UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

MAESTRÍA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

FACULTAD DE CIENCIAS

PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN EL BACHILLERATO

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR EN MATEMÁTICAS

P R E S E N T A:

MATILDE YUKIE SUZUKI HAYAKAWA

COMITÉ TUTORAL:

DIRECTORA DE TESIS: M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA. F. CIENCIAS

M. EN C. AGUSTÍN ONTIVEROS PINEDA. F. CIENCIAS

M. EN C. ROXANNA DENISE PASTOR FASQUELLE. F. PSICOLOGÍA

MÉXICO, D. F., JULIO DE 2014

Dedico este trabajo:

a mi madre Alicia Yasue

a mis hijos René Takashi e Isali Akemi

y a mi nieto Fernando

de tres generaciones diferentes que han vivido en carne propia este proceso

Quiero agradecer:

al Programa de Superación del Personal Académico
por el apoyo que me brindaron para realizar mis estudios de Posgrado

a la Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades, Plantel Sur
y a la Maestría en Docencia para la Educación Media Superior
por haber contribuido en mi formación docente

a mi tutora principal :

M. en C. Elena de Oteyza de Oteyza

por su paciencia y sus consejos

a mi comité tutoral :

M. en C. Roxanna Denise Pastor Fasquelle
M. en C. Agustín Ontiveros Pineda
por su amistad, apoyo, y por el tiempo que me brindaron

a los integrantes de mi jurado :

Dr. José Alberto Monzoy Vásquez
M. en C. Juan Bautista Recio Zubieta
por la confianza y sus comentarios tan alentadores

a mis maestros y maestras de la Madems

en especial al Dr. Carlos Torres Alcaráz
de quien recibí los mejores consejos para dar una clase
y al Dr. Juan Eduardo Esquivel Larrondo
quien me hizo ver la parte humana del docente

a los integrantes del seminario multidisciplinar :

Dra. Ofelia Contreras Gutiérrez

Dr. Rafael de Jesús Hernández Rodríguez

Mtro. Fernando Ávila Villanueva

por sus valiosos comentarios observaciones y sugerencias.

al profesor y a las profesoras:

Armando Carlos Meza Romero,

Blanca Nieves Susana Regino Velázquez,

Guadalupe Xochitl Chávez Pérez

por haber cedido el tiempo en sus grupos

para la realización de este trabajo

a mi hermana y mis hermanos:

Tama, Kenji, Juan y Luis

por apoyarme en todo momento

a mi sobrino :

Óscar Toshio

con el deseo de que culmine

con éxito sus estudios

a mis amigas y compañeras de la Maestría:

Martha Alicia Reyes y Maura Patricia Miranda

con las que he compartido momentos inolvidables

a mi amiga, comadre y ex-alumna:

Silvia Cera de la Rosa

por su apoyo incondicional

a mis compañeros y compañeras de estudio del japonés y francés:

Maribel, Alejandra, Angélica, Marissa,
Mayra, Damián, Tere, Adria,
Edna, Adriana, Román, Carolina
y en especial a Alejandro Vázquez y Midori Reyes
por haberme apoyado en momentos de crisis

a mis amigos y amigas:

Carlos Soto, Dulce Ma. Peralta, Guadalupe Islas

Daniel Flores, Bertha Medina, Alberto Lozano, Alberto Güido,
Edilberto Hernández, Teodomiro Nava, Minerva Calvillo,
Francisco Díaz, Rocío Solís, Luis Mascherpa, Guadalupe Rosas
José Chacón, Ismael Rivera, Antonio Flores y Joel Chávez
por sus sabios consejos

a todos mis familiares, amigas y amigos

que me animaron a concluir este trabajo

a la Facultad de Ciencias

a la Universidad Nacional Autónoma de México

por albergarme en sus recintos

Matilde Yukie Suzuki Hayakawa

Dime y lo olvido

enséñame y lo recuerdo

involúcrame y lo aprendo

Benjamín Franklin

Índice

Resumen

En este trabajo se propone una estrategia didáctica para abordar el *concepto de límite en términos de la continuidad* de una función, ya que la idea de continuidad es más intuitiva y comprensible, considerando únicamente los conocimientos previos que poseen los y las estudiantes al comienzo de un curso introductorio de Cálculo.

El concepto de límite de una función es difícil de comprender para los y las estudiantes de bachillerato y los(as) que inician sus estudios universitarios, principalmente por el lenguaje tan abstracto que se emplea para definirlo, se requiere de un pensamiento de orden superior en el que interviene el análisis, la abstracción, la generalización y la síntesis, y la gran mayoría de los(as) estudiantes no está familiarizado con ello.

Con la estrategia se pretende *reactivar los conocimientos previos* de los y las estudiantes y con ello, remover algunos *obstáculos epistemológicos o preconcepciones* y tratar de sustituirlos por los correctos y con la secuencia didáctica, llegar al *concepto de límite* en términos de la continuidad de una función con una breve explicación por parte del(de la) docente

Algunos resultados de este trabajo muestran que la estrategia proporciona alternativas para enriquecer y mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto de límite de una función, sin extenderse en el tema de los procesos infinitos, ya que el concepto de infinito presenta dificultades todavía más complejas que el concepto mismo de límite.

Abstract

This is a proposal of an educational strategy to teach the *concept of limit in terms of continuity* of a function, since the idea of continuity is more intuitive and comprehensible for high school student, considering only the previous knowledge that the students already have at the beginning of an Introductory Calculus course.

The concept of the limit of a function is difficult to understand for high school students and for students who begin their undergraduate studies, mainly because of the abstract language used to define it; higher-order thinking is required in which the skills of analysis, abstraction, generalization and synthesis, among others, are involved, and the majority of students are not acquainted with them.

The objective of this strategy is to *reactivate the previous knowledge* of the students and with this, to eliminate some *misconceptions*, and therefore, to reach the *concept of limit in terms of the continuity* of a function with a brief explanation from the teacher.

Some results of this work show that the strategy provides alternatives to enrich and improve the learning-teaching process regarding the concept of limit of a function, without going further into the topic of infinite processes, since the concept of infinite represents difficulties that are even more complex than the ones involved in the concept of limit.

Introducción

La idea de este trabajo surge de observar que en los cursos de Cálculo Diferencial e Integral *I* en la Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades, un gran número de estudiantes no logra comprender los conceptos básicos, en particular, los conceptos de límite y de derivada, ni expresar la idea que encierra el concepto de límite o su interpretación geométrica tanto de éste, como de la derivada y la relación que existe entre ellos.

Lo anterior trae como consecuencia que al aplicar la derivada en problemas de optimización o graficación, el(la) estudiante no logra hacer la conexión de los conceptos de límite y de derivada con la aplicación, por tal motivo existe un número elevado de estudiantes que no aprueba la asignatura.

Para comprender el concepto de derivada es necesario comprender el concepto de límite, y éste resulta un poco complicado, ya que la definición formal de límite resulta incomprensible para los(as) estudiantes de bachillerato y de los primeros años de nivel superior, por el lenguaje tan abstracto que se utiliza, además de que los(as) alumnos(as) relacionan el límite de una función con la acepción de límite como la línea real o imaginaria que delimita dos regiones o como el fin, término o extremo de algo.

Si el concepto de límite no es comprendido, entonces tampoco lo es el de continuidad ni el de derivada, por consiguiente, la interpretación geométrica de la derivada pierde sentido y esto conduce a que los(as) estudiantes no sepan utilizar esta herramienta tan poderosa en los problemas de optimización así como en la graficación de funciones.

La derivada es un límite así como la integral, ¿cómo pueden lograr comprender lo que es una derivada, una integral o simplemente el concepto de continuidad si no les queda claro el concepto de límite de una función?

La continuidad y la definición formal de límite de una función no están contempladas en el programa de estudios vigente de la Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades, en su lugar se les introduce en los procesos infinitos y por la aridez del tema, los(as) estudiantes comienzan a perder interés y muchos(as) de ellos(as) desertan de la asignatura.

Dado que son varios los factores que influyen en el aprendizaje de los contenidos de la asignatura de Cálculo, en este trabajo se propone una estrategia didáctica que ayudará a la comprensión del concepto de límite, tomando en cuenta los aspectos observados que intervienen en la problemática del(de la) estudiante, dando propuestas para dar solución a aquellos puntos en los que el(la) docente puede incidir.

La estrategia didáctica que se aplica en la primera unidad: '*Procesos infinitos y la noción de límite*', de la asignatura de *Cálculo Diferencial e Integral I del Colegio de Ciencias y Humanidades*, se apoya en la idea de continuidad de las funciones, que es una noción más intuitiva y puede ser visualizada y comprendida gráficamente por los(as) estudiantes.

La estrategia favorecerá la comprensión del concepto de límite, además de que el(la) estudiante relacionará el concepto con planteamientos reales, lo que hace aterrizar un concepto muy abstracto con algo relacionado a lo cotidiano. Para el(la) estudiante resulta más natural reconocer cuándo una función es continua o tiene una discontinuidad y conectar ésto con el límite de una función, así como relacionarlo con su entorno, que simplemente comprender el concepto aislado.

Con la aplicación de la secuencia didáctica, el(la) estudiante llega al concepto de límite de una función, con una breve explicación por parte del(de la) docente, los conocimientos que el(la) estudiante posee y la interacción y comunicación entre pares.

Se contribuye de esta manera a que el curso de Cálculo resulte más interesante, los(as) estudiantes tengan un mejor desempeño porque comprenderán la mayor parte del curso y habrá un menor número de deserciones.

Si a los(as) estudiantes de bachillerato les quedan claros los conceptos de continuidad, límite y derivada, les permitirá avanzar en sus cursos posteriores ya que llegarán al nivel superior con los conocimientos básicos y con una mejor disposición.

El trabajo consta de cinco capítulos y ocho anexos. En el *Capítulo I* se trata el tema de la educación, la situación actual de la Educación Media Superior, el mejoramiento en la calidad de los sistemas educativos, la formación docente y el trabajo colegiado.

En el *Capítulo II* se fundamenta la propuesta con un enfoque constructivista, el aprendizaje significativo, las preconcepciones o ideas previas de los(as) estudiantes y los afectos en matemáticas, esto es, las bases teóricas del presente trabajo. Aclarando que todo el subcapítulo *'Los afectos en Matemáticas'* fue tomado del libro *Matemática emocional*, de Inés Mª Gómez Chacón.

En el *Capítulo III* se encuentra la problemática que se detecta en el tema de límites de funciones algebraicas, así como la propuesta para abordar el tema de una forma diferente a la que se plantea en el programa vigente de la asignatura y en la mayoría de los libros de Cálculo.

En el *Capítulo IV* se presentan los resultados obtenidos de la estrategia didáctica y la valoración de la intervención.

En el *Capítulo V* se encuentra el análisis de resultados y las conclusiones obtenidas del ejercicio, así como las consideraciones finales para que el trabajo pueda sea utilizado por otros(as) docentes.

En la última parte del trabajo se presentan los *Anexos* y las *Fuentes documentales*.

En el *Anexo 1*, se encuentra el examen de diagnóstico en su versión final y un examen de dignóstico de un alumno de un grupo de prueba.

En el *Anexo 2*, se encuentran algunas bitácoras de estudiantes de los grupos de prueba.

En el *Anexo 3*, están los trabajos extraclase que se dejaron a los grupos de prueba en el transcurso de la primera unidad en su versión final y algunas tareas de alumnas de un grupo de prueba.

En el *Anexo 4* se encuentra la secuencia didáctica en su versión final y una secuencia didáctica de un equipo del grupo de prueba del turno matutino.

En el *Anexo 5* se presentan algunos ejemplos resueltos de límites de funciones algebraicas para cubrir la parte del cálculo de límites de funciones algebraicas.

En el *Anexo 6* se encuentra un tipo de examen parcial (de cuatro diferentes que se aplicaron) y tres exámenes parciales de dos alumnos: uno del grupo de prueba del turno matutino, otro del grupo de prueba del turno vespertino y otro de una alumna del grupo testigo del turno matutino.

En el *Anexo 7* están las respuestas a los exámenes, secuencia didáctica y trabajos extraclase.

Por último, en el *Anexo 8* se encuentran las fotos de los(as) alumnos(as) de los grupos de prueba, el *519* del turno matutino y el *562* del turno vespertino.

Con este trabajo se intenta contribuir a encontrar estrategias que puedan mejorar la comprensión del concepto de límite, en particular, las actividades realizadas conducen al(a la) alumno(a) al concepto de límite, a partir de la idea de continuidad de una función y la igualdad de funciones, esto es, se propone una alternativa para solucionar las dificultades con las que se enfrenta el(la) estudiante de bachillerato en el tema de límites y mejorar así el proceso de enseñanza y aprendizaje en la asignatura de Cálculo.

Capítulo I
Educación y formación docente

En este capítulo se presenta una panorámica sobre lo que han escrito algunos(as) autores(as) sobre educación, se da un breve esbozo de la situación por la que atraviesa la Educación Media Superior (EMS) y sus retos, en particular, aquí en México. También se hace mención del mejoramiento en la calidad de los sistemas educativos, la formación docente y el trabajo colegiado.

Educación y sociedad

La educación y la formación docente son temas que cubren muchos aspectos, no se pretende hacer una revisión exhaustiva, únicamente tomar las ideas principales de algunos(as) autores(as) que han escrito sobre ello y hacer una reflexión en cuanto al compromiso que adquirimos como docentes. Se asume el término educación en dos sentidos, en los(as) estudiantes que se atenderán en un futuro próximo y como estudiante en formación docente.

Enseñar y aprender es una necesidad para la existencia de una sociedad, toda comunicación es educativa, ningún conocimiento es inútil. El(la) receptor(a) de una comunicación obtiene una experiencia ampliada y alterada, participa en lo que otro(a) ha pensado y sentido, de un modo restringido o amplio se ha modificado la actitud propia, también es afectado el(la) que comunica. El mismo proceso de convivir educa, estimula y enriquece la imaginación.

Existe una marcada diferencia entre la educación que cada uno(a) obtiene de vivir con los demás y la educación deliberada de un(a) joven, en el primer caso, la educación es incidental, pero al tratar con el(la) joven, el hecho de la asociación misma, como un hecho humano inmediato, adquiere importancia, nuestro principal quehacer con él(ella), es capacitarle para compartir una vida en común.

La educación es un proceso de estimulación, de nutrición y de cultivo, dirige y encauza, es una actividad estructuradora, moldeadora, formadora. Hay que hacer partícipe al(a la) estudiante de manera que sienta su éxito y su fracaso como suyos.

La importancia del lenguaje para la adquisición de conocimientos es indudablemente la principal causa de la idea de que el conocimiento puede transmitirse directamente de unos(as) a otros(as). Parece casi como si todo lo que tenemos que hacer para llevar una idea a la mente de otro(a) es introducir un sonido en sus oídos. (*Dewey, 1995*)

Cuanto más se conoce la naturaleza de las cosas, más probabilidad hay de utilizarla eficazmente, el(la) educador(a) está obligado(a) a manejar la atención del(de la) aprendiz. La psicología admite aplicaciones prácticas, en virtud de las cuales la pedagogía formula las reglas para la educación, de la misma manera, la ciencia sociológica de la educación puede admitir aplicaciones prácticas.

La transmisión, por el(la) docente al(a la) estudiante, de un saber positivo, la asimilación del(de la) aprendiz por una materia, parece ser la condición de una verdadera formación intelectual. La razón es obvia: el análisis sociológico del entendimiento entraña consecuencias pedagógicas.

La memoria, la atención, la facultad de asociación son disposiciones congénitas en el(la) aprendiz, que el ejercicio desarrolla, en el campo de la experiencia individual, sea cual fuere el objeto al que estas facultades se apliquen. Las ideas directoras elaboradas por nuestra civilización, son por el contrario, ideas colectivas que hay que transmitir al(a la) aprendiz, porque él(ella) no podría elaborarlas solo(a). No podemos rehacer la ciencia por nuestra experiencia propia, porque ella es social y no individual; la aprendemos.

La palabra educación comprende todo lo que hacemos nosotros(as) mismos(as) y todo lo que los(as) demás hacen por nosotros(as) con objeto de acercarnos a la perfección de nuestra naturaleza, hasta los efectos indirectos producidos sobre el carácter y sobre las facultades del ser humano por medio de cosas cuyo objeto es completamente distinto.

Llevar al punto más elevado que pueda alcanzarse todas las potencias que residen en nosotros(as), realizarlas tan completamente como sea posible, pero sin que se perjudiquen las unas a las otras, ¿no es esto un ideal, al que no puede superar cualquier otro(a)? La educación tendría por objeto 'hacer del individuo un instrumento de felicidad para sí mismo y para sus semejantes'. Un espíritu cultivado prefiere no vivir a tener que renunciar a los goces de la inteligencia.

La educación ha variado infinitamente según los tiempos y según los países, desde las antiguas ciudades griegas, hasta nuestros tiempos. En las ciudades griegas y latinas, la educación preparaba al individuo para subordinarse ciegamente a la colectividad, para llegar a ser la cosa de la sociedad.

En Atenas se pretendía formar espíritus delicados, discretos, sutiles, enamorados de la medida, y de la armonía, aptos para saborear lo bello y los goces de la pura especulación. En Roma se pretendía, que los niños se hicieran hombres de acción, apasionados por la gloria militar, indiferente a lo que concierne a las letras y a las artes. En la Edad Media la educación era, ante todo, cristiana; en el Renacimiento toma el carácter más laico y más literario; hoy en día la ciencia tiende a tomar el lugar que antiguamente tenía el arte en la educación y la educación trata de hacer del individuo una personalidad autónoma. (*Durkheim, 2006*)

Platón escribió respecto al ideal para gobernar el Estado: "Debíamos escoger hombres de ese temple, y que debía preferirse a los más firmes, de más mérito, de ser posible, más hermosos, que desde sus primeros años muestren equidad y dulzura; más no basta con esas ventajas corporales y con la nobleza de sentimientos, es preciso que además, sean verdaderos filósofos, que tengan memoria, sabiduría, virtud, voluntad, horror a la mentira, amor al trabajo, grandeza de alma, de afabilidad, aliado de la verdad, de la justicia, de la fuerza y de la templanza, dispuestos a todo género de trabajo, sin distinciones, que tengan disposiciones convenientes para la educación que queremos darles, que se apliquen en cálculo, geometría, música, astronomía y sobre todo a la dialéctica que es el supremo ápice y colmo de las demás ciencias; que no hay ninguna otra que deba ponerse por cima de ella y que cierra la serie de las ciencias que importa aprender".

Un pueblo educado sabrá elegir a dirigentes honestos(as) y competentes, éstos(as) eligirán a los(as) mejores asesores(as). Un pueblo inteligente y educado no permite corruptos(as) ni incompetentes. Un pueblo educado prospera también en condiciones adversas. No es suficiente que una sociedad posea algunas personas muy capacitadas. Toda la sociedad tiene que tener la posibilidad de formación durante toda la vida. Todo cuanto no tenemos en nuestro nacimiento y que necesitamos de personas adultas nos es dado por la educación, entendido como aquello que aprendemos de la naturaleza, de los seres humanos, de las cosas.

Orientar nuestra atención hacia la parte de la educación más susceptible de nuestra influencia: los esfuerzos conscientes de hombres y mujeres para formar el intelecto y delinear la personalidad de los(as) menos educados(as). ¿Qué clase de personas debería intentar crear la educación humana? Las leyes de la educación deben ser relativas a los principios de gobierno.

El problema de reforzar la crueldad y la injusticia a través de la educación surge cuando los principios de una sociedad apoyan la crueldad y la injusticia. Hay mucho que reflexionar en esta parte si queremos mejorar la sociedad en la que vivimos.

El propósito de la educación es cultivar esa unidad, enseñando a todos(as) los(as) niños(as) que es la (única) buena vida para ellos(as) e inculcándoles el deseo de intentar alcanzar esta buena vida por encima de todas las inferiores. Los(as) ciudadanos(as) de una comunidad bien ordenada, aprenden que no pueden realizar su propio bien a menos que contribuyan al bien común, y son educados(as) para desear sólo lo que puede ser bueno para ellos(as) mismos(as) y para la sociedad. (*Guttman, 1987*)

En primer lugar debemos inculcar en los(as) jóvenes las normas y las convenciones actuales de la sociedad adulta, en segundo lugar enseñarles conocimientos que garanticen que su pensamiento se ajuste a lo que es real y verdadero sobre el mundo y en tercer lugar debemos estimular el desarrollo de las potencialidades de cada estudiante. La vertiente negativa es que estas tres ideas son mutuamente incompatibles y que esta incompatibilidad es la causa principal de nuestra prolongada crisis educativa. (*Egan, 2000*)

Retos de la educación media superior

Resulta evidente que se tienen serios problemas de educación en todo el mundo, en particular, en México la situación es grave, ya que los resultados de las evaluaciones internacionales en los que ha participado nuestro país, revelan que nuestros(as) estudiantes de entre *15* y *16* años, ocupan las últimas posiciones en las competencias de lectura, matemáticas y ciencias naturales, de los países miembros de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico. (*OCDE, 2003*)

La reforma educativa está en el primer lugar de la agenda de casi todos los países, debido a la problemática que se está presentando, a pesar de que en varios países han destinado grandes cantidades de dinero a la educación, como Estados Unidos, y no han obtenido los mejores resultados, en otros países, sin embargo, no ha sido muy fuerte su inversión en educación y se encuentran en los primeros lugares en las evaluaciones internacionales, como Corea, Finlandia, Canadá y Japón. (*OCDE, 2009*)

¿En qué radica, entonces, que algunos sistemas educativos tengan un excelente desempeño y mejoran con mayor rapidez que otros? La misión principal de cualquier sistema educativo es cambiar lo que sucede en los corazones y en las mentes de los(as) niños(as) y jóvenes, lo cual no es ninguna tarea fácil.

En los sistemas educativos exitosos consiguen a las personas más aptas para ejercer la docencia, los capacitan para convertirlos en instructores(as) eficientes y garantizan que el sistema sea capaz de brindar la mejor educación posible a todos(as) los(as) niños(as) y jóvenes, pagando buenos salarios.

La tarea de un sistema educativo es garantizar que cuando un(a) docente ingrese a un aula cuente con los materiales, los conocimientos, la capacidad y la ambición de llevar a un(a) niño(a) o joven a superar lo hecho el día anterior y nuevamente el día siguiente.

Los(as) estudiantes que reciben instrucción de docentes con bajo desempeño durante varios años seguidos sufren una pérdida educacional en gran medida irreversible.

No puede mejorarse el aprendizaje sin mejorar la instrucción. La calidad de un sistema educativo depende de la calidad de sus docentes. Uno puede tener el mejor plan de estudio, la mejor infraestructura y las mejores políticas, pero si no se cuenta con buenos(as) docentes, todo aquello no servirá de nada…. Si los(as) docentes no están motivados(as), ¿cómo lograr estudiantes motivados(as)? (*Barber, 2008*)

Un elemento que llama la atención de los programas educativos de la actual administración del gobierno federal para la EMS, es el anuncio de una radical reforma para este tipo educativo, la Reforma Integral para la Educación Media Superior, RIEMS, en la que juega un importante papel la propuesta de orientar el esfuerzo educativo mediante un enfoque basado en competencias.

Para que se pueda lograr una mejora en la eficiencia terminal y en la calidad de la educación, se deben analizar los problemas actuales de la EMS, mejorar la calidad de los sistemas educativos, tomando en cuenta las debilidades de nuestros(as) estudiantes, para tener un punto de partida y no comenzar desde cero, la actualización, preparación y formación docente es fundamental, así como el trabajo colegiado.

En cuanto a los puntos anteriores, como docentes, debemos tomar parte en los que nos competen. La EMS debe hacer frente a los retos que se le presentan, como son la ampliación de la cobertura, la mejora de la calidad y la búsqueda de la equidad, eso le dará identidad y fortaleza.

Sobre la cobertura, dadas las tendencias demográficas y educativas que se observan en el país, el crecimiento más notable del sistema educativo nacional durante los próximos años se localizará en el nivel medio superior. La cobertura de la EMS debe entenderse como el número de jóvenes que cursa el nivel en relación con aquellos(as) que se encuentran en edad de cursarlo.

La educación que reciban los(as) estudiantes de EMS debe contribuir a su crecimiento como individuos a través del desarrollo de habilidades y actitudes que les permitan desempeñarse adecuadamente como miembros de la sociedad. Implica un esfuerzo y una inversión que los(as) alumnos(as) valorarán mejor en la medida en que sus estudios sean significativos para sus aspiraciones como jóvenes.

Muchos(as) estudiantes ingresan a la EMS con grandes deficiencias en sus conocimientos, lo que les impide un desempeño satisfactorio en este nivel educativo, esto afecta la eficacia de la EMS aún cuando es originado fuera de ella.

Los(as) jóvenes deben permanecer en la escuela y lograr una sólida formación ética y cívica, así como el dominio de los conocimientos, habilidades y destrezas que requerirán en su vida futura.

La calidad está estrechamente relacionada con la pertinencia, cuando los(as) jóvenes reconocen en su vida cotidiana y en sus proyectos a futuro, las ventajas de lo que aprenden en la escuela, aumenta el desempeño y reafirman los conocimientos y las habilidades adquiridas. Que el aprendizaje se produzca en un contexto significativo para los(as) jóvenes, ya sea en los estudios de las diferentes disciplinas o en el ámbito laboral, aumentará la cobertura y permanencia en la EMS. El sistema educativo debe planear estrategias para cumplir la función de formar personas preparadas para enfrentar los retos que se les presenten.

En la actualidad es deseable que los(as) jóvenes sean personas reflexivas, capaces de desarrollar opiniones personales, interactuar en diversos contextos, asumir un papel importante como miembros de la sociedad y estar en posibilidades de actualizarse de manera continua, entre otros aspectos.

Las trayectorias de vida de los(as) jóvenes de hoy son complejas y variadas, en comparación con las de generaciones anteriores, por lo que es necesario que la educación esté orientada al desarrollo de herramientas que les permitan desempeñarse de manera satisfactoria en diversos ámbitos. Una educación orientada al desarrollo de estas herramientas haría a la EMS más atractiva para los(as) jóvenes. (*SEP, 2008*)

Otros factores relevantes para la mejora en la calidad de la EMS, son: la calidad de la enseñanza, las instalaciones y equipamiento con que se cuenta. Si no se cuenta con instalaciones apropiadas, la educación que reciben los(as) estudiantes difícilmente será pertinente.

El que todas las escuelas alcancen por lo menos un estándar mínimo en estos rubros es un paso importante en la mejora de la calidad de la EMS.

La educación juega un papel importante en la construcción de un país más equitativo, a mayor educación, menores diferencias económicas y sociales.

Las diferencias en la calidad de las escuelas son un obstáculo que debe atenderse para que existan condiciones que permitan a todas las escuelas y subsistemas avanzar en una misma dirección.

Se han propuesto estrategias para tratar de mejorar la calidad de los sistemas educativos: mayores inversiones destinadas a educación, reducción de la cantidad de estudiantes en las aulas, mejorar la calidad de los(as) docentes, entre otros.

En referencia a mayores inversiones destinadas a educación, como se ha mencionado anteriormente, una mayor inversión en educación no garantiza que se mejore la calidad de la educación, algunos sistemas educativos como los de Canadá, Finlandia, Japón y Corea dan prueba de que la excelencia en educación es una meta alcanzable a un costo razonable.

Singapur, es el mejor ejemplo de ello, ya que es uno de los países con mejor desempeño del mundo y gasta menos en educación primaria que *27* de los *30* países de la OCDE. En cambio, el desempeño de un gran número de sistemas educativos apenas ha mejorado en décadas, pese a los sensibles aumentos del gasto y a muchos esfuerzos de reforma bien intencionados. (*Barber, 2008*)

Estados Unidos no fue el único país con problemas para mejorar su sistema educativo, casi todos los países miembros de la OCDE, elevaron sensiblemente su gasto en educación, pero muy pocos alcanzaron mejoras de desempeño significativas.

Lo que no ha tenido un fuerte impacto sobre la calidad de los resultados, es la política más ampliamente apoyada y solventada que prácticamente todos los sistemas educativos han seguido que consiste en reducir la cantidad de estudiantes en las aulas, con el objeto de mejorar la educación.

La reducción de la cantidad de estudiantes tiene fuertes implicaciones en materia de recursos: menos estudiantes implica más docentes, lo que significa que con el mismo nivel de financiamiento, habrá menos dinero por docente.

En el año *2006*, la *Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades* hizo la reducción de los grupos de Matemáticas de primer semestre, justo a la mitad, fue una gran inversión, los salones fueron divididos a la mitad en una primera etapa, para los grupos de Matemáticas *I* y *II*, pero esto redujo mucho el espacio, así que en una segunda etapa, en el año *2007*, para los grupos de Matemáticas *III* y *IV*, dos salones grandes se convirtieron en tres de buen tamaño, se requirieron más docentes, pizarrones, puertas, cambio de mobiliario, etcétera.

Al término del periodo de tres años de la generación que estuvo en grupos reducidos, no arrojó un cambio notable en los resultados de las cifras de egresados, el promedio general, la efiencia terminal, mejor desempeño y habilidades, mayor número de aprobados(as) en las asignaturas de Matemáticas, como podría esperarse.

¿Por qué la reducción de estudiantes en los grupos de Matemáticas no mostró los resultados esperados? En principio, debe haber un tiempo de estabilización, para que todo se vaya acoplando a las nuevas condiciones, además, un factor importante fue la contratación de muchos(as) docentes de recién ingreso, apenas incorporando el modelo educativo del colegio a su práctica docente, o bien, impartiendo su clase sin conocer el modelo del colegio.

Los resultados en años posteriores a la implementación de la reducción de la cantidad de alumnos(as), no ha tenido un fuerte impacto sobre la calidad en la educación y desempeño de los(as) estudiantes del Colegio de Ciencias y Humanidades. Lo cual hace desviar la atención hacia la calidad docente.

Ante los problemas que se enfrenta la educación pública en México, en particular en la Educación Media Superior (EMS), gobierno, instituciones, docentes, padres(madres) de familia, alumnos(as) y público en general, deben conjuntar esfuerzos para que se pueda producir un cambio sustancial.

El gobierno debe tomar cartas en el asunto y preocuparse seriamente en la preparación de sus futuros(as) ciudadanos(as), algunos(as) de los(as) cuales serán los(as) futuros(as) gobernantes, en cuanto esto suceda, la sociedad en conjunto irá encaminada en la misma dirección buscando un mejor nivel de vida.

Un indicador de la funcionalidad del Sistema de EMS es la eficiencia terminal, de aquí se desprenden los grandes problemas de calidad y equidad que atañen al sistema en su conjunto. Resulta urgente pues, atender los problemas asociados con la calidad en la formación de los(as) estudiantes y de los(as) docentes de la EMS mexicana, para mejorar significativamente la eficiencia terminal.

El maestro o maestra que todos queremos

En cuanto al aprendizaje escolar se refiere, se debe mejorar la calidad de los(as) docentes. En investigaciones realizadas en diferentes lugares de Estados Unidos, se mostró que estudiantes asignados a los(as) mejores docentes de matemáticas lograron avances sensibles, mientras que los(as) estudiantes asignados(as) a docentes con bajo desempeño, su dominio de la asignatura empeoró.

Los estudios que toman en cuenta todas las pruebas disponibles sobre eficiencia docente sugieren que los(as) estudiantes asignados(as) a docentes con alto desempeño lograrán avances tres veces más rápido que los(as) asignados(as) a docentes con bajo desempeño. (*Barber, 2008*)

Los sistemas educativos con más alto desempeño, atraen en forma constante gente más capacitada a la carrera docente, lo que lleva a su vez a mejores resultados académicos.

Para ser docente, no basta con ser experto(a) en el área o asignatura que se imparte, ya que eso no asegura que se cuente con las capacidades para enseñar de manera adecuada y eficaz ni que propicie el aprendizaje de los(as) estudiantes.

Como docentes se debe estar consciente de que se requiere de una planeación adecuada de actividades educativas, diseño de clases participativas, el fomento del aprendizaje colaborativo, la resolución de problemas que lleven a los(as) estudiantes a enfrentarse a problemas reales y tomar decisiones correctas en el ámbito escolar, informal y en lo cotidiano.

La formación de los(as) docentes debe ser un proceso continuo de preparación, no sólo disciplinar, también se debe tener una formación psicopedagógica y didáctica, basándose en principios sociales, éticos y educativos, para asumir el compromiso en el área laboral y generar contenidos educativos en lugar de repetir los patrones tradicionales que, obviamente, debemos cambiar.

Las nuevas generaciones de estudiantes son diferentes a las de años anteriores, debido a múltiples factores, como el uso de tecnologías, información disponible en diferentes medios de comunicación, familias desintegradas, facilidad de acceso al alcohol y drogas, entre otros.

La formación docente es uno de los factores que repercuten en la calidad de los procesos educativos que se realizan en todos los niveles, desde el básico hasta el nivel superior. La mayoría de los(as) profesores(as) que han encaminado sus pasos hacia la docencia no cuentan con la preparación pedagógica, psicológica ni didáctica requerida para ser docente.

Un(a) docente efectivo(a) de matemáticas, es aquel(lla) que con bastante consistencia logra objetivos enfocados sobre el aprendizaje de sus estudiantes, sea de forma directa o indirecta. Sus presentaciones deben ser claras y bien organizadas, fáciles de seguir, de entender y de recordar (*SER*).

Para que una lección sea fácil de *Seguir*, el(la) docente debe señalar los propósitos al principio y al final de la lección, esto ayuda a situar a los(as) estudiantes hacia a dónde van y si al final de la lección lograron lo que se proponía.

Es importante estructurar la lección en introducción, cuerpo y conclusión. Realizar continuamente micro resúmenes para que el(la) estudiante se sitúe y tenga un panorama del camino a seguir.

El(la) docente debe motivar a los(as) estudiantes refiriéndose a los usos en un futuro de lo que se está aprendiendo en la lección, con aplicaciones relacionadas, así como mencionar los factores relevantes para los(as) estudiantes. Apoyarse en anécdotas o notas históricas.

El(la) docente debe tener una clara expresión, utilizar un lenguaje simple y hablar con un ritmo adecuado haciendo las pausas necesarias para que el(la) estudiante tenga tiempo de reflexionar y preguntar sus dudas. Debe ser entusiasta, tener buen humor, hacer la lección interesante y atractiva, aliviando así la tensión de los(as) estudiantes.

Para que una lección sea fácil de *Entender*, el(la) docente debe relacionar los conocimientos previos con el nuevo material y establecer una conexión, comparar y contrastar lo nuevo con lo anterior.

El(la) maestro(a) debe saber cuando se está entendiendo lo que está explicando o si surgen confusiones. Debe anticipar dificultades y preparar a los(as) estudiantes de antemano y estar atento cuando un(a) estudiante quiere preguntar algo. Debe ser cuidadoso y preciso al responder a las preguntas que hacen los(as) alumnos(as).

Para que una lección sea fácil de *Recordar*, el(la) docente debe enfatizar los puntos más importantes cambiando el tono de voz para que el(la) estudiante enfoque su atención y se quede con lo esencial. Escribir palabras clave en el pizarrón, enfatizar en los puntos principales, repetir ideas con las mismas o diferentes palabras, remarcar para enfatizar cualidades. Hacer continuamente micro-resúmenes.

Se debe dar un resumen general al final de la lección, el(la) docente debe proveer a los(as) estudiantes de instrumentos para organizar lo aprendido de manera que lo almacene en la memoria. Utilizar técnicas de nemotecnia, algoritmos, títulos para relacionar lo aprendido para que permanezca en la memoria.

Los(as) docentes efectivos preparan su lección, le dan una presentación oral y visual atractiva, relacionan la información nueva con la ya existente ayudando a los(as) estudiantes a entender y asimilar el nuevo material. (*Hativa, 1983*)

Ademas de lo señalado anteriormente, otras cualidades que debe poseer un(a) maestro(a) para considerarlo un(a) buen(a) docente, esto es, el maestro o maestra que todos queremos, debe tener:

- ✓ **dominio de la asignatura que imparte, para tener la seguridad de lo que afirma,**
- ✓ **conocimientos y habilidades en metodologías apropiadas y variadas,**
- ✓ **conocimiento, sensibilidad e interés en sus estudiantes,**
- ✓ **capacidad de reflexionar sobre las prácticas de enseñanza,**
- ✓ **capacidad de modificar los abordajes de enseñanza y aprendizaje como resultado de la reflexión,**
- ✓ **capacidad de crear y sostener un ambiente de aprendizaje efectivo,**
- ✓ **entendimiento del currículo y de sus objetivos,**
- ✓ **profesionalismo general, buen ánimo y dedicación a los objetivos de la enseñanza,**
- ✓ **habilidad para la comunicación efectiva,**
- ✓ **habilidad de comunicar a los(as) estudiantes el entusiasmo por el aprendizaje,**
- ✓ **interés en los(as) estudiantes como individuos, sentido de valoración y responsabilidad de ayudarlos(as) a aprender, a hacerse buenas personas y a tener sensibilidad,**
- ✓ **buen carácter, sentido de ética y disciplina personal,**
- ✓ **habilidad de trabajar con otras personas y construir buenos vínculos dentro de la escuela y la comunidad,**
- ✓ **disposición a colaborar con otros(as) docentes bajo el principio del trabajo colegiado,**
- ✓ **motivación por lo que hace y saber transmitir esa motivación a sus estudiantes.**

Aunque hay un consenso general de que los(as) docentes deben dominar los contenidos disciplinares, no hay un acuerdo sobre la manera en que se debe lograr dicho dominio, ni siquiera acerca de cómo se debería concebir la disciplina.

El conocimiento disciplinar no es suficiente para asegurar competencia profesional, siendo necesarios otros conocimientos de índole psicológica: cómo aprenden los(as) estudiantes, conocer los afectos, dificultades y errores característicos en el(la) alumno(a), entre otros.

Los(as) docentes deberíamos ser capaces también de organizar la enseñanza, diseñar tareas de aprendizaje, usar los recursos adecuados, y comprender los factores que condicionan la enseñanza y el aprendizaje. (*Godino, 2009*)

Enseñar no sólo es proporcionar información, sino ayudar a aprender y para ello el(la) docente debe tener un buen conocimiento de sus estudiantes: cuáles son sus ideas previas, qué son capaces de aprender en un momento determinado, su estilo de aprendizaje, los motivos que los(as) animan o desalientan, sus hábitos de trabajo, las actitudes y valores que manifiestan frente al estudio concreto de cada tema.

El propósito central de la intervención educativa, es que los(as) estudiantes se conviertan en aprendices exitosos(as), así como en pensadores(as) críticos(as) y planificadores(as) activos(as) de su propio aprendizaje.

En los reportes de población de jóvenes en la edad para ingresar a una institución de EMS, se estimó que en *2010* se tuvo el mayor número de estudiantes que demandan un lugar en alguna de estas instituciones en comparación de años anteriores.

Es un reto para los(as) docentes de este nivel, ofrecer el mejor servicio y preparar de manera adecuada a estos(as) jóvenes que habrán de ingresar al campo laboral, proseguir sus estudios en alguna licenciatura o en una carrera técnico-profesional y probablemente se conviertan en nuestros(as) futuros(as) gobernantes.

En materia de educación, el incumplimiento de los compromisos de mejorar la calidad se ve reflejado en las oportunidades de la vida de los(as) estudiantes y esto trae como resultado consecuencias desfavorables para el país.

Si se pretenden mejorar los sistemas educativos, la escuela, el proceso de enseñanza y aprendizaje y para que cualquier inversión en educación sea redituable, es una pieza clave encontrar y formar a los(as) mejores docentes, en cualquiera de los señalamientos anteriores.

La prosperidad de cualquier país se debe a la calidad y preparación de sus ciudadanos(as), las personas necesitan mejorar sus conocimientos y habilidades a lo largo de toda la vida, es preciso que los sistemas educativos tengan bases sólidas, promuevan el saber y las habilidades, y se consolide la capacidad y la motivación de los(as) jóvenes para seguir aprendiendo después de terminar su escolarización.

El análisis y la evaluación, unidos a los incentivos apropiados, pueden impulsar a los(as) estudiantes a aprender mejor, a los(as) docentes a enseñar mejor y a las escuelas a crear entornos más favorables y productivos.

