



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
INGENIERÍA ELÉCTRICA (INSTRUMENTACIÓN)

TOPÓGRAFO CORNEAL PORTÁTIL BASADO EN PANTALLAS NULAS

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
DOCTOR EN INGENIERÍA

PRESENTA: AMILCAR JAVIER ESTRADA MOLINA

**DIRECTOR DE TESIS:**

DR. JOSÉ RUFINO DÍAZ URIBE, CCADET

**COMITÉ TUTORAL**

DR. NEIL CHARLES BRUCE DAVIDSON, CCADET

DR. ROBERTO ORTEGA MARTÍNEZ, CCADET

MÉXICO, D.F

AGOSTO 2014



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor L D de los Estados Unidos Mexicanos.

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. NEIL C. BRUCE DAVIDSON.

Secretario: Dr. ALEJANDRO A. CORNEJO RODRÍGUEZ.

1<sup>er</sup>. Suplente: Dr. JOSÉ RUFINO DÍAZ URIBE.

2<sup>do</sup>. Suplente: Dr. DANIEL MALACARA HERNÁNDEZ.

3<sup>er</sup>. Suplente: Dr. YOBANI MEJÍA BARBOSA.

Esta tesis fue realizada en el Laboratorio de Pruebas Ópticas del Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico de la Universidad Nacional Autónoma de México.

## TUTOR DE TESIS:

Dr. JOSÉ RUFINO DÍAZ URIBE

  
Firma

*Con mucho cariño y amor para DIOS, mis Padres, mi Hermana Karen Estrada y para todos aquellos que creyeron en mi.*

*Amilcar J. Estrada Molina*



*En algún lugar sobre el arcoíris donde  
los pájaros celestes vuelan y los sueños  
que has soñado, hoy se hacen realidad*

*Yip Harburg*

# AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer

A la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), por ser la casa de estudios que me permitió realizar mis estudios de Doctorado en Ingeniería Eléctrica.

Al Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico (CCADET), por brindarme los espacios físicos, académicos e investigativos para que yo pudiese realizar mi investigación doctoral.

Al Dr. José Rufino Díaz Uribe, por su dedicación, apoyo, entrega y orientación en esta tesis de Doctorado.

A los miembros del comité tutorial: Dr. Neil. Bruce Davidson, Dr. Roberto Ortega Martínez, por sus consejos pertinentes en cada reunión del comité tutorial.

A los jurados de tesis, por dedicar su valioso tiempo para revisar mi tesis y hacerme correcciones pertinentes.

Al Dr. James Schwiegerling, por aceptarme en su laboratorio en el *College Of Optical Sciences* de la Universidad de Arizona y entrenarme durante seis meses en temas de óptica visual.

Al Dr. Marco Ramírez Ortiz, por su asesoría en aspectos clínicos del instrumento y por liderar la implementación del primer prototipo del topógrafo en el Hospital Infantil de México Federico Gómez.

A mis compañeros de laboratorio, por soportare en el día a día y por los gratos momentos que pasamos en congresos nacionales e internacionales.

A la Coordinación de Estudios de Posgrado (CEP) de la UNAM y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), por la beca que me otorgaron, con la cual pude dedicarme de tiempo completo a mi investigación doctoral.

A la Dirección General de Asuntos del Personal Académico (DGAPA), por su apoyo en los fondos asignados para la compra de instrumentación necesaria en la realización de este trabajo de tesis. Estos fondos fueron otorgados a través de los proyectos PAPIIT: IN11410 y IT101912.

*Amílcar J. Estrada Molina*

# ÍNDICE GENERAL

<b>AGRADECIMIENTOS</b>	<b>I</b>
<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>X</b>
<b>1. TOPOGRAFÍA CORNEAL</b>	<b>14</b>
1.1. La Córnea Humana . . . . .	14
1.2. Curvatura, Potencia Refractiva y Elevación . . . . .	16
1.3. Modelos Matemáticos de la Superficie Corneal . . . . .	20
1.4. Sistemas de Medición Usados en Topografía Corneal . . . . .	22
1.4.1. Topógrafo Corneal de Anillos de Plácido . . . . .	22
1.4.2. Haz de Barrido de Hendidura . . . . .	25
1.4.3. Cámara de Scheimpflug . . . . .	27
1.4.4. Tomografía de Coherencia Óptica . . . . .	30
1.5. Comentarios Finales . . . . .	33
<b>2. TOPOGRAFÍA CORNEAL CON PANTALLAS NULAS</b>	<b>34</b>
2.1. Método de Pantallas Nulas . . . . .	34
2.1.1. Diseño de la Pantalla Nula . . . . .	35
2.1.2. Evaluación de las Normales . . . . .	37
2.2. Elevación . . . . .	40
2.3. Curvatura . . . . .	42
2.3.1. Curvaturas Principales para una Superficie con Simetría de Revolución . . . . .	43
2.3.2. Curvatura Sagital y Meridional como Función de la Normal . . . . .	45
2.3.3. Evaluación Numérica de la Curvatura Meridional . . . . .	46
2.4. Potencia Refractiva . . . . .	48
2.5. Comentarios Finales . . . . .	49
<b>3. EXACTITUD DE LA RECONSTRUCCIÓN CORNEAL DEBIDO AL PISTÓN Y AL DESCENTRAMIENTO CORNEAL</b>	<b>51</b>
3.1. Pistón . . . . .	52
3.1.1. Efecto del Pistón en la Reconstrucción Corneal . . . . .	53
3.2. Descentramiento . . . . .	62
3.2.1. Efecto del Descentramiento en la Reconstrucción Corneal . . . . .	64

3.3.	Algoritmo para la Estimación del Pistón y el Descentramiento . . . . .	70
3.3.1.	Elección de un Valor Semilla para $z_0$ . . . . .	71
3.3.2.	Elección de los Valores Semillas para el Descentramiento $(x_0, y_0)$ . . . . .	73
3.3.3.	Rutina de Optimización . . . . .	73
3.3.4.	Ejemplos Simulados . . . . .	76
3.4.	Comentarios Finales . . . . .	78
<b>4.</b>	<b>EXACTITUD EXPERIMENTAL EN SUPERFICIES DE CALIBRACIÓN</b>	<b>80</b>
4.1.	Pruebas en una Esfera de Calibración de $r = 6.375$ mm . . . . .	80
4.1.1.	Captura de Imágenes . . . . .	81
4.1.2.	Cálculo de los Centroides . . . . .	82
4.1.3.	Diferencia de Elevación . . . . .	83
4.1.4.	Radios de Curvatura: Sagital y Meridional . . . . .	84
4.1.5.	Potencia Refractiva . . . . .	85
4.2.	Pruebas en una Esfera de Calibración de $r = 7.80$ mm . . . . .	86
4.2.1.	Captura de Imágenes y Cálculo de los Centroides . . . . .	86
4.2.2.	Diferencia de Elevación . . . . .	88
4.2.3.	Radios de Curvatura: Sagital y Meridional . . . . .	90
4.2.4.	Potencia Refractiva . . . . .	91
4.3.	Comentarios Finales . . . . .	92
<b>5.</b>	<b>AVANCES EN EL PROTOTIPO DEL TOPÓGRAFO CORNEAL</b>	<b>94</b>
5.1.	Construcción del Primer Prototipo del Topógrafo Portátil . . . . .	94
5.2.	Implementación Clínica del Primer Prototipo del Topógrafo Portátil . . . . .	96
5.3.	Topografía Corneal de una Córnea <i>in vivo</i> . . . . .	98
5.4.	Mejoras para la Implementación de un Segundo Prototipo . . . . .	102
5.4.1.	Mejoras en el Diseño de la Pantalla Nula . . . . .	103
5.4.2.	Mejoras en el Sistema de Iluminación . . . . .	103
5.4.3.	Mejoras en la Arquitectura del Topógrafo Corneal Portátil . . . . .	105
5.5.	Comentarios Finales . . . . .	107
	<b>CONCLUSIONES Y APORTES RELEVANTES</b>	<b>109</b>
	<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>113</b>
	<b>A. PRODUCCIÓN BIBLIOGRÁFICA DE LA TESIS DOCTORAL</b>	<b>121</b>

# ÍNDICE DE FIGURAS

1.1.	Esquema del segmento anterior del ojo (Corte transversal). . . . .	15
1.2.	(a) Capas tisulares de la córnea. (b) Regiones de la superficie corneal . . . . .	16
1.3.	Reconstrucción corneal en el plano meridional. . . . .	17
1.4.	Diagrama basico del topógrafo corneal de anillos de Plácido. . . . .	23
1.5.	Anillos de Plácido reflejados en la superficie corneal (Imagen obtenida de la referencia [46]). . . . .	23
1.6.	Esquema de arcos circulares para reconstruir el perfil meridional según Doss [22]. . . . .	24
1.7.	Sistema de haz de barrido de hendidura: (a) Esquema experimental. (b) Imagen del segmento anterior del ojo obtenida de la referencia [48]. . . . .	26
1.8.	Geometría de un sistema de haz de barrido de hendidura con: (a) Cámara fotográfica. (b) Cámara de Scheimpflug. . . . .	28
1.9.	Esquema de un sistema basado en la cámara de Scheimpflug con rotación. . . . .	28
1.10.	Imagen del segmento anterior obtenida con el Pentacam (Imagen obtenida en la referencia [7]). . . . .	29
1.11.	Diagrama esquemático de un sistema de OCT. . . . .	30
1.12.	Imagen del segmento anterior obtenida con un sistema de OCT (Imagen obtenida en la referencia [63]). . . . .	32
2.1.	Trazo de rayos para el diseño de la pantalla nula. . . . .	35
2.2.	Esquema meridional del trazo de rayos utilizado para la evaluación de la normal en el método de pantallas nulas ( $\hat{\mathbf{r}}_i$ , $\hat{\mathbf{r}}_r$ y $\hat{\mathbf{I}}$ no necesariamente están contenidos en el plano meridional). . . . .	38
2.3.	Esquema para el cálculo de la elevación corneal. . . . .	40
2.4.	Sección $\Gamma$ formada por la intersección del plano $\Pi$ con la superficie $S$ . . . . .	43
2.5.	Plano sagital y meridional para una superficie con simetría de revolución. . . . .	44

3.1. (a) Esquema gráfico para ilustrar el pistón corneal $z_0$ . (b) Efecto del pistón en el área cubierta por el patrón de puntos en el CCD. La línea sólida representa el área cubierta por el patrón de puntos cuando la superficie tiene un pistón nulo ( $z_0 = 0$ ). Mientras que las líneas discontinuas representan el caso para un pistón positivo (guiones largos) o negativo (líneas punteadas). (c) Efecto sobre el patrón de puntos en el CCD cuando la superficie de prueba tiene un pistón negativo. (d) Efecto sobre el patrón de puntos en el CCD cuando la superficie de prueba tiene un pistón positivo. . . . .	53
3.2. Esquema para el trazo directo de rayos utilizado en la simulación. . . . .	54
3.3. Exactitud del mapa de diferencia de elevación en función del pistón cuando se comparó con una esfera de $r = 7.8$ mm: (a) Errores PV y RMS para datos NC. (b) Errores PV y RMS para datos C. . . . .	57
3.4. Exactitud del mapa de radio de curvatura sagital y meridional en función del pistón: (a) Error RMS para los mapas NC. (b) Error RMS para los mapas C. . . . .	61
3.5. Radio de curvatura en una superficie corneal esférica cuando no se corrige por pistón: (a) Radio de curvatura sagital. (b) Radio de curvatura meridional. . . . .	62
3.6. Potencia refractiva en función de la distancia radial para cada valor de pistón: (a) Potencia refractiva sin corregir por pistón. (b) Potencia refractiva corregida por pistón. . . . .	62
3.7. Esquema meridional para ilustrar el descentramiento corneal. . . . .	64
3.8. Efecto del descentramiento sobre el patrón de puntos corneales observado en el CCD: (a) Patrón simulado. (b) Patrón Experimental. . . . .	64
3.9. Exactitud del mapa de diferencia de elevación en función del descentramiento cuando se comparó con una esfera de $r = 7.8$ mm: (a) Errores PV y RMS para datos NC. (b) Errores PV y RMS para datos C. . . . .	66
3.10. Exactitud del radio de curvatura sagital y meridional en función del descentramiento: (a) Error RMS para los mapas NC. (b) Error RMS para los mapas C. . . . .	68
3.11. Radios de curvatura en función de la distancia radial en $x_0 = 0.4$ mm: (a) Radio sagital. (b) Radio meridional. . . . .	68
3.12. Potencia refractiva en función de la distancia radial en $x_0 = 0.4$ mm donde PDN (Potencia refractiva obtenida con las normales) y PDA (Potencia refractiva obtenida analíticamente): (a) Potencia refractiva para datos no corregidos por descentramiento. (b) Potencia refractiva para datos corregidos por descentramiento. . . . .	70
3.13. Desviación radial de cada anillo definido sobre el patrón observado en el CCD . . . . .	72
3.14. Curva de calibración para encontrar un valor semilla del pistón corneal. . . . .	72
3.15. Esquema meridional del trazo invero de rayos ( $\hat{\mathbf{r}}_i$ y $\hat{\mathbf{r}}_r$ no necesariamente están en un plano meridional) . . . . .	74
4.1. Imagen de los <i>spots</i> sobre el balín de $r = 6.375$ mm: (a) Imagen a un F/2.8. (b) Imagen a un F/16. . . . .	82
4.2. Imagen de los <i>spots</i> sobre la esfera de calibración de $r = 7.80$ mm: (a) Imagen M1. (b) Imagen M2. . . . .	88
5.1. Diagrama esquemático del diseño del topógrafo corneal [11]. . . . .	95
5.2. Carcasa utilizada para el primer prototipo del topógrafo corneal. . . . .	95
5.3. (a) Esquema de la prueba del prototipo. (b) Foto capturada en quirófano. . . . .	97

5.4. Imágenes obtenidas con el primer prototipo del topógrafo corneal: (a) Imagen con pestañas superpuestas sobre los <i>spots</i> . (b) y (c) Imágenes con exceso de película lagrimal. (d) Imagen con párpados poco abiertos. . . . .	98
5.5. Imagen corneal utilizada para realizar la primera topografía corneal de una córnea <i>in vivo</i> con el topógrafo corneal portátil. El cruce de las líneas continuas en blanco corresponde al punto por donde pasa el eje óptico del topógrafo. . . . .	99
5.6. Mapas corneales: (a) Mapa de diferencia de elevación. (b) Mapa de radio sagital. (c) Mapa de radio meridional. (d) Mapa de potencia refractiva. . . . .	100
5.7. Sistema de iluminación desarrollado para el segundo prototipo del topógrafo corneal portátil: (a) Diagrama esquemático. (b) Fotografía. . . . .	104
5.8. (a) Imagen de la esfera de calibración obtenida con el nuevo sistema de iluminación. (b) Imagen binaria obtenida por un umbral global. . . . .	105
5.9. Imágenes obtenidas en el trabajo de campo realizado con un modelo del segundo prototipo del topógrafo corneal portátil: (a) Hospital Infantil. (b) y (c) Hospital General. (d) FESI. . . . .	106



# ÍNDICE DE TABLAS

1.1. Diferentes modelos matemáticos de la superficie córnea en coordenadas cilíndricas $(\rho, \theta, z)$ . . . . .	21
1.2. Modelo de la córnea según Navarro [38]. . . . .	21
3.1. Parámetros de diseño de la pantalla nula utilizados en la simulación numérica. . . . .	54
3.2. Desviaciones en elevación respecto a la córnea simulada ( $r = 7.8$ mm y $p = 1$ ). . . . .	56
3.3. Ajuste de la mejor cónica para datos corregidos y no corregidos por pistón. . . . .	57
3.4. Desviaciones del radio sagital respecto al radio $r = 7.8$ mm de la córnea simulada. . . . .	59
3.5. Desviaciones del radio meridional respecto al radio $r = 7.8$ mm de la córnea simulada. . . . .	60
3.6. Desviaciones de la potencia refractiva respecto al valor analítico obtenido para una esfera de $r = 7.8$ mm. . . . .	63
3.7. Desviaciones en elevación respecto a la córnea simulada ( $r = 7.8$ mm y $p = 1$ ) para los mapas NC y C por descentramiento. . . . .	65
3.8. Desviaciones del radio sagital respecto al radio $r = 7.8$ mm para datos con descentramiento. . . . .	67
3.9. Desviaciones del radio meridional respecto al radio $r = 7.8$ mm para datos con descentramiento. . . . .	67
3.10. Desviaciones de la potencia refractiva respecto al valor analítico obtenido para una esfera de $r = 7.8$ mm para datos corregidos y no corregidos por descentramiento. . . . .	69
3.11. Ajuste polinomial para la curva de calibración con el que se estima el valor semilla $z_{0S}$ . . . . .	73
3.12. Resultados obtenidos para el pistón y descentramiento de una superficie esférica simulada de radio $r = 7.8$ mm, cuando se aplica el algoritmo iterativo que se ha propuesto para estimar las coordenadas del vértice corneal $(x_0, y_0, z_0)$ . . . . .	77
4.1. Parámetros usados en el diseño de la pantalla nula para probar el balín de $r = 6.375$ mm. . . . .	81
4.2. Desviaciones en diferencias de elevación $\Delta z$ del balín respecto a la esfera de $r = 6.375$ mm. . . . .	83
4.3. Desviaciones en diferencias de elevación del balín respecto a la mejor esfera BFS. . . . .	84
4.4. Desviaciones del radio sagital y meridional respecto al radio nominal $r = 6.375$ mm del balín. . . . .	85
4.5. Desviaciones en potencia dióptrica del balín respecto a una esfera ideal de $r = 6.375$ mm. . . . .	85

---

4.6. Parámetros usados en el diseño de la pantalla nula para probar la esfera de calibración de $r = 7.80$ mm. . . . .	87
4.7. Desviaciones en diferencias de elevación de la Esf-Cal respecto a la esfera de $r = 7.80$ mm. . . . .	88
4.8. Desviaciones en diferencias de elevación de la Esf-Cal respecto a la mejor esfera BFS. . . . .	90
4.9. Desviaciones del radio sagital y meridional respecto al radio nominal $r = 7.80$ mm de la Esf-Cal. . . . .	90
4.10. Desviaciones en potencia refractiva de la Esf-Cal respecto a una esfera ideal de $r = 7.80$ mm. . . . .	91
5.1. Desviaciones de las magnitudes topográficas respecto a la BFS de radio $r = 7.071$ mm. . . . .	101

# INTRODUCCIÓN

La topografía corneal es una medida de la forma (elevación o sagita), curvatura y potencia refractiva de la córnea basada en el ángulo de reflexión (pendiente corneal) de los rayos de luz en dicha superficie. Esta pendiente corneal se relaciona directamente con la curvatura axial y a su vez, esta última es relacionada con la sagita y la curvatura meridional (o instantánea) a través de integraciones y derivaciones respectivamente. La curvatura se puede relacionar con la potencia refractiva de manera directa a través de la constante queratométrica ( $K = 337.5$ ), que no es otra cosa que la diferencia entre el índice de refracción de la córnea ( $n_c = 1.3375$ ) y del aire ( $n_a = 1$ ), multiplicado por  $10^3$  (factor de conversión de metros a milímetros) [1]. Es importante decir que la relación directa entre la curvatura y la potencia refractiva sólo es válida en la región paraxial de la córnea. Fuera de esa región se pierde esa proporcionalidad por lo que la potencia refractiva debe ser obtenida haciendo uso de la Ley de Snell dado que esta ley si predice la propiedades refractivas de una superficie óptica [2,3].

En los últimos años la topografía corneal ha ganado relevancia debido al incremento acelerado de algunas técnicas utilizadas en cirugía refractiva, el trasplante de córnea y la necesidad que tienen los optómetras de prescribir de manera más precisa lentes de contactos y lentes intraoculares (IOLs, por sus siglas en inglés), entre otras necesidades. Por ejemplo, en cirugía refractiva cuando se utiliza la técnica LASIK (acrónimo del inglés *Laser-Assisted in Situ Keratomileusis*), la superficie corneal es modificada mediante el uso de un láser excímero, con el propósito de corregir ametropías comunes como miopía, hipermetropía y astigmatismo, y así evitar el uso de gafas o lentes de contactos que en muchos casos pueden ser molestos para los pacientes. En LASIK es de suma importancia contar con un previo diagnóstico de las características geométricas y refractivas de la córnea, ya que este estudio no sólo le permite al oftalmólogo planear de manera precisa el procedimiento quirúrgico, sino también determinar si el paciente es un candidato adecuado para la operación y si tendrá buenos

resultados con el tratamiento. Como segunda medida, un diagnóstico corneal después de realizar la cirugía es necesario para darle seguimiento al estatus refractivo de la córnea operada de una manera objetiva [4]. En el caso de lentes de contacto, se conoce como regla general que el área de mayor ajuste de lentes rígidas es en el meridiano más plano dentro de la región paracentral de la córnea, por lo que un mapa de curvatura es útil para revelar dicho plano de la superficie corneal [5]. Es así como la topografía corneal goza actualmente de un interés investigativo de parte de la comunidad científica y médica.

A través de los años la topografía corneal ha sido medida con una variedad de técnicas basadas en diferentes fenómenos ópticos tales como la reflexión especular, la reflexión difusa y la esparcimiento de la luz, entre otros [6, 7]. Por ejemplo, en reflexión especular las técnicas tradicionales son los anillos de Plácido, interferometría y deflectometría de Moiré, en las cuales se considera a la superficie corneal como un espejo convexo. En el caso de la reflexión difusa, la propiedad especular es modificada con la aplicación de un líquido fluorescente en la película lagrimal; las técnicas que utilizan reflexión difusa son la rasterestereografía, las franjas de Moiré y la perfilometría por transformada de Fourier. Finalmente, en el esparcimiento de la luz es necesario un medio dispersor donde la luz pueda transmitirse para después reflejarse hacia atrás en diferentes direcciones. Esto se facilita en el tejido corneal debido a que es un medio óptico donde la luz puede esparcirse. Este es el principio que utiliza el haz de hendidura para visualizar los bordes de la superficie anterior y posterior de la córnea.

Técnicas como el haz de hendidura de barrido, la imagen de Scheimpflug y la tomografía de coherencia óptica (OCT, por sus siglas en inglés), han tomado mucha fuerza dentro del ambiente clínico dado que permiten medir directamente la elevación corneal, así como hacer un modelo tridimensional de la córnea a través de cortes transversales sobre dicha superficie. A estas técnicas se les conoce como tomografía corneal, dado que se derivan de las palabras griegas “tomos” (cortar o seccionar) y “graphein” (escribir) [1, 7]. La tomografía corneal debe aplicarse a sistemas capaces de producir imágenes de las superficie anterior y posterior de la córnea, espesor corneal, cristalino e iris, con la finalidad de combinar esta información en una reconstrucción tridimensional del segmento anterior del ojo. Estas técnicas proveen al oftalmólogo de una herramienta poderosa para obtener medidas más precisas que lo lleven a un mejor entendimiento de la superficie corneal. Esto último es realmente importante en el ambiente médico debido a las necesidades y expectativas de los pacientes, quienes desean una mejor calidad visual después de que se hacen un tratamiento quirúrgico con cirugía refractiva.

Muchas de las técnicas mencionadas anteriormente son aún prototipos experimentales, mientras que otras son dispositivos comerciales de gran peso y tamaño, diseñados especialmente para que sean dedicados en un área de trabajo, evitando así su fácil traslado de un lugar a otro. Este último, es el caso de topógrafos como el Keratron (Optikon, Roma, Italia), que utiliza los anillos de Plácido., el Orbscan (Bauch & Lomb, Rochester, NY), siendo éste un sistema híbrido que utiliza anillos de Plácido y un haz de hendidura de barrido., el Pentacam (Oculus Inc., Dutenhofen, Alemania), basado en el principio de Scheimpflug., y el Visante Omni (Carl Zeiss Meditec, Jena, Alemania) que es un sistema híbrido de anillos de Plácido y OCT. Estos sistemas también son pensados para usarse con pacientes adultos, los cuales deben estar sentados y cooperar durante el estudio topográfico. Por ejemplo, el paciente debe poner su cara en un marco de referencia para facilitar la alineación del ápice corneal con el eje óptico del instrumento.

Con lo mencionado anteriormente, no sería sencillo realizar una topografía corneal a un paciente que tenga que estar acostado en una cama sin poder estar sentado como se requiere en la mayoría de los instrumentos que actualmente están disponibles comercialmente. Lo mismo acontece cuando los pacientes son niños; especialmente recién nacidos o en sus primeros años de vida quienes no pueden seguir instrucciones para el estudio de sus córneas. Actualmente ha aumentado el número de niños a los cuales hay que realizarles topografía corneal, ya sea para el conocimiento de esta superficie a tempranas edades [8], o con el fin de prescribir lentes de contacto o intraoculares como ayuda a la prevención de la ceguera infantil debido a la catarata [9], ya que la ceguera en niños menores de 12 meses se puede evitar con la adaptación de lentes de contacto y en niños entre los 12 meses y 3 años con la adaptación de un lente intraocular. Es por eso que los centros de oftalmología requieren contar con topógrafos capaces de abordar este tipo de situaciones presentes en el campo clínico. Algunas compañías han desarrollado dispositivos comerciales que han sido construidos de manera portátil buscando solucionar este tipo de problemas como es el caso del EyeSys Vista (EyeSys Vision, Houston, TX), entre otros.

Hace unos años atrás el **Dr. Marco Ramírez Ortiz** quien es director del servicio de oftalmología del Hospital Infantil de México Federico Gómez, le comentó al **Dr. José Rufino Díaz Uribe** (asesor de este trabajo), todas estas dificultades que él mismo enfrenta cada día en el departamento que lidera en el hospital infantil. Mi asesor le propuso la posibilidad de construir un topógrafo portátil económico de tecnología mexicana con todas las características necesarias (portabilidad, fácil

manejo, liviano y ergonómico) para ser usado con bebés e infantes. La idea fue acogida por mí y para ese entonces propuse las primeras ideas, construí un primer modelo experimental de laboratorio basado en el método de pantallas nulas [10] y realicé pruebas iniciales en superficies de calibración. Este fue el trabajo desarrollado en mi tesis de maestría presentada en noviembre del 2010 [11]. En el 2011 comencé el doctorado con el objetivo de construir el primer prototipo del topógrafo portátil, mejorar la exactitud de los algoritmos para reconstruir la superficie corneal y realizar pruebas preliminares de este prototipo en el Hospital Infantil de México. Es por eso que se presenta este texto en extenso de lo que ha sido la investigación a nivel doctoral del topógrafo corneal portátil desarrollado en el Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico (CCADET) de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM).

Esta tesis doctoral se ha esquematizado de la siguiente manera: En el capítulo 1, se dará un breve estudio del estado del arte de la topografía corneal. En el capítulo 2, se desarrollarán los conceptos matemáticos utilizados para obtener la elevación, curvaturas y poder refractivo de la superficie corneal mediante pantallas nulas. En el capítulo 3, se mostrará el efecto que tienen el pistón y el descentramiento de la córnea en la exactitud de la reconstrucción corneal y se presentará el algoritmo que propongo para encontrar dicho pistón y descentramiento. Pruebas de calibración sobre esferas de radios conocidos se mostrarán en el capítulo 4. La construcción e implementación del primer prototipo, pruebas preliminares en córneas *in vivo* y los avances en la construcción de un segundo prototipo se mostrarán en el capítulo 5. Finalmente, se presentarán las conclusiones generales y los logros obtenidos en esta investigación doctoral.

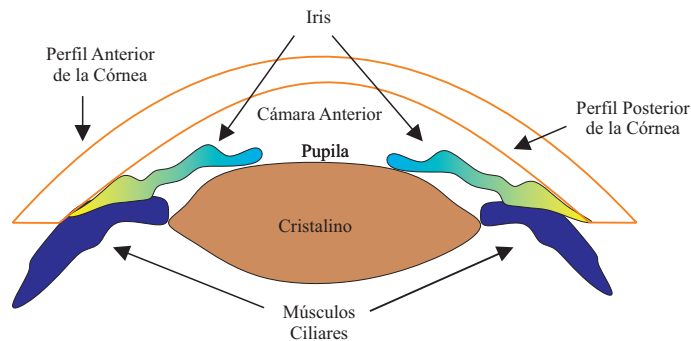
# TOPOGRAFÍA CORNEAL

La topografía corneal como se mencionó en la introducción de esta tesis no es más que la medición de las propiedades geométricas y refractivas de la córnea de una manera no invasiva. Desde los años setenta del siglo XX, la topografía corneal ha evolucionado aceleradamente. Actualmente se cuenta con técnicas muy precisas para medir la córnea, lo que ha permitido tener un modelo completo de la superficie corneal. Es por eso que en este capítulo se dará una revisión al estado del arte de la topografía corneal. Esta revisión incluirá: el estudio de la anatomía y de las propiedades ópticas de la córnea; la definición de elevación, curvatura y potencia refractiva (o potencia refractiva); una mirada a los modelos matemáticos desarrollados para describir la superficie corneal y finalmente se presentarán las técnicas más relevantes para estimar la topografía corneal.

## 1.1. La Córnea Humana

El segmento anterior del ojo está compuesto por la córnea, la cámara anterior (volumen lleno de humor acuoso), el iris, la pupila y el cristalino. Dentro del segmento anterior, la córnea es el primer componente ópticamente transparente y el que ofrece el mayor poder refractivo del ojo en comparación con el cristalino que con dos superficies y un medio inhomogéneo (gradiente de índice de refracción) refracta los rayos de luz en su camino hacia la retina. La córnea está compuesta por una superficie anterior y una posterior, las cuales están separadas por un espesor promedio de 0.55 mm en el ápice corneal y 0.70 mm en la región periférica de la misma. La superficie anterior es la responsable del mayor poder refractivo de la córnea, debido a la diferencia en índices de refracción en la interface aire-córnea. Esto produce que cualquier rayo que entra al sistema óptico del ojo es fuertemente refractado en la superficie anterior para luego sufrir una leve refracción en la superficie

posterior de la córnea; en este caso los índices de refracción de la córnea y el humor acuoso son muy parecidos, siendo diferentes sólo hasta la tercera cifra significativa. Esta es la razón fundamental por lo que la superficie anterior ha sido por años la superficie de mayor interés en el campo clínico e investigativo respecto a la superficie posterior. La Fig. 1.1 muestra la posición de la córnea dentro del segmento anterior del ojo.

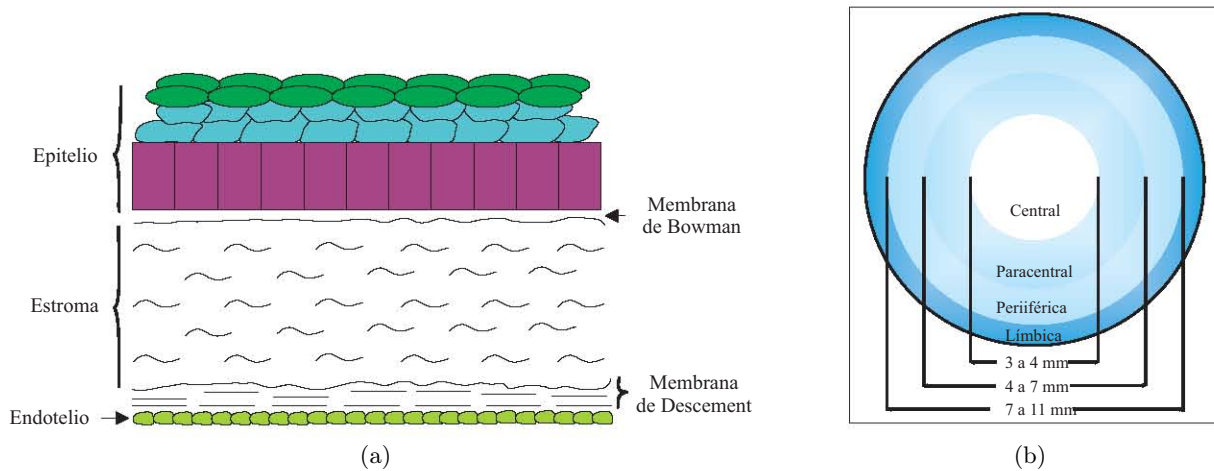


**Figura 1.1:** Esquema del segmento anterior del ojo (Corte transversal).

Desde el punto de vista histológico, la córnea está constituida por el epitelio, la membrana de Bowman, el estroma, la membrana de Descemet y finalmente el endotelio, formando así las 5 capas en que se divide dicha superficie [ver Fig. 1.2(a)]. Las propiedades ópticas de la córnea están asociadas al epitelio y al estroma. Por ejemplo, la película lagrimal se encuentra sobre el epitelio dándole la forma lisa y suave a la córnea para favorecer la reflexión especular de la luz. Mientras que el estroma, siendo formado por un 80 % de agua y un 20 % de fibras de colágeno y proteoglicanos, hace que la córnea mantenga su habilidad de transmitir la luz hacia el interior del globo ocular. De manera global el tejido corneal es similar al de la esclera con la excepción de que éste es transparente y no contiene vasos sanguíneos [12, 13]. Por otro lado, usualmente suele dividirse transversalmente a la córnea en cuatro regiones: central, paracentral, periférica y límbica [ver Fig. 1.2(b)] [14]. La región central (también llamada región apical, capa corneal o esférica) tiene un diámetro de 3 a 4 mm y es considerada la región óptica de la córnea porque es la principal responsable de la formación de las imágenes en la retina a través de la pupila de entrada del ojo aún en condiciones de alta iluminación (fotópica) donde la pupila puede cerrarse hasta un diámetro mínimo de 2 mm. La región paracentral tiene un diámetro aproximado entre 4 a 7 mm y es muy importante para el diseño de lentes de contacto blandas (SCL, por sus siglas en inglés) debido a que en esta zona se hace el ajuste de dichas lentes [5]; esta región cobra importancia en condiciones de baja iluminación (escotópica) donde la pupila puede dilatarse hasta un diámetro de 8 mm. La región periférica tiene un diámetro de 7 a 11 mm y es la zona las córneas normales son más planas y se vuelven más esféricas. Con



la utilización de lentes de contacto rígidas (RCL, por sus siglas en inglés), dicha región ha tomado mucho interés en el campo clínico y actualmente contar con datos topográficos en esa zona es uno de los desafíos en topografía corneal [15]. Finalmente, la región límbica es un anillo de aproximadamente 0.5 mm de anchura que termina en la esclera.

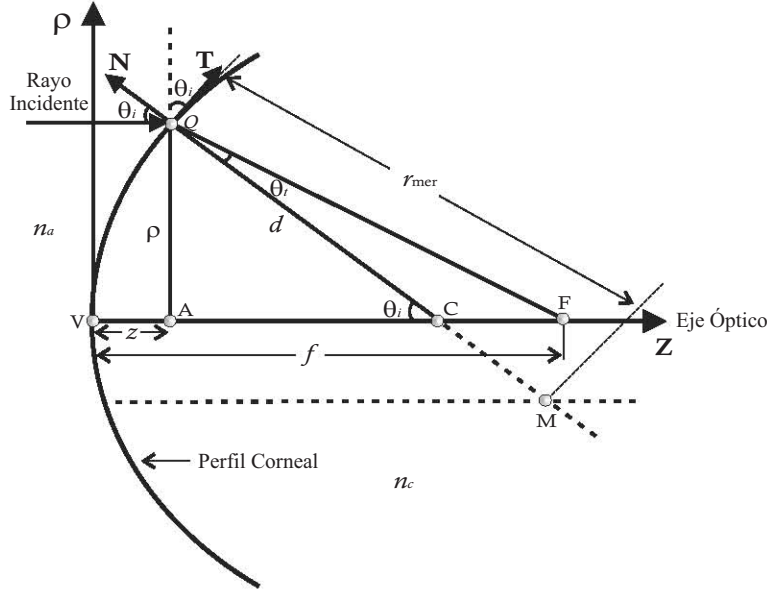


**Figura 1.2:** (a) Capas tisulares de la córnea. (b) Regiones de la superficie corneal

## 1.2. Curvatura, Potencia Refractiva y Elevación

La curvatura, elevación y potencia refractiva son las formas comunes de representar la topografía corneal. Existe una estrecha relación entre estas tres magnitudes teniendo en cuenta conceptos de óptica paraxial. Es conocido de la geometría diferencial que hay diferentes curvaturas en un mismo punto de una superficie; por ejemplo, se pueden definir: curvatura normal, curvatura media, curvatura de Gauss, curvatura meridional, entre otras [16–18]. En topografía corneal se suele utilizar la curvatura axial y la curvatura meridional definidas en el plano meridional [3, 19–21]. Esto es debido a que anteriormente sólo se contaba con instrumentos que ofrecían datos corneales exclusivamente en la dirección radial, lo cual hizo que se desarrollaran algoritmos que permitieran hacer la reconstrucción de la superficie corneal en el plano meridional [22, 23]. En términos estrictos la curvatura axial no es una curvatura en sí, porque ésta no ofrece información de la rapidez de cambio del vector tangente unitario en alguna dirección; ésta se define como el inverso de la distancia de un punto corneal al eje óptico sobre la línea de la normal como se describe en la Fig. 1.3. Por años la comunidad clínica se ha familiarizado con esta definición, lo que ha llevado a una interpretación errónea del concepto de curvatura ampliamente conocido por la comunidad científica dedicada al estudio de la óptica visual. Es así como la curvatura meridional tomó relevancia, ya que ésta sí ofrece información de la rapidez

de cambio de vector tangente unitario en la dirección meridional. Es por eso que en el campo de la topografía corneal se han popularizado los nombres de curvatura local, instantánea o verdadera para referirse a la curvatura meridional [6].



**Figura 1.3:** Reconstrucción corneal en el plano meridional.

Según la Fig. 1.3, C y M son el centro de curvatura axial y meridional respectivamente. F es el foco de la córnea donde todos los rayos paralelos al eje óptico convergen después de la refracción en dicha superficie. V es el vértice la córnea por donde pasa el el eje óptico. **N** y **T** son los vectores normal y tangente a la superficie en el punto corneal **Q** respectivamente;  $n_a$  y  $n_c$  son los índices de refracción del aire y la córnea, respectivamente. Acorde a la geometría de la Fig. 1.3, del  $\Delta AQC$  se obtiene la expresión para la curvatura axial  $C_{\text{axi}}$  en el punto **Q**

$$C_{\text{axi}} = \frac{1}{d} = \frac{\sin \theta_i}{\rho}, \quad (1.1)$$

donde  $\rho$  es la distancia perpendicular del el eje óptico hasta la córnea y  $\theta_i$  es el ángulo de incidencia del rayo incidente. Haciendo uso de las identidades trigonométricas se obtiene una relación de  $\sin \theta_i$  en función de  $\tan \theta_i = dz/d\rho$ , que no es otra cosa que la pendiente de la córnea en el punto **Q**. Esto es importante en topografía corneal porque muchos instrumentos comerciales estiman directamente la pendiente corneal con métodos de reflexión especular [24, 25]. Por tanto, la curvatura axial se transforma en la expresión siguiente

$$C_{\text{axi}} = \frac{dz/d\rho}{\rho [1 + (dz/d\rho)^2]^{1/2}}. \quad (1.2)$$

Para el caso de la curvatura meridional se hace uso de la expresión analítica de la geometría diferencial para describir la curvatura de una curva plana generada por el corte de un plano con una superficie [16–18]. Esta se expresa como:

$$C_{\text{mer}} = \frac{1}{r_{\text{mer}}} = \frac{d^2z/d\rho^2}{[1 + (dz/d\rho)^2]^{3/2}}. \quad (1.3)$$

Si se conectan las Ecs. (1.2) y (1.3), se logra obtener la relación que existe entre la curvatura axial y meridional [20].

$$C_{\text{axi}} = \frac{1}{\rho} \int_0^\rho C_{\text{mer}} d\rho. \quad (1.4)$$

Lo que da entender la Ec. (1.4), es que la curvatura axial es el promedio de todos los valores de la curvatura meridional en el camino desde el eje óptico al punto  $Q$ . La curvatura meridional también puede escribirse en función de la curvatura axial

$$C_{\text{mer}} = C_{\text{axi}} + \rho \frac{dC_{\text{axi}}}{d\rho}. \quad (1.5)$$

De la Ec. (1.5) se demuestra que en el vértice de la superficie  $C_{\text{mer}} = C_{\text{axi}}$ , ya que  $\rho = 0$ . En la región paraxial  $\rho \rightarrow 0$ , y por ende  $C_{\text{mer}} \approx C_{\text{axi}}$ . Se sabe que el radio de curvatura es el inverso de la curvatura por lo que en dicha región los radios axial  $d$ , y meridional  $r_{\text{mer}}$  son aproximadamente iguales asintóticamente ( $d \approx r_{\text{mer}}$ ).

En topografía corneal también se utiliza el concepto de potencia refractiva como una medida de las propiedades refractivas de la córnea. Matemáticamente se expresa cómo el cociente entre el índice de refracción  $n_c$  y la segunda distancia focal  $f$  de la superficie corneal, donde se ha supuesto un modelo de lente simple para la superficie anterior de la córnea [ver Ec. (1.6)]. Las unidades en el Sistema Internacional de Unidades es la Dioptría (D) que se define cómo el inverso del metro ( $\text{m}^{-1}$ ).

$$P = \frac{n_c}{f}. \quad (1.6)$$

De la geometría en la Fig. (1.3), se logra relacionar los ángulos de incidencia  $\theta_i$ , de transmisión  $\theta_t$ , la distancia perpendicular de la córnea hasta el eje óptico  $\rho$ , la sagita  $z$ , con la longitud focal secundaria como  $f = z + \rho / \tan(\theta_i - \theta_t)$ . Por lo que la Ec. (1.6) queda de la siguiente manera

$$P = \frac{n_c}{z + \rho / \tan(\theta_i - \theta_t)}. \quad (1.7)$$

Los ángulos de incidencia y de transmisión se relacionan a través de la conocida Ley de Snell. La Ec. (1.7) se simplifica si se hace uso de la aproximación de ángulos pequeños en la región paraxial donde  $z \rightarrow 0$ ,  $\tan(\theta_i - \theta_t) \approx \sin(\theta_i - \theta_t) \approx (\theta_i - \theta_t) \approx \rho(n_c - 1)/n_c d$  y  $d \approx r_{\text{mer}}$ . Si se reemplaza esto último en la Ec. (1.7), se obtienen las expresiones más divulgadas de la potencia refractiva en el campo de la topografía corneal [3, 19, 20].

$$P_{\text{axi}} = \frac{(n_c - 1)}{d} = (n_c - 1)C_{\text{axi}}, \quad P_{\text{mer}} = \frac{(n_c - 1)}{r} = (n_c - 1)C_{\text{mer}}, \quad (1.8)$$

donde  $P_{\text{axi}}$  y  $P_{\text{mer}}$  son la potencia axial y meridional respectivamente. Cualquiera de las expresiones de la Ec. (1.8) ofrecen resultados precisos en la región paraxial como muestra Roberts [3], pero en topografía corneal se suelen usar estas expresiones sin limitaciones paraxiales sobre toda la córnea. Esto es otro concepto erróneo que se ha usado por años en el comunidad clínica. El siguiente ejemplo da una idea del error que se comete al utilizar estas expresiones fuera de la región paraxial: si se quisiera obtener la potencia refractiva de una esfera haciendo uso de la Ec. (1.8), ésta daría una constante sobre toda la superficie, pero se sabe que para una esfera la potencia refractiva no es una constante ya que aumenta del centro hacia la periferia debido a la aberración esférica que está presente en este tipo de superficie [3].

