



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE POSGRADO EN CIENCIA E INGENIERIA DE MATERIALES
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATERIALES

LOCALIZACIÓN FOTÓNICA DE MULTICAPAS APERIÓDICAS

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIA E INGENIERIA DE MATERIALES

PRESENTA:

FIS. JUAN GUILLERMO MUNGUIA FERNÁNDEZ

COMITÉ TUTOR

DRA. VICENTA SÁNCHEZ MORALES (TUTOR PRINCIPAL, FC)

DR. CHUMIN WANG CHEN (IIM)

DR. RAÚL PATRICIO ESQUIVEL SIRVENT (IF)

MÉXICO, D.F. JUNIO 2014



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

DATOS DEL JURADO

1. Datos del alumno

Juan Guillermo
Munguía
Fernández
juanguillermo@ciencias.unam.mx
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
300339208

3. Presidente

Dr.
Luis Antonio
Pérez
López

4. Primer Vocal (Tutor)

Dra.
Vicenta
Sánchez
Morales

5. Segundo Vocal

Dra.
Lucia
Medina
Gómez

6. Tercer Vocal

Dra.
Rosario
Paredes
Gutiérrez

7. Secretaria

Monserrat
Bizarro
Sordo

A MI FAMILIA Y AMIGOS...

AGRADECIMIENTOS

A mi familia...

A mis padres Silvia Fernández y Lucas Munguía Mora y a mi hermana Silvia Munguía de quienes sigo recibiendo un gran apoyo y no tengo muchas palabras para describir lo que siento al saber que están a mi lado.

Al grupo #Yosoycuartopiso...

A Mariana Centeno, Fernando Sánchez y Alejandro Villareal, que con ellos perturbamos la tranquilidad de los Doctores en el cuarto piso del Edificio de Física. También pasamos buenos momentos cuando salíamos a festejar cualquier cosa solo por el hecho de festejar y trastrochar.

Mis amigos de ciencias y del posgrado...

Hay amigos que sigo frecuentando después de la licenciatura y seguimos pasando buenos momentos Alejandro Becerril y Hans Cruz. Hay otros con los que sigo manteniendo una relación muy cercana por el posgrado Yadhira Salazar, Roxana Marisol, Fernando Buendía, Néstor Cotzomi y Fernando Yautenzi que la hemos pasado bien cuando nos reunimos. Pero hay una persona muy especial a la que quiero agradecer por ser una de mis grandes amigas, donde he encontrado mucho apoyo y complicidad, Estrella Terán.

Tampoco puede faltar en agradecer a mis amigos y cómplices Zeus Valtierra y Mario Morales en los cuales puedo confiar plenamente

A mi asesora Dra. Vicenta Sánchez Morales

Le doy las gracias por seguirme teniendo una infinita paciencia, a quien le he aprendido mucho a pesar de mi terquedad.

A mí comité tutor...

Al Dr. Chumin Wang Chen y al Dr. Raúl Patricio Esquivel Sirvent quienes me apoyaron y me dieron consejos durante mis estudios en el posgrado de materiales.

A mí jurado...

Doy las gracias a todos los miembros de mi jurado donde recibí un gran apoyo por sus valiosos comentarios y sugerencias que ayudaron a enriquecer sustancialmente esta tesis.

A mi segunda casa...

Agradezco a la UNAM y en especial a la Facultad de Ciencias la cual me ha permitido utilizar sus instalaciones para mi formación, y así desarrollar mis capacidades y aportarme herramientas para hacerle frente a la vida diaria. También agradezco al Departamento de Física de la Facultad por que me permitieron utilizar el cubículo 405 para realizar mis estudios de posgrado y en la elaboración de esta tesis.

A la DGAPA ,CONACYT y DGTIC...

Finalmente agradezco al CONACYT por darme una beca para realizar los estudios de maestria y que sin esta beca hubiera sido difícil. Tambien agradezco a la DGAPA por la beca recibida a través del proyecto PAPIIT IN113813 y a la DGTIC por permitirme utilizar la supercomputadora Miztli para la realización de mis cálculos utilizados en esta tesis.

Índice General

Resumen	i
Introducción	ii

Capítulo I Fotónica

1.1 Introducción	1
1.2 Ecuaciones de Maxwell	1
1.3 Matriz de Transferencia	2
1.4 Reflexión y Refracción en una Frontera Plana	3
1.4.1 Condiciones de Frontera	4
1.4.2 Campo Eléctrico Perpendicular al Plano de Incidencia (<i>TE</i>)	6
1.4.3 Campo Eléctrico Paralelo al Plano de Incidencia (<i>TM</i>)	8
1.5 Cristales Fotónicos	11
1.5.1 Estructura de Bandas	12

Capítulo II Periodicidad

2.1 Introducción	15
2.2 Cristales	16
2.2.1 Periodicidad y Celda Unitaria	17
2.2.2 Simetría de los Cristales	18
2.2.3 Sistema de Coordenadas	20
2.2.4 Sistema de Índices para Planos Cristalinos	22
2.3 Materiales Amorfos	22
2.3.1 Estructura Atómica	23
2.3.2 Aleatoriedad y Desorden	24
2.4 Cuasicristales	24
2.4.1 Cuasicristales Unidimensionales	25

Capítulo III Resultados

3.1 Introducción	28
3.2 Campo Eléctrico Perpendicular al Plano de Incidencia (<i>TE</i>)	28
3.3 Campo Eléctrico Paralelo al Plano de Incidencia (<i>TM</i>)	29
3.4 Matriz de Transferencia de una Capa	31
3.5 Transmitancia	32
3.6 Secuencia de Fibonacci Generalizada (<i>FG</i>)	33
3.7 Coeficiente de Lyapunov	34
3.8 Multicapas Aperiódicas y Cuasiperiódicas	35
3.8.1 Diferentes Espesores de Capas [$T(d_A, d_B)$]	46
3.8.2 Dependencia del Ángulo de Incidencia [$T(\theta, d_A)$]	54

3.8.3 Variación de la Frecuencia [$T(\theta, \omega/\omega_0)$]	62
3.8.4 Variación del Camino Óptico	66
3.9 Localización	75
Conclusiones	80
Apéndice A	81
Referencias	84

Resumen

La propagación de una onda a través de un medio es muy sensible a la estructura del mismo, si la escala del medio es del orden de la longitud de onda de la radiación incidente. Debido a esto, un material puede interactuar de forma diferente con la radiación si se encuentra en forma periódica, cuasiperiódica, aperiódica y totalmente desordenada. Por lo que los materiales dieléctricos con estructuras del mismo orden que la longitud de onda, son considerados excelentes candidatos para fabricar componentes ópticos capaces de reflejar, confinar o guiar la luz del mismo modo que un metal, pero sin las pérdidas debidas a la absorción. Estos materiales son los *cristales fotónicos*. En esta tesis se estudiaron las propiedades ópticas de los cristales fotónicos para las multicapas cuasiperiódicas y aperiódicas que siguen la secuencia de Fibonacci Generalizada ($A \rightarrow A^m B^n$ y $B \rightarrow A$). Para llevar a cabo esta investigación desarrollamos un método unificado de renormalización para las matrices de transferencia en las multicapas cuasiperiódicas y aperiódicas con el objetivo de analizar la transmitancia de cualquier número de capas. Se estudió el efecto en la transmitancia para cualquiera de las dos polarizaciones ($-s$ o $-p$) al variar los parámetros tales como el ángulo de incidencia, el índice de refracción, el grosor de las capas, el camino óptico y los diferentes ordenamientos de las capas que pueden ser cuasiperiódicos y/o aperiódicos. Los principales resultados que encontramos fueron la autosimilaridad de los espectros de transmitancia (T) cuando el ordenamiento de las capas sigue una secuencia cuasiperiódica ($n=1$) y una zona de frecuencias donde el espectro presenta oscilaciones periódicas cuando su ordenamiento es aperiódico ($n>1$) considerando un ángulo de incidencia cero. Además, los espectros que tienen valores con mayor T se encuentran en la polarización $-p$. Otro resultado importante, es la ecuación analítica que calcula cualquier espectro de T para cuando las capas se ordenan siguiendo las secuencias de Fibonacci Generalizada en una generación $g=2$ y reproduce exactamente los mismos resultados que el programa numérico. En los espectros de T para la polarización $-p$ se encontraron regiones de alta transmitancia para ángulos de incidencia en un intervalo de $\theta=50$ a 70 y determinadas frecuencias. Se realizó un estudio acerca del camino óptico ya que es muy utilizado el valor de $\lambda_0/4$ y se quiso saber que tanto afectaba el variar este parámetro de 0.1 a 10 en los espectros de T , descubriendo diferentes zonas donde hay valores de alta T . Además, se presentaron un mayor número de zonas de alta reflectancia en los espectros cuando el ordenamiento de las capas es cuasiperiódico ($n=1$). También, se realizó un estudio del coeficiente de Lyapunov, encontrando que los espectros tienen una mayor localización cuando las ondas son transversales eléctricas en comparación con las magnéticas. En general, el espectro de transmisión es muy sensible al modificar el índice de refracción ya que los máximos se recorren a frecuencia más bajas al ir incrementando este índice.

Introducción

Los cristales fotónicos (CF) son estructuras dieléctricas que están diseñadas para controlar y manipular la propagación de la luz. Un CF puede ser construido al menos por una base de dos materiales con índice de refracción diferentes. El comportamiento de la luz propagándose en un CF puede ser entendido haciendo una similitud con la forma en cómo se propagan los electrones en materiales. La luz que se propaga en un CF interactuando con la modulación periódica del índice de refracción da como resultado la formación de bandas permitidas y prohibidas en longitudes de onda ópticas. Es posible construir CF de una geometría dada en dimensiones de milímetros para el control de microondas o de micras para el control de infrarrojos. Otro dispositivo óptico utilizado es un espejo dieléctrico de múltiples capas, tal como una pila de cuarto de onda, que consiste en capas alternas de materiales con diferentes constantes dieléctricas. La luz de la longitud de onda adecuada, cuando incide sobre un material de tales capas, se refleja por completo. La razón es que la onda de luz se refleja parcialmente en cada interfaz de la capa y si el espaciamiento es periódico, las múltiples reflexiones de la onda incidente interfieren destructivamente para eliminar la onda hacia delante de la propagación. Este fenómeno es bien conocido, primero se explica por Lord Rayleigh en 1887, que es la base de muchos dispositivos, incluyendo los espejos dieléctricos, filtros dieléctricos Fabry-Perot y láseres de retroalimentación distribuida [Joannopoulos, 2008]. Todos contienen dieléctricos de bajas pérdidas que son ordenados periódicamente en una dimensión, estos son cristales unidimensionales. Incluso éstos cristales fotónicos unidimensionales pueden tener propiedades sorprendentes. Una pequeña cantidad de desorden en un medio periódico no destruirá completamente una banda prohibida [Fan, 1995]; [Rodríguez, 2005], e incluso un medio altamente desordenado pueden evitar la propagación de las ondas por el mecanismo de localización de Anderson [John, 1984]. Otra clase interesante no periódica de materiales que tienen banda prohibida son estructuras cuasicristalinas [Joannopoulos, 2008].

El objetivo general de la tesis es realizar un estudio de la transmitancia fotónica y el coeficiente de Lyapunov para ondas transversales eléctricas (TE) y magnéticas (TM) en multicapas cuasiperiódicas y aperiódicas que siguen la secuencia de Fibonacci Generalizada. Para llevar a cabo este objetivo desarrollaremos un método unificado de renormalización para la matriz de transferencia de estas multicapas y así poder obtener la transmitancia (T) y el coeficiente de Lyapunov (γ) para cualquier número de capas en los diferentes sistemas, debido a que las multicapas consideradas no se ordenan de forma periódica.

Este trabajo lo dividiremos en tres capítulos:

En el capítulo 1 presentamos el formalismo electromagnético necesario para estudiar la transmitancia en los cristales fotónicos, es decir, haremos una revisión de la física y de las matemáticas para el estudio de los cristales fotónicos y de la aplicación de las ecuaciones de Maxwell a medios dieléctricos.

En el capítulo 2 describiremos las distintas formas de ordenamiento de los materiales, porque es bien conocido que en la física del estado sólido también se puede aplicar a los cristales fotónicos, solo que en lugar de electrones se remplazan por ondas electromagnéticas.

En el capítulo 3 presentamos los principales resultados del estudio de las propiedades ópticas en las multicapas fotónicas considerando sistemas cuasiperiódicos y aperiódicos, generados a partir de la secuencia de Fibonacci Generalizada.

Finalmente se presentaran las conclusiones y un apéndice.

Capítulo I

Fotónica

1.1 Introducción

Las ondas consisten en la propagación de alguna perturbación física a través de algún medio material, por ejemplo: olas en el agua, variaciones de presión en el aire (sonido), etc. No obstante existe un tipo de fenómeno ondulatorio que no requiere la presencia de medios materiales para su propagación aunque ciertamente también pueden propagarse a través de medios materiales. Estas ondas son las *ondas electromagnéticas*. Históricamente la existencia de estas ondas surgió como una consecuencia de las ecuaciones de Maxwell. La combinación de las leyes de Faraday-Maxwell y Ampere-Maxwell implicaba que un campo magnético variable en el tiempo podía ser la fuente de un campo eléctrico variable en el tiempo y viceversa. De este modo, los campos eléctricos y magnéticos se generan mutuamente dando lugar a una onda electromagnética que se propaga en el vacío con una velocidad $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0} \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}$. Esta hipótesis teórica deducida por Maxwell fue confirmada experimentalmente en 1888 por H. Hertz [Jackson, 1999].

Además de que las ondas electromagnéticas constituyen uno de los fenómenos físicos más predominantes en la naturaleza, tiene una importancia fundamental en el campo de las comunicaciones y en la fotónica. La mayoría de las comunicaciones actuales se sustentan en la transmisión de ondas electromagnéticas, ya sea en el vacío o bien a través de medios materiales.

1.2 Ecuaciones de Maxwell

Hay múltiples leyes y expresiones dentro de la Física que son la base del Electromagnetismo y que explican todos los fenómenos electromagnéticos. James C. Maxwell sintetizó estas ecuaciones y las extendió otorgándonos cuatro ecuaciones que contenían toda la información experimental adquirida sobre los campos eléctricos y magnéticos.

1. Ley de Gauss para el campo eléctrico.

Maxwell extendió la validez de la ley de Gauss a campos eléctricos que varían en el tiempo $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t)$, de modo que se puede escribir como

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho.$$

2. Ley de Gauss para el campo magnético.

Indica la ausencia de fuentes del campo eléctrico, es decir, de cargas magnéticas

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0.$$

3. Ley de Faraday (Ley de la inducción eléctrica)

Relaciona los valores de \vec{E} con la variación del vector \vec{B} en el tiempo

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

4. Ley de Ampere

Relaciona la corriente de conducción, la de desplazamiento y la intensidad del campo magnético

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Estas ecuaciones junto con la fuerza Lorentz,

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}),$$

forman todo el cuerpo teórico de la Electrodinámica en el vacío. [Jackson, 1999].

1.3 Matriz de Transferencia

El campo electromagnético más simple es una onda plana, en el caso del campo eléctrico esta se representa como:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}),$$

donde ω es la frecuencia angular y \vec{k} es el vector de onda.

Si la onda es armónica, la dependencia temporal viene dada por la función $\cos \omega t$ y usando la notación compleja

$$E(\vec{r}, t) = E_0(\vec{r})e^{-i\omega t},$$

\vec{k} se define en una base de tres vectores $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$,

$$\Rightarrow \varepsilon_i \cdot \varepsilon_j = \delta_{ij} \text{ y } \varepsilon_i \times \varepsilon_j = \varepsilon_k.$$

Si se propaga en una dirección, en este caso el eje z

$$E(z, t) = \left[\varepsilon_x e^{i(kz + \delta_x)} \hat{e}_x + \varepsilon_y e^{i(kz + \delta_y)} \hat{e}_y \right] e^{-i\omega t},$$

siendo $\varepsilon_{x,y}$ y $\delta_{x,y}$ la amplitud y la fase de la vibración a lo largo de cada eje.

Por transversabilidad de las ondas planas tenemos que

$$\vec{k} \times \vec{E} = \mu\omega \vec{H},$$

como una onda monocromática vibra de forma sinusoidal con el tiempo o sea que es constante, se puede tomar como

$$E(z) = \begin{pmatrix} \varepsilon_x e^{-i\delta_x} \\ \varepsilon_y e^{-i\delta_y} \end{pmatrix} e^{ikz},$$

pero si se considera que está en el plano $z=0$

$$E(0) = \begin{pmatrix} \varepsilon_x e^{-i\delta_x} \\ \varepsilon_y e^{-i\delta_y} \end{pmatrix},$$

el vector $E(0)$ contiene la información acerca de la amplitud y de la fase de la onda monocromática, entonces la dependencia con z se puede escribir como

$$E(z) = E(0)e^{ikz},$$

y contemplando la parte temporal

$$E(z,t) = E(0)e^{i(kz - \omega t)} = E_0 e^{i(kz - \omega t)}.$$

En la siguiente sección aplicaremos estos campos [Jackson, 1999].

1.4 Reflexión y Refracción en una Frontera Plana

Si se considera una onda plana armónica que forma un ángulo θ_0 con la normal a la frontera plana entre dos medios (llamados 1 y 2). El índice de refracción complejo puede expresarse como:

$$n = \eta_r + i\eta_e,$$

donde η_r es el índice de refracción y η_e es el coeficiente de extinción. Se supondrá que el cambio de índices en la frontera es abrupto y se escogerá al eje z perpendicular a la frontera, es decir, a la superficie de separación.

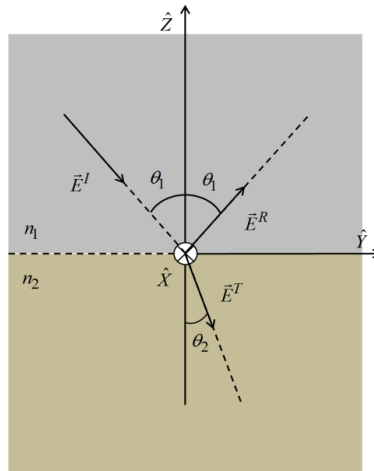


Figura 1-1. Reflexión y refracción de una onda plana en la frontera de dos medios.

La onda incidente desde el medio 1 da lugar a una onda reflejada en el mismo medio y a una transmitida en el medio 2 (Fig. 1-1). Los ángulos de incidencia (θ_1) y de refracción (θ_2), se miden desde la normal a la frontera. El campo total en los medios 1 y 2 obedece a las ecuaciones de Maxwell y se deben de cumplir las siguientes condiciones:

1. Las direcciones de propagación de las ondas incidentes, reflejadas y transmitidas están en el mismo plano, llamado *plano de incidencia*, perpendicular al plano de la frontera.
2. El ángulo de reflexión es igual al de incidencia.

3. Los ángulos de incidencia y de refracción satisfacen la ley de Snell

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 .$$

Si los medios 1 y 2 son transparentes y no hay reflexión total interna, los índices n_1 , n_2 y los ángulos θ_1 y θ_2 son reales.

Si hay reflexión total interna o si uno de los medios es absorbente los ángulos θ_1 y θ_2 son complejos.

En el rayo reflejado prevalecen las oscilaciones perpendiculares al plano de incidencia y en el refractado las oscilaciones paralelas al plano de incidencia.

El grado de polarización depende del ángulo de incidencia, designemos por θ_{Br} (ángulo de Brewster) el ángulo que satisface la condición

$$\tan \theta_{Br} = n_{12} ,$$

donde n_{12} es el índice de refracción del segundo medio respecto al primero. Si el ángulo de incidencia es θ_{Br} el rayo reflejado estará totalmente polarizado (contendrá únicamente oscilaciones perpendiculares al plano de incidencia).

El grado de polarización del rayo refractado, cuando al ángulo de incidencia es igual a θ_{Br} , alcanza su valor máximo, pero sigue estando polarizado parcialmente. A continuación desarrollamos las condiciones de frontera para el campo electromagnético.

1.4.1 Condiciones de Frontera

Para que se forme la onda reflejada se debe de cumplir que

$$\begin{aligned} \hat{n} \times \vec{E} \Big|_{Superficie} &= 0 \\ \hat{n} \cdot \vec{D} \Big|_{Superficie} &= \sigma \\ \hat{n} \cdot \vec{B} \Big|_{Superficie} &= 0 \\ \hat{n} \times \vec{H} \Big|_{Superficie} &= J_{Superficie} \end{aligned} ,$$

en un medio conductor perfecto y no debe existir un campo en su interior, para un medio dieléctrico no necesariamente debe ser cero en la parte interior, por lo que debemos asumir una onda transmitida.

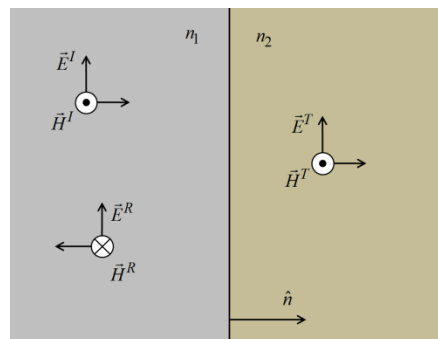


Figura 1-2. Direcciones del campo eléctrico y magnético en la frontera de dos medios.

Si no hay una pérdida en el flujo de la frontera se cumple

$$\omega^I + \omega^R = \omega^T$$

donde ω^I y ω^R son el flujo de potencia sobre la superficie 1 (medio 1) de la onda incidente y reflejada, respectivamente y ω^T es el flujo sobre la superficie 2 (medio 2) de la onda transmitida, es decir,

$$\Rightarrow \int_{S1} \vec{P}^I \cdot d\vec{s}_1 + \int_{S1} \vec{P}^R \cdot d\vec{s}_1 = \int_{S2} \vec{P}^T \cdot d\vec{s}_2 ,$$

donde \vec{P}^I , \vec{P}^R y \vec{P}^T son los vectores de Poynting. El campo electromagnético debe satisfacer las condiciones de contorno (véase Fig. 1-2)

$$\begin{aligned} \hat{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \Big|_{Superficie} &= 0 \\ \hat{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \Big|_{Superficie} &= 0' \end{aligned} \quad (1.1)$$

suponiendo que no hay cargas libres y corrientes.

Tomamos la incidencia normal a la superficie donde el eje z es la dirección de propagación de la onda y al eje y con la dirección de la polarización del campo eléctrico.

La expresión genérica de una onda es

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \vec{E}(0)e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r})} \\ \vec{H}(\vec{r}) &= \frac{1}{\omega\mu} \vec{k} \times \vec{E}(\vec{r}) \end{aligned}$$

donde $\omega = \frac{k}{\sqrt{\mu\epsilon}}$,

$$\vec{H}(\vec{r}) = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \hat{k} \times \vec{E}(\vec{r}),$$

el índice de refracción se define $n = \sqrt{\mu\epsilon}$, pero como $\mu=1$, entonces obtenemos la siguiente ecuación

$$\vec{H}(\vec{r}) = n\hat{k} \times \vec{E}(\vec{r}),$$

con las condiciones que propusimos, la onda incidente queda de la siguiente forma

$$\begin{aligned} E^I(z) &= E_1^I \hat{y} e^{i(kz)} \\ H(z) &= n_1 \left(-\hat{z} \times E_1^I \hat{y} e^{-i(kz)} \right) = n_1 E_1^I \hat{x} e^{i(kz)}, \end{aligned}$$

para la onda reflejada $k = \hat{z}$

$$\begin{aligned} E^R(z) &= E_1^R \hat{y} e^{-i(kz)} \\ H(z) &= n_1 \left(\hat{z} \times E_1^R \hat{y} e^{-i(kz)} \right) = -n_1 E_1^R \hat{x} e^{-i(kz)}, \end{aligned}$$

y la transmitida

$$E^T(z) = E_2^T \hat{y} e^{i(kz)}$$

$$H(z) = n_2 \left(-\hat{z} \times E_2^T \hat{y} e^{-i(kz)} \right) = n_2 E_2^T \hat{x} e^{-i(kz)},$$

aplicando la condición de contorno en el campo eléctrico [Ec.(1.1)] entre los dos medios y que solo es afectada en el eje y, tenemos que

$$\left(E_y^I + E_y^R \right) \Big|_{z=0} = E_y^T \Big|_{z=0}$$

$$\Rightarrow E_1^I \hat{y} e^{-i(kz)} + E_1^R \hat{y} e^{-i(kz)} = E_2^T \hat{y} e^{-i(kz)}$$

obtenemos la siguiente relación de amplitudes

$$\Rightarrow E_1^I + E_1^R = E_2^T \quad (1.2)$$

Realizaremos lo mismo para el campo magnético y utilizando la relación

$$H(\vec{r}) = n\vec{k} \times E(\vec{r})$$

obtenemos esta relación de amplitudes

$$\left(H_y^I + H_y^R \right) \Big|_{z=0} = H_y^T \Big|_{z=0}$$

$$\Rightarrow n_1 E_1^I - n_1 E_1^R = n_2 E_2^T \quad (1.3)$$

Aplicando las anteriores ecuaciones para cualquier ángulo de incidencia y haciendo que el campo eléctrico o magnético incida sobre la frontera, tenemos dos casos que son las ondas transversales eléctricas (TE) y las ondas transversales magnéticas (TM) ([Yeh, 1998] y [Jackson, 1999]).

1.4.2 Campo Eléctrico Perpendicular al Plano de Incidencia (TE)

Las ecuaciones de campo eléctrico en la frontera (ver Fig. 1-3) cuando es perpendicular al plano de incidencia son:

$$E^I(\vec{r}) = E(0)_n^I e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \hat{x}$$

$$E^R(\vec{r}) = E(0)_n^R e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \hat{x},$$

$$E^T(\vec{r}) = E(0)_{n+1}^T e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \hat{x}$$

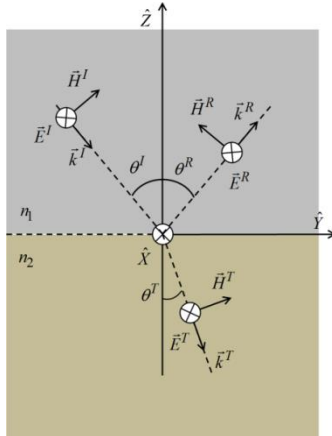


Figura 1-3. Incidencia del campo eléctrico sobre la frontera.

donde \vec{k} está definido de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\vec{k}^I &= k_0^I (\sin \theta^I \hat{y} - \cos \theta^I \hat{z}) \\ \vec{k}^R &= k_0^R (\sin \theta^R \hat{y} + \cos \theta^R \hat{z}) . \\ \vec{k}^T &= k_1^T (\sin \theta^T \hat{y} - \cos \theta^T \hat{z})\end{aligned}$$

El campo magnético depende del campo eléctrico como

$$\vec{H}_n = n_n \frac{\vec{k}_n}{k} \times \vec{E}_n .$$

Con los datos que proporcionamos y teniéndolos para el tiempo $t=0$ obtenemos los siguientes resultados

$$\begin{aligned}H_n^I &= n_n \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & \sin \theta_n & -\cos \theta_n \\ E_n^I & 0 & 0 \end{vmatrix} e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r})} = n_n E_n^I (-\cos \theta_n \hat{y} - \sin \theta_n \hat{z}) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r})} \\ H_n^R &= n_n \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & \sin \theta_n & \cos \theta_n \\ E_n^R & 0 & 0 \end{vmatrix} e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r})} = n_n E_n^R (\cos \theta_n \hat{y} - \sin \theta_n \hat{z}) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r})} , \\ H_{n+1}^T &= n_{n+1} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & \sin \theta_{n+1} & -\cos \theta_{n+1} \\ E_{n+1}^T & 0 & 0 \end{vmatrix} e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r})} = n_{n+1} E_{n+1}^T (-\cos \theta_{n+1} \hat{y} - \sin \theta_{n+1} \hat{z}) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r})}\end{aligned}$$

si ahora colocamos el plano en $\hat{z}=0$ obtenemos que el campo magnético es

$$\begin{aligned}H_n^I &= -n_n E_n^I \cos \theta_n e^{-ik^I \sin \theta^I} \\ H_n^R &= n_n E_n^R \cos \theta_n e^{-ik^R \sin \theta^R} , \\ H_{n+1}^T &= -n_{n+1} E_{n+1}^T \cos \theta_{n+1} e^{-ik^T \sin \theta^T}\end{aligned}$$

esto lo sustituimos en las Ec.(1.2) y Ec.(1.3) y obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}E_n^I + E_n^R &= E_{n+1}^T \\ n_n E_n^I \cos \theta_n e^{-ik^I \sin \theta^I} - n_n E_n^R \cos \theta_n e^{-ik^R \sin \theta^R} &= n_{n+1} E_{n+1}^T \cos \theta_{n+1} e^{-ik^T \sin \theta^T} ,\end{aligned}$$

donde $E_n = E_n^I + E_n^R$ debe ser constante lo cual significa que la fase es constante e implica que

$$\sin \theta^I = \sin \theta^R \quad \Rightarrow \quad \theta^I = \theta^R ,$$

se conoce como la **segunda ley de Snell**.

Aplicando la segunda ley de Snell obtenemos lo siguiente

$$e^{-ik^I \sin \theta^I} (n_n E_n^I \cos \theta_n - n_n E_n^R \cos \theta_n) = n_{n+1} E_{n+1}^T \cos \theta_{n+1} e^{-ik^T \sin \theta^T} ,$$

y proponemos que:

$$k_I \sin \theta_I = k_T \sin \theta_T,$$

la cual se conoce como la *tercera ley de Snell*.

