



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO
POSGRADO EN CIENCIAS DE LA TIERRA
INSTITUTO DE GEOFISICA

**ANÁLISIS PARAMÉTRICO DE TOPOGRAFÍAS Y VALLES
ALUVIALES POR MEDIO DEL MÉTODO IBEM OPTIMIZADO**

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA TIERRA

PRESENTA:
MAURICIO ARELLANO GUZMÁN

TUTOR
Dr. Francisco José Sánchez Sesma, Instituto de Ingeniería, UNAM

JURADO:

Dr. Victor Manuel Cruz Atienza, Instituto de Geofísica, UNAM
Dr. Vladimir Kostoglodov, Instituto de Geofísica, UNAM
Dr. Ricardo José Padilla y Sánchez, Facultad de Ingeniería, UNAM
Dra. Úrsula Xiomara Iturrarán Viveros, Facultad de Ciencias, UNAM

MÉXICO, D.F. ,JUNIO DEL 2014



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

El primer agradecimiento que brindo es para mi tutor de tesis el Dr. Francisco J. Sánchez Sesma, pues ha sido en este largo y oscuro trayecto de tesis, el faro que guía mi camino. Durante todo este tiempo siempre estuvo presente brindándome mucha ayuda, apoyo, comprensión, ánimo y rigor científico. Siempre marcando las pautas que un gran investigador y poeta matemático puede brindar a los que estamos a su alrededor.

Agradezco a mis sinodales la Dra. Úrsula X. Iturrarán Viveros, Dr. Vladimir Kostoglodov, Dr. Victor Manuel Cruz Atienza y el Dr. Michelangelo por asignarme parte de su tiempo y darme sus valiosos comentarios para concluir este trabajo de tesis.

Agradezco de manera atenta al Dr. Takae Ohminato y Stephanie Chaillat por facilitarme los datos necesarios para sustentar todas las comparaciones realizadas dentro de este trabajo.

Agradezco a mi familia porque siempre me reciben con los brazos abiertos y una gran sonrisa.

Agradezco a mis amigos Gilberto, Pablo, Maricruz, Mario y a todos mis compañeros de trabajo, que no se nombran aquí pero brindan palabras de aliento todos los días.

Agradezco al Instituto de Ingeniería UNAM, por todas las facilidades y apoyos otorgados durante la elaboración de este trabajo.

Agradezco el apoyo brindado por el Conacyt durante mis estudios de Posgrado 2011-2013, dentro y fuera del Instituto de Geofísica UNAM.

Agradezco en especial a mi prometida Alejandra Fernández Martínez, pues ella es la fuente de inspiración que mueve mi mundo, llenando de alegría cada momento que compartimos juntos durante todo este tiempo.

Es una alegría para mí, compartir el trabajo de los últimos años con aquellos que observan y comprenden de manera científica cada suceso que ocurre en la naturaleza.

Lista de Símbolos

k_x	Número de onda horizontal
k_z	Número de onda vertical
f	Frecuencia en Hz
ω	Frecuencia angular en rad/s
r_α	Coefficiente k_x/k_z para el número de onda S
r_β	Coefficiente k_x/k_z para el número de onda P
C_x, C_R	Velocidad aparente en la dirección x y velocidad de ondas de Rayleigh
$\ \cdot \ $	Norma euclidiana o norma L_2
Ω	Dominio elástico, homogéneo, lineal, isótropo e infinito.
S	Frontera del dominio Ω , también se usa $\partial\Omega$
Γ_i	Segmento i -ésimo de área en la superficie S
\hat{n}	Vector normal a la superficie S
$G_{ij}(\mathbf{x}, \xi)$	Tensor Función de Green para los puntos \mathbf{x}, ξ
$T_{ij}(\mathbf{x}, \xi)$	Tensor de tracciones de Green para los puntos \mathbf{x}, ξ
δ_{ij}	Delta de Kronecker
α	Velocidad onda P
β	Velocidad onda S
f_1, f_2	Soluciones de Stokes
μ	Módulo cortante ó de cizalla
r	Distancia entre los puntos \mathbf{x}, ξ
t_i	Tracciones de Cauchy
σ_{ij}	Tensor de esfuerzos
γ_i	Cosenos directores
$\varphi_j(\xi)$	Densidades de fuerza en el punto ξ
u_i	Campo de desplazamientos
\neq	No es igual
\in	Pertenece a
\forall	Para todos
$D_{ijk}(\mathbf{x}, \xi)$	Tensor de esfuerzos
$p_j(\xi)$	Fuerza unitaria aplicada en el punto ξ
λ	Constante de Lamé
θ	Ángulo de incidencia de ondas respecto al eje vertical
ϕ	Ángulo azimutal de incidencia de ondas
Φ	Potencial de ondas P
Ψ	Potencial de ondas S
i	Unidad compleja imaginaria
ρ_E, ρ_R	Densidad semiespacio e inclusión elástica
Q_P, Q_S	Factor de calidad para la atenuación de ondas P y S respectivamente.
R_P, R_S	Coefficiente de reflexión en superficie libre de ondas P y S respectivamente.
λ_R, λ_E	Longitud de onda en inclusión elástica y semiespacio.
ω_n	Frecuencias de resonancias en Hz
t_0, t_i	Tiempo característico ($1/f_0$) e inicial de un pulso de Ricker.
ν_E, ν_R	Coefficiente de Poisson del semiespacio y de la inclusión elástica
η	Frecuencia adimensional
\mathbf{a}	Distancia de normalización.

Resumen

El objetivo general de este trabajo es encontrar los factores geométricos y mecánicos que caracterizan tanto la generación de ondas superficiales en valles aluviales y topografías como las modificaciones significativas del movimiento del terreno. Se utilizó el Método de Elementos en la Frontera Indirecto (IBEM) para resolver numéricamente problemas de distinta naturaleza: *topografía*, *valle aluvial* y *topografía con valle aluvial*. Debido a que las condiciones de frontera definen completamente las ecuaciones que rigen el problema físico e incrementan el uso de memoria y tiempo de cómputo, se realizó la optimización del método IBEM con las técnicas numéricas de *condensación estática* y el *complemento de Schur*. Esto mejoró drásticamente el manejo de la memoria y el tiempo de cálculo, en algunos casos fue hasta 34 veces más rápido en comparación con otros métodos. Para validar los datos obtenidos por el IBEM se realizó una comparación con el método de diferencias finitas (FDM) en el caso de topografía, donde el error encontrado se asocia a la difracción de *ondas progresivas* P, SV y Rayleigh producidas por las esquinas. En el caso de valles aluviales se realizó comparaciones con el método de multipolos rápidos (FMM), el método de elementos espectrales (SEM) y el método integral de elementos en la frontera (BIEM). Los resultados obtenidos para varios modelos de topografía, permitieron encontrar algunas características geométricas y mecánicas para la generación de ondas superficiales de manera explícita en los sismogramas sintéticos. Por otra parte las instantáneas en tiempo, permitieron mostrar y explicar la evolución completa de las ondas difractadas por la cavidad hemisférica ante la incidencia oblicua de ondas SH. El resultado del análisis de los diagramas f-x calculados por el IBEM, permitió encontrar fórmulas empíricas que involucran los factores geométricos y mecánicos para estimar *las resonancias acústicas* ω_n del cañón y valle aluvial hemisférico, ante la incidencia vertical de ondas P y SV. El error porcentual entre los resultados numéricos y los calculados teóricamente con las fórmulas empíricas es 1.47% , 0.81% y 3.85%,4.57%, respectivamente. Respecto al modelo de valle trapezoidal, se muestra una comparación cualitativa con los resultados obtenidos para la incidencia vertical de onda SH. En la cual, se observó un gran parecido a más alta frecuencia con los resultados publicados en dos dimensiones. La variación espacial del movimiento lateral producido por esta incidencia en las esquinas inferiores del valle induce la generación de ondas de Love. Los resultados de la variación del *ángulo de la base del valle* trapezoidal (Θ), muestra una mejor aproximación a un estrato plano cuando se trata de un valle cilíndrico ($\Theta = 90^\circ$). Para estos modelos se puede apreciar una amplitud mayor en los modos de Love y una duración que aumenta proporcionalmente con el ángulo Θ . La difracción producida por la incidencia de ondas P y SV en las esquinas inferiores del valle genera ondas de Rayleigh. En general, la difracción es más intensa y compleja cuando el ángulo azimutal φ es perpendicular a la bisectriz del ángulo subtendido en cada esquina. En la última parte de este trabajo se incluye el efecto topográfico en el estudio de valles aluviales. Los resultados muestran que la presencia de topografía cerca de un valle aluvial afecta la propagación de ondas, aumentando las amplitudes de las ondas difractadas por las esquinas. Se estudia la implementación de la fuente en el método IBEM y se realiza una comparación cualitativa con un esquema de diferencias finitas para el problema de Lamb.

Índice General

Agradecimientos
Resumen
Símbolos

PARTE I FUNDAMENTOS

1. Introducción	
2. Método Indirecto de Elementos a la Frontera (IBEM)	
2.1 Teorema de Somigliana.....	5
2.2 Función de Green.....	5
2.3 Formulación matemática del IBEM.....	6
2.4 Discretización de las Ecuaciones Integrales.....	7
2.5 Integración del tensor de Tracciones.....	8
2.6 Integración de la Función de Green.....	8
2.7 Difracción de ondas elásticas.....	10
2.8 Atenuación.....	11
2.9 Visualización.....	12
3. Optimización Numérica del Método IBEM	
3.1 Difracción de ondas sísmicas para topografías.....	13
3.2 Difracción de ondas sísmicas para valles aluviales.....	15
3.3 Modelo de valle aluvial con topografía.....	17
3.4 Condensación Estática.....	18
3.5 Criterio de Discretización.....	21

PARTE II APLICACIONES SISMOLÓGICAS

4. Incidencia de Ondas Sísmicas sobre Topografías	
4.1 Modelo canónico.....	23
4.2 Cañón hemisférico.....	23
4.3 Cañón triangular.....	37
4.4 Cañón trapezoidal.....	38
4.5 Cañón cubico.....	40
4.6 Cañón Croissant.....	41
4.7 Sismogramas sintéticos para incidencia SH en modelos canónicos....	43
4.8 Diagramas f-x para incidencia P-SV en modelos canónicos.....	45
4.9 Espectros de Amplitud P-SV en modelos canónicos.....	46

5. Análisis paramétrico de Valles Aluviales	
5.1 Valle hemisférico.....	48
5.2 Valle trapezoidal.....	67
5.3 Valle Cilíndrico.....	71
5.4 Valle Croissant.....	72
6. Efecto de la Topografía en Valles Aluviales	
6.1 Cañón Hemisférico con Valle Aluvial.....	75
6.2 Cañón trapezoidal con Valle Aluvial.....	79
6.3 La fuente Sísmica.....	83
6.4 El problema de Lamb.....	85
7. Conclusiones	

Bibliografía

Apéndices

A Coeficientes de amplitud para la incidencia de ondas P-SV en una superficie libre.

B Cálculo del tensor de Tracciones

C Integración de la Función de Green en el caso Singular

Capítulo 1.

Introducción

“...Es imposible ser matemático sin ser un poeta del alma ”

Sofía Kovalévsckaya

En el último siglo se han desarrollado varios trabajos que estudian la propagación de ondas en medios elásticos continuos lineales. En ellos se muestra la importancia y dificultad de encontrar una descripción exacta para los desplazamientos en un medio que posee características geométricas y mecánicas que lo diferencian de otros y que es posible aplicar en la práctica. Ver por ejemplo, [Lamb \(1904\)](#), [Love \(1944\)](#), [Chao \(1960\)](#), [Achenbach \(1973\)](#), [Eringen & Suhubi \(1975\)](#), [Miklowitz \(1978\)](#), [Hudson \(1980\)](#), [Aki & Richards \(1980\)](#), [Kennet \(1983\)](#), [Ufías \(1999\)](#).

Para enfatizar las propiedades mecánicas de un medio en el que se propagan ondas elásticas lineales y no lineales, se construyen modelos matemáticos idealizados que involucran sus propiedades físicas. Para resolverlos de manera unívoca, se requiere especificar las propiedades geométricas del problema y sus valores de contorno (condiciones de frontera).

En este trabajo el objetivo general es encontrar los factores geométricos y mecánicos que generan ondas superficiales en topografías y valles aluviales con distintas condiciones de frontera utilizando el Método de Elementos en la Frontera Indirecto (IBEM). Se divide en dos partes principales, en la primera se establece la formulación matemática y numérica de los modelos de *topografía*, *valle aluvial* y *valle aluvial con topografía*. En la segunda, se presentan los resultados numéricos obtenidos por el método IBEM de varios modelos canónicos.

En el capítulo 2, se desarrolla la formulación matemática del método IBEM [Sánchez-Sesma & Luzón,\(1995\)](#), para resolver las ecuaciones de la elasticidad dinámica en un medio homogéneo, isótropo e infinito en el dominio de la frecuencia [Domínguez & Abascal,\(1984\)](#). Al mismo tiempo, se realiza la integración analítica del tensor de tracciones y de la función de Green para calcular el campo de desplazamientos de topografías y valles aluviales en tres dimensiones ante la incidencia de ondas P, SV, SH y Rayleigh.

En el capítulo 3, se emplea el método IBEM para resolver numéricamente problemas de distinta naturaleza: *topografía* [Ortiz-Alemán et al.,\(1998\)](#), *valle aluvial* [Sánchez-Sesma & Luzón,\(1995\)](#) y *topografía con valle aluvial*. En dichos casos, las condiciones de frontera definen completamente las ecuaciones que rigen el problema físico. Esto implica un aumento en el uso de la memoria RAM y tiempo de cómputo. Por esta razón, se realizó la optimización del método con técnicas numéricas implementadas como la *condensación estática* [Gil-Zepeda et al.,\(2002\)](#) y el *complemento de Schur* [Benítez & Thome, \(2006\)](#). Esto mejora drásticamente el manejo de la memoria y el tiempo de cálculo en nuestros modelos de estudio.

Los resultados obtenidos para varios modelos de topografía; cañón hemisférico, trapezoidal, triangular, cúbico y croissant, son presentados en el capítulo 4. Dichos resultados permitieron encontrar algunas características geométricas y mecánicas para la difracción de ondas, explícitamente en las funciones de transferencia, sismogramas sintéticos, diagramas f-x, snap en tiempo y frecuencia dentro de cada modelo. En general, se muestra por primera vez resultados

tridimensionales de la propagación de ondas dentro del dominio elástico en el tiempo, empleando el método IBEM.

Para verificar los resultados obtenidos por el método IBEM, se realizó una comparación cuantitativa entre el método de diferencias finitas FDM y el IBEM para el modelo del cañón hemisférico presentado por [Ohminato & Chouet\(1997\)](#). El error encontrado para el arreglo de receptores sobre el eje X ante la incidencia vertical de ondas SV es completamente asociado a la difracción de *ondas progresivas* P,SV y Rayleigh producidas por las esquinas verificando lo observado por [Kawase,\(1988\)](#) para el mismo modelo en dos dimensiones. Esto muestra que el rango de operación correcto del IBEM es para frecuencias bajas e intermedias.

Posteriormente, se realizó el análisis de la variación de los ángulos de incidencia, donde las ondas reflejadas y difractadas varían en su amplitud y el tiempo en que aparecen. No existen hasta el momento de escribir este trabajo, datos de comparación que puedan verificar las observaciones encontradas.

Mediante las simulaciones, se pudo mostrar y explicar la evolución completa de las ondas difractadas por la cavidad hemisférica ante la incidencia oblicua de ondas SH. Los resultados de la sección transversal del cañón hemisférico tiene características similares con el cañón con forma de U presentado por [Gao et al.,\(2012\)](#), mostrando que el *patrón de difracción* propuesto es correcto.

Un resultado interesante del análisis de los diagramas f-x calculados por el IBEM permitió deducir una fórmula que involucra los factores geométricos y mecánicos para calcular *las resonancias acústicas* ω_n del cañón hemisférico para la incidencia vertical de las ondas P y SV. La importancia de estas fórmulas empíricas radica en la localización de los desplazamientos máximos en el dominio de la frecuencia como un efecto de sitio inducido por la topografía, lo que enfatiza la importancia de este trabajo.

En el capítulo 5, se hace un estudio de la respuesta sísmica de valles aluviales con distintas configuraciones; valle hemisférico, trapezoidal, cilíndrico y croissant. El primero es un modelo propuesto por [Sánchez-Sesma et al., \(1983\)](#) cuya solución semianalítica en términos de series de Bessel ha permitido la comparación entre diversos métodos numéricos en tres dimensiones; el BIEM (Boundary Integral Element Method) indirecto por [Mossesian & Dravinski, \(1990\)](#), SEM(Spectral Element Method) de [Komatitsch & Tromp,1999](#) , BEM (Boundary Element Method) por [Dangla et al.,2005](#), [Delavaud, PhD, \(2007\)](#) con el SEM y [Chaillat, PhD, \(2008\)](#) con el FMM (Fast Multipole Method). Se realizaron diversas comparaciones entre los resultados publicados por los autores anteriores y el método IBEM. Los resultados demuestran el buen funcionamiento del IBEM y una elevada eficiencia en el tiempo de cómputo.

De manera análoga al caso de la topografía hemisférica, se obtuvieron las fórmulas empíricas de *resonancias acústicas* ω_n para el valle hemisférico. El error porcentual entre los resultados numéricos y los calculados teóricamente con las fórmulas empíricas es inferior al 5%.

En cuanto al modelo de valle trapezoidal, se muestra una comparación con los resultados obtenidos por [Kawase & Aki ,\(1989\)](#) en dos dimensiones.Los resultados muestran que existe un gran parecido en más alta frecuencia.

La incidencia vertical SH se ha utilizado para validar cualitativamente otros métodos numéricos, ver por ejemplo; [Rodriguez-Zuñiga et al.,\(1995\)](#),[Avila et. al., \(2002\)](#),[Gil-Zepeda et. al.,\(2003\)](#).

El estudio de la amplificación de las ondas producidas por las esquinas se ha intensificado en los últimos años debido a que permite encontrar los aspectos más importantes de la microzonificación sísmica en dos dimensiones, [Kumar & Narayan,\(2008\)](#). Es decir, permite predecir la frecuencia fundamental F_0 de amplificaciones para algunos suelos estratificados [Dobry et al.,\(1976\)](#), el factor de agravación [Chavez-García & Faccioli,\(2000\)](#) y la variabilidad espacial del movimiento lateral producido por la incidencia de ondas SH en las esquinas inferiores del valle que inducen la generación de ondas superficiales de Love, [Narayan,\(2012\)](#).

Los resultados de la variación del *ángulo de la base del valle trapezoidal* Θ , muestra una mejor aproximación a un estrato plano cuando $\Theta = 90^\circ$, es decir cuando se trata de un valle cilíndrico. En estos modelos se puede apreciar una amplitud mayor en los modos de Love detectados por [Bouchon,\(1980\)](#) y recientemente estudiados por [Narayan,\(2012\)](#) con una duración que aumenta proporcionalmente con el ángulo Θ .

El contraste de impedancia entre el valle y el semiespacio para las ondas P y S que se difractan por las esquinas inferiores se transducen en ondas de Rayleigh, como se muestra en [Narayan,\(2011\)](#). Este efecto se ha estudiado dentro del contexto lineal [Assimaki et al., \(2005\)](#) y no lineal [Gelato et al.,\(2010\)](#), [Gelato et al., \(2012\)](#).

Por otra parte, la *variación del ángulo azimutal* φ sólo se puede mostrar en el modelo de valle croissant que no es axisimétrico. En general, la difracción es más intensa y compleja cuando el ángulo φ es perpendicular a la bisectriz del ángulo subtendido en cada esquina.

Algunos estudios [Komatitsch et al., \(2004\)](#), [Lee et al., \(2008\)](#), [Lee et al., \(2009a y 2009b\)](#), han mostrado que la presencia de topografía cerca de un valle aluvial afecta la propagación de ondas, aumentando las amplitudes por efectos de sitio y contraste en la impedancia mecánica de ambos medios. Por esta razón, se incluye el efecto topográfico en el estudio de valles aluviales en el capítulo 6, donde se muestra el análisis de tiempos de arribo para un cañón trapezoidal con valle aluvial en su interior y un cañón hemisférico con valle aluvial en su interior. Los resultados coinciden con los esperados teóricamente.

En este último capítulo, se muestra que el intervalo de distancia que contiene amplitudes significativas para la propagación de ondas con la función de Green implementada en el método IBEM, es igual a 5 veces la distancia de normalización. Por otra parte, algunas componentes del tensor de tracciones son utilizadas como el término libre de una fuente puntual para resolver el problema de Lamb. Este es un problema clásico que ha sido extensamente estudiado desde inicios del siglo pasado [Lamb,\(1904\)](#) pero que sigue siendo un tema de investigación vigente. La solución de dicho problema se puede encontrar en [Mooney,\(1974\)](#), [Eringen & Suhubi,\(1975\)](#), [Aki & Richards,\(2002\)](#), [Kausel,\(2006\)](#), [Kausel,\(2012\)](#) y [Petersson & Sjogreen,\(2013\)](#), entre otros.

Para concluir, se muestra la aproximación obtenida por el IBEM para el problema de Lamb. Los resultados son comparados cualitativamente con el esquema de diferencias finitas en tres dimensiones propuesto por [Petersson & Sjogreen,\(2013\)](#).

Capítulo 2.

Método Indirecto de Elementos en la Frontera

“... Dios es un científico de alto nivel”

Paul M. Dirac

El Método de Elementos a la Frontera (BEM) es una técnica numérica empleada para encontrar la solución de problemas gobernados por ecuaciones diferenciales parciales lineales y no lineales, también es llamado *método directo*. En las últimas tres décadas ha adquirido gran popularidad en varios campos de la ciencia como la física de plasmas, elasticidad, acústica, electromagnetismo, geotecnia, geomécanica y sismología por mencionar algunos.

En general el método directo presenta ventajas en el análisis de problemas exteriores en los cuales se discretiza la frontera de una región del espacio reduciendo en un grado de libertad las ecuaciones del dominio discretizado. Por otra parte las ecuaciones integrales que se emplean satisfacen de manera natural las condiciones de radiación para un medio infinito. En particular esta última ventaja ha permitido resolver problemas de propagación de ondas para valles aluviales, por ejemplo [Eshrhagi & Dravinski \(1989\)](#), [Fishman & Ahmad \(1995\)](#).

Como consecuencia del método directo surge el Método Indirecto de Elementos a la Frontera (IBEM) que es una herramienta numérica versátil que posee las ventajas del método directo. La formulación teórica que utiliza es elegante y compacta con base en principios físicos sencillos de reflexión y difracción de ondas, [Sánchez-Sesma & Luzón \(1995\)](#). En contraste, las ecuaciones integrales empleadas por el IBEM tienen un riguroso desarrollo matemático que proporciona excelentes resultados con pocos recursos computacionales, [Dominguez & Abascal\(1984\)](#). Las discretizaciones utilizadas por el método son fácilmente programables y considerablemente de menor tamaño que las necesitadas por otros métodos numéricos de dominio como Diferencias Finitas (FDM), Elemento Finito (FEM) y Elementos Espectrales (SPECFEM).

Actualmente se puede encontrar en la literatura simulaciones realistas de topografías y valles aluviales en gran escala que usan métodos de descomposición de dominio (DDM) con el objetivo de obtener resultados confiables para efectos de sitio y riesgo sísmico ver por ejemplo [Frankel\(1993\)](#), [Komatitsch & Tromp\(1999\)](#), [Bielak \(2003\)](#), [Komatitsch\(2004\)](#), [Min\(2003\)](#), [Frehner\(2008\)](#), [Lee \(2008,2009\)](#), [Ichimura\(2009\)](#), [Käser\(2009\)](#), [Bielak\(2010\)](#), [Chaljub\(2010\)](#), [Lan&Chang\(2011\)](#) y [Cupillard\(2012\)](#).

En este capítulo se desarrolla la formulación matemática del Método IBEM para resolver las ecuaciones diferenciales parciales de la elasticidad dinámica en un medio homogéneo, isótropo e infinito. Se establece la discretización numérica para calcular el campo de desplazamientos en el dominio de la frecuencia de topografías y valles aluviales en tres dimensiones ante la incidencia de ondas P, SV, SH y Rayleigh.

2.1 Teorema de Somigliana

A partir del teorema de reciprocidad de Betti , seleccionamos uno de los dos posibles estados como la solución fundamental de las ecuaciones de la elasticidad dinámica $G_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$, mientras que el otro estado puede ser elegido como la solución deseada $T_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$. Por tanto, para la región Ω que contiene los dos sistemas de estados y su frontera S , se deduce la siguiente ecuación integral en la frontera:

$$C_{ij}(\boldsymbol{\xi})u_j(\boldsymbol{\xi}) = \int_S G_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})t_i(\mathbf{x}) - T_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})u_i(\mathbf{x}) dS + \int_{\Omega} f_i(\mathbf{x})G_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})d\Omega, \quad (2.1)$$

donde t_i, u_i, f_i son las componentes de las tracciones, el campo de desplazamientos y las fuerzas de cuerpo, respectivamente. El coeficiente C_{ij} depende de la suavidad de la frontera y la región del espacio en que se encuentra el punto de integración $\boldsymbol{\xi}$, [Brebbia\(1992\)](#). Esta ecuación integral es conocida como la identidad de Somigliana, [Hartmann\(1981\)](#), y satisface las condiciones de radiación de Sommerfeld¹ de manera natural cuando se emplea para resolver problemas de propagación de ondas.

2.2 Función de Green

La función de Green corresponde a la solución del campo de desplazamientos en el punto \mathbf{x} producido por una fuerza unitaria p_j aplicada en el punto $\boldsymbol{\xi}$ definida como:

$$u_i(\mathbf{x}) = G_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})p_j(\boldsymbol{\xi}). \quad (2.2)$$

Los esfuerzos asociados a estos desplazamientos se obtienen mediante la ley de Hooke :

$$\sigma_{ij} = D_{ijk}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})p_j(\boldsymbol{\xi}) = \left[\lambda \frac{\partial}{\partial x_l} G_{lk}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial}{\partial x_j} G_{ik}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) + \frac{\partial}{\partial x_i} G_{jk}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \right) \right] p_j(\boldsymbol{\xi}) \quad (2.3)$$

y sus tracciones correspondientes aplicando la fórmula de Cauchy

$$t_i = \sigma_{ij}n_j = D_{ijk}n_jp_k = T_{ik}p_k. \quad (2.4)$$

Algunas funciones de Green han sido ampliamente estudiadas y pueden encontrarse en la literatura clásica como: [Lamb\(1904\)](#), [Love\(1944\)](#), [Sokolnikof\(1956\)](#), [Eringen & Suhubi\(1975\)](#), [Ben-Menahem & Singh \(1981\)](#), [Aki & Richards \(2002\)](#), [Achenbach\(2003\)](#), [Kausel\(2006\)](#).

En este trabajo restringimos nuestro análisis a la función de Green en tres dimensiones para una fuerza unitaria aplicada en el origen con dirección arbitraria, dentro de un medio elástico homogéneo, isótropo y de extensión infinita. Las formulaciones de la Función de Green en el dominio del tiempo y frecuencia se encuentran en [Aki & Richards \(1980\)](#) y [Dominguez & Abascal \(1984\)](#), respectivamente. Presentamos una formulación equivalente de la función de Green en el dominio de la frecuencia presentada por [Sánchez-Sesma & Luzón \(1995\)](#), expresada por:

¹ (i) $r\Psi$ está acotada y (ii) $r \left(\frac{\partial\Psi}{\partial r} - ik\Psi \right) \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow \infty$, [Sommerfeld \(1954\)](#), pp.199.

$$G_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{4\pi\mu r} \{f_1 \gamma_i \gamma_j + f_2 (\delta_{ij} - \gamma_i \gamma_j)\}. \quad (2.5)$$

y su tensor de tracciones deducido a partir de la ec.(3.4)

$$T_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{4\pi r^2} \{(g_1 - g_2 - 2g_3) \gamma_i \gamma_j \gamma_k n_k + g_2 \gamma_j n_i + g_3 (\gamma_i n_j + \gamma_k n_k \delta_{ij})\}. \quad (2.6)$$

Las funciones $(g_1 - g_2 - 2g_3)$, g_2 , g_3 determinan el sistema de esfuerzos longitudinales, transversales y cortantes, respectivamente, que se aplican en el punto $\boldsymbol{\xi}$. La descripción completa del tensor de Green y la deducción del tensor de tracciones se encuentran detalladamente descritos en el apéndice B.

Se puede apreciar en las ecs.(2.5) y (2.6), singularidades de orden r^{-1} y r^{-2} , dichas singularidades, no pueden ser integradas con los métodos numéricos convencionales de cuadratura Gaussiana, se analizarán los distintos casos de integración en apartados posteriores.

2.3 Formulación matemática del IBEM

En una región Ω con frontera S , $u_i^*(\mathbf{x})$, $u_i(\mathbf{x})$ y $t_i^*(\mathbf{x})$, $t_i(\mathbf{x})$ representan los desplazamientos y tracciones del problema elastodinámico interior y exterior, respectivamente. Estas cantidades son utilizadas dentro de la identidad de Somigliana ec.(2.1) para describir sus representaciones integrales. Suponiendo que ambas soluciones poseen la misma función de Green, se puede obtener la ecuación integral del método indirecto realizando la suma directa entre la ecuación que describe el problema exterior e interior, tal que:

$$C_{ij}(\boldsymbol{\xi}) u_j(\boldsymbol{\xi}) + C_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}) u_j^*(\boldsymbol{\xi}) = \int_S \{(t_i(\mathbf{x}) - t_i^*(\mathbf{x})) G_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) - T_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) (u_i(\mathbf{x}) - u_i^*(\mathbf{x}))\} dS. \quad (2.7)$$

Imponiendo la continuidad del campo de desplazamiento para los puntos que están en la frontera $u_i(\mathbf{x}) = u_i^*(\mathbf{x})$ con base en el estudio de [Kupradze\(1963\)](#), se puede definir la nueva variable $\varphi_i(\mathbf{x}) \equiv t_i(\mathbf{x}) - t_i^*(\mathbf{x})$. Al sustituir $\varphi_i(\mathbf{x})$ dentro de la ec.(2.7) y utilizando la propiedad de simetría de la función de Green, $G_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = G_{ji}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = G_{ji}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})$, se obtiene la representación integral del campo de desplazamiento difractado en $\mathbf{x} \in S \subset \Omega$.

$$u_i(\mathbf{x}) = \int_S G_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \varphi_j(\boldsymbol{\xi}) dS. \quad (2.8)$$

La variable $\varphi_i(\mathbf{x})$ es interpretada como una densidad de fuerza constante que actúa en puntos que yacen sobre la frontera [Bouchon & Sánchez-Sesma\(2007\)](#). Existe una relación directa entre el campo de desplazamientos con la distribución de esfuerzos y tracciones, esto resulta evidente al aplicar la fórmula de Cauchy ec.(2.4) sobre la ec.(2.8) que permite encontrar las tracciones difractadas en el punto $\mathbf{x} \in S \subset \Omega$.

$$t_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \varphi_i(\mathbf{x}) + \int_S T_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \varphi_j(\boldsymbol{\xi}) dS. \quad (2.9)$$

Sin embargo, cuando $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}$ tal que $\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \in S$ se necesita introducir el primer término del lado derecho de la ec.(2.9). Este es el resultado de aplicar una técnica formal de extracción de singularidades que es usada para resolver las ecuaciones integrales hipersingulares (HBIE) de la elasticidad en dos y tres dimensiones, [Guggiani\(1991,1992\)](#).

2.4 Discretización de las Ecuaciones Integrales

La solución de las ecuaciones integrales para el método indirecto nos permite encontrar los valores de las densidades de fuerza $\varphi(\boldsymbol{\xi})$ para todos los puntos $\boldsymbol{\xi}$ que pertenecen a la frontera S . Realizamos una *discretización* aproximando la superficie S en segmentos de área Γ_i tal que $S = \cup_{i=1}^N \Gamma_i$. Se considera para nuestra formulación que $\varphi(\mathbf{x})$ tiene un valor constante dentro de Γ_i . De tal forma que la ecuación discretizada para los desplazamientos es

$$u_i(\mathbf{x}_n) = \sum_{j=0}^N \varphi_j(\boldsymbol{\xi}_l) \int_{\Gamma_i} G_{ij}(\mathbf{x}_n, \boldsymbol{\xi}_l) dS \quad (2.10)$$

y de manera análoga para las tracciones

$$t_i(\mathbf{x}_n) = \sum_{j=0}^N \varphi_j(\boldsymbol{\xi}_l) \left(\frac{1}{2} \delta_{ij} \delta_{nl} + \int_{\Gamma_i} T_{ij}(\mathbf{x}_n, \boldsymbol{\xi}_l) dS \right). \quad (2.11)$$

En general, para el método directo las funciones $\varphi(\mathbf{x})$ son consideradas como funciones de aproximación constante, lineal, cuadrática ó isoparamétrica, [Hartmann\(1989\)](#). En ciertas condiciones en que se formula el problema elastodinámico pueden ser elegidas con arbitrariedad [Shahi & Noorzad\(2011\)](#). Por otra parte, en acoplamientos híbridos BEM-FEM la elección óptima de $\varphi(\mathbf{x})$ resulta ser funciones de Galerkin, [Parreira & Guggiani\(1989\)](#), [Beer & Meek,\(1981\)](#), [Ahmad & Manolis\(1987\)](#).

Las ecuaciones (2.10) y (2.11) tienen el mismo significado que en el algoritmo directo, sin embargo hay que tener en cuenta que los puntos de observación y colocación se han intercambiado. En consecuencia la matriz que se forma a partir de la función de Green es la misma en ambos métodos debido a la propiedad de simetría. Por el contrario las matrices de las tracciones tienen transpuestos los subíndices de las direcciones y los argumentos en que se evalúan, por tanto no coinciden. En la Figura 1 se muestra ambos esquemas de colocación.

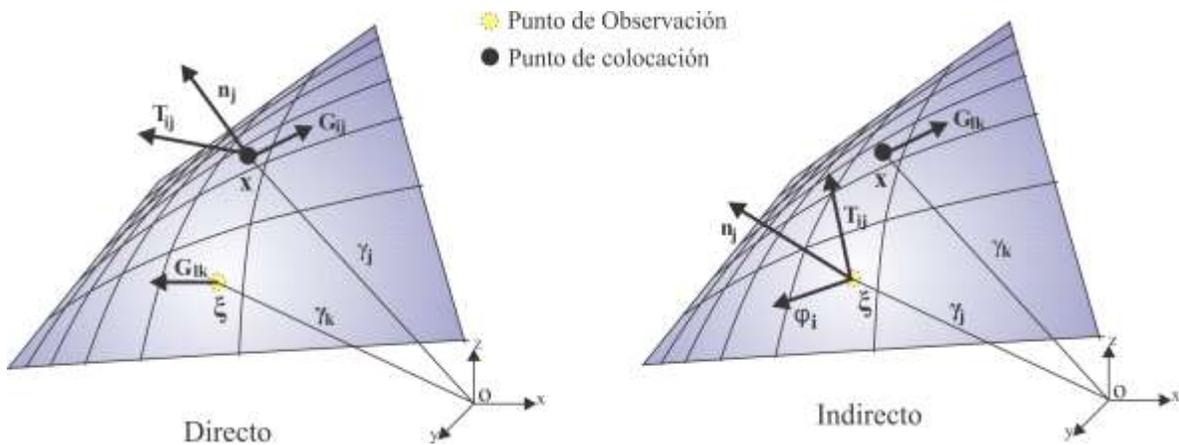


Figura 1. Esquema de colocación para el método directo (izquierda) y el método indirecto (derecha).

2.5 Integración del tensor de Tracciones

La integral en la ec.(2.11) existe y tiene un comportamiento regular para todo valor de \mathbf{x} incluso cuando $\mathbf{r} \rightarrow 0$ ya que la tracción es la proyección de la fuerza sobre el vector normal, el cual es ortogonal a la superficie, esto significa que la integral vale cero y que el valor de la tracción cuando $\mathbf{x}_n = \xi_l$ está dado por:

$$t_i(\mathbf{x}_n) = \pm \frac{1}{2} \delta_{ij} \delta_{nl} \varphi_j(\xi_l) . \quad (2.12)$$

El signo de la ec.(2.12) depende de la orientación del vector normal. Podemos observar en las ecs.(3.14-3.15) que la respuesta dinámica para bajas frecuencias tiende a la solución estática elástica de Kelvin, donde las singularidades son explícitas y se evalúan con las técnicas propuestas por [Guggiani & Casalini \(1987\)](#), obteniendo el mismo resultado que en la ec.(2.12).

$$K_1 = \int_0^{\infty} f_1 dt = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \int_0^{\infty} \delta\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) dt + 2\beta^2 \int_0^{\infty} \int_{1/\alpha}^{1/\beta} \delta(t - kr) k dk dt \quad (2.13)$$

$$= \frac{\beta^2}{\alpha^2} + 2\beta^2 \int_{1/\alpha}^{1/\beta} k dk = 1. \quad (2.14)$$

$$K_2 = \int_0^{\infty} f_2 dt = 1 - \beta^2 \int_{1/\alpha}^{1/\beta} k dk = 1 - \frac{\beta^2}{2} \left[\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\alpha^2} \right] = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2} \right]. \quad (2.15)$$

La interpretación física de este término está asociada a una distribución simétrica de fuerzas que actúan en un punto de la frontera del dominio. Esto por otra parte es idéntico al resultado obtenido por el método directo para los tracciones [Reynoso et al. \(1997\)](#).

Sin embargo la integral de la ec.(2.10) resulta ser singular cuando la distancia entre el punto de observación y colocación tiende a cero $\mathbf{r} \rightarrow 0$ y sólo existe en el sentido de Valor Principal de Cauchy (CPV), en la siguiente sección explicaremos como resolver esta integral a partir de métodos especiales de cálculo.

2.6 Integración de la Función de Green

La influencia de los coeficientes que involucran la integración de la función de Green discreta ec.(2.10) es expresada en términos de integrales de superficie sobre cada punto de colocación. Esta integral contiene una singularidad débil de orden \mathbf{r}^{-1} , donde \mathbf{r} es la distancia euclidiana entre el punto de colocación \mathbf{x} y ξ . Claramente estos puntos están sobre la frontera S del dominio Ω .

2.6.1 Integración regular

El primer caso corresponde cuando el punto ξ está fuera del área de integración del punto de colocación \mathbf{x} , matemáticamente el conjunto de puntos S_1 que satisfacen esta condición se expresa de la siguiente manera:

$$S_1 := \{ \forall \mathbf{x}, \xi \in S \mid \mathbf{x} \in \Gamma_i, \xi \in \Gamma_j, \Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset \}. \quad (2.16)$$

En teoría la integral para los puntos del conjunto S1 es regular y tiene un valor finito que decrece asintóticamente a cero cuando la distancia entre \mathbf{x} y ξ tiende a infinito. En este caso se puede emplear cuadratura Gaussiana para el cálculo numérico de la integral, [Abramowitz & Stegun\(1972\)](#).

2.6.2 Integración cercana a la singularidad

El segundo caso de integración de la función de Green corresponde cuando el punto ξ está dentro del área de integración del punto de colocación \mathbf{x} y la distancia \mathbf{r} entre ambos puntos es distinta de cero, esto provoca un comportamiento cercano a la singularidad de la integral. El conjunto de puntos S2 que definen esta condición es:

$$S2 := \{ \forall \mathbf{x}, \xi \in S \mid \mathbf{x}, \xi \in \Gamma_i \mid \mathbf{x} \neq \xi \} \quad (2.17)$$

La evaluación de la integral para los puntos del conjunto S2 tiene dificultades considerables, pues no se puede realizar numéricamente con los métodos de integración Gaussiana convencionales. Sin embargo, otras técnicas especiales han sido desarrolladas para su evaluación. Por mencionar las más importantes se tienen: el *método de subdivisión* y el *método de transformación de coordenadas*. El primero ha sido discutido en detalle en [Lachat & Watson\(1976\)](#) y [Kane\(1989\)](#), mientras que el segundo ha sido presentado por [Telles\(1987\)](#).

La aproximación numérica para el valor de la integral en este caso se presenta en el Apéndice C, donde se aplica el método de transformación de coordenadas para su evaluación. En resumen, se emplea un factor de ponderación en cada uno de los coeficientes de las soluciones de Stokes (ver Apéndice B), estos términos son integrales elípticas completas de segunda especie para la excentricidad dada por el cociente de la distancia entre el punto \mathbf{x} y ξ entre el valor del radio del círculo.

2.6.3 Integración Singular

La integral de la función de Green es singular cuando se tiene que el punto ξ y el punto de colocación \mathbf{x} coinciden en sus coordenadas espaciales, es decir $\mathbf{r} = 0$. Esta condición es representada por el conjunto de puntos S3 que satisfacen esta condición:

$$S3 := \{ \forall \mathbf{x}, \xi \in S \mid \mathbf{x}, \xi \in \Gamma_j \mid \mathbf{x} = \xi \} \quad (2.18)$$

La integral sólo existe en el sentido del valor principal de Cauchy para el conjunto de puntos S3. En este caso se recurre al método de transformación de coordenadas para evitar la singularidad y encontrar el valor de la integral. En consecuencia se realiza una transformación de coordenadas cartesianas a polares para cada segmento de área Γ_i , tal que:

$$\mathbb{T}: \Gamma_i(x, y, z) \rightarrow R_i(\rho, \theta) \quad (2.19)$$

donde el Jacobiano de la transformación \mathbb{T} remueve la singularidad débil. Por conveniencia, al realizar la discretización de la superficie se elige el espacio donde $G_{ij}(\mathbf{x}, \xi)$ no presenta singularidades. Esta elección tiene un costo numérico pues la discretización de la superficie se realiza con círculos de radio constante con centro en el punto \mathbf{x} , de tal manera que no existe una malla que se tenga que resolver como ocurre en los métodos de dominio. En cambio se tiene un conjunto de puntos de colocación que cubren de forma homogénea la superficie S empleando segmentos de área circulares de radio constante.

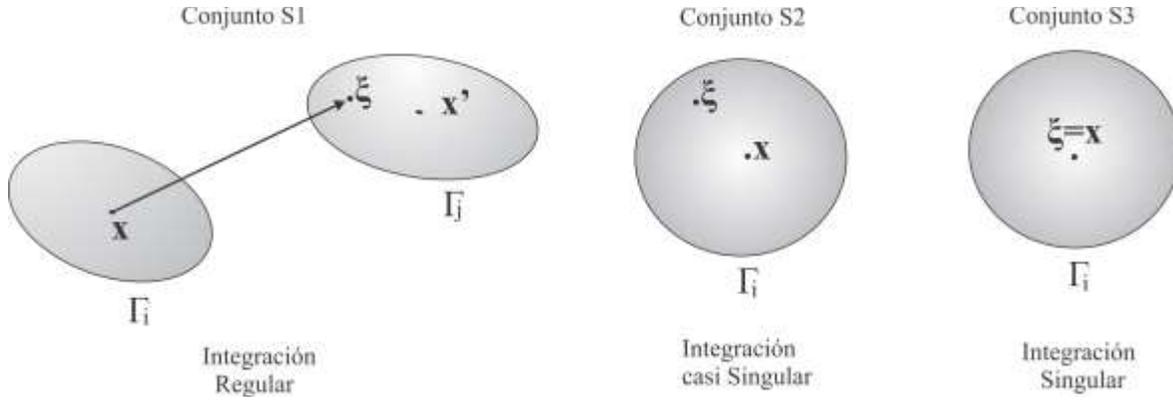


Figura 2. Esquema que representa los tres tipos de integración de la Función de Green utilizando segmentos de área circular Γ_i de radio constante en los puntos de colocación $\mathbf{x} \in S$.

Para cada punto de colocación \mathbf{x} se integran las contribuciones vectoriales de los cosenos directores γ_i dentro del círculo. Para esto, expandimos en serie de Taylor las funciones potenciales de la función de Green (ver Apéndice B) f_1, f_2 hasta tercer orden y se integra respecto a \mathbf{r} cada término. Por tanto el valor numérico de la función de Green ec.(2.5) en el caso singular puede escribirse como

$$G_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{4\mu} \{ (F_1 + F_2) \delta_{ij} + (F_2 - F_1) \gamma_i \gamma_j \} \quad (2.20)$$

donde

$$F_1 = 1 - i \left(2 + \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^3 \right) \frac{kr}{6} - \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^4 \right) \frac{k^2 r^2}{9} + i \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^5 \frac{k^3 r^3}{24} \quad (2.21)$$

y

$$F_2 = \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 \right) - i \left(2 + \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^3 \right) \frac{kr}{6} - \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^4 \right) \frac{k^2 r^2}{9} + i \frac{k^3 r^3}{24} \quad (2.22)$$

La integración de la función de Green es un interludio numérico que se realiza una sola vez, esto representa una ventaja cuando se emplea para resolver problemas con distinta configuración por ejemplo para problemas de grietas, [Iturrarán-Viveros et al., \(2008\)](#), [Rodríguez-Castellanos et al., \(2006\)](#), para interfaces sólido-líquido [Rodríguez-Castellanos et al., \(2011\)](#), valles aluviales con gradiente de velocidad vertical [Luzón et al., \(2009\)](#), topografías irregulares [Ortiz-Alemán et al., \(1998\)](#), y respuesta sísmica de valles aluviales [Sánchez-Sesma & Luzón \(1995\)](#). En particular analizaremos estos dos últimos casos con detenimiento en las secciones siguientes.

2.7 Difracción de ondas elásticas

La expresión matemática para encontrar el campo de desplazamientos totales \mathbf{u} para un semiespacio ante la incidencia de ondas sísmicas es la misma que se presentó en [Bielak & Christiano \(1984\)](#), en la cual la única incógnita es el campo difractado

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^0(\mathbf{x}) + \mathbf{u}^r(\mathbf{x}), \quad (2.23)$$

donde \mathbf{u}^0 es el campo de desplazamientos incidente más el reflejado en una superficie libre y \mathbf{u}^r es el campo difractado por la irregularidad dentro del semiespacio.

Para calcular el campo difractado de desplazamientos utilizamos la ec.(2.10), mientras que para encontrar la solución de referencia se emplean los coeficientes de amplitud para las ondas incidentes dentro de las ecuaciones para los potenciales de ondas planas P-SV y para la incidencia de ondas de Rayleigh. Las tracciones se calculan de manera análoga a los desplazamientos ec.(2.23)

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}) = \mathbf{t}^0(\mathbf{x}) + \mathbf{t}^r(\mathbf{x}). \quad (2.24)$$

Para encontrar \mathbf{t}^0 se calculan los esfuerzos y se aplica la ley de Cauchy de las tracciones utilizando los vectores normales a la superficie para cada punto. Por otra parte empleamos el tensor de tracciones ec.(2.11) para determinar \mathbf{t}^r .

2.8 Atenuación

Una forma de introducir la atenuación en un problema de propagación de ondas, es convertir algunos de sus parámetros en cantidades complejas ver por ejemplo, [Ewing et al., \(1957\)](#), [Schwab & Knopoff \(1971\)](#). La atenuación de las ondas de cuerpo puede ser expresada tomando los valores complejos para las velocidades de las ondas P y S $\alpha' = \alpha + i\alpha^*$ y $\beta' = \beta + i\beta^*$. Donde la atenuación de las ondas de cuerpo es medido a partir de las amplitudes a varias distancias, las partes imaginarias de las velocidades están relacionadas con el factor de calidad espacial Q_e .

El factor de calidad Q_e se define como el decremento de la máxima amplitud sobre una longitud de onda. Para ondas P y S podemos definir los factores de calidad de la siguiente manera:

$$\frac{1}{Q_\alpha} = \frac{2\alpha^*}{\alpha}, \quad (2.25)$$

$$\frac{1}{Q_\beta} = \frac{2\beta^*}{\beta}. \quad (2.26)$$

Entonces las velocidades complejas pueden ser expresadas en términos de su correspondiente factor de calidad Q

$$\alpha' = \alpha \left(1 + \frac{i}{2Q_\alpha} \right) \quad (2.27)$$

$$\beta' = \beta \left(1 + \frac{i}{2Q_\beta} \right) \quad (2.28)$$

Claramente cuando no hay atenuación cuando $Q_e = \infty$ lo que implica la velocidad usual. Las ecuaciones (2.52-2.53) proveen una manera práctica de introducir la atenuación en el cálculo de sismogramas sintéticos ver por ejemplo [Ganley \(1981\)](#), aunque no se incluye la dispersión.

En muchos problemas sismológicos se considera que no hay disipación de energía en procesos de compresión y por tanto el factor de calidad para el módulo de Bulk $Q_k = \infty$. Con esta hipótesis y $Q_\beta^{-1} = Q_\mu^{-1}$ se puede obtener la relación

$$\frac{1}{Q_\alpha} = \frac{4}{3} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 \frac{1}{Q_\beta} \quad (2.29)$$

Para un sólido de Poisson ($\nu = 0.25$) la ec.(3.54) se convierte en $Q_\alpha = \frac{2}{4}Q_\beta$, [Udías \(1999\)](#).

2.9 Visualización

La descripción geométrica de un sólo punto de colocación que pertenece a la frontera está determinado por las coordenadas espaciales del centro del círculo \mathbf{x} , el vector normal $\hat{\mathbf{n}}$ y el radio de la circunferencia R . Para encontrar la representación gráfica de dicho punto en el espacio primero suponemos que el centro \mathbf{x} coincide con un sistema local de coordenadas cartesianas S' , luego se toma un punto $\boldsymbol{\eta}$ que pertenece al perímetro del círculo y se efectúa una rotación alrededor de su vector normal. Posteriormente, se realiza la traslación a los ejes coordenados del sistema global S , este procedimiento se muestra en la Figura 3.

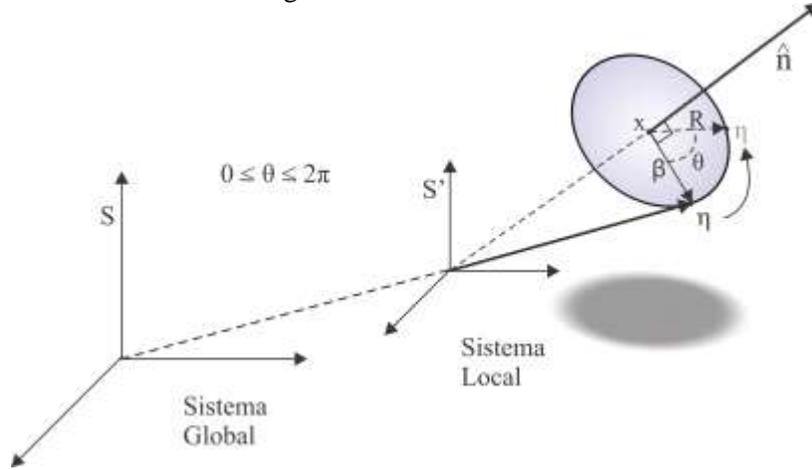


Figura 3. Construcción geométrica del área de integración para un punto de colocación \mathbf{x} .

Cuando se conocen los valores de \mathbf{x} y $\hat{\mathbf{n}}$ se puede encontrar un punto $\boldsymbol{\eta}$ que pertenezca al perímetro del círculo. En el caso en que $\hat{\mathbf{n}}$ está alineado con alguno de los ejes coordenados la rotación que se tiene que realizar es canónica, [Friedberg et al., \(2003\)](#). En cambio, cuando el vector normal tiene una dirección arbitraria, se utiliza la condición de producto interior $\boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$.

Existen distintas combinaciones para elegir la dirección del vector $\boldsymbol{\beta}$, en este análisis elegimos una configuración sencilla que al ser multiplicada por el radio del círculo R , nos permite encontrar las coordenadas del punto $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\beta}R$ donde $\boldsymbol{\beta} = \left(-\frac{1}{n_1}, \frac{1}{2n_2}, \frac{1}{2n_3}\right)$, [Lehman \(2008\)](#).

Una vez conocido el punto $\boldsymbol{\eta}$ se aplica la matriz de rotación con respecto a un eje con dirección arbitraria. Esta matriz se define como un *cuaternion simétrico*, [Baker, PhD, \(1911\)](#) que es utilizado en el procesamiento de imágenes digitales, [Newman & Sproull \(1979\)](#) y se expresa de la siguiente manera

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} n_1^2\theta + \cos\theta & n_1n_2\theta - n_3\sin\theta & n_1n_3\theta + n_2\sin\theta \\ n_1n_2\theta + n_3\sin\theta & n_2^2\theta + \cos\theta & n_2n_3\theta - n_1\sin\theta \\ n_1n_3\theta - n_2\sin\theta & n_2n_3\theta + n_1\sin\theta & n_3^2\theta + \cos\theta \end{bmatrix}, \quad (2.30)$$

donde $\hat{\mathbf{n}} = (n_1, n_2, n_3)$ y $\theta = 1 - \cos\theta$ para $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Al multiplicar la matriz de rotación por el punto $\boldsymbol{\eta}$ obtenemos el círculo que representa el área de integración.

Capítulo 3.

Optimización Numérica del IBEM

“... Dios hizo los números enteros el resto es obra del hombre”

Leopold Kronecker

En capítulos anteriores se estableció la formulación integral de las tracciones y desplazamientos, así como su significado matemático en la propagación de ondas en un medio continuo elástico homogéneo y lineal. En el presente capítulo utilizamos el Método Indirecto de Elementos en la Frontera (IBEM) para resolver numéricamente problemas de distinta naturaleza: *topografía, valle aluvial y valle aluvial con topografía*. En tales casos las condiciones de frontera definen completamente las ecuaciones que rigen el problema físico.

Al aumentar el número de puntos de colocación en la discretización los resultados numéricos obtenidos con el método IBEM adquieren mejor exactitud. Esto implica un aumento de memoria RAM y tiempo de cómputo. Por dicha razón optimizamos el método con técnicas numéricas como la *condensación estática* y teoremas de la teoría de matrices, en particular, el *complemento de Schur*, para reducir el manejo de la memoria y el tiempo de cálculo en nuestros problemas.

3.1 Difracción de ondas sísmicas para topografías

Nuestro análisis comienza con el caso más sencillo en un semiespacio elástico, en el cual su frontera está formada por una parte plana ∂E y una parte irregular ∂R que representa la topografía irregular. En este apartado y en los posteriores definiremos M como el número de puntos que pertenecen a la frontera plana sin irregularidad y L el número de puntos que están sobre la irregularidad. Por lo tanto la frontera del dominio $\partial\Omega = \partial E \cup \partial R$ contiene $N = M + L$ puntos.

Las ecuaciones básicas para resolver problemas de difracción elástica con el método IBEM están sujetas a las condiciones de frontera para tracciones y desplazamientos en uno ó varios medios elásticos. En este caso existen sólo tracciones libres para la región Ω expresadas por

$$\mathbf{x} \in \partial E \quad \mathbf{t}^{E^+}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}. \quad (3.1)$$

$$\mathbf{x} \in \partial R \quad \mathbf{t}^{R_0}(\mathbf{x}) + \mathbf{t}^{R^+}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}. \quad (3.2)$$

La solución de referencia \mathbf{t}^0 forma el vector del lado derecho de la ec.(3.2) que corresponde a la solución de campo libre para la irregularidad. Entonces el sistema de ecuaciones está dado por

$$\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \varphi_j(\xi_l) \left(\frac{1}{2} \delta_{ij} \delta_{nl} + \int_{\Gamma_i} T_{ij}(\mathbf{x}_n, \xi_l) \, dS \right) = 0, \quad (3.3)$$

$$\sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^N \varphi_j(\xi_l) \left(\frac{1}{2} \delta_{ij} \delta_{nl} + \int_{\Gamma_i} T_{ij}(\mathbf{x}_n, \xi_l) \, dS \right) = -t_i^{R_0}(\mathbf{x}_n). \quad (3.4)$$

Considerando la densidad de fuerza $\varphi_j(\xi)$ constante dentro del área del círculo Γ_i implica que el sistema será formado por las componentes de las tracciones entre cada punto de colocación \mathbf{x}_i y las contribuciones de los puntos frontera ξ_j expresadas por la siguiente ecuación como

$$\sum_{j=1}^N \varphi_j(\xi_l) T_{ij}(\mathbf{x}_n, \xi_l) dS_\xi = 0, \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (3.5)$$

$$\sum_{j=1}^N \varphi_j(\xi_l) T_{ij}(\mathbf{x}_n, \xi_l) dS_\xi = -t_i^{R_0}(\mathbf{x}), \quad i = 1, 2, \dots, L \quad (3.6)$$

donde cada término T_{ij} es una matriz de tamaño 3×3 dada por

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix}_{ij} \quad i \neq j, \quad T_{ii} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{ii} \quad i = j, \quad (3.7)$$

$$\varphi_j = \begin{bmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \\ \varphi_z \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad -t_i^{R_0} = - \begin{bmatrix} t_x^{R_0} \\ t_y^{R_0} \\ t_z^{R_0} \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

El esquema de colocación de la ec.(3.3-3.4) se muestra en la Figura 1, en donde para cada punto $\mathbf{x} \in S$ se debe calcular T_{ij} entre los puntos \mathbf{x}_i y ξ_j donde $i, j = 1, 2, \dots, N$ formando una matriz diagonal cuando $i = j$ y una matriz llena cuando $i \neq j$, ec.(3.7). El tamaño de la matriz global es de $3N \times 3N$. En general, esta matriz no es simétrica y sus elementos son distintos para cada valor de la frecuencia.