El informe PISA

Los análisis comparativos internacionales suministran datos para saber cuáles son los puntos fuertes y débiles de cada país, y sirven de estímulo para que cada uno de ellos eleve sus aspiraciones, proporcionan datos orientados a la política nacional, tanto en relación con los programas escolares y la labor de los(as) docentes como en relación con el aprendizaje de los(as) estudiantes.

Al disponer de datos sobre el rendimiento escolar, la OCDE en *1997*, puso en marcha el Programa Internacional para la Evaluación de Alumnos(as) (PISA, siglas en inglés de Programme for International Student Assessment), que representa el compromiso de los gobiernos de examinar, de forma periódica y en un marco común internacional, los resultados de los sistemas de educación, medidos en función de los logros alcanzados por los(as) estudiantes.

El primer estudio PISA se llevó a cabo en el año *2000*, se centró en la competencia lectora y reveló enormes diferencias entre unos países y otros a la hora de capacitar a los(as) jóvenes para tener acceso a la información escrita, manejarla, integrarla, evaluarla y reflexionar sobre ella, con el fin de poder desarrollar su potencial y ampliar sus horizontes. Estos estudios se realizan cada tres años y se centran en competencias de lectura, matemáticas y ciencias, las pruebas correspondientes a matemáticas se realizaron en los años de *2003* y *2012*.

En los resultados de las pruebas de PISA, se observa que nuestros(as) jóvenes están en un nivel muy bajo en lectura, ciencias naturales y matemáticas, en particular, no saben interpretar una gráfica.

PISA pretende medir hasta qué punto los(as) estudiantes de *15* años próximos al final de la escolarización obligatoria, están preparados para enfrentarse a los retos de las sociedades de los conocimientos actuales, centrada en la capacidad de los(as) jóvenes de utilizar sus conocimientos y habilidades para hacer frente a los desafíos de la vida real.

Los rasgos fundamentales en los que se basa la elaboración del informe PISA son su orientación política, el innovador concepto de competencia, que se refiere a la capacidad de los(as) estudiantes de aplicar sus conocimientos y habilidades en áreas académicas fundamentales y de analizar, razonar y comunicarse eficazmente cuando plantean, resuelven e interpretan problemas relacionados con distintas situaciones, su importancia para el aprendizaje a lo largo de la vida, entre otros.

El informe va más allá que un examen, estudia una amplia gama de resultados educativos: motivación para aprender, sus opiniones de sí mismos(as) y sus estrategias de aprendizaje, por mencionar algunos aspectos.

A pesar de que la UNAM no participa en estas pruebas, los resultados son importantes para conocer las dificultades y debilidades de nuestros(as) estudiantes de entre *15* y *16* años, para tratar de resolver los problemas y proponer soluciones, así como fortalecer las competencias y habilidades de los(as) docentes y de los(as) estudiantes.

Al analizar estas dificultades se puede obtener mucha información, se deben considerar los errores para aprender de ellos, revisar las competencias y habilidades que se deben fomentar tanto en los(as) estudiantes como en los(as) docentes: organizar y animar situaciones de aprendizaje partiendo de los conocimientos previos, implicando a los(as) alumnos(as) y a los(as) docentes en actividades de investigación, que se fomente el trabajo en equipo, crear condiciones de cooperación en las que se ponen en juego determinados valores y actitudes, utilizar las nuevas tecnologías, etcétera, para estimular y mantener el deseo de motivar, aprender y enseñar.

El trabajo colegiado

Un factor importante para que se logre el trabajo colegiado, es que los(as) docentes tienen que estar dispuestos(as) a participar en un proyecto organizado en conjunto con la Academia respectiva, o bien, con la Dirección del plantel.

El perfil exigible del(de la) docente es la voluntad de participar en dicho proyecto y hallarse dispuesto(a) a aprender de la experiencia y conocimiento de los(as) demás participantes. Demandando una disposición reflexiva sobre sus técnicas de enseñanza, la utilización de materiales y la manera en que se pondera el desempeño de los(as) estudiantes.

Es menester que el(la) docente tenga el conocimiento de la materia que imparte, maneje de forma adecuada la didáctica específica del proyecto, conozca el modelo educativo del Colegio, muestre interés por conocer, y aplicar nuevos métodos y orientaciones para atender las necesidades de los(as) estudiantes, así como hallarse dispuesto a colaborar con otros(as) docentes bajo el principio del trabajo colegiado.

Los(as) docentes deben reunirse regularmente para intercambiar sus puntos de vista sobre el desempeño general de los grupos y de cada estudiante en particular, para evaluar la retención de los mismos.

El trabajo colegiado es una actividad central en formación pertinente que se apoya y complementa con la tutoría y ahora también con el programa de asesorías. Mediante este tipo de seguimiento, se procura que exista un vínculo directo e individual entre el(la) docente y cada uno(a) de sus tutorados(as) o asesorados(as).

La complementación entre trabajo colegiado y seguimiento de estudiantes es la manera como los(as) docentes de un grupo se responsabilizan del mismo colectivamente, presupone, que los(as) profesores(as) cuenten con la información académica, no psicológica, que obtuvieron de las tutorías o asesorías individuales con los(as) estudiantes a su cargo.

En el trabajo colegiado debe existir una disposición de integrar la información recogida para que los(as) docentes expongan, discutan, formulen acuerdos acerca de los problemas académicos que se presentan cotidianamente en el grupo. Las reuniones de trabajo tienen que ser serias y sencillas, regulares y periódicas, en un lugar destinado para esta actividad y coordinada por un(a) responsable de programa. (*Zorrilla, 2010*)

El trabajo colegiado es de gran importancia, ya que la experiencia de los(as) docentes con más años de antigüedad debe ser compartida con los(as) profesores(as) más jóvenes para que haya una retroalimentación y su práctica docente sea cada vez mejor, en beneficio de nuestros(as) estudiantes. En el proceso de búsqueda del perfil del(de la) bachiller no se debe perder de vista que la pluralidad de modelos educativos en la EMS es algo positivo, que permite atender una población diversa con diferentes intereses, aspiraciones y posibilidades, sin que ello invalide objetivos comunes esenciales que se deben procurar.

En el propósito de encontrar estos objetivos es necesario conocer, primero, la situación y composición de la EMS en el país, así como los principales retos que deben atenderse. Se deben también valorar las reformas que se han hecho en distintos momentos en los diversos subsistemas de este nivel educativo, las cuales deberán servir como base para una reforma más amplia, profunda y duradera.

En cuanto a los(as) profesores(as), uno de los principales retos se encuentra en definir el perfil que deben tener, y crear mecanismos que aseguren que los(as) docentes de recién ingreso lo cumplan, así como la actualización de aquellos(as) que ya forman parte de la planta docente de las escuelas. Esto es de gran importancia dado que el perfil de los(as) docentes de EMS no puede ser igual al de los(as) de educación básica o superior.

Se trata de un nivel educativo distinto, con características particulares que deben atenderse, como las relacionadas con las necesidades de los(as) adolescentes y con el hecho de que egresan en edad de ejercer sus derechos y obligaciones como ciudadanos(as). De lo contrario, la planta docente continuará siendo insuficiente en sus alcances, sin que se garantice realización de los objetivos propios de la EMS.

El trabajo colegiado es de suma importancia para el crecimiento de todos(as), involucra trabajo adicional para el(la) docente pero se reditúa en el mejoramiento de la educación de los(as) estudiantes, se comparten logros y limitaciones, y con la experiencia de los(as) demás la labor docente se mejora en todos los aspectos.

A pesar de las diferencias que pudiéramos notar en las lecturas de los(as) diferentes autores(as), cada una trata de las cuestiones de la educación, sus propósitos, su relación con la sociedad, con el ideal de personas que queremos, ya sea para formar una sociedad bien estructurada, para formar a nuestros(as) futuros(as) gobernantes, que es lo que necesitamos para que el proceso de enseñanza y aprendizaje sea más fructífero.

Lo que debemos enseñar como docentes, lo que provoca la crisis educativa, entre otros aspectos, nos hace reflexionar si lo que hacemos es correcto o necesitamos reformular nuestro pensamiento para dar lo mejor de nosotros(as) mismos(as) como docentes, en nosotros está el poder mejorar esta situación.

Capítulo II

Aprendizaje en la escuela y en la vida

En este capítulo se tratan los temas del enfoque constructivista, el aprendizaje significativo, las preconcepciones que poseen los(as) alumnos(as) así como los afectos y emociones que expresan los(as) estudiantes en la clase de matemáticas, bases teóricas del trabajo.

Constructivismo sociocultural

El positivismo se introdujo en la universidad mexicana y en otros países en desarrollo a principios del siglo pasado, con la idea de una evolución de la economía hacia mejores niveles de vida. Paulatinamente se ha abandonado este paradigma en virtud de que ya no responde a las necesidades de la sociedad actual.

Durante la guerra fría, representaba una ventaja tener una mayor cantidad de científicos(as) e ingenieros(as) dentro de un bloque económico, es así que en los años sesenta y setenta se desarrollaron proyectos curriculares en ciencias para cubrir los contenidos científicos en toda la población escolar y lograr un desarrollo tecnológico.

Los resultados no fueron los esperados, los(as) estudiantes encontraban dificultades al aprender ciencias, estableciéndose políticas para buscar soluciones que se remiten a los avances logrados en la psicología y ciencias afines y surge el constructivismo.

El constructivismo es la corriente con mayor presencia en los programas educativos y la instrucción desde mediados de los años setenta y es el fundamento de las principales reformas curriculares y desde los años noventa hubo una fuerte influencia del constructivismo de orientación sociocultural.

El constructivismo se ha establecido como política educativa, es un modelo que establece que una persona es una construcción propia que se va produciendo día a día como resultado de la interacción del ambiente y de sus disposiciones internas en los aspectos cognitivos, sociales y afectivos del comportamiento.

El conocimiento no es una copia de la realidad, sino una construcción del ser humano, que se realiza con los esquemas que la persona ya posee, sus conocimientos previos, esto es, con lo que ya construyó en su relación con el medio que lo rodea.

Todo aprendizaje supone una construcción que se realiza a través de un proceso mental que conlleva a la adquisición de un conocimiento nuevo, pero en el proceso no sólo es el nuevo conocimiento que se ha adquirido, sino, sobre todo la posibilidad de construirlo y adquirir una nueva competencia que le permitirá generalizar, es decir, aplicar lo ya conocido a una situación nueva.

Aprendizaje significativo

El aprendizaje es significativo, desde el punto de vista constructivista, cuando hay acuerdo entre nuestras experiencias y nuestras concepciones. El aprendizaje es siempre funcional, a mayor grado de significatividad y funcionalidad, cobran mayor sentido sus componentes procedimentales, actitudinales y conceptuales.

Se produce cuando se establecen relaciones sustantivas y no arbitrarias entre el conocimiento como parte previa de la estructura cognoscitiva del(de la) estudiante y el nuevo contenido de aprendizaje.

Cuando la distancia entre lo que se sabe y lo que se tiene que aprender es adecuada, el aprendizaje es significativo y está de acuerdo con la adopción de un enfoque profundo si el nuevo contenido tiene una estructura idónea y el(la) estudiante presenta cierta disposición. Cuando no se presentan estas condiciones se presenta un aprendizaje mecánico y fácilmente sometido al olvido. (*Ausubel, 1983*)

Ausubel manifiesta que el factor más importante que influye en el aprendizaje es lo que el(la) estudiante ya sabe, si se conoce ésto entonces se sabrá lo que se tiene que enseñar. Plantea que el aprendizaje del(de la) alumno(a) depende de la estructura cognitiva previa que se relaciona con la nueva información. Un aprendizaje es significativo cuando los contenidos son relacionados de modo no arbitrario y sustancial con lo que el(la) estudiante ya sabe.

Por relación sustancial y no arbitraria se debe entender que las ideas se relacionan con algún aspecto existente específicamente relevante de la estructura cognoscitiva del(de la) estudiante, como una imagen, un símbolo ya significativo, un concepto o una proposición.

En el proceso educativo, es importante considerar lo que la persona ya sabe, de tal manera que establezca una relación con aquello que debe aprender.

Este proceso tiene lugar si el(la) aprendiz tiene en su estructura cognitiva, conceptos, ideas, proposiciones estables y definidas, con los cuales la nueva información puede interactuar.

El aprendizaje mecánico, contrariamente al aprendizaje significativo, se produce cuando no existen los medios adecuados, de tal forma que la nueva información es almacenada arbitrariamente, sin interactuar con conocimientos preexistentes.

La concepción constructivista asume como elemento central en la explicación de los procesos de aprendizaje y enseñanza en el aula, los conocimientos previos de los(as) estudiantes.

Los(as) alumnos(as) presentan una determinada disposición para llevar a cabo el aprendizaje que se les plantea, surge como resultado de numerosos factores de índole personal e interpersonal: el grado de equilibrio personal del(de la) estudiante, su autoimagen y autoestima, sus experiencias anteriores de aprendizaje, su capacidad de asumir riesgos y esfuerzos, de pedir, dar y recibir ayuda son algunos aspectos de tipo personal que desempeñan un papel importante en la disposición del(de la) alumno(a) frente al aprendizaje.

El aprendizaje significativo aborda los factores o condiciones que garantizan la adquisición, la asimilación y la retención del contenido a desarrollar en el aula. Se logra por medio de la verbalización y del lenguaje y requiere, por tanto, comunicación entre distintas personas y con uno mismo.

Desde una perspectiva constructivista sociocultural, se asume que el(la) alumno(a) se acerca al conocimiento como aprendiz activo(a) y participativo(a), constructor(a) de significados y generador(a) de sentido sobre lo que se aprende, y que, además el(la) estudiante no construye el conocimiento de manera aislada, sino en virtud de la mediación de otros(as), y en un momento y contexto cultural particulares, con la orientación hacia metas definidas. (*Díaz Barriga, s.f.*)

Dependiendo del contenido, se distinguen tres tipos de aprendizaje: de representaciones, de conceptos y de proposiciones. En el aprendizaje de representaciones, el(la) aprendiz atribuye significado a símbolos verbales o escritos mediante la asociación de éstos con sus referentes objetivos.

El aprendizaje de conceptos también es una asociación de un símbolo con un objeto con atributos genéricos; el(la) aprendiz abstrae de la realidad objetiva aquellos atributos comunes a los objetos que clasifica en cierta clase. Se definen los conceptos como objetos, acontecimientos, situaciones o propiedades que poseen atributos de criterio comunes y que están diseñados mediante algún símbolo o signo aceptado.

En el aprendizaje de proposiciones no se trata de asimilar el significado de términos o símbolos aislados sino de ideas que resultan de una combinación lógica de términos en una expresión. No podrá tener lugar el aprendizaje de una proposición, a menos que los conceptos que en ella estén incluidos no hayan sido aprendidos previamente; de allí que los aprendizajes de representaciones y de conceptos sean básicos para un aprendizaje de proposiciones.

Preconcepciones de los(as) estudiantes

Las ideas previas, obstáculos epistemológicos o preconcepciones, son ideas que utilizan los(as) estudiantes (niños(as), jóvenes y adultos(as)), para la interpretación de diversos fenómenos antes de recibir enseñanza en la que aprendan la explicación científica.

Estas ideas anteriores a la educación formal tienen una gran relación con los errores conceptuales cometidos por estudiantes de cualquier nivel, en un área cualquiera de la ciencia, a pesar de que hayan recibido enseñanza formal sobre el tema a lo largo de varios años. (*Hierrezuelo, 2006*)

Si la mente de nuestros(as) estudiantes se encontrara en blanco, sería más sencillo que aprendieran lo que quisiéramos transmitirles, se podría enseñar de una manera más efectiva y homogénea aquello que queremos que aprendan, pero la realidad es otra y la concepción constructivista asume este hecho como un elemento central en la explicación de los procesos de aprendizaje y enseñanza en el aula.

El(la) alumno(a) construye personalmente un significado (o lo reconstruye desde el punto de vista social) sobre la base de los significados que ha podido construir previamente y gracias a esta base es posible continuar aprendiendo y construyendo nuevos significados. (*Coll, 1999*)

Ante las respuestas erróneas de los(as) alumnos(as), se debe hacer una reflexión, un error es una señal de que algo no marcha bien y si no se intenta entender, remover y tratar de cambiar esos errores por los correctos, el(la) estudiante construirá sus conocimientos sobre una base no muy sólida, y eso es un obstáculo para la comprensión y construcción de nuevos conocimientos.

Las investigaciones confirman las apreciaciones de muchos(as) docentes sobre la escasa efectividad de una enseñanza de las ciencias incapaz de lograr la comprensión de conceptos fundamentales reiteradamente enseñados.

Sierpinska (*1992*) señala que entendemos un concepto cuando se puede afirmar lo que el objeto es o no es, además de relacionarlo con otros conceptos, en el proceso se identifican atributos esenciales y se establecen relaciones entre ellos. Cuando se transita de un conocimiento anterior a uno nuevo sin establecer relaciones entre ellos, se presentan obstáculos epistemológicos o preconcepciones.

Sierpinska introduce cuatro categorías para explicar el proceso de entendimiento:

- ✓ La identificación, se refiere a la acción de percibir un objeto de manera global reconociendo las características más importantes del objeto.
- ✓ La discriminación, al distinguir que entre dos o más objetos las diferencias y características comunes.
- ✓ La generalización, lo que ayuda a extender el dominio y abre nuevas posibilidades de interpretación.
- ✓ La síntesis, al relacionar o establecer vínculos entre hechos aparentemente inconexos que como resultado, éstos aparecen formando un todo organizado.

Las ideas previas de los(as) alumnos(as) han de tenerse en cuenta en numerosos factores del proceso educativo, desde el desarrollo del currículum hasta la formación de docentes.

La gran mayoría de los(as) profesores(as) desconoce las preconcepciones de sus estudiantes, e incluso a veces mantienen ideas que se asemejan bastante a las de sus alumnos(as); por lo tanto resulta difícil que un(a) docente que no conozca la existencia de las ideas previas pueda enfocar las actividades de clase necesarias para superarlas.

El problema de la edad es crítico, si combatimos las ideas previas a una edad demasiado temprana hay problemas asociados con el limitado desarrollo intelectual. Si lo hacemos demasiado tarde, las ideas pueden osificarse y ser más reticentes al cambio. (*Hierrezuelo, 2006*)

La persistencia de las preconcepciones nos conduce a dudar de la eficacia de los métodos de enseñanza, resulta difícil cambiar o remover las ideas previas, depende del tema que se trate, siendo mayor la persistencia de las dificultades en los temas relacionados con hechos y fenómenos que los(as) estudiantes observan con frecuencia.

Si queremos remover las preconcepciones de nuestros(as) alumnos(as) antes de recibir una enseñanza formal, el primer paso es conocer cuáles son esas ideas previas. En las situaciones de clase el método más adecuado es el diálogo socrático, el(la) docente propone alguna situación que debe ser analizada por los(as) estudiantes, generalmente dispuestos en grupos pequeños donde tiene lugar una primera discusión, realizándose posteriormente una puesta en común en la que intervienen todos los grupos o al menos una parte importante de ellos.

Este sistema exige, para que sea lo más fecundo posible, que exista un ambiente distendido en la clase que permita a los(as) estudiantes expresarse libremente, no temiendo nunca que sus ideas puedan ser ridiculizadas tomadas en cuenta negativamente por parte del(de la) docente. Lo cual no quiere decir que no puedan ser discutidas y rebatidas, cosa que es aceptada por parte de los(as) alumnos(as) sin mayores problemas. (*Hierrezuelo, 2006*)

Se tiene que reunir la información y cuando un(a) estudiante exprese ideas correctas, se deben reafirmar en el momento para que los(as) alumnos(as) que tienen las preconcepciones, puedan reflexionar y desecharlas y adquirir las ideas nuevas que surgen de sus pares, es decir, ellos(as) se deben dar cuenta de cuáles son sus propias ideas previas y cambiarlas por las correctas.

Los diálogos socráticos se pueden insertar en situaciones específicas, para transformar una metodología expositiva y pasiva en una metodología activa para los(as) estudiantes y el(la) docente, es claro que hay temas que requieren la metodología expositiva, pero una combinación de éstas, hará que las clases dejen de ser una rutina de años, es decir, convertir la tarea docente a una investigación activa y motivadora.

Los afectos en Matemáticas

¿De qué depende el hecho de que un niño o niña que entra en una escuela llegue a encontrar fascinante el quehacer propio de las matemáticas y otro(a) en cambio se convierta en profundo(a) aborrecedor(a) de ellas para toda su vida?

En el ámbito de la enseñanza, se reconoce la gran influencia que las variables afectivas ejercen en la construcción del conocimiento de los y las estudiantes.

Las cuestiones afectivas juegan un papel esencial en la enseñanza y aprendizaje de la matemática, y algunas de ellas están fuertemente arraigadas en la persona y no son fácilmente desplazables por la instrucción.

Las creencias matemáticas son componentes del conocimiento subjetivo implícito de la persona sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje y están basadas en la experiencia.

Las concepciones que se entienden como creencias conscientes son distintas de las creencias básicas, inconscientes y cuya componente afectiva está más enfatizada.

La actitud es una predisposición evaluativa, es decir, positiva o negativa, que determina las intenciones personales e influye en el comportamiento, consta de tres componentes: una cognitiva que se manifiesta en las creencias subyacentes a dicha actitud, una componente afectiva que se manifiesta en los sentimientos de aceptación o rechazo de una tarea y una componente intencional o de tendencia a un cierto tipo de comportamiento.

Si el objeto es la matemática, se distinguen dos grandes categorías: actitudes hacia la Matemática y actitudes matemáticas.

Las primeras se refieren a la valoración y el aprecio de esta disciplina y al interés por esta materia y por su aprendizaje, y subrayan más la componente afectiva que la cognitiva; aquella que se manifiesta en términos de interés, satisfacción, curiosidad, valoración, etcétera.

Las actitudes matemáticas, por el contrario, tienen un carácter marcadamente cognitivo y se refieren al modo de utilizar capacidades generales como la flexibilidad de pensamiento, la apertura mental, el espíritu crítico, la objetividad, entre otras, que son importantes en el trabajo en matemáticas.

Las emociones son respuestas organizadas más allá de la frontera de los sistemas psicológicos, incluyendo lo fisiológico, cognitivo, motivacional y el sistema experiencial. Surgen en respuesta a un suceso, interno o externo, que tiene una carga de significado positiva o negativa para la persona.

Los afectos, como las emociones, las actitudes y las creencias de los(as) estudiantes son factores clave en la comprensión de su comportamiento en matemáticas. El papel central que desempeñan las creencias y las emociones en el éxito o fracaso en matemáticas ha sido apuntado por distintos(as) didactas de la matemática.

La relación que se establece entre afectos y aprendizaje es cíclica: por una parte, la experiencia que tiene un(a) estudiante al aprender matemáticas le provoca distintas reacciones e influye en la formación de sus creencias. Por otra, las creencias que sostiene la persona, tienen una consecuencia directa en su comportamiento en situaciones de aprendizaje y en su capacidad para aprender.

El(la) estudiante, al aprender matemáticas, recibe continuos estímulos asociados con las matemáticas como problemas, actuaciones del(de la) docente, mensajes sociales, por mencionar algunos, que le generan cierta tensión. Ante ellos reacciona emocionalmente de forma positiva o negativa.

Esta reacción está condicionada por sus creencias acerca de sí mismo(a) y acerca de las matemáticas: si la persona se encuentra con situaciones similares repetidamente, produciéndose la misma clase de reacciones afectivas, entonces la activación de la reacción emocional, ya sea satisfacción o frustración, puede ser automatizada, y se 'solidifica' en actitudes, que influyen en las creencias y colaboran a su formación.

Los afectos hacia las matemáticas forman un sistema regulador de la estructura de conocimiento del(de la) estudiante. La persona actuará, pensará y orientará su ejecución.

Si a un(a) estudiante que entiende la matemática como un cálculo, y éste se le continua enfatizando en su etapa de primaria, en el futuro se resistirá a tareas que demanden pensar, manifestando miedos, desánimo y ganas de abandonarlas con poca efectividad en el abordaje y con gran dificultad.

Conocer apropiadamente hechos, algoritmos y procedimientos no es suficiente para garantizar el éxito en una persona. Sus dificultades de aprendizaje radican en las creencias que tiene acerca de la matemática, acerca de sí mismo(a) y que configuran su perspectiva matemática.

Los(as) docentes de matemáticas, los(as) estudiantes, los padres y las madres, tienen su perspectiva de matemáticas y de su enseñanza y aprendizaje, esto afecta a las creencias del(de la) aprendiz y no siempre en la misma dirección.

La toma de conciencia de la actividad emocional es un instrumento de control personal, un poderoso mediador en las relaciones con otros(as) y un elemento clave de la autorregulación del aprendizaje en el aula.

Si se desea mejorar la enseñanza y aprendizaje de la matemática, será conveniente tener en cuenta los factores afectivos tanto de estudiantes como de docentes. Las emociones, actitudes y creencias actúan como fuerzas de resistencia al cambio.

Si un(a) docente piensa que lo mejor para el aprendizaje de la matemática es trabajar rutinas y algoritmos, la enseñanza que imparta será centrada en esos aspectos.

La perspectiva de los(as) estudiantes debe ser mejorada, si ellos(as) tienen una determinada creencia acerca de cómo debe ser el aprendizaje, plantearán resistencia ante otra aproximación, manifestando reacciones emocionales negativas.

Es importante plantear intervenciones que ayuden a los(as) alumnos(as) a salir del estado de bloqueo ante la actividad matemática.

Una reacción emocional es una respuesta afectiva fuerte, se trata del tipo de afecto más visceral que es intenso pero de relativa corta duración. En las observaciones de aula y en el seguimiento de los(as) estudiantes se focaliza la atención a los cambios de respuestas afectivas o cambios de estado de sentimientos durante la resolución de problemas matemáticos.

Para la identificación de las reacciones emocionales se tiene en cuenta, cómo la persona está valorando el objeto o la situación, contextualizándolas en la realidad que las produce. Las emociones son respuestas afectivas fuertes que no son sólo automáticas o consecuencia de activaciones fisiológicas, sino que serían el resultado complejo del aprendizaje, de la influencia social y de la interpretación.

Una persona alfabetizada emocionalmente en matemáticas es aquella que ha desarrollado su inteligencia emocional en este contexto, que ha logrado una forma de interaccionar con este ámbito y que tiene en cuenta los sentimientos y emociones propios y ajenos.

La alfabetización emocional engloba habilidades tales como el control de los impulsos y fobias en relación a la asignatura, lo que permite desarrollar la atención necesaria para que se logre el aprendizaje, la autoconciencia, la motivación, el entusiasmo, la perseverancia, la empatía, la agilidad mental, etcétera. (*Gómez Chacón, 2008*)

La mayoría de los(as) docentes no toma en consideración estos aspectos emocionales y es necesario detenerse a repensar las actitudes hacia los(as) estudiantes. En ocasiones se hacen comentarios acerca de las respuestas erróneas que dan los(as) estudiantes a preguntas que se les hacen en clase, en los exámenes o en los diferentes tipos de evaluación, pero no se considera la carga de emociones que hay en el(la) alumno(a), sus frustraciones, sus malas experiencias en Matemáticas, su estado de ánimo en esos momentos, sus creencias, sus preconcepciones, su autoestima, sus problemas en casa, etcétera.

Se condena pero no se propone una solución para tratar de remover y eliminar esas respuestas erróneas, como docentes tenemos la responsabilidad de la formación de los(as) estudiantes.

Sería más satisfactorio comentar que un(a) alumno(a) respondía incorrectamente a algún ejercicio en particular, pero que después de aplicar cierta estrategia, el(la) estudiante ahora trata de hacer los ejercicios correctamente, pregunta cuando tiene dudas, se siente más seguro(a) y en adelante no le causarán desagrado las asignaturas relacionadas con las Matemáticas.

Se tiene mucho camino por recorrer, las condiciones en el aula continuamente van cambiando y tenemos que estar refrescando nuestra práctica docente con lo que se va descubriendo en las diferentes investigaciones que se realizan en torno al proceso de enseñanza y aprendizaje.

Estudiante autónomo(a)

El mayor reto para los(as) docentes es cambiar el foco de los procesos educativos en dirección de formar personas que se cuestionen sus propios aprendizajes, sean autónomos(as) y dispongan de herramientas intelectuales que les permitan un aprendizaje continuo a lo largo de la vida. (*Pozo, 1999*)

Pozo y Monereo (*s.f.*), señalan que en la última década han surgido un gran número de propuestas didácticas orientadas a establecer propuestas metodológicas para una enseñanza estratégica.

Desde esta perspectiva, enseñar una estrategia implica ceder o transferir progresivamente el control de la estrategia, que en un primer momento ejerce de manera absoluta el(la) docente, para pasar a manos del(de la) estudiante para que se apropie y pueda empezar a utilizarla de manera autónoma, a ser un(a) estratega autónomo(a).

Aprender a aprender es la capacidad que tiene el(la) estudiante de autorregular su propio proceso de estudio y aprendizaje en función de los objetivos que persigue y de las condiciones del contexto que determinan la consecución de ese objetivo.

Lograr los procesos que favorecen el aprendizaje autónomo requiere que éstos sean intencionales, se dirigen hacia el logro de capacidades concretas; conscientes, son objeto de supervisión y regulación metacognitiva constante (no apartarse del objetivo) y sensibles a las variables del contexto de enseñanza y aprendizaje que haya realizado en un nivel de exigencia y bajo unas condiciones determinadas.

Las capacidades metacognitivas hacen posible un aprendizaje autónomo y autodirigido. Un(a) aprendiz competente es el(la) que conoce y regula sus propios procesos de aprendizaje, tanto desde el punto de vista cognitivo como emocional y puede hacer un uso estratégico de sus conocimientos, ajustándolos a las exigencias del contenido o tarea de aprendizaje y a las características de la situación.

Conocer a los(as) estudiantes como personas que piensan, implica tener sensibilidad sobre lo que los(as) alumnos(as) tienen en mente, lo que proporciona información adicional sobre cómo los(as) estudiantes dan sentido a las matemáticas y sobre cómo pueden construir sus conocimientos.

Conocer a los(as) estudiantes como personas que aprenden, supone ser consciente de la teoría del aprendizaje asumida y sus implicaciones en términos de las actividades de clase y las interacciones con los(as) estudiantes.

Si se desea que los(as) alumnos(as) aprendan verdaderamente a aprender, se necesita cambiar no sólo las propuestas y materiales sino, sobre todo, las metas que los guían y los métodos que los desarrollan. Sólo cambiando la forma de concebir el aprendizaje y la enseñanza se podrá cambiar la suya.

Durante el aprendizaje de las matemáticas, los(as) alumnos(as) estudian conceptos matemáticos, teoremas, algoritmos, definiciones y varias estrategias que son utilizadas para resolver problemas. Se considera que la resolución de problemas es un componente necesario del proceso de la enseñanza y aprendizaje de la matemática.

Este factor se torna en un componente importante relacionado con el éxito del estudio de las mismas, puesto que el propósito central de la intervención educativa es que los(as) estudiantes se conviertan en aprendices exitosos(as), así como pensadores(as) críticos(as) y planificadores(as) activos(as) de su propio aprendizaje.

Capítulo III
Problemática y propuesta didáctica

En este capítulo se presenta la problemática observada en el salón de clase, y en particular en el tema de límites, así como la propuesta de una estrategia didáctica para mejorar la comprensión del concepto de límite de una función, en términos de la continuidad de una función.

El problema no es problema

Existen múltiples factores por los que los(as) estudiantes no logran comprender los conceptos básicos, que influyen de manera importante en el aprendizaje de los contenidos. Considerando la experiencia adquirida en algunos años de labor docente en el Colegio de Ciencias y Humanidades del Plantel Sur, se apunta lo siguiente:

En cuanto a los(as) estudiantes:

- ✓ **La gran mayoría de los(as) alumnos(as) no toma notas de lo que se discute en clase, esto es, no lleva un registro de las ideas importantes que surgen en clase, confía demasiado en su memoria, sólo apunta los ejercicios que se hacen en el pizarrón y eso lo puede encontrar en la mayoría de los libros, la experiencia del(de la) docente, no.**
- ✓ **En los ejercicios y problemas que se plantean en clase o extraclase, la mayor parte de los(as) estudiantes no lee las instrucciones y en ocasiones responde cosas que no se le preguntan, es decir, no le da importancia a la lectura.**
- ✓ **Algunos(as) estudiantes no resuelven sus dudas, muchos(as) de ellos(as) se quedan callados(as) por temor a burlas por parte de sus compañeros(as) o por creer que el(la) profesor(a) se molestará.**

- ✓ **Algunos(as) estudiantes no siguen instrucciones, se resisten a cambiar ciertos hábitos que no son recomendables para mejorar su forma de tomar apuntes. Por ejemplo, no borrar cuando cometen un error, sino encerrarlo o trazar una línea que cruce lo incorrecto y colocar en seguida lo correcto.**

- ✓ **El grueso de los(as) estudiantes tiene serias deficiencias en interpretar una gráfica porque desconoce que una gráfica le proporciona información de la relación que existe entre dos variables, esto está estrechamente relacionado con el propósito del Cálculo, que es el estudio del cambio, además de saber cómo cierta cantidad o magnitud está cambiando respecto a otra.**

- ✓ **La mayoría de los(as) alumnos(as) desconoce que la gráfica de una función nos ayuda a visualizar lo que sucederá en un futuro, esto es, con el estudio de las funciones podemos extrapolar e interpolar, y en particular, el estudio de los límites nos dice el comportamiento de las funciones en los extremos (pasado y futuro) y en los puntos problemáticos de la función (presente).**

- ✓ **Si los(as) estudiantes no muestran una disposición o voluntad para aprender, todo tipo de ayuda pedagógica está condenada al fracaso, la motivación es un factor determinante para que se lleve a cabo la adquisición de nuevos conocimientos y la aplicación de lo aprendido de forma efectiva cuando se necesita, en lo cotidiano de la vida y el trabajo.**

- ✓ **La mayoría de los(as) alumnos(as) no sabe trabajar en equipo, si los equipos son de cuatro integrantes, dos trabajan y los(as) otros(as) hacen relleno, a veces sólo uno(a) es el(la) que hace todo, esto sucede cuando los(as) estudiantes se sienten solos(as) y comienzan a platicar en lugar de trabajar.**

- ✓ **Los(as) estudiantes del bachillerato son adolescentes y pasan por una etapa de grandes cambios físicos, psicológicos y sociales, están expuestos a múltiples factores de riesgo, como por ejemplo, una baja autoestima, distanciamiento afectivo de los padres, disponibilidad al alcohol y a las drogas, falta de alternativas para el tiempo libre, entre otros, que influyen en su desempeño académico.**

- ✓ **La mayoría de los(as) alumnos(as) posee preconcepciones, lo que dificulta el aprendizaje de los contenidos de los temas de algunas asignaturas.**

- ✓ **Los(as) estudiantes llegan a la asignatura de Cálculo de diferentes grupos, al aplicar un examen de diagnóstico para explorar sus conocimientos previos, se detecta que la mayoría de los(as) alumnos(as) tiene deficiencias en conocimientos así como en sus métodos de estudio. Se hace una reactivación de conocimientos anteriormente adquiridos en un lapso de tiempo que no está contemplado en el programa, eso es un obstáculo para que el curso se lleve a buen término y se cubra todo el programa en tiempo y forma.**

En cuanto a los docentes:

- ✓ **La mayoría de los(as) docentes no le da importancia a relacionar los conceptos matemáticos con lo cotidiano, por lo cual, algunos(as) estudiantes saben resolver ejercicios pero no saben en dónde pueden aplicar esos conocimientos.**

- ✓ **Los(as) docentes tenemos demasiados(as) estudiantes en las clases de 5º y 6º semestres, grupos de 40 a 60 alumnos(as), excesivos contenidos que enseñar, limitaciones de varios tipos que atentan contra un trabajo que debería ser dedicado y reflexivo, la mayoría de los(as) docentes, no valora la importancia del aprendizaje significativo porque desconoce las vías para alcanzar ese objetivo pedagógico.**

- ✓ **Los(as) docentes debemos actualizarnos continuamente, los(as) alumnos(as) de generaciones pasadas son diferentes a las actuales, y no podemos seguir con los mismos apuntes de hace 30 o 40 años porque las condiciones van cambiando por múltiples factores.**

Se ha detectado, además de los aspectos antes mencionados, que al iniciar la primera unidad: *'Procesos infinitos y la noción de límite'*, del programa de *Cálculo Diferencial e Integral I del Colegio de Ciencias y Humanidades*, justamente con los procesos infinitos, a los(as) estudiantes les resulta muy árido el tema. Los(as) estudiantes tienen que hacer aproximaciones cada vez más y más cerca de algún valor, y en algunas ocasiones, antes de que termine la unidad, ya varios(as) alumnos(as) desertaron de la asignatura.

Esto no significa que los procesos infinitos deban ser eliminados del programa, ya que son de gran importancia para comprender qué tan cerca se puede estar de algo sin llegar a él, o para entender ciertos comportamientos o tendencias de algunas funciones, para generalizar, para observar ciertos patrones, pero en el bachillerato, se deben trabajar uno o dos ejemplos que sean familiares e interesantes para los(as) alumnos(as) y no utilizar la mayoría de las sesiones de la unidad en estos procesos. Una opción es el uso de la tecnología para hacer más ágil el tema o buscar otra alternativa, que es lo que se propone en este trabajo.

En los cursos de Cálculo Diferencial del bachillerato, un gran número de estudiantes no logra comprender los conceptos básicos, en especial los conceptos de límite y de derivada, ya que en las diferentes formas de evaluación utilizadas, el(la) alumno(a) no logra expresar la idea que encierra el concepto de límite, la interpretación geométrica del límite de una función o de la derivada, así como la relación que existe entre el límite y la derivada, además de que relaciona el concepto de límite de una función con el significado de límite, como la línea que delimita dos regiones o como un término o fin de algo.

Lo anterior trae como consecuencia que al aplicar la derivación en problemas de optimización o graficación, el(la) estudiante no logra hacer la conexión del concepto de derivada con la aplicación, por lo que existe un número elevado de alumnos(as) que no aprueba la asignatura.

La derivada es un límite así como la integral, ¿cómo pueden lograr comprender lo que es una derivada, una integral o simplemente el concepto de continuidad si no les queda claro el concepto de límite?

La continuidad no se encuentra incluida en los programas de Matemáticas ni de Cálculo Diferencial e Integral *I* y *II*, y aun cuando no forma parte explícita de la temática, ésta subyace a lo largo de los cuatro cursos anteriores de Matemáticas. La continuidad puede ser introducida, no de manera formal, para abordar el concepto de límite sin mayor problema y sin alterar el programa de la asignatura.

¿Todo tiene un límite?

El concepto de límite es primordial para la interpretación geométrica de la derivada y de la integral, es importante en la graficación de funciones y es fundamental en el análisis matemático, pero el concepto de límite encierra una gran complejidad, la definición formal de límite resulta incomprensible para la mayoría de los(as) estudiantes de bachillerato y primeros años de nivel superior por el lenguaje tan abstracto que se utiliza. Se requiere un pensamiento de orden superior en el que intervienen el análisis, la abstracción, la generalización y la síntesis, y la mayoría de los(as) alumnos(as) no está familiarizado con ello.

Para muestra de ello, veamos lo que nos dice la definición formal de límite.

Definición formal de límite*. Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo* $[a, b]$ *excepto quizás en un valor c en (a, b). El límite de la función $f(x)$ existe y es igual a L, lo que se denota por $\lim_{x \to c} f(x) = L$, si y sólo si $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$, tal que $x \in Dom\, f$ y $0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$*

Lo que nos dice la definición es que si consideramos una función $f(x)$ definida en un intervalo $[a, b]$, excepto quizás en un valor c en (a, b), decir que el límite de una función $f(x)$ existe y su valor es L, cuando x se acerca a c, significa que para cada ε positivo, existe una δ positiva, donde ε y δ pueden ser tan pequeñas como se quiera, de manera que si la distancia que hay de x a c es menor que δ, entonces la distancia que hay de $f(x)$ a L es menor que ε.

