



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS  
Instituto de Ciencias Nucleares

## Cuantización Topológica del Hoyo Negro de Reissner-Nordström

**TESIS**

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

**MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)**

PRESENTA:

**Luis Daniel Soto Lastiri**

DIRECTOR DE TESIS: Dr. Hernando Quevedo Cubillos  
Instituto de Ciencias Nucleares

MIEMBRO DEL COMITÉ TUTOR: Dr. Erick Leonardo Patiño Jaidar  
Facultad de Ciencias

MIEMBRO DEL COMITÉ TUTOR: Dr. José Antonio García Zenteno  
Instituto de Ciencias Nucleares

México, D. F., Agosto de 2014.



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



*A mis padres Rogelio y Graciela.*



# Agradecimientos

Quisiera ocupar estas líneas para agradecer a todas aquellas personas que estuvieron tanto en los momentos buenos como en los momentos difíciles que pasé a lo largo de mi estancia en el PCF. Agradecimiento especial se merecen mis padres Rogelio Soto Ayala y Graciela Lastiri Huerta quienes siempre estuvieron ahí para apoyarme, en cualquier circunstancia, y quienes me dieron fuerza para alcanzar mis objetivos. Quisiera agradecer también ampliamente a mi tutor, el Dr. Hernando Quevedo Cubillos, quien siempre estuvo pendiente de mi avance académico y no sólo eso, sino que también fue un gran consejero y amigo durante mi estancia en el Posgrado, y que sin duda lo seguirá siendo. A aquellas personas, compañeros y amigos que conocí durante el Posgrado, por retroalimentarme y prestarse a valiosas discusiones, todo con el vívido afán de contribuir al entendimiento de la ciencia. No quisiera dar nombres, porque han sido innumerables las personas de las cuales he recibido un gran apoyo tanto a nivel personal, administrativo y académico, sin embargo, tengan presente que a todas ellas les estoy muy agradecido.



# RESUMEN

## CUANTIZACIÓN TOPOLÓGICA DEL HOYO NEGRO DE REISSNER-NORDSTRÖM

Luis Daniel Soto Lastiri  
Instituto de Ciencias Nucleares, Universidad Nacional Autónoma de México  
Maestro en Ciencias (Física)

Este trabajo de tesis consiste básicamente en aplicar el método de Cuantización Topológica al sistema gravitacional clásico descrito por la métrica de Reissner-Nordström. En la primera parte de esta tesis se deriva la solución de Reissner-Nordström (R-N) y se estudian las propiedades geométricas de esta solución, poniendo especial énfasis en la estructura del espaciotiempo fuera y dentro del horizonte de eventos. También se construye la máxima extensión analítica de este espaciotiempo (coordenadas de Kruskal-Szekeres) y se analiza R-N en coordenadas isotrópicas. En el capítulo siguiente se introduce lo que es en sí el formalismo de Cuantización Topológica y se enuncia y demuestra el teorema en el que se basa este formalismo (Teorema Básico de Cuantización Topológica), particularizándolo al caso de campos gravitacionales con simetría de norma  $U(1)$  y simetría espaciotemporal  $SO(3,1)$ . Más aún, se introduce el concepto de espectros topológicos, los cuales son relaciones funcionales entre los parámetros físicos que describen al sistema clásico y números enteros, y se dice cómo calcularlos. Posteriormente, en el capítulo subsecuente se aplica este formalismo a la configuración clásica que nos interesa, esto es, al hoyo negro de R-N y se obtienen los espectros topológicos tanto para el grupo  $U(1)$  como para el grupo  $SO(3,1)$ . También se analiza la versión euclidiana de R-N y se obtiene el respectivo espectro topológico tomando como grupo de simetría el grupo  $SO(4)$ . Con estos espectros ( $U(1)$  y  $SO(4)$ ) se obtienen relaciones de discretización para los parámetros físicos que describen a la solución clásica, es decir, se discretizan la masa  $M$  y la carga eléctrica  $Q$ . Finalmente, en el último capítulo, se hace un breve resumen de la termodinámica de hoyos negros así como de las leyes mecánicas que rigen estos sistemas gravitacionales, enfocándonos al caso de R-N. Más aún, con la fórmula de Bekenstein-Hawking que relaciona la entropía de un hoyo negro con el área del horizonte de eventos ( $S = A/4$ ), se obtiene una discretización para la entropía de los hoyos negros (euclidianos) de R-N.



## ABSTRACT

### TOPOLOGICAL QUANTIZATION OF THE REISSNER-NORDSTRÖM BLACK HOLE

Luis Daniel Soto Lastiri  
Instituto de Ciencias Nucleares, Universidad Nacional Autónoma de México  
Maestro en Ciencias (Física)

This thesis work consists basically in applying the method of Topological Quantization to the classical gravitational system described by the Reissner-Nordström metric. In the first part of this thesis, it is derived the Reissner-Nordström (R-N) solution and studied the geometric properties of it, paying special attention to the structure of spacetime outside and inside the event horizon. It is also constructed the maximal analytical extension of this spacetime (Kruskal-Szekeres coordinates) and analyzed R-N in isotropic coordinates. In the next chapter, it is introduced the formalism of Topological Quantization and it is stated and proved the theorem in which this formalism is based on (Basic Theorem of Topological Quantization), particularizing it to the case of gravitational fields with  $U(1)$  gauge symmetry and  $SO(3,1)$  spacetime symmetry. Furthermore, the concept of topological spectra is introduced, which are functional relations between the physical parameters describing the classical system and integer numbers, and it is noted how to calculate them. Later on, in the next chapter, we apply this formalism to the classical configuration we are interested in, this is to say, to the R-N black hole, and obtain the topological spectra for the  $U(1)$  gauge group as well as for the  $SO(3,1)$  group. Moreover, we analyze the euclidian version of R-N and calculate the corresponding topological spectrum taking the group  $SO(4)$  as the symmetry group. With these spectra ( $U(1)$  y  $SO(4)$ ) we obtain discretization relations for the physical parameters entering the classical solution, namely, the mass  $M$  and the electric charge  $Q$  are discretized. Finally, in the last chapter, we make a short summary of black hole thermodynamics and the mechanical laws that rule these gravitational systems, putting special emphasis in the R-N case. Even more, with the help of the Bekenstein-Hawking formula that relates the entropy of a black hole to the event horizon area ( $S = A/4$ ), we obtain a discretization for the entropy of the (euclidian) R-N black holes.



# Índice general

Agradecimientos	III
Resumen (español)	V
Resumen (inglés)	VII
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Métrica de Reissner-Nordström</b>	<b>5</b>
2.1. Propiedades Geométricas de la métrica de Reissner-Nordström . . . . .	6
2.2. Singularidades de curvatura (esenciales) vs. Singularidades coordenadas . . . . .	7
2.3. Máxima extensión analítica del espaciotiempo de Reissner-Nordström . . . . .	8
2.4. Coordenadas Isotrópicas para Reissner-Nordström . . . . .	11
<b>3. Cuantización Topológica</b>	<b>15</b>
3.1. El método . . . . .	15
3.2. Teorema Básico de Cuantización Topológica . . . . .	16
<b>4. Espectro topológico del hoyo negro de Reissner-Nordström</b>	<b>21</b>
4.1. Espectro utilizando como fibra estándar el grupo $U(1)$ . . . . .	21
4.2. Espectro utilizando como fibra estándar el grupo $SO(3,1)$ . . . . .	24
4.2.1. Coordenadas tipo esféricas . . . . .	24
4.2.2. Coordenadas de Kruskal-Szekeres . . . . .	28
4.3. Versión euclidiana del hoyo negro de Reissner-Nordström y cuantización de la masa y carga . . . . .	30
4.4. Discusión . . . . .	33
<b>5. Termodinámica de hoyos negros</b>	<b>35</b>
5.1. Las leyes clásicas de la mecánica de hoyos negros . . . . .	35
5.1.1. Ley cero . . . . .	35
5.1.2. Primera ley . . . . .	35
5.1.3. Segunda ley . . . . .	36
5.1.4. Tercera ley . . . . .	36
5.2. Temperatura de Hawking y relación de las leyes anteriores con las leyes termodinámicas ordinarias . . . . .	36
5.3. Entropía de hoyos negros . . . . .	39
5.3.1. Relación del espectro topológico con la entropía del hoyo negro de Reissner-Nordström . . . . .	39
<b>6. Conclusiones</b>	<b>41</b>
<b>A. Función de Transición para un Grupo de Lie <math>G</math></b>	<b>45</b>
<b>B. Gravedad superficial del hoyo negro de Reissner-Nordström</b>	<b>47</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>48</b>



# Capítulo 1

## Introducción

La Teoría de la Relatividad General formulada por Albert Einstein en 1915 es, a mi parecer, la teoría física más hermosa que existe hasta el momento. Parte de su belleza reside en el hecho que relaciona las propiedades geométricas del espaciotiempo con la distribución de materia y energía que existe en él.

Inmediatamente después de que Einstein propuso su teoría, diversos científicos, entre ellos matemáticos y físicos, empezaron a buscar soluciones a las ecuaciones que describen la Relatividad General, tal es el caso de Schwarzschild, quien en 1916 [39], encontró la primera solución exacta no trivial, la cual describe el campo gravitacional en la región exterior a un cuerpo con masa  $M$ , estático y con simetría esférica.

Poco tiempo después, y de forma independiente, el matemático Hans Reissner (1916) [34] y el físico teórico Gunnar Nordström (1918) [30], encontraron otra solución exacta, pero en este caso, que describía el campo gravitacional de un objeto eléctricamente cargado, con simetría esférica y masa  $M$ . Esta solución, conocida como métrica de Reissner-Nordström, no es de vacío, ya que además del campo gravitacional presente, también existe un campo electromagnético que es la fuente de energía y momento. Es justo esta solución la que será el objeto principal de estudio en esta tesis.

Existe otra solución de vacío que es exacta, la cual fue descubierta mucho tiempo después por el matemático neozelandés Roy Kerr en 1963 [17], y que describe el campo gravitacional exterior a un objeto con masa  $M$ , con simetría axial y momento angular  $J$ . Esta solución fue generalizada por el físico americano Ezra Ted Newman en 1965 [29] en la que el objeto también posee carga eléctrica, y la cual es conocida como solución de Kerr-Newman. Dentro de estas soluciones discutidas, la de Kerr-Newman es la más general pues se reduce a las otras tres soluciones, es decir, a Schwarzschild, Reissner-Nordström y Kerr, en los límites adecuados.

Análisis de estas soluciones exactas conllevan, entre otras regiones, a la predicción de regiones de no escape, conocidas como hoyos negros, los cuales están entre los más sorprendentes ejemplos de objetos astrofísicos que existen en el Universo. Si bien es cierto que los hoyos negros tienen características muy peculiares y únicas que pueden ser descritas clásicamente por la Relatividad General (dejando de lado las singularidades que no pueden ser explicadas por esta teoría), e incluso a nivel semiclásico con ayuda de la Teoría Cuántica de Campos (QFT por sus siglas en inglés) se ha podido entender, entre otros fenómenos, el proceso de radiación de Hawking [14], también es cierto que a nivel cuántico no se ha podido obtener una descripción satisfactoria que, por un lado, reproduzca lo que ya conocemos a nivel clásico y, por otro lado, encuentre las piezas faltantes al gran rompecabezas que es nuestro Universo y explique los fenómenos que sólo una teoría cuántica de la gravedad podría proporcionar.

Una de estas piezas faltantes es el explicar, desde un punto de vista microscópico bajo el tratamiento de la física estadística, la entropía de los hoyos negros. Se sabe que a nivel macroscópico la entropía  $S$  de Bekenstein-Hawking de un hoyo negro viene dada por  $S = A/4$ , donde  $A$  es el área del horizonte de eventos, sin embargo, a nivel microscópico, aún no se tiene una teoría que pueda explicar los grados de libertad responsables de esta entropía. Otro problema que se cree se puede arreglar teniendo disponible una teoría cuántica de la gravedad es el hecho de que las singularidades de curvatura<sup>1</sup> que aparecen en las soluciones de las ecuaciones de campo de Einstein pueden desaparecer si dicha teoría está disponible [7].

Sabemos que en la naturaleza existen al menos tres campos fundamentales: el campo fuerte, el campo débil y el campo electromagnético, los cuales describen, de forma muy precisa, los fenómenos que presenciamos actualmente. La descripción de estos tres campos se ha logrado unificar en una sola teoría cuántica, conocida como el Modelo Estándar de Partículas Elementales, y la cual es, sin duda, uno de los más grandes logros que se ha hecho en física

---

<sup>1</sup>Se dará su definición en el capítulo 2.

teórica. No obstante, existe otro campo que tiene características muy especiales y distintas a las de los campos del Modelo Estándar, no sólo porque sus efectos son muy pequeños, sino también porque se necesitan grandes cantidades de energía y/o materia para medir tales efectos. Este campo es el campo gravitacional, y, desde hace poco más de 80 años, cuando los dos grandes pilares de la física moderna: Relatividad General y Mecánica Cuántica ya estaban formulados, se han propuesto diversas teorías que buscan cuantizarlo y así tener una Teoría Unificada, o mejor dicho, una descripción completa de los que se cree que sólo existen 4 campos fundamentales.

Teorías como Cuantización por Deformación, Cuantización Canónica, Geometría No-Conmutativa, Loop Quantum Gravity (LQG) y Teoría de Cuerdas son de las más destacadas en este afán por encontrar una teoría cuántica de la gravedad. Dentro de estas teorías, LQG y Teoría de Cuerdas<sup>2</sup> son las que encabezan esta lista en el sentido de la cantidad de gente que hay trabajando en ellas. A pesar de que estas teorías tienen características atractivas que hacen que sean posibles candidatas para una teoría cuántica de la gravedad, no hay hasta el momento alguna indicación que nos diga cuál es la teoría correcta y, lo que es aún peor, no hay mucha evidencia observacional que nos guíe hacia la búsqueda de ella. El verdadero problema de encontrar tal teoría, además de que existen inconsistencias matemáticas y problemas técnicos que dificultan la cuantización, es el hecho de que no se sabe, a un nivel fundamental, qué significa cuantizar el espaciotiempo.

Como es discutido por Carlip [7] y Rovelli [36], entre los varios problemas que surgen al querer cuantizar la gravedad están: el problema del tiempo (el tiempo juega un papel especial en la teoría cuántica (canónica) ya que determina la elección de las posiciones y los momentos canónicos y además sirve para fijar la normalización de la función de onda; en cambio, en Relatividad General, el tiempo es una coordenada más y no hay preferencia de él sobre las coordenadas espaciales)<sup>3</sup>; el problema de la reconstrucción (se cree que las observables en gravedad cuántica deben respetar la simetría fundamental de la Relatividad General, esto es, invariancia ante difeomorfismos, y por tanto, deben ser constantes de movimiento no locales. Si se llegara a encontrar un conjunto de observables, aún deberíamos averiguar cómo reconstruir la descripción local estándar como el límite clásico); el posible hecho de que a pequeñas escalas, por debajo de la longitud de Planck, el principio de incertidumbre deba ser modificado (esto conduciría a que los cálculos basados en teoría de perturbaciones hechos en teoría cuántica de campos ordinaria no tuvieran sentido, si es que tratamos a la Relatividad General como una teoría cuántica de campos), además de que se cree que la topología del espaciotiempo puede ser sujeta a fluctuaciones cuánticas, resultando en una “espuma” de espaciotiempo microscópica “*spacetime foam*”; el problema de asignarle una función de onda al Universo que surge de la necesidad de entender la cosmología cuántica, es decir, la mecánica cuántica del Universo como un todo (al hacer esto, uno no podría hacer la distinción usual entre un observador y lo que es observado, replanteándose preguntas como: ¿cuándo las funciones de onda colapsan? o ¿qué es lo que hace especial a un observador en la teoría cuántica?).

Así pues, dados estos problemas (entre los más importantes), y los diversos intentos no del todo satisfactorios para cuantizar el campo gravitacional, Hernando Quevedo Cubillos junto con Leonardo Patiño Jáidar, en 2005, propusieron una teoría alternativa basada en topología y geometría diferencial, llamada “Cuantización Topológica” [31], con la cual, a partir de ciertas construcciones geométricas (haces fibrados principales), es posible obtener una discretización de los parámetros físicos que describen la configuración clásica<sup>4</sup> de un sistema físico dado. Por ejemplo, para el caso que nos interesa que es la configuración gravitacional clásica de Reissner-Nordström, se espera obtener una discretización de los parámetros de la masa  $M$  y la carga eléctrica  $Q$  que aparecen en el espaciotiempo solución de la teoría de Einstein-Maxwell. A esta discretización que relaciona los parámetros físicos con un número entero se le conoce como espectro topológico. El espectro topológico asociado a una configuración clásica particular se puede obtener, básicamente, de dos formas:

1. Mediante regularización de la conexión: este método consiste en considerar, ya sea la conexión métrica o la conexión asociada al campo de materia, y remover, mediante transformaciones de norma, las regiones donde dicha conexión es singular. Condiciones de unicidad sobre las funciones de transición que relacionan las conexiones transformadas<sup>5</sup> son las que conllevan al espectro topológico. Si la conexión es regular en todo punto, entonces decimos que no existe condición de cuantización.<sup>6</sup>

<sup>2</sup>Para una introducción bastante completa a la Teoría de Cuerdas consultar, por ejemplo, [32]. Para LQG puede consultarse [35].

<sup>3</sup>Para una discusión a fondo del problema del tiempo así como el papel que juega éste en la Cuantización Canónica y en la teoría de la Relatividad General, ver [21].

<sup>4</sup>La definición de configuración clásica se establecerá más adelante en el capítulo 3.

<sup>5</sup>Por conexiones transformadas se debe de entender a aquellas obtenidas a partir de la conexión original al aplicar transformaciones de norma.

<sup>6</sup>Vale la pena mencionar en este punto que se hará referencia indistintamente de aquí en adelante al término discretización como cuantización y viceversa, teniendo en mente que cuantizar, en el sentido estricto, significa tener básicamente tres cosas: observables, estados cuánticos y evolución de dichos estados.

- 
2. Calculando el invariante topológico asociado al haz fibrado principal: dependiendo del grupo de simetría que se tome como la fibra estándar en el haz fibrado principal, es el tipo de invariante que caracteriza al sistema físico. Se conoce [24] que en el caso en que la fibra estándar es el grupo de simetría  $O(N)$ , el invariante topológico correspondiente es la clase característica de Pontrjagin; si la fibra es el grupo  $SO(N)$ , el invariante topológico es la clase característica de Euler, y si la fibra es el grupo  $U(N)$ , entonces el invariante topológico es la clase característica de Chern. El espectro topológico, pues, se obtiene al aplicar el Teorema de Gauss-Bonet a la clase característica respectiva [24, 11, 19].

En esta tesis aplicaremos el primer método, esto es, el método de regularización de la conexión, para tratar de cuantizar el hoyo negro de Reissner-Nordström. Con esto en mente, esta tesis se organiza de la siguiente manera:

- En el capítulo 2 se hace un análisis de las propiedades geométricas de la solución de Reissner-Nordström (R-N) y se hace énfasis en la estructura del espaciotiempo fuera y dentro del horizonte de eventos. También se discute la diferencia entre singularidades de curvatura y singularidades coordenadas, y se particulariza al caso de R-N. En la sección 2.2 se obtiene el espaciotiempo de R-N en coordenadas de Kruskal-Szekeres, las cuales corresponden a la máxima extensión analítica de dicho espaciotiempo. En la sección 2.3 se discute la métrica de R-N en coordenadas isotrópicas y se observa que, en efecto, existe un puente de Einstein-Rosen [42, 40] en esta solución, y el cual se puede ver de forma muy directa en el diagrama de Penrose-Carter asociado a la máxima extensión analítica de R-N.
- En el capítulo 3 se introduce el método de Cuantización Topológica y se explican las condiciones generales que se deben satisfacer para poder aplicarlo. También se demuestra a detalle el teorema en el cual se basa este método, llamado **Teorema Básico de Cuantización Topológica** (Teorema 3.2), enfocándolo al caso de sistemas gravitacionales electromagnéticos con simetría de norma  $U(1)$  y simetría espaciotemporal  $SO(3, 1)$ . Este teorema es de fundamental importancia en el proceso posterior para la cuantización del sistema clásico ya que hace referencia a la existencia y unicidad de un haz fibrado principal que, geoméricamente, contiene toda la información de la configuración clásica asociada a nuestro sistema físico.
- En el capítulo 4 se calcula el espectro topológico del hoyo negro de Reissner-Nordström utilizando como fibra estándar el grupo de norma  $U(1)$ , así como también el grupo de simetría  $SO(3, 1)$ . Se explora también la versión euclidianda de R-N y se calcula el respectivo espectro topológico utilizando como grupo de simetría el grupo  $SO(4)$ . Como consecuencia de los espectros topológicos, se analiza la forma que deben tener los parámetros físicos de masa  $M$  y carga eléctrica  $Q$  que aparecen en la solución de R-N. El cálculo detallado de estos espectros así como el análisis de los mismos es discutido en este capítulo.
- En el capítulo 5 se hace un breve repaso de las leyes clásicas de la mecánica de hoyos negros y se establece su relación con aquéllas de la Termodinámica usual a partir de la fórmula de Hawking  $S = \frac{A}{4}$ . También se discute la segunda ley *generalizada* de la Termodinámica de hoyos negros. Posteriormente se calcula, a partir de los espectros topológicos (euclidianos) obtenidos en el capítulo 4, el espectro topológico para la entropía, o equivalentemente, para el área del horizonte de eventos del hoyo negro de Reissner-Nordström, y se discuten los posibles valores que puede tomar esta entropía en base a los valores de ciertos números enteros.
- Finalmente, en el capítulo 6 se establecen las conclusiones de este trabajo y se exponen las ventajas de utilizar este método de Cuantización Topológica como una teoría alternativa de cuantización.

Además de la parte principal de este trabajo de tesis donde se desarrollan los aspectos teóricos asociados con las propiedades geométricas de la solución de Reissner-Nordström así como también con el método de Cuantización Topológica, y los cálculos de los espectros topológicos con el método antes mencionado por medio de regularización de la conexión y su relación con la termodinámica de hoyos negros, específicamente con el hoyo negro de R-N, se anexan dos apéndices los cuales están organizados de la siguiente manera:

- En el Apéndice A se hace una demostración detallada de la forma que debe de tener la función de transición (la cual se ocupa en el cálculo del espectro topológico) que relaciona dos conexiones transformadas, obtenida cada una de ellas al remover alguna de las singularidades en la conexión original mediante una transformación de norma.
- En el Apéndice B se hace el cálculo explícito de la gravedad superficial para el caso del hoyo negro de Reissner-Nordström, la cual es un ingrediente muy importante en el análisis de la termodinámica de este sistema gravitacional.



## Capítulo 2

# Métrica de Reissner-Nordström

La métrica de Reissner-Nordström es una solución exacta con simetría esférica e invariancia ante traslaciones temporales (estática) de las ecuaciones de Einstein en presencia de un campo electromagnético, caracterizada por dos parámetros: la masa  $M$  y la carga eléctrica  $Q$ .<sup>1</sup> A diferencia de la solución de Schwarzschild que es una solución de vacío, en este caso, dado que la fuente posee carga eléctrica, ya no se habla más de ello. Para obtener la métrica de Reissner-Nordström partimos de las ecuaciones de Einstein [44]:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

donde  $T_{\mu\nu}$  es el tensor de energía-momento asociado al campo electromagnético y donde se han utilizado unidades en las cuales la constante de la gravitación universal  $G$  y la velocidad de la luz  $c$  son iguales a 1. Éste está dado por:

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left( F_{\mu\rho}F_{\nu}{}^{\rho} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma} \right), \quad (2.2)$$

con  $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}$  el tensor de campo electromagnético (la intensidad de campo) y  $A_{\mu}$  el cuadvivector potencial. Ahora bien, haciendo uso de la simetría esférica del problema, podemos escribir la métrica  $g_{\mu\nu}$ , solución a (2.1), de la siguiente forma [9]:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} = -e^{2\alpha(r,t)}dt^2 + e^{2\beta(r,t)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (2.3)$$

donde  $\alpha(r, t)$  y  $\beta(r, t)$  son funciones a determinar a partir de las ecuaciones de campo. Veamos que es posible reducir la ecuación (2.1) para el caso del tensor de energía-momento dado en (2.2). Calculando la traza de (2.1) obtenemos:

$$R = -8\pi T, \quad (2.4)$$

donde  $R \equiv g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = R_{\mu}{}^{\mu}$  es el escalar de Ricci y  $T \equiv g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = T_{\mu}{}^{\mu}$  es la traza del tensor de energía-momento. Por tanto, las ecuaciones de Einstein se pueden reescribir en la forma:

$$R_{\mu\nu} = 8\pi \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right). \quad (2.5)$$

Sin embargo, es fácil ver que  $T = 0$ , ya que  $T \equiv T_{\mu}{}^{\mu} = \frac{1}{4\pi} (F_{\mu\rho}{}^{\mu\rho} - \frac{1}{4}\delta_{\mu}{}^{\mu}F_{\rho\sigma}{}^{\rho\sigma}) = 0$ . Esto permite simplificar la ecuación (2.5), obteniéndose:

$$R_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (2.6)$$

Ésta es justo la ecuación de Einstein que se debe resolver. No obstante, además de satisfacer (2.6), la solución también debe satisfacer las ecuaciones de Maxwell:

$$\nabla_{\mu}F^{\mu\nu} = 0, \quad (2.7)$$

$$\nabla_{\sigma}F^{\mu\nu} + \nabla_{\mu}F^{\nu\sigma} + \nabla_{\nu}F^{\sigma\mu} = 0. \quad (2.8)$$

---

<sup>1</sup>Consideraremos que la fuente no posee carga magnética  $P$  debido a que no se han observado monopolos magnéticos en la naturaleza, por lo que únicamente será relevante la carga eléctrica  $Q$ .

