



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
MAESTRÍA EN CIENCIAS (FÍSICA)
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

**OBTENCIÓN DEL ESPECTRO TOPOLÓGICO
DEL AGUJERO NEGRO DE KERR Y KERR-NEWMAN**

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:
Mario Agustín Torres Oviedo

TUTOR PRINCIPAL:
Dr. Hernando Quevedo Cubillos
Instituto de Ciencias Nucleares

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTORAL:
Dr. Erick Leonardo Patiño Jaidar
Dr. Rodolfo Patricio Martínez y Romero
Facultad de Ciencias

MÉXICO, D. F. (JULIO) 2014



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mi mamá, a mi papá
y a mi hermano

Índice

Índice	1
1. Introducción	3
2. Cuantización Topológica	10
2.1. Problemas de la Cuantización Canónica	10
El problema de los estados	11
El problema de los observables	12
El problema del tiempo	13
2.2. Cuantización de la gravedad	14
Cuantización canónica de la gravitación de Newton	15
Cuantización canónica de la gravitación de Einstein (formalismo ADM)	16
Otros formalismos	18
2.3. Formalismo de Cuantización Topológica	19
Definición y cuantización de observables	21
Definición de estados	23
Definición de evolución en el tiempo	23
3. Métrica de Kerr y Kerr-Newman	26
3.1. Propiedades geométricas de la métrica de Kerr	27
3.2. La métrica de Kerr en diferentes coordenadas	33
Coordenadas de Kerr-Schild	33
Coordenadas de Doran	34
4. Espectro topológico del agujero negro de Kerr y Kerr-Newman	36
4.1. Análisis en coordenadas Boyer-Lindquist	37
Espectro topológico euclideo	44
4.2. Análisis con coordenadas de Doran y Boyer-Lindquist	45

5. Conclusiones

49

Referencias

52

1. Introducción

Uno de los principales problemas de la Física Teórica desde hace 80 años es la cuantización del campo gravitacional. Gran número de investigadores y científicos (incluyendo diez premios Nobel) han intentado lograrlo sin resultado satisfactorio alguno.

El principal formalismo que se ha utilizado para lograr este cometido es el de la Cuantización Canónica, la cual ha sido la teoría más exitosa hasta nuestros días para cuantizar sistemas físicos, dando resultados de una precisión extraordinaria, y cuyo mayor triunfo ha sido construir el Modelo Estándar de Partículas hoy en día en uso. Sin embargo, a pesar del éxito tremendo de la Cuantización Canónica en cuanto a su predictibilidad en la descripción de los sistemas físicos de la naturaleza, existen algunos problemas fundamentales en la aplicación del formalismo canónico de cuantización a diversos sistemas físicos, los cuales han sido fuente de innumerables debates desde su concepción. Muchos de los aspectos conceptuales y matemáticos de la teoría siguen sin ser resueltos todavía.

El objetivo de la Cuantización Topológica es dar una alternativa al formalismo canónico, resolviendo o eliminando varios de los principales problemas que surgen al aplicar éste para la descripción de la naturaleza. El objetivo ulterior de desarrollar un formalismo alternativo al canónico es tener una herramienta matemáticamente consistente y lo suficientemente poderosa para describir fenómenos naturales que no pueden ser cubiertos por la Teoría Cuántica actual.

El desarrollo de este nuevo formalismo está todavía en proceso y la presente tesis, como parte de ese desarrollo, es la aplicación de la Teoría de Cuantización Topológica para la descripción de un sistema físico en particular: el agujero negro de Kerr. En específico la obtención del espectro topológico de sus parámetros, fenómeno natural cuya descripción no está bien definida en el formalismo canónico.

La tesis está dividida en tres secciones: la primera sección expone el formalismo de la Cuantización Topológica, dando primero una justificación del porqué del desarrollo de ésta; la segunda presenta la métrica del espacio-tiempo correspondiente al agujero negro de Kerr; y finalmente, en la última sección aplicamos el formalismo de la Cuantización Topológica a dicho agujero negro para la obtención de su espectro topológico.

Primera sección: Cuantización topológica

La primera sección comienza con una exposición de los principales problemas conceptuales de fondo de la teoría cuántica actual, tomando como base la descripción axiomática de la aplicación del formalismo de cuantización canónica y mencionando las principales inconsistencias conceptuales.

El primer problema a mencionar es el de la definición de los estados. Uno de los axiomas de la cuantización es el postulado de que los estados físicos forman un espacio de Hilbert, el cual si es de dimensión infinita, para poder ser separable debe ser isomorfo en particular al espacio de funciones de cuadrado integrable. Sin embargo la mecánica cuántica canónica hace uso de objetos matemáticos que no se encuentran en éste tipo de espacios, el ejemplo más claro es la utilización de la Delta de Dirac, la cual es de importancia clave en el formalismo canónico. Este problema, para fines prácticos, ha sido resuelto utilizando un espacio de estados que incluya estos objetos, sin embargo para varios físicos y matemáticos desde hace décadas sigue existiendo una discrepancia fundamental.

Otro de los principales problemas a resolver surge con la utilización de operadores cuánticos que representan observables físicas; en específico, el llamado *problema del ordenamiento*, debido a la naturaleza no conmutativa de los operadores cuánticos. Existe otro problema concerniente a los observables cuando se intenta cuantizar la gravedad, que surge debido a la no localidad de la teoría de la Relatividad General.

El último de los problemas que mencionaremos en este trabajo y uno de los más fundamentales en la concepción de una teoría cuántica de la gravedad es el llamado *problema del tiempo*, este se refiere al hecho de que la Cuántica Canónica utiliza al tiempo como parámetro privilegiado de derivación en los cálculos, mientras que en gravitación el tiempo no posee una posición privilegiada con respecto a las demás coordenadas.

Éstos y otros problemas de la Teoría Cuántica Canónica han sido y son hasta hoy fuente de innumerables discusiones en cuanto a su solución, su verdadera relevancia y sus consecuencias.

Continuamos entonces con el problema original mencionado al inicio de esta introducción: la cuantización del campo gravitacional. Varias y desde enfoques muy diversos han sido las formulaciones que han intentado lograr cuantizar la gravedad: después de la consolidación de la teoría cuántica canónica,

se intentó utilizarla para cuantizar el campo gravitacional, dando lugar al desarrollo del formalismo de Arnowitt-Deser-Misner (ADM), el cual hasta ahora no ha tenido éxito; de éste surgió la teoría de Gravedad Cuántica de Lazos como forma de dilucidar los problemas técnicos matemáticos que presenta la cuantización canónica de la gravedad; apareció también con otro enfoque la Teoría de Cuerdas, que representa un cambio radical de fondo en la concepción de la materia y la energía; surgieron también formalismos con fundamentos geométricos como el de Geometría No Conmutativa y el de Cuantización por Deformación, entre otros. El objetivo último de cuantizar el campo gravitacional ha logrado eludir a todas estas teorías hasta nuestros días.

La Cuantización Topológica es un formalismo alternativo para modelar la física con una base completamente geométrica y topológica. El desarrollo actual de la Cuantización Topológica se centra en satisfacer tres de los axiomas de los que debe partir una teoría de cuantización: la definición y formulación de observables, la definición de estados cuánticos y finalmente la formulación de ecuaciones que gobiernen su evolución en el tiempo. Las observables las definimos como las funciones que mapean del espacio de configuración al espacio de los reales y la intención es después obtener una discretización de la observable,

La herramienta principal de esta teoría son los haces fibrados principales. Los cuales son un tipo particular de haces fibrados en el que se utiliza el grupo de estructura como fibra.

Para obtener un espectro topológico de las observables de un sistema en Cuantización Topológica, lo realizamos por medio de dos métodos diferentes: uno de estos métodos consiste en utilizar como herramienta los invariantes topológicos del espacio total del haz fibrado principal y el otro método obtiene condiciones de cuantización por medio de las condiciones de compatibilidad que se deben satisfacer en la construcción de una conexión definida en todo el espacio.

La idea central de este segundo método es la construcción completa de un haz fibrado principal, para lo cual es necesario definir y construir todos sus elementos: en el caso de campos toma como espacio base el espacio-tiempo y en el caso de sistemas mecánicos el espacio base es el espacio de configuraciones; como fibra se toma el grupo de Lie asociado a cualquier simetría natural que posea el sistema. Para la construcción completa del haz fibrado, se necesita construir una conexión que esté completamente definida en todo el espacio.

Si en la construcción del haz fibrado principal éste se puede cubrir con una sola carta (U, ϕ) , el haz se llama *trivial* y por lo tanto en principio se puede construir una conexión que esté definida en todo el espacio. En cambio, para un espacio que no puede ser cubierto por un solo abierto, se necesitan funciones de transición t_{ij} que “unan” las diferentes cartas en las regiones donde traslapan y corresponden a transformaciones de norma Λ_{ij} de las conexiones en los diferentes abiertos, estas transformaciones de norma deben cumplir en general con ciertas condiciones de compatibilidad. De estas condiciones de compatibilidad es de donde obtendremos condiciones de cuantización de los parámetros del sistema.

La definición de estados cuánticos y de evolución en el tiempo en este formalismo todavía están en desarrollo. Sin embargo, de manera preliminar consideramos que los estados cuánticos se definen como secciones locales σ del haz fibrado, y la evolución en el tiempo está determinada por los transportes en el espacio total del haz fibrado.

Segunda sección: Métrica de Kerr

Como preliminar para la aplicación del formalismo de Cuantización Topológica al agujero negro de Kerr y Kerr-Newman, en la segunda sección exponemos un análisis general de la métrica de Kerr y su generalización a Kerr-Newman.

Las soluciones exactas de las ecuaciones de campo de Einstein de la Relatividad General se ha demostrado se dividen en tres familias: las soluciones para un espacio-tiempo estático y esféricamente simétrico corresponden a la métrica de Schwarzschild, las soluciones con las mismas simetrías pero con la presencia de carga eléctrica corresponden a la métrica de Reissner-Nördstrom, y finalmente las soluciones para un espacio-tiempo estacionario y con simetría axial corresponden a la solución de Kerr. Estas tres soluciones corresponden a tres tipos de agujero negro: un agujero negro con simetría esférica, un agujero con carga eléctrica y un agujero negro con momento angular, respectivamente.

Por el teorema llamado de “no hair”, los agujeros negros pueden describirse completamente por medio de tres parámetros: la masa M , la carga eléctrica e y el momento angular por unidad de masa a . En el caso del agujero negro de Kerr, los dos parámetros que aparecen en su métrica son la masa y el momento angular. La solución correspondiente a los agujeros negros de Kerr se subdivide a su vez en tres subfamilias, dependiendo de la magnitud de estos dos parámetros: el agujero negro lento

cuando $a < M$, el agujero negro extremo cuando $a = M$ y finalmente el agujero negro rápido $a > M$ que como veremos corresponde a una singularidad desnuda.

Entre las diferentes características que distinguen a las tres familias, el agujero negro de Kerr se distingue especialmente porque la singularidad a la que da lugar no es un punto como en los casos de Schwarzschild y Reissner-Nördstrom, sino que es un anillo. La forma en que se construye la variedad completa de la métrica de Kerr es “pegando” una copia del espacio-tiempo de Kerr al cruzar la singularidad de anillo hacia $r < 0$.

Las tres subfamilias de Kerr poseen características que las distinguen, siendo la más distintiva el hecho de que el agujero negro lento da lugar a dos horizontes de eventos: el horizonte externo de radio mayor r_+ y el horizonte interno de radio menor r_- . Si fijamos el valor de la masa $M \neq 0$, a medida que va aumentando el momento angular a del agujero negro, estos horizontes van acercándose hasta que en el caso del agujero negro extremo ambos coinciden en un sólo horizonte, y aumentando todavía más el momento angular finalmente se llega al agujero negro rápido que no posee horizontes, por lo que representan una singularidad desnuda.

Los horizontes antes mencionados corresponden a regiones con valor de r donde la métrica se hace singular, sin embargo al analizar las propiedades geométricas de la métrica, nos damos cuenta que estas singularidades son en realidad producidas por la elección de coordenadas utilizada para describir el espacio-tiempo; en cambio, la singularidad de anillo es una singularidad “real” donde la curvatura se vuelve infinita. A las primeras singularidades antes mencionadas les llamamos *singularidades de coordenadas* y a la segunda le denominamos *singularidad de curvatura*.

El agujero negro que analizaremos en esta tesis es el agujero negro lento de Kerr. Los horizontes dividen de manera efectiva al espacio-tiempo en tres bloques distintos: bloque I ($r_+ < r < +\infty$), bloque II ($r_- < r < r_+$) y bloque III ($-\infty < r < r_-$). Una particularidad importante de este agujero negro es que la coordenada tipo tiempo de la métrica se convierte en tipo espacio al cruzar el horizonte r_+ y vuelve a ser de tipo tiempo cuando cruza el horizonte r_- hacia la singularidad.

Mencionamos después brevemente el análisis de este agujero negro en diferentes coordenadas.

Tercera sección: obtención del espectro topológico de Kerr

En esta última sección aplicamos el formalismo de Cuantización Topológica a la modelación del agujero negro de Kerr, para poder obtener su espectro de energía.

El método que utilizamos para la obtención del espectro es por medio de las condiciones de compatibilidad. Utilizamos para desarrollar los cálculos el formalismo de Cartan de tétradas para trabajar de manera local. Construimos un haz fibrado principal para modelar al sistema, utilizando como espacio base al espacio-tiempo M de cuatro dimensiones del agujero negro, la fibra estándar que utilizaremos es el grupo de Lorentz $SO(3, 1)$ ya que es la simetría correspondiente a la invariancia de Lorentz que la teoría de la Relatividad posee en cada punto.

