





Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

---

FACULTAD DE CIENCIAS

CICLOS HAMILTONIANOS EN UNA  
GENERALIZACIÓN DE TORNEOS  
BIPARTITOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MATEMÁTICA

P R E S E N T A :

MARÍA DEL PILAR CANO VILA

TUTORES:

MAT. ILÁN ABRAHAM GOLDFEDER  
ORTIZ Y DRA. HORTENSIA GALEANA  
SÁNCHEZ



2014

1. Datos del alumno

Cano

Vila

María del Pilar

56 59 18 23

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Matemáticas

410076686

2. Datos del tutor

Mat

Ilán Abraham

Goldfeder

Ortiz

3. Datos del tutor

Dra.

Hortensia

Galeana

Sánchez

4. Datos del sinodal 1

Dr.

Juan José

Montellano

Ballesteros

5. Datos del sinodal 2

2

Dra.  
Mucuy Kak del Carmen  
Guevara  
Aguirre

6. Datos del sinodal 3.

Dra.  
Mika  
Olsen

7. Datos del trabajo escrito.

Ciclos hamiltonianos en una generalización de torneos bipar-  
titos.

68 p  
2014

# Ciclos hamiltonianos en una generalización de torneos bipartitos

María del Pilar Cano Vila

29 de julio de 2014



*A mi abito.*





# Agradecimientos

Quiero agradecer primero a mis abuelos, por su gran carinõ y apoyo desde pequeñã, en especial a mi abuelo Quino que siempre me dijo que no dejara de estudiar y que hiciera todos los sacrificios necesarios para lograr mis metas.

Tambi3n agradezco a mi madre Pilar, quien a pesar de que nunca le pareci3 que estudiara fuera de casa y la carrera que elegí me apoy3 de todas las maneras que pudo, por su amor constante y por ser mi madre.

Despu3s quiero agradecer a mi padre Ricardo que desde pequeñã me ha impulsado a hacer las cosas que deseo, entre ellas estudiar Matemáticas.

Tambi3n quiero agradecer a mis tutores y profesores, Hortensia e Ilán. En primera, por ser tan buenos profesores, ya que desde el primer curso qued3 enamorada de Teoría de gráficas, por abrirme la puerta a ese mundo tan bonito para mí. En segunda, por acceder a ser mis tutores de tesis, por ser tolerantes conmigo y tenerme tanta paciencia.

Por supuesto se agradece el apoyo y carinõ de mis hermanos Paulina, Bernardo y Ricardo. A mis amigos Memo, Alonso, Alex y Joaquín por hacer de mi carrera más tranquila y divertida. A Diana P. por ser mi amiga, apoyarme, hacer equipos conmigo y soportarme como roomie todo un año durante el proceso de mi tesis. A Vero, Peny, Mari y Andrés por apoyarme desde siempre aunque sea desde lejitos y virtualmente. Agradezco de manera muy especial para Diana M. que desde el primer día de clases me brindaste tu amistad y que gracias a eso mi camino durante toda la licenciatura fue muy amena a tu lado.

A mi novio Diego, por ser un gran pilar durante todo este año para la creación de mi tesis, por darme tu apoyo y cariño.

Además agradezco a mis sinodales Mucuy, Juancho y Mika; por tomarse el tiempo para leer mi tesis y en tan poco tiempo.

También agradezco a todo aquel que ya sea directa o indirectamente contribuyó en algo al desarrollo de esta tesis y que no haya mencionado ya.

Finalmente, y no por eso menos importante, agradezco en gran medida a mi hermano Javier, quien me ayudo desde un inicio a elegir mi carrera, quien estuvo a mi lado durante todo este camino y me ayudo de muchas maneras con mis materias, además me enseñó a utilizar latex. Por él es que entré al mundo de las gráficas y que me ha inspirado de gran manera durante mi carrera. Gracias Javi.

**¡Muchas gracias!**

# Índice general

Agradecimientos	III
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Resumen . . . . .	1
1.2. Marco Histórico . . . . .	2
<b>2. Teoría de gráficas</b>	<b>7</b>
2.1. Conceptos básicos . . . . .	7
2.2. Grado de un vértice . . . . .	10
2.3. Subdigráficas . . . . .	10
2.4. Caminos . . . . .	11
2.5. Conexidad . . . . .	13
2.6. Tipos especiales de digráficas . . . . .	15
<b>3. Hamiltonicidad en digráficas bipartitas semicompletas</b>	<b>19</b>
3.1. Demostración nueva de un resultado clásico en hamiltonicidad	20
<b>4. Hamiltonicidad en una <math>\mathcal{P}</math>-composición</b>	<b>31</b>
4.1. Resumen . . . . .	31
4.2. Preliminares . . . . .	32
4.3. Definición de $\mathcal{P}$ -composición y sus propiedades . . . . .	32
4.4. Misma combinación . . . . .	34

4.5. Hamiltonicidad en la $\mathcal{P}$ -composición de digráficas bipartitas ordenadas semicompletas sobre un ciclo. . . . .	37
<b>Bibliografía</b>	<b>55</b>

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Resumen

El concepto de ciclo hamiltoniano lo da por vez primera Thomas Kirkman, un año más tarde lo populariza Sir William Rowan Hamilton y en honor a él se le da el nombre de ciclo hamiltoniano.

El problema de encontrar un ciclo hamiltoniano tiene una extensa cantidad de aplicaciones. La más famosa es el problema del agente viajero, que consiste en dada una lista de ciudades y las distancias entre cada par de ellas, ¿Cuál es la ruta más corta posible que visita cada ciudad exactamente una vez y regresa a la ciudad origen?, el problema es bastante complejo, tanto que es un problema NP-completo.

Otra aplicación del ciclo hamiltoniano es el juego de Hamilton, y que por él deriva el nombre. Consiste en encontrar un ciclo hamiltoniano en los bordes de un dodecaedro, es decir, un camino de tal manera que cada vértice es visitado una sola vez y el punto final es el mismo que el punto de partida.

Cuando un cartero quiere entregar todas sus cartas de la manera más eficiente sin repetir direcciones o calles, y empezar y terminar desde la estación de correos, tendría que encontrar el ciclo hamiltoniano en su

mapa de rutas. Y así podemos encontrar más aplicaciones.

El problema de encontrar un ciclo hamiltoniano es un área de estudio interesante y complejo para la Teoría de Gráficas, pero al trabajar con torneos o cosas semicompletas se puede facilitar bastante.

Hoy en día se sabe que un torneo o una digráfica semicompleta es una digráfica hamiltoniana si cumple que sea fuertemente conexa. También sabemos que una digráfica bipartita semicompleta es hamiltoniana si cumple que sea fuertemente conexa y además posea un factor de ciclos.

Bang-Jensen define lo que son digráficas localmente semicompletas y cumplen ser hamiltonianas bajo las mismas condiciones que un torneo, más tarde define las digráficas localmente semicompletas en flechas y las  $\mathcal{H}_i$ -libres, con  $i = 1, 2, 3$  o  $4$ . Estas digráficas incluyen a las digráficas bipartitas semicompletas y resulta ser que son hamiltonianas bajo las mismas condiciones que una digráfica bipartita semicompleta.

En el estudio de estas digráficas la Dra. Hortensia Galeana y el Mat. Ilán Goldfeder en [9] definen lo que es una  $\mathcal{P}$ -composición, la cual conserva el ser bipartita y es muy parecida a las digráficas localmente semicompleta en flechas pero ya no necesariamente es semicompleta.

Al ser muy parecida a una digráfica localmente semicompleta en flechas, nos hace pensar que  $\mathcal{P}$ -composición de digráficas bipartitas ordenadas semicompletas sobre un ciclo será hamiltoniana si es fuertemente conexa y posee un factor de ciclos.

En este trabajo se resuelve dicho problema, el cual era un problema abierto. Además se da una demostración original del teorema de Gutin y de Häggkvist y Manoussakis.

## 1.2. Marco Histórico

1

El primer resultado de hamiltonicidad en un torneo se remonta al año 1934 cuando László Rédei demuestra que todo torneo posee una trayec-

---

<sup>1</sup>Todos los conceptos que se dan por conocidos en esta sección se encuentran en el siguiente capítulo

toria hamiltoniana, lo cual da partida a demostrar que todo torneo fuertemente conexo posee un ciclo hamiltoniano, es decir, que todo torneo fuertemente conexo sea hamiltoniano. Este resultado fue demostrado por Camion en 1959, estas propiedades se extienden fácilmente a digráficas semicompletas. Tenemos los siguientes teoremas:

**Teorema 1.** *Todo torneo posee una trayectoria hamiltoniana.*

**Teorema 2.** *Un torneo es hamiltoniano si y sólo si es fuertemente conexo.*

Teniendo el caso para torneos, lo más lógico es preguntarse si una digráfica bipartita es hamiltoniana si también es fuertemente conexa. El problema fue resuelto en 1984 por Gutin en ruso [1], posteriormente en inglés por Häggkvist y Manoussakis en 1989 [2], demostrando el siguiente teorema:

**Teorema 3.** *Toda digráfica bipartita semicompleta es hamiltoniana si y sólo si es fuertemente conexa y posee un factor de ciclos.*

Posteriormente, Bang-Jensen define distintos tipos de generalizaciones de torneos. Las primeras generalizaciones que da son las de digráficas localmente in-semicompleta, localmente ex-semicompleta y localmente semicompleta, las cuales se definen como sigue:

**Definición 1.** *Sea  $D$  una digráfica. Decimos que  $D$  es localmente in-semicompleta (ex-semicompleta) si para todo  $x$  vértice de  $D$ , los in-vecinos (ex-vecinos) de  $x$  inducen una digráfica semicompleta.*

**Definición 2.** *Sea  $D$  una digráfica. Decimos que  $D$  es localmente semicompleta si cumple que sea localmente in-semicompleta y ex-semicompleta a la vez.*

Teniendo estos conceptos, Bang-Jensen demuestra en 1990 [3] que una digráfica localmente semicompleta posee una trayectoria hamiltoniana si y sólo si es conexa, haciendo sospechar que pasa lo mismo que en un torneo. Tres años después, en 1993 [4] Bang-Jensen en conjunto con Huang demuestran el siguiente teorema.



**Teorema 4.** *Una digráfica localmente in-semicompleta con al menos 2 vértices es hamiltoniana si y sólo si  $D$  es fuertemente conexa.*

Este lógicamente se cumple para gráficas localmente semicompletas, lo cual demuestra nuestras sospechas.

Inmediatamente después, Bang- Jensen publica un artículo en 1993 [5] donde para poder incluir a las gráficas bipartitas semicompletas extiende el concepto de localmente semicompleta a localmente semicompleta en flechas como sigue.

**Definición 3.** *Una digráfica  $D$  es localmente semicompleta en flechas si para cada  $x \rightarrow y$  flecha en  $D$ , se cumplen las siguientes:*

- a) *Si  $u$  es in-vecino de  $x$ ,  $v$  es in-vecino de  $y$  y  $u \neq v$ , entonces  $u$  y  $v$  son adyacentes,*
- b) *Si  $u$  es ex-vecino de  $x$ ,  $v$  es ex-vecino de  $y$  y  $u \neq v$ , entonces  $u$  y  $v$  son adyacentes.*

En éste mismo artículo demuestra lo siguiente.

**Teorema 5.** *Una digráfica localmente semicompleta en flechas es hamiltoniana si y sólo si es fuertemente conexa y posee un factor de ciclos*

Es decir, demuestra el mismo teorema de Gutin, Häggkvist y Manoussakis pero extendido a más digráficas, dado que las digráficas bipartitas semicompletas es una subclase de digráficas localmente semicompletas en flechas.

Más tarde, Bang-Jensen en su búsqueda para dar una nueva generalización de las gráficas semicompletas y bipartitas semicompletas, introduce las gráficas  $\mathcal{H}_i$ -libres con  $i = 1, 2, 3$  o  $4$  (las digráficas  $\mathcal{H}_i$  se muestran en la siguiente figura 1.1), es decir, cada vez que aparezca una digráfica  $\mathcal{H}_i$  en tu digráfica, debe aparecer la flecha punteada en cualquiera de las dos direcciones que aparece en la figura 1.1.

Teniendo a las  $\mathcal{H}_i$ -libres Bang-Jensen, en un artículo que se publica en el año 2004 [6], sugirió que una digráfica  $\mathcal{H}_i$ -libre es hamiltoniana si y sólo si es fuertemente conexa y posee un factor de ciclos.

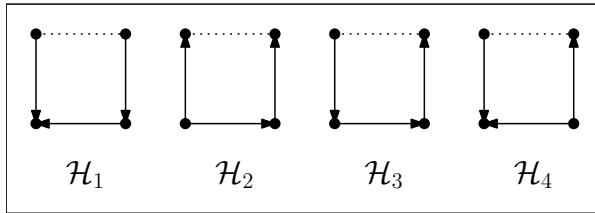


Figura 1.1: Las flechas punteadas no pueden existir y las flechas que no aparecen sí pueden existir.

En el 2009 Wang y Wang [7] definen las digráficas *localmente in-semicompletas en flechas* y *localmente ex-semicompletas en flechas*, que resultan ser las digráficas  $\mathcal{H}_1$ -libre y  $\mathcal{H}_2$ -libre respectivamente y demuestran la conjetura de Bang-Jensen para las digráficas  $\mathcal{H}_1$ -libre y  $\mathcal{H}_2$ -libre. En el mismo año, Hortensia Galeana, Ilán A. Goldfeder e Isabel Urrutia [8] dan una caracterización de digráficas 3-quasi-transitivas fuertemente conexas, que son las digráficas  $\mathcal{H}_3$ -libres, y con esa caracterización demuestran la conjetura para las  $\mathcal{H}_3$ -libres.

Hortensia Galeana e Ilán Goldfeder publicaron una clasificación de todas las clases de digráficas localmente semicompletas en flechas [9], trabajo en el cual Ilán Goldfeder queriendo caracterizar este tipo de digráficas define lo que es la  $\mathcal{P}$ -composición.

Años más tarde, Hortensia Galeana e Ilán Goldfeder demuestran la conjetura de Bang-Jensen para las digráficas  $\mathcal{H}_4$ -libres [10], quedando demostrada su conjetura para todas las digráficas  $\mathcal{H}_i$ -libres.

Así, obteniendo estos resultados, Hortensia Galeana e Ilán Goldfeder conjeturan que la  $\mathcal{P}$ -composición de digráficas bipartitas ordenadas semicompletas sobre un ciclo será hamiltoniana si es fuertemente conexas y posee un factor de ciclos.



# Capítulo 2

## Teoría de gráficas

Muchas situaciones del mundo real pueden ser descritas a partir de un diagrama que consiste en un conjunto de puntos y un conjunto de líneas que unen ciertos pares de estos puntos. Por ejemplo, los puntos pueden representar personas y las líneas parejas de amigos; o los puntos podrían representar estaciones de comunicación y las líneas los enlaces de comunicación entre ellos. Hay que notar que cómo se dibujen los puntos y las líneas es irrelevante, en general lo que se busca representar es cuáles pares son unidos por un línea y cuáles no. El tratar de abstraer matemáticamente este tipo de situaciones da pie al concepto de gráfica.

### 2.1. Conceptos básicos

Una *gráfica*  $G$  es una dupla  $(V, A)$  que consiste de un conjunto finito no vacío  $V$  de *vértices* y un conjunto  $A$ , ajeno de  $V$ , de *aristas*, junto con una *función de incidencia*  $\psi_G$  que asocia cada arista con un par de vértices de  $G$ . Si tenemos una arista  $a$  y un par de vértices  $u, v$ , tales que  $\psi_G(e) = \{u, v\}$ , entonces se dice que  $a$  *une* a los vértices  $u$  y  $v$ , y que  $u$  y  $v$  son los extremos de  $a$ . Por simplicidad, usaremos  $uv$  para referirnos a una arista que une al par de vértices  $\{u, v\}$ .

