



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

**ESTADOS SIMÉTRICOS PARA LA SIMULACIÓN EFICIENTE
DE LA ECUACIÓN MAESTRA EN ÓPTICA CUÁNTICA**

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:
MARDUK BOLAÑOS PUCHET

TUTOR PRINCIPAL
DR. PABLO BARBERIS BLOSTEIN, IIMAS

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR
DR. ALFRED BARRY U'REN CORTÉS, ICN
DR. CARLOS FRANCISCO PINEDA ZORRILLA, IF

MÉXICO, D. F. JULIO DE 2014



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

Agradezco enormemente haber conocido a y trabajado con Pablo Barberis: mi asesor, profesor y amigo. Es un placer convivir con alguien con su generosidad, su entusiasmo y su mente ágil.

Carlos Pineda me ha apoyado enormemente durante varios años y me ha dado consejos importantes para crecer como persona y como físico. Para él mi más sincero agradecimiento.

Estoy muy agradecido con Alfred U'Ren y Karen Volke, quienes me brindaron un apoyo total en momentos muy difíciles y durante varios años me han dado consejos importantes para crecer como persona y como físico.

Le agradezco a Antonio “Toño” Juárez y Roberto “Bobby” Ramírez por darme consejos de amigo, de hermano mayor, de entrenador, en los momentos más importantes.

Estoy muy agradecido con Yanalté Herrero por todo su apoyo con las cuestiones administrativas.

Agradezco a los miembros del Jurado, Rocío Jáuregui, Ramón López, Oscar Rosas y David Sanders, sus valiosos comentarios sobre una versión preliminar de esta tesis.

Mi amigo Jorge Comensal, escritor, tuvo la valentía de leer una versión preliminar de este texto lleno de ecuaciones y tecnicismos. Le agradezco enormemente el esfuerzo y sus comentarios.

Esta tesis demuestra que Ricardo Weder tenía razón y le agradezco por darme la motivación para incursionar en la física teórica.

Durante la realización de este trabajo recibí el apoyo de dos becas PAPIIT mediante los proyectos IN100813 e IN103714.

Le agradezco a David Sanders sus enseñanzas y su contagioso entusiasmo por el software libre. Es un placer ir a sus clases y a sus pláticas.

Agradezco haber tenido la oportunidad de ser profesor de dos grupos de primer semestre de la licenciatura en Física. Aprendí más de mis estudiantes que ellos de mí.

A mi familia le agradezco su constante apoyo durante estos años, en los que hubo muchos problemas y me ayudaron a superarlos.

A Margarita le agradezco por ayudarme a liberar mi potencial y por ser la luz que ilumina mi vida y calienta mi corazón.

La omisión de algún agradecimiento no es por ingratitud sino por ineptitud.

Resumen

En óptica cuántica, la evolución de un sistema tomando en cuenta su interacción con el ambiente a menudo se modela con la ecuación maestra de Lindblad, una ecuación de movimiento para el operador de estado del sistema, que para N átomos con $M + 1$ niveles es un elemento de un espacio vectorial V de dimensión $(M + 1)^{2N}$. Si la ecuación maestra y el operador de estado inicial son simétricos ante el intercambio de los átomos, entonces la evolución del operador de estado del sistema ocurre en el subespacio simétrico de V , cuya dimensión es polinomial en el número de átomos. En este trabajo construimos una base de este subespacio. Por otro lado, presentamos un método algebraico para construir un conjunto de superoperadores, con los cuales se puede escribir la ecuación maestra simétrica, y se pueden etiquetar los elementos de la base de arriba como en la teoría del momento angular. Estos resultados permitirán simular de manera eficiente una gran cantidad de sistemas de interés y calcular, en algunos casos, la solución analítica de la ecuación maestra, así como estudiar sus estados estacionarios y la dinámica de las observables del sistema.

Abstract

In quantum optics, the evolution of a system considering its interaction with the environment is often modelled with the Lindblad master equation, an equation of motion for the state operator of the system, which for N atoms with $M + 1$ levels is an element of a vector space V of dimension $(M + 1)^{2N}$. If the Lindblad equation and the initial state operator are symmetric under the exchange of the atoms, then the evolution of the state operator of the system takes place in the symmetric subspace of V . The dimension of this subspace is polynomial in the number of atoms. In this thesis we build a basis for this subspace. Moreover, we present a method for constructing a set of superoperators, in terms of which the symmetric master equation can be expressed, and it is also possible to label the elements of the above basis in a similar way to the theory of angular momentum. These results will allow an efficient simulation of several systems of interest and, in some cases, calculating the analytical solution of the master equation, as well as studying its stationary states and the dynamics of the system's observables.

Contenido

Introducción	9
1. Sistemas cuánticos cerrados y abiertos	13
1.1. Conceptos matemáticos	13
1.2. Descripción del estado de un sistema cuántico	15
1.2.1. Vectores de estado	15
1.2.2. Operadores de estado	16
1.3. Evolución temporal de sistemas cuánticos cerrados	19
1.4. Evolución temporal de sistemas cuánticos abiertos	21
1.4.1. Semigrupos dinámicos cuánticos	22
1.4.2. Ecuación maestra cuántica de Born–Markov	27
2. Ecuación maestra de Lindblad para átomos de muchos niveles	33
2.1. Conceptos matemáticos	33
2.1.1. El espacio de Liouville y los superoperadores	33
2.1.2. Álgebras de Lie	36
2.2. Ecuación maestra de la óptica cuántica	39
2.3. Estados simétricos y superoperadores colectivos	43
2.3.1. Átomos de tres niveles	46
2.3.2. Átomos con $M + 1$ niveles	57
3. Solución de la ecuación maestra de Lindblad para átomos de tres niveles	63
3.1. Conceptos matemáticos	63
3.2. Estado del sistema al tiempo t	64
4. Conclusiones	75
A. Superoperadores $\check{A}_{\pm,3}^k$	79
B. Acción de los superoperadores $\check{A}_{\pm,3}^{k(1)}$ sobre los vectores unitarios	83
C. Acción de los superoperadores \check{A}_{\pm}^k sobre los vectores simétricos	87
Referencias	91

Introducción

La evolución de un sistema cuántico es unitaria y está descrita, en el régimen no relativista, por la ecuación de Schrödinger. En general, los grados de libertad de interés del sistema no pueden ser aislados y son afectados por los demás. Esto induce una partición del sistema en dos: el sistema de interés y el resto. Cuando la dimensión del sistema es muy grande, un modelo matemático completo de su dinámica es, en general, muy complicado. Por lo tanto, es conveniente buscar una descripción de la evolución del sistema de interés. Para tal propósito, en muchos casos se puede usar el formalismo de los sistemas cuánticos abiertos, en el cual las dos particiones del sistema se llaman sistema cuántico abierto y ambiente.

Muchos sistemas de interés en óptica cuántica, como explicaremos con detalle en este trabajo, se modelan adecuadamente con la ecuación maestra de Lindblad [1], una ecuación de evolución para el operador de estado del sistema cuántico abierto, que toma en cuenta los procesos que ocurren debido a su interacción con el ambiente. En sus orígenes, la óptica cuántica se ocupaba principalmente del estudio de los fenómenos ópticos que no pueden ser explicados con la electrodinámica clásica. Sin embargo, en décadas recientes su campo de estudio se ha ampliado y actualmente abarca áreas de investigación como procesamiento de información cuántica e interacción materia-radiación. El procesamiento de información cuántica es uno de los grandes retos de la física actual y para el éxito de esta empresa es crucial estudiar la interacción de los sistemas cuánticos con el ambiente. Por lo tanto, es de gran importancia contar con un modelo realista para algunos de los experimentos que nos permiten entender los fenómenos cuánticos fundamentales y eventualmente desarrollar nuevas tecnologías.

Las simetrías juegan un papel fundamental en la física [2] y en particular en la mecánica cuántica [3]. Algunos ejemplos incluyen: el teorema de Noether sobre la relación entre simetrías y cantidades conservadas; la función de onda de N fermiones (bosones) idénticos es antisimétrica (simétrica) ante el intercambio de las partículas; las estructuras cristalinas de los materiales corresponden a distintos tipos de simetría; el modelo estándar de las partículas elementales está construido con base en simetrías; actualmente se estudian nuevas fases de la materia conocidas como fases topológicas protegidas por simetría [4]. Desde un punto de vista teórico las simetrías le dan estructura al espacio de estados, puros o mixtos, de un sistema cuántico. Cuando la dinámica del sistema preserva la simetría del estado, la evolución del sistema ocurre en un subespacio del espacio de estados, caracterizado por ese tipo de simetría.

La evolución del operador de estado de un sistema de N átomos de $M + 1$ niveles tiene lugar en un espacio de Hilbert de dimensión $(M + 1)^{2N}$, llamado espacio de Liouville. Los operadores que actúan sobre este espacio se llaman superoperadores. El estudio de sistemas

abiertos en óptica cuántica revela que muchos procesos son simétricos ante el intercambio de los átomos y, por lo tanto, ocurren en el subespacio simétrico del espacio de Liouville del sistema. Si la ecuación maestra de Lindblad y el estado inicial del sistema tienen esta simetría, entonces el operador de estado será simétrico en todo momento. En este trabajo consideramos el sistema cuántico abierto que consiste de N átomos con $M + 1$ niveles, que interactúan de manera independiente con un baño térmico de radiación. La ecuación maestra de Lindblad que describe a este sistema fue publicada recientemente [5]. Como explicaremos con detalle en el texto, restringiendo el tipo de sistemas físicos descritos por esta ecuación, se obtiene una ecuación maestra simétrica ante el intercambio de los átomos.

En 1987 Sarkar y Satchell [6] mostraron que un operador de estado simétrico que describe N átomos de dos niveles se especifica con solamente $\binom{N+3}{N}$ coeficientes. Por lo tanto, la dimensión del subespacio simétrico del espacio de Liouville es polinomial en N y, a partir de la discusión del párrafo anterior, esto significa que la evolución del operador de estado dada por una ecuación maestra simétrica ante el intercambio de los átomos, se puede simular de manera eficiente. Desafortunadamente, este resultado fue ignorado e incluso fue obtenido nuevamente en 2012 [7] por Hartmann, cuya contribución consistió en expresar una ecuación maestra simétrica ante el intercambio de los átomos, en términos de un conjunto de superoperadores colectivos que postuló; no explicó cómo construirlos. A partir de la estructura algebraica de estos superoperadores, el autor mostró que los elementos de la base del subespacio simétrico de Liouville se pueden etiquetar como se hace en la teoría del momento angular. Estos dos resultados, los superoperadores y los elementos de la base del subespacio simétrico etiquetados, permiten calcular la solución analítica de la ecuación maestra en muchos casos de interés.

El estudio de sistemas atómicos de varios niveles que interactúan con el ambiente es importante para investigar nuevos fenómenos cuánticos y por las posibles aplicaciones en el procesamiento de información cuántica. Por lo tanto, es imprescindible generalizar los resultados de Sarkar y Satchell y de Hartmann para átomos de tres o más niveles. Como mostraremos en este trabajo, construir la base del subespacio simétrico del espacio de Liouville de N átomos con $M + 1$ niveles es fácil, ya que es una generalización del proceso utilizado para construir estados simétricos de sistemas cerrados. Sin embargo, hasta donde sabemos, es la primera vez que se hace. Por otro lado, es difícil construir los superoperadores colectivos que permiten etiquetar los vectores base simétricos y calcular la solución analítica de la ecuación maestra. Incluso Hartmann reconoce [8] que no hay un procedimiento para hacerlo. El resultado más importante de este trabajo es que se obtuvo un método para construir estos superoperadores en el caso general de átomos de $M + 1$ niveles. También generalizamos el procedimiento para etiquetar los vectores base del subespacio simétrico.

A partir de lo anterior, consideramos que esta tesis hace dos aportaciones importantes. Por un lado, el procedimiento para construir la base del subespacio simétrico del espacio de Liouville de N átomos con $M + 1$ niveles permitirá simular de manera eficiente y realista la interacción de los átomos con el ambiente mediante una ecuación maestra de Lindblad, simétrica ante el intercambio de los átomos. Por otro lado, la construcción de los superoperadores colectivos y el procedimiento para etiquetar los elementos de la base a

partir de los superoperadores, serán de gran utilidad para encontrar soluciones analíticas de dicha ecuación.

Es menester mencionar que las herramientas computacionales fueron fundamentales para la realización de este trabajo. Por un lado, permitieron generar todas las tablas y también las ecuaciones más complicadas del texto. De esta manera se ahorra tiempo y se evita introducir errores en las expresiones matemáticas. Por otro lado, para obtener las tablas y las ecuaciones fue necesario implementar diversos algoritmos, que implicaron resolver sistemas de ecuaciones lineales, realizar operaciones sobre conjuntos, calcular combinaciones y permutaciones, etc. Tradicionalmente, en la comunidad científica se utiliza software comercial, el cual tiene limitaciones para su uso y los algoritmos que implementa no son transparentes. En este trabajo utilizamos software libre: IPython [9] y SymPy [10]. El primero ofrece una interfaz gráfica interactiva basada en el formato de cuaderno, que intercala celdas para código en el lenguaje Python, con celdas para texto y celdas para gráficos. El segundo es un sistema de álgebra computacional. Estos proyectos han sido desarrollados por científicos que buscan mayor flexibilidad que la que ofrecen los programas comerciales y han alcanzado suficiente madurez como para ser utilizados en centros de investigación de prestigio y universidades alrededor del mundo. En aras de que cualquier colega pueda verificar los resultados de este trabajo o basarse en ellos, el código que genera las tablas y las ecuaciones mencionadas arriba se puede descargar del sitio [11]. Por otro lado, los resultados de esta tesis podrían ser usados, por ejemplo, con el programa QuTiP [12], el cual está diseñado para simular la dinámica de sistemas cuánticos abiertos.

Estructura del trabajo

El texto está organizado en cuatro capítulos. En el primer capítulo presentamos la cinemática y la dinámica de los sistemas cuánticos cerrados y los sistemas cuánticos abiertos, incluyendo la discusión de las aproximaciones que se deben hacer para obtener la ecuación maestra de Lindblad. El segundo capítulo contiene los resultados más importantes de la tesis. Primero se discute con detalle la construcción de los superoperadores colectivos y los vectores base del subespacio simétrico del espacio de Liouville, así como el procedimiento para etiquetarlos, para el caso de átomos de tres niveles. Después se generalizan estos resultados para átomos con $M + 1$ niveles. El tercer capítulo detalla un procedimiento para encontrar la solución analítica de una ecuación maestra de Lindblad simétrica para N átomos en una configuración de tres niveles, en contacto con un baño térmico. Por último, el cuarto capítulo presenta las conclusiones del trabajo.

1. Sistemas cuánticos cerrados y abiertos

En este capítulo presentamos los conceptos más importantes relacionados con la descripción y la evolución del estado de sistemas cuánticos cerrados y abiertos.

1.1. Conceptos matemáticos

Con el fin de tener una referencia rápida de los conceptos matemáticos utilizados en el capítulo, enunciaremos algunas definiciones y algunos teoremas –que no se discuten formalmente en la mayoría de los libros de mecánica cuántica– siguiendo a Tarasov [13].

DEFINICIÓN. Un *espacio de Hilbert* \mathcal{H} es un espacio vectorial sobre \mathbb{C} , con un producto escalar $\langle x, y \rangle \in \mathbb{C}$ para cada par de elementos $x, y \in \mathcal{H}$, tal que todas las sucesiones de Cauchy convergen a un elemento de \mathcal{H} . La norma en el espacio de Hilbert se define como $\|x\|_{\mathcal{H}} = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. En este trabajo nos limitaremos a espacios de Hilbert de dimensión finita N .

DEFINICIÓN. Si \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_2 son dos espacios de Hilbert, su *producto tensorial* es un espacio de Hilbert $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ junto con un mapeo bilineal $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, denotado por $(f_1, f_2) \mapsto f_1 \otimes f_2 \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, tal que el rango del mapeo genera el espacio $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ y para todos $f_1, g_1 \in \mathcal{H}_1$, $f_2, g_2 \in \mathcal{H}_2$,

$$\langle f_1 \otimes f_2, g_1 \otimes g_2 \rangle_{\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2} = \langle f_1, g_1 \rangle_{\mathcal{H}_1} \langle f_2, g_2 \rangle_{\mathcal{H}_2}. \quad (1.1)$$

Recordamos que \times denota el producto cartesiano. De (1.1) se tiene que para todo $f_1 \in \mathcal{H}_1$ y $f_2 \in \mathcal{H}_2$,

$$\|f_1 \otimes f_2\|_{\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2} = \|f_1\|_{\mathcal{H}_1} \|f_2\|_{\mathcal{H}_2}. \quad (1.2)$$

A partir de la definición, si $(e_i)_{i \in I}$ y $(f_j)_{j \in J}$ son bases ortonormales en \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_2 , entonces $(e_i \otimes f_j)_{(i,j) \in I \times J}$ es una base ortonormal en $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, donde I y J son conjuntos finitos de índices. Además, $\dim(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2) = \dim(\mathcal{H}_1) \dim(\mathcal{H}_2)$.

A lo largo del texto consideraremos que las bases de los espacios vectoriales están ordenadas, es decir, que la sucesión (x_1, x_2, \dots, x_N) de elementos del espacio vectorial es tal que el conjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ es linealmente independiente y genera todo el espacio vectorial. Usualmente se abusa de la denotación y las bases ordenadas se denotan como conjuntos, sin embargo, en este trabajo usaremos la notación correcta: $(x_i)_{i=1}^N$.

DEFINICIÓN. Sean \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_2 espacios vectoriales. Un *operador lineal* \hat{T} con valores en \mathcal{H}_2 es un mapeo lineal de un subespacio $D(\hat{T}) \subset \mathcal{H}_1$ en \mathcal{H}_2 . El conjunto $D(\hat{T})$ se llama el dominio de \hat{T} . La imagen $R(\hat{T}) = \hat{T}(D(\hat{T})) = \{\hat{T}f : f \in D(\hat{T})\}$ se llama el rango de \hat{T} .

Los siguientes son ejemplos de operadores lineales:

1. Sistemas cuánticos cerrados y abiertos

- \hat{I} es el operador *identidad* si $\hat{I}x = x$ para toda $x \in \mathcal{H}$.
- \hat{T}^{-1} es el operador *inverso* de \hat{T} si $\hat{T}\hat{T}^{-1} = \hat{T}^{-1}\hat{T} = \hat{I}$.
- \hat{T}^\dagger es el operador *adjunto* de \hat{T} si $\langle \hat{T}^\dagger x, y \rangle = \langle x, \hat{T}y \rangle$, para todos $x, y \in \mathcal{H}$.
- \hat{T} es un operador *autoadjunto* o *hermiteano* si $\langle \hat{T}x, y \rangle = \langle x, \hat{T}y \rangle$, para todos $x, y \in \mathcal{H}$, por lo cual $\hat{T}^\dagger = \hat{T}$.
- \hat{T} es un operador *unitario* si $\langle \hat{T}x, \hat{T}y \rangle = \langle x, y \rangle$, para todos $x, y \in \mathcal{H}$.
- \hat{T} es un operador *de proyección* si $\hat{T}^2 = \hat{T}$ y $\hat{T}^\dagger = \hat{T}$.
- \hat{T} es un operador *positivo* o *no negativo* si $\hat{T}^\dagger = \hat{T}$ y $\langle x, \hat{T}x \rangle \geq 0$, para todo $x \in \mathcal{H}$.
- \hat{T} es un operador *estrictamente positivo* si $\hat{T}^\dagger = \hat{T}$ y $\langle x, \hat{T}x \rangle > 0$, para todo $x \neq 0 \in \mathcal{H}$.
- \hat{T} es un operador *normal* si $\hat{T}^\dagger \hat{T} = \hat{T} \hat{T}^\dagger$.

Un operador positivo, también llamado positivo semi-definido, a menudo se denota como $\hat{T} \geq 0$. Análogamente, un operador estrictamente positivo se denota como $\hat{T} > 0$.

DEFINICIÓN. Sean \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_2 espacios de Hilbert. Un operador lineal \hat{T} de \mathcal{H}_1 en \mathcal{H}_2 es *acotado* si existe $C \in \mathbb{R}, C > 0$ tal que $\|\hat{T}x\|_{\mathcal{H}_2} \leq C\|x\|_{\mathcal{H}_1}$, para todo $x \in \mathcal{H}_1$.

DEFINICIÓN. Sea \hat{T} un operador lineal acotado en un espacio de Hilbert \mathcal{H} . La *traza* de \hat{T} es el número complejo

$$\text{Tr}\{\hat{T}\} = \sum_{i=1}^N \langle e_i, \hat{T}e_i \rangle, \quad (1.3)$$

donde $(e_i)_{i=1}^N$ es una base ortonormal de \mathcal{H} .

DEFINICIÓN. Un *funcional lineal* sobre un espacio de Hilbert \mathcal{H} es un operador lineal de \mathcal{H} en \mathbb{C} .

Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert. El *espacio dual* de \mathcal{H} es un espacio lineal \mathcal{H}^* de todos los funcionales lineales continuos sobre \mathcal{H} . Denotamos x como elemento de \mathcal{H} por el *vector ket* $|x\rangle$ y como elemento de \mathcal{H}^* por el *vector bra* $\langle x|$. Entonces $|x\rangle \mapsto \langle x|$ es un mapeo lineal uno a uno de \mathcal{H} en \mathcal{H}^* . En términos de esta notación, el producto escalar se denota como $\langle x|y\rangle$ y satisface la propiedad $\langle x|y\rangle = \langle y|x\rangle^*$, donde el asterisco denota conjugación compleja.

Denotamos por $\hat{P}(x, y) = |x\rangle\langle y|$ al operador que mapea un elemento $|z\rangle$ de \mathcal{H} en el elemento $|x\rangle\langle y|z\rangle$:

$$\hat{P}(x, y)|z\rangle = |x\rangle\langle y|z\rangle. \quad (1.4)$$

Un mapeo de esta forma se llama *operador ket-bra*. El operador adjunto de $\hat{P}(x, y)$ se define como

$$\hat{P}^\dagger(x, y) = |y\rangle\langle x| = \hat{P}(y, x). \quad (1.5)$$

1.2. Descripción del estado de un sistema cuántico

TEOREMA. Todo operador lineal acotado \hat{T} en un espacio de Hilbert \mathcal{H} tiene una *representación matricial* T_{ij} dada por

$$\hat{T} = \sum_{i,j=1}^N |e_i\rangle\langle e_i| \hat{T} |e_j\rangle\langle e_j| = \sum_{i,j=1}^N T_{ij} \hat{P}_{ij}, \quad (1.6)$$

donde $(|e_i\rangle)_{i=1}^N$ es una base ortonormal de \mathcal{H} . Los números $T_{ij} := \langle e_i | \hat{T} | e_j \rangle$ son llamados elementos de matriz del operador \hat{T} con respecto a la base $(|e_i\rangle)_{i=1}^N$. En este trabajo denotamos a las matrices sin acentos o “gorros”.

TEOREMA. Todo operador autoadjunto acotado \hat{T} en un espacio de Hilbert \mathcal{H} se puede representar mediante la *descomposición espectral*

$$\hat{T} = \sum_{i=1}^N \lambda_i |e_i\rangle\langle e_i|, \quad (1.7)$$

donde $\lambda_i \in \mathbb{R}$ son los autovalores y $|e_i\rangle$ son los autovectores de \hat{T} .

DEFINICIÓN. Un *semigrupo* es un conjunto M en el que se define una operación binaria g tal que $g(x, y) \in M \forall x, y \in M$ y $g(g(x, y), z) = g(x, g(y, z)) \forall x, y, z \in M$. Es decir, g es una operación asociativa.

1.2. Descripción del estado de un sistema cuántico

1.2.1. Vectores de estado

De acuerdo con los postulados de la mecánica cuántica, la descripción completa del estado físico de un sistema cuántico individual está dada en términos de su vector de estado $|\psi\rangle$. El vector de estado es un elemento de un espacio de Hilbert \mathcal{H} . Dado que el espacio de Hilbert es un espacio lineal, entonces es posible formar combinaciones lineales de dichos vectores. De acuerdo con el *principio de superposición*, la combinación lineal

$$|\Psi\rangle = \sum_n c_n |\psi_n\rangle \quad (1.8)$$

corresponde a un estado físico del sistema. En (1.8) $(|\psi_n\rangle)_{n=1}^N \in \mathcal{H}$ y c_n son coeficientes complejos que satisfacen $\sum_n |c_n|^2 = 1$, es decir, el vector de estado es unitario, $\langle \Psi | \Psi \rangle = 1$. Durante mucho tiempo se pensó que el principio de superposición sólo es válido para entidades microscópicas como fotones y electrones. Sin embargo, experimentos recientes de interferencia con moléculas de C_{70} han mostrado que el principio de superposición es válido a escalas mayores [14].

Uno de los conceptos fundamentales de la mecánica cuántica es el *enredamiento cuántico*. Consideremos un sistema cuántico \mathcal{S} , descrito por un vector de estado $|\Psi\rangle$, compuesto por dos subsistemas \mathcal{S}_1 y \mathcal{S}_2 (en este caso, \mathcal{S} es llamado un sistema cuántico bipartita). Se

1. Sistemas cuánticos cerrados y abiertos

dice que el vector de estado $|\Psi\rangle$ de \mathcal{S} está *enredado* con respecto a \mathcal{S}_1 y \mathcal{S}_2 , si no se puede escribir como un producto tensorial de vectores de estado de estos subsistemas, es decir, si no existen vectores de estado $|\psi\rangle_1$ de \mathcal{S}_1 y $|\phi\rangle_2$ de \mathcal{S}_2 tales que $|\Psi\rangle = |\psi\rangle_1 \otimes |\phi\rangle_2 \equiv |\psi\rangle_1 |\phi\rangle_2$. Por lo tanto, los subsistemas no tienen asociado su propio vector de estado, sino que sólo pueden ser descritos con un vector de estado asociado al sistema compuesto.

Si en cambio, $|\Psi\rangle = |\psi\rangle_1 |\phi\rangle_2$, es decir, \mathcal{S}_1 y \mathcal{S}_2 no están enredados, entonces cada subsistema tiene asociado un vector de estado –que constituye una descripción completa de su estado físico– y no hay alguna propiedad física que pueda medirse en el sistema compuesto \mathcal{S} , que no pueda determinarse a partir de mediciones en los subsistemas. Por lo tanto, aunque los subsistemas son parte de un sistema más grande, mantienen su individualidad.

Como explicaremos con detalle en el Capítulo 2, los sistemas cuánticos de interés (electrones, átomos, moléculas, etc.) interactúan continuamente con un sistema cuántico muy grande, llamado ambiente, y esta interacción resulta en el enredamiento de ambos sistemas. Por lo tanto, no es posible describir al sistema de interés en términos de vectores de estado. Esto motiva la introducción del concepto de operador de estado, que será desarrollado en la siguiente subsección.

1.2.2. Operadores de estado

Cuando un sistema cuántico puede ser descrito por un vector en un espacio de Hilbert, decimos que el sistema está en un *estado puro* y el vector de estado contiene información completa sobre el estado físico del sistema.

Un estado puro $|\psi\rangle$ tiene asociado un operador de proyección

$$\hat{\rho} \equiv |\psi\rangle\langle\psi| \quad (1.9)$$

sobre un subespacio unidimensional. Este subespacio es llamado también un rayo, ya que a estados que difieren por una fase global, $e^{i\phi}|\psi\rangle$, les corresponde el mismo proyector.

Este operador es el ejemplo más sencillo de un *operador de estado*, también llamado operador estadístico u operador densidad. El último término es el más utilizado en la literatura. Sin embargo, por consistencia con el término vector de estado, en este trabajo usaremos el término operador de estado.

En el caso general del estado (1.8), el operador de estado correspondiente es

$$\hat{\rho} = |\Psi\rangle\langle\Psi| = \sum_{ij} c_i c_j^* |\psi_i\rangle\langle\psi_j|. \quad (1.10)$$

Los términos $i \neq j$, correspondientes a los elementos fuera de la diagonal en la representación matricial de $\hat{\rho}$ (matriz de estado), representan la coherencia entre las distintas componentes $|\psi_i\rangle$ y son denominados los términos de interferencia. Es importante notar que siempre existe una base en la cual la matriz de estado es diagonal y por tanto no tiene elementos fuera de la diagonal. Entonces, los términos de interferencia existen respecto a una base particular ($|\psi_i\rangle$).

1.2. Descripción del estado de un sistema cuántico

Usando el operador de estado podemos describir un sistema físico que está en un *estado mixto*, lo cual significa que tenemos información incompleta sobre el estado del sistema. Esta situación típicamente ocurre cuando el procedimiento físico usado para preparar un estado cuántico contiene un elemento probabilístico. Sin embargo, la distribución de probabilidades es conocida. Estas probabilidades expresan la ignorancia de un observador acerca del estado cuántico del sistema, mientras que físicamente, el sistema ha sido preparado en un estado puro. Es importante notar que las probabilidades tienen un origen puramente clásico, en contraste con las probabilidades asociadas con el proceso de medición de una variable física del sistema, que tienen un origen cuántico.

Lo anterior significa que antes de que se realice una medición, el sistema está en alguno de los estados puros $|\psi_i\rangle$ (no necesariamente ortogonales) pero el observador no sabe en cuál. Por lo tanto, sólo es posible asociar una probabilidad p_i a cada uno de los estados $|\psi_i\rangle$. El operador de estado correspondiente a esta situación es

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|, \quad (1.11)$$

con $p_i \geq 0$ y $\sum_i p_i = 1$. Este operador representa una mezcla estadística de operadores de estado puros $\hat{\rho}_i = |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$, llamada una *mezcla propia* porque se puede interpretar como una distribución de probabilidad de estados cuánticos puros.

Lo anterior sólo es cierto si se tiene la certeza de que el sistema ha sido preparado en alguno de los estados $|\psi_i\rangle$, es decir, si se tiene información sobre el procedimiento de preparación del estado (1.11). Esto se debe a que cualquier operador de estado mixto se puede expresar como la mezcla de estados puros en una gran cantidad de maneras. En otras palabras, un operador de estado mixto solo (sin información adicional) no es suficiente para reconstruir unívocamente una distribución de probabilidad de estados puros [14].

El operador de estado (1.11) tiene las siguientes propiedades matemáticas:

- Es hermiteano porque $p_i \in \mathbb{R}$.
- Es positivo porque

$$\langle\phi|\hat{\rho}|\phi\rangle = \sum_i p_i \langle\phi|\psi_i\rangle \langle\psi_i|\phi\rangle = \sum_i p_i |\langle\psi_i|\phi\rangle|^2 \geq 0 \quad (1.12)$$

para cualquier vector de estado $|\phi\rangle$.

- $\text{Tr } \hat{\rho} = 1$ porque

$$\begin{aligned} \text{Tr } \hat{\rho} &= \sum_k \langle e_k | \hat{\rho} | e_k \rangle = \sum_{i,k} \langle e_k | p_i |\psi_i\rangle \langle\psi_i| e_k \rangle \\ &= \sum_i p_i \langle\psi_i| \left(\sum_k |e_k\rangle\langle e_k| \right) |\psi_i\rangle = \sum_i p_i \langle\psi_i|\psi_i\rangle = 1, \end{aligned} \quad (1.13)$$

donde $(|e_k\rangle)$ es una base ortonormal del espacio de Hilbert del sistema.

1. Sistemas cuánticos cerrados y abiertos

El operador de estado también permite generalizar el concepto de enredamiento cuántico entre dos (o más) sistemas presentado en la sección anterior. Para las siguientes definiciones usamos un sistema bipartita $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1\mathcal{S}_2$; $\hat{\rho}$ denota el operador de estado del sistema \mathcal{S} , $\hat{\rho}_1$ es el operador de estado del sistema \mathcal{S}_1 y $\hat{\rho}_2$ es el operador de estado del sistema \mathcal{S}_2 .

- $\hat{\rho}$ es *no correlacionado* si se escribe como

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}_1 \otimes \hat{\rho}_2. \quad (1.14)$$

- $\hat{\rho}$ es *separable* si se escribe en la forma

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i \hat{\rho}_{1,i} \otimes \hat{\rho}_{2,i}, \quad (1.15)$$

donde $0 \leq p_i \leq 1$ y $\sum_i p_i = 1$. $\hat{\rho}$ es *inseparable* si no se puede descomponer así.

Decimos que los dos sistemas están *enredados* si $\hat{\rho}$ no es un estado separable [15].

Ahora consideramos un sistema cuántico \mathcal{A} enredado con un sistema cuántico \mathcal{B} . El estado cuántico del sistema compuesto \mathcal{AB} está definido por el operador de estado $\hat{\rho}$. El espacio de Hilbert del sistema compuesto está dado por el producto tensorial de los espacios de Hilbert correspondientes a cada sistema,

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\mathcal{A}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{B}}. \quad (1.16)$$

Si los conjuntos de estados ortonormales ($|\psi_i\rangle$) y ($|\phi_j\rangle$) son base de los espacios $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$ y $\mathcal{H}_{\mathcal{B}}$ respectivamente, entonces los estados ($|\phi_i\rangle|\psi_j\rangle$) son una base del espacio de Hilbert \mathcal{H} . Notamos que, en este caso, los paréntesis denotan un conjunto ordenado.

Supongamos que un observador sólo tiene acceso al sistema \mathcal{A} , es decir, sólo puede realizar mediciones sobre ese sistema pero no sobre el sistema \mathcal{B} . Por lo tanto, todo lo que el observador puede saber sobre el estado del sistema compuesto debe inferirlo a partir de mediciones locales sobre \mathcal{A} únicamente.

Los operadores que corresponden a las variables físicas que describen a un sistema se llaman *observables* y en el caso del sistema \mathcal{A} son de la forma

$$\hat{O} = \hat{O}_{\mathcal{A}} \otimes \hat{I}_{\mathcal{B}}, \quad (1.17)$$

donde $\hat{I}_{\mathcal{B}}$ es el operador identidad sobre el espacio de Hilbert $\mathcal{H}_{\mathcal{B}}$.

El *valor esperado* del observable \hat{O} asociado a la variable física \mathcal{O} , cuando el sistema está en el estado $|\phi\rangle$, se denota como $\langle \hat{O} \rangle_{\phi}$ y se obtiene experimentalmente midiendo la propiedad \mathcal{O} en \mathcal{N} sistemas preparados en el estado $|\phi\rangle$:

$$\langle \hat{O} \rangle_{\phi} = \lim_{\mathcal{N} \rightarrow \infty} \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \mathcal{O}_j, \quad (1.18)$$

1.3. Evolución temporal de sistemas cuánticos cerrados

donde \mathcal{O}_j denota el resultado de la medición de \mathcal{O} en el j -ésimo sistema. En el formalismo de la mecánica cuántica, los valores \mathcal{O}_j corresponden con los autovalores o_j de \hat{O} y la probabilidad de medir un cierto valor cuando el sistema está en el estado $|\phi\rangle$ está dada por $p(o_j) = |\langle\phi|o_j\rangle|^2$. Por lo tanto, $\langle\hat{O}\rangle_\phi$ se calcula mediante

$$\langle\hat{O}\rangle_\phi = \sum_j p(o_j)o_j = \sum_j \langle\phi|o_j\rangle \langle o_j|\phi\rangle o_j = \langle\phi|\hat{O}|\phi\rangle = \sum_m \langle m|\phi\rangle \langle\phi|\hat{O}|m\rangle, \quad (1.19)$$

donde usamos la descomposición espectral (1.7) del operador identidad y del observable \hat{O} . Cuando el estado del sistema es mixto (1.11), el valor esperado $\langle\hat{O}\rangle$ se calcula como

$$\langle\hat{O}\rangle = \sum_i p_i \langle\hat{O}\rangle_{\phi_i} = \sum_i p_i \langle\phi_i|\hat{O}|\phi_i\rangle = \text{Tr}[\hat{\rho}\hat{O}]. \quad (1.20)$$

A partir de lo anterior, el valor esperado del observable (1.17) está dado por

$$\begin{aligned} \langle\hat{O}\rangle &= \text{Tr}[\hat{\rho}\hat{O}] \\ &= \sum_{ij} \langle\phi_j|\langle\psi_i|\hat{\rho}(\hat{O}_A \otimes \hat{I}_B)|\psi_i\rangle|\phi_j\rangle \\ &= \sum_i \langle\psi_i|\left(\sum_{j=1} \langle\phi_j|\hat{\rho}|\phi_j\rangle\right)\hat{O}_A|\psi_i\rangle \\ &= \sum_i \langle\psi_i|(\text{Tr}_B \hat{\rho})\hat{O}_A|\psi_i\rangle \\ &= \text{Tr}_A[(\text{Tr}_B \hat{\rho})\hat{O}_A]. \end{aligned} \quad (1.21)$$

El operador $\hat{\rho}_A \equiv \text{Tr}_B \hat{\rho}$ se define como el *operador de estado reducido* correspondiente al sistema \mathcal{A} y describe completamente las propiedades estadísticas de todos los observables que pertenecen a este subsistema. $\text{Tr}_B \hat{\rho}$ se llama la traza parcial de $\hat{\rho}$ sobre el subsistema \mathcal{B} . Es interesante notar que esta manera de describir al subsistema \mathcal{A} es la única posible [16](p. 76).