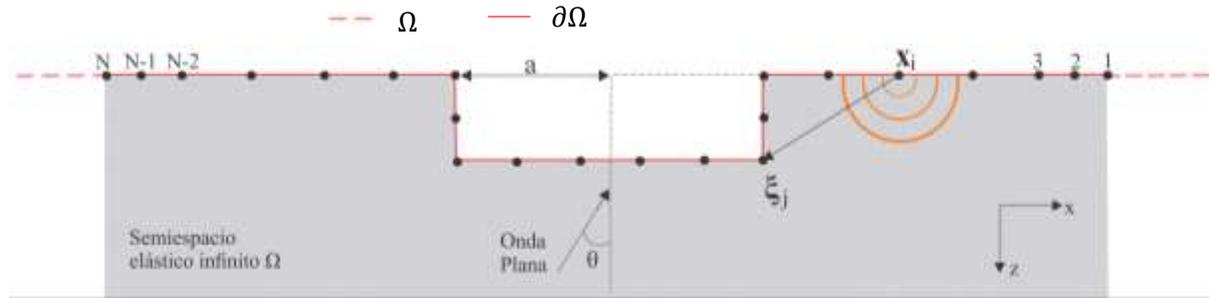


Figura 1. Esquema de colocación para formar el sistema de ecuaciones ec.(3.3-3.4) por medio de las tracciones entre los puntos \mathbf{x}_i y ξ_j . Se muestra el ángulo θ para la incidencia de ondas planas sobre la topografía. La línea roja representa la frontera discretizada $\partial\Omega$ mientras que la línea punteada es el semiespacio elástico Ω no acotado. En cada punto de colocación \mathbf{x}_i se asocia una densidad de fuerza que emite ondas en todas direcciones y que se mide en el punto ξ_j . Se muestra la longitud de onda característica a de la topografía.

El sistema de ecuaciones para la topografía ecs.(3.3-3.4) puede tener distintas distribuciones de sus elementos como se muestra en la Figura 2. Para realizar un análisis espectral es suficiente colocar 6 puntos por longitud de onda característica a por cada frecuencia normalizada η [Sánchez-Sesma & Campillo \(1991\)](#), definida como

$$\eta = \frac{\omega a}{\pi \beta}, \quad (3.9)$$

donde β es la velocidad de la onda S en el semiespacio. Es posible obtener ventajas numéricas a partir de un análisis asintótico para los valores de las tracciones T_{ij} que decaen rápidamente con la distancia en un orden de $O(1/r^2)$, Bouchon et al., (1995), despreciando los términos menores a un valor fijo porcentual de filtrado ε para la matriz global. Para esta aproximación se eliminan los elementos que se localizan fuera del radio

$$r \approx \frac{\pi\eta}{\varepsilon N_b}, \quad (3.10)$$

respecto del punto donde se evalúan las tracciones. En la ec.(3.10) N_b es el número total de elementos y $\eta = \eta_{max}$ es la frecuencia máxima para la discretización. Aplicando la ec.(3.10) sobre la matriz global se obtiene una matriz dispersa como se muestra en la Figura 2, esto optimiza el uso de memoria RAM y disminuye el tiempo de cómputo. El ahorro de memoria reportado en Ortiz-Alemán & Sánchez-Sesma (1998) alcanzó hasta el 80% para una topografía con $N = 639$ puntos.

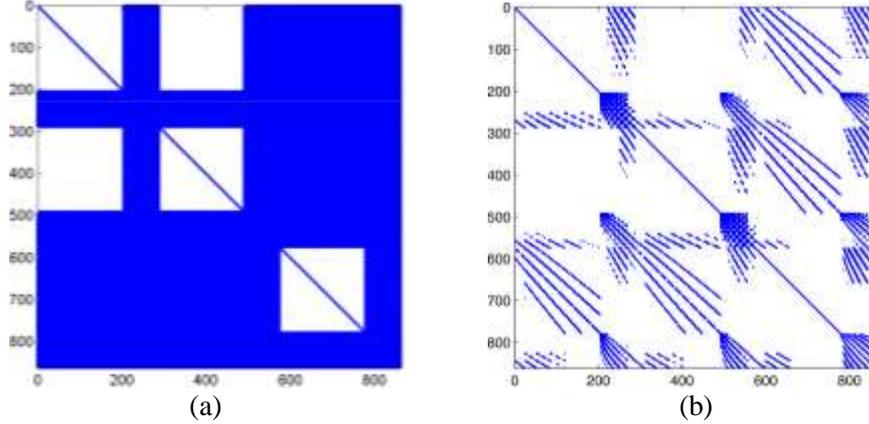


Figura 2. Matriz formada para calcular la topografía de un cañón semiesférico con $N=287$ puntos. (a)Matriz completa.(b) Matriz dispersa con $\varepsilon = 0.07$ para $\eta = 1$.

Una vez obtenidas las densidades φ_j se calcula el campo de desplazamientos difractado \mathbf{u}^r en cada uno de los receptores N_r realizando el producto tensorial con la función de Green

$$u_i^r = \sum_{j=1}^{N_r} G_{ij}(\mathbf{x}, \xi) \varphi_j(\xi) , \quad j = 1,2,3 \dots N. \quad (3.11)$$

Por último se calcula el campo de desplazamientos total sumando la solución de campo libre \mathbf{u}^0 más el campo difractado \mathbf{u}^r ec.(3.11) para cada receptor.

$$u_i(\mathbf{x}) = u_i^{R_0}(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{N_r} G_{ij}(\mathbf{x}, \xi) \varphi_j(\xi) , \quad j = 1,2,3 \dots N. \quad (3.12)$$

3.2 Difracción de ondas sísmicas para valles aluviales

En este análisis, añadimos una nueva región $\Omega_1 = \partial K \cup \partial R$ donde la frontera ∂K es introducida como la irregularidad en superficie mientras que la frontera ∂R fue definida en la sección anterior como la irregularidad en el semiespacio elástico $\Omega = \partial E \cup \partial R$. En la Figura 3 se muestra el esquema de colocación para las fronteras del valle aluvial. En este apartado nos referiremos a la interfaz como la frontera ∂R que comparte el semiespacio y la irregularidad.

El número de puntos que forman las fronteras ∂E , ∂R y ∂K son M , L y S , respectivamente. Por tanto el número total de puntos que forman la discretización son $N = M + 2L + S$.

Las condiciones de frontera que rigen el problema de difracción elástica son las tracciones libres para las fronteras ∂K y ∂E y la continuidad de desplazamientos y tracciones para la interfaz ∂R .

$$\mathbf{x} \in \partial E \quad \mathbf{t}_{\Omega}^{E+}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad (3.13)$$

$$\mathbf{x} \in \partial K \quad \mathbf{t}_{\Omega}^{K-}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad (3.14)$$

$$\mathbf{x} \in \partial R \quad \mathbf{t}^{R_0}(\mathbf{x}) + \mathbf{t}_{\Omega}^{R+}(\mathbf{x}) = \mathbf{t}_{\Omega_1}^{R+}(\mathbf{x}), \quad (3.15)$$

$$\mathbf{x} \in \partial R \quad \mathbf{u}^{R_0}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}_{\Omega}^{R+}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_{\Omega_1}^{R+}(\mathbf{x}). \quad (3.16)$$

El signo del vector normal esta expresado por el superíndice + ó -. Sustituyendo las ec.(2.10-2.11) en las ecs.(3.13-3.16) y considerando las ecs.(2.23-2.24) se pueden establecer las siguientes ecuaciones integrales para cada una de las fronteras:

$$\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^{M+L} \varphi_j^E(\xi_l) \left(\frac{1}{2} \delta_{ij} \delta_{nl} + \int_{\partial E} T_{ij}^E(\mathbf{x}_n, \xi_l) dS_{\xi} \right) = 0, \quad (3.17)$$

$$\sum_{i=1}^S \sum_{j=1}^{L+S} \varphi_j^K(\xi_l) \left(-\frac{1}{2} \delta_{ij} \delta_{nl} + \int_{\partial K} T_{ij}^K(\mathbf{x}_n, \xi_l) dS_{\xi} \right) = 0, \quad (3.18)$$

$$\sum_{i=1}^L \left(\sum_{j=1}^{M+L} \varphi_j^R(\xi_l) \int_{\partial R} G_{ij}^R(\mathbf{x}_n, \xi_l) dS_{\xi} - \sum_{j=1}^{L+S} \varphi_j^R(\xi_l) \int_{\partial R} G_{ij}^R(\mathbf{x}_n, \xi_l) dS_{\xi} \right) = -u_i^{R_0}(\mathbf{x}_n). \quad (3.19)$$

$$\sum_{i=1}^L \left[\sum_{j=1}^{M+L} \varphi_j^R(\xi_l) \left(\frac{1}{2} \delta_{ij} \delta_{nl} + \int_{\partial R} T_{ij}^R(\mathbf{x}_n, \xi_l) dS_{\xi} \right) - \sum_{j=1}^{L+S} \varphi_j^R(\xi_l) \left(\frac{1}{2} \delta_{ij} \delta_{nl} + \int_{\partial R} T_{ij}^R(\mathbf{x}_n, \xi_l) dS_{\xi} \right) \right] = -t_i^{R_0}(\mathbf{x}_n). \quad (3.20)$$

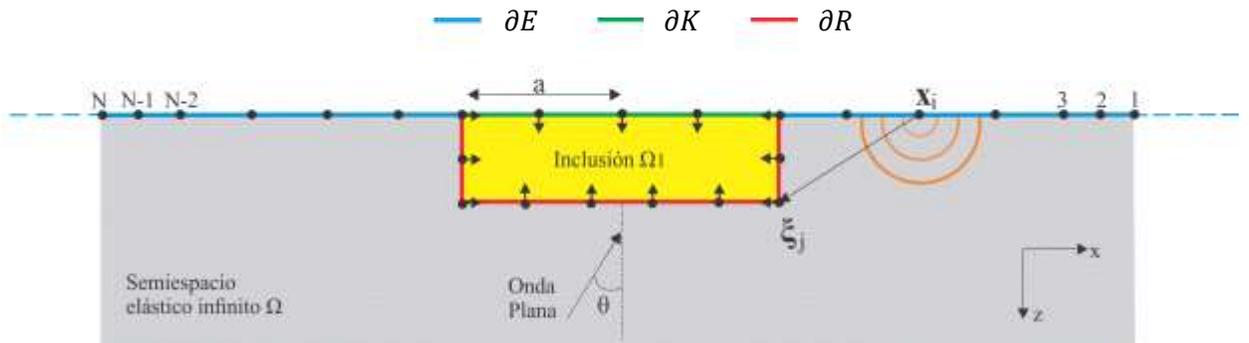


Figura 3. Esquema de colocación para un valle aluvial. La inclusión irregular (amarillo) tiene como fronteras ∂K (línea verde) y ∂R (línea roja) y sus vectores normales están indicados como flechas que apuntan hacia el interior de esta región. El semiespacio (gris) está formado por la unión de las fronteras ∂R y ∂E (línea azul). La frontera que está en la interfaz de ambas regiones comparte la misma orientación del vector normal. Se muestra el ángulo de incidencia de ondas planas y la longitud de onda característica a del valle.

Posteriormente se calcula el campo de desplazamientos difractado \mathbf{u}^R realizando el producto tensorial entre las densidades φ_j y la función de Green. Cuando el receptor se encuentra en la frontera ∂E le corresponde la función de Green del semiespacio G_{ij}^Ω y cuando se encuentra en la frontera ∂K le corresponde la función de Green para la inclusión elástica $G_{ij}^{\Omega_1}$. Por último se suma la solución de referencia sólo a los receptores que se encuentran en el semiespacio N_r^Ω para encontrar el campo de desplazamientos total.

$$x \in \partial E \quad u_i(\mathbf{x}) = u_i^{R_0}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{N_r^\Omega} G_{ij}^\Omega(\mathbf{x}, \xi) \varphi_j(\xi) \quad , \quad j = 1, 2, \dots, M + L \quad (3.21)$$

$$x \in \partial K \quad u_i(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_r^{\Omega_1}} G_{ij}^{\Omega_1}(\mathbf{x}, \xi) \varphi_j(\xi) \quad j = 1, 2, \dots, L + S. \quad (3.22)$$

3.3 Modelo de valle aluvial con topografía

Cuando se añade una nueva frontera topográfica al valle aluvial presentado en la sección anterior se obtiene el modelo de valle aluvial con topografía, en el que las condiciones de frontera son las mismas que en la sección anterior junto con la condición de tracciones libres para la frontera con topografía irregular ∂T que pertenece al semiespacio; $\partial\Omega = \partial E \cup \partial R \cup \partial T$. Mientras, la frontera de la inclusión elástica está dada por $\partial\Omega_1 = \partial K \cup \partial R$ como se muestra en el esquema de la Figura 4.

El número de puntos para la frontera ∂T es P , de tal forma que el sistema tiene $N = M + 2L + S + P$ ecuaciones con tres grados de libertad cada una. Por tanto el tamaño total de la matriz es $3N \times 3N$. Observamos que la interfaz ∂R tiene el doble de puntos y esta definida por las ecuaciones siguientes:

$$x \in \partial E \quad \mathbf{t}_\Omega^{E+}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad (3.23)$$

$$x \in \partial K \quad \mathbf{t}_\Omega^{K-}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad (3.24)$$

$$x \in \partial T \quad \mathbf{t}^{T_0}(\mathbf{x}) + \mathbf{t}_\Omega^{T+}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad (3.25)$$

$$x \in \partial R \quad \mathbf{t}^{R_0}(\mathbf{x}) + \mathbf{t}_\Omega^{R+}(\mathbf{x}) = \mathbf{t}_{\Omega_1}^{R+}(\mathbf{x}), \quad (3.26)$$

$$x \in \partial R \quad \mathbf{u}^{R_0}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}_\Omega^R(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_{\Omega_1}^R(\mathbf{x}). \quad (3.27)$$

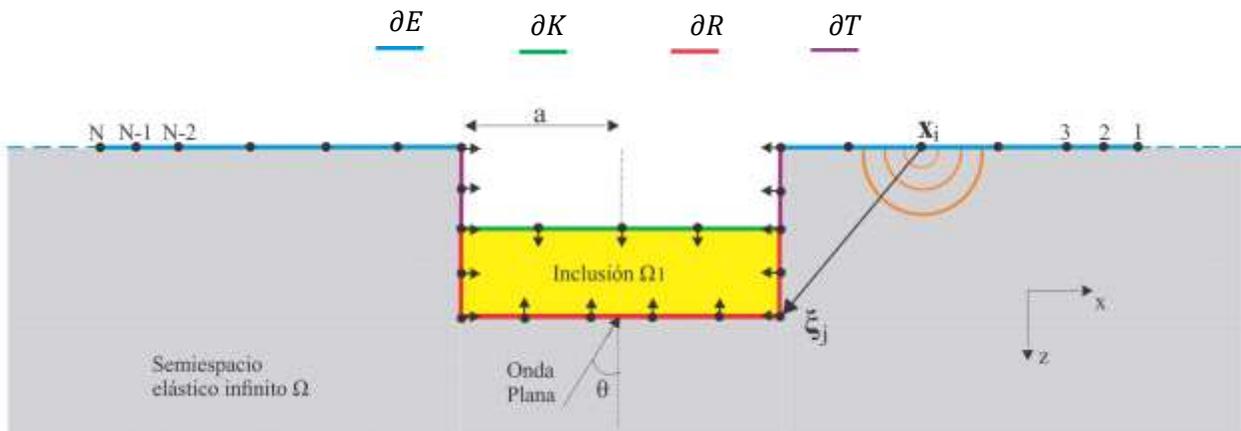


Figura 4. Esquema de colocación para un valle aluvial con topografía. Se muestran los mismos parámetros que en la Figura 3 y se incluye una nueva frontera topográfica ∂T al semiespacio $\partial\Omega = \partial E \cup \partial R \cup \partial T$.

$$\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^{M+L+P} \varphi_j^E(\xi_l) \left(\frac{1}{2} \delta_{ij} \delta_{nl} + \int_{\partial E} T_{ij}^E(\mathbf{x}_n, \xi_l) dS_\xi \right) = 0, \quad (3.28)$$

$$\sum_{i=1}^S \sum_{j=1}^{L+S} \varphi_j^K(\xi_l) \left(-\frac{1}{2} \delta_{ij} \delta_{nl} + \int_{\partial K} T_{ij}^K(\mathbf{x}_n, \xi_l) dS_\xi \right) = 0, \quad (3.29)$$

$$\sum_{i=1}^P \sum_{j=1}^{M+L+P} \varphi_j^T(\xi_l) \left(\frac{1}{2} \delta_{ij} \delta_{nl} + \int_{\partial T} T_{ij}^T(\mathbf{x}_n, \xi_l) dS_\xi \right) = -t_i^{T_0}(\mathbf{x}_n), \quad (3.30)$$

$$\sum_{i=1}^L \left(\sum_{j=1}^{M+L+P} \varphi_j^R(\xi_l) \int_{\partial R} G_{ij}^R(\mathbf{x}_n, \xi_l) dS_\xi - \sum_{j=1}^{L+S} \varphi_j^R(\xi_l) \int_{\partial R} G_{ij}^R(\mathbf{x}_n, \xi_l) dS_\xi \right) = -u_i^{R_0}(\mathbf{x}_n). \quad (3.31)$$

$$\sum_{i=1}^L \left[\sum_{j=1}^{M+L+P} \varphi_j^R(\xi_l) \left(\frac{1}{2} \delta_{ij} \delta_{nl} + \int_{\partial R} T_{ij}^R(\mathbf{x}_n, \xi_l) dS_\xi \right) - \sum_{j=1}^{L+S} \varphi_j^R(\xi_l) \left(\frac{1}{2} \delta_{ij} \delta_{nl} + \int_{\partial R} T_{ij}^R(\mathbf{x}_n, \xi_l) dS_\xi \right) \right] = -t_i^{R_0}(\mathbf{x}_n). \quad (3.32)$$

Observamos que en las ecuaciones (3.28),(3.31) y (3.32) aumenta en P, el número de puntos que pertenecen a la frontera ∂T en comparación a las ecuaciones (3.17),(3.19) y (3.20) para el modelo de valle aluvial. Note que en la ecuacion (3.30) la solución de referencia está formada por los puntos de la frontera topográfica que la constituyen $t_i^{T_0}(\mathbf{x}_n)$ y no por los puntos de la interfaz $t_i^{R_0}(\mathbf{x}_n)$ entre el semiespacio y la inclusión elástica.

3.4 Condensación Estática

Al formar el sistema de ecuaciones descrito por las ecs.(3.1-3.2) para la topografía y el valle aluvial ecs.(3.13-3.16) se obtiene una configuración de la matriz global que no aprovecha al máximo las propiedades de las submatrices que la constituyen. Cuando se aplica la técnica de condensación estática a la matriz IBEM original (ver Figura 2 y 5) se obtiene una estructura optimizada de la matriz con bloques bien definidos y bloques vacíos que permiten resolver la matriz global por medio de sistemas más compactos, obteniendo un mejor aprovechamiento de la memoria RAM y velocidad de cómputo, [Gil-Zepeda,\(2005\)](#).

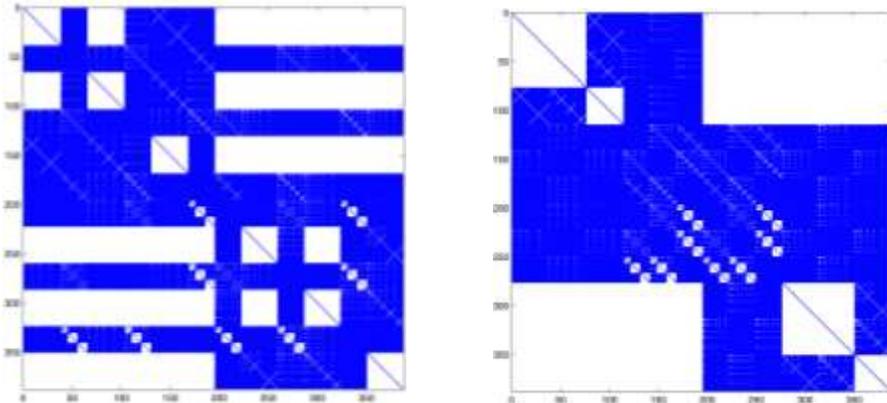


Figura 5. Sistema de ecuaciones para calcular la respuesta dinámica de un valle aluvial subdividido por las tres regiones $M = 38, K = 27, L = 37$. (izquierda) Matriz original IBEM [Sánchez-Sesma & Luzón \(1995\)](#). (derecha) Matriz condensada propuesta por [Gil-Zepeda et al.,\(2002\)](#).

En las siguientes dos secciones presentamos la formulación para la condensación estática de topografías y valles aluviales. Implementando algoritmos de descomposición de dominio que aprovechan al máximo la configuración de los bloques de matrices.

3.4.1 Condensación estática para topografía

Empezamos encontrando las matrices condensadas de las ecuaciones (3.1-3.2) para la respuesta sísmica de una topografía

$$\begin{aligned} x \in \partial E & \quad \mathbf{t}^{E^+}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ x \in \partial R & \quad \mathbf{t}^{R^+}(\mathbf{x}) = -\mathbf{t}^{R_0} \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{t}_{MM} & \mathbf{t}_{ML} \\ \mathbf{t}_{LM} & \mathbf{t}_{LL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_M \\ \varphi_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{t}^{R_0} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Luego resolvemos el sistema de ecuaciones siguiente

$$[\mathbf{t}_{MM}][P_1] = [\mathbf{t}_{ML}] \quad (3.34)$$

y encontramos el sistema reducido S_1 y su solución φ_L

$$S_1 = [\mathbf{t}_{LL}] - [\mathbf{t}_{LM}][P_1], \quad (3.35)$$

$$[S_1][\varphi_L] = -\mathbf{t}^{R_0}. \quad (3.36)$$

Posteriormente obtenemos el vector solución φ_L que está definido por

$$\varphi_M = -P_1 \varphi_L \quad (3.37)$$

En este algoritmo se tiene que resolver las matrices $\mathbf{t}_{MM} \in \mathbb{C}^{3M \times 3M}$ y $S_1 \in \mathbb{C}^{3L \times 3L}$ por separado, lo que reduce el uso de memoria y el tiempo de cómputo que es mucho menor que al resolver la matriz completa.

3.4.2 Complemento de Schur para topografía

Es posible optimizar algunos pasos intermedios de este algoritmo conociendo la estructura de las submatrices que forman la matriz global. Primero se obtiene el complemento de Schur para invertir la matriz \mathbf{t}_{MM} dividiéndola en los bloques que se muestran la Figura 6. El bloque A y D son diagonales mientras que B y C son antisimétricos pero contienen dos sub-bloques simétricos cada uno. En estos sub-bloques los valores de la parte triangular superior tienen signo contrario con respecto a la parte triangular inferior.

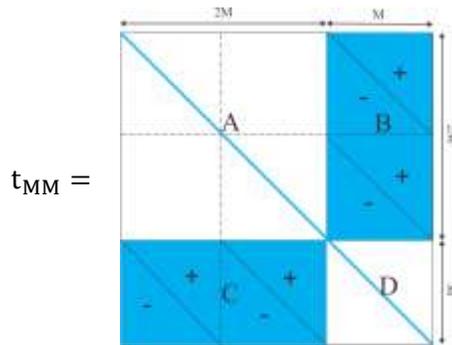


Figura 6. Estructura de la matriz \mathbf{t}_{MM} . Se puede apreciar claramente los sub-bloques A, B, C y D, en los cuales A y D son diagonales mientras que los bloques B y C son antisimétricos por el signo.

Cuando $A \in \mathbb{C}^{2M \times 2M}$ es una matriz compleja no singular se puede calcular \mathbf{t}_{MM}^{-1} si y sólo si existe la matriz inversa del complemento de Schur $S = D - CA^{-1}B$ de A en \mathbf{t}_{MM} , utilizando la siguiente expresión, [Benítez & Thome, 2006](#):

$$\mathbf{t}_{MM}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{S}^{-1} \\ -\mathbf{S}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{S}^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Observamos que para encontrar \mathbf{t}_{MM}^{-1} se necesita calcular las sub-matrices inversas \mathbf{A}^{-1} y \mathbf{S}^{-1} . La primera es diagonal lo que implica que su inversa es el recíproco de los valores en la diagonal y se puede almacenar en un vector de tamaño $2M$. La segunda matriz es simétrica permitiendo aplicar nuevamente el complemento de Schur para ser invertida. Esto disminuye dramáticamente el uso de memoria, y es ideal para discretizaciones que tienen una mayor cantidad de puntos de colocación en el semiespacio. El uso de memoria se reduce al 55% y la velocidad de resolución de las matrices del IBEM disminuye al 45% sin importar las características del ordenador. En la Figura 7 se muestra el número de coeficientes almacenados y el tiempo de resolución respecto al tamaño de la matriz que aumenta al doble de tamaño en cada punto.

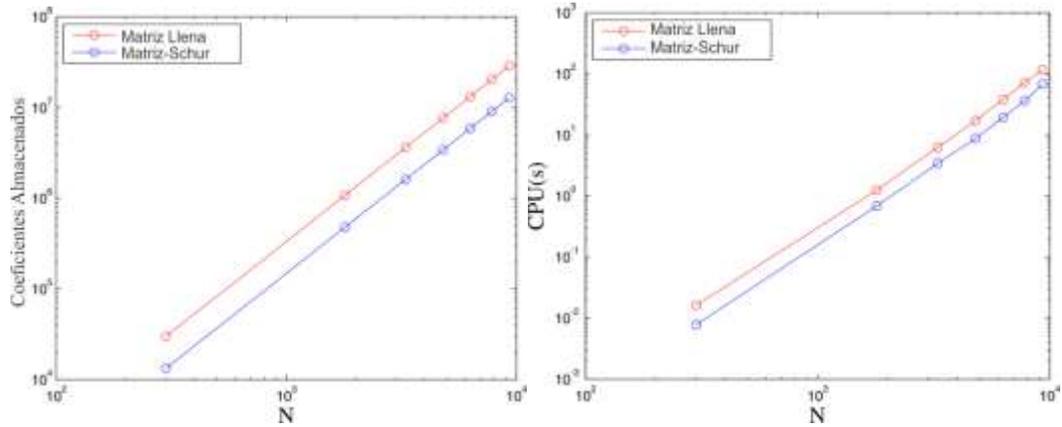


Figura 7. Se muestra el número de coeficientes almacenados y tiempo de resolución del sistema de ecuaciones lleno y con la técnica de Schur.

3.4.3 Condensación estática para valles aluviales

Realizamos la forma condensada de las ecuaciones (3.13-3.16) e identificamos las regiones del semiespacio (gris) y la inclusión elástica (amarillo) de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_{\Omega}^{\mathbf{E}^-}(\mathbf{x}) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{t}^{\mathbf{R}_0}(\mathbf{x}) + \mathbf{t}_{\Omega}^{\mathbf{R}^+}(\mathbf{x}) &= \mathbf{t}_{\Omega_1}^{\mathbf{R}^+}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{u}^{\mathbf{R}_0}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}_{\Omega}^{\mathbf{R}}(\mathbf{x}) &= \mathbf{u}_{\Omega_1}^{\mathbf{R}}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{t}_{\Omega}^{\mathbf{K}^-}(\mathbf{x}) &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} T_{M_{\Omega}M_{\Omega}} & T_{M_{\Omega}L_{\Omega}} & \mathbf{0}_{M_{\Omega}L_{\Omega_1}} & \mathbf{0}_{M_{\Omega}S_{\Omega_1}} \\ T_{L_{\Omega}M_{\Omega}} & T_{L_{\Omega}L_{\Omega}} & T_{L_{\Omega_1}L_{\Omega_1}} & T_{L_{\Omega_1}S_{\Omega_1}} \\ G_{L_{\Omega}M_{\Omega}} & G_{L_{\Omega}L_{\Omega}} & G_{L_{\Omega_1}L_{\Omega_1}} & G_{L_{\Omega_1}S_{\Omega_1}} \\ \mathbf{0}_{S_{\Omega}M_{\Omega}} & \mathbf{0}_{S_{\Omega}L_{\Omega}} & T_{S_{\Omega_1}L_{\Omega_1}} & T_{S_{\Omega_1}S_{\Omega_1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{M_{\Omega}} \\ \varphi_{L_{\Omega}} \\ \varphi_{L_{\Omega_1}} \\ \varphi_{S_{\Omega_1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{M_{\Omega}} \\ -\mathbf{t}^{\mathbf{R}_0} \\ -\mathbf{u}^{\mathbf{R}_0} \\ \mathbf{0}_{S_{\Omega_1}} \end{bmatrix}. \quad (3.39)$$

Las matrices $\mathbf{0}_{S_{\Omega}M_{\Omega}}$, $\mathbf{0}_{S_{\Omega}L_{\Omega}}$, $\mathbf{0}_{M_{\Omega}L_{\Omega_1}}$, $\mathbf{0}_{M_{\Omega}S_{\Omega_1}}$ son matrices nulas. El sistema anterior se puede resolver con nuevos y más pequeños sistemas de ecuaciones

$$[T_{M_{\Omega}M_{\Omega}}][P_1] = [T_{M_{\Omega}L_{\Omega}}], \quad (3.40)$$

$$[T_{S_{\Omega_1}S_{\Omega_1}}][P_2] = [T_{S_{\Omega_1}L_{\Omega_1}}]. \quad (3.41)$$

Donde $[P_1]$ y $[P_2]$ son incógnitas que pueden resolverse como ecuaciones simultáneas, ahora es posible expresar

$$[S_{11}] = [T_{L_{\Omega}L_{\Omega}}] - [T_{L_{\Omega}M_{\Omega}}][P_1], \quad (3.42)$$

$$[S_{12}] = [T_{L_{\Omega_1}L_{\Omega_1}}] - [T_{L_{\Omega_1}S_{\Omega_1}}][P_2], \quad (3.43)$$

$$[S_{21}] = [G_{L_{\Omega}L_{\Omega}}] - [G_{L_{\Omega}M_{\Omega}}][P_1], \quad (3.44)$$

$$[S_{22}] = [G_{L_{\Omega_1}L_{\Omega_1}}] - [G_{L_{\Omega_1}K_{\Omega_1}}][P_2]. \quad (3.45)$$

$[S_{ij}] \in \mathbb{C}^{3L \times 3L}$ son matrices que forman el nuevo sistema

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{L_{\Omega}} \\ \varphi_{L_{\Omega_1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t^{R_0} \\ -u^{R_0} \end{bmatrix}. \quad (3.46)$$

Al resolver la matriz obtenemos $\varphi_{L_{\Omega}}$ y $\varphi_{L_{\Omega_1}}$ por tanto podemos encontrar las incógnitas restantes mediante las ecuaciones siguientes

$$[\varphi_{M_{\Omega}}] = -[P_1][\varphi_{L_{\Omega}}], \quad (3.47)$$

$$[\varphi_{S_{\Omega_1}}] = -[P_2][\varphi_{L_{\Omega_1}}]. \quad (3.48)$$

Aunque resulta eficiente discretizar el modelo geométrico conforme aumenta la frecuencia, la velocidad y exactitud de los resultados radica en resolver los sistemas de ecuaciones de manera eficiente, este punto se discutirá con detalle en el siguiente capítulo.

3.5 Criterio de Discretización

Para realizar la discretización de un dominio homogéneo cuadrado con círculos de radio constante que cubran homogéneamente la superficie, se puede emplear la fórmula $R = \frac{2a}{N}$ donde se debe cumplir la condición $\eta \leq \frac{1}{5(R/a)}$ para encontrar una solución con el muestreo correcto. Es decir, cinco puntos por longitud de onda (ppl λ) como mínimo. Por ejemplo, cuando se pretende discretizar una región cuadrada de longitud $4a$ hasta una frecuencia normalizada $\eta \leq 1$ implica que $\frac{R}{a} = 0.2$ lo que significa que debe haber $N = \frac{2a}{R} = \frac{8}{0.2}$, es decir 40 puntos de colocación, esto corresponde a 10 puntos por longitud de onda. En la Tabla 1 se resumen algunos de estos cálculos.

Tabla 1. Puntos por longitud de onda para diferentes frecuencias normalizadas en una región cuadrada de $4a$.

$\eta = \frac{wa}{\pi\beta}$	ppl λ	N (total)	Radio (R/a)
1.0	10	400	0.1951
2.0	20	1600	0.0988
3.0	30	3600	0.0661
4.0	40	6400	0.0497

Al realizar diferentes discretizaciones de un dominio plano, se encontró que la manera óptima de distribución de los puntos de colocación con área de integración circular es en forma polar para un modelo axisimétrico. De manera similar, cuando la geometría a discretizar contiene esquinas será mejor emplear dominios cuadrados y/o rectangulares.

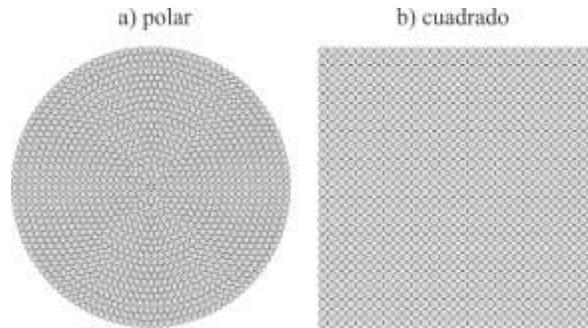


Figura 8. Dominio con simetría polar (izquierda) y dominio con esquinas (derecha).

Como resultado se puede apreciar una correcta difracción de ondas en ambos casos con la discretización adecuada y una reflexión interna mínima debida a los bordes de la frontera en las que se cumple la condición de radiación de Sommerfeld (ver sección 2.1).

En el capítulo siguiente se muestra una gran variedad de discretizaciones en las que se realizó el análisis correspondiente a los puntos por longitud en cada modelo geométrico para una y dos regiones elásticas.

Capítulo 4.

Incidencia de ondas sísmicas sobre topografías

“... La Geometría es el arte de pensar bien y dibujar mal”

J.H. Poincaré.

Este estudio tiene como propósito general encontrar las condiciones geométricas y mecánicas para la generación de ondas superficiales para topografías. Para lograr esto se define un modelo canónico y se analizan varios modelos geométricos con diferentes parámetros mecánicos ante la incidencia vertical y oblicua de ondas sísmicas P, SV, SH y Rayleigh.

El método IBEM está limitado a la propagación de ondas en medios homogéneos, con el fin de fijar nuestra atención en la difracción de ondas producidas por los efectos topográficos. Es muy rápido, flexible y sus resultados son confiables. En este sentido, se presenta una comparación entre el Método de Diferencias Finitas FDM (Finite Differences Method por sus siglas en inglés) y el método IBEM.

4.1 Modelos Canónicos

Un modelo canónico es aquel modelo geométrico definido por el semiespacio positivo $\{x, y, z | x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ en el que incide una onda sísmica de amplitud unitaria con la pareja de ángulos (θ, φ) , donde θ representa el ángulo de incidencia de la onda respecto al eje vertical y φ el ángulo de propagación azimutal de la onda. Este modelo es normalizado por la longitud característica \mathbf{a} , que representa la longitud de onda mínima para que exista difracción de ondas. Se utiliza la frecuencia adimensional η ec.(3.9) para realizar el análisis de la propagación de ondas en el dominio de la frecuencia. En cambio para el análisis en el tiempo se realiza la convolución de Fourier de la señal obtenida con la ondoleta de Ricker definida por los parámetros libres de tiempo central ($b = \pi/t_0$) e inicial (t_i) como

$$f(t) = [b^2(t - t_i)^2 - 1/2] \exp[-b^2(t - t_i)^2]. \quad (4.1)$$

La razón por la cual se emplea la señal anterior es por tres propiedades. La primera es que es una señal de alta frecuencia, es decir, tienen una amplitud pequeña cuando la frecuencia tiende a cero y sirven como filtro para una frecuencia central f_0 . La segunda es que puede emplearse como función temporal de la fuente. Por último, el pulso de Ricker es una señal no causal, pero para fines prácticos se considera “causal efectiva”, [Cêverny,\(2001\)](#).

4.2 Cañon hemisférico

Definición del modelo

El primer modelo que se estudia es un cañón hemisférico ante la incidencia vertical de ondas SV con las siguientes propiedades mecánicas $\alpha = 5$ km/s, $\beta = 2.5$ km/s, $\rho = 2.4$ g/cm³ y $v_E = 1/3$. Este modelo fue propuesto por [Ohminato & Chouet,\(1997\)](#), en este trabajo la distancia de normalización \mathbf{a} corresponde al radio del cañón $\mathbf{a}=1.2$ km y la frecuencia adimensional de excitación es igual a uno.

En general, para los ejemplos presentados en este capítulo se utilizaron los mismos parámetros mecánicos diferenciando únicamente por su forma geométrica.

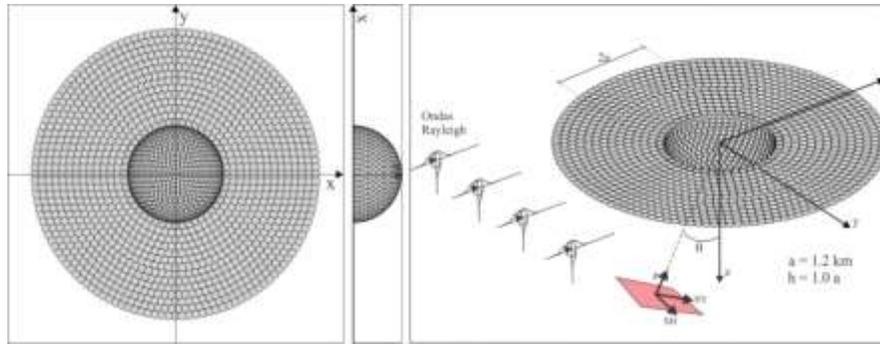
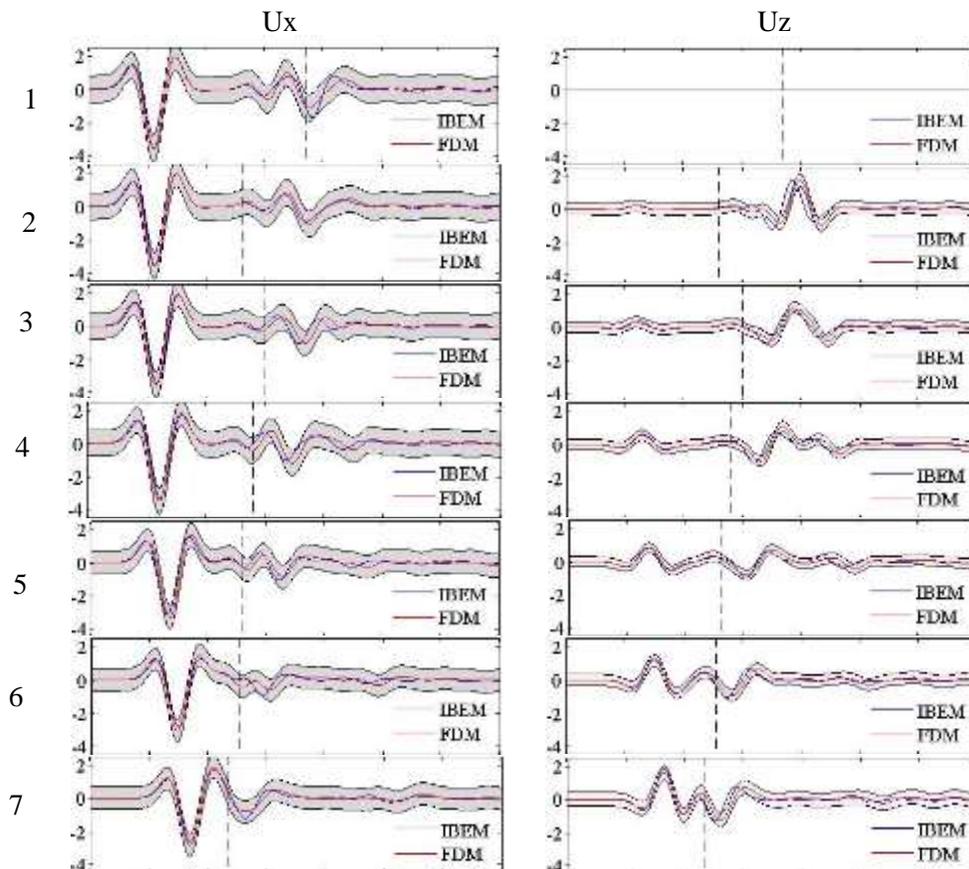


Figura 1. Discretización del cañón hemisférico.

Comparación entre el IBEM y el FDM en el dominio del tiempo

Para el FDM se utilizó un esquema escalonado de Parsimonius Luo & Schuster,(1990) con 25 puntos por longitud de onda y un frente de onda plano SV polarizado en la dirección X formado por la componente f_x de varias fuerzas distribuidas homogéneamente en todo un plano horizontal y que disminuyen a cero conforme nos acercamos hacia los bordes. Se impusieron condiciones absorbentes A1 (aproximación paraxial de la ecuación de onda) de Clayton & Engquist,(1977) sobre los esquinas del modelo. Se utilizó una unidad de material con 12 esfuerzos cortantes distribuidos en sus bordes que coinciden con la superficie libre y que los esfuerzos normales se encuentren sumergidos en el material. Esto garantiza tracciones libres en la superficie haciendo cero los coeficientes de Lamé. Esta aproximación escalonada de una curva suave puede producir pequeñas difracciones residuales como se discute en Muir et al., (1992). Se utilizaron 30 trazas a lo largo del eje X que fueron decimadas a 200 intervalos con un $dt = 0.192 \times 10^{-1}s$.



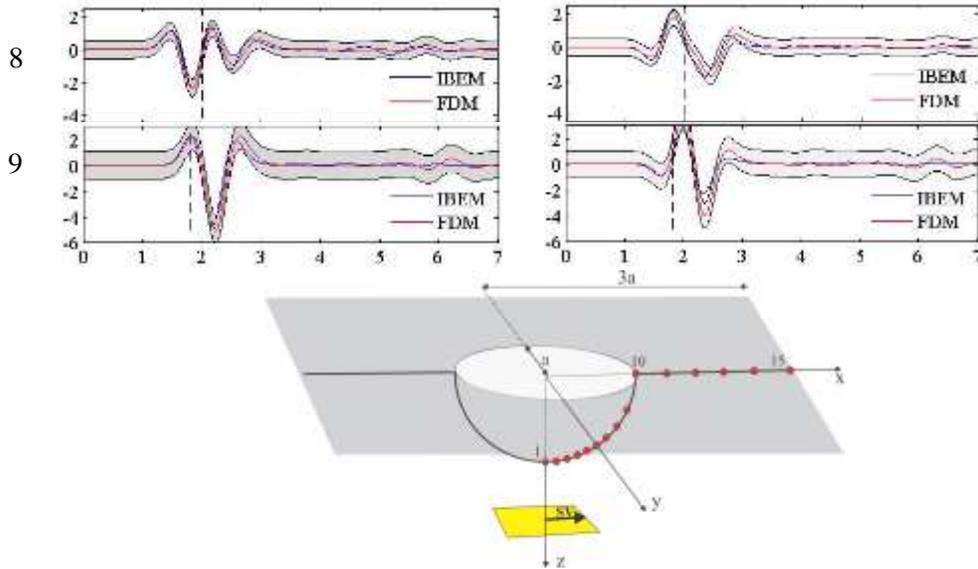


Figura 2. Desplazamientos obtenidos por el IBEM (azul) y el FDM (rojo) para la incidencia vertical de una onda SV registrada en los receptores mostrados en la parte inferior. La desviación estándar de la señal FDM se suma y resta a cada línea roja formando una región con una cota superior e inferior de confianza (región gris).

Los resultados entre ambos métodos coinciden hasta el tiempo marcado por la línea negra punteada en las trazas. Observamos que todas las trazas horizontales se encuentran dentro de la región generada por la desviación estándar y que el error porcentual ec.(4.2) se propaga hacia el centro del cañón debido a las ondas difractadas por las esquinas, ver Figura 3.

$$\text{Error} = \left| \frac{U_{\text{FDM}} - U_{\text{IBEM}}}{U_{\text{FDM}}} \right| \times 100. \quad (4.2)$$

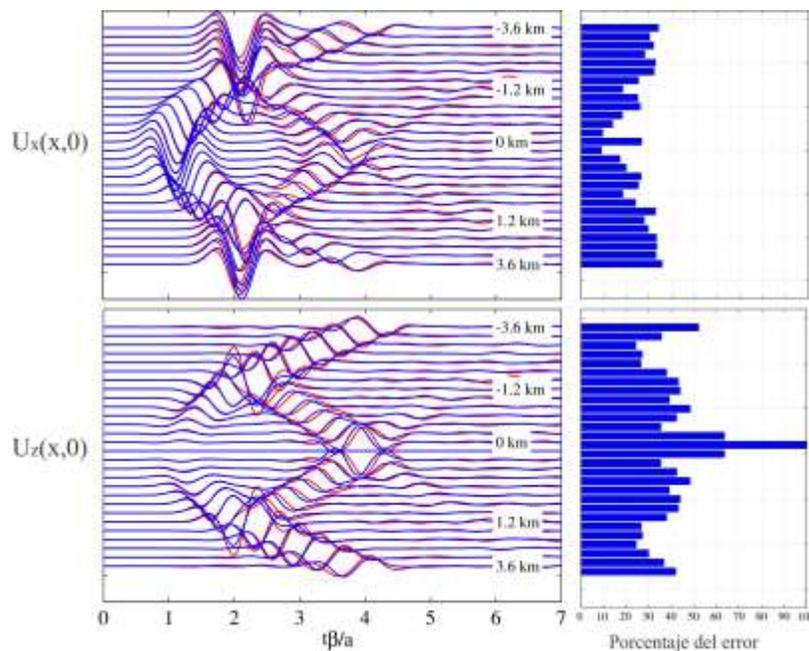


Figura 3. Error porcentual entre los sismogramas sintéticos obtenidos por el IBEM (azul) y FDM (rojo) para la incidencia vertical de una onda SV.

Observe que el error en la componente vertical para el receptor del centro del cañón es uno. Esto se debe a que los desplazamientos calculados por el IBEM son exactamente cero y los datos obtenidos por el FDM tienen una amplitud de 1.15×10^{-3} . En tanto, para la componente horizontal el error (26.7%) es tres veces el valor de los receptores de alrededor (8.9%). Esto se debe a la simetría axial del modelo, ya que el error producido por la difracción de los bordes origina una superposición de ondas cuya contribución es significativa en el punto central.

La comparación anterior nos permite determinar que el método IBEM es válido para bajas frecuencias, que los efectos de borde que se producen por las esquinas son mínimos y no se generan reflexiones indeseables debidas a las fronteras geométricas del modelo, Es decir, el IBEM posee una buena exactitud de los resultados en comparación con otros métodos numéricos, ver por ejemplo Yokoi T., (2003).

Sismogramas Sintéticos

En la Figura 4 se muestran los sismogramas sintéticos para la onda SV en un arreglo lineal de 100 receptores equidistantes sobre el eje X. Para la incidencia $\theta = 0^\circ$ se aprecia la difracción de las ondas producidas por las esquinas hacia el interior del cañón en la componente horizontal. El tiempo que necesita la onda para llegar al centro de la cavidad es $t\beta/a = 4$ y a la esquina contraria es $t\beta/a = 5$. En la componente U_z a 30° no se observa la onda incidente debido a que su amplitud es cero para el coeficiente de Poisson ($\nu = 1/3$).

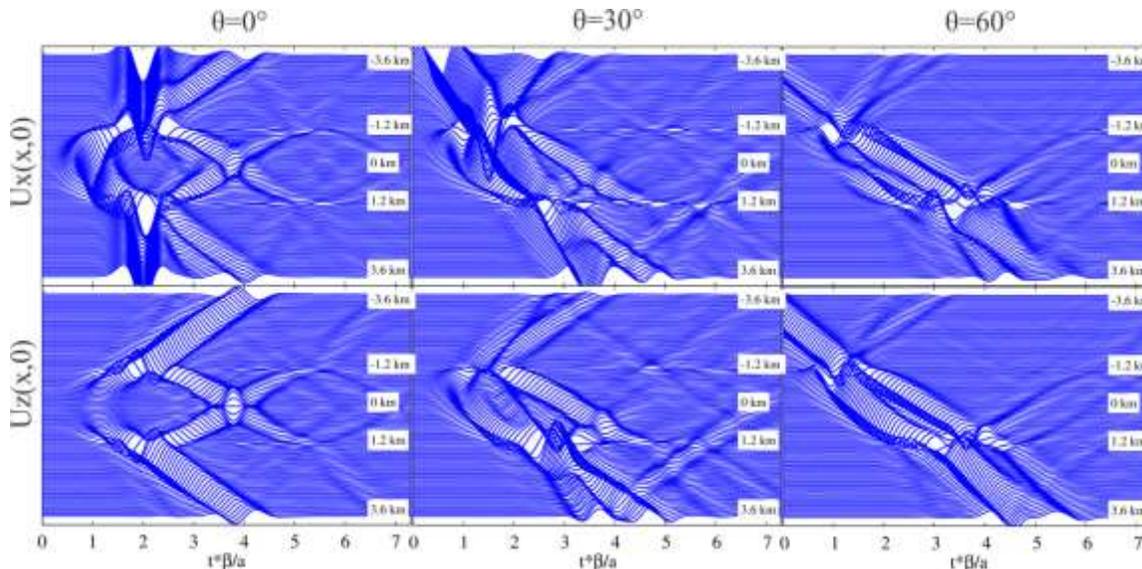


Figura 4. Sismogramas sintéticos de una onda SV que incide con distintos ángulos sobre un cañón hemisférico.

La incidencia oblicua revela que cuando inciden las ondas SV sobre la superficie hemisférica se produce una reflexión con el mismo ángulo de incidencia hacia el semiespacio. De tal forma que las ondas difractadas tienen una velocidad de ondas de Rayleigh y una amplitud mayor en la dirección de propagación. Estas ondas tienen la suficiente energía para llegar al extremo opuesto a lo largo del cañón. En la Figura 5 se muestran diferentes perfiles a lo largo del cañón hemisférico. En ellos, se aprecia una difracción más fuerte dentro de la cavidad con valores máximos sobre los ejes coordenados. Mientras, los perfiles **d** y **e** tienen desplazamientos verticales y horizontales con una polaridad opuesta. En tanto, los efectos de borde se registran claramente en los perfiles **c** y **f**, con un incremento de amplitud en los receptores que se encuentran cerca del cañón.

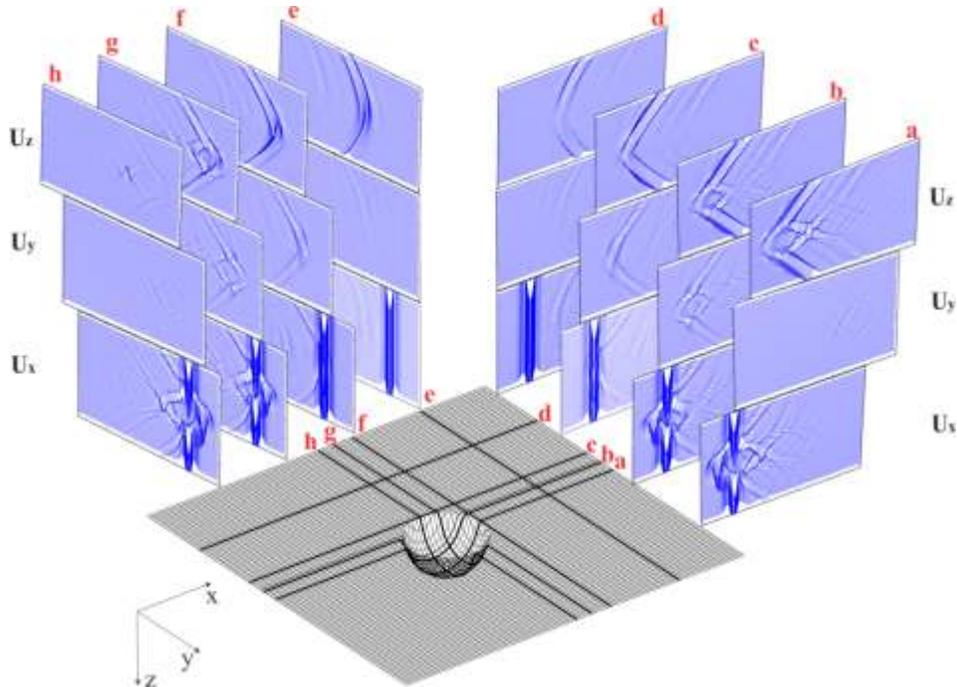
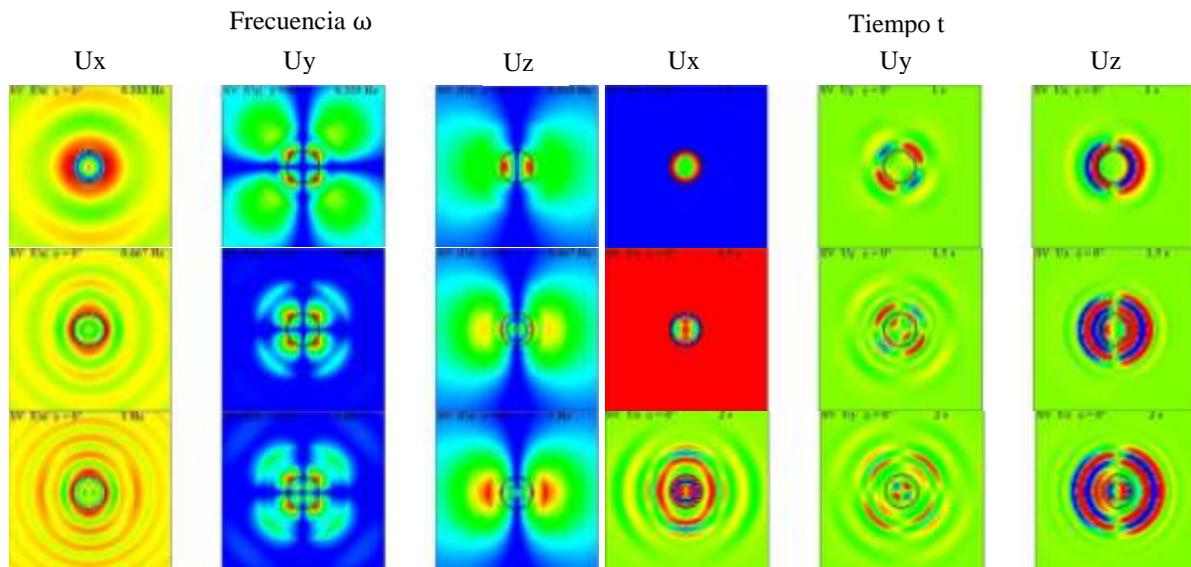


Figura 5.Desplazamientos para la incidencia vertical de una onda SV. Se muestran diferentes perfiles en la dirección X y Y para una frecuencia adimensional $\eta = 1$.

