



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

**MOVILIDAD DE AGENTES INTELIGENTES EN
AMBIENTES COMPLEJOS**

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE

MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA

MIGUEL ANGEL MAYA CONTRERAS

TUTOR PRINCIPAL

DR. OCTAVIO REYMUNDO MIRAMONTES VIDAL
INSTITUTO DE FÍSICA, UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR

DR. DENIS PIERRE BOYER
INSTITUTO DE FÍSICA, UNAM

DR. DAVID PHILIP SANDERS
FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM

MÉXICO, D.F. JULIO 2014



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

Todo mi agradecimiento y reconocimiento a mi tutor principal, por motivar el aprendizaje sobre programación en software libre, por la guía y enseñanzas, y a los integrantes de mi comité tutor por la ayuda, apoyo y sugerencias para versión final de esta tesis.

A los miembros del jurado por la dedicación y las observaciones para este trabajo, que incentivaron la discusión y resultaron las últimas correcciones.

A mis familiares, amigos y compañeros por la calidez y apoyo brindado en todo este tiempo.

A CONACyT por la beca de maestría otorgada de agosto de 2011 a julio de 2013.

Agradezco al proyecto DGAPA-PAPIIT #IN101712 que me brindó una beca en el periodo de septiembre a noviembre de 2013.

Miguel Angel Maya Contreras
México DF, junio de 2014

Resumen

En este trabajo se investigan las propiedades de un modelo computacional de agentes inteligentes que se mueven en ambientes heterogéneos.

Se considera un dominio cuadrado de área unitaria, en dos dimensiones, en donde se encuentran distribuidos, de manera aleatoria y uniforme, N blancos fijos o lugares de interés. A cada uno de estos blancos se le asigna cierto tamaño o atractivo. Entre mayor sea el tamaño del blanco, más atractivo será para el agente. La forma de distribuir el tamaño a los blancos está dado como una ley de potencias, caracterizada por un exponente β .

Consideramos a un agente determinista con pleno conocimiento del medio que busca visitar dos blancos sucesivamente, para esto, minimiza una función de costos que tiene que ver con el tamaño de los blancos y la distancia total a recorrer. De manera que llegue a los dos blancos más atractivos, aún no visitados, y que la distancia total que recorra sea la mínima posible.

El modelo es capaz de representar diferentes situaciones, desde el movimiento de forrajeo de algunos animales hasta el movimiento de personas dentro de una economía que buscan maximizar su beneficio y, al mismo tiempo, minimizar su desplazamiento. El modelo es una extensión a un modelo anterior de optimización a primer paso, donde el agente busca visitar sólo un blanco. Se encontró que el modelo de optimización a segundo paso es ligeramente más eficiente que el modelo de optimización a primer paso.

Para cierto valor del parámetro β , que caracteriza la distribución del tamaño de los blancos, la distribución de frecuencias de la longitud de los pasos, que da el agente, se asemeja a una ley de potencias. Por otro lado, se observa una marcada diferencia en la forma de visitar a los dos blancos. Para llegar al primero se recorre una distancia mayor que para llegar al segundo; no obstante, la cantidad de recurso en el primero es menor que en el segundo, como si el hecho de ir de la posición inicial al primer blanco se tratara de una estrategia de posicionamiento para quedar cerca de un blanco con mayor tamaño.

Abstract

In this work we have investigated the properties of a computational model of intelligent agents that moves in heterogeneous environments.

A square domain of unit area is considered, in two dimensions, where there are distributed, randomly and uniformly, certain amount of fixed targets or sites of interest. Every target has certain weight or attractiveness. The bigger the weight of the target, the most attractive will be for the agent. The distribution of the weights of the targets is given by a power law, characterized by an exponent β .

We have assumed a deterministic agent that has a perfect knowledge of sizes and position of every target in the system, the agent wants to visit two targets, to do this, he has to minimize a function of costs that depends on the weight of the targets and on the total distance. In this way, the agent visits the two most attractive targets, not yet visited, and that the total distance to reach them is a minimum.

The model is able to represent different situations, from the movement of foraging animals to the movement of people within an economy seeking to maximize their benefits, and at the same time, minimizing their displacement. The model is an extension to a previous model where the agent wants to visit just one target. We found that the model of two step optimization is slightly more efficient than the one step optimization.

It was found that for a certain value of the parameter β , the frequency distribution of the step lengths is look like a power law. On the other hand, it was observed a strikingly difference in the way to visit each one of the two targets. To reach to the first one, the distance travelled is larger compared with the distance to reach the second one; even though, the weight of the first is smaller than the weight of the second, it seems that the fact of going from the initial position to the first target were a positioning strategy to be near of a target with larger weight.

Índice general

Índice general	IV
1. Introducción	1
1.1. Fundamentos de procesos estocásticos	2
1.1.1. Distribución de probabilidad	3
1.1.2. Momentos de las distribuciones	5
1.1.3. Función característica	6
1.1.4. Teorema del Límite Central	7
1.1.5. Caminante aleatorio	8
1.1.6. Movimiento browniano	10
1.1.7. Tiempo medio de primer paso	13
1.1.8. Desplazamiento cuadrático medio	15
1.1.9. Distribución de Lévy	16
I Antecedentes	17
2. Dinámica de la movilidad de agentes	18
2.1. Distribución de Lévy en la dinámica caótica	19
2.2. Difusión normal	20
2.3. Difusión anómala	21

2.3.1. Subdifusión	22
2.3.2. Superdifusión	23
2.4. Vuelos y caminatas de Lévy	24
2.4.1. Vuelos de Lévy	24
2.4.2. Caminatas de Lévy	26
2.4.3. Un ejemplo de los vuelos de Lévy: La caminata de Weierstrass	27
3. Modelo de optimización a primer paso	29
3.1. Modelo computacional de optimización a primer paso	30
3.1.1. Distribución del tamaño de los blancos	31
3.1.2. Distancia característica de un sistema	32
3.1.3. Reglas de movimiento	33
3.1.4. Movimiento del agente	34
3.1.5. Estadística del movimiento	37
3.2. Dependencia de los parámetros del modelo	39
3.2.1. Dependencia del k_{\max}	39
3.2.2. Dependencia del número de blancos	40
3.2.3. Análisis del comportamiento observado	43
II Resultados	48
4. Modelo de optimización a segundo paso	49
4.1. Modelo computacional de optimización a segundo paso	50
4.1.1. Reglas de movimiento	50
4.1.2. Aumento en los cálculos	51
4.2. Estadística del movimiento	52
4.3. Comparación con el modelo de optimización a primer paso	58
4.4. Desplazamiento cuadrático medio	67

ÍNDICE GENERAL

5. Conclusiones	72
Referencias	75

Capítulo 1

Introducción

El estudio de los sistemas complejos ha tomado gran relevancia en diversas ramas de la ciencia, debido a que no sólo toma en cuenta los componentes individuales de los sistemas a estudiar, sino que, en gran medida, también trata con las interacciones entre éstos. Uno de sus objetivos es tomar sistemas aparentemente muy complicados y reducirlos a sus propiedades más generales, de tal manera que mediante el uso de reglas sencillas se pueda reproducir su comportamiento. El término *sistema complejo* se usa para referirse a sistemas donde la suma de las propiedades de sus elementos individuales es diferente al comportamiento total [1], es decir, donde las interacciones entre los elementos son fundamentales; aunque aún no hay consenso en la definición anterior.

Muchos sistemas en la naturaleza tienen componentes móviles. Se hará referencia a tales componentes como *agentes*, por ejemplo en un medio ambiente natural, como es un bosque o una selva, los componentes son las plantas y animales. Si nos fijamos en el movimiento de forrajeo de algún animal, diremos que estamos observando la movilidad de un agente en el sistema de interés.

Uno de los temas que recibe mucha atención en el estudio de los sistemas complejos es la movilidad de agentes en distintos entornos [2, 3, 4, 5, 6]; tales estudios están enfocados en describir el movimiento observado en diferentes individuos, ya sean animales [2, 4], partículas [7, 8], incluso seres humanos [9, 10]. En los casos anteriores la interacción del agente con el medio desempeña un papel fundamental; tales interacciones pueden generar propiedades emergentes de mucho interés.

Antes de proseguir con la descripción de un modelo de agentes móviles que se

desarrollará en este trabajo, es importante tener en cuenta conceptos propios del área.

1.1. Fundamentos de procesos estocásticos

Para abordar la teoría de probabilidad es menester entender los procesos estocásticos; en la presente sección se abordarán algunas definiciones y ejemplos. Para describir algún fenómeno o evento pueden considerarse dos tipos de variables.

Las *variables deterministas* son aquellas cuyo valor no cambia al repetirse un experimento bajo las mismas condiciones, es decir, poseen un valor establecido de acuerdo a ciertas leyes de tal forma que su valor numérico puede determinarse con absoluta certeza en cualquier instante de tiempo.

En muchos fenómenos es posible, en principio, considerar todas las variables involucradas, sin embargo, algunas de éstas cambian de forma muy complicada o bien pueden estar determinadas a partir de condiciones difícilmente abordables. Usualmente lo que se hace es tratar como aleatorio a un fenómeno donde no se tiene pleno control sobre las variables involucradas o bien, donde no se conocen perfectamente. Es por eso que es importante tener en cuenta a las variables de tipo aleatorias.

Una *variable aleatoria* es una cantidad cuyo valor numérico está determinado por el resultado de un experimento. En otras palabras, un variable aleatoria es una función definida en un espacio muestral, de tal manera que permite medir un experimento aleatorio asignándole un número real a cada elemento del espacio muestral. El espacio muestral está conformado por todos los posibles resultados de un experimento.

Las variables aleatorias pueden ser discretas, por ejemplo el número de águilas que salen al lanzar 5 monedas o el número de electrones en la banda de conducción de un semiconductor; también pueden ser continuas en un intervalo dado, por ejemplo la rapidez de una partícula browniana. Es común denotar a las variables aleatorias con letras mayúsculas.

Cuando se introduce el tiempo como parámetro de una variable aleatoria se habla de un *proceso estocástico* o bien de un proceso aleatorio. Estos procesos cubren prácticamente toda la teoría de la probabilidad desde lanzar una moneda hasta el análisis armónico [11]. El parámetro temporal puede considerarse discreto o continuo, según lo requiera el problema a tratar.

Una función que varía irregularmente en el tiempo puede ser reemplazada por un

conjunto o ensamble de funciones bien comportadas, es decir, puede tratarse como un proceso estocástico [12].

En un proceso estocástico no se puede hacer predicciones precisas sobre los resultados de un experimento, pero se cuenta con otras herramientas para decir al menos con qué probabilidad puede suceder algún evento. Para ello se hace uso de algunas cantidades, como la distribución de probabilidad.

1.1.1. Distribución de probabilidad

La distribución de probabilidad es la colección de todas las probabilidades para todos los resultados posibles de una variable aleatoria. Dado que las variables aleatorias pueden tomar valores en conjuntos discretos o continuos se consideran dos casos.

Caso discreto

Considérese una variable aleatoria X en un espacio muestral Ω , y supóngase que X tiene resultados posibles x_i , con $i = 1, 2, 3, \dots$. Podemos asignar una probabilidad P_i a cada x_i ; entonces decimos que el conjunto de valores $\{P_i\}$ es la distribución de probabilidad en Ω , donde debe satisfacerse que $P_i \geq 0 \forall i$ y $\sum_{i=1}^{\infty} P_i = 1$.

De lo anterior podemos definir la *función de densidad de probabilidad* $f_X(x)$ como

$$f_X(x) = \mathbb{P}(X = x) = \sum_{i=1}^{\infty} P_i \delta(x - x_i), \quad (1.1)$$

donde $\delta(x - x_i)$ es la delta de Dirac. La *función de distribución acumulativa*, $F_X(x)$ está dada por

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(y) dy = \sum_{i=1}^{\infty} P_i \Theta(x - x_i), \quad (1.2)$$

donde $\Theta(x - x_i)$ es la función de Heaviside

$$\Theta(s) = \begin{cases} 0, & \text{para } s < 0, \\ 1, & \text{para } s > 0. \end{cases}$$

Nótese que la función de densidad de probabilidad es justamente la derivada de la

función de distribución,

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}.$$

Cabe puntualizar que la función de distribución $F_X(x)$ nos da la probabilidad de que la variable estocástica X tenga un resultado en el intervalo $(-\infty, x)$. Para que la densidad de probabilidad $f_X(x)$ sea siempre positiva, la función de distribución debe ser una función monótonamente creciente en x , con valores límite $F_X(-\infty) = 0$ y $F_X(\infty) = 1$.

Un ejemplo de un proceso aleatorio con distribución de probabilidad discreta es el lanzamiento de una moneda donde sólo pueden ocurrir dos casos, águila o sol. Otro ejemplo es el lanzamiento de un dado donde hay seis posibles resultados.

Caso continuo

Considérese ahora a la variable aleatoria X que puede tomar valores de un conjunto continuo, tal como en un intervalo del eje de los reales. Consideremos también que existe una función continua por partes $f_X(x)$, tal que la probabilidad de que X tenga un resultado en el intervalo $\{a \leq x \leq b\}$ está dada por el área bajo la curva $f_X(x)$ vs x entre $x = a$ y $x = b$, es decir,

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx. \quad (1.3)$$

Entonces diremos que X es una variable aleatoria continua, $f_X(x)$ es la densidad de probabilidad y $f_X(x) dx$ es la probabilidad de encontrar a la variable estocástica X en el intervalo $(x, x + dx)$. En este caso, la densidad de probabilidad debe satisfacer las condiciones: $f_X(x) \geq 0 \forall x$ y $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$.

También podemos definir la función de distribución acumulativa en el caso continuo

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(y) dy; \quad (1.4)$$

en este caso, la función de distribución tiene la misma forma que la ecuación (1.2) y debe cumplir también las mismas condiciones.

Comúnmente se encuentran ciertos tipos de densidades de probabilidad, en física

las más comunes son las siguientes:

La *densidad de probabilidad uniforme*, usualmente encontrada en los generadores de números aleatorios en las computadoras,

$$f_X(x) = 1 \quad \text{para} \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (1.5)$$

La *densidad de probabilidad exponencial*, que aparece en el decaimiento radiactivo y en la teoría de colisiones de gases,

$$f_X(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \quad \text{para} \quad x \geq 0. \quad (1.6)$$

Finalmente, la *densidad de probabilidad normal o gaussiana*, que describe por ejemplo la distribución de probabilidad de velocidades en un gas, la distribución de posiciones a tiempos largos en caminatas aleatorias, la solución de la ecuación de difusión, entre otros,

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]. \quad (1.7)$$

Cabe destacar que cuando tenemos X_1, X_2, \dots, X_r variables aleatorias gaussianas y mutuamente independientes, la suma $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_r$ es también gaussiana. Además, el valor medio y la varianza de Y son la suma de los promedios y las varianzas de las variables X_i respectivamente.

1.1.2. Momentos de las distribuciones

Si podemos determinar la densidad de probabilidad, $f_X(x)$ de una variable aleatoria X , entonces obtendremos toda la información de ésta; no obstante, en la práctica es difícil obtenerla. A partir de la densidad de probabilidad podemos conocer muchas propiedades interesantes de la distribución, como el promedio y la desviación estándar. El promedio o valor esperado de alguna función $h(X)$ definida en el espacio muestral se define como

$$\langle h(X) \rangle = \int h(x) f_X(x) dx.$$

En general a la cantidad $\langle X^n \rangle$ se le conoce como el n -ésimo momento de X (siempre que tenga valor finito) y se define como

$$\langle X^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x) dx. \quad (1.8)$$

Los primeros momentos de la distribución contienen información sobre el comportamiento global de la densidad de probabilidad, tales como la forma y su extensión; por ello son de gran importancia y se les designan como:

- El primer momento $\langle X \rangle$ es llamado *el promedio o valor medio de X* : Nos da la posición del “centro de masa” de la densidad de probabilidad. Suele confundirse a veces con el valor más probable x_p , que localiza el punto con mayor probabilidad en $f_X(x)$, o con la mediana x_m , para el cual la mitad de los valores de X son más pequeños y la otra mitad son más grandes, es decir, $F_X(x_m) = \frac{1}{2}$.
- El segundo momento $\langle X^2 \rangle$ nos da información muy importante de la densidad de probabilidad. A la combinación $\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2$ se le conoce como *la varianza de X* . La *desviación estándar* σ_X de la variable X , nos da una medida de qué tanto la probabilidad se extiende más allá del valor medio $\langle X \rangle$; se define como:

$$\sigma_X \equiv \sqrt{\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2}. \quad (1.9)$$

- El tercer momento $\langle X^3 \rangle$ refleja cualquier asimetría en la distribución de probabilidad alrededor de $x = 0$.

Cabe señalar que los momentos de las distribuciones de probabilidad pueden ser infinitos; ésto también proporciona información sobre las propiedades de la distribución considerada, como se verá más adelante.

1.1.3. Función característica

La función característica de una variable aleatoria X con función de densidad $f_X(x)$, definida en un intervalo I , está dada por

$$G(k) = \langle e^{ikX} \rangle = \int_I e^{ikx} f_X(x) dx, \quad (1.10)$$

la cual existe para todo real k , y cumple con las siguientes propiedades:

$$G(0) = 1, \quad |G(k)| \leq 1.$$

$G(k)$ es también la función generadora de momentos en el sentido de que los coeficientes de su expansión en serie de Taylor son los momentos de la distribución o combinaciones de éstos,

$$G(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} \langle X^n \rangle;$$

de lo anterior puede inferirse que las derivadas de $G(k)$ evaluadas en $k = 0$ existen hasta la misma n que los momentos; por lo tanto, si conocemos la función característica podemos obtener los momentos de la distribución

$$\langle X^n \rangle = \lim_{k \rightarrow 0} (-i)^n \frac{d^n G(k)}{d k^n}. \quad (1.11)$$

Por otro lado, de la ecuación (1.10) se nota que $G(k)$ es la transformada de Fourier de la función $f_X(x)$.

Así, por ejemplo, la función característica para la distribución uniforme con función de densidad $f_X(x) = \frac{1}{a}$ definida en el intervalo $0 \leq x \leq a$ es $G(k) = \frac{e^{iak} - 1}{iak}$; mientras que para la distribución normal con $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ en $-\infty < x < \infty$ le corresponde $G(k) = e^{-\frac{1}{2}k^2}$.

1.1.4. Teorema del Límite Central

Una de las cuestiones que surgen de manera natural cuando se trabaja con variables aleatorias es, qué pasa si ahora se considera una suma de éstas; es preciso saber cómo cambian las propiedades de la distribución de esta suma de variables aleatorias. Para esto, el teorema del límite central ha resultado ser fundamental en la física, pues establece condiciones bajo las cuales la suma de variables aleatorias independientes siguen asintóticamente una distribución normal.

Sean X_1, X_2, \dots, X_r un conjunto de variables aleatorias independientes, cada una con la misma densidad de probabilidad gaussiana, $f_X(x)$ con valor medio cero y varianza σ^2 . La densidad de probabilidad de la suma de ellas $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_r$ es,

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r\sigma^2}} \exp\left[-\frac{y^2}{2r\sigma^2}\right]. \quad (1.12)$$

De esta manera, $\langle Y^2 \rangle = r\sigma^2$ crece linealmente con r . De tal forma que si definimos

$$Z = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_r}{\sqrt{r}}, \quad (1.13)$$

ésta tendrá varianza σ^2 y así,

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right]. \quad (1.14)$$

El teorema del límite central establece que aún cuando la densidad de probabilidad, $f_X(x)$ para cada una de las variables aleatorias X no sean gaussianas, sino otro tipo de distribuciones, con valor medio cero y varianza finita σ^2 , la ecuación (1.14) sigue cumpliéndose en el límite cuando $r \rightarrow \infty$. Para visualizar este resultado, considérese la función característica de una función de densidad $f_X(x)$ arbitraria,

$$G_X(k) = \int_I e^{ikx} f_X(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} \langle X^n \rangle = 1 - \frac{1}{2}\sigma^2 k^2 + \dots \quad (1.15)$$

La función característica para Z es

$$G_Z(k) = \left[G_X\left(\frac{k}{\sqrt{r}}\right) \right]^r = \left[1 - \frac{\sigma^2 k^2}{2r} \right]^r \rightarrow e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 k^2}, \quad (1.16)$$

que corresponde a la distribución dada por la ecuación (1.14) cuando $r \rightarrow \infty$.

1.1.5. Caminante aleatorio

Las caminatas aleatorias constituyen el modelo más elemental de un proceso estocástico [13, 14], que pueden ser construidos mediante la aplicación sucesiva del mismo proceso de transición en intervalos de tiempo discreto, es decir, a intervalos $1, 2, \dots$. En la física aparecen en la mecánica estadística como sumas parciales de cantidades fluctuantes, como en la trayectoria de partículas que sufren colisiones sucesivas. El hecho de asumir intervalos de tiempo discretos e igualmente espaciados puede modificarse postulando que los intervalos de tiempo entre pasos sucesivos de la caminata son, de

hecho, variables aleatorias independientes con densidad de probabilidad dada. En otras palabras, los instantes de tiempo en el que ocurre cada paso son regulados por un proceso estocástico diferente al que obedecen las longitudes de los pasos de la caminata [15].

Considérese X_1, X_2, \dots variables aleatorias independientes con la misma densidad de probabilidad f ; la caminata aleatoria inducida S_n es la secuencia de variables aleatorias,

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n \quad \text{con} \quad S_0 = 0. \quad (1.17)$$

Las caminatas aleatorias introducen dos tipos de comportamientos emergentes [16]. El primero es que una caminata aleatoria después de un gran número de pasos es fractal o invariante de escala. El segundo comportamiento es que el punto final de una caminata aleatoria tiene una distribución de probabilidad que satisface a la ecuación de difusión. Ambos comportamientos son independientes, más aún universales, es decir, no dependen de los detalles microscópicos de la caminata.

En el límite continuo, la ecuación que describe la evolución temporal de un ensamble de caminatas aleatorias en una dimensión, que a tiempos largos presenta un comportamiento simple, está dada por

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D \nabla^2 f = D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}. \quad (1.18)$$

La ecuación de difusión, describe la evolución temporal de la densidad de probabilidad de una partícula mientras se mueve aleatoriamente en el espacio. Si un conjunto de partículas no interactúan, la distribución de probabilidad de una partícula describe también el comportamiento de todas las demás partículas.

Considérese un ejemplo específico, un caminante aleatorio en un retículo, en una dimensión; sea Δ la separación entre los elementos del retículo y τ el tiempo entre cada paso. Sea $P(n\Delta, s\tau)$ la probabilidad de encontrar a la partícula en $x = n\Delta$ después de s pasos; supóngase también que la probabilidad de ir a la izquierda es igual a la probabilidad de ir a la derecha, entonces, se tiene

$$P(n\Delta, (s+1)\tau) = \frac{1}{2}P((n+1)\Delta, s\tau) + \frac{1}{2}P((n-1)\Delta, s\tau). \quad (1.19)$$

Restando $P(n\Delta, s\tau)$ en ambos lados de la ecuación anterior y dividiendo por τ , se encuentra que

$$\begin{aligned} & \frac{P(n\Delta, (s+1)\tau) - P(n\Delta, s\tau)}{\tau} \\ &= \frac{\Delta^2}{2\tau} \left[\frac{P((n+1)\Delta, s\tau) + P((n-1)\Delta, s\tau) - 2P(n\Delta, s\tau)}{\Delta^2} \right]. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Haciendo $x = n\Delta$, $t = s\tau$ y tomando el límite cuando $\Delta \rightarrow 0$ y $\tau \rightarrow 0$, pero de tal forma que $D = \frac{\Delta^2}{2\tau}$ permanezca finita, se llega a la siguiente ecuación

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2}, \quad (1.21)$$

que es precisamente la ecuación de difusión para $P(x, t)$.

La ecuación de difusión se aplica a todas las caminatas aleatorias, siempre y cuando la distribución de probabilidad sea amplia y varíe lentamente comparado con el tamaño de los pasos y el tiempo transcurrido entre cada paso [16].

Muchos otros sistemas pueden modelarse con caminatas aleatorias, por ejemplo, las bacterias en busca de alimento realizan caminatas aleatorias sesgadas [17, 18]. Las caminatas aleatorias con pasos muy largos, aunque poco frecuentes, conllevan a otra clase de universalidad, conocidos como *vuelos de Lévy* [13], los cuales no son descritos mediante la ecuación de difusión, ni tampoco obedecen el teorema del límite central (ya que no cumplen con las hipótesis del teorema, pues su segundo momento diverge).