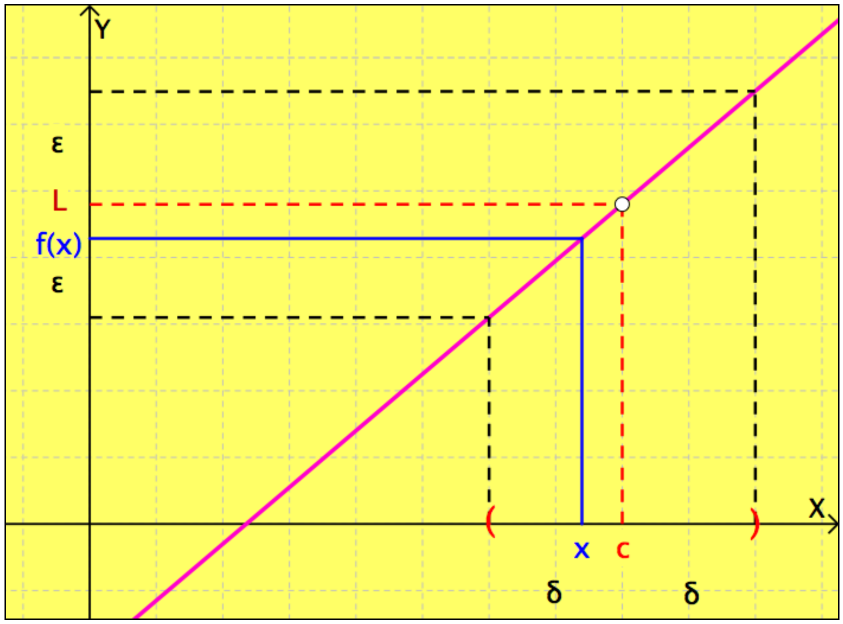


Figura 1. Vecindades de radio ε ***y*** δ ***alrededor de L y c. Si los valores de f (x) están 'muy cercanos' a L al acercarse x a c, entonces L es el valor del límite.***

Como se puede observar, la definición formal de límite, encierra una gran cantidad de elementos que el(la) estudiante debe conocer, además de que se requiere cierta madurez para poder comprender lo que hay detrás del concepto, por ello, en el programa de la asignatura se aborda el concepto de límite con procesos infinitos y no se contempla la definición formal de límite, ni la continuidad de la función, únicamente se llega a la noción de límite.

El punto de interés del Cálculo no sólo se reduce a estudiar el cambio en general, sino saber cómo cierta cantidad o magnitud está cambiando respecto a otra. El Cálculo es dinámico, está relacionado con el cambio y el movimiento, el concepto de continuidad tiene su origen en el estudio del movimiento de los cuerpos.

La noción intuitiva que tenemos del movimiento de una partícula móvil es la de un punto que pasa de una posición a otra ininterrumpidamente, sin efectuar saltos, esto es, no desaparece de repente y aparece en otra posición diferente, sino que para cambiar de posición tuvo que seguir una trayectoria continua.

Es la misma idea intuitiva de función continua en un intervalo contenido en el dominio de la función, la curva que representa la gráfica se puede dibujar con un trazo ininterrumpido, sin levantar el lápiz del papel. (*De Oteyza, 2006*)

Si por el contrario, la curva que representa la gráfica de una función, tiene saltos en el intervalo, esto es, no se puede dibujar de un solo trazo, la función no es continua en el punto donde tiene el salto. Ésta es la idea de continuidad que se requiere para que los(as) estudiantes de bachillerato, comprendan la idea de límite.

Con la idea de continuidad, se puede comprender el concepto de límite:

"El límite L *de una función en* c *, es el valor que debería tener la función para ser continua en el punto (c, L), esté o no definida la función en ese punto"*

esto es, en términos de la continuidad, no en términos de ε y δ.

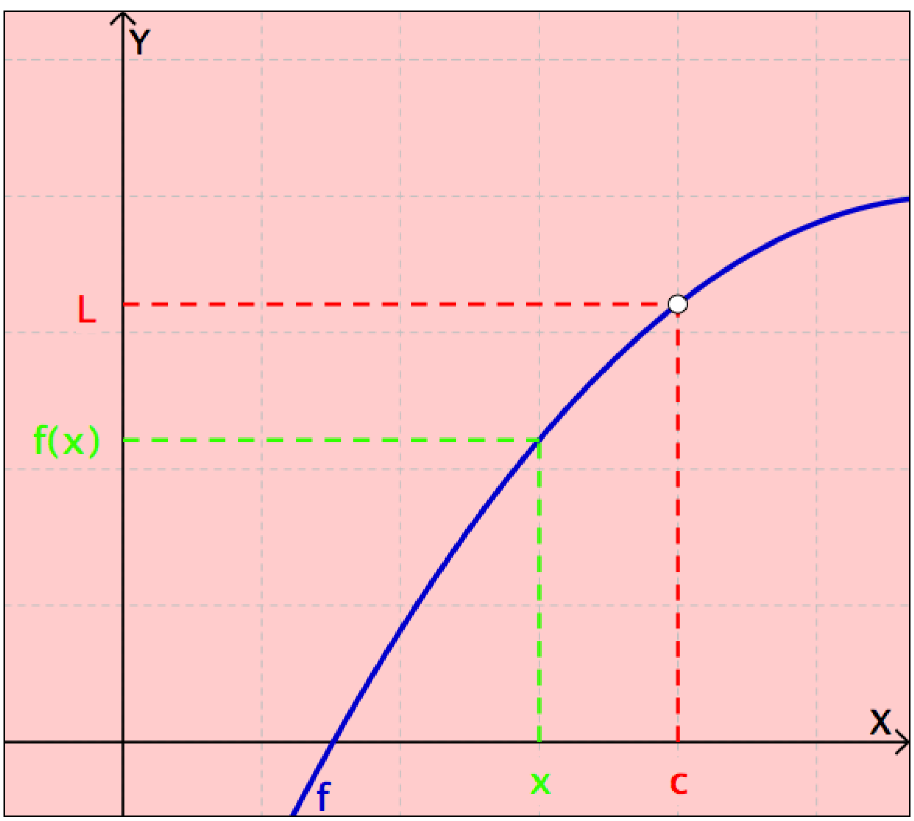


Figura 2. El límite L *es el valor que debería tener* $f(x)$ *para que la función sea continua en el punto (c, L).*

Si la función no puede hacerse continua en *c*, el límite no existe en ese valor:

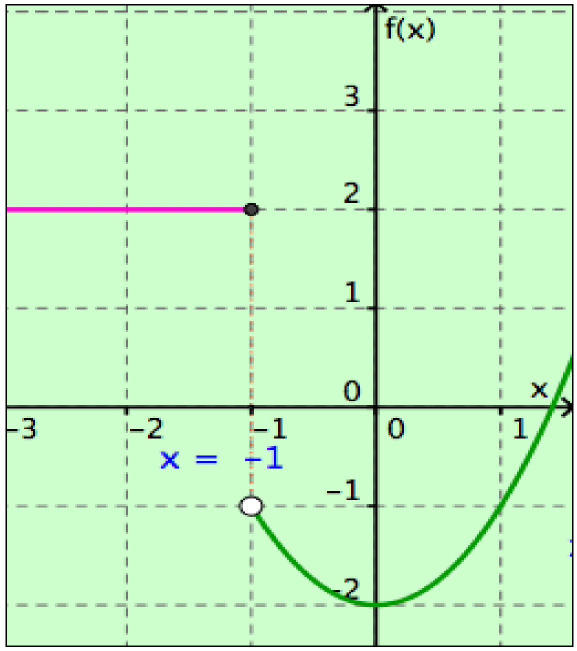


Figura 3. El límite en **x** ***= -1 no existe, en todos los demás puntos sí existe el límite.***

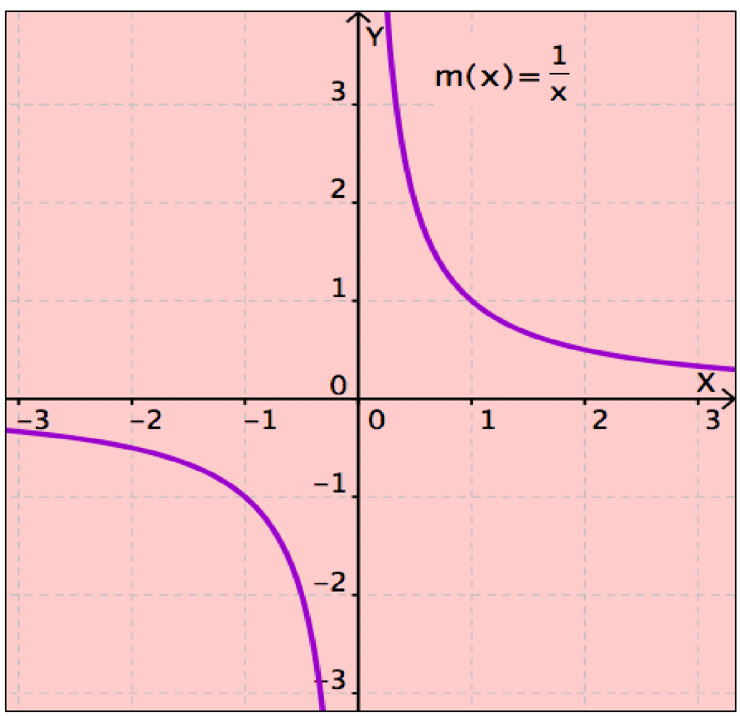


Figura 4. El límite en **x** ***= 0 no existe, en todos los demás puntos sí existe el límite.***

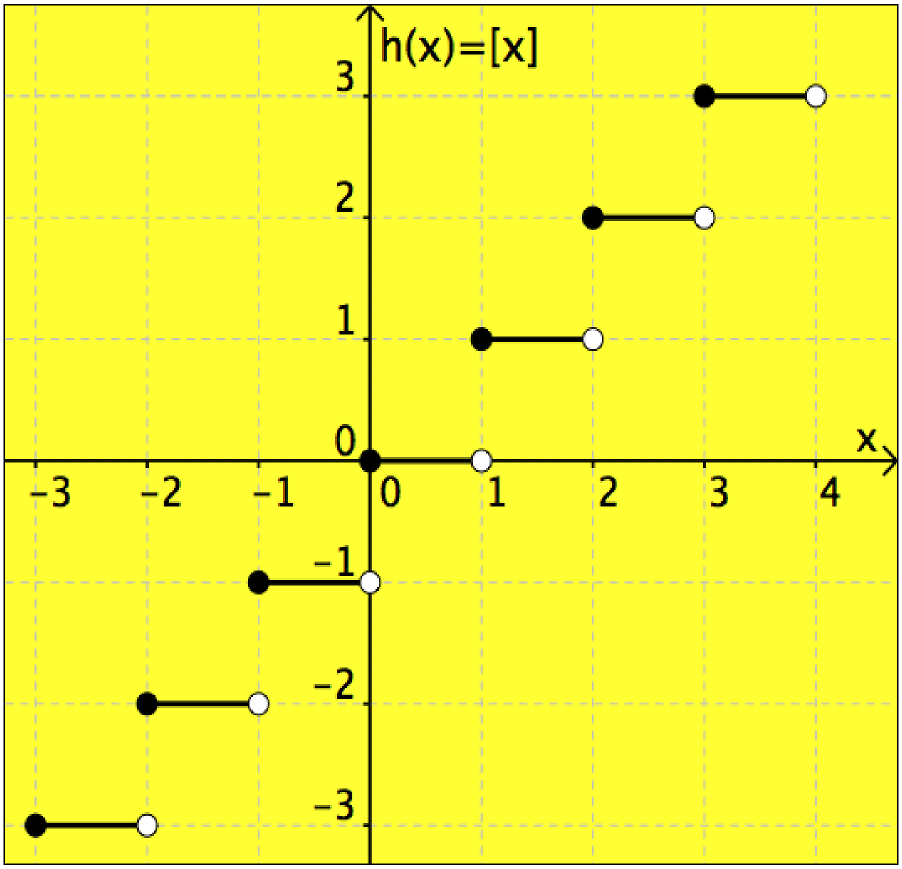


Figura 5. El límite en cada entero no existe y en las x distintas de un entero, si existe.

En la *Figura 3*, el límite de la función no existe en $x = -1$, no hay manera de colocar un punto para hacer continua la función en ese valor.

En la *Figura 4,* el límite de la función no existe en $x = 0$, al acercarse a 0 por la izquierda, la función toma valores muy grandes negativos y al acercarse a 0 por la derecha, la función toma valores muy grandes positivos, no hay manera de colocar un punto en $x = 0$ para hacer continua la función.

En la *Figura 5,* al acercarse a cualquier número entero, por ejemplo, en $x = 3$, por la izquierda la función vale 2 y por la derecha la función vale 3, no hay manera de hacer continua la función colocando un punto, y lo mismo ocurre en cada número entero.

Propuesta de la estrategia didáctica

Se propone una estrategia didáctica que favorece la comprensión del concepto de límite sin extenderse en los procesos infinitos, contribuyendo a que el curso de Cálculo resulte más interesante, los(as) estudiantes tengan un mejor desempeño en el curso lo que provocará un menor número de deserciones.

Es importante mencionar que esta propuesta no es exclusiva para el Colegio de Ciencias y Humanidades, puede ser aplicada en cualquier escuela de nivel medio superior, en el tema correspondiente de su programa.

Antes de que inicie el curso se solicitará el apoyo a dos profesores(as) de la asignatura de *Cálculo Diferencial e Integral I del CCH* de cualquier plantel para que presten sus grupos, uno de los cuales será el grupo testigo y el otro será el grupo de prueba, para comparar si la aplicación de la estrategia didáctica en el grupo de prueba contribuye a la comprensión de los conceptos básicos y en particular a la comprensión del concepto de límite de una función.

Los(as) docentes de los grupos de prueba y testigo se encargarán de hacer la presentación y pedirles a los(as) estudiantes el apoyo que se solicita, y después se les explicará que se trata de una investigación que se llevará a cabo en dos grupos y se compararán los resultados obtenidos.

Al grupo testigo únicamente se le solicita su participación en dos sesiones: en el examen de diagnóstico y en el primer examen parcial, el tiempo restante de la primera unidad será impartida por su profesor(a) de manera tradicional. Se hará la comparación con el grupo de prueba al que se le aplica la estrategia didáctica.

Se realizarán las actividades en el grupo de prueba tratando de no ocupar más tiempo del estimado para la primera unidad, ya que se interfiere con lo programado por el(la) docente que cede su tiempo para aplicar las actividades correspondientes al tema de procesos infinitos y la noción de límite de la primera unidad. Se considera una sesión extra en caso de que se extienda el tiempo de alguna actividad.

La estrategia didáctica se aplicará en el grupo de prueba y se llevará a cabo en toda la primera unidad de la asignatura de Cálculo *I* del programa vigente del CCH, se aplicará una secuencia didáctica que se apoya en la continuidad de las funciones.

Antes de aplicar la secuencia didáctica se plantean uno o dos problemas que generen interés y que se relacionen con el concepto de límite, para que quede un referente y el(la) estudiante relacione el nuevo conocimiento con su cotidiano.

Una vez que el concepto de límite se comprenda, se retoma el problema generador para que la idea de límite se relacione con lo cotidiano, se engloban así los conocimientos previos con el concepto nuevo y en qué situaciones se puede aplicar, de esta manera, el(la) alumno(a) adquiere un aprendizaje significativo que podrá ser aplicado a otras situaciones cuando se requiera.

Se pretende que con la estrategia didáctica el(la) estudiante reconozca cuándo una función tiene una discontinuidad o cuándo es continua en todos sus puntos, así como reconocer si la discontinuidad es de tipo asintótico o de tipo puntual, que al comparar las gráficas de dos funciones que son iguales excepto en un solo punto, llegue al concepto de límite, con los conocimientos previos del(de la) estudiante y la interacción entre pares al realizar el trabajo en equipo.

Dado que el concepto de continuidad y la igualdad de funciones no está contemplado en el programa, al hacer una reactivación de los conocimientos previos y reconocer en una gráfica si la función es o no continua, se define la igualdad de funciones para los fines que persigue la secuencia didáctica y que los(as) estudiantes relacionen lo visto anteriormente con el concepto de límite.

Una vez que se llega al concepto de límite, se explica la definición formal de límite así como su interpretación geométrica y por último el cálculo de límites de funciones algebraicas.

A continuación se presenta el planteamiento de la estrategia didáctica en la que se registran los datos y se hace una descripción por sesiones.

Descripción de la estrategia didáctica

Título de la estrategia didáctica:

Comprensión del concepto de límite de una función

Ubicación:

Plantel:	***Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades***
Semestre o año:	***5º semestre***
Asignatura:	***Cálculo Diferencial e Integral I***
Unidad temática:	***Unidad I. Procesos infinitos y la noción de límite***
Tiempo:	***De 6 a 8 sesiones de dos horas cada una***

Aplicación:

Grupo:	***519***	***562***
Turno:	***Matutino***	***Vespertino***
Número de alumnos(as):	***42***	***28***

Datos generales:

Fecha de elaboración:	***3 de julio de 2012***
Instructora:	***Matilde Yukie Suzuki Hayakawa***

Propósitos:

Que el(la) alumno(a):

- ✓ ***reconozca en una gráfica si está representada una función;***
- ✓ ***reconozca en una gráfica si la función representada es continua o discontinua en algún o algunos valores;***
- ✓ ***reconozca si una función presenta una discontinuidad de tipo asintótico o puntual;***
- ✓ ***con base en la continuidad no formal y la igualdad de funciones, comprenda el concepto de límite de una función;***
- ✓ ***exprese con sus palabras o por escrito, de manera asertiva, cuando existe o no, el límite de una función en cierto valor c;***
- ✓ ***relacione el límite con la tendencia de la función en una gráfica.***

Aprendizajes:

El(la) alumno(a):

- ✓ ***reconoce en una gráfica de una función, el dominio y la imagen de la función;***
- ✓ ***distingue la continuidad o discontinuidad en un punto en la gráfica de una función;***
- ✓ ***distingue si la función presenta una discontinuidad de tipo asintótico o puntual;***
- ✓ ***reconoce si existe el límite o no en la gráfica de una función;***
- ✓ ***relaciona el límite con la tendencia de la función en una gráfica;***
- ✓ ***resuelve límites de funciones algebraicas y comprende el significado del resultado;***
- ✓ ***relaciona el valor que debería tener la función en un punto con el límite de la función en ese punto.***

Fases, etapas y tiempos:

Etapas de la estrategia didáctica para la comprensión del concepto de límite		
Fase	***Etapa***	***Tiempo***
Apertura	**Aplicación de un examen de diagnóstico y su resolución.** **Tarea 1 (Casos de factorización) 1ª sesión** **Tarea 2 (Funciones) 2ª sesión**	**6 – 8 hrs.**
Desarrollo	**Aplicación de una secuencia didáctica y una plenaria.** **Tarea 3 (Concepto de límite) 4ª sesión** **Explicación de límites de algunas funciones algebraicas.** **Tarea 4 (Cálculo de límites) 5ª sesión**	**2 – 4 hrs.**
Cierre	**Aplicación de un examen parcial para evaluar la unidad.**	**2 hrs.**

Tabla 1. Estructura de la estrategia didáctica, seis sesiones para la estrategia. Se indica el número de sesión en la que se deben solicitar las tareas.

Material:

Fase	*Material*
Apertura	Todo el material se entregará impreso a los(as) alumnos(as). Sesiones 1, 2 y 3.
Desarrollo	Se solicita a los(as) alumnos(as) que lleven 3 hojas milimétricas, una regla y una calculadora, aunque esta última no es indispensable. 4ª sesión.
Cierre	Se entregará el material impreso. 5ª y 6ª sesiones.

Tabla 2. Material para la estrategia didáctica, se indica el número de sesión en la que se debe solicitar el material.

Descripción de las etapas por sesión:

Se propone la estrategia didáctica en tres etapas y se llevará a cabo durante la primera unidad de Cálculo I, la cual está programada para 6 sesiones de dos horas cada una.

	Descripción
Primera sesión *Apertura*	*En la primera sesión se hará la presentación y se explicará lo que se pretende con la estrategia didáctica, que consiste en varias actividades que se llevarán a cabo en la primera unidad. Se les explicará a los alumnos(as) que su trabajo será importante para una investigación y se les pide su apoyo en cuanto al cumplimiento de los trabajos extraclase que se les soliciten y la veracidad de las respuestas que proporcionen.* *Todo lo que se realice en las sesiones de prueba, será tomado en cuenta para su evaluación de la primera unidad del programa de Cálculo. Se les hará entrega del programa de la asignatura, y los cambios realizados en la primera unidad, así como la bibliografía para la misma.*

	Se aplicará un examen de diagnóstico (Anexo 1: 1.1), para explorar los conocimientos previos, con éste, se revisará si el(la) estudiante domina los siguientes temas: ✓ ***Definición de función.*** ✓ ***Dominio e imagen o recorrido.*** ✓ ***Gráficas de funciones continuas y no continuas.*** ✓ ***Factorizaciones.*** ✓ ***Operaciones aritméticas.*** ✓ ***Álgebra elemental.*** ***Como se puede observar, los(as) estudiantes ya han visto anteriormente estos temas, excepto quizás la continuidad (no formal) y la igualdad de funciones.*** ***Al término del examen de diagnóstico, se comenzará a resolver el mismo, con todo detalle y aclarando cualquier duda que surja, por pequeña que ésta sea, para que reactiven los conocimientos de operaciones básicas de aritmética y álgebra, las factorizaciones más comunes, los concepto de función, dominio e imagen, características de algunas rectas, parábolas y funciones racionales, así como la continuidad no formal en un valor de x.*** ***Todo lo anterior con la intención de revisar y corregir los errores que cometieron, entender y remover preconcepciones, tratando de sustituirlas por lo correcto y que no se detengan en la secuencia didáctica por no recordar temas que ya han visto anteriormente, la idea de continuidad se analiza con las gráficas de algunas funciones. A lo largo de la unidad, se dejarán algunos trabajos extraclase para complementar y reafirmar los temas vistos.*** ***Se les hará entrega de la Tarea 1 (Anexo 3: 3.1) para la siguiente clase, se les recomienda que no dejen de hacerla para que en la siguiente sesión puedan participar. La tarea consiste en buscar los 10 casos de factorización más comunes y escribir 3 ejemplos en su cuaderno.***

Diez minutos antes de terminar cada sesión, se les pedirá que escriban en una hoja su nombre, grupo, fecha y las respuestas a las siguientes preguntas:

- ✓ ***¿Cómo te sentiste en la clase?,***
- ✓ ***¿Qué aprendiste el día de hoy?,***
- ✓ ***¿Qué debes hacer para mejorar tu desempeño? ****

Esa hoja la entregarán al final de cada sesión y conformará la bitácora COL (Comprensión Oral y de Lenguaje), que es una forma alternativa de evaluación, diferente a los instrumentos de evaluación tradicionales, como las tareas y exámenes, en ella, el(la) estudiante escribe su sentir y lo que aprendió, al principio escriben poco, conforme van avanzando las sesiones, van escribiendo más y se expresan cada vez mejor.

Si el(la) alumno(a) sabe redactar lo que aprendió y cómo lo hizo, es que comprendió lo que se vio en la clase, si no escribe algo significativo, es que tiene algún distractor o no comprendió o tiene problemas de redacción.

Los resultados de las bitácoras no se muestran en una tabla o en una gráfica, se obtiene información de la parte emocional y afectiva de los y las estudiantes, y además expresan lo que aprendieron en la sesión.

Se evaluará con la bitácora, para ver los avances por sesión, pero además se aplicará un examen parcial para poder hacer la comparación con el grupo testigo, ya que en éste, no se pide bitácora ni se resuelve el examen de diagnóstico, para no influir en el grupo.

La pregunta ¿cómo te sentiste en la clase? es muy importante, porque el(la) estudiante se siente tomado en cuenta y va perdiendo el temor a preguntar sus dudas en la clase.

La pregunta ¿qué aprendiste el día de hoy? es lo que evalúa lo que se vio en la sesión correspondiente, se consideran tres casos: a) logró expresar lo que se vio en la sesión, b) expresó parcialmente lo que se vio en la sesión o c) no logró expresar lo que se vio en la sesión.

	Se les indica que deben explicar con ejemplos lo que aprendieron, no sólo mencionar lo que recuerdan de la clase, porque pueden recordar lo que se vio, más no explicar con un ejemplo y resolverlo. ***La última pregunta se puede cambiar por otra, dado que los(as) estudiantes escriben muchas propuestas que no cumplen. Se puede cambiar por la pregunta: ¿a qué te comprometes para la siguiente sesión para mejorar y participar activamente en la clase?, esto es, a corto plazo para que se comprometan y vean en la siguiente clase si lo cumplieron y si no fue así, en qué les afectó.***
Segunda sesión	***Se revisará la Tarea 1(Anexo 3; 3.1), en su cuaderno. Al inicio de cada sesión se preguntará si hay dudas de lo que se vio en la clase anterior o de la tarea, si las hay, se aclaran. Resueltas las dudas se hace una recapitulación de lo visto en la sesión anterior invitando al que quiera participar o entre todos van recordando y participando.*** ***Se continúa con la resolución del examen, se les hace entrega de la Tarea 2 (Anexo 3; 3.2), para que la entreguen en la siguiente sesión, antes de finalizar la clase se les pide que contesten las preguntas de la bitácora COL.***
Tercera sesión	***Se pedirá que entreguen la Tarea 2. Se pregunta si hay dudas de la tarea o de las clases anteriores, si las hay, se aclaran y se hace una recapitulación de lo visto anteriormente, invitando a los(as) estudiantes a que participen y se continúa con la resolución del examen.*** ***Para esta sesión ya se estará finalizando la resolución de los reactivos del examen, pero eso depende de las dudas y de las preconcepciones que tengan los(as) estudiantes, ya que como siempre sucede en todos los cursos, hay grupos que participan y hay grupos que no, hay alumnos(as) brillantes y otros(as) no tanto.*** ***No hay tarea para la siguiente sesión y antes de finalizar la clase se les pide la bitácora COL.***

	Se les solicita traer para la siguiente sesión: 3 hojas milimétricas, 1 regla y 1 calculadora (opcional)
Cuarta sesión ***Desarrollo***	***Se regresará la Tarea 2 calificada, se preguntará si hay dudas de la tarea o de la clase anterior, una vez aclaradas las dudas, si las hay, se invitará a que alguien recapitule lo visto anteriormente.*** ***Se les menciona lo que realizarán en esa sesión, se aplicará la secuencia didáctica por lo que se explican los propósitos de la secuencia, de forma oral, escrita en el pizarrón o en una hoja impresa. Se planea que la secuencia didáctica y la plenaria se realicen en la misma sesión.*** ***Se les explica a los(as) estudiantes los propósitos de la misma y hacia dónde conduce el trabajo que realizarán. Antes de comenzar a trabajar con la secuencia, se les explica la definición de igualdad de funciones para que la tengan presente cuando se les pregunta si dos funciones son iguales.*** ***El propósito principal de la secuencia didáctica, es el de llegar al concepto de límite de una función.*** ***Antes de aplicar la secuencia, se inicia con el planteamiento de uno o dos problemas generadores en los cuales se puede aplicar el concepto de límite, para que quede(n) como antecedente y puedan relacionar el concepto nuevo con las aplicaciones, y se retomará(n) al final de la plenaria.*** ***El trabajo se realizará en equipos de dos alumnos(as), al iniciar las actividades de la secuencia didáctica, se les explica que en la primera actividad se les pide hacer las gráficas de dos funciones, uno(a) de los(as) integrantes trazará una de ellas y el(la) otro(a) integrante trazará la otra, en la mitad de la hoja milimétrica.*** ***En total se piden 5 gráficas, dos en cada hoja y la última en una hoja completa, se recalcará que deberán utilizar la misma escala en ambas gráficas, ya que compararán las dos funciones.***

Esto hará más evidente y conveniente la comparación de las gráficas si están del mismo tamaño, esto es, los(as) dos integrantes deberán tener la misma distancia del origen al 1 en cada eje cartesiano, si utilizan una hoja milimétrica, la unidad deberá ser de 1 centímetro en ambas gráficas.

En la actividad 1, una de las funciones es relativamente fácil de graficar, se trata de una función polinomial cuadrática, la otra es una función racional y no es tan fácil de graficar si se le van dando valores a la variable y se van obteniendo las correspondientes imágenes, por lo que le dejarán a la suerte decidir quién hace la función racional, con un equitativo volado. Lo mismo pasa en la actividad 2.

Los pares de funciones tienen una característica que resultará interesante para los(as) estudiantes, las gráficas que obtienen, son idénticas excepto en un punto, pero sus expresiones algebraicas son muy diferentes. Compararán las gráficas que obtuvieron por separado.

Si ninguno(a) de los(as) integrantes se da cuenta de que la función racional se puede simplificar, algunos equipos comenzarán a hacer una tabla de valores para graficar, aun cuando se han reactivado y reafirmado conocimientos anteriores como son: factorizaciones, llevar las ecuaciones a su forma canónica u ordinaria para poder graficar rápidamente, simplificar, etcétera, porque desconocen en dónde deben aplicar lo que ya saben o no observan con detenimiento las expresiones algebraicas de las funciones.

Al comparar sus gráficas se darán cuenta que las gráficas son muy parecidas, casi idénticas, excepto porque no saben qué sucede en el valor en donde no está definida la función, pedirán ayuda al(a la) docente, pero éste(a) no debe interferir, ni dar ideas, tal vez provocar reflexión sobre lo visto anteriormente.

Tendrán que resolver esas dificultades y aclarar entre ellos(as) mismos(as) las dudas, por tal razón trabajan en equipos y entre pares es como tendrán que resolver esas dudas. Comenzarán a contestar lo que se les pide en la actividad, eso tal vez les aclare el panorama.

Los(as) estudiantes van utilizando los conocimientos previos que ya poseen, contestando las preguntas de las actividades de la secuencia didáctica, conforme van avanzando, ellos(as) van llegando al concepto de límite, sin que el(la) profesor(a) intervenga activamente en el proceso, sólo es un acompañante en el andamiaje, esto es, ellos(as) van construyendo ese conocimiento con la experiencia que ellos(as) tienen y van llegando a un concepto que tendrá relación con lo que saben y con lo que se está planteando como problema inicial y que es algo de su cotidiano, de esta manera el aprendizaje que adquieran será significativo.

En la Actividad 3 se pide la gráfica de una función con características diferentes a las anteriores, la función m se muestra en la Figura 30. Como se puede observar, la función m no tiene una discontinuidad puntual como las funciones f y j de las actividades anteriores, tiene un comportamiento asintótico en x = 0, y en este caso, no hay manera de colocar un punto para hacer continua la función, por lo tanto el límite de la función m no existe en x = 0, en cualquier otro punto de la función sí existe el límite, es decir, en el dominio de la función, existe el límite.

Se compactarán dos equipos de dos integrantes, en uno de cuatro, para que entre más compañeros(as) puedan concluir las actividades. Si el equipo se da cuenta de que las funciones racionales se pueden simplificar, entonces acabarán las actividades en menos de una hora.

Si todos los equipos terminan las actividades en tiempo y forma, se llevará a cabo la plenaria para rescatar todas las ideas, dudas, resultados obtenidos y conclusiones que surgieron en los equipos, reuniendo toda la información para que los conceptos que tienen aislados, se puedan complementar y consolidar y entre todos(as) llegar al concepto de límite, relacionando lo que ya saben con lo que se está encontrando y puedan utilizarlo en otras situaciones diferentes en las que se requiera.

	Se reafirman las opiniones y comentarios correctos, así, los(as) alumnos(as) que tienen preconcepciones, remuevan lo incorrecto, por lo correcto, esto es, cuando un(a) estudiante exprese alguna idea correcta, se repite lo que dice o se le pide repetir lo que dice, dándole la importancia a lo que está encontrando para que los(as) alumnos(as) que tienen errores, los corrijan. ***Lo ideal es que la secuencia didáctica y la plenaria se lleven a cabo en la misma sesión para que no haya dispersión de ideas, pero si la mayoría de los equipos no termina a tiempo, de manera que no se pueda llevar a cabo la plenaria en la misma sesión, entonces se realiza en la siguiente.*** ***Se solicita al(a la) docente del grupo de prueba una sesión más en caso de que no se termine lo planeado, esto se prevee desde el principio, aclarando que puede suceder que los(as) estudiantes no terminen en las sesiones correspondientes de la primera unidad, y eso depende del grupo de prueba, ya que si la mayoría de los equipos termina a tiempo, se puede llevar a cabo la plenaria aunque uno o dos equipos no haya concluido su trabajo.*** ***En la plenaria se hará la comparación de las dos gráficas de las funciones de la actividad 1(Anexo 7: 7.5, Figuras 26 y 27) (y luego de la actividad 2, Anexo 7: 7.5, Figuras 28 y 29), idénticas en todos sus puntos, excepto en uno y se pregunta: ¿qué se le tendría que hacer a una de las gráficas para que sea exactamente igual a la otra gráfica?*** ***Esto es, si se colocara un punto en el hueco, la función se haría continua y las gráficas serían iguales, entonces se llega a que:*** ***"El límite de la función en un punto, es el valor que debería tener la función en ese punto para ser continua".*** ***Si con un punto, la función se puede hacer continua, entonces el límite existe y es igual al valor que debería tener la función en ese punto, si no es posible colocar un punto para que la función sea continua, entonces el límite no existe.***

	El ejemplo en el que no es posible colocar un punto en la gráfica para hacerla continua, se presenta en la gráfica de la actividad 3. (Anexo 7: 7.5, Figura 30) Con las actividades los(as) alumnos(as) distinguen cuándo se presenta una discontinuidad puntual y cuándo la discontinuidad es asintótica. ***Se retoma el problema que se plantea al inicio de la secuencia y se relaciona con el concepto de límite. Los problemas que se planteen deben ser atractivos, relacionados con temas de interés de los(as) jóvenes, que puedan participar, por ejemplo, correr cierta distancia y tomar el tiempo que emplean para ello, en estas experiencias les gusta participar y ellos toman los datos y determinan quién es es más veloz, se compara también con el hombre más veloz en las olimpiadas y se trata de obtener una velocidad instantánea, que está en relación con el límite de una función.*** ***Es obvio que el tiempo destinado a la primera unidad, no es suficiente para explorar los conocimientos previos, reactivar los conocimientos anteriores, tratar de remover las preconcepciones, relacionar lo aprendido con problemas de lo cotidiano, aplicar la secuencia didáctica para llegar al concepto de límite, explicar la definición formal, explicar el cálculo de límites de funciones algebraicas y evaluar lo anterior, así que se tratará de hacer lo posible (¿o imposible?) para cubrir todos los puntos anteriores.*** ***Antes de finalizar la sesión se pide que entreguen la secuencia didáctica y que contesten la bitácora, se les entrega la Tarea 3 impresa para que la entreguen en la siguiente sesión.***
Quinta sesión	***Se entrega la Tarea 3 calificada, se preguntará si hay dudas de la tarea o de lo visto anteriormente, se resolverán las dudas y se invitará a hacer una recapitulación de lo visto en la sesión anterior. Se explicarán los propósitos de la sesión.*** ***Con el conocimiento de que los(as) estudiantes pueden decir cuándo existe o no el límite de una función en un valor c observando una gráfica, se da la definición formal de límite.***

	Con algunos ejemplos, se explica el cálculo de límites de funciones algebraicas, tratando de cubrir las funciones polinomiales, racionales y con radicales, algunos ejemplos resueltos se presentan en el Anexo 5. *Se entregará la Tarea 4 impresa y se resolverán algunos ejercicios de la tarea y antes de terminar la sesión se les pide entregar la bitácora COL.*
Sexta sesión *Cierre*	*Se les entregará la Tarea 4 calificada, se preguntará si hay dudas de lo visto en la primera unidad y se invitará a participar en la recapitulación de las sesiones anteriores sobre el concepto de límite y cálculo de los mismos.* *Se aplicará el examen parcial para evaluar la primera unidad, pero antes de aplicarlo, se les agradece su participación y se les explica que todas sus evaluaciones serán utilizadas como evidencias del trabajo de investigación.* *El examen parcial se aplicará tanto en el grupo de prueba en donde se aplicó la estrategia didáctica como en el grupo testigo para poder comparar los resultados y así saber si la estrategia didáctica causó algún impacto en el grupo de prueba.* *Las calificaciones del examen parcial se entregarán al(a la) docente del grupo testigo y al(a la) docente del grupo de prueba, se le entregarán todas las evaluaciones que se hicieron en el grupo.* *Lo ideal sería dar un seguimiento a los(as) estudiantes por medio de asesorías o tutorías para determinar el impacto que los cambios que se proponen, causan en el grupo de prueba, con una evaluación adecuada que permita revelar si hubo mejoría en la comprensión de los conceptos de continuidad, límites y derivada, y si esto influye en el desempeño de los(as) estudiantes en los cursos posteriores con la estrategia aplicada.* *Con este trabajo se intenta contribuir a encontrar estrategias que puedan mejorar la comprensión del concepto de límite, proponer alternativas para solucionar las dificultades con las que se enfrenta el(la) estudiante y mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje en este tema.*

	Representa todo un reto el que los(as) estudiantes de bachillerato, lleguen a sus estudios superiores con buenas bases en Cálculo y en este sentido va la propuesta.

Fuentes documentales:

Para el(la) docente:

- ✓ **Coll, C., Martín, E., Mauri, T., Miras, M., Onrubia, J., Solé, I. & Zabala, A. (1999). *El constructivismo en el aula.* Capítulo 3. (9ª ed.) Barcelona: Ed. Graó.**
- ✓ **Díaz-Barriga, F. (s.f.). *Enseñanza situada. Vínculo entre la escuela y la vida.* México: McGraw-Hill. ISBN: 970 10 5516 0.**
- ✓ **Gómez Chacón, I. (2002). *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático.* Madrid: Narcea.**
- ✓ **Hernández, F. & Sancho, J. (1996). *Para enseñar no basta con saber la asignatura.* Ed. Paidós. ISBN: 968-853-327-0.**
- ✓ **Swann, H. & Johnson, J. (1983). *Primer libro de Cálculo. Prof. E McSquared. Original, fantástico y de lo más edificante* (2ª impresión). (pp. 68-160). México: CECSA. ISBN 968-26-0260-2.**

Para el(la) estudiante:

- **De Oteyza, E., Lam, E., Hernández, C. & Carrillo, Á. (2006). *Conocimientos fundamentales de Matemáticas. Cálculo Diferencial e Integral.* México: Pearson. Educación. ISBN 970-32-3841-6.**
- **Purcell, E., Varberg, D. & Rigdon, S. (2007). *Cálculo diferencial e integral* (9ª ed.). (pp 55-91). Pearson. Educación. ISBN 978-970-26-0989-6.**

Concepto de límite de una función

Integrantes: ______________________________ ______________________________

______________________________ ______________________________

Propósitos:

Que el(la) alumno(a):

- ✓ *reconozca en una gráfica si la función representada es continua o discontinua en algún o algunos valores de x;*
- ✓ *reconozca si la discontinuidad es de tipo asintótico o de tipo puntual;*
- ✓ *pueda asegurar si dos funciones son iguales y reconozca en qué difieren.*
- ✓ *pueda asegurar cuando existe el límite de una función en la gráfica de una función y cuando no.*

Actividad 1

1. *Traza las gráficas de las siguientes funciones:*

1) $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$ ***2)*** $g(x) = 1 + x + x^2$

3) *¿Las gráficas de las funciones **f (x)** y **g(x)** son iguales, ligeramente diferentes o totalmente diferentes?* ______________________________ .

4) *¿Hay algún valor o valores en donde las funciones no estén definidas?* ________________ *, si es así, ¿en cuál función?* ________________ *, ¿en qué valor o valores?* ________________ .

5) *Realiza una tabla de **x** y de **f (x)**, dando valores a **x** muy próximos al valor en donde la función no está definida, si es que lo hay, por la izquierda y por la derecha, para observar cuál es el comportamiento de la función cerca del punto.*

x	$f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$

6) *¿El valor de la función **f (x)** crece indefinidamente, decrece indefinidamente o se acerca a un valor específico?* ____ .

7) *¿Cuál es el dominio de la función **f** ?* ______________________________ ,

*¿cuál es el dominio de la función **g**?* ______________________________ .