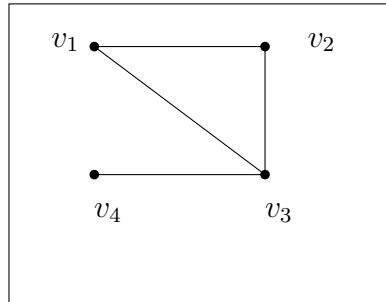


Figura 2.1: Gráfica  $G$  con  $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  y  $A(G) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_1v_3, v_3v_4\}$ .

Las gráficas reciben este nombre dado que pueden ser representadas gráficamente y por medio de esta representación se pueden comprender fácilmente varias de sus propiedades. Cada vértice puede ser representado como un punto y cada arista como una línea que conecta a los puntos que representan sus extremos. En la figura 2.1 se muestra una forma en la que se podría dibujar una gráfica  $G$ .

No hay una forma única de dibujar una gráfica porque la posición relativa de los puntos que representan los vértices y la forma de las líneas que representan a las aristas no tienen ninguna relevancia. El diagrama de una gráfica sólo sirve para representar las relaciones de *incidencia* entre sus vértices y aristas, aunque muchas veces nos referimos a él como la gráfica misma y así también a las líneas como sus aristas y a los puntos como sus vértices.

Se dice que los extremos de una arista son *incidentes* en la arista, así como la arista es incidente a sus extremos. Dos vértices incidentes en la misma arista decimos que son *adyacentes*, así como dos aristas incidentes en un mismo vértice. Dos vértices adyacentes también son llamados *vecinos*.

Cuando los extremos de una arista es solamente un vértice, diremos

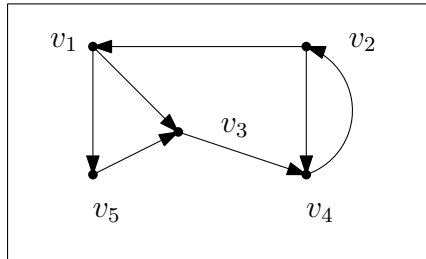


Figura 2.2: Digráfica  $D$  con  $V(D) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$  y  $F(D) = \{(v_2, v_1), (v_1, v_5), (v_1, v_3), (v_2, v_4), (v_4, v_2), (v_3, v_4), (v_5, v_3)\}$ .

que la arista es un *lazo*. Cuando dos aristas distintas tienen los mismos extremos les llamaremos *aristas paralelas*.

Una gráfica es *simple* si no contiene lazos ni aristas paralelas. A partir de la siguiente sección y a lo largo de la tesis sólo se usarán gráficas simples por lo que al decir gráfica se refiere a una gráfica simple.

Una *gráfica dirigida* o *digráfica*  $D$  consiste de un conjunto finito no vacío  $V(D)$  de objetos llamados vértices; junto con una colección de pares ordenados de distintos vértices llamados *flechas* de  $D$ , denotado por  $F(D)$ . Es decir, es una gráfica en la cual sus aristas tienen dirección. Nosotros trabajaremos exclusivamente con digráficas.

Si  $f = (u, v) \in F(D)$ , diremos que  $f$  *incide desde*  $u$  y que  $f$  *incide hacia*  $v$ ; diremos que  $u$  es *adyacente hacia*  $v$  y  $v$  es *adyacente desde*  $u$ . Si no sabemos la dirección de la flecha pero existe una flecha que une a  $u$  y a  $v$ , simplemente diremos que son adyacentes. Por comodidad, usaremos  $u \rightarrow v$  para referirnos a una flecha  $(u, v)$ . Diremos que  $v$  es *ex-vecino* de  $u$ , si  $u$  es adyacente hacia  $v$  y al conjunto que contiene a todos los ex-vecinos de  $u$  lo llamaremos *ex-vecindad* de  $u$ ; del mismo modo diremos que  $v$  es *in-vecino* de  $u$  si  $u$  es adyacente desde  $v$  y al conjunto que contiene a todos los in-vecinos de  $u$  lo llamaremos *in-vecindad* de  $u$ .

Podemos observar un ejemplo de una digráfica en la figura 2.2

## 2.2. Grado de un vértice

El *grado* de un vértice  $v$  en un gráfica  $G$  es denotado con  $d_G(v)$  y es el número de aristas en las que es incidente  $v$ . Se usa el mismo concepto para digráfica, pero en este caso son todas las flechas que inciden en el vértice  $v$  y se denota con  $d_D(v)$ .

En digráficas existen otros conceptos para el grado de un vértice, el *in-grado* de un vértice  $v$  en una digráfica  $D$  se denota por  $d_D^-(v)$  y es el número de flechas que inciden hacia  $v$ , es decir, las flechas que le llegan a  $v$ ; el *ex-grado* de un vértice  $v$  en una digráfica  $D$  se denota por  $d_D^+(v)$  y es el número de flechas que inciden desde  $v$ , es decir, el número de flechas que salen de  $v$ .

**Teorema 6.** *Dada una digráfica  $D = (V, F)$ :*

$$\sum_{v \in V} d_D^-(v) = \sum_{v \in V} d_D^+(v) = |F|$$

*Demostración.* Cada flecha incide desde (respectivamente hacia) exactamente un vértice, por lo que cada flecha está contada exactamente una vez en  $\sum_{v \in V} d_D^-(v)$  ( $\sum_{v \in V} d_D^+(v)$  respectivamente).  $\square$

## 2.3. Subdigráficas

Dadas dos digráficas  $D = (V(D), F(D))$  y  $H = (V(H), F(H))$ , se dice que  $H$  es una *subdigráfica* de  $D$  si  $V(H) \subseteq V(D)$  y  $F(H) \subseteq F(D)$ . Se dice que  $H$  es una *subdigráfica generadora* de  $D$  si  $V(D) = V(H)$ .

Consideremos la digráfica  $D = (V(D), F(D))$  y sea  $S$  un *subconjunto no vacío* de  $V(D)$ . La digráfica  $D[S]$  *inducida* por  $S$  está definida como sigue:  $V(D[S]) = S$ , la flecha  $u \rightarrow v$  está en  $D[S]$  si  $u, v \in S$  y la flecha  $u \rightarrow v$  está en  $D$ . También se dice que  $D[S]$  es una digráfica inducida de  $D$ .

Se dice que  $G_D$  es la *gráfica subyacente* de  $D$ , si  $V(G_D) = V(D)$  y  $uv \in A(G_D)$  si al menos una de las siguientes se cumple;  $u \rightarrow v$  está en  $D$  o  $v \rightarrow u$  está en  $D$ .

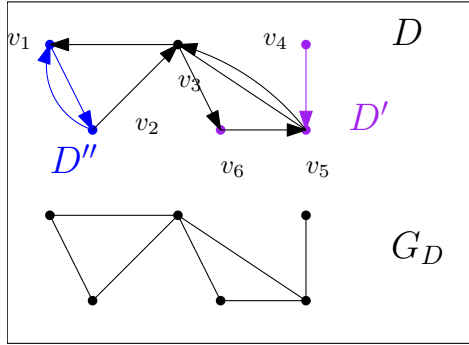


Figura 2.3:  $D$  es un digráfica,  $D'$  es una subdigráfica de  $D$ ,  $D''$  es un subdigráfica inducida de  $D$  y  $G_D$  es la gráfica subyacente de  $D$ .

La figura 2.3 muestra un ejemplo de subdigráfica, subdigráfica inducida y gráfica subyacente.

## 2.4. Caminos

Un *camino* en una digráfica  $D$  es una sucesión de los vértices de  $D$  de tal manera que dos vértices son consecutivos si son adyacentes en  $D$ . Un *camino dirigido* es un camino de  $D$  de tal manera que si  $v$  es consecutivo de  $u$  en el camino, entonces  $u \rightarrow v$  está en  $D$ . La *longitud* de un camino  $C = (u_0, u_i, \dots, u_n)$  es el  $n$ .

En la figura 2.3 un camino podría ser  $C = (v_1, v_2, v_3, v_1, v_3, v_6, v_5)$  y tiene longitud 6 y un camino dirigido  $C = (v_1, v_2, v_1, v_2, v_3, v_5)$ .

Un *paseo* (*paseo dirigido*) es un camino (camino dirigido) en el que no se repiten flechas. De igual manera, una *trayectoria* (*trayectoria dirigida*) es un paseo (paseo dirigido) en el que no se repiten vértices.

Un *camino cerrado* (*camino cerrado dirigido*) empieza y termina en el mismo punto. Un *ciclo* (*ciclo dirigido*) en una digráfica  $D$  es un camino cerrado (camino cerrado dirigido), de longitud mayor o igual a 2, en el



que sólo se repite el primer y último vértice.

Un ciclo dirigido en la figura 2.3 es  $C = (v_1, v_2, v_3)$ , también  $C = (v_1, v_2, v_1)$ .

**Teorema 7.** *Todo camino cerrado  $C$  de longitud impar contiene un ciclo de longitud impar.*

*Demostración.* Procediendo por inducción sobre la longitud de  $C$ .

Si la longitud de  $C$  es 3, entonces  $C = (u_0, u_1, u_2, u_0)$ ,  $u_0 \neq u_1$ ,  $u_1 \neq u_2$  y  $u_2 \neq u_0$  pues son adyacentes dos a dos y no admitimos lazos.

(H.I) Todo camino cerrado de longitud impar menos a  $2n + 1$  contiene un ciclo de longitud impar.

P.D. Todo camino cerrado de longitud  $2n + 1$  contiene un ciclo de longitud impar.

Sea  $C = (u_0, u_1, \dots, u_{2n}, u_0)$  un camino cerrado de longitud  $2n + 1$ .

Caso 1) Si  $u_i \neq u_j$  para cada  $i \neq j$ ,  $i, j \in \{0, 1, \dots, 2n\}$ ; entonces  $C$  es un ciclo de longitud impar.

Caso 2) Existe  $i \neq j$  tal que  $u_i = u_j$ .

Sin pérdida de generalidad supongamos que  $i < j$ , tomamos  $C_1 = (u_i, u_{i+1}, \dots, u_{j-1}, u_j = u_i)$  y  $C_2 = (u_0, u_1, \dots, u_{i-1}, u_i = u_j, u_{j+1}, \dots, u_{2n}, u_0)$ .  $C_1$  y  $C_2$  son caminos cerrados con longitud menor a  $2n + 1$ .

Luego, como la longitud de  $C$  es igual a la suma de las longitudes de  $C_1$  y  $C_2$ , y la longitud de  $C$  es impar, se sigue que necesariamente una de las longitudes ya sea de  $C_1$  o de  $C_2$  es impar y la otra es par.

Sin pérdida de generalidad supongamos que la longitud de  $C_1$  es impar, además es menor a  $2n + 1$ , entonces por H.I.  $C_1$  contiene un ciclo de longitud impar.

Por lo tanto  $C$  contiene un ciclo de longitud impar. □

También diremos que  $T$  es una *trayectoria hamiltoniana dirigida* de la digráfica  $D$  si  $V(T) = V(D)$  y  $C$  es un *ciclo hamiltoniano dirigido* de  $D$  si  $V(C) = V(D)$ . Por último, se dice que  $D$  es una *digráfica hamiltoniana* si posee un ciclo hamiltoniano dirigido. Para nosotros el concepto de trayectoria hamiltoniana dirigida y ciclo hamiltoniano dirigido serán de suma importancia.

En la figura 2.4 se da un ejemplo de digráfica hamiltoniana.

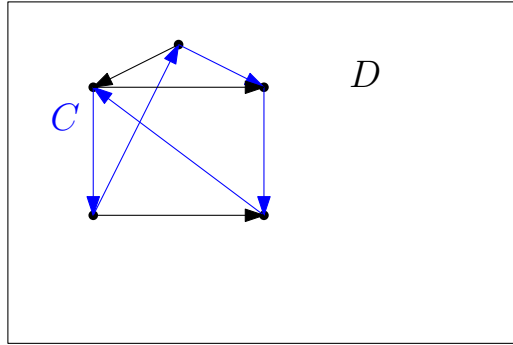


Figura 2.4:  $D$  es una digráfica hamiltoniana y  $C$  es su ciclo hamiltoniano.

## 2.5. Conexidad

Para empezar, una gráfica es conexa si para cualesquiera dos vértices  $u$  y  $v$  existe una trayectoria que los une. En digráficas existen tres conceptos de conexidad: *conexidad débil*, *conexidad unilateral* y *conexidad fuerte*.

Decimos que una digráfica  $D$  es *débilmente conexa* o *conexa* si  $G_D$  es conexa, es decir,  $D$  es débilmente conexa si para cualesquiera dos vértices  $v$  y  $u$  existe una  $uv$ -trayectoria (una trayectoria que empieza en  $u$  y termina en  $v$ ) en  $D$ .

Diremos que  $D$  es *unilateral conexa* si para cualesquiera dos vértices  $u$  y  $v$  en  $D$ , existe una  $uv$ -trayectoria dirigida o una  $vu$ -trayectoria dirigida.

Decimos que  $D$  es *fuertemente conexa* si para cualesquiera dos vértices  $u$  y  $v$  en  $D$ , existe una  $uv$ -trayectoria dirigida y una  $vu$ -trayectoria dirigida. Notemos que una digráfica fuertemente conexa es una digráfica unilateral conexa pero no viceversa.

En la figura 2.6 se muestra un ejemplo de digráfica débilmente conexa, unilateral conexa y fuertemente conexa.

**Observación 1.** Notemos que si una digráfica  $D$  es hamiltoniana entonces  $D$  es fuertemente conexa, pues si tomamos 2 vértices en  $D$   $u, v$ ,

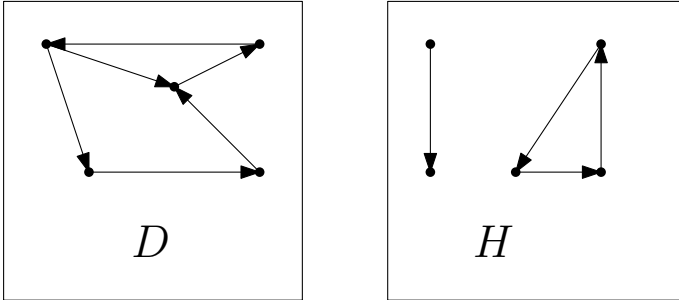


Figura 2.5:  $D$  es una digráfica conexa y  $H$  es una digráfica disconexa.

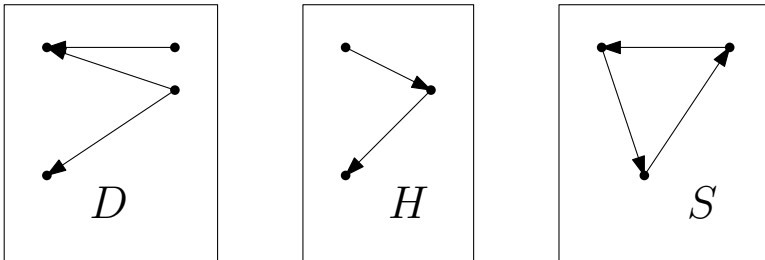


Figura 2.6:  $D$  es una digráfica débilmente conexa,  $H$  es una digráfica unilateralmente conexa y  $S$  es una digráfica fuertemente conexa.

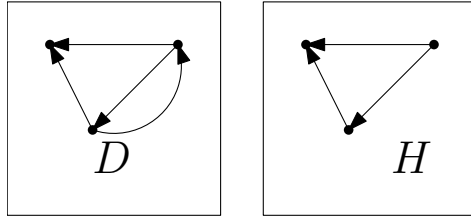


Figura 2.7:  $D$  es una digráfica semicompleta y  $H$  es un torneo.

sabemos que existe un ciclo dirigido  $C$  tal que  $V(C) = V(D)$  por lo que  $T_1 = (u, C, v)$  es un camino dirigido de  $u$  a  $v$  en  $D$  y  $T_2 = (v, C, u)$  es un camino dirigido de  $v$  a  $u$ .