Claramente las ecuaciones de Einstein y las ecuaciones de Maxwell están acopladas, ya que el tensor de campo electromagnético  $F_{\mu\nu}$  aparece en las ecuaciones de la gravitación en el término del tensor de energía-momento  $T_{\mu\nu}$  (como en ecuación (2.2)), mientras que las componentes de la métrica  $g_{\mu\nu}$  aparecen en las ecuaciones de Maxwell a través de la derivada covariante  $\nabla_\mu$  (ecuaciones (2.7) y (2.8)).

Dadas la simetrías impuestas sobre nuestra solución (simetría esférica y que la fuente del campo  $F_{\mu\nu}$  es una carga eléctrica puntual), podemos escribir el cuadvectores potencial como  $A_\mu = (\Phi(r), 0, 0, 0)$ , donde  $\Phi(r) = \frac{Q}{r}$  es el potencial electrostático, siendo  $Q$  la carga eléctrica total de la fuente. De aquí se sigue que el campo  $F_{\mu\nu}$  está dado por:

$$F_{\mu\nu} = E(r) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

con  $E(r) = \frac{Q}{r^2}$  la componente radial del campo eléctrico.

A partir de esta  $F_{\mu\nu}$  es inmediato calcular las componentes del tensor de energía-momento. Así pues, de acuerdo a (2.2) y utilizando la métrica (2.3), resulta:

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} \frac{Q^2 e^{2\alpha(r,t)}}{2r^4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{Q^2 e^{2\beta(r,t)}}{2r^4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Q^2}{2r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{Q^2 \sin^2 \theta}{2r^2} \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Es fácil corroborar, como vimos unas líneas arriba, que la traza del tensor de energía-momento es cero. Para ello calculamos las componentes mixtas de  $T_{\mu\nu}$ , es decir,  $T_\mu{}^\nu$ :

$$T_\mu{}^\nu = g^{\sigma\nu} T_{\mu\sigma} = \frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} -\frac{Q^2}{2r^4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{Q^2}{2r^4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Q^2}{2r^4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{Q^2}{2r^4} \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

y, sumando sobre la diagonal, obtenemos el resultado deseado ( $T_\mu{}^\mu = 0$ ).

Por tanto, todo se reduce a resolver ecuación (2.6) con  $T_{\mu\nu}$  como en (2.10), y  $R_{\mu\nu}$  se obtiene de la manera usual al contraer el segundo con el cuarto (o equivalentemente el primer con el tercer) índice del tensor de Riemann, es decir:  $g^{\sigma\rho} R_{\mu\rho\nu\sigma} = R_{\mu\rho\nu}{}^\rho = R_{\mu\nu}$ . La solución a dichas ecuaciones viene dada por la 4-métrica de Reissner-Nordström:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = - \left( 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left( 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)} + r^2 d\Omega^2, \quad (2.12)$$

con  $d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$ .

## 2.1. Propiedades Geométricas de la métrica de Reissner-Nordström

Si definimos  $\Delta$  como  $\Delta = r^2 - 2Mr + Q^2$  podemos escribir la métrica de Reissner-Nordström de la siguiente manera:

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{r^2} dt^2 + \frac{r^2}{\Delta} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (2.13)$$

Esta métrica tiene una singularidad de curvatura (esencial) en  $r = 0$ , como se puede constatar al calcular el escalar de Kretschmann  $K \equiv R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma}$  (ver sección 2.2), y singularidades coordenadas cuando  $\Delta = 0$ , es decir, cuando  $r = r_\pm = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}$ . Claramente existen tres casos diferentes, dependiendo de los valores relativos de  $M$  y  $|Q|$ .

- **1er. caso** ( $M < |Q|$ ): los  $r_\pm$  son imaginarios y ningún horizonte cubre a la singularidad en  $r = 0$ . Se dice entonces que se tiene una singularidad desnuda. De acuerdo a la conjetura de la censura cósmica [40], no existen en la naturaleza tales singularidades en el caso de colapso gravitacional. Además, esta condición ( $M < |Q|$ ) es muy difícil de lograr a nivel astrofísico, ya que la fuerza gravitacional es mucho mayor que la fuerza eléctrica a esas escalas. Por esta razón, este caso se considera *no-físico*.

- **2do. caso** ( $M = |Q|$ ): se tiene un hoyo negro de Reissner-Nordström extremo con un único horizonte de eventos en  $r = M$ . En este caso extremo, la métrica (2.12) toma la forma:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{M}{r}\right)^2 dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{M}{r}\right)^2} + r^2 d\Omega^2. \quad (2.14)$$

- **3er. caso** ( $M > |Q|$ ): existen dos horizontes de eventos en  $r = r_{\pm}$ . Las hipersuperficies a  $r$  constante son nulas cuando  $g^{rr} = \frac{\Delta}{r^2} = 0$ , i.e., cuando  $\Delta = 0$ . Por tanto,  $r_{\pm}$  son hipersuperficies nulas (en concordancia con el hecho de que son horizontes de eventos). Cabe destacar, además, que cuanto más grande es la carga del hoyo negro (a  $M$  fija) los horizontes son más cercanos entre sí, hasta llegar al caso extremo descrito anteriormente donde sólo existe un horizonte de eventos.

La figura (2.1) muestra la forma de la función  $f(r) \equiv \frac{\Delta}{r^2}$  para estos tres casos:

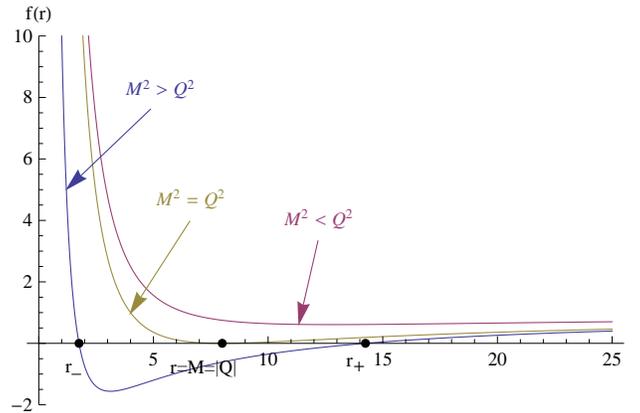


Figura 2.1: Forma de la función  $f(r)$  para los casos: a)  $M^2 < Q^2$ , b)  $M^2 = Q^2$  y c)  $M^2 > Q^2$ . En el caso a) se tomó  $M = 5$ ,  $Q = 8$ ; en el b),  $M = 8$ ,  $Q = 8$ ; y finalmente en el c),  $M = 8$ ,  $Q = 5$ .

## 2.2. Singularidades de curvatura (esenciales) vs. Singularidades coordenadas

Antes de hablar de las singularidades de curvatura como de coordenadas, debemos decir que uno de los principales “déficits” de la Teoría de Einstein es precisamente el que la descripción clásica de la Gravitación y la materia no es válida justo en la vecindad de las singularidades del espaciotiempo, incluyendo a las mismas singularidades. Además, una definición concreta y general de singularidad es muy difícil darla ya que sólo en casos muy específicos de soluciones de las ecuaciones de Einstein (soluciones con un alto grado de simetría) es posible afirmar si una singularidad es de curvatura o de coordenadas. No obstante, existen los conocidos *Teoremas de Singularidad* en Relatividad General [44, 15], los cuales prueban, que en efecto, las singularidades son características reales y genéricas de soluciones cosmológicas y que colapsan. Si bien es cierto que estos teoremas dan muy poca información de la verdadera naturaleza de las singularidades, ellos muestran que modelos tales como el “Universo que Rebota” no-singular (*nonsingular Bouncing Universe*) son incompatibles con la Relatividad General, a menos que ciertas condiciones de energía sean satisfechas por la materia y otras condiciones se cumplan en el espaciotiempo.

Existen varios criterios para caracterizar a las singularidades, como el descrito por Wald [44], el cual asocia la incompletez de geodésicas nulas y tipo tiempo con la presencia de singularidades. Es justo esta noción de incompletez de geodésicas el que es utilizado en los *Teoremas de Singularidad*. Sin embargo, dadas las simetrías del caso que estamos analizando (solución de Reissner-Nordström), es suficiente caracterizar a las singularidades de acuerdo a si ellas dan lugar a escalares asociados con la curvatura divergentes o si ellas pueden ser removidas mediante cambios de coordenadas. Así pues, tomaremos la siguiente prescripción para decir si una singularidad es de curvatura o sólo de coordenadas:

Las singularidades de curvatura, también llamadas geométricas o esenciales, son aquellas regiones del espaciotiempo donde cantidades invariantes escalares, asociadas generalmente con la curvatura y utilizadas para medir la intensidad

del campo gravitacional, son infinito, y por ser cantidades invariantes, no dependen del sistema de coordenadas en el que nos encontremos. Así pues, podemos decir que las singularidades de curvatura son inherentes al espaciotiempo en cuestión y no pueden ser removidas de ninguna forma por cambios de coordenadas. Una forma de determinar estas singularidades de curvatura asociadas a un espaciotiempo dado es calculando cantidades invariantes formadas a partir de contracciones del tensor de curvatura, tales como el escalar de Ricci ( $R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} R_{\mu\rho\nu\sigma}$ ) o el escalar de Kretschmann (definido como  $K \equiv R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma}$ ), de tal forma que justo los puntos en donde estos escalares divergen determinan dichas singularidades. En el caso del espaciotiempo de Reissner-Nordström, el escalar de Ricci es cero. Sin embargo, al calcular el escalar de Kretschmann:  $K = \frac{8(7Q^4 - 12MQ^2r + 6M^2r^2)}{r^8}$ , nos damos cuenta que en  $r = 0$  existe, en efecto, una singularidad de curvatura.

Por otro lado, existen singularidades coordenadas, las cuales son puntos del espaciotiempo donde la métrica no está bien definida, sin embargo, en este caso, estas singularidades son dependientes del sistema coordenado en el que nos encontramos. Dicho de otra forma, en un cierto sistema de coordenadas, digamos  $S$ , la métrica puede tener ciertos puntos singulares, pero bajo un cambio apropiado de coordenadas es posible que la métrica, en este nuevo sistema de coordenadas,  $S'$ , ya no tenga más dichos puntos singulares. Se habla entonces de singularidades coordenadas. Apliquemos estos conceptos a la métrica de Reissner-Nordström (2.12), o equivalentemente a (2.13), y veamos que, en efecto,  $r = r_-$  y  $r = r_+$  son singularidades de coordenadas. Para ello, definimos la coordenada tortuga  $r^*$  por medio de  $dr^* = \frac{r^2}{\Delta} dr = \frac{dr}{\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)}$ , cuya solución está dada por:

$$r^* = r + \frac{1}{2\kappa_+} \ln \left( \frac{|r - r_+|}{r_+} \right) + \frac{1}{2\kappa_-} \ln \left( \frac{|r - r_-|}{r_-} \right),$$

donde  $\kappa_{\pm} = \frac{(r_{\pm} - r_{\mp})}{2r_{\pm}^2}$  son las gravedades superficiales de los horizontes  $r_{\pm}$ , respectivamente.<sup>2</sup> Ahora introducimos las coordenadas radiales nulas  $v, u$  como:

$$v = t + r^*, \quad u = t - r^*, \quad (2.15)$$

de tal forma que la métrica de Reissner-Nordström en las coordenadas avanzadas de Eddington-Finkelstein ( $v, r, \theta, \phi$ ) es:

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{r^2} dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega^2. \quad (2.16)$$

Es en estas coordenadas donde el carácter no singular  $\forall r > 0$  se manifiesta explícitamente, en particular para  $r = r_{\pm}$ . Por tanto, hemos demostrado que las coordenadas avanzadas de Eddington-Finkelstein, con ayuda de la coordenada tortuga  $r^*$ , son capaces de remover las singularidades que existían en (2.13), y en consecuencia,  $r = r_{\pm}$  son singularidades coordenadas.

### 2.3. Máxima extensión analítica del espaciotiempo de Reissner-Nordström

Para hacer un análisis más apropiado de la estructura del espaciotiempo de Reissner-Nordström es conveniente utilizar las coordenadas  $U^{\pm}, V^{\pm}$  definidas por:

$$U^{\pm} = -\exp(-\kappa_{\pm}u), \quad V^{\pm} = \exp(\kappa_{\pm}v), \quad (2.17)$$

donde  $u, v$  son las coordenadas radiales nulas definidas en (2.15). A las coordenadas  $U^{\pm}, V^{\pm}$  se les llama coordenadas de Kruskal-Szekeres.

Para el signo  $+$ , la métrica de R-N queda escrita como:

$$ds^2 = -\frac{r_+r_-}{\kappa_+^2} \frac{\exp(-2\kappa_+r)}{r^2} \left( \frac{r_-}{r - r_-} \right)^{\left(\frac{\kappa_+}{\kappa_-} - 1\right)} dU^+ dV^+ + r^2 d\Omega^2, \quad (2.18)$$

donde  $r(U^+, V^+)$  está determinada implícitamente por la ecuación:

$$U^+ V^+ = -\exp(2\kappa_+r) \left( \frac{r - r_+}{r_+} \right) \left( \frac{r - r_-}{r_-} \right)^{\frac{\kappa_+}{\kappa_-}}. \quad (2.19)$$

<sup>2</sup>La definición de gravedad superficial así como el cálculo explícito de ella para el caso de los hoyos negros de Reissner-Nordström se puede encontrar en el Apéndice B.

Estas coordenadas no cubren la región  $r \leq r_-$  debido a la singularidad coordenada en  $r = r_-$  y a que  $U^+V^+$  es complejo para  $r < r_-$ . Nótese, además, que el dominio de  $u, v$  es  $-\infty < u, v < \infty$ , y por tanto, el dominio de  $U^+$  es  $-\infty < U^+ < 0$  y el de  $V^+$  es  $0 < V^+ < \infty$ . No obstante, el dominio de  $U^+$  y  $V^+$  se puede extender a  $-\infty < U^+, V^+ < \infty$ , ya que las expresiones (2.18) y (2.19) siguen siendo válidas en esta región. Esta extensión da lugar a dos pares de regiones isométricas entre sí, como puede verse en la figura (2.2):

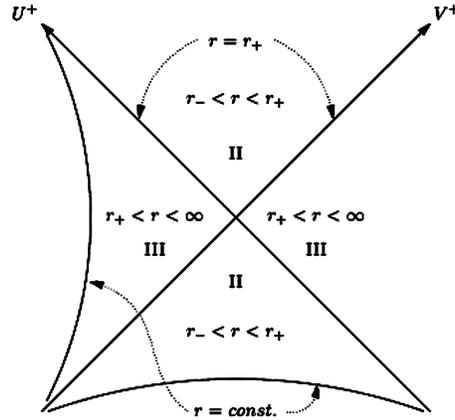


Figura 2.2: Las regiones II son isométricas entre sí, al igual que las regiones III. El dominio de  $r$  es  $r_- < r$ , siendo  $r_- < r < r_+$  en II mientras que  $r > r_+$  en III.  $r = r_+$  es representada sobre los ejes  $U^+$  y  $V^+$ .

Por otro lado, si ocupamos las coordenadas etiquetadas por el signo  $-$ , esto es,  $U^-$  y  $V^-$ , la métrica de R-N se ve como:

$$ds^2 = -\frac{r_+r_-}{\kappa_-^2} \frac{\exp(-2\kappa_-r)}{r^2} \left( \frac{r_+}{r_+ - r} \right)^{\left( \frac{\kappa_-}{\kappa_+} - 1 \right)} dU^- dV^- + r^2 d\Omega^2, \quad (2.20)$$

donde, de forma similar,  $r(U^-, V^-)$  está determinada implícitamente por la ecuación:

$$U^- V^- = -\exp(-2\kappa_-r) \left( \frac{r_- - r}{r_-} \right) \left( \frac{r_+ - r}{r_+} \right)^{\frac{\kappa_-}{\kappa_+}}. \quad (2.21)$$

Mirando cuidadosamente (2.20) y (2.21), nos damos cuenta que las coordenadas  $U^-, V^-$  cubren el espacio  $0 < r < r_+$ , ya que para  $r > r_+$ , (2.21) se vuelve compleja. De forma análoga existe una singularidad coordenada en  $r = r_+$ , como puede verse en (2.20). Cabe destacar que también en este caso una extensión a la región  $-\infty < U^-, V^- < \infty$  es posible, dando lugar a dos pares de regiones isométricas entre sí, como puede verse en la figura (2.3):

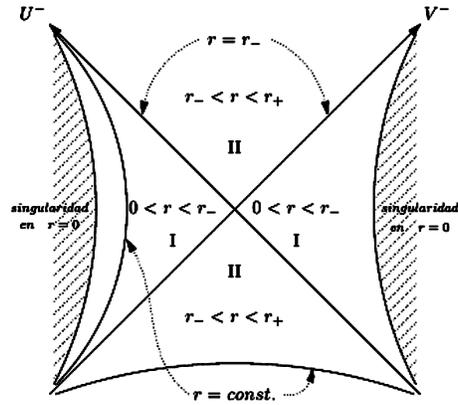


Figura 2.3: Las regiones I son isométricas entre sí y corresponden a la región  $0 < r < r_-$ . Las regiones II son también isométricas entre sí, e isométricas a las regiones II de las coordenadas  $(U^+, V^+)$ . Los ejes  $U^-, V^-$  corresponden a  $r = r_-$ .

Así pues, pareciera que si tomamos los dos pares de coordenadas:  $\{U^+, V^+\}$  y  $\{U^-, V^-\}$  podría ser posible cubrir todo el espacio-tiempo, sin embargo, la métrica admite una extensión analítica, por lo que estos dos pares de coordenadas no cubren todo el espacio-tiempo. No obstante, se puede mostrar que la unión de ambos parches (pares de coordenadas) es analítica, y que el proceso de unir alternadamente los dos parches infinitas veces produce la máxima extensión analítica del espacio-tiempo. El diagrama de la máxima extensión analítica de Reissner-Nordström se muestra a continuación (figura (2.4)):

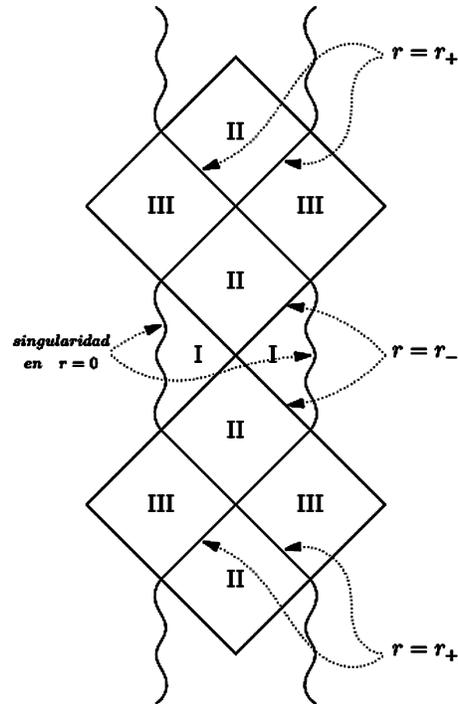


Figura 2.4: Máxima extensión analítica del espacio-tiempo de Reissner-Nordström. Las regiones I, II y III se repiten periódicamente infinitas veces. Nótese, sin embargo, que cada par de regiones cubierto por las coordenadas  $(U^+, V^+)$ , es decir, regiones II y III, así como aquel par de regiones cubierto por las coordenadas  $(U^-, V^-)$ , es decir, regiones I y II, son regiones distintas (aunque isométricas) a la original.

## 2.4. Coordenadas Isotrópicas para Reissner-Nordström

Haciendo el siguiente cambio de variable:  $r = \rho + M + \frac{M^2 - Q^2}{4\rho}$ , la métrica de Reissner-Nordström (2.12) se puede escribir de la siguiente manera:

$$ds^2 = -\frac{\Sigma}{r^2(\rho)} dt^2 + \frac{r^2(\rho)}{\rho^2} (d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2), \quad (2.22)$$

donde  $\Sigma = \left[ \rho - \frac{(M^2 - Q^2)}{4\rho} \right]^2$ . Las coordenadas  $(t, \rho, \theta, \phi)$  se llaman coordenadas isotrópicas. Claramente en estas coordenadas las hipersuperficies a  $t = cte$  son conformalmente planas, como puede verse de (2.22) al hacer  $dt = 0$ . Por otro lado, cabe mencionar que existen dos valores de  $\rho$   $\left( \frac{1}{2}(-M + r - \sqrt{Q^2 - 2Mr + r^2}) \right)$  y  $\frac{1}{2}(-M + r + \sqrt{Q^2 - 2Mr + r^2})$  para cada valor de  $r > r_+$  y  $0 < r < r_-$ , mientras que  $\rho$  es complejo para  $r_- < r < r_+$ . En  $r = r_+$  y  $r = r_-$ ,  $\rho$  tiene un único valor dado por  $\frac{\sqrt{M^2 - Q^2}}{2}$  y  $-\frac{\sqrt{M^2 - Q^2}}{2}$ , respectivamente. Gráficamente,  $r$  como función de  $\rho$ , se muestra en la figura (2.5):

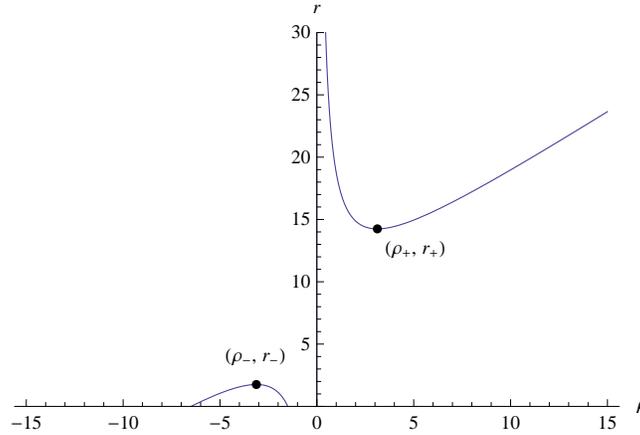


Figura 2.5:  $r$  como función de  $\rho$  para valores de  $M = 8$  y  $Q = 5$ . Los puntos  $(\rho_+, r_+) = \left(\frac{\sqrt{39}}{2}, 8 + \sqrt{39}\right)$  y  $(\rho_-, r_-) = \left(-\frac{\sqrt{39}}{2}, 8 - \sqrt{39}\right)$  son los puntos fijos correspondientes a la isometría  $\rho \rightarrow \frac{M^2 - Q^2}{4\rho}$ .

Esta nueva métrica cubre dos regiones isométricas entre sí, intercambiadas por la geometría  $\rho \rightarrow \frac{M^2 - Q^2}{4\rho}$ . Dicho de otra forma, la métrica (2.22) es invariante ante el cambio  $\rho \rightarrow \frac{M^2 - Q^2}{4\rho}$ . Existen dos “puntos” fijos correspondientes a esta isometría, los cuales son  $\rho_+ = \frac{\sqrt{M^2 - Q^2}}{2}$  y  $\rho_- = -\frac{\sqrt{M^2 - Q^2}}{2}$  (ver figura (2.5)). El caso que nos interesa es el de  $\rho_+$ , ya que justo este caso es el que da lugar a un puente de Einstein-Rosen (un agujero de gusano conectando dos universos)<sup>3</sup>.  $\rho_+$  es, de hecho, una 2-esfera fija de radio  $r = r_+ = M + \sqrt{M^2 - Q^2}$  (a  $t = cte$ ). Esta 2-esfera es la de menor radio posible ya que al acercarse desde cualquier lado a  $r = r_+$  sobre una hipersuperficie a  $t = cte$ , el radio de la 2-esfera, a  $\rho$  constante, decrece hasta alcanzar el valor de  $r = r_+$  en  $\rho = \frac{\sqrt{M^2 - Q^2}}{2}$ . Es justo este valor de  $\rho$  el cual es el punto medio del puente de Einstein-Rosen que conecta dos secciones espaciales entre las regiones III del diagrama de Penrose-Carter mostrado a continuación (figura (2.6)):

<sup>3</sup>Para una discusión de los agujeros de gusano y sus distintas formas, ver, por ejemplo, [42].

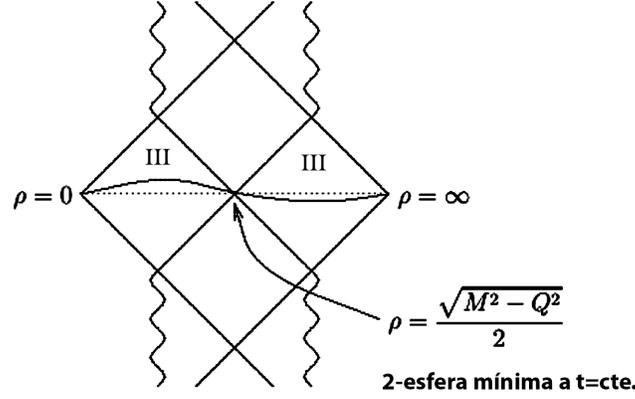


Figura 2.6: Diagrama de Penrose-Carter ilustrando la 2-esfera mínima  $\left(\rho = \frac{\sqrt{M^2 - Q^2}}{2}\right)$  del puente de Einstein-Rosen que conecta las regiones III.

El otro “punto” fijo, esto es,  $\rho_-$ , también es una 2-esfera pero de radio máximo, ya que al acercarse desde cualquier lado a  $r = r_-$  sobre una hipersuperficie a  $t = cte$ , el radio de la 2-esfera, a  $\rho$  constante, aumenta hasta llegar al valor de  $r = r_-$  en  $\rho = -\frac{\sqrt{M^2 - Q^2}}{2}$ . En este caso no existe puente de Einstein-Rosen, ya que en el diagrama de Penrose-Carter estaríamos yendo desde una singularidad en  $r = 0$  hasta otra singularidad en  $r = 0$  (conectando las regiones I en el diagrama de Penrose-Carter de la máxima extensión analítica del espaciotiempo de Reissner-Nordström (figura (2.4))).