8) *¿Los dominios de las funciones **f** y **g** son iguales, ligeramente diferentes o totalmente diferentes?* ____ .

9) *¿Cuál crees que sea la razón por la que las gráficas de **f** y **g** resultaron así, si tienen una expresión algebraica diferente?* ____

____ .

10) *Factoriza o realiza una división en la expresión algebraica de la función **f**, ¿qué puedes concluir?*

____

____ .

11) *¿Qué le tendrías que hacer a la gráfica de la función **f** para que sea igual a la gráfica de la función **g**?* ____ .

12) *El valor que debe tomar la función f (x) en x = 1 para que la función sea continua en ese punto, es:* ____ .

Actividad 2

2.1 *La función h está dada por* $\boldsymbol{h(x) = x - 2}$

1) *Evalúa la función anterior en los siguientes valores de x:*

x	*– 1.9*	*– 1.99*	*– 1.999*	$\rightarrow$		$\leftarrow$	*– 2.0001*	*– 2.001*	*– 2.01*	*– 2.1*
h(x)				$\rightarrow$		$\leftarrow$				

2) *¿A qué valor se acerca **x** por la izquierda?* ________________ *, ¿y por la derecha?* ___________________ .

3) *¿A qué valor se acerca la función **h**, si x se acerca por la izquierda a ese valor?* __________________ .

4) *¿A qué valor se acerca la función **h**, si x se acerca por la derecha a ese valor?* ____________________ .

5) *¿El valor de **h(x)** crece indefinidamente, decrece indefinidamente o se acerca a un valor específico?* ____ .

6) *¿Qué valor tiene la función cuando x = – 2?* ____ .

2.2 *Considera ahora la función* $\boldsymbol{j(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}}$

1) *Evalúa la función en los siguientes valores de x:*

x	*– 1.9*	*– 1.99*	*– 1.999*	$\rightarrow$		$\leftarrow$	*– 2.0001*	*– 2.001*	*– 2.01*	*– 2.1*
j(x)				$\rightarrow$		$\leftarrow$				

2) *¿A qué valor se acerca **x** por la izquierda?* ______________ *, ¿y por la derecha?* ____________________ .

3) *¿A qué valor se acerca la función **j**, si x se acerca por la izquierda a ese valor?* ___________________ .

4) *¿A qué valor de la función se acerca la función* ***j****, si* ***x*** *se acerca por la derecha a ese valor?* ______________________________ .

5) *¿El valor de* ***j(x)*** *crece indefinidamente, decrece indefinidamente o se acerca a un valor específico?*______________________________ .

6) *¿Qué valor tiene la función cuando x = – 2?* ______________________________ .

2.3 *Traza las gráficas de las funciones del ejercicio anterior:*

1) $j(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$ ***2)*** ***h(x) = x – 2***

3) *¿Las gráficas de las funciones* ***j(x)*** *y* ***h(x)*** *son iguales, ligeramente diferentes o totalmente diferentes?* ______________________________ .

4) *¿Hay algún valor o valores en donde las funciones no estén definidas?* ______________ , *si es así, ¿en cuál función?* ______________ , *¿en qué valor o valores de* ***x****?* ______________ .

5) *Dale valores a* ***x*** *muy próximos al punto en donde la función no está definida, si es que lo hay, por la izquierda y por la derecha, para que observes cuál es el comportamiento de la función cerca del punto.*

x	$j(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$

6) *¿El valor de* ***j(x)*** *crece o decrece indefinidamente o se acerca a un valor específico?* ______________________________ .

__7)__ ¿Cuál es el dominio de la función __j__? ______________________________ ,

¿cuál es el dominio de la función __h__? ______________________________ .

__8)__ ¿En qué difieren los dominios de las funciones __j__ y __h__? ______________________ .

__9)__ ¿Cómo es la gráfica de la función __j__ comparada con la gráfica de la función __h__? ________ , ¿por qué? ____.

__10)__ Observa las gráficas de ambas funciones, ¿qué le tendrías que hacer a la gráfica de la función __j__ para que sea igual a la gráfica de la función __h__? ______________________________

____.

__11)__ El valor que debe tomar la función __j(x)__ en $x = -2$ para que la función sea continua en ese punto, es: ____.

Actividad 3

3. *Traza la gráfica de la función*

1) $m(x) = \frac{1}{x}$

2) *¿Hay algún valor o valores en donde la función* **m** *no esté definida?* ______________________________ *,* *si es así, ¿en qué valor o valores de* ***x****?* ______________________________ *.*

3) *¿Cuál es el dominio de la función* ***m(x)****?* ______________________________ *.*

4) *Dale valores a* ***x*** *muy próximos al punto en donde la función* ***m(x)*** *no está definida, si es que lo hay, por la izquierda y por la derecha, para observar cuál es el comportamiento de la función cerca del punto.*

x	$m(x) = \frac{1}{x}$

5) *¿El valor de* ***m(x)*** *crece o decrece indefinidamente o se acerca a un valor específico cuando* ***x*** *se aproxima por la izquierda de ese valor?* ______________________________ *.*

6) *¿El valor de* ***m(x)*** *crece o decrece indefinidamente o se acerca a un valor específico cuando* ***x*** *se aproxima por la derecha de ese valor?* ______________________________ *.*

7) *La función m tiene el mismo comportamiento observado en las funciones* ***f*** *y* ***j*** *de las actividades anteriores, cerca del punto donde no están definidas?* ______________________________ *.*

8) *Observa la gráfica de la función* ***m****, ¿se puede colocar un punto en* ***x*** *= 0, de manera que la función* ***m(x)*** *sea continua en ese punto?* ______________________________ *.*

Capítulo IV
Resultados de la intervención

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos de la aplicación de la estrategia didáctica para comprender el concepto de límite de una función.

Datos de los grupos de prueba y testigo

Para llevar a cabo la propuesta didáctica se eligieron tres grupos de *5º* semestre en la asignatura de *Cálculo Diferencial e Integral I*, del *Colegio de Ciencias y Humanidades*, en el ciclo escolar *2013-1*, dos grupos de prueba en los que se aplicó la estrategia didáctica y se compararon los resultados obtenidos al final del ejercicio con un grupo testigo que no se le aplicó la secuencia, recibieron su clase tradicional.

En los grupos de prueba se solicitó el permiso de las profesoras para ceder el tiempo de la primera unidad, seis sesiones de dos horas cada una, al final de la cual se entregó a las profesoras la evaluación correspondiente de dicha unidad. Al profesor del grupo testigo únicamente se le solicitaron dos sesiones, una sesión de una hora al principio de la unidad para aplicar el examen de diagnóstico y una sesión de dos horas al final de la unidad para aplicar el primer examen parcial.

La estrategia se planeó con únicamente un grupo de prueba y un grupo testigo, los dos del mismo turno, pero surgió la idea de comparar el grupo testigo del turno matutino con un grupo de prueba del turno vespertino, de esta manera, se reafirma si la estrategia didáctica cumple su objetivo, al aplicarse en el turno vespertino.

La planeación contempló las seis sesiones que están consideradas en el programa de la asignatura, pero se solicitó a las profesoras de los grupos de prueba, dos sesiones extras para poder concluir todas las actividades de la estrategia didáctica.

Todos los datos obtenidos del ejercicio, fueron capturaron en Excel y para su análisis estadístico se utilizó el programa SPSS, los datos presentados en las tablas y las gráficas de barras se obtienen del despliegue de datos procesados por el mismo programa.

Cuadro de datos de los grupos de prueba y grupo testigo			
Grupo	***Turno***	***Número de alumnos(as)***	***Área en la que eligieron carrera***
519 Prueba	***Matutino***	***42***	***Área 1: 69.04%*** ***Otras áreas: 30.96%***
506 Testigo	***Matutino***	***46***	
562 Prueba	***Vespertino***	***28***	***Área 1: 53.57%*** ***Otras áreas: 46.43%***

Tabla 3. Datos de los tres grupos en los que se aplicó el examen de diagnóstico y el examen parcial 1.

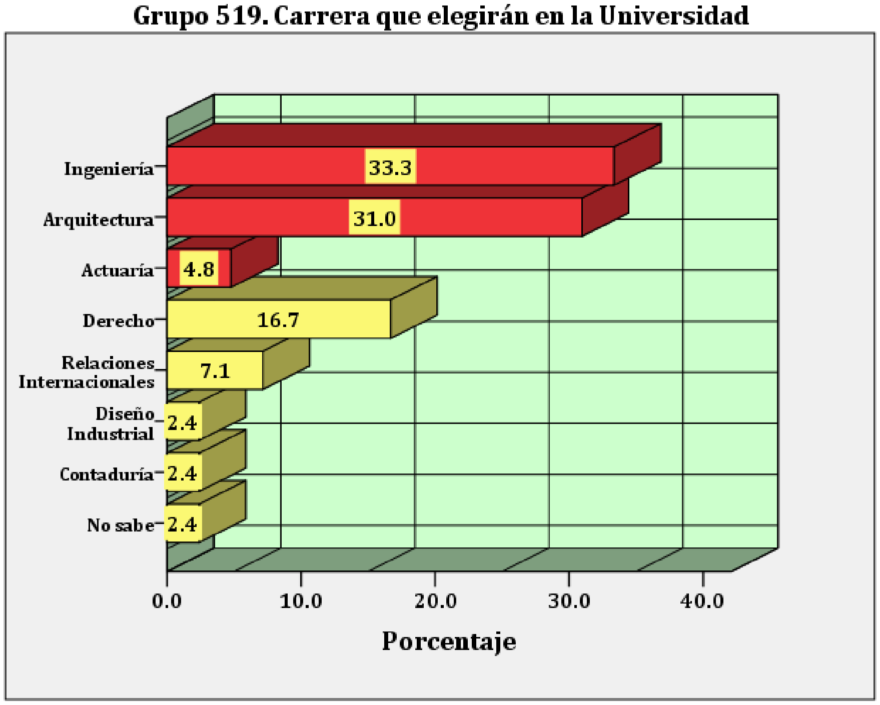


Figura 6. El 69.04% de los(as) estudiantes del grupo 519 del turno matutino eligieron una carrera de área 1 (en rojo).

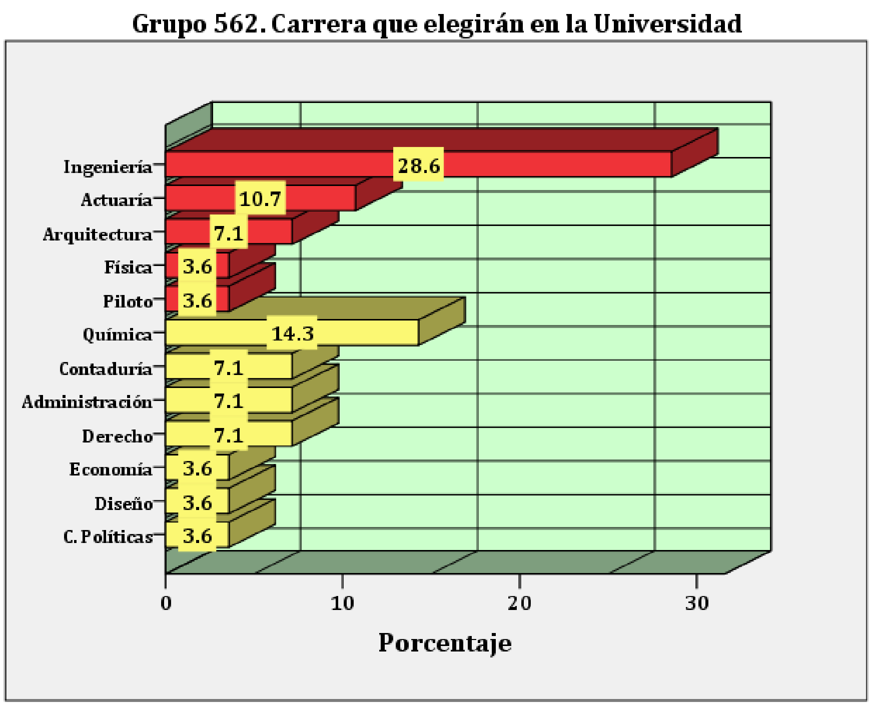


Figura 7. El 53.57% de los(as) estudiantes del grupo 562 del turno vespertino eligieron una carrera de área 1 (en rojo).

De los datos anteriores se observa que un gran número de estudiantes de los grupos de prueba eligieron una carrera de área *1*, casi el *70%* en el grupo *519* y aproximadamente el *50%* en el grupo *562*.

El que la mayoría de los(as) alumnos(as) del grupo *519* del turno matutino tengan una carrera de área *1* en mente, pudo influir en la obtención de respuestas favorables a la secuencia didáctica y al primer examen parcial, al finalizar el semestre esto reflejó un mejor aprovechamiento del grupo, lo que se puede observar en las calificaciones finales que obtuvieron en la *Tabla 9* y en las *Figuras 23, 24* y *25*.

Las tablas y gráficas que se presentan a continuación, muestran las calificaciones obtenidas por los(as) estudiantes en el examen de diagnóstico, en la secuencia didáctica, en el primer examen parcial y las calificaciones que obtuvieron al final del semestre, las cuales fueron divididas en tres categorías para evitar tener un despliegue de barras en las cuales sea difícil hacer una comparación. Las categorías en las que se dividieron son tres:

- ✓ ***0 – 5.9: los que no aprobaron, obtuvieron una calificación entre 0 y 5.9;***
- ✓ ***6 – 7.9: los que aprobaron y obtuvieron una calificación entre 6 y 7.9;***
- ✓ ***8 – 10: los que aprobaron y obtuvieron una calificación mayor o igual a 8.***

En las tablas de datos se muestran las frecuencias y los porcentajes en cada una de esas categorías, también se muestran los valores de las calificaciones mínima, máxima, así como la media.

Resultados del examen de diagnóstico

Se aplicó un examen de diagnóstico en los grupos de prueba *519* y *562*, y en el grupo testigo *506*, para explorar los conocimientos previos de los(as) alumnos(as). Los reactivos fueron seleccionados sobre temas que ya se han visto en cursos de Matemáticas *I* a *IV*, que son básicos para poder obtener los resultados que se esperan al aplicar la secuencia didáctica.

Algunos de los ejercicios que se seleccionaron para el examen de diagnóstico, son ejemplos de reactivos en los que la mayoría de los(as) estudiantes cometen errores consistentemente, esto es debido a las ideas previas, obstáculos epistemológicos o preconcepciones que los(as) estudiantes poseen y que se pretende remover y tratar de sustituirlas por las respuestas correctas, con la reactivación de los conocimientos previos al resolver el examen de diagnóstico.

En el *Anexo 1: 1.1* se encuentra el examen de diagnóstico en su versión final, es decir, con las modificaciones para mejorar el instrumento de evaluación y obtener así una mejor información de los conocimientos previos y las preconcepciones que poseen los(as) alumnos(as). Con la resolución del examen se reactivaron y reafirmaron los conocimientos previos y se trató de remover y sustituir las preconcepciones por las respuestas correctas.

A continuación se presentan los resultados obtenidos en el examen de diagnóstico.

Cuadro comparativo de calificaciones obtenidas en el examen de diagnóstico						
Grupo	*Turno*	*No. de alumnos(as)*	*Calificaciones por categorías*	*Frecuencia*	*Porcentaje*	*Valores mínimo, máximo y media*
519 Prueba	*Matutino*	*42*	*0 – 5.9*	*42*	*100*	*mín: 1.1 máx: 5.5 media: 2.7*
			6 – 7.9	*0*	*0*	
			8 - 10	*0*	*0*	
506 Testigo	*Matutino*	*46*	*0 – 5.9*	*41*	*89.1*	*mín: 0.4 máx: 7.1 media: 3.3*
			6 – 7.9	*5*	*10.9*	
			8 - 10	*0*	*0*	
562 Prueba	*Vespertino*	*28*	*0 – 5.9*	*28*	*100*	*mín: 0 máx: 4.5 media: 2.5*
			6 – 7.9	*0*	*0*	
			8 - 10	*0*	*0*	

Tabla 4. Calificaciones distribuidas en tres categorías de los grupos en los que se aplicó el examen de diagnóstico.

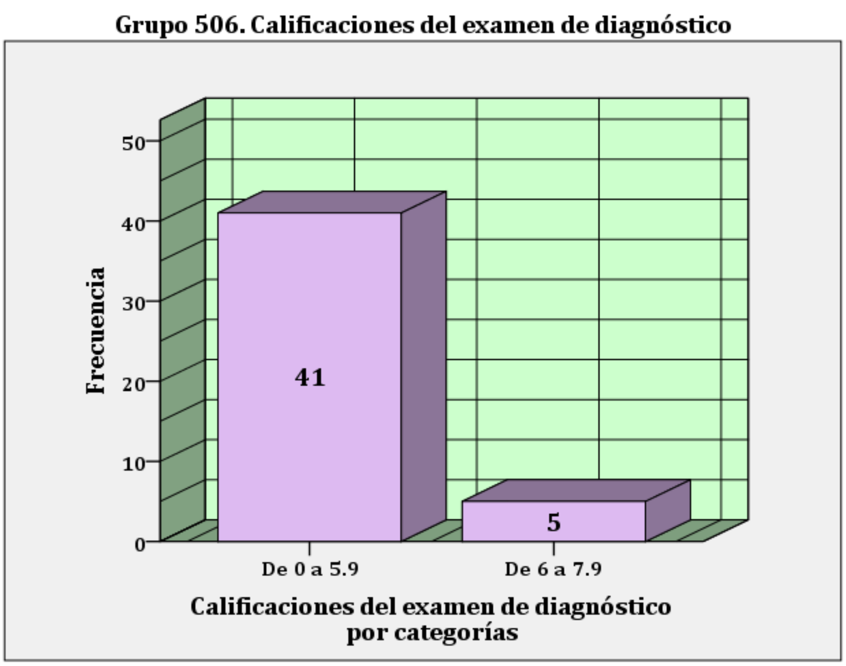


Figura 8. En el grupo 506 cinco estudiantes aprobaron el ex. de diagnóstico, la calificación mínima fue: 0.4, la máxima: 7.1, la media: 3.3.

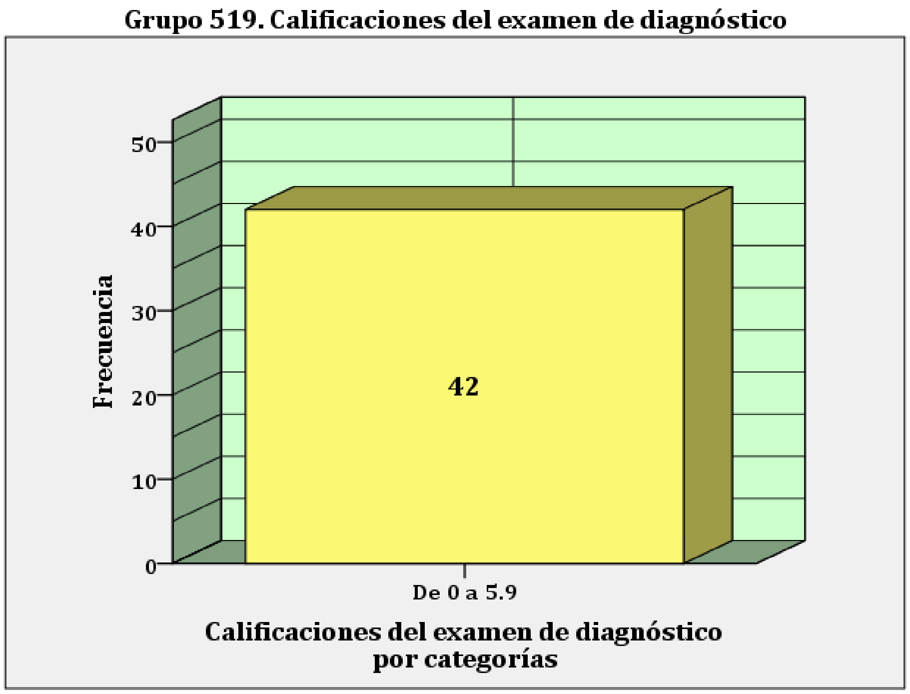


Figura 9. En el grupo 519 ningún(a) estudiante aprobó el examen de diagnóstico, la calificación mínima fue: 1.1, la máxima: 5.5, la media: 2.7.

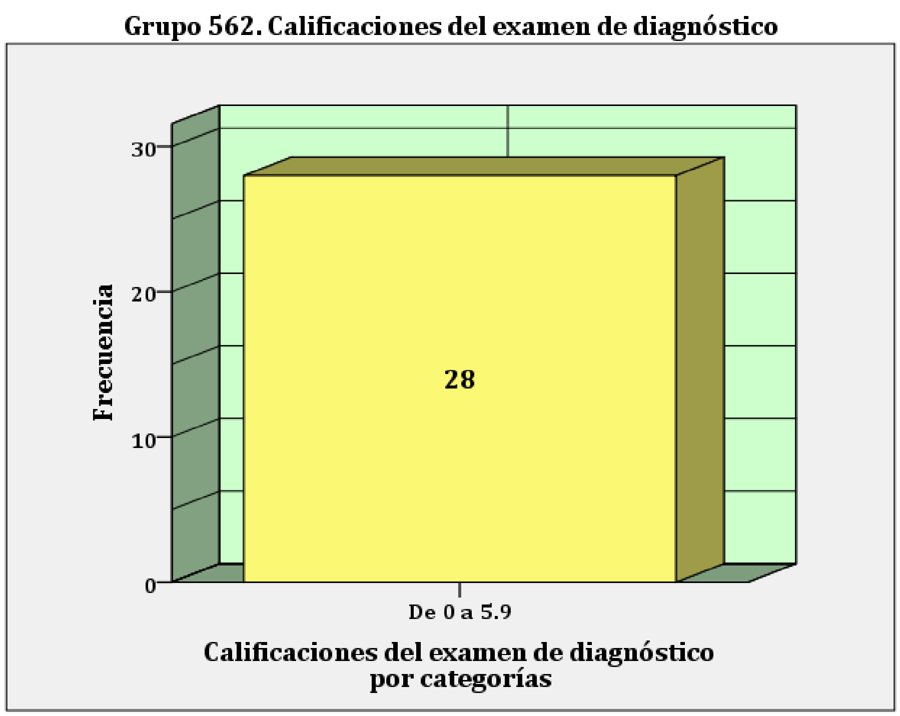


Figura 10. En el grupo 562 ningún(a) estudiante aprobó el examen de diagnóstico, la calificación mínima fue 0, la máxima: 4.5, la media: 2.5.

Los resultados del examen de diagnóstico nos muestran que en los grupos de prueba no hubo ninguna calificación aprobatoria, mientras que en el grupo testigo hubo *5* estudiantes que aprobaron el examen, esto es, aproximadamente el *11%* del grupo testigo aprobó el examen de diagnóstico.

Las calificaciones promedio, fueron más altas en el grupo testigo que en los grupos de prueba y la población del grupo testigo es mayor que la de los grupos de prueba.

La gran mayoría de los(as) estudiantes no contestó correctamente lo que es una función y el no tener claro el concepto de función, o no reconocer lo que es el dominio y la imagen de una función, es un obstáculo para la comprensión del concepto de límite de una función.

En el *Anexo 1: 1.2* se encuentra un examen de diagnóstico contestado por un alumno de un grupo de prueba. Como se puede observar en el examen, el alumno no tiene presente la jerarquía de operaciones, sabe resolver ecuaciones lineales sencillas y al no haber procedimiento en una ecuación cuadrática, se infiere que está obteniendo la respuesta por observación. Tiene conocimiento de las factorizaciones más comunes, tiene claro el concepto de función, aunque fue de los(as) pocos(as) estudiantes que contestaron correctamente lo que es una función. No tiene clara la noción de continuidad.

Resultados de las bitácoras COL

Las bitácoras nos muestran la parte afectiva de los(as) estudiantes en las diferentes actividades que se llevaron a cabo, se sienten tomados(as) en cuenta porque se les pregunta su sentir en la sesión, eso crea un ambiente distendido que facilita el aprendizaje. A muchos(as) estudiantes les elimina la tensión que provoca "la clase de matemáticas" y se sienten con confianza para preguntar las dudas que surgen durante las clases.

En las bitácoras los(as) estudiantes describieron cómo se sintieron en la clase, el ambiente que se generó en el salón fue apropiado para poder lograr los propósitos de las sesiones, además de que los(as) estudiantes expresaron qué es lo que les impidió lograr dichos propósitos y lo que propusieron para mejorar su rendimiento escolar.

Como se puede observar en las bitácoras de la primera sesión que se encuentran en el *Anexo 2: 2.1, 2.2 y 2.3*, durante la resolución del examen de diagnóstico se aclararon dudas, se reconocieron errores comunes y se reafirmó la solución correcta. Los(as) alumnos(as) escriben que se sienten a gusto y que la clase es ágil.

Se logró generar un ambiente de confianza. Los ejercicios se resolvieron de una manera un tanto diferente y con opción a elegir entre diversas formas de solución, a ellos(as) se les hizo interesante y eso los motivó a revisar los apuntes de sus cursos anteriores.

Se cumplió por una parte el generar el interés de los(as) alumnos(as) al reactivar sus conocimientos previos, tratando de remover algunas preconcepciones, obstáculos epistemológicos o ideas previas, que es una tarea un tanto complicada de llevar a cabo en tan poco tiempo, pero se sembró la semilla y se trató de sustituirlas por las respuestas correctas. Si se lograran entender las causas que provocan dichos obstáculos, se tendría un avance de gran magnitud, pero eso requiere de más tiempo y para el propósito principal de la estrategia, no es posible llevarlo a cabo.

También se muestran algunas bitácoras del grupo de prueba del turno vespertino *Anexo 2: 2.4, 2.5*, reconocen que los trabajos extraclase les ayudan para poder participar, pero pocos(as) alumnos(as) entregaron las tareas, aun así hubo interés en las clases y en la secuencia didáctica, y al final del semestre se vió reflejado en el aprovechamiento de los(as) estudiantes y en el número de deserciones, que fue menor que el del grupo testigo del turno matutino.

Las bitácoras mostraron un buen resultado, pero faltó más motivación, en cuanto a la entrega de las tareas, aunque es sabido por la mayoría de los(as) docentes del *Colegio de Ciencias y Humanidades*, que los grupos del turno vespertino son algo difíciles de convencer en cuanto al compromiso por sacar adelante la asignatura.

Si en la bitácora no escriben lo que se vio en la clase, tal vez no comprendieron lo visto en la sesión por no haber entregado la tarea, o bien, tienen diversos distractores, como salir a comprar algo, salir y distraerse un poco antes de su próxima clase, en fin, en el proceso intervienen muchos factores.

Las bitácoras dejan expresar a los(as) alumnos(as) la parte afectiva y emocional, que por lo general nunca es tomado en cuenta en las asignaturas de ciencias, únicamente se analizan tablas, gráficas, números, promedios, etcétera.

En el *Anexo 3: 3.1, 3.2, 3.3 y 3.4* se encuentran los trabajos extraclase en su última versión y en los apartados *3.5* y *3.6* se encuentran algunas tareas entregadas por alumnas de un grupo de prueba. Como se puede observar en los trabajos extraclase, se reafirman los conceptos de función, dominio e imagen, ya que eso es crucial para el curso de Cálculo y en particular para la secuencia didáctica.

Resultados de la secuencia didáctica

Los resultados de la aplicación de la secuencia didáctica en los grupos de prueba, se muestran a continuación:

Cuadro de calificaciones de la Secuencia Didáctica						
Grupo	*Turno*	*Número de alumnos(as)*	*Categorías*	*Frecuencia*	*Porcentaje*	*Valores mínimo, máximo y media*
519 Prueba	*Matutino*	*42*	*0 – 5.9*	*9*	*21.4*	*mín: 3.0*
			6 – 7.9	*31*	*73.8*	*máx: 8.1*
			8 - 10	*2*	*4.8*	*media: 6.5*
562 Prueba	*Vespertino*	*28*	*0 – 5.9*	*13*	*46.4*	*mín: 0*
			6 – 7.9	*15*	*53.6*	*máx: 7.8*
			8 - 10	*0*	*0*	*media: 4.7*

Tabla 5. Calificaciones obtenidas en los dos grupos de prueba en los que se aplicó la secuencia didáctica.

Grupo 519. Secuencia Didáctica. Trabajo en equipos de dos o tres alumnos

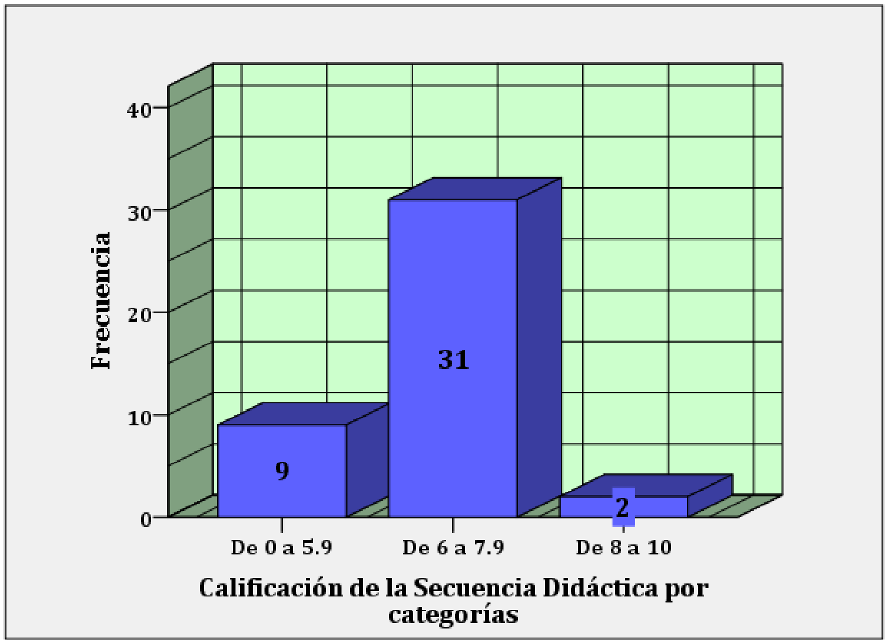


Figura 11. En el grupo 519 la calificación mínima que obtuvieron en la secuencia didáctica fue: 3.0, la máxima: 8.1, la media: 6.5.

Grupo 562. Secuencia Didáctica. Trabajo en equipos de dos alumnos

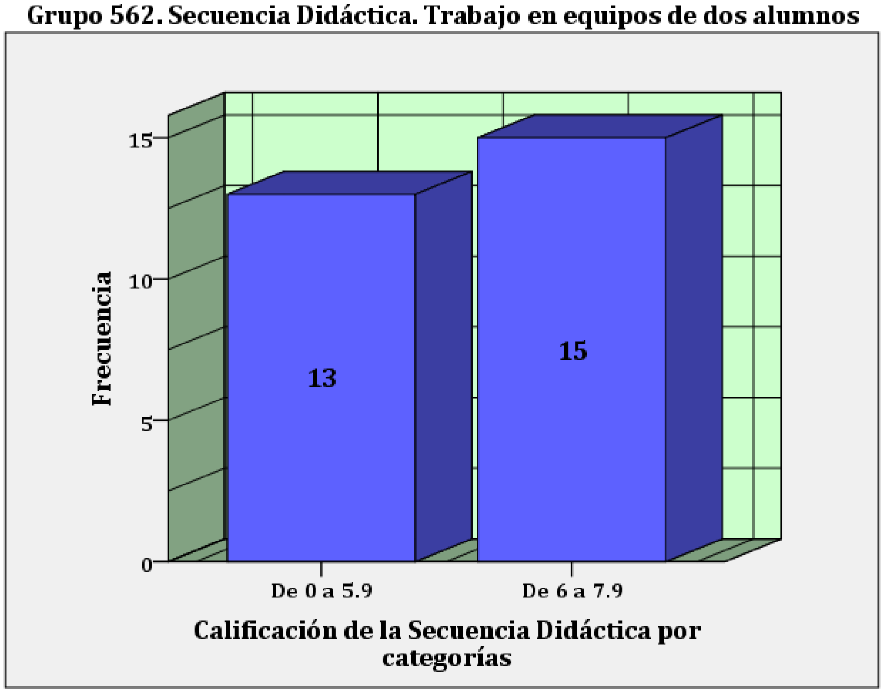


Figura 12. En el grupo 562 la calificación mínima que obtuvieron en la secuencia didáctica fue 0, la máxima: 7.8, la media: 4.7.

Se puede observar en las gráficas anteriores, que en el grupo matutino *519* hubo una mejor respuesta a la secuencia didáctica, al obtenerse un mayor número de respuestas esperadas por los(as) estudiantes, en casi un *80%*, para lograr el propósito de la secuencia, en comparación del grupo *562* del turno vespertino, ya que casi el *50%* de los(as) estudiantes no lograron contestar correctamente o no terminaron de contestar lo que se solicitaba en la secuencia.

Como se menciona anteriormente, una de las causas por la que no contestaron correctamente o no terminaron de contestar en el grupo del turno vespertino fue que la mayoría de los(as) alumnos(as) no entregaron tareas. Sí mostraron interés en realizar las actividades y resolvían sus dudas en el salón de clase, pero como se observa en la *Figura 12,* en casi el *50%* de los equipos no se obtuvieron las respuestas esperadas a las preguntas de la secuencia.

En los dos grupos en los que se aplicó la secuencia, se utilizaron dos sesiones para ello, y en la segunda, los equipos revisaron los detalles y lo que les faltó. Se realizó la plenaria en la que todos(as) expresaron lo que obtuvieron en las actividades y se llegó al concepto de límite. Todos los equipos que no terminaron en la primera sesión, fue a causa de no haber entregado tareas o por haber faltado a alguna sesión.

Figura 13. Trabajo en equipo de la secuencia didáctica en un grupo de prueba.

Únicamente dos equipos (uno del turno matutino y otro del vespertino) simplificaron las expresiones de las funciones, graficaron inmediatamente y contestaron la secuencia con facilidad.

En la plenaria se cuestionó la razón por la que los pares de funciones ***f*** y ***g*** de la ***Actividad 1*** tienen la misma gráfica, excepto en un punto, a pesar de tener expresiones algebraicas diferentes, lo mismo para el par de funciones ***j*** y ***h***, de la ***Actividad 2.***

En el ***Anexo 7*** y en las ***Figuras 26, 27, 28*** y ***29***, se muestran las gráficas de las funciones de las ***Actividades 1*** y ***2*** en las que se les solicitó graficar. En el ***Anexo 4: 4.1*** se muestra una secuencia contestada por un equipo de un grupo de prueba.

Algunos equipos no trazaron correctamente sus gráficas, por lo que no concluyeron lo que se esperaba, pero en la plenaria se dieron cuenta de los errores que cometieron y participaron en la idea principal: explicar de qué manera las gráficas de las funciones que son iguales en todos sus puntos, excepto en uno, sean exactamente iguales. Ésto los(as) condujo al concepto de límite, en términos de la continuidad en ese punto:

‘***El límite de una función es el valor que debería tener la función para ser continua en ese punto’***

si no hay manera de hacer continua la función con un punto, entonces el límite no existe.

En el ***Anexo 2: 2.7*** y ***2.8***, se puede observar en las bitácoras que los(as) estudiantes saben expresar lo que es el límite de una función en un punto en términos de la continuidad y no en términos de ε y δ.

Al término de la secuencia se dio la definición formal de límite y se explicó el cálculo de límites de funciones algebraicas, se tuvo una respuesta bastante positiva en la resolución de los mismos. Obviamente el tiempo destinado para la primera unidad no es suficiente para cubrir todo lo planeado pero la respuesta, la actitud y el empeño de los(as) estudiantes ya para finalizar el trabajo, fue bastante bueno.

Resultados del primer examen parcial

Al final de la unidad, se aplicó el primer examen parcial *(Anexo 6)* tanto a los grupos de prueba como al grupo testigo.

Cuadro comparativo de las calificaciones del primer examen parcial						
Grupo	*Turno*	*Número de alumnos(as)*	*Categorías*	*Frecuencia*	*Porcentaje*	*Valores mínimo, máximo y media*
519 Prueba	*Matutino*	*42*	*11*	*21*	*50*	*mín: 1.8 máx: 9.5 media: 5.6*
			6 – 7.9	*18*	*42.9*	
			8 - 10	*3*	*7.1*	
506 Testigo	*Matutino*	*32*	*0 – 5.9*	*31*	*96.9*	*mín: 1.3 máx: 6.4 media: 3.5*
			6 – 7.9	*1*	*3.1*	
			8 - 10	*0*	*0*	
562 Prueba	*Vespertino*	*28*	*0 – 5.9*	*15*	*53.6*	*mín: 2.6 máx: 9.0 media: 4.7*
			6 – 7.9	*10*	*35.7*	
			8 - 10	*3*	*10.7*	

Tabla 6. Calificaciones obtenidas en los tres grupos en los que se aplicó el primer examen parcial.

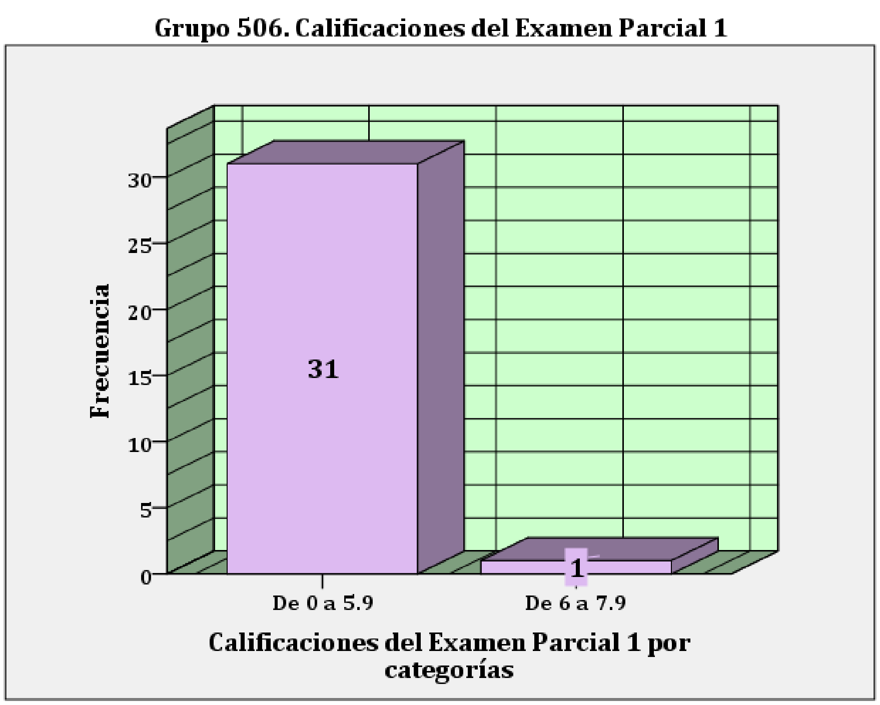


Figura 14. El 3% de los(as) estudiantes aprobaron el ex. parcial 1. La calificación mínima fue: 1.3, la máxima: 6.4, la media: 3.5.

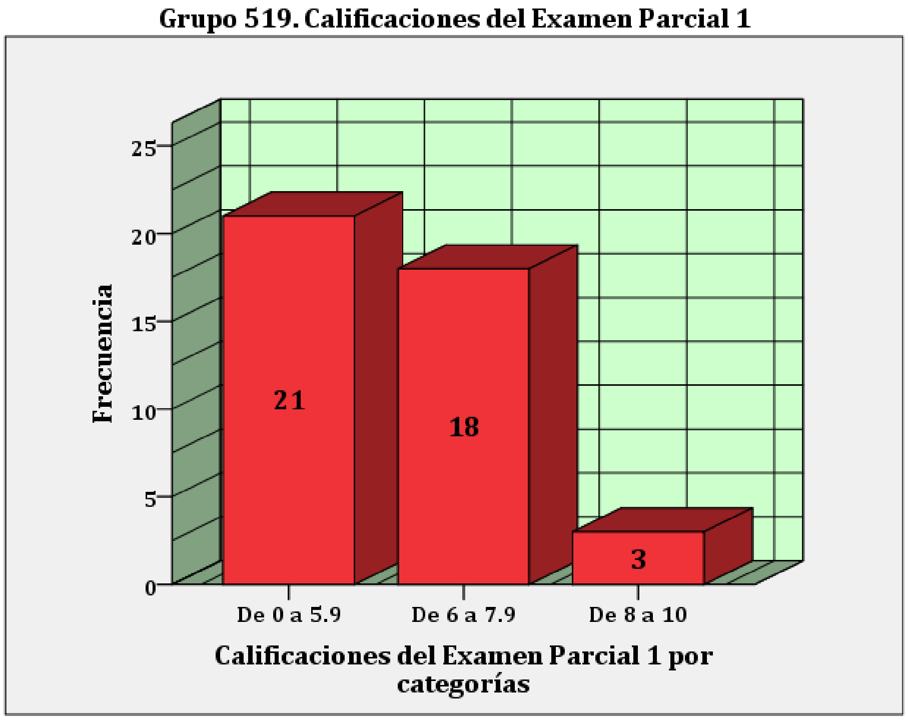


Figura 15. El 50% de los(as) estudiantes aprobaron el ex. parcial 1. La calificación mínima fue: 1.8, la máxima: 9.5, la media: 5.6.