1.1.6. Movimiento browniano

En 1827 el botánico inglés Robert Brown se dio cuenta de que pequeñas partículas suspendidas en un fluido llevan a cabo movimientos particularmente erráticos. A este fenómeno, que también es observado en gases, se le conoce como movimiento browniano. En 1900 Louis Bachelier, un matemático francés, presenta su tesis titulada *teoría de la especulación* [19], donde discute el uso del movimiento browniano para evaluar las opciones financieras. Posteriormente, Einstein retoma la teoría del movimiento browniano, que hasta ese entonces tenía sólo una descripción cualitativa, cuando buscaba confirmar la naturaleza atómica de la materia [20].

El movimiento browniano no es más que una caminata aleatoria donde la longitud

de los pasos es pequeña y el tiempo entre cada paso es tan corto que podemos considerarlo como un movimiento continuo. Es importante ya que proporciona evidencia, en la escala macroscópica, sobre la naturaleza atómica (discreta) de la materia a escala microscópica. La naturaleza discreta de la materia provoca fluctuaciones en la densidad de materia, mismas que a su vez inducen efectos observables en el movimiento de la partícula browniana.

Considérese que sumergimos una partícula de polen, por ejemplo, en agua; considerando que el fluido está constituido por partículas mucho más pequeñas que la partícula de polen, cuando ésta se observa por el microscopio pareciera que se encuentra en un estado de agitación, experimentando movimientos rápidos y aleatorios, debido a los choques con las diminutas partículas que componen al fluido. Consecuentemente, la velocidad de la partícula de polen varía, debido a que lleva a cabo un gran número de saltos pequeños y no correlacionados.

Einstein consideró el caso de una partícula libre, es decir, una partícula sobre la cual las únicas fuerzas que actuaban eran ejercidas por las moléculas del fluido en el que estaba inmersa. Los resultados que obtuvo pueden resumirse de la siguiente manera.

Supóngase el movimiento de la partícula sobre el eje x ; lo que se quiere es la probabilidad de que al tiempo t la partícula esté entre x_1 y x_2 dado que a $t = 0$ estaba en x_0 , esto es,

$$P(x_1 \leq x \leq x_2, t) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, t | x_0, 0) dx,$$

Einstein demostró que la densidad de probabilidad $f(x, t | x_0, 0)$ debe satisfacer

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \tag{1.22}$$

donde D es una constante física. Las condiciones impuestas sobre f son

$$f \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t | x_0, 0) dx = 1 \tag{1.23}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(x, t | x_0, 0) = 0,$$

en la ecuación anterior se excluye el caso $x = x_0$, ya que a $t = 0$ la partícula está en x_0 .

Para resolver la ecuación (1.22) en el caso en que $f(x, 0) = \delta(x)$, aplicando la transformada de Fourier a $f(x, t)$, que está dada por

$$G(k, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) e^{ikx} dx, \quad (1.24)$$

la ecuación (1.22) toma la forma

$$\frac{\partial G(k, t)}{\partial t} = -Dk^2 G(k, t), \quad (1.25)$$

cuya solución está dada por

$$G(k, t) = e^{-Dk^2 t}, \quad (1.26)$$

donde se ha usado el hecho de que $G(k, 0) = 1$ ya que $f(x, 0) = \delta(x)$. Si ahora aplicamos la transformada inversa de Fourier a la ecuación (1.26), resulta

$$f(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-Dk^2 t} e^{-ikx} dx, = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left[-\frac{x^2}{4Dt}\right]. \quad (1.27)$$

Luego entonces, se puede identificar a la función $f(x, t)$ con una gaussiana con valor medio $\langle x(t) \rangle = 0$ y varianza $\sigma^2 = 2Dt$.

La gran contribución de Einstein no sólo fue que derivó las ecuaciones (1.22) y (1.27), sino que obtuvo una relación entre el coeficiente de difusión macroscópico, D y las propiedades atómicas de la materia. Esta relación es la siguiente $D = RT/N_A 6\pi\eta a$, donde R es la constante universal de los gases, N_A es el número de Avogadro, T es la temperatura en kelvin, η es la viscosidad y a es el radio de la partícula browniana. De la expresión para D , es posible determinar el número de Avogadro con experimentos de movimiento browniano [21].

Cuando consideramos un movimiento browniano inmerso en algún potencial externo, podemos escribir la ecuación de movimiento para la partícula browniana donde se incluya la fuerza de fricción (que es proporcional a la velocidad) y una fuerza aleato-

ria que simule el movimiento errático de la partícula; esto da paso a la ecuación de movimiento de Langevin para la partícula browniana. Dada la ecuación de Langevin para el movimiento browniano, puede determinarse una expresión para la evolución temporal de la densidad de probabilidad en el espacio fase de la partícula browniana, conocida como la ecuación de Fokker-Planck [22].

Cuando se estudian agentes móviles hay varias cantidades capaces de caracterizar el movimiento de forma muy general. En las siguientes secciones se revisarán algunas cantidades de interés.

1.1.7. Tiempo medio de primer paso

En algunas ocasiones nos preguntamos cuánto tiempo le toma a una variable aleatoria alcanzar cierto valor; ésta es una pregunta importante en problemas de búsqueda aleatoria y en general de movilidad de agentes. Considerando una caminata aleatoria, el tiempo medio de primer paso es el tiempo promedio que le toma al caminante llegar a algún sitio dado, digamos R , por primera vez.

Supóngase que un caminante empieza en el sitio A , a $t = 0$, y queremos saber cuánto tiempo (pasos) le toma al caminante llegar a un nuevo sitio R por primera vez. Desde luego este tiempo de primer paso será diferente para distintas realizaciones y de ahí que también sea una variable aleatoria. Nuestro propósito será encontrar su distribución de probabilidad y, en particular, encontrar el valor esperado del tiempo de primer paso.

Supóngase que $A < R$. Para algún sitio $m < R$ sea $q_m(t)$ la probabilidad de que al tiempo t el caminante que partió de A esté ahora en m , sin haber pasado por R . Entonces $q_m(t)$ puede verse como la densidad de un ensamble de caminantes, todos comenzando en A al tiempo $t = 0$ y moviéndose independientemente. Asumiendo que $q_R(t) = 0 \forall t$; así, en el instante en que alguno de los caminantes pase por R , deja de contribuir a la densidad, es decir, no regresa a la caminata. De esta manera, R actúa como una frontera absorbente y podemos escribir

$$\begin{aligned} \dot{q}_m &= q_{m+1} + q_{m-1} - 2q_m & (m < R - 1) \\ \dot{q}_{R-1} &= q_{R-2} - 2q_{R-1}. \end{aligned} \tag{1.28}$$

Las ecuaciones anteriores pueden considerarse como una caminata aleatoria en $-\infty < m < \infty$ en la cual la transición de R a $R - 1$ es imposible. Nótese que, en este caso, la

probabilidad no se conserva

$$\frac{d}{dt} \sum_{-\infty}^{R-1} q_m(t) = -q_{R-1}, \quad (1.29)$$

la ecuación anterior nos dice que el número total de caminantes restantes en cada unidad de tiempo va disminuyendo.

Adicionalmente podemos postular un estado adicional q_* que llamaremos el estado limbo, que es el estado en el que están los caminantes que han pasado por el sitio R . La probabilidad de estar en este estado es, por definición,

$$q_* = 1 - \sum_{-\infty}^{R-1} q_m(t),$$

y de acuerdo a la ecuación (1.29) debe cumplir que $\dot{q}_* = q_{R-1}$.

Para resolver la ecuación (1.28), tomamos como condición inicial $q_m(0) = \delta_{m,A}$. Una vez resueltas, la probabilidad de que los caminantes aún no hayan pasado por R es

$$\sum_{-\infty}^{R-1} q_m(t) = 1 - q_*. \quad (1.30)$$

Sea $f_{R,A}(t) dt$ la probabilidad de que el caminante llegue a R por primera vez en un tiempo entre t y $t + dt$ dado que a $t = 0$ estaba en A ; entonces

$$f_{R,A}(t) = -\frac{d}{dt} \sum_{-\infty}^{R-1} q_m(t) = q_{R-1}(t), \quad (1.31)$$

luego entonces

$$f_{R,A}(t) = -\sum_{-\infty}^{R-1} \dot{q}_m(t) = g_{R-1} q_{R-1}(t), \quad (1.32)$$

donde g_{R-1} es la probabilidad de que estando en $R - 1$ se dé un salto a R . Así, la probabilidad de llegar a R en lugar de seguir hasta $-\infty$ es

$$\pi_{R,A} = \int_0^\infty f_{R,A}(t) dt = 1 - \sum_{-\infty}^{R-1} q_m(-\infty). \quad (1.33)$$

Si $\pi_{R,A} = 1$, entonces $f_{R,A}(t)$ es la densidad de probabilidad para el tiempo de primer paso a R ; en ese caso, el valor esperado del tiempo de primer paso, de un caminante que parte de A a $t = 0$ y que llegue a R , es

$$\tau_{R,A} = \int_0^\infty t f_{R,A}(t) dt = \sum_{-\infty}^{R-1} \int_0^\infty q_m(t) dt. \quad (1.34)$$

1.1.8. Desplazamiento cuadrático medio

En un movimiento aleatorio la medida espacial más común es el desplazamiento cuadrático medio. Esta cantidad proporciona en cierto modo una medida de qué tanto espacio ha explorado el caminante.

Para tener una noción de la distancia que recorre el caminante en cada instante de tiempo, se toma el cuadrado de las distancias de un ensamble de caminantes que parten de mismo lugar, y se calcula el promedio. A este promedio lo denotamos por $\langle X^2(t) \rangle$ y se le conoce como el desplazamiento cuadrático medio,

$$\langle X^2(t) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}(0))^2, \quad (1.35)$$

donde $\mathbf{r}(0)$ es la posición del caminante al tiempo $t = 0$, $\mathbf{r}_i(t)$ es la posición del i -ésimo caminante al tiempo t y N es el número de trayectorias independientes o de caminantes.

También es posible calcular el desplazamiento cuadrático medio de una sola trayectoria, calculando el desplazamiento en diferentes segmentos y promediando todas las distancias recorridas en cada tamaño de segmento. Lo anterior se realiza para diferentes tamaños de segmentos. La manera de calcularlo es la siguiente:

$$\langle X^2(t) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{\tau=1}^N [\mathbf{r}(\tau + t) - \mathbf{r}(\tau)]^2. \quad (1.36)$$

1.1.9. Distribución de Lévy

Hasta ahora se han precisado algunas de las distribuciones más comunes en la física; en esta sección se abordará otro tipo de distribución que ha generado gran interés. Se trata de la distribución de Lévy que se caracteriza por tener varianza infinita. La función característica para esta distribución es de la forma

$$G(k) = e^{-c|k|^\alpha}, \quad (1.37)$$

donde $0 < \alpha < 2$.

Es de resaltar que sólo se pueden obtener expresiones analíticas de la densidad de probabilidad de tipo Lévy para algunos casos. Por ejemplo, la función de distribución de Cauchy, que es un caso especial de la distribución de tipo Lévy, está dada por [22]

$$F_X(x) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \tan^{-1} \left(\frac{x-b}{a} \right) \right], \quad (1.38)$$

donde $a > 0$ y b son constantes finitas. De aquí, la densidad de probabilidad para la variable aleatoria X está dada por

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + (x-b)^2}, \quad (1.39)$$

y la función característica es

$$G(k) = e^{-ikb - |k|a}. \quad (1.40)$$

De las ecuaciones anteriores, se puede calcular el primer momento de la distribución de Cauchy, $\langle X \rangle = b$, pero la varianza es infinita.

Otro proceso que está gobernado por la distribución de Lévy es la caminata aleatoria de Weierstrass en el límite continuo. Sobre este proceso se discutirá más adelante.

Parte I

Antecedentes

Capítulo 2

Dinámica de la movilidad de agentes

En épocas recientes se ha señalado que el comportamiento complejo y presumiblemente aleatorio de diversos sistemas puede estar gobernado por ecuaciones no lineales deterministas [23]. A tal comportamiento complejo y determinista se le denominó caótico.

Con el estudio de la dinámica no lineal, la física estadística ha encontrado el reto de caracterizar, predecir y controlar la evolución de procesos no lineales y complejos tanto en el espacio como en el tiempo. Este estudio se ha concentrado en sistemas hamiltonianos, es decir, aquellos que conservan la energía [24].

El comportamiento estadístico visible surge posiblemente de la naturaleza intrincada, jerárquica y fractal de las trayectorias de los sistemas dinámicos no lineales, junto con la extrema sensibilidad de las soluciones a las condiciones iniciales [23].

A su vez se ha encontrado que, en sistemas hamiltonianos con términos simples no lineales se pueden inducir movimientos fractales con propiedades estadísticas que no son estándares, es decir, caóticos [25].

Uno de los principales objetivos de los estudios que se han realizado en el área es la descripción de la dinámica caótica, lo que permite un vistazo a la naturaleza de los procesos aleatorios asociados, principalmente caminatas aleatorias, y su relación con la teoría de sistemas dinámicos [26].

2.1. Distribución de Lévy en la dinámica caótica

Las órbitas reales en el espacio fase de sistemas dinámicos deterministas siempre son predecibles, teóricamente, dado que representan las soluciones de sistemas simples de ecuaciones como las de Newton; sin embargo, en el caso del caos dinámico esas órbitas son altamente inestables. Generalmente en el movimiento caótico, la distancia entre órbitas inicialmente cercanas crece exponencialmente con el tiempo como

$$d(t) = d(0) e^{\lambda t}, \quad (2.1)$$

donde a λ se le conoce como el exponente de Lyapunov. Esta relación es válida para tiempos suficientemente largos.

Las inestabilidades locales descritas por la ecuación (2.1) conducen a un rápido mezclado de las órbitas dentro de un intervalo de tiempo $\tau_\lambda = 1/\lambda$.

La estadística gaussiana para la difusión en el espacio y la poissoniana para mediciones temporales, bajo ciertas condiciones pueden dar una descripción válida, aunque aproximada, de la aparente aleatoriedad de las órbitas caóticas. El caos hamiltoniano puede ser bien descrito por la estadística de Lévy [23].

La estadística de Lévy describe procesos fractales que aparecen tanto en el espacio como en el tiempo, y que yacen en procesos complejos tales como la difusión turbulenta, la difusión de fase caótica en las uniones de Josephson y en la relajación lenta en materiales vítreos [23].

Los procesos aleatorios que presentan invariancia de escala, es decir, procesos que tienen muchas escalas pero ninguna de ellas domina o caracteriza el proceso, pueden explicarse mediante la estadística de Lévy. Geométricamente implica que una trayectoria tendrá propiedades fractales, es decir, será semejante vista en diferentes escalas.

Un ejemplo de los procesos aleatorios con invariancia de escala es una caminata aleatoria con longitud cuadrática media de salto infinita $\langle R^2 \rangle = \infty$.

Anteriormente se había visto que una caminata aleatoria puede verse como la suma de variables aleatorias con segundo momento finito; en el caso de una caminata aleatoria invariante de escala, es equivalente a la suma de variables aleatorias con segundo momento infinito.

Paul Lévy estudió procesos (caminatas) aleatorios con segundo momento infinito

($\langle R^2 \rangle = \infty$) [27], aunque no encontró aplicación física debido a que se requerían relaciones dependientes del tiempo, tales como

$$\langle R^2(t) \rangle \sim t^\gamma, \quad (2.2)$$

donde t es el tiempo y γ una constante. Para relacionarlo con procesos físicos se debe tomar en cuenta el tiempo requerido para completar un paso de la caminata aleatoria [28].

La difusión anómala en los sistemas hamiltonianos caóticos caen fuera del dominio del movimiento browniano, y su naturaleza estadística se refleja en el valor de γ entre uno y dos. Para $\gamma = 1$, corresponde al movimiento browniano y cuando $\gamma = 2$, se trata de un movimiento balístico. Aunque hay otros procesos con valores de γ diferentes, como en la difusión turbulenta en un sistema abierto que se caracteriza por un valor de $\gamma = 3$.

Tanto las caminatas de Lévy como los vuelos de Lévy son procesos aleatorios cuyas órbitas, en el espacio fase, poseen propiedades fractales [29, 30].

Con el estudio de la difusión se pueden visualizar y extender los conceptos previamente estudiados..

2.2. Difusión normal

En 1905 Karl Pearson publicó un trabajo sobre “el problema de las caminatas aleatorias”, donde proponía lo siguiente: “Un hombre parte de un punto O y camina l_1 metros en línea recta; después gira cierto ángulo y camina l_2 metros en línea recta. Este proceso se repite n -veces. ¿Cuál es la probabilidad de que después de n repeticiones él esté a una distancia entre r y $r + \delta r$ del punto de partida O?” [31]

Pearson estaba interesado en cómo los mosquitos distribuían la malaria; posteriormente, demostró que este proceso queda descrito por la ecuación de difusión. Es decir, el desplazamiento de un mosquito de su posición inicial es proporcional a la raíz cuadrada del tiempo transcurrido, y que la distribución de la posición de muchos caminantes aleatorios que parten del mismo punto es gaussiana.

En realidad, la primera persona en tratar con el problema de la difusión fue el fisiólogo Alemán Adolf Fick, quién estaba interesado en la forma en que los nutrientes

viajan a través de las membranas en los organismos. En 1855 Fick publicó su famosa ecuación de difusión, que puede escribirse como

$$\frac{\partial P}{\partial t} = D \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}, \quad (2.3)$$

donde P es la probabilidad de encontrar un objeto en la posición x al tiempo t y D es el coeficiente de difusión que en este caso se considera constante.

Fick demostró que el desplazamiento cuadrático medio de un objeto sometido a difusión normal es $2Dt$. Sin embargo, sus argumentos fueron puramente fenomenológicos y en analogía con la ecuación de calor de Fourier; fue Einstein quién derivó la ecuación de difusión de principios microscópicos como parte de su trabajo sobre el movimiento browniano [20], lo que permitió a Jean Perrin y otros probar la existencia de los átomos [21].

Posteriormente a mediados de los 70, varios investigadores empezaron a estudiar las situaciones en las que los supuestos de Einstein y Pearson no eran válidos, tales estudios culminaron en lo que ahora se conoce como difusión anómala.

2.3. Difusión anómala

Actualmente varios procesos pueden ser descritos mediante la difusión anómala [32]; desde las señales de células biológicas [33] al movimiento de forrajeo de algunos animales [4]. Parece ser que el movimiento de algunos individuos queda mejor descrito por pasos que no son independientes y donde el tiempo transcurrido de un paso a otro pueden tomar una amplia gama de valores.

La mejor manera de estudiar desviaciones de la difusión gaussiana o normal es graficar las distribuciones de la trayectoria libre de una partícula y el tiempo que le toma recorrerla. Si el ancho de la distribución es estrecho, entonces la mayoría de los valores están concentrados alrededor del valor medio; si es muy amplio entonces el valor medio no representa el comportamiento típico de la mayoría. Un ejemplo de esto último es la distribución de la riqueza en el mundo, como lo notó por primera vez el economista italiano Vilfredo Pareto [34]. La distancia entre la pobreza extrema y la riqueza es tan amplia que la media de la distribución de Pareto carece de significado.

Considérese una función de densidad que sigue una ley de potencias de la forma

$$f_X(x) = C x^{-\alpha}, \quad (2.4)$$

donde C es una constante. Como la función de distribución, $F_X(x)$ es la integral de la función de densidad (ec. 1.4), entonces también sigue una ley de potencias,

$$F_X(x) = \frac{C}{\alpha - 1} x^{-(\alpha-1)}. \quad (2.5)$$

A las distribuciones que sigue una ley de potencias se les conoce como *distribución de Pareto* [35].

La distribución de Pareto también aparece en física; el 1920 el matemático francés Paul Lévy estudió una familia de distribuciones ahora conocidas como distribuciones de Pareto-Lévy, que surgen cuando se suman muchas cantidades independientes y aleatorias, pero que cada una tiene segundo momento infinito [27].

Ahora surge la pregunta ¿cómo es que todo esto afecta a la ecuación de difusión simple? La respuesta es que en la ecuación de Fick (2.3) tenemos que cambiar las derivadas normales por derivadas fraccionarias [36]. Ésto, al igual que la distribución de Pareto, sólo ha tenido cabida recientemente debido a las observaciones de difusión anómala.

Un ejemplo de uso de las derivadas fraccionarias se encuentra en los procesos que ocurren en las fotocopiadoras [37] que no pueden ser descritas por la ecuación de difusión simple, pues los portadores de carga se difunde más lentamente; a este tipo de difusión anómala de le llama *subdifusión*.

2.3.1. Subdifusión

La manera más común para caracterizar la subdifusión se hace mediante el desplazamiento cuadrático medio, cuando $\langle X^2(t) \rangle \sim t^\gamma$, donde $\gamma < 1$.

Recientemente se han encontrado ejemplos de procesos de subdifusión. Por ejemplo, en [7] mostraron que, como resultado del atrapamiento, el tiempo de viaje de los contaminantes de las aguas subterráneas es mucho más largo de lo que se esperaría en la difusión normal.

De igual manera en [38] formularon una teoría que toma en cuenta los tiempos extremadamente largos de retención de los contaminantes y que distingue entre la

difusión anómala y la normal. En particular investigaron la influencia, en la memoria del sistema, de los patrones contaminantes sobre largos periodos de tiempo, concluyendo que la ecuación de difusión estándar debe reemplazarse por una versión con derivadas fraccionarias.

En biología también hay muchos fenómenos de subdifusión como la manera en la que se difunden las proteínas [8, 17].

2.3.2. Superdifusión

La superdifusión se caracteriza porque el desplazamiento cuadrático medio de un caminante va como $\langle X^2(t) \rangle \sim t^\gamma$, donde $\gamma > 1$.

Los ejemplos anteriores sobre difusión anómala han sido de caminatas aleatorias donde los caminantes cambian su dirección en cada paso. Si ahora consideramos la posibilidad de que el caminante aleatorio siga en movimiento sin cambiar de dirección por largo tiempo, se encuentra que la distribución de las longitudes de paso, así como la distribución de los tiempo de espera entre cada paso, son muy amplias y, de hecho, son de tipo Lévy. A tal caminata de Lévy corresponde un proceso en el que el desplazamiento cuadrático medio crece más rápido del que lo haría en la difusión normal. Es por eso que a ese proceso se le conoce como superdifusivo.

Se han reportado observaciones sobre el movimiento de algunos animales que presentan superdifusión, por ejemplo, el vuelo de los albatros puede ser modelado por una caminata de Lévy [2]. Estas aves vuelan aproximadamente a velocidad constante y la amplia distribución de los tiempos entre los cambios de dirección conducen a un patrón de largas líneas rectas ininterrumpidas. Tales trayectorias pueden ser pensadas como una estrategia de búsqueda eficiente que conduce a las aves a nuevas áreas en vez de trayectorias de difusión simple en los cuales, los mismos lugares son visitados muchas veces.

Otro ejemplo aparece en el estudio del movimiento de monos araña en la península de Yucatán, donde se encontró que estos animales llevan a cabo caminatas de tipo Lévy en su búsqueda de alimento [4].

Los patrones de búsqueda de muchos organismos (monos, albatros, chacales, bacterias, etc.) parecen seguir la distribución de Lévy. Mientras la razón de este comportamiento anómalo no es muy claro, se ha demostrado que las caminatas de Lévy superan a las caminatas aleatorias brownianas como estrategia para encontrar objetos

localizados aleatoriamente [4].

La superdifusión también se ha observado en el transporte intracelular [39] y en el flujo turbulento [40].

2.4. Vuelos y caminatas de Lévy

Cuando muchos trataban de corroborar el teorema del límite central bajo las más débiles condiciones posibles, Paul Lévy buscaba excepciones para el teorema [27]. Se preguntó acerca del escalamiento para distribuciones de probabilidad, lo que lo llevó a estudiar variables aleatorias con segundo momento infinito. Un segundo momento finito significaría una escala característica y un comportamiento gaussiano para la densidad de probabilidad. En cambio un segundo momento infinito implica la ausencia de una escala definida. Lévy encontró la clase de funciones de probabilidad que gobiernan la suma de esas variables aleatorias. Éstas describen una caminata aleatoria con desplazamiento cuadrático medio infinito para cada paso, que hoy se conocen como *vuelos de Lévy*. Cada vuelo es parametrizado por un exponente que describe cómo diverge el primer momento infinito.