Para la construcción del haz fibrado utilizamos primero las coordenadas llamadas de Boyer-Lindquist, aprovechando las singularidades que presenta la métrica en los horizontes en estas coordenadas para así utilizar más de una carta para cubrir el espacio y en el traslape de éstas poder extraer alguna condición de cuantización por medio de las condiciones de compatibilidad. Al realizar los cálculos prescritos por este procedimiento nos damos cuenta que las transformaciones de norma necesarias para eliminar las singularidades en el traslape de los abiertos son funciones univaluadas, por lo que no surge ninguna condición de cuantización. Para corroborar esto analizamos la métrica del sistema en coordenadas diferentes.

Utilizamos las llamadas coordenadas de Doran, que son una generalización de las coordenadas de Painlevé-Gullstrand utilizadas en el caso de la geometría de Reissner-Nördstrom. Estas coordenadas son transparentes a los horizontes, pero tienen la característica que solamente están definidas para $r > 0$. Calculamos las componentes de la conexión en estas coordenadas y notamos que la conexión es regular en todo el espacio cubierto por las coordenadas de Doran. Notamos entonces, que haciendo uso combinado de las coordenadas de Boyer-Lindquist y las de Doran, podemos definir una conexión que sea regular en todo el espacio-tiempo de Kerr. En efecto, en el Bloque III definido por las coordenadas de Boyer-Lindquist, la conexión es regular, mientras que en toda la región con $r > 0$ la conexión en coordenadas de Doran es regular. Haciendo el traslape en la región $0 < r < r_-$ la conexión queda completamente definida con una simple transformación de coordenadas en la región de traslape.

Esto demuestra que no surgen condiciones de cuantización para este campo gravitacional con esta simetría.

Finalmente, mencionamos el resultado obtenido anteriormente por otro investigador, en el que se obtiene un espectro topológico del agujero negro de Kerr-Newman pero esta vez utilizando como fibra al grupo $U(1)$.

2. Cuantización Topológica

2.1. Problemas de la Cuantización Canónica

El formalismo canónico de la teoría cuántica moderna es una de las formulaciones físicas más exitosas en la actualidad. Sus resultados son de una exactitud que no deja lugar a dudas sobre su validez física.

Sin embargo, el formalismo de Cuantización Canónica sufre de varios problemas conceptuales que continúan sin tener una solución correcta. En esta sección analizaremos algunos de estos problemas, más adelante introduciremos el formalismo de Cuantización Topológica y veremos como lidia esta formulación con dichas cuestiones.

Con el objetivo de describir de manera rigurosa una teoría de cuantización, se han considerado un conjunto de axiomas a partir de los cuales puede establecerse la cuantización de sistemas físicos [6] [13] [15] [14], aquí nos limitaremos al caso de sistemas con un número finito de grados de libertad:

1. Axioma de estados.- se debe definir un espacio de Hilbert que esté conformado por los estados cuánticos del sistema, de los cuales no todos son necesariamente físicos. Este espacio debe ser un espacio vectorial, con una norma y producto interno definidos, y debe ser *separable*, es decir, debe ser posible definir una base en términos de la cual puedan expresarse todos los demás estados del espacio.
2. Axioma de las observables.- a partir de las observables clásicas, se deben definir observables cuánticas a las cuales estén asociadas operadores que actúen sobre los estados del espacio de Hilbert, mapeando estos últimos a otros estados. Estas observables deben satisfacer relaciones de conmutación entre ellas.

$$q \rightarrow \hat{q}, \quad p \rightarrow \hat{p}, \tag{2.1}$$

$$[\hat{q}_i, \hat{q}_j] = 0, \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0, \quad [\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar.$$

3. Axioma de evolución en el tiempo.- la evolución en el tiempo debe estar definida por una ecuación

de movimiento que gobierne la forma en que los estados cambian a lo largo del paso del tiempo. En general, el generador de la evolución en el tiempo será el operador Hamiltoniano derivado de la función Hamiltoniana del sistema físico clásico que se quiere cuantizar.

4. Axioma de la probabilidad.- los valores de las observables están dados probabilísticamente. El valor esperado de una observable se obtiene a partir de la probabilidad de las mediciones de muchos sistemas físicos idénticos, mediante la ecuación:

$$\langle \hat{O} \rangle = \frac{\langle \psi | \hat{O} | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}. \quad (2.2)$$

5. Axioma de los compatibilidad.- para que un estado del espacio de Hilbert sea un estado físico debe ser el eigenestado de un operador cuántico asociado a una observable:

$$\hat{A}|a\rangle = a|a\rangle. \quad (2.3)$$

Cuando inentamos describir el formalismo de la Cuantización Canónica por medio de estos axiomas, encontramos varios problemas de índole conceptual. A continuación presentamos algunos de ellos.

El problema de los estados

El primer problema de fondo matemático del formalismo canónico que mencionaremos surge en la definición y uso del espacio de Hilbert [14]. Un espacio de Hilbert está definido como un espacio vectorial completo con una norma definida y un producto interno definido. Una de las características del espacio de Hilbert es que debe ser *separable*, es decir, debe ser posible definir una base de vectores linealmente independientes que generen todo el espacio, es decir todos los elementos del espacio de Hilbert deben poder ser escritos como una suma lineal de elementos de la base. Es en este último punto la fuente de conflicto: el teorema de Schmidt o teorema de expansión de eigenfunciones establece que para que un espacio de Hilbert sea separable debe ser de dimensión finita, o en caso de que sea infinita el espacio de Hilbert debe ser isomorfo a l^2 , es decir el espacio de secuencias de Cauchy de cuadrado sumable:

$$l^2 = \{g_n : \sum_n |g_n|^2 < \infty\},$$

y en particular isomorfo al espacio de funciones de cuadrado integrable:

$$L^2 = \{f : \int |f|^2 < \infty\}.$$

EL problema reside en que en el formalismo de Cuantización Canónica, es necesario hacer uso de objetos matemáticos que no se encuentran en estos espacios. El ejemplo por excelencia es la utilización de la delta de Dirac, la cual es crucial para el formalismo cuántico, ya que es utilizada para los cálculos en sistemas cuánticos de dimensión infinita y no forma parte del espacio de Hilbert que definimos en el primer axioma de cuantización; otro ejemplo de este problema es el uso de la función exponencial en la mecánica cuántica, la cual tampoco se encuentra en un espacio de Hilbert.

Dada esta discrepancia fundamental, actualmente, en el formalismo canónico se hace uso del llamado espacio de Hilbert *equipado* el cual incluye funciones como la exponencial y distribuciones como la delta de Dirac. Sin embargo, si nos basamos de manera rigurosa en los axiomas antes mencionados, el problema sigue estando presente. Como asevera von Neumann [14] acerca de la necesidad de utilizar la delta de Dirac o la función exponencial: “[...] sólo su éxito en la aplicación física puede justificar su uso en la mecánica cuántica.”

El problema de los observables

El problema en la definición de los observables cuánticos. Cuando se aplica el formalismo canónico para cuantizar sistemas físicos clásicos surge una ambigüedad en el momento de intentar definir el límite clásico del sistema cuántico resultante. A este problema se le llama el *problema del ordenamiento*.

Las observables clásicas son cantidades que matemáticamente conmutan ante el producto de cualquiera dos de ellas, en cambio, en el formalismo cuántico, los operadores cuánticos asociados a observables no son conmutativos ante el producto. Esto implica que existe una ambigüedad en la definición del operador cuántico asociado al producto de dos observables:

$$\begin{array}{ccc}
 a \rightarrow \hat{A} & & \hat{A}\hat{C} \\
 & \Longrightarrow & ac \xrightarrow{?} \\
 c \rightarrow \hat{C} & & \hat{C}\hat{A}
 \end{array}$$

En el ejemplo arriba, la elección de uno u otro de los ordenamientos da una cuantización totalmente diferente, y no existen hasta ahora transformaciones unitarias conocidas que relacionen ambas para la mayoría de los sistemas físicos.

En el caso de la cuantización de la Gravitación, la definición de los observables presenta otro problema de fondo: la teoría de la relatividad es no local, por lo que las observables no están definidas con respecto a un punto específico en el espacio ya que la teoría es invariante ante difeomorfismos activos, la teoría cuántica en cambio es una teoría local, las observables están ancladas a un punto específico. Conciliar esta discrepancia es de suma importancia si lo que se desea es aplicar un formalismo de cuantización a la gravitación de Einstein.

El problema del tiempo

Este es uno de los problemas más fundamentales en el intento de una posible cuantización de la gravitación. Las estructuras básicas de las formulaciones matemáticas de la física son las ecuaciones diferenciales, la dinámica de las teorías actualmente en uso descansan en la utilización de derivadas como codificación del cambio.

En particular la teoría canónica desarrolla su formulación utilizando al tiempo como parámetro para medir este cambio en todos los cálculos. Toda la dinámica de la cuántica canónica sucede en el espacio (de 3 dimensiones) y se mide con respecto al tiempo (dimensión adicional). Sus ecuaciones diferenciales utilizan derivadas respecto a un tiempo absoluto y privilegiado.

Para la teoría de la Relatividad de Einstein, en cambio, el tiempo es simplemente una más de las coordenadas utilizadas para describir el espacio tiempo, de la misma naturaleza que las tres coordenadas espaciales restantes, formando así el espacio-tiempo de cuatro dimensiones. Es aquí donde radica uno de los principales obstáculos cuando se intenta fundir ambas teorías: surge el conflicto para la teoría cuántica de justificar el porqué privilegiar cualquiera de estas cuatro dimensiones por encima de las

demás para utilizarla como base para medir la dinámica.

Siendo las cuatro dimensiones del espacio-tiempo exactamente de la misma naturaleza, presentaría una arbitrariedad de la teoría el elegir cualquiera de ellas por sobre de las otras para utilizarla como parámetro en las derivadas de sus ecuaciones. Por otro lado, el intentar definir un operador cuántico para el tiempo \hat{t} presentaría la dificultad de definir la operación de derivación de un operador con respecto a otro.

Un ejemplo del problema del tiempo en la cuantización de la gravitación se presenta en la formulación Arnowitt-Deser-Misner, el cual veremos en la siguiente sección.

El problema del tiempo sigue siendo un problema sin resolver.

Como vemos, el formalismo canónico para cuantizar sistemas físicos tiene problemas fundamentales presentes en el fondo de la teoría. Para algunos, la presencia de estos conflictos no resueltos es una posible causa de los infructuosos intentos por cuantizar el campo gravitacional utilizando esta formulación. Sobre la cuantización de este campo hablaremos en la siguiente sección.

2.2. Cuantización de la gravedad

Desde la concepción de la teoría cuántica canónica se ha intentado encontrar una teoría que describa de manera cuántica a la gravitación, esta empresa ha tenido diversas motivaciones: la unificación de los campos fundamentales en una sola teoría, la necesidad de una teoría que pueda describir y analizar fenómenos gravitacionales relativistas a escalas cuánticas, en específico, las singularidades de los agujeros negros y la del Big Bang, la esperanza que esta posible teoría lidiara con esas singularidades que escapan el alcance de las teorías actuales, y muchas más razones.

En efecto, desde la aparición de la Mecánica Cuántica, la comunidad científica se abocó a cuantizar todos los campos fundamentales de la naturaleza, siendo el campo gravitacional el único que hasta ahora ha eludido todos los intentos de cuantizarlo. Exponemos aquí de manera general algunos de los trabajos que se han desarrollado en torno a este objetivo:

Cuantización canónica de la gravitación de Newton

Los primeros pasos para una cuantización de la gravedad fue el intento de cuantizar el campo gravitacional newtoniano. Considerando el campo gravitacional como un campo escalar $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ cuya función Lagrangiana es:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{8\pi G} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - \rho \varphi. \quad (2.4)$$

Aquí $g^{\mu\nu}$ es una métrica euclídeana en tres dimensiones, G es la constante de la gravitación universal de Newton y ρ es la distribución de materia que genera el campo gravitacional. Aplicando ahora los axiomas de cuantización mencionados en la sección anterior, se definen estados cuánticos ψ y observables $\varphi \rightarrow \hat{\varphi}$. El problema grave surge cuando aplicamos el axioma de evolución en el tiempo (axioma 3); para ello obtenemos primero el Hamiltoniano clásico $\mathcal{H} = p^\mu \partial_\mu \varphi - \mathcal{L}$, definiendo los momentos multisimplécticos $p^\mu = \partial_{\varphi, \mu} \mathcal{L}$ (donde la coma representa derivada parcial de φ con respecto a μ) y lo promovemos a operador cuántico, el cual al reescribirlo utilizando operadores queda de la siguiente manera:

$$\hat{\mathcal{H}} = -2\pi G g_{\mu\nu} \hat{p}^\mu \hat{p}^\nu + \rho \hat{\varphi}, \quad (2.5)$$

donde: $\hat{p} = \frac{1}{2\rho} \nabla$.

La ecuación de evolución queda entonces [11]:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{\mathcal{H}} \psi \implies i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{2\rho} \nabla^2 \psi + \rho \varphi \psi, \quad (2.6)$$

donde φ debe satisfacer la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 \varphi = 4\pi G \rho |\psi|^2, \quad (2.7)$$

donde $\rho |\psi|^2$ representa la probabilidad de la distribución de materia.