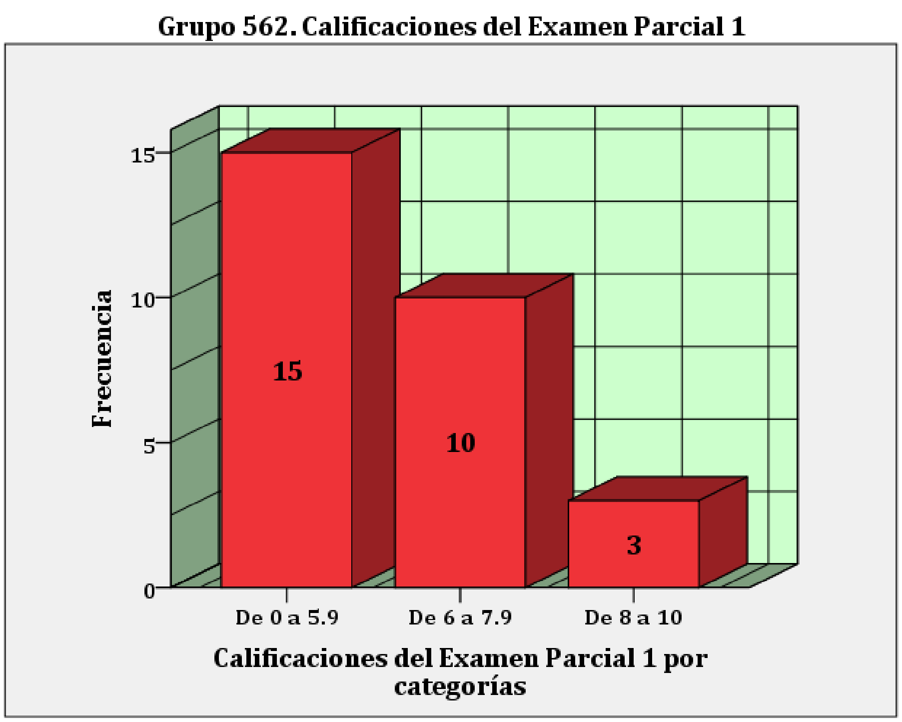


Figura 16. El 46.4% de los(as) estudiantes aprobaron el ex. parcial 1. La calificación mínima fue: 2.6, la máxima: 9, la media: 4.7.

Los resultados anteriores muestran que hubo una mejor respuesta al examen parcial en los grupos de prueba, que en el grupo testigo, ya que en los dos grupos de prueba casi el *50%* de los(as) estudiantes aprobaron el primer examen parcial y en el grupo testigo sólo el *3%*, esto es, sólo un alumno aprobó el examen parcial.

Lo anterior implica un resultado positivo en cuanto al aprovechamiento de los(as) estudiantes, efecto de la aplicación de la estrategia didáctica.

En el grupo *562* del turno vespertino se aplicó sólo un tipo de examen parcial y en los grupos *519* y *506* se aplicaron cuatro tipos diferentes de examen, debido a que en el turno vespertino, se tenía un menor número de alumnos(as).

Comparando las *Tablas 3* y *6*, se observa que el número de estudiantes del grupo testigo *506* disminuyó de *46* a *32*, es decir, no se presentaron *14* alumnos(as) al examen parcial, *8* de los(as) cuales ya habían desertado de la asignatura. *15* de los(as) *32* estudiantes que se presentaron, ya tenían una calificación aprobatoria en su grupo, esto es, ya les habían aplicado el primer examen parcial y aun así se presentaron al examen que se aplicó para los fines del reporte de esta propuesta. *9* estudiantes no habían presentado el examen en su grupo, pero como se observa en los resultados, de los *32* alumnos que se presentaron, únicamente aprobó *1* alumno que no tenía una calificación aprobatoria en su grupo.

En el *Anexo 6: 6.2* se muestra un examen parcial contestado por un alumno de un grupo de prueba, es del mismo alumno del examen de diagnóstico que se encuentra en el *Anexo 1: 1.2*, se puede observar que, en general, con la reactivación de los conocimientos de temas vistos con anterioridad al curso de Cálculo, la secuencia didáctica, la presentación de ejercicios planeados y orientados a un propósito particular y la disposición del alumno, se logra un mejor desempeño y con toda seguridad, tendrá éxito en sus futuros cursos afines a esta asignatura, además de que si al alumno le resulta relevante y pertinente, lo relacionará con circunstancias personales en su realidad cotidiana.

Resultados de la sección del examen diagnóstico en el examen parcial

El examen parcial estuvo compuesto, tanto de reactivos similares a los del examen de diagnóstico, como de reactivos relativos al concepto de límite de una función y cálculo de límites, así que para realizar un análisis más específico, el examen parcial se calificó en forma global y por secciones, la sección del examen de diagnóstico y la sección del tema de límites, los resultados se muestran en la *Tabla 7* y las gráficas de barras en las *Figuras 17, 18 y 19* y los resultados de la sección de límites en la *Tabla 8* y *Figuras 20, 21 y 22.*

Cuadro comparativo de las calificaciones de la sección del examen de diagnóstico						
Grupo	*Turno*	*Número de alumnos(as)*	*Categorías*	*Frecuencia*	*Porcentaje*	*Valores mínimo, máximo y media*
519 Prueba	*Matutino*	*42*	*0 – 5.9*	*12*	*20.6*	*mín: 2.2 máx: 10 media: 6.7*
			6 – 7.9	*16*	*38.1*	
			8 - 10	*14*	*33.3*	
506 Testigo	*Matutino*	*32*	*0 – 5.9*	*23*	*71.9*	*mín: 0.4 máx: 7.1 media: 4.4*
			6 – 7.9	*9*	*28.1*	
			8 - 10	*0*	*0*	
562 Prueba	*Vespertino*	*28*	*0 – 5.9*	*13*	*46.4*	*mín: 3 máx: 10 media: 6.2*
			6 – 7.9	*8*	*28.6*	
			8 - 10	*7*	*25*	

Tabla 7. Calificaciones obtenidas en los tres grupos en la sección correspondiente del examen de diagnóstico en el examen parcial 1.

Grupo 506. Calificaciones de la sección del examen de diagnóstico en el examen parcial 1

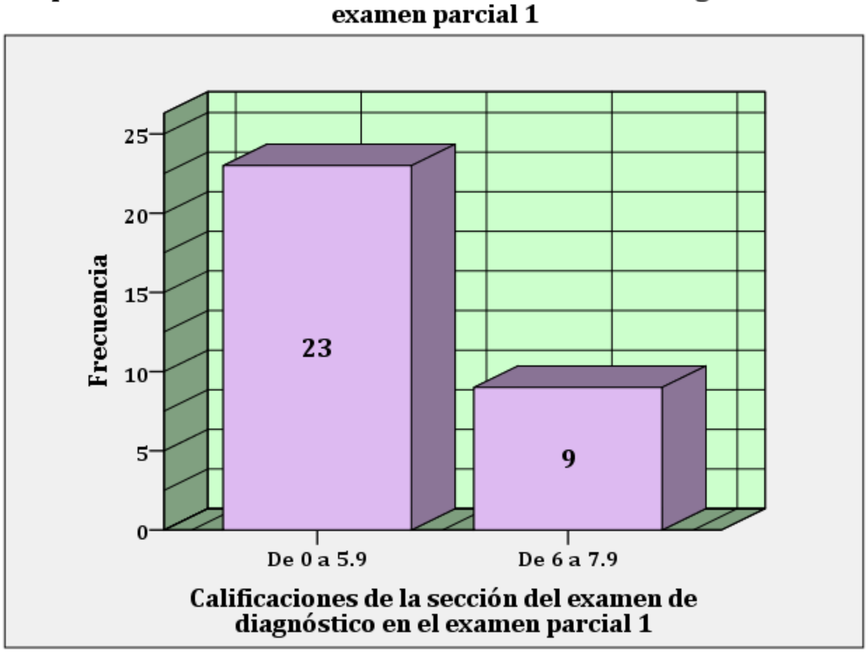


Figura 17. El 28% de los(as) estudiantes aprobaron la sección del ex. diagnóstico, la calificación mín. fue: 0.4, la máxima: 7.1, la media: 4.4.

Grupo 519. Calificaciones de la sección del examen de diagnóstico en el examen parcial 1

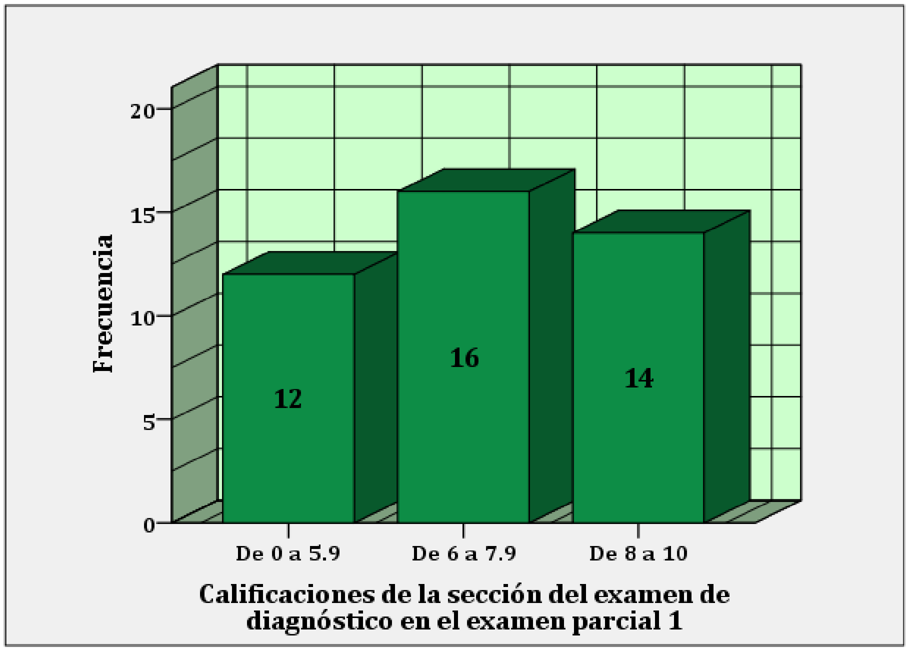


Figura 18. El 79% de los(as) estudiantes aprobaron la sección del ex. diagnóstico, la calificación mín. fue: 2, la máxima: 10, la media: 6.7.

Grupo 562. Calificaciones de la sección del examen de diagnóstico en el examen parcial 1

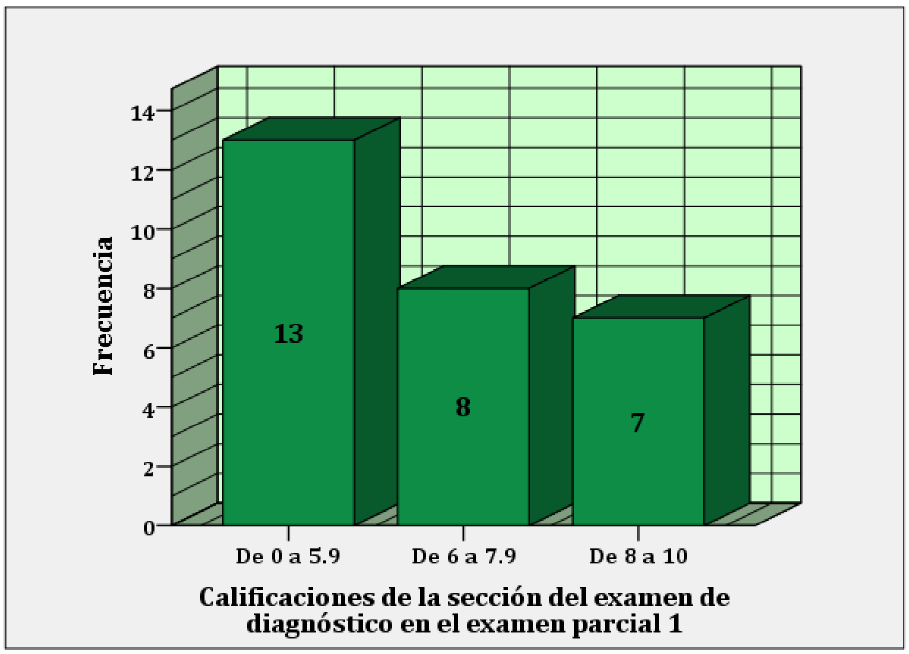


Figura 19. El 53.6% de los(as) estudiantes aprobaron la sección del ex. diagnóstico, la calificación mínima fue: 3, la máxima: 10, la media: 6.2.

Como se puede observar en la *Tabla 7* y en las *Figuras 17, 18* y *19*, los resultados obtenidos en los reactivos de la sección del examen de diagnóstico tomados del examen parcial, muestran que los(as) estudiantes de los grupos de prueba, tanto matutino como vespertino, lograron una mejoría muy significativa en sus respuestas en el examen parcial y sobre todo en comparación de los resultados del grupo testigo, lo que implica que la reactivación de los conocimientos de los temas vistos en sus cursos anteriores, se reflejó en sus evaluaciones, pero más que la calificación, lo importante es que cuentan con los conocimientos necesarios para abordar el concepto de límite, ésto es un avance para lograr una mejor comprensión de los temas subsecuentes en el curso de Cálculo y los(as) estudiantes tendrán una mejor disposición en sus cursos posteriores.

En el *Anexo 6: 6.2, 6.3 y 6.4,* se muestran tres exámenes parciales de alumnos(as) de los grupos de prueba y del grupo testigo, el primero (*6.2*) y el tercero (*6.4*) corresponden a exámenes de alumnos de los grupos de prueba, dan respuesta a lo referente al concepto de función, resuelven los límites y dan una respuesta a lo que es el límite en un punto. El segundo examen (*6.3*) corresponde a una alumna del grupo testigo, se observa que no contesta lo referente a lo que es una función, ni lo que es el límite en un punto pero sí resuelve algunos límites.

Resultados de la sección de límites en el examen parcial

En la siguiente tabla se muestran los resultados de la sección de límites en el primer examen parcial.

Cuadro comparativo de las calificaciones de la sección de límites						
Grupo	*Turno*	*Número de alumnos(as)*	*Categorías*	*Frecuencia*	*Porcentaje*	*Valores mínimo, máximo y media*
519 Prueba	*Matutino*	*42*	*0 – 5.9*	*35*	*83.3*	*mín: 0 máx: 9.2 media: 3.9*
			6 – 7.9	*6*	*14.3*	
			8 - 10	*1*	*2.4*	
506 Testigo	*Matutino*	*32*	*0 – 5.9*	*31*	*96.9*	*mín: 0 máx: 6.6 media: 2.4*
			6 – 7.9	*1*	*3.1*	
			8 - 10	*0*	*0*	
562 Prueba	*Vespertino*	*28*	*0 – 5.9*	*28*	*100*	*mín: 0 máx:5.7 media: 3.2*
			6 – 7.9	*0*	*0*	
			8 - 10	*0*	*0*	

Tabla 8. Calificaciones obtenidas en los tres grupos en la sección correspondiente a límites del examen parcial 1.

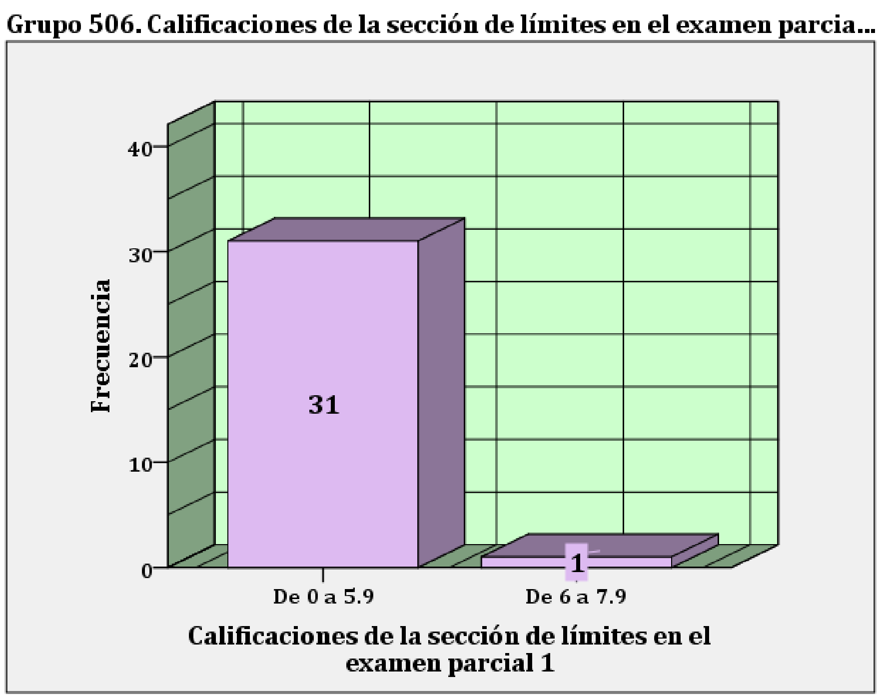


Figura 20. El 3.1% de los(as) alumnos(as) aprobaron la sección de límites, la calificación mínima fue: 0, la máxima: 6.6, la media: 2.4.

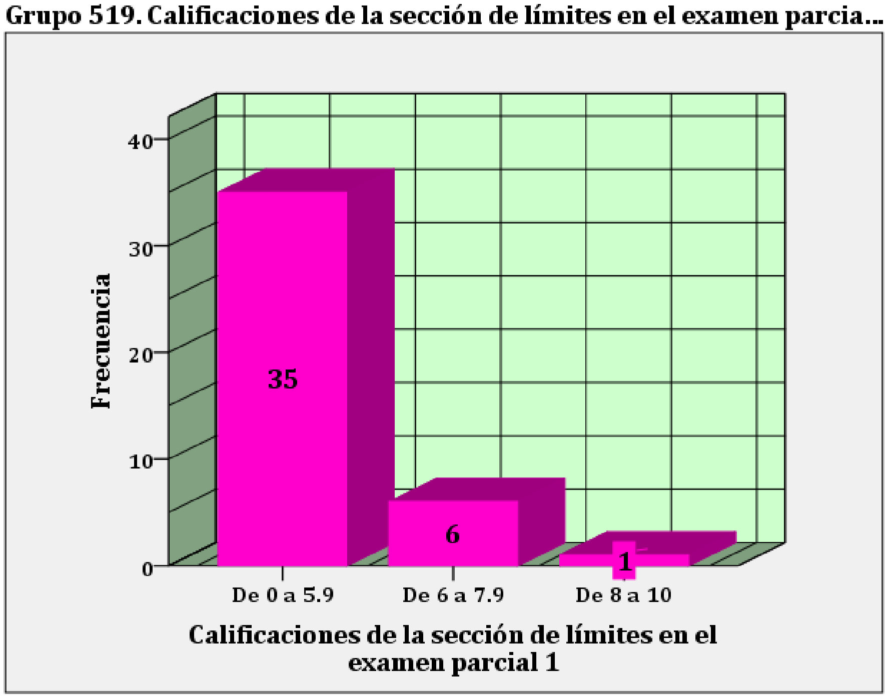


Figura 21. El 16.7% de los(as) estudiantes aprobaron la sección de límites, la calificación mínima fue: 0, la máxima: 9.2, la media: 3.9.

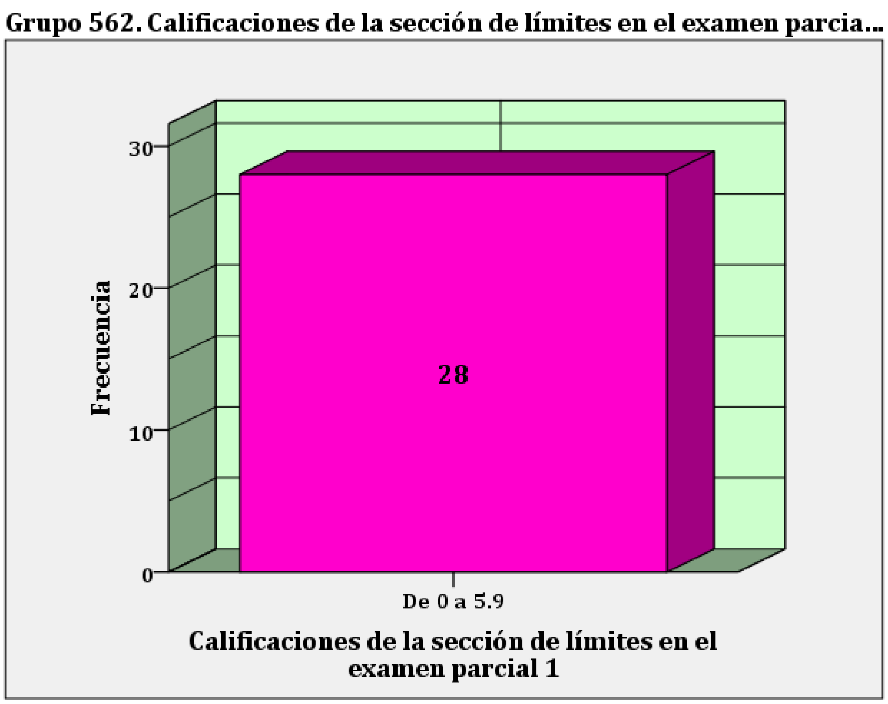


Figura 22. Ningún(a) estudiante aprobó la sección de límites en el ex. parcial, la calificación mínima fue: 0, la máxima: 5.7, la media: 3.2.

Como se puede observar en la *Tabla 8* y las *Figuras 20, 21* y *22*, los resultados en los reactivos de la sección de límites del examen parcial, muestran que los(as) estudiantes del grupo de prueba del turno matutino, tuvieron una mejor respuesta que los(as) estudiantes del grupo testigo, ya que el *16.7%* de los(as) estudiantes contestaron correctamente, mientras que en el grupo testigo solamente el *3.1%* lo hizo.

En el grupo de prueba de la tarde no hubo estudiantes aprobados(as) en los reactivos de la sección de límites, sin embargo, comparando los promedios de calificaciones obtenidas por los tres grupos, se observa que el grupo de prueba *519* tuvo en promedio una calificación de *3.9*, el grupo *562* un promedio de *3.2* y el grupo testigo *506* un promedio de *2.4*.

El haber reactivado los conocimientos de los cursos anteriores reflejó un mejor aprovechamiento de los(as) estudiantes de los grupos de prueba en el examen parcial global, pero en la sección del tema de límites, la respuesta del grupo de prueba del turno vespertino no fue muy buena.

Esto no se puede considerar como un mal resultado, ya que si se analizan los factores que intervinieron en la estrategia didáctica: el poco tiempo para realizar la reactivación de conocimientos anteriores tratando de remover preconcepciones y sustituirlas por lo correcto (tres o cuatro sesiones), cubrir el tema de límites con la secuencia didáctica, la plenaria, la explicación de la definición formal y el cálculo de límites (tres o cuatro sesiones), además del tiempo de la aplicación del examen parcial, y que en el turno vespertino se presenta un gran ausentismo aunado a la falta de entrega de tareas, se puede decir que los resultados obtenidos, en general, mejoraron en gran medida la respuesta de los grupos de prueba tanto en la primera unidad como al finalizar el semestre.

Resultados de las calificaciones finales

A continuación se presentan las calificaciones finales de los grupos de prueba y del grupo testigo, los datos fueron solicitados a los(as) docentes que amablemente prestaron sus grupos para la realización de la intervención.

Cuadro comparativo de las calificaciones finales						
Grupo	*Turno*	*Número de alumnos(as)*	*Categorías*	*Frecuencia*	*Porcentaje*	*Media, deserciones y NP*
519 Prueba	*Matutino*	*42 (49)*	*0 – 5.9*	*7 (10)*	*16.7 (20.4)*	*media: 7 (6.9) deserciones: 1 NP: 1*
			6 – 7.9	*21 (22)*	*50.0 (44.8)*	
			8 – 10	*14 (17)*	*33.3 (32.7)*	
506 Testigo	*Matutino*	*44*	*0 – 5.9*	*12*	*37.5*	*media: 6.3 deserciones: 8 NP: 8*
			6 – 7.9	*17*	*53.1*	
			8 - 10	*7*	*21.9*	
562 Prueba	*Vespertino*	*28*	*0 – 5.9*	*4*	*14.3*	*media: 7.5 deserciones: 4 NP: 7*
			6 – 7.9	*7*	*25.0*	
			8 - 10	*17*	*60.7*	

Tabla 9. Calificaciones finales obtenidas en los tres grupos y No. de deserciones

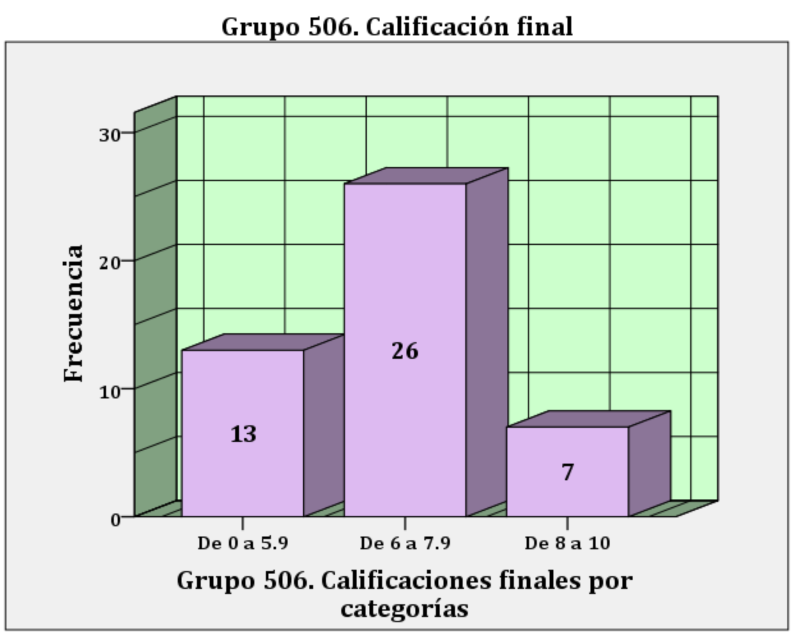


Figura 23. El 75% de los(as) estudiantes aprobaron la asignatura, la calificación promedio fue de 6.3, 8 estudiantes desertaron de la materia.

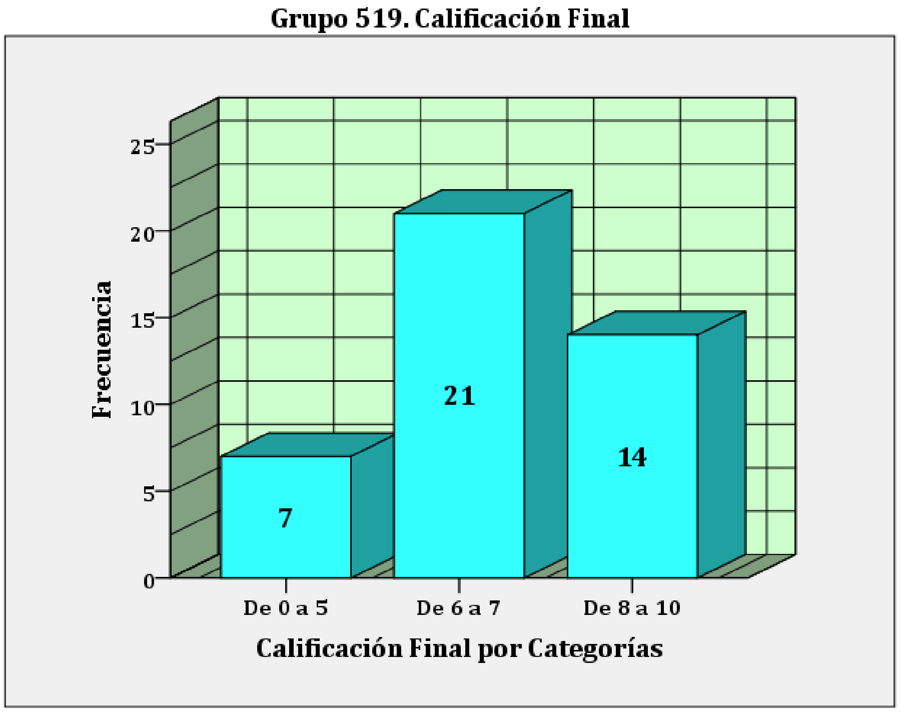


Figura 24. El 83.3% de los(as) estudiantes aprobaron la asignatura, la calificación promedio fue de 7, 1 alumno desertó de la materia.

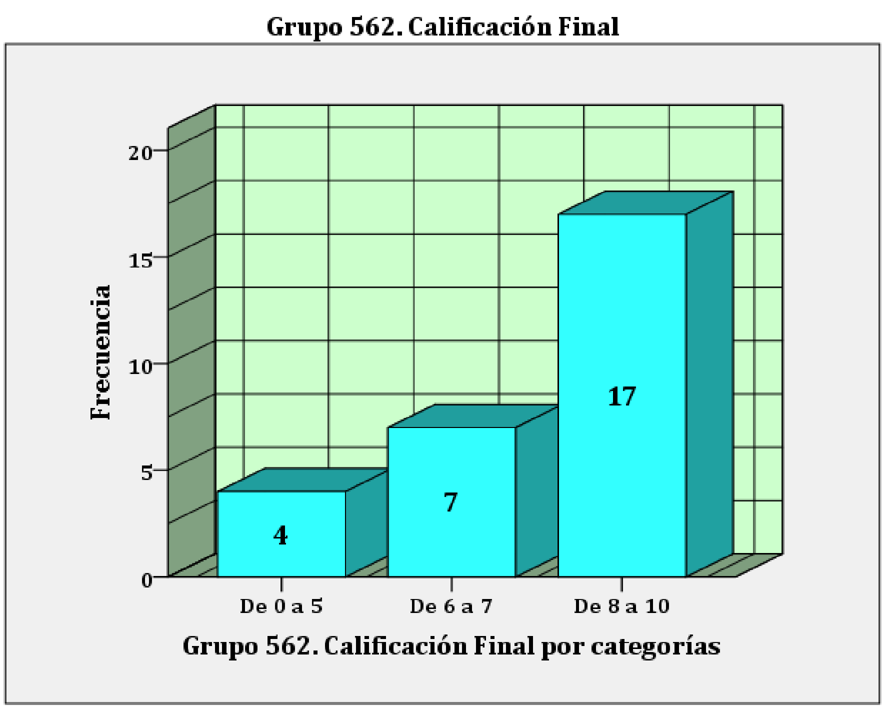


Figura 25. El 85.7% de los(as) estudiantes aprobaron la asignatura, la calificación promedio fue de 7.5, 4 estudiantes desertaron de la materia.

En la última columna de la *Tabla 9,* las NP (No se Presentó) corresponden tanto a los(as) estudiantes que nunca se presentaron al curso como a aquellos(as) que no cubrieron un *70%* de asistencias, no se les está considerando en las deserciones a los(as) alumnos(as) que nunca se presentaron al curso. En el caso del grupo del turno vespertino, hubo *7* NP, pero *3* estudiantes nunca se presentaron al curso.

En la misma tabla se muestran los datos de los(as) alumnos(as) que se les consideró en la estadística y que aparecen en el conteo de los datos de las gráficas de barras y entre paréntesis los datos de los(as) estudiantes que aparecen en el acta.

En el grupo *519* hubo únicamente *1* alumno que obtuvo NP, desertó de la asignatura en la primera unidad, pero no está considerado en el total de estudiantes que se les contabilizó en los exámenes de diagnóstico, ni en la secuencia didáctica, ni en el primer examen parcial. Tampoco se están considerando *6* estudiantes, *3* de los(as) cuales, estaban en otro grupo e hicieron su cambio al grupo *519*, no se les aplicó el examen de diagnóstico, ni trabajaron en la secuencia didáctica, ya que hicieron su cambio después de haber aplicado la secuencia, los otros *3* alumnos(as) no se presentaron el día que se aplicó la secuencia didáctica y no se les consideró en las estadísticas.

En el grupo de prueba *519* hubo *1* deserción, en el grupo testigo *506* hubo *8* deserciones, en el grupo de prueba *562* hubo *4* deserciones, todo esto en el transcurso de la primera unidad.

Capítulo V
Análisis de resultados y conclusiones

En este capítulo se presenta el análisis de los resultados obtenidos en la intervención, así como las conclusiones a las que se llega por este análisis. Se hace un balance de los aspectos que se lograron con la estrategia didáctica y lo que no se consiguió con la misma.

Análisis de resultados

En la siguiente tabla, se concentran los resultados obtenidos de la intervención, se comparan los resultados al iniciar la unidad con el examen de diagnóstico, después de la aplicación de la estrategia didáctica y al final con las calificaciones obtenidas por los(as) estudiantes de los tres grupos.

Cuadro comparativo de resultados de la intervención							
Grupo	*Examen de diagnóstico*	*Examen Parcial*	*Sección del diagnóstico*	*Sección de límites*		*Calificación final*	*Deserciones*
519 (Prueba) Matutino	*0%*	*50%*	*71.4%*	*16.7%*	*3.9*	*83.3%*	*1*
506 (Testigo) Matutino	*10.9%*	*3.1%*	*28.1%*	*3.1%*	*2.4*	*75%*	*8*
562 (Prueba) Vespertino	*0%*	*46.4%*	*53.6%*	*0%*	*3.2*	*85.7%*	*4*

Tabla 10. Porcentajes de las calificaciones aprobatorias, excepto en la quinta columna, subcolumna 2 de la parte de límites, donde se muestra la calificación promedio en límites y en la última columna, que son el número de deserciones.

Comparando la segunda columna con el resto de las columnas, resulta evidente que el antes y después es muy marcado; el grupo testigo contaba con un mejor nivel de conocimientos previos al curso de Cálculo y al final de la primera unidad los resultados mejoraron en los grupos de prueba comparados con el grupo testigo: en el examen parcial, en la sección del examen de diagnóstico en el examen parcial y en las calificaciones promedio en la sección de límites en el examen parcial.

Los resultados de las últimas columnas de las calificaciones finales obtenidas por los tres grupos al final del semestre y el número de deserciones, nos muestran que la estrategia sí causó un impacto en los grupos de prueba, al haber un mejor desempeño y menos deserciones en los grupos de prueba que en el grupo testigo, aun cuando en el turno vespertino siempre se presenta un gran número de deserciones y ausentismo.

La estrategia didáctica generó interés en los(as) estudiantes, por la forma en la que fue planteada, sin extenderse en los procesos infinitos, aunque los(as) alumnos(as) hacen algunas aproximaciones en el llenado de las tablas de datos para ver el comportamiento de una función cerca de cierto valor.

Lo anterior no significa que los procesos infinitos deban ser eliminados del programa, ya que son de gran importancia para comprender qué tan cerca se puede estar de algo sin llegar a él, o para entender ciertos comportamientos o tendencias de algunas funciones, para generalizar, para observar ciertos patrones, por mencionar algunas ventajas, pero se deben trabajar uno o dos ejemplos que sean familiares e interesantes para los(as) estudiantes de bachillerato, y no utilizar todas las sesiones de la primera unidad en los procesos infinitos.

La aplicación de la estrategia didáctica representa más trabajo para los(as) estudiantes, por la cantidad de trabajos extraclase que entregaron en el poco tiempo que se tiene para cubrir el tema de límites de funciones algebraicas, y también representa más trabajo para el(la) docente, ya que se tienen que revisar y hacer las correcciones y aclaraciones de los trabajos de una clase a otra, pero al final de la unidad, los(as) alumnos(as) tienen las bases firmes y necesarias para comenzar el tema de derivada.

Esto es, reactivando y reafirmando los conocimientos anteriores al curso de Cálculo, los(as) estudiantes abordan el tema de límites con las bases necesarias para el buen desarrollo en el curso y eso es evidente en los resultados obtenidos en la intervención.

En cuanto al concepto de límite, hubo una mejor respuesta de los grupos de prueba, comparados con el grupo testigo, columna *5* de la Tabla *10*, aun cuando en el turno vespertino no obtuvieron calificaciones aprobatorias en la parte de límites del examen parcial, ya que las calificaciones promedio del examen parcial en la parte de límites fueron mayores en los grupos de prueba que en el grupo testigo, esto es, se obtuvieron promedios de calificaciones bajas, pero mejores que los promedios en el grupo de prueba.

Lo que se observó en los exámenes parciales en la parte de límites, es que en el grupo testigo muy pocos(as) estudiantes contestaron lo referente al concepto de límite (dos alumnos), y sólo resolvieron algunos de los límites de funciones algebraicas, esto es, saben calcular algunos límites, pero no saben expresar lo que entienden por un límite de una función o decir cuándo existe o no el límite de una función, esto refleja que el concepto no lo tienen claro, pero el cálculo lo hacen.

Si la gran mayoría de los(as) estudiantes llegara con las bases necesarias al curso de Cálculo, se tendría más tiempo para dedicarlo al concepto de límite y cálculo de límites de funciones algebraicas y entonces en el curso de Cálculo, probablemente, no se presentaría tanta deserción y el índice de reprobación sería bajo.

De la entrega de los trabajos extraclase depende el éxito de la secuencia didáctica, ya que si los(as) estudiantes no tienen claros los conceptos de función, dominio e imagen y las operaciones básicas, no conseguirán contestar correctamente lo que se pregunta en la secuencia didáctica, se llevarán más tiempo del que se tiene planeado y no lograrán llegar al concepto de límite.

Si a los(as) estudiantes de bachillerato les quedan claros los conceptos de continuidad, límite y derivada, llegarán al nivel superior con una mejor disposición y con los conocimientos básicos que les permitirán avanzar en sus cursos posteriores.

Conclusiones

Al analizar los datos de la Tabla *10*, resultó un tanto ambicioso cubrir todos los aspectos antes mencionados en tan poco tiempo, pero toda la problemática que se presenta en el curso de Cálculo es precisamente por los conocimientos previos de los(as) estudiantes, esto es, que no llegan con buenas bases al curso de Cálculo, razón por lo cual hay un número elevado de alumnos(as) que no acredita la asignatura y lo que se logró con esta estrategia fue reactivar los conocimientos previos para un mejor desempeño en la clase de Cálculo, lo que se puede observar en las calificaciones finales.

La primera dificultad que se presentó en la estrategia didáctica, es que el concepto de función no está bien claro en los(as) estudiantes, siendo que en los cuatro semestres anteriores a Cálculo, está presente el tema de funciones, en especial, en el cuarto semestre, ya que a lo largo del mismo, se analizan las funciones algebraicas y trascendentales.

Se dedicó más tiempo del planeado en reactivar y reafirmar los conceptos de función, dominio e imagen, para poder conseguir el propósito de la secuencia didáctica. Esto impone planear una estrategia didáctica para comprender el concepto de función.

Una parte importante de la estrategia didáctica reside principalmente en que los(as) estudiantes posean los conocimientos básicos para abordar el tema de límites, si revisamos el esqueleto de la estrategia didáctica en la *Tabla 1*, se destina el mayor tiempo a operaciones básicas, factorizaciones, conceptos de función, dominio e imagen, esto es, se dedica más tiempo a la reactivación de temas ya vistos, tratando de remover y sustituir los errores comunes que cometen los(as) estudiantes por las respuestas correctas, que el que se dedica al concepto de límite y cálculo de límites.

