,

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1C_1 & F_1C_2 & F_1C_3 & F_1C_4 \\ F_2C_1 & F_2C_2 & F_2C_3 & F_2C_4 \\ F_3C_1 & F_3C_2 & F_3C_3 & F_3C_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (-1)(2)+(2)(-2) & (-1)(-1)+(2)(1) & (-1)(1)+(2)(0) & (-1)(4)+(2)(2) \\ (2)(2)+(3)(-2) & (2)(-1)+(3)(1) & (2)(1)+(3)(0) & (2)(4)+(3)(2) \\ (-3)(2)+(1)(-2) & (-3)(-1)+(1)(1) & (-3)(1)+(1)(0) & (-3)(4)+(1)(2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -6 & 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 14 \\ -8 & 4 & -3 & -10 \end{bmatrix}.$$

3.2 Cálculo de determinantes por cofactores

1. Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ es una matriz cuadrada de orden 2, el determinante de esta matriz es

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

2. Si $A = [a_{ij}]$ es una matriz cuadrada de orden n (una matriz con n filas y n columnas) el determinante de esta matriz se puede calcular desarrollando por cofactores por cualquier fila o columna de la siguiente manera:

(a) Por una fila: Sea $F_i = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix}$ una fila (cualquiera) de A, y sea Δ_{ij} el determinante de la matriz $(n-1) \times (n-1)$ que resulta de suprimir la fila i y la columna j, $j = 1, 2, \ldots, n$, de la matriz A; entonces

$$\det(A) = (-1)^{i+1} a_{i1} \Delta_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} \Delta_{i2} + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} \Delta_{in}$$

El Δ_{ij} es un determinante de una matriz de orden $(n-1) \times (n-1)$ al cual se le puede aplicar el mismo procedimiento para calcularlo como suma de determinantes de órdenes $(n-2) \times (n-2)$; al aplicar sucesivamente este procedimiento se llega al cálculo de determinantes de orden 2×2 que están definidos en el inciso 1.

(b) Por una columna: Sea $C_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$ una columna de A, y sea Δ_{ij}el determinante de la matriz $(n-1) \times (n-1)$ que resulta de suprimir la fila i y la columna j, $i = 1, 2, \ldots, n$, de la matriz A; entonces

$$\det(A) = (-1)^{j+1} a_{1j} \Delta_{1j} + (-1)^{j+2} a_{2j} \Delta_{2j} + \cdots + (-1)^{j+n} a_{nj} \Delta_{nj}$$

El Δ_{ij} es un determinante de una matriz de orden $(n-1) \times (n-1)$ al cual se le puede aplicar el mismo procedimiento para calcularlo como suma de determinantes de órdenes $(n-2) \times (n-2)$; al aplicar sucesivamente este procedimiento se llega al cálculo de determinantes de orden 2×2 que están definidos en el inciso 1.

Ejemplo 3.2 $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = (-2)(4) - (1)(-3) = -5$

Ejemplo 3.3 *Calcular, desarrollando por una fila o por una columna, el determinante de la matriz*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Solución: ▶ Ya que la última columna tiene dos elementos nulos, conviene desarrollar el determinante por cofactores por esta columna (o por la cuarta fila), entonces

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} &= (-1)^{4+1}(0)\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{4+2}(-2)\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&\quad + (-1)^{4+3}(1)\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{4+4}(0)\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{4+2}(-2)\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{4+3}(1)\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -2\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Ahora desarrollamos por cofactores los determinantes 3×3 por la tercera fila:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} &= -2\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -2\left((-1)^{3+1}(-3)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}(1)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}\right) \\
&\quad -\left((-1)^{3+1}(-3)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}(1)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}\right) \\
&= -2\left(-3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}\right) \\
&\quad -\left(-3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}\right) \\
&= -2\,(-3(-4-4)-4-4) - (-3(2-2)-2+6) \\
&= -2(24-8)-4 \\
&= -36. \blacktriangleleft
\end{aligned}$$

Ya que $(-1)^{i+j}$ es 1 o -1 si $i+j$ es par o impar, respectivamente, una manera simple de evitar el cálculo de estas potencias de -1 es por medio de una matriz de signos; la cual es una matriz del mismo tamaño que la matriz a la cual se le va a calcular el determinante. La primer componenete de la matriz designos es el signo $+$, después se alternan –en las demás componentes– los signos $+$ y $-$ con la condición de que al lado y abajo deben siempre estar signos distintos; por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{bmatrix}$$

son matrices de signos para matrices de órdenes 3 y 4, respectivamenete. Entonces, para calcular el determinante de una matriz A por una fila o columna se forma la matriz de signos del mismo tamaño que la matriz A, y en lugar de calcular $(-1)^{i+j}$ en $(-1)^{i+j}a_{ij}\Delta_{ij}$ se observa el signo que tiene la componente ij en la matriz de signos.

Ejemplo 3.4 *Al desarrollar por la primera fila utilizando la matriz de signos de orden 3:*

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} &= (-2)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\
&= -2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\
&= -2\cdot 1 + 3\cdot 0 - (-2) \\
&= 0
\end{aligned}$$

3.3 Sistemas lineales

Un sistema lineal de m ecuaciones y n incógnitas tiene la forma

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

donde los coeficientes a_{ij} y los términos independientes b_j son números reales dados. El sistema se puede escribir en forma matricial como

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

donde $A = [a_{ij}]$ es la matriz de coeficientes, $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$.

Método de Gauss

Para resolver un sistema lineal $A\vec{x} = \vec{b}$, se procede de la siguiente manera:

1. Se forma la matriz ampliada

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

2. Se aplican de manera conveniente las operaciones de fila

   intercambio de filas: $F_i \leftrightarrow F_j$: la fila i se intercambia con la fila j.

   cambio de escala $F_i \leftrightarrow \alpha F_i$: la fila i se multiplica por el escalar $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$.

   suma de filas $F_i \leftrightarrow \alpha F_i + \beta F_j$: la fila i se cambia por el resultado de la operación $\alpha F_i + \beta F_j$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$.

   hasta obtener un sistema equivalente (con las mismas soluciones) en forma escalonada; esto es, un sistema $[E \mid \vec{c}]$ donde la matriz ampliada cumple las siguientes condiciones:

   - si tiene filas nulas éstas están por debajo de las filas no nulas
   - el primer elemento distinto de cero de cada fila no nula se encuentra a la derecha de los primeros elementos distintos de cero de las filas anteriores

   Al primer elemento distinto de cero de una fila no nula de un sistema escalonado se le llama pivote de esa fila. A las variables que corresponden a columna con pivote se les dice variables básicas o ligadas y a las que no corresponden a pivote, se les dice variables libres. Por ejemplo, el sistema lineal

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 - x_5 &= 2 \\ x_2 - 3x_4 &= -5 \\ x_4 + x_5 &= -1 \end{aligned}$$

   tiene matriz ampliada

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 3 & -4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

   por tanto está en forma escalonada con variables ligadas: x_1, x_2 y x_4; y variables libres: x_3 y x_5.

3. Se resuelve el sistema escalonado resultante utilizando sustitución regresiva: despejando la variables ligadas de abajo hacia arriba y sustituyendo los resultados obtenidos en las ecuaciones precedentes considerendo lo siguiente:

   - Si el sistema tiene una fila con todos sus registros nulos a la derecha de la ampliación y un registro distino de cero en el lado derecho, entonces el sistema no tiene solución, es inconsistente; en caso contrario el sistema es consistente y puede tener una única solución o una infinidad de soluciones. Por ejemplo, el sistema escalonado

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right]$$

no tiene solución (sistema inconsistente)

- Si el sistema escalonado tiene pivote en toda columna y es consistente (no se sucede el caso anterior), entonces tiene solución única. Por ejemplo, el sitema escalonado

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

es consistente y al hacer sustitución regresiva:

$$\begin{aligned} x_4 &= \frac{-4}{-2} = 2 \\ x_3 &= \frac{2-2x_4}{-2} = \frac{2-4}{-2} = 1 \\ x_2 &= \frac{9-2x_3-3x_4}{-1} = -(9-2(1)-3(2)) = -1 \\ x_1 &= 7 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 7 - 1 - 2(1) - 2 = 2 \end{aligned}$$

y podemos expresar la única solución del sistema en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- Si el sistema es consistente y tiene variables libres, entonces tiene una infinidad de soluciones. Por ejemplo, el sistema escalonado

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

es consistente, las variables ligadas son x_1, x_2 y x_4; mientras que las variables libres son x_3 y x_5. Por tanto tiene una infinidad de soluciones. Al hacer sustitución regresiva

$$\begin{aligned} x_4 &= x_5 \\ x_2 &= 5 + x_3 - 2x_4 - 2x_5 \\ &= 5 + x_3 - 4x_5 \\ x_1 &= 1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - x_5 \\ &= 1 + 5 + x_3 - 4x_5 - 2x_3 - 2x_5 \\ &= 6 - x_3 - 6x_5 \end{aligned}$$

Entonces, por ser x_3 y x_5 variables libres, pueden tomar cualquier valor y el conjunto de soluciones del sistema se puede expresar en la forma

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6-s-6r \\ 5+s-4r \\ s \\ r \\ r \end{bmatrix}$$

con $r, s \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 3.5 *Resolver el sistema*

$$\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 + 2x_3 & = & 1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 & = & 3 \\ -3x_1 + 2x_2 + 5x_3 & = & 6 \\ 5x_1 - 4x_2 - x_3 & = & -4 \end{array}$$

Solución: ▶ La matriz ampliada de este sistema es

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \\ -3 & 2 & 5 & 6 \\ 5 & -4 & -1 & -4 \end{array}\right]$$

Apliquemos el método de Gauss:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \\ -3 & 2 & 5 & 6 \\ 5 & -4 & -1 & -4 \end{array}\right] \overset{(a)}{\to} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 11 & 9 \\ 0 & 1 & -11 & -9 \end{array}\right]$$

$$\overset{(b)}{\to} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & -10 & -10 \end{array}\right]$$

$$\overset{(c)}{\to} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

El sistema tiene solución única que se obtiene al hacer sustitución regresiva:

$$\begin{array}{rcl} x_3 & = & 1 \\ x_2 & = & 1 + x_3 \\ & = & 2 \\ x_1 & = & 1 + x_2 - 2x_3 \\ & = & 1 + 2 - 2 \\ & = & 1 \blacktriangleleft \end{array}$$

Obsérvese que para obtener el segundo sistema equivalente, se utilizó el primer elemento de la primera fila del, sistema original, para transformar en ceros los elementos que están por debajo de él con las operaciones: (a) $F_2 \leftrightarrow -2F_1 + F_2$, $F_3 \leftrightarrow 3F_1 + F_3$ y $F_4 \leftrightarrow -5F_1 + F_4$; mientras que el segundo sistema se obtuvo utilizando el primer elemento de la segunda fila para transformar a ceros los elementos que están por debajo del mismo con las operaciones de fila: (b) $F_3 \leftrightarrow F_2 + F_3$, $F_4 \leftrightarrow -F_2 + F_4$; y el sistema final se consiguió mediante la operación (c) $F_4 \leftrightarrow F_4 + F_3$. En general, cuando se utiliza el primer elemento no nulo de una fila de una matriz ampliada para convertir en ceros los elementos que están por debajo de él, mediante operaciones de renglón, se dice que se efectúa con éste un pivote. Éste es, en esencia, el método de Gauss.

Ejemplo 3.6 *Resolver el sistema*

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 &= 7 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= -2 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= -2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_4 &= -8 \end{aligned}$$

Solución: ▶

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 1 & -3 & 7 \\ 3 & 1 & -2 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 0 & 6 & -8 \end{array}\right] \overset{(a)}{\to} \left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & 5 & -7 & 13 & -25 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 5 & -1 & 9 & -15 \end{array}\right]$$

$$\overset{(b)}{\to} \left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & 5 & -7 & 13 & -25 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & -4 & 10 \end{array}\right]$$

$$\overset{(c)}{\to} \left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & 5 & -7 & 13 & -25 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

[(a): $F_2 \leftrightarrow -3F_1 + 2F_2$, $F_3 \leftrightarrow F_3 + F_1$, $F_4 \leftrightarrow -F_1 + F_4$; (b): $F_4 \leftrightarrow -F_2 + F_4$; (c): $F_4 \leftrightarrow -2F_3 + F_4$.] Las variables ligadas son x_1, x_2 y x_3; la variable libre es x_4. El sistema tiene una infinidad de soluciones, que se obtienen al hacer sustitución regresiva:

$$\begin{aligned}
x_3 &= \frac{5}{3} + \frac{2}{3}x_4 \\
x_2 &= -5 + \frac{7}{5}x_3 - \frac{13}{5}x_4 \\
&= -5 + \frac{7}{5}\left(\frac{5}{3} + \frac{2}{3}x_4\right) - \frac{13}{5}x_4 \\
&= -\frac{8}{3} - \frac{5}{3}x_4 \\
x_1 &= \frac{7}{2} + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_4 \\
&= \frac{7}{2} + \frac{1}{2}\left(-\frac{8}{3} - \frac{5}{3}x_4\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{5}{3} + \frac{2}{3}x_4\right) + \frac{3}{2}x_4 \\
&= \frac{4}{3} + \frac{1}{3}x_4
\end{aligned}$$

esto es,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} + \frac{1}{3}r \\ -\frac{8}{3} - \frac{5}{3}r \\ \frac{5}{3} + \frac{2}{3}r \\ r \end{bmatrix}$$

donde r es cualquier número real. ◄

3.4 Valores y vectores propios

Si A es una matriz cuadrada de orden n, $\lambda \in \mathbb{R}$ es una valor propio[1] de esta matriz si exite un vector $\vec{u} \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}_{\mathbb{R}^n}\}$, tal que $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$. En tal caso, el vector $\vec{u}$ es un vector propio[1] de la matriz A asociado o correspondiente al valor propio λ. Para calcular los valores propios y vectores propios correspondientes de una matriz A se procede de la siguiente forma:

1. Los valores propios de la matriz A son las raíces reales de la ecuación característica:
$$\det(A - \lambda I_n) = 0$$
donde I_n es la matriz identidad de orden n; esto es, I_n es la matriz con todos los elementos de su diagonal iguales a uno y todos los elementos fuera de la diagonal iguales a cero.

2. Si $\lambda = \alpha$ es un valor propio de la matriz A, los valores propios asociados a α son las soluciones no nulas de la ecuación
$$A - \alpha I_n = \vec{0}_{\mathbb{R}^n}$$

[1]Se usan también los términos equivalentes valor característico o eigenvalor o autovalor para valor propio; y vector característico o eigenvector o autovector para vector propio, en la literatura de álgebra lineal.

Se puede demostrar[2] que $\det(A-\lambda I_n)$ es en todo caso un polinomio de grado n en λ y, por tanto, tiene a lo más n raíces reales. Así, toda matriz cuadrada de orden n tiene a lo más n valores propios. Sin embargo, cuando la matriz es simétrica; esto es, cuando coincide con su transpuesta[3], entonces todos los valores propios de la matriz serán números reales y tendrá, por tanto, n valores propios exactamente si se cuentan con multiplicidades.

Ejemplo 3.7 *Calcular los valores y vectores propios correspondientes de cada valor propio de la matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución: ▶

$$\begin{aligned}
\det(A-\lambda I_3) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 0-\lambda & 1 \\ 1 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)(\lambda(\lambda-1)-3)-(\lambda-1-1) \\
&= -(\lambda-2)(\lambda^2-\lambda-3)-(\lambda-2) \\
&= -(\lambda-2)(\lambda^2-\lambda-3+1) \\
&= -(\lambda-2)(\lambda^2-\lambda-2) \\
&= -(\lambda-2)(\lambda-2)(\lambda+1)=0
\end{aligned}$$

implica que $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=\lambda_3=2$ son los valores propios de la matriz A; $\lambda=2$ con multiplicidad dos y $\lambda=-1$ con multiciplidad uno.

---

[2] Cf. referencia bibliográfica [2], p. 127.

[3] Si A es una matriz, su transpuesta es la matriz cuya primera columna a la primera fila de A, la segunda columna es la segunda fila de A, etc.

Para hallar los vectores propios correspondientes a λ_1 resolvemos el sistema homogéneo $(A-\lambda_1 I_3)\vec{x}=\vec{0}_{\mathbb{R}^3}$:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 2-\lambda_1 & 1 & 0 \\ -1 & 0-\lambda_1 & 1 \\ 1 & 3 & 1-\lambda_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \\
&\to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&\to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & -8 & -6 \end{bmatrix} \\
&\to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

al hacer sustitución regresiva (el sistema es homogéneo y, por tanto, los términos independientes son cero),

$$\begin{aligned}
x_2 &= -\frac{3}{4}x_3 \\
x_1 &= -3x_2-2x_3 \\
&= \frac{9}{4}x_3-2x_3 \\
&= \frac{1}{4}x_3
\end{aligned}$$

luego, los valores propios asociados a $\lambda_1=-1$ son los vectores de la forma $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r/4 \\ -3r/4 \\ r \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 1/4 \\ -3/4 \\ 1 \end{bmatrix}$ con $r\neq 0$. Para el valor propio $\lambda_2=2$,

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 2-\lambda_2 & 1 & 0 \\ -1 & 0-\lambda_2 & 1 \\ 1 & 3 & 1-\lambda_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \\
&\to \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&\to \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&\to \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned} x_2 &= 0 \\ x_1 &= -3x_2 + x_3 \\ &= 0 + x_3 \\ &= x_3 \end{aligned}$$

y, por tanto, los vectores propios correspondientes a $\lambda_2 = 2$ están dados por $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ 0 \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ con $s \neq 0$. ◄

Capítulo 4

Ecuaciones diferenciales

4.1 Ecuaciones diferenciales de primer orden

Una función φ, definida en un intervalo I, es una solución de la ecuación diferencial de orden uno

$$\dot{x} = f(t, x)$$

si:

1. $(t, \varphi(t)) \in D_f$ para todo $t \in I$, donde D_f es el dominio de la función f.
2. $\dot{\varphi}(t) = f(t, \dot{\varphi}(t))$ para todo $t \in I$.

Separación de variables

Una ecuación diferencial de primer orden es de variables separables si se puede escribir en la forma

$$\dot{x} = f_1(t) f_2(x)$$

donde f_1 es una función que depende únicamente de t y f_2 es una función que depende únicamente de x. Si este es el caso, la ecuación diferencial se resuelve *separando variables*:

1. La ecuación se escribe en forma diferencial:
$$\frac{dx}{dt} = f_1(t) f_2(x)$$
2. Se separan variables:
$$\frac{dx}{f_2(x)} = f_1(t) dt$$
3. Se integra
$$\int \frac{dx}{f_2(x)} = \int f_1(t) dt$$

Ejemplo 4.1 *Resolver la ecuación diferencial*

$$\dot{x} = -\frac{x}{t}$$

Solución: ▶ La ecuación es de variables separables con $f_1(t) = -1/t$ y $f_2(x) = x$. Entonces, al aplicar el método,

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{t}$$

$$\frac{dx}{x} - \frac{dt}{t}$$

$$\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{dt}{t}$$

implica

$$\ln x = -\ln t + C$$

y, por tanto,

$$\ln x = \ln t^{-1} + C$$

de donde,

$$\begin{aligned} x &= e^{\ln t^{-1} + C} \\ &= \frac{e^C}{t} \end{aligned}$$

Luego,

$$x(t) = \frac{A}{t}$$

con $A \in \mathbb{R}$. ◀

Ecuación diferencial lineal de primer orden

Una ecuación diferencial que se puede escribir en la forma

$$\dot{x} + a(t)x = b(t)$$

donde a y b son funciones que dependen únicamente de t (en particular pueden ser funciones constantes) es una ecuación diferencial lineal de primer orden. La solución general de esta ecuación está dada por

$$x(t) = \frac{1}{e^{\int a(t)dt}} \int b(t)e^{\int a(t)dt}$$

donde $\int a(t)dt$ es cualquier antiderivada de la función a y, por tanto, esta última integral se toma sin constante de integración.

Ejemplo 4.2 *La ecuación diferencial* $t\dot{x} - x = t\ln t$ *se puede escribir como*

$$\dot{x} - \frac{1}{t}x = \ln t$$

y como $a(t) = -1/t$ *y* $b(t) = \ln t$ *dependen únicamente de* t*, esta ecuación es lineal. Entonces,*

$$\int a(t)dt = \int \frac{-1}{t}dt = -\ln t,$$

$$e^{\int a(t)dt} = e^{-\ln t} = e^{\ln t^{-1}} = \frac{1}{t}$$

por tanto,

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\frac{1}{t}} \int \frac{\ln t}{t} dt \\ &= t\frac{1}{2}\ln^2 t + Ct \end{aligned}$$

4.2 Ecuaciones diferenciales orden superior

Una función φ, definida en un intervalo I, es una solución de la ecuación diferencial de orden n

$$x^{(n)} = f(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n-1)})$$

donde $x^{(k)} = \dfrac{d^k x}{dt^k}$, si:

1. $(t, \varphi(t), \dot{\varphi}(t), \ldots, \varphi^{(n-1)}(t)) \in D_f$ para todo $t \in I$, donde D_f es el dominio de la función f.
2. $\varphi^{(n)}(t) = f(t, \varphi(t), \dot{\varphi}(t), \ldots, \varphi^{(n-1)}(t))$ para todo $t \in I$

La ecuación diferencial más simple de orden superior es la que tiene la forma

$$x^{(n)} = f(t)$$

la cual se puede resolver integrando sucesivamente n veces. Por ejemplo, la ecuación diferencial

$$\ddot{x} = 6t$$

se puede resolver integrando sucesivamente dos veces:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \int 6t dt \\ &= 3t^2 + C_1 \end{aligned}$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned} x &= \int (3t^2 + C_1)dt \\ &= t^3 + C_1 t + C_2 \end{aligned}$$

Ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes

Una ecuación diferencial que se puede escribir en la forma

$$a_2\ddot{x} + a_1\dot{x} + ax = 0$$

donde a_2, a_1 y a_0 son constantes, es una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes. Para resolver este tipo de ecuaciones se procede de la siguiente manera:

1. Se forma la ecuación característica: $a_2m^2 + a_1m + a_0 = 0$ y se calculan sus soluciones: m_1 y m_2.

2. De acuerdo a la naturaleza algebraica de éstas se forma la solución general de la ecuación diferencial del siguiente modo:

   (a) Si $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$ y $m_1 \neq m_2$, entonces

   $$x(t) = C_1e^{m_1t} + C_2e^{m_2t}$$

   (b) Si $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$ y $m_1 = m_2 = m$, entonces

   $$x(t) = C_1e^{mt} + C_2te^{mt}$$

   (c) Si $m_1 = \alpha+\beta i$, $m_2 = \alpha-\beta i$ son raíces complejas, con $\beta > 0$, entonces

   $$x(t) = (C_1\cos(\beta t) + C_2\,\mathrm{sen}(\beta t))e^{\alpha t}$$

Ejemplo 4.3 *Resolver las ecuaciones diferenciales*

1. $\ddot{x} - 5\dot{x} + 6x = 0$

2. $\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 0$

3. $\ddot{x} + \dot{x} + x = 0$

Solución: ▶

1. La ecuación característica para esta ecuación es

$$\begin{aligned} 0 &= m^2 - 5m + 6 \\ &= (m-2)(m-3) \end{aligned}$$

   con soluciones $m_1 = 2$ y $m_2 = 3$ (caso a), por tanto

$$x(t) = C_1e^{2t} + C_2e^{3t}$$

2. Ecuación característica

$$\begin{aligned} 0 &= m^2 - 4m + 4 \\ &= (m-2)^2 \end{aligned}$$

por tanto, $m_1 = m_2 = 2$ (caso b), entonces

$$x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 t e^{2t}$$

3. Ecuación característica: $m^2 + m + 1 = 0$, por tanto,

$$\begin{aligned} m &= \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{3i^2}}{2} \\ &= -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i \end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned} m_1 &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \\ m_2 &= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \end{aligned}$$

(caso c) entonces,

$$x(t) = \left(C_1 \cos(\frac{\sqrt{3}}{2} t) + C_2 \operatorname{sen}(\frac{\sqrt{3}}{2} t) \right) e^{-\frac{1}{2} t}$$

◀

Ecuación diferencial lineal no homogénea

Una ecuación diferencial lineal no homogénea con coeficientes y término independiente constantes tiene la forma

$$a_2 \ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_0 x = b \tag{4.1}$$

donde a_2, a_1, a_0 y b son números reales. Esta ecuación se resuelve con el siguiente procedimiento:

1. Se encuentra la solución general, x_h, de la ecuación diferencial lineal homogénea asociada

$$a_2 \ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_0 x = 0.$$

2. Si $a_0 \neq 0$, sea $\bar{x} = b/a_0$; entonces la solución general de (4.1) está dada por
$$x(t) = x_h(t) + \bar{x}$$

3. Si $a_0 = 0$ y $a_1 \neq 0$, sea $\bar{x} = \dfrac{b}{a_1}t$, entonces la solución general de (4.1) es
$$x(t) = x_h(t) + \bar{x}$$

4. Si $a_0 = a_1 = 0$, se integra dos veces como se hizo al inicio de esta sección.

Ejemplo 4.4 *Resolver la ecuación diferencial*
$$\ddot{x} - \dot{x} - 2x = 4$$

Solución: ▶ En este problema, la ecuación homogénea asociada es
$$\ddot{x} - \dot{x} - 2x = 0$$
con ecuación característica $m^2 - m - 2 = (m-2)((m+1) = 0$, por lo que
$$x_h = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}$$
Puesto que $a_0 = -2 \neq 0$, para este caso, $\bar{x} = -4/2 = -2$ y, entonces
$$x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} - 2$$
◀

Ejemplo 4.5 *Resolver la ecuación diferencial*
$$\ddot{x} - 4\dot{x} = 16$$

Solución: ▶ La ecuación característica, en este caso es, $m^2 - 4m = m(m-4) = 0$, por lo que
$$x_h = C_1 + C_2 e^{4t}$$
Puesto que $a_0 = 0$ y $a_1 = -4$, $\bar{x} = -\dfrac{16}{4}t$ y, por tanto,
$$x(t) = C_1 + C_2 e^{4t} - 4t$$
◀

4.3 Sistemas lineales en el plano

Un sistema lineal de ecuaciones diferenciales en el plano (dos ecuaciones diferenciales con dos incógnitas) tiene la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_{22} \end{aligned} \tag{4.2}$$

donde los coeficientes a_{ij} son números reales dados. El sistema lineal se puede escribir en forma matricial como

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$$

donde $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $\dot{\vec{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}$ y $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ es la matriz de coeficientes.

Método de solución

Para resolver el sistema lineal (4.2) se calculan los valores propios de la matriz de coeficientes del sistema, λ_1 y λ_2, y de acuerdo a su naturaleza algebraica se procede de la siguiente manera:

1. Si λ_1 y λ_2 son reales y $\lambda_1 \neq \lambda_2$, sean $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ vectores propios correspondientes, respectivamente, y $M = [\vec{u}_1 \quad \vec{u}_2]$ la matriz que tiene por columnas a estos vectores, entonces la solución general del sistema lineal (4.2) esta dada por
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} C_1 e^{\lambda_1 t} \\ C_2 e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}$$

   Ejemplo 4.6 *Resolver el sistema*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= 4x_1 - 2x_2 \end{aligned}$$

   Solución: ▶ En este problema $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$; por tanto,

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-2-\lambda) - 4 \\ &= \lambda^2 + \lambda - 2 - 4 \\ &= \lambda^2 + \lambda - 6 \\ &= (\lambda+3)(\lambda-2) \end{aligned}$$

   implica $\lambda_1 = -3$ y $\lambda_2 = 2$. Ya que

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda_1 & 1 \\ 4 & -2-\lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

los vectores propios correspondientes a $\lambda_1 = -3$ tienen la forma $\begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r/4 \\ r \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} -1/4 \\ 1 \end{bmatrix}$, con $r \neq 0$; Puesto que

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda_2 & 1 \\ 4 & -2-\lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

los vectores propios asociados a $\lambda_2 = 2$ tienen la forma $\begin{bmatrix} u_{21} \\ u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, con $s \neq 0$. Tomando $r = 4$ y $s = 1$, la solución general del sistema esta dada por

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 e^{-3t} \\ C_2 e^{2t} \end{bmatrix}$$

es decir,

$$\begin{aligned} x_1 &= -C_1 e^{-3t} + C_2 e^{2t} \\ x_2 &= 4C_1 e^{-3t} + C_2 e^{2t} \end{aligned}$$

◀

2. Si $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ y $\lambda_2 = \alpha - \beta i$ son números complejos con $\beta > 0$, sea

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} - \alpha & -\beta \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

entonces, la solución general del sistema está dada por

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} r_0 e^{\alpha t} \cos(\beta t + \theta_0) \\ r_0 e^{\alpha t} \operatorname{sen}(\beta t + \theta_0) \end{bmatrix}$$

donde r_0 y θ_0 son constantes reales o, al utilizar identidades trigonométricas,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} (C_1 \cos \beta t - C_2 \operatorname{sen} \beta t) e^{\alpha t} \\ (C_2 \cos \beta t + C_1 \operatorname{sen} \beta t) e^{\alpha t} \end{bmatrix}$$

con $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 4.7 *Resolver el sistema*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 4x_1 - 2x_2 \\ \dot{x}_2 &= 5x_1 + 2x_2 \end{aligned}$$

Solución: ▶

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} &= (4-\lambda)(2-\lambda) + 10 \\ &= \lambda^2 - 6\lambda + 18 = 0 \end{aligned}$$

implica

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{6\pm\sqrt{36-72}}{2}\\ &= \frac{6\pm\sqrt{-36}}{2}\\ &= \frac{6\pm\sqrt{36i^2}}{2}\\ &= 3\pm 3i\end{aligned}$$

luego $\lambda_1 = 3+3i$ y $\lambda_2 = 3-3i$. Entonces $\alpha = 3$, $\beta = 3$ y

$$\begin{aligned}M &= \begin{bmatrix} a_{11}-\alpha & -\beta \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix} 4-3 & -3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (C_1\cos(3t)-C_2\sin(3t))e^{3t} \\ (C_2\cos(3t)+C_1\sin(3t))e^{3t} \end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix} ((C_1-3C_2)\cos(3t)-(3C_1+C_2)\operatorname{sen}(3t))e^{3t} \\ (5C_1\cos(3t)-5C_2\operatorname{sen}(3t))\,e^{3t} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

◀

3. Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0 \in \mathbb{R}$, sea $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{bmatrix}$ un vector propio correspondiente a λ_0, y sean $c, d \in \mathbb{R}$ cualquier par de números tales que $M = \begin{bmatrix} u_{11} & c \\ u_{21} & d \end{bmatrix}$ tenga determinante no nulo:

   (a) Si $M^{-1}AM = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix}$, entonces

   $$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = M\begin{bmatrix} (C_1+C_2t)e^{\lambda_0 t} \\ C_2e^{\lambda_0 t} \end{bmatrix}$$

   (b) Si $M^{-1}AM = \begin{bmatrix} \lambda_0 & \gamma \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix}$ con $\gamma \neq 1$, sea $M_1 = M\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\gamma \end{bmatrix}$, entonces

   $$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = M_1\begin{bmatrix} (C_1+C_2t)e^{\lambda_0 t} \\ C_2e^{\lambda_0 t} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 4.8 *Resolver el sistema*

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 5x_1 + 4x_2\\ \dot{x}_2 &= -x_1 + x_2\end{aligned}$$

Solución: ▶

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} &= (5-\lambda)(1-\lambda)+4\\ &= \lambda^2 - 6\lambda + 9\\ &= (\lambda-3)^2 = 0\end{aligned}$$

implica $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$. Ya que

$$\begin{bmatrix} 5-3 & 4 \\ -1 & 1-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

los vectores propios correspondientes a $\lambda_0 = 3$ están dados por $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2r \\ r \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$; con $r = 1$ se obtiene el vector propio $\begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Sea $M = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, entonces $\det(M) = -1 \neq 0$ y[1]

$$\begin{aligned}M^{-1}AM &= \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix} -4 & -5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned}M_1 &= M\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{-1} \end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

[1]Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ y $|A| = ad - bc \neq 0$, entonces $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

y, por tanto,

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= M_1 \begin{bmatrix} (C_1 + C_2 t)e^{3t} \\ C_2 e^{3t} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (C_1 + C_2 t)e^{3t} \\ C_2 e^{3t} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (-2C_1 + C_2(1-2t))e^{3t} \\ (C_1 + C_2(-1+t))e^{3t} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

◀

4.4 Sistemas afines en el plano

Un sistema de la forma

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{b} \tag{4.3}$$

donde $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $\dot{\vec{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}$ y $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$, es un sistema afín de ecuaciones diferenciales. Para resolver este tipo de sistemas se procede de la siguiente manera:

1. Se calcula la solución general, $\vec{x}_h$, del sistema lineal asociado $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$.

2. Se calcula una solución $\overline{\vec{x}} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}$ del sistema lineal de ecuaciones $A\vec{x} = -\vec{b}$.

3. La solución general del sistema afín de ecuaciones diferenciales (4.3) está dada por
$$\vec{x} = \vec{x}_h + \overline{\vec{x}}$$

Ejemplo 4.9 *Resolver el sistema*

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_1 + x_2 - 6 \\
\dot{x}_2 &= 4x_1 - 2x_2 + 18
\end{aligned}$$

Solución: ▶ Por el ejemplo 4.6 la solución general del sistema lineal asociado está dada por

$$\vec{x}_h = \begin{bmatrix} -C_1 e^{-3t} + C_2 e^{2t} \\ 4C_1 e^{-3t} + C_2 e^{2t} \end{bmatrix}$$

Puesto que

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 &= 6 \\
4x_1 - 2x_2 &= -18
\end{aligned}$$

tiene solución

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -18 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}} = -1$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 4 & -18 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}} = 7$$

la solución general del sistema está dada por

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -C_1e^{-3t} + C_2e^{2t} \\ 4C_1e^{-3t} + C_2e^{2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -C_1e^{-3t} + C_2e^{2t} - 1 \\ 4C_1e^{-3t} + C_2e^{2t} + 7 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

◄

4.5 Enfoque cualitativo

Consideremos un sistema lineal de segundo orden

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{aligned} \tag{4.4}$$

o escrito en forma matricial $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$, donde $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ es la matriz de coeficientes. Existe un método alternativo para analizar geométricamente el sistema sin necesidad de resolverlo explícitamente, llamado *enfoque cualitativo*. El objetivo fundamental de este método es comprender el comportamiento que tienen las soluciones del sistema, en conjunto, a largo plazo; es decir, cuando la variable independiente t –que en la mayoría de las aplicaciones en economía representa el tiempo– tiende a infinito. Supongamos que $(x_1, x_2) = (x_1(t), x_2(t))$ es una solución del sistema que satisface la condición inicial $x_1(t_0) = \alpha$ y $x_2(t_0) = \beta$; entonces el conjunto de pares ordenados $(x_1(t), x_2(t))$, $t \in [t_0, \infty)$, describe una curva en el plano cartesiano x_1, x_2 –llamada *trayectoria*– que comienza en el punto (α, β) como se ilustra en la figura 4.1.

Podemos observar el comportamiento de ambas funciones, x_1 y x_2, por medio de una flecha en la trayectoria que nos indica el crecimiento de ambas funciones conforme t aumenta. En la figura 4.2 (a) la flecha indica que x_1 y x_2 son crecientes; en (b) que ambas funciones son decrecientes; en (c) que x_1 crece y x_2 decrece y en (d) que x_1 decrece y x_2 crece.