Debido al segundo término en el lado derecho de la ecuación de evolución (2.6), ésta es no lineal. Es aquí donde reside el problema: una de las bases experimentales de la cuántica es el principio de superposición, que matemáticamente se deriva de la posibilidad de separar en una suma lineal cualquier

solución de la ecuación de evolución. Si la ecuación es no lineal, como es este caso de la cuantización de la gravedad newtoniana, entonces las soluciones no reproducen el principio de superposición [11], lo cual es un problema muy fuerte para esta formulación de la cuantización de la gravedad.

Cuantización canónica de la gravitación de Einstein (formalismo ADM)

La cuantización canónica a la teoría de gravitación de Einstein, se desarrolló el formalismo de Arnowitt, Deser y Misner, llamado por sus siglas formalismo ADM. Esta formulación inicia asumiendo el espacio-tiempo con métrica lorentziana globalmente hiperbólico $(M, g_{\mu\nu})$; a este espacio se le hace una foliación en hipersuperficies tipo espacio Σ_t que poseen una métrica inducida de tres dimensiones q_{ij} , las superficies Σ están parametrizadas por una función t , la cual se descompone en una parte normal a la hipersuperficie llamada función *lapso* N y una parte tangencial N^i llamada función *desplazamiento* (espacial) (Figura 2.1).

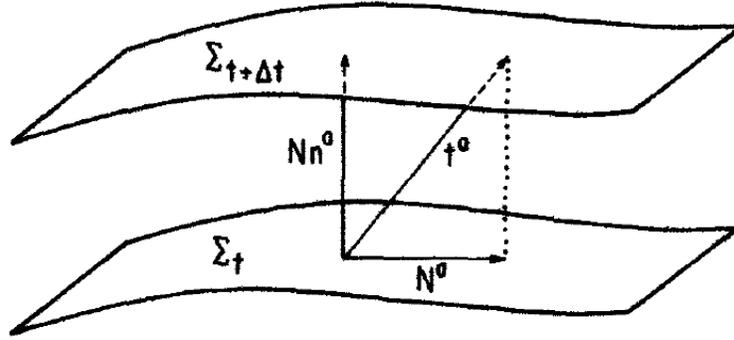


Figura 2.1: Foliación del espacio-tiempo (Obtenido de Wald [3] Fig. 10.2)

El elemento de línea de este espacio foliado se ve de esta manera:

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + q_{ij} (N^i dt + dx^i) (N^j dt + dx^j). \quad (2.8)$$

En este formalismo se considera a la métrica q_{ij} como la coordenada generalizada y sus momentos generalizados $\pi^{ij} = \delta\mathcal{L}/\delta q_{ij}$ están linealmente relacionados con la curvatura extrínseca K^{ij} . Se construye la función Lagrangiana y a partir de ella una función Hamiltoniana y se define la acción de

Einstein-Hilbert en estos términos [1] [11] [13]:

$$S_{EH} = \int dt \int_{\Sigma} d^3x (\pi^{ij} q_{ij} - N\mathcal{H} - N^i \mathcal{H}_i), \quad (2.9)$$

donde:

$$\begin{aligned} \pi_{ij} &= \frac{1}{16} \sqrt{q} (K^{ij} - q^{ij} K), \\ \mathcal{H} &= \frac{16}{\sqrt{q}} (\pi^{ij} \pi_{ij} - \frac{1}{2} \Pi^2) - \frac{1}{16} \sqrt{q} R^{(3)}, \\ \mathcal{H}^i &= -2 \nabla_j \pi^{ij}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Identificamos en la acción (2.9) que el segundo y tercer término del integrando son constricciones, ya que el Lagrangiano de este sistema no es regular. En esta expresión, la función lapso N y las funciones desplazamiento N^i hacen las veces de multiplicadores de Lagrange y variando la acción con respecto a estos multiplicadores, obtenemos las constricciones:

$$\begin{aligned} \frac{\delta S_{EH}}{\delta N} = \mathcal{H} = 0, & \quad \text{constricción de Hamilton,} \\ \frac{\delta S_{EH}}{\delta N^i} = \mathcal{H}^i = 0, & \quad \text{constricción de Gauss.} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Aplicando a continuación los axiomas de cuantización, Por el formalismo con constricciones desarrollado por Dirac para sistemas singulares, los estados cuánticos son aniquilados por las constricciones; en este caso un estado cuántico cualquiera $\Psi(q_{ij})$ es aniquiliado por la acción del operador cuántico $\mathcal{H} \rightarrow \hat{\mathcal{H}}$ correspondiente a la constricción de Hamilton:

$$\hat{\mathcal{H}}\Psi = 0. \quad (2.12)$$

Se ha demostrado que si se resuelve esta igualdad, la ecuación correspondiente a la constricción de Gauss y la ecuación de evolución construida con los operadores \hat{q}_{ij} y $\hat{\pi}^{ij}$ tienen también solución; en sí esto nos dice que la cuantización de la gravedad por medio del formalismo canónico se reduce a resolver la ecuación (2.12), ésta es llamada la ecuación de Wheeler-DeWitt [11], que escrita de manera explícita:

$$-16\pi G G_{ijkl} \frac{\delta^2 \Psi}{\delta q_{ij} \delta q_{kl}} - \frac{1}{16\pi G} R^{(3)} \Psi = 0, \quad (2.13)$$

donde: $G_{ijkl} = \frac{1}{2\sqrt{q}} (q_{ik}q_{jl} + q_{il}q_{jk} - q_{ij}q_{kl})$.

En esta ecuación (2.13) q_{ij} es la métrica espacial inducida en las superficies Σ y que cumple aquí la función de variable dinámica, G_{ijkl} es denominada la *supermétrica* del espacio de “geometrías tridimensionales” definidas por las métricas q_{ij} , llamado *superespacio*, y $R^{(3)}$ es el escalar de curvatura espacial definido en las hipersuperficies tridimensionales a partir de la métrica inducida.

La ecuación de Wheeler-DeWitt sólo se ha podido resolver para modelos con grados de libertad reducidos llamados minisuperespacios y midisuperespacios, estas soluciones corresponden a la llamada Cosmología Cuántica. Hasta ahora no existen soluciones a la ecuación para la métrica completa con todos sus grados de libertad.

En la ecuación de Wheeler-DeWitt también se puede apreciar una manifestación del problema del tiempo mencionado anteriormente: ésta es la ecuación diferencial que gobierna la evolución de los estados cuánticos y, sin embargo, no aparece el tiempo en ningún lugar de la expresión; en esta ecuación las derivadas son con respecto a una métrica Riemanniana espacial y no con respecto al tiempo.

Otros formalismos

A lo largo del tiempo han surgido otras teorías con el objetivo de cuantizar el campo gravitacional: teoría de cuerdas, gravedad cuántica de lazos, formalismos de geometría no conmutativa, cuantización por deformación, etc.

Algunos de ellos basados en resultados anteriores, como por ejemplo, la teoría de gravedad cuántica de lazos, la cual se centra en aspectos técnicos y matemáticos a resolver basados en el formalismo ADM antes mencionado.

Otros buscan cambios radicales en la concepción fundamental de la materia y la energía, como por ejemplo la teoría de cuerdas.

Muchos de estos formalismos llevan varias décadas de desarrollo y dando lugar a un gran enriquecimiento en el conocimiento de la física y de la matemática, sin embargo, su objetivo fundamental sigue eludiendo a todas y cada una de estas teorías.

2.3. Formalismo de Cuantización Topológica

La Cuantización Topológica es un formalismo alternativo a la cuantización canónica. Esta teoría tiene una base puramente geométrica y topológica a diferencia de la teoría canónica que está basada sobretodo en el análisis funcional. La intención del formalismo es desarrollar una estructura matemática axiomática y rigurosa, evitando así caer en arbitrariedades y ambigüedades en los conceptos en los que está basada la formulación matemática.

La Cuantización Topológica parte un postulado central que sostiene que el universo es por naturaleza cuántico; es decir, todos los sistemas físicos que se estudian se entiende de antemano que son cuánticos de por sí, y la intención entonces, es encontrar la manera de extraer la información cuántica que posee el sistema.

El formalismo establece entonces que el primer paso es modelar el sistema físico a “cuantizar” (ya sea un sistema mecánico, un campo de norma, un campo gravitacional, etc.) por medio de una variedad diferencial y una conexión; la forma ahora en la que se va a extraer la información cuántica es por medio de la construcción de un haz fibrado principal sobre esta variedad, utilizando para su construcción las simetrías naturales que posea el sistema.

De acuerdo a M. Nakahara [6], un *haz fibrado* (E, π, M, F, G) es un espacio topológico que localmente se ve como un producto directo de dos espacios topológicos (Fig. 2.2) y consiste en los siguientes elementos:

- Una variedad diferencial E llamada *espacio total*.
- Una variedad diferencial M llamada *espacio base*.
- Una variedad diferencial F llamada *fibra estándar*.
- Un mapeo suprayectivo $\pi : E \rightarrow M$ llamado *proyección*.
- Un grupo de Lie G llamado *grupo de estructura*.
- Un conjunto de abiertos $\{U_i\}$ de M con un difeomorfismo $\phi : U_i \times F \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$ llamado *trivialización local*.

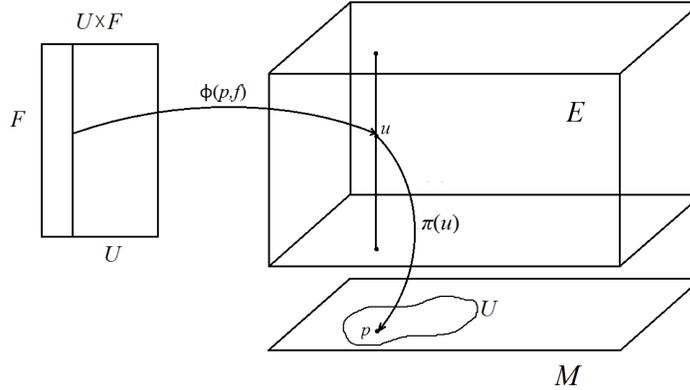


Figura 2.2: Haz fibrado

- Funciones t_{ij} llamadas *funciones de transición* que relacionan trivializaciones locales ϕ_i y ϕ_j en el traslape de sus dos abiertos correspondientes U_i y U_j :

$$t_{ij} = \phi_i \circ \phi_j^{-1}. \quad (2.14)$$

Si consideramos el traslape de tres abiertos U_i , U_j y U_k , tendremos las funciones de transición $t_{ij} = \phi_i \circ \phi_j^{-1}$ y $t_{jk} = \phi_j \circ \phi_k^{-1}$, las cuales cumplen entonces con la condición de ciclicidad:

$$t_{ij}t_{jk} = t_{ik}. \quad (2.15)$$

Si el haz fibrado puede cubrirse con un sólo abierto U_i con su correspondiente trivialización local ϕ_i , es decir, todas las funciones de transición t_{ij} pueden considerarse como mapeos identidad, a este haz se le denomina *haz trivial*.

Las funciones de transición van a ser de suma importancia en nuestro formalismo como veremos más adelante.

Un haz fibrado *principal* es aquél que utiliza al grupo de estructura como fibra estándar, este es el tipo particular de haces que se utiliza en la Cuantización Topológica. De acuerdo con el formalismo [7], construimos el haz fibrado definiendo el espacio base M como el espacio de configuración del sistema

físico, la fibra estándar se define de acuerdo a las simetrías que posea el sistema, es decir, el grupo de Lie asociado a la simetría en cuestión es utilizado como fibra estándar.

En esta teoría trabajamos de manera local utilizando el formalismo de Cartan de *tétradas* θ^a , que es un sistema ortonormal local de coordenadas definidas de esta manera:

$$g_{\mu\nu}dx^\mu \otimes dx^\nu = \eta_{ab}\theta^a \otimes \theta^b, \quad (2.16)$$

donde la métrica plana de Minkowski η_{ab} la definimos con signatura $(-+++)$.

La utilización del formalismo de tétradas implica que el análisis de sistemas gravitacionales correspondientes a las soluciones de las ecuaciones de campo de Einstein se hace de manera local, es decir reduce la invariancia natural ante difeomorfismos de esta teoría a la invariancia local ante transformaciones de Lorentz.

Definición y cuantización de observables

En la Cuantización Topológica, las observables se definen como las funciones O que mapean elementos del espacio base M del haz fibrado (ya sea éste el espacio de configuraciones, espacio fase, espacio-tiempo lorentziano según sea el caso) al conjunto de los reales:

$$O : M \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.17)$$

En este formalismo no se hace distinción de las observables clásicas y cuánticas. Sencillamente, algunas de las observables definidas en el sistema pueden presentar condiciones de cuantización. Para obtener las condiciones de cuantización de los observables, el sistema físico a analizar debe poder ser descrito por medio de un haz fibrado principal. En el caso del agujero negro de Kerr, hacemos uso del siguiente teorema [7]:

Teorema 2.1. *Una solución dada de las ecuaciones de campo de Einstein en vacío puede ser representada por un único haz fibrado principal de diez dimensiones con el espacio-tiempo M como espacio base, el grupo de Lorentz $SO(3,1)$ como el grupo de estructura G e isomorfo a la fibra estándar F y*

una conexión con valores en el álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3,1)$ del grupo de Lorentz.