La estrategia didáctica contribuyó a la comprensión del concepto de límite en términos de la continuidad de una función, los(as) estudiantes reafirmaron los conocimientos básicos para el curso de Cálculo y presentaron disposición para ello.

De esta manera, el curso de Cálculo resultó más interesante, los(as) estudiantes lograron un mejor desempeño ya que comprendieron la mayor parte del curso, hubo un menor número de deserciones en los grupos de prueba y disminuyó la reprobación, sobre todo en el grupo de prueba del turno vespertino.

Se puede asegurar que las bitácoras COL contribuyeron a que los(as) estudiantes se sintieran con mucha seguridad al preguntar sus dudas, ya que al cuestionarles su sentir en cada sesión, hizo que los(as) alumnos(as) se sintieran tomados en cuenta, pudieron expresar sus sentimientos tanto de satisfacción como de frustración ante los ejercicios que se les presentaban, así como en su trabajo en equipo tratando de resolver entre pares la secuencia que los conducía al concepto de límite, el ambiente en las sesiones fue agradable y eso contribuyó a lograr un buen desempeño de los(as) estudiantes.

De lo anterior se concluye que existe una estrecha relación entre afectividad y cognición, si no se toma en cuenta esto, no se puede explicar por qué los(as) estudiantes se bloquean ante ciertas asignaturas, por lo general de corte científico.

Se concluye que la mayoría de los(as) alumnos(as) lograron establecer la relación entre sus conocimientos previos y el concepto de límite, esto es, en base a lo que ya saben y por medio de la secuencia didáctica lograron construir el concepto de límite y relacionarlo con su entorno, con lo que están familiarizados y les resultó interesante. En este caso lo que se hizo para crear interés en el tema, fue plantearles una carrera de *100* metros del corredor más rápido en la tierra y tratar de calcular la velocidad en cierto instante, ya que ésto es el límite de la velocidad promedio, cuando el intervalo de tiempo que se considera, es muy pequeño.

El realizar una tabla de valores para graficar, aun cuando se revisaron y reactivaron las factorizaciones, las simplificaciones, llevar las ecuaciones a su forma canónica u ordinaria para poder graficar rápidamente, significa que los(as) estudiantes no relacionan los conocimientos anteriores cuando se les presenta una situación en donde lo tienen que utilizar, esto es, no saben aplicar lo que ya saben para utilizarlo en otra situación diferente, es decir, los conocimientos que poseen están aislados, sin conexión con las aplicaciones.

Con el poco tiempo que se tiene para toda la unidad, únicamente se reactivan los temas vistos con anterioridad, pero no es suficiente para tratar de remover las preconcepciones y cambiarlas por lo correcto, reactivar y reafirmar el concepto de función, así como el dominio y la imagen, que la mayor parte de los(as) estudiantes no los tiene claros, los(as) alumnos(as) prefieren sólo resolver ejercicios, sin emplear definiciones, conceptos o teoremas.

Olvidan lo que en un momento determinado aprendieron, porque retuvieron en su memoria los conceptos y procedimientos objetos de aprendizaje como hechos aislados, no organizados o sin una estructura lógica.

Generalmente lo aprendido en su momento al paso del tiempo se reproduce tal cual y sin conexiones con otros conocimientos y esto es debido a la falta de solidez, por eso se debe promover el aprendizaje significativo.

Sería conveniente hacer una reflexión a las preguntas:

***¿Por qué lo(as) alumnos(as) llegan al curso de Cálculo con tantas lagunas y obstáculos epistemológicos?*,**

¿En qué etapa de la formación de los(as) estudiantes está ocurriendo este descontrol, desinformación o deformación de los conocimientos?

Probablemente las respuestas estarán dirigidas hacia la formación docente, tanto de los(as) profesores(as) de nivel medio, como de los de nivel medio superior. Tal vez al realizar evaluaciones convenientes, sin afectar la situación laboral del profesorado, se detecten los focos que se deben atender para evitar una mayor difusión de errores conceptuales.

Consideraciones finales

La estrategia didáctica se ha aplicado a grupos de Cálculo en semestres posteriores al reportado en el presente trabajo, y cada vez surgen otras consideraciones, como es natural en todo proceso educativo, ya que como docentes tenemos que mejorar nuestra práctica en el salón de clase, corregir y actualizar nuestros apuntes, buscar nuevas formas de evaluación, crear y mejorar los materiales didácticos de manera que resulten interesantes a los(as) estudiantes, echar mano de la tecnología disponible, actualizarnos continuamente, etcétera.

De lo contrario nuestras clases se volverán monótonas y aburridas, los(as) alumnos(as) nos rebasarán en cuanto a tecnología, no nos considerarán un ejemplo a seguir, sino que seremos un(a) profesor(a) más, que no llega a trascender en las vidas de los(as) alumnos(as) y eso no podemos permitirlo.

Lo ideal sería dar un seguimiento a los(as) estudiantes por medio de asesorías o tutorías para determinar el impacto que causa la estrategia al abordar el tema de límites de manera diferente al propuesto en el programa, con una evaluación adecuada que permita revelar si hubo una mejor comprensión de los conceptos de límite y derivada y si se tiene un mejor desempeño de los(as) estudiantes en la asignatura de Cálculo.

Se debe tomar en cuenta que una característica del *Colegio de Ciencias y Humanidades*, es que la población de alumnos(as) de *5º* y *6º* semestres no está dividida por áreas, sino que los(as) estudiantes eligen las asignaturas más afines a la carrera que estudiarán, pero deben elegir una o dos asignaturas del área de matemáticas, aunque su carrera no sea de área *1* o *2*.

De esta manera, en las asignaturas de *Cálculo Diferencial e Integral I* y *II*, el grueso de los(as) estudiantes elige carreras de área *1* o *2*, pero también algunos(as) de los(as) que van a carreras de *Música, Historia, Odontología, Psicología, Letras*, por mencionar algunas, eligen Cálculo porque tenían que elegir entre *Cálculo Diferencial e Integral, Estadística o Cibernética y Computación.*

Muchas veces por falta de información, eligen la asignatura sin saber los contenidos temáticos, y si no se tiene presente esta situación, estos(as) estudiantes serán los desertores potenciales de esta asignatura. ***¿Por qué no diseñar estrategias interesantes y amigables, en las materias de alto índice de reprobación, sin sacrificar los contenidos temáticos, sino presentarlos de una manera diferente y atractiva a los(as) estudiantes?***

Si se quiere mejorar el sistema educativo, los problemas en la formación de los(as) estudiantes, la calidad y eficiencia terminal, contar con docentes eficientes, se debe comenzar por la formación y preparación de nuestros(as) docentes.

Las cuestiones sobre la educación, sus propósitos, su relación con la sociedad, con el ideal de personas que queremos, ya sea para formar una sociedad bien estructurada, o para que se conviertan en nuestros futuros gobernantes, es lo que necesitamos para que el proceso de enseñanza aprendizaje sea más fructífero.

Lo que debemos enseñar como docentes, nos hace reflexionar si lo que hacemos es correcto o necesitamos reformular nuestro pensamiento para dar lo mejor de nosotros mismos; se puede extraer mucha información de lo que se ha escrito sobre educación, docencia, mejoramiento de los sistemas educativos, teorías de enseñanza y aprendizaje, etcétera, pero sólo en nosotros(as) como docentes está el poder mejorar esta situación.

Si se tiene alguna sugerencia, observación y/o comentario para mejorar este trabajo, será bien recibido y se pueden dirigir a la siguiente dirección electrónica:

matilde.suzuki@cch.unam.mx

Anexos

Anexo 1. Examen de diagnóstico.

1.1. Versión final.

Nombre: ____ *Carrera:* ____________________

Instrucciones*: Resuelve y contesta correctamente los ejercicios, sólo serán tomados en cuenta los ejercicios acompañados del procedimiento correspondiente. Simplifica y factoriza tus resultados.*

1. $\frac{4}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{5}{3} =$

2. *Encuentra el valor de x que satisface la ecuación dada:*

a) $x - 2 = 3x - 1$

b) $(x + 2)(x - 1) = 0$

c) $x^2 - 6x + 5 = 0$

d) $\frac{2}{3} + \frac{2}{x} = 5$

3. *Factoriza las siguientes expresiones:*

a) $x^2 - 144 =$ ***b)*** $x^2 + 3x + 2 =$ ***c)*** $2x^2 + 3x - 2 =$

4. *Escribe una expresión equivalente:*

a) $\sqrt{x^2 - 9} =$ ***b)*** $(x + 3)^2 =$ ***c)*** $\frac{2 + x}{x} =$

5. *Encierra en un círculo la letra del inciso en el que se representa una función, (Ojo: desde el inciso **a)**, hasta el inciso **r)**):*

a)

x	*y*
1	*3*
1	*6*
3	*9*
3	*12*

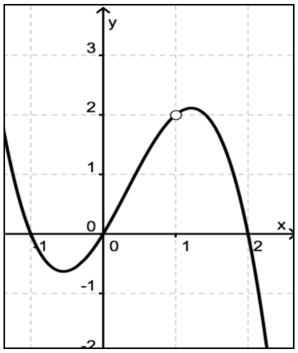
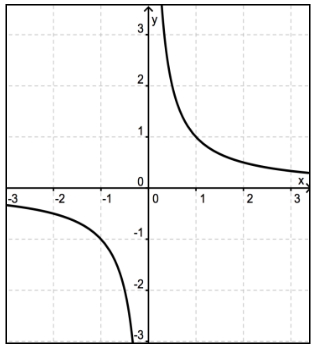
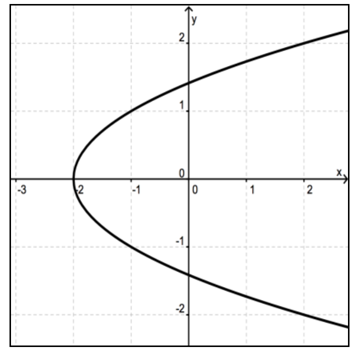
b)

x	*y*
1	*3*
2	*6*
3	*9*
3.5	*10.5*

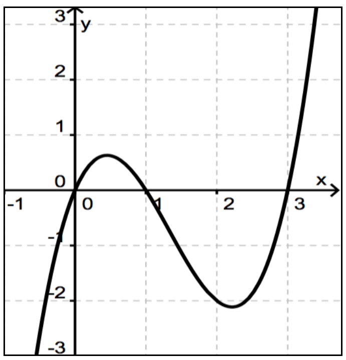
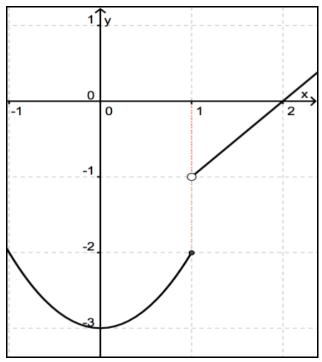
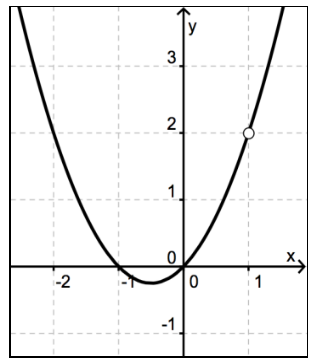
c)

x	*y*
1	*3*
2	*3*
3	*3*
4	*3*

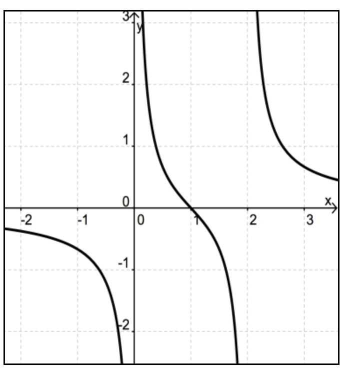
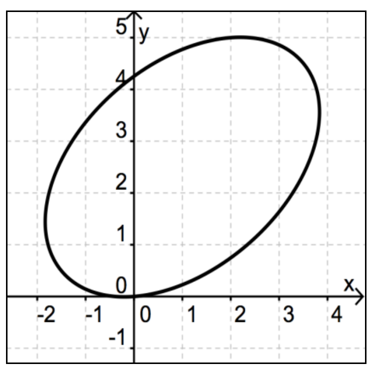
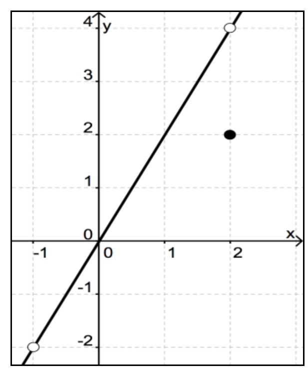
d) $f(x) = 0$ ***e)*** $-2x + 3 = 5$ ***f)*** $y = x$

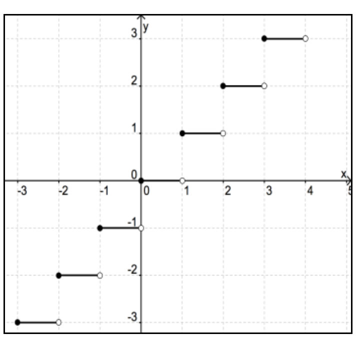
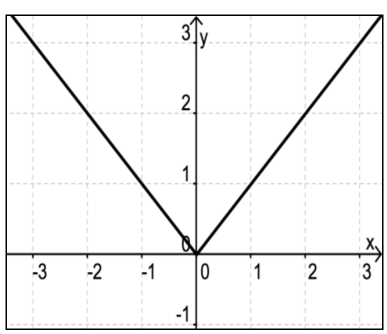
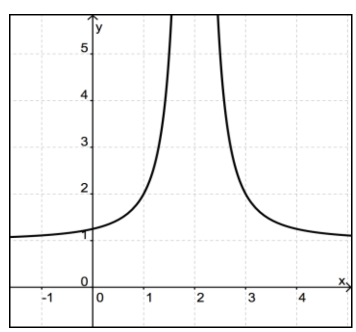
g) h) i)

j) k) l)

m) n) o)

p) q) r)

6. *En las gráficas anteriores, del inciso* ***g)*** *al inciso* ***r)****,* ***que identificaste como funciones****, indica debajo de las mismas, el dominio y la imagen (rango o recorrido) de la función correspondiente, indica también si la función es continua o el valor de x donde la función presenta una discontinuidad, si es que lo es en el intervalo que se muestra.*

7. a) *Explica lo que es una función.*

b) *Explica lo que es el dominio de una función.*

c) *Explica lo que es la imagen, rango o recorrido de una función.*

1.2. Ejemplo de examen de diagnóstico de un alumno de un grupo de prueba.

MYSH

Arquitectura

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
EXAMEN DE DIAGNÓSTICO

4.1

Nombre: González Cruz Oscar Alejandro

1. $\frac{4}{3}+\frac{2}{5}\times\frac{5}{3}=$ $\frac{11}{3}$ No

2. Encuentra el valor de x que satisface la ecuación dada:

No hay operaciones

$\frac{1}{2}$ **a)** $x-2=3x-1$ $x=-0.5$

b) $(x+2)(x-1)=0$

$\frac{1}{2}$ **c)** $x^2-6x+5=0$ $x=5$?

d) $\frac{2}{3}+\frac{2}{x}=5$

3. Factoriza las siguientes expresiones:

1 **a)** $x^2-144=$ $(x+12)(x-12)$

1 **b)** $x^2+3x+2=$ $(x+2)(x+1)$

c) $4x^2-6x^3+2x=$

4. Encierra en un círculo los incisos que representan una función:

1 **a)** $f(x)=0$ **b)** $-2x+3=5$ **c)** $y=x$

$\frac{2}{3}$ **d)**

x	y
1	3
1	6
3	9
3	12

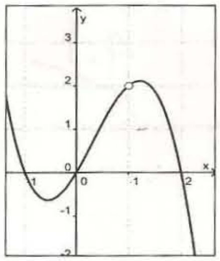
e)

x	y
1	3
2	6
3	9
3.5	10.5

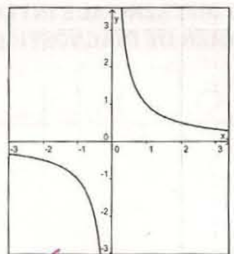
f)

x	y
1	3
2	3
3	9
4	3

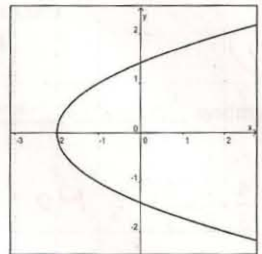
1 de 3



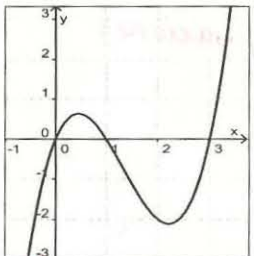
g) ℝ-[1]



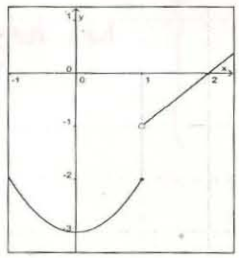
h)



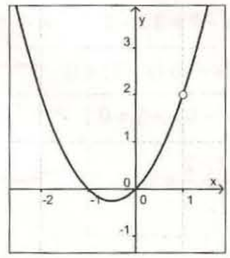
i)



j)

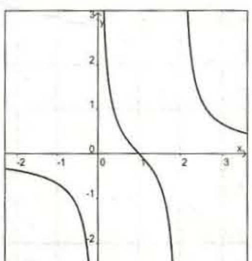


k)

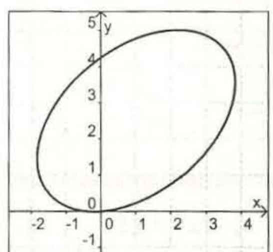


l)

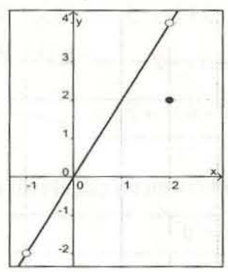
1



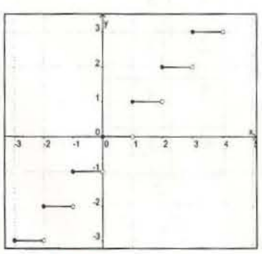
m)



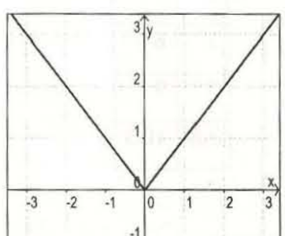
n)



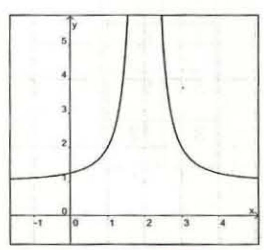
o)



p)



q) IR + No



r)

2 de3

5. En las figuras anteriores, que identificaste como funciones, indica debajo de ellas, en qué punto (o puntos) es discontinua, si lo es.

1 **6. a)** Explica lo qué es una función Es una relación en la cual para cada absisa hay un sólo punto de las ordenadas

b) Explica lo qué es el dominio y la imagen de una función El dominio es el rengo en el cual se extienden los puntos correspondientes de la función + ó -

$\frac{1}{2}$ **7.** Explica qué significa que una función sea continua Que a todas las absisas les corresponda una ordenada

Anexo 2. Bitácoras COL.

2.1. Ejemplo de bitácora de una alumna de un grupo de prueba.

Maldonado Olmos Marisol

Rev

① ¿Cómo me sentí en la clase?

Me sentí muy bien en la clase porque entendí todo, ya que la maestra tiene la habilidad de enseñar; de hacerlo fácil y yo pienso que para ser matemáticas (cálculo) es difícil, pero ella lo hizo fácil, aparte de que tiene una gran paciencia. Me sentí más agusto porque si no entendía algo, tenía la seguridad de preguntar por su manera de ser y porque te explica bien, las veces que quieras.

② ¿Que me gustaria que se hiciera para mejorar la clase?

Pues para mi fue suficiente lo que hizo ya que no necesite nada más aparte de que con la tarea que nos dejo fue más sencillo entender y agarrarle el hilo al tema.

③ ¿Que aprendí?

Aprendí a hacer sumas, divisiones y multiplicaciones de quebrados, las jerarquíaz para encontrar la incognita de una ecuación y resolverlas con la general, completando los cuadrado, y a graficar. Por supuesto también a factorizar por los 10 casos

1 de 1

2.2. Ejemplo de bitácora de una alumna de un grupo de prueba.

Rw

Luna Rodríguez Lourdes J. 10/08/2012

1) ¿Cómo me sentí en clase? La
clase del día de hoy me fue muy agradable
ya que la maestra tiene una gran
capacidad de explicar clara y ágilmente
los temas vistos en clase, además de
desarrollar distintas alternativas
de resolución de ecuaciones, etc.
2) ¿Qué me gustaría que se hiciera
para mejorar la clase? A mí me
gustó la clase el modo los temas y
el repaso y creo, hasta el momento
que no debe de haber modificaciónes
3) ¿Qué aprendí? El día de hoy
repase los metodos de resolución
de fracciónes sumas restas y multipli-
caciónes, la diferencia entre funcion
expresión y ecuación estructuramnente
hablando y los tipos de factorización
y resolución del T.C.P.

1 de 1

2.3. Ejemplo de bitácora de un alumno de un grupo de prueba.

Octavio Hernandez Flores

Rev

1) ¿Como me senti en la clase?

- Me senti interesado en la clase y tambien decepcionado porque no me acordaba todos los distintos metodos de sacar la x (factorizacion, chicharronera y cuadrado perfecto, ecuacion ordinaria etc)

2) ¿Que me gustaria para que mejorara la clase?

- Sinceramente Nada,!! porque a mi juicio esta forma de enseñar me parece muy buena y facil de entender

3) ¿Que aprendi?

Aprendi a recorda mis clases olvidadas de mate I, II, III y IV en tan solo 2 hrs o menos.

Tambien aprendi a no dejar por muerto los conocimientos dados en Mate, porque te va servir para lo que sigue en un futuro

1 de 1

2.4. *Ejemplo de bitácora de un alumno del turno vespertino.*

13-08-12

Méndez Martínez Alejandro

1.- ¿Como me sentí en la clase?

Muy bien, Hoy si le entendí a todo lo que explico

2.- ¿Que puedo hacer para mejorar desempeño?

hacer las tareas que nos pide la profesora para asi poder entender de una forma más facil los trabajos en clase

3.- ¿Que aprendí?

aprendi tres formas de factorizar incluyendo la más dificil y como manipular los números para mi favor, incluyendo las caracteristicas de una función

1 de 1

2.5. Ejemplo de bitácora de una alumna del turno vespertino.

13/08/2012.

Silva Martinez Zahira Mariela

1º Me gusto la clase porque tiene una Forma practicapara enseñar y muy amena y muy entendible.

2º Cumplir a tiempo con el material dela clas y Sobretodo repasar lo ya enseñado para tener Fresco el conocimiento y poder participar mejor en la clase.

3º Algunos tipos de Funciones y a diFerenciaR. una Funcion Continua de una descontinua.

1 de 1

2.6. Ejemplo de bitácora de una alumna de un grupo de prueba.

=26-agosto-12=

Ruiz Pérez Itzel Yanira

Grupo: 519

1 ¿Cómo me sentí en la clase de hoy?

Hoy me sentí muy bien y segura ya que la profesora explicó muy bien y me gusta mucho que nos tiene paciencia y hace que la clase no sea tediosa o aburrida.

2 ¿Qué propongo hacer para mejorar mi desempeño?

Propongo que la profesora siga así y no se desespere porque me agrada mucho cómo enseña. y propongo que para mi mejor desempeño tengo que anotar lo más importante y poner mucha atención.

3 ¿Qué aprendí?

Hoy repasamos la jerarquía de operaciones eso me ayudó porque ya no recordaba muy bien, también la profesora nos recomendó no usar fracciones mixtas que es mejor usar fracciones impropias y propias. Aprendí las reglas de divisibilidad. Aprendí a agilizar mi manera de resolver ecuaciones ya que antes usando la chicharronera me tardaba mucho y cometía muchos errores. Aprendí que es mejor simplificar ecuaciones que tengan fracciones para hacerlo más fácil al resolverlo.

1 de 1

2.7. Ejemplo de bitácora después de aplicar la secuencia didáctica.

27-agosto-2012.

Carral Cárdenas Kazandra.

¿Qué aprendí hoy?

Aprendí el concepto de límite, que es el PUNTO con el cual una función puede tener continuidad.
En el caso de una hipérbola no sería posible y si llegaría a darse el caso el límite tiende a infinito.
El límite nos sirve para las derivadas.

¿Cómo me centí en la clase?

Me centí bien ya en la parte de la explicación de lo visto en las actividades, ya que en algunas preguntas no le entendía muy bien lo que me pedía.

¿Qué cambiaría?

Hacer un poco más claras algunas preguntas, ya que en como dos, no se entendía claramente lo que se requería.

1 de 1

2.8. Ejemplo de bitácora después de aplicar la secuencia didáctica.

¿Como me senti? Rodrigo García Mendieta 519

Me senti feliz porque logre entender el trabajo. Rw

¿Como mejoraria?

La clase está bien el resto está en mi y mi estudio

¿Que aprendi?

Termine mi actividad y aprendi que un limite es el valor que tendria que tener la función para ser continua.

1 de 1

Anexo 3. Trabajos extraclase.

3.1. Tarea 1. Versión final.

Traer en el cuaderno 3 ejercicios de cada uno de los siguientes casos de factorización, busca el tema en un libro de Álgebra:

1) *Factor común,*

2) *Factor común por agrupación,*

3) *Diferencia de cuadrados,*

4) *Trinomio de la forma:* $x^2 + b\,x + c$,

5) *Trinomio de la forma:* $ax^2 + bx + c$,

6) *Cubo perfecto de binomios,*

7) *Suma o diferencia de cubos perfectos.*

Menciona el autor y el título del libro, el año de la edición y las páginas consultadas.

Ejemplo:

3) *Diferencia de cuadrados*

a) $x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x - 3)(x + 3)$

b) $x^2 - 2 = \sqrt{x}^{\,2} - \sqrt{2}^{\,2} = \sqrt{x} - \sqrt{2} \quad \sqrt{x} + \sqrt{2}$

c) $36 - (x - 5) = 6^2 - \sqrt{x-5}^{\,2} = 6 - \sqrt{x-5} \quad 6 + \sqrt{x-5}$

3.2. Tarea 2. Versión final.

1. *Busca en un libro de Cálculo:*

> ***a)*** *La definición de* ***función****.*
>
> ***b)*** *La definición de* ***dominio o dominio natural*** *de una función.*
>
> ***c)*** *La definición de* ***imagen*** *(rango o recorrido) de una función.*
>
> ***d)*** *La definición de* ***igualdad*** *de funciones.*

Menciona el nombre y autor(a) del libro, el año de la edición y las páginas consultadas.

2. *Traza las gráficas de las siguientes funciones:*

a) $f(x) = 2x - 1$

b) $g(x) = x^2 + x - 2$

c) $h(x) = \dfrac{2x^2 + 3x - 2}{x + 2}$

d) $i(x) = \dfrac{-x^3 - 4x^2 - 3x + 2}{x + 2}$

e) $j(x) = \dfrac{1}{x + 3}$

f) $k(x) = \dfrac{1}{x^2} - 2$

Indica en cada una de ellas su dominio, su imagen (rango o recorrido), explica por qué se trata de una función e indica cuál de las funciones es continua o en qué valor de x, hay una discontinuidad.

3.3. Tarea 3. Versión final.

1. a) *Explica lo que es una* ***función****.*

b) *Explica lo que es el* ***dominio*** *de una función.*

c) *Explica lo que es la* ***imagen, rango o recorrido*** *de una función.*

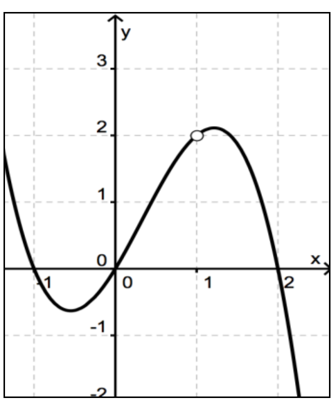
d) *Explica cuando dos funciones son* ***iguales****.*

2. a) *Explica lo que entiendes por el límite de una función f en 'c'.*

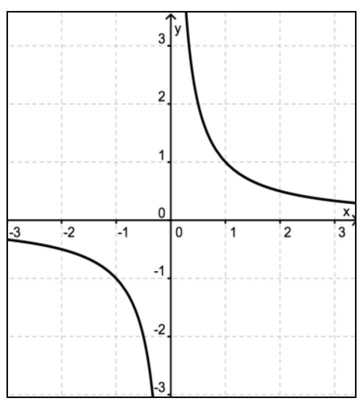
b) *Menciona dos casos en los que se pueda asegurar que el límite de una función existe en 'c'.*

c) *Menciona dos casos en los que* ***no*** *existe el límite de una función en 'c'.*

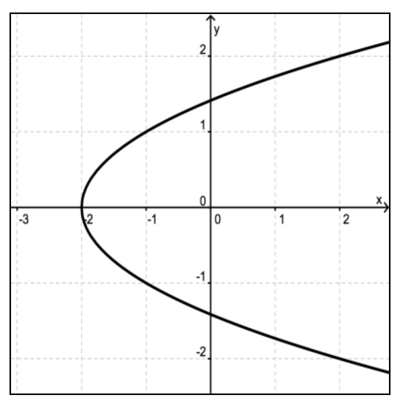
3. *Debajo de las siguientes figuras, escribe el dominio y la imagen (rango o recorrido) de la función, si está representada una función, también indica si es continua o en qué valor de x donde se presenta una discontinuidad.*



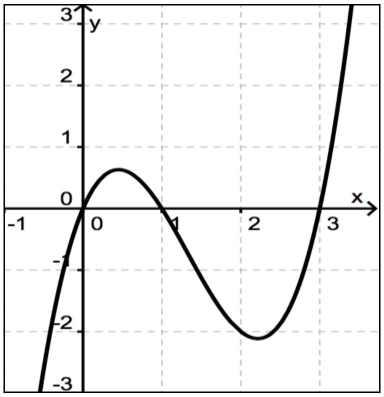
a)



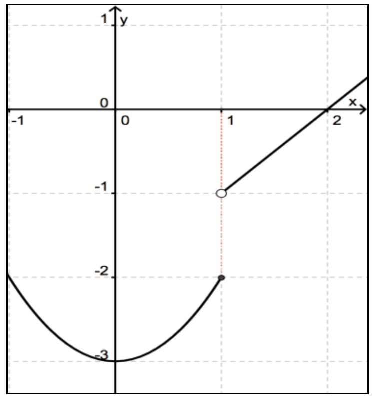
b)



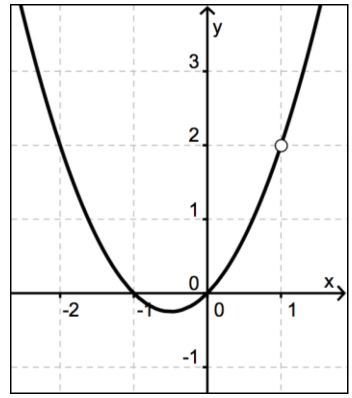
c)


y
x
3
2
1
0
-1
-2
-3
-1
0
1
2
3

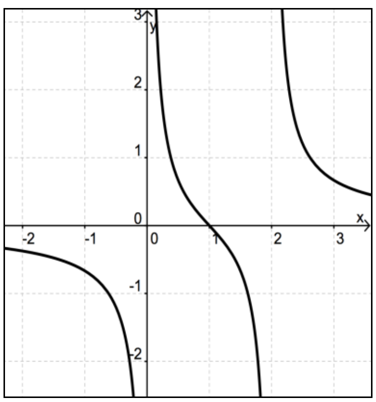
d)


y
x
1
0
-1
-2
-3
-1
0
1
2

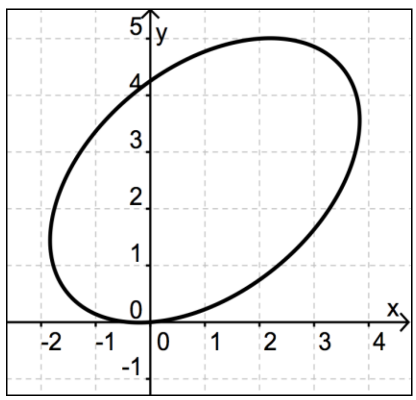
e)


y
x
3
2
1
0
-1
-2
-1
0
1

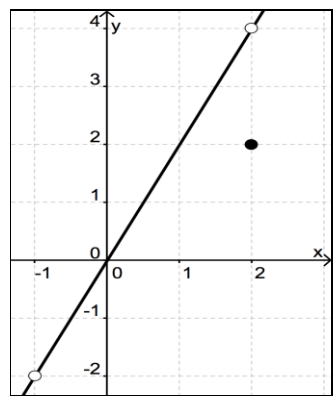
f)


y
x
3
2
1
0
-1
-2
-2
-1
0
1
2
3

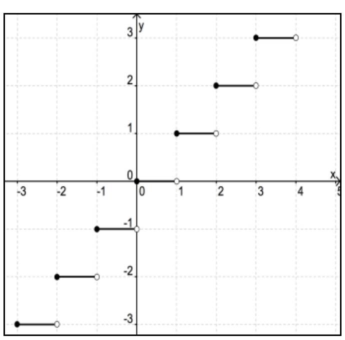
g)


y
x
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-1
0
1
2
3
4

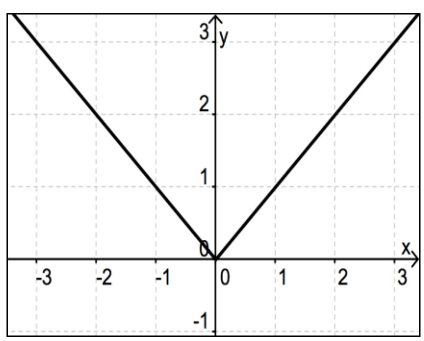
h)


y
x
4
3
2
1
0
-1
-2
-1
0
1
2

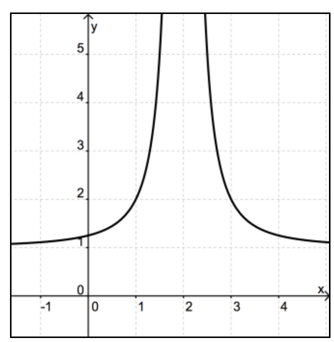
i)


y
x
3
2
1
0
-1
-2
-3
-3
-2
-1
0
1
2
3
4

j)


y
x
3
2
1
0
-1
-3
-2
-1
0
1
2
3

k)


y
x
5
4
3
2
1
0
-1
0
1
2
3
4

l)

4. *De las gráficas anteriores, ¿cuál es el valor de los siguientes límites en el valor de x que se indica? o ¿cuál es la tendencia de la función?*

a) $\lim_{x\to-\infty} a(x) \to$	***b)*** $\lim_{x\to-1} a(x) =$	***c)*** $\lim_{x\to1} a(x) =$	***d)*** $\lim_{x\to\infty} a(x) \to$
e) $\lim_{x\to-\infty} b(x) \to$	***f)*** $\lim_{x\to2} b(x) =$	***g)*** $\lim_{x\to0} b(x)$	***h)*** $\lim_{x\to\infty} b(x) \to$
i) $\lim_{x\to-\infty} c(x)$	***j)*** $\lim_{x\to2} d(x) =$	***k)*** $\lim_{x\to1^-} e(x) =$	***l)*** $\lim_{x\to1^+} e(x) =$
m) $\lim_{x\to1} e(x)$	***n)*** $\lim_{x\to-\infty} f(x) \to$	***ñ)*** $\lim_{x\to-\infty} g(x) \to$	***o)*** $\lim_{x\to\infty} g(x) \to$
p) $\lim_{x\to0} g(x)$	***q)*** $\lim_{x\to0} h(x)$	***r)*** $\lim_{x\to-1} i(x) =$	***s)*** $\lim_{x\to2} i(x) =$
t) $\lim_{x\to3} j(x)$	***u)*** $\lim_{x\to0} k(x) =$	***v)*** $\lim_{x\to2} l(x) \to$	***w)*** $\lim_{x\to\infty} l(x) \to$

3.4. Tarea 4. Versión final.

Calcula los siguientes límites en el valor de x que se indica:

1) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\frac{1}{3} - \frac{1}{x}}{x-3} =$

2) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3+1}{x^2+1} =$

3) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{6x^2+5x-2}{x+1} =$

4) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{3x-9}{x^2-9} =$

5) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} =$

6) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x+3}{2x^2+5x-3} =$

7) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1-x}{x} =$

8) $\lim\limits_{x \to -1} \left(x^3 - 4x^2 - 3x + 1\right) =$

9) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\frac{1}{x+1} + 1}{x+2} =$

10) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3-4x^2-3x+18}{x^3-7x^2+15x-9} =$

11) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3-4x^2-3x+18}{x^3-7x^2+15x-9} =$

12) $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sqrt{t+2}-\sqrt{2}}{t} =$

13) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x-1}} =$

14) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3}{(x-2)^2} =$

15) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{4-(2+x)^2} =$

3.5. Ejemplo de tarea de una alumna de un grupo de prueba.

Grupo: 519.

Karen Abad Solares.

Tarea. 1

DEFINICIONES.

10

Definición de función.

Es la correspondencia o relación f. de los elementos de un conjunto A con los elementos de un conjunto B. Una función cumple con la condición de existencia (todos los elementos de A están relacionados con los elementos de B) y con la condición de unicidad (cada elemento de A está relacionado con un único elemento B).

Dominio.

El conjunto de todos los posibles valores de ingreso que la función acepta.

Los valores de salida son llamados Rango.

Dominio $\rightarrow$ Función $\rightarrow$ Rango.

Ej. si a la función $f(x)=x^2$ se le dan los valores $x=\{1, 2, 3..\}$ entonces $\{1, 2, 3..\}$ es el dominio.

Rango.

El conjunto de todos los valores de salida de una función.

Dominio $\rightarrow$ función $\rightarrow$ Rango.

Ej. si a la función $f(x)=x^2$ se le dan los valores $x=\{1, 2, 3..\}$ entotces el rango será $\{1, 4, 9...\}$

1 de 1

3.6. Ejemplo de tarea de una alumna después de aplicar la secuencia didáctica.

Camal Cárdenas Kazandra.

Grupo: 519.

9.6

MYSH

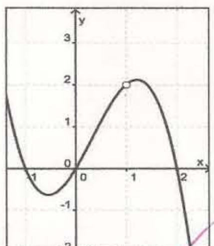
Cálculo Diferencial e Integral I

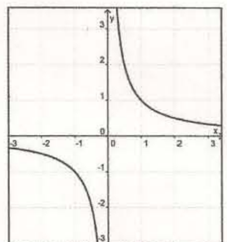
Tarea 4

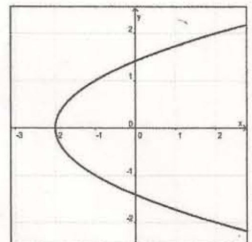
Muy bien, revisa las correcciones

1. Debajo de las siguientes figuras, escribe el dominio y la imagen de la función, si es que está representada una función.