Si  $D$  es una digráfica en la cual existen dos vértices  $u$  y  $v$  tales que no existe una  $uv$ -trayectoria que los une, decimos que  $D$  es una digráfica *disconexa*, es decir, cuando  $D$  no es conexa. En la figura 2.5 se muestra un ejemplo de digráfica conexa y una de digráfica disconexa.

Cuando una digráfica sea conexa vamos a decir que la *distancia* de dos vértices  $u$  y  $v$  en  $D$ , denotado por  $d(u, v)$ , es la longitud de la  $uv$ -trayectoria de longitud mínima.

## 2.6. Tipos especiales de digráficas

Existen diferentes tipos de digráficas que juegan un papel importante en la teoría de gráficas, a continuación se mencionan algunas que serán usadas a lo largo de la tesis.

Una digráfica  $D = (V(D), F(D))$  se dice que es *semicompleta* si para cada par de vértices  $u$  y  $v$  se tiene que existe  $u \rightarrow v$  o existe  $v \rightarrow u$ . Un *torneo* es una digráfica semicompleta en la que para cualesquiera dos vértices  $u$  y  $v$  existe una y sólo una de las siguientes,  $u \rightarrow v$  ó  $v \rightarrow u$ . En la figura 2.7 se muestran ejemplos de digráficas semicompletas y de un torneo.

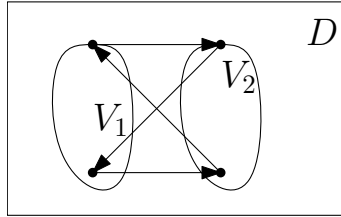


Figura 2.8:  $D$  es una digráfica bipartita semicompleta.

Decimos que un conjunto  $V'$  de los vértices de una digráfica  $D = (V(D), F(D))$  es *independiente* si para cualesquiera dos vértices  $u$  y  $v$  en  $V'$  no existe una flecha que los une. Una digráfica  $D = (V(D), F(D))$  es una *digráfica bipartita* si existe una partición de sus vértices en dos conjuntos  $V_1$  y  $V_2$  y dichos conjuntos son independientes. En la figura 2.8 se da un ejemplo de una digráfica bipartita.

**Teorema 8.** *Una digráfica es bipartita si y sólo si no tiene ciclos de longitud impar.*

*Demostración.* Sean  $D = (V(D), F(D))$  una digráfica bipartita,  $(V_1, V_2)$  su bipartición y  $C = (u_0, u_1, \dots, u_{n-1}, u_0)$  un ciclo en  $G$ .

Sin pérdida de generalidad podemos asumir que  $u_0 \in V_1$ , debido a que  $u_0$  y  $u_1$  son adyacentes y dado que  $D$  es bipartita, entonces  $u_1 \in V_2$ . En general tenemos que  $u_{2k} \in V_1$  y  $u_{2k+1} \in V_2$ . Dado que  $u_{n-1}$  y  $u_0$  son adyacentes tenemos que  $u_{n-1} \in V_2$ , por tanto  $n - 1 = 2k + 1$  para algún valor de  $k$  y se sigue que  $C$  tiene longitud par.

Para demostrar la otra implicación basta con probarlo para digráficas conexas. Sea entonces  $D$  una digráfica conexa sin ciclos de longitud impar, para algún  $u \in V$  arbitrario, definimos la partición  $(V_1, V_2)$  como sigue:

$$V_1 = \{x \in V \text{ tal que } d(x, u) \text{ es par}\}$$

$$V_2 = \{y \in V \text{ tal que } d(y, u) \text{ es impar}\}$$

Ahora veamos que  $(V_1, V_2)$  es una bipartición de  $V$ . Sean  $v$  y  $w$  dos vértices de  $V_1$ ,  $P$  un  $uv$ -camino de longitud mínima y  $Q$  un  $uw$ -camino de longitud mínima. Sea  $u'$  el último vértice común en  $P$  y  $Q$ . Sea  $P'$  un  $vu'$ -camino de longitud mínima y  $Q'$  un  $u'w$ -camino de longitud mínima. Vemos que las longitudes de  $P'$  y  $Q'$  deben tener la misma paridad, por tanto al concatenar  $P'Q'$  obtenemos un camino de longitud par. Suponemos que si  $v$  y  $w$  son adyacentes lo que implica que  $C = P'Q' \cup (v, w)$  es un camino cerrado de longitud impar en  $D$ , el cual contiene un ciclo de longitud impar, contradiciendo la hipótesis. Por lo tanto  $(V_1, V_2)$  es una bipartición de  $V(D)$ .  $\square$

Vamos a decir que una digráfica bipartita es *bipartita semicompleta* si para cualesquiera dos vértices  $u \in V_1$  y  $v \in V_2$ , existe al menos una de las siguientes;  $u \rightarrow v$  o  $v \rightarrow u$ . En la figura 2.8  $D$  es una digráfica bipartita semicompleta.

De ahora en adelante como sólo trabajaremos con cosas dirigidas, nos referiremos como camino, paseo, trayectoria, camino cerrado y ciclo a camino dirigido, paseo dirigido, trayectoria dirigida, camino cerrado dirigido y ciclo dirigido, respectivamente.



## Capítulo 3

# Hamiltonicidad en digráficas bipartitas semicompletas

El primero en demostrar qué debe cumplir una digráfica bipartita semicompleta para ser hamiltoniana fue Gutin en 1984 [1] pero en ruso. Más tarde, sin saber que Gutin ya había dado y demostrado qué debe cumplir una digráfica bipartita semicompleta para ser hamiltonianas, Manoussakis y Häggkvist dan la misma en 1989 [2]. Dicho teorema pide que las digráficas bipartitas semicompletas sean fuertemente conexas y posean un factor de ciclo.

En esta sección se da una demostración útil de dicho teorema, esta demostración es bonita pues es constructiva.



### 3.1. Demostración nueva de un resultado clásico en hamiltonicidad

Las siguientes definiciones serán utilizadas continuamente a lo largo de la tesis.

**Definición 4.** Sea  $D$  una digráfica y sean  $C_1$  y  $C_2$  ciclos en  $D$ , donde  $C_1 = (u_0, u_1, \dots, u_{n-1}, u_0)$  y  $C_2 = (v_0, v_1, \dots, v_{m-1}, v_0)$ . Decimos que entre  $C_1$  y  $C_2$  hay un par bueno de flechas si existen  $i$  y  $j$  donde  $0 \leq i \leq n-1$  y  $0 \leq j \leq m-1$  tales que  $u_i \rightarrow v_j$  y  $v_{j-1} \rightarrow u_{i+1}$  están en  $F(D)$ .

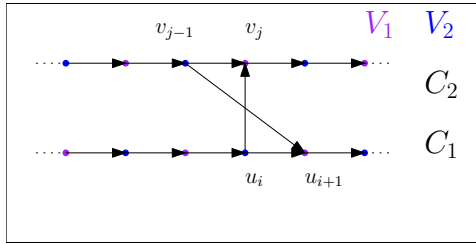


Figura 3.1: Ejemplo de un par bueno de flechas

**Definición 5.** Sea  $D$  una digráfica, decimos que  $D$  tiene un factor de ciclos si existe una partición de los vértices de  $D$  tal que la subdigráfica inducida generadora por los vértices de cada parte de la partición forman un ciclo.

La siguiente proposición va a jugar un papel muy importante durante todo este trabajo.

**Proposición 1.** Sea  $D$  una digráfica que posee un factor en 2 ciclos tal que entre los 2 ciclos hay un par bueno de flechas, entonces  $D$  posee un ciclo hamiltoniano.

*Demostración.* Sean  $C_1 = (u_0, u_1, \dots, u_{n-1}, u_0)$  y  $C_2 = (v_0, v_1, \dots, v_{m-1}, v_0)$  dos ciclos que forman un factor en 2 ciclos de  $D$  tal que entre los 2 ciclos

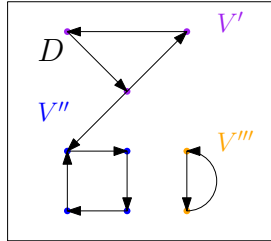


Figura 3.2: Ejemplo de un factor de ciclos.  $V'$ ,  $V''$  y  $V'''$  forman el factor

hay un par bueno de flechas, entonces existen  $i$  y  $j$  donde  $0 \leq i \leq n - 1$  y  $0 \leq j \leq m - 1$  tales que  $u_i \rightarrow v_j$  y  $v_{j-1} \rightarrow u_{i+1}$  están en  $F(D)$ , por lo que  $C = (u_i, v_j) \cup (v_j, C_2, v_{j-1}) \cup (v_{j-1}, u_{i+1}) \cup (u_{i+1}, C_1, u_i)$  es un ciclo hamiltoniano de  $D$ .

□

La figura 3.3 muestra como se forma el ciclo hamiltoniano cuando tienes un par bueno de flechas y un factor de dos ciclos.

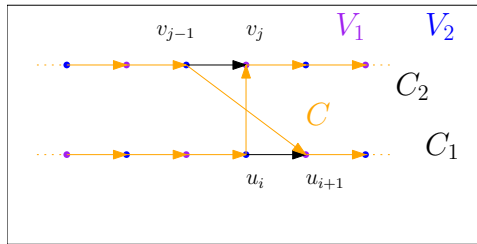


Figura 3.3: Ejemplo del ciclo hamiltoniano de un factor de dos ciclos con un par bueno de flechas

Sea  $D$  una digráfica, sea  $S$  un conjunto de vértices de  $D$  y  $x \in V(D) - S$ . Denotamos por  $(S, x)$  y por  $(x, S)$  al conjunto de flechas que van desde  $S$  hacia  $x$  y al conjunto de flechas que van desde  $x$  hacia  $S$ , respectivamente.

**Lema 1.** *Toda digráfica bipartita semicompleta fuertemente conexa con un factor en 2 ciclos es hamiltoniana.*

*Demostración.* Sea  $D$  una digráfica bipartita semicompleta fuertemente conexa con un factor de 2 ciclos. Sean  $C_1 = (u_0, u_1, \dots, u_{n-1}, u_0)$  y  $C_2 = (v_0, v_1, \dots, v_{m-1}, v_0)$  los ciclos que forman el factor de 2 ciclos de  $D$ , notemos que tanto  $n$  como  $m$  son números pares por ser  $D$  bipartita.

Como  $D$  es fuertemente conexa existe una  $V(C_1) \rightarrow V(C_2)$  flecha; sin pérdida de generalidad sea  $u_0 \rightarrow v_0$  tal flecha.

**Observación 2.**  $u_i \in V(C_1)$  y  $v_j \in V(C_2)$  son adyacentes en  $D$  si y sólo si los índices tienen la misma paridad. Esto por ser  $D$  una digráfica bipartita semicompleta y por como definimos a  $C_1$  y a  $C_2$ .

Por la proposición 1 podemos suponer que no hay un par bueno de flechas entre  $C_1$  y  $C_2$  pues en caso de haber un par bueno de flechas  $D$  es hamiltoniana.

**Observación 3.** Para todo  $x \in V(C_1)$  se tiene que  $(V(C_2), x) \neq \emptyset$  y  $(x, V(C_2)) \neq \emptyset$ .

Supongamos por contradicción que existe  $u \in V(C_1)$  tal que una y sólo una de las siguientes opciones sucede:

- a) Para cada  $y \in V(C_2)$  adyacente a  $u$ , sólo existe  $u \rightarrow y$ ;
- b) Para cada  $y \in V(C_2)$  adyacente a  $u$ , sólo existe  $y \rightarrow u$ .

-Si pasa a)

Sin pérdida de generalidad sea  $u = u_0$ . Sea  $i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$  el menor índice tal que  $v_j \rightarrow u_i$  está en  $D$ , para algún  $v_j \in V(C_2)$ ;  $i$  existe pues como  $D$  es fuertemente conexa sabemos que existe una  $x \rightarrow y$  en  $F(D)$  tal que  $x \in V(C_2)$  y  $y \in V(C_1)$ , además  $i > 0$ , ya que  $y \neq u$  por definición de  $u$ . Por elección de  $i$  se tiene que  $u_{i-1} \rightarrow v_{j+1}$  está en  $D$ , por lo que entre  $C_1$  y  $C_2$  hay un par bueno de flechas, lo cual es una contradicción. (La figura 3.4 muestra lo que sucede en este caso)

-Si sucede b)

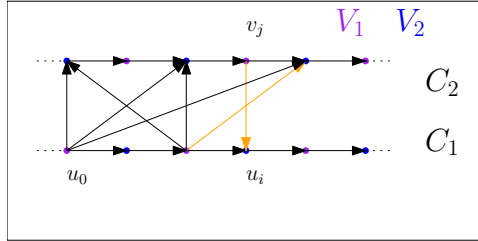


Figura 3.4:

Sin pérdida de generalidad sea  $u = u_{n-1}$ . Sea  $i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$  el mayor índice tal que  $u_i \rightarrow v_j$  está en  $D$  para algún  $v_j \in V(C_2)$ ;  $i$  existe, pues como  $D$  es fuertemente conexa sabemos que existe una  $y \rightarrow x$  en  $F(D)$  tal que  $y \in V(C_2)$  y  $x \in V(C_1)$ , además  $i < n-1$  ya que  $y \neq u$  por definición de  $u$ . Por elección de  $i$  se tiene que  $v_{i-1} \rightarrow u_{j+1}$  está en  $D$ , por lo que entre  $C_1$  y  $C_2$  hay un par bueno de flechas, lo cual es una contradicción. (La figura 3.5 muestra lo que sucede en este caso)

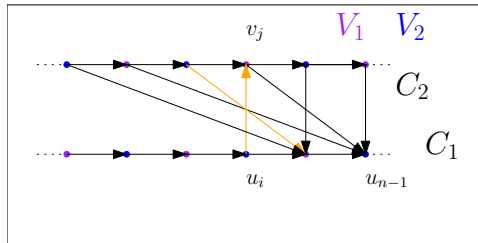


Figura 3.5:

Análogamente para todo  $y \in V(C_2)$  se tiene que  $(V(C_1), y) \neq \emptyset$  y  $(y, V(C_1)) \neq \emptyset$ .

**Observación 4.** Veamos que  $n > 2$  y  $m > 2$ .

Por reducción al absurdo, supongamos sin pérdida de generalidad que  $m \leq 2$ , entonces por ser  $D$  bipartita y como es la longitud de un ciclo se

tiene que  $m = 2$ . Por la observación 3 sabemos que existe  $v_0 \rightarrow u$  es  $F(D)$  para algún  $u \in V(C_1)$ . Sea  $i \in \{1, 2, \dots, m - 1\}$  el menor índice tal que  $v_0 \rightarrow u_i$ , como  $u_{i-2} \rightarrow v_0$  está en  $D$  y no hay un par bueno de flechas se tiene que  $u_{i-1} \rightarrow v_1$  existe, lo cual es una contradicción pues  $u_{i-1} \rightarrow v_1$  y  $v_0 \rightarrow u_i$  son un par de flechas bueno.

Por lo tanto  $n > 2$  y  $m > 2$ .

Sea  $j_0 \in \{2k + 1 : 0 \leq k \leq (m - 2)/2\}$  el mayor índice tal que  $v_{j_0} \rightarrow u_1$  está en  $D$ .

**Afirmación 1.**  $v_{j_0}$  existe y  $j_0 \neq m - 1$ .

Existe por la observación 3 y  $j_0 \neq m - 1$  pues de ser iguales  $u_0 \rightarrow v_0$  y  $v_{m-1} \rightarrow u_1$  es un par de flechas bueno, lo cual es una contradicción.

Sea  $T_0 = (u_0, v_0) \cup (v_0, C_2, v_{j_0}) \cup (v_{j_0}, u_1)$  una trayectoria en  $D$  (en la figura 3.6 se muestra como se forma la trayectoria  $T_0$ ).