La última magnitud que se utiliza tradicionalmente en topografía corneal es la elevación o sagita  $z$  y se define como la distancia de un punto corneal  $Q$  respecto a un plano de referencia perpendicular a dicho eje (ver Fig. 1.3). Ésta se puede medir directamente usando la cámara de Scheimpflug o con un sistema de OCT [7]. En el tercer párrafo de esta sección se dijo que la pendiente corneal en un punto  $Q$  se puede expresar como  $\tan \theta_i = dz/d\rho$ . Si esta expresión es integrada en ambos lados respecto a  $\rho$ , se obtendría la elevación de manera indirecta a través de una integración sobre los puntos de las pendientes corneales como se describe a continuación

$$z = z_0 + \int_0^\rho \tan \theta_i d\rho. \quad (1.9)$$

La integral de la Ec. (1.9) debe ser resuelta numéricamente dado que las pendientes corneales no son funciones analíticas sino datos discretos obtenidos experimentalmente. Algunos autores han utilizado diferentes algoritmos numéricos (arcos circulares, método del trapecio, splines, entre otros) para reconstruir la elevación corneal por medio de la Ec. (1.9) [22, 23, 26]. Lo importante de obtener

la elevación con dicha ecuación es que a partir de ésta, se pueden calcular la curvatura axial y meridional con sus correspondientes potencias refractivas haciendo uso de las Ecs. (1.2), (1.3) y (1.8) con la única restricción de que la córnea tenga simetría rotacional, ya que se requiere que el eje óptico y el vector normal estén contenidos en el plano meridional. Si la córnea no tiene simetría rotacional (córneas con astigmatismo, queratocono, entre otras), el vector normal se sale de dicho plano meridional, por lo que los rayos reflejado y refractado tendrán una componente meridional y otra oblicua o sagital. Si se utilizan las ecuaciones desarrolladas anteriormente bajo estas condiciones, la reconstrucción de la superficie corneal será incompleta por no tener en cuenta la componente oblicua de dichos rayos. Esto se conoce como el error del rayo oblicuo (o *skew ray error*, por su traducción al inglés) y está bien documentado en la literatura [6, 27–29].

Finalmente, los datos de curvatura, potencia y elevación deben ser presentados de una manera rápida, sencilla y que permitan la comparación ente los resultados de la evaluación de la córnea con diferentes técnicas. Por tal razón se introdujeron en 1987 los mapas corneales, los cuales son representaciones bi-dimensionales de colores donde cada color está asociado a variaciones en la superficie corneal, ya sea, en elevación, curvatura o potencia refractiva. Esta forma de representar los datos fue desarrollada por Klyce y sus colaboradores [30], como una herramienta que facilitara la interpretación de los datos de la topografía corneal. La propuesta fue adoptada por la industria oftálmica y hoy en día es un estándar en la práctica clínica. Las ideas centrales para construir dichos mapas corneales están resumidas en la norma americana ANSI **Z80.23-2007**, para sistemas de topografía corneal que evalúan la córnea [31].

### 1.3. Modelos Matemáticos de la Superficie Corneal

Diferentes autores han modelado matemáticamente la córnea basandose en datos estadísticos y poblacionales de la topografía corneal, o simplemente en consideraciones teóricas [15, 32–35]. Estos modelos que se enlistan en la Tabla. 1.1, han incluido córneas normales (córneas con astigmatismo  $< 0.25$  D), astigmáticas (astigmatismo  $\geq 0.25$  D), con queratocono, entre otras. El modelo que ha prevalecido durante años por su sencillez y robustez para modelar una córnea normal es la de una cónica de revolución, donde se tienen dos parámetros fundamentales como lo son el radio de curvatura en el vértice  $r$  y el factor  $p = k + 1$ , siendo  $k$  la constante de conicidad, la cual define la naturaleza de la cónica [36]. Para una superficie astigmática, el radio de curvatura en el vértice es función del ángulo polar y de los radios en dos diferentes meridianos (vertical y horizontal) [37, 38]. Para modelar una córnea con queratocono Carvalho [35] propone una superficie dependiendo de la zona

de evaluación corneal ( $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ ) y de un parámetro  $a$  llamado “Intensidad de Queratocono”.

**Tabla 1.1:** Diferentes modelos matemáticos de la superficie córnea en coordenadas cilíndricas  $(\rho, \theta, z)$ .

Córnea	Parámetros	Ecuación	Referencia
Normal	$r, p$	$pz^2 - 2rz + \rho^2 = 0$	Navarro [38]
Astigmática	$r_h, r_v, \theta, p$	$pz^2 - 2z \left( \frac{1}{\frac{1}{r_h} + \left( \frac{1}{r_v} - \frac{1}{r_h} \right) \sin^2 \theta} \right) + \rho^2 = 0$	Navarro [38]
Queratocono	$r, a$	$z = \begin{cases} r - \sqrt{r^2 - \rho^2}, & 0 < \rho \leq \rho_1 \\ r - \sqrt{r^2 - \rho^2} + \frac{a}{2} \left[ 1 - \cos 2\pi \left( \frac{\rho - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1} \right) \right], & \rho_1 < \rho \leq \rho_2 \\ r - \sqrt{r^2 - \rho^2}, & \rho_2 < \rho \leq \rho_3 \end{cases}$	Carvalho [35]

Actualmente es común hacer un modelo de la córnea de una manera más general basado en los polinomios de Zernike [39, 40], ya que con este se pueden estimar fácilmente las aberraciones corneales [41], así como medidas del queratocono corneal [42]. Por otra parte, Navarro [38] hizo una revisión completa de los modelos actuales del ojo y los comparó con los datos experimentales para evaluar las propiedades ópticas del mismo. Respecto a la córnea, hace uso de un modelo bicónico de la superficie corneal que es un modelo más general, porque al hacer unas suposiciones respecto a sus parámetros se pueden obtener la cónica de revolución y la superficie astigmática descritas en la Tabla. 1.1, así como un elipsoide sin simetría de revolución. Con datos experimentales de 123 córneas, Navarro mostró que el modelo esférico y el del elipsoide sin simetría de revolución son los que ofrecen mayor y menor error RMS (acrónimo del inglés *Root Mean Square*), respectivamente. Este resultado refuerza la idea que la córnea no tiene simetría de revolución. En este estudio también se encuentran valores promedios del radio de curvatura en el vértice, del factor  $p$  y de la potencia refractiva de la córnea. Estos resultados se muestran en la Tabla. 1.2.

**Tabla 1.2:** Modelo de la córnea según Navarro [38].

Superficie	Radio de curvatura (mm)	Potencia refractiva (D)	$p = k + 1$	Cónica
Anterior	7.83	48.0	$0.70 \leq p \leq 0.82$	Prolato
Posterior	6.50	-6.00	0.34	Prolato

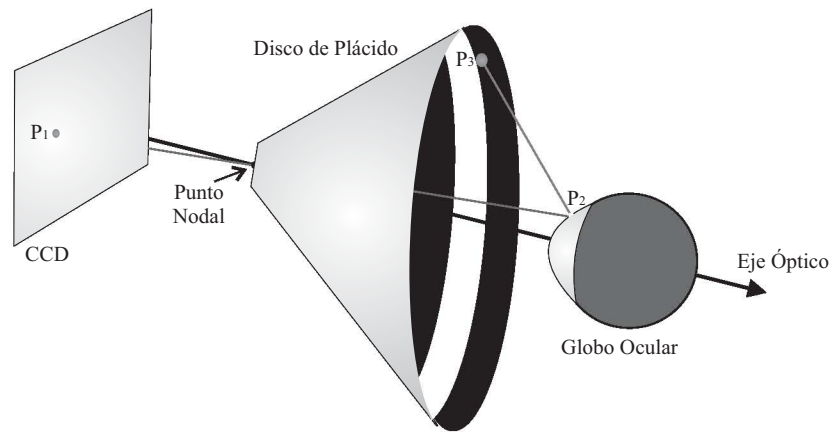
## 1.4. Sistemas de Medición Usados en Topografía Corneal

El sistema de medición basado en los anillos de Plácido es quizás el más usado en el campo clínico por su sencillez y su fácil implementación. La mayoría de los topógrafos corneales que están disponible actualmente en el mercado utilizan este sistema de medición. La norma americana lo define como *Topógrafo Corneal de Anillos de Plácido* [31]. Diferentes trabajos han mostrado las limitaciones que se tienen a la hora de evaluar la topografía corneal con el topógrafo corneal de anillos de Plácido [6, 15, 27, 29, 43], lo que ha motivado a la comunidad científica y a las compañías líderes en la industria oftálmica ha desarrollar nuevos sistemas de medición que solucionen dichas limitaciones. Es por eso que técnicas como el haz de barrido de hendidura (o de rendija) (Slit Scanning, por su traducción al inglés), la cámara de Scheimpflug y el OCT han sido adaptadas para evaluar la córnea. A continuación se dará un breve explicación de estos sistemas mencionados anteriormente.

### 1.4.1. Topógrafo Corneal de Anillos de Plácido

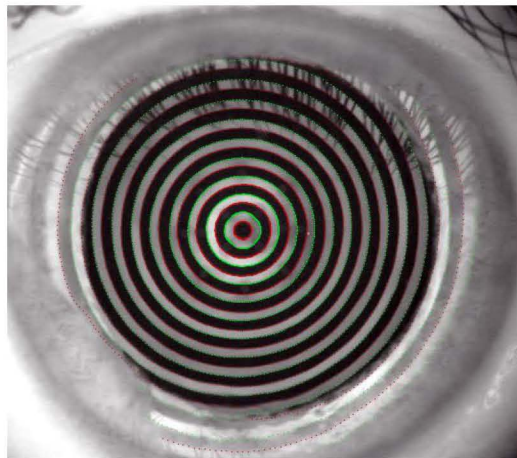
Este topógrafo corneal está basado en la capacidad de la superficie corneal anterior de comportarse como un espejo convexo y reflejar la luz especularmente. Dicho instrumento utiliza anillos de Plácido (conjunto de anillos concéntricos blancos y negros) que son puestos en un soporte plano, semiesférico, cilíndrico, o cónico para ser iluminados externamente y así formar una imagen virtual por reflexión en la superficie corneal [6, 44]. Un sistema óptico compuesto por una lente acromática, diafragma y un detector, es implementado para poder visualizar dicha imagen virtual. Un computador permite almacenar y procesar la imagen de los anillos de tal manera que se obtengan datos que se puedan relacionar con la geometría del sistema con el fin de obtener la topografía corneal. Es la distorsión del patrón de los anillos la que ofrece información de la superficie corneal. Por ejemplo, se sabe que si los anillos aparecen circulares y concéntricos, se asocia a una córnea simétrica (córnea normal); si los anillos forman un conjunto de elipses, se dice que es una córnea astigmática y finalmente cuando hay queratocono, los anillos son abultados hacia el centro de la córnea. Aunque han pasado más de 100 años desde que se introdujo este sistema [45], el método de medición ha cambiado muy poco desde ese tiempo. Un diagrama del topógrafo corneal de anillos de Plácido se muestra en la Fig. 1.4.

Como se puede observar en la Fig. 1.4, un rayo de luz que parte del punto  $\mathbf{P}_3$  en el cono que contiene a los anillos de Plácido llega a la superficie corneal en el punto  $\mathbf{P}_2$ , donde se refleja cumpliendo la ley de la reflexión. El rayo reflejado pasa por un punto sobre el eje óptico del sistema



**Figura 1.4:** Diagrama básico del topógrafo corneal de anillos de Plácido.

(usualmente llamado punto nodal), para finalmente llegar al punto  $P_1$  en el detector de imagen que generalmente es un CCD (acrónimo del inglés *Charge-Coupled Device*). La Fig. 1.5 muestra los anillos reflejados sobre la córnea obtenido con este tipo de topógrafo.



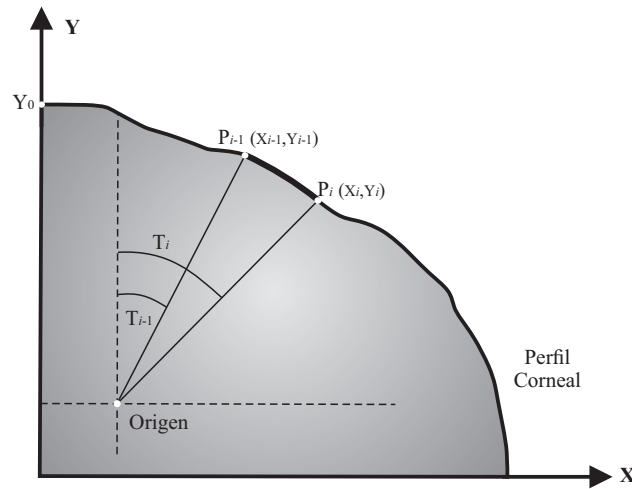
**Figura 1.5:** Anillos de Plácido reflejados en la superficie corneal (Imagen obtenida de la referencia [46]).

Con el conocimiento de la geometría del sistema (puntos cardinales del sistema óptico y distancias de trabajo), de las coordenadas de los puntos en los anillos con sus correspondientes puntos imagen en el CCD (obtenidos con algoritmos de procesamientos de imágenes), y de la distancia entre los anillos y el vértice corneal, se puede estimar la pendiente del punto corneal en la dirección radial [6, 23–25]. La pendiente en la dirección azimutal no es posible calcularla porque se tiene un continuo de puntos en esa dirección perdiendo así la correspondencia uno a uno con los puntos en el plano imagen. Debido a esto, la reconstrucción de la topografía corneal (curvatura, potencia y elevación) se hace sólo en el plano meridional. Este es el gran limitación que tiene este sistema de



medición debido a la utilización de los anillos de Plácido, ya que hay presencia de rayos oblicuos producidos por la no simetría rotacional de la córnea o por la incorrecta alineación de ésta respecto al eje óptico del topógrafo. La manera de solucionar este problema es cambiar los anillos por un patrón de puntos que permita obtener información tanto en la dirección azimutal como en la dirección radial. Puntos distribuidos en una malla cuadrada, radialmente y en un patrón de ajedrez han sido utilizados para sobrellevar el problema del rayo oblicuo [11, 43, 46, 47].

El algoritmo más común para recuperar la topografía corneal con anillos de Plácido fue propuesto por Doss [22] en 1981. Este algoritmo recupera el perfil meridional de la córnea meridiano por meridiano al considerar a dicha curva como una sucesión de arcos circulares. La Fig. 1.6 muestra el esquema utilizado por Doss para encontrar el valor de la elevación en el plano meridional.



**Figura 1.6:** Esquema de arcos circulares para reconstruir el perfil meridional según Doss [22].

La expresión que dedujo para el valor de la elevación en un anillo dado en la córnea es realmente es muy sencilla y está descrita en la Ec. (1.10).

$$Y_i = Y_{i-1} - \frac{(X_{i-1} - X_i)(\cos T_{i-1} - \cos T_i)}{\sin T_{i-1} - \cos T_i}, \quad (1.10)$$

donde  $X$ ,  $Y$  son la distancia radial y la elevación del punto de evaluación, respectivamente.  $T$  es el ángulo de inclinación de la línea tangente que pasa por el punto de evaluación. Los subíndices  $i$  y  $i - 1$  corresponden a dos anillos adyacentes. Realmente el valor de elevación en un punto en particular depende de todos los puntos anteriores que hacen parte del perfil en el plano meridional correspondiente, teniendo como punto de partida al ápex corneal el cual tiene un valor de elevación  $Y_0 = 7.8$  mm (Doss supuso una córnea esférica con radio de curvatura  $r = 7.8$  mm, como una

primera aproximación para llevar a cabo su algoritmo [22]), ya que el origen de coordenadas está el centro de curvatura de la superficie corneal.

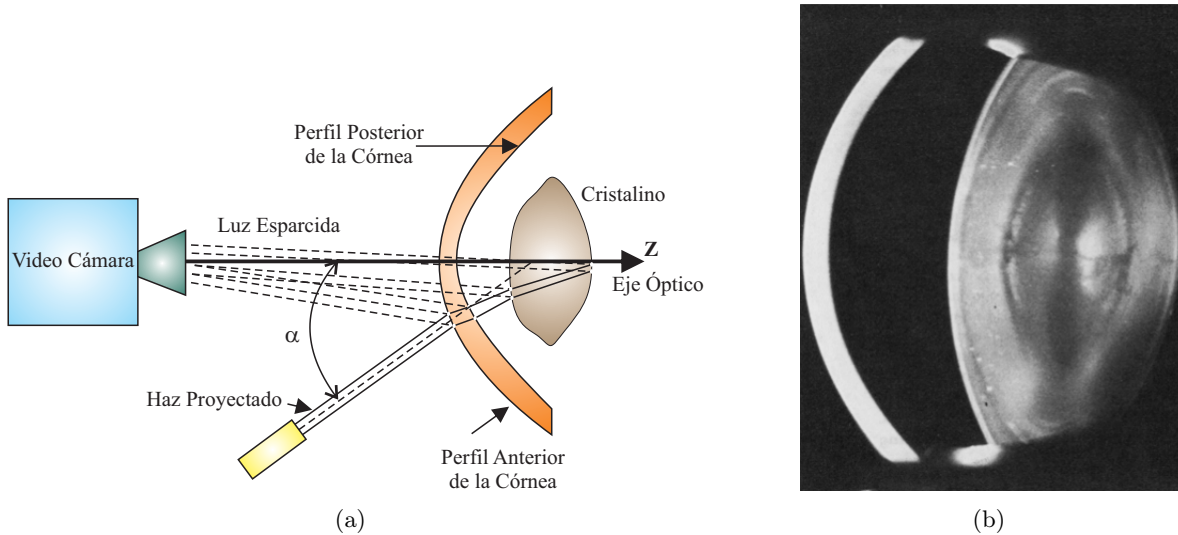
En 1991 van Saarloos [23] mejoró el algoritmo propuesto por Doss, introduciendo parámetros geométricos del sistema de medición como las distancias de trabajo, la posición de la imagen virtual de los anillos en la córnea, entre otras. Utilizó un trazo de rayos inverso a la dirección real de éstos, es decir, el rayo principal parte del plano imagen en el CCD pasa por el punto nodal, intercepta a la córnea donde se refleja para después llegar a su punto correspondiente en los anillos. van Saarloos implementó un proceso iterativo tan potente que en dos o tres iteraciones la solución converge rápidamente, aumentando así la exactitud en la estimación de la topografía corneal. La mayoría de los topógrafos corneales comerciales basados en los anillos de Plácido utilizan el algoritmo de van Saarloos o una variación de éste de tal manera que pueda adaptarse a sus necesidades. Por ejemplo, el Atlas 900 (Carl Zeiss Meditec, Jena, Alemania), el Keratron (Optikon, Roma, Italia), entre otros.

Por último, la exactitud y la precisión de los resultados obtenidos con este sistema de medición se ve afectada por algunos factores de las condiciones de medida que en muchos casos no son las óptimas. La exactitud del topógrafo se realiza teniendo en cuenta diferentes superficies de calibración (esferas con diferentes radios de curvatura, elipsoides y superficies tóricas), y es reportada en términos del valor RMS. Por ejemplo, la norma americana [31] recomienda reportar la exactitud en la medida de la potencia refractiva y radios de curvatura en tres diferentes regiones en el área de medición en las superficies de calibración. Estas zonas son: central (diámetro  $\leq 3$  mm), media ( $3 < \text{diámetro} \leq 6$  mm) y externa (diámetro  $> 6$  mm). Por otro lado, la precisión debe ser estimada para un conjunto de mediciones repetidas para una misma córnea. La precisión es afectada por la dinámica natural del ojo, por el no alineamiento de la córnea respecto al eje del instrumento, los cambios de posición de la cabeza del paciente y la sombra que producen la nariz y la cejas en la imagen de los anillos, entre otras.

#### 1.4.2. Haz de Barrido de Hendidura

Este sistema se basa en fotografiar cortes seccionales de todas las estructuras del segmento anterior del ojo utilizando un haz de una lámpara de hendidura que barre diferentes ángulos respecto al eje óptico [ver Fig. 1.7(a)], lo que permite obtener una imagen completa de todas estas estructuras [1, 48, 49]. La imagen es formada por la reflexión difusa que ocurre en todos los componente del segmento anterior por donde pasa el haz de hendidura. En la córnea está reflexión difusa se da

porque las moléculas del estroma actúan como focos de esparcimiento de Rayleigh. Por ejemplo, la luz esparcida en la superficie anterior y posterior de la córnea es observada como bandas curvadas que aparecen intensamente luminosas como se observa en la Fig. 1.7(b).



**Figura 1.7:** Sistema de haz de barrido de hendidura: (a) Esquema experimental. (b) Imagen del segmento anterior del ojo obtenida de la referencia [48].

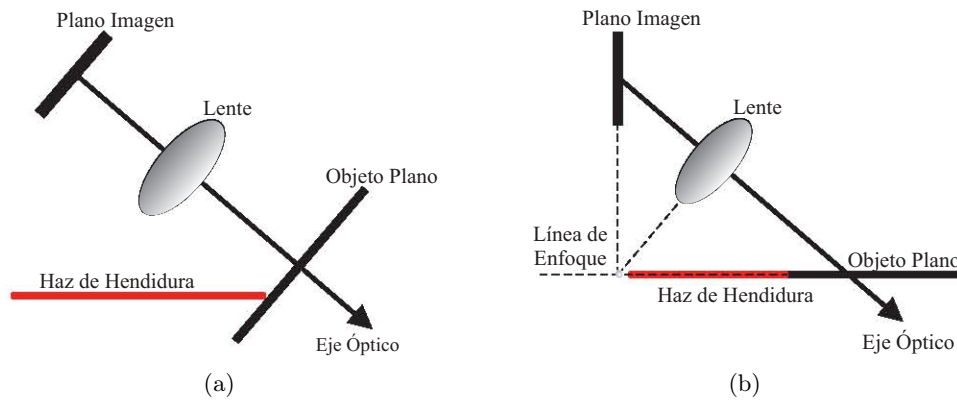
El topógrafo comercial que utiliza esta técnica es el Orbscan II (Bausch & Lomb, Rochester, NY), el cual utiliza haces proyectados para mantener una inclinación constante de  $45^\circ$  respecto al eje óptico de la cámara que captura las imágenes. 20 cortes son proyectados secuencialmente de lado a lado con una separación de  $250 \mu\text{m}$ , permitiendo así barrer una gran región de la córnea. En total serían 40 cortes adquiridos en 1.5 segundos los que utiliza el Orbscan II para la formación de la imagen del segmento anterior del ojo. Alrededor de 18,000 puntos son obtenidos y procesados para obtener la topografía de la superficie anterior y posterior de la córnea, el espesor corneal (*Paquimetría*), la cámara anterior (volumen entre la córnea y el iris, el cual es llenado por el humor acuoso), entre otras mediciones [50]. El Orbscan II incorpora un sistema de anillos de Plácido descrito anteriormente (ver Sec. 1.4.1) para obtener medidas de curvatura y potencia refractiva de la superficie corneal anterior en la dirección radial. Esto hace que el Orbscan II sea un sistema híbrido compuesto de una componente basado en los anillos de Plácido y otro basado en el haz de barrido de hendidura. Desafortunadamente debido a un tema de propiedad intelectual y patentes, no se cuenta con información suficiente en la literatura acerca de los algoritmos matemáticos empleados por el Orbscan II para la obtención de la topografía corneal utilizando el haz de hendidura. Hay un modelo propuesto por Cairns *et al* [51], donde propone un trazo exacto de rayos y una aproximación esférica de la superficie corneal posterior para obtener la paquimetría de la córnea.

Hay muchas fuentes de error que deben ser tenidas en cuentas debido a que afectan la precisión de las mediciones obtenidas con el Orbscan II. Estas fuentes de error dependen del paciente, del operador y del mismo instrumento (diseño y arquitectura original). El paciente es una fuente de error debido a que se requiere una buena fijación durante los 1.5 s que dura el escaneo, así como unas óptimas condiciones en la película lagrimal (ni muy seca ni muy húmeda) y que no presente un exceso de parpadeo. El operador también puede influenciar las mediciones debido a la incorrecta alineación e inestabilidad del instrumento durante la medición. Finalmente, las fuentes de error asociadas al instrumento son debidas a la profundidad de foco, la resolución de la cámara, al alineamiento y dimensiones de los cortes producidos por el haz de barrido de hendidura, como también a los algoritmos utilizados para recuperar la topografía de la córnea.

### 1.4.3. Cámara de Scheimpflug

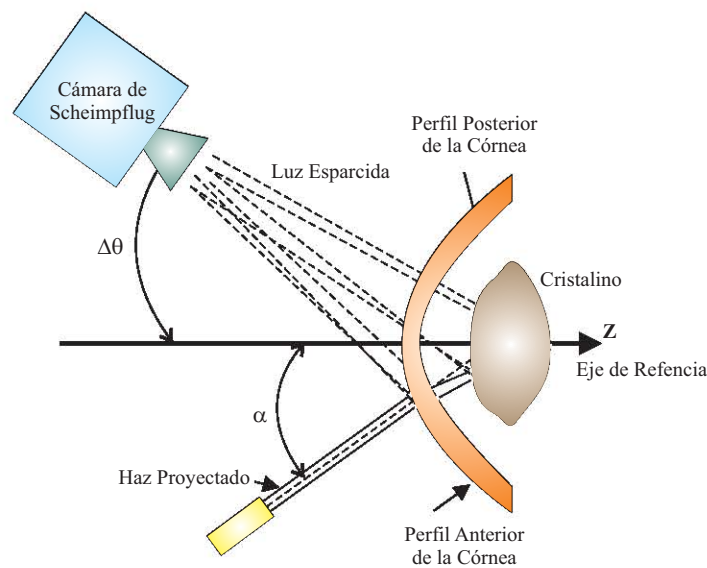
Los sistemas basados en el haz de barrido de hendidura fueron mejorados por la implementación de una cámara de Scheimpflug debido a que se requería que todos los puntos de la imagen del segmento anterior estuviesen correctamente enfocados. Tradicionalmente se utilizaba una cámara fotográfica convencional para capturar las imágenes del segmento anterior del ojo. En este tipo de cámaras, la lente y el plano imagen (película o sensor CCD) son paralelos debido a que los puntos de una imagen están todos bien enfocados en un plano que también es paralelo a la lente y al plano imagen. Si el objeto de estudio no está contenido en un plano paralelo al plano imagen sino que está inclinado, la imagen de éste aparecerá enfocada sólo en a lo largo de la línea que intercepta el plano de enfoque. Con la cámara de Scheimpflug inventada por el militar austriaco Theodor Scheimpflug se soluciona este problema inclinando el plano de la imagen respecto a el eje de la lente. Con esto se logra aumentar la profundidad de foco mejorando así la calidad de la imagen respecto al enfoque [52]. Una imagen tomada en estas condiciones es llamada imagen de Scheimpflug. La configuración clásica de un sistema de haz de hendidura con una cámara fotográfica y con una cámara de Scheimpflug se pueden observar en la Figs. 1.8(a) y 1.8(b).

La tecnología basada en la imagen de Scheimpflug fue introducida en la segunda mitad del siglo XX [48, 53, 54]. Poco después se entendió que no sólo se requería un sistema de medición que incluyera la cámara de Scheimpflug sino que también permitiese obtener fotografías reproducibles de alta resolución por variación angular de dicha cámara. Esto permitió desarrollar el primer sistema basado en la imagen de Scheimpflug por medio de rotación de la cámara fotográfica que va variando



**Figura 1.8:** Geometría de un sistema de haz de barrido de hendidura con: (a) Cámara fotográfica. (b) Cámara de Scheimpflug.

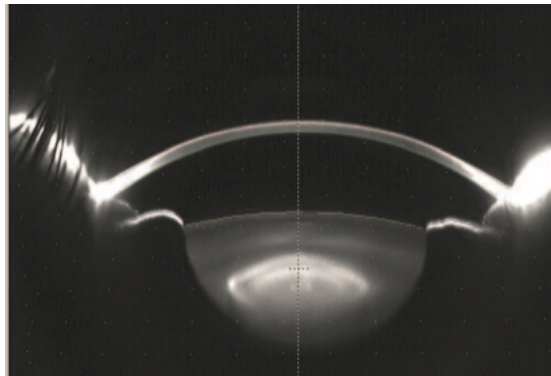
cada cierto ángulo  $\Delta\theta$ , como se observa en la Fig. 1.9 [55].



**Figura 1.9:** Esquema de un sistema basado en la cámara de Scheimpflug con rotación.

Desde que fue introducido el Topcon SL-45 (Topcon, Tokio, Japón) en los años ochenta siendo éste el primer instrumento comercial que utilizó la cámara de Scheimpflug con rotación, la tecnología ha estado en constante actualización al tal punto que hoy en día se cuenta con instrumentos mejor desarrollados y que permiten calcular la elevación corneal directamente. Tal es el caso del Pentacam (Oculus Inc., Dutenhofen, Alemania), donde la cámara de Scheimpflug rota  $360^\circ$  alrededor de un sólo punto de fijación mientras el paciente enfoca una fuente de luz azul ( $\lambda = 475 \text{ nm}$ ) emitida por un LED (acrónimo del inglés *Laser Emitting Diode*), la cual es libre de radiación ultra violeta

que pueda afectar al cristalino [56]. Con esta rotación se evitan las sombras producidas por la nariz obtenidas en otros sistemas de medición, además que permite obtener imágenes en tres dimensiones y una evaluación precisa de la región central de la córnea. Adicionalmente, el Pentacam contiene una segunda cámara para la detección del tamaño y orientación de la pupila, como también para el control del movimiento residual del ojo, los cuales son corregidos por software. Este instrumento utiliza un algoritmo de trazo de rayos para estimar la topografía corneal. Para eso adquiere hasta 50 imágenes en aproximadamente 2 segundos, donde obtiene 2760 puntos de elevación para cada imagen teniendo un total de 138000 puntos de evaluación para generar los mapas de elevación de ambas superficies corneales (anterior y posterior). Una imagen del segmento anterior capturado con este instrumento se pueden ver en la Fig. (1.10).



**Figura 1.10:** Imagen del segmento anterior obtenida con el Pentacam (Imagen obtenida en la referencia [7]).

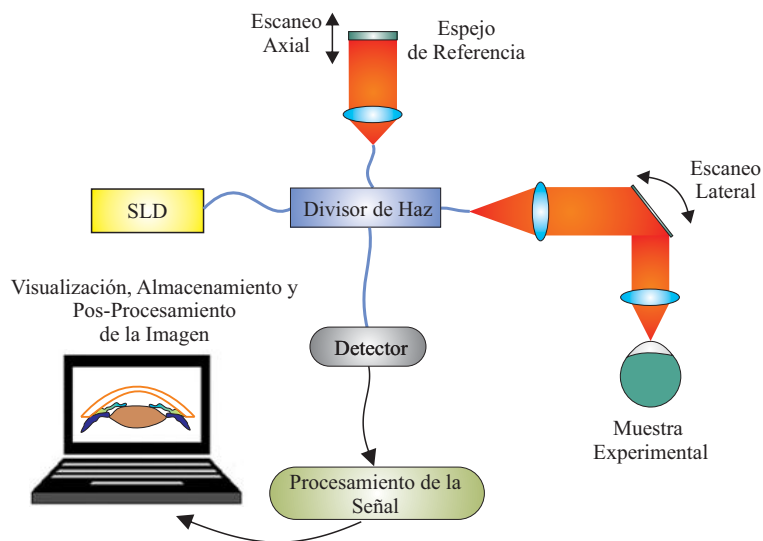
Con una cámara de Scheimpflug se obtienen imágenes del segmento anterior del ojo con una mínima distorsión geométrica. Sin embargo, la imagen puede ser afectada por la distorsión óptica producida por la refracción en las superficies de la córnea y del cristalino. Por lo tanto, mediciones biométricas del segmento anterior como curvatura corneal, paquimetría, cambios en la curvatura del cristalino durante la acomodación, profundidad en la cámara anterior, entre otras, deben ser corregidas mediante algoritmos [57]. El Pentacam incluye un algoritmo que corrige la distorsión producida por la córnea pero no la distorsión producida por la superficie anterior del cristalino.

El Pentacam difiere esencialmente del Orbscan descrito en la Sec. 1.4.2, en la manera en que éste toma las imágenes de la córnea. El Orbscan captura imágenes en cortes verticales separados uno del otro sin tener un punto común. Además, el Orbscan no puede registrar los movimientos sacádicos del ojo mientras captura las imágenes. El Pentacam mantiene el punto central de cada meridiano

y mediante software puede eliminar los movimientos involuntarios del ojo, sobrellevando de esta manera las limitaciones presentadas por el Orbscan. El Pentacam también tiene ventajas respecto a los sistemas basados en los anillos de Plácido descrito en la Sec. 1.4.1. Por ejemplo, el Pentacam mide la elevación directamente sin ninguna aproximación y a partir de ésta estima la curvatura y el potencia refractiva de ambas superficie de la córnea, mientras que el topógrafo de anillos de Plácido, estima la elevación y la potencia refractiva mediante la integración y derivación numérica de las pendientes locales de únicamente la superficie anterior de la córnea.

#### 1.4.4. Tomografía de Coherencia Óptica

Finalmente se presenta el último sistema a tratar en este pequeño resumen del estado del arte en topografía corneal. La tomografía de coherencia óptica (OCT) es una técnica no invasiva de imagen desarrollada en 1991 por Huang *et al* [58]. Se basa en un sistema de interferometría de baja coherencia temporal que revela las estructuras internas de los tejidos biológicos con una alta resolución axial aprovechando las propiedades de coherencia y retraso temporal de la luz reflejada en dichas estructuras. El esquema de un sistema de OCT estándar desarrollado por Huang se puede observar en la Fig. 1.11.



**Figura 1.11:** Diagrama esquemático de un sistema de OCT.

El esquema experimental de la Fig. 1.11, es esencialmente un interferómetro de Michelson donde la muestra experimental (objeto de interés) es iluminada con un haz de luz de baja coherencia temporal proveniente de un diodo superluminiscente (SLD, por sus siglas en inglés) de una longitud de onda  $\lambda_0 = 830$  nm. La luz es dividida al pasar por un divisor de haz con lo que se consigue separar

al sistema en dos brazos, donde en uno se coloca la muestra y en el otro un espejo de referencia. El espejo de referencia se mueve axialmente mientras que la muestra experimentalmente es escaneada lateralmente por el movimiento de un segundo espejo que también es usado para enfocar la luz en dicha muestra. La luz reflejada proveniente de ambos brazos es combinada nuevamente por el divisor de haz para luego ser dirigida hacia el detector. Sólo aquellas reflexiones de la muestra y del espejo de referencia que hayan coincidido con cierto retraso temporal en el tiempo de vuelo de dichas ondas (o que el camino óptico de las dos ondas coincidan dentro de una banda de coherencia) producirán interferencia. Por lo que sólo algunas señales provenientes de la muestra serán capturadas en el detector. La interferencia resultante es electrónicamente filtrada y almacenada en el computador. La técnica que permite realizar mediciones axiales en un sistema de OCT es comúnmente llamado A-scan. Cuando se juntan una colección de A-scans para formar una sección transversal de la muestra, la técnica se denota como B-scan. Sin embargo, si la muestra es escaneada primeramente y luego el espejo de referencia es movido, la técnica es llamada C-scan o en-fase [62].

Debido a la baja coherencia temporal de la fuente es posible obtener resoluciones axiales que van desde 3 a 20  $\mu\text{m}$ , como se muestra en la Ec. (1.11) [59–61].

$$\Delta l = \frac{c\Delta\tau}{2} = \frac{2\lambda_0^2 \ln 2}{\pi\Delta\lambda}, \quad (1.11)$$

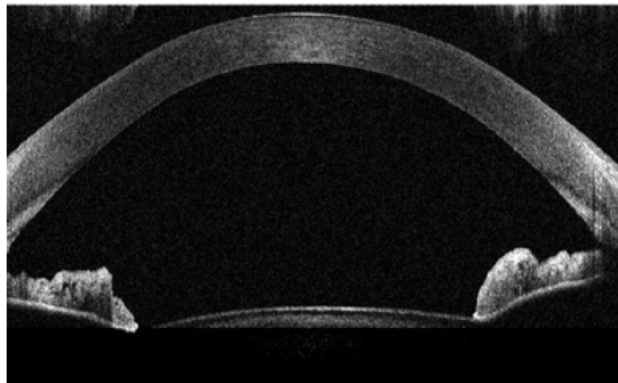
donde  $\Delta l$  es la resolución axial,  $c$  la velocidad de la luz en el vacío,  $\Delta\tau$  es el ancho temporal del pulso,  $\lambda_0$  y  $\Delta\lambda$  son la longitud de onda y el ancho espectral de la fuente, respectivamente. La Ec. (1.11) es un estándar para definir la resolución axial de un sistema de OCT en el vacío por lo que demuestra que se puede conseguir una buena resolución al tener una fuente que sea de baja coherencia temporal o que tenga un amplio ancho espectral. Por ejemplo, si se usa un SLD como en de la Fig. 1.11 con un  $\Delta\lambda = 20$  nm, se obtiene un  $\Delta l \approx 15$   $\mu\text{m}$ . Si se aumenta al doble el ancho espectral, es decir,  $\Delta\lambda = 40$  nm la resolución axial mejora el doble, es decir obtiene un valor de  $\Delta l \approx 7.6$   $\mu\text{m}$ .

La inherente habilidad de resolver distancias con resolución micrométrica junto con la posibilidad de realizar barridos de alta velocidad sobre la muestra experimental, hacen del OCT una perfecta herramienta para ser utilizada como un topógrafo. Pero existe una principal limitación para analizar directamente la información de la superficies del segmento anterior que es debida a la distorsión de barrido (o *Fan distortion* como es conocido en la literatura especializada) [62]. La distorsión de barrido son un conjunto de aberraciones asociadas con la arquitectura del sistema de barrido del instrumento. La distorsión de campo y el astigmatismo hacen que la contribución de la distorsión de



barrido sea considerable de modo que no se puedan obtener directamente mediciones cuantitativas de las imágenes originales. Sin embargo, con una correcta calibración de dicha distorsión [62–64], en combinación con algoritmos de eliminación de ruido, segmentación automática, detección y ajuste de superficies, permiten al OCT ofrecer mapas topográficos de todas las superficies oculares, los cuales son comparables con la topografía obtenida con otros métodos descritos en este estado del arte [65].

El primer sistema de OCT adaptado para visualizar imágenes del segmento anterior del ojo fue desarrollado por Izatt *et al* [66]. Con este prototipo experimental se logró obtener imágenes *in vivo* de la superficie anterior y posterior de la córnea, la cámara anterior, y del iris. Desde entonces se han hecho importantes esfuerzos para desarrollar dispositivos de uso clínico basados en el sistema de OCT. Estos esfuerzos ha sido encaminados en aumentar la velocidad de adquisición de datos cuando se hacen estudios *in vivo*, así como aumentar la resolución de las imágenes mediante la implementación de láseres de femtosegundos. En la actualidad se cuentan con algunos instrumentos disponibles en el mercado, siendo Carl Zeiss Meditec la compañía más avanzada en el desarrollo y comercialización de estos dispositivos. Por ejemplo, el modelo Visante Omni adquiere imágenes de  $16 \times 6$  mm con resolución axial de  $18 \mu\text{m}$  y transversal de  $60 \mu\text{m}$  y velocidad de escaneo es de 512 A-scan por línea en 0.125 s. La fuente de iluminación que utiliza es un SLD de  $\lambda = 1310$  nm. Una imagen adquirida con este sistema comercial se muestra en la Fig. 1.12.



**Figura 1.12:** Imagen del segmento anterior obtenida con un sistema de OCT (Imagen obtenida en la referencia [63]).

Con el análisis de las imágenes corneales, el Visante Omni permite la identificación de la sección transversal de la córnea con lo que se facilita la medición del espesor corneal. Igualmente permite identificar alteraciones corneales post-operativas, la integridad de la córnea (superficie anterior y posterior) y cambios inesperados como el crecimiento epitelial, lo cual es relevante en cirugía refractiva. Otro modelo desarrollado por Carl Zeiss Meditec es el modelo HD-OCT Cirrus, el cual se ha

diseñado primeramente para capturar imágenes de alta resolución de la retina pero recientemente ha sido usado para diferenciar visualmente la superficie anterior y posterior de la córnea [67].

## 1.5. Comentarios Finales

Gran parte de la calidad óptica del ojo es determinada por las propiedades ópticas y geométricas de la córnea. Por muchos años, estas propiedades se han intentado medir con diferentes técnicas de imagenología, las cuales van desde el ampliamente documentado topógrafo de anillos de Plácido hasta la tomografía por coherencia óptica. Dichas técnicas se han resumido en este capítulo con el propósito de entender el estado del arte actual de la topografía corneal. No cabe duda que los topógrafos basados en los anillos de Plácido son una herramienta estándar con la que cuenta el oftalmólogo para el diagnóstico y evaluación de la superficie corneal. Sin embargo, el desarrollo de nuevas técnicas de imágenes del segmento anterior como lo son el haz de hendidura de barrido, la cámara de Scheimpflug y el OCT, abre una nueva era de evaluación y tratamiento basado en la imagen, permitiendo así el desarrollo de modelos de ojo individualizados para cada paciente. Esto ofrece la posibilidad de incrementar la predicción de errores refractivos, cataratas y ectasias corneales, entre otros. Técnicas como biomicroscopía por ultrasonido [68], resonancia magnética nuclear [69], técnicas interferométricas, anillos de Moiré, rasterterografía (estas últimas ampliamente documentadas en la referencia [6]), etc., no son tratadas en este capítulo debido a que algunas no tuvieron tanto éxito en el campo clínico o bien, sólo han sido prototipos experimentales de laboratorio. En conclusión, en una era donde las técnicas de imagenología ya están disponibles en el campo clínico, es importante resaltar que la topografía corneal mediante anillos de Plácido o por técnicas basadas en reflexión especular siguen siendo el pan de cada día para un oftalmólogo.

# TOPOGRAFÍA CORNEAL CON PANTALLAS NULAS

El método de pantallas nulas desarrollado en la última década del siglo pasado por Díaz-Uribe y Campos-García [10], se ha venido implementando con éxito para probar no sólo superficies ópticas rápidas (concavas o convexas) con o sin simetría de revolución [70–73], sino también para obtener la topografía corneal [74, 75]. Tradicionalmente con este método se ha estimado la elevación de la superficie bajo prueba en función del vector normal en cada punto de evaluación. Pero en este capítulo se mostrarán expresiones matemáticas no sólo para calcular la elevación sino también para estimar la curvatura y la potencia refractiva en función de dicha normal, para así tener las tres magnitudes comúnmente utilizadas en topografía corneal totalmente relacionadas con el vector normal de la córnea.

## 2.1. Método de Pantallas Nulas

Al igual que el método de anillos de Plácido para estimar la topografía corneal, la técnica de pantallas nulas se basa en presentar un *target* ante una superficie, el cual puede ser una distribución de puntos, líneas, anillos, gotas o una combinación de éstos., los cuales son puestos en una base ya sea plana, cilíndrica, esférica, cónica, entre otras, de tal manera que su imagen formada por reflexión en la superficie llega a ser un patrón de referencia (malla, anillos concéntricos con líneas radiales, distribución radial de spots, etc), siempre y cuando la superficie de prueba sea perfecta. Cualquier distorsión de este patrón será asociado a imperfecciones en la superficie de prueba, sólo si dicha superficie está correctamente alineada, enfocada y todo el sistema experimental está correctamente

calibrado. Está es la esencia de una prueba nula para probar una superficie. El *target* en este método es llamado pantalla nula [10, 76].

### 2.1.1. Diseño de la Pantalla Nula

Para diseñar la pantalla nula se utiliza un trazo inverso de rayos tomando como punto de partida y de llegada, al plano imagen de un CCD y la pantalla nula, respectivamente. Este trazo de rayos está bien documentado por Campos-García [10] y Estrada-Molina [11]. Es por eso que sólo las ideas básicas se describen a continuación teniendo como referencia la Fig. 2.1, que representa dicho trazo de rayos en un plano meridional (no hay pérdida de generalidad por considerar el plano meridional para el diseño de la pantalla nula ya que se considera una superficie de revolución como superficie ideal). El trazo de rayos empieza con un rayo que parte del CCD en  $\mathbf{P}_1(x_1, y_1, -a - b)$ , llega a una superficie en  $\mathbf{P}_2(x_2, y_2, z_2)$ , pasando por el punto nodal  $\mathbf{P}(0, 0, -b)$ . Esta superficie sólo es utilizada como diseño y es simulada por la ecuación que describe una córnea normal con radio de curvatura  $r = 7.8$  mm y factor  $p = 1$  (ver Tabla. 1.1 en la Pag. 21). Esta superficie tiene su vértice en el origen de coordenadas por lo que la pantalla nula es diseñada sin tener en cuenta el desplazamiento del vértice de ésta respecto a los ejes coordenados. El rayo incidente sufre reflexión especular en la superficie para después llegar a la pantalla nula en  $\mathbf{P}_3(x_3, y_3, z_3)$ .