1

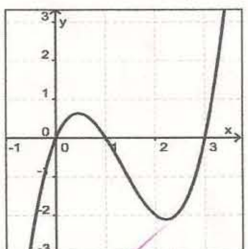


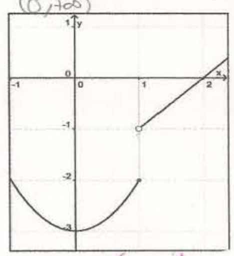


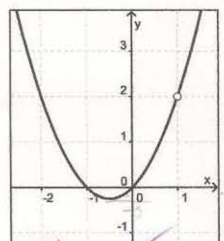


a) $D_a=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ $Im_a=(-\infty,+\infty)$ **b)** $D_b=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ $Im_b=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ **c)** $D_c=$ $Im_c=$ No es función

1

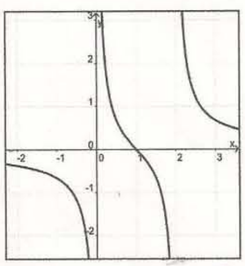


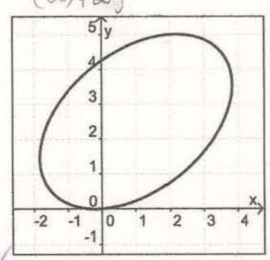


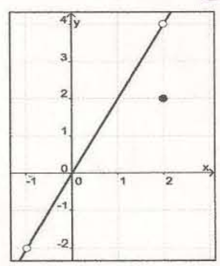


d) $D_d=(-\infty,+\infty)$ $Im_d=(-\infty,+\infty)$ **e)** $D_e=(-\infty,+\infty)$ $Im_e=(-3,+\infty)$ **f)** $D_f=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ $Im_f=(-3,+\infty)$ $-\frac{1}{4}$

0



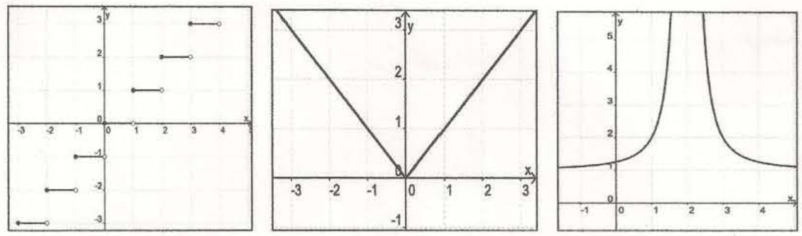




g) $D_g=(-\infty,0)\cup(0,2)\cup(2,+\infty)$ $Im_g=(-\infty,+\infty)$ **h)** $D_h=$ $Im_h=$ No es función **i)** $D_i=(-\infty,-1)\cup(-1,2)\cup(2,+\infty)$ $Im_i=(-\infty,-2)\cup(-2,4)\cup(4,+\infty)$

1 de 2

(1)



j) D_j= ✓ $(-\infty,+\infty)$ Im_j= $\mathbb{Z}$ Todos los enteros ✓ **k)** D_k= ✓ $(-\infty,+\infty)$ Im_k= ✓ $[0,+\infty)$ **l)** D_l= $(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$ ✓ Im_l= $(1,+\infty)$ ✓

2. A qué valor tienen o a qué valor se acercan los siguientes límites (se refieren a las gráficas de los incisos anteriores):

(1)

a) $\lim_{x\to-\infty} a(x) = \infty$ ✓ **b)** $\lim_{x\to-1} a(x) = 0$ ✓ **c)** $\lim_{x\to1} a(x) = 1$ ✓ **d)** $\lim_{x\to\infty} a(x) = -\infty$ ✓

e) $\lim_{x\to-\infty} b(x) = 0$ ✓ **f)** $\lim_{x\to2} b(x) = 0.5$ mejor $\frac{1}{2}$ ✓ **g)** $\lim_{x\to0} b(x) = \nexists$ ✓ **h)** $\lim_{x\to\infty} b(x) = 0$ ✓

(7/8)

i) $\lim_{x\to-\infty} c(x) = \nexists$ No, no es función **j)** $\lim_{x\to2} d(x) = \infty$ No -2 **k)** $\lim_{x\to1^-} e(x) = -2$ ✓ **l)** $\lim_{x\to1^+} e(x) = -1$ ✓

m) $\lim_{x\to1} e(x) = \nexists$ ✓ **n)** $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ ✓ **ñ)** $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0^-$ ✓ **o)** $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0^+$ ✓

(6/8)

p) $\lim_{x\to0} g(x) = \nexists$ ✓ **q)** $\lim_{x\to0} h(x) = (0,4.1)$ No, no es función, no tiene caso preguntar el límite. **r)** $\lim_{x\to-1} i(x) = -2$ ✓ **s)** $\lim_{x\to2} i(x) = \nexists$ (4) No, en donde se tiene que poner un punto para hacerla continua

t) $\lim_{x\to3} j(x) = \nexists$ ✓ **u)** $\lim_{x\to0} k(x) = 0$ ✓ **v)** $\lim_{x\to2} l(x) = \infty$ ✓ **w)** $\lim_{x\to\infty} l(x) = 1$ ✓

(1) **3. a)** Explica lo qué es una función Es una relación entre dos conjuntos uno llamado Dominio y otro contradominio, de tal manera que a cada elemento del dominio le corresponde uno y solamente uno del contradominio ✓

(1) **b)** Explica lo qué es el dominio de una función Es el conjunto más grande de números reales en donde tiene sentido evaluar la función ✓

(1) **c)** Explica lo que es la imagen o rango de una función Es un subconjunto del contradominio ~~que~~ cuyos elementos provienen de algún elemento del dominio. ✓

2 de 2

Anexo 4. Secuencia didáctica.

4.2. Ejemplo de secuencia didáctica de un equipo de un grupo de prueba.

1 36 MYSH

Para todas las actividades trabajar en equipos de dos personas.

Integrantes: Emiliano Gracilee Valdez ______ Gallegos del Río Jaime C.

Actividad 1

1. Trazar las gráficas de las siguientes funciones:

1 **i)** $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$ 1 **ii)** $g(x) = 1 + x + x^2$

1 a) ¿Qué puedes decir de la función f comparada con la función g? que la función f tiene un valor no definido y la función g todos sus valores son definidos.

1 b) ¿Cómo son las gráficas de ambas funciones? ¿iguales? parte que ambas hacia arriba y son parabolas, tienen la misma recta, y los mismos dominios excepto en -1

1 1 c) ¿Cuál es el dominio de la función f? R-{1}, ¿cuál es el dominio de la función g? R

1/2 1/2 d) ¿Cómo son los dominios de las funciones f y g? diferentes y ¿las imágenes? (-.5, ∞) No porque en la función (f) el {-1} no esta definido ¿qué tanto?

1 1 e) ¿Hay algún valor o valores en donde las funciones no estén definidas? Si, si es así, ¿en qué valor o valores del dominio? f(x)=1

1 f) Dar valores a x muy próximos al punto en donde la función no está definida, si es que lo hay, para observar cuál es el comportamiento de la función cerca del punto. ¿El valor de $f(x)$ crece o decrece indefinidamente o se acerca a un valor específico? se acerca al 3

Actividad 2

1. Si la función h está dada por $h(x) = x - 2$, evaluar la función en los siguientes puntos:

x	-1.9	-1.99	-1.999	→	-2	←	-2.0001	-2.001	-2.01	-2.1
$h(x)$	-3.9	-3.99	-3.999	→	-4	←	-4.0001	-4.001	-4.01	-4.1

1 a) ¿A qué valor se acerca x? -2

1 b) ¿A qué valor se acerca $h(x)$? -4

1 1 c) ¿Cuál es el dominio de la función h? R, ¿cuál es su imagen? (∞, -∞)

12.5
16.5
7
36.0

12.5

e) Qué puedes decir sobre los valores de la función cuando se le van dando valores a x muy cercanos a -2 por la izquierda, comparando con los valores de la función al acercarse x a -2 por la derecha? por la izquierda aumenta, y por la derecha disminuye

f) ¿A qué valor sospechas que se acerca $h(x)$, cuando x se acerca a -2? -4

g) ¿Qué valor tiene la función cuando x = -2? -4

2. Considera ahora la función $j(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$, evalúa la función en los siguientes puntos,

x	-1.9	-1.99	-1.999	→	-2	←	-2.0001	-2.001	-2.01	-2.1
$j(x)$	-3.9	-3.99	-3.999	→	-4	←	-4.0001	-4.001	-4.01	-4.1

a) ¿A qué valor se acerca x? -2

b) ¿A qué valor se acerca $j(x)$? -4

c) ¿Cuál es el dominio de la función j? R = {-2}, ¿cuál es su imagen? (∞, -∞)

e) Qué pueden decir sobre los valores de la función cuando se le van dando valores a x muy cercanos a -2 por la izquierda, comparando con los valores de la función al acercarse x a -2 por la derecha? pues es igual que el ejercicio anterior, por la izquierda aumenta y por la derecha disminuye

f) ¿A qué valor sospechas que se acerca $j(x)$, cuando x se acerca a -2? -4

g) ¿Qué valor tiene la función cuando x = -2? No esta definida

3. Traza las gráficas de las funciones:

i) $j(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$ ii) $h(x) = x - 2$

a) ¿Qué puedes decir de la función j comparada con la función h? que la funcion j tiene un valor no definido, y la función h todos sus valores están definidos

b) ¿Cómo son las gráficas de ambas funciones? similares, al momento de graficarlas

¿qué tan similares?

c) ¿Cuál es el dominio de la función j? R={-2}, ¿cuál es el dominio de la función h? R

d) ¿Cómo son los dominios de las funciones j y h? diferentes, por que en la funcion j {-2} no esta definida y ¿las imágenes? iguales No

e) ¿Hay algún valor o valores en donde las funciones no estén definidas? Si, si es así, ¿en qué valor o valores del dominio? x={-2}

16.5

Actividad 3

1 **1.** Traza la gráfica de la función $m(x) = \frac{1}{x}$

1 a) ¿Cuál es el dominio de la función $m(x)$? $\mathbb{R} - \{0\}$

1 1 b) ¿Existirá una función que tenga el mismo comportamiento observado en las funciones anteriores (f y g, j y h)? No , si la hay, escribe su regla de correspondencia ________,

1 si no la hay, dí por qué por que la función m(x) tiene un comportamiento extraño, es asíntota asintótico en X=0

¿poniendo?

c) ¿Qué se necesitaría hacer para que las funciones f y g, sean iguales? comprobar que

1 todos los valores en "x" estén definidos, para ambas funciones, quitando el punto en el que el valor no está definido

d) ¿Qué se necesitaría hacer para que las funciones j y h, sean iguales? comprobar que

1 todos los valores en "x" estén definidos, para ambas funciones, quitando el punto en el que el valor no está definido.

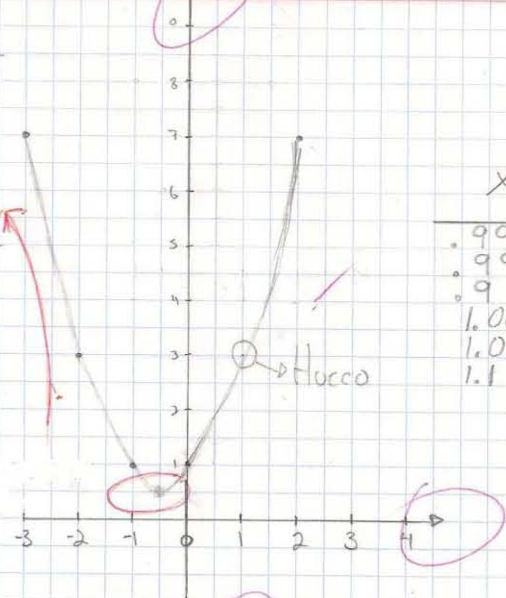
7

$f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$

$\mathbb{R} - \{1\} = D_f$

$Im\ (.5, \infty)$

x	
-3	$\frac{-28}{-4} = 7$
-2	$\frac{-9}{-3} = 3$
-1	$\frac{-2}{-2} = 1$
0	$\frac{-1}{-1} = 1$
2	$\frac{7}{1} = 7$
3	$\frac{26}{2} = 13$
4	$\frac{63}{3} = 21$

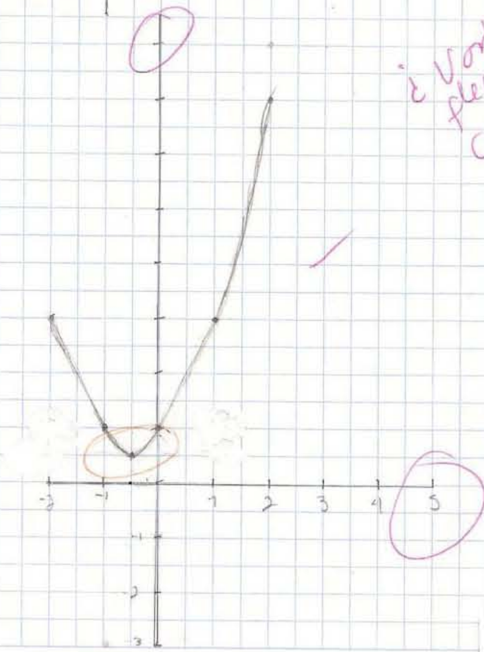


X	
.999	2.997
.99	2.97
.9	2.7
1.001	
1.01	
1.1	

¿Variables, flechas de crecimiento?

$g(x) = 1 + x + x^2$

-1	1
0	1
1	3
2	7
3	13
4	21



$D_f = \mathbb{R}$

$Im\ (.5, \infty)$

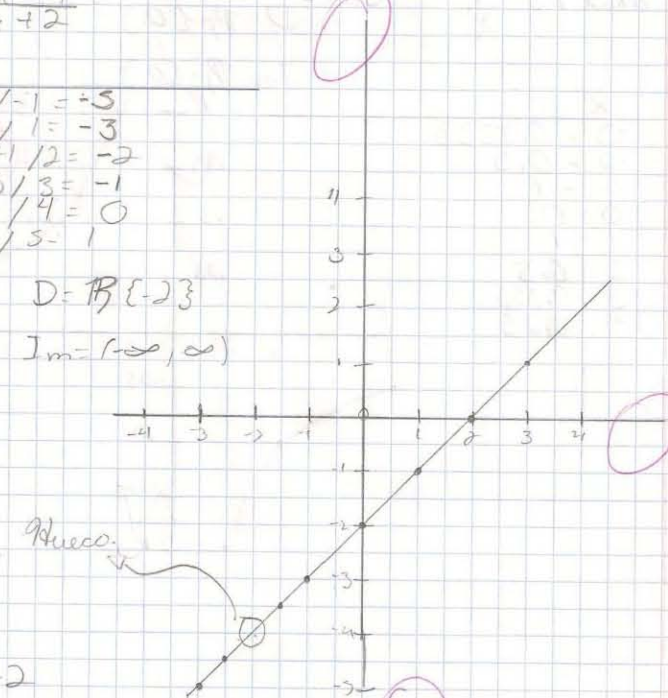
4 de 6

$J(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$

x	
-3	$5/-1 = -5$
-1	$-3/1 = -3$
0	$-4/2 = -2$
1	$-3/3 = -1$
2	$0/4 = 0$
3	$5/5 = 1$

$D = \mathbb{R}\{-2\}$

$Im = (-\infty, \infty)$

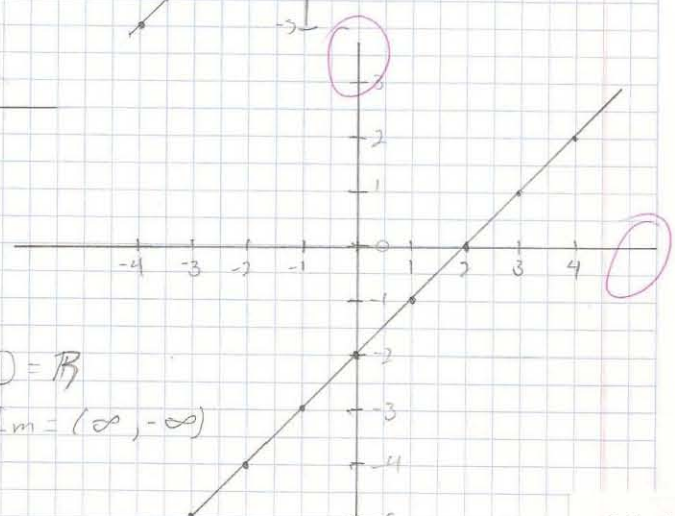


$h(x) = x-2$

x	
-3	-5
-2	-4
-1	-3
0	-2
1	-1
2	0
3	1
4	2

$D = \mathbb{R}$

$Im = (\infty, -\infty)$

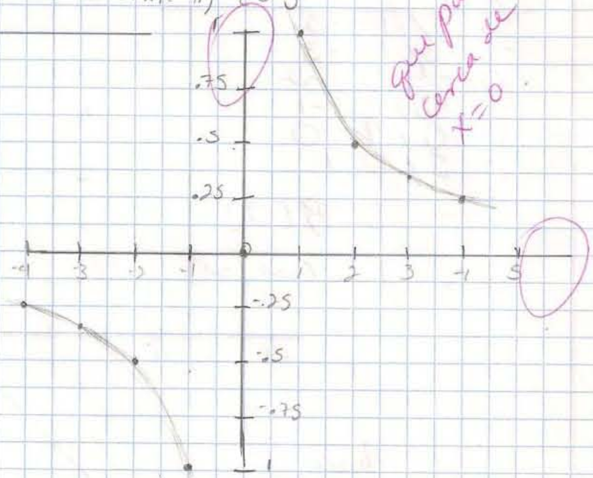


$m(x) = \frac{1}{x}$

$D = \mathbb{R} - \{0\}$

$Im = \mathbb{R} - \{0\}$

x	
-3	- 0.3333
-2	- 0.5
-1	- 1
0	0
1	1
2	0.5
3	0.333
4	0.25



que pasa cerca de x=0

6 de 6

Anexo 5. Ejemplos de límites de funciones algebraicas.

5.1. Ejercicios resueltos de límites de funciones algebraicas.

	$\lim\limits_{x\to c} f(x)$
Funciones polinomiales	**a)** $\lim\limits_{x\to -1}(x^3-3x+1)=(-1)^3-3(-1)+1=3$
Funciones racionales	**a)** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-x}{2x^2+5x-7}=\frac{2^2-2}{2(2)^2+5(2)-7}=\frac{2}{11}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-x}{2x^2+5x-3}=\frac{1^2-1}{2(1)^2+5(1)-3}=\frac{0}{4}=0$ **c)** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x}{2x^2+5x-7}$ No existe $\frac{1^2+1}{2(1)^2+5(1)-7}=\frac{2}{0}$ x 0.9 0.99 0.999 →… **1** $f(x)$ −1.9 −21.9 −221.9 →… −∞ **1** ←…1.001 1.01 1.1 x ∞ ←…222.5 22.5 2.5 $f(x)$ **d)** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-x}{2x^2+x-3}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{(x-1)(2x+3)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x}{(2x+3)}=\frac{1}{5}$
Funciones con radicales	**a)** $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{2x^2+5x-7}=\sqrt{2(2)^2+5(2)-7}=\sqrt{11}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to 1}(\sqrt{x}+1)=2$ **c)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}\left(\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+2-2}{x\,\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}$ $=\frac{1}{2\sqrt{2}}$

Anexo 6. Examen parcial 1.B.

6.1. Versión final.

Nombre: ____ *Grupo:* _______________

***Instrucciones**: Resuelve correctamente los siguientes ejercicios, sólo serán tomados en cuenta los ejercicios acompañados del procedimiento correspondiente. Simplifica y factoriza tus resultados.*

***1.** Factoriza las siguientes expresiones:*

***a)** $x^2 - 2 =$*

***b)** $x^2 + 8x + 15 =$*

***c)** $2x^2 + 3x - 2 =$*

***2.** Encuentra el valor de x que satisface la ecuación dada:*

***a)** $x - 2 = 3x - 1$*

***b)** $(x + 2)(3x - 1) = 0$*

***c)** $x^2 - 6x + 5 = 0$*

***d)** $\frac{2}{3} + \frac{1}{x} = 3$*

***3.** Resuelve:*

$$\frac{4}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{5}{4} =$$

***4.** Escribe una expresión equivalente:*

***a)** $\sqrt{x^2 - 2} =$*

***b)** $(x - 5)^2 =$*

***c)** $\frac{x + 4}{x} =$*

***5. a)** ¿Cuál es la condición fundamental para asegurar que una expresión algebraica sea una función?* ____

____

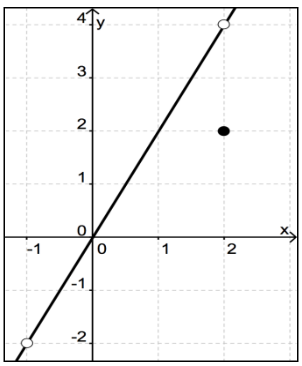
b) *Si una función tiene por dominio todos los números reales excepto x = – 2, ¿qué sucede si se evalúa la función en ese valor?* ______________________________

____

c) *Si se tiene la función f (x) = – x², ¿cuál es la imagen de f ?* ____________________

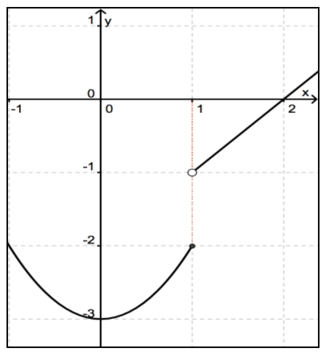
____

6. *Indica los valores de los límites que se indican debajo de cada gráfica o la tendencia de la función.*



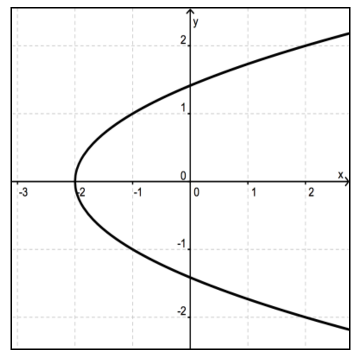
a) $\lim\limits_{x \to -1} a(x)$

$\lim\limits_{x \to 2} a(x)$



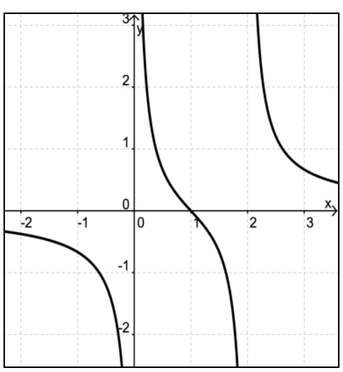
b) $\lim\limits_{x \to 1} b(x)$

$\lim\limits_{x \to 2} b(x)$



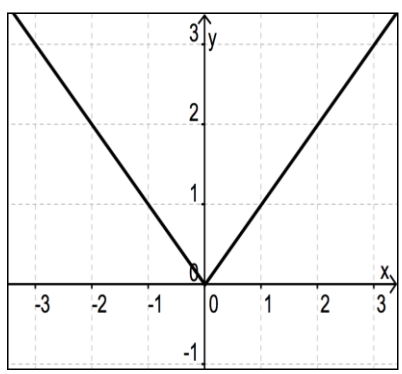
c) $\lim\limits_{x \to -\infty} c(x)$

$\lim\limits_{x \to 1} c(x)$



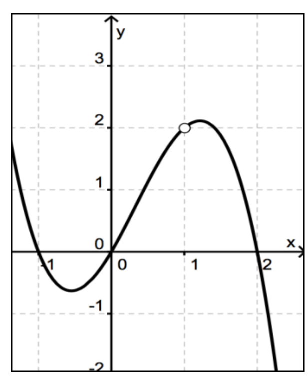
d) $\lim\limits_{x \to 2} d(x)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} d(x)$



e) $\lim\limits_{x \to 0} e(x)$

$\lim\limits_{x \to \infty} e(x)$



f) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

7. *Las siguientes preguntas se refieren a la figura del inciso* ***a)****:*

a) *¿a qué valor se acerca la función cuando x se acerca a 2 por la izquierda* $(x\to 2^-)$*?*

a*(x)→* ____ ,

b) *y ¿cuándo x se acerca a 2 por la derecha* $(x\to 2^+)$*?* ***a****(x)→* ____________________ ,

c) *¿existe el límite cuando x tiende a 2?* ______________________________ ,

d) *¿por qué?* ____

____

____ .

8. a) *Menciona dos casos en los que* **no** *existe el límite de una función en 'c' y explica por qué razón no existe el límite* ______________________________

____

____

____

____ .

b) *Explica lo que significa que el límite de una función exista en un valor 'c'* __________

____

____

____ .

9. *Calcula los siguientes límites:*

a) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{2x^2+5x-3}{x+3} =$

b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\frac{1}{2}-\frac{1}{x}}{x-2} =$

c) $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sqrt{t+2}-\sqrt{2}}{t} =$

6.2. Ejemplo de examen parcial de un alumno del turno matutino.

ED. 4.1
D 9.6 - L 9.2

MYSH.

9.5

$\boxed{9 \quad \text{C.F}}$

Cálculo Diferencial e Integral I
Examen Parcial 1

Nombre: González Cruz Oscar Alejandro Grupo 519

Bien!

1. Resuelve:

(1) $\frac{4}{3}+\frac{2}{5}\times\frac{5}{4}=$ $\frac{4}{3}+\frac{10}{20}=\frac{4}{3}+\frac{1}{2}=\frac{8+3}{3\cdot 2}=\frac{11}{6}$ ✓

2. Encuentra el valor de x que satisface la ecuación dada:

operaciones al reverso

(1) **a)** $x-2=3x-1$ $x=-\frac{1}{2}$ ✓

(1) **b)** $(x+2)(3x-1)=0$ $x_1=-2$; $x_2=\frac{1}{3}$ → $3x-1=0$, $3x=1$, $x=\frac{1}{3}$ ✓

(1) **c)** $x^2-6x+5=0$ $x_1=5$; $x_2=1$ ✓

(1) **d)** $\frac{2}{3}+\frac{1}{x}=3$ $x=\frac{3}{7}$ ✓

3. Factoriza las siguientes expresiones:

(1) **a)** $x^2+8x+15=$ $(x+3)(x+5)$ ✓

(1) **b)** $x^2-7=$ $(x+\sqrt{7})(x-\sqrt{7})$ ✓

(1) **c)** $4x^2-6x^3+2x=$ $(-2x)(3x+1)(x-1)$ ✓

operaciones al reverso

4. Encierra en un círculo la letra del inciso en el que se representa una función, (Ojo: desde el inciso **a)**, hasta el inciso **l)**):

(2/3) **a)** $-2x+3=5$ ✓ **b)** $f(x)=\pi$ **c)** $y=-\sqrt{x}$ ✓

(1) **d)** ✓

x	y
1	3
2	3
3	3
4	3

e) ✓

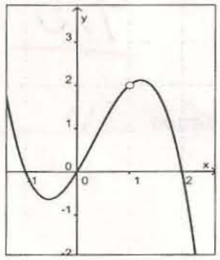
x	y
0	0
1	1
2	$\sqrt{2}$
4	2

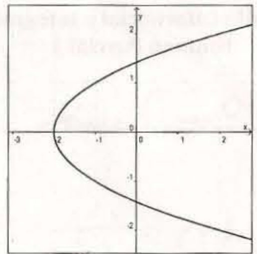
f) ✓

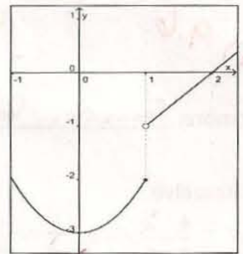
x	y
1	3
1	6
3	9
3	12

$9+\frac{1}{3}$

1 de 4







$\frac{2}{3}$

g) $D_g = \mathbb{R}$ No

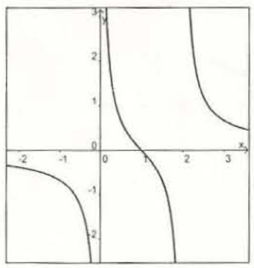
$Im_g = \mathbb{R} - \{2\}$ No

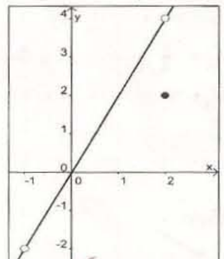
h) $D_h =$ —

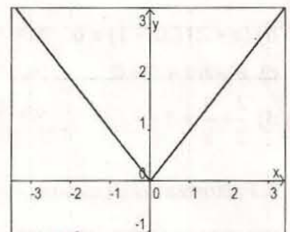
$Im_h =$ —

i) $D_i = \mathbb{R}$

$Im_i = \mathbb{R} - \{-1\}$ No







$\frac{2}{3}$

j) $D_j =$ —

$Im_j =$ —

k) $D_k = \mathbb{R} - \{-1\}$

$Im_k = \mathbb{R} - \{-2, 4\}$

l) $D_l =$ —

$Im_l =$ —

$\frac{5}{6}$ **5.** En las figuras anteriores, del inciso **g)** al inciso **l)**, indica el dominio y la imagen, rango o recorrido de las que representan una función.

6. En la figura del inciso **i)**, ¿a qué valor se acerca la función cuando x se acerca a 1 por la izquierda($x \to 1^-$)? $i(x) \to$ -2, y ¿cuándo x se acerca por la derecha($x \to 1^+$)?

(2) $i(x) \to$ -1, existe el límite cuando x tiende a 1? No, ¿por qué? Porque ~~al evaluar la función en~~ x = 1, los valores de f(x) son distintos (no se acercan al mismo valor).

acercarse a

7. a) Explica lo qué es una función Es la relación entre dos conjuntos (dominio e

(1) imagen) en la que a un elemento del dominio le corresponde uno y solamente uno de la imagen

b) Explica lo qué es el dominio de una función Es el conjunto de valores de una

(1) función donde tiene sentido evaluarla

$4 + \frac{4}{3} + \frac{5}{6}$

2 de 4

1 **c)** Explica lo qué es la imagen, rango o recorrido de una función es un subconjunto del contradominio cuyos elementos surgen a partir de los del dominio

provienen

1 **8. a)** Explica lo que es el límite de una función en un punto Es el valor de una función donde es posible evaluarla y hacerla continua.

→ a veces no es posible evaluarla

b) Menciona dos casos en los que **no** existe el límite de una función en un punto y explica el por qué 1) En una función asintótica, pues la separación entre rama y rama es muy grande e imposible de andar para juntar las ramas. 2) Cuando hay un salto de rama a rama en una función, como en el inciso "i", pues al acercarse a un punto por la derecha y por la izquierda los valores de la función son muy distintos entre sí. 2

9. Calcula los siguientes límites:

1 **a)** $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{2x^2+5x-3}{x+3} = -7$ ✓

operaciones al reverso

1 **b)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} = 2$ ✓

operaciones al reverso

1 **c)** $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3+1}{x^2+1} = \cancel{\lim_{x\to -1}} \dfrac{(-1)^3+1}{(-1)^2+1} = \cancel{\lim_{x\to -1}} \dfrac{-1+1}{1+1} = \cancel{\lim_{x\to -1}} \dfrac{0}{2} = 0$ ✓

Si no aparece x, no se pone lím.

$\frac{1}{4}$ **d)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^3 - x^2 - 2x\right) = -\infty$ ✓

1 **e)** $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^2+5x-3}{5x+3} = \infty$ ✓

$8+\frac{1}{4}$

2.

a) $x-2=3x-1$

$x-x-2=3x-1-x$

$1-2=2x-1+1$

$-1=2x$

$-\frac{1}{2}=x$

c) $x^2-6x+5=0$

$(x-5)(x-1)=0$

$x_1=5$

$x_2=1$

d) $\frac{2}{3}+\frac{1}{x}=3$

$\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{x}=3\right)3x$

$3x\div3=x\cdot2=2x$

$3x\div x=3\cdot1=3$

$3x\div1=3x\cdot3=9x$

$2x+3=9x$

$3=9x-2$

$3=7x$

$\boxed{\frac{3}{7}=x}$

Comprobación

$\frac{2}{3}+\frac{1}{\frac{3}{7}}=3$

$\frac{2}{3}+\frac{7}{3}=3$

$\frac{9}{3}=3$

$3=3$

3. $4x^2-6x^3+2x=(-2x)(3x+1)(x-1)$ Factor común $2x$

$-6x^3+4x^2+2x$

$\underbrace{(-2x)(3x^2-2x-1)}$

$\frac{3(3x^2-2x-1)}{3}=\frac{9x^2+1(3x)-3}{3}$

$=\frac{(3x+1)(3x-3)}{3}$

$=(3x+1)(x-1)$

9.

a) $\lim_{x\to-3}\frac{2x^2+5x-3}{x+3}=\lim_{x\to-3}\frac{\frac{2(2x^2+5x-3)}{2}}{x+3}$

$=\lim_{x\to-3}\frac{\frac{4x^2+5(2x)-6}{2}}{x+3}$

$=\lim_{x\to-3}\frac{\frac{(2x-1)(2x+6)}{2}}{x+3}$

$=\lim_{x\to-3}\frac{(2x-1)\cancel{(x+3)}}{\cancel{x+3}}$

$=\lim_{x\to-3}2x-1$

$=\cancel{\lim_{x\to-3}}\ 2(-3)-1=-7$

b) $\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x}+1)\cancel{(\sqrt{x}-1)}}{\cancel{\sqrt{x}-1}}$

$=\lim_{x\to1}\sqrt{x}+1$

$=\cancel{\lim_{x\to1}}\ \sqrt{1}+1$

$=\cancel{\lim_{x\to1}}\ 1+1=2$

e) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+5x-3}{5x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2+5x-3}{x}}{\frac{5x+3}{x}}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x}+\frac{5x}{x}-\frac{3}{x}}{\frac{5x}{x}+\frac{3}{x}}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+5-\cancel{\frac{3}{x}}}{5+\cancel{\frac{3}{x}}}$

$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{5}x\right)+5=\infty$

4 de 4

6.3. Ejemplo de examen parcial de una alumna del grupo testigo.

ED 3,7 D6 -2 2.2

MYSH1

Cálculo Diferencial e Integral I
Examen Parcial 1

$4.4 \rightarrow \boxed{7\ \text{CF.}}$

Nombre: Olivares Villalpando Anamaría Guadalupe   Grupo 506

1. Resuelve:

(1) $\frac{4}{3}+\frac{2}{5}\times\frac{5}{4}= \frac{4}{3}+\left(\frac{2}{5}\times\frac{5}{4}\right); \frac{4}{3}+\left(\frac{10}{20}\right); \frac{4}{3}+\frac{2}{4}; \frac{16+6}{12} = \frac{22}{12} = \boxed{\frac{11}{6}}$

2. Encuentra el valor de *x* que satisface la ecuación dada:

(1) **a)** $x-2=3x-1$ $x=-\frac{1}{2}$

($\frac{1}{2}$) **b)** $(x+2)(3x-1)=0$ $x_1=0.43$ $x_2=-2.13$ No

(1) **c)** $x^2-6x+5=0$ $x_1=5$ $x_2=1$

(1) **d)** $\frac{2}{3}+\frac{1}{x}=3$ $x=\frac{3}{7}$

3. Factoriza las siguientes expresiones:

(1) **a)** $x^2-9=(x-3)(x+3)$

(1) **b)** $x^2+8x+15=(x+3)(x+5)$

— **c)** $4x^2-6x^3+2x=\left[\left((1)(2x)\right)(2x)\right]\left(-\frac{3}{2}x^2\right)$ No

4. Encierra en un círculo la letra del inciso en el que se representa una función, (Ojo: desde el inciso **a)**, hasta el inciso **f)**):

($\frac{2}{3}$) **a)** $f(x)=\pi$ **b)** $-2x+3=5$ **c)** $y=-\sqrt{x}$

($\frac{2}{3}$) **d)**

x	*y*
1	3
1	6
3	9
3	12

e)

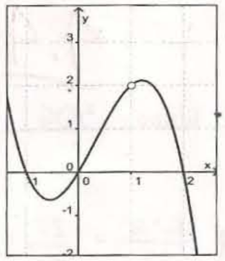
x	*y*
0	0
1	1
2	$\sqrt{2}$
4	2

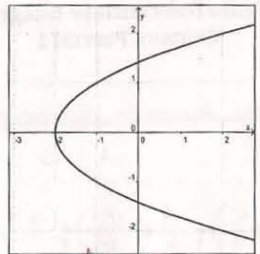
f)

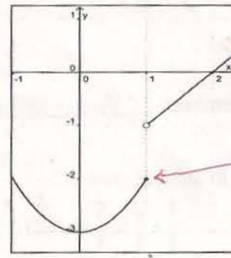
x	*y*
1	3
2	3
3	3
4	3

$6.5+\frac{4}{3}$

1 de 4







g) $D_g = (-\infty, \infty)$ No

$Im_g = (-\infty, \infty)$ ✓

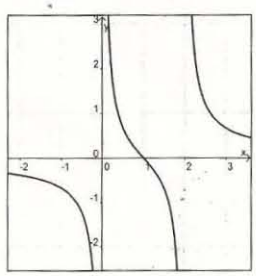
h) $D_h = (-2, \infty)$ NO No es función

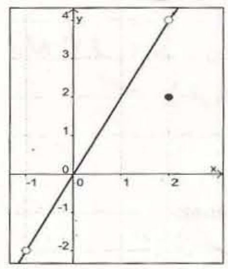
$Im_h = (-\infty, \infty)$

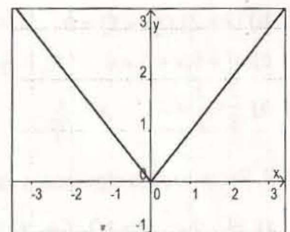
i) $D_i = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$ También en 1 hay función

$Im_i = (-3, \infty)$ $(-1, \infty)$

1/3







j) $D_j = (-\infty, \infty)$ No

$Im_j = (-\infty, \infty)$ ✓

k) $D_k = (-\infty, \infty)$ No

$Im_k = (-\infty, \infty)$ No

l) $D_l = (-\infty, \infty)$ ✓

$Im_l = (0, \infty)$ ✓

5/6

5. En las figuras anteriores, del inciso **g)** al inciso **l)**, indica el dominio y la imagen de las que representan una función.

6. En la figura del inciso **i)**, ¿a qué valor se acerca la función cuando x se acerca a 1 por la izquierda($x \to 1^-$)? $i(x) \to$ 1 NO, y ¿cuándo x se acerca por la derecha($x \to 1^+$)? $i(x) \to$ 1 NO ¿existe el límite cuando x tiende a 1? Sí No, ¿por qué? porque la función describe que en 1, la línea que describe se parte. No

7. a) Explica lo qué es una función Es una igualación con resultado 0 No

b) Explica lo qué es el dominio de una función Es el rango de valores que abarca el eje de las x's No

1 1/3 5/6

c) Explica lo qué es la imagen de una función Es el intervalo de valores que abarca el eje de las y's NO

8. a) Explica lo que es el límite de una función en un punto Es el punto al que se va a aproximar la función, sea cualquier valor dado a la incógnita NO

b) Menciona dos casos en los que **no** existe el límite de una función en un punto

el valor de π, cuando un denominador se divide entre un nomerador que tiende ir a infinito NO

9. Calcula los siguientes límites:

1 **a)** $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{2x^2+5x-3}{x+3}$;

$$\begin{array}{r} 2x-1 \\ x+3\overline{)\,2x^2+5x-3} \\ \underline{-2x^2-6x} \\ -x-3 \\ \underline{+x+3} \\ 0 \end{array}$$

; $\lim\limits_{x \to -3}(2x-1)$; $\lim\limits_{x \to -3}[2(-3)-1] = \boxed{-7}$

1 **b)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} \cdot \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$; $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x})^2 - 1\sqrt{x} + 1\sqrt{x} - 1}$; $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x}+1)}{\cancel{x-1}}$;

$\lim\limits_{x \to 1} (\sqrt{x}+1) = \boxed{2}$

— **c)** $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3+1}{x^2+1}$; $\lim\limits_{x \to -1} (x+1) \stackrel{?}{=} 0$ el resultado es correcto pero no el procedimiento.