1)  $u_2 \rightarrow v_{j_0+1}$  está en  $D$ , ya que en caso contrario tendríamos que  $v_{j_0+1} \rightarrow u_2$ . Ahora, por la definición de  $v_{j_0}$  se tiene que  $u_1 \rightarrow u_{j_0+2}$ , entonces entre  $C_1$  y  $C_2$  hay un par bueno de flechas, lo que contradice nuestra hipótesis. En la figura 3.6 podemos observar lo que sucede aquí.

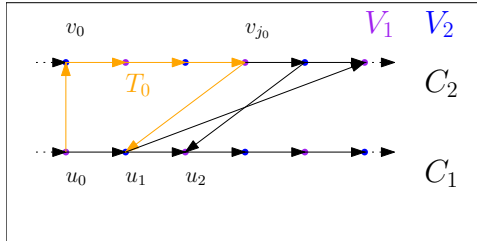


Figura 3.6:

Sea  $i_0$  el mayor índice  $i \in \{2t : 1 \leq t \leq (n - 2)/2\}$  tal que  $u_{i_0} \rightarrow v_{j_0+1}$  (existe pues al menos existe  $i = 2$ ). Sea  $T_1 = T_0 \cup (u_1, C_1, u_{i_0}) \cup (u_{i_0}, v_{j_0+1})$  una trayectoria en  $D$ .

**Afirmación 2.** Existe un  $j \in \{2k + 1 : (j_0 + 1)/2 \leq k \leq (m - 2)/2\}$  tal que  $v_j \rightarrow u_{i_0+1}$  está en  $D$ . En la figura 3.7 podemos observar lo que dice la afirmación.

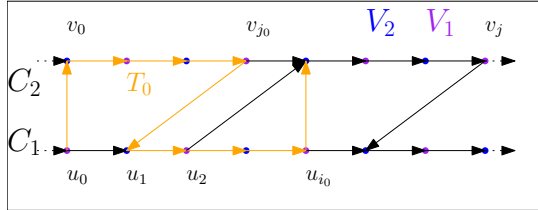


Figura 3.7:

Supongamos que no existe tal  $j$ .

**Observación 5.** Si no existe tal  $j$ , entonces  $i_0 + 1 = n - 1$ .

Por reducción al absurdo. Si  $i_0 + 1 \neq n - 1$ , entonces existe  $u_{i_0+2} \in V(C_1)$ , por la elección de  $i_0$  se tiene que  $v_{j_0+1} \rightarrow u_{i_0+2}$  y como suponemos que no existe tal  $j$  se tiene que  $u_{i_0+1} \rightarrow v_{j_0+2}$  lo cual es una contradicción pues entre  $C_1$  y  $C_2$  habría un par bueno de flechas. Por lo que  $i_0+1 = n-1$ .

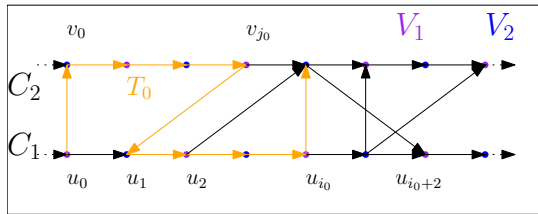


Figura 3.8:

Luego, como  $i_0 + 1 = n - 1$  y no existe  $j \in \{2k + 1 : (j_0 + 1)/2 \leq k \leq (m - 2)/2\}$  tal que  $v_j \rightarrow u_{n-1}$  se tiene que  $u_{n-1} \rightarrow v_{j_0+2}$ , entonces independientemente de si  $u_0 \rightarrow v_{j_0+1}$  o  $v_{j_0+1} \rightarrow u_0$ ; se tiene que habría un par bueno de flechas, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto existe  $j \in \{2k + 1 : (j_0 + 1)/2 \leq k \leq (m - 2)/2\}$  tal que  $v_j \rightarrow u_{i_0+1}$  está en  $D$ .

2) Sea  $j_1$  el mayor índice  $j \in \{2k + 1 : (j_0 + 1)/2 \leq k \leq (m - 2)/2\}$  que cumple que  $v_{j_1} \rightarrow u_{i_0+1}$ .

(a) Si  $j_1 = m - 1$ , entonces  $C = T_1 \cup (v_{j_0+1}, C_2, v_{j_1} = v_{m-1}) \cup (v_{m-1}, u_{i_0+1}) \cup (u_{i_0+1}, C_1, u_0)$  es un ciclo hamiltoniano.

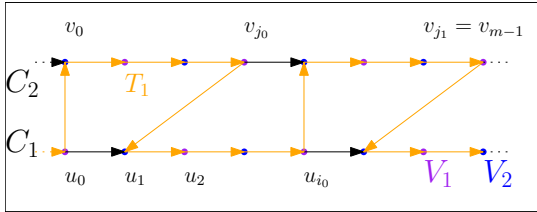


Figura 3.9: (a)

(b.1) Si  $j_1 \neq m - 1$ , sea  $T_2 = T_1 \cup (v_{j_0+1}, C_2, v_{j_1}) \cup (v_{j_1}, u_{i_0+1})$  una trayectoria en  $D$ .

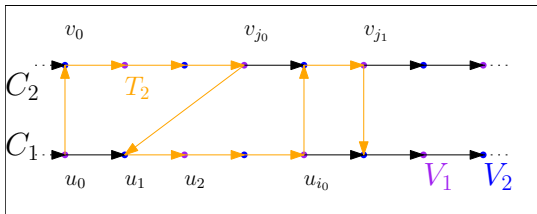


Figura 3.10: (b.1)

(b.2) Si  $j_1 \neq m - 1$  y además  $i_0 + 1 = n - 1$ .

Como  $j_1 \neq m - 1$ , entonces  $u_{n-1} \rightarrow v_{j_1+2}$  está en  $D$  por definición de  $v_{j_1}$  y como no hay un par bueno de flechas se tiene que  $u_0 \rightarrow v_{j_1+1}$  está en  $D$ . Sea  $C = (u_0, v_{j_1+1}) \cup (v_{j_1+1}, C_2, v_{j_0}) \cup (v_{j_0}, T_2, u_{i_0+1} = u_{n-1}) \cup (u_{n-1}, u_0)$  un ciclo hamiltoniano.

En las figuras 3.9, 3.10 y 3.11 podemos observar lo que sucede en cada uno de los caso anteriores.

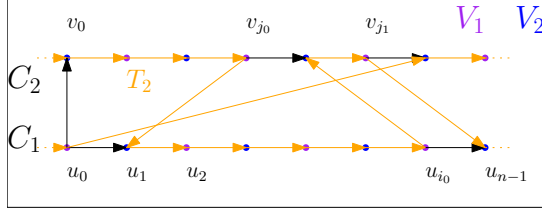


Figura 3.11: (b.2)

3) Si sólo sucede (b.1) en 2), podemos encontrar análogamente como en 1) el mayor índice  $i \in \{2t : (i_0 + 2)/2 \leq t \leq (m - 2)/2\}$  al cual denotaremos por  $i_1$ , tal que  $u_{i_1} \rightarrow v_{j_1+1}$  está en  $D$ .

Sea  $T_3 = T_2 \cup (u_{i_0+1}, C_1, u_{i_1}) \cup (u_{i_1}, v_{j_1+1})$  una trayectoria en  $D$ .

4) Si no existe  $j \in \{2k + 1 : (j_1 + 1)/2 \leq k \leq (m - 2)/2\}$  tal que  $v_j \rightarrow u_{i_1+1}$ ; por la observación 4 si sucede eso se tiene que  $i_1 + 1 = n - 1$ ; pues en caso contrario habría un par bueno de flechas.

Así pues, como no existe  $j \in \{2k + 1 : (j_1 + 1)/2 \leq k \leq (m - 2)/2\}$  tal que  $v_j \rightarrow u_{n-1}$ , entonces  $u_{n-1} \rightarrow v_{j_1+2}$ . Por lo tanto  $u_0 \rightarrow v_{j_1+1}$  porque no hay par bueno de flechas.

Vemos que  $C = (u_0, v_{j_1+1}) \cup (v_{j_1+1}, C_2, v_{j_0}) \cup (v_{j_0}, T_3, u_{i_0+1}) \cup (u_{i_0+1}, C_1, u_0)$  es un ciclo hamiltoniano.

Si existe  $j \in \{2k + 1 : (j_1 + 1)/2 \leq k \leq (m - 2)/2\}$  tal que  $v_j \rightarrow u_{i_1+1}$ , análogamente como en 2) podemos construir ya sea un ciclo hamiltoniano o una trayectoria más grande  $T_4$ .

Así sucesivamente construimos un ciclo hamiltoniano en  $D$ , ya que  $D$  es una digráfica finita por lo que en algún momento llegamos a  $u_{n-1}$  ó  $v_{m-1}$  lo cual se reduce a 2.a), 2.b) y 4).

Por lo tanto  $D$  es hamiltoniana. □

**Teorema 9.** *Toda digráfica bipartita semicompleta es hamiltoniana si y sólo si es fuertemente conexa y tiene un ciclo factor.*

*Demostración.* Sea  $D$  una digráfica bipartita semicompleta.



Supongamos que  $D$  es hamiltoniana, entonces  $D$  es fuertemente conexa pues si tomamos dos vértices en  $D$   $u$  y  $v$ , sabemos que existe un ciclo dirigido  $C$  tal que  $V(C) = V(D)$  por lo que  $T_1 = (u, C, v)$  es un camino dirigido de  $u$  a  $v$  en  $D$  y  $T_2 = (v, C, u)$  es un camino dirigido de  $v$  a  $u$ . Luego  $V(C)$  es una partición de los vértices de  $D$  tal que cada elemento de la partición posee un ciclo que pasa por todos sus vértices, por lo que  $D$  tiene un ciclo factor.

Inversamente, supongamos que  $D$  es fuertemente conexa y que tiene un factor de  $k$  ciclos.

Por inducción sobre  $k$ .

### Caso base)

Caso 1) Si  $k = 1$  entonces  $\{V(D)\}$  es la partición de los vértices de  $D$  y la inducida por  $V(D)$  tiene un ciclo que pasa por todos sus vértices. Por lo tanto  $D$  es hamiltoniana.

Caso 2) Si  $k = 2$ , entonces, por el Lema 1,  $D$  es hamiltoniana.

**Hipótesis inductiva)** Toda digráfica  $D$  bipartita semicompleta fuertemente conexa con un factor en  $m$  ciclos (donde  $2 \leq m \leq k$ ) es hamiltoniana.

Paso inductivo) Sea  $D$  fuertemente conexa y con un factor en  $k + 1$  ciclos.

Veamos que  $D$  es hamiltoniana. Sean  $C_1, C_2, \dots, C_{k+1}$  los  $k + 1$  ciclos que forman el factor de  $k + 1$  ciclos de  $D$ .

**Caso 1)** Si existe  $C_i$  con  $2 \leq i \leq k + 1$  tal que existen  $(V(C_1), V(C_i))$ -flecha y  $(V(C_i), V(C_1))$ -flecha entonces por el Lema 1 tenemos que en la gráfica que induce  $V(C_1 \cup C_i)$  tiene un ciclo que pasa por todos sus vértices, por lo que  $D$  tiene un factor en  $k$  ciclos, por hipótesis inductiva  $D$  es hamiltoniana.

**Caso 2)** Si para todo  $C_i$  ciclo con  $2 \leq i \leq k + 1$  pasa una y sólo una de las siguientes condiciones:

Para todo vértice  $u \in V(C_1)$  existe  $u \rightarrow v$  para todo  $v \in V(C_i)$  adyacente a  $u$  ó existe  $v \rightarrow u$  para todo  $v \in V(C_i)$  adyacente a  $u$ .

Definimos  $S = \{x \in V(D) - V(C_1) : (u, x) \in F(D) \forall u \in V(C_1)\}$  y  $T = \{x \in V(D) - V(C_1) : (x, u) \in F(D) \forall u \in V(C_1)\}$ . Sean  $V'_1 = S \cup V(C_1)$  y  $V'_2 = T$ .

1)  $V'_1$  y  $V'_2$  son distintos del vacío por ser  $D$  fuertemente conexa.

2)  $V'_1$  y  $V'_2$  son ajenos.

En caso contrario si existe un  $z$  en la intersección de  $V'_1$  y  $V'_2$  entonces  $z$  está en  $V(D) - V(C_1)$  por definición de  $T$  y como  $z$  está en un  $V(C_i)$  con  $2 \leq i \leq k + 1$  por lo que existen  $(V(C_1), V(C_i))$ -flecha y  $(V(C_i), V(C_1))$ -flecha, lo cual es una contradicción.

3)  $V(D) = V'_1 \cup V'_2$  pues  $D$  es bipartita semicompleta.

Por lo tanto tenemos una partición de los vértices en dos conjuntos  $V'_1$  y  $V'_2$ .

Notemos que existe una  $(V'_1, V'_2)$ -flecha pues  $D$  es fuertemente conexa; como no existe una  $(V(C_1), T)$ -flecha, se tiene que existe una  $(S, T)$ -flecha, sea  $s_i \rightarrow t_j$  dicha flecha donde  $s_i \in V(C_i)$ ,  $t_j \in V(C_j)$ ,  $i \neq j$  con  $i$  y  $j$  en  $\{2, 3, \dots, k + 1\}$ .

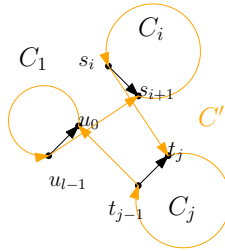


Figura 3.12:

Sean  $C_1 = (u_0, u_1, \dots, u_{l-1}, u_0)$ ,  $C_i = (x_0 = s_{i+1}, x_1, \dots, x_{r-1} = s_i, x_0)$  y  $C_j = (y_0 = t_j, y_1, \dots, y_{h-1} = t_{j-1}, y_0)$  dichos ciclos, así  $C' = (u_0, C_1, u_{l-1}) \cup (u_{l-1}, s_{i+1}) \cup (s_{i+1}, C_i, s_i) \cup (s_i, t_j) \cup (t_j, C_j, t_{j-1}) \cup (t_{j-1}, u_0)$  es un ciclo que pasa por todos los vértices de la digráfica inducida por los

vértices  $V(C_1) \cup V(C_i) \cup V(C_j)$  por lo que  $D$  tiene un factor en  $k - 1$  ciclos. En la figura 3.12 podemos observar como se forma  $C'$ .

Por lo que por hipótesis inductiva  $D$  es hamiltoniana. □

# Capítulo 4

## Hamiltonicidad en una $\mathcal{P}$ -composición

### 4.1. Resumen

En este capítulo,  $D$  es una digráfica con  $n$  vértices  $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$  y  $D_1, \dots, D_n$  son digráficas  $k$ -partitas ordenadas, con particiones ordenadas  $\mathcal{P}(D_i) = (V_0^i, \dots, V_{k-1}^i)$ , tales que  $V(D_i)$  y  $V(D_j)$  sean ajenos si  $i \neq j$ . Decimos que la  $\mathcal{P}$ -composición  $H = D[D_1, \dots, D_n]^{\mathcal{P}}$  con la  $k$ -partición ordenada  $\mathcal{P} = ((\cup_{i=0}^n V_0^i) = V_0, \dots, (\cup_{i=0}^n V_{k-1}^i) = V_{k-1})$  es la digráfica  $H$  con  $V(H) = \cup_{i=0}^{k-1} V_i$  y si  $w, z$  están en  $V(H)$ , entonces la flecha  $w \rightarrow z$  está en  $H$  si  $w, z$  están en  $V(D_i)$ , para alguna  $i \in \{1, \dots, n\}$ , y  $w \rightarrow z$  está en  $D_i$ , o si  $w \in V_k^i$  y  $z \in V_l^j$ , con  $i \neq j$ ,  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  y  $s_i \rightarrow s_j$  está en  $D$ . Utilizando esta definición se demuestra cuándo una  $\mathcal{P}$ -composición de digráficas bipartitas ordenadas semicompletas sobre un ciclo es hamiltoniana.