Todo sistema lineal tiene por lo menos una solución constante: $x_1(t) = 0, x_2(t) = 0$ para todo t, como fácilmente se puede comprobar sustituyendo en el sistema (4.4). A toda solución constante (c_1, c_2) de un sistema lineal se le

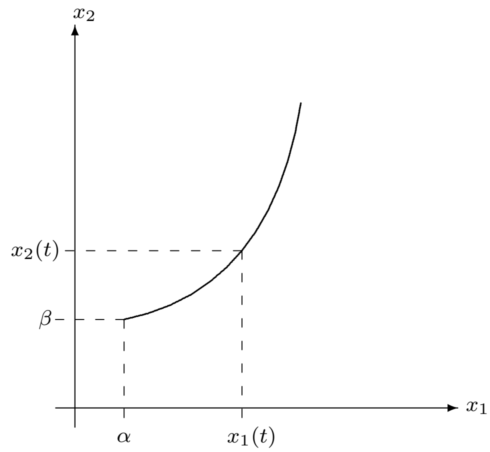


Figura 4.1:

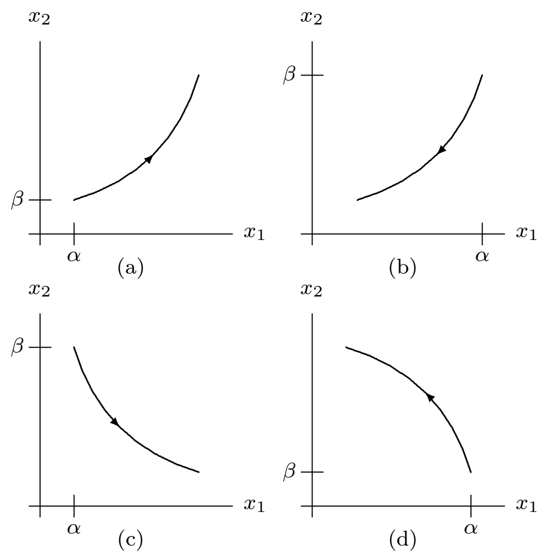


Figura 4.2:

dice *punto de equilibrio* (o *punto crítico* o *fijo*) de ese sistema; de esta manera, (c_1, c_2) es un punto de equilibrio del sistema de ecuaciones diferenciales si y sólo si (c_1, c_2) es una solución del sistema lineal homogéno $A\vec{x} = \vec{0}_{\mathbb{R}^2}$; es decir, cuando (c_1, c_2) pertenece a la intersección de las rectas $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0$ y $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 0$. Si el determinante de la matriz de coeficientes es diferente de cero, $(0, 0)$ es el único punto de equilibrio que tiene el sistema; cuando esto sucede se dice que el sistema es *simple*. Sólamente se estudiarán sistemas lineales simples; esto es, supondremos siempre que el determinante de la matriz de coeficientes es no nulo. El único punto de equilibrio, $(0,0)$, de un sistema lineal simple es la base para el análisis cualitativo del sistema y al bosquejo de las trayectorias en el plano se le dice *retrato de fases* del sistema o *plano de fases* del sistema. Ilustramos algunas de las ideas elementales del análisis cualitativo en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 4.10 *Consideremos el sistema lineal*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 \\ \dot{x}_2 &= -2x_2 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Para conocer las trayectorias del sistema resolvemos la ecuación diferencial

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{dx_2/dt}{dx_1/dt} = \frac{-2x_2}{-x_1}$$

esto es,

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{2x_2}{x_1}$$

para eliminar el parámetro t y encontrar una relación entre las variables x_2 y x_1. Entonces, al separar variables,

$$\int \frac{dx_2}{x_2} = 2\int \frac{dx_1}{x_1}$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \ln x_2 &= 2\ln x_1 + C \\ &= \ln x_1^2 + C \end{aligned}$$

de donde

$$x_2 = Cx_1^2.$$

Luego, las trayectorias del sistema lineal son: parábolas con vértice en el origen, y las rectas $x_2 = 0$ y $x_1 = 0$ –pues, como fácilmente se puede comprobar al sustituir en (4.5), $(e^{-t}, 0)$ y $(0, e^{-2t})$ son soluciones de ese sistema– como se ilustra en la figura 4.3. Por otra parte,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 > 0 \Leftrightarrow x_1 < 0 \\ \dot{x}_2 &= -2x_2 > 0 \Leftrightarrow x_2 < 0 \end{aligned}$$

por tanto, x_1 y x_2 son crecientes en el tercer cuadrante; decrecientes en el primer cuadrante; x_1 es creciente y x_2 es decreciente en el segundo cuadrante; y x_1 es decreciente y x_2 es creciente el el cuarto cuadrante. Esta situación se representa geométricamente en la figura 4.3 mediante flechas perpendiculares que coinciden en un punto común donde la horizontal indica que x_1 es creciente si está orientada a la derecha o decreciente si está orientada a la izquierda; mientras que la vertical indica que x_2 es creciente si está orientada hacia arriba

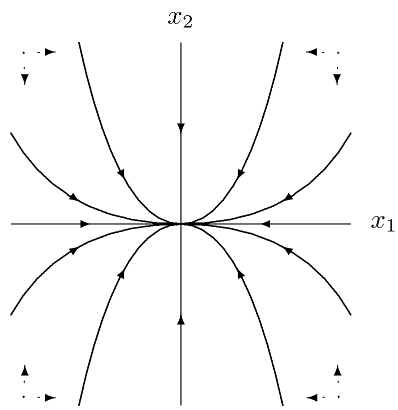


Figura 4.3:

y decreciente si está orientada hacia abajo. De está manera, el bosquejo de las trayectorias en la figura 4.3 muestra que cualquier solución (x_1, x_2) *del sistema de ecuaciones diferenciales (4.5) cumple*

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} x_1(t) &= 0\\ \lim_{t\to\infty} x_2(t) &= 0\end{aligned}$$

Si toda trayectoria tiende al origen cuando t tiende a infinito, en un sistema lineal simple, se dice que el punto de equilibrio $(0,0)$ –el origen– es *estable.* Si toda trayectoria tiende ya sea a ∞ o a $-\infty$ cuando t tiende a infinito, el punto de equilibro es *inestable* por definición. Sin embargo, existen otros comportamientos cualitativos que no entran en estas dos clasificaciones.

Ejemplo 4.11 *Analizar cualitativamente el sistema simple*

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1\\ \dot{x}_2 &= x_2\end{aligned}$$

Solución: ▶ En este caso,

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{x_2}{x_1}$$

Al separar variables se obtiene

$$\int \frac{dx_2}{x_2} = -\int \frac{dx_1}{x_1}$$

que resulta en

$$\begin{aligned}\ln x_2 &= -\ln x_1 + C\\ &= \ln x_1^{-1} + C\end{aligned}$$

y, por tanto, las trayectorias son las hipérbolas

$$x_2 = \frac{C}{x_1}$$

bosquejadas en la figura 4.4. Es claro que $(0, C_2e^t)$ y $(C_1e^{-t}, 0)$ son soluciones de este sistema; por tanto, los ejes, que son las asíntotas de las hipérbolas $x_2 = C/x_1^2$, son también trayectorias, llamadas *separatrices* del sistema para este punto de equilibrio; que en este caso es denominado un *punto de silla.* Haciendo un análisis de signos, por cuadrantes –como se realizó en el ejemplo anterior–, las trayectorias quedan orientadas como se ilustra en la figura 4.4. Es importante notar que en este caso –punto de silla– una de las separatrices converge al punto de equilibrio mientras que la otra diverge. Esto significa que cualquier solución particular que satisface una condición inicial $x_1(t_0) = a$ y $x_2(t_0) = b$, con (a, b) en la separatriz, cuyas direcciones señalan al punto de equilibrio, satisface $\lim_{t\to\infty} x_1(t) = 0$ y $\lim_{t\to\infty} x_2(t) = 0$; mientras que si (a, b) pertenece a la otra separatriz, entonces x_1 y x_2 divergen –simultánamente– a ∞ o $-\infty$. ◀

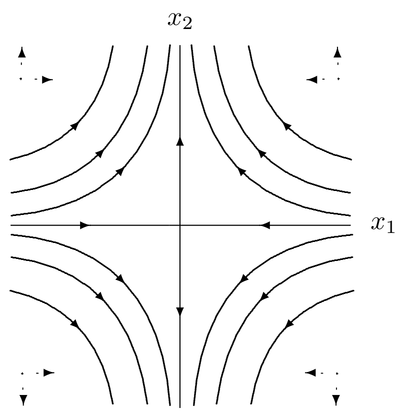


Figura 4.4:

Clasificación de sistemas lineales

Afortunadamente, sólo existe un número finito de posibilidades para el retrato de fases de un sistema lineal; es decir, todo sistema lineal simple tiene un retrato de fases similar ("muy parecido") geométricamente a uno y sólo uno de los retratos de fases que se ilustran a continuación.

Nodos:

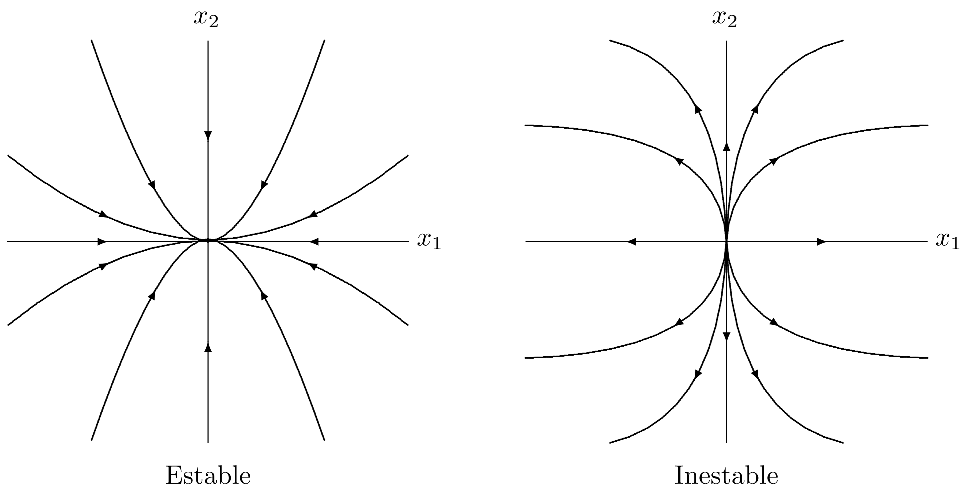


Figura 4.5:

Nodos impropios:

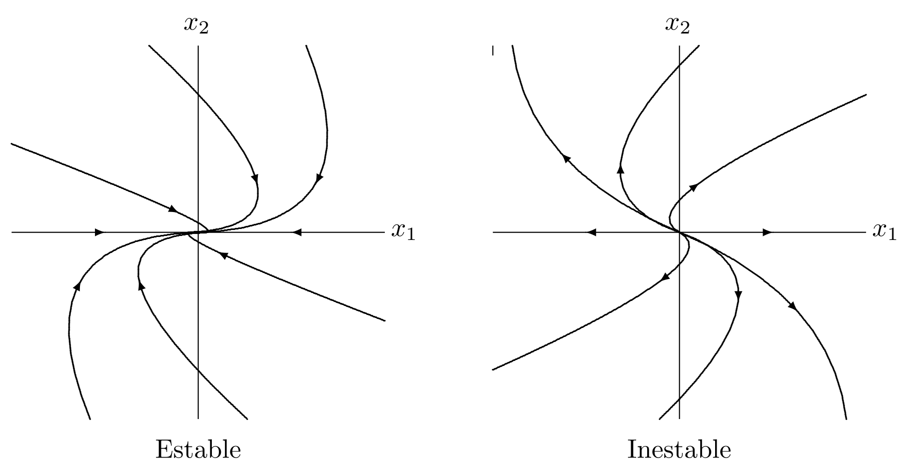


Figura 4.6:

Nodos estrella:

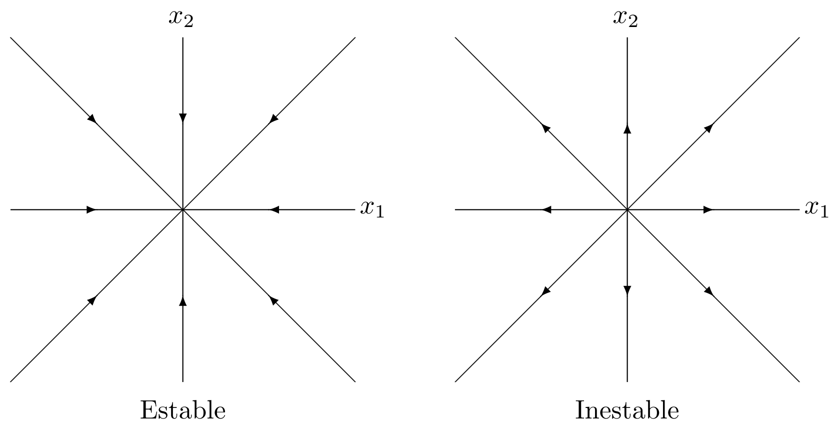


Figura 4.7:

Centros:

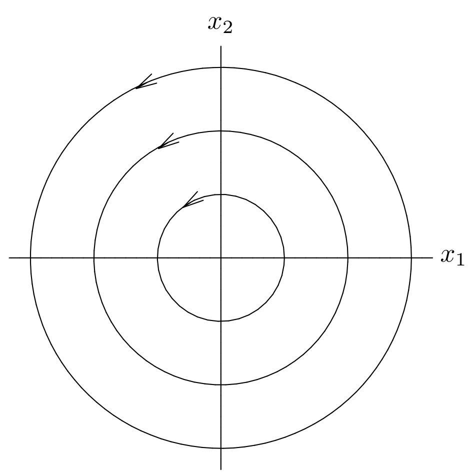


Figura 4.8:

Focos:

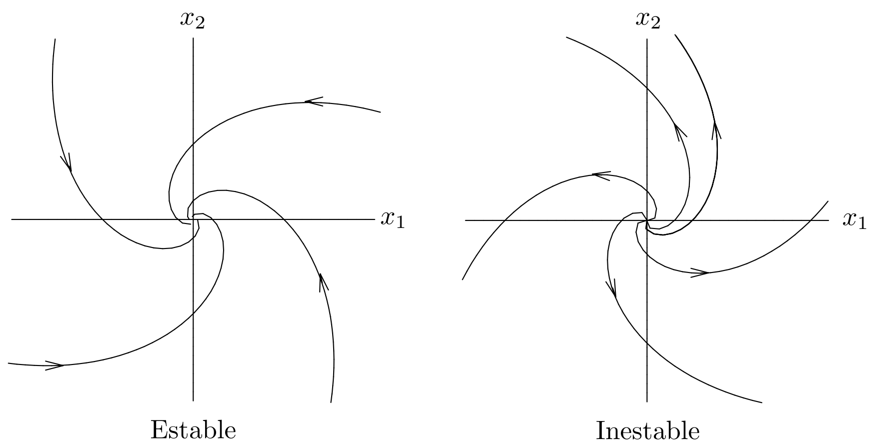


Figura 4.9:

Puntos de silla:

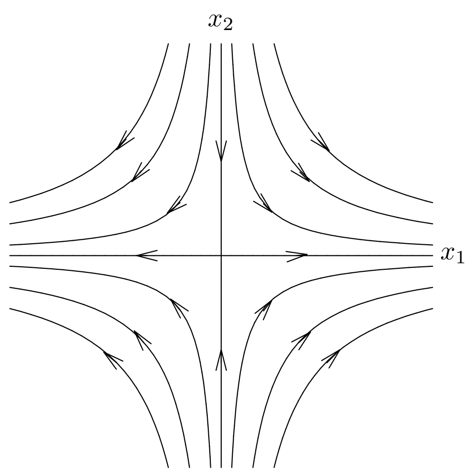


Figura 4.10:

Un aspecto fundamental de cualquier sistema lineal de ecuaciones diferenciales es que dado cualquier punto (a, b) del plano existe una única solución del sistema cuya trayectoria pasa por ese punto. En consecuencia, las trayectorias del retrato de fases de cualquier sistema lineal no se intersecan entre sí y *llenan* el plano.

Ejemplo 4.12 *Bosquejar el plano de fases del sistema lineal*

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1\\ \dot{x}_2 &= -x_1 + x_2\end{aligned}$$

Solución: ▶ Las trayectorias satisfacen la ecuación diferencial

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-x_1 + x_2}{-x_1} = 1 - \frac{x_2}{x_1}$$

esto es, la ecuación diferencial lineal de primer orden

$$\frac{dx_2}{dx_1} + \frac{1}{x_1}x_2 = 1$$

Ya que

$$e^{\int \frac{dx_1}{x_1}} = e^{\ln x_1} = x_1$$

la solución de esta ecuación está dada por

$$\begin{aligned}x_2 &= \frac{1}{x_1}\int x_1 dx_1\\ &= \frac{1}{2}x_1 + \frac{C}{x_1}\end{aligned}$$

Por tanto, las trayectorias son las curvas dadas por

$$x_2 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{C}{x_1} \tag{4.6}$$

Para bosquejar estas curvas consideremos lo siguiente:

- Si $C > 0$ y $x_1 > 0$, entonces $\lim_{x_1\to\infty} C/x_1 = 0$ implica que $x_2 \to \frac{1}{2}x_1$ cuando x_1 tiende a infinito; y ya que $\lim_{x_1\to 0^+} x_2 = \infty$, se concluye que la gráfica de la función x_2 tiene por asíntotas a las rectas $x_2 = \frac{1}{2}x_1$ y $x_1 = 0$.
- Si $C < 0$ y $x_1 > 0$, entonces $\lim_{x_1\to\infty} C/x_1 = 0$ implica que $x_2 \to \frac{1}{2}x_1$ cuando x_1 tiende a infinito; y ya que $\lim_{x_1\to 0^+} x_2 = -\infty$, se concluye que la gráfica de la función x_2 tiene por asíntotas a las rectas $x_2 = \frac{1}{2}x_1$ y $x_1 = 0$.
- Si $C > 0$ y $x_1 < 0$, entonces $\lim_{x_1\to\infty} C/x_1 = 0$ implica que $x_2 \to \frac{1}{2}x_1$ cuando x_1 tiende a infinito; y ya que $\lim_{x_1\to 0^-} x_2 = -\infty$, se concluye que la gráfica de la función x_2 tiene por asíntotas a las rectas $x_2 = \frac{1}{2}x_1$ y $x_1 = 0$.
- Si $C < 0$ y $x_1 < 0$, entonces $\lim_{x_1\to\infty} C/x_1 = 0$ implica que $\frac{1}{2}x_2 \to x_1$ cuando x_1 tiende a infinito; y ya que $\lim_{x_1\to 0^+} x_2 = \infty$, se concluye que la gráfica de la función x_2 tiene por asíntotas a las rectas $x_2 = x_1$ y $x_1 = 0$.

- Si $x_1 = 0$, entonces $\dot{x}_2 = x_2$ y, por tanto, $x_2 = C_2 e^t$; luego, la asíntota $x_1 = 0$ es una trayectoria

- Al resolver la primera ecuación del sistema (4.6) se obtiene $x_1 = C_1 e^{-t}$; entonces, si $x_2 = \frac{1}{2}x_1 = \frac{1}{2}C_1 e^{-t}$,

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &= -x_1 + \frac{1}{2}x_1 \\ &= -\frac{1}{2}x_1 \\ &= -\frac{1}{2}C_1 e^{-t} \\ &= \dot{x}_2 \end{aligned}$$

  por lo tanto, la asíntota $x_2 = \frac{1}{2}x_1$ es una trayectoria.

- $\dot{x}_1 > 0 \Leftrightarrow x_1 < 0$; por lo que x_1 es creciente si y sólo si $x_1 < 0$.

- $\dot{x}_2 > 0 \Leftrightarrow x_2 > x_1$; por tanto x_2 es creciente si y sólo se x_2 se encuentra por encima de la recta $x_2 = x_1$.

- Puesto que

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-x_1 + x_2}{-x_1}$$

  las trayectorias que cruzan la recta $x_2 = x_1$ lo hacen con pendiente nula.

- Las trayectorias que cruzan la recta $x_1 = 0$ lo hacen con pendiente infinita; sin embargo ésta es una trayectoria y, por tanto, ninguna otra la interseca.

El bosquejo del retrato de fases de este sistema est contenido en la figura 4.11.
◀

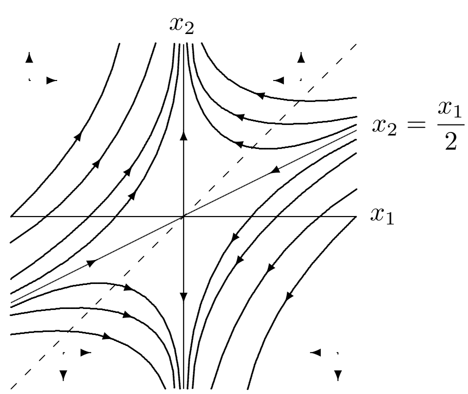


Figura 4.11:

El retrato de fases del ejemplo anterior coincide, en simulitud, al plano de fases de un punto de silla. En todo punto de silla exiten dos trayectorias que son las separatrices (asíntotas) de todas las demás trayectorias y sólo una de ellas está dirigida hacia el punto de equilibrio; a esta última se le llama trayectoria *estable* del sistema. En el ejemplo anterior las rectas $x_1 = 0$ y $x_2 = \dfrac{1}{2}x_1$ son las separatrices y la segunda recta es la trayectoria estable. De hecho, si (φ_1, φ_2) es cualquier solución particular de un sistema lineal de ecuaciones –cuyo punto de equilibrio es un punto de silla– pasa por un punto (a, b) que pertenece a la trayectoria estable, entonces las funciones φ_1 y φ_2 tienden a cero a cuando t tiende a infinito.

Localización en el plano traza-determinante

Para analizar cualitativamente un sistema lineal de ecuaciones diferenciales, $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$, sin tener que realizar un procedimiento –que puede resultar muy complejo– como el que se hizo en el ejemplo anterior, se utiliza el esquema gráfico contenido en la figura 4.12, el cual clasifica los sistemas de acuerdo a los valores que tienen la traza y el determinante de la matriz de coeficientes. Recordemos que la traza de una matriz es la suma de los elementos que se encuentran en su diagonal y se representa por el símbolo tra(A). El diagrama traza-determinante es emplea

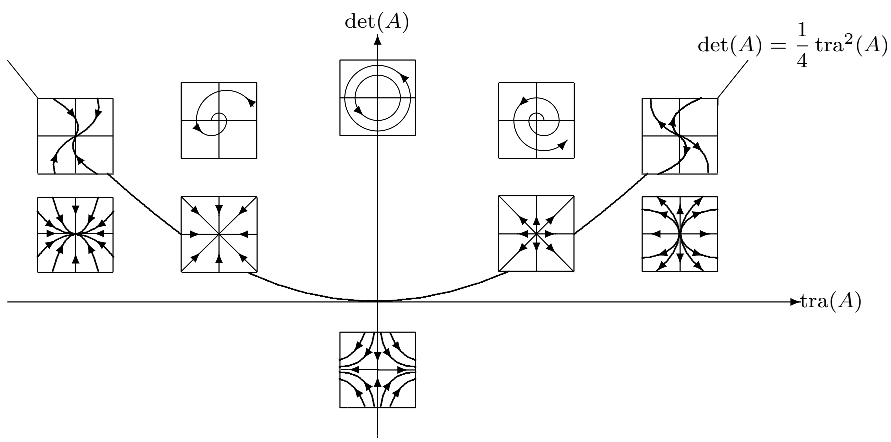


Figura 4.12:

de acuerdo a los siguiente criterios:

1. Si $\det(A) = (1/4)\,\mathrm{tra}^2(A)$, entonces el retrato de fases se encuentra en la parábola de la figura 4.12 y, por tanto, corresponde a un nodo impropio o a una estrella. Para saber si es inestable o estable se observa el signo de tra(A), si es positivo es inestable y si es negativo es estable[2].

[2]En general, en las aplicaciones, es suficiente saber si hay estabilidad o no y la información

2. Si $0 < \det(A) < (1/4)\,\mathrm{tra}^2(A)$ y $\mathrm{tra}(A) > 0$, entonces el retrato de fases se encuentra por debajo de la parábola de la figura 4.12 en el primer cuadrante y, por tanto, corresponde a un nodo inestable.

3. Si $0 < \det(A) < (1/4)\,\mathrm{tra}^2(A)$ y $\mathrm{tra}(A) < 0$, entonces el retrato de fases se encuentra por debajo de la parábola de la figura 4.12 en el segundo cuadrante y, por tanto, corresponde a un nodo estable.

4. Si $\det(A) > (1/4)\,\mathrm{tra}^2(A)$ y $\mathrm{tra}(A) > 0$, entonces el retrato de fases se encuentra por arriba de la parábola de la figura 4.12 en el primer cuadrante y, por tanto, corresponde a un foco inestable.

5. Si $\det(A) > (1/4)\,\mathrm{tra}^2(A)$ y $\mathrm{tra}(A) < 0$, entonces el retrato de fases se encuentra por arriba de la parábola de la figura 4.12 en el segundo cuadrante y, por tanto, corresponde a un foco estable.

6. Si $\mathrm{tra}(A) = 0$ y $\det(A) > 0$, entonces el retrato de fases corresponde a un centro.

7. Si $\det(A) < 0$, el retrato de fases corresponde a un punto de silla.

Ejemplo 4.13 *Determinar el tipo de retrato de fases al que corresponde el punto de equilibrio del sistema lineal del ejemplo 4.12 utilizando el diagrama traza-determinante.*

Solución: ► En este caso $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ por lo que $\det(A) = -1$ y, por tanto, corresponde a un punto de silla. ◄

Ejemplo 4.14 *Determinar el tipo de retrato de fases, utilizando el diagrama traza-determinante, que corresponde a los siguientes sistemas:*

1. $$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 2x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + 2x_2 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 2x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - 3x_2 \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 - 4x_2 \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 - x_2 \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 2x_2 \\ \dot{x}_2 &= -3x_1 - x_2 \end{aligned}$$

---

que se da en este inciso es suficiente para este fin; sin embargo, si se requiere de más precisión se utiliza lo siguiente: los valores propios de la matriz de coeficientes, en este caso, son iguales; (a) si la matriz de coeficientes es diagonal, es un nodo estrella; (b) si la matriz de coeficientes no es diagonal en un nodo impropio.

Solución: ▶

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\det(A) = 3$, $\operatorname{tra}(A) = 4$, $\operatorname{tra}^2(A) - 4\det(A) = 16 - 12 > 0$; por tanto, $0 < \det(A) < (1/4)\operatorname{tra}^2(A)$ y, entonces, el retrato de fases corresponde a un nodo inestable.

2. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$, $\det(A) = -7 < 0$; por tanto, el retrato de fases corresponde a un punto de silla.

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $\det(A) = 7$ y $\operatorname{tra}(A) = 0$; por tanto, el retrato de fases corresponde a un centro.

4. $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$, $\det(A) = 6$, $\operatorname{tra}(A) = -1 < 0$, $\operatorname{tra}^2(A) - 4\det(A) = 1-24 = -23 < 0$; por tanto, $\det(A) > (1/4)\operatorname{tra}^2(A)$ y, entonces, el retrado de fases corresponde a un foco estable.

◀

4.6 Sistemas autómos no lineales

En general, un sistema autónomo de ecuaciones en el plano tiene la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) \end{aligned} \tag{4.7}$$

donde f_1 y f_2 son funciones de dos variables que supondremos tienen primeras derivadas parciales continuas en la intersección de sus dominios de definición. Un punto de equilibrio (punto crítico o fijo) del sistema (4.7) es una par de funciones constantes (c_1, c_2) que es solución de este sistema. Entonces (c_1, c_2) es un punto de equilibrio si y sólo si (c_1, c_2) es una solución del sistema simultáneo de ecuaciones algebraicas (no necesariamente lineal)

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2) &= 0 \end{aligned}$$

En consecuencia, el conjunto de los puntos de equilibrio del sistema autónomo de ecuaciones diferenciales (4.7) está conformado por los puntos de intersección de las curvas $f_1(x_1, x_2) = 0$ y $f_2(x_1, x_2) = 0$. Así, un sistema autónomo puede tener más de un punto de equilibrio, en contraposición con los sistemas lineales simples que sólo tienen uno. Nuevamente, una trayectoria del sistema (4.7) es la gráfica de una solución particular, $(x_1, x_2) = (x_1(t), x_2(t))$ que satisface una condición inicial $x_1(t_0) = a$ y $x_2(t_0) = b$ orientada con una flecha que indica la dirección de crecimiento de x_1 y x_2. Aunque el aspecto geométrico de las trayectorias de un sistema autónomo de ecuaciones diferenciales no lineal puede ser muy complicado, generalmente, en la proximidad de cada uno de sus puntos de equilibrio, se comporta como si el sistema fuera lineal y por ende coincide con uno de los retratos de fases que se analizaron en la sección anterior. Esto es, para cada punto de equilibrio (c_1, c_2) existe un $\delta > 0$, tal que en el disco de centro (c_1, c_2) y radio δ, la forma de las trayectorias son las de un nodo, un nodo impropio, un nodo estrella, un centro, un foco o un punto de silla, trasladado al punto (c_1, c_2) y con las trayectorias orientadas de la misma manera. El retrato de fases que tiene el sistema en ese disco se denomina el comportamiento *local* cualitativo en el punto de equilibrio (c_1, c_2). Este importante resultado se precisa en el siguiente teorema.

Teorema 4.1 *Sea* (c_1, c_2) *un punto de equilibrio del sistema de ecuaciones diferenciales (4.7). Se supone que* f_1 *y* f_2 *tienen primeras derivadas parciales continuas en todos los puntos de un conjunto abierto que contiene a* (c_1, c_2) *y que*

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(c_1,c_2) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(c_1,c_2) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(c_1,c_2) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(c_1,c_2) \end{vmatrix} \neq 0$$

Al sistema lineal

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(c_1,c_2)x_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(c_1,c_2)x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(c_1,c_2)x_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(c_1,c_2)x_2 \end{aligned}$$

se le llama la linearización *del sistema (4.7) en* (c_1, c_2). *Entonces existe* $\delta > 0$ *tal que:*

1. *Si la linearización del sistema en* (c_1, c_2) *es un nodo, un nodo impropio, un foco o un punto de silla, en el origen, entonces la forma de las trayectorias del sistema (4.7) en el disco con centro* (c_1, c_2) *y radio* δ *es la de un nodo, un nodo impropio, un foco o un punto de silla respectivamente, trasladado al punto* (c_1, c_2) *y con las trayectorias orientadas de la misma forma que las de la linearización correspondiente.*

2. *Si la linearización del sistema en* (c_1, c_2) *es un centro, entonces la forma de las trayectorias del sistema (4.7) en el disco con centro* (c_1, c_2) *y radio* δ *es la de un nodo impropio o un foco.*

Ejemplo 4.15 *Analizar cualitativamente el comportamiento local del sistema no lineal de ecuaciones diferenciales*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + x_2 + x_1^2 \\ \dot{x}_2 &= x_2 - x_1 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Solución: ▶ Los puntos de equilibrio del sistema están dados por las soluciones del sistema simultáneo de ecuaciones algebraicas

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_1^2 &= 0 \\ x_2 - x_1 &= 0 \end{aligned}$$

Al despejar $x_2 = x_1$ de la segunda ecuación y substituir en la primera se obtiene

$$x_1(x_1 + 2) = 0$$

y, por tanto, los puntos de equilibrio son $(0,0)$ y $(-2,-2)$. En este problema $f_1(x_1,x_2) = x_1 + x_2 + x_1^2$ y $f_2(x_1,x_2) = x_2 - x_1$; por lo tanto,

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 2x_1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- En el punto de equilibrio $(0,0)$

  $$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(0,0) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(0,0) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(0,0) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(0,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

  por lo que la linearización del sistema en este punto es el sistema lineal

  $$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + x_2 \end{aligned}$$

  con matriz de coeficientes $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Entonces $\det(A) = 2$, $\operatorname{tra}(A) = 2 > 0$ y, por tanto, $\frac{1}{4}\operatorname{tra}^2(A) = 1 < 2 = \det(A)$, el retrato de fases de la linearización corresponde un foco inestable; luego, el comportamiento local del sistema no lineal (4.8) en el punto de equilibrio $(0,0)$ es el mismo.

- En el punto de equilibrio $(-2,-2)$

  $$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(-2,-2) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(-2,-2) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(-2,-2) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(-2,-2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 1 = -2 \neq 0$$

  por la que la linearización del sistema en este punto es el sistema lineal

  $$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -3x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + x_2 \end{aligned}$$

  con matriz de coeficientes $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Entonces $\det(A) = -2 < 0$ y, por tanto, el retrato de fases de la linearización en el punto de equilibrio $(-2,-2)$ corresponde a un punto de silla. En consecuencia, el comportamiento local del sistema no lineal (4.8) en el punto de equilibrio $(-2,2)$ es el mismo.◀

El bosquejo de las trayectorias del sistema autónomo de ecuaciones diferenciales del ejemplo precedente –realizado con el programa numérico e interactivo `pplane` en JAVA de la página electrónica de John C. Polking:
`http://math.rice.edu/~polking/` – se encuentra contenido en la figura 4.13.

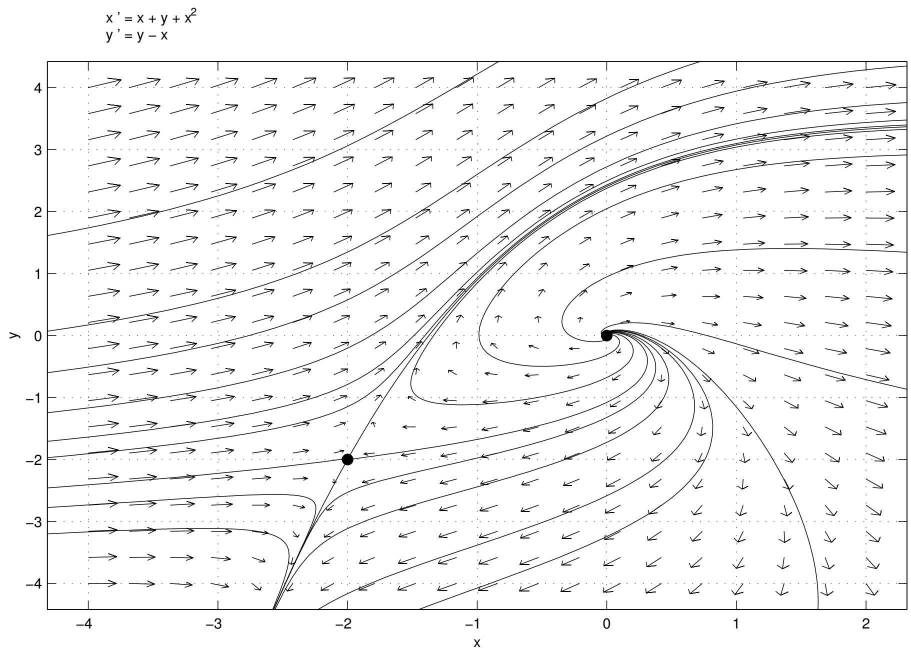


Figura 4.13:

Parte II

Cálculo de variaciones

Capítulo 5

Optimización de funcionales y condición de Euler

En este capítulo se presentan los conceptos de extremos relativos y absolutos de funcionales en espacios vectoriales normados e inmediatamente se establecen condiciones necesarias para que cierto tipo de funcionales integrales, que se utilizan con frecuencia en economía matemática, alcancen valores óptimos.

5.1 Extremos relativos y absolutos de funcionales

Funcionales

Definición 5.1 *Sea* $\mathbf{E}$ *un espacio vectorial. Un funcional en* $\mathbf{E}$ *es cualquier función* J *con dominio contenido en* $\mathbf{E}$ *y valores reales.*

Ejemplo 5.1

1. *Sea* $J_1 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$*, definido* $J_1(\vec{u}) = \|\vec{u}\|$*, entonces* J_1 *es un funcional en* $\mathbb{R}^4$*, y si* $\vec{u} = (-1, 2, 1, 2)$*,* $J_1(\vec{u}) = \|(-1, 2, 1, 2)\| = \sqrt{10}$.
2. *Sea* $J_2 : C[0, 1] \to \mathbb{R}$*, definido por* $J_2(f) = f(1/2)$*,* J_2 *es un funcional en* $C[0, 1]$ *y si* $f(t) = t^2$ *y* $g(t) = \operatorname{sen}(\pi t)$*, entonces* $J_2(f) = f(1/2) = 1/4$ *y* $J_2(g) = \operatorname{sen}(\pi/2) = 1$.
3. *Sea* $J_3 : C[-1, 1] \to \mathbb{R}$*, definido por* $J_3(f) = \int_{-1}^{1} f(t)dt$*,* J_3 *es un funcional en* $C[-1, 1]$ *y si* $f(t) = e^t$*,* $J_3(f) = \int_{-1}^{1} e^t dt = e - e^{-1}$.