1.3. Evolución temporal de sistemas cuánticos cerrados

De acuerdo con los postulados de la Mecánica Cuántica, la evolución temporal del vector de estado $|\psi(t)\rangle$, que contiene toda la información sobre un sistema físico al tiempo t , está dada por la ecuación de Schrödinger:

$$\frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t) |\psi(t)\rangle, \quad (1.22)$$

donde $\hat{H}(t)$ es el operador hamiltoniano del sistema.

1. Sistemas cuánticos cerrados y abiertos

Para un *sistema cuántico cerrado*, es decir, que no forma parte de un sistema cuántico más grande, y aislado (no interacciona con otro sistema físico), el hamiltoniano no depende del tiempo y la solución formal de la ecuación de Schrödinger es

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}(t-t_0)/\hbar} |\psi(t_0)\rangle. \quad (1.23)$$

Podemos definir un operador unitario de evolución $\hat{U}(t, t_0)$, que conecta el estado $|\psi(t_0)\rangle$ al tiempo t_0 con el estado $|\psi(t)\rangle$ al tiempo t ,

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle. \quad (1.24)$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación de Schrödinger (1.22), se obtiene un problema de valores iniciales (PVI) para el operador de evolución con la ecuación diferencial

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{U}(t, t_0) = \hat{H}(t) \hat{U}(t, t_0) \quad (1.25)$$

y la condición inicial $\hat{U}(t_0, t_0) = \hat{I}$.

La solución del PVI para un hamiltoniano \hat{H} independiente del tiempo es

$$\hat{U}(t, t_0) = e^{-i\hat{H}(t-t_0)/\hbar}. \quad (1.26)$$

En cambio, para un sistema cerrado sujeto a una fuerza externa que varía con el tiempo (por ejemplo un campo electromagnético), cuya dinámica está descrita en términos de un hamiltoniano dependiente del tiempo, la solución de la ecuación de Schrödinger es

$$|\psi(t)\rangle = \check{T} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \hat{H}(t') dt' \right] |\psi(t_0)\rangle, \quad (1.27)$$

donde \check{T} es el superoperador de orden temporal definido como

$$\check{T}[\hat{A}(t_1)\hat{B}(t_2)] = \begin{cases} \hat{A}(t_1)\hat{B}(t_2), & t_1 > t_2, \\ \hat{B}(t_2)\hat{A}(t_1), & t_2 \geq t_1. \end{cases} \quad (1.28)$$

Es decir, este operador ordena productos de operadores dependientes del tiempo de manera que sus argumentos crecen de derecha a izquierda. A los operadores que actúan sobre otros operadores se les llama *superoperadores* y los denotamos como \check{A} . En el siguiente capítulo discutiremos con detalle sus propiedades matemáticas.

El operador de evolución en este caso es de la forma

$$\hat{U}(t, t_0) = \check{T} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \hat{H}(t') dt' \right]. \quad (1.29)$$

Si el estado del sistema al tiempo t_0 está caracterizado por un operador de estado mixto

$$\hat{\rho}(t_0) = \sum_i c_i |\psi_i(t_0)\rangle \langle \psi_i(t_0)|, \quad (1.30)$$

entonces el estado del sistema al tiempo t está dado por

$$\hat{\rho}(t) = \sum_i c_i \hat{U}(t, t_0) |\psi_i(t_0)\rangle \langle \psi_i(t_0)| \hat{U}^\dagger(t, t_0) = \hat{U}(t, t_0) \hat{\rho}(t_0) \hat{U}^\dagger(t, t_0). \quad (1.31)$$

Derivando esta ecuación con respecto al tiempo y usando la ecuación (1.25), se obtiene la ecuación de von Neumann, también llamada de Liouville–von Neumann [16]:

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}(t) = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}(t), \hat{\rho}(t)]. \quad (1.32)$$

En términos del superoperador de Liouville (Liouvilliano) definido como

$$\check{L}(t)[\hat{\rho}] = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}(t)\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{H}(t)], \quad (1.33)$$

la ecuación (1.32) se escribe

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}(t) = \check{L}(t) \hat{\rho}(t). \quad (1.34)$$

La solución formal de esta ecuación diferencial está dada por

$$\hat{\rho}(t) = \check{T} \exp \left[\int_{t_0}^t \check{L}(t') dt' \right] \hat{\rho}(t_0). \quad (1.35)$$

Es importante recalcar que las ecuaciones de evolución (1.22) y (1.32) modelan el comportamiento de un sistema cuántico cerrado. Para ver esto, consideremos un átomo de dos niveles \mathcal{A} , que interacciona con un campo de radiación cuantizada \mathcal{R} . El sistema compuesto \mathcal{AR} está descrito por un operador de estado $\hat{\rho}_{\mathcal{AR}}$ que evoluciona de acuerdo con la ecuación de von Neumann. Sin embargo, el operador de estado reducido que describe al átomo $\hat{\rho}_{\mathcal{A}} = \text{Tr}_{\mathcal{R}} \hat{\rho}_{\mathcal{AR}}$ no evoluciona de esta manera (la evolución temporal de un operador de estado reducido se discutirá con detalle en la siguiente sección). Si en cambio, el átomo interacciona con radiación clásica, su operador de estado $\hat{\rho}_{\mathcal{A}}$ evoluciona con la ecuación de von Neumann.

1.4. Evolución temporal de sistemas cuánticos abiertos

En la sección anterior presentamos un resumen de las ecuaciones fundamentales que describen la dinámica de sistemas cuánticos cerrados. Sin embargo, ningún sistema físico se puede considerar cerrado en la práctica (excepto, quizás, el universo). En el caso de los sistemas cuánticos, es muy importante considerar que siempre está presente la interacción con un sistema cuántico más grande, llamado ambiente, ya que da lugar al proceso llamado *decoherencia*, mediante el cual se destruye la superposición de estados del sistema abierto. Adicionalmente a la decoherencia, los sistemas cuánticos abiertos están sujetos a procesos de relajación, como los sistemas clásicos.

1.4.1. Semigrupos dinámicos cuánticos

Existen distintos formalismos para estudiar sistemas cuánticos abiertos [17]. El más exitoso consiste en considerar que el sistema abierto \mathcal{S} tiene pocos grados de libertad e interactúa con un sistema \mathcal{A} que tiene una gran cantidad de grados de libertad. Este sistema recibe el nombre genérico de *ambiente*. En la literatura se utiliza a menudo un modelo sencillo para el ambiente: un sistema de osciladores armónicos independientes. Un ambiente con una infinidad de grados de libertad, de manera que las frecuencias de sus modos forman un continuo, se llama *reservorio*. Si el reservorio está en equilibrio térmico se llama *baño térmico*.

Tanto el sistema como el ambiente tienen asociado un espacio de Hilbert que denotamos $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ y $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$, respectivamente. El espacio de Hilbert total es $\mathcal{H}_{\mathcal{SA}} = \mathcal{H}_{\mathcal{S}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{A}}$. El sistema compuesto \mathcal{SA} se considera cerrado y la evolución unitaria del operador de estado que describe al sistema total, $\hat{\rho}(t)$, está dada por (1.31). A partir de este estado, como explicamos en la sección 1.2, el operador de estado reducido $\hat{\rho}_{\mathcal{S}}(t)$ se calcula mediante

$$\hat{\rho}_{\mathcal{S}}(t) = \text{Tr}_{\mathcal{A}} \hat{\rho}(t) = \text{Tr}_{\mathcal{A}} \{ \hat{U}(t, t_0) \hat{\rho}(t_0) \hat{U}^\dagger(t, t_0) \}, \quad (1.36)$$

donde $\hat{U}(t, t_0)$ denota el operador de evolución del sistema \mathcal{SA} con hamiltoniano total \hat{H} . De manera análoga, la ecuación de movimiento del operador $\hat{\rho}_{\mathcal{S}}(t)$ se obtiene tomando la traza parcial sobre el ambiente en la ecuación de Liouville-von Neumann para el estado del sistema total:

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}_{\mathcal{S}}(t) = -\frac{i}{\hbar} \text{Tr}_{\mathcal{A}} [\hat{H}(t), \hat{\rho}(t)]. \quad (1.37)$$

Las ecuaciones (1.36) y (1.37), permiten obtener $\hat{\rho}_{\mathcal{S}}(t)$ una vez que se ha determinado la evolución de $\hat{\rho}(t)$. Sin embargo, en muchas ocasiones no estamos interesados en la dinámica del ambiente o del sistema total. Además, en la mayoría de los casos es imposible determinar analíticamente la evolución de $\hat{\rho}(t)$. Por lo tanto, es necesario recurrir a métodos analíticos que permiten obtener ecuaciones de evolución aproximadas para $\hat{\rho}_{\mathcal{S}}(t)$.

Restringiendo el sistema abierto a un sistema débilmente acoplado con el ambiente, podemos suponer que al tiempo $t = 0$ el sistema total se prepara en el estado no correlacionado

$$\hat{\rho}(0) = \hat{\rho}_{\mathcal{S}}(0) \otimes \hat{\rho}_{\mathcal{A}}, \quad (1.38)$$

donde $\hat{\rho}_{\mathcal{S}}(0)$ es el estado inicial del sistema \mathcal{S} y $\hat{\rho}_{\mathcal{A}}$ es un estado de referencia del ambiente. La transformación $\hat{\rho}_{\mathcal{S}}(0) \mapsto \hat{\rho}_{\mathcal{S}}(t)$, que describe el cambio del estado del sistema abierto del tiempo $t = 0$ al tiempo t , se puede escribir en la forma

$$\hat{\rho}_{\mathcal{S}}(t) = \check{V}(t) \hat{\rho}_{\mathcal{S}}(0) \equiv \text{Tr}_{\mathcal{A}} \{ \hat{U}(t, 0) [\hat{\rho}_{\mathcal{S}}(0) \otimes \hat{\rho}_{\mathcal{A}}] \hat{U}^\dagger(t, 0) \}. \quad (1.39)$$

Si el estado de referencia $\hat{\rho}_{\mathcal{A}}$ y el tiempo t están fijos, esta relación define un *mapeo dinámico* del espacio de operadores de estado del sistema \mathcal{S} en sí mismo. En adelante usaremos $\check{U}(t) \equiv \check{U}(t, 0)$ y $\hat{\rho}_{\mathcal{S}} \equiv \hat{\rho}_{\mathcal{S}}(0)$.

1.4. Evolución temporal de sistemas cuánticos abiertos

El mapeo dinámico se puede caracterizar completamente en términos de operadores que actúan sobre el espacio de Hilbert \mathcal{H}_S del sistema abierto. Con este fin, utilizamos una base ortonormal ($|\phi_k\rangle$) en \mathcal{H}_A para escribir la descomposición espectral de $\hat{\rho}_A$

$$\hat{\rho}_A = \sum_k \lambda_k |\phi_k\rangle\langle\phi_k|, \quad \lambda_k \geq 0, \quad \sum_k \lambda_k = 1 \quad (1.40)$$

y para calcular Tr_A en (1.39). El resultado es la *representación mediante suma de operadores* o *representación de Kraus* [18] del mapeo dinámico $\check{V}(t)$,

$$\check{V}(t)\hat{\rho}_S = \sum_{ik} \hat{W}_{ik}(t)\hat{\rho}_S\hat{W}_{ik}^\dagger(t), \quad (1.41)$$

donde definimos los operadores de Kraus

$$\hat{W}_{ik} \equiv \hat{W}_{ik}(t) = \sqrt{\lambda_k} \langle\phi_i|\hat{U}(t)|\phi_k\rangle \quad (1.42)$$

que sólo actúan sobre \mathcal{H}_S y satisfacen (debido a que $\hat{U}(t)$ es un operador unitario)

$$\begin{aligned} \sum_{ik} \hat{W}_{ik}^\dagger \hat{W}_{ik} &= \sum_{ik} \lambda_k \langle\phi_k|\hat{U}^\dagger(t)|\phi_i\rangle \langle\phi_i|\hat{U}(t)|\phi_k\rangle \\ &= \sum_k \lambda_k \langle\phi_k|\hat{U}^\dagger(t)\hat{U}(t)|\phi_k\rangle \\ &= \left(\sum_k \lambda_k\right)\hat{I}_S = \hat{I}_S. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Notamos que $\hat{\rho}_S(t)$ tiene las siguientes propiedades:

- Es hermiteano porque $\hat{\rho}_S$ es hermiteano:

$$\hat{\rho}_S^\dagger(t) = \left(\sum_{ik} \hat{W}_{ik}\hat{\rho}_S\hat{W}_{ik}^\dagger\right)^\dagger = \sum_{ik} (\hat{W}_{ik}^\dagger)^\dagger \hat{\rho}_S^\dagger \hat{W}_{ik}^\dagger = \sum_{ik} \hat{W}_{ik}\hat{\rho}_S\hat{W}_{ik}^\dagger = \hat{\rho}_S(t). \quad (1.44)$$

- Tiene traza uno debido a (2.11) y a la propiedad cíclica de la traza

$$\text{Tr} \hat{\rho}_S(t) = \text{Tr} \left(\sum_{ik} \hat{W}_{ik}\hat{\rho}_S\hat{W}_{ik}^\dagger\right) = \sum_{ik} \text{Tr} \left(\hat{\rho}_S\hat{W}_{ik}^\dagger\hat{W}_{ik}\right) = \text{Tr} \left(\hat{\rho}_S \sum_{ik} \hat{W}_{ik}^\dagger\hat{W}_{ik}\right) = 1. \quad (1.45)$$

- Es positivo porque $\hat{\rho}_S$ es positivo

$$\langle\psi_S|\hat{\rho}_S(t)|\psi_S\rangle = \sum_{ik} \langle\psi_S|\hat{W}_{ik}\hat{\rho}_S\hat{W}_{ik}^\dagger|\psi_S\rangle = \sum_{ik} \left\langle\phi_S^{ik}\left|\hat{\rho}_S\right|\phi_S^{ik}\right\rangle \geq 0, \quad (1.46)$$

1. Sistemas cuánticos cerrados y abiertos

donde $|\psi_S\rangle$ es cualquier vector de estado en \mathcal{H}_S y definimos $|\phi_S^{ik}\rangle \equiv \hat{W}_{ik}^\dagger |\psi_S\rangle$.

El mapeo dinámico definido arriba tiene una propiedad matemática con implicaciones físicas muy importantes. Supongamos que hay un sistema \mathcal{C} lejos del sistema abierto \mathcal{S} , de manera que \mathcal{C} no interacciona con \mathcal{S} ni con \mathcal{A} . Por lo tanto, la evolución unitaria del sistema total \mathcal{SCA} es de la forma $\hat{U}_{SA}(t) \otimes \hat{U}_C(t)$. Como vimos arriba, si el estado inicial del sistema \mathcal{SA} es no correlacionado, entonces la evolución del sistema \mathcal{S} está dada por un mapeo dinámico. Análogamente, el estado inicial más general del sistema \mathcal{SCA} que permitiría describir al sistema \mathcal{SC} con un mapeo dinámico, es de la forma

$$\hat{\rho}_{SCA}(0) = \hat{\rho}_{SC}(0) \otimes \hat{\rho}_A. \quad (1.47)$$

Usando la traza parcial, el estado del sistema \mathcal{SC} al tiempo t está dado por

$$\hat{\rho}_{SC}(t) = \text{Tr}_A\{\hat{\rho}_{SCA}(t)\} = \text{Tr}_A\{\hat{U}_{SA}(t) \otimes \hat{U}_C(t)[\hat{\rho}_{SC}(0) \otimes \hat{\rho}_A]\hat{U}_{SA}^\dagger(t) \otimes \hat{U}_C^\dagger(t)\}. \quad (1.48)$$

Usando la descomposición espectral (1.40) de $\hat{\rho}_A$ se obtiene

$$\hat{\rho}_{SC}(t) = \sum_{ik} \hat{W}_{ik}(t) \otimes \hat{U}_C(t)[\hat{\rho}_{SC}(0)]\hat{W}_{ik}^\dagger(t) \otimes \hat{U}_C^\dagger(t) = \check{V}(t) \otimes \check{U}(t)[\hat{\rho}_{SC}(0)], \quad (1.49)$$

donde $\check{V}(t)$ es un mapeo dinámico actuando sobre el subsistema \mathcal{S} y el superoperador

$$\check{U}(t) \cdot = \hat{U}_C(t) \cdot \hat{U}_C^\dagger(t) \quad (1.50)$$

corresponde a la evolución unitaria del sistema \mathcal{C} . Por lo tanto, el mapeo dinámico que describe la evolución del sistema \mathcal{SC} es el producto tensorial de la dinámica de cada subsistema.

Como $\hat{\rho}_{SC}(0)$ y $\hat{\rho}_{SC}(t)$ son operadores de estado, el mapeo (1.49) preserva la positividad. Para ver esto, escribimos el mapeo en la forma

$$\check{V}(t) \otimes \check{U}(t) = [\check{V}(t) \otimes \hat{I}_C][\hat{I}_S \otimes \check{U}(t)]. \quad (1.51)$$

Recordando la descomposición polar, es decir, la descomposición de un operador lineal como producto de un operador positivo y un operador unitario, dado que $\hat{I}_S \otimes \check{U}(t)$ es un operador unitario, entonces

$$\check{V}(t) \otimes \hat{I}_C \quad (1.52)$$

es un operador positivo. El significado físico de (1.51) es que el mapeo $\check{V}(t)$, que describe la evolución del sistema abierto \mathcal{S} que interacciona con el ambiente \mathcal{A} , actúa localmente sobre \mathcal{S} y no afecta al sistema \mathcal{C} .

Un mapeo positivo transforma operadores positivos en operadores positivos. Si su extensión mediante el operador identidad en un espacio de Hilbert de dimensión $n \in \mathbb{N}$ arbitraria es un operador positivo, se llama *completamente positivo*. Un mapeo que actúa sobre operadores de estado de manera lineal, que –en general– disminuye la traza y que es completamente positivo, recibe el nombre de *operación cuántica* y describe el cambio más

1.4. Evolución temporal de sistemas cuánticos abiertos

general de un operador de estado [19]. El teorema de representación de Kraus [18] asegura que toda operación cuántica \check{V} tiene una representación mediante una suma de operadores

$$\check{V}(\hat{\rho}) = \sum_i \hat{A}_i \hat{\rho} \hat{A}_i^\dagger, \quad \sum_i \hat{A}_i^\dagger \hat{A}_i \leq \hat{I}. \quad (1.53)$$

Las operaciones cuánticas que preservan la traza satisfacen

$$\sum_i \hat{A}_i^\dagger \hat{A}_i = \hat{I}. \quad (1.54)$$

En algunos libros [20] llaman a las operaciones cuánticas que preservan la traza simplemente operaciones cuánticas, lo cual puede producir confusión.

A partir de lo anterior, concluimos que el mapeo dinámico (1.39) es un tipo de operación cuántica que preserva la traza, al igual que el superoperador de evolución unitaria (1.50). Sin embargo, a diferencia del último, se puede demostrar que el inverso de un mapeo dinámico, \check{V}^{-1} , es un mapeo dinámico si y sólo si \check{V} es unitario [21](p. 28). Físicamente, esto significa que podemos construir un mapeo dinámico para describir la evolución del sistema abierto del tiempo t_0 al tiempo t_1 , pero no podemos partir del estado del sistema abierto al tiempo t_1 , cuando ya no conocemos el estado del ambiente, y regresar al estado inicial del sistema abierto. Por lo tanto, al calcular la traza sobre los grados de libertad del ambiente, ocurre una pérdida irreversible de información (sobre el sistema \mathcal{S}) que se transfirió del sistema abierto al ambiente durante la evolución. Por otro lado, es importante notar que si al tiempo $t = 0$ suponemos que el estado del sistema total es no correlacionado, $\hat{\rho}(0) = \hat{\rho}_{\mathcal{S}}(0) \otimes \hat{\rho}_{\mathcal{A}}$, entonces podemos construir un mapeo dinámico $\check{V}(t)$. Sin embargo, el estado del sistema total al tiempo t no necesariamente es un producto tensorial, por lo que no es posible construir un mapeo dinámico a partir de un tiempo t arbitrario.

El mapeo dinámico (1.39) lo definimos para un tiempo $t \geq 0$ fijo. Si dejamos variar $t \in \mathbb{R}^+$, obtenemos una familia de un parámetro $\{\check{V}(t)|t \geq 0\}$ de mapeos dinámicos, donde $\check{V}(0)$ es el mapeo identidad. Sin embargo, es imposible trabajar con la dinámica general excepto para algunos modelos sencillos como osciladores armónicos acoplados linealmente [22](p. 152). Como explicaremos con detalle más adelante, bajo ciertas suposiciones sobre el comportamiento dinámico del ambiente, se puede reemplazar la dinámica exacta por una dinámica markoviana que satisface la *propiedad de semigrupo*,

$$\check{V}(t_1)\check{V}(t_2) = \check{V}(t_1 + t_2), \quad t_1, t_2 \geq 0, \quad (1.55)$$

y de esta manera podemos definir la composición de mapeos dinámicos. La propiedad de semigrupo muestra claramente la irreversibilidad de la dinámica. Dados los tiempos t_1 y t_2 , la suma de ellos es el tiempo $t_1 + t_2$. Sin embargo, dado el tiempo $t_1 + t_2$ existen una infinidad (no numerable) de tiempos t_1 y t_2 , cuya suma da ese resultado. Una familia de un parámetro continuo de mapeos dinámicos que satisfacen la propiedad de semigrupo, constituyen un *semigrupo dinámico cuántico*.

1. Sistemas cuánticos cerrados y abiertos

Dado un semigrupo dinámico cuántico existe un mapeo lineal \check{L} , el generador del semigrupo, en términos del cual se obtiene una ecuación diferencial de primer orden para el operador de estado reducido $\hat{\rho}_S(t)$ del sistema abierto,

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_S(t) = \check{L}\hat{\rho}_S(t), \quad (1.56)$$

llamada *ecuación maestra cuántica*. Gorini, Kossakowski y Sudarshan [23] mostraron que la forma más general del generador de un semigrupo dinámico cuántico en un espacio de Hilbert de dimensión finita N es (con $\hbar = 1$)

$$\check{L}_{\text{GKS}}\hat{\rho}_S(t) = -i[\hat{H}'_S, \hat{\rho}_S(t)] + \frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^{N^2-1} a_{ij} \{[\hat{F}_i \hat{\rho}_S(t), \hat{F}_j^\dagger] + [\hat{F}_i, \hat{\rho}_S(t) \hat{F}_j^\dagger]\}. \quad (1.57)$$

Aquí,

- $A = (a_{ij})$ es una matriz positiva, que contiene toda la información sobre los procesos de decoherencia y disipación a los que está sujeto el sistema abierto. Es decir, los elementos de matriz a_{ij} representan tiempos de vida, tasas de relajación longitudinal y transversal, y parámetros de equilibrio como polarización estacionaria o magnetización.
- \hat{H}'_S es el hamiltoniano efectivo del sistema abierto, que incluye términos adicionales debido al acoplamiento del sistema con el ambiente.
- $\hat{F}_0 = \hat{I}$ y $\hat{F}_i, i = 1, 2, \dots, N^2 - 1$, son operadores que forman una base del espacio de operadores acotados que actúan sobre \mathcal{H}_S .

Como la matriz A es positiva, se puede diagonalizar usando una transformación unitaria U . Reemplazando los operadores $\{\hat{F}_i, i = 1, 2, \dots, N^2 - 1\}$ por combinaciones lineales adecuadas de ellos \hat{L}_α (con coeficientes determinados por U), se obtiene la forma diagonal del generador \check{L} ($\hbar = 1$)

$$\check{L}_d \hat{\rho}_S(t) = -i[\hat{H}'_S, \hat{\rho}_S(t)] + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{N^2-1} \kappa_\alpha \{[\hat{L}_\alpha \hat{\rho}_S(t), \hat{L}_\alpha^\dagger] + [\hat{L}_\alpha, \hat{\rho}_S(t) \hat{L}_\alpha^\dagger]\}. \quad (1.58)$$

Göran Lindblad [1] demostró que (1.58) es el generador acotado más general si \mathcal{H}_S es un espacio de Hilbert separable, el conjunto de índices $\{\alpha\}$ es numerable y $\sum_\alpha \hat{L}_\alpha^\dagger \hat{L}_\alpha$ es un operador acotado. Por esta razón, $\{\hat{L}_\alpha\}$ son llamados *operadores de Lindblad* y

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_S(t) = -i[\hat{H}'_S, \hat{\rho}_S(t)] - \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{N^2-1} \kappa_\alpha \{\hat{L}_\alpha^\dagger \hat{L}_\alpha \hat{\rho}_S(t) + \hat{\rho}_S(t) \hat{L}_\alpha^\dagger \hat{L}_\alpha\} + \sum_{\alpha=1}^{N^2-1} \kappa_\alpha \hat{L}_\alpha \hat{\rho}_S(t) \hat{L}_\alpha^\dagger \quad (1.59)$$

es la *ecuación maestra de Lindblad*. La primera suma en (1.59) contiene términos de decaimiento que reducen la población total $\text{Tr} \hat{\rho}_S(t)$ de $\hat{\rho}_S(t)$. La segunda suma consiste de

1.4. Evolución temporal de sistemas cuánticos abiertos

términos que aumentan la población, garantizando que $\text{Tr } \hat{\rho}_S(t) = 1$ en todo momento. Como los operadores $\{\hat{F}_i\}$ no necesariamente son hermiteanos, entonces los operadores de Lindblad no siempre representan observables físicas. Por otro lado, el generador \hat{L} es invariante ante transformaciones unitarias de los operadores de Lindblad

$$\sqrt{\kappa_i} \hat{L}_i \rightarrow \sqrt{\kappa'_i} \hat{L}'_i = \sum_j u_{ij} \sqrt{\kappa_j} \hat{L}_j \quad (1.60)$$

con $U = (u_{ij})$ una matriz unitaria. Esta propiedad será de gran importancia en el siguiente capítulo.

1.4.2. Ecuación maestra cuántica de Born–Markov

Desde el punto de vista microscópico, una ecuación maestra cuántica markoviana se debe poder obtener a partir de la dinámica hamiltoniana del sistema total (compuesto por el sistema abierto y el ambiente). A continuación discutiremos las aproximaciones que se deben hacer para obtener el generador del semigrupo dinámico cuántico en la forma de Lindblad, en el límite de acoplamiento débil.

Suponemos que el hamiltoniano $\hat{H}(t)$ del sistema total se puede descomponer como

$$\hat{H} = \hat{H}_S \otimes \hat{I}_A + \hat{H}_A \otimes \hat{I}_S + \hat{H}_I, \quad (1.61)$$

donde \hat{H}_S es el hamiltoniano libre del sistema, \hat{H}_A es el hamiltoniano libre del ambiente y

$$\hat{H}_I = \sum_i \hat{S}_i \otimes \hat{A}_i \quad \hat{S}_i = \hat{S}_i^\dagger, \hat{A}_i = \hat{A}_i^\dagger \quad (1.62)$$

es el hamiltoniano de interacción. En lo sucesivo utilizaremos el esquema de interacción y $\hbar = 1$, con $\hat{H}_0 = \hat{H}_S + \hat{H}_A$, $\hat{H}_I(t) = e^{i\hat{H}_0 t} \hat{H}_I e^{-i\hat{H}_0 t}$ y $\hat{\rho}_I(t) = e^{i\hat{H}_0 t} \hat{\rho}(t) e^{-i\hat{H}_0 t}$. Además, supondremos que el estado inicial del sistema total no está correlacionado (una suposición razonable cuando el acoplamiento del sistema y el ambiente es débil):

$$\hat{\rho}(0) = \hat{\rho}_I(0) = \hat{\rho}_S(0) \otimes \hat{\rho}_A(0). \quad (1.63)$$

La ecuación de von Neumann para el operador de estado del sistema total, $\hat{\rho}_I(t)$, en el esquema de interacción está dada por

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}_I(t) = -i[\hat{H}_I(t), \hat{\rho}_I(t)]. \quad (1.64)$$

Integrando formalmente esta ecuación se obtiene

$$\hat{\rho}_I(t) = \hat{\rho}_I(0) - i \int_0^t dt' [\hat{H}_I(t'), \hat{\rho}_I(t')]. \quad (1.65)$$

1. Sistemas cuánticos cerrados y abiertos

Sustituyendo esta expresión en (1.64) y dado que $\hat{\rho}_I^{(S)}(t) = \text{Tr}_{\mathcal{A}} \hat{\rho}_I(t)$, calculando la traza sobre el ambiente se obtiene

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}_I^{(S)}(t) = - \int_0^t dt' \text{Tr}_{\mathcal{A}} [\hat{H}_I(t), [\hat{H}_I(t'), \hat{\rho}_I(t')]], \quad (1.66)$$

donde, sin pérdida de generalidad, supusimos que

$$\text{Tr}_{\mathcal{A}} [\hat{H}_I(t), \hat{\rho}(0)] = 0. \quad (1.67)$$

Notamos que (1.66) depende del operador de estado del sistema total evaluado en todos los tiempos entre 0 y t , es decir, depende del estado cambiante del ambiente. Para eliminar esta dependencia utilizamos la *aproximación de Born*: suponemos que el acoplamiento entre el sistema abierto y el ambiente es débil, de manera que la influencia del sistema en el ambiente es pequeña. Por lo tanto, el estado del sistema total al tiempo t es un producto tensorial y el operador de estado del ambiente es aproximadamente constante

$$\hat{\rho}_I(t) \approx \hat{\rho}_I^S(t) \otimes \hat{\rho}_{\mathcal{A}}, \quad \hat{\rho}_{\mathcal{A}} = \hat{\rho}_{\mathcal{A}}(0). \quad (1.68)$$

Esta aproximación es razonable en muchos casos, cuando el sistema abierto está acoplado a un ambiente mucho más grande. Sin embargo, esto no implica que no se producen excitaciones en el ambiente inducidas por la interacción con el sistema. Sustituyendo (1.68) en (1.66) obtenemos una ecuación integrodiferencial para el operador de estado reducido $\hat{\rho}_I^S(t)$

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}_I^S(t) = - \int_0^t dt' \text{Tr}_{\mathcal{A}} [\hat{H}_I(t), [\hat{H}_I(t'), \hat{\rho}_I^S(t') \otimes \hat{\rho}_{\mathcal{A}}]]. \quad (1.69)$$

Sin embargo, esta ecuación es no local en el tiempo porque la evolución temporal de $\hat{\rho}_I^S(t)$ no depende sólo de $\hat{\rho}_I^S(t)$. La llamada *aproximación de Markov* nos permite reemplazar $\hat{\rho}_I^S(t')$ con $\hat{\rho}_I^S(t)$ en (1.69) para obtener la *ecuación de Redfield*,

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}_I^S(t) = - \int_0^t dt' \text{Tr}_{\mathcal{A}} [\hat{H}_I(t), [\hat{H}_I(t'), \hat{\rho}_I^S(t) \otimes \hat{\rho}_{\mathcal{A}}]]. \quad (1.70)$$

Esta ecuación es local en el tiempo pero todavía no es una ecuación markoviana porque depende de la preparación que se elija al tiempo $t = 0$. La aproximación de Markov, así como el procedimiento para obtener una ecuación markoviana, se explican a continuación. Para ello, definimos las funciones de correlación del ambiente

$$C_{\alpha\beta}(t, t') = \text{Tr}_{\mathcal{A}} \{ \hat{A}_{\alpha}(t) \hat{A}_{\beta}(t') \hat{\rho}_{\mathcal{A}} \} = \left\langle \hat{A}_{\alpha}(t) \hat{A}_{\beta}(t') \right\rangle_{\hat{\rho}_{\mathcal{A}}} \quad (1.71)$$

y suponemos que el ambiente está en un estado estacionario (en equilibrio térmico)

$$[\hat{H}_{\mathcal{A}}, \hat{\rho}_{\mathcal{A}}] = 0. \quad (1.72)$$

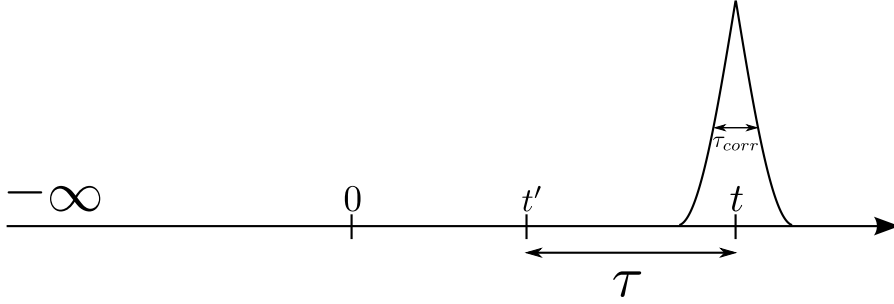


Figura 1.1.: Representación gráfica de la aproximación de Markov, mostrando el rápido decaimiento de las funciones de correlación del ambiente alrededor del tiempo t . Al hacer el cambio de variable de t' por τ ya no hay un tiempo privilegiado y la dinámica ya no depende de la preparación inicial del sistema.

Entonces las funciones de correlación no dependen de t , sino del intervalo de tiempo $\tau = t - t'$:

$$C_{\alpha\beta}(t, t') = \text{Tr}_{\mathcal{A}}\{\hat{A}_{\alpha}(\tau)\hat{A}_{\beta}(0)\hat{\rho}_{\mathcal{A}}\} = C_{\alpha\beta}(t - t') = C_{\alpha\beta}(\tau). \quad (1.73)$$

Cuando el acoplamiento del sistema con el ambiente es débil y el ambiente está a una temperatura suficientemente alta, es razonable suponer que las correlaciones internas que se establecen en el ambiente durante su interacción con el sistema decaen en una escala de tiempo τ_{corr} mucho más corta que la escala de tiempo característica τ_R en la cual $\hat{\rho}_I^S(t)$ cambia notablemente. Por lo tanto, las funciones de correlación $C_{\alpha\beta}(\tau)$ son picudas en la región $t \approx t'$, mientras que a bajas temperaturas, estas funciones no se comportan como una $\delta(\tau)$ de Dirac. Esto nos permite suponer que la interacción del sistema con el ambiente no modifica el estado $\hat{\rho}_I^S(t)$ del sistema apreciablemente durante el tiempo de correlación, lo cual justifica el reemplazo de $\hat{\rho}_I^S(t')$ por $\hat{\rho}_I^S(t)$ en (1.69). Por otro lado, se puede mostrar que el decaimiento de las correlaciones sólo es válido para un ambiente infinitamente grande, con un continuo de frecuencias. Esto es así porque para una separación entre las frecuencias infinitamente pequeña, los tiempos de recurrencia de Poincaré son infinitos y se tiene una dinámica irreversible.