Es importante mencionar que la isometría que tenemos presente en estas coordenadas isotrópicas corresponde a la isometría  $(U, V) \rightarrow (-U, -V)$  que existe en el espaciotiempo de Kruskal. Ahora bien, hay una característica más que hay que notar cuando se quiere calcular la distancia al horizonte  $r = r_+$  a lo largo de una curva a  $t, \theta, \phi$  constantes desde un radio externo, digamos  $R > r_+$ . Esta distancia, de acuerdo a la métrica en coordenadas esféricas (2.12), está dada por:

$$s = \int_{r_+}^R \frac{dr}{\sqrt{\left(1 - \frac{r_+}{r}\right)\left(1 - \frac{r_-}{r}\right)}} = \sqrt{(r_+ - R)(r_- - R)} - \frac{1}{2}(r_+ + r_-) \ln(r_+ - r_-) + (r_+ + r_-) \ln\left(\sqrt{-r_+ + R} + \sqrt{-r_- + R}\right), \quad (2.23)$$

la cual tiende a infinito cuando  $r_+ - r_- \rightarrow 0$ .

Esto quiere decir que el puente de Einstein-Rosen que conecta las regiones III es infinitamente largo en el límite extremo  $r_- \rightarrow r_+$ , o lo que es lo mismo, en el límite  $|Q| \rightarrow M$ . Esto se puede checar, de igual forma, si utilizamos la métrica en coordenadas isotrópicas (2.22), y calculamos de nuevo la distancia a lo largo de una curva a  $t, \theta, \phi$  constantes desde  $r = r_+$  hasta un radio  $R > r_+$ , que en términos de la coordenada  $\rho$  sería desde  $\rho = \frac{\sqrt{M^2 - Q^2}}{2}$  hasta  $\frac{1}{2}(-M + R + \sqrt{Q^2 - 2MR + R^2})$ . La distancia, en este caso, es:

$$s = \int_{\frac{\sqrt{M^2 - Q^2}}{2}}^{\frac{1}{2}(-M + R + \sqrt{Q^2 - 2MR + R^2})} \left(1 + \frac{M}{\rho} + \frac{M^2 - Q^2}{4\rho^2}\right) d\rho = \sqrt{Q^2 - 2MR + R^2} - \frac{1}{2}M \ln(M^2 - Q^2) + M \ln(-M + R + \sqrt{Q^2 - 2MR + R^2}), \quad (2.24)$$

la cual, en el límite  $|Q| \rightarrow M$ , también tiende a infinito.

Así pues, hemos mostrado que tanto en coordenadas esféricas como en coordenadas isotrópicas, la distancia que existe entre un radio  $R > r_+$  y  $r = r_+$  es infinita en el límite extremo donde los horizontes se juntan.

Un diagrama pictórico del puente de Einstein-Rosen en este límite extremo se ilustra a continuación, en la figura (2.7):

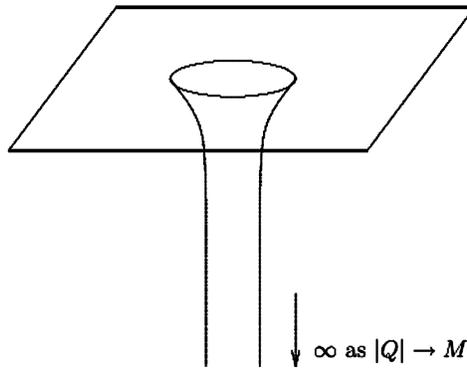


Figura 2.7: Puente de Einstein-Rosen entre secciones espaciales de las regiones III llega a ser infinitamente largo en el caso de un hoyo negro de Reissner-Nordström extremo, es decir, en el límite  $|Q| \rightarrow M$ .



# Capítulo 3

## Cuantización Topológica

Como se describió brevemente en la introducción, este formalismo surge como un procedimiento alternativo de cuantización, basado en propiedades topológicas que pueden ser extraídas a partir de un haz fibrado principal, el cual está asociado a alguna configuración clásica en particular. Este tipo de métodos basados en la estructura topológica ya han sido estudiados anteriormente en el contexto de diversas configuraciones de monopolos e instantones [11]. En las secciones subsecuentes, se explica a detalle en qué consiste el método de Cuantización Topológica así como el teorema fundamental en el que se basa este formalismo.

### 3.1. El método

El método de Cuantización Topológica puede ser aplicado a cualquier configuración de campo (clásica) cuya estructura geométrica permita la existencia de un haz fibrado principal con una conexión. Inicialmente este método fue pensado para describir configuraciones de campo gravitacionales [31], sin embargo, se ha mostrado que también es válido para el caso de sistemas mecánicos conservativos con un número finito de grados de libertad [28]. En ambos casos (campos y sistemas mecánicos), la existencia y unicidad de un haz fibrado principal asociado a cada configuración clásica es de crucial importancia para la obtención del espectro topológico. Una configuración clásica en este formalismo es cualquier sistema físico *clásico* al cual se le puede asociar una estructura geométrica única que consiste de una variedad diferencial con una conexión.<sup>1</sup>

En el caso de sistemas mecánicos conservativos con un número finito de grados de libertad resulta que el formalismo de Maupertuis de la mecánica clásica es el escenario apropiado para codificar la información en el espacio base del correspondiente haz fibrado principal. De hecho, la métrica de Jacobi (única para cada sistema mecánico y la cual contiene toda la información física del sistema) determina una variedad Riemanniana que a su vez es la que usamos como espacio base del haz fibrado principal. La fibra estándar es representada por el grupo de rotaciones, el cual contiene todas las simetrías del sistema mecánico cuando se usa una descripción de co-marcos locales para representar a la métrica de Jacobi. Además, la correspondiente conexión en el haz fibrado principal coincide con la conexión de la métrica de Jacobi cuando la primera es proyectada sobre el espacio base. La existencia y unicidad de tal haz fibrado principal, así como la condición sobre la conexión, son establecidas en el siguiente teorema:

**Teorema 3.1.** *Un sistema mecánico conservativo con  $k$  grados de libertad para el cual el Hamiltoniano es una cantidad conservada puede ser representado por un único haz fibrado principal  $P$  de dimensión  $\frac{1}{2}k(k+1)$ , con la variedad Riemanniana  $(\Sigma, h)$  como el espacio base, donde  $h$  es la métrica de Jacobi y  $\Sigma$  su dominio en el espacio de configuración, el grupo  $SO(k)$  como el grupo de estructura (isomorfo a la fibra estándar), y una conexión con valores en el álgebra de Lie  $\mathfrak{so}(k)$ .*

La prueba de este teorema puede ser encontrada en [28].

Dado que el caso que nos interesa es el de campos gravitacionales electromagnéticos, nos centraremos en un teorema análogo al anterior pero aplicado precisamente al caso de configuraciones de campos gravitacionales con infinitos grados de libertad. En la sección 3.2 se establecerá dicho teorema y se hará una demostración detallada de él.

---

<sup>1</sup>Unicidad en este contexto debe ser entendida en el sentido de que estos dos objetos geométricos (variedad diferencial y conexión) son suficientes para distinguir entre configuraciones clásicas. Así, por ejemplo, dos variedades diferenciales relacionadas entre sí por un isomorfismo y con la misma conexión, describen en este formalismo la misma configuración clásica. Para una discusión más detallada sobre qué es una configuración clásica en Cuantización Topológica, ver [26].

Una vez construido el haz fibrado principal correspondiente a una configuración clásica particular, es posible obtener el espectro topológico ya sea, analizando los invariantes topológicos asociados a cada haz fibrado, o regularizando la conexión mediante transformaciones de norma.

Se ha mostrado que para el caso de sistemas mecánicos como el oscilador armónico [27] y el problema del campo central [28], el método de Cuantización Topológica efectivamente reproduce los espectros obtenidos de forma estándar con cuantización canónica. Sin embargo, como se mencionó en la introducción, este método aún está bajo construcción y aún no se sabe con precisión qué significan conceptos como estados cuánticos, probabilidades, y evolución en este formalismo.

## 3.2. Teorema Básico de Cuantización Topológica

En esta sección se hará una demostración detallada del Teorema Básico de la Cuantización Topológica [31], el cual se enuncia a continuación (Teorema 3.2), y se aplicará al caso de campos gravitacionales electromagnéticos con simetría de norma  $U(1)$  y simetría espaciotemporal  $SO(3,1)$ .

**Teorema 3.2.** *Cualquier solución en el vacío de las ecuaciones de campo de Einstein puede ser representada por un único haz fibrado principal 10-dimensional  $P$  con el espaciotiempo  $M$  como el espacio base, el grupo de Lorentz como el grupo de estructura (isomorfo a la fibra estándar), y una conexión con valores en el álgebra de Lie del grupo de Lorentz.*

Para demostrar este teorema, primero necesitamos demostrar el teorema de reconstrucción para haces fibrados, el cual establece:

**Teorema 3.3 (Teorema de Reconstrucción).** *Un haz fibrado principal está especificado de manera única por el espacio base ( $N$ ), un grupo de estructura ( $G$ ) isomorfo a la fibra estándar, y un conjunto de funciones de transición con valores en el grupo de estructura y que satisfacen la condición de cociclo.*

*Demostración.* Sea  $\{U_\alpha\}$  una cubierta abierta del espacio base  $N$  (el cual lo consideraremos como una variedad diferenciable) y  $G$  un grupo de Lie (grupo de estructura). Tomemos  $X_\alpha = U_\alpha \times G$  para cada  $\alpha$  y  $X = \bigcup_\alpha X_\alpha$  la suma topológica de  $X_\alpha$ . Claramente cada elemento de  $X$  es un triplete  $(\alpha, x, g)$ , donde  $\alpha$  denota algún índice,  $x \in U_\alpha$ , y  $g \in G$ . Como  $X_\alpha$  es diferenciable y  $X$  es la unión disjunta de las  $X_\alpha$ , se sigue que  $X$  también es una variedad diferenciable. Introducimos una relación de equivalencia  $\sim$  en  $X$  de la siguiente manera: decimos que  $(\alpha, x, g) \sim (\beta, y, g') \Leftrightarrow x = y \in U_\alpha \cap U_\beta$  y  $g' = \psi_{\beta\alpha}(x)g$ , donde  $\psi_{\beta\alpha}$  es un mapeo de  $U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$ .

Sea  $P = \frac{X}{\sim}$ . Mostremos primero que  $G$  actúa libremente sobre  $P$  por la derecha y que  $\frac{P}{G} = N$ . Por definición, cada  $h \in G$  mapea la clase de equivalencia de  $(\alpha, x, g)$  en la clase de equivalencia de  $(\alpha, x, gh)$ . Es fácil ver que esta definición es independiente de la elección del representante  $(\alpha, x, g)$ , y de hecho lo es, ya que cualquier elemento de  $[(\alpha, x, g)]$  lo podemos llevar a otro elemento dentro de la misma clase por medio de  $\psi_{\beta\alpha}$ . Ahora bien, dado que  $h$  lleva  $[(\alpha, x, g)] \rightarrow [(\alpha, x, gh)]$  y el mapeo es 1 : 1 en  $P$ , entonces  $G$  actúa libremente sobre  $P$  por la derecha. Construyamos ahora la proyección  $\Pi$ :

$\Pi : P \rightarrow N$  está definida por:  $[(\alpha, x, g)] \mapsto x$ . Esta definición es independiente del representante  $(\alpha, x, g)$  por como se estableció la relación de equivalencia. Para  $u, v \in P$ ,  $\Pi(u) = \Pi(v) \Leftrightarrow v = uh$ , para algún  $h \in G$ .

$\Leftarrow$ ): Sean  $(\alpha, x, g)$  y  $(\beta, y, g')$  representantes de  $u$  y  $v$ , respectivamente. Si  $v = uh$  para algún  $h \in G$ , entonces  $y = x$ , y por tanto  $\Pi(v) = \Pi(u)$ .

$\Rightarrow$ ): Si  $\Pi(u) = x = y = \Pi(v) \in U_\alpha \cap U_\beta$ , entonces  $v = uh$ , donde  $h$  está definida por la siguiente relación:  $g' = \psi_{\beta\alpha}(x)gh$ , ó  $h = g^{-1}(\psi_{\beta\alpha}(x))^{-1}g'$ . Falta, como siguiente paso, construir las funciones de transición  $\psi_{\beta\alpha}$ :

Sea  $\psi_\alpha : \Pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times G$  la trivialización local dada por  $\psi_\alpha(u) = (x, g)$ , donde  $u \in \Pi^{-1}(U_\alpha)$  es la clase de equivalencia de  $(\alpha, x, g)$ . Si escribimos  $\psi_\alpha^{-1}(x, g) = \psi_{\alpha,x}^{-1}(g)$ , entonces el mapeo  $\psi_{\alpha,x}^{-1} : G \rightarrow G_x$  es un difeomorfismo. Así pues, si definimos  $\psi_{\beta\alpha}(x) \equiv \psi_{\beta,x} \circ \psi_{\alpha,x}^{-1}$ ,  $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ , claramente  $\psi_{\beta\alpha}(x)$  es un mapeo de  $G$  a  $G$  que cumple con la relación de cociclo:  $\psi_{\gamma\beta}(x) \circ \psi_{\beta\alpha}(x) = \psi_{\gamma\alpha}(x)$ , para  $x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ .

Explícitamente:

$$\begin{aligned} \psi_{\gamma\beta}(x) &= \psi_{\gamma,x} \circ \psi_{\beta,x}^{-1}, \\ \psi_{\beta\alpha}(x) &= \psi_{\beta,x} \circ \psi_{\alpha,x}^{-1}, \\ \Rightarrow \psi_{\gamma\beta}(x) \circ \psi_{\beta\alpha}(x) &= (\psi_{\gamma,x} \circ \psi_{\beta,x}^{-1}) \circ (\psi_{\beta,x} \circ \psi_{\alpha,x}^{-1}) = \psi_{\gamma,x} \circ (\psi_{\beta,x}^{-1} \circ \psi_{\beta,x}) \circ \psi_{\alpha,x}^{-1} = \psi_{\gamma,x} \circ \psi_{\alpha,x}^{-1} = \psi_{\gamma\alpha}(x). \end{aligned}$$

Por último, probaremos que este haz fibrado principal es único, módulo equivalencia con otros haces fibrados principales. Para ello enunciamos el siguiente lema:

**Lema 3.1.** Sean  $P_1$  y  $P_2$  dos haces fibrados principales sobre  $N$  y supongamos (sin pérdida de generalidad) que  $\{U_\alpha\}$  es una cubierta de  $N$  tanto para  $P_1$  como para  $P_2$ . Sean  $\psi_{\beta\alpha}^1, \psi_{\beta\alpha}^2 : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$  las correspondientes funciones de transición para  $P_1$  y  $P_2$ , respectivamente. Entonces  $P_1$  y  $P_2$  son equivalentes si y sólo si existen mapeos continuos  $\lambda_\alpha : U_\alpha \rightarrow G$ , tales que:  $\psi_{\beta\alpha}^2(x) = (\lambda_\beta(x))^{-1} \circ \psi_{\beta\alpha}^1(x) \circ \lambda_\alpha(x)$ , para toda  $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ .

*Demostración.*  $\Rightarrow$ ): Supongamos que  $P_1$  y  $P_2$  son equivalentes, entonces existe  $\tilde{f} : P_1 \rightarrow P_2$  que induce el mapeo  $f = id_N$ . Sea  $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ . Así pues, para cualquier  $u \in \Pi_1^{-1}(x)$  existe  $\tilde{f}(u) \in \Pi_2^{-1}(x)$ . Consideremos ahora las siguientes trivializaciones locales sobre  $U_\alpha$  para  $P_1$  y  $P_2$  respectivamente:  $\psi_\alpha^1 : \Pi_1^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times G$  y  $\psi_\alpha^2 : \Pi_2^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times G$ , y también sobre  $U_\beta$ :  $\psi_\beta^1 : \Pi_1^{-1}(U_\beta) \rightarrow U_\beta \times G$  y  $\psi_\beta^2 : \Pi_2^{-1}(U_\beta) \rightarrow U_\beta \times G$ . Definiendo  $\lambda_\alpha : U_\alpha \rightarrow G$  por  $\lambda_\alpha(x) = \psi_{\alpha,x}^1 \circ (\psi_{\alpha,x}^2)^{-1}$  y  $\lambda_\beta : U_\beta \rightarrow G$  por  $\lambda_\beta(x) = \psi_{\beta,x}^1 \circ (\psi_{\beta,x}^2)^{-1}$ , podemos calcular  $(\lambda_\beta(x))^{-1} \circ \psi_{\beta\alpha}^1(x) \circ \lambda_\alpha(x)$ :

$$\begin{aligned} (\lambda_\beta(x))^{-1} \circ \psi_{\beta\alpha}^1(x) \circ \lambda_\alpha(x) &= [(\psi_{\beta,x}^1 \circ (\psi_{\beta,x}^2)^{-1})]^{-1} \circ [\psi_{\beta,x}^1 \circ (\psi_{\alpha,x}^1)^{-1}] \circ [\psi_{\alpha,x}^1 \circ (\psi_{\alpha,x}^2)^{-1}] \\ &= \psi_{\beta,x}^2 \circ [(\psi_{\beta,x}^1)^{-1} \circ \psi_{\beta,x}^1] \circ [(\psi_{\alpha,x}^1)^{-1} \circ \psi_{\alpha,x}^1] \circ (\psi_{\alpha,x}^2)^{-1} \\ &= \psi_{\beta,x}^2 \circ (\psi_{\alpha,x}^2)^{-1} \\ &= \psi_{\beta\alpha}^2(x) \end{aligned}$$

$\Leftarrow$ ): Partimos ahora del hecho que existen mapeos continuos  $\lambda_\alpha : U_\alpha \rightarrow G$  que satisfacen:

$$\psi_{\beta\alpha}^2(x) = (\lambda_\beta(x))^{-1} \circ \psi_{\beta\alpha}^1(x) \circ \lambda_\alpha(x),$$

para toda  $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ , y donde  $\psi_{\beta\alpha}^1, \psi_{\beta\alpha}^2 : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$  son las funciones de transición para  $P_1$  y  $P_2$ , respectivamente. Definamos  $\tilde{f}_\alpha : \Pi_1^{-1}(U_\alpha) \rightarrow \Pi_2^{-1}(U_\alpha)$  por  $\tilde{f}_\alpha(u) = (\psi_\alpha^2)^{-1}(x, (\lambda_\alpha(x))^{-1} \psi_{\alpha,x}^1)$ , entonces es fácil ver que bajo la proyección  $\Pi_2$  esta  $\tilde{f}$  induce el mapeo identidad en  $U_\alpha$ :

$$\begin{aligned} \Pi_2(\tilde{f}_\alpha(u)) = f_\alpha(\Pi_1(u)) = f_\alpha(x) &= \Pi_2[(\psi_\alpha^2)^{-1}(x, (\lambda_\alpha(x))^{-1} \psi_{\alpha,x}^1)] \\ &= \Pi_2(\Pi_2^{-1}(x)) \\ &= x, \end{aligned}$$

pero esto es válido para todo abierto  $U_\alpha$ ,  $\therefore f(x) = x$  (el mapeo identidad en  $N$ ), y por ende  $\tilde{f}$  es una equivalencia entre  $P_1$  y  $P_2$ . □

Con esto se demuestra el Teorema de Reconstrucción 3.3.<sup>2</sup> □

Basándonos en el Teorema de Reconstrucción, ahora podemos proceder a la demostración del Teorema 3.2 identificando cada uno de los elementos que conforman el haz fibrado principal en el caso de soluciones a las ecuaciones de Einstein en el vacío:

*Demostración.* Para una solución a las ecuaciones de Einstein en el vacío, dada por un marco ortonormal  $e$ , podemos tomar al espaciotiempo  $M$  como el espacio base. En el caso de haces fibrados principales, la fibra estándar es isomorfa al grupo de estructura. Por ende, basta únicamente identificar al grupo de estructura, el cual corresponde con el grupo de Lorentz  $SO(3, 1)$ . Construyamos como siguiente elemento del haz fibrado principal las funciones de transición.

Para ello consideremos el mapeo  $\tilde{\phi}_\alpha$  de  $U_\alpha$  al espacio vectorial de 1-formas sobre  $U_\alpha$  con valores en el álgebra de Lie de  $SO(3, 1)$ :  $\Lambda^1(U_\alpha, \mathfrak{so}(3, 1))$ , esto es:  $\tilde{\phi}_\alpha : U_\alpha \rightarrow \Lambda^1(U_\alpha, \mathfrak{so}(3, 1))$ , que nos permite introducir el marco ortonormal  $e_\alpha$  en  $U_\alpha$ . De forma similar  $\tilde{\phi}_\beta : U_\beta \rightarrow \Lambda^1(U_\beta, \mathfrak{so}(3, 1))$  permite introducir el marco  $e_\beta$  en  $U_\beta$ . Estos marcos están relacionados entre sí a través de un elemento  $\Lambda_{\alpha\beta} \in SO(3, 1)$  mediante:  $e_\alpha = \Lambda_{\alpha\beta} e_\beta$ . En la región de intersección, la condición de compatibilidad  $\tilde{\phi}_\alpha \circ \tilde{\phi}_\beta^{-1} = \Lambda_{\alpha\beta}$  debe ser satisfecha. Entonces, si consideramos tres abiertos, digamos

<sup>2</sup>Para la demostración de este teorema se han utilizado como base las siguientes referencias: [12], [18], [23].

$U_\alpha, U_\beta, U_\gamma$ , tales que  $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset$ , tendremos:  $\tilde{\phi}_\alpha \circ \tilde{\phi}_\gamma^{-1} = \Lambda_{\alpha\gamma}$ ,  $\tilde{\phi}_\beta \circ \tilde{\phi}_\gamma^{-1} = \Lambda_{\beta\gamma}$  y  $\tilde{\phi}_\alpha \circ \tilde{\phi}_\beta^{-1} = \Lambda_{\alpha\beta}$ . Por tanto, se sigue que:

$$\begin{aligned}\Lambda_{\alpha\beta} \circ \Lambda_{\beta\gamma} &= (\tilde{\phi}_\alpha \circ \tilde{\phi}_\beta^{-1}) \circ (\tilde{\phi}_\beta \circ \tilde{\phi}_\gamma^{-1}) \\ &= \tilde{\phi}_\alpha \circ (\tilde{\phi}_\beta^{-1} \circ \tilde{\phi}_\beta) \circ \tilde{\phi}_\gamma^{-1} \\ &= \tilde{\phi}_\alpha \circ \tilde{\phi}_\gamma^{-1} \\ &= \Lambda_{\alpha\gamma},\end{aligned}$$

cumpléndose la condición de cociclo necesaria para las funciones de transición.

Así pues, hemos identificado a las funciones de transición con los elementos  $\Lambda_{\alpha\beta} \in SO(3, 1)$ . Finalmente necesitamos mostrar que existe una conexión  $\omega \in P$ . Con este propósito en mente demostremos el siguiente teorema:

**Teorema 3.4.** *Dada una cubierta abierta  $\{U_\alpha\}$  de  $N$ , un grupo de estructura  $G$  con álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , una familia de 1-formas con valores en el álgebra de Lie:  $A_\alpha \in \Lambda^1(U_\alpha, \mathfrak{g})$  que cumplen con la condición de compatibilidad:*

$$A_\alpha = \psi_{\beta\alpha}^{-1} A_\beta \psi_{\beta\alpha} + \psi_{\beta\alpha}^{-1} d\psi_{\beta\alpha}, \quad (3.1)$$

donde  $\psi_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$  son elementos de  $G$ , y un conjunto de secciones locales  $\sigma_\alpha : U_\alpha \rightarrow \Pi^{-1}(U_\alpha)$  satisfaciendo  $\sigma_\beta = \sigma_\alpha \psi_{\alpha\beta}$  en  $U_\alpha \cap U_\beta$ , entonces existe una única conexión  $\omega \in P$  tal que  $A_\alpha = \sigma_\alpha^* \omega$ , donde  $\sigma_\alpha^*$  es el pullback inducido por  $\sigma_\alpha$ .