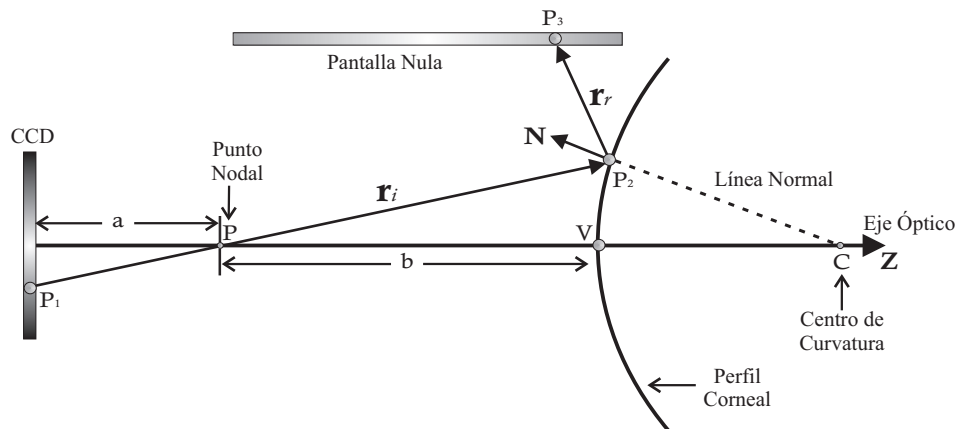


Figura 2.1: Trazo de rayos para el diseño de la pantalla nula.

Las coordenadas rectangulares del punto  $\mathbf{P}_3$  sobre la pantalla nula dependerán de todos los puntos e interfaces por donde los rayos incidente y reflejado pasen. Si se observa la Fig. 2.1, esta dependencia estará determinada por los puntos  $\mathbf{P}_1$  en el CCD, por las distancias de trabajo ( $a$  y  $b$ ), por la naturaleza de la superficie de referencia así como de la geometría del objeto que soporta la

pantalla nula. Para tener una expresión analítica que describa el punto  $\mathbf{P}_3$ , se utiliza el vector del rayo reflejado descrito por la Ley de Reflexión en su forma vectorial

$$\hat{\mathbf{r}}_r = \hat{\mathbf{r}}_i - 2(\hat{\mathbf{r}}_i \cdot \hat{\mathbf{N}})\hat{\mathbf{N}}, \quad (2.1)$$

donde  $\hat{\mathbf{r}}_i$  y  $\hat{\mathbf{r}}_r$  son el vector unitario de rayo incidente y reflejado.  $\hat{\mathbf{N}}$  es el vector normal unitario de la superficie de referencia que se obtiene al aplicar el operador gradiente a la ecuación que describe a dicha superficie de diseño. El vector descrito en la Ec. (2.1) es interceptado con el objeto que soporta la pantalla nula para obtener el punto  $\mathbf{P}_3$ . Por ejemplo, el soporte que se utilizará en este trabajo doctoral es cilíndrico ( $x^2 + y^2 = R^2$ ), por lo que el punto  $\mathbf{P}_3$  tendrá las siguientes coordenadas rectangulares:

$$x_3 = R \cos(\phi + \pi), \quad (2.2a)$$

$$y_3 = R \sin(\phi + \pi), \quad (2.2b)$$

$$z_3 = z_2 + m_{xz}(x_3 - x_2), \quad (2.2c)$$

donde  $R$  es el radio interno del cilindro,  $\phi = \arctan(y_1/x_1)$  es el ángulo de inclinación de los puntos en el CCD.  $m_{xz} = r_x/r_y$  es la pendiente sobre el plano  $\mathbf{XZ}$  de la recta que describe el vector de rayo reflejado dado por la Ec. (2.1). El punto  $\mathbf{P}_2$  está sobre la superficie de referencia.

Una vez que se obtienen las coordenadas del punto  $\mathbf{P}_3$ , éstas se deben imprimir sobre el objeto de soporte de la pantalla nula. Esto es una tarea que no es trivial, pero se puede facilitar si dichos puntos se imprimen con la mayor precisión posible a escala correcta sobre el plano de una pantalla que generalmente es un hoja de papel. Para esto es necesario hacer una transformación de coordenadas de los puntos del objeto tridimensional al plano de la pantalla de impresión. Cuando se utiliza una pantalla cilíndrica, el papel es enrollado en forma cilíndrica y es introducido en un cilindro de acrílico transparente. Las coordenadas sobre el plano del papel dependerán del radio del cilindro donde se coloca la pantalla, del ángulo  $\phi$  descrito anteriormente y del espesor  $\varepsilon$  del papel en donde se imprimirán los puntos. La transformación de coordenadas es descrita en la Ec. (2.3).

$$\text{Pantalla cilíndrica} \implies \begin{cases} X = (R - \varepsilon)\phi, \\ Y = z_3. \end{cases} \quad (2.3)$$

### 2.1.2. Evaluación de las Normales

Una de las ventajas del método de pantallas nulas para estimar la topografía corneal se debe a que con este método se puede evaluar el vector normal en cada punto de evaluación de la córnea. Esto es importante porque con el vector normal se pueden obtener la elevación, la curvatura y la potencia refractiva como se mostrará en las secciones siguientes. El vector normal se calcula haciendo un trazo exacto de rayos en la dirección correcta en que se propagan los rayos de luz a diferencia del diseño de la pantalla nula donde se utiliza un trazo inverso de rayos. Dichos rayos parten de la pantalla nula, llegan a la córnea donde se reflejan para llegar al CCD donde forman un punto imagen de cada punto objeto que está en la pantalla nula. Es claro recalcar que de cada punto objeto emerge un cono de rayos pero sólo se tiene en cuenta para el cálculo de la normal al rayo principal que pasa por el punto nodal.

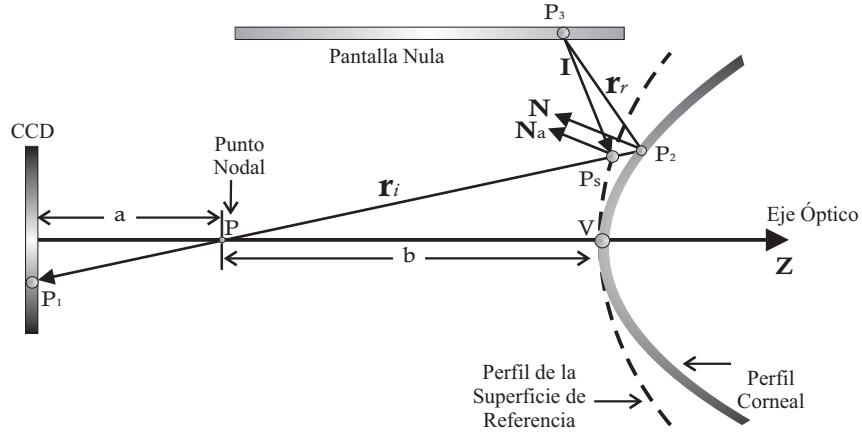
En el cálculo de las normales se supone que la córnea es suave, regular y se puede representar matemáticamente por la función  $\psi(x, y, z) = 0$ . Suave quiere decir que la primera y la segunda derivada de la función  $\psi$  existen, son continuas y tiene un valor único. Mientras que el concepto de una superficie regular da entender que el vector normal es diferente de cero en cada punto de la superficie. A partir de estas consideraciones se puede calcular el vector normal basándose en la Ley de la Reflexión como se describe en la Ec. (2.4)

$$\mathbf{N} = \hat{\mathbf{r}}_r - \hat{\mathbf{r}}_i. \quad (2.4)$$

Los vectores  $\hat{\mathbf{r}}_r$  y  $\hat{\mathbf{r}}_i$  se pueden calcular teniendo en cuenta el diagrama de la Fig. 2.2.  $\hat{\mathbf{r}}_r$  es fácil de calcular porque después de la reflexión en la córnea este rayo pasa por el punto nodal, dando como resultado la siguiente expresión:

$$\hat{\mathbf{r}}_r = \frac{(x_1, y_1, -a)}{(x_1^2 + y_1^2 + a^2)^{1/2}}. \quad (2.5)$$

Para calcular el vector de rayo de incidente  $\hat{\mathbf{r}}_i$ , se tiene que tener en cuenta el punto  $\mathbf{P}_2$  sobre la córnea. Debido a que no se conoce previamente la córnea que se está probando, el punto  $\mathbf{P}_2$  es desconocido, razón por la cual éste se aproxima por un punto  $\mathbf{P}_s(x_s, y_s, z_s)$  que está sobre una superficie de referencia que se utiliza como aproximación a la córnea. Esto implica que se debe construir un nuevo vector de rayo incidente  $\hat{\mathbf{I}}$  que sea aproximación de  $\hat{\mathbf{r}}_i$  y que llegue a  $\mathbf{P}_s$ , por lo que el cálculo de la normal es aproximado y como consecuencia se cuenta tendrá un error implícito en la estimación de dicha normal.



**Figura 2.2:** Esquema meridional del trazado de rayos utilizado para la evaluación de la normal en el método de pantallas nulas ( $\hat{\mathbf{r}}_i$ ,  $\hat{\mathbf{r}}_r$  y  $\hat{\mathbf{I}}$  no necesariamente están contenidos en el plano meridional).

La superficie de referencia que se utiliza es modelada por una cónica de revolución descrita en la Tabla. 1.1 (ver en la Pag. 21), sólo que esta ecuación se expresa en coordenadas rectangulares y se le adicionan las coordenadas  $(x_0, y_0, z_0)$  que corresponden al decentramiento  $(x_0, y_0)$  y al pistón  $z_0$  del vértice de dicha superficie en los ejes  $\mathbf{XYZ}$  respectivamente. Está cónica de revolución se describe matemáticamente por la Ec. (2.6).

$$\psi(x_s, y_s, z_s) = p(z_s - z_0)^2 - 2r(z_s - z_0) + (x_s - x_0)^2 + (y_s - y_0)^2 = 0. \quad (2.6)$$

La dirección del vector  $\hat{\mathbf{I}}$  se puede determinar al conectar los puntos  $\mathbf{P}_3$  y  $\mathbf{P}_s$  con una línea recta que es la aproximación del rayo incidente según la Ec. (2.7)

$$\hat{\mathbf{I}} = \frac{(x_s - x_3, y_s - y_3, z_s - z_3)}{[(x_s - x_3)^2 + (y_s - y_3)^2 + (z_s - z_3)^2]^{1/2}}, \quad (2.7)$$

donde las coordenadas  $(x_s, y_s, z_s)$  se obtienen al prolongar hasta intersectar a la superficie de referencia, a la línea recta que describe el vector de rayo incidente. Esto permite obtener las siguientes expresiones:

$$x_s = -tx_1, \quad (2.8a)$$

$$y_s = -ty_1, \quad (2.8b)$$

$$z_s = at - b, \quad (2.8c)$$

donde el parámetro  $t$  en las expresiones anteriores se obtiene al reemplazar dichas ecuaciones en la Ec. (2.6), dando como resultado las siguientes expresiones

$$t = \frac{-\lambda - (\lambda^2 - 4\alpha\beta)^{1/2}}{2\alpha}, \quad (2.9a)$$

$$\alpha = x_1^2 + y_1^2 + pa^2, \quad (2.9b)$$

$$\lambda = -2[p(b + z_0)a + ra - (x_1x_0 + y_1y_0)], \quad (2.9c)$$

$$\beta = p(b + z_0)^2 + 2r(b + z_0) + x_0^2 + y_0^2. \quad (2.9d)$$

Las expresiones dadas en la Ec. (2.9) muestran que es necesario saber de antemano las coordenadas  $(x_0, y_0, z_0)$  del vértice de la superficie antes de realizar el cálculo de las normales. Si no se tienen en cuenta estas coordenadas, la evaluación de las normales se puede llevar a cabo, pero el error que se cometería afectaría considerablemente la exactitud de los mapas corneales (este efecto se mostrará en el siguiente capítulo). Por otro lado, al redefinir la Ec. (2.4) reemplazando el vector  $\hat{\mathbf{r}}_i$  por el vector  $\hat{\mathbf{I}}$ , se obtiene el vector normal a la superficie de referencia descrito por

$$\mathbf{N}_a = (N_{ax}, N_{ay}, N_{az}) = \hat{\mathbf{r}}_r - \hat{\mathbf{I}}. \quad (2.10)$$

Es evidente que entre más se aproxime la superficie de referencia a la superficie de prueba se tendrá que  $\hat{\mathbf{I}} \rightarrow \hat{\mathbf{r}}_i$  y  $\mathbf{N}_a \rightarrow \mathbf{N}$ . Por lo tanto, el error en la normal  $\mathbf{N}_a$  será mínimo. Si las Ecs. (2.5) y (2.7) se reemplazan en la Ec. (2.10), se llega a las expresiones para las componentes de la normal a la superficie de referencia como se describe a continuación:

$$N_{ax} = \frac{x_1}{(x_1^2 + y_1^2 + a^2)^{1/2}} + \frac{(x_3 - x_s)}{[(x_s - x_3)^2 + (y_s - y_3)^2 + (z_s - z_3)^2]^{1/2}}, \quad (2.11a)$$

$$N_{ay} = \frac{y_1}{(x_1^2 + y_1^2 + a^2)^{1/2}} + \frac{(y_3 - y_s)}{[(x_s - x_3)^2 + (y_s - y_3)^2 + (z_s - z_3)^2]^{1/2}}, \quad (2.11b)$$

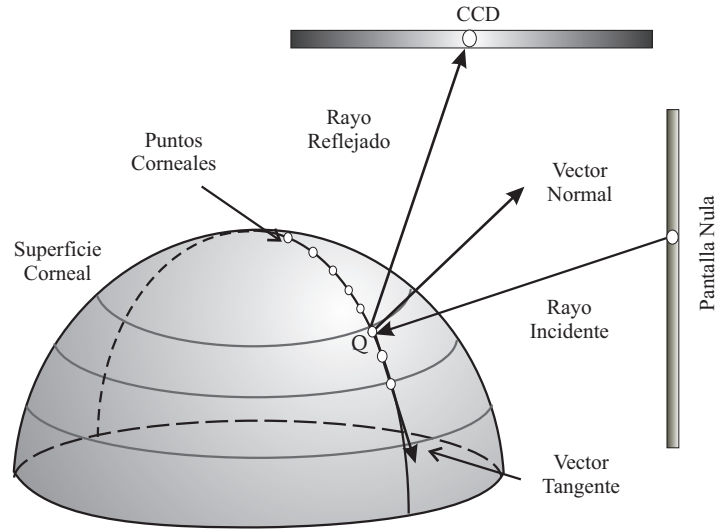
$$N_{az} = \frac{-a}{(x_1^2 + y_1^2 + a^2)^{1/2}} + \frac{(z_3 - z_s)}{[(x_s - x_3)^2 + (y_s - y_3)^2 + (z_s - z_3)^2]^{1/2}}. \quad (2.11c)$$

Una vez obtenidas las expresiones de las normales, lo que prosigue es relacionar la elevación, curvatura y potencia refractiva en función de la normal. Esto se llevará a cabo en las secciones siguientes.



## 2.2. Elevación

La elevación como se mencionó en la Sec. 1.2 del Cap. 1 (ver en la Pag. 14), se define como la distancia sobre el eje óptico del punto corneal respecto a un plano de referencia perpendicular a dicho eje. Esta elevación se puede relacionar con la normal en cada punto de evaluación. Para ilustrar el cálculo de la elevación corneal se tiene en cuenta la Fig. 2.3.



**Figura 2.3:** Esquema para el cálculo de la elevación corneal.

Se define un punto sobre la córnea como un punto corneal  $Q$  que es determinado por el vector de posición  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ . Igualmente, se define una trayectoria sobre la superficie donde se pueda mover dicho punto corneal, de tal manera que se tenga un elemento diferencial de longitud  $d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$  en la dirección del vector tangente unitario de la córnea en el punto  $Q$ . Por tanto, dicho vector  $d\mathbf{r}$  es perpendicular al vector normal  $\mathbf{N}$  de la córnea en el punto  $Q$ . Esto hace que el producto punto entre esos dos vectores sea nulo como se describe en la Ec. (2.12) [77].

$$\mathbf{N} \cdot d\mathbf{r} = 0. \quad (2.12)$$

Si se reemplaza los vectores  $\mathbf{N}$  y  $d\mathbf{r}$  en la Ec. (2.12), se obtiene la diferencial de elevación  $dz$  como se muestra en la Ec. (2.13).

$$dz = - \left( \frac{N_x}{N_z} dx + \frac{N_y}{N_z} dy \right). \quad (2.13)$$

La Ec. (2.13) se puede integrar para obtener la elevación corneal en un punto  $Q$ .

$$z = z_1 - \int_C \left( \frac{N_x}{N_z} dx + \frac{N_y}{N_z} dy \right), \quad (2.14)$$

donde  $C$  indica que es una integral de línea que depende de la trayectoria de integración que se defina como también de los puntos que están contenidos en ella.  $z_1$  es la elevación del punto corneal inicial, que es el punto de partida de todas las trayectorias que se definan. Se propone aproximar este valor de la siguiente manera.

$$z_1 = z_0 + \frac{c(x_1^2 + y_1^2)}{1 + \sqrt{1 - pc^2(x_1^2 + y_1^2)}} \quad (2.15)$$

donde  $c = 1/r$ , siendo  $r$  el radio de curvatura en el vértice.  $(x_1, y_1)$  son las coordenadas en el plano **XY** del punto corneal inicial y  $z_0$  es el pistón de la superficie corneal.

Por otro lado, la expresión deducida en la Ec. (2.14) para encontrar la elevación corneal es similar a la Ec. (1.9) (ver en la Pag. 19), con la diferencia que la Ec. (2.14) no tiene limitaciones meridionales que produzcan una reconstrucción corneal meridiano por meridiano como si lo tiene la Ec. (1.9). Además, la Ec. (2.14) es exacta porque no se involucraron aproximaciones en la deducción de la misma; sin embargo, cuando se pretende resolver dicha ecuación, al menos dos aproximaciones deben ser consideradas; (i) el cálculo del vector normal implica aproximaciones como se mencionó anteriormente. (ii) puesto que se tiene un conjunto de datos discretos de la normal en cada punto de evaluación y no funciones analíticas, la Ec. (2.14) no tiene una solución exacta y debe ser resuelta por métodos numéricos. Aquí se utilizará el *Método del Trapecio* para llevar a cabo dicha integración numérica debido a que es un método ampliamente conocido y que funciona muy bien para datos que no están igualmente espaciados [78].

Esta integración numérica se realiza de manera iterativa con el propósito de mejorar el cálculo de las normales aproximadas a la superficie corneal. Para lograr esto, inicialmente se utiliza la superficie de diseño empleada para definir la pantalla nula como superficie de referencia para obtener las normales aproximadas. Sobre estas normales se realiza una integración numérica y se obtiene una superficie integrada  $z = f(x, y)$ . Esta superficie encontrada  $f(x, y)$  es tomada como nueva superficie de referencia para encontrar sus normales e integrarlas y así obtener una nueva superficie  $f_1(x, y)$ . Este proceso se repite iterativamente hasta que el error RMS de las diferencias entre dos superficies reconstruidas consecutivamente  $[f_N(x, y) - f_{N-1}(x, y)]$  sea menor a una tolerancia TOL. Usualmente después de unas cuatro o cinco iteraciones la solución converge.

Generalmente en topografía corneal se sustrae una superficie de referencia de los datos de elevación con el propósito de revelar variaciones finas en la superficie corneal, las cuales son ocultadas si sólo se presenta el mapa de elevación, dado que dichas variaciones son de dos o tres órdenes de magnitud menores que los valores de elevación en la periferia de una cornea normal [79]. En otras palabras, los datos de elevación de córneas normales no se diferenciarán mucho de datos de elevación de córneas anormales, lo que podría llevar a una incorrecta interpretación debido a un problema de rango dinámico en la visualización de mapas de elevación. Para superar este problema y así revelar las finas variaciones corneales, se construirá un mapa de diferencias de elevación como sigue

$$\Delta z = z_{\text{cal}} - z_{\text{fit}}, \quad (2.16)$$

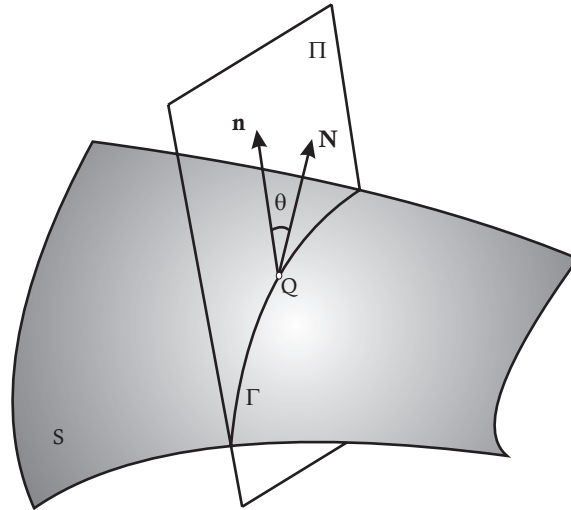
donde  $z_{\text{cal}}$  es calculado con la Ec. (2.14) y  $z_{\text{fit}}$  es obtenido por medio del ajuste de los datos experimentales  $z_{\text{cal}}$  a una superficie de referencia. La selección de una adecuada superficie de referencia depende mucho de la aplicación clínica que se quiera obtener. Por ejemplo, para córneas operadas por cirugía refractiva se utiliza el mapa de elevación antes de la operación como superficie de referencia para así revelar los efectos de la cirugía refractiva en la córnea. Tradicionalmente se han utilizado esferas, cónicas y superficies tóricas como superficies de referencia entre otras. En este trabajo doctoral se utilizará una esfera como superficie de referencia y se tendrá el valor RMS del mapa de diferencias de elevación como una medida de la exactitud de dicho mapa.

## 2.3. Curvatura

Tradicionalmente en topografía corneal se ha utilizado ampliamente el concepto de curvatura axial y meridional definidos en un plano meridional. Pero como se mencionó anteriormente, la curvatura axial matemáticamente no es una curvatura y suele ser inexacta cuando el eje óptico del instrumento no está contenido en el plano meridional (ver Sec. 1.2 en la Pag. 16). Es por eso que en esta sección se desarrollarán los conceptos matemáticos de curvatura sagital y meridional que no son otra cosa que las curvaturas principales de una córnea que tenga simetría de revolución. Cabe resaltar que las propiedades geométricas de una superficie se pueden revelar por el estudio de curvas embebidas en ella.

### 2.3.1. Curvaturas Principales para una Superficie con Simetría de Revolución

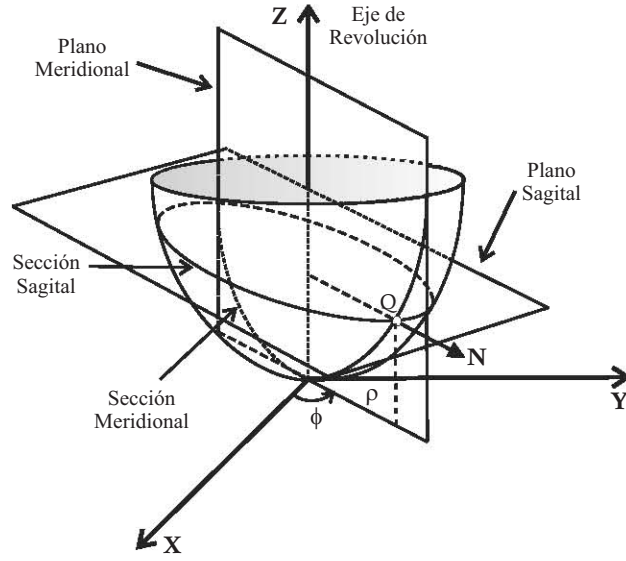
Sea  $S$  una superficie general y  $\Gamma$  una curva plana formada por la intersección de  $S$  con un plano  $\Pi$ , la cual es llamada sección [16–18]. La sección tendrá una normal unitaria denotada por  $\hat{\mathbf{n}}$  que no necesariamente coincide con la normal unitaria a la superficie  $\hat{\mathbf{N}}$  en un punto  $Q$  que pertenece a  $S$ , ya que  $\hat{\mathbf{N}}$  puede no estar contenido en  $\Pi$ . Por tanto, habrá un ángulo  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq \pi/2$ ) subtendido entre  $\hat{\mathbf{n}}$  y  $\hat{\mathbf{N}}$  como se muestra en la Fig. 2.4, que es relacionado por el coseno como  $\hat{\mathbf{N}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \cos \theta$ .



**Figura 2.4:** Sección  $\Gamma$  formada por la intersección del plano  $\Pi$  con la superficie  $S$ .

Cuando  $\theta = 0$ ,  $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{N}}$ , con  $\hat{\mathbf{N}}$  contenido en  $\Pi$ . La sección generada por este plano que ahora contiene a  $\hat{\mathbf{N}}$  es llamada sección normal y es denotada por  $\Gamma_N$ . Se pueden generar infinitas curvas  $\Gamma_N$  sobre  $S$ , pero habrá exactamente dos intersecciones mutuamente perpendiculares de  $\Pi$  con  $S$  donde la curvatura de las  $\Gamma_N$  tendrán valores extremos (máximo y mínimo) [16–18]. Los correspondientes vectores tangentes unitarios y curvaturas de las secciones normales son llamados ahora direcciones principales y curvaturas principales [16]. Si  $S$  es una superficie con simetría de revolución, sus curvaturas principales estarán en la dirección sagital y meridional [17, 18]. Como es usual en topografía corneal, en este trabajo se asumirá que la córnea es una superficie con simetría de revolución, la cual se genera por la rotación de una curva plana  $z = f(\rho)$  en torno de un eje de simetría como se muestra en la Fig. 2.5.

Una superficie de revolución se puede describir matemáticamente como



**Figura 2.5:** Plano sagital y meridional para una superficie con simetría de revolución.

$$x = \rho \cos \phi, \quad (2.17a)$$

$$y = \rho \sin \phi, \quad (2.17b)$$

$$z = f(\rho), \quad (2.17c)$$

donde  $\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$  es la distancia radial del eje óptico (se considera que el eje óptico del instrumento coincide con el eje de simetría de la superficie) hasta un punto corneal, el cual es proyectado sobre el plano  $\mathbf{XY}$ .  $\phi = \arctan(y/x)$  es el ángulo entre el eje  $\mathbf{X}$  y la línea radial que contiene al punto corneal. Las coordenadas  $(x, y, z)$  de la Ec. (2.17) están relacionadas con las coordenadas de la superficie de referencia  $(x_s, y_s, z_s)$  y las coordenadas del vértice  $(x_0, y_0, z_0)$  como:  $x = x_s - x_0$ ,  $y = y_s - y_0$ ,  $z = z_s - z_0$ .

Por otro lado, las curvatura sagital y meridional para esta superficie están descritas por las Ecs (2.18) y (2.19) [6, 80].

$$\kappa_{\text{sag}} = \frac{dz/d\rho}{\rho[1 + (dz/d\rho)^2]^{1/2}}, \quad (2.18)$$

y

$$\kappa_{\text{mer}} = \frac{d^2z/d\rho^2}{[1 + (dz/d\rho)^2]^{3/2}}. \quad (2.19)$$

Es de notar que la Ec. (2.18) coincide en expresión matemática con la Ec. (1.2) (ver en la Pag. 18), pero en definición la  $C_{\text{axi}}$  y  $\kappa_{\text{sag}}$  difieren dado que la  $\kappa_{\text{sag}}$  si ofrece información de la rapidez de cambio del vector tangente unitario en la dirección sagital, lo que no ocurre con la curvatura axial definida por la Ec. (1.1), puesto que sólo es el inverso de una distancia relativa al eje óptico. Para el caso de las curvaturas meridionales descritas por las Ecs. (2.19) y (1.3) no hay problema porque ambas coinciden en definición y expresión matemática. Al relacionar las Ecs. (2.18) y (2.19) se obtiene

$$\kappa_{\text{mer}} = \kappa_{\text{sag}} + \rho \frac{d\kappa_{\text{sag}}}{d\rho}, \quad (2.20)$$

la cual coincide con la expresión dada en la Ec. (1.4) (ver en la Pag. 18), con la diferencia de que en vez de usar la curvatura axial se usará la curvatura sagital.

### 2.3.2. Curvatura Sagital y Meridional como Función de la Normal

La curvatura sagital y meridional se puede relacionar con la normal en cada punto corneal. Para esto, primero se obtiene la diferencial total de  $z$  en función de las coordenadas  $(x, y)$ .

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \quad (2.21)$$

La Ec. (2.21) se compara con la Ec. (2.13) para obtener la siguiente relación:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{N_x}{N_z}, \quad (2.22a)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{N_y}{N_z}. \quad (2.22b)$$

Haciendo uso de la regla de la cadena para encontrar  $d\kappa_{\text{sag}}/d\rho$ , se obtiene:

$$\frac{dz}{d\rho} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{d\rho} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{d\rho}, \quad (2.23)$$

reemplazando las Ecs. (2.17) y (2.22) en la Ec. (2.23), se llega a:

$$\frac{dz}{d\rho} = -\frac{1}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \left[ x \frac{N_x}{N_z} + y \frac{N_y}{N_z} \right]. \quad (2.24)$$

Finalmente, se reemplaza la Ec. (2.24) en la Ec. (2.18) para obtener la expresión de la curvatura sagital en función de la normal.

$$\kappa_{\text{sag}} = -\frac{x \frac{N_x}{N_z} + y \frac{N_y}{N_z}}{(x^2 + y^2)^{1/2} \left[ x^2 + y^2 + \left( x \frac{N_x}{N_z} + y \frac{N_y}{N_z} \right)^2 \right]^{1/2}}. \quad (2.25)$$

Lo que da entender la Ec. (2.25), es que la curvatura sagital depende del punto corneal en cuestión y no explícitamente de la vecindad de puntos alrededor de éste (aunque  $\mathbf{N}$  sí depende implícitamente de la vecindad ya que  $\mathbf{N} = \nabla f$ ). Esto hace que dicha curvatura sea una estimación directa una vez se ha obtenido la normal. Por otro lado, la curvatura meridional se obtiene mediante el cálculo de la segunda derivada de la Ec. (2.23) para después reemplazar dicho término en la Ec. (2.19). Se obtiene el mismo resultado si reemplaza la Ec. (2.25) en la Ec. (2.20).

$$\kappa_{\text{mer}} = - (x^2 + y^2)^{1/2} \left\{ \frac{x^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{N_x}{N_z} \right) + y^2 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{N_y}{N_z} \right) + xy \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{N_x}{N_z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{N_y}{N_z} \right) \right]}{\left[ x^2 + y^2 + \left( x \frac{N_x}{N_z} + y \frac{N_y}{N_z} \right)^2 \right]^{3/2}} \right\}. \quad (2.26)$$

Las Ecs. (2.25) y (2.26) para las curvaturas sagital y meridional de una superficie con simetría de revolución son exactas puesto que no se usaron aproximaciones en la deducción de las mismas. Estas ecuaciones fueron presentadas por Estrada-Molina *et al* [81], en el 22 Congreso General de la Comisión Internacional de Óptica (ICO, por sus siglas en inglés) y fueron publicadas en Applied Optics en el año 2013 [82].

### 2.3.3. Evaluación Numérica de la Curvatura Meridional

La principal desventaja de obtener la curvatura meridional mediante la Ec. (2.20) o la Ec. (2.26), es que éstas depende de términos que incluyen derivadas, por lo que es necesario realizar evaluaciones numéricas que introducen una gran cantidad de error debido a la naturaleza discreta de los datos experimentales [81]. Para tratar de reducir estos errores numéricos asociados a la evaluación numérica de la curvatura meridional, se utilizará la Ec. (2.20), donde la derivada de la curvatura sagital  $d\kappa_{\text{sag}}/d\rho$ , se ajustará a una función mediante el uso de los datos experimentales del vector

normal. Para lograr este objetivo, se obtiene la normal unitaria de la cónica descrita en la Ec. (2.6), la cual describe una córnea con simetría de revolución.

$$\widehat{\mathbf{N}} = \frac{(x, y, pz - r)}{[x^2 + y^2 + (pz - r)^2]^{1/2}}. \quad (2.27)$$

Calculando el cociente entre las componentes del vector normal unitario, se obtiene:

$$\frac{N_x}{N_z} = -\frac{x}{[r^2 - p(x^2 + y^2)]^{1/2}}, \quad (2.28a)$$

$$\frac{N_y}{N_z} = -\frac{y}{[r^2 - p(x^2 + y^2)]^{1/2}}. \quad (2.28b)$$

Reemplazando las expresiones de la Ec. (2.28) en la Ecs. (2.25) y (2.26), la curvatura sagital y meridional para un cónica de revolución, son obtenidas respectivamente como:

$$\kappa_{\text{sag}} = \frac{1}{[r^2 - (p - 1)(x^2 + y^2)]^{1/2}}, \quad (2.29)$$

y

$$\kappa_{\text{mer}} = \frac{r^2}{[r^2 - (p - 1)(x^2 + y^2)]^{3/2}}. \quad (2.30)$$

Es importante señalar que las expresiones dadas en las Ecs. (2.29) y (2.30) son generales porque coinciden con el resultado obtenido por Menchaca y Malacara [82], haciendo uso de otras consideraciones matemáticas. Por otro lado, si se eleva al cuadrado las expresiones de la Ec. (2.28) y luego se suman, el resultado obtenido es:

$$\eta(\rho) \equiv \left(\frac{N_x}{N_z}\right)^2 + \left(\frac{N_y}{N_z}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2}{[r^2 - p(x^2 + y^2)]} = \frac{\rho^2}{(r^2 - p\rho^2)}, \quad (2.31)$$

donde  $\eta(\rho)$  es función de la distancia radial del punto corneal en el plano  $\mathbf{XY}$ . Mediante el ajuste de los datos experimentales de las normales a la Ec. (2.31), se puede obtener el radio  $r$  y el factor  $p$  que se describe en dicha ecuación. Haciendo uso de la Ec. (2.29) para calcular la derivada de la curvatura sagital descrita en la Ec. (2.20) y así obtener finalmente la curvatura meridional según la Ec. (2.32)

$$\kappa_{\text{mer}} = \kappa_{\text{sag}} + \frac{(p_{\text{fit}} - 1)(x^2 + y^2)}{[r_{\text{fit}}^2 - (p_{\text{fit}} - 1)(x^2 + y^2)]^{3/2}}, \quad (2.32)$$



donde  $\kappa_{\text{sag}}$  se calcula con la Ec. (2.25);  $r_{\text{fit}}$  y  $p_{\text{fit}}$  se obtienen por ajuste de mínimos cuadrados en la Ec. (2.31). Finalmente, los radios de curvatura sagital y meridional se obtienen como el recíproco de  $\kappa_{\text{sag}}$  y  $\kappa_{\text{mer}}$ , respectivamente, con la finalidad de construir un mapa de radio de curvatura en vez de un mapa de curvatura para facilitar la interpretación de los resultados.

## 2.4. Potencia Refractiva

Finalmente se relacionará la última magnitud topográfica con la normal en cada punto de evaluación. La potencia refractiva como se mostró en la Ec. (1.7) (ver en la Pag. 19) depende de las propiedades geométricas y refractivas de la córnea. El termino  $\tan(\theta_i - \theta_t)$  en la Ec. (1.7), se puede simplificar haciendo uso de la identidad trigonométrica para la suma y diferencia de ángulos dada según

$$\tan(\theta_i - \theta_t) = \frac{\tan \theta_i - \tan \theta_t}{1 + \tan \theta_i \tan \theta_t}, \quad (2.33)$$

por lo que la potencia refractiva  $P$  dada directamente en dioptrías (siempre y cuando las unidades de longitud sean metros) se puede obtener de la siguiente manera:

$$P = \frac{n_c(\tan \theta_i - \tan \theta_t)}{z(\tan \theta_i - \tan \theta_t) + (x^2 + y^2)^{1/2}(1 + \tan \theta_i \tan \theta_t)}, \quad (2.34)$$

donde la elevación  $z$ , se calcula con la Ec. (2.14), mientras que  $\tan \theta_i = dz/d\rho$ , se puede relacionar con la normal en cada punto de evaluación mediante el uso de la Ec. (2.24). Por tanto,  $\tan \theta_i$  es

$$\tan \theta_i = -\frac{1}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \left[ x \frac{N_x}{N_z} + y \frac{N_y}{N_z} \right]. \quad (2.35)$$

Para encontrar  $\tan \theta_t$  dado en la Ec. (2.34), se parte de la Ley de Snell [2, 19], la cual relaciona los ángulos de incidencia y refracción con los índices de refracción [ver Ec. (2.36)].

$$\sin \theta_t = \left( \frac{n_a}{n_c} \right) \sin \theta_i, \quad (2.36)$$

donde  $n_a = 1$  es el índice de refracción del aire y  $n_c$  es el índice de refracción de la córnea al considerar tanto el perfil anterior como el posterior. Teniendo en cuenta la ecuación anterior se realizan procedimientos trigonométricos para llegar a:

$$\tan \theta_t = \frac{\sin \theta_i}{\sqrt{n_c^2 - \sin^2 \theta_i}}. \quad (2.37)$$

donde  $\sin \theta_i$  se relaciona con  $\tan \theta_i$  de la siguiente manera:

$$\sin \theta_i = \frac{\tan \theta_i}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta_i}}. \quad (2.38)$$

Finalmente se reemplaza la Ec. (2.35) en la Ec. (2.38) para así obtener una expresión de  $\sin \theta_i$  en función de la normal y de esta manera relacionar  $\tan \theta_t$  con la normal en cada punto de evaluación.

$$\sin \theta_i = - \frac{x \frac{N_x}{N_z} + y \frac{N_y}{N_z}}{\left[ x^2 + y^2 + \left( x \frac{N_x}{N_z} + y \frac{N_y}{N_z} \right)^2 \right]^{1/2}}. \quad (2.39)$$

Es así como la potencia refractiva  $P$  descrita en la Ec. (2.34), queda totalmente determinada por la evaluación de la normal en cada punto corneal. A manera de resumen se pueden enumerar los pasos a seguir para calcular la potencia refractiva con

1. Se calculan las componentes de la normal en cada punto corneal con la Ec. (2.11).
2. Con la Ec. (2.39) se calcula  $\sin \theta_i$ .
3. Se obtiene  $\tan \theta_t$  según la Ec. (2.37).
4. Mediante la Ec. (2.35) se obtiene la  $\tan \theta_i$ .
5. Finalmente se reemplaza el valor de  $z$ ,  $\tan \theta_i$ ,  $\tan \theta_t$  y  $\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$  en la Ec. (2.34) para obtener la potencia refractiva.

## 2.5. Comentarios Finales

En este capítulo se mostró la relación que existe entre la normal a la córnea y las tres principales magnitudes utilizadas en topografía corneal. Esta relación es fundamental por dos motivos principalmente: (i) el vector normal se puede determinar completamente con el método de pantallas nulas ya que en este método existe una correspondencia uno a uno entre los puntos que están en la pantalla nula y en el plano imagen. (ii) la normal a una superficie es una propiedad intrínseca de la superficie y es invariante ante cualquier transformación paramétrica, lo que significa que por medio de la normal se puede revelar la naturaleza de la superficie.

Para encontrar una expresión de la curvatura que estuviese más acorde a una definición matemática, se ha supuesto que la córnea es o está cerca de ser una superficie con simetría de revolución.

Esto es una buena aproximación para córneas que tienen un astigmatismo menor a 0.25 D como se mencionó en el capítulo anterior. Si la córnea no tiene simetría de revolución, la curvatura sagital y meridional no serán las curvaturas principales de ésta, por lo que se tendría que encontrar la intersección de su vector normal con los planos sagital y meridional, sólo si se quieren utilizar las Ecs. (2.25) y (2.32). La suposición de la simetría rotacional para la córnea también es tenida en cuenta para calcular la potencia refractiva pero no es tenida en cuenta para calcular la elevación corneal con la Ec. (2.14), ya que la ecuación se puede aplicar a una superficie en general sin limitante rotacional. Por lo tanto, se espera que el cálculo de la elevación sea más exacto que el cálculo de la curvatura y potencia refractiva para córneas con un fuerte componente de astigmatismo, con queratócono o operadas por cirugía refractiva.

La ventaja de obtener las curvaturas y la potencia refractiva directamente de la normal es que no se requiere ajustar previamente una superficie sobre los datos de elevación para después obtener estas magnitudes por derivación. Esto aumentaría el error en el cálculo de las curvaturas y la potencia refractiva; por ejemplo, para obtener los datos de elevación hay que integrar los datos de la normal lo que implica un error asociado al método de integración utilizado, luego hay que ajustar una superficie por mínimos de cuadrados a estos datos de elevación con lo que se tiene un error en el ajuste empleado. Finalmente, sobre esta superficie ajustada se tiene que aplicar las Ecs. (2.18) y (2.19), donde las derivadas son calculadas numéricamente. Es así como se aumentaría el error total en la estimación de las curvaturas y la potencia dióptrica.