Las ecuaciones nos quedan de la siguiente forma

$$\begin{cases} E_n^I + E_n^R = E_{n+1}^T \\ n_n \cos \theta_n (E_n^I - E_n^R) = n_{n+1} \cos \theta_{n+1} E_{n+1}^T \end{cases} \quad (1.4)$$

Hacemos operaciones entre las ecuaciones de Ec.(1.4) para quedarnos solamente con el campo eléctrico transmitido e incidente

$$\begin{cases} n_n \cos \theta_n (E_n^I + E_n^R) = n_{n+1} \cos \theta_{n+1} E_{n+1}^T \\ n_n \cos \theta_n (E_n^I - E_n^R) = n_{n+1} \cos \theta_{n+1} E_{n+1}^T \end{cases}$$

y obtenemos

$$2n_n \cos \theta_n E_n^I = E_{n+1}^T (n_n \cos \theta_n + n_{n+1} \cos \theta_{n+1}),$$

realizamos la razón entre el campo eléctrico transmitido e incidente y obtenemos

$$\frac{E_{n+1}^T}{E_n^I} = \frac{2n_n \cos \theta_n}{(n_n \cos \theta_n + n_{n+1} \cos \theta_{n+1})}. \quad (1.5)$$

Ahora de las ecuaciones de Ec.(1.4) haremos operaciones de tal forma que solo tengamos el campo eléctrico incidente y reflejado

$$\begin{cases} n_{n+1} \cos \theta_{n+1} (E_n^I + E_n^R) = n_{n+1} \cos \theta_{n+1} E_{n+1}^T \\ n_n \cos \theta_n (E_n^I - E_n^R) = n_{n+1} \cos \theta_{n+1} E_{n+1}^T \end{cases}$$

y obtenemos

$$E_n^I (n_{n+1} \cos \theta_{n+1} - n_n \cos \theta_n) = -E_n^R (n_n \cos \theta_n + n_{n+1} \cos \theta_{n+1}).$$

La razón entre el campo eléctrico reflejado e incidente es

$$\frac{E_n^R}{E_n^I} = \frac{(n_n \cos \theta_n - n_{n+1} \cos \theta_{n+1})}{(n_n \cos \theta_n + n_{n+1} \cos \theta_{n+1})}, \quad (1.6)$$

las ecuaciones (1.5) y (1.6) son llamadas *Ecuaciones de Fresnel* para la polarización-s [Yeh, 1998].

En la siguiente sección se realizará el mismo procedimiento anterior pero considerando el campo eléctrico paralelo al plano de incidencia.

1.4.3 Campo Eléctrico Paralelo al Plano de Incidencia (TM)

Las ecuaciones de campo eléctrico en la frontera (ver Fig. 1- 4) cuando es paralelo al plano de incidencia se pueden escribir como:

$$\begin{aligned}
E^I(\vec{r}) &= E(0)_n^I (\cos \theta_I \hat{y} + \sin \theta_I \hat{z}) e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \\
E^R(\vec{r}) &= E(0)_n^R (\cos \theta_R \hat{y} - \sin \theta_R \hat{z}) e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} , \\
E^T(\vec{r}) &= E(0)_{n+1}^T (\cos \theta_T \hat{y} + \sin \theta_T \hat{z}) e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}
\end{aligned}$$

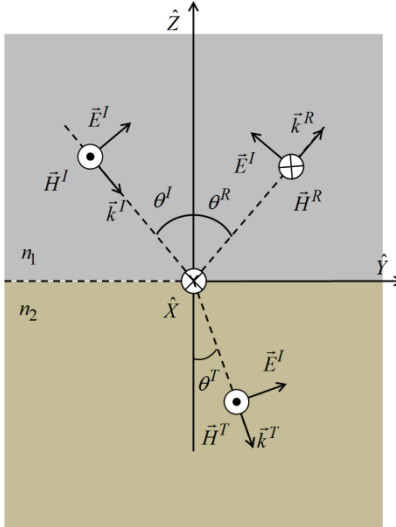


Figura 1-4. Incidencia del campo magnético sobre la frontera.

donde \vec{k} está definido de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
k^I &= k^I (\sin \theta^I \hat{y} - \cos \theta^I \hat{z}) \\
k^R &= k^R (\sin \theta^R \hat{y} + \cos \theta^R \hat{z}) . \\
k^T &= k^T (\sin \theta^T \hat{y} - \cos \theta^T \hat{z})
\end{aligned}$$

El campo magnético depende del campo eléctrico por la siguiente expresión

$$\vec{H}_n = n_n \frac{\vec{k}_n}{k} \times \vec{E}_n$$

para el tiempo $t=0$ obtenemos los siguientes resultados

$$\begin{aligned}
H_n^I &= n_n \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & \sin \theta_n & -\cos \theta_n \\ E_n^i & \cos \theta_n & \sin \theta_n \end{vmatrix} e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r})} = n_n E_n^I e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r})} \hat{x} \\
H_n^R &= n_n \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & \sin \theta_n & \cos \theta_n \\ E_n^r & \cos \theta_n & -\sin \theta_n \end{vmatrix} e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r})} = -n_n E_n^R e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r})} \hat{x} \\
H_{n+1}^T &= n_{n+1} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & \sin \theta_{n+1} & -\cos \theta_{n+1} \\ E_n^T & \cos \theta_{n+1} & \sin \theta_{n+1} \end{vmatrix} e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r})} = n_{n+1} E_n^T e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r})} \hat{x} .
\end{aligned}$$

Ahora si colocamos el plano en $\hat{z} = 0$ obtenemos que el campo magnético es

$$\begin{aligned}
H_n^I &= n_n E_n^I e^{-ik^I \sin \theta^I} \\
H_n^R &= -n_n E_n^R e^{-ik^R \sin \theta^R} , \\
H_{n+1}^T &= n_{n+1} E_{n+1}^T e^{-ik^T \sin \theta^T}
\end{aligned}$$

esto lo sustituimos en las Ec.(1.2) y Ec.(1.3) y obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
E_n^I \cos \theta_n + E_n^R \cos \theta_n &= E_{n+1}^T \cos \theta_{n+1} \\
n_n E_n^I e^{-ik^I \sin \theta^I} - n_n E_n^R e^{-ik^R \sin \theta^R} &= n_{n+1} E_{n+1}^T e^{-ik^T \sin \theta^T} ,
\end{aligned}$$

donde $E_n = E_n^I + E_n^R$ debe ser constante, por lo que tenemos una fase constante, lo cual implica que

$$\sin \theta^I = \sin \theta^R \Rightarrow \theta^I = \theta^R ,$$

como se vio en la sección anterior esta es la **segunda ley de Snell**.

Suponemos que

$$e^{-ik^I \sin \theta^I} (n_n E_n^I - n_n E_n^R) = n_{n+1} E_{n+1}^T e^{-ik^T \sin \theta^T} ,$$

donde es necesario proponer

$$k_I \sin \theta_I = k_T \sin \theta_T ,$$

llamada la **tercera ley de Snell**.

Las ecuaciones de frontera tienen la siguiente forma

$$\begin{cases} E_n^I \cos \theta_n + E_n^R \cos \theta_n = E_{n+1}^T \cos \theta_{n+1} \\ n_n (E_n^I - E_n^R) = n_{n+1} E_{n+1}^T \end{cases} . \quad (1.7)$$

Realizamos operaciones entre las ecuaciones (1.7) para quedarnos solamente con el campo eléctrico transmitido e incidente

$$\begin{cases} n_n \cos \theta_n (E_n^I + E_n^R) = n_{n+1} \cos \theta_{n+1} E_{n+1}^T \\ n_n \cos \theta_n (E_n^I - E_n^R) = n_{n+1} \cos \theta_{n+1} E_{n+1}^T \end{cases}$$

y obtenemos

$$2n_n \cos \theta_n E_n^I = E_{n+1}^T (n_n \cos \theta_{n+1} + n_{n+1} \cos \theta_n) .$$

La razón entre el campo eléctrico transmitido e incidente es

$$\frac{E_{n+1}^T}{E_n^I} = \frac{2n_n \cos \theta_n}{(n_n \cos \theta_{n+1} + n_{n+1} \cos \theta_n)} . \quad (1.8)$$

Ahora de las ecuaciones de Ec.(1.7) haremos operaciones de tal forma que solo tengamos el campo eléctrico incidente y reflejado

$$\begin{cases} n_{n+1} \cos \theta_n (E_n^I + E_n^R) = n_{n+1} \cos \theta_{n+1} E_{n+1}^T \\ n_n \cos \theta_{n+1} (E_n^I - E_n^R) = n_{n+1} \cos \theta_{n+1} E_{n+1}^T \end{cases}$$

y obtenemos

$$E_n^I (n_{n+1} \cos \theta_n - n_n \cos \theta_{n+1}) = -E_n^R (n_{n+1} \cos \theta_n + n_n \cos \theta_{n+1})$$

Hacemos una razón entre el campo eléctrico reflejado e incidente y obtenemos

$$\frac{E_n^R}{E_n^I} = \frac{(n_n \cos \theta_{n+1} - n_{n+1} \cos \theta_n)}{(n_n \cos \theta_n + n_{n+1} \cos \theta_{n+1})}. \quad (1.9)$$

Las ecuaciones (1.8) y (1.9) son llamadas *Ecuaciones de Fresnel* para la polarización-p [Yeh, 1998].

Ya que hemos visto todo el formalismo electromagnético que utilizaremos para los cristales fotónicos, en la siguiente sección hablaremos un poco de estos materiales.

1.5 Cristales Fotónicos

La propagación de una onda a través de un material es sensible, si la escala del mismo es del orden de la longitud de onda del rayo incidente. Pero también la interacción del material con la onda se puede presentar de forma periódica, aperiódica o cuasiperiódica. Los materiales dieléctricos son los que se utilizan para la fabricación de componentes ópticos capaces de reflejar, confinar o guiar una onda del mismo modo que lo hace un metal. Estos materiales se denominan Cristales Fotónicos. Los cristales fotónicos se clasifican en 1D, 2D y 3D (véase Fig. 1.5).

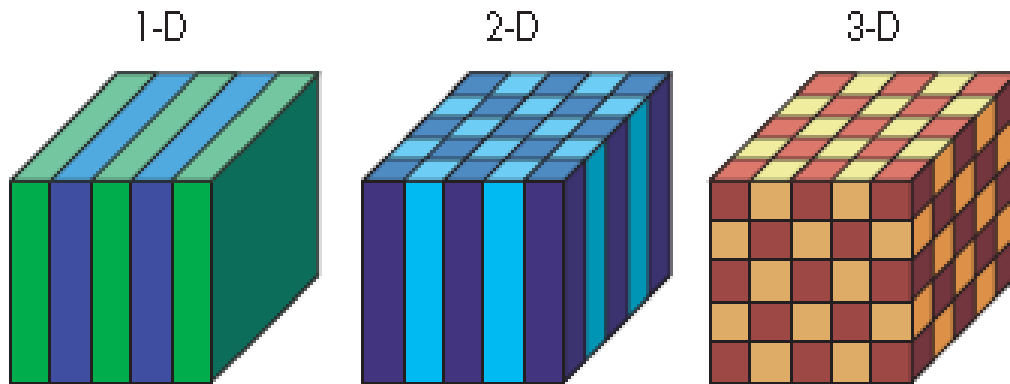


Figura 1.5. Cristales fotónicos a) en una dimensión, b) dos dimensiones y c) en tres dimensiones.

En 1887, Lord Rayleigh estudiaba la propiedad de que una onda podía ser totalmente refractada por la red del material, el cual estaba atravesando, siempre que éste presentara características internas de tipo periódico.

Posteriormente las publicaciones de Eli Yablonovitch y de Sajeev John en 1987, proponen la utilización de materiales en los cuales ciertas frecuencias no pueden propagarse, es decir, inhibir la propagación de luz dentro de un material. Cada uno tenía motivaciones diferentes para conseguir estos materiales. E. Yablonovitch proponía la utilización de estos materiales en la fabricación de láseres más eficientes. Por el otro lado, S. John pretendía utilizar estos materiales en el rango de frecuencias prohibidas para la

localización de la luz, al igual que ocurre con los electrones que quedan confinados en sistemas desordenados [Joannopoulos, 2008].

Posteriormente a las publicaciones realizadas por E. Yablonovitch y S. John, el desarrollo de los cristales fotónicos tuvo un despegue muy importante, primero en el marco teórico, en el cual, numerosos científicos de todo el mundo intentaron resolver los sistemas resultantes de la propagación de ondas lumínicas en materiales con una constante dieléctrica de tipo periódica, y luego, también en el campo de la experimentación, donde se comenzaron a desarrollar los primeros cristales fotónicos, con el objetivo de lograr estructuras dieléctricas de tipo periódico con características propias para rechazar ondas de luz con longitudes de onda específicas. Al igual que sucede con los materiales de tipo semiconductor, en el cual la unión de dos materiales diferentes puede presentar propiedades que resultan de gran utilidad práctica, como por ejemplo, la invención del transistor de silicio de juntura. También en el campo de los cristales fotónicos, la posibilidad de unir materiales con propiedades diferentes puede resultar de enorme interés para el futuro desarrollo de dispositivos de comunicación íntegramente ópticos. Existe una analogía entre el efecto del potencial cristalino sobre los electrones, y la variación periódica del índice de refracción sobre los fotones [Joannopoulos, 2008].

1.5.1 Estructura de Bandas

Una estructura de bandas fotónicas se calcula unificando conocimientos de electromagnetismo y física del estado sólido. Las ecuaciones de Maxwell determinan cómo se propagan las ondas en el material y dado que la onda electromagnética se encuentra frente a un material con una constante dieléctrica periódica se usa el teorema de Bloch para la solución del problema.

Las propiedades ópticas de los cristales fotónicos dependen de los siguientes parámetros:

- *El parámetro de red del cristal*, debe ser del orden de la longitud de onda con la que se desea interactuar.
- *La celda unidad y su topología*, es decir, la geometría con que se disponen los elementos de difracción usados y cómo se encuentran conectados entre sí.
- *Los índices de refracción de los materiales que componen el cristal fotónico*, que son determinantes en la anchura del gap fotónico. Si el contraste es muy alto entre los dieléctricos que forman la estructura, los pseudogaps fotónicos se producen con más facilidad.

En la siguiente tabla (Tabla I-1) se presentan las diferencias o similitudes entre la mecánica cuántica (potencial periódico) y el electromagnetismo (dieléctrico periódico).

Tabla I-1 Comparación entre los electrones y los fotones.

	Mecánica cuántica en un potencial periódico.	Electromagnetismo en un dieléctrico periódico.
Función principal.	Función de onda escalar $\Psi(r,t)$	Campo vectorial magnético $\vec{H}(r,t)$
Ecuación principal.	Ecuación de Schrödinger $\left(\frac{p^2}{2m} + V(\vec{r})\right)\Psi_E(\vec{r}) = E\Psi_E(\vec{r})$	Ecuación de onda $\nabla \times \frac{1}{\varepsilon(\vec{r})} \nabla \times \vec{H}_\omega(\vec{r}) = \frac{\omega^2}{c^2} \vec{H}_\omega(\vec{r})$
En que se manifiesta la periodicidad del sistema.	En el potencial: $V(\vec{r}) = V(\vec{r} + \vec{R})$ para todos los vectores de la red R.	En la constante dieléctrica: $\varepsilon(\vec{r}) = \varepsilon(\vec{r} + \vec{R})$ para todos los vectores de la red R.
Localización de la función principal.	La función de onda se concentra en regiones de bajo potencial.	Los campos se concentran en regiones de alta constante dieléctrica.
Nombre de las bandas cercanas al gap.	Las bandas superior e inferior se denominan banda de conducción y de valencia, respectivamente.	Las bandas superior e inferior al gap son del aire y la dieléctrica, respectivamente.
Origen físico de las estructuras de bandas.	La dispersión coherente de la onda electrónica al atravesar regiones con diferente potencial.	La dispersión coherente de los campos electromagnéticos en las interfaces entre regiones de distinta constante dieléctrica.
Resultado de la inclusión de un defecto.	Puede crear un estado permitido en el interior del gap que posibilita la existencia de un estado electrónico localizado alrededor del defecto.	Puede crear un estado permitido en el interior del gap que posibilita la existencia de un modo localizado alrededor del defecto.

Los cristales fotónicos unidimensionales formados por múltiples láminas de dieléctricos colocadas de manera periódica fueron estudiadas por Lord Rayleigh [Rayleigh, 1888] mostrando que este ordenamiento tiene banda fotónica prohibida. Después, Bykov [Bykov, 1972] desarrollo un estudio teórico de estructuras ópticas para investigar el efecto de una banda prohibida sobre la emisión espontanea de átomos y moléculas dentro de estructuras con propiedades fotónicas y también menciona que podría ocurrir si se emplearan estructuras bi y/o tridimensionales. El número de publicaciones científicas sobre los cristales fotónicos comenzó a crecer desde 1987 a partir de los artículos de Eli Yablonovitch [Yablonovitch, 1987] y Sajeev John [John, 1987], donde de forma independiente propusieron la aplicación de las bandas fotónicas prohibidas como medio para inhibir la emisión espontánea y el estudio de los fenómenos de localización en estos materiales. Además, en 1991 Yablonovitch mostro la primera banda fotónica prohibida en tres dimensiones en el orden de microondas. En 1996 Thomas Krauss hizo la primera demostración de un cristal fotónico en dos dimensiones para la longitud de luz visible. Además de multicapas periódicas también se han estudiado multicapas con ordenamientos cuasiperiódicos y aperiódicos. Por ejemplo, se estudió la transmitancia de multicapas que

siguen la secuencia de Fibonacci [Hattori, 1994], [Nava, 2003], [Nava, 2009], también hay artículos donde se trabaja con la secuencia de Thue Morse [Méndez, 2010] o hay trabajos en los que se ha realizado el estudio de estas dos secuencias de manera teórica y experimental [Palavicini, 2013], con el objetivo de sentar las bases para crear espejos omnidireccionales. También se ha realizado un estudio de la transmitancia en los cristales fotónicos empleado ondas transversales eléctricas como magnéticas [Khalfoun, 2009], [Thiem, 2010], [Maciá, 2012].

Capítulo II

Periodicidad

2.1 Introducción

La mayoría de los avances en la tecnología han provenidos del conocimiento profundo de las propiedades de los materiales. Además de utilizar las características de aquellos con lo que nos provee la naturaleza, la ciencia ha alcanzado hoy en día una cota de desarrollo en la que podemos diseñar, producir sustancias y compuestos cuyas propiedades pueden ser debidamente ajustadas a requerimientos específicos. Por ejemplo, una rama de la investigación actual dentro del marco de la física del estado sólido está dedicada a entender y mejorar las propiedades de conducción eléctrica de los materiales.

La Física del estado sólido constituye una parte importante de la Física Cuántica. Con su ayuda podemos comprender las propiedades mecánicas, térmicas, eléctricas, magnéticas y ópticas de la materia en sus tres estados conocidos. En materia condensada se observa que, para cualquier sustancia o elemento material, modificando sus condiciones de temperatura o presión, pueden obtenerse distintos estados o fases, denominados *estados de agregación de la materia*, en relación con las fuerzas de unión de las partículas (moléculas, átomos o iones) que la constituyen. La existencia de un estado u otro de la materia depende de las condiciones de presión (P), y temperatura (T) en las que se formaron. La Fig. 2-1 muestra un diagrama de fases P-T del agua a volumen constante [Kittel, 1996].

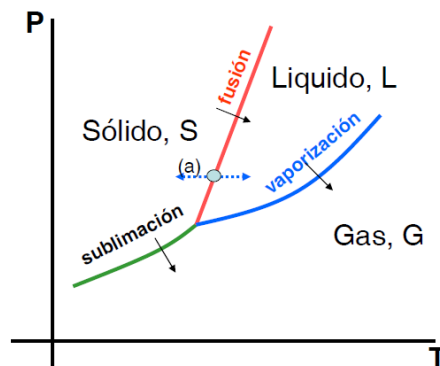


Figura 2-1. Diagrama de fases P-T a volumen constante de los estados de agregación.

Como se puede observar en la Fig. 2-1, a altas presiones y bajas temperaturas predomina el estado sólido (S), mientras que a bajas presiones y altas temperaturas el estado gaseoso (G). Más aún, en los estados sobre las líneas coexisten ambas fases. Por otro lado, si se calienta una sustancia a P constante, se puede pasar por una secuencia de estados (cambios de fases). La línea punteada (a) indica que podemos pasar del estado S al líquido (L) si calentamos en torno al punto de fusión y del estado L al S si enfriamos. Mientras el sólido funde su temperatura se mantiene constante.

Por otro lado, en un sólido lo podemos modelar como átomos conectados entre sí mediante resortes (Fig. 2-2), la energía interna del sólido se compone de energía potencial elástica de sus átomos y energía cinética. La presión es una medida del grado de compresión de sus átomos y la temperatura una medida de su energía cinética interna.

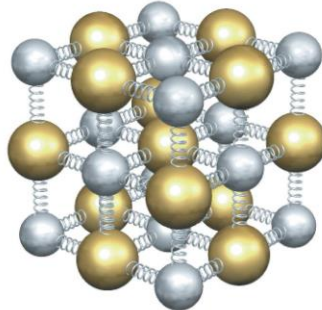


Figura 2-2. Ejemplo de un sólido tridimensional.

En las siguientes secciones vamos a describir algunas propiedades de los materiales en estado sólido, como son los cristales, los sólidos amorfos y los cuasicristales.

2.2 Cristales

Estructura cristalina

Todos los cristales, aunque sólo sea respecto de alguna de sus propiedades, son anisótropos, es decir, sus propiedades dependen de la dirección en el cristal.

Una particularidad de la estructura de las sustancias cristalinas es la existencia de una correlación en la disposición mutua de los átomos (moléculas) a distancias mayores que la interatómica media. Esta correlación se debe al equilibrio de muchas fuerzas o procesos que se producen durante las interacciones de los átomos y las capas electrónicas de estructura específica. En este estado de equilibrio los átomos (moléculas) se disponen ordenadamente, formando las figuras características de cada cristal.

Los cristales son sustancias en las cuales las partículas que las componen (átomos, moléculas) están dispuestas con rigurosa periodicidad, formando una estructura cristalina regular [Kittel, 1996]. Cada sustancia cristalina se diferencia de las otras sustancias, también cristalinas, por su estructura atómica. Un cristal se dice que es homogéneo si para un punto cualquiera, tomado dentro de él, existe otro punto, totalmente idéntico al primero por sus propiedades, situado a cierta distancia finita de él.

La principal diferencia entre un sólido cristalino y un sólido amorfo es su estructura. En un sólido cristalino existe una ordenación de los átomos a largo alcance, mientras que en los sólidos amorfos no se puede predecir donde se encontrará el próximo átomo. En este hecho se basan los diferentes métodos de diferenciación entre ambos tipos de sólido, que en algunos casos no es fácil de establecer a simple vista. En la Fig. 2-3 se presenta una red

periódica y una red amorfa. A continuación describiremos algunas características de los cristales periódicos.

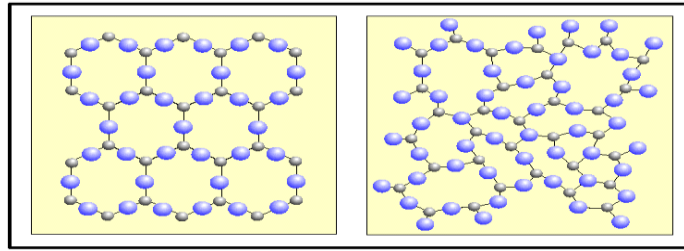


Figura 2-3. Red ordenada periódicamente y red de un cristal amorfo.

2.2.1 Periodicidad y Celda Unitaria

El estado cristalino es aquel que partiendo de la definición de homogeneidad y teniendo en cuenta la estructura atómica ordenada y repetitiva, los puntos idénticos están ligados con el punto inicial, elegido arbitrariamente, al cual llamamos nodo, por tres vectores de traslación no coplanares y sus traslaciones forman una red periódica tridimensional que abarca todo el espacio del cristal. Se le ha dado el nombre de red porque los puntos idénticos del cristal pueden unirse entre sí por medio de líneas (ver Fig. 2-4).

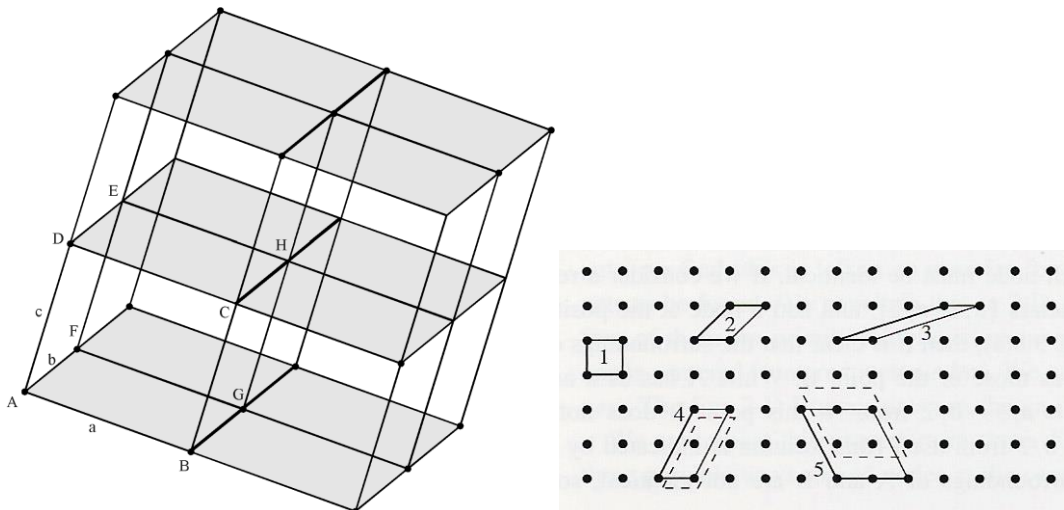


Figura 2-4. Los nodos o puntos idénticos se marcan con un círculo.

La red puede describirse por medio de un paralelepípedo elemental ABCDEFGH llamado *celda unitaria* (Fig. 2-4), el cual se repite periódicamente en el espacio construido sobre los tres vectores no coplanares de traslación o traslaciones unitarias \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} (Fig. 2-4) [Kittel, 1996]. Las traslaciones actúan no sobre un punto cualquiera de la red, si no sobre toda la red en su conjunto. Si como origen se toma un nodo cualquiera, el radio vector \vec{R} de cualquier otro nodo de la red puede determinarse por la fórmula

$$\vec{R} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} \quad (2.1)$$

donde m, n, p son números enteros que se expresan en fracciones de las aristas de la celda y se llaman índices del nodo. El conjunto de los tres índices suele escribirse entre corchetes $[mnp]$ y recibe el nombre de símbolo del nodo.

La celda unitaria, en el caso general, es un paralelepípedo oblicuo cuyas aristas son a, b y c y sus ángulos $\alpha(bc)$, $\beta(ca)$ y $\gamma(ab)$ (Fig. 2-5). Las seis magnitudes se denominan parámetros de red. Los parámetros a, b y c que definen la dimensión de la celda unitaria suelen llamarse constantes de la red.

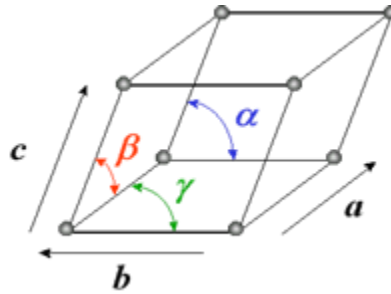


Figura 2-5. Puntos reticulares.

El paralelepípedo elemental construido sobre las traslaciones más cortas a, b y c es el paralelepípedo fundamental de la red. Este paralelepípedo no tiene nodos adicionales en ningún punto interior ni en la superficie, aparte de los situados en los vértices, y recibe el nombre de paralelepípedo primitivo o celda elemental primitiva. Al volumen del paralelepípedo fundamental corresponde un nodo de la red. Porque en cada nodo situado en un vértice del paralelepípedo le corresponde $1/8$ de este nodo.

Al observar los sistemas cristalinos notamos que en la mayoría de ellos presentan un alto grado de simetría. Estas simetrías juegan un papel muy importante en el estudio de los materiales ya que por medio de ciertas operaciones de simetría permiten que los cálculos de propiedades en los materiales se simplifiquen.

2.2.2 Simetría de los Cristales

La simetría está vinculada con muchas de las formas estructuradas más profundas de la naturaleza y hoy en día nos resulta fundamental para comprender científicamente el universo. Los principios de conservación, tales como los relativos a la energía y al impulso o al momento cinético expresan una simetría que posee la totalidad del espacio-tiempo continuo: las leyes de la física son las mismas en cualquier lugar. Las simetrías de los cristales no sólo sirven para clasificar sus formas, sino que determinan muchas de sus propiedades naturales, desde las estrellas de mar hasta las gotas de lluvia, desde los virus hasta las galaxias, poseen llamativas simetrías.

El estudio de la simetría es importante tanto en física clásica como en física cuántica porque muchos aspectos de la conducta observable de los sistemas son deducibles de la existencia de las simetrías. Las simetrías describen la invariancia de las ecuaciones fundamentales ante transformaciones de coordenadas.