*Demostración.* Sea  $\omega$  una 1-forma en  $P$  con valores en el álgebra de Lie de  $G$  definida por:

$$\omega_\alpha \equiv g_\alpha^{-1} \Pi^* A_\alpha g_\alpha + g_\alpha^{-1} d_P g_\alpha, \quad (3.2)$$

donde  $d_P$  es la derivada exterior en  $P$  y  $g_\alpha$  es la trivialización local canónica definida por  $\psi_\alpha(u) = (x, g_\alpha)$ , para  $u = \sigma_\alpha(x)g_\alpha$ . Mostremos primero que efectivamente  $\sigma_\alpha^* \omega_\alpha = A_\alpha$ . Así pues, para  $X \in T_x N$ :

$$\begin{aligned}\sigma_\alpha^* \omega_\alpha(X) = \omega_\alpha(\sigma_{\alpha*}(X)) &= (g_\alpha^{-1} \Pi^* A_\alpha g_\alpha + g_\alpha^{-1} d_P g_\alpha)(\sigma_{\alpha*}(X)) \\ &= g_\alpha^{-1} \Pi^* A_\alpha(\sigma_{\alpha*} X) g_\alpha + g_\alpha^{-1} d_P g_\alpha(\sigma_{\alpha*} X) \\ &= \Pi^* A_\alpha(\sigma_{\alpha*} X) + d_P g_\alpha(\sigma_{\alpha*} X) \\ &= A_\alpha(\Pi_* \sigma_{\alpha*} X) + d_P g_\alpha(\sigma_{\alpha*} X),\end{aligned} \quad (3.3)$$

donde en la tercera igualdad se ha utilizado el hecho de que  $\sigma_{\alpha*} X \in T_{\sigma_\alpha} P$  y  $g_\alpha = e$  en  $\sigma_\alpha$ . Más aún, nos damos cuenta que  $\Pi_* \sigma_{\alpha*} = \text{id}_{T_x(N)}$  y que  $d_P g_\alpha(\sigma_{\alpha*} X) = 0$ , ya que  $g_\alpha = e$  a lo largo de  $\sigma_{\alpha*} X$ . Por tanto, ecuación (3.3) se reduce a:

$$\sigma_\alpha^* \omega_\alpha(X) = \omega_\alpha(\sigma_{\alpha*}(X)) = A_\alpha(X).$$

Como esto es válido para toda  $X \in T_x N$ , se sigue que  $\sigma_\alpha^* \omega_\alpha = A_\alpha$ . Ahora veamos que esta  $\omega_\alpha$  satisface los axiomas de una 1-forma de conexión, i.e.:

a)  $\omega(B^\sharp) = B$ , con  $B^\sharp$  el vector fundamental generado por  $B$

b)  $R_h^* \omega_{uh} = \text{Ad}_{h^{-1}} \omega_u$

Demostremos primero a): Por definición,  $B^\sharp$  es un elemento del subespacio vertical sobre  $P$  en el punto  $u$ , esto es,  $B^\sharp \in V_u P$  y  $B \in \mathfrak{g}$ , entonces:

$$\begin{aligned}\omega_\alpha(B^\sharp) &= (g_\alpha^{-1} \Pi^* A_\alpha g_\alpha + g_\alpha^{-1} d_P g_\alpha)(B^\sharp) \\ &= g_\alpha^{-1} \Pi^* A_\alpha(B^\sharp) g_\alpha + g_\alpha^{-1} d_P g_\alpha(B^\sharp) \\ &= g_\alpha^{-1} A_\alpha(\Pi_* B^\sharp) g_\alpha + g_\alpha^{-1} d_P g_\alpha(B^\sharp) \\ &= g_\alpha^{-1} d_P g_\alpha(B^\sharp),\end{aligned}$$

donde en la última línea se ha utilizado el hecho que  $\Pi_*X = 0$  para toda  $X \in V_uP$ .

$$\text{Además } d_P g_\alpha(B^\sharp) = \left. \frac{dg(u \exp(tB))}{dt} \right|_{t=0},$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \omega_\alpha(B^\sharp) &= g_\alpha(u)^{-1} \left. \frac{dg(u \exp(tB))}{dt} \right|_{t=0} \\ &= g_\alpha(u)^{-1} g_\alpha(u) \left. \frac{d \exp(tB)}{dt} \right|_{t=0} \\ &= B \exp(tB) \Big|_{t=0} \\ &= B. \end{aligned}$$

Procedamos a demostrar b): Sea  $X \in T_uP$  y  $h \in G$ , entonces:

$$\begin{aligned} R_h^* \omega_{\alpha uh}(X) = \omega_{\alpha uh}(R_{h*}X) &= (g_{\alpha uh}^{-1} \Pi^* A_\alpha g_{\alpha uh} + g_{\alpha uh}^{-1} d_P g_{\alpha uh})(R_{h*}X) \\ &= g_{\alpha uh}^{-1} A_\alpha (\Pi_* R_{h*}X) g_{\alpha uh} + g_{\alpha uh}^{-1} d_P g_{\alpha uh}(R_{h*}X) \end{aligned}$$

pero  $g_{\alpha uh} = g_{\alpha u}h$  y  $\Pi_* R_{h*}X = \Pi_*X$ , ya que  $\Pi R_h = \Pi$ ,

$$\begin{aligned} \Rightarrow R_h^* \omega_{\alpha uh}(X) &= h^{-1} g_{\alpha u}^{-1} A_\alpha (\Pi_*X) g_{\alpha u} h + g_{\alpha u}^{-1} \left. \frac{d}{dt} g_{\alpha c(t)h} \right|_{t=0} \\ &= h^{-1} g_{\alpha u}^{-1} A_\alpha (\Pi_*X) g_{\alpha u} h + h^{-1} g_{\alpha u}^{-1} \left. \frac{d}{dt} g_{\alpha c(t)} \right|_{t=0} h \\ &= h^{-1} g_{\alpha u}^{-1} A_\alpha (\Pi_*X) g_{\alpha u} h + h^{-1} g_{\alpha u}^{-1} d_P g_{\alpha u}(X) h \\ &= h^{-1} \omega_{\alpha u}(X) h \\ &= \text{Ad}_{h^{-1}} \omega_{\alpha u}(X), \end{aligned}$$

donde  $c(t)$  es una curva que pasa por  $u = c(0)$  y cuyo vector tangente en  $u$  es  $X$ .

Con esto se demuestra el Teorema 3.4, con  $\omega$  dada como en la ecuación (3.2). □

En nuestro caso el grupo de estructura es el grupo de Lorentz y los elementos  $\psi_{\beta\alpha}^{-1}$  en Teorema 3.4 los identificamos con las funciones de transición  $\Lambda_{\alpha\beta} \in SO(3,1)$  al comparar la condición de compatibilidad (3.1) con aquella para la conexión de espín  $A_\alpha$  dada por:

$$A_\alpha = \Lambda_{\alpha\beta} A_\beta \Lambda_{\alpha\beta}^{-1} + \Lambda_{\alpha\beta} d \Lambda_{\alpha\beta}^{-1}. \quad (3.4)$$

La familia de 1-formas locales  $A_\alpha$  está determinada por la conexión  $A$  definida en cada abierto  $U_\alpha$ . Por último, mostraremos que siempre es posible construir secciones locales. Dado que todo haz fibrado principal acepta una trivialización local definida por  $\psi_\alpha : \Pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times G$ , podemos introducir una sección canónica local sobre  $U_\alpha$  de la siguiente manera:

Sea  $u \in \Pi^{-1}(x)$ ,  $x \in U_\alpha$ , entonces existe un único elemento  $g_u \in G$  tal que  $u = \sigma_\alpha(x)g_u$ , donde  $\sigma_\alpha : U_\alpha \rightarrow \Pi^{-1}(U_\alpha)$  está definida por:  $\sigma_\alpha(x) = \psi_\alpha^{-1}(x, e)$ ;  $e = g_{\alpha\alpha}(x)$  es el elemento identidad en  $G$ . Así pues, es fácil ver que en la región de intersección de dos abiertos, digamos  $U_\alpha$  y  $U_\beta$ , dos secciones  $\sigma_\alpha$  y  $\sigma_\beta$  se relacionan por medio de la función de transición  $\psi_{\beta\alpha}$ , esto es:

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha(x) = \psi_\alpha^{-1}(x, e) = \psi_\beta^{-1}(x, \psi_{\beta\alpha}(x)e) &= \psi_\beta^{-1}(x, \psi_{\beta\alpha}(x)) \\ &= \psi_\beta^{-1}(x, e) \psi_{\beta\alpha}(x) \\ &= \sigma_\beta(x) \psi_{\beta\alpha}(x). \end{aligned}$$

Pero esto es válido para toda  $x \in U_\alpha$ , entonces  $\sigma_\alpha = \sigma_\beta \psi_{\beta\alpha}$ , tal como es requerido.

Es claro que en el caso que estamos analizando, las distintas secciones se relacionan por un elemento  $\Lambda_{\alpha\beta} \in SO(3,1)$ :  $\sigma_\alpha = \sigma_\beta \Lambda_{\beta\alpha}$ .

Así pues, se han construido todos los elementos necesarios para representar cualquier solución de las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío por un único haz fibrado principal 10-dimensional y una única conexión  $\omega \in P$ , demostrándose el Teorema Básico de la Cuantización Topológica (Teorema 3.2). □

Como siguiente paso consideremos el campo gravitacional en presencia de un campo de materia, es decir, además de la conexión  $\mathfrak{so}(3, 1)$  asociada a la acción gravitacional tendremos una conexión debida a la respectiva acción de materia. Todos estos resultados se pueden formular en el siguiente teorema:

**Teorema 3.5.** *Cualquier solución de las ecuaciones de campo de Einstein acopladas a un campo de materia (que lo consideraremos como un campo de norma<sup>3</sup>) puede ser representada por un único haz fibrado principal con el espaciotiempo  $M$  como el espacio base, el grupo de norma como el grupo de estructura (isomorfo a la fibra estándar) y una conexión con valores en el álgebra de Lie del grupo de norma.*

*Demostración.* La demostración de este teorema es análoga a la del Teorema 3.2, únicamente que en este caso tendremos una conexión de norma  $\mathcal{A}_\alpha \in \Lambda^1(U_\alpha, \mathfrak{g})$  en lugar de la conexión  $A_\alpha \in \Lambda^1(U_\alpha, \mathfrak{so}(3, 1))$ , y las funciones de transición serán elementos  $\gamma_{\alpha\beta} \in G$  en lugar de los elementos  $\Lambda_{\alpha\beta} \in SO(3, 1)$ . En consecuencia, en el caso de campos de materia, es posible construir un haz fibrado principal sobre  $M$  por cada conexión de norma adicional que se tenga. □

---

<sup>3</sup>Un campo de materia es un campo de norma si existe una 1-forma de conexión  $\mathcal{A}$  con valores en el álgebra de Lie de un grupo de Lie  $G$  la cual genera la intensidad de campo  $F$  en la forma usual:  $F = d\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A}$ .

## Capítulo 4

# Espectro topológico del hoyo negro de Reissner-Nordström

### 4.1. Espectro utilizando como fibra estándar el grupo $U(1)$

Recordamos de (2.13) que la métrica de Reissner-Nordström la podemos escribir como

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{r^2} dt^2 + \frac{r^2}{\Delta} dr^2 + r^2 d\Omega^2,$$

donde  $\Delta \equiv r^2 - 2Mr + Q^2$  y  $d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ . En términos de los horizontes de eventos  $r_+ = M + \sqrt{M^2 - Q^2}$  y  $r_- = M - \sqrt{M^2 - Q^2}$ , la expresión anterior se puede escribir de la siguiente manera:

$$ds^2 = -\frac{(r-r_-)(r-r_+)}{r^2} dt^2 + \frac{r^2}{(r-r_-)(r-r_+)} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (4.1)$$

Ésta es una solución a las ecuaciones de Einstein-Maxwell con el potencial electrostático  $\Phi(r) = \frac{Q}{r} dt$ . La correspondiente conexión  $u(1)$  asociada a este potencial es  $\tilde{\Phi} = i\Phi = i\frac{Q}{r} dt$ , que bajo una transformación de norma se comporta como en la ecuación (3.1) [31].<sup>1</sup> De acuerdo al Teorema 3.5 discutido en el capítulo anterior, es posible construir un único haz fibrado principal cuyo espacio base es el espaciotiempo  $M$  y el grupo de estructura (isomorfo a la fibra estándar) es el grupo  $U(1)$ . Ahora bien, como siguiente paso analizaremos las condiciones necesarias en el espacio base para que dicho haz fibrado principal pueda construirse. Para ello expresamos nuestra solución (4.1) en términos de un marco de tétradas (marco local y ortonormal) de tal forma que sea posible determinar las singularidades (de coordenadas) en la conexión  $\tilde{\Phi}$ . Las singularidades de curvatura las dejamos de lado ya que estas regiones son suprimidas *a priori* en el espaciotiempo (variedad base).

Consideremos el siguiente marco de tétradas:

$$\theta^1 = \frac{[(r-r_-)(r-r_+)]^{1/2}}{r} dt; \quad \theta^2 = \frac{r}{[(r-r_-)(r-r_+)]^{1/2}} dr; \quad \theta^3 = r d\theta; \quad \theta^4 = r \sin\theta d\phi. \quad (4.2)$$

En este marco, la conexión  $u(1)$  toma la siguiente forma:

$$\tilde{\Phi} = i \frac{Q}{[(r-r_-)(r-r_+)]^{1/2}} \theta^1, \quad (4.3)$$

---

<sup>1</sup>Es importante mencionar que la notación utilizada en [31] es distinta a la utilizada en este texto, ya que en aquel caso la conexión  $u(1)$  se denota simplemente por  $A$  y no por  $\tilde{\Phi}$ , como en nuestro caso.

la cual es singular cuando  $r = r_-$  y  $r = r_+$ . Para remover las singularidades primero aplicamos la transformación de norma  $\gamma_1 = \exp\left(\frac{iQt}{r_-}\right) \in U(1)$ . Sustituyendo en (3.1) obtenemos:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Phi}_1 &= \exp\left(\frac{iQt}{r_-}\right) \left[ i \frac{Q}{[(r-r_-)(r-r_+)]^{1/2}} \theta^1 \right] \exp\left(\frac{-iQt}{r_-}\right) + \exp\left(\frac{iQt}{r_-}\right) \frac{\partial}{\partial t} \left[ \exp\left(\frac{-iQt}{r_-}\right) \right] \frac{r}{[(r-r_-)(r-r_+)]^{1/2}} \theta^1 \\
 &= i \frac{Q}{[(r-r_-)(r-r_+)]^{1/2}} \theta^1 - \frac{iQ}{r_-} \frac{r}{[(r-r_-)(r-r_+)]^{1/2}} \theta^1 \\
 &= \frac{iQr_- \theta^1 - iQr \theta^1}{r_- [(r-r_-)(r-r_+)]^{1/2}} \\
 &= \frac{-iQ(r-r_-) \theta^1}{r_- [(r-r_-)(r-r_+)]^{1/2}} \\
 &= -i \frac{Q}{r_-} \left( \frac{r-r_-}{r-r_+} \right)^{1/2} \theta^1,
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

la cual es claramente no singular para toda  $r > 0$  excepto para  $r = r_+$ .

De forma análoga removemos la singularidad en  $r = r_+$  aplicando la transformación de norma  $\gamma_2 = \exp\left(\frac{iQt}{r_+}\right) \in U(1)$ . Esto es:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Phi}_2 &= \exp\left(\frac{iQt}{r_+}\right) \left[ i \frac{Q}{[(r-r_-)(r-r_+)]^{1/2}} \theta^1 \right] \exp\left(\frac{-iQt}{r_+}\right) + \exp\left(\frac{iQt}{r_+}\right) \frac{\partial}{\partial t} \left[ \exp\left(\frac{-iQt}{r_+}\right) \right] \frac{r}{[(r-r_-)(r-r_+)]^{1/2}} \theta^1 \\
 &= i \frac{Q}{[(r-r_-)(r-r_+)]^{1/2}} \theta^1 - \frac{iQ}{r_+} \frac{r}{[(r-r_-)(r-r_+)]^{1/2}} \theta^1 \\
 &= \frac{iQr_+ \theta^1 - iQr \theta^1}{r_+ [(r-r_-)(r-r_+)]^{1/2}} \\
 &= \frac{-iQ(r-r_+) \theta^1}{r_+ [(r-r_-)(r-r_+)]^{1/2}} \\
 &= -i \frac{Q}{r_+} \left( \frac{r-r_+}{r-r_-} \right)^{1/2} \theta^1,
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

la cual es claramente no singular para toda  $r > 0$  excepto en  $r = r_-$ .

Así pues, hemos encontrado dos transformaciones de norma que quitan las singularidades en la conexión, y por tanto, debe ser posible encontrar una función de transición  $\in U(1)$ , que llamaremos  $g_{12}$ , la cual relacione  $\tilde{\Phi}_1$  y  $\tilde{\Phi}_2$  a partir de (3.1), y que esté definida únicamente en la región de intersección donde ambas,  $\tilde{\Phi}_1$  y  $\tilde{\Phi}_2$ , son regulares. Tomemos en particular los subconjuntos abiertos  $U_1 = (0, r_+)$  y  $U_2 = (r_-, \infty)$ , los cuales cubren completamente la coordenada radial y por ende, podemos usar como un atlas de nuestra variedad base los subconjuntos  $U_1 \times \mathbb{R}^3$  y  $U_2 \times \mathbb{R}^3$ . Las conexiones  $\tilde{\Phi}_1$  y  $\tilde{\Phi}_2$  están bien definidas en los abiertos  $U_1$  y  $U_2$ , respectivamente. Por consiguiente, en la región de intersección  $U_1 \cap U_2 = (r_-, r_+)$ , ambas deben estar relacionadas por medio de una función de transición  $g_{12}$ , la cual resulta ser:

$$g_{12} = \exp \left[ iQ \left( \frac{1}{r_-} - \frac{1}{r_+} \right) t \right]. \tag{4.6}$$

Veamos que en efecto esta función de transición relaciona ambas conexiones:

$$\begin{aligned}
 g_{12}\tilde{\Phi}_2g_{12}^{-1} + g_{12}dg_{12}^{-1} &= \exp \left[ iQ \left( \frac{1}{r_-} - \frac{1}{r_+} \right) t \right] \left[ -i \frac{Q}{r_+} \left( \frac{r-r_+}{r-r_-} \right)^{1/2} \theta^1 \right] \exp \left[ -iQ \left( \frac{1}{r_-} - \frac{1}{r_+} \right) t \right] \\
 &+ \exp \left[ iQ \left( \frac{1}{r_-} - \frac{1}{r_+} \right) t \right] \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \exp \left[ -iQ \left( \frac{1}{r_-} - \frac{1}{r_+} \right) t \right] \right\} \frac{r}{[(r-r_-)(r-r_+)]^{1/2}} \theta^1 \\
 &= -i \frac{Q}{r_+} \left( \frac{r-r_+}{r-r_-} \right)^{1/2} \theta^1 - iQ \left( \frac{1}{r_-} - \frac{1}{r_+} \right) \frac{r}{[(r-r_-)(r-r_+)]^{1/2}} \theta^1 \\
 &= -i \frac{Q}{r_+} \left( \frac{r-r_+}{r-r_-} \right)^{1/2} \theta^1 - iQ \left( \frac{r_+-r_-}{r-r_+} \right) \frac{r}{[(r-r_-)(r-r_+)]^{1/2}} \theta^1 \\
 &= \frac{-iQ(r-r_+)r_-\theta^1 - iQ(r_+-r_-)r\theta^1}{r-r_+[(r-r_-)(r-r_+)]^{1/2}} \\
 &= \frac{(iQr_+r_- - iQr_+r)\theta^1}{r-r_+[(r-r_-)(r-r_+)]^{1/2}} \\
 &= \frac{-iQ(r-r_-)\theta^1}{r_-[(r-r_-)(r-r_+)]^{1/2}} \\
 &= -i \frac{Q}{r_-} \left( \frac{r-r_-}{r-r_+} \right)^{1/2} \theta^1 \\
 &= \tilde{\Phi}_1.
 \end{aligned}$$

La función de transición (4.6) es justamente la que nos dará el espectro topológico asociado al grupo de simetría  $U(1)$ . Para que la función de transición sea unívoca, y en consecuencia, la conexión transformada (ya sea  $\tilde{\Phi}_1$  o  $\tilde{\Phi}_2$ ) también lo sea, es necesario pedir que la coordenada  $t$  sea una coordenada compacta y periódica, y que el coeficiente en frente de  $t$  en (4.6) sea un entero, es decir:

$$Q \left( \frac{1}{r_-} - \frac{1}{r_+} \right) = n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (4.7)$$

Dado que la función de transición está definida únicamente en la región de intersección de los abiertos  $U_1$  y  $U_2$ , es decir, en  $(r_-, r_+)$ , es sensato pedir que  $t$  sea ahí una coordenada compacta y periódica, ya que en esa región (la región contenida entre los horizontes) la coordenada temporal se vuelve una coordenada radial y viceversa, esto es,  $t$  y  $r$  intercambian sus roles [22]. Por tanto, es permitido considerar a  $t$  como una coordenada angular:  $0 \leq t \leq 2\pi$  dentro de los horizontes. El espectro topológico se sigue inmediatamente al sustituir los valores de  $r_-$  y  $r_+$  en (4.7), obteniéndose:

$$\begin{aligned}
 Q \left( \frac{1}{r_-} - \frac{1}{r_+} \right) &= Q \left( \frac{1}{M - \sqrt{M^2 - Q^2}} - \frac{1}{M + \sqrt{M^2 - Q^2}} \right) \\
 &= Q \left[ \frac{M + \sqrt{M^2 - Q^2} - (M - \sqrt{M^2 - Q^2})}{(M - \sqrt{M^2 - Q^2})(M + \sqrt{M^2 - Q^2})} \right] \\
 &= Q \left[ \frac{2\sqrt{M^2 - Q^2}}{M^2 - (M^2 - Q^2)} \right] \\
 &= \frac{2}{Q} \sqrt{M^2 - Q^2} \\
 &= n,
 \end{aligned}$$

lo que indica que la carga eléctrica  $Q$  y la masa  $M$  de un hoyo negro de Reissner-Nordström no pueden tomar cualquier valor, sino que están relacionadas de forma discreta de acuerdo a (4.8):

$$\frac{2}{Q} \sqrt{M^2 - Q^2} = n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (4.8)$$

## 4.2. Espectro utilizando como fibra estándar el grupo $SO(3, 1)$

### 4.2.1. Coordenadas tipo esféricas

Una vez calculado el espectro topológico del hoyo negro de Reissner-Nordström utilizando como fibra estándar el grupo de simetría  $U(1)$ , procedamos a hacer lo propio para el caso en que la fibra estándar es el grupo de Lorentz  $SO(3, 1)$ . Para ello, usamos otra vez la solución de Reissner-Nordström en coordenadas tipo esféricas y dada en términos de un marco de tétradas como en la ecuación (4.2). A partir de este marco de tétradas es posible calcular la 1-forma de conexión vía la primera ecuación de estructura de Cartan:

$$D\theta^a := d\theta^a + \omega^a_b \wedge \theta^b = T^a, \quad (4.9)$$

donde  $d$  es la derivada exterior,  $D$  la derivada exterior covariante y  $T^a$  la 2-forma de torsión definida como  $T^a \equiv \frac{1}{2}T^a_{bc}\theta^b \wedge \theta^c$ . Para esta solución, las componentes del tensor de torsión son todas cero, por lo que (4.9) se reduce a

$$d\theta^a + \omega^a_b \wedge \theta^b = 0. \quad (4.10)$$

Pediremos, además, que  $\omega$  sea una conexión métrica, es decir, que localmente  $D\eta_{ab} = d\eta_{ab} + \omega_{ab} + \omega_{ba} = 0$ ,  $\eta_{ab}$  siendo la métrica de Minkowski, condición que implica la antisimetría de las componentes de la conexión [31]. En términos de la base coordenada<sup>2</sup>, la conexión resulta ser:

$$\omega^a_b = \begin{pmatrix} 0 & \frac{f'(r)}{2}dt & 0 & 0 \\ \frac{f'(r)}{2}dt & 0 & -\sqrt{f(r)}d\theta & -\sqrt{f(r)}\sin\theta d\phi \\ 0 & \sqrt{f(r)}d\theta & 0 & -\cos\theta d\phi \\ 0 & \sqrt{f(r)}\sin\theta d\phi & \cos\theta d\phi & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.11)$$

donde se ha definido  $f(r) \equiv \frac{\Delta}{r^2} = \frac{(r-r_-)(r-r_+)}{r^2} = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}$ , y el símbolo “ $'$ ” denota derivada con respecto a  $r$ . Cabe destacar, además, que los índices  $a$  y  $b$  que aparecen en la conexión etiquetan al marco local de tétradas, los cuales coinciden, en este caso particular, con los índices matriciales. Ahora bien, para analizar los puntos singulares es conveniente expresar la conexión anterior en términos de la base  $\{\theta^a\}$ .<sup>3</sup> Así pues:

$$\omega^a_b = \begin{pmatrix} 0 & \frac{f'(r)}{2\sqrt{f(r)}}\theta^1 & 0 & 0 \\ \frac{f'(r)}{2\sqrt{f(r)}}\theta^1 & 0 & -\frac{\sqrt{f(r)}}{r}\theta^3 & -\frac{\sqrt{f(r)}}{r}\theta^4 \\ 0 & \frac{\sqrt{f(r)}}{r}\theta^3 & 0 & -\frac{\cot\theta}{r}\theta^4 \\ 0 & \frac{\sqrt{f(r)}}{r}\theta^4 & \frac{\cot\theta}{r}\theta^4 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

Para que esté bien definida la conexión anterior, cada  $\omega^a_b$  ( $a, b = 1, 2, 3, 4$ ) debe ser real. Claramente el término  $\frac{f'(r)}{2\sqrt{f(r)}}\theta^1$  es siempre real para el dominio donde está bien definido, es decir, para toda  $r \neq r_{\pm}$ , ya que para  $r > r_+$  o  $0 < r < r_-$ ,  $\sqrt{f(r)}$  es real así como también  $\theta^1$ ; para  $r_- < r < r_+$ ,  $\sqrt{f(r)}$  es imaginario pero también  $\theta^1$ , por lo que el término completo  $\frac{f'(r)}{2\sqrt{f(r)}}\theta^1$  es real. El término  $\frac{\cot\theta}{r}\theta^4$  tampoco tiene problema, su dominio

está bien definido para toda  $r > 0$  y  $\theta \neq \{0, \pi\}$ . Sin embargo, los términos  $\frac{\sqrt{f(r)}}{r}\theta^3$  y  $\frac{\sqrt{f(r)}}{r}\theta^4$  no siempre son reales, específicamente para  $r_- < r < r_+$  ambos términos son imaginarios, por lo que tendremos que arreglar esta situación. El problema se resuelve automáticamente si para la región fuera de los horizontes, esto es, para  $0 < r < r_-$  y  $r > r_+$ , utilizamos la conexión (4.12), mientras que para la región entre los horizontes  $r_- < r < r_+$ , utilizamos esa misma conexión con la modificación de poner  $-f(r)$  donde aparezca  $f(r)$ . De esta forma nos aseguramos de que la conexión  $\omega^a_b$  sea siempre real.