Notamos que para $t \gg \tau_{\text{corr}}$, se puede extender el límite inferior de la integral en (1.70) hasta $-\infty$, ya que las funciones de correlación $C_{\alpha\beta}(t - t')$ se anulan para $t' \ll t$. En términos de τ tenemos la ecuación maestra cuántica markoviana (ver figura 1.1)

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_I^S(t) = - \int_0^{\infty} d\tau \text{Tr}_{\mathcal{A}}[\hat{H}_I(t), [\hat{H}_I(\tau), \hat{\rho}_I^S(t) \otimes \hat{\rho}_{\mathcal{A}}]]. \quad (1.74)$$

Es importante recalcar que la aproximación de Markov implica que la evolución temporal del operador de estado $\hat{\rho}^S$ ocurre en una escala de tiempo, cuya resolución no permite distinguir procesos que ocurren en un intervalo temporal del orden de τ_{corr} .

Las aproximaciones de Born–Markov que hemos utilizado hasta ahora, en general no garantizan que la ecuación (1.74) defina el generador de un semigrupo dinámico cuántico.

1. Sistemas cuánticos cerrados y abiertos

Para ello, hace falta realizar una aproximación adicional. Escribimos los operadores $\hat{S}_\alpha(t) = e^{i\hat{H}_S t} \hat{S}_\alpha e^{-i\hat{H}_S t}$ como [16]

$$\hat{S}_\alpha(t) = \sum_{\omega} \hat{S}_\alpha(\omega) e^{-i\omega t}, \quad (1.75)$$

donde $\{\omega\}$ es un conjunto de diferencias de autovalores $\{\epsilon_k - \epsilon_l\}$ de \hat{H}_S y

$$\hat{S}_\alpha(\omega) = \sum_{\epsilon_k - \epsilon_l = \omega} |k\rangle\langle k| \hat{S}_\alpha |l\rangle\langle l| \quad (1.76)$$

son operadores propios de \hat{H}_S , es decir,

$$[\hat{H}_S, \hat{S}_\alpha(\omega)] = -\omega \hat{S}_\alpha(\omega) \quad \text{y} \quad [\hat{H}_S, \hat{S}_\alpha^\dagger(\omega)] = +\omega \hat{S}_\alpha^\dagger(\omega). \quad (1.77)$$

En términos de $\hat{S}_\alpha(t)$ y $\hat{A}_\alpha(t) = e^{i\hat{H}_A t} \hat{A}_\alpha e^{-i\hat{H}_A t}$, el hamiltoniano de interacción $\hat{H}_I(t)$ tiene la forma

$$\hat{H}_I(t) = \sum_{\alpha, \omega} e^{-i\omega t} \hat{S}_\alpha(\omega) \otimes \hat{A}_\alpha(t) = \sum_{\alpha, \omega} e^{+i\omega t} \hat{S}_\alpha^\dagger(\omega) \otimes \hat{A}_\alpha(t). \quad (1.78)$$

Substituyendo esta expresión en (1.74) se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{\rho}_I^S(t) &= \int_0^\infty d\tau \text{Tr}_A \{ \hat{H}_I(\tau) \hat{\rho}_I^S(t) \otimes \hat{\rho}_A \hat{H}_I(t) - \hat{H}_I(t) \hat{H}_I(\tau) \hat{\rho}_I^S(t) \otimes \hat{\rho}_A \} + \text{c.h.} \\ &= \sum_{\omega, \omega'} \sum_{\alpha, \beta} e^{i(\omega - \omega')t} \Gamma_{\alpha\beta}(\omega) [\hat{S}_\beta(\omega) \hat{\rho}_I^S(t) \hat{S}_\alpha^\dagger(\omega') - \hat{S}_\alpha^\dagger(\omega') \hat{S}_\beta(\omega) \hat{\rho}_I^S(t)] + \text{c.h.} \end{aligned} \quad (1.79)$$

En esta expresión, “c.h.” significa el conjugado hermiteano de lo que precede y definimos

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\beta}(\omega) &= \int_0^\infty dt' e^{i\omega t'} \langle \hat{A}_\alpha^\dagger(t) \hat{A}_\beta(\tau) \hat{\rho}_A \rangle \\ &= \frac{1}{2} \gamma_{\alpha\beta}(\omega) + i S_{\alpha\beta}(\omega), \end{aligned} \quad (1.80)$$

donde para ω fija, $\gamma_{\alpha\beta}(\omega)$ son elementos de una matriz positiva y $S_{\alpha\beta}(\omega)$ son elementos de una matriz hermiteana.

Denotamos por τ_S la escala de tiempo de la evolución intrínseca del sistema abierto \mathcal{S} . Esta escala de tiempo está definida por un valor típico del inverso de la diferencia de las frecuencias involucradas $\tau_{\text{corr}} \ll \tau_S = |\omega' - \omega|^{-1}$, $\omega' \neq \omega$. Si $\tau_S \ll \tau_R$, podemos despreciar los términos tales que $\omega' \neq \omega$ en (1.79), ya que oscilan muy rápido durante el tiempo τ_R en el cual $\hat{\rho}_I^S(t)$ varía apreciablemente. Esta es la *aproximación de la onda rotante*, comúnmente utilizada en óptica cuántica [16].

Con las definiciones de arriba, finalmente llegamos a la ecuación maestra en el esquema de Schrödinger en la forma de Gorini–Kossakowski–Sudarshan:

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}_S(t) = -i[\tilde{\hat{H}}_S, \hat{\rho}_S(t)] + \sum_{\omega} \sum_{\alpha, \beta} \gamma_{\alpha\beta}(\omega) [\hat{S}_\beta(\omega) \hat{\rho}_S(t) \hat{S}_\alpha^\dagger(\omega) - \frac{1}{2} \{ \hat{S}_\alpha^\dagger(\omega) \hat{S}_\beta(\omega), \hat{\rho}_S(t) \}], \quad (1.81)$$

1.4. Evolución temporal de sistemas cuánticos abiertos

donde $\tilde{\hat{H}}_S = \hat{H}_S + \hat{H}_L$ con

$$\hat{H}_L = \sum_{\omega} \sum_{\alpha, \beta} S_{\alpha\beta}(\omega) \hat{S}_{\alpha}^{\dagger}(\omega) \hat{S}_{\beta}(\omega) \quad (1.82)$$

el llamado hamiltoniano del corrimiento Lamb (*Lamb shift* en inglés), porque produce una renormalización de los niveles de energía no perturbados inducida por la interacción del sistema abierto con el ambiente y $\{A, B\} = AB + BA$ es el anticonmutador. Dado que el modelo utilizado no describe adecuadamente el corrimiento Lamb, el término (1.82) típicamente es despreciado.

La ecuación (1.81) se puede escribir en la forma de Lindblad diagonalizando las matrices positivas $\gamma_{\alpha\beta}(\omega)$.

2. Ecuación maestra de Lindblad para átomos de muchos niveles

En este capítulo trataremos el sistema cuántico abierto que consiste de N átomos con $M + 1$ niveles, que interactúan con un baño térmico. El punto de partida será una ecuación maestra de Lindblad simétrica ante el intercambio de los átomos. El operador de estado del sistema es un elemento de un espacio vectorial, cuyas propiedades serán discutidas en la sección 2.1. Si el operador de estado inicial del sistema es simétrico, la evolución ocurre en el subespacio simétrico de este espacio vectorial. Por lo tanto, vamos a construir una base de este subespacio, con la que mostraremos que su dimensión es polinomial en el número de átomos. Por otro lado, mostraremos cómo construir un conjunto de superoperadores colectivos de N átomos con $M + 1$ niveles, en términos de los cuales se puede expresar la ecuación maestra. A partir de la estructura algebraica de este conjunto y con base en los conceptos de la sección 2.1, vamos a explicar cómo etiquetar los elementos de la base que construimos. Estos son los resultados más importantes de la tesis. Para mayor claridad, los procedimientos serán descritos con detalle para el caso de átomos de tres niveles y después se generalizarán para más niveles.

2.1. Conceptos matemáticos

En esta sección estudiaremos los conceptos matemáticos necesarios para obtener los resultados discutidos arriba. Por un lado, el espacio de Liouville y los superoperadores que actúan sobre él serán definidos siguiendo a Tarasov[13] y Mukamel[24] y, por otro lado, siguiendo a Fuchs[25] definiremos a las álgebras de Lie.

2.1.1. El espacio de Liouville y los superoperadores

DEFINICIÓN. Un *espacio de Hilbert de operadores* es un espacio lineal (o espacio vectorial) de operadores \mathcal{M} junto con un producto escalar $(\hat{A}|\hat{B})$ para cada par de elementos $\hat{A}, \hat{B} \in \mathcal{M}$, tal que \mathcal{M} es un espacio completo.

Sea \mathcal{M} un espacio de Hilbert de operadores. El *espacio dual* de \mathcal{M} es un espacio lineal \mathcal{M}^* de todos los funcionales lineales continuos sobre \mathcal{M} . Denotamos \hat{A} como elemento de \mathcal{M} por $|\hat{A}\rangle$. Este elemento es llamado *vector ket* del espacio \mathcal{M} . \hat{A} como elemento de \mathcal{M}^* lo denotamos por $\langle \hat{A}|$. Los elementos $\langle \hat{A}|$ se llaman *vector bra* de \mathcal{M} . Entonces $|\hat{A}\rangle \mapsto \langle \hat{A}|$ es un mapeo uno a uno de \mathcal{M} en \mathcal{M}^* . El producto escalar en \mathcal{M} satisface la condición $(\hat{A}|\hat{B})^* = (\hat{B}|\hat{A})$ con $\hat{A}, \hat{B} \in \mathcal{M}$, donde el asterisco denota conjugación compleja.

2. Ecuación maestra de Lindblad para átomos de muchos niveles

DEFINICIÓN. Un *superoperador* sobre \mathcal{M} es un mapeo \check{L} de \mathcal{M} en sí mismo.

El dominio y el rango de un superoperador se denotan como $D(\check{L})$ y $R(\check{L})$ respectivamente.

DEFINICIÓN. Un superoperador *lineal* es un superoperador que satisface las siguientes condiciones:

$$\check{L}[|\hat{A}\rangle + |\hat{B}\rangle] = \check{L}[|\hat{A}\rangle] + \check{L}[|\hat{B}\rangle], \text{ para todos } |\hat{A}\rangle, |\hat{B}\rangle \in D(\check{L}) \subset \mathcal{M}. \quad (2.1)$$

$$\check{L}[a|\hat{A}\rangle] = a\check{L}[|\hat{A}\rangle], \text{ para todo } |\hat{A}\rangle \in D(\check{L}) \subset \mathcal{M}, a \in \mathbb{C}. \quad (2.2)$$

DEFINICIÓN. Sea \check{L} un superoperador sobre \mathcal{M} . El superoperador *adjunto* de \check{L} es un superoperador \check{L}^\dagger sobre \mathcal{M}^* tal que

$$\check{L}^\dagger[|\hat{A}\rangle]|\hat{B}\rangle = (\hat{A}|\check{L}[|\hat{B}\rangle]), \quad (2.3)$$

para todo $|\hat{B}\rangle \in D(\check{L}) \subset \mathcal{M}$ y algún $(\hat{A}| \in D(\check{L}^\dagger) \subset \mathcal{M}^*$. Un superoperador adjunto también se llama superoperador *conjugado* o superoperador *dual*.

DEFINICIÓN. Un superoperador *simétrico* es un superoperador \check{L} sobre \mathcal{M} tal que

$$(\check{L}[|\hat{A}\rangle]|\hat{B}\rangle) = (\hat{A}|\check{L}[|\hat{B}\rangle]), \text{ para todos } |\hat{A}\rangle, |\hat{B}\rangle \in D(\check{L}) \subset \mathcal{M}. \quad (2.4)$$

DEFINICIÓN. Un superoperador *autoadjunto* es un superoperador \check{L} simétrico tal que $D(\check{L}) = D(\check{L}^\dagger)$.

DEFINICIÓN. Sea $(\hat{A}|$ el operador adjunto de $|\hat{A}\rangle \in \mathcal{M}$. Un superoperador *real* es un superoperador \check{L} sobre \mathcal{M} tal que

$$\{\check{L}[|\hat{A}\rangle]\}^\dagger = \check{L}^\dagger[(\hat{A}|)], \text{ para todo } |\hat{A}\rangle \in D(\check{L}) \subset \mathcal{M}, (\hat{A}| \in D(\check{L}^\dagger). \quad (2.5)$$

DEFINICIÓN. Un superoperador *no negativo* es tal que $\check{L}[|\hat{A}^2\rangle] \geq 0$ para todo $|\hat{A}^2\rangle = |\hat{A}^\dagger\hat{A}\rangle \in D(\check{L}) \subset \mathcal{M}$. Un superoperador *positivo* es un superoperador \check{L} no negativo tal que $\check{L}[|\hat{A}\rangle] = 0$ si y sólo si $|\hat{A}\rangle = 0$.

DEFINICIÓN. Un superoperador \check{L} sobre \mathcal{M} se llama *acotado* si $\|\check{L}[|\hat{A}\rangle]\|_{\mathcal{M}} \leq c\| |\hat{A}\rangle \|_{\mathcal{M}}$ para alguna constante c y para todo $|\hat{A}\rangle \in \mathcal{M}$.

DEFINICIÓN. Un superoperador lineal acotado \check{U} sobre \mathcal{M} se llama (acotado) *isométrico* si \check{U} deja invariante el producto escalar: $(\check{U}\hat{A}|\check{U}\hat{B}) = (\hat{A}|\hat{B})$ para todo $|\hat{A}\rangle, |\hat{B}\rangle \in \mathcal{M}$. Si en particular $R(\check{U}) = \mathcal{M}$, entonces \check{U} es un *superoperador unitario*.

Denotamos por $\check{P}(\hat{A}, \hat{B}) = |\hat{A}\rangle(\hat{B}|$ al mapeo que asigna a un elemento $|\hat{C}\rangle$ de \mathcal{M} el elemento $|\hat{A}\rangle(\hat{B}|\hat{C}\rangle$:

$$\check{P}(\hat{A}, \hat{B})|\hat{C}\rangle = |\hat{A}\rangle(\hat{B}|\hat{C}\rangle). \quad (2.6)$$

El mapeo $\check{P}(\hat{A}, \hat{B}) = |\hat{A}\rangle(\hat{B}|$ se llama *superoperador ket-bra*. El adjunto de $\check{P}(\hat{A}, \hat{B})$ se define como

$$\check{P}^\dagger(\hat{A}, \hat{B}) = |\hat{B}\rangle(\hat{A}| = \check{P}(\hat{B}, \hat{A}). \quad (2.7)$$

DEFINICIÓN. Un *espacio de Liouville* es un espacio de Hilbert de operadores con el producto escalar

$$(\hat{A}|\hat{B}) = \text{Tr}[\hat{A}^\dagger \hat{B}], \quad (2.8)$$

completo con la norma de Hilbert-Schmidt $\|\hat{A}\|_2 = \sqrt{(\hat{A}|\hat{A})}$.

DEFINICIÓN. Un *espacio de Hilbert asociado* es un espacio de Liouville $\bar{\mathcal{H}}$, tal que todos los elementos de $\bar{\mathcal{H}}$ son operadores sobre un espacio de Hilbert \mathcal{H} .

Si el espacio de Hilbert \mathcal{H} es de dimensión n , su correspondiente espacio de Hilbert asociado es de dimensión n^2 . Supongamos que $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$ y $(|e_k\rangle)_{k=1}^n$ es una base de \mathcal{H} . Entonces los elementos

$$|kl\rangle = |\hat{P}(e_k, e_l)\rangle = |e_k\rangle\langle e_l| \quad (2.9)$$

forman una base del espacio de Hilbert asociado $\bar{\mathcal{H}}$. Por lo tanto, cada elemento $|\hat{A}\rangle \in \bar{\mathcal{H}}$ se puede representar en la forma

$$|\hat{A}\rangle = \sum_{k,l=1}^n |kl\rangle(kl|\hat{A}), \quad (2.10)$$

donde $(kl|\hat{A}) = \langle e_k|\hat{A}|e_l\rangle = A_{kl}$ es la representación matricial del operador \hat{A} en \mathcal{H} . De la ecuación (2.10) se desprende que la resolución del superoperador identidad en $\bar{\mathcal{H}}$ está dada por

$$\sum_{j,k=1}^n |jk\rangle(jk| = |\hat{I}\rangle. \quad (2.11)$$

En términos de una base inducida por los elementos (2.9) un superoperador actuando sobre $\bar{\mathcal{H}}$ se escribe

$$\check{L} = \sum_{j,k,r,s=1}^n |jk\rangle(rs|\check{L}|rs), \quad (2.12)$$

donde los “elementos de matriz” del superoperador están dados por

$$L_{jk,rs} = (jk|\check{L}|rs). \quad (2.13)$$

En lugar de especificar las entradas del superoperador con cuatro índices, podemos definir dos índices griegos $\alpha = 1, 2, \dots, n^2$ y $\beta = 1, 2, \dots, n^2$. De esta manera la representación matricial de un superoperador corresponde con una matriz de orden $n^2 \times n^2$.

Una clase importante de superoperadores está formada por los superoperadores de la forma

$$\check{S}|\hat{A}\rangle = (\hat{M} \cdot \hat{N})|\hat{A}\rangle = |\hat{M}\hat{A}\hat{N}\rangle, \quad \forall \hat{A} \in \mathcal{M}. \quad (2.14)$$

2. Ecuación maestra de Lindblad para átomos de muchos niveles

Estos superoperadores son llamados *superoperadores factorizables* [26]. El elemento de matriz del operador $\hat{M}\hat{A}\hat{N}$ en el espacio de Hilbert \mathcal{H} está dado por

$$\begin{aligned} \langle i|\hat{M}\hat{A}\hat{N}|j\rangle &= \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \langle i|\hat{M}|r\rangle \langle r|\hat{A}|s\rangle \langle s|\hat{N}|j\rangle \\ &= \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \langle i|\hat{M}|r\rangle \langle s|\hat{N}|j\rangle \langle r|\hat{A}|s\rangle \\ &= \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \langle i|\hat{M}|r\rangle \langle j|\hat{N}^\dagger|s\rangle \langle r|\hat{A}|s\rangle. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Por otro lado, el elemento de matriz del vector ket $|\hat{M}\hat{A}\hat{N}\rangle \in \bar{\mathcal{H}}$ está dado por

$$(ij|\hat{M}\hat{A}\hat{N}) = (ij|\check{S}\hat{A}) = \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n (ij|\check{S}|rs)(rs|\hat{A}). \quad (2.16)$$

Comparando (2.15) y (2.16) obtenemos

$$(ij|\check{S}|rs) = \langle i|\hat{M}|r\rangle \langle j|\hat{N}^\dagger|s\rangle, \quad (2.17)$$

de donde

$$S = M \otimes N^\dagger. \quad (2.18)$$

Al pasar de (2.17) a (2.18) usamos la definición del producto tensorial de matrices:

DEFINICIÓN. El *producto de Kronecker*, *producto directo* o *producto tensorial* de $A = [a_{ij}] \in M_{m,n}(\mathbb{F})$ y $B = [b_{ij}] \in M_{p,q}(\mathbb{F})$ se denota por $A \otimes B$ y se define como la matriz

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix} \in M_{mp,nq}(\mathbb{F}). \quad (2.19)$$

$M_{i,j}(\mathbb{F})$ denota al conjunto de las matrices de orden $i \times j$ sobre el campo \mathbb{F} .

2.1.2. Álgebras de Lie

DEFINICIÓN. Un *álgebra* \mathcal{U} es un espacio vectorial con una operación binaria adicional $\diamond : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ bilineal:

$$\begin{aligned} (x + y) \diamond z &= x \diamond z + y \diamond z, \\ x \diamond (y + z) &= x \diamond y + x \diamond z, \\ (\xi x) \diamond (\eta y) &= (\xi\eta)x \diamond y, \end{aligned} \quad (2.20)$$

para todo $x, y, z \in \mathcal{U}$ y todos los elementos ξ, η del campo \mathbb{F} asociado al espacio vectorial.

DEFINICIÓN. Un *álgebra de Lie* \mathfrak{g} es un álgebra cuya operación binaria es el paréntesis de Lie, denotado por $[\cdot, \cdot]$, que satisface las siguientes propiedades:

$$[x, x] = 0 \quad \forall x \in \mathfrak{g}, \quad (2.21)$$

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0 \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{g}. \quad (2.22)$$

La propiedad (2.22) se llama *la identidad de Jacobi*. A partir de la bilinealidad y la propiedad (2.21) se tiene la *propiedad de antisimetría*,

$$0 = [x + y, x + y] = [x, x] + [x, y] + [y, x] + [y, y] = [x, y] + [y, x]. \quad (2.23)$$

Dada un álgebra \mathcal{U} con un producto asociativo \diamond , se puede obtener un álgebra de Lie asociada \mathfrak{g} definiendo el paréntesis de Lie como el conmutador con respecto al producto \diamond :

$$[x, y] := x \diamond y - y \diamond x. \quad (2.24)$$

La dimensión $d = \dim \mathfrak{g}$ de un álgebra de Lie es la dimensión de \mathfrak{g} considerada como espacio vectorial. En este trabajo nos limitaremos a álgebras de Lie de dimensión finita n . Denotamos al conjunto de elementos base de \mathfrak{g} por $(e_i)_{i=1}^n$. Estos elementos son llamados *generadores* de \mathfrak{g} .

Debido a la bilinealidad, el paréntesis de Lie está determinado unívocamente si se conoce en una base. Por lo tanto, se puede definir el paréntesis de Lie y en consecuencia el álgebra de Lie \mathfrak{g} mediante el desarrollo del paréntesis de e_i y e_k con respecto a la base,

$$[e_i, e_k] = \sum_{l=1}^n C_{ikl} e_l. \quad (2.25)$$

Los n^3 coeficientes C_{ikl} son las *constantes de estructura* del álgebra de Lie \mathfrak{g} relativas a la base escogida. En términos de las constantes de estructura las propiedades de un álgebra de Lie (2.21), (2.22) y (2.23) están dadas por

$$C_{iik} = 0, \quad (2.26)$$

$$\sum_l (C_{jkl} C_{ilm} + C_{kil} C_{jlm} + C_{ijl} C_{klm}) = 0, \quad m = 1, 2, \dots, n, \quad (2.27)$$

$$C_{ikl} = -C_{kil}, \quad l = 1, 2, \dots, n. \quad (2.28)$$

DEFINICIÓN. Un *homomorfismo* del álgebra de Lie \mathfrak{g} al álgebra de Lie \mathfrak{h} es un mapeo $\phi : \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{h}$ que preserva las estructuras algebraicas, es decir, es lineal y lleva el paréntesis de Lie a un paréntesis de Lie

$$[x, y] \mapsto \phi([x, y]) = [\phi(x), \phi(y)], \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}. \quad (2.29)$$

El espacio de todos los mapeos lineales de V en sí mismo, con V un espacio vectorial, es a su vez un espacio vectorial sobre \mathbb{F} , que denotamos $\mathfrak{gl}(V)$. En la práctica \mathbb{F} es \mathbb{R} o \mathbb{C} .

2. Ecuación maestra de Lindblad para átomos de muchos niveles

Dado que la composición \circ de mapeos lineales es nuevamente un mapeo lineal, la operación \circ es un producto asociativo y por lo tanto $\mathfrak{gl}(V)$ es un álgebra asociativa \circ , considerando conmutadores con respecto a este producto y recordando (2.24), es un álgebra de Lie sobre \mathbb{F} . Esta construcción se puede hacer con cualquier espacio vectorial V y el álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(V)$ se llama el *álgebra lineal general* de V . Si V tiene dimensión finita n , fijando una base para V cualquier elemento de $\mathfrak{gl}(V)$ se puede describir con una matriz de orden $n \times n$ con entradas en \mathbb{F} y la operación \circ es implementada con la multiplicación usual de matrices. El conjunto de dichas matrices se denota por $\mathfrak{gl}(n)$ y es un álgebra de Lie de dimensión n^2 .

Sean V y \mathfrak{g} un espacio vectorial y un álgebra de Lie definidos sobre el mismo campo \mathbb{F} . A cada elemento x de \mathfrak{g} le asociamos el homomorfismo entre álgebras de Lie

$$R(x) : \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{gl}(V), \quad (2.30)$$

tal que para cualesquiera dos elementos x, y de \mathfrak{g} el conmutador de $R(x)$ y $R(y)$ existe y reproduce el paréntesis de Lie de x y y en \mathfrak{g} :

$$R(x) \circ R(y) - R(y) \circ R(x) = R([x, y]). \quad (2.31)$$

En (2.31) \circ es la multiplicación de matrices.

DEFINICIÓN. Dado un espacio vectorial V y un homomorfismo R entre las álgebras de Lie \mathfrak{g} y $\mathfrak{gl}(V)$, que satisface la relación (2.31), decimos que V es un *espacio de representación* de \mathfrak{g} y R es una *representación* de \mathfrak{g} .

Si el homomorfismo (2.30) es inyectivo, entonces R es una *representación fiel* de \mathfrak{g} .

DEFINICIÓN. Un subespacio $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ de un álgebra de Lie \mathfrak{g} , que a su vez es un álgebra de Lie con respecto al paréntesis de Lie de \mathfrak{g} , es una *subálgebra* de Lie de \mathfrak{g} .

Toda álgebra de Lie \mathfrak{g} tiene dos subálgebras *triviales*, ella misma y el subespacio $\{0\}$. Cualquier otra subálgebra de \mathfrak{g} es una subálgebra *propia* de \mathfrak{g} .

DEFINICIÓN. Una subálgebra \mathfrak{h} del álgebra de Lie \mathfrak{g} se llama *invariante* si $[x, y] \in \mathfrak{h}$ para todo $x \in \mathfrak{h}$ y todo $y \in \mathfrak{g}$.

Una subálgebra de Lie invariante también se llama *ideal*.

DEFINICIÓN. Un álgebra de Lie \mathfrak{g} es *abeliana* si $[x, y] = 0$ para todo $x, y \in \mathfrak{g}$.

DEFINICIÓN. Los *elementos semisimples* $x \in \mathfrak{g}$ tienen la propiedad de que existe una base $\mathcal{B} = (e_i)$ de \mathfrak{g} tal que $[x, e_i] = ke_i$ para todo elemento de \mathcal{B} .

DEFINICIÓN. Una *subálgebra de Cartan* de \mathfrak{g} es una subálgebra abeliana maximal (no está contenida en otra subálgebra) que consiste únicamente de elementos semisimples.

Todas las subálgebras de Cartan de \mathfrak{g} tienen la misma dimensión r . Esta dimensión común es una propiedad del álgebra de Lie \mathfrak{g} .

DEFINICIÓN. El *rango* de un álgebra de Lie \mathfrak{g} es la dimensión de la subálgebra de Cartan.

DEFINICIÓN. Un álgebra de Lie es *simple* si no es abeliana y no contiene ideales propias.

DEFINICIÓN. Un álgebra de Lie \mathfrak{g} es *semisimple* si cada elemento de \mathfrak{g} se puede escribir como el conmutador de dos elementos de \mathfrak{g} . Esto se denota por brevedad como $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$.

Un álgebra de Lie semisimple no tiene ideales abelianas.

2.2. Ecuación maestra de la óptica cuántica

El álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(V)$ contiene una ideal abeliana, que consiste de todos los múltiplos escalares de la matriz identidad. Imponiendo la condición de que las matrices tengan traza cero obtenemos una subálgebra de Lie compleja, que es simple. Si V tiene dimensión n , esta álgebra se denota por $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ o, por brevedad, $\mathfrak{sl}(n)$.

DEFINICIÓN. Las matrices $\mathcal{E}_{i,j}$ de orden $n \times n$, cuya entrada en el i -ésimo renglón y la j -ésima columna es uno mientras que todas las demás entradas son cero, se llaman *matrices elementales*.

Las matrices elementales satisfacen las relaciones de conmutación

$$[\mathcal{E}_{i,j}, \mathcal{E}_{r,s}] = \mathcal{E}_{i,s}\delta_{jr} - \mathcal{E}_{r,j}\delta_{si}. \quad (2.32)$$

Una base del álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(n)$ está dada por la unión

$$B_+ \cup B_0 \cup B_- \quad (2.33)$$

de las tres sucesiones ordenadas

$$\begin{aligned} B_0 &= (\mathcal{E}_{i,i} - \mathcal{E}_{i+1,i+1})_{i=1}^{n-1}, \\ B_+ &= (\mathcal{E}_{i,j} \mid 1 \leq i < j \leq n), \\ B_- &= (\mathcal{E}_{i,j} \mid 1 \leq j < i \leq n). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Los elementos en B_0 conmutan todos entre sí y forman una subálgebra abeliana. La base (2.33) es llamada la descomposición triangular del álgebra $\mathfrak{sl}(n)$. En total son $(n-1) + 2\frac{n(n-1)}{2} = n^2 - 1$ generadores, por lo tanto, la dimensión de $\mathfrak{sl}(n)$ es $n^2 - 1$.

La estructura de las álgebras de Lie simples se estudia a partir de la estructura del álgebra $\mathfrak{sl}(2)$. De acuerdo con (2.34) los generadores de esta álgebra son

$$H_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad E_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.35)$$

y satisfacen las relaciones de conmutación

$$[H_0, E_{\pm}] = \pm 2E_{\pm}, \quad [E_+, E_-] = H_0. \quad (2.36)$$

En mecánica cuántica el álgebra $\mathfrak{sl}(2)$ está relacionada con el espín $1/2$ y se utiliza el generador $H_3 = \frac{1}{2}H_0$. En términos de H_3 se tienen las relaciones de conmutación

$$[H_3, E_{\pm}] = \pm E_{\pm}, \quad [E_+, E_-] = 2H_3. \quad (2.37)$$

2.2. Ecuación maestra de la óptica cuántica

La interacción de materia con radiación electromagnética en el régimen de la óptica cuántica típicamente satisface las condiciones físicas de la aproximación de Markov. Por lo tanto, en óptica cuántica es conveniente describir la evolución del sistema abierto usando la ecuación

2. Ecuación maestra de Lindblad para átomos de muchos niveles

maestra markoviana. Un sistema de gran interés consiste en N átomos con M transiciones dipolares acopladas con campos de radiación externos, que interactúan con un baño de radiación. Antes de presentar la ecuación maestra correspondiente a este caso general, necesitamos la ecuación maestra para un átomo con M transiciones dipolares, que interactúa con un baño de radiación electromagnética. La ecuación maestra se deduce siguiendo un procedimiento similar al que describimos con detalle en el capítulo anterior y no lo vamos a escribir. La deducción con todo detalle está en el libro de Ficek y Swain [27]. Aquí, nos limitaremos a especificar el hamiltoniano del sistema total, el estado de referencia del baño y la ecuación maestra resultante.

El hamiltoniano del sistema total está compuesto por tres términos

$$\hat{H} = \hat{H}_A + \hat{H}_C + \hat{H}_{AC}, \quad (2.38)$$

donde

$$\hat{H}_A = \sum_{i=0}^M E_i |i\rangle\langle i| \quad (2.39)$$

es el hamiltoniano del átomo con autoestados de energía $|0\rangle, |1\rangle, \dots, |M\rangle$ y sus correspondientes energías $E_0 = \hbar\omega_0, E_1 = \hbar\omega_1, \dots, E_M = \hbar\omega_M$, con $E_0 \leq E_1 \leq \dots \leq E_M$, es decir, los niveles de energía pueden ser degenerados o no degenerados.

El segundo término en (2.38) es el hamiltoniano del campo de radiación cuantizado,

$$\hat{H}_C = \sum_{\vec{k}, \lambda} \hbar\omega_k \left(\hat{a}_{\vec{k}\lambda}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}\lambda} + \frac{1}{2} \right), \quad (2.40)$$

donde $\hat{a}_{\vec{k}\lambda}$ y $\hat{a}_{\vec{k}\lambda}^\dagger$ son los operadores de aniquilación y creación de fotones en el modo \vec{k}, λ , con vector de onda \vec{k} , frecuencia ω_k y polarización $\hat{e}_{\vec{k}\lambda}$ ($\lambda \in \{1, 2\}$). Las polarizaciones deben ser ortogonales, $\hat{e}_{\vec{k}\lambda} \cdot \hat{e}_{\vec{k}\lambda'} = \delta_{\lambda\lambda'}$, y transversales, $\vec{k} \cdot \hat{e}_{\vec{k}\lambda} = 0$. El término $\frac{1}{2} \sum_{\vec{k}, \lambda} \hbar\omega_k$ corresponde a la energía de las fluctuaciones del vacío y típicamente se omite, apelando al principio de correspondencia [28].

El último término en (2.38) es el hamiltoniano de interacción entre el átomo y el campo. La interacción depende del momento dipolar eléctrico total del átomo, que en términos de los niveles de energía se escribe

$$\vec{\mu} = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n>m}^M (\vec{\mu}_{nm} \hat{A}_{nm} + \vec{\mu}_{mn} \hat{A}_{mn}), \quad (2.41)$$

donde $\vec{\mu}_{nm} = \vec{\mu}_{mn}^* = \langle n | \vec{\mu} | m \rangle$ es el elemento de matriz dipolar y $\hat{A}_{nm} = |n\rangle\langle m|$ es el operador de transición dipolar atómica entre los niveles de energía $|n\rangle$ y $|m\rangle$. Suponiendo que el campo de radiación se acopla a todos los momentos dipolares atómicos, en la aproximación

2.2. Ecuación maestra de la óptica cuántica

dipolar el hamiltoniano de interacción es de la forma

$$\hat{H}_{AC} = -\vec{\mu} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = -i\hbar \sum_{\vec{k}\lambda} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n>m}^M [\vec{\mu}_{nm} \cdot \vec{u}_{\vec{k}\lambda}(\vec{r}) \hat{A}_{nm} \hat{a}_{\vec{k}\lambda} + \vec{\mu}_{mn} \cdot \vec{u}_{\vec{k}\lambda}(\vec{r}) \hat{A}_{mn} \hat{a}_{\vec{k}\lambda} - \text{c.h.}], \quad (2.42)$$

donde

$$\vec{u}_{\vec{k}\lambda}(\vec{r}) = \left(\frac{\omega_k}{2\epsilon_0 \hbar \mathcal{V}} \right)^{\frac{1}{2}} \hat{e}_{\vec{k}\lambda} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (2.43)$$

son las funciones que describen a cada modo y usamos una descomposición del campo de radiación en modos de Fourier en una caja de volumen \mathcal{V} con condiciones a la frontera periódicas. Las funciones $\vec{u}_{\vec{k}\lambda}(\vec{r})$ están evaluadas en la posición \vec{r} del átomo, al cual consideramos estacionario.

Suponemos que los modos del baño de radiación están en un estado de equilibrio a temperatura T . Entonces,

$$\hat{\rho}_B = \frac{1}{Z_B} \exp[-\beta \hat{H}_B] = \prod_{\vec{k}, \lambda} (1 - \exp[-\beta \hbar \omega_k]) \exp[-\beta \hbar \omega_k \hat{a}_{\vec{k}, \lambda}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}, \lambda}], \quad \beta = (k_B T)^{-1}. \quad (2.44)$$

Para que la aproximación de Markov sea válida, el ancho del espectro de frecuencias del baño tiene que ser mucho mayor que el ancho de línea atómico. Típicamente, el tiempo de vida atómico es del orden de 10^{-8} s y el periodo de oscilación de una onda en la región visible del espectro es del orden de 10^{-15} s. Por lo tanto, en el régimen de la óptica cuántica se satisfacen las condiciones físicas de la evolución markoviana.