Extremos relativos y absolutos

Definición 5.2 *Sean* $\mathbf{E}$ *un espacio vectorial normado, con norma* $\|\cdot\|$*;* J *un funcional en* $\mathbf{E}$ *definido en todos los puntos de un subconjunto no vacío* Ω *del espacio* $\mathbf{E}$ *y* $f_0 \in \Omega$.

1. *$J(f_0)$ es un máximo relativo (local) de J en Ω, si existe $\delta > 0$ tal que*

$$J(f_0) \geq J(f) \text{ para todo } f \in B(f_0, r) \cap \Omega.$$

En tal caso, se dice que J alcanza un máximo relativo (local) en el punto $f_0 \in \Omega$.

2. *$J(f_0)$ es un mínimo relativo (local) de J en Ω, si existe $\delta > 0$ tal que*

$$J(f_0) \leq J(f) \text{ para todo } f \in B(f_0, r) \cap \Omega.$$

En tal caso, se dice que J alcanza un mínimo relativo (local) en el punto $f_0 \in \Omega$.

3. *Si $J(f_0)$ es un máximo o un mínimo relativo de J es Ω, se dice que $J(f_0)$ es un extremo relativo de J en Ω y que éste se alcanza en f_0.*

Definición 5.3 *Sean* **E** *un espacio vectorial con norma $\|\cdot\|$, J un funcional en* **E** *definido en todos los puntos de un subconjunto no vacío, Ω, del espacio* **E** *y $f_0 \in \Omega$.*

1. *$J(f_0)$ es el máximo absoluto de J en Ω si $J(f) \leq J(f_0)$ para todo $f \in \Omega$.*

2. *$J(f_0)$ es el mínimo absoluto de J en Ω si $J(f_0) \leq J(f)$ para todo $f \in \Omega$.*

3. *$J(f_0)$ es un extremo absoluto de J en Ω si $J(f_0)$ es un máximo o un mínimo absoluto.*

Evidentemente, si J tiene un máximo (mínimo) absoluto en Ω éste es único. Sin embargo, un funcional puede tener más de un máximo (mínimo) relativo.

Ejemplo 5.2 *Sea $J : C[-1,1] \to \mathbb{R}$ el funcional definido por $J(f) = \int_{-1}^{1}[f(t)]^2 dt$. Puesto que $\int_{-1}^{1}[f(t)]^2 dt \geq 0$ para toda $f \in C[-1,1]$, se tiene que $J(\theta) = 0$, donde θ es la función constante cero en $[-1,1]$, es un mínimo absoluto (y relativo) de J en $\Omega = C[-1,1]$.*

Ejemplo 5.3 *Sean $\Omega = \{f \in C^2[-1,1] : f(-1) = f(1) = 0\}$ y $J : C^2[-1,1] \to \mathbb{R}$ el funcional definido por $J(f) = \int_{-1}^{1}[f(t)]^3 dt$. Sean, para cada $n \in \{1,2,3,\ldots\}$, $g_n(t) = n(1-t^2)$ y $h_n(t) = -g_n(t)$. Claramente $g_n \in C^2[-1,1]$ y $g_n(-1) = g_n(1) = 0$, luego $g_n \in \Omega$ para todo n y, por tanto, $h_n \in \Omega$ para todo n. Puesto que*

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} J(g_n) &= \lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} n^3(1-t^2)^3 dt \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{32}{35} n^3 \\
&= \infty
\end{aligned}$$

se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} J(h_n) = -\infty.$$

En consecuencia, J no tiene extremos absolutos en Ω. Más adelante, en el ejemplo 5.5, se mostrará que J no tiene tampoco extremos relativos.

Ejemplo 5.4

1. *Sea $J : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definido por $J(t) = t^2$, entonces $J(0) = 0$ es el mínimo absoluto de J en $\mathbb{R}$; pues $J(0) = 0 \leq t^2$ para todo $t \in \mathbb{R}$.*

2. *Sea $J : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definido por $J(t) = t^3$. Entonces, si $\varepsilon > 0$ es cualquier número real,*

$$\begin{aligned} J(\varepsilon) &= \varepsilon^3 > 0 \\ J(0) &= 0 \\ J(-\varepsilon) &= -\varepsilon^3 < 0 \end{aligned}$$

   Por lo tanto,

$$J(-\varepsilon) < J(0) < J(\varepsilon)$$

   Por lo que $J(0) = 0$ no es un extremo relativo de J en $\mathbb{R}$. Y ya que

$$\lim_{t\to\pm\infty} t^3 = \pm\infty$$

   J no tiene extremos absolutos en $\mathbb{R}$.

3. *Si $J(t) = \cos t$, entonces 1 y -1 son, respectivamente, el máximo absoluto y el mínimo absoluto de J en $\mathbb{R}$; los cuales se alcanzan en los puntos $2n\pi$ y $(2n+1)\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, respectivamente. De hecho, también son extremos relativos. Así, una función puede alcanzar extremos relativos o absolutos en puntos distintos entre sí; incluso en una infinidad de puntos como es en este ejemplo.*

5.2 Condición de Euler

Muchos problemas de optimización se reducen a encontrar extremos relativos de funcionales de la forma $J(f) = \int_a^b F(t, f(t), \dot{f}(t))dt$ donde F es una función real de tres variables con condiciones adecuadas de *suavidad*, y las funciones sobre las que actúa J satisfacen la condición de frontera $f(a) = x_0$ y $f(b) = y_0$. Para resolver esta cuestión, primero se reduce éste a un problema de optimización de variable real y después se buscan condiciones necesarias, sobre f, para que en esta función J alcance un extremo relativo. La estrategia se encuentra contenida en la siguiente proposición.

Proposición 5.1 *Sean* $a, b, x_0, y_0 \in \mathbb{R}$*, con* $a < b$*;* $\Omega = \{\varphi \in C^2[a,b] : \varphi(a) = x_0, \varphi(b) = y_0\}$*;* $J : \Omega \to \mathbb{R}$ *un funcional;* $f_0 \in \Omega$*;* $\eta \in C^2[a,b]$ *cualquier función que satisface* $\|\eta\| \leq 1$ *y* $\eta(a) = \eta(b) = 0$*; y* $J_\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definido por* $J_\eta(\alpha) = J(f_0 + \alpha\eta)$*. Si* J *tiene un mínimo (máximo) relativo en* f_0*, entonces* J_η *tiene un mínimo (máximo) relativo en* $\alpha = 0$*.*

Demostración: Sea $\delta > 0$ tal que $J(f_0) \leq J(\varphi)$ para toda $\varphi \in \Omega$ con $\|\varphi - f_0\| < \delta$. Entonces, si $|\alpha| < \delta$,

$$\begin{aligned} \|f_0 + \alpha\eta - f_0\| &= \|\alpha\eta\| \\ &= |\alpha|\|\eta\| \\ &< \delta\|\eta\| \\ &\leq \delta \end{aligned}$$

y, puesto que $(f_0 + \alpha\eta)(a) = f_0(a) + \alpha\eta(a) = x_0 + 0 = x_0$ y $(f_0 + \alpha\eta)(b) = f_0(b) + \alpha\eta(b) = y_0 + 0 = y_0$, $f_0 + \alpha\eta \in \Omega$ y

$$J_\eta(0) = J(f_0) \leq J(f_0 + \alpha\eta) = J_\eta(\alpha)$$

Lo cual demuestra que $J_\eta(0)$ es un mínimo relativo de J_η. ■

La interpretación geométrica de la precedente proposición tiene el significado siguiente: Suponiendo que J alcanza un extremo relativo en f_0, digamos un mínimo, el valor de J aumentará si f_0 se *perturba* ligeramente; estas *perturbaciones* se construyen tomando cualquier función $\eta \in C^2[a,b]$ tal que $\eta(a) = \eta(b) = 0$ que tenga norma –en $C^2[a,b]$– pequeña y sumando a f_0 un múltiplo constante de η, la función $f_0 + \alpha\eta$, como se ilustra en la figura 5.1. Entonces, el funcional $J_\eta(\alpha) = J(f_0 + \alpha\eta)$, puesto que J alcanza un mínimo en f_0, debe tener un mínimo en $\alpha = 0$.

Sean $\Omega = \{f \in C^2[a,b] : f(a) = x_0,\ f(b) = y_0\}$, $F : [a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función con primeras derivadas parciales continuas en todo punto del conjunto $[a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $J : \Omega \to \mathbb{R}$ el funcional definido por

$$J(f) = \int_a^b F(t, f(t), \dot{f}(t))dt,$$

$\eta \in C^2[a,b]$ cualquier función que satisface $\eta(a) = \eta(b) = 0$ y $\|\eta\| \leq 1$. Si J alcanza, por ejemplo, un mínimo relativo en f_0 en Ω, por la proposición (5.1)

$$J_\eta(\alpha) = J(f_0 + \alpha\eta) = \int_a^b F(t, f_0(t) + \alpha\eta(t), \dot{f}_0(t) + \alpha\dot{\eta}(t))dt$$

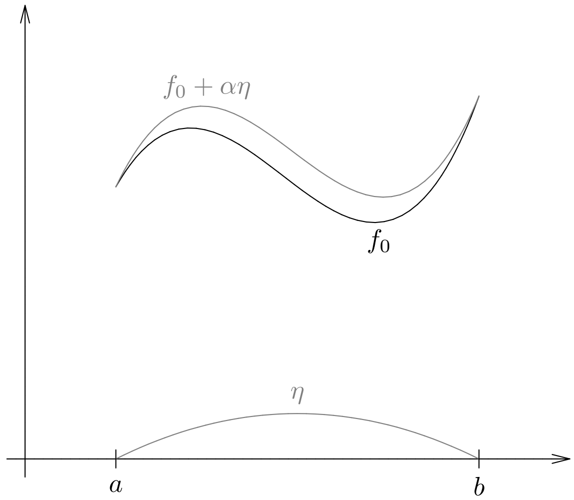


Figura 5.1:

alcanza un mínimo relativo en $\alpha = 0$. Ya que F tiene primeras derivadas parciales continuas, por la regla de Leibiniz[1], J_η es derivable en todo punto α y

$$\begin{aligned}
\dot{J}_\eta(\alpha) &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial\alpha}\Big(F(t, f_0(t)+\alpha\eta(t), \dot{f}_0(t)+\alpha\dot{\eta}(t))\Big)\,dt \\
&= \int_a^b \begin{pmatrix} F_1(t, f_0(t)+\alpha\eta(t), \dot{f}_0(t)+\alpha\dot{\eta}(t))0 \\ +F_2(t, f_0(t)+\alpha\eta(t), \dot{f}_0(t)+\alpha\dot{\eta}(t))\eta(t) \\ +F_3(t, f_0(t)+\alpha\eta(t), \dot{f}_0(t)+\alpha\dot{\eta}(t))\dot{\eta}(t) \end{pmatrix} dt \\
&= \int_a^b \begin{pmatrix} F_2(t, f_0(t)+\alpha\eta(t), \dot{f}_0(t)+\alpha\dot{\eta}(t))\eta(t) \\ +F_3(t, f_0(t)+\alpha\eta(t), \dot{f}_0(t)+\alpha\dot{\eta}(t))\dot{\eta}(t) \end{pmatrix} dt
\end{aligned}$$

Puesto que $\alpha = 0$ es un mínimo relativo y J_η es derivable, $\dot{J}_\eta(0) = 0$. De aquí, ya que η es una función arbitraria,

$$\int_a^b (F_2(t, f_0(t), \dot{f}_0(t))\eta(t) + F_3(t, f_0(t), \dot{f}_0(t))\dot{\eta}(t))dt = 0 \tag{5.1}$$

para toda $\eta \in C^2[a,b]$ tal que $\eta(a) = \eta(b) = 0$ y $\|\eta\| \leq 1$. Por otro lado, si $\eta_1 \in C^2[a,b]$ es cualquier función con $\eta_1(a) = \eta_1(b) = 0$ y η_1 no es la función constante cero, sea $\eta = \eta_1/\|\eta_1\|$, de esta manera $\eta \in C^2[a,b]$, $\eta(a) = \eta(b) = 0$

[1]Sean $(\alpha,t) \mapsto G(\alpha,t)$ una función con derivadas parciales continuas en un subconjunto del espacio $\mathbb{R}^2$ y $\Phi(\alpha) = \int_a^b G(\alpha,t)dt$. Entonces Φ es derivable y

$$\dot{\Phi}(\alpha_0) = \int_a^b \frac{\partial G}{\partial\alpha}(\alpha_0,t)dt.$$

y $\|\eta\| \leq 1$, por tanto η satisface la relación (5.1); esto es,

$$\begin{aligned}
0 &= \int_a^b (F_2(t, f_0(t), \dot{f}_0(t))\eta(t) + F_3(t, f_0(t)+\eta(t), \dot{f}_0(t)+\dot{\eta}(t))\dot{\eta}(t))dt \\
&= \int_a^b (F_2(t, f_0(t), \dot{f}_0(t))\frac{\eta_1(t)}{\|\eta_1\|} + F_3(t, f_0(t), \dot{f}_0(t))\frac{\dot{\eta}_1(t)}{\|\eta_1\|})dt \\
&= \frac{1}{\|\eta_1\|}\int_a^b (F_2(t, f_0(t), \dot{f}_0(t))\eta_1(t) + F_3(t, f_0(t), \dot{f}_0(t))\dot{\eta}_1(t))dt.
\end{aligned}$$

Es decir, la relación (5.1) se cumple para toda $\eta \in C^2[a,b]$ tal que $\eta(a) = \eta(b) = 0$. Al integrar por partes el segundo término del integrando en (5.1), se obtiene (haciendo $u = F_3(t, f_0(t), \dot{f}_0(t))$ y $dv = \dot{\eta}_1(t)$)

$$\begin{aligned}
\int_a^b F_3(t, f_0(t), \dot{f}_0(t))\dot{\eta}_1(t)dt &= F_3(t, f_0(t), \dot{f}_0(t))\eta(t)\Big|_{t=a}^{t=b} \\
&\quad - \int_a^b \frac{d}{dt}\Big(F_3(t, f_0(t), \dot{f}_0(t))\Big)\eta(t)dt \\
&= 0 - \int_a^b \frac{d}{dt}F_3(t, f_0(t), \dot{f}_0(t))\eta(t)dt \\
&= -\int_a^b \frac{d}{dt}\Big(F_3(t, f_0(t), \dot{f}_0(t))\Big)\eta(t)dt
\end{aligned}$$

Entonces (5.1) se reduce a

$$\int_a^b \left(F_2(t, f_0(t), \dot{f}_0(t)) - \frac{d}{dt}\Big(F_3(t, f_0(t), \dot{f}_0(t))\Big)\right)\eta(t)dt = 0$$

para toda $\eta \in C^2[a,b]$ tal que $\eta(a) = \eta(b) = 0$. Se puede probar (cf. referencias bibliográficas: [23] p. 94; [24] pp. 29 y 32) que esto sucede si y sólo si el primer factor en el integrando de la precedente igualdad es la función constante cero. Se resume este resultado en el siguiente teorema.

Teorema 5.1 (Condición de Euler) *Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ dos puntos dados, $(t, f, \dot{f}) \mapsto F(t, f, \dot{f})$ una función con primeras derivadas parciales continuas en la región $[a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ del espacio $\mathbb{R}^3$, $\Omega = \{f \in C^2[a,b] : f(a) = x_0, f(b) = y_0\}$, y $J : \Omega \to \mathbb{R}$ el funcional definido por*

$$J(f) = \int_a^b F(t, f(t), \dot{f}(t))dt. \tag{5.2}$$

Si J tiene un extremo relativo en $f_0 \in \Omega$, entonces f_0 satisface la ecuación diferencial

$$\frac{\partial F}{\partial f} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{f}}\right) \tag{5.3}$$

con las condiciones de frontera

$$f(a) = x_0, f(b) = y_0. \tag{5.4}$$

Definición 5.4 *A toda función $f \in C^2[a,b]$ que satisface la condición de Euler; es decir, la ecuación diferencial (5.3) con las condiciones de frontera (5.4), se le llama punto crítico o función estacionaria del funcional*[2] *(5.2).*

Debe observarse que el teorema anterior únicamente establece condiciones necesarias para que el funcional (5.2) alcance un extremo relativo, que no son suficientes en todos los casos. Es decir, si $J = \int_a^b F(t, f(t), \dot{f}(t))dt$ alcanza un extremo relativo en f_0, entonces f_0 satisface la condición de Euler; sin embargo, el hecho de que una función f_0 satisfaga la condición de Euler no garantiza que en este punto J alcance un extremo relativo.

Ejemplo 5.5 *Sea $\Omega = \{f \in C^2[-1,1] : f(-1) = f(1) = 0\}$ y $J : \Omega \to \mathbb{R}$ el funcional definido por $J(f) = \int_{-1}^1 [f(t)]^3\, dt$. En este caso*

$$F(t, f, \dot{f}) = f^3$$

Entonces,

$$\frac{\partial F}{\partial f} = 3f^2 \quad y \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{f}} = 0;\ por\ tanto\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{f}}\right) = 0.$$

De esta manera la condición de Euler se traduce a

$$f^2 = 0,\ con\ f(-1) = 0 = f(1).$$

Es evidente que la única función que satisface este requisito es la función constante $\theta(t) = 0$, $t \in [-1,1]$. Sin embargo, si δ es cualquier número real positivo, sean g_δ y h_δ las funciones definidas por $g_\delta(t) = \frac{\delta}{4}\left(1 - t^2\right)$ y $h_\delta(t) = \frac{1}{4}\delta(t^2 - 1) = -g_\delta$. Entonces, por ser éstas funciones polinomiales pertenecen a $C^2[-1,1]$ y ya que $g_\delta(\pm 1) = h_\delta(\pm 1) = 0$, también pertenecen a Ω; y, puesto que $g_\delta(t) = \frac{\delta}{4}\left(1 - t^2\right)$ es una parábola con vértice en $(0, \delta/4)$, $\dot{g}_\delta(t) = -\frac{\delta}{2}t$ es una recta y $\ddot{g}_\delta(t) = -\delta/2$, se tiene que $\|g_\delta\|_\infty = \delta/4$,$\|\dot{g}_\delta\|_\infty = \delta/2$ y $\left\|\ddot{g}_\delta\right\|_\infty = \delta/2$; por tanto, $\|h_\delta\| = \|g_\delta\| = \delta/2$. Y ya que $\int_{-1}^1 (g_\delta(t))^3 dt = \frac{1}{70}\delta^3$,

$$J(h_\delta) < J(0) < J(g_\delta),$$

luego, $J(\theta) = 0$ no es ni máximo ni mínimo relativo.

En todo lo que sigue se empleará la notación más cómoda y compacta $J(f) = \displaystyle\int_a^b F(t, f, \dot{f})dt$ en lugar de $J(f) = \displaystyle\int_a^b F(t, f(t), \dot{f}(t))dt$ cuando sea conveniente. También emplearemos, como es natural, distintas letras para denotar a la función variable f.

[2]A toda función $f \in C^2[a,b]$ que satisface la ecuación diferencial (5.3) sin considerar la restrición en la frontera (5.4), se le dice extremal del funcional (5.2). Sin embargo, en varios textos de la materia a los puntos críticos (funciones estacionarias) de este funcional también les llaman extremales del mismo.

Ejemplo 5.6 *Encontrar las funciones estacionarias de los siguientes funcionales:*

1. $J(x) = \int_0^{40} -\frac{\dot{x}^2}{2} dt,\ x(0) = 20$ *y* $x(40) = 0,$ *en* $C^2[0, 40]$.

2. $J(x) = \int_{-1}^{0} \left(\frac{1}{2}x + x\dot{x} + \dot{x} + \frac{1}{2}\dot{x}^2\right) dt,\ x(-1) = 0$ *y* $x(0) = 1$ *en* $C^2[-1, 0]$.

3. $J(x) = \int_0^1 \left(\dot{x}^2 + 2\dot{x} + x^2\right) dt,\ x(0) = 1,\ x(1) = 1$ *en* $C^2[0, 1]$.

Solución: ▶

1. En este caso $F(t, x, \dot{x}) = -\frac{\dot{x}^2}{2}$, por lo que

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} &= -\dot{x}, \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) &= -\ddot{x}, \\ \frac{\partial F}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

y la ecuación diferencial a resolver es

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)$$

es decir,

$$\ddot{x} = 0,$$

luego, $\dot{x} = c_1$ y, entonces,

$$x(t) = \int c_1 dt = c_1 t + c_2.$$

Por la condiciones de frontera dadas, $x(0) = 20$ y $x(40) = 0$,

$$\begin{aligned} c_1 \cdot 0 + c_2 &= x(0) = 20 \\ 40c_1 + c_2 &= x(40) = 0 \end{aligned}$$

que al resolver produce $c_1 = -\frac{1}{2}$ y $c_2 = 20$. Por tanto,

$$x(t) = -\frac{1}{2}t + 20$$

es la única función estacionaria de este funcional.

2. Aquí, $F(t, x, \dot{x}) = \frac{1}{2}x + x\dot{x} + \dot{x} + \frac{1}{2}\dot{x}^2$, por lo que

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} &= \dot{x} + x + 1, \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) &= \ddot{x} + \dot{x}, \\ \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{1}{2} + \dot{x} \end{aligned}$$

y la ecuación diferencial a resolver es

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)$$

esto es,

$$\ddot{x} = \frac{1}{2}$$

luego,

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{2}t + c_1,$$

entonces,

$$x(t) = \frac{1}{4}t^2 + c_1 t + c_2.$$

Por la condiciones de frontera dadas, $x(-1) = 0$ y $x(0) = 1$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} - c_1 + c_2 &= x(-1) = 0 \\ c_2 &= x(0) = 1 \end{aligned}$$

Al resolver el sistema obtenemos $c_2 = 1$ y $c_1 = \frac{5}{4}$, por lo que la única función estacionaria de este funcional es

$$x(t) = \frac{1}{4}t^2 + \frac{5}{4}t + 1.$$

3. En este caso $F(t, x, \dot{x}) = \dot{x}^2 + 2\dot{x} + x^2$, por lo que

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} &= 2\dot{x} + 2 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) &= 2\ddot{x} \\ \frac{\partial F}{\partial x} &= 2x \end{aligned}$$

y la ecuación diferencial a resolver es

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)$$

es decir,

$$\ddot{x} - x = 0,$$

con ecuación característica $\lambda^2 - 1 = 0$ y raíces $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$; por tanto,

$$x(t) = c_1 e^t + c_1 e^{-t}.$$

Por la condiciones de frontera dadas, $x(0) = 1$ y $x(1) = 1$,

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= x(0) = 1 \\ c_1 e + c_2 e^{-1} &= x(1) = 1. \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos $c_1 = \frac{1}{1+e}$ y $c_2 = \frac{e}{1+e}$, con lo que el único punto crítico de este funcional es

$$x(t) = \frac{e^t + e^{1-t}}{1 + e}.$$

◄

Capítulo 6

Condiciones suficientes para integrandos convexos

En la segunda sección de este capítulo se establecen condiciones suficientes para que, por medio del análisis de convexidad del integrando, el funcional $J(f) = \int_a^b F(t, f(t), \dot{f}(t))dt$, sujeto a la condición de frontera, $f(a) = x_0$ y $f(b) = y_0$, alcance un extremo en una función estacionaria f_0. La primera sección es una breve introducción al tema de funciones convexas; mientras que en los últimos dos segmentos se aplican los conceptos del capítulo 6 y la sección 7.2 del presente capítulo–condiciones necesarias y suficientes– a la resolución de dos problemas en economía: dinámica de un monopolista –planteado en la introducción– y planeación de producción para un costo mínimo.

6.1 Convexidad y funciones convexas

En este segmento se presentan las principales características de conjuntos convexos y funciones convexas y cóncavas.

Convexidad

Definición 6.1

1. *Sean $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Se define el segmento de línea que une a estos dos puntos como el conjunto*

$$[\vec{u}, \vec{v}] = \{\vec{w} = \vec{u} + t(\vec{v} - \vec{u}) : \ 0 \leq t \leq 1\}.$$

2. *Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. A es convexo si $[\vec{u}, \vec{v}] \subset A$ para todo par de vectores $\vec{u}, \vec{v} \in A$.*

Geométricamente, en el plano $\mathbb{R}^2$, $[\vec{u}, \vec{v}]$ es el conjunto de todos los puntos que se encuentran entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en la línea recta que une a estos puntos como se ilustra en la figura 6.1 (a); mientras que, como se ilustra en la misma figura (b), un conjunto es convexo si para cada par de puntos en éste, el segmento de línea que los une está completamente contenido en ese conjunto.

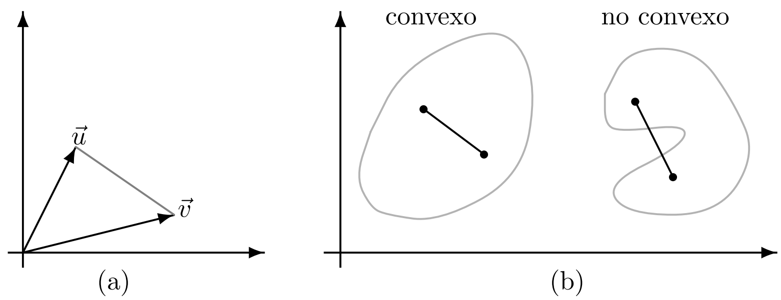


Figura 6.1:

Ejemplo 6.1 *$\varnothing$ y $\mathbb{R}^n$ son convexos.*

Ejemplo 6.2 *Sea $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$, entonces $B(\vec{a}, r)$ es un conjunto convexo. En efecto: sean $\vec{u}, \vec{v} \in B(\vec{a}, r)$, $\vec{w} = \vec{u} + t(\vec{v} - \vec{u}) \in [\vec{u}, \vec{v}]$, entonces $\|\vec{u} - \vec{a}\| < r$, $\|\vec{v} - \vec{a}\| < r$ y $0 \leq t \leq 1$; por tanto,*

$$\begin{aligned}
\|\vec{w} - \vec{a}\| &= \|\vec{u} + t(\vec{v} - \vec{u}) - \vec{a}\| \\
&= \|\vec{u} + t(\vec{v} - \vec{u}) - \vec{a} + t\vec{a} - t\vec{a}\| \\
&= \|\vec{u} + t\vec{v} - t\vec{u} - \vec{a} + t\vec{a} - t\vec{a}\| \\
&= \|(1-t)\vec{u} + t(\vec{v} - \vec{a}) - (1-t)\vec{a}\| \\
&= \|(1-t)(\vec{u} - \vec{a}) + t(\vec{v} - \vec{a})\| \\
&\leq \|(1-t)(\vec{u} - \vec{a})\| + \|t(\vec{v} - \vec{a})\| \\
&= (1-t)\,\|\vec{u} - \vec{a}\| + t\,\|\vec{v} - \vec{a}\| \\
&< (1-t)r + tr \\
&= r
\end{aligned}$$

Funciones convexas

Definición 6.2 *Sea $F : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función real de varias variables. Sea $C \subset D$ un conjunto convexo.*

1. *La función F es convexa en C si*

$$F(\vec{u} + t(\vec{v} - \vec{u})) \leq F(\vec{u}) + t(F(\vec{v}) - F(\vec{u})) \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in C,\ \forall t \in [0, 1].$$

2. *La función F es cóncava en C si*

$$F(\vec{u} + t(\vec{v} - \vec{u})) \geq F(\vec{u}) + t(F(\vec{v}) - F(\vec{u})) \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in C,\ \forall t \in [0, 1].$$

Geométricamente, una función de dos variables $z = F(x, y)$, es convexa cuando, para cualquier par de puntos en $\vec{u}, \vec{v} \in C$, el segmento de línea $[F(\vec{u}), F(\vec{v})]$ está por encima de la gráfica de la función F si ésta se evalúa en los puntos del segmento $[\vec{u}, \vec{v}]$ como se muestra en la figura 6.2; mientras que la función es cóncava en caso contrario; esto es, si $-F$ es convexa.

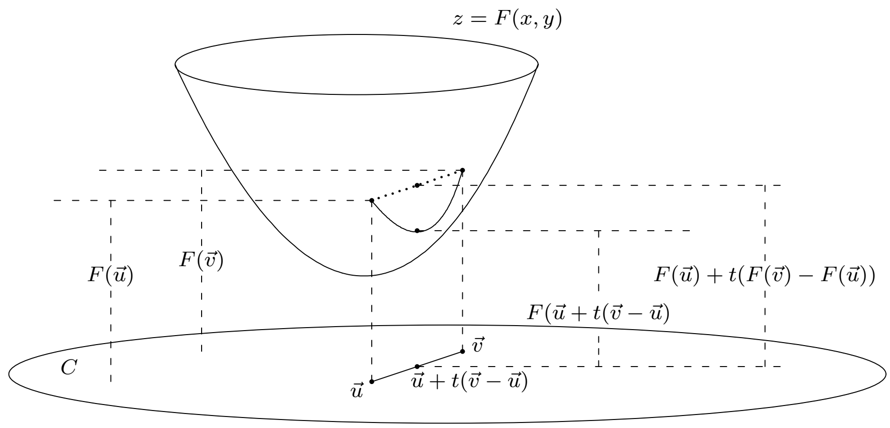


Figura 6.2:

Se puede probar (cf. referencia bibliográfica [9] pp. 74 a 78) que si F tiene segundas derivadas parciales continuas en todo punto del conjunto convexo C y para todo punto $\vec{u} \in C$ la matriz hessiana

$$\begin{bmatrix} F_{11}(\vec{u}) & F_{12}(\vec{u}) & \cdots & F_{1n}(\vec{u}) \\ F_{21}(\vec{u}) & F_{22}(\vec{u}) & \cdots & F_{2n}(\vec{u}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{n1}(\vec{u}) & F_{n2}(\vec{u}) & \cdots & F_{nn}(\vec{u}) \end{bmatrix},$$

donde $F_{ij}(\vec{u}) = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}(\vec{u})$, es semidefinida positiva[1] (negativa), entonces F es convexa (cóncava) en C. A su vez, una condición necesaria y suficiente[2] para que una matriz sea semidefinida positiva (negativa) es que todos sus valores propios sean no negativos (no positivos).

Ejemplo 6.3 *Consideremos la función $z = F(x, y) = x^2 + y^2$, entonces, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,*

[1] Una matriz cuadrada A de orden n es semidefinida positiva (negativa) si $\vec{x}^{\,t} A\vec{x} \geq 0$ (≤ 0) para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

[2] ib. p. 78, o [2] p. 378

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} F_{xx}(x,y) & F_{xy}(x,y) \\ F_{yx}(x,y) & F_{yy}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Así, el polinomio característico de esta matriz es

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2.$$

Por tanto, los valores propios de $H(x,y)$, para cualquier $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, son $\lambda_1 = 2 \geq 0$ y $\lambda_2 = 2 \geq 0$; por lo que $H(x,y)$ es semidefinida positiva para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Luego, F es convexa en $\mathbb{R}^2$.

6.2 Condiciones suficientes para integrandos convexos

Cuando el integrando del funcional $J(f) = \displaystyle\int_a^b F(t,f,\dot{f})dt$ es una función convexa o cóncava para cada valor de la variable independiente t y el funcional tiene una función estacionaria f_0; es decir, f_0 es solución de la ecuación diferencial (5.3) y satisface las condiciones de frontera (5.4) (p. 74), es posible demostar (cf. referencias bibliográficas [24] pp. 258-259; [5] pp. 81-82) que el funcional alcanza un extremo absoluto en f_0 como se establece en el siguiente teorema.

Teorema 6.1 *Sean $F : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función con primeras derivadas parciales continuas en todo punto del conjunto $[a,b] \times \mathbb{R}^2$ y f_0 una función estacionaria del funcional $J = \displaystyle\int_a^b F(t,f(t),\dot{f}(t))dt$ en el conjunto $\Omega = \{\varphi \in C^2[a,b] : \varphi(a) = x_0, \varphi(b) = y_0\}$.*

1. Si para cada $t \in [a,b]$ la función $(f,\dot{f}) \mapsto F(t,f,\dot{f})$ es convexa en el espacio (convexo) $\mathbb{R}^2$, entonces $J(f_0)$ es un mínimo absoluto de J en Ω.
2. Si para cada $t \in [a,b]$ la función $(f,\dot{f}) \mapsto F(t,f,\dot{f})$ es cóncava en el espacio (convexo) $\mathbb{R}^2$, entonces $J(f_0)$ es un máximo absoluto de J en Ω.

Para aplicar el precedente teorema en la práctica se utilizan los valores propios de la matriz hessiana como se hace patente en el siguiene corolario.

Corolario 6.1 *Sean $F : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función con segundas derivadas parciales continuas en todo punto del conjunto $[a,b] \times \mathbb{R}^2$ y f_0 una función estacionaria del funcional $J(f) = \int_a^b F(t,f(t),\dot{f}(t))dt$ en el conjunto $\Omega = \{\varphi \in C^2[a,b] : \varphi(a) = x_0, \varphi(b) = y_0\}$.*

1. Si para cada $t \in [a,b]$ la matriz

$$\begin{bmatrix} F_{ff}(t,f,\dot{f}) & F_{f\dot{f}}(t,f,\dot{f}) \\ F_{f\dot{f}}(t,f,\dot{f}) & F_{\dot{f}\dot{f}}(t,f,\dot{f}) \end{bmatrix}$$

es semidefinida positiva en todo punto $(f, \dot{f}) \in \mathbb{R}^2$, entonces $J(f_0)$ es el mínimo absoluto de J en Ω.

2. Si para cada $t \in [a, b]$ la matriz

$$\begin{bmatrix} F_{ff}(t, f, \dot{f}) & F_{f\dot{f}}(t, f, \dot{f}) \\ F_{f\dot{f}}(t, f, \dot{f}) & F_{\dot{f}\dot{f}}(t, f, \dot{f}) \end{bmatrix}$$

es semidefinida negativa en todo punto $(f, \dot{f}) \in \mathbb{R}^2$, entonces $J(f_0)$ es el máximo absoluto de J en Ω.

Demostración:

1. La hipótesis implica que, para cada $t \in \mathbb{R}$, la función $(f, \dot{f}) \longmapsto F(t, f, \dot{f})$ es convexa en el espacio (convexo) $\mathbb{R}^2$, y el resultado es consecuencia del primer inciso del teorema precedente.

2. La hipótesis implica que, para cada $t \in \mathbb{R}$, la función $(f, \dot{f}) \longmapsto F(t, f, \dot{f})$ es cóncava en el espacio (convexo) $\mathbb{R}^2$, y el resultado es consecuencia del segundo inciso del teorema precedente.