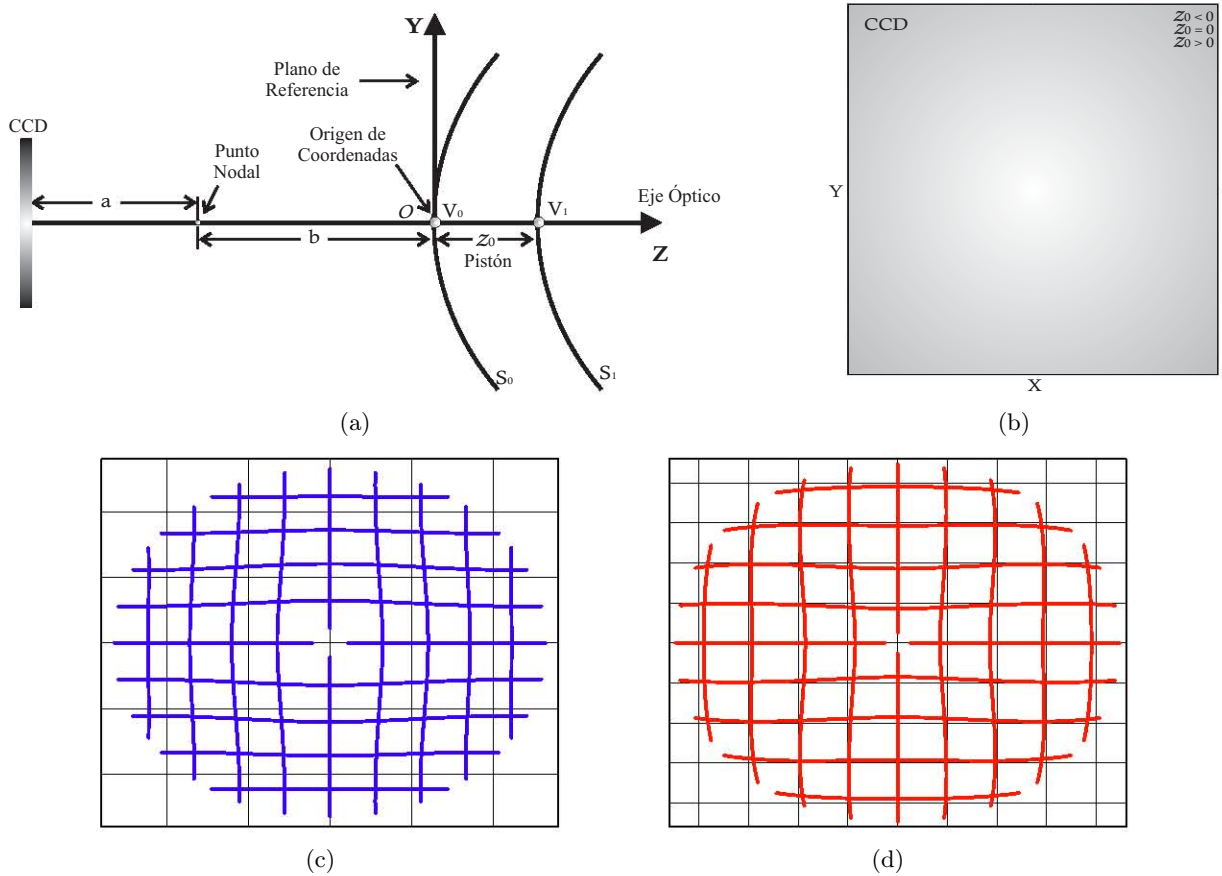
# EXACTITUD DE LA RECONSTRUCCIÓN CORNEAL DEBIDO AL PISTÓN Y AL DESCENTRAMIENTO CORNEAL

La exactitud de las mediciones topográficas se ve afectada tanto por factores inherentes al método de pantallas nulas, a los algoritmos utilizados en el procesamiento de imagen y en la reconstrucción de la superficie corneal como a limitaciones propias de la estructura facial del sujeto. Por ejemplo, en la imagen de la córnea obtenida para la evaluación, las pestañas pueden aparecer superpuestas a los puntos imagen, lo que dificulta saber si un punto pertenece a punto imagen o a las pestañas. Este es un problema que no es trivial resolver, por lo que muchos algoritmos no tienen en cuenta estas zonas de superposición a la hora de construir los mapas corneales, lo que trae como consecuencia que la córnea no sea evaluada uniformemente y que la exactitud de dichos mapas se vea afectada. Respecto a la fuentes de error inherentes al método de pantallas nulas se pueden mencionar la incorrecta impresión de los puntos en la pantalla nula así como un mal posicionamiento de dicha pantalla en el cilindro de soporte, entre otras. Por último, las principales fuentes de error asociadas al algoritmo de evaluación son el descentramiento  $(x_0, y_0)$  y el pistón  $z_0$  de la superficie corneal al momento de capturar la imagen de la córnea. Como se mostró en el Cap. 2., las ecuaciones utilizadas para obtener la elevación, curvatura y potencia refractiva dependen de las coordenadas del vértice de la córnea, por lo que es necesario saber que tanto influyen en la exactitud de la reconstrucción

corneal. Es por eso que en este capítulo sólo se muestra teóricamente el efecto que tiene el pistón y el descentramiento de la córnea en la exactitud de las mediciones topográficas y se plantea un algoritmo iterativo basado en un trazo inverso de rayos para encontrar las coordenadas  $(x_0, y_0, z_0)$ .

### 3.1. Pistón

Generalmente la imagen de la córnea debe capturarse cuando el vértice corneal está en un plano de referencia donde se garantice la correcta posición de la córnea respecto al instrumento. La distancia relativa sobre el eje óptico entre el vértice corneal y el plano de referencia (en este caso el plano de referencia coincide con el origen de coordenadas) se define aquí como el pistón y es denotado como  $z_0$  [ver Fig. 3.1(a)]. Cuando el vértice corneal está en la posición correcta a lo largo del eje óptico (pistón nulo) se dice comúnmente que la córnea está en foco. Cabe señalar que el diseño de la pantalla nula se realiza de manera ideal suponiendo una superficie de referencia que tiene su vértice en el origen de coordenadas ( $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ ). Cualquier modificación de estos valores alterará la distribución de puntos observados en la imagen. Por ejemplo, cuando la córnea tiene un pistón positivo (o negativo) lo que se produce es que el patrón de puntos en el CCD cubre un área menor (o mayor) en dicho sensor como se observa en la Fig. 3.1(b). Además, el patrón de puntos observado en el CCD se distorsiona de manera similar como ocurre en la distorsión de una imagen debido a aberraciones de tercer orden. Tanto en el pistón positivo como negativo, el patrón de puntos en el CCD adquiere una forma combinada de cojín y de barril como se observa en las Figs. 3.1(c) y 3.1(d); es decir, si la córnea se acerca hacia el topógrafo (pistón negativo), el patrón de puntos en el CCD obtienen una forma de barril en la región central y una forma de cojín en la región periférica [3.1(c)]. Mientras que cuando la córnea se aleja del topógrafo (pistón positivo), dicho patrón de puntos tomará una forma de cojín en la región central y de barril en la región periférica [3.1(d)]. Para mayor detalle de este efecto se puede consultar la referencia [10]. En conclusión, este efecto podría ser asociado a imperfecciones en la superficie corneal y no a un mal posicionamiento de la misma como en realidad ocurre, con lo que se cometería un error que afectaría considerablemente la exactitud de la reconstrucción corneal. Es importante decir que si la forma de la superficie evaluada no coincide con la superficie de referencia propuesta para el diseño de la pantalla (cambios en el radio de curvatura y constante de conicidad), se tendrá un efecto sobre la distribución de puntos observados en el CCD parecido al que produce el pistón. Este último tema no es de consideración en este capítulo.



**Figura 3.1:** (a) Esquema gráfico para ilustrar el pistón corneal  $z_0$ . (b) Efecto del pistón en el área cubierta por el patrón de puntos en el CCD. La línea sólida representa el área cubierta por el patrón de puntos cuando la superficie tiene un pistón nulo ( $z_0 = 0$ ). Mientras que las líneas discontinuas representan el caso para un pistón positivo (guiones largos) o negativo (líneas punteadas). (c) Efecto sobre el patrón de puntos en el CCD cuando la superficie de prueba tiene un pistón negativo. (d) Efecto sobre el patrón de puntos en el CCD cuando la superficie de prueba tiene un pistón positivo.

### 3.1.1. Efecto del Pistón en la Reconstrucción Corneal

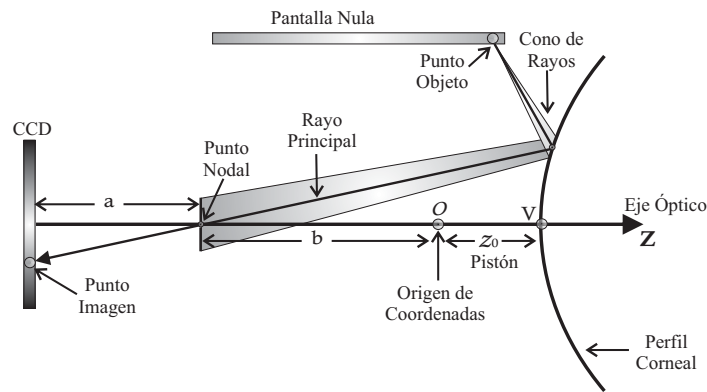
Para mostrar el efecto que tiene pistón sobre la reconstrucción corneal, se realizó una simulación numérica que incluyó los puntos en la pantalla nula, su imagen reflejada sobre la superficie corneal y sus correspondientes puntos en el CCD para distintas posiciones del vértice corneal. La superficie corneal que se propuso en esta simulación fue una esfera de  $r = 7.8$  mm. Para lograr este objetivo, inicialmente se encontraron las coordenadas de los puntos en la pantalla nula mediante un trazo inverso de rayos como se describe en la Sec. 2.1.1 del Cap. 2 (ver en la Pag. 35). Para el diseño de la pantalla nula se consideró una superficie corneal esférica con su vértice en el origen de coordenadas ( $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ ). Se utilizó una distribución de puntos radiales (intervalos angulares  $\Delta\theta = 7.5^\circ$  y separación radial  $\Delta\rho = 72 \mu\text{m}$ ) en el plano del CCD. Los parámetros empleados para diseñar la

pantalla nula utilizada en esta simulación se muestran en la Tabla. 3.1.

**Tabla 3.1:** Parámetros de diseño de la pantalla nula utilizados en la simulación numérica.

Parámetro	Símbolo	Magnitud (mm)
Radio de la Córnea	$r$	7.80
Distancia de Trabajo #1	$a$	21.22
Distancia de Trabajo #2	$b$	61.19
Radio Interno del Cilindro	$R$	9.30
Longitud del Cilindro	$L$	34.0

Una vez que se obtuvieron las coordenadas en la pantalla nula, éstas se utilizaron como puntos de partida para obtener la distribución de puntos en el CCD cuando la superficie corneal tiene un pistón  $z_0$ . Como se mencionó en el Cap. 2., de un punto objeto en la pantalla nula emerge un cono de rayos que se refleja en la superficie corneal para llegar al plano donde se encuentra el CCD. Mediante un algoritmo iterativo basado en el *Método de Newton-Raphson Bidimensional* [78], se seleccionó sólo el rayo que pasa por el punto nodal (rayo principal) y que posteriormente forma un punto imagen como se ejemplifica en la Fig. 3.2. Este proceso se repitió para todos los puntos en la pantalla nula. Cabe resaltar que la naturaleza de la córnea esférica ( $r = 7.8$  mm) no cambió durante la simulación, ésta sólo fue desplazada a lo largo de las direcciones **XYZ**.



**Figura 3.2:** Esquema para el trazado directo de rayos utilizado en la simulación.

Se obtuvieron las coordenadas de los puntos imagen para diez posiciones del vértice corneal que van desde  $-1.0$  mm hasta  $1.0$  mm en pasos de  $0.2$  mm. Se excluye  $z_0 = 0$ , porque el error

que se encontró para las mediciones topográficas fue prácticamente numérico debido a que en esa posición del vértice corneal fue donde se hizo el diseño de la pantalla nula. Con los puntos objetos en la pantalla nula y su correspondientes puntos imagen en el CCD se calcularon las normales en la superficie corneal esférica ( $r = 7.8$  mm) que se utilizó en el diseño de la pantalla nula. Esto último se hizo para que la exactitud de la reconstrucción corneal sólo se vea afectada por el incorrecto posicionamiento del vértice corneal y no por el desconocimiento de la forma de la córnea. Finalmente se construyeron los mapas corneales (diferencia de elevación, radio de curvatura y potencia refractiva) para cada pistón de la superficie corneal, cuando se utilizan las coordenadas del vértice corneal como *input* en los algoritmos de evaluación (resultados corregidos); esto quiere decir que el vértice de la superficie de referencia donde se calculará la normal coincide con el vértice de la superficie corneal  $(x_0, y_0, z_0)$  como se detalla en la Sec. 2.1.2 del Cap. 2 (ver en Pag. 37). Cuando no se utilizan dichas coordenadas del vértice corneal en los algoritmos de evaluación (resultados no corregidos) el vector normal es calculado en una superficie de referencia centrada y sin pistón; es decir,  $(x_0 = y_0 = z_0 = 0)$ , por lo que los vértices de la superficies de referencia y corneal no están en el mismo punto espacial. Los resultados numéricos fueron comparados contra la misma córnea esférica con el fin de facilitar la interpretación de los resultados. Estos resultados son presentados con la etiquetas C y NC que significan “Corregidos” y “No Corregidos” por pistón. Para todos los casos se calculó el error RMS que se utilizó como una medida de la exactitud de cada mapa corneal. Igualmente se obtuvo el error PV (acrónimo del inglés *Peak to Valley*) para verificar la discrepancia máxima de los datos corneales de cada magnitud topográfica

### Diferencias de Elevación

Para obtener las diferencias de elevación se calculó la elevación  $z_{\text{cal}}$  por integración numérica haciendo uso de la Ec. (2.14) (ver en la Pag. 41). Estos datos  $z_{\text{cal}}$  fueron ajustados a una esfera de  $r = 7.8$  mm para obtener  $z_{\text{fit}}$  mediante un ajuste no lineal de mínimos cuadrados basado en el *Algoritmo de Levenberg-Marquart* [83]. Finalmente se calcularon las diferencias de elevación  $\Delta z$  con la Ec. (2.16) (ver en la Pag. 42). Para cada posición del vértice corneal (de  $-1.0$  mm a  $1.0$  mm) se obtuvieron los errores RMS y PV para  $\Delta z$ , como también el valor  $z_0^{\text{fit}}$  para los datos corregidos (C) como para los datos no corregidos (NC) por pistón. Estos resultados fueron tabulados en la Tabla. 3.2.

Los valores de  $z_0^{\text{fit}}$  en la Tabla. 3.2 corresponden al valor del pistón corneal que se obtendría del ajuste de mínimos cuadrados que se hizo sobre los datos de elevación calculados por integración. Los resultados para  $z_0^{\text{fit,NC}}$  discreparon totalmente del valor real de  $z_0$ . Esto no ocurrió con el  $z_0^{\text{fit,C}}$ ,

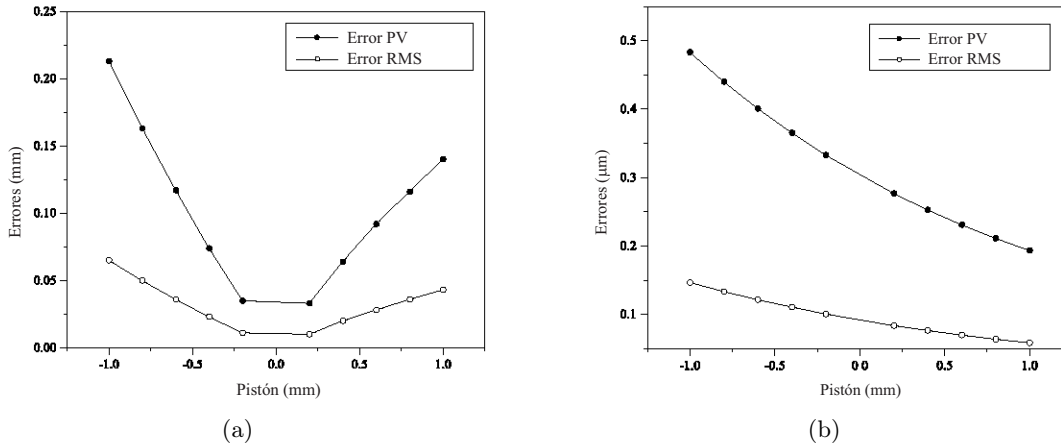


**Tabla 3.2:** Desviaciones en elevación respecto a la córnea simulada ( $r = 7.8$  mm y  $p = 1$ ).

$z_0$ (mm)	$z_0^{\text{fit,NC}}$ (mm)	$PV_{\Delta z}^{\text{NC}}$ (mm)	$RMS_{\Delta z}^{\text{NC}}$ (mm)	$z_0^{\text{fit,C}}$ (mm)	$PV_{\Delta z}^{\text{C}}$ (mm)	$RMS_{\Delta z}^{\text{C}}$ (mm)
-1.000	-0.067	0.213	0.065	-0.100	$4.833 \times 10^{-4}$	$1.467 \times 10^{-4}$
-0.800	-0.051	0.163	0.050	-0.800	$4.401 \times 10^{-4}$	$1.335 \times 10^{-4}$
-0.600	-0.037	0.117	0.036	-0.600	$4.010 \times 10^{-4}$	$1.215 \times 10^{-4}$
-0.400	-0.023	0.074	0.023	-0.400	$3.654 \times 10^{-4}$	$1.107 \times 10^{-4}$
-0.200	-0.011	0.035	0.011	-0.200	$3.330 \times 10^{-4}$	$1.007 \times 10^{-4}$
0.200	0.010	0.033	0.010	0.200	$2.770 \times 10^{-4}$	$8.376 \times 10^{-5}$
0.400	0.021	0.064	0.020	0.400	$2.530 \times 10^{-4}$	$7.646 \times 10^{-5}$
0.600	0.030	0.092	0.028	0.600	$2.311 \times 10^{-4}$	$6.982 \times 10^{-5}$
0.800	0.038	0.116	0.036	0.800	$2.113 \times 10^{-4}$	$6.382 \times 10^{-5}$
1.000	0.046	0.140	0.043	1.000	$1.934 \times 10^{-4}$	$5.837 \times 10^{-5}$

donde en todos los casos si se recuperó el valor del pistón de la superficie corneal simulada. Por otro lado, se encontró que el error  $RMS_{\Delta z}^{\text{NC}}$  en todos los casos tuvo valores de centésimas de milímetros, lo cual es un valor elevado para una evaluación corneal en diferencias de elevación teniendo en cuenta que es una simulación numérica donde sólo se tuvo al pistón como fuente de error. También se observó que los errores  $RMS_{\Delta z}^{\text{NC}}$  y  $PV_{\Delta z}^{\text{NC}}$  empeoraron a medida que aumentó la separación del vértice corneal respecto al origen como se muestra en la Fig. 3.3(a). El error  $RMS_{\Delta z}^{\text{C}}$  mejoró en dos o tres órdenes de magnitud respecto al error  $RMS_{\Delta z}^{\text{NC}}$  para un mismo  $z_0$ . Se encontró que el error  $RMS_{\Delta z}^{\text{C}}$  es más pequeño (en un factor de  $10^{-1}$ ) cuando se corrigió por pistón positivo que cuando se corrigió por pistón negativo, por lo que la evaluación fue más exacta para valores de  $z_0$  positivos [Fig. 3.3(b)].

En topografía corneal se suele ajustar diferentes tipos de superficies dependiendo de la aplicación clínica que se quiera obtener y de los cambios clínicamente significativos que se quieran observar [1]. Entre estas superficies de ajuste se encuentran: la esfera de mejor ajuste (BFS, acrónimo del inglés *Best Fit Sphere*), la cónica de mejor ajuste y la elipsoide tórica de mejor ajuste entre otras. El hecho es que si se ajusta algunas de estas superficies a datos no corregidos por pistón no se recupera la superficie corneal que se está evaluando. Por ejemplo, en esta simulación cuando se ajustó la mejor cónica descrita por la Ec. (2.6) por mínimos cuadrados sobre los datos de elevación  $z_{\text{cal}}$  para los



**Figura 3.3:** Exactitud del mapa de diferencia de elevación en función del pistón cuando se comparó con una esfera de  $r = 7.8$  mm: (a) Errores PV y RMS para datos NC. (b) Errores PV y RMS para datos C.

datos no corregidos por pistón, se obtuvieron cónicas de diferente naturaleza a una esfera. Mientras que para los datos corregidos por pistón se encontraron resultados con un alto grado de exactitud. En esta ocasión sólo se consideraron seis posiciones de pistones ( $z_0 = \pm 0.2$  mm,  $z_0 = \pm 0.4$  mm y  $z_0 = \pm 1.0$  mm) para mostrar este efecto. Dichos resultados obtenidos para la mejor cónica se muestran en la Tabla. 3.3.

**Tabla 3.3:** Ajuste de la mejor cónica para datos corregidos y no corregidos por pistón.

$z_0$ (mm)	$z_0^{\text{fit,NC}}$ (mm)	$r^{\text{fit,NC}}$ (mm)	$p^{\text{fit,NC}}$	Cónica	$z_0^{\text{fit,C}}$ (mm)	$r^{\text{fit,C}}$ (mm)	$p^{\text{fit,C}}$	Cónica
-1.000	0.008	8.460	0.405	Prolato	-1.000	7.799	1.000	Esfera
-0.400	0.003	8.054	0.780	Prolato	-0.400	7.799	1.000	Esfera
-0.200	0.002	7.925	0.893	Prolato	-0.200	7.799	1.000	Esfera
0.200	-0.001	7.675	1.103	Oblato	0.200	7.799	1.000	Esfera
0.400	-0.003	7.555	1.202	Oblato	0.400	7.799	1.000	Esfera
1.000	-0.007	7.212	1.477	Oblato	1.000	7.799	1.000	Esfera

En todos los casos el  $r^{\text{fit,NC}}$  se desvió considerablemente del valor nominal  $r = 7.8$  mm de la esfera simulada, por lo que se demuestra la inexactitud de la reconstrucción corneal para un ajuste de mejor cónica cuando se utilizan datos no corregidos por pistón de la córnea. Este resultado es importante porque hay instrumentos que capturan la imagen corneal sólo cuando ésta está en la posición correcta sobre el eje óptico (este tema se abordará en la Sec. 3.3); el hecho es que si hay

una imprecisión en el posicionamiento de la córnea se van obtener resultados inexactos en elevación corneal si los datos no son corregidos por pistón. Por ejemplo, si se tiene una imprecisión de  $\pm 0.2$  mm en la medición del pistón de una córnea esférica y se realiza la evaluación sobre datos no corregidos, se encontrará que la forma de la córnea es prolata o un oblata según el signo de  $z_0$ . Cuando se utilizan datos corregidos si se recupera la forma de la córnea simulada (ver la Tabla. 3.3). En adición a esto último, el resultado para  $r^{\text{fit,C}}$  fue bastante bueno ya que el error porcentual fue de aproximadamente 0.012 % para todos los casos.

### Radios de Curvatura

En esta simulación también se estudió el efecto del pistón en el radio curvatura sagital y meridional. Estas magnitudes fueron obtenidas siguiendo el algoritmo descrito en el numeral 2 y 3 de la Sec. 2.3 (ver en la Pag. 42). Una vez se que se obtuvieron las curvaturas haciendo uso de las Ecs. (2.25) y (2.32) (ver en Pags. 46 y 47), se calcularon los radios de curvatura como el recíproco de la curvatura ( $r = 1/\kappa$ ). Se comparó el valor numérico de los radios sagital y meridional en cada punto corneal respecto al valor nominal  $r = 7.8$  mm y se obtuvieron el error RMS y el error PV de estas diferencias. Los resultados numéricos obtenidos en esta simulación para el radio sagital se encuentran tabulados en la Tabla. 3.4.

**Tabla 3.4:** Desviaciones del radio sagital respecto al radio  $r = 7.8$  mm de la córnea simulada.

$z_0$ (mm)	$PV_{r_{\text{sag}}}^{\text{NC}}$ (mm)	$RMS_{r_{\text{sag}}}^{\text{NC}}$ (mm)	$PV_{r_{\text{sag}}}^{\text{C}}$ (mm)	$RMS_{r_{\text{sag}}}^{\text{C}}$ (mm)
-1.000	1.100	1.068	$7.890 \times 10^{-6}$	$2.111 \times 10^{-6}$
-0.800	0.835	0.830	$1.068 \times 10^{-5}$	$2.881 \times 10^{-6}$
-0.600	0.595	0.606	$1.013 \times 10^{-5}$	$2.756 \times 10^{-6}$
-0.400	0.378	0.393	$1.247 \times 10^{-5}$	$3.461 \times 10^{-6}$
-0.200	0.180	0.194	$7.967 \times 10^{-6}$	$2.281 \times 10^{-6}$
0.200	0.165	0.182	$8.977 \times 10^{-6}$	$2.577 \times 10^{-6}$
0.400	0.315	0.356	$7.533 \times 10^{-6}$	$2.077 \times 10^{-6}$
0.600	0.454	0.522	$7.021 \times 10^{-6}$	$1.899 \times 10^{-6}$
0.800	0.581	0.680	$9.015 \times 10^{-6}$	$2.416 \times 10^{-6}$
1.00	0.700	0.832	$8.400 \times 10^{-6}$	$2.230 \times 10^{-6}$

El  $\text{RMS}_{r_{\text{sag}}}^{\text{NC}}$  tuvo valores de décimas de milímetros en nueve de los diez casos estudiados y aumentó a medida que se incrementó el pistón. Esto es un comportamiento esperado ya que el error en el cálculo de la normal depende de la selección de la superficie de referencia que se utiliza para encontrar el punto  $\mathbf{P}_s$  como una aproximación del punto  $\mathbf{P}_2$  en la superficie corneal. (ver Fig. 2.2 en la Pag. 38); es decir, si se utiliza una superficie de referencia que está muy alejada de la posición sobre el eje  $\mathbf{Z}$  que tuvo la córnea al momento de capturar la imagen, el error en el cálculo de la normal afectará considerablemente la exactitud en las mediciones del radio de curvatura. En contraste a estos resultados, cuando se corrigió por pistón, la exactitud fue del orden de nanómetros en todas las posiciones del vértice corneal. Esto demuestra que el pistón afecta considerablemente la evaluación del radio sagital cuando los datos no son corregidos por pistón.

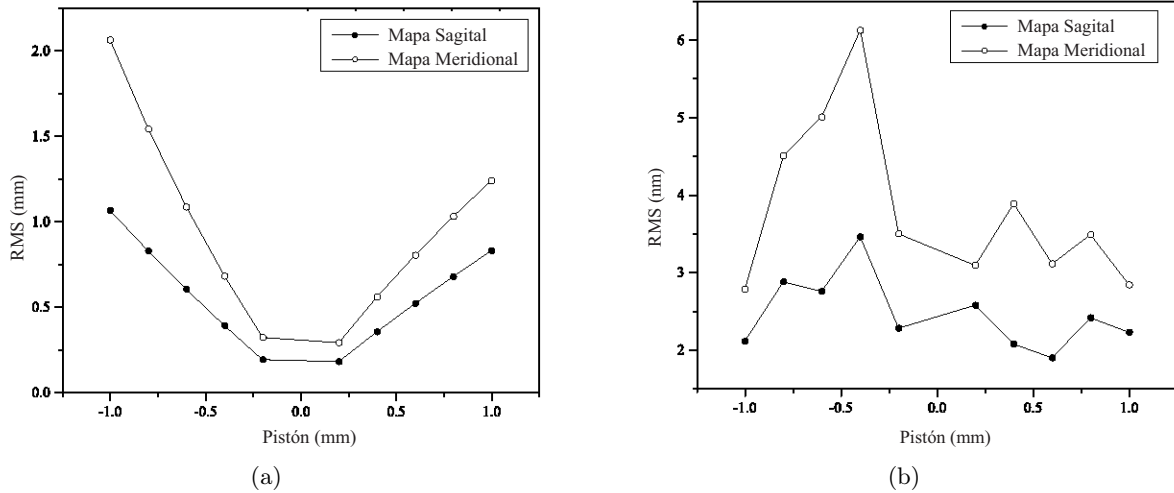
En la Tabla. 3.5 se muestran los resultados obtenidos para la evaluación del radio meridional en función del pistón.

**Tabla 3.5:** Desviaciones del radio meridional respecto al radio  $r = 7.8$  mm de la córnea simulada.

$z_0$ (mm)	$\text{PV}_{r_{\text{mer}}}^{\text{NC}}$ (mm)	$\text{RMS}_{r_{\text{mer}}}^{\text{NC}}$ (mm)	$\text{PV}_{r_{\text{mer}}}^{\text{C}}$ (mm)	$\text{RMS}_{r_{\text{mer}}}^{\text{C}}$ (mm)
-1.000	3.005	2.066	$1.069 \times 10^{-5}$	$2.787 \times 10^{-6}$
-0.800	2.188	1.543	$1.520 \times 10^{-5}$	$4.507 \times 10^{-6}$
-0.600	1.501	1.087	$1.473 \times 10^{-5}$	$5.009 \times 10^{-6}$
-0.400	0.920	0.683	$1.635 \times 10^{-5}$	$6.129 \times 10^{-6}$
-0.200	0.425	0.323	$1.06 \times 10^{-5}$	$3.500 \times 10^{-6}$
0.200	0.367	0.293	$5.583 \times 10^{-5}$	$3.094 \times 10^{-6}$
0.400	0.685	0.560	$1.051 \times 10^{-5}$	$3.891 \times 10^{-6}$
0.600	0.963	0.805	$1.006 \times 10^{-5}$	$3.113 \times 10^{-6}$
0.800	1.206	1.032	$1.254 \times 10^{-5}$	$3.490 \times 10^{-6}$
1.000	1.420	1.241	$1.117 \times 10^{-5}$	$2.842 \times 10^{-6}$

Se encontró que el  $\text{RMS}_{r_{\text{mer}}}^{\text{NC}}$  también aumentó con el incremento del pistón como ocurre con el radio sagital, pero la exactitud del radio meridional empeoró respecto a la exactitud del radio sagital cuando no se corrigió por pistón [ver Fig. 3.4(a)]. Respecto a los datos corregidos, también se

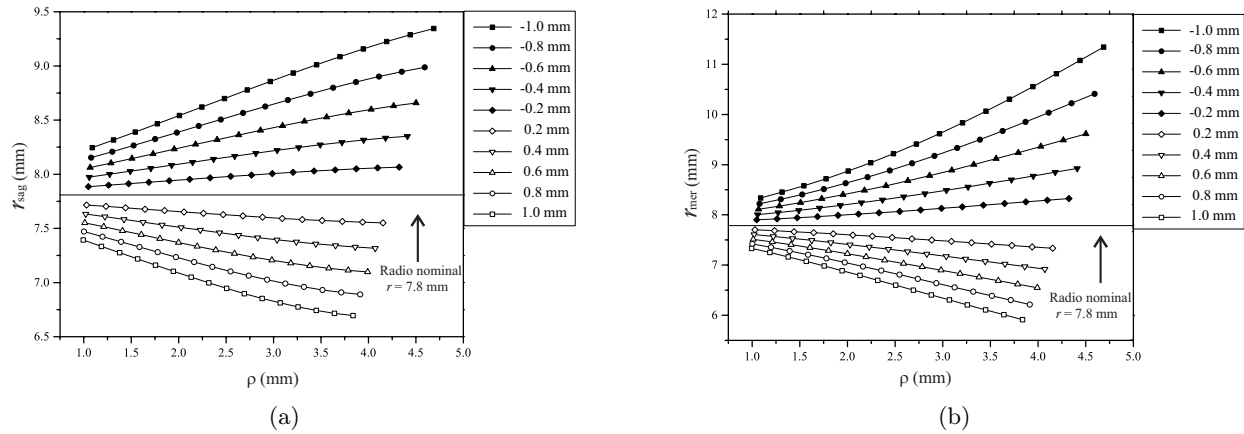
encontró que la exactitud para el radio sagital fue mejor que la exactitud del radio meridional [ver Fig. 3.4(b)].



**Figura 3.4:** Exactitud del mapa de radio de curvatura sagital y meridional en función del pistón: (a) Error RMS para los mapas NC. (b) Error RMS para los mapas C.

El comportamiento mostrado en la Fig. 3.4, se debe principalmente a que el radio meridional depende de un ajuste de mínimos cuadrados sobre los datos numéricos de las normales, a diferencia del radio sagital que depende de un cálculo directo una vez que se obtienen las normales. El efecto es mayor para el error  $RMS_{r_{mer}}^{NC}$  [ver Fig. 3.4(a)], ya que hay una propagación del error que se presenta en el cálculo de  $RMS_{r_{sag}}^{NC}$ . Por otro lado, la exactitud del radio meridional corregido por pistón es del orden de nanómetros con valores muy cercanos a los obtenidos para el radio sagital. Por ejemplo, la discrepancia máxima de estos mapas corregidos se da en  $z_0 = -0.4$  mm y es de 2.668 nm [ver Fig. 3.4(b)]. Aunque se esperaría que el radio sagital y meridional fuesen los mismos porque en esta simulación se ha considerado a la córnea como una superficie esférica que tiene puntos umbilicales en toda su superficie [16–18], este resultado es muy bueno ya que el radio meridional se ve afectado por el ajuste de mínimos cuadrados como se comentó anteriormente.

Se graficó el radio de curvatura en función de la distancia radial de los puntos corneales con el objetivo de observar la tendencia de esta magnitud cuando no se corrigió por pistón. Tanto el radio sagital [ver Fig. 3.5(a)] como el meridional [ver Fig. 3.5(b)] se alejaron del valor nominal utilizado en esta simulación para la córnea esférica. Para un pistón negativo hubo una sobre estimación de los radios y para un pistón positivo se produjo una sub estimación de dichos radios de curvatura.



**Figura 3.5:** Radio de curvatura en una superficie corneal esférica cuando no se corrige por pistón: (a) Radio de curvatura sagital. (b) Radio de curvatura meridional.

### Potencia Refractiva

En esta sección se presenta el efecto del pistón en la exactitud de la potencia refractiva. La potencia se calcula con el algoritmo descrito en la Sec. 2.4 del Cap. 2 (ver en la Pag. 48), donde se relaciona la potencia refractiva con la normal a la superficie corneal. También se calculó la potencia refractiva de una córnea esférica de manera analítica con el propósito de comparar los resultados numéricos obtenidos con las ecuaciones propuestas en esta tesis, ya sea para los datos corregidos como los no corregidos por pistón. Para obtener la potencia refractiva de manera analítica, en vez de calcular la elevación por integración,  $z$  fue obtenida directamente de la Ec. (2.8) (ver la Pag. 38) en cada punto  $(x, y)$ . Luego  $z$  fue reemplazada en la Ec. (1.6) (ver la Pag. 18). Se utilizó el valor  $n_c = 1.3375$ , el cual corresponde al índice de refracción de la superficie corneal (incluye la superficie anterior y posterior). Los resultados numéricos de esta comparación son mostrados en la Tabla. 3.6. Se encontró que el error  $\mathbf{RMS}_P^{\text{NC}}$  tuvo valores muy cercanos para la misma separación de la córnea respecto al origen de coordenadas. Por ejemplo, cuando se compara el error  $\mathbf{RMS}_P^{\text{NC}}$  en las posiciones  $z_0 = +1$  mm y  $z_0 = -1$  mm, la diferencia de estos dos valores es de 0.02 D (corresponde a la resta: 6.19 D – 6.17 D). En todos los casos de los resultados no corregidos, se obtuvieron exactitudes del orden de Dioptrías. Esto sin lugar a dudas es un resultado totalmente pobre teniendo en cuenta que la exactitud reportada para córneas reales varía de 0.1 D a 0.25 D [6, 84–86]. Es por eso que es obligatorio corregir los datos por pistón para así obtener una mejor exactitud en el mapa de potencia refractiva. La exactitud de la potencia refractiva cuando se corrigió por pistón fue del orden de  $10^{-4}$  Dioptrías, en todos los valores del pistón corneal simulado.

**Tabla 3.6:** Desviaciones de la potencia refractiva respecto al valor analítico obtenido para una esfera de  $r = 7.8$  mm.

$z_0$ (mm)	$PV_P^{NC}$ (mm)	$RMS_P^{NC}$ (mm)	$PV_P^C$ (mm)	$RMS_P^C$ (mm)
-1.00	7.29	6.17	$9.40 \times 10^{-4}$	$3.92 \times 10^{-4}$
-0.80	5.81	4.93	$8.43 \times 10^{-4}$	$3.52 \times 10^{-4}$
-0.60	4.34	3.70	$7.58 \times 10^{-4}$	$3.17 \times 10^{-4}$
-0.40	2.88	2.47	$6.82 \times 10^{-4}$	$2.82 \times 10^{-4}$
-0.20	1.44	1.23	$5.52 \times 10^{-4}$	$2.50 \times 10^{-4}$
0.20	1.42	1.23	$4.32 \times 10^{-4}$	$2.02 \times 10^{-4}$
0.40	2.47	2.84	$4.51 \times 10^{-4}$	$1.94 \times 10^{-4}$
0.60	3.71	4.25	$4.08 \times 10^{-4}$	$1.78 \times 10^{-4}$
0.80	4.95	5.65	$3.70 \times 10^{-4}$	$1.63 \times 10^{-4}$
1.00	7.05	6.19	$3.35 \times 10^{-4}$	$1.50 \times 10^{-4}$

También se muestran la Figs. 3.6(a) y 3.6(b), donde se observan cómo varía la potencia refractiva en función de la distancia radial de los puntos corneales tanto para los datos no corregidos como para los datos corregidos. Cuando la distancia radial aumentó en el caso no corregido, la potencia disminuyó para los pistones  $z_0 = -0.8$  mm y  $z_0 = -1.0$  mm, mientras que aumentó para pistones entre  $z_0 = -0.6$  mm y  $z_0 = 1.0$  mm. Esto es un resultado inverso al obtenido en los mapas de radios sagital y meridional donde dichas magnitudes aumentaron para pistones negativos y disminuyeron para pistones positivos a medida que la distancia radial aumentó [ver Figs. 3.5(a) y 3.5(b)]. Para los datos corregidos, la potencia refractiva en todas las posiciones del vértice corneal tuvo un comportamiento ascendente a medida que aumentó la distancia radial [ver Fig. 3.6(b)]. Este es un resultado totalmente esperado ya que se sabe que la potencia refractiva en una córnea esférica aumenta del centro a la periferia debido a la aberración esférica [3]. Otra manera de comprobar la exactitud de los resultados corregidos es verificar que a medida que la distancia radial disminuye ( $\rho \rightarrow 0$ ), la potencia refractiva se aproxima al valor predicho por la aproximación paraxial [ $P_{\text{par}} = (n_c - 1)/r = 43.26$  D] para una córnea esférica con  $r = 7.8$  mm. Esto no ocurrió para los datos no corregidos por pistón [ver Fig. 3.6(a)], con lo que se demuestra que la potencia refractiva es totalmente inexacta si no se corrige por pistón.

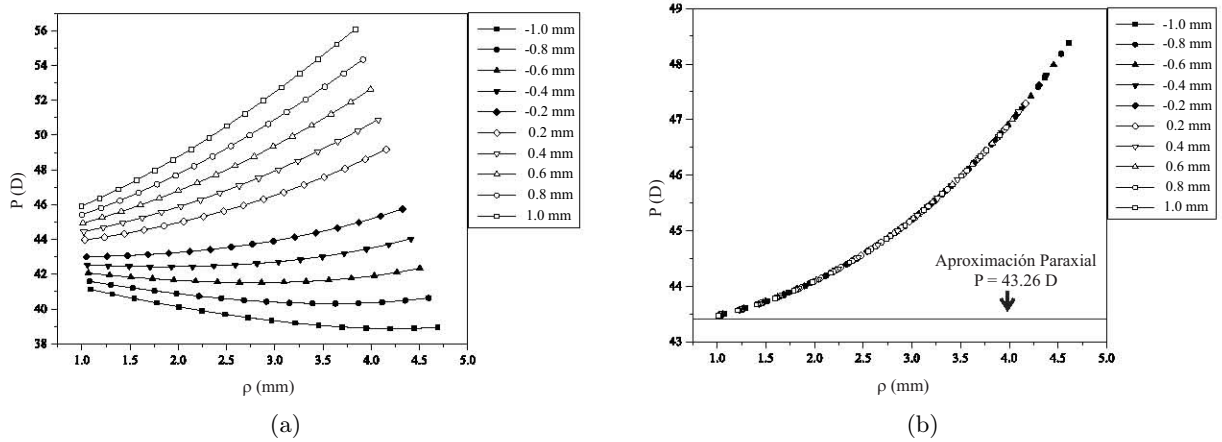


Figura 3.6: Potencia refractiva en función de la distancia radial para cada valor de pistón: (a) Potencia refractiva sin corregir por pistón. (b) Potencia refractiva corregida por pistón.

### 3.2. Descentramiento

A diferencia del pistón, el descentramiento se define aquí como el desplazamiento del vértice corneal en una dirección perpendicular al eje óptico  $Z$ . Acorde a esta definición y al sistema de coordenadas rectangulares que se ha utilizado en los cálculos de la topografía corneal en esta tesis, el descentramiento se puede dar sobre el eje  $X$ , sobre eje  $Y$ , o en una combinación de estas dos direcciones. Con el propósito de ilustrar esta definición, en la Fig. 3.7 se considera una superficie con un pistón  $z_0$  y un descentramiento  $y_0$  sobre el eje  $Y$ .

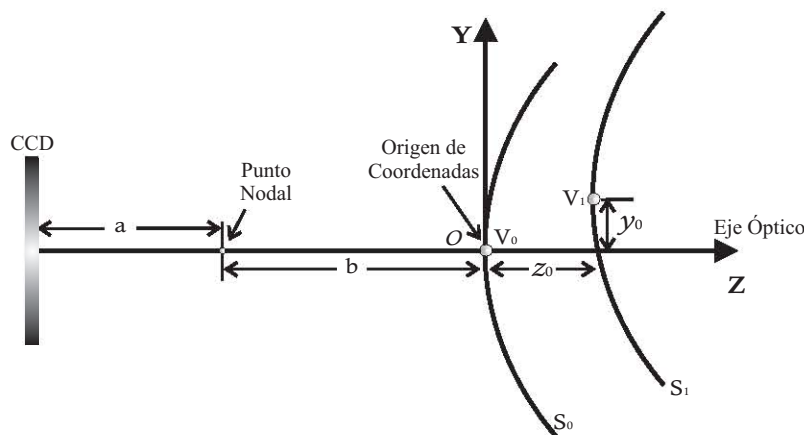
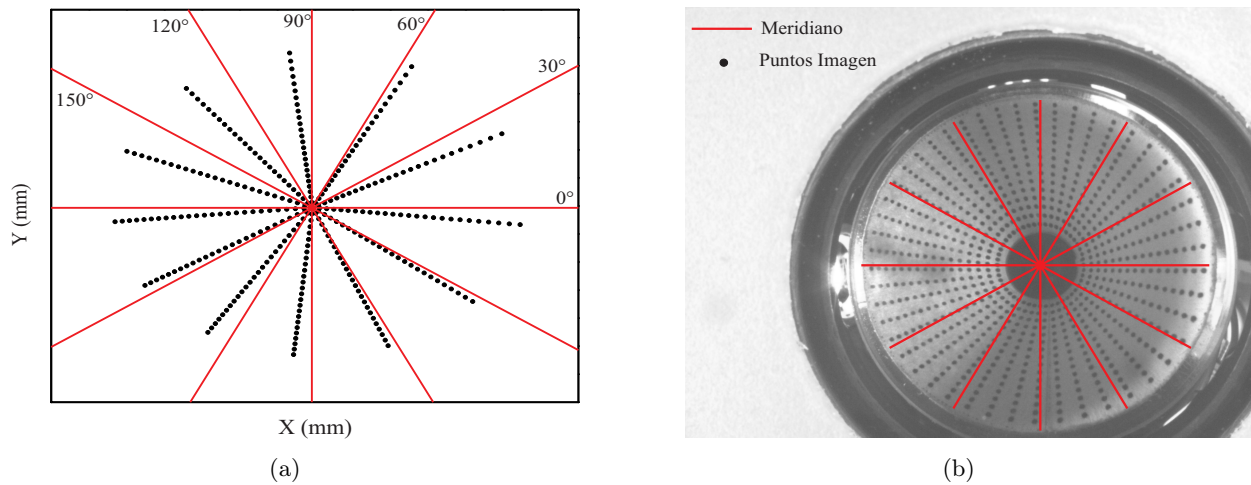


Figura 3.7: Esquema meridional para ilustrar el descentramiento corneal.

En la Fig. 3.7,  $S_0$  está centrada y la superficie  $S_1$  tiene un descentramiento positivo  $y_0$ . El efecto más relevante que produce el descentramiento sobre un patrón de puntos en el CCD se observa de una manera más sencilla si se tiene un patrón radial de puntos en el CCD, donde el descentramiento



hace que dichos puntos ya no sean formados solamente por rayos meridionales sino que también tengan una contribución debida a rayos oblicuos (*skew rays*) que por definición no están contenidos en un plano meridional. Esto ocurre porque se pierde la simetría rotacional del sistema respecto al eje óptico del instrumento [29, 46], por lo que en un meridiano  $\phi_o$ , los puntos imagen quedarán fuera de dicho meridiano [ver Fig. 3.8(a)]. Este efecto es más pronunciado a medida que aumenta tanto el descentramiento de la superficie como la distancia radial de los puntos corneales. Un ejemplo experimental de como se distorsiona el patrón de puntos en el sensor imagen se muestra en la Fig. 3.8(b), donde se observan seis meridianos ( $\Delta\phi = 30^\circ$ ) superpuestos sobre la imagen obtenida de una esfera de calibración de radio  $r = 7.8$  mm.



**Figura 3.8:** Efecto del descentramiento sobre el patrón de puntos corneales observado en el CCD: (a) Patrón simulado. (b) Patrón Experimental.