Los desplazamientos de los perfiles **b** y **g** son simétricos aunque la amplitud en el perfil **b** es mayor que en el perfil **g**, debido a que la onda está polarizada en la dirección X. Por otra parte, los desplazamientos U_y en los perfiles **a** y **h** son nulos, es decir, representan líneas nodales.

Resultados en frecuencia y tiempo

Los desplazamientos en tiempo y frecuencia para la incidencia vertical de una onda SV sobre el cañón hemisférico son mostrados en la Figura 9. Se utilizó un arreglo cuadrado de 100×100 receptores con longitud $10a$ en intervalos de frecuencia de 0.33 Hz hasta llegar a 2Hz y un intervalo de tiempo entre cada imagen de 0.5s para los primeros 3.5s.



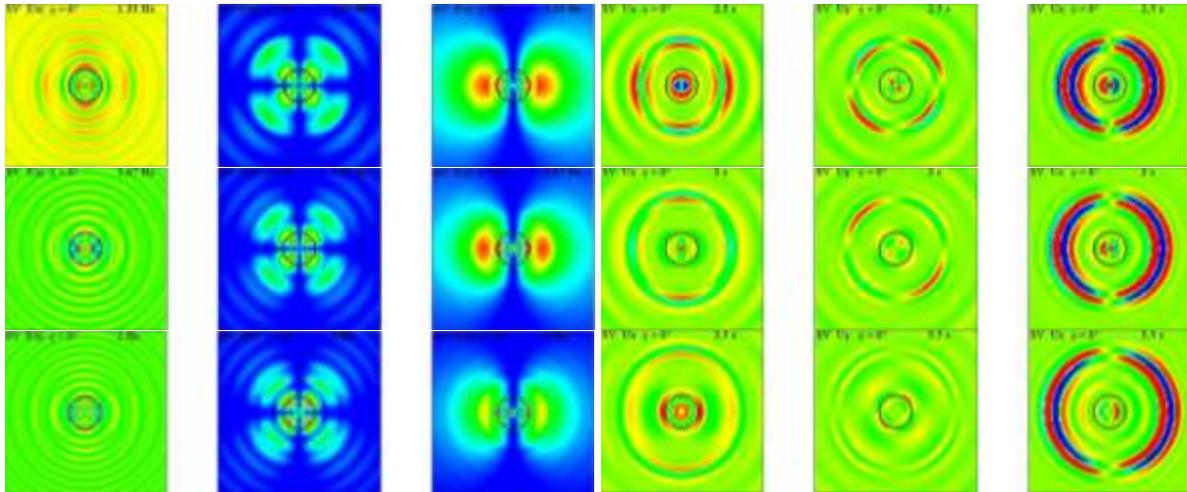


Figura 6. Componentes de desplazamiento para la incidencia vertical de ondas SV sobre un cañón hemisférico en frecuencia (izquierda) y tiempo (derecha). Se utilizó un pulso de Ricker con $t_1 = 1$ y $t_0 = 1$.

En la componente U_x se forman anillos elípticos orientados sobre el eje Y. En el caso de la componente U_y la mayor cantidad de energía se observa en cuatro lóbulos en un azimut de $\varphi = 45^\circ$ respecto al eje horizontal X. Los lóbulos tienen una amplitud máxima en la parte externa de los bordes del cañón para una baja frecuencia y al incrementarse, estos se desplazan hacia su interior. En cambio el tiempo que requiere la onda en llegar desde la base hasta la superficie plana es de $t=1$ s.

Diagramas f-x

Cuando se registra el módulo de la amplitud de los desplazamientos en una línea de receptores para todas las frecuencias, se puede formar un diagrama frecuencia vs distancia normalizada definido como diagrama f-x. Las direcciones de interés son X y Y debido a la simetría del problema.

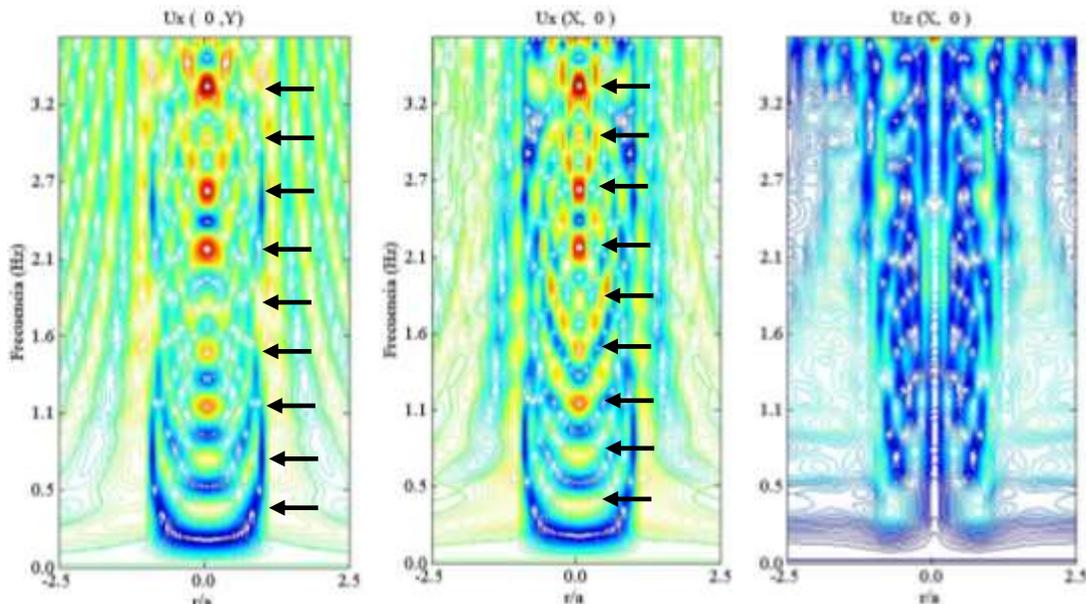


Figura 7. Diagramas f-x para dos líneas de receptores sobre las direcciones X y Y. Las flechas negras indican la amplitud máxima de desplazamiento en el punto central de la cavidad.

En la Figura 7 se muestra que los desplazamientos U_y son nulos ya que el eje X es una línea nodal. También se distingue una estructura periódica de los máximos de amplitud sobre el receptor central del cañón. La componente horizontal U_x del eje Y presenta un comportamiento similar al eje X, el cual es claramente mayor, esto es provocado por la polarización de la onda. Los desplazamientos U_y y U_z son nulos puesto que los receptores están sobre la línea nodal Y.

Fórmulas empíricas

Para explicar la periodicidad en que aparecen los máximos, se realizó un análisis del modelo geométrico en el receptor localizado en el fondo del cañón (0,0-**a**). Los máximos de amplitud tienen una excelente aproximación con la siguiente fórmula

$$\omega_n = \left(\frac{\beta}{2a}\right) \frac{n}{2\sqrt{2}}. \quad n = 1,2,3, \dots \quad (4.3)$$

En la ec.(4.3) β es la velocidad en el semiespacio, **a** es la distancia de normalización y ω_n son las frecuencias de los máximos desplazamientos del receptor. La constante $2\sqrt{2}$ es introducida por la difracción producida por los bordes del cañón. Este valor numérico es discutido por primera vez en [Sanchez-Sesma,\(1990\)](#), donde incide una onda vertical SV sobre una cuña con una apertura de 90° . El error porcentual entre el valor numérico y el valor teórico calculado en cada frecuencia de resonancia es de 0.81%, cabe mencionar que no se han considerado variaciones de ángulo.

Tabla 1. Comparación entre las frecuencias numéricas y su valor teórico ec.(4.3).

Valor Numérico ω (Hz)	Valor Teórico ω_n (Hz)	Error absoluto $ \omega - \omega_n $
0.3760	0.3683	0.0077
0.7295	0.7366	0.0071
1.0969	1.1049	0.0080
1.4816	1.4731	0.0085
1.8108	1.8414	0.0306
2.1782	2.2097	0.0315
2.5871	2.5780	0.0091
2.9545	2.9463	0.0082
3.3045	3.3146	0.0101
3.6511	3.6828	0.0317

Incidencia P

Efecto del ángulo de incidencia

En la Figura 8 se muestra la incidencia vertical de la ondas P para un arreglo lineal de receptores alineados sobre el eje X. Las ondas reflejadas hacia el semiespacio generadas por la difracción de las esquinas se distinguen por la separación de fases P, S y Rayleigh (flechas amarillas). Cuando viajan dentro del cañón son llamadas ondas progresivas *creeping waves* (flechas café), [Kawase,\(1988\)](#). Por otro lado, las ondas de Rayleigh (flechas rojas) que se generan por la incidencia de la onda P con los bordes son predominantemente verticales y se propagan hacia afuera del cañón para $t\beta/a > 2$.

Conforme aumenta el ángulo hasta 60° las ondas progresivas P,S y Rayleigh en el interior del cañón se alcanzan a separar y se pueden distinguir cada una de ellas. Cuando regresan por la reflexión con la contraesquina conservan suficiente energía para propagarse hacia afuera del cañón.

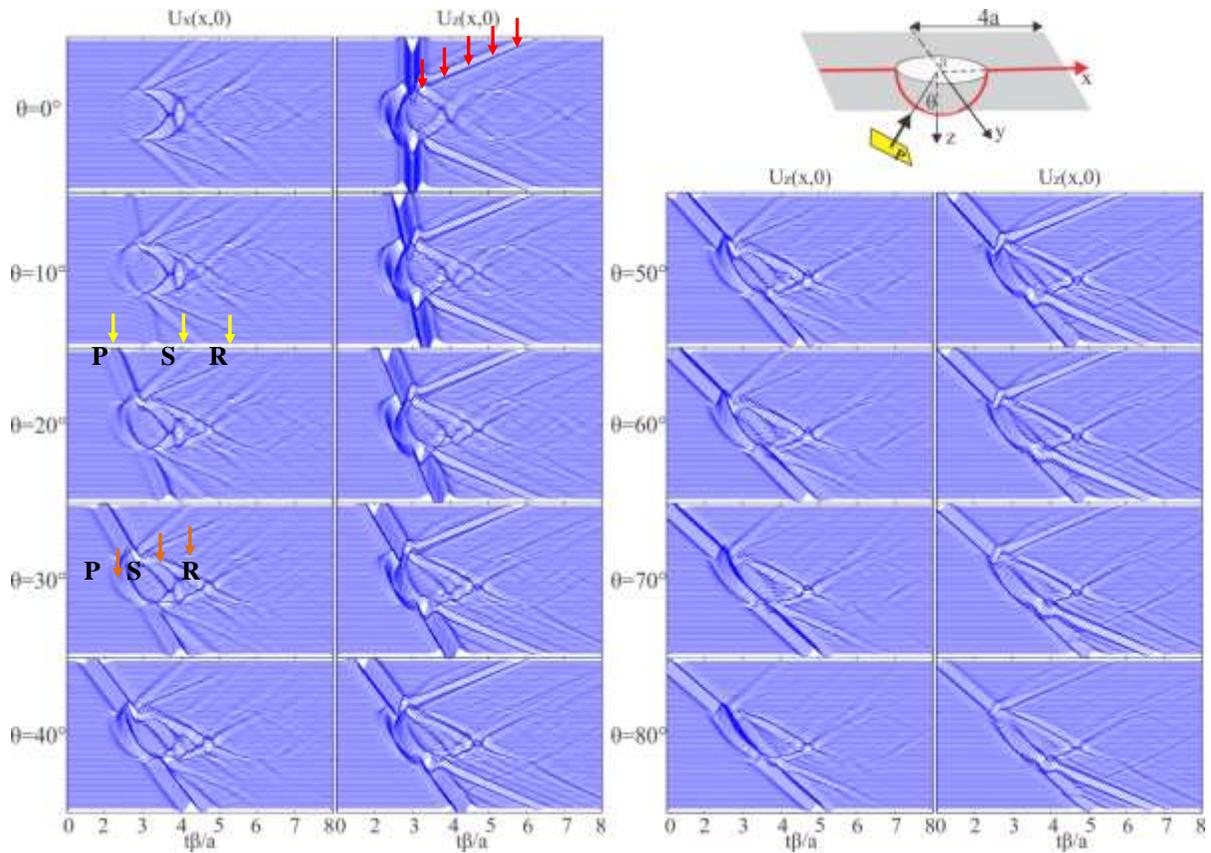
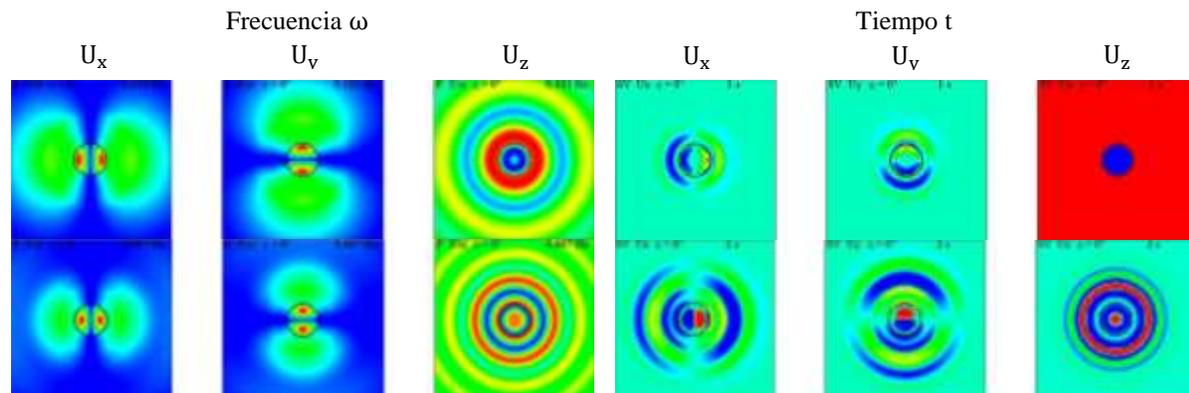


Figura 8. Desplazamientos de la incidencia de ondas P sobre un cañón hemisférico. En la parte superior se muestra el esquema de incidencia de ondas y la posición de los receptores.

Las ondas de Rayleigh generadas por ambas esquinas tienen una amplitud distinta, siendo de mayor amplitud la esquina de incidencia, aunque a partir de un ángulo de 50° sucede lo contrario. En cambio, las ondas de Rayleigh horizontales dentro del cañón se incrementan conforme aumenta el ángulo de incidencia mientras que los verticales disminuyen.

Resultados en frecuencia y tiempo

Los desplazamientos en tiempo y frecuencia para la incidencia vertical de una onda P sobre el cañón hemisférico son mostrados en la Figura 9. Se utilizó un arreglo cuadrado de 100×100 receptores con longitud $10a$ en intervalos de frecuencia de 0.33 Hz hasta llegar a 2Hz y un intervalo de tiempo entre cada imagen de 1s para los primeros 6s.



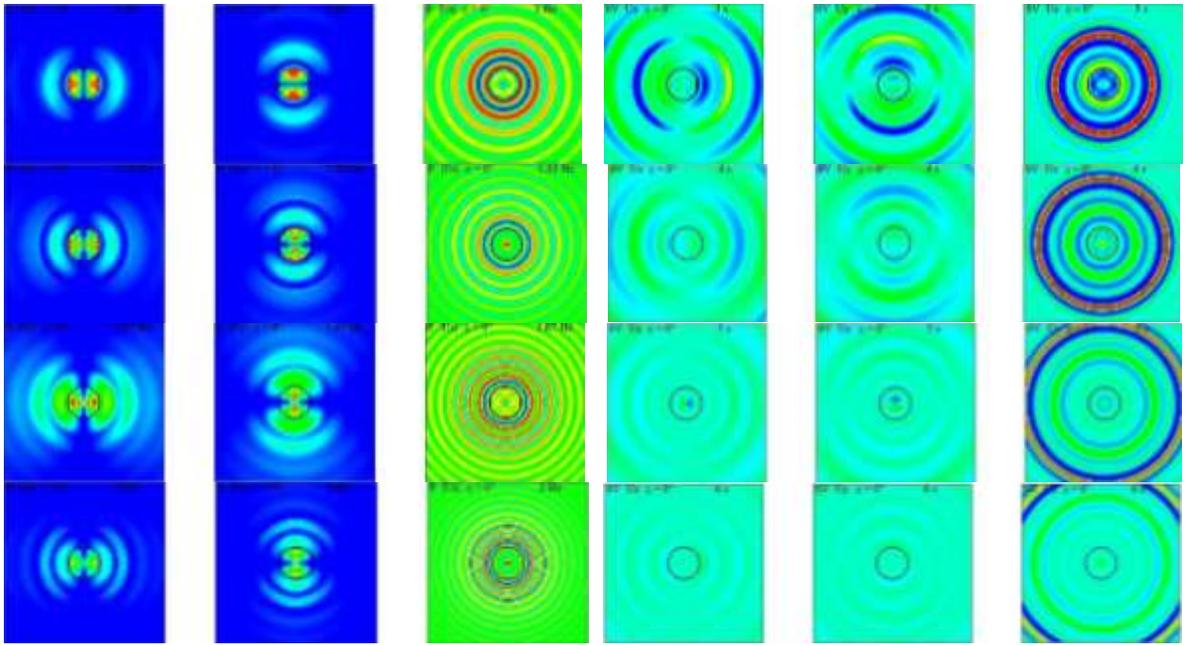


Figura 9. Lo mismo que en la Figura 6 pero incidencia P.

La amplitud en frecuencia U_z es axisimétrica respecto al eje vertical, mientras que los desplazamientos U_x son idénticos a los U_y pero con una rotación de 90° . Con el aumento de la frecuencia se forman puntos de amplitud máxima cerca de los bordes que están en la dirección X y Y, respectivamente.

Los desplazamientos U_x y U_y en el tiempo tienen un comportamiento idéntico en direcciones perpendiculares, formando semicírculos concéntricos respecto a la cavidad hemisférica. Tal que, la difracción en los bordes del cañón genera ondas P, S y Rayleigh que se propagan hacia dentro y fuera del cañón. Estas últimas se aprecian se distinguen con los mínimos generados (anillos azules) que están alrededor del cañón.

Para $t=5$, la onda P está en el borde nuestra ventana y las fases S y Rayleigh tienen una velocidad de $\beta \approx 0.54\alpha$ y $C_R \approx 0.92\beta$, respectivamente. Al mismo tiempo hay cinco ondas generadas por la cavidad (anillos azules). No se observa difracción de ondas provocadas por los bordes del modelo geométrico de manera apreciable en ningún intervalo de tiempo.

Diagramas f-x

Se tomaron dos líneas de receptores ubicados sobre los ejes X y Y. Los resultados muestran las mismas amplitudes entre las componentes U_x y U_y , al intercambiarse los ejes coordenados. Tal que las amplitudes para U_z son las mismas en X y Y, ver Figura 10.

En tanto, la fórmula empírica para calcular los máximos de amplitud en la componente vertical tiene la misma forma que la ec.(4.3). Sin embargo, el factor geométrico es diferente y como se muestra a continuación

$$\omega_n = \left(\frac{\alpha}{2a}\right) \frac{n}{2\sqrt{3}}. \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.4)$$

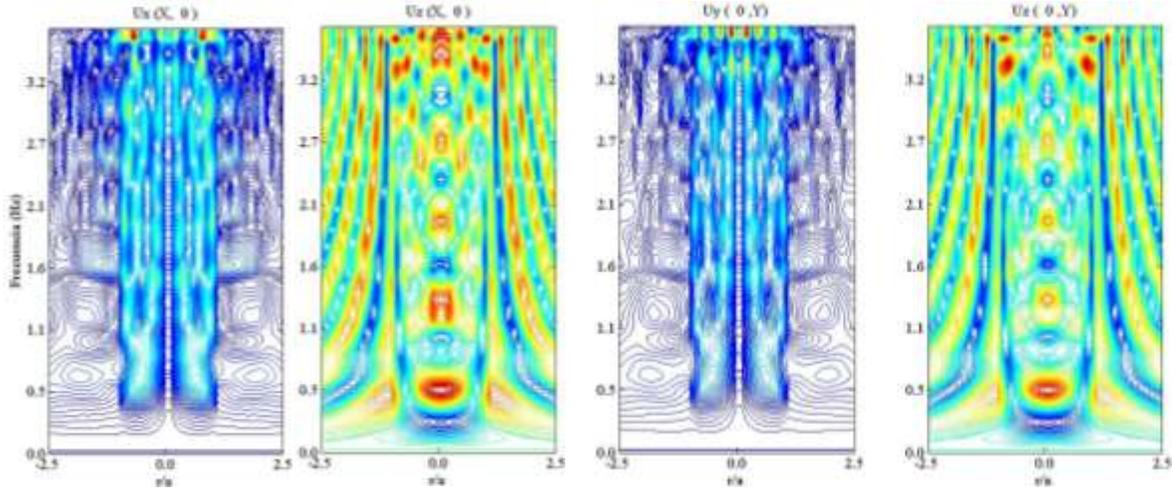


Figura 10. Diagramas f-x para dos líneas de receptores sobre las direcciones X y Y. Las flechas negras indican la amplitud máxima de desplazamiento en el punto central de la cavidad.

Donde α es la velocidad de onda P. El error porcentual calculado fue de 8.29%. Si le sumamos una constante a la ec.(4.4) con el valor promedio de los errores absolutos (0.15) el error disminuye hasta 1.47%. En la Tabla 2 se muestra el error absoluto entre los valores numéricos y teóricos obtenidos con la ec.(4.5).

Tabla 2. Comparación entre las frecuencias numéricas encontradas y su valor teórico ec.(4.4).

Valor Numérico ω (Hz)	Valor Teórico ω_n (Hz)	Error absoluto $ \omega - \omega_n $
0.4333	0.6014	0.1681
1.1000	1.2028	0.1028
1.6333	1.8042	0.1709
2.2298	2.4056	0.1758
2.8669	3.0070	0.1401

En la Figura 11 se muestra la función de transferencia para el receptor ubicado en la parte central del cañón ante la incidencia de ondas P y SV verticales, los cuales producen desplazamientos en las componentes U_z y U_x , respectivamente.

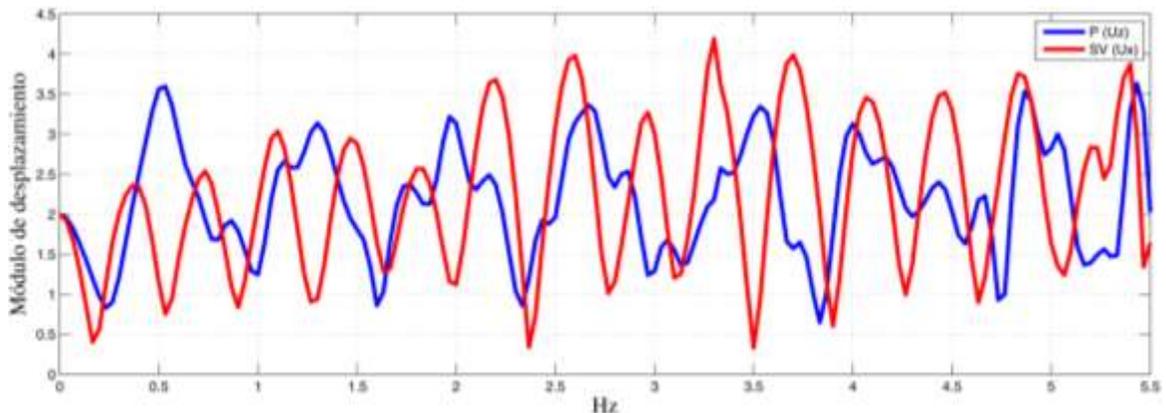


Figura 11. Módulo de desplazamientos para la incidencia vertical de una onda P y SV sobre el cañón hemisférico en la estación central.

Incidencia SH

Efecto producido por el ángulo de incidencia

En la Figura 12 la diferencia de tiempos entre el primer arribo y la onda difractada disminuye. Cuando la incidencia es vertical, esta diferencia es de $t\beta/a = 3$ y disminuye hasta $t\beta/a = 1.3$ cuando el ángulo es de $\theta = 60^\circ$. Al mismo tiempo la onda difractada por la primera esquina se transmite con mayor energía cuando el ángulo de incidencia aumenta, por lo tanto, la onda reflejada disminuye su amplitud.

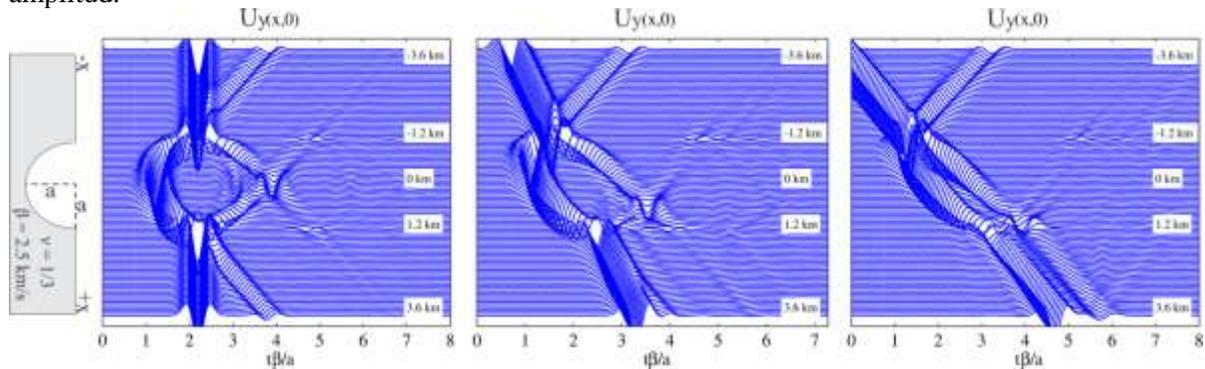


Figura 12. Desplazamientos del perfil ubicado sobre el eje X, para la incidencia SH sobre el cañón hemisférico con ángulo de incidencia $\theta = 0^\circ, 30^\circ$ y 60° . Las componentes U_x y U_z son nulas.

Diagramas f-x

En la Figura 13 se muestran dos arreglos de receptores. El primero es una línea de receptores sobre el eje X donde la mayor cantidad de energía se concentra en el lado de incidencia de la onda. Esta difracción tiene valores máximos cerca de los bordes alrededor de las frecuencias 2.1Hz y 3.3Hz.

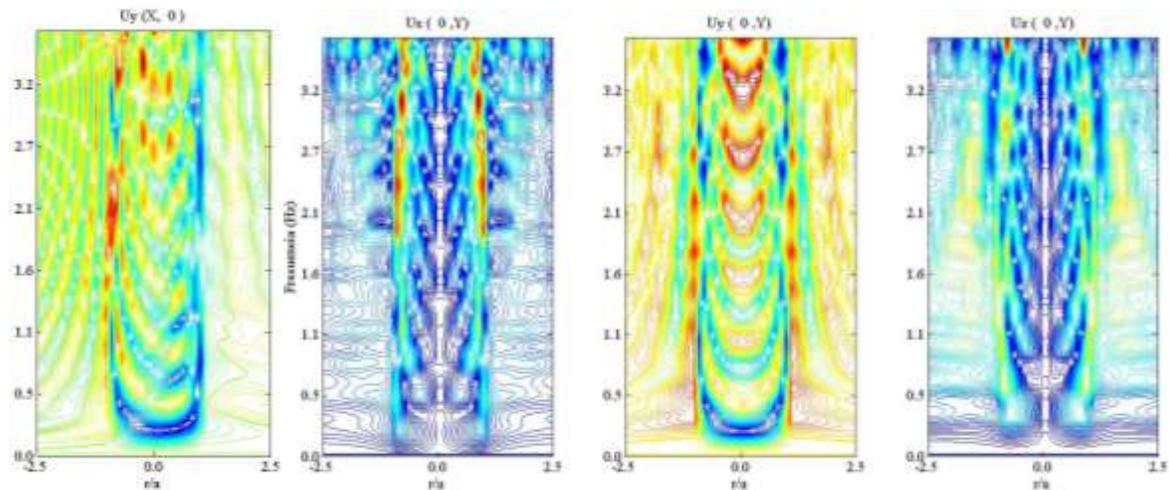


Figura 13. Diagramas f-x para la línea de receptores ubicadas sobre el eje X y Y para la incidencia $\theta = 30^\circ$ para una onda SH.

El segundo está sobre el eje Y, los desplazamientos verticales y horizontales muestran una fuerte amplificación en los bordes de la cavidad hemisférica. Se puede ver un comportamiento periódico en la componente U_y donde la amplitud crece al aumentar la frecuencia y una amplificación sobre las esquinas del cañón en todas las frecuencias provocadas tal vez, por las reflexiones internas.

Resultados en frecuencia y tiempo

Los desplazamientos en tiempo y frecuencia para la incidencia vertical de una onda P sobre el cañón hemisférico son mostrados en la Figura 14. Se utilizó un arreglo cuadrado de 100×100 receptores con longitud $10a$ en intervalos de frecuencia de 0.33 Hz hasta llegar a 2Hz y un intervalo de tiempo entre cada imagen de 1s para los primeros 5s.

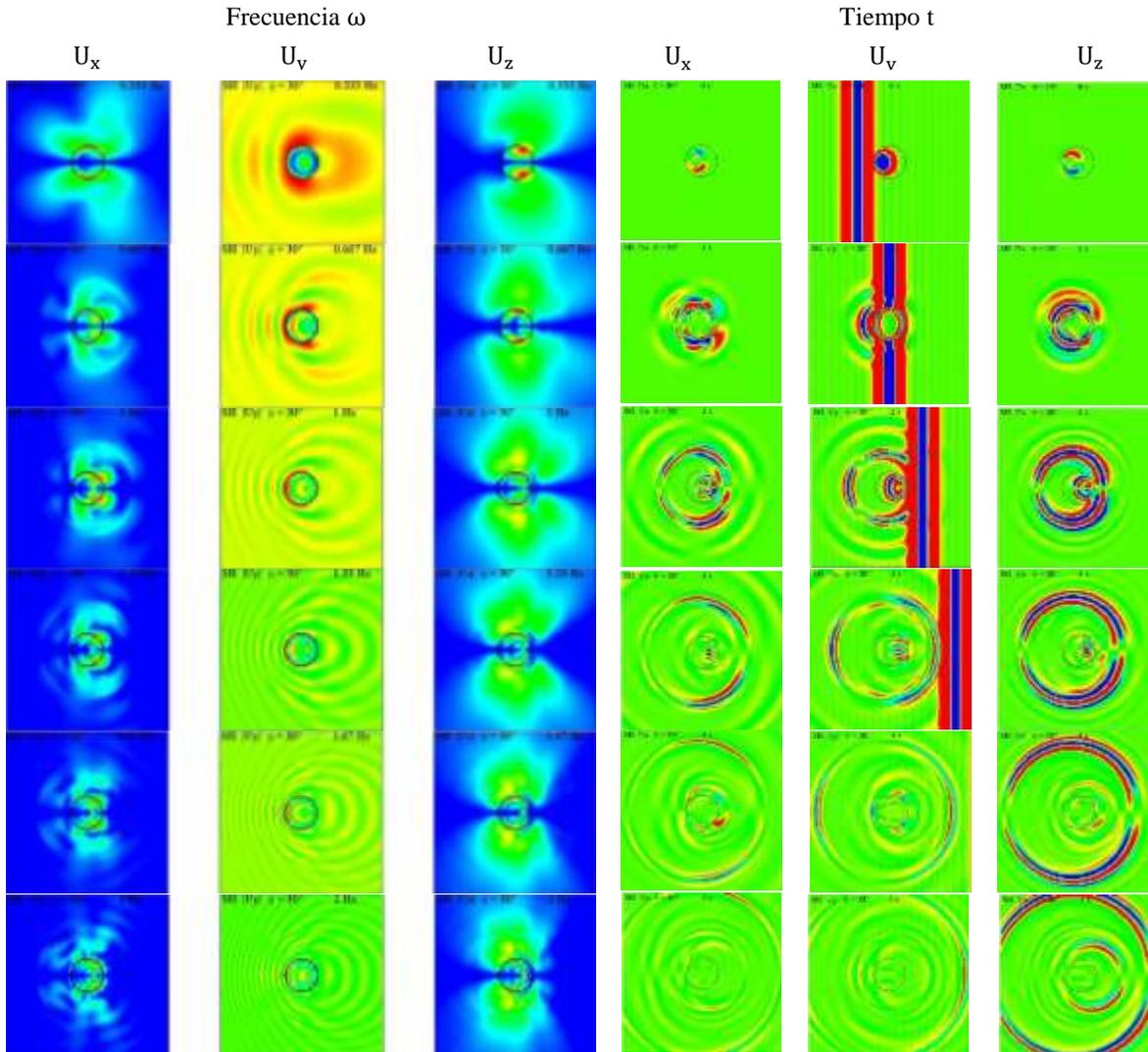


Figura 14. Lo mismo que en la Figura 6 pero incidencia SH con $\theta = 30^\circ$

En la frecuencia, todas las componentes son simétricas respecto al eje X. Las amplitudes horizontales, presentan cuatro lóbulos frontales perpendiculares entre sí, que delimitan la región de sombra de la cavidad. Al aumentar la frecuencia se incrementan las divisiones concéntricas de las ondas alrededor de la cavidad. Por otra parte, los desplazamientos verticales tienen una distribución menos homogénea y se ubican preferentemente en dirección Y. Debido a que la onda está polarizada en la dirección Y habrá mayor difracción hacia atrás en la componente U_y .

En $t\beta/a = 2$, el desplazamiento de las reflexiones de las ondas progresivas se localiza a una distancia de $0.866a$ respecto al centro de coordenadas debido al ángulo de incidencia. La mayor cantidad de energía está en el lado positivo del eje X, esto es ocasionado por la reflexión de la onda incidente, la difracción hacia afuera de las esquinas y las ondas progresivas producidas dentro en el cañón.

Patrón de difracción SH de una sección transversal

Para analizar la propagación de las ondas SH que inciden con un ángulo de $\theta = 30^\circ$ sobre el cañón hemisférico se utilizó la teoría de rayos, con el fin de describir de manera más sencilla los frentes de onda generados en una sección transversal descrita por el plano nodal XZ. En la Figura 15 se muestra el patrón completo de la difracción de ondas para esta incidencia.

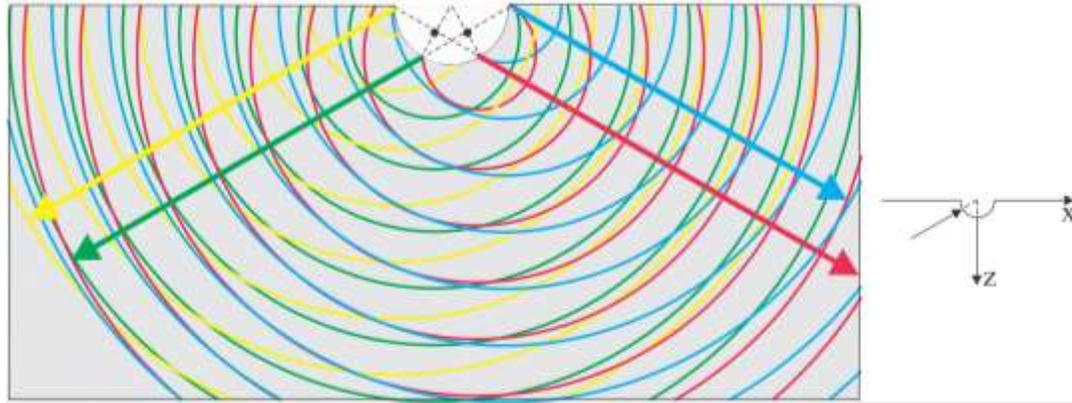


Figura 15. Difracción de ondas SH oblicua $\theta = 30^\circ$ sobre el cañón hemisférico. Se muestran los frentes de onda esféricos cada 1s para la sección transversal correspondiente al plano XZ.

Primero la incidencia de la onda comienza en el tiempo $t\beta/a = 0$, lo que implica que el punto de reflexión sobre el semiespacio está en las coordenadas $(-2a,0)$ y que el frente plano toca la hemisfera en el punto $(-\cos \theta, -\sin \theta)$. En este punto se genera una onda por la reflexión de la onda sobre el semiespacio y el cañón. Esta se propaga hacia el semiespacio como un frente de onda esférico (línea verde). Luego para $t\beta/a = 0.5$, la onda incidente está sobre la primera esquina donde genera una onda difractada por la esquina en sentido contrario a la dirección de propagación (línea amarilla) y se transmite directamente desde la esquina hasta el punto de intersección con el cañón (línea roja). Cuando $t\beta/a = 1.5$ se genera una onda difractada por la segunda esquina en la que su sentido coincide con la dirección de propagación de la onda incidente (línea azul).

Mediante las simulaciones, se pudo mostrar y explicar la evolución completa de las ondas difractadas por el cañón hemisférico ante la incidencia oblicua de ondas SH. Los resultados obtenidos, ver Figura 16, tienen una gran similitud con el cañón con forma de U presentado por Gao et al.,(2012), mostrando que el patrón de difracción propuesto es correcto.

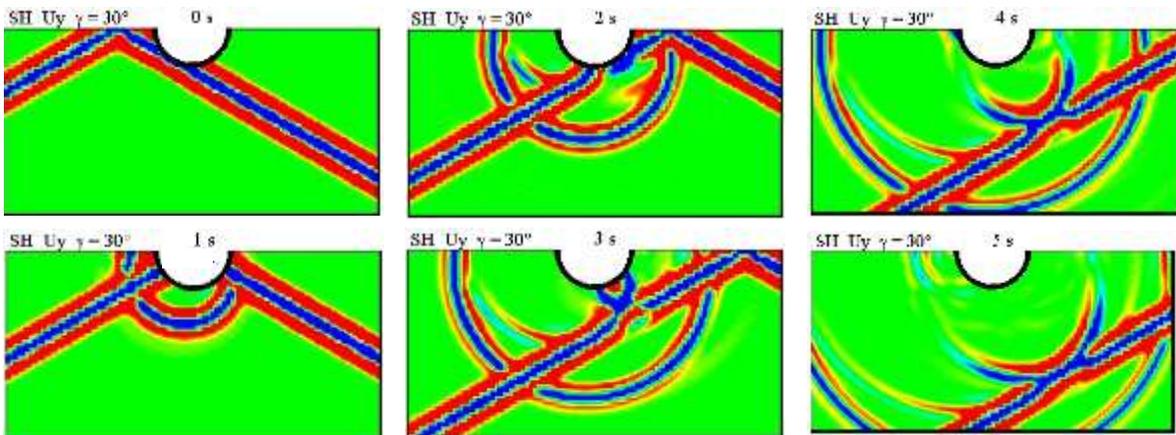


Figura 16. Plano XZ ante la incidencia de una onda SH oblicua $\theta = 30^\circ$

Ondas de Rayleigh

Resultados en el tiempo

En la Figura 17 se muestra una rejilla de de 90×90 receptores de longitud de $10a$ para las tres componentes del desplazamiento y a su izquierda la sección transversal rectangular con una longitud de $10a$ y $5a$ de profundidad para el plano XZ. El pulso de Ricker utilizado tiene un tiempo inicial $t_i = 1s$ y $t_0 = 1s$. El intervalo de tiempo entre cada imagen es de $1.0s$ para los primeros $5.0s$

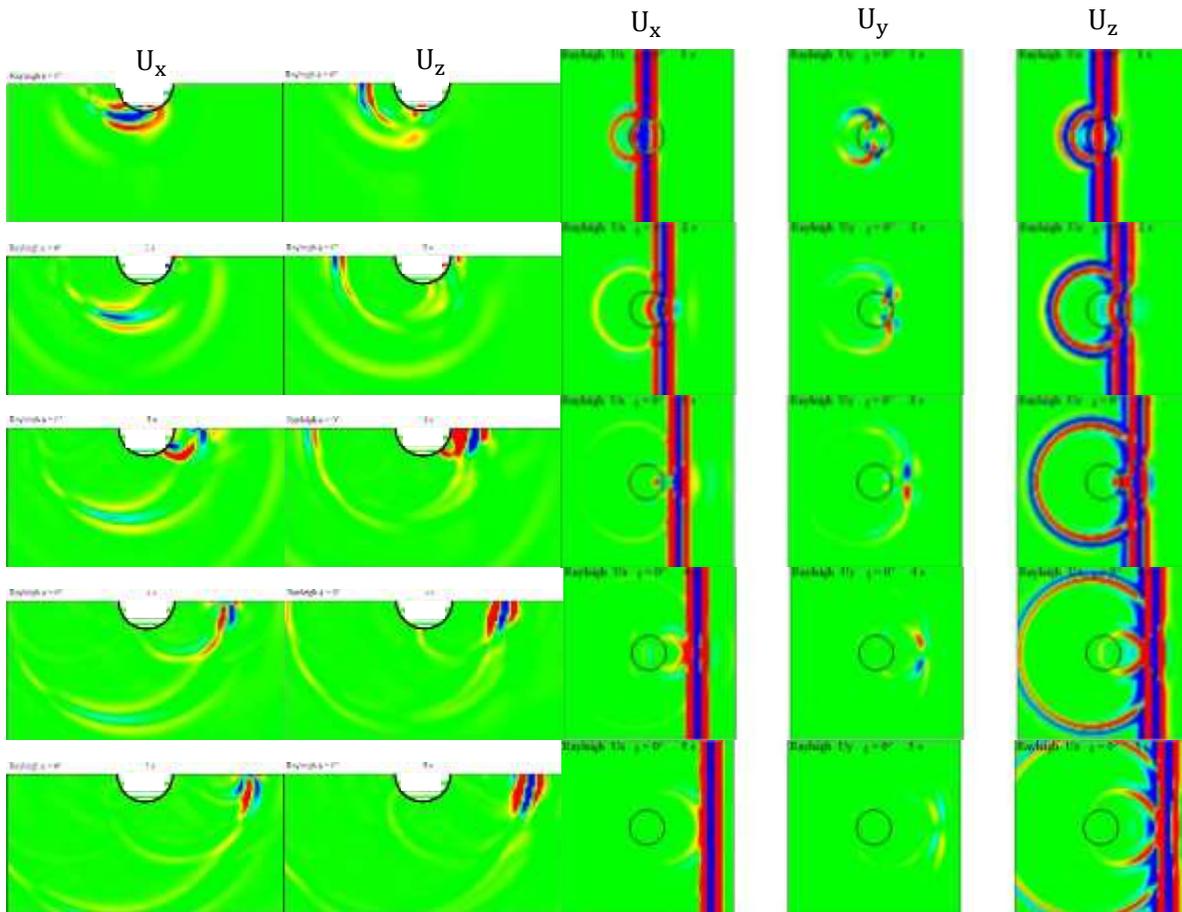


Figura 17. Desplazamientos para la incidencia de ondas Rayleigh sobre un cañón hemisférico (derecha). Desplazamientos en sección transversal XZ (izquierdo).

En el tiempo $t\beta/a = 3$ se puede ver que los desplazamientos verticales disminuyen su amplitud conforme aumenta la profundidad. En superficie el desplazamiento horizontal se propaga como una onda esférica que se desvanece al incrementarse la distancia. Mientras que el desplazamiento en la componente U_y se concentra en la dirección de propagación de la onda en un área muy pequeña. En contraste a la componente vertical U_z que se propaga como una onda simétrica que contiene mucha energía. Cuando está dentro del cañón disminuye mucho su amplitud en $t\beta/a = 4$ y al salir de la cavidad forma un nuevo frente de onda esférico. Para $t\beta/a = 5$ se puede verificar que el centro del frente de ondas está a una distancia de $4.65a$ debido a que la velocidad de ondas de Rayleigh para el coeficiente de Poisson ($\nu = 1/3$) tiene un valor aproximado de 0.93 . Se observa también un movimiento retrogrado y tres frentes de onda con distintas profundidades que se superponen cerca de la superficie debido a poseen la misma velocidad de fase. Esto produce un incremento en su amplitud que se puede ver en la componente horizontal U_x .

Sismogramas sintéticos

En la Figura 18 se muestra la incidencia de ondas de Rayleigh con un azimut $\varphi = 0^\circ$ sobre el cañón hemisférico para un arreglo de receptores sobre el eje X. Podemos apreciar la reflexión con la mayor cantidad de energía como una onda de Rayleigh que se propaga hacia afuera del cañón. Las ondas transmitidas y difractadas se pueden observar dentro del cañón. En la componente horizontal se puede ver con más detalle las fases que se reflejan en sentido contrario de la propagación de la onda.

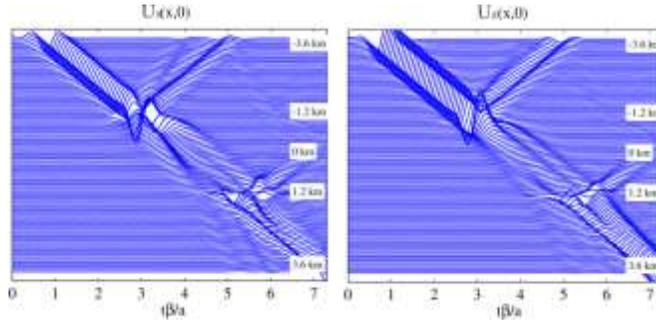


Figura 18. Desplazamientos horizontales y verticales para la incidencia de ondas de Rayleigh sobre el cañón hemisférico. Se utilizó un pulso de Ricker para una frecuencia central $\eta = 1$.

4.2 Cañón triangular

El análisis del cañón triangular presenta una simetría con respecto al eje Y para las ondas SV y SH, que dependen del azimut de incidencia. Estas forman frentes de onda planos, creados por las superficies laterales de la topografía, ver Figura 19.

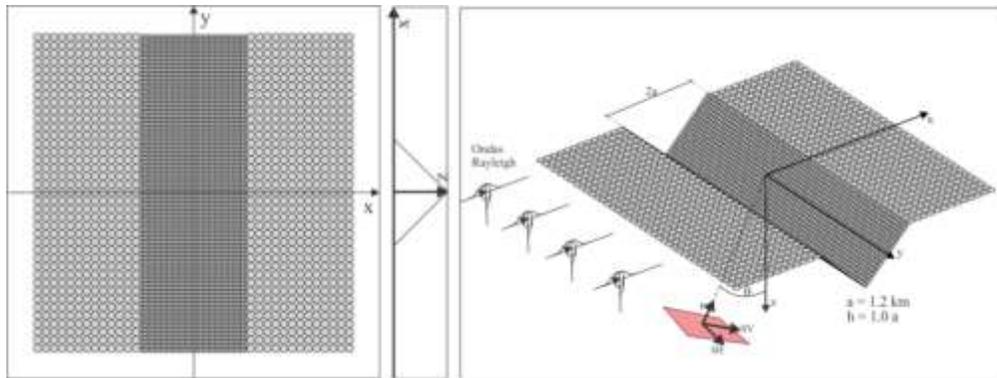


Figura 19. Discretización de cañón triangular.

Resultados en tiempo

Los desplazamientos en tiempo para la incidencia de una onda de Rayleigh sobre el cañón triangular son mostrados en la Figura 20. Se utilizó un arreglo cuadrado de 100×100 receptores con longitud $6a$ en intervalos de tiempo entre cada imagen de 1.25s para los primeros 3.75s. El pulso de Ricker empleado tiene los siguientes parámetros $t_i = 1$ y un $t_0 = 1$.

En el caso de la onda P los desplazamientos se registran en las tres componentes. Así, los frentes planos que se propagan hacia afuera del cañón tienen mayor amplitud en la componente vertical. Para la onda SV los desplazamientos son frentes planos de ondas que se encuentran en la componente horizontal y vertical. Siendo los desplazamientos verticales los que tienen una mayor amplitud en comparación con los horizontales. En cambio, para la onda SH la propagación de frentes planos sólo se registra en la componente U_y hacia afuera del cañón.

Incidencia Rayleigh

En el caso de las ondas de Rayleigh los desplazamientos se registran en la componente horizontal y vertical. La componente vertical tiene mayor amplitud en comparación con la componente horizontal. Se pueden ver las ondas difractadas en cada una de las esquinas del cañón triangular que se propagan en sentido contrario de la dirección de propagación.

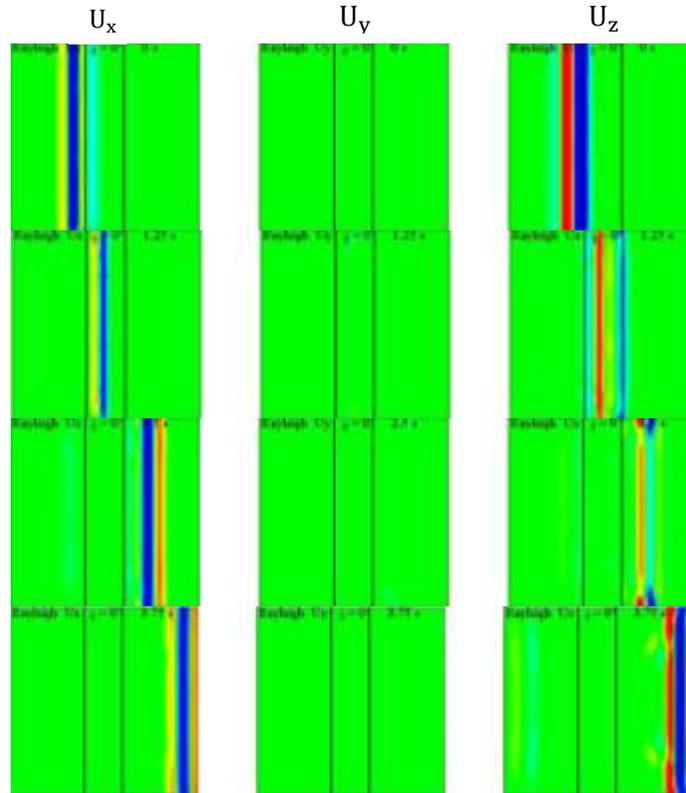


Figura 20. Desplazamientos de la onda Rayleigh sobre el cañón triangular

4.3 Cañón trapezoidal

El siguiente modelo que se muestra es un cañón trapezoidal con los parámetros mecánicos mencionados en secciones anteriores ante la incidencia vertical de ondas SH. El modelo geométrico se muestra en la Figura 21. Los resultados en superficie son mostrados en la Figura 22 y en el plano nodal XZ en la Figura 23.

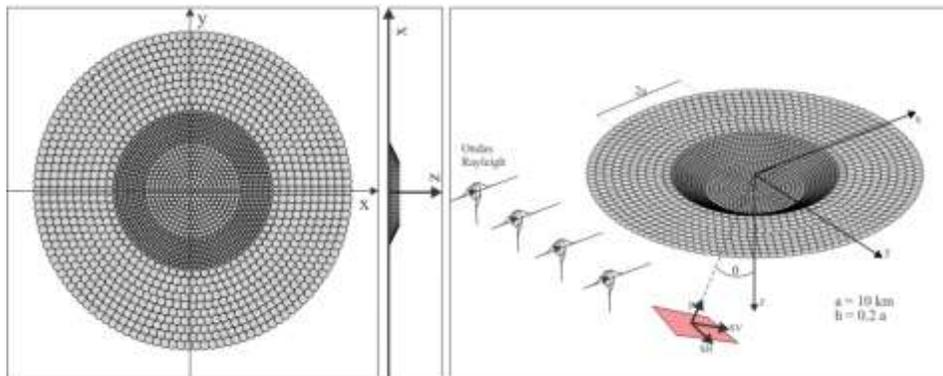


Figura 21. Discretización de cañón trapezoidal.

Resultados en tiempo y frecuencia

Los desplazamientos en tiempo y frecuencia para la incidencia vertical de una onda SH sobre el cañón trapezoidal se muestran en la Figura 22. Se utilizó un arreglo cuadrado de 100×100 receptores con longitud $10a$ en intervalos de frecuencia de 0.2 Hz hasta llegar a 1Hz y un intervalo de tiempo entre cada imagen de 1s para los primeros 5s.

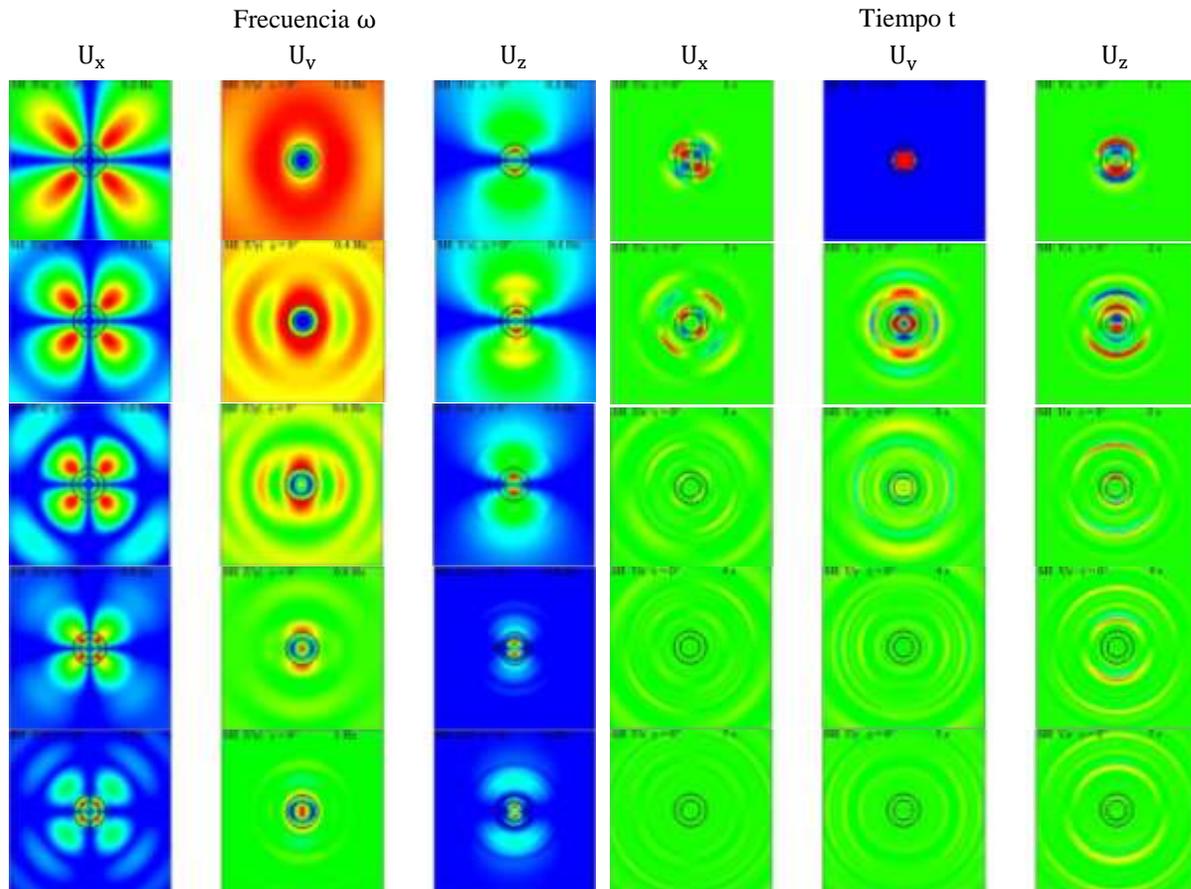


Figura 22. Módulos de desplazamientos de la onda SH vertical sobre el cañón trapezoidal en tiempo (derecha) y frecuencia (izquierda).

En la incidencia SH, se muestra que la componente horizontal y vertical tienen una amplitud mayor en la dirección X y Y, respectivamente. Estos desplazamientos forman anillos concéntricos que representan las ondas que generan las esquinas superiores e inferiores del cañón con una amplitud mayor en el eje Y. Para los desplazamientos U_y se forman anillos con amplitudes máximas en las direcciones que están a 45° respecto a cada eje en cada cuadrante. Para la incidencia P, se forman frentes de onda P, S y Rayleigh progresivos producidos por la esquina inferior y superior. Tal que, el frente de ondas P llega al borde de la rejilla de receptores en $t\beta/a = 5$. En el caso de las ondas SV, el comportamiento de las ondas difractadas es similar al de las ondas SV, haciendo los cambios sugeridos en la sección anterior.