■

Ejemplo 6.4 *En el inciso 3 del ejemplo 5.6, p. 76, el funcional* $J(x) = \displaystyle\int_0^1 (\dot{x}^2 + 2\dot{x} + x^2)dt$, *tiene a* $x(t) = \dfrac{e^t + e^{1-t}}{1+e}$ *como la única función estacionaria que satisface la condición de frontera* $x(0) = 1$ *y* $x(1) = 1$. *En este caso* $F = \dot{x}^2 + 2\dot{x} + x^2$ *y, por tanto,*

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Entonces, el polinomio característico de H *está dado por*

$$\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2\,;$$

así que los valores propios de H *son* $\lambda_1 = \lambda_2 = 2 \geq 0$ *y, por tanto, en* $x(t) = \dfrac{e^t + e^{1-t}}{1+e}$ *el funcional* J *alcanza su mínimo absoluto.*

Ejemplo 6.5 *Resolver el problema*

$$\begin{array}{rl} \textit{maximizar} & J = \displaystyle\int_0^1 (x^2 + \dot{x}^2 + t)dt \\ \textit{sujeto a} & \left\{ \begin{array}{rcl} x(0) & = & 0 \\ x(1) & = & e^{-1} - e \end{array} \right. \end{array} \tag{6.1}$$

Solución: ▶ En este caso $F = x^2 + \dot{x}^2 + t$, por lo que

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= 2x, \\ \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} &= 2\dot{x}, \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) &= 2\ddot{x} \end{aligned}$$

De esta manera, la ecuación diferencial (ecuación de Euler) a resolver es

$$\ddot{x} - x = 0$$

que tiene ecuación característica $m^2 - 1 = 0$ con soluciones $m_1 = 1$ y $m_2 = -1$. Por tanto, la solución general de la ecuación de Euler es

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t}.$$

Puesto que $x(0) = 0$ y $x(1) = e^{-1} - e$,

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= 0 \\ C_1 e + C_2 e^{-1} &= e^{-1} - e \end{aligned}$$

Entonces, $C_2 = -C_1$ y al sustituir esta relación la segunda ecuación se obtiene

$$C_1(e - e^{-1}) = e^{-1} - e$$

de donde $C_1 = -1$ y $C_2 = 1$. Luego, la única función estacionaria para este problema de optimización es

$$x(t) = e^{-t} - e^t.$$

Ya que $F = x^2 + \dot{x}^2 + t$,

$$H = \begin{bmatrix} F_{xx} & F_{x\dot{x}} \\ F_{x\dot{x}} & F_{\dot{x}\dot{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

los valores propios de H son $\lambda_1 = \lambda_2 = 2 \geq 0$; por lo que J alcanza su valor mínimo en $x(t) = e^{-t} - e^t$. ◀

6.3 Dinámica de un monopolista

En la introducción se planteó la cuestión de encontrar la función de precio que maximiza la ganancia en el problema de dinámica de un monopolista (p. 1). En este apartado se da la solución a este modelo utilizando la condición de Euler y el análisis de convexidad del integrando.

Recordemos que en este problema el objetivo es encontrar una función $p = p(t)$ para hacer máxima la ganancia de la firma en el intervalo $[0, T]$ si el precio inicial es p_1 y el final el p_2; es decir,

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximizar} & J(p) = \displaystyle\int_0^T (p(ap+b+h\dot{p}) - A(ap+b+h\dot{p})^2 - B(ap+b+h\dot{p}) + C)dt \\
\text{sujeto a} & \left\{ \begin{array}{lcl} p(0) & = & p_1 \\ p(T) & = & p_2 \end{array} \right.
\end{array}
$$

En este caso, $F(t,p,\dot{p}) = p(ap+b+h\dot{p}) - A(ap+b+h\dot{p})^2 - B(ap+b+h\dot{p}) + C$, por lo que

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial p} &= 2ap + b + h\dot{p} - 2Aa(ap+b+h\dot{p}) - Ba, \\
\frac{\partial F}{\partial \dot{p}} &= hp - 2Ah(ap+b+h\dot{p}) - Bh, \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{p}}\right) &= h\dot{p} - 2Ah(a\dot{p} + h\ddot{p}).
\end{aligned}
$$

Entonces, la ecuación de Euler para este problema es

$$2ap + b + h\dot{p} - 2Aa(ap+b+h\dot{p}) - Ba = h\dot{p} - 2Ah(a\dot{p} + h\ddot{p})$$

que equivale a

$$2Ah^2\ddot{p} + 2a(1-Aa)p = 2Aab + Ba - b. \tag{6.2}$$

La ecuación característica de la ecuación diferencial homogénea asociada esta dada por

$$2Ah^2m^2 + 2a(1-Aa) = 0$$

cuyas soluciones son $m = \dfrac{1}{|h|}\sqrt{\dfrac{a(Aa-1)}{A}}$ y $-m$; por lo tanto, la solución de la ecuación diferencial homogénea asociada es

$$p_H = C_1e^{mt} + C_2e^{-mt}.$$

Puesto que el coeficiente de p en (6.2) es distinto de cero, una solución particular de esta ecuacion diferencial está dada por

$$p_0 = \frac{2Aab + Ba - b}{2a(1-Aa)}$$

Luego, la solución general de (6.2) es

$$p(t) = C_1e^{mt} + C_2e^{-mt} + p_0$$

Puesto que $p(0) = p_1$ y $p(T) = p_2$, se tiene

$$
\begin{aligned}
C_1 + C_2 &= p_1 - p_0 \\
e^{mT}C_1 + C_2e^{-mT} &= p_2 - p_0
\end{aligned}
$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
C_1 &= \frac{\begin{vmatrix} p_1 - p_0 & 1 \\ p_2 - p_0 & e^{-mT} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{mT} & e^{-mT} \end{vmatrix}} \\
&= \frac{e^{-mT}(p_1 - p_0) - (p_2 - p_1)}{e^{-mT} - e^{mT}} \\
&= \frac{e^{-mT}(p_1 - p_0) - (p_2 - p_1)}{e^{-mT}(1 - e^{2mT})} \\
&= \frac{p_1 - p_0 - (p_2 - p_1)e^{mT}}{1 - e^{2mT}}
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
C_2 &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & p_1 - p_0 \\ e^{mT} & p_2 - p_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{mT} & e^{-mT} \end{vmatrix}} \\
&= \frac{p_2 - p_0 - (p_1 - p_0)e^{mT}}{e^{-mT} - e^{mT}} \\
&= \frac{p_2 - p_0 - (p_1 - p_0)e^{mT}}{-e^{mT}\,(1 - e^{-2mT})} \\
&= \frac{p_1 - p_0 - (p_2 - p_0)e^{-mT}}{1 - e^{-2mT}}
\end{aligned}
$$

Entonces, si J tiene un extremo, éste se debe alcanzar en

$$p(t) = C_1 e^{mt} + C_2 e^{-mt} + p_0$$

con

$$
\begin{aligned}
p_0 &= \frac{2Aab + Ba - b}{2a(1 - Aa)} \\
m &= \frac{1}{|h|}\sqrt{\frac{a(Aa - 1)}{A}} \\
C_1 &= \frac{p_1 - p_0 - (p_2 - p_1)e^{mT}}{1 - e^{2mT}} \\
C_2 &= \frac{p_1 - p_0 - (p_2 - p_0)e^{-mT}}{1 - e^{-2mT}}
\end{aligned}
$$

Ahora bien, ya que

$$
\begin{aligned}
H &= \begin{bmatrix} F_{pp} & F_{p\dot{p}} \\ F_{\dot{p}p} & F_{\dot{p}\dot{p}} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2a - 2Aa^2 & 0 \\ 0 & -2Ah^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

los valores propios de H son $\lambda_1 = 2a - 2Aa^2$ y $\lambda_2 = -2Ah^2$; puesto que $a < 0$ y $A > 0$, $\lambda_1 = 2a - 2Aa^2 < 0$ y $\lambda_2 = -2Ah^2 < 0$. Por tanto, J alcanza su valor máximo en $p(t) = C_1 e^{mt} + C_2 e^{-mt} + p_0$.

6.4 Planeación de producción para un costo mínimo

Una firma tiene una orden de un volumen B para ser liberada en un tiempo T. Desean planificar la producción para satisfacer a tiempo el pedido con un costo mínimo. Sea x el volumen total acumulado del producto al tiempo t. El costo para cumplir con la orden proviene de dos fuentes: (1) el costo de producción por unidad, c_p, el cual la empresa calcula que crece linealmente en función de la velocidad de producción $\dot{x}$ y (2) el costo unitario por almacenar el inventario que crece linealmente con el tiempo. Por la condición (1), $c_p = k_1\dot{x}$ para alguna constante $k_1 > 0$. Por la condición (2), si C_a es el costo por unidad por almacenar el inventario, entonces $C_a = k_2 t$ para alguna constante $k_2 > 0$; por tanto, $c_a = \dot{C}_a = k_2$ es el precio por almacenar una unidad por unidad de tiempo. De esta manera, en un intervalo de tiempo $[t, t+dt]$, de longitud dt, un diferencial de tiempo, la empresa tiene un costo total

$$\begin{aligned} dJ &= (c_p\dot{x} + k_2 x)\, dt \\ &= \left(k_1\dot{x}^2 + k_2 x\right) dt. \end{aligned}$$

Así, el costo total para entregar el producto es

$$J(x) = \int_0^T (k_1\dot{x}^2 + k_2 x) dt$$

Entonces, la empresa debe resolver el problema de hallar una función de planeación de producción $x = x(t)$ para resolver el problema

$$\begin{array}{rl} \text{minimizar} & J(x) = \displaystyle\int_0^T (k_1\dot{x}^2 + k_2 x) dt \\ \text{sujeto a} & \left\{ \begin{array}{lcl} x(0) & = & 0 \\ x(T) & = & B \end{array} \right. \end{array}$$

En este caso $F(t, x, \dot{x}) = k_1\dot{x}^2 + k_2 x$; por lo que

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= k_2, \\ \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} &= 2k_1\dot{x}, \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) &= 2k_1\ddot{x} \end{aligned}$$

Luego, la ecuación de Euler en para este problema es

$$\ddot{x} = \frac{k_2}{2k_1}$$

cuya solución (al integrar dos veces sucesivamente) es

$$x(t) = \frac{k_2}{4k_1}t^2 + C_1 t + C_2.$$

Puesto que $x(0) = 0$ y $x(T) = B$, entonces

$$\begin{aligned} C_2 &= 0 \\ B &= \frac{k_2}{4k_1}T^2 + C_1 T \end{aligned}$$

por lo que

$$C_1 = \frac{B}{T} - \frac{k_2}{4k_1}T$$

y, por tanto,

$$x(t) = \frac{k_2}{4k_1}t^2 + \left(\frac{B}{T} - \frac{k_2}{4k_1}T\right)t, \;\; 0 \leq t \leq T,$$

es la función estacionaria para este problema. Ya que

$$H = \begin{bmatrix} F_{xx} & F_{x\dot{x}} \\ F_{\dot{x}x} & F_{\dot{x}\dot{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2k_1 \end{bmatrix}$$

tiene los valores propios $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 2k_1 \geq 0$, en $x(t) = \frac{k_2}{4k_1}t^2 + \left(\frac{B}{T} - \frac{k_2}{4k_1}T\right)t$ se alcanza el costo mínimo. Así, la empresa tiene que producir

$$\dot{x}(t) = \frac{k_2}{2k_1}t + \frac{B}{T} - \frac{k_2}{4k_1}T$$

artículos por unidad de tiempo.

Capítulo 7

Frontera variable

En la primera sección de este capítulo se plantean los llamados problemas con frontera variable y en la segunda sección se aplican estos conceptos a la resolución de un problema en economía.

7.1 Condiciones necesarias y suficientes para problemas con frontera variable

En esta apartado trataremos problemas de optimización del funcional $J(f) = \displaystyle\int_a^T F(t, f, \dot{f})dt$ donde el extremo derecho del intervalo $[a, T]$ y/o el valor de $f(T)$ pueden ser variables y estableceremos condiciones necesarias, llamadas condiciones de transversalidad, para que el funcional J alcance un extremo. Para la deducción y comprobación de estos resultados se pueden consultar las referencias bibliográficas [5] pp. 59-64 y [15] pp. 55-60.

I. Línea terminal vertical: En este problema $T = b$ está fijo, pero $f(T)$ es variable (libre); es decir, se desea resolver el problema

$$\begin{array}{ll} \text{optimizar} & J = \displaystyle\int_a^b F(t, f, \dot{f})dt \\ \text{sujeto a} & \begin{cases} f(a) = x_0 \\ f(T) \text{ libre} \end{cases} \end{array}$$

Esto significa que el conjunto de funciones admisibles está conformado por todas las funciones suaves hasta el orden 2 cuyas gráficas *empiezan* en el punto (a, x_0) y *terminan* en la línea vertical $x = b$, como se muestra en la figura 7.1. Para que J alcance un valor óptimo en una función f_0, ésta debe satisfacer las siguientes

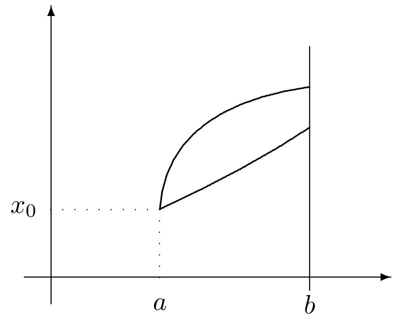


Figura 7.1:

condiciones:

1. f_0 es una solución de la ecuación de Euler: $\dfrac{\partial F}{\partial f} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial F}{\partial \dot{f}}\right)$
2. la condición de frontera: $f_0(a) = x_0$
3. la condición de transversalidad: $\dfrac{\partial F}{\partial \dot{f}}(b, f_0(b), \dot{f}_0(b)) = 0$

II. Línea terminal horizontal: En este problema T es variable y $f(T) = y_0$ es fijo; es decir, se requiere resolver el problema

$$\begin{array}{ll} \text{optimizar} & J = \displaystyle\int_a^T F(t, f, \dot{f})dt \\ \text{sujeto a} & \begin{cases} f(a) = x_0 \\ T \text{ libre} \\ f(T) = y_0 \end{cases} \end{array}$$

Aquí,las gráficas de todas las funciones admisibles *empiezan* en (a, x_0) y *terminan* en la línea horizontal $y = y_0$ como se ilustra en la figura 7.2. Para este caso

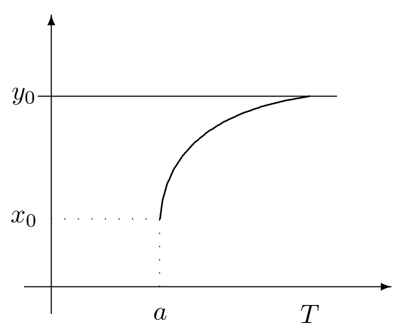


Figura 7.2:

las condiciones que debe cumplir una función f_0 para que en ella se alcance un valor óptimo son:

1. f_0 es una solución de la ecuación de Euler: $\dfrac{\partial F}{\partial f} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial F}{\partial \dot{f}}\right)$

2. la condición de frontera: $f_0(a) = x_0$

3. las condiciones de transversalidad: $\left\{ \begin{array}{lcl} f_0(T) & = & y_0 \\ \left[F - \dot{f}_0(T)\dfrac{\partial F}{\partial \dot{f}}\right]_{\vec{u}} & = & 0 \end{array} \right.$

   donde $\vec{u} = (T, f_0(T), \dot{f}_0(T))$

III. Sin línea terminal: En este problema T y $f(T)$ son variables; es decir, se quiere resolver el problema:

$$\begin{array}{rl} \text{optimizar} & J = \displaystyle\int_a^T F(t, f, \dot{f})dt \\ \text{sujeto a} & \left\{ \begin{array}{l} f(a) = x_0 \\ T \text{ libre} \\ f(T) \text{ libre} \end{array} \right. \end{array}$$

Para este caso las gráficas de las funciones admisibles *comienzan* en el punto (a, x_0) y pueden *terminar* en cualquier punto como se ilustra en la figura 7.3. Las condiciones que debe cumplir una función f_0 para que en ella se alcance un

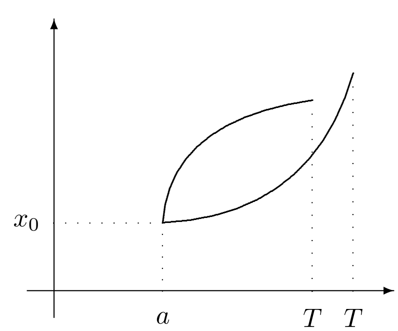


Figura 7.3:

valor óptimo son:

1. f_0 es una solución de la ecuación de Euler: $\dfrac{\partial F}{\partial f} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial F}{\partial \dot{f}}\right)$

2. la condición de frontera: $f_0(a) = x_0$

3. las condiciones de transversalidad: $\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial \dot{f}}(T, f_0(T), \dot{f}_0(T)) = 0 \\ F(T, f_0(T), \dot{f}_0(T)) = 0 \end{cases}$

Se puede probar (cf. referencia bibliográfica [5] pp. 82-83) que si el integrando del funcional J en cualquiera de los tres anteriores casos es convexo (cóncavo); es decir, para cada $t \in [a, T]$ la función $(f, \dot{f}) \mapsto F(t, f, \dot{f})$ es convexa (cóncava) y f es una función estacionaria del funcional $J(f) = \int_a^T F(t, f, \dot{f})dt$ –en el sentido de que satisface las tres condiciones de alguno de los tres casos precedentes–, entonces $J(f)$ es un mínimo absoluto (máximo absoluto).

Ejemplo 7.1 *Hallar el valor extremo del funcional*

$$J(f) = \int_0^1 (t^2 + f^2 + \dot{f}^{\,2})dt$$

sujeto a $f(0) = 1$ *y determinar si es máximo o mínimo absoluto.*

Solución: ▶ Aquí $f(1)$ es libre; por tanto es un problema de línea vertical terminal (caso I). $F(t, f, \dot{f}) = t^2 + f^2 + \dot{f}^{\,2}$; entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial f} &= 2f, \\ \frac{\partial F}{\partial \dot{f}} &= 2\dot{f}, \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial f}\right) &= 2\ddot{f} \end{aligned}$$

Por lo que la ecuación de Euler es $\ddot{f} - f = 0$; que tiene polinomio característico $\lambda^2 - 1$, con raíces $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$. Por tanto,

$$f(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t}.$$

Puesto que $f(0) = 1$, se tiene

$$C_1 + C_2 = -1$$

y ya que

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial F}{\partial \dot{f}}\right|_{t=T=1} &= 2\dot{f}(1) \\ &= \left. C_1 e^t - C_2 e^{-t}\right|_{t=1} \\ &= C_1 e - C_2 e^{-1} \end{aligned}$$

se debe cumplir

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= 1 \\ C_1 e - C_2 e^{-1} &= 0 \end{aligned}$$

que tiene por solución $C_1 = \frac{e^{-1}}{e+e^{-1}}$ y $C_2 = \frac{e}{e+e^{-1}}$; por lo que

$$f(t) = \frac{e^t}{1+e^2} + \frac{e^{2-t}}{1+e^2}$$

Finalmente, ya que

$$H = \begin{bmatrix} F_{ff} & F_{f\dot{f}} \\ F_{f\dot{f}} & F_{\dot{f}\dot{f}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

tiene los valores propios $\lambda_1 = \lambda_2 = 2 \geq 0$, $J(f)$ es el mínimo absoluto. ◀

Ejemplo 7.2 *Hallar el valor extremo del funcional*

$$J(f) = \int_0^T (t\dot{f} + \dot{f}^{\,2})dt$$

sujeto a $f(0) = 1$, $f(T) = 10$ *y determinar si es máximo o mínimo absoluto.*

Solución: ▶ En este ejemplo T es libre y $f(T) = 10$, por lo que es un problema de línea terminal horizontal. Para este caso $F(t, f, \dot{f}) = t\dot{f} + \dot{f}^{\,2}$; por lo que

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial f} &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \dot{f}} &= t + 2\dot{f}, \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{f}}\right) &= 1 + 2\ddot{f} \end{aligned}$$

y la ecuación diferencial de Euler que corresponde es, entonces,

$$\ddot{f} = -\frac{1}{2}.$$

Al integrar dos veces

$$f(t) = -\frac{1}{4}t^2 + C_1 t + C_2.$$

Puesto que $f(0) = 1$,

$$f(t) = -\frac{1}{4}t^2 + C_1 t + 1.$$

En este caso se debe cumplir

$$10 = f(T) = -\frac{1}{4}T^2 + C_1 T + 1 \tag{7.1}$$

y
$$0=\left[F-\dot{f}\frac{\partial F}{\partial \dot{f}}\right]_{t=T}=T\dot{f}(T)+\dot{f}^{\,2}(T)-\dot{f}\,(T)(T+2\dot{f}(T)).$$
La última expresión se reduce a
$$-\dot{f}(T)=0$$
esto es,
$$-\frac{1}{2}T+C_1=0;$$
de donde,
$$C_1=\frac{1}{2}T.$$
Al sustituir C_1 en (7.1) se obtiene
$$T^2=36$$
por lo que $T=6$ y, entonces, $C_1=3$; por lo tanto,
$$f(t)=-\frac{1}{4}t^2+3t+1.$$
Finalmente, puesto que
$$H=\begin{bmatrix} F_{ff} & F_{f\dot{f}} \\ F_{f\dot{f}} & F_{\dot{f}\dot{f}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$
tiene los valores propios $\lambda_1=0$ y $\lambda_2=2$, ambos no negativos, J alcanza su mínimo absoluto en
$$f(t)=-\frac{1}{4}t^2+3t+1,\ 0\leq t\leq 6.$$
◀

Ejemplo 7.3 *Hallar el valor extremo del funcional*
$$J(f)=\int_0^T (f+\dot{f}^{\,2}+t)dt$$
sujeto a $f(0)=0$, *y determinar si es máximo o mínimo absoluto.*

Solución: ▶ En este ejemplo T y $f(T)$ son libres, entonces las condiciones de transversalidad corresponden a un problema sin línea terminal. Aquí, $F=f+\dot{f}^{\,2}+t$, por lo que
$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial f} &= 1,\\ \frac{\partial F}{\partial \dot{f}} &= 2\dot{f},\\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{f}}\right) &= 2\ddot{f}\end{aligned}$$

Entonces, la ecuación diferencial de Euler que corresponde es

$$\ddot{f} = 0$$

que tiene solución general

$$f(t) = \frac{1}{4}t^2 + C_1 t + C_2.$$

La condición de frontera $f(0) = 0$ implica $C_2 = 0$, y las condiciones de transversalidad

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial F}{\partial \dot{f}}\right|_T &= 0 \\ F|_T &= 0 \end{aligned}$$

se traducen a

$$\begin{aligned} 2\dot{f}(T) &= 0 \\ f(T) + (\dot{f}(t))^2 + T &= 0 \end{aligned}$$

esto

$$\frac{1}{2}T + C_1 = 0 \tag{7.2}$$

$$\frac{1}{4}T^2 + C_1 T + T = 0 \tag{7.3}$$

Al despejar C_1 de la ecuación (7.2) y sustituir en (7.3) se obtiene

$$\frac{1}{4}T^2 - \frac{1}{2}T^2 + T = 0$$

de donde

$$T - \frac{1}{4}T^2 = 0$$

y, por tanto,

$$T = 4 \text{ y } C_1 = -2$$

Entonces,

$$f(t) = \frac{1}{4}t^2 - 2t,\ 0 \leq t \leq 4$$

es la función estacionaria para el funcional J. Puesto que

$$H = \begin{bmatrix} F_{ff} & F_{f\dot{f}} \\ F_{f\dot{f}} & F_{\dot{f}\dot{f}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

tiene los valores propios $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 2$, J alcanza el mínimo absoluto en $f(t) = \frac{1}{4}t^2 - 2t$, $0 \leq t \leq 4$. ◄

7.2 Planeación de producción para un costo mínimo con tiempo de entrega libre

En la sección 6.4, p. 87, analizamos el problema de una firma que quiere minimizar su costo de produción para entregar un volumen B de un artículo en un tiempo T predeterminado. Ahora supongamos que la empresa no tiene restricción de tiempo para la entrega de este pedido; es decir, T es libre. Entonces, se tiene que encontrar, para este caso, una función de planeación de producción $x = x(t)$, $0 \leq t \leq T$, que resuelva

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & J = \displaystyle\int_0^T (k_1\dot{x}^2 + k_2 x)dt \\ \text{sujeto a} & \begin{cases} x(0) = 0 \\ T \text{ libre} \\ x(T) = B \end{cases} \end{array}$$

Este es un problema con línea terminal horizontal; la ecuación de Euler es la misma que en el problema original y, por tanto, su solución general :

$$x(t) = \frac{k_2}{4k_1}t^2 + C_1 t + C_2;$$

pero ahora se deben cumplir las condiciones de frontera y transversalidad que vimos en en el caso II (p. 90); esto es,

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 \\ x(T) &= B \\ \left[F - \dot{x}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right]_{t=T} &= 0 \end{aligned}$$

La primera relación implica $C_2 = 0$. Al sustituir $x(T)$ y $\dot{x}(T)$ en la última ecuación se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &= k_2\left(\frac{k_2}{4k_1}T^2 + C_1 T\right) - k_1\left(\frac{k_2}{2k_1}T + C_1\right)^2 \\ &= \frac{k_2^2}{4k_1}T^2 + k_2 C_1 T - \frac{k_2^2}{4k_1}T^2 - k_2 C_1 T - k_1 C_1^2 \\ &= -k_1 C_1^2; \end{aligned}$$

de donde $C_1 = 0$. Por tanto,

$$B = x(T) = \frac{k_2}{4k_1}T^2$$

implica $T = 2\sqrt{k_1 B/k_2}$; luego, la función estacionaria es

$$x(t) = \frac{k_2}{4k_1}t^2,\ 0 \leq t \leq 2\sqrt{\frac{k_1 B}{k_2}}$$

Finalmente, ya que

$$\begin{aligned} H &= \begin{bmatrix} F_{xx} & F_{x\dot{x}} \\ F_{\dot{x}x} & F_{\dot{x}\dot{x}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2k_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

tiene valores propios $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 2 > 0$, J alcanza su valor mínimo en x. Entonces la empresa debe producir

$$\dot{x}(t) = \frac{k_2}{2k_1} t$$

artículos por unidad de tiempo en el intervalo $[0, T]$, $T = 2\sqrt{k_1 B / k_2}$, para satisfacer el pedido del volumen B en ese intervalo de tiempo a un costo mínimo.

Capítulo 8

Generalizaciones

En este capítulo se presentan algunas generalizaciones a problemas de optimización para funcionales integrales que contienen más de una variable o derivadas superiores de una misma función.

8.1 Condiciones necesarias para funcionales de varias variables

Supongamos ahora que se requiere optimizar un funcional de la forma

$$J(x, y) = \int_a^b F(t, x, \dot{x}, y, \dot{y})dt$$

donde las funciones admisibles pertenecen al espacio $C^2[a, b]$ y satisfacen $x(a) = x_1$, $x(b) = x_2$, $y(a) = y_1$ y $y(b) = y_2$ y la función F tiene segundas derivadas parciales continuas respecto a todas sus variables en un conjunto que contiene a $[a, b] \times \mathbb{R}^4$. Sean η_1 y η_2 un par de funciones en $C^2[a, b]$ tales que $\eta_1(a) = \eta_1(b) = \eta_2(a) = \eta_2(b) = 0$ y $\Phi(\alpha) = \int_a^b F(t, x+\alpha\eta_1, \dot{x}+\alpha\dot{\eta}_1, y+\alpha\eta_2, \dot{y}+\alpha\dot{\eta}_2)dt$. De manera análoga al caso de una sola función del apartado 6.2, si $J(x, y)$ tiene un extremo relativo en (x, y), Φ tiene un extremo relativo en $\alpha = 0$. Entonces, puesto que

$$\dot{\Phi}(\alpha) = \int_a^b \begin{pmatrix} F_2(t, x+\alpha\eta_1, \dot{x}+\alpha\dot{\eta}_1, y+\alpha\eta_2, \dot{y}+\alpha\dot{\eta}_2)\eta_1 \\ +F_3(t, x+\alpha\eta_1, \dot{x}+\alpha\dot{\eta}_1, y+\alpha\eta_2, \dot{y}+\alpha\dot{\eta}_2)\dot{\eta}_1 \\ +F_4(t, x+\alpha\eta_1, \dot{x}+\alpha\dot{\eta}_1, y+\alpha\eta_2, \dot{y}+\alpha\dot{\eta}_2)\eta_2 \\ +F_5(t, x+\alpha\eta_1, \dot{x}+\alpha\dot{\eta}_1, y+\alpha\eta_2, \dot{y}+\alpha\dot{\eta}_2)\dot{\eta}_2 \end{pmatrix} dt$$

se debe tener,

$$0 = \int_a^b (F_2(t, x, \dot{x}, y, \dot{y})\eta_1 + F_3(t, x, \dot{x}, y, \dot{y})\dot{\eta}_1 + F_4(t, x, \dot{x}, y, \dot{y})\eta_2 + F_5(t, x, \dot{x}, y, \dot{y})\dot{\eta}_2)\, dt$$

Al integrar por partes –los términos que contienen a F_3 y F_5– se obtiene, ya que $\eta_1(a) = \eta_1(b) = \eta_2(a) = \eta_2(b) = 0$,

$$\int_a^b \begin{pmatrix} \left(F_2(t,x,\dot{x},y,\dot{y}) - \frac{d}{dt}F_3(t,x,\dot{x},y,\dot{y})\right)\eta_1 \\ +\left(F_4(t,x,\dot{x},y,\dot{y}) - \frac{d}{dt}F_5(t,x,\dot{x},y,\dot{y})\right)\eta_2 \end{pmatrix} dt = 0.$$

Puesto que η_1 y η_2 son arbitrarias, la precedente igualdad se cumple para todo par de estas funciones en $C^2[a,b]$ que cumplan con la condición $\eta_i(a) = \eta_i(b) = 0$, $i = 1,2$. Por tanto, los factores que multiplican a estas funciones tienen que ser nulos; esto es

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right) \end{aligned}$$

En general, para que el funcional

$$J(x_1,\ldots,x_n) = \int_a^b F(t,x_1,\ldots,x_n,\dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_n)dt$$

alcance un extremo relativo en $(x_1,\ldots,x_n)$ es necesario que

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\right),\ i = 1,2,\ldots,n. \tag{8.1}$$

Como se observa, esta es una generalización directa de la condición de Euler para el caso de un funcional con una sola variable.

Ejemplo 8.1 *Encontrar el par de funciones (x,y) donde el funcional*

$$J(x,y) = \int_{-1}^{1}\left(2tx - \dot{x}^{\,2} - \frac{\dot{y}^2}{3}\right)dt$$

posiblemente alcance un extremo relativo, que satisfacen las condiciones de frontera: $x(-1) = 2$, $x(1) = 0$, $y(-1) = -1$ y $y(1) = 1$.

Solución: ▶ Para este caso $F = 2tx - \dot{x}^{\,2} - \dfrac{\dot{y}^{\,2}}{3}$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= 2t, \\ \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} &= -2\dot{x}, \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) &= -2\ddot{x}, \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} &= -\frac{2}{3}\dot{y}, \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right) &= -\frac{2}{3}\ddot{y} \end{aligned}$$

El sistema a resolver es entonces:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -t \\ \ddot{y} &= 0 \end{aligned}$$

que tiene solución general

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{1}{6}t^3 + C_1 t + C_2, \\ y(t) &= C_3 t + C_4. \end{aligned}$$

Con las condiciones de frontera dadas, las constantes deben satisfacer el sistema

$$\begin{aligned} -C_1 + C_2 + \frac{1}{6} &= x(-1) = 2 \\ C_1 + C_2 - \frac{1}{6} &= x(1) = 0 \\ C_4 - C_3 &= y(-1) = -1 \\ C_3 + C_4 &= y(1) = 1 \end{aligned}$$

que al resolver produce

$$C_1 = -\frac{5}{6},\ C_2 = 1,\ C_3 = 1 \text{ y } C_4 = 0.$$

Las funciones buscadas son

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{1}{6}t^3 - \frac{5}{6}t + 1, \\ y(t) &= t. \end{aligned}$$

◄

8.2 Condiciones suficientes para varias variables

De manera análoga al caso de un funcional de una sola variable, si en el funcional

$$J(\vec{x}) = \int_a^b F(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}})dt$$

$\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\dot{\vec{x}} = (\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)$, el integrando es convexo (cóncavo); esto es, la función $t \mapsto F(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}})$, es convexa (cóncava) en $\mathbb{R}^{2n}$, y $\vec{x}^*$ es una función vectorial estacionaria para J; es decir, sus funciones coordenadas satisfacen la condición de Euler (8.1), y cumple con las condiciones de frontera dadas, entonces $J(\vec{x}^*)$ es el mínimo (máximo) absoluto de J. Así, si para todo $t \in [a, b]$

la matriz hessiana

$$H = \begin{bmatrix} F_{x_1x_1} & \cdots & F_{x_1x_n} & F_{x_1\dot{x}_1} & \cdots & F_{x_1\dot{x}_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ F_{x_nx_1} & \cdots & F_{x_nx_n} & F_{x_n\dot{x}_1} & \cdots & F_{x_n\dot{x}_n} \\ F_{\dot{x}_1x_1} & \cdots & F_{\dot{x}_1x_n} & F_{\dot{x}_1\dot{x}_1} & \cdots & F_{\dot{x}_1\dot{x}_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{\dot{x}_nx_1} & \cdots & F_{\dot{x}_nx_n} & F_{\dot{x}_1\dot{x}_1} & \cdots & F_{\dot{x}_n\dot{x}_n} \end{bmatrix}$$

tiene todos sus valores propios mayores o iguales a cero (menores o iguales a cero), entonces $J(\vec{x}^*)$ es el mínimo (máximo) absoluto.

Ejemplo 8.2 *Consideremos la función estacionaria,* $t \mapsto (x(t), y(t))$, $x(t) = -\frac{1}{6}t^3 - \frac{5}{6}t + 1$ *y* $y(t) = t$, *del ejemplo 8.1 (p. 100) para el funcional* $J(x,y) = \int_{-1}^{1}(2tx - \dot{x}^{\,2} - \frac{\dot{y}^2}{3})dt$. *En este caso* $F = 2tx - \dot{x}^{\,2} - \frac{\dot{y}^2}{3}$ *y*

$$\begin{aligned} H &= \begin{bmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{x\dot{x}} & F_{x\dot{y}} \\ F_{yx} & F_{yy} & F_{y\dot{x}} & F_{y\dot{y}} \\ F_{\dot{x}x} & F_{\dot{x}y} & F_{\dot{x}\dot{x}} & F_{\dot{x}\dot{y}} \\ F_{\dot{y}x} & F_{\dot{y}y} & F_{\dot{y}\dot{x}} & F_{\dot{y}\dot{y}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

cuyos valores propios son $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -2$ *y* $\lambda_4 = -2/3$, *todos menores o iguales a cero; por lo que* J *alcanza su máximo absoluto en* $x = -\frac{1}{6}t^3 - \frac{5}{6}t + 1$, $y = t$.

8.3 Condiciones necesarias para funcionales que contienen derivadas superiores

Consideremos el funcional $J(x) = F(t, x, \dot{x}, \ddot{x})$, y sea η una función suave tal que $\eta(a) = \eta(b) = \dot{\eta}(a) = \dot{\eta}(b) = 0$ y sea

$$J_\eta(\alpha) = \int_a^b F(t, x + \alpha\eta, \dot{x} + \alpha\dot{\eta}, \ddot{x} + \alpha\ddot{\eta})dt.$$

Nuevamente, si J alcanza un extremo relativo en x, entonces J_η alcanza un extremo relativo en $\alpha = 0$. Ya que

$$\begin{aligned} \dot{J}_\eta(\alpha) = \int_a^b & \left(F_2\left(t, x + \alpha\eta, \dot{x} + \alpha\dot{\eta}, \ddot{x} + \alpha\ddot{\eta}\right)\eta + F_3(t, x + \alpha\eta, \dot{x} + \alpha\dot{\eta}, \ddot{x} + \alpha\ddot{\eta})\dot{\eta}\right. \\ & \left. + \, F_4(t, x + \alpha\eta, \dot{x} + \alpha\dot{\eta}, \ddot{x} + \alpha\ddot{\eta})\ddot{\eta}\right) dt \end{aligned}$$

se debe tener

$$\int_a^b (F_2(t,x,\dot{x},\ddot{x})\eta + F_3(t,x,\dot{x},\ddot{x})\dot{\eta} + F_4(t,x,\dot{x},\ddot{x})ddoteta)dt = 0 = \dot{J}_\eta(0).$$

Al integrar por partes se obtiene, ya que $\eta(a) = \eta(b) = \dot{\eta}(a) = \dot{\eta}(b) = 0$,

$$\int_a^b \left(F_2 - \frac{dF_3}{dt} + \frac{d^2F_4}{dt^2} \right) \eta dt = 0$$

para toda $\eta \in C^2[a,b]$ tal que η y $\dot{\eta}$ se anulan en los extremos del intervalo y esto es posible sólo si

$$\frac{d^2F_4}{dt^2} - \frac{dF_3}{dt} + F_2 = 0.$$

De esta manera, una condición necesaria para que el funcional $J(x) = F(t,x,\dot{x},\ddot{x})$ alcance un extremo relativo en x es que esta función satisfaga la llamada ecuación de Euler-Poisson (orden 2):

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) + \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

En general, la ecuación de Euler-Poisson para el funcional

$$J(x) = \int_a^b F(t,x,\dot{x},\ldots,x^{(n)})dt$$

adquiere la forma

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}}\right) - \cdots + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n}\left(\frac{\partial F}{\partial x^{(n)}}\right) = 0$$

Ejemplo 8.3 *Encontrar la función estacionaria –es decir, la función que satisface la ecuación de Euler-Poisson–, para el problema de optimizar el funcional*

$$J(x) = \int_a^b \left(\frac{1}{2}\ddot{x}^2 + \dot{x}^2 + \frac{1}{2}x^2\right) dt$$

que satisface la condición de frontera $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$, $x(1) = e^{-1}$, $\dot{x}(1) = 0$.