### 3.2.1. Efecto del Descentramiento en la Reconstrucción Corneal

Al igual que en el caso del pistón, el efecto producido por el descentramiento podría ser asociado a imperfecciones en la superficie corneal con lo que se cometería un error que afectaría la reconstrucción corneal. Para tener una magnitud de este error, se utilizó la misma simulación y procedimiento realizado para cuantificar el error por pistón (ver Sec. 3.1.1). Se simularon distribuciones de puntos en el CCD para descentramientos del vértice corneal tanto en una dirección como en dos direcciones. Estos patrones se obtuvieron utilizando el mismo algoritmo iterativo propuesto en el caso del pistón. En todos los casos se supuso una córnea sin pistón ( $z_0 = 0$  mm). Se calcularon las magnitudes topográficas para datos corregidos y no corregidos por descentramiento en seis posiciones del vértice corneal descritas a continuación:  $y_0 = \pm 0.2$  mm;  $x_0 = \pm 0.4$  mm;  $x_0 = y_0 = \pm 0.6$  mm. Los resultados

numéricos fueron comparados con el caso ideal que se propone en la simulación que es una córnea esférica con  $r = 7.8$  mm y  $p = 1$ . En todos los casos se calculó el error RMS y el error PV para cuantificar la exactitud de la reconstrucción corneal. Al igual que en el caso del pistón, se rotula con una C cuando los resultados son corregidos por descentramiento y con una NC cuando éstos no son corregidos descentramiento.

### Diferencias de Elevación

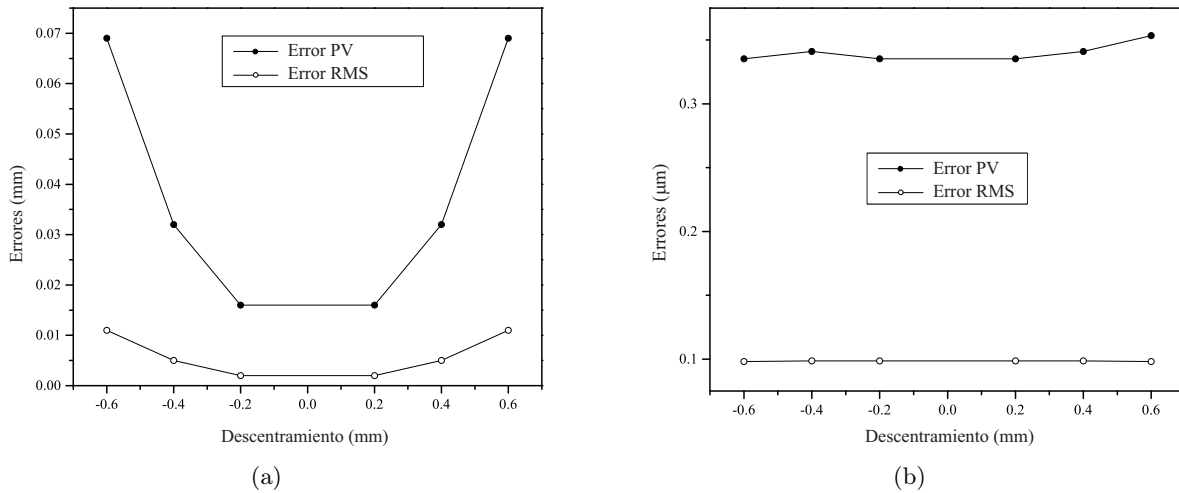
Los resultados obtenidos para las diferencias de elevación  $\Delta z$  son mostrados en la Tabla. 3.7.

**Tabla 3.7:** Desviaciones en elevación respecto a la córnea simulada ( $r = 7.8$  mm y  $p = 1$ ) para los mapas NC y C por descentramiento.

$x_0$ (mm)	$y_0$ (mm)	$PV_{\Delta z}^{NC}$ (mm)	$RMS_{\Delta z}^{NC}$ (mm)	$PV_{\Delta z}^C$ (mm)	$RMS_{\Delta z}^C$ (mm)
-0.60	-0.60	0.069	0.011	$3.353 \times 10^{-4}$	$9.814 \times 10^{-5}$
-0.40	0.00	0.032	0.005	$3.410 \times 10^{-4}$	$9.858 \times 10^{-5}$
0.00	-0.20	0.016	0.002	$3.353 \times 10^{-4}$	$9.863 \times 10^{-5}$
0.00	0.200	0.016	0.002	$3.353 \times 10^{-4}$	$9.863 \times 10^{-5}$
0.40	0.00	0.032	0.005	$3.410 \times 10^{-4}$	$9.858 \times 10^{-5}$
0.60	0.60	0.069	0.011	$3.534 \times 10^{-4}$	$9.814 \times 10^{-5}$

Se obtuvieron valores para el error  $RMS_{\Delta z}^{NC}$  del orden de centésimas y milésimas de milímetros. Al igual que en el caso del pistón, estos valores siguen siendo muy elevados para la exactitud de un mapa de diferencia de elevación simulado, teniendo en cuenta que sólo se tiene el descentramiento como fuente de error. También se encontró que el descentramiento con signo positivo o negativo afecta de la misma manera la exactitud del mapa de diferencia de elevación, ya que se obtuvo el mismo valor numérico para el error RMS [ver Fig. 3.9(a)]. Por ejemplo en  $x_0 = -0.40$  mm y  $x_0 = 0.40$  mm, el error  $RMS_{\Delta z}^{NC}$  tuvo el mismo valor de 0.005 mm. Este mismo comportamiento se encontró para el error  $PV_{\Delta z}^{NC}$ ,  $PV_{\Delta z}^C$  y  $RMS_{\Delta z}^C$ . Cuando se corrigió por descentramiento, la exactitud de las diferencia de elevación mejoró considerablemente ya que el error  $RMS_{\Delta z}^C$  tuvo valores del orden de centésimas de micrómetros, mejorando unos dos o tres ordenes de magnitud en exactitud respecto al error  $RMS_{\Delta z}^{NC}$ . Otro resultado encontrado para el error  $RMS_{\Delta z}^C$  es que sus valores son comparables en distintas posiciones del vértice corneal dado que la discrepancia entre el valor máximo y el valor mínimo de dicho error es de 0.5 nm. Esto quiere decir que sin importar el nivel de descentramiento

de la superficie corneal se obtuvo prácticamente la misma exactitud para las diferencias de elevación cuando se tiene en cuenta el descentramiento a la hora de hacer la evaluación [ver Fig. 3.9(b)]. Cabe resaltar que la exactitud en el cálculo de las diferencias de elevación para datos corregidos es afectada principalmente por el error de truncamiento que se comete al utilizar el método de trapecio para calcular  $z$  por medio de la Ec. (2.14) con la que se calcula la elevación corneal.



**Figura 3.9:** Exactitud del mapa de diferencia de elevación en función del descentramiento cuando se comparó con una esfera de  $r = 7.8$  mm: (a) Errores PV y RMS para datos NC. (b) Errores PV y RMS para datos C.

### Radios de Curvatura

Al igual que en el caso del pistón, también se calculó la exactitud tanto del radio sagital como del radio meridional al considerar datos corregidos y no corregidos por descentramiento. Los resultados obtenidos al comparar el valor calculado del radio sagital respecto al valor nominal  $r = 7.8$  mm se muestran en la Tabla. 3.8. Mientras que los resultados para el radio meridional se muestran en la Tabla. 3.9. En ambos casos (ver Tablas. 3.8 y 3.9), se obtuvieron valores elevados para los errores PV y RMS no corregidos por descentramiento, por lo que la discrepancia y la exactitud de los radios sagital y meridional fue afectada considerablemente por la pérdida de simetría de revolución respecto al eje óptico de las mediciones. Es decir, si no se corrige por descentramiento y se utiliza una superficie de referencia centrada para obtener las normales, se pierde información en la dirección oblicua al considerar sólo rayos meridionales. Este problema se superó cuando en la evaluación se tuvo en cuenta la magnitud del descentramiento de la córnea simulada. Como prueba de esto, se obtuvieron valores para los errores PV y RMS para datos corregidos del orden de unidades de nanómetros en el peor de los casos. Con esto se demuestra que si se conoce la magnitud del descentramiento

de la superficie y se utiliza como *input* en el cálculo del radio sagital se superará el error del rayo oblicuo. También se encontró que la exactitud de los radios sagital y meridional para datos no corregidos empeoró considerablemente cuando la córnea estuvo descentrada en dos direcciones que cuando sólo lo estuvo en una sola dirección. Por ejemplo, en el caso del radio meridional se obtuvo un  $\text{RMS}_{r_{\text{mer}}}^{\text{NC}} = 12.01$  mm para  $x_0 = y_0 = \pm 0.6$  mm, lo que corresponde aproximadamente a seis veces el error  $\text{RMS}_{r_{\text{mer}}}^{\text{NC}} = 2.41$  mm encontrado para  $x_0 = \pm 0.4$  mm

**Tabla 3.8:** Desviaciones del radio sagital respecto al radio  $r = 7.8$  mm para datos con descentramiento.

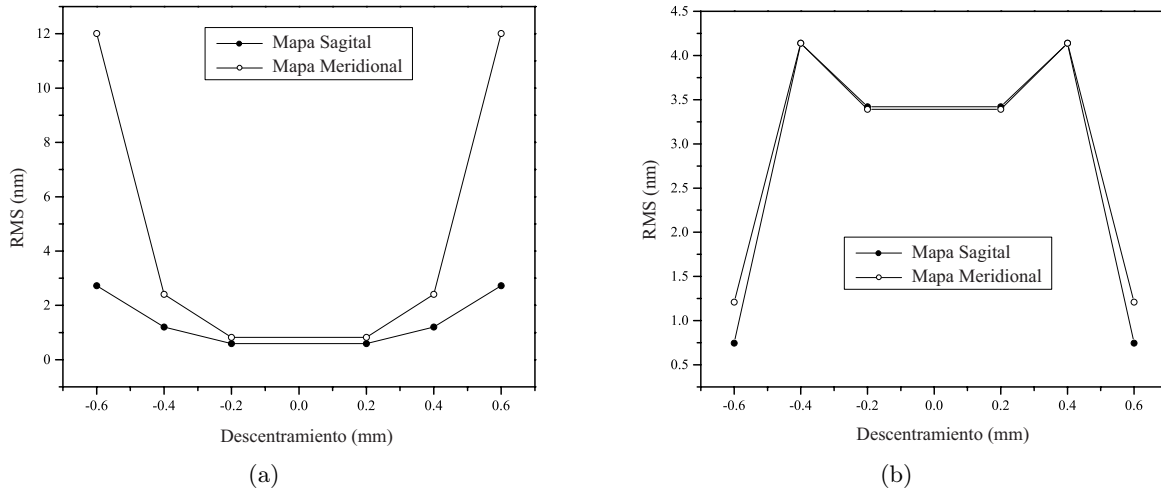
$x_0$ (mm)	$y_0$ (mm)	$\text{PV}_{r_{\text{sag}}}^{\text{NC}}$ (mm)	$\text{RMS}_{r_{\text{sag}}}^{\text{NC}}$ (mm)	$\text{PV}_{r_{\text{sag}}}^{\text{C}}$ (mm)	$\text{RMS}_{r_{\text{sag}}}^{\text{C}}$ (mm)
-0.60	-0.60	13.11	2.72	$8.57 \times 10^{-6}$	$7.45 \times 10^{-7}$
-0.40	0.00	6.08	1.20	$3.95 \times 10^{-5}$	$4.14 \times 10^{-6}$
0.00	-0.20	3.03	0.59	$2.68 \times 10^{-5}$	$3.42 \times 10^{-6}$
0.00	0.20	3.03	0.59	$2.68 \times 10^{-5}$	$3.42 \times 10^{-6}$
0.40	0.00	6.08	1.20	$3.95 \times 10^{-5}$	$4.14 \times 10^{-6}$
0.60	0.60	13.11	2.72	$8.57 \times 10^{-6}$	$7.45 \times 10^{-7}$

**Tabla 3.9:** Desviaciones del radio meridional respecto al radio  $r = 7.8$  mm para datos con descentramiento.

$x_0$ (mm)	$y_0$ (mm)	$\text{PV}_{r_{\text{mer}}}^{\text{NC}}$ (mm)	$\text{RMS}_{r_{\text{mer}}}^{\text{NC}}$ (mm)	$\text{PV}_{r_{\text{mer}}}^{\text{C}}$ (mm)	$\text{RMS}_{r_{\text{mer}}}^{\text{C}}$ (mm)
-0.60	-0.60	34.17	12.01	$9.33 \times 10^{-6}$	$1.21 \times 10^{-6}$
-0.40	0.00	8.39	2.41	$3.95 \times 10^{-5}$	$4.14 \times 10^{-6}$
0.00	-0.20	3.11	0.82	$2.68 \times 10^{-5}$	$3.39 \times 10^{-6}$
0.00	0.20	3.11	0.82	$2.68 \times 10^{-5}$	$3.39 \times 10^{-6}$
0.40	0.00	8.39	2.41	$3.95 \times 10^{-5}$	$4.14 \times 10^{-6}$
0.60	0.60	34.17	12.01	$9.32 \times 10^{-6}$	$1.21 \times 10^{-6}$

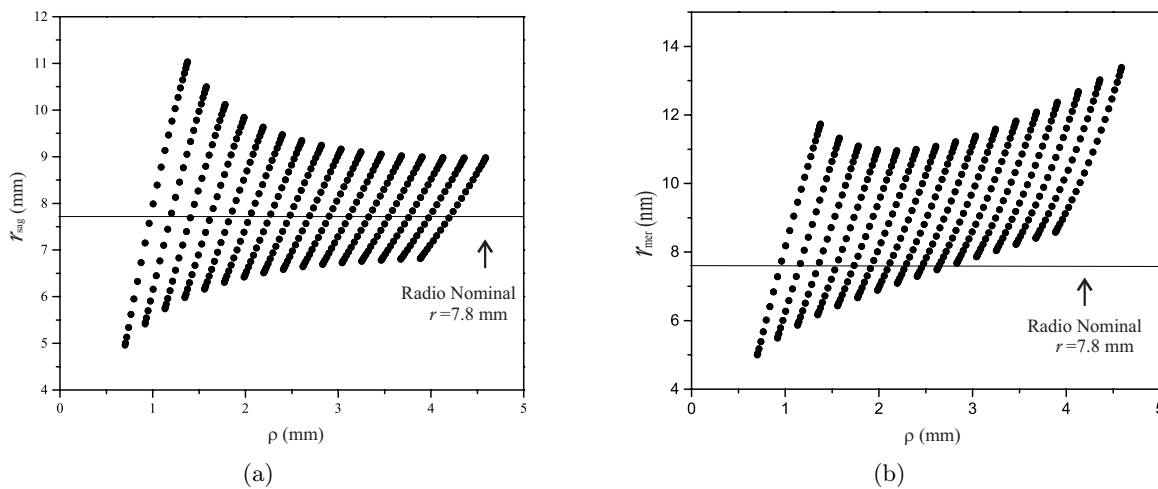
Por otro lado, al graficar el error RMS en función del descentramiento se observó que en cuando no se corrigieron los datos por descentramiento, el radio sagital fue más exacto que el radio meridional [ver la Fig. 3.10(a)]. Es decir, el efecto de descentramiento se amplificó sobre el radio meridional debido a que éste depende de la derivada del radio sagital y de un ajuste numérico de las normales

como se mencionó anteriormente. Por el contrario, cuando se utilizaron los datos corregidos se encontró que ambas magnitudes tuvieron prácticamente la misma exactitud para las diferentes posiciones del vértice corneal sobre un eje perpendicular al eje óptico [ver Fig. 3.10(b)]. Tanto para los datos corregidos como para los datos no corregidos, los resultados obtenidos se comportaron de manera simétrica respecto al origen de coordenadas dado que la superficie se desplaza la misma distancia pero en direcciones opuestas con respecto al eje óptico.



**Figura 3.10:** Exactitud del radio de curvatura sagital y meridional en función del descentramiento: (a) Error RMS para los mapas NC. (b) Error RMS para los mapas C.

Una vez más se muestra el efecto sobre el comportamiento del radio de curvatura sagital y meridional como función de la distancia radial de los puntos corneales.



**Figura 3.11:** Radios de curvatura en función de la distancia radial en  $x_0 = 0.4$  mm: (a) Radio sagital. (b) Radio meridional.

Los datos graficados en las Figs. 3.11(a) y 3.11(b) fue para un descentramiento corneal de  $x_0 = 0.4$  mm. En esas figuras se observa que el descentramiento produce tanto una sobre estimación como una sub estimación de dichos radios de curvatura. Esto es un resultado diferente al obtenido con el pistón donde la sobre o sub estimación del radio de curvatura depende de la dirección donde se dé el desplazamiento del vértice corneal [ver Figs. 3.5(a) y 3.5(b)].

### Potencia Refractiva

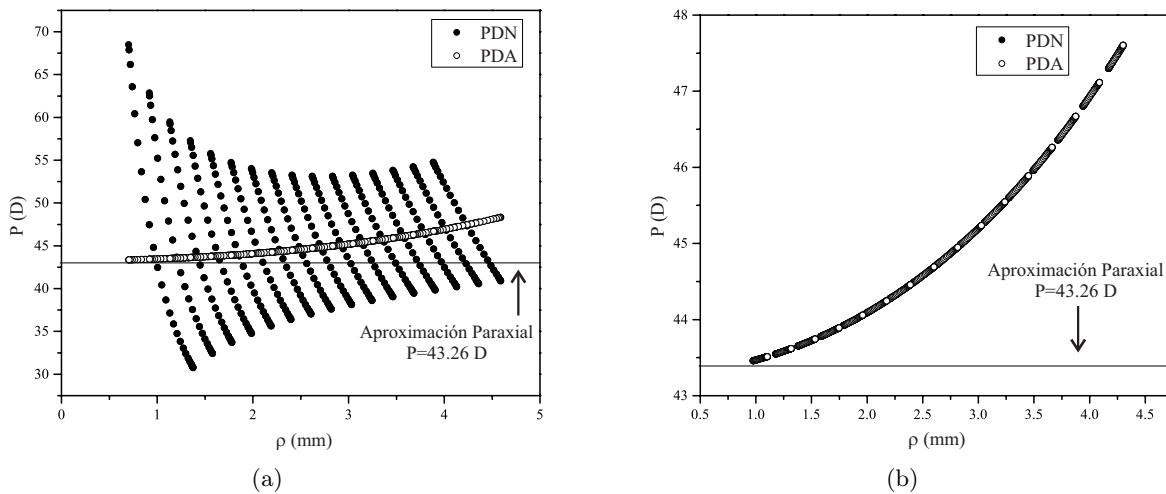
Se estudió el efecto del descentramiento en la exactitud de la potencia refractiva. Las comparaciones numéricas se llevaron a cabo de la misma manera como se hizo al estudiar el efecto del pistón sobre dicha potencia refractiva (ver sección anterior). La Tabla. 3.10 muestra los resultados obtenidos en esta simulación para la potencia refractiva cuando se comparó con la potencia refractiva de una córnea esférica ( $r = 7.8$  mm), la cual fue calculada de manera analítica.

**Tabla 3.10:** Desviaciones de la potencia refractiva respecto al valor analítico obtenido para una esfera de  $r = 7.8$  mm para datos corregidos y no corregidos por descentramiento.

$x_0$ (mm)	$y_0$ (mm)	$PV_P^{NC}$ (D)	$RMS_P^{NC}$ (D)	$PV_P^C$ (D)	$RMS_P^C$ (D)
-0.60	-0.60	47.17	12.78	$5.85 \times 10^{-4}$	$2.41 \times 10^{-4}$
-0.40	0.00	37.72	7.09	$6.68 \times 10^{-4}$	$2.42 \times 10^{-4}$
0.00	-0.20	17.44	3.50	$6.49 \times 10^{-4}$	$2.44 \times 10^{-4}$
0.00	0.20	17.44	3.50	$6.49 \times 10^{-4}$	$2.44 \times 10^{-4}$
0.40	0.00	38.02	7.14	$6.68 \times 10^{-4}$	$2.41 \times 10^{-4}$
0.60	0.60	47.69	12.87	$5.85 \times 10^{-4}$	$2.39 \times 10^{-4}$

El error  $RMS_P^{NC}$  fue considerablemente probe para todos los casos de descentramiento, por lo que la potencia refractiva calculada sin hacer previamente la corrección por descentramiento es totalmente inexacta. Los valores obtenidos del error  $PV_P^{NC}$  también son elevados, dando a entender que los valores de potencia refractiva calculados con el algoritmo propuesto en esta tesis (ver Sec. 2.4 en la Pag. 48) se alejan considerablemente de aquellos obtenidos analíticamente para una córnea esférica en cada punto evaluación. En cambio, la exactitud de la potencia refractiva mejoró considerablemente cuando se corrigió por descentramiento ya que se obtuvieron valores para el error  $RMS_P^C$  del orden de  $10^{-4}$  D. Igualmente se encontró que la exactitud prácticamente se mantiene constante para los distintos valores del descentramiento. Por otro lado, el descentramiento afectó considera-

blemente no sólo a la exactitud de la potencia refractiva sino también al patrón de comportamiento de esta magnitud en función de la distancia radial. Esto se puede verificar en la Fig. 3.12(a), donde el patrón obtenido es totalmente diferente al que se encuentra cuando se hace el cálculo de manera analítica. Cabe recordar que la potencia refractiva aumenta del centro hacia a la periferia debido a la aberración esférica que sufren este tipo de superficies. En cambio cuando se corrigió por descentramiento si se obtuvo el patrón adecuado con valores muy cercanos al valor obtenido analíticamente [ver Fig. 3.12(b)]



**Figura 3.12:** Potencia refractiva en función de la distancia radial en  $x_0 = 0.4$  mm donde PDN (Potencia refractiva obtenida con las normales) y PDA (Potencia refractiva obtenida analíticamente): (a) Potencia refractiva para datos no corregidos por descentramiento. (b) Potencia refractiva para datos corregidos por descentramiento.

### 3.3. Algoritmo para la Estimación del Pistón y el Descentramiento

Es claro con lo expuesto en las secciones anteriores que es necesario tener previamente información de la magnitud del pistón y descentramiento de la córnea para utilizarlos como parámetros de entrada en los algoritmos de evaluación y con esto tener una reconstrucción corneal con una mejor exactitud. La pregunta obligada aquí es: ¿cómo logro tener conocimiento del pistón y descentramiento al momento de capturar la imagen de la córnea?. Es un problema que no es trivial de resolver. Muchos topógrafos comerciales y sistemas experimentales han intentado tener control de estas magnitudes de diferente manera. Por ejemplo, el Keratron Piccolo (Optikon, Roma, Italia) utiliza un sistema patentado de control de posicionamiento del ojo (EPCS, por sus siglas en inglés) con el cual logra corregir por descentramiento y garantizar un adecuado posicionamiento axial de la córnea [87, 88]. El EPCS consiste de un fuente infrarroja y un detector, los cuales están localizados

de manera opuesta uno del otro en la cara posterior del instrumento. La imagen de la córnea es capturada cuando el vértice de la misma está centrada y en el plano de apertura de la cara posterior del instrumento. Si no se logra el correcto centrado del vértice corneal respecto al eje óptico del instrumento, el EPCS realizará la corrección de este pequeño descentramiento. Otro método utiliza cámaras laterales para ver la posición axial de la córnea y sólo capturar la imagen en la posición correcta del vértice corneal sobre el eje óptico con lo que se pueden construir un mapa topográfico libre de errores de pistón y descentramiento [89].

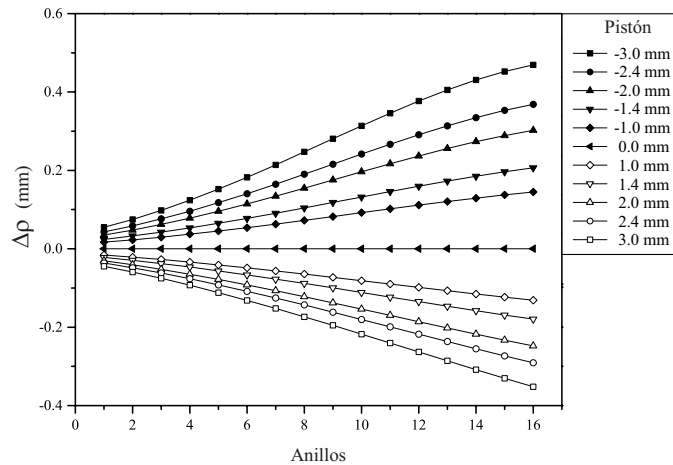
En este trabajo de tesis no se implementó un sistema experimental que ofrezca control en tiempo real tanto del pistón como del descentramiento del vértice corneal como se expone en los ejemplos anteriores. La propuesta que se hace inicialmente en esta tesis para solucionar este problema se basa en un algoritmo general que se describe en las siguientes paginas. Para saber la exactitud con la que se estima las coordenadas del vértice corneal se mostrarán algunos ejemplos simulados.

### 3.3.1. Elección de un Valor Semilla para $z_0$

El algoritmo que se propone para encontrar las coordenadas del vértice corneal empieza con la elección de un valor inicial que sea una buena aproximación al valor real del pistón  $z_0$  de la córnea. Este valor semilla se denota como  $z_{0S}$ . Para encontrar este valor semilla se aprovecha el hecho de que el pistón hace que el patrón de puntos formados en el CCD cubra una área mayor o menor respecto al área que cubre el patrón de diseño utilizado para la formación de la pantalla nula. Para ilustrar lo dicho anteriormente, se ordenan los centroides menor a mayor en distancias radiales respecto al centro geométrico del patrón de puntos, de tal manera que aquellos centroides con distancias radiales similares definan un anillo. Para cada anillo se obtiene el valor promedio  $\rho_{ani}$  de las distancias radiales de los centroides que pertenecen al anillo en consideración. Este valor es comparado con el valor promedio  $\rho_0$  de las distancias radiales de los puntos de diseño pertenecientes a dicho anillo. Con esto se encuentra la desviación radial definida como  $\Delta\rho = \rho_{ani} - \rho_0$  para ser graficada como función de los anillos y del pistón como se observa en la Fig. 3.13. Como era de esperarse, un pistón positivo produce valores de  $\Delta\rho < 0$  y un pistón negativo da como resultado valores de  $\Delta\rho > 0$ , lo que corresponde a una área menor o mayor respecto al área de diseño, respectivamente. Este efecto se utiliza para determinar el signo del pistón para así saber en que sentido se movió la córnea en la dirección axial respecto al origen de coordenadas.

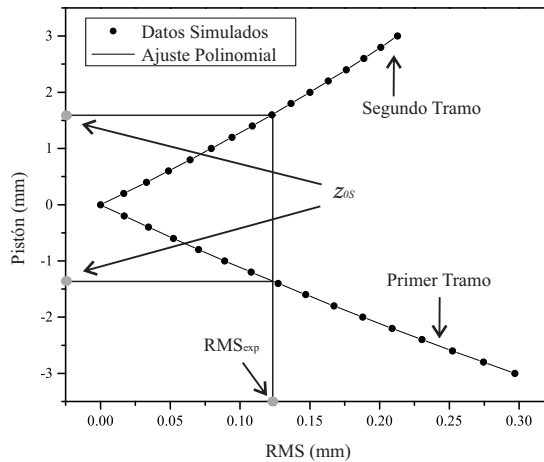
Una vez que se tiene el signo del pistón, se obtiene el RMS de las desviaciones radiales  $\Delta\rho$  sobre





**Figura 3.13:** Desviación radial de cada anillo definido sobre el patrón observado en el CCD

el patrón experimental producido por la córnea. Este valor de RMS es utilizado para encontrar el valor semilla dentro una curva de calibración que se construyó con el modelo de una córnea esférica de radio  $r = 7.8$  mm que se ha venido utilizando. Esta curva de calibración se muestra en la Fig. 3.14.



**Figura 3.14:** Curva de calibración para encontrar un valor semilla del pistón corneal.

La curva de calibración simulada se obtuvo dentro de un intervalo bastante amplio de pistón que va desde  $-3.0$  mm a  $3.0$  mm en pasos de  $0.2$  mm. Esta curva de calibración es dividida en dos tramos ya que el signo del pistón  $z_0$  produce ya sea un comportamiento ascendente y descendente de la curva a medida que aumenta el RMS. El primer tramo va desde  $-3.0$  mm a  $0$  mm y el segundo tramo que va desde  $0$  mm a  $3.0$  mm (ver Fig. 3.14). Para ambos tramos se hizo el mismo ajuste polinomial de tercer grado que se describe en la Ec. (3.1), obteniendo valores diferentes para cada

coeficiente polinomial como se muestra en la Tabla. 3.11 en cada tramo estudiado.

$$z_{0S} = A_0 + A_1 \text{RMS} + A_2 (\text{RMS})^2 + A_3 (\text{RMS})^3 \quad (3.1)$$

**Tabla 3.11:** Ajuste polinomial para la curva de calibración con el que se estima el valor semilla  $z_{0S}$ .

	Signo de $z_0$	$A_0$ (mm)	$A_1$	$A_2$ (mm <sup>-1</sup> )	$A_3$ (mm <sup>-2</sup> )
<b>Primer Tramo</b>	Negativo	$-3.07 \times 10^{-4}$	-11.87	7.52	-5.31
<b>Segundo Tramo</b>	Positivo	$-2.46 \times 10^{-4}$	11.93	7.34	13.24

Para seleccionar el tramo que corresponde al ajuste polinomial adecuado, se debe conocer de antemano el signo del pistón por el procedimiento que se describió anteriormente. Finalmente se utiliza el RMS como parámetro de entrada en la Ec. (3.1) para obtener el valor semilla  $z_{0S}$  como una aproximación al pistón de la superficie corneal.

### 3.3.2. Elección de los Valores Semillas para el Descentramiento ( $x_0, y_0$ )

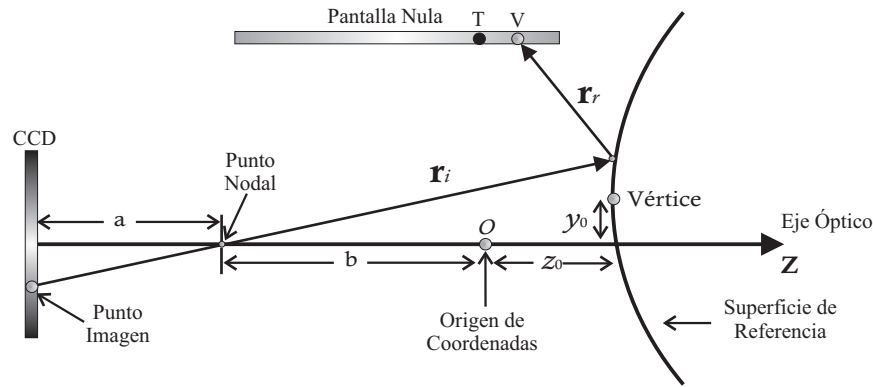
Para encontrar los valores semillas del descentramiento ( $x_0, y_0$ ) que tuvo la superficie corneal, se realiza una integración numérica para encontrar la elevación corneal haciendo uso de la Ec. (2.14) (ver en la Pag. 41). En esta ecuación hay un término  $z_1$  que se determina con la Ec. (2.15) (ver en la Pag. 41) y que depende del valor del pistón corneal  $z_0$ . Este valor se aproxima con el valor semilla de pistón  $z_{0S}$  obtenido previamente. La integración numérica se hace de manera iterativa como se explicó en la Sec. 2.2 (ver la Pag. 40). La superficie final que se obtiene  $z = f_N(x, y)$  es ajustada a la mejor cónica descrita por la Ec. (2.6) (ver en la Pag. 38). Como resultado de este ajuste, se obtienen valores semillas ( $x_{0S}, y_{0S}$ ) para el descentramiento corneal ( $x_0, y_0$ ).

### 3.3.3. Rutina de Optimización

Una vez que se tienen las semillas ( $x_{0S}, y_{0S}, z_{0S}$ ), se realiza un proceso de optimización basado en un trazo inverso de rayos con el propósito de actualizar el valor de  $z_{0S}$  que nos permita acercarnos más al valor real del pistón corneal  $z_0$ . Este trazo inverso de rayos es similar al que se utiliza en el diseño de la pantalla nula (ver Sec. 2.1.1 en la Pag. 35), pero con algunas modificaciones debido a la pérdida de simetría como producto de tener una superficie descentrada.

### Trazo Inverso de Rayos

Inicialmente se trazan rayos que parten de los centroides (puntos imagen) calculados en la imagen corneal que se capturó para la evaluación. Estos rayos se reflejan en una superficie semilla para después interceptar el cilindro donde se encuentran los puntos de la pantalla nula de diseño (puntos denotados con la letra T). Con esto se logra obtener nuevos puntos de pantalla nula que son denotados con la letra V (ver Fig. 3.15) y que dependen de la ubicación espacial del vértice de la superficie semilla. La superficie semilla es la superficie obtenida en la sección anterior la cual fue ajustada a la mejor cónica como se explicó previamente.



**Figura 3.15:** Esquema meridional del trazo inverso de rayos ( $\hat{\mathbf{r}}_i$  y  $\hat{\mathbf{r}}_r$  no necesariamente están en un plano meridional)

Las ecuaciones utilizadas para encontrar las coordenadas de los puntos V difieren de aquellas descritas para calcular los puntos T (ver Ec. 2.2 en la Pag. 36), debido a que en esta ocasión el trazo de rayos ya no es meridional dado que se pierde la simetría respecto al eje óptico como producto de tener una superficie semilla que está descentrada. Por tanto, las coordenadas rectangulares para el punto V se calculan como se describe a continuación

$$x_V = x_2 + t_1 \hat{\mathbf{r}}_{rx}, \quad (3.2a)$$

$$y_V = y_2 + t_1 \hat{\mathbf{r}}_{ry}, \quad (3.2b)$$

$$z_V = z_2 + t_1 \hat{\mathbf{r}}_{rz}, \quad (3.2c)$$

donde  $\hat{\mathbf{r}}_{rx}, \hat{\mathbf{r}}_{ry}, \hat{\mathbf{r}}_{rz}$  son las componentes rectangulares del vector reflejado en la superficie semilla.  $(x_2, y_2, z_2)$  son las coordenadas del punto de reflexión en la superficie semilla, las cuales son obtenidas siguiendo el procedimiento detallado en las referencia [11].  $t_1$  es un parámetro que permite prolongar

la recta que describe el vector unitario del rayo reflejado  $\hat{\mathbf{r}}_r$ . Dicho parámetro depende de la geometría del objeto que soporta la pantalla nula; en este caso es un objeto cilíndrico de radio  $R$  con su eje de simetría sobre el eje óptico. La ecuación que describe a este parámetro es

$$t_1 = \frac{-(x_2\hat{\mathbf{r}}_{rx} + y_2\hat{\mathbf{r}}_{ry}) + \left[ R^2 (\hat{\mathbf{r}}_{rx}^2 + \hat{\mathbf{r}}_{ry}^2) - (x_2\hat{\mathbf{r}}_{ry} + y_2\hat{\mathbf{r}}_{rx})^2 \right]^{1/2}}{\hat{\mathbf{r}}_{rx}^2 + \hat{\mathbf{r}}_{ry}^2}. \quad (3.3)$$

Una vez que se realiza el trazo inverto de rayos, se construye una función de mérito (MF, acrónimo del inglés *Merit Function*) y se realiza un proceso de optimización que permita encontrar el valor mínimo de la MF.

### Función de Mérito

La función de mérito MF es una representación numérica que da una estimación del grado de correlación de los datos con un modelo previamente establecido [78]. El éxito del modelo depende de que la MF  $\rightarrow 0$ . Esto se logra con una selección adecuada de los parámetros que componen a dicho modelo. La MF que se propone aquí es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las diferencias entre la distancia euclidiana de los puntos T y la distancia euclidiana de los puntos V calculada con el modelo de trazo inverto de rayos que se ha propuesto. Esta suma es dividida por el número total datos experimentales. Matemáticamente se puede expresar según

$$\text{MF} = \sqrt{\frac{\sum_i^N (\text{T}_i - \text{V}_i)^2}{N}}, \quad (3.4)$$

donde  $N$  es el número de centroides disponibles en cada imagen corneal.  $\text{T} = (x_{i3}^2 + y_{i3}^2 + z_{i3}^2)^{1/2}$  y  $\text{V} = (x_{iV}^2 + y_{iV}^2 + z_{iV}^2)^{1/2}$ . La Ec. (3.4) coincide con la definición del error RMS de las posiciones de los puntos en la pantalla nula calculados con el modelo propuesto respecto a los puntos de la pantalla nula de diseño, por lo que el RMS es una especie de función de mérito. Por otro lado, los parámetros utilizados en este modelo están asociados a la superficie semilla ( $r_S, p_S, x_{0S}, y_{0S}$ ), a las distancia de trabajo ( $a$  y  $b$ ) y al objeto cilíndrico que soporta la pantalla nula ( $R$ ); mientras que la única variable definida aquí es el pistón  $z_0$  de la superficie. Con este modelo planteado se realiza un proceso de optimización para encontrar la magnitud del pistón que produce el valor más pequeño de la MF como producto de haber movido iterativamente el vértice de la superficie de referencia a lo largo de la dirección axial dentro de un rango determinado que incluye al valor semilla  $z_{0S}$ . El nuevo valor de pistón que se obtuvo, sirve como una nueva semilla ya que está más cerca del valor real del pistón corneal. A partir de aquí se repite proceso de manera iterativa desde la Sec. 3.3.2, hasta que

la diferencia de valores de  $(x_{0S}, y_{0S}, z_{0S})$  obtenidos en dos iteraciones consecutivas sea menor a una cota de error. Con todo lo expuesto anteriormente, el algoritmo que se propone para encontrar las coordenadas del vértice corneal esta resumido en los siguientes pasos:

1. Se encuentran todos los centroides de los spots de la imagen que se captura para la evaluación.
2. Se obtiene el valor semilla para el pistón corneal siguiendo el procedimiento descrito en la Sec. 3.3.1.
3. Se realiza un proceso de integración iterativa para encontrar los valores semillas para el descentramiento corneal como se explica en la Sec. 3.3.2.
4. Una superficie semilla con su vértice en  $(x_{0S}, y_{0S}, z_{0S})$  es movida iterativamente en la dirección axial.
5. Se lanzan rayos desde los centroides en la imagen hasta llegar a la pantalla nula un vez que son reflejados por la superficie semilla.
6. Se calcula la MF acorde a la Ec. (3.4) para todos los valores de pistón de la superficie semilla
7. Un proceso de optimización se realiza hasta encontrar el valor mínimo dentro de todas las MF calculadas.
8. El valor de pistón obtenido se utiliza como una nueva semilla y se repite el proceso desde el paso 3 hasta que se alcance una cota de error entre dos valores de pistón obtenidos consecutivamente.
9. Finalmente se tiene una buena aproximación de las coordenadas del vértice corneal, las cuales se utilizarán para calcular todos los mapas topográficos.

#### 3.3.4. Ejemplos Simulados

Se realizó una simulación para verificar si el algoritmo propuesto cumple con el objetivo de encontrar las coordenadas del vértice corneal y con que exactitud realiza esta tarea. Para esto, se simularon patrones de puntos en el CCD con diferentes niveles de descentramiento y pistones simultáneamente en una superficie esférica. Esta simulación se realizó con el mismo algoritmo utilizado para estudiar el efecto del pistón y el descentramiento en la exactitud de la reconstrucción corneal (ver Secs. 3.1.1 y 3.2.1). Los resultados obtenidos se muestran en la Tabla. 3.12.

**Tabla 3.12:** Resultados obtenidos para el pistón y descentramiento de una superficie esférica simulada de radio  $r = 7.8$  mm, cuando se aplica el algoritmo iterativo que se ha propuesto para estimar las coordenadas del vértice corneal  $(x_0, y_0, z_0)$ .

$x_0$ (mm)	$x_0^{\text{fit}}$ (mm)	$E_{x_0}$ (%)	$y_0$ (mm)	$y_0^{\text{fit}}$ (mm)	$E_{y_0}$ (%)	$z_0$ (mm)	$z_0^{\text{fit}}$ (mm)	$E_{z_0}$ (%)
0.5000	0.4999	0.0200	-1.0000	-0.9999	0.0100	0.6000	0.6001	0.0167
-0.3200	-0.3200	0.0000	0.4500	0.4500	0.0000	-0.5700	-0.5699	0.0175
-0.3000	-0.3000	0.0000	-0.5000	-0.5000	0.0000	0.0000	-0.0001	0.0100
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-1.0000	-1.0000	0.0000

El error porcentual mostrado en la Tabla. 3.12 para cada caso en particular se utiliza en esta ocasión como una medida de la exactitud del algoritmo para encontrar las coordenadas del vértice de una córnea esférica. Para todos los casos este error porcentual no superó el 0.02% y en algunos casos fue del 0.000% (esta cifra es truncada por lo que hay un error numérico que es menor a esa cantidad). Estos resultados demuestran que el algoritmo cumple con la tarea de encontrar el pistón y el descentramiento de la superficie que se está evaluando. Es importante señalar que este algoritmo funciona muy bien cuando la semilla  $z_{0S}$  está muy cerca del valor real del pistón corneal  $z_0$ , ya que sí este valor no es cercano al pistón corneal, la solución no converge después de un número grande de iteraciones. Mientras que cuando se hace una buena elección de la semilla del pistón, la solución suele converger después de cuatro o cinco iteraciones. Esto es un desafío que se está tratando de resolver, ya que cuando la superficie corneal tiene un radio de curvatura y constante de conicidad diferentes a los valores que se utilizaron para diseñar la pantalla nula (ver Tabla. 3.1), el patrón de puntos observados en el CCD también sufrirá un cambio de escala (mayor o menor) en el área cubierta en el CCD como ocurre cuando la córnea tiene pistón. Por ejemplo, se simuló un patrón el CCD para una superficie esférica sin pistón y sin descentramiento ( $x_0 = y_0 = z_0 = 0$  mm). El radio de curvatura de esta superficie fue de  $r = 8.5$  mm que es aproximadamente 1.09 veces el radio de curvatura ( $r = 7.8$  mm) con el que se diseñó la pantalla nula. El valor semilla  $z_{0S}$  encontrado con el procedimiento descrito en la Sec. 3.3.2, fue de  $-0.6965$  mm, el cual es un valor muy alejado del valor real del pistón simulado  $z_0 = 0$  mm. Después de un número grande de iteraciones la solución no convergió al valor real del pistón corneal y la estimación de las coordenadas del vértice corneal fue totalmente inexacta.

En conclusión, para un caso real donde no se conoce la forma de la córnea que se está probando,

donde se tengan centroides experimentales afectados por ruido o que las distancias de trabajo hayan cambiando durante la captura de la imagen, el cálculo de las coordenadas del vértice corneal ya no será exacto. Esto implica una fuente de error sistemáticos que afectará indudablemente la exactitud de los mapas corneales y dependerá de cuán lejos se está de la posición absoluta del vértice corneal como se mostró en las secciones anteriores.

### 3.4. Comentarios Finales

Se ha desarrollado un capítulo algo extenso pero totalmente relevante debido a que se abordan dos de los mayores desafíos de la topografía corneal: la necesidad de realizar una reconstrucción corneal con un mejor grado de exactitud y tener un control sobre las coordenadas del vértice corneal. Sobre estos tópicos, es sin duda donde se están realizando los mayores esfuerzos tanto por la comunidad científica como por la industria oftálmica. Los resultados obtenidos en la simulación del efecto del pistón y el descentramiento en la exactitud de la reconstrucción corneal son importantes porque revelan la posibilidad de realizar una reconstrucción completa sin tener que garantizar el centrado de la superficie corneal respecto al eje óptico del instrumento como ocurre en los instrumentos basados en los anillos de Plácido, los cuales utilizan algoritmos de trazo de rayos meridionales. Tampoco es necesario posicionar correctamente la superficie corneal en la dirección axial para capturar la imagen y realizar la evaluación. Lo único que hay enfatizar con los algoritmos propuestos en esta tesis es que es si debe conocer la magnitud del pistón y el descentramiento de la superficie corneal al momento de realizar la topografía corneal para obtener resultados confiables y con la suficiente exactitud para que sean datos útiles en oftalmología.