Resultados en el tiempo para sección transversal

En la Figura 23 se observa que la difracción de ondas producida se debe a que la profundidad del cañón tiene aproximadamente la longitud de onda incidente. Aunque, es muy fuerte la generación de ondas producidos por las esquinas superiores e inferiores del cañón, los cuales están desfazados por un tiempo de $t\beta/a = 1$ en cada instantánea. Los desplazamientos de U_x y U_z son nulos.

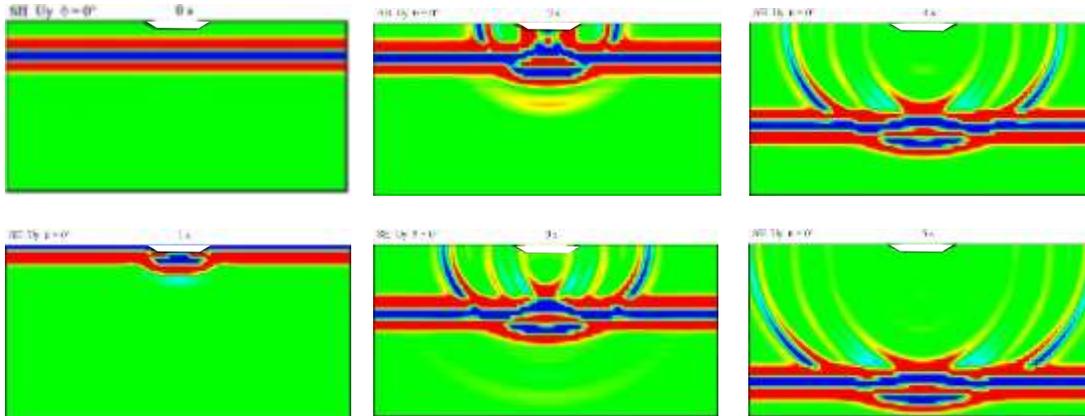


Figura 23. Desplazamientos de la onda vertical SH sobre el cañón trapezoidal para el plano XZ.

4.4 Cañón Cúbico

El siguiente modelo es un cañón cúbico con los parámetros mecánicos mencionados en secciones anteriores ante la incidencia vertical de ondas P. El modelo geométrico se muestra en la Figura 24. Los resultados en superficie son mostrados en la Figura 25.

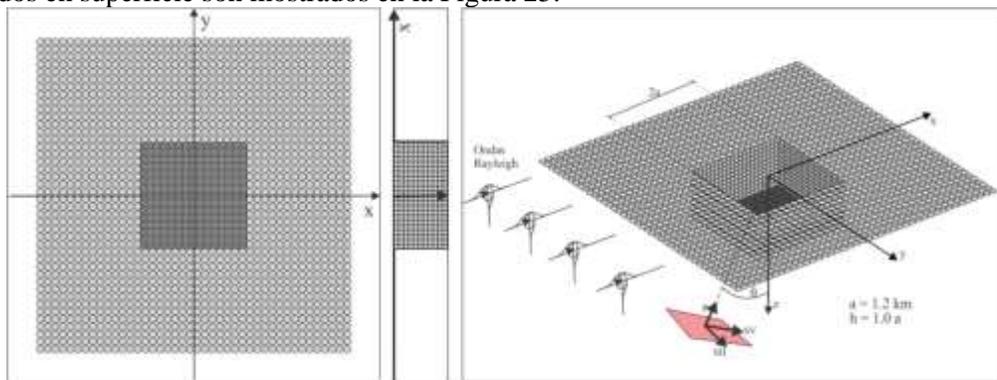
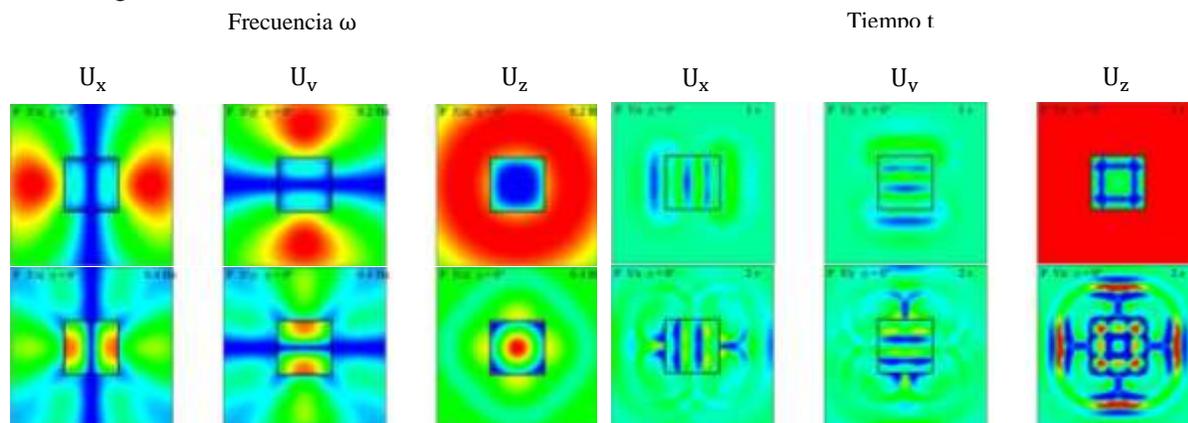


Figura 24. Discretización de cañón Cúbico.

Resultados en el dominio de la frecuencia

Los desplazamientos en tiempo y frecuencia para la incidencia vertical de una onda P sobre el cañón cúbico son mostrados en la Figura 25. Se utilizó un arreglo cuadrado de 100×100 receptores con longitud $6a$ en intervalos de frecuencia de 0.2 Hz hasta llegar a 1Hz y un intervalo de tiempo entre cada imagen de 1s para los primeros 5s.



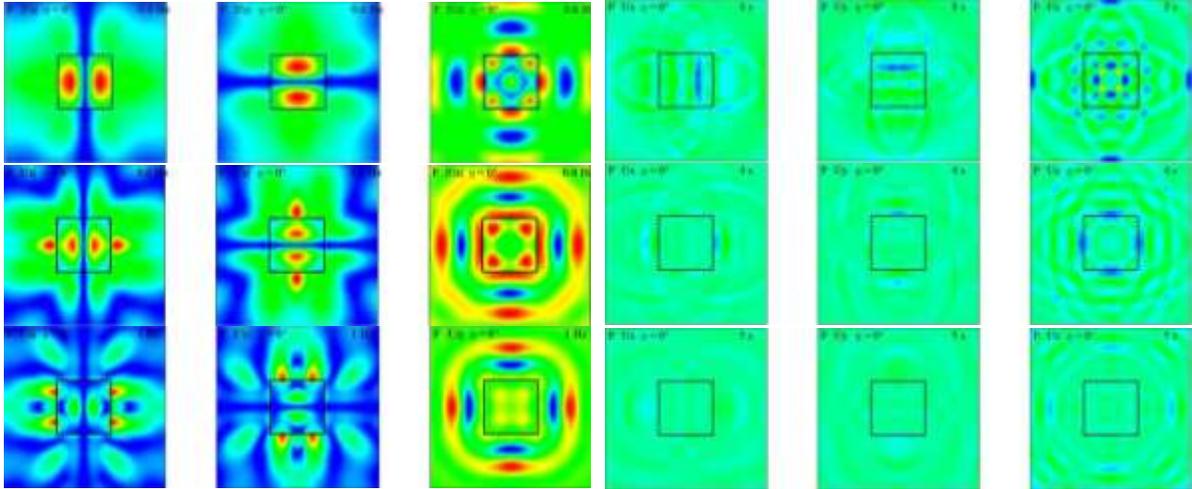


Figura 25. Módulos de desplazamientos de la onda P vertical sobre el cañón cúbico en tiempo (derecha) y frecuencia (izquierda).

En la incidencia P, ver Figura 25, se observa una fuerte difracción de ondas en la dirección X para la componente horizontal. En ella se muestran dos máximos en la parte de afuera de ambas caras que están en la dirección X. Esto es provocado por los frentes de ondas elípticos que se superponen exactamente en estas líneas. Dichos frentes se propagan a través del cañón como ondas progresivas hasta que llegan a los bordes del cañón cúbico para generar nuevos frentes de ondas. En el caso de la componente U_y se tienen las mismas observaciones pero con un ángulo de 90° en sentido antihorario. Para la componente vertical se forma un frente de onda cuadrado con máximos en los ejes coordenados X y Y, en los que se distinguen las fases P, S y Rayleigh que se propagan hacia afuera y adentro del cubo. La difracción de estos frentes en las esquinas del cubo forman frentes de ondas esféricos, al superponerse con los frentes planos adquiere forma de una estrella cuyo patrón de difracción se complica rápidamente.

En la incidencia de la onda SV sobre el cañón cubico produce frentes de ondas planos para la componente horizontal que se difractan en todo el interior del cañón como ondas progresivas en ambas direcciones de manera alternada. Esto produce frentes que son cuadrados en el interior del cañón que se propagan hacia afuera de él. Los mínimos de desplazamientos están sobre los ejes coordenados X y Y. En la componente U_y se puede observar la formación de frentes de ondas esféricos en cada una de las esquinas. Estos frentes se superponen justo en el centro del cañón y se difractan hacia afuera y hacia adentro como ondas progresivas. Luego, para la componente vertical se forman anillos elípticos fuera de la cavidad que se propagan en las direcciones $+X$ y $-X$, debido a las ondas difractadas y reflejadas por las caras laterales del cañón. En el caso SH se observa el mismo comportamiento si se hacen los cambios pertinentes mencionados en las secciones anteriores.

Para la componente horizontal de la incidencia de ondas de Rayleigh se revela que la difracción producida por las esquinas genera el frente de ondas elíptico que se menciona en la incidencia P y SV. Una gran cantidad de energía se refleja en la cara externa del cañón y otra se difracta hacia el interior. Los máximos de amplitud están en dirección de la propagación de la onda. Esto se observa también en la componente vertical, donde las amplitudes son mayores que en la componente horizontal.

4.5 Cañón Croissant

El siguiente modelo que se muestra es un cañón con forma irregular descrito en [Ortiz-Alemán & Sánchez-Sesma \(1998\)](#). La región está definida por los radios $r < a$ y $R > b$, donde $r^2 = x^2 + y^2$ y $R^2 = (x - a)^2 + y^2$. La condición para dibujar la superficie $f(x,y)$ es que $a > b$. La función $f(x,y)$ está descrita por la ecuación

$$f(x,y) = h(b^2 - R^2) \left[1 - \frac{2a(a-x)}{R^2} \right]. \quad (4.5)$$

Donde h es la profundidad del valle. Los parámetros geométricos que describen este cañón son los siguientes: $b = 0.7a$, $h = 0.4a$ y $a = 4$ km. Los parámetros mecánicos son los mismos que en los modelos anteriores. La parámetros geométricos son representados en la Figura 26. Se analiza la incidencia de una onda SV sobre este modelo. El intervalo de frecuencia utilizado en la Figura 27 fue de 0.5 Hz hasta llegar a 2.5Hz y el intervalo de tiempo entre cada imagen de 1s para los primeros 5s.

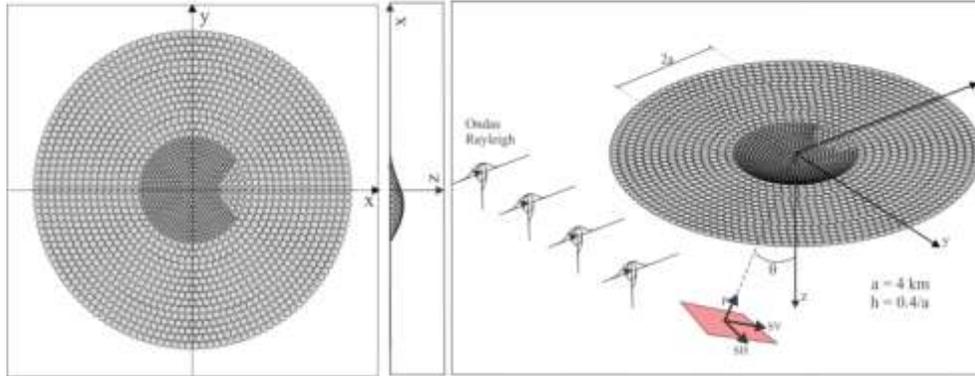


Figura 26. Discretización del valle Croissant

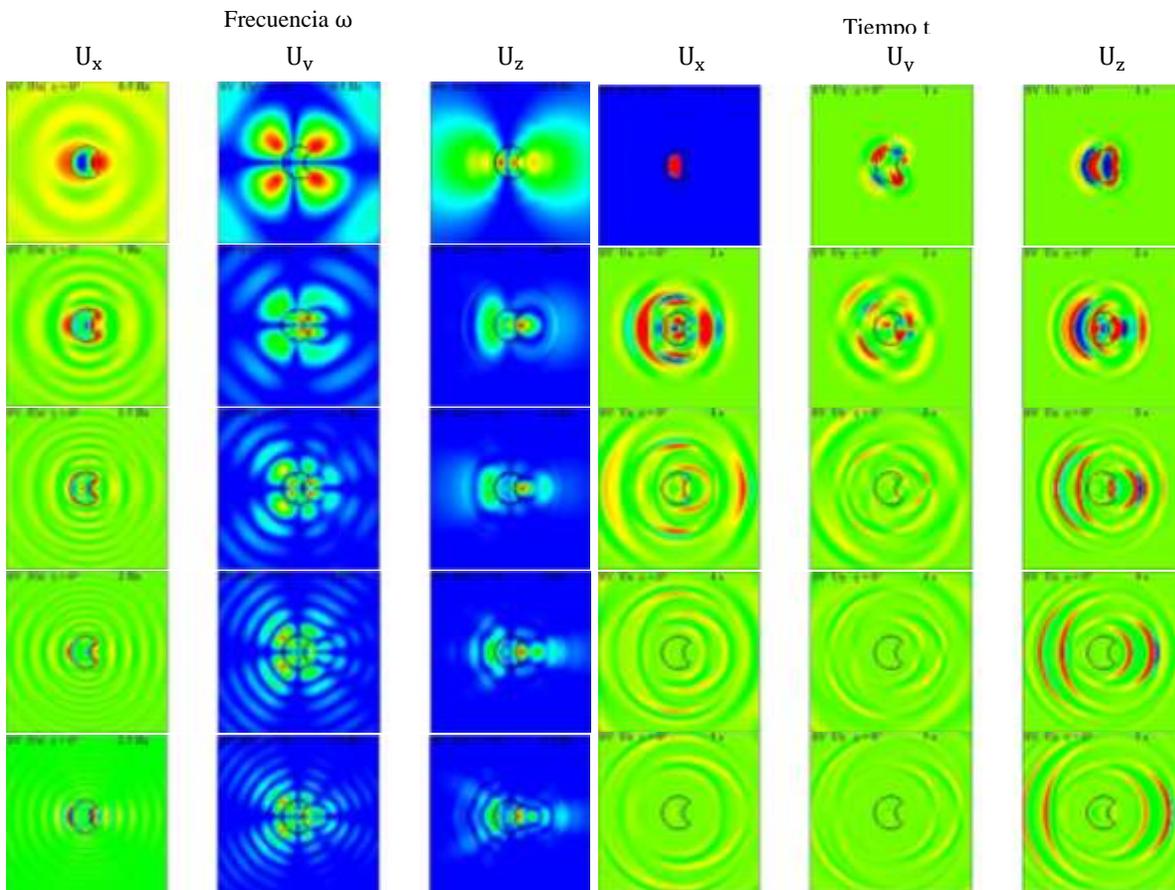


Figura 27. Módulos de desplazamientos de la onda SV vertical sobre el cañón croissant en tiempo (derecha) y frecuencia (izquierda).

Para la incidencia de la onda SV, los desplazamientos horizontales son máximos sobre el eje X. Primero se ilumina la parte más profunda del cañón y posteriormente cuando la onda llega a la superficie se difractan dos frentes de onda provenientes del semicírculo mayor y menor. El frente de onda del primero tiene mayor longitud y amplitud que el segundo. Luego, las esquinas difractan hacia afuera y dentro del cañón fases que se pueden identificar fácilmente conforme aumenta el tiempo. En el caso de la componente vertical es la misma descripción pero los frentes difractados tienen más energía y se desplazan más rápido en la dirección X que los horizontales. Por otra parte los desplazamientos U_y se generan en los bordes al transcurrir el tiempo y se comportan de la misma manera que los horizontales.

En la incidencia de ondas P, la difracción que se obtiene en la componente horizontal y U_y para un tiempo grande es semejante, aunque la componente horizontal genera una amplitud mayor en la zona de sombra del semicírculo menor en la dirección +X. Para un tiempo pequeño estos frentes son simétricos. Los frentes de onda son semicírculos también que se difractan en las direcciones -X y +X. Estos últimos con una longitud más estrecha que en los desplazamientos horizontales y con una simetría sobre el eje X. Para la componente vertical se difractan ondas P,S y Raleigh en la dirección +X debido a la embergadura del semicírculo menor y hacia atrás en la dirección -X por la curvatura del semicírculo exterior. La distancia recorrida en ambos frentes difractados en las direcciones X es la misma para el tiempo $t\beta/a = 5$, lo que implica que la onda P se encuentra en el borde de la rejilla de receptores.

Para las ondas Rayleigh difractadas en la componente horizontal y vertical se observa una onda circular producida por el semicírculo exterior e interior. Esta última con una velocidad mayor que el frente plano Rayleigh en la dirección X, es decir que las esquinas se difractan las fases P y S hacia adelante. Como la profundidad del cañón no es muy grande la amplitud del frente que pasa por su interior es fuerte en su parte central. Al pasar el tiempo se observan dos frentes de onda en las componentes horizontal y vertical, de los cuales el frente interno se encuentra desplazado hasta el borde del frente exterior similar a la incidencia SV.

4.6 Sismogramas sintéticos para incidencia SH en modelos canónicos

A continuación, exponemos los sismogramas sintéticos obtenidos para un perfil de receptores alineados ubicados sobre el eje X para cada uno de los modelos geométricos expuestos anteriormente. La frecuencia normalizada de excitación para cada cañón es de uno. Los parámetros mecánicos y la información acerca de la geometría de cada modelo se muestran en la Figura 28.

En el modelo cúbico y trapezoidal, se revela una gran difracción de ondas que se producen por los bordes inferiores de cada cañón. Estos se reflejan sucesivamente en las caras laterales de la cavidad propagándose hacia el exterior con mucha energía. También se observan fuertes resonancias para cada cañón, que tienen la misma forma que la primera incidencia dentro del cañón. Es decir, se nota un trapecio y una onda plana para el tiempo $t\beta/a > 3.3$ en el modelo trapezoidal y cúbico, respectivamente.

En el caso del cañón triangular se observa una separación de fases cuando la onda SH se difracta en cada uno de los bordes del cañón. Estas “ondas progresivas” se superponen en el centro del cañón y forman una resonancia de la cavidad con la misma forma triangular de incidencia para $t\beta/a > 3.3$.

En el caso del cañón hemisférico se ha realizado su análisis correspondiente a la sección 5.1 de este capítulo. En general, conforme aumenta el ángulo de incidencia se incrementa la reflexión de la onda

incidente con la superficie externa de las paredes de cada cañón y disminuye en el borde contrario. En el caso del cañón cubico la difracción de ondas en ambas caras no disminuye.

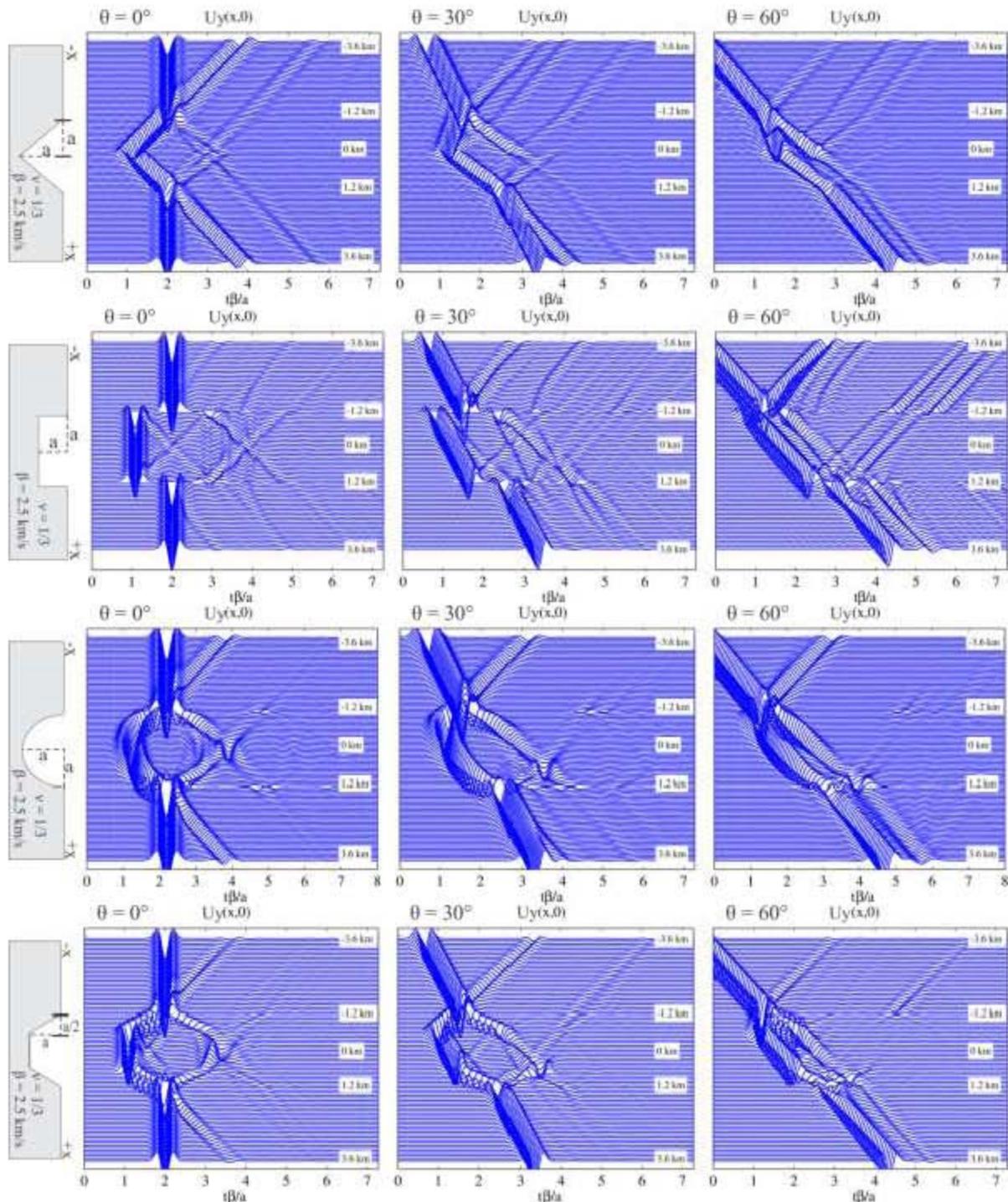


Figura 28. Desplazamientos de la componente U_y para la incidencia de una onda SH con distintos ángulos $\theta = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ$ sobre varios modelos geométricos. Se muestran las propiedades mecánicas de cada modelo y su radio característico. Se utilizó un pulso de Ricker con los parámetros $t_i = 2s$ y $t_0 = 1s$.

4.8 Diagramas f-x para la incidencia P-SV

Se utilizó un arreglo lineal sobre el eje Y en el caso de la incidencia de ondas P y SV sobre los modelos de cañones presentados en el apartado anterior.

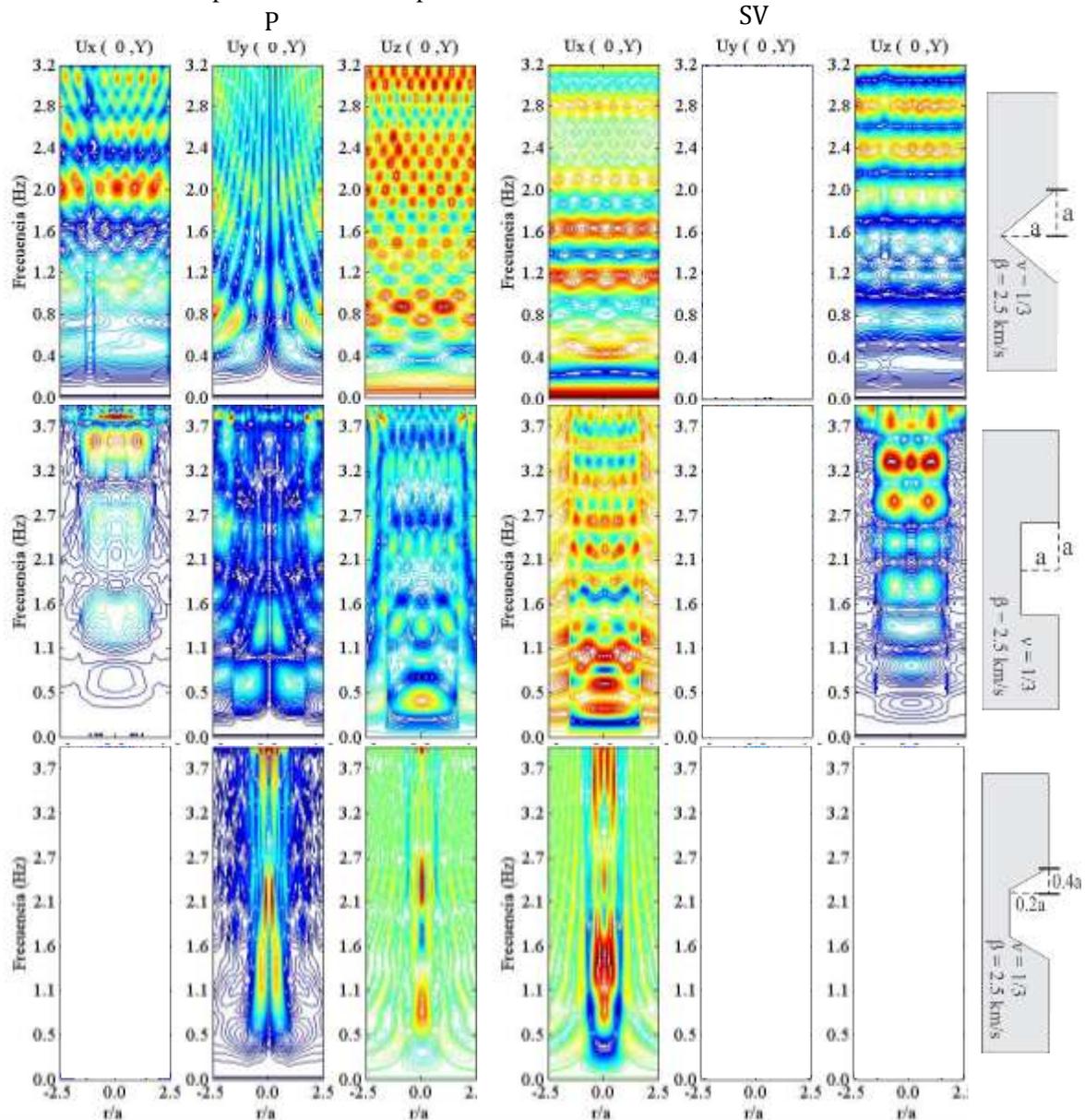


Figura 29. Diagramas f-x para las diferentes topografías mostradas. Incidencia P (izquierda) e incidencia SV (derecha) para el arreglo de receptores alineados sobre el eje Y.

En la incidencia de la onda SV de la Figura 29, todos los desplazamientos U_y son nulos. Para los modelos axisimétricos (cañón hemisférico y trapezoidal) la componente vertical también es nula. En el modelo triangular para el caso de la componente horizontal, se observan ciertas franjas de frecuencias con desplazamientos en todos los receptores. Esto se debe a que los receptores están a la máxima profundidad dentro del cañón. Por otra parte, en el cañón cúbico se distinguen estas franjas, pero con muchos máximos alineados dentro del cañón. Por otra parte en el cañón trapezoidal se distinguen máximos de amplitud muy espaciados.

Luego, para la incidencia de la onda P el patrón de amplitud es más complejo para el cañón triangular. Se observan múltiples máximos en franjas de frecuencias discretas, para la componente horizontal y vertical. Sin embargo, para el cañón cúbico las franjas de máximos se distinguen claramente en las tres componentes. Esto mismo ocurre en cañón trapezoidal, aunque los máximos de amplitud se localizan en el centro del cañón a frecuencias muy bien definidas en la componente vertical.

Se identifican máximos de amplitud en el centro de cada modelo geométrico con una periodicidad en la frecuencia. En los cañones axisimétricos se anulan todas los componentes de desplazamientos (excepto la horizontal) sobre el eje Y.

4.9 Espectros de amplitud P-SV en modelos canónicos

En la Figura 30 se grafican los módulos de desplazamientos del receptor que está en el centro de cada cañón ante la incidencia de las ondas P y SV, respectivamente. La periodicidad de los máximos globales de la amplitud en la Figura 30, revela resonancias de ondas debido a las condiciones geométricas de cada modelo topográfico. Siendo la componente vertical de la onda P y la componente horizontal de la onda SV las más indicadas para hacer esta comparación.

El segundo máximo y mínimo del modelo hemisférico y cúbico coinciden en amplitud y en frecuencia. Este mínimo también coincide con el mínimo de todos los modelos y está marcado con la flecha vertical negra en la Figura 64. Los máximos siguientes del cañón tienen un desfazamiento a mayor frecuencia con respecto al cañón hemisférico.

La amplitud de los desplazamientos es menor para el cañón triangular, pero los intervalos de frecuencia en que se presentan son constantes. Se observan 5, 3, 2 y 1 máximos globales para los cañones triangular, cúbico, hemisférico y trapezoidal, respectivamente. Al comparar la profundidad entre el cañón triangular y el trapezoidal se obtiene un factor de 5, este factor geométrico está relacionado con la frecuencia de excitación del cañón y los máximos de desplazamiento obtenidos.

El cañón trapezoidal tiene una profundidad 5 veces menor que el cañón triangular, dicha profundidad representa la longitud de onda del cañón λ_c en dirección vertical. Para obtener la difracción del cañón, la longitud de onda incidente λ_p tiene que ser aproximadamente del mismo valor que λ_c . Por otra parte, la velocidad de la onda P es constante y está relacionada con λ_p por medio de la ec.(4.6). Esto implica que, al aumentar la frecuencia la longitud de onda incidente λ_p disminuye y genera la difracción proveniente del cañón. Esto mismo ocurre con las profundidades del resto de los cañones, produciendo el mínimo marcado por la flecha negra en la Figura 30.

$$c = \lambda v \quad (4.6)$$

Las frecuencias de los máximos globales de amplitud para el cañón hemisférico tienen un espectro de resonancia periódica definido por la ec.(4.4), notamos que la resonancia geométrica está modulada por el factor inverso de $2\sqrt{3}$ que es aproximadamente la distancia que se recorre de una esquina a otra sobre la superficie hemisférica.

En la incidencia SV, es interesante notar que para frecuencias mayores a 2Hz la amplitud del cañón trapezoidal tiene un gran parecido a la envolvente de los máximos de amplitud del cañón cúbico. En contraste para frecuencias menores a 2Hz tiene gran similitud con la envolvente del cañón hemisférico.

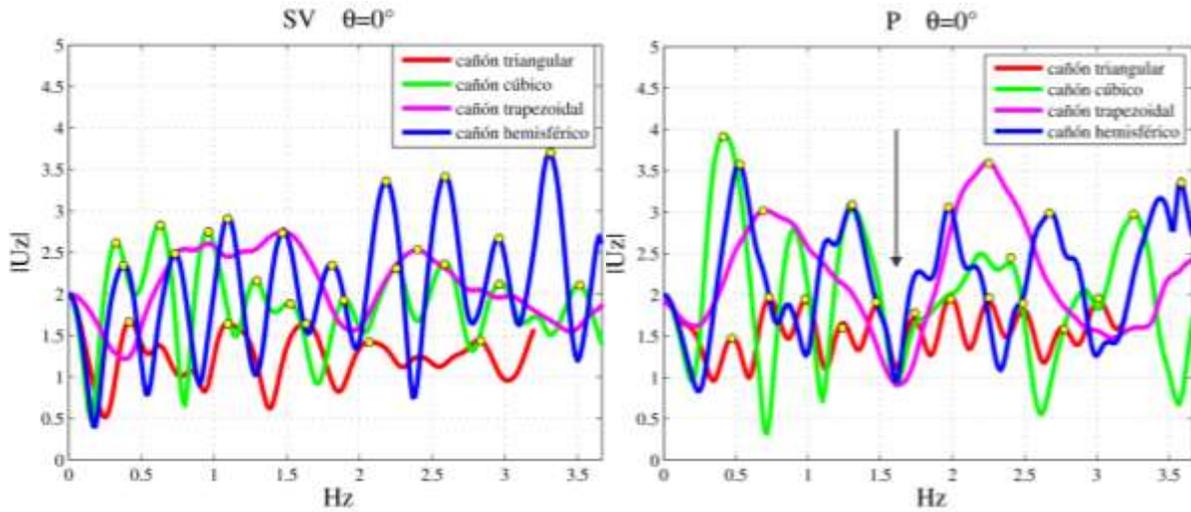


Figura 30. Amplitud de los desplazamientos verticales para la incidencia de la onda P y horizontales para la incidencia de la onda SV sobre el receptor en el centro para distintos modelos geométricos. Los puntos amarillos resaltan la ubicación de los máximos de amplitud en cada modelo.

Cerca de 2Hz se observa un mínimo para los cañones hemisférico, trapezoidal y cúbico. Después de esta frecuencia se aprecia una coincidencia en las frecuencias de los maximos del cañón hemisférico y cúbico. Aunque el cañón triangular tiene un desfase de $\sim 0.2\text{Hz}$.

Es claro que la geometría de cada topografía se puede expresar como un factor numérico que modula los máximos de amplitud en las resonancias acústicas que se forman dentro de los cañones. En este punto detenemos nuestro análisis sobre incidencia de ondas sísmicas en modelos topográficos.

Capítulo 5.

Análisis paramétrico de Valles Aluviales

“...El estudio profundo de la naturaleza es la fuente más fértil de descubrimientos matemáticos”

J.B. Fourier.

Este capítulo se estudian modelos canónicos para entender la propagación de ondas de valles aluviales en tres dimensiones y diferenciar sus efectos topográficos ante la incidencia de ondas sísmicas P,SV,SH y Rayleigh por medio del método IBEM.

En la primera parte de este capítulo se realiza una comparación de los resultados obtenidos con resultados de otros métodos numéricos publicados. Posteriormente, con base en la formulación matemática desarrollada en el capítulo 3 para valles aluviales, se analizan varios modelos geométricos con distintos parámetros mecánicos.

5.1 Valle hemisférico

Incidencia P

El primer modelo que se estudia es un valle aluvial hemisférico (inclusión elástica suave) ante la incidencia vertical de ondas P con las siguientes propiedades mecánicas $\mu_R/\mu_E = 0.3$, $\rho_R/\rho_E = 0.6$ con $\nu_R = 0.3$ y $\nu_E = 0.25$ presentado por [Sánchez-Sesma et al.,1983](#),ver Figura 1.Esta configuración permite inducir una fuerte amplificación del movimiento sísmico en depósitos aluviales suaves.

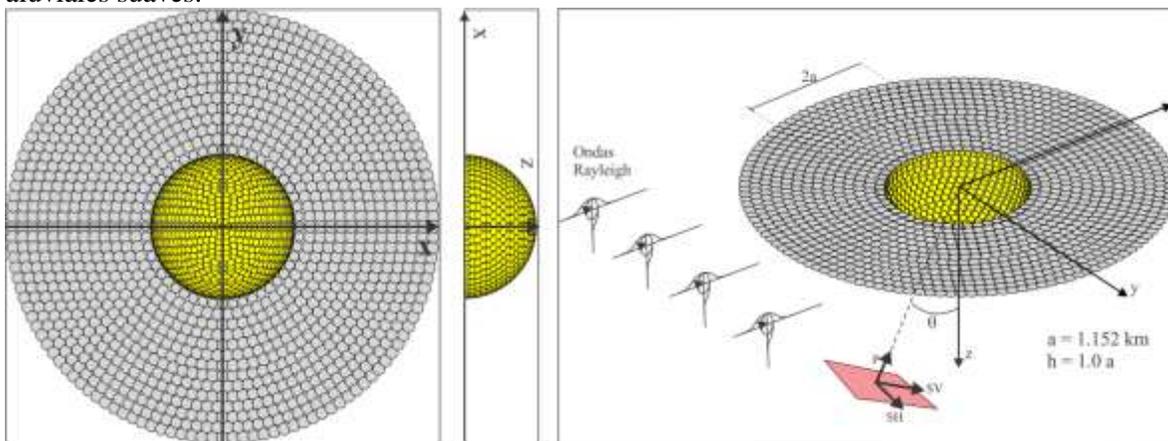


Figura 1. Discretización del valle hemisférico.

Comparación con resultados publicados

Se realizó una comparación con los resultados publicados para este modelo por medio de tres métodos numéricos distintos. El primero se trata de una solución semianalítica en términos de series de funciones de Bessel publicados en [Sánchez-Sesma et al.,1983](#). Estos resultados son frecuentemente utilizados para verificar diversos métodos numéricos. Por ejemplo el BIEM (Boundary Integral Element Method) indirecto por [Mossesian & Dravinski, 1990](#),SEM(Spectral Element Method) de [Komatitsch & Tromp,1999](#) y BEM (Boundary Element Method) por [Dangla et al.,2005](#).

El segundo caso se trata de una comparación realizada por [Delavaud, PhD, 2007](#) con el Spectral Element Method (SEM por sus siglas en inglés). Por último, la solución obtenida por [Chaillat, et al.,2009](#), con el Fast Multipole Method (FMM por sus siglas en inglés).

En la Figura 2 se puede apreciar una diferencia en la amplitud de la componente vertical hacia el centro del valle, entre los métodos SEM, FMM y el presente método IBEM. Esto se debe al truncamiento del semiespacio discretizado. El RMS del error obtenida por la solución semianalítica y el FMM disminuye al discretizar un radio mayor del semiespacio, como se muestra en [Chaillat, PhD, 2008](#). Los efectos de borde han sido removidos con propósitos de comparación.

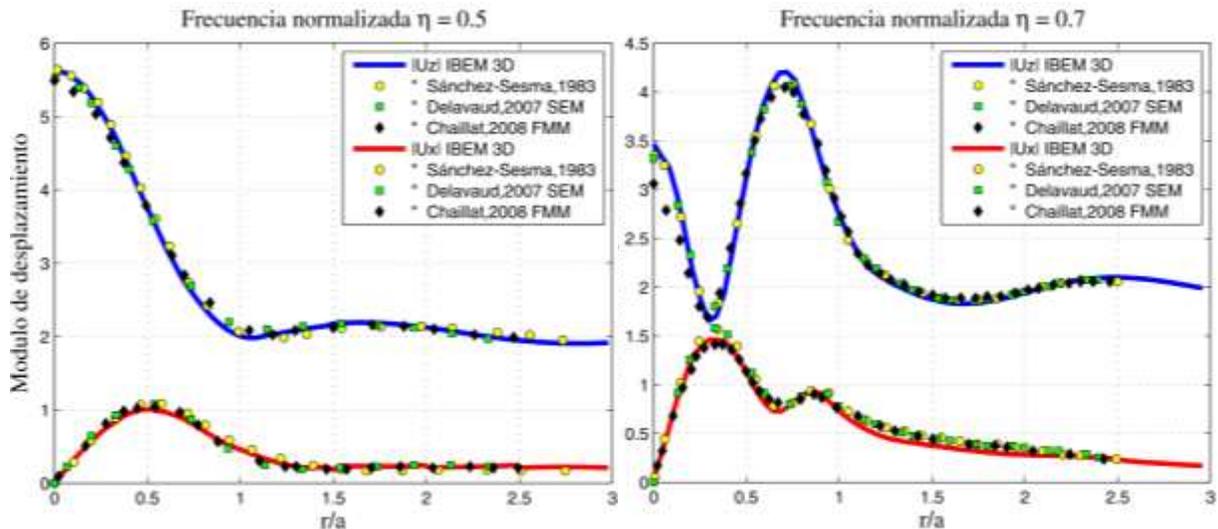


Figura 2. Módulo de desplazamiento para la incidencia vertical de una onda P sobre un valle aluvial hemisférico para las frecuencias normalizadas $\eta = 0.5$ y 0.7 . Se muestra la comparación entre el IBEM y diferentes métodos numéricos.

Para $\eta = 0.5$ se observa un punto de inflexión en el desplazamiento vertical, que se localiza en $r/a = 0.5$ y que corresponde al desplazamiento máximo horizontal. En el caso contrario, observamos un punto de inflexión en el desplazamiento horizontal a una distancia $r/a = 1.0$ que corresponde al mínimo de los desplazamientos verticales. La amplitud del desplazamiento vertical en el centro del valle (5.647) es máxima mientras que los desplazamientos horizontales son nulos. Análogamente, al caso anterior para $\eta = 0.7$ observamos una amplitud máxima de desplazamientos horizontales y mínima de verticales para una distancia de $r/a=0.3$ y el caso contrario cuando $r/a=0.6$.

Resultados para más alta frecuencia

En la Figura 3 se muestran los resultados obtenidos para más alta frecuencia $\eta = 1.0$ y $\eta = 2.0$. Los efectos de borde han sido removidos para su comparación con resultados publicados. Observamos que todos los desplazamientos $|U_x|$ inician en cero y que $|U_y|$ es siempre nulo sin importar la frecuencia que se esté analizando, esto se debe a que los ejes coordenados X,Y son líneas nodales.

También notamos que el número de puntos críticos locales se incrementa de manera impar en $|U_x|$ y se duplica para $|U_z|$ cuando la frecuencia aumenta al doble. El número de máximos en la componente vertical y horizontal es el mismo y se incrementan de manera proporcional a la frecuencia.

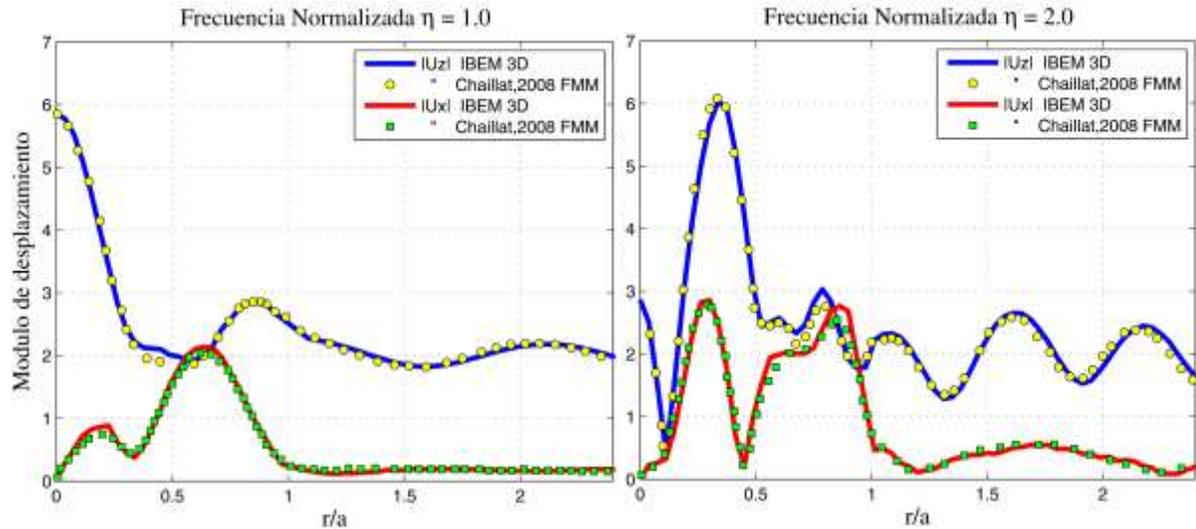


Figura 3. Módulo de desplazamiento para la incidencia vertical de una onda P en un valle aluvial hemisférico para las frecuencias normalizadas $\eta = 1.0$ y 2.0 . Se muestra la comparación entre el IBEM y el FMM.

Eficiencia computacional

Se comparó el tiempo de cómputo entre el IBEM optimizado para el valle hemisférico en las frecuencias normalizadas $\eta = 0.5, 0.7, 1.0$ y 2.0 y el FMM presentado por Chaillat(2008). Se consideran tres grados de libertad por punto de colocación para el presente método (IBEM) y un nodo con igual número de grados de libertad para el método de comparación (FMM).

Para los resultados en baja frecuencia $\eta = 0.5, 0.7$ el IBEM utilizó 4 puntos por longitud de onda en el semiespacio λ_E y 12 puntos por longitud de onda en la inclusión elástica λ_R . El número total de puntos de colocación del semiespacio y el valle aluvial fueron $N_I = 1421$ con un tiempo de cómputo de $t_I = 9s$, en un procesador de 3GHz y 8GB de memoria RAM. En contraste, para el FMM se necesitaron $N_f = 17,502$ nodos requiriendo 39 iteraciones con un tiempo de 8s por iteración, es decir un tiempo final de $t_f = 312s$.

$\eta = \frac{\omega a}{\pi \beta}$	IBEM				FMM	
	λ_E (semiespacio)	λ_R (inclusión)	N_I (puntos)	t_I (s)	N_f (nodos)	t_f (s)
0.5	4	12	1,421	9	17,502	312
0.7	10	13	4,383	177	17,502	1,512
1.0	14	15	5,265	230	90,057	3,351
2.0	17	22	6,623	255	190,299	8,725

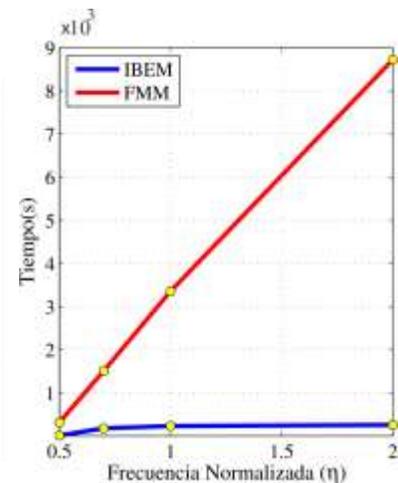


Tabla 1. Tiempo de cómputo del IBEM para distintas frecuencias normalizadas. Comparación con el tiempo publicado para el FMM

Análogamente para los resultados en más alta frecuencia $\eta = 1.0$ y 2.0 se necesitaron $N_I = 6623$ puntos de colocación y un tiempo de cómputo de $t_I = 255s$. Por otra parte, el número de nodos

utilizados por el FMM fueron $N_f = 190, 299$ con 627 iteraciones cada una con una duración de 79s, es decir, un tiempo final de $t_f = 49\ 533s$. Estos datos se resumen en la Tabla 1.

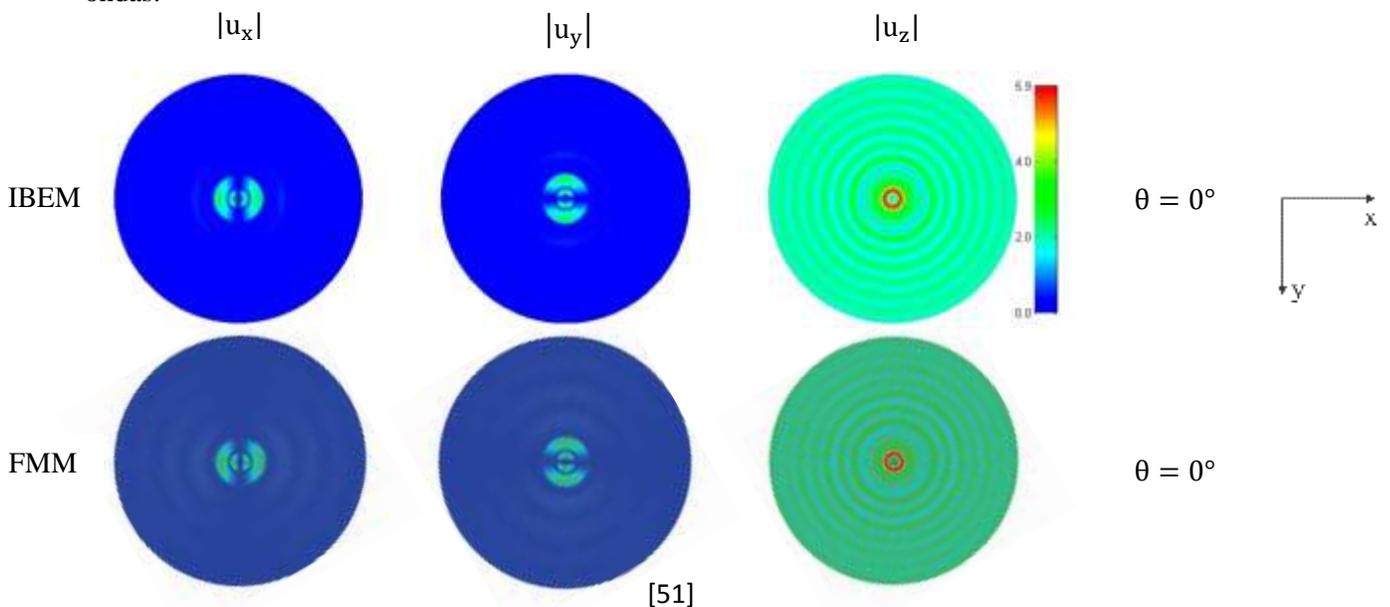
Entre las ventajas computacionales más importantes del IBEM destaca la solución de todas las incidencias de ondas sísmicas P,SV,SH y Rayleigh en una sola ejecución. La resolución del sistema de ecuaciones de manera más rápida y eficiente por medio de condensación estática y complemento de Schur (ver Capítulo 4) y la fácil incorporación de más regiones y fronteras.

Por otra parte, cuando se obtiene la solución del sistema de ecuaciones se puede obtener la solución para miles de receptores que están en la frontera. Pero también se puede calcular la solución en receptores dentro del dominio correspondiente al semiespacio y la inclusión elástica simultáneamente en secciones transversales de la misma forma que en la frontera.

Resultados en el dominio de la frecuencia

En la Figura 4 se muestra la comparación de los resultados calculados por el método IBEM y los publicados por [Chaillat, PhD\(2008\)](#), para la incidencia vertical de la onda P en un arreglo de 12,786 receptores en un dominio circular de radio $5a$. Existen algunas diferencias entre las imágenes, la primera es la escala de colores (no es exactamente la misma) y la segunda es que el número de receptores utilizado por el IBEM posiblemente es inferior al empleado por el FMM (no se reporta un número exacto de receptores) lo que implica no obtener una imagen de alta calidad.

En la incidencia vertical de la onda P, se observa una importante amplificación dentro del valle para los desplazamientos que forman semicírculos concéntricos alineados sobre el eje +X para la componente horizontal. Los desplazamientos en la componente U_y contienen la misma información pero con una rotación antihoraria de 90° . En cambio, los desplazamientos verticales se difractan como anillos concéntricos al valle hemisférico de forma simétrica con respecto al eje vertical. En cuanto se comienza a incrementar el ángulo de incidencia, se crea una zona de sombra muy bien definida en la incidencia a 30° . La difracción hacia atrás generada por la reflexión de las ondas sobre la inclusión elástica contiene más energía que las ondas que se difractan hacia adelante en la dirección +X. Los máximos de amplitud se encuentran en el centro del valle para las componentes vertical y horizontal. Por otro lado para la componente horizontal se aprecia una línea de simetría sobre el eje X. También se identifican zonas de amplificación discreta cerca de los bordes del valle. Para la incidencia a 60° se forma un máximo de amplitud en la esquina opuesta a la incidencia de ondas.



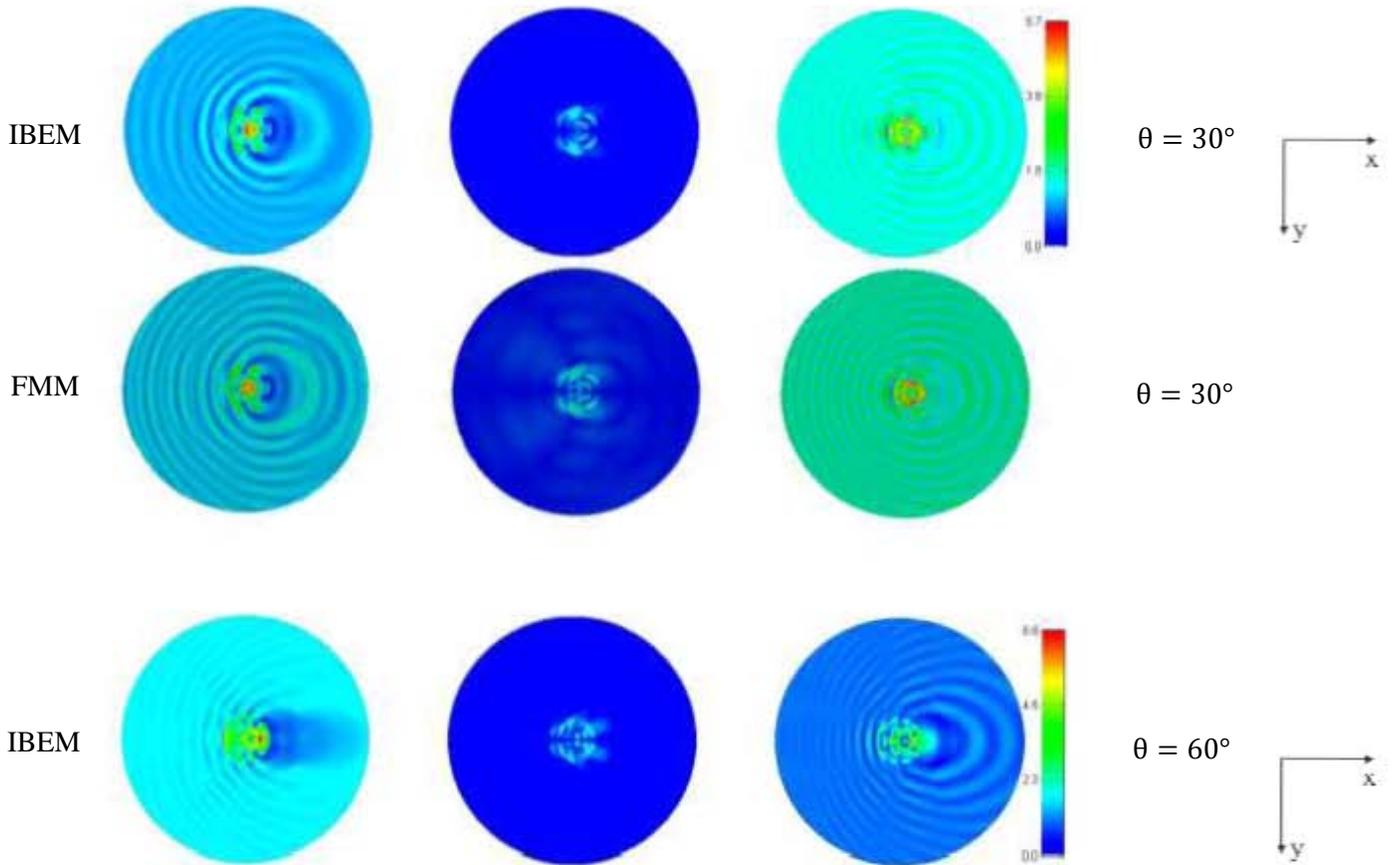
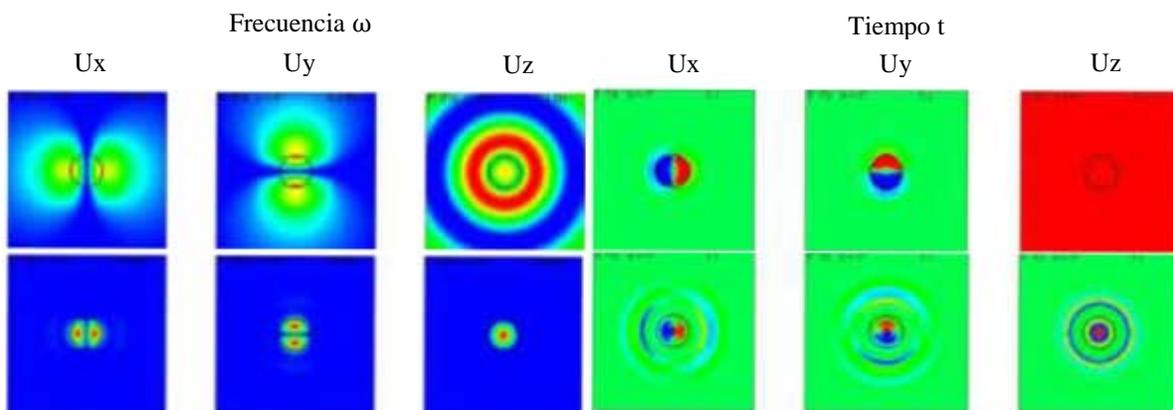


Figura 4. Difracción de una onda P con incidencia $\theta = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ$ (arriba, centro, abajo, respectivamente) sobre el valle aluvial hemisférico. Se encuentran los resultados obtenidos con el IBEM y en la parte inferior los resultados con el FMM, para una frecuencia normalizada de $\eta = 2$ para cada componente del desplazamiento en superficie; u_x (izquierda), u_y (centro) y u_z (derecha). En el caso de incidencia $\theta = 60^\circ$ no existe resultado de comparación.