2.4.1. Vuelos de Lévy

Lévy generalizó la idea del teorema del límite central para tomar en cuenta sumas de variables aleatorias con momentos infinitos, el valor de cada variable puede pensarse como la longitud de un paso en una caminata aleatoria. Los vuelos de Lévy están caracterizados por una función de distribución de la forma [3]

$$F_X(l_j) \sim l_j^{-\mu}, \tag{2.6}$$

con $1 < \mu \leq 3$, donde l_j es la longitud del j -ésimo vuelo. Para $\mu \geq 3$ se recupera el caso gaussiano; mientras que para $\mu \leq 1$ no corresponde a una distribución de probabilidad que pueda ser normalizada.

Lévy se preguntó cuándo la distribución de la suma de n pasos sería la misma que la distribución de cada elemento en la suma; salvo un factor de escala. Nótese que lo anterior es la idea básica de los fractales, ¿cuándo el todo se parece a alguna de sus partes? Una respuesta a esta pregunta es bien conocida: la suma de gaussianas

2. Dinámica de la movilidad de agentes

es una gaussiana. Recordando que la densidad de probabilidad de una gaussiana es $f(x) = (2\pi)^{-1/2} \exp[-x^2/2]$, la densidad de probabilidad de la suma de n variables gaussianas, propiamente escalada por $n^{-1/2} \sum_i X_i$, es $(2\pi n)^{-1/2} \exp[-x^2/2n]$, tal que $f(x)$ y $f_n(x)$ tienen la misma forma, salvo un factor de escala n . En el espacio de Fourier ($x \rightarrow k$), $f_n(x)$ tiene la forma

$$G_n(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} f_n(x) dx = \exp\left[-\frac{nk^2}{2}\right]. \quad (2.7)$$

Luego entonces, el segundo momento de $f_n(x)$ está dado por

$$-\frac{\partial^2 G_n(k=0)}{\partial k^2} = n. \quad (2.8)$$

Lévy descubrió que había otra respuesta a la pregunta, a saber, cuando se tiene la suma de n variables de tipo Lévy, la función característica está dada por

$$G_n(k) = \exp(-cn|k|^\alpha), \quad \text{para } 0 < \alpha \leq 2. \quad (2.9)$$

donde c es una constante. Nótese que cuando $\alpha = 2$ se recupera el caso gaussiano. Para $\alpha < 2$ se tiene que

$$\langle X^2 \rangle = -\frac{\partial^2 G_n(k=0)}{\partial k^2} = \infty, \quad (2.10)$$

A la caminata aleatoria con segundo momento infinito se le conoce como *vuelo de Lévy*. Dado que una distribución de Lévy sigue una ley de potencias, implica que las distribuciones de tipo Lévy son *invariantes de escala*.

Si ahora se aplica la transformada inversa de Fourier a la ecuación (2.9) tenemos

$$f_n(x) \sim \frac{cn}{x^{1+\alpha}}, \quad (2.11)$$

donde la ley de potencias para la cola de la distribución indica la ausencia de una escala característica, esto es, la suma gobernada por la ecuación (2.11) con $\alpha < 2$ es dominada por los términos más grandes y de ahí que haya una probabilidad considerable para grandes valores de desplazamiento.

Otro aspecto importante es que α es la dimensión del conjunto de puntos visitados

en un vuelo de Lévy y como $0 < \alpha < 2$ la dimensión del conjunto es fractal [30].

Para hacer la conexión de un proceso físico con el concepto de los vuelos de Lévy hace falta introducir el tiempo como un parámetro. La forma de considerar al tiempo es proponiendo una distribución de probabilidad para los intervalos de tiempo, independiente de la distribución de la longitud de los pasos.

2.4.2. Caminatas de Lévy

Una distribución no poissoniana es la precursora del concepto de tiempo fractal [23] donde los tiempos de espera entre saltos ocurren en todas las escalas; pero un tiempo de espera con un orden de magnitud más largo es un orden de magnitud menos frecuente. Para tiempos fractales, el promedio de los tiempos de espera $\langle t \rangle$ entre los eventos es infinito, esto no quiere decir que la duración entre cada evento sea infinito así como un segundo momento infinito no quiere decir que la longitud de pasos sean infinitos.

Para conciliar la estadística de Lévy con un proceso físico se debe tomar en cuenta el tiempo para completar cada salto de la caminata aleatoria; a este proceso se le conoce como *caminata de Lévy* [41]. Entonces, nos fijamos en el desplazamiento después de un tiempo t en lugar de n pasos. Aún cuando la distancia promedio de salto sea infinito (un vuelo de Lévy), el desplazamiento promedio después de un tiempo t (caminata de Lévy) estará caracterizado por un incremento dependiente del tiempo, de la forma t^μ . Las caminatas de Lévy son modificaciones de los vuelos de Lévy preservando la invariancia de escala espacial [23]. Para superar la divergencia de $\langle R^2(t) \rangle$ se introduce un costo de tiempo tal que los pasos largos sean penalizados. La formulación de las caminatas de Lévy yace en un enfoque de caminata aleatoria de tiempo continuo. La naturaleza de la caminata está enteramente especificada por su distribución de probabilidad $\psi(\mathbf{r}, t)$ para un paso simple con vector de desplazamiento \mathbf{r} en un tiempo t . Esta densidad de probabilidad tiene las siguientes propiedades

$$\int dr dt \psi(\mathbf{r}, t) = 1, \quad \psi(\mathbf{r}, t) = p(r) \delta\left(t - \frac{|\mathbf{r}|}{v(\mathbf{r})}\right), \quad p(\mathbf{r}) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} |\mathbf{r}|^{-\mu}. \quad (2.12)$$

La segunda propiedad relaciona la longitud del paso con el tiempo, en términos de la velocidad que depende de la longitud del paso ($v(\mathbf{r})$). La clave para evitar la divergencia de las longitudes de paso en los vuelos de Lévy yace en el acoplamiento espacio-tiempo a través de la función delta. La tercera propiedad es responsable de la autosemejanza

de las trayectorias y por esta misma representa un vuelo de Lévy.

De esta manera, para las caminatas de Lévy tendremos que $\langle R^2(t) \rangle \sim t^{-\mu}$, donde μ es finita que bien puede tratarse de un movimiento acelerado, $1 < \mu \leq 3$ [28].

2.4.3. Un ejemplo de los vuelos de Lévy: La caminata de Weierstrass

Considérese una caminata aleatoria en una dimensión. Sea $P(l)$ la probabilidad de un salto con longitud de desplazamiento l en la caminata aleatoria. Se elige [13]

$$P(l) = \frac{n-1}{2n} \sum_{j=0}^{\infty} n^{-j} (\delta_{l,b^j} + \delta_{l,-b^j}), \quad (2.13)$$

con $n > b > 1$, donde $\delta_{i,j}$ es la delta de Kronecker. Pueden ocurrir saltos de cualquier magnitud en base b ($1, b, b^2, \dots$) pero cada desplazamiento sucesivo de orden mayor ocurre con un orden menor de frecuencia en base n . El caminante da alrededor de n pasos de longitud 1 antes de que un paso de longitud b ocurra; alrededor de n cúmulos, separados por una distancia b , se forman antes que ocurra un salto de longitud b^2 ; y así sucesivamente hasta formar una jerarquía de cúmulos dentro de cúmulos. Eventualmente, un conjunto fractal de puntos es visitado. La transformada de Fourier de la ecuación (2.13) es

$$\tilde{P}(k) = \frac{n-1}{n} \sum_{j=0}^{\infty} n^{-j} \cos(b^j k), \quad (2.14)$$

que es el ejemplo de Weierstrass de una función que no es derivable en ningún punto. La autosemejanza de la función de Weierstrass se hace explícita en la siguiente ecuación

$$\tilde{P}(k) = \frac{1}{n} \tilde{P}(bk) + \frac{n-1}{n} \cos(k), \quad (2.15)$$

cuya solución para k pequeño está dada por

$$\tilde{P}(k) \sim \exp(-|k|^\alpha), \quad \alpha = \frac{\ln(n)}{\ln(b)}. \quad (2.16)$$

El exponente α ahora aparece en la forma de una dimensión fractal. Para $\alpha = 2$, resulta un comportamiento gaussiano y para $\alpha < 2$ se sigue que $\langle l^2 \rangle = \infty$, es decir,

2. Dinámica de la movilidad de agentes

se obtienen los vuelos de Lévy. El conjunto de puntos visitados por los vuelos es de dimension fractal α . Para un espacio homogéneo, la dimensión del conjunto de puntos visitados de la caminata aleatoria es 2, es decir, un movimiento browniano cubre un espacio 2-dimensional [26].

Capítulo 3

Modelo de optimización a primer paso

La descripción de la movilidad de los agentes en el medio en el que habitan es todavía una cuestión abierta, debido a la fuerte dependencia del movimiento con la interacción de los otros componentes del sistema en cuestión, por ejemplo, los recursos que motivan al agente a moverse.

Se ha encontrado que los agentes con cierto grado de conocimiento de su entorno ejecutan movimientos de tipo Lévy en la búsqueda de recursos [3, 4, 42, 43]. Ésto se ha observado tanto en el movimiento de forrajeo de animales como el mono araña [4], el albatros [2], entre otros. Por otro lado, también se han observado patrones semejantes en el movimiento de botes de pesca y en el movimiento de difusión de billetes por las ciudades [42].

Cuando un agente tiene pleno conocimiento de su entorno mucho puede decirse de sus capacidades cognitivas. Aunque el movimiento de este tipo de agentes está bien definido, dado que siempre buscan maximizar su beneficio con mínimo desgaste, cuando se mueven en un ambiente desordenado y heterogéneo, la reglas deterministas generan trayectoria erráticas y complejas, susceptibles a ser estudiado como caminatas aleatorias [44].

Si bien las distribuciones en ley de potencias son invariantes de escala, en la práctica, la distribución de frecuencias de las longitudes de los pasos, de los agentes analizados, no son invariantes de escala en el sentido estricto, mejor dicho son de escala múltiple, es decir, la distribución en ley de potencias está truncada, debido a que los sistemas

físicos son finitos y, más aún, la longitud del medio donde se mueven los agentes tienen tamaños específicos.

En trabajos anteriores [44, 45, 46] se ha estudiado un modelo computacional de un caminante determinista, que se mueve en un ambiente heterogéneo en busca de recursos que están contenidos en blancos distribuidos al azar dentro de un dominio dado. Los recursos presentes en cada blanco varían de forma específica. El objetivo del caminante, en cada paso, es capturar la mayor cantidad de recursos y al mismo tiempo recorrer la menor distancia posible. El modelo se basa en hipótesis generales, de tal forma que sea capaz de representar diferentes situaciones.

3.1. Modelo computacional de optimización a primer paso

En las simulaciones computacionales de este capítulo retomaremos el modelo introducido en [47]. En este modelo ¹ se consideran N blancos fijos que están aleatoria y uniformemente distribuidos en un dominio dos dimensional. Cada blanco tiene cierta cantidad de recursos. Para ir de un blanco a otro el agente se fija en cada uno de los blancos disponibles y elige ir al que le de el mayor beneficio, en términos de la cantidad de recursos que contiene, y que al mismo tiempo minimice sus costos, es decir, considera qué tan lejos está de su posición actual. Sin pérdida de generalidad se supone que este dominio es un cuadrado de área unitaria. En cada realización, el agente ejecuta n pasos, tal que el número de blancos visitados es también n .

El i -ésimo blanco, con $i = 1, 2, \dots, N$ contiene cierta cantidad de recursos k_i con $1 \leq k_i \leq k_{max}$. El i -ésimo blanco se considerará muy atractivo si k_i es grande, es decir, cercano a k_{max} , y poco atractivo si k_i es cercano a 1. La existencia de un valor máximo de recursos que puede haber en cada blanco, k_{max} obedece a la necesidad de que el modelo represente situaciones realistas.

La manera en la que se distribuye la cantidad de recursos en cada blanco es muy importante en el modelo; para darle realismo se considera que los recursos están distribuidos como una ley de potencias, mismas que han sido observadas en algunos bosques tropicales [48] así como en la distribución de ciudades [49].

¹El programa se encuentra en: https://github.com/miguelmaya/tesis_maestria

3.1.1. Distribución del tamaño de los blancos

Para construir una distribución en ley de potencias para el tamaño de los blancos, que en el modelo juegan el papel de los recursos disponibles en cada blanco, se utilizó la función Z de Riemann.

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad (3.1)$$

donde en general $s \in \mathbb{C}$ y $Re\{s\} > 1$.

Nos interesa la función Z de Riemann para el caso en el que $s \in \mathbb{N}$ para generar números enteros distribuidos como una ley de potencias a partir de números aleatorios uniformemente distribuidos en el intervalo $[0, 1)$.

Para generar la distribución deseada, consideramos la sucesión:

$$\left\{ \frac{1}{c}(1), \frac{1}{c} \left(1 + \frac{1}{2^\beta}\right), \frac{1}{c} \left(1 + \frac{1}{2^\beta} + \frac{1}{3^\beta}\right), \dots, \frac{1}{c} \left(\sum_{n=1}^{k_{\max}} \frac{1}{n^\beta}\right) \right\} \quad (3.2)$$

donde $c = \sum_{n=1}^{k_{\max}} \frac{1}{n^\beta}$ es la constante de normalización y β es un parámetro.

Entonces, se genera un número aleatorio r uniformemente distribuido en $[0, 1)$; si $r \in (0, \frac{1}{c}(1))$ hacemos $R = 1$ (en este caso denotaremos como R a cada número con la nueva distribución); si $r \in (\frac{1}{c}(1), \frac{1}{c}(1 + \frac{1}{2^\beta}))$, haremos $R = 2$ así sucesivamente, tal que si $r \in (\frac{1}{c} \sum_{n=1}^{M-1} \frac{1}{n^\beta}, \frac{1}{c} \sum_{n=1}^M \frac{1}{n^\beta})$ haremos $R = M$. Se generan tantos números aleatorios como blancos haya en el dominio.

Dado que r está distribuido uniformemente, tendremos que habrá muchos valores de $R = 1$, poco menos para $R = 2$ y así sucesivamente, tal que el resultado final es una colección de números enteros distribuidos como una ley de potencias negativa.

Así pues, se tiene que la distribución del tamaño de los recursos, contenidos en los blancos, está dada como una ley de potencias de la forma,

$$p(k) = Ck^{-\beta}, \quad \text{con} \quad k = 1, 2, \dots, k_{\max} \quad (3.3)$$

donde C es la constante de normalización y sólo se considerarán valores para $\beta > 1$.

Otra cantidad importante en el modelo es la relación entre el número de blancos

presentes y el tamaño del dominio donde se realiza el movimiento. Más adelante se analizará cómo afectan las variables al comportamiento del modelo.

3.1.2. Distancia característica de un sistema

Cuando se tienen N objetos distribuidos en un área determinada, nos gustaría conocer cuál es la distancia promedio entre vecinos más cercanos.

En nuestro caso tenemos N puntos, que juegan el papel de los blancos, distribuidos uniformemente en un cuadrado unitario. Nos gustaría conocer la distancia típica al vecino más cercano.

Si consideramos la región de Voronoi [50] y dado que los N blancos están uniformemente distribuidos en el área unitaria ($A = 1$), esperamos que cada celda de Voronoi sea un cuadrado de lado l . Por lo tanto, el área de cada celda de Voronoi, $a = l^2$ estará dada por

$$l^2 = \frac{A}{N} = \frac{1}{N} \quad (3.4)$$

de la ecuación anterior se sigue que la distancia promedio entre dos blancos es $l = \frac{1}{\sqrt{N}}$.

Por otro lado, se realizaron simulaciones computacionales para determinar la distancia mínima promedio de separación entre dos blancos. Para esto nos situamos en el k -ésimo punto y nos fijamos en la distancia a la que está cada uno de los $N - 1$ puntos restantes, y nos quedamos con la mínima de esas distancias (d_k); de tal manera que al hacerlo para todos los puntos tendremos un total de N distancias mínimas, y al promediarlas obtendremos la distancia mínima promedio al vecino más cercano. Lo anterior se realizó para diferentes valores de N desde, 3000 hasta 50000. Haciendo un ajuste a los puntos, se encontró que la distancia mínima promedio \bar{d} está dada por

$$\bar{d} = \frac{1}{2\sqrt{N}} \quad (3.5)$$

En la figura 3.1 se presenta el resultado de las simulaciones; cada punto es el promedio de un ensamble de 20.

Por conveniencia tomaremos como la distancia característica del sistema, l_0 a la cantidad

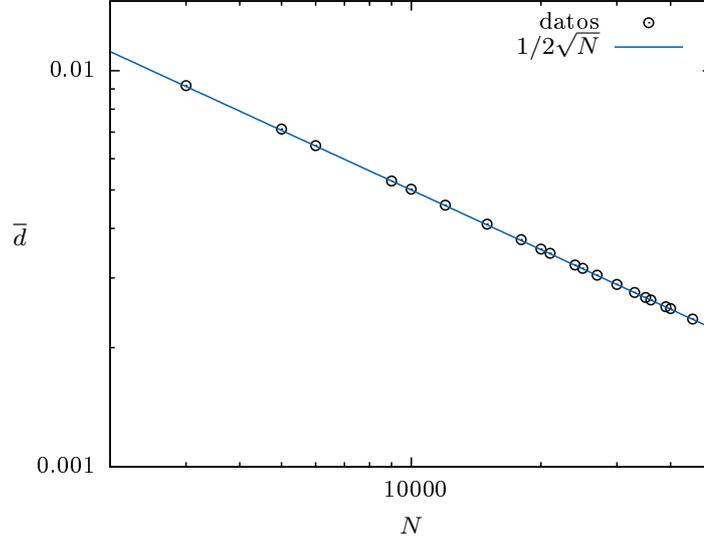


Figura 3.1: La distancia mínima promedio de separación entre dos blancos, \bar{d} .

$$l_0 = 2\bar{d} = \frac{1}{\sqrt{N}}. \quad (3.6)$$

La distancia característica es una cantidad útil para establecer una escala al sistema, por ejemplo, en algoritmos de forrajeo la distancia recorrida entre un objetivo y otro dividido por la distancia característica, l_0 nos da una medida del tiempo que le toma ir de un punto a otro al animal forrajero, suponiendo que en una unidad de tiempo recorre l_0 .

3.1.3. Reglas de movimiento

Una vez establecido el tamaño o atractivo de los blancos, se coloca a un agente en el centro del dominio, y suponiendo que en cada unidad de tiempo el caminante da un paso de un blanco a otro, la regla que sigue el caminante en cada iteración ($t \rightarrow t + 1$) es la siguiente:

- El caminante localizado en el i -ésimo blanco se moverá al j -ésimo tal que una función de costos $E^{(1)}$ sea mínima entre todos los $j \neq i$ blancos posibles. Con

$$E^{(1)} = \frac{l_{ij}}{k_j}, \quad (3.7)$$

Donde k_j es el tamaño del blanco j y l_{ij} la distancia entre el blanco i y el j .

- El agente no se mueve a blancos previamente visitados.

Con lo anterior, el agente visita el objetivo con mayor tamaño que le queda más cerca. La suposición de que el agente no regrese a un blanco previamente visitado corresponde a un movimiento destructivo en el ámbito de movimientos de forrajeo y, en general, tiene que ver con la memoria del agente y nos habla de un proceso no markoviano.

3.1.4. Movimiento del agente

Siguiendo las reglas anteriores, se realizaron simulaciones computacionales independientes en C++ para diferentes valores del parámetro β entre 1.25 y 5.25. La razón de la elección de estos valores será evidenciada más adelante.

En la figura 3.2 se presentan las gráficas de las distribuciones en ley de potencias, de los tamaños de los blancos, generadas mediante la función Z de Riemann con un valor de corte $k_{\max} = 10^3$. Dado que si se presentan los N puntos en la gráfica no se ve exactamente la ley de potencias de la que provienen, lo que se hace usualmente para presentar este tipo de datos es agruparlos en conjuntos, y en su lugar poner sólo un punto representativo. Para los datos con distribución en leyes de potencias, lo que se hace es ir aumentando el tamaño de estos conjuntos de forma logarítmica, y normalizarlos dividiendo el valor de cada punto entre el tamaño del conjunto al que representa. A lo anterior se le conoce como *binning* o agrupamiento logarítmico [51]. En cada caso se utilizó un *binning* logarítmico para presentar los puntos. Además, se realizó un ajuste para corroborar que efectivamente los puntos provenían de una ley de potencias de la forma $p(k) \sim k^{-\beta}$. En algunos casos el exponente ajustado tiene ligeras desviaciones al valor de β correspondiente, esto se debe al generador de números aleatorios y al *binning* logarítmico. De cualquier forma el tamaño de las desviaciones es despreciable.

La variación del exponente en la ecuación (3.3) genera diferencias notables en la distribución del tamaño de los blancos; como se observa en la figura 3.2, para valores de β pequeños ($\beta < 2$) la presencia de blancos con tamaño máximo es abundante en comparación con los casos en los que el valor de β es mayor. Para $\beta > 4$ la gran mayoría de blancos tienen tamaños pequeños. Estas diferencias serán decisivas en el movimiento que surge de la interacción del agente con el medio.

3. Modelo de optimización a primer paso

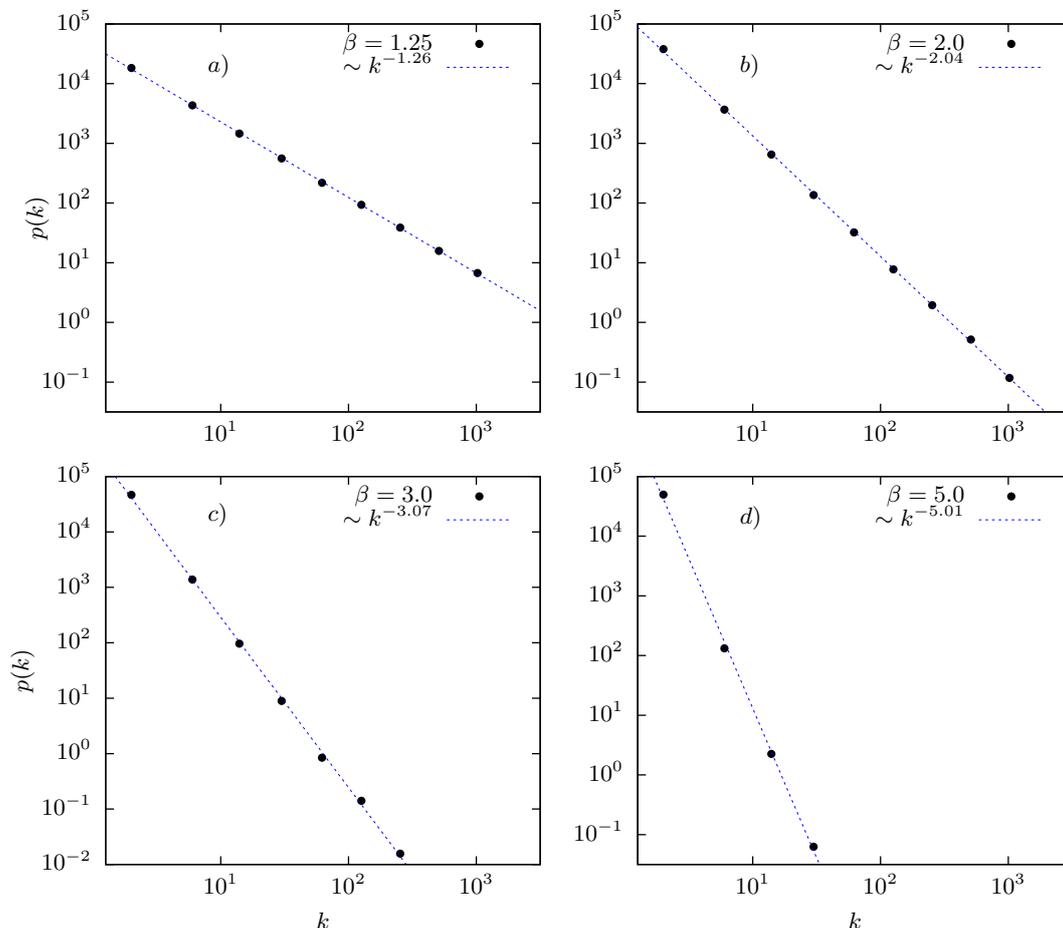


Figura 3.2: Distribución de los tamaños para los blancos en escala logarítmica con sus respectivo ajuste para: a) $\beta = 1.25$, b) $\beta = 2.0$, c) $\beta = 3.0$, d) $\beta = 5.0$. En este caso $N = 10^5$ y $k_{\max} = 10^3$.

Al realizar las simulaciones de un agente que optimiza su movimiento en cada paso se encuentra que, para distintos valores de β se observan comportamientos diferentes en el movimiento. Esto es simplemente la comprobación de los resultados encontrados en [44].