Otro resultado importante encontrado en esta simulación es que el no tener en cuenta el pistón al momento de construir los mapas de radios de curvatura y potencia refractiva se produce ya sea una sobre estimación o sub estimación de dichas magnitudes en la aproximación de una córnea esférica. Esto es relevante en topografía corneal porque un mapa inexacto de radio sagital o meridional conduce a una mal diseño y prescripción de un lente de contacto o intraocular para un un paciente; mientras que un mapa de potencia refractiva inexacto da una mala información del estatus refractivo de una córnea pre o post operada por cirugía refractiva. El no considerar el descentramiento en la evaluación corneal produce que se considere sólo la componente meridional del rayo reflejado que forma la imagen en el CCD mientras que la componente oblicua de éste no es tenida en cuenta, con lo que se obtiene un error que afecta mayormente a los mapas de radios de curvatura y potencia refractiva dado que la normal a la superficie se sale del plano sagital y meridional en donde están

definidas estas magnitudes.

Un aspecto importante tratado en este capítulo es que se ha logrado avanzar en un algoritmo para la estimación de las coordenadas del vértice corneal. Con este algoritmo se han obtenido resultados confiables para superficies con radio de curvatura y constante de conicidad conocidos, por lo que este método es limitado. Como se mostró en la última sección de este capítulo, el método es inexacto cuando no se conoce la forma de la superficie que se está probando como en el caso de córneas reales. Un posible camino para intentar tener un algoritmo más robusto que incluya casos más generales es que en el modelo que se utiliza para realizar la optimización de la función de mérito se incluyan más variables que simplemente el pistón  $z_0$ ; por ejemplo, si se quiere hacer un modelo cónico de la superficie corneal, se pueden incluir el radio de curvatura en el vértice y la factor  $p$  de dicha cónica. También se pueden incluir el descentramiento  $(x_0, y_0)$  de la superficie corneal y variables asociadas a la geometría del topógrafo (distancias de trabajo, inclinaciones en la pantalla nula, etc). Esto trae como consecuencia que se tenga un algoritmo más complicado de resolver porque la optimización ahora es multidimensional, ya que depende del número de variables involucradas y de la cantidad de datos experimentales utilizados. Aún así, aquí se resalta el hecho que se está trabajando en la dirección correcta, ya que se ha mostrado la posibilidad de estimar las coordenadas del vértice de una superficie conocida al estudiar el patrón de puntos que se observa en el CCD sin necesidad de implementar un sistema de control de posicionamiento del vértice al momento de capturar la imagen de la superficie.



# EXACTITUD EXPERIMENTAL EN SUPERFICIES DE CALIBRACIÓN

En este capítulo se presentan resultados experimentales obtenidos en la evaluación de superficies de calibración. Con la evaluación de superficies de calibración se puede verificar la exactitud del instrumento cuando utilizan datos experimentales, ya que se conoce de antemano los parámetros de estas superficies y se tiene control previo del posicionamiento de la misma. Esto no ocurre en pruebas en córneas *in vivo* debido a que se desconoce completamente que tipo de superficie es la córnea evaluada. Es por eso que la exactitud de los topógrafos corneales se reporta sobre superficies conocidas y no sobre córneas. Esto contrasta con la reproducibilidad de las mediciones, las cuales si se realiza sobre un conjunto de medidas hechas bajo las mismas condiciones experimentales sobre una córnea *in vivo* [31]. Dicha reproducibilidad es afectada principalmente por los movimientos sacádicos del ojo que hacen que el *target* del instrumento no se proyecte sobre los mismos puntos corneales. Por tanto, en este capítulo sólo se mostrarán medidas de exactitud y no de reproducibilidad sobre las magnitudes topográficas (diferencia de elevación, radios: sagital y meridional, potencia dióptrica) obtenidas para dos superficie esféricas con radios de curvatura diferentes.

## 4.1. Pruebas en una Esfera de Calibración de $r = 6.375$ mm

La primera superficie de calibración que se utilizó para verificar la exactitud experimental del topógrafo corneal basado en pantallas nulas fue una esfera de acero  $r = 6.375 \pm 0.005$  mm (balín). Este radio de curvatura es muy cercano al que podría tener un bebe al momento de nacer debido a la elevada potencia refractiva (53.1 D) que presentan en la región central de la córnea como lo

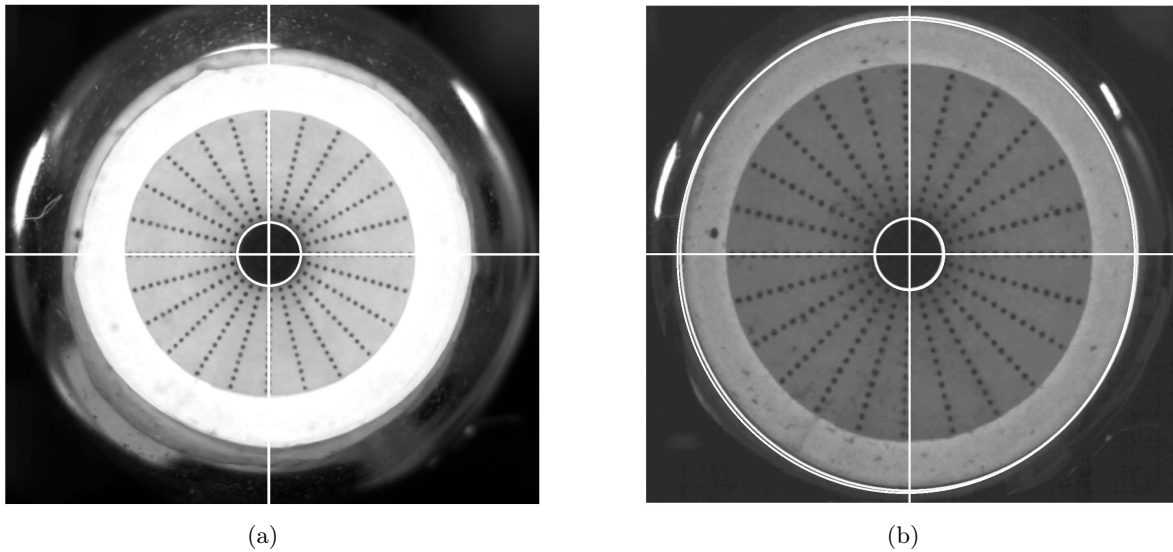
reporta Gordon y Donzis [90]. Para probar dicha superficie se diseñó un pantalla nula cilíndrica con los parámetros descritos en la Tabla. 4.1.

**Tabla 4.1:** Parámetros usados en el diseño de la pantalla nula para probar el balín de  $r = 6.375$  mm.

Parámetro	Símbolo	Magnitud (mm)
Radio de la Córnea	$r$	6.375
Distancia de Trabajo #1	$a$	21.00
Distancia de Trabajo #2	$b$	64.03
Radio Interno del Cilindro	$R$	9.00
Longitud del Cilindro	$L$	34.01

#### 4.1.1. Captura de Imágenes

Para capturar la imagen de los *spots* reflejadas en el balín, se utilizó una lente positiva MVL16L (Tamron, Saitama, Japón) de 16 mm de longitud focal que tiene un diafragma que regula la luz en un rango de F/1.4 a F/16. Esta lente fue adherida a una cámara CMOS DCC1645C (Thorlabs Inc, Newton, NJ) que tiene un sensor de  $4.61 \text{ mm} \times 3.69 \text{ mm}$  ( $1280 \times 1024$  píxeles) y un tamaño de píxel de  $3.6 \mu\text{m}$ . Con estos valores y los mostrados en la Tabla. 4.1, se diseñó un arreglo radial de 312 *spots* con una separación radial de  $l = 0.074 \text{ mm}$  y angular de  $\Delta\theta = 15^\circ$  en el plano imagen de la cámara CMOS. La pantalla nula fue iluminada con un panel electroluminiscente con el que se logró tener un contraste homogéneo que permitió diferenciar muy bien los *spots* del fondo de la imagen. Este panel fue enrollado en la pared externa del cilindro que soporta la pantalla nula. La Figs. 4.1(a) y 4.1(b) muestran la imagen de los *spots* sobre el balín, las cuales se capturaron con una apertura de diafragma de F/2.8 y F/16, respectivamente. El diafragma de la lente no sólo permite controlar el número de rayos que llegan al CMOS sino que también modifica la profundidad de foco del sistema óptico, dando como resultado que la imagen pueda ser capturada con un buen enfoque en dos posiciones axiales distintas, es decir, con dos valores de pistón diferentes. Es por eso que las imágenes F/2.8 y F/16 tuvieron valores de pistón diferentes. Por otro lado, en dichas imágenes hay una zona central donde no hay *spots*, por lo que esta región no fue evaluada. El tamaño de esta región depende de la longitud y el diámetro de la cara posterior del cilindro que contiene la pantalla nula. Si la longitud del cilindro aumenta, la zona no evaluada disminuye, mientras que si el diámetro del cilindro disminuye, la región no evaluada tenderá a cero.



**Figura 4.1:** Imagen de los *spots* sobre el balín de  $r = 6.375$  mm: (a) Imagen a un F/2.8. (b) Imagen a un F/16.

#### 4.1.2. Cálculo de los Centroides

Los centroides de los *spots* mostrados en las Figs. 4.1(a) y 4.1(b) se obtuvieron implementando un algoritmo de procesamiento de imágenes desarrollado por mi en la tesis de maestría [11] y mejorado en esta tesis doctoral. Este algoritmo se describe a continuación:

1. Se define una región de interés (ROI, acrónimo del inglés *Region of Interest*) con el propósito de eliminar todos los píxeles que no contienen información relevante para la evaluación.
2. Un realce de contraste es realizado mediante la ampliación del histograma de niveles de grises de los píxeles dentro de la ROI.
3. Una imagen binaria (imagen con sólo dos valores de intensidad: 0 y 1) es obtenida mediante un proceso de binarización adaptativa (segmentación por regiones de similitud).
4. Todos aquellos píxeles que no son parte de los *spots* en la imagen binaria son eliminados para facilitar la segmentación de cada *spot* por separado. El criterio de eliminación se basa en el tamaño promedio del *spot*. Los *spots* en promedio tienen diez píxeles de diámetro (se considera un círculo inscrito en el *spot*), por lo que un objeto se discrimina si no tiene un diámetro entre 7 y 13 píxeles.
5. Finalmente se obtienen las coordenadas de los centroides de cada *spot* en píxeles. Estas son convertidas al sistema cartesiano de coordenadas y corregidas por una pequeña distorsión de

barril que tiene la lente ( $E = -6.61 \times 10^{-5} \text{ mm}^{-2}$ ). Esta distorsión fue modelada con el método comúnmente usado para calibrar lentes por distorsión radial (barril o cojín) [91, 92].

Una vez que se calcularon los centroides, éstos fueron ordenados de acuerdo al diseño inicial de la pantalla nula. Con esto se logró garantizar la correspondencia de cada centroide con su punto objeto en la pantalla nula. Finalmente se obtuvieron datos experimentales listos para calcular las magnitudes utilizadas en topografía corneal (diferencia de elevación, curvaturas y potencia refractiva) con las ecuaciones propuestas en el Cap. 2. (ver en la Pag. 34).

### 4.1.3. Diferencia de Elevación

Inicialmente se obtuvo la elevación  $z$  para cada imagen haciendo una integración iterativa como se explicó en la Sec. 3.3.2 (ver en Pag. 73) y se comparó contra el balón que se probó. Esta comparación consistió en calcular los errores PV y RMS para las diferencias de elevación respecto a una esfera de 6.375 mm. Los resultados se muestran en la Tabla. 4.2, donde  $(x_0, y_0, z_0)$  son las coordenadas del vértice del balón para cada imagen capturada. Las coordenadas del vértice se obtuvieron con el algoritmo expuesto en el capítulo anterior.

**Tabla 4.2:** Desviaciones en diferencias de elevación  $\Delta z$  del balón respecto a la esfera de  $r = 6.375$  mm.

Imagen	$x_0$ (mm)	$y_0$ (mm)	$z_0$ (mm)	PV ( $\mu\text{m}$ )	RMS ( $\mu\text{m}$ )
F/2.8	-0.01	0.01	1.33	34.96	6.07
F/16	0.05	0.02	-1.52	43.24	7.88

Cada imagen tuvo una región de evaluación diferente debido a que en una imagen se tuvo un pistón positivo mientras que en la otra se tuvo un pistón negativo. Para la imagen F2.8 dicha región fue de 51.50%, mientras que para la imagen F/16 la región evaluada fue de 65.82% del hemisferio completo que se puede evaluar en este balón que es de 12.75 mm (ver la Fig. 4.1). En la Tabla. 4.2 se observa que los resultados en diferencias de elevación obtenidos para las dos imágenes son comparables entre si, tanto para el error PV como para el error RMS. En esta comparación que fue hecha contra la misma esfera de calibración, la discrepancia de los resultados no superó los 44  $\mu\text{m}$ , mientras que el error RMS de las diferencias de elevación que es una medida de la exactitud experimental, fue menor a 8  $\mu\text{m}$ . En el mejor de los casos el error RMS fue de 6.07  $\mu\text{m}$ , siendo éste un resultado bastante aceptable para la evaluación de una esfera de calibración teniendo en cuenta que todavía

estamos minimizando las fuentes de error que afectan la exactitud de los resultados.

También se ajustaron los resultados de elevación  $z$  con la mejor esfera BFS (*Best Fit Sphere*, por sus siglas en inglés) con el propósito principal de encontrar el radio ajustado de esta BFS y compararlo con el radio real del balón  $r = 6.375$  mm. En esta comparación también se calculó los errores PV y RMS para cada imagen. Los resultados de este ajuste se encuentran en la Tabla. 4.3.

**Tabla 4.3:** Desviaciones en diferencias de elevación del balón respecto a la mejor esfera BFS.

Imagen	PV ( $\mu\text{m}$ )	RMS ( $\mu\text{m}$ )	$r_{\text{BFS}}$ (mm)	E (%)
F/2.8	35.40	5.99	6.38	0.08
F/16	43.30	7.88	6.37	0.08

Para ambas imágenes se recuperó el radio de curvatura del balón con un error porcentual de 0.08 %. Estos valores están dentro del rango de incertidumbre del radio nominal del balón  $r = 6.375 \pm 0.005$  (ver en la Tabla. 4.3). Esto demuestra que el método de pantallas nulas tiene una buena exactitud para estimar tanto la elevación como el radio de curvatura en vértice de una superficie esférica. Otro aspecto que se puede concluir con estos resultados es que el algoritmo que se utiliza para calcular la elevación funciona adecuadamente. También es importante señalar que los errores PV y RMS para las diferencias de elevación respecto a la BFS son prácticamente los mismos a los obtenidos en la comparación contra la esfera de  $r = 6.375$  mm; lo que significa que para la comparación de elevación contra la BFS, el error RMS no fue mayor a  $8 \mu\text{m}$ .

#### 4.1.4. Radios de Curvatura: Sagital y Meridional

Se calcularon los radios de curvatura sagital y meridional en cada punto de evaluación y fueron comparados con el radio nominal del balón. Esto se realizó para cada imagen por separado y los resultados se muestran en la Tabla. 4.4. Cabe resaltar que los errores rotulados con el subíndice “Sag” corresponden al radio sagital y aquellos con el subíndice “Mer” al radio meridional.

Aunque los resultados de la evaluación de los radios sagital y meridional son comparables entre las dos imágenes, tanto el error RMS sagital y meridional para la imagen F/16 fue relativamente mejor que los obtenidos para la imagen F/2.8. Este resultado es contrario al obtenido en la Tabla. 4.2, donde se observa que la evaluación del balón por medio de la elevación fue mejor para la imagen F/2.8 que para la F/16. Los radios sagital y meridional para la imagen F/16 difieren en promedio

**Tabla 4.4:** Desviaciones del radio sagital y meridional respecto al radio nominal  $r = 6.375$  mm del balín.

Imagen	PV <sub>Sag</sub> (mm)	RMS <sub>Sag</sub> (mm)	E <sub>Sag</sub> (%)	PV <sub>Mer</sub> (mm)	RMS <sub>Mer</sub> (mm)	E <sub>Mer</sub> (%)
F/2.8	1.008	0.137	2.145	1.009	0.218	3.412
F/16	0.723	0.116	1.817	0.725	0.122	1.911

1.817% y 1.911% respectivamente del radio nominal. No es un mal resultado pero se deben reducir los errores sistemáticos que afectan la evaluación con el objetivo de mejorar la exactitud al calcular el radio sagital y meridional. Por otro lado, también se encontró que para cada imagen, los errores PV<sub>Sag</sub> y PV<sub>Mer</sub> varían solamente en la tercera o cuarta cifra significativa. Esto quiere decir que la discrepancia del radio sagital y meridional respecto al valor nominal del balín evaluando las dos imágenes por separado, es prácticamente la misma.

#### 4.1.5. Potencia Refractiva

Por último se muestran los resultados de la potencia refractiva del balín. Estos resultados que se muestran en la Tabla. 4.5, fueron comparados con la potencia refractiva de una esfera ideal de  $r = 6.375$  mm en cada punto de evaluación.

**Tabla 4.5:** Desviaciones en potencia dióptrica del balín respecto a una esfera ideal de  $r = 6.375$  mm.

Imagen	PV (D)	RMS (D)
F/2.8	8.368	1.174
F/16	6.001	1.023

Es realmente pobre la exactitud que se obtuvo en la evaluación de la potencia refractiva sobre el balín. Puede que esto se deba a una propagación de error dado que la potencia refractiva depende inversamente de la elevación  $z$ , por lo que errores en el cálculo de la elevación afecta la exactitud de la potencia refractiva. El error PV también estuvo muy elevado ya que la discrepancia de los resultados no debe ser mayor a 1 D. Cabe recordar de los resultados simulados en el Cap. 3, que la exactitud y las discrepancias de los resultados se ven más afectados para el mapa de potencia refractiva debido a su naturaleza meridional, por lo que cualquier imprecisión en el cálculo en la

coordenadas del vértice de la superficie evaluada afectaría considerablemente los resultados para la potencia refractiva.

Los resultados mostrados en esta sección sin lugar a dudas están afectados por diversos errores tantos aleatorios como sistemáticos. Por ejemplo, un error sistemático es la imprecisión que se puede tener al imprimir las gotas sobre una hoja de papel y tener que pegarla simétricamente para crear la pantalla nula. Otra fuente de error puede ser el mal posicionamiento de esta pantalla dentro del cilindro que la soporta. Estas dos fuentes de error sistemáticos fueron minimizadas y se volvió a probar una esfera de calibración pero en esta ocasión dicha esfera tenía un radio de  $r = 7.80$  mm. Los resultados de esta evaluación son mostrados en la siguiente sección.

## 4.2. Pruebas en una Esfera de Calibración de $r = 7.80$ mm

La segunda superficie que se utilizó para comprobar la exactitud experimental del topógrafo corneal basado en el método de pantallas nulas, fue una esfera de calibración con radio de curvatura  $r = 7.80 \pm 0.05$  mm (Optikon, Roma, Italia). Esta esfera de calibración es denotada como “Esf-Cal” para fines prácticos de redacción. Se utiliza la Esf-Cal por dos razones: (i) El radio de curvatura de esta esfera es muy cercano al radio de curvatura de la superficie anterior de una córnea normal (ver Tabla. 1.2 en la Pag. 21) según el modelo del ojo de Navarro [38]. (ii) Es un tipo de superficie muy cercana a aquellas recomendadas por la norma americana ANSI **Z80.23-2007** [31], para verificar la exactitud de un sistema de topografía corneal. Para probar la Esf-Cal se diseñó una nueva pantalla nula con más puntos de evaluación que en el caso del balón, dado que en vez de tener *spots* ordenados radialmente cada  $15^\circ$  ahora se tienen cada  $7.5^\circ$ . Además, el radio del interno del cilindro que soporta la pantalla aumentó respecto al utilizado para probar el balón. En total se tuvieron 768 puntos de evaluación separados radialmente cada 0.072 mm. Los parámetros utilizados en esta pantalla nula se muestran en la Tabla. 4.6.

### 4.2.1. Captura de Imágenes y Cálculo de los Centroides

La óptica utilizada para capturar las imágenes de la Esf-Cal es idéntica a la que se utilizó en la evaluación del balón (ver Sec. 4.1). Esta superficie se colocó en un sistema de tres platinas de desplazamiento para garantizar el movimiento sobre los tres ejes coordenados y tener un control del pistón y el descentramiento de dicha superficie. Se utilizaron dos imágenes capturadas en posiciones diferentes respecto al sistema de coordenadas global. Estas imágenes son rotuladas como M1 y M2.

**Tabla 4.6:** Parámetros usados en el diseño de la pantalla nula para probar la esfera de calibración de  $r = 7.80$  mm.

Parámetro	Símbolo	Magnitud (mm)
Radio de la Córnea	$r$	7.80
Distancia de Trabajo #1	$a$	21.22
Distancia de Trabajo #2	$b$	61.19
Radio Interno del Cilindro	$R$	9.30
Longitud del Cilindro	$L$	34.01

M1 fue capturada con una posición del vértice de la superficie muy cercana al origen de coordenadas; las lecturas de las platinas fueron:  $x_{p1} = 11.450$  mm,  $y_{p1} = 15.389$  mm,  $z_{p1} = 25.830$  mm. M2 fue capturada con pistón y descentramiento ya que se quiso verificar la exactitud del instrumento en este tipo de situaciones que son comunes en el día a día de la practica clínica en topografía corneal; las lecturas de las platinas para la imagen M2 fueron  $x_{p2} = 11.945$  mm,  $y_{p2} = 15.878$  mm,  $z_{p2} = 25.288$  mm. Las lecturas de las platinas para M1 fueron tomadas como la referencia inicial con la que se comparó para saber cuanto pistón y descentramiento se le dio a la Esf-Cal cuando se capturó M2. Estos valores fueron:

$$\Delta x_{M2} = (x_{p2} - x_{p1}) = 0.495 \text{ mm}, \quad (4.1a)$$

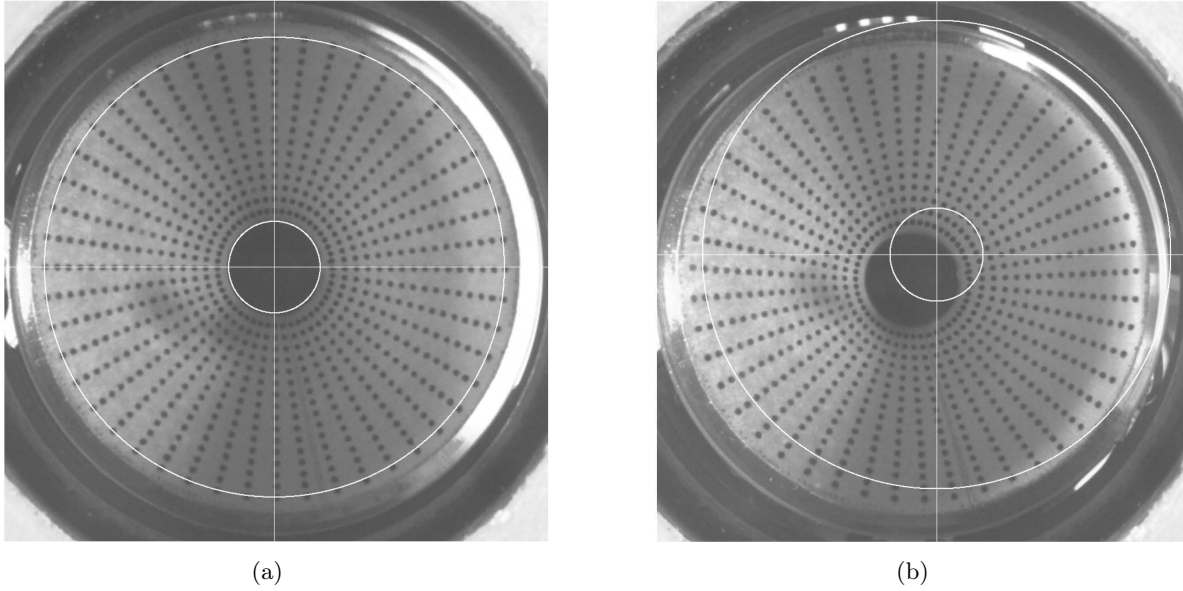
$$\Delta y_{M2} = -(y_{p2} - y_{p1}) = -0.495 \text{ mm}, \quad (4.1b)$$

$$\Delta z_{M2} = (z_{p2} - z_{p1}) = -0.542 \text{ mm}, \quad (4.1c)$$

donde el signo negativo de la Ec. 4.1(b) está puesto a propósito dado que la superficie se movió en la dirección negativa del eje  $\mathbf{Y}$ , aunque la lectura  $y_{p2}$  fuese mayor que la lectura  $y_{p1}$ . Las imágenes M1 y M2 son mostradas en la Fig. 4.2, donde se observa que la Esf-Cal en la Fig. 4.2(b) está descentrada respecto al eje óptico del topógrafo corneal. Cabe resaltar que en esta ocasión las imágenes fueron capturadas con la misma apertura de diafragma F/8. Los centroides en estas imágenes se calcularon, fueron ordenados respecto al diseño y corregidos por distorsión de la lente siguiendo el algoritmo de procesamiento de imágenes que está completamente detallado en la sección anterior. A partir de este punto se procedió de igual manera a como se hizo con el balín para calcular la exactitud de las



magnitudes topográficas al utilizar el método de pantalla nula.



**Figura 4.2:** Imagen de los *spots* sobre la esfera de calibración de  $r = 7.80$  mm: (a) Imagen M1. (b) Imagen M2.

#### 4.2.2. Diferencia de Elevación

Primeramente se calculó la elevación  $z$  de manera iterativa y se comparó contra la esfera de radio  $r = 7.80$  mm. Para cada imagen se obtuvieron las coordenadas del vértice  $(x_0, y_0, z_0)$  y los errores PV y RMS de las diferencias de elevación. Los resultados se muestran en la Tabla. 4.7.

**Tabla 4.7:** Desviaciones en diferencias de elevación de la Esf-Cal respecto a la esfera de  $r = 7.80$  mm.

Imagen	$x_0$ (mm)	$y_0$ (mm)	$z_0$ (mm)	PV ( $\mu\text{m}$ )	RMS ( $\mu\text{m}$ )
M1	-0.018	-0.020	-0.052	40.27	6.37
M2	0.495	-0.522	-0.520	35.21	5.80

Las coordenadas obtenidas para el vértice de la Esf-Cal en la imagen M1 confirma que dicha superficie se posicionó muy cerca del origen de coordenadas. Esto también se puede comprobar analizando la región circular cubierta por los centroides en la imagen M1, ya que la pantalla nula se diseñó para que cuando el vértice de la Esf-Cal estuviese en el origen de coordenadas dichos

centroides cubrieran una región circular de radio 1.440 mm en el sensor imagen; los centroides experimentales cubrieron una región promedio de radio de 1.448 mm, por lo que la hay una desviación de  $8 \mu\text{m}$  que corresponde aproximadamente a una desviación de 2 píxeles en la imagen M1. Para la imagen M2 se pudieron recuperar valores muy cercanos al descentramiento y al pistón que tuvo la imagen M2 respecto a la imagen M1. Estos valores fueron:  $\delta x = x_0^{\text{M2}} - x_0^{\text{M1}} = 0.513$  mm,  $\delta y = y_0^{\text{M2}} - y_0^{\text{M1}} = -0.502$  mm,  $\delta z = z_0^{\text{M2}} - z_0^{\text{M1}} = -0.468$  mm. Al comparar estos valores obtenidos con los de la Ec. (4.1), se obtuvo un error porcentual del 3.63% para el descentramiento en  $\mathbf{X}$ , del 1.41% para el descentramiento en  $\mathbf{Y}$  y del 13.65% para el pistón. Es un buen resultado para el descentramiento ya que los errores porcentuales no superaron el 10%. El error porcentual para el pistón si estuvo un poco elevado; posiblemente esto se deba a que los resultados están fuertemente influenciados por la exactitud con la que se calcule las coordenadas del vértice de la Esf-Cal en la M1 que fue la imagen que se utilizó como referencia para saber cuanto descentramiento se le dio a la esfera cuando se capturó la imagen M2. Por otro lado, se obtuvo prácticamente el mismo error RMS para ambas evaluaciones de la Esf-Cal. Aunque estos resultados muestran una leve mejoría respecto a los resultados obtenidos en la evaluación del balón (ver Tabla. 4.2), se observó que la exactitud del topógrafo corneal al evaluar superficies de calibración se mantuvo en promedio en  $6.68 \mu\text{m}$  dentro de un rango de  $5.80 \mu\text{m}$  a  $7.88 \mu\text{m}$ . Las discrepancias de los resultados en las diferencias de elevación también se mantuvieron en valores comparables para la evaluación de la Esf-Cal. Por lo que las discrepancias de los resultados cuando se probaron superficies esféricas con el método de pantallas nulas no fue superior a  $44 \mu\text{m}$  (ver Tablas. 4.2 y 4.7).

Al igual que en la evaluación del balón, la elevación  $z$  para la Esf-Cal se ajustó a la mejor esfera BFS. Los resultados de este ajuste se encuentran en la Tabla. 4.8. El radio de curvatura en el vértice de la Esf-Cal se recuperó al evaluar las imágenes M1 y M2. Para la imagen M2 el radio se recuperó con un error del 0.00% (realmente hay un error pero es menor a  $10^{-4}$ %), mientras que para la imagen M1 se recuperó con un error porcentual del 0.01%, por lo que la evaluación de la Esf-Cal fue mejor al utilizar la imagen M2 que al utilizar M1. Esto último también se puede corroborar al observar los resultados para los errores PV y RMS en las Tablas. 4.7 y 4.8. El hecho de que se hayan obtenido resultados experimentales con un alto grado de exactitud al evaluar una superficie que estuvo descentrada y con pistón hace pensar que se va por buen camino para tener un algoritmo bien robusto tanto para encontrar el vértice corneal como para evaluar superficies corneales sin tener que garantizar un correcto descentramiento y posicionamiento axial de la córnea. Esto se comentó en el Cap. 3 y se mostró por medio de datos simulados que si se puede realizar la evaluación corneal

bajo estas condiciones. Sin lugar a dudas este es uno de los resultados más relevantes de esta tesis.

**Tabla 4.8:** Desviaciones en diferencias de elevación de la Esf-Cal respecto a la mejor esfera BFS.

Imagen	PV ( $\mu\text{m}$ )	RMS ( $\mu\text{m}$ )	$r_{\text{BFS}}$ (mm)	E (%)
M1	40.20	6.35	7.81	0.01
M2	35.20	5.79	7.80	0.00

### 4.2.3. Radios de Curvatura: Sagital y Meridional

Se calcularon los radios de curvatura sagital y meridional en cada punto de evaluación y fueron comparados con el radio nominal de la Esf-Cal. Los resultados se muestran en la Tabla. 4.9. Al igual que en la evaluación del balón, los errores PV y RMS fueron rotulados con el subíndice “Sag” corresponden al radio sagital y aquellos con el subíndice “Mer” al radio meridional.

**Tabla 4.9:** Desviaciones del radio sagital y meridional respecto al radio nominal  $r = 7.80$  mm de la Esf-Cal.

Imagen	PV <sub>Sag</sub> (mm)	RMS <sub>Sag</sub> (mm)	E <sub>Sag</sub> (%)	PV <sub>Mer</sub> (mm)	RMS <sub>Mer</sub> (mm)	E <sub>Mer</sub> (%)
M1	0.529	0.075	0.968	0.531	0.081	1.044
M2	0.414	0.075	0.966	0.463	0.093	1.194

Se obtuvo el mismo resultado en la exactitud del radio sagital (ver error RMS<sub>Sag</sub> en la Tabla. 4.9) cuando se realizó la evaluación utilizando las imágenes M1 y M2. Esto es un buen resultado ya que se está evaluando la misma superficie a través de dos imágenes capturadas en posiciones espaciales diferentes. Es por eso que el error porcentual es prácticamente igual en ambos casos. El error PV<sub>Sag</sub> fue mejor para la evaluación con M2 que con M1. Respecto a la exactitud en el cálculo del radio meridional se encontró que ésta fue mejor cuando se calculó dicho radio con la imagen M1 que con M2. Por supuesto que hablar de una mejor o peor evaluación es algo relativo ya que los resultados son bastante comparables entre si. Por ejemplo, en el radio meridional la diferencia en exactitud es apenas  $12 \mu\text{m}$ .

Cabe resaltar que tanto en el radio sagital como en el meridional se obtuvo una mejor exactitud

que en la evaluación del balín. Esto se fundamenta en que tanto el error  $\text{RMS}_{\text{Sag}}$  como el error  $\text{RMS}_{\text{Mer}}$  para la Esf-Cal se redujeron aproximadamente a la mitad respecto al obtenido en la evaluación del balín (comparar Tablas. 4.4 y 4.9), por lo que la exactitud de los resultados obtenidos para la Esf-Cal es aproximadamente el doble de la que se obtuvo para el balín. Posiblemente esto se deba a que la pantalla nula impresa en el papel fue recortada y pegada con mayor precisión que la que se utilizó para probar el balín.

#### 4.2.4. Potencia Refractiva

Para la Esf-Cal también se obtuvo la potencia refractiva en cada punto de evaluación. Estos resultados fueron comparados con la potencia refractiva de una esfera de radio  $r = 7.80$  mm y se muestran en la Tabla. 4.10.

**Tabla 4.10:** Desviaciones en potencia refractiva de la Esf-Cal respecto a una esfera ideal de  $r = 7.80$  mm.

Imagen	PV (D)	RMS (D)
M1	2.351	0.460
M2	3.045	0.463

Nuevamente y como se ha obtenido tanto para la diferencia de elevación como para el radio de curvatura sagital y meridional, la exactitud en el cálculo de la potencia refractiva de la Esf-Cal es prácticamente la misma. Lo relevante aquí es que se obtuvieron mejores resultados que los obtenidos al evaluar el balín. Tener valores del alrededor de 0.4 D en el error RMS de la potencia refractiva para superficie de calibración es bastante bueno, pero hay que seguir minimizando las fuentes de errores sistemáticos que puedan estar presentes en la evaluación experimental para llegar a exactitudes cercanas a 0.25 D como se reporta en la literatura [6, 84–86]. Con esto también se logrará que el error PV pueda disminuir a valores menores a 1 D. Otro aspecto que puede disminuir el error en el cálculo de la potencia refractiva es que se tenga mayor precisión en la obtención del descentramiento de la superficie ya que éste afecta considerablemente la potencia refractiva como se mencionó anteriormente. Actualmente se está trabajando en el mejoramiento del algoritmo que se presentó en la Sec. 3.3 del Cap. 3 (ver en Pag. 70), para la obtención del descentramiento y del pistón.

### 4.3. Comentarios Finales

En este capítulo se obtuvieron resultados muy importantes para la exactitud del topógrafo corneal basado en pantallas nulas [10]. Esta exactitud se mide en función de la capacidad que se tenga para recuperar la topografía de superficies conocidas. La norma americana recomienda utilizar varios tipos de superficies para evaluar la exactitud de un topógrafo corneal; entre estas superficies se encuentran superficies esféricas con distintos valores de radios de curvatura, elipsoides de revolución y superficies tóricas entre otras [31]. Aquí sólo se probaron dos superficies esféricas; una balón con un radio muy cercanos al de un recién nacido ( $r = 6.375$  mm) y la otra fue una esfera de calibración fabricada por la empresa Optikon para probar sus topógrafos. Esta esfera de calibración tiene un radio prácticamente igual al de una córnea adulta que no tiene ninguna alteración ocular ( $r = 7.80$  mm). Los resultados obtenidos para el balón fueron buenos sobre todo en la exactitud que se obtuvo para estimar las diferencias de elevación, ya sea respecto a la propia esfera que se probó o respecto a la mejor esfera. Donde realmente no tuvieron buenos resultados fue cuando se obtuvo la potencia refractiva ya que los resultados estuvieron muy lejanos a los reportados en la literatura [6, 84–86]. Esto quizás se deba a diversos errores sistemáticos que deben ser corregidos. Por ejemplo, en vez de imprimir la pantalla nula en una hoja de papel para después tener que pegarla simétricamente para formar un objeto cilíndrico con el papel, sería mejor imprimir dicha pantalla directamente en la pared de un cilindro de un material transparente como el acrílico.

Los resultados obtenidos al evaluar la esfera de Optikon fueron bastante buenos. En las cuatro magnitudes topográficas las exactitudes disminuyeron respecto a los resultados obtenidos con el balón. Esto se debe a que en esta ocasión tanto el corte como el pegado de la pantalla se hizo de una manera más precisa. Lo que se mostró en las secciones anteriores y que es meritorio resaltar de nuevo es que la mejor exactitud que se obtuvo en diferencia de elevación respecto a la misma superficie que se probó fue de  $5.88 \mu\text{m}$  y la peor fue de  $7.88 \mu\text{m}$ . Esto es importante porque estamos muy cerca del valor umbral de exactitud que muchos autores han reportado; este umbral corresponde a valores en error RMS de las diferencias de elevación menores a  $5 \mu\text{m}$  [23, 39, 43].

Por otro lado, los resultados para la potencia refractiva también son muy buenos ya que aquí se está calculando dicha magnitud sin limitaciones paraxiales y con afectación de la aberración esférica que afecta fuertemente a superficies esféricas [3]. La exactitud que se reporta comúnmente es debida a la proporcionalidad directa de la potencia refractiva con la curvatura en la zona paraxial, donde las superficies se aproximan más a una esfera y donde el efecto de la aberración esférica es menor.

Otro resultado importante es que se encontraron resultados muy buenos para la evaluación de la esfera con descentramiento, con lo que se comprueba que el problema del rayo oblicuo fue superado al utilizar un tipo de *target* como la pantalla nula donde se tiene una correspondencia uno a uno entre un punto en la pantalla y un punto imagen en el CCD.

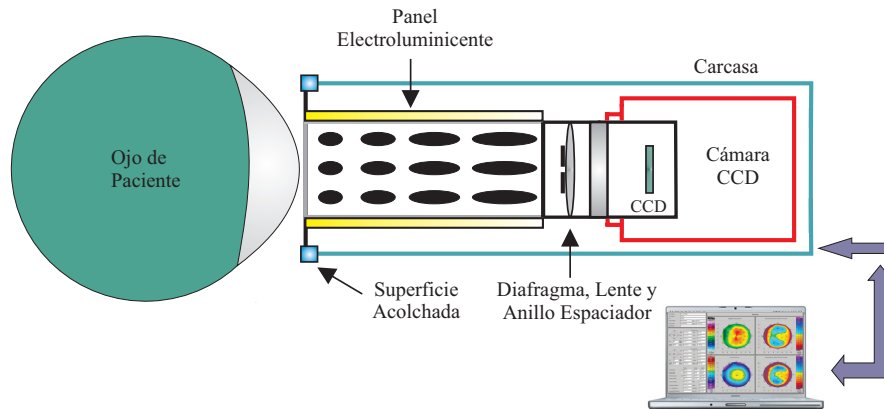
# AVANCES EN EL PROTOTIPO DEL TOPÓGRAFO CORNEAL

Finalmente se presenta el último capítulo de esta tesis que corresponde a la implementación de un primer prototipo que pueda ser usado en la práctica clínica como también las posibles mejoras que se tendrán en cuenta para el desarrollo de un segundo prototipo. Estas mejoras involucran el diseño y fabricación de la carcasa que contiene al instrumento, la implementación de un nuevo sistema de iluminación que reemplace los paneles electroluminiscentes que se venían utilizando, la ampliación de las dimensiones del cilindro para tener mayor área de evaluación corneal como también más puntos de evaluación, entre otras mejoras. Estos avances que se han obtenido en la dirección de tener un prototipo robusto y ergonómico son presentados a continuación de manera cronológica. Cabe resaltar que se llevaron a cabo las primeras pruebas en el Hospital Infantil de México Federico Gómez con el primer prototipo que se construyó.

## 5.1. Construcción del Primer Prototipo del Topógrafo Portátil

En mi tesis de maestría realicé el diseño y el montaje experimental del topógrafo corneal basado en pantallas nulas [11]. Ese diseño tuvo algunas modificaciones para ser utilizado en la implementación del primer prototipo del topógrafo que se construyó en esta tesis doctoral. En términos generales, la propuesta que hice en la maestría consistió de un cilindro externo que contiene un cilindro interno que soporta la pantalla nula. Se propuso un sistema de adquisición de imagen basado en una lente positiva, un anillo espaciador, una cámara CCD y una computadora portátil. El sistema de iluminación consistió de un panel electroluminiscente que se enrolló en la pared externa del cilindro

que soporta la pantalla nula. El diagrama esquemático del diseño realizado en la tesis de maestría se muestra en la Fig. 5.1.



**Figura 5.1:** Diagrama esquemático del diseño del topógrafo corneal [11].

Una vez probado ampliamente esta propuesta en el laboratorio, surgió la necesidad de llevar la propuesta al contexto real de trabajo para identificar las posibles mejoras tanto de la tecnología como del instrumento una vez que el usuario tuviese su primer contacto con el prototipo. Fue con este objetivo que se fabricó una carcasa para un primer prototipo de prueba del topógrafo corneal; esto se hizo para llevar de forma segura el instrumento al Hospital Infantil de México Federico Gómez donde se realizaron las primeras pruebas. Esta carcasa tuvo una envolvente que pudiese sostenerse con las manos del usuario (ver modulo 1 en la Fig. 5.2) y una superficie acolchada que brindase una interacción adecuada entre el instrumento y el paciente (ver modulo 2 en la Fig. 5.2).



(a)

**Figura 5.2:** Carcasa utilizada para el primer prototipo del topógrafo corneal.



Las dimensiones de la envolvente fueron condicionadas por el tamaño de la cámara [CMOS DCC1645C (Thorlabs Inc, Newton, NJ)] que se tenía en ese momento. Para facilitar la fabricación de este prototipo, se emplearon tubos PVC de diferentes diámetros. La envolvente principal se generó de un tubo de 63 mm de diámetro, el la cual fue modificado para generar dos superficies planas que sirviesen de apoyo a la cámara. Una de ellas forma la base que permite fijar (con tornillos) la cámara al resto de la envolvente, mientras que la segunda superficie determina el límite para restringir el movimiento de la misma. La carcasa tiene otros dos cilindros concéntricos para proteger a la lente de la cámara y al cilindro que soporta la pantalla nula (ver Fig. 5.2); los cilindros miden 50 mm y 40 mm de diámetro. Al final de estos cilindros se encuentra la superficie acolchada, la cual se puede alejar o acercar del resto de la envolvente para disminuir o aumentar respectivamente la distancia del instrumento a la córnea del paciente. Esta superficie acolchada también se construye a partir de un tubo de PVC de 40 mm de diámetro, al cual se le dio una forma particular que permite recargarse en la orbita del ojo. El área que estuvo en contacto con la cara del paciente se recubrió con silicón de platino para amortiguar el instrumento.