Según el teorema anterior para tener una descripción completa del sistema físico que estemos analizando se necesita construir una conexión con valores en el álgebra de Lie correspondiente que esté definida en todo el espacio del sistema. Dado un haz no trivial, debe cubrirse el espacio con más de un abierto, y debe definirse una conexión en cada uno de estos abiertos. En el traslape de dos abiertos U_i y U_j , la transformación de norma Λ_{ij} que relaciona las conexiones ω_i y ω_j define las funciones de transición t_{ij} . Estas conexiones ω son conexiones de espín compatibles con la tetrada θ^a . Las transformaciones Λ_{ij} deben cumplir la condición de compatibilidad:

$$\omega_i = \Lambda_{ij}\omega_j\Lambda_{ij}^{-1} + \Lambda_{ij}d\Lambda_{ij}^{-1} \quad (2.18)$$

Es aquí donde reside el procedimiento de cuantización: a partir de las condiciones de compatibilidad surgirán las condiciones de cuantización de los parámetros del sistema, que en los casos hasta ahora estudiados [9][7][8] han surgido a partir de satisfacer una periodicidad en una dirección compacta.

Estas reglas surgen al obtener de las condiciones de compatibilidad alguna función f que dependa de los parámetros del sistema λ_i (ya sean carga, energía, momento angular, masa, etc.) que esté restringida a tomar valores enteros:

$$f(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots) = n, \quad (2.19)$$

donde λ_i son parámetros del sistema físico y $n \in \mathbb{Z}$. Esta función f es el *espectro topológico* del sistema.

Como vimos, la definición de las observables en el formalismo mencionada arriba, no existe distinción conceptual entre las observables clásicas y cuánticas, la diferencia entre ellas surge a partir de las posibles reglas de cuantización que surjan del análisis del sistema físico por medio de las herramientas geométricas y topológicas de la Cuantización Topológica. Por lo tanto, no existe entonces la necesidad de definir operadores cuánticos de la manera canónica, evitando así el problema del ordenamiento.

Definición de estados

La definición de estado cuántico en esta teoría está todavía en fase de desarrollo, sin embargo, existe una idea general de la definición. Un estado cuántico se puede definir como una sección local del haz fibrado.

Dado un haz fibrado con espacio total E , espacio base M , fibra estándar F y mapeo proyección π , una *sección* se define como el mapeo $\sigma : M \rightarrow E$ tal que se satisface la condición $\pi \circ \sigma = id_M$. Es decir para un punto $p \in M$ el mapeo $\sigma(p)$ es un elemento de la fibra sobre el punto $F_p = \pi^{-1}(p)$. Una *sección local* σ_i es una sección definida sobre un abierto U_i del espacio base M .

Un estado cuántico en Cuantización Topológica se define como una sección local σ_i sobre un abierto U_i del espacio base M . Hacer una medición de una observable O de un estado en particular σ implica utilizar de manera natural la proyección π del haz fibrado para mapear este estado σ al espacio base M , donde está definida la función observable O según (2.17).

Considerando secciones locales distintas σ_i y σ_j definidas sobre los abiertos U_i y U_j respectivamente que corresponden a estados cuánticos diferentes del sistema, éstos se mapean utilizando la proyección al espacio base y al medir utilizando la función O se obtienen valores numéricos distintos O_i y O_j de la observable para los diferentes estados del sistema.

Vemos que en esta definición, el formalismo de Cuantización Topológica hace innecesaria la definición de un espacio de Hilbert, evitando así los conflictos y arbitrariedades que surgen en la teoría canónica entre la definición matemática de este espacio y su aplicación real en la teoría.

Como mencionamos al principio de esta subsección, este aspecto de la teoría está en este momento en desarrollo.

Definición de evolución en el tiempo

En el formalismo de Cuantización Topológica, la evolución en el tiempo se espera esté relacionada con el transporte de objetos geométricos en el espacio total del haz fibrado, este transporte está definido por la conexión ω construida en el espacio total P del haz fibrado[7]:

Teorema 2.2. *Dado un haz fibrado, con espacio total P , una cobertura $\{U_i\}$ del espacio base M , un*

grupo de estructura G isomorfo a la fibra F , y una familia local de 1-formas de conexión \mathcal{A}_i , evaluadas en el álgebra de Lie \mathfrak{g} correspondiente al grupo G , definidas en M que satisfacen la condición de compatibilidad:

$$\mathcal{A}_j = t_{ij}^{-1} \mathcal{A}_i t_{ij} + t_{ij}^{-1} dt_{ij}, \quad (2.20)$$

donde las funciones de transición $t_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G$ son elementos del grupo G , y un conjunto de secciones locales $\sigma_i : U_i \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$ que satisfacen $\sigma_j = \sigma_i t_{ij}$ en la intersección $U_i \cap U_j$, existe entonces una única conexión ω en P tal que $\mathcal{A}_i = \sigma_i^* \omega$, donde σ_i^* es el pullback inducido por la sección σ_i .

La conexión ω es el objeto que posee la información sobre cómo pasar de un punto u_i en P correspondiente a una fibra $F_p = \pi^{-1}(p)$ a un punto u_j correspondiente a una fibra $F_q = \pi^{-1}(q)$. En principio, estos elementos de P pertenecen a secciones locales definidas, es decir a estados cuánticos, y la conexión determina cómo evolucionar el estado, es decir, cómo pasar de un estado cuántico a otro.

Utilizando esta definición de evolución, elude de manera efectiva el problema del tiempo mencionado en la sección anterior: el conflicto que existe entre la Relatividad General y la mecánica cuántica por la coordenada tiempo ocurre en el contexto del espacio-tiempo físico (que correspondería al espacio base M en nuestra descripción en haces fibrados). La Cuantización Topológica en cambio utiliza el objeto puramente geométrico de la conexión para describir el cambio en cualquier dirección o coordenada, incluido el tiempo, realizando todo el análisis a nivel del espacio total P , donde la conexión permite cambiar de fibra a fibra y de sección local en sección local, es decir, de un estado a otro estado; y sólo después de haber evolucionado el sistema es cuando se proyecta al espacio base (es decir el espacio físico del sistema), evitando de esa manera el conflicto antes mencionado.

Al igual que la definición de estados cuánticos, la evolución en el tiempo es un aspecto de la teoría que se encuentra en desarrollo.

La teoría de Cuantización Topológica en su estado actual se ha centrado en el primer paso consistente en definir la cuantización o discretización de observables. Hasta ahora el formalismo ha sido

aplicado a algunos sistemas físicos como, por ejemplo, campos gravitacionales [7] y sistemas mecánicos [8] con bastante éxito; incluso en este último caso, reproduciendo espectros directamente relacionados con los espectros cuánticos obtenidos por la teoría canónica.

En este trabajo aplicaremos el formalismo al caso específico del campo gravitacional de Kerr y generalizado a Kerr-Newman.

3. Métrica de Kerr y Kerr-Newman

Las soluciones exactas de las ecuaciones de campo de Einstein correspondientes a agujeros negros se pueden agrupar en tres familias [2] [3] [4], que dependen según sea el caso de hasta tres parámetros: la masa M , la carga e y el momento angular por unidad de masa a .

La más sencilla de éstas familias (desarrollada tan sólo unos meses después de que Einstein publicara las ecuaciones de su teoría) es la solución de Schwarzschild, ésta describe un espacio tiempo esféricamente simétrico y estático, es decir describe la geometría del espacio-tiempo de una partícula puntual no rotante [16]; estas soluciones dependen solamente de un parámetro: la masa M .

La siguiente familia a mencionar es la de Reissner-Nördstrom, que describe un espacio tiempo con las mismas simetrías pero posee carga eléctrica, por tanto estas soluciones dependen de dos parámetros: la masa M y la carga e .

Finalmente, la familia de Kerr describe el espacio-tiempo estático y con simetría axial en el exterior de un objeto masivo y compacto en rotación alrededor de un eje de simetría. Esta solución exacta a las ecuaciones de campo de Einstein es una familia de espacio-tiempos que dependen de dos parámetros: la masa M y el momento angular por unidad de masa $a = J/M$ [2]. Al considerar un agujero negro de Kerr con carga se le denomina agujero negro de Kerr-Newman que depende adicionalmente de la carga e . En esta tesis analizaremos el agujero negro de Kerr y luego haremos la extensión al de Kerr-Newman.

Las coordenadas más utilizadas para describir al agujero negro de Kerr son las llamadas coordenadas de Boyer-Lindquist [1] [2] [4], las cuales son una generalización de las coordenadas de Schwarzschild: t es el tiempo, r es la distancia al origen, ϑ el ángulo de colatitud y ϕ el ángulo acimutal. La solución de Kerr en estas coordenadas, está descrita por la siguiente métrica:

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & - \left(1 - \frac{2Mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta} \right) dt^2 - 2 \frac{2Mra \sin^2 \vartheta}{r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta} dt d\phi + \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta}{r^2 + a^2 - 2Mr} dr^2 \\
 & + (r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta) d\vartheta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2 \sin^2 \vartheta}{r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta} \right) \sin^2 \vartheta d\phi^2.
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Para poner esta ecuación en una expresión algebraica un poco más manejable definiremos tres

variables que estaremos utilizando a lo largo de este trabajo y que se explicarán más adelante:

$$\delta^2 = r^2 + a^2 - 2Mr, \quad \rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta, \quad R^2 = r^2 + a^2. \quad (3.2)$$

Sustituyendo (3.2) en la métrica de Kerr (3.1), se ve así:

$$\begin{aligned} ds^2 = & -\left(\frac{\delta^2 - a^2 \sin^2 \vartheta}{\rho^2}\right) dt^2 - \frac{2a \sin^2 \vartheta (R^2 - \delta^2)}{\rho^2} dt d\phi + \frac{\rho^2}{\delta^2} dr^2 \\ & + \rho^2 d\vartheta^2 + \left(\frac{R^4 - \delta^2 a^2 \sin^2 \vartheta}{\rho^2}\right) \sin^2 \vartheta d\phi^2, \end{aligned} \quad (3.3)$$

y después de manipulación algebraica, nos queda la siguiente expresión:

$$ds^2 = -\frac{\delta^2}{\rho^2} (dt - a \sin^2 \vartheta d\phi)^2 + \frac{\rho^2}{\delta^2} dr^2 + \rho^2 d\vartheta^2 + \frac{\sin^2 \vartheta}{\rho^2} (R^2 d\phi - a dt)^2. \quad (3.4)$$

3.1. Propiedades geométricas de la métrica de Kerr

De la expresión de la métrica (3.1) observamos que:

- Si paramos la rotación de la masa central, es decir $a = 0$, la solución tiende al espacio-tiempo de Schwarzschild.

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2Mr}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2Mr}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\phi^2. \quad (3.5)$$

En este límite las dos última funciones en (3.2) se reducen a la coordenada radial: $\rho^2 \rightarrow r^2$ y $R^2 \rightarrow r^2$.

- Cuando quitamos la masa $M = 0$, la solución es igual al espacio-tiempo plano de Minkowski, si bien la expresión queda en una forma no muy familiar, en coordenadas oblato-esferoidales:

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta}{r^2 + a^2} dr^2 + (r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta) d\vartheta^2 + (r^2 + a^2) \sin^2 \vartheta d\phi^2. \quad (3.6)$$

- A distancias muy grandes de la masa central $r \rightarrow \infty$ la métrica también tiende a Minkowski, es decir la solución de Kerr es asintóticamente plana.
- Como puede verse a partir de la expresión de la métrica (3.1), ya que no aparecen de forma explícita el tiempo t y el ángulo acimutal φ la geometría de Kerr posee los vectores de Killing ∂_t y ∂_φ [2]. Sin embargo como veremos, el vector tipo tiempo ∂_t no está bien definido en la totalidad del espacio-tiempo de Kerr.
- La métrica (3.1) posee una singularidad física o de curvatura en $r = 0$ y $\vartheta = \pi/2$ (ecuador) simultáneamente. Al calcular las componentes del tensor de curvatura R^a_{bcd} y sustituir estos valores de r y ϑ , notamos que esta es una singularidad de la geometría; este resultado se puede verificar de forma invariante analizando el escalar de Kretschmann $K = R_{abcd}R^{abcd}$ y comprobar que diverge en estos puntos del espacio [16]. Esta es una de las principales características geométricas del espacio-tiempo de Kerr que lo distinguen del de Schwarzschild y el de Reissner-Nördstrom. Si escribimos la métrica en coordenadas cartesianas o llamadas de *Kerr-Schild*, como veremos en la siguiente sección, se aprecia que la singularidad del agujero negro de Kerr es un anillo de radio a y no un punto como en las otras dos familias de soluciones. Esta singularidad de anillo queda expresada en la ecuación (3.4) como $\rho^2 = 0$; esta función ρ^2 es una generalización de la r^2 de Schwarzschild, lo cual se puede verificar al fijar $a = 0$ en ρ^2 .
- A partir de la métrica en coordenadas de Boyer-Lindquist (3.1) notamos que existen también otros dos valores de r en que la métrica presenta patologías, específicamente, el tercer término de la expresión se vuelve singular cuando se cumple $r^2 + a^2 - 2Mr = 0$, los valores de r para los que ocurre esto son:

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}. \quad (3.7)$$

En realidad esta singularidad aparece sólo por la elección de coordenadas, al calcular las componentes del tensor de curvatura notamos que éstas no se indefinen en estos valores de r , por lo que ésta no es una singularidad física o de curvatura sino una singularidad de coordenadas, la cual queda expresada en la ecuación (3.4) como $\delta^2 = 0$. Notamos también aquí que δ^2 es una

generalización de la función del horizonte de la métrica se Schwarzschild $f(r) = 1 - 2M/r$. La función δ^2 se puede escribir en términos de los valores de r_+ y r_- de la ecuación (3.7) de esta manera:

$$\delta^2 = (r - r_+)(r - r_-). \quad (3.8)$$

Es por medio de esta función horizonte δ^2 que podemos generalizar el agujero negro de Kerr al agujero negro de Kerr-Newman cuando existe una carga eléctrica, simplemente modificamos la expresión para δ^2 en (3.2) agregándole la carga e de la siguiente manera:

$$\delta^2 = r^2 + a^2 + e^2 - 2Mr. \quad (3.9)$$

Todos los cálculos hechos en esta tesis para el agujero negro de Kerr se pueden generalizar después a Kerr-Newman; sólo basta con definir la función δ^2 como acaba de ser mencionado.