En la figura 3.3 se observan los movimientos generados por el agente para tres valores de β , a saber 1.25, 3.0 y 5.0. En el lado izquierdo se encuentra representado el desplazamiento del agente en los primeros $n = 500$ y a la derecha se encuentra un acercamiento a la región más conveniente para observar de cerca el movimiento.

Nótese que en el caso $\beta = 1.25$ la caminata está dominada por pasos con longitud similares entre ellos y el caminante visita blancos relativamente cercanos entre sí. De-

3. Modelo de optimización a primer paso

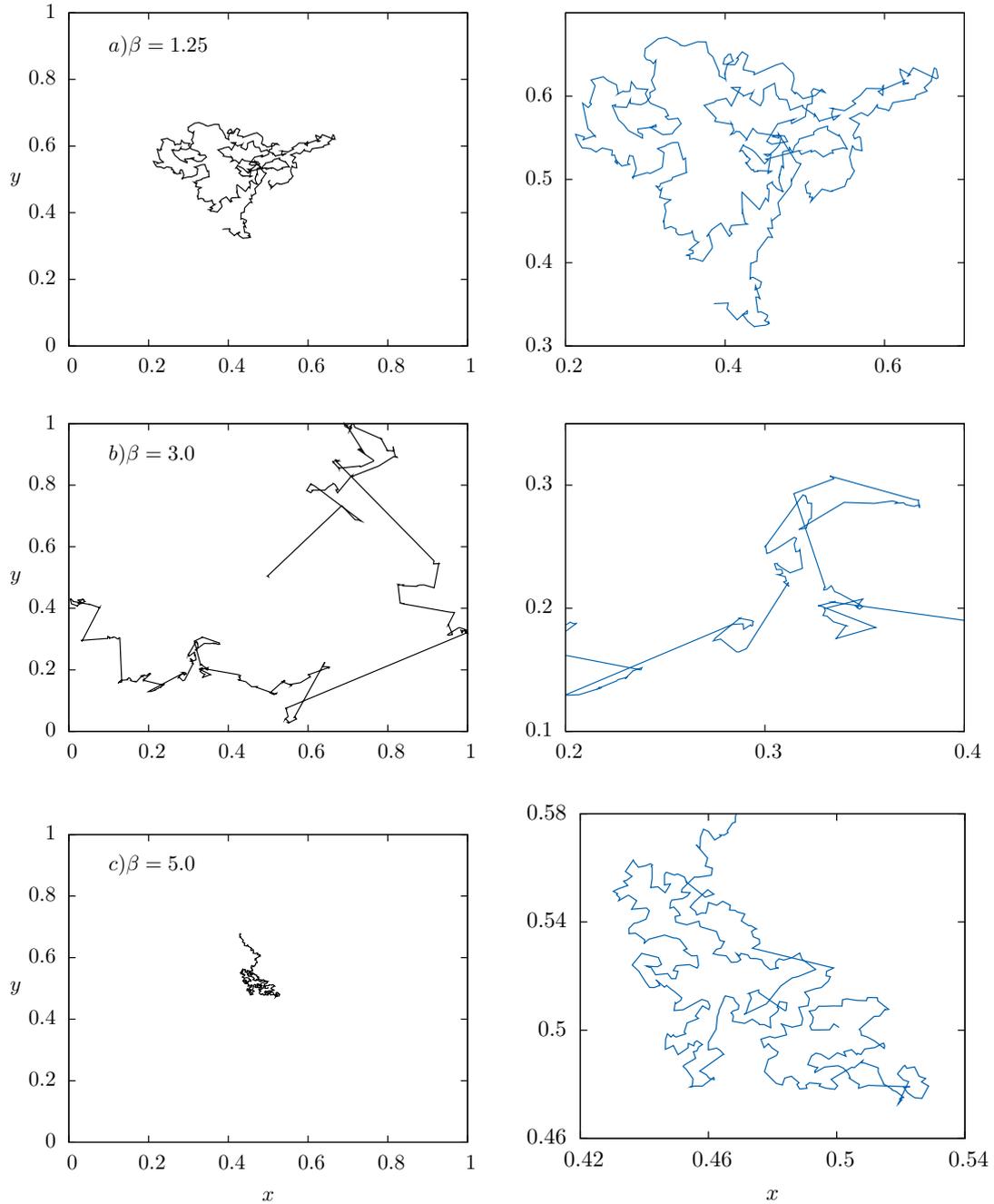


Figura 3.3: Izquierda: Representación de los desplazamientos en el dominio de área unitaria de los primeros 500 pasos. Derecha: Acercamiento a un área de interés de la gráfica izquierda para: a) $\beta = 1.25$, b) $\beta = 3.0$ y c) $\beta = 5.0$. En este caso $N = 10^5$.

bido a que en este régimen los blancos con gran tamaño son abundantes, la separación entre cada uno de ellos es pequeña, de tal manera que el agente puede visitarlos sin tener que recorrer gran distancia.

En cuanto al caso en el que $\beta = 3.0$ la caminata presenta pasos de diversas longitudes, similares a los puntos visitados en un vuelo de Lévy. En los trabajos anteriores, a este régimen le llaman *régimen crítico*, debido a que si bien hay presentes blancos de gran tamaño, éstos son muy escasos y por ende la separación entre ellos es grande. De tal forma que de vez en cuando el agente decide visitar un blanco grande a pesar de la distancia que los separa.

En el caso $\beta = 5.0$, la caminata se da en una región muy pequeña del dominio, los tamaños de los pasos son muy pequeños, comparables con la distancia característica l_0 . En este régimen la mayoría de blancos tienen tamaños pequeños, así que al agente no le conviene viajar distancias grandes, por lo que opta por una búsqueda local entre blancos próximos entre sí.

3.1.5. Estadística del movimiento

Una cantidad importante que proporciona información del movimiento es el *coeficiente de variación*, definido por

$$C_{\text{var}} = \frac{\sigma}{\langle X \rangle}, \quad (3.8)$$

es decir, la desviación estándar entre el promedio de la variable aleatoria X . En estadística ésta es una cantidad de gran utilidad, debido a que permite comparar la fluctuación que existe entre dos mediciones independientes, que pueden ser de una misma o de diferentes variables aleatorias [52]. Resulta muy útil al comparar la dispersión entre varios conjuntos de datos con diferente promedio.

En un conjunto de datos, el coeficiente de variación permite describir la dispersión de una variable independientemente de sus unidades. Entre mayor sea el coeficiente de variación, mayor será la dispersión en los datos de esa variable [53].

En nuestro caso, por simplicidad se utilizará el cuadrado del coeficiente de variación para comparar la dispersión que hay en la longitud de los pasos, que da el agente, al cambiar el valor del parámetro β .

En la figura 3.4 se presenta los resultados de simulaciones computacionales donde

3. Modelo de optimización a primer paso

se calculó el cuadrado del coeficiente de variación, de la longitud de los pasos, para diferentes valores de β . Para cada simulación se distribuyeron $N = 10^5$ blancos y el agente ejecutó $n = 5000$ pasos (con el mismo número de blancos visitados) y $k_{\max} = 10^3$. Cada punto de la gráfica es el promedio de 100 simulaciones independientes.

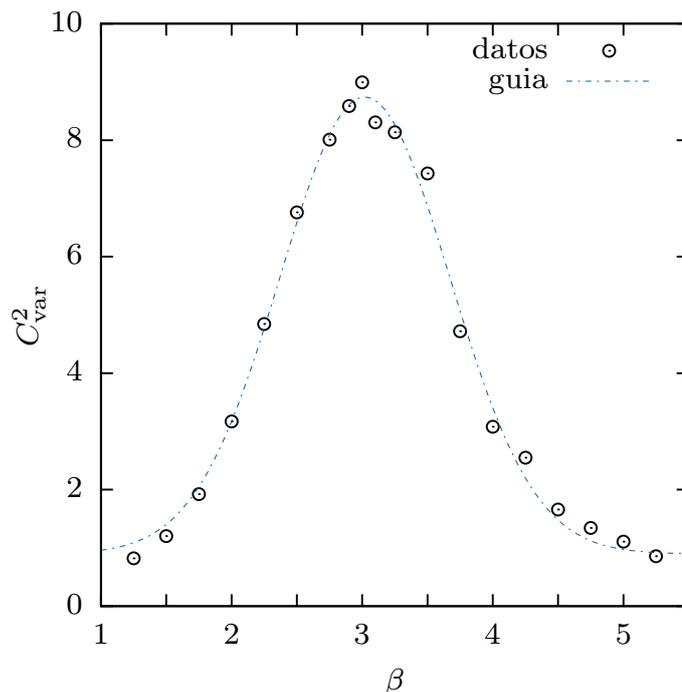


Figura 3.4: El cuadrado del coeficiente de variación de la longitud de los pasos, l para diferentes valores de β . En este caso $N = 10^5$, $n = 5000$ y $k_{\max} = 10^3$. La línea punteada es una guía visual a la tendencia de los datos.

Como se observa en la figura 3.4, para valores de β pequeños ($\beta < 2$), la dispersión es considerablemente menor que cerca del valor crítico $\beta = 3$ y para valores mayores ($\beta > 4$) la dispersión vuelve a caer. Lo anterior nos da una pista de lo que sucede en el modelo cuando $\beta = 3$, ya que se sabe que cuando una variable presenta grandes fluctuaciones, es común encontrar leyes de potencias asociadas a dicha variable [54].

La dispersión que existe en el régimen de $\beta = 3$ se ajusta muy bien al comportamiento observado en la caminata de la figura 3.3 (b), donde se observan una combinación de longitudes de pasos, que van desde algunos muy cortos a otros muy largos, contrario a lo que ocurre en los otros casos, donde las longitudes de los pasos son muy similares.

3.2. Dependencia de los parámetros del modelo

Si bien el modelo computacional presentado ya ha sido estudiado ampliamente [47, 44, 46], cabe hacer algunas observaciones sobre las cantidades que intervienen. Lo anterior para ver cómo afecta el valor numérico de cada uno de los parámetros considerados.

3.2.1. Dependencia del k_{\max}

De la construcción de la distribución para el tamaño de los blancos surge la pregunta de cuál es la repercusión, en el modelo, al poner un tamaño máximo predeterminado, k_{\max} . Como se ha visto anteriormente, para valores de β pequeños, la probabilidad de tener blancos con gran tamaño es alta. Entonces, la existencia de un valor de corte para la ley de potencias debe tener mayor impacto cuando tratamos con valores de β pequeños, y para valores más grandes el efecto debe ser menos perceptible.

Para ver cómo resulta afectada la distribución debido al valor de corte k_{\max} , se considera otra forma de distribuir el tamaño de los blancos como una ley de potencias, sin la restricción de un valor de corte [49].

$$p(k) = k_{\min} (1 - r)^{-\frac{1}{\beta-1}}, \quad (3.9)$$

donde r es un número aleatorio distribuido uniformemente en el rango $0 \leq r < 1$. De igual manera se considerarán casos en los que $\beta > 1$.

Con la distribución dada por la ecuación (3.9), el tamaño de los blancos no está acotado, es decir, puede tomar valores en los reales arbitrariamente grandes, sólo existe una cota mínima k_{\min} que al igual que con la función zeta de Riemann se fija en $k_{\min} = 1$.

En la figura 3.5 se presenta la gráfica de la dispersión en el tamaño de los pasos, l para diferentes valores de β , donde el tamaño de los blancos está distribuido por la ecuación (3.9) que no considera un valor de corte k_{\max} . Cada punto es el promedio de 100 simulaciones independientes.

En la figura se aprecia que la dependencia del valor de corte tiene efecto visible en la región $1.5 \leq \beta \leq 2.25$, es decir, en la región crítica $\beta \approx 3$ el modelo no se ve afectado por el valor de corte k_{\max} .

Más aún, en la figura 3.6 se presenta la gráfica del coeficiente de variación para diferentes valores de k_{\max} , a saber $k_{\max} = 10^5, 10^4$, también para el caso de $k_{\max} = 10^3$,

3. Modelo de optimización a primer paso

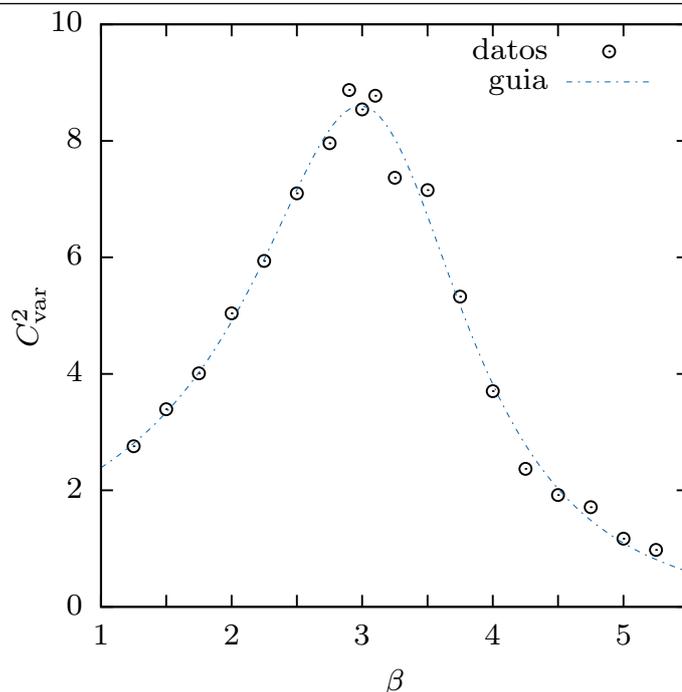


Figura 3.5: El cuadrado del coeficiente de variación de la longitud de los pasos respecto al valor de β , sin la restricción del valor de corte k_{\max} . En este caso $N = 10^5$ y con $n = 5000$. La línea punteada es una guía visual de la tendencia de los datos.

que es el valor que se utilizará por defecto a menos de que se especifique lo contrario, y finalmente también contiene el caso en el que no hay un k_{\max} predefinido.

La razón de utilizar el valor de $k_{\max} = 10^3$ en el modelo es que se pretende hacer una analogía con escenarios reales. El tamaño del i -ésimo blanco k_i representa qué tan atractivo es este blanco para el agente, de manera que el blanco con mayor atractivo, con $k = 10^3$, es mil veces más atractivo que el blanco menos atractivo, con $k = 1$. Resultaría poco realista suponer un blanco millones de veces más atractivo que otros. Además, para $\beta \geq 2.25$ el valor de k_{\max} resulta irrelevante, ya que la probabilidad de tener un blanco con tamaño mayor a 10^3 es extremadamente baja.

3.2.2. Dependencia del número de blancos

Consideremos ahora la dependencia del modelo con el número de blancos; es decir, nos preguntamos si la región crítica, el valor de β para el que el coeficiente de variación es máximo, depende del valor del número de blancos disponibles, N . De inmediato surge la pregunta sobre la dependencia del número de blancos visitados en cada realización.

3. Modelo de optimización a primer paso

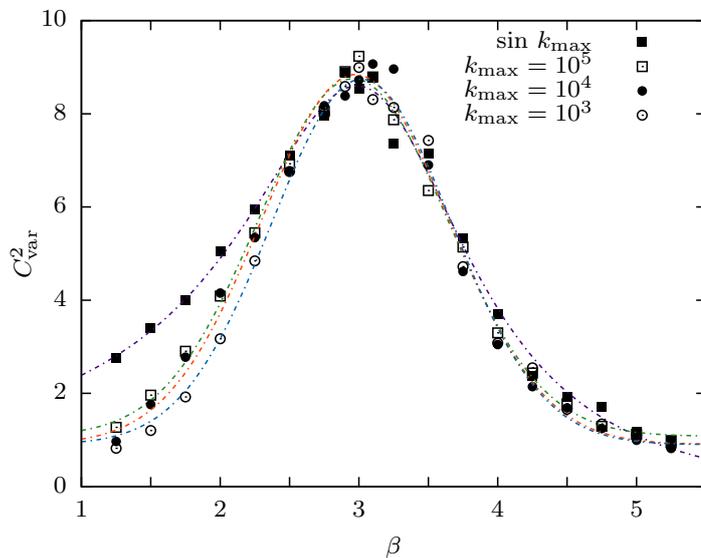


Figura 3.6: Dependencia del modelo con el valor de corte k_{\max} . En este caso $N = 10^5$ y $n = 5000$. Cada conjunto de puntos tiene una guía visual.

Para responder a la primera pregunta, se realizaron algunas simulaciones cambiando el número de blancos presentes pero de tal manera que los blancos visitados fueran siempre el cinco por ciento de los blancos disponibles; es decir, el número de pasos ejecutados, n y el número de blancos disponibles, N siempre satisfacen la relación $\frac{n}{N} = 0.05$. Para cada valor de N se calculó el cuadrado del coeficiente de variación, los resultados se presentan en la figura 3.7. Cada punto es el promedio de 100 simulaciones independientes.

Los resultados de la gráfica ponen en manifiesto que el valor de β donde hay mayor dispersión es independiente del número de blancos, N y el número de pasos, n siempre que la razón entre estos sea constante.

Con todo y lo anterior, aún queda la cuestión sobre si cambiará el valor de β , donde el coeficiente de variación es máximo, con el número de blancos visitados, n . Para ésto, se realizaron nuevas simulaciones donde se mantuvo constante el número de blancos, $N = 10^5$ pero con diferentes valores en el número de pasos, n . Los resultados de las simulaciones se presentan en la figura 3.8. Cada punto es el promedio de 100 simulaciones independientes.

Es de notarse el cambio en el tamaño de las fluctuaciones en la longitud de los pasos al cambiar el número de blancos visitados; sin embargo, la región de mayor

3. Modelo de optimización a primer paso

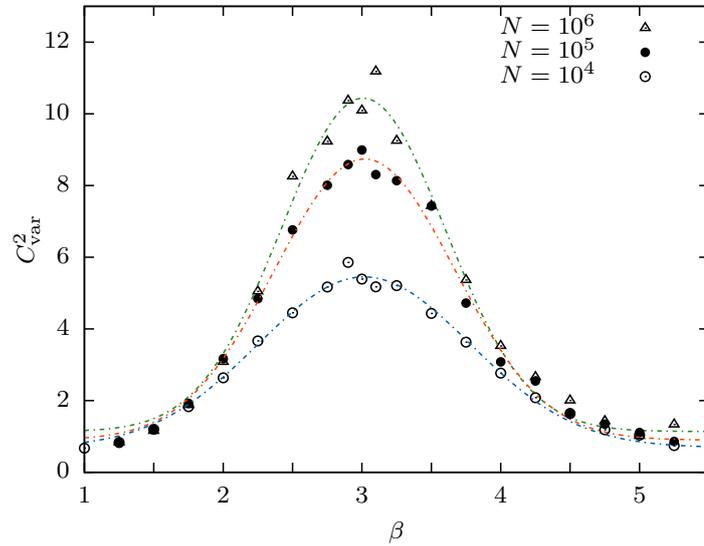


Figura 3.7: Dependencia del modelo con el valor de N . En cada caso se mantuvo constante fracción de blancos visitados en 0.05. Cada conjunto de puntos tiene una guía visual.

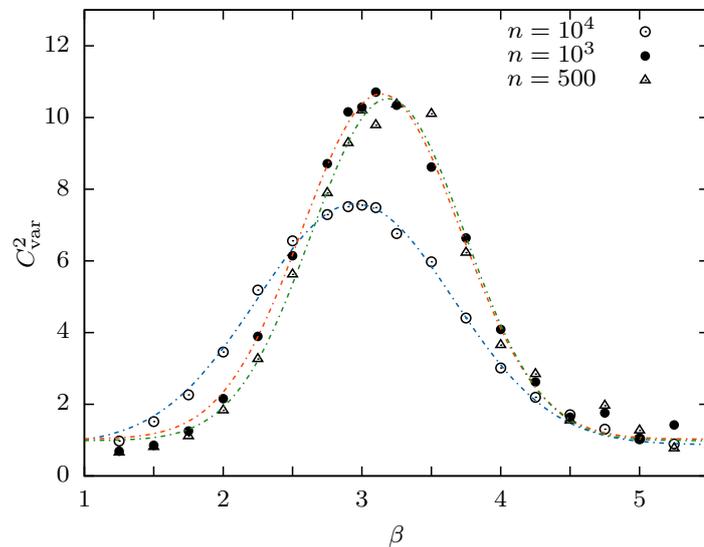


Figura 3.8: Dependencia del coeficiente de variación de la longitud de los pasos con el número de pasos, n , con $N = 10^5$ fijo. Nótese que la región de mayor fluctuación permanece en el mismo lugar, pero la dispersión es más pequeña a medida que se incrementa el número de pasos. Cada conjunto de puntos tiene una guía visual.

fluctuación permanece en el mismo lugar, $\beta \approx 3$. En simulaciones posteriores, la fracción de blancos visitados será menor o igual 0.05. Esta restricción en el número de blancos visitados está pensada de tal forma que el movimiento del agente no modifique de manera sustancial el dominio en el que se mueve, dada la restricción de que cuando visita algún blanco consume todos los recursos, y por ende, no regresa a un lugar previamente visitado.

3.2.3. Análisis del comportamiento observado

Ya se ha visto la dependencia del modelo con las diferentes variables que intervienen; si nos quedamos con $N = 10^5$ blancos, fijamos el número de lugares visitados en $n = 5000$ y el tamaño máximo de los blancos en $k_{\max} = 10^3$, sabemos que la región de mayor dispersión se encuentra en $\beta \approx 3$. Esto último es uno de los principales resultados de [44].

Lo que falta es comprobar que las grandes fluctuaciones en el modelo reflejan longitudes de paso invariantes de escala en el movimiento del agente. Para lo anterior se realizó una gráfica con la distribución de frecuencia de las longitudes de paso, para diferentes valores de β . Los resultados se presentan en la figura 3.9.

Nótese que en la figura 3.9, la longitud de paso más frecuente es prácticamente la misma, independientemente del valor de β , y corresponde al valor $l_0 = 1/\sqrt{N}$. Recordando que, l_0 es la distancia característica de separación entre los blancos y de ahí que refleje un tamaño característico del sistema, y por ende, establece una escala al modelo.

Para hacer a un lado la dependencia del modelo con la escala característica del sistema, nos fijaremos solamente en las longitudes de paso mayores a la distancia característica. Nuevamente se presenta la distribución de frecuencias del tamaño de los pasos en la figura 3.10, esta vez en la misma gráfica, para diferentes valores de β , y para longitudes mayores a l_0 . En esta figura se observan diferencias sustanciales en la distribución de frecuencias de la longitud de los pasos ejecutado por el agente para cada régimen. En la región crítica, la distribución de frecuencias de las longitudes de paso es muy parecida a una ley de potencias, a diferencia del caso en que $\beta = 1.25$. Mientras que en $\beta = 5.0$ también parece seguir una ley de potencias en ciertos tramos, pero el rango de valores que cubre es más pequeño.