Haciendo las aproximaciones de Born, Markov y de la onda rotante, se obtiene la ecuación maestra para un átomo con M transiciones dipolares en una configuración arbitraria de sus niveles de energía

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}_A, \hat{\rho}] + (1 + N_0) \sum_{i=1}^M \gamma_i (\hat{\sigma}_i^- \hat{\rho} \hat{\sigma}_i^+ - \frac{1}{2} \{\hat{\sigma}_i^+ \hat{\sigma}_i^-, \hat{\rho}\}) + N_0 \sum_{i=1}^M \gamma_i (\hat{\sigma}_i^+ \hat{\rho} \hat{\sigma}_i^- - \frac{1}{2} \{\hat{\sigma}_i^- \hat{\sigma}_i^+, \hat{\rho}\}), \quad (2.45)$$

donde

$$N_0 := N(\omega_0) = (\exp[\beta \hbar \omega_0] - 1)^{-1} \quad (2.46)$$

es la distribución de Planck, es decir, el número promedio de fotones en un modo con la frecuencia promedio de las transiciones atómicas

$$\omega_0 = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \omega_i, \quad \omega_i = (E_n - E_m)/\hbar, \quad n > m \in \{0, 1, \dots, M\}. \quad (2.47)$$

En (2.45) y (2.47), el índice i corre sobre las transiciones atómicas dipolares permitidas. Los operadores de transición dipolar se denotan como

$$\hat{\sigma}_i^+ := |n\rangle\langle m|, \quad \hat{\sigma}_i^- := |m\rangle\langle n|, \quad n > m. \quad (2.48)$$

2. Ecuación maestra de Lindblad para átomos de muchos niveles

Además, estamos considerando que los momentos dipolares de estas transiciones son ortogonales, de manera que las transiciones son independientes. En el caso general, $\vec{\mu}_i \cdot \vec{\mu}_j \neq 0$, la ecuación maestra tiene términos no diagonales que acoplan las transiciones. También despreciamos la corrección a los niveles de energía debido al corrimiento Lamb, como explicamos al final del capítulo anterior. Las tasas de emisión espontánea γ_i para cada transición dipolar están dadas por [5]

$$\gamma_i = \frac{\omega_0^3 |\vec{\mu}_i|^2}{3\pi\epsilon_0 \hbar c^3}. \quad (2.49)$$

Ahora consideramos una colección de N átomos idénticos con M transiciones dipolares. Suponemos que los niveles atómicos están divididos en un grupo de estados base cuasidegenerados y un grupo de estados excitados cuasidegenerados. Esto significa que la diferencia de energía entre dos estados que pertenecen al mismo grupo es mucho menor que las energías asociadas a todas las transiciones dipolares permitidas. Por lo tanto, todas las posibles diferencias ($\omega_i - \omega_j$) son mucho menores que la frecuencia de transición promedio ω_0 , lo cual nos permite aproximar las frecuencias ω_i con la frecuencia promedio.

En este caso, el hamiltoniano atómico y el hamiltoniano de interacción son de la forma

$$\hat{H}_A = \sum_{j=1}^N \hat{H}_A^j, \quad (2.50)$$

$$\hat{H}_{AC} = \sum_{j=1}^N \hat{H}_{AC}^j, \quad (2.51)$$

donde \hat{H}_A^j y \hat{H}_{AC}^j fueron definidos en (2.39) y (2.42) respectivamente. Todos los átomos interactúan con el mismo baño de radiación y ahora las funciones que describen los modos son diferentes para cada átomo,

$$\vec{u}_{\vec{k}\lambda}(\vec{r}_j) = \left(\frac{\omega_{\vec{k}}}{2\epsilon_0 \hbar \mathcal{V}} \right)^{\frac{1}{2}} \hat{e}_{\vec{k}\lambda} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}_j}. \quad (2.52)$$

Como antes, consideramos que los modos del baño de radiación están en un estado de equilibrio a temperatura T .

Haciendo las aproximaciones de Born, Markov y de la onda rotante, se obtiene la ecuación maestra para N átomos con M transiciones dipolares [5]

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{\rho} = & -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}_A, \hat{\rho}] + (1 + N_0) \sum_{\mu=1}^N \sum_{i=1}^M \gamma_i (\hat{\sigma}_{i-}^{\mu} \hat{\rho} \hat{\sigma}_{i+}^{\mu} - \frac{1}{2} \{ \hat{\sigma}_{i+}^{\mu}, \hat{\sigma}_{i-}^{\mu}, \hat{\rho} \}) \\ & + N_0 \sum_{\mu=1}^N \sum_{i=1}^M \gamma_i (\hat{\sigma}_{i+}^{\mu} \hat{\rho} \hat{\sigma}_{i-}^{\mu} - \frac{1}{2} \{ \hat{\sigma}_{i-}^{\mu}, \hat{\sigma}_{i+}^{\mu}, \hat{\rho} \}), \end{aligned} \quad (2.53)$$

2.3. Estados simétricos y superoperadores colectivos

donde consideramos que los momentos dipolares de las transiciones atómicas son ortogonales y suponemos que los átomos están separados por distancias mayores que la longitud de onda asociada a la frecuencia promedio $\lambda_0 = 2\pi c/\omega_0$. Esto significa que los átomos están acoplados a N baños estadísticamente independientes.

Hasta ahora sólo hemos considerado la interacción de N átomos con un baño de radiación térmico en el espacio libre. Como mencionamos al principio de la sección, en el caso general, los átomos están en presencia de campos de radiación externos (por ejemplo, láseres) y para tomar en cuenta esa interacción se debe agregar un término a la ecuación maestra, (2.53)

$$-\frac{i}{\hbar}[\hat{H}_L(t), \hat{\rho}], \quad (2.54)$$

donde el hamiltoniano dependiente del tiempo $\hat{H}_L(t)$ describe la interacción entre los láseres y los átomos y en la aproximación de la onda rotante está dado por

$$\hat{H}_L(t) = -\hbar \sum_{\mu=1}^N \sum_{j=1}^M [\Omega_j(\vec{r}_\mu) e^{-i\nu_j t} \hat{\sigma}_{j+}^\mu + \text{c.h.}], \quad (2.55)$$

donde las frecuencias de Rabi $\Omega_j(\vec{r}_\mu)$ se definen como

$$\Omega_j(\vec{r}_\mu) = (\vec{\mu}_j \cdot \vec{\epsilon}_j) \mathcal{E}_j \exp[i\vec{k}_j \cdot \vec{r}_\mu] / \hbar. \quad (2.56)$$

En (2.56) $\vec{k}_j = \nu_j \hat{e}_z / c$ son los vectores de onda de los láseres que se propagan en la dirección del eje z , $\vec{\epsilon}_j$ son los vectores unitarios de polarización, \mathcal{E}_j es la amplitud de cada láser, \vec{r}_μ es la posición de cada átomo y $\vec{\mu}_j$ es el momento dipolar eléctrico al cual está acoplado el láser. Si las frecuencias de Rabi son mucho menores que la frecuencia promedio ω_0 , entonces la presencia de los láseres no afectará a los demás términos en (2.53).

2.3. Estados simétricos y superoperadores colectivos

La ecuación maestra (2.53) se puede convertir en un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas de primer orden para los elementos de matriz $\rho_{nm} = \langle n | \hat{\rho} | m \rangle$ del operador de estado, con $|n\rangle$ y $|m\rangle$ elementos de la base natural del espacio de Hilbert $\mathcal{H}_{M+1}^{\otimes N}$ de N átomos con $M+1$ niveles de energía: $(|k_1\rangle |k_2\rangle \cdots |k_N\rangle)$, con $|k_i\rangle \in \{|0\rangle, |1\rangle, \dots, |M\rangle\}$ una base del espacio de Hilbert de un átomo con $M+1$ niveles de energía. Como resultado, para calcular $\hat{\rho}(t)$ habría que resolver un sistema de $(M+1)^{2N}$ ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas. Debido al crecimiento exponencial del número de ecuaciones con el número de átomos, es imposible simular la ecuación maestra (2.53) con decenas o centenas de átomos. Sin embargo, como explicaremos con detalle en esta sección, la simetría ante el intercambio de los átomos manifiesta en esta ecuación permite reducir el número de ecuaciones diferenciales que se necesitan resolver a una cantidad polinomial en el número de átomos.

2. Ecuación maestra de Lindblad para átomos de muchos niveles

Si los átomos están confinados en un volumen pequeño comparado con λ_0^3 , la ecuación maestra que describe al sistema se puede escribir como (despreciando términos de interacción entre los dipolos)

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{H}_A, \hat{\rho}] + (1 + N_0) \sum_{i=1}^M \gamma_i (\hat{J}_-^i \hat{\rho} \hat{J}_+^i - \frac{1}{2} \{ \hat{J}_+^i \hat{J}_-^i, \hat{\rho} \}) + N_0 \sum_{i=1}^M \gamma_i (\hat{J}_+^i \hat{\rho} \hat{J}_-^i - \frac{1}{2} \{ \hat{J}_-^i \hat{J}_+^i, \hat{\rho} \}), \quad (2.57)$$

donde definimos los operadores colectivos

$$\hat{J}_+^i = \sum_{\mu=1}^N \hat{\sigma}_{i+}^{\mu} \quad \text{y} \quad \hat{J}_-^i = \sum_{\mu=1}^N \hat{\sigma}_{i-}^{\mu}. \quad (2.58)$$

Notamos que estos operadores son invariantes ante el intercambio de los átomos. En este caso es conveniente utilizar la representación de Schwinger del momento angular [29] para construir una base del subespacio simétrico $\mathcal{S}(\mathcal{H}_{M+1}^{\otimes N})$ de $\mathcal{H}_{M+1}^{\otimes N}$, que contiene los vectores de estado simétricos ante el intercambio de subsistemas. Esta base tiene

$$\binom{N+M}{N} = \frac{(N+M)!}{N!M!} = \frac{1}{M!} \prod_{k=0}^{M-1} (N+M-k) \quad (2.59)$$

elementos de la forma $|k_0, k_1, \dots, k_M\rangle$, donde k_i es el número de átomos que están en el estado $|i\rangle$ y $\sum_i k_i = N$. A partir de (2.59), la dimensión de $\mathcal{S}(\mathcal{H}_{M+1}^{\otimes N})$ es un polinomio de orden $\mathcal{O}(N^M)$ en el número de átomos. Para átomos de dos niveles es conocida la base de $\mathcal{S}(\mathcal{H}_2^{\otimes N})$, que consiste de $N+1$ autoestados de los operadores colectivos

$$\hat{J}_z = \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^N \hat{\sigma}_z^{\mu}, \quad \hat{\sigma}_z^{\mu} = [\hat{\sigma}_+^{\mu}, \hat{\sigma}_-^{\mu}] \quad (2.60)$$

y

$$\hat{J}^2 = \hat{J}_- \hat{J}_+ + \hat{J}_z^2 + \hat{J}_z, \quad (2.61)$$

llamados estados de Dicke [30]:

$$\hat{J}_z |J, M\rangle = M |J, M\rangle, \quad \hat{J}^2 |J, M\rangle = J(J+1) |J, M\rangle, \quad J = \frac{N}{2}, M = -J, \dots, J. \quad (2.62)$$

Estos estados son invariantes ante el intercambio de los átomos. Sin embargo, no sirven para calcular la evolución de $\hat{\rho}(t)$ dada por la ecuación (2.53) (con $M=1$), ya que la dinámica del sistema involucra estados fuera del subespacio simétrico $\mathcal{S}(\mathcal{H}_2^{\otimes N})$. Para ver esto, consideramos dos átomos de dos niveles. En este caso, los estados de Dicke son:

$$|1, -1\rangle = |00\rangle, \quad |1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |01\rangle), \quad |1, 1\rangle = |11\rangle. \quad (2.63)$$

Supongamos que el operador de estado del sistema es $\hat{\rho} = |1, 1\rangle\langle 1, 1|$ y calculamos el término de la ecuación maestra

$$\sum_{\mu=1}^2 \hat{\sigma}_-^{\mu} \hat{\rho} \hat{\sigma}_+^{\mu} = |0\rangle\langle 1|_1 |11\rangle\langle 11| |1\rangle\langle 0|_1 + |0\rangle\langle 1|_2 |11\rangle\langle 11| |1\rangle\langle 0|_2 = |01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10|, \quad (2.64)$$

donde usamos (2.48). Notamos que (2.64) no se puede expresar en términos de los estados de Dicke (2.63). Tomando en cuenta esta situación, en 2008 Chase y Geremia [31] definieron los operadores de estado colectivos, los cuales se especifican con $(N+1)(N+2)(N+3)/2$ coeficientes y bajo la acción de procesos colectivos, como los que describe (2.53) (con $M=1$), son mapeados en estados colectivos. Sin embargo, como los autores advierten, su construcción no se puede generalizar para átomos de más niveles.

A partir de consideraciones sobre la simetría ante el intercambio de los átomos, el sistema de ecuaciones diferenciales para ρ_{nm} con $n, m = 0, 1, \dots, M$ se puede simplificar significativamente. Cuando el sistema consiste de N átomos de dos niveles, Sarkar y Satchell [6] mostraron en 1987 que para un operador de estado simétrico, solamente $(N+1)(N+2)(N+3)/6$ coeficientes son independientes. Esto les permitió resolver una ecuación maestra muy parecida a (2.53) (con $M=1$) para 45 átomos. No incluyeron más átomos en la simulación por falta de memoria en el sistema de cómputo del que disponían. Desafortunadamente este resultado pasó desapercibido –a juzgar por la cantidad de artículos que utilizan distintas aproximaciones con tal de permanecer en el subespacio de Dicke– y, de hecho, fue obtenido nuevamente en 2012, cuando Hartmann [7] construyó un conjunto de $\binom{N+3}{N}$ vectores base, en términos de los cuales se puede expresar al operador de estado simétrico de N átomos de dos niveles. Esta base fue utilizada recientemente para simular un láser con 30 átomos de dos niveles y hasta 200 fotones en la cavidad [32]. Adicionalmente, Hartmann hizo una contribución importante: escribir la ecuación maestra (2.53) (con $M=1$) en términos de un conjunto de superoperadores que postuló; no explicó cómo construirlos. Hartmann mostró que estos superoperadores son generadores de distintas subálgebras $\mathfrak{sl}(2)$, lo que permite etiquetar los vectores base similarmente a los estados de Dicke. Por lo tanto, bajo la acción de estos superoperadores los vectores base se transforman de manera sencilla. Usando los vectores base y los superoperadores, Hartmann calculó la solución analítica de la ecuación maestra considerando únicamente procesos disipativos.

Como explicamos en la introducción de este trabajo, es muy importante generalizar los resultados de Sarkar y Satchell y de Hartmann para átomos de tres o más niveles. Ahí mencionamos que construir una base del subespacio simétrico del espacio de Liouville de N átomos con $M+1$ niveles, $\mathcal{L}_{M+1}^{\otimes N}$, es sencillo y se basa en el procedimiento para construir estados simétricos puros de N bosones idénticos. También explicamos que construir superoperadores como los de Hartmann es difícil y ni siquiera él conoce un método para hacerlo.

En esta sección primero vamos a mostrar que la estructura algebraica de los superoperadores que actúan sobre $\mathcal{L}_{M+1}^{\otimes N}$ induce un algoritmo para construir la generalización de los superoperadores de Hartmann para átomos de $M+1$ niveles. Después vamos a construir

2. Ecuación maestra de Lindblad para átomos de muchos niveles

la base del subespacio simétrico de $\mathcal{L}_{M+1}^{\otimes N}$ y vamos a etiquetar a estos estados en términos de distintas subálgebras $\mathfrak{sl}(2)$. Además mostraremos que la dimensión de este subespacio es polinomial en el número de átomos. La solución analítica de la ecuación maestra (2.53) (con $M = 2$) se discutirá en el siguiente capítulo. Por otro lado, para mayor claridad, primero explicaremos los procedimientos con detalle para el caso de átomos de tres niveles y posteriormente presentaremos la generalización a más niveles sin repetir los detalles que son comunes.

2.3.1. Átomos de tres niveles

Para átomos de tres niveles existen tres configuraciones de los niveles de energía acoplados mediante dos transiciones dipolares ($E_0 < E_1 < E_2$):

- Configuración V : $|1\rangle$ y $|2\rangle$ cuasidegenerados; transiciones $|1\rangle \leftrightarrow |0\rangle$, $|2\rangle \leftrightarrow |0\rangle$;

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{\rho}] + (\check{L}_{10} + \check{L}_{20})\hat{\rho} \quad (2.65)$$

- Configuración Λ : $|0\rangle$ y $|1\rangle$ cuasidegenerados; transiciones $|2\rangle \leftrightarrow |1\rangle$, $|2\rangle \leftrightarrow |0\rangle$;

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{\rho}] + (\check{L}_{21} + \check{L}_{20})\hat{\rho} \quad (2.66)$$

- Configuración Ξ : transiciones $|2\rangle \leftrightarrow |1\rangle$, $|1\rangle \leftrightarrow |0\rangle$;

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{\rho}] + (\check{L}_{21} + \check{L}_{10})\hat{\rho}. \quad (2.67)$$

En las expresiones anteriores, denotamos al superoperador de Lindblad asociado a procesos disipativos en una transición dipolar como ($N_0^+ = N_0 + 1$)

$$\check{L}_{ij}[\hat{\rho}] = \sum_{\mu=1}^N N_0^+ \gamma_{ij} \left(\hat{\sigma}_{ij-}^{\mu} \hat{\rho} \hat{\sigma}_{ij+}^{\mu} - \frac{1}{2} \{ \hat{\sigma}_{ij+}^{\mu} \hat{\sigma}_{ij-}^{\mu}, \hat{\rho} \} \right) + N_0 \gamma_{ij} \left(\hat{\sigma}_{ij+}^{\mu} \hat{\rho} \hat{\sigma}_{ij-}^{\mu} - \frac{1}{2} \{ \hat{\sigma}_{ij-}^{\mu} \hat{\sigma}_{ij+}^{\mu}, \hat{\rho} \} \right), \quad (2.68)$$

y $\hat{H} = \sum_i \hat{H}_i$ con $\hat{H}_i = E_0 |0\rangle\langle 0| + E_1 |1\rangle\langle 1| + E_2 |2\rangle\langle 2|$. Los productos de operadores $\hat{\sigma}_{20+} \hat{\sigma}_{20-} = \hat{\sigma}_{21+} \hat{\sigma}_{21-} = |2\rangle\langle 2|$, $\hat{\sigma}_{21-} \hat{\sigma}_{21+} = \hat{\sigma}_{10+} \hat{\sigma}_{10-} = |1\rangle\langle 1|$ y $\hat{\sigma}_{10-} \hat{\sigma}_{10+} = \hat{\sigma}_{20-} \hat{\sigma}_{20+} = |0\rangle\langle 0|$ se pueden simplificar utilizando [33]

$$|j\rangle\langle j| = \frac{\hat{I}}{M+1} + 2 \sum_{k=0}^{j-1} \hat{\sigma}_3^{k,k+1} - \frac{2}{M+1} \sum_{k=0}^{M-1} (M-k) \hat{\sigma}_3^{k,k+1}, \quad (2.69)$$

donde

$$\hat{\sigma}_3^{k,k+1} = \frac{1}{2} (|k+1\rangle\langle k+1| - |k\rangle\langle k|) = \frac{1}{2} \hat{\sigma}_z^{k,k+1}. \quad (2.70)$$

Por lo tanto, se tiene

$$\begin{aligned}
 |2\rangle\langle 2| &= \frac{1}{3}(\hat{I}_3 + 2\hat{\sigma}_3^{01} + 4\hat{\sigma}_3^{12}) = \frac{1}{3}(\hat{I}_3 - 2\hat{\sigma}_3^{01} + 4\hat{\sigma}_3^{02}) = \frac{1}{3}(\hat{I}_3 + 2\hat{\sigma}_3^{02} + 2\hat{\sigma}_3^{12}). \\
 |1\rangle\langle 1| &= \frac{1}{3}(\hat{I}_3 + 2\hat{\sigma}_3^{01} - 2\hat{\sigma}_3^{12}) = \frac{1}{3}(\hat{I}_3 + 4\hat{\sigma}_3^{01} - 2\hat{\sigma}_3^{02}) = \frac{1}{3}(\hat{I}_3 + 2\hat{\sigma}_3^{02} - 4\hat{\sigma}_3^{12}). \\
 |0\rangle\langle 0| &= \frac{1}{3}(\hat{I}_3 - 4\hat{\sigma}_3^{01} - 2\hat{\sigma}_3^{12}) = \frac{1}{3}(\hat{I}_3 - 2\hat{\sigma}_3^{01} - 2\hat{\sigma}_3^{02}) = \frac{1}{3}(\hat{I}_3 - 4\hat{\sigma}_3^{02} + 2\hat{\sigma}_3^{12}).
 \end{aligned} \tag{2.71}$$

En las expresiones anteriores utilizamos el hecho de que los operadores $\hat{\sigma}_3^{ij}$ no son linealmente independientes:

$$\hat{\sigma}_3^{01} = \hat{\sigma}_3^{02} - \hat{\sigma}_3^{12}. \tag{2.72}$$

En términos de (2.69), el hamiltoniano de N átomos de tres niveles está dado, tomando como energía de referencia a

$$\bar{E} = \frac{1}{3}(E_0 + E_1 + E_2), \tag{2.73}$$

por

$$\hat{H} = \tilde{E}_0 \hat{J}_3^{02} + \tilde{E}_1 \hat{J}_3^{12}, \quad \tilde{E}_i = 2(\bar{E} - E_i), \quad \hat{J}_3^{ij} = \sum_{\mu=1}^N \hat{\sigma}_3^{ij(\mu)}. \tag{2.74}$$

Los superoperadores de Lindblad (2.68) consisten de $2N$ términos iguales, donde cada uno actúa en el espacio de Hilbert de un átomo. Esta simetría la usaremos a continuación para construir un conjunto de estados base invariantes ante el intercambio de los átomos. Para ejemplificar el procedimiento usaremos la configuración Λ y para simplificar la notación, en adelante consideraremos la ecuación maestra (2.66) en el espacio de Hilbert de un átomo \mathcal{H}_3 (\check{L}_{20}^1 es la restricción de (2.68) a un átomo),

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}\hat{\rho} &= -\frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{\rho}] + N_0^+ \gamma_{21} \left(\hat{\sigma}_-^{21} \hat{\rho} \hat{\sigma}_+^{21} - \frac{1}{2} \{ \hat{\sigma}_+^{21} \hat{\sigma}_-^{21}, \hat{\rho} \} \right) \\
 &\quad + N_0 \gamma_{21} \left(\hat{\sigma}_+^{21} \hat{\rho} \hat{\sigma}_-^{21} - \frac{1}{2} \{ \hat{\sigma}_-^{21} \hat{\sigma}_+^{21}, \hat{\rho} \} \right) + \check{L}_{20}^1 \hat{\rho}.
 \end{aligned} \tag{2.75}$$

Superoperadores colectivos

La ecuación (2.75) es una ecuación de operadores y, como mencionamos en la sección 2.1, estos operadores son elementos de un espacio de Liouville, en este caso de nueve dimensiones, \mathcal{L}_{3^2} . Por lo tanto, es conveniente escribirla en la notación que presentamos

2. Ecuación maestra de Lindblad para átomos de muchos niveles

ahí:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}|\hat{\rho}\rangle &= -\frac{i}{\hbar}\tilde{E}_0\left[|\hat{\sigma}_3^{02}\hat{\rho}\hat{I}_3\rangle - |\hat{I}_3\hat{\rho}\hat{\sigma}_3^{02}\rangle\right] - \frac{i}{\hbar}\tilde{E}_1\left[|\hat{\sigma}_3^{12}\hat{\rho}\hat{I}_3\rangle - |\hat{I}_3\hat{\rho}\hat{\sigma}_3^{12}\rangle\right] \\
&\quad + N_0^+\gamma_{21}\left\{|\hat{\sigma}_-^{21}\hat{\rho}\hat{\sigma}_+^{21}\rangle - \frac{1}{3}\left[|\hat{I}_3\hat{\rho}\hat{I}_3\rangle + |\hat{\sigma}_3^{02}\hat{\rho}\hat{I}_3\rangle + |\hat{I}_3\hat{\rho}\hat{\sigma}_3^{02}\rangle + |\hat{\sigma}_3^{12}\hat{\rho}\hat{I}_3\rangle + |\hat{I}_3\hat{\rho}\hat{\sigma}_3^{12}\rangle\right]\right\} \\
&\quad + N_0\gamma_{21}\left\{|\hat{\sigma}_+^{21}\hat{\rho}\hat{\sigma}_-^{21}\rangle - \frac{1}{3}\left[|\hat{I}_3\hat{\rho}\hat{I}_3\rangle + |\hat{\sigma}_3^{02}\hat{\rho}\hat{I}_3\rangle + |\hat{I}_3\hat{\rho}\hat{\sigma}_3^{02}\rangle - 2|\hat{\sigma}_3^{12}\hat{\rho}\hat{I}_3\rangle - 2|\hat{I}_3\hat{\rho}\hat{\sigma}_3^{12}\rangle\right]\right\} \\
&\quad + \check{L}_{20}^1|\hat{\rho}\rangle \\
&:= \check{G}_\Lambda|\hat{\rho}\rangle,
\end{aligned} \tag{2.76}$$

\check{G}_Λ es un caso particular del superoperador más general que actúa sobre \mathcal{L}_{3^2} ,

$$\check{G}\cdot = \sum_{i,j=1}^9 g_{ij}\hat{M}_i \cdot \hat{N}_j \in \mathfrak{gl}(9), \tag{2.77}$$

donde \hat{M}_i, \hat{N}_j son elementos de $\{\hat{I}_3\} \cup \{\hat{\sigma}_\pm^{10}, \hat{\sigma}_\pm^{21}, \hat{\sigma}_\pm^{20}, \hat{\sigma}_3^{02}, \hat{\sigma}_3^{12}\}$, el conjunto de generadores del álgebra $\mathfrak{gl}(3)$. El segundo conjunto en la unión es una base del álgebra $\mathfrak{sl}(3)$. La representación matricial de (2.77) está dada por

$$G = \sum_{i,j=1}^9 g_{ij}M_i \otimes N_j^\dagger. \tag{2.78}$$

Es importante notar que G se puede escribir en términos de la identidad \mathbb{I}_9 y la base de $\mathfrak{sl}(9)$ definida en (2.34). Sin embargo, la hemos escrito en términos de superoperadores factorizables porque así se expresa la ecuación maestra de Lindblad y estamos interesados en encontrar la relación entre ambas representaciones.

Las matrices en $Y_+ = \{\sigma_+^{10}, \sigma_+^{20}, \sigma_+^{21}\}$ y $Y_- = \{\sigma_-^{10}, \sigma_-^{20}, \sigma_-^{21}\}$ son triangulares superiores y triangulares inferiores, respectivamente. Las matrices en $X = \{\mathbb{I}_3, \sigma_3^{02}, \sigma_3^{12}\}$ son diagonales. A partir de la definición del producto de Kronecker de matrices (2.19), se tiene que el producto tensorial de una matriz triangular superior (inferior) y cualquier otra matriz, resulta en una matriz triangular superior (inferior). Por otro lado, el producto tensorial de dos matrices diagonales produce una matriz diagonal, mientras que el producto tensorial de una matriz diagonal y una matriz triangular superior (inferior) resulta en una matriz triangular superior (inferior). A partir de lo anterior, de las 81 supermatrices $M_i \otimes N_j^\dagger$, por construcción, nueve son diagonales: una es la identidad $\mathbb{I}_3 \otimes \mathbb{I}_3 = \mathbb{I}_9$ y las restantes las denotamos como \mathbb{M}_3 ; se obtienen al hacer todos los productos tensoriales entre las matrices en X (excepto $\mathbb{I}_3 \otimes \mathbb{I}_3$). De las 72 supermatrices restantes, 36 son triangulares superiores (inferiores) y las denotamos como \mathbb{M}_+ (\mathbb{M}_-); se obtienen al hacer todos los productos tensoriales entre las matrices en Y_+ (Y_-), el producto tensorial de cada matriz en X con cada matriz en Y_+ (Y_-), el producto tensorial de cada matriz en Y_+ (Y_-) con cada matriz en X y el producto tensorial de cada matriz en Y_+ (Y_-) con cada matriz en Y_- (Y_+).

2.3. Estados simétricos y superoperadores colectivos

En términos de las supermatrices en $\mathbb{M}_3, \mathbb{M}_+, \mathbb{M}_-$, la ecuación (2.78) se escribe

$$G = g_0 \mathbb{I}_9 + \sum_{p=1}^8 g_3^p M_3^p + \sum_{q=1}^{36} g_+^q M_+^q + \sum_{r=1}^{36} g_-^r M_-^r. \quad (2.79)$$

En la ecuación (2.79) y en lo sucesivo los superíndices no representan potencias, son sólo índices superiores.

Las supermatrices en $\mathbb{M}_3, \mathbb{M}_+, \mathbb{M}_-$ son de orden 9×9 y se pueden escribir en términos de la base de $\mathfrak{sl}(9)$, $B_+ \cup B_3 \cup B_-$, como

$$M_3^p = \sum_{m=1}^8 a_m^p B_3^m \quad p = 1, 2, \dots, 8, \quad (2.80a)$$

$$M_+^q = \sum_{m=1}^8 \sum_{n=m+1}^9 a_{m,n}^q \mathcal{E}_{m,n} \quad q = 1, 2, \dots, 36, \quad (2.80b)$$

$$M_-^r = \sum_{m=1}^8 \sum_{n=m+1}^9 a_{n,m}^r \mathcal{E}_{n,m} \quad r = 1, 2, \dots, 36, \quad (2.80c)$$

donde $\mathcal{E}_{m,n}$ son las matrices elementales definidas en la sección 2.1.2. Los elementos del conjunto B_3 difieren de los elementos del conjunto B_0 definido en (2.34) en un factor de $\frac{1}{2}$. Por lo tanto, de las ecuaciones (2.80) se obtienen 36 supermatrices de ascenso y sus correspondientes supermatrices de descenso, que son combinaciones lineales de las supermatrices $M_+^q \in \mathbb{M}_+$ y $M_-^r \in \mathbb{M}_-$,

$$A_+^k := \mathcal{E}_{m,n} = \sum_q b_q^{m,n} M_+^q, \quad A_-^k := \mathcal{E}_{n,m} = \sum_r b_r^{n,m} M_-^r, \quad (2.81)$$

donde $m = 1, 2, \dots, 8$, $n = m + 1, m + 2, \dots, 9$ y $k = 0, 1, \dots, 35$. A cada par (m, n) le corresponde un valor de k . También se obtienen las supermatrices

$$B_3^m = \sum_{p=1}^8 b_p^m M_3^p, \quad m = 1, 2, \dots, 8. \quad (2.82)$$

Usando las relaciones de conmutación de $\mathfrak{sl}(2)$ (2.37), podemos definir a las supermatrices A_3^k como $2A_3^k = [A_+^k, A_-^k]$. Por lo tanto, el índice k enumera 36 álgebras $\mathfrak{sl}(2)$. Recordando la ecuación (2.32) notamos que las supermatrices $2A_3^{k'} = [\mathcal{E}_{m,n}, \mathcal{E}_{n,m}]$ con $m = 1, 2, \dots, 8$ y $n = m + 1$ son justamente las supermatrices B_3^m . Dado que el álgebra $\mathfrak{sl}(9)$ tiene rango ocho, sólo ocho de las 36 supermatrices A_3^k son linealmente independientes. Por lo tanto, las otras 28 supermatrices son combinaciones lineales de las supermatrices $A_3^{k'}$.

A partir de lo anterior, la ecuación (2.76) se puede escribir en términos de los superoperadores $\check{A}_{\pm,3}^{k(1)}$ correspondientes a las supermatrices $A_{\pm,3}^k$. Sin embargo, no hay una única

2. Ecuación maestra de Lindblad para átomos de muchos niveles

manera de hacerlo debido a la libertad para elegir a los superoperadores $\check{A}_3^{k(1)}$. Dado que la ecuación (2.66) contiene N términos como (2.76), cada uno actuando sobre el espacio de Hilbert de un átomo, entonces podemos definir a los superoperadores colectivos como

$$\check{A}_{\pm,3}^k := \sum_{i=1}^N \check{I}_9^{(1)} \otimes \check{I}_9^{(2)} \otimes \cdots \otimes \check{A}_{\pm,3}^{k(i)} \otimes \cdots \otimes \check{I}_9^{(N)}. \quad (2.83)$$

Estos superoperadores se muestran explícitamente en el apéndice A. Dado que los superoperadores $\check{A}_{\pm,3}^{k(i)}$ satisfacen las relaciones de conmutación

$$[\check{A}_3^{k(i)}, \check{A}_{\pm}^{k(j)}] = \pm \check{A}_{\pm}^{k(i)} \delta_{ij}, \quad [\check{A}_+^{k(i)}, \check{A}_-^{k(j)}] = 2\check{A}_3^{k(i)} \delta_{ij}, \quad (2.84)$$

entonces, para cada k , los superoperadores colectivos satisfacen las relaciones de conmutación del álgebra $\mathfrak{sl}(2)$ (2.37). Por otro lado, como comentamos arriba, en el apéndice A notamos que los superoperadores $\check{A}_3^0, \check{A}_3^8, \check{A}_3^{15}, \check{A}_3^{21}, \check{A}_3^{26}, \check{A}_3^{30}, \check{A}_3^{33}$ y \check{A}_3^{35} son linealmente independientes.

Dada un álgebra $\mathfrak{sl}(2)$, existe un operador que conmuta con todos sus elementos, llamado el operador de Casimir cuadrático [25]. En el contexto de esta sección, definimos los superoperadores cuadráticos

$$\check{C}^k = \check{A}_-^k \check{A}_+^k + (\check{A}_3^k)^2 + \check{A}_3^k, \quad (2.85)$$

que satisfacen las siguientes relaciones de conmutación:

$$[\check{C}^k, \check{C}^{k'}] = [\check{C}^k, \check{A}_3^{k'}] = 0, \quad k, k' = 0, 1, \dots, 35, \quad (2.86)$$

ya que $[\check{A}_3^k, \check{A}_3^{k'}] = 0$ y se puede mostrar que $\check{A}_-^k \check{A}_+^k$ es diagonal. Por lo tanto, existe un conjunto de autovectores comunes de \check{C}^k y \check{A}_3^k con $k = 0, 1, \dots, 35$.