## 4.2. Preliminares

Inicialmente Bang-Jensen define lo que son digráficas localmente semicompletas y cumplen ser hamiltonianas bajo las mismas condiciones que un torneo, recordemos que un torneo es una digráfica semicompleta en la que para cualesquiera dos vértices  $u$  y  $v$  existe una y sólo una de las siguientes,  $u \rightarrow v$  o  $v \rightarrow u$ ; y un torneo es hamiltoniano si y sólo si es fuertemente conexo.

Más tarde Bang-Jensen define las digráficas localmente semicompletas en flechas y las  $\mathcal{H}_i$ -libres, con  $i = 1, 2, 3$  o  $4$ . Estas digráficas incluyen a las digráficas bipartitas semicompletas, y resulta ser que son hamiltonianas bajo las mismas condiciones que una digráfica bipartita semicompleta, es decir, es hamiltoniana si y sólo si posee un factor de ciclos y es fuertemente conexa, donde decimos que una digráfica posee un factor de ciclos si existe una partición de los vértices de  $D$  tal que la digráfica inducida por los vértices de cada parte es hamiltoniana.

En el estudio de las digráficas localmente semicompletas en flechas la Dra. Hortensia Galeana y el Mat. Ilán Goldfeder en [9] definen lo que es una  $\mathcal{P}$ -composición, la cual conserva el ser bipartita y es muy parecida a las digráficas localmente semicompleta en flechas pero ya no necesariamente es semicompleta.

A partir de que son digráficas muy parecidas a la estructura de una digráfica localmente semicompleta en flechas, Hortensia Galeana e Ilán Goldfeder conjeturan que una  $\mathcal{P}$ -composición de digráficas bipartitas ordenadas semicompletas sobre un ciclo es hamiltoniana si y sólo si posee un factor de ciclos y es fuertemente conexa, así como las digráficas bipartitas semicompletas.

## 4.3. Definición de $\mathcal{P}$ -composición y sus propiedades

**Definición 6.** *Sea  $D$  una digráfica, diremos que  $D$  tiene una partición ordenada  $\mathcal{P}(D) = (V_0, \dots, V_{k-1})$ , donde  $V_i$  es un subconjunto de  $V(D)$  para todo  $i \in \{0, \dots, k-1\}$  si y sólo si se cumple lo siguiente:*

- 1)  $V_i \cap V_j = \emptyset$ , si  $i \neq j$ ,
- 2)  $\cup_{i=0}^{k-1} V_i = V(D)$ ,
- 3)  $V_i$  es un conjunto independiente en  $D$ , posiblemente vacío, para todo  $i \in \{0, \dots, k-1\}$ .

Notemos que una partición ordenada no necesariamente es una partición de  $V(D)$  en el sentido usual pues no pedimos que  $V_i \neq \emptyset$ .

En el caso particular que  $k = 2$ , las llamaremos bipartitas ordenadas.

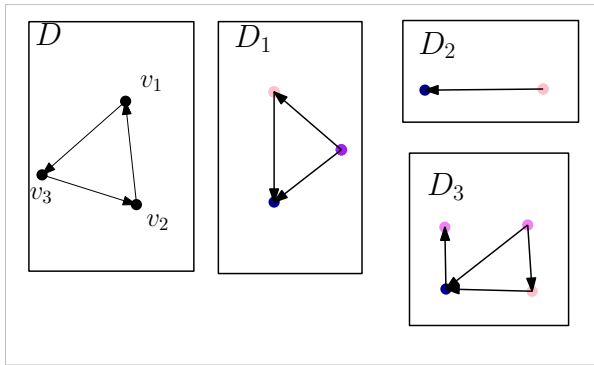
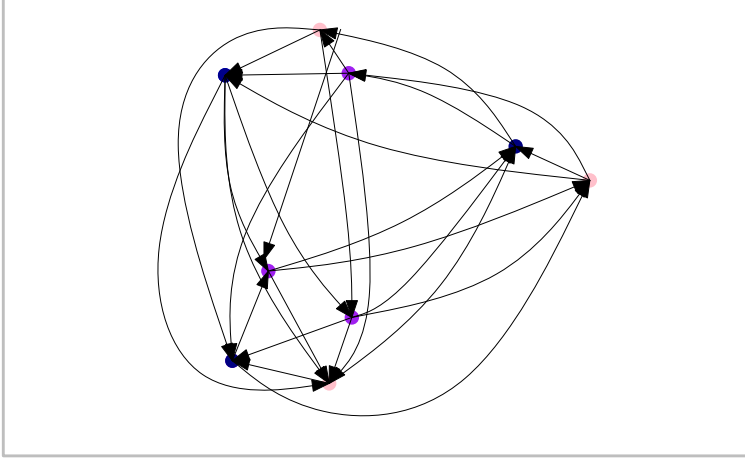


Figura 4.1:

**Definición 7.** Sean  $D$  una digráfica con  $V(D) = \{s_i : 1 \leq i \leq n\}$ , y  $D_1, D_2, \dots, D_n$  digráficas  $k$ -partitas, con particiones ordenadas  $\mathcal{P}(D_i) = (V_0^i, \dots, V_{k-1}^i)$ , tales que  $V(D_i)$  y  $V(D_j)$  sean ajenos si  $i \neq j$ . La  $\mathcal{P}$ -composición  $D[D_1, D_2, \dots, D_n]^{\mathcal{P}}$  con la  $k$ -partición ordenada  $\mathcal{P} = ((\cup_{i=0}^n V_0^i) = V_0, \dots, (\cup_{i=0}^n V_{k-1}^i) = V_{k-1})$  es la digráfica  $H$  con  $V(H) = \cup_{i=0}^{k-1} V_i$ , y si  $w, z$  están en  $V(H)$ , entonces  $w \rightarrow z$  si y sólo si una de las siguientes propiedades se cumple:

\* Si  $w, z$  están en  $V(D_i)$ , para alguna  $i \in \{1, \dots, n\}$ , y  $w \rightarrow z$  está en  $D_i$ ,

\*  $w \in V_k^i$  y  $z \in V_l^j$ , con  $i \neq j$ ,  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  y  $s_i \rightarrow s_j$  está en  $D$ .

Figura 4.2:  $\mathcal{P}$ -composición

Llamaremos a cada  $D_i$  como sumando de  $D$ , para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

En la figura 4.2 podemos ver la  $\mathcal{P}$ -composición dada por las digráficas que están en la figura 4.1, donde los vértices de mismo color pertenecen a la misma parte de la partición.

A partir de aquí en lo que resta del trabajo nos referiremos a los ciclos  $C_1$  y  $C_2$ , como  $C_1 = (u_0, \dots, u_{k-1}, u_0)$  y  $C_2 = (v_0, \dots, v_{m-1}, v_0)$ .

#### 4.4. Misma combinación

Para facilitar la escritura de las demostraciones de los siguientes resultados definiremos lo siguiente.

**Definición 8.** Sean  $D_1, \dots, D_n$  digráficas bipartitas ordenadas. Sea  $H = D[D_1, D_2, \dots, D_n]^{\mathcal{P}}$  la  $\mathcal{P}$ -composición y sean  $C_1, C_2$  dos ciclos ajenos en  $H$  tales que cada uno pasa por al menos dos sumandos.

Diremos que  $C_1$  y  $C_2$  tienen la misma combinación si existen  $x_1 \rightarrow y_1$  en  $C_1$  y  $x_2 \rightarrow y_2$  en  $C_2$  tal que  $x_1$  y  $x_2$  están en  $V_l^i$  y;  $y_1$  y  $y_2$  están en  $V_{l+1}^r$  donde  $i \neq r$ ,  $i, r \in \{1, \dots, n\}$  y con  $l$  módulo 2.

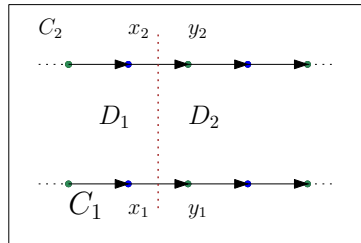


Figura 4.3: Ejemplo de dos ciclos que tienen la misma combinación.

Recordemos que si  $D$  es una digráfica y  $C_1$  y  $C_2$  ciclos en  $D$ , donde  $C_1 = (u_0, u_1, \dots, u_{n-1}, u_0)$  y  $C_2 = (v_0, v_1, \dots, v_{m-1}, v_0)$ . Decimos que entre  $C_1$  y  $C_2$  hay un *par bueno de flechas* si existen  $i$  y  $j$  donde  $0 \leq i \leq n - 1$  y  $0 \leq j \leq m - 1$  tales que  $u_i \rightarrow v_j$  y  $v_{j-1} \rightarrow u_{i+1}$  están en  $F(D)$ .

**Observación 6.** Sea  $H$  la  $\mathcal{P}$ -composición  $H = D[D_1, D_2, \dots, D_n]^\mathcal{P}$ , donde  $D_1, \dots, D_n$  digráficas bipartitas ordenadas. Notemos que si  $C_1$  y  $C_2$  son dos ciclos ajenos en  $H$  tales que cada uno pasa por al menos dos sumandos y tienen la misma combinación, entonces  $C_1$  y  $C_2$  tienen un par bueno de flechas

*Demostración.* Como  $C_1$  y  $C_2$  tienen la misma combinación en  $H$ , entonces existen  $x_1 \rightarrow y_1$  en  $C_1$  y  $x_2 \rightarrow y_2$  en  $C_2$  tales que  $u_0 = x_1$  y  $v_0 = x_2$  están en  $V_l^i$  y  $u_1 = y_1$  y  $v_1 = y_2$  están en  $V_{l+1}^r$  donde  $i \neq r$ ,  $i, r \in \{1, \dots, n\}$  y con  $l$  módulo 2. Por lo que por la definición de  $\mathcal{P}$ -composición  $u_0 \rightarrow v_1$  y  $v_0 \rightarrow u_1$  las cuales son un par bueno de flechas de  $C_1$  y  $C_2$ .  $\square$

**Observación 7.** Sean la  $\mathcal{P}$ -composición  $D = C_n[D_1, D_2, \dots, D_n]^\mathcal{P}$  y  $C_n$  el ciclo de longitud  $n$ , donde  $D_1, \dots, D_n$  son digráficas bipartitas ordenadas. Sean  $C_1$  y  $C_2$  dos ciclos ajenos en  $D$  tales que cada uno pasa por todos los sumandos y no tienen la misma combinación.



Si existe una flecha  $u_i \rightarrow u_{i+1}$  de  $C_1$  tal que  $u_i \in V_l^t$  y  $u_{i+1} \in V_{l+1}^{t+1}$  con  $l$  módulo 2 y  $t \in \{1, \dots, n\}$ , entonces para toda flecha  $u_j \rightarrow u_{j+1} \in (D_t, D_{t+1})$  de  $C_1$ , se tiene que  $u_j \in V_l^t$  y  $u_{j+1} \in V_{l+1}^{t+1}$  con  $l$  módulo 2.

Es decir, que cada vez que pase  $C_1$  por una flecha  $x \rightarrow y \in (D_t, D_r)$  se conserva que  $x \in V_l$ ,  $y \in V_{l+1}$ ; y de la misma manera sucederá con  $C_2$ .

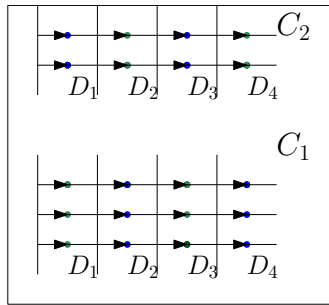


Figura 4.4:

*Demostración.* Sea una flecha en  $u_i \rightarrow u_{i+1} \in (D_t, D_{t+1})$  en  $C_1$ , donde  $u_i \in V_l$  y  $u_{i+1} \in V_{l+1}$ , con  $l$  módulo 2.

Procediendo por contradicción supongamos que existe una flecha  $u_j \rightarrow u_{j+1} \in (D_t, D_{t+1})$  en  $C_1$  con  $u_j \in V_{l+1}$ . Se tiene por la definición de  $\mathcal{P}$ -composición que hay  $u_{j+1} \in V_l$ , con  $l$  módulo 2.

Por otra parte, como  $C_1$  y  $C_2$  no tienen la misma combinación, y  $u_i \rightarrow u_{i+1} \in (D_t, D_{t+1})$  está en  $C_1$  tal que  $u_i \in V_l$  y  $u_{i+1} \in V_{l+1}$  con  $l$  módulo 2, entonces para toda flecha  $v_s \rightarrow v_{s+1} \in (D_t, D_{t+1})$  en  $C_2$  se sigue que  $v_s \in V_{l+1}$  y  $v_{s+1} \in V_l$ .

Así tenemos que existen  $u_j \rightarrow u_{j+1}$  en  $C_1$  y  $v_s \rightarrow v_{s+1}$  en  $C_2$  tal que  $u_j$  y  $v_s$  están en  $V_{l+1}^t$  y  $u_{j+1}$  y  $v_{s+1}$  están en  $V_l^{t+1}$  donde  $t \in \{1, \dots, n\}$  y  $l$  módulo 2. Es decir,  $C_1$  y  $C_2$  tienen la misma combinación; lo cual es una contradicción.

Por lo tanto para toda  $u_j \rightarrow u_{j+1} \in (D_t, D_{t+1})$  en  $C_1$ , se tiene que  $u_j \in V_l$  y  $u_{j+1} \in V_{l+1}$  con  $l$  módulo 2 y  $t \in \{1, \dots, n\}$ .  $\square$

En la figura 4.4 podemos observar un ejemplo de lo que sucede en la observación 7

## 4.5. Hamiltonicidad en la $\mathcal{P}$ -composición de digráficas bipartitas ordenadas semicompletas sobre un ciclo.

**Lema 2.** *Consideremos  $C$  un ciclo dirigido tal que  $C = (v_0, \dots, v_n = v_0)$  y  $D_1, \dots, D_n$  digráficas bipartitas ordenadas semicompletas fuertemente conexas ajenas. Sea  $D$  la  $\mathcal{P}$ -composición  $C[D_1, \dots, D_n]^{\mathcal{P}}$ . Si  $D$  es fuertemente conexa y posee un factor de ciclos tal que uno de los ciclos pasa por todos los sumandos de  $D$  y cada uno de los demás está contenido en algún sumando, entonces  $D$  es hamiltoniana*

*Demostración.* Si  $n = 2$ , entonces  $D$  es bipartita semicompleta, pues si  $u$  y  $v$  son vértices de  $D$  tales que  $u \in V_0$  y  $v \in V_1$  se sigue que  $u$  y  $v$  son adyacentes. Primero supongamos que  $u$  y  $v$  están en el mismo sumando  $D_i$ , con  $i$  módulo 2 lo que implica que  $u \in V_0^i$  y  $v \in V_1^i$ , como  $D_i$  es semicompleta entonces  $u$  y  $v$  son adyacentes en  $D_i$ , por lo que  $u$  y  $v$  son adyacentes en  $D$ . Ahora, supongamos que  $u$  y  $v$  están en sumandos distintos; por la definición de  $D$  y como sólo tiene dos sumandos,  $u$  y  $v$  son adyacentes. Por lo tanto  $D$  es bipartita semicompleta, es fuertemente conexa y posee un factor de dos ciclos, entonces por Teorema 3  $D$  es hamiltoniana.

Por lo tanto podemos suponer que  $n \geq 3$ .

Procedemos a demostrarlo por inducción sobre  $k$ , donde  $k$  es el número de ciclos que posee el factor.

-Si  $k = 1$ , entonces  $D$  es una digráfica hamiltoniana.