Una vez aclarado este punto, continuemos a analizar las singularidades de (4.12): claramente existen singularidades (de coordenadas) cuando  $f(r) = 0$ , es decir, cuando  $r = r_{\pm}$ ; y en  $\theta = \{0, \pi\}$ . Este caso angular es similar al problema del monopolo de Dirac, en el cual se tienen que definir dos potenciales vectoriales, uno en cada casquete de la esfera, debido a las singularidades también en  $\theta = 0$  y en  $\theta = \pi$  (ver, por ejemplo, [24]). Por ende, para encontrar las relaciones de discretización (análogas a las obtenidas en el caso de  $U(1)$ ), debemos encontrar transformaciones

<sup>2</sup> $\omega^a_b = \omega^a_{b\mu} dx^\mu$ , donde  $\omega^a_{b\mu}$  son las componentes de  $\omega^a_b$  en la base de coordenadas. Aquí  $a, b = 1, 2, 3, 4$  y  $\mu = 1, 2, 3, 4$ .

<sup>3</sup>Las componentes de  $\omega^a_b$  en la base de tétradas están dadas por  $\omega^a_{bc}$ , esto es:  $\omega^a_b = \omega^a_{bc}\theta^c$ . ( $a, b, c = 1, 2, 3, 4$ )

de norma  $\in SO(3,1)$  tales que remuevan todas las singularidades de coordenadas, de forma que en la región de intersección donde las nuevas conexiones (conexiones transformadas) asociadas a estas transformaciones de norma son válidas (por supuesto podemos tomar cualquier subconjunto de la región completa donde están bien definidas estas conexiones transformadas, pero teniendo en cuenta que debemos construir un atlas de la variedad), es posible extraer el espectro topológico al considerar la condición de unicidad sobre la función de transición que relaciona tales conexiones transformadas. Para este propósito, es conveniente trabajar con el álgebra de Lie de  $SO(3,1)$ , siguiendo la convención:

$$J_1 = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$K_1 = -i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_2 = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_3 = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

Aquí las  $\{J_i\}$  son los generadores de rotaciones alrededor de la dirección  $i$  mientras que los  $\{K_i\}$  son los generadores de boosts que mezclan las direcciones 0 e  $i$  ( $i = 1, 2, 3$ ).<sup>4</sup>

Escribimos la conexión en términos de esta álgebra de Lie, esto es, hacemos  $\omega^a_b = \omega^a_{b\mu} dx^\mu$ , donde  $x^\mu$  son las coordenadas del espaciotiempo. Entonces la conexión (4.11) se ve como:

$$\omega^a_b = \frac{f'(r)}{2} dt (iK_1) - \sqrt{f(r)} d\theta (iJ_3) + \sqrt{f(r)} \sin \theta d\phi (iJ_2) - \cos \theta d\phi (iJ_1). \quad (4.14)$$

Es en esta forma de escribir la conexión donde su carácter endomórfico se ve explícitamente, es decir, una 1-forma con valores en el álgebra de Lie (en este caso en  $\mathfrak{so}(3,1)$ ).

De (4.14) es claro que  $\omega^a_{bt} = \frac{f'(r)}{2} (iK_1)$ , donde las únicas componentes distintas de cero son:  $\omega^1_{2t} = \omega^2_{1t} = \frac{f'(r)}{2}$ . Todas las componentes de  $\omega^a_{br}$  son idénticamente cero mientras que  $\omega^a_{b\theta} = -\sqrt{f(r)} (iJ_3)$ , lo que indica que  $\omega^2_{3\theta} = -\omega^3_{2\theta} = -\sqrt{f(r)}$ , siendo las demás componentes iguales a cero. Finalmente,  $\omega^a_{b\phi} = \sqrt{f(r)} \sin \theta (iJ_2) - \cos \theta (iJ_1) \Rightarrow \omega^2_{4\phi} = -\omega^4_{2\phi} = -\sqrt{f(r)} \sin \theta$  y  $\omega^3_{4\phi} = -\omega^4_{3\phi} = -\cos \theta$ ; todas las demás componentes son cero. Tratemos de remover primero las singularidades angulares, que es donde  $d\phi$  diverge, o equivalentemente, donde  $\theta^4 = 0$ .

Una forma de hacerlo es pidiendo que  $\omega^a_{b\phi}|_{\theta=0,\pi} = 0$  bajo la ecuación (3.4), es decir, que la conexión transformada en la dirección  $\phi$  valuada en  $\theta = 0$  y  $\theta = \pi$  se anule. Con esto en mente, consideremos la siguiente transformación de norma  $\in SO(3,1)$  dada por  $\Lambda_1 = \exp(-i\phi J_1)$ . Sustituyendo esta transformación en (3.4), obtenemos:

$$\begin{aligned} \omega_1' &= \exp(-i\phi J_1) \omega \exp(i\phi J_1) + \exp(-i\phi J_1) \partial_\mu (\exp(i\phi J_1)) dx^\mu \\ &= \exp(-i\phi J_1) \omega \exp(i\phi J_1) + iJ_1 d\phi, \end{aligned} \quad (4.15)$$

donde  $\exp(\mp i\phi J_1) = 1_{4 \times 4} \mp i \sin \phi J_1 + (\cos \phi - 1) J_1^2$ , siendo  $J_1$  uno de los generadores del álgebra de Lie de  $SO(3,1)$  (generador de rotaciones alrededor de la dirección  $\{1\}$ ) definidos anteriormente, y el símbolo “'” en la conexión únicamente se pone para hacer explícita la referencia a la conexión transformada. En forma matricial:

$$\Lambda_1^\pm = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \phi & \mp \sin \phi \\ 0 & 0 & \pm \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

Haciendo el cálculo explícito con  $\omega$  como en (4.11) resulta:

$$(\omega_1')^a_b = \begin{pmatrix} 0 & \frac{f'(r)}{2} dt & 0 & 0 \\ \frac{f'(r)}{2} dt & 0 & -\sqrt{f(r)}(\cos \phi d\theta - \sin \phi \sin \theta d\phi) & -\sqrt{f(r)}(\sin \phi d\theta + \cos \phi \sin \theta d\phi) \\ 0 & \sqrt{f(r)}(\cos \phi d\theta - \sin \phi \sin \theta d\phi) & 0 & (-\cos \theta + 1)d\phi \\ 0 & \sqrt{f(r)}(\sin \phi d\theta + \cos \phi \sin \theta d\phi) & (\cos \theta - 1)d\phi & 0 \end{pmatrix},$$

<sup>4</sup> $i = 0, 1, 2, 3$  representan las direcciones  $t, r, \theta, \phi$ , respectivamente.

que en términos del álgebra de Lie de  $SO(3, 1)$  es:<sup>5</sup>

$$(\omega_1')^a_b = \frac{f'(r)}{2} dt(iK_1) - \sqrt{f(r)}(\cos\phi d\theta - \sin\phi \sin\theta d\phi)(iJ_3) + \sqrt{f(r)}(\sin\phi d\theta + \cos\phi \sin\theta d\phi)(iJ_2) + (1 - \cos\theta)d\phi(iJ_1). \quad (4.17)$$

En  $\theta = 0$ , (4.17) se reduce a:

$$(\omega_1')^a_b |_{\theta=0} = \frac{f'(r)}{2} dt(iK_1), \quad (4.18)$$

la cual es claramente no singular. Por tanto, hemos mostrado que la transformación de norma  $\Lambda_1 = \exp(-i\phi J_1)$  remueve la singularidad en  $\theta = 0$  proveniente del término  $d\phi$  que aparecía en la conexión inicial (no transformada). Hacemos un procedimiento similar para el caso de la singularidad en  $\theta = \pi$ , también debida a  $d\phi$ , pero ahora la transformación de norma que resuelve el problema es  $\Lambda_2 = \exp(i\phi J_1)$ .

De nuevo insertamos esta transformación de norma en (3.4), esto es:

$$\begin{aligned} \omega_2' &= \exp(i\phi J_1)\omega \exp(-i\phi J_1) + \exp(i\phi J_1)\partial_\mu(\exp(-i\phi J_1))dx^\mu \\ &= \exp(i\phi J_1)\omega \exp(-i\phi J_1) - iJ_1 d\phi. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Explícitamente, la conexión transformada resulta ser:

$$(\omega_2')^a_b = \begin{pmatrix} 0 & \frac{f'(r)}{2} dt & 0 & 0 \\ \frac{f'(r)}{2} dt & 0 & -\sqrt{f(r)}(\cos\phi d\theta + \sin\phi \sin\theta d\phi) & \sqrt{f(r)}(\sin\phi d\theta - \cos\phi \sin\theta d\phi) \\ 0 & \sqrt{f(r)}(\cos\phi d\theta + \sin\phi \sin\theta d\phi) & 0 & (-\cos\theta - 1)d\phi \\ 0 & -\sqrt{f(r)}(\sin\phi d\theta - \cos\phi \sin\theta d\phi) & (\cos\theta + 1)d\phi & 0 \end{pmatrix},$$

que en términos del álgebra de Lie de  $SO(3, 1)$  se puede escribir como:

$$(\omega_2')^a_b = \frac{f'(r)}{2} dt(iK_1) - \sqrt{f(r)}(\cos\phi d\theta + \sin\phi \sin\theta d\phi)(iJ_3) - \sqrt{f(r)}(\sin\phi d\theta - \cos\phi \sin\theta d\phi)(iJ_2) - (1 + \cos\theta)d\phi(iJ_1). \quad (4.20)$$

En  $\theta = \pi$ , (4.20) se reduce a:

$$(\omega_2')^a_b |_{\theta=\pi} = \frac{f'(r)}{2} dt(iK_1), \quad (4.21)$$

la cual es no singular. Así pues, hemos mostrado también en este caso que existe una transformación de norma  $\Lambda_2 = \exp(i\phi J_1)$  tal que la singularidad en  $\theta = \pi$  que tenía la conexión (4.14) desaparece. Sean  $U_1 = [0, \pi)$  y  $U_2 = (0, \pi]$  dos subconjuntos del conjunto  $[0, \pi]$ . Este par de subconjuntos claramente cubre la coordenada angular  $\theta$  completamente, por lo que podemos tomar como un atlas de la variedad base  $M^4 - \{r = 0\}$  los subconjuntos  $U_1 \times \mathbb{R}^3 - \{r = 0\}$  y  $U_2 \times \mathbb{R}^3 - \{r = 0\}$ .<sup>6</sup> Las conexiones  $(\omega_1')^a_b$  y  $(\omega_2')^a_b$ , o simplemente  $\omega_1'$  y  $\omega_2'$ , están bien definidas en  $U_1$  y  $U_2$  respectivamente, por lo que en la región de intersección  $U_1 \cap U_2 = (0, \pi)$  ambas conexiones deben estar relacionadas mediante una función de transición  $\Lambda_{12} \in SO(3, 1)$  como en ecuación (3.4). Cálculo directo de  $\Lambda_{12}$  resulta ser:<sup>7</sup>

$$\Lambda_{12} = \Lambda_1 \Lambda_2^{-1} = \exp(-i\phi J_1)\exp(-i\phi J_1) = \exp(-2i\phi J_1), \quad (4.22)$$

donde se ha hecho uso de la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff [37].

Para obtener las condiciones de cuantización debemos pedir que la función de transición (4.22) sea univaluada. La coordenada  $\phi$  *per se* es una coordenada compacta y periódica, por lo que (4.22) es univaluada sólo si  $2 = n$ , condición que se satisface automáticamente (condición de cuantización trivial) o, dicho de otra forma, no hay información física subyacente al remover las singularidades angulares utilizando como grupo de simetría el grupo  $SO(3, 1)$ .

Fijémonos ahora en las singularidades en la parte radial, es decir, en  $r = r_+$  y  $r = r_-$ . De nuevo, en analogía a como se hizo en la parte angular, debemos encontrar transformaciones de norma  $\in SO(3, 1)$  tales que remuevan las

<sup>5</sup>Es importante mencionar que se ha hecho un abuso de notación al utilizar el símbolo “'”, ya que éste utilizado en  $\omega$  denota únicamente a la conexión transformada, mientras que al utilizarlo en la función  $f(r)$ , denota derivación con respecto a  $r$ .

<sup>6</sup> $\mathbb{R}^3 - \{r = 0\}$  denota el producto cartesiano  $(-\infty, \infty) \times (0, \infty) \times [0, 2\pi]$ , que son justamente los valores que pueden tomar las coordenadas  $t, r$  y  $\phi$ , respectivamente.

<sup>7</sup>Para una derivación detallada de la forma de la función de transición que relaciona dos 1-formas de conexión en alguna región de intersección distinta de vacío donde ambas 1-formas están bien definidas, ver el **Apéndice A**.

singularidades en estos puntos, que como sabemos, provienen del diferencial  $dt = (f(r))^{-1/2}\theta^1$ . Para ello, consideremos primero la transformación de norma  $\Lambda_+ = \exp(it_+K_1)$ , con  $t_+ \equiv \frac{f'(r_+)}{2}t$ . Insertando esta transformación en la ecuación (3.4) se obtiene:

$$\begin{aligned}\omega'_+ &= \exp(it_+K_1)\omega\exp(-it_+K_1) + \exp(it_+K_1)\partial_\mu[\exp(-it_+K_1)]dx^\mu \\ &= \exp(it_+K_1)\omega\exp(-it_+K_1) - i\frac{f'(r_+)}{2}K_1dt,\end{aligned}\quad (4.23)$$

donde

$$\exp(\pm it_+K_1) = 1_{4\times 4} \pm i \sinh t_+ K_1 + (1 - \cosh t_+) K_1^2,$$

siendo  $K_1$  el generador de boosts en la dirección  $\{1\}$  dado en la ecuación (4.13). Sustituyendo estas expresiones para  $\exp(\pm it_+K_1)$  y la expresión para  $\omega$  (ecuación (4.11)) en (4.23), obtenemos:

$$(\omega'_+)^a_b = \begin{pmatrix} 0 & \left(\frac{f'(r)}{2} - \frac{f'(r_+)}{2}\right)dt & -\sqrt{f(r)}\sinh t_+d\theta & -\sqrt{f(r)}\sin\theta\sinh t_+d\phi \\ \left(\frac{f'(r)}{2} - \frac{f'(r_+)}{2}\right)dt & 0 & -\sqrt{f(r)}\cosh t_+d\theta & -\sqrt{f(r)}\sin\theta\cosh t_+d\phi \\ -\sqrt{f(r)}\sinh t_+d\theta & \sqrt{f(r)}\cosh t_+d\theta & 0 & -\cos\theta d\phi \\ -\sqrt{f(r)}\sin\theta\sinh t_+d\phi & \sqrt{f(r)}\sin\theta\cosh t_+d\phi & \cos\theta d\phi & 0 \end{pmatrix},$$

que en términos del álgebra de Lie de  $SO(3,1)$  es:

$$\begin{aligned}(\omega'_+)^a_b &= \left(\frac{f'(r)}{2} - \frac{f'(r_+)}{2}\right)dt(iK_1) - \sqrt{f(r)}\sinh t_+d\theta(iK_2) - \sqrt{f(r)}\sin\theta\sinh t_+d\phi(iK_3) \\ &\quad - \sqrt{f(r)}\cosh t_+d\theta(iJ_3) + \sqrt{f(r)}\sin\theta\cosh t_+d\phi(iJ_2) - \cos\theta d\phi(iJ_1).\end{aligned}\quad (4.24)$$

En  $r = r_+$ , (4.24) se reduce a:

$$(\omega'_+)^a_b|_{r=r_+} = -\cos\theta d\phi(iJ_1),\quad (4.25)$$

la cual es claramente no singular. De hecho, (4.24) es no singular  $\forall r \in (0, \infty) - \{r = r_-\}$ , contemplando que para la región entre los horizontes  $r_- < r < r_+$  tomemos  $-f(r)$  en lugar de  $f(r)$  para que la raíz cuadrada sea real.

Por otro lado, para remover la singularidad en  $r = r_-$  aplicamos la transformación de norma  $\Lambda_- = \exp(it_-K_1)$ , con  $t_- \equiv \frac{f'(r_-)}{2}t$ . Veamos que, en efecto, esta transformación es la que hace el trabajo correcto: Sustituyendo  $\Lambda_-$  en (3.4), se obtiene:

$$\begin{aligned}\omega'_- &= \exp(it_-K_1)\omega\exp(-it_-K_1) + \exp(it_-K_1)\partial_\mu[\exp(-it_-K_1)]dx^\mu \\ &= \exp(it_-K_1)\omega\exp(-it_-K_1) - i\frac{f'(r_-)}{2}K_1dt.\end{aligned}\quad (4.26)$$

Desarrollamos la expresión anterior en forma matricial:

$$(\omega'_-)^a_b = \begin{pmatrix} 0 & \left(\frac{f'(r)}{2} - \frac{f'(r_-)}{2}\right)dt & -\sqrt{f(r)}\sinh t_-d\theta & -\sqrt{f(r)}\sin\theta\sinh t_-d\phi \\ \left(\frac{f'(r)}{2} - \frac{f'(r_-)}{2}\right)dt & 0 & -\sqrt{f(r)}\cosh t_-d\theta & -\sqrt{f(r)}\sin\theta\cosh t_-d\phi \\ -\sqrt{f(r)}\sinh t_-d\theta & \sqrt{f(r)}\cosh t_-d\theta & 0 & -\cos\theta d\phi \\ -\sqrt{f(r)}\sin\theta\sinh t_-d\phi & \sqrt{f(r)}\sin\theta\cosh t_-d\phi & \cos\theta d\phi & 0 \end{pmatrix},$$

que en términos del álgebra de Lie de  $SO(3,1)$  es:

$$\begin{aligned}(\omega'_-)^a_b &= \left(\frac{f'(r)}{2} - \frac{f'(r_-)}{2}\right)dt(iK_1) - \sqrt{f(r)}\sinh t_-d\theta(iK_2) - \sqrt{f(r)}\sin\theta\sinh t_-d\phi(iK_3) \\ &\quad - \sqrt{f(r)}\cosh t_-d\theta(iJ_3) + \sqrt{f(r)}\sin\theta\cosh t_-d\phi(iJ_2) - \cos\theta d\phi(iJ_1).\end{aligned}\quad (4.27)$$

Evaluando (4.27) en  $r = r_-$  resulta:

$$(\omega'_-)^a_b|_{r=r_-} = -\cos\theta d\phi(iJ_1),\quad (4.28)$$

la cual es claramente no singular. Más aún, (4.27) es no singular  $\forall r \in (0, \infty) - \{r = r_+\}$ , con la misma consideración anterior de poner  $-f(r)$  en lugar de  $f(r)$  en la región entre los horizontes.

Resumiendo, hemos encontrado dos transformaciones de norma  $\Lambda_+$  y  $\Lambda_-$  que remueven las singularidades en  $r_+$  y  $r_-$ ,

respectivamente, debidas al término  $dt$  en la conexión (4.14). Sean  $U_- = (0, r_+)$  y  $U_+ = (r_-, \infty)$  dos subconjuntos del conjunto  $(0, \infty)$ . Este par de subconjuntos claramente cubre el dominio de la coordenada radial  $r$ , por lo que podemos tomar como un atlas de la variedad base  $M^4 - \{r = 0\}$  los subconjuntos  $U_- \times \mathbb{R}^3$  y  $U_+ \times \mathbb{R}^3$ .<sup>8</sup> Las conexiones  $(\omega'_+)^a_b$  y  $(\omega'_-)^a_b$ , o simplemente  $\omega'_+$  y  $\omega'_-$ , están bien definidas en  $U_+$  y  $U_-$  respectivamente, por lo que en la región de intersección  $U_+ \cap U_- = (r_-, r_+)$  ambas conexiones deben estar relacionadas mediante una función de transición  $\Lambda_{-+} \in SO(3, 1)$ , como en ecuación (3.4). Cálculo directo de  $\Lambda_{-+}$  resulta:

$$\Lambda_{-+} = \Lambda_- \Lambda_+^{-1} = \exp(it_- K_1) \exp(-it_+ K_1) = \exp(i(t_- - t_+) K_1), \quad (4.29)$$

donde otra vez, como en (4.22), se ha usado la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff.

Ahora bien, para obtener el espectro topológico asociado a este grupo de simetría espaciotemporal (grupo  $SO(3, 1)$ ), debemos imponer condiciones de unicidad en los valores que puede tomar la función de transición (4.29).  $K_1$  es el generador de boosts en la dirección  $\{1\}$ , por lo que en forma matricial,  $\exp(i(t_- - t_+) K_1)$  se ve de la siguiente manera:

$$\Lambda_{-+} = \begin{pmatrix} \cosh(t_- - t_+) & \sinh(t_- - t_+) & 0 & 0 \\ \sinh(t_- - t_+) & \cosh(t_- - t_+) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.30)$$

Para que  $\Lambda_{-+}$  sea univaluada, cada componente de ella lo debe de ser. Esto ocurre, por definición, para todo valor del argumento de las funciones  $\sinh$  y  $\cosh$ , es decir, para toda  $t_- - t_+ = \frac{1}{2}[f'(r_-) - f'(r_+)]t$ , siendo  $t$  una coordenada radial por tratarse de la región entre los horizontes de eventos. A diferencia del caso del espectro de  $U(1)$ , aquí no podemos considerar a  $t$  una coordenada compacta ni periódica, ya que estamos removiendo las singularidades radiales con una transformación de norma que involucra únicamente la parte no-compacta del grupo de Lorentz.<sup>9</sup> Así pues, no existe restricción alguna sobre los valores que puede tomar la función  $\frac{1}{2}[f'(r_-) - f'(r_+)]$ , y por ende, no hay condición de cuantización que nos lleve a algún espectro topológico (discreto) en el caso de  $SO(3, 1)$ .

#### 4.2.2. Coordenadas de Kruskal-Szekeres

Para corroborar que efectivamente no se obtiene un espectro topológico (según el formalismo de Cuantización Topológica) en el caso en que utilizamos como fibra estándar del haz fibrado principal el grupo de Lorentz  $SO(3, 1)$ , utilicemos otras coordenadas, por ejemplo, las coordenadas de Kruskal-Szekeres  $\{U^\pm, V^\pm\}$  asociadas a la máxima extensión analítica de Reissner-Nordström, dadas por (2.17). Recordamos de la sección 2.3 que las coordenadas  $\{U^+, V^+\}$  son válidas para la región  $r > r_-$ , y en las cuales la métrica del espaciotiempo de R-N se ve como:

$$ds^2 = -\frac{r_+ r_- \exp(-2\kappa_+ r)}{\kappa_+^2 r^2} \left(\frac{r_-}{r - r_-}\right)^{\left(\frac{\kappa_+}{\kappa_-} - 1\right)} dU^+ dV^+ + r^2 d\Omega^2, \quad (4.31)$$

donde  $r(U^+, V^+)$  está determinada implícitamente por la ecuación:

$$U^+ V^+ = -\exp(2\kappa_+ r) \left(\frac{r - r_+}{r_+}\right) \left(\frac{r - r_-}{r_-}\right)^{\frac{\kappa_+}{\kappa_-}}. \quad (4.32)$$

La región  $0 < r < r_-$  se cubre con las coordenadas  $\{U^-, V^-\}$ , en las cuales el espaciotiempo de R-N toma la siguiente forma:

$$ds^2 = -\frac{r_+ r_- \exp(-2\kappa_- r)}{\kappa_-^2 r^2} \left(\frac{r_+}{r_+ - r}\right)^{\left(\frac{\kappa_-}{\kappa_+} - 1\right)} dU^- dV^- + r^2 d\Omega^2, \quad (4.33)$$

donde, de forma similar,  $r(U^-, V^-)$  está determinada implícitamente por la ecuación:

$$U^- V^- = -\exp(-2\kappa_- r) \left(\frac{r_- - r}{r_-}\right) \left(\frac{r_+ - r}{r_+}\right)^{\frac{\kappa_-}{\kappa_+}}. \quad (4.34)$$

<sup>8</sup>En este caso,  $\mathbb{R}^3$  denota al producto cartesiano  $(-\infty, \infty) \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ , que son los valores que pueden tomar las coordenadas  $t$ ,  $\theta$  y  $\phi$ , respectivamente. En notación compacta:  $\mathbb{R}^3 \cong (-\infty, \infty) \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ .

<sup>9</sup>La parte no-compacta del grupo de Lorentz corresponde a aquella generada por los boosts  $\{K_i\}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , definidos en (4.13). (Podemos ver también que  $t$  no puede ser periódica por ningún motivo ya que las funciones  $\cosh$  y  $\sinh$  no lo son.)

Trabajemos primero con el par de coordenadas  $\{U^+, V^+\}$ , es decir, con la métrica (4.31). Eligiendo el siguiente marco de tétradas ortonormal:

$$\theta^1 = \frac{h_+(r)}{2}dU^+ - dV^+; \quad \theta^2 = \frac{h_+(r)}{2}dU^+ + dV^+; \quad \theta^3 = rd\theta; \quad \theta^4 = r \sin \theta d\phi, \quad (4.35)$$

con  $h_+(r) \equiv -\frac{1}{2} \frac{r_+ r_-}{\kappa_+^2} \frac{\exp(-2\kappa_+ r)}{r^2} \left( \frac{r_-}{r_+ - r_-} \right)^{\left( \frac{\kappa_+}{\kappa_-} - 1 \right)}$  y, usando la primera ecuación de estructura de Cartan (ec.(4.10)), obtenemos la siguiente 1-forma de conexión:

$$\omega^a_b = \begin{pmatrix} 0 & \frac{h'_+(r)}{2h_+(r)}(\theta^1 - \theta^2) & -\frac{1}{2r}\theta^3 & -\frac{1}{2r}\theta^4 \\ \frac{h'_+(r)}{2h_+(r)}(\theta^1 - \theta^2) & 0 & -\frac{1}{2r}\theta^3 & -\frac{1}{2r}\theta^4 \\ -\frac{1}{2r}\theta^3 & \frac{1}{2r}\theta^3 & 0 & -\frac{\cot \theta}{r}\theta^4 \\ -\frac{1}{2r}\theta^4 & \frac{1}{2r}\theta^4 & \frac{\cot \theta}{r}\theta^4 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.36)$$

donde el símbolo “'” en  $h'_+(r)$  denota derivada con respecto a  $r$ . Podemos expresar  $\omega^a_b$  en términos de las componentes endomórficas  $\omega^a_{b\mu}$ , por lo que  $\omega^a_b = \omega^a_{b\mu} dx^\mu$ , donde  $x^\mu$  son las coordenadas del espaciotiempo. Explícitamente:

$$\omega^a_b = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{h'_+(r)}{h_+(r)}dV^+ & -\frac{1}{2}d\theta & -\frac{1}{2}\sin \theta d\phi \\ -\frac{h'_+(r)}{h_+(r)}dV^+ & 0 & -\frac{1}{2}d\theta & -\frac{1}{2}\sin \theta d\phi \\ -\frac{1}{2}d\theta & \frac{1}{2}d\theta & 0 & -\cos \theta d\phi \\ -\frac{1}{2}\sin \theta d\phi & \frac{1}{2}\sin \theta d\phi & \cos \theta d\phi & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.37)$$

Analizando cada componente de la conexión vemos que el único término singular es  $\frac{\cot \theta}{r}\theta^4 = \cos \theta d\phi$ , el cual es no regular en  $\theta = 0$  y  $\theta = \pi$ . Este término es idéntico al término singular relacionado con la parte angular analizado en el caso anterior donde se utilizaron coordenadas tipo esféricas, por lo que las mismas transformaciones de norma se requieren para remover tales singularidades, es decir:  $\Lambda_1 = \exp(-i\phi J_1)$  y  $\Lambda_2 = \exp(i\phi J_1)$ , donde  $\Lambda_1$  remueve la singularidad en  $\theta = 0$  y  $\Lambda_2$  remueve la singularidad en  $\theta = \pi$ .  $J_1$  es el generador de rotaciones alrededor de la dirección  $\{1\}$ . Por tanto, la función de transición que relaciona ambas conexiones transformadas en la región de intersección de los abiertos donde estas conexiones están bien definidas ( $\Lambda_{12} = \exp(-2i\phi J_1)$ ) de nuevo arroja una condición de cuantización *trivial*.