Dependiendo de los valores de la masa M y el momento angular a , la familia de soluciones de Kerr se subdivide a su vez en las siguientes subfamilias [2] (Fig. 3.1):

- *Agujero negro lento* $a^2 < M^2$. En esta subfamilia la función δ^2 es igual a cero para los dos valores de r dados por la ecuación (3.7), estos definen dos fronteras en el espacio-tiempo de Kerr, y las nombramos el *horizonte exterior* r_+ y el *horizonte interior* r_- . Estos dos horizontes dividen el espacio tiempo de Kerr en tres bloques. Si fijamos la masa M y comenzamos a variar el parámetro a , a medida que aumenta, los horizontes se van acercando hasta un valor límite, que corresponde a la siguiente subfamilia.
- *Agujero negro extremo* $a^2 = M^2$. En este tipo de agujero negro, la función δ^2 tiene una doble raíz, los horizontes coinciden en un solo valor $r = M$.
- *Agujero negro rápido* $a^2 > M^2$. Vemos que las raíces de δ^2 se vuelven imaginarias en este caso. Los agujeros negros de Kerr correspondientes a esta subfamilia no poseen horizontes de eventos y, por lo tanto, presentan la singularidad de anillo desnuda.

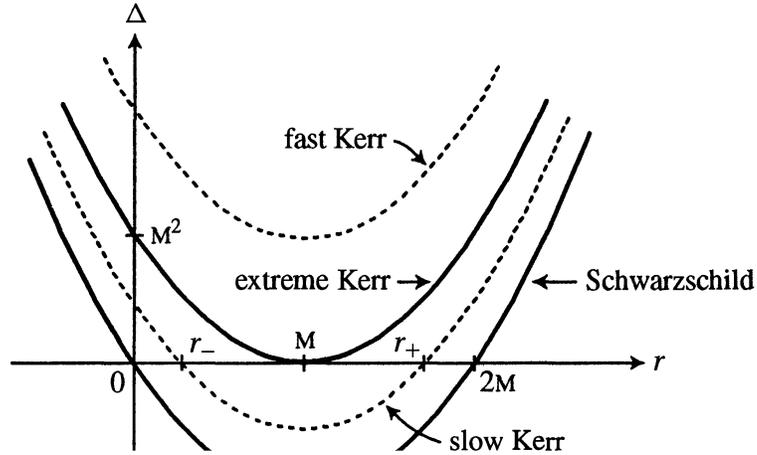


Figura 3.1: Subfamilias de Kerr (Obtenido de O'Neill [2] Fig. 2.1)

En esta tesis trabajaremos sólo con los agujeros negros lentos de Kerr y Kerr-Newman. La presencia de los dos horizontes r_{\pm} divide de manera efectiva al espacio tiempo en tres subespacios abiertos o bloques (Fig. 3.2).

El bloque I es el que está definido desde $r = +\infty$ hasta el horizonte exterior $r = r_+$, este bloque es el que conocemos físicamente, corresponde al espacio-tiempo en el que vivimos y en el cual podemos hacer mediciones; debido al horizonte exterior, no podemos obtener ninguna información de los otros dos bloques restantes. El campo gravitacional a r suficientemente grande es comparable al Newtoniano y las coordenadas t , r , ϑ y ϕ son las coordenadas usuales y se comportan de la manera usual en nuestro entorno físico. Los vectores ∂_t se orientan de manera natural “apuntando hacia el futuro”.

El bloque II es el subespacio que comprende entre los dos horizontes exterior e interior $r_- < r < r_+$, este bloque es un espacio completamente relativista [2] y el significado causal usual de las coordenadas se pierde: la coordenada temporal t se vuelve de tipo espacio y la coordenada r se vuelve de tipo tiempo. La orientación temporal de este subespacio se puede definir una vez que lo “pegamos” con el bloque I (el cual sí tiene una orientación temporal definida) y extendemos la orientación de éste último al bloque II.

El bloque III va desde el horizonte interior $r = r_-$ hasta $r = -\infty$, este bloque contiene a la singularidad de anillo y a valores de $r \ll -1$ se comporta como el bloque I pero con la particularidad

de que su gravedad es repulsiva.

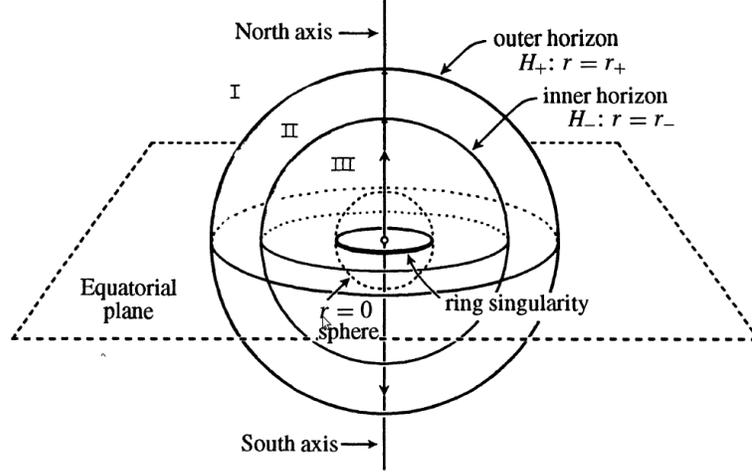


Figura 3.2: Bloques de Kerr en coordenadas B-L (Obtenido de O'Neill [2] Fig. 2.2)

Este tipo de agujero negro posee otras dos regiones de interés. Analizamos la norma del vector de Killing ∂_t :

$$\partial_t \partial^t = g_{tt} = -\frac{\delta^2 - a^2 \sin^2 \vartheta}{\rho^2} = -\left(1 - \frac{2Mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta}\right). \quad (3.10)$$

Como vemos, la componente g_{tt} de la métrica se vuelve positiva en valores menores a $r = M + \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \vartheta}$, este es el llamado *límite estático*, el vector de Killing ∂_t se vuelve tipo espacio. La zona comprendida entre este límite estático y el horizonte exterior r_+ se le denomina *ergosfera* (Fig 3.3). En esta región, para que un observador pudiera estar estacionario debería moverse más rápido que la luz, es decir, en la ergosfera el agujero negro en rotación “arrastra” al espacio-tiempo en su giro; cualquier observador en la ergosfera es forzado a moverse alrededor del agujero negro con una velocidad angular de:

$$\Omega = \frac{d\phi}{dt} = -\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} = \frac{a(R^2 - \delta^2)}{R^4 - \delta^2 a^2 \sin^2 \vartheta}, \quad (3.11)$$

para observadores acercándose al horizonte exterior $r \rightarrow r_+$, esta velocidad angular se vuelve:

$$\Omega_H = \frac{a}{r_+^2 + a^2}, \quad (3.12)$$

lo que se podría interpretar como la velocidad angular a la que gira el horizonte exterior del agujero negro [3].

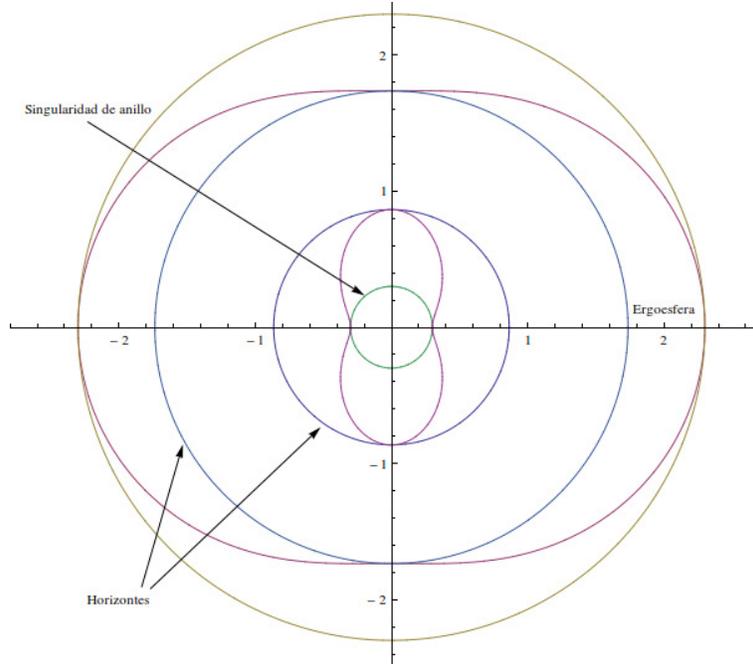


Figura 3.3: Ergoesfera

Finalmente, notamos en la métrica (3.1) que para valores negativos de r suficientemente pequeños y valores de θ suficientemente pequeños, la componente $g_{\phi\phi}$ de la métrica se vuelve negativa:

$$g_{\phi\phi} = \left(r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2 \sin^2 \vartheta}{r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta} \right) \sin^2 \vartheta d\phi^2. \quad (3.13)$$

Esto quiere decir que el vector de Killing ∂_ϕ se vuelve tipo tiempo; lo sorprendente aquí es que la coordenada ϕ es periódica y las órbitas del vector de Killing son cerradas, es decir, cerca de la singularidad de anillo para $r < 0$ existen curvas cerradas tipo tiempo, en otras palabras, una máquina de tiempo que puede violar la causalidad.

3.2. La métrica de Kerr en diferentes coordenadas

Las coordenadas hasta aquí utilizadas son las de Boyer-Lindquist. En general, son las más usadas en la literatura ya que son una generalización de las coordenadas utilizadas en los casos de Schwarzschild y Reissner-Nördstrom, los cuales utilizan coordenadas esféricas. Sin embargo, estas coordenadas como vimos presentan varias anomalías y regiones donde se indefinen. Con el fin de evitar estas patológicas, se trabaja con otras coordenadas. A continuación presentamos algunos de estos diferentes sistemas de coordenadas de la geometría de Kerr.

Coordenadas de Kerr-Schild

Esta es la segunda forma en la que la métrica de Kerr fue escrita originalmente [16]. Escribir el elemento de línea en las coordenadas de Kerr-Schild es escribirlo en coordenadas cartesianas; la métrica se ve de la siguiente manera:

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 + \frac{2mr^3}{r^4 + a^2z^2} \left(dt + \frac{r(x dx + y dy)}{a^2 + r^2} + \frac{a(y dx - x dy)}{a^2 + r^2} + \frac{z}{r} dz \right)^2. \quad (3.14)$$

En estas coordenadas, r deja de ser una coordenada, volviéndose una función determinada implícitamente por:

$$r^2 + a^2 \left(1 - \frac{z^2}{r^2} \right) = x^2 + y^2 + z^2 \quad (3.15)$$

En estas coordenadas las superficies a r constante son elipsoides confocales, que al reducir la coordenada radial degeneran para $r = 0$ en el disco $x^2 + y^2 \leq a^2$ con $z = 0$. Aquí reside una de las características más notables de estas coordenadas, al calcular el invariante $R^{abcd}R_{abcd}$, este diverge cuando se cumple:

$$x^2 + y^2 = a^2; z = 0, \quad (3.16)$$

es decir aquí se aprecia la forma real de la singularidad de curvatura: un anillo que corresponde a la frontera del disco antes mencionado, con un radio igual a a . Vemos que si el agujero negro deja de girar, el anillo se reduce a un punto, reproduciendo entonces la singularidad de la geometría de Schwarzschild.

Coordenadas de Doran

Esta definición de coordenadas para la métrica de Kerr es de las más recientes [16] [17], desarrollada por Chris Doran en el año 2000, son una generalización de las coordenadas de Painlevé-Gullstrand [16] para la geometría de Reissner-Nördstrom.

La coordenada temporal de estas coordenadas corresponde al tiempo propio de observadores en caída libre hacia el agujero negro a lo largo de trayectorias radiales que parten de infinito, es decir trayectorias con ϑ y ϕ constante.

La métrica de Kerr en coordenadas de Doran se ve así:

$$ds^2 = -dt^2 + \left(\frac{\rho}{R} dr + \alpha (dt - a \sin^2 \vartheta d\phi) \right)^2 + \rho^2 d\vartheta^2 + R^2 \sin^2 \vartheta d\phi^2, \quad (3.17)$$

donde la función α es:

$$\alpha = \frac{\sqrt{R^2 - \delta^2}}{\rho} \quad (3.18)$$

Algunas de las propiedades de estas coordenadas son:

- Cuando la masa M se hace igual a cero, el factor α se desvanece también, por lo que la métrica queda de nuevo como el espacio-tiempo plano de Minkowski en coordenadas elipsoidales como en la ecuación (3.5).
- Cuando se para el giro del agujero negro, es decir $a = 0$, la métrica se reduce a la de la geometría de Schwarzschild en las llamadas coordenadas de Painlevé-Gullstrand:

$$ds^2 = -dt^2 + \left(dr + \sqrt{\frac{2M}{r}} dt \right)^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\phi^2 \quad (3.19)$$

Por esta razón las coordenadas de Doran son consideradas una generalización de las coordenadas de Painlevé-Gullstrand para el caso de la geometría de agujeros negros en rotación.

- Una de las características benignas en cuanto a los cálculos es que en la métrica inversa $g^{\mu\nu}$ la componente temporal es $g^{tt} = -1$. Desde el punto de vista del formalismo ADM mencionado en

la sección anterior, estas coordenadas folian el espacio con una función lapso N que es igual a la unidad en todas partes.