En el sentido más amplio, la palabra simetría representa la existencia de un invariable respecto a ciertas transformaciones. Haciendo girar un objeto alrededor de un eje o reflejarlo en un punto o en un plano, la figura debe coincidir consigo misma. Estas operaciones se llaman transformaciones simétricas, y la imagen geométrica, que caracteriza una transformación simétrica por separado, se denomina elemento de simetría. Todo cuerpo, lo mismo que toda figura geométrica, puede considerarse como un sistema de puntos. Cada figura finita tiene por lo menos un punto que permanece en su sitio durante las transformaciones simétricas. Este es un punto singular. En este sentido los cristales poseen simetría puntual, a diferencia de la simetría espacial característica de las redes cristalinas, cuyo elemento fundamental de simetría es la traslación.

En los cristales el número de elementos de simetría es limitado. En ellos, lo mismo que en las figuras finitas, se distinguen los siguientes elementos principales de simetría: el plano especular de simetría, de rotación y el centro de inversión.

El *plano especular de simetría* corresponde a la reflexión simple en el plano como en un espejo. Este plano divide al cuerpo en dos partes iguales que coinciden entre sí en todos sus puntos al reflejarse.

El *eje de simetría por rotación simple* es una recta que tiene la propiedad de que si alrededor de ella se gira, en una fracción de circunferencia igual a $2\pi/n$, en la que n es el orden del eje, la figura, esta coincide consigo misma en todos sus puntos. Así, si la figura tiene un eje de simetría de sexto orden ($n=6$), el giro será igual a $2\pi/6$ de circunferencia (60°). Los valores de n están limitados en redes infinitas por las ligaduras de los operadores de traslación a los valores 2, 3, 4 y 6 [Ashcroft, 1976].

El *centro de simetría o centro de inversión*, es un punto singular dentro de la figura, en el cual, al reflejarse ésta coincide consigo misma, es decir, la operación de inversión consiste en la reflexión de la figura en un punto, después de lo cual está resuelta vuelta e invertida.

Estas tres simetrías están representadas en la Fig. 2-6, con líneas y planos.

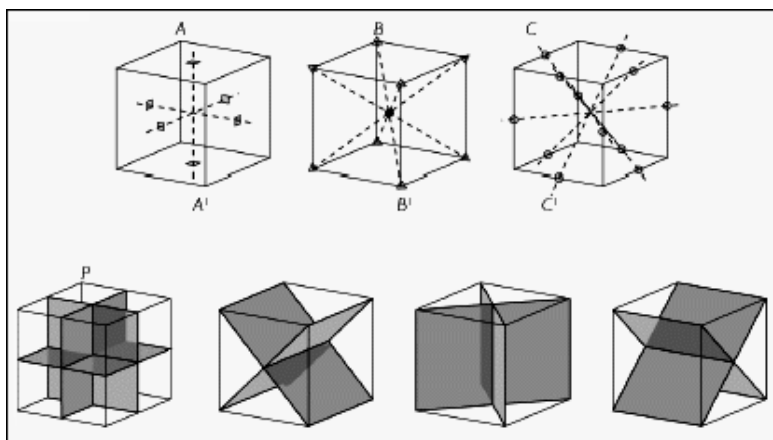


Figura 2-6. Muestra los ejes, los planos y los centros de simetría.

Cuando se pide que la simetría rotacional sea compatible con la traslacional, el número total de operaciones de simetría se reduce significativamente, como se discute a continuación.

2.2.3 Sistema de Coordenadas

En cristalografía, para la descripción analítica de los cristales se utiliza un sistema de coordenadas tridimensionales, que se elige de acuerdo con la simetría del cristal. Los ejes de coordenadas, por lo general, coinciden con las aristas de la celda unitaria, la cual se caracteriza por medio de los seis parámetros $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$.

Tabla II-1. Estructura cristalina

Sistema	Longitud	Ángulos	Parámetros a especificar
Cúbico	$a = b = c$	$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	a
Tetragonal	$a = b \neq c$	$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	a, c
Ortorrómbico	$a \neq b \neq c$	$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	a, b, c
Monoclínico	$a \neq b \neq c$	$\alpha = \beta = 90^\circ \neq \gamma$	a, b, c, γ
Triclínico	$a \neq b \neq c$	$\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq 90^\circ$	$a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$
Romboédrico	$a = b = c$	$\alpha = \beta = \gamma \neq 90^\circ$	a, γ
Hexagonal	$a = b \neq c$	$\alpha = \beta = 90^\circ; \gamma = 120^\circ$	a, c

Al elegir los ejes cristalográficos hay que cumplir las reglas (véase la Tabla II-1) adoptadas en la cristalografía. El cumplimiento de estas reglas reduce al mínimo la posible arbitrariedad.

Los ejes *–aristas de la celda unitaria–* se eligen de tal modo que coincidan con direcciones principales de la red y sean iguales a las traslaciones más cortas en estas direcciones. Si no existen direcciones particulares, las aristas de la celda se eligen por las filas de la red cristalinas o por las aristas del poliedro cristalino.

En 1848, Bravais consiguió demostrar matemáticamente que sólo existen 14 tipos de redes de traslación diferentes por su simetría. Bravais enunció tres condiciones cuyo cumplimiento sucesivo permite elegir, del conjunto innumerable de celdas unitarias, una determinada que caracteriza a la red en su totalidad. Estas condiciones son las siguientes [Ashcroft, 1976]:

- 1) El sistema cristalino de la celda elegida debe ser la misma que la del sistema cristalino de toda la red, es decir, su simetría debe corresponder a la simetría de toda la red.

- 2) El número de ángulos rectos y lados iguales debe ser máximo;
- 3) Cumpliéndose las dos primeras condiciones, el volumen de la celda debe ser mínimo.

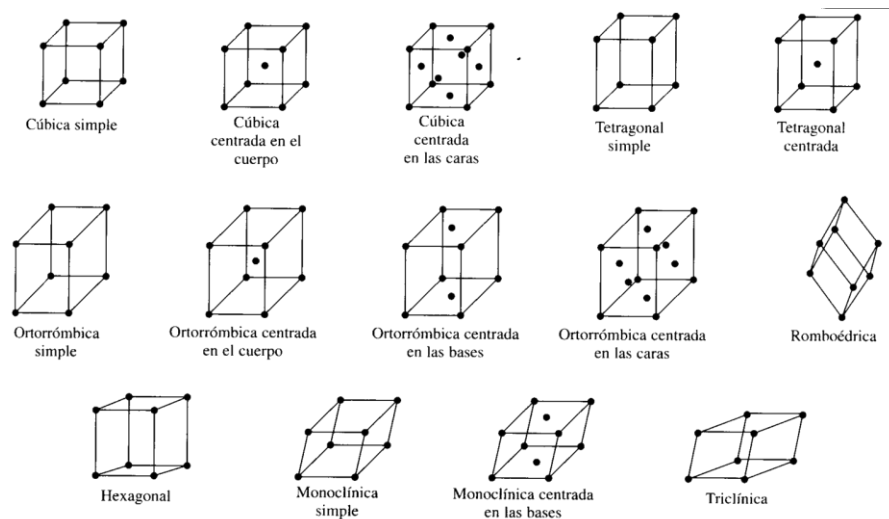


Figura 2-7. Las catorce redes de Bravais en el espacio tridimensional.

Cualquier operación de simetría de una red de Bravais puede descomponerse en una traslación por medio de un vector de la red \vec{R} , dado por la Ec.(2.1), y una operación que deja fijo al menos un punto de la red. Esto permite clasificar a las redes de Bravais en grupos de simetrías. Si se considera sólo las operaciones que dejan al menos un punto fijo, se tiene una clasificación por grupos puntuales. Si a ello se añade las operaciones de traslación se obtienen los grupos espaciales. Con estas consideraciones se presenta el número de grupos puntuales y espaciales de las redes cristalinas.

Como se ha mencionado, el procedimiento para escoger la celda unitaria no es único, y algunas veces una celda arbitraria no refleja la simetría de la red, por ejemplo Fig. 2-8.

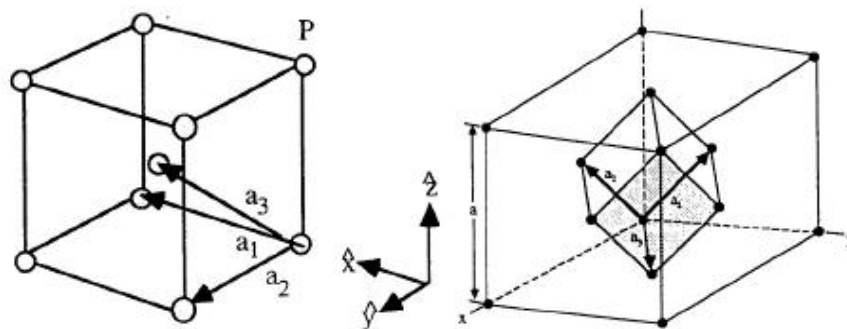


Figura 2-8. Vectores primitivos para redes BCC (izquierda) y FCC (derecha).

Existe un procedimiento muy conveniente para escoger una celda asociada a un punto que sí refleja la simetría de la red. Ésta celda se encuentra dibujando líneas que conecten ese punto con el resto en la red, bisectando cada línea con un plano y tomando el poliedro

más pequeño que contenga al punto delimitado por estos planos. A ésta región que rodea al punto la definimos como la celda de Wigner-Seitz para un punto de la red [Kittel, 1996].

2.3.4 Sistemas de Índices para Planos Cristalinos

La orientación de un plano cristalino está determinada por tres puntos en el plano no colineales. Si cada punto se encuentra en un eje del cristal distinto, el plano se puede especificar dando las coordenadas de los puntos en términos de las constantes de la red \vec{a}_1 , \vec{a}_2 y \vec{a}_3 . Resulta más útil para el análisis estructural, el especificar la orientación de un plano por los índices determinados de la forma siguiente [Ashcroft, 1976]:

Encuentra las intersecciones en los ejes en términos de las constantes de la red \vec{a}_1 , \vec{a}_2 y \vec{a}_3 . Se toman los recíprocos de esos números y se reducen a tres enteros que tengan la misma razón, usualmente los tres enteros más pequeños. Al resultado, encerrado en paréntesis (*hkl*), se le llama índice del plano o de Miller. Los índices de Miller se escriben sin comas y entre paréntesis, utilizando tildes para los valores negativos.

Con el propósito de estudiar la periodicidad del enrejado cristalino, supondremos que el cristal se extiende infinitamente en el espacio, una forma de abordar estos sistemas macroscópicos es a partir del espacio recíproco.

2.3 Materiales Amorfos

Hay materiales que no presentan una estructura repetida en las tres direcciones del espacio, es decir, no presentan cristalinidad y por tanto sólo poseen orden a corto alcance. A éste tipo de materiales que presentan orden a corto alcance se denominan materiales amorfos.

Un mismo compuesto, según sea el proceso de solidificación, puede formar una red cristalina o un sólido amorfo. Por ejemplo, según la disposición espacial de las moléculas de sílice (SiO_2), se puede obtener una estructura cristalina (el cuarzo) o un sólido amorfo (el vidrio) [Zallen, 1998].

2.3.1 Estructura Atómica

Los sólidos amorfos, al igual que los líquidos y gases, son isótropos, es decir sus propiedades son iguales en todas las direcciones. Esto se debe a la falta de regularidad en el ordenamiento o una distribución al azar de las partículas, lo cual determina que todas las direcciones sean equivalentes.

La viscosidad se entiende por la resistencia de una sustancia a deformarse. Si un líquido puede ser enfriado rápidamente, sin que cristalice, su viscosidad tiende a aumentar hasta un valor muy elevado. Tan elevado que el flujo bajo una presión moderada puede volverse despreciable y difícil de medir experimentalmente.

Si una fuerza se aplica al material (aunque sea relativamente liviana) y por un intervalo razonable de tiempo, la sustancia desarrollará una deformación pseudo-permanente, es decir, fluirá como si fuera un líquido de viscosidad extremadamente alta. Cada material amorfo tiene un punto de fusión bien definido. Ahora bien, si se calienta dos materiales amorfos de la misma composición, tales sustancias pueden diferir en su respuesta (según el grado de amorfización en su estructura), ablandándose progresivamente, aumentando con relativa rapidez la tendencia a una deformación permanente bajo carga, es decir, se le proporciona capacidad plástica.

Las relativamente altas densidades de sólidos y líquidos, similares además entre sí, señalan que, en ambos casos, las distancias interatómicas son suficientemente pequeñas como para que los enlaces jueguen un papel relevante. Los enlaces contribuyen a ordenar los átomos del sólido según corresponda a ese tipo de enlace. Por el contrario, en un gas, los enlaces entre moléculas juegan un rol de orden limitado o prácticamente nulo.

Se puede obtener un material amorfo al enfriar un líquido de forma suficientemente rápida, de modo que los átomos no alcancen a ordenarse al pasar al estado sólido. De esta manera, los sólidos amorfos tienen una estructura interna, en términos del grado de ordenamiento atómico, similar a la de un líquido (un cierto orden de corto alcance pero no de largo alcance).

Así, si obtuviésemos una fotografía instantánea (imagen congelada) del ordenamiento atómico de un sólido amorfo y de un líquido, no podríamos establecer la diferencia. Sin embargo, por tratarse de un sólido, la movilidad atómica será de moderada a nula.

Los factores que favorecen la formación de un sólido amorfo en el lugar de uno cristalino son [Zallen, 1998]:

- Alta velocidad de enfriamiento desde el estado líquido al sólido.
- Alta direccionalidad del enlace.
- Varios elementos aleantes.

De esta manera, será mucho más fácil obtener un sólido amorfo entre materiales con enlace covalente (direccional) que en los de enlace metálico (no direccional).

Los enlaces que forman la estructura amorfa de una misma sustancia son del mismo tipo que los enlaces en su forma cristalina, sea cual sea el tipo de enlace (a presión y temperatura ambiente). Hay casos en que aumentando la presión se puede pasar de un tipo de enlace a otro.

En términos de entropía, un enlace direccional es muy “ordenado” y cuesta más formarlo. Es decir, un material con este tipo de enlaces se puede enfriar más lentamente (procesos más baratos) sin que los átomos se agrupen de forma suficientemente periódica, es decir, en cristales.

Los átomos del borde no están tan fuertemente enlazados como los del interior del grano cristalino, con lo que es más fácil afectarlos.

Por eso una de las grandes ventajas de los materiales amorfos es su resistencia a la corrosión, ya que al no haber bordes de grano, no hay zonas donde se pueda afectar al material.

2.3.2 Aleatoriedad y Desorden

La aleatoriedad se puede caracterizar de distintas formas, por ejemplo: de acuerdo a la geometría del material, al spin, al desorden vibracional de los átomos, etc. Este desorden se entiende mejor al compararlo con la forma estándar de un cristal perfecto, en el que un grupo de átomos se encuentran arreglados como parte de un modelo periódico en tres dimensiones y de extensión infinita. Con esta definición, para que un material sea considerado como un cristal imperfecto le bastaría ser solamente finito, con claros defectos en su estructura geométrica como las vacantes, huecos intersticiales, dislocaciones atómicas, etc.

El desorden geométrico debido a la aleatoriedad es producto de la no-periodicidad de su estructura [Zallen, 1998]. Estos materiales, como se mencionó anteriormente, presentan también una aleatoriedad en el sentido del spin y en su comparación con el spin de los cristales perfectos.

Los materiales amorfos están afectados también por el movimiento vibracional aleatorio de sus átomos fuera de la posición de equilibrio, destruyendo de otra forma la perfecta periodicidad, siendo esto independiente del desorden geométrico. El concepto vibracional es válido sólo a 0 K, ya que someter las sustancias a una cierta temperatura finita es proporcionar una cantidad de energía cinética para vibrar.

2.4 Cuasicristales

Esta sección está dedicada a los cuasicristales, introduciremos algunas de sus características básicas, su terminología y sus propiedades físicas. Los conceptos básicos de los cuasicristales están dirigidos a mostrar la diferencia con los cristales y los sólidos amorfos.

Los cuasicristales, o sólidos cuasiperiódicos, fueron creados por vez primera por el grupo de Dan Shechtman en National Bureau of Standards en 1984 [Shechtman, 1984]. Ellos estaban estudiando la estructura de la aleación $Al_{86}Mn_{14}$, la cual exhibe simetrías icosaédricas, es decir, simetría de rotación de orden 5, incompatible con la simetría de las redes cristalográficas clásicas. Por tanto, su estructura cristalina no es periódica, es decir, no se puede construir mediante la repetición de una celda unidad. El método tradicional para su crecimiento se basa en el enfriamiento rápido de metales fundidos, de manera que los átomos no tienen tiempo de acceder a las posiciones de equilibrio correspondiente a los sólidos cristalinos

El diagrama de difracción electrónica de la muestra de $\text{Al}_{86}\text{Mn}_{14}$ exhibía máximos de difracción nítidos y brillantes (tradicionalmente indica una periodicidad traslacional), dispuestos de tal forma que daban lugar a una formación simétrica de orden 5. En la Fig. 2-9 se encuentra la foto del patrón de difracción de la muestra estudiada.

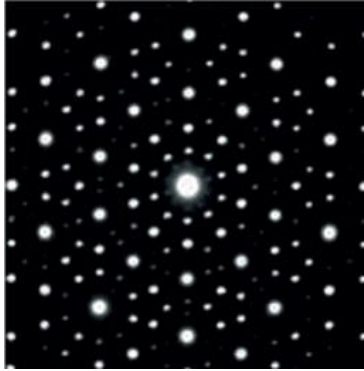


Figura 2-9. Patrón de difracción electrónica de la muestra $\text{Al}_{86}\text{Mn}_{14}$.

Posteriores estudios [Janssen, 2007] de difracción confirmaron que esta nueva fase mostraba íntegramente la simetría total del grupo puntual icosaédrico. Esta fase, ahora llamada fase icosaédrica, o fase-*i*, se ha encontrado en una gran variedad de aleaciones de metales de transición 3d. También se descubrieron otras fases con simetrías prohibidas, que producían patrones de difracción nítidos. La más importante es la fase decagonal, que posee un eje periódico ortogonal a dos ejes no periódicos. Las fases que han sido observadas son de orden 5, 8, 10 y 12 en un gran número de aleaciones metálicas, en las que el *Al* es su elemento mayoritario. Al conjunto de estas fases no periódicas se les ha denominado cuasicristales.

En general los cuasicristales se caracterizan por un orden de largo alcance sin tener simetría traslacional tridimensional. El primero se manifiesta por la aparición de puntos nítidos en el patrón de difracción y la segunda en la ocurrencia de simetrías rotacionales prohibidas para los cristales convencionales.

La clasificación que existía hasta el momento entre dos tipos materiales (periódicos y amorfos) tuvo que ser modificada al constatar la existencia de una clase de materia que, sin ser cristalina en el sentido convencional, mostraba diagramas nítidos de difracción, por lo que no se podía considerar amorfa. Es decir, nos hallábamos ante una nueva forma de ordenamiento de la materia, lo que se denominó orden cuasicristalino.

2.4.1 Cuasicristales Unidimensionales

Un modelo simple de una dimensión permite demostrar, de una manera completa y clara, muchas peculiaridades de las estructuras cuasicristalinas, las cuales existen en 2 o 3 dimensiones. Un cuasicristal de una dimensión puede ser descrito mediante la siguiente construcción matemática: partimos de una red de Bravais cuadrada (plana), elegimos un

nudo donde colocamos el origen de un sistema de coordenadas cartesiano y dibujamos la celda unitaria centrada en dicho nudo (celda de Wigner-Seitz). Dibujamos una recta con pendiente irracional (elegimos que sea el número áureo) que pase por el origen. Debido a ser un número irracional, no cortará ningún otro nudo de la red [Janot, 1994].

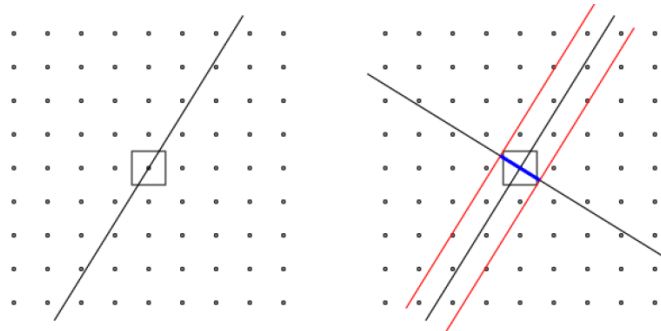


Figura 2-10. Construcción matemática de la red de Fibonacci.

Se dibujan dos rectas (rojas) paralelas a la recta inicial (Fig. 2-10) y que pasen por una esquina de la celda primitiva unidad. El espacio limitado por ambas rectas selecciona un subconjunto de nudos de toda la red 2D. A continuación, se deben proyectar estos puntos sobre la recta original. Estas proyecciones cortan la misma en segmentos de dos tamaños (largo y corto) de manera aperiódica. Como hemos elegido que la pendiente sea el número áureo, el teselamiento de la recta es similar al generado por la secuencia de Fibonacci.

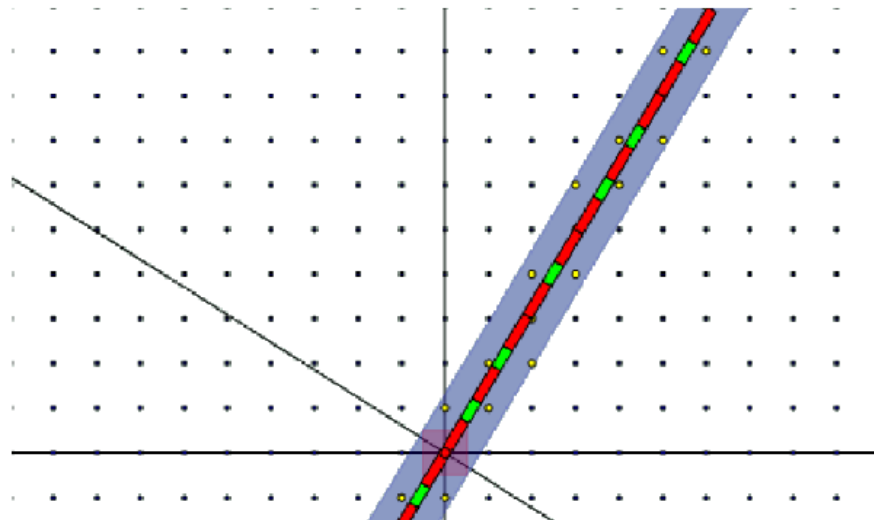


Figura 2-11. Proyección de los puntos para obtener el teselamiento de Fibonacci.

Por tanto, a partir de la proyección de un subconjunto de nudos de una red periódica 2D sobre una recta con pendiente irracional, hemos teselado la misma de manera aperiódica. Este razonamiento se puede generalizar a más dimensiones, pero se complica matemáticamente y se hace más abstracto.

Para obtener los mosaicos de Penrose, hay que partir de un espacio de 5 dimensiones y proyectar el hipercubo sobre un plano 2D con pendiente irracional respecto al espacio de dimensión superior, es decir, que no corte puntos de la red del hipercubo salvo en el origen.

Por tanto, la visualización de esta proyección se hace muy compleja y hay que deducirlo de manera abstracta mediante matrices, teoría de grupos, subespacios, álgebra de Lie, etc. Aparte, es posible hacer un razonamiento análogo en espacios de 5, 6 ó más dimensiones para obtener un teselamiento aperiódico en 3D.

Capítulo III

Resultados

3.1 Introducción

Dentro de los diferentes materiales semiconductores avanzados que se están estudiando a nivel mundial está el Silicio Poroso (PSi) [Turner, 1958], para aplicaciones en dispositivos ópticos, los cuales presentan gran relación de área-volumen, alta resistividad y energía de banda gap fotónica [Canham, 1990]. Algunos de estos materiales se vienen trabajando desde la década de los noventa y sus principales aplicaciones son el desarrollo de dispositivos optoelectrónicos [Fauchet, 1995].

Los cristales fotónicos dependen en mayor medida de las constantes dieléctricas y del ordenamiento de los distintos materiales que los componen. En este trabajo se investigaron las propiedades ópticas de los cristales fotónicos unidimensionales donde el ordenamiento de las capas sigue secuencias cuasiperiódicas y aperiódicas, tales como, las secuencias de Fibonacci Generalizadas.

3.2 Campo Eléctrico Perpendicular al Plano de Incidencia (TE)

Vamos a partir de las ecuaciones [Ec.(1.4)] que vimos en el capítulo 1

$$\begin{aligned} E_n^I + E_n^R &= E_{n+1}^T \\ n_n \cos \theta_n (E_n^I - E_n^R) &= n_{n+1} \cos \theta_{n+1} E_{n+1}^T \end{aligned}$$

si tenemos una j-ésima capa dentro de nuestro cristal fotónico, la onda transmitida se vuelve una onda incidente para esa capa y tiene su onda reflejada por lo que podemos decir que

$$E_{j+1}^T = E_{j+1}^I + E_{j+1}^R$$

Por lo que la Ec.1.4 la podemos reescribir como

$$\begin{aligned} E_n^I + E_n^R &= E_{n+1}^I + E_{n+1}^R \\ n_n \cos \theta_n (E_n^I - E_n^R) &= n_{n+1} \cos \theta_{n+1} (E_{n+1}^I - E_{n+1}^R) \end{aligned}$$

si aplicamos la siguiente definición [Kohmoto, 1987]

$$\begin{aligned} E_n^+ &= E_n^I + E_n^R \\ iE_n^- &= E_n^I - E_n^R \end{aligned}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} E_n^+ &= E_{n+1}^+ \\ n_n \cos \theta_n (iE_n^-) &= n_{n+1} \cos \theta_{n+1} (iE_{n+1}^-) \end{aligned}$$

si dejamos a E_n^- en términos de E_{n+1}^- podemos escribir

$$E_n^+ = E_{n+1}^+$$

$$E_n^- = \frac{n_{n+1}}{n_n} \frac{\cos \theta_{n+1}}{\cos \theta_n} E_{n+1}^-$$

y escrita en forma matricial es

$$\begin{pmatrix} E_n^+ \\ E_n^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_{n+1}}{n_n} \frac{\cos \theta_{n+1}}{\cos \theta_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{n+1}^+ \\ E_{n+1}^- \end{pmatrix}$$

rescribiéndola

$$\begin{pmatrix} E_n^+ \\ E_n^- \end{pmatrix} = T_{n|n+1} \begin{pmatrix} E_{n+1}^+ \\ E_{n+1}^- \end{pmatrix}$$

donde $T_{n|n+1}$ es la matriz de transferencia para el caso del campo eléctrico transversal al plano de incidencia, definida como:

$$T_{n|n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_{n+1}}{n_n} \frac{\cos \theta_{n+1}}{\cos \theta_n} \end{pmatrix}.$$

Se realizará el mismo procedimiento para TM .

3.3 Campo Eléctrico Paralelo al Plano de Incidencia (TM)

Las ecuaciones de frontera [Ec.(1.7)] tienen la siguiente forma

$$E_n^I \cos \theta_n + E_n^R \cos \theta_n = E_{n+1}^T \cos \theta_{n+1}$$

$$n_n (E_n^I - E_n^R) = n_{n+1} E_{n+1}^T,$$

si tenemos una j -ésima capa dentro de nuestro cristal fotónico, la onda transmitida se vuelve una onda incidente para esa capa y tiene su onda reflejada por lo que podemos decir que

$$E_{j+1}^T = E_{j+1}^I + E_{j+1}^R,$$

por lo que la Ec.(1.4) la podemos reescribir como

$$E_n^I \cos \theta_n + E_n^R \cos \theta_n = E_{n+1}^I \cos \theta_{n+1} + E_{n+1}^R \cos \theta_{n+1}$$

$$n_n (E_n^I - E_n^R) = n_{n+1} (E_{n+1}^I - E_{n+1}^R).$$

Si aplicamos la siguiente definición [Kohmoto, 1987]

$$E_n^+ = E_n^I + E_n^R,$$

$$iE_n^- = E_n^I - E_n^R,$$

obtenemos

$$E_n^+ \cos \theta_n = E_{n+1}^+ \cos \theta_{n+1}$$

$$n_n (iE_n^-) = n_{n+1} (iE_{n+1}^-),$$

si dejamos a E_n^- en términos de E_{n+1}^- y a E_n^+ en términos E_{n+1}^+ podemos escribir lo siguiente

$$E_n^+ = \frac{\cos \theta_{n+1}}{\cos \theta_n} E_{n+1}^+$$

$$E_n^- = \frac{n_{n+1}}{n_n} E_{n+1}^-$$

Escribiendo estas ecuaciones en forma matricial

$$\begin{pmatrix} E_n^+ \\ E_n^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\cos \theta_{n+1}}{\cos \theta_n} & 0 \\ 0 & \frac{n_{n+1}}{n_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{n+1}^+ \\ E_{n+1}^- \end{pmatrix},$$

despejando

$$\begin{pmatrix} E_n^+ \\ E_n^- \end{pmatrix} = \frac{\cos \theta_{n+1}}{\cos \theta_n} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_{n+1}}{n_n} \frac{\cos \theta_n}{\cos \theta_{n+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{n+1}^+ \\ E_{n+1}^- \end{pmatrix},$$

rescribiendo

$$\begin{pmatrix} E_n^+ \\ E_n^- \end{pmatrix} = \frac{\cos \theta_{n+1}}{\cos \theta_n} T_{n|n+1} \begin{pmatrix} E_{n+1}^+ \\ E_{n+1}^- \end{pmatrix}$$

donde $T_{n|n+1}$ es la matriz de transferencia para el caso del campo eléctrico paralelo al plano de incidencia, dada por

$$T_{n|n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_{n+1}}{n_n} \frac{\cos \theta_n}{\cos \theta_{n+1}} \end{pmatrix}.$$

En resumen tenemos las matrices de transferencia para los dos casos

	Matrices de Transferencia
Transversal Eléctrico (TE)	$T_{n n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_{n+1}}{n_n} \frac{\cos \theta_{n+1}}{\cos \theta_n} \end{pmatrix}$
Transversal Magnético (TM)	$T_{n n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_{n+1}}{n_n} \frac{\cos \theta_n}{\cos \theta_{n+1}} \end{pmatrix}$

3.4 Matriz de Transferencia de una Capa

Para un cambio de fase tenemos que

$$E(z) = E(0)e^{ikz}$$

donde

$$E(0) = \begin{pmatrix} \varepsilon_x e^{-i\delta_x} \\ \varepsilon_y e^{-i\delta_y} \end{pmatrix}.$$

Para la frontera

$$\begin{aligned} E_n^I &= E_n^I e^{i\delta_n} \\ E_n^R &= E_n^R e^{-i\delta_n} \end{aligned}$$

tomamos en cuenta la definición propuesta por Kohmoto [Kohmoto, 1987]

$$\begin{aligned} E_n^+ &= E_n^I + E_n^R \\ iE_n^- &= E_n^I - E_n^R \end{aligned}$$

ponemos estas ecuaciones en término de sus fases y considerando el espesor del material

$$\begin{aligned} E_{n,d}^+ &= E_n^I e^{i\delta_n} + E_n^R e^{-i\delta_n} \\ iE_{n,d}^- &= E_n^I e^{i\delta_n} - E_n^R e^{-i\delta_n} \end{aligned}$$

donde el valor de δ_n es

$$\delta_n = \frac{kn_n d_n}{\cos \theta_n} = \frac{2\pi n_n d_n}{\lambda \cos \theta_n},$$

siendo d_n es el espesor del material.