**Nota:** El término  $-\frac{h'_+(r)}{h_+(r)}dV^+$  es regular en todo punto ya que  $dV^+ = \frac{1}{2}(\theta^2 - \theta^1)$  es regular así como la función  $-\frac{h'_+(r)}{h_+(r)}$ .

Procedamos finalmente a cubrir la parte faltante del espaciotiempo de R-N con el par de coordenadas  $\{U^-, V^-\}$ , esto es, utilicemos la métrica (4.33). Elegimos el siguiente marco de tétradas ortonormal:

$$\theta^1 = \frac{h_-(r)}{2}dU^- - dV^-; \quad \theta^2 = \frac{h_-(r)}{2}dU^- + dV^-; \quad \theta^3 = rd\theta; \quad \theta^4 = r \sin \theta d\phi, \quad (4.38)$$

con  $h_-(r) \equiv -\frac{1}{2} \frac{r_+ r_-}{\kappa_-^2} \frac{\exp(-2\kappa_- r)}{r^2} \left( \frac{r_+}{r_+ - r_-} \right)^{\left( \frac{\kappa_-}{\kappa_+} - 1 \right)}$  y, usando de nuevo la primera ecuación de estructura de Cartan (ec.(4.10)), obtenemos la siguiente 1-forma de conexión:

$$\omega^a_b = \begin{pmatrix} 0 & \frac{h'_-(r)}{2h_-(r)}(\theta^1 - \theta^2) & -\frac{1}{2r}\theta^3 & -\frac{1}{2r}\theta^4 \\ \frac{h'_-(r)}{2h_-(r)}(\theta^1 - \theta^2) & 0 & -\frac{1}{2r}\theta^3 & -\frac{1}{2r}\theta^4 \\ -\frac{1}{2r}\theta^3 & \frac{1}{2r}\theta^3 & 0 & -\frac{\cot \theta}{r}\theta^4 \\ -\frac{1}{2r}\theta^4 & \frac{1}{2r}\theta^4 & \frac{\cot \theta}{r}\theta^4 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.39)$$

El símbolo “'” en  $h'_-(r)$  denota derivada con respecto a  $r$ .

En términos de las componentes endomórficas  $\omega^a_{b\mu}$ , la conexión anterior se ve como  $\omega^a_b = \omega^a_{b\mu} dx^\mu$ , esto es:

$$\omega^a_b = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{h'_-(r)}{h_-(r)}dV^- & -\frac{1}{2}d\theta & -\frac{1}{2}\sin \theta d\phi \\ -\frac{h'_-(r)}{h_-(r)}dV^- & 0 & -\frac{1}{2}d\theta & -\frac{1}{2}\sin \theta d\phi \\ -\frac{1}{2}d\theta & \frac{1}{2}d\theta & 0 & -\cos \theta d\phi \\ -\frac{1}{2}\sin \theta d\phi & \frac{1}{2}\sin \theta d\phi & \cos \theta d\phi & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.40)$$

La conexión obtenida en este caso (a partir de (4.38)) es idéntica en forma a la obtenida para (4.35), con la única diferencia de poner  $h_-(r)$  donde estaba  $h_+(r)$  y  $h'_-(r)$  en lugar de  $h'_+(r)$ , por lo que las singularidades en este caso también ocurren en  $\theta = 0$  y  $\theta = \pi$ . Por ende, las mismas transformaciones de norma remueven estas singularidades y el espectro topológico obtenido a partir de imponer condiciones de unicidad sobre la función de transición que relaciona las conexiones transformadas es trivial.

### 4.3. Versión euclidiana del hoyo negro de Reissner-Nordström y cuantización de la masa y carga

Dado que no es posible obtener un espectro topológico (discreto) en el caso en que la fibra es el grupo  $SO(3, 1)$ , ya que justo las transformaciones de norma que remueven las singularidades coordenadas radiales en (4.11), o equivalentemente en (4.14), tienen que ver únicamente con la parte no-compacta del grupo de Lorentz, podemos intentar analizar la versión euclidiana de Reissner-Nordström para ver si nos arroja, en efecto, una relación de discretización. Para ello, hacemos una rotación de Wick en la coordenada temporal en la solución de R-N (4.1), es decir, hacemos el cambio  $t \rightarrow it$ , obteniendo la versión euclidiana de R-N:

$$ds^2 = \frac{(r - r_-)(r - r_+)}{r^2} dt^2 + \frac{r^2}{(r - r_-)(r - r_+)} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (4.41)$$

Procedemos de manera similar como lo hicimos en la primera sección de este capítulo y escribimos esta solución, (4.41), en términos de un marco de tétradas (local y ortonormal), el cual puede ser el mismo utilizado en (4.2), ya que matemáticamente sólo cambiamos un signo al pasar de la versión lorentziana a la versión euclidiana. Sin embargo, estas tétradas ahora ya no estarán más relacionadas entre sí por una matriz de Lorentz, sino que ahora, por tener la solución invariancia ante transformaciones de norma  $SO(4)$ , estos marcos de tétradas estarán relacionados por un elemento  $\psi_{\alpha\beta} \in SO(4)$ , es decir,  $\theta_\alpha = \psi_{\alpha\beta}\theta_\beta$ . El cálculo de la conexión es idéntico al realizado anteriormente en el que se obtuvo (4.11), salvo que en este caso, debido a que estamos trabajando con una métrica euclidiana,  $diag(1, 1, 1, 1)$ , la conexión difiere en el signo de una de las componentes. Explícitamente, la conexión se ve como:

$$\omega^a_b = \begin{pmatrix} 0 & \frac{f'(r)}{2} dt & 0 & 0 \\ -\frac{f'(r)}{2} dt & 0 & -\sqrt{f(r)} d\theta & -\sqrt{f(r)} \sin\theta d\phi \\ 0 & \sqrt{f(r)} d\theta & 0 & -\cos\theta d\phi \\ 0 & \sqrt{f(r)} \sin\theta d\phi & \cos\theta d\phi & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.42)$$

la cual la podemos escribir en términos del álgebra de Lie de  $SO(4)$ :<sup>10</sup>

$$\begin{aligned} \tilde{J}_1 &= -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, & \tilde{J}_2 &= -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \tilde{J}_3 &= -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \tilde{K}_1 &= -i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \tilde{K}_2 &= -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \tilde{K}_3 &= -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.43)$$

resultando:

$$\omega^a_b = \frac{f'(r)}{2} dt (i\tilde{K}_1) - \sqrt{f(r)} d\theta (i\tilde{J}_3) + \sqrt{f(r)} \sin\theta d\phi (i\tilde{J}_2) - \cos\theta d\phi (i\tilde{J}_1). \quad (4.44)$$

Así como en el caso del álgebra de  $SO(3, 1)$  donde las  $\{J_i\}$  son los generadores de rotaciones y los  $\{K_i\}$  los generadores de boosts, en este caso las  $\{\tilde{J}_i\}$  así como los  $\{\tilde{K}_i\}$  son ambos generadores de rotaciones.<sup>11</sup> La conexión (4.44) es

<sup>10</sup>Es importante mencionar que las álgebras de Lie de  $SO(4)$  y  $SO(3, 1)$  son isomorfas, es decir, satisfacen las mismas relaciones de conmutación.

<sup>11</sup>Cabe destacar que los generadores  $\{J_i\}$  asociados al álgebra de Lie  $\mathfrak{so}(3, 1)$  son exactamente los mismos generadores  $\{\tilde{J}_i\}$  asociados al álgebra de Lie  $\mathfrak{so}(4)$ . Simplemente se usó esta notación de tilde (“ $\sim$ ”) para hacer la distinción entre generadores que pertenecen a distintas (aunque isomorfas) álgebras de Lie.

idéntica a la conexión (4.14), salvo por los generadores involucrados en cada una de las álgebras de Lie. Esto lleva como consecuencia que las transformaciones de norma que remueven las singularidades de coordenadas en la conexión deben de tener la misma forma. En efecto, para las singularidades en la parte angular, es decir, en  $\theta = 0$  y  $\theta = \pi$ , las transformaciones de norma que hacen el trabajo son  $\tilde{\Lambda}_1 = \exp(-i\phi\tilde{J}_1)$  y  $\tilde{\Lambda}_2 = \exp(i\phi\tilde{J}_1)$ , respectivamente. De nuevo, en la región de intersección donde las conexiones transformadas  $\omega'_1$  y  $\omega'_2$  están bien definidas, obtenemos una función de transición análoga a (4.22), esto es,  $\tilde{\Lambda}_{12} = \exp(-2i\phi\tilde{J}_1) \in SO(4)$ , la cual arroja una condición de cuantización trivial. Por otro lado, para las singularidades en la parte radial, es decir, en  $r = r_+$  y en  $r = r_-$ , las transformaciones de norma que remueven estas singularidades son  $\tilde{\Lambda}_+ = \exp(it_+\tilde{K}_1)$  y  $\tilde{\Lambda}_- = \exp(it_-\tilde{K}_1)$ , respectivamente, con  $t_{\pm} = \frac{f'(r_{\pm})}{2}t$  como antes. Las conexiones transformadas tienen la siguiente forma:

$$\begin{aligned} (\omega'_{\pm})^a_b = & \left( \frac{f'(r)}{2} - \frac{f'(r_{\pm})}{2} \right) dt(i\tilde{K}_1) - \sqrt{f(r)} \sin t_{\pm} d\theta(i\tilde{K}_2) - \sqrt{f(r)} \sin \theta \sin t_{\pm} d\phi(i\tilde{K}_3) \\ & - \sqrt{f(r)} \cos t_{\pm} d\theta(i\tilde{J}_3) + \sqrt{f(r)} \sin \theta \cos t_{\pm} d\phi(i\tilde{J}_2) - \cos \theta d\phi(i\tilde{J}_1), \end{aligned} \quad (4.45)$$

donde  $(\omega'_+)^a_b$  es la conexión asociada a la transformación de norma  $\tilde{\Lambda}_+$  y  $(\omega'_-)^a_b$  es la conexión asociada a la transformación de norma  $\tilde{\Lambda}_-$ . Cabe destacar que la forma de las conexiones transformadas (4.45) es similar a aquellas dadas por las ecuaciones (4.24) y (4.27), salvo por los generadores correspondientes a cada álgebra además de que en este caso ( $SO(4)$ ) las funciones trigonométricas  $\sin$  y  $\cos$  reemplazan a las funciones trigonométricas hiperbólicas  $\sinh$  y  $\cosh$  que surgen para el caso de  $SO(3, 1)$ . Elegiendo otra vez los subconjuntos  $U_- = (0, r_+)$  y  $U_+ = (r_-, \infty)$  de tal forma que la unión de  $U_- \times \mathbb{R}^3$  y  $U_+ \times \mathbb{R}^3$  es un atlas de la variedad base  $M^4 - \{r = 0\}$ , obtenemos la siguiente función de transición para el caso de  $SO(4)$ :

$$\tilde{\Lambda}_{-+} = \tilde{\Lambda}_- \tilde{\Lambda}_+^{-1} = \exp\left(it_-\tilde{K}_1\right) \exp\left(-it_+\tilde{K}_1\right) = \exp\left(i(t_- - t_+)\tilde{K}_1\right). \quad (4.46)$$

Esta función de transición es idéntica en forma a la función de transición obtenida en (4.29), salvo por los generadores involucrados. No obstante, es esta diferencia entre los generadores que aparecen en las funciones de transición (4.29) y (4.46) la que hace que en el caso de  $SO(4)$  sí exista un espectro topológico **discreto** y en  $SO(3, 1)$  no. Veamos cómo llegamos a tal afirmación: Una vez teniendo (4.46), el proceso natural para obtener un espectro topológico es aplicar condiciones de unicidad sobre dicha función de transición. Dado que el generador  $\tilde{K}_1$  en (4.46) está asociado a una rotación (específicamente en el plano  $t - r$ ), entonces las funciones que deben ser univaluadas deben de ser senos y cosenos ( $\sin$  y  $\cos$ ), que como sabemos siempre lo son en cada región periódica de periodo  $2\pi$ .

Más aún, en la región de intersección donde esta función de transición es válida, es decir, en la región entre los horizontes, las coordenadas temporales juegan el papel de coordenadas radiales y viceversa. Específicamente, podemos considerar a  $t$  como una coordenada angular dentro de los horizontes, es decir,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , por lo que la condición de unicidad sobre la función de transición se traduce a  $\frac{1}{2}[f'(r_-) - f'(r_+)] = m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ . Sustituyendo el valor de  $f'(r) = \frac{2M}{r^2} - \frac{2Q^2}{r^3}$  en la expresión anterior y evaluando en los horizontes, obtenemos:

$$\frac{2\sqrt{M^2 - Q^2}(-2M^2 + Q^2)}{Q^4 c_0} = m, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad (4.47)$$

donde se ha introducido una constante  $c_0$  con unidades de inverso de longitud, de tal forma que la expresión anterior sea compatible en cuestión de unidades. (4.47) es el espectro topológico asociado al grupo de simetría  $SO(4)$ .

Así pues, hemos obtenido una relación funcional de la forma  $g(M, Q) = m$ , donde  $g$  es una función de los parámetros físicos  $M$  y  $Q$ , y  $m \in \mathbb{Z}$ .

Por otro lado, para obtener el espectro topológico completo del hoyo negro de Reissner-Nordström falta considerar la relación de cuantización que se obtiene de la parte asociada al grupo de simetría  $U(1)$ , la cual, como vimos anteriormente en la sección 4.1, conduce a otra relación funcional de la forma  $h(M, Q) = n$ , donde  $h$  es otra vez una función de los parámetros físicos de la solución de R-N:  $M$  y  $Q$ , y  $n \in \mathbb{Z}$ .<sup>12</sup> Explícitamente:

$$\frac{2}{Q}\sqrt{M^2 - Q^2} = n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (4.48)$$

Dadas estas dos relaciones de cuantización ((4.47) y (4.48)), es posible obtener los valores de la carga eléctrica  $Q$  y la masa  $M$  del hoyo negro en términos únicamente de los números enteros  $n$  y  $m$ , es decir, los parámetros físicos

<sup>12</sup>Es importante mencionar que la relación de cuantización obtenida en el caso de  $U(1)$  (4.8) es independiente de si ocupamos como espacio base del haz fibrado principal la solución (lorentziana) o la versión euclidiana de Reissner-Nordström, ya que para este caso la conexión que se utiliza es justamente aquella asociada al grupo de norma  $U(1)$ , y no la conexión de espín asociada al espacio base.

de nuestra solución de R-N están “cuantizados”. Álgebra directa conlleva a las siguientes relaciones de cuantización tanto para la masa como para la carga eléctrica:

$$M = \frac{(2 + n^2)\sqrt{4 + n^2}}{4} \left| \frac{n}{m} \right| \left| \frac{1}{c_0} \right| \quad (4.49)$$

$$Q = -\frac{n(2 + n^2)}{2m} \frac{1}{c_0}. \quad (4.50)$$

Son justo estas relaciones de cuantización las que establecen que la masa y la carga eléctrica de un hoyo negro euclidiano de Reissner-Nordström no pueden tomar cualquier valor, sino que únicamente combinaciones específicas de los números enteros  $n$  y  $m$ .

Las gráficas siguientes (figuras (4.1) y (4.2)) muestran el comportamiento de  $M$  y  $Q$  como función de los números enteros  $n$  y  $m$ :

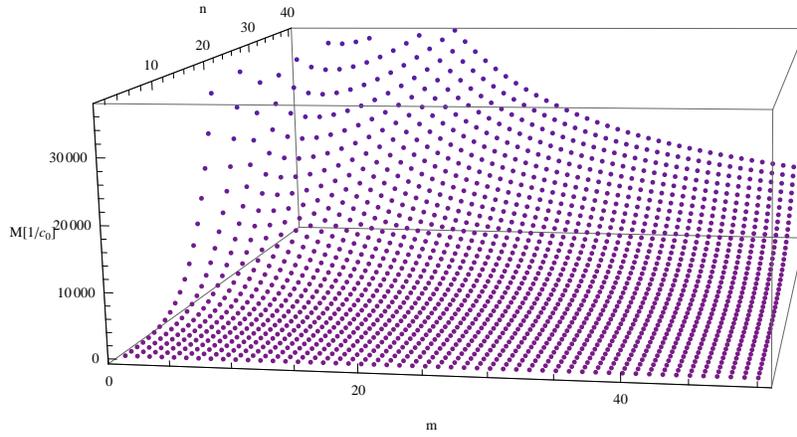


Figura 4.1: Masa del hoyo negro (euclidiano) de Reissner-Nordström como función de los números enteros  $n$  y  $m$ .

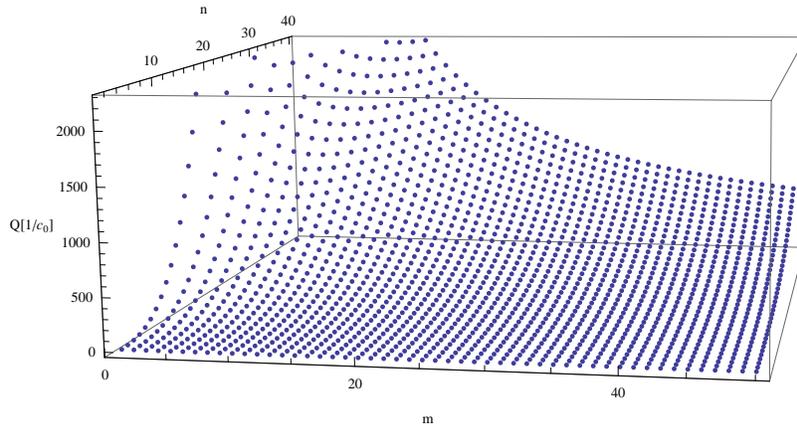


Figura 4.2: Carga eléctrica del hoyo negro (euclidiano) de Reissner-Nordström como función de los números enteros  $n$  y  $m$ .

Sin pérdida de generalidad, el rango de los números  $n$  y  $m$  en las gráficas anteriores se ha elegido positivo ( $m = \{1 - 50\}$  y  $n = \{1 - 40\}$ ).

## 4.4. Discusión

De acuerdo a los resultados obtenidos en este capítulo podemos hacer un amplio análisis y consecuentes comparaciones de lo que conlleva utilizar como espacio base del haz fibrado principal la solución de Reissner-Nordström (ecuación (4.1)), o la versión euclidiana de ella (ecuación (4.41)). Al utilizar como espacio base el espaciotiempo de Reissner-Nordström tenemos una simetría inherente ante rotaciones en el espacio y tiempo simplemente porque este espaciotiempo es solución a las ecuaciones de Einstein. Esta simetría (local) que existe ante el grupo  $SO(3,1)$  nos permite elegir a este grupo como fibra de nuestro haz fibrado principal, lo que nos condujo, como se vio en la sección 4.2, a la no cuantización de la masa y carga. Sin embargo, si utilizamos como espacio base del haz fibrado principal la versión euclidiana de la solución de Reissner-Nordström, esto es, ecuación 4.41, sí es posible obtener un espectro topológico **discreto** que relaciona la masa  $M$  y la carga  $Q$  con un número entero.

Por otro lado, el espectro topológico obtenido a partir de la invariancia ante el grupo  $U(1)$  es independiente de si utilizamos como espacio base de nuestro haz fibrado principal (4.1) o (4.41), ya que la conexión calculada está asociada únicamente al campo inducido (electromagnético) y no al campo de fondo (métrico). Con este grupo ( $U(1)$ ) como la fibra estándar del haz fibrado principal, obtenemos un espectro topológico **discreto** que relaciona, otra vez, los parámetros físicos  $M$  y  $Q$  con un número entero (ecuación (4.48)). Así pues, en consecuencia, tenemos que para la versión euclidiana de R-N existen dos relaciones funcionales,  $g(M, Q) = m$  y  $h(M, Q) = n$ , una por cada fibra utilizada, lo que nos conduce al resultado de que la masa  $M$  y la carga eléctrica  $Q$  están “cuantizadas” (ecs. (4.49) y (4.50)). En particular, la cuantización de la masa y carga en la versión euclidiana se puede explicar debido a que en este caso las transformaciones de norma que remueven las singularidades radiales en la conexión de espín original involucran únicamente generadores de rotaciones (asociados al grupo  $SO(4)$ , el cual es compacto), a diferencia del caso lorentziano en donde las transformaciones de norma que hacen lo propio involucran sólo boosts en una dirección, los cuales están asociados con la parte no-compacta del grupo de Lorentz.

Analizando los espectros topológicos de la masa y carga obtenidos en las ecuaciones (4.49) y (4.50), podemos obtener una conclusión muy interesante: para valores de los números enteros  $m$  y  $n$  iguales a cero, es decir, para hoyos negros extremos ( $M = |Q|$ ), los valores de la masa y carga eléctrica quedan indefinidos, por lo que los espectros (4.49) y (4.50) son válidos únicamente para el caso de hoyos negros no-extremos. Esto era de esperarse ya que el formalismo que utilizamos para obtener los espectros topológicos asociados a los grupos de simetría  $U(1)$  y  $SO(4)$  requirió de la región entre los horizontes de eventos, en donde las coordenadas temporales juegan el papel de coordenadas radiales y viceversa [22]. Esto se logra únicamente para el caso en que  $M > |Q|$ , es decir, para hoyos negros no-extremos de R-N. En efecto, de las relaciones de cuantización para la masa y carga eléctrica, siempre se tiene que  $M > |Q|$  para todo valor de  $m$  y  $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ .



# Capítulo 5

## Termodinámica de hoyos negros

En este capítulo se hará un análisis detallado de las 4 leyes clásicas que rigen la mecánica de hoyos negros y se verá que existe, en efecto, una relación más allá que simple analogía, con las leyes termodinámicas macroscópicas que describen la naturaleza. En particular, se discutirá el caso de los hoyos negros de Reissner-Nordström, los cuales, como sabemos del capítulo 2, son una solución exacta (estática y con simetría esférica) a las ecuaciones de campo de Einstein en presencia de un campo electromagnético. Finalmente, se encontrará la relación de los espectros topológicos para la masa y carga calculados en el capítulo anterior con la entropía de los hoyos negros de R-N, a partir de la ecuación fundamental que rige la termodinámica de estos sistemas gravitacionales.

### 5.1. Las leyes clásicas de la mecánica de hoyos negros

#### 5.1.1. Ley cero

Primero enunciaremos esta ley y después la particularizaremos para el caso de los hoyos negros de R-N:

**Ley cero:** “La gravedad superficial  $\kappa$  de un hoyo negro estacionario es constante sobre el horizonte de eventos”.

En el caso del hoyo negro de R-N, la gravedad superficial viene dada por:<sup>1</sup>

$$\kappa = \frac{r_+ - M}{r_+^2} = \frac{\sqrt{M^2 - Q^2}}{(M + \sqrt{M^2 - Q^2})^2}. \quad (5.1)$$

Claramente esta gravedad superficial se reduce a la gravedad superficial de Schwarzschild ( $\kappa = \frac{1}{4M}$ ) en el límite  $Q \rightarrow 0$ .

#### 5.1.2. Primera ley

Esta ley establece que el cambio en el área del horizonte de eventos es proporcional al cambio en la energía, la carga y el momento angular de un hoyo negro. En el caso de R-N, el momento angular es cero. Para derivar esta ley, calculemos primero el área del horizonte de eventos: Haciendo  $dr = dt = 0$  y  $r = r_+$  en (2.13), obtenemos:

$$ds^2 = r_+^2 d\Omega^2 = r_+^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu.$$

Así pues, el área del horizonte se calcula fácilmente y resulta ser:

$$\begin{aligned} A_H \equiv A &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sqrt{\det(g_{\mu\nu})} d\theta d\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r_+^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ &= 4\pi r_+^2. \end{aligned} \quad (5.2)$$

En términos de la masa  $M$  y carga  $Q$  del hoyo negro, el área del horizonte de eventos es:

$$A = 4\pi(M + \sqrt{M^2 - Q^2})^2. \quad (5.3)$$

---

<sup>1</sup> Checar **Apéndice B** para el cálculo explícito de la gravedad superficial.