Estas coordenadas van a ser de relevancia para el desarrollo del trabajo en esta tesis.

4. Espectro topológico del agujero negro de Kerr y Kerr-Newman

Aplicamos ahora el formalismo de Cuantización Topológica descrito en la sección 2.3 al agujero negro de Kerr con la intención de cuantizar el campo gravitacional para obtener el espectro topológico de energía de este sistema. Como vimos existen dos métodos para obtener este espectro: por medio del cálculo de invariantes topológicos y por medio de las condiciones de compatibilidad de las funciones de transición en traslapes de abiertos. En esta tesis utilizaremos el método de condiciones de compatibilidad para obtener una expresión que nos cuantice el sistema.

Para el desarrollo de los cálculos, utilizaremos el formalismo de Cartan de tétradas. Este formalismo consiste en definir una base ortonormal local de coordenadas, las 1-formas o covectores ortonormales θ^a están definidas así:

$$g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu = \eta_{ab} \theta^a \otimes \theta^b, \quad (4.1)$$

donde $g_{\mu\nu}$ son las componentes de la métrica.

Los covectores ortonormales θ^a están relacionadas con la base de diferenciales de coordenadas por medio de las funciones e_μ^a llamadas *tétradas*:

$$\theta^a = e_\mu^a dx^\mu. \quad (4.2)$$

En el transcurso de esta tesis, utilizaremos como notación índices griegos para componentes de coordenadas e índices latinos para componentes de tétradas. En el cálculo de una tétrada, debido a la simetría de la métrica $g_{\mu\nu}$, el sistema de ecuaciones (4.1) siempre queda indeterminado, es decir existen n ecuaciones para $n(n+1)/2$ incógnitas, por lo que existe una arbitrariedad algebraica en la obtención de una tétrada. El cambio de una tétrada a otra está representado por la matriz de transformación perteneciente al grupo de estructura:

$$\theta' = \Lambda \theta \quad ; \quad \Lambda \in G. \quad (4.3)$$

4.1. Análisis en coordenadas Boyer-Lindquist

Para el caso de la métrica de Kerr en coordenadas Boyer-Lindquist, utilizamos la expresión de la métrica en (3.4) y calculamos las tétradas según la ecuación (4.1) y sus inversas, que en forma matricial, se escriben así:

$$e_{\mu}^a = \begin{pmatrix} \frac{\delta}{\rho} & 0 & 0 & -\frac{\delta}{\rho} a \sin^2 \vartheta \\ 0 & \frac{\rho}{\delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho & 0 \\ -\frac{a \sin \vartheta}{\rho} & 0 & 0 & \frac{R^2 \sin \vartheta}{\rho} \end{pmatrix} \downarrow^a \quad (4.4)$$

$$e_a^{\mu} = \begin{pmatrix} \frac{R^2}{\delta \rho} & 0 & 0 & \frac{a \sin \vartheta}{\rho} \\ 0 & \frac{\delta}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ \frac{a}{\delta \rho} & 0 & 0 & \frac{1}{\rho \sin \vartheta} \end{pmatrix} \downarrow^{\mu} \quad (4.5)$$

El formalismo de Cuantización Topológica indica que el procedimiento ahora es construir un haz fibrado principal que modele este sistema físico. Por la singularidad de curvatura que presenta la geometría de Kerr, el haz no puede ser globalmente trivial, esto es de suma importancia para el cálculo pues, para poder cubrir toda la variedad necesitaremos más de una carta; del traslape de las cartas que utilicemos para cubrir el haz obtendremos nuestro resultado.

Para construir el haz fibrado definimos todos los elementos que lo componen. Utilizamos como espacio base M el espacio-tiempo lorentziano de cuatro dimensiones en el que se encuentra el sistema físico. Por ser una solución a las ecuaciones de campo de Einstein, la métrica de Kerr es invariante ante difeomorfismos, sin embargo, una de las ventajas de utilizar el formalismo local de tétradas es el hecho de que esta invariancia se puede reducir: localmente la métrica es invariante ante transformaciones de Lorentz. Tomando en cuenta la simetría que surge de esta propiedad de invariancia, utilizamos el grupo de Lie $SO(3, 1)$, grupo de Lorentz, asociado a esta simetría como grupo de estructura G y por

ser haz fibrado principal, utilizamos este mismo grupo para definir la fibra estándar F del haz. Con el espacio base M (4 dimensiones) y la fibra F (6 dimensiones) definida, construimos el espacio total E , una variedad diferencial de 10 dimensiones.

Lo siguiente es construir una conexión ω que esté definida en toda la variedad. Debido a la singularidad de curvatura de anillo de esta geometría, eliminamos a priori los puntos de la singularidad de esta topología y no trabajaremos con ella a lo largo de los cálculos subsiguientes. Las componentes de la conexión toman valores en el algebra de Lie $\mathfrak{so}(3,1)$ correspondiente al grupo de Lorentz, cuyos generadores los definimos de esta manera:

$$\hat{K}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{K}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{K}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

(4.6)

$$\hat{J}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{J}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{J}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

donde los \hat{J}_i son los generadores de rotaciones espaciales y los \hat{K}_i son los generadores de boosts.

Comenzaremos ahora la aplicación del formalismo al sistema físico del agujero negro de Kerr. Trabajaremos primero con la métrica en coordenadas de Boyer-Lindquist (3.4). Calculamos las componentes de la conexión ω_b^a utilizando la Primera Ecuación de Estructura de Cartan:

$$d\theta^a = -\omega_b^a \wedge \theta^b. \tag{4.7}$$

Calculamos primero todas las derivadas exteriores:

$$\begin{aligned}
d\theta^0 &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\delta}{\rho} \right) \theta^1 \wedge \theta^0 - \frac{a^2 \sin \vartheta \cos \vartheta}{\rho^3} \theta^2 \wedge \theta^0 - \frac{2\delta a \cos \vartheta}{\rho^3} \theta^2 \wedge \theta^3, \\
d\theta^1 &= -\frac{a^2 \sin \vartheta \cos \vartheta}{\rho^3} \theta^2 \wedge \theta^1, \\
d\theta^2 &= \frac{r\delta}{\rho^3} \theta^1 \wedge \theta^2, \\
d\theta^3 &= \frac{2ar \sin \vartheta}{\rho^3} \theta^1 \wedge \theta^0 + \frac{r\delta}{\rho^3} \theta^1 \wedge \theta^3 + \frac{R^2 \cot \vartheta}{\rho^3} \theta^2 \wedge \theta^3.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

haciendo la igualdad (4.5) para cada una de las ecuaciones anteriores, las componentes de la conexión ω_b^a en forma matricial quedan de esta manera, donde el índice a representa la fila y el índice b representa la columna:

$$\left(\begin{array}{cccc}
0 & \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\delta}{\rho} \right) \theta^0 - \frac{ar \sin \vartheta}{\rho^3} \theta^3 & -\frac{a^2 \sin \vartheta \cos \vartheta}{\rho^3} \theta^0 - \frac{a\delta \cos \vartheta}{\rho^3} \theta^3 & -\frac{ar \sin \vartheta}{\rho^3} \theta^1 + \frac{a\delta \cos \vartheta}{\rho^3} \theta^2 \\
\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\delta}{\rho} \right) \theta^0 - \frac{ar \sin \vartheta}{\rho^3} \theta^3 & 0 & -\frac{a^2 \sin \vartheta \cos \vartheta}{\rho^3} \theta^1 - \frac{r\delta}{\rho^3} \theta^2 & -\frac{ar \sin \vartheta}{\rho^3} \theta^0 - \frac{r\delta}{\rho^3} \theta^3 \\
-\frac{a^2 \sin \vartheta \cos \vartheta}{\rho^3} \theta^0 - \frac{a\delta \cos \vartheta}{\rho^3} \theta^3 & \frac{a^2 \sin \vartheta \cos \vartheta}{\rho^3} \theta^1 + \frac{r\delta}{\rho^3} \theta^2 & 0 & -\frac{a\delta \cos \vartheta}{\rho^3} \theta^0 - \frac{R^2 \cos \vartheta}{\rho^3 \sin \vartheta} \theta^3 \\
-\frac{ar \sin \vartheta}{\rho^3} \theta^1 + \frac{a\delta \cos \vartheta}{\rho^3} \theta^2 & \frac{ar \sin \vartheta}{\rho^3} \theta^0 + \frac{r\delta}{\rho^3} \theta^3 & \frac{a\delta \cos \vartheta}{\rho^3} \theta^0 + \frac{R^2 \cos \vartheta}{\rho^3 \sin \vartheta} \theta^3 & 0
\end{array} \right), \tag{4.9}$$

donde:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\delta}{\rho} \right) = \frac{\rho \partial_r \delta - \delta \partial_r \rho}{\rho^2} = \frac{\rho^2 (r - M) - r \delta^2}{\delta \rho^3}. \tag{4.10}$$

La conexión se puede escribir también en términos de los generadores del álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3,1)$, quedando de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\omega &= \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\delta}{\rho} \right) \theta^0 - \frac{ar \sin \vartheta}{\rho^3} \theta^3 \right) \otimes \hat{K}_1 + \left(-\frac{a^2 \sin \vartheta \cos \vartheta}{\rho^3} \theta^0 - \frac{a\delta \cos \vartheta}{\rho^3} \theta^3 \right) \otimes \hat{K}_2 \\
&+ \left(-\frac{ar \sin \vartheta}{\rho^3} \theta^1 + \frac{a\delta \cos \vartheta}{\rho^3} \theta^2 \right) \otimes \hat{K}_3 + \left(\frac{a\delta \cos \vartheta}{\rho^3} \theta^0 + \frac{R^2 \cos \vartheta}{\rho^3 \sin \vartheta} \theta^3 \right) \otimes \hat{J}_1 \\
&- \left(\frac{ar \sin \vartheta}{\rho^3} \theta^0 + \frac{r\delta}{\rho^3} \theta^3 \right) \otimes \hat{J}_2 + \left(\frac{a^2 \sin \vartheta \cos \vartheta}{\rho^3} \theta^1 + \frac{r\delta}{\rho^3} \theta^2 \right) \otimes \hat{J}_3.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

El procedimiento ahora nos indica que debemos asegurar que esta conexión está bien definida en todo el espacio, es decir, si es necesario que el espacio sea cubierto por varios abiertos, la conexión debe ser regular en cada uno de éstos, incluyendo los traslapes de los abiertos. En el caso de la conexión (4.9) y (4.11), ésta se vuelve singular en el anillo $\rho^2 = 0$ y en los horizontes $\delta^2 = 0$. La singularidad de coordenadas se pueden eliminar por medio de transformaciones de norma Λ de esta manera:

$$\omega' = \Lambda \omega \Lambda^{-1} + \Lambda d\Lambda^{-1}. \tag{4.12}$$

Estas transformaciones de norma Λ deben cumplir las condiciones de compatibilidad y, como vimos en la expresión (4.3), las Λ 's son elementos del grupo $SO(3, 1)$, que pueden escribirse con su representación matricial o por medio de los generadores de su algebra de Lie $\mathfrak{so}(3, 1)$.

Analizando la conexión (4.9) notamos que no es posible eliminar la singularidad de coordenadas en cada uno de los dos horizontes de manera simultánea con una sola transformación de norma. Es decir, para poder definir de manera regular esta conexión en todo el espacio necesitamos utilizar dos cartas, cuyo traslape queda acotado entre los dos horizontes r_+ y r_- .

Analicemos el término de la componente $\omega_1^0 = \omega_0^1$ en el que aparece una singularidad:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\delta}{\rho} \right) \theta^0 \otimes \hat{K}_1 = \frac{\rho^2(r - M) - r\delta^2}{\delta\rho^3} \theta^0 \otimes \hat{K}_1 = \frac{(r - M)\rho^2 - r\delta^2}{\rho^4} (dt - a \sin^2 \vartheta d\phi) \otimes \hat{K}_1. \tag{4.13}$$

Por la presencia de δ en el denominador de la expresión, esta componente se vuelve singular en r_+ y r_- . Si analizamos la segunda igualdad de (4.13) la expresión aparentemente no tiene singularidades, sin embargo en esta expresión el diferencial dt es el que diverge en el horizonte (4.5), por lo que nos

centraremos en el término con dt presente de esta segunda igualdad.