Estados simétricos mixtos

La ecuación maestra (2.66) es simétrica ante el intercambio de los átomos y, por lo tanto, si el operador de estado inicial es simétrico, lo seguirá siendo durante su evolución. Para poder especificar un operador de estado simétrico, necesitamos construir una base del subespacio simétrico del espacio de Liouville de N átomos de tres niveles, $\mathcal{S}(\mathcal{L}_{3^2}^{\otimes N})$. Un elemento de esta base está dado por

$$|\hat{S}\rangle = K \sum_P \check{P}(|22\rangle^{\otimes \alpha} |21\rangle^{\otimes \beta} |20\rangle^{\otimes \gamma} |12\rangle^{\otimes \delta} |11\rangle^{\otimes \epsilon} |10\rangle^{\otimes \eta} |02\rangle^{\otimes \theta} |01\rangle^{\otimes \kappa} |00\rangle^{\otimes \lambda}), \quad (2.87)$$

donde P son todas las permutaciones de dos partículas que no producen productos tensoriales repetidos e $|ij\rangle$ son los vectores base unitarios en el espacio de Liouville de nueve

2.3. Estados simétricos y superoperadores colectivos

dimensiones \mathcal{L}_{3^2} ,

$$\begin{array}{cccccccc}
 |22\rangle & |21\rangle & |20\rangle & |12\rangle & |11\rangle & |10\rangle & |02\rangle & |01\rangle & |00\rangle \\
 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
 \end{array} \cdot \quad (2.88)$$

Los exponentes griegos denotan la ocupación del vector $|ij\rangle$ y satisfacen

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon + \eta + \theta + \kappa + \lambda = N, \quad (2.89)$$

y

$$K = \frac{\alpha! \beta! \gamma! \delta! \epsilon! \eta! \theta! \kappa! \lambda!}{N!} \quad (2.90)$$

es una constante de normalización. Es importante aclarar lo que significa la ocupación de un vector $|ij\rangle$. El operador de estado de N átomos es un elemento de $\mathcal{L}_{3^2}^{\otimes N}$ y una base de este espacio, de acuerdo con la definición de producto tensorial de espacios de Hilbert en la sección 1.1, está dada por 9^N elementos de la forma

$$|i_1 j_1\rangle_1 \otimes |i_2 j_2\rangle_2 \otimes \cdots \otimes |i_k j_k\rangle_m \otimes \cdots \otimes |i_N j_N\rangle_N, \quad i, j = 0, 1, 2, \quad (2.91)$$

donde los vectores $|i_k j_k\rangle$ son base del espacio de Liouville del átomo k . En (2.87) escribimos los elementos de la base de $\mathcal{L}_{3^2}^{\otimes N}$ de forma compacta. La ocupación del vector $|ij\rangle$ representa el número de veces que aparece $|ij\rangle$ en (2.91) y puede ser cero. Por otro lado, cuando decimos que el superoperador \check{P} permuta dos partículas, nos referimos a que permuta dos subíndices: m y m' .

Notamos que los vectores base simétricos se especifican con ocho índices griegos. Sin embargo, como ya hemos señalado antes, estamos interesados en asignarles etiquetas que permitan especificar de manera simple la acción de los superoperadores colectivos sobre ellos. Para ello, es necesario determinar si son autovectores de \check{C}^k y \check{A}_3^k .

Para calcular la acción de \check{C}^k y \check{A}_3^k sobre $|\hat{S}\rangle$ es necesario consultar las tablas que aparecen en el apéndice B, donde se ha calculado la acción de los superoperadores de un átomo $\check{A}_{\pm,3}^{k(1)}$ sobre los vectores $|ij\rangle$. En estas tablas se observa que los superoperadores $\check{A}_{\pm}^{k(1)}$ intercambian población (ocupación) entre un vector $|ij\rangle$ y un vector $|i'j'\rangle$. Llamaremos Υ y Υ' a los índices griegos correspondientes a la ocupación de estos vectores. La acción de $\check{A}_{\pm}^{k(1)}$ sobre $|\hat{S}\rangle$ resulta en un vector simétrico $|\hat{S}'\rangle$ tal que la ocupación de $|ij\rangle$ es $\Upsilon \pm 1$ y la ocupación de $|i'j'\rangle$ es $\Upsilon' \mp 1$. Entonces, si actúan uno tras otro dejan a $|\hat{S}\rangle$ igual. Por otro lado, los vectores $|ij\rangle$ e $|i'j'\rangle$ son autovectores de los superoperadores $\check{A}_3^{k(1)}$, entonces $|\hat{S}\rangle$ también lo es.

Debido a la simetría de los superoperadores $\check{A}_{\pm,3}^k$ ante el intercambio de los átomos, la acción de \check{A}_{\pm}^k (\check{A}_3^k) sobre $|\hat{S}\rangle$ produce tantas copias de $|\hat{S}'\rangle$ (respectivamente, $|\hat{S}\rangle$) como la

2. Ecuación maestra de Lindblad para átomos de muchos niveles

ocupación del vector $|ij\rangle$ (respectivamente, la suma de los autovalores de $|ij\rangle$ e $|i'j'\rangle$). A partir de lo anterior y recordando la ecuación (2.85), queda claro que $|\hat{S}\rangle$ también es un autovector de \check{C}^k . Definiendo (como en la teoría del momento angular)

$$\check{C}^k|\hat{S}\rangle = a^k(a^k + 1)|\hat{S}\rangle, \quad \check{A}_3^k|\hat{S}\rangle = a_3^k|\hat{S}\rangle, \quad k = 0, 1, \dots, 35, \quad (2.92)$$

se obtienen los autovalores de \check{C}^k y \check{A}_3^k en términos de los índices griegos (tabla 2.1). Por brevedad llamaremos autovalor a a^k , pero no hay que olvidar que no es un autovalor de \check{C}^k . Además, el valor de a^k es la raíz positiva de la ecuación cuadrática $a^k(a^k + 1) = f_k(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \eta, \theta, \kappa, \lambda)$, donde f_k está dada por el autovalor correspondiente en la tabla 2.1.

En las tablas del apéndice B notamos que cada álgebra $\mathfrak{sl}(2)$ actúa de manera no trivial solamente sobre dos vectores base. Alternativamente, en la tabla 2.1 se observa que los autovalores a^k y a_3^k solamente están relacionados con dos índices griegos. Recordamos (2.89) que sólo ocho índices griegos son independientes. Por lo tanto, para poder describir completamente al vector simétrico son necesarios cuatro pares de autovalores (a^k, a_3^k) , asociados a ocho índices griegos diferentes. Esos pares de autovalores corresponden a cuatro pares de superoperadores \check{C}^k y \check{A}_3^k , que actúan de manera no trivial sobre distintos vectores $|ij\rangle$. Otra manera de decir esto es que se necesitan cuatro álgebras $\mathfrak{sl}(2)$ tales que los superoperadores de un álgebra conmutan con los superoperadores de cualquiera de las otras álgebras. A partir de la tabla 2.2 se puede determinar cuáles álgebras satisfacen esta condición. El encabezado de cada columna se repite a lo largo de la columna para facilitar la lectura de la tabla. Donde aparece un número significa que todos los generadores de esa álgebra conmutan con todos los generadores del álgebra correspondiente a ese renglón. Si aparece un espacio en blanco significa que alguno de los generadores del álgebra en esa columna no conmuta con alguno de los generadores del álgebra correspondiente a ese renglón.

La elección de las cuatro álgebras es completamente arbitraria. Sin embargo, en el siguiente capítulo explicaremos por qué elegimos el cuarteto

$$\mathbf{A} = \{\mathcal{A}^7, \mathcal{A}^{13}, \mathcal{A}^{22}, \mathcal{A}^{27}\}. \quad (2.93)$$

Para estas álgebras, los índices griegos satisfacen

$$\begin{aligned} \alpha &= a^7 + a_3^7, & \beta &= a^{13} + a_3^{13}, & \delta &= a^{22} + a_3^{22}, & \epsilon &= a^{27} + a_3^{27}, \\ \lambda &= a^7 - a_3^7, & \kappa &= a^{13} - a_3^{13}, & \eta &= a^{22} - a_3^{22}, & \theta &= a^{27} - a_3^{27}, \end{aligned} \quad (2.94)$$

$$\gamma = N - 2a^{13} - 2a^{22} - 2a^{27} - 2a^7. \quad (2.95)$$

En adelante llamaremos etiquetas a $a^7, a_3^7, a^{13}, a_3^{13}, a^{22}, a_3^{22}, a^{27}$ y a_3^{27} . El rango de valores que pueden tomar las etiquetas se obtiene a partir de las relaciones de conmutación:

$$[\check{A}_3^i, \check{A}_\pm^i] = \pm \check{A}_\pm^i, \quad \check{A}_{\pm,3}^i \in \mathcal{A}^i, \quad \mathcal{A}^i \in \mathbf{A}. \quad (2.96)$$

Tabla 2.1.: Autovalores de los superoperadores \check{C}^k y \check{A}_3^k actuando sobre $|\hat{S}\rangle$.

$a^0 = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$	$a_3^0 = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$
$a^1 = \frac{1}{2}(\alpha + \gamma)$	$a_3^1 = \frac{1}{2}(\alpha - \gamma)$
$a^2 = \frac{1}{2}(\alpha + \delta)$	$a_3^2 = \frac{1}{2}(\alpha - \delta)$
$a^3 = \frac{1}{2}(\alpha + \epsilon)$	$a_3^3 = \frac{1}{2}(\alpha - \epsilon)$
$a^4 = \frac{1}{2}(\alpha + \eta)$	$a_3^4 = \frac{1}{2}(\alpha - \eta)$
$a^5 = \frac{1}{2}(\alpha + \theta)$	$a_3^5 = \frac{1}{2}(\alpha - \theta)$
$a^6 = \frac{1}{2}(\alpha + \kappa)$	$a_3^6 = \frac{1}{2}(\alpha - \kappa)$
$a^7 = \frac{1}{2}(\alpha + \lambda)$	$a_3^7 = \frac{1}{2}(\alpha - \lambda)$
$a^8 = \frac{1}{2}(\beta + \gamma)$	$a_3^8 = \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$
$a^9 = \frac{1}{2}(\beta + \delta)$	$a_3^9 = \frac{1}{2}(\beta - \delta)$
$a^{10} = \frac{1}{2}(\beta + \epsilon)$	$a_3^{10} = \frac{1}{2}(\beta - \epsilon)$
$a^{11} = \frac{1}{2}(\beta + \eta)$	$a_3^{11} = \frac{1}{2}(\beta - \eta)$
$a^{12} = \frac{1}{2}(\beta + \theta)$	$a_3^{12} = \frac{1}{2}(\beta - \theta)$
$a^{13} = \frac{1}{2}(\beta + \kappa)$	$a_3^{13} = \frac{1}{2}(\beta - \kappa)$
$a^{14} = \frac{1}{2}(\beta + \lambda)$	$a_3^{14} = \frac{1}{2}(\beta - \lambda)$
$a^{15} = \frac{1}{2}(\delta + \gamma)$	$a_3^{15} = \frac{1}{2}(\gamma - \delta)$
$a^{16} = \frac{1}{2}(\epsilon + \gamma)$	$a_3^{16} = \frac{1}{2}(\gamma - \epsilon)$
$a^{17} = \frac{1}{2}(\eta + \gamma)$	$a_3^{17} = \frac{1}{2}(\gamma - \eta)$
$a^{18} = \frac{1}{2}(\gamma + \theta)$	$a_3^{18} = \frac{1}{2}(\gamma - \theta)$
$a^{19} = \frac{1}{2}(\gamma + \kappa)$	$a_3^{19} = \frac{1}{2}(\gamma - \kappa)$
$a^{20} = \frac{1}{2}(\gamma + \lambda)$	$a_3^{20} = \frac{1}{2}(\gamma - \lambda)$
$a^{21} = \frac{1}{2}(\delta + \epsilon)$	$a_3^{21} = \frac{1}{2}(\delta - \epsilon)$
$a^{22} = \frac{1}{2}(\delta + \eta)$	$a_3^{22} = \frac{1}{2}(\delta - \eta)$
$a^{23} = \frac{1}{2}(\delta + \theta)$	$a_3^{23} = \frac{1}{2}(\delta - \theta)$
$a^{24} = \frac{1}{2}(\delta + \kappa)$	$a_3^{24} = \frac{1}{2}(\delta - \kappa)$
$a^{25} = \frac{1}{2}(\delta + \lambda)$	$a_3^{25} = \frac{1}{2}(\delta - \lambda)$
$a^{26} = \frac{1}{2}(\epsilon + \eta)$	$a_3^{26} = \frac{1}{2}(\epsilon - \eta)$
$a^{27} = \frac{1}{2}(\epsilon + \theta)$	$a_3^{27} = \frac{1}{2}(\epsilon - \theta)$
$a^{28} = \frac{1}{2}(\epsilon + \kappa)$	$a_3^{28} = \frac{1}{2}(\epsilon - \kappa)$
$a^{29} = \frac{1}{2}(\epsilon + \lambda)$	$a_3^{29} = \frac{1}{2}(\epsilon - \lambda)$
$a^{30} = \frac{1}{2}(\eta + \theta)$	$a_3^{30} = \frac{1}{2}(\eta - \theta)$
$a^{31} = \frac{1}{2}(\eta + \kappa)$	$a_3^{31} = \frac{1}{2}(\eta - \kappa)$
$a^{32} = \frac{1}{2}(\eta + \lambda)$	$a_3^{32} = \frac{1}{2}(\eta - \lambda)$
$a^{33} = \frac{1}{2}(\kappa + \theta)$	$a_3^{33} = \frac{1}{2}(\theta - \kappa)$
$a^{34} = \frac{1}{2}(\lambda + \theta)$	$a_3^{34} = \frac{1}{2}(\theta - \lambda)$
$a^{35} = \frac{1}{2}(\kappa + \lambda)$	$a_3^{35} = \frac{1}{2}(\kappa - \lambda)$

2.3. Estados simétricos y superoperadores colectivos

Para ver esto, consideramos un autovector común de \check{C}^i y \check{A}_3^i , que denotamos

$$|a^i; a_3^i; \alpha), \quad (2.97)$$

donde $a^i(a^i + 1)$ y a_3^i son los autovalores de \check{C}^i y \check{A}_3^i , y α denota etiquetas correspondientes a operadores de las otras álgebras. Entonces

$$\begin{aligned} [\check{A}_3^i, \check{A}_+^i] |a^i; a_3^i; \alpha) &= \check{A}_3^i \check{A}_+^i |a^i; a_3^i; \alpha) - \check{A}_+^i \check{A}_3^i |a^i; a_3^i; \alpha) \\ &= \check{A}_3^i (\check{A}_+^i |a^i; a_3^i; \alpha)) - a_3^i (\check{A}_+^i |a^i; a_3^i; \alpha)) \\ &= \check{A}_+^i |a^i; a_3^i; \alpha) \end{aligned} \quad (2.98)$$

implica que

$$\check{A}_3^i (\check{A}_+^i |a^i; a_3^i; \alpha)) = (a_3^i + 1) (\check{A}_+^i |a^i; a_3^i; \alpha)). \quad (2.99)$$

Por lo tanto, \check{A}_+^i aumenta en una unidad el valor de a_3^i . Análogamente, \check{A}_-^i disminuye en una unidad el valor de a_3^i . Esto explica por qué a \check{A}_+^i y \check{A}_-^i se les llama superoperadores de ascenso y descenso. A partir de (2.99), las relaciones (2.94) y dado que el valor mínimo de un índice griego es cero, concluimos que \check{A}_+^7 aumenta el valor de a_3^7 hasta que $\lambda = 0$, es decir, hasta que $a^7 = a_3^7$. De manera similar, \check{A}_-^7 disminuye el valor de a_3^7 hasta que $\alpha = 0$, es decir, hasta que $a_3^7 = -a^7$. Lo mismo ocurre con las demás etiquetas a_3^i . Por otro lado, a partir de la tabla 2.1 y dado que el valor máximo de un índice griego es N , concluimos que las etiquetas a^i toman valores en $\{0, \frac{1}{2}, \dots, N/2\}$.

A partir de lo anterior, tenemos los siguientes intervalos para las etiquetas:

$$\begin{array}{cccc} a^7 = 0, \frac{1}{2}, \dots, N/2 & a^{13} = 0, \frac{1}{2}, \dots, N/2 & a^{22} = 0, \frac{1}{2}, \dots, N/2 & a^{27} = 0, \frac{1}{2}, \dots, N/2 \\ a_3^7 = -a^7, \dots, a^7 & a_3^{13} = -a^{13}, \dots, a^{13} & a_3^{22} = -a^{22}, \dots, a^{22} & a_3^{27} = -a^{27}, \dots, a^{27}. \end{array} \quad (2.100)$$

La condición (2.89) se expresa en términos de las etiquetas como

$$a^7 + a^{13} + a^{22} + a^{27} = \frac{N}{2}. \quad (2.101)$$

En términos de las etiquetas de arriba, denotamos a los vectores simétricos como

$$|\hat{Q}\rangle := Q_{a_3^7 a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}}^{a^7 a^{27} a^{22} a^{13}}. \quad (2.102)$$

La dimensión de $\mathcal{S}(\mathcal{L}_{3^2}^{\otimes N})$ está dada por

$$\begin{aligned} &\sum_{a^{27}=0}^{N/2} \sum_{a_3^{27}=-a^{27}}^{a^{27}} \sum_{a^{22}=0}^{N/2-a^{27}} \sum_{a_3^{22}=-a^{22}}^{a^{22}} \sum_{a^{13}=0}^{N/2-a^{22}-a^{27}} \sum_{a_3^{13}=-a^{13}}^{a^{13}} \sum_{a^7=0}^{N/2-a^{13}-a^{22}-a^{27}} \sum_{a_3^7=-a^7}^{a^7} 1 \\ &= \frac{1}{8!} (N+1)(N+2)(N+3)(N+4)(N+5)(N+6)(N+7)(N+8) \\ &= \binom{N+9-1}{N}. \end{aligned} \quad (2.103)$$

2. Ecuación maestra de Lindblad para átomos de muchos niveles

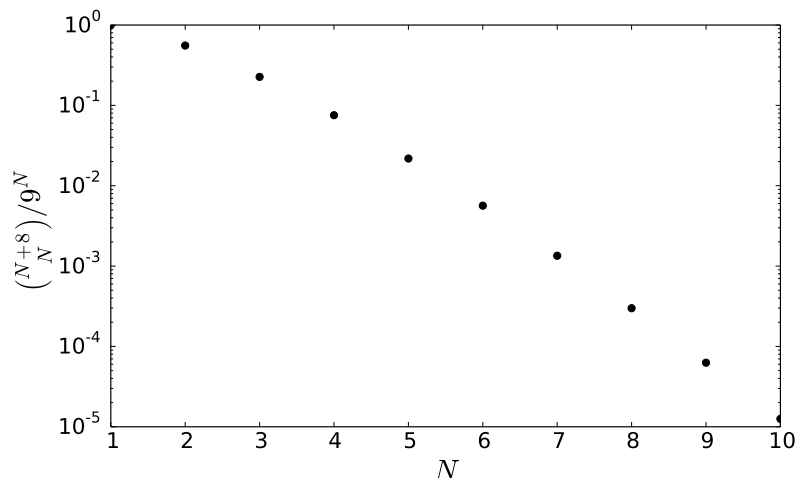


Figura 2.1.: Fracción del espacio de Liouville de N átomos de tres niveles que representa el subespacio simétrico.

Para tener una mejor idea de la importancia de este resultado, en la figura 2.1 graficamos el cociente entre la dimensión (2.103) del subespacio simétrico $\mathcal{S}(\mathcal{L}_{3^2}^{\otimes N})$ y la dimensión (9^N) del espacio de Liouville $\mathcal{L}_{3^2}^{\otimes N}$ en función del número de átomos N . Como se observa en la figura, para $N = 4$ el subespacio simétrico representa menos del 10% del espacio de Liouville y para $N = 10$ el porcentaje se reduce a 0.001%. Por lo tanto, en la base de los vectores simétricos se reduce considerablemente el número de ecuaciones diferenciales acopladas que hay que resolver para calcular el operador de estado del sistema.

En términos de los vectores simétricos, el *estado simétrico* de un sistema de N átomos de tres niveles se escribe como

$$\hat{\rho}_{\mathcal{S}} = \sum_{i=1}^{\binom{N+8}{N}} q_i \hat{Q}_i \text{ (espacio de Hilbert)} \quad \circ \quad |\hat{\rho}_{\mathcal{S}}\rangle = \sum_{i=1}^{\binom{N+8}{N}} q_i |\hat{Q}_i\rangle \text{ (espacio de Liouville)}, \quad (2.104)$$

donde $|\hat{Q}_i\rangle$ son todos los vectores simétricos que se pueden construir de acuerdo con (2.100) y (2.101), y los coeficientes q_i deben ser tales que $\hat{\rho}_{\mathcal{S}}$ sea un operador de estado. Como mencionamos antes, los superoperadores $\check{A}_{\pm,3}^k$ son invariantes ante el intercambio de los átomos y la ecuación maestra (2.53) se puede escribir en términos de ellos. Por lo tanto, la evolución del operador de estado del sistema en el intervalo de tiempo (t_0, t) está dada por la composición de mapeos que mandan estados simétricos a estados simétricos.

Como ejemplo de un estado simétrico consideremos tres átomos de tres niveles, cada uno en un estado de energía diferente. El estado del sistema está dado por

$$\hat{\rho}_{\mathcal{S}} = Q_{0\ 1/2}^{1\ 1/2} = \frac{|012\rangle\langle 012|}{6} + \frac{|021\rangle\langle 021|}{6} + \frac{|102\rangle\langle 102|}{6} + \frac{|120\rangle\langle 120|}{6} + \frac{|201\rangle\langle 201|}{6} + \frac{|210\rangle\langle 210|}{6}, \quad (2.105)$$

2.3. Estados simétricos y superoperadores colectivos

donde omitimos los números cuánticos nulos. La acción de los superoperadores de ascenso y descenso sobre los vectores simétricos está tabulada en el apéndice C. Si actuamos con el superoperador \check{A}_-^3 sobre el estado (2.105), obtenemos el estado

$$\hat{\rho}_S = Q_{-1/2}^{1/2} \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} = \frac{|011\rangle\langle 011|}{3} + \frac{|101\rangle\langle 101|}{3} + \frac{|110\rangle\langle 110|}{3}, \quad (2.106)$$

en el que ningún átomo está excitado. Por lo tanto, concluimos que el superoperador \check{A}_-^3 “baja” a los átomos que estén en el nivel $|2\rangle$ al nivel $|1\rangle$. Los estados (2.105) y (2.106) son diagonales, es decir, carecen de términos de coherencia. Como mencionamos antes, en las situaciones de interés en óptica cuántica los átomos interactúan con radiación y el hamiltoniano del sistema incluye operadores atómicos de ascenso y descenso (ver 2.55). El superoperador (2.54) se puede escribir en términos de algunos de los superoperadores de ascenso y descenso que se enlistan en el apéndice A. De acuerdo con el apéndice C, la acción de estos superoperadores sobre los vectores simétricos “diagonales” (que consisten de términos de la forma $|i_1 i_2 \cdots i_N\rangle\langle i_1 i_2 \cdots i_N|$) produce vectores simétricos “no diagonales” (que consisten de términos de la forma $|i_1 i_2 \cdots i_N\rangle\langle j_1 j_2 \cdots j_N|$) y por lo tanto, en presencia de radiación el estado simétrico del sistema tiene coherencias.

Es importante aclarar que aunque construimos los vectores simétricos partiendo de la ecuación maestra para la configuración Λ (2.75), tanto los superoperadores $\check{A}_{\pm,3}^k$ como los vectores simétricos $|\hat{Q}\rangle$ sirven para las configuraciones V y Ξ .

2.3.2. Átomos con $M + 1$ niveles

La ecuación maestra para N átomos con M transiciones dipolares, que interactúan con baños de radiación en equilibrio térmico independientes, está dada por la expresión (2.53). Procediendo como en la sección anterior consideramos la ecuación maestra para un átomo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{\rho} = & -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}_A, \hat{\rho}] + N_0^+ \sum_{i=1}^M \gamma_i \left(\hat{\sigma}_{i-} \hat{\rho} \hat{\sigma}_{i+} - \frac{1}{2} \{ \hat{\sigma}_{i+} \hat{\sigma}_{i-}, \hat{\rho} \} \right) \\ & + N_0 \sum_{i=1}^M \gamma_i \left(\hat{\sigma}_{i+} \hat{\rho} \hat{\sigma}_{i-} - \frac{1}{2} \{ \hat{\sigma}_{i-} \hat{\sigma}_{i+}, \hat{\rho} \} \right), \end{aligned} \quad (2.107)$$

donde \hat{H}_A se definió en (2.39), los productos de los operadores $\hat{\sigma}_{i-}$ y $\hat{\sigma}_{i+}$ se pueden expresar en términos de $2\hat{\sigma}_3^i = [\hat{\sigma}_{i+}, \hat{\sigma}_{i-}]$ usando (2.69) y el índice i corre sobre todas las transiciones dipolares permitidas.

Superoperadores colectivos

La ecuación (2.107) es una ecuación de operadores y, como mencionamos antes, estos operadores son elementos de un espacio de Liouville, en este caso de $(M + 1)^2$ dimensiones,

2. Ecuación maestra de Lindblad para átomos de muchos niveles

$\mathcal{L}_{(M+1)^2}$. En la notación de Dirac $|\cdot\rangle$ y en términos de superoperadores, esta ecuación se escribe

$$\frac{d}{dt}|\hat{\rho}\rangle = \check{S}|\hat{\rho}\rangle, \quad (2.108)$$

donde

$$\check{S} = \sum_{i,j=1}^{(M+1)^2} s_{ij} \hat{F}_i \cdot \hat{G}_j \in \mathfrak{gl}((M+1)^2) \quad (2.109)$$

es el superoperador más general que actúa sobre $\mathcal{L}_{(M+1)^2}$ y $\hat{F}_i, \hat{G}_j \in \{\hat{I}_{M+1}\} \cup \mathcal{B}_{M+1} \cdot \mathcal{B}_{M+1}$ es la base del álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(M+1)$ definida en (2.34), aunque con las matrices de B_0 multiplicadas por un factor de 1/2. Denotamos ese conjunto como B_3 .

La representación matricial de (2.109) está dada por

$$S = \sum_{i,j=1}^{(M+1)^2} s_{ij} F_i \otimes G_j^\dagger. \quad (2.110)$$

A partir de la definición de la base del álgebra $\mathfrak{sl}(n)$ (2.34), sabemos que las matrices en B_+ (resp. B_-) son triangulares superiores (resp. inferiores) y las matrices en B_3 son diagonales. Usando las propiedades del producto tensorial de matrices, las $(M+1)^4$ matrices $F_i \otimes G_j^\dagger$ se pueden agrupar en tres conjuntos: el primero consiste de $(M+1)^2$ matrices diagonales: una es la identidad $\mathbb{I}_{M+1} \otimes \mathbb{I}_{M+1} = \mathbb{I}_{(M+1)^2}$ y las restantes las denotamos como \mathbb{M}_3 ; se obtienen al hacer todos los productos tensoriales entre las matrices en $X = \{\mathbb{I}_{M+1}\} \cup B_3$ (excepto $\mathbb{I}_{M+1} \otimes \mathbb{I}_{M+1}$). De las $(M+1)^4 - (M+1)^2$ matrices restantes, la mitad son triangulares superiores (resp. inferiores) y las denotamos como \mathbb{M}_+ (resp. \mathbb{M}_-); se obtienen al hacer todos los productos tensoriales entre las matrices en B_+ (resp. B_-), el producto tensorial de cada matriz en X con cada matriz en B_+ (resp. B_-), el producto tensorial de cada matriz en B_+ (resp. B_-) con cada matriz en X y el producto tensorial de cada matriz en B_+ (resp. B_-) con cada matriz en B_- (resp. B_+).

En términos de las supermatrices en $\mathbb{M}_3, \mathbb{M}_+, \mathbb{M}_-$, la ecuación (2.110) se escribe

$$S = s_0 \check{I}_{(M+1)^2} + \sum_{p=1}^{(M+1)^2-1} s_3^p M_3^p + \sum_{q=1}^{q'} s_+^q M_+^q + \sum_{r=1}^{r'} s_-^r M_-^r, \quad q' = r' = \frac{1}{2}[(M+1)^4 - (M+1)^2]. \quad (2.111)$$

Las supermatrices en $\mathbb{M}_3, \mathbb{M}_+, \mathbb{M}_-$ son de orden $(M+1)^2 \times (M+1)^2$ y se pueden escribir,

2.3. Estados simétricos y superoperadores colectivos

en términos de la base de $\mathfrak{sl}((M+1)^2)$, $\mathcal{B}_{(M+1)^2}$, como

$$M_3^p = \sum_{m=1}^{(M+1)^2-1} a_m^p B_3^m, \quad p = 1, 2, \dots, (M+1)^2 - 1 \quad (2.112a)$$

$$M_+^q = \sum_{m=1}^{(M+1)^2-1} \sum_{n=m+1}^{(M+1)^2} a_{m,n}^q \mathcal{E}_{m,n}, \quad q = 1, 2, \dots, q', \quad (2.112b)$$

$$M_-^r = \sum_{m=1}^{(M+1)^2-1} \sum_{n=m+1}^{(M+1)^2} a_{n,m}^r \mathcal{E}_{n,m}, \quad r = 1, 2, \dots, r', \quad (2.112c)$$

donde $\mathcal{E}_{m,n}$ son las matrices elementales definidas en la sección 2.1.2. Por lo tanto, de las ecuaciones (2.112) se obtienen $\frac{1}{2}((M+1)^4 - (M+1)^2)$ supermatrices de ascenso y sus correspondientes supermatrices de descenso, que son combinaciones lineales de las supermatrices $M_+^q \in \mathbb{M}_+$ y $M_-^r \in \mathbb{M}_-$

$$A_+^k := \mathcal{E}_{m,n} = \sum_{q=1}^{q'} b_q^k M_+^q, \quad A_-^k := \mathcal{E}_{n,m} = \sum_{r=1}^{r'} b_r^k M_-^r, \quad (2.113)$$

donde $m = 1, 2, \dots, (M+1)^2 - 1$, $n = m+1, m+2, \dots, (M+1)^2$ y $k = 0, 1, \dots, \frac{1}{2}[(M+1)^4 - (M+1)^2] - 1$. También se obtienen las supermatrices

$$B_3^m = \sum_{p=1}^{(M+1)^2-1} b_p^m M_3^p, \quad m = 1, 2, \dots, (M+1)^2 - 1. \quad (2.114)$$

Usando las relaciones de conmutación de $\mathfrak{sl}(2)$ (2.37) podemos definir a las supermatrices A_3^k como $2A_3^k = [A_+^k, A_-^k]$. Por lo tanto, el índice k enumera $\frac{1}{2}[(M+1)^4 - (M+1)^2]$ álgebras $\mathfrak{sl}(2)$. Recordando la ecuación (2.32) notamos que las supermatrices $2A_3^{k'} = [\mathcal{E}_{m,n}, \mathcal{E}_{n,m}]$ con $m = 1, 2, \dots, (M+1)^2 - 1$ y $n = m+1$ son justamente las supermatrices B_3^m . Dado que el álgebra $\mathfrak{sl}((M+1)^2)$ tiene rango $(M+1)^2 - 1$, sólo $M^2 + 2M$ de las $\frac{1}{2}[(M+1)^4 - (M+1)^2]$ supermatrices A_3^k son linealmente independientes. Las supermatrices restantes son combinaciones lineales de las supermatrices $A_3^{k'}$.

A partir de lo anterior, la ecuación (2.107) se puede escribir en términos de los superoperadores $\check{A}_{\pm,3}^{k(1)}$ correspondientes a las supermatrices $A_{\pm,3}^k$. Debido a la libertad para elegir un conjunto de superoperadores $\check{A}_3^{k(1)}$ independientes, hay distintas maneras de hacer esto. Dado que la ecuación (2.53) contiene N términos como (2.107), cada uno actuando sobre el espacio de Hilbert de un átomo, entonces podemos definir a los superoperadores colectivos como

$$\check{A}_{\pm,3}^k := \sum_{\mu=1}^N \check{I}_{(M+1)^2}^{(1)} \otimes \check{I}_{(M+1)^2}^{(2)} \otimes \cdots \otimes \check{A}_{\pm,3}^{k(\mu)} \otimes \cdots \otimes \check{I}_{(M+1)^2}^{(N)}. \quad (2.115)$$

2. Ecuación maestra de Lindblad para átomos de muchos niveles

Con el mismo argumento de la sección anterior, para cada k los superoperadores colectivos satisfacen las relaciones de conmutación del álgebra $\mathfrak{sl}(2)$. También de manera análoga, existe un conjunto de autovectores comunes de \check{C}^k y \check{A}_3^k con $k = 0, 1, \dots, \frac{1}{2}[(M+1)^4 - (M+1)^2] - 1$.

Estados simétricos mixtos

Un operador de estado simétrico de N átomos con $M+1$ niveles es un elemento del subespacio simétrico del espacio de Liouville de N átomos con $M+1$ niveles, $\mathcal{S}(\mathcal{L}_{(M+1)^2}^{\otimes N})$. Un elemento de la base de este subespacio está dado por

$$|\hat{S}\rangle = K \sum_P \check{P} \bigotimes_{i,j=0}^M |ij\rangle^{\otimes \alpha_{ij}}, \quad (2.116)$$

donde P son todas las permutaciones de dos subíndices (como en la sección anterior) que no producen productos tensoriales repetidos, $|ij\rangle$ son los vectores base unitarios en el espacio de Liouville de $(M+1)^2$ dimensiones, $\mathcal{L}_{(M+1)^2}$,

$$\begin{aligned} & |M, M\rangle \cdots |M, 0\rangle \quad |M-1, M\rangle \cdots |M-1, 0\rangle \cdots |0, M\rangle \cdots |0, 0\rangle \\ & \begin{bmatrix} 1_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1_M \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1_{M+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1_{2M+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1_{M^2+M-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 1_{M^2+2M} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.117)$$

los índices griegos denotan la ocupación del vector $|ij\rangle$ (definida en la sección anterior) y satisfacen

$$\sum_{i,j=0}^M \alpha_{ij} = N \quad (2.118)$$

y

$$K = \frac{\prod_{i,j=0}^M \alpha_{ij}!}{N!} \quad (2.119)$$

es una constante de normalización. Los subíndices en (2.117) indican la entrada del vector que vale uno.

Los superoperadores $\check{A}_{\pm,3}^{k(1)}$ actúan de manera no trivial sobre un subespacio de dos dimensiones, por lo cual al calcular su acción sobre los vectores (2.117) se obtendrán tablas similares a las mostradas en el apéndice B. De manera análoga a la sección anterior, calculando la acción de \check{C}^k y \check{A}_3^k sobre $|\hat{S}\rangle$ se concluye que $|\hat{S}\rangle$ es un autovector de estos superoperadores con autovalores $a^k(a^k+1)$ y a_3^k respectivamente. Por brevedad, llamaremos simplemente a^k al primer autovalor.

Por lo anterior, cada par de autovalores a^k y a_3^k está relacionado con dos índices griegos α_{ij} y α'_{ij} . Recordamos (2.118) que solamente M^2+2M índices griegos son independientes.

2.3. Estados simétricos y superoperadores colectivos

Por lo tanto, para poder describir completamente al vector simétrico son necesarios el mismo número de autovalores independientes. Estos autovalores corresponden a

$$R = \begin{cases} \frac{1}{2}(M^2 + 2M), & \text{si } M \text{ es par} \\ \frac{1}{2}(M + 1)^2, & \text{si } M \text{ es impar} \end{cases} \quad (2.120)$$

pares de superoperadores \check{C}^k y \check{A}_3^k , que actúan de manera no trivial sobre distintos pares de vectores $|ij\rangle$. Otra manera de decir esto es que se necesitan R álgebras $\mathfrak{sl}(2)$ tales que los superoperadores de un álgebra conmutan con los superoperadores de cualquiera de las otras álgebras. Para determinar cuáles álgebras satisfacen esta condición se deben calcular los conmutadores de los generadores de cada álgebra con los de todas las demás. Una vez que se elige un conjunto de álgebras que satisfacen esta condición, se obtiene la relación entre los índices griegos independientes α_{ij} y las etiquetas a^k y a_3^k con $k = 1, 2, \dots, M^2 + 2M$ como en las ecuaciones (2.89).

Siguiendo el procedimiento de la sección anterior, resulta que las etiquetas a^k toman valores en $\{0, \frac{1}{2}, \dots, N/2\}$ y las etiquetas a_3^k toman valores en $\{-a^k, -a^k + 1, \dots, a^k - 1, a^k\}$. Además, las etiquetas a^k satisfacen la condición

$$\sum_{k=1}^{M^2+2M} a^k = \frac{N}{2}. \quad (2.121)$$

La dimensión de $\mathcal{S}(\mathcal{L}_{(M+1)^2}^{\otimes N})$ está dada por ($M' = M^2 + 2M$)

$$\sum_{a^{M'}=0}^{N/2} \sum_{a_3^{M'}=-a^{M'}}^{a^{M'}} \cdots \sum_{a^2=0}^{N/2-\sum_{k=3}^{M'} a^k} \sum_{a_3^2=-a^2}^{a^2} \sum_{a^1=0}^{N/2-\sum_{k=2}^{M'} a^k} \sum_{a_3^1=-a^1}^{a^1} 1 = \binom{N + (M+1)^2 - 1}{N}. \quad (2.122)$$

El número de vectores simétricos (2.122) es igual al número de maneras de distribuir N objetos idénticos en $(M+1)^2$ contenedores, tal que los contenedores pueden quedar vacíos [34]. En este caso, los contenedores son los vectores base $|ij\rangle$.