Así pues, tenemos una relación  $A = A(M, Q)$ , la cual, localmente, la podemos expresar en forma diferencial como:

$$dA = \left( \frac{\partial A}{\partial M} \right) \Big|_Q dM + \left( \frac{\partial A}{\partial Q} \right) \Big|_M dQ. \quad (5.4)$$

Rearreglando términos y usando las siguientes identidades  $\left( \frac{\partial M}{\partial A} \right) \Big|_Q = \frac{1}{\left( \frac{\partial A}{\partial M} \right) \Big|_Q}$  y  $\left( \frac{\partial M}{\partial Q} \right) \Big|_A = - \left( \frac{\partial M}{\partial A} \right) \Big|_Q \left( \frac{\partial A}{\partial Q} \right) \Big|_M$ , obtenemos la **primera ley** de la mecánica de hoyos negros para R-N:

$$dM = \left( \frac{\partial M}{\partial A} \right) \Big|_Q dA + \left( \frac{\partial M}{\partial Q} \right) \Big|_A dQ = \frac{\kappa}{8\pi} dA + \Xi dQ, \quad (5.5)$$

donde  $\kappa$  es la gravedad superficial dada por (5.1) y  $\Xi = \frac{Q}{r_+} = \frac{Q}{M + \sqrt{M^2 - Q^2}}$ .

### 5.1.3. Segunda ley

Esta ley debida a Hawking, quien fue el primero en probarla en 1971, establece básicamente que en cualquier proceso físico permisible, el área del horizonte de eventos de un hoyo negro no puede decrecer con el tiempo, es decir:  $\delta A \geq 0$ . En un lenguaje matemático, esta ley puede ser formulada de acuerdo al siguiente teorema, conocido como el Teorema de Área de Hoyos Negros:

**Teorema 5.1 (Teorema de Área de Hoyos Negros).** *Sea  $(M, g_{\mu\nu})$  un espaciotiempo asintótica y fuertemente previsible que satisface  $R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \geq 0$  para todos los vectores nulos  $k^\mu$ .<sup>2</sup> Sean  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  dos superficies de Cauchy tipo espacio para una región globalmente hiperbólica  $\tilde{V} \subset \tilde{M}$  ( $\tilde{M}$  siendo el espaciotiempo no-físico asociado a  $M$ ), con  $\Sigma_2 \subset I^+(\Sigma_1)$ ,  $I^+(\Sigma_1)$  el futuro cronológico de  $\Sigma_1$ , y sean  $\mathcal{H}_1 = H \cap \Sigma_1$  y  $\mathcal{H}_2 = H \cap \Sigma_2$ , donde  $H$  denota el horizonte de eventos, es decir, la frontera de la región de hoyo negro de  $(M, g_{\mu\nu})$ . Entonces el área de  $\mathcal{H}_2$  es mayor o igual que el área de  $\mathcal{H}_1$ .*

Dejaremos de lado la prueba de este teorema, ya que la idea principal de esta sección es comparar y encontrar la relación que tienen las leyes clásicas que gobiernan la mecánica de hoyos negros con las leyes usuales termodinámicas macroscópicas. Sin embargo, la demostración de este teorema así como los detalles técnicos que involucran la afirmación del mismo pueden ser consultados en [44].

### 5.1.4. Tercera ley

En el contexto de relatividad general clásica y considerando el impacto que tiene el hecho de agregar materia a un hoyo negro, esta ley fue formulada y probada como la siguiente ley dinámica [16]:

**Tercera Ley:** “Ningún proceso continuo en el cual el tensor de energía-momento de materia acretada permanece acotado y satisface la condición débil de la energía<sup>3</sup> en una vecindad del horizonte aparente puede reducir la gravedad superficial de un hoyo negro a cero dentro de un tiempo finito avanzado”.

Cabe destacar que los hoyos negros extremos de R-N por sí mismos tienen gravedad superficial cero, como puede verse haciendo  $M = |Q|$  en (5.1). Sin embargo, no es el único caso en que un hoyo negro de R-N puede tener gravedad superficial igual a cero, también ocurre que cuando  $M \rightarrow \infty$ ,  $\kappa \rightarrow 0$ .

## 5.2. Temperatura de Hawking y relación de las leyes anteriores con las leyes termodinámicas ordinarias

En esta sección veremos que, contemplando efectos cuánticos asociados con la radiación de los hoyos negros, las leyes clásicas de la mecánica de hoyos negros revisadas en la sección anterior, efectivamente son las leyes termodinámicas usuales aplicadas a estos sistemas gravitacionales, provisto de que la segunda ley *generalizada* (discutida más adelante) sea válida. Clásicamente, los hoyos negros son objetos que tienen temperatura absoluta igual a cero, ya que absorben cualquier cosa y no emiten nada. Sin embargo, en 1974, Hawking [14] hizo el gran

<sup>2</sup>Técnicamente, un espaciotiempo asintótica y fuertemente previsible es aquél que obedece la hipótesis de la censura cósmica [40]. La condición  $R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \geq 0$  para todos los vectores nulos  $k^\mu$ , llamada condición de convergencia temporal, es equivalente a la condición fuerte de la energía:  $T_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \geq T_{\mu\mu}k^\mu$ .

<sup>3</sup>La condición débil de la energía establece que  $T_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \geq 0$  para todo vector nulo  $k^\mu$ .

descubrimiento de que la temperatura física de un hoyo negro no es cero absoluto, sino que tiene una temperatura dada asociada consigo exactamente equivalente a la de un cuerpo negro, esto es, radía a una temperatura:<sup>4</sup>

$$T = \frac{\kappa}{2\pi}, \quad (5.6)$$

con  $\kappa$  la gravedad superficial. La derivación original de Hawking [14] hizo uso del formalismo para calcular la creación de partículas en un espaciotiempo curvo. Hawking consideró un espaciotiempo clásico  $(M, g_{\mu\nu})$  que describía el colapso gravitacional a un hoyo negro de Schwarzschild, y un campo cuántico libre propagándose en este espaciotiempo de fondo, el cual estaba inicialmente en su estado de vacío previo al colapso, y calculó el número de partículas del campo en infinito a tiempos posteriores. Su cálculo reveló que a tiempos posteriores, el número de partículas esperado en infinito correspondía a la emisión de un cuerpo negro perfecto (de tamaño finito) a la temperatura de Hawking (5.6).

El cálculo original de Hawking puede ser generalizado y extendido de la siguiente manera: por un lado, uno puede considerar un espaciotiempo que represente un colapso gravitacional arbitrario a un hoyo negro tal que el hoyo negro se asiente a un estado final estacionario que satisfaga la ley cero de la mecánica de hoyos negros, esto es, que la gravedad superficial del estado final de hoyo negro sea constante en todo el horizonte. Por otro lado, no es necesario que el estado inicial del campo cuántico sea su estado de vacío, sino es posible tomar como estado inicial cualquier estado no-singular [45].

Una vez sabido que existe una relación física (y matemática) directa entre la temperatura y la gravedad superficial, podemos dar una interpretación de las leyes clásicas que rigen la mecánica de hoyos negros como **leyes termodinámicas** ordinarias. Para ello, recordemos las leyes usuales de la termodinámica:<sup>5</sup>

- **Ley Cero:** Establece que la temperatura  $T$  es constante en un cuerpo que está en equilibrio térmico.
- **Primera Ley:**  $dE = TdS +$  términos de trabajo.
- **Segunda Ley:**  $\delta S \geq 0$  en cualquier proceso.
- **Tercera Ley:** Es imposible alcanzar  $T = 0$  mediante un proceso físico.<sup>6</sup>

Claramente la ley cero de la mecánica de hoyos negros es la ley cero termodinámica aplicada al sistema gravitacional de hoyo negro, una vez que se sabe que  $\frac{\kappa}{2\pi}$  representa la temperatura *física* de un hoyo negro. Al identificar estas leyes debemos destacar que en ambos casos tenemos condiciones de equilibrio, es decir, por un lado, un cuerpo está en equilibrio térmico mientras que por otro, el hoyo negro es estacionario.

Ocurre algo similar con la primera ley: dado que  $M$  en (5.5) representa exactamente la misma cantidad física que  $E$  en la primera ley de la termodinámica, esto es, la energía total, y como  $T = \frac{\kappa}{2\pi}$  de acuerdo a Hawking, entonces podemos decir que la primera ley de la mecánica de hoyos negros es, en efecto, la primera ley de la termodinámica aplicada a estos sistemas gravitacionales, una vez que se ha identificado a la entropía  $S$  con  $\frac{A}{4}$ .

La segunda ley, desde el punto de vista termodinámico, falla cuando es aplicada a hoyos negros clásicos, ya que uno podría tomar cualquier cantidad de materia ordinaria y arrojarla al hoyo negro, la cual, de acuerdo con relatividad general, desaparecería en una singularidad del espaciotiempo (singularidad de curvatura). En este proceso se pierde la entropía inicial que se tenía en la materia y ninguna entropía que la compense o que la aumente aparece, por lo que la entropía total del universo decrece. Sin embargo, si uno considera que el hoyo negro tiene su propia entropía, de tal forma que la materia arrojada dentro de él se siga teniendo en cuenta, entonces la segunda ley se podría arreglar. Esto fue exactamente lo que hizo Bekenstein [4] después de que el **Teorema de Área** fue demostrado:

Él asignó una entropía al hoyo negro  $S_{bh}$  proporcional al área del horizonte de eventos  $A$ , y definió una entropía *generalizada*  $S'$  tal que fuera la suma de la entropía ordinaria fuera del hoyo negro  $S_{ord}$  más la entropía asociada al hoyo negro, esto es:  $S' = S_{ord} + S_{bh}$ , de tal forma que  $\delta S' \geq 0$ , es decir, que la entropía generalizada nunca decreciera con el tiempo. No obstante, cuando la radiación de Hawking es considerada, serios problemas con la segunda ley de la mecánica de hoyos negros ocurren: conservación de la energía requiere que un hoyo negro aislado deba perder masa de tal forma que compense la energía radiada a infinito por el proceso de Hawking. De hecho, si uno iguala la tasa de pérdida de masa del hoyo negro y el flujo de energía en infinito debido a la creación de partículas, uno llega a la sorprendente conclusión de que un hoyo negro aislado radía toda su masa dentro de un tiempo finito. En este proceso de “evaporación”, el área del horizonte  $A$  decrece, ya que el tensor de energía-momento asociado a la materia cuántica no satisface la condición fuerte de la energía, violando una de las hipótesis del Teorema de Área.

<sup>4</sup>Esta temperatura representa la temperatura medida por un observador en infinito.

<sup>5</sup>Una descripción y análisis más detallado de estas leyes puede ser encontrado en [20].

<sup>6</sup>Existen otras formulaciones de la tercera ley, las cuales se discutirán más adelante en el texto.

Así pues, en resumen podemos decir que la segunda ley de la termodinámica debe de ser modificada por la segunda ley *generalizada* cuando hoyos negros están presentes, de tal forma que se siga cumpliendo que el cambio total en la entropía del universo no decrezca con el tiempo. Sin embargo, existe un gran debate si esta ley *generalizada* se cumple en todos los casos, incluso se han pensado experimentos en los cuales se pueda violar dicha ley [3], [4]. Para una discusión más profunda acerca de la validez de la segunda ley *generalizada*, ver por ejemplo [46]. Si en efecto la segunda ley *generalizada* es válida siempre, es más que evidente que debemos interpretar  $S_{bh}$  como la entropía física de un hoyo negro, y por tanto, las leyes de la mecánica de hoyos negros ciertamente representan las leyes termodinámicas ordinarias aplicadas a estos sistemas gravitacionales.

Finalmente, analicemos la tercera ley: Sabemos que existen tres formulaciones de la tercera ley de la termodinámica ordinaria [20]:

1. (Nernst, 1912): establece que es imposible alcanzar  $T = 0$  en un número finito de procesos continuos.
2. (Nernst, 1906): un proceso isotérmico debe ser también un proceso isentrópico cuando  $T \rightarrow 0$ :

$$\lim_{T=T_0 \rightarrow 0} (\Delta S) = 0.$$

3. (Planck, 1910): la entropía de cualquier sistema se anula en el estado en el que  $T = 0$ , es decir:

$$S = 0 \text{ cuando } T = 0.$$

Dadas estas formulaciones veamos cuál de ellas es compatible con la tercera ley clásica de la mecánica de hoyos negros:

Una vez que sabemos que un hoyo negro radía de acuerdo al espectro de un cuerpo negro a una temperatura dada por  $T = \frac{\kappa}{2\pi}$ , llamada temperatura de Hawking, veamos que en efecto la primera formulación de la tercera ley se cumple para el caso que nos interesa, esto es, para el caso de los hoyos negros de Reissner-Nordström. Recordamos de (5.1) que la gravedad superficial para los hoyos negros de R-N está dada por:

$$\kappa = \frac{r_+ - M}{r_+^2} = \frac{\sqrt{M^2 - Q^2}}{(M + \sqrt{M^2 - Q^2})^2}.$$

Claramente esta gravedad superficial tiende a cero cuando  $M \rightarrow |Q|$  (hoyos negros extremos de R-N) o cuando  $M \rightarrow \infty$ . Por otro lado, pareciera razonable pensar que la gravedad superficial de los hoyos negros *no*-extremos de R-N ( $M > |Q|$ ) gradualmente tendiera a cero conforme emiten materia eléctricamente neutra afuera de ellos hasta que  $M = |Q|$ . Sin embargo, veremos que esto es imposible de alcanzar en un tiempo finito, o dicho de otra forma, un hoyo negro *no*-extremo solamente puede convertirse en uno extremo si hay una cantidad infinita de tiempo disponible. Para ello consideremos la tasa de cambio en la masa del hoyo negro de acuerdo al proceso de radiación de Hawking, es decir:

$$\frac{dM}{dt} = -c_1 A T^4, \quad (5.7)$$

donde  $c_1$  es una constante,  $A$  es el área del horizonte de eventos dada por (5.3) y  $T$  es la temperatura de Hawking. De (5.7):

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= -c_1 (4\pi r_+^2) \left(\frac{\kappa}{2\pi}\right)^4 \\ &= -c_2 \frac{(r_+ - M)^4}{r_+^6} \\ &= -c_2 \frac{(\sqrt{M^2 - Q^2})^4}{(M + \sqrt{M^2 - Q^2})^6}, \\ \Rightarrow dt &= -c_3 \frac{(M + \sqrt{M^2 - Q^2})^6}{(\sqrt{M^2 - Q^2})^4} dM, \end{aligned} \quad (5.8)$$

con  $c_2$  y  $c_3$  constantes. Así pues, multiplicando el numerador y denominador del lado derecho de (5.8) por  $\frac{1}{Q^6}$  y haciendo  $x = \frac{M}{|Q|}$ , se obtiene:

$$\begin{aligned} t &\sim - \int \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^6}{(\sqrt{x^2 - 1})^4} dx \\ &= -16x - \frac{32x^3}{3} + \frac{x}{2(x^2 - 1)} - \frac{2(16x^4 + 16x^2 - 41)}{3\sqrt{x^2 - 1}} + \frac{35}{4} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Claramente esta integral diverge en  $x = 1$ , por tanto se concluye que se necesita una cantidad infinita de tiempo para que un hoyo negro *no*-extremo de R-N se convierta en un hoyo extremo mediante radiación de Hawking.

Por otro lado, la segunda formulación de la tercera ley no es válida para el caso de los hoyos negros de R-N, ya que no importa cómo nos acerquemos al límite  $T \rightarrow 0$ , ya sea haciendo  $\frac{M}{|Q|} \rightarrow 1$  o  $M \rightarrow \infty$ , ningún proceso isotérmico en ese límite de  $T \rightarrow 0$  es un proceso isentrópico.<sup>7</sup>

Finalmente la tercera formulación de la tercera ley de la termodinámica tampoco es compatible con aquella correspondiente a la mecánica de hoyos negros: como se mencionó anteriormente,  $T \rightarrow 0$  cuando  $\frac{M}{|Q|} \rightarrow 1$  o  $M \rightarrow \infty$ , y en cualquier caso, la entropía dada por  $S = \frac{A}{4}$  no tiende a cero. De (5.3) es fácil ver que la entropía en el caso de los hoyos negros extremos de R-N es  $S = \pi M^2 = \pi Q^2$ , mientras que por otro lado, cuando  $M \rightarrow \infty$ ,  $S \rightarrow \infty$ .

### 5.3. Entropía de hoyos negros

De acuerdo al análisis y la discusión hechas en la sección anterior acerca de la relación que existe entre las leyes clásicas de la mecánica de hoyos negros con aquellas referentes a la termodinámica usual, podemos decir que estas leyes clásicas de la mecánica de hoyos negros junto con la fórmula de temperatura de Hawking (5.6) permiten identificar una cantidad asociada a los hoyos negros, esto es,  $\frac{A}{4}$ , como matemáticamente equivalente al rol de la entropía. Más aún, si consideramos que la segunda ley *generalizada* es válida, entonces podemos concluir, en efecto, que esta cantidad representa la entropía *física* de los hoyos negros. Existen varias formas de calcular la entropía de los hoyos negros, tal como se hace en la formulación euclidiana de la integral de camino<sup>8</sup>, o en otras aproximaciones, como por ejemplo, la que establece que la entropía de los hoyos negros es debida a la entropía de enredamiento resultante de las correlaciones de campos cuánticos entre el exterior y el interior del hoyo negro; o debida a la entropía ordinaria de la atmósfera térmica que rodea a dichos hoyos negros; o la que surge de la teoría de Sakharov de gravedad inducida; o la que resulta en el contexto de geometría cuántica; o la que surge de la teoría de cuerdas<sup>9</sup>; sin embargo, todas ellas reproducen, bajo distintas hipótesis y consideraciones, la fórmula obtenida para la entropía en función del área del horizonte de eventos:  $S = \frac{A}{4}$ .

A pesar de los grandes avances que se han realizado en torno al cálculo de la entropía (por distintos métodos) de los hoyos negros, el gran reto en las teorías cuánticas de la gravedad es dar una explicación y una derivación directa de la fórmula para dicha entropía, ya que la mayoría de estas teorías, si no es que todas, difieren acerca de cuáles son los grados de libertad dinámicos responsables del surgimiento de la entropía de estos sistemas gravitacionales, y los cuales no son del todo claros por qué son exactamente éstos los que reproducen la entropía correcta a nivel clásico.

#### 5.3.1. Relación del espectro topológico con la entropía del hoyo negro de Reissner-Nordström

En esta sección se obtendrá la relación que existe entre la entropía de los hoyos negros de Reissner-Nordström y los espectros topológicos euclidianos obtenidos en el capítulo anterior (ecuaciones (4.49) y (4.50)). Para ello, recordamos que la entropía de los hoyos negros de R-N está dada por:

$$S = \frac{A}{4} = \pi(M + \sqrt{M^2 - Q^2})^2. \quad (5.10)$$

Así pues, sustituyendo los espectros de la carga y masa en esta expresión de la entropía, resulta:

$$S = \pi \frac{n^2(2 + n^2)^2(n + \sqrt{4 + n^2})^2}{16m^2} \frac{1}{c_0^2}. \quad (5.11)$$

Justo esta expresión nos dice que la entropía de un hoyo negro (euclidiano) de R-N está determinada por los números enteros  $n$  y  $m$ , es decir, está cuantizada. Al igual que en los espectros de la carga y masa, la entropía (5.11) tampoco describe hoyos negros extremos, dado que en ese caso  $n$  y  $m$  son ambos cero, y por tanto, la entropía quedaría indefinida. La gráfica de la entropía como función de los números enteros  $n$  y  $m$  se muestra en la figura (5.1):

<sup>7</sup>Una explicación referente a esta segunda formulación de la tercera ley de la termodinámica y su incompatibilidad con la tercera ley de la mecánica de hoyos negros puede ser consultada en [10].

<sup>8</sup>Ver por ejemplo [10] para una descripción sobre esta formulación euclidiana y su aplicación particular a los hoyos negros de R-N.

<sup>9</sup>Consultar [46] para una explicación de cada una de estas aproximaciones.

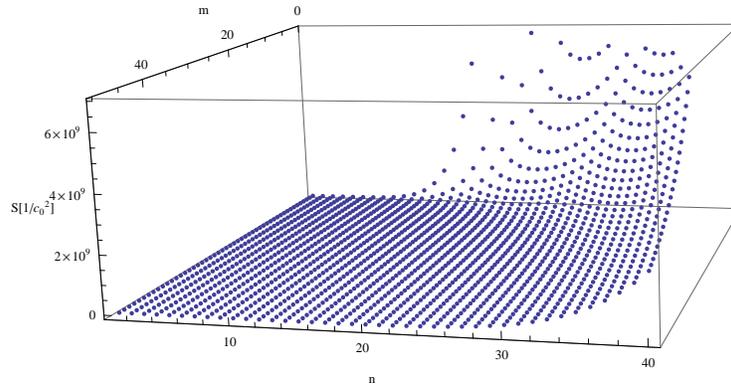


Figura 5.1: Entropía del hoyo negro euclidiano de Reissner-Nordström como función de los números enteros  $n$  y  $m$ .

Podemos también graficar algunas curvas de nivel tanto para valores fijos de  $n$  como de  $m$ . Estas gráficas (figs. 5.2 y 5.3) se muestran a continuación:

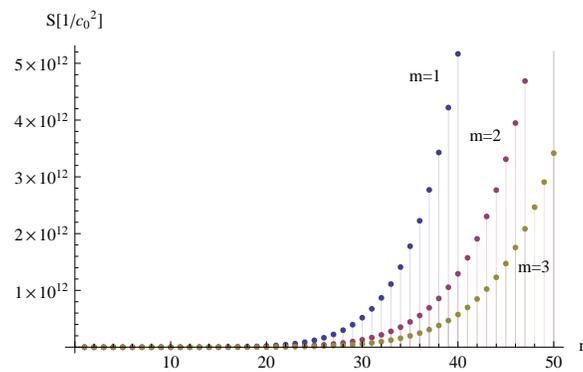


Figura 5.2: Entropía del hoyo negro euclidiano de Reissner-Nordström como función de  $n$  para valores de  $m = 1, 2, 3$ .

La gráfica en color azul representa la entropía  $S$  como función de  $n$  para  $m = 1$ . La gráfica en color magenta representa lo propio para  $m = 2$ , y la gráfica en color oro lo hace para  $m = 3$ .

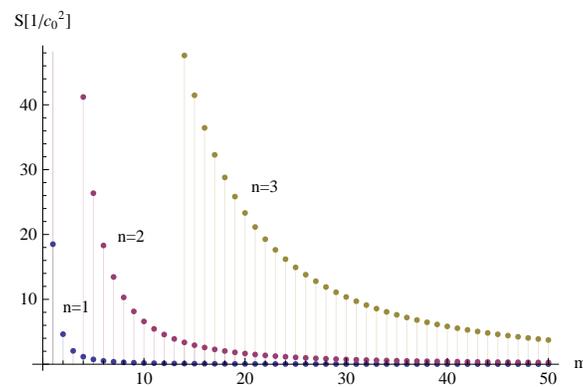


Figura 5.3: Entropía del hoyo negro euclidiano de Reissner-Nordström como función de  $m$  para valores de  $n = 1, 2, 3$ .

Análogo al caso anterior, la gráfica azul representa la entropía  $S$  como función de  $m$  para  $n = 1$ , la magenta lo hace para  $n = 2$ , y la oro para  $n = 3$ .

# Capítulo 6

## Conclusiones

A partir de las ecuaciones de Einstein-Maxwell con el tensor de energía-momento aquél asociado al campo electromagnético producido por una carga eléctrica puntual, e imponiendo simetría esférica en nuestra solución, fue posible obtener la métrica de Reissner-Nordström (2.12). Se vio que, para  $M > |Q|$ , existe una singularidad de curvatura en  $r = 0$  (como se corroboró al calcular el escalar de Kretschmann) y dos singularidades coordenadas que coinciden con los horizontes de eventos en  $r = r_+ = M + \sqrt{M^2 - Q^2}$  y  $r = r_- = M - \sqrt{M^2 - Q^2}$  (se vio que efectivamente éstas eran singularidades de coordenadas al expresar la métrica de R-N en coordenadas avanzadas de Eddington-Finkelstein, donde la forma explícita de la métrica en ese caso era manifiestamente no singular en  $r = r_+$  y  $r = r_-$ ). En el caso en que  $M = |Q|$ , existe una única singularidad de coordenadas en  $r = r_+ = r_-$ . Para el caso en que  $M < |Q|$ , no se obtiene ninguna singularidad de coordenadas además de la singularidad de curvatura en  $r = 0$  inherente al espaciotiempo de R-N, la cual corresponde, en este caso particular, a una singularidad desnuda. Posteriormente, utilizando las coordenadas de Kruskal-Szekeres, se construyó la máxima extensión analítica para este espaciotiempo, la cual consta de la unión infinita de los dos tipos de parches  $\{U^+, V^+\}$  y  $\{U^-, V^-\}$ , cada uno de los cuales cubre dos pares de regiones isométricas entre sí. Finalmente, en lo que respecta a la geometría de este espaciotiempo, se utilizaron coordenadas isotrópicas y se vio que existe un puente de Einstein-Rosen que conecta dos secciones espaciales entre las regiones III en el diagrama de Penrose-Carter (fig. 2.6) asociado a la máxima extensión analítica de dicho espaciotiempo. Más aún, en el caso extremo donde  $M = |Q|$ , el puente de Einstein-Rosen llega a ser infinitamente largo, por lo que es imposible pasar de un universo a otro.