Los desplazamientos en tiempo y frecuencia para la incidencia vertical de una onda P sobre el valle hemisférico son mostrados en la Figura 5. Se utilizó un arreglo cuadrado de 100×100 receptores con longitud $10a$ en intervalos de frecuencia de 0.2 Hz hasta llegar a 1Hz y un intervalo de tiempo entre cada imagen de 1s para los primeros 6s.



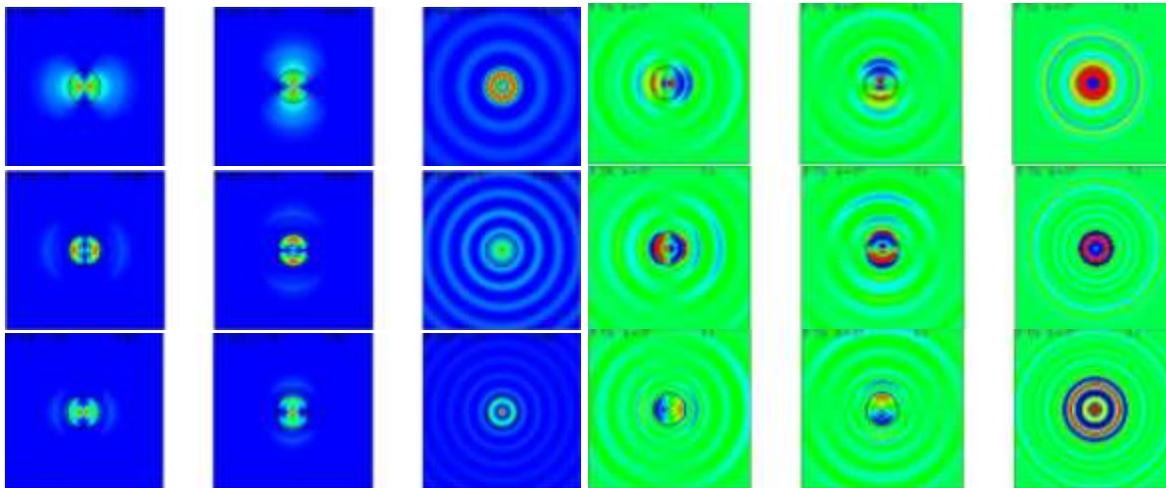


Figura 5. Componentes de desplazamiento para la incidencia vertical de ondas SV sobre el valle hemisférico en frecuencia (izquierda) y tiempo (derecha). Se utilizó un pulso de Ricker con $t_i = 1$ y $t_0 = 2$.

En la Figura 5 se observa el mismo comportamiento que en la topografía hemisférica, aunque dentro del valle se produce la mayor cantidad de difracción y amplitud de desplazamientos en comparación con el semiespacio. El frente de onda P produce difracción que se separa en las fases P,S y Rayleigh que se pueden apreciar mejor conforme aumenta el tiempo. La velocidad de la onda P coincide con la distancia recorrida para la última ventana de tiempo.

Diagramas f-x

En la Figura 6 se muestra el módulo de desplazamientos para la incidencia vertical de una onda P en función de la frecuencia y la posición normalizada de un perfil de receptores alineados sobre el eje X y el eje Y, respectivamente.

Como se puede apreciar en la componente horizontal del eje X, la mayor cantidad de energía está contenida en el interior del valle a diferencia de la componente vertical que permite salir energía hacia el semiespacio. Al igual que ocurre en el caso de la topografía, se observa una estructura más o menos periódica en el receptor en el centro del valle.

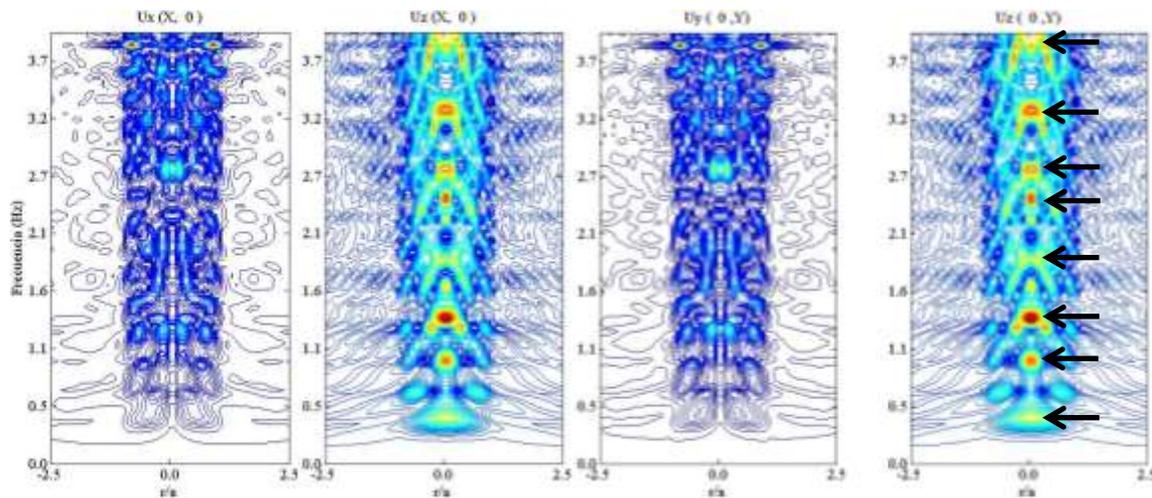


Figura 6. Diagramas f-x para dos líneas de receptores sobre las direcciones X y Y. Las flechas negras indican la amplitud máxima de desplazamiento en la estación sobre el origen.

Los diagramas f-x de la componente vertical en el eje X y Y son idénticos, esto se debe a que la difracción generada por el valle es simétrica. Por otra parte, observamos las líneas nodales que se forman en la componente U_y y U_x en el eje X y Y, respectivamente, esto coincide con las imágenes que se muestran en la Figura 5.

Fórmula empírica

La fórmula que describe todos los máximos indicados con las flechas negras dentro de la Figura 6, es una combinación de la diferencia de fase entre la velocidad de la onda P que se propaga en el semiespacio α_E y en la inclusión elástica α_R .

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\alpha_E - \alpha_R}{2a} \right) \frac{n}{2\sqrt{3}} \quad n = 1,2,3, \dots \quad (5.1)$$

Aunque los términos constantes en el denominador de la ec.(5.1) se pueden reducir fácilmente a un valor conste de 12, se muestra explícitamente los términos que provienen de aspectos geométricos, ver ec.(5.3).

Tabla 2. Comparación entre las frecuencias numéricas encontradas para la incidencia vertical de una onda P y su valor teórico ec.(5.1).

Valor Numérico ω (Hz)	Valor Teórico ω_n (Hz)	Error absoluto $ \omega - \omega_n $
0.4331	0.4556	0.0224
0.9605	0.9111	0.0493
1.3597	1.3667	0.0070
1.8945	1.8222	0.0723
2.2712	2.2778	0.0066
2.7382	2.7333	0.0049
3.2806	3.1889	0.0917
3.8832	3.6444	0.2388
3.9812	4.1000	0.1188

La Tabla 2 muestra los valores calculados teóricamente para las frecuencias de resonancias para el valle hemisférico. La ec.(5.1) tiene un error relativo de 3.85% entre los datos numéricos y los calculados de manera teórica siendo una buena aproximación a los valores de resonancia, esto se puede ver en la Figura 7, donde se muestran los desplazamientos para el receptor que se encuentra en el origen de coordenadas.

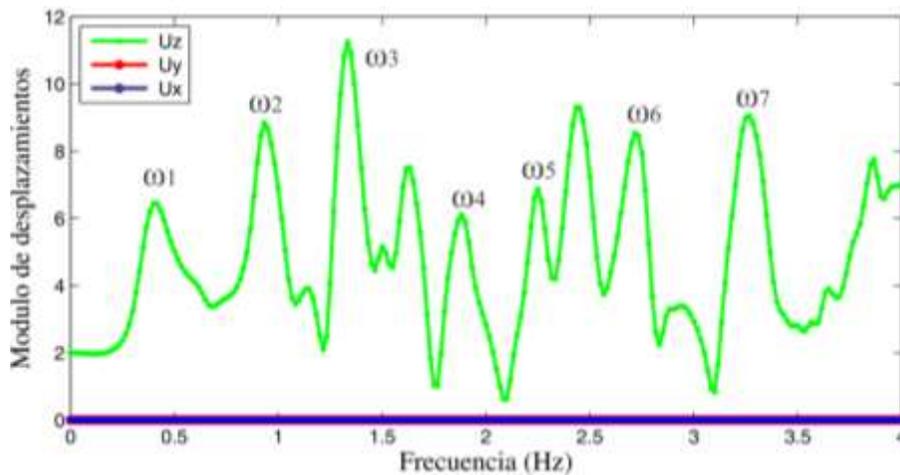


Figura 7. Módulo de desplazamientos para la incidencia vertical de una onda P sobre el valle hemisférico en la estación ubicada en el origen de coordenadas.

Es claro ver que la longitud de onda del valle es $\lambda = 2a$ para una frecuencia normalizada igual a uno, donde a es la distancia de normalización del modelo. La frecuencia de la onda P que proviene del semiespacio con una velocidad α_E está definida por la ec.(4.6), tal que

$$f_P = \frac{\alpha_E}{\lambda_\alpha}. \quad (5.2)$$

Donde la longitud de onda P, está relacionada con la frecuencia adimensional del valle por

$$\eta_\alpha = \frac{2a}{\lambda_\alpha} \quad (5.3)$$

Un modelo de velocidades y densidades no adimensionales para el modelo de la Figura 1, propuesto por Devalaud, PhD(2007), tiene los valores mostrados en la Tabla 3.

Tabla 3. Valores numéricos para el modelo de la Figura 1, tomados de Devalaud PhD,(2007).

α_E	β_E	α_R	β_R	ρ_E	ρ_R	a	η
$1730 \frac{m}{s}$	$1000 \frac{m}{s}$	$1320 \frac{m}{s}$	$710 \frac{m}{s}$	$2000 \frac{kg}{m^3}$	$1200 \frac{kg}{m^3}$	75m	0.5

La frecuencia normalizada determina una frecuencia central de excitación del valle $f_P = 5.76$ Hz que se utiliza como parámetro en el pulso de Ricker definido en la ecs.(4.1-4.2). En síntesis, el análisis adimensional nos permite calcular de manera unívoca los desplazamientos para distintos modelos mecánicos y establecer el rango de validez del método IBEM.

Sismogramas sintéticos

En la Figura 8 se muestra la línea de receptores sobre el eje X, para la incidencia vertical los desplazamientos en la componente vertical registran una fuerte difracción producida por los bordes que viajan en el interior del valle y se transmiten a la esquina contraria.

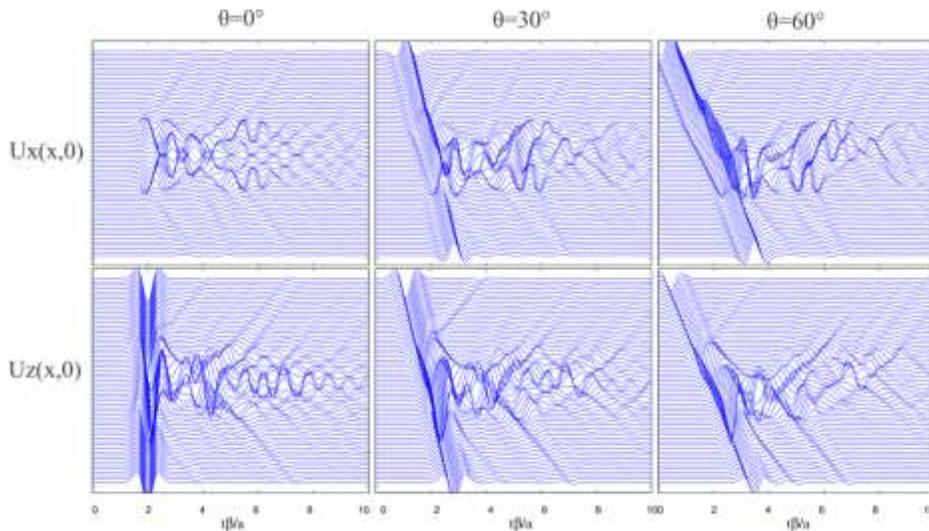


Figura 8. Sismogramas sintéticos para la incidencia vertical de una onda P sobre el valle hemisférico en un arreglo de receptores sobre el eje X.

Se pueden apreciar las fases P, S y Rayleigh que se producen en los bordes del valle hacia su interior. Conforme aumenta el ángulo de incidencia se pueden distinguir las ondas difractadas por las esquinas de manera más visible, al igual que las reflexiones internas dentro del valle.

La mayor cantidad de movimiento se registra dentro del cañón, (inclusión suave sobre sulo rígido) en especial para la componente vertical en incidencia a 0° . Cuando aumenta el ángulo de incidencia la amplitud de las ondas difractadas por la superficie incidente es menor que por las ondas difractadas por la contra esquina.

Incidencia SV

El segundo modelo de comparación es un valle aluvial hemiesférico ante la incidencia vertical y oblicua $\theta = 30^\circ$ de una onda plana SV. Los parámetros mecánicos son $\mu_R/\mu_E = 1/6$, $\rho_R/\rho_E = 2/3$ con $\nu_R = \nu_E = 1/3$ presentados por [Mosessian & Dravinski, 1990](#). En ese trabajo se utilizó una formulación inelástica débil con un factor de calidad igual a 100 para la onda P y SV. En este trabajo no se utiliza una formulación inelástica sino puramente elástica.

Comparación de resultados en frecuencia

En la Figura 9 se muestran los desplazamientos para la incidencia de una onda SV vertical y oblicua sobre el valle aluvial hemisférico, respectivamente. Se puede apreciar una gran exactitud con los resultados publicados por [Mosessian & Dravinski \(1990\)](#) utilizando el Método Integral a la Frontera (BIE por sus siglas en inglés) y con los obtenidos por [Chaillat \(2008\)](#) con el FMM. En este último, se muestra un comportamiento puramente elástico que no difiere mucho de la formulación inelástica debido a la frecuencia de comparación. La atenuación inelástica no ha sido considerada en nuestro modelo.

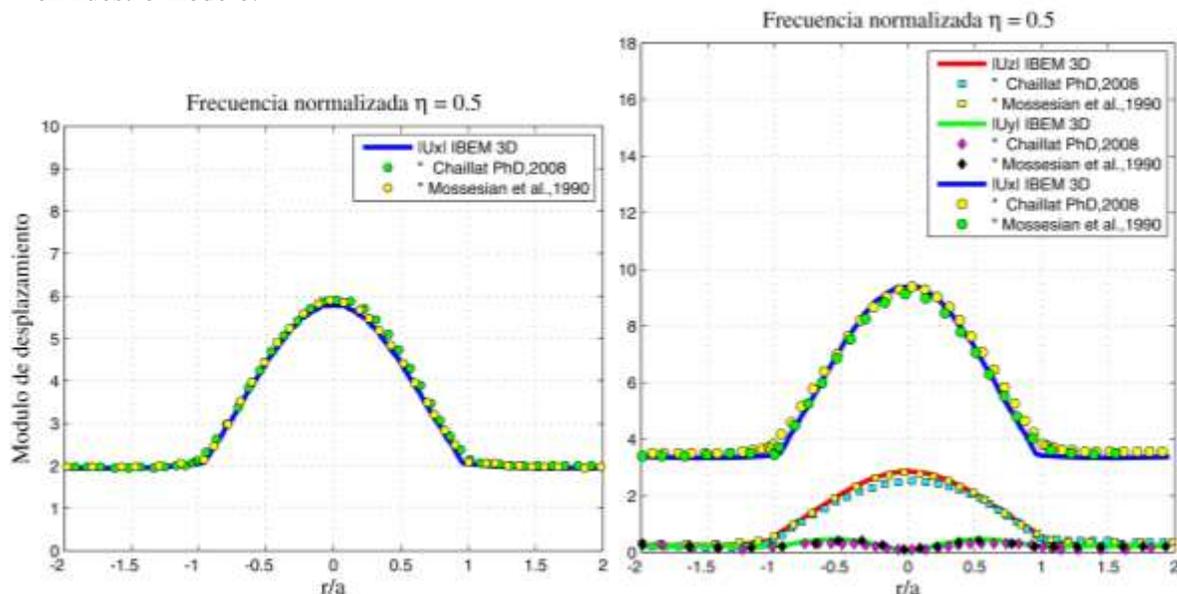


Figura 9. Módulo de desplazamientos para la incidencia vertical (izquierda) y oblicua $\theta = 30^\circ$ (derecha) de una onda SV sobre el modelo de la Figura 1. Se muestra la comparación entre los resultados de el BIE, el FMM y el IBEM para una frecuencia adimensional $\eta = 0.5$.

En la Figura 9 los resultados obtenidos que se muestran por la comparación entre los diferentes métodos numéricos FMM, BIE e IBEM son excelentes. Para continuar con nuestro análisis, retomamos el modelo mostrado en la Figura 1 a partir de este momento.

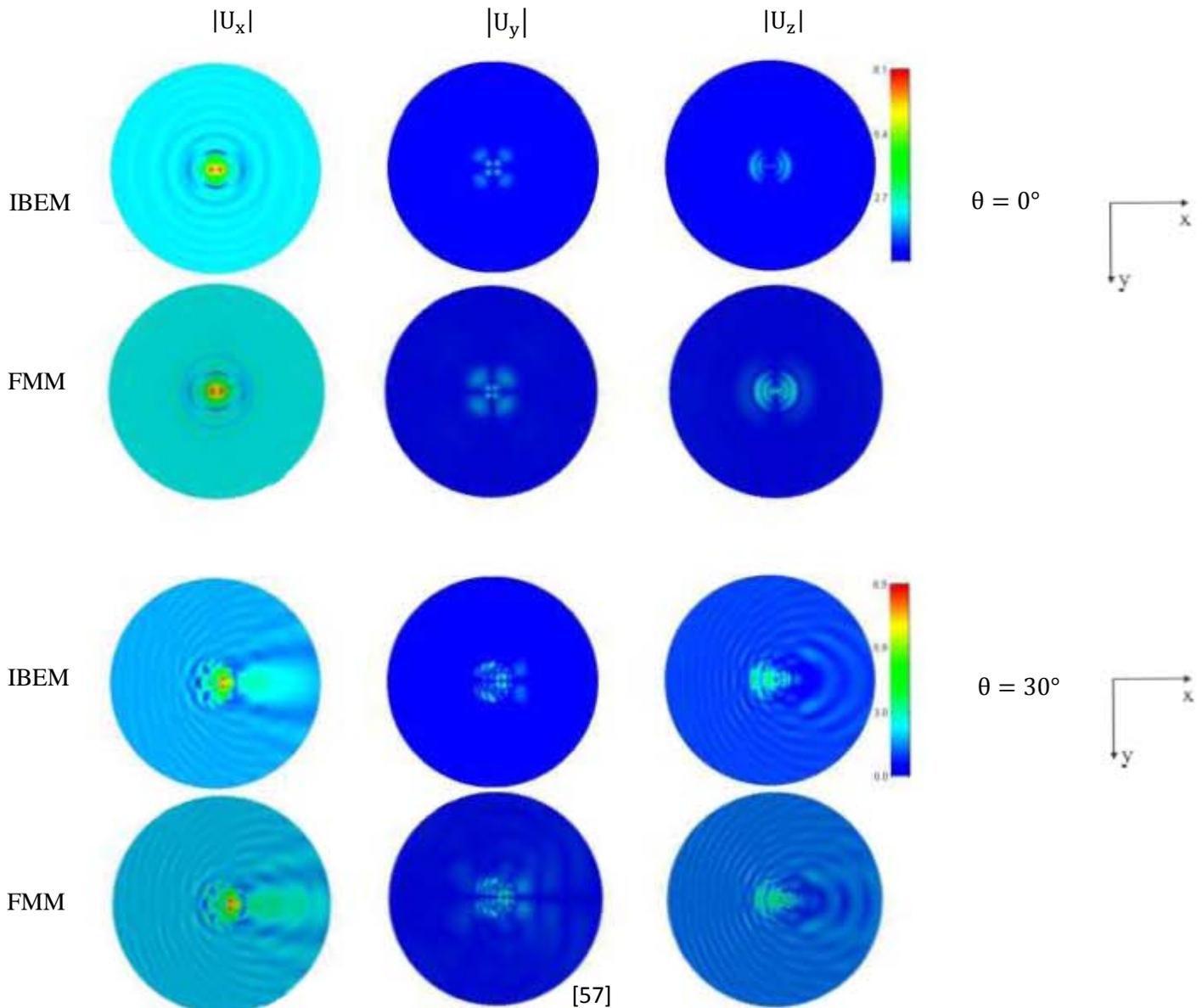
Resultados en el dominio de la frecuencia

La Figura 10 muestra la incidencia de ondas SV en los ángulos $\theta = 0^\circ, 30^\circ$ y 60° . Las diferencias que se pueden apreciar entre los resultados calculados por el IBEM y el FMM son la escala de colores y el número de receptores para el dominio circular.

En la incidencia de la onda SV sobre el valle hemisférico, se observan dos puntos de máxima amplitud dentro del valle. Estos máximos forman frentes elípticos con eje de simetría sobre el eje Y. Al incrementar el ángulo de incidencia se forma un lóbulo de máximas amplitudes localizado en la región de la sombra de la incidencia. En la dirección opuesta las amplitudes cada vez están más cerca y forman un patrón de difracción de semicírculos alrededor del valle.

Para la componente U_y se tienen dos lóbulos alineados en el eje Y. Al aumentar la frecuencia, estos se acercan a los bordes del valle y se empiezan a separar formando anillos concéntricos posicionados a 45° de los ejes coordenados en la parte exterior del valle. Dentro del valle se siguen apreciando estos lóbulos en alta frecuencia, pero de menor tamaño, ver Figura 10.

En la componente vertical, cuando la onda incide verticalmente se forman anillos semicirculares alineados en el eje de incidencia X. Conforme aumenta el ángulo de incidencia estos anillos se acercan a los bordes del valle, esto forma patrones de difracción constructiva y destructiva en la región iluminada por la incidencia. La región de la sombra presenta un lóbulo de menor amplitud que los desplazamientos en el borde del valle, en el cual tiene una amplitud máxima en toda la componente.



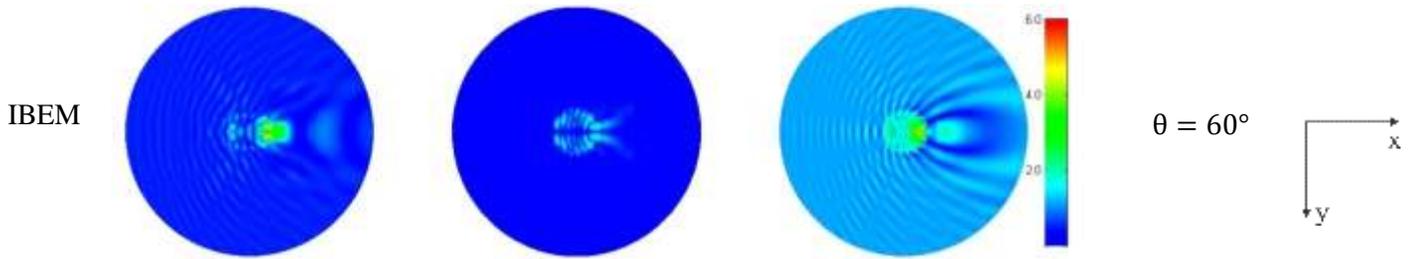


Figura 10. Lo mismo que en la Figura 4 pero incidencia SV.

Diagramas f-x

En la Figura 11 se muestra el módulo de desplazamientos para la incidencia vertical de una onda SV en función de la frecuencia y la posición normalizada de un perfil de receptores alineados sobre el eje Y y el eje X, respectivamente.

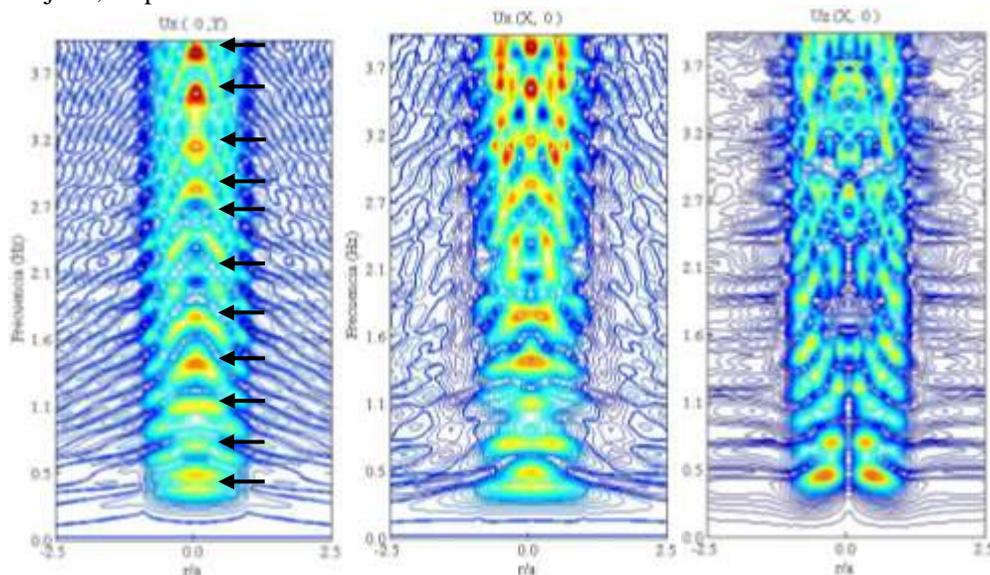


Figura 11. Diagramas f-x para la línea de receptores ubicadas sobre el eje Y y X. Las flechas negras indican la amplitud máxima de desplazamiento en el punto central del valle.

Los diagramas f-x de la componente horizontal en la Figura 11 se muestra una gran cantidad de energía dentro del valle aluvial. Sólo se registra desplazamiento en la componente vertical sobre el eje Y. También, se puede observar la periodicidad de aparición de los máximos de amplitud más claramente en la componente horizontal del eje Y.

La fórmula ec.(5.4) describe todos los máximos indicados con las flechas negras dentro de la Figura 11, es una combinación de la diferencia de fase entre la velocidad de la onda S que se propaga en el semiespacio β_E y en la inclusión elástica β_R .

$$\omega_n = \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_E - \beta_R}{2a} \right) \frac{n}{2\sqrt{2}} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.4)$$

Los resultados numéricos para los máximos de los desplazamientos encontrados en la componente horizontal de la Figura 11 se muestran en la Tabla 4. El cálculo del error porcentual entre los resultados numéricos y teóricos calculados con la ec.(5.4) y los valores de la Tabla 4 es de 4.57%.

Esto muestra que se encontró una buena aproximación de resonancia para el valle aluvial hemisférico como se puede apreciar en la Figura 12, que muestra la amplitud de los desplazamientos para la estación que se encuentra en el origen de coordenadas.

Tabla 4. Comparación entre las frecuencias numéricas encontradas para la incidencia vertical de una onda SV y su valor teórico ec.(5.4).

Valor Numérico ω (Hz)	Valor Teórico ω_n (Hz)	Error absoluto $ \omega - \omega_n $
0.3955	0.3418	0.0537
0.7495	0.6835	0.0660
1.0810	1.0253	0.0557
1.4049	1.3671	0.0378
1.7815	1.7088	0.0727
2.1657	2.0506	0.1151
2.5800	2.3924	0.1877
2.8136	2.7341	0.0794
3.1525	3.0759	0.0766
3.5744	3.4177	0.1567
3.9058	3.7595	0.1464

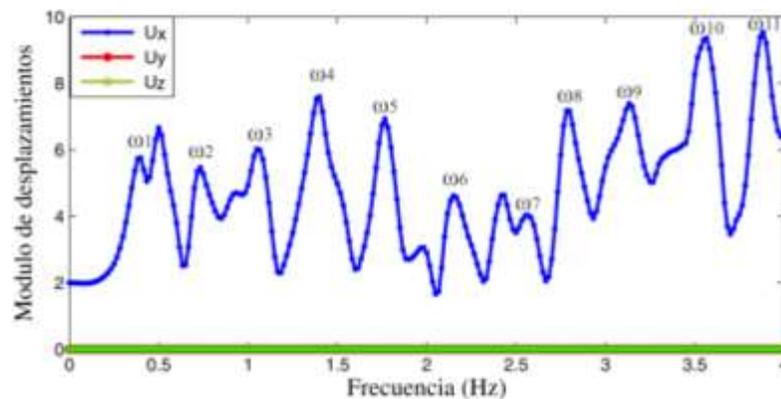


Figura 12. Módulo de desplazamiento para la incidencia vertical de una onda SV sobre el valle hemisférico en la estación ubicada en el origen de coordenadas.

La importancia de la ec.(5.4) radica en que la localización donde se encuentra la estación, coincide con el lugar donde se registran los máximos desplazamientos que generan la difracción de ondas dentro del valle.

Sismogramas sintéticos

En la Figura 13 se muestran los sismogramas sintéticos de un arreglo de receptores equiespaciados sobre el eje X y Y, para la incidencia de ondas SV a 0°, 30° y 60°. Se puede apreciar el retraso en los desplazamientos en el interior del valle con respecto al tiempo de arribo en el semiespacio plano para la componente horizontal de la incidencia vertical.

Las ondas difractadas por los bordes tienen velocidad de ondas de Rayleigh que se propagan hacia afuera y adentro del valle. Cuando la incidencia es vertical la amplitud de estas ondas es simétrica. En cambio, cuando aumenta el ángulo de incidencia la amplitud de las ondas reflejadas por el valle aluvial son menores en comparación con las ondas refractadas por la esquina contraria. Esto se ve claramente en la componente vertical con ángulo de 60°, donde la amplitud de las ondas de Rayleigh tienen una importante cantidad de energía que se transmite al semiespacio.

Por otra parte, las fases P,S y Rayleigh refractadas por las esquinas del valle hacia el interior del valle tienen varias reflexiones internas antes de desvanecerse. Cuando el ángulo se incrementa se distingue mejor la propagación de estas fases, las cuales tienen una amplitud máxima en el caso del ángulo crítico. La componente U_y es nula para cualquier ángulo de incidencia, pues el eje X representa una línea nodal para estos desplazamientos.

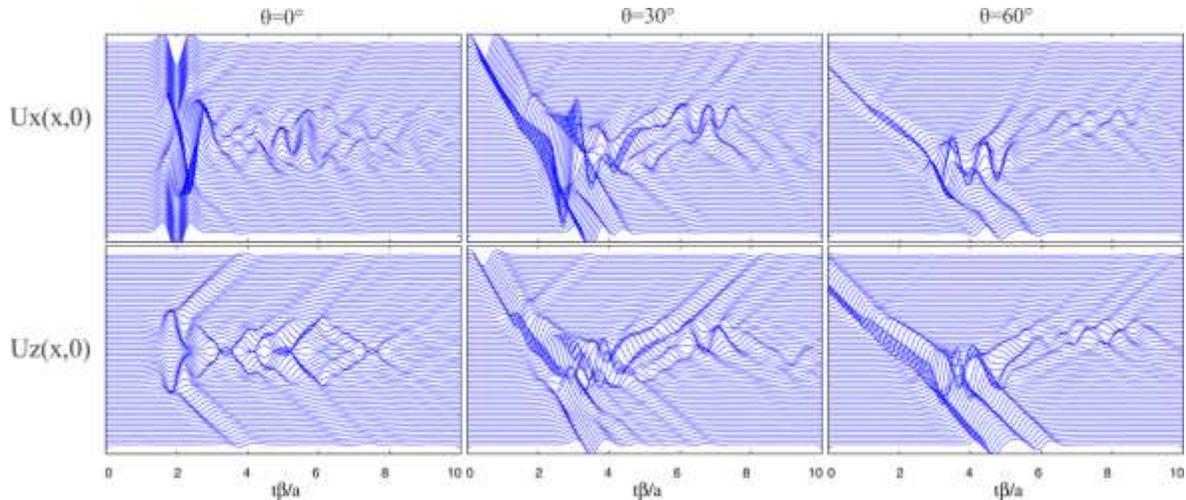


Figura 13. Sismogramas para el perfil de receptores alineados en el eje X del valle hemisférico, ante la incidencia de una onda SV con un ángulo de incidencia de 0° , 30° y 60° .

En el caso de la incidencia de la onda SV para el perfil de receptores alineados en el eje Y, los desplazamientos U_y y U_z son nulos para la incidencia vertical, ver Figura 14. Sin embargo, los desplazamientos U_y no son nulos cuando se incrementa el ángulo de incidencia. Se puede apreciar una serie de reflexiones internas dentro del valle para la componente U_y .

Para la componente horizontal, el tiempo que tarda en llegar el frente de onda que se refleja desde el fondo del valle aluvial hasta la superficie es de $t\beta/a = 2$. Se repite el mismo comportamiento y disminuye la amplitud de los desplazamientos en esta componente, al incrementar el ángulo de incidencia. Por otra parte para los desplazamientos verticales, se tienen desplazamientos similares a los de la componente horizontal. En este caso, la amplitud es cero con incidencia vertical, posteriormente aumenta hasta el ángulo crítico y luego disminuye.

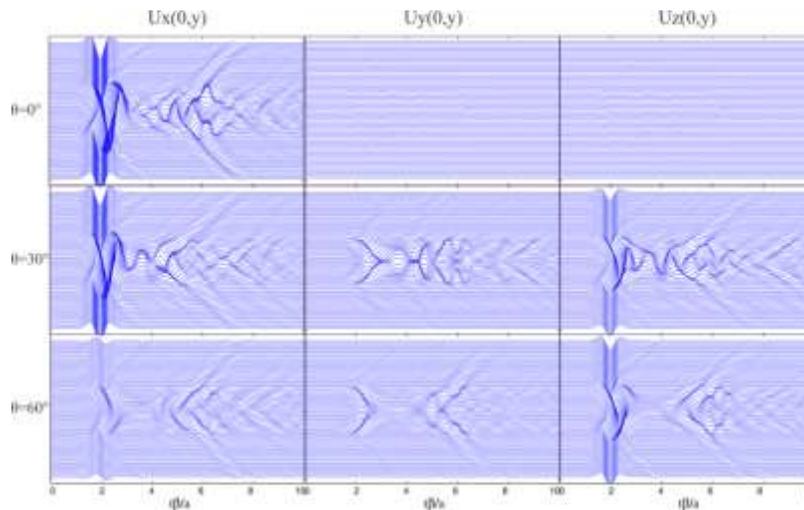


Figura 14. Sismogramas sintéticos para el perfil de receptores alineados en el eje Y del valle hemisférico, ante la incidencia de una onda SV con un ángulo de incidencia de 0° , 30° y 60° .

Resultados en el dominio del tiempo

En la Figura 15 se muestra la incidencia vertical de ondas SV sobre el valle hemisférico, mostramos la propagación de ondas en el dominio del tiempo, para una rejilla cuadrada de receptores 100×100 receptores que cubren una región de $10a \times 10a$. La deconvolución se realizó con un pulso de Ricker con un tiempo inicial $t_1 = 2s$ y $t_0 = 1s$. El intervalo de tiempo entre cada imagen es 1s para los primeros 6s a partir de 2s.

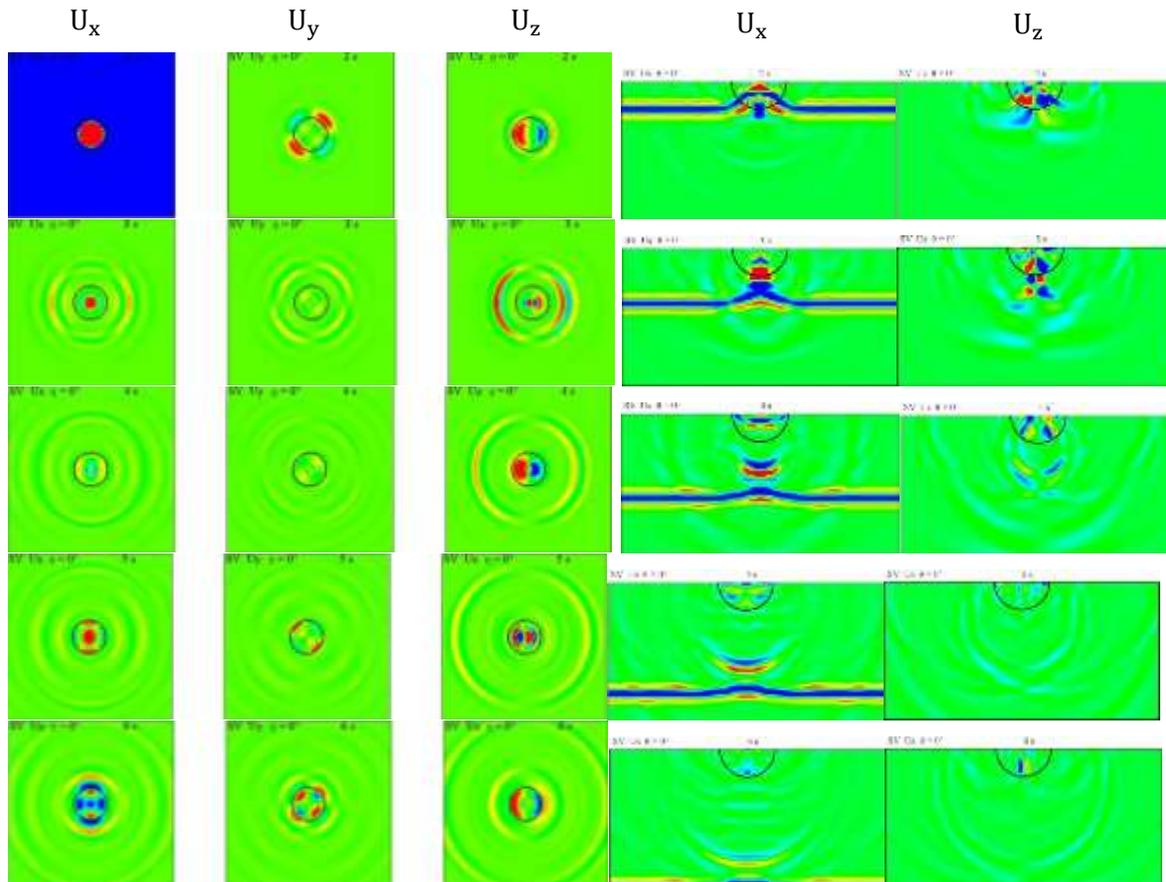


Figura 15. Desplazamientos para la incidencia vertical de ondas SV sobre el valle hemisférico. Se muestra la sección transversal correspondiente al plano XZ.

En la componente vertical de la Figura 15 se puede apreciar las ondas P,S y Rayleigh que se difractan hacia afuera del valle aluvial. En la sección transversal se ven más fácilmente estas fases. También se observa el arribo de la onda P a los bordes de la rejilla de receptores en un tiempo de $t\beta/a = 5$. La amplitud de los desplazamientos es más amplia en la dirección $-X$.

Para la componente horizontal se encuentran máximos de amplitud distribuidos en el centro y en los bordes del valle en las direcciones $+Y$ y $-Y$, que difractan ondas en esta dirección. Al incrementarse el tiempo se alterna en la dirección X , estos son los frentes reflejados por la base del valle aluvial como se ve claramente en el tiempo $t\beta/a = 4$ para la sección transversal en esta componente.

En el caso de la componente U_y se tiene una línea nodal sobre el eje X en superficie y un plano nodal en la sección transversal XY . Los desplazamientos se comportan como un frente esférico al transcurrir el tiempo, con máximos de amplitud a 45° respecto a cada eje coordenado.

Incidencia SH

Resultados en el dominio de la frecuencia

En la Figura 24, se muestra la distribución del módulo de la amplitud de los desplazamientos ante la incidencia vertical de la onda SH sobre el valle hemisférico. Se colocó un arreglo cuadrado de 100×100 receptores con longitud $10a$ sobre la superficie. Los intervalos de frecuencias son de 0.2Hz hasta llegar a 1Hz.

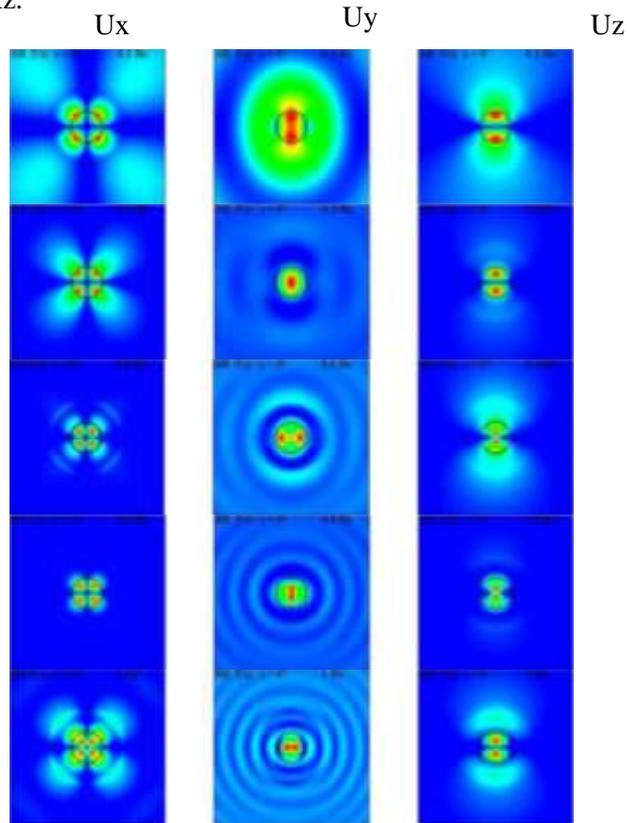


Figura 16. Los mismo que en Figura 5 pero incidencia SH.

Se observan dos líneas nodales sobre los ejes coordenados en la componente horizontal de la Figura 16. Con máximos de amplitud distribuidos en cuatro lóbulos a 45° con respecto a los ejes coordenados por fuera del valle y que se desplazan hacia su interior. Mientras, en la componente vertical se muestran dos lóbulos de desplazamientos máximo dentro del valle y con forma de semianillos que están alineados en el eje Y en la parte exterior del valle. Para la componente U_y se observan un patrón de difracción de las amplitudes máximas sobre el eje Y creado a partir de la alternancia con el eje X. Los desplazamientos forman anillos elípticos con una amplitud más pronunciada sobre el eje Y. Los máximos permanecen dentro del valle y permiten que la energía se propague hacia el semiespacio.

Diagramas f-x

En la Figura 17, se muestran los diagramas de desplazamiento en función de la frecuencia y la distancia respecto al origen de coordenadas para la incidencia de ondas SH verticales sobre el valle hemisférico.

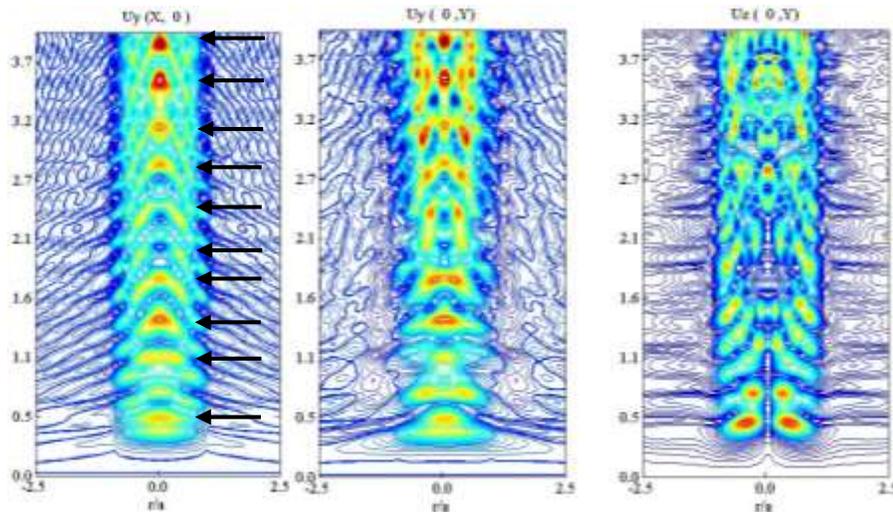


Figura 17. Diagrama f-x para el perfil sobre el eje X y Y, ante la incidencia de una onda SH vertical.

Las frecuencias en que aparecen los máximas amplitudes (flechas negras, Figura 17) sobre el receptor que está sobre el origen de coordenadas es la ec.(5.4) salvo que se añade una constante para ajustar mejor los resultados teóricos esta constante es el promedio de las desviaciones absolutas máximas (~ 0.1) para reducir el error porcentual hasta el 2.79%.

Sismogramas sintéticos

En la Figura 18, se muestran los desplazamientos de la componente U_y , no hay movimiento en las otras componentes para el perfil sobre el eje X, es decir son líneas nodales. Se puede observar las múltiples reflexiones desde la parte inferior del valle hasta la superficie debido a la onda SH atrapada en el valle aluvial, esto cumple con la definición de ondas de Love.

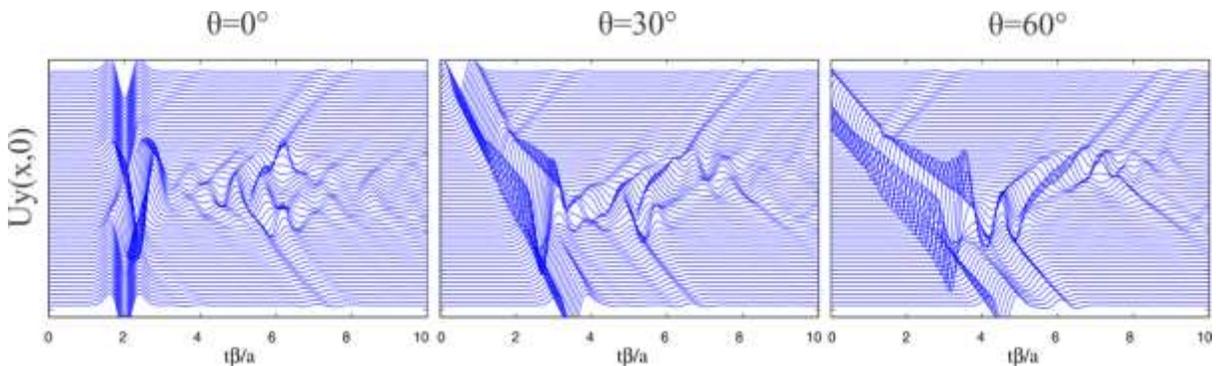


Figura 18. Sismogramas para el perfil de receptores alineados en el eje X del valle hemisférico, ante la incidencia de una onda SH con un ángulo de incidencia de 0° , 30° y 60° .

En el caso de las ondas de Love la amplitud no decrece cuando se aumenta el ángulo de incidencia como se ve en el caso a 60° , también las reflexiones internas aumentan la duración del movimiento dentro del valle. Los modos de Love pueden ser identificados como formas repetitivas que se forman dentro del valle y se presentan en ciertos intervalos de tiempo de $t\beta/a = 2.85$.

Se distingue también una gran difracción de ondas con amplificaciones importantes en el tiempo en que comienza el primer modo de Love, en particular en las esquinas.

Resultados en el dominio del tiempo

En la Figura 19 se muestra la incidencia vertical de ondas SH sobre el valle hemisférico. Se muestra la propagación de ondas en el dominio del tiempo, para una rejilla cuadrada de receptores 100×100 receptores que cubren una región de $10a$. La deconvolución se realizó con un pulso de Ricker con un tiempo inicial $t_i = 2s$ y $t_0 = 1s$. El intervalo de tiempo entre cada imagen es $1s$ para los primeros $7s$ a partir de $2s$.

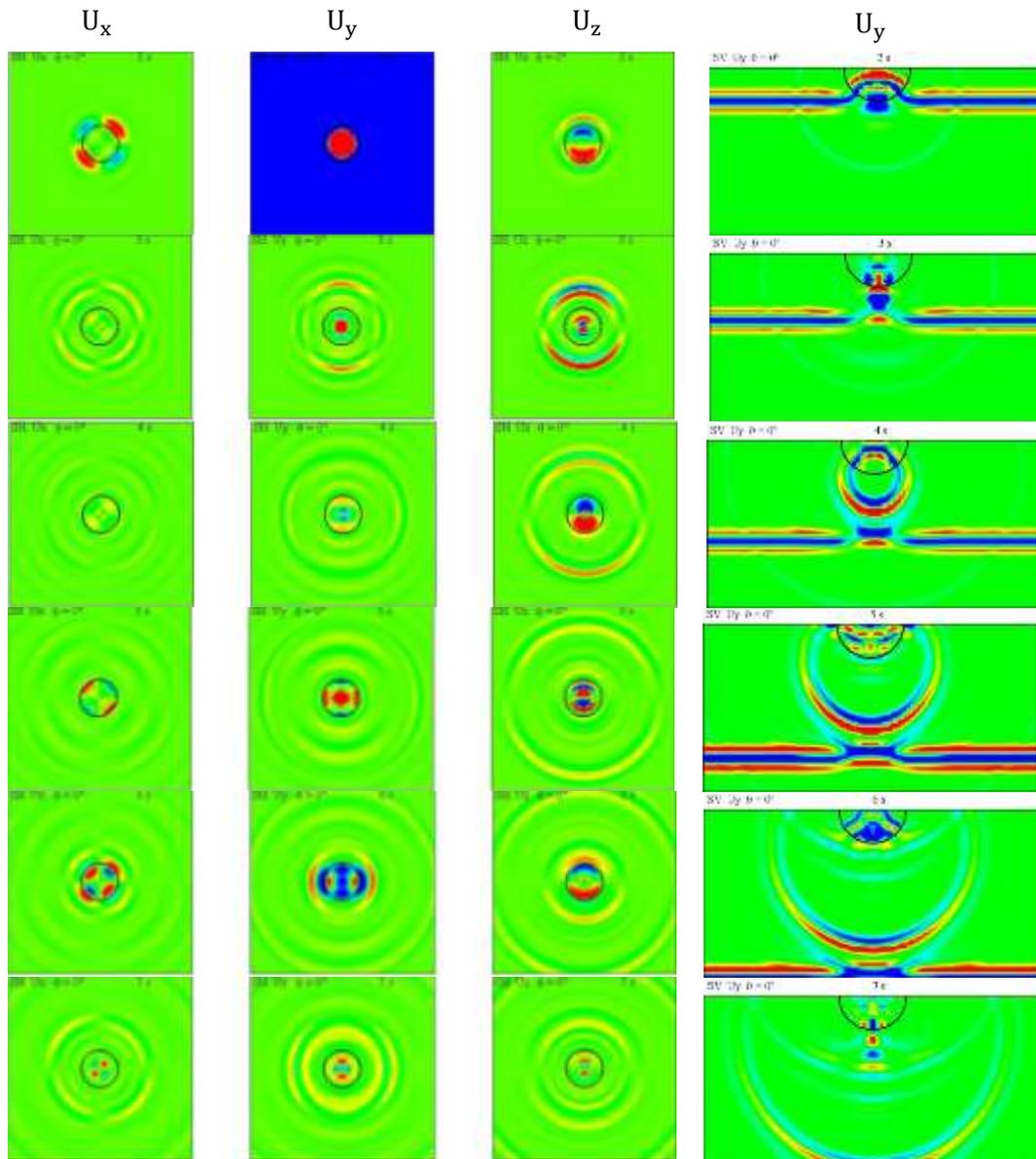


Figura 19. Desplazamientos para la incidencia vertical de ondas SH sobre el valle aluvial hemisférico. Se muestra la sección transversal correspondiente al plano XZ.

En la Figura 19 se puede ver claramente en la sección transversal que mucha energía de la onda SH incidente, se queda atrapada dentro del valle aluvial. Estos frentes de onda se transmiten a través del valle con una velocidad menor que las ondas que se propagan por la interfaz del semiespacio. Lo anterior crea frentes de onda difractados por las esquinas que se alejan del valle aluvial al mismo tiempo en superficie, pero con un desfazamiento en la dirección $+Z$. La mayor cantidad de energía

se concentra en el punto más profundo del valle. Por otro lado, los desplazamientos en la componente vertical son difractados por los dos máximos de amplitud orientados en la dirección $+Y$ y $-Y$. al mismo tiempo los cuatro máximos que se crean por afuera del valle en la componeten horizontal difractan el mismo frente de onda. En ambas componentes, conforme avanza el tiempo se difractan ondas debido a los bordes del valle aluvial. Esto se registra en los sismogamas de la Figura18.

Ondas de Rayleigh

Los diagramas f-x para la incidencia de la onda de Rayleigh sobre un perfil de receptores alineados en el eje X y Y se muestran en la Figura 20.

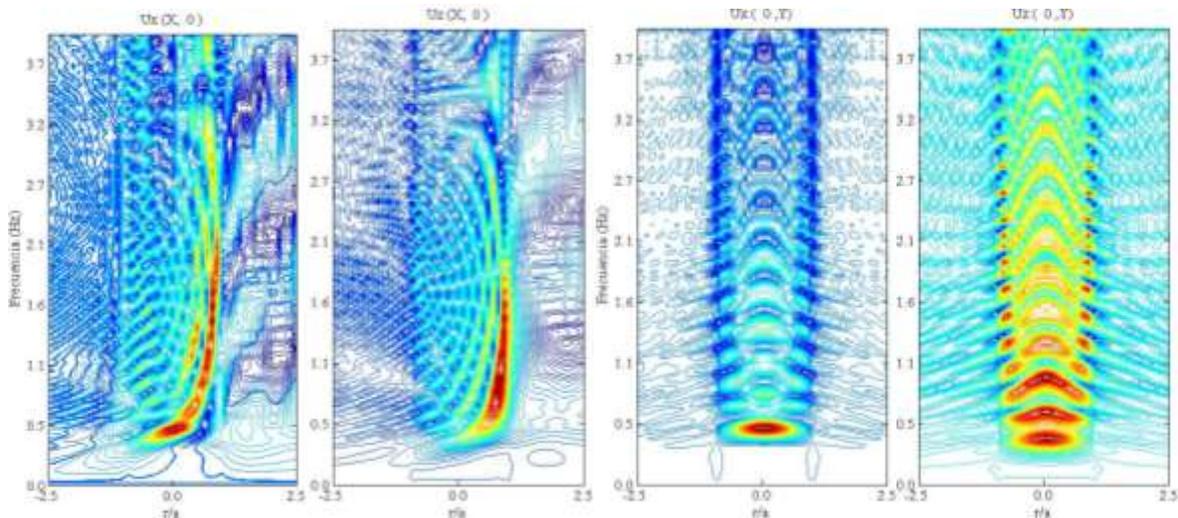


Figura 20.Diagrama f-x para la incidencia de Rayleigh sobre el perfil de receptores en el eje X y Y.