## 5.2. Implementación Clínica del Primer Prototipo del Topógrafo Portátil

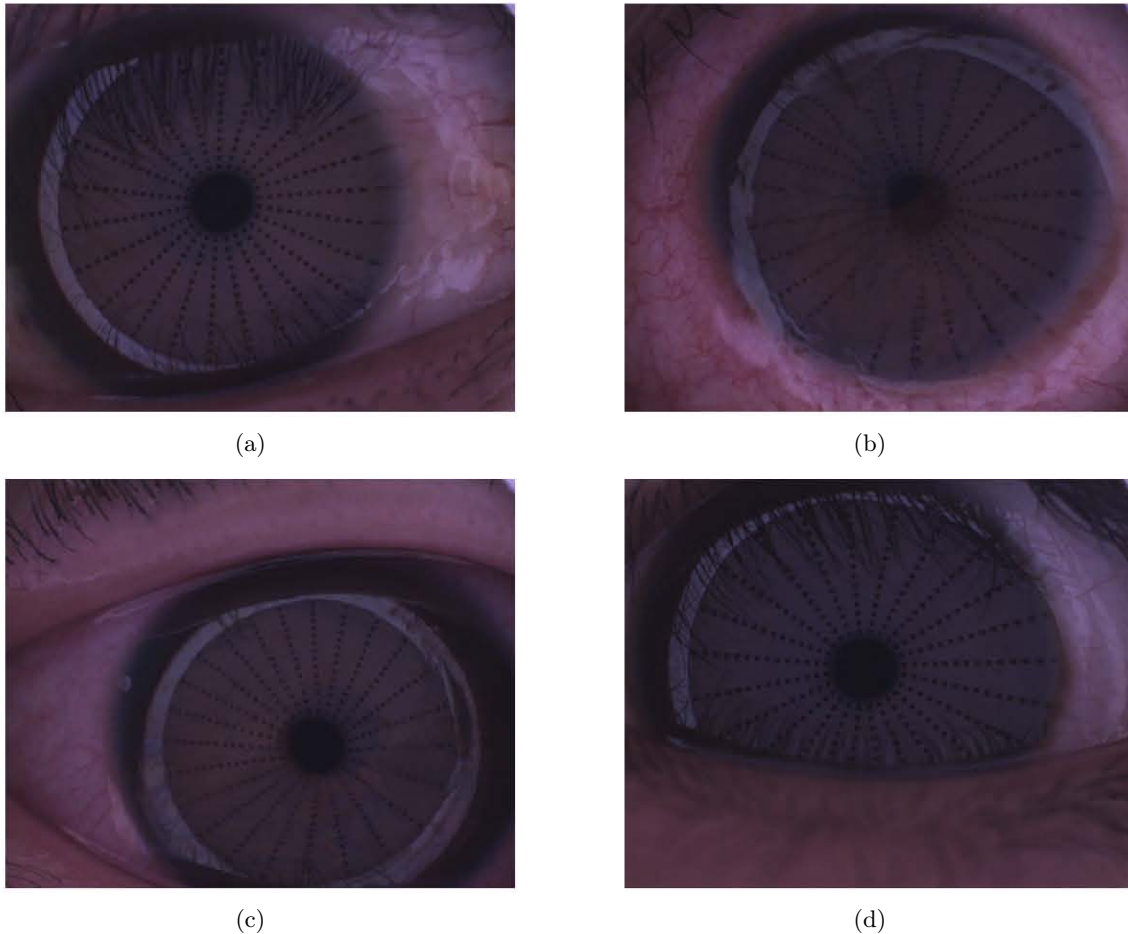
Una vez que se tuvo listo el primer prototipo, éste fue probado en el departamento de oftalmología del Hospital Infantil de México Federico Gómez. La interacción de los usuarios (optómetras y oftalmólogos) con el prototipo fue liderada por el **Dr. Marco Ramírez Ortiz**, quien es el director del departamento de oftalmología del hospital. En este primer acercamiento del prototipo con el usuario se incluyeron pacientes entre 5 y 12 años con el consentimiento informado y explícito de los padres de cada paciente. Como se buscaba evaluar la portabilidad del instrumento, éste fue probado en el quirófano con pacientes que fueron operados de diversas cirugías oculares bajo anestesia. Este aspecto es importante porque precisamente este es una de los problemas que se quiere solucionar con esta propuesta de topógrafo corneal. Es decir, que una topografía se pueda realizar sobre pacientes que estén confinados a una silla de rueda o en una cama de quirófano, entre otros. En la Fig. 5.3(a) se recrea la propuesta de como el usuario realizará la topografía corneal con pacientes acostados (por ejemplo, lactantes e infantes). La Fig. 5.3(b) muestra al usuario utilizando el prototipo con un paciente acostado en uno de los quirófanos del hospital infantil.



**Figura 5.3:** (a) Esquema de la prueba del prototipo. (b) Foto capturada en quirófano.

Con este primer prototipo se obtuvieron un banco de imágenes de córneas *in vivo* con cierta dificultad tanto desde el punto de vista instrumental como del punto de vista de la interacción del usuario-instrumento-paciente. Algunas de estas imágenes que se muestran en la Fig. 5.4 revelan algunos problemas que impiden tener una excelente imagen para obtener la topografía corneal. Por ejemplo en la Fig. 5.4(a) se muestra una imagen corneal con pestañas superpuestas sobre los *spots*. Como se mencionó en el Cap. 3 (ver en Pag. 51), las pestañas dificultan la homogénea evaluación de la superficie corneal ya que éstas introducen puntos que son llamados falsos positivos, los cuales son centroides que no pertenecen a un *spot* producido por la pantalla nula. Muchos topógrafos no consideran estas zonas a la hora de encontrar los mapas corneales. La idea a futuro es desarrollar una algoritmo robusto que procese la imagen de tal manera que las pestañas sean removidas y la evaluación se pueda hacer sobre esas regiones de superposición. Las Figs. 5.4(b) y 5.4(c) muestran imágenes de córneas con exceso de película lagrimal, por lo que muchos *spots* no logran formarse en la imagen. Esto es un problema a considerar ya que este método de pantallas nulas está basado en la capacidad de tener una superficie lisa adecuada que favorezca la reflexión especular en la interfase formada por la película lagrimal y la córnea. Es por eso que es estrictamente necesario capturar la imagen en condiciones óptimas de película lagrimal; es decir, ni tan viscosa ni tan seca. Finalmente, en la Fig. 5.4(d) se muestra el efecto que se tiene al no abrir correctamente los párpados (superior e inferior). Lo que acontece es que los párpados tapan los *spots* en la zona inferior y superior de la córnea. Esto no es problema cuando se tienen pacientes cooperantes que se esfuercen por abrir dichos párpados, la dificultad se presenta cuando no se tiene este tipo de pacientes como en el

caso de intentar hacer un estudio topográfico a lactantes y niños, entre otros. La solución para capturar una excelente imagen bajo estas condiciones sería utilizar uno beflarostato (es una especie de pinza quirúrgica) para abrir los párpados y de esta manera realizar la topografía corneal llevando el topógrafo portátil hacia el paciente.

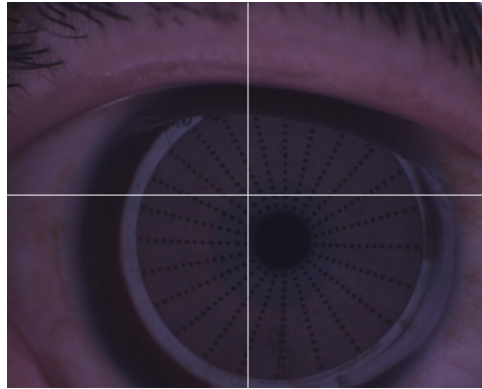


**Figura 5.4:** Imágenes obtenidas con el primer prototipo del topógrafo corneal: (a) Imagen con pestañas superpuestas sobre los *spots*. (b) y (c) Imágenes con exceso de película lagrimal. (d) Imagen con párpados poco abiertos.

### 5.3. Topografía Corneal de una Córnea *in vivo*

En esta sección se muestra la primera evaluación de una córnea *in vivo* utilizando una imagen obtenida con el topógrafo corneal portátil propuesto en esta tesis. Del conjunto de imágenes que se obtuvieron con la implementación del topógrafo en el hospital infantil, se seleccionó la mejor imagen que se pudo obtener en esa oportunidad. Es decir, una imagen sin superposición de pestañas, con los

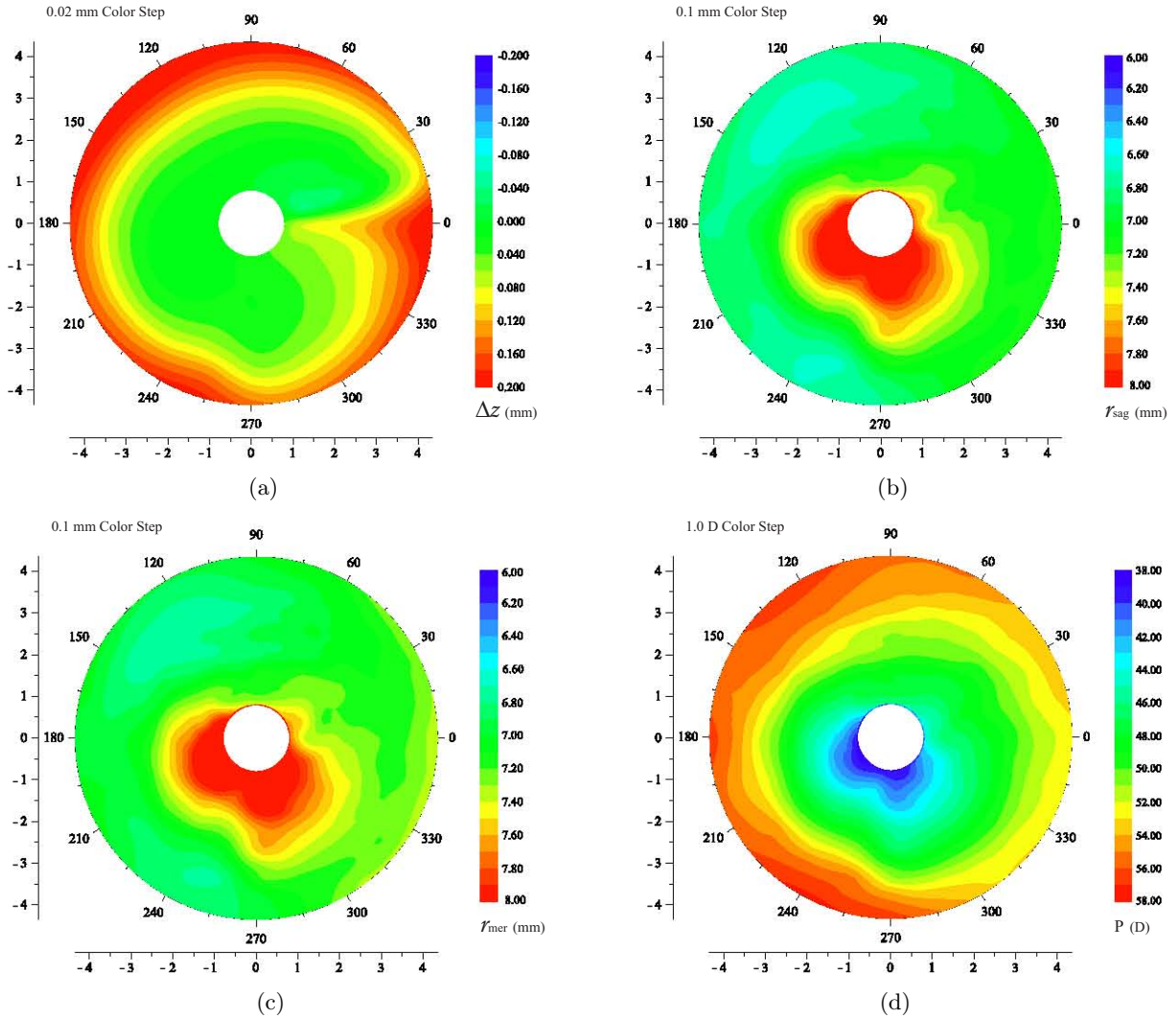
párpados lo más abiertos posibles y con una película lagrimal en óptimas condiciones. Esta imagen se observa en la Fig. 5.5. Sobre esta imagen se aplicó el mismo algoritmo descrito en la Sec. 4.1.2 (ver en Pag. 82) para calcular los centroides de los *spots*. Como se observa en la Fig. 5.5, el párpado superior obstruye la visualización de algunos *spots*, por lo que se deben eliminar los puntos en la pantalla nula que corresponden a los centroides de los *spots* que no aparecen en la imagen corneal. Esta es una tarea que no es trivial y actualmente se realiza de manera manual teniendo en cuenta el archivo de diseño de la pantalla nula. Este proceso se debe realizar con mucho cuidado ya que es necesario garantizar la correcta correspondencia entre centroides y pantalla nula. Una incorrecta correspondencia afectaría considerablemente la exactitud de los resultados de la topografía corneal. Este inconveniente se puede resolver con ayuda de unas marcas de referencia sobre la imagen que permitan identificar con facilidad dicha correspondencia entre puntos.



**Figura 5.5:** Imagen corneal utilizada para realizar la primera topografía corneal de una córnea *in vivo* con el topógrafo corneal portátil. El cruce de las líneas continuas en blanco corresponde al punto por donde pasa el eje óptico del topógrafo.

Claramente se observa en la Fig. 5.5 el descentramiento que tuvo la córnea respecto al eje óptico del topógrafo al momento de capturar su imagen. Seguramente la córnea también tuvo un pistón respecto al origen de coordenadas. Visualmente el pistón no se puede observar en la Fig. 5.5, ya que es posible que el buen enfoque de los *spots* en la imagen se deba a la profundidad de foco que produce la apertura de diafragma (F/8) que se utilizó para capturar la imagen. Se aplicó el algoritmo descrito en la Sec. 3.3 (ver en Pag. 70) para estimar el valor del pistón y descentramiento del vértice corneal y así utilizarlos como parámetros de entrada en los algoritmos empleados para el cálculo de todas las magnitudes topográficas. Cabe resaltar que esta estimación es aproximada porque el algoritmo descrito en la Sec. 3.3 está basado en un modelo esférico de la superficie corneal con un radio de curvatura  $r = 7.8$  mm. Estos valores fueron:  $(x_0 = -1.103$  mm,  $y_0 = -1.449$  mm,  $z_0 = -0.374$  mm).

Los mapas corneales para esta evaluación se muestran en la Fig. 5.6.



**Figura 5.6:** Mapas corneales: (a) Mapa de diferencia de elevación. (b) Mapa de radio sagital. (c) Mapa de radio meridional. (d) Mapa de potencia refractiva.

La escala de cada mapa es relativa al valor máximo y al valor mínimo de los valores numéricos de cada magnitud topográfica. El mapa de diferencia de elevación se construyó al restarle la mejor esfera de ajuste (BFS con  $r = 7.071$  mm) a la elevación  $z$  obtenida por integración de las normales en cada punto corneal. Cabe resaltar que el ajuste de la BFS se realiza con la elevación  $z$ . La región que se evaluó en la superficie corneal corresponde aproximadamente a una región definida entre la distancia radial del punto corneal más alejado del eje óptico ( $\rho_{\text{max}} = 4.344$  mm) y el radio de la región donde no hay puntos de evaluación ( $\rho_{\text{min}} = 0.800$  mm). Por tanto, el área evaluada en la superficie corneal fue  $A = \pi(\rho_{\text{max}}^2 - \rho_{\text{min}}^2) = 57.27$  mm<sup>2</sup>. Los mapas de radios de curvatura

y de potencia refractiva muestran una marcada tendencia esférica, ya que por ejemplo, en los mapas mostrados en las Figs. 5.6(b) y 5.6(c), los radios de curvatura tiende a un valor constante (por eso el color verde en cada mapa), mientras que en el mapa mostrado en la Fig. 5.6(d), la potencia refractiva aumenta del centro a la periferia como sucede en una esfera [3]. Este resultado está fuertemente influenciado por la estimación en las coordenadas del vértice corneal, ya que esta estimación es aproximada y está basada en un modelo esférico de la córnea como se dijo anteriormente.

Las magnitudes topográficas fueron comparadas contra la BFS de radio  $r = 7.071$  mm. Esta comparación consistió en obtener tanto el PV como el RMS de los mapas de diferencias de elevación, de radios de curvatura sagital y meridional y de la potencia refractiva. Los resultados de esta comparación se encuentran en la Tabla. 5.1.

**Tabla 5.1:** Desviaciones de las magnitudes topográficas respecto a la BFS de radio  $r = 7.071$  mm.

Magnitud Topográfica	Simbolo	PV (mm)	RMS (mm)
Diferencia de Elevación	$\Delta z$	0.181	0.027
Radio de Curvatura Sagital	$r_{\text{Sag}}$	2.173	0.471
Radio de Curvatura Meridional	$r_{\text{Mer}}$	2.095	0.476
Potencia Refractiva	$P$	13.518	3.017

El RMS para la diferencia de elevación fue de  $27 \mu\text{m}$ , lo que quiere decir es que las deformaciones de la córnea respecto a la BFS en promedio son del valor del RMS. El RMS tanto para el radio sagital como para el radio meridional fue del orden de las décimas de milímetros y son prácticamente el mismo, ya que sólo varían en la tercera cifra significativa; seguramente esto se deba a la tendencia esférica que tienen los resultados como se explicó en los párrafos anteriores. Los resultados obtenidos para la potencia refractiva están elevados sobre todo en las discrepancias PV, por lo que no sería una buena opción comparar los valores de potencia refractiva con una BFS de radio  $r = 7.071$  mm. Estos resultados obtenidos en la evaluación de esta córnea son en términos generales aceptables ya que todavía hay fuentes de errores sistemáticos (control en la distancia de trabajo, estimación de las coordenadas del vértice corneal, superposición de pestañas, entre otras) que están afectando la exactitud de los resultados. Actualmente se está trabajando en reducir estas fuentes de error para evitar errores significativos y obtener un alto grado de exactitud y precisión en las mediciones sobre córneas reales realizadas con este topógrafo corneal.

## 5.4. Mejoras para la Implementación de un Segundo Prototipo

Una vez que se hizo la prueba de usuario del primer prototipo en su contexto real de uso, se pudieron identificar problemas fundamentales que se deberán resolver cuando se construya un segundo prototipo. Entre estos problemas se encuentran:

1. La pantalla nula debe imprimirse directamente en la pared interna del cilindro para así reemplazar la impresión de ésta sobre una hoja de papel. Se espera que con esto se reduzca el error debido al mal pegado de la pantalla y al mal posicionamiento de la misma en el cilindro. Otra opción sería calibrar lo mejor posible la pantalla usada para identificar los defectos que tenga para después corregir los resultados por estos defectos de la pantalla nula; es decir, con las coordenadas reales de los puntos de la pantalla nula, la evaluación puede hacerse de la forma correcta ya que se elimina cualquier efecto de los errores en el mal posicionamiento de la pantalla.
2. Se deben incluir más puntos de sobre la córnea para tener una evaluación más homogénea de la superficie corneal y reducir el error de truncamiento que se presenta al utilizar un algoritmo numérico para para integrar los datos de las normales y así obtener la elevación.
3. Sobre la pantalla nula se deben incluir unas marcas de referencias que permitan identificar el meridiano  $0^\circ$  de los *spots* en la imagen corneal y que faciliten el proceso de correspondencia entre los puntos objeto en la pantalla nula y sus puntos imagen en el CCD.
4. Es necesario tener una referencia externa en la carcasa para identificar la orientación de la cámara CCD que permita capturar imágenes sin una rotación arbitraria.
5. El sistema de iluminación dado por el panel electroluminiscente debe ser cambiado porque su intensidad luminosa decae rápidamente con el uso del mismo.
6. El diámetro de la superficie acolchada (45 mm) resulta demasiado grande y rígido, lo que no permite que el instrumento se posicione a la distancia correcta de la córnea.
7. El agarre del prototipo no resultó muy eficiente y ergonómico, ya que al tener un diámetro de 63 mm no permitía un manejo fino del mismo.
8. La carcasa del prototipo resultó algo grande para el usuario por lo que es recomendable reducir de tamaño dicha carcasa. Esto se podría lograr al utilizar una cámara CCD de menores dimensiones.

Todos los problemas mencionados anteriormente se han empezado a resolver de la mejor manera. Se han obtenido buenos resultados en la solución de algunos, mientras que en otros se ha avanzado satisfactoriamente. Algunos de estos avances se tratan en detalle a continuación.

#### 5.4.1. Mejoras en el Diseño de la Pantalla Nula

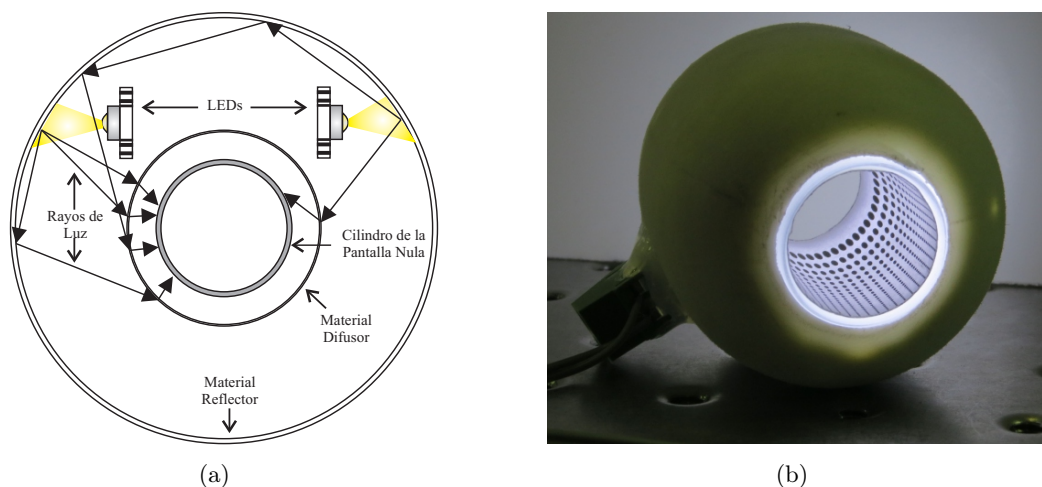
Para aumentar el número de puntos de evaluación en la imagen corneal, se empleó una cámara CCD que tiene menor tamaño de píxel (resolución espacial) que la cámara CMOS utilizada en el primer prototipo. Esto permitió que los *spots* en la imagen tuviesen un menor diámetro con la misma cantidad de píxeles que se venía utilizando (aproximadamente 10 píxeles de diámetro). Con esto se logró disminuir la separación radial entre cada *spot*, lo que trajo como consecuencia que el número de *spots* aumentará en cada meridiano. La separación angular entre *spots* también se redujo. En el primer prototipo se utilizó una separación angular de  $15^\circ$ , mientras que en esta nueva propuesta la separación angular es de  $7.5^\circ$ , producto de que se tiene una cámara con mejor resolución espacial. Además de aprovechar los beneficios que se tienen al utilizar una mejor cámara para aumentar el número de puntos de evaluación, un nuevo cilindro para soportar la pantalla nula fue fabricado para ayudar a este propósito. Este cilindro tiene una longitud de 45.6 mm y un diámetro interno de 21.4 mm. Estas dimensiones son mayores a las del cilindro empleado en el primero prototipo ( $L = 36.01$  mm,  $D = 18.0$  mm). Todo lo anterior permitió diseñar una pantalla nula con 1104 gotas, las cuales permiten proyectar igual número de puntos de evaluación sobre la córnea. Es así como actualmente se tiene aproximadamente tres veces el número de puntos de evaluación que se tenía con el primer prototipo (336 puntos corneales). En conclusión se ha diseñado una pantalla nula con mayores dimensiones y con un número mayor de gotas. En la Tabla. ?? se muestran los parámetros utilizados para este nuevo diseño.

#### 5.4.2. Mejoras en el Sistema de Iluminación

El panel electroluminiscente que se utilizó para proveer la iluminación homogénea sobre la pantalla nula no fue lo suficientemente eficiente y práctico. Entre las desventajas más importantes del panel electroluminiscente es que este funciona con un elevado voltaje (200 VAC), siendo algo riesgoso para el paciente si el panel no está correctamente aislado dado que el topógrafo debe estar lo más cerca que se pueda de la córnea para obtener imágenes bien enfocadas. Esto expone al paciente a que en cualquier momento pueda tocar los bordes del panel con los párpados y por consiguiente tener una descarga eléctrica. Otra de las desventajas de la utilización de paneles electroluminiscentes es que son difíciles de conseguir en el mercado nacional e internacional, lo que las hace realmente



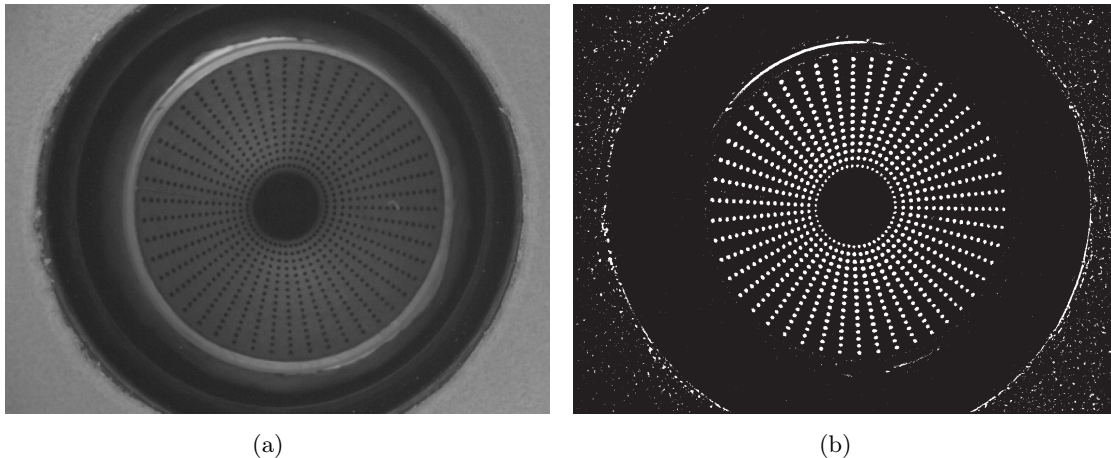
muy costosas. En muchas ocasiones se tuvieron que reemplazar ya sea por daño o por cambio en las dimensiones del cilindro que soporta la pantalla nula. Estas desventajas de los paneles electroluminiscentes motivaron a buscar otras alternativas de iluminación. Para lograr esta tarea se contó con el apoyo técnico-profesional del **M. en I. Juan Ricardo Damian Zamacona**, quien es Técnico Académico del Departamento de Instrumentación y Medición del CCADET-UNAM. La alternativa por la que se optó, fue diseñar y construir una sistema de iluminación basado en LEDs individuales de tal manera que este sistema pudiese ajustarse a las necesidades propias del topógrafo portátil. La razón por la que se eligieron LEDs se debe a que es una fuente de luz muy eficiente, esto quiere decir que un alto porcentaje de la potencia eléctrica suministrada al dispositivo en cuestión se transforma en luz y no se disipa en forma de calor. Se buscó la generación de una infinidad de puntos emisores de luz a partir de dos LEDs de alta potencia (P3W200-120/41); para esto se utilizó un material reflejante de aluminio puesta en la pared interna de un cilindro que es concéntrico al cilindro de la pantalla nula. Para lograr una fuente de luz homogénea, se recubrió la pared externa del cilindro de la pantalla nula con un material disipador de tal forma que la luz se esparciera a lo largo de todo el cilindro y de esta manera iluminara toda la pantalla nula. El diagrama esquemático y una fotografía de la fuente de iluminación se observan en las Figs. 5.7(a) y la Fig. 5.7(b), respectivamente.



**Figura 5.7:** Sistema de iluminación desarrollado para el segundo prototipo del topógrafo corneal portátil: (a) Diagrama esquemático. (b) Fotografía.

Para alimentar los LEDs se construyó una fuente de corriente constante para que la intensidad luminosa no estuviese variando debido a fluctuaciones en el voltaje de alimentación. Para esto se utilizó un circuito integrado LM317 (dispuesto como fuente de corriente ajustable) que se alimentara con un voltaje de entrada entre 12 y 30 V y que pudiera proporcionar una corriente de salida ajustable entre 15 y 30 mA. La homogeneidad de esta fuente de luz fue probada sobre la superficie

de calibración de  $r = 7.8$  mm que utilizó en el Cap. 4 [ver Fig. 5.8(a)]. Después de un procesamiento de imágenes se encontró que es posible obtener un único valor de umbral para separar los *spots* de la iluminación de fondo y así crear una imagen binaria como se observa en la Fig. 5.8(b). Actualmente se está mejorando este sistema de iluminación con la implementación de ocho LEDs de alta potencia para así iluminar más homogéneamente algunas zonas oscuras que se presenta en la imagen corneal. Esto es importante ya que cuando se utilizó un umbral global sobre la imagen de la esfera de calibración, se eliminó indeseablemente un *spot* que está afectado por sombras [ver Fig. 5.8(b)]. Una opción para evitar esto sería utilizar un umbral adaptativo por zonas de interés. Igualmente se está trabajando en la reducción del tamaño de la misma para así tener una instrumento más liviano y compacto.

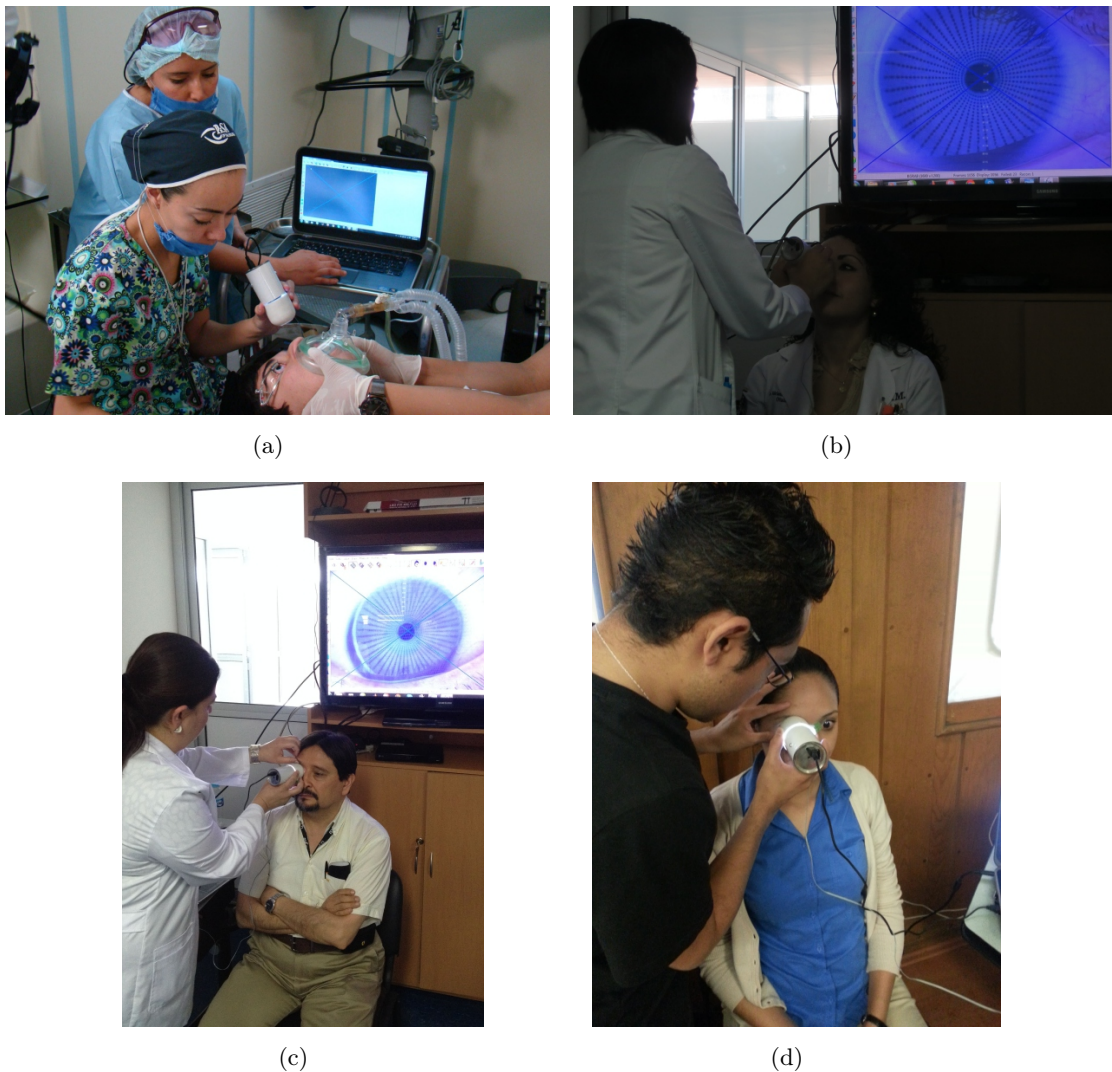


**Figura 5.8:** (a) Imagen de la esfera de calibración obtenida con el nuevo sistema de iluminación. (b) Imagen binaria obtenida por un umbral global.

### 5.4.3. Mejoras en la Arquitectura del Topógrafo Corneal Portátil

Actualmente se está trabajando en conjunto con la **M. en DI. Citlali Díaz Gutiérrez** del Centro de Investigaciones de Diseño Industrial (CIDI) de la UNAM en varios aspectos del diseño y construcción del segundo prototipo del topógrafo portátil. Por ejemplo, uno de los aspectos en que se está trabajando en la actualidad es en un modelo tridimensional del cilindro y la pantalla nula con el objetivo de imprimir dicha pantalla directamente sobre cilindro. Igualmente se está avanzando junto con la **Maestra Díaz Gutiérrez** y su equipo de trabajo en el diseño de una nueva carcasa para solucionar los problemas que se presentaron con la carcasa utilizada en el primer prototipo. Para eso se realizaron trabajos de campo con un modelo provisional del topógrafo para probar distintas características que puede ofrecer el instrumento. Por ejemplo, las diferente formas de sujeción del

instrumento, la necesidad de un soporte entre el instrumento y la cara del paciente, la facilidad que ofrece el instrumento al usuario de manipular los párpados del paciente, entre otras. Este trabajo de campo se llevó a cabo en distintas entidades de salud de la Ciudad de México, entre las que se encuentran el Hospital Infantil de México Federico Gómez, el Hospital General de México Dr. Eduardo Liceaga y el Departamento de Optometría de la Facultad de Estudios Superiores de la UNAM (Campus: Iztacala) (FESI). En la Fig. 5.9, se muestran algunas fotografías obtenidas en el trabajo campo que se realizó.



**Figura 5.9:** Imágenes obtenidas en el trabajo de campo realizado con un modelo del segundo prototipo del topógrafo corneal portátil: (a) Hospital Infantil. (b) y (c) Hospital General. (d) FESI.

Hay otros aspectos que también se están trabajando en conjunto con **Maestra Díaz Gutiérrez**. Por ejemplo, el diseño de una marca fiduciaria en la pantalla nula para identificar el meridiano  $0^\circ$  en la

imagen corneal, así como el diseño de una referencia para identificar correctamente la orientación del topógrafo corneal. Por otro lado, se ha empezado a trabajar en la automatización de los algoritmos de procesamiento de imágenes, de cálculo de centroides y de las magnitudes topográficas. Este trabajo se está realizando con un Ingeniero Mecatrónico externo a la UNAM.

## 5.5. Comentarios Finales

En este último capítulo de la tesis se mostró la implementación de un primer prototipo del topógrafo corneal portátil basado en pantallas nulas. Esto es un paso muy importante en la consolidación de un instrumento, ya que la propuesta se sacó del laboratorio y se pudo llevar al contexto real de trabajo para que los usuarios; tanto los optómetras como los oftalmólogos tuviesen contacto con el prototipo. Esta experiencia realizada en el Hospital Infantil de México sin lugar a dudas dejó mucha retroalimentación y reveló algunos problemas que no se habían tenido en cuenta en el montaje experimental de laboratorio que se hizo en la maestría. Estos problemas que tienen que ver tanto como de la parte técnica del instrumento (sistema óptico del topógrafo, adquisición de las imágenes, posicionamiento axial de la córnea, entre otros) como del diseño ergonómico del mismo, se han venido resolviendo con éxito.

Como se mostró en la Sec. 5.3, se obtuvo la primera evaluación para una córnea *in vivo*. Esto fue uno de los grandes desafíos de esta tesis doctoral ya que desde la maestría sólo se habían probado esferas de calibración en el laboratorio. Si bien es cierto que se debe mejorar el algoritmo que se tiene para el cálculo de las coordenadas del vértice corneal para aumentar la exactitud de los mapas corneales, aún así en la evaluación de esta córnea se obtuvieron resultados aceptables al menos para la diferencia de elevación ( $\text{RMS} = 27 \mu\text{m}$ ) y los radios de curvatura sagital y meridional ( $\text{RMS} = 0.47 \text{ mm}$ ) para la comparación con una BFS. El Hospital Infantil no cuenta con un topógrafo convencional como el de anillos de Plácido que pueda dar una topografía del paciente, por lo que no hubo manera de validar los resultados. El proceso de validación del topógrafo portátil está pensando realizarse en el Instituto de Oftalmología Conde de Valenciana una vez que se tenga construido el segundo prototipo que incluye todas mejoras respecto al primer prototipo y que fueron detalladas en este capítulo.

Es bueno señalar que actualmente se cuenta con un modelo de lo que sería el segundo prototipo, el cual funciona en óptimas condiciones. Este modelo se está utilizando para mostrarlo en los diferentes centros de salud donde se está buscando establecer protocolos de colaboración académica e

---

investigativa. También ha servido para hacer divulgación de este proyecto de investigación a través del CCADET y la UNAM como también mostrarlo como soporte a los pares académicos y entidades que financian esta investigación. A este nuevo modelo se le ha llamado **ToCo** que quiere decir Topógrafo Corneal.

# CONCLUSIONES Y APORTES RELEVANTES

Se ha presentado la investigación doctoral relacionada con el desarrollo de un topógrafo corneal portátil basado en la técnica de pantallas nulas. Este trabajo es una continuación de la investigación preliminar que realicé en mi tesis de maestría y que por el alcance de la misma, sólo diseñé y realicé el montaje experimental de laboratorio del topógrafo corneal, dejando algunos problemas por resolver a futuro. Esto me motivó a tomar el reto de continuar dicha investigación a nivel doctoral, con el objetivo fundamental de construir y probar el primer prototipo del topógrafo corneal portátil en el ambiente real trabajo. Durante tres años y medio invertí todo el tiempo que fue necesario para lograr este objetivo. Muchos problemas fueron resueltos a tiempo, mientras que otros iban surgiendo naturalmente en el desarrollo de la investigación. A continuación se van a resaltar los resultados relevantes de esta tesis, las principales conclusiones de este trabajo doctoral y se mencionarán los desafíos a futuro que habrá que resolver para alcanzar la meta de desarrollar un prototipo con tecnología mexicana que pueda ser comercializado.

El primer logro obtenido en esta investigación doctoral fue desarrollar expresiones matemáticas que garantizaran la relación de las magnitudes topográficas con el vector normal de la córnea, el cual puede ser obtenido de manera sencilla con el método de pantallas nulas en el que está basado el topógrafo corneal portátil que se ha desarrollado en esta tesis. Los detalles matemáticos pueden ser vistos en el Cap. 2. En ese sentido se amplió el espectro de magnitudes que se pueden calcular con el método de pantallas nulas, ya que tradicionalmente sólo se tenía una expresión matemática para calcular la elevación de la superficie bajo prueba. Ahora no sólo es posible calcular la elevación, sino que también se puede estimar las curvaturas (sagital y meridional) y la potencia refractiva. La

única restricción que se tiene a la hora de utilizar las ecuaciones matemáticas desarrollados aquí para calcular las curvaturas, es que la superficie bajo prueba tiene que tener simetría rotacional (esta es una hipótesis usual en todos los instrumentos). Afortunadamente muchas córneas normales pueden ser tratadas con una superficie de revolución en una buena aproximación. Actualmente se está trabajando en la deducción de una expresión matemática para las curvaturas que no tenga limitantes desde el punto de vista de la superficie, ya que el cálculo del vector normal es independiente de la forma de la superficie que se está probando con el método de pantallas nulas.

Otro aspecto importante a señalar y que se referenció en el Cap. 1 y se demostró en el Cap. 3 mediante simulación numérica, es que la potencia refractiva debe ser calculada sin limitaciones paraxiales y no como lo hacen muchos topógrafos corneales, los cuales emplean una relación de proporcionalidad entre la potencia y la curvatura que sólo es válida en la región paraxial. Para evitar esto, se utilizó la ecuación propuesta por Roberts [3] para estimar la potencia refractiva en función de la elevación y los ángulos de incidencia y transmisión. Sólo fue necesario relacionar dichos ángulos con el vector normal a través de la Ley de Snell, ya que la elevación se tiene totalmente determinada con dicho vector normal. De esta manera se obtuvo una expresión matemática en función del vector normal a la superficie que no tiene limitaciones paraxiales. Esto sin lugar a dudas hace que los algoritmos y por ende los resultados obtenidos para la potencia refractiva sean más exactos que aquellos resultados obtenidos con algoritmos basados en una potencia proporcional a la curvatura. Es posible realizar a futuro una simulación numérica que incluya varios tipos de modelos matemáticos de superficies corneales para calcular la exactitud que se tiene al utilizar la ecuación propuesta en esta tesis para la potencia refractiva.

Una conclusión relevante que se obtuvo en esta tesis, es que la exactitud de las magnitudes topográficas se ve afectada cuando no se corrigen los datos de evaluación por pistón y descentramiento de la superficie corneal como se mostró en el Cap. 3 por medio de una simulación numérica. Dicha exactitud empeora con el aumento del pistón y el descentramiento corneal. El descentramiento produce un efecto simétrico sobre la exactitud de cada magnitud topográfica. Esto quiere decir que si se tiene un valor de descentramiento no importa la dirección ( $\mathbf{X}$  o  $\mathbf{Y}$ ) o el sentido (positivo o negativo) en que se de este descentramiento, el efecto sobre la exactitud será el mismo. Esto no ocurre con el pistón ya que un pistón negativo empeora más la exactitud que un pistón positivo. Otro resultado importante encontrado aquí es que al no corregir por pistón a la curvatura sagital y meridional, se produce una sobreestimación o subestimación de las curvaturas cuando el pistón es negativo o

positivo, respectivamente. Se encontró que el efecto que produce el pistón y descentramiento sobre el patrón de puntos en el CCD son de naturaleza distinta. Para el pistón este efecto se da meridionalmente, lo que hace que los centroides en el CCD se muevan en la dirección radial respecto a su posición ideal como ocurre comúnmente en un sistema óptico cuando está afectado por distorsión radial (barril o cojín). En el caso del descentramiento, el efecto es principalmente angular aunque hay un pequeño movimiento radial de los centroides respecto a su posición ideal. Los centroides que se ven más afectados por el descentramiento son aquellos que están más alejados del vértice corneal. Todo esto es motivo de publicación, razón por la cual se está preparando un manuscrito para someterlo a publicación en una revista especializada en óptica visual.

Lo dicho en el párrafo anterior muestra la necesidad de estimar el valor del pistón y del descentramiento corneal. En este sentido se ha venido trabajando y se han logrado tener resultados preliminares muy buenos en el desarrollo de un algoritmo que pueda obtener la posición del vértice corneal (pistón y descentramiento) teniendo en cuenta el patrón de puntos distorsionados que se obtiene en la imagen corneal y los puntos objetos en la pantalla nula. Se obtuvieron errores porcentuales no mayores al 0.02 % para datos simulados de superficies esféricas. En datos experimentales para una esfera de calibración los errores porcentuales no superaron el 14 %. Este algoritmo deja de funcionar muy bien cuando la superficie que se está probando tiene una radio de curvatura o una constante de conicidad diferente a la utilizada en el diseño de la pantalla nula. Esto es una gran limitante ya que generalmente la pantalla nula es diseñada con una superficie esférica de referencia mientras que la córnea está lejos de ser una esfera y de tener un único radio de curvatura. Actualmente se está intentando sobrellevar este inconveniente de tal manera que el algoritmo pueda estimar el vértice corneal para cualquier tipo de superficie. Esto se está llevando a cabo en colaboración con el grupo de Óptica Aplicada de la Universidad Nacional de Colombia (Campus: Bogotá) que dirige el **Dr. Yobani Mejía Barbosa**.