A partir de la definición sumamos y restamos estas dos ecuaciones para obtener lo siguiente

$$\begin{aligned} E_n^I &= \frac{E_n^+ + iE_n^-}{2} \\ iE_n^R &= \frac{E_n^+ - iE_n^-}{2} \end{aligned}$$

sustituimos estas últimas ecuaciones en la definición tomando en cuenta sus fases

$$\begin{aligned} E_{n,d}^+ &= \frac{E_n^+ + iE_n^-}{2} e^{i\delta_n} + \frac{E_n^+ - iE_n^-}{2} e^{-i\delta_n} \\ iE_{n,d}^- &= \frac{E_n^+ + iE_n^-}{2} e^{i\delta_n} - \frac{E_n^+ - iE_n^-}{2} e^{-i\delta_n} \end{aligned}$$

asociando

$$\begin{aligned} E_{n,d}^+ &= \frac{e^{i\delta_n} + e^{-i\delta_n}}{2} E_n^+ + \frac{e^{i\delta_n} - e^{-i\delta_n}}{2} iE_n^- \\ iE_{n,d}^- &= \frac{e^{i\delta_n} - e^{-i\delta_n}}{2} E_n^+ + \frac{e^{i\delta_n} + e^{-i\delta_n}}{2} iE_n^- \end{aligned}$$

se pueden describir como

$$\begin{aligned} E_{n,d}^+ &= \cos \delta_n E_n^+ - \sin \delta_n E_n^- \\ iE_{n,d}^- &= \sin \delta_n E_n^+ + \cos \delta_n iE_n^- \end{aligned}$$

Si lo ponemos de forma matricial tenemos que

$$\begin{pmatrix} E_{n,d}^+ \\ E_{n,d}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \delta_n & -\sin \delta_n \\ \sin \delta_n & \cos \delta_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n^+ \\ E_n^- \end{pmatrix}$$

recribiéndola

$$\begin{pmatrix} E_{n,d}^+ \\ E_{n,d}^- \end{pmatrix} = T_n \begin{pmatrix} E_n^+ \\ E_n^- \end{pmatrix}$$

donde T_n es la matriz de transferencia de la capa

$$T_n = \begin{pmatrix} \cos \delta_n & -\sin \delta_n \\ \sin \delta_n & \cos \delta_n \end{pmatrix}.$$

Con las matrices de transferencia obtenidas anteriormente para las interfaces y las capas, en la siguiente sección determinaremos la transmitancia.

3.5 Transmitancia

Al tener una multicapa fotónica tenemos que describir las capas y las interfaces con las matrices obtenidas y al hacer la multiplicación de todas estas matrices tendremos la matriz de transferencia para las N capas dieléctricas

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} = \prod_{n=0}^N T_n T_{n+1|n},$$

describiéndolo de esta manera para todas las capas

$$\begin{pmatrix} E_n^+ \\ E_n^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{n+1}^+ \\ E_{n+1}^- \end{pmatrix},$$

si reemplazamos los E_n^+ y E_n^- de la ecuación anterior por la definición de Kohmoto

$$\begin{aligned} E_n^+ &= E_n^I + E_n^R \\ iE_n^- &= E_n^I - E_n^R \end{aligned}$$

obtenemos que

$$\begin{aligned} E_n^I + E_n^R &= m_{11} (E_{n+1}^I + E_{n+1}^R) + im_{12} (E_{n+1}^R - E_{n+1}^I) \\ E_n^I - E_n^R &= -im_{21} (E_{n+1}^I + E_{n+1}^R) + m_{22} (E_{n+1}^R - E_{n+1}^I). \end{aligned}$$

La última capa está relacionada con el final del cristal por lo cual no podría haber reflexión, entonces $E_{n+1}^R = 0$. Igualando las ecuaciones obtenemos

$$(m_{11} + im_{12} - im_{21} + m_{22}) E_n^R = (im_{12} - m_{11} + im_{21} + m_{22}) E_n^I,$$

sustituyendo esta ecuación en la primera ecuación deducida tendremos que

$$E_{n+1}^I = m_{11} \left[E_n^I + \frac{-m_{11} + im_{12} + im_{21} + m_{22}}{m_{11} + im_{12} - im_{21} + m_{22}} E_n^I \right] - im_{12} \left[E_n^I + \frac{-m_{11} + im_{12} + im_{21} + m_{22}}{m_{11} + im_{12} - im_{21} + m_{22}} E_n^I \right].$$

Entonces el coeficiente de transmisión (τ) para una estructura con N capas dieléctricas

$$\tau = \frac{E_{n+1}^I}{E_n^I} = \frac{2(m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21})}{m_{11} + im_{12} - im_{21} + m_{22}} = \frac{2}{m_{11} + m_{22} + i(m_{12} - m_{21})},$$

donde el determinante de la matriz \mathbf{M} es 1 si la capa 0 y N+1 son del mismo material. Esto se debe a que el determinante de un producto de matrices es igual al producto de los determinantes de cada matriz y además $\det(T_{n|n+1})$ y

$$\prod_{n=0}^N \det(T_{n|n+1}) = \prod_{n=0}^N \frac{n_{n+1} \cos \theta_{n+1}}{n_n \cos \theta_n} = 1 \text{ para el caso TE}$$

$$\prod_{n=0}^N \det(T_{n|n+1}) = \prod_{n=0}^N \frac{n_{n+1} \cos \theta_n}{n_n \cos \theta_{n+1}} = 1 \text{ para el caso TM.}$$

Por lo que la transmitancia es

$$T = \tau \tau^* = \frac{4}{(m_{11} + m_{22})^2 + (m_{12} - m_{21})^2}$$

Utilizando las matrices de transferencia podemos investigar la transmisión o la reflexión en multicapas. Lo cual lo aplicaremos en los cristales fotónicos, para el estudio de estos sistemas desarrollamos un método de renormalización para el cálculo de la transmitancia el cual se encuentra en el apéndice A. A continuación describiremos como son estos cristales.

3.6 Secuencia de Fibonacci Generalizada (FG)

Hay muchas clases de secuencias de Fibonacci generalizadas [FG(m,n)], donde m y n son números enteros positivos. Las secuencias de dos letras a y b se generan con las siguientes reglas de sustitución

$$b \rightarrow a \text{ y } a \rightarrow a^m b^n,$$

también se puede emplear el siguiente crecimiento de la secuencia

$$F_0 = b, \quad F_1 = a, \quad F_{g+1} = F_g^m F_{g-1}^n,$$

o una relación de recurrencia

$$F_{g+1} = mF_g + nF_{g-1}, \quad F_0 = F_1 = 1.$$

Otra forma de generar las secuencias es por la matriz de sustitución (\mathbf{M}) como

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{M} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & n \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underbrace{AA \cdots A}_m \underbrace{BB \cdots B}_n \\ A \end{pmatrix}.$$

Los eigenvalores de la matriz \mathbf{M} son (λ_{\pm}),

$$\begin{vmatrix} m-\lambda & n \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - m\lambda - n = 0 \Rightarrow \lambda_{\pm} = \frac{m \pm \sqrt{m^2 + 4n}}{2}.$$

Por otra parte, el límite de la razón entre el número de letras de dos secuencias consecutivas cuando $g \rightarrow \infty$ viene dado por

$$\sigma = \lim_{g \rightarrow \infty} \frac{F_{g+1}}{F_g} = \frac{m + \sqrt{m^2 + 4n}}{2}$$

Algunos valores de σ coinciden con los llamados “números metálicos”

$$\begin{aligned} FG(1,1): \sigma_g &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} && \text{numero de la secuencia de oro,} \\ FG(2,1): \sigma_s &= 1 + \sqrt{2} && \text{numero de la secuencia de plata,} \\ FG(3,1): \sigma_b &= \frac{3 + \sqrt{13}}{2} && \text{numero de la secuencia de bronce,} \\ FG(1,2): \sigma_c &= 2 && \text{numero de la secuencia de cobre,} \\ FG(1,3): \sigma_n &= \frac{1 + \sqrt{13}}{2} && \text{numero de la secuencia de níquel.} \end{aligned}$$

Cabe señalar que las secuencias son cuasiperiódicas si cumplen las condiciones de Pisot y la unimodularidad del determinante de la matriz de sustitución. En particular, para $n=1$, los eigenvalores cumplen $\lambda_+ > 1$ y $|\lambda_-| < 1$, que son las condiciones de Pisot y el determinante de \mathbf{M} es unimodular ([Cassels, 1957], [Maciá, 2009].),

$$\begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

En la siguiente sección hablaremos del coeficiente de Lyapunov, el cual usaremos como herramienta para trabajar la Localización.

3.7 Coeficiente de Lyapunov

Los conceptos generales de la Teoría de Estabilidad fueron planteados en 1892 por el matemático ruso M. A. Lyapunov en el trabajo “*Problem General de la Stabilite du Mouvement*”. En este trabajo, Lyapunov propuso dos métodos para el estudio de la estabilidad, las cuales fueron nombrados por el mismo como primer y segundo método. El primer método de Lyapunov consiste en la linealización de la ecuación diferencial (no lineal) a través de su solución y el posterior estudio de la ecuación variacional matricial no autónoma por medio de un conjunto de números llamados Exponentes Característicos o Exponentes de Lyapunov (EL) como son conocidos en la actualidad. El análisis de estabilidad por medio del segundo método de Lyapunov se realiza en términos de una función escalar V , usualmente llamada función de Lyapunov, la cual semeja la energía potencial en un sistema mecánico, ya que decrece a través de la solución de la ecuación [Lyapunov, 1949].

Por el teorema de Kesten-Furstenberg [Ishii, 1973], [Kirkman, 1984] podemos escribir los exponentes de Lyapunov de la siguiente forma

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \|M_1 M_2 \dots M_n\|$$

donde $\gamma > 0$ y γ es el exponente de Lyapunov del producto de todas las matrices de transferencia.

Una forma de reescribir la expresión anterior es

$$\gamma = \frac{1}{N} \ln(m_{11}^2 + m_{12}^2 + m_{21}^2 + m_{22}^2)$$

donde m_{ij} son las entradas de la matriz de transferencia, es bien conocido que el inverso del coeficiente de Lyapunov es la longitud de la localización de los fotones [Zhao, 2007].

En la siguiente sección realizaremos un estudio detallado de los efectos en la transmitancia y el coeficiente de Lyapunov para diferentes sistemas cuasiperiódicos y aperiódicos.

3.8 Multicapas Aperiódicas y Cuasiperiódicas

En este trabajo analizamos el efecto de la aperiodicidad en la transmitancia fotónica para multicapas que siguen la secuencia de FG, a través de los métodos de renormalización para las matrices de transferencia ya sean para polarización-s (el campo eléctrico en dirección perpendicular al plano de incidencia) o polarización-p (el campo eléctrico en dirección paralela al plano de incidencia). En la Fig. 3-1 se muestra la transmitancia en función de la frecuencia normalizada para ocho multicapas, ie, ABAABABA, con índices de refracción $n_A = 2.3$ y $n_B = 1.55$, el grosor de las capas es $d_A = 76 \text{ nm}$ y $d_B = 113 \text{ nm}$, siguen un camino óptico de $n_A d_A = n_B d_B = \lambda_0/4$, donde $\lambda_0 = 700 \text{ nm}$, el ángulo de incidencia es $\theta = 0$ y una longitud de onda de $\lambda = 700 \text{ nm}$. Obsérvese un espectro que oscila y es simétrico con respecto a $\omega/\omega_0 = 1$. Esta figura es igual a la que se muestra en la Figura 1b de la referencia [Zhukovsky, 2010], nótese que la secuencia es la misma solo que ellos toman A como B y B como A, los parámetros y el camino óptico son iguales, por eso no depende del ordenamiento de estas multicapas.

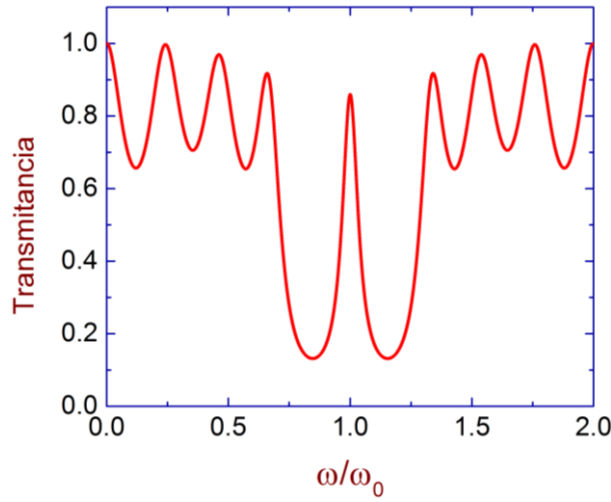


Figura 3-1. Transmitancia versus la frecuencia (ω/ω_0) normalizada para ocho multicapas, con índices de refracción y grosores $n_A=2.3$, $d_A=76\text{ nm}$ y $n_B=1.55$, $d_B=113\text{ nm}$ respectivamente, que siguen un camino óptico de $n_A d_A = n_B d_B = \lambda_0/4$, donde $\lambda_0=700\text{ nm}$ y el ángulo de incidencia es $\theta=0$.

Como las multicapas se ordenan de forma cuasiperiódica o aperiódica no es posible tener una solución analítica general de transmitancia. Por lo que solo presentamos la ecuación analítica para cualquier secuencia de Fibonacci Generalizado de la generación $g=2$.

$$T = 4 / \left(4 + \sin^2(m\delta_A) \left[(\beta_{VA} + \beta_{AV})^2 - 4 \right] + \sin^2(n\delta_B) \left[(\beta_{VB} + \beta_{BV})^2 - 4 \right] + \sin^2(m\delta_A) \sin^2(n\delta_B) \left[(\beta_{BA} + \beta_{AB})^2 - (\beta_{VA} + \beta_{AV})^2 - (\beta_{VB} + \beta_{BV})^2 - 4 \right] + \frac{1}{2} \sin(2m\delta_A) \sin(2n\delta_B) \left[(\beta_{VB} + \beta_{BV})(\beta_{VA} + \beta_{AV}) - 2(\beta_{AB} + \beta_{BA}) \right] \right)$$

donde m y n son números enteros positivos, β_{xy} representa la polarización $-s$ o $-p$. Para la polarización $-s$ (transversal eléctrico) tenemos que β_{xy} es

$$\beta_{xy} = \frac{\eta_y \cos \theta_y}{\eta_x \cos \theta_x},$$

y para la polarización $-p$ (transversal magnético) se tiene que

$$\beta_{xy} = \frac{\eta_y \cos \theta_x}{\eta_x \cos \theta_y}.$$

La figura Fig. 3-2 nos muestra los espectros de transmitancia de 9 sistemas (a) $m=1, n=1$, (b) $m=2, n=1$, (c) $m=3, n=1$, (d) $m=1, n=2$, (e) $m=2, n=2$, (f) $m=3, n=2$, (g) $m=1, n=3$, (h) $m=2, n=3$ y (i) $m=3, n=3$, todas estas secuencias son para una generación $g=2$. Los parámetros utilizados son los mismos que en la Fig. 3-1. En las figuras se pueden observar líneas en color amarillo las cuales pertenecen a los resultados numéricos obtenidos a partir del método de renormalización y detrás de estos espectros tenemos líneas de color negro que se traslapa, la cual pertenece a las gráficas obtenidas con la ecuación analítica. Obsérvese que son exactamente iguales los espectros. Esta ecuación

analítica puede describir cualquier espectro de transmitancia siempre que sea generación $g = 2$.

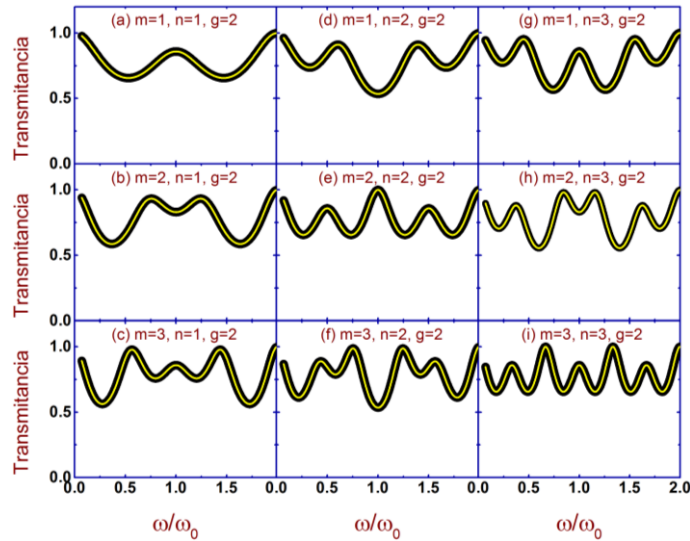


Figura 3-2. Transmitancia versus la frecuencia normalizada (ω/ω_0), tomando los mismos parámetros de la Fig. 3-1. Las líneas de color amarillo pertenecen a los resultados numéricos obtenidos con el método de renormalización y detrás de color negro los espectros que se obtuvieron con la ecuación analítica.

Después de la verificación con ecuación analítica, el siguiente paso es ampliar el conocimiento del que se tiene acerca de las multicapas aperiódicas y cuasiperiódicas.

Ahora presentamos un espectro de transmisión óptica para nueve sistemas de Fibonacci generalizado versus la frecuencia normalizada (ω/ω_0), utilizando los mismos parámetros de la Fig. 3-1. Los nueve sistemas se escogieron tal que en su construcción se llegue a la cantidad de 100 capas quedando de la siguiente manera (a) $m=1, n=1$ y $g=11$, (b) $m=2, n=1$ y $g=6$, (c) $m=3, n=1$ y $g=5$, (d) $m=1, n=2$ y $g=8$, (e) $m=2, n=2$ y $g=6$, (f) $m=3, n=2$ y $g=5$, (g) $m=1, n=3$ y $g=7$, (h) $m=2, n=3$ y $g=5$ y (i) $m=3, n=3$ y $g=5$. Obsérvese cómo todos los espectros son simétricos alrededor de $\omega/\omega_0=1$, además, en la primera columna [Fig. 3-3 (a)-(c)] se tiene pocos picos de alta transmisión ($T \approx 1$) alrededor de $\omega/\omega_0=1$, en cambio se tiene más densidad de puntos de alta transmisión ($T \approx 1$) cerca de $\omega/\omega_0=0$ y $\omega/\omega_0=2$. Para la columna dos [Fig. 3-3 (d)-(f)] alrededor de $\omega/\omega_0=1$ se tiene una mayor densidad de puntos de alta transmitancia cerca a uno y las figuras de la tercera columna [Fig. 3-3 (g)-(i)] casi no tienen picos de alta transmisión para esta zona.

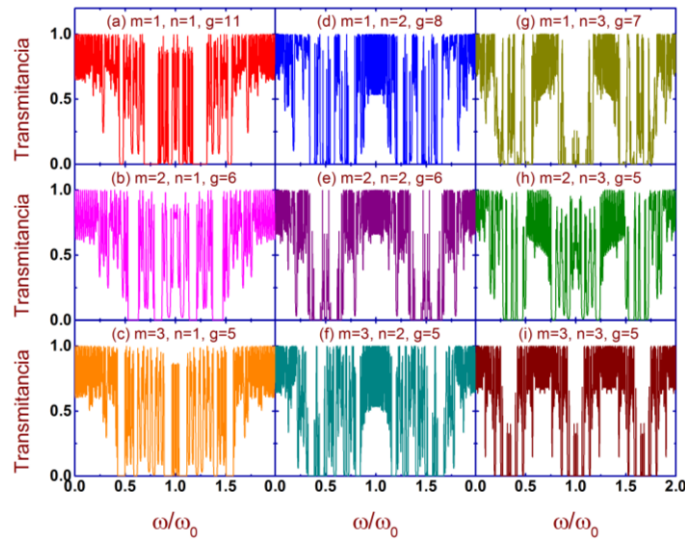


Figura 3-3. Transmitancia versus la frecuencia normalizada (ω/ω_0), tomando los mismos parámetros de la Fig. 3-1 y para los diferente ordenamiento de las capas siguiendo las secuencias de FG.

En la Fig. 3-4 mostramos una ampliación de la Fig. 3-3 para la región de $\omega/\omega_0 = 1$ donde los espectros son simétricos. Nótese como los espectros de la primera columna son autosimilares [Fig. 3-4 (a)-(c)], en cambio los de la segunda columna [Fig. 3-4 (d)-(f)] oscilan de forma periódica y los de la tercera columna [Fig. 3-4 (g)-(i)] solo muestran muy pocos picos de transmitancia alrededor de la zona $\omega/\omega_0 = 1$.

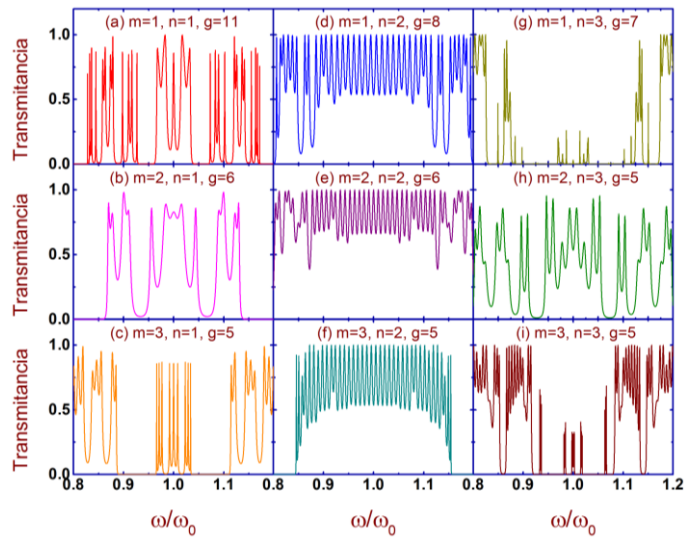


Figura 3-4. Amplificación de la Transmitancia versus la Frecuencia normalizada (ω/ω_0). Para los mismos parámetros de la Fig. 3-3.

Hay que aclarar que cuando se tiene un ángulo de incidencia $\theta = 0$ los espectros de TE y TM son iguales, pero en el momento en que se varia el ángulo estos espectros empiezan mostrar diferencias. Continuamos el estudio pero ahora variamos el ángulo de incidencia.

En la Fig. 3-5 se muestra un espectros de transmisión óptica para las ondas TE versus la frecuencia normalizada (ω/ω_0) de los nueve sistemas de Fibonacci Generalizado y los

mismos parámetros de la Fig. 3-3, con la variante de que el ángulo de incidencia es igual a $\theta = 30$. Obsérvese que para este caso el espectro ya no es simétrico alrededor de $\omega/\omega_0 = 1$, pero mantiene una semejanza con el espectro de $\theta = 0$, aunque, se aprecia un corrimiento de los espectros en dirección de las frecuencias. Para los espectros de la primera columna [Fig. 3-5 (a)-(c)] se tienen pocos picos de alta transmisión alrededor de $\omega/\omega_0 = 1$, caso contrario a lo que ocurre en sus extremos ($\omega/\omega_0 = 0$ y $\omega/\omega_0 = 2$) donde se tiene una alta densidad de puntos de alta transmisión. En cambio, para la columna dos [Fig. 3-5 (d)-(f)] alrededor de $\omega/\omega_0 = 1$ y los extremos, existen zonas donde se encuentra una concentración de picos con una transmitancia $T \approx 1$. En las figuras de la tercera columna [Fig. 3-5 (g)-(i)] se tienen cuatro regiones de mayor densidad de puntos de alta transmitancia.

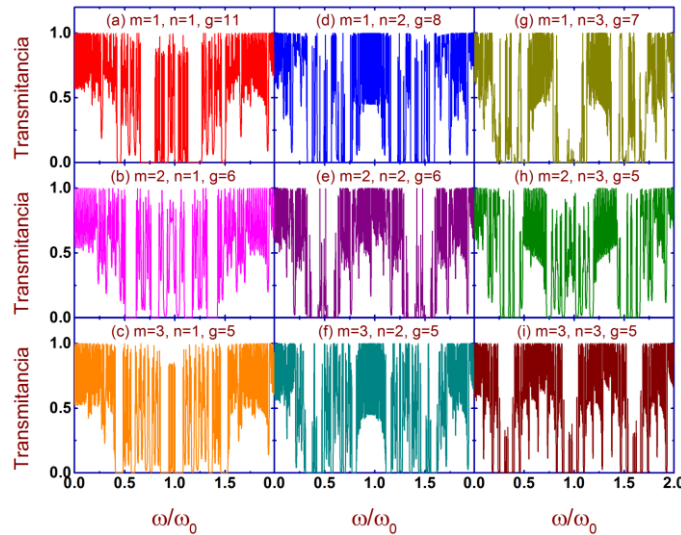


Figura 3-5. (TE) Transmitancia versus la frecuencia (ω/ω_0) normalizada, con índices de refracción y grosores $n_A = 2.3$, y $n_B = 1.55$, $d_A = 76 \text{ nm}$ y $d_B = 113 \text{ nm}$ respectivamente, que siguen un camino óptico de $n_A d_A = n_B d_B = \lambda_0/4$, donde $\lambda_0 = 700 \text{ nm}$ y el ángulo de incidencia es $\theta = 30$.

En la Fig. 3-6 mostramos una ampliación de la Fig. 3-5 para la región donde $\omega/\omega_0 = 1$. Nótese como los espectros de la primera columna son autosimilares y hay un corrimiento [Fig. 3-6 (a)-(c)], en cambio los de la segunda columna [Fig. 3-6 (d)-(f)] oscilan de forma periódica con un corrimiento, salvo la gráfica (e) que ya perdió en su totalidad esa periodicidad y los de la tercera columna [Fig. 3-6 (g)-(i)] muestran al igual que los de la primera columna un corrimiento con respecto a los de los espectros $\theta = 0$.

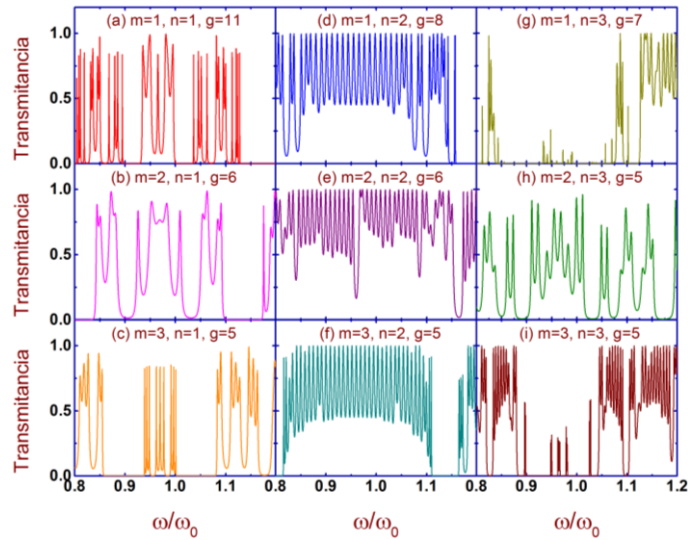


Figura 3-6. Amplificación de la transmitancia versus la frecuencia normalizada (ω/ω_0).
Para los mismos parámetros de la Fig. 3-5.

Ya hemos visto como son los espectros para los ángulos de incidencia $\theta=0,30$, ahora obtendremos los espectros para un ángulo de $\theta=60$. La Fig. 3-7 muestra un espectros de transmisión óptica para las ondas TE versus la frecuencia normalizada (ω/ω_0) de los nueve sistemas de Fibonacci Generalizado y los mismos parámetros de la Fig. 3-3. Obsérvese que no hay simetría alrededor de $\omega/\omega_0=1$, la semejanza que se mantenía hasta el ángulo $\theta=30$ se ha perdido y podemos observar que los mínimos de las gráficas han descendido más de lo que se pudo apreciar para los ángulos precedentes. Para los espectros de la primera columna [Fig. 3-7 (a)-(c)], la alta transmisión se tiene en los extremos ($\omega/\omega_0=0$ y $\omega/\omega_0=2$). La segunda columna [Fig. 3-7 (d)-(f)] sigue manteniendo la alta transmitancia en el centro de sus graficas ($\omega/\omega_0=1$) y en sus extremos. Las gráficas de la tercera columna [Fig. 3-5 (g)-(i)], como hemos visto tiene cuatro regiones de alta transmitancia que se mantienen a pesar de la variación del ángulo.