Solución: ▶ En este caso

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= x, \\ \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} &= 2\dot{x}, \\ \frac{\partial F}{\partial \ddot{x}} &= \ddot{x} \end{aligned}$$

y, por tanto, la ecuación de Euler-Poisson que corresponde es

$$x^{(4)} - 2\ddot{x} + x = 0.$$

El polinomio característico para esta ecuación diferencial es

$$\begin{aligned}\lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 &= \left(\lambda^2 - 1\right)^2 \\ &= (\lambda + 1)^2 (\lambda - 1)^2\end{aligned}$$

cuyas raíces (dobles) son , $\lambda = \pm 1$; luego,

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 t e^t + C_3 e^{-t} + C_4 t e^{-t}$$

Ya que

$$\begin{aligned}0 &= x(0) = C_1 + C_3, \\ 1 &= \dot{x}(0) = C_1 + C_2 - C_3 + C_4 \\ e^{-1} &= x(1) = C_1 e + C_2 e + C_3 e^{-1} + C_4 e^{-1} \\ 0 &= \dot{x}(1) = C_1 e + 2C_2 e - C_3 e^{-1}\end{aligned}$$

el sistema para hallar la función estacionaria con las condiciones de frontera dadas es

$$\begin{aligned}C_1 + C_3 &= 0 \\ C_1 + C_2 - C_3 + C_4 &= 1 \\ C_1 e + C_2 e + C_3 e^{-1} + C_4 e^{-1} &= e^{-1} \\ C_1 e + 2C_2 e - C_3 e^{-1} &= 0\end{aligned}$$

Apliquemos el método de Gauss:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ e & e & e^{-1} & e^{-1} & e^{-1} \\ e & 2e & -e^{-1} & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & e^{-2} & e^{-2} & e^{-2} \\ 1 & 2 & -e^{-2} & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & e^{-2} - 1 & e^{-2} & e^{-2} \\ 0 & 2 & -e^{-2} - 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & e^{-2} + 1 & e^{-2} - 1 & e^{-2} - 1 \\ 0 & 0 & -e^{-2} + 3 & -2 & -2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{e^{-2}-1}{e^{-2}+1} & \frac{e^{-2}-1}{e^{-2}+1} \\ 0 & 0 & -e^{-2} + 3 & -2 & -2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{e^{-2}-1}{e^{-2}+1} & \frac{e^{-2}-1}{e^{-2}+1} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(e^{-2}-1)(e^{-2}-5)}{e^{-2}+1} & \frac{(e^{-2}-1)(e^{-2}-5)}{e^{-2}+1} \end{array}\right]$$

y, entonces,
$$C_4 = 1,\ C_3 = C_2 = C_1 = 0.$$
Luego,la función estacionaria para este problema es
$$x(t) = te^{-t}.$$
◄

Capítulo 9

Restricciones integrales y horizonte infinito

En este apartado estudiaremos problemas de optimización de funcionales integrales que contienen una restricción –para las funciones admisibles– que involucra una integral definida; y funcionales integrales donde el límite superior de integración es infinito, el cual es conocido como problema con tiempo de horizonte infinito.

9.1 Problemas con restricciones integrales

Ahora consideremos el problema de optimizar el funcional

$$J(f) = \int_a^b F(t, f, \dot{f})dt$$

sujeto a la condición de frontera $f(a) = x_0$, $f(b) = y_0$ y con la restricción integral $\int_a^b G(t, f, \dot{f})dt = L$, donde F y G son funciones con primeras derivadas parciales continuas y L es una constante. Sean $\eta_1, \eta_2 \in C^2[a, b]$ dos funciones que satisfacen $\eta_1(a) = \eta_1(b) = \eta_2(a) = \eta_2(b) = 0$ y sea $\phi(\alpha_1, \alpha_2,) = \int_a^b F(t, f + \alpha_1\eta_1 + \alpha_2\eta_2, \dot{f} + \alpha_1\dot{\eta}_1 + \alpha_2\dot{\eta}_2)dt$. Se puede probar (cf. [5] pp. 139-141) que si J alcanza un valor óptimo en f, sujeto a la restricción integral, entonces la función ϕ alcanza un valor óptimo, sujeto a la restricción $\psi(\alpha_1, \alpha_2) = \int_a^b G(t, f + \alpha_1\eta_1 + \alpha_2\eta_2, \dot{f} + \alpha_1\dot{\eta}_1 + \alpha_2\dot{\eta}_2)dt = L$, en $(\alpha_1, \alpha_2) = (0, 0)$. Entonces, por el método de multiplicadores de Lagrange

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left(\phi(\alpha_1, \alpha_2) + \lambda\psi(\alpha_1, \alpha_2)\right)_{(\alpha_1,\alpha_2)=(0,0)} = 0,\ i = 1, 2.$$

Sea $u(t) = (t, f(t) + \alpha_1\eta_1(t) + \alpha_2\eta_2(t), \dot{f}(t) + \alpha_1\dot{\eta}_1(t) + \alpha_2\dot{\eta}_2(t))$; puesto que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\left(\phi(\alpha_1,\alpha_2) + \lambda\psi(\alpha_1,\alpha_2)\right) &= \frac{\partial}{\partial\alpha_i}\int_a^b \left(F(u(t)) + \lambda G(u(t)\right) dt \\ &= \int_a^b \left(\begin{array}{c} F_2(u)\eta_i + F_3(u)\dot{h}_i + \lambda G_2(u)\eta_i \\ +\lambda G_3(u)\dot{h}_i \end{array}\right) dt\end{aligned}$$

y, al integrar por partes,

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\left(\phi(\alpha_1,\alpha_2) + \psi\lambda(\alpha_1,\alpha_2)\right) = \int_a^b \left(\begin{array}{c} F_2(u) + \lambda G_2(u) \\ \lambda\dfrac{d}{dt}\left(F_3(u) + \lambda G_3(u)\right)\eta_i \end{array}\right) dt,$$

entonces,

$$\int_a^b \left(F_2(t,f,\dot{f}) + \lambda G_2(t,f,\dot{f}) - \frac{d}{dt}\left(F_3(t,f,\dot{f}) + \lambda G_3(t,f,\dot{f})\right)\right)\eta_i dt = 0$$

Luego, si $\Phi = F + \lambda G$,

$$\int_a^b \left(\frac{\partial\Phi}{\partial f} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{f}}\right)\right)\eta_i dt = 0,\ i = 1, 2.$$

para todo par de funciones $\eta_i \in C^2[a,b]$ que se anulan en los extremos del intervalo. Lo cual sucede sólo si el integrando es nulo. Así, una condición necesaria para que se alcance un valor óptimo en f es que esta función sea solución de la ecuación diferencial

$$\frac{\partial\Phi}{\partial f} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{f}}\right) = 0$$

Resumimos este importante resultado en el siguiente teorema.

Teorema 9.1 *Sean F y G funciones con primeras derivadas parciales continuas, si*

$$J(f) = \int_a^b F(t,f,\dot{f})dt$$

alcanza un valor óptimo en f_0, sujeto a la restricción integral

$$\int_a^b G(t,f,\dot{f}) = L,$$

con las condiciones de frontera $f(a) = x_0$ y $f(b) = y_0$, entonces f_0 satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{f}}\right) - \frac{\partial\Phi}{\partial f} = 0$$

donde

$$\Phi = F + \lambda G.$$

Ejemplo 9.1 *Encontrar la función donde posiblemente el funcional*

$$J(x) = \int_0^1 \dot{x}^2 dt$$

alcance un valor óptimo sujeto a la restricción

$$\int_0^1 x dt = 1$$

con las condiciones de frontera $x(0) = 2$ *y* $x(1) = 4$.

Solución: ▶ En este caso $\Phi = \dot{x}^2 + \lambda x$. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= \lambda, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}} &= 2\dot{x}, \end{aligned}$$

por tanto la ecuación diferencial a resolver es

$$2\ddot{x} - \lambda = 0;$$

que tiene solución general

$$x = \frac{\lambda}{4}t^2 + C_1 t + C_2.$$

Las condiciones de frontera implican

$$\begin{aligned} 2 &= x(0) = C_2, \\ 4 &= x(1) = \frac{\lambda}{4} + C_1 + C_2; \end{aligned}$$

mientras que de la restricción integral se obtiene

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^1 \left(\frac{\lambda}{4}t^2 + C_1 t + 2 \right) dt \\ &= \frac{1}{12}\lambda + \frac{1}{2}C_1 + 2 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{4} + C_1 &= 2 \\ \frac{1}{12}\lambda + \frac{1}{2}C_1 &= -1 \end{aligned}$$

que al resolver produce $\lambda = 48, C_1 = -10$. Entonces,

$$x(t) = 12t^2 - 10t + 2$$

es la función estacionaria para este problema. ◀

Ejemplo 9.2 *Una compañía minera vende, tan pronto como lo extrae, un recurso mineral. La mina cuenta con una cantidad B de este mineral. La ganancia es invertida instantáneamente a una tasa de interés r. La compañía sabe que la razón instantánea de las ventas por el mineral crece a una escala logarítmica en función de la rapidez con la que se vende el recurso. Hallar la planeación de la extracción y, por tanto, de la venta de todo el mineral en un lapso de tiempo T para maximizar el ingreso total por la inversión de las venta del mineral.*

Solución: ▶ Sea $x(t)$ la cantidad total del mineral que la compañía ha vendido hasta el instante t, entonces la corriente de ingreso que invierte la compañía está dada por $s(t) = \ln(\dot{x})$; así que el valor futuro de esta corriente de ingreso (el capital total por la inversión) desde $t = 0$ hasta $t = T$ está dado por

$$\int_0^T e^{rt} \ln(\dot{x}) dt.$$

Ya que la cantidad total con la que cuenta la mina es B, entonces

$$\int_0^T \dot{x} dt = B.$$

Así, lo que se requiere es maximizar el funcional

$$J(x) = \int_0^T e^{rt} \ln(\dot{x}) dt$$

sujeto a la restricción integral

$$\int_0^T \dot{x} dt = B.$$

En este caso

$$\Phi = e^{rt} \ln(\dot{x}) + \lambda \dot{x};$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}} &= \frac{e^{rt}}{\dot{x}} + \lambda, \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}}\right) &= \frac{(r\dot{x} - \ddot{x})e^{rt}}{\dot{x}^2} \end{aligned}$$

Por lo que la ecuación a resolver es

$$\ddot{x} - r\dot{x} = 0;$$

cuya solución general está dada por

$$x(t) = C_1 + C_2 e^{rt}.$$

Puesto que

$$x(0) = 0$$

y

$$\int_0^T \dot{x} dt = x(T) = B,$$

se tiene

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= 0 \\ C_1 + C_2 e^{rT} &= B \end{aligned}$$

Por lo que $C_2 = -C_1$ y $C_1 = B/\left(1 - e^{rT}\right)$; y, entonces,

$$x(t) = \frac{B}{1 - e^{rT}}\left(1 - e^{rt}\right)$$

es la función estacionaria para este problema. Notemos que $\int_0^T \dot{x} dt = B$ equivale a la condición de frontera con valores fijos $x(0) = 0$ y $x(T) = B$; por lo que, en este caso, el problema es equivalente a un problema de maximización con condiciones en la frontera dados. De esta manera podemos determinar si en la función estacionaria el funcional alcanza su máximo absoluto analizando los valores propios de la matriz hessiana para el integrando $F = e^{rt} \ln(\dot{x})$. En efecto, ya que

$$\begin{aligned} H &= \begin{bmatrix} F_{xx} & F_{x\dot{x}} \\ F_{x\dot{x}} & F_{\dot{x}\dot{x}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{e^{rt}}{\dot{x}^2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

los valores propios se H son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = -\frac{e^{rt}}{\dot{x}^2}$, ambos menores o iguales a cero para todo valor $t \in [0, T]$ y para todo $(x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2$. Luego J es máximo en

$$x(t) = \frac{B}{1 - e^{rT}}\left(1 - e^{rt}\right).$$

Entonces, la compañía debe extraer el mineral a un ritmo

$$\dot{x} = \frac{-rB}{(1 - e^{rT})} e^{rt}$$

por unidad de tiempo, para maximizar su ingreso por la inversión en el periódo $[0, T]$. ◄

9.2 Horizonte de tiempo infinito

El objetivo es optimizar el funcional

$$J(x) = \int_a^{\infty} F(t, x, \dot{x}) e^{-rt} dt$$

sujeto a la condición de frontera $x(a) = x_0$. En este caso T es libre y, por tanto, la condición de transversalidad, del problema con línea terminal horizontal,

$$\left[F - \dot{x}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right]_{t=T} = 0$$

se debe cumplir en $T = \infty$; esto es,

$$\lim_{T\to\infty} \left[F - \dot{x}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right]_{t=T} = 0.$$

Además se tiene que cumplir al menos una de las siguientes condiciones (cf. [5] pp. 98-103)

$$\begin{aligned} \lim_{T\to\infty} x(T) &= \bar{x} \\ \text{o } \lim_{T\to\infty} \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right]_{t=T} &= 0. \end{aligned}$$

Es decir, la función estacionaria converge asintóticamente o cumple, en el límite, la condición de transversalidad para el problema de línea terminal vertical. En resumen:

Teorema 9.2 *Sea F una función con dominio en $\mathbb{R}^3$ y primeras derivadas parciales continuas en todo punto del conjunto $[a,\infty)\times\mathbb{R}^2$. Para que el funcional*

$$J = \int_a^\infty F(t, x, \dot{x})dt \tag{9.1}$$

sujeto a $x(a) = x_0$, alcance un valor óptimo en una función x es necesario que ésta satisfaga:

1. *La ecuación de Euler* $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right) - \dfrac{\partial F}{\partial x} = 0.$
2. *La condición de frontera $x(a) = x_0$.*
3. $\lim_{T\to\infty} \left[F - \dot{x}\dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right]_{t=T} = 0.$
4. *Una (por lo menos) de las siguientes condiciones:*
   (a) $\lim_{T\to\infty} x(T) = \bar{x} \in \mathbb{R}.$
   (b) $\lim_{T\to\infty} \left[\dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right]_{t=T} = 0.$

Conservando la jerga anterior, toda función que satisfaga las condiciones del precedente teorema es una función estacionaria del funcional (9.1).

Ejemplo 9.3 *Encontrar una función estacionaria del funcional*

$$J(x) = \int_0^\infty e^{-2t}\left(x^2 + x + \dot{x} + \frac{1}{8}\dot{x}^2\right) dt$$

sujeto a la condición $x(0) = 0$.

Solución: ▶ En este caso $F = e^{-2t}\left(x^2 + x + \dot{x} + \frac{1}{8}\dot{x}^2\right)$, por tanto

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &= (2x+1)e^{-2t}, \\
\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} &= (1 + \frac{1}{4}\dot{x})e^{-2t}, \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) &= (\frac{1}{4}\ddot{x} - 2 - \frac{1}{2}\dot{x})e^{-2t}.
\end{aligned}$$

Entonces, la ecuación de Euler es

$$(\frac{1}{4}\ddot{x} - 2 - \frac{1}{2}\dot{x})e^{-2t} = (2x+1)e^{-2t}$$

que equivale a

$$\frac{1}{4}\ddot{x} - \frac{1}{2}\dot{x} - 2x = 3;$$

esto es,

$$\ddot{x} - 2\dot{x} - 8x = 12.$$

La ecuación característica es

$$\lambda^2 - 2\lambda - 8 = (\lambda - 4)(\lambda + 2) = 0$$

y, por tanto,

$$x(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{4t} - \frac{3}{2}.$$

Por otro lado,

$$\lim_{T\to\infty} x(t) = \bar{x} \in \mathbb{R},$$

se cumple si $C_2 = 0$, con $\bar{x} = -3/2$. Y ya que $x(0) = 0$,

$$0 = C_1 - \frac{3}{2}$$

por lo que $C_1 = 3/2$ y

$$x(t) = \frac{3}{2}\left(e^{-2t} - 1\right).$$

Finalmente, ya que

$$\begin{aligned}
\lim_{T\to\infty}\left[F - \dot{x}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right]_{t=T} &= \lim_{T\to\infty}\left[\left(x^2 + x + \dot{x} + \frac{1}{8}\dot{x}^2 - \dot{x}(1 + \frac{1}{4}\dot{x})\right)e^{-2t}\right]_{t=T} \\
&= \lim_{T\to\infty}\left[\left(x^2 + x - \frac{1}{8}\dot{x}^2\right)e^{-2t}\right]_{t=T} \\
&= \left(\frac{9}{4} - \frac{3}{2} - 0\right)\lim_{T\to\infty} e^{-2T} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$x(t) = \frac{3}{2}\left(e^{-2t} - 1\right)$ es una función estacionaria para el funcional J. ◀

9.3 Un modelo de inversión

Una empresa tiene como único insumo el capital $K = K(t)$. La función de ganancias brutas está dada por $G(K) = AK - BK^2$; mientras que la firma estima que la función de costos de inversión varía en forma cuadrática respecto a la variación del capital de acuerdo a la relación $C(\dot{K}) = \alpha\dot{K}^2 + \beta\dot{K}$. El problema que tiene la empresa es encontrar la función de capital que maximice el *valor presente* a largo plazo

$$\int_0^\infty (G(K) - C(\dot{K}))e^{-rt}dt$$

con $K(0) = 0$. Se supone que $B > 0$, $\alpha > 0$, $r > 0$ y $A - \beta\rho > 0$.

En este caso $F = (G(K) - C(\dot{K}))e^{-rt}$. Entonces, ecuación de Euler para este problema es

$$\frac{\partial F}{\partial K} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{K}}\right) = 0$$

esto es

$$\dot{G}(K)e^{-rt} + \frac{d}{dt}\left(\dot{C}(\dot{K})e^{-rt}\right) = 0$$

es decir,

$$\dot{G}(K)e^{-rt} + (\ddot{C}(\dot{K})\ddot{K} - r\dot{C}(\dot{K}))e^{-rt} = 0$$

que equivale a

$$\ddot{C}(\dot{K})\ddot{K} + \dot{G}(K) - r\dot{C}(\dot{K}) = 0.$$

Al sustituir $G(K) = AK - BK^2$ y $C(\dot{K}) = \alpha\dot{K}^2 + \beta\dot{K}$, en la anterior ecuación se obtiene

$$2\alpha\ddot{K} + A - 2BK - r(2\alpha\dot{K} + \beta) = 0$$

que equivale a

$$2\alpha\ddot{K} - 2r\alpha\dot{K} - 2BK = r\beta - A$$

que, al normalizar, se transforma en

$$\ddot{K} - r\dot{K} - \frac{B}{\alpha}K = \frac{r\beta - A}{2\alpha} \tag{9.2}$$

La ecuación característica es, en este caso

$$m^2 - rm - \frac{B}{\alpha} = 0$$

que tiene las soluciones

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{1}{2}\left(r + \sqrt{r^2 + 4\beta/\alpha}\right) > 0 \\ m_2 &= \frac{1}{2}\left(r - \sqrt{r^2 + 4\beta/\alpha}\right) < 0 \end{aligned}$$

Por tanto, la solución general de la ecuación diferencial homogénea asociada es

$$K_H = C_1 e^{m_1 t} + C_2 e^{m_2 t}$$

Ya que $B \neq 0$, una solución particular de la ecuación diferencial (9.2) es

$$\bar{K} = \frac{A - rB}{2B}$$

Así, la solución general de (9.2) está dada por

$$K(t) = C_1 e^{m_1 t} + C_2 e^{m_2 t} + \frac{A - rB}{2B}$$

Para que

$$\lim_{T\to\infty} K(T) = \bar{K},$$

se requiere que $C_1 = 0$; pues $m_1 > 0$. Puesto que $K(0) = 0$,

$$C_2 = \frac{rB - A}{2B}$$

Por tanto,

$$K(t) = \frac{A - rB}{2B}\left(1 - e^{m_2 t}\right).$$

Ya que

$$\dot{K}(t) = \frac{-m_2(A - rB)}{2B} e^{m_2 t}$$

se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{T\to\infty} K(T) &= \frac{A - rB}{2B}, \\ \lim_{T\to\infty} \dot{K}(T) &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \lim_{T\to\infty} F(K(T)) &= \left(AK - BK^2 - (\alpha\dot{K}^2 + \beta\dot{K})\right) e^{-rt} = 0, \\ \lim_{T\to\infty} \frac{\partial F}{\partial \dot{K}} &= \lim_{T\to\infty} (2\alpha\dot{K} + \beta) e^{-rt} = 0, \end{aligned}$$

luego

$$\lim_{T\to\infty} \left(F - \dot{K}F_{\dot{K}}\right)_{t=T} = 0.$$

Así,

$$K(t) = \frac{A - rB}{2B}\left(1 - e^{m_2 t}\right) \tag{9.3}$$

cumple con las condiciones del teorema 9.2 y es, en consecuencia, una función estacionaria el funcional J. Es decir, si el valor presente alcanza un valor máximo, éste se obtiene con una corriente de capital dada por la función (9.3).

Parte III

Teoría de control óptimo

Capítulo 10

Problema básico y principio del máximo

En la introducción se planteó un problema de inversión donde se tenía que encontrar un par de funciones, I y K, para maximizar $J = \int_0^T (K - aK^2 - I^2)dt$ que cumplieran con las condiciones $K(0) = K_0$ y $\dot{K} = I - \delta K$. Este tipo de problemas pertenece a la teoría de control óptimo y en este capítulo se darán herramientas generales para poder resolver problemas como éste y otros más que se presentan con frecuencia en Economía.

10.1 El principio del máximo de Pontryagin

El problema básico en la teoría de control óptimo es[1]:

$$\begin{aligned} &\text{maximizar} \quad J(x,y) = \int_0^T F(t,x,y)dt \\ &\text{sujeto a} \quad \begin{cases} \dot{x} &= g(t,x,y) \\ x(0) &= x_0 \end{cases} \end{aligned} \tag{10.1}$$

donde x y y son funciones clase C^2 en el intervalo $[0, T]$. A la función x se le acostumbra llamar variable de estado; mientras que a la función y se le dice variable de control. F y g son funciones dadas con primeras derivadas parciales continuas y los valores x_0 y $T > 0$ son números reales también dados.

[1]Cf. referencia [13], pp. 842-844, para una deducción y comprobación de los resultados de este apartado

El hamiltoniano

Para resolver el problema básico de la teoría de control óptimo se emplea la función –el hamiltoniano de este problema de control–

$$\mathcal{H} = F(t, x, y) + \lambda(t) g(t, x, y),$$

donde λ es una función por determinar, a la cual se le dice variable de coestado[2].

Condiciones necesarias y suficientes

Las condiciones necesarias y suficientes que deben cumplir las variables de estado, de control y de coestado, para que el problema básico de control óptimo (10.1) tenga solución, están contenidas en los siguientes dos teoremas; el primero es conocido como *principio del máximo de Pontryagin*.

Teorema 10.1 (Condiciones necesarias) *Si en el problema de control óptimo (10.1) J alcanza un valor máximo, en (x, y), entonces se deben cumplir las siguientes condiciones:*

1. $\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} = 0.$

2. $$\begin{aligned} \dot{\lambda} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \\ \dot{x} &= g(t, x, y) \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ \lambda(T) &= 0 \end{aligned}$$

Teorema 10.2 (Condiciones suficientes) *Si (x^*, y^*, λ^*) satisface las condiciones necesarias del teorema anterior y se cumplen las dos siguientes:*

1. *Para cada $t \in [0, T]$ la función $(x, y) \mapsto F(t, x, y)$ es cóncava.*

2. *Una de las siguientes afirmaciones es verdadera:*

   (a) *Para cada $t \in [0, T]$ la función $(x, y) \mapsto g(t, x, y)$ es lineal*[3].

   (b) *Para cada $t \in [0, T]$ la función $(x, y) \mapsto g(t, x, y)$ es cóncava y $\lambda^*(t) \geq 0$ para todo $t \in (0, T)$.*

   (c) *Para cada $t \in [0, T]$ la función $(x, y) \mapsto g(t, x, y)$ es convexa y $\lambda^*(t) \leq 0$ para todo $t \in (0, T)$.*

Entonces el problema de control óptimo (10.1) tiene solución en (x^*, y^*).

[2] Esta función juega un papel semejante a un multiplicador de Lagrange.

[3] Una función de dos variables $(x, y) \mapsto \varphi(x, y)$ es lineal, si se puede escribir en la forma $g(x, y) = ax + by$ donde a y b son constantes.

Ejemplo 10.1 *Resolver el problema de control óptimo*

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & J = \displaystyle\int_0^1 (x - y^2)dt \\ \text{sujeto a} & \left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x} & = & y \\ x(0) & = & 2 \end{array} \right. \end{array}$$

Solución: ▶ En este caso el hamiltoniano esta dado por

$$\mathcal{H} = x - y^2 + \lambda y$$

Ya que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} &= -2y + \lambda, \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} &= 1, \end{aligned}$$

se debe cumplir

$$\begin{aligned} \lambda - 2y &= 0, \\ \dot{\lambda} &= -1, \\ \dot{x} &= y. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= -t + C_1, \\ \dot{x} &= \frac{1}{2}\lambda = -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}C_1. \end{aligned}$$

Entonces, al integrar,

$$x(t) = -\frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{2}C_1 t + C_2.$$

Puesto que $x(0) = 2$, se tiene $2 = C_2$ y ya que $\lambda(1) = 0$, $C_1 = 1$; luego,

$$x(t) = -\frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{2}t + 2$$

y, entonces,

$$y = \dot{x} = -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}.$$

Como

$$\begin{bmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{yx} & F_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

tiene los valores propios 0 y -2, F es cóncava; y puesto que la función $g(t, x, y) = y$ es lineal, el problema de control óptimo tiene solución en

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{2}t + 2 \\ y(t) &= -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

con $t \in [0, 1]$. ◀

10.2 Un problema de inversión

En la introducción (p. 2) se planteó un problema de inversión donde una firma tiene que hallar las funciones $K = K(t)$ e $I = I(t)$ para

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximizar} & J(K,I) = \displaystyle\int_0^T \left(K - aK^2 - I^2\right) dt \\
\text{sujeto a} & \left\{ \begin{array}{lcl} \dot{K} & = & I - \delta K \\ K(0) & = & K_0 \end{array} \right.
\end{array}
$$

donde $a > 0$ y $\delta > 0$. En este caso el hamiltoniano viene dado por

$$\mathcal{H} = K - aK^2 - I^2 + \lambda(I - \delta K).$$

Puesto que se debe cumplir

$$0 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I} = -2I + \lambda,$$

el sistema a resolver es

$$
\begin{aligned}
\dot{\lambda} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial K} = -(1 - 2aK - \delta\lambda) \\
\dot{K} &= I - \delta K = \frac{1}{2}\lambda - \delta K
\end{aligned}
$$

es decir, el sistema lineal no homogéneo,

$$
\begin{aligned}
\dot{\lambda} &= \delta\lambda + 2aK - 1 \\
\dot{K} &= \tfrac{1}{2}\lambda - \delta K
\end{aligned}
\tag{10.2}
$$

El sistema lineal asociado correspondiente es

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda} \\ \dot{K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta & 2a \\ \frac{1}{2} & -\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ K \end{bmatrix}$$

Los valores propios de la matriz de coeficientes, $A = \begin{bmatrix} \delta & 2a \\ \frac{1}{2} & -\delta \end{bmatrix}$, de este sistema, están dados por las raíces del polinomio característico

$$\det(A - rI_2) = \begin{vmatrix} \delta - r & 2a \\ \frac{1}{2} & -\delta - r \end{vmatrix} = -(\delta - r)(\delta + r) - a$$

es decir, las soluciones de la ecuación

$$r^2 - \delta^2 - a = 0$$

que son

$$
\begin{aligned}
r_1 &= \sqrt{\delta^2 + a} \\
r_2 &= -r_1
\end{aligned}
$$

Sea $r = \sqrt{\delta^2 + a}$. Los vectores propios asociados a $r_1 = r$ de la matriz de coeficientes A, son las soluciones no nulas del sistema homogéneo $(A - rI_2)\vec{x} = \vec{0}$; y, puesto que,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \delta - r & 2a \\ \frac{1}{2} & -\delta - r \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 1 & -2(\delta + r) \\ \delta - r & 2a \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & -2(\delta + r) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

son todos los puntos de la forma

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(\delta + r)s \\ s \end{bmatrix}$$

con $s \neq 0$. Ya que

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \delta - r_2 & 2a \\ \frac{1}{2} & -\delta - r_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \delta + r & 2a \\ \frac{1}{2} & -\delta + r \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 2(-\delta + r) \\ \delta + r & 2a \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 2(-\delta + r) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

los vectores propios correspondientes a $r_2 = -r$ están dados

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(\delta - r)\zeta \\ \zeta \end{bmatrix}$$

con $\zeta \neq 0$. Entonces, eligiendo $s = 1$ y $\zeta = -1$, la solución del sistema lineal homogéneo es

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \lambda_h \\ K_h \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2(r - \delta) & 2(\delta + r) \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 e^{-rt} \\ C_2 e^{rt} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} C_2 \left(2r + 2\delta\right) e^{rt} - C_1 \left(2\delta - 2r\right) e^{-rt} \\ C_2 e^{rt} - C_1 e^{-rt} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ya que

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cc|c} \delta & 2a & 1 \\ \frac{1}{2} & -\delta & 0 \end{array}\right] &\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2\delta & 0 \\ \delta & 2a & 1 \end{array}\right] \\ &\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2\delta & 0 \\ 0 & 2(\delta^2 + a) & 1 \end{array}\right] \end{aligned}$$

tiene por solución

$$\begin{bmatrix} \bar{\lambda} \\ \bar{K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\delta}{\delta^2 + a} \\ \frac{1}{2(\delta^2 + a)} \end{bmatrix},$$

la solución general del sistema 10.2 es

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\lambda\\ K\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}2(r-\delta) & 2(r+\delta)\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_1e^{-rt}\\ C_2e^{rt}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\bar{\lambda}\\ \bar{K}\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}2(r-\delta)C_1e^{-rt}+2(r+\delta)C_2e^{rt}+\bar{\lambda}\\ -C_1e^{-rt}+C_2e^{rt}+\bar{K}\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Sustituyendo las condiciones $K(0)=K_0$ y $\lambda(T)=0$, se obtiene el sistema

$$\begin{aligned}-C_1+C_2 &= K_0-\bar{K}\\ 2C_1(r-\delta)e^{-rT}+2C_2(r+\delta)e^{rT} &= -\bar{\lambda}\end{aligned}$$

Por tanto,

$$C_2=C_1+K_0-\bar{K}$$

y

$$2C_1(r-\delta)e^{-rT}+2\left(C_1+K_0-\bar{K}\right)(r+\delta)e^{rT}=-\bar{\lambda}$$

por lo que

$$(2(r-\delta)e^{-rT}+2(r+\delta)e^{rT})C_1=-2(K_0-\bar{K})(r+\delta)e^{rT}-\bar{\lambda};$$

luego,

$$C_1=\frac{-2(K_0-\bar{K})(r+\delta)e^{rT}-\bar{\lambda}}{2(r-\delta)e^{-rT}+2(r+\delta)e^{rT}}$$

y

$$\begin{aligned}C_2 &= \frac{-2(K_0-\bar{K})(r+\delta)e^{rT}-\bar{\lambda}}{2(r-\delta)e^{-rT}+2(r+\delta)e^{rT}}+K_0-\bar{K}\\ &= \frac{-2(K_0-\bar{K})(r+\delta)e^{rT}-\bar{\lambda}+2(r-\delta)e^{-rT}(K_0-\bar{K})+2(r+\delta)e^{rT}(K_0-\bar{K})}{2(r-\delta)e^{-rT}+2(r+\delta)e^{rT}}\\ &= \frac{2(r-\delta)e^{-rT}(K_0-\bar{K})-\bar{\lambda}}{2(r-\delta)e^{-rT}+2(r+\delta)e^{rT}}\end{aligned}$$

Puesto que, en este caso, $F=K-aK^2-I^2$,

$$\begin{aligned}H &= \begin{bmatrix}F_{KK} & F_{KI}\\ F_{IK} & F_{II}\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}-2a & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}\end{aligned}$$

tiene los valores propios $-2a,-2$, la función F es cóncava; y ya que $G=I-\delta K$ es lineal, el funcional J alcanza su valor máximo en la (K,I) con

$$\begin{aligned}K &= 2(r-\delta)C_1e^{-rt}+2(r+\delta)C_2e^{rt}+\bar{\lambda},\\ I &= \frac{1}{2}\lambda=\frac{1}{2}\left(-C_1e^{-rt}+C_2e^{rt}+\bar{K}\right)\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{-2(K_0 - \bar{K})(r+\delta)e^{rT} - \bar{\lambda}}{2(r-\delta)e^{-rT} + 2(r+\delta)e^{rT}} \quad \text{y} \\ C_2 &= \frac{2(r-\delta)e^{-rT}(K_0 - \bar{K}) - \bar{\lambda}}{2(r-\delta)e^{-rT} + 2(r+\delta)e^{rT}}. \end{aligned}$$

Es decir, la firma alcanza su máxima ganancia, en el intervalo $[0, T]$, definiendo su capital y su inversión de esta manera.

Capítulo 11

Control óptimo para problemas con factor de descuento

A pesar de que en el capítulo anterior se resolvieron problemas de control óptimo de la forma básica

$$\begin{array}{rl} \text{maximizar} & J(x,y) = \displaystyle\int_0^T F(t,x,y)dt \\ \text{sujeto a} & \left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x} & = & g(t,x,y) \\ x(0) & = & x_0 \end{array} \right. \end{array}$$

en economía es más frecuente que se presenten aplicaciones donde aparece un factor de descuento en el integrando; es decir, donde se optimiza un valor presente. En este segmento nos abocaremos a resolver este tipo de problemas cuando las funciones involucradas son autónomas.