Siempre que se construye un instrumento hay que probar que tan exacto y reproducibles son los resultados que se obtienen. En esta tesis no se realizaron pruebas de reproducibilidad porque esto estuvo fuera del alcance de proyecto doctoral. Lo que sí se hizo y con excelentes resultados fueron pruebas de exactitud sobre esferas de calibración. Por ejemplo, para diferencias de elevación respecto a la misma esfera de calibración la exactitud del método de pantallas nulas anda del orden  $6.6 \mu\text{m}$  en promedio. Para los radios de curvatura se encontró una exactitud del orden de  $75 \mu\text{m}$  y  $81 \mu\text{m}$  en el mejor de los casos para el radio sagital y meridional, respectivamente. Con la potencia



refractiva también se encontró una buena exactitud, la cual no fue superior a 0.5 D. Estos resultados obtenidos experimentalmente que se muestran en el Cap. 4, son sin duda muy buenos, ya que todavía hay aspectos que se tienen que mejorar como es la impresión de la pantalla nula directamente en el cilindro, el cálculo del pistón y el descentramiento, el diseño de más puntos la parte central de la superficie, un mejor el procesamiento de la imagen, entre otros.

Finalmente se hace mención a uno de los logros más importantes de esta tesis y que corresponde a la construcción e implementación clínica del primer prototipo del topógrafo corneal portátil. Con esto se logró sacar al instrumento de un ambiente de laboratorio científico y se llevó a un contexto real de trabajo. Se tuvo una gran ganancia en la experiencia de usuario ya que la retroalimentación con éste está siendo muy útil para construir un segundo prototipo. Además, con la implementación de este prototipo en la clínica se pudo obtener un banco de imágenes que se están estudiando para mejorar los algoritmos de procesamiento de imágenes utilizados en el topógrafo. De este banco de imágenes se seleccionó la mejor y se logró tener la primera topografía corneal de una córnea *in vivo* con el topógrafo corneal portátil con deformaciones en la superficie de  $27 \mu\text{m}$  respecto a la mejor esfera (ver Cap. 5). Es así como se cumplió con el objetivo de construir un primer prototipo del topógrafo corneal. Esto nos motivó a someter la invención a una evaluación de patente ante el Instituto Mexicano de la Propiedad Intelectual con el propósito de proteger dicha invención. Esta patente fue enviada en el mes de septiembre de 2011 y actualmente se encuentra en revisión.

En los tres años y medio no sólo se consiguió desarrollar un primer prototipo del topógrafo corneal portátil, sino que también se consiguieron productos académicos que son parte fundamental de la investigación. Entre estos productos se encuentran un artículo publicado en Applied Optics que es uno de las revistas de mayor tradición en óptica a nivel mundial, dos resúmenes en extenso (proceedings) en dos de las más importantes organizaciones de óptica del mundo y dos proceedings más a nivel nacional. También se consiguió presentar una patente en México como se mencionó en el párrafo anterior. Adicional a esto, se mostró los avances de la investigación doctoral en las más importantes conferencias de óptica y óptica visual del mundo en países como México, Argentina, Brasil, Irlanda y Portugal, entre otros. En resumen a todo lo expuesto anteriormente y mostrado en esta tesis, se enumeran a continuación los logros obtenidos en esta investigación doctoral.

1. Se desarrollaron expresiones matemáticas exactas para calcular las curvatura (sagital y meridional) y la potencia refractiva de la córnea en función del vector normal de la misma.
2. Se mostró el efecto del pistón y el descentramiento en el patrón de puntos formado en el CCD.

3. Se encontró la exactitud de la reconstrucción corneal cuando no se tiene en cuenta el pistón y el descentramiento en los algoritmos de evaluación. También se mostró cual es la exactitud de dicha reconstrucción cuando se tiene en cuenta el pistón y el descentramiento.
4. Se ha avanzado en el desarrollo de un método que permita encontrar las coordenadas del vértice corneal teniendo en cuenta la imagen corneal que se obtiene para evaluación.
5. Se realizó un proceso de calibración para estimar la exactitud del topógrafo al medir la forma de superficies de calibración conocidas.
6. Se ha alcanzado una exactitud experimental para la diferencia de elevación, las curvaturas y la potencia refractiva con una cota máxima de  $7 \mu\text{m}$ ,  $75 \mu\text{m}$ ,  $81 \mu\text{m}$  y  $0.5 \text{ D}$ , respectivamente.
7. Se realizó una evaluación sobre una superficie de calibración descentrada. Los errores están dentro de los límites experimentales; con esto se demuestra que el método de pantallas nulas en el que se basa el topógrafo no sufre del error del rayo oblicuo (*skew ray*).
8. Se construyó el primer prototipo del topógrafo corneal portátil basado en el diseño que realicé en mi tesis de maestría.
9. Se ha avanzado en la construcción de un segundo prototipo que incluye mejoras respecto al primero.
10. Se desarrolló una nueva fuente de iluminación basada en LEDs de alta potencia para reemplazar la utilización de paneles electroluminiscentes.

A futuro se deben abordar los siguientes aspectos que no han sido resueltos en esta investigación:

- Ampliar las ecuaciones de curvatura corneal sin limitaciones de simetría rotacional.
- Desarrollar un algoritmo robusto o un método experimental que permita estimar las coordenadas de la superficie corneal.
- Imprimir la pantalla nula directamente en el cilindro que la contiene y no sobre una hoja de papel como se viene realizando.
- Realizar la validación del instrumento una vez que se construya el segundo prototipo y llevar a cabo pruebas de reproducibilidad en córneas *in vivo*.
- Automatizar los algoritmos de procesamiento de imágenes y de evaluación corneal. Así mismo se debe realizar una interface amigable para el usuario del topógrafo corneal portátil.

# BIBLIOGRAFÍA

- [1] M. W. Belin, S. S. Khachikian, and R. Ambrósio Jr, *Tomografía corneal basada en la elevación*, 2a ed, Jaypee-Highlights Medical Publishers, Panamá (2012).
- [2] E. Hecht, *Optics*, 3a ed, Addison-Wesley, EE.UU (1998).
- [3] C. Roberts, “The accuracy of “Power” maps to display curvature data in corneal topography systems,” *Inv. Ophthalm. Vis. Sci.* **35**, 3525-3532 (1994).
- [4] T. Fernández Peinado, D. P. Piñero, I. Alcaraz López, and J. L. Alio, “Correlation of both corneal surfaces in corneal ectasia after myopic LASIK,” *Opt. Vis. Sci.* **88**, 539-542 (2011).
- [5] P. J. Caroline, M. P. André, and C. W. Norman, “Corneal topography and computerized contact lens-fitting modules,” *Int Contact Lens Clin.* **21**, 185-195 (1994).
- [6] Y. Mejía-Barbosa and D. Malacara-Hernández, “A review of methods for measuring corneal topography,” *Opt. Vis. Sci.* **78**, 240-253 (2001).
- [7] T. Swartz, L. Marten, and M. Wang, “Measuring the cornea: the latest developments in corneal topography,” *Curr. Opin. Ophthalmol.* **18**, 325-333 (2007).
- [8] S. J. Isenberg, M. Del Signore, A. Chen, J. Wei, and P. D. Christenson, “Corneal topography of neonates and infants,” *Arch. Ophthalmol.* **122**, 1767-1771 (2004).
- [9] C. Gilbert and A. Foster, “Childhood blindness in the context of VISION 2020-The right to sight,” in *Bulletin of the World Health Organization.* **79**, 227-232 (2001).
- [10] R. Díaz-Uribe and M. Campos-García, “Null-screen testing of fast convex aspheric surfaces,” *Appl. Opt.* **39**, 2670-2677 (2000).

- 
- [11] A. Estrada-Molina, *Diseño y construcción de un videoqueratómetro portátil para uso con lactantes*, Tesis de Maestría, Universidad Nacional Autónoma de México, México (2000).
- [12] D. J. Coster, *Fundamentals of clinical ophthalmology (cornea)*, 1a ed, BMJ Books, Reino Unido (2002).
- [13] P. L. Kaufman and A. Alm, *Fisiología del ojo*, 10a ed, Elsevier, España (2014).
- [14] L. D. Bore, "Corneal topography- The dark side of the moon," In *Holography, inteferometry and optical pattern recognition in biomedicine*, **1429**, 217-228 (1991).
- [15] S. A. Klein, "Corneal topography. A review, new ANSI standars and problem to solve," In *Vision Science and its Applications*, OSA, **NW8**, 286-282 (2000).
- [16] O. N. Stavroudis, *The mathematical of geometrical and physical optics*, Wiley-VCH, Alemania (2006).
- [17] D. J. Struik, *Lectures on classical differential geometry*, 2a ed, Addison-Wesley, EE.UU (1961).
- [18] M. P. do Carmo, *Differential geometric of curves and surfaces*, Prentice Hall, EE.UU (1976).
- [19] S. A. Klein and R. B. Mandell, "Shape and refractive powers in corneal topography," *Inves. Ophthl. Vis. Sci.* **36**, 2096-2109 (1995).
- [20] S. A. Klein and R. B. Mandell, "Axial and instantaneous power conversion in corneal topography," *Inves. Ophthl. Vis. Sci.* **36**, 2155-2159 (1995).
- [21] T. O. Salmon and D. G. Horner, "Comparison of elevation, curvature, and power descriptors for corneal topography," *Opt. Vis. Sci.* **72**, 800-808 (1995).
- [22] J. D. Doss, R. L. Hutson, J. J. Rowsey, and D. R. Brown, "Method for calculation of corneal profile and power distribution," *Arch. Ophthalmol.* **99**, 1261-1265 (1981).
- [23] P. P. van Saarloos and I. J. Constable, "Improved method for calculation of corneal topography for any photokeratoscope geometry," *Opt. Vis. Sci.* **68**, 960-965 (1991).
- [24] C. Campbell, "Reconstruction of the corneal shape with MasterVue corneal topography system," *Opt. Vis. Sci.* **74**, 899-905 (1997).
- [25] R. Mattioli and N. K. Tripoli, "Corneal geometry reconstruction with Keratron videokeratographer," *Opt. Vis. Sci.* **74**, 881-894 (1997).

- 
- [26] S. A. Klein, "A corneal topography algorithm that produces continuous curvature," *Opt. Vis. Sci.* **69**, 829-834 (1992).
- [27] S. A. Klein, "Axial curvature and the skew ray error in corneal topography," *Opt. Vis. Sci.* **74**, 931-944 (1997).
- [28] S. A. Klein, "Corneal topography reconstruction algorithm that avoids the skew ray ambiguity and the skew error," *Opt. Vis. Sci.* **74**, 945-962 (1997).
- [29] J. J. Snellenburg, B. Braaf, E. A. Hermans, R. G. L. van der Heijde, and V. A. D. P. Sicam, "Forward ray tracing for image projection prediction and surface reconstruction in the evaluation of corneal topography systems," *Opt. Exp.* **18**, 19324-19338 (2010).
- [30] L. Maguire, D. Singer and S. Klyce, "Graphic presentation of computer-analyzed keratometer photographs," *Arch. Ophthalmol.* **105**, 223-230(1987).
- [31] ANSI **Z80.23-2007**, *Corneal topography system- Standard terminology, requirements*, (2007).
- [32] P. M. Kiely, G. Smith, and L. G. Carney, "The mean shape of the human cornea," *Optica Acta.* **29**, 1027-1040 (1982).
- [33] R. Lindsay, G. Smith, and D. Atchison, "Descriptors of corneal shape," *Opt. Vis. Sci.* **75**, 156-158 (1998).
- [34] R. H. Rand, H. C. Howland, and R. A. Applegate, "Mathematical model of a Placido disk keratometer and its implications for recovery of corneal topography," *Opt. Vis. Sci.* **74**, 926-930 (1997).
- [35] L. A. Carvalho, "Absolute accuracy of Placido-based videokeratographs to measure the optical aberrations of the cornea," *Opt. Vis. Sci.* **81**, 616-628 (2004).
- [36] D. Malacara, "Mathematical representation of an optical surface and its characteristics," In *Optical shop testing*, D. Malacara (Ed), **3a** ed, Wiley, EE.UU (2007).
- [37] H. Burek and W. A. Douthwaite, "Mathematical models of the general corneal surface," *Ophthal. Physiol. Opt.* **13**, 68-72 (1993).
- [38] R. Navarro, "The optical design of the human eye: a critical review," *J. Optom.* **2**, 3-18 (2009).
- [39] A. Guirao and P. Artal, "Corneal wave aberration from videoqueratopography: accuracy and limitation of the procedure," *J. Opt. Soc. Am. A.* **17**, 955-956 (2000).

- [40] V. A. D. P. Sicam, J. Coppens, J. T. P. van den Berg, and R. G. L. van der Heijde, "Corneal surface reconstruction algorithm that uses Zernike polynomials representation," *J. Opt. Soc. Am. A.* **21**, 1300-1306 (2004).
- [41] J. Schwiegerling, J. E. Greivenkamp, and J. M. Miller, "Representation of videoqueratoscopic height data with Zernike polynomials," *J. Opt. Soc. Am. A.* **12**, 2105-2113 (1995).
- [42] J. Schwiegerling, "Cone dimensions in keratoconus using Zernike polynomials," *Opt. Vis. Sci.* **74**, 963-969 (1997).
- [43] J. H. Massig, E. Lingelbach, and B. Lingelbach, "Videokeratoscope for accurate and detailed measurement of the cornea surface," *Appl. Opt.* **44**, 2281-2287 (2005).
- [44] A. H. Knoll, S. Russel, and L.W. Carol, "New photokeratoscope utilizing a hemispherical object surface," *J. Opt Soc. Am.* **47**, 221-222 (1957).
- [45] A. Reynolds, "Introduction: History of corneal measurements," In *Corneal topography measuring and modifying the cornea*, D. Schanzlin and J. Robin, Springer-Verlag, EE.UU (1991).
- [46] N. Lewis, *Corneal topography measurements for biometrics applications*, Tesis de Doctorado, Universidad de Arizona, EE.UU (2011).
- [47] Y. Mejía and J. G. Galeano, "Corneal topographer based on the Hartmann test," *Opt. Vis. Sci.* **86**, 370-381 (2009).
- [48] N. Brown, "An advanced slit-image camera," *Brit. J. Ophthalmol.* **56**, 624-631 (1972).
- [49] R. K. Snook, "Pachymetry and true topography using the Orbscan system," In *Corneal topography: The state of the art*, J. P. Gills, D. R. Sanders, S. P. Thornton, R. G. Martin, J. L. Gayton, J. T. Holladay (Eds), Slack Inc., EE.UU (1995).
- [50] Orbscan II and Orbscan IIz - Anterior segment analysis system (Operator's Manual), Bausch & Lomb, Rochester NY (2003).
- [51] G. Cairns, A. Collins, and C. N. J. MacGhee, "A corneal model for slit-scanning elevation topography," *Ophthal. Physiol. Opt.* **23**, 193-204 (2003).
- [52] T. Scheimpflug (1904), *Improved method and apparatus for the systematic alteration or distortion of plane pictures and images by means of lenses and mirrors for photography and for other purposes*, **GB1196** (Patente otorgada en Gran Bretaña).

- [53] C. Drews, "Depth of field in slit image photographic. An optical solution using the Scheimpflug principle," *Ophthalmologica*. **148**, 143-150 (1964).
- [54] N. Brown, "Slit-image photography," *Trans Ophthalmol. Soc.* **89**, 397-408 (1969).
- [55] V. Dragomirescu, O. Hockwin, H. R. Koch, and K. Sasaki, "Development of a new equipment for rotating slit image photography according to Scheimpflug's principle," *Inter. Top. Gerontol.* **13**, 118-130 (1978).
- [56] P. Jain and S. P. S. Grewal, "Pentacam: Principle and clinical applications," *JOCGP*. **3**, 20-32 (2009).
- [57] P. Rosales, *Purkinje and Scheimpflug imaging for the evaluation of crystalline and intraocular lenses in vivo*, Tesis de Doctorado, Universidad de Valladolid, España (2008).
- [58] D. Huang, E. A. Swanson, C. P. Lin, J. S. Schuman, W. G. Stinson, W. Chang, M. R. Hee, T. Flotte, K. Gregory, C. A. Puliafito, and J. G. Fujimoto, "Optical coherence tomography," *Science*. **254**, 1178-1181 (1991).
- [59] A. F. Fercher, W. Drexler, C. K. Hitzenberger, and T. Lasser, "Optical coherence tomography-principles and applications," *Rep. Prog. Phys.* **66**, 239-303 (2003).
- [60] M. Brezinski, *Optical coherence tomography: Principles and applications*, Elsevier, EE.UU (2006).
- [61] I. I. K. Ahmed, "Anterior segment optical coherence tomography in Glaucoma," *J. Curr. Glauc. Pract.* **3**, 14-23 (2009).
- [62] S. Ortiz, D. Siedlecki, L. Remon, and S. Marcos, "Optical coherence tomography for quantitative surface topography," *Appl. Opt.* **48**, 6078-6715 (2009).
- [63] S. Ortiz-Egea, *Quantitative anterior segment optical coherence tomography*, Tesis de Doctorado, Universidad de Valladolid, España (2012).
- [64] V. Westphall, A. M. Rollins, S. Radhakrishnan, and J. A. Izzat, "Correction of geometric and refractive image distortions in optical coherence tomography applying Fermat's principle," *Opt. Exp.* **10**, 397-404 (2002).
- [65] S. Ortiz, D. Siedlecki, I. Grulkowski, L. Remon, D. Pascual, M. Wojtkowski, and S. Marcos, "Optical distortion correction in optical coherence tomography for quantitative ocular anterior segment by three-dimensional imaging," *Opt. Exp.* **18**, 2782-2796 (2010).

- [66] J. A. Izatt, M. R. Hee, E. A. Swanson, C. P. Lin, D. Huang, J. S. Schuman, C. A. Puliafito, and J. G. Fujimoto, "Micrometer-Scale resolution imaging of the anterior eye in vivo with optical coherence tomography," *Arch. Ophthalmol.* **112**, 1584-1589 (1994).
- [67] E. B. Rodrigues, M. Johanson, and F. M. Penha, "Anterior segment tomography with the Cirrus optical coherence tomography," *J. Ophthalmol.* **2012**, 1-5 (2012).
- [68] H. Ishikawa and J. S. Schuman, "Anterior segment imaging: Ultrasound biomicroscopy," *Ophthalmol. Clin. North. Am.* **17**, 7-20 (2004).
- [69] J. F. Koretz, S. A. Strenk, L. M. Strenk, and J. L. Semmlow, "Scheimpflug and high-resolution magnetic resonance imaging of the anterior segment: a comparative study," *J. Opt. Soc. Am. A.* **21**, 346-354 (2004).
- [70] M. Campos-García, R. Díaz-Uribe, and F. Granados-Agustín, "Testing fast aspheric convex surfaces with a linear array of sources," *Appl. Opt.* **43**, 6255-6264 (2004).
- [71] L. Carmona-Paredes and R. Díaz-Uribe, "Geometric analysis of the null screen used for testing convex optical surfaces," *Rev. Mex. Fís.* **53**, 421-430 (2007).
- [72] M. Campos-García, R. Bolado-Gómez, and R. Díaz-Uribe, "Testing aspheric concave surfaces with a cylindrical null screen," *Appl. Opt.* **47**, 849-859 (2008).
- [73] M. Campos-García, "Prueba de superficies esféricas rápidas con pantallas nulas," Tesis de Doctorado, Universidad Nacional Autónoma de México, México (2005).
- [74] I. Funes-Maderey, "Videoqueratometría de campo plano," Tesis de Licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México, México (1998).
- [75] R. Colín, "Nuevos desarrollos en videoqueratometría de campo plano," Tesis de Licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México, México (2007).
- [76] D. Malacara-Doblado and I. Ghozeil, "Hartmann, Hartmann-Shack, and other screen tests," In *Optical shop testing*, D. Malacara (Ed), **3a** ed, Wiley-Interscience, EE.UU (2007).
- [77] R. Díaz-Uribe, "Medium-precision null-screen testing of off axis parabolic mirrors for segmented primary telescope optics: the large millimeter telescope," *Appl. Opt.* **39**, 2790-2804 (2000).
- [78] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical recipes*, **3a** ed, Cambridge University Press, EE.UU. (2007).



- [79] J. Schwiegerling and J. E. Greivenkamp, "Using corneal height maps and polynomial decomposition to determine corneal aberrations," *Opt. Vis. Sci.* **74**, 906-916 (1997).
- [80] C. Menchaca and D. Malacara, "Directional curvature in a conic mirror," *Appl. Opt.* **23**, 3258-3260 (1984).
- [81] A. Estrada-Molina and R. Díaz-Urbe, "Tangential and sagittal curvature from normals computed by null screen method in corneal topography," *Proc. SPIE* **8011**, 80119J (2011).
- [82] A. Estrada-Molina, M. Campos-García, and R. Díaz-Urbe, "Sagittal and meridional radii of curvature for a surface with symmetry of revolution by using a null-screen testing method," *Appl. Opt.* **52**, 625-634 (2013).
- [83] P. R. Bevington and D. K. Robinson, *Data reduction and error analysis for the physical sciences*, McGraw-Hill, EE.UU (1992).
- [84] C. Roberts, "Characterization of the inherent error in a spherically-biased corneal topography system in mapping a radially aspheric surface," *J. Refract. Corneal. Surg.* **10**, 103-111 (1994).
- [85] J. E. Greivenkamp, M. D. Mellinger, R. W. Snyder, J.T. Schwiegerling, A. E. Lowman, and J. M. Miller, "Comparison of three videokeratoscopes in measurement of toric test surfaces," *J. Refract. Surg.* **36**, 229-239 (1996).
- [86] C. Roberts, "Accuracy of instantaneous radius of curvature algorithm in four Placido-ring based corneal topography devices using surfaces with aspheric profiles," *Invest. Ophthalmol. Vis. Sci.* **37**, 2558(suppl.) (1996).
- [87] Keratron (Operator's Manual), Optikon, Italy (2014).
- [88] R. Mattioli (1996), *Apparatus for topographical analysis of cornea*, **US5526073** (Patent).
- [89] H. D'Souza and E. J. Sarver (1999), *Multi-camera corneal analysis system*, **US5953100** (Patent).
- [90] R. A. Gordon and P. B. Donzis, "Refractive development of the human eye," *Arch Ophthalmol.* **103**, 785-789 (1985).
- [91] A. K. Gathak and K. Tahyagarajan *Contemporary Optics*, Plenum Press, EE.UU (1978).
- [92] K. S. Choi, E. Y. Lam, and K. K. Y. Wong, "Automatic source camera identification using the intrinsic lens radial distortion," *Opt. Express.* **14**, 11551-11565 (2006).

# PRODUCCIÓN BIBLIOGRÁFICA DE LA TESIS DOCTORAL

Este apéndice se refiere a toda la producción bibliográfica que se obtuvo en los tres años y medio en que se desarrolló esta investigación doctoral. En Septiembre de 2011, se solicitó ante la Instituto Mexicano de la Propiedad Intelectual (IMPI), la revisión de la originalidad de la propuesta del topógrafo corneal. A la fecha de publicación de esta tesis, el IMPI sigue en proceso de revisión de dicha solicitud de patente. También, se incluye un artículo arbitrado publicado en *Applied Optics* que es una de las revistas de mayor tradición en óptica y que pertenece a la Sociedad Americana de Óptica (OSA, por sus siglas en inglés). Además se incluyen cuatro *proceedings*, que corresponden a trabajos presentados en conferencias internacionales. A continuación se describe dicha producción bibliográfica.

## Patente Solicitada

- José Rufino Díaz Uribe y Amilcar Javier Estrada Molina, *Dispositivo o aparato que permite realizar estudios de topografía corneal en lactantes e infantes*, Patente solicitada ante el Instituto Mexicano de la Propiedad Intelectual en México, No. Expediente: **MX/a/2011/009884**.

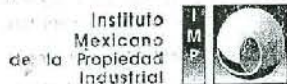
## Artículo Arbitrado

- Amilcar Estrada-Molina, Manuel Campos-García, and Rufino Díaz-Urbe, “Sagittal and meridional radii of curvature for a surface with symmetry of revolution by using a null-screen testing method,” *Appl. Opt.* **52**, 625-634 (2013).

## Proceedings

- Amilcar Estrada-Molina, Manuel Campos-García, and Rufino Díaz-Urbe, “Elevation Maps with and without Defocus Correction by Using Null Screen Testing: A Potential Application for Corneal Topography”, In Latin American Optics and Photonics Conference, (Optical Society of America, Washington, DC, 2012) **LT2A.15**.
- Amilcar Estrada-Molina and Rufino Díaz-Urbe, “Tangential and sagittal curvature from normals computed by null screen method in corneal topography,” Proc. SPIE **8011**, 80119J (2011).
- Manuel Campos-García, Amilcar Estrada-Molina, and Rufino Díaz-Urbe, “Evaluation of the Principal Radius of Curvature of a Convex Surface with Null-Screen Method”, In Mexican Optics and Photonics Meeting, (Academia Mexicana de Óptica, 2012), **MOPM-2012-OP-31**.
- Manuel Campos-García, Amilcar Estrada-Molina, and Rufino Díaz-Urbe, “Corneal topography with null-screen”, In 2<sup>nd</sup> International Congress on Instrumentation and Applied Optics, Mexico (2011).

En las siguientes paginas se muestran la primera hoja de los documentos que acreditan dicha producción bibliográfica.



**INSTITUTO MEXICANO DE LA PROPIEDAD INDUSTRIAL**  
 Dirección Divisonal de Patentes

Solicitud de Patente  
 Solicitud de Registro de Modelo de Utilidad

Solicitud de Registro de Diseño Industrial, especifique cuál:  
 Modelo Industrial  Dibujo Industrial

Uso exclusivo Delegaciones y Subdelegaciones de la Secretaría de Economía y Oficinas Regionales del IMPI

Sello

Folio de entrada

Fecha y hora de recepción

Solicitud  
 Expediente: MX/a/2011/020884  
 Fecha: 21/SEP/2011 Hora: 14:10  
 Folio: MX/E/2011/065739 49559



Antes de llenar la forma lee las consideraciones generales al reverso

**I DATOS DEL (DE LOS) SOLICITANTE(S)**

El solicitante es el inventor   solicitante es el causahabiente

1) Nombre (s): UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO.  
 2) Nacionalidad (es): MEXICANA.  
 3) Domicilio: calle, número, colonia y código postal: 9º PISO DE LA TORRE DE RECTORÍA S/N, CIUDAD UNIVERSITARIA, DELEGACIÓN COYOACÁN, C.P. 04510.  
 Población, Estado y País: MÉXICO, DISTRITO FEDERAL.  
 4) Teléfono (clave): 56 22 63 29 AL 31 5) Fax (clave): 56 65 46 44

**II DATOS DEL (DE LOS) INVENTOR(ES)**

6) Nombre (s): JOSÉ RUFINO DÍAZ URIBE Y AMILCAR JAVIER ESTRADA MOLINA  
 7) Nacionalidad (es): MEXICANA Y COLOMBIANA  
 8) Domicilio: calle, número, colonia y código postal: ALMANALCO 47, COL. VERGEL DE COYOACÁN, DELEGACIÓN TLALPÁN, C.P. 14340  
 Población, Estado y País: DISTRITO FEDERAL, MÉXICO  
 9) Teléfono (clave): 10) Fax (clave):

**III DATOS DEL (DE LOS) APODERADO(S)**

11) Nombre (s): LIC. ALEJANDRO FERNÁNDEZ VARELA JIMÉNEZ R.G.P. DLI-14782  
 13) Domicilio: calle, número, colonia y código postal: EDIFICIO "B" 3er. PISO, ZONA CULTURAL DE CIUDAD UNIVERSITARIA, DELEGACIÓN COYOACÁN, C.P. 04510.  
 Población, Estado y País: MÉXICO, DISTRITO FEDERAL. 14) Teléfono (clave): 58 22 63 29 AL 31 15) Fax (clave): 56 65 46 44  
 16) Personas Autorizadas para oír y recibir notificaciones: LIC. CLAUDIA LIZBETH LLANOS ARGUELLO, LIC. MARTHA FIGUEROA PÉREZ, LIC. YESICA MARIBEL CORONEL RIVERA Y LIC. ROCIO JUÁREZ VÁZQUEZ.

17) Denominación o Título de la invención: "DISPOSITIVO O APARATO PORTÁTIL QUE PERMITE REALIZAR ESTUDIOS DE TOPOGRAFÍA CORNEAL EN LACTANTES E INFANTES"

18) Fecha de divulgación previa  
 Día Mes Año

19) Clasificación Internacional uso exclusivo del IMPI

20) Divisonal de la solicitud  
 Número

21) Fecha de presentación  
 Día Mes Año

22) Prioridad Reclamada:  
 País Número Fecha de presentación No. de serie  
 Día Mes Año

**Lista de verificación (uso interno)**

No. Hojas		No. Hojas	
X 1	Comprobante de pago de la tarifa	X 2	Documento de cesión de derechos
X 19	Descripción y reivindicación (es) de la invención		Constancia de depósito de material biológico
X 2	Dibujo (s) en su caso		Documento (s) comprobatorio(s) de divulgación previa
X 1	Resumen de la descripción de la invención		Documento (s) de prioridad
X 1	Documento que acredita la personalidad del apoderado		Traducción
		26	TOTAL DE HOJAS

Observaciones:

Bajo protesta de decir verdad, manifiesto que los datos asentados en esta solicitud son ciertos.

LIC. ALEJANDRO FERNÁNDEZ VARELA JIMÉNEZ CD. UNIVERSITARIA D.F. A 19 DE SEPTIEMBRE DE 2011  
 Nombre y firma del solicitante o su apoderado

# Sagittal and meridional radii of curvature for a surface with symmetry of revolution by using a null-screen testing method

Amilcar Estrada-Molina,\* Manuel Campos-García, and Rufino Díaz-Uribe

Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico, Universidad Nacional Autónoma de México, Circuito Exterior S/N, Ciudad Universitaria, Apto. Postal 70-186, Delegación Coyoacán, Mexico D.F., C.P. 04510, Mexico

\*Corresponding author: amilcar.estrada@ccadet.unam.mx

Received 23 October 2012; revised 14 December 2012; accepted 17 December 2012;  
posted 17 December 2012 (Doc. ID 178543); published 30 January 2013

An algorithm to compute the sagittal and meridional radii of curvature for a surface of revolution is presented. The sagittal radius is obtained from the surface normal, and the meridional radius is calculated from a function fitted to the derivative of the sagittal curvature by using the surface-normals raw data. A calibration spherical surface is tested by using the null-screen testing method. Experimental results of the spherical surface show that the sagittal and meridional radii of curvature differ by 2.600% and 2.604%, respectively, with respect to the actual radius of the calibration spherical surface. © 2013 Optical Society of America

OCIS codes: 330.7325, 080.2720, 330.7327, 120.3930, 080.0080.

## 1. Introduction

The null-screen testing method is based on having a set of dots or lines which are drawn on a screen in such a way that its image obtained by reflection off the test surface becomes a perfect pattern of radial or square arrangement, either circles or lines, as long as the test surface is perfect. Any departure from this pattern is indicative of defects of the test surface or its defocusing, or its misalignment, i.e., it is a null test [1]. The advantage of using the null-screen method to test an optical surface is that it does not require the design of an additional optical system for the evaluation of the surface; it only needs a conventional optical system to view the virtual image formed behind the surface. The null-screen testing method can be used to test a surface with or without symmetry of revolution, free-form surfaces, fast aspherical convex and concave surfaces [1–4]. The testing can even be used to evaluate corneal

topography [5–8], which has recently become exciting work for the optical engineer since the cornea has an important role in the viewing of high-quality images on the retina, contributing nearly 74% of the total dioptric power of the eye.

Traditionally, the null-screen testing method has been used to measure the shape of the test surface, but in this paper, we will use this testing method for proposing an algorithm to calculate the principal radii of curvature of any surface of revolution. It is important to mention that this work is only the first part of a new corneal topographer prototype to measure the corneal topography in neonates and infants. This prototype is being developed in the Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico of the Universidad Nacional Autónoma de México in collaboration with Dr. Marco Ramírez Ortiz, who is pediatric ophthalmologist of the Hospital Infantil de México Federico Gómez [7].

On the other hand, from the point of view of differential geometry, a curve formed by the intersection of a surface and a plane that contains the surface normal is called a normal section. There are exactly two

# Elevation Maps with and without Defocus Correction by Using Null Screen Testing: A Potential Application for Corneal Topography

**Amilcar Estrada-Molina, Manuel Campos-García and Rufino Díaz-Uribe**

*Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico, Universidad Nacional Autónoma de México,  
Apto. Postal 70-186, C.P 04510, México D.F., México  
amilcar.estrada@ccadet.unam.mx*

**Abstract:** Elevation maps for a calibration sphere with and without defocus correction were obtained. Experimental results of two different evaluations show that when the defocus correction was performed these maps decrease around two orders of magnitude.

© 2012 Optical Society of America

**OCIS codes:** 120.2830, 330.4460, 330.7325 .

## 1. Introduction

Traditionally when testing a surface by using a null screen, a reference surface as approximation to the test surface is used. Reference surface is represented by a function  $z = f(x, y)$  with its vertex on the origin of coordinates [1–3]. The last can be experimentally ensured placing the test surface on three linear precision stages configured into **XYZ** arrangements, to ensure an easy centered along the **X** and **Y** axis and a proper focus on the **Z**-axis. Sometimes, the centering of the tested surface is achieved and the evaluation can be performed; however, when the image is captured it has an amount of defocus that must be corrected. In corneal topography this problem is frequently presented. Many topographers captured the image of the cornea when it has proper focus; for example, the Keratron Piccolo topographers utilizes a patented eye positioning control system (EPCS) that includes descentration correction [4]. The EPCS consists of an infrared source and a detector located opposite each other on the outer aperture of the cone. Proper focus occurs when the vertex of the cornea lies in the plane of the aperture of the cone. When the IR detector sees the vertex of the cornea centered, an image is automatically captured. The EPCS works well when the subject has the eye wide open. If it is not sufficiently wide open, the corneal vertex with the lashes will be confused, and an incorrect location of the cornea is assumed. As a consequence, incorrect results can be obtained (e.g. such as a steeper cornea when certainly it is not) [5]. That is why, it is more convenient to capture the image of the cornea without taking into account its position on the **Z**-axis, so that the defocus of the surface can be found by using of the information extracted from the captured image and of an iterative algorithm developed for this purpose. Then, we will be ready to obtain the elevation maps of the test surface. In this study, a brief explication about how to obtain the defocus of test surface is given. Subsequently, we show the experimental results in the evaluation of a spherical surface (steel ball) with radius of curvature  $r = 6.375$  mm, for both cases; with and without defocus correction.

## 2. Methods and experimental results

We performed a test of a steel ball with a radius of curvature  $r = 6.375$  mm. Null-screen was wrapped around and placed inside an acrylic cylinder (18 mm in diameter and 36.010 mm length) to give it mechanical strength. Image of the tested surface was acquired with a CMOS camera (Thorlabs Model DCC1645C) with a sensitive area of 4.610 mm  $\times$  3.690 mm (1280  $\times$  1024 pixels), and a 16 mm focal length Tamron video lens attached. A picture of the experimental setup and the two images used for the evaluation are show in Fig. 1

The vertex of the surface was calculated as follows: First, image processing was performed to facilitate the task of finding the  $(x, y)$  coordinates of the centroids of the dark spots of the Fig. 1(b) and 1(c). Second, a ray tracing from centroid point on the image plane to reference surface and then to null screen was performed to obtain a new points on null screen. Surface reference was moved iteratively along the **Z**-axis (For simplicity, the centering of the tested surface was ensured to have a single degree of freedom in the algorithm). Third, the sum of the Euclidean distance  $d$ , between the actual points and new points on the null screen was obtained. Each value  $d$  and the coordinates of the

# Tangential and sagittal curvature from the normals computed by the null screen method in corneal topography

Amilcar Estrada-Molina<sup>a</sup> and Rufino Díaz-Uribe<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Universidad Nacional Autónoma de México,  
Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico, Apto. Postal 70-186, C.P 04510,  
México, D.F.

## ABSTRACT

A new method for computing the tangential and sagittal curvatures from the normals to a cornea is proposed. The normals are obtained through a Null Screen method from the coordinates of the drops shaped spots at the null screen, the coordinates on a reference approximating surface and the centroids on the image plane. This method assumes that the cornea has rotational symmetry and our derivations will be carried out in the meridional plane that contains the symmetry axis. Experimental results are shown for a calibration spherical surface, using cylindrical null screens with radial point arrays.

**Keywords:** Corneal Topography, null screen, tangential and sagittal curvatures and optical metrology

## 1. INTRODUCTION

The cornea is the most important refracting element in the optical system of the eye, because it contributes nearly 74% of the total dioptric power of eye.<sup>1</sup> This feature is crucial in the formation of high-quality images on the retina. That is why it has become in recent years an exciting work for opticians, trying to measure the elevation, curvature and dioptric power of the surface (Corneal Topography). This has allowed a better understanding of that surface because there have been developed new experimental methods and new theoretical models to enrich the measurement of the corneal topography in clinical practice. For example, some years ago, Díaz-Uribe and Granados-Agustín proposed a new technique based on the scanning of the corneal surface with a low power HeNe laser beam; they showed that by measuring the deflection of the reflected beam, it is possible to compute the shape of the scanned cornea.<sup>2</sup> Carvalho built a wavefront sensor of a set of concentric “half-donut” surfaces (longitudinally sectioned toroids) molded on an acrylic surface with a CCD located at the focal plane; when these surface are illuminated with a plane wavefront, they focus a symmetric pattern of concentric discs on the CCD plane; for a distorted wavefront, a nonsymmetric disc pattern is formed (similar to images of a placido-based videokeratographer). From detection of shift in the radial direction, radial slopes are computed for a maximum of 2880 points, and the traditional least-squares procedure is used to fit these partial derivatives to a set of 15 conventional Zernike polynomials.<sup>3</sup> More recently Mejía developed a prototype of a corneal topographer based on the Hartmann test, where a the Hartmann pattern is generated by the surface under test from a set of point sources located on a ellipsoidal screen for having a nearly zero field curvature, and by the Fourier analysis and the optical aberration theory they obtain the sagitta (elevation map) of the surface. Then, taking the first and the second derivatives of the sagitta in the radial direction they obtain the meridional curvature map.<sup>4</sup>

The corneal topography methods most widely used in clinical practice and reported in scientific literature, can be classified according to the optical phenomenon that they are based; specular reflection (Placido disk-based Systems, Interferometry and Moiré Deflectometry), where the cornea is considered like an optical surface, soft, smooth and reflective, coated on the tear film. Diffuse reflection (The Moiré Fringe Systems, Rasterstereography and Fourier Transform Profilometry), where a small amount of fluorescein be placed in the tear film to transform the corneal surface in a diffuse reflector. Scattered light (Slitlamp System) uses the scattering phenomenon of the light when it is transmitted in an optical medium.

In Mexico, in the Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico of the Universidad Nacional Autónoma de México there is a work group that have been working in corneal topography using the Null Screen method

E-mail author: amilcar.estrada@ccadet.unam.mx and rufino.diaz@ccadet.unam.mx.



## Evaluation of the principal radius of curvature of a convex surface with the null-screen method

Manuel Campos-García<sup>(1)</sup>, Amílcar Estrada-Molina<sup>(1)</sup>, Rufino Díaz-Uribe<sup>(1)</sup>

1. Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico, Universidad Nacional Autónoma de México, Circuito Exterior S/N, Ciudad Universitaria, A. P. 70-186, Delegación Coyoacán, C.P. 04510, México D. F. Mexico  
Corresponding author email: manuel.campos@ccadet.unam.mx

### ABSTRACT:

The null-screen method has been used to test aspheric surfaces. This geometrical method measures the slope of the test surface and from these measurements it is possible to calculate the principal radius of curvature. Sagittal radius is obtained from the surface normals and the meridional radius is calculated from a function fitted to the derivative of the sagittal curvature.

**Key words:** Null screen, Optical testing, Aspherics, Surface measurements, Radius of curvature

### REFERENCES AND LINKS

- [1] R. Díaz-Uribe, M. Campos-García, "Null screen testing of fast convex aspheric surfaces", Appl. Opt. 39, 2670-2677 (2000).
- [2] M. Campos-García, R. Diaz-Uribe and F. Granados-Agustin, "Testing fast aspheric convex surfaces with a linear array of sources," Appl. Opt. 43(34), 6255-6264 (2004).

### 1. Introduction

In a previous work [1], we proposed a null screen method to test fast aspheric convex surfaces. The method consists of drawing a set of spots on a cylinder in such a way that by reflection on the test surface, the image consists of a perfect pattern of radial or square arrangement of circles or lines, as long as the test surface is perfect. Here the whole surface is tested at once. This method measures the shape of the test surface from slope measurements.

### 2. Radius of curvature from normals data

To calculate the surface normals  $\mathbf{N} = (n_x, n_y, n_z)$  on each point on the test surface, we perform a three-dimensional ray trace to find the direction of the reflected  $\mathbf{r}_r$  and the incident ray  $\mathbf{r}_i$  [2]. From reflection law, the surface normal  $\mathbf{N}$  can be obtained according to

$$\mathbf{N} = \mathbf{r}_r - \mathbf{r}_i, \quad (1)$$

From the normals measurements the sagittal radius of curvature can be obtained from

$$r_{sag} = -(x^2 + y^2)^{1/2} \left\{ x^2 + y^2 + \left( x \frac{n_x}{n_z} + y \frac{n_y}{n_z} \right)^2 \right\}^{1/2} \bigg/ x \frac{n_x}{n_z} + y \frac{n_y}{n_z}, \quad (2)$$



### CORNEAL TOPOGRAPHY WITH NULL-SCREENS

Manuel Campos-García, Amílcar Estrada-Molina and Rufino Díaz-Urbe.

manuel.campos@ccadet.unam.mx

Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico,  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Apdo. Postal 70-186, 04510, D.F. México.

#### ABSTRACT

The principles of the null screen method for measuring the corneal topography have been applied since several years ago. In this work, we propose to calculate the local curvatures of the corneal surface from the normals to the surface to obtain power maps (sagittal and meridional). This we consider both a cylindrical and a conical null-screen to compare their performance in accuracy. Additionally, we performed a numerical simulation introducing Gaussian random errors in the coordinates of the centroids of the spots on the image plane, and in the coordinates of the sources (spots on the null-screen) to optimize the surface where the null-screens is drawn for reducing the error in the evaluation of the topography.

#### 1. INTRODUCTION

In recent years, there has been increased interest in quantitative measurements of the shape, curvature and dioptric power (Corneal Topography) of the surface of the human cornea. In particular, keratorefractive surgical procedures demand precise measurement of the corneal surface in order to correct properly the refractive state of the eye; thus topographic measurements of the corneal surface are important in planning, performing, and assessing the effects of these procedures. This is due since the cornea is the most important refracting element in the optical system of the eye, because it contributes nearly 74% of the total dioptric power of eye.

The current methods for determining the shape of the corneal surface are mainly based on Placido's disk, are inadequate in terms of accuracy, and their limitations have recently been recognized. In principle, this disk is a plate with concentric bright and dark rings. A virtual image of these rings is formed by the reflection off the tear film on the cornea. Regularly, in the commercially available videokeratoscopes the rings are attached to a concave surface in order to reduce the field curvature of the image. The image is captured by a CCD camera that is placed behind a central bore in the plate. The numerical evaluation of the image proceeds along meridians. For this, the center of the innermost ring or the intersection of the instrument axis with the cornea is taken as the center of these meridians. An algorithm finds the intersections of the rings and the meridian, and a local radius of curvature can be calculated using the distances of the intersections of neighboring rings. In this way, a number of tangential radii are found for each meridian. The curvature is related to the first and the second derivative of the corneal height. Finally, this height can be calculated by a numerical integration along the meridians.

In a previous work [1], we proposed a null screen method to test fast aspheric convex surfaces. The method consists of drawing a set of curved lines on a cylinder in such a way that by reflection on the test surface, the image consists of a perfect square grid. Here the whole surface is tested at once. The proposal of using a cylinder as the object comes from the fact that, from paraxial calculations it can be shown that for a convex spherical reflecting surface, the real object having a plane image, is a highly eccentric ellipsoidal surface. However, building ellipsoidal surfaces is an