— **d)** $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3-4x^2-3x+1) =$ INDETERMINADA, pero tiende a un valor

2

EJERCICIO 2

A) $x-2=3x-1$; $x-3x=2-1$; $-2x=1$; $\boxed{x=\frac{1}{-2}}$

B) $(x+2)(3x-1)=0$; $3x^2+5x-3=0$; $x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4(3)(-3)}}{2(3)}$; $x=\frac{-5\pm\sqrt{61}}{6}$ $x_1=\frac{-5+7.8}{6}=0.43$

$x_2=\frac{-5-7.8}{6}=-2.13$

6

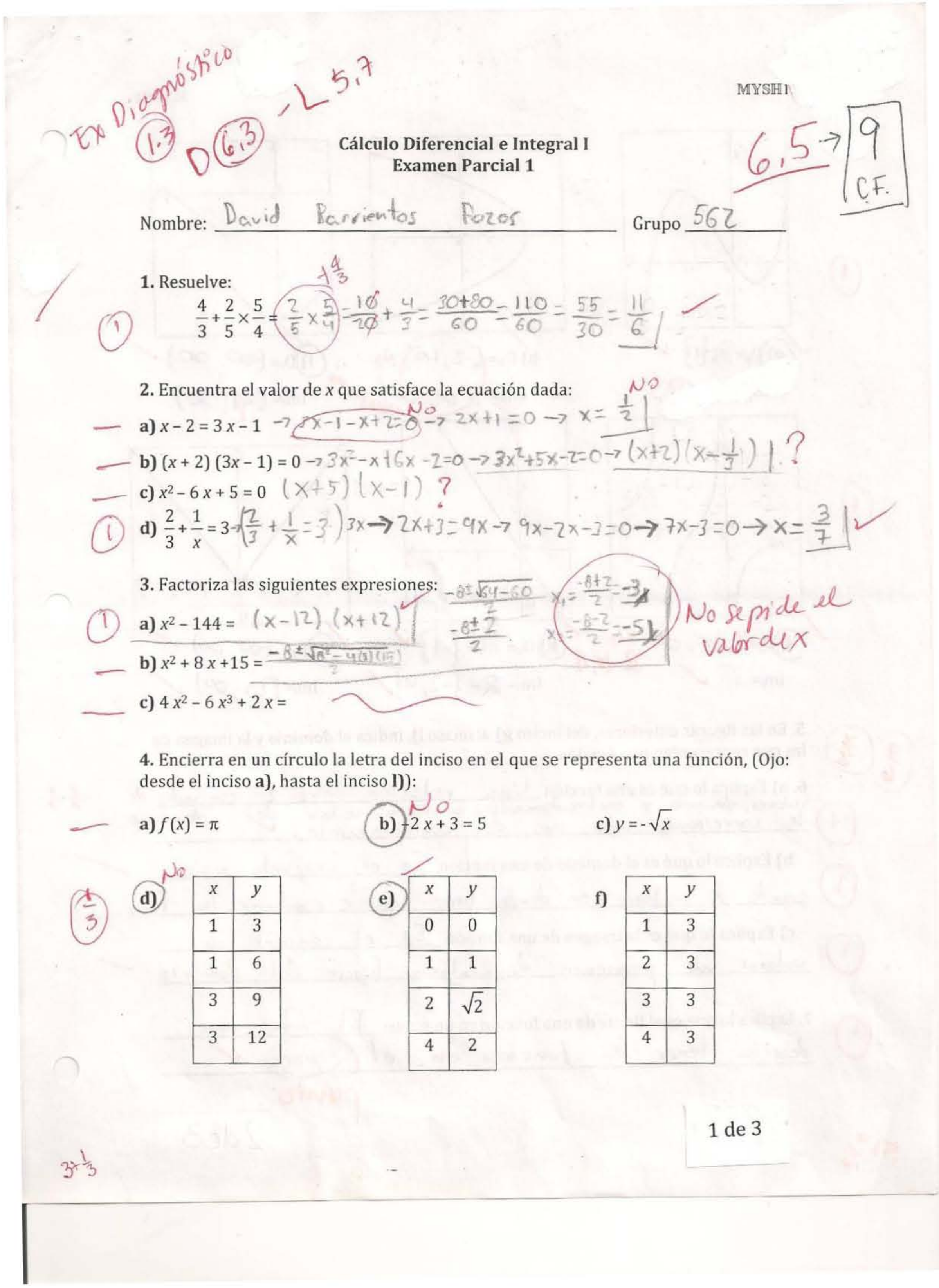
C) $x^2-6x+5=0$; $x=\frac{6\pm\sqrt{-6^2-4(1)(5)}}{2}$; $x=\frac{6\pm\sqrt{16}}{2}$; $x_1=\frac{6+4}{2}=5$

$x_2=\frac{6-4}{2}=1$

D) $\frac{2}{3}+\frac{1}{x}=3$; $\frac{1}{x}=3-\frac{2}{3}$; $1=\left(3-\frac{2}{3}\right)x$; $\frac{1}{3-\frac{2}{3}}=x$; $x=\frac{1}{\frac{9}{3}-\frac{2}{3}}=\frac{1}{\frac{7}{3}}$; $x=\frac{3}{7}$

4 de 4

6.4. Ejemplo de examen parcial de un alumno del turno vespertino.



Ex Diagnóstico 1.3 D 6.3 - L 5.7

MYSHI

Cálculo Diferencial e Integral I
Examen Parcial 1

6.5 → 9 CF.

Nombre: David Barrientos Pozos Grupo 562

1. Resuelve:

$\frac{4}{3}+\frac{2}{5}\times\frac{5}{4}= \left(\frac{2}{5}\times\frac{5}{4}\right)=\frac{10}{20}+\frac{4}{3}=\frac{30+80}{60}=\frac{110}{60}=\frac{55}{30}=\frac{11}{6}$

2. Encuentra el valor de x que satisface la ecuación dada:

a) $x-2=3x-1$ → $3x-1-x+2=0$ → $2x+1=0$ → $x=\frac{1}{2}$ NO

b) $(x+2)(3x-1)=0$ → $3x^2-x+6x-2=0$ → $3x^2+5x-2=0$ → $(x+2)(x-\frac{1}{3})$?

c) $x^2-6x+5=0$ $(x+5)(x-1)$?

d) $\frac{2}{3}+\frac{1}{x}=3$ → $\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{x}=3\right)3x$ → $2x+3=9x$ → $9x-2x-3=0$ → $7x-3=0$ → $x=\frac{3}{7}$

3. Factoriza las siguientes expresiones:

a) $x^2-144=$ $(x-12)(x+12)$

b) $x^2+8x+15=$ $\frac{-8\pm\sqrt{8^2-4(1)(15)}}{2}$ $\frac{-8\pm\sqrt{64-60}}{2}$ $\frac{-8\pm 2}{2}$ $x_1=\frac{-8+2}{2}=-3$ $x_2=\frac{-8-2}{2}=-5$ No se pide el valor de x

c) $4x^2-6x^3+2x=$

4. Encierra en un círculo la letra del inciso en el que se representa una función, (Ojo: desde el inciso **a)**, hasta el inciso **l)**):

a) $f(x)=\pi$ **b)** $2x+3=5$ No **c)** $y=-\sqrt{x}$

d) No

x	y
1	3
1	6
3	9
3	12

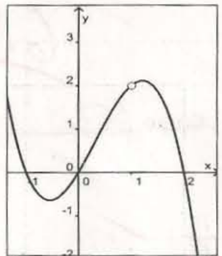
e)

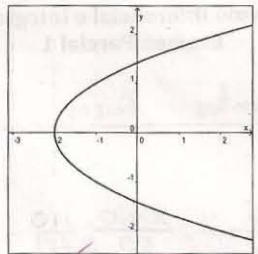
x	y
0	0
1	1
2	$\sqrt{2}$
4	2

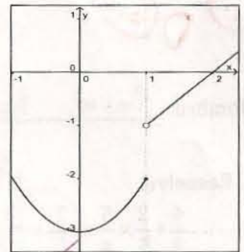
f)

x	y
1	3
2	3
3	3
4	3

1 de 3

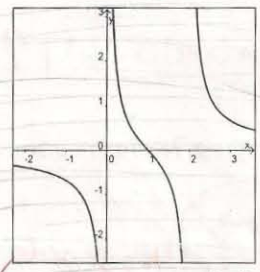


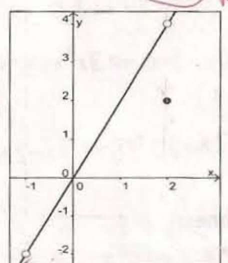


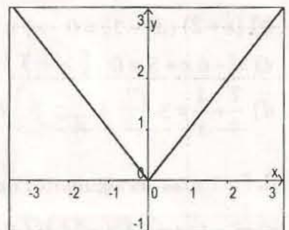


g) $D_g = \mathbb{R} - \{1\}$ h) $D_h = [-2, \infty)$ No i) $D_i = (-\infty, \infty)$

$Im_g = \mathbb{R}$ $Im_h = (-\infty, \infty)$ No es función $Im_i = [-1, \infty)$ 3







j) $D_j = (-\infty, \infty)$ No $\mathbb{R} - \{0, 2\}$ k) $D_k = \mathbb{R} - \{-1\}$ l) $D_l = (-\infty, \infty)$

$Im_j = \mathbb{R}$ $Im_k = \mathbb{R} - \{-2, 4\}$ $Im_l = [0, \infty)$

5. En las figuras anteriores, del inciso **g)** al inciso **l)**, indica el dominio y la imagen de las que representan una función.

$\frac{7}{6}$

6. **a)** Explica lo qué es una función Una relación entre 2 conjuntos de valores, dominio y contradominio, a cada valor del dominio le corresponde solo uno del contradominio

b) Explica lo qué es el dominio de una función Es el conjunto más grande de valores en donde tiene sentido evaluar la función

c) Explica lo qué es la imagen de una función Es el conjunto de valores que provienen de algún lugar del dominio

7. Explica lo que es el límite de una función en un punto El valor que debería tener la función en el hueco punto

$5 + \frac{7}{6}$

8. En la figura del inciso **i)**, ¿a qué valor se acerca la función cuando x se acerca a 1 por la izquierda?, y ¿cuándo x se acerca por la derecha?, existe el límite cuando x tiende a 1?, ¿por qué? izq = .99 No der = 1.1 No

Si No porque tiene un punto NO.

9. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to -3} \frac{2x^2+5x-3}{x+3} \to$ $\lim_{x \to -3} \frac{(x+3)(2x-1)}{x+3} \Rightarrow 2(-3)-1 = -7$

apartе

b) $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \to \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{(x-1)^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow \lim_{x \to 1} (x-1)^{\frac{1}{2}} = 0$ No

$(\sqrt{x}+\sqrt{1})(\sqrt{x}-\sqrt{1})$

No es lo mismo

c) $\lim_{x \to 3} \frac{x^3-4x^2-3x+18}{x^3-7x^2+15x-9} \to \lim_{x \to 3} \frac{(x^2-x-6)\cancel{(x-3)}}{(x^2-4x+3)\cancel{(x-3)}} \Rightarrow \lim_{x \to 3} \frac{(x+2)}{(x-1)} = \frac{3+2}{3-1} = \frac{5}{2}$

d) $\lim_{x \to 1} \frac{1-x}{x} \to \frac{1-1}{1} = \frac{0}{1} = 0$

3 de 3

A.

Anexo 7. Respuestas a los exámenes, secuencia didáctica y tareas.

7.1. Respuestas del examen de diagnóstico.

1. $\frac{22}{15}$

2. a) $x = -\frac{1}{2}$ ***b)*** $x = -2, x = 1$ ***c)*** $x = 5, x = 1$ ***d)*** $x = \frac{6}{13}$

3. a) $(x-12)(x+12)$ ***b)*** $(x+2)(x+1)$ ***c)*** $(x+2)(2x-1)$

4. a) $\sqrt{x-3}\sqrt{x+3}$ ***b)*** $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$ ***c)*** $1 + \frac{2}{x}$

5. y 6. g) D_g= ***R*** - {1} ; Im_g= ***R*** ***discontinuidad en x = 1***

h) D_h= ***R*** - {0} ; Im_h= ***R*** - {0} ***discontinuidad en x = 0***

i) No está representada una función

j) D_j= R ; Im_j= R ***j es continua en R***

k) D_k= R - {1} ; Im_k= [-3, ∞) ***discontinuidad en x = 1***

l) D_l= R -{1} ; Im_l= [0.25, ∞) ***discontinuidad en x = 1***

m) D_m= R - {0, 2} ; Im_m= R ***discontinuidad en x = 0 y en x = 2***

n) No está representada una función

ñ) D_o= R - {-1} ; Im_o= R - {-1, 4} ***discontinuidad en x = -1 y en x = 2***

o) D_p= R ; Im_p= $\mathbb{Z}$ ***discontinuidad en $\mathbb{Z}$***

p) D_q= R ; Im_q= [0, ∞) ***q es continua en R***

q) D_r= R - {2} ; Im_r= (1, ∞) ***discontinuidad en x = 2***

Nota: Todas las funciones son continuas en su dominio, excepto cuando la función tiene saltos.

7. a) Una función es una relación entre dos conjuntos llamados dominio y contradominio de manera que a cada elemento del dominio le corresponde uno y sólo un elemento del contradominio.

b) El dominio de una función es el conjunto de números reales en donde tiene sentido evaluar la función.

c) La imagen, rango o recorrido de una función es un subconjunto del contradominio cuyos elementos provienen de un elemento del dominio.

7.2. Respuestas de la Tarea 2.

1. a) Una función *es una regla de correspondencia que asocia a cada objeto* **x** *en un conjunto –denominado dominio- un sólo valor f (x) de un segundo conjunto. El conjunto de todos los valores así obtenidos se denomina rango de la función. (Purcell, pp. 29, 2007)*

a) Se establece una función *de un conjunto A en un conjunto B, cuando se da una regla a través de la cual asociamos a cada elemento x de A un único elemento y de B; a dicha regla se le denomina la regla de correspondencia o de asociación de la función y se le denota por una letra, digamos f. Todo esto se resume con la notación:* $f : A \rightarrow B$. *Para tener una función debemos contar con dos conjuntos, que pueden ser iguales entre sí y una regla de correspondencia con las características antes descritas. El conjunto A es llamado el dominio de la función Dom f = A. El conjunto B es llamado contradominio de la función f. Se acostumbra denotar por f (x) al elemento y de B que está asociado al elemento x de A a través de f. (De Oteyza, pp. 3, 2006)*

b) El dominio natural *es el conjunto más grande de números reales para el cual la regla de la función tiene sentido. (Purcell, pp. 30, 2007)*

c) La imagen o rango *de la función* $f : A \rightarrow B$ *es una colección de todos los elementos f (x), con x en A, es decir, todos aquellos elementos de B que fueron los asociados a los elementos de A. Este conjunto se denota por f (A) o bien Im f. (De Oteyza, pp. 5, 2006)*

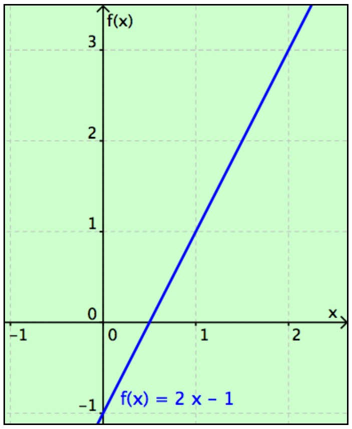
d) Decimos que dos funciones f y g son iguales *si:*

i) tienen el mismo dominio,

ii) tienen la misma regla de correspondencia, es decir, f (x) = g(x),

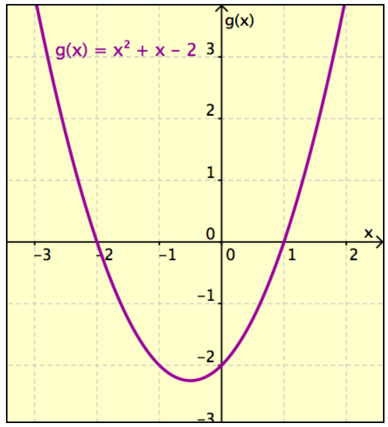
para todo x en el dominio. (De Oteyza, pp. 8, 2006)

2.



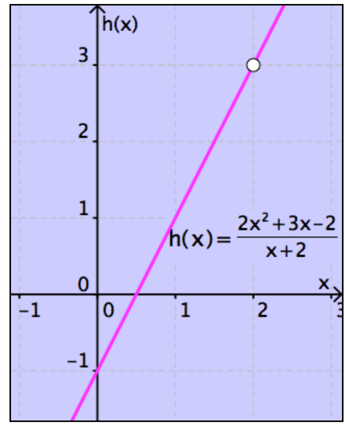
a) D_f = R ; Im_f = R

función continua.



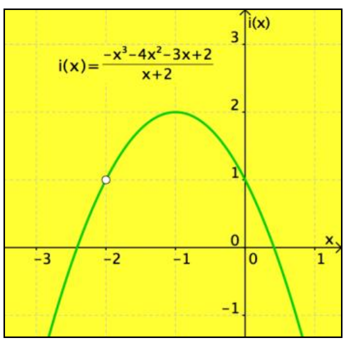
b) D_g = R ; Im_g = [-2.25, ∞)

función continua.



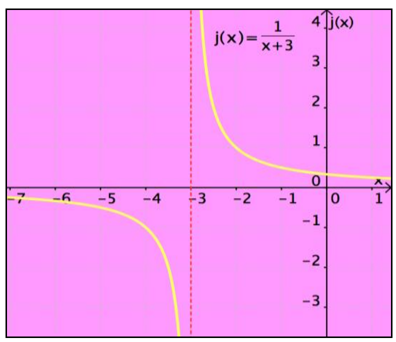
c) D_h=R - {2} ; Im_h=R - {3}

discontinuidad en x=2.



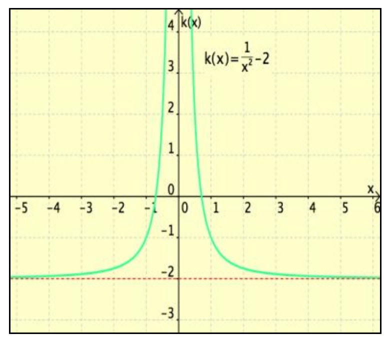
d)D_i=R - {-2} ; Im_i =(∞, 2)

discontinuidad en x = -2.



e) D_j=R - {-3} ; Im_j=R - {0}

discontinuidad en x = -3.



f) D_k=R - {0} ; Im_k= (-2, ∞)

discontinuidad en x = 0.

Todas las expresiones algebraicas anteriores son funciones, ya que para cada valor que se le asigne a la variable se obtendrá uno y sólo un valor de la función, además de que si se traza una línea vertical en cada gráfica, sólo intersectará un único punto de la gráfica.

7.3. Respuestas de la Tarea 3.

*1. a) Una función es una regla de correspondencia que asocia a cada objeto **x** en un conjunto –denominado* dominio*- un solo valor **f (x)** de un segundo conjunto. El conjunto de todos los valores así obtenidos se denomina rango de la función. (Purcell, pp. 29, 2007)*

b) El dominio natural *es el conjunto más grande de números reales para el cual la regla de correspondencia de la función tiene sentido. (Purcell, pp. 30, 2007)*

c) La imagen o rango *de la función $f : A \rightarrow B$ es una colección de todos los elementos **f (x)**, con **x** en **A**, es decir, todos aquellos elementos de **B** que fueron los asociados a los elementos de **A**. Este conjunto se denota por **f (A)** o bien **Im f**. (De Oteyza, pp. 5, 2006)*

*d) Decimos que dos funciones **f** y **g** son* iguales *si:*

i) tienen el mismo dominio,
*ii) tienen la misma regla de correspondencia, es decir, **f (x) = g(x)**,*
*para todo **x** en el dominio. (De Oteyza, pp. 8, 2006)*

*2. a) El límite de una función **f** en '**c**', es el valor **L** que debería tener la función en **x = c**, para que la función sea continua en ese punto.*

*b) 1. Cuando la función es continua en **x = c**.*

*2. Cuando al acercarnos a '**c**' por la izquierda y por la derecha, el valor de la función se acerca al mismo valor.*

*c) 1. Cuando la función tiene un comportamiento asintótico en **x = c**.*

*2. Cuando no se pueda colocar un punto en **x = c** para que sea continua.*

3. a) $D_a = R - \{1\}$; $Im_a = R$; discontinuidad en $x = 1$

b) $D_b = R - \{0\}$; $Im_b = R - \{0\}$; discontinuidad en $x = 0$

c) No está representada una función.

d) $D_d = R$; $Im_d = R$; la función d es continua en R

e) $D_e = R - \{1\}$; $Im_e = [-3, \infty)$; discontinuidad en $x = 1$

f) $D_f = R - \{1\}$; $Im_f = [0.25, \infty)$; discontinuidad en $x = 1$

g) $D_g = R - \{0, 2\}$; $Im_g = R$; discontinuidad en $x = 0$ y $x = 2$

h) No está representada una función.

i) $D_i = R - \{-1\}$; $Im_i = R - \{-1, 4\}$; discontinuidad en $x = -1$ y en $x = 2$

j) $D_j = R$; $Im_j = \mathbb{Z}$; discontinuidad en $\mathbb{Z}$

k) $D_k = R$; $Im_k = [0, \infty)$; la función k es continua en R

l) $D_l = R - \{2\}$; $Im_l = (1, \infty)$; discontinuidad en $x = 2$.

4.

a) $\to \infty$	b) 0	c) 2	d) $\to -\infty$	e) $\to 0$	f) No existe
g) $\frac{1}{2}$	h) $\to 0$	i) No es función	j) 2	k) -2	l) -1
m) No existe	n) 2	ñ) $\to 0$	o) 0	p) No existe	q) No es función
r) -2	s) 4	t) No existe	u) 0	v) $\to \infty$	w) $\to 1$

7.4. Respuestas de la Tarea 4.

1) $\frac{1}{9}$	2) 0	3) $\frac{9}{2}$	4) $\frac{1}{2}$	5) 2
6) $-\frac{1}{7}$	7) 0	8) -1	9) -1	10) $-\frac{1}{2}$
11) $\frac{5}{2}$	12) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$	13) 0	14) $\to \infty$	15) $-\frac{1}{4}$

7.5. Respuestas de la Secuencia didáctica.

7.5.1. Respuestas de la Actividad 1.

1)

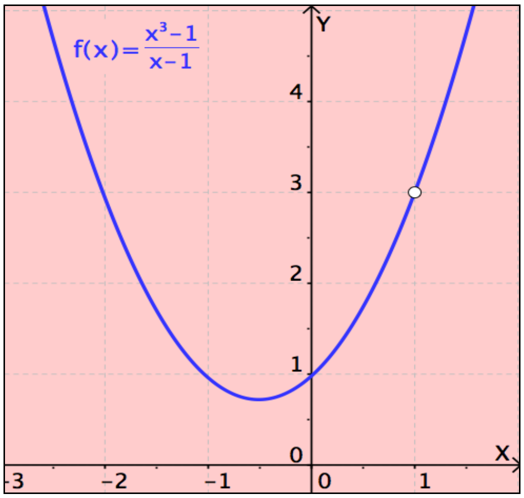


Figura 26. Gráfica de $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$

2)

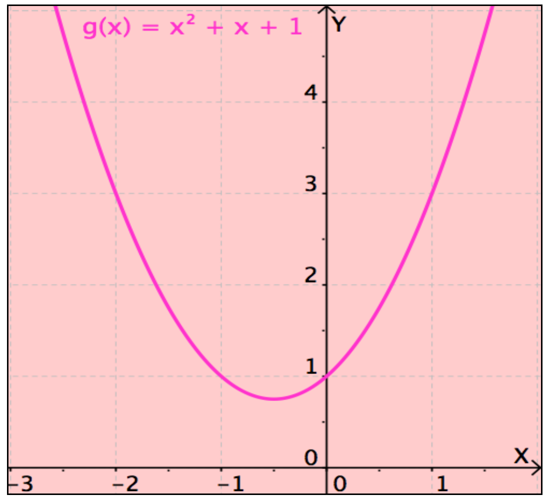


Figura 27. Gráfica de $g(x) = 1 + x + x^2$

3) Son ligeramente diferentes. Son iguales excepto en $x = 1$.

4) Sí ; en la función $f(x)$ ***; en*** $x = 1$.

5)

x	$f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$
0.999	2.997001
0.99999	2.99997
1.0001	3.0003
1.00001	3.00003

6) Se acerca a 3.

7) $D_f = R - \{1\}$; $D_g = R$.

8) Ligeramente diferentes, son iguales excepto por $x = 1$.

*9) En realidad tienen la misma regla de correspondencia, ya que si se hace la división de los polinomios del numerador y del denominador de la función **f**, se obtiene la expresión algebraica de la función **g**, pero se tiene que tomar en cuenta que en la función racional **f (x)**, el denominador tiene que ser diferente de cero, por eso los dominios de las funciones son diferentes y las funciones **f** y **g** son diferentes, a pesar de diferir sólo en un solo punto.*

*10) Que las funciones **f** y **g** tienen la misma regla de correspondencia o expresión algebraica.*

*11) A la gráfica de la función **f** se le coloca un punto en el hueco, o bien a la función **g** se le puede quitar un punto en $x = 1$, así las gráficas de las funciones serían iguales.*

12) El valor que debería tomar la función para hacerla continua es 3, que es precisamente el valor del límite en $x = 1$.

7.5.2. Respuestas de la Actividad 2.

2.1. 1) $h(x) = x - 2$

x	-1.9	-1.99	-1.999	$\rightarrow$	-2	$\leftarrow$	-2.0001	-2.001	-2.01	-2.1
$h(x)$	-3.9	-3.99	-3.999	$\rightarrow$	-4	$\leftarrow$	-4.0001	-4.001	-4.01	-4.1

2) Se acerca a -2 *por la izquierda ; y también a* -2 *por la derecha.*

3) Se acerca a -4 *por la izquierda.*

4) Se acerca a -4 *por la derecha.*

5) Se acerca a -4.

6) $h(-2) = (-2) - 2 = -4$.

2.2. 1) $j(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$

x	**– 1.9**	**– 1.99**	**– 1.999**	**→**	**– 2**	**←**	**– 2.0001**	**– 2.001**	**– 2.01**	**– 2.1**
j(x)	**– 3.9**	**– 3.99**	**– 3.999**	**→**	**– 4**	**←**	**– 4.0001**	**– 4.001**	**– 4.01**	**– 4.1**

2) Se acerca a – 2 por la izquierda ; y también a – 2 por la derecha.

3) Se acerca a – 4 por la izquierda.

4) Se acerca a – 4 por la derecha.

5) Se acerca a – 4.

6) No está definida en x = – 2.

2.3) 1)

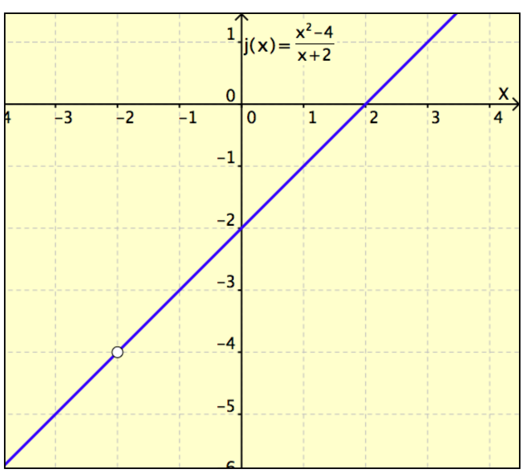


Figura 28. Gráfica de $\mathbf{j(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}}$.

2)

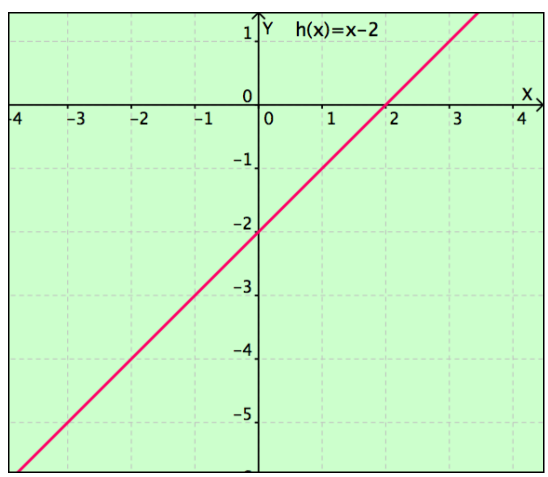


Figura 29. Gráfica de h(x) = x – 2.

3) Las funciones j y h son ligeramente diferentes. Son iguales excepto en x = – 2.

4) Sí ; en la función j (x); en x = – 2.

5)

x	$j(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$
– 1.999	– 3.999
– 1.99999	– 3.99999
– 2.001	– 4.001
– 2.00001	– 4.00001

6) Se acerca a – 4.

7) $D_j = R - \{-2\}$; $D_h = R$.

8) Difieren en x = – 2.

9) Las gráficas son iguales, excepto por el punto (– 2, – 4).

10) Si se colocara el punto (– 2, – 4)

*en la gráfica de la función **j**, las gráficas de las funciones **j** y **h** serían idénticas.*

11) – 4 es el valor que debería tomar la función j para ser continua.

7.5.3. Respuestas de la Actividad 3

1)

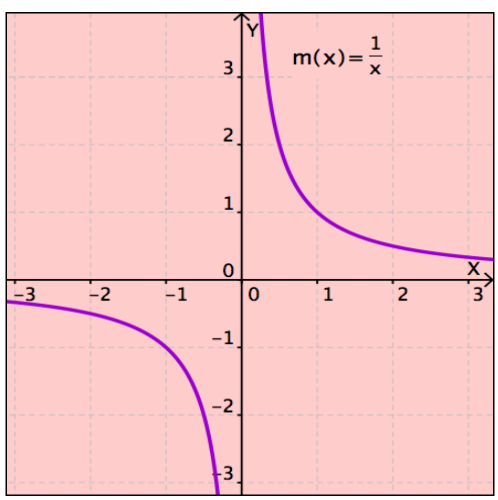


Figura 30. Gráfica de $m(x) = \frac{1}{x}$.

2) Sí, en x = 0.

3) $D_m = R - \{0\}$.

4)

x	$m(x) = \frac{1}{x}$
$-.001$	$-1,000$
$-.00001$	$-100,000$
0.001	$1,000$
0.00001	$100,000$

5) La función* m *decrece indefinidamente cuando* x *se acerca a 0 por la izquierda.

6) La función* m *crece indefinidamente cuando* x *se acerca a 0 por la derecha.

7) No, ya que en este caso al acercarse al valor donde no está definida,* $x = 0$*, la función* m *no se acerca a un valor determinado, sino que por la izquierda decrece indefinidamente y por la derecha crece indefinidamente.

8) No se puede colocar un punto en* $x = 0$ *para hacerla continua, ya que por la izquierda la rama de la función va decreciendo y por la derecha la rama de la función va creciendo, no hay manera de 'unir' las dos ramas con un punto.

7. 6. Respuestas del examen parcial 1. Tipo B.

1. a) $x^2 - 2 = \left(\sqrt{x}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(\sqrt{x} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{2}\right)$

b) $x^2 + 8x + 15 = (x+3)(x+5)$

c) $2x^2 + 3x - 2 = (x+2)(2x-1)$

2. a) $x = -\dfrac{1}{2}$ *b)* $x = -2\ ;\ x = \dfrac{1}{3}$ *c)* $x = 1; x = 5$ *d)* $x = \dfrac{3}{7}$

3. $\dfrac{4}{5} + \dfrac{2}{5} \times \dfrac{5}{4} = \dfrac{13}{10}$

4. a) $\left(\sqrt{x} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{2}\right)$ *b)* $x^2 - 10x + 25$ *c)* $1 + \dfrac{4}{x}$

5. a) La condición fundamental para asegurar que una expresión sea una función, es que para cada elemento del dominio le corresponda uno y sólo un elemento del contradominio.

b) La función no está definida en ese valor, ya que el dominio es el conjunto de números reales en donde tiene sentido evaluar la función, si ese valor no está en el dominio, significa que no se va a obtener ningún valor real al sustituir ese valor de x.

c) La imagen de esa función son todos los reales negativos, ya que la gráfica de la función está por debajo del eje X.

6.

a) $-2\ ;\ 4$	*b) No existe;* 0	*c) No es función*
d) No existe; $\to 0$	*e)* $0\ ;\ \to \infty$	*f)* $2\ ;\ 0$

*7. a) Cuando **x** se acerca a 2 por la izquierda ($x \to 2^-$), $g(x) \to 4$.*

*b) Cuándo **x** se acerca a 2 por la derecha ($x \to 2^+$), $g(x) \to 4$.*

*c) Sí existe el límite cuando **x** tiende a 2.*

d) Porque al acercarnos a 2 por la izquierda y por la derecha, la función se acerca al mismo valor.

8. a) 1. Cuando la función tiene un salto en $x = c$ imposible de rellenar con un punto y que la función se haga continua.

2. Cuando la función tenga una discontinuidad en $x = c$ de tipo asintótico.

b) El límite de una función existe en $x = c$, si se puede 'colocar' un punto en la gráfica para hacerla continua en ese valor.

9.

a) -7	b) $\frac{1}{4}$	c) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

Anexo 8. Alumnos y alumnas de los grupos de prueba

8.1. Grupo 519

8.2. Grupo 562.

Fuentes documentales

Ausubel, D., Novak, J. & Hanesian, H. (1983). *Psicología Educativa: Un punto de vista cognoscitivo.* México: Trillas.

Abarca, N. (s. f.) *La enseñanza del cálculo diferencial e integral mediante la resolución de problemas, una propuesta motivadora.* Bolivia: Tecnociencia Universitaria. *http://www.revistasbolivianas.org.bo/scielo.php?pid=S1991-64692007000100005&script=sci_arttext*

Barber, M. & Mourshed, M. (2008). *Cómo hicieron los sistemas educativos con mejor desempeño del mundo para alcanzar sus objetivos.* PREAL (41). Chile. ISBN: 0718-6002. *http://www.slideshare.net/AdolfoPerez6/como-hicieron-los-sistemas-educativos-con-mejor-desempeno-del-mundo-para-alcanzar-sus-objetivos*

Coll, C., Martín, E., Mauri, T., Miras, M., Onrubia, J., Solé, I. & Zabala, A. (1999). *El constructivismo en el aula. Un punto de partida para el aprendizaje de nuevos contenidos: los conocimientos previos* (9ª ed.). Barcelona: Ed. Graó. http://www.slideshare.net/eldiiego/el-constructivismo-en-el-aula

De Oteyza, E., Lam, E., Hernández, C. & Carrillo, Á. (2006). *Conocimientos Fundamentales de Matemáticas. Cálculo Diferencial e integral.* (pp. 3, 5, 8) México: Pearson. Educación. ISBN 970-32-3841-6.

Dewey, J. (1995). *Democracia y educación. Una introducción a la Filosofía de la educación.* (pp. 13 – 54) Madrid: Morata.

Díaz-Barriga, F. (s.f.). *Enseñanza situada. Vínculo entre la escuela y la vida.* México: McGraw-Hill. ISBN: 970 10 5516 0.

Díaz-Barriga, F. & Hernández, G. (2002). ***Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista.*** **México: McGraw-Hill.**

Dominguez, I. (2009). ***Breve evolución de los sistemas educativos latinoamericanos: necesidad de la educación para el desarrollo.*** **RIE (49). Cuba.** ***http://www.rieoei.org/deloslectores/2920Cruz.pdf***

Dubinsky, E. & Wilson R. (2013). ***High School student's understanding of the function concept.*** **The journal of Mathematical Behavior.** ***http://www.algebra.org/articles/2013Dubinsky-Wilson_HSstudent'sunderstandingofthefunctionconcept.pdf***

Duckworth, E. (2000). ***Cuando surgen ideas maravillosas. Y otros ensayos sobre la enseñanza y el aprendizaje.*** **Ed. Gedisa. ISBN: 84-7432-720-2.**

Durkheim, É. (2006). ***Educación y sociología.*** **México: Colofón.**

Egan, K. (2000). ***Mentes educadas.*** **(pp. 13 – 56.) Barcelona: Paidós.**

Ferrer, G. (2006). ***Estándares en Educación. Implicancias para su Aplicación en América Latina.*** **PREAL. Chile.** ***http://es.scribd.com/doc/201975252/Estandares-en-Educacion-Implicancias-en-America-Latina-FERRER***

Fletcher, T. (1971). ***Didáctica de la Matemática Moderna en la enseñanza media.*** **(pp. 118-) Ed. Varazén.**

Franco, J. (2011). ***Cálculo: el verbo del cosmos.*** **México: Siglo XXI. ISBN-13:978-607-03-0295-4**

Godino, J. (2009). *Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de Matemáticas.* (pp. 13 – 31) Revista Iberoamericana de Educación Matemática, (20). UNION. *http://www.ugr.es/~jgodino/eos/JDGodino%20Union_020%202009.pdf*

Gómez Chacón, I. (2008). *Incrementar el aprendizaje estudiantil en América Latina. El desafío para el siglo XXI.* Madrid Banco mundial: Mayol Ediciones.

Gómez Chacón, I. (2002). *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático.* Madrid: Narcea. ISBN: 978-84-277-1336-9

Gómez Chacón, I. (s.f.). *Una metodología cualitativa para el estudio de las influencias afectivas en el conocimiento de las matemáticas.* Madrid. *http://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/download/21548/21382*

Guttman, A. (1987). *La educación democrática.* (pp. 36 – 68) Barcelona: Paidós.

Hativa, N. (1983). *What makes mathematics lessons easy to Follow, Understand, and Remember?* (pp. 398-406). The two-year College Mathematics Journal (14 – 5) *http://www.jstor.org/stable/3026762?origin=JSTOR-pdf*

Hernández, F. & Sancho, J. (1996). *Para enseñar no basta con saber la asignatura.* Ed. Paidós. ISBN: 968-853-327-0.

Hierrezuelo, J. & Montero, A. (2006). *La ciencia de los alumnos. Su utilización en la didáctica de la física y la química.* Fontamara. ISBN 968-476-598-3.

Hill, H., Ball, D., & Schilling, S. (2008). *Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic specific knowledge of students.* Journal for Research in Mathematics Education, 39*(4) 372-400.* *http://dlavertydotcom.wordpress.com/2012/02/21/hill-ball-schilling-2008-unpacking-pedagogical-content-knowledge-conceptualizing-and-measuring-teachers-topic-specific-knowledge-of-students/*

Hunt, B. (2009). *Efectividad del desempeño docente. Una reseña de la literatura internacional y su relevancia para mejorar la educación en América Latina.* PREAL (43) Chile. www.preal.org/publicacion.asp

López, M. (1973). *Límite.* Programa Nacional de Formación de Profesores. Asociación Nacional de Universidades e Institutos de Enseñanza Superior, México.

Mochón, S. (1994). *Quiero entender el Cálculo. Un enfoque diferente basado en conceptos y aplicaciones.* Grupo editorial Iberoamérica. ISBN 970-625-051-4.

Morales, M. &Delgado, I. (s.f.). *El constructivismo. ¿Paradigma filosófico emergente?* http://es.scribd.com/doc/6827660/El-constructivismo-Paradigma-filosofico-emergente

OCDE, Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico. (2003). *Informe PISA* (Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos) 2003. Aprender para el mundo del mañana. España. ISBN: 84-294-0580-1.

Platón. *Diálogos.* (pp. 113 – 178) México: Porrúa.

Pozo, J. & Monereo, C. (s.f.). *El aprendizaje estratégico.* Madrid: Aula XXI Santillana. http://www.researchgate.net/publication/39406721_El_aprendizaje_estratgico__Juan_Ignacio_Pozo_Carles_Monereo_(coord.)

Purcell, E., Varberg, D. & Rigdon, S. (2007). *Cálculo diferencial e integral* (9ª ed.) Pearson. Educación. ISBN 978-970-26-0989-6.

Sawyer, W. (1977). *¿De qué trata el Cálculo?* (pp. 6) Comunicación interna No. 5. Traducción de Sánchez, A y Nieva, A. Publicación del Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias, UNAM.

Sierpinska, A. (1992). *On Understanding the Notion of Function. The Concept of function. Aspects of Epistemology and pedagogy.* Mathematical Association of America. USA: Dubinsky & Harel Eds.

Subsecretaría de Educación Media de la SEP. (2008). *Reforma integral de la educación media superior en México: La creación de un Sistema Nacional de Bachillerato en un marco de diversidad.* México. http://www.slideshare.net/liliagtorres/reforma-integral-de-la-educacion-media-superior

Swann, H. & Johnson, J. (1983). *Primer libro de Cálculo. Prof. E McSquared. Original, fantástico y de lo más edificante* (2ª impresión), (pp. 68-160). México: CECSA. ISBN 968-26-0260-2.

Terán, R. (2007). *Memoria UNAM, CCH, 2007.* Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades. México. UNAM.

Vilenkin, N. (1984). *Método de aproximaciones sucesivas.* Moscú: Ed. MIR.

Vrancken, S., Gregorini, M., Engler, A., Müller, D. & Hecklein, M. (s.f.). *Dificultades relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite.* http://www.soarem.org.ar/Documentos/29%20vrancken.pdf

Zorrilla, J. (2010). *El futuro del bachillerato mexicano y el trabajo colegiado. Lecciones de una intervención exitosa.* México: ANUIES. ISBN 978-607-451-019-5.

La educación no es preparación para la vida

la educación es la vida misma

John Dewey