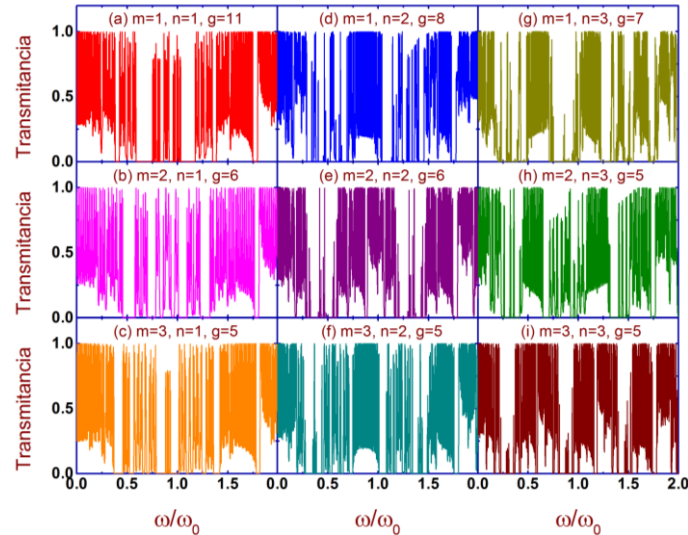


Figura 3-7. (TE) Transmittancia versus la frecuencia (ω/ω_0) normalizada, con índices de refracción y grosores $n_A=2.3$, $d_A=76\text{ nm}$ y $n_B=1.55$, $d_B=113\text{ nm}$ respectivamente, que siguen un camino óptico de $n_A d_A = n_B d_B = \lambda_0/4$, donde $\lambda_0=700\text{ nm}$ y el ángulo de incidencia es $\theta=60$.

En la Fig. 3-8 mostramos una ampliación de la región donde $\omega/\omega_0 = 1$ en la Fig. 3-7. Los espectros de la primera columna [Fig. 3-8 (a)-(c)] no tienen simetría y tampoco autosimilaridad, en cambio los de la segunda columna [Fig. 3-8 (d)-(f)] en específico las gráficas (d) y (f) tienen una periodicidad entre $\omega/\omega_0 = 0.8$ y 1.1 . La tercera columna [Fig. 3-8 (g)-(i)] no presenta simetría pero si presenta zonas de alta transmitancia y alta reflectancia.

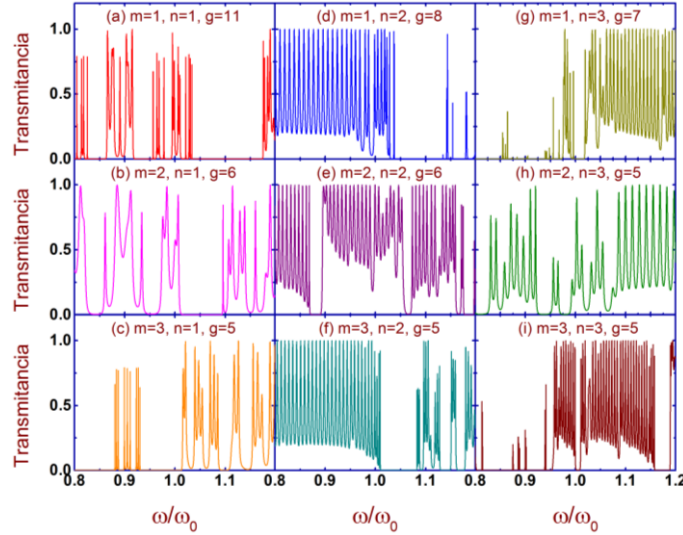


Figura 3-8. Amplificación de la transmitancia versus la frecuencia normalizada (ω/ω_0). Para los mismos parámetros de la Fig. 3-7.

En la Fig. 3-9 se observa que para un ángulo de incidencia de $\theta = 89^\circ$, no hay muchas zonas de alta transmitancia pero las regiones con alta reflectancia aumentaron considerablemente al ir incrementando el ángulo de incidencia. Nótese que en los nueve sistemas se presenta un gap o alta reflectancia muy recurrente alrededor de $\omega/\omega_0 = 0.25$ y $\omega/\omega_0 = 1.75$.

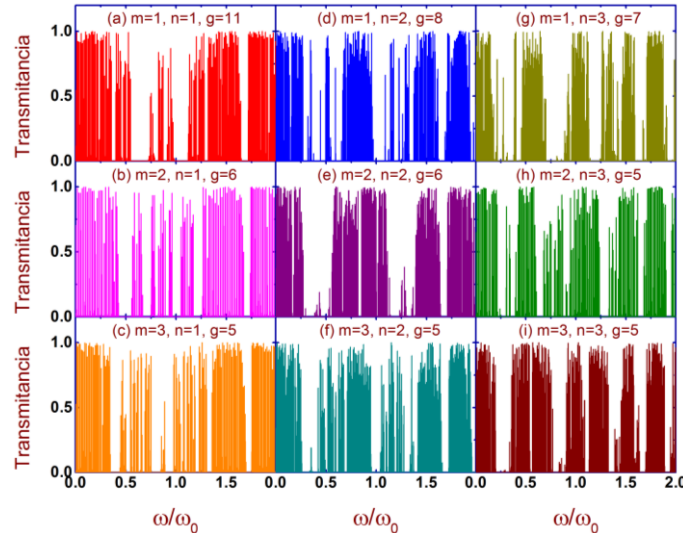


Figura 3-9. (TE) Transmittancia versus la frecuencia (ω/ω_0) normalizada, con índices de refracción y grosores $n_A = 2.3$, $d_A = 76 \text{ nm}$ y $n_B = 1.55$, $d_B = 113 \text{ nm}$ respectivamente, que siguen un camino óptico de $n_A d_A = n_B d_B = \lambda_0/4$, donde $\lambda_0 = 700 \text{ nm}$ y el ángulo de incidencia es $\theta = 89^\circ$.

Al hacer la ampliación de la Fig. 3-9 en el valor $\omega/\omega_0 = 1$ podemos verificar lo que se ha mencionado en la Fig. 3-10, que las regiones con alta reflectancia han aumentado ya no hay periodicidad ni autosimilaridad, además los picos con alta transmitancia han disminuido para los nuevos sistemas.

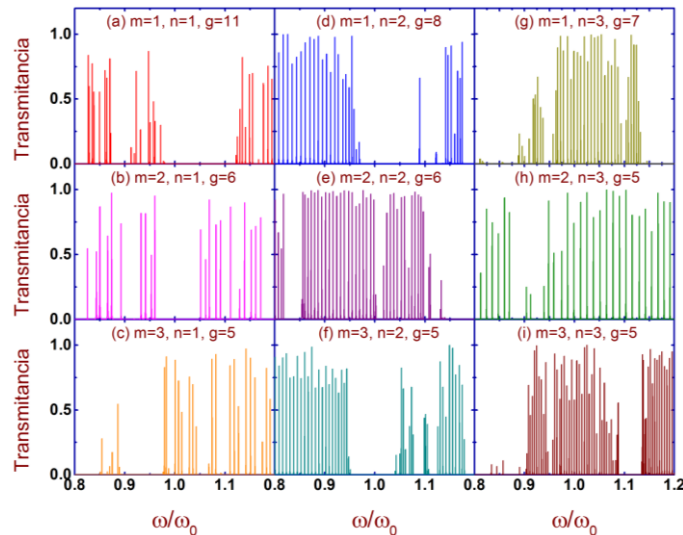


Figura 3-10. Amplificación de la transmitancia versus la frecuencia normalizada (ω/ω_0). Para los mismos parámetros de la Fig. 3-9.

Ya hemos visto como son los espectros de TE para los parámetros con índices de refracción $n_A = 2.3$ y $n_B = 1.55$, el grosor de las capas es $d_A = 76 \text{ nm}$ y $d_B = 113 \text{ nm}$, que siguen un camino óptico de $n_A d_A = n_B d_B = \lambda_0/4$, donde $\lambda_0 = 700 \text{ nm}$, el ángulo de incidencia es $\theta = 30, 60, 89$ (recordando que los espectros TE y TM son los mismos para una ángulo de $\theta = 0$) y una longitud de onda de $\lambda = 700 \text{ nm}$. Ahora lo que haremos es que tomaremos estas mismas consideraciones pero para ondas transversales magnéticas (TM) para hacer una comparación en cuanto a transmitancia y reflectancia.

La Fig. 3-11 muestra espectros de transmisión óptica para las ondas TM versus la frecuencia normalizada (ω/ω_0), en los nueve sistemas de Fibonacci Generalizado, mismos que utilizamos para analizar la polarización-s y un ángulo de incidencia igual a $\theta = 30$. Para los espectros de la primera columna [Fig. 3-11 (a)-(b)] se tiene que la alta transmitancia se encuentra en los extremos de las gráficas, se puede apreciar que hay dos gaps o alta reflectancia muy bien definidas antes de que empiece la zona de alta transmitancia en cada extremo y por último se puede hablar de una simetría. Sin en cambio, para la columna dos [Fig. 3-11 (d)-(f)] alrededor de $\omega/\omega_0 = 1$ y en los extremos hay zonas de alta transmitancia, pero en la gráfica Fig. 3-11 (e) no hay simetría en comparación de las otras dos gráficas de la segunda columna. Para las figuras de la tercera columna [Fig. 3-11 (g)-(i)] la concentración de puntos con alta transmitancia se encuentran en 4 regiones del espectro.

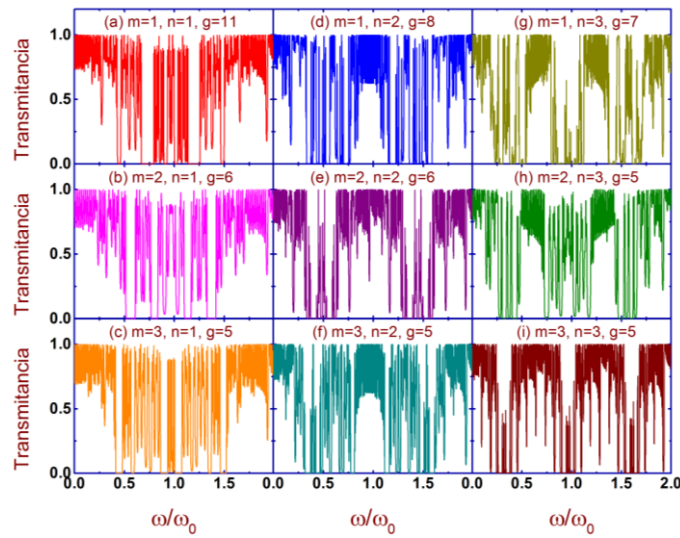


Figura 3-11. (TM) Transmittancia versus la frecuencia (ω/ω_0) normalizada, con índices de refracción y grosores $n_A = 2.3$, $d_A = 76 \text{ nm}$ y $n_B = 1.55$, $d_B = 113 \text{ nm}$ respectivamente, que siguen un camino óptico de $n_A d_A = n_B d_B = \lambda_0/4$, donde $\lambda_0 = 700 \text{ nm}$ y el ángulo de incidencia es $\theta = 30$.

Haciendo una comparación de las Fig. 3-5 y Fig.3-11 podemos observar que los espectros de TE y de TM respectivamente, hay semejanza con lo que podemos concluir hasta ahora que el ángulo de incidencia no es un factor considerable para modificar los espectros de transmitancia.

En la Fig. 3-12 mostramos una ampliación de la Fig. 3-11 para la región donde $\omega/\omega_0 = 1$. Nótese como los espectros de la primera columna [Fig. 3-12 (a)-(c)] no tienen periodicidad, no son simétricas respecto a $\omega/\omega_0 = 1$. La segunda columna [Fig. 3-12 (d)-(f)] presenta oscilaciones, pero tampoco tiene simetría, como los de la tercera columna [Fig. 3-12 (g)-(i)].

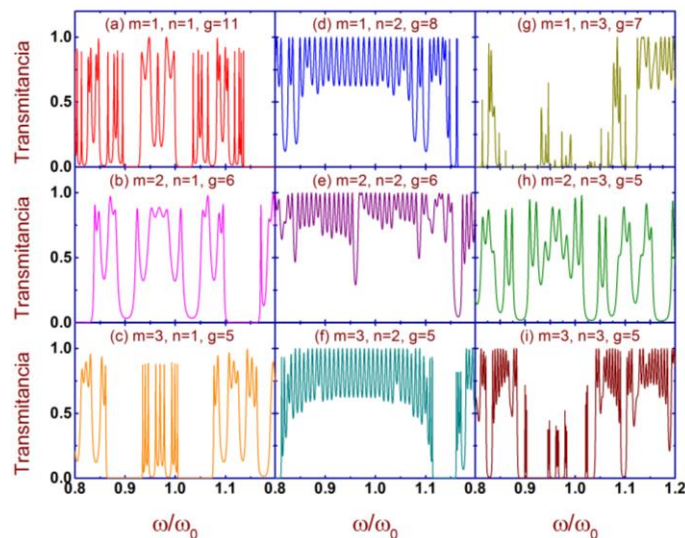


Figura 3-12. Ampliación de la transmitancia versus la frecuencia normalizada (ω/ω_0). Para los mismos parámetros de la Fig. 3-11.

Al hacer la ampliación (Fig. 3-12) y compararla con la de la Fig. 3-6 (Para el caso de TE), observamos que si hay semejanza pero hay zonas dentro de las 9 secuencias de

Fibonacci para la Fig. 3-12 que presentan picos de menor amplitud con respecto a los picos de la Fig. 3-6.

En la Fig. 3-13 se muestra los espectros para las ondas TM o polarización-p para un ángulo de incidencia de $\theta = 60^\circ$. Para los espectros de la primera columna [Fig. 3-13 (a)-(b)] se observa que no hay simetría con respecto a $\omega/\omega_0 = 1$, se tiene que los picos de alta transmitancia se pueden encontrar en los extremos. La columna dos [Fig. 3-13 (d)-(f)] muestra que alrededor de $\omega/\omega_0 = 1$ y en sus extremos ($\omega/\omega_0 = 0$ y $\omega/\omega_0 = 2$) se tiene una densidad de picos con alta transmitancia. Para las figuras de la tercera columna [Fig. 3-13 (g)-(i)] la mayor densidad de picos donde la transmitancia es cercano a uno ($T \approx 1$) se encuentran distribuidos por todo el espectro de manera no continua, pero de manera recurrente se puede encontrar alrededor de $\omega/\omega_0 = 0.5$ y $\omega/\omega_0 = 1.25$.

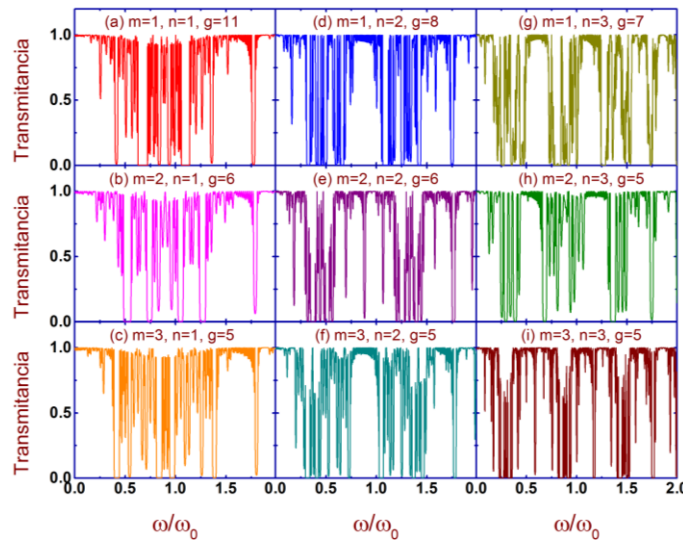


Figura 3-13. (TM) Transmitancia versus la frecuencia (ω/ω_0) normalizada, con índices de refracción y grosores $n_A = 2.3$, $d_A = 76 \text{ nm}$ y $n_B = 1.55$, $d_B = 113 \text{ nm}$ respectivamente, que siguen un camino óptico de $n_A d_A = n_B d_B = \lambda_0/4$, donde $\lambda_0 = 700 \text{ nm}$ y el ángulo de incidencia es $\theta = 60^\circ$.

Si comparamos la Fig. 3-13 con la Fig. 3-7, podemos observar que el contorno superior de los espectros tiene cierta semejanza entre ellos, la diferencia es la amplitud de los picos, siendo de menor amplitud en TM.

En la Fig. 3-14 mostramos una ampliación de la Fig. 3-13 para la región donde $\omega/\omega_0 = 1$. En la primera columna [Fig. 3-14 (a)-(c)] se observa que no hay simetría, pero hay muchos picos con alta transmitancia. La segunda columna [Fig. 3-14 (d)-(f)] muestra oscilaciones cercanas a la alta transmitancia pero no hay simetría, en la gráfica (e) se observa que hay una línea que tiene alta transmitancia. En la tercera columna [Fig. 3-14 (g)-(i)] también se muestran oscilaciones muy cercanas a $T \approx 1$.

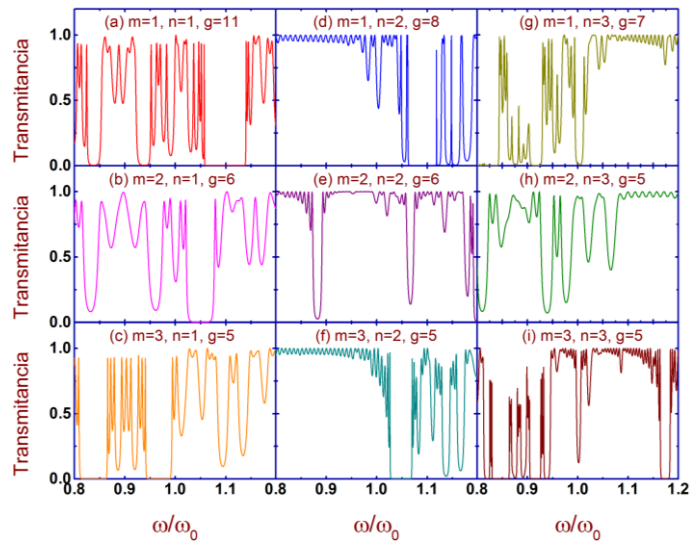


Figura 3-14. Amplificación de la transmitancia versus la frecuencia normalizada (ω/ω_0). Para los mismos parámetros de la Fig. 3-13.

La comparación de las Fig. 3-8 con la Fig. 3-14, también observamos que los picos tienen menor amplitud en TM en comparación con los de TE, además presenta más picos de alta transmitancia en TM.

En la Fig. 3-15 se muestran espectros de transmisión óptica para la polarización-p versus la frecuencia normalizada (ω/ω_0) para un ángulo de incidencia de $\theta=89^\circ$. Obsérvese en todas las figuras una alta densidad de picos y una reducción significativa de gap.

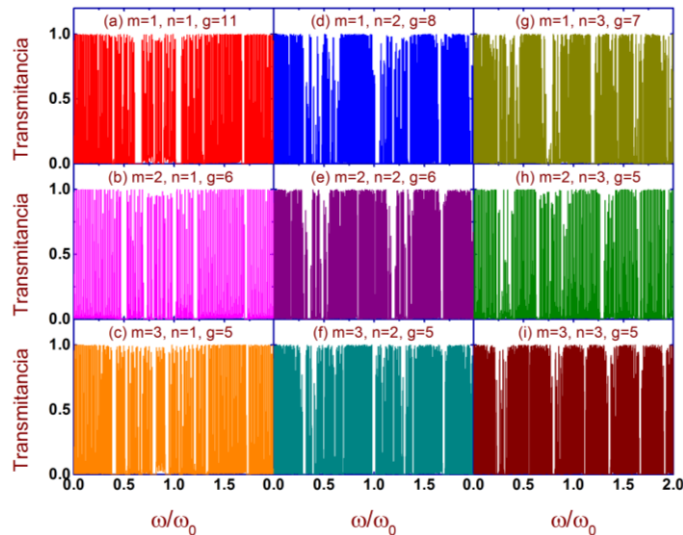


Figura 3-15. (TM) Transmittancia versus la frecuencia (ω/ω_0), con índices de refracción y grosores $n_A=2.3$, $d_A=76\text{ nm}$ y $n_B=1.55$, $d_B=113\text{ nm}$ respectivamente, que siguen un camino óptico de $n_A d_A = n_B d_B = \lambda_0/4$, donde $\lambda_0=700\text{ nm}$ y el ángulo de incidencia es $\theta=89^\circ$.

Al comparar la Fig. 3-15 con la Fig. 3-9, nótese que la de los espectros para TM tiene más picos con valores cercanos a $T \approx 1$ y que hay una reducción significativa de gaps tanto en número como en ancho.

En la Fig. 3-16 mostramos una amplificación de la Fig. 3-15 para la región donde $\omega/\omega_0=1$. Nótese que los espectros ya no presentan autosimilaridad para la primera

columna [Fig. 3-16 (a)-(c)], en cambio para las otras dos columnas hay regiones de frecuencia donde los espectros siguen oscilando periódicamente con una amplitud de oscilación más grande, pero ninguno presenta simetría.

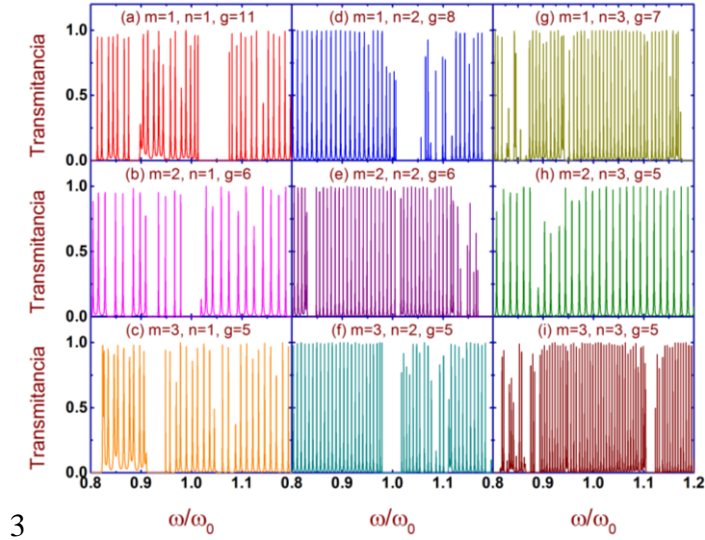


Figura 3-16. Amplificación de la transmitancia versus la frecuencia normalizada (ω/ω_0).
Para los mismos parámetros de la Fig. 3-15.

Para continuar con el análisis de contrastes de espectros de TM y TE, tenemos la Fig. 3-16 y la Fig. 3-10 respectivamente. Podemos concluir que en los espectros de TM, que la amplitud de los picos son más grandes en comparación con los de TE y como ya se había mencionado tienen menos gaps con menor anchos.

Para una conclusión más general a partir de lo que hemos visto en las figuras que dependiendo del ordenamiento de las multicapas podemos diseñar dispositivos que sólo tengan transmitancia (balística) en regiones bien determinadas de frecuencias o en caso contrario se tengan regiones de frecuencia donde la reflectancia sea total. Teniendo en cuenta estas ideas podemos decir que los espectros de TM presentan amplias zonas de alta transmisión y que las gráficas obtenidas para la polarización-s nos muestran más gaps o alta reflectancia. Esto ratifica lo que se puede observar para multicapas periódicas. Hemos visto como son los espectros al variar solo un parámetro, pero al tener tantas variables que cambiar tenemos la posibilidad de enriquecer este trabajo. ¿Cómo son los espectros de transmitancia al variar los espesores de las multicapas? ¿Cómo afecta la variación del ángulo de incidencia y la frecuencia en los espectros de transmitancia? y ¿si pudiéramos definir el camino óptico ($n_A d_A = n_B d_B = \lambda_0/4$) de una forma diferente que no sea a un cuarto de la longitud que tanto cambiaría la reflectancia o la transmitancia?. Más adelante veremos cómo son estos espectros en escala de colores.

3.8.1 Diferentes Espesores de Capas [T(d_A, d_B)]

En esta sección estudiamos la influencia que tiene la variación de los espesores de las capas que forman los cristales fotónicos cuasiperiódicos y aperiódicos sobre la transmitancia. Tomaremos la condición que el camino óptico este dado como $n_A d_A = n_B d_B = \lambda_0/4$, donde $\lambda_0 = 700 \text{ nm}$. En la Fig. 3-17 presentamos la transmitancia (escala de colores) en función de la variación del grosor de las capas d_A y d_B para diferentes ángulos de incidencia (θ),

(a) $\theta=0$, (b) $\theta=10$, (c) $\theta=20$, (d) $\theta=30$, (e) $\theta=40$, (f) $\theta=50$, (g) $\theta=60$, (h) $\theta=70$, (i) $\theta=80$, (j) $\theta=89$, cuando las capas del sistema siguen un ordenamiento tipo $m=1, n=1$ y generación $g=3$ (ABA). Se ha escogido esta secuencia por ser la más sencilla y porque para fines ilustrativos se puede mostrar las escalas de transmitancia con una buena nitidez, que se pierde al hacer crecer la generación. Cabe mencionar, que el grosor de las capas los variamos desde $1nm$ hasta $300nm$. Como el camino óptico lo tomamos como definición, al variar el grosor de las capas también lo hará el índice de refracción.

Los espectros de transmitancia de la Fig. 3-17 son para ondas Transversales Elécticas (TE). Obsérvese en primera instancia que mientras aumentamos el ángulo de incidencia existen valores críticos en los grosores de las capas donde no hay un valor de transmitancia, estas zonas están indeterminadas y esto se debe a que se ha llegado al límite de la condición propuesta para el camino óptico (color gris).

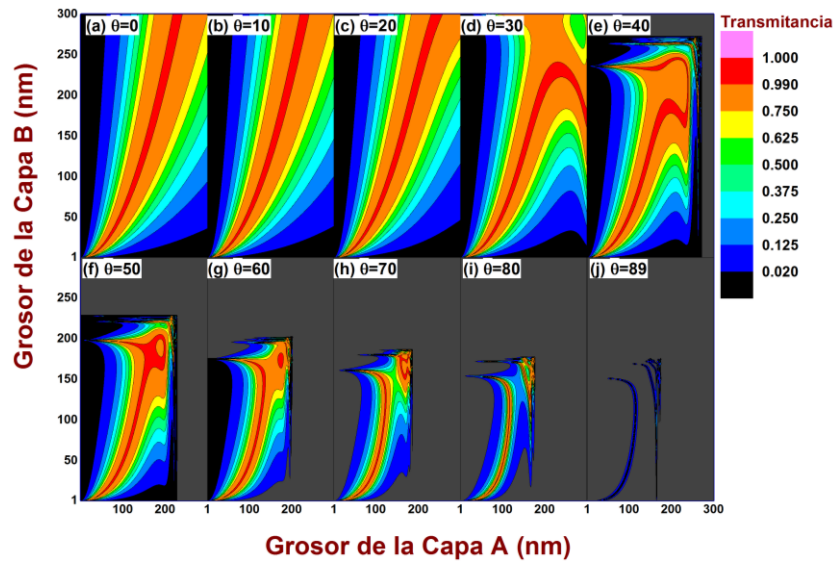


Figura 3-17. Transmitancia $T(d_A, d_B)$ para las ondas TE con diferentes ángulos (a) $\theta=0$, (b) $\theta=10$, (c) $\theta=20$, (d) $\theta=30$, (e) $\theta=40$, (f) $\theta=50$, (g) $\theta=60$, (h) $\theta=70$, (i) $\theta=80$, (j) $\theta=90$. Cumpliendo el camino óptico dado por $n_A d_A = n_B d_B = \lambda_0/4$, donde $\lambda_0 = 700 nm$. El ordenamiento de las capas es de $m=1 a 4$ y $n=1 a 4$ y una generación $g=3$ (ABA).

En la Fig. 3-17 (a) tiene una gran similitud al espectro que se obtiene de un cristal fotónico periódico, por ejemplo, en la zona de color rojo (de mayor transmitancia) esta descrito por una curvatura dirigida al eje que varía el grosor del menor número de capas del sistema. Siendo esta curva una línea recta en el cristal periódico. En las Fig. 3-17 (b) y (c) se puede ver que sigue manteniendo una similitud con la Fig. 3-17 (a) debido a que el ángulo todavía no es un factor que marque gran diferencia. En cambio en la Fig. 3-17 (d) se observa que la zona donde tiene alta transmitancia presenta una curva que cambia drásticamente alrededor de 250 nm de espesor para ambas capas. En la Fig. 3-17 (e) se puede observar que hay una zona en gris la cual nos dice que hay una limitación en el grosor al variar el ángulo, pero aun así podemos ver que hay alta transmitancia para ciertos grosores. En las Fig. 3-17 (f) hasta la (j) se puede ver que hay una mayor reducción en la zona permitida de transmitancia conforme se incrementa el ángulo de incidencia, debido a que tanto θ y el límite del camino óptico tiene cada vez un mayor efecto en la transmitancia. Aunque todavía existen zonas bien determinadas por la variación de los grosores de las capas donde se puede obtener transmitancia.