Primero eliminamos la singularidad en el horizonte exterior, para ello aplicamos la transformación de norma:

$$\Lambda_+ = e^{\frac{(r_+-M)\rho_+^2-r_+\delta_+^2}{\rho_+^4}t \otimes \hat{K}_1}, \quad (4.14)$$

donde ρ_+ y δ_+ son las funciones definidas en (3.2) evaluadas en el horizonte exterior r_+ . Esta transformación de norma en forma matricial se ve como:

$$\Lambda_+ = \begin{pmatrix} \cosh\left(\frac{(r_+-M)\rho_+^2-r_+\delta_+^2}{\rho_+^4}t\right) & \sinh\left(\frac{(r_+-M)\rho_+^2-r_+\delta_+^2}{\rho_+^4}t\right) & 0 & 0 \\ \sinh\left(\frac{(r_+-M)\rho_+^2-r_+\delta_+^2}{\rho_+^4}t\right) & \cosh\left(\frac{(r_+-M)\rho_+^2-r_+\delta_+^2}{\rho_+^4}t\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

Aplicamos la transformación de norma (4.14) según la ecuación (4.12):

$$\begin{aligned} \omega_1^0 &= \left(e^{\frac{(r_+-M)\rho_+^2-r_+\delta_+^2}{\rho_+^4}t \otimes \hat{K}_1} \right) \frac{(r_+-M)\rho_+^2-r_+\delta_+^2}{\rho_+^4} dt \otimes \hat{K}_1 \left(e^{-\frac{(r_+-M)\rho_+^2-r_+\delta_+^2}{\rho_+^4}t \otimes \hat{K}_1} \right) \\ &+ \left(e^{\frac{(r_+-M)\rho_+^2-r_+\delta_+^2}{\rho_+^4}t \otimes \hat{K}_1} \right) d \left(e^{-\frac{(r_+-M)\rho_+^2-r_+\delta_+^2}{\rho_+^4}t \otimes \hat{K}_1} \right) \\ &= \frac{(r_+-M)\rho_+^2-r_+\delta_+^2}{\rho_+^4} dt \otimes \hat{K}_1 - \frac{(r_+-M)\rho_+^2-r_+\delta_+^2}{\rho_+^4} dt \otimes \hat{K}_1 + \frac{(r_+-M)\rho_+^2-r_+\delta_+^2}{4\rho_+^2 a^2 \sin \vartheta \cos \vartheta} t d\theta \otimes \hat{K}_1, \end{aligned} \quad (4.16)$$

es decir, cuando la conexión es evaluada en el horizonte exterior r_+ , la singularidad desaparece en esta componente:

$$\omega_1^0|_{r_+} = \frac{(r_+-M)\rho_+^2-r_+\delta_+^2}{4\rho_+^2 a^2 \sin \vartheta \cos \vartheta} t d\theta \otimes \hat{K}_1. \quad (4.17)$$

De la misma manera, se aplica una transformación análoga a la anterior pero para el horizonte interior r_- . Las transformaciones de norma Λ_+ y Λ_- eliminan las singularidades en ambos horizontes por separado, tenemos entonces que las conexiones correspondientes a cada transformación están

relacionadas por una transformación de norma definida en el traslape de los abiertos, en este caso el bloque II de la geometría de Kerr en estas coordenadas de Boyer-Lindquist, esta transformación según la condición de cociclo (2.5) se expresa de esta manera:

$$\Lambda_+ \Lambda_-^{-1} = e^{\left(\frac{(r_+ - M)\rho_+^2 - r_+ \delta_+^2}{\rho_+^4} - \frac{(r_- - M)\rho_-^2 - r_- \delta_-^2}{\rho_-^4} \right) t \otimes \hat{K}_1}. \quad (4.18)$$

Esta transformación de norma corresponde en forma matricial a funciones de seno y coseno hiperbólico (4.15), esto indica que la transformación de norma es una función univaluada para todo valor de t , por lo que no surge ninguna condición de cuantización de ella.

Regresando a la conexión original (4.9), analizamos ahora otro de sus elementos con anomalías, el segundo término de la componente $\omega_3^2 = -\omega_2^3$:

$$\frac{R^2 \cos \vartheta}{\rho^3 \sin \vartheta} \theta^3 \otimes \hat{J}_1 = \left(\frac{aR^2 \cos \vartheta}{\rho^4} dt + \frac{R^4 \cos \vartheta}{\rho^4} d\phi \right) \otimes \hat{J}_1, \quad (4.19)$$

y notamos que presenta una singularidad en el eje de rotación, es decir, para valores de $\vartheta = 0$ y $\vartheta = \pi$ la función seno en el denominador se vuelve cero; en términos de coordenadas vemos ahora que el segundo término en la expresión de la derecha cuando el ángulo ϑ toma estos valores, el diferencial $d\phi$ queda indefinido; nos centraremos en este término para el siguiente procedimiento. Utilizamos una transformación de norma para eliminar estas singularidades, primero nos deshacemos de la singularidad en $\vartheta = 0$ con la transformación

$$\Lambda_0 = e^{\phi \otimes \hat{J}_1}, \quad (4.20)$$

o bien en forma matricial:

$$\Lambda_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}. \quad (4.21)$$

De la misma manera que en la eliminación de las singularidades anteriores, aplicamos la transfor-

mación (4.20) según la ecuación (4.12):

$$\begin{aligned}
\omega' &= e^{\phi \otimes \hat{J}_1} \frac{R^4 \cos \vartheta}{\rho^4} d\phi \otimes \hat{J}_1 e^{-\phi \otimes \hat{J}_1} + e^{\phi \otimes \hat{J}_1} d\left(e^{-\phi \otimes \hat{J}_1}\right) \\
&= \frac{R^4 \cos \vartheta}{\rho^4} d\phi \otimes \hat{J}_1 - d\phi \otimes \hat{J}_1 = \left(\frac{R^4 \cos \vartheta}{\rho^4} - 1\right) d\phi \otimes \hat{J}_1.
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Como vemos, la singularidad en esta componente desaparece para valores de $\vartheta = 0$. Para eliminar la singularidad en $\vartheta = \pi$ se realiza el mismo procedimiento, utilizando ahora la transformación $\Lambda_\pi = e^{-\phi \otimes \hat{J}_1}$.

Tenemos entonces que la conexión transformada mediante Λ_0 es regular en la región $0 \geq \vartheta > \pi$ y la conexión obtenida con la transformación Λ_π está bien definida en $0 > \vartheta \geq \pi$. Estas dos conexiones se relacionan por medio de la transformación:

$$\Lambda_0 \Lambda_\pi^{-1} = e^{2\phi \otimes \hat{J}_1}. \tag{4.23}$$

Notamos también que esta transformación es una función univaluada, por lo que no surgen condiciones de cuantización de este procedimiento.

Con estos cálculos, la teoría de Cuantización Topológica nos indica que la geometría de Kerr y Kerr-Newman utilizando la simetría de Lorentz no genera ningún espectro topológico, por lo que al parecer, los parámetros de este campo gravitacional no presentan ninguna cuantización. Sin embargo, para el caso específico de Kerr-Newman, cuando aplicamos las reglas de Cuantización Topológica utilizando la simetría adicional que posee esta geometría gracias a la presencia del campo electromagnético, es decir utilizando como fibra estándar al grupo $U(1)$, en efecto veremos que sí surgen reglas de cuantización para los parámetros.

Adicionalmente, durante el desarrollo de este trabajo, analizamos la aplicación de las reglas de Cuantización Topológica para una “geometría de Kerr” en un espacio euclideo, es decir, aplicamos una rotación de Wick a la solución de Kerr, la cual es Lorentziana y procedemos con el formalismo. En este caso la aplicación del formalismo también genera un espectro topológico.

Espectro topológico euclideo

Acabamos de ver en la sección anterior, que no surge una condición de cuantización a partir del haz fibrado construido anteriormente. En esta sección, sin embargo, estudiaremos el caso en que el espacio base no es lorentziano sino euclideo. Si bien, esto no representa un sistema físico real de nuestro Universo, su desarrollo es de interés.

Haciendo una rotación de Wick cambiamos la coordenada temporal $t \rightarrow it$, el grupo de estructura del haz fibrado cambia a $SO(4)$, por lo que los generadores de boosts \hat{K}_i se cambian a generadores de rotaciones espaciales.

La transformación de norma Λ_+ (4.14) y su contraparte Λ_- son elementos del grupo $SO(4)$ y el generador se vuelve $\hat{K}_1 \rightarrow \hat{J}_4$, quedando la función de transición (4.18) entre ambas conexiones como:

$$\Lambda_+ \Lambda_-^{-1} = e^{\left(\frac{(r_+ - M)\rho_+^2 - r_+ \delta_+^2}{\rho_+^4} - \frac{(r_- - M)\rho_-^2 - r_- \delta_-^2}{\rho_-^4} \right) t \otimes \hat{J}_4}. \quad (4.24)$$

Para que la función pueda ser univaluada, la expresión en el paréntesis debe ser igual a un número entero n :

$$\begin{aligned} n &= \frac{(r_+ - M)\rho_+^2 - r_+ \delta_+^2}{\rho_+^4} - \frac{(r_- - M)\rho_-^2 - r_- \delta_-^2}{\rho_-^4} \\ &= \frac{(r_+ - M)(r_+^2 + a^2 \cos^2 \vartheta) - r_+(r_+^2 + a^2 + e^2 - 2Mr_+)}{(r_+^2 + a^2 \cos^2 \vartheta)^2} - \frac{(r_- - M)(r_-^2 + a^2 \cos^2 \vartheta) - r_-(r_-^2 + a^2 + e^2 - 2Mr_-)}{(r_-^2 + a^2 \cos^2 \vartheta)^2}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

después de manipulación algebraica, nos da el espectro topológico:

$$\begin{aligned} n &= M \left(\frac{r_-^2 - a^2 \cos^2 \vartheta}{(r_-^2 + a^2 \cos^2 \vartheta)^2} - \frac{r_+^2 - a^2 \cos^2 \vartheta}{(r_+^2 + a^2 \cos^2 \vartheta)^2} \right) \\ &\quad - e^2 \left(\frac{r_-}{(r_-^2 + a^2 \cos^2 \vartheta)^2} - \frac{r_+}{(r_+^2 + a^2 \cos^2 \vartheta)^2} \right) \\ &\quad - a^2 \sin^2 \vartheta \left(\frac{r_-}{(r_-^2 + a^2 \cos^2 \vartheta)^2} - \frac{r_+}{(r_+^2 + a^2 \cos^2 \vartheta)^2} \right). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Si calculamos ahora el valor de este espectro en el eje de simetría $\vartheta = 0, \pi$ obtenemos :

$$n = M \left(\frac{r_-^2 - a^2}{(r_-^2 + a^2)^2} - \frac{r_+^2 - a^2}{(r_+^2 + a^2)^2} \right) - e^2 \left(\frac{r_-}{(r_-^2 + a^2)^2} - \frac{r_+}{(r_+^2 + a^2)^2} \right), \quad (4.27)$$

y su valor en el ecuador $\vartheta = \pi/2$:

$$n = M \left(\frac{1}{r_-^2} - \frac{1}{r_+^2} \right) - e^2 \left(\frac{1}{r_-^3} - \frac{1}{r_+^3} \right) - a^2 \left(\frac{1}{r_-^3} - \frac{1}{r_+^3} \right). \quad (4.28)$$

El espectro (4.26) entonces es el que correspondería al agujero negro de Kerr-Newman ya que se utilizó la definición de la función δ^2 como se especifica en la ecuación (3.9), para obtener el espectro correspondiente a una “geometría de Kerr”, simplemente eliminamos la carga e . Cuando se para el giro del agujero $a = 0$, este espectro se reduce al espectro topológico euclideo que correspondería a la “geometría de Reissner-Nördstrom”, es decir:

$$n = M \left(\frac{1}{r_-^2} - \frac{1}{r_+^2} \right) - e^2 \left(\frac{1}{r_-^3} - \frac{1}{r_+^3} \right), \quad (4.29)$$

y si tomamos simultáneamente $a = 0$ y $e = 0$ obtenemos el de Schwarzschild. Estos espectros han sido calculados anteriormente en otras tesis que han trabajado esta teoría.

Si bien, como ya se dijo, este espectro topológico no representa algo físico, su resultado es de interés por la regularidad y estética de sus expresiones matemáticas. Su posible relevancia en la física de agujeros negros sólo se verá con el tiempo.

4.2. Análisis con coordenadas de Doran y Boyer-Lindquist

Como vimos en la sección anterior, la métrica de Kerr en coordenadas de Boyer-Lindquist diverge en los horizontes interior y exterior. La intención de la sección anterior fue cubrir el espacio con dos abiertos que traslapan en el Bloque II. El análisis que haremos ahora aprovecha el hecho de que la 1-forma de conexión en las coordenadas de Boyer-Lindquist es regular en cada uno de los bloques por separado. Centrando nuestra atención en el bloque III, la conexión no posee ninguna singularidad en este espacio (recordando que la singularidad de anillo fue eliminada de la topología).

Notamos también que en las coordenadas de Doran, la métrica de Kerr es regular en el espacio-tiempo para valores $r > 0$. Calculamos ahora entonces, la conexión en estas coordenadas y verificamos la regularidad de ésta e identificamos los puntos que presenten anomalías.

Tenemos la métrica en coordenadas de Doran:

$$ds^2 = -dt^2 + \left(\frac{\rho}{R} dr + \alpha(dt - a \sin^2 \vartheta d\phi) \right) + \rho^2 d\vartheta^2 + R^2 \sin^2 \vartheta d\phi^2. \quad (4.30)$$

La métrica en esta forma nos da una tétrada natural:

$$e_{\mu}^a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \frac{\rho}{R} & 0 & -\alpha a \sin^2 \vartheta \\ 0 & 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R \sin \vartheta \end{pmatrix}, \quad \downarrow^a \quad (4.31)$$

y su inversa:

$$e_a^{\mu} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\alpha R}{\rho} & 0 & 0 \\ \alpha & \frac{R}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha a \sin \vartheta}{\rho} & 0 & \frac{1}{R \sin \vartheta} \end{pmatrix}. \quad \downarrow^{\mu} \quad (4.32)$$

Calculamos ahora la uno forma de conexión, utilizando la primera ecuación de estructura de Cartan.