En el diagrama f-x de la Figura 20, la componente vertical y horizontal muestran que mucha de la energía de la onda incidente se queda atarapada dentro del valle aluvial y en menor cantidad se refleja en sentido contrario a la dirección de la incidencia. Se puede ver claramente que esta onda se propaga hacia la esquina contraria como el modo de Rayleigh fundamental y varios subarmónicos en la componente vertical y horizontal. No hay desplazamientos en la componente U_y sobre el arreglo de receptores en el eje X.

Por otro lado, en los receptores sobre el eje Y se distingue un patrón de difracción más claro y periódico dentro del valle aluvial. Los máximos de desplazamientos a baja frecuencia se encuentran en el centro del valle para la componente horizontal y vertical. Con el aumento de frecuencia estos máximos centrales se dividen y se acercan a los bordes del valle.

Sismogramas sintéticos

En la Figura 21, se muestran los sismogramas registrados en un perfil de receptores equiespaciados en la dirección X y Y. En el perfil alineado sobre el eje X, la onda de Rayleigh reflejada se puede apreciar muy bien en la componente vertical. La amplitud de la onda que se propaga dentro del valle aluvial crece conforme se acerca a la contraesquina. En este punto, se refleja hacia adentro del valle energía pero la mayoría se transmite al semiespacio. Al llegar a la contraesquina se aprecia la onda de Rayleigh transmitida y un subarmónico que la acompaña.

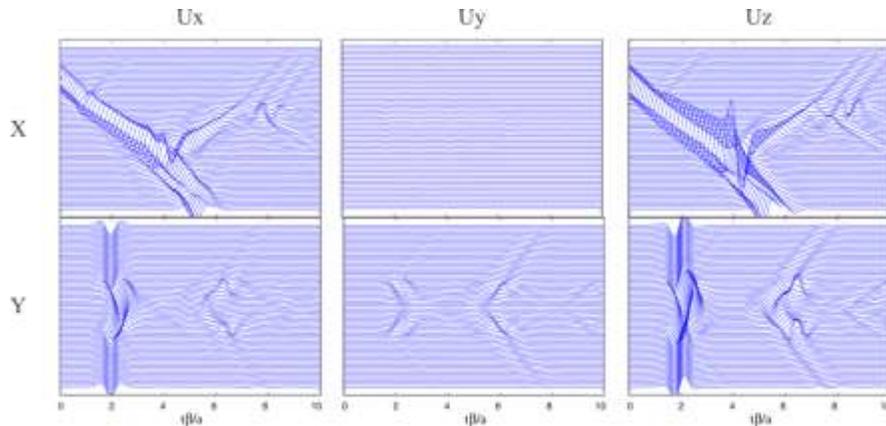
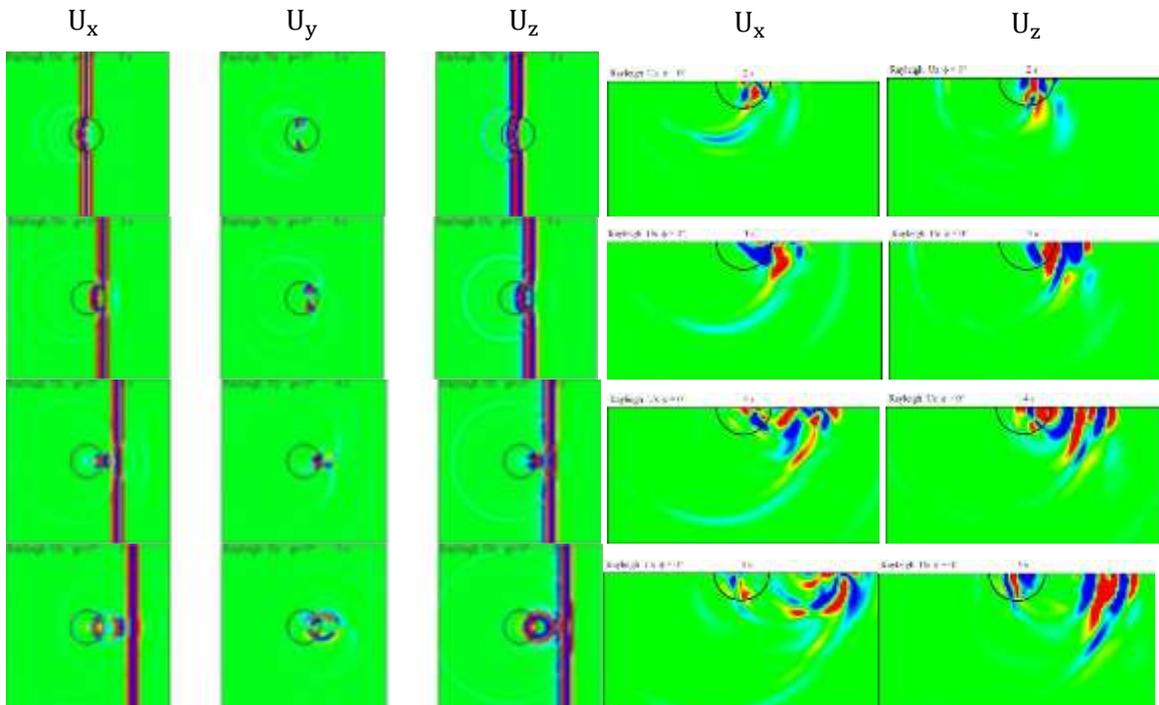


Figura 21. Sismogramas de la onda Rayleigh que incide con un ángulo azimutal $\varphi = 0^\circ$.

Para los receptores que se encuentran en el eje Y registran un movimiento periódico muy bien definido. Este movimiento, es característico de los modos que se identificaron en la gráfica 20. Observe que hay una amplitud notable de desplazamientos en los bordes del valle, estos permiten la reflexión hacia adentro del valle y su exterior.

Resultados en el dominio del tiempo

En la Figura 22, se muestra la incidencia de ondas de Rayleigh sobre el valle hemisférico. Se muestra la propagación de ondas en el dominio del tiempo, para una rejilla cuadrada de receptores 100×100 receptores que cubren una región de $10a \times 10a$. La deconvolución se realizó con un pulso de Ricker con un tiempo inicial $t_i = 2s$ y $t_0 = 1s$. El intervalo de tiempo entre cada imagen es 1s para los primeros 7s a partir de 2s.



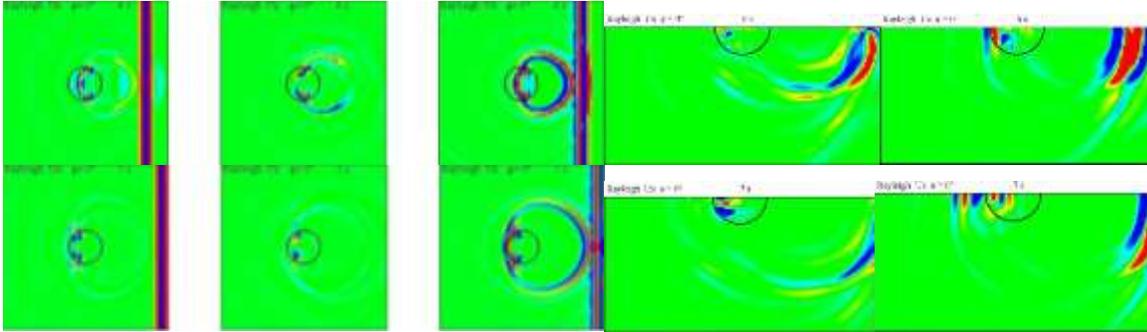


Figura 22.Desplazamientos para la incidencia de ondas de Rayleigh sobre el valle aluvial hemisférico. Se muestra la sección transversal correspondiente al plano XZ.

En la Figura 22 se muestra la propagación de un frente de onda reflejado en la componente vertical y horizontal, debido a la presencia del valle. Los desplazamientos de la componente vertical son más grandes en comparación con la componente horizontal que se desvanece más rápido. Los desplazamientos U_y se propagan sobre el contorno del valle, parte de estas ondas que son difractadas hacia el interior del valle son amplificadas por la impedancia mecánica entre ambos medios. Esto provoca que los desplazamientos dentro del valle tengan menor velocidad y mayor amplitud, como se puede ver en la componente vertical en $t\beta/a = 3$. En la sección transversal, al igual que en la topografía observamos ondas que se propagan hacia el interior del semiespacio, pero esta vez las ondas que se quedan atrapadas en el valle producen una difracción hacia atrás de menor amplitud pero de la misma forma geométrica, esto se puede apreciar en las componentes horizontal y vertical para $t\beta/a = 7$.

5.2 Valle Trapezoidal

El modelo siguiente es un valle aluvial trapezoidal (estrato suave sobre base rígida) con las siguientes propiedades mecánicas $\beta_R = 1 \text{ km/s}$, $\beta_E = 2.5 \text{ km/s}$, $\rho_R = 1.49 \text{ g/cm}^3$ y $\rho_E = 2.45 \text{ g/cm}^3$ con $\nu_R = 1/3$ y $\nu_E = 1/3$, en el valle aluvial y el semiespacio, respectivamente. Este modelo es presentado por [Kawase & Aki, \(1989\)](#) y permite estudiar los efectos producidos por las esquinas, así como la propagación de ondas superficiales de Love generadas por las esquinas, [Bard & Bouchon, \(1980a\)](#), ver Figura 23.

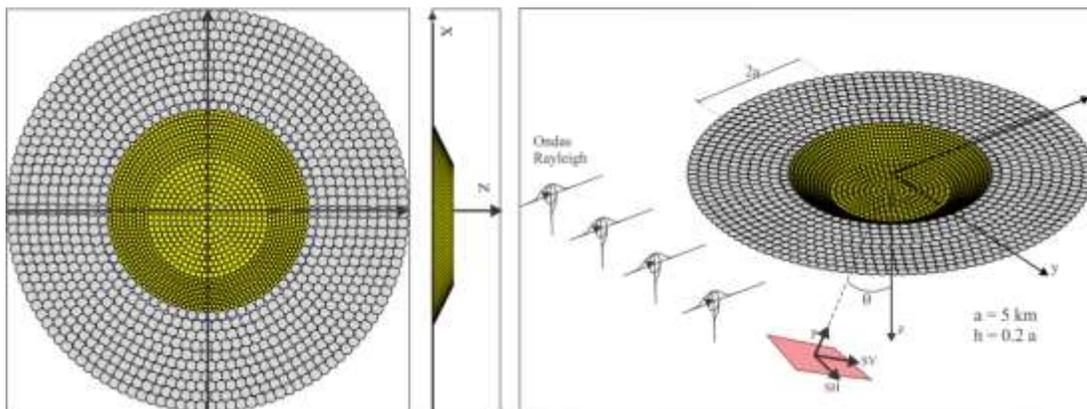


Figura 23. Discretización del valle trapezoidal.

Este modelo fue empleado para estudiar y explicar los registros con larga duración en las estaciones pertenecientes a la red del servicio sismológico nacional (SSN); Tacubaya (TCBY), central de abastos (CDAO) y secretaría de comunicaciones y transportes (SCT), durante el terremoto de

Michoacán, México (1985). Los resultados de este modelo han sido utilizados para validar otros métodos numéricos en dos dimensiones, Rodríguez-Zuñiga et al. (1995), Avila et al. (2002), Gil-Zepeda et al. (2003).

Resultados en el tiempo y frecuencia

En la componente horizontal de la Figura 24, se forman frentes de onda circulares que se propagan hacia el semiespacio. La difracción generada en el interior del valle se concentra en la parte central del valle. Las paredes laterales permiten la transmisión de las ondas del borde inferior al superior y viceversa cuando se reflejan ondas en el interior del valle.

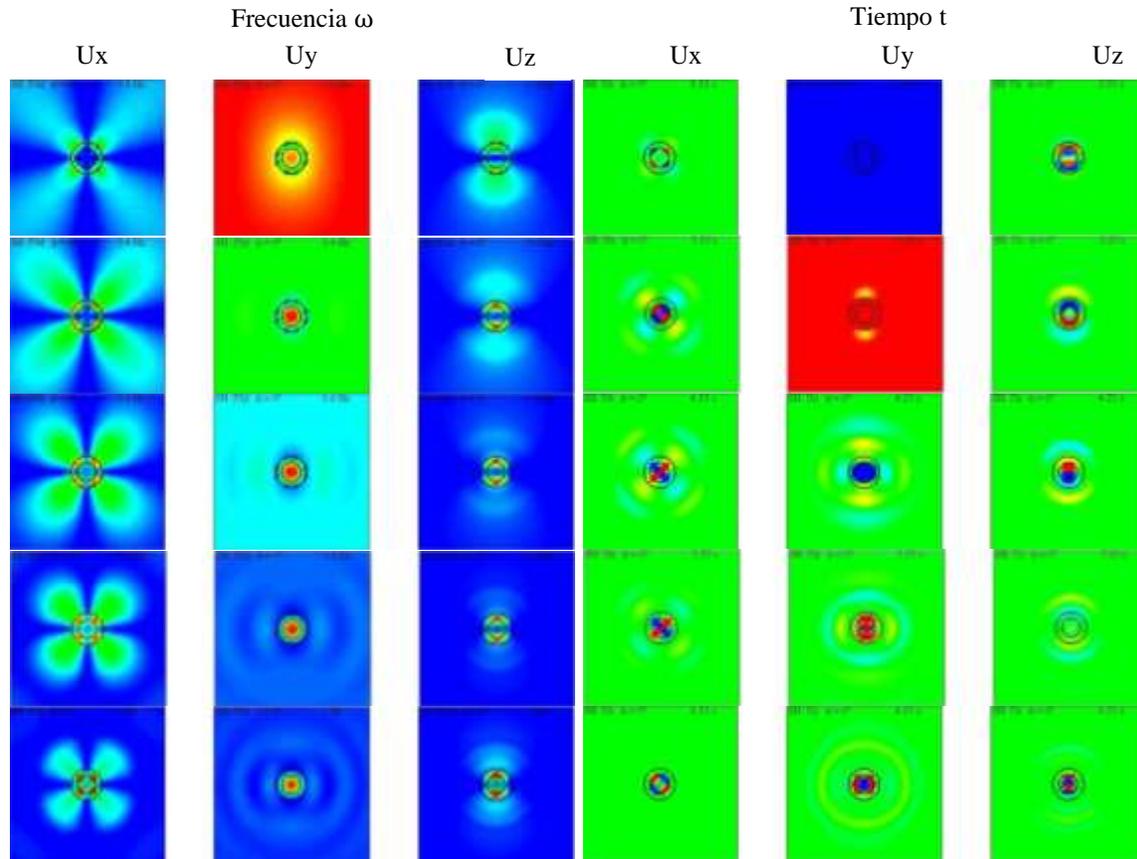


Figura 24. Desplazamientos para la incidencia vertical de ondas SH sobre el valle trapezoidal en frecuencia (izquierda) y tiempo (derecha).

En la componente U_y , los máximos del desplazamiento se acercan en el centro del valle y regresan a las esquinas superiores para propagarse como frentes elípticos alineados sobre el eje X, con una amplitud máxima sobre el eje X. Las reflexiones interiores dentro del valle se concentran en los bordes sobre el Y, al igual que en la componente vertical. Esto nos indica que este tipo de ondas son ondas de Love. En la componente vertical los frentes de ondas son semicírculos que se propagan en las direcciones $+Y$ y $-Y$. Los desplazamientos se concentran en la base del valle.

Esta última observación coincide con lo reportado por Kawase & Aki (1989). Es decir, la difracción producida por los bordes del valle cuando incide una onda SH vertical genera ondas de Love que se propagan hacia el interior del valle. Mientras que la incidencia vertical de ondas SV sobre el valle produce modos de Rayleigh para el valle trapezoidal. Por las características geométricas del valle se pueden observar el modo fundamental de Love y varios armónicos superiores, ver Figura 25.

Comparación con datos publicados

El método de elemento de frontera de número de onda discreto (DWBEM, por sus siglas en inglés), es un método de frontera que combina el método de elementos en la frontera (BEM) con el número de onda discreto de la función de Green. En la Figura 25 se muestra la comparación entre los resultados obtenidos por el método IBEM en tres dimensiones y los resultados publicados por Kawase & Aki,(1989) con el DWBEM en dos dimensiones. Se puede ver la gran similitud entre ambos resultados y una difracción más intensa con el método IBEM, donde se observan amplificaciones más intensas entre cada modo de Love (que identificamos como una X que atraviesa todo el valle).

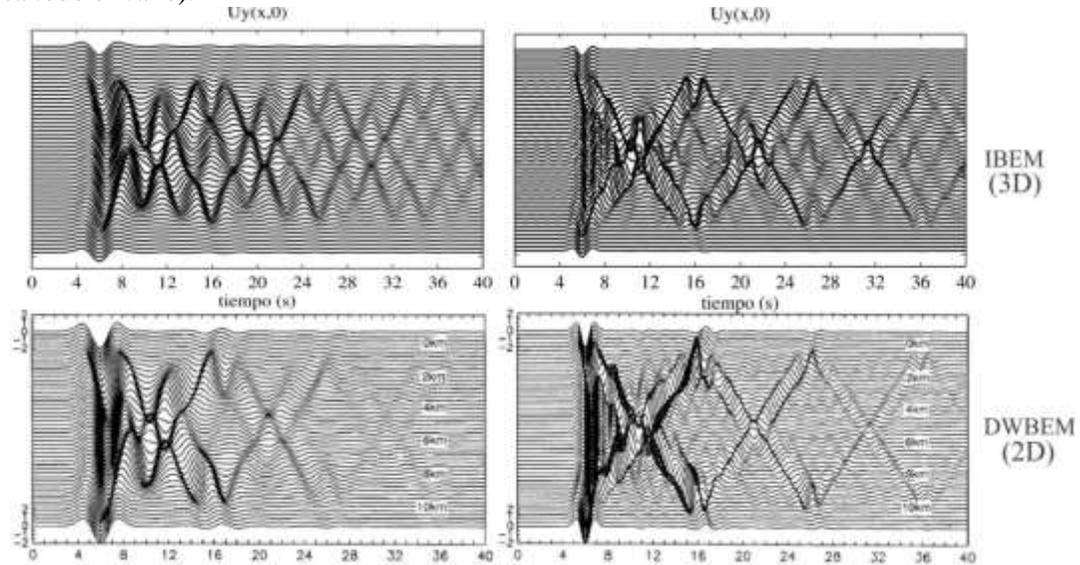


Figura 25. En la parte superior se muestran los resultados obtenidos con el metodo IBEM y en la inferior los resultados de Kawase & Aki (1989). Se utilizó un pulso de Ricker con un $t_0 = 4s$ (0.25 Hz) para los sismogramas de la primera columna y un $t_0 = 2s$ (0.5 Hz) para los de la segunda.

Según la fórmula para el cálculo de la frecuencia de resonancia f_c de un estrato, $f_c = \beta/4h$. Se obtiene el valor $f_c = 0.25$ Hz al introducir los datos del modelo. Como se menciona en Kawase & Aki,(1989), la respuesta en ambos casos es muy parecida, pero a 0.5Hz la amplitud de onda de Love es más grande. Para frecuencias superiores a 0.5Hz, la máxima amplitud de la onda de Love en el modo fundamental decrece debido a la aparición del primer modo alto. Esto se puede apreciar en la curva de dispersión de nuestro modelo en la Figura 26.

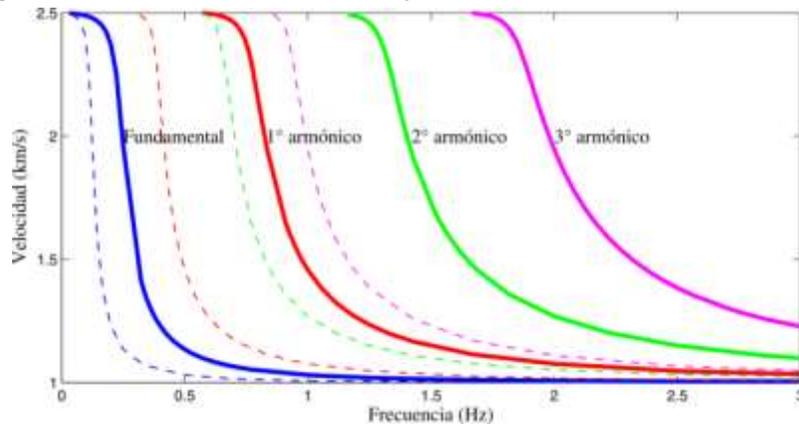


Figura 26.Curvas de dispersión para los primeros modos de Love del modelo de la Figura 23.

Análisis del ángulo de esquina inferior

En los últimos años el estudio de la amplificación de las ondas producidas por las esquinas se ha intensificado debido a que permite encontrar los aspectos más importantes de la microzonificación sísmica en dos dimensiones, Kumar & Narayan,(2008). Es decir, permite predecir la frecuencia fundamental F_0 de amplificaciones para algunos suelos estratificados Dobry et al.,(1976), el factor de agravación Chavez-García & Faccioli,(2000) y la variabilidad espacial del movimiento lateral producido por la incidencia de ondas SH en las esquinas inferiores del valle que inducen la generación de ondas superficiales de Love, Narayan,(2012).

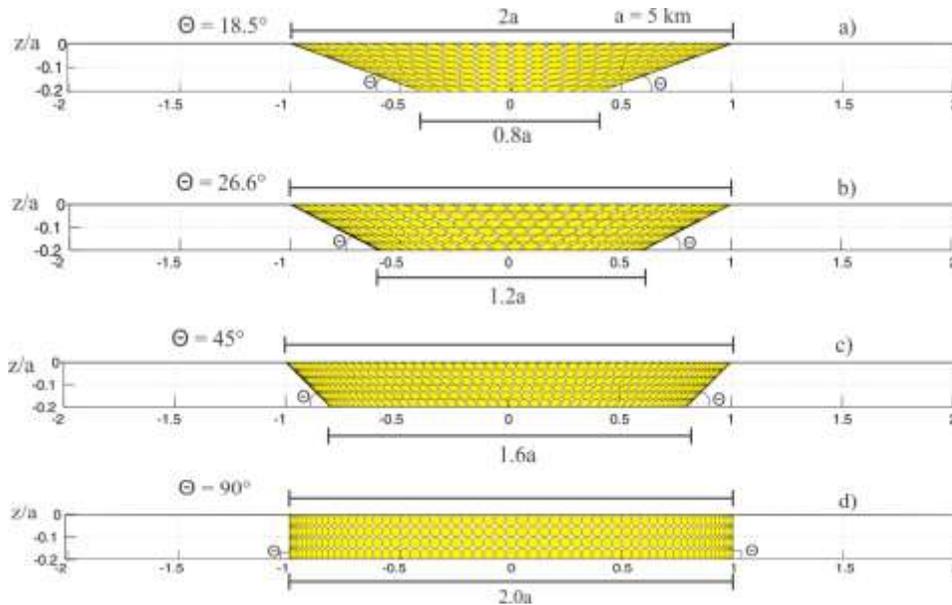


Figura 27. Variación del ángulo de la base del valle trapezoidal Θ .

Resultados en el dominio del tiempo

El incremento del ángulo de la base del valle aluvial Θ , produce una larga duración en los registros de los desplazamientos y una amplificación de amplitud del modo fundamental y los tres primeros armónicos. Para el modelo con la base más pequeña (a), se puede apreciar una difracción importante producida por las esquinas inferiores del valle que se transmite hacia el semiespacio.

En el caso de los modelos (b) y (c), se puede observar el primer y segundo armónico, respectivamente. La amplitud aumenta de manera proporcional al ángulo Θ . Por otra parte para el modelo (d), se aprecian los tres primeros armónicos. Cada uno de ellos con subarmónicos que se identifican claramente.

En la parte central se puede apreciar una periodicidad de máximos de la misma amplitud, esto se debe a las múltiples reflexiones internas de las ondas SH que se mantienen atrapadas dentro del valle. Se puede verificar que por cada armónico se identifican cuatro pulsos de Ricker simétricos. Esta última observación puede ser explicada por la regla de un cuarto de onda para un estrato plano infinito sobre un semiespacio, Nakamura, (2000), Carniel et al.,(2006), Van der Baan, (2009).

El modelo (d) es la aproximación más aceptable de un estrato plano sobre el semiespacio. Esto es porque no hay difracción producida por las esquinas inferiores del valle. Cuando se disminuye el ángulo Θ existe mayor difracción y movimiento producido por las paredes laterales del valle.

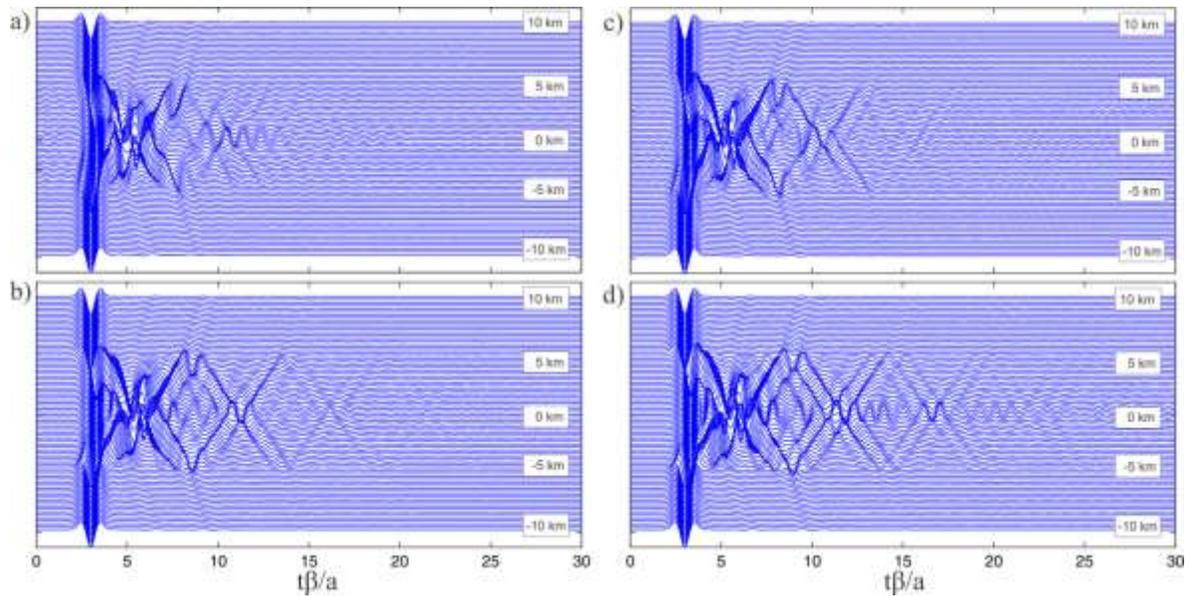


Figura 28. Incidencia vertical SH para los receptores ubicados sobre el eje X para los modelos de valle trapezoidal de la Figura 27. a) $\theta = 18.5$, b) $\theta = 26.6$, c) $\theta = 45$ y d) $\theta = 90$. Se utilizó un pulso de Ricker con los parámetros $t_i = 3$ y $t_0 = 1.33$.

Para las ondas P y S el contraste de impedancia que se difractan por las esquinas inferiores del valle se transducen en ondas de Rayleigh, [Narayan,\(2011\)](#). Este efecto se ha estudiado dentro del contexto lineal [assimaki et al., \(2005\)](#) y no lineal [Gelatoj et al.,\(2010\)](#) y [Gelatoj et al., \(2012\)](#).

5.3 Valle Cilíndrico

El modelo que a continuación se presenta es un valle aluvial cilíndrico. Con los siguientes parámetros mecánicos $\beta_R = 1$ km/s, $\beta_E = 2.5$ km/s, $\rho_R = \rho_E$ con $\nu_R = \nu_E = 1/3$. En la Figura 29 se muestra la discretización utilizada para la simulación de este valle aluvial.

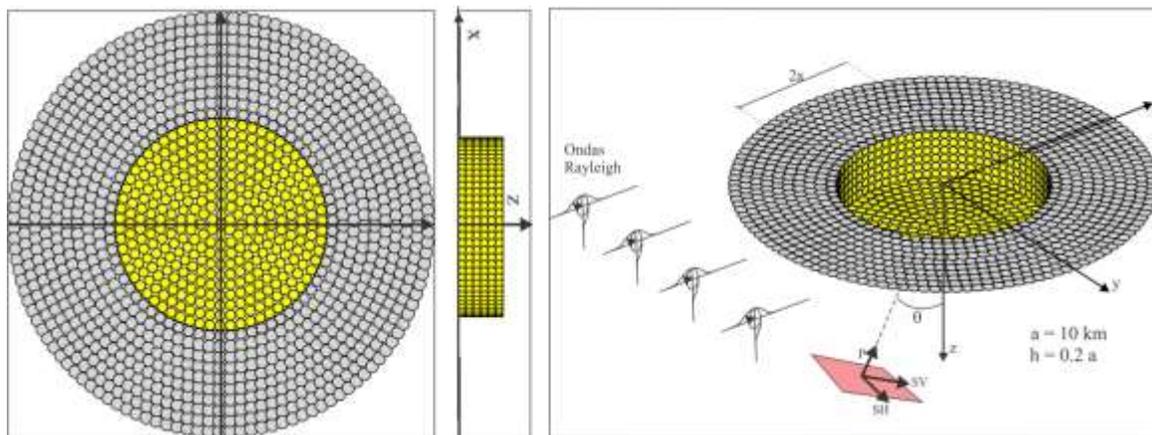


Figura 29. Discretización del valle cilíndrico.

En este modelo se estudian principalmente los efectos producidos por las esquinas inferiores del valle aluvial. Además de ser una buena aproximación de un estrato sobre el semiespacio, en el cual se puede analizar las ondas SH atrapadas en este estrato como ondas de Love. Se analizan los

parámetros mecánicos y geométricos adecuados para la existencia de estas ondas superficiales dentro del valle para el caso de incidencia vertical SV.

Resultados en el tiempo y frecuencia

Los desplazamientos en tiempo y frecuencia para la incidencia vertical de una onda SV sobre el valle cilíndrico son mostrados en la Figura 30. Se utilizó un arreglo cuadrado de 100×100 receptores con longitud $10a$ en intervalos de frecuencia de 0.2 Hz hasta llegar a 1Hz y un intervalo de tiempo entre cada imagen de 1s para los primeros 7.25s.

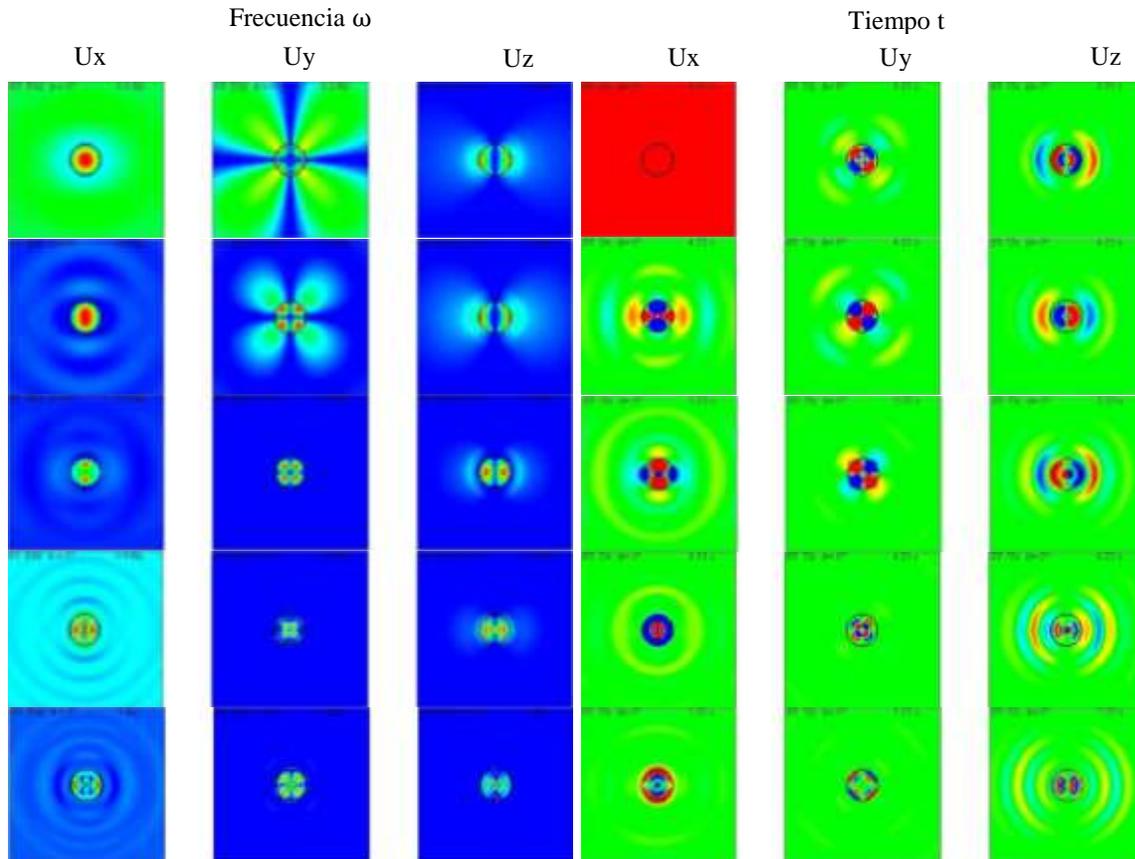


Figura 30. Desplazamientos para la incidencia vertical de ondas SV sobre el valle cilíndrico en frecuencia (izquierda) y tiempo (derecha).

Se observa muy bien el mecanismo de difracción de la componente horizontal. En el cual las ondas que se difractan en dirección $+Y$ y $-Y$ son transmitidas hacia el semiespacio con mucha energía y disminuyen poco en amplitud conforme avanza el tiempo.

En la componente U_y se observan dos líneas nodales sobre los ejes X y Y que generan frentes de onda en las direcciones a 45° de cada cuadrante, formando un frente circular conforme la onda pasa del valle hasta el semiespacio. En cambio, la componente vertical se forma una difracción acumulada en las direcciones $+X$ y $-X$ con puntos de difracción en los bordes dentro del valle.

5.4 Valle Croissant

En la Figura 31, se muestra el modelo de valle irregular que es presentado por [Sánchez-Sesma & Luzón, \(1995\)](#). La ec.(5.5) describe la superficie del valle que tiene los siguientes parámetros geométricos: $b = 0.7a$, $h = 0.4a$ y $a = 4$ km.

Los parámetros mecánicos del modelo son $\beta_R = 1.0 \text{ km/s}$, $\beta_E = 2.0 \text{ km/s}$, $\rho_R = 0.8\rho_E$, $\nu_R = 0.35$, $\nu_E = 0.25$. La frecuencia central de excitación del cañón es una frecuencia adimensional igual a uno. Los parámetros geométricos están dados en la Figura 31.

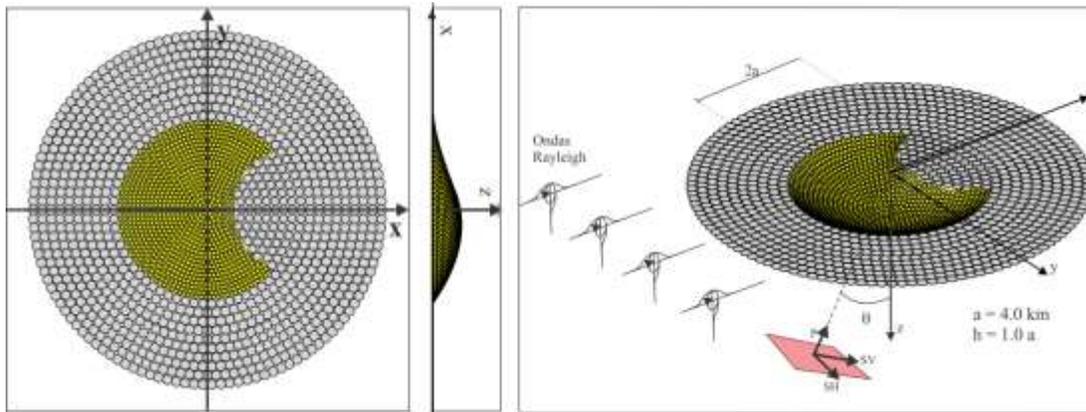


Figura 31. Discretización del modelo de valle aluvial Croissant.

Los desplazamientos en tiempo y frecuencia para la incidencia de una onda Rayleigh sobre el valle croissant son mostrados en la Figura 32.

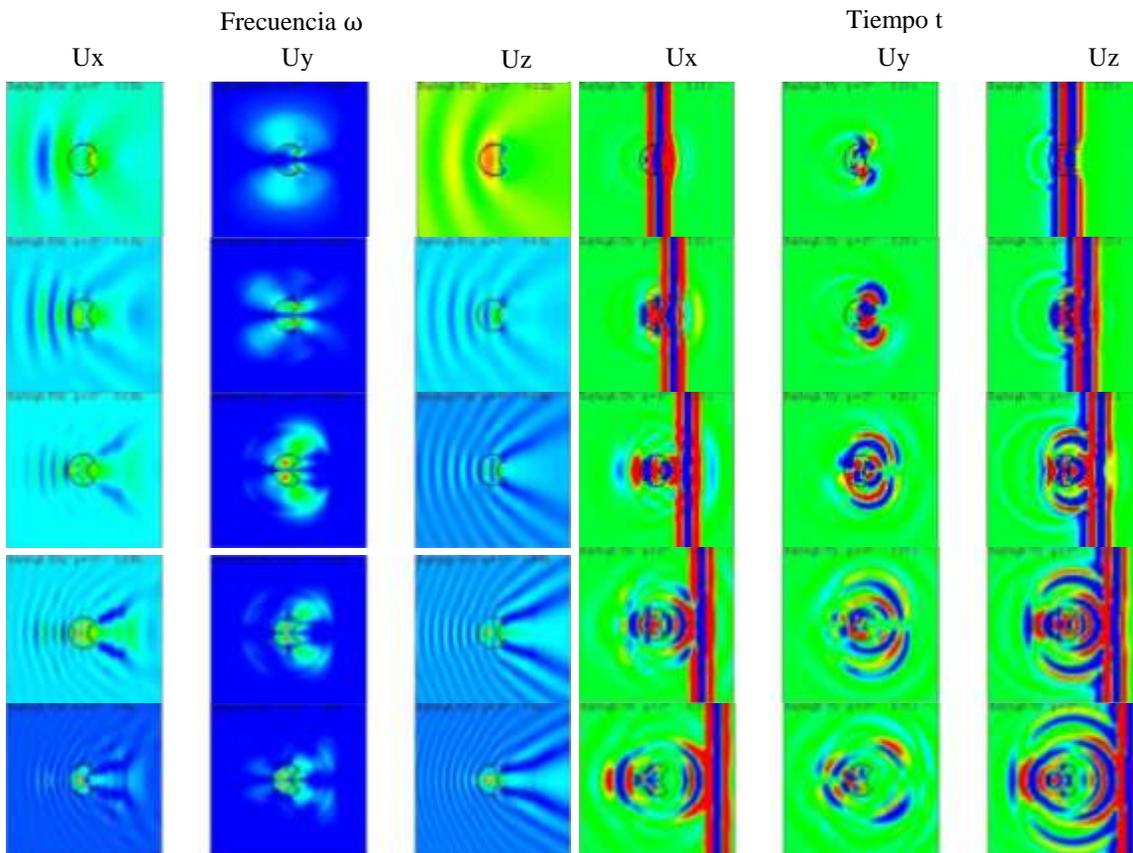


Figura 67. Incidencia de una onda Rayleigh sobre el valle aluvial Croissant con un azimut $\varphi = 0^\circ$.

Con el aumento de la frecuencia la componente U_y , se registra desplazamientos máximos dentro del valle y genera una zona de sombra para cada una de las esquinas, en las cuales su embergadura empieza a disminuir. Se detecta un poco de energía difractada hacia atrás.

En el tiempo, la componente U_y las ondas se propagan por los bordes del valle. Una parte de la energía es reflejada hacia atrás, donde coincide con las ondas difractadas por la esquinas del valle. Mientras en la componente vertical y horizontal, se observa una difracción dominante en la dirección $+X$ y $-X$. La amplitud de la reflexión de la onda incidente sobre el valle es mucho mayor que la difracción generada por la región de la sombra y las esquinas del valle. En $t\beta/a = 4.5$ para la componente vertical, se puede observar como los frentes de onda convergen la esquina de incidencia. Poca energía queda atrapada en el valle y se transmite aún menos al semiespacio, siendo las amplitudes de la componente vertical más grande que la horizontal. La forma de los frentes de onda difractado es determinada por la geometría superficial del valle para estas ondas.

Variación del ángulo azimutal

La incidencia azimutal pierde sentido cuando se está tratando de analizar un modelo axisimétrico con respecto al eje vertical. En esta sección se presenta el modelo de la Figura 32 con los mismos parámetros geométricos y mecánicos pero con una incidencia azimutal de $\varphi = 45^\circ$, ante la incidencia oblicua $\theta = 30^\circ$ de ondas P-SV. Cuando el tiempo aumenta y las ondas difractadas por el valle croissant se alejan, adquieren un comportamiento similar al de la incidencia azimutal cero.

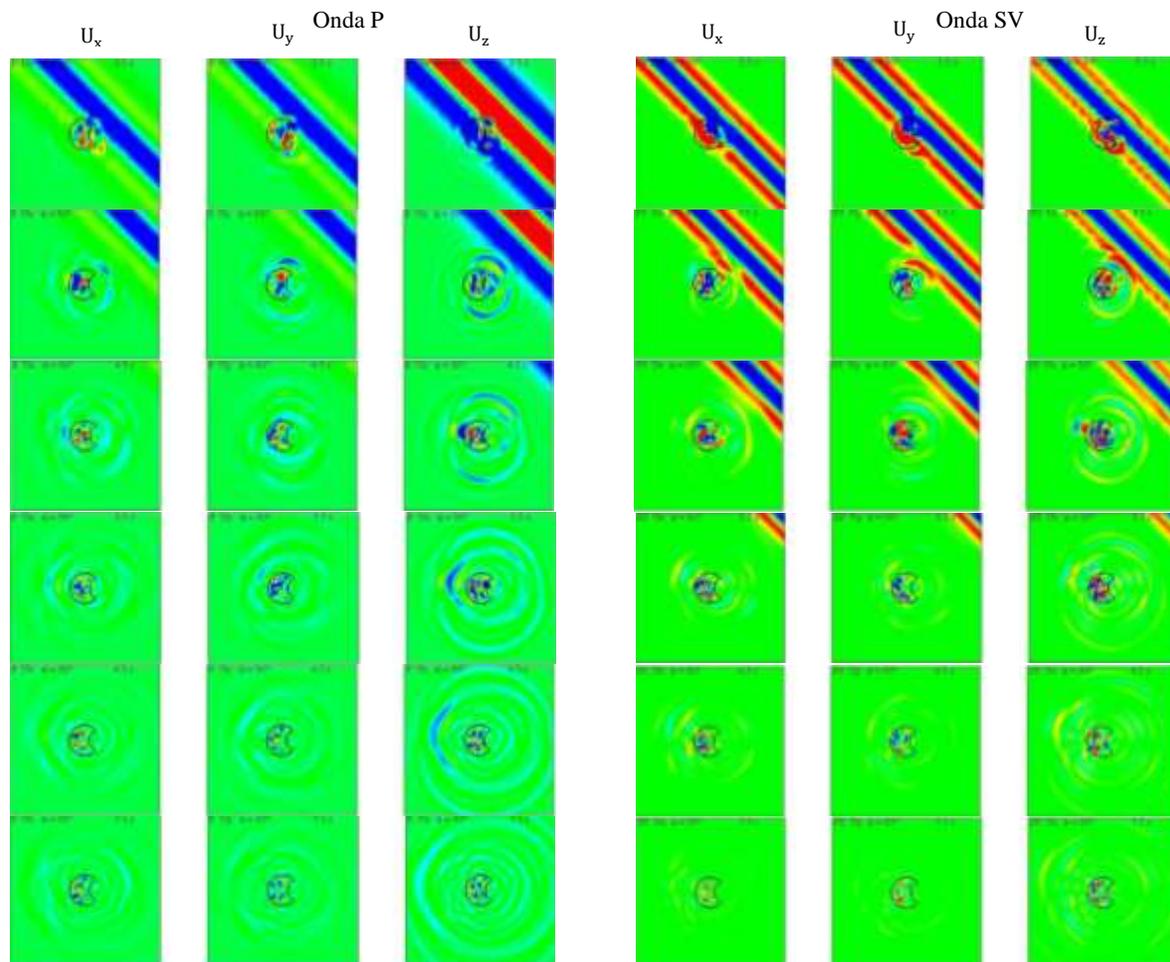


Figura 69. Desplazamientos de la onda P (izquierda) y SV (derecha) que inciden en el valle croissant. Se utilizó un pulso de Ricker con $t_1 = 2s$ y $t_0 = 1.333s$.

En general, la difracción de ondas que se genera por la incidencia de ondas sobre un valle aluvial irregular es más complicada de entender. Limitamos nuestro análisis a la búsqueda de factores geométricos y mecánicos para generación de ondas superficiales.

Capítulo 6.

Efecto de la topografía en valles aluviales

“...El álgebra es muy generosa, siempre nos dice más de lo que le preguntamos”

J.R. D'Alembert

Este capítulo contiene los dos avances más recientes que se han hecho en el método IBEM. El primero y más importante es incluir el efecto topográfico en un valle aluvial como una aproximación más real a una cuenca sedimentaria. El segundo es la inclusión de una fuente sísmica puntual.

Algunos estudios [Komatitsch et al., \(2004\)](#), [Lee et al., \(2008\)](#), [Lee et al., \(2009a y 2009b\)](#), han mostrado que la presencia de topografía cerca de un valle aluvial afecta la propagación de ondas, aumentando las amplitudes por efecto de sitio y el constaste en la impedancia mecánica de ambos medios.

Resulta factible modificar el código de programación, dependiendo de la naturaleza del problema que deseamos resolver. En el capítulo 4, se establecieron las ecuaciones que determinan las condiciones de frontera del problema, ecs.(3.28-3.32). Las dos secciones siguientes abordan ejemplos claros del efecto que causa la topografía cuando rodea un valle aluvial.

6.1 Cañón Hemisférico con valle aluvial

El primer modelo que se desarrolla es un cañón hemisférico como se muestra en la Figura 1. La profundidad de la topografía es $0.5a$ y la del valle $0.5a$, donde a es el radio de normalización $a=1.2\text{km}$. Las propiedades mecánicas del semiespacio y la inclusión son $\beta_E = 2.5 \text{ km/s}$ $\nu_E = 1/3$ y $\beta_R = 1 \text{ km/s}$ $\nu_R = 1/3$, respectivamente.

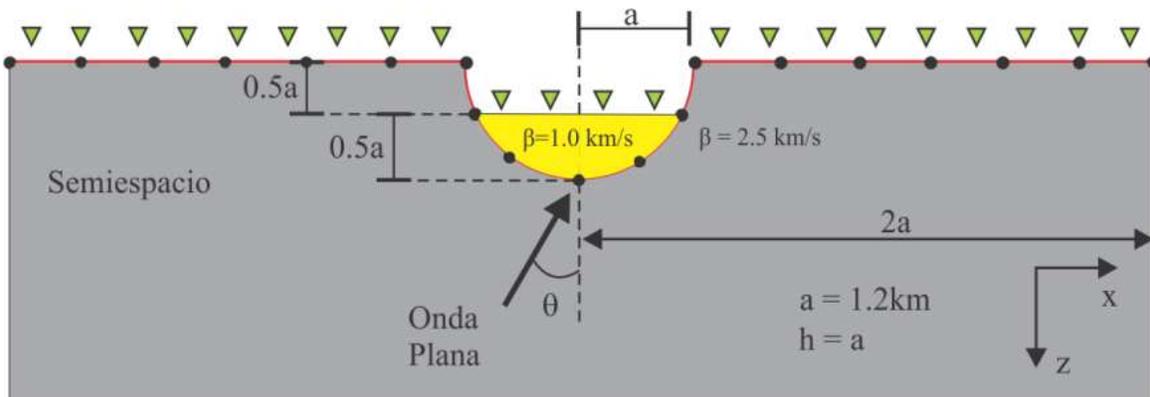


Figura 1. Cañón hemisférico con valle aluvial. Se muestra el arreglo de receptores equiespaciados sobre el eje X y el ángulo de incidencia. La profundidad del valle y de la topografía valen la mitad del radio característico $a=1.2\text{km}$.

En el momento de escribir este trabajo, no se encontraron resultados publicados para realizar una comparación numérica. Para validar los resultados obtenidos con el IBEM, se analizan los tiempos de arribo en el dominio del tiempo para los sismogramas sintéticos de la incidencia vertical de una onda SH sobre el cañón mostrado en la Figura 1.

Incidencia SH

Validación por tiempos de arribo

En la Figura 2, se muestra el sismograma sintético obtenido para el arreglo de receptores alineados sobre el eje X ante la incidencia vertical de una onda SH, sobre el cañón mostrado en la Figura 1. El pulso de Ricker que se utilizó tiene los siguientes parámetros, $t_i = 4$ y $t_0 = 1.5$.

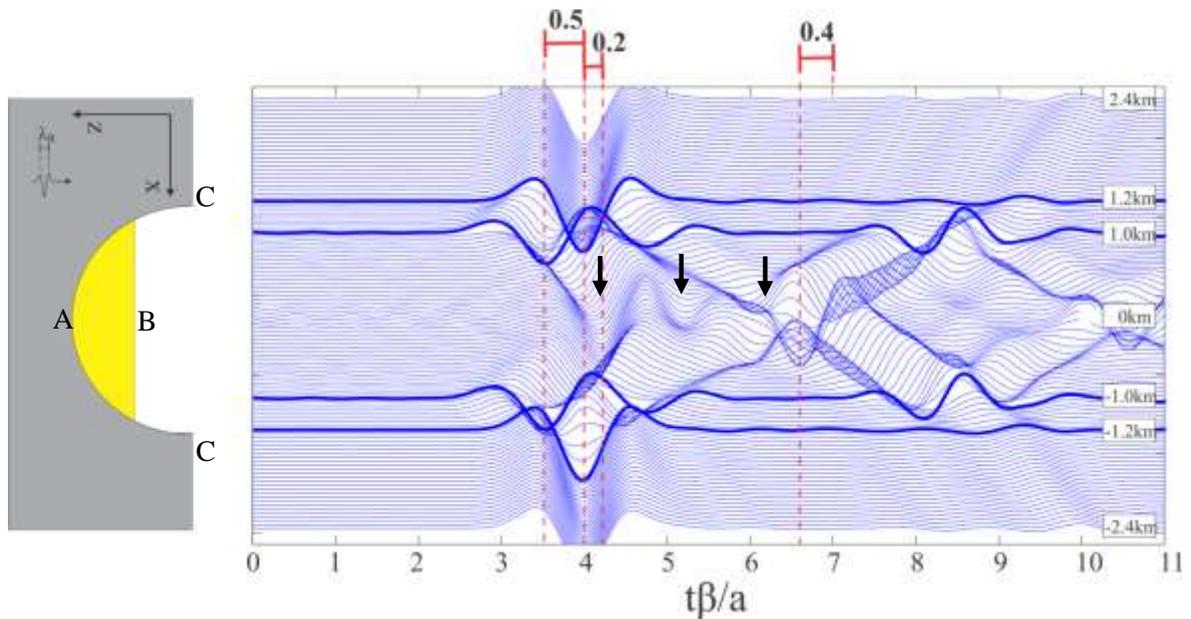


Figura 2. Sismograma sintético para la incidencia vertical de una onda SH sobre el modelo mostrado en la Figura 1. Esquema representativo de la incidencia SH sobre el cañón con valle hemisférico a diferentes profundidades: a) base del valle, b) superficie del valle y c) semiespacio plano.

El tiempo del primer arribo que se registra en los receptores que se encuentran en el semiespacio plano es $t\beta/a = 4$. Luego, la diferencia del tiempo entre este pulso y el arribo de los receptores que se encuentran en el centro del valle es de $t\beta/a = 0.2$. Esta es la mitad de la velocidad adimensional de la onda S, $\beta_R/\beta_E = 0.4$, puesto que la onda sólo viaja la mitad de la distancia de normalización en dirección vertical. Es decir el tiempo de arribo tiene un retraso debido a la impedancia mecánica ($\rho_R\beta_R/\rho_E\beta_E$) entre ambos medios de la onda SH en el centro del valle (punto B). En términos de distancia adimensional se expresa de la siguiente manera:

$$t_B = t_i^E + t_{AB}^R = t_i^E + (0.5)(\beta_R/\beta_E) = 4 + 0.5(0.4) = 4.2. \quad (6.1)$$

Luego, la diferencia de tiempo entre los receptores del semiespacio (punto C) y el borde superior del valle (punto B) es igual a $t\beta/a = 0.5$. Debido a que la onda tarda en viajar $t\beta/a = 1$ una distancia de $1.0a$ dentro del semiespacio. Las reflexiones verticales dentro del valle son indicadas con las flechas negras de la Figura 2 y tienen una duración de $t\beta/a = 1$.

En nuestro modelo se tienen cuatro esquinas. Las primeras dos pertenecen a la parte superior del valle aluvial y las siguientes dos a la topografía. En ambas se difractan ondas hacia el interior del valle y hacia el semiespacio, este efecto de esquina se estudia en [Narayan,\(2012\)](#).

Diagramas f-x

En la Figura 3, se muestra el diagrama f-x para la línea de receptores sobre el eje X ante la incidencia vertical de una onda SH. La interacción entre la topografía y el semiespacio es débil, mientras que la interacción entre el valle y la topografía claramente aumenta, en el interior del valle se conserva la mayor cantidad de energía. Se puede observar la ubicación de la topografía que encierra el valle aluvial.

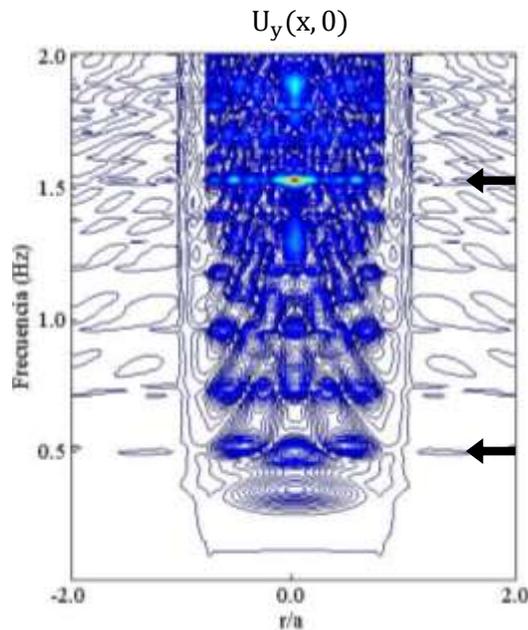


Figura 3. Diagrama f-x del arreglo de receptores sobre eje X ante la incidencia vertical de la onda SH. La onda SH está polarizada en la dirección Y, por lo tanto, los otros desplazamientos son nulos.

El modo fundamental se localiza en la frecuencia 0.41 Hz y el primer armónico en la frecuencia 0.52 Hz, esta última es igual a la frecuencia adimensional $\eta = 1.0$, ver Figura 3. Las frecuencias de resonancia para un estrato plano infinito se indican con flechas negras, de acuerdo con la regla

$$\omega_k = \frac{2k + 1}{4} \left(\frac{\beta_E}{h} \right) \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (6.2)$$

Estas frecuencias coinciden con un desplazamiento lateral que se puede ver como una línea horizontal que atraviesa el semiespacio. Los desplazamientos máximos se encuentran en la segunda frecuencia de resonancia.

En la Figura 4, se muestra el módulo de desplazamientos para la componente U_y con distintos ángulos de incidencia y una frecuencia adimensional de $\eta = 1.0$. Es claro que para la incidencia vertical, en la región de la topografía la amplitud disminuye en comparación del valle. En general no se preserva la forma del espectro al aumentar el ángulo de incidencia como ocurre con los valles aluviales, ver [Sánchez-Sesma et al.,\(1989\)](#) y [Sánchez-Sesma & Luzón, \(1995\)](#), en el caso de incidencia oblicua.