11.1 Problemas con factor de descuento autónomos

En varios modelos de economía se presentan modelos donde se requiere optimizar funcionales que contienen un factor de descuento $e^{-\rho t}$, donde $\rho > 0$ es la tasa de descuento; esto es, resolver problemas de control óptimo de la forma

$$\begin{array}{rl} \text{maximizar} & J(x,y) = \displaystyle\int_0^T F(t,x,y)e^{-\rho t}dt \\ \text{sujeto a} & \left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x} & = & g(t,x,y) \\ x(0) & = & x_0 \end{array} \right. \end{array} \tag{11.1}$$

Por desgracia en la mayoría de estos problemas, cuando una de las funciones F o g depende de t, el sistema de ecuaciones diferenciales que resulta, utilizando las condiciones necesarias del teorema 10.1 (p. 120) aplicadas al hamiltoniano $H = F(t,x,y) + \lambda g(t,x,y)$, no es autónomo[1]; cuando esto sucede el sistema puede ser sumamente complicado de resolver (incluso imposible) y es muy difícil aplicar técnicas cualitativas para analizar su comportamiento. Sin embargo, si F y g son funciones autónomas; esto es, ambas no dependen de la variable independiente t: $F = F(x,y)$, $g = g(x,y)$, entonces, modificando ligeramente el hamiltoniano, es posible deducir –mediante las condiciones necesarias del teorema 10.1–, un sistema de ecuaciones diferenciales que sí es autónomo para resolverlo directamente o utilizar el enfoque cualitativo para su análisis. En efecto, sea $\mathcal{H} = F(x,y)e^{-\rho t} + \lambda g(x,y)$ el hamiltoniano del problema de control óptimo con factor de descuento (11.1), y sea $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}e^{\rho t}$, entonces

$$0 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} = \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial y} e^{-\rho t}$$

implica

$$\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial y} = 0 \tag{11.2}$$

Y

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \Rightarrow \dot{\lambda} = -\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial x} e^{-\rho t}$$

Sea $\mu = \lambda e^{\rho t}$, entonces $\lambda = \mu e^{-\rho t}$; por tanto,

$$\dot{\lambda} = (\dot{\mu} - \rho\mu)e^{-\rho t}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} (\dot{\mu} - \rho\mu)e^{-\rho t} &= \dot{\lambda} \\ &= -\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial x} e^{-\rho t}; \end{aligned}$$

esto es,

$$\dot{\mu} - \rho\mu = -\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial x}.$$

Ya que $\mu = \lambda e^{\rho t}$,

$$\mathcal{H}_1 = F(x,y) + \mu g(x,y)$$

y el sistema que se debe resolver para solucionar el problema es

$$\begin{aligned} \dot{\mu} - \rho\mu &= -\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial x} \\ \dot{x} &= g(x,y) \end{aligned} \tag{11.3}$$

Ahora despejemos la variable de control y de (11.2), digamos $y = \varphi(x,\mu)$ (supondremos que esto siempre se puede realizar), y sustituyamos en los lados derechos de las dos igualdades de (11.3), entonces obtenemos el sistema autónomo

[1] Un sistema de ecuaciones difernciales es autónomo si es de la forma $\dot{\vec{x}} = f(\vec{x})$; es decir, aunque las funciones componentes de $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ dependen de la variable independiente t, la función f no depende de t.

$$\begin{aligned}
\dot{\mu} &= -\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial x} + \rho\mu \\
\dot{x} &= g(x, \varphi(x, \mu))
\end{aligned}$$

A la variable $\mu = \lambda e^{\rho t}$ se le llama el valor actual (presente) de la variable de coestado λ y a $\mathcal{H}_1$ el valor actual (presente) del hamiltoniano $\mathcal{H}$ del problema de optimización. En resumen:

Teorema 11.1 (Condiciones necesarias) *Si el problema de control óptimo con factor de descuento*

$$\begin{array}{ll}
\textit{maximizar} & J(x,y) = \displaystyle\int_0^T F(x,y)e^{-\rho t}dt \\
\textit{sujeto a} & \left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x} & = & g(x,y) \\ x(0) & = & x_0 \end{array} \right.
\end{array}$$

tiene solución (x, y)*, entonces ésta satisface:*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial y} &= 0 \\
\dot{\mu} - \rho\mu &= -\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial x} \\
\dot{x} &= g(x, \varphi(x, \mu)) \\
\mu(T) &= 0
\end{aligned}$$

donde $\mathcal{H}_1 = F(x,y) + \mu g(x,y)$ *es el valor actual del hamiltoniano de este problema,* $\mu = \lambda e^{\rho t}$ *es el valor actual de la variable de coestado* λ*, y* $y = \varphi(x, \mu)$ *se obtiene al despejar* y *de* $\dfrac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial y} = 0$*.*

Por otra parte, ya que el hamiltoniano $\mathcal{H}_1$ únicamente se utiliza para obtener un sistema autónomo de ecuaciones diferenciales en términos del valor presente de la variable de coestado de la variable de estado, μ y x, respectivamente, y la concavidad de la función $F = F(x, y)$ implica la concavidad de la función $z = F(x, y)e^{-\rho t}$, las condiciones suficientes establecidas en el teorema 10.2, p. 120, siguen siendo válidas al aplicarlas a las funciones $F = F(x, y)$, $g = g(x, y)$ y $\lambda = \mu e^{-\rho t}$. Es decir:

Teorema 11.2 (Condiciones suficientes) *Si* (x^*, y^*, λ^*) *satisface las condiciones necesarias del teorema 11.1 y se cumplen las dos siguientes:*

1. *La función* $(x, y) \mapsto F(x, y)$ *es cóncava.*
2. *Una de las siguientes afirmaciones es verdadera:*

   (a) *La función* $(x, y) \mapsto g(x, y)$ *es lineal.*

(b) La función $(x,y) \mapsto g(x,y)$ es cóncava y $\lambda(t) \geq 0$ para todo $t \in (0,T)$.

(c) La función $(x,y) \mapsto g(x,y)$ es convexa y $\lambda(t) \leq 0$ para todo $t \in (0,T)$.

Entonces el problema de control óptimo (10.1) tiene solución en (x^*, y^*).

Ejemplo 11.1 *Resolver el problema de control óptimo con factor de descuento*

$$\begin{array}{ll} \textit{maximizar} & J = \displaystyle\int_0^1 (xy - y^2 - x^2)e^{-2t}dt \\ \textit{sujeto a} & \left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x} & = & x + y \\ x(0) & = & 1 + \frac{1}{3}e^2 \end{array} \right. \end{array}$$

Solución: ▶ En este caso $\mu = \lambda e^{2t}$ y

$$\mathcal{H}_1 = xy - y^2 - x^2 + \mu(x+y);$$

por lo que

$$0 = \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial y} = x - 2y + \mu \Rightarrow y = \frac{x+\mu}{2}.$$

Entonces

$$\begin{array}{rcl} -\dfrac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial x} & = & -(y - 2x + \mu) \\ & = & -\dfrac{x+\mu}{2} + 2x - \mu; \end{array}$$

por lo tanto

$$\begin{array}{rcl} \dot{\mu} - 2\mu & = & -\dfrac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial x} \\ & = & -\dfrac{x+\mu}{2} + 2x - \mu \end{array}$$

se reduce a

$$\dot{\mu} = \frac{3}{2}x + \frac{\mu}{2}$$

y

$$\dot{x} = x + y$$

a

$$\dot{x} = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\mu$$

Y, en consecuencia, el sistema (autónomo) a resolver es

$$\begin{array}{rcl} \dot{\mu} & = & \frac{1}{2}\mu + \frac{3}{2}x \\ \dot{x} & = & \frac{1}{2}\mu + \frac{3}{2}x \end{array} \tag{11.4}$$

Los valores propios de la matriz de coeficientes de este sistema están dados por las soluciones de la ecuación

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} \frac{1}{2}-r & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2}-r \end{vmatrix} = \left(\frac{3}{2}-r\right)\left(\frac{1}{2}-r\right)-\frac{3}{4} \\ &= r^2-2r \\ &= r(r-2) \end{aligned}$$

que son $r_1 = 0$ y $r_2 = 2$. Para $r_1 = 0$ el sistema homogéno

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \frac{1}{2}-r_1 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2}-r_1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \frac{1}{2}-0 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2}-0 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

tiene solución $\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$; mientras que para $r_2 = 2$ el sistema

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \frac{1}{2}-r_2 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2}-r_2 \end{vmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}-2 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2}-2 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

tiene solución $\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = b \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $b \in \mathbb{R}$. Por tanto la solución general de (11.4) está dada por

$$\begin{bmatrix} \mu \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3C_1 + C_2e^{2t} \\ C_1 + C_2e^{2t} \end{bmatrix}$$

Por las condiciones, $x(0) = 1 + \frac{1}{3}e^2$ y $\mu(1) = 0$, se tiene

$$\begin{aligned} -3C_1 + C_2e^2 &= 0 \\ C_1 + C_2 &= 1 + \frac{1}{3}e^2 \end{aligned}$$

cuyas soluciones son $C_1 = \frac{1}{3}e^2$, $C_2 = 1$. Por tanto,

$$x(t) = \frac{1}{3}e^2 + e^{2t}$$

y, en consecuencia, la variable de control resulta ser

$$y(t) = \dot{x}(t) - x(t) = e^{2t} - \frac{1}{3}e^2.$$

Finalmente, en este caso, $F = xy - y^2 - x^2$; entonces

$$\begin{bmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{yx} & F_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

tiene polinomio característico

$$(-2 - r)^2 - 1,$$

y sus valores propios son, por tanto, $r_1 = -1 \leq 0$ y $r_2 = -3 \leq 0$, por lo que F es cóncava; y ya que la función $\dot{x} = g(x, y) = x + y$ es lineal, las funciones x y y resuelven el problema de maximización dado. ◀

11.2 Un problema de producción con factor de descuento

Una firma tiene una rapidez de producción que depende únicamente de la mano de obra L, dada por $L - \frac{1}{10}L^2$, y el precio por unidad de producto es constante e igual a una unidad monetaria. La firma paga una cantidad fija de 2 unidades monetarias de salario, por unidad de tiempo, a cada trabajador; e incurre en gastos de contratación por unidad de tiempo de $\frac{1}{10}H^2$ unidades monetarias si realiza H contrataciones por unidad de tiempo. La empresa pierde mano de obra en proporción constante a la cantidad de empleados por unidad de tiempo con constante de proporción $\frac{1}{5}$. La firma desea encontrar la función de contrataciones $H = H(t)$ que maximice sus ganancias si se considera que hay un factor de descuento $e^{-\frac{1}{5}t}$ en el intervalo de tiempo $[0, 10]$.

Puesto $p = 1$ es el precio por unidad del producto, entonces la ganancia total por la venta de éste desde $t=0$ hasta $t=10$ es $\int_0^{10}(L - \frac{1}{10}L^2 - 2L - \frac{1}{10}H^2)e^{-\frac{1}{5}t}dt$. Ya que realiza H contrataciones por unidad de tiempo, y la empresa pierde $\frac{1}{5}L$ empleados por unidad de tiempo, entonces $\dot{L} = H - \frac{1}{5}L$. Así, se tiene que resolver el problema de control óptimo con factor de descuento

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & J = \displaystyle\int_0^T (-L - \frac{1}{10}L^2 - \frac{1}{10}H^2)e^{-\frac{1}{5}t}dt \\ \text{sujeto a} & \left\{ \begin{array}{lcl} \dot{L} & = & H - \frac{1}{5}L \\ L(0) & = & L_0 \end{array} \right. \end{array}$$

donde L_0 es la mano de obra con la que cuenta la firma en $t = 0$. En este caso

$$\mathcal{H}_1 = -L - \frac{1}{10}L^2 - \frac{1}{10}H^2 + \mu(H - \frac{1}{5}L)$$

por lo que

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & \dfrac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial H} = -\dfrac{1}{5}H + \mu \\ & \Rightarrow & H = 5\mu \end{array}$$

Por otra parte,

$$\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial L} = -1 - \frac{1}{5}L - \frac{1}{5}\mu.$$

Entonces, el sistema de ecuaciones a resolver es

$$\begin{aligned}
\dot{\mu} - \frac{1}{5}\mu &= \frac{1}{5}L + \frac{1}{5}\mu + 1 \\
\dot{L} &= H - \frac{1}{5}L \\
&= 5\mu - \frac{1}{5}L
\end{aligned}$$

esto es,

$$\begin{aligned}
\dot{\mu} &= \tfrac{2}{5}\mu + \tfrac{1}{5}L + 1 \\
\dot{L} &= 5\mu - \tfrac{1}{5}L.
\end{aligned} \tag{11.5}$$

El sistema

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 5 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mu} \\ \bar{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

tiene solución

$$\bar{\mu} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & \frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{1}{5} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 5 & -\frac{1}{5} \end{vmatrix}} = -\frac{5}{27}$$

$$\bar{L} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{2}{5} & -1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 5 & -\frac{1}{5} \end{vmatrix}} = -\frac{125}{27}$$

Por otra parte, los valores propios de $\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 5 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$ están dados por las soluciones de la ecuación

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \frac{2}{5} - r & \frac{1}{5} \\ 5 & -\frac{1}{5} - r \end{vmatrix} &= (\frac{2}{5} - r)(-\frac{1}{5} - r) - 1 \\
&= r^2 - \frac{1}{5}r - \frac{27}{25} = 0
\end{aligned}$$

que son:

$$\begin{aligned}
r_1 &= \frac{1}{10} + \frac{1}{10}\sqrt{109} \\
r_2 &= \frac{1}{10} - \frac{1}{10}\sqrt{109}
\end{aligned}$$

Para $r_1 = \frac{1}{10} + \frac{1}{10}\sqrt{109}$,

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \frac{2}{5} - r_1 & \frac{1}{5} \\ 5 & -\frac{1}{5} - r_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{3}{10} - \frac{1}{10}\sqrt{109} & \frac{1}{5} \\ 5 & -\frac{3}{10} - \frac{1}{10}\sqrt{109} \end{bmatrix} \\
&\sim \\
&\sim \begin{bmatrix} \frac{3}{10} - \frac{1}{10}\sqrt{109} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

por lo tanto, los valores propios correspondientes a r_1 están dados por $\alpha \left[\begin{array}{c} 1 \\ -\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{109} \end{array} \right]$, $\alpha \neq 0$. Mientras que para $r_2 = \frac{1}{10} - \frac{1}{10}\sqrt{142}$,

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cc} \frac{2}{5} - r_2 & \frac{1}{5} \\ 5 & -\frac{1}{5} - r_2 \end{array} \right] &= \left[\begin{array}{cc} \frac{3}{10} + \frac{1}{10}\sqrt{109} & \frac{1}{5} \\ 5 & -\frac{3}{10} + \frac{1}{10}\sqrt{109} \end{array} \right] \\ &\sim \left[\begin{array}{cc} \frac{3}{10} + \frac{1}{10}\sqrt{109} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 \end{array} \right]; \end{aligned}$$

por lo que los valores propios correspondientes a r_2 satisfacen $\beta \left[\begin{array}{c} 1 \\ -\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{109} \end{array} \right]$, $\beta \neq 0$. Entonces, la solución general del sistema (11.5) está dada por

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{c} \mu \\ L \end{array} \right] &= \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ -\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{109} & -\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{109} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} C_1 e^{r_1 t} \\ C_2 e^{r_2 t} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \bar{\mu} \\ \bar{L} \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ -\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{109} & -\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{109} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} C_1 e^{r_1 t} \\ C_2 e^{r_2 t} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} -\frac{5}{27} \\ -\frac{125}{27} \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{c} C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} - \frac{5}{27} \\ \left(\frac{1}{2}\sqrt{109} - \frac{3}{2}\right) C_1 e^{r_1 t} - \left(\frac{1}{2}\sqrt{109} + \frac{3}{2}\right) C_2 e^{r_2 t} - \frac{125}{27} \end{array} \right] \end{aligned}$$

Ya que $\mu(T) = 0$ y $L(0) = L_0$, C_1 y C_2 son las soluciones del sistema

$$\begin{aligned} e^{r_1 T} C_1 + e^{r_2 T} C_2 &= \frac{5}{27} \\ \left(\frac{1}{2}\sqrt{109} - \frac{3}{2}\right) C - \left(\frac{1}{2}\sqrt{109} + \frac{3}{2}\right) C_2 &= \frac{125}{27} \end{aligned}$$

esto es,

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\left| \begin{array}{cc} \frac{5}{27} & e^{r_2 T} \\ \frac{125}{27} & -\left(\frac{1}{2}\sqrt{109} + \frac{3}{2}\right) \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{cc} e^{r_1 T} & e^{r_2 T} \\ \left(\frac{1}{2}\sqrt{109} - \frac{3}{2}\right) & -\left(\frac{1}{2}\sqrt{109} + \frac{3}{2}\right) \end{array} \right|} \\ &= \frac{\frac{125}{27} e^{T r_2} + \frac{5}{54}\sqrt{109} + \frac{5}{18}}{\frac{3}{2} e^{T r_1} - \frac{3}{2} e^{T r_2} + \frac{1}{2}\sqrt{109} e^{T r_1} + \frac{1}{2}\sqrt{109} e^{T r_2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{\left| \begin{array}{cc} e^{r_1 T} & \frac{5}{27} \\ \left(\frac{1}{2}\sqrt{109} - \frac{3}{2}\right) & \frac{125}{27} \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{cc} e^{r_1 T} & e^{r_2 T} \\ \left(\frac{1}{2}\sqrt{109} - \frac{3}{2}\right) & -\left(\frac{1}{2}\sqrt{109} + \frac{3}{2}\right) \end{array} \right|} \\ &= -\frac{\frac{125}{27} e^{T r_1} - \frac{5}{54}\sqrt{109} + \frac{5}{18}}{\frac{3}{2} e^{T r_1} - \frac{3}{2} e^{T r_2} + \frac{1}{2}\sqrt{109} e^{T r_1} + \frac{1}{2}\sqrt{109} e^{T r_2}} \end{aligned}$$

Finalmente, ya que $F = -L - \frac{1}{10}L^2 - \frac{1}{10}H^2$, la matriz

$$\begin{bmatrix} F_{LL} & F_{LH} \\ F_{HL} & F_{HH} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

tiene los valores propios $l_1 = l_2 = -\frac{1}{5} \leq 0$, entonces la función F es cóncava; y puesto que –en este problema– $g = \dot{L} = H - \dfrac{1}{5}L$ es lineal, la función de ganancia alcanza su valor máximo en el intervalo $[0, T]$ si

$$H = 5\mu$$

donde $\mu = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} - \frac{5}{27}$, r_1, r_2, C_1 y C_2 son los valores que se calcularon anteriormente.

11.3 Un problema de inversión con análisis cualitativo

En la introducción se planteó el problema de inversión $J = \int_0^T (K - aK^2 - I^2)dt$ sujeto a $\dot{K} = I - \delta K$, $K(0) = K_0$ y en la sección 9.2 se resolvió este problema. Ahora supongamos que en lugar de la función de producción $Q(K) = K - aK^2$ tenemos una función más general $Q = f(K)$ que cumple con las siguientes condiciones: f es clase C^2 en $[0, \infty)$; $\dot{f}(K) > 0$, para $K \geq 0$; $\ddot{f}(K) < 0$, para $K \geq 0$; $\lim_{K \to 0} \dot{f}(K) = \infty$ y $\lim_{K \to \infty} \dot{f}(K) = 0$ (es decir: f es creciente y cóncava en el primer cuadrante; mientras que $\dot{f}$ es decreciente y tiene como asíntotas a los ejes de coordenadas en el primer cuadrante) y que la firma ahora necesita resolver el problema con factor de descuento:

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & J = \displaystyle\int_0^T (f(K) - I^2)e^{-\rho t} dt \\ \text{sujeto a} & \left\{ \begin{array}{lcl} \dot{K} & = & I - \delta K \\ K(0) & = & K_0 \end{array} \right. \end{array} \tag{11.6}$$

Entonces

$$\mathcal{H}_1 = f(K) - I^2 + \mu(I - \delta K)$$

por lo que

$$0 = \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial I} = -2I + \mu$$

implica $I = \frac{1}{2}\mu$; y ya que

$$-\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial K} = -\dot{f}(K) + \delta\mu,$$

el sistema de ecuaciones diferenciales a resolver es

$$\begin{array}{rcl} \dot{\mu} - \rho\mu & = & -\dfrac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial K} = -\dot{f}(K) + \delta\mu \\ \dot{K} & = & I - \delta K = \dfrac{1}{2}\mu - \delta K \end{array}$$

esto es,

$$\begin{array}{rcl} \dot{K} & = & -\delta K + \frac{1}{2}\mu \\ \dot{\mu} & = & (\delta+\rho)\mu - \dot{f}(K) \end{array} \tag{11.7}$$

Puesto que no conocemos a la función f, no se puede resolver explícitamente el sistema[2], entonces aplicaremos técnicas cualitativas para analizar la solución de este problema:

Punto de equilibrio: El punto de equilibrio, $(\bar{K}, \bar{\mu})$, está dado por la solución del sistema

$$\begin{aligned} -\delta K + \frac{1}{2}\mu &= 0 \\ (\delta+\rho)\mu - \dot{f}(K) &= 0 \end{aligned}$$

que se encuentra en la intersección de las gráficas de las funciones $\mu = 2\delta K$ y $\mu = \dfrac{\dot{f}(K)}{\delta+\rho}$, que se ilustra en el bosquejo gráfico de la figura 11.1.

Naturaleza del punto de equilibrio: En este caso, para el sistema no lineal (11.7), $f_1(K,\mu) = -\delta K + \frac{1}{2}\mu$ y $f_2(K,\mu) = (\delta+\rho)\mu - \dot{f}(K)$; por lo que

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(\bar{K},\bar{\mu}) & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(\bar{K},\bar{\mu}) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(\bar{K},\bar{\mu}) & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(\bar{K},\bar{\mu}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\delta & \dfrac{1}{2} \\ -\ddot{f}(\bar{K}) & \delta+\rho \end{vmatrix} = -\delta(\delta+\rho) + \frac{1}{2}\ddot{f}(\bar{K}) < 0 \tag{11.8}$$

porque $\delta > 0$, $\rho > 0$ y $\ddot{f}(K) < 0$ para todo $K \geq 0$. Por lo tanto, la linearización del sistema (11.7) es

$$\begin{array}{rcl} \dot{K} & = & -\delta K + \dfrac{1}{2}\mu \\ \dot{\mu} & = & -\ddot{f}(\bar{K})K + (\delta+\rho)\mu \end{array}$$

y, por (11.8), el punto de equilibrio $(\bar{K}, \bar{\mu})$ corresponde localmente a un punto de silla.

Bosquejo del retrato de fases:

Isoclinas De (11.7) se deduce que

$$\frac{d\mu}{dK} = \frac{(\delta+\rho)\mu - \dot{f}(K)}{-\delta K + \frac{1}{2}\mu}$$

[2] De hecho, aunque se diera en forma explícita esta función, probablemente no sería posible resolver el sistema . Por ejemplo, $f(K) = \ln(K)$ cumple con las condiciones dadas, y el sistema que resulta es

$$\begin{array}{rcl} \dot{K} & = & -\delta K + \dfrac{1}{2}\mu \\ \dot{\mu} & = & (\delta+\rho)\mu - \dfrac{1}{K} \end{array}$$

el cual no es lineal y no se tiene una herramienta general para resolver este tipo de sistemas.

Por lo tanto, $\dfrac{d\mu}{dK} = 0$ si

$$\mu = \frac{1}{\delta + \rho} \dot{f}(K)$$

y $\dfrac{d\mu}{dK} = \infty$ si

$$\mu = 2\delta K.$$

Esto significa que toda trayectoria que cruce la recta $\mu = 2\delta K$ lo hará con pendiente infinita y toda trayectoria que cruce la curva $\mu = \frac{1}{\delta+\rho}\dot{f}(K)$ lo hará con pendiente cero como se ilustra en la figura 11.1.

Direcciones de las trayectorias: Puesto que

$$\begin{aligned} \dot{K} &= -\delta K + \frac{1}{2}\mu > 0 \Leftrightarrow \mu > 2\delta K, \\ \dot{\mu} &= (\delta + \rho)\mu - \dot{f}(K) > 0 \Leftrightarrow \mu > \frac{1}{\delta + \rho}\dot{f}(K) \end{aligned}$$

las direcciones de las trayectorias están determinadas por las regiones que se encuentran por encima o por debajo de las curvas $\mu = 2\delta K$ y $\mu = \frac{1}{\delta+\rho}\dot{f}(K)$, representadas por un par de flechas que parten de un punto común como se muestra en le figura 11.1

Separatrices: Puesto que el punto de equilibrio $(\bar{K}, \bar{\mu})$ corresponde a un punto de silla, existen un par de trayectorias que equivalen a las asíntotas de un punto de silla en un sistema lineal y que pasan por el punto de equilibrio y corresponden a una trayectoria que es estable y a otra que es inestable; las cuales se ilustran en la figura 11.1 como las curvas S_1 y S_2.

Análisis cualitativo de la solución: En el plano de fases bosquejado en la figura 11.1 se observa que la solución al problema 11.6 sólo puede ser una trayectoria que esté por debajo de la separatriz S_2 por la condición de transversalidad $\mu(T) = 0$. Por tanto, para un valor inicial $K(0) = K_0 < \bar{K}$ y un T dados, la solución $K = K(t)$, $0 \le t \le T$, comienza en K_0, puede ser que crezca un lapso de tiempo y después decrezca para tomar un valor final $K(T)$ en algunos casos menor que K_0 y siempre menos que éste si $K_0 > \bar{K}$. Este comportamiento puede ser muy rápido o más lento dependiendo de la longitud del intervalo $[0, T]$; esto se ve reflejado geométricamente en la longitud de las trayectorias de las posibles soluciones. En la figura 11.2 se bosquejan estos dos casos para una condición inicial K_0 e I_0.

En contraparte, si $K_0 < \bar{K}$, $I = I(t)$ decrece hasta que vale cero; mientras que exhibe el mismo comportamiento si $K_0 > \bar{K}$ e $I_0 < \frac{\dot{f}(K_0)}{2(\delta+\rho}$) (figura 11.3 (a)) y crece un lapso de tiempo y después decrece hasta valer cero en T si $I_0 > \frac{\dot{f}(K_0)}{2(\delta+\rho)}$ (figura 11.3 (b)).

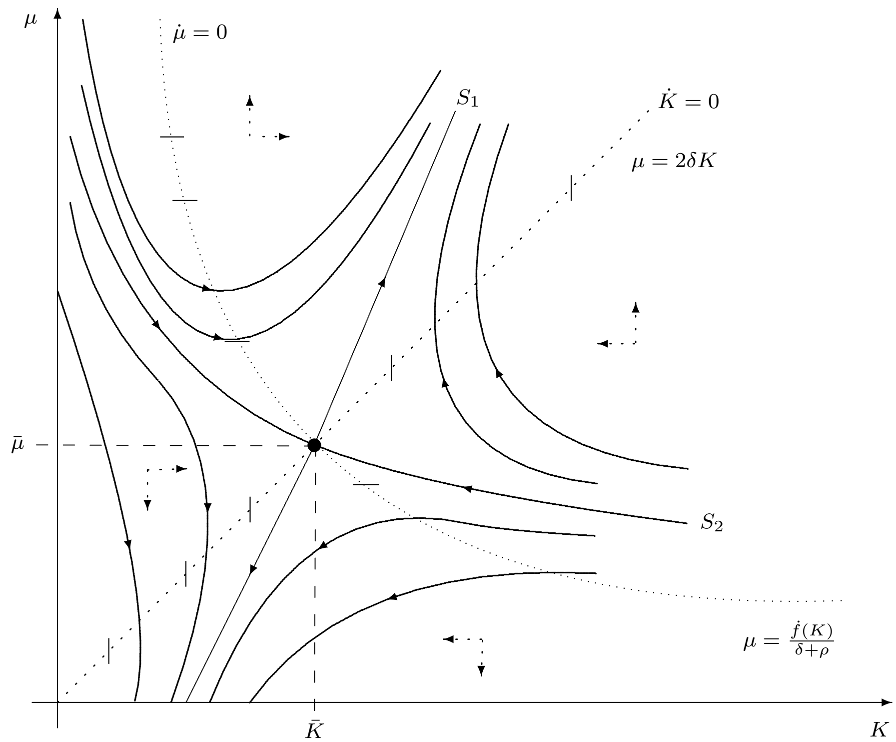


Figura 11.1: Plano de fases

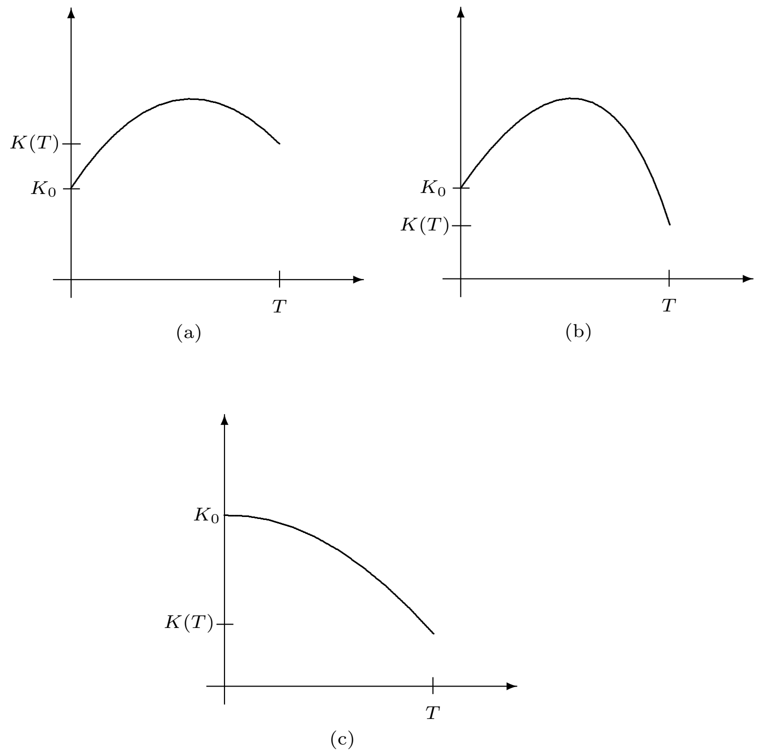


Figura 11.2: Bosquejo de la posible variable de control óptima $K = K(t)$: Los incisos (a) y (b) se dan cuando $K_0 < \bar{K}$ e $I_0 > \delta K_0$; mientras que (c) sucede si $K_0 < \bar{K}$ e $I_0 < \delta K_0$ o cuando $K_0 > \bar{K}$.

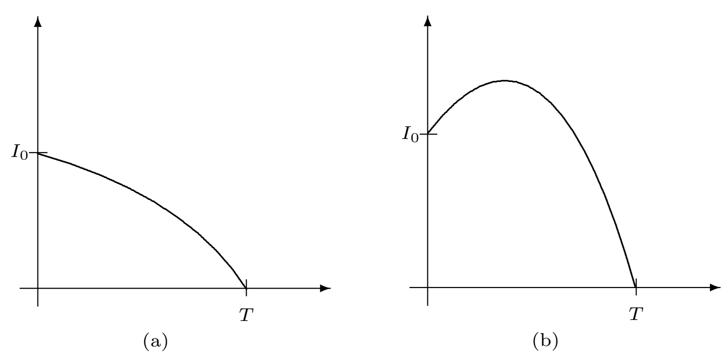


Figura 11.3: Bosquejo de la posible variable de control óptima: (a) $I = I(t)$ si $K_0 < \bar{K}$ o $K_0 > \bar{K}$ e $I_0 < \frac{\dot{f}(K_0)}{2(\delta+\rho)}$; (b) $I = I(t)$ si $K_0 > \bar{K}$ e $I_0 > \frac{\dot{f}(K_0)}{2(\delta+\rho)}$.

Capítulo 12

Condiciones terminales alternativas

En este capítulo se plantea la forma en que se debe modificar el principio del máximo de Pontryagin para obtener condiciones necesarias en problemas de control óptimo cuando el valor final de la variable de estado, $x(T)$, o el propio valor en el extremo derecho del intervalo, T, es fijo o no, o tienen algún tipo de restricción. Para la deducción y comprobación de los resultados que en este apartado se establecen, se recomienda consultar las referencias bibliográficas [13] pp. 864-866, [5] pp. 240-243.

12.1 Condiciones de frontera sobre $x(T)$

En esta sección se analiza el problema de optimización donde T es fijo, el valor terminal $x(T) = b$ es fijo o debe satisfacer una restricción de la forma $x(T) \geq b$ para un valor dado b.

Punto terminal fijo

El problema a resolver es:

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & J = \displaystyle\int_0^T F(t,x,y)dt \\ \text{sujeto a} & \left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x} & = & g(t,x,y) \\ x(0) & = & x_0 \\ x(T) & = & b \end{array} \right. \end{array} \tag{12.1}$$

donde T y b son fijos; es decir, la gráfica de la variable de estado óptima debe empezar en el punto $(0, x_0)$ y terminar en el punto (T, b) como se ilustra en la figura 12.1. En este caso las condiciones necesarias del principio del máximo de Pontryagin son las mismas, cambiando la condición de transversalidad $\lambda(T) = 0$ por la condición de frontera $x(T) = b$; es decir:

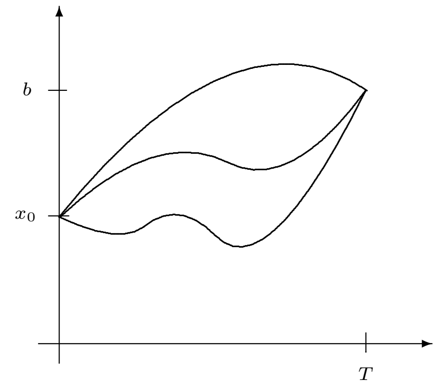


Figura 12.1:

Teorema 12.1 *Si el problema de control óptimo con punto terminal fijo 12.1 tiene solución óptima en (x, y) y $\mathcal{H} = F(t, x, y) + \lambda g(t, x, y)$ es el hamiltoniano de este problema, entonces se cumplen las siguientes condiciones:*

1. $\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} = 0$

2. $$\dot{\lambda} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}$$
   $$\dot{x} = g(t, x, y)$$

3. $$\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ x(T) &= b \end{aligned}$$

Naturalmente, si en lugar de un problema básico de control óptimo se tiene un problema con factor de descuento

$$\text{maximizar} \quad J = \int_0^T F(x, y)e^{-\rho t}dt$$
$$\text{sujeto a} \quad \begin{cases} \dot{x} &= g(x, y) \\ x(0) &= x_0 \\ x(T) &= b \end{cases}$$

las condiciones necesarias del teorema 11.1, p. 129, siguen siendo válidas únicamente cambiando la condición de transversalidad $\mu(T) = 0$ por la condición de frontera $x(T) = b$. Por otra parte, las condiciones suficientes de los teoremas 10.2, p. 120, y 11.2, p. 129, son aplicables en cada caso.

Ejemplo 12.1 *Resolver el problema de control óptimo*

$$\textit{maximizar} \quad J = \int_0^1 (x - y^2)dt$$
$$\textit{sujeto a} \quad \begin{cases} \dot{x} &= y \\ x(0) &= 2 \\ x(1) &= 4 \end{cases}$$

Solución: ▶ En este caso $\mathcal{H} = x - y^2 + \lambda y$ y en el ejemplo 10.1 (p. 121) vimos que la solución está dada por $x(t) = -\frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{2}C_1 t + C_2$, $y = \dot{x} = -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}C_1$. Entonces $x(0) = 2$ y $x(1) = 4$ implican

$$\begin{aligned} 2 &= C_2 \\ 4 &= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}C_1 + C_2 \end{aligned}$$

por lo que $C_2 = 2$ y $C_1 = 9/2$. Por tanto,

$$x(t) = -\frac{1}{4}t^2 + \frac{9}{4}t + 2$$

y

$$y(t) = -\frac{1}{2}t + \frac{9}{4}$$

Puesto que F es cóncava (cf. ejemplo 10.1, p. 121) y $g(x, y) = y$ es lineal, x y y resuelven el problema. ◀

Línea terminal vertical truncada

El problema a resolver es

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & J = \displaystyle\int_0^T F(t, x, y)dt \\ \text{sujeto a} & \left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x} & = & g(t, x, y) \\ x(0) & = & x_0 \\ x(T) & \geq & b \end{array} \right. \end{array}$$

es decir, la gráfica de la variable óptima de estado debe empezar en $(0, x_0)$ y terminar en algún punto cuya ordenada, $x(T)$, tiene un valor al menos igual a b como se ilustra en la figura 12.2.

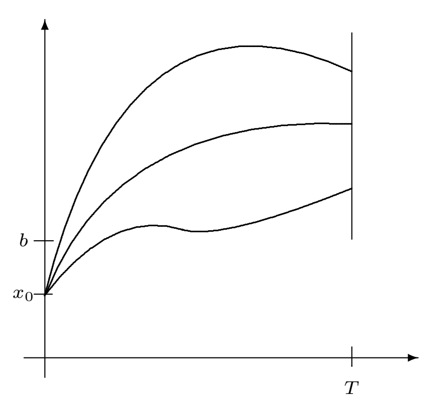


Figura 12.2:

En este caso el problema se resuelve de la siguiente manera: Se aplican las condiciones necesarias del teorema 10.1, p. 120 (o teorema 11.1, p. 129).