Hasta ahora los resultados extraídos de las gráficas concuerdan con los resultados

3. Modelo de optimización a primer paso

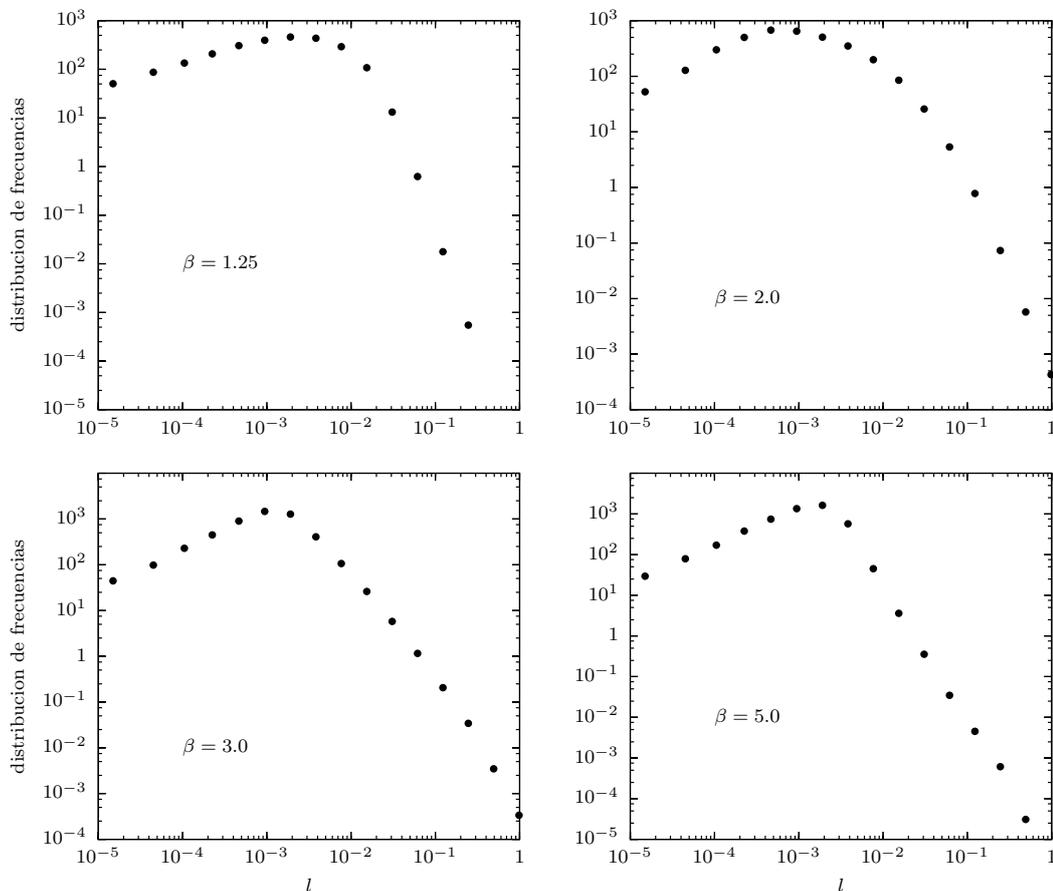


Figura 3.9: *Distribución de frecuencias del tamaño de los pasos en escala logarítmica para: a) $\beta = 1.25$, b) $\beta = 2.0$, c) $\beta = 3.0$, d) $\beta = 5.0$ con binning logarítmico.*

previos [44], donde también señalan que la distribución de frecuencias del tamaño de los pasos sigue una ley de potencias con exponente $\alpha \approx \beta - 1$ en la región crítica. Para corroborar este resultado, en la figura 3.11 se realizó un ajuste a la distribución de frecuencias para el caso $\beta = 3$ en la región donde se observa un posible comportamiento invariante de escala, por lo que no se tomaron en cuenta los tres últimos puntos, y se encuentra que la ley de potencias que se ajusta va como $l^{-\alpha}$ donde $\alpha = 2.02 \approx \beta - 1$.

Si bien el resultado no es exactamente una ley de potencias, dado que los puntos en la cola de la distribución caen fuera de la recta, para ciertos valores entre $10^{-3} < l < 10^{-1}$, la ley de potencias resulta verosímil.

En concordancia con los resultados previos, se encuentra mayor dispersión en las longitudes de los pasos en el valor particular de $\beta = 3$. Éste es el llamado régimen

3. Modelo de optimización a primer paso

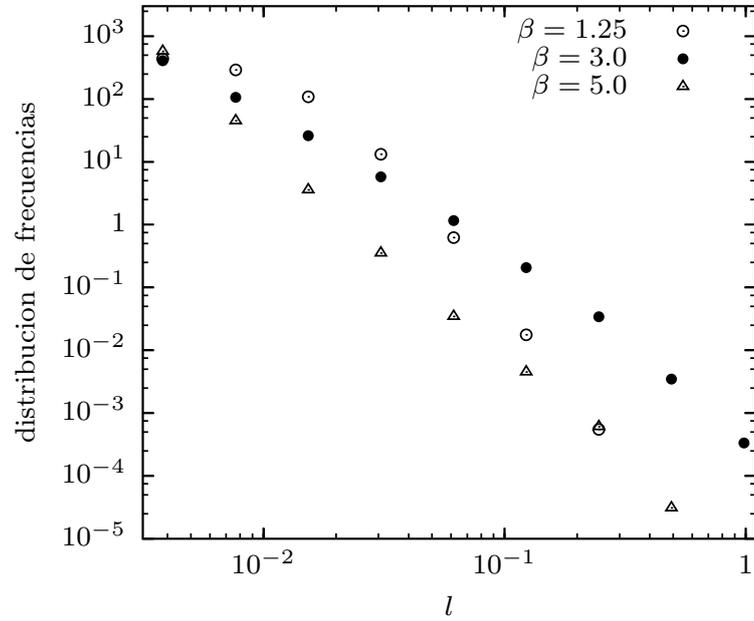


Figura 3.10: Distribución de frecuencias de la longitud de los pasos para $l > l_0$.

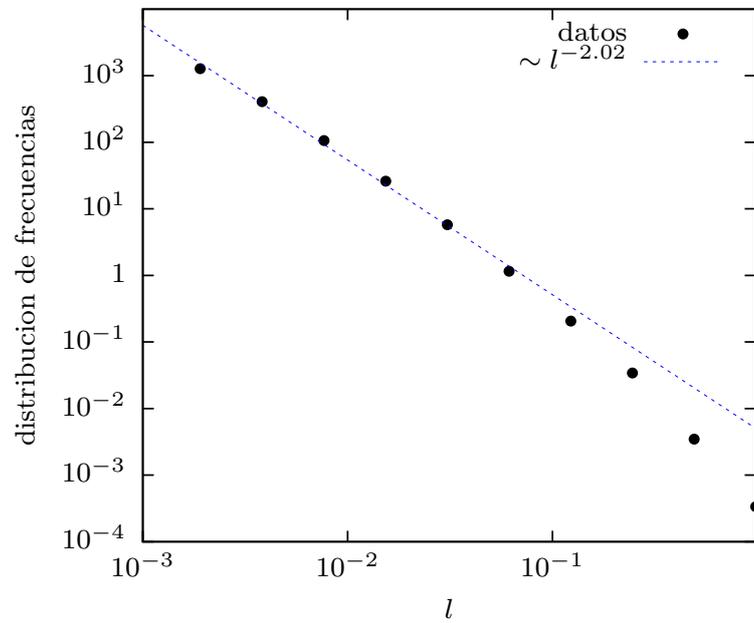


Figura 3.11: Ajuste de la distribución de frecuencias de las longitudes de los pasos para el caso $\beta = 3$ sin tomar en cuenta los 3 últimos puntos.

3. Modelo de optimización a primer paso

crítico, donde se encuentran presentes longitudes de pasos que van desde el orden del tamaño de separación mínima entre blancos, l_0 hasta longitudes del orden del tamaño del sistema. Esta amplia gama de longitudes de paso es inducida por la interacción entre el agente y el ambiente en el que se mueve, donde existen blancos con tamaño suficientemente grande como para que el agente de vez en cuando realice saltos largos, y también blancos no muy grandes, pero suficientemente cercanos para que el agente prefiera hacer saltos locales.

Es importante también discutir sobre el papel que tiene la forma de distribuir el tamaño de los blancos mediante la función zeta de Riemann dada por la ecuación (3.3). Para valores de β pequeños, $\beta < 2$ el número de blancos con gran tamaño es considerable. A esta región de valores de β se le conoce como régimen abundante, dada la presencia de un importante número de blancos con tamaños cercanos a k_{\max} .

Para valores de β intermedios, $2 < \beta < 4$, el dominio contiene pocos blancos con gran tamaño, cercanos a k_{\max} , y muchos otros con tamaños menores; la presencia de pocos blancos con tamaños importantes generan los pasos de gran longitud que se observan en la figura 3.9. A esta región de valores de β se le conoce como régimen crítico o diverso, debido a la presencia de blancos con tamaños en un amplio rango de valores de k .

Por último está la región de valores para $\beta > 4$, donde son mucho más abundantes los blancos con tamaño pequeño, cercano a $k_{\min} = 1$, aunque existen blancos con mayor tamaño, pero la diferencia es poco significativa que el caminante prefiere dar pasos pequeños a blancos contiguos, no obstante su pequeño tamaño, a dar saltos grandes para llegar a blancos con un tamaño ligeramente mayor. A esta región de valores de β se le conoce como régimen escaso.

Está claro que la estrategia óptima al buscar recursos varía de un ambiente a otro dependiendo de la forma en la que están distribuidos los tamaños de los blancos; en nuestro caso particular, la estrategia varía conforme cambia el valor del parámetro β .

Como se había mencionado anteriormente, se han observado movimientos de tipo Lévy (con invariancia de escala en la longitud de los saltos entre un sitio de interés y otro) en el movimiento de forrajeo de varios animales. Por lo anterior se pone especial interés en la región crítica, donde $\beta \approx 3$, que induce caminatas de tipo Lévy en el movimiento del agente determinista.

En el campo se ha estimado la distribución de los tamaños de objetos que inducen a un agente a moverse; tal es el caso de árboles frutales en las selvas y bosques, que se

3. Modelo de optimización a primer paso

ha reportado están distribuidos como una ley de potencias con exponente entre 1.5 y 4 [48].

Del mismo modo, la distribución de los sitios de interés en las ciudades siguen aproximadamente una ley de potencias [49] de acuerdo a la ley de Zipf.

En el análisis anterior se han reproducido los resultados encontrados en [44], además de analizar la dependencia del modelo en las variables que intervienen, tales como el número de blancos, N el número de blancos visitados, que coincide con el número de pasos en cada realización, n y el valor de corte en el tamaño de los blancos, k_{max} . Cuando se hace la analogía con problemas cotidianos o con situaciones que ocurren en la naturaleza, como en el caso de los monos araña en su movimiento de forrajeo, los números asignados a las variables resultan naturales.

Después de la inspección de la dependencia del modelo con los parámetros involucrados, resulta que ninguno de éstos tiene tanto impacto como el valor de β , por lo que se puede decir que el único parámetro importante en el modelo es precisamente β , que dicta la forma de distribuir el tamaño o atractivo de los blancos.

Cuando consideramos el movimiento de agentes inteligentes, es decir, agentes con pleno conocimiento del medio y que cada movimiento es razonado buscando optimizar su beneficio, el uso de reglas deterministas para optimizar a primer paso resulta verosímil.

Por otro lado, cuando el agente considerado es una persona, como en el problema del vendedor viajero o en el problema del turista, la elección de cada paso sigue reglas un tanto más complicadas, ya que en ese caso, el movimiento está orientado a visitar un conjunto de blancos (en los ejemplos anteriores estos blancos se tratan de ciudades) y en cada paso, el agente debe considerar no sólo uno sino dos o más lugares a los que desea llegar, de tal manera que obtenga el máximo beneficio y al mismo tiempo recorra la menor distancia posible.

Una mejora al modelo planteado, que obedece al sentido común, es la suposición de que el caminante busca optimizar su movimiento no sólo a primer paso, sino que en realidad busca optimizar una trayectoria total, es decir, que en cada paso visita más de un blanco. Entonces, el siguiente escenario en el problema del movimiento de agentes inteligentes es la optimización a segundo paso.

Parte II

Resultados

Capítulo 4

Modelo de optimización a segundo paso

En el capítulo anterior se describió el modelo computacional donde un agente inteligente buscaba optimizar su movimiento, haciendo un compromiso entre visitar un blanco con la mayor cantidad de recursos y al mismo tiempo recorrer la menor distancia posible, en cada paso tenía que evaluar cierta función de costos dada por la ecuación (3.7) para decidir cuál blanco visitar. A dicho movimiento le llamaremos de *optimización a primer paso* (o1p).

El supuesto de que el caminante elige optimizar cada paso que da, es plausible cuando se trata de animales forrajeros, o en general, agentes con ciertas capacidades cognitivas; sin embargo, cuando suponemos que el caminante es un persona, sería más natural pensar que el movimiento obedece a reglas un tanto más complicadas.

La continuación lógica en el modelo de movilidad de agentes inteligentes con pleno conocimiento de su entorno, es la optimización de su movimiento a segundo paso. En esta instancia supondremos que en cada iteración el agente busca visitar dos blancos, de tal manera que obtenga la ganancia máxima pero que la distancia total recorrida sea la menor entre todas las posibles trayectorias.

Por ejemplo, si suponemos a un agente con gran capacidad cognitiva que se mueve en busca de satisfacer dos necesidades, la suposición obvia es que el primer paso esté condicionado al segundo. Es decir, el agente considerará el beneficio que obtendrá al visitar ambos lugares, en términos de la ganancia y la distancia total, antes de iniciar el recorrido; hablamos de un problema de *optimización a segundo paso* (o2p). A diferencia

del caso anterior donde, si el caminante quería visitar dos lugares, lo que hacía era optimizar su movimiento un paso a la vez (01p).

Este es un problema clásico en economía con diferentes variantes, supongamos que una persona quiere ir al banco y de ahí quiere ir a comer a algún restaurante, por supuesto conoce todos los bancos y restaurantes que hay dentro de ciertos límites, además a cada uno de ellos les asigna cierta calificación (en el modelo, el tamaño del blanco juega este papel) ya sea por el servicio que recibe por parte del personal, por los productos, por los precios, etcétera. Entonces, el criterio que usará para decidir qué banco y qué restaurante visitará está supeditado a la combinación de ambos.

Nótese que este problema asintóticamente converge al problema del vendedor viajero, o más bien al problema del turista, donde el caminante busca minimizar la trayectoria entre N blancos (en este caso los blancos son ciudades) con ubicación conocida y fija. Este problema es uno de los denominados *hard to solve*, dado que los cálculos para resolverlo aumenta como el factorial del número de blancos a visitar. No obstante, se ha estudiado con diferentes enfoques, desde el cálculo de todas las posibles trayectorias, hasta modelos computacionales basados en propiedades de compuestos orgánicos con buena aproximación a la trayectoria óptima [55].

4.1. Modelo computacional de optimización a segundo paso

En este modelo ¹ se retoman las variables de la optimización a primer paso, siendo N el número de blancos presentes en el dominio y n el número de blancos visitados en la caminata. De igual manera, el agente no regresa a un blanco previamente visitado y la forma de situar a los blancos, así como de darles su valor o tamaño, es la misma que en la optimización a primer paso.

4.1.1. Reglas de movimiento

Suponiendo que en cada unidad de tiempo el caminante optimiza una trayectoria, esto es, realiza una caminata donde visita dos blancos, la regla que sigue el caminante en cada iteración del modelo ($t \rightarrow t + 1$) es la siguiente:

¹El programa se encuentra en: https://github.com/miguelmaya/tesis_maestria

4. Modelo de optimización a segundo paso

- El caminante localizado en el i -ésimo blanco se fija en el primer objetivo a su alcance, digamos $j \neq i$, y en el tamaño que tiene, es decir, cuánto vale k_j así como la distancia a la que se encuentra, $l_{i,j}$.
- Posteriormente se fija en un segundo blanco accesible, digamos $m \neq i, j$ y en su tamaño, k_m y calcula la distancia que hay entre la posición j y la posición m , $l_{j,m}$. Luego calcula el valor de una función de costos $E^{(2)}$ que le permite conocer el costo, es decir, la distancia total a recorrer, y el beneficio, esto es, la cantidad de recursos contenidos en ambos, que obtendrá al visitar ambos blancos. Donde:

$$E^{(2)} = \frac{l_{i,j} + l_{j,m}}{k_j + k_m}, \quad (4.1)$$

- Dados i, j fijos, calcula la función de costos $E^{(2)}$ para todo $m \neq i, j$.
- Luego, se pasa a otro blanco accesible $j \neq i$ y recorre nuevamente todos los $m \neq i, j$.
- Así sucesivamente para todo $j \neq i$.
- Finalmente elige la trayectoria j, m tales que la función de costos (4.1) sea mínima entre todas las posibles combinaciones con $j \neq i$ y $m \neq i, j$.
- Al final de cada iteración el agente que inicialmente estaba en el blanco i , pasa por el j y termina en el blanco m que minimizan $E^{(2)}$. Al pasar por algún blanco, acaba con los recursos de éste, es decir, $k_j = k_m = 0$ para no volver a visitarlos.

Nótese que con estas reglas de movimiento, los cálculos que se tienen que realizar aumente de manera significativa con el número de blancos presentes, N . Este es el hecho de que el problema del turista sea difícil de resolver, ya que en ese caso el número de blancos a visitar es igual al número de blancos presentes.

4.1.2. Aumento en los cálculos

En esta sección se revisará el aumento en los cálculos que tiene que realizar el agente para elegir a los dos blancos que visitará en cada iteración.

En el dominio unitario situamos N blancos distribuidos aleatoriamente, por lo tanto, en el modelo de optimización a primer paso, en la primera iteración el agente realiza N operaciones de la forma de la ecuación (3.7); en la segunda iteración el agente realiza

$N-1$ operaciones, ya que no considera al blanco previamente visitado; así sucesivamente tal que en la q -ésima iteración realiza $N-(q-1)$ operaciones. Por otro lado, en el modelo de optimización a segundo paso, en la primera iteración el agente realiza $N(N-1)$ operaciones de la forma de la ecuación (4.1); en la segunda iteración el agente realiza $(N-2)(N-3)$ operaciones, y así sucesivamente, de tal manera que en la q -ésima iteración realiza $[N-(2q-2)][N-(2q-1)]$. Sin olvidar que en la ecuación (4.1) hay una suma en el numerador y otra en el denominador.

Dado que N es grande, el número de cálculos en la optimización a segundo paso es del orden del cuadrado de los cálculos realizados en la optimización a primer paso. Para visualizar el aumento, considérese $N = 10^5$, que es el número de blancos utilizados en la optimización a primer paso; entonces el número de cálculos en cada iteración es del orden de 10^5 . Si en la optimización a segundo paso se considera el mismo N , el número de cálculos en cada iteración serían del orden de 10^{10} .

Nótese que, en el caso de un caminante que optimice su movimiento a tercer paso, en la primera iteración el número de cálculos a realizar es de $N(N-2)(N-3)$; como el N es grande, los cálculos van como N^3 . En el caso límite donde la optimización sea al N -ésimo paso, es decir, en la primera iteración el caminante tiene que visitar los N blancos presentes, el número de operaciones va como $N!$, que es precisamente el problema del turista, salvo que en este caso no sólo tiene que tomar en cuenta la distancia entre los blancos (ciudades) sino también el tamaño o atractivo de cada blanco.

4.2. Estadística del movimiento

El coeficiente de variación es una cantidad que proporciona una medida de la dispersión de las longitudes de los pasos que hay en el modelo. Cuando se trató con el modelo de optimización a primer paso, se encontró que existe una región donde las fluctuaciones de la longitud de los pasos son máximas ($\beta = 3$). En esa región de máxima dispersión se observa que la distribución de frecuencias de la longitud de pasos siguen un comportamiento que se acerca a una ley de potencias.

Para ver cómo es la dispersión de las longitudes de paso en el modelo de optimización a segundo paso se presenta la figura 4.1, donde se encuentra graficado el cuadrado del coeficiente de variación para los mismos valores que en la optimización a primer paso. Debido al aumento del número de cálculos requeridos, en esta parte se realizaron simulaciones con $N = 10^4$, $n = 500$ y $k_{\max} = 10^3$. La curva presentada es el promedio

4. Modelo de optimización a segundo paso

de 50 simulaciones independientes. En lo sucesivo, los resultados presentados serán el promedio de 50 simulaciones independientes, a menos que se indique otra cosa.

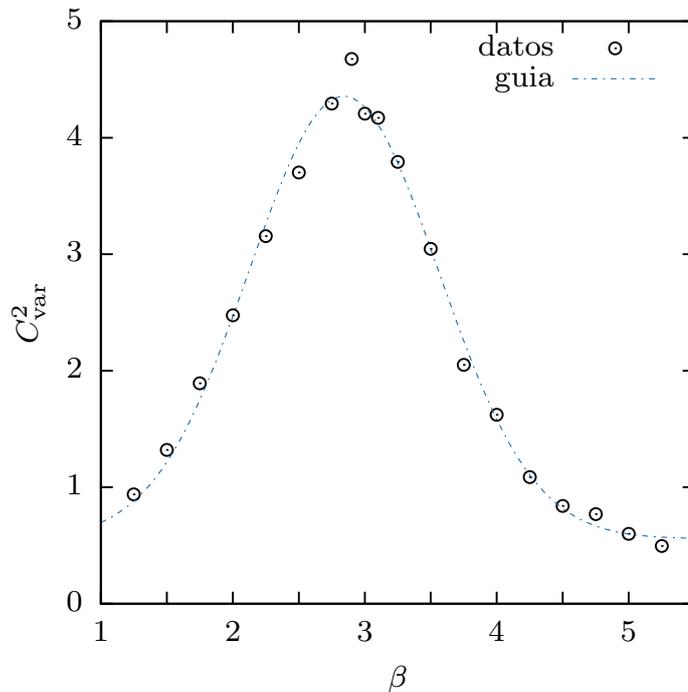


Figura 4.1: El cuadrado del coeficiente de variación de la longitud de los pasos, l en función de β para la optimización a segundo paso. En este caso $N = 10^4$, $n = 500$ y $k_{\text{max}} = 10^3$. La línea punteada es una guía visual de la tendencia de los datos.

En la gráfica 4.1 se observa un comportamiento parecido al que muestra la optimización a primer paso, dado que en ambos casos existe una región en el valor de β para el cual la fluctuación de la longitud de pasos es máxima. Es importante notar que la región de máxima dispersión ha cambiado ligeramente respecto al encontrado en la optimización a primer paso.

Para tener un criterio de comparación con el modelo de optimización a primer paso se presenta la figura 4.2, donde se encuentran graficado el cuadrado del coeficiente de variación tanto para la optimización a primer como a segundo paso con los mismos valores en, $N = 10^4$, $n = 500$ y $k_{\text{max}} = 10^3$.

Nótese que, en la figura 4.2 la fluctuación en las longitudes de paso es mayor para la o1p que para la o2p, salvo para valores pequeños del parámetro, $\beta < 2$, que corresponde al régimen superabundante, donde prácticamente los promedios son iguales.

4. Modelo de optimización a segundo paso

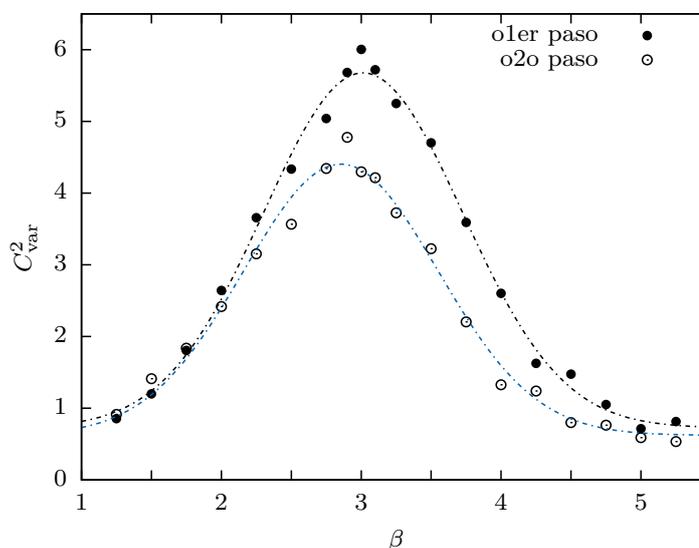


Figura 4.2: Comparación del comportamiento del coeficiente de variación entre la o1p y la o2p. En ambos casos se usaron los mismos parámetros, a saber, $N = 10^4$, $n = 500$ y $k_{\max} = 10^3$. Cada conjunto de puntos tiene una guía visual.

El rasgo más importante en la figura 4.2 es el desplazamiento que el pico de la dispersión sufre al pasar de la o1p a la o2p. Como se mostró en el capítulo anterior, el máximo valor de la dispersión de las longitudes de paso se presenta en el valor de $\beta = 3$. Por otro lado, para el caso en el que el agente optimiza su movimiento a segundo paso, el máximo valor de la dispersión de las longitudes de paso se encuentra alrededor de $\beta = 2.9$. Nótese también la diferencia en las fluctuaciones para valores de β mayores. Cuando se investigó la dependencia de modelo de o1p a los valores de N , n y k_{\max} , se observaron diferencias en las fluctuaciones del tamaño de los pasos en la región crítica, pero en ninguno de ellos persistieron dichas diferencias para valores grandes del parámetro β .

Si bien la gráfica de las fluctuaciones para la optimización a segundo paso resulta semejante a la obtenida en el movimiento de optimización a primer paso, es conveniente analizar el movimiento ejecutado por el agente. En la figura 4.3 se presenta el movimiento que sigue el agente para algunos valores de β , con sus respectivos acercamientos a las zonas de interés.