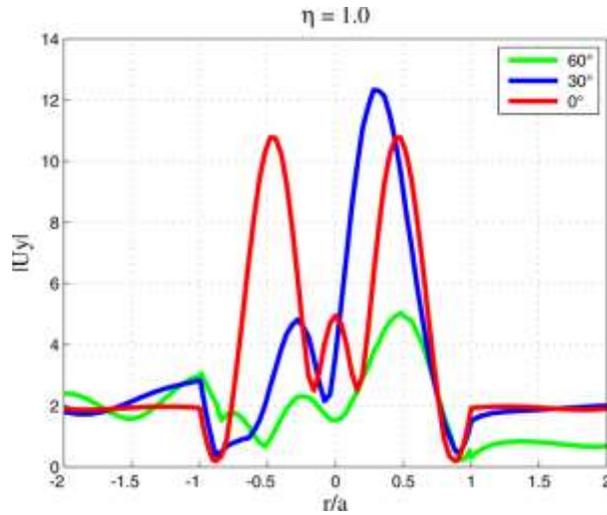


Figura 4. Amplitud de desplazamiento para la componente U_y para un arreglo de receptores sobre el eje X ante la incidencia con distintos ángulos de una onda SH. La frecuencia normalizada que se muestra es $\eta = 1.0$.

En la incidencia vertical, los desplazamientos son simétricos y de la misma magnitud como se espera, pero en el caso de incidencia oblicua los desplazamientos son más grandes y se acumulan en la contraesquina de la incidencia de la onda dentro del valle. Estos desplazamientos están confinados con la aparición de la topografía.

Por otra parte, en la esquina donde incide la onda SH dentro de la región del valle y la topografía observamos desplazamientos continuos y con mayor difracción cuando aumenta el ángulo de incidencia. Esto mismo ocurre en la parte del semiespacio plano fuera de la topografía.

Incidencia vertical P-SV

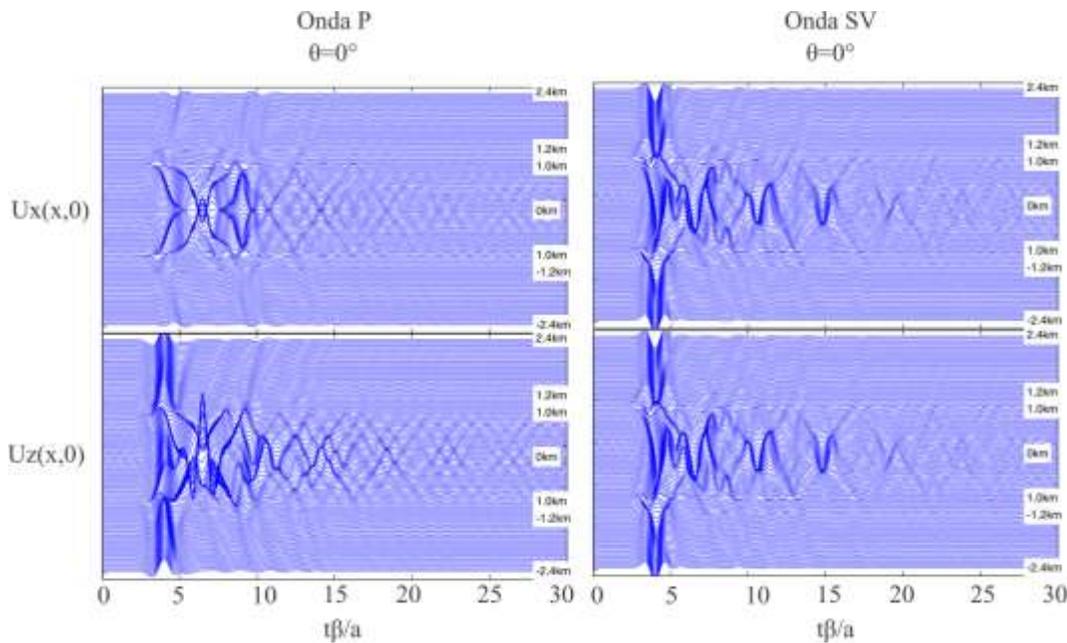


Figura 5. Simosgramas sintéticos para la incidencia vertical de ondas P(izquierda) y SV(derecha) sobre el modelo mostrado en la Figura 1.

En la Figura 5 se muestran los sismogramas sintéticos para la incidencia vertical P-SV sobre el modelo mostrado en la Figura 1. Observamos una amplificación muy grande en la componente U_z y una difracción intensa en las componentes horizontal y vertical. Se pueden ver como se difractan las ondas de las esquinas hacia el interior y exterior del valle y topografía respectivamente.

En el caso de las ondas SV, se observan reflexiones repetitivas y con amplitud decreciente. La difracción de los cuatro bordes se difracta hacia el interior y exterior del valle. Se observa una excelente transmisión de onda a través de la topografía y valle aluvial.

Incidencia Rayleigh

En la Figura 6 se muestran múltiples reflexiones internas en el interior del valle aluvial que se difractan hacia el semiespacio plano con mucha energía como ondas de Rayleigh. La presencia de la topografía incrementa la difracción dentro del valle y su amplitud.

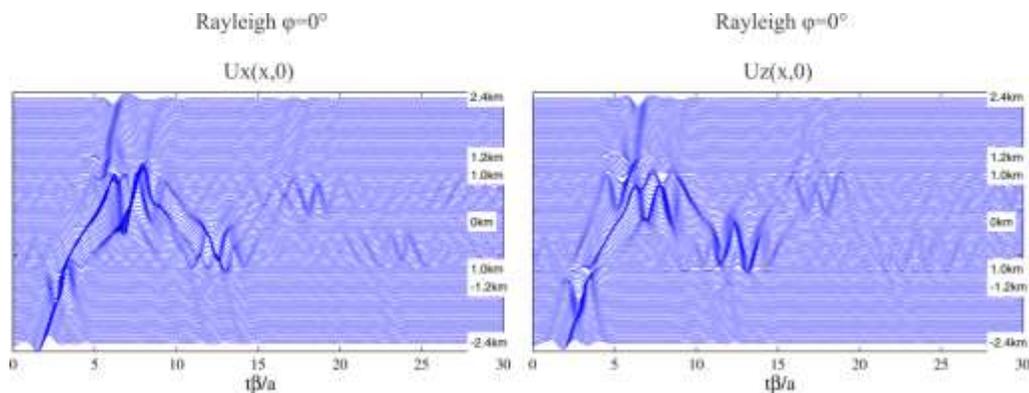


Figura 6. Componentes del desplazamiento horizontal (izquierdo) y vertical (derecho) para la incidencia de ondas de Rayleigh sobre el modelo que se estableció en la Figura 1.

6.2 Cañón Trapezoidal con Valle Aluvial

El segundo modelo de estudio es un cañón trapezoidal con valle aluvial, ver Figura 7. El radio característico y la profundidad tienen un valor de $a=h=5\text{km}$. Las propiedades mecánicas del semiespacio y la inclusión son $\beta_E = 2.5\text{ km/s}$, $\nu_E = 1/3$ y $\beta_R = 1\text{ km/s}$, $\nu_R = 1/3$.

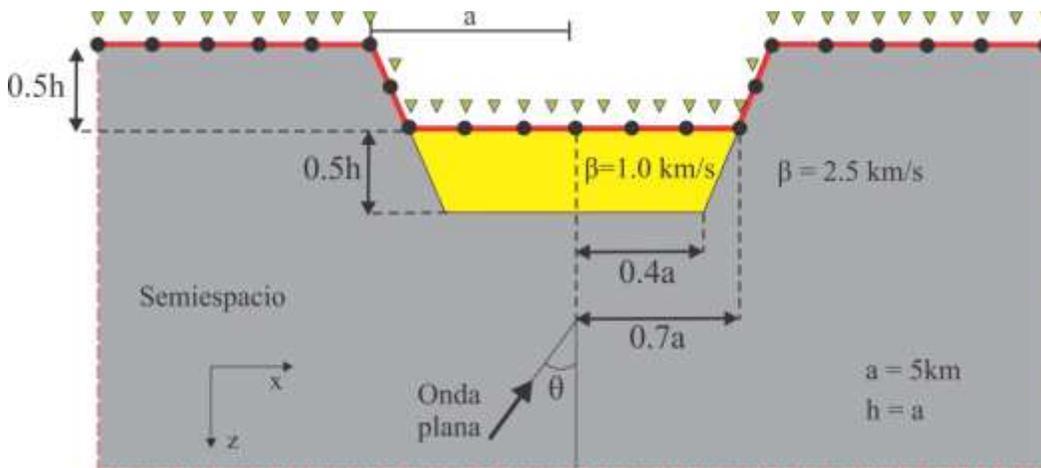


Figura 7. Modelo de cañón trapezoidal con valle aluvial. La profundidad del valle y de la topografía valen la mitad del radio característico $a=5\text{km}$. Arreglo lineal de receptores sobre el eje X.

Incidencia SH

En el análisis de los sismogramas, el tiempo de arribo para la incidencia vertical de una onda plana SH polarizada sobre el eje Y deben ser los siguientes: el tiempo de retraso entre el receptor que se encuentra en la esquina superior de la topografía (punto verde) y el receptor que está en la esquina superior del valle (punto rojo), deber 1s debido a que la distancia de separación vertical entre ambos puntos es de 2.5 km y la velocidad en el semiespacio es de $\beta_E = 2.5$ km/s. Esto se verifica en el sismograma de la Figura 8 con la diferencia de tiempo marcada entre la línea roja y verde.

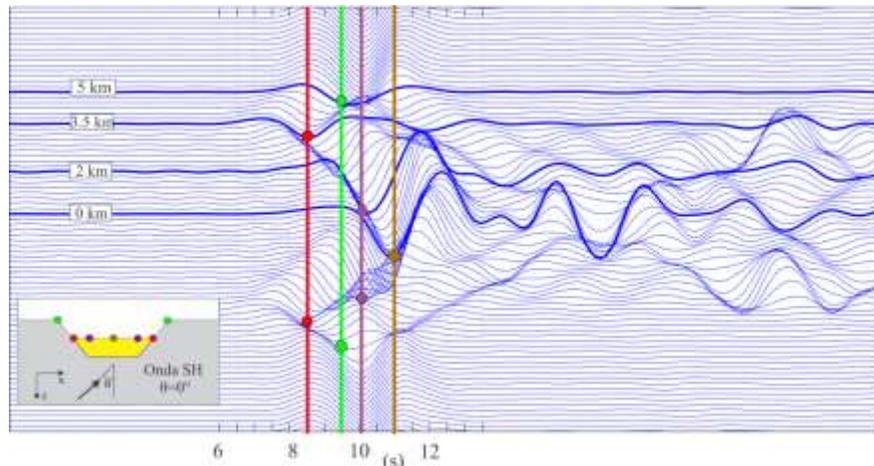


Figura 8. Sismograma sintético para la incidencia vertical de una onda SH polarizada en la dirección Y ante el valle mostrado en la Figura 7. Se utilizó un pulso de Ricker con los parámetros $t_0 = 1.25$ s y $t_i = 10$ s.

Por otra parte, el tiempo de atraso entre el receptor en la esquina superior del valle aluvial (punto rojo) y el receptor que está exactamente a la mitad de la superficie del valle (punto café) corresponde a 2.5s, la razón es que la velocidad dentro del valle es de $\beta_R = 1$ km/s y la distancia vertical que ha viajado la onda dentro del valle antes de llegar al punto café es de 2.5km. Esto se puede verificar con el tiempo entre las líneas roja y café.

La diferencia de tiempos entre el receptor en la esquina superior del valle (punto rojo) y el punto que está sobre la esquina inferior del valle (punto morado), tiene un decremento lineal que corresponde al cociente de la distancia (respecto al centro del valle) entre la velocidad del valle β_R .

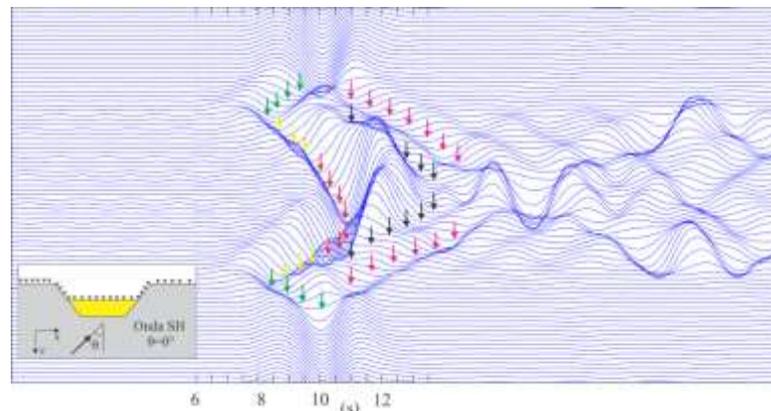


Figura 9. Difracción de ondas del valle mostrado en la Figura 7 ante la incidencia vertical de una onda plana SH polarizada en la dirección Y.

En la Figura 8, se muestra la difracción de ondas que genera la esquina superior de la topografía hacia el interior del valle está indicada con flechas rosas. Mientras que la difracción de ondas producidas por las esquinas superiores del valle aluvial generan ondas de Love (como se señaló en el capítulo anterior), hacia dentro del valle hasta llegar a la esquina contraria del valle en 10s como se espera.

La incidencia de la onda plana sobre la frontera de la topografía esta marcada con flechas color verde. Mientras, la incidencia en la frontera lateral del valle trapezoidal esta indicada con flechas amarillas y la incidencia en la parte plana inferior del valle se muestra indicada con flechas rojas. Todas estas flechas corresponden al tiempo de arribo esperado.

Diagrama $f-x$

En los diagramas $f-x$ que se muestran en la Figura 10, se puede ver que la amplitud de los desplazamientos en la incidencia vertical son periódicos y están fuertemente ligados a la geometría de la topografía fuera del valle para bajas frecuencias.

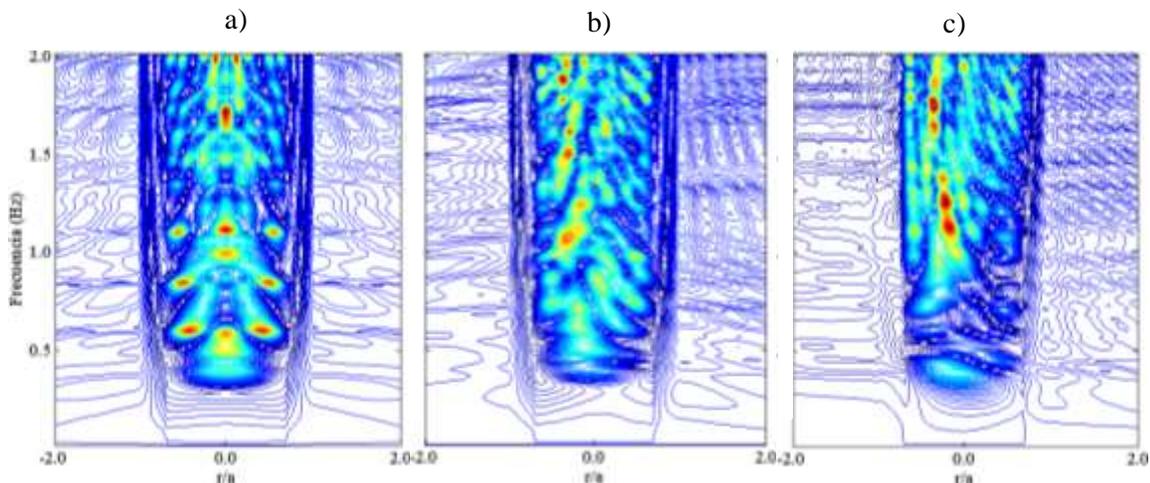


Figura 10. Diagrama $f-x$ del arreglo de receptores sobre eje X ante la incidencia de la onda SH del modelo mostrado en la Figura 7, para distintos ángulos de incidencia a) 0° , b) 30° y c) 60° . La onda SH está polarizada en la dirección Y, por lo tanto, los otros desplazamientos son nulos.

Por otro lado, los desplazamientos máximos se encuentran en la región del valle aluvial. Estos aparecen en más alta frecuencia conforme se aumenta el ángulo de incidencia. La difracción aumenta en la contraesquina de la incidencia de la onda y se transmite directamente a la región de la topografía y semiespacio.

En la Figura 11, se muestran los sismogramas sintéticos para un arreglo de receptores alineados sobre el eje X ante la incidencia de una onda SH vertical sobre el modelo mostrado en la Figura 7. Los parámetros del pulso de Ricker son los mismos que en el caso SH.

Observamos que en los desplazamientos y la difracción de las ondas dentro del valle existe poca difracción generada por la topografía. La difracción del valle es dominante y tiene las mismas características que se describen en el capítulo anterior, para el valle trapezoidal. En este modelo se tienen seis esquinas que difractan ondas hacia el interior del valle y en menor intensidad hacia el semiespacio. Esta es la propagación más importante dentro del valle aluvial, sus efectos y transducciones a otro tipo de ondas de estudian en [Narayan,\(2012\)](#), para el caso de ondas SH y en [Narayan,\(2011\)](#), en el caso de ondas P-SV.

Se puede observar en la componente horizontal de la onda SV y la componente vertical de la onda P una difracción del valle contaminada por las ondas generadas por todas las esquinas del piso del valle, las esquinas superiores del valle y las esquinas superiores de la topografía.

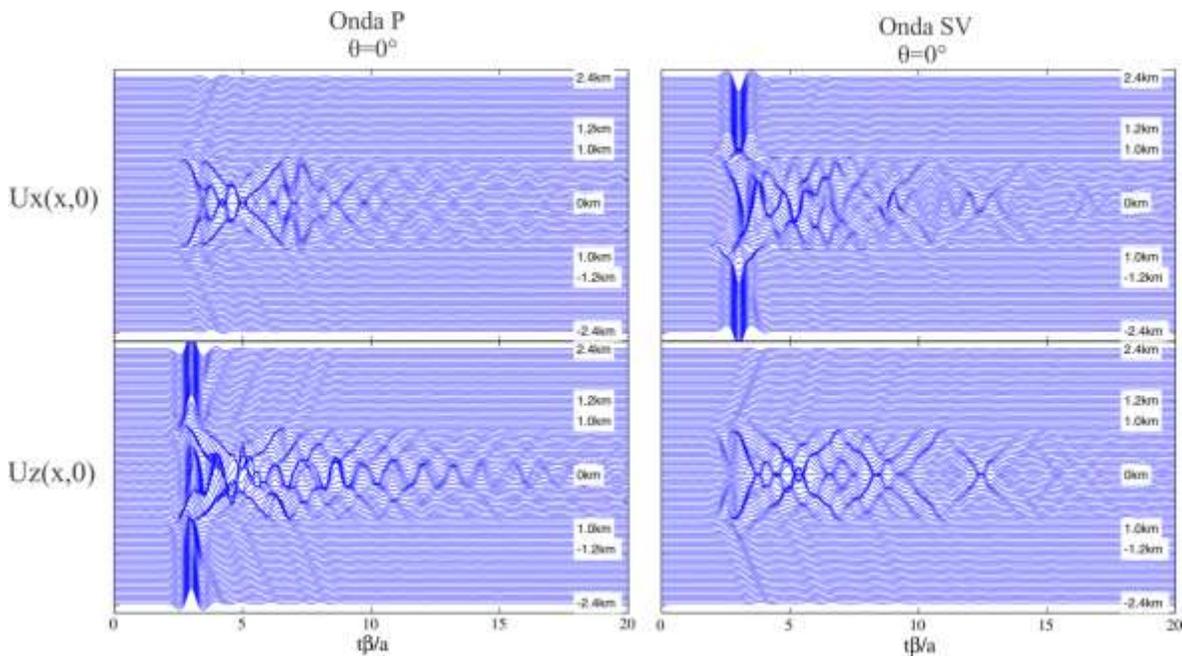


Figura 11. Simosgramas sinteticos para la incidencia vertical de ondas P(izquierda) y SV(derecha) sobre el modelo mostrado en la Figura 7.

Incidencia Rayleigh

En la Figura 12 se observa la incidencia de las ondas sobre la esquina del valle, la cual difracta ondas hacia el interior del valle y el semiespacio. La topografía disminuye los efectos y amplitudes de las ondas de Rayleigh en nuestro modelo debido a que las ondas de Rayleigh disminuyen su amplitud con la profundidad.

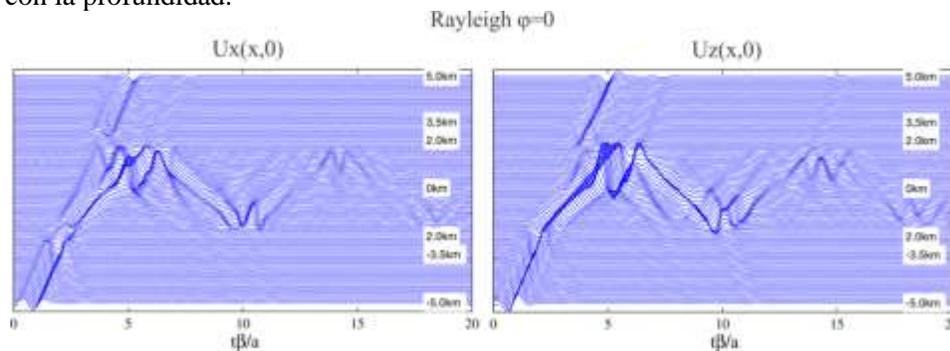


Figura 12. Sismogramas sinteticos para un arreglo de receptores sobre el eje X ante la incidencia de una onda SH sobre el modelo de la Figura 7.

Cuando el frente de onda Rayleigh llega a las esquinas, se reflejan y una parte de ellas se transmite hacia la región de la topografía. La amplitud de la onda de Rayleigh aumenta en la componente vertical y horizontal cuando se propagan en la parte más profunda del valle, en este caso es una superficie plana que se puede apreciar mejor en la componente vertical.

6.3 La fuente sísmica

Si una fuerza de magnitud G y con una dependencia en el tiempo $g(t)$ actúa en la dirección X sobre el origen, los desplazamientos de la partícula están dados por [Love,\(1944\)](#) como

$$U_x = \frac{G}{4\pi\rho} \left\{ \frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial x^2} \int_{r/\alpha}^{r/\beta} t' g(t-t') dt' + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 \left[\frac{1}{\alpha^2} g\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) - \frac{1}{\beta^2} g\left(t - \frac{r}{\beta}\right) \right] + \frac{1}{r\beta^2} g\left(t - \frac{r}{\beta}\right) \right\}, \quad (6.3)$$

$$U_y = \frac{G}{4\pi\rho} \left\{ \frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial y^2} \int_{r/\alpha}^{r/\beta} t' g(t-t') dt' + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial r}{\partial y} \right) \left[\frac{1}{\alpha^2} g\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) - \frac{1}{\beta^2} g\left(t - \frac{r}{\beta}\right) \right] \right\}, \quad (6.4)$$

$$U_z = \frac{G}{4\pi\rho} \left\{ \frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial z^2} \int_{r/\alpha}^{r/\beta} t' g(t-t') dt' + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial r}{\partial z} \right) \left[\frac{1}{\alpha^2} g\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) - \frac{1}{\beta^2} g\left(t - \frac{r}{\beta}\right) \right] \right\}. \quad (6.5)$$

En donde α es la velocidad de la onda P, β es la velocidad de la onda S, ρ es la densidad y $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Debido a la simetría de alrededor del eje X, las ecs.(6.3-6.5) se pueden expresar en términos de coordenadas esféricas con el eje X pasando a través de sus polos. Con ϕ como el ángulo entre el eje +X y la coordenada radial, las ecs.(6.3-6.5) se pueden escribir como

$$U_r = \frac{G \cos \phi}{4\pi\rho r} \left[\frac{2}{r^2} \int_{r/\alpha}^{r/\beta} t' g(t-t') dt' + \frac{1}{\alpha^2} g\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) \right] \quad (6.6)$$

$$U_\theta = 0 \quad (6.7)$$

$$U_\phi = \frac{G \sin \phi}{4\pi\rho r} \left[\frac{1}{r^2} \int_{r/\alpha}^{r/\beta} t' g(t-t') dt' + \frac{1}{\beta^2} g\left(t - \frac{r}{\beta}\right) \right] \quad (6.8)$$

En la Figura 13, se muestra el desplazamiento radial y tangencial para una fuerza puntual (delta de Kronecker), en términos del tiempo y la distancia radial adimensionales, $\mathbf{T} = t/P$ y $\mathbf{R} = r/\alpha P$, respectivamente, P es el período de la señal.

Los parámetros que se utilizaron para realizar esta gráfica son $\nu = 0.2$ y una frecuencia de excitación de 10-50Hz, para cada distancia de 1-5 \mathbf{R} , respectivamente. El procedimiento es el siguiente; se calcula la función de Green entre dos puntos en el dominio de la frecuencia en coordenadas esféricas (ver [Kausel,2006](#)) utilizando la distancia normalizada. Posteriormente se realiza la convolución con un pulso de Ricker con un tiempo inicial y característico, ambos parámetros del pulso de Ricker varían en función de \mathbf{R} , $t_0(\mathbf{R})$ y $t_1(\mathbf{R})$.

En los desplazamientos radiales, la onda P es distorsionada en el campo cercano. Conforme pasa el tiempo avanza y se puede apreciar una contribución (onda S) en el movimiento radial. Esta señal aparece hasta cinco veces la distancia normalizada. Similarmente, se puede ver una contribución al desplazamiento tangencial que viaja como una onda P. La forma de la onda varía con la distancia como una proporción relativa entre el tiempo, la distancia y la amplitud.

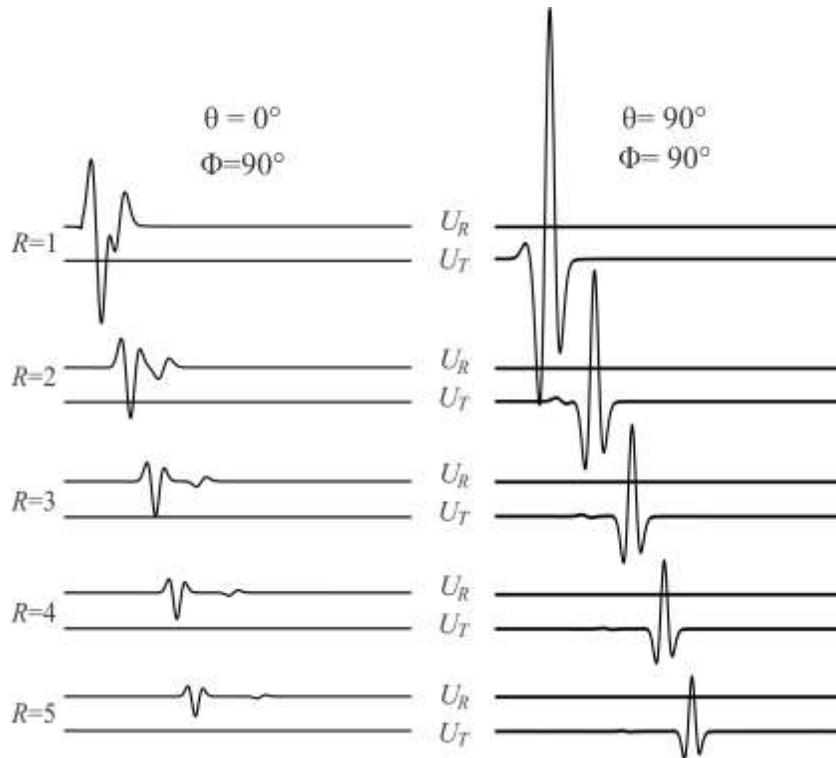


Figura 13. Componente radial y tangencial para una fuerza puntual en diferentes distancias de observación R . La frecuencia de excitación varía de 10Hz para $R=1$ hasta 50Hz con $R=5$. El módulo de Poisson utilizado fue de $\nu = 0.2$ y un $t_0 = 10\Delta t/R$.

La Figura 13, permite ver que es suficiente considerar un dominio con cinco veces la distancia de normalización a para un modelo de valle aluvial ó topografía. En este cálculo, se utilizó la misma función de Green implementada en el método IBEM con las componentes $G_{i,1}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$. El patrón de radiación que se genera para las ondas P y S es similar al que se muestra en la Figura 14 que se obtiene al aplicar una fuerza en la dirección vertical. Esto permite comprobar, que las densidades de fuerza distribuidas en la frontera de un medio elástico se superponen para formar el campo difractado originado por una irregularidad.

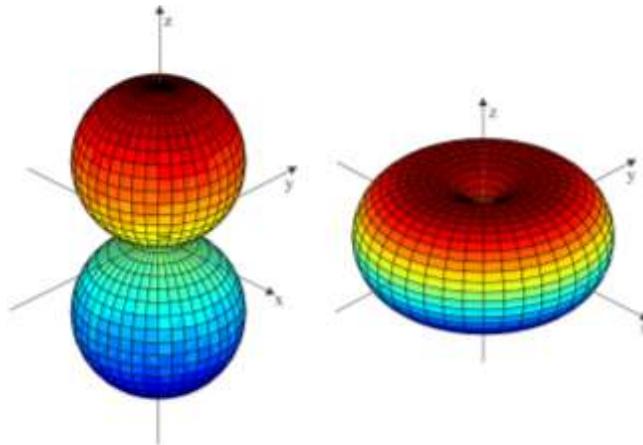


Figura 14. Representación tridimensional de los patrones de radiación generados por una fuerza vertical en la dirección z para las ondas P(izquierda) y S(derecha).

La incorporación de una fuente sísmica dentro del programa IBEM permitirá explorar problemas de interés sísmológico y de ingeniería sísmica más realistas. Por el momento, concluimos este trabajo de investigación presentando los resultados del problema de Lamb utilizando el método IBEM.

6.4 El problema de Lamb

El problema de Lamb consiste en una fuerza impulsiva que actúa en dirección vertical sobre un semiespacio elástico, homogéneo e infinito. La solución de dicho problema ha sido estudiada extensamente durante el último siglo y se puede encontrar en [Mooney,\(1974\)](#), [Eringen & Suhubi,\(1975\)](#), [Aki & Richards,\(2002\)](#), [Kausel,\(2006\)](#), [Kausel,\(2012\)](#) y [Petersson & Sjogreen,\(2013\)](#), entre otros.

Se realizó una comparación cualitativa entre los resultados obtenidos con el método IBEM y el método de diferencias finitas, propuesto por [Petersson & Sjogreen,\(2013\)](#), en un dominio tridimensional en el que se obtienen los desplazamientos al aplicar una fuerza unitaria sobre el origen con dirección vertical negativa. El dominio computacional es $0 \leq z \leq 4, -8 \leq y \leq 8$ y $-8 \leq x \leq 8$ con los parámetros mecánicos de un semiespacio homogéneo $\lambda = \mu = \rho = 1$ y $\nu = 0.2$. La magnitud de los desplazamientos, $\sqrt{U_x^2 + U_y^2 + U_z^2}$ es graficado en la Figura 15.

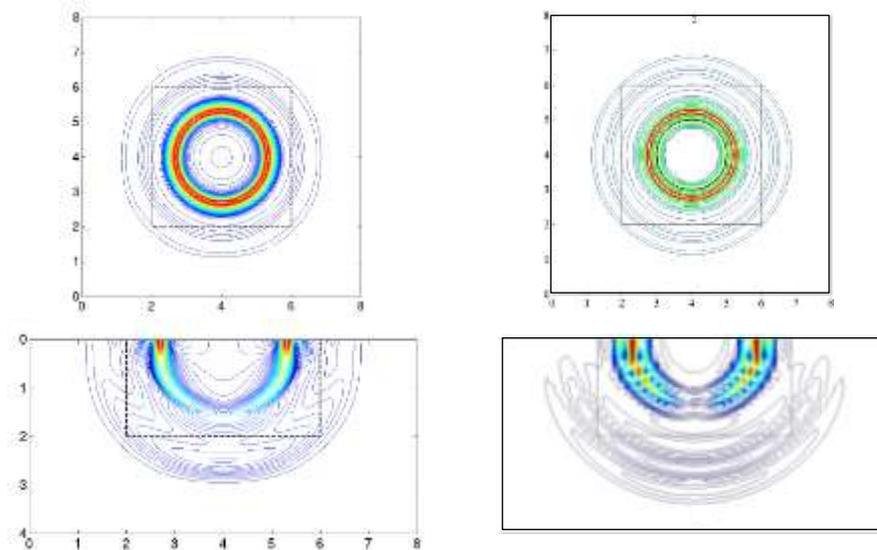


Figura 15. En la columna de la izquierda se muestra la magnitud de los desplazamientos para el problema de Lamb para los planos $Z=0$ (arriba) y $Y=4$ (abajo) en el tiempo igual a 2, figuras tomadas de [Petersson & Sjogreen \(2013\)](#). A la derecha los resultados obtenidos con el IBEM para el mismo modelo.

En la Figura 15, se puede apreciar una onda superficial Rayleigh con una amplitud mayor cerca de la superficie que disminuye con la profundidad y en particular en la dirección en que se propaga la onda P que tiene una velocidad $\alpha = \sqrt{3}$. La velocidad de las onda S tiene una velocidad igual a 1, mientras que la velocidad de las ondas de Rayleigh es de $C_R \approx 0.92$. La evidencia reunida, muestra la correcta implementación de la fuente en el funcionamiento del IBEM.

Capítulo 7.

Conclusiones

“... Todo debería ser hecho lo más simple posible, pero no más simple”

Albert Einstein

En conclusión, se cumplió el objetivo general de esta tesis al encontrar factores geométricos y mecánicos que producen la generación de ondas superficiales en valles aluviales y topografías. Al mismo tiempo, se realizaron optimizaciones computacionales importantes para emplear el método IBEM como una herramienta de cálculo confiable, eficiente y flexible en la modificación de su código de programación.

Se realizó la comparación entre los resultados del Método de Diferencias Finitas y el método IBEM para la incidencia vertical de una onda SV, sobre el modelo de topografía hemisférica propuesto por [Ohminato & Chouet,\(1997\)](#). El análisis de los resultados derivados de esta comparación, permitieron verificar la observación de *ondas progresivas*, que son ondas P,SV y Rayleigh que se propagan sobre la superficie del cañón, reportadas primeramente por [Kawase,\(1988\)](#), para el modelo bidimensional.

Por otra parte, se encontraron fórmulas analíticas para calcular las *resonancias acústicas* en el centro del cañón hemisférico para la incidencia vertical de ondas P y SV, obteniendo un error porcentual de 1.47% y 0.81%, respectivamente.

Se demostró que para la onda P, la resonancia geométrica está modulada por el factor inverso de $2\sqrt{3}$, que es aproximadamente la distancia que se recorre de una esquina a otra sobre la superficie hemisférica. La importancia de estas ecuaciones, es predecir las frecuencias en que ocurren las amplificaciones máximas dentro del cañón, a partir de considerar sus factores geométricos y mecánicos.

Con base en los resultados obtenidos para varias topografías (hemisférica, trapezoidal, cúbica, triangular y croissant), se concluye que el factor determinante de la difracción de ondas es la *presencia de esquinas* en la geometría de cada modelo estudiado.

Por otra parte, los sismogramas sintéticos demuestran *la variación de la amplitud de las ondas difractadas* P, SV y Rayleigh en función de su módulo de Poisson y el ángulo de incidencia sobre las distintas topografías. Es decir, la amplitud de las ondas difractadas aumenta de manera proporcional con el ángulo de incidencia.

Respecto a la *variación del ángulo de incidencia azimutal*, se concluye que no existe variación alguna en el patrón de difracción y en sus amplitudes calculadas para los modelos axisimétricos (hemisférico y trapezoidal). Sin embargo, para los modelos que no lo son (croissant, triangular y cúbico), presentan patrones de difracción que dependen del ángulo azimutal y de su configuración geométrica. Esto produce en algunos casos, una mayor duración de la difracción dentro y fuera de la topografía, así como la generación de nuevos frentes de ondas planos (cañón triangular y cúbico) y esféricos (cañón croissant) con una interferencia destructiva y constructiva en el interior del cañón.

A partir de los diagramas f-x, se encontró que el arreglo de receptores alineados sobre el eje Y tiene desplazamientos nulos para la incidencia vertical de la onda SV en la componente U_y para todos los modelos. Sin embargo, para los que son *axisimétricos* (cañón hemisférico y trapezoidal), la componente vertical también es nula. Es decir, la *configuración geométrica* para la incidencia vertical de ondas P-SV determina líneas nodales, regiones de resonancia y sombra.

El módulo de amplitud para el receptor que se encuentra en la parte central de la topografía de cada cañón, nos permite recuperar características geométricas de cada modelo. Para la incidencia vertical P, se demostró que el aumento de frecuencia disminuye la longitud de onda incidente y produce una difracción más notable en el cañón trapezoidal, que es el menos profundo. Es decir, la función de transferencia se encuentra en fase cuando hay un mínimo de amplitud que coincide en todos los modelos presentados, esto ocurre cuando la *profundidad* de una topografía es un múltiplo entero de la otra.

En cambio, para la incidencia SV, se detectó un efecto de *lateralidad*. Cuando la frecuencia de excitación es mayor a 2Hz, la función de transferencia del cañón trapezoidal se convierte en la envolvente de los máximos de amplitud del cañón cúbico. En contraste, para frecuencias menores a 2Hz tiene mayor similitud con la envolvente del cañón hemisférico.

En la segunda parte de este trabajo, se realizó la *validación* de los resultados con el valle aluvial hemisférico propuesto por [Sánchez-Sesma et al.,\(1983\)](#) ante la incidencia vertical de una onda P. En el cual, se realizaron varias comparaciones con los datos publicados por otros autores; [Sánchez-Sesma et al.,\(1983\)](#), que es una solución semianalítica en series de Bessel, [Devalaud, PhD,\(2007\)](#), con el método SEM y [Chaillat, PhD,\(2008\)](#), con el método FMM. En este último, se realizó una comparación para los tiempos de operación entre ambos métodos para diferentes frecuencias normalizadas, demostrando que el método IBEM es hasta 34 veces más rápido que el FMM. Esto verifica que el que el método IBEM funciona correctamente para el rango de frecuencias bajo e intermedio.

De manera análoga, se realizó la comparación con los datos publicados por [Mossesian & Dravinski, \(1990\)](#) y [Chaillat, PhD,\(2008\)](#) para la incidencia oblicua de una onda SV sobre el valle hemisférico. Los resultados obtenidos muestran una gran similitud con los datos de comparación, reafirmando de esta manera que el método IBEM realiza los cálculos correctos para la *incidencia oblicua de ondas*.

Se encontraron las ecuaciones que determinan las *frecuencias de resonancias*, para la amplitud máxima de desplazamientos del valle hemisférico ante la incidencia vertical de ondas P-SV. Estas fórmulas están en función de la diferencia de velocidad entre el valle y el semiespacio, la distancia de normalización y un factor geométrico numérico distinto para cada onda. Los errores porcentuales entre los valores numéricos y teóricos para las ondas P y SV son 3.85% y 4.57%, respectivamente.

Al analizar una serie de modelos propuestos (croissant, hemisférico, cilindrico y trapezoidal), se encontró evidencia que sustenta la generación de ondas superficiales de Rayleigh difractadas e inducidas hacia afuera y dentro del valle aluvial, principalmente originado por las esquinas del modelo geométrico, [Narayan,\(2011\)](#) y ondas de Love atrapadas dentro de los valles aluviales que incrementan su amplitud con el ángulo de incidencia, como se muestra en [Narayan,\(2012\)](#).

En particular, para el valle trapezoidal el incremento del *ángulo de la esquina inferior del valle* aumenta la amplitud de los modos de Love, obtenidos por la incidencia vertical de ondas SH y prolonga su duración. Para bajas frecuencias se realizó la comparación cualitativa con el modelo propuesto por [Kawase & Aki \(1989\)](#), mostrando un gran parecido entre los resultados del método IBEM y el DWBEM.

Para modelos no axisimétricos, *el ángulo de incidencia azimutal* produce en general, una difracción más fuerte entre el valle y el semiespacio. También se obtiene una duración de excitación más larga dentro del valle, cuando se alinea el ángulo azimutal con las esquinas. El ángulo de incidencia debe ser distinto a 0° y el azimut perpendicular al ángulo subtendido por la esquina. Esto se demostró en el valle irregular *croissant* con un azimut de 45° y un ángulo de incidencia de 30° .

Posteriormente, se estableció la formulación matemática para calcular la *respuesta sísmica de cañones topográficos con valle aluvial en su interior*, implementándose en el método IBEM. El análisis de tiempos de arribo para el modelo trapezoidal de cada esquina y región fue el predicho por la teoría, mostrando de esta manera, el correcto funcionamiento del programa.

La *amplificación* dentro del valle aluvial, se incrementa mucho más cuando se tiene alrededor una topografía axisimétrica. La interacción entre el valle aluvial y la topografía es mucho más compleja y se producen máximos resonancia en el interior y el centro del valle, como ocurre en el caso de topografía y valle aluvial.

Se incluyeron los avances obtenidos hasta el momento de escribir este trabajo, sobre la incorporación de una *fente sísmica* dentro del programa IBEM. Con el objetivo de entender problemas de interés sismológico y de ingeniería sísmica más realistas y complejos. Se verificó, que la función de Green utilizada por el método IBEM, describe una fuente puntual impulsiva entre dos puntos del espacio generando ondas P y S para un medio homogéneo, isótropo e infinito. Como resultado, es suficiente considerar un dominio de discretización de tamaño igual a cinco veces la distancia de normalización para considerar los efectos significativos de las ondas P y S.

Se realizó una comparación cualitativa para los resultados obtenidos entre el método IBEM y el método de diferencias finitas, propuesto por [Petersson & Sjogreen,\(2013\)](#), para el problema de Lamb en tres dimensiones. Los resultados sugieren una buena aproximación respecto a la solución analítica, descrita en [Mooney,\(1974\)](#).

Apéndice A

Coeficientes de amplitud para la incidencia de ondas P-SV en una superficie libre

En este apéndice se realiza la deducción explícita de los coeficientes de amplitud R_{PP} y R_{PS} para la reflexión de ondas P-SV que incide en un semiespacio elástico homogéneo e isótropo.

Una onda P que incide sobre una superficie libre produce ondas P-SV reflejadas (Figura A1). El potencial que representa la onda P incidente y reflejada ec.(2.29) se expresa de la siguiente manera

$$\phi = A_1 e^{i(\omega t - k_x x + k_x r_\alpha z)} + A_2 e^{i(\omega t - k_x x - k_x r_\alpha z)} \quad (\text{A. 1})$$

y el potencial de la onda SV ec.(2.30) que se propaga en dirección positiva del eje z es

$$\Psi = B e^{i(\omega t - k_x x - k_x r_\beta z)}. \quad (\text{A. 2})$$

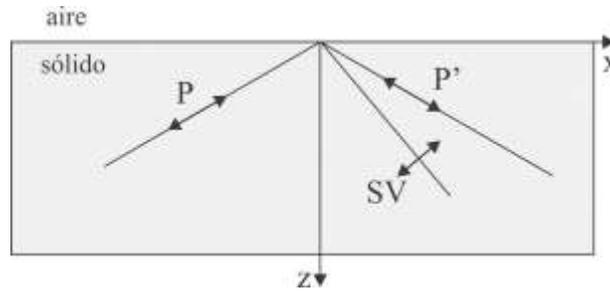


Figura A1. Incidencia de onda P en superficie libre

La onda incidente P satisface la condición $t_i = 0$ para cualquier vector normal en la interfaz sólido-aire, lo que implica que los esfuerzos σ_{xz} y σ_{zz} son nulos. Empleamos la ley de Hooke ec.(2.10) para expresar los esfuerzos en términos de los potenciales (A.1) y (A.2).

$$\sigma_{xz} = 2\mu \varepsilon_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = \mu \left(2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) \quad (\text{A. 3})$$

$$\sigma_{zz} = \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz}) + 2\mu \varepsilon_{zz} = \lambda \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} = \lambda \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) + 2\mu \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial x} \right) \quad (\text{A. 4})$$

Reemplazamos las derivadas parciales de los potenciales (A.1) y (A.2) en los esfuerzos tal que

$$\sigma_{xz} = \mu \left[(k_x^2 r_\alpha A_1 - k_x^2 r_\alpha A_2 + k_x^2 r_\beta^2 B) + (k_x^2 r_\alpha A_1 - k_x^2 r_\alpha A_2 - k_x^2 B) \right] e^{i(\omega t - k_x x)} \quad (\text{A. 5})$$

$$= \mu \left[(r_\alpha A_1 - r_\alpha A_2 + r_\beta^2 B) + (r_\alpha A_1 - r_\alpha A_2 - B) \right] k_x^2 e^{i(\omega t - k_x x)} \quad (\text{A. 6})$$

$$= \mu \left[2r_\alpha (A_1 - A_2) + (r_\beta^2 - 1) B \right] k_x^2 e^{i(\omega t - k_x x)}. \quad (\text{A. 7})$$

$$\sigma_{zz} = [\lambda(-k_x^2 A_1 - k_x^2 A_2 - k_x^2 r_\alpha^2 A_1 - k_x^2 r_\alpha^2 A_2) + 2\mu(-k_x^2 r_\alpha^2 A_1 - k_x^2 r_\alpha^2 A_2 - k_x^2 r_\beta B)] e^{i(\omega t - k_x x)} \quad (\text{A. 8})$$

$$= -[\lambda(A_1 + A_2 + r_\alpha^2 A_1 + r_\alpha^2 A_2) + 2\mu(r_\alpha^2 A_1 + r_\alpha^2 A_2 + r_\beta B)] k_x^2 e^{i(\omega t - k_x x)} \quad (\text{A. 9})$$

$$= -[\lambda(A_1 + A_2)(1 + r_\alpha^2) + 2\mu(r_\alpha^2(A_1 + A_2) + r_\beta B)] k_x^2 e^{i(\omega t - k_x x)}. \quad (\text{A. 10})$$

Las ecuaciones $\sigma_{xz} = \sigma_{zz} = 0$ se satisfacen si y sólo si los paréntesis cuadrados son nulos, de esta manera formamos el siguiente sistema de ecuaciones

$$2r_\alpha(A_1 - A_2) + (r_\beta^2 - 1)B = 0 \quad (\text{A. 11})$$

$$\lambda(A_1 + A_2)(1 + r_\alpha^2) + 2\mu(r_\alpha^2(A_1 + A_2) + r_\beta B) = 0.$$

Dividimos el sistema de ecuaciones (A.11) entre A_1 y sustituimos $1 + r_\alpha^2 = \frac{c_x^2}{\alpha^2} = \frac{\rho c_x^2}{\lambda + 2\mu}$ en la segunda ecuación del sistema (A.11) obteniendo

$$2r_\alpha \frac{A_2}{A_1} + (1 - r_\beta^2) \frac{B}{A_1} = 2r_\alpha \quad (\text{A. 12})$$

$$(\rho c_x^2 - 2\mu) \frac{A_2}{A_1} + 2\mu r_\beta \frac{B}{A_1} = 2\mu - \rho c_x^2.$$

Resolviendo el sistema (A.12) encontramos el cociente $\frac{B}{A_1}$ de las amplitudes de onda SV y P. Multiplicamos $(\rho c_x^2 - 2\mu)$ y $2r_\alpha$ por la primera y segunda ecuación del sistema (A.12) respectivamente y restamos para obtener el coeficiente B/A_1 como se muestra

$$(\rho c_x^2 - 2\mu) (1 - r_\beta^2) \frac{B}{A_1} - 4\mu r_\beta r_\alpha \frac{B}{A_1} = 2r_\alpha (\rho c_x^2 - 2\mu) - 2r_\alpha (2\mu - \rho c_x^2), \quad (\text{A. 13})$$

$$[(\rho c_x^2 - 2\mu) (1 - r_\beta^2) - 4\mu r_\beta r_\alpha] \frac{B}{A_1} = 4r_\alpha (\rho c_x^2 - 2\mu), \quad (\text{A. 14})$$

$$\frac{B}{A_1} = \frac{4r_\alpha (\rho c_x^2 - 2\mu)}{(\rho c_x^2 - 2\mu) (1 - r_\beta^2) - 4\mu r_\beta r_\alpha}. \quad (\text{A. 15})$$

Dividimos la última ecuación (A.15) entre μ

$$\frac{B}{A_1} = \frac{4r_\alpha \left(\frac{\rho c_x^2}{\mu} - 2 \right)}{\left(\frac{\rho c_x^2}{\mu} - 2 \right) (1 - r_\beta^2) - 4r_\beta r_\alpha}. \quad (\text{A. 16})$$

Luego mediante la igualdad $1 + r_\beta^2 = \frac{c_x^2}{\beta^2} = \frac{\rho c_x^2}{\mu}$ encontramos para la ec.(A.16) que

$$\frac{B}{A_1} = \frac{4r_\alpha (r_\beta^2 - 1)}{(r_\beta^2 - 1) (1 - r_\beta^2) - 4r_\beta r_\alpha} = \frac{4r_\alpha (1 - r_\beta^2)}{(1 - r_\beta^2)^2 + 4r_\beta r_\alpha}. \quad (\text{A. 17})$$

Resolvemos ahora el sistema (A.12) para el cociente $\frac{A_2}{A_1}$. Multiplicamos $2\mu r_\beta$ y $(1 - r_\beta^2)$ por la primera y segunda ecuación respectivamente y restamos. Obteniendo así

$$4\mu r_\beta r_\alpha \frac{A_2}{A_1} - (\rho c_x^2 - 2\mu)(1 - r_\beta^2) \frac{A_2}{A_1} = 4\mu r_\beta r_\alpha - (1 - r_\beta^2)(2\mu - \rho c_x^2), \quad (\text{A.18})$$

$$[4\mu r_\beta r_\alpha - (\rho c_x^2 - 2\mu)(1 - r_\beta^2)] \frac{A_2}{A_1} = 4\mu r_\beta r_\alpha - (1 - r_\beta^2)(2\mu - \rho c_x^2). \quad (\text{A.19})$$

Dividiendo ambos lados de la ec.(A.19) entre μ y despejando, tenemos que

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{4r_\beta r_\alpha - (1 - r_\beta^2) \left(2 - \frac{\rho c_x^2}{\mu}\right)}{4r_\beta r_\alpha - \left(\frac{\rho c_x^2}{\mu} - 2\right) (1 - r_\beta^2)}, \quad (\text{A.20})$$

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{4r_\beta r_\alpha - (1 - r_\beta^2)(1 - r_\beta^2)}{4r_\beta r_\alpha - (r_\beta^2 - 1)(1 - r_\beta^2)} = \frac{4r_\beta r_\alpha - (1 - r_\beta^2)^2}{4r_\beta r_\alpha + (1 - r_\beta^2)^2}. \quad (\text{A.21})$$

En resumen, los coeficientes de amplitud para la incidencia de una onda P en una superficie libre son:

$$R_{PP} = \frac{A_2}{A_1} = \frac{4r_\beta r_\alpha - (1 - r_\beta^2)^2}{4r_\beta r_\alpha + (1 - r_\beta^2)^2}$$

(A.22)

$$R_{PS} = \frac{B}{A_1} = \frac{4r_\alpha(1 - r_\beta^2)}{(1 - r_\beta^2)^2 + 4r_\beta r_\alpha}$$

Intercambiamos los coeficientes A_1, A_2 por B_1, B_2 y r_α por r_β , respectivamente, en la ec.(A.1). Y para la ec.(A.2) reemplazamos B por A y r_β por r_α . Tal que, al realizar el procedimiento análogo al desarrollado en este apéndice llegamos a los coeficientes de reflexión para una onda SV en una superficie dados por

$$R_{SS} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{4r_\beta r_\alpha - (1 - r_\beta^2)^2}{4r_\beta r_\alpha + (1 - r_\beta^2)^2}$$

(A.23)

$$R_{SP} = \frac{A}{B_1} = \frac{-4r_\beta(1 - r_\beta^2)}{(1 - r_\beta^2)^2 + 4r_\beta r_\alpha}$$

■

Apéndice B

Cálculo del tensor de Tracciones

En este apéndice se calcula el tensor de Tracciones de Green para una fuerza impulsiva que se aplica sobre el punto \mathbf{x} y que produce desplazamientos en el punto $\boldsymbol{\xi}$, en un espacio infinito y homogéneo en el dominio de la frecuencia. Se deduce la función de Green en términos de funciones de Hankel.

La función de Green, para una fuerza impulsiva unitaria en un espacio homogéneo, isótropo e infinito se representa de la siguiente manera:

$$G_{ij} = \frac{1}{4\mu\pi r} [f_1 \gamma_i \gamma_j + f_2 (\delta_{ij} - \gamma_i \gamma_j)]. \quad \text{B.1}$$

Donde $r^2 = (x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2$, γ_i, γ_j son los cosenos directores y f_1, f_2 las funciones de Stokes en el dominio de la frecuencia. Representadas por las expresiones

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{\beta^2}{\alpha^2} \left(1 - \frac{2i}{qr} - \frac{2}{q^2 r^2} \right) e^{-iqr} + \left(\frac{2i}{kr} + \frac{2}{k^2 r^2} \right) e^{-ikr}, \\ f_2 &= \frac{\beta^2}{\alpha^2} \left(\frac{i}{qr} + \frac{1}{q^2 r^2} \right) e^{-iqr} + \left(1 - \frac{i}{kr} - \frac{1}{k^2 r^2} \right) e^{-ikr}. \end{aligned} \quad \text{B.2}$$

Para obtener el tensor de deformaciones se necesita encontrar la derivada de la función de Green respecto a la distancia como se muestra a continuación.