- Si la variable de estado encontrada satisface la restricción $x(T) \geq b$, ésta es la solución al problema[1].
- Si la variable de estado encontrada no satisface la restricción $x(T) \geq b$, entonces se cambia la condición de transversalidad $\lambda(T) = 0$ ($\mu(T) = 0$) por la condición de frontera $x(T) = b$. La variable de estado que se encuentre con este criterio es la solución del problema[1]

Ejemplo 12.2 *Resolver el problema*

$$\begin{array}{ll} \textit{maximizar} & J = \displaystyle\int_0^1 -y^2 dt \\ \textit{sujeto a} & \left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x} & = & x + y \\ x(0) & = & 1 \\ x(1) & \geq & 3 \end{array} \right. \end{array}$$

Solución: ▶ En este caso

$$\mathcal{H} = -y^2 + \lambda(x + y).$$

Entonces

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} = -2y + \lambda = 0$$

implica $y = \frac{1}{2}\lambda$ y el sistema a resolver es

$$\begin{array}{rcl} \dot{\lambda} & = & -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = -\lambda \\ \dot{x} & = & x + y \end{array}$$

esto es

$$\begin{array}{rcl} \dot{\lambda} & = & -\lambda \\ \dot{x} & = & x + \dfrac{1}{2}\lambda \end{array}$$

Por tanto, al separar variables,

$$\lambda = C_1 e^{-t}$$

y, en consecuencia,

$$\dot{x} = x + \frac{1}{2} C_1 e^{-t}.$$

[1]Naturalmente, si se satisfacen condiciones suficientes.

Por lo que

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{e^{-t}} \int \frac{1}{2} C_1 e^{-2t} dt \\ &= \frac{1}{e^{-t}} \left[-\frac{1}{4} C_1 e^{-2t} + C_2 \right] \\ &= -\frac{1}{4} C_1 e^{-t} + C_2 e^{t}. \end{aligned}$$

La condición de transversalidad $\lambda(1) = 0$ implica $C_1 = 0$ y, por tanto,

$$x(t) = C_2 e^t.$$

Por la condición inicial $x(0) = 1$, se tiene $C_2 = 1$, luego

$$x(t) = e^t;$$

sin embargo,

$$x(1) = e < 3.$$

Entonces, se debe susutituir la condición de transversalidad $\lambda(1) = 0$ por la condición de frontera $x(1) = 3$ y, así, C_1, C_2 son las soluciones del sistema

$$\begin{aligned} 1 &= x(0) = -\frac{1}{4} C_1 + C_2 \\ 3 &= x(1) = -\frac{1}{4} C_1 e^{-1} + C_2 e \end{aligned}$$

que están dadas por

$$C_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & e \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\frac{1}{4} & 1 \\ -\frac{1}{4}e^{-1} & e \end{vmatrix}} = \frac{12 - 4e}{e - e^{-1}}$$

$$C_2 = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{1}{4} & 1 \\ -\frac{1}{4}e^{-1} & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\frac{1}{4} & 1 \\ -\frac{1}{4}e^{-1} & e \end{vmatrix}} = \frac{3 - e^{-1}}{e - e^{-1}}$$

Así que,

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{1}{4} \frac{12 - 4e}{e - e^{-1}} e^{-t} + \frac{3 - e^{-1}}{e - e^{-1}} e^{t} \\ &= \frac{e - 3}{e - e^{-1}} e^{-t} + \frac{3 - e^{-1}}{e - e^{-1}} e^{t} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
y &= \frac{1}{2}\lambda \\
&= \frac{1}{2}C_1 e^{-t} \\
&= \frac{1}{2}\frac{12-4e}{e-e^{-1}}e^{-t} \\
&= \frac{6-2e}{e-e^{-1}}e^{-t}
\end{aligned}$$

son las variables de estado y de control óptimas, respectivamente, de este problema, porque $F = -y^2$ es una función cóncava y $g = x + y$ es una función lineal. ◀

12.2 Condiciones de frontera sobre T

En esta sección se analiza el problema de optimización donde T es variable y el valor terminal $x(T) = b$ es fijo o T debe satisfacer una restricción de la forma $T \leq T_{\text{máx}}$ para un valor dado $T_{\text{máx}}$.

Línea terminal horizontal

El problema a resolver es

$$\begin{array}{rl}
\text{maximizar} & J = \displaystyle\int_0^T F(t, x, y)dt \\
\text{sujeto a} & \left\{\begin{array}{lcl} \dot{x} &=& g(t, x, y) \\ x(0) &=& x_0 \\ x(T) &=& b \end{array}\right.
\end{array}$$

donde b es un valor dado y T es libre (variable). Es decir, en este tipo de problema se permite escoger el valor de T para poder alcanzar el nivel objetivo $x(T) = b$, como se ilustra en le figura 12.3

En este caso la condición de transversalidad de la variable de coestado $\lambda(T) = 0$ (o $\mu(T) = 0$, si el problema es con factor de descuento) se sustituye por la condición de transversalidad sobre el hamiltoniano $\mathcal{H}$ (o $\mathcal{H}_1$, si el problema es con factor de descuento):

$$\mathcal{H}(T) = 0$$

(o $\mathcal{H}_1(T) = 0$, si el problema es con factor de descuento) y las demás condiciones del teorema 10.1, p. 120 (o teorema 11.1, p. 129, si el problema es con factor de descuento) permanecen iguales. Obviamente las condiciones de los teoremas 10.2, p. 120, y 11.2, p. 129, son aplicables en cada caso.

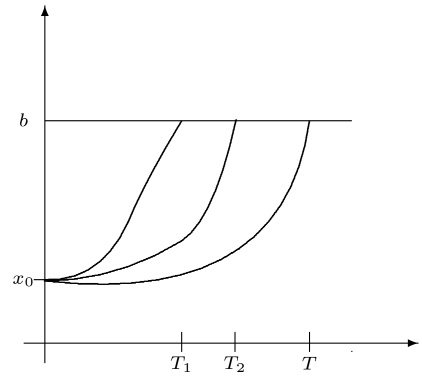


Figura 12.3:

Ejemplo 12.3 *Resolver el problema de control óptimo*

$$\textit{maximizar} \quad J = \int_0^T -(t^2 + y^2)dt$$

$$\textit{sujeto a} \quad \begin{cases} \dot{x} & = & y \\ x(0) & = & 4 \\ x(T) & = & 5 \end{cases}$$

donde T es libre.

Solución: ► En este caso

$$\mathcal{H} = -\left(t^2 + y^2\right) + \lambda y.$$

Por lo que

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} = -2y + \lambda = 0$$

implica

$$y = \frac{1}{2}\lambda$$

y el sistema a resolver es, entonces,

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = 0 \\ \dot{x} &= y = \frac{1}{2}\lambda \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \lambda &= C_1 \\ x &= \int \frac{1}{2} C_1 dt \\ &= \frac{1}{2} C_1 t + C_2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el sistema a resolver, para encontrar C_1, C_2 y T es

$$\begin{aligned}
4 &= x(0) = C_2 \\
5 &= x(T) = \frac{1}{2}C_1T + C_2 \\
0 &= \mathcal{H}(T) = -(T^2 + (\frac{1}{2}\lambda)^2) + \lambda(\frac{1}{2}\lambda) \\
&= -(T^2 + \frac{1}{4}C_1^2) + \frac{1}{2}C_1^2 \\
&= -T^2 + \frac{1}{4}C_1^2
\end{aligned}$$

esto es,

$$\begin{aligned}
C_2 &= 4 \\
\frac{1}{2}C_1T + C_2 &= 5 \\
-T^2 + \frac{1}{4}C_1^2 &= 0
\end{aligned}$$

que tiene por solución (recordando que $T \geq 0$) $C_2 = 4$, $C_1 = 2$ y $T = 1$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
x(t) &= t + 4 \\
y(t) &= \frac{1}{2}\lambda \\
&= \frac{1}{2}C_1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

son, respectivamente, las variables de estado y control óptimas de este problema[2] en el intervalo $[0, 1]$. ◄

Línea terminal horizontal truncada

El problema a resolver es

$$\begin{aligned}
&\text{maximizar} \quad J = \int_0^T F(t, x, y)dt \\
&\text{sujeto a} \quad \begin{cases} \dot{x} = g(t, x, y) \\ x(0) = x_0 \\ x(T) = b \\ T \leq T_{\text{máx}} \end{cases}
\end{aligned}$$

donde el valor b es dado y T es libre (variable); pero T no debe pasar de un valor fijo $T_{\text{máx}}$. Es decir, en este tipo de problema se permite escoger el valor de T para alcanzar el nivel objetivo $x(T) = b$, pero T debe satisfacer $0 \leq T \leq T_{\text{máx}}$

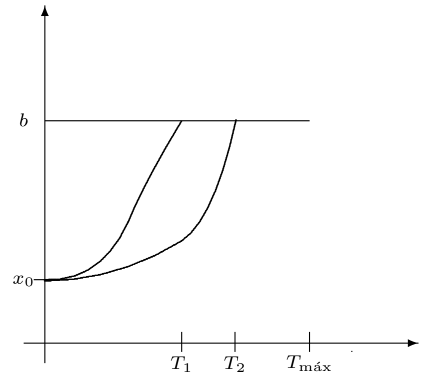


Figura 12.4:

como se ilustra en le figura 12.4. Nuevamente, como en el caso del problema con línea horizontal terminal, la condición de transversalidad de la variable de coestado $\lambda(T) = 0$ (o $\mu(T) = 0$) se sustituye por la condición de transversalidad sobre el hamiltoniano $\mathcal{H}$ (o $\mathcal{H}_1$):

$$\mathcal{H}(T) = 0$$

(o $\mathcal{H}_1(T) = 0$) y las demás condiciones del teorema 10.1, p. 120 (o teorema 11.1, p. 129), permanecen iguales. Si el valor T que se calcula con este procedimiento es menor que $T_{\text{máx}}$, el problema está resuelto; en caso contrario, se toma $T_{\text{máx}}$ como valor fijo y se resuelve con la técnica para el problema de punto terminal fijo con $x(T_{\text{máx}}) = b$.

Ejemplo 12.4 *Resolver el ejemplo 12.3 con la condición* $0 \leq T \leq \frac{1}{2}$.

Solución: ▶ En el ejemplo 12.3 se encontró la solución óptima $x = t + 4$ y $T = 1$ que no es menor a 1/2. Por tanto, hacemos $T_{\text{máx}} = 1/2$ el extremo derecho del intervalo y se resuelve el problema con la técnica de punto terminal fijo con $x(1/2) = 5$. En ese ejemplo se vio que $x(t) = \frac{1}{2}C_1 t + C_2$; así que el sistema a resolver es

$$\begin{aligned} 4 &= x(0) = C_2 \\ 5 &= x(1/2) = \frac{1}{4}C_1 + C_2 \end{aligned}$$

cuya solución es $C_2 = 4 = C_1$; por lo que la variable de estado óptima es

$$x(t) = 2t + 4,\ t \in [0, 1/2].$$

◀

[2]Obsérvese que $F = -t^2 - y^2$ es cóncava y que $g = y$ es lineal.

12.3 Un modelo de consumo óptimo

Supongamos que una persona tiene una cantidad inicial x_0 de capital en un banco que posteriormente crece instantáneamente en forma proporcional al capital con constante de proporcionalidad $r > 0$. El individuo tiene un único consumo cuya rapidez en el tiempo esta dado por la función $c = c(t)$. Todo lo que no consume lo reinvierte. De esta manera la rapidez con la que aumenta su capital en el banco está dada por

$$\dot{x} = rx - c.$$

El individuo desea elegir la función de consumo $c(t)$, en tiempo de vida T, que maximice la utilidad total, si tiene una función de utilidad instantánea $U(c) = \ln c$ y un factor de descuento con tasa $\rho > 0$; además, al final tiene que conservar una cantidad fija b en el banco. Es decir, quiere resolver el problema

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & J = \displaystyle\int_0^T \ln(c)e^{-\rho t}dt \\ \text{sujeto a} & \left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x} & = & rx - c \\ x(0) & = & x_0 \\ x(T) & = & b \end{array} \right. \end{array}$$

En este caso

$$\mathcal{H}_1 = \ln(c) + \mu(rx - c)$$

Por lo que

$$\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial c} = \frac{1}{c} - \mu = 0$$

implica

$$c = \frac{1}{\mu}$$

y, por tanto, el sistema a resolver es

$$\begin{array}{rcl} \dot{\mu} - \rho\mu & = & -\dfrac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial x} = -\mu r \\ \dot{x} & = & rx - c = rx - \dfrac{1}{\mu} \end{array}$$

esto es,

$$\begin{array}{rcl} \dot{\mu} & = & (\rho - r)\mu \\ \dot{x} & = & rx - \dfrac{1}{\mu} \end{array}$$

La primera ecuación del sistema anterior tiene solución

$$\mu = C_1 e^{(\rho - r)t}$$

y, entonces, la segunda ecuación se transforma en

$$\dot{x} - rx = -\frac{1}{C_1} e^{(r-\rho)t}$$

cuya solución está dada por

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{e^{-rt}} \int -\frac{1}{C_1} e^{(r-\rho)t} e^{-rt} dt \\ &= \frac{1}{e^{-rt}} \int -\frac{1}{C_1} e^{-\rho t} dt \\ &= \frac{1}{e^{-rt}} \left[\frac{1}{C_1 \rho} e^{-\rho t} + C_2 \right] \\ &= \frac{1}{\rho C_1} e^{(r-\rho)t} + C_2 e^{rt}. \end{aligned}$$

Al sustituir las condiciones en la frontera obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} x_0 &= x(0) = \frac{1}{\rho C_1} + C_2 \\ b &= x(T) = \frac{1}{\rho C_1} e^{(r-\rho)T} + C_2 e^{rT} \end{aligned}$$

Sea $A = \frac{1}{\rho C_1}$, de esta forma el sistema anterior se transforma en el sistema lineal

$$\begin{aligned} A + C_2 &= x_0 \\ A e^{(r-\rho)T} + C_2 e^{rT} &= b \end{aligned}$$

cuya solución está dada por

$$A = \frac{\begin{vmatrix} x_0 & 1 \\ b & e^{rT} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{(r-\rho)T} & e^{rT} \end{vmatrix}} = \frac{b - x_0 e^{rT}}{e^{(r-\rho)T} - e^{rT}}$$

$$C_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_0 \\ e^{(r-\rho)T} & b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{(r-\rho)T} & e^{rT} \end{vmatrix}} = -\frac{b - x_0 e^{(r-\rho)T}}{e^{(r-\rho)T} - e^{rT}}$$

Por tanto,

$$C_1 = \frac{1}{\rho A} = \frac{e^{(r-\rho)T} - e^{rT}}{\rho(b - x_0 e^{rT})}$$

y entonces

$$\begin{aligned} c(t) &= \frac{1}{\mu} = \\ &= \frac{1}{C_1 e^{(\rho-r)t}} \\ &= \frac{\rho(b - x_0 e^{rT})}{e^{(r-\rho)T} - e^{rT}} e^{(r-\rho)t} \end{aligned}$$

es la función de consumo que resuelve el problema (porque $F = \ln(c)$ es cóncava y $g = rx - c$ es lineal).

Ejemplo 12.5 *Supongamos que ahora, en el problema precedente, el inversionista desea dejar al menos b unidades monetarias al final del tiempo de vida T; es decir, se tiene que resolver el problema de línea terminal vertical truncada*

$$
\begin{array}{rl}
\textit{maximizar} & J = \displaystyle\int_0^T \ln(c)e^{-\rho t}dt \\
\textit{sujeto a} & \left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x} & = & rx - c \\ x(0) & = & x_0 \\ x(T) & \geq & b \end{array} \right.
\end{array}
$$

Así, por lo anterior, $\mu = C_1 e^{(\rho - r)t}$, $c = \dfrac{1}{\mu}$ y $x(t) = \frac{1}{\rho C_1} e^{(r-\rho)t} + C_2 e^{rt}$ y la condición de transversalidad $\mu(T) = 0$ implicaría $C_1 = 0$ lo cual no es posible porque entonces x no estaría definida; por tanto, el problema se debe tratar con la estrategia de punto terminal fijo con $x(T) = b$, que produce la misma solución que encontramos anteriormente.

Capítulo 13

Problemas con horizonte de tiempo infinito

En este capítulo se estudiarán los problemas de control óptimo que tienen horizonte de tiempo infinito; es decir, problemas donde se requiere maximizar un funcional de la forma $J(x,y) = \int_0^{\infty} F(x,y)e^{-\rho t}dt$.

13.1 Horizonte de tiempo infinito con puntos terminales fijos

El problema a resolver en este caso es

$$\begin{array}{rl} \text{maximizar} & J = \displaystyle\int_0^{\infty} F(x,y)e^{-\rho t}dt \\ \text{sujeto a} & \left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x} & = & g(x,y) \\ x(0) & = & x_0 \\ \lim\limits_{t\to\infty} x(t) & = & b \end{array} \right. \end{array}$$

donde el valor b es dado. Es decir, la gráfica de la variable de estado comienza en punto $(0, x_0)$ y converge asíntoticamente al número real b. Para resolver este tipo de problemas se aplican las mismas condiciones del teorema 12.1, p. 142, cambiando la condición de frontera $x(T) = b$ por la condición de convergencia asintótica $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = b$.

Ejemplo 13.1 (Consumo óptimo con horizonte de tiempo infinito) *Consideremos el modelo de consumo óptimo que se trató en la sección 12.3 (p. 150), pero ahora supongamos que el capital del banco tiende a cero cuando t tiende a infinito si se supone, para este fin, que $r < \rho$; es decir, resolvamos el* *problema con horizonte de tiempo infinito*

$$
\begin{array}{ll}
\textit{maximizar} & J = \displaystyle\int_0^\infty \ln(c) e^{-\rho t} dt \\
\textit{sujeto a} & \left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x} & = & rx - c \\ x(0) & = & x_0 \\ \lim\limits_{t\to\infty} x(t) & = & b \end{array} \right.
\end{array}
$$

En la sección 12.3 se encontraron las soluciones generales

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{\rho C_1} e^{(r-\rho)t} + C_2 e^{rt} \\
c(t) &= \frac{1}{C_1} e^{(r-\rho)t}
\end{aligned}
$$

Como

$$
0 = \lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\rho C_1} e^{(r-\rho)t} + C_2 e^{rt}
$$

entonces C_2 debe ser cero. Con la condición $x(0) = x_0$, obtenemos

$$
x_0 = \frac{1}{\rho C_1}
$$

de donde

$$
C_1 = \frac{1}{\rho x_0}
$$

y, por tanto,

$$
\begin{aligned}
x(t) &= x_0 e^{(r-\rho)t} \\
c(t) &= \rho x_0 e^{(r-\rho)t} = \rho x(t).
\end{aligned}
$$

13.2 Horizonte infinito con puntos terminales libres

El problema a resolver en este caso es

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximizar} & J(x,y) = \displaystyle\int_0^\infty F(x,y) e^{-\rho t} dt \\
\text{sujeto a} & \left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x} & = & g(x,y) \\ x(0) & = & x_0 \\ \lim\limits_{t\to\infty} x(t) \text{ libre} & & \end{array} \right.
\end{array}
$$

Para solucionar este tipo de problemas se plantea el sistema de ecuaciones diferenciales que produce las condiciones 1 y 2 del teorema 12.1, p. 142, y, en general– cuando ρ es suficientemente pequeño–, el punto de equilibrio $(\bar{x}, \bar{\mu})$ corresponde a un punto de silla; entonces, cuando esto sucede, las condición de frontera que se utiliza para encontrar la solución óptima del problema de control es

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \bar{x}$$

Es decir, cuando el punto de equilibrio $(\bar{x}, \bar{\mu})$ corresponde a un punto de silla, entonces la trayectoria estable $(x^*, \mu^*) = (x^*(t), \mu^*(t))$, la única que satisface, en el plano de fases, $\lim_{t\to\infty} x^*(t) = \bar{x}$, $\lim_{t\to\infty} \mu^*(t) = \bar{\mu}$, es la trayectoria óptima; esto es: dada una condición inicial $x(0) = x_0, \mu(0) = \mu_0$, las funciones que resuelven el problema y satisfacen esta condición, x_* y μ_*, son $x_*(t) = x^*(t)$ y $\mu_*(t) = \mu^*(t)$ con $(x^*(0), \mu^*(0)) = (x_0, \mu_0)$.

Ejemplo 13.2 (Inversión con horizonte de tiempo infinito) *Resolver el problema de inversión de la sección 10.2, p. 122, con factor de descuento ρ y con horizonte de tiempo infinito; esto es, solucionar el problema*

$$\begin{array}{ll} \textit{maximizar} & J = \displaystyle\int_0^\infty (K - aK^2 - I^2)e^{-\rho t}dt \\ \textit{sujeto a} & \left\{ \begin{array}{lcl} \dot{K} & = & I - \delta K \\ K(0) & = & K_0 \end{array} \right. \end{array}$$

Solución: ▶ En este caso, el hamiltoniano presente es

$$\mathcal{H}_1 = K - aK^2 - I^2 + \mu(I - \delta K)$$

por lo que

$$0 = \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial I} = -2I + \mu$$

implica

$$I = \frac{1}{2}\mu.$$

Entonces, el sistema a resolver es

$$\begin{array}{rcl} \dot{K} & = & -\delta K + I \\ & = & -\delta K + \dfrac{1}{2}\mu \\ \dot{\mu} - \rho\mu & = & -\dfrac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial K} \\ & = & -(1 - 2aK - \mu\delta) \end{array}$$

esto es,

$$\begin{array}{rcrcrcr} \dot{K} & = & -\delta K & + & \frac{1}{2}\mu & & \\ \dot{\mu} & = & 2aK & + & (\rho + \delta)\mu & - & 1 \end{array} \tag{13.1}$$

La solución del sistema lineal

$$\begin{bmatrix} -\delta & \frac{1}{2} \\ 2a & \rho + \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{K} \\ \bar{\mu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

está dada por

$$\bar{K} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \rho+\delta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\delta & \frac{1}{2} \\ 2a & \rho+\delta \end{vmatrix}} = \frac{1}{2\left(\delta^2+\rho\delta+a\right)}$$

$$\bar{\mu} = \frac{\begin{vmatrix} -\delta & 0 \\ 2a & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\delta & \frac{1}{2} \\ 2a & \rho+\delta \end{vmatrix}} = \frac{\delta}{\delta^2+\rho\delta+a}$$

Los valores propios de la matriz $A = \begin{bmatrix} -\delta & \frac{1}{2} \\ 2a & \rho+\delta \end{bmatrix}$ son las soluciones de la ecuación

$$\begin{vmatrix} -\delta-\ell & \frac{1}{2} \\ 2a & \rho+\delta-\ell \end{vmatrix} = \ell^2 - \rho\ell - (\delta^2+\rho\delta+a) = 0$$

que son

$$\begin{aligned} \ell_1 &= \frac{\rho}{2} + \frac{\sqrt{\rho^2+4(\delta^2+\rho\delta+a)}}{2} > 0 \\ \ell_2 &= \frac{\rho}{2} - \frac{\sqrt{\rho^2+4(\delta^2+\rho\delta+a)}}{2} < 0 \end{aligned}$$

Para ℓ_1

$$\begin{bmatrix} -\delta-\ell_1 & \frac{1}{2} \\ 2a & \rho+\delta-\ell_1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{\rho+\delta-\ell_1}{2a} \\ -\delta-\ell_1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{\rho+\delta-\ell_1}{2a} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

por lo que los vectores propios asociados a ℓ_1 están dados por $\alpha \begin{bmatrix} \frac{\rho+\delta-\ell_1}{2a} \\ -1 \end{bmatrix}$, $\alpha \neq 0$. Para ℓ_2

$$\begin{bmatrix} -\delta-\ell_2 & \frac{1}{2} \\ 2a & \rho+\delta-\ell_2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{\rho+\delta-\ell_2}{2a} \\ -\delta-\ell_2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{\rho+\delta-\ell_2}{2a} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

por lo que los vectores propios asociados a ℓ_2 están dados por $\beta \begin{bmatrix} \frac{\rho+\delta-\ell_2}{2a} \\ -1 \end{bmatrix}$, $\beta \neq 0$. Por tanto, la solución general del sistema (13.1) es

$$\begin{bmatrix} K \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\rho+\delta-\ell_1}{2a} & \frac{\rho+\delta-\ell_2}{2a} \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 e^{\ell_1 t} \\ C_2 e^{\ell_2 t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{K} \\ \bar{\mu} \end{bmatrix}$$

esto es

$$\begin{aligned} K &= C_1 \frac{\rho+\delta-\ell_1}{2a} e^{\ell_1 t} + C_2 \frac{\rho+\delta-\ell_2}{2a} e^{\ell_2 t} + \bar{K} \\ \mu &= -C_1 e^{\ell_1 t} - C_2 e^{\ell_2 t} + \bar{\mu} \end{aligned}$$

Puesto que

$$\begin{vmatrix} -\delta & \frac{1}{2} \\ 2a & \rho+\delta \end{vmatrix} = -\delta(\delta+\rho) - a < 0$$

el punto de equilibrio $(\bar{K}, \bar{\mu})$ corresponde a un punto de silla ; K debe cumplir

$$\lim_{t\to\infty} K(t) = \bar{K}$$

y ya que $\ell_1 > 0$, $\ell_2 < 0$, entonces C_1 tiene que ser cero; luego,

$$K = C_2 \frac{\rho+\delta-\ell_2}{2a} e^{\ell_2 t} + \bar{K}$$

y como $K(0) = K_0$,

$$C_2 = \frac{2a(K_0 - \bar{K})}{\rho+\delta-\ell_2}$$

Así,

$$\begin{aligned} K(t) &= (K_0 - \bar{K})e^{\ell_2 t} + \bar{K} \\ \mu(t) &= \frac{2a(K_0 - \bar{K})}{\ell_2 - \rho - \delta} e^{\ell_2 t} + \bar{\mu} \end{aligned}$$

$$I(t) = \frac{1}{2}\mu(t) = \frac{a(K_0 - \bar{K})}{\ell_2 - \rho - \delta} e^{\ell_2 t} + \bar{\mu}$$

resuelven el problema. ◀

13.3 Modelo neoclásico de crecimiento económico

En este modelo se supone que los agentes económicos –población y firmas– son racionales y que la población hace sus elecciones tomando en cuenta a toda su descendencia. La producción Y es una función linealmente homogénea[1] de dos insumos, capital K y mano de obra L:

$$Y = F(K, L)$$

con las propiedades $F_L > 0$, $F_K > 0$, $F_{LL} < 0$ y $F_{KK} < 0$. Entonces, si $y = Y/L$ es el producto per cápita,

$$\begin{aligned} y &= \frac{Y}{L} \\ &= \frac{1}{L} F(K, L) \\ &= F(\frac{K}{L}, \frac{L}{L}) \\ &= F(\frac{K}{L}, 1) \end{aligned}$$

[1]Una función de dos variables $z = g(x, y)$ es linealmente homogénea si es homogénea de grado uno; esto es, $g(\alpha x, \alpha y) = \alpha g(x, y)$.

por ser F una función linealmente homogénea. De esta manera, si $k = \dfrac{K}{L}$ es el capital per cápita

$$y = f(k)$$

donde $f(k) = F(k,1)$. El producto total Y se consume o se invierte, por tanto, si δ es la tasa de depreciación del inventario de capital K, C es el consumo e I la inversión, el crecimiento del capital está dado por

$$\begin{aligned}\dot{K} &= I - \delta K \\ &= Y - C - \delta K\end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned}\frac{\dot{K}}{L} &= \frac{Y}{L} - \frac{C}{L} - \delta\frac{K}{L} \\ &= y - c - \delta k \\ &= f(k) - c - \delta k\end{aligned}$$

donde $c = C/L$ es el consumo per cápita. En este modelo se supone que toda la población trabaja y crece proporcionalmente a la misma con una tasa de crecimiento n; esto es, $\dot{L} = nL$. Entonces

$$\begin{aligned}\dot{k} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{K}{L}\right) \\ &= \frac{\dot{K}L - K\dot{L}}{L^2} \\ &= \frac{\dot{K}}{L} - \frac{\dot{L}}{L}\frac{K}{L} \\ &= \frac{\dot{K}}{L} - nk \\ &= f(k) - c - \delta k - nk\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\dot{k} = f(k) - c - (\delta + n)k.$$

De esta manera, si $U = U(c)$ es una función instantánea de binestar social (expresada en téminos per cápita) que satisface: $\dot{U}(c) > 0$, $\ddot{U}(c) < 0$; $\rho > n$ es la tasa de descuento social (tasa del factor de descuento) y la población inicial se normaliza a uno; entonces la utilidad intemporal está dada por

$$\int_0^\infty U(c)e^{nt}e^{-\rho t}dt = \int_0^\infty U(c)e^{-(\rho-n)t}dt$$

y el problema a resolver en este modelo es, por lo tanto,

$$\begin{array}{rl}\text{maximizar} & J = \displaystyle\int_0^\infty U(c)e^{-(\rho-n)t}dt \\ \text{sujeto a} & \left\{\begin{array}{lcl}\dot{k} & = & f(k) - c - (\delta+n)k \\ k(0) & = & k_0\end{array}\right.\end{array}$$

En este caso,

$$\mathcal{H}_1 = U(c) + \mu(f(k) - c - (\delta + n)k)$$

por lo que

$$\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial c} = \dot{U}(c) - \mu = 0$$

implica

$$\mu = \dot{U}(c);$$

de donde al despejar c,

$$c = \phi(\mu)$$

y, por tanto, el sistema de ecuaciones que se obtiene es

$$\begin{aligned} \dot{k} &= f(k) - \phi(\mu) - (\delta + n)k \\ \dot{\mu} - (\rho - n)\mu &= -\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial k} \\ &= -\left(\dot{f}(k) - (\delta + n)\right)\mu \end{aligned}$$

esto es,

$$\begin{aligned} \dot{k} &= f(k) - \phi(\mu) - (\delta + n)k \\ \dot{\mu} &= (\delta + \rho - \dot{f}(k))\mu \end{aligned} \tag{13.2}$$

Puesto que $\mu = \dot{U}(c)$,

$$\dot{\mu} = \ddot{U}(c)\dot{c},$$

entonces, la segunda ecuación diferencial del sistema (13.2) se puede escribir como

$$\dot{c} = (\delta + \rho - \dot{f}(k))\frac{\dot{U}(c)}{\ddot{U}(c)}$$

y el sistema que analizaremos cualitativamente en lugar (13.2) es el sistema equivalente

$$\begin{aligned} \dot{k} &= f(k) - c - (\delta + n)k \\ \dot{c} &= (\delta + \rho - \dot{f}(k))\tfrac{\dot{U}(c)}{\ddot{U}(c)} \end{aligned} \tag{13.3}$$

El punto de equilibrio del sistema (13.3) es la intersección de las curvas

$$\begin{aligned} \delta + \rho - \dot{f}(k) &= 0 \\ f(k) - c - (\delta + n)k &= 0 \end{aligned}$$

Al despejar k de la primera ecuación se obtiene la recta vertical

$$k = \bar{k}$$

y al despejar c de la segunda ecuación se obtiene la curva

$$c = f(k) - (\delta + n)k$$

Puesto que $\ddot{f}(k) = F_{KK}(k,1) < 0$,

$$\frac{d^2c}{dk^2} = \ddot{f}(k) < 0$$

así que $c = f(k) - (\delta + n)k$ es una función cóncava. El bosquejo de las gráficas de la curva $c = f(k) - (\delta + n)k$ y de la recta $k = \bar{k}$ se encuntra ilustrado en la figura 13.1; el punto de intersección de éstas, $(\bar{k}, \bar{c})$, es el punto de equilibrio del sistema (13.3). Por otra parte,

$$\frac{dc}{dk} = \frac{(\delta + \rho - \dot{f}(k))\frac{\dot{U}(c)}{\ddot{U}(c)}}{f(k) - c - (\delta + n)k}$$

así que las trayectorias del sitema atraviesan con pendiente cero a la recta $k = \bar{k}$ y con pendiente infinita a la curva $c = f(k) - (\delta + n)k$ como se ilustra en la figura 13.1. Por otra parte,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial k}\left(f(k) - c - (\delta + n)k\right)\Big|_{(\bar{k},\bar{c})} &= \dot{f}(\bar{k}) - (\delta + n) = 0 \\
\frac{\partial}{\partial c}\left(f(k) - c - (\delta + n)k\right)\Big|_{(\bar{k},\bar{c})} &= -1 \\
\frac{\partial}{\partial k}\left((\delta + \rho - \dot{f}(k))\frac{\dot{U}(c)}{\ddot{U}(c)}\right)\Bigg|_{(\bar{k},\bar{c})} &= -\ddot{f}(\bar{k})\frac{\dot{U}(\bar{c})}{\ddot{U}(\bar{c})} \\
\frac{\partial}{\partial c}\left((\delta + \rho - \dot{f}(k))\frac{\dot{U}(c)}{\ddot{U}(c)}\right)\Bigg|_{(\bar{k},\bar{c})} &= (\delta + \rho - \dot{f}(\bar{k}))\ \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\dot{U}(c)}{\ddot{U}(c)}\right)\Bigg|_{c=\bar{c}} = 0
\end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -\ddot{f}(\bar{k})\frac{\dot{U}(\bar{c})}{\ddot{U}(\bar{c})} & 0 \end{vmatrix} = -\ddot{f}(\bar{k})\frac{\dot{U}(\bar{c})}{\ddot{U}(\bar{c})} < 0$$

porque $\ddot{f}(k) = F_{KK}(k,1) < 0$, $\dot{U} > 0$ y $\ddot{U} < 0$; por lo tanto, el punto de equilibrio $(\bar{k}, \bar{c})$ correponde a un punto de silla. Luego, la trayectoria estable del diagrama de fases es la trayectoria óptima del problema como se ilustra en la figura 13.1. En este bosquejo se han considerado las direcciones de las trayectorias considerando que

$$\dot{k} = f(k) - c - (\delta + n)k > 0 \Leftrightarrow c < f(k) - (\delta + n)k$$

y

$$\dot{c} = (\delta + \rho - \dot{f}(k))\frac{\dot{U}(c)}{\ddot{U}(c)} > 0 \Leftrightarrow \delta + \rho - \dot{f}(k) < 0 \Leftrightarrow k < \bar{k}$$

En el plano de fases se puede observar que si $k_0 < \bar{k}$ es un valor cercano a $\bar{k}$, entonces la función óptima de capital per cápita $k^* = k^*(t)$ toma este valor

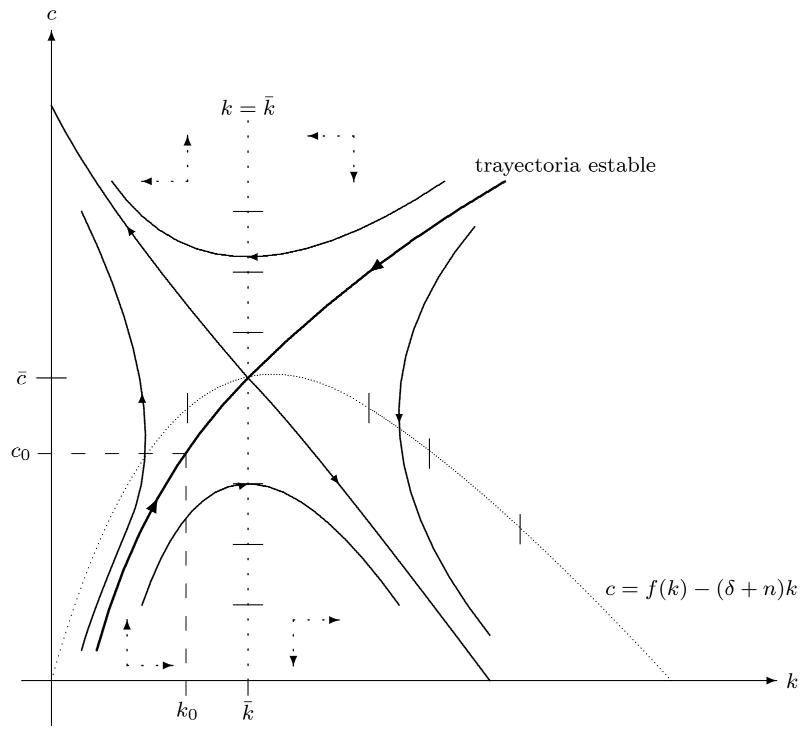


Figura 13.1:

inicial en $t = 0$ y crece conforme t aumenta tendiendo a $\bar{k}$ cuando t tiende a infinito; y de manera análoga se comporta la función de consumo óptimo $c^* = c^*(t)$, tomando un valor inicial c_0 y tendiendo de manera creciente a $\bar{c}$ cuando t tiende a infinito. En contraparte, si k_0 es un valor cercano mayor a $\bar{k}$, entonces la trayectoria óptima $(k^*, c^*) = (k^*(t), k^*(t))$ converge decreciendo al punto de equilibrio $(\bar{k}, \bar{c})$.