Ahora considerando ondas Transversales Magnéticas (TM), la Fig. 3-18 presenta los espectros en escala de colores para la transmitancia en función de los grosores de las capas y de diferentes ángulos de incidencia, tomando los mismos parámetros que la Fig. 3-17. Observe que mientras aumentamos el ángulo de incidencia existen valores críticos en los grosores de las capas donde ya no hay transmitancia. Además, se presenta la cuestión de la limitación del camino óptico (zona gris), tal como sucede en la onda TE (Fig. 3-17). Pero en este caso se tienen más zonas de alta transmitancia a partir de $\theta = 30$ y superiores que no se observan en la onda TE. Más aun, los valores críticos donde existe transmitancia son más grandes en comparación con los TE. Cabe señalar, que la Fig. 3-17 (a) para TE y TM es la misma en el ángulo $\theta = 0$.

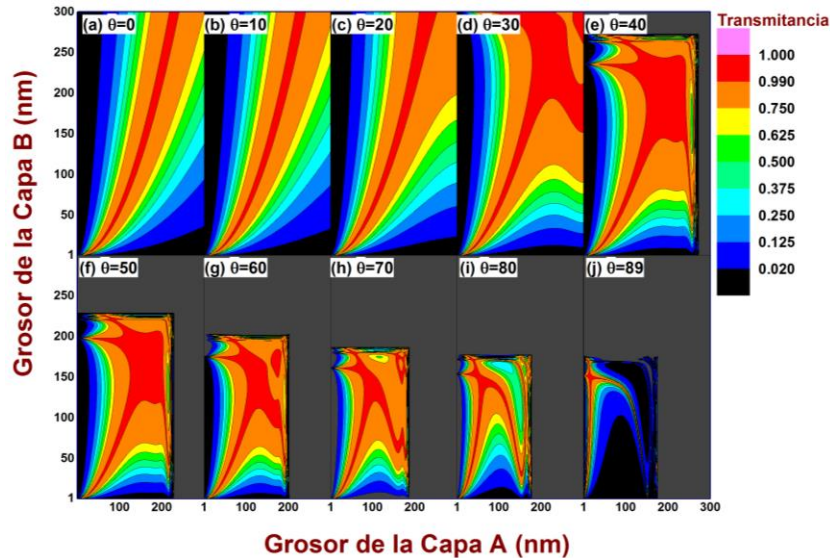


Figura 3-18. Transmitancia $T(d_A, d_B)$ para las ondas TM con diferentes ángulos (a) $\theta = 0$, (b) $\theta = 10$, (c) $\theta = 20$, (d) $\theta = 30$, (e) $\theta = 40$, (f) $\theta = 50$, (g) $\theta = 60$, (h) $\theta = 70$, (i) $\theta = 80$, (j) $\theta = 89$. Cumpliendo el camino óptico dado por $n_A d_A = n_B d_B = \lambda_0/4$, donde $\lambda_0 = 700 \text{ nm}$. El ordenamiento de las capas es de $m=1 a 4$ y $n=1 a 4$ y una generación $g = 3$ (ABA).

En las Fig. 3-18 (b) y (c) nótese la similitud con la del ángulo $\theta = 0$ tal como sucede para el caso TE [Fig. 3-17 (b) y (c)]. Además, en la Fig. 3-18 (d) la zona de alta transmitancia es más ancha con respecto a los ángulos que le anteceden ($\theta = 0, 10$ y 20) y a su correspondiente en TE. En las Fig. 3-18 (f) hasta la (j) se puede seguir observando la reducción de la zona permitida, pero sin en cambio la zona de alta transmitancia siguen siendo más grandes que en las obtenidas para TE. También, se aprecia que las zonas de indeterminación no se encuentra en espesores menores de 200 nm para $\theta < 70$ y a demás para ángulos mayores todavía podemos encontrar zonas transmitancia, en cambio para TE estas zonas si son muy reducidas llegando a ser casi puntuales.

Ya hemos observado que ocurre de manera general con la transmitancia para las ondas TE y TM, con los parámetros propuestos y con una secuencia de Fibonacci Generalizada (FG) con $m=1, n=1$ y generación $g = 3$. A continuación adjuntamos varias graficas de diferentes sistemas $m=1 a 4$ y $n=1 a 4$ para una generación $g=3$ pero manteniendo un solo ángulo de incidencia los cuales serán $\theta = 30, 50, 60$ y 70 para los dos tipos de ondas, debido a los cambios notorios en el espectro de transmitancia para estos ángulos.

Mostramos a continuación en la Fig. 3-19 espectros de transmitancias para ondas Transversales Elécticas (TE) con un ángulo de $\theta = 30$ y diferentes secuencias de Fibonacci Generalizada con una generación $g=3$.

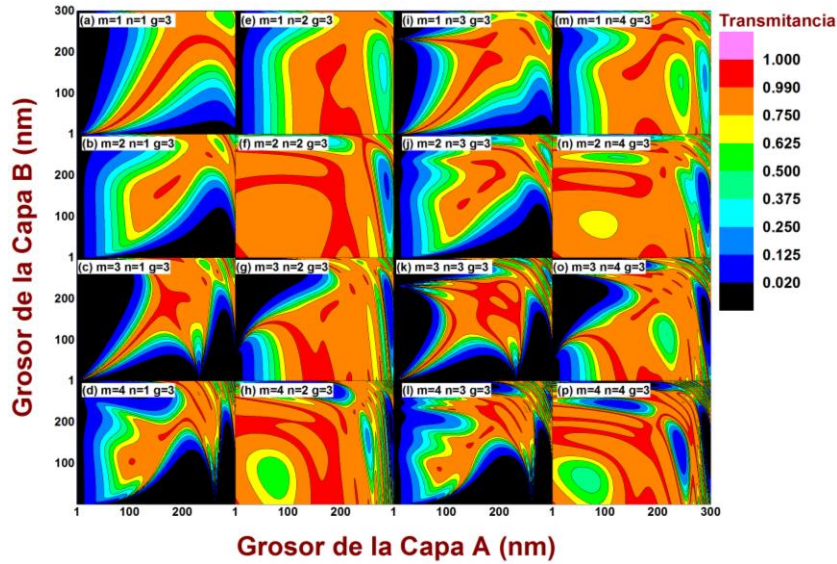


Figura 3-19. Transmitancia $T(d_A, d_B)$ para las ondas TE con un ángulo de $\theta = 30$. Cumpliendo el camino óptico dado por $n_A d_A = n_B d_B = \lambda_0/4$, donde $\lambda_0 = 700 \text{ nm}$. El ordenamiento de las capas es de $m=1 a 4$ y $n=1 a 4$ y una generación $g = 3$.

Podemos observar que las zonas permitidas de transmitancia son muy similares en la primera columna [Fig. 3-19 (a)-(d)] con la tercera columna [Fig. 3-19 (i)-(l)] y a su vez la segunda columna [Fig. 3-19 (e)-(h)] con la cuarta columna [Fig. 3-19 (m)-(p)]. Pero las zonas de alta transmitancia no son similares en ningún caso, pero se presenta pequeñas zonas de $T \approx 1$ que coinciden.

Ahora presentamos el mismo estudio (TE) pero para un ángulo de $\theta = 50$ en la Fig. 3-20 y tomando los mismos parámetros que la Fig. 3-19.

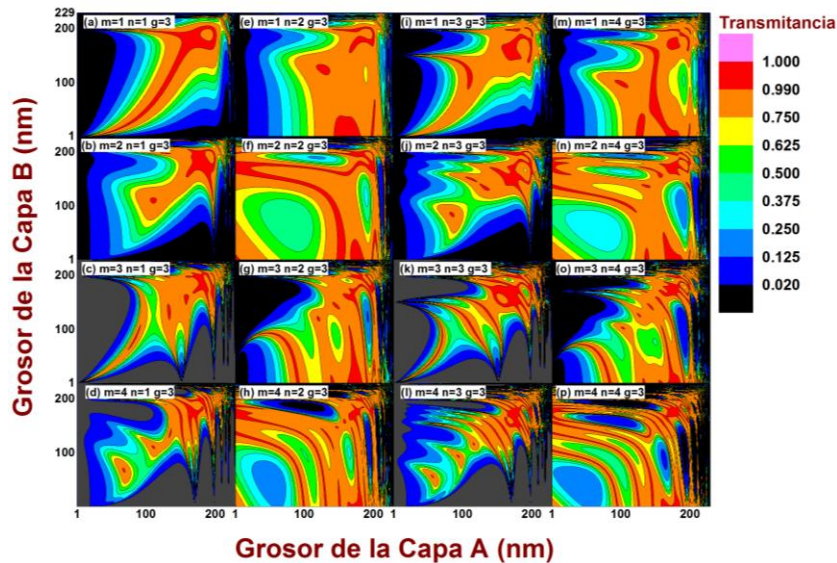


Figura 3-20. Transmitancia $T(d_A, d_B)$ para las ondas TE con un ángulo de $\theta = 50$. Cumpliendo el camino óptico dado por $n_A d_A = n_B d_B = \lambda_0/4$, donde $\lambda_0 = 700 \text{ nm}$. El ordenamiento de las capas es de $m=1 a 4$ y $n=1 a 4$ y una generación $g = 3$.

Obsérvese que las columnas impares [Fig. 3-20 (a)-(d) y Fig. 3-20 (i)-(l)] son similares, las Fig. 3-20 (c), (k), (d) y (l) presentan zonas en gris las cuales no se ven en las otras gráficas de su columna. Estas indeterminaciones no se presentan en el ángulo de incidencia $\theta = 30$. En las columnas pares [Fig. 3-20 (e)-(h) y Fig. 3-20 (m)-(o)] aparte de mantienen una similitud en la zona de transmitancia, estas graficas no presentan indeterminación como en las columnas impares con lo cual podemos concluir que las secuencias que tienen $n = \text{impar}$ presentaran estas zonas en gris a partir de un valor de $m = 3$. Nótese que los espectros en escala de colores de la transmitancia de la Fig. 3-20 en lo general están decreciendo en comparación a lo que sucede para un ángulo de $\theta = 30$.

Mostramos a continuación en la Fig. 3-21 espectros de transmitancia para ondas Transversales Eléctricas (TE) en un ángulo de $\theta = 60$.

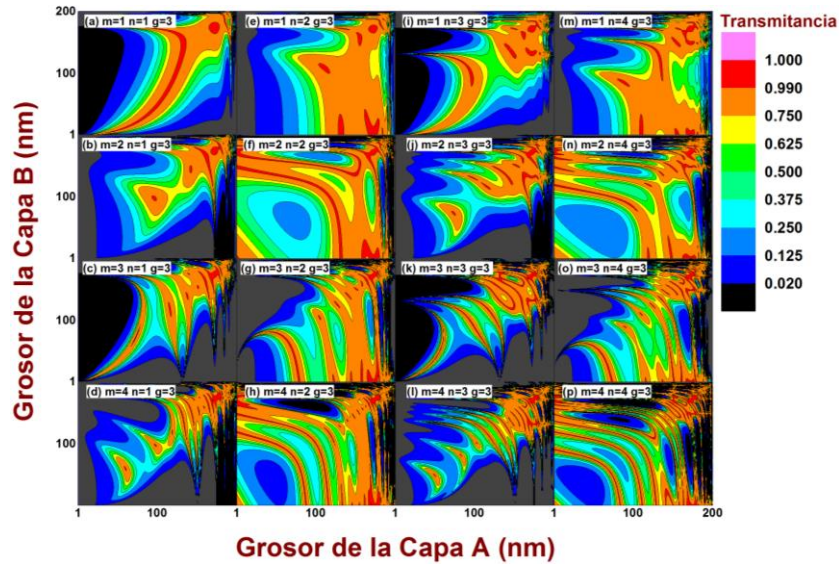


Figura 3-21. Transmitancia $T(d_A, d_B)$ para las ondas TE con un ángulo de $\theta = 60$. Cumpliendo el camino óptico dado por $n_A d_A = n_B d_B = \lambda_0 / 4$, donde $\lambda_0 = 700 \text{ nm}$. El ordenamiento de las capas es de $m = 1 a 4$ y $n = 1 a 4$ y una generación $g = 3$.

Para las columnas impares las zonas de indeterminación crecieron pero si observamos los espectros de la Fig. 3-21 (c) y (k) hay una zona de color negro que es la que le corresponde a la alta reflectancia y esta zona no encontraba en la gráfica para $\theta = 50$. En las columnas pares las zonas de transmisión siguen siendo parecidas, las Fig. 3-21 (e), (m), (g), (o) presentan las zonas de indeterminación que antes no se apreciaban en las gráficas para $\theta = 30$ y 50 . Los espectros en la Fig. 3-21 en su totalidad presenta menos zonas de alta transmitancia comparados con los ángulos anteriores para las ondas Transversales Eléctricas (TE).

Los espectros de la Fig. 3-22 en primera instancia nos presenta una reducción considerable de las zonas de alta transmitancia para las ondas Transversales Eléctricas para un ángulo de incidencia de $\theta = 70$ (TE).

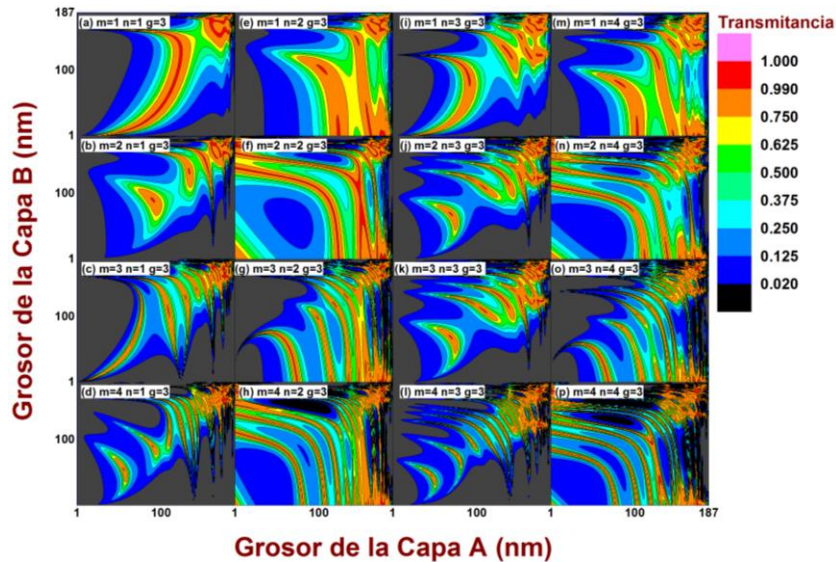


Figura 3-22. Transmitancia $T(d_A, d_B)$ para las ondas TE con un ángulo de $\theta=70$. Cumpliendo el camino óptico dado por $n_A d_A = n_B d_B = \lambda_0/4$, donde $\lambda_0 = 700 \text{ nm}$. El ordenamiento de las capas es de $m=1 a 4$ y $n=1 a 4$ y una generación $g=3$.

En las columnas impares las zonas de indeterminación crecieron pero si observamos estas se encuentran fuera de la zona permitida de transmitancia. En las columnas pares la zona de transmisión siguen siendo semejante, pero las Fig. 3-22 (f), (h), (n), (p) a comparación de las otras graficas la zona gris es muy pequeña y empezaron aparecer en este ángulo, ya que si revisamos las gráficas anteriores ($\theta=30, 50$ y 60) para las ondas TE no existía esta región.

Ahora presentamos el mismo estudio pero para ondas Transversales Magnéticas (TM), en la Fig. 3-23 mostramos los espectros de transmitancia para un ángulo de $\theta=30$, con diferentes secuencias de Fibonacci Generalizado y una generación $g=3$, se usaron los mismos parámetros que en el caso de la polarización-s. Se observa que la zona de transmisión son semejante para la primera [Fig. 3-23 (a)-(d)] y la tercera columna [Fig. 3-23 (i)-(l)], así como para la segunda [Fig. 3-23 (e)-(h)] y cuarta columna [Fig. 3-23 (m)-(p)]. Nótese que las columnas impares tienen más zona de alta reflectancia que las columnas pares.

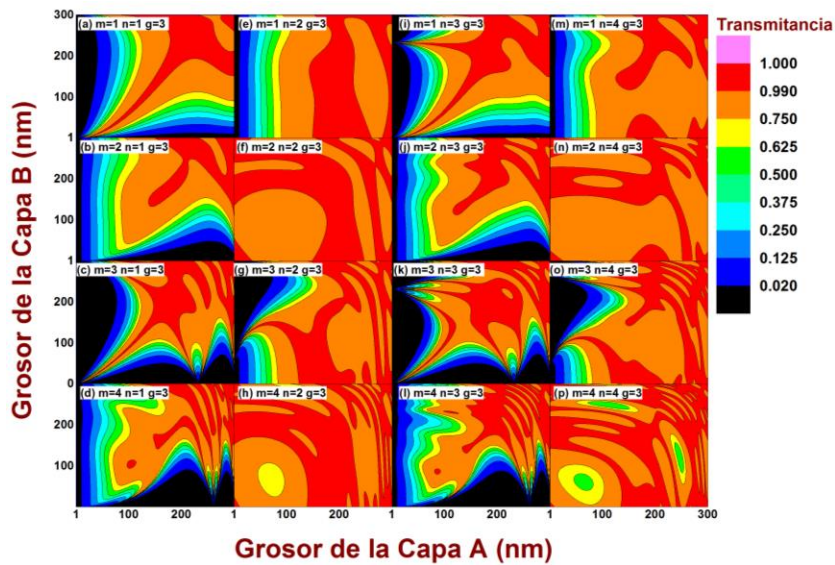


Figura 3-23. Transmitancia $T(d_A, d_B)$ para las ondas TM con un ángulo de $\theta = 30$. Cumpliendo el camino óptico dado por $n_A d_A = n_B d_B = \lambda_0/4$, donde $\lambda_0 = 700 \text{ nm}$. El ordenamiento de las capas es de $m=1 a 4$ y $n=1 a 4$ y una generación $g = 3$.

Comparando la Fig. 3-23 con la Fig. 3-19, se aprecia que los espectros de transmitancia son semejantes en forma a excepción de cuando se compara el valor de la transmitancia, ya que la región de alta transmitancia se encuentra en mayor proporción en la polarización-p y la alta reflectancia se mantiene similar en todas las secuencias para ambas figuras.

En la Fig. 3-24 se presentan los espectros de transmitancia de las ondas Transversales Magnéticas (TM) para un ángulo de $\theta = 50$. Se muestra la similitud entre las columnas impares, así como en las columnas pares. Las zonas de alta transmitancia se empiezan a extender para los espectros con ángulo de incidencia $\theta = 50$ respecto a las de $\theta = 30$, también se aprecia una disminución del espesor de las capas.

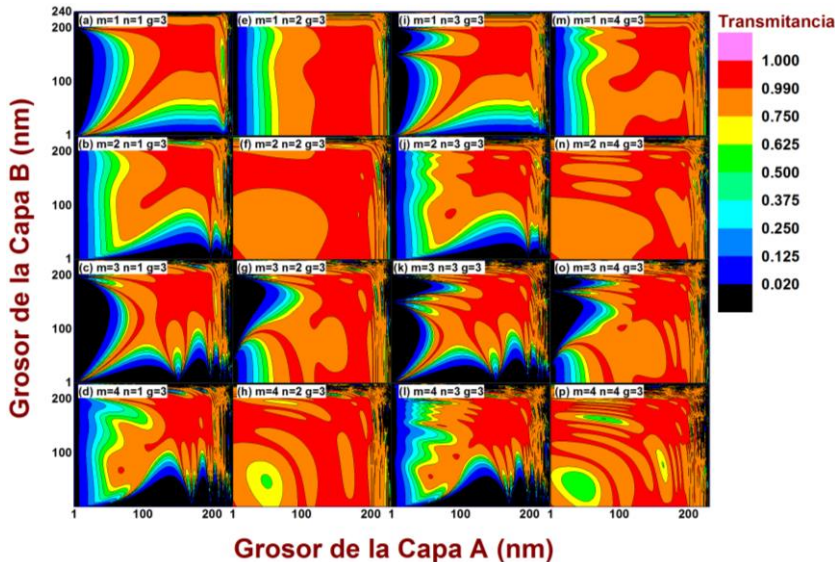


Fig. 3-24. Transmitancia $T(d_A, d_B)$ para las ondas TM con un ángulo de $\theta = 50$. Cumpliendo el camino óptico dado por $n_A d_A = n_B d_B = \lambda_0/4$, donde $\lambda_0 = 700 \text{ nm}$. El ordenamiento de las capas es de $m=1 a 4$ y $n=1 a 4$ y una generación $g = 3$.

Ahora comparamos la Fig. 3-24 con la Fig. 3-20, se nota que mientras se aumenta el ángulo de incidencia, en los espectros de la polarización-p crecen las regiones de alta transmitancia, contrario a las ondas TE que se reducen, también se observa que en las figuras de TM no hay existencia de zonas de color gris.

Mostramos a continuación en la Fig. 3-25 espectros de transmitancia de las ondas Transversales Magnéticas (TM) para un ángulo de $\theta = 60$. Las columnas impares siguen mostrando una similitud en el área de transmisión, pero se observa por primera vez en estas columnas específicamente para los espectros de la Fig. 3-25 (c) y (k) zonas de indeterminación. Las columnas pares muestran zonas de indeterminación en las Fig. 3-25 (e), (g), (m), (o), lo que antes no se apreciaba en los espectros para $\theta = 30$ y 50 . Los espectros en la Fig. 3-25 en su totalidad presenta una ligera reducción de la región de alta transmitancia en comparación para el espectro de TM para un ángulo de $\theta = 50$.

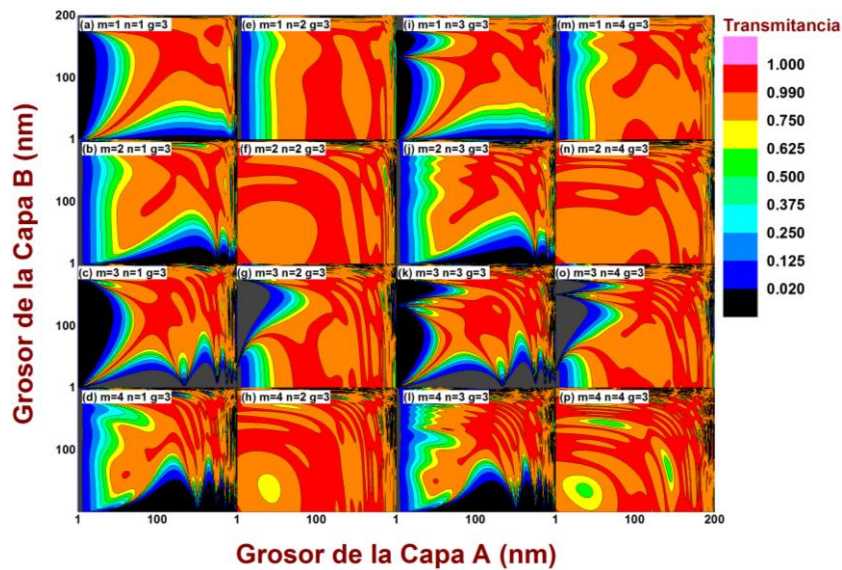


Figura 3-25. Transmitancia $T(d_A, d_B)$ para las ondas TM con un ángulo de $\theta = 60$. Cumpliendo el camino óptico dado por $n_A d_A = n_B d_B = \lambda_0 / 4$, donde $\lambda_0 = 700 \text{ nm}$. El ordenamiento de las capas es de $m=1$ a 4 y $n=1$ a 4 y una generación $g=3$.

Si comparamos los espectros de la Fig. 3-25 con la Fig. 3-21 veremos que en un ángulo de incidencia $\theta = 60$ las zonas de indeterminación son menores para TM de lo que son para TE, además se encuentran en mayor proporción zonas de alta transmitancia en la polarización-p que en la -s.

Los espectros de la Fig. 3-26 nos muestra que no hay zonas de reflectancia y que las regiones de alta transmitancia disminuyeron considerablemente para un ángulo de incidencia $\theta = 70$, las columnas 1 y 3, así como la columna 2 y 4 mantienen esa semejanza.

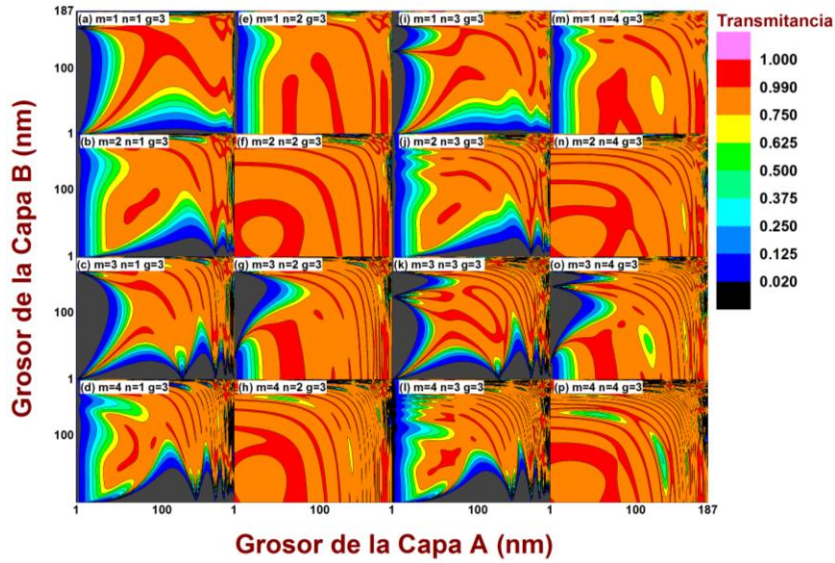


Figura 3-26. Transmitancia $T(d_A, d_B)$ para las ondas TM con un ángulo de $\theta = 70^\circ$. Cumpliendo el camino óptico dado por $n_A d_A = n_B d_B = \lambda_0/4$, donde $\lambda_0 = 700 \text{ nm}$. El ordenamiento de las capas es de $m=1 a 4$ y $n=1 a 4$ y una generación $g=3$.

Comparando la Fig. 3-26 con la figura respectiva para TE (Fig. 3-22) tenemos que para este ángulo de incidencia ($\theta = 70^\circ$), en el espectro de la polarización-s no tenemos regiones de alta transmitancia, caso contrario en el espectro de la onda TM.

Ya que hemos visto el efecto en la transmitancia al variar los dos grosores de las capas que construyen nuestro cristal fotónico cuasiperiódico y aperiódico, además al ir incrementando el número de capas debido a la variación de m y n que generan la secuencia de Fibonacci Generalizado (FG), ya sea para el caso de TE y TM. En la siguiente sección analizaremos la variación del ángulo de incidencia y el cambio en uno de los grosores de las capas del cristal fotónico.

3.8.2 Dependencia del Ángulo de Incidencia [$T(\theta, d_A)$]

Para seguir ampliando el estudio de las multicapas aperiódicas y cuasiperiódicas, analizaremos los espectros de transmitancia presentados en escala de colores para la polarización-s y -p. Los parámetros utilizados fueron, para la capa B se mantendrá constante el índice de refracción de $n_B = 1.55$ cumpliendo el camino óptico definido como $n_B d_B = \lambda_0/4$, donde $\lambda_0 = 700 \text{ nm}$ y se mantendrá también la longitud de onda como $\lambda = 700 \text{ nm}$. Los parámetros que variaremos serán el espesor de la capa A (d_A) que tomara valores de 1 nm hasta 300 nm cumpliendo el camino óptico como $n_A d_A = \lambda_0/4$ y el ángulo de incidencia de $\theta = 0$ a 90° . En la Fig. 3-27 mostramos un conjunto de 16 espectros transmitancia con la siguiente características (a) $m=1, n=1$ y $g=3$, (b) $m=2, n=1$ y $g=3$, (c) $m=3, n=1$ y $g=3$, (d) $m=4, n=1$ y $g=3$, (e) $m=1, n=2$ y $g=3$, (f) $m=2, n=2$ y $g=3$, (g) $m=3, n=2$ y $g=3$, (h) $m=4, n=2$ y $g=3$, (i) $m=1, n=3$ y $g=3$, (j) $m=2, n=3$ y $g=3$, (k) $m=3, n=3$ y $g=3$, (l) $m=4, n=3$ y $g=3$, (m) $m=1, n=4$ y $g=3$, (n) $m=2, n=4$ y $g=3$, (o) $m=3, n=4$ y $g=3$ y (p) $m=4, n=4$ y $g=3$. Nótese las similitudes de los espectros de las columnas uno [Fig. 3-27(a)-(d)] y tres [Fig. 3-27(i)-(l)], así como las columnas dos [Fig.

3-27(e)-(h)] y cuatro [Fig. 3-27(m)-(p)]. Además, cuando las multicapas tienen un orden aperiódico presentan un mayor número de zonas de mayor valor de transmitancia (columnas 2, 3 y 4) en comparación que cuando se ordenan de forma cuasiperiódica.