(Hipótesis inductiva) Si  $D$  posee un factor de  $k$  ciclos en  $D$ ,  $k \geq 1$ , tal que uno de los ciclos pasa por todos los sumandos y cada uno de los demás está contenido en algún sumando, entonces  $D$  es hamiltoniana.

(Paso inductivo) Supongamos que  $D$  posee un factor de  $k + 1$  ciclos, tal que uno de los ciclos pasa por todos los sumandos y cada uno de los demás está contenido en algún sumando.

Por demostrar que  $D$  es hamiltoniana.

Supongamos que  $C_1$  y  $C_2$  son dos ciclos del factor, tales que  $C_1$  pasa por todos los sumandos de  $D$  y  $C_2$  está contenido en uno solo, sea  $D_j$  tal sumando.

Ya que supusimos que  $C_1$  pasa por todos los sumandos de la  $\mathcal{P}$ -composición, existe una subtrayectoria  $T = (w_1, \dots, w_m)$  de  $C_1$  tal que  $w_1$  está en  $D_{j-1}$ ,  $w_m$  está en  $D_{j+1}$  y  $w_i$  está en  $D_j$  para todo  $i$  en  $\{2, \dots, m-1\}$ , con  $j$  módulo  $n$ . Esto pues por definición de  $D$ ,  $(D_j, D_l) \neq \emptyset$  si y sólo si  $l = j + 1$ .

Por definición,  $(D_{j-1}, D_j) \neq \emptyset$  y  $(D_j, D_{j+1}) \neq \emptyset$ . Ya que  $C_2$  está contenido en  $D_j$ , tenemos que  $(w_1, C_2) \neq \emptyset$  y  $(C_2, w_m) \neq \emptyset$ .

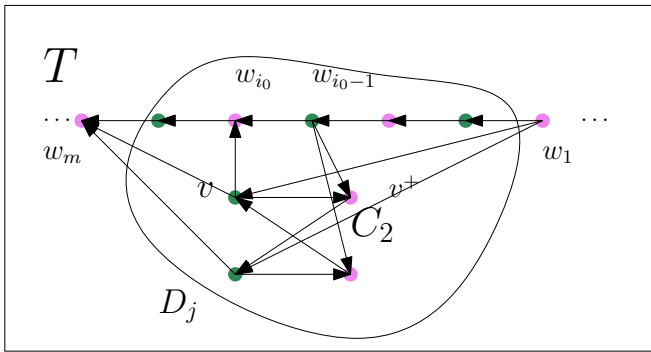


Figura 4.5: Ejemplo

Sea  $i_0$  el menor índice en  $\{1, 2, \dots, m\}$  tal que  $v \rightarrow w_{i_0}$ , para algún vértice  $v$  en  $C_2$ . Dicho índice existe porque  $C_2 \mapsto^{\mathcal{P}} w_m$  y  $C_2$  tiene al menos dos vértices. Más aún,  $i_0$  es mayor que uno porque  $w_1 \mapsto^{\mathcal{P}} C_2$ . Ya que  $v \rightarrow w_{i_0}$ , dichos vértices están en partes distintas y se sigue que  $w_{i_0-1}$  y el sucesor de  $v$  ( $v^+$ ) están en partes distintas, por lo tanto son

adyacentes. Más aún, ya que  $i_0$  es el primer índice tal que  $v \rightarrow w_{i_0}$  para algún vértice  $v$  en  $C_2$  y como  $i_0 \leq m$  entonces  $w_{i_0-1}$  está en  $D_j$  ó  $D_{j-1}$ , por lo que como  $C_2$  está en  $D_j$ , se sigue que  $w_{i_0-1} \rightarrow v^+$ . Como  $v \rightarrow w_{i_0}$  y  $w_{i_0-1} \rightarrow v^+$  son un par bueno de flechas, por la Proposición 1 se sigue que  $D$  posee un factor de  $k$  ciclos, tal que uno de los ciclos pasa por todos los sumandos y el resto de los ciclos están contenidos en uno solo. Por hipótesis inductiva se tiene que  $D$  es hamiltoniana.

Por lo tanto  $D$  es hamiltoniana. □

Si consideramos un ciclo  $C_1$  que pasa por todos los sumandos de una  $\mathcal{P}$ -composición  $D = C[D_1, \dots, D_n]^{\mathcal{P}}$  donde  $n$  es impar,  $D_1, \dots, D_n$  digráficas bipartitas ordenadas semicompletas fuertemente conexas ajenas y  $C$  es un ciclo de longitud  $n$ ,  $D$  es bipartita ordenada, por lo que  $C_1$  es de longitud par por ser ciclo de  $D$ . Si  $k$  es el número de veces por las que pasa  $C_1$  por cada sumando y  $c_i^j$  indica el número de vértices del sumando  $D_i$  por los que pasa  $C_1$  en la vuelta  $j$ , entonces la longitud del ciclo  $C_1$  es igual a  $\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n c_i^j$ .

Supongamos que  $C_1$  pasa por un número impar de vértices por cada sumando en cada vuelta, es decir,  $c_i^j$  es impar para cada  $i$  y  $j$ . Ya que  $\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n c_i^j$  es par pues es la longitud de  $C_1$  y esta suma tiene  $kn$  sumandos con  $n$  impar, se sigue que  $k$  tiene que ser par.

**Lema 3.** Sean  $C = (w_0, \dots, w_n = w_0)$  un ciclo y  $D_1, \dots, D_n$  digráficas bipartitas ordenadas semicompletas fuertemente conexas ajenas, donde  $n$  es impar. Sea  $D$  la  $\mathcal{P}$ -composición  $C[D_1, \dots, D_n]^{\mathcal{P}}$ .

Si  $D$  tiene un factor de dos ciclos  $C_1$  y  $C_2$  donde cada uno pase por todos los sumandos y no tienen la misma combinación, entonces existen las flechas  $u_l \rightarrow u_{l+1}$  en  $C_1$  y  $v_j \rightarrow v_{j+1}$  en  $C_2$  tales que  $u_l, u_{l+1}, v_j$  y  $v_{j+1}$  están en el mismo sumando.

*Demostración.* Sea  $t$  el número de vueltas por las que pasa  $C_1$  por todos los sumandos.

Primero veamos que existe un  $r \in \{1, \dots, t\}$  tal que en la vuelta  $r$  el ciclo  $C_1$  pasa por un número par de vértices por el sumando  $D_i$ , para algún  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

Supongamos por contradicción que  $c_i^j$  es impar para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$  y para todo  $j \in \{1, \dots, t\}$ , por lo que  $t$  debe ser un número par; entonces  $C_1$  pasa al menos 2 veces por cada sumando.

Sean  $u_{i_j}$  y  $u_{i_j+2h}$  el primer y último vértice respectivamente por el que pasa  $C_1$  en la vuelta  $j$  por el sumando  $D_i$ , si  $u_{i_j} \in V_l$  con  $l$  módulo 2, nótese que  $u_{i_j+2h}$  está en  $V_l$  ya que  $c_i^j$  es impar. Como sólo nos interesan las combinaciones que hay en las flechas que cambian de un sumando a otro en  $C_1$  podemos suponer sin pérdida de generalidad que cada vez que  $C_1$  pasa por cada sumando, solo pasa por un vértice.

Supongamos sin pérdida de generalidad que  $u_0 \in V_1^1$  ya que  $n$  es un número impar y estamos suponiendo que  $C_1$  pasa por un vértice cada vez que pasa por un sumando, se sigue que  $u_{n-1} \in V_1^n$  entonces  $u_n \in V_2^1$ . Se tiene que la flecha  $u_0 \rightarrow u_1 \in (D_1, D_2)$  de  $C_1$  con  $u_0 \in V_1^1$  y  $u_1 \in V_2^2$  y se tiene que  $u_n \rightarrow u_{n+1} \in (D_1, D_2)$  de  $C_1$  con  $u_n \in V_2^1$  y  $u_{n+1} \in V_1^2$ , lo cual contradice la observación 7 ya que  $C_1$  y  $C_2$  no tienen la misma combinación.

Por lo tanto existe  $r$  tal que  $C_1$  en la vuelta  $r$  pasa por  $D_i$  en un número par de vértices para algún  $i \in \{1, \dots, n\}$  y  $r \in \{1, \dots, t\}$ . Sea  $D_{i_0}$  tal sumando.

Ahora, veamos que existe una flecha  $v_j \rightarrow v_{j+1}$  en  $C_2$  con  $v_j, v_{j+1}$  en  $V(D_{i_0})$ , es decir, que  $C_2$  tiene una flecha totalmente contenida en  $D_{i_0}$ .

Procediendo por contradicción supongamos que no existe tal flecha, es decir, cada vez que  $C_2$  pasa por  $D_{i_0}$  sólo pasa por un vértice.

Sean  $u_l$  el primer vértice de  $C_1$  que pasa por  $D_{i_0}$  en la vuelta  $r$  y  $v_j$  el primer vértice de  $C_2$  que pasa por  $D_{i_0}$  en la primera vuelta. Sin pérdida de generalidad supongamos que  $u_l \in V_1^{i_0}$ , como  $C_1$  y  $C_2$  no tienen la misma combinación se tiene que  $v_j \in V_2^{i_0}$ , por lo que la flecha  $v_j \rightarrow v_{j+1}$  en  $C_2$  cumple que  $v_{j+1} \in V_1^{i_0+1}$ .

Por otra parte, sea  $u_{l+2h+1}$  el último vértice por el que pasa  $C_1$  en la vuelta  $r$  por  $D_{i_0}$  con  $h$  natural, como en la vuelta  $r$  el ciclo  $C_1$  pasa

por un número par de vértices por  $D_{i_0}$ , se sigue que  $u_{l+2h+1} \in V_2^{i_0}$ , entonces la flecha  $u_{l+2h+1} \rightarrow u_{l+2(h+1)} \in (D_{i_0}, D_{i_0+1})$  en  $C_1$  cumple que  $u_{l+2(h+1)} \in V_1^{i_0+1}$ .

Por lo que existen flechas  $u_{l+2h+1} \rightarrow u_{l+2(h+1)}$  en  $C_1$  y  $v_j \rightarrow v_{j+1}$  en  $C_2$  tal que  $u_{l+2h+1}$  y  $v_j$  están en  $V_2^{i_0}$  y  $u_{l+2(h+1)}$  y  $v_{j+1}$  están en  $V_1^{i_0+1}$ , es decir,  $C_1$  y  $C_2$  tienen la misma combinación; lo cual es una contradicción.

Por lo tanto existen las flechas  $v_j \rightarrow v_{j+1}$  en  $C_2$  y  $u_l \rightarrow u_{l+1}$  en  $C_1$  tales que  $v_j, v_l, v_{j+1}$  y  $v_{l+1}$  están en  $D_i$  para alguna  $i \in \{1, \dots, n\}$ . □

En la figura 4.6 podemos observar un ejemplo del Lema 3.

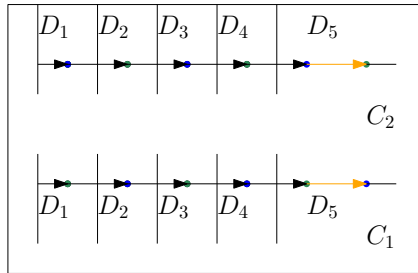


Figura 4.6: Ejemplo de Lema reflema-2.

**Lema 4.** Sean  $C = (w_0, \dots, w_n = w_0)$  un ciclo y  $D_1, \dots, D_n$  digráficas bipartitas ordenadas semicompletas fuertemente conexas ajenas. Sea  $D$  la  $\mathcal{P}$ -composición  $C[D_1, \dots, D_n]^{\mathcal{P}}$ . Supongamos que  $D$  tiene dos ciclos  $C_1$  y  $C_2$  tales que cada uno de los ciclos pasa por todos los sumandos y no tienen la misma combinación.

Si existen las flechas  $u_i \rightarrow u_{i+1}$  en  $C_1$  y  $v_j \rightarrow v_{j+1}$  en  $C_2$  tales que  $u_i, u_{i+1}, v_j$  y  $v_{j+1}$  están en el mismo sumando, entonces  $C_1$  y  $C_2$  tienen un par bueno de flechas.

*Demostración.* Sea  $i_0$  el menor índice en  $\{0, \dots, k-1\}$  y  $j_0$  el menor índice en  $\{0, \dots, m-1\}$ , tales que las flechas  $u_{i_0} \rightarrow u_{i_0+1}$  y  $v_{j_0} \rightarrow v_{j_0+1}$ , con  $u_{i_0}, u_{i_0+1}, v_{j_0}$  y  $v_{j_0+1}$  en el sumando  $D_t$  para alguna  $t \in \{1, \dots, n\}$ , por lo que  $u_{i_0-1}$  y  $v_{j_0-1} \in V(D_{t-1})$ .

Supongamos sin pérdida de generalidad que  $u_{i_0} \in V_1^t$ , se sigue por la definición de  $\mathcal{P}$ -composición que  $u_{i_0-1} \in V_2^{t-1}$  y  $u_{i_0+1} \in V_2^t$ . Como  $C_1$  y  $C_2$  no tienen la misma combinación, entonces  $v_{j_0} \in V_2^t$  y  $v_{j_0-1} \in V_1^{t-1}$ ; de aquí que existe una flecha entre  $u_{i_0}$  y  $v_{j_0}$  pues  $D_t$  es bipartita semicompleta.

**Caso 1)** La flecha  $v_{j_0} \rightarrow u_{i_0}$  está en  $D$ .

Como  $v_{j_0+1} \in V_1^t$  y  $u_{i_0-1} \in V_2^{t-1}$ , se tiene, por la definición de  $D$  que existe la flecha  $u_{i_0-1} \rightarrow v_{j_0+1}$ . Por lo que  $v_{j_0} \rightarrow u_{i_0}$  y  $u_{i_0-1} \rightarrow v_{j_0+1}$  son un par bueno de flechas de  $C_1$  y  $C_2$ .

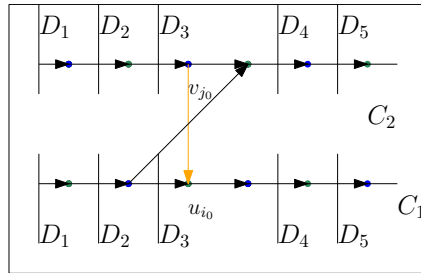


Figura 4.7: Ejemplo del caso 1) del Lema 4.

**Caso 2)** La flecha  $u_{i_0} \rightarrow v_{j_0}$  está en  $D$ .

Como  $u_{i_0+1} \in V_2^t$  y  $v_{j_0-1} \in V_1^{t-1}$ , se tiene que por la definición de  $D$  existe  $v_{j_0-1} \rightarrow u_{i_0+1}$  en  $D$ . Por lo que  $u_{i_0} \rightarrow v_{j_0}$  y  $v_{j_0-1} \rightarrow u_{i_0+1}$  son un par bueno de flechas de  $C_1$  y  $C_2$ .

Por lo tanto  $C_1$  y  $C_2$  tienen un par bueno de flechas. □

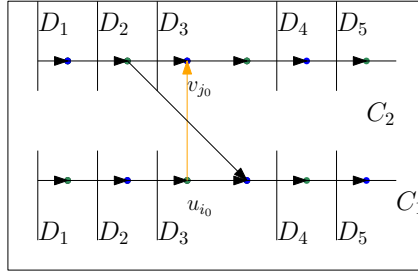


Figura 4.8: Ejemplo del caso 2) del lema 4.

Ahora, consideremos  $C$  un ciclo tal que  $C = (w_0, \dots, w_n = w_0)$  y  $D_1, \dots, D_n$  son digráficas bipartitas ordenadas semicompletas fuertemente conexas ajenas. Sea  $D$  la  $\mathcal{P}$ -composición  $C[D_1, \dots, D_n]^{\mathcal{P}}$ .