De la figura 4.3, notamos que el agente realiza movimientos similares a los ejecutados cuando sólo optimizaba su movimiento a primer paso. Lo que sigue es realizar el análisis de las frecuencias de aparición de las longitudes de los saltos para algunos valores de

4. Modelo de optimización a segundo paso

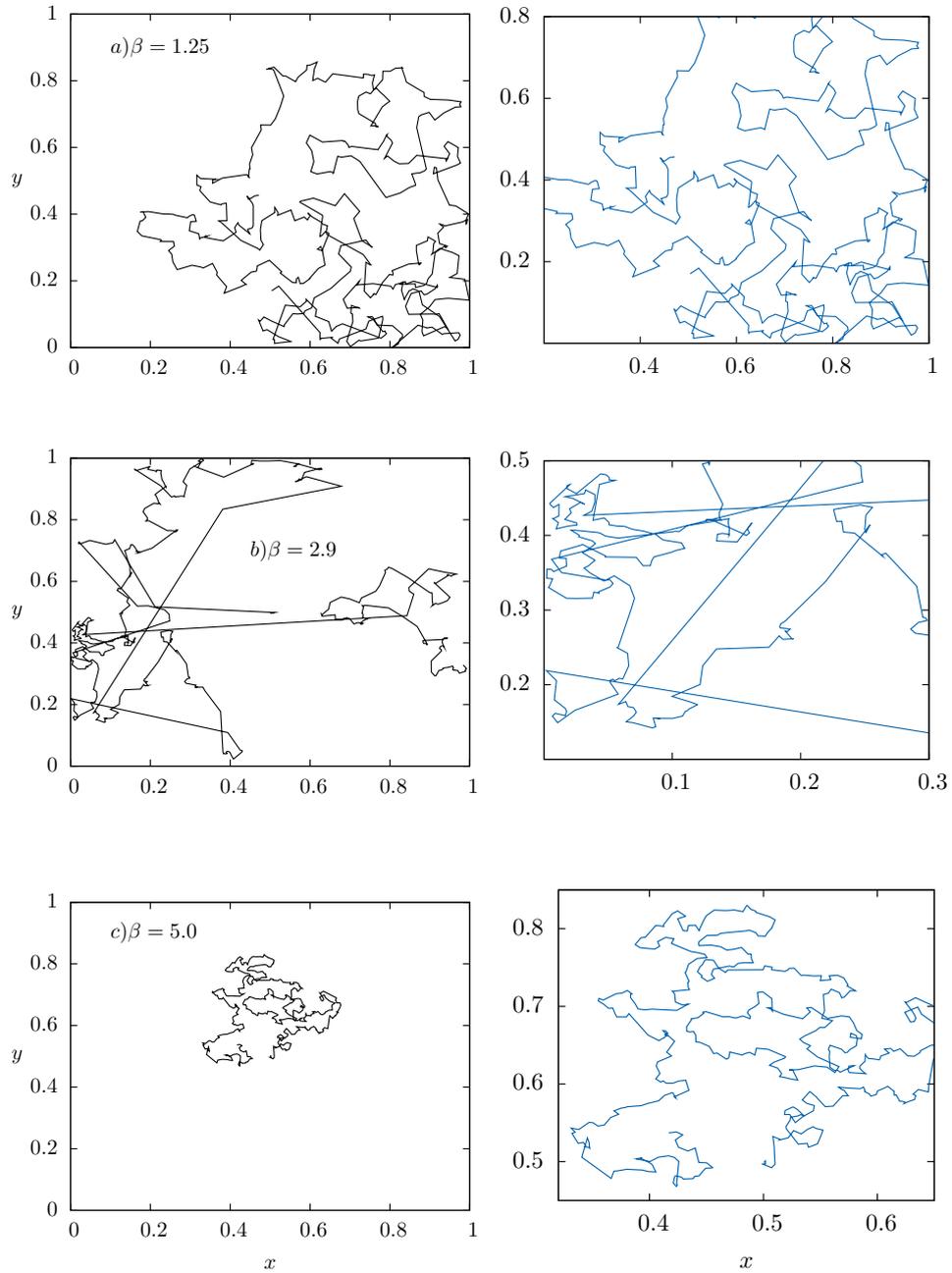


Figura 4.3: *Izquierda: Representación de los desplazamientos en el dominio de área unitaria en la o2p. Derecha: Acercamiento a un área de interés de la gráfica izquierda para: a) $\beta = 1.25$, b) $\beta = 2.9$ y c) $\beta = 5.0$. En este caso $N = 10^5$.*

β . En la figura 4.4 se graficó la distribución de frecuencias de las longitudes de paso, mismas que tienen forma muy similar a las que se muestran en la figura 3.9.

4. Modelo de optimización a segundo paso

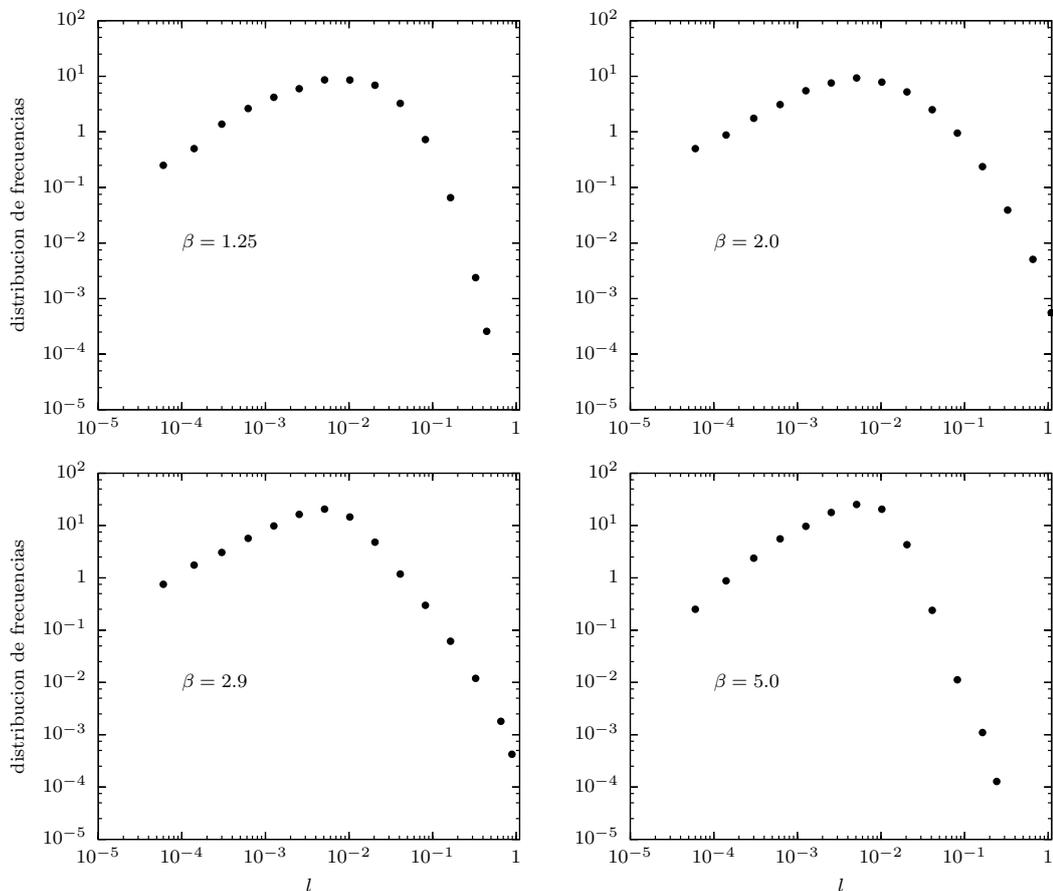


Figura 4.4: *Distribución de frecuencias del tamaño de los pasos en escala logarítmica para: a) $\beta = 1.25$, b) $\beta = 2.0$, c) $\beta = 2.9$, d) $\beta = 5.0$ con binning logarítmico.*

A continuación y de la misma manera que en el capítulo anterior, en la figura 4.5 sólo se muestra la distribución de frecuencias para distancias mayores a $l_0 = 0.01$, la distancia característica del dominio, ya que en este caso $N = 10^4$.

Nuevamente, para el valor de β cerca de la región crítica, la distribución de frecuencias de la longitud de los saltos parece seguir una ley de potencias. La región de máxima dispersión de las distancias está en $\beta = 2.9$ en la o2p. Al ajustar la distribución de frecuencias a una ley de potencias, sin tomar en cuenta los dos últimos puntos, se encuentra que $p(l) \sim l^{-2.06}$ nuevamente notamos que $\alpha = 2.06 \approx \beta - 1$. La gráfica del ajuste se presenta en la figura 4.6.

4. Modelo de optimización a segundo paso

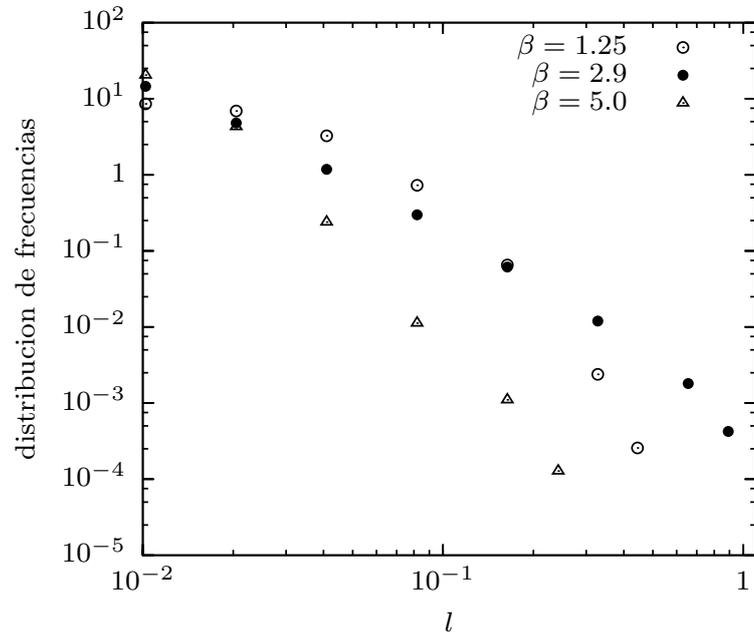


Figura 4.5: Distribución de frecuencias de la longitud de los pasos en la o2p para $l > l_0$.

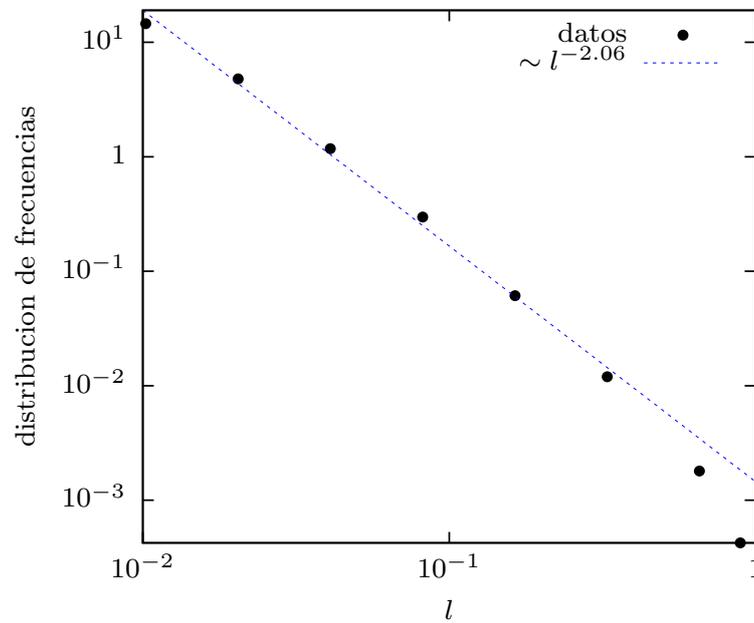


Figura 4.6: Ajuste de la distribución de frecuencias de la longitud de los pasos para el caso $\beta = 2.9$, sin tomar en cuenta los dos últimos puntos para la o2p.

4.3. Comparación con el modelo de optimización a primer paso

En el análisis del movimiento de agentes, como se ha mencionado antes, se utilizan números aleatorios para distribuir los blancos en el dominio; de igual manera se emplean números aleatorios para asignar el tamaño a cada blanco.

Para poder realizar una comparación cuantitativa del movimiento que llevan a cabo los agentes que siguen determinada regla, ya sea que busquen optimizar a primer o segundo paso, es necesario establecer las condiciones adecuadas para dicha comparación. En las simulaciones esto es posible fijando la semilla de los generadores de los números aleatorios.

Una de las cosas importantes en este tratamiento es analizar la diferencia que surge cuando situamos a un agente en un dominio, con determinada distribución de blancos, que busca optimizar su movimiento a primer paso y observamos la trayectoria que sigue. Por otro lado, si ahora situamos a un agente más inteligente, que busca optimizar su movimiento a segundo paso, en un dominio idéntico al primero y observamos la trayectoria que recorre, se esperarían cambios en el movimiento respecto al que sigue el primer agente. Si ambos agentes parten del mismo lugar, como puede ser el centro del dominio, con coordenadas $x = 0.5$, $y = 0.5$ es posible analizar la diferencias entre las trayectorias.

El movimiento resultante dentro de los dominios se presentan en la figura 4.7 para algunos valores de β , a saber, *a*) $\beta = 1.25$, *b*) $\beta = 2.9$ y *c*) $\beta = 5.0$. En negro se dibujó la trayectoria del agente que optimiza a primer paso y en azul la trayectoria del agente que optimiza a segundo paso. En el lado derecho de cada caso se encuentra un acercamiento al centro del dominio, ya que ambos agentes parten de ese lugar; también se encuentran marcadas las posiciones de los blancos visitados.

En la figura 4.7 **(a)** que corresponde al régimen superabundante, se observa que ambos agentes siguen la misma trayectoria inicialmente, eventualmente se separan y posteriormente visitan los mismos blancos. En el caso de **(b)** que corresponde a $\beta = 2.9$, cerca del régimen crítico, las trayectorias se separan desde el tercer salto; posteriormente notamos escasos blancos que son visitados por ambos agentes. Finalmente en **(c)**, el caso de $\beta = 5.0$ que corresponde al régimen disperso, si bien las trayectorias comienzan juntas, pronto se separan para ir alejándose a medida que avanzan las iteraciones.

Claramente se observan diferencias en las trayectorias de un agente que optimiza

4. Modelo de optimización a segundo paso

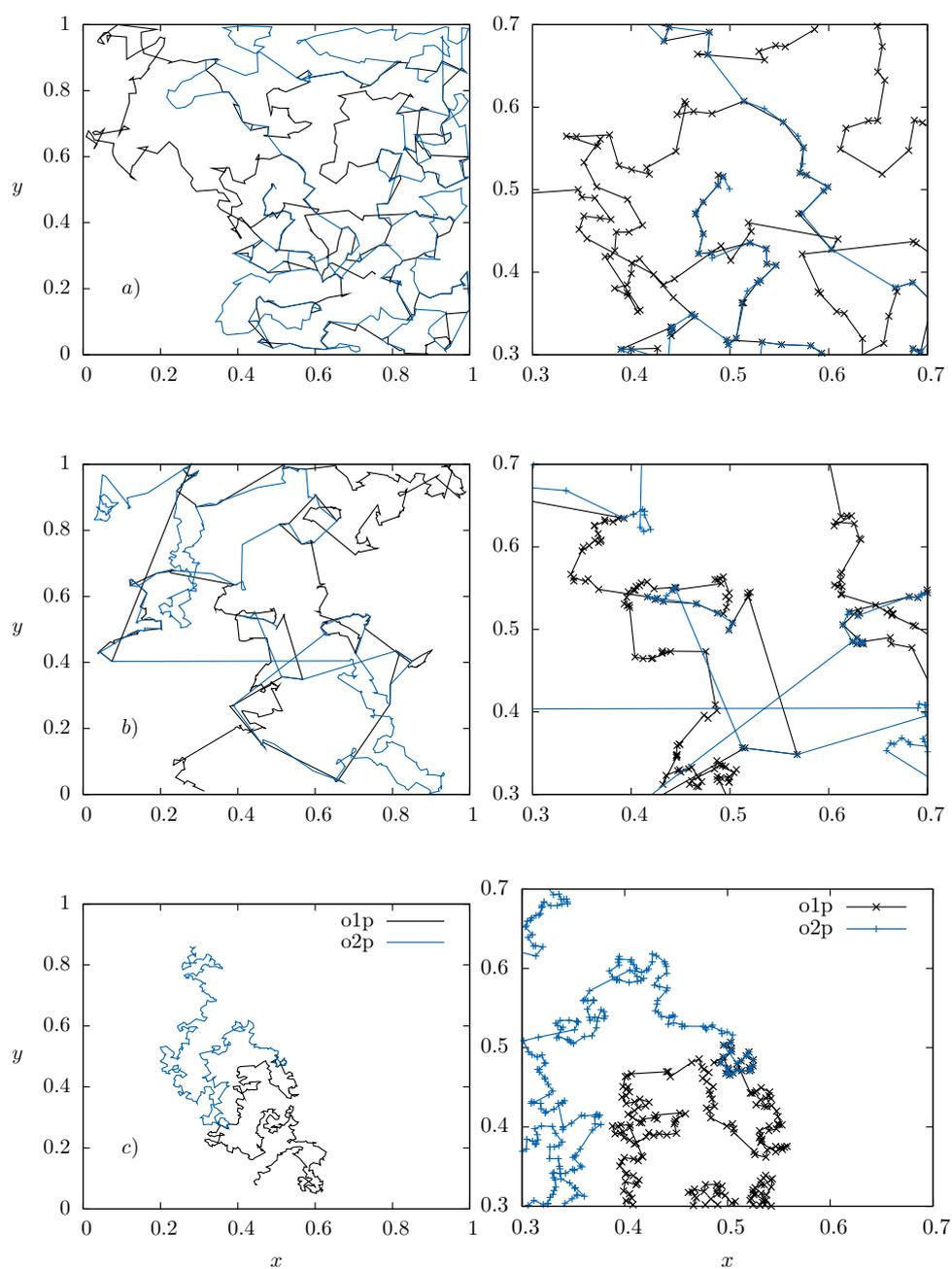


Figura 4.7: *Izquierda: Representación de los desplazamientos de ambos agentes en un dominio idéntico para: a) $\beta = 1.25$, b) $\beta = 2.9$ y c) $\beta = 5.0$. Derecha: Acercamiento al centro del dominio de donde parten ambos agentes. En negro el desplazamiento del agente que optimiza a primer paso y en azul la trayectoria del agente que optimiza a segundo paso.*

su movimiento a primer paso de otro que optimiza a segundo paso, sin importar que se muevan en dominios idénticos. El porqué de estas diferencias puede entenderse midiendo

4. Modelo de optimización a segundo paso

cuál es la estrategia óptima de entre las dos consideradas. Para ello, se calculan los recursos obtenidos y la distancia recorrida para hacerse de dichos recursos en cada trayectoria.

En la figura 4.8 se presentan las fracciones de los recursos capturados, esto es, la cantidad de recursos capturados entre el total de recursos disponibles, para cada uno de los agentes y para distintos valores de β . Como ya se apuntó anteriormente, el total de recursos disponibles es el mismo para ambos agentes, lo que cambia es la cantidad de recursos capturados. Nótese que la fracción de recursos capturados al término de la caminata es ligeramente mayor para el caminante que optimiza a primer paso en el régimen $\beta < 2$; mientras que para $\beta > 2$ la fracción de recursos capturados es prácticamente la misma para ambos agentes, salvo cerca del régimen crítico, $2.25 < \beta < 3.1$, donde el agente más inteligente es el que obtiene ligeramente mayor número de recursos.

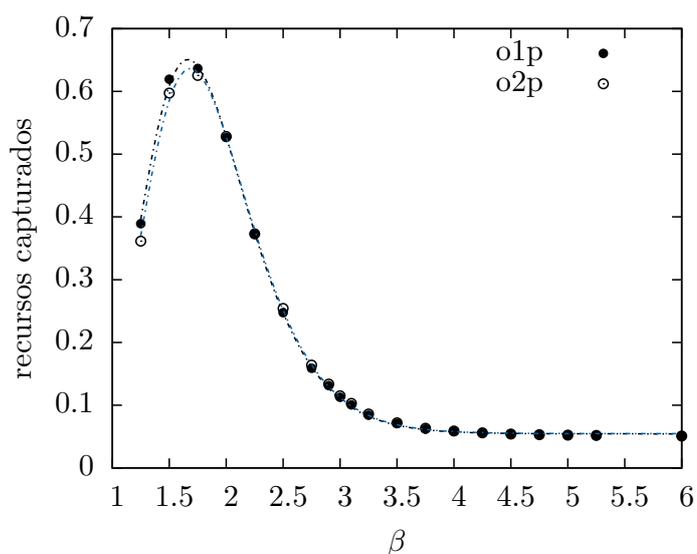


Figura 4.8: *Fracción de los recursos obtenidos por los agentes para cada valor de β . Cada conjunto de puntos tiene una guía visual.*

En el análisis anterior, si bien el agente que optimiza a segundo paso es quien obtiene más recursos, el excedente obtenido sólo es ligeramente superior a los recursos capturados por el primer agente, por lo tanto, veamos si la mayor capacidad cognitiva del segundo agente se refleja en las distancias recorridas. Para ello se calculó la distancia total recorrida por ambos agentes. Los resultados se presentan en la figura 4.9, donde

4. Modelo de optimización a segundo paso

se observan nuevamente mejores resultados para el agente que optimiza a segundo paso, dado que recorre menor distancia para obtener mayores recursos; sin embargo, las diferencias son pequeñas comparadas con el aumento en el número de cálculos que tiene que realizar para ejecutar su movimiento en comparación con los cálculos que realiza el primer agente.

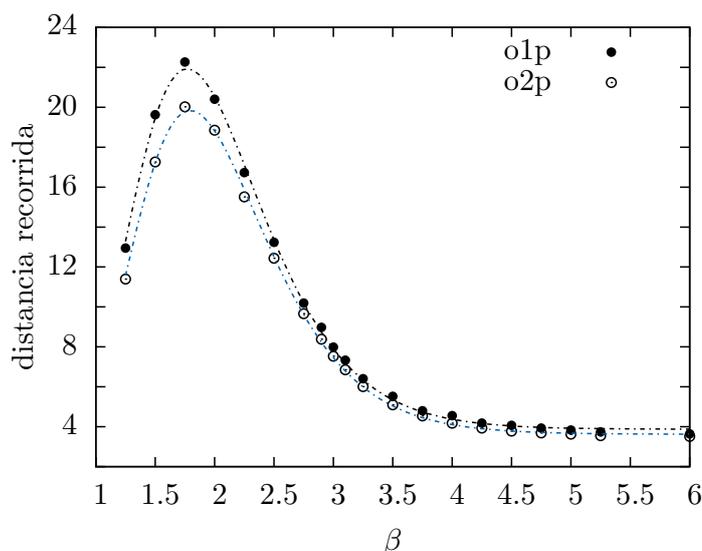


Figura 4.9: Distancia total recorrida por los agentes para cada valor de β . Cada conjunto de puntos tiene una guía visual.

Las reglas de movimiento de los agentes buscan optimizar una la función de costos $E^{(1)}$ y $E^{(2)}$ que tienen que ver con los recursos que se obtendrán al visitar un blanco entre la distancia que se tiene que recorrer para conseguirlos. Se puede extender el concepto de la función de costos para comparar el método de o1p con el método de o2p. Para lo anterior se postula una cantidad a la que denominaremos utilidad, que definimos como

$$U = \frac{K_T}{l_T}, \quad (4.2)$$

donde K_T es la fracción de recursos obtenidos del total disponibles y l_T es la distancia total recorrida.

En la figura 4.10 se presenta la gráfica para la utilidad de los dos agentes, para diferentes valores de β .

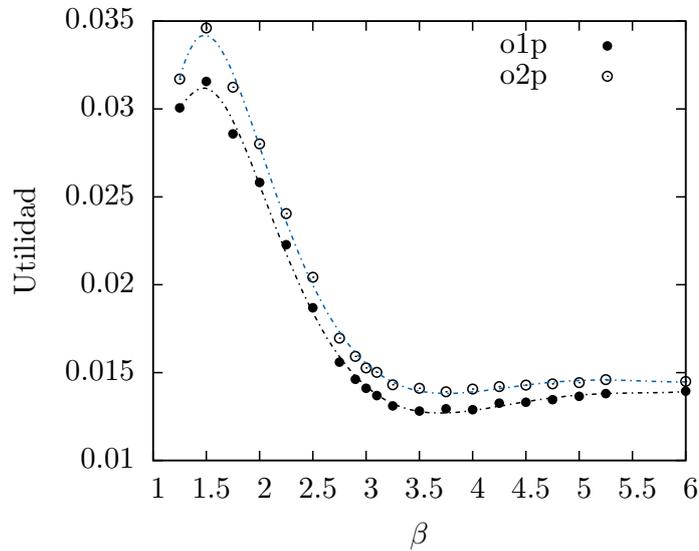


Figura 4.10: Utilidad generada por los agentes para cada valor de β . Cada conjunto de puntos tiene una guía visual.