3. Solución de la ecuación maestra de Lindblad para átomos de tres niveles

En este capítulo presentamos la solución analítica de la ecuación maestra de Lindblad para N átomos de tres niveles en la configuración Λ , que interaccionan con un baño térmico. La elección de la configuración Λ es arbitraria. Para propósitos de mostrar cómo encontrar la solución analítica de la ecuación maestra, las distintas configuración atómicas son equivalentes. Sin embargo, tenemos presente que la física de cada configuración es diferente y muy interesante.

Con el propósito de ilustrar el resultado, consideramos estados iniciales con uno, dos y tres átomos excitados, calculamos el correspondiente operador de estado al tiempo t y representamos gráficamente su evolución temporal.

3.1. Conceptos matemáticos

Los resultados de este capítulo se basan en el cálculo de la exponencial de una matriz. En esta sección explicamos cómo hacerlo.

DEFINICIÓN. La exponencial de una matriz compleja A de orden $n \times n$ se define como

$$e^A = \mathbb{I} + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots \quad (3.1)$$

TEOREMA. La serie (3.1) converge absolutamente y uniformemente en conjuntos acotados de matrices complejas.

TEOREMA. Sean A y B matrices complejas de orden $n \times n$ que conmutan: $AB = BA$. Entonces $e^{A+B} = e^A e^B$.

TEOREMA (CAYLEY-HAMILTON). Sea $p(t) = t^n + c_{n-1}t^{n-1} + \dots + c_1t + c_0$ el polinomio característico de una matriz compleja A de orden $n \times n$. Entonces

$$p(A) = A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \dots + c_1A + c_0\mathbb{I} \quad (3.2)$$

es la matriz nula.

Las demostraciones de los teoremas anteriores están en el libro de Artin [35].

La mayoría de los libros de álgebra lineal o de ecuaciones diferenciales alertan al lector sobre la dificultad de calcular la exponencial de una matriz cuadrada arbitraria y típicamente se limitan a los casos sencillos de matrices diagonales, matrices triangulares y matrices diagonalizables. En el caso general se debe recurrir a la forma canónica de Jordan [35]. Sorprendentemente, estos libros ignoran que en 1966 Putzer [36] presentó dos

3. Solución de la ecuación maestra de Lindblad para átomos de tres niveles

algoritmos basados en el teorema de Cayley-Hamilton para calcular la exponencial de cualquier matriz cuadrada. Uno requiere resolver un sistema de ecuaciones algebraicas y el otro requiere resolver un sistema de ecuaciones diferenciales. Estos algoritmos fueron creados intencionalmente para evitar utilizar la forma canónica de Jordan. Los libros de Horn [37] y Kelley [38] sí mencionan y describen los algoritmos de Putzer. Desde 1966 se han publicado varios algoritmos para calcular la exponencial de una matriz sin utilizar la forma canónica de Jordan [39], [40], [41], [42]. En este capítulo utilizamos el algoritmo de Leonard [42], el cual describimos a continuación.

Usando el teorema de Cayley-Hamilton la exponencial de una matriz A de orden $n \times n$ se puede escribir como [42]

$$e^{At} = x_0(t)\mathbb{I} + x_1(t)A + x_2(t)A^2 + \cdots + x_{n-1}(t)A^{n-1}, \quad (3.3)$$

donde los coeficientes $x_j(t)$, $0 \leq j \leq n-1$, son las soluciones de la ecuación diferencial de orden n

$$x^{(n)} + c_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + c_1x' + c_0x = 0, \quad (3.4)$$

con las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} x_0(0) &= 1, & x'_0(0) &= 0, & \dots, & x_0^{(n-1)}(0) &= 0 \\ x_1(0) &= 0, & x'_1(0) &= 1, & \dots, & x_1^{(n-1)}(0) &= 0 \\ & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ x_{n-1}(0) &= 0, & x'_{n-1}(0) &= 0, & \dots, & x_{n-1}^{(n-1)}(0) &= 1 \end{aligned} \quad (3.5)$$

y se escriben así:

$$x_j(t) = f_{j,1}(t)e^{\lambda_1 t} + f_{j,2}(t)e^{\lambda_2 t} + \cdots + f_{j,n}(t)e^{\lambda_n t}. \quad (3.6)$$

En (3.6) la contribución de cada autovalor λ_k con multiplicidad m es de la forma

$$f_{j,k}(t) := a_{j,k,0} + a_{j,k,1}t + a_{j,k,2}t^2 + \cdots + a_{j,k,m-1}t^{m-1} \quad (3.7)$$

y los coeficientes $a_{j,k,i}$ se obtienen resolviendo el sistema de ecuaciones algebraicas (3.5).

3.2. Estado del sistema al tiempo t

En el capítulo anterior presentamos la ecuación maestra de Lindblad para N átomos de tres niveles en la configuración Λ

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{\rho}] + (\check{L}_{21} + \check{L}_{20})\hat{\rho}, \quad (3.8)$$

donde los procesos disipativos asociados a cada transición dipolar están dados por el superoperador de Lindblad ($N_0^+ = N_0 + 1$)

$$\check{L}_{ij}[\hat{\rho}] = N_0^+ \sum_{\mu=1}^N \gamma_{ij} \left(\hat{\sigma}_{ij-}^{\mu} \hat{\rho} \hat{\sigma}_{ij+}^{\mu} - \frac{1}{2} \{ \hat{\sigma}_{ij+}^{\mu} \hat{\sigma}_{ij-}^{\mu}, \hat{\rho} \} \right) + N_0 \gamma_{ij} \left(\hat{\sigma}_{ij+}^{\mu} \hat{\rho} \hat{\sigma}_{ij-}^{\mu} - \frac{1}{2} \{ \hat{\sigma}_{ij-}^{\mu} \hat{\sigma}_{ij+}^{\mu}, \hat{\rho} \} \right) \quad (3.9)$$

y el hamiltoniano del sistema es

$$\hat{H} = \sum_{\mu=1}^N \hat{H}_{\mu}, \quad \hat{H}_{\mu} = \tilde{E}_0 \hat{\sigma}_3^{02(\mu)} + \tilde{E}_1 \hat{\sigma}_3^{12(\mu)}, \quad \tilde{E}_i = 2(\bar{E} - E_i), \quad \bar{E} = \frac{1}{3} \sum_i E_i. \quad (3.10)$$

Uno de los resultados más importantes de ese capítulo fue la construcción de un conjunto de superoperadores colectivos $\check{A}_{\pm,3}^k$, $k = 0, 1, \dots, 35$, con los cuales se pueden etiquetar los vectores simétricos y además, como mostraremos en esta sección, permiten calcular la solución analítica de la ecuación maestra (3.8). Para ello, primero vamos a escribir esta ecuación en términos de esos superoperadores y posteriormente vamos a obtener el operador de estado del sistema al tiempo t . El procedimiento para las configuraciones V y Ξ es análogo.

La ecuación maestra (3.8) es la suma de N términos, cada uno actuando sobre el espacio de Liouville de un átomo de tres niveles \mathcal{L}_{3^2} ,

$$-\frac{i}{\hbar} [\hat{H}_{\mu}, \hat{\rho}] + N_0^+ \gamma_{21} \left(\hat{\sigma}_-^{21} \hat{\rho} \hat{\sigma}_+^{21} - \frac{1}{2} \{ \hat{\sigma}_+^{21} \hat{\sigma}_-^{21}, \hat{\rho} \} \right) + N_0 \gamma_{21} \left(\hat{\sigma}_+^{21} \hat{\rho} \hat{\sigma}_-^{21} - \frac{1}{2} \{ \hat{\sigma}_-^{21} \hat{\sigma}_+^{21}, \hat{\rho} \} \right) + \check{L}_{20}^1 \hat{\rho}, \quad (3.11)$$

donde \check{L}_{20}^1 es la restricción de (3.9) a un átomo y

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{20-} \hat{\sigma}_{20+} &= \frac{1}{3} (\hat{I}_3 - 4\hat{\sigma}_3^{02} + 2\hat{\sigma}_3^{12}), & \hat{\sigma}_{21-} \hat{\sigma}_{21+} &= \frac{1}{3} (\hat{I}_3 + 2\hat{\sigma}_3^{02} - 4\hat{\sigma}_3^{12}), \\ \hat{\sigma}_{21+} \hat{\sigma}_{21-} &= \hat{\sigma}_{20+} \hat{\sigma}_{20-} = \frac{1}{3} (\hat{I}_3 + 2\hat{\sigma}_3^{02} + 2\hat{\sigma}_3^{12}). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Consultando el apéndice A inmediatamente podemos reemplazar en (3.8) las sumas de superoperadores $\hat{\sigma}_{\pm}^{21} \cdot \hat{\sigma}_{\mp}^{21}$ y $\hat{\sigma}_{\pm}^{20} \cdot \hat{\sigma}_{\mp}^{20}$ por los superoperadores \check{A}_{\pm}^3 y \check{A}_{\pm}^7 . También es claro que la suma de N términos $\hat{I}_3 \cdot \hat{I}_3$ es igual a $N\check{I}_9$. Las sumas de superoperadores de la forma $\hat{A} \cdot \hat{I}_3$ e $\hat{I}_3 \cdot \hat{A}$ con $\hat{A} \in \{\hat{\sigma}_3^{02}, \hat{\sigma}_3^{12}\}$ se pueden expresar como combinación lineal de distintos conjuntos de superoperadores \check{A}_3^k linealmente independientes. Por ejemplo, como se muestra en el apéndice A, podrían escribirse en términos de los superoperadores $\check{A}_3^0, \check{A}_3^8, \check{A}_3^{15}, \check{A}_3^{21}, \check{A}_3^{26}, \check{A}_3^{30}, \check{A}_3^{33}$ y \check{A}_3^{35} . Sin embargo, como explicaremos más adelante, es necesario que el conjunto base de los superoperadores \check{A}_3^k contenga a los superoperadores \check{A}_3^3 y \check{A}_3^7 . De esta manera tendremos a todos los generadores de las álgebras \mathcal{A}^3 y \mathcal{A}^7 .

Para encontrar un conjunto de ocho superoperadores \check{A}_3^k linealmente independientes, que incluya a \check{A}_3^3 y \check{A}_3^7 , procedemos de la siguiente manera: a partir de la tabla 2.2 podemos encontrar todos los cuartetos de álgebras, que incluyen a \mathcal{A}^3 y satisfacen que todos los generadores de un álgebra conmutan con todos los generadores de las otras álgebras. Análogamente para \mathcal{A}^7 . Dado un cuarteto de cada una de estas dos álgebras se tienen ocho superoperadores \check{A}_3^k . Si este conjunto es linealmente independiente, hemos encontrado lo que buscamos. De esta manera obtenemos el conjunto

$$\{\check{A}_3^3, \check{A}_3^9, \check{A}_3^{17}, \check{A}_3^{33}, \check{A}_3^7, \check{A}_3^{13}, \check{A}_3^{22}, \check{A}_3^{27}\}, \quad (3.13)$$

3. Solución de la ecuación maestra de Lindblad para átomos de tres niveles

en términos del cual:

$$\begin{aligned}
\sum_{\mu=1}^N \hat{\sigma}_3^{12(\mu)} \hat{\rho} \hat{I}_3^{(\mu)} &= (\check{A}_3^{17} + \check{A}_3^3 + \check{A}_3^9) \hat{\rho}, & \sum_{\mu=1}^N \hat{I}_3^{(\mu)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_3^{12(\mu)} &= (\check{A}_3^{33} + \check{A}_3^3 - \check{A}_3^9) \hat{\rho}, \\
\sum_{\mu=1}^N \hat{\sigma}_3^{02(\mu)} \hat{\rho} \hat{I}_3^{(\mu)} &= (2\check{A}_3^{13} + \check{A}_3^{17} - \check{A}_3^{22} - \check{A}_3^{33} + \check{A}_3^7 - \check{A}_3^9) \hat{\rho}, & & \\
\sum_{\mu=1}^N \hat{I}_3^{(\mu)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_3^{02(\mu)} &= (-\check{A}_3^{13} - \check{A}_3^{17} + 2\check{A}_3^{22} + \check{A}_3^{33} + \check{A}_3^7 + \check{A}_3^9) \hat{\rho}. & &
\end{aligned} \tag{3.14}$$

A partir de lo anterior, en términos de los superoperadores $\check{A}_{\pm,3}^k$, la ecuación maestra (3.8) se escribe:

$$\begin{aligned}
\frac{d|\hat{\rho}\rangle}{dt} &= \left[N_0 \gamma_{20} \check{A}_+^7 + N_0 \gamma_{21} \check{A}_+^3 + \gamma_{20} N_0^+ \check{A}_-^7 + \gamma_{21} N_0^+ \check{A}_-^3 + \frac{2}{3} (N_0^- \gamma_{20} - \gamma_{21} \tilde{N}_0) \check{A}_3^7 \right. \\
&+ \frac{2}{3} (N_0^- \gamma_{21} - \gamma_{20} \tilde{N}_0) \check{A}_3^3 - \frac{1}{3} \gamma \tilde{N}_0 N \check{I}_9 - 4 \frac{i}{\hbar} (2E_0 + E_2 - 3\bar{E}) \check{A}_3^9 \\
&+ \left(-3 \frac{i}{\hbar} \tilde{E}_0 + \frac{N_0^- \gamma_{20}}{3} - \frac{\gamma_{21} \tilde{N}_0}{3} \right) \check{A}_3^{13} + \left(-2 \frac{i}{\hbar} (E_2 - E_0) + \frac{N_0^- \gamma_{21}}{3} - \frac{\gamma_{20} \tilde{N}_0}{3} \right) \check{A}_3^{17} \\
&+ \left. \left(2 \frac{i}{\hbar} (E_2 - E_0) + \frac{N_0^- \gamma_{21}}{3} - \frac{\gamma_{20} \tilde{N}_0}{3} \right) \check{A}_3^{33} + \left(3 \frac{i}{\hbar} \tilde{E}_0 + \frac{N_0^- \gamma_{20}}{3} - \frac{\gamma_{21} \tilde{N}_0}{3} \right) \check{A}_3^{22} \right] |\hat{\rho}\rangle \\
&:= \check{L} |\hat{\rho}\rangle, \tag{3.15}
\end{aligned}$$

donde definimos $\gamma = \gamma_{20} + \gamma_{21}$, $N_0^\pm = N_0 \pm 1$, $\tilde{N}_0 = 2N_0 + 1$.

Dado que el Liouvilliano \check{L} no depende del tiempo, la solución formal de la ecuación (3.15) está dada por:

$$|\hat{\rho}(t)\rangle = e^{\check{L}t} |\hat{\rho}(0)\rangle. \tag{3.16}$$

En principio, podemos evaluar esta expresión utilizando el desarrollo en serie de la exponencial,

$$\exp \left[t \sum_i \alpha_i \check{X}_i \right] = e^{t\check{Y}}, \tag{3.17}$$

calculando la acción de las potencias de \check{Y} sobre el estado inicial, $\check{Y}^n |\hat{\rho}(0)\rangle$. Sin embargo, este procedimiento puede ser muy tedioso. El cálculo sería más sencillo si fuera posible expresar la exponencial (3.17) como un producto de exponenciales de superoperadores, cuya acción sobre $|\hat{\rho}(0)\rangle$ es más fácil de evaluar. Este cambio de representación se conoce como *desenredar la exponencial*.

Usando la representación matricial de los superoperadores se tiene que si dos superoperadores \check{A} y \check{B} conmutan, entonces $e^{\check{A}+\check{B}} = e^{\check{A}} e^{\check{B}}$. Por lo tanto, a partir de las relaciones

Tabla 3.1.: Relaciones de conmutación entre los superoperadores de las álgebras \mathcal{A}^3 , \mathcal{A}^7 y \mathcal{A}^{29} .

	\check{A}_+^3	\check{A}_+^7	\check{A}_+^{29}	\check{A}_3^3	\check{A}_3^7	\check{A}_3^{29}	\check{A}_-^3	\check{A}_-^7	\check{A}_-^{29}
\check{A}_+^3	0	0	\check{A}_+^7	$-\check{A}_+^3$	$-\frac{1}{2}\check{A}_+^3$	$\frac{1}{2}\check{A}_+^3$	$2\check{A}_3^3$	$-\check{A}_-^{29}$	0
\check{A}_+^7	0	0	0	$-\frac{1}{2}\check{A}_+^7$	$-\check{A}_+^7$	$-\frac{1}{2}\check{A}_+^7$	$-\check{A}_+^{29}$	$2\check{A}_3^7$	\check{A}_+^3
\check{A}_+^{29}	$-\check{A}_+^7$	0	0	$\frac{1}{2}\check{A}_+^{29}$	$-\frac{1}{2}\check{A}_+^{29}$	$-\check{A}_+^{29}$	0	\check{A}_-^3	$2\check{A}_3^{29}$
\check{A}_3^3	\check{A}_+^3	$\frac{1}{2}\check{A}_+^7$	$-\frac{1}{2}\check{A}_+^{29}$	0	0	0	$-\check{A}_-^3$	$-\frac{1}{2}\check{A}_-^7$	$\frac{1}{2}\check{A}_-^{29}$
\check{A}_3^7	$\frac{1}{2}\check{A}_+^3$	\check{A}_+^7	$\frac{1}{2}\check{A}_+^{29}$	0	0	0	$-\frac{1}{2}\check{A}_-^3$	$-\check{A}_-^7$	$-\frac{1}{2}\check{A}_-^{29}$
\check{A}_3^{29}	$-\frac{1}{2}\check{A}_+^3$	$\frac{1}{2}\check{A}_+^7$	\check{A}_+^{29}	0	0	0	$\frac{1}{2}\check{A}_-^3$	$-\frac{1}{2}\check{A}_-^7$	$-\check{A}_-^{29}$
\check{A}_-^3	$-2\check{A}_3^3$	\check{A}_+^{29}	0	\check{A}_-^3	$\frac{1}{2}\check{A}_-^3$	$-\frac{1}{2}\check{A}_-^3$	0	0	$-\check{A}_-^7$
\check{A}_-^7	\check{A}_-^{29}	$-2\check{A}_3^7$	$-\check{A}_-^3$	$\frac{1}{2}\check{A}_-^7$	\check{A}_-^7	$\frac{1}{2}\check{A}_-^7$	0	0	0
\check{A}_-^{29}	0	$-\check{A}_+^3$	$-2\check{A}_3^{29}$	$-\frac{1}{2}\check{A}_-^{29}$	$\frac{1}{2}\check{A}_-^{29}$	\check{A}_-^{29}	\check{A}_-^7	0	0

de conmutación $[\check{A}_3^k, \check{A}_3^{k'}] = 0$ la ecuación (3.16) se simplifica:

$$\begin{aligned}
|\hat{\rho}\rangle(t) = & \exp(\alpha_1 \check{A}_9 t) \exp(\alpha_2 \check{A}_3^9 t) \exp(\alpha_3 \check{A}_3^{13} t) \exp(\alpha_4 \check{A}_3^{17} t) \exp(\alpha_5 \check{A}_3^{22} t) \exp(\alpha_6 \check{A}_3^{33} t) \cdot \\
& \cdot \exp\left[(\alpha_3^3 \check{A}_3^3 + \alpha_3^7 \check{A}_3^7 + \alpha_3^{29} \check{A}_3^{29} + \alpha_-^3 \check{A}_-^3 + \alpha_-^7 \check{A}_-^7 + \alpha_+^3 \check{A}_+^3 + \alpha_+^7 \check{A}_+^7) t\right] |\hat{\rho}(0)\rangle. \quad (3.18)
\end{aligned}$$

Recordamos que el operador de estado inicial se escribe en términos de los vectores simétricos construidos en el capítulo anterior. Para calcular el operador de estado al tiempo t a partir de (3.18) es conveniente etiquetar a los vectores simétricos en términos de superoperadores que pertenezcan a un cuarteto de álgebras tales que los generadores de un álgebra conmutan con los de cualquier otra. El conjunto (3.13) lo construimos a partir de dos cuartetos así. En particular, contiene al cuarteto $\{\mathcal{A}^7, \mathcal{A}^{13}, \mathcal{A}^{22}, \mathcal{A}^{27}\}$. Ésta es la justificación de la elección de etiquetas que usamos para especificar los vectores simétricos en el capítulo anterior.

Como muestra la tabla 3.1, los superoperadores que aparecen en el exponente de la última exponencial en (3.18) satisfacen las relaciones de conmutación del álgebra $\mathfrak{sl}(3)$ [25](p. 34). De hecho, su representación matricial corresponde con la representación de nueve dimensiones de esta álgebra. El álgebra \mathcal{A}^{29} está relacionada con la transición que está prohibida en la configuración Λ , pero que está permitida en las otras configuraciones de tres niveles. Es bien conocido que cuando los superoperadores en el exponente del lado izquierdo de (3.17) son generadores de un álgebra de Lie, entonces podemos desenredar la

3. Solución de la ecuación maestra de Lindblad para átomos de tres niveles

exponencial como [43]

$$\exp \left[t \sum_i \alpha_i \check{X}_i \right] = \prod_i \exp \left[\beta_i(t) \check{X}_i \right]. \quad (3.19)$$

En el caso de $\mathfrak{sl}(3)$ se tiene

$$\exp \left[\left(\sum_j \alpha_+^j \check{A}_+^j + \sum_j \alpha_3^j \check{A}_3^j + \sum_j \alpha_-^j \check{A}_-^j \right) t \right] = \quad (3.20)$$

$$\prod_i \exp \left(\beta_+^i(t) \check{A}_+^i \right) \prod_j \exp \left(\log \beta_3^j(t) \check{A}_3^j \right) \prod_k \exp \left(\beta_-^k(t) \check{A}_-^k \right), \quad (3.21)$$

donde $i = 3, 7, 29$; $j = 3, 7$; $k = 29, 7, 3$ y escribimos el lado derecho en orden normal, es decir, todos los superoperadores de descenso están a la derecha de todos los superoperadores de ascenso. También se puede escribir en orden antinormal, con todos los superoperadores de ascenso a la derecha de todos los superoperadores de descenso. Los coeficientes $\log \beta_3^j(t)$ se escogen así porque la matriz asociada a los superoperadores \check{A}_3^j es diagonal.

Dado que los coeficientes α son conocidos, hace falta determinar los coeficientes β . Existen distintos procedimientos para llevar esto a cabo. En casos sencillos se pueden calcular las exponenciales usando la serie de Maclaurin. En otros casos se suele utilizar el método de la derivada paramétrica para plantear un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales acopladas. Aquí vamos a utilizar el método de Leonard para calcular las exponenciales por considerarlo más eficiente que las alternativas anteriores. Usando la representación matricial de tres dimensiones del álgebra $\mathfrak{sl}(3)$, calculamos la exponencial del lado izquierdo y el producto de las exponenciales del lado derecho. De esta manera se obtiene un sistema de ecuaciones algebraicas, que permite obtener los coeficientes β en términos de los coeficientes α :

$$\begin{aligned} \beta_+^3 &= \frac{\sqrt{\beta_3^3}}{2b\sqrt{\beta_3^7}} \left[\alpha_+^3 (\beta_3^7)^{\frac{3}{2}} b_7 + \beta_-^{29} \left(\alpha_+^3 \beta_+^{29} \sqrt{\beta_3^3} \beta_3^7 b_7 - \alpha_+^7 \sqrt{\beta_3^7} b_3 b \right) \right], \\ \beta_+^7 &= \frac{1}{2\beta_3^7} \left(-\alpha_+^3 \beta_+^{29} \sqrt{\beta_3^3} \beta_3^7 b_7 + \alpha_+^7 \sqrt{\beta_3^7} b_3 b \right), \\ \beta_+^{29} &= \alpha_-^3 \alpha_+^7 z_1 \left(\alpha_+^7 \alpha_-^7 z_1 + \frac{1}{4} (\alpha_3^7)^2 z_1 - \frac{1}{2} \alpha_3^7 z_0 + z_2 \right)^{-1}, \\ \beta_3^3 &= \left(-\alpha_+^3 \alpha_-^7 z_1 \beta_+^{29} + \alpha_+^3 \alpha_-^3 z_1 + \frac{1}{4} (\alpha_3^3)^2 z_1 - \frac{1}{2} \alpha_3^3 z_0 + z_2 \right)^{-2}, \\ \beta_3^7 &= \left(\frac{\beta_+^{29}}{\alpha_-^3 \alpha_+^7 z_1} \right)^2, \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned}\beta_-^3 &= \sqrt{\beta_3^3} \left(-\frac{1}{2} \alpha_3^3 \alpha_-^7 \beta_+^{29} z_1 + \frac{1}{2} \alpha_-^3 \alpha_3^7 z_1 + \alpha_-^3 z_0 - \alpha_-^7 \beta_+^{29} z_0 \right), \\ \beta_-^7 &= \frac{1}{2\beta_3^7} \left(-\alpha_-^3 \beta_-^{29} \sqrt{\beta_3^3} \beta_3^7 b_7 + \alpha_-^7 \sqrt{\beta_3^7} b_3 b \right), \\ \beta_-^{29} &= \frac{\beta_+^{29}}{\alpha_-^3 \alpha_+^7} \alpha_+^3 \alpha_-^7,\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}b &= \beta_+^{29} \beta_-^{29} \sqrt{\beta_3^3} \sqrt{\beta_3^7} + \beta_3^7, \quad b_7 = \alpha_3^7 z_1 + 2z_0, \quad b_3 = \alpha_3^3 z_1 + 2z_0, \\ z_0 &= -\frac{e^{\lambda_0 t}}{\lambda'''} (\lambda_1 + \lambda_2) + \frac{e^{\lambda_1 t}}{\lambda''} (\lambda_0 + \lambda_2) - \frac{e^{\lambda_2 t}}{\lambda'} (\lambda_0 + \lambda_1), \\ z_1 &= \frac{e^{\lambda_0 t}}{\lambda'''} - \frac{e^{\lambda_1 t}}{\lambda''} + \frac{e^{\lambda_2 t}}{\lambda'}, \\ z_2 &= \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda'''} e^{\lambda_0 t} - \frac{\lambda_0 \lambda_2}{\lambda''} e^{\lambda_1 t} + \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\lambda'} e^{\lambda_2 t}, \\ \lambda' &= \lambda_0 \lambda_1 - \lambda_0 \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2^2, \\ \lambda'' &= \lambda_0 \lambda_1 - \lambda_0 \lambda_2 - \lambda_1^2 + \lambda_1 \lambda_2, \\ \lambda''' &= \lambda_0^2 - \lambda_0 \lambda_1 - \lambda_0 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_2, \\ \lambda_0 &= p(q + \sqrt{q^2 + p^3})^{-1/3} - (q + \sqrt{q^2 + p^3})^{1/3}, \\ \lambda_1 &= pw^{-1}(q + \sqrt{q^2 + p^3})^{-1/3} - w(q + \sqrt{q^2 + p^3})^{1/3}, \\ \lambda_2 &= p\bar{w}^{-1}(q + \sqrt{q^2 + p^3})^{-1/3} - \bar{w}(q + \sqrt{q^2 + p^3})^{1/3}, \\ p &= -\frac{1}{3}(\alpha_+^3 \alpha_-^3 + \alpha_+^7 \alpha_-^7) - \frac{1}{12}[(\alpha_3^3)^2 + \alpha_3^3 \alpha_3^7 + (\alpha_3^7)^2], \\ q &= -\frac{1}{4}(\alpha_+^3 \alpha_-^3 \alpha_3^7 + \alpha_3^3 \alpha_+^7 \alpha_-^7) - \frac{1}{16}[(\alpha_3^3)^2 \alpha_3^7 + \alpha_3^3 (\alpha_3^7)^2], \\ w &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \bar{w} = \text{conj}(w).\end{aligned} \tag{3.23}$$

Cuando sólo ocurre emisión espontánea, es decir $N_0 = 0$, las expresiones de arriba se simplifican considerablemente:

$$\begin{aligned}0 &= \beta_+^3 = \beta_+^7 = \beta_+^{29} = \beta_-^{29}, \quad \beta_3^7 = e^{\alpha_3^7 t}, \quad \beta_3^3 = e^{\alpha_3^3 t}, \\ \beta_-^3 &= \frac{2\alpha_-^3}{2\alpha_3^3 + \alpha_3^7} \left[\exp\left(\alpha_3^3 t + \frac{\alpha_3^7 t}{2}\right) - 1 \right], \\ \beta_-^7 &= \frac{2\alpha_-^7}{\alpha_3^3 + 2\alpha_3^7} \left[\exp\left(\frac{\alpha_3^3 t}{2} + \alpha_3^7 t\right) - 1 \right].\end{aligned} \tag{3.24}$$

Dado que las expresiones (3.22) para los coeficientes β_i cuando $N_0 > 0$ son muy complicadas, en aras de simplificar la exposición en adelante consideraremos solamente el caso

3. Solución de la ecuación maestra de Lindblad para átomos de tres niveles

$N_0 = 0$. Entonces, sustituyendo los coeficientes α en (3.24), finalmente tenemos el estado del sistema al tiempo t :

$$\begin{aligned} |\hat{\rho}\rangle(t) = & \exp(\alpha'_1 \check{I}_9 t) \exp(\alpha'_2 \check{A}_3^9 t) \exp(\alpha'_3 \check{A}_3^{13} t) \exp(\alpha'_4 \check{A}_3^{17} t) \exp(\alpha'_5 \check{A}_3^{22} t) \exp(\alpha'_6 \check{A}_3^{33} t) \cdot \\ & \cdot \exp\left(-\frac{2}{3}\gamma \check{A}_3^3 t\right) \exp\left(-\frac{2}{3}\gamma \check{A}_3^7 t\right) \exp\left(\frac{\gamma_{20}}{\gamma} f(t) \check{A}_3^7\right) \exp\left(\frac{\gamma_{21}}{\gamma} f(t) \check{A}_3^3\right) |\hat{\rho}(0)\rangle, \end{aligned} \quad (3.25)$$

donde $f(t) = 1 - e^{-\gamma t}$ y α'_i son los coeficientes que se obtienen de (3.15) cuando $N_0 = 0$.

Dado que cualquier operador de estado inicial simétrico es combinación lineal de vectores base simétricos, sólo necesitamos calcular la evolución de estos vectores. Usando el desarrollo en serie de la exponencial, la tabla 2.1 y las tablas del apéndice C se obtiene

$$|\hat{S}\rangle(t) = C(t) \sum_{i=0}^{a^7+a_3^7} \sum_{i'=0}^{a^7+a_3^7-i} K_{ii'}(t) \binom{a^7+a_3^7-i}{i'} \binom{a^7+a_3^7}{i} Q_{\tilde{a}_3^7}^{a^7-i/2} a_3^{27+i/2} a_3^{22} a_3^{13} \quad (3.26)$$

con

$$\begin{aligned} C(t) &= \exp(\alpha'_1 t) \exp(\alpha'_2 a_3^9 t) \exp(\alpha'_3 a_3^{13} t) \exp(\alpha'_4 a_3^{17} t) \exp(\alpha'_5 a_3^{22} t) \exp(\alpha'_6 a_3^{33} t), \\ K_{ii'}(t) &= \exp\left(-\frac{2}{3}\gamma \tilde{a}_3^3 t\right) \exp\left(-\frac{2}{3}\gamma \tilde{a}_3^7 t\right) \left[\frac{\gamma_{20}}{\gamma} f(t)\right]^{i'} \left[\frac{\gamma_{21}}{\gamma} f(t)\right]^i, \\ \tilde{a}_3^3 &= \frac{1}{2}(a^7 + a_3^7 - 2i - i' - a^{27} - a_3^{27}), & \tilde{a}_3^7 &= a_3^7 - \frac{i}{2} - i', \\ a_3^{17} &= \frac{1}{2}(N - 2a^{13} - 3a^{22} + a_3^{22} - 2a^{27} - 2a^7), & a_3^9 &= \frac{1}{2}(a^{13} + a_3^{13} - a^{22} - a_3^{22}), \\ a_3^{33} &= \frac{1}{2}(a^{27} - a_3^{27} - a^{13} + a_3^{13}). \end{aligned}$$

A partir de lo anterior podemos calcular la evolución temporal de un sistema de N átomos de tres niveles en la configuración Λ cuando sólo ocurre emisión espontánea. Si el sistema inicialmente consiste de un átomo excitado, $|\hat{\rho}(0)\rangle = |22\rangle$, el estado del sistema al tiempo t está dado por

$$|\hat{\rho}^1(t)\rangle = \frac{\gamma_{20}}{\gamma} f(t) |00\rangle + \frac{\gamma_{21}}{\gamma} f(t) |11\rangle + |22\rangle e^{-\gamma t} \quad (3.27)$$

y la evolución de las poblaciones de los tres niveles se muestra en la figura 3.1.

Cuando inicialmente se tienen dos átomos excitados, $|\hat{\rho}(0)\rangle = |22\rangle^{\otimes 2}$, el estado simétrico del sistema al tiempo t está dado por

$$\begin{aligned} |\hat{\rho}^2(t)\rangle = & \frac{\gamma_{20}^2}{\gamma^2} f(t)^2 |00\rangle^{\otimes 2} + \frac{2\gamma_{20}}{\gamma^2} \gamma_{21} f(t)^2 \left(\frac{|00\rangle|11\rangle}{2} + \frac{|11\rangle|00\rangle}{2} \right) \\ & + \frac{2\gamma_{20}}{\gamma} f(t) \left(\frac{|00\rangle|22\rangle}{2} + \frac{|22\rangle|00\rangle}{2} \right) e^{-\gamma t} + \frac{\gamma_{21}^2}{\gamma^2} f(t)^2 |11\rangle^{\otimes 2} \\ & + \frac{2\gamma_{21}}{\gamma} f(t) \left(\frac{|11\rangle|22\rangle}{2} + \frac{|22\rangle|11\rangle}{2} \right) e^{-\gamma t} + |22\rangle^{\otimes 2} e^{-2\gamma t} \end{aligned} \quad (3.28)$$

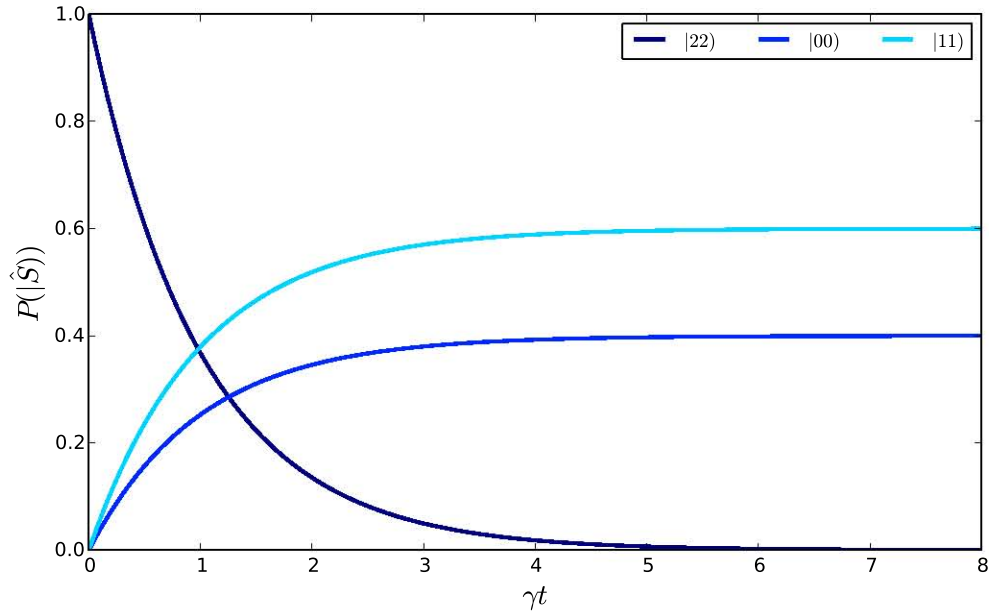


Figura 3.1.: Evolución temporal de las poblaciones de los tres niveles de un átomo inicialmente excitado, $|\hat{\rho}(0)\rangle = |22\rangle$.

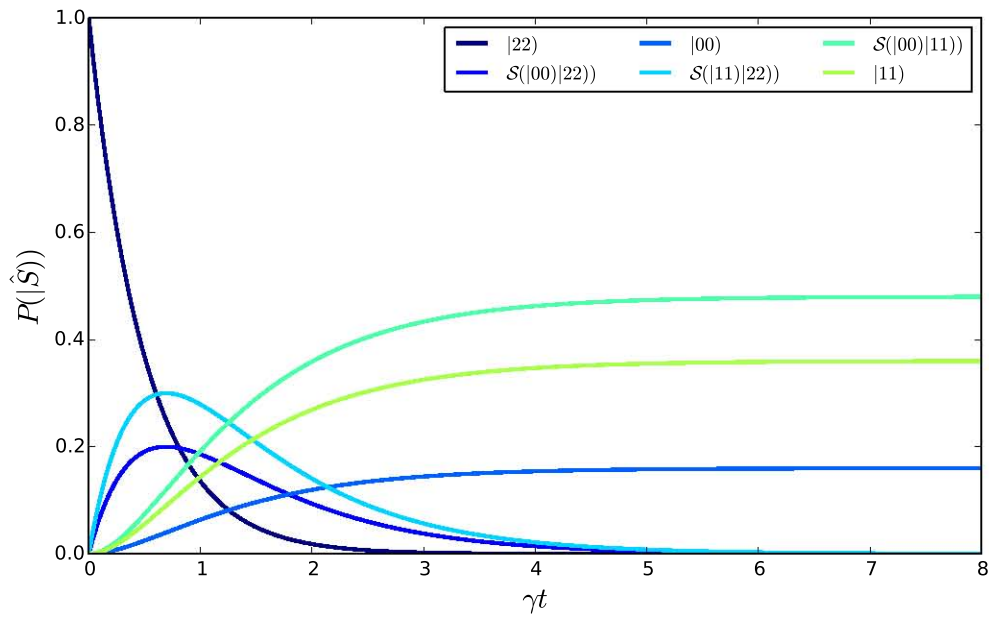


Figura 3.2.: Evolución temporal de las componentes del operador de estado simétrico de dos átomos inicialmente excitados, $|\hat{\rho}(0)\rangle = |22\rangle^{\otimes 2}$.

3. Solución de la ecuación maestra de Lindblad para átomos de tres niveles

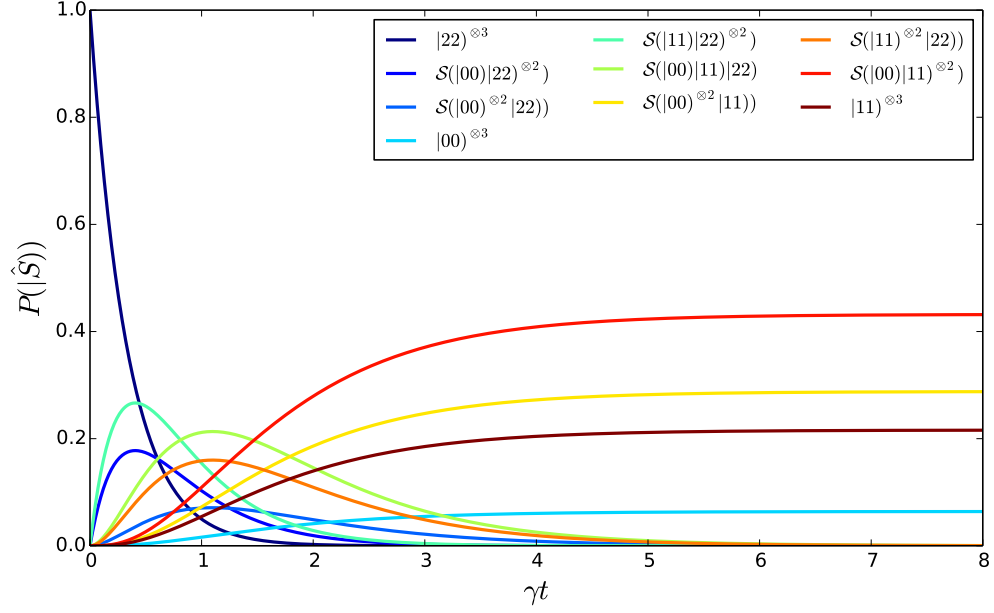


Figura 3.3.: Evolución temporal de las componentes del operador de estado simétrico de tres átomos inicialmente excitados $|\hat{\rho}(0)\rangle = |22\rangle^{\otimes 3}$.

y su evolución temporal se muestra en la figura 3.2.

Si inicialmente se tienen tres átomos excitados, $|\hat{\rho}(0)\rangle = |22\rangle^{\otimes 3}$, el estado simétrico del sistema al tiempo t está dado por

$$\begin{aligned}
 |\hat{\rho}^3(t)\rangle = & \frac{\gamma_{20}^3}{\gamma^3} f(t)^3 |00\rangle^{\otimes 3} + \frac{3\gamma_{21}}{\gamma^3} \gamma_{20}^2 f(t)^3 \mathcal{S}(|00\rangle^{\otimes 2} |11\rangle) + \frac{3\gamma_{20}}{\gamma^3} \gamma_{21}^2 f(t)^3 \mathcal{S}(|11\rangle^{\otimes 2} |00\rangle) \\
 & + \frac{3\gamma_{20}^2}{\gamma^2} f(t)^2 \mathcal{S}(|00\rangle^{\otimes 2} |22\rangle) + \frac{6\gamma_{20}}{\gamma^2} \gamma_{21} f(t)^2 \mathcal{S}(|00\rangle |11\rangle |22\rangle) e^{-\gamma t} \\
 & + \frac{3\gamma_{20}}{\gamma} f(t) \mathcal{S}(|22\rangle^{\otimes 2} |00\rangle) e^{-2\gamma t} + \frac{\gamma_{21}^3}{\gamma^3} f(t)^3 |11\rangle^{\otimes 3} + |22\rangle^{\otimes 3} e^{-3\gamma t} \\
 & + \frac{3\gamma_{21}^2}{\gamma^2} f(t)^2 \mathcal{S}(|11\rangle^{\otimes 2} |22\rangle) e^{-\gamma t} + \frac{3\gamma_{21}}{\gamma} f(t) \mathcal{S}(|22\rangle^{\otimes 2} |11\rangle) e^{-2\gamma t},
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

y su evolución se muestra en la figura 3.3. En (3.29) y en las figuras, \mathcal{S} produce el vector base simétrico correspondiente al estado de los átomos en su argumento.

En las figuras 3.1, 3.2 y 3.3 usamos los valores $\gamma_{20} = 0.4$ y $\gamma_{21} = 0.6$, el eje de las ordenadas representa la probabilidad de que el estado del sistema sea el vector simétrico $|\hat{S}\rangle$ indicado en la leyenda del gráfico y el eje de las abscisas representa el tiempo medido en unidades de γ . En todos los casos la probabilidad de que los átomos estén en el estado excitado o una combinación lineal que lo incluya tiende a cero, como es de esperarse.

Debido a que $\gamma_{21} > \gamma_{20}$, $P(|11\rangle) > P(|00\rangle)$ en todo momento. También notamos que es más probable que los átomos estén en una mezcla de sus estados base que en alguno de ellos.

La expresión (3.27) se puede obtener resolviendo la ecuación maestra (2.75) en la base estándar del espacio de Hilbert de un átomo de tres niveles:

$$\begin{aligned} \hat{\rho} = & a_{00} |0\rangle\langle 0| + a_{01} |0\rangle\langle 1| + a_{02} |0\rangle\langle 2| + a_{10} |1\rangle\langle 0| + a_{11} |1\rangle\langle 1| + a_{12} |1\rangle\langle 2| + \\ & + a_{20} |2\rangle\langle 0| + a_{21} |2\rangle\langle 1| + a_{22} |2\rangle\langle 2|. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Usando las expresiones

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_-^{21} \hat{\rho} \hat{\sigma}_+^{21} &= a_{22} |1\rangle\langle 1|, \\ \hat{\sigma}_-^{20} \hat{\rho} \hat{\sigma}_+^{20} &= a_{22} |0\rangle\langle 0|, \\ |2\rangle\langle 2| \hat{\rho} &= a_{20} |2\rangle\langle 0| + a_{21} |2\rangle\langle 1| + a_{22} |2\rangle\langle 2|, \\ \hat{\rho} |2\rangle\langle 2| &= a_{02} |0\rangle\langle 2| + a_{12} |1\rangle\langle 2| + a_{22} |2\rangle\langle 2|, \end{aligned} \quad (3.31)$$

se obtienen los coeficientes

$$\begin{aligned} a_{00}(t) &= \frac{\gamma_{20}}{\gamma} a_{22}(0) f(t) & a_{10}(t) &= a_{10}(0) & a_{20}(t) &= a_{20}(0) e^{-\frac{1}{2}\gamma t} \\ a_{01}(t) &= a_{01}(0) & a_{11}(t) &= \frac{\gamma_{21}}{\gamma} a_{22}(0) f(t) & a_{21}(t) &= a_{21}(0) e^{-\frac{1}{2}\gamma t} \\ a_{02}(t) &= a_{02}(0) e^{-\frac{1}{2}\gamma t} & a_{12}(t) &= a_{12}(0) e^{-\frac{1}{2}\gamma t} & a_{22}(t) &= a_{22}(0) e^{-\gamma t}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Si el estado inicial del átomo es $\hat{\rho}(0) = |2\rangle\langle 2|$, entonces el único coeficiente inicialmente no nulo es $a_{22}(0) = 1$. Con esta condición inicial obtenemos el estado (3.27). Para dos y tres átomos excitados el estado inicial es factorizable y las expresiones (3.28) y (3.29) se obtienen al calcular los productos tensoriales $\hat{\rho}^1(t) \otimes \hat{\rho}^1(t)$ y $\hat{\rho}^1(t) \otimes \hat{\rho}^1(t) \otimes \hat{\rho}^1(t)$.

Este ejemplo permite comprobar que las expresiones obtenidas usando los vectores simétricos y los superoperadores construidos en el capítulo anterior son consistentes con las expresiones obtenidas en la base estándar del espacio de Hilbert. Esto da confianza en el método de este capítulo para calcular soluciones analíticas con un estado inicial general y un número de átomos más grande.

Por último, el procedimiento utilizado en este capítulo para calcular la solución analítica de la ecuación maestra (3.8) sirve como base para estudiar sistemas atómicos con más transiciones dipolares.

4. Conclusiones

En esta tesis se desarrollaron herramientas matemáticas importantes para el estudio de sistemas atómicos con $M + 1$ niveles cuando se toma en cuenta la interacción con el ambiente. En particular, nos enfocamos al caso en que la ecuación maestra de Lindblad, que describe la evolución del sistema abierto, es simétrica ante el intercambio de los átomos. Si el operador de estado inicial del sistema tiene esta simetría, la evolución tendrá lugar en el subespacio simétrico del espacio de Liouville del sistema.

Como mencionamos en la introducción, los trabajos de Sarkar y Satchell [6] y de Hartmann [7] motivaron el desarrollo de este trabajo, que consistió en generalizar los resultados de estos autores para átomos de más de dos niveles. Para lograrlo, fue necesario estudiar la formulación de la mecánica cuántica en el espacio de Liouville [24]. En particular, fue fundamental entender la estructura algebraica de los superoperadores que actúan sobre este espacio. Los resultados de esta tesis se enuncian a continuación:

- **Vectores base simétricos.** Mostramos cómo construir una base del subespacio simétrico del espacio de Liouville de N átomos con $M + 1$ niveles. La dimensión de este subespacio es polinomial en N , lo cual permitirá simular de manera eficiente ecuaciones maestras simétricas debido a la dramática disminución de los requisitos de memoria.
- **Superoperadores colectivos simétricos.** Encontramos un procedimiento para construir superoperadores colectivos de N átomos con $M + 1$ niveles, en términos de los cuales se pueden etiquetar los vectores base simétricos. Expresando una ecuación maestra simétrica en términos de estos superoperadores y el operador de estado simétrico en términos de los vectores base etiquetados se pueden encontrar los estados estacionarios del sistema, lo cual es relevante en el marco de las recientes propuestas [44], [45] para aprovechar la disipación en el procesamiento de información cuántica.
- **Solución analítica de la ecuación maestra de Lindblad simétrica.** Usando los resultados anteriores, obtuvimos una expresión analítica para el operador de estado al tiempo t , que describe a un sistema de átomos en una configuración de tres niveles en interacción con un baño térmico de radiación. La solución analítica de la ecuación maestra permitirá estudiar la dinámica de distintos observables del sistema así como de distintas medidas de enredamiento.

Hasta donde sabemos, estos resultados no han sido obtenidos anteriormente.

Trabajo futuro

El conjunto de vectores base simétricos construidos en este trabajo nos permitirá simular eficientemente la interacción de átomos de tres niveles en la configuración Λ con un modo de una cavidad y un haz coherente, tomando en cuenta la emisión espontánea de los átomos y las pérdidas de la cavidad. Este sistema ha sido propuesto como medio de almacenamiento para información cuántica [46]. Actualmente, hacen falta simulaciones que consideren la interacción de los átomos con distintos estados cuánticos de la luz, incluso con dos modos de una cavidad, tomando en cuenta procesos disipativos.

La solución analítica que obtuvimos para N átomos de tres niveles en interacción con un baño térmico de radiación a temperatura mayor que cero es muy complicada y dificulta el estudio de la dinámica del sistema. Para obtener una expresión más sencilla sería conveniente utilizar otro procedimiento para desenredar la exponencial de una suma de operadores que generan un álgebra $\mathfrak{sl}(3)$.

Una generalización de este trabajo consistiría en construir vectores base con distintos tipos de simetría para estudiar interacciones más generales entre materia y radiación tomando en cuenta procesos disipativos.

Apéndices

A. Superoperadores $\check{A}_{\pm,3}^k$

$$\begin{aligned}
\check{A}_{\pm}^0 \hat{\rho} &= \sum_i \frac{1}{3} \hat{I}_3^{(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_{\mp}^{21(i)} + \frac{2}{3} \hat{\sigma}_3^{02(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_{\mp}^{21(i)} + \frac{2}{3} \hat{\sigma}_3^{12(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_{\mp}^{21(i)} \\
\check{A}_{\pm}^1 \hat{\rho} &= \sum_i \frac{1}{3} \hat{I}_3^{(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_{\mp}^{20(i)} + \frac{2}{3} \hat{\sigma}_3^{02(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_{\mp}^{20(i)} + \frac{2}{3} \hat{\sigma}_3^{12(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_{\mp}^{20(i)} \\
\check{A}_{\pm}^2 \hat{\rho} &= \sum_i \frac{1}{3} \hat{\sigma}_{\pm}^{21(i)} \hat{\rho} \hat{I}_3^{(i)} + \frac{2}{3} \hat{\sigma}_{\pm}^{21(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_3^{02(i)} + \frac{2}{3} \hat{\sigma}_{\pm}^{21(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_3^{12(i)} \\
\check{A}_{\pm}^3 \hat{\rho} &= \sum_i \hat{\sigma}_{\pm}^{21(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_{\mp}^{21(i)} \\
\check{A}_{\pm}^4 \hat{\rho} &= \sum_i \hat{\sigma}_{\pm}^{21(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_{\mp}^{20(i)} \\
\check{A}_{\pm}^5 \hat{\rho} &= \sum_i \frac{1}{3} \hat{\sigma}_{\pm}^{20(i)} \hat{\rho} \hat{I}_3^{(i)} + \frac{2}{3} \hat{\sigma}_{\pm}^{20(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_3^{02(i)} + \frac{2}{3} \hat{\sigma}_{\pm}^{20(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_3^{12(i)} \\
\check{A}_{\pm}^6 \hat{\rho} &= \sum_i \hat{\sigma}_{\pm}^{20(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_{\mp}^{21(i)} \\
\check{A}_{\pm}^7 \hat{\rho} &= \sum_i \hat{\sigma}_{\pm}^{20(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_{\mp}^{20(i)} \\
\check{A}_{\pm}^8 \hat{\rho} &= \sum_i \frac{1}{3} \hat{I}_3^{(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_{\mp}^{10(i)} + \frac{2}{3} \hat{\sigma}_3^{02(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_{\mp}^{10(i)} + \frac{2}{3} \hat{\sigma}_3^{12(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_{\mp}^{10(i)} \\
\check{A}_{\pm}^9 \hat{\rho} &= \sum_i \hat{\sigma}_{\pm}^{21(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_{\pm}^{21(i)} \\
\check{A}_{\pm}^{10} \hat{\rho} &= \sum_i \frac{1}{3} \hat{\sigma}_{\pm}^{21(i)} \hat{\rho} \hat{I}_3^{(i)} + \frac{2}{3} \hat{\sigma}_{\pm}^{21(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_3^{02(i)} - \frac{4}{3} \hat{\sigma}_{\pm}^{21(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_3^{12(i)} \\
\check{A}_{\pm}^{11} \hat{\rho} &= \sum_i \hat{\sigma}_{\pm}^{21(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_{\mp}^{10(i)} \\
\check{A}_{\pm}^{12} \hat{\rho} &= \sum_i \hat{\sigma}_{\pm}^{20(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_{\pm}^{21(i)} \\
\check{A}_{\pm}^{13} \hat{\rho} &= \sum_i \frac{1}{3} \hat{\sigma}_{\pm}^{20(i)} \hat{\rho} \hat{I}_3^{(i)} + \frac{2}{3} \hat{\sigma}_{\pm}^{20(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_3^{02(i)} - \frac{4}{3} \hat{\sigma}_{\pm}^{20(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_3^{12(i)} \\
\check{A}_{\pm}^{14} \hat{\rho} &= \sum_i \hat{\sigma}_{\pm}^{20(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_{\mp}^{10(i)} \\
\check{A}_{\pm}^{15} \hat{\rho} &= \sum_i \hat{\sigma}_{\pm}^{21(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_{\pm}^{20(i)} \\
\check{A}_{\pm}^{16} \hat{\rho} &= \sum_i \hat{\sigma}_{\pm}^{21(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_{\pm}^{10(i)} \\
\check{A}_{\pm}^{17} \hat{\rho} &= \sum_i \frac{1}{3} \hat{\sigma}_{\pm}^{21(i)} \hat{\rho} \hat{I}_3^{(i)} - \frac{4}{3} \hat{\sigma}_{\pm}^{21(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_3^{02(i)} + \frac{2}{3} \hat{\sigma}_{\pm}^{21(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_3^{12(i)}
\end{aligned}$$

A. Superoperadores $\check{A}_{\pm,3}^k$

$$\begin{aligned}
\check{A}_{\pm}^{18} \hat{\rho} &= \sum_i \hat{\sigma}_{\pm}^{20(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_{\pm}^{20(i)} \\
\check{A}_{\pm}^{19} \hat{\rho} &= \sum_i \hat{\sigma}_{\pm}^{20(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_{\pm}^{10(i)} \\
\check{A}_{\pm}^{20} \hat{\rho} &= \sum_i \frac{1}{3} \hat{\sigma}_{\pm}^{20(i)} \hat{\rho} \hat{I}_3^{(i)} - \frac{4}{3} \hat{\sigma}_{\pm}^{20(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_3^{02(i)} + \frac{2}{3} \hat{\sigma}_{\pm}^{20(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_3^{12(i)} \\
\check{A}_{\pm}^{21} \hat{\rho} &= \sum_i \frac{1}{3} \hat{I}_3^{(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_{\mp}^{21(i)} + \frac{2}{3} \hat{\sigma}_3^{02(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_{\mp}^{21(i)} - \frac{4}{3} \hat{\sigma}_3^{12(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_{\mp}^{21(i)} \\
\check{A}_{\pm}^{22} \hat{\rho} &= \sum_i \frac{1}{3} \hat{I}_3^{(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_{\mp}^{20(i)} + \frac{2}{3} \hat{\sigma}_3^{02(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_{\mp}^{20(i)} - \frac{4}{3} \hat{\sigma}_3^{12(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_{\mp}^{20(i)} \\
\check{A}_{\pm}^{23} \hat{\rho} &= \sum_i \frac{1}{3} \hat{\sigma}_{\pm}^{10(i)} \hat{\rho} \hat{I}_3^{(i)} + \frac{2}{3} \hat{\sigma}_{\pm}^{10(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_3^{02(i)} + \frac{2}{3} \hat{\sigma}_{\pm}^{10(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_3^{12(i)} \\
\check{A}_{\pm}^{24} \hat{\rho} &= \sum_i \hat{\sigma}_{\pm}^{10(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_{\mp}^{21(i)} \\
\check{A}_{\pm}^{25} \hat{\rho} &= \sum_i \hat{\sigma}_{\pm}^{10(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_{\mp}^{20(i)} \\
\check{A}_{\pm}^{26} \hat{\rho} &= \sum_i \frac{1}{3} \hat{I}_3^{(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_{\mp}^{10(i)} + \frac{2}{3} \hat{\sigma}_3^{02(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_{\mp}^{10(i)} - \frac{4}{3} \hat{\sigma}_3^{12(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_{\mp}^{10(i)} \\
\check{A}_{\pm}^{27} \hat{\rho} &= \sum_i \hat{\sigma}_{\pm}^{10(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_{\pm}^{21(i)} \\
\check{A}_{\pm}^{28} \hat{\rho} &= \sum_i \frac{1}{3} \hat{\sigma}_{\pm}^{10(i)} \hat{\rho} \hat{I}_3^{(i)} + \frac{2}{3} \hat{\sigma}_{\pm}^{10(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_3^{02(i)} - \frac{4}{3} \hat{\sigma}_{\pm}^{10(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_3^{12(i)} \\
\check{A}_{\pm}^{29} \hat{\rho} &= \sum_i \hat{\sigma}_{\pm}^{10(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_{\mp}^{10(i)} \\
\check{A}_{\pm}^{30} \hat{\rho} &= \sum_i \hat{\sigma}_{\pm}^{10(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_{\pm}^{20(i)} \\
\check{A}_{\pm}^{31} \hat{\rho} &= \sum_i \hat{\sigma}_{\pm}^{10(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_{\pm}^{10(i)} \\
\check{A}_{\pm}^{32} \hat{\rho} &= \sum_i \frac{1}{3} \hat{\sigma}_{\pm}^{10(i)} \hat{\rho} \hat{I}_3^{(i)} - \frac{4}{3} \hat{\sigma}_{\pm}^{10(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_3^{02(i)} + \frac{2}{3} \hat{\sigma}_{\pm}^{10(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_3^{12(i)} \\
\check{A}_{\pm}^{33} \hat{\rho} &= \sum_i \frac{1}{3} \hat{I}_3^{(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_{\mp}^{21(i)} - \frac{4}{3} \hat{\sigma}_3^{02(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_{\mp}^{21(i)} + \frac{2}{3} \hat{\sigma}_3^{12(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_{\mp}^{21(i)} \\
\check{A}_{\pm}^{34} \hat{\rho} &= \sum_i \frac{1}{3} \hat{I}_3^{(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_{\mp}^{20(i)} - \frac{4}{3} \hat{\sigma}_3^{02(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_{\mp}^{20(i)} + \frac{2}{3} \hat{\sigma}_3^{12(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_{\mp}^{20(i)} \\
\check{A}_{\pm}^{35} \hat{\rho} &= \sum_i \frac{1}{3} \hat{I}_3^{(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_{\mp}^{10(i)} - \frac{4}{3} \hat{\sigma}_3^{02(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_{\mp}^{10(i)} + \frac{2}{3} \hat{\sigma}_3^{12(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_{\mp}^{10(i)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\check{A}_3^0 \hat{\rho} &= \sum_i \frac{1}{3} \hat{I}_3^{(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_3^{12(i)} + \frac{2}{3} \hat{\sigma}_3^{02(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_3^{12(i)} + \frac{2}{3} \hat{\sigma}_3^{12(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_3^{12(i)} \\
\check{A}_3^8 \hat{\rho} &= \sum_i \frac{1}{3} \hat{I}_3^{(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_3^{02(i)} - \frac{1}{3} \hat{I}_3^{(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_3^{12(i)} + \frac{2}{3} \hat{\sigma}_3^{02(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_3^{02(i)} - \frac{2}{3} \hat{\sigma}_3^{02(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_3^{12(i)} + \frac{2}{3} \hat{\sigma}_3^{12(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_3^{02(i)} \\
&\quad - \frac{2}{3} \hat{\sigma}_3^{12(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_3^{12(i)} \\
\check{A}_3^{15} \hat{\rho} &= \sum_i -\frac{1}{3} \hat{I}_3^{(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_3^{02(i)} - \frac{2}{3} \hat{\sigma}_3^{02(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_3^{02(i)} + \frac{1}{3} \hat{\sigma}_3^{12(i)} \hat{\rho} \hat{I}_3^{(i)} + \frac{2}{3} \hat{\sigma}_3^{12(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_3^{12(i)} \\
\check{A}_3^{21} \hat{\rho} &= \sum_i \frac{1}{3} \hat{I}_3^{(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_3^{12(i)} + \frac{2}{3} \hat{\sigma}_3^{02(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_3^{12(i)} - \frac{4}{3} \hat{\sigma}_3^{12(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_3^{12(i)} \\
\check{A}_3^{26} \hat{\rho} &= \sum_i \frac{1}{3} \hat{I}_3^{(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_3^{02(i)} - \frac{1}{3} \hat{I}_3^{(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_3^{12(i)} + \frac{2}{3} \hat{\sigma}_3^{02(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_3^{02(i)} - \frac{2}{3} \hat{\sigma}_3^{02(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_3^{12(i)} - \frac{4}{3} \hat{\sigma}_3^{12(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_3^{02(i)} \\
&\quad + \frac{4}{3} \hat{\sigma}_3^{12(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_3^{12(i)} \\
\check{A}_3^{30} \hat{\rho} &= \sum_i -\frac{1}{3} \hat{I}_3^{(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_3^{02(i)} + \frac{1}{3} \hat{\sigma}_3^{02(i)} \hat{\rho} \hat{I}_3^{(i)} + \frac{2}{3} \hat{\sigma}_3^{02(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_3^{12(i)} - \frac{1}{3} \hat{\sigma}_3^{12(i)} \hat{\rho} \hat{I}_3^{(i)} + \frac{2}{3} \hat{\sigma}_3^{12(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_3^{02(i)} \\
&\quad - \frac{2}{3} \hat{\sigma}_3^{12(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_3^{12(i)} \\
\check{A}_3^{33} \hat{\rho} &= \sum_i \frac{1}{3} \hat{I}_3^{(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_3^{12(i)} - \frac{4}{3} \hat{\sigma}_3^{02(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_3^{12(i)} + \frac{2}{3} \hat{\sigma}_3^{12(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_3^{12(i)} \\
\check{A}_3^{35} \hat{\rho} &= \sum_i \frac{1}{3} \hat{I}_3^{(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_3^{02(i)} - \frac{1}{3} \hat{I}_3^{(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_3^{12(i)} - \frac{4}{3} \hat{\sigma}_3^{02(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_3^{02(i)} + \frac{4}{3} \hat{\sigma}_3^{02(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_3^{12(i)} + \frac{2}{3} \hat{\sigma}_3^{12(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_3^{02(i)} \\
&\quad - \frac{2}{3} \hat{\sigma}_3^{12(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_3^{12(i)} \\
\hat{\sigma}_3^{12} \hat{\rho} \hat{\sigma}_3^{02} &= \left(\frac{1}{2} \check{A}_3^0 - \frac{1}{2} \check{A}_3^{21} - \frac{1}{2} \check{A}_3^{26} + \frac{1}{2} \check{A}_3^8 \right) \hat{\rho} \\
\hat{I}_3 \hat{\rho} \hat{\sigma}_3^{02} &= \left(\check{A}_3^0 + \check{A}_3^{21} + \check{A}_3^{26} + \check{A}_3^{33} + \check{A}_3^{35} + \check{A}_3^8 \right) \hat{\rho} \\
\hat{\sigma}_3^{02} \hat{\rho} \hat{\sigma}_3^{12} &= \left(\frac{1}{2} \check{A}_3^0 - \frac{1}{2} \check{A}_3^{33} \right) \hat{\rho} \\
\hat{\sigma}_3^{12} \hat{\rho} \hat{I}_3 &= \left(\check{A}_3^0 + 3\check{A}_3^{15} + 2\check{A}_3^{21} + \check{A}_3^{26} + 2\check{A}_3^8 \right) \hat{\rho} \\
\hat{\sigma}_3^{02} \hat{\rho} \hat{I}_3 &= \left(\check{A}_3^0 + 3\check{A}_3^{15} + 3\check{A}_3^{21} + 3\check{A}_3^{26} + 3\check{A}_3^{30} + 2\check{A}_3^{33} + \check{A}_3^{35} + 2\check{A}_3^8 \right) \hat{\rho} \\
\hat{I}_3 \hat{\rho} \hat{\sigma}_3^{12} &= \left(\check{A}_3^0 + \check{A}_3^{21} + \check{A}_3^{33} \right) \hat{\rho} \\
\hat{\sigma}_3^{12} \hat{\rho} \hat{\sigma}_3^{12} &= \left(\frac{1}{2} \check{A}_3^0 - \frac{1}{2} \check{A}_3^{21} \right) \hat{\rho} \\
\hat{\sigma}_3^{02} \hat{\rho} \hat{\sigma}_3^{02} &= \left(\frac{1}{2} \check{A}_3^0 - \frac{1}{2} \check{A}_3^{33} - \frac{1}{2} \check{A}_3^{35} + \frac{1}{2} \check{A}_3^8 \right) \hat{\rho}
\end{aligned}$$

B. Acción de los superoperadores $\check{A}_{\pm,3}^{k(1)}$ sobre los vectores unitarios

<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="border-right: 1px solid black;"></th> <th> 22)</th> <th> 21)</th> <th> 20)</th> <th> 12)</th> <th> 11)</th> <th> 10)</th> <th> 02)</th> <th> 01)</th> <th> 00)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="border-right: 1px solid black;">\check{A}_+^{10}</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td> 21)</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black;">\check{A}_-^{10}</td> <td>0</td> <td> 11)</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black;">\check{A}_3^{10}</td> <td>0</td> <td>$\frac{ 21\rangle}{2}$</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>$-\frac{ 11\rangle}{2}$</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table>		22)	21)	20)	12)	11)	10)	02)	01)	00)	\check{A}_+^{10}	0	0	0	0	21)	0	0	0	0	\check{A}_-^{10}	0	11)	0	0	0	0	0	0	0	\check{A}_3^{10}	0	$\frac{ 21\rangle}{2}$	0	0	$-\frac{ 11\rangle}{2}$	0	0	0	0	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="border-right: 1px solid black;"></th> <th> 22)</th> <th> 21)</th> <th> 20)</th> <th> 12)</th> <th> 11)</th> <th> 10)</th> <th> 02)</th> <th> 01)</th> <th> 00)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="border-right: 1px solid black;">\check{A}_+^{11}</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td> 21)</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black;">\check{A}_-^{11}</td> <td>0</td> <td> 10)</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black;">\check{A}_3^{11}</td> <td>0</td> <td>$\frac{ 21\rangle}{2}$</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>$-\frac{ 10\rangle}{2}$</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table>		22)	21)	20)	12)	11)	10)	02)	01)	00)	\check{A}_+^{11}	0	0	0	0	0	21)	0	0	0	\check{A}_-^{11}	0	10)	0	0	0	0	0	0	0	\check{A}_3^{11}	0	$\frac{ 21\rangle}{2}$	0	0	0	$-\frac{ 10\rangle}{2}$	0	0	0
	22)	21)	20)	12)	11)	10)	02)	01)	00)																																																																								
\check{A}_+^{10}	0	0	0	0	21)	0	0	0	0																																																																								
\check{A}_-^{10}	0	11)	0	0	0	0	0	0	0																																																																								
\check{A}_3^{10}	0	$\frac{ 21\rangle}{2}$	0	0	$-\frac{ 11\rangle}{2}$	0	0	0	0																																																																								
	22)	21)	20)	12)	11)	10)	02)	01)	00)																																																																								
\check{A}_+^{11}	0	0	0	0	0	21)	0	0	0																																																																								
\check{A}_-^{11}	0	10)	0	0	0	0	0	0	0																																																																								
\check{A}_3^{11}	0	$\frac{ 21\rangle}{2}$	0	0	0	$-\frac{ 10\rangle}{2}$	0	0	0																																																																								
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="border-right: 1px solid black;"></th> <th> 22)</th> <th> 21)</th> <th> 20)</th> <th> 12)</th> <th> 11)</th> <th> 10)</th> <th> 02)</th> <th> 01)</th> <th> 00)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="border-right: 1px solid black;">\check{A}_+^{12}</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td> 21)</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black;">\check{A}_-^{12}</td> <td>0</td> <td> 02)</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black;">\check{A}_3^{12}</td> <td>0</td> <td>$\frac{ 21\rangle}{2}$</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>$-\frac{ 02\rangle}{2}$</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table>		22)	21)	20)	12)	11)	10)	02)	01)	00)	\check{A}_+^{12}	0	0	0	0	0	0	21)	0	0	\check{A}_-^{12}	0	02)	0	0	0	0	0	0	0	\check{A}_3^{12}	0	$\frac{ 21\rangle}{2}$	0	0	0	0	$-\frac{ 02\rangle}{2}$	0	0	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="border-right: 1px solid black;"></th> <th> 22)</th> <th> 21)</th> <th> 20)</th> <th> 12)</th> <th> 11)</th> <th> 10)</th> <th> 02)</th> <th> 01)</th> <th> 00)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="border-right: 1px solid black;">\check{A}_+^{13}</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td> 21)</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black;">\check{A}_-^{13}</td> <td>0</td> <td> 01)</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black;">\check{A}_3^{13}</td> <td>0</td> <td>$\frac{ 21\rangle}{2}$</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>$-\frac{ 01\rangle}{2}$</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table>		22)	21)	20)	12)	11)	10)	02)	01)	00)	\check{A}_+^{13}	0	0	0	0	0	0	0	21)	0	\check{A}_-^{13}	0	01)	0	0	0	0	0	0	0	\check{A}_3^{13}	0	$\frac{ 21\rangle}{2}$	0	0	0	0	0	$-\frac{ 01\rangle}{2}$	0
	22)	21)	20)	12)	11)	10)	02)	01)	00)																																																																								
\check{A}_+^{12}	0	0	0	0	0	0	21)	0	0																																																																								
\check{A}_-^{12}	0	02)	0	0	0	0	0	0	0																																																																								
\check{A}_3^{12}	0	$\frac{ 21\rangle}{2}$	0	0	0	0	$-\frac{ 02\rangle}{2}$	0	0																																																																								
	22)	21)	20)	12)	11)	10)	02)	01)	00)																																																																								
\check{A}_+^{13}	0	0	0	0	0	0	0	21)	0																																																																								
\check{A}_-^{13}	0	01)	0	0	0	0	0	0	0																																																																								
\check{A}_3^{13}	0	$\frac{ 21\rangle}{2}$	0	0	0	0	0	$-\frac{ 01\rangle}{2}$	0																																																																								
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="border-right: 1px solid black;"></th> <th> 22)</th> <th> 21)</th> <th> 20)</th> <th> 12)</th> <th> 11)</th> <th> 10)</th> <th> 02)</th> <th> 01)</th> <th> 00)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="border-right: 1px solid black;">\check{A}_+^{14}</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td> 21)</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black;">\check{A}_-^{14}</td> <td>0</td> <td> 00)</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black;">\check{A}_3^{14}</td> <td>0</td> <td>$\frac{ 21\rangle}{2}$</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>$-\frac{ 00\rangle}{2}$</td> </tr> </tbody> </table>		22)	21)	20)	12)	11)	10)	02)	01)	00)	\check{A}_+^{14}	0	0	0	0	0	0	0	0	21)	\check{A}_-^{14}	0	00)	0	0	0	0	0	0	0	\check{A}_3^{14}	0	$\frac{ 21\rangle}{2}$	0	0	0	0	0	0	$-\frac{ 00\rangle}{2}$	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="border-right: 1px solid black;"></th> <th> 22)</th> <th> 21)</th> <th> 20)</th> <th> 12)</th> <th> 11)</th> <th> 10)</th> <th> 02)</th> <th> 01)</th> <th> 00)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="border-right: 1px solid black;">\check{A}_+^{15}</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td> 20)</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black;">\check{A}_-^{15}</td> <td>0</td> <td>0</td> <td> 12)</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black;">\check{A}_3^{15}</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>$\frac{ 20\rangle}{2}$</td> <td>$-\frac{ 12\rangle}{2}$</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table>		22)	21)	20)	12)	11)	10)	02)	01)	00)	\check{A}_+^{15}	0	0	0	20)	0	0	0	0	0	\check{A}_-^{15}	0	0	12)	0	0	0	0	0	0	\check{A}_3^{15}	0	0	$\frac{ 20\rangle}{2}$	$-\frac{ 12\rangle}{2}$	0	0	0	0	0
	22)	21)	20)	12)	11)	10)	02)	01)	00)																																																																								
\check{A}_+^{14}	0	0	0	0	0	0	0	0	21)																																																																								
\check{A}_-^{14}	0	00)	0	0	0	0	0	0	0																																																																								
\check{A}_3^{14}	0	$\frac{ 21\rangle}{2}$	0	0	0	0	0	0	$-\frac{ 00\rangle}{2}$																																																																								
	22)	21)	20)	12)	11)	10)	02)	01)	00)																																																																								
\check{A}_+^{15}	0	0	0	20)	0	0	0	0	0																																																																								
\check{A}_-^{15}	0	0	12)	0	0	0	0	0	0																																																																								
\check{A}_3^{15}	0	0	$\frac{ 20\rangle}{2}$	$-\frac{ 12\rangle}{2}$	0	0	0	0	0																																																																								
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="border-right: 1px solid black;"></th> <th> 22)</th> <th> 21)</th> <th> 20)</th> <th> 12)</th> <th> 11)</th> <th> 10)</th> <th> 02)</th> <th> 01)</th> <th> 00)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="border-right: 1px solid black;">\check{A}_+^{16}</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td> 20)</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black;">\check{A}_-^{16}</td> <td>0</td> <td>0</td> <td> 11)</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black;">\check{A}_3^{16}</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>$\frac{ 20\rangle}{2}$</td> <td>0</td> <td>$-\frac{ 11\rangle}{2}$</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table>		22)	21)	20)	12)	11)	10)	02)	01)	00)	\check{A}_+^{16}	0	0	0	0	20)	0	0	0	0	\check{A}_-^{16}	0	0	11)	0	0	0	0	0	0	\check{A}_3^{16}	0	0	$\frac{ 20\rangle}{2}$	0	$-\frac{ 11\rangle}{2}$	0	0	0	0	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="border-right: 1px solid black;"></th> <th> 22)</th> <th> 21)</th> <th> 20)</th> <th> 12)</th> <th> 11)</th> <th> 10)</th> <th> 02)</th> <th> 01)</th> <th> 00)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="border-right: 1px solid black;">\check{A}_+^{17}</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td> 20)</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black;">\check{A}_-^{17}</td> <td>0</td> <td>0</td> <td> 10)</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black;">\check{A}_3^{17}</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>$\frac{ 20\rangle}{2}$</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>$-\frac{ 10\rangle}{2}$</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table>		22)	21)	20)	12)	11)	10)	02)	01)	00)	\check{A}_+^{17}	0	0	0	0	0	20)	0	0	0	\check{A}_-^{17}	0	0	10)	0	0	0	0	0	0	\check{A}_3^{17}	0	0	$\frac{ 20\rangle}{2}$	0	0	$-\frac{ 10\rangle}{2}$	0	0	0
	22)	21)	20)	12)	11)	10)	02)	01)	00)																																																																								
\check{A}_+^{16}	0	0	0	0	20)	0	0	0	0																																																																								
\check{A}_-^{16}	0	0	11)	0	0	0	0	0	0																																																																								
\check{A}_3^{16}	0	0	$\frac{ 20\rangle}{2}$	0	$-\frac{ 11\rangle}{2}$	0	0	0	0																																																																								
	22)	21)	20)	12)	11)	10)	02)	01)	00)																																																																								
\check{A}_+^{17}	0	0	0	0	0	20)	0	0	0																																																																								
\check{A}_-^{17}	0	0	10)	0	0	0	0	0	0																																																																								
\check{A}_3^{17}	0	0	$\frac{ 20\rangle}{2}$	0	0	$-\frac{ 10\rangle}{2}$	0	0	0																																																																								
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="border-right: 1px solid black;"></th> <th> 22)</th> <th> 21)</th> <th> 20)</th> <th> 12)</th> <th> 11)</th> <th> 10)</th> <th> 02)</th> <th> 01)</th> <th> 00)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="border-right: 1px solid black;">\check{A}_+^{18}</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td> 20)</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black;">\check{A}_-^{18}</td> <td>0</td> <td>0</td> <td> 02)</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black;">\check{A}_3^{18}</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>$\frac{ 20\rangle}{2}$</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>$-\frac{ 02\rangle}{2}$</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table>		22)	21)	20)	12)	11)	10)	02)	01)	00)	\check{A}_+^{18}	0	0	0	0	0	0	20)	0	0	\check{A}_-^{18}	0	0	02)	0	0	0	0	0	0	\check{A}_3^{18}	0	0	$\frac{ 20\rangle}{2}$	0	0	0	$-\frac{ 02\rangle}{2}$	0	0	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="border-right: 1px solid black;"></th> <th> 22)</th> <th> 21)</th> <th> 20)</th> <th> 12)</th> <th> 11)</th> <th> 10)</th> <th> 02)</th> <th> 01)</th> <th> 00)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="border-right: 1px solid black;">\check{A}_+^{19}</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td> 20)</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black;">\check{A}_-^{19}</td> <td>0</td> <td>0</td> <td> 01)</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black;">\check{A}_3^{19}</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>$\frac{ 20\rangle}{2}$</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>$-\frac{ 01\rangle}{2}$</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table>		22)	21)	20)	12)	11)	10)	02)	01)	00)	\check{A}_+^{19}	0	0	0	0	0	0	0	20)	0	\check{A}_-^{19}	0	0	01)	0	0	0	0	0	0	\check{A}_3^{19}	0	0	$\frac{ 20\rangle}{2}$	0	0	0	0	$-\frac{ 01\rangle}{2}$	0
	22)	21)	20)	12)	11)	10)	02)	01)	00)																																																																								
\check{A}_+^{18}	0	0	0	0	0	0	20)	0	0																																																																								
\check{A}_-^{18}	0	0	02)	0	0	0	0	0	0																																																																								
\check{A}_3^{18}	0	0	$\frac{ 20\rangle}{2}$	0	0	0	$-\frac{ 02\rangle}{2}$	0	0																																																																								
	22)	21)	20)	12)	11)	10)	02)	01)	00)																																																																								
\check{A}_+^{19}	0	0	0	0	0	0	0	20)	0																																																																								
\check{A}_-^{19}	0	0	01)	0	0	0	0	0	0																																																																								
\check{A}_3^{19}	0	0	$\frac{ 20\rangle}{2}$	0	0	0	0	$-\frac{ 01\rangle}{2}$	0																																																																								
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="border-right: 1px solid black;"></th> <th> 22)</th> <th> 21)</th> <th> 20)</th> <th> 12)</th> <th> 11)</th> <th> 10)</th> <th> 02)</th> <th> 01)</th> <th> 00)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="border-right: 1px solid black;">\check{A}_+^{20}</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td> 20)</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black;">\check{A}_-^{20}</td> <td>0</td> <td>0</td> <td> 00)</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black;">\check{A}_3^{20}</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>$\frac{ 20\rangle}{2}$</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>$-\frac{ 00\rangle}{2}$</td> </tr> </tbody> </table>		22)	21)	20)	12)	11)	10)	02)	01)	00)	\check{A}_+^{20}	0	0	0	0	0	0	0	0	20)	\check{A}_-^{20}	0	0	00)	0	0	0	0	0	0	\check{A}_3^{20}	0	0	$\frac{ 20\rangle}{2}$	0	0	0	0	0	$-\frac{ 00\rangle}{2}$	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="border-right: 1px solid black;"></th> <th> 22)</th> <th> 21)</th> <th> 20)</th> <th> 12)</th> <th> 11)</th> <th> 10)</th> <th> 02)</th> <th> 01)</th> <th> 00)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="border-right: 1px solid black;">\check{A}_+^{21}</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td> 12)</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black;">\check{A}_-^{21}</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td> 11)</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black;">\check{A}_3^{21}</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>$\frac{ 12\rangle}{2}$</td> <td>$-\frac{ 11\rangle}{2}$</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table>		22)	21)	20)	12)	11)	10)	02)	01)	00)	\check{A}_+^{21}	0	0	0	0	12)	0	0	0	0	\check{A}_-^{21}	0	0	0	11)	0	0	0	0	0	\check{A}_3^{21}	0	0	0	$\frac{ 12\rangle}{2}$	$-\frac{ 11\rangle}{2}$	0	0	0	0
	22)	21)	20)	12)	11)	10)	02)	01)	00)																																																																								
\check{A}_+^{20}	0	0	0	0	0	0	0	0	20)																																																																								
\check{A}_-^{20}	0	0	00)	0	0	0	0	0	0																																																																								
\check{A}_3^{20}	0	0	$\frac{ 20\rangle}{2}$	0	0	0	0	0	$-\frac{ 00\rangle}{2}$																																																																								
	22)	21)	20)	12)	11)	10)	02)	01)	00)																																																																								
\check{A}_+^{21}	0	0	0	0	12)	0	0	0	0																																																																								
\check{A}_-^{21}	0	0	0	11)	0	0	0	0	0																																																																								
\check{A}_3^{21}	0	0	0	$\frac{ 12\rangle}{2}$	$-\frac{ 11\rangle}{2}$	0	0	0	0																																																																								

	22)	21)	20)	12)	11)	10)	02)	01)	00)
\check{A}_+^{22}	0	0	0	0	0	12)	0	0	0
\check{A}_-^{22}	0	0	0	10)	0	0	0	0	0
\check{A}_3^{22}	0	0	0	$\frac{ 12\rangle}{2}$	0	$-\frac{ 10\rangle}{2}$	0	0	0

	22)	21)	20)	12)	11)	10)	02)	01)	00)
\check{A}_+^{23}	0	0	0	0	0	0	12)	0	0
\check{A}_-^{23}	0	0	0	02)	0	0	0	0	0
\check{A}_3^{23}	0	0	0	$\frac{ 12\rangle}{2}$	0	0	$-\frac{ 02\rangle}{2}$	0	0

	22)	21)	20)	12)	11)	10)	02)	01)	00)
\check{A}_+^{24}	0	0	0	0	0	0	0	12)	0
\check{A}_-^{24}	0	0	0	01)	0	0	0	0	0
\check{A}_3^{24}	0	0	0	$\frac{ 12\rangle}{2}$	0	0	0	$-\frac{ 01\rangle}{2}$	0

	22)	21)	20)	12)	11)	10)	02)	01)	00)
\check{A}_+^{25}	0	0	0	0	0	0	0	0	12)
\check{A}_-^{25}	0	0	0	00)	0	0	0	0	0
\check{A}_3^{25}	0	0	0	$\frac{ 12\rangle}{2}$	0	0	0	0	$-\frac{ 00\rangle}{2}$

	22)	21)	20)	12)	11)	10)	02)	01)	00)
\check{A}_+^{26}	0	0	0	0	0	11)	0	0	0
\check{A}_-^{26}	0	0	0	0	10)	0	0	0	0
\check{A}_3^{26}	0	0	0	0	$\frac{ 11\rangle}{2}$	$-\frac{ 10\rangle}{2}$	0	0	0

	22)	21)	20)	12)	11)	10)	02)	01)	00)
\check{A}_+^{27}	0	0	0	0	0	0	11)	0	0
\check{A}_-^{27}	0	0	0	0	02)	0	0	0	0
\check{A}_3^{27}	0	0	0	0	$\frac{ 11\rangle}{2}$	0	$-\frac{ 02\rangle}{2}$	0	0

	22)	21)	20)	12)	11)	10)	02)	01)	00)
\check{A}_+^{28}	0	0	0	0	0	0	0	11)	0
\check{A}_-^{28}	0	0	0	0	01)	0	0	0	0
\check{A}_3^{28}	0	0	0	0	$\frac{ 11\rangle}{2}$	0	0	$-\frac{ 01\rangle}{2}$	0

	22)	21)	20)	12)	11)	10)	02)	01)	00)
\check{A}_+^{29}	0	0	0	0	0	0	0	0	11)
\check{A}_-^{29}	0	0	0	0	00)	0	0	0	0
\check{A}_3^{29}	0	0	0	0	$\frac{ 11\rangle}{2}$	0	0	0	$-\frac{ 00\rangle}{2}$

	22)	21)	20)	12)	11)	10)	02)	01)	00)
\check{A}_+^{30}	0	0	0	0	0	0	10)	0	0
\check{A}_-^{30}	0	0	0	0	0	02)	0	0	0
\check{A}_3^{30}	0	0	0	0	0	$\frac{ 10\rangle}{2}$	$-\frac{ 02\rangle}{2}$	0	0

	22)	21)	20)	12)	11)	10)	02)	01)	00)
\check{A}_+^{31}	0	0	0	0	0	0	0	10)	0
\check{A}_-^{31}	0	0	0	0	0	01)	0	0	0
\check{A}_3^{31}	0	0	0	0	0	$\frac{ 10\rangle}{2}$	0	$-\frac{ 01\rangle}{2}$	0

	22)	21)	20)	12)	11)	10)	02)	01)	00)
\check{A}_+^{32}	0	0	0	0	0	0	0	0	10)
\check{A}_-^{32}	0	0	0	0	0	00)	0	0	0
\check{A}_3^{32}	0	0	0	0	0	$\frac{ 10\rangle}{2}$	0	0	$-\frac{ 00\rangle}{2}$

	22)	21)	20)	12)	11)	10)	02)	01)	00)
\check{A}_+^{33}	0	0	0	0	0	0	0	0	02)
\check{A}_-^{33}	0	0	0	0	0	0	01)	0	0
\check{A}_3^{33}	0	0	0	0	0	0	$\frac{ 02\rangle}{2}$	$-\frac{ 01\rangle}{2}$	0

	22)	21)	20)	12)	11)	10)	02)	01)	00)
\check{A}_+^{34}	0	0	0	0	0	0	0	0	02)
\check{A}_-^{34}	0	0	0	0	0	0	00)	0	0
\check{A}_3^{34}	0	0	0	0	0	0	$\frac{ 02\rangle}{2}$	0	$-\frac{ 00\rangle}{2}$

	22)	21)	20)	12)	11)	10)	02)	01)	00)
\check{A}_+^{35}	0	0	0	0	0	0	0	0	01)
\check{A}_-^{35}	0	0	0	0	0	0	0	00)	0
\check{A}_3^{35}	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{ 01\rangle}{2}$	$-\frac{ 00\rangle}{2}$

C. Acción de los superoperadores \check{A}_{\pm}^k sobre los vectores simétricos

$$\begin{aligned}
\check{A}_+^0 Q_{a_3^7 a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} &= (a^{13} + a_3^{13}) Q_{a_3^7 + 1/2 a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13} - 1/2} \\
\check{A}_+^1 Q_{a_3^7 a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} &= (\gamma) Q_{a_3^7 + 1/2 a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} \\
\check{A}_+^2 Q_{a_3^7 a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} &= (a^{22} + a_3^{22}) Q_{a_3^7 + 1/2 a_3^{27} a_3^{22} - 1/2 a_3^{13}} \\
\check{A}_+^3 Q_{a_3^7 a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} &= (a^{27} + a_3^{27}) Q_{a_3^7 + 1/2 a_3^{27} - 1/2 a_3^{22} a_3^{13}} \\
\check{A}_+^4 Q_{a_3^7 a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} &= (a^{22} - a_3^{22}) Q_{a_3^7 + 1/2 a_3^{27} a_3^{22} - 1/2 a_3^{13}} \\
\check{A}_+^5 Q_{a_3^7 a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} &= (a^{27} - a_3^{27}) Q_{a_3^7 + 1/2 a_3^{27} - 1/2 a_3^{22} a_3^{13}} \\
\check{A}_+^6 Q_{a_3^7 a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} &= (a^{13} - a_3^{13}) Q_{a_3^7 + 1/2 a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13} - 1/2} \\
\check{A}_+^7 Q_{a_3^7 a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} &= (a^7 - a_3^7) Q_{a_3^7 + 1 a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} \\
\check{A}_+^8 Q_{a_3^7 a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} &= (\gamma) Q_{a_3^7 a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13} + 1/2} \\
\check{A}_+^9 Q_{a_3^7 a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} &= (a^{22} + a_3^{22}) Q_{a_3^7 a_3^{27} a_3^{22} - 1/2 a_3^{13} + 1/2} \\
\check{A}_+^{10} Q_{a_3^7 a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} &= (a^{27} + a_3^{27}) Q_{a_3^7 a_3^{27} - 1/2 a_3^{22} a_3^{13} + 1/2} \\
\check{A}_+^{11} Q_{a_3^7 a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} &= (a^{22} - a_3^{22}) Q_{a_3^7 a_3^{27} a_3^{22} + 1/2 a_3^{13} + 1/2} \\
\check{A}_+^{12} Q_{a_3^7 a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} &= (a^{27} - a_3^{27}) Q_{a_3^7 a_3^{27} + 1/2 a_3^{22} a_3^{13} + 1/2} \\
\check{A}_+^{13} Q_{a_3^7 a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} &= (a^{13} - a_3^{13}) Q_{a_3^7 a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13} + 1} \\
\check{A}_+^{14} Q_{a_3^7 a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} &= (a^7 - a_3^7) Q_{a_3^7 - 1/2 a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13} + 1/2} \\
\check{A}_+^{15} Q_{a_3^7 a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} &= (a^{22} + a_3^{22}) Q_{a_3^7 a_3^{27} a_3^{22} - 1/2 a_3^{13}} \\
\check{A}_+^{16} Q_{a_3^7 a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} &= (a^{27} + a_3^{27}) Q_{a_3^7 a_3^{27} - 1/2 a_3^{22} a_3^{13}} \\
\check{A}_+^{17} Q_{a_3^7 a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} &= (a^{22} - a_3^{22}) Q_{a_3^7 a_3^{27} a_3^{22} + 1/2 a_3^{13}}
\end{aligned}$$

C. Acción de los superoperadores \check{A}_{\pm}^k sobre los vectores simétricos

$$\begin{aligned}
\check{A}_-^0 Q_{a_3^7 a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} &= (a^7 + a_3^7) Q_{a_3^7 - 1/2 a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13} + 1/2} \\
\check{A}_-^1 Q_{a_3^7 a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} &= (a^7 + a_3^7) Q_{a_3^7 - 1/2 a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} \\
\check{A}_-^2 Q_{a_3^7 a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} &= (a^7 + a_3^7) Q_{a_3^7 - 1/2 a_3^{27} a_3^{22} + 1/2 a_3^{13}} \\
\check{A}_-^3 Q_{a_3^7 a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} &= (a^7 + a_3^7) Q_{a_3^7 - 1/2 a_3^{27} + 1/2 a_3^{22} a_3^{13}} \\
\check{A}_-^4 Q_{a_3^7 a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} &= (a^7 + a_3^7) Q_{a_3^7 - 1/2 a_3^{27} a_3^{22} - 1/2 a_3^{13}} \\
\check{A}_-^5 Q_{a_3^7 a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} &= (a^7 + a_3^7) Q_{a_3^7 - 1/2 a_3^{27} + 1/2 a_3^{22} a_3^{13}} \\
\check{A}_-^6 Q_{a_3^7 a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} &= (a^7 + a_3^7) Q_{a_3^7 - 1/2 a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13} - 1/2} \\
\check{A}_-^7 Q_{a_3^7 a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} &= (a^7 + a_3^7) Q_{a_3^7 - 1 a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} \\
\check{A}_-^8 Q_{a_3^7 a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} &= (a^{13} + a_3^{13}) Q_{a_3^7 a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13} - 1/2} \\
\check{A}_-^9 Q_{a_3^7 a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} &= (a^{13} + a_3^{13}) Q_{a_3^7 a_3^{27} a_3^{22} + 1/2 a_3^{13} - 1/2} \\
\check{A}_-^{10} Q_{a_3^7 a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} &= (a^{13} + a_3^{13}) Q_{a_3^7 a_3^{27} + 1/2 a_3^{22} a_3^{13} - 1/2} \\
\check{A}_-^{11} Q_{a_3^7 a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} &= (a^{13} + a_3^{13}) Q_{a_3^7 a_3^{27} a_3^{22} - 1/2 a_3^{13} - 1/2} \\
\check{A}_-^{12} Q_{a_3^7 a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} &= (a^{13} + a_3^{13}) Q_{a_3^7 a_3^{27} + 1/2 a_3^{22} a_3^{13} - 1/2} \\
\check{A}_-^{13} Q_{a_3^7 a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} &= (a^{13} + a_3^{13}) Q_{a_3^7 a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13} - 1} \\
\check{A}_-^{14} Q_{a_3^7 a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} &= (a^{13} + a_3^{13}) Q_{a_3^7 + 1/2 a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13} - 1/2} \\
\check{A}_-^{15} Q_{a_3^7 a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} &= (\gamma) Q_{a_3^7 a_3^{27} a_3^{22} + 1/2 a_3^{13}} \\
\check{A}_-^{16} Q_{a_3^7 a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} &= (\gamma) Q_{a_3^7 a_3^{27} + 1/2 a_3^{22} a_3^{13}} \\
\check{A}_-^{17} Q_{a_3^7 a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} &= (\gamma) Q_{a_3^7 a_3^{27} a_3^{22} - 1/2 a_3^{13}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\check{A}_+^{18} Q_{a_3^7}^{a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} &= (a^{27} - a_3^{27}) Q_{a_3^7}^{a_3^{27-1/2} a_3^{22} a_3^{13}} \\
\check{A}_+^{19} Q_{a_3^7}^{a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} &= (a^{13} - a_3^{13}) Q_{a_3^7}^{a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13-1/2}} \\
\check{A}_+^{20} Q_{a_3^7}^{a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} &= (a^7 - a_3^7) Q_{a_3^7+1/2}^{a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} \\
\check{A}_+^{21} Q_{a_3^7}^{a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} &= (a^{27} + a_3^{27}) Q_{a_3^7}^{a_3^{27-1/2} a_3^{22+1/2} a_3^{13}} \\
\check{A}_+^{22} Q_{a_3^7}^{a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} &= (a^{22} - a_3^{22}) Q_{a_3^7}^{a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} + 1 a_3^{13} \\
\check{A}_+^{23} Q_{a_3^7}^{a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} &= (a^{27} - a_3^{27}) Q_{a_3^7}^{a_3^{27-1/2} a_3^{22+1/2} a_3^{13}} \\
\check{A}_+^{24} Q_{a_3^7}^{a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} &= (a^{13} - a_3^{13}) Q_{a_3^7}^{a_3^{27} a_3^{22+1/2} a_3^{13-1/2}} \\
\check{A}_+^{25} Q_{a_3^7}^{a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} &= (a^7 - a_3^7) Q_{a_3^7+1/2}^{a_3^{27} a_3^{22+1/2} a_3^{13}} \\
\check{A}_+^{26} Q_{a_3^7}^{a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} &= (a^{22} - a_3^{22}) Q_{a_3^7}^{a_3^{27+1/2} a_3^{22-1/2} a_3^{13}} \\
\check{A}_+^{27} Q_{a_3^7}^{a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} &= (a^{27} - a_3^{27}) Q_{a_3^7}^{a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} + 1 a_3^{22} a_3^{13} \\
\check{A}_+^{28} Q_{a_3^7}^{a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} &= (a^{13} - a_3^{13}) Q_{a_3^7}^{a_3^{27+1/2} a_3^{22} a_3^{13-1/2}} \\
\check{A}_+^{29} Q_{a_3^7}^{a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} &= (a^7 - a_3^7) Q_{a_3^7+1/2}^{a_3^{27+1/2} a_3^{22} a_3^{13}} \\
\check{A}_+^{30} Q_{a_3^7}^{a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} &= (a^{27} - a_3^{27}) Q_{a_3^7}^{a_3^{27-1/2} a_3^{22+1/2} a_3^{13}} \\
\check{A}_+^{31} Q_{a_3^7}^{a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} &= (a^{13} - a_3^{13}) Q_{a_3^7}^{a_3^{27} a_3^{22+1/2} a_3^{13-1/2}} \\
\check{A}_+^{32} Q_{a_3^7}^{a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} &= (a^7 - a_3^7) Q_{a_3^7+1/2}^{a_3^{27} a_3^{22+1/2} a_3^{13}} \\
\check{A}_+^{33} Q_{a_3^7}^{a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} &= (a^{13} - a_3^{13}) Q_{a_3^7}^{a_3^{27+1/2} a_3^{22} a_3^{13-1/2}} \\
\check{A}_+^{34} Q_{a_3^7}^{a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} &= (a^7 - a_3^7) Q_{a_3^7+1/2}^{a_3^{27-1/2} a_3^{22+1/2} a_3^{13}} \\
\check{A}_+^{35} Q_{a_3^7}^{a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} &= (a^7 - a_3^7) Q_{a_3^7+1/2}^{a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13-1/2}}
\end{aligned}$$

C. Acción de los superoperadores \check{A}_{\pm}^k sobre los vectores simétricos

$$\begin{aligned}
\check{A}_{-}^{18} Q_{a_3^7 a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} &= (\gamma) Q_{a_3^7 a_3^{27} - 1/2 a_3^{22} a_3^{13}} \\
\check{A}_{-}^{19} Q_{a_3^7 a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} &= (\gamma) Q_{a_3^7 a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13} + 1/2} \\
\check{A}_{-}^{20} Q_{a_3^7 a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} &= (\gamma) Q_{a_3^7 + 1/2 a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} \\
\check{A}_{-}^{21} Q_{a_3^7 a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} &= (a^{22} + a_3^{22}) Q_{a_3^7 a_3^{27} + 1/2 a_3^{22} - 1/2 a_3^{13}} \\
\check{A}_{-}^{22} Q_{a_3^7 a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} &= (a^{22} + a_3^{22}) Q_{a_3^7 a_3^{27} a_3^{22} - 1 a_3^{13}} \\
\check{A}_{-}^{23} Q_{a_3^7 a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} &= (a^{22} + a_3^{22}) Q_{a_3^7 a_3^{27} + 1/2 a_3^{22} - 1/2 a_3^{13}} \\
\check{A}_{-}^{24} Q_{a_3^7 a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} &= (a^{22} + a_3^{22}) Q_{a_3^7 a_3^{27} - 1/2 a_3^{22} - 1/2 a_3^{13}} \\
\check{A}_{-}^{25} Q_{a_3^7 a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} &= (a^{22} + a_3^{22}) Q_{a_3^7 a_3^{27} a_3^{22} - 1/2 a_3^{13} + 1/2} \\
\check{A}_{-}^{26} Q_{a_3^7 a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} &= (a^{22} + a_3^{22}) Q_{a_3^7 + 1/2 a_3^{27} a_3^{22} - 1/2 a_3^{13}} \\
\check{A}_{-}^{27} Q_{a_3^7 a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} &= (a^{27} + a_3^{27}) Q_{a_3^7 a_3^{27} - 1/2 a_3^{22} + 1/2 a_3^{13}} \\
\check{A}_{-}^{28} Q_{a_3^7 a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} &= (a^{27} + a_3^{27}) Q_{a_3^7 a_3^{27} - 1/2 a_3^{22} - 1/2 a_3^{13}} \\
\check{A}_{-}^{29} Q_{a_3^7 a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} &= (a^{27} + a_3^{27}) Q_{a_3^7 + 1/2 a_3^{27} - 1/2 a_3^{22} a_3^{13}} \\
\check{A}_{-}^{30} Q_{a_3^7 a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} &= (a^{27} + a_3^{27}) Q_{a_3^7 a_3^{27} - 1/2 a_3^{22} + 1/2 a_3^{13}} \\
\check{A}_{-}^{31} Q_{a_3^7 a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} &= (a^{27} + a_3^{27}) Q_{a_3^7 a_3^{27} - 1/2 a_3^{22} a_3^{13} + 1/2} \\
\check{A}_{-}^{32} Q_{a_3^7 a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} &= (a^{27} + a_3^{27}) Q_{a_3^7 a_3^{27} + 1/2 a_3^{22} - 1/2 a_3^{13}} \\
\check{A}_{-}^{33} Q_{a_3^7 a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} &= (a^{27} + a_3^{27}) Q_{a_3^7 a_3^{27} - 1/2 a_3^{22} a_3^{13} + 1/2} \\
\check{A}_{-}^{34} Q_{a_3^7 a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} &= (a^{27} + a_3^{27}) Q_{a_3^7 + 1/2 a_3^{27} - 1/2 a_3^{22} a_3^{13}} \\
\check{A}_{-}^{35} Q_{a_3^7 a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13}} &= (a^{13} - a_3^{13}) Q_{a_3^7 + 1/2 a_3^{27} a_3^{22} a_3^{13} - 1/2}
\end{aligned}$$

Referencias

1. Lindblad, G. On the generators of quantum dynamical semigroups. *Communications in Mathematical Physics* **48**, 119-130 (1976).
2. Tarasov, L. *This Amazingly Symmetrical World* (Mir Publishers, 1986).
3. Fano, U. *et. al. Symmetries in Quantum Physics* (Academic Press, 1996).
4. Chen, X. *et. al. Symmetry-Protected Topological Orders in Interacting Bosonic Systems. Science* **338**, 1604-1606 (2012).
5. Kiffner, M. *et. al. en Progress in Optics, Vol. 55* (ed. Wolf, E.) 85-197 (Elsevier Science, 2010).
6. Sarkar, S. *et. al. Solution of master equations for small bistable systems. Journal of Physics A: Mathematical and General* **20**, 2147 (1987).
7. Hartmann, S. Generalized Dicke States. *arXiv:1201.1732* (2012).
8. *Comunicación privada.*
9. Pérez, F. *et. al. IPython: a System for Interactive Scientific Computing. Computing in Science and Engineering* **9**, 21-29 (2007).
10. SymPy Development Team. *SymPy: Python library for symbolic mathematics* (2013).
11. <http://www.iimas.unam.mx/barberis/EstadosSimetricos>.
12. Johansson, J. *et. al. QuTiP 2: A Python framework for the dynamics of open quantum systems. Computer Physics Communications* **184**, 1234-1240 (2013).
13. Tarasov, V. *Quantum Mechanics of Non-Hamiltonian and Dissipative Systems* (Elsevier, 2008).
14. Schlosshauer, M. A. *Decoherence: And the Quantum-To-Classical Transition* (Springer, 2010).
15. Heinosaari, T. Guide to mathematical concepts of quantum theory. *Acta Physica Slovaca. Reviews and Tutorials* **58**, 487-674 (2008).
16. Breuer, H.-P. *et. al. The Theory of Open Quantum Systems* (Oxford University Press, 2002).
17. Weiss, U. *Quantum Dissipative Systems* (World Scientific, 1993).
18. Kraus, K. *States, Effects, and Operations: Fundamental Notions of Quantum Theory* (Springer, 1983).

Referencias

19. Barnum, H. *et. al.* Information transmission through a noisy quantum channel. *Phys. Rev. A* **57**, 4153-4175 (1998).
20. Benenti, G. *et. al.* *Principles of Quantum Computation and Information: Basic concepts* (World Scientific, 2004).
21. Rivas, Á. *et. al.* *Open Quantum Systems: An Introduction* (Springer, 2011).
22. Alicki, R. *et. al.* *Quantum Dynamical Systems* (Oxford University Press, 2001).
23. Gorini, V. *et. al.* Completely positive dynamical semigroups of N -level systems. *Journal of Mathematical Physics* **17**, 821-825 (1976).
24. Mukamel, S. *Principles of Nonlinear Optical Spectroscopy* (Oxford University Press, 1999).
25. Fuchs, J. *et. al.* *Symmetries, Lie Algebras and Representations* (Cambridge University Press, 2003).
26. Prigogine, I. *et. al.* A Unified Formalism of Dynamics and Thermodynamics. *Chemica Scripta* **4**, 5-32 (1973).
27. Ficek, Z. *et. al.* *Quantum Interference and Coherence: Theory and Experiments* (Springer, 2004).
28. Mandel, L. *et. al.* *Optical Coherence and Quantum Optics* (Cambridge University Press, 1994).
29. Schwinger, J. *Reporte NYO-3071 (1952); después publicado en Quantum Theory of Angular Momentum, editado por LC Biendeharn y H. Van Dam 1965.*
30. Dicke, R. H. Coherence in spontaneous radiation processes. *Physical Review* **93**, 99 (1954).
31. Chase, B. A. *et. al.* Collective processes of an ensemble of spin-1/2 particles. *Phys. Rev. A* **78**, 052101 (2008).
32. Xu, M. *et. al.* Simulating open quantum systems by applying $SU(4)$ to quantum master equations. *Phys. Rev. A* **87**, 062101 (2013).
33. Klimov, A. B. *et. al.* *A Group-Theoretical Approach to Quantum Optics* (Wiley-VCH, 2008).
34. OEIS Foundation Inc. *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences* A059481. 2011.
35. Artin, M. *Algebra* (Pearson, 2010).
36. Putzer, E. J. Avoiding the Jordan Canonical Form in the Discussion of Linear Systems with Constant Coefficients. *The American Mathematical Monthly* **73**, 2-7 (1966).
37. Horn, R. A. *et. al.* *Topics in Matrix Analysis* (Cambridge University Press, 1991).
38. Kelley, W. G. *et. al.* *The Theory of Differential Equations: Classical and Qualitative* (Springer, 2010).

39. Kirchner, R. B. An Explicit Formula for e^{At} . *The American Mathematical Monthly* **74**, 1200-1204 (1967).
40. Fulmer, E. P. Computation of the Matrix Exponential. *The American Mathematical Monthly* **82**, 156-159 (1975).
41. Apostol, T. M. Some Explicit Formulas for the Exponential Matrix e^{tA} . *The American Mathematical Monthly* **76**, 289-292 (1969).
42. Leonard, I. The Matrix Exponential. *SIAM Review* **38**, 507-512 (1996).
43. Gilmore, R. *Lie Groups, Lie Algebras, and Some of Their Applications* (Wiley, 1974).
44. Verstraete, F. *et. al.* Quantum computation and quantum-state engineering driven by dissipation. *Nat Phys* **5**, 633-636 (2009).
45. Albert, V. V. *et. al.* Symmetries and conserved quantities in Lindblad master equations. *Phys. Rev. A* **89**, 022118 (2014).
46. Fleischhauer, M. *et. al.* Quantum memory for photons: Dark-state polaritons. *Physical Review A* **65**, 022314 (2002).