Obsérvese que si  $D$  contiene un ciclo  $C_1$ , entonces por la definición de  $D$  sólo puede ocurrir que  $C_1$  pasa por todos los sumandos de  $D$  ó que  $C_1$  esté completamente contenido en uno solo.

**Lema 5.** Sean  $C = (w_0, \dots, w_n = w_0)$  un ciclo, donde  $n$  es impar, y  $D_1, \dots, D_n$  digráficas bipartitas ordenadas semicompletas fuertemente conexas ajenas. Sea  $D$  la  $\mathcal{P}$ -composición  $C[D_1, \dots, D_n]^{\mathcal{P}}$ .

Si  $D$  es fuertemente conexas y posee un factor de dos ciclos, entonces  $D$  es hamiltoniana

*Demostración.* Supongamos que  $C_1$  y  $C_2$  son los ciclos del 2-factor.

Consideraremos los siguientes casos:

**Caso 1)**  $C_1$  pasa por todos los sumandos de  $D$  y que  $C_2$  está completamente contenido en uno solo, entonces por el lema 1  $D$  es hamiltoniana.

**Caso 2)** Si  $C_1$  y  $C_2$  están en sumandos distintos. Entonces  $n = 2$ , lo cual es una contradicción pues  $n$  por hipótesis es impar, por tanto, este caso no puede suceder.

**Caso 3)** Tanto  $C_1$  como  $C_2$  pasan por todos los sumandos. Si  $C_1$  y  $C_2$  tienen la misma combinación, entonces por la observación 6 se tiene



que  $C_1$  y  $C_2$  tienen un par bueno de flechas, por la Proposición 1 existe un ciclo que pasa por todos los vértices de  $C_1$  y  $C_2$ . Por lo tanto  $D$  es hamiltoniana.

Así, supongamos que  $C_1$  y  $C_2$  no tienen la misma combinación, por lo que se sigue del Lema 3 que existen las flechas  $u_i \rightarrow u_{i+1}$  en  $C_1$  y  $v_j \rightarrow v_{j+1}$  en  $C_2$  tales que  $u_i, u_{i+1}, v_j$  y  $v_{j+1}$  están en el mismo sumando; por el Lema 4 se sigue que  $C_1$  y  $C_2$  tienen un par bueno de flechas, así existe un ciclo que pasa por todos los vértices de  $C_1$  y  $C_2$ . Por lo tanto  $D$  es hamiltoniana.

Por lo tanto,  $D$  es hamiltoniana. □

**Lema 6.** Sean  $C = (w_0, \dots, w_n = w_0)$  un ciclo y  $D_1, \dots, D_n$  digráficas bipartitas ordenadas semicompletas fuertemente conexas ajenas. Sea  $D$  la  $\mathcal{P}$ -composición  $C[D_1, \dots, D_n]^{\mathcal{P}}$ .

Si  $D$  es fuertemente conexa y posee un factor de ciclos tal que cada ciclo del factor está completamente contenido en un solo sumando, entonces  $D$  es hamiltoniana.

*Demostración.* Como cada ciclo del factor está contenido en un solo sumando, entonces cada sumando tiene un factor de ciclos y como son bipartitas semicompletas fuertemente conexas, se sigue que cada sumando es hamiltoniano. Sea  $C_i$  el ciclo hamiltoniano del sumando  $D_i$ , para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Ya que todos los sumandos son bipartitos, cada  $C_i$  es de longitud par, así que sin pérdida de generalidad supongamos que  $C_i = (u_0^i, u_2^i, \dots, u_{k_i-1}^i, u_{k_i}^i = u_0^i)$  el ciclo hamiltoniano del sumando  $D_i$ , para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  y  $u_0^i \in V_1$ , lo que implica que  $u_{k_i-1}^i \in V_2$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , donde  $\{V_1, V_2\}$  es la bipartición de  $D$ . Por lo que por definición se tiene que  $u_{k_i-1}^{i-1} \rightarrow u_0^i$ .

Sea  $C' = (u_0^1, C_1, u_{k_1-1}^1) \cup (u_{k_1-1}^1, u_0^2) \cup (u_0^2, C_2, u_{k_2-1}^2) \cup \dots \cup (u_0^n, C_n, u_{k_n-1}^n) \cup (u_{k_n-1}^n, u_0^1)$ ,  $C'$  es un ciclo hamiltoniano.

Por lo tanto  $D$  es hamiltoniana. □

**Lema 7.** *Consideremos un ciclo  $C = (w_0, \dots, w_n = w_0)$  donde  $n$  es par y digráficas bipartitas ordenadas semicompletas fuertemente conexas ajenas  $D_1, \dots, D_n$ . Sea  $D$  la  $\mathcal{P}$ -composición  $C[D_1, \dots, D_n]^{\mathcal{P}}$ .*

*Si  $D$  es fuertemente conexas y tiene un factor de dos ciclos, tal que los dos ciclos pasan por todos los sumandos, entonces  $D$  es hamiltoniana.*

*Demostración.* Sean  $C_1$  y  $C_2$  los ciclos que forman el factor, tal que  $r$  y  $s$  son el número de vueltas que dan  $C_1$  y  $C_2$  respectivamente en  $D$ .

Si  $C_1$  y  $C_2$  tienen un par bueno de flechas, entonces por la Proposición 1  $D$  es hamiltoniana.

Así, supongamos que  $C_1$  y  $C_2$  no tienen un par bueno de flechas.

Supongamos sin pérdida de generalidad que  $r \leq s$ ; es decir,  $C_1$  da menos o el mismo número de vueltas que  $C_2$  por todos los sumandos. Como  $C_1$  y  $C_2$  no tienen un par bueno de flechas, se tiene por Observación 6 que  $C_1$  y  $C_2$  no tienen la misma combinación. Se sigue por el Lema 4 que para cada sumando  $D_i$ , con  $i \in \{1, \dots, n\}$ , no sucede que la flecha  $u_l \rightarrow u_{l+1}$  esté en  $C_1$  y la flecha  $v_j \rightarrow v_{j+1}$  esté en  $C_2$ , donde  $u_l, u_{l+1}, v_j$  y  $v_{j+1}$  están en  $D_i$ , para algún  $l \in \{0, \dots, r\}$  y un  $j \in \{1, \dots, s\}$ , pues estamos suponiendo que los ciclos no tienen un par bueno de flechas. (+)

**Afirmación 1.** Si existe un sumando  $D_i$  y alguna vuelta  $t$ , donde  $t \in \{1, \dots, s\}$ ; tal que en la vuelta  $t$  alguno de los dos ciclos tiene una flecha enteramente contenida en ese sumando, entonces el ciclo pasa por  $D_i$  por un número impar de vértices.

Sea  $C_h$  tal ciclo y  $D_i$  tal sumando, con  $h \in \{1, 2\}$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Por (+) sean  $u_l$  el único vértice por el que pasa  $C_{h+1}$  en la primera vuelta por  $D_i$  y  $v_j$  el primer vértice por el que pasa  $C_h$  en la vuelta  $t$  por el sumando  $D_i$ , con  $h$  módulo 2. Como  $C_h$  tiene un flecha enteramente contenida en el sumando  $D_i$ , se sigue que  $v_{j+1}$  es un vértice de  $C_h$  que está en  $D_i$ , por lo tanto  $v_j \rightarrow v_{j+1}$  está en  $D_i$  en  $C_h$ .

Procediendo por contradicción supongamos que  $C_h$  pasa por un número par de vértices por el sumando  $D_i$  en la vuelta  $t$ . Sin pérdida de generalidad supongamos que  $v_j \in V_1^i$ , se sigue que  $v_{j-1} \in V_2^{i-1}$ . Como  $C_1$  y

$C_2$  no tiene la misma combinación se tiene que  $u_l \in V_2^i$  y  $u_{l-1} \in V_1^{i-1}$ , por ser  $u_l$  el único vértice por el que pasa  $C_{h+1}$  por  $D_i$  en la primer vuelta.

Como suponemos que  $C_h$  pasa por un número par de vértices por  $D_i$  en la vuelta  $t$ , sea  $v_{j+2k+1}$ , el último vértice por el que pasa  $C_h$  en la vuelta  $t$  por el sumando  $D_i$ , con  $k \geq 1$ , así  $v_{j+2k+1} \in V_2^i$ , pues  $v_j \in V_1^i$ . Se sigue que  $v_{j+2(k+1)} \in V_1^{i+1}$  en  $C_h$ . También, como  $u_l \in V_2^i$  y es el único vértice por el que pasa  $C_{h+1}$  por el sumando  $D_i$  en la primer vuelta, se sigue que  $u_{l+1} \in V_1^{i+1}$ . Por lo que  $C_1$  y  $C_2$  tienen la misma combinación, lo cual es una contradicción. Por lo tanto  $C_h$  pasa por un número impar de vértices por  $D_i$ .

Sea  $v_{j+2k}$  el último vértice por el que pasa  $C_h$  en la vuelta  $t$  por  $D_i$

**Afirmación 2.** Las flechas  $u_l \rightarrow v_j$  y  $v_{j+2k} \rightarrow u_l$  están en  $D$ .

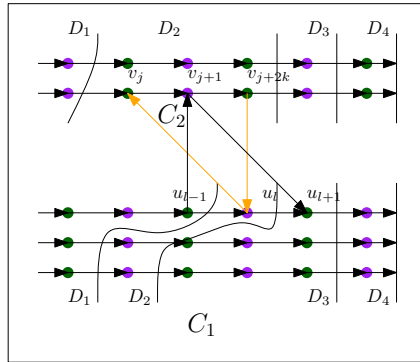


Figura 4.9: Ejemplo de la afirmación 2

Recordemos que  $u_l \in V_2^i$  y  $v_j \in V_1^i$ . Como  $D_i$  es bipartita semicompleta se tiene que  $u_l$  y  $v_j$  son adyacentes, probemos que  $u_l \rightarrow v_j$ . Supongamos por contradicción que  $v_j \rightarrow u_l$  está en  $D$ . Recordemos que  $v_{j+1} \in V_2^i$ , por la definición de  $D$  y  $u_{l-1}$  está en  $V_1^{i-1}$ , se tiene la flecha  $u_{l-1} \rightarrow v_{j+1}$ , entonces  $v_j \rightarrow u_l$  y  $u_{l-1} \rightarrow v_{j+1}$  son un par bueno de flechas de  $C_1$  y  $C_2$ , lo cual es una contradicción. Por lo tanto,  $u_l \rightarrow v_j$  está en  $D$ .

Como  $v_j \in V_1^i$ , se sigue que  $v_{j+2k} \in V_1^i$  y  $v_{j+2k-1} \in V_2^i$ . Además, como  $D_i$  es bipartita semicompleta se sigue que  $u_l$  y  $v_{j+2k}$  son adyacentes. Veamos que  $v_{j+2k} \rightarrow u_l$ .

Supongamos por contradicción que  $u_l \rightarrow v_{j+2k}$  está en  $D$ . Recordemos que  $u_{l+1} \in V(D_{i+1})$ , por la definición de  $D$  se tiene que  $v_{j+2k-1} \rightarrow u_{l+1}$ . Se sigue que  $v_{j+2k-1} \rightarrow u_{l+1}$  y  $u_l \rightarrow v_{j+2k}$  forman un par bueno de flechas de  $C_1$  y  $C_2$ , lo cual es una contradicción. Por lo tanto,  $v_{j+2k} \rightarrow u_l$  está en  $D$ .

**Afirmación 3.** Si existe un sumando  $D_i$ , tal que cada vez que  $C_1$  y  $C_2$  pasan por él, sólo pasan por un vértice, entonces para todo vértice  $x \in V(C_1) \cap V(D_i)$ , existe un vértice  $v \in V(C_2) \cap V(D_i)$  tal que la flecha  $x \rightarrow v$  está en  $D$ , y viceversa, para todo vértice  $y \in V(C_2) \cap V(D_i)$ , existe un vértice  $u \in V(C_1) \cap V(D_i)$  tal que la flecha  $y \rightarrow u$  está en  $D$ .

Sea  $x \in V(D_i) \cap V(C_1)$ ,  $x$  está en  $V_m^i$ , para algún  $m \in \{1, 2\}$ . Veamos que  $V(C_1) \cap V(D_i) = V_m^i$ , con  $m \in \{1, 2\}$ .

Como  $C_1$  pasa por un sólo vértice cada vez que pasa por el sumando  $D_i$ , se sigue que  $x^+ \in V(D_{i+1})$  en  $C_1$ , por lo que  $x^+ \in V_{m+1}^{i+1}$ , ya que  $x \in V_m^i$ .

Sea  $u \neq x$  y  $u \in V(D_i) \cap V(C_1)$ , como  $C_1$  pasa por un sólo vértice en cada vuelta por  $D_i$ , se sigue que  $u^+ \in V(D_{i+1})$  en  $C_1$ , además  $C_1$  y  $C_2$  no tienen la misma combinación, por la Observación 7 se sigue que  $u \in V_m^i$  y  $u^+ \in V_{m+1}^{i+1}$ , por lo que  $V(D_i) \cap V(C_1) \subseteq V_m^i$ .

Sea  $u \in V_m^i$ , supongamos por contradicción que  $u \in V(C_2) \cap V(D_i)$ . Recordemos que  $x \in V_m^i$ , luego como  $C_1$  y  $C_2$  sólo pasan por un vértice por  $D_i$  en cada vuelta, se tiene que  $x^+$  (sucesor de  $x$  en  $C_1$ ) y  $u^+$  (sucesor de  $u$  en  $C_2$ ), están en  $D_{i+1}$  y  $x^+ \in V_{m+1}^{i+1}$  al igual que  $u^+ \in V_{m+1}^{i+1}$ , con  $m$  módulo 2. Por lo que  $C_1$  y  $C_2$  tienen la misma combinación, lo cual es una contradicción. Por lo tanto  $u \in V(D_i) \cap V(C_1)$ , así  $V_m^i \subseteq V(D_i) \cap V(C_1)$ .

Por lo tanto,  $V(D_i) \cap V(C_1) = V_m^i$ .

Análogamente obtenemos que  $V(D_i) \cap V(C_2) = V_{m+1}^i$ .

Ya que  $D_i$  es fuertemente conexas y bipartita semicompleta con  $V(D_i) \cap V(C_1) = V_m^i$  y  $V(D_i) \cap V(C_2) = V_{m+1}^i$  son conjuntos independientes, se tiene que para cada  $x \in V_m^i$  en  $C_1$ , existe un vértice  $v \in V_{m+1}^i$  en  $C_2$  tal

que  $x \rightarrow v$ , con  $m$  módulo 2, para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ . También, para cada  $y \in V_m^i$  en  $C_2$  existe un  $u \in V_{m+1}^i$  en  $C_1$  tal que  $y \rightarrow u$ , por ser  $D_i$  fuertemente conexa.

Sean  $a_t^i$  el último vértice por el que pasa el ciclo  $C_1$  en la vuelta  $t$  por el sumando  $D_i$ ,  $b_t^i$  el último vértice por el que pasa el ciclo  $C_2$  en la vuelta  $t$  por el sumando  $D_i$ ,  $c_t^i$  el primer vértice por el que pasa el ciclo  $C_1$  en la vuelta  $t$  por el sumando  $D_i$ ,  $d_t^i$  el primer vértice por el que pasa el ciclo  $C_2$  en la vuelta  $t$  por el sumando  $D_i$  y  $T_t^i$  la trayectoria contenida en  $C_2$  que contiene a todos los vértices por los que pasa  $C_2$  en la vuelta  $t$  por el sumando  $D_i$ .