Para ello calculamos primero las derivadas exteriores de los covectores θ^a :

$$d\theta^0 = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\delta}{\rho} \right) \theta^1 \wedge \theta^0 - \frac{a^2 \sin \vartheta \cos \vartheta}{\rho^3} \theta^2 \wedge \theta^0 - \frac{2\delta a \cos \vartheta}{\rho^3} \theta^2 \wedge \theta^3. \quad (4.33)$$

Las componentes de la conexión ω_b^a en forma matricial quedan de la siguiente manera, donde el índice a representa la fila y el índice b representa la columna:

$$\left(\begin{array}{cccc}
0 & -\frac{R}{\rho} \frac{\partial \alpha}{\partial r} \theta^1 + \frac{\alpha a^2}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial \vartheta} \theta^2 & \frac{\alpha a^2}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial \vartheta} \theta^1 - \frac{\alpha R r}{\rho^3} \theta^2 & -\frac{\alpha r}{\rho R} \theta^3 \\
-\frac{R}{\rho} \frac{\partial \alpha}{\partial r} \theta^1 + \frac{\alpha a^2}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial \vartheta} \theta^2 & 0 & -\frac{\alpha a^2}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial \vartheta} (\theta^0 - \theta^1) - \frac{r R}{\rho^3} \theta^2 - \frac{\alpha a}{R} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{\sin \vartheta}{\rho} \right) \theta^3 & -\frac{a \sin \vartheta}{\rho} \frac{\partial \alpha}{\partial r} \theta^1 + \frac{\alpha a}{R} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{\sin \vartheta}{\rho} \right) \theta^2 - \frac{r}{\rho R} \theta^3 \\
\frac{\alpha a^2}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial \vartheta} \theta^1 - \frac{\alpha R r}{\rho^3} \theta^2 & \frac{\alpha a^2}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial \vartheta} (\theta^0 - \theta^1) + \frac{r R}{\rho^3} \theta^2 + \frac{\alpha a}{R} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{\sin \vartheta}{\rho} \right) \theta^3 & 0 & \frac{\alpha a}{R} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{\sin \vartheta}{\rho} \right) \theta^1 + \frac{\alpha r a \sin \vartheta}{\rho^3} \theta^2 - \frac{\cos \vartheta}{\rho \sin \vartheta} \theta^3 \\
-\frac{\alpha r}{\rho R} \theta^3 & \frac{a \sin \vartheta}{\rho} \frac{\partial \alpha}{\partial r} \theta^1 - \frac{\alpha a}{R} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{\sin \vartheta}{\rho} \right) \theta^2 + \frac{r}{\rho R} \theta^3 & -\frac{\alpha a}{R} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{\sin \vartheta}{\rho} \right) \theta^1 - \frac{\alpha r a \sin \vartheta}{\rho^3} \theta^2 + \frac{\cos \vartheta}{\rho \sin \vartheta} \theta^3 & 0
\end{array} \right) \quad (4.34)$$

Expresada en términos de los generadores, tenemos:

$$\begin{aligned}
\omega_b^a &= \left(-\frac{R}{\rho} \frac{\partial \alpha}{\partial r} \theta^1 + \frac{\alpha a^2}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial \vartheta} \theta^2 \right) \otimes \hat{K}_1 + \left(\frac{\alpha a^2}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial \vartheta} \theta^1 - \frac{\alpha R r}{\rho^3} \theta^2 \right) \otimes \hat{K}_2 - \frac{\alpha r}{\rho R} \theta^3 \otimes \hat{K}_3 \\
&\quad - \left(\frac{\alpha a}{R} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{\sin \vartheta}{\rho} \right) \theta^1 + \frac{\alpha r a \sin \vartheta}{\rho^3} \theta^2 - \frac{\cos \vartheta}{\rho \sin \vartheta} \theta^3 \right) \otimes \hat{J}_1 \\
&\quad - \left(\frac{a \sin \vartheta}{\rho} \frac{\partial \alpha}{\partial r} \theta^1 - \frac{\alpha a}{R} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{\sin \vartheta}{\rho} \right) \theta^2 + \frac{r}{\rho R} \theta^3 \right) \otimes \hat{J}_2 \\
&\quad + \left(\frac{\alpha a^2}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial \vartheta} \theta^0 - \frac{\alpha a^2}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial \vartheta} \theta^1 + \frac{r R}{\rho^3} \theta^2 + \frac{\alpha a}{R} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{\sin \vartheta}{\rho} \right) \theta^3 \right) \otimes \hat{J}_3,
\end{aligned} \quad (4.35)$$

donde:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \alpha}{\partial r} &= \alpha \frac{(M-r)\delta \rho^2 + r R \rho^2 + r \delta^4 - r R^4}{\rho^4}, \\
\frac{\partial \rho}{\partial \vartheta} &= -\frac{a^2 \sin \vartheta \cos \vartheta}{\rho},
\end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{\sin \vartheta}{\rho} \right) = \frac{\rho \cos \vartheta - 2r \sin \vartheta}{\rho^2}.$$

Como vemos, la conexión en las coordenadas de Doran es regular en todo el espacio para valores de $r > 0$. Esto nos indica directamente que podemos definir una conexión regular en todo el espacio si traslapamos la conexión en coordenadas de Boyer-Lindquist con la conexión en coordenadas de Doran, fijando el traslape en la región acotada por los valores $0 < r < r_-$.

Ambas coordenadas relacionadas por la transformaciones:

$$dt_D = dt_{BL} + \frac{R^2}{\delta^2} \sqrt{\frac{R^2 - \delta^2}{R^2}},$$

(4.37)

$$d\phi_D = d\phi_{BL} + \frac{a}{\delta^2} \sqrt{\frac{R^2 - \delta^2}{R^2}}.$$

Según el formalismo de Cuantización Topológica, dado que la conexión está bien definida en todo el espacio, módulo una transformación de coordenadas trivial, no surge entonces ninguna condición de cuantización para el campo gravitacional descrito por la solución de Kerr, corroborándose el resultado anterior.

* * *

Como vimos en estas secciones anteriores, confirmamos por medio de dos métodos diferentes que no se obtiene un espectro topológico de los agujeros negros en cuestión al utilizar la simetría de Lorentz del sistema. Finalmente, con intención comparativa, mencionamos el espectro topológico del agujero negro de Kerr-Newman obtenido anteriormente por otro investigador [9], utilizando el grupo de Lie $U(1)$ correspondiente a la simetría del electromagnetismo, debida a la presencia de la carga eléctrica e :

$$\frac{2e^3 \sqrt{M^2 - (a^2 + e^2)}}{e^4 + 4a^2 M^2} = n,$$

(4.38)

donde n es entero.

5. Conclusiones

Como vimos, en esta tesis se analizaron los agujeros negros de Kerr (que depende de la masa M y el momento angular a) y de Kerr-Newman (que depende de la masa M , el momento angular a y la carga e) utilizando el formalismo de Cuantización Topológica para obtener un espectro topológico de sus parámetros. Los cálculos desarrollados en este trabajo se hicieron utilizando el formalismo de Cartan de tétradas.

Se construyó primero un haz fibrado principal para modelar el agujero negro de Kerr utilizando como espacio base el espacio-tiempo de la solución de Kerr con la métrica g_{ab} correspondiente y se utilizó como fibra y grupo de estructura al grupo de Lie $SO(3,1)$ correspondiente a la simetría de Lorentz que posee este sistema físico de manera local. La intención principal para obtener un espectro topológico consiste en construir una conexión de spin que esté definida en todo el espacio total del haz fibrado, y de esta construcción poder extraer condiciones de cuantización. El análisis del agujero negro de Kerr-Newman con esta simetría es el mismo.

Este sistema físico se analizó primero trabajando con la métrica de Kerr en coordenadas de Boyer-Lindquist, que son una generalización de las coordenadas esféricas utilizadas en el agujero negro de Schwarzschild. La conexión de spin contruida para el haz fibrado en estas coordenadas presenta singularidades de coordendas en los horizontes exterior r_+ e interior r_- del agujero negro de Kerr, por lo que para lograr que la conexión esté bien definida en todo el espacio es necesario utilizar más de una carta que lo cubra.

Se observó que haciendo una transformación de norma Λ_+ que cumpla con ciertas condiciones de compatibilidad se elimina la singularidad en el horizonte exterior pero no en la del interior, por lo se puede definir una primera carta que cubra la región $\infty > r > r_-$ donde la conexión está bien definida. De la misma manera se utilizó una transformación de norma Λ_- para eliminar la singularidad del horizonte interior quedando la conexión bien definida en otra carta que cubre $-\infty < r < r_+$. Para tener ahora una conexión bien definida en la totalidad del espacio tiempo de Kerr, se define la función de transición $\Lambda_+\Lambda_-^{-1}$ en el traslape de las cartas el cual comprende la región $r_- < r < r_+$. La idea central consiste en que para poder ser esta última transformación una función univaluada, debería satisfacerse

alguna restricción, ésta es precisamente la que correspondería a la condición de cuantización que se busca; sin embargo, en este caso en que construimos el haz fibrado utilizando la simetría correspondiente a $SO(3,1)$, la función de transición entre las cartas utilizadas es ya de por sí una función univaluada, por lo que no surge ninguna condición de cuantización, es decir no se obtiene ningún espectro topológico para el agujero negro de Kerr y su generalización a Kerr-Newman.

Para corroborar este resultado, posteriormente se utilizó en el análisis del sistema una combinación de coordenadas de Doran y de Boyer Lindquist. Las coordenadas de Doran se caracterizan por ser transparentes a los horizontes, físicamente se pueden considerar como las coordenadas de observadores cayendo al agujero en trayectorias radiales desde infinito.

Se observó que por un lado la conexión de spin calculada utilizando las coordenadas de Boyer-Lindquist está bien definida en la región $-\infty < r < r_-$ y por otro lado la conexión calculada con las coordenadas de Doran está bien definida en la región de $0 < r < \infty$, traslapamos entonces dos cartas que cubran estas regiones quedando la región de intersección entre $r = 0$ y $r = r_-$, en esta región de traslape la conexión de spin sigue estando bien definida. Notamos entonces que la conexión en realidad sí está bien definida en todo el espacio-tiempo de Kerr, y la relación que existe en la región de traslape es sencillamente una transformación de coordenadas de donde tampoco se pueden extraer condiciones de cuantización, confirmando entonces que no hay espectro topológico.

Se analizó brevemente el caso en el que la métrica de los agujeros negros de Kerr y Kerr-Newman fuera euclideana, y en este caso, sí se obtiene un espectro topológico. Si bien este modelo no representa en sí un sistema físico, su resultado es de interés por la regularidad y estética de sus expresiones matemáticas; su relevancia en la física de agujeros negros se verá con el tiempo.

Dado los resultados de los cálculos de esta tesis, vemos que los campos gravitacionales correspondientes a los agujeros negros de Kerr y de Kerr-Newman no se cuantizan cuando tomamos en cuenta exclusivamente las simetrías del campo gravitacional.

El hecho de que aparentemente el campo gravitacional de Kerr no se cuantiza puede deberse a que el modelo matemático con el que analizamos el sistema físico tiene las simetrías reducidas, es decir, hay la posibilidad de que al reducir la simetría ante difeomorfismos de la teoría gravitacional a la simetría local de Lorentz al utilizar el formalismo de tétradas se esté perdiendo algo de información.

Esta posibilidad tendrá que ser tratada en otro trabajo.

El siguiente paso en mi línea de investigación es la definición y el análisis de estados cuánticos y evolución en el tiempo de estos campos gravitacionales utilizando el formalismo de Cuantización Topológica.

Referencias

- [1] C.W. Misner, K.Thorne, J.A. Wheeler. *Gravitation* (W.H. Freeman and Company, San Francisco 1973)
- [2] B. O'Neill. *The geometry of Kerr Black holes* (AK Peters, Wellesley, MA 1995)
- [3] R.M. Wald. *General Relativity* (The University of Chicago Press, Chicago 1984)
- [4] S.W. Hawking, G.F.R. Ellis. *The Large Scale Structure of Space-Time* (Cambridge University Press, Cambridge 1973)
- [5] S.M. Carroll. *An Introduction to General Relativity, Spacetime, and Geometry* (Addison Wesley, San Francisco 2004)
- [6] M. Nakahara. *Geometry, Topology and Physics* (Institute of Physics Publishing, Bristol 2003)
- [7] L. Patiño, H. Quevedo. Topological quantization of gravitational fields, *J. Math. Phys.* **46** (2005)
- [8] F. Nettel, H. Quevedo, M. Rodríguez. Topological spectrum of mechanical systems, *Rep. Math. Phys.* **64** (2009)
- [9] L.Patiño. *Sobre el problema de la transición campo-partícula*. (Tesis de doctorado UNAM, 2003)
- [10] A.J.S.Hamilton. Notes of Gravitational Theory course (University of Colorado at Boulder, 2008)
- [11] S. Carlip. Quantum Gravity: a Progress Report, *Rep. Prog. Phys.* **64** (2001)
- [12] C. Kiefer. Quantum Gravity-A Short Overview, in *Quantum Gravity, Mathematical Models and Experimental Bounds*, editores B. Fauser, J. Tolksdorf, E. Zeidler (Birkhäuser Verlag, Basel 2007)
- [13] A. Macías, H. Quevedo. Time Paradox in Quantum Gravity, in *Quantum Gravity, Mathematical Models and Experimental Bounds*, editores B. Fauser, J. Tolksdorf, E. Zeidler (Birkhäuser Verlag, Basel 2007)
- [14] J. von Neumann. *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics* (Translation by Robert T. Beyer, Princeton University Press, Princeton 1955)

- [15] F. Heylighen. Classical and Non-classical Representations in Physics II: Quantum mechanics, *Cybernetics and Systems* **21** (1990)
- [16] M. Visser. The Kerr spacetime: A brief introduction, in *The Kerr Spacetime Rotating Black Holes in General Relativity*, editores D.L. Wiltshire, M. Visser, S. M. Scott (Cambridge University Press, Cambridge 2009)
- [17] C. Doran. A new form of the Kerr solution, *Phys. Rev. D* **61** (2000)