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_{kj}}{\partial x_l} &= \frac{-1}{4\mu\pi r^2} \{f_1 \gamma_k \gamma_j + f_2 (\delta_{kj} - \gamma_k \gamma_j)\} \frac{\partial r}{\partial x_l} \\ &+ \frac{1}{4\pi\mu r} \left\{ \frac{\partial f_1}{\partial x_l} \gamma_k \gamma_j + f_1 \frac{\partial \gamma_k}{\partial x_l} \gamma_j + f_1 \gamma_k \frac{\partial \gamma_j}{\partial x_l} + \frac{\partial f_2}{\partial x_l} \delta_{kj} - \frac{\partial f_2}{\partial x_l} \gamma_k \gamma_j - f_2 \frac{\partial \gamma_k}{\partial x_l} \gamma_j - f_2 \gamma_k \frac{\partial \gamma_j}{\partial x_l} \right\}. \end{aligned}$$

Al agrupar términos semejantes se obtiene la expresión reducida

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_{kj}}{\partial x_l} &= \frac{-1}{4\mu\pi r^2} \{f_1 \gamma_k \gamma_j + f_2 (\delta_{kj} - \gamma_k \gamma_j)\} \frac{\partial r}{\partial x_l} \\ &+ \frac{1}{4\pi\mu r} \left\{ \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_l} - \frac{\partial f_2}{\partial x_l} \right) \gamma_k \gamma_j + (f_1 - f_2) \left(\frac{\partial \gamma_k}{\partial x_l} \gamma_j + \gamma_k \frac{\partial \gamma_j}{\partial x_l} \right) + \frac{\partial f_2}{\partial x_l} \delta_{kj} \right\}. \end{aligned}$$

Reemplazando las derivadas parciales de γ_k, γ_j y f_2 , en la expresión anterior se tiene que

$$\frac{\partial \gamma_k}{\partial x_l} = \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{x_k}{r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial x_k}{\partial x_l} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x_l} x_k = \frac{1}{r} (\delta_{kl} - \gamma_l \gamma_k),$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_l} = \frac{df_1}{dr} \frac{\partial r}{\partial x_l} = \frac{df_1}{dr} \frac{x_l}{r} = \frac{df_1}{dr} \gamma_l$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_{kj}}{\partial x_l} &= \frac{-\gamma_l}{4\mu\pi r^2} \{f_1 \gamma_k \gamma_j + f_2 (\delta_{kj} - \gamma_k \gamma_j)\} \\ &+ \frac{1}{4\pi\mu r} \left\{ \left(\frac{df_1}{dr} - \frac{df_2}{dr} \right) \gamma_l \gamma_k \gamma_j + (f_1 - f_2) \left(\frac{1}{r} (\delta_{kl} - \gamma_l \gamma_k) \gamma_j + \frac{1}{r} (\delta_{jl} - \gamma_j \gamma_l) \gamma_k \right) + \frac{df_2}{dr} \gamma_l \delta_{kj} \right\} \end{aligned}$$

Agrupando términos obtenemos la derivada parcial de la función de Green

$$\frac{\partial G_{kj}}{\partial x_l} = \frac{1}{4\pi\mu r} \left\{ \left(\frac{df_1}{dr} - \frac{df_2}{dr} - \frac{3(f_1 - f_2)}{r} \right) \gamma_l \gamma_k \gamma_j + \frac{(f_1 - f_2)}{r} (\gamma_j \delta_{kl} + \gamma_k \delta_{jl}) + \left(\frac{df_2}{dr} - \frac{f_2}{r} \right) \gamma_l \delta_{kj} \right\}$$

La derivada $\frac{\partial G_{lj}}{\partial x_k}$ se obtiene intercambiando los índices l por k . Este es el mismo resultado que se puede encontrar en [Kausel,\(2006\)](#). Como paso siguiente calculamos las deformaciones, por medio del tensor

$$\varepsilon_{klj} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial G_{kj}}{\partial x_l} + \frac{\partial G_{lj}}{\partial x_k} \right). \quad \text{B.3}$$

Explícitamente el tensor de las deformaciones ε_{klj} es

$$\begin{aligned} \varepsilon_{klj} &= \frac{1}{8\pi\mu r} \left\{ 2 \left(\frac{df_1}{dr} - \frac{df_2}{dr} - \frac{3(f_1 - f_2)}{r} \right) \gamma_l \gamma_k \gamma_j + \frac{(f_1 - f_2)}{r} (2\gamma_j \delta_{kl} + \gamma_l \delta_{jk} + \gamma_k \delta_{jl}) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{df_2}{dr} - \frac{f_2}{r} \right) (\gamma_k \delta_{lj} + \gamma_l \delta_{kj}) \right\}. \end{aligned}$$

Luego, aplicamos la ley de Hooke ecuación (2.10) sobre el tensor de deformaciones

$$\sigma_{mnj} = C_{mnkl} \varepsilon_{klj} = \lambda \varepsilon_{kkj} \delta_{mn} + 2\mu \varepsilon_{klj},$$

donde ε_{kkj} es

$$\varepsilon_{kkj} = \frac{1}{4\pi\mu r} \left\{ \frac{df_1}{dr} + \frac{(f_1 - 2f_2)}{r} \right\} \gamma_j. \quad \text{B.4}$$

Entonces el tensor de esfuerzos está representado por el tensor σ_{mnj}

$$\begin{aligned} \sigma_{mnj} &= \frac{\lambda}{4\pi\mu r} \left\{ \frac{df_1}{dr} + \frac{(f_1 - 2f_2)}{r} \right\} \gamma_j \delta_{mn} \\ &+ \frac{1}{4\pi r} \left\{ 2 \left(\frac{df_1}{dr} - \frac{df_2}{dr} - \frac{3(f_1 - f_2)}{r} \right) \gamma_m \gamma_n \gamma_j \right\} \\ &+ \frac{1}{4\pi r} \left\{ \frac{(f_1 - f_2)}{r} (2\gamma_j \delta_{mn} + \gamma_n \delta_{jm} + \gamma_m \delta_{jn}) + \left(\frac{df_2}{dr} - \frac{f_2}{r} \right) (\gamma_m \delta_{nj} + \gamma_n \delta_{mj}) \right\}. \end{aligned}$$

Reemplazando los potenciales elastodinámicos en términos de las velocidades de la onda P y S se tiene que

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\rho\alpha^2 - 2\rho\beta^2}{\rho\beta^2} = \left(\frac{\alpha^2}{\beta^2} - 2\right).$$

Introduciendo lo anterior en el tensor de esfuerzos y reagrupando obtenemos

$$\begin{aligned} \sigma_{mnj} = \frac{1}{4\pi r} \left\{ 2 \left(\frac{df_1}{dr} - \frac{df_2}{dr} - \frac{3(f_1 - f_2)}{r} \right) \gamma_m \gamma_n \gamma_j + \left[\frac{\alpha^2}{\beta^2} \left(\frac{df_1}{dr} + \frac{f_1 - 2f_2}{r} \right) + 2 \left(\frac{f_2}{r} - \frac{df_1}{dr} \right) \right] \gamma_j \delta_{mn} \right. \\ \left. + \left(\frac{df_2}{dr} + \frac{f_1 - 2f_2}{r} \right) (\gamma_m \delta_{nj} + \gamma_n \delta_{mj}) \right\}. \end{aligned} \quad \text{B.5}$$

En el tensor σ_{mnj} se puede realizar cualquier proyección de esfuerzos en cualquier dirección. Se han propuesto tres: longitudinales, transversales y cortantes. Los longitudinales se obtienen con la proyección $\gamma_m \gamma_n \gamma_j$, obteniendo la función g_1 . Los transversales y cortantes están representados por las funciones g_2 y g_3 definidas por el segundo y tercer paréntesis del tensor σ_{mnj} , ec.(B.5). Estos se representan como sigue

$$\sigma_l = \frac{1}{4\pi r} \left\{ \frac{\alpha^2}{\beta^2} \left(\frac{df_1}{dr} + \frac{f_1 - 2f_2}{r} \right) - 4 \frac{(f_1 - f_2)}{r} \right\} F_j(\xi_l), \quad \text{(B.6)}$$

$$\sigma_t = \frac{1}{4\pi r} \left\{ \frac{\alpha^2}{\beta^2} \left(\frac{df_1}{dr} + \frac{f_1 - 2f_2}{r} \right) + 2 \left(\frac{f_2}{r} - \frac{df_1}{dr} \right) \right\} F_j(\xi_l), \quad \text{(B.7)}$$

$$\sigma_c = \frac{1}{4\pi r} \left\{ \frac{df_2}{dr} + \frac{f_1 - 2f_2}{r} \right\} F_j(\xi_l). \quad \text{(B.8)}$$

Los esfuerzos longitudinales ec.(B.6) se puede expresar como la combinación lineal de los esfuerzos transversales y cortantes, ec.(B.7) y (B.8), respectivamente. Al realizar el producto de la ec.(B.5) por el vector normal n_k , contraer los índices, factorizar el término $1/r$ y sustituir las funciones de los esfuerzos e intercambiar el índice i por k se obtiene la representación obtenida por [Sánchez-Sesma & Luzón, \(1995\)](#).

$$T_{ij} = \frac{1}{4\pi r^2} \left\{ (g_1 - g_2 - 2g_3) \gamma_i \gamma_j \gamma_k n_k + g_2 \gamma_j n_i + g_3 (\gamma_i n_j + \gamma_k n_k \delta_{ij}) \right\}$$

Función de Green en términos de funciones de Hankel

La representación de la función de Green en términos de funciones de Hankel, nos permite analizar el comportamiento asintótico de la función de Green presentada en la ec.(B.1) y su contribución estadística en campos difusos. Utilizamos para este propósito los dos lemmas siguientes.

Lemma 1. Sea $J_0(x)$, $Y_0(x)$ funciones de Bessel esféricas de primera y segunda especie, respectivamente, entonces la función de Hankel esférica de segundo especie es $h_0^2(x) = \frac{i}{x} e^{-ix}$.

Dem: $h_0^2(x) = J_0(x) - iY_0(x) = \frac{\text{sen } x}{x} - i \left(\frac{-\cos x}{x} \right) = \frac{i}{x} (\cos x - i \text{sen } x) = \frac{i}{x} e^{-ix}$ ■

Lemma 2. Sea $J_2(x)$, $Y_2(x)$ funciones de Bessel esféricas de primera y segunda especie de segundo orden, respectivamente, entonces la función de Hankel esférica de segundo especie de segundo orden es $h_2^2(x) = \left[\left(\frac{3}{x^2} - 1 \right) \frac{i}{x} - \frac{3}{x^2} \right] e^{-ix}$.

$$\begin{aligned} \text{Dem: } h_2^2(x) &= J_2(x) - iY_2(x) = \left[\left(\frac{3}{x^2} - 1 \right) \frac{\text{sen } x}{x} - \frac{3 \cos x}{x} \right] - i \left[\left(1 - \frac{3}{x^2} \right) \frac{\cos x}{x} - \frac{3 \text{sen } x}{x^2} \right] \\ &= \left(\frac{3}{x^2} - 1 \right) \left[\frac{\text{sen } x}{x} - i \left(\frac{-\cos x}{x} \right) \right] + \left(\frac{-3}{x^2} \right) [\cos x - i \text{sen } x] \\ &= \left(\frac{3}{x^2} - 1 \right) \frac{i}{x} [\cos x - i \text{sen } x] - \frac{3}{x^2} [\cos x - i \text{sen } x] = \left[\left(\frac{3}{x^2} - 1 \right) \frac{i}{x} - \frac{3}{x^2} \right] e^{-ix} \blacksquare \end{aligned}$$

La función de Green permanece igual a la ec.(B.1), aunque las soluciones de Stokes ecs.(B.2), se representan en funciones de Hankel como se presenta en el siguiente teorema.

Teorema: Sean f_1 y f_2 las soluciones de Stokes, entonces

$$f_1 = -\frac{ikr\beta^3}{3} (\xi - 2\eta)$$

$$f_2 = -\frac{ikr\beta^3}{3} (\xi + \eta)$$

donde

$$\xi = \frac{h_0^2(qr)}{\alpha^3} + 2 \frac{h_0^2(kr)}{\beta^3}$$

$$\eta = \frac{h_2^2(qr)}{\alpha^3} - \frac{h_2^2(kr)}{\beta^3}$$

Demostración:

$$\begin{aligned} f_1 &= -\frac{ikr\beta^3}{3} \left(\frac{h_0^2(qr)}{\alpha^3} + 2 \frac{h_0^2(kr)}{\beta^3} - 2 \frac{h_2^2(qr)}{\alpha^3} + 2 \frac{h_2^2(kr)}{\beta^3} \right) \\ &= -\frac{ikr\beta^3}{3} (h_0^2(qr) - 2h_2^2(qr)) - 2 \frac{ikr}{3} (h_0^2(kr) + h_2^2(kr)) \end{aligned}$$

Definiendo $a = kr, b = \frac{\beta}{\alpha}$, tal que $ab = qr$ y utilizando el lemma 1 y 2 se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} &= -\frac{iab^3}{3} \left\{ \frac{i}{ab} - \left(\frac{3}{(ab)^2} - 1 \right) \frac{2i}{ab} + \frac{2 * 3}{(ab)^2} \right\} e^{-iab} - \frac{2ia}{3} \left\{ \frac{3i}{a^3} - \frac{3}{a^2} \right\} e^{-ia} \\ &= b^2 \left\{ \frac{1}{3} - \left(\frac{3}{(ab)^2} - 1 \right) \frac{2}{3} - \frac{2i}{ab} \right\} e^{-iab} + \left\{ \frac{2}{a^2} + \frac{2i}{a} \right\} e^{-ia} \\ &= b^2 \left\{ \frac{1}{3} - \frac{2}{(ab)^2} + \frac{2}{3} - \frac{2i}{ab} \right\} e^{-iab} + \left\{ \frac{2}{a^2} + \frac{2i}{a} \right\} e^{-ia} \\ &= \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 \left\{ 1 - \frac{2}{(qr)^2} - \frac{2i}{qr} \right\} e^{-iqr} + \left\{ \frac{2i}{kr} + \frac{2}{(kr)^2} \right\} e^{-ia} \end{aligned}$$

De manera análoga, realizamos el procedimiento anterior para f_2

$$\begin{aligned}
 f_2 &= -\frac{ikr\beta^3}{3} \left(\frac{h_0^2(qr)}{\alpha^3} + 2\frac{h_0^2(kr)}{\beta^3} + \frac{h_2^2(qr)}{\alpha^3} - \frac{h_2^2(kr)}{\beta^3} \right) \\
 &= -\frac{ikr\beta^3}{3\alpha^3} (h_0^2(qr) + h_2^2(qr)) - \frac{ikr}{3} (2h_0^2(kr) - h_2^2(kr)). \\
 &= -\frac{iab^3}{3} \left(\frac{i}{ab} + \left[\left(\frac{3}{(ab)^2} - 1 \right) \frac{i}{ab} - \frac{3}{(ab)^2} \right] \right) e^{-iab} - \frac{ia}{3} \left\{ \frac{2i}{a} - \left[\left(\frac{3}{a^2} - 1 \right) \frac{i}{a} - \frac{3}{a^2} \right] \right\} e^{-ia} \\
 &= b^2 \left[\frac{1}{3} + \left(\frac{3}{(ab)^2} - 1 \right) \frac{1}{3} + \frac{i}{ab} \right] e^{-iab} + \left\{ \frac{2}{3} - \left(\frac{3}{a^2} - 1 \right) \frac{1}{3} - \frac{i}{a} \right\} e^{-ia} \\
 &= b^2 \left(\frac{i}{ab} + \frac{1}{(ab)^2} \right) e^{-iab} + \left(1 - \frac{i}{a} - \frac{1}{a^2} \right) e^{-ia} \\
 &= \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 \left\{ \frac{i}{qr} + \frac{1}{(qr)^2} \right\} e^{-iqr} + \left\{ 1 - \frac{i}{kr} - \frac{1}{(kr)^2} \right\} e^{-ikr} \blacksquare
 \end{aligned}$$

Los resultados obtenidos en el teorema anterior, para las funciones de Stokes en términos de funciones de Hankel se pueden encontrar en [Sánchez-Sesma & Campillo,\(2006\)](#).

Apéndice C

Integración de la función de Green en el caso singular

La integral de la función de Green es casi singular cuando el punto ξ está dentro de la misma área de integración que el punto de colocación x . Para evitar la singularidad construimos una aproximación elíptica que describe la distancia r entre el punto x y ξ en función de su posición angular θ dentro del círculo de radio constante R_0 . Posteriormente resolvemos las integrales elípticas resultantes en expansión de series utilizando la fórmula del binomio de Newton con una aproximación de cuarto orden.

La ecuación del círculo en términos de las componentes de la distancia t_1 y t_2 según se indica en la Figura C1 es: $(t_1 + r_0) + t_2 = R_0^2$. Equivalentemente en términos de θ : $r^2 + 2r\cos\theta r_0 - (R_0^2 - r_0^2) = 0$. Resolviendo esta ecuación con la fórmula de segundo grado, se llega a la fórmula con dependencia angular θ :

$$r(\theta) = R_0 \left[\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \theta} - \varepsilon \cos \theta \right] , \quad (C.1)$$

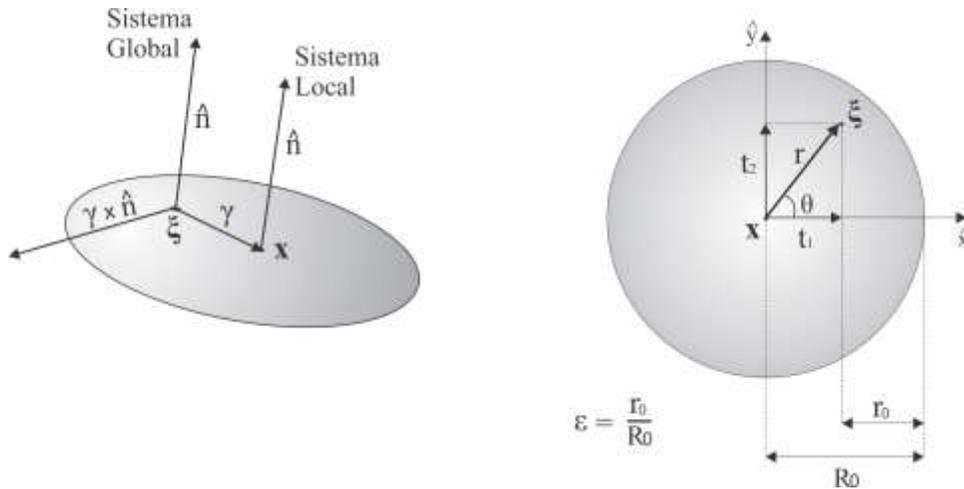


Figura C1. Construcción vectorial de una base global y local para los puntos ξ y x (Izquierda). Descripción geométrica de las distancias entre el punto ξ y x , se muestra la definición de la excentricidad (Derecha).

donde la excentricidad se define como $\varepsilon \equiv \frac{r_0}{R_0}$. Elegimos el sistema local para realizar la integral, tal que, cualquier punto dentro del círculo posee los cosenos directores $\gamma = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$ y el vector normal $\hat{n} = e_3$. Luego las integrales en cada dirección del sistema global se expresan como:

$$\int_{\Gamma} \hat{n} dS , \quad \int_{\Gamma} \gamma_i \gamma_j dS \quad y \quad \int_{\Gamma} \gamma_i n_j - \gamma_j n_i dS . \quad (C.2)$$

Observe que la última integral de las ecs.(C.2) es nula, por tanto la primera y segunda integral se pueden expresar en coordenadas polares como sigue:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{r(\theta)} r(\theta) dr d\theta , \quad \int_0^{2\pi} \int_0^{r(\theta)} \begin{Bmatrix} \cos^2 \theta \\ \sin^2 \theta \end{Bmatrix} r(\theta) dr d\theta \quad (C.3)$$

Las integrales C.3 son clasificadas como integrales elípticas de primera especie y de enésimo orden para $r^n(\theta)$. Numéricamente consideramos suficiente una aproximación hasta tercer orden de los coeficientes siguientes

$$C_n = \int_0^{2\pi} r^n(\theta) d\theta, \quad D_n = \int_0^{2\pi} r^n(\theta) \cos^2\theta d\theta, \quad E_n = \int_0^{2\pi} r^n(\theta) \sin^2\theta d\theta \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\begin{aligned} C_1 &= \int_0^{2\pi} R(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} R_0 \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2\theta} R_0 \varepsilon \cos\theta d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} R_0 \left[1 - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \sin^2\theta - \frac{1}{8} \varepsilon^4 \sin^4\theta - \frac{1}{16} \varepsilon^6 \sin^6\theta - \frac{5}{128} \varepsilon^8 \sin^8\theta - \frac{7}{256} \varepsilon^{10} \sin^{10}\theta \dots - \varepsilon \cos\theta \right] d\theta \\ &= 2\pi R_0 \left[1 - \frac{\varepsilon^2}{4} - \frac{3}{64} \varepsilon^4 - \frac{5}{256} \varepsilon^6 - \frac{175}{16384} \varepsilon^8 - \dots \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_1 &= \int_0^{2\pi} R(\theta) \cos^2\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^2\theta (R_0 \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2\theta} - R_0 \varepsilon \cos\theta) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} R_0 \left[\cos^2\theta - \frac{\varepsilon^2}{2} \sin^2\theta \cos^2\theta - \frac{\varepsilon^4}{8} \sin^4\theta \cos^2\theta - \frac{\varepsilon^6}{16} \sin^6\theta \cos^2\theta - \frac{5}{128} \varepsilon^8 \sin^8\theta \cos^2\theta - \cos^3\theta \right] d\theta \\ &= \pi R_0 \left[1 - \frac{\varepsilon^2}{8} - \frac{\varepsilon^4}{64} - \frac{5\varepsilon^6}{1024} - \frac{3\varepsilon^8}{16384} - \dots \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_1 &= \int_0^{2\pi} R(\theta) \sin^2\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^2\theta (R_0 \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2\theta} - R_0 \varepsilon \cos\theta) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} R_0 \left[\sin^2\theta - \frac{\varepsilon^2}{2} \sin^4\theta - \frac{\varepsilon^4}{8} \sin^6\theta - \frac{\varepsilon^6}{16} \sin^8\theta - \frac{5\varepsilon^8}{128} \sin^{10}\theta - \frac{7\varepsilon^{10}}{256} \sin^{12}\theta \dots - \varepsilon \cos\theta \sin^2\theta \right] d\theta \\ &= \pi R_0 \left[1 - \frac{3}{8} \varepsilon^2 - \frac{5}{64} \varepsilon^4 - \frac{35}{1024} \varepsilon^6 - \frac{315}{32768} \varepsilon^8 - \dots \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_2 &= \int_0^{2\pi} R(\theta) d\theta = R_0^2 \int_0^{2\pi} 1 - \varepsilon^2 \sin^2\theta - 2\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2\theta} \varepsilon \cos\theta - \varepsilon^2 \cos^2\theta d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} R_0^2 (1 - \varepsilon^2 \sin^2\theta + \varepsilon^2 \cos^2\theta) d\theta = R_0^2 [2\pi - \varepsilon^2 \pi + \varepsilon^2 \pi] = 2\pi R_0^2 [1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_2 &= \int_0^{2\pi} R^2(\theta) \cos^2\theta d\theta = \int_0^{2\pi} R_0^2 (\cos^2\theta - \varepsilon^2 \sin^2\theta \cos^2\theta - 2\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2\theta} \varepsilon \cos^3\theta + \varepsilon^2 \cos^4\theta) d\theta \\ &= R_0^2 \left[\pi - \frac{\varepsilon^2}{4} \pi + \frac{3}{4} \varepsilon^2 \pi \right] = \pi R_0^2 \left[1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_2 &= \int_0^{2\pi} R^2(\theta) \sin^2 \theta d\theta = \int_0^{2\pi} R_0^2 \left(\sin^2 \theta - \varepsilon^2 \sin^4 \theta - 2\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \theta} \varepsilon \cos \theta \sin^2 \theta + \varepsilon^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \right) d\theta \\ &= R_0^2 \left[\pi - \frac{3}{4} \varepsilon^2 \pi + \frac{\varepsilon^2}{4} \pi \right] = \pi R_0^2 \left[1 - \frac{3}{4} \varepsilon^2 + \frac{\varepsilon^2}{4} \right] = \pi R_0^2 \left[1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_3 &= R_0^3 \int_0^{2\pi} (1 - \varepsilon^2 \sin^2 \theta)^{3/2} - 3(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \theta) \varepsilon \cos \theta + 3\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \theta} \varepsilon^2 \cos^2 \theta - \varepsilon^3 \cos^3 \theta d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} R_0^3 \left((1 - 3\varepsilon^2 \sin^2 \theta)^{3/2} + 3\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \theta} \varepsilon^2 \cos^2 \theta \right) d\theta \\ &= R_0^3 \left[2\pi - \frac{3}{2} \pi \varepsilon^2 + \frac{9}{32} \pi \varepsilon^4 + \frac{5}{128} \pi \varepsilon^6 + \frac{105}{8192} \pi \varepsilon^8 + \dots + 3\pi \varepsilon^2 - \frac{3}{8} \pi \varepsilon^4 - \frac{3}{64} \pi \varepsilon^6 - \frac{15}{1024} \pi \varepsilon^8 - \dots \right] \\ &= 2\pi R_0^3 \left[1 + \frac{3}{4} \varepsilon^2 - \frac{3}{64} \varepsilon^4 - \frac{1}{256} \varepsilon^6 - \frac{15}{16384} \varepsilon^8 - \dots \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_3 &= R_0^3 \int_0^{2\pi} (1 - \varepsilon^2 \sin^2 \theta)^{3/2} \cos^2 \theta - 3(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \theta) \varepsilon \cos^3 \theta + 3\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \theta} \varepsilon^2 \cos^4 \theta - \varepsilon^3 \cos^5 \theta d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \theta)^{3/2} \cos^2 \theta + 3\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \theta} \varepsilon^2 \cos^4 \theta \right] d\theta \\ &= R_0^3 \left[\pi - \frac{3}{8} \pi \varepsilon^2 + \frac{3}{64} \pi \varepsilon^4 + \frac{5}{1024} \pi \varepsilon^6 + \frac{84}{163} \pi \varepsilon^8 + \dots + \frac{9}{4} \pi \varepsilon^2 - \frac{3}{16} \pi \varepsilon^4 - \frac{9}{512} \pi \varepsilon^6 - \frac{9}{2048} \pi \varepsilon^8 - \dots \right] \\ &= \pi R_0^3 \left[1 + \frac{15}{8} \varepsilon^2 - \frac{9}{64} \varepsilon^4 - \frac{13}{1024} \varepsilon^6 - \frac{51}{16384} \varepsilon^8 - \dots \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_3 &= R_0^3 \int_0^{2\pi} (1 - \varepsilon^2 \sin^2 \theta)^{3/2} \sin^2 \theta - 3(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \theta) \varepsilon \cos \theta \sin^2 \theta + 3\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \theta} \varepsilon^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \\ &\quad - \varepsilon^3 \cos^3 \theta \sin^2 \theta d\theta \\ &= R_0^3 \left[\pi - \frac{9}{8} \pi \varepsilon^2 + \frac{15}{64} \pi \varepsilon^4 + \frac{35}{1024} \pi \varepsilon^6 + \frac{189}{16384} \pi \varepsilon^8 + \dots + \frac{3}{4} \pi \varepsilon^4 - \frac{15}{512} \pi \varepsilon^6 - \frac{21}{2048} \pi \varepsilon^8 - \dots \right] \\ &= \pi R_0^3 \left[1 - \frac{3}{8} \varepsilon^2 + \frac{3}{64} \varepsilon^4 + \frac{35}{1024} \varepsilon^6 + \frac{21}{16384} \varepsilon^8 + \dots \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_4 &= R_0^4 \int_0^{2\pi} (1 - \varepsilon^2 \sin^2 \theta)^2 - 4(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \theta)^{3/2} \varepsilon \cos \theta + 6(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \theta) \varepsilon^2 \cos^2 \theta - 4\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \theta} \varepsilon^3 \cos^3 \theta \\ &= \int_0^{2\pi} 1 - 2\varepsilon^2 \sin^2 \theta + \varepsilon^4 \sin^4 \theta + 6\varepsilon^2 \cos^2 \theta - 6\varepsilon^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \varepsilon^4 \cos^4 \theta d\theta \\ &= R_0^4 \left[2\pi - 2\pi \varepsilon^2 + \frac{3}{4} \pi \varepsilon^4 + 6\pi \varepsilon^2 - \frac{6}{4} \pi \varepsilon^4 + \frac{3}{4} \pi \varepsilon^4 \right] = 2\pi R_0^4 [1 + 2\varepsilon^2] \end{aligned}$$

$$D_4 = R_0^4 \int_0^{2\pi} \sin^2\theta - 2\varepsilon^2 \cos^2\theta + \varepsilon^4 \sin^4\theta \cos^2\theta + 6\varepsilon^2 \cos^4\theta - 6\varepsilon^4 \sin^2\theta \cos^4\theta + \varepsilon^4 \cos^6\theta d\theta$$

$$= R_0^4 \left[\pi - \frac{\pi}{2} \varepsilon^2 + \frac{\pi}{8} \varepsilon^4 + \frac{18}{4} \pi \varepsilon^2 - \frac{3}{4} \pi \varepsilon^4 + \frac{5}{8} \pi \varepsilon^4 \right] = \pi R_0^4 [1 + 4\varepsilon^2]$$

$$E_4 = R_0^4 \int_0^{2\pi} \sin^2\theta - 2\varepsilon^2 \sin^4\theta + \varepsilon^4 \sin^6\theta + 6\varepsilon^2 \cos^2\theta \sin^2\theta - 6\varepsilon^4 \sin^4\theta \cos^2\theta + \varepsilon^4 \cos^4\theta \sin^2\theta d\theta$$

$$= R_0^4 \left[\pi - \frac{3}{2} \pi \varepsilon^2 + \frac{5}{8} \pi \varepsilon^4 + \frac{3}{2} \pi \varepsilon^2 - \frac{3}{4} \pi \varepsilon^4 + \frac{\pi}{8} \varepsilon^4 \right] = \pi R_0^4 [1]$$

Integración singular

El cambio de coordenadas cartesianas a polares remueve la singularidad débil. Por lo que se efectúa una integración analítica, donde las soluciones de Stokes $F_1 = \int_0^r f_1(\omega, r) dr$ y $F_2 = \int_0^r f_2(\omega, r) dr$ son integradas en expansión de serie de Taylor hasta tercer orden.

Note que la función de Green en el caso singular y casi singular son ponderadas con los cosenos directores de cada dirección correspondientes al sistema global ec.(C.2). Por otra parte, en el caso cercano a la singularidad los coeficientes C_i, D_i, E_i $i = 1, 2, 3, 4$ se ponderan con todos los términos de las funciones F_1 y F_2 del caso singular, dando lugar a las funciones F_1^W y F_2^W para cada $W = C, D, E$, correspondiente.

$$\varepsilon = 0 \quad G_{ij} = \frac{1}{4\mu} \{ (F_1 + F_2) \delta_{ij} + (F_2 - F_1) \gamma_i \gamma_j \}$$

$$F_1 = 1 - i \left(2 + \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^3 \right) \frac{kr}{6} - \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^4 \right) \frac{k^2 r^2}{9} + i \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^5 \frac{k^3 r^3}{24}$$

$$F_2 = \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 \right) - i \left(2 + \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^3 \right) \frac{kr}{6} - \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^4 \right) \frac{k^2 r^2}{9} + i \frac{k^3 r^3}{24}$$

$$\varepsilon \neq 0 \quad G_{ij} = \left\{ 2 F_2^C \delta_{ij} + (F_1^D - F_2^D) \gamma_i \gamma_j + (F_1^E - F_2^E) (\gamma_i n_j - \gamma_j n_i) \right\} \frac{1}{4\mu}$$

$$F_2^W = \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 \right) \mathbf{W}_1 - i \left(2 + \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^3 \right) \frac{kr}{6} \mathbf{W}_2 - \left(2 + \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^4 \right) \frac{k^2 r^2}{18} \mathbf{W}_3 + i \frac{k^3 r^3}{24} \mathbf{W}_4 \quad \mathbf{W} = C, D, E$$

$$F_1^W = \mathbf{W}_1 - i \left(2 + \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^3 \right) \frac{kr}{6} \mathbf{W}_2 - \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^4 \right) \frac{k^2 r^2}{18} \mathbf{W}_3 + i \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^5 \frac{k^3 r^3}{24} \mathbf{W}_4 \quad \mathbf{W} = D, E$$

Bibliografía

- [1] Abramowitz, M. & I.A. Stegun (1972). *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications Inc., New York.
- [2] Achenbach, J.D. (1973). *Wave Propagation in Elastic Solids*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam.
- [3] Ahmad S. & Manolis G. D (1987). Dynamic analysis of 3-D structures by a transformed boundary element method. *Computational Mechanics* **2**:185-197. Springer-Verlag.
- [4] Aki, K. & P.G. Richards (1980). *Quantitative Sismology. Theory and Methods*, W.H. Freeman and Company, San Francisco.
- [5] Aki, K. & P.G. Richards (2002). *Quantitative Sismology: Theory and Methods*. University Science Books, 2nd ed.
- [6] Assimaki D., Gazetas G. & Kausel E. (2005). Effects of Local Soil Conditions on the Topographic Aggravation of Seismic Motion: Parametric Investigation and Recorded Field Evidence from the 1999 Athens Earthquake. *Bull. Seism. Soc. Am.* **95**: 1059-1089.
- [7] Ávila R., Palencia V.J., Sánchez-Sesma F.J., (2002). *El VMP: Una técnica variacional para simular la respuesta sísmica de valles aluviales someros*. *Revista de Ingeniería Sísmica* **67**:79-100. México.
- [8] Baker A.L. (1911). *Quaternions as the Result of Algebraic Operations*. D. Van Nostrand Company. Brooklyn PhD, New York.
- [9] Bard P. Y. & Bouchon M. (1980). *The seismic response of sediment-filled valleys. Part 1. The case of incident SH waves*. *Bull. Seismol. Soc. Am.* **70**:1263–1286.
- [10] Beer, G. & Meek J.L (1981). *The coupling of boundary and finite element methods for infinite domain problems in elasticity*. *Boundary element method*, **1**:575-591.
- [11] Ben-Menahem A. & Singh S. J. (1981). *Seismic waves and sources*. Springer-Verlag. ISBN, 3540905065.
- [12] Benítez J. & Thome N. (2006). *The generalized Schur complement in group inverses and $(k + 1)$ -potent matrices*. *Linear and Multilinear Algebra*, **54**: 6.
- [13] Bielak J. & Christiano P. (1984). *On the effective seismic input for non-linear soil-structure interaction systems*. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, **12**:107-119.
- [14] Bielak J., Loukakis K., Hisada Y. & Yoshimura C. (2003). *Domain Reduction Method for Three-dimensional Earthquake Modeling in Localized Regions, Part I. Theory*. *Bull. Seism. Soc. Am.*, **93**:817-824.
- [15] Bielak J., Graves W. R., Olsen K., Taborda R., Ramírez-Guzmán L., Day S. M., Ely G.P., Roten D., Jordan T.H., Maechling P.J., Urbanic J., Cui Y. & Juve G. (2010). *The ShakeOut earthquake scenario: Verification of three simulation sets*. *Geophys. J. Int.*, **180**:375–404.
- [16] Bouchon, M., (1981). *A simple method to calculate Green's functions for elastic layered media*. *Bull. Seism. Soc. Am.*, **71**:959-971.

- [17] Bouchon, M., C. A. Schultz, and M. N. Toksöz (1995). *A fast implementation of boundary integral equation methods to calculate the propagation of seismic waves in laterally varying layered media*. *Bull. Seism. Soc. Am.* **85**:1679-1687.
- [18] Bouchon, M. and J. S. Barker (1996). Seismic response of a hill: the example of Tarzana, California. *Bull. Seism. Soc. Am.* **86**:66-72.
- [19] Bouchon M. & Sánchez-Sesma F.J. (2007). *Boundary integral equations and boundary elements methods in elastodynamics*. *Advances in Geophysics*, **48**:157-190. Elsevier-Academic Press, New York, Boston.
- [20] Bortfeld, R., (1961). *Approximations to the reflection and transmission coefficients of plane longitudinal and transverse waves*. *Geophysical Prospecting*, **9**: 485-503.
- [21] Brebbia, C. A. & J. Dominguez (1992). *Boundary Elements an Introductory Course*, Second Ed., Comp. Mec. Publ., Southampton & Mc Graw-Hill Book Co., New York.
- [22] Carniel, R., Barazza, F. & Pascolo, P., (2006). *Improvement of Nakamura technique by singular spectrum analysis*. *Soil Dyn. Earthq. Eng.*, **26**:55–63.
- [23] Cervený, V. (2001). *Seismic Ray Theory*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [24] Chaillat S. (2008). *Fast Multipole Method for 3-D elastodynamic boundary integral equations; Application to seismic wave propagation*. Laboratoire de Mécanique des Solides, École Polytechnique, Paris PhD, France.
- [25] Chaillat S., M. Bonnet, J.F. Semblat (2009). *A new fast multi-domain BEM to model seismic wave propagation and amplification in 3D geological structures*. *Geophys. J. Int.*, **177**: 509-531.
- [26] Chaljub, E., Moczo P., Tsuno S., Bard P.Y., Kristek J., Käser M., Stupazzini M. & Kristekova M. (2010). *Quantitative Comparison of Four Numerical Predictions of 3D Ground Motion in the Grenoble Valley, France*. *Bull. Seism. Soc. Am.*, **100**:1427-1455.
- [27] Chao C. C. (1960). *Dynamical response of an elastic half-space to tangential surface loadings*. *Journal of Applied Mechanics* **27**:559.
- [28] Chapman C. (2004). *Fundamentals of seismic wave propagation*. Cambridge University Press. New York. ISBN 052181538X.
- [29] Chavez-García F. J. & Faccioli E. (2000). *Complex site effects and building codes: making the leap*. *J. Seismol.* **4**:23–40.
- [30] Clayton R. W. & Engquist B. (1977). *Absorbing boundary conditions for acoustic and elastic wave equations*. *Bull. Seismol. Soc. Am.* **67**:1529–1540.
- [31] Cupillard P., Delavaud E., Burgos G., Festa G., Vilotte J.P., Capdeville Y. & Montagner J.P. (2012). *RegSEM: a versatile code based on the spectral element method to compute seismic wave propagation at the regional scale*. *Geophys. J. I.*, **188**:1203-122.
- [32] Dangla, P., J.-F. Semblat, H. Xiao et N. Delépine (2005). *A Simple and Efficient Regularization Method for 3D BEM: Application to Frequency-Domain Elastodynamics*. *Bull. Seismol. Soc. Am.* **95**:1916-1927.

- [33] Delavaud E. (2007). *Simulation numérique de la propagation d'ondes en milieu géologique complexe: application à l'évaluation de la réponse sismique du bassin de Caracas (Venezuela)*. PhD thesis, Institut de Physique du Globe de Paris. En français, www.ipgp.jussieu.fr/_delavaud/ThesisDelavaud.pdf.
- [34] Dobry R., Oweis I. & Urzua A. (1976). *Simplified procedures for estimating the fundamental period of a soil profile*. Bull. Seismol. Soc. Am. **66**:1293–1321.
- [35] Dominguez, J. and Abascal, R., (1984). *On fundamental solutions for the boundary integral equations in static and dynamic elasticity*. Engineering Analysis, Vol. **1**, No. 3, pp. 128–134, eqs. 20, 21.
- [36] Eringen A. C. & Suhubi E.S. (1975). *Elastodynamics Vol.II-Linear Theory*. Academic Press.
- [37] Eshraghi H. & Dravinski M.(1989). *Scattering of plane harmonic SH, SV, P and Rayleigh waves by nonaxisymmetric three-dimensional canyons: a wave function expansion approach*. Earthquake Engng. Struct. Dyn., **18**:983–998.
- [38] Ewing, W., Jardetzky W. , & Press F. (1957). *Elastic waves in layered media*. McGraw-Hill, New York.
- [39] Fishman K.L. & Ahmad S. (1995). *Seismic response for alluvial valleys subjected to SH, P and SV waves*. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, **14**:249-258.
- [40] Frankel, A. (1993). *Three-dimensional Simulations of Ground Motions in the San Bernardino Valley, California, for Hypothetical Earthquakes on the San Andreas Fault*. Bull. Seismol. Soc. Am. **83**:1020-1041.
- [41] Frehner M., Schmalholz S., Saenger E. & Holger S. (2008). *Comparison of finite difference and finite element methods for simulating two-dimensional scattering of elastic waves*. Physics of the Earth and Planetary Interiors, **171**:112-121.
- [42] Friedberg S.H., Insel A.J., Spence L.E. (2003). *Linear Algebra*. Prentice Hall, 4th Ed. New Jersey, EUA.
- [43] Fujiwara H. (2000). *The fast multipole method for solving integral equations of three-dimensional topography and basin problems*. Geophys. J. Int., **140**:198–210.
- [44] Ganley, D., (1981). *A method for calculating synthetic seismograms which include the effects of absorption and dispersion*. Geophysics **46**:1100–1107.
- [45] Gao Y., Zhang N., Li D., Liu H., Cai Y. & Wu Y. (2012). *Effects of Topographic Amplification Induced by a U-Shaped Canyon on Seismic Waves*. Bull. Seismol. Soc. Am. **102**:1748–1766.
- [46] Gelagoti, F., R. Kourkoulis, I. Anastasopoulos, T. Tazoh, & G. Gazetas (2010). *Seismic wave propagation in a very soft alluvial valley: Sensitivity to ground-motion details and soil nonlinearity, and generation of a parasitic vertical component*. Bull. Seismol. Soc. Am. **100**:3035–3054, doi 10.1785/0120100002.
- [47] Gelagoti, F., R. Kourkoulis, I. Anastasopoulos & G. Gazetas (2012). *Nonlinear Dimensional Analysis of Trapezoidal Valleys Subjected to Vertically Propagating SV Waves*. Bull. Seismol. Soc. Am. **102**:999–1017, doi 10.1785/0120110182.

- [48] Gernot B., Smith I., Duenser C., (2008). *The Boundary Element Method with Programming: for engineers and scientist*. SpringerWien, New York.
- [49] Gil-Zepeda A.S., Luzón F., Aguirre J., Morales J., Sánchez-Sesma F.J. & Ortiz-Alemán C. (2002). *3D Seismic Response of the Deep Basement Structure of the Granada Basin (Southern Spain)*. Bull. Seismol. Soc. Am., **92**:2163–2176.
- [50] Gil-Zepeda A.S., Montalvo-Arrieta J.C., Vai R., Sánchez-Sesma F.J. (2003). *A hybrid indirect boundary element—discrete wave number method applied to simulate the seismic response of stratified alluvial valleys*. Soil Dynamics and Earthquake Engineering **23**:77–86.
- [51] Gil-Zepeda A.S. (2005). *Propagación de ondas sísmicas en estructuras geológicas someras*. Tesis de Doctorado, Instituto de Ingeniería, UNAM.
- [52] Guiggiani M. & Casalini P. (1987). *Direct computation of Cauchy principal value integrals in advanced boundary elements*. Int. J. Numerical Method in Engineering, **24**: 1711-1720.
- [53] Guiggiani M., & Gigante A., (1990). *A general algorithm for multidimensional Cauchy principal value integrals in the boundary element method*. ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. **57**:906-915.
- [54] Guggiani M. (1991). *Computing principal value integrals in 3D BEM for time-harmonic elastodynamics A direct approach*. Communications in Applied Numerical Methods.
- [55] Guggiani M. (1992). *Computing Principal Value Integrals in 3D BEM for Time-Harmonic Elastodynamics; A Direct Approach*. Communications in Applied Numerical Methods, Vol. **8**:141-149.
- [56] Hartmann F., (1981). *The Somigliana identity on piecewise smooth surfaces*. Journal of Elasticity, Vol. **11**: 403-423.
- [57] Hartmann F. (1989). *Introduction to Boundary Elements: Theory and Applications*. Springer-Berlag, Berlín.
- [58] Harris, John G. (2001). *Linear Elastic Waves*. Cambridge University Press, London.
- [59] Hudson, J. A. (1980). *The Excitation and Propagation of Elastic Waves*. Cambridge University Press, New York.
- [60] Ichimura T., Hori M. y Bielak J. (2009). *A hybrid multiresolution meshing technique for finite element three-dimensional earthquake ground motion modeling in basins including topography*. Geophysical Journal International, **177**:1221-1232.
- [61] Iturrarán-Viveros U., Sánchez-Sesma F. J. & Luzón F. (2008). *Boundary element simulation of scattering of elastic waves by 3-D cracks*. J. Appl. Geophys., **64**,70-82.
- [62] Johnson, L. (1974). *Green's function for Lamb's problem*. Geophys. J. R. Astr. Soc. **37**:99–131.

- [63] Kane J.H., Gupta A. & Saigal S. (1989). *Reusable Intrinsic Sample Point (RISP) Algorithm for Efficient Numerical Integration of Three Dimensional Curved Boundary Elements*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. **288**:1661-1676.
- [64] Käser M., Castro C., Hermann V. & Pelties C.(2009).*High Performance Computing in Science and Engineering, capitulo SeisSol – A software for Seismic Wave Propagation Simulations*, pp. 281-292. Springer.
- [65] Katsikadelis, J.T. (2002). *Boundary Elements: Theory and Applications*. Elsevier Science, 1st ed.
- [66] Kausel, E. (1994). *Thin-Layer Method: Formulation in the Time Domain*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, **37**: 927-941
- [67] Kausel E.(2006). *Fundamental Solutions in Elastodynamics, A Compendium*. Cambridge University Press, New York.
- [68] Kausel, E. (2012). *Lamb's problem at its simplest*. Proc. R. Soc. A. Mathematical, Physical and Engineering Sciences 469 (2149): 20120462–20120462.
- [69] Kawase H. (1988). *Time-domain response of a semicircular canyon for incident SV, P, and Rayleigh waves calculated by the discrete wavenumber boundary element method*. Bull Seismol Soc Am. **78**:1415–37.
- [70] Kawase, H. and Aki (1989). *A study on the response of a soft basin for incident S, P, and Rayleigh waves with special reference to the long duration observed in Mexico City*. Bull. Seism. Soc. Am. **79**: 610-630.
- [71] Kennett B. (1983). *Seismic wave propagation in stratified media*. ANU E Press, Australia. ISBN 0521312191.
- [72] Komatitsch, D., and J. Tromp (1999). *Introduction to the spectral-element method for 3-D seismic wave propagation*. Geophys. J. Int. **139**: 806–822.
- [73] Komatitsch, D., Q. Liu, J. Tromp, P. Süß, C. Stidham, and J. H. Shaw (2004). *Simulations of ground motion in the Los Angeles basin based upon the spectral-element method*. Bull. Seismol. Soc. Am. **94**: 187–206.
- [74] Kumar S., Narayan J.P. (2008). *Importance of quantification of local site effects based on wave propagation in seismic microzonation*. J. Earth Syst. Sci. **117**, S2, pp. 731–748.
- [75] Kupradze, V. D. (1963). *Dynamical Problems in Elasticity*, in Progress in Solid Mechanics Vol. III. North-Holland Publishing Company, Amsterdam.
- [76] Lachat, J.C. & Watson, LO. (1976). *Effective numerical treatment of boundary integral equations: a formulation for three dimensional elastostatics*. Int. J. Num. Meth. in Eng. **10**:991-1005.
- [77] Lamb, H. (1904). *On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid*. Phil. Trans. Royal Soc. London, A, **203**:1-42.

- [78] Lan H. & Zhang Z. (2011). *Three-Dimensional Wave-Field Simulation in Heterogeneous Transversely Isotropic Medium with Irregular Free Surface*. Bull. Seismol. Soc. Am., **101**:1354-1370.
- [79] Landau, L.D. & Lifshitz E.M. (1982). *Teoría de la Elasticidad, Curso de Física Teórica Vol. 7*. Reverté, Barcelona.
- [80] Lang, S. (2005). *Undergraduate Analysis*. Springer UTM, New York.
- [81] Lee S. J. , Chen H. W., Liu Q. , Komatitsch D., Huang B. S. & Tromp J. (2008). *Three-Dimensional Simulations of Seismic-Wave Propagation in the Taipei Basin with Realistic Topography Based upon the Spectral-Element Method*. Bull. Seismol. Soc. Am., **98**:253-264.
- [82] Lee S. J. , Komatitsch D., Huang B. S. & Tromp J. (2009). *Effects of Topography on Seismic-Wave Propagation: An Example from Northern Taiwan*. Bull. Seismol. Soc. Am., **99**:314-325.
- [83] Lee S. J., Chang Y.C., Komatitsch D. & Huang B.S., Tromp J. (2009). *Effects of Realistic Surface Topography on Seismic-Ground Motion in the Yangminshan Region of Taiwan Based Upon the Spectral Element Method and LIDAR DTM*. Bull. Seismol. Soc. Am., **99**:681-693.
- [84] Lehmann C. H. (2007). *Geometría analítica*. Limusa 4ta. Ed., México.
- [85] Levedev L.P. & Cloud M.J. (2009). *Introduction to mathematical elasticity*. Wiley & Sons, ISBN 9814273724.
- [86] Lines L.R. & Treitel S. (1984). *Tutorial: A review of least-squares and its application to geophysical problems*. Geophys. Pros. **32**:159-186.
- [87] Love, A. E. H. (1944). *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Dover Publications, New York.
- [88] Luzón F., Sánchez-Sesma F.J., Pérez-Ruiz J.A., Ramírez-Guzmán L. , Pech A. (2009). *In-plane seismic response of inhomogeneous alluvial valleys with vertical gradients of velocities and constant Poisson ratio*. Soil Dynamics and Earthquake Engineering **29**:994–1004.
- [89] Luo Y. & Schuster G. (1990). *Parsimonious staggered grid-finite differencing of the wave equation*. Geophys. Res. Lett. **17**, 155-158.
- [90] Malvern L. E. (1969). *Introduction to the mechanics of a continuous medium*. Prentice Hall, Englewood Cliffs. 713 pp.
- [91] Miklowitz J. (1978). *The theory of elastic waves and waveguides*. North-Holland. Applied mathematics and mechanics. California, EUA. ISBN 0720405513
- [92] Min D. J., Changsoo S., R. Gerhard P. & Hai S.Y. (2003). *Weighted-Averaging Finite Element Method for 2D Elastic Wave Equations in the Frequency Domain*. Bull. Seismol. Soc. Am., **93**:904-921.
- [93] Mooney, H.M. (1974). *Some numerical solutions for Lamb's problem*. Bull. Seismol. Soc. Am., **64** (2), 473-491.

- [94] Mossessian T. K. & Dravinski M. (1990). *Amplification of elastic waves by a three dimensional valley. Part 1: Steady state response*. Earthquake Engng. Struct. Dyn., **19**:667–680.
- [95] Mossessian T. K. & Dravinski M. (1990). *Amplification of elastic waves by a three dimensional valley. Part 2: Steady state response*. Earthquake Engng. Struct. Dyn., **19**:681–691.
- [96] Muir F. J., Dellinger J. E. & Nichols D. (1992). *Modeling elastic fields across irregular boundaries*. Geophysics **57**, 1189-1193.
- [97] Nakamura Y. (2000). *Clear identification of fundamental idea of Nakamura's technique and its applications*. Proceedings of the XII World Conf. Earthquake Engineering, New Zealand, p. Paper no. 2656.
- [98] Narayan J.P. (2011). *Effects of P-Wave and S-Wave Impedance Contrast on the Characteristics of Basin Transduced Rayleigh Waves*. Pure Appl. Geophys. **169**:693–709
- [99] Narayan J.P. (2012). *Effects of Angle of Incidence of SH-wave at the Basin-Edge on the Characteristics of Basin-Edge Induced Love waves*. Journal of Earthquake and Tsunami Vol. **6**, No. 1.
- [100] Newman W.M. & Sproull R.F.(1979).*Principles of Interactive Computers Graphics*. McGraw Hill, New York.
- [101] Ohminato T. & Chouet B. A. (1997). *A Free-Surface Boundary Condition for Including 3D Topography in the Finite-Difference Method*. Bull. Seismol. Soc. Am. Vol. **87**:494-515.
- [102] Ortiz-Alemán C., Sánchez-Sesma F.J., Rodríguez-Zúñiga J.L., Luzón F. (1998). *Computing topographical 3D site effects using a fast IBEM/conjugate gradient approach*. Bull. Seismol. Soc. Am. **88**:393–399.
- [103] Pujol J. (2003). *Elastic wave propagation and generation in seismology*. Cambridge University Press, New York , EUA. ISBN 0521817307
- [104] Petersson N. A. & Sjogreen B. (summitted 2013). *Super-grid Modeling of the Elastic Wave Equation in Semibounded Domains*. Communications in Computational Physics, LLNL-JRNL-610212
- [105] Reddy, J.N. (1993). *An Introduction to Finite Element Method*. Mc Graw-Hill, New York.
- [106] Reinoso E., Wrobel L.C. & Power H. (1997). *Three-dimensional scattering of seismic waves from topographical structures*. Soil Dyn. Earthquake Engng., **16**:41–61.
- [107] Rodríguez-Castellanos A., Sánchez-Sesma F.J., Luzón F. & Martin R. (2006). *Multiple Scattering of Elastic Waves by Subsurface Fractures and Cavities*. Bull. Seism. Soc. Am. **96**:1359-1374.
- [108] Rodríguez-Castellanos A., Flores E., Sánchez-Sesma F.J., Ortiz-Alemán C., Nava-Flores M. and Martin R. (2011). *Indirect Boundary Element Method applied to Fluid-Solid Interfaces. Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Vol. **31**:470-477.
- [109] Rodríguez-Zúñiga J.L., Sánchez-Sesma F.J. & Pérez Rocha E. L. (1995). *Seismic Response of Shallow Alluvial Valley: The Use of Simplified Models*. Bull. Seism. Soc. Am. **85**:890-899.

- [110] Saad, M.H. (2009). *Elasticity: Theory, Applications and Numerics*. Elsevier Inc., Burlingong, USA.
- [111] Shahi, R. and Noorzad, A. (2011). *Dynamic Response of Rigid Foundations of Arbitrary Shape Using Half-Space Green's Function*. Int. J. Geomech., **11**: 391–398.
- [112] Sánchez-Sesma, F. J. & Rosenblueth E.(1979). *Ground motion at canyons of arbitrary shape under incident SH waves*. Bull. Seism. Soc. Am. **69**: 1107-1120.
- [113] Sánchez-Sesma, F. J. & Esquivel, J. (1979). *Ground motion on alluvial valleys under incident plane SH waves*. Bull. Seism. Soc. Am. **69**:1107-1120.
- [114] Sánchez-Sesma, F. J. (1983). *Diffraction of elastic waves by three dimensional surface irregularities*. Bull. Seism. Soc. Am. **73**:1621-1636.
- [115] Sánchez-Sesma F.J. Pérez-Rocha E., Chavez-Pérez S. (1989). *Diffraction of elastic waves by three dimensional surface irregularities. Part II*. Bull. Seism. Soc. Am. Vol. **79**:101-112,
- [116] Sánchez-Sesma F.J. (1990). *Elementary Solutions for Response of a wedge-shaped medium to incident SH and SV waves*. Bull. Seism. Soc. Am. **80**:737-742.
- [117] Sánchez-Sesma, F. J. & Campillo M. (1991). *Diffraction of s, SV and Rayleigh waves by topographic features: a boundary integral formulation*. Bull. Seism. Soc. Am. Vol. **81**: 2234-2253.
- [118] Sánchez-Sesma, F. J. & Luzón F.(1995). *Seismic response of three dimensional alluvial valleys for incident P, S and Rayleigh waves*. Bull. Seism. Soc. Am. **85**. 269-284.
- [119] Sánchez-Sesma F. J., Madariaga R., Irikura K. (2001). *An approximate elastic two dimensional Green's function for a constant-gradient medium*. Geophys. J. Int. Vol. **146**:269-284.
- [120] Sánchez-Sesma, F. J. & Campillo M. (2006). *Retrieval of the Green's Function from Cross Correlation: The Canonical Elastic Problem*. Bull. Seism. Soc. Am. Vol. **96**:1182-1191.
- [121] Schwab F. & Knopoff L. (1971). *Surface waves on multilayered anelastic media*. Bull. Seism. Soc. Am. **61**:893–912.
- [122] Shiann-Jong L., Komatitsch D., Bor-Shouh H., & Tromp J. (2009). *Effects of Topography on Seismic-Wave Propagation: An Example from Northern Taiwan*. Bull. Seism. Soc. Am. **99**:314-325.
- [123] Sokolnikoff I.(1956) *Mathematical Theory of Elasticity*, McGraw-Hill, New York.
- [124] Sommerfeld, A.(1964a). *Optics, Lectures on Theoretical Physics Vol. IV*. Academic New York.

- [125] Sommerfeld, A.(1964b). *Partial Differential Equations on Physics, Lectures on Theoretical Physics Vol. VI*. Academic New York.
- [126] Spivak, M. *Cálculo en Variedades*. Reverté, Barcelona.
- [127] Stein S. & Weyssession M. (2003). *Introduction to seismology earthquake and earth structure*. Blackwell publishing Malden, USA.
- [128] Stokes, G. G.(1849). *On the dynamical theory of diffraction*. Trans. Camb. Phil. Soc. Vol. **9**:243-280. London.
- [129] Telles J.C.F. (1987). *A Self-Adaptative Coordinate Transformation for Efficient Numerical Evaluations of General Boundary Element Integrals*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. **24**:959-973.
- [130] Timoshenko, S.P. & Godier, J.N. (1970). *Theory of Elasticity*. Mc Graw-Hill Book Company, New York.
- [131] Udías A. (1999). *Principles of seismology*. Cambridge University Press, New York, EUA. ISBN: 9780521624787.
- [132] Van der Baan M. (2009). *The origin of SH-wave resonance frequencies in sedimentary layers*. Geophys. J. Int. **178**:1587–1596.
- [133] Yokoi, T. (2003). *The higher order Born approximation to improve the solution of seismic response of a three dimensional canyon computed by the Indirect Boundary Method*, J. Phys. Earth Vol. **137**:97-106.
- [134] Yokoi, T. & Sanchez-Sesma, F. J. (1998). *A hybrid calculation technique of indirect boundary element method and the analytical solutions for three dimensional problems of topography*, J. Phys. Earth Vol. **137**: 97-106.
- [135] Zienkiewicz, O. C. (1977). *The Finite Element Method*. Mc Graw-Hill, New York.
- [136] Zienkiewicz, O. C. & Taylor, R. L. (1991). *The Finite Element Method Vol. II.*, Mc Graw-Hill, New York.
- [137] Zoeppritz K. (1919). *Erdbebenwellen VIII B. On the reflection and propagation of seismic waves*. Göttinger Nachrichten **I**:66-84.