Recordemos que  $C_1$  y  $C_2$  o pasan por un vértice cada vez que pasan por el sumando  $D_1$  o alguno de ellos tiene una flecha enteramente contenida en ese sumando, para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ , por lo que por la Afirmación 1 que  $C_1$  y  $C_2$  pasan por un número impar de vértices por cada sumando en cada vuelta. Sea  $a_1^i \in V_m^i$ , con  $m \in \{1, 2\}$ , entonces  $c_1^{i+1} \in V_{m+1}^{i+1}$  y por la Observación 7 que  $a_t^i \in V_m^i$  y  $c_t^{i+1} \in V_{m+1}^{i+1}$ , para todo  $t \in \{1, \dots, r\}$ , por lo que  $b_l^i \in V_{m+1}^i$  y  $d_l^{i+1} \in V_m^{i+1}$ , para todo  $l \in \{1, \dots, s\}$ , con  $m$  módulo 2. (\*\*)

Luego, por la definición de  $\mathcal{P}$ -composición y por (\*\*) se tiene que  $a_t^i \rightarrow c_l^{i+1}$  está en  $D$ , para todo  $t$  y  $l$  en  $\{1, \dots, r\}$ , y todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

De igual manera se tiene que  $b_l^i \rightarrow d_t^{i+1}$  está en  $D$ , para todo  $t$  y  $l$  en  $\{1, \dots, s\}$ , y todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ . (\*\*\*)

En la figura 4.10 podemos observar las flechas  $b_t^1 \rightarrow d_l^2$  está en  $D$ , para todo  $t$  y  $l$  en  $\{1, \dots, s\}$ .

Por otra parte, por la Afirmación 2 y 3, se tiene que para cada  $i$  impar en  $\{1, \dots, n\}$ , existe un  $t_i$ , donde  $1 \leq t_i \leq s$ , tal que  $a_1^i \rightarrow d_{t_i}^i$ , y para cada  $i$  par en  $\{0, \dots, n-1\}$ , existe un  $t_i$ , donde  $1 \leq t_i \leq s$ , tal que  $b_{t_i}^i \rightarrow c_1^i$ .

Por (\*\*\*) se tiene que para cada  $i$  impar en  $\{1, \dots, n\}$ , se tiene que  $b_t^i \rightarrow d_l^{(i+1)}$ , para toda  $t$  y  $l$  en  $\{1, \dots, s\}$ . (\*\*\*)

Construimos el ciclo  $C'_1$  como sigue:

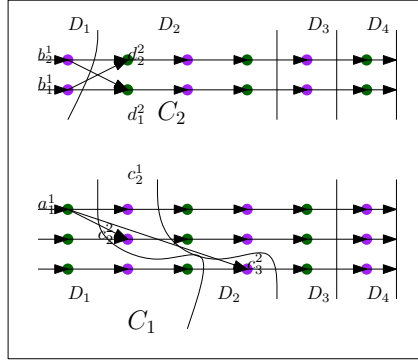


Figura 4.10:

$$C'_1 = (u_0, C_1, a_1^1, d_{t_1}^1, T_{t_1}^1, b_{t_1}^1, d_{t_2}^2, T_{t_2}^2, b_{t_2}^2, c_1^2, C_1, a_1^3, \dots, b_{t_n}^n, c_1^n, C_1, u_0)$$

Caso 1) Si  $V(D) - V(C'_1) = \emptyset$ , entonces  $D$  es hamiltoniana.

Caso 2) Si  $V(D) - V(C'_1) \neq \emptyset$ , entonces  $(V(C_2) - V(C'_1)) \neq \emptyset$ . Por como construimos  $C'_1$ , en  $V(C_2)$ , para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$  sólo quitamos las trayectoras  $T_{t_i}^i$  de la vuelta  $t_i$  en el sumando  $D_i$  por los que pasaba  $C_2$ , es decir, quitamos exactamente una trayectoria por la que pasaba  $C_2$  por el sumando  $D_i$ , para toda  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

Como teníamos exactamente una trayectoria  $T_t^i$  para cada  $t \in \{1, \dots, s\}$  vuelta e  $i \in \{1, \dots, n\}$ , se tiene que en  $C_2$  hay  $s$  trayectorias  $T_t^i$ , para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ , por lo que en  $C_2 - C'_1$  hay exactamente  $s - 1$  trayectorias  $T_t^i$ , para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

Para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  re-etiquetamos  $b_t^i, d_t^i$  y  $T_t^i$  en  $(V(C_2) - V(C'_1))$  de la siguiente manera:

- a) Si  $t < t_i$ , a  $T_t^i$  como  $P_t^i$ , a  $b_t^i$  como  $e_t^i$  y a  $d_t^i$  como  $f_t^i$ ,
- b) Si  $t > t_i$ , a  $T_t^i$  como  $P_{t-1}^i$ , a  $b_t^i$  como  $e_{t-1}^i$  y a  $d_t^i$  como  $f_{t-1}^i$ .

Es decir, recorreremos cada trayectoria un lugar hacia adelante a partir de la trayectoria que quitamos  $T_{t_i}^i$ , para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

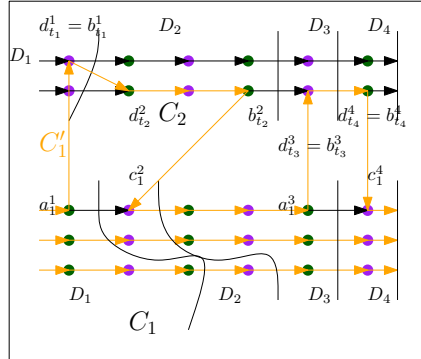


Figura 4.11: Ejemplo de la construcción de  $C'_1$ .

Una vez re-etiquetadas las trayectorias, unimos cada trayectoria del sumando  $i$  de la vuelta  $j$  con la trayectoria del sumando  $i+1$  de la vuelta  $j$ , es decir,  $P_j^i$  con la trayectoria  $P_j^{i+1}$ . Por ejemplo, la trayectoria  $P_1^1$  la unimos con la trayectoria  $P_1^2$ , la trayectoria  $P_1^2$  con la trayectoria  $P_1^3$ , y así sucesivamente construimos el ciclo  $C'_2 = (f_1^1, P_1^1, e_1^1, f_1^2, P_1^2, e_1^2, \dots, e_1^n, f_2^1, \dots, e_{s-1}^n, f_1^1)$

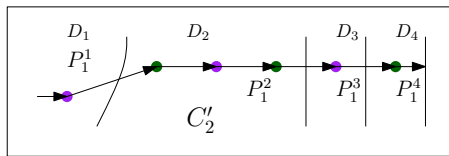


Figura 4.12: Ejemplo de la construcción de  $C'_2$

El ciclo  $C'_2$  se puede construir pues hay exactamente  $s - 1$  trayectorias  $P_i^j$ , para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Además es ciclo, pues no repite vértices, ya que no repite trayectorias por construcción, y cada trayectoria es ajena en vértices pues pertenecían a  $C_2$ . Por construcción de  $C'_2$  se tiene que

$$V(C'_2) = (V(C_2) - V(C'_1)).$$

**Afirmación 4)**  $C'_2$  y  $C'_1$  tienen la misma combinación.

Ya que como  $C_2$  y  $C_1$  no tienen la misma combinación, por la observación 7 se tiene que  $b_t^1 \in V_m^1$  y  $d_t^2 \in V_{m+1}^2$  para todo  $t \in \{1, \dots, s\}$  y con  $m \in \{1, 2\}$ , ya que las flechas  $b_t^1 \rightarrow d_t^2$  para toda  $t \in \{1, \dots, s\}$ , pertenecen a  $(D_1, D_2)$  en el ciclo  $C_2$ .

Por construcción de  $C'_1$ , la flecha  $b_{t_1}^1 \rightarrow d_{t_2}^2$  (flecha que anteriormente no pertenecía a  $C_1$ ) es una flecha que va de  $D_1$  a  $D_2$  en la primer vuelta de  $C'_1$ , y como  $b_{t_1}^1$  es un  $b_t^1$  en el ciclo  $C_2$ , para algún  $t_1 \in \{1, \dots, s\}$  y  $d_{t_2}^2$  es un  $d_t^2$  en el ciclo  $C_2$ , para algún  $t_2 \in \{1, \dots, s\}$ , por lo anterior se sigue que  $b_{t_1}^1 \in V_m^1$  y  $d_{t_2}^2 \in V_{m+1}^2$ .

Por otra parte, por construcción de  $C'_2$  la flecha  $e_1^1 \rightarrow f_1^2$  en  $C'_2$  va de  $D_1$  a  $D_2$  en la primer vuelta de  $C'_2$  y como  $e_1^1$  era un  $b_t^1$  en  $C_2$  para alguna  $t \in \{1, \dots, s\}$  y  $f_1^2$  era un  $d_t^2$  en  $C_2$  para alguna  $t \in \{1, \dots, s\}$ , se sigue que  $e_1^1 \in V_m^1$  y  $f_1^2 \in V_{m+1}^2$ .

Por lo tanto existen flechas  $b_{t_1}^1 \rightarrow d_{t_2}^2$  en  $C'_1$  y  $e_1^1 \rightarrow f_1^2$  en  $C'_2$ , tal que  $b_{t_1}^1$  junto con  $e_1^1$  están en  $V_m^1$ , y  $d_{t_2}^2$  con  $f_1^2$  están en  $V_{m+1}^2$ , para algún  $m \in \{1, 2\}$ , es decir,  $C'_1$  y  $C'_2$  tienen la misma combinación.

Por lo que  $C'_1$  y  $C'_2$  tienen un par bueno de flechas. Por lo tanto  $D$  es hamiltoniana.

Por lo tanto  $D$  es hamiltoniana. □

**Teorema 10.** Consideremos  $C = (w_0, \dots, w_n = w_0)$  un ciclo y  $D_1, \dots, D_n$  digráficas bipartitas ordenadas semicompletas fuertemente conexas ajenas. Sea  $D$  la  $\mathcal{P}$ -composición  $C[D_1, \dots, D_n]^{\mathcal{P}}$ .

$D$  es hamiltoniana si y sólo si posee un factor de ciclos y es fuertemente conexas.

*Demostración.* Primero supongamos que  $D$  es hamiltoniana,  $D$  posee un ciclo que pasa por todos sus vértices, por lo que  $D$  posee un factor de un ciclo y es fuertemente conexas.



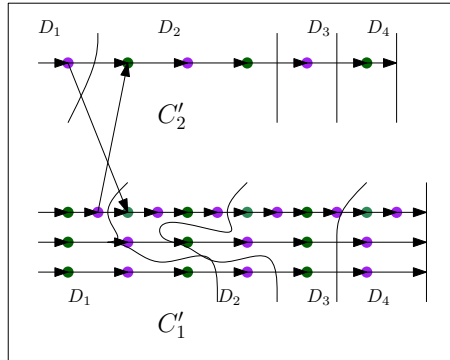


Figura 4.13:

Ahora, supongamos que  $D$  posee un factor de ciclos. Por demostrar que  $D$  es hamiltoniana

Procedemos a demostrarlo por inducción sobre el número de ciclos que posee el factor de ciclos.

Si  $k = 1$ , entonces  $D$  es una digráfica hamiltoniana pues existe un ciclo  $C_1 = (u_0, \dots, u_{k-1}, u_0)$  que pasa por todos los vértices de  $D$ .

Si  $k = 2$ , entonces  $D$  es hamiltoniana, pues si  $n$  es impar por Lema 5 se tiene que  $D$  es hamiltoniana. Si  $n$  es par por Lema 7 se sigue que  $D$  es hamiltoniana. Por lo tanto  $D$  es hamiltoniana.

(Hipótesis inductiva) Si  $D$  posee un factor de  $k$  ciclos, con  $k \geq 2$ , entonces  $D$  es hamiltoniana.

(Paso inductivo) Supongamos que  $D$  tiene un factor de  $k + 1$  ciclos. Veamos que  $D$  es hamiltoniana.

Sean  $C_1, C_2, \dots, C_{k+1}$  los ciclos que forman el factor de ciclos en  $D$ .

Caso 1) Si cada ciclo está contenido en un solo sumando, entonces por Lema 6  $D$  es hamiltoniana

Caso 2) Existe un ciclo  $C_i$  que pasa por todos los sumandos y existe un ciclo  $C_j$  que está contenido en un solo sumando, entonces por el Lema 1, existe un ciclo  $C'$  tal que  $V(C') = V(C_i) \cup V(C_j)$ , por lo que  $D$  posee un factor de  $k$  ciclos, entonces por hipótesis inductiva  $D$  es hamiltoniana.

Caso 3) Cada ciclo del factor pasa por todos los sumandos.

Como  $k \geq 2$ , entonces  $k + 1 \geq 3$ . Veamos que existen ciclos del factor  $C_i$  y  $C_j$  que tienen la misma combinación.

Supongamos por contradicción que por cada par de ciclos distintos del factor  $C_i$  y  $C_j$ , no tienen la misma combinación. En particular  $C_1$  y  $C_2$ , entonces para cada flecha  $x_1 \rightarrow y_1 \in (D_1, D_2)$  en  $C_1$  y cada flecha  $x_2 \rightarrow y_2 \in (D_1, D_2)$  en  $C_2$ , se tiene que  $x_1, y_2 \in V_l$  y  $x_2, y_1 \in V_{l+1}$ , con  $l$  módulo 2.

Por otra parte,  $C_2$  y  $C_3$  tampoco tienen la misma combinación, por lo que para cada flecha  $x_2 \rightarrow y_2 \in (D_1, D_2)$  en  $C_2$  y para cada flecha  $x_3 \rightarrow y_3 \in (D_1, D_2)$  en  $C_3$ , se tiene que  $x_3 \in V_l$  y  $y_3 \in V_{l+1}$ , pues  $x_2 \in V_{l+1}$  y  $y_2 \in V_l$  con  $l$  módulo 2.

Por lo que  $C_1$  y  $C_3$  tienen la misma combinación, lo cual es una contradicción. Por lo tanto existen dos ciclos del factor  $C_i$  y  $C_j$  que tienen la misma combinación, entonces por la Observación 6,  $C_i$  y  $C_j$  tienen un par bueno de flechas, por lo que por la Proposición 1 existe un ciclo  $C'$  tal que  $V(C') = V(C_i) \cup V(C_j)$ ; así se tiene que  $D$  tiene un factor de  $k$  ciclos, por lo que por hipótesis inductiva  $D$  es hamiltoniana.

Por lo tanto  $D$  es hamiltoniana.

□



# Bibliografía

- [1] G. Gutin, Criterion for complete bipartite digraphs to be Hamiltonian, *Vestsī Acad. Navuk BSSR Ser. Fiz-Mat. Navuk* 1 (1984) 109-110.
- [2] R. Häggkvist, Y. Monoussakis, Cycles and paths in bipartite tournament with spanning configurations, *Combinatorica* 9 (1) (1989) 33-38.
- [3] J. Bang-Jensen, Locally semicomplete digraphs: a generalization of tournaments. *J. Graph Theory*, 14(3):371-390, 1990.
- [4] J. Bang-Jensen, J. Huang, E. Prisner, In-tournament digraphs. *J. Combin. Theory Ser. B*, 59(2):267-287, 1993.
- [5] J. Bang-Jensen, Arc-locally tournament digraphs: a generalization of tournaments and bipartite tournaments, Technical Report Preprint No. 10, Department of Mathematics and Computer Science, University of Southern Denmark, 1993.
- [6] J. Bang-Jensen, The structure of arc-locally semicomplete digraphs, *Discrete Math.* 283 (2004) 1-6.
- [7] S. Wang, R. Wang, The structure of strong arc-locally semi complete digraphs, *Discrete Math.* 309 (2009) 6555 - 6562.
- [8] H. Galeana, I.A. Goldfeder, I. Urrutia, On the structure of strong 3-quasi-transitive digraphs, *Discrete Math.* 310(2010) 2495-2498.

- [9] H. Galeana, I.A. Goldfeder, A classification of all arc-locally semi-complete digraphs, *Discrete Mathematics*. 312 (2012) 1883-1891.
- [10] H. Galeana, I.A. Goldfeder, Hamiltonian cycles in a generalization of bipartite tournament with cycle factor, *Discrete Math.* 315-316 (2014) 135-143.