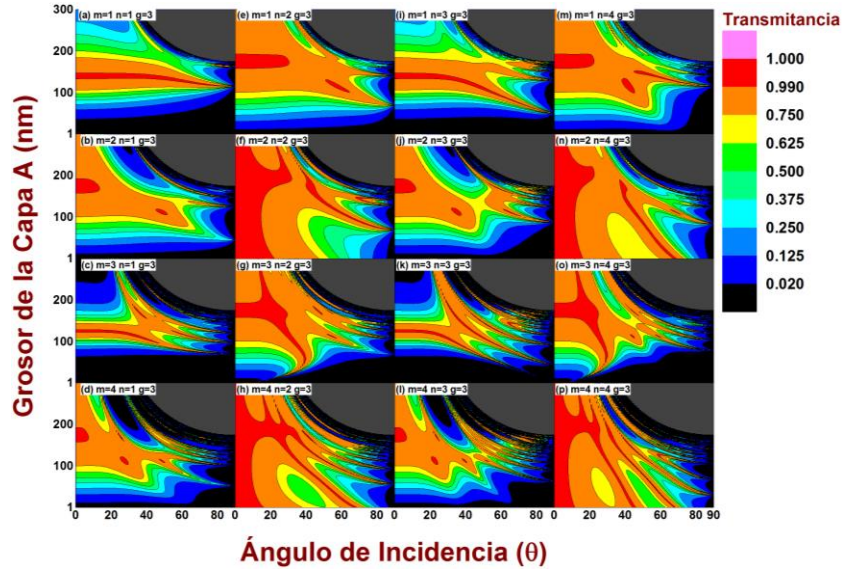


Figura 3-27. Espectro de transmitancia $T(\theta, d_A)$ para la polarización—s, con parámetros de capa B con índice de refracción de $n_B = 1.55$ con un camino óptico de $n_B d_B = \lambda_0/4$, donde $\lambda_0 = 700 \text{ nm}$ y una la longitud de onda de $\lambda = 700 \text{ nm}$. Se variara el espesor de la capa A (d_A) tomando valores de 1 nm hasta 300 nm , cumpliendo un camino óptico de $n_A d_A = \lambda_0/4$ y del ángulo de incidencia de $\theta = 0$ a 90 , todos los espectros se presentan para una generación $g = 3$.

Obsérvese también que cuando las multicapas se ordenan siguiendo las secuencias de FG presentadas en las columnas pares, el espectro tiene zonas más amplias de alta transmitancia (región roja).

Los espectros de la figura anterior fueron realizados para una generación $g = 3$, donde el mayor número de capas se encuentra cuando $m = 4$ y $n = 4$ que consta de 20 capas, ahora vamos analizar el efecto en el espectro de transmitancia si el sistema tiene al menos 100 capas. Estas multicapas serán ordenadas siguiendo la secuencia de FG para diferentes generaciones en la Fig. 3-28 tales como (a) $m = 1, n = 1$ y $g = 11$, (b) $m = 2, n = 1$ y $g = 6$, (c) $m = 3, n = 1$ y $g = 5$, (d) $m = 4, n = 1$ y $g = 4$, (e) $m = 1, n = 2$ y $g = 8$, (f) $m = 2, n = 2$ y $g = 6$, (g) $m = 3, n = 2$ y $g = 5$, (h) $m = 4, n = 2$ y $g = 4$, (i) $m = 1, n = 3$ y $g = 7$, (j) $m = 2, n = 3$ y $g = 5$, (k) $m = 3, n = 3$ y $g = 5$, (l) $m = 4, n = 3$ y $g = 4$, (m) $m = 1, n = 4$ y $g = 6$, (n) $m = 2, n = 4$ y $g = 5$, (o) $m = 3, n = 4$ y $g = 5$ y (p) $m = 4, n = 4$ y $g = 4$.

Obsérvese la reducción de las zonas de alta transmitancia al incrementarse el número de capas y el incremento de las regiones con alta reflectancia (color negro), más aún, si el ordenamiento de las capas es aperiódico todavía conserva un mayor número de zonas de transmitancia cercanas a uno (zona roja). Además, alrededor del ángulo de incidencia $\theta = 40$ todavía algunos espectros presentan pequeñas regiones con $T \approx 1$ pero solo para sistemas aperiódicos, en cambio cuando el ordenamiento es cuasiperiódico (columna uno) esto no sucede.

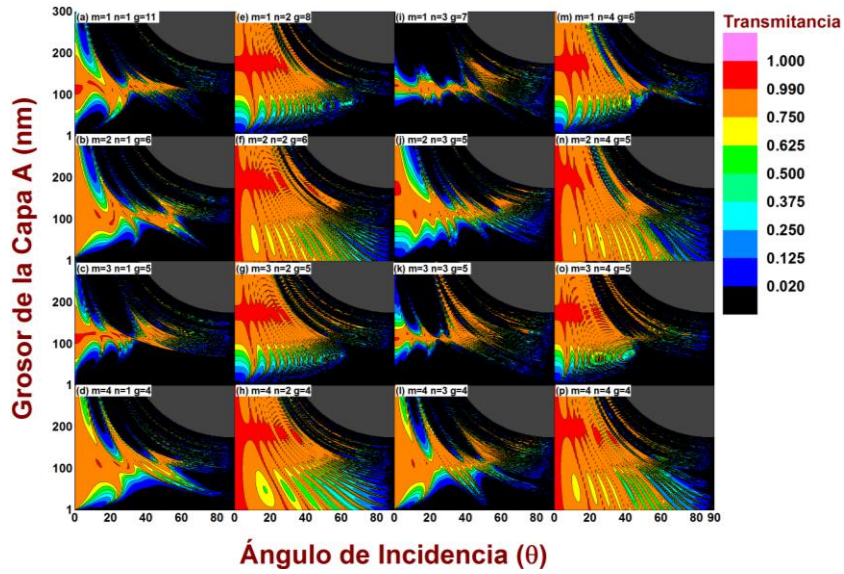


Figura 3-28. Espectro de transmitancia $T(\theta, d_A)$ para la polarización-s, con parámetro de capa B con índice de refracción de $n_B = 1.55$ con un camino óptico de $n_B d_B = \lambda_0/4$, donde $\lambda_0 = 700 \text{ nm}$ y una la longitud de onda de $\lambda = 700 \text{ nm}$. Se variara el espesor de la capa A (d_A) tomando valores de 1 nm hasta 300 nm , cumpliendo un camino óptico de $n_A d_A = \lambda_0/4$ y del ángulo de incidencia (de $\theta = 0$ a 90), todos los espectros se presentan para generaciones que cumplan una construcción alrededor de 100 capas en un cristal fotónico aperiódico y cuasiperiódico.

Con el fin de completar este estudio, presentamos el mismo análisis del efecto en el espectro de transmitancia que tiene el variar el grosor de la capa A y el ángulo de incidencia solo que para polarización-p.

En la Fig. 3-29 se muestran los espectros de transmitancia para ondas transversales magnéticas (TM) tomando los mismos parámetros que en la Fig. 3-27. (a) $m=1, n=1$ y $g=3$, (b) $m=2, n=1$ y $g=3$, (c) $m=3, n=1$ y $g=3$, (d) $m=4, n=1$ y $g=3$, (e) $m=1, n=2$ y $g=3$, (f) $m=2, n=2$ y $g=3$, (g) $m=3, n=2$ y $g=3$, (h) $m=4, n=2$ y $g=3$, (i) $m=1, n=3$ y $g=3$, (j) $m=2, n=3$ y $g=3$, (k) $m=3, n=3$ y $g=3$, (l) $m=4, n=3$ y $g=3$, (m) $m=1, n=4$ y $g=3$, (n) $m=2, n=4$ y $g=3$, (o) $m=3, n=4$ y $g=3$ y (p) $m=4, n=4$ y $g=3$. Nótese como en los espectros de las Fig. 3-29 (a) e (i) el ordenamiento de las multicapas es fundamental ya que al ser la (a) cuasiperiódica presenta una pequeña zona de alta transmitancia con respecto a un ordenamiento aperiódico [(i)] que casi toda su zona permitida es de alta transmitancia. Además en general los espectros de transmitancia de la polarización-p tienen más regiones de alta transmitancia con respecto a las ondas transversales eléctricas (TE).

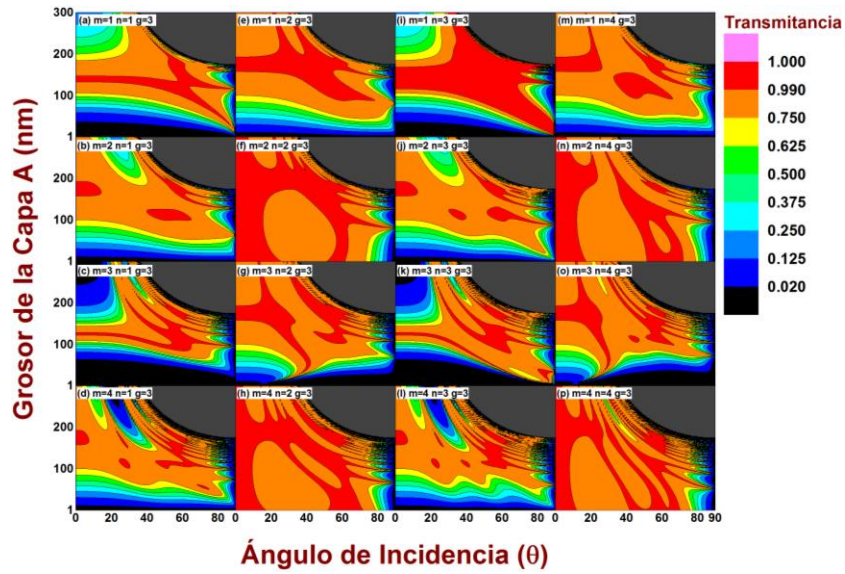


Figura 3-29. Espectro de transmitancia $T(\theta, d_A)$ para la polarización-p, con parámetro de capa B con índice de refracción de $n_B = 1.55$ con un camino óptico de $n_B d_B = \lambda_0/4$, donde $\lambda_0 = 700 \text{ nm}$ y una la longitud de onda de $\lambda = 700 \text{ nm}$. Se variara el espesor de la capa A (d_A) tomando valores de 1 nm hasta 300 nm , cumpliendo un camino óptico de $n_A d_A = \lambda_0/4$ y del ángulo de incidencia de $\theta = 0$ a 90 , todos los espectros se presentan para una generación $g = 3$.

Como los experimento se realizan alrededor de cientos de capas, analizamos el efecto en el espectro de transmitancia para la polarización-p en sistemas variando la generación que depende de m y n con el fin de tener más de cien capas. Los parámetros utilizados son los mismos que en la Fig. 3-28. Los espectros de transmitancia se muestran en la Fig. 3-30 para (a) $m=1, n=1$ y $g=11$, (b) $m=2, n=1$ y $g=6$, (c) $m=3, n=1$ y $g=5$, (d) $m=4, n=1$ y $g=4$, (e) $m=1, n=2$ y $g=8$, (f) $m=2, n=2$ y $g=6$, (g) $m=3, n=2$ y $g=5$, (h) $m=4, n=2$ y $g=4$, (i) $m=1, n=3$ y $g=7$, (j) $m=2, n=3$ y $g=5$, (k) $m=3, n=3$ y $g=5$, (l) $m=4, n=3$ y $g=4$, (m) $m=1, n=4$ y $g=6$, (n) $m=2, n=4$ y $g=5$, (o) $m=3, n=4$ y $g=5$ y (p) $m=4, n=4$ y $g=4$. Nótese como los espectros que cumplen un ordenamiento cuasiperiódico en la multicapa son similares entre ellos. Además, la zona indeterminada no depende del número de capas, dado que es la misma para cualquier generación y ordenamiento de las capas. También, se observa un incremento de las regiones con alta reflectancia en todos los espectros en comparación con la Fig. 3-29. Sin embargo, podemos apreciar que alrededor del ángulo incidencia $\theta = 60$ se encuentra repetidamente en todos los espectros alta transmitancia.

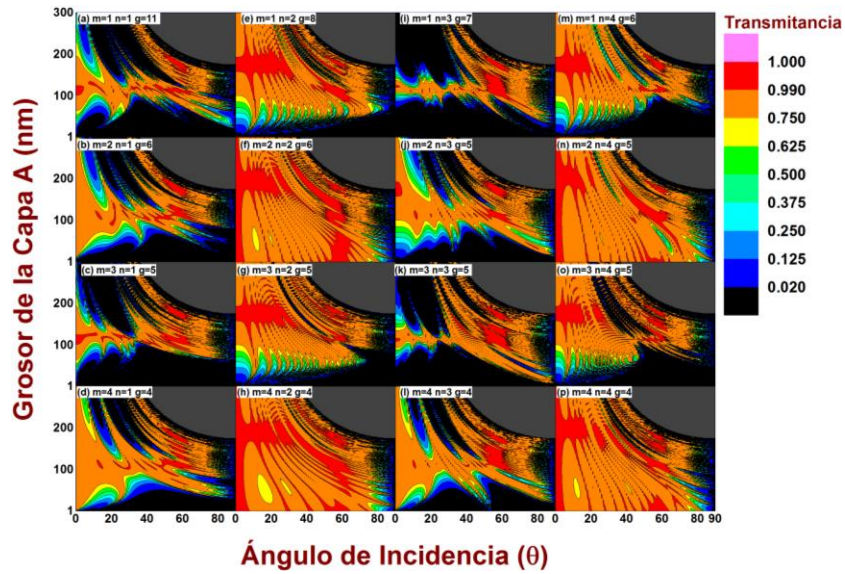


Figura 3-30. Espectro de transmitancia $T(\theta, d_A)$ para la polarización—p, con parámetro de capa B con índice de refracción de $n_B = 1.55$ con un camino óptico de $n_B d_B = \lambda_0/4$, donde $\lambda_0 = 700 \text{ nm}$ y una la longitud de onda de $\lambda = 700 \text{ nm}$. Se variara el espesor de la capa A (d_A) tomando valores de 1 nm hasta 300 nm , cumpliendo un camino óptico de $n_A d_A = \lambda_0/4$ y del ángulo de incidencia de $\theta = 0$ a 90 , todos los espectros se presentan para generaciones que cumplan una construcción alrededor de 100 capas en un cristal fotónico aperiódico y cuasiperiódico.

Ya hemos visto como son los espectros cuando los grosores y los índices de refracción de las capas cumplen el camino óptico, aunque se varié al menos uno de los grosores. ¿Pero qué pasaría si uno de estos grosores que variamos no cumple el camino óptico propuesto? A continuación veremos los espectros de transmitancia (Fig. 3-31) considerando los siguientes parámetros, para la capa B se mantendrá constante el índice de refracción de $n_B = 1.55$ cumpliendo el camino óptico definido como $n_B d_B = \lambda_0/4$, donde $\lambda_0 = 700 \text{ nm}$ y se mantendrá también la longitud de onda como $\lambda = 700 \text{ nm}$. Los parámetros que variamos fueron el espesor de la capa A (d_A) que tomara valores de 1 nm hasta 300 nm con un índice de refracción $n_A = 2.3$ pero no cumplirá el camino óptico y el ángulo de incidencia de $\theta = 0$ a 90 . Las multicapas se ordenan cumpliendo la secuencia de Fibonacci Generalizada de la forma siguiente (a) $m=1, n=1$ y $g=3$, (b) $m=2, n=1$ y $g=3$, (c) $m=3, n=1$ y $g=3$, (d) $m=4, n=1$ y $g=3$, (e) $m=1, n=2$ y $g=3$, (f) $m=2, n=2$ y $g=3$, (g) $m=3, n=2$ y $g=3$, (h) $m=4, n=2$ y $g=3$, (i) $m=1, n=3$ y $g=3$, (j) $m=2, n=3$ y $g=3$, (k) $m=3, n=3$ y $g=3$, (l) $m=4, n=3$ y $g=3$, (m) $m=1, n=4$ y $g=3$, (n) $m=2, n=4$ y $g=3$, (o) $m=3, n=4$ y $g=3$ y (p) $m=4, n=4$ y $g=3$. Se observa en todos los espectros de transmitancia que la región de alta reflectancia se encuentra en el intervalo que forman los ángulos de incidencia $\theta = 80$ a 90 , se aprecia que los picos se adelgazan en cuanto aumentan los números enteros m y n para el ordenamiento de las capas que siguen la secuencia de Fibonacci generalizada.

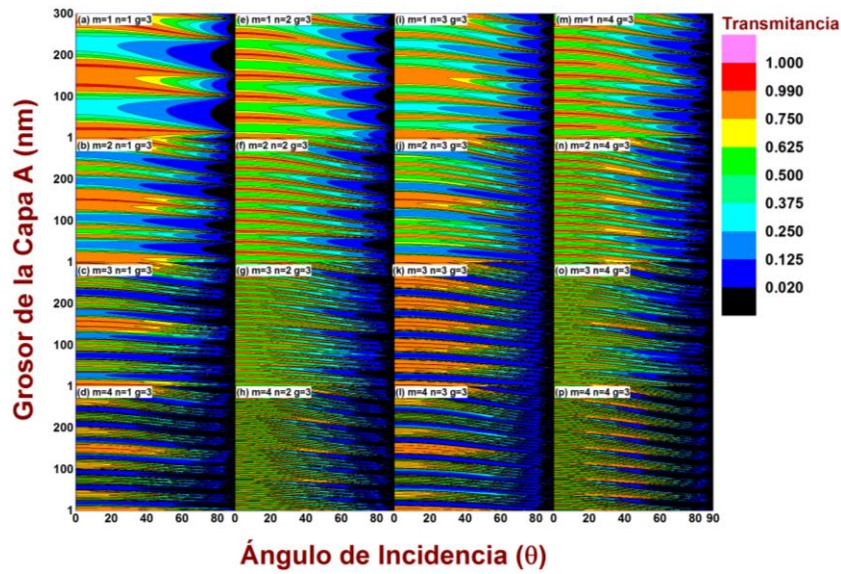


Figura 3-31. Espectro de transmitancia $T(\theta, d_A)$ para la polarización—s, con parámetro de capa B con índice de refracción de $n_B = 1.55$ con un camino óptico de $n_B d_B = \lambda_0/4$, donde $\lambda_0 = 700 \text{ nm}$ y una la longitud de onda de $\lambda = 700 \text{ nm}$. Se variara el espesor de la capa A (d_A) tomando valores de 1 nm hasta 300 nm , pero no se cumple el camino óptico de $n_A d_A = \lambda_0/4$ y del ángulo de incidencia de $\theta = 0$ a 90 , todos los espectros se presentan para una generación $g = 3$.

En la Fig. 3-32 se aprecia los espectros de transmitancia para la polarización-s en diferentes generaciones, tal que el número de multicapa sea mayor a cien, se toman los mismos parámetros que en la Fig. 3-31, a excepción de las secuencias (a) $m = 1, n = 1$ y $g = 11$, (b) $m = 2, n = 1$ y $g = 6$, (c) $m = 3, n = 1$ y $g = 5$, (d) $m = 4, n = 1$ y $g = 4$, (e) $m = 1, n = 2$ y $g = 8$, (f) $m = 2, n = 2$ y $g = 6$, (g) $m = 3, n = 2$ y $g = 5$, (h) $m = 4, n = 2$ y $g = 4$, (i) $m = 1, n = 3$ y $g = 7$, (j) $m = 2, n = 3$ y $g = 5$, (k) $m = 3, n = 3$ y $g = 5$, (l) $m = 4, n = 3$ y $g = 4$, (m) $m = 1, n = 4$ y $g = 6$, (n) $m = 2, n = 4$ y $g = 5$, (o) $m = 3, n = 4$ y $g = 5$ y (p) $m = 4, n = 4$ y $g = 4$. Nótese que al incrementar el número de capas los picos de los espectros se adelgazan, obteniendo solo zonas con diferentes valores de transmitancia (escala de colores) y se reduce las regiones de alta transmitancia (0.99 a 1.0), debido a que son valores puntuales.

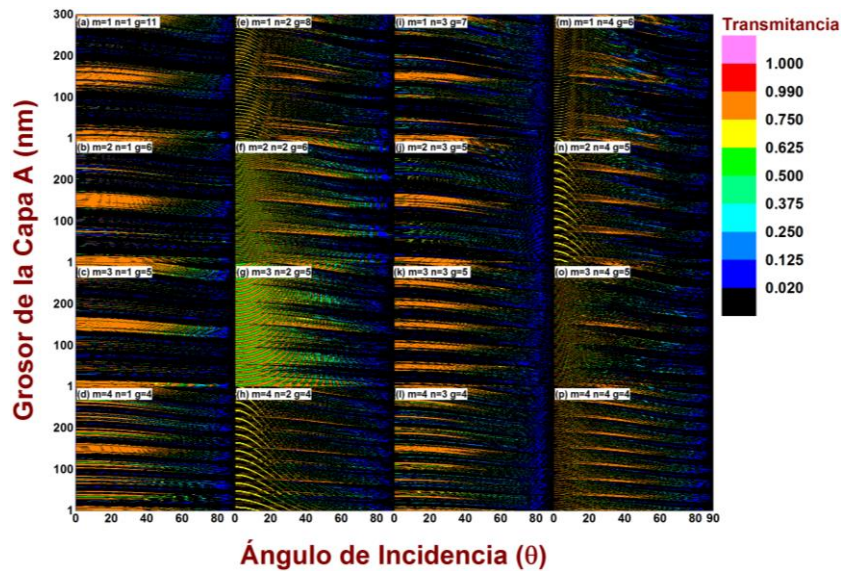


Figura 3-32. Espectro de transmitancia $T(\theta, d_A)$ para la polarización—s, con parámetro de capa B con índice de refracción de $n_B = 1.55$ con un camino óptico de $n_B d_B = \lambda_0/4$, donde $\lambda_0 = 700 \text{ nm}$ y una longitud de onda de $\lambda = 700 \text{ nm}$. Se variara el espesor de la capa A (d_A) tomando valores de 1 nm hasta 300 nm , pero no se cumple el camino óptico de $n_A d_A = \lambda_0/4$ y del ángulo de incidencia de $\theta = 0$ a 90 , todos los espectros se presentan para generaciones que cumplan una construcción alrededor de 100 capas en un cristal fotónico aperiódico y cuasiperiódico.

En la Fig. 3-33 se muestran espectros de transmitancia para las ondas transversales magnéticas (TM), usando los mismos parámetros que en la Fig. 3-31 y siguiendo los ordenamientos de Fibonacci Generalizado mostrados a continuación (a) $m=1, n=1$ y $g=3$, (b) $m=2, n=1$ y $g=3$, (c) $m=3, n=1$ y $g=3$, (d) $m=4, n=1$ y $g=3$, (e) $m=1, n=2$ y $g=3$, (f) $m=2, n=2$ y $g=3$, (g) $m=3, n=2$ y $g=3$, (h) $m=4, n=2$ y $g=3$, (i) $m=1, n=3$ y $g=3$, (j) $m=2, n=3$ y $g=3$, (k) $m=3, n=3$ y $g=3$, (l) $m=4, n=3$ y $g=3$, (m) $m=1, n=4$ y $g=3$, (n) $m=2, n=4$ y $g=3$, (o) $m=3, n=4$ y $g=3$ y (p) $m=4, n=4$ y $g=3$. Observemos que cuando se incrementa el ordenamiento de las multicapas los picos de los espectros se adelgazan. También se puede apreciar que el valor de la transmitancia que predomina en los espectros es el del intervalo 0.75 a 0.99 (color naranja), además hay zonas de alta transmitancia alrededor del ángulo de incidencia $\theta = 60$ para todos los espectros (color rojo).

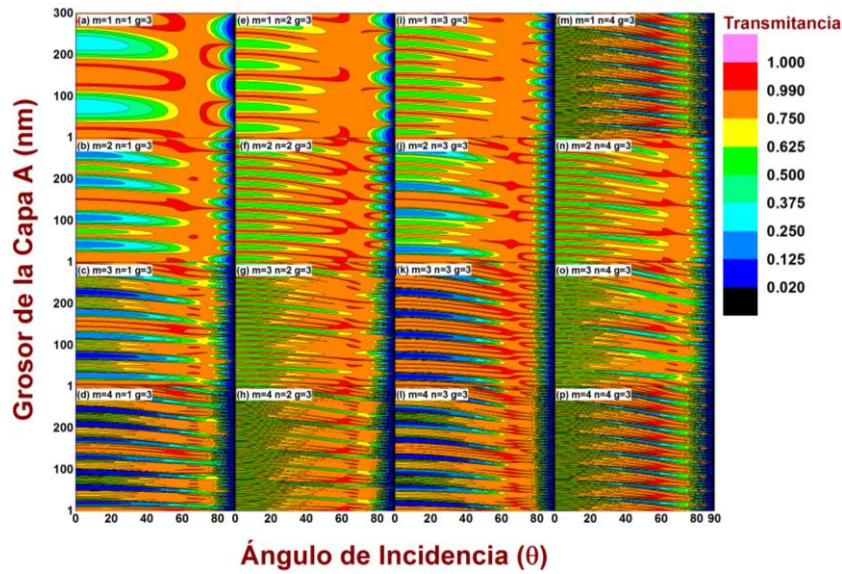


Figura 3-33. Espectro de transmitancia $T(\theta, d_A)$ para la polarización-p, con parámetro de capa B con índice de refracción de $n_B = 1.55$ con un camino óptico de $n_B d_B = \lambda_0/4$, donde $\lambda_0 = 700 \text{ nm}$ y una longitud de onda de $\lambda = 700 \text{ nm}$. Se variara el espesor de la capa A (d_A) tomando valores de 1 nm hasta 300 nm , pero no se cumple el camino óptico de $n_A d_A = \lambda_0/4$ y del ángulo de incidencia de $\theta = 0$ a 90 , todos los espectros se presentan para una generación $g = 3$.

Finalmente, para este caso presentamos los espectros de transmitancia para la polarización-p en diferentes generaciones, tal que el número de multicapa sea mayor a cien (En la Fig. 3-34), se toman los mismos parámetros que en la Fig. 3-31, a excepción de las secuencias (a) $m = 1, n = 1$ y $g = 11$, (b) $m = 2, n = 1$ y $g = 6$, (c) $m = 3, n = 1$ y $g = 5$, (d) $m = 4, n = 1$ y $g = 4$, (e) $m = 1, n = 2$ y $g = 8$, (f) $m = 2, n = 2$ y $g = 6$, (g) $m = 3, n = 2$ y $g = 5$, (h) $m = 4, n = 2$ y $g = 4$, (i) $m = 1, n = 3$ y $g = 7$, (j) $m = 2, n = 3$ y $g = 5$, (k) $m = 3, n = 3$ y $g = 5$, (l) $m = 4, n = 3$ y $g = 4$, (m) $m = 1, n = 4$ y $g = 6$, (n) $m = 2, n = 4$ y $g = 5$, (o) $m = 3, n = 4$ y $g = 5$ y (p) $m = 4, n = 4$ y $g = 4$. Aquí también podemos observar que solo hay pequeñas zonas de alta transmitancia alrededor del ángulo de incidencia $\theta = 60$, las cuales no se presentan en la Fig. 3-32.

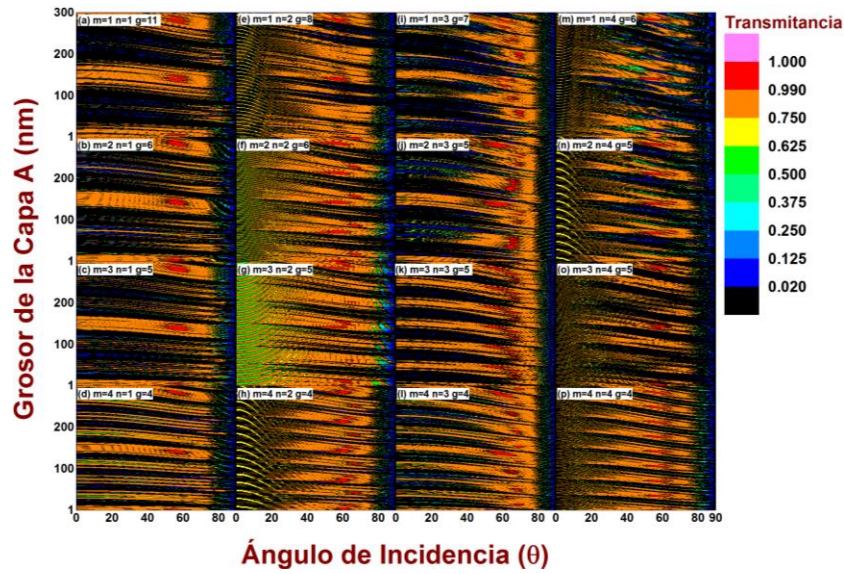


Figura 3-34. Espectro de transmitancia $T(\theta, d_A)$ para la polarización—p, con parámetro de capa B con índice de refracción de $n_B = 1.55$ con un camino óptico de $n_B d_B = \lambda_0/4$, donde $\lambda_0 = 700 \text{ nm}$ y una longitud de onda de $\lambda = 700 \text{ nm}$. Se variara el espesor de la capa A (d_A) tomando valores de 1 nm hasta 300 nm , pero no se cumple el camino óptico de $n_A d_A = \lambda_0/4$ y del ángulo de incidencia de $\theta = 0$ a 90 , todos los espectros se presentan para generaciones que cumplan una construcción alrededor de 100 capas en un cristal fotónico aperiódico y cuasiperiódico.

En la sección anterior vimos el efecto en la transmitancia al variar uno de los grosores de las capas que construyen nuestro cristal fotónico cuasiperiódico y aperiódico, además del ángulo de incidencia ya sea para el caso de TE y TM. En la siguiente sección analizaremos la variación del ángulo de incidencia y la frecuencia normalizada.