En la gráfica para la utilidad de ambos movimientos, queda evidenciado la ventaja que tiene la optimización a segundo paso en comparación con la optimización a primer paso. De las gráficas donde se muestra la fracción de recursos obtenidos y la distancia total recorrida, se sigue que el incremento en la utilidad, cuando el agente optimiza a segundo paso, proviene del hecho de que en la optimización a segundo paso el agente recorre una distancia menor.

Hasta ahora las diferencias observadas son pequeñas y no hay pista de la causa del corrimiento observado en el pico de la fluctuación de las distancias recorridas (ver figura 4.2). Un aspecto que merece atención es el hecho de que en la optimización a segundo paso, en cada iteración el agente da dos saltos. En los análisis anteriores no se hizo distinción entre el primer y el segundo salto. Si ahora los consideramos por separado, es decir, por un lado contabilizamos los recursos obtenidos así como la distancia recorrida en el primer salto y hacemos lo mismo para el segundo salto por separado. Lo que se obtiene se muestra en la figura 4.11.

De la figura 4.11 encontramos que hay diferencias muy marcadas entre el primer y segundo salto de cada iteración. En (a) observamos que la fracción de recursos capturados en el segundo salto de cada iteración es casi el doble a los capturados durante el primer salto, para valores de beta pequeños, $1.25 < \beta < 3.25$ mientras que, para valores de $\beta > 4.0$ la fracción de recursos capturados es prácticamente la misma. En

4. Modelo de optimización a segundo paso

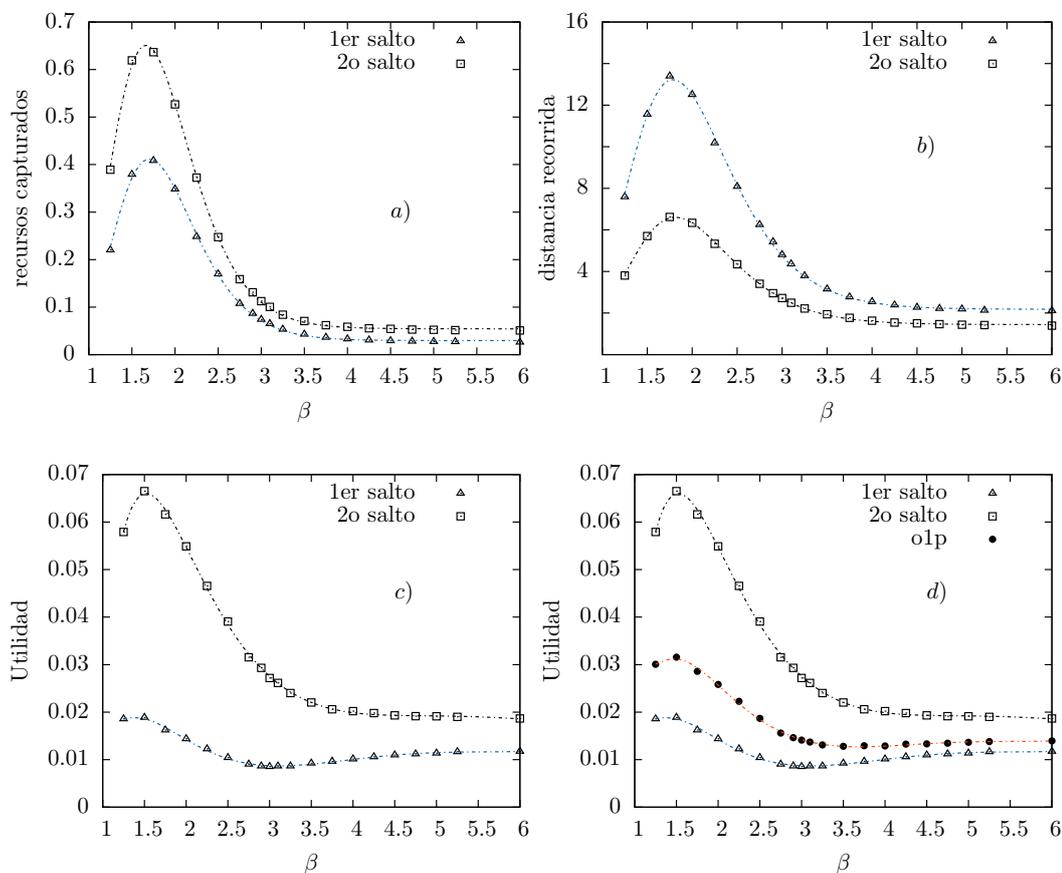


Figura 4.11: Separación de los saltos en la optimización a segundo paso. a) la fracción de los recursos obtenidos en cada salto, b) la distancia total recorrida en cada salto, c) la utilidad de cada salto por separado y d) la utilidad de cada salto comparadas con la utilidad de la optimización a primer paso. Cada conjunto de puntos tiene una guía visual.

(b) notamos que la distancia recorrida en el primer salto de cada iteración es considerablemente mayor, incluso el doble en algunos casos, para valores de beta pequeños, $\beta < 3$; y para valores más grandes, la distancia recorrida en el primer salto sigue siendo ligeramente mayor. Entonces, tenemos que, durante el segundo salto de cada iteración el caminante obtiene más recursos y recorre menor distancia en comparación al primer salto. Dada la definición de utilidad, encontramos que el segundo salto es, por mucho, más provechoso para el agente como se observa en (c). Finalmente para tener un criterio de comparación con el movimiento de o1p, en (d) se presenta nuevamente la gráfica de la utilidad, pero esta vez, también incluye la utilidad obtenida por un agente que optimiza su movimiento a primer paso.

Las diferencias que surgen entre el primer y segundo salto resultan sorprendentes.

4. Modelo de optimización a segundo paso

Tal vez éste sea el motivo de las diferencias en la dispersión observada, es decir, del corrimiento del pico de la fluctuación de las longitudes de los saltos. Para investigar la conjetura anterior, se realizó la gráfica de las fluctuaciones de las distancias recorridas en la optimización a segundo paso, pero esta vez separando el primer y segundo salto; los resultados se presentan en la figura 4.12.

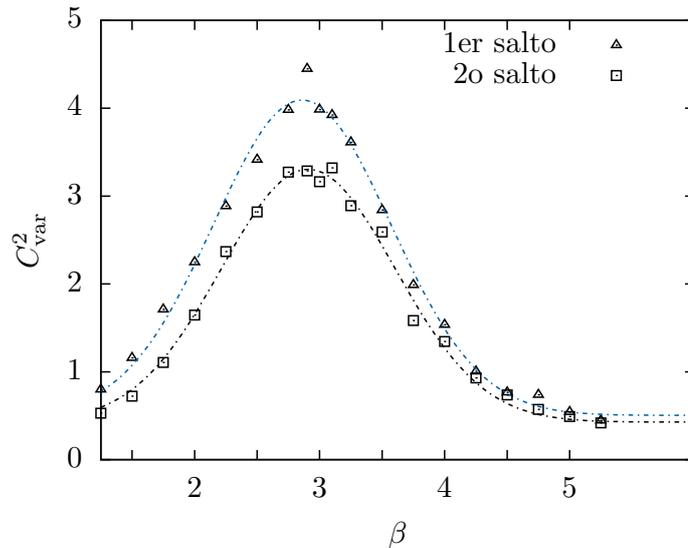


Figura 4.12: El cuadrado del coeficiente de variación de la longitud de los pasos, l en función de β para la optimización a segundo paso. Esta vez se consideran por separado las distancias recorridas en el primer salto de las recorridas en el segundo salto de cada iteración. Cada conjunto de puntos tiene una guía visual.

De la figura 4.12 notamos que, efectivamente, la dispersión en las distancias recorridas durante el primer salto es notablemente mayor que la de las distancias recorridas en el segundo salto para valores de $\beta < 4$, en particular, para valores cercanos a la región crítica. De la figura 4.11 (b), donde se encontró que las distancias recorridas en el segundo salto son menores en comparación de las que se recorren durante el primero, se puede ver que las diferencias entre las distancias recorridas durante el primer y segundo salto en la o2p se acentúan en el mismo régimen donde se aprecia mayor diferencia en el coeficiente de variación de la longitud de los saltos. Por lo tanto, se puede inferir que el movimiento de primer y segundo salto se presenta en escalas diferentes, sin que se hayan hecho consideraciones adicionales, es decir, es un comportamiento emergente del modelo de optimización a segundo paso.

Para ver más de cerca el comportamiento del primer y segundo salto, se presenta la

4. Modelo de optimización a segundo paso

distribución de frecuencias de las distancias recorridas para algunos valores de β , esta vez separando las distancias del primer y segundo salto.

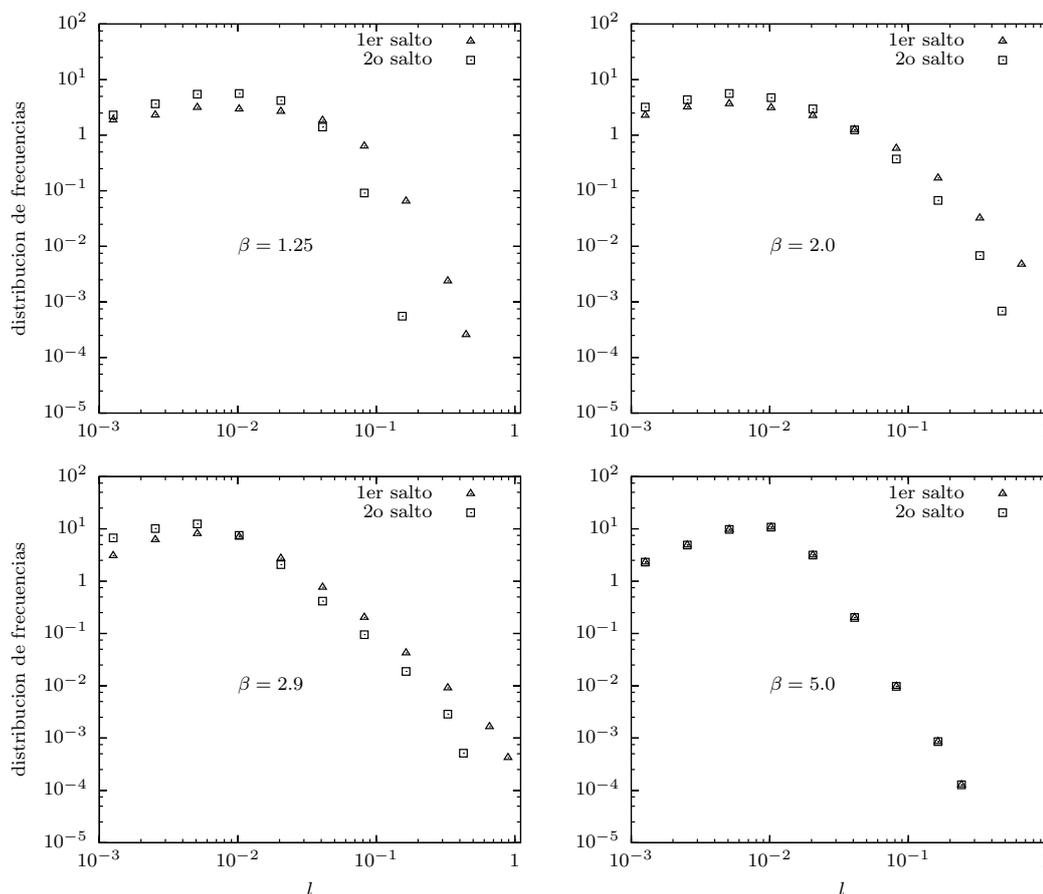


Figura 4.13: *Distribución de frecuencias de la longitud de los pasos diferenciando entre el primer y segundo salto en la o2p con binning logarítmico.*

Como era de esperarse en la figura 4.13, las diferencias entre el primer y segundo salto se dan en los casos donde β es menor que cuatro. Para $\beta = 1.25, 2.0, 3.0$, notamos que los saltos pequeños son más frecuentes durante el segundo salto, y por ende, los saltos más largos son menos frecuentes. Una cuestión que surge de la gráfica anterior es cómo cambia la distribución de frecuencias de las longitudes de paso en la región crítica. A simple vista pareciera que se puede ajustar una ley de potencias a la distribución de frecuencias del primer salto y otra diferente a la distribución de frecuencias del segundo salto.

En la figura 4.14 se graficó la distribución de frecuencias de las longitudes de los

4. Modelo de optimización a segundo paso

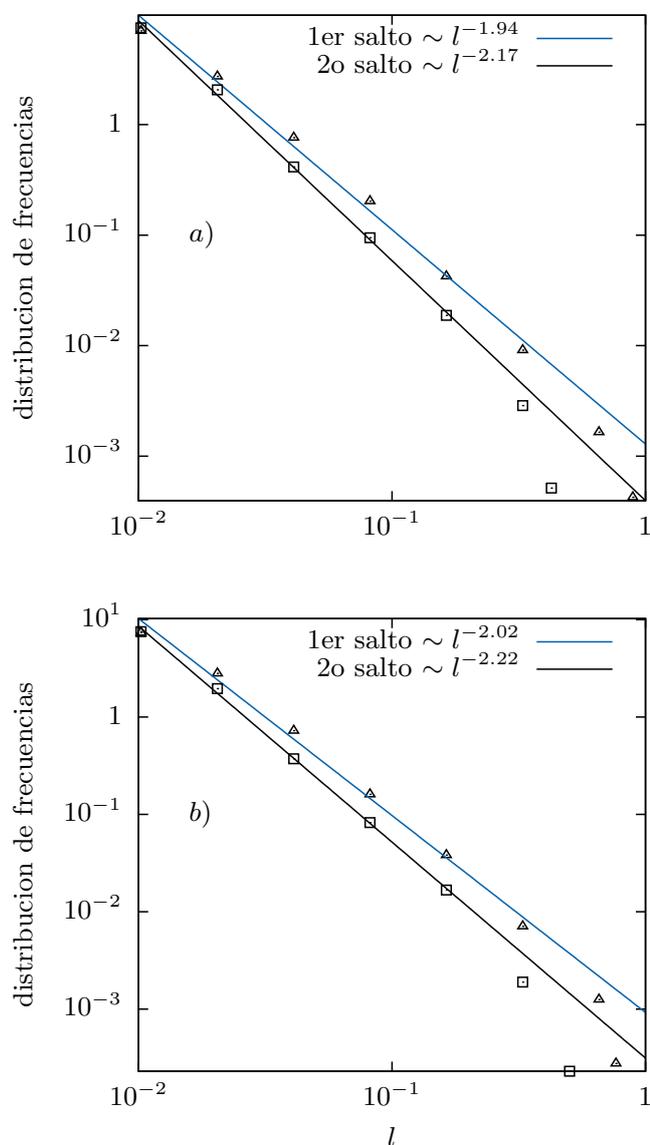


Figura 4.14: Distribución de frecuencias, con ajuste, de la longitud de los pasos diferenciando entre el primer y segundo salto en la o2p con binning logarítmico. Para a) $\beta = 2.9$ y b) $\beta = 3.0$.

saltos en la o2p, de igual manera diferenciando entre el primer y segundo salto de cada iteración. En ésta se ajustó una ley de potencias a cada una de las distribuciones observadas para los casos en que a) $\beta = 2.9$ y b) $\beta = 3.0$, sin tomar en cuenta los dos últimos puntos de cada distribución. La diferencia de la ley de potencias que se ajustan al primer y segundo salto confirman lo que se venía especulando con las gráficas anteriores, la optimización a segundo paso induce un comportamiento emergente que

establece diferencias entre el primer y segundo salto de cada iteración.

4.4. Desplazamiento cuadrático medio

Otra cantidad relevante y digna de ser analizada en este modelo es el desplazamiento cuadrático medio, que nos permite ver cómo es la difusión del agente en el dominio, para diferentes valores de β .

En la figura 4.15 se presenta el desplazamiento cuadrático medio de un ensamble de 50 trayectorias independientes, tanto en el modelo de optimización a primer paso como en el de optimización a segundo paso. Cabe resaltar que, en el modelo se supone que en cada unidad de tiempo el agente va de un blanco a otro, sin importar cuán lejos esté uno de otro.

De la figura 4.15, nótese que para el caso de $\beta = 1.25$, los movimientos tanto para la optimización a primer y segundo paso se muestran ligeramente superdifusivos, dado que la pendiente es ligeramente mayor que la unidad. Por otro lado, cerca de la región crítica, el movimiento es extremadamente subdifusivo; aunque intuitivamente se esperaría que el movimiento fuera superdifusivo, dado que la distribución de frecuencias de las distancias recorridas en este régimen se acerca a una ley de potencias como se ha mostrado. En estudios anteriores muestran que cuando un agente está restringido a moverse dentro de un dominio determinado, ya sea porque se mueve alrededor de su hogar o en alguna zona de interés, presenta un comportamiento extremadamente subdifusivo para tiempos largos [6]. Finalmente, para $\beta = 5.0$ el movimiento resulta estar en el régimen superdifusivo, a pesar de que el agente realice saltos pequeños entre blancos cercanos (ver figura 4.3 (c)).

La suposición anterior de que en cada unidad de tiempo el agente realice saltos entre un blanco y otro, sin importar la distancia que los separa, es inverosímil, ya que en cualquier escenario, todo caminante se mueve a una velocidad finita, es decir, entre más alejados estén dos blancos, mayor será el tiempo que le tome en ir de uno a otro.

Hasta ahora, con la suposición anterior se ha visto que los puntos visitados por el agente se asemeja a los puntos visitados en un vuelo de Lévy. Recordando que para hacer la conexión entre los vuelos de Lévy y las caminatas de Lévy lo que se hace es penalizar los saltos largos, es decir, entre más largo sea un salto, mayor tiempo le toma completarlo. Siguiendo este precepto, en las trayectorias del caminante, en ambos modelos considerados (optimización a primer y segundo paso), se fija una velocidad

4. Modelo de optimización a segundo paso

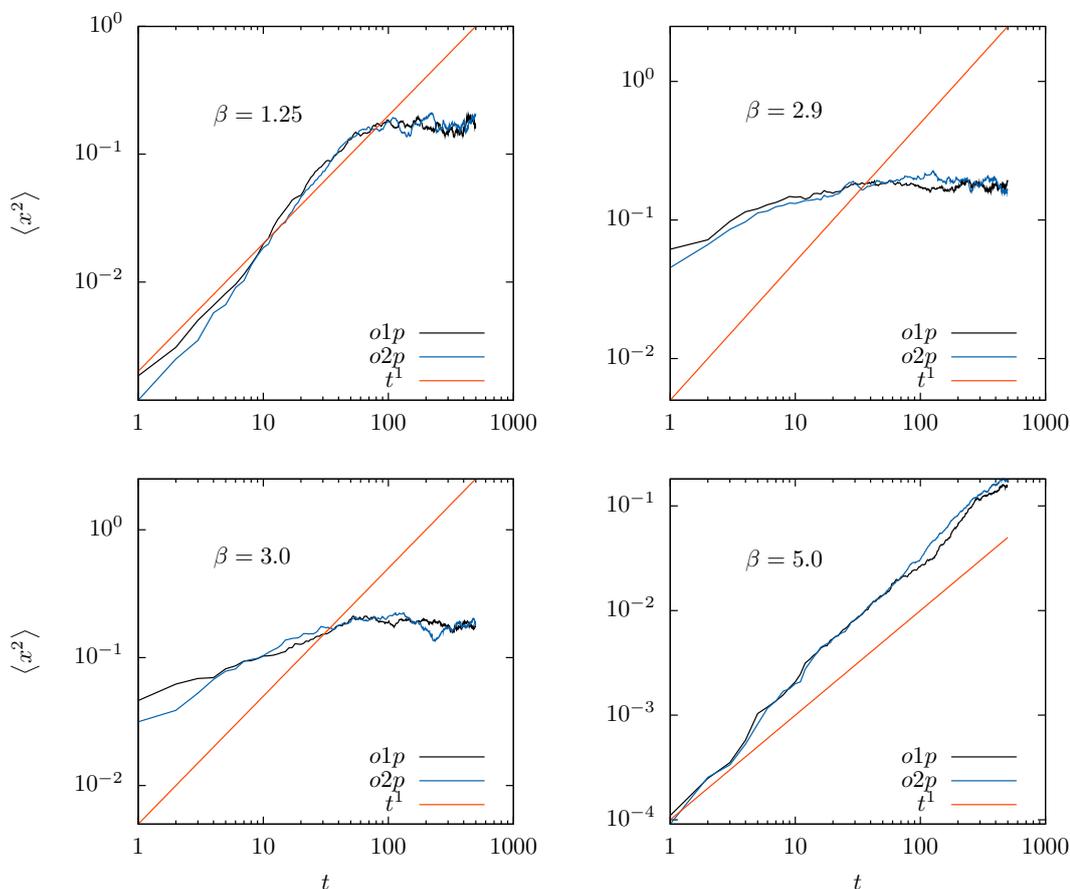


Figura 4.15: Desplazamiento cuadrático medio para algunos valores de β , las figuras son resultado del promedio de un ensamble de 50 trayectorias independientes, en este caso, se supone que en cada unidad de tiempo el agente va de un blanco a otro sin importar la distancia que los separe.

máxima para el caminante, o mejor dicho, se fija la distancia máxima que puede recorrer en cada unidad de tiempo. Una distancia máxima *ad hoc* es la distancia característica del sistema, l_0 . De esta manera, si el caminante recorre una distancia D entre dos blancos, con $D > l_0$, y tal que $\tau l_0 < D < (\tau + 1)l_0$ con $\tau \in \mathbb{N}$, entonces diremos que al agente le toma $\tau + 1$ unidades de tiempo ir de un blanco a otro que esta a una distancia D . De esta manera pasamos de los vuelos de Lévy a las caminatas de Lévy.

Nótese que inicialmente considerábamos que visitar n blancos le tomaba al agente n unidades de tiempo; una vez establecida una velocidad máxima, tenemos que al cabo de n unidades de tiempo el agente habrá recorrido n_1 blancos, con $n_1 \leq n$. En la figura 4.16 se muestran las trayectorias superpuestas del agente que se mueve sin una

4. Modelo de optimización a segundo paso

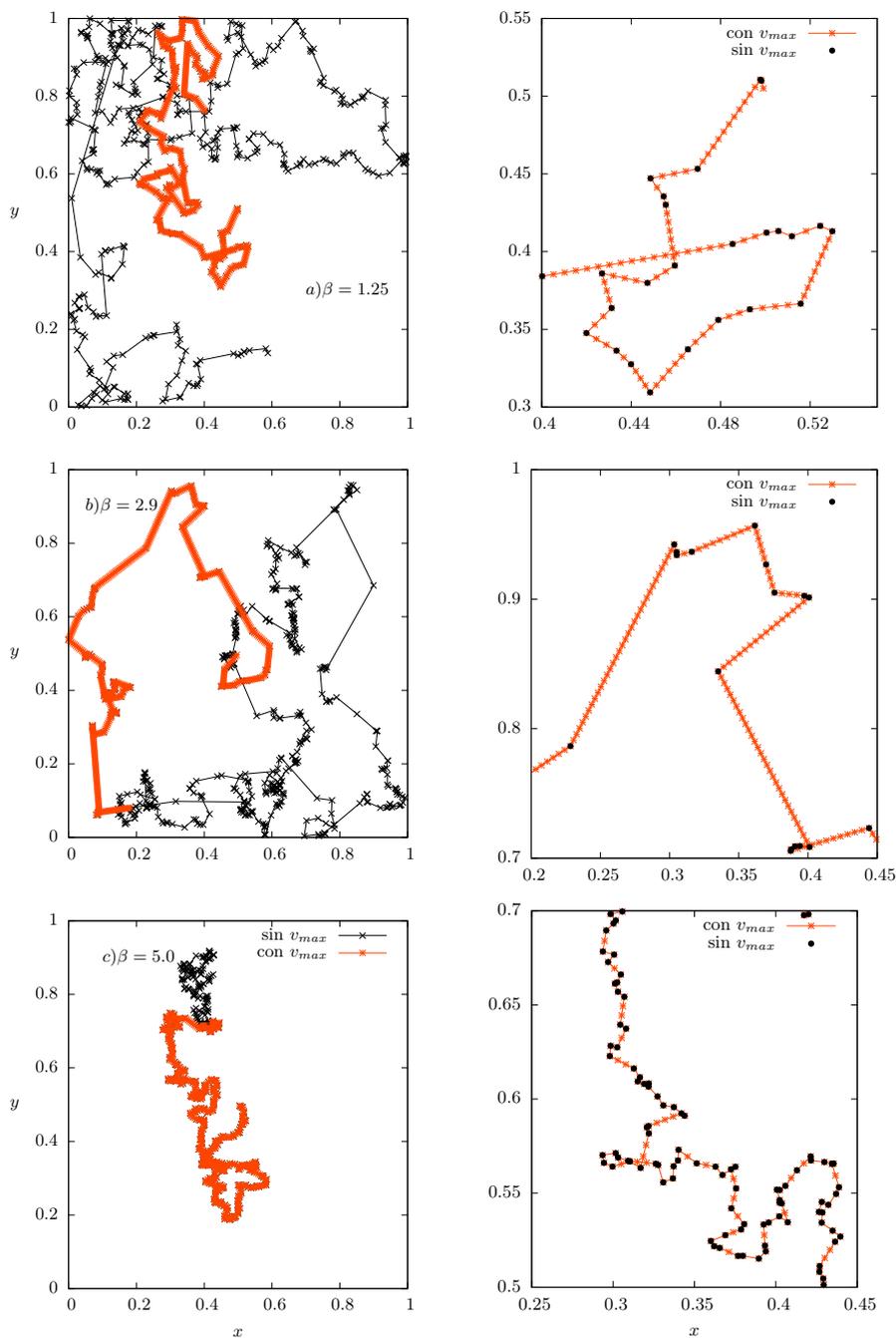


Figura 4.16: Izquierda: Superposición de las trayectoria de un agente que visita 500 blancos sin restricción en la velocidad y la trayectoria que seguiría al cabo de 500 unidades de tiempo suponiendo que se a lo más recorre una distancia l_0 en cada unidad de tiempo, es decir se mueve con una velocidad máxima v_{max} . Derecha: Acercamiento a alguna zona de interés. Nótese que, cuando no hay una v_{max} la posición del agente en cada unidad de tiempo coincide con la posición de los blancos. Para la optimización a segundo paso.