Una vez hecho el análisis de la geometría y la estructura del espaciotiempo de R-N, se introdujo el método de Cuantización Topológica como un formalismo alternativo de cuantización en la que la estructura geométrica de haz fibrado principal es de fundamental importancia para caracterizar a los sistemas físicos en cuestión, y no sólo eso, sino que a partir de ella es posible obtener relaciones de discretización de los parámetros físicos que describen a nuestra solución clásica (espectro topológico). Este método se basa principalmente en el hecho de que para cualquier sistema físico (clásico) debe existir una configuración clásica que consta de una variedad diferencial y una conexión, y que geoméricamente contiene toda la información física del sistema. Así pues, a partir de esta configuración clásica, es posible construir, a partir del Teorema de Reconstrucción de haces fibrados (**Teorema 3.3**), un único haz fibrado principal (módulo clases de equivalencia) cuyo grupo de estructura (grupo de Lie) es aquél asociado a las simetrías del sistema físico, y asociarle una conexión que tiene valores en el álgebra de Lie del respectivo grupo de Lie. Se vio que, en el caso de las ecuaciones de Einstein en el vacío, cualquier solución a ellas puede ser representada de manera única por un haz fibrado principal 10-dimensional  $P$ , con el espaciotiempo  $M$  como el espacio base, el grupo de Lorentz  $SO(3, 1)$  como el grupo de estructura (isomorfo a la fibra estándar), y una conexión con valores en el álgebra de Lie del grupo de Lorentz. Esto es justo lo que establece el Teorema Básico de Cuantización Topológica demostrado a detalle en el capítulo 3 (**Teorema 3.2**). Más aún, también se demostró que en el caso de las ecuaciones de campo de Einstein acopladas a campos de materia (campos de norma), es posible construir un único haz fibrado principal con espacio base el espaciotiempo  $M$ , grupo de estructura el grupo asociado al campo de norma, y una conexión con valores en el álgebra de Lie del respectivo grupo de norma (**Teorema 3.5**). Para el caso que nos concierne, es decir, para el caso de Reissner-Nordström, se utilizaron dos distintos haces fibrados principales, uno por cada grupo de simetría del sistema físico: un haz fibrado principal con grupo de estructura el grupo de simetría espaciotemporal  $SO(3, 1)$ , y otro haz fibrado principal cuyo grupo de estructura es el grupo de norma  $U(1)$ .

Una vez teniendo estos dos haces fibrados principales se procedió a obtener los espectros topológicos correspondientes mediante el método de regularización de la conexión: para el caso en que la fibra estándar era el grupo  $SO(3, 1)$ , fue posible remover las singularidades (de coordenadas) en la conexión de espín tanto en la parte angular como en la parte radial mediante transformaciones de norma, sin embargo, al aplicar condiciones de unicidad sobre las

funciones de transición que relacionan las conexiones transformadas, se obtuvo, para la parte angular, una condición de cuantización trivial, mientras que para la parte radial, no se obtuvo ningún espectro topológico que relacionara de forma discreta los parámetros físicos  $M$  y  $Q$ . Por otro lado, cuando se utilizó como fibra estándar el grupo de norma  $U(1)$ , sí fue posible obtener un espectro topológico *discreto*, al aplicar condiciones de unicidad en la función de transición (4.6), arrojando una relación funcional de la forma  $h(M, Q) = n$ , donde  $M$  y  $Q$  son los parámetros físicos de la solución de R-N, y  $n$  es un número entero.

No obstante, para obtener una discretización “completa” de los parámetros físicos  $M$  y  $Q$ , es decir, obtener relaciones funcionales de la forma:  $h(M, Q) = n$  y  $g(M, Q) = m$ , con  $n$  y  $m$  enteros, tuvimos que analizar la versión euclidiana de R-N, en donde la simetría local ante el grupo  $SO(4)$  fue de crucial importancia para la discretización de la masa y la carga eléctrica. A diferencia del grupo de Lorentz  $SO(3, 1)$  donde existe una parte no-compacta asociada a los boosts (la cual se vio reflejada en la *no* discretización del espectro topológico para este grupo de simetría), el grupo  $SO(4)$  únicamente se compone de rotaciones, haciendo que este grupo sea compacto, y por ende, al momento de aplicar condiciones de unicidad en la correspondiente función de transición, el espectro topológico que resulta es *discreto*. Como fue discutido al final del capítulo 4, al pasar de la versión lorentziana a la versión euclidiana de R-N, el espectro topológico asociado a la fibra  $U(1)$  no se ve modificado, ya que la conexión que se utiliza en este caso es la que está asociada al campo de norma (inducido), y no la que está asociada al campo métrico. Así pues, de esta forma obtenemos una discretización “completa” de los parámetros físicos  $M$  y  $Q$  (en el sentido de que ambos parámetros se discretizan de manera independiente) en función de los números enteros  $n$  y  $m$  (ecs. 4.49 y 4.50, respectivamente). Podemos decir, entonces, que la masa y carga eléctrica de los hoyos negros (euclidianos) de Reissner-Nordström están “cuantizadas”. Analizando los espectros topológicos anteriores podemos obtener conclusiones muy importantes acerca de los valores permitidos de los números enteros  $n$  y  $m$ : cuando  $m = 0$ , los valores de la carga y la masa son singulares, sin embargo, el valor de  $m = 0$  corresponde a hoyos negros extremos ( $M = |Q|$ ), como se puede verificar al analizar el espectro topológico asociado al grupo de simetría  $SO(4)$  (4.47). Pero  $M = |Q|$  también implica el valor de  $n = 0$  en el espectro topológico asociado al grupo de norma  $U(1)$  (4.48), por ende, podemos concluir que los espectros para la carga eléctrica y la masa quedan indefinidos en el caso de hoyos negros extremos de R-N. No es así para el caso en que  $M > |Q|$ , es decir, para hoyos negros no-extremos, donde los espectros (4.49) y (4.50) son completamente válidos para cualesquiera valores de los números enteros  $n$  y  $m$  distintos de cero. El hecho que para el caso extremo no se valgan los espectros topológicos para  $M$  y  $Q$ , desde el punto de vista matemático, no nos debería extrañar, ya que, como se discutió al final del capítulo 4, el proceso que se siguió para obtenerlos requirió de la región entre los horizontes de eventos (en donde las coordenadas temporales juegan el papel de coordenadas espaciales y viceversa), la cual aparecía únicamente en el caso no-extremo. Desde un punto de vista físico, debemos tener presente que es difícil afirmar alguna consecuencia directa a partir del análisis de la versión euclidiana de R-N, además de que el caso extremo tiene propiedades y características muy diferentes en comparación con el caso no-extremo, como el hecho de que es justo el límite entre la aparición y la no aparición de una singularidad desnuda, que como se mencionó en el texto, no existen tales singularidades en el caso de colapso gravitacional de acuerdo a la conjetura de la censura cósmica.

Finalmente se discutieron las leyes clásicas de la mecánica de hoyos negros, y se particularizaron al caso de R-N. Se vio que, con ayuda de la fórmula de Hawking  $T = \frac{\kappa}{2\pi}$  y la identificación de  $S$  con  $\frac{A}{4}$ , es posible relacionar estas leyes mecánicas de hoyos negros con aquéllas de la Termodinámica estándar, y no sólo eso, si en realidad la segunda ley generalizada es válida siempre, entonces  $S$  ciertamente representa la entropía física de un hoyo negro, y por tanto podemos decir que las leyes clásicas de la mecánica de hoyos negros son las leyes termodinámicas usuales aplicadas a estos sistemas gravitacionales. No obstante de esta más que evidente naturaleza termodinámica de los hoyos negros, cabe destacar que en el análisis de la tercera ley de la Termodinámica, sólo una de las formulaciones de esta ley es compatible con aquélla correspondiente a la de la mecánica de hoyos negros. Ésta es la que establece que es imposible alcanzar  $T = 0$  en un número finito de procesos continuos. Las otras dos formulaciones de la tercera ley de la Termodinámica no tienen su correspondiente con la tercera ley clásica de la mecánica de hoyos negros, lo que se podría deber, ya que no estamos tomando el valor de la entropía exactamente en el límite extremo, a que los hoyos negros cuasi-extremos no son sistemas perfectamente estables [10].

Por último, basándonos en la fórmula de área de Bekenstein-Hawking  $S = \frac{A}{4}$ , se calculó el espectro topológico de la entropía en función de los espectros topológicos obtenidos anteriormente tanto para la masa como para la carga eléctrica, resultando que la entropía (o equivalentemente el área del horizonte) de los hoyos negros (euclidianos) de R-N está cuantizada (5.11). De igual forma que los espectros para la masa y la carga eléctrica, el espectro para la entropía tampoco describe hoyos negros extremos, ya que en ese caso la entropía queda indefinida, sin embargo, (5.11) puede ser de gran utilidad al querer describir la termodinámica de hoyos negros no-extremos de R-N al relacionar esta aproximación con aquélla hecha con la formulación euclidiana de la integral de camino (incorporando gravedad) y la termodinámica bien establecida que se deriva a partir de ella.

---

Como comentario final a este trabajo de tesis, quisiera referirme al método de Cuantización Topológica específicamente como un formalismo alternativo de cuantización basado en la estructura geométrica de un haz fibrado principal y una conexión, contruídos a partir de una configuración clásica asociada a un sistema físico en particular. Si bien es cierto que este método aún está bajo construcción, ya que no se sabe por el momento qué son conceptos como estados cuánticos y evolución, me parece que es un camino muy válido y muy interesante en el sentido que utiliza estructuras geométricas que son bien conocidas y entendidas a nivel teórico, de tal forma que sirvan de base para describir la verdadera naturaleza cuántica del mundo que nos rodea. Ésta es justamente la visión de Cuantización Topológica: “la naturaleza es cuántica *per se*, no es necesario cuantizarla, únicamente hay que encontrar la manera adecuada para extraer la información que ella contiene”.



## Apéndice A

# Función de Transición para un Grupo de Lie $G$

En este apéndice veremos qué forma debe de tener la función de transición que relaciona dos 1-formas de conexión para el caso en que estas conexiones tienen valores en el álgebra de Lie de un grupo de Lie  $G$  y las cuales están definidas en la intersección no vacía de dos abiertos sobre el espacio base. Para ello, supongamos que tenemos una conexión  $\omega_i'$  que resulta de aplicar la transformación de norma  $\Lambda_{ik} : U_i \cap U_k \rightarrow G$  a una  $\omega_k$ , donde el símbolo “'” sólo se escribe para hacer explícita la referencia a la conexión transformada, y  $U_i$  y  $U_k$  son dos abiertos sobre el espacio base tales que  $U_i \cap U_k \neq \emptyset$ . En ecuaciones:

$$\omega_i' = \Lambda_{ik}\omega_k\Lambda_{ik}^{-1} + \Lambda_{ik}d\Lambda_{ik}^{-1}. \quad (\text{A.1})$$

Por otra parte, consideremos otra transformación de norma, digamos  $\Lambda_{jk} : U_j \cap U_k \rightarrow G$  ( $U_j \cap U_k \neq \emptyset$ ), aplicada a la misma conexión original  $\omega_k$ , obteniéndose una nueva conexión  $\omega_j'$ :

$$\omega_j' = \Lambda_{jk}\omega_k\Lambda_{jk}^{-1} + \Lambda_{jk}d\Lambda_{jk}^{-1}. \quad (\text{A.2})$$

Ahora bien, dadas estas dos conexiones transformadas (A.1 y A.2), veamos que la función de transición  $\Lambda_{ij} = \Lambda_{ik}\Lambda_{kj} = \Lambda_{ik}\Lambda_{jk}^{-1}$  efectivamente es la que relaciona ambas conexiones de acuerdo a:

$$\omega_i' = \Lambda_{ij}\omega_j'\Lambda_{ij}^{-1} + \Lambda_{ij}d\Lambda_{ij}^{-1}. \quad (\text{A.3})$$

*Demostración.* Partimos del hecho que (A.1) y (A.2) son válidas, y calculamos  $\Lambda_{ij}\omega_j'\Lambda_{ij}^{-1} + \Lambda_{ij}d\Lambda_{ij}^{-1}$ . Así pues:

$$\begin{aligned} \Lambda_{ij}\omega_j'\Lambda_{ij}^{-1} + \Lambda_{ij}d\Lambda_{ij}^{-1} &= \Lambda_{ij} \left( \Lambda_{jk}\omega_k\Lambda_{jk}^{-1} + \Lambda_{jk}d\Lambda_{jk}^{-1} \right) \Lambda_{ij}^{-1} + \Lambda_{ij}d\Lambda_{ij}^{-1} \\ &= \Lambda_{ij}\Lambda_{jk}\omega_k\Lambda_{jk}^{-1}\Lambda_{ij}^{-1} + \Lambda_{ij}\Lambda_{jk}(d\Lambda_{jk}^{-1})\Lambda_{ij}^{-1} + \Lambda_{ij}d\Lambda_{ij}^{-1} \\ &= \Lambda_{ik}\omega_k\Lambda_{kj}\Lambda_{ji} + \Lambda_{ik}(d\Lambda_{jk}^{-1})\Lambda_{ij}^{-1} + \Lambda_{ik}\Lambda_{kj}d\Lambda_{ij}^{-1} \\ &= \Lambda_{ik}\omega_k\Lambda_{ki} + \Lambda_{ik} \left( (d\Lambda_{jk}^{-1})\Lambda_{ij}^{-1} + \Lambda_{kj}(d\Lambda_{ij}^{-1}) \right) \\ &= \Lambda_{ik}\omega_k\Lambda_{ik}^{-1} + \Lambda_{ik}d(\Lambda_{kj}\Lambda_{ji}) \\ &= \Lambda_{ik}\omega_k\Lambda_{ik}^{-1} + \Lambda_{ik}d\Lambda_{ik}^{-1}, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

la cual es exactamente  $\omega_i'$  por (A.1). □

**Nota:** En la demostración se ha hecho uso de las siguientes propiedades de consistencia de las funciones de transición, esto es:

1.  $\Lambda_{ij}(p) = \Lambda_{ji}(p)^{-1}$ ,  $p \in U_i \cap U_j$ .
2.  $\Lambda_{ij}(p)\Lambda_{jk}(p) = \Lambda_{ik}(p)$ ,  $p \in U_i \cap U_j \cap U_k$ .



## Apéndice B

# Gravedad superficial del hoyo negro de Reissner-Nordström

Antes de hacer el cálculo de la gravedad superficial para el caso del hoyo negro de Reissner-Nordström, es conveniente recordar qué es un campo vectorial de Killing así como también la definición de un horizonte de Killing.

**Definición.** *Un campo vectorial de Killing sobre una variedad  $M$  equipada con una métrica  $g$  (se asume diferenciable) es un campo vectorial diferenciable  $K^a$  sobre  $M$  tal que su flujo deja la métrica invariante, es decir,  $\Phi_K(t)^* g_{ab} = g_{ab}$ , o equivalentemente,  $\mathcal{L}_K g_{ab} = 0$ , donde  $\mathcal{L}_K$  denota la derivada de Lie a lo largo del campo vectorial  $K^a$ . En otras palabras, un campo vectorial diferenciable  $K^a$  sobre  $(M, g)$  es un campo de Killing si y sólo si  $K^a$  satisface la ecuación de Killing:*

$$\nabla_{(a} K_{b)} \equiv \nabla_a K_b + \nabla_b K_a = 0. \quad (\text{B.1})$$

Ahora procedamos a definir qué es un horizonte de Killing:

**Definición.** *Una hipersuperficie nula  $N$  es un horizonte de Killing de un campo vectorial de Killing  $K^a$  si  $K^a|_N$  es normal a  $N$ .*

Ahora bien, una vez que hemos introducido los conceptos de campo vectorial de Killing como horizonte de Killing, podemos definir la gravedad superficial  $\kappa$ . La gravedad superficial  $\kappa$  es una cantidad definida sobre el horizonte de un hoyo negro estacionario arbitrario (no necesariamente de vacío o electro-vacío en su región exterior). Se sabe que para todo hoyo negro estacionario existe un campo vectorial de Killing  $K^a$ , el cual es normal al horizonte del hoyo negro [44], y por ende, dicho horizonte es un horizonte de Killing.

**Definición.** *Sea  $n$  una normal a una hipersuperficie nula  $N$  tal que  $n \cdot \nabla n^a = 0$  sobre  $N$ ,  $K^a = hn^a$  un campo vectorial de Killing para alguna  $h$ , por tanto:*

$$K \cdot \nabla K^a|_N = \kappa K^a, \quad (\text{B.2})$$

donde  $\kappa = K \cdot \partial \ln |h|$  es la gravedad superficial del horizonte de Killing  $N$ .

Para hacer el cálculo de la gravedad superficial del hoyo negro de R-N, es conveniente trabajar con la expresión alterna de (B.2), esto es:

$$-\frac{1}{2} \partial^a (K^2)|_N = \kappa K^a, \quad (\text{B.3})$$

donde  $K^2$  denota la contracción  $g_{bc} K^b K^c$ . Esta ecuación puede ser resuelta fácilmente para  $\kappa$ , únicamente identificando los campos vectoriales de Killing (de un espaciotiempo) asociados a un sistema de coordenadas en particular. En nuestro caso, la geometría que nos interesa es la de Reissner-Nordström, y utilizaremos, por simplicidad, las coordenadas avanzadas de Eddington-Finkelstein para describir este espaciotiempo. Recordamos de la sección 2.2 que la métrica de R-N en estas coordenadas  $(v, r, \theta, \phi)$  se escribe como:

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{r^2} dv^2 + 2dvdr + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (\text{B.4})$$

donde  $\Delta = r^2 - 2Mr + Q^2 = (r - r_+)(r - r_-)$ ;  $r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}$ . Claramente  $K^a = \left(\frac{\partial}{\partial v}\right)^a$  es un campo vectorial de Killing de (B.4), ya que la derivada de Lie de (B.4) a lo largo del campo vectorial  $\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)^a$  es igual a cero. Calculemos el covector correspondiente a  $K^a$ , esto es:

$$K_a = g_{ab}K^b = g_{av}K^v = -\frac{\Delta}{r^2}(dv)_a + (dr)_a. \quad (\text{B.5})$$

En  $r = r_{\pm}$ ,  $K_a = (dr)_a$  ( $\Delta = 0$  en  $r_{\pm}$ ), y por tanto,  $K_a$  es normal a  $r_{\pm}$ . Así pues,  $r_{\pm}$  son horizontes de Killing del campo vectorial  $\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)^a$ .

Ya obtenido el covector  $K_a$ , es posible calcular la gravedad superficial  $\kappa$  a partir de la ecuación (B.3). Explícitamente:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\partial_a(K^2) &= -\frac{1}{2}\partial_a(g_{bc}K^bK^c) = -\frac{1}{2}\partial_a(K^bK_b) \\ &= -\frac{1}{2}\partial_a\left(-\frac{\Delta}{r^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dr}\left(\frac{\Delta}{r^2}\right)(dr)_a \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dr}\left(\frac{\Delta}{r^2}\right)K_a|_{r_{\pm}}. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Por (B.3), esto tiene que ser igual a  $\kappa K_a$ , por lo tanto:

$$\begin{aligned} \kappa = \kappa_{\pm} &= \frac{1}{2}\frac{d}{dr}\left(\frac{\Delta}{r^2}\right)|_{r_{\pm}} \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dr}\left(\frac{(r - r_-)(r - r_+)}{r^2}\right)|_{r_{\pm}} \\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{r^3}(r - r_-)(r - r_+) + \frac{1}{r^2}(2r - r_+ - r_-)\right)|_{r_{\pm}} \\ &= \frac{r_{\pm} - r_{\mp}}{2r_{\pm}^2}, \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

que en términos de los parámetros físicos de nuestra solución (es decir, la masa  $M$  y la carga  $Q$  del hoyo negro) es:

$$\kappa_{\pm} = \frac{\pm\sqrt{M^2 - Q^2}}{(M \pm \sqrt{M^2 - Q^2})^2}. \quad (\text{B.8})$$

Ésta es la expresión final para la gravedad superficial del horizonte de Killing de un hoyo negro estacionario con masa  $M$  y carga eléctrica  $Q$  descrito por la métrica de Reissner-Nordström.

# Bibliografía

- [1] Marcos Exequiel Atala. Perturbación Escalar en Reissner-Nordström: Formulación Covariante. <http://rdu.unc.edu.ar/bitstream/handle/11086/32/15442.pdf?sequence=1>, Jun 2010.
- [2] J. M. Bardeen, B. Carter, and S. W. Hawking. *The Four Laws of Black Hole Mechanics*. Commun. Math. Phys., (31):161–170, 1973.
- [3] J. D. Bekenstein. *Black Holes and Entropy*. Phys. Rev. D7, :2333–2346, 1973.
- [4] J. D. Bekenstein. *Generalised second law of thermodynamics in black hole physics*. Phys. Rev. D9, :3292–3300, 1974.
- [5] Matthias Blau. Lecture Notes on General Relativity. <http://www.blau.itp.unibe.ch/Lecturenotes.html>, Feb 2014.
- [6] Herbert B. Callen. *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics*. John Wiley & Sons, second edition, 1985.
- [7] S. Carlip. Quantum Gravity: a Progress Report. arXiv:gr-qc/0108040v1, Aug 2001.
- [8] Sean M. Carroll. Lecture Notes on General Relativity. arXiv:gr-qc/9712019v1, Dec 1997.
- [9] Sean M. Carroll. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Addison Wesley, 2004.
- [10] Miranda C. N. Cheng. *The Thermodynamics of Reissner-Nordström Black Hole and the Extreme Limit*. PhD thesis. <http://www.math.jussieu.fr/~chengm/thesis/1%20copy.pdf>.
- [11] Theodore Frankel. *The Geometry of Physics: An Introduction*. Cambridge University Press, 1997.
- [12] M. Göckeler and T. Schücker. *Differential geometry, gauge theories, and gravity*. Cambridge University Press, 1987.
- [13] Andrew J. S. Hamilton. General Relativity, Black Holes and Cosmology. [http://jila.colorado.edu/~ajsh/phys5770\\_14/grbook.pdf](http://jila.colorado.edu/~ajsh/phys5770_14/grbook.pdf), 2014.
- [14] S. W. Hawking. *Particle Creation by Black Holes*. Commun. Math. Phys., (43):199–220, 1975.
- [15] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis. *The large scale structure of spacetime*. Cambridge University Press, Cambridge, 1973.
- [16] W. Israel. *Third Law of Black Hole Dynamics: A Formulation and Proof*. Phys. Rev. Lett., 4(57):397–399, 1986.
- [17] Roy P. Kerr. Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics. *Phys.Rev.Lett.*, 11:237–238, 1963.
- [18] S. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of Differential Geometry*, volume 1. John Wiley & Sons, 1963.
- [19] S. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of Differential Geometry*, volume 2. John Wiley & Sons, 1969.
- [20] P. T. Landsberg. *Thermodynamics and Statistical Mechanics*. Dover, New York, 1990.
- [21] Alfredo Macías and Hernando Quevedo. Time paradox in Quantum Gravity. arXiv:gr-qc/0610057v1, Oct 2006.

- [22] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler. *Gravitation*. Freeman, 1973.
- [23] Gregory L. Naber. *Topology, Geometry and Gauge fields: Foundations*. Springer, second edition, 2011.
- [24] Mikio Nakahara. *Geometry, Topology and Physics*. Taylor & Francis, second edition, 2003.
- [25] Charles Nash and Siddhartha Sen. *Topology and Geometry for Physicists*. Dover, 2011.
- [26] Francisco Nettel and Hernando Quevedo. *Topological spectrum of classical configurations*. AIP Conf. Proc., **956**(9), 2007.
- [27] Francisco Nettel and Hernando Quevedo. *Topological Spectrum of the Harmonic Oscillator*. International Journal of Pure and Applied Mathematics, **70**(2):117–123, 2011.
- [28] Francisco Nettel, Hernando Quevedo, and Moicés Rodríguez. *Topological spectrum of mechanical systems*. Reports on Mathematical Physics, **64**(3), 2009.
- [29] E T. Newman, R. Couch, K. Chinnapared, A. Exton, A. Prakash, et al. Metric of a Rotating, Charged Mass. *J.Math.Phys.*, 6:918–919, 1965.
- [30] G. Nordström. On the Energy of the Gravitational Field in Einstein’s Theory. *Verhandl. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap., Afdel. Natuurk., Amsterdam*, 26:1201–1208, 1918.
- [31] Leonardo Patiño and Hernando Quevedo. *Topological quantization of gravitational fields*. J. Math. Phys., **46**(022502), 2005.
- [32] J. Polchinski. *String Theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [33] Harvey Reall. Black Holes. <http://www.aei.mpg.de/~gielen/black.pdf>, Jul 2008.
- [34] H. Reissner. Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes nach der Einsteinschen Theorie. *Annalen der Physik*, 50:106–120, 1916.
- [35] Carlo Rovelli. *Loop Quantum Gravity*. Living Rev. Relativity, **1**, 1998.
- [36] Carlo Rovelli. Notes for a brief history of quantum gravity. arXiv:gr-qc/0006061v3, Jan 2001.
- [37] Lewis H. Ryder. *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, second edition, 1996.
- [38] Bernard F. Schutz. *A first course in general relativity*. Cambridge University Press, 1985.
- [39] Karl Schwarzschild. On the gravitational field of a mass point according to Einstein’s theory. *Sitzungsber.Preuss.Akad.Wiss.Berlin (Math.Phys.)*, 1916:189–196, 1916.
- [40] P. K. Townsend. Black Holes. arXiv:gr-qc/9707012v1, Jul 1997.
- [41] Florencia Vieyro. Agujeros negros de Born-Infeld. [http://www.fcaglp.unlp.edu.ar/astrofrelat/agujeros\\_negros/media/monografias/Vieyro.pdf](http://www.fcaglp.unlp.edu.ar/astrofrelat/agujeros_negros/media/monografias/Vieyro.pdf), May 2010.
- [42] M. Visser. *Lorentzian Wormholes: From Einstein to Hawking*. Springer-Verlag, New York, 1996.
- [43] R. M. Wald. *On Particle Creation by Black Holes*. Commun. Math. Phys., (45):9–34, 1975.
- [44] R. M. Wald. *General Relativity*. The University of Chicago Press, 1984.
- [45] R. M. Wald. *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics*. University of Chicago Press, Chicago, 1994.
- [46] R. M. Wald. The Thermodynamics of Black Holes. arXiv:gr-qc/9912119v2, Sep 2000.