3.8.3 Variación de la Frecuencia [$T(\theta, \omega/\omega_0)$]

Hemos visto hasta ahora como es afectado el espectro de transmitancia al hacer variar los parámetros como $T(d_A, d_B)$ y $T(d_A, \theta)$, en esta sección veremos cómo influye cuando variamos el ángulo de incidencia versus la frecuencia normalizada [$T(\theta, \omega/\omega_0)$] en el espectro de transmitancia (escala de colores) de las multicapas aperiódicas y cuasiperiódicas para la polarización—s y —p. Los parámetros que se utilizarán para la Fig. 3-35 serán que la capa A y B mantendrán un índice de refracción constante de $n_A = 2.3$ y $n_B = 1.55$ respectivamente, cumpliendo un camino óptico definido como $n_A d_A = n_B d_B = \lambda_0/4$, donde $\lambda_0 = 700 \text{ nm}$. Los parámetros a variar serán la frecuencia normalizada de $\omega/\omega_0 = 0$ a 2 y el ángulo de incidencia de $\theta = 0$ a 90 . Todos estos parámetros serán aplicados a las siguientes secuencias para la polarización—s (a) $m=1, n=1$ y $g=3$, (b) $m=2, n=1$ y $g=3$, (c) $m=3, n=1$ y $g=3$, (d) $m=4, n=1$ y $g=3$, (e) $m=1, n=2$ y $g=3$, (f) $m=2, n=2$ y $g=3$, (g) $m=3, n=2$ y $g=3$, (h) $m=4, n=2$ y $g=3$, (i) $m=1, n=3$ y $g=3$, (j) $m=2, n=3$ y $g=3$, (k) $m=3, n=3$ y $g=3$, (l) $m=4, n=3$ y $g=3$, (m) $m=1, n=4$ y $g=3$, (n) $m=2, n=4$ y $g=3$, (o) $m=3, n=4$ y $g=3$ y (p) $m=4, n=4$ y $g=3$. Nótese que en cada espectro muestra alta reflectancia entre los ángulos $\theta = 80$ y 90 de forma constante pero mientras más crece el ordenamiento más zonas de alta reflectancia

aparecen, el número de picos que tiene cada espectro nos indica el número de interfaces que tiene la multicapa, por ejemplo para el ordenamiento $m=1, n=2$ tenemos la secuencia VABBAAV y se tienen 6 interfaces y en la Fig. 3-35 (e) se observan 6 picos con valores de transmitancia distintos de cero, este fenómeno se presenta en los espectros de transmitancia para cualquier ordenamiento de capas que siguen las secuencias de Fibonacci generalizada con generación $g=3$.

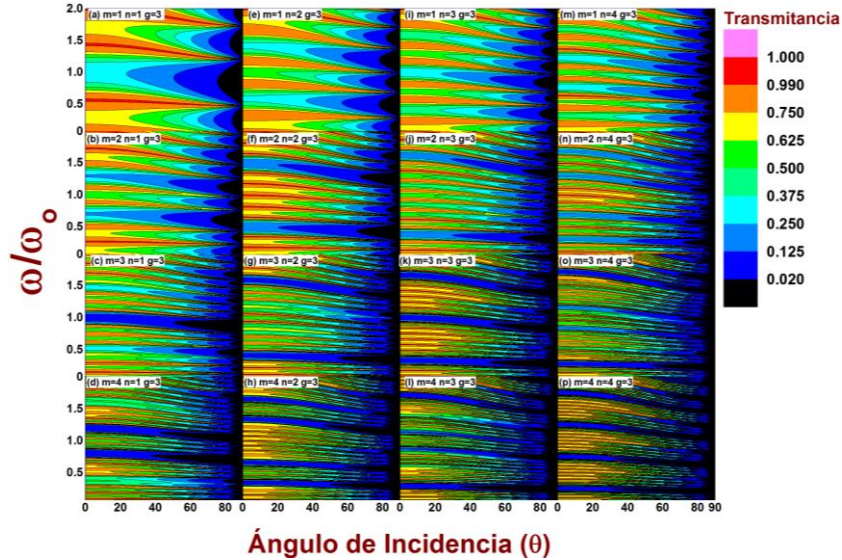


Figura 3-35. Espectro de transmitancia $T(\theta, \omega/\omega_0)$ para las onda transversal eléctrica (TE), con parámetro de capa A y capa B con índice de refracción de $n_A=2.3$ y $n_B=1.55$ respectivamente, con un camino óptico de $n_A d_A = n_B d_B = \lambda_0/4$, donde $\lambda_0 = 700 \text{ nm}$. Se variara el ángulo de incidencia de $\theta=0$ a 90 y también se varia la normalización de la frecuencia. Los espectros se presentan para generaciones de $g=3$.

Se ha visto como es el espectro de transmitancia para una generación $g=3$, por lo que ahora se analizara con los mismos parámetros y la misma polarización para generación que contenga al menos 100 capas (Fig. 3-36). Las generaciones que cumplen este requisito no son iguales para todos los ordenamientos de las secuencias por lo que los enlistaremos a continuación (a) $m=1, n=1$ y $g=11$, (b) $m=2, n=1$ y $g=6$, (c) $m=3, n=1$ y $g=5$, (d) $m=4, n=1$ y $g=4$, (e) $m=1, n=2$ y $g=8$, (f) $m=2, n=2$ y $g=6$, (g) $m=3, n=2$ y $g=5$, (h) $m=4, n=2$ y $g=4$, (i) $m=1, n=3$ y $g=7$, (j) $m=2, n=3$ y $g=5$, (k) $m=3, n=3$ y $g=5$, (l) $m=4, n=3$ y $g=4$, (m) $m=1, n=4$ y $g=6$, (n) $m=2, n=4$ y $g=5$, (o) $m=3, n=4$ y $g=5$ y (p) $m=4, n=4$ y $g=4$. Nótese que es difícil apreciar la observación que se hizo para la Fig. 3-35 con relación a los picos en el espectro y las interfaces. Cuando aumentamos el número de capas las zonas de alta reflectancia se incrementan y las zonas de transmitancia cercanas a uno se encuentran de manera puntual.

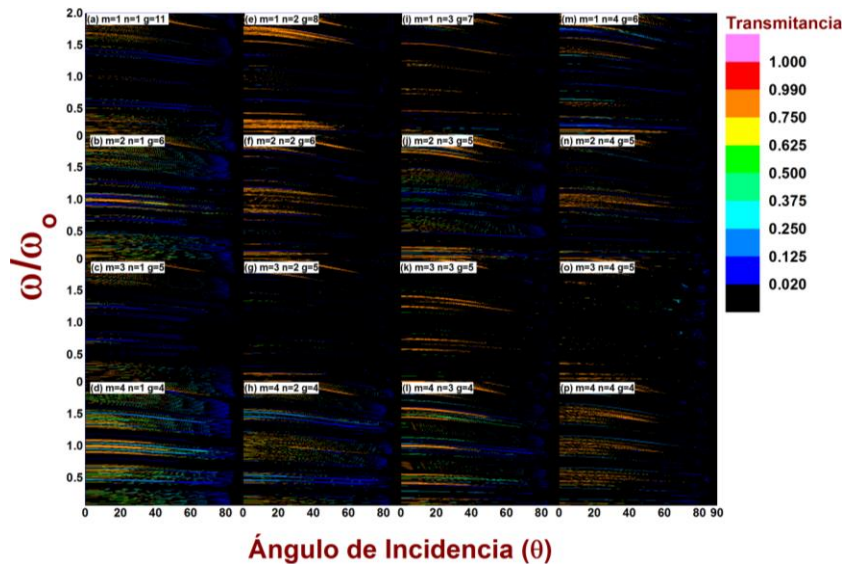


Figura 3-36. Espectro de transmitancia $T(\theta, \omega/\omega_0)$ para las onda transversal eléctrica (TE), con parámetro de capa A y capa B con índice de refracción de $n_A = 2.3$ y $n_B = 1.55$ respectivamente, con un camino óptico de $n_A d_A = n_B d_B = \lambda_0/4$, donde $\lambda_0 = 700 \text{ nm}$. Se variara el ángulo de incidencia de $\theta = 0$ a 90 y también se varia la normalización de la frecuencia. Los espectros se presentan para generaciones que cumplan una construcción alrededor de 100 capas en un cristal fotónico aperiódico y cuasiperiódico.

Los espectros de transmitancia de las Fig.3-35 y Fig. 3-36 están realizadas para una polarización–s, por lo que para terminar este tema nos faltaría tomar los mismos parámetros y aplicarlos para las ondas transversales magnéticas. En la Fig. 3-37 tenemos los espectros de transmitancia para la polarización–p con los mismos parámetros que en la Fig. 3-35 con la siguientes secuencias (a) $m = 1, n = 1$ y $g = 3$, (b) $m = 2, n = 1$ y $g = 3$, (c) $m = 3, n = 1$ y $g = 3$, (d) $m = 4, n = 1$ y $g = 3$, (e) $m = 1, n = 2$ y $g = 3$, (f) $m = 2, n = 2$ y $g = 3$, (g) $m = 3, n = 2$ y $g = 3$, (h) $m = 4, n = 2$ y $g = 3$, (i) $m = 1, n = 3$ y $g = 3$, (j) $m = 2, n = 3$ y $g = 3$, (k) $m = 3, n = 3$ y $g = 3$, (l) $m = 4, n = 3$ y $g = 3$, (m) $m = 1, n = 4$ y $g = 3$, (n) $m = 2, n = 4$ y $g = 3$, (o) $m = 3, n = 4$ y $g = 3$ y (p) $m = 4, n = 4$ y $g = 3$. Se observa la misma relación (Fig. 3-37) de las interfaces con los picos del espectro que se muestran en la Fig. 3-35 (TE), solo que ahora existe un mayor número de zonas de transmitancia (color naranja) y se presentan más zonas con alta transmitancia. Los valores del ángulo de incidencia donde se presenta la alta reflectancia aparecen alrededor de $\theta \approx 90$. En la mayoría de los espectros las zonas de alta transmitancia se presentan de manera constante en un rango de ángulo de incidencia entre $\theta = 50$ y 70 .

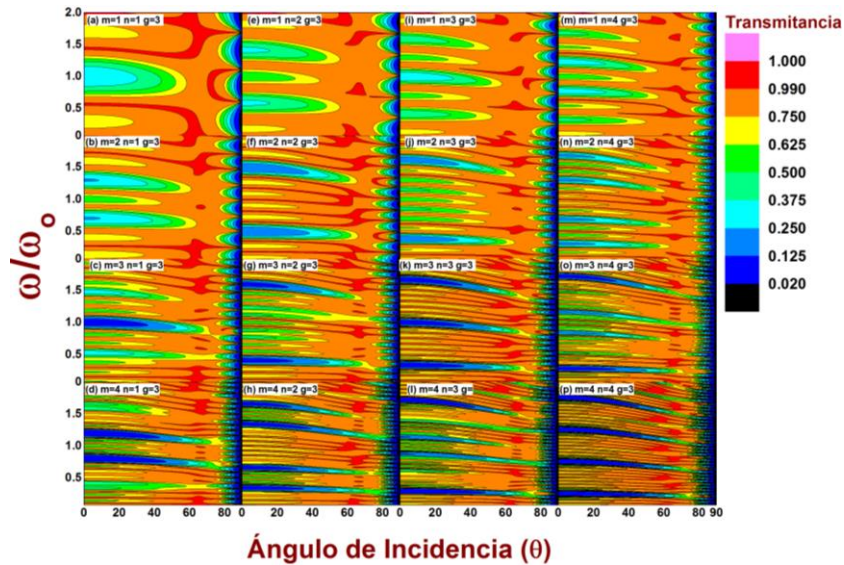


Figura 3-37. Espectro de transmitancia $T(\theta, \omega/\omega_0)$ para las onda transversal magnética (TM), con parámetro de capa A y capa B con índice de refracción de $n_A=2.3$ y $n_B=1.55$ respectivamente, con un camino óptico de $n_A d_A = n_B d_B = \lambda_0/4$, donde $\lambda_0 = 700 \text{ nm}$. Se variara el ángulo de incidencia de $\theta=0$ a 90 y también se varia la normalización de la frecuencia. Los espectros se presentan para generaciones de $g=3$.

En la Fig. 3-38 tenemos los espectros de transmisión de la polarización-p para secuencias que tienen alrededor de 100 capas y con los mismos parámetros que en la Fig. 3-35, el ordenamiento se presenta de la siguiente manera (a) $m=1, n=1$ y $g=11$, (b) $m=2, n=1$ y $g=6$, (c) $m=3, n=1$ y $g=5$, (d) $m=4, n=1$ y $g=4$, (e) $m=1, n=2$ y $g=8$, (f) $m=2, n=2$ y $g=6$, (g) $m=3, n=2$ y $g=5$, (h) $m=4, n=2$ y $g=4$, (i) $m=1, n=3$ y $g=7$, (j) $m=2, n=3$ y $g=5$, (k) $m=3, n=3$ y $g=5$, (l) $m=4, n=3$ y $g=4$, (m) $m=1, n=4$ y $g=6$, (n) $m=2, n=4$ y $g=5$, (o) $m=3, n=4$ y $g=5$ y (p) $m=4, n=4$ y $g=4$. Es difícil apreciar la relación de las interfaces con el número de picos en todos los espectros, pero aunque aumentamos el número de capas la zona de alta transmitancia se siguen preservando en un rango de ángulo de incidencia de entre $\theta=50-70$, pero no en todas las frecuencias y las zonas de alta reflectancia crecen al incrementarse el número de capas.

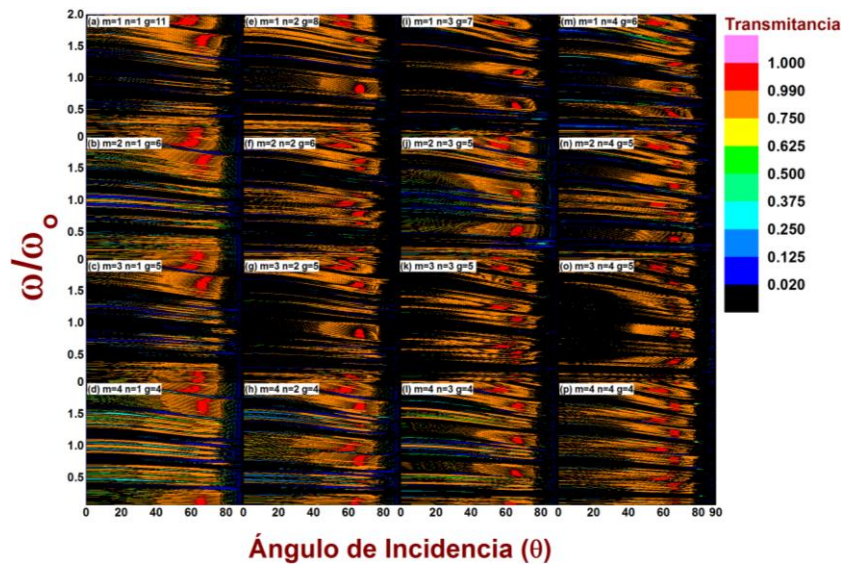


Figura 3-38. Espectro de transmitancia $T(\theta, \omega/\omega_0)$ para las onda transversal magnético (TM), con parámetro de capa A y capa B con índice de refracción de $n_A = 2.3$ y $n_B = 1.55$ respectivamente, con un camino óptico de $n_A d_A = n_B d_B = \lambda_0/4$, donde $\lambda_0 = 700 \text{ nm}$. Se variara el ángulo de incidencia de $\theta = 0$ a 90 y también se varia la normalización de la frecuencia. Los espectros se presentan para generaciones que cumplan una construcción alrededor de 100 capas en un cristal fotónico aperiódico y cuasiperiódico.

Al comparar la Fig. 3-38 con la Fig. 3-36 se observa que el espectro para las ondas transversales magnéticas mantiene más zonas de alta transmitancia con respecto a los espectros de polarización TE que se encuentra de manera puntual.

Podemos concluir que hay una relación entre el número de interfaces de cada secuencia con la de los picos que aparecen en los espectros de transmitancia $T(\theta, \omega/\omega_0)$, que los espectros de TM presentan alta transmitancia entre los ángulos de incidencia $\theta = 50$ a 70 de manera muy recurrente y que los espectros que tienen más regiones de alta transmitancia aunque se presentan en las dos polarizaciones, se encuentra en mayor proporción es en TM.

Hemos hablado mucho del camino óptico pero ¿qué tanto afecta esta relación en nuestros espectros? En la siguiente sección presentaremos espectros de transmitancia en las cuales se puede apreciar estos efectos y en donde se presenta más zonas de alta transmitancia.

3.8.4 Variación del Camino Óptico

Para empezar el estudio del camino óptico mostraremos espectros de transmitancia en dos dimensiones para darnos una idea que tanto impacta el cambio del camino óptico en estos espectros. En la Fig. 3-39 se muestra la Transmitancia en función de la Frecuencia angular normalizada con los siguientes parámetros, el ángulo de incidencia tiene un valor de cero ($\theta = 0$), el índice de refracción para la capa A es $n_A = 2.3$ y el de la capa B es $n_B = 1.55$, los ordenamientos están descritos de la siguiente forma (a) $m=1, n=1$ y $g=6$, (b) $m=2, n=1$ y $g=4$, (c) $m=3, n=1$ y $g=3$, (d) $m=4, n=1$ y $g=3$, (e) $m=1, n=2$ y $g=4$, (f) $m=2, n=2$ y $g=3$, (g) $m=3, n=2$ y $g=3$, (h) $m=4, n=2$ y $g=3$, (i) $m=1, n=3$ y $g=4$,

(j) $m=2, n=3$ y $g=3$, (k) $m=3, n=3$ y $g=3$, (l) $m=4, n=3$ y $g=3$, (m) $m=1, n=4$ y $g=4$, (n) $m=2, n=4$ y $g=3$, (o) $m=3, n=4$ y $g=3$ y (p) $m=4, n=4$ y $g=3$. Estas generaciones se eligieron para que se puedan apreciar las diferencias entre los tres caminos ópticos elegidos. Los espectros que tiene la línea negra tiene un camino óptico de $n_A d_A = n_B d_B = \lambda_0/4$, en cambio para los espectros de color rojo se tiene que $n_A d_A = \lambda_0/4.5$ y $n_B d_B = \lambda_0/4$ y finalmente los espectros de color verde tiene un camino óptico de $n_B d_B = \lambda_0/4.5$, tenemos que $\lambda_0 = 700 \text{ nm}$. Se observa que el espectro con el camino libre igual se encuentra rodeada por arriba del espectro de color verde y por debajo del espectro de color rojo, solo que en algunos sistemas nótese que existen regiones donde esto no pasa como por ejemplo en la secuencia $m=2$ y $n=1$, esto se debe a la asimetría de los caminos ópticos. Nótese que en la diagonal exceptuando la $m=1$ y $n=1$ tiene una tendencia periódica en los espectros de transmitancia. Recordemos que los espectros de transmitancia de la polarización-s y -p son iguales para un ángulo de incidencia $\theta=0$.

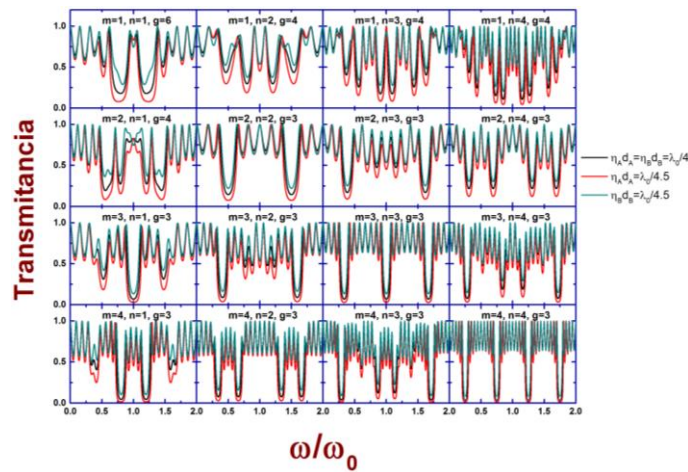


Figura 3-39. Transmitancia versus la Frecuencia angular para TE y TM con los siguientes parámetros; el Angulo de incidencia tiene un valor de cero ($\theta=0$), el índice de refracción para la capa A es $n_A=2.3$ y el de la capa B es $n_B=1.55$, también consideramos una longitud de onda $\lambda_0=700 \text{ nm}$, los ordenamientos siguieron la siguiente secuencia (a) $m=1, n=1$ y $g=6$, (b) $m=2, n=1$ y $g=4$, (c) $m=3, n=1$ y $g=3$, (d) $m=4, n=1$ y $g=3$, (e) $m=1, n=2$ y $g=4$, (f) $m=2, n=2$ y $g=3$, (g) $m=3, n=2$ y $g=3$, (h) $m=4, n=2$ y $g=3$, (i) $m=1, n=3$ y $g=4$, (j) $m=2, n=3$ y $g=3$, (k) $m=3, n=3$ y $g=3$, (l) $m=4, n=3$ y $g=3$, (m) $m=1, n=4$ y $g=4$, (n) $m=2, n=4$ y $g=3$, (o) $m=3, n=4$ y $g=3$ y (p) $m=4, n=4$ y $g=3$.

En la Fig. 3-40 se muestran espectros de transmitancia para la polarización-s con un ángulo de incidencia $\theta=70$ (este ángulo se eligió de tal manera que se puedan apreciar una mayor diferencia entre sus espectros) y los mismos parámetros presentados en la Fig. 3- 39 con ordenamientos (a) $m=1, n=1$ y $g=6$, (b) $m=2, n=1$ y $g=4$, (c) $m=3, n=1$ y $g=3$, (d) $m=4, n=1$ y $g=3$, (e) $m=1, n=2$ y $g=4$, (f) $m=2, n=2$ y $g=3$, (g) $m=3, n=2$ y $g=3$, (h) $m=4, n=2$ y $g=3$, (i) $m=1, n=3$ y $g=4$, (j) $m=2, n=3$ y $g=3$, (k) $m=3, n=3$ y $g=3$, (l) $m=4, n=3$ y $g=3$, (m) $m=1, n=4$ y $g=4$, (n) $m=2, n=4$ y $g=3$, (o) $m=3, n=4$ y $g=3$ y (p) $m=4, n=4$ y $g=3$.

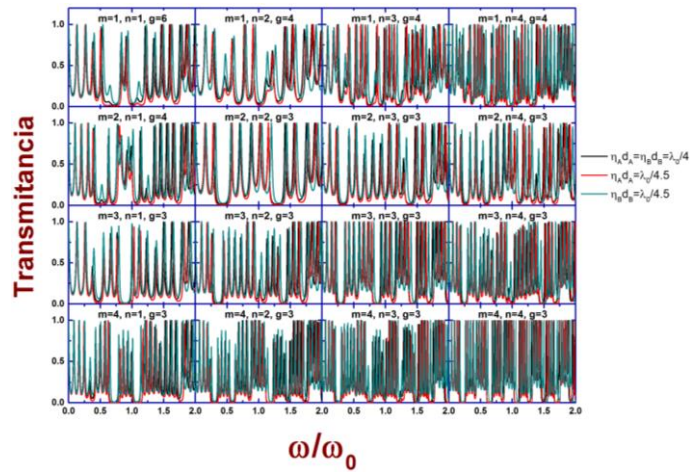


Figura 3-40. Transmitancia versus la Frecuencia angular para TE con los siguientes parámetros; el ángulo de incidencia tiene un valor de setenta ($\theta = 70$), el índice de refracción para la capa A es $\eta_A = 2.3$ y el de la capa B es $\eta_B = 1.55$, también consideramos una longitud de onda $\lambda_0 = 700 \text{ nm}$.

Obsérvese como la periodicidad de los espectros en las multicapas aperiódicas, es decir, en la diagonal de la Fig. 3-40 se destruye. Además, puede verse un desfase en los picos de los espectros de transmitancia con respecto a los diferentes caminos ópticos.

Ahora tomaremos los mismos parámetros de la Fig. 3-40 para la polarización-p y estos resultados se presentaran en la Fig. 3-41.

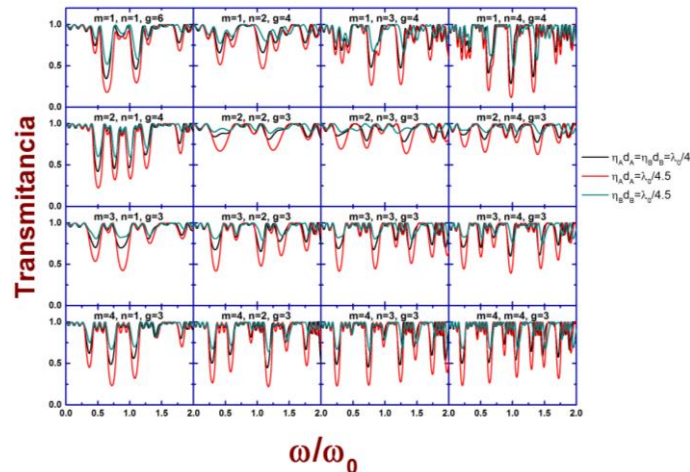


Figura 3-41. Transmittancia versus la Frecuencia angular para TM con los siguientes parámetros; el ángulo de incidencia tiene un valor de setenta ($\theta = 70$), el índice de refracción para la capa A es $\eta_A = 2.3$ y el de la capa B es $\eta_B = 1.55$, también consideramos una longitud de onda $\lambda_0 = 700 \text{ nm}$, los ordenamientos siguieron la siguiente secuencia (a) $m=1, n=1$ y $g=6$, (b) $m=2, n=1$ y $g=4$, (c) $m=3, n=1$ y $g=3$, (d) $m=4, n=1$ y $g=3$, (e) $m=1, n=2$ y $g=4$, (f) $m=2, n=2$ y $g=3$, (g) $m=3, n=2$ y $g=3$, (h) $m=4, n=2$ y $g=3$, (i) $m=1, n=3$ y $g=4$, (j) $m=2, n=3$ y $g=3$, (k) $m=3, n=3$ y $g=3$, (l) $m=4, n=3$ y $g=3$, (m) $m=1, n=4$ y $g=4$, (n) $m=2, n=4$ y $g=3$, (o) $m=3, n=4$ y $g=3$ y (p) $m=4, n=4$ y $g=3$.

Como se puede observar en la Fig. 3-41 los espectros cambian drásticamente con respecto a los espectros de la Fig. 3-40. Por ejemplo los mínimos de estos espectros son más altos comparados con los mínimos de la figura anterior y se puede encontrar más zonas

que contengan alta transmitancia. También, note que los espectros tienen menos picos de oscilación y se encuentran desfasados.

Lo que ahora se presenta son los espectros de transmitancia en escala de colores con la variación de los caminos ópticos para las dos capas que participan en la construcción de nuestro modelo de multicapas aperiódicas y cuasiperiódicas. Se procederá de la siguiente forma, la capa A tendrá un índice de refracción de $n_A=2.3$ con un camino óptico de $n_A d_A = \lambda_0/X$ y la capa B tendrá un índice de refracción de $n_B=1.55$ y un camino óptico de $n_B d_B = \lambda_0/Y$, donde X e Y tienen valores de $0.1 a 10$ y $\lambda_0 = 700\text{ nm}$. Los ordenamientos a seguir son (a) $m=1, n=1$ y $g=11$, (b) $m=2, n=1$ y $g=6$, (c) $m=3, n=1$ y $g=5$, (d) $m=4, n=1$ y $g=4$, (e) $m=1, n=2$ y $g=8$, (f) $m=2, n=2$ y $g=6$, (g) $m=3, n=2$ y $g=5$, (h) $m=4, n=2$ y $g=4$, (i) $m=1, n=3$ y $g=7$, (j) $m=2, n=3$ y $g=5$, (k) $m=3, n=3$ y $g=5$, (l) $m=4, n=3$ y $g=4$, (m) $m=1, n=4$ y $g=6$, (n) $m=2, n=4$ y $g=5$, (o) $m=3, n=4$ y $g=5$ y (p) $m=4, n=4$ y $g=4$.

En la Fig. 3-42 se presenta el espectro de transmitancia para la variación del camino óptico para ambas capas, los parámetros a utilizar están descritos con anterioridad pero para un ángulo de incidencia de $\theta=0$ (para este ángulo de incidencia los espectros de transmitancia son los mismos para TE y TM).

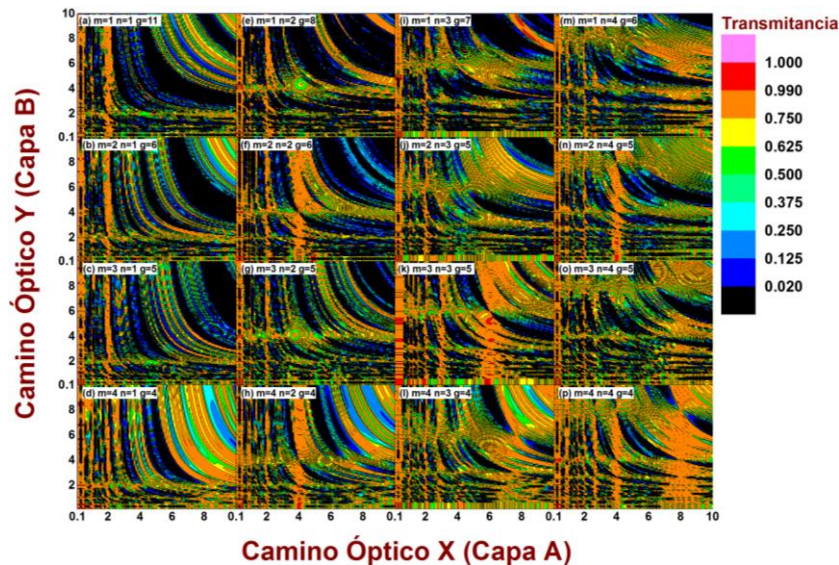