4. Modelo de optimización a segundo paso

velocidad máxima y visita 500 blancos, con la trayectoria que seguiría al cabo de 500 unidades de tiempo suponiendo que en cada unidad de tiempo recorre a lo más una distancia l_0 , es decir, a una velocidad máxima v_{\max} . Lo anterior se realizó para el agente que optimiza a segundo paso.

Una vez que se ha considerado el tiempo que le toma al agente moverse de un blanco a otro, ya sea que su movimiento optimice a primer o segundo paso, es factible calcular el desplazamiento cuadrático medio de un ensamble de 50 trayectorias independientes, considerando las primeras 500 unidades de tiempo. De esta manera se puede ver cómo cambia el movimiento cuando el agente optimiza a primer y segundo paso.

Para ver si hay un cambio en la difusión del agente debido al aumento en sus capacidades cognitivas, se presenta la figura 4.17 donde está graficado el desplazamiento cuadrático medio para la optimización a primer y segundo paso para algunos valores de β . De la figura se observa que, para todos los valores de β considerados, el movimiento es superdifusivo tanto en la o1p como en la o2p; sin embargo, la difusión máxima se presenta precisamente en la región donde hay máxima dispersión en las distancias recorridas, es decir, en la región crítica.

Resulta notable y consistente que, a pesar de que para todos los valores de β considerados se estableció una velocidad máxima, sea en el régimen crítico donde la difusión es mayor ($\langle X^2 \rangle(t) \sim t^{1.8}$). También es consistente que para $\beta = 5$ la difusión sea menor de entre los demás casos ($\langle X^2 \rangle(t) \sim t^{1.3}$), aunque el movimiento sigue siendo superdifusivo.

A pesar de lo anterior, no hay una diferencia apreciable en el tipo de difusión que sigue un caminante que optimiza su movimiento a primer paso, de uno que optimiza a segundo paso.

4. Modelo de optimización a segundo paso

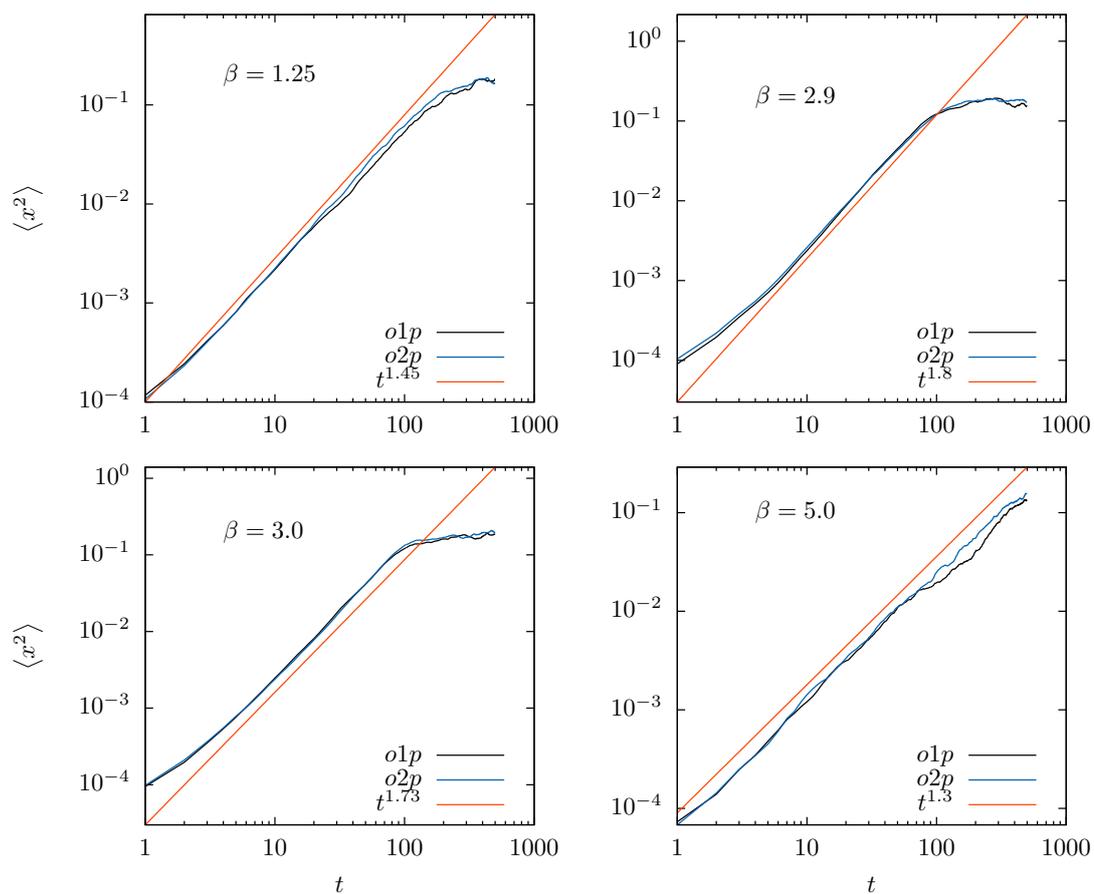


Figura 4.17: Desplazamiento cuadrático medio para algunos valores de β , en este caso, se supone que en cada unidad de tiempo el agente a lo más recorre una distancia l_0 , las figuras son resultado del promedio de un ensamble de 50 trayectorias independientes.

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo se estudió un modelo de movilidad de agentes con fin de caracterizar el comportamiento de un agente con amplias capacidades cognitivas que tiene pleno conocimiento de su entorno, de tal manera que en cada paso que da busca satisfacer dos necesidades y para ello analiza todo su entorno y elige la trayectoria que le sea óptima, en términos de recorrer la menor distancia y al mismo tiempo obtener la mayor satisfacción (cantidad de recursos).

Se acentúa que el modelo pueda representar el movimiento de personas que buscan obtener la mayor utilidad con la menor inversión posible, se habla de la optimización, de un agente económico, a segundo paso.

En la literatura se encuentran diversos trabajos donde se han reportado movimientos de tipo Lévy en diferentes animales forrajeros [4], así como en depredadores marinos [3, 5]. En tales estudios se muestra que los puntos (blancos) que visita el agente pueden ser generados mediante un vuelo de Lévy. La explicación recurrente es que un movimiento en vuelos de Lévy es la estrategia óptima en la búsqueda aleatoria de recursos (presas en este caso) distribuidos al azar.

Con el modelo de optimización a primer paso se mostró que efectivamente la estrategia óptima, en la búsqueda de recursos distribuidos al azar en un dominio, es cuando el agente da pasos cuyas longitudes siguen una distribución en ley de potencias, en el régimen de Lévy; sin embargo, en ese caso se hacen dos consideraciones importantes: *i*) El agente tiene pleno conocimiento de su entorno, y *ii*) Los recursos no están distribuidos uniformemente en los blancos, sino que obedecen una ley de potencias negativa. Por lo tanto, es la misma distribución de los recursos la que establece el patrón de Lévy en la longitud de los pasos del agente.

Del régimen diverso en adelante, $\beta \geq 3$, es donde se encuentran los desplazamientos en escalas múltiples que se asemejan a las caminatas de Lévy. Esto sugiere que los patrones de movimiento de tipo Lévy observados provengan de la distribución de los recursos y de la memoria de los caminantes.

Muchos de los resultados del modelo de optimización a primer paso siguen siendo validos cuando consideramos la optimización a segundo paso, entre los más importantes destacan que, el régimen crítico sigue alrededor de $\beta = 3$, es decir, la distribución de recursos en cada blanco induce caminatas cuyos puntos visitados se parecen a los que se visitarían en un vuelo de Lévy. Cuando se estudian estos movimientos como si fueran caminatas de Lévy, esto es, cuando se establece una velocidad máxima en el movimiento del agente, se encuentra que la difusión es máxima en el régimen crítico. Es razonable pensar que cuando un agente realiza una búsqueda de recursos en un ambiente disperso trata de maximizar el área de búsqueda mediante pasos largos, aunque poco frecuentes, seguido de una búsqueda local en pasos más cortos.

Por otro lado, el grado de difusión es prácticamente el mismo en el modelo de optimización a primer y segundo paso. Además, para cualquier valor del parámetro β el movimiento es superdifusivo en mayor o menor medida, como se mostró en la figura 4.17.

El modelo de optimización a segundo paso está pensado para un agente con gran capacidad cognitiva, debido al aumento de los cálculos que se tienen que realizar en cada paso. En el capítulo 4 se analizó cómo aumentan los cálculos entre al optimización a primer y segundo paso. Mientras que en la o1p el número de cálculos necesarios para dar un salto en cada iteración va como N , el número de blancos presentes; en la o2p el número de cálculos va como N^2 . Cuando N es grande, incluso el tiempo de computo requerido para hacer los cálculos crece de manera considerable.

En el modelo de o2p se sigue encontrando que la distribución de frecuencias de las distancias recorridas tienen un comportamiento muy parecido a una ley de potencias en el régimen crítico. Es sabido que grandes fluctuaciones conllevan a leyes de potencias, por lo que en la región donde se observa gran dispersión en el tamaño de las longitudes de paso es natural encontrar que siguen una distribución en ley de potencias, con las restricciones de las cotas en la distancias mínima y máxima que pueden aparecer.

Un aspecto importante y a la vez sorprendente en el modelo de o2p es la diferencia exacerbada entre el primer y segundo salto, como se mostró en la figura 4.13, dado que el segundo salto resulta ser mucho más provechoso que el primero. Pareciera que

el primer salto sólo sigue una estrategia de posicionamiento y en el segundo salto es cuando se toma ventaja de la posición para obtener la mayor cantidad de recursos. Se habla de que el modelo de o2p tiene comportamientos emergentes.

Bien podría pensarse en un modelo de optimización a tercer paso, donde el agente tuviera que elegir tres blancos a visitar en cada iteración, cada uno supeditado al anterior. De igual manera podría pensarse en un modelo de optimización al k -ésimo paso; sin embargo, el tiempo de computo requerido para realizar tales cálculos, y seguir con los supuestos aquí considerados, crece de forma considerable y lo hace inviable. De la comparación entre el modelo de o1p con el de o2p, se pueden extrapolar ciertos resultados. Como el aumento en la utilidad al aumentar la capacidad cognitiva, la observación de patrones en movimiento en leyes de potencias a partir de cierto régimen crítico y las sensibles diferencias entre cada uno de los saltos, es decir, el primer salto es mayor, seguido del segundo, después el tercero, etcétera.

En el problema del turista, el número de blancos presentes es el mismo número de blancos a visitar, el trabajo de computo requerido resulta inviable incluso para valores de $N = 20$. Sin embargo, este problema se ha atacado con diferentes enfoques y con algoritmos probabilistas con muy buenos resultados [55].

Dados los resultados del modelo, podría pensarse a la inversa. Ya se sabe cómo es la distribución de la longitudes de paso de un caminante con gran capacidad cognitiva que anda en busca de recursos, para diferentes ambientes, cada uno con cierta distribución de recursos dada por el parámetro β . Si ahora nos fijamos en la forma en que se mueve algún agente, en base a los patrones de su movimiento, se podría intuir cómo está constituido el medio en el que interacciona.

En este trabajo se han encontrado patrones en ley de potencia al estudiar movimientos de agentes. En diversos estudios de campo, se han encontrado los mismos patrones de movimiento, tanto en animales como en personas. Las leyes de potencias aparecen en diversas situaciones físicas, son importantes porque describen leyes generales, por no decir universales, de los procesos donde se encuentran. Incluso existen estudios donde aseveran que los seres humanos no sólo actuamos sino que también pensamos siguiendo patrones en leyes de potencias [10]. Analizar el alcance y validez de estas leyes fundamentales es todavía un tema abierto.

Queda mucho por hacer en lo que concierne a modelos de movilidad de agentes, dada la enorme cantidad de parámetros que influyen en la toma de decisiones de un caminante, con altas capacidades cognitivas, que efectúa un movimiento de búsqueda.

Referencias

- [1] M. Mitchell. *Complexity a guided tour*. Oxford Univerity Press, 2009 (vid. pág. [1](#)).
- [2] G. M. Viswanathan y col. “Lévy flight search patterns of wandering albatrosses”. En: *Nature* 381 (1996), págs. 413-415 (vid. págs. [1](#), [23](#), [29](#)).
- [3] G. M. Viswanathan y col. “Optimizing the success of random searches”. En: *Nature* 401 (1999), págs. 911-914 (vid. págs. [1](#), [24](#), [29](#), [72](#)).
- [4] G. Ramos-Fernández y col. “Lévy walk patterns in the foraging movements of spider monkeys”. En: *behav. Ecol. Sociobol.* 55 (2003), págs. 223-230 (vid. págs. [1](#), [21](#), [23](#), [24](#), [29](#), [72](#)).
- [5] O. Miramontes, D. Boyer y F. Bartumeus. “The Effects of Spatially Heterogeneous Prey Distributions on Detection Patterns in Foraging Seabirds”. En: *PLoS ONE* 7 (2012). journal.pone.0034317 (vid. págs. [1](#), [72](#)).
- [6] D. Boyer, M. C. Crofoot y P. D. Walsh. “Non-random walks in monkeys and humans”. En: *J. R. Soc. Interface* 9 (2012), págs. 842-847 (vid. págs. [1](#), [67](#)).
- [7] J. W. Kirchner, X. Feng y C. Neal. “Fractal stream chemistry and its implications for contaminant transport in catchments”. En: *Nature* 403 (2000), pág. 5244 (vid. págs. [1](#), [22](#)).
- [8] J. Szymanski y M. Weiss. “Elucidating the origin of anomalous diffusion in crowded fluids”. En: *Phys. Rev. Lett.* 103 (2009) (vid. págs. [1](#), [23](#)).

-
- [9] M. C. González, C. A. Hidalgo y A-L. Barabási. “Understanding individual human mobility patterns”. En: *Nature* 453 (2008), págs. 778-782 (vid. pág. 1).
- [10] A. Baronchelli y F. Radicchi. “Lévy flights in human behavior and cognition”. En: *Chaos, solitons and Fractals* 56 (2013). preprint, arXiv:1306.6533v1 [physics.soc-ph], pág. 101 (vid. págs. 1, 74).
- [11] W. Feller. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. Third. Vol. 1. John Wiley y Sons, 1968 (vid. pág. 2).
- [12] N. G. van Kampen. *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*. Third. Elsevier, 2007 (vid. pág. 3).
- [13] I. M. Sokolov J. Klafter. *First Steps in Random Walks: From Tools to Applications*. Oxford University Press, 2011 (vid. págs. 8, 10, 27).
- [14] G. H. Weiss. *Aspects and Applications of the Random Walk*. North-Holland, 1994 (vid. pág. 8).
- [15] W. Feller. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. Third. Vol. 2. John Wiley y Sons, 1970 (vid. pág. 9).
- [16] J. P. Sethna. *Entropy, Order Parameters and Complexity*. Oxford University Press, 2010 (vid. págs. 9, 10).
- [17] I. Golding y E. C. Cox. “Physical nature of bacterial cytoplasm”. En: *Phys. Rev. Lett.* 96 (2006). doi:http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.96.098102 (vid. págs. 10, 23).
- [18] I. M. Sokolov H. C. Berg. *Random Walks in Biology*. Princeton University Press, 1983 (vid. pág. 10).
- [19] L. Bachelier. “Theory of Speculation”. En: *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* 17 (1900). Louis Bachelier’s Theory of Speculation: The Origins of Modern Finance, Prince-

-
- ton University Press, Princeton, 2006, (traducido por M. Davis y A. Etheridge) (vid. pág. 10).
- [20] A. Einstein. En: *Ann. Phys.* 21 (1905), pág. 549 (vid. págs. 10, 21).
- [21] M. J. Perrin. *Brownian movement and molecular reality*. Taylor y Francis, London, 1910 (vid. págs. 12, 21).
- [22] L. E. Reichl. *A Modern Course in Statistical Physics*. John Wiley y Sons, 1998 (vid. págs. 13, 16).
- [23] M. F. Shlesinger, G. M. Sazlavsky y J. Klafter. “Strange Kinetics”. En: *Nature* 363 (2003), págs. 31-37 (vid. págs. 18, 19, 26).
- [24] T. Geisel. “Lévy Walks in Chaotic Systems: Useful Formulas and Recent Applications”. En: *Lévy flights and Related Phenomena in Physics, editao por G.M. Zaslavsky, Sringer-Verlarg* (1995) (vid. pág. 18).
- [25] T. Geisel, A. Zacherl y G. Radons. “Generic 1/f-noise in chaotic Hamiltonian dynamics”. En: *Physical Review Letters* 59 (1987), pág. 2503 (vid. pág. 18).
- [26] M. F. Shlesinger y J. Klafter. “Lévy walks versus Lévy flights”. En: *On the growth and form: fractal and non-fractal patterns in physics* (1986). edited by Stanley H. and Ostrowsky N; Martinus Nijho, Dordrecht, págs. 279-283 (vid. págs. 18, 28).
- [27] P. Lévy. *Théorie de láddition des Variables Aléatoires*. Gauthier-Villars, París, 1954 (vid. págs. 20, 22, 24).
- [28] T. Geisel, J. Nierwetberg y A. Zacherl. “Accelerated diffusion in Josephson junctions and related chaotic systems”. En: *A. Phys. Rev. Lett.* 54 (1985), págs. 616-619 (vid. págs. 20, 27).
- [29] E. Montroll y M. F. Shlesinger. *Studies in Statistical Mechanics, Vol. 11*. North-Holland, Amsterdam, 1984 (vid. pág. 20).

-
- [30] B. Mandelbrot. *The Fractal Geometry of Nature*. Freeman, San Francisco, 1982 (vid. págs. [20](#), [26](#)).
- [31] K. Pearson. “The problem of the random walk”. En: *Nature* 72 (1905), pág. 294 (vid. pág. [20](#)).
- [32] J. Klafter e I. M. Sokolov. “Anomalous diffusion spreads its wings”. En: *Physics World* 18 (2005), págs. 29-32 (vid. pág. [21](#)).
- [33] K. Ritchie et. al. “Detection of non-Brownian diffusion in the cell membrane in single molecule tracking”. En: *Biophysic. J.* 88 (2005), págs. 2266-2277 (vid. pág. [21](#)).
- [34] V. Pareto. *Cours d'Économie Politique*. Droz, Geneva, 1896 (vid. pág. [21](#)).
- [35] B. C. Arnold. *Pareto Distributions*. International Cooperative Publishing House, Maryland, 1983 (vid. pág. [22](#)).
- [36] L. L. Eliazar y M. F. Shlesinger. “Fractional motions”. En: *Physics Reports* (2013). doi:10.1016/j.physrep.2013.01.004 (vid. pág. [22](#)).
- [37] H. Scher y E. W. Montroll. “Anomalous Transit-Time Dispersion in Amorphous Solids”. En: *Physical Review B* 12 (1975), pág. 2455 (vid. pág. [22](#)).
- [38] M. Dentz y col. “Time behavior of solute transport in heterogeneous media: transition from anomalous to normal transport”. En: *Water Resources* 27 (2004), págs. 155-173 (vid. pág. [22](#)).
- [39] A. Caspi, R. Granek y M. Elbaum. “Enhanced diffusion in active intracellular transport”. En: *Physical Review Letters* 85 (2000), pág. 5655 (vid. pág. [24](#)).
- [40] T. Solomon, E. Weeks y H. Swinney. “Observation of anomalous diffusion and Lévy flights in a two-dimensional rotating flow”. En: *Physical Review Letters* 71 (1993), pág. 3975 (vid. pág. [24](#)).

-
- [41] M. F. Shlesinger, J. Klafter y B. J. West. “Lévy dynamics of enhanced diffusion: Application to turbulence”. En: *Physical Review Letters* 58 (1987), págs. 1100-1103 (vid. pág. 26).
- [42] D. Brockmann, L. Hufnagel y T. Geisel. “The Scaling Laws in Human Travels”. En: *Nature* 434 (2006), págs. 462-465 (vid. pág. 29).
- [43] F. Bartumeus y col. “Helical Lévy walks: adjusting searching statistics to resource availability in microzooplankton”. En: *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 100 12771–75 (2003) (vid. pág. 29).
- [44] D. Boyer, O. Miramontes y H. Larralde. “Lévy-like behaviour in deterministic models of intelligent agents exploring heterogeneous environments”. En: *J. Phys. A: Math. Theor* 42 (2009) (vid. págs. 29, 30, 35, 39, 43, 44, 47).
- [45] D. Boyer y O. López-Corona. “Self-Organization Scaling and Collapse in a Coupled Automaton Model of Foragers”. En: *Journal of Physics A* 42 (2009), pág. 4014 (vid. pág. 30).
- [46] O.L. Corona y col. “Lévy Flights, 1/f Noise and Self Organized Criticality in a Traveling Agent Model”. En: *Journal of Modern Physics* 4 (2013), págs. 279-283 (vid. págs. 30, 39).
- [47] D. Boyer y col. “Scale-free Foraging by Primates Emerges from their Interaction with a Complex Environment”. En: *Proc. R. Soc. B.* 273 (2006), págs. 1743-1750 (vid. págs. 30, 39).
- [48] B. J. Enquist y K. J. Niklas. “Invariant Scaling Relations Across uman Tree-dominated Communities”. En: *Nature* 410 (2001), págs. 655-660 (vid. págs. 30, 47).
- [49] M. E. J. Newmann. “Power laws, Pareto distributions and Zipf’s law”. En: *Contemporary Physics* 46 (2005), pág. 323 (vid. págs. 30, 39, 47).

-
- [50] F. Aurenhammer. “Voronoi Diagrams - A Survey of a Fundamental Geometric Data Structure”. En: *ACM Computing Surveys* 23 (1991), págs. 345-405 (vid. pág. 32).
- [51] A. Clauset, C. R. Shalizi y M. E. J. Newman. “Power law distributions in empirical data”. En: *SIAM Review* 51 (2009), págs. 661-703 (vid. pág. 34).
- [52] K. Black. *Business Statistics: For Contemporary Decision Making*. 7th. John Wiley y Sons, 2012 (vid. pág. 37).
- [53] J. Bruin. *The coefficient of variation*. Nov. de 2013. URL: http://www.ats.ucla.edu/stat/mult_pkg/faq/general/coefficient_of_variation.htm (vid. pág. 37).
- [54] R. V. Solé. *Phase Transitions*. Princeton University Press, 2011 (vid. pág. 38).
- [55] J. Jones y A. Adamatzky. “Computation of the Travelling Salesman Problem by a Shrinking Blob”. En: (2013). preprint, arXiv:1303.4969v2 (vid. págs. 50, 74).