Parte IV

Resúmenes didácticos

Capítulo 14

Cálulo de variaciones

14.1 Frontera fija, frontera variable

Problema general

$$\begin{array}{rl} \text{optimizar} & J = \displaystyle\int_a^T F(t, f, \dot{f})dt \\ \text{sujeto a} & \begin{cases} f(a) = x_0 \\ \text{T fijo o libre} \\ f(T) \text{ fijo o libre} \end{cases} \end{array}$$

Las posibles combinaciones producen los siguientes casos de interés: **frontera fija**, **línea terminal vertical, línea terminal horizontal** y **sin línea terminal.** Para resolver el problema, en cualquiera de sus variantes, se procede de la siguiente manera:

1. Se resuelve la ecuación de Euler (ecuación diferencial homogénea de segundo orden):
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{f}}\right) - \frac{\partial F}{\partial f} = 0$$

2. Se utilizan las condiciones de frontera y transversalidad, dadas en la tabla[1] 14.1, para determinar las dos constantes que aparecen en la solución general de la ecuación de Euler y el valor de T –si se requiere–, según sea el caso. A la función f^* que se obtenga se le llama función estacionaria (o extremal)

3. Se calcula la matriz hessiana: $H = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}_{(t,f,\dot{f})}$.

[1]Donde $F_2|_{t=T} = F_2(T, f(T), \dot{f}(T))$, $\left[F - \dot{f}F_2\right]_{t=T} = F(T, f(T), \dot{f}(T)) - \dot{f}(T)F_2(T, f(T), \dot{f}(T))$ y $F(T) = (T, f(T), \dot{f}(T))$.

(a) Si para cada t y para todo par $(f, \dot{f})$ los valores propios de la matriz hessiana son mayores o iguales a cero, entonces se alcanza un mínimo absoluto en f^*

(b) Si para cada t y para todo par $(f, \dot{f})$ los valores propios de la matriz hessiana son menores o iguales a cero, entonces se alcanza un máximo absoluto en f^*

	Características	Condición de frontera	Condición de transversalidad
Frontera fija	T fijo $f(T) = y_0$ fijo	$f(a) = x_0$ $f(T) = y_0$	
Línea terminal vertical	$T = T_0$ fijo $f(T)$ libre	$f(a) = x_0$	$F_2\|_{t=T} = 0$
Línea terminal horizontal	T libre $f(T) = y_0$ fijo	$f(a) = x_0$	$f(T) = y_0$ $\left[F - \dot{f}F_2\right]_{t=T} = 0$
Sin línea terminal	T libre $f(T)$ libre	$f(a) = x_0$	$F_2\|_{t=T} = 0$ $F(T) = 0$

Tabla 14.1:

14.2 Funcionales de varias variables

Para resolver el problema

$$\text{optimizar} \quad J = \int_a^b F(t, x_1, x_2 \ldots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_n)dt$$
$$\text{sujeto a} \quad \begin{cases} x_i(a) &= \alpha_i \\ x_i(b) &= \beta_i \\ i &= 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

se procede de la siguiente manera:

1. Se resuelve el sistema de ecuaciones diferenciales de Euler

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial F}{\partial x_1} &= 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial F}{\partial x_2} &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_n}\right) - \frac{\partial F}{\partial x_n} &= 0 \end{aligned}$$

2. Se utilizan las condiciones de frontera $x_1(a) = \alpha_1, x_1(b) = \beta_1, x_2(a) = \alpha_2, x_2(b) = \beta_2, \ldots, x_n(a) = \alpha_n, x_n(b) = \beta_n$ para determinar las $2n$ constantes de la solución general del sistema de ecuaciones de Euler del inciso anterior. A la función f^* que se obtenga se le dice función estacionaria.

3. Se calcula matriz hessiana

$$H = \begin{bmatrix} F_{x_1x_1} & \cdots & F_{x_1x_n} & F_{x_1\dot{x}_1} & \cdots & F_{x_1\dot{x}_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ F_{x_nx_1} & \cdots & F_{x_nx_n} & F_{x_n\dot{x}_1} & \cdots & F_{x_n\dot{x}_n} \\ F_{\dot{x}_1x_1} & \cdots & F_{\dot{x}_1x_n} & F_{\dot{x}_1\dot{x}_1} & \cdots & F_{\dot{x}_1\dot{x}_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{\dot{x}_nx_1} & \cdots & F_{\dot{x}_nx_n} & F_{\dot{x}_1\dot{x}_1} & \cdots & F_{\dot{x}_n\dot{x}_n} \end{bmatrix}$$

   (a) Si para todo $t \in [a,b]$ y para todo $(x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)$ la matriz hessiana H tiene todos sus valores propios mayores o iguales a cero, en f^* se alcanza un mínimo absoluto.

   (b) Si para todo $t \in [a,b]$ y para todo $(x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)$ la matriz hessiana H tiene todos sus valores propios menores o iguales a cero, en f^* se alcanza un máximo absoluto.

14.3 Funcionales con derivadas superiores

Para encontrar una función donde posiblemente el problema

$$\begin{array}{rc} \text{optimizar} & J = \displaystyle\int_a^b F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots, x^{(n)})dt \\ \text{sujeto a} & \left\{ \begin{array}{c} x(a) = \alpha_0,\, x(b) = \beta_0 \\ \dot{x}(a) = \alpha_1,\, \dot{x}(b) = \beta_1 \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(a) = \alpha_{n-1},\, x^{(n-1)}(a) = \beta_{n-1} \end{array} \right. \end{array}$$

tenga una solución, se procede de la siguiente manera:

1. Se resuelve la ecuación de Euler-Poisson

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}}\right) - \cdots + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n}\left(\frac{\partial F}{\partial x^{(n)}}\right) = 0.$$

2. Se utilizan las condiciones de frontera $x^{(k)}(a) = \alpha_k$, $x^{(k)}(b) = \beta_k$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, (donde $x^{(0)}(t_0) = x(t_0)$) para calcular las $2n$ constantes que aparecen en la solución general de la ecuación de Euler-Poisson

14.4 Restricciones integrales

Para encontrar una función donde posiblemente el problema

$$\begin{array}{rl} \text{optimizar} & J = \displaystyle\int_a^b F(t, f, \dot{f})dt \\ \text{sujeto a} & \left\{ \begin{array}{rcl} \int_a^b G(t, f, \dot{f})dt & = & L \\ f(a) & = & x_0 \\ f(b) & = & y_0 \end{array} \right. \end{array}$$

tenga solución, se procede de la siguiente manera:

1. Se resuelve la ecuación diferencial

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{f}}\right) - \frac{\partial \Phi}{\partial f} = 0$$

donde $\Phi = F + \lambda G$.

2. Se utilizan las condiciones de frontera $f(a) = x_0$, $f(b) = y_0$ y la resricción integral $\int_a^b G(t, f, \dot{f})dt = L$ para plantear un sistema de ecuaciones y encontrar las constantes C_1, C_2 –que aparecen en la solución general de la ecuación diferencial del prime inciso– y el multiplicador λ.

14.5 Horizonte de tiempo infinito

Para encontrar una función donde posiblemente el problema

$$\begin{array}{rl} \text{optimizar} & J = \displaystyle\int_a^\infty F(t, x, \dot{x})dt \\ \text{sujeto a} & x(a) \quad = \quad \alpha \end{array}$$

tenga una solución, se procede de la siguiente manera:

1. Se resuelve la ecuación de Euler

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

2. Se establecen restricciones sobre alguna de las constantes que aparecen en la solución general, $x(t)$, de la ecuación de Euler, para que

$$\lim_{T \to \infty} x(T) = \bar{x}$$

sea un número real y se utiliza la condición de frontera $x(a) = \alpha$ para determinar la otra constante.

3. Se verifica que la función x^* que se encontró con lo dos incisos anteriores cumpla con al menos una de las siguientes dos condiciones:

(a) $\lim\limits_{T\to\infty} \left[F(T, x^*(T), \dot{x^*}(T)) - \dot{x^*}(T) \dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}}(T, x^*(t), \dot{x^*}(T)) \right] = 0$

(b) $\lim\limits_{T\to\infty} \dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}}(T, x^*(T), \dot{x^*}(T)) = 0$

Capítulo 15

Control óptimo

15.1 Problema básico

Para resolver el problema

$$\begin{array}{rl} \text{maximizar} & J = \displaystyle\int_0^T F(t,x,y)dt \\ \text{sujeto a} & \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & g(t,x,y) \\ x(0) & = & x_0 \end{array} \right. \end{array}$$

donde T es dado, x es la variable de estado y y es la variable de control, se procede de la siguiente manera:

1. Se define el hamiltoniano del problema

$$\mathcal{H} = F(t,x,y) + \lambda g(t,x,y)$$

   donde $\lambda = \lambda(t)$ es una función por determinar llamada variable de coestado.

2. De la ecuación $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} = 0$ se despeja la variable de control y.

3. Se sustituye, donde aparezca, la variable de control que se despejó en el inciso anterior en el sistema

$$\begin{array}{rcl} \dot{\lambda} & = & -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \\ \dot{x} & = & g(t,x,y) \end{array}$$

   para obtener un sistema de ecuaciones diferenciales donde no está presente la variable de control.

4. Se resuelve el sistema que se obtuvo en el inciso anterior y se utiliza la condición de frontera $x(0) = x_0$ y la condición de transversalidad $\lambda(T) = 0$ para encontrar las constantes que aparecen en la solución general del sistema de ecuaciones.

5. Sea (x^*, y^*, λ^*) la solución que se obtiene en el inciso precedente. Se verifican las siguientes dos condiciones:

   (a) Para cada $t \in [a, T]$ la función $(x, y) \mapsto F(t, x, y)$ es cóncava.

   (b) Una de las siguientes afirmaciones es verdadera:

      i. Para cada $t \in [a, b]$ la función $(x, y) \mapsto g(t, x, y)$ es lineal[1].

      ii. Para cada $t \in [a, b]$ la función $(x, y) \mapsto g(t, x, y)$ es cóncava y $\lambda^*(t) \geq 0$ para todo $t \in (0, T)$.

      iii. Para cada $t \in [a, b]$ la función $(x, y) \mapsto g(t, x, y)$ es convexa y $\lambda^*(t) \leq 0$ para todo $t \in (0, T)$.

15.2 Problemas autónomos con factor de descuento

Para resolver el problema

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximizar} & J = \displaystyle\int_0^T F(x, y) e^{-\rho t} dt \\
\text{sujeto a} & \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & g(x, y) \\ x(0) & = & x_0 \end{array} \right.
\end{array}
$$

donde T es fijo y ρ es la tasa del factor de descuento, se procede de la manera siguiente:

1. Se define el valor actual del hamiltoniano del problema

$$\mathcal{H}_1 = F(x, y) + \mu g(x, y)$$

   donde $\mu = \lambda e^{\rho t}$ es el valor actual de la variable de coestado λ.

2. De la ecuación $\dfrac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial y} = 0$ se despeja la variable de control y.

3. Se sustituye, donde aparezca, la variable de control que se despejó en el inciso anterior en el sistema

$$
\begin{array}{rcl}
\dot{\mu} & = & \rho\mu - \dfrac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial x} \\
\dot{x} & = & g(x, y)
\end{array}
$$

   para obtener un sistema de ecuaciones diferenciales donde no está presente la variable de control.

[1] $\varphi = \varphi(x, y)$ es lineal si se puede escribir en la forma $\varphi(x, y) = ax + by$ para ciertas constantes $a, b \in \mathbb{R}$.

4. Se resuelve el sistema que se obtuvo en el inciso anterior y se utiliza la condición de frontera $x(0) = x_0$ y la condición de transversalidad $\mu(T) = 0$ para encontrar las constantes que aparecen en la solución general del sistema de ecuaciones.

5. Sea (x^*, y^*, λ^*) la solución que se obtiene en el inciso precedente. Se verifican las siguientes dos condiciones:

   (a) Para cada $t \in [a, T]$ la función $(x, y) \mapsto F(t, x, y)$ es cóncava.

   (b) Una de las siguientes afirmaciones es verdadera:

      i. Para cada $t \in [a, b]$ la función $(x, y) \mapsto g(t, x, y)$ es lineal[2].

      ii. Para cada $t \in [a, b]$ la función $(x, y) \mapsto g(t, x, y)$ es cóncava y $\lambda^*(t) \geq 0$ para todo $t \in (0, T)$.

      iii. Para cada $t \in [a, b]$ la función $(x, y) \mapsto g(t, x, y)$ es convexa y $\lambda^*(t) \leq 0$ para todo $t \in (0, T)$.

15.3 Condiciones terminales alternativas

Problema general:

$$\text{maximizar} \quad J = \int_0^T F(t, x, y)dt$$
$$\text{sujeto a} \quad \begin{cases} \dot{x} = g(t, x, y) \\ x(0) = x_0 \\ x(T) \quad \begin{cases} = b \quad \text{ó} \\ \geq b \end{cases} \\ T \quad \begin{cases} \text{fijo ó} \\ \text{libre ó} \\ \in (0, T_{\text{máx}}] \end{cases} \end{cases}$$

donde x_0, b y $T_{\text{máx}}$ son valores dados. Las combinaciones de interés se describen en la tabla 15.1.

Para resolver este problema, en cualquiera de sus variantes, se procede de la siguiente manera:

1. Se realizan los pasos 1 a 3 del problema básico del apartado 15.1, p. 171.

2. Se resuelve el sistema de ecuaciones diferenciales que se obtiene en el inciso anterior.

3. Si se tiene:

   Punto terminal fijo: Se utilizan las condiciones de frontera $x(0) = x_0$ y $x(T) = b$ para determinar las dos constantes que aparecen en la solución general del sistema en el inciso 2.

[2] $\varphi = \varphi(x, y)$ es lineal si se puede escribir en la forma $\varphi(x, y) = ax + by$ para ciertas constantes $a, b \in \mathbb{R}$.

	Características
Punto terminal fijo	T fijo $x(T) = b$ fijo
Línea terminal vertical truncada	T fijo $x(T) \geq b$
Línea terminal horizontal	T libre $x(T) = b$ fijo
Línea terminal horizontal truncada	T libre, con $0 \leq T \leq T_{\text{máx}}$ $x(T) = b$ fijo

Tabla 15.1:

Línea terminal vertical truncada: Se utiliza la condición de frontera y la condición de transversalidad $\lambda(T) = 0$ para determinar las dos constantes que aparecen en la solución general del sistema en el inciso 2. Sea $\widetilde{x}$ la solución que se obtiene en este paso.

(a) Si $\widetilde{x}(T) \geq b$, $x^* = \widetilde{x}$ es la función estacionaria del problema y se pasa al inciso 4.

(b) Si $\widetilde{x}(T) < b$, entonces se utiliza la condición de frontera $x(0) = x_0$, y la condición de frontera $x(T) = b$ en lugar de la condición de transversalidad $\lambda(T) = 0$, para determinar las dos constantes que aparecen en la solución general del sistema en el inciso 2 como se hace en el caso de punto terminal fijo. Sea x^* la solución que se obtiene en este paso.

Línea terminal horizontal: Se utilizan la condición de frontera $x(0) = x_0$ y las condiciones de transversalidad $x(T) = b$ y $\mathcal{H}(T) = 0$, para determinar las dos constantes que aparecen en la solución general en el inciso 2 y el valor de T. Sea x^* la solución que se obtiene en este paso.

Línea terminal horizontal truncada: Se utilizan la condición de frontera $x(0) = x_0$ y las condiciones de transversalidad $x(T) = b$ y $\mathcal{H}(T) = 0$, para determinar las dos constantes que aparecen en la solución general del sistema en el inciso 2 y el valor de T. Sea x^* la función que se obtiene.

(a) Si $T \leq T_{\text{máx}}$, entonces x^* es la función estacionaria del problema y se pasa al inciso 4.

(b) Si $T > T_{\text{máx}}$, entonces se toma $T = T_{\max}$ como valor fijo y se encuentra x^* utilizando el caso de punto terminal fijo con $x(T_{\text{máx}}) = b$.

4. Se aplica el inciso 5 del problema básico del apartado 15.1, p. 171.

15.4 Condiciones alternativas para problemas con factor de descuento

Problema general:

$$\text{maximizar} \quad J = \int_0^T F(x,y)e^{-\rho t}dt$$
$$\text{sujeto a} \quad \begin{cases} \dot{x} = g(x,y) \\ x(0) = x_0 \\ x(T) \quad \begin{cases} = b \quad \text{ó} \\ \geq b \end{cases} \\ T \quad \begin{cases} \text{fijo ó} \\ \text{libre ó} \\ \in (0, T_{\text{máx}}] \end{cases} \end{cases}$$

donde x_0, b y $T_{\text{máx}}$ son valores dados. Las combinaciones de interés se describen en la tabla 15.1. Para resolver este problema, en cualquiera de sus variantes, se procede de la siguiente manera:

1. Se realizan los pasos 1 a 3 del problema autónomo con factor de descuento del apartado 15.2, p. 172.

2. Se resuelve el sistema de ecuaciones diferenciales que se obtiene en el inciso anterior.

3. Si se tiene:

   Punto terminal fijo: Se utilizan las condiciones de frontera $x(0) = x_0$ y $x(T) = b$ para determinar las dos constantes que aparecen en la solución general en el inciso 2.

   Línea terminal vertical truncada: Se utiliza la condición de frontera y la condición de transversalidad $\mu(T) = 0$ para determinar las dos constantes que aparecen en la solución general del sistema en el inciso 2. Sea $\widetilde{x}$ la solución que se obtiene en este paso.

   (a) Si $\widetilde{x}(T) \geq b$, $x^* = \widetilde{x}$ es la función estacionaria del problema y se pasa al inciso 4.

   (b) Si $x^*(T) < b$, entonces se utiliza la condición de frontera $x(0) = x_0$ y la condición de frontera $x(T) = b$ en lugar de la condición de transversalidad $\mu(T) = 0$, para determinar las dos constantes que aparecen en la solución general del sistema en el inciso 2 como se hace en el caso de punto terminal fijo. Sea x^* la solución que se obtiene en este paso.

   Línea terminal horizontal: Se utilizan la condición de frontera $x(0) = x_0$ y las condiciones de transversalidad $x(T) = b$ y $\mathcal{H}_1(T) = 0$, para determinar las dos constantes que aparecen en la solución general en el inciso 2 y el valor de T. Sea x^* la solución que se obtiene en este paso.

Línea terminal horizontal truncada: Se utilizan la condición de frontera $x(0) = x_0$ y las condiciones de transversalidad $x(T) = b$ y $\mathcal{H}_1(T) = 0$, para determinar las dos constantes que aparecen en la solución general del sistema en el inciso 2 y el valor de T. Sea x^* la función que se obtiene.

(a) Si $T \leq T_{\text{máx}}$, entonces x^* es la función estacionaria del problema y se pasa al paso 4.

(b) Si $T > T_{\text{máx}}$, entonces se toma $T = T_{\max}$ como valor fijo y se encuentra x^* utilizando el caso de punto terminal fijo con $x(T_{\text{máx}}) = b$.

4. Se aplica el inciso 5 del problema autónomo con factor de descuento del apartado 15.2, p. 172.

15.5 Horizonte infinito con punto terminal fijo

Problema general:

$$\text{maximizar} \quad J = \int_0^\infty F(x,y)e^{-\rho t}dt$$
$$\text{sujeto a} \quad \begin{cases} \dot{x} & = & g(x,y) \\ x(0) & = & x_0 \\ \lim\limits_{t\to\infty} x(t) & = & b \end{cases}$$

donde x_0 y b son números reales dados. Para resolver este problema se aplican los mismos pasos del problema autónomo con factor de descuento del apartado 15.2, p. 172, cambiando la condición de transversalidad, $\mu(T) = 0$, del paso 4 por la condición de convergencia asintótica: $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = b$.

15.6 Horizonte infinito con punto terminal libre

Problema general:

$$\text{maximizar} \quad J = \int_0^\infty F(x,y)e^{-\rho t}dt$$
$$\text{sujeto a} \quad \begin{cases} \dot{x} & = & g(x,y) \\ x(0) & = & x_0 \\ \lim\limits_{t\to\infty} x(t) & \text{libre} & \end{cases}$$

Para resolver este problema se aplican los mismos pasos que en el problema de tiempo de horizonte infinito con punto terminal fijo cambiando la condición de convergencia asintótica por la condición de equlibrio estable: $\lim_{t\to\infty} x(t) = \bar{x}$; donde $(\bar{x}, \bar{\mu})$ es el punto de equilibrio que corresponde al punto de silla del sistema de ecuaciones diferenciales que se obtiene en el paso 3 del apartado 15.2, p. 172.

Bibliografía

[1] Anton, H., *Introducción al álgebra lineal*, Limusa Wiley, México D.F., 2002.

[2] Apostol, T., *Calculus*, volumen 2, Editorial Reverté, S.A., España, 1980.

[3] Arrowsmith, D. K., Place, C. M., *Dynamical Systems* DIFFERENTIAL EQUATIONS, MAPS AND CHAOTIC BEHAVIOUR, Chapman and Hall, London, 1992.

[4] Blanchard, P., Devaney, R., Hall, G., *Ecuaciones diferenciales*, Internacional Thomson Editores, México D. F., 1999.

[5] Chiang, A., *Elements of Dynamical Optimization*, Waveland Press, Illinois, 2000.

[6] Chiang, A., *Métodos Fundamentales de Economía Matemática*, McGraw-Hill, México, D. F., 2006.

[7] Evans, G. C., *The Dynamics of Monopoly*, The American Mathematical Monthly, Vol. 31, No. 2., 1924, pp. 77-83.

[8] Ewing, G., *Calculus of Variations with applications*, Dover Publications, Inc., New York, 1985.

[9] Fleming, W. H., *Funciones de Varias Variables*, CECSA, México, D. F., 1965.

[10] Fraleigh, J. y Beauregard, R., *Linear Algebra*, Addison-Wesley Pub. Co., Reading, Mass., 1990.

[11] Gelfand I. M., Fomin, S. V., *Calculus of Variations*, Prentice-Hall, USA, 1963.

[12] Hadley, G., Variational methods in economics, North-Holland Pub. Co., New York, 1971.

[13] Hoy, M., Livernois, J., McKenna, C., Rees, R., Stengos, T., *Mathematics for Economics*, Addison-Wesley, Canada, 1996.

[14] Ize, J., *Cálculo de Variaciones*, IIMAS-FENOMEC, UNAM, México D.F., 2002.

[15] Kamien, M. I., Schwartz, N. L., *Dynamic Optimization*, North-Holland., Amsterdam., 2001.

[16] Lange, S., *Linear Algebra*, Addison-Wesley Pub. Co., Inc., New York, 1971.

[17] Lipschutz, S., *Álgebra Lineal*, McGraw-Hill, México D.F., 1991.

[18] Marsden, J., Tromba, A., *Cálculo Vectorial*, Addison-Wesley Iberoamrica, México D.F., 1986.

[19] Pierre, N. V., *Dynamical Systems* and introduction with applications in economics and biology , Berlin, 1994.

[20] Pontryagin, L. S., Boltyanskii, V. G., Gamkrelidze, R. V., Mishchenko, E. F., *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, John Wiley & Sons, New York, 1962.

[21] Sydsaeter, K., Hammond, P., *Matemáticas para el Análisis Económico*, Prentice-Hall, Madrid, 1996.

[22] Takayama, A., *Mathematical Economics*, The Dryden Press, USA, 1974.

[23] Troutman J. L., *Variational Calculus with Elementary Convexity*, Springer-Verlag, New York, 1983.

[24] van Brunt, V., *The Calculus of Variations*, Springer, New York, 2006.

[25] Villa Salvador, G., Martínez Rocha, J. M., *Cálculo diferencial de varias variables reales (Cálculo III)*, ESFM-IPN, México D.F., 1982.

[26] Villa Salvador, G., Martínez Rocha, J. M., *Cálculo infinitesimal de varias variables reales*, volumen 1, IPN, México D.F., 2001. http://www.ctrl.cinvestav.mx/ gvilla/CalculoIII.pdf

[27] Wan, F. W., *Introduction to the Calculus of Variations and its Applications*, Chapman & Hall, New York, 1995.

[28] Weber, J., *Matemáticas para administración y Economía*, Harla, México D.F., 1982.

[29] Zill, G., *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*, Thomson, México D. F., 2006.

Consideraciones finales

1. La elaboración de esta tesina requirió de la consulta de una gran variedad de fuentes bibliográficas. Las principales dificultades que se presentaron son las siguientes:

   (a) Los libros que cubren los temas más relevantes de optimización dinámica, en su mayoría, tienen un nivel dirigido al posgrado; por lo que suponen una serie de conocimientos matemáticos avanzados que el lector debe poseer para poder comprenderlos. Por tanto, su lectura es difícil; además contienen, por lo general, muy pocos ejemplos resueltos y casi no tienen ejercicios propuestos.

   (b) Los textos que tienen un nivel asequible para un estudiante de licenciatura en Economía, son poco formales, no cubren los temas más relevantes y, por el poco rigor y formalismo que presentan, terminan por ser confusos y, aún así, presentan pocos ejemplos y aplicaciones a la economía.

   (c) Los libros enfocados a matemáticos o a estudiantes de matemáticas, especialmente los que están dirigidos a no graduados, aunque son difíciles de leer por el alto rigor matemático, presentan una estructura sumamente organizada, con deducciones matemáticas claras y, por supuesto, con demostraciones de todos los resultados, con suficientes ejemplos y ejercicios; pero con pocas aplicaciones a la economía y con el obvio grado de dificultad para el estudiante que no es de la carrera de matemáicas.

   (d) Con todas estas dificultades, además, hay poca bibliografía relacionada en los aservos de nuestras bibliotecas.

   Por estas razones, se tuvieron que consultar muchas fuentes bibliográficas, tomando de unas y de otras el material que era adecuado, ya sea en teoría, ejemplos o aplicaciones. Buscando los más claros en cada tema en los ejemplos o en las aplicaciones en economía y combinando unos con otros tratando de obtener el mejor resultado en exposición. Espero que mínimamente el ahorro en tiempo –en cuanto a la búsqueda de fuentes bibliográficas– sea de utilidad al estudiante y que la bibliografía (la cual ya ha sido *filtrada* dejando las fuentes que considero son más útiles) que se incluye en esta tesina junto con el material que contiene ésta, le sirvan para la introducción a los temas más relevantes de optimización dinámica y que en un futuro pueda profundizar en estos temas sin tener que comenzar de *cero*. También, en relación a la dificultad en cuanto a la falta de aservo bibliográfico, debo mencionar que mucho me ayudó en este aspecto el buscador de libros de internet `Bookfi.org`. Albergo la esperanza de que esta tesina también pueda apoyar un poco en su labor docente al profesor en las materias de economía cuantitativa, dejando material de la misma para autoestudio, o tomando algunos de los ejemplos o aplicaciones para ejercicios, etc.

2. Un aspecto relevante que debe observarse, es que los temas desarrollados en esta tesina para el estudio de la optimización dinámica integran de manera natural los conocimientos adquiridos a lo largo de la carrera del área de economía cuantitativa (cálculo diferencial e integral de una variable, matrices, sistemas lineales de ecuaciones, valores y vectores propios, derivadas parciales, ecuaciones diferenciales –con sus enfoques cuantitativo y cualitativo– y espacios vectoriales). Por esta razón, el estudio del material en esta tesina –ya sea en su totalidad, de manera parcial e incluso en una breve *hojeada*– es una excelente manera de justificar la importancia de adquirir todo el bagaje de conocimientos matemáticos que se imparten en esta área y de cómo se aplican éstos a problemas sumamente importantes y nada triviales que, de hecho, sólo se pueden plantear y resolver mediante la teoría de optimización dinámica.

3. La primera parte de la tesina fue escrita con el propósito de proveer al lector de las bases matemáticas que se requieren para el estudio de optimización dinámica (cálculo de variaciones y control óptimo); con dos propósitos: (a) el que esta guía metodológica sea autocontenida (b) que lector no se pierda en un mundo de temas de matemáticas que no se requieren para la comprensión de la optimización dinámica elemental.

4. A pesar de que en la introducción se menciona el hecho de que en otras instituciones de educación superior se ha implementado en sus programas de estudio la teoría de Optimización Dinámica como una materia *per se* y no como un tópico entre otros del temario de alguna materia, como ocurre en la facultad de economía; no se ha pretendido establecer controversia alguna relacionada con la reforma de los planes de estudio de esta facultad. Sin embargo, nuestra facultad como parte fundamental de la máxima casa de estudios de este país, debe estar a la cabeza de las instituciones de educación superior en economía, y no se debe pasar por alto el hecho de que esta importante materia ya está siendo integrada en sus planes de estudio desde la licenciatura en otras instituciones universitarias. Mientras tanto, el material de esta tesina posiblemente pueda servir para cubrir un poco el espacio vacío que existe de esta díficil materia, al ser estudiada por cuenta propia por parte de la comunidad que esté interesada en este apasionante tema.

5. Aunque la primera parte de esta tesina –elementos básicos– contiene el marco teórico en el que se basan las aplicaciones dadas en las partes II y III de este trabajo, es pertinente aclarar que cada uno de los capítulos 1 a 4, por sí mismos, tienen una gran variedad de importantes aplicaciones directas o indirectas a la economía. A continuación se hace referencia a algunas de ellas con el objetivo de destacar la trascendencia que tienen estos temas matemáticos de economía cuantitativa:

   Espacios Vectoriales**:** No únicamente los problemas de optimización dinámica tienen sus respectivas soluciones en subconjuntos de espacios vectoriales; sino una gran variedad de problemas que se aplican en economía como son: problemas de ecuaciones en diferencias, en ecuaciones diferenciales, programación lineal, etc; que se utilizan para resolver y plantear diversos e importantes modelos económicos como el Modelo de Harrod, el Modelo General de Cobweb, el Modelo de Ingreso-Consumo-Inversión; el Modelo Macroeconómico de Domar, el Modelo de ajuste de precios de Evans y muchos otros más (Cf. [28], pp. 598-601; 575-580).

   Espacios Normados**:** El estudio de los espacios normados se utiliza para caracterizar la noción de distancia entre elementos de conjuntos –que poseen una estructura algebraica de espacio vectorial– por medio de la norma de la diferencia de esos elementos (su distancia) y con ello definir proximidad entre los elementos de estos espacios: dos elementos son próximos si su distancia es *pequeña*. Estos temas son particularmente importantes en los espacios de funciones o en los espacios de vectores con n coordenadas –los espacios $\mathbb{R}^n$–; que son los conjuntos donde se buscan soluciones para problemas de optimización dinámica o problemas de optimización de funciones reales de varias variables, respectivamente, en economía. Así, en cualquiera de estos espacios, un máximo o un mínimo relativo de una función F (un extremo local) se alcanza en un punto u_0 donde $F(u_0)$ es el valor más grande o más pequeño comparado con valores $F(u)$ para puntos u próximos al punto u_0. En el primer caso (opimización dinámica) los valores óptimos se alcanzan en funciones que satisfacen ciertas condiciones y la proximidad se mide con la norma uniforme o con otras normas en espacios de funciones; mientras que en el segundo caso (funciones reales de varias variables) los valores óptimos se alcanzan en vectores en $\mathbb{R}^n$ y la proximidad se mide con la norma natural en este espacio: la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las coordenadas del vector. Por otra parte, no todos los problemas que aparecen en economía cuantitativa se pueden resolver *exactamente*; entonces es necesario buscar una *solución aproximada* del problema. Aquí *solución aproximada* significa una función –para un problema de optimización dinámica o un problema que se resuelve solucionando una ecuación diferencial o un sistema de ecuaciones diferenciales, etc.– o un vector –para un problema de optimización de funciones de varias variables, o un problema de programación lineal o un problema en economía cuya solución se encuentra resolviendo un sistema de ecuaciones lineales, etc.–, que es próximo a la solución exacta del problema; la proximidad se define nuevamente por medio de la norma en el espacio subyacente del problema en cuestión. Este tipo de problemas –hallar soluciones aproximadas– pertenecen a una rama de las matemáticas llamada *métodos numéricos*. En cualquiera de los casos –encontrar soluciones exactas o aproximadas– la noción de norma es fundamental y por ello es que el concepto de espacio vectorial normado tiene una aplicación básica en economía cuantitativa.

Matrices, determinantes, ... **:**

Matrices**:** Las matrices –arreglos rectangulares de números reales– se pueden aplicar en economía desde situaciones muy simples como registrar, por ejemplo, las cantidades en unidades monetarias que destina un sector económico a otro en una economía (abierta o cerrada), en un una matriz insumo-producción (cf. [13], pp. 332-336) hasta determinar cuál debe ser la producción de cada sector si la demanda cambia y las condiciones económicas no (modelo de Leontieff para economía abierta) o encontrar valores de equilibrio del sistema; es decir, la relación que deben tener las producciones de cada sector de tal manera que sus ingresos igualen a sus egresos (modelo de Leontieff para economía cerrada).

Determinantes**:** Por medio de los subdeterminantes de una matriz hessiana, es posible determinar si en un punto crítico de una función de varias variables se alcanza un máximo o un mínimo relativo. También es posible determinar, con estos determinantes, si una función es convexa o cóncava en un conjunto convexo; y si en en un punto crítico en un conjunto convexo se obtiene un máximo o un mínimo absoluto. Estos son temas de aplicación de gran importancia en optimización para economía. También, por medio de determinates se calculan los valores propios de matrices hessianas y, con la no negatividad o la no positividad de éstos, es posible obtener los mismos objetivos en optimización; a su vez, los valores propios se utilizan para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales o para establecer el comportamiento cualitativo del sistema dinámico correspondiente. Éstas, entre muchas otras, son importantes aplicaciones de los determinantes en economía cuantitativa.

Sistemas lineales**:** Los sistemas lineales se aplican directamente o indirectamente en economía en una gran variedad de situaciones: ley de oferta y demanda; modelos de Leontieff (mencionados en el inciso anterior); cálculo de puntos de equilibrio en sistemas dinámicos; programación lineal; etc.

Valores y vectores propios: Los valores propios y vectores propios se utilizan para caracterizar los puntos de equilibrio de sistemas dinámicos en economía que se modelan a través de sistemas de ecuaciones diferenciales (lineales o no). Los valores propios de la matriz hessiana se utilizan para determinar la naturaleza de un (máximo o mínimo relativo) de un punto crítico de una función de varias variables, o para determinar si una función es cóncava o convexa en un conjunto convexo, o para determinar si una función alcanza un máximo o un mínimo absoluto en un punto crítico de un conjunto convexo. También los valores propios de ciertas matrices se utilizan para resolver sistemas dinámicos en economía que se modelan a través de sistema lineales de ecuaciones diferenciales.

Ecuaciones diferenciales: Las ecuaciones diferenciales se utilizan para modelar diversos fenómenos en economía, por ejemplo, los modelo macroeconómico de Domar y de ajuste de precios de Evans –citados en el primer inciso de este subitem; o para modelar, resolver o analizar cualitativamente sistemas dinámicos en economía lineales o no lineales. Algunas de estas interesantes aplicaciones se pueden encontrar en [13], capítulos 21 a 24, o en las sección 5.1.3 (p. 170) de [3].