



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
MAESTRÍA EN CIENCIAS FÍSICAS
INSTITUTO DE CIENCIAS FÍSICAS

FUNCIONES DE POSICIÓN Y MOMENTO EN EL OJO DE PEZ DE
MAXWELL MONOCROMÁTICO

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE
MAESTRA EN CIENCIAS FÍSICAS

PRESENTA:
MA. CRISTINA SALTO ALEGRE

Dr. KURT BERNARDO WOLF BOGNER
INSTITUTO DE CIENCIAS FÍSICAS

DR. NATIG ATAKISHIYEV
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

DR. REMIGIO CABRERA TRUJILLO
INSTITUTO DE CIENCIAS FÍSICAS

CUERNAVACA, MORELOS JUNIO 2014.



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

TESIS DEFENDIDA POR

Ma. Cristina Salto Alegre

Y APROBADA POR EL JURADO:

Dr. Kurt Bernardo Wolf Bogner

Dra. Masuma Atakishiyeva

Dr. Natig Atakishiyev

Dr. Wolf Luis Mochán Backal

Dr. Alejandro Amaya Tapia

Agradecimientos

A mi familia por apoyarme y quererme tanto. Siempre están en mis pensamientos.

A mi querido Manuel Sedano, por ser mi mejor amigo y confidente. Gracias por escuchar mis quejas, tenerme paciencia y hacerme tan feliz durante estos años.

A todos los estudiantes del ICF, que aunque los he tratado poco, me divierto a lo grande con ustedes: Héctor, Carlos, Ricardo, Luisana, Berta, Paulino, Yamili, Aurora, Adriana, etc. A esas personas especiales que he conocido en Cuernavaca y que sin querer se han vuelto mis mejores amigos: Siomara, Natalia, César, Arturo y Denhi. ¡Gracias Arturo por enseñarme el enfoque de la física y felicidades por tu nuevo bebé!

A todos los maestros del ICF, por enseñarme lo hermosa que es la física y tenerme tanta paciencia. En especial, al Dr. Mochán por dar una clase tan genial, siempre quedaba anonadada después de su clase; al Dr. Récamier, que aunque no me haya dado clase, siempre me ha apoyado en todo.

A mi asesor, el Dr. Bernardo Wolf, a quién he llegado a tener mucho cariño. Gracias por tenerme tanta paciencia, ser mi guía en mi formación como científica y estar siempre al pendiente de mí.

A mi comité tutor: el Dr. Natig y el Dr. Remigio Cabrera por sus consejos y apoyarme con trámites cada semestre.

A los miembros de mi jurado, por sus válidos comentarios y el tiempo dedicado a la revisión de mi tesis.

Agradezco también a CONACYT por que sin la beca que me otorgó para estudiar la maestría no lo hubiera logrado. También, gracias al apoyo económico del proyecto UNAM-PAPIIT IN101011 que fué indispensable para el inicio de mi maestra.

*A mis abuelos, Leonor y Santiago,
por ser mis segundos padres.
Siempre vivirán en mi corazón.*

Resumen

El ojo de pez de Maxwell en óptica geométrica es un medio con un índice de refracción tal que las trayectorias de la luz son círculos. En nuestro caso, exploramos la versión monocromática de este medio, donde la luz puede tener únicamente un conjunto discreto de longitudes de onda. Para luz monocromática (lo cual significa tomar un valor fijo para el ‘momento angular’ ℓ), las soluciones independientes son un conjunto discreto. Por consiguiente, se tiene un sistema finito de dimensión $2\ell + 1$.

En este trabajo se estudia el caso bidimensional, donde una esfera \mathcal{S}^2 (en un espacio ambiente tridimensional) es proyectada en el medio óptico bidimensional \mathcal{R}^2 del ojo de pez. De esta manera, mediante la proyección estereográfica, al encontrar las bases de funciones en la esfera se encuentran las correspondientes bases de campos de ondas de posición y momento en el plano del ojo de pez. La *base de momento* se forma por $2\ell + 1$ funciones de Sherman Volobuyev y la *base de posición* consta de dos conjuntos: la subbase de $\ell + 1$ *dedos de Legendre* (posición) y la subbase de ℓ funciones *derivadas normales*.

Además, se hace la contracción del ojo de pez al medio homogéneo de Helmholtz que corresponde al mismo formalismo de la contracción del álgebra de rotaciones $so(3)$ al álgebra Euclidiana $iso(2)$.

Índice

Agradecimientos	ii
Resumen	iv
Índice	v
Lista de figuras	vi
1 Introducción	1
Proyección estereográfica	2
Mapeo unitario entre espacios de Hilbert	4
2 Bases en el ojo de pez	6
2.1 Armónicos esféricos	6
2.2 Base de Sherman-Volobuyev	10
Base finita no-ortogonal de ShV	12
2.3 Base de Legendre	13
Superposición de bases de $nShV$ y Legendre	19
3 Contracción del ojo de pez a un medio homogéneo	21
Parámetros de contracción	21
3.1 Contracción de funciones de la base $nShV$	23
3.2 Contracción en la base de Legendre	25
4 Conclusiones	29
A Transformada de onda y producto interior en el espacio de Helmholtz	31
Referencias	35

Lista de figuras

1.1	Trayectoria de una partícula y trayectorias de luz en el ojo de pez . . .	2
1.2	Proyección estereográfica	2
1.3	Índice de refracción del ojo de pez de Maxwell	3
2.1	Armónicos esféricos en la esfera y el plano	8
2.2	Funciones de Sherman-Volobuyev	11
2.3	armónico de Legendre	14
2.4	Subbase de $\ell + 1$ funciones de posición	15
2.5	Subbase de ℓ derivadas normales	17
3.1	Campo de onda más localizado y su de derivada en el medio de Helmholtz.	27

1. Introducción

En 1854, la Real Academia de Irlanda ofreció un premio a quién resolviera el siguiente problema: determinar el índice de refracción $n(\vec{r})$ de un medio óptico inhomogéneo en el que rayos paralelos de luz (en el aire) al entrar al medio llegaran todos a un mismo punto recorriendo distancias mínimas. Este problema fue resuelto por Maxwell [1], y desde entonces el medio óptico es llamado el *ojo de pez de Maxwell*. Maxwell encontró que este medio debe tener un índice de refracción que depende solamente del radio $r := |\vec{r}|$ en un medio tridimensional $\vec{r} = (x, y, z) \in \mathcal{R}^3$, $z > 0$, y es $n(\vec{r}) = 1/(1 + (r/R_0)^2)$; rayos incidentes paralelos entre sí, en la cara $z = 0$, recorrerán trayectorias circulares dentro del medio óptico y se cumplirá que recorren una distancia mínima para converger en ese punto. Aquí consideraremos que el medio óptico inhomogéneo $n(\vec{r}) = 1/(1 + r^2)$ se extiende sobre todo el espacio (y no solamente sobre el subespacio $z > 0$), por lo que las trayectorias de luz serán círculos, y trabajaremos con un modelo plano de dos dimensiones, de modo que $\vec{r} = (x, y) \in \mathcal{R}^2$.

Lunenburg [2] demostró que en óptica geométrica el movimiento de la luz en el ojo de pez es la proyección estereográfica del movimiento libre de una partícula sobre círculos máximos en la superficie de una esfera (*rotor puntual*), como se sugiere en la Fig. 1.1. Los dos sistemas comparten así la misma dinámica y simetría regida por el grupo de Lie de rotaciones de la esfera $SO(3)$. Otro sistema que también contiene esta simetría es el átomo de hidrógeno en la mecánica cuántica, como fue descubierto por Fock [3], aunque en este caso el espacio tridimensional es proyección de una esfera en 4 dimensiones. Estudios posteriores por Buchdahl [4] determinaron que los generadores de este grupo de rotaciones cierran en el álgebra de Lie $so(3)$, donde la energía está relacionada con su operador invariante de Casimir (el ‘momento angular total’). Finalmente, en el marco del espacio fase completo —incluyendo coordenadas de posición y de momento—, se demostró que el mapeo estereográfico es *canónico* en mecánica u óptica clásica [5], como aparece en el texto [6, Capítulo 6].

Aquí extendemos el análisis a un modelo ondulatorio de la óptica que supone luz monocromática, que utiliza la bien conocida teoría del momento angular cuántico y las representaciones irreducibles del grupo $SO(3)$, para construir bases de funciones que puedan interpretarse como las de posición y momento en el ojo de pez. Constataremos estas asignaciones examinando su comportamiento en el límite cuando la proyección estereográfica tiende al mapeo unidad, y el ojo de pez tiende a un medio homogéneo descrito por la ecuación de Helmholtz. En este límite embonamos con estudios más

recientes donde se analizan aspectos del espacio fase en un sistema gobernado por una ecuación diferencial de segundo grado, cuyas soluciones están generadas por condiciones iniciales de valor y derivada normal, y cuyo producto interior invariante es no-local [7, 8].

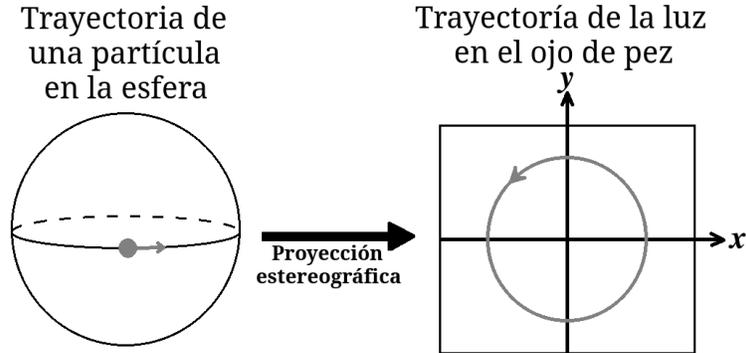


Figura 1.1: La trayectoria de una partícula sobre la superficie de una esfera bajo proyección estereográfica se mapea en las trayectorias de luz en el medio óptico del ojo de pez.

Proyección estereográfica

La *proyección estereográfica* mapea los puntos de la superficie de una esfera de radio ρ sobre un plano $(x, y) \in \mathcal{R}^2$; en nuestro caso el plano es tangente al polo superior de la esfera, $z = \rho$ como se muestra en la Fig. 1.2; el polo inferior es mapeado al punto infinito del plano. Este mapeo es bien conocido en matemáticas: proyecta círculos de la esfera a círculos en el plano, y los ángulos sobre la esfera son los mismos que en el plano (el mapeo es *conforme*). Conforme la partícula libre se mueve sobre círculos máximos, su proyección como trayectorias de la luz son círculos en el plano del ojo de pez.

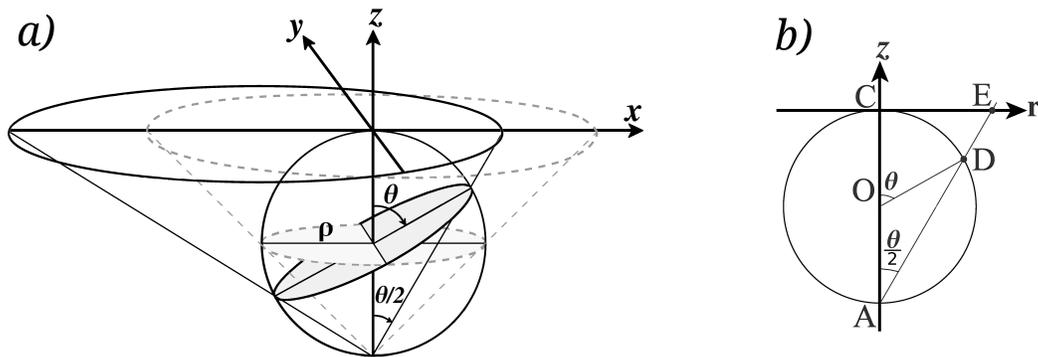


Figura 1.2: a) Un círculo máximo sobre la esfera de radio ρ con ángulo polar θ se proyecta sobre un círculo en el plano óptico (*línea continua*). El ecuador de la esfera se proyecta al llamado *círculo mínimo o mágico* (*línea punteada*). Las parejas de puntos antípodos sobre la esfera se mapean en puntos *conjugados* en el plano óptico. b) Un punto D sobre la esfera (círculo), es proyectado desde el polo sur A al plano óptico r en el punto E .

Para el ojo de pez bidimensional como en la Figura 1.2 consideramos la esfera en un espacio *ambiente* tridimensional $\mathcal{S}_\rho^2 \subset \mathcal{R}^3$ con coordenadas polares $\Omega = (\theta, \phi)$, $\theta \in [0, \pi]$, $\phi \in (-\pi, \pi]$, cuyo radio fijo es $\rho > 0$. Las coordenadas en el plano del ojo de pez serán $\mathbf{r} := (x, y) = (r \cos \phi, r \sin \phi) \in \mathcal{R}^2$, $r = |\mathbf{r}|$ y $\tan \phi = x/y$. El mapeo estereográfico entre la esfera \mathcal{S}^2 y el plano \mathcal{R}^2 está dado por

$$\tan \frac{1}{2}\theta = \frac{r}{2\rho}, \quad \text{es decir,} \quad \sin \theta = \frac{4\rho r}{4\rho^2 + r^2} \quad \cos \theta = \frac{4\rho^2 - r^2}{4\rho^2 + r^2}. \quad (1.1)$$

y el ángulo ϕ es el mismo en ambos espacios. El polo superior de la esfera, $\theta = 0$, se mapea en el origen y centro del ojo de pez $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, mientras que el polo sur $\theta = \pi$ se mapea en el punto al infinito del plano óptico (el cual se agrega a \mathcal{R}^2); el ecuador de la esfera, $\theta = \frac{1}{2}\pi$, se mapea sobre el círculo de radio $|\mathbf{r}| = 2\rho$ que está centrado en el origen, al cuál llamaremos *círculo mínimo*, porque es menor al radio de cualquier otra trayectoria en el ojo de pez. El índice de refracción del ojo de pez es [1, 2, 4]

$$n(r) = \frac{n_0}{1 + r^2/4\rho^2}, \quad n_0 := n(0). \quad (1.2)$$

Dentro del círculo mínimo $r \leq 2\rho$ se tiene un índice de refracción $n(r) \geq \frac{1}{2}n_0$. Con este modelo se puede describir una guía de ondas cuyo índice de refracción al centro sea $n_0 = 2$ y con radio $r = 2\rho$, bordeada de vacío $n(2\rho) = 1$. Matemáticamente sin embargo, no hay impedimento para considerar todo el plano $\mathbf{r} \in \mathcal{R}^2$. En el modelo de óptica geométrica el mapeo estereográfico entre los espacios fase es *canónico* [6, Sect. 6.4], mientras que para el caso monocromático que analizamos como espacio vectorial finito (de $2\ell + 1$ dimensiones) la canonicidad será remplazada por la *unitariedad*. Estas transformaciones entre espacios son reversibles y en consecuencia conservan la información contenida en sus posibles estados. Esta transformación unitaria entre espacios los de Hilbert de funciones sobre la esfera y en el plano, será descrita en una sección posterior.

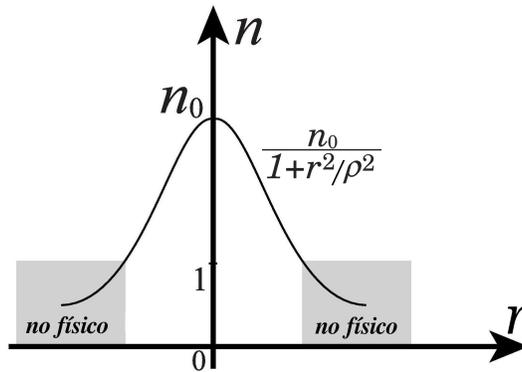


Figura 1.3: Índice de refracción $n(r)$ del ojo de pez de Maxwell. La región no-física $n(r) < 1$ se muestra sombreada.

Mapeo unitario entre espacios de Hilbert

Con el objetivo de mapear funciones de cuadrado integrable en la esfera, $F(\Omega) = F(\theta, \phi) \in \mathcal{L}^2(\mathcal{S}^2)$ en funciones de onda en el plano óptico $f(\mathbf{r}) = f(r, \phi) = f(x, y) \in \mathcal{L}^2(\mathcal{R}^2)$ de manera unitaria (preservando el producto interior), a partir de (1.1) se encuentra la relación entre las medidas en la esfera y el plano,

$$d \cos \theta = \left(\frac{4\rho}{r^2 + 4\rho^2} \right)^2 r dr, \quad d\phi = \frac{x dx - y dy}{r^2}, \quad (1.3)$$

de modo que

$$d^2\Omega = d \cos \theta d\phi = \left(\frac{4\rho}{r^2 + 4\rho^2} \right)^2 r dr d\phi = \left(\frac{4\rho}{r^2 + 4\rho^2} \right)^2 dx dy. \quad (1.4)$$

Usando (1.4), exigimos que el mapeo $F(\Omega) \mapsto f(\mathbf{r})$ sea unitario, de manera que los productos internos correspondientes se conserven: $(F, G)_{\mathcal{S}^2} = (f, g)_{\mathcal{R}^2}$, con medidas (1.4) y $d^2\mathbf{r} := dx dy$ respectivamente. Esto determina que las funciones deben estar relacionadas a través de un cambio de medida,

$$f(\mathbf{r}) = \left(\frac{4\rho}{r^2 + 4\rho^2} \right) F(\Omega(\mathbf{r})), \quad F(\Omega) = \rho \sec^2(\frac{1}{2}\theta) f(\mathbf{r}(\Omega)). \quad (1.5)$$

El *multiplicador* frente a $F(\Omega(\mathbf{r}))$ es un *factor de oblicuidad* en el plano óptico, debido al ángulo θ de proyección de ese plano, como se ve en la figura 1.2. Una manera muy intuitiva de entender este factor entre la esfera y el plano, es colocando una lámpara en el polo inferior, la intensidad de la luz proyectada en el plano tiene su máximo alrededor del origen del plano, mientras que intensidad disminuye cuando nos alejamos de él. Con (1.5), el producto interior entre las funciones en los dos espacios de Hilbert esta dado por

$$(F, G)_{\mathcal{S}^2} := \int_{\mathcal{S}^2} d^2\Omega F(\Omega)^* G(\Omega) = \int_{\mathcal{R}^2} d^2\mathbf{r} f(\mathbf{r})^* g(\mathbf{r}) =: (f, g)_{\mathcal{R}^2} \quad (1.6)$$

Cuando la luz es tratada como onda, no hay trayectorias como en el modelo geométrico. Para proponer un espacio fase óptico necesitamos bases de funciones de posición y de momento que sean análogas a las usadas en mecánica cuántica. Encontraremos funciones de onda para formar bases de posición y momento sobre la esfera y, mediante la proyección estereográfica, sus campos de ondas correspondientes en el medio de ojo de pez. Las bases encontradas serán de *posición* y de *momento* en el sentido que al tomar el límite $\ell, \rho \rightarrow \infty$ correspondan a las funciones más localizadas y a ondas planas en el espacio de Helmholtz, respectivamente.

Llamamos "monocromático" a este modelo porque reducimos el espacio de funciones sobre la esfera a aquellas que pertenecen a una sola representación irreducible del grupo $SO(3)$ determinada por su momento angular $\ell, L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 = \ell(\ell + 1)$ (1.7) Como puede apreciarse en una representación gráfica de los armónicos "ex-

tremos" $Y_{\ell, \pm \ell}$ (ver Fig. (2.1)), éstos tienen ℓ oscilaciones alrededor del ecuador, independientemente del radio ρ de la esfera. Como veremos en el capítulo 3, en el límite al medio homogéneo cuando $\ell = \rho k \rightarrow \infty$, el número de onda del campo en este medio de Helmholtz será k , donde la longitud de onda será $\lambda = 2\pi/k$. Aquí no contemplamos la dependencia en el tiempo de los campos. Si descendemos de la ecuación de onda al Laplaciano sobre la esfera, la frecuencia de oscilación será $\omega = ck$ en el límite, mientras que para ρ, ℓ finitas, será $c\sqrt{\ell(\ell+1)}$. Al considerar luz monocromática tendremos un conjunto finito de funciones en cada una de las bases consideradas [9].

2. Bases en el ojo de pez

En este capítulo desarrollaremos tres bases relevantes para el sistema del ojo de pez ondulatorio, obtenidas a partir de funciones que caracterizaremos sobre la esfera. Después proyectaremos estereográficamente estos conjuntos de funciones para visualizarlos como campos de ondas en el medio óptico. Los ilustraremos mediante simulaciones numéricas en MATHEMATICA. Tres bases de funciones sobre la esfera serán importantes: los armónicos esféricos $Y_{\ell,m}(\theta, \phi)$, las funciones normalizadas de Sherman-Volobuyev definidas por versiones rotadas de $Y_{\ell,\ell}(\theta, \phi)$, y los armónicos de Legendre definidas por rotaciones de $Y_{\ell,0}(\theta, \phi)$. Finalmente, justificaremos la interpretación de éstas como bases de funciones para el espacio fase del sistema ojo de pez.

2.1. Armónicos esféricos

Para trabajar con funciones de onda sobre la esfera es común utilizar como funciones base a los armónicos esféricos, ya que es una base ortonormal y completa, además de poseer relaciones de simetría bien conocidas. Por este motivo es importante escribir explícitamente algunas de sus características, ya que serán punto de partida para definir las bases de posición y momento para el sistema ondulatorio del ojo de pez monocromático.

Sobre la esfera, los generadores del álgebra de Lie de rotaciones $so(3)$ son los bien conocidos operadores de momento angular $\vec{L} = -i\vec{\rho} \times \nabla_{\vec{\rho}}$, donde $\vec{\rho} \equiv (x, y, z)$ en el espacio ambiente tridimensional, los cuales generan los elementos finitos del grupo de rotaciones $SO(3)$. En componentes Cartesianas, son

$$L_x = -i(y\partial_z - z\partial_y), \quad L_y = -i(z\partial_x - x\partial_z), \quad L_z = -i(x\partial_y - y\partial_x). \quad (2.1)$$

los cuales dejan invariante el radio $\rho = |\vec{\rho}|$ de la esfera. Éstos satisfacen las bien conocidas relaciones de conmutación $[L_i, L_j] = iL_k$, con i, j, k una permutación cíclica de x, y, z . Aunque en la esfera de radio ρ , solo existen dos coordenadas generalizadas (θ, ϕ) , los operadores del momento angular se muestran en coordenadas cartesianas ya que más adelante esta forma será útil para realizar la contracción (límite $\ell, \rho \rightarrow \infty$) del algebra de rotaciones $so(3)$ al álgebra euclidiana $iso(2)$.

Las representaciones matriciales $\mathcal{D}_{m,m'}^\ell(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-i(m\alpha+m'\gamma)} d_{m,m'}^\ell(\beta)$ del grupo $SO(3)$ son irreducibles y unitarias [10]; actúan sobre los espacios propios (*eigenespacios*)

del operador de Casimir invariante $L^2 = \sum_i L_i^2$ con eigenvalor $\ell(\ell+1)$, caracterizado por el entero positivo ℓ . Los armónicos esféricos son eigenfunciones del operador L_z cuyo espectro consiste en $2\ell+1$ eigenvalores equiespaciados $m|_\ell^\ell$ y del operador de Casimir L^2 . Los armónicos esféricos se definen como [11, Eqs. (3.141–153)]

$$\begin{aligned} Y_{\ell,m}(\theta, \phi) &= (-1)^m e^{im\phi} \sqrt{(2\ell+1)(\ell+m)!(\ell-m)!/4\pi} \\ &\quad \times \sum_k \frac{(-1)^k (\sin \theta)^{2k+m} (\cos \theta)^{\ell-2k-m}}{2^{2k+m} k! (k+m)! (\ell-2k-m)!} \\ &= A_{\ell,m} e^{im\phi} P_\ell^m(\cos \theta), \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\text{con } A_{\ell,m} = (-1)^m \sqrt{\frac{(2\ell+1)(\ell-m)!}{4\pi(\ell+m)!}}$$

$$\text{y } m \in \{-\ell, -\ell+1, \dots, \ell\}, \quad \ell \in \{0, 1, 2, \dots\} = \mathcal{Z}_0^+,$$

con $\theta \in [0, \pi]$ (polo superior y polo inferior, respectivamente) y $\phi \in (-\pi, \pi]$ (a partir del meridiano en la dirección x), donde $P_\ell^m(z)$ son los polinomios asociados de Legendre. Este conjunto de funciones es una base ortonormal y completa para el espacio de Hilbert de funciones (complejas) de cuadrado integrable sobre la esfera, $\mathcal{L}^2(\mathcal{S}^2)$:

$$\begin{aligned} (Y_{\ell,m}, Y_{\ell,m'})_{\mathcal{S}^2} &:= \int_0^\pi d \cos \theta \int_{-\pi}^\pi d\phi Y_{\ell,m}(\theta, \phi)^* Y_{\ell,m'}(\theta, \phi) \\ &= \delta_{m,m'}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} (Y(\theta, \phi), Y(\theta', \phi'))_{\mathcal{S}_2^*} &:= \sum_{\ell=0}^\infty \sum_{m=-\ell}^\ell Y_{\ell,m}(\theta, \phi)^* Y_{\ell,m}(\theta', \phi') \\ &= \delta(\cos \theta - \cos \theta') \delta(\phi - \phi'). \end{aligned} \quad (2.4)$$

con producto interno

$$(f, g)_{\mathcal{S}^2} := \int_0^\pi d \cos \theta \int_{-\pi}^\pi d\phi f(\theta, \phi)^* g(\theta, \phi), \quad (2.5)$$

donde $*$ denota la conjugación compleja.

Fijamos la representación ℓ y consideramos el espacio vectorial de dimensión $2\ell+1$ denotado por \mathcal{M}_ℓ , que será subconjunto finito del espacio $\mathcal{L}^2(\mathcal{S}^2)$. En el plano del ojo de pez, los campos de ondas correspondientes a los armónicos esféricos son, de acuerdo a (1.1) y (1.5),

$$y_{\ell,m}(\mathbf{r}) = A_{\ell,m} \frac{4\rho}{r^2 + 4\rho^2} e^{im\phi} P_\ell^m\left(\frac{4\rho^2 - r^2}{4\rho^2 + r^2}\right), \quad (2.6)$$

los cuales serán ortogonales y completos cuando se integran sobre $\mathbf{r} \in \mathcal{R}^2$ bajo el producto interno $(f, g)_{\mathcal{R}^2}$, usando (2.5) debido a que la proyección estereográfica es una transformación unitaria.

En la Fig. 2.1 se muestran algunos armónicos esféricos sobre la esfera y su corre-

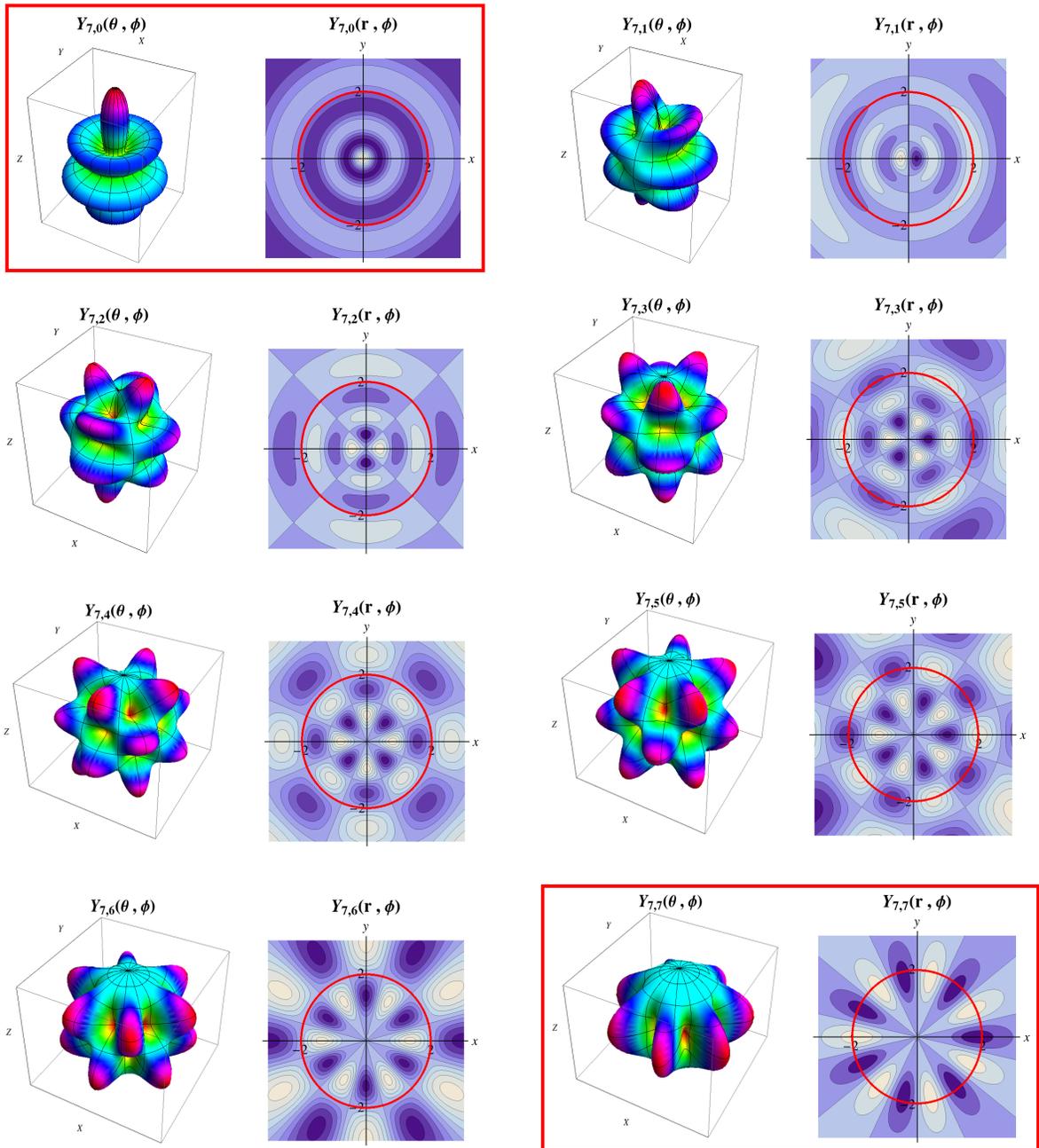


Figura 2.1: Armónicos esféricos en la esfera y el plano para $\ell = 7$ y $m = 0, 1, \dots, 7$. Noté que en la esfera, el armónico $Y_{7,0}(\theta, \phi)$ puede ser interpretado en la esfera como la posición de una partícula en el polo superior (y/o inferior) y el $Y_{7,7}(\theta, \phi)$ como una onda plana en el ecuador con $2\ell + 1 = 15$ oscilaciones.

spondiente proyección en el medio del ojo de pez. Recordemos que buscamos bases de funciones de onda que puedan ser interpretadas como funciones ‘propias’ de momento y posición. Intuitivamente hay dos casos particulares entre los armónicos esféricos

que son de interés. Para funciones de posición necesitamos armónicos esféricos que, al proyectarse sobre el plano óptico sean los campos de ondas *más localizados* posibles. De acuerdo con la Fig. 2.1, éstos son los armónicos de Legendre $Y_{\ell,0}(\theta, \phi)$. Para funciones de momento, los campos de onda en el ojo de pez que semejan una onda plana cerca del centro son los armónico extremo $Y_{\ell,\ell}(\theta, \phi)$, rotados $\frac{1}{2}\pi$ sobre el eje y . Todo esto con una ℓ fija, pues los campos que consideramos son monocromáticos. En particular, los armónicos *extremos* $m = \ell$ y los de *Legendre* $m = 0$, se definen como

$$Y_{\ell,\ell}(\theta, \phi) = \frac{(-1)^\ell}{2^\ell \ell!} \sqrt{\frac{(2\ell+1)!}{4\pi}} (\sin \theta e^{i\phi})^\ell = (-1)^\ell Y_{\ell,-\ell}(\theta, \phi)^*, \quad (2.7)$$

$$Y_{\ell,0}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} P_\ell(\cos \theta) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} {}_2F_1\left(\begin{matrix} -\ell, \ell+1 \\ 1 \end{matrix}; \sin^2 \frac{1}{2}\theta\right). \quad (2.8)$$

La convención del signo para $Y_{\ell,\ell}(\theta, \phi)$ es que son positivos en el polo superior, $Y_{\ell,\ell}(0, \phi) > 0$, y en el polo inferior el signo dependerá de la paridad de ℓ como $Y_{\ell,\ell}(\pi, \phi) \sim (-1)^\ell$. Los armónicos esféricos particulares (2.7) y (2.8) son las funciones prototípicas para las bases de posición y momento que se describirán en las secciones siguientes. Para que estas funciones generen las bases para el espacio \mathcal{M}_ℓ es necesario considerar sus rotaciones a través de ángulos de Euler.

Las rotaciones azimutales de funciones sobre la esfera (alrededor del eje z) son generadas por $L_z = -i\partial/\partial\phi$ a través de $\exp(-i\alpha L_z) F(\theta, \phi) = F(\theta, \phi - \alpha)$. En la base de armónicos esféricos esta rotación unicamente multiplica por fases: $Y_{\ell,m}(\theta, \phi - \alpha) = e^{-im\alpha} Y_{\ell,m}(\theta, \phi)$. Por otro lado, las rotaciones polares (alrededor del eje y) están dadas por la combinación lineal

$$e^{-i\beta L_y} Y_{\ell,m}(\theta, \phi) = \sum_{m'=-\ell}^{\ell} Y_{\ell,m'}(\theta, \phi) d_{m',m}^\ell(\beta), \quad (2.9)$$

donde $d_{m',m}^\ell(\beta)$ es la función *d pequeña* de Wigner [11, Ecs. (3.65) y (3.72)],

$$\begin{aligned} d_{m',m}^\ell(\beta) &= \sqrt{(\ell+m)!(\ell-m)!(\ell+m')!(\ell-m')!} \\ &\times \sum_k \frac{(-1)^{m'-m+k} (\cos \frac{1}{2}\beta)^{2\ell-m'+m-2k} (\sin \frac{1}{2}\beta)^{m'-m+2k}}{k!(\ell-m'-k)!(\ell+m-k)!(m'-m+k)!} \\ &= \sqrt{\frac{(\ell+m)!(\ell-m)!}{(\ell+m')!(\ell-m')!}} \\ &\times (\sin \frac{1}{2}\beta)^{m-m'} (\cos \frac{1}{2}\beta)^{m+m'} P_{\ell-m}^{(m-m', m+m')}(\cos \beta), \end{aligned} \quad (2.10)$$

donde $P_n^{(\mu,\nu)}(x)$ son los polinomios de Jacobi.

Recordemos que las representaciones irreducibles unitarias del grupo $SO(3)$ son $\mathcal{D}_{m,m'}^\ell(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-i(m\alpha+m'\gamma)} d_{m,m'}^\ell(\beta)$. Las matrices $\mathbf{d}^\ell(\beta) := \|d_{m,m'}^\ell(\beta)\|$ de dimensión $(2\ell+1) \times (2\ell+1)$ son reales y ortogonales: $d_{m',m}^\ell(\beta) = d_{m,m'}^\ell(-\beta)$. Su regla de multipli-

cación es $\mathbf{d}^\ell(\beta_1) \mathbf{d}^\ell(\beta_2) = \mathbf{d}^\ell(\beta_1 + \beta_2)$ y $\mathbf{d}^\ell(0) = \mathbf{1}$; otras propiedades son $|d_{m,m'}^\ell(\beta)| \leq 1$ y, para β fija, tienen las simetrías: $d_{m',m}^\ell = (-1)^{m-m'} d_{m,m'}^\ell = (-1)^{m-m'} d_{-m',-m}^\ell$. Cuando $\beta = \frac{1}{2}\pi$, son las *funciones de Kravchuk* [12] dadas por

$$d_{m,m'}^\ell(\frac{1}{2}\pi) = \frac{(-1)^{\ell+m}}{2^\ell} \sqrt{\binom{2\ell}{\ell+m} \binom{2\ell}{\ell+m'}} K_{\ell+m}(\ell+m'; \frac{1}{2}; 2\ell+1) = d_{m',m}^\ell(-\frac{1}{2}\pi), \quad (2.11)$$

donde $K_n(\ell+m; \frac{1}{2}; N) = {}_2F_1(-n, -\ell-m; N; 2)$ con $N = 2\ell+1$; son los polinomios simétricos de Kravchuk de grado $n|_0^{2\ell}$ en los N valores de ‘posición discreta’ $m|_{-\ell}^\ell$, que han sido usadas como funciones de onda del oscilador armónico finito [13] de modo n (energía $n + \frac{1}{2}$), que tienen paridad $(-1)^n$ bajo $m \leftrightarrow -m$. Remarcamos algunos casos particulares de la d de Wigner [11, Ec. (3.84)]:

$$2(m \cos \beta - m') d_{m',m}^\ell(\beta) = \sqrt{(\ell-m)(\ell+m+1)} \sin \beta d_{m',m+1}^\ell(\beta) + \sqrt{(\ell+m)(\ell-m+1)} \sin \beta d_{m',m-1}^\ell(\beta), \quad (2.12)$$

$$d_{m,0}^\ell(\beta) = (-1)^m \sqrt{\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_\ell^m(\cos \beta) = d_{m,0}^\ell(-\beta), \quad (2.13)$$

donde los polinomios asociados de Legendre son

$$P_\ell^m(\cos \beta) = (-\sin \beta)^m \frac{d^m}{d(\cos \beta)^m} P_\ell(\cos \theta), \quad P_\ell^\ell(\cos \beta) = \frac{(2\ell)!}{2^\ell \ell!} (-\sin \beta)^\ell. \quad (2.14)$$

Otras identidades que serán utilizadas son [11, Ec. (3.141)]:

$$Y_{\ell,m}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} d_{m,0}^\ell(\theta) e^{im\phi}, \quad d_{m,\ell}^\ell(\frac{1}{2}\pi) = \frac{1}{2^\ell} \sqrt{\binom{2\ell}{\ell+m}}, \quad (2.15)$$

donde el término en la raíz cuadrada es la distribución binomial sobre $2\ell+1$ puntos. También anotamos para uso posterior los límites de los armónicos esféricos y las ds de Wigner cuando la representación ℓ crece y el ángulo $\beta = r/\rho$ decrece,

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty}^{\ell=k\rho} Y_{\ell,m}\left(\frac{r}{\rho}, \phi\right) = (-1)^m \sqrt{\frac{k\rho}{2\pi}} J_m(kr) e^{im\phi}, \quad \lim_{\rho \rightarrow \infty}^{\ell=k\rho} d_{m,m'}^\ell\left(\frac{r}{\rho}\right) = J_{m-m'}(kr). \quad (2.16)$$

2.2. Base de Sherman-Volobuyev

Las funciones de Sherman-Volobuyev (ShV) [14, 15, 16] sobre la esfera son esencialmente los armónicos esféricos extremos $Y_{\ell,\pm\ell}(\theta, \phi)$ en (2.7); pero mientras los armónicos extremos exhiben su cinturón de oscilaciones alrededor del ecuador, las funciones ShV tienen estos cinturones a lo largo de los meridianos con ángulos $\alpha \in (-\pi, \pi] = \mathcal{S}^1$ sobre el círculo ‘ ϕ ’. Un vector unitario $\mathbf{n}(\alpha) = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ en el plano $\mathbf{r} = (x, y)$ apunta en

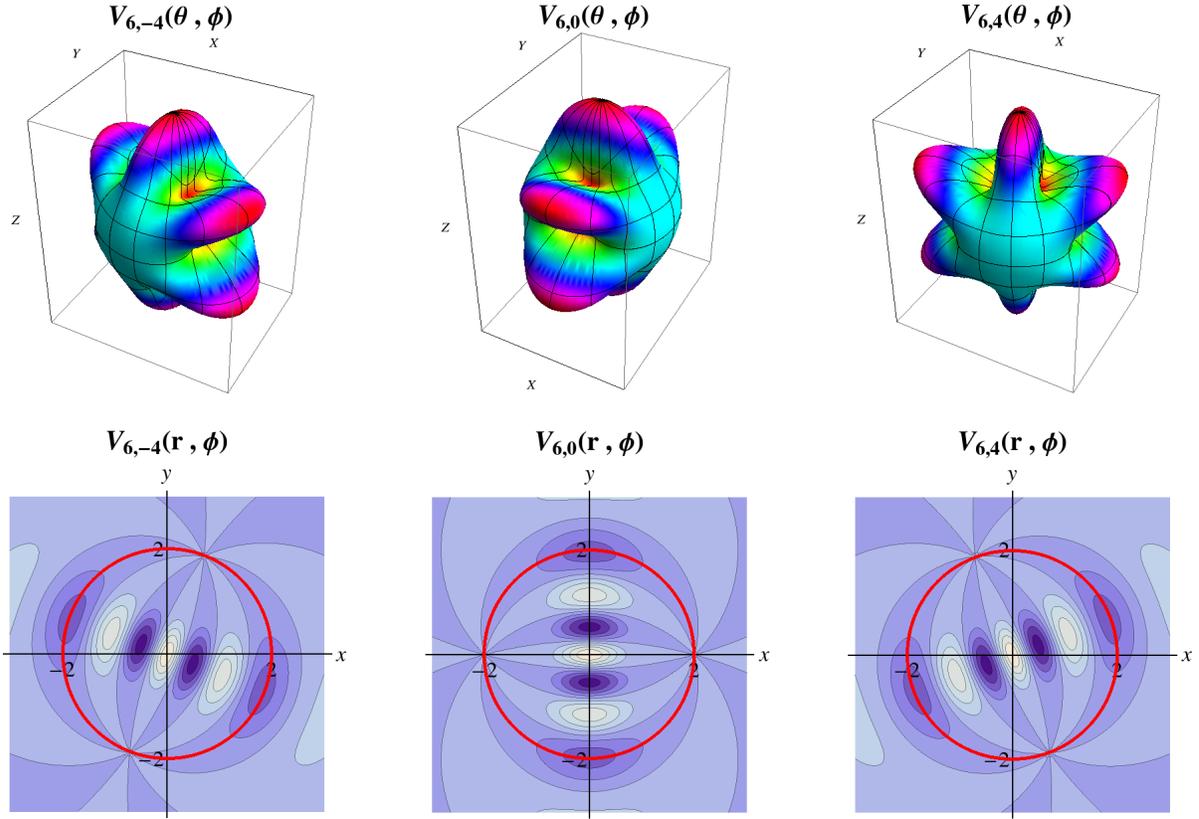


Figura 2.2: *Primera fila:* se muestra las funciones $V_{\ell,m}(\theta, \phi)$ sobre la esfera (2.21), para $\ell = 10$ y $m = -4, 0, 4$. *Segunda fila:* se observa los campos de ondas $\nu_{\ell,m}(\mathbf{r})$ en el ojo de pez para la misma ℓ y m 's. El círculo rojo corresponde al círculo mágico.

la dirección del cinturón de oscilación,

$$\begin{aligned}
 \Phi_{\ell,\alpha}(\theta, \phi) &:= r^{-\ell}(z + i\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})^\ell \\
 &= r^{-\ell}(z + i(x \cos \alpha + y \sin \alpha))^\ell \\
 &= (\cos \theta + i \sin \theta \cos(\phi - \alpha))^\ell = \Phi_{\ell,0}(\theta, \phi - \alpha).
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Las funciones de Sherman-Volobuyev representan lo más cercano a ondas planas sobre la esfera y son soluciones de la ecuación de Laplace-Beltrami [16, Ec. (5)] para este espacio. En un espacio tridimensional, el operador de Laplace-Beltrami es el laplaciano en coordenadas esféricas. Estas funciones forman una base completa para $\mathcal{L}^2(\mathcal{S}^2)$. En la Ref. [16] se utilizaron, junto con sus funciones duales, para construir una función de Wigner para funciones sobre la esfera y cuyo espacio fase consta de un conjunto infinito de círculos concéntricos en el plano \mathcal{R}^2 de radios enteros $\ell|_0^\infty$, donde cada círculo corresponde a las direcciones de un campo de ondas de longitud de onda definida por ℓ . Cada círculo con ℓ fija corresponde a un sistema monocromático, como es nuestro caso.

Las funciones ShV (2.18) se obtienen de los armónicos esféricos extremos (2.7) mediante una rotación de $\frac{1}{2}\pi$ alrededor del eje y (2.9), de modo que el ecuador x - y se convierta en meridiano en el plano y - z , y luego se rota por un ángulo α alrededor del eje z , que queda fijo. Es conveniente normalizar las funciones de ShV (2.17) sobre la esfera multiplicando por los coeficientes dados en (2.7), y definiendo las funciones *normalizadas* de ShV (n ShV) en términos del armónico esférico extremo y las d 's de Wigner (2.10),

$$\begin{aligned} V_{\ell,\alpha}(\theta, \phi) &:= \sqrt{\frac{(2\ell+1)!}{4\pi}} \frac{(-1)^\ell}{2^\ell \ell!} \Phi_{\ell,\alpha}(\theta, \phi - \frac{1}{2}\pi) \\ &= e^{-i\alpha L_z} e^{-i\frac{1}{2}\pi L_y} Y_{\ell,\ell}(\theta, \phi) \\ &= \sum_{m=-\ell}^{\ell} e^{-i\alpha m} d_{m,\ell}^\ell(\frac{1}{2}\pi) Y_{\ell,m}(\theta, \phi) = V_{\ell,0}(\theta, \phi - \alpha). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Para $\alpha = 0$, el cinturón de oscilaciones de $V_{\ell,0}(\theta, \phi)$ está en el plano y - z ; α es el ángulo de rotación derecha sobre el eje z ; así para $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ está en el plano x - z . Proyectados sobre el medio del ojo de pez, los campos de onda n ShV son:

$$\begin{aligned} v_{\ell,\alpha}(\mathbf{r}) &= \frac{(-1)^\ell \rho}{(4\rho^2 + r^2)^{\ell+1} 2^{\ell-2} \ell!} \sqrt{\frac{(2\ell+1)!}{4\pi}} \left(4\rho^2 - r^2 + i4\rho r \sin(\phi - \alpha)\right)^\ell \\ &= \sum_{m=-\ell}^{\ell} e^{-i\alpha m} d_{m,\ell}^\ell(\frac{1}{2}\pi) y_{\ell,m}(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (2.19)$$

donde $y_{\ell,m}(\mathbf{r})$ es la proyección en el ojo de pez de los armónicos esféricos dados en (2.6).

Base finita no-ortogonal de ShV

Los armónicos esféricos y las funciones de Sherman-Volobuyev forman bases para el espacio de funciones de cuadrado integrable sobre la esfera, $\mathcal{L}^2(\mathcal{S}^2)$. Al fijar el valor del momento angular ℓ , hay $2\ell + 1$ funciones que generan un espacio de dimensión finita $\mathcal{M}_\ell \subset \mathcal{L}^2(\mathcal{S}^2)$ que, por tanto, describe un sistema finito [9], cuyas bases serán discretas y finitas. Para cada $\ell \in \mathcal{Z}^+$ tenemos $2\ell + 1$ armónicos esféricos independientes, etiquetados por $m|_{-\ell}^\ell$; el número de funciones ShV está dado así por el momento angular. Podemos ver las funciones de esta base como $2\ell + 1$ puntos equidistantes α_m sobre el círculo, $\mathcal{C}_{2\ell+1} \subset \mathcal{S}^1$,

$$\alpha_m := \frac{2\pi m}{2\ell + 1}, \quad \{\alpha_m\}_{m=-\ell}^\ell \in \mathcal{C}_{2\ell+1}. \quad (2.20)$$

Este círculo corresponde al meridiano donde se encuentra el cinturón de oscilaciones de la función de Sherman-Volobuyev. Entonces, podemos reescribir (2.18) para los ángulos

(2.20), reemplazando el subíndice α por m , como

$$V_{\ell,m}(\theta, \phi) = \sum_{m'=-\ell}^{\ell} e^{-\frac{2\pi i m m'}{2\ell+1}} d_{m',\ell}^{\ell}(\frac{1}{2}\pi) Y_{\ell,m'}(\theta, \phi) = V_{\ell,0}(\theta, \phi - \alpha_m). \quad (2.21)$$

Dicho círculo representa el meridiano donde se encuentra la función de ShV. Subrayamos que las funciones $n\text{ShV}$, $V_{\ell,m}(\theta, \phi)$ para diferentes α_m 's, son versiones rotadas de la original $V_{\ell,0}(\theta, \phi)$, por ángulos $\alpha_m = 2\pi m/(2\ell+1)$, como se muestra en la Fig. 2.2, donde también mostramos su proyección en el medio del ojo de pez mediante (1.1) como $v_{\ell,m}(\mathbf{r})$. De la Fig. 2.2 se intuye que al tomar el límite cuando el radio de la esfera crece indefinidamente, las rotaciones alrededor del eje z que definen los ángulos α_m se convertirán en rotaciones por un conjunto denso de ángulos sobre el círculo α .

Las funciones $n\text{ShV}$ en (2.21) no son ortonormales; el producto interno de cualquiera dos de ellas puede ser obtenido de la ortonormalidad de los armónicos esféricos (2.3), tomando en cuenta la invariancia de la integración sobre la esfera bajo rotaciones y $V_{\ell,m}(\theta, \phi) = V_{\ell,0}(\theta, \phi - \alpha_m)$. La superposición entre dos armónicos extremos, uno rotado respecto al otro por $\alpha_m - \alpha_{m'}$, es

$$\begin{aligned} (V_{\ell,m}, V_{\ell,m'})_{S^2} &= (Y_{\ell,\ell}, e^{-i(\alpha_m - \alpha_{m'})L_y} Y_{\ell,\ell})_{S^2} = d_{\ell,\ell}^{\ell}(\alpha_m - \alpha_{m'}) \\ &= \left(\cos \frac{\pi(m - m')}{2\ell + 1} \right)^{2\ell}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Cuando las $2\ell+1$ funciones $n\text{ShV}$ toman los ángulos α_m en (2.20), ninguna pareja es ortogonal, ya que en (2.22), $\frac{1}{2}(\alpha_m - \alpha_{m'}) = \frac{1}{2}\pi$ implicaría $m - m' = \ell + \frac{1}{2}$, pero las m 's siempre son enteras. Se puede verificar numéricamente que $\det |d_{\ell,\ell}^{\ell}(\alpha_m - \alpha_{m'})| > 0$, por lo que el conjunto de $2\ell + 1$ vectores $n\text{ShV}$ forman una base *completa* para el espacio \mathcal{M}_{ℓ} ; es decir que cualquier función $F(\theta, \phi) \in \mathcal{M}_{\ell}$ (con ℓ fija) sobre la esfera, puede ser escrita como

$$F(\theta, \phi) = \sum_m \tilde{F}_m V_{\ell,m}(\theta, \phi). \quad (2.23)$$

Como resultado de que las funciones $n\text{ShV}$ no sean ortogonales (2.22), el espacio $2\ell+1$ dimensional \mathcal{M}_{ℓ} de funciones (2.23) adquiere una medida *no-local*:

$$\begin{aligned} (F, G)_{S^2} &= \sum_{m,m'=-\ell}^{\ell} \tilde{F}_m^* (V_{\ell,m}, V_{\ell,m'})_{S^2} \tilde{G}_{m'} = \sum_{m,m'=-\ell}^{\ell} \tilde{F}_m^* d_{\ell,\ell}^{\ell}(\alpha_m - \alpha_{m'}) \tilde{G}_{m'} \\ &= \sum_{m,m'=-\ell}^{\ell} \tilde{F}_m^* \left(\cos \frac{\pi(m - m')}{2\ell + 1} \right)^{2\ell} \tilde{G}_{m'} =: (F, G)_{\mathcal{M}_{\ell}}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

2.3. Base de Legendre

El conjunto de armónicos esféricos $Y_{\ell,0}(\theta, \phi) \sim P_{\ell}(\cos \theta)$ en (2.8) son funciones reales y también proporcionarán una base de funciones sobre la esfera y sobre el ojo de pez

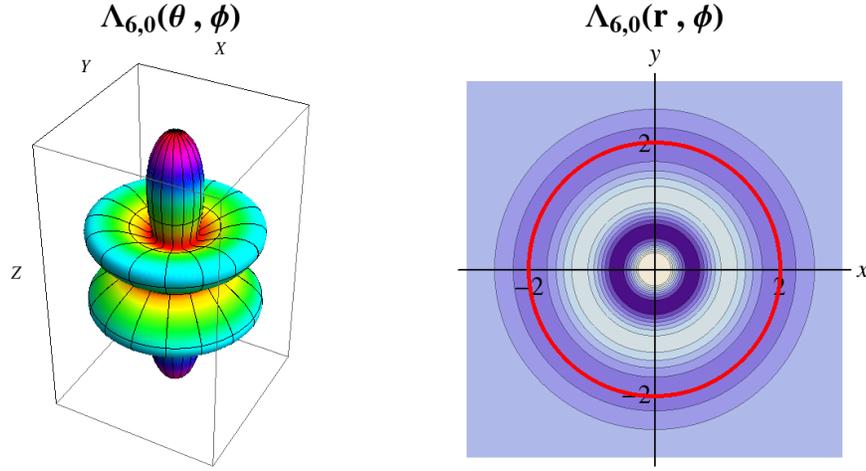


Figura 2.3: El armónico de Legendre $Y_{\ell,0}(\theta, \phi)$ es la función más localizada sobre la esfera y el ojo de pez.

monocromático (ℓ fija), distinta de la base de $n\text{ShV}$. En el intervalo $0 \leq \theta < \pi$, los armónicos $Y_{\ell,0}(\theta, \phi)$ exhiben un máximo (*dedo de Legendre*) en la dirección del eje z , porque $\max P_\ell(\cos \theta) = 1$ para $\theta = 0$ y una *cola* $P_\ell(-1) = (-1)^\ell P_\ell(1)$ para $\theta = \pm\pi$ como se muestra en la Figura 2.3. Esto los hace candidatos a ser las funciones de *posición más localizada* en los polos $\pm z$. El eje que contiene el *dedo de Legendre* y su *cola* puede ser rotado para apuntar en cualquier dirección de la esfera $(\theta, \phi) \in \mathcal{S}^2$. Al rotar las funciones $Y_{\ell,0}(\theta, \phi)$ por ángulos $\beta_m := \pi m / (2\ell + 1)$, $m|_{-\ell}^\ell$ alrededor del eje y se producen los *armónicos de Legendre* que examinaremos como base para el espacio \mathcal{M}_ℓ . Los *armónicos de Legendre* o *base de dedos de Legendre* son funciones reales cuyo ‘*dedo*’ apunta sobre el semi-meridiano superior contenido en el plano $x-z$, $y \geq 0$. La *base de Legendre* queda definida a través de

$$\begin{aligned}
\Lambda_{\ell,m}(\theta, \phi) &:= e^{-i\beta_m L_y} Y_{\ell,0}(\theta, \phi) = \sum_{m'=-\ell}^{\ell} d_{m',0}^\ell(\beta_m) Y_{\ell,m'}(\theta, \phi) \\
&= d_{0,0}^\ell(\beta_m) Y_{\ell,0}(\theta, \phi) + \sum_{m'=1}^{\ell} d_{m',0}^\ell(\beta_m) (Y_{\ell,m'}(\theta, \phi) + Y_{\ell,m'}(\theta, \phi)^*) \quad (2.25) \\
&= \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} \left(d_{0,0}^\ell(\beta_m) d_{0,0}^\ell(\theta) + 2 \sum_{m'=1}^{\ell} d_{m',0}^\ell(\beta_m) d_{m',0}^\ell(\theta) \cos m'\phi \right) \\
&= \Lambda_{\ell,m}(\theta, -\phi) = (-1)^\ell \Lambda_{\ell,m}(\theta \pm \pi, \phi).
\end{aligned}$$

Los armónicos de Legendre (2.25) son reales y simétricos bajo reflexiones $\phi \leftrightarrow -\phi$ en la esfera, y por tanto simétricos en $y \leftrightarrow -y$ sobre el plano del ojo de pez, como se observa en la Fig. 2.4. Por esta razón, los armónicos de Legendre proveen solamente una base para funciones *pares* en el azimut sobre la esfera, $F(\theta, \phi) = F(\theta, -\phi)$, para un subespacio de \mathcal{M}_ℓ de dimensión $\ell+1$. Esto puede verse como $Y_{\ell,m}(\theta, \phi) + (-1)^m Y_{\ell,-m}(\theta, \phi) \sim \cos m\phi$, para m que se encuentra en un conjunto de $\ell+1$ valores, de entre los $2\ell+1$ valores

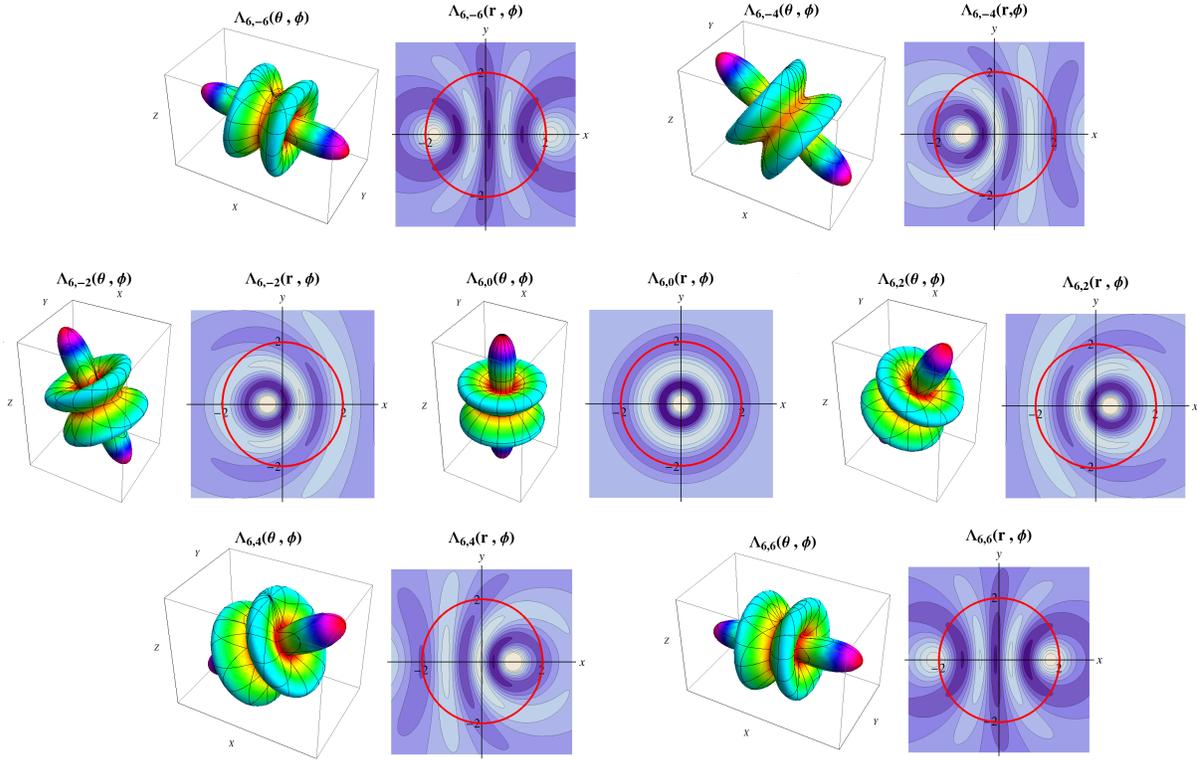


Figura 2.4: Se muestra el conjunto de $\ell + 1$ funciones $\Lambda_{\ell,m}(\theta, \phi)$ para $\ell = 6$, $m \in \{-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6\} = \mathcal{E}_\ell$ y sus respectivos campos en el ojo de pez.

de β_m . Verificamos numéricamente que el rango de las matrices $\|d_{m',0}^\ell(\beta_m)\|$ es de $\ell + 1$ y que el subconjunto de funciones $\Lambda_{\ell,m}(\theta, \phi)$ para $m \in \{-\ell, -\ell + 2, \dots, \ell - 2, \ell\} =: \mathcal{E}_\ell$ son linealmente independientes. Así, este conjunto de funciones es una base completa para las funciones pares. En el medio del ojo de pez, los campos de ondas correspondientes también son reales, con valores extremos en *dos* puntos: la proyección del dedo en (r, ϕ) y la de su cola en $(r', \phi + \pi)$; estos dos puntos son *conjugados* porque $rr' = (2\rho)^2$, donde 2ρ es el radio proyectado del círculo del ecuador $\theta = \frac{1}{2}\pi$ (el ‘círculo mágico’). Debido a que todos los dedos de Legendre sobre la esfera se encuentran en el semi-meridiano superior $(-\frac{1}{2}\pi \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi)$, en el ojo de pez, los $\ell + 1$ ‘dedos’ se proyectan *dentro* del círculo mágico. La Figura 2.3 sugiere que los estados de Legendre son los campos de ondas *más localizados* en el ojo de pez, por lo que los identificaremos como funciones de *posición* en este medio.

Necesitamos otro conjunto de ℓ funciones para completar una base del espacio \mathcal{M}_ℓ . Este conjunto debe generar las funciones *impares* en azimut $F(\theta, \phi) = -F(\theta, -\phi)$. Usando la teoría del momento angular, notamos que los generadores del álgebra L_x (y L_z) cambian de signo bajo $y \leftrightarrow -y$, de manera que la siguiente función es también

impar:

$$\begin{aligned}
L_x Y_{\ell,0}(\theta, \phi) &= \frac{1}{2} \sqrt{\ell(\ell+1)} (Y_{\ell,1}(\theta, \phi) + Y_{\ell,-1}(\theta, \phi)) \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{\ell(\ell+1)} (Y_{\ell,1}(\theta, \phi) - Y_{\ell,1}(\theta, \phi)^*) \\
&= -i \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} P_\ell^1(\cos \theta) \sin \phi.
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Aquí actuamos con los operadores de ascenso y descenso en $L_x = \frac{1}{2}(L_+ + L_-)$ sobre los armónicos esféricos (2.2) como eigenfunciones de momento angular (2.1). Con esto definimos las funciones

$$\begin{aligned}
A'_{\ell,m}(\theta, \phi) &:= \sqrt{\frac{2}{\ell(\ell+1)}} e^{-i\beta_m L_y} (-i) L_x \Lambda_{\ell,0}(\theta, \phi) \\
&= \frac{-i}{\sqrt{2}} e^{-i\beta_m L_y} (Y_{\ell,1}(\theta, \phi) + Y_{\ell,-1}(\theta, \phi)) \\
&= \frac{-i}{\sqrt{2}} \sum_{m'=-\ell}^{\ell} (d_{m',1}^\ell(\beta_m) + d_{m',-1}^\ell(\beta_m)) Y_{\ell,m'}(\theta, \phi) \\
&= \frac{-i}{\sqrt{2}} \sum_{m'=1}^{\ell} (d_{m',1}^\ell(\beta_m) + d_{m',-1}^\ell(\beta_m)) (Y_{\ell,m'}(\theta, \phi) - Y_{\ell,m'}(\theta, \phi)^*) \\
&= \sqrt{\frac{2\ell+1}{2\pi}} \sum_{m'=1}^{\ell} (d_{m',1}^\ell(\beta_m) + d_{m',-1}^\ell(\beta_m)) d_{m',0}^\ell(\theta) \sin m' \phi \\
&= -A'_{\ell,m}(\theta, -\phi) = (-1)^\ell A'_{\ell,m}(\theta \pm \pi, \phi).
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Este es un conjunto de funciones normalizadas, reales e *impares* en el ángulo azimutal ϕ sobre la esfera, y su correspondiente en el eje y sobre el ojo de pez. Llamaremos a estas funciones *derivadas normales* debido a que sobre el semi-meridiano $-\frac{1}{2}\pi < \beta < \frac{1}{2}\pi$, en el plano $y = 0$, estas funciones tienen valores cero y derivadas máximas, como se aprecia en la Fig. 2.5. Estas funciones generan un subespacio de \mathcal{M}_ℓ de dimensión ℓ y su dependencia del ángulo azimutal es $\sim \sin m\phi$.

Como hicimos en el caso de los dedos de Legendre, confirmamos numéricamente que el rango de la matriz en (2.27) es ℓ , por lo que el subconjunto de funciones $A'_{\ell,m}(\theta, \phi)$ para $m's \in \{-\ell+1, -\ell+3, \dots, \ell-3, \ell-1\} =: \mathcal{E}'_\ell$ es linealmente independientes y completa en el subespacio de funciones impares en azimut. Junto con las funciones de *posición* (2.25), estas funciones forman una base completa para el espacio \mathcal{M}_ℓ de $2\ell+1$ vectores independientes sobre la esfera, y correspondientemente también una base en el plano del ojo de pez.

En resumen, el espacio \mathcal{M}_ℓ es generado por los $\ell+1$ *armónicos de Legendre* $\Lambda_{\ell,m}(\theta, \phi)$, $m \in \mathcal{E}_\ell$ que son funciones pares en azimut, y las ℓ *derivadas normales*, $A'_{\ell,m}(\theta, \phi)$, $m \in \mathcal{E}'_\ell$ que son impares en el mismo ángulo. Debido a la elección de los conjuntos \mathcal{E}_ℓ y \mathcal{E}'_ℓ , las funciones pares e impares quedan interdigitadas y, bajo el límite $\ell, \rho \rightarrow \infty$ darán puntos pares e impares sobre el eje x del plano del ojo de pez, respectivamente.

De la paridad de funciones (2.25) y (2.27) se sigue que $(\Lambda_{\ell,m}, A'_{\ell,m})_{S^2} = 0$, aunque

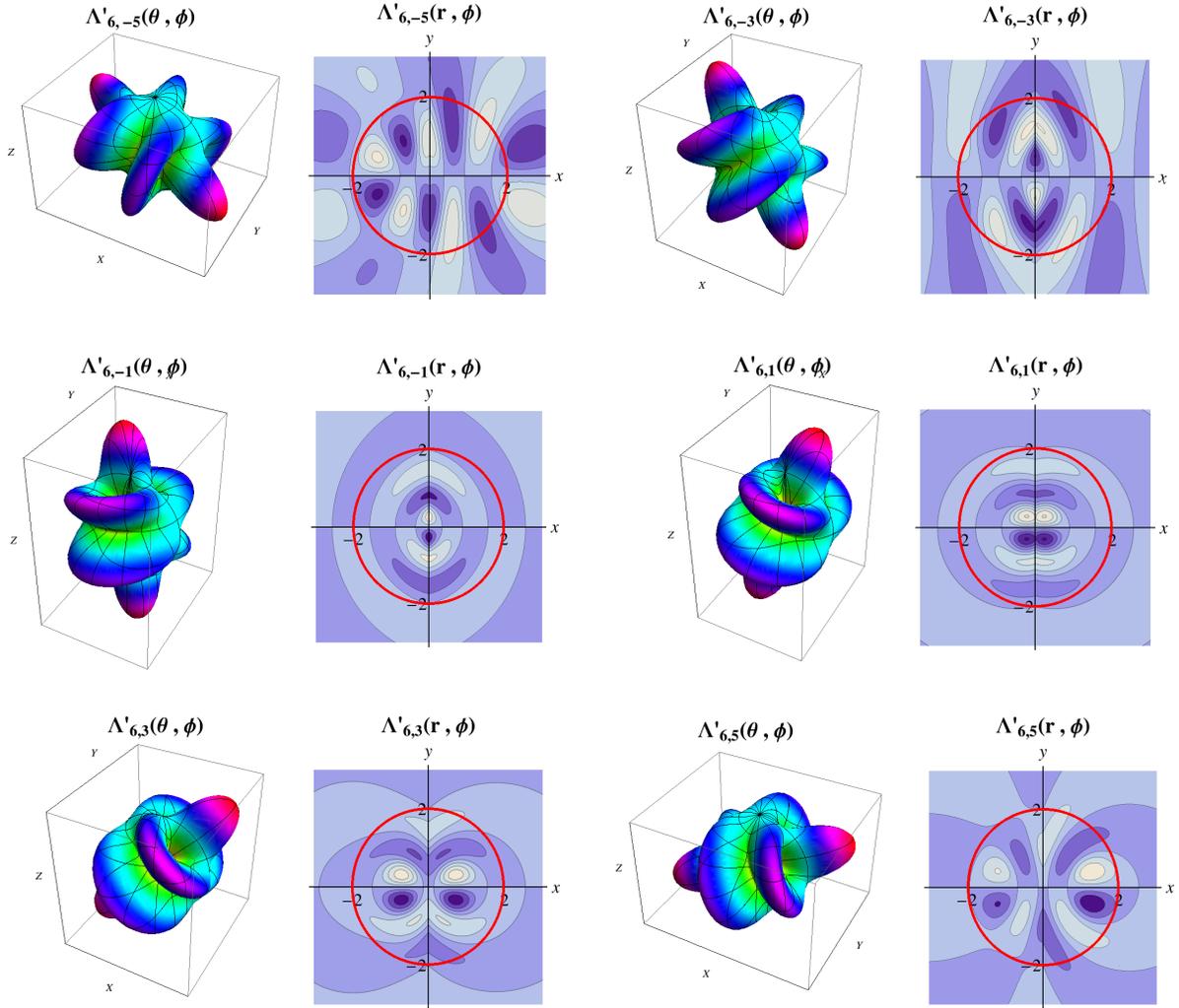


Figura 2.5: Las ℓ funciones pares $\Lambda'_{\ell, m}(\theta, \phi)$ de la base de derivadas normales, para $\ell = 6, m \in \{-5, -3, -1, 1, 3, 5\} = \mathcal{E}'_{\ell}$ y sus respectivos campos en el ojo de pez.

ninguno de los subconjuntos de funciones es ortogonal. Para las funciones de ‘posición’ $\Lambda_{\ell, m}$, el producto interno sobre la esfera puede ser calculado como en (2.22), con (2.13),

$$\begin{aligned}
 (\Lambda_{\ell, m}, \Lambda_{\ell, m'})_{S^2} &= \left(e^{-i\beta_m L_y} Y_{\ell, 0}, e^{-i\beta_{m'} L_y} Y_{\ell, 0} \right)_{S^2} \\
 &= \left(Y_{\ell, 0}, e^{-i(\beta_{m'} - \beta_m) L_y} Y_{\ell, 0} \right)_{S^2} \\
 &= d_{0,0}^{\ell}(\beta_{m'} - \beta_m) = P_{\ell}(\cos(\beta_{m'} - \beta_m)).
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

donde $P_{\ell}(\cos \beta)$ es el polinomio de Legendre en potencias de $\nu, \nu \in \{\ell, \ell-2, \dots, 1 \text{ ó } 0\}$ de $\cos \beta$, o de manera equivalente, una combinación lineal de $\cos \nu \beta$ para el mismo rango de ν . Este ecuación es válida para $m, m' |_{-\ell}^{\ell}$ pero únicamente la necesitaremos

para $m, m' \in \mathcal{E}_\ell$.

$$P_\ell(\cos \beta) = \begin{cases} \sum \cos \nu \beta, & \text{con } \nu \in \{\ell, \ell-2, \dots, 1 \text{ ó } 0\}, \\ \sum \cos^\nu \beta, & \text{con } \nu \in \{\ell, \ell-2, \dots, 1 \text{ ó } 0\}, \end{cases} \quad (2.29)$$

Por otro lado, las funciones ‘derivadas normales’ tienen el siguiente producto interno,

$$\begin{aligned} (A'_{\ell,m}, A'_{\ell,m'})_{\mathcal{S}^2} &= \frac{1}{2} \left(e^{-i\beta_m L_y} (Y_{\ell,1} + Y_{\ell,-1}), e^{-i\beta_{m'} L_y} (Y_{\ell,1} + Y_{\ell,-1}) \right)_{\mathcal{S}^2} \\ &= d_{1,1}^\ell(\beta_{m'} - \beta_m) + d_{1,-1}^\ell(\beta_{m'} - \beta_m) =: Q_{\ell-1}(\cos(\beta_{m'} - \beta_m)). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Usando (2.12) y la propiedad $d_{m',m}^\ell = (-1)^{m-m'} d_{m,m'}^\ell$, el polinomio $Q_{\ell-1}(\cos \beta)$ está dado como

$$\begin{aligned} Q_{\ell-1}(\cos \beta) &= d_{1,1}^\ell(\beta) + d_{1,-1}^\ell(\beta) = \frac{2}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \frac{d_{0,1}^\ell(\beta)}{\sin \beta} \\ &= \frac{1}{\ell} P_{\ell-1}^{(1,1)}(\cos \beta) \end{aligned} \quad (2.31)$$

Por cómputo simbólico se confirma que $Q_{\ell-1}(\cos \beta)$ es un polinomio en $\cos \beta$ de grado μ , $\mu \in \{\ell-1, \ell-3, \dots, 1 \text{ ó } 0\}$, o equivalentemente una suma de términos $\cos \mu \beta$ para el mismo rango de μ , es decir,

$$Q_{\ell-1}(\cos \beta) = \begin{cases} \sum \cos \mu \beta, & \text{con } \mu \in \{\ell-1, \ell-3, \dots, 1 \text{ ó } 0\}, \\ \sum \cos^\mu \beta, & \text{con } \mu \in \{\ell-1, \ell-3, \dots, 1 \text{ ó } 0\}, \end{cases} \quad (2.32)$$

Como antes, (2.30) es válida para $m, m' |_{-\ell}^\ell$ pero únicamente la necesitaremos para $m, m' \in \mathcal{E}'_\ell$. La base proporcionada por las funciones (2.25) y (2.27) es completa en el espacio \mathcal{M}_ℓ , por tanto, las funciones sobre la esfera de momento angular ℓ serán combinaciones lineales de las funciones pares (2.25) e impares (2.27),

$$F(\theta, \phi) = \sum_{m \in \mathcal{E}_\ell} F_m \Lambda_{\ell,m}(\theta, \phi) + \sum_{m \in \mathcal{E}'_\ell} F'_m \Lambda'_{\ell,m}(\theta, \phi), \quad (2.33)$$

donde los coeficientes F_m y F'_m se encuentran a través de la base dual.

Nuevamente, una base no ortogonal involucra medidas no locales, como en (2.24). De las ecuaciones (2.28) y (2.30), el producto interno de dos función en la esfera (2.33)

se puede expresar como:

$$\begin{aligned}
(F, G)_{\mathcal{S}^2} &= \sum_{m, m' \in \mathcal{E}_\ell} F_m^*(\Lambda_{\ell, m}, \Lambda_{\ell, m'})_{\mathcal{S}^2} G_{m'} \\
&+ \sum_{m, m' \in \mathcal{E}'_\ell} F_m'^*(\Lambda'_{\ell, m}, \Lambda'_{\ell, m'})_{\mathcal{S}^2} G_{m'} \\
&= \sum_{m, m' \in \mathcal{E}_\ell} F_m^* P_\ell \left(\cos \frac{2\pi(m' - m)}{2\ell + 1} \right) G_{m'} \\
&+ \sum_{m, m' \in \mathcal{E}'_\ell} F_m'^* Q_{\ell-1} \left(\cos \frac{2\pi(m' - m)}{2\ell + 1} \right) G_{m'} \\
&=: (F, G)_{\mathcal{M}_\ell}.
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Al igual que en (2.24), en el siguiente capítulo se tomará el límite $\ell \rightarrow \infty$ y se contraerá el producto interno para los campos de ondas en el medio homogéneo de Helmholtz.

Superposición de bases de $n\text{ShV}$ y Legendre

Finalmente, el producto escalar entre las funciones la base de $n\text{ShV}$ y la de Legendre puede ser encontrado a partir de sus definiciones (2.18) y (2.25)–(2.27) con un cambio de rotaciones $y-z-y$ a $z-y-z$. De esta manera, el translope entre el conjunto de funciones de *posición* y las de $n\text{ShV}$ es:

$$\begin{aligned}
(V_{\ell, m}, \Lambda_{\ell, m'})_{\mathcal{M}_\ell} &= (e^{-i\alpha_m L_z} e^{-i\frac{1}{2}\pi L_y} Y_{\ell, \ell}, e^{-i\beta_{m'} L_y} Y_{\ell, 0})_{\mathcal{S}^2} \\
&= (e^{-i\theta_{m, m'} L_y} e^{-i\psi_{m, m'} L_z} Y_{\ell, \ell}, e^{+i\phi_{m, m'} L_z} Y_{\ell, 0})_{\mathcal{S}^2} \\
&= e^{+i\ell\psi_{m, m'}} \sum_{m''} d_{m'', \ell}^\ell(\theta_{m, m'}) (Y_{\ell, m''}, Y_{\ell, 0})_{\mathcal{S}^2} \\
&= e^{i\ell\psi_{m, m'}} d_{0, \ell}^\ell(\theta_{m, m'}) = \frac{\sqrt{(2\ell)!}}{2^\ell \ell!} \sin^\ell \theta_{m, m'} e^{i\ell\psi_{m, m'}},
\end{aligned} \tag{2.35}$$

donde los ángulos de Euler permutados están dados por

$$\cos \theta_{m, m'} = -\cos \alpha_m \sin \beta_{m'}, \quad e^{2i\psi_{m, m'}} = \frac{\sin \alpha_m \sin \beta_{m'} - i \cos \beta_{m'}}{\sin \alpha_m \sin \beta_{m'} + i \cos \beta_{m'}}, \tag{2.36}$$

o $\tan \psi_{m, m'} = \sin \alpha_m \tan \beta_{m'}$, mientras que $\tan \phi_{m, m'} = \tan \alpha_m \sec \beta_{m'}$ no aparece en el resultado debido a que $Y_{\ell, 0}$ es invariante bajo $e^{+i\phi L_z}$. Similarmente, entre las funciones

de *derivada normal* y las de $n\text{ShV}$ tenemos,

$$\begin{aligned}
(V_{\ell,m}, A'_{\ell,m'})_{\mathcal{M}_\ell} &= (e^{-i\alpha_m L_z} e^{-i\frac{1}{2}\pi L_y} Y_{\ell,\ell}, e^{-i\beta_{m'} L_y} \frac{1}{\sqrt{2}}(Y_{\ell,1} - Y_{\ell,-1}))_{\mathcal{S}^2} \\
&= (e^{-i\theta_{m,m'} L_y} e^{-i\psi_{m,m'} L_z} Y_{\ell,\ell}, e^{+i\phi_{m,m'} L_z} \frac{1}{\sqrt{2}}(Y_{\ell,1} - Y_{\ell,-1}))_{\mathcal{S}^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{+i\ell\psi_{m,m'}} (e^{+i\phi_{m,m'}} d_{1,\ell}^\ell(\theta_{m,m'}) - e^{-i\phi_{m,m'}} d_{-1,\ell}^\ell(\theta_{m,m'})) \\
&= \frac{e^{+i\ell\psi_{m,m'}}}{2^{\ell+1}\sqrt{2}} \sqrt{\frac{(2\ell)!}{(\ell+1)!(\ell-1)!}} (\sin \theta_{m,m'})^{\ell-1} (\cos \theta_{m,m'} \cos \phi_{m,m'} + i \sin \theta_{m,m'}).
\end{aligned} \tag{2.37}$$

En el capítulo siguiente contraeremos el álgebra de rotaciones en la esfera $so(3)$ al álgebra Euclidiana $iso(2)$; esto llevará a la contracción del sistema del ojo de pez de Maxwell al medio homogéneo que obedece la ecuación de Helmholtz.

3. Contracción del ojo de pez a un medio homogéneo

En este capítulo contraeremos el ojo de pez de Maxwell a un medio homogéneo de Helmholtz; esto lo haremos tomando el límite de las funciones de onda en la esfera cuando el radio ρ y el momento angular ℓ crecen indefinidamente. El álgebra de Lie $so(3)$ que genera rotaciones sirve para caracterizar funciones en la esfera y correspondientemente a los campos de onda en el medio de ojo de pez bidimensional. Este límite es la contracción del álgebra $so(3)$ al álgebra Euclidiana $iso(2)$ que genera rotaciones y traslaciones en el plano.

Las bases propuestas de ShV y de Legendre son completas en el espacio \mathcal{M}_ℓ para cualquier ℓ finita, que puede ser arbitrariamente grande. Cuando $\ell, \rho \rightarrow \infty$ no vemos impedimento para que estas bases sigan siendo completas en el espacio de soluciones (no-exponenciales) de Helmholtz; este proceso de límite no es distinto al límite de las transformadas finitas de Fourier a la series y a las transformadas integrales de Fourier cuando el número de puntos tiende al infinito en el primer caso, y su densidad también en el segundo [17, Sec. 3.4].

Parámetros de contracción

Al tomar el límite $\rho \rightarrow \infty$, el índice de refracción (1.2) se convierte en una constante, $n(\mathbf{r}) = n_0$, por lo que el ojo de pez de Maxwell limita a un medio homogéneo donde los campos de onda deben seguir siendo monocromáticos.

Para que el campo de ondas proyectado no se convierta en constante, ℓ y ρ deben crecer proporcionalmente durante la contracción ($\ell \sim \rho$). El cociente de estos dos parámetros definirá el número de onda $k = \ell/\rho$ que permanecerá finito. Las funciones $n\text{ShV}$ entonces tendrán la misma longitud de onda λ en la esfera como en el centro del plano del ojo de pez. Como el perímetro de cualquier círculo máximo es $2\pi\rho$, un armónico extremo $Y_{\ell,\ell}(\theta, \phi) \sim e^{i\ell\phi}$, acomodará ℓ longitudes de onda como $\lambda = 2\pi\rho/\ell$, y esta longitud de onda permanecerá en el límite. Esto determina al parámetro de la contracción,

$$k := \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\ell}{\rho}. \quad (3.1)$$

Los puntos en la esfera con ángulos polares $-\frac{1}{2}\pi < \beta_m < \frac{1}{2}\pi$ (a lo largo de θ en

la Fig. 2.3) se proyectarán en puntos que permanecerán finitos $x_m = \rho \tan \beta_m \approx \rho \beta_m$ sobre el eje x del plano óptico, y que se encuentran dentro del círculo ‘de radio mínimo’ 2ρ . La contracción $\rho, \ell \rightarrow \infty$ de $iso(\mathcal{B})$ con el parámetro k determina la representación de $iso(\mathcal{L})$ a la cual se llega. Los ángulos polares que se proyectarán sobre puntos finitos x_m también serán determinados por el mismo parámetro:

$$k = \frac{\ell}{\rho} = \frac{\ell\beta}{x_m}, \quad \beta_m = \frac{x_m}{\rho} = \frac{kx_m}{\ell} \quad (3.2)$$

Este parámetro k es el *número de onda* de los campos en el límite del medio homogéneo con índice de refracción n_0 .

El ángulo polar θ de la esfera en crecimiento mapea sus puntos en un radio finito r sobre el plano del ojo de pez (1.1), cuando

$$\sin \theta = \frac{4\rho r}{4\rho^2 + r^2} \quad \rightarrow \quad \theta \approx r/\rho \rightarrow 0. \quad (3.3)$$

El límite para la base de armónicos esféricos $y_{\ell,m}(\mathbf{r})$ en (2.6) está dado en la ecuación (2.16),

$$\mu_m(\mathbf{r}) := \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\rho}} y_{\ell,m}\left(\frac{r}{\rho}, \phi\right) = (-1)^m \sqrt{\frac{k}{2\pi}} J_m(kr) e^{im\phi}, \quad m|_{-\infty}^{\infty} \quad (3.4)$$

con paridad $\mu_m(r, -\phi) = (-1)^m \mu_{-m}(r, \phi)$. La dependencia estas funciones en $\sqrt{\rho}$ fue eliminada renormalizando las funciones para la contracción por $1/\sqrt{\rho}$; de esta manera obtenemos las soluciones *multipolares* (3.4) que constituyen una base numerable bien conocida para el espacio de campos de onda del medio de Helmholtz.

Cuando $\rho \rightarrow \infty$, las rotaciones alrededor del eje z permanecen como rotaciones del plano (x, y) alrededor de su centro. Por otro lado, las rotaciones polares en la esfera definidas por el ángulo β alrededor del eje y se convierte en traslaciones en la dirección x del plano tangente al ojo de pez. Similarmente, las rotaciones alrededor del eje x se transforman en traslaciones en el plano en la dirección $-y$,

$$\begin{aligned} L_x &= -i(y\partial_z - z\partial_y) \quad \rightarrow \quad +i\rho\partial_y =: \rho E_y, \\ L_y &= -i(z\partial_x - x\partial_z) \quad \rightarrow \quad -i\rho\partial_x =: \rho E_x, \end{aligned} \quad (3.5)$$

Las transformaciones generadas por $e^{-i\beta L_y} \rightarrow e^{-ixE_x}$ con desplazamientos finitos $x \approx \beta\rho$ requieren que los ángulos β se vayan a cero como $\sim 1/\rho$, lo mismo ocurre para las rotaciones alrededor del eje x ($e^{-i\beta L_x} \rightarrow e^{+i\beta\rho\partial_y}$). Por tanto, el operador de Casimir bajo la contracción se convierte en

$$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 = \ell(\ell + 1)1 \quad \rightarrow \quad \rho^2(\partial_x^2 + \partial_y^2) = \rho^2 k^2 1. \quad (3.6)$$

Al factorizar ρ^2 nos queda la ecuación de Helmholtz bidimensional para campos con

número de onda k .

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2\right)\psi(x, y) = 0 \quad (3.7)$$

Finalmente, notamos que los campos de ondas de Helmholtz sobre el plano $\mathbf{r} = (x, y) = r(\cos \phi, \sin \phi)$ en \mathcal{R}^2 no son funciones cuadrado integrable, ya que el producto escalar *local* (1.6) se haría indefinido con el factor de oblicuidad en (1.5), es $1/\rho \rightarrow 0$. Por esto reescalamos los campos de ondas correspondientes para que sean independientes de ρ ; se indicarán con letras minúsculas de aquí en adelante.

3.1. Contracción de funciones de la base $n\text{ShV}$

Como la dimensión $2\ell + 1$ del espacio de los campos de onda monocromáticos del ojo de pez M_ℓ aumenta con $\rho \rightarrow \infty$, los ángulos azimutales para las funciones pertenecientes a la base $n\text{ShV}$, $\alpha_m = 2\pi m/(2\ell + 1)$ para $m|_{-\ell}^\ell$ definidas en (2.18), se vuelven densos en el círculo α , separados por $\Delta\alpha = 2\pi/(2\ell + 1) \rightarrow 0$. Intuitivamente se puede ver que las funciones $n\text{ShV}$ $V_{\ell,m}(\theta, \phi)$ serán contraídas a ondas planas en la dirección dada por α . En efecto, el límite $\ell, \rho \rightarrow \infty$ respetando (3.2)–(3.3), de las funciones de $n\text{ShV}$ está dado por la suma creciente

$$V_{\ell,m}\left(\frac{r}{\rho}, \phi\right) = \sum_{m'=-\ell}^{\ell} d_{m',\ell}^\ell\left(\frac{1}{2}\pi\right) e^{-im'\alpha_m} Y_{l,m'}\left(\frac{q}{\rho}, \phi\right). \quad (3.8)$$

Esta es la d de Wigner definida en (2.15), y su límite es

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} d_{m',\ell}^\ell\left(\frac{1}{2}\pi\right) = (\pi\ell)^{-1/4} \quad \text{cuando} \quad |m'| \ll \ell. \quad (3.9)$$

Para los armónicos esféricos se usa el límite en (2.16), que involucra funciones de Bessel $J_{m'}(kr)$, donde notamos que estas funciones tienen un cero de orden m' en $r = 0$ y son pequeñas cuando $kr < m'$; para m' grande habrá contribuciones pequeñas en regiones finitas del plano (x, y) pues la función d de Wigner seguirá acotada por $|d_{m',\ell}^\ell(\beta)| \leq 1$.

El límite de las funciones de $n\text{ShV}$ dadas en (3.8) son un campo de ondas sobre el medio de Helmholtz, es decir, funciones de $\mathbf{r} = (x, y) = r(\cos \phi, \sin \phi)$. Finalmente, tomamos en cuenta que el factor de oblicuidad en el límite es $\sim \rho^{-1}$, derivado de (1.5) con $\ell = k\rho$. Así, el límite de las funciones de $n\text{ShV}$ será

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} V_{\ell,m}\left(\theta = \frac{r}{\rho}, \phi\right) = \sum_{m'} (-1)^{m'} \frac{e^{-im'\alpha_m}}{(\pi\ell)^{1/4}} \sqrt{\frac{k\rho}{2\pi}} J_{m'}(kr) e^{im'\phi}, \quad (3.10)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{k\rho}{\pi}\right)^{1/4} \sum_{m'} e^{im'(\phi-\alpha+\pi)} J_{m'}(kr), \quad (3.11)$$

$$= \frac{(k\rho/\pi)^{1/4}}{\sqrt{2\pi}} e^{ikr \sin(\phi-\alpha)}. \quad (3.12)$$

En el último paso usamos la función generadora de las funciones de Bessel. Excepto por el factor $\rho^{1/4}$ que debe ser renormalizado, estas son ondas planas con número de onda k cuyos frentes de onda tienen la dirección $\phi = \alpha$. Escribiremos por convención las funciones límite sobre el ojo de pez con letras minúsculas:

$$v_{k,\alpha}(r, \phi) := \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho^{1/4}} V_{\ell,m}(r/\rho, \phi) = \frac{(k/\pi)^{1/4}}{\sqrt{2\pi}} e^{ikr \sin(\phi-\alpha)}. \quad (3.13)$$

Utilizando (2.23) se realiza la contracción de (3.12) a una integral de Riemann en el límite $\rho \rightarrow \infty$. El procedimiento usado para esto se puede apreciar en [17, Sec. 3.4], donde la transformada finita de Fourier sobre $2\ell + 1$ puntos en un círculo α_m , se contrae a la serie de Fourier donde hay una integral integral sobre α en el círculo. En nuestro caso,

$$f(\mathbf{r}) = \frac{1}{\Delta\alpha} \sum_{m=-\ell}^{\ell} (\Delta\alpha) \tilde{f}_m v_{\ell,m}(\mathbf{r}) \quad \rightarrow \quad f(\mathbf{r}) = \int_{-\pi}^{\pi} d\alpha \tilde{f}(\alpha) e^{ikr \sin(\phi-\alpha)}. \quad (3.14)$$

donde $\mathbf{r} = (r \cos \phi, r \sin \phi)$ y $\vec{k} = (k \cos \alpha, k \sin \alpha)$; $k = |\vec{k}|$, a diferencia de esto, en [8] el vector de onda \vec{k} está dado como $\vec{k} = (k \sin \alpha, k \cos \alpha)$.

Sustituyendo $x = r \cos \phi$ y $y = r \sin \phi$ en la ecuación (3.14) y siguiendo los mismos pasos que se dan en [8], encontramos el desarrollo para campos de Helmholtz en ondas planas con direcciones sobre el círculo dado por el ángulo α ,

$$f(x, y) = \frac{k}{2\pi} \int_{S^1} d\alpha \tilde{f}(\alpha) e^{ik(x \sin \alpha - y \cos \alpha)}. \quad (3.15)$$

las funciones $\tilde{f}(\alpha)$ pueden recuperarse por la *transformada de onda* de la ecuación (3.14) [8].¹

$$\tilde{f}(\alpha) = \frac{\sigma k}{2} \frac{1}{2\pi} \int_R dx \left(f(x) \cos \alpha + \frac{1}{ik} f_y(x) \right) e^{-ik(x \sin \alpha)}, \quad (3.16)$$

donde $\sigma := \text{sign} \cos \alpha$; $f(x) = f(x, y)|_{y=0}$ y $f_y(x) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}|_{y=0}$ son los valores y velocidades iniciales a lo largo de la línea $y = 0$ que es suficiente para caracterizar el campo de ondas de Helmholtz sobre $\mathbf{r} \in R^2$.

El producto interno entre dos funciones sobre la esfera (2.24) implica un producto interno *no local* para los coeficientes \tilde{f}_m . En el límite $\ell \rightarrow \infty$, el núcleo *no local* se transforma en una δ de Dirac y el producto interno de las funciones $\tilde{f}(\alpha)$ se convierte en *local*. El límite del núcleo es

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty}^{\ell=k\rho} \left(\cos \frac{\pi(m-m')}{2\ell+1} \right)^{2\ell} = \frac{1}{\sqrt{\pi k \rho}} \delta(\alpha - \alpha'). \quad (3.17)$$

¹Hacemos notar que en esta referencia los ángulos ϕ se cuentan a partir del eje y ; aquí tomamos el eje x como meridiano de origen del azimut.

Para demostrar esto, notése que para $m \neq m'$, $\cos(\alpha_m - \alpha_{m'}) < 1$ así que sus potencias crecientes tienden a cero; por otro lado la integral de (3.17), es decir el área bajo la curva, es asintóticamente $1/\sqrt{\pi\ell}$, por lo que el producto escalar entre dos funciones sobre el círculo α es

$$(f, g)_o = \int_{-\pi}^{\pi} d\alpha \tilde{f}(\alpha)^* \tilde{g}(\alpha), \quad (3.18)$$

y las potencias de ρ se cancelan. Confirmamos así que la base de ondas planas $v_{k,\alpha}(\mathbf{r})$ en (3.13) es una base de *momentos*, la cual es el límite $\rho \rightarrow \infty$ de la base $n\text{ShV}$ sobre la esfera, $V_{\ell,m}(\theta, \phi)$, $m|_{-\ell}$ en (2.18), así como en el ojo de pez de Maxwell monocromático.

Al remplazar funciones $\tilde{f}(\alpha)$ y $\tilde{g}(\alpha)$ como las dadas en (3.16), y tomando en cuenta la forma integral de las funciones de Bessel, se ve explícitamente la *no localidad* del producto interno de las soluciones de Helmholtz dado en la referencia [8],

$$(f, g)_{\mathcal{H}_k} := \frac{1}{4} \int_R dx \int_R dx' \left(f(x) \frac{J_1(k(x-x'))}{x-x'} g(x') + f_y(x) \frac{J_0(k(x-x'))}{k} g_y(x') \right), \quad (3.19)$$

Este producto escalar (3.19) es invariante ante traslaciones y rotaciones sobre el plano y caracteriza el espacio de Hilbert \mathcal{H}_k de soluciones de Helmholtz para un número de onda k . La ecuación (3.11) también se puede ver como el desarrollo de ondas planas en términos de los campos multipolares $\mu_m(r, \phi)$ dados en (3.4).

3.2. Contracción en la base de Legendre

Recordemos que la base de Legendre se compone de dos conjuntos de funciones: las funciones de posición $\Lambda_{\ell,m}(\theta, \phi)$ que generan un espacio $\ell + 1$ dimensional con $m \in \mathcal{E}_\ell$, y las derivadas normales $\Lambda'_{\ell,m}(\theta, \phi)$, $m \in \mathcal{E}'_\ell$, que generan un espacio de dimensión ℓ . Las funciones de posición $\Lambda_{\ell,m}(\theta, \phi)$ son pares alrededor del ángulo azimutal $\phi \rightarrow -\phi$ y sobre el eje $y \rightarrow -y$ del plano del ojo de pez, mientras que las funciones derivadas normales son impares sobre estos mismos ejes.

Los armónicos de Legendre $\Lambda_{\ell,m}(\theta, \phi)$ y sus derivadas normales $\Lambda'_{\ell,m}(\theta, \phi)$ dadas respectivamente en (2.25) y (2.27) se encuentran en el semi-meridiano superior contenido en el plano $x-z$, $z > 0$. Cada máximo de las funciones de posición $\Lambda_{\ell,m}(\theta, \phi)$ esta dado por una $\beta_m = 2\pi m/(2\ell+1)$, $m \in \mathcal{E}_\ell$ en (2.25). La contracción proyecta estos ‘dedos’ máximos sobre los puntos x_m , $m \in \mathcal{E}_m$, del plano del ojo de pez; similarmente, las derivadas máximas en x_m con $m \in \mathcal{E}'_\ell$,

$$x_m = 2\rho \tan \frac{1}{2}\beta_m \rightarrow x_m = \rho\beta_m = \frac{1}{4}\lambda m, \quad m \in \mathcal{E}_\ell \text{ o } \mathcal{E}'_\ell. \quad (3.20)$$

De esta manera, los puntos en cada uno de los dos conjuntos están equiespaciados por *media* longitud de onda, $\frac{1}{2}\lambda$.

Los puntos x_m en (3.20) corresponden tanto de las funciones de posición $\Lambda_{\ell,m}(\theta, \phi)$ como de las derivadas normales $\Lambda'_{\ell,m}(\theta, \phi)$. Se tendrán dos puntos de acumulación en el medio de Helmholtz, dependiendo de la paridad de ℓ . Cuando ℓ es par, los dedos de

Legendre se proyectan sobre puntos x_m 's pares \mathcal{E}_{par} en el medio homogéneo, y cuando ℓ es impar los puntos de acumulación son los impares $\mathcal{E}_{\text{impar}}$, recorridos por un cuarto de longitud de onda respecto a los pares. Sin pérdida de generalidad, podemos hacer la contracción con ℓ par y tomar su límite $\ell \rightarrow \infty$, de esta manera escogemos el conjunto de puntos pares \mathcal{E}_{par} para nuestras funciones de Legendre, es decir, $\mathcal{E}_\ell \rightarrow \mathcal{E}_{\text{par}}$; los máximos de las derivadas normales $A'_{\ell,m}(\theta, \phi)$ corresponderán al conjunto de puntos impares $\mathcal{E}_{\text{impar}}$; como dijimos arriba, los puntos de cada conjunto estarán separados por $\frac{1}{2}\lambda$.

Usando lo anterior, podemos encontrar la contracción de las funciones en la base de Legendre, $A_{\ell,m}(\theta, \phi)$ en (2.25) considerando primero $m = 0$ ($\beta_0 = 0$), cuyo 'dedo' de Legendre apunta al origen del plano del ojo de pez. En el origen del plano, $d_{m',0}^\ell(0) = \delta_{m',0}$ reduce la suma a un solo término $Y_{\ell,0}(\theta, \phi)$ cuyo límite es (2.16). Por tanto, $A_{\ell,0}(\theta, \phi)$ estará centrado en el origen del plano del ojo de pez $x_0 = 0$, y su límite será, con $\ell = k\rho$,

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} A_{\ell,0}(r/\rho, \phi) = \sqrt{\frac{k\rho}{2\pi}} J_0(kr). \quad (3.21)$$

Debido a que los demás armónicos de Legendre $A_{\ell,m}(\theta, \phi)$ son rotaciones discretas alrededor del eje y de $Y_{\ell,0}(\theta, \phi)$, sus respectivas contracciones serán versiones trasladadas de (3.21) centradas en puntos pares discretos x_m 's en (3.20). Estos puntos $\mathbf{x}_m := (x_m, 0)$ sobre el eje x , son equidistantes por media longitud de onda $\frac{1}{2}\lambda m$ y se pueden interpretar como los centros de campos monopoles desplazados (3.21) dados por

$$\lambda_{k,m}(\mathbf{r}) := \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho} A_{\ell,m}(r/\rho, \phi) = \sqrt{\frac{k}{2\pi}} J_0(k|\mathbf{r} - \mathbf{x}_m|), \quad (3.22)$$

donde $kx_m = \frac{1}{2}\pi m$ y $|\mathbf{r} - \mathbf{x}_m| = \sqrt{(x - x_m)^2 + y^2}$.

En la Figura 3.1 se observa que la función $J_0(kr)$ en (3.21) que, como es bien sabido, es el campo de ondas de Helmholtz *más estrecho* [8]; por consiguiente, podemos confirmar que (3.22) toma el rol de base de *posición* para los campos de ondas en el medio de Helmholtz. Con esta identificación se sugiere que la base de Legendre sobre la esfera, $A_{\ell,m}(\theta, \phi)$ en (2.25) es *la mejor base de posición sobre la esfera* la cual, al proyectarse estereográficamente, también adquiere el significado de base de posición $\lambda_{k,m}(\mathbf{r})$ para el ojo de pez de Maxwell monocromático, como se ve en la Figura 2.3.

Para la contracción de las derivadas normales $A'_{\ell,m}(\theta, \phi)$ (2.27) utilizamos el límite $\ell, \rho \rightarrow \infty$ de las funciones de posición (3.21) para $\theta = r/\rho \rightarrow 0$ y $\beta_m = x_m/\rho \rightarrow 0$, con

la derivada respecto de y sobre las funciones de $\mathbf{r} = (x, y)$,

$$\begin{aligned}
 \lim_{\rho \rightarrow \infty} A'_{\ell,m}(r/\rho, \phi) &= \lim_{\rho \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{\ell(\ell+1)}} e^{-i\beta_m L_y} \Lambda_{\ell,0}(\theta, \phi) \\
 &= i \sqrt{\frac{k\rho}{\pi}} e^{-ix_m E_x} \partial_y J_0(kr) \\
 &= i \sqrt{\frac{k\rho}{\pi}} J_1(k|\mathbf{r} - \mathbf{x}_m|) \frac{y}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}_m|}.
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

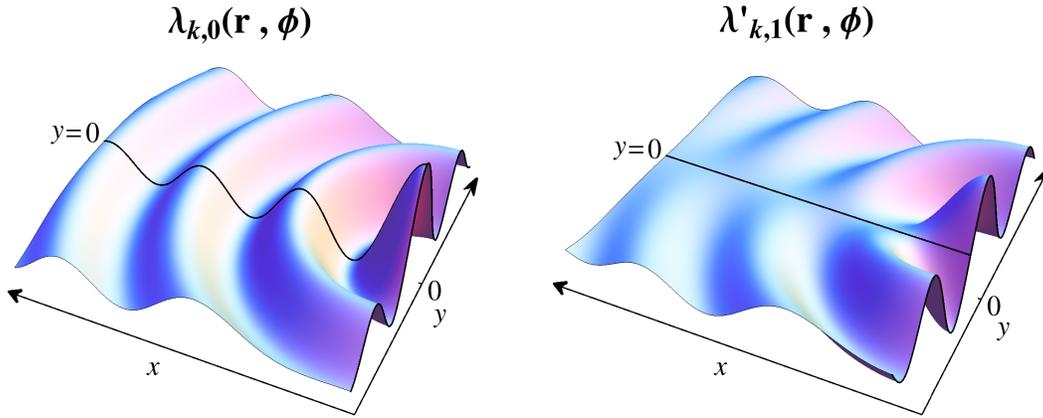


Figura 3.1: (izquierda) Campo de ondas más localizado $\lambda_{k,0}(\mathbf{r})$ y su derivada $\lambda'_{k,1}(\mathbf{r})$ (a la derecha) en el medio de Helmholtz.

Como los demás elementos de la sub-base de derivadas normales también son versiones rotadas de $A'_{\ell,0}(\theta, \phi)$, bajo la contracción serán versiones trasladadas de (3.23) en puntos impares x_m , $m \in \mathcal{E}_{\text{impar}}$,

$$\lambda'_{k,m}(\mathbf{r}) := \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{-i}{\sqrt{\rho}} A'_{\ell,m}(r/\rho, \phi) = \sqrt{\frac{k}{\pi}} \frac{J_1(k|\mathbf{r} - \mathbf{x}_m|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}_m|} y, \tag{3.24}$$

como $m \in \mathcal{E}_{\text{impar}}$, las m 's corresponden a puntos impares x_m 's que se encuentran separados por media longitud de onda de manera que $kx_m = \frac{1}{2}\pi m$, $m|_{-\infty}^{\infty}$, al igual que los puntos correspondientes a las funciones $\lambda_{k,m}(\mathbf{r})$. Renormalizamos por un factor de $\rho^{-1/2}$. Notamos que $y/|\mathbf{r} - \mathbf{x}_m| = \sin \phi_m$, donde ϕ_m es el ángulo referido al punto \mathbf{x}_m .

Los campos de ondas genéricos de Helmholtz pueden escribirse en términos de las bases de posición infinita (3.22) y (3.27) como

$$f(\mathbf{r}) = \sum_{m' \in \mathcal{E}_{\text{par}}} f_m \lambda_{k,m}(\mathbf{r}) + \sum_{m' \in \mathcal{E}_{\text{impar}}} f'_m \lambda'_{k,m}(\mathbf{r}). \tag{3.25}$$

Usando (2.16), encontramos

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow \infty} P_\ell(r/\rho) &= J_0(kr), \\ \lim_{\rho \rightarrow \infty} \left(d_{1,1}^\ell(r/\rho) + d_{1,-1}^\ell(r/\rho) \right) &= J_0(kr) + J_2(kr) = 2J_1(kr)/kr. \end{aligned} \quad (3.26)$$

La ecuación (3.26) ayuda a dar explícitamente las contracciones de la base de Legendre en términos de funciones de Bessel,

$$\begin{aligned} \lambda_{k,m}(\mathbf{r}) &= \sum_{m' \in \mathcal{E}_{\text{par}}} J_{m'}(\tfrac{1}{2}\pi m) \mu_{m'}(\mathbf{r}), & m \in \mathcal{E}_{\text{par}} \\ \lambda'_{k,m}(\mathbf{r}) &= \sqrt{2} \sum_{m' \in \mathcal{E}_{\text{impar}}} \frac{J_{m'}(\tfrac{1}{2}\pi m) m'}{\tfrac{1}{2}\pi m} \mu_{m'}(\mathbf{r}), & m \in \mathcal{E}_{\text{impar}} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Para dos campos f, g , dados en términos de los coeficientes $f_m, f_{m'}, g_m, g_{m'}$, se puede encontrar su producto interno como el límite del caso finito dado en (3.26), cuyo producto interno no-local es (2.34), y usando (3.28) para $m = 1$,

$$(f, g)_Z := \sum_{m, m' \in \mathcal{E}_{\text{par}}} f_m^* J_0(\pi(m' - m)) g_{m'} + 2 \sum_{m, m' \in \mathcal{E}_{\text{impar}}} f_m^* \frac{J_1(\pi(m' - m))}{\pi(m' - m)} g_{m'}. \quad (3.28)$$

El producto interno conserva su no-localidad en las posiciones discretas como en [8]. Compárese con (3.18).

Finalmente, usando la fórmula de la suma de Bessel [18, Eq. 8.538.2] para desplazamientos en (3.22), $\mathbf{r}'_m := \mathbf{r} - \mathbf{x}_m$, con $\mathbf{r}(r, \phi)$ refiriéndose al origen del plano podemos poner las funciones de onda de posición y derivadas normales (3.22) y (3.27) en término de la base de funciones *multipolares* (3.4),

$$\begin{aligned} J_0(k|\mathbf{r}'_m|) &= \sum_{m'=-\infty}^{\infty} J_{m'}(\pi m) \mu_{m'}(\mathbf{r}), \\ J_1(k|\mathbf{r}'_m|) e^{-i\phi'_m} &= \sum_{m'=-\infty}^{\infty} J_{1-m'}(\pi m) \mu_{m'}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (3.29)$$

donde los ángulos ϕ'_m son los referidos a los puntos x_m donde se encuentran los centros de las funciones. La matriz de elementos $M_{m',m} := J_{m'}(\pi m)$ es el núcleo de transformación entre funciones de posición y la base multipolar que, como vimos al final del último apartado, es el límite $\rho, \ell \rightarrow \infty$ de la base de armónicos esféricos. Esto ocurre también para la matriz $M'_{m',m} := J_{1-m'}(\pi m)$.

4. Conclusiones

Usando la proyección estereográfica, la cual es un mapeo unitario entre espacios de Hilbert, al encontrar bases de funciones en la esfera se encuentran correspondientemente bases de campos de ondas en el plano del ojo de pez, de manera única. Así se construyeron las bases de momento y de posición en el medio del ojo de pez monocromático (en una representación ℓ fija del grupo de rotaciones). Cada base consta de $2\ell + 1$ funciones que generan un espacio \mathcal{M}_ℓ de dimensión finita, el cual es subconjunto del espacio de funciones cuadrado integrable $\mathcal{L}^2(\mathcal{S}^2)$ sobre la esfera.

La *base de momento* corresponde a las funciones de Sherman-Volobuyev [15, 14, 16] $V_{\ell,m}(\theta, \phi)$, y la *base de posición* o de Legendre consta de dos sub-bases: La base de *dedos de Legendre* $A_{\ell,m}(\theta, \phi)$ de dimensión $\ell + 1$, y la base de *derivadas normales* $A'_{\ell,m}(\theta, \phi)$ de dimensión ℓ . Las funciones de Sherman-Volobuyev son generadas a partir de $2\ell + 1$ rotaciones discretas de los armónicos esféricos extremos $Y_{\ell,\ell}(\theta, \phi)$. En la base de Legendre ocurre algo similar aunque esencialmente diferente: la sub-base de los dedos de Legendre son generadas a partir de rotaciones discretas del armónico de Legendre $Y_{\ell,0}(\theta, \phi)$, las cuales son funciones pares bajo reflexiones del ángulo azimutal ϕ y del plano $y = 0$ en el ojo de pez; las ℓ funciones derivadas normales se encontraron aplicando el operador de momento angular L_x a las funciones anteriores, y son funciones impares del ángulo azimutal ϕ y del plano $y = 0$ en el ojo de pez. Como ninguna de las dos bases construidas es ortogonal, los productos interiores expresados en términos de los coeficientes en esas bases presentan medidas no-locales. La construcción de estas dos sub-bases de Legendre parece ser nueva en la literatura.

Se realizó la contracción del ojo de pez al medio homogéneo de Helmholtz, dejando que el radio de la esfera ρ y el número de oscilaciones ℓ de las funciones involucradas crezcan indefinidamente, manteniendo la relación $\ell/\rho = k$, donde k es el parámetro que determina el número de onda en este medio. Bajo esta contracción, la base de funciones de Sherman-Volobuyev se convirtieron en la base continua de ondas planas en el medio homogéneo. La sub-base de dedos de Legendre (2.25) se convirtió en la base numerable de funciones de Bessel $\sim J_0(kr)$ en (3.22), centradas en los puntos discretos pares x_m (3.20) sobre el eje x del plano de Helmholtz, las cuales son las soluciones más localizadas en este medio; por último, la sub-base de derivadas normales (2.27) se convirtió en las funciones $\sim J_1(kr)y/kr$ en (3.27), centradas en los puntos discretos numerables impares x_m sobre el eje x . Los puntos en cada sub-base están separados por media longitud de onda.

La medida no-local (2.24) correspondiente a las funciones de Sherman-Volobuyev bajo el límite $\ell, \rho \rightarrow \infty$ se convirtió en local (2.24); en cambio, la medidas límite para las dos sub-bases de Legendre (2.34) siguen siendo *no locales* (3.28) [8]. Con estos resultados se verifica que las funciones aquí presentadas constituyen una elección robusta para definir campos de onda de posición y momento en el medio del ojo de pez de Maxwell monocromático, así como y en la esfera.

A. Transformada de onda y producto interior en el espacio de Helmholtz

En este apartado se obtiene la *transformada de onda* sobre un círculo a partir de la transformada de Fourier bidimensional. Después se obtiene el producto interior en el espacio de Helmholtz. Se encuentra que las funciones solución del medio de Helmholtz incluyen los valores iniciales en la función y su derivada normal. Todo este desarrollo se tomó de la referencia [8].

Ecuación de Helmholtz bidimensional

En un espacio bidimensional $\mathbf{r} = (x, y)$ la ecuación de onda está dada por

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{c} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Psi(x, y, t) = 0, \quad (\text{A.1})$$

donde c es la velocidad de la luz y t es el tiempo. Al considerar soluciones monocromáticas para el número de onda $k = 2\pi/\lambda \in \mathcal{R}$ (donde λ es la longitud de onda) estamos proponiendo que las soluciones tienen la forma

$$\Psi(x, y, t) = \psi(x, y) e^{-ickt}, \quad (\text{A.2})$$

donde la función $\psi(x, y)$ es la solución de la ecuación de Helmholtz

$$H_k \psi(x, y) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2\right)\psi(x, y) = 0, \quad (\text{A.3})$$

y H_k es el *operador* de Helmholtz.

Las soluciones a esta ecuación son las llamadas *ondas planas*

$$\psi(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-ixk_x + yk_y} = \frac{1}{2\pi} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad |\mathbf{k}| = k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}, \quad (\text{A.4})$$

que se propagan en dirección del vector

$$\mathbf{k} = (k_x, k_y) = (k \sin \phi, k \cos \phi), \quad \phi \in (-\pi, \pi]. \quad (\text{A.5})$$

Transformada de onda

Consideramos soluciones generales de la ecuación de Helmholtz que están acotadas y tienen bien definida su transformada de Fourier,

$$\psi(\mathbf{r}) = (\mathcal{F}\tilde{\psi})(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{R}^2} d^2\mathbf{g} \tilde{\psi}(\mathbf{g}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad (\text{A.6})$$

con $\mathbf{g} = (g_x, g_y) \in \mathcal{R}^2$. La transformada inversa de Fourier para el campo de onda es

$$\tilde{\psi}(\mathbf{g}) = (\mathcal{F}^{-1}\psi)(\mathbf{g}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{R}^2} d^2\mathbf{r} \psi(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \quad (\text{A.7})$$

Al actuar sobre (A.6) con el operador H_k dado en (A.3), y conmutando H_k dentro de la integral, se tiene

$$\int_{\mathcal{R}^2} d^2\mathbf{g} (k^2 - g_x^2 - g_y^2) \tilde{\psi}(\mathbf{g}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = 0. \quad (\text{A.8})$$

Cambiando (A.8) a coordenadas polares $(g_x, g_y) = [g, \phi]$ con $g_x = g \sin \phi$, $g_y = g \cos \phi$, tenemos

$$\int_0^\infty g dg \int_{\mathcal{S}} d\phi (k^2 - g^2) \tilde{\psi}[g, \phi] e^{i(x \sin \phi + y \cos \phi)} = 0. \quad (\text{A.9})$$

Si $\psi(\mathbf{r})$ es distinto de cero, la solución generalizada para esta ecuación tiene la forma

$$\tilde{\psi}[g, \phi] = \frac{\delta(k - g)}{k} \psi^\circ(\phi), \quad (\text{A.10})$$

donde $\psi^\circ(\phi)$ es una función sobre el círculo \mathcal{S} . Sustituyendo (A.10) en (A.9) encontramos la *transformada de onda* \mathcal{W} , que se define a través de

$$\psi(x, y) = (\mathcal{W}\psi^\circ)(x, y) = \sqrt{\frac{k}{2\pi}} \int_{\mathcal{S}} d\phi \psi^\circ(\phi) (\phi) e^{ik(x \sin \phi + y \cos \phi)}. \quad (\text{A.11})$$

La transformada de onda es una transformada integral de funciones en el círculo $\psi^\circ(\phi) \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}}$ sobre soluciones de la ecuación de Helmholtz $\psi(x, y) \in \mathcal{F}_{H_k}$, es decir,

$$\mathcal{W} : \mathcal{F}_{\mathcal{S}} \mapsto \mathcal{F}_{H_k}. \quad (\text{A.12})$$

El operador \mathcal{W} puede ser representado como un vector columna de dos entradas, a través de

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= (\mathcal{W}\psi^\circ)(x) = \int_{\mathcal{S}} d\vartheta \mathbf{W}(x, \vartheta) \psi^\circ(\vartheta), \\ \mathbf{W}(x, \vartheta) &= \sqrt{\frac{k}{2\pi}} \begin{pmatrix} 1 \\ ik \cos \vartheta \end{pmatrix} e^{ikx \sin \vartheta}. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

y la *transformada de onda transpuesta* \mathcal{W}^\dagger será un 2-vector renglón de kernels integrales

$$\begin{aligned}\psi^\circ(\vartheta) &= (\mathcal{W}^\dagger \Psi)(\vartheta) = \int_{\mathcal{R}} dx \mathbf{W}^{(\dagger)}(\vartheta, x) \Psi(x), \\ \mathbf{W}^{(\dagger)}(\vartheta, x) &= \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{k}{2\pi}} \left(\cos \vartheta, \frac{1}{ik} \right) e^{-ikx \sin \vartheta},\end{aligned}\tag{A.14}$$

donde $\sigma = \text{sign} \cos \vartheta$ y $\Psi(x)$ es el vector de valores iniciales de las soluciones de Helmholtz dado como

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi(x) \\ \psi'(x) \end{pmatrix}.\tag{A.15}$$

Producto interior en el espacio de Helmholtz

El producto interno de funciones cuadrado integrables en el círculo está dado como

$$(\psi^\circ, \phi^\circ)_{\mathcal{S}} = \int_{\mathcal{S}} d\vartheta \psi^\circ(\vartheta)^* \phi^\circ(\vartheta),\tag{A.16}$$

y define el bien conocido espacio de Hilbert $\mathcal{L}^2(\mathcal{S})$. La transformada de onda \mathcal{W} mapea este espacio de funciones sobre un espacio de una pareja de funciones (valores iniciales de las soluciones de Helmholtz) que llamaremos *espacio de Helmholtz* \mathcal{H}_k . Para un valor fijo del número de onda k , \mathcal{H}_k se define de la siguiente manera,

$$\mathcal{H}_k = \{\psi \mid \mathcal{W}^\dagger \psi \in \mathcal{L}^2(\mathcal{S})\}.\tag{A.17}$$

Con esto, la transformada de onda \mathcal{W} constituye una transformación unitaria entre el espacio de Hilbert de funciones cuadrado integrables y el espacio de Hilbert de Helmholtz \mathcal{H}_k .

El producto interno en $\mathcal{L}^2(\mathcal{S})$ induce un producto en el espacio \mathcal{H}_k de la siguiente manera

$$(\Psi, \Phi)_{\mathcal{H}_k} = \int_{\mathcal{R}} dx \int_{\mathcal{R}} dx' \Psi^\dagger(x) \mathcal{H}_k(x - x') \Phi^\dagger(x').\tag{A.18}$$

Al remplazar la forma vectorial de la transformada de onda transpuesta \mathcal{W}^\dagger de (A.14) en el producto (A.16), obtenemos

$$\begin{aligned}(\psi^\circ, \phi^\circ)_{\mathcal{S}} &= \int_{\mathcal{S}} d\vartheta \left[\int_{\mathcal{R}} dx \mathbf{W}^{(\dagger)}(\vartheta, x) \Psi(x) \right]^\dagger \int_{\mathcal{S}} d\vartheta' \left[\int_{\mathcal{R}} dx' \mathbf{W}^{(\dagger)}(\vartheta', x') \Phi(x') \right] \\ &= \int_{\mathcal{R}} dx \int_{\mathcal{R}} dx' \Psi(x)^\dagger \left[\int_{\mathcal{S}} d\vartheta \mathbf{W}^{(\dagger)}(\vartheta, x)^\dagger \mathbf{W}^{(\dagger)}(\vartheta, x') \right] \Phi(x'),\end{aligned}\tag{A.19}$$

donde la integral encerrada por corchetes cuadrados en la última expresión de (A.19) corresponde a la medida integral $\mathcal{H}_k(x - x')$. Resolviendo la integral, obtenemos

$$\mathcal{H}_k(x - x') = \frac{k}{8\pi} \int_{\mathcal{S}} d\vartheta \begin{pmatrix} \cos^2 \vartheta & \frac{1}{ik} \cos \vartheta \\ \frac{-1}{ik} \cos \vartheta & \frac{1}{k^2} \end{pmatrix} e^{ik(x-x') \sin \vartheta}.\tag{A.20}$$

Podemos encontrar una expresión más sencilla de $\mathcal{H}_k(x - x')$ a partir de la siguiente propiedad de paridad

$$\int_{\mathcal{S}} d\vartheta \cos^n \vartheta e^{i\xi \sin \vartheta} = \begin{cases} 2\pi(n-1)!! \frac{J_{n/2}(\xi)}{\xi^{n/2}}, & \text{si } n \text{ es par,} \\ 0, & \text{si } n \text{ es impar,} \end{cases} \quad (\text{A.21})$$

donde $m!! = (m-2)!!$, $1!! = 0!! = 1$ y $(-1)!! = -1$. Cuando $n = 0, 1, 2$, la expresión resulta ser

$$\mathcal{H}_k(x - x') = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} k \frac{J_1(k(x-x'))}{k(x-x')} & 0 \\ 0 & k^{-1} J_0(k(x-x')) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.22})$$

Por tanto podemos afirmar que el producto (A.18) dado por la medida (A.22) es no-local pero es homogéneo e isotrópico; es decir, integramos sobre el rango de las dos funciones, x y x' , pero el producto de las funciones sólo depende de la distancia, $\xi = k|x - x'|$. El espacio de Hilbert \mathcal{H}_k excluye funciones que no son oscilatorias sino exponenciales, pues éstas no son integrables.

Resumimos los resultados de la referencia [8] sobre el espacio de Hilbert \mathcal{H}_k para contrastarlos con las conclusiones del trabajo presente, donde este espacio se aborda como contracción del espacio de funciones sobre la esfera con momento angular definido, realizado en su modelo de ojo de pez monocromático de Maxwell. El producto interior (A.16) es el mismo que el descrito por la contracción $\rho \rightarrow \infty$ de la base de Sherman-Volobuyev al medio de Helmholtz en la ecuación (3.18). Pero el producto interno no-local (A.22) es sobre coordenadas x, x' que son variables *continuas*, mientras que el producto interno que encontramos en (3.28) en la base de Legendre, también no-local, se toma sobre valores *discretos* de la coordenada x_m , donde los puntos pares dan los valores iniciales, y los impares las derivadas normales iniciales; cada uno de los dos conjuntos de puntos están espaciados por media longitud de onda.

Referencias

- [1] J.C. Maxwell, *Cambridge and Dublin Math. J.* **8**, 188 (1854).
- [2] R.K. Luneburg, *Mathematical Theory of Optics* (U. of California, Berkeley, 1964), Sect. 28.
- [3] V. Fock, Zur Theorie des Wasserstoffatoms, *Zeitschrift für Physik* **98**, 145 (1935).
- [4] H.A. Buchdahl, Kepler problem and Maxwell fish-eye, *Am. J. Phys.* **46**, 840 (1978).
- [5] A. Frank, F. Leyvraz y K.B. Wolf, Hidden symmetry and potential group of the Maxwell fish-eye. *Jour. Math. Phys.* **31**, 2757 (1990).
- [6] K.B. Wolf, *Geometric Optics on Phase Space* (Springer-Verlag, Heidelberg, 2004).
- [7] K.B. Wolf, Continuous versus discrete free Hamiltonian systems, *Journal of Physics A* **46**, art. 335202 (7p.) (2013).
- [8] Pedro González-Casanova and K.B. Wolf, Interpolation for solutions of the Helmholtz equation, *Numerical Methods for Partial Differential Equations* **11**, 77–91 (1994).
- [9] K.B. Wolf, Discrete systems and signals on phase space, *Appl. Math. & Information Science* **4**, 141–181 (2010).
- [10] Elpidio Chacón Esponda, *Introducción a la teoría de los grupos y sus aplicaciones a la mecánica cuántica*(UNAM, 2008)
- [11] Biedenharn and Louck, *Angular Momentum in Quantum Physics* (Board, Vol. 08)
- [12] N.M. Atakishiyev and K.B. Wolf, Fractional Fourier-Kravchuk transform, *J. Opt. Soc. Am. A* **14**, 1467–1477 (1997).
- [13] N.M. Atakishiyev, G.S. Pogosyan, and K.B. Wolf, Finite models of the oscillator, *Phys. Part. Nuclei, Suppl.* **3**, **36**, 521–555 (2005).
- [14] T.O. Sherman, Fourier analisis on the sphere, *Trans. Am. Math. Soc.* **209**, 1-31 (1975).

-
- [15] I.P. Volobuyev, Plane waves on the sphere and some of their applications, *Teor. Mat. Fiz.* **45**, 421–426 (1980).
- [16] M.A. Alonso, G.S. Pogosyan, and K.B. Wolf, Wigner functions for curved spaces II. On spheres. *Journal of Math. Phys.*, **Vol. 44, 4**, 1472–1489 (2003)
- [17] K.B. Wolf, *Integral Transforms in Science and Engineering* (Plenum Publ. Corp., New York, 1979).
- [18] Gradshteyn and Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products* (Elsevier Academic Press publications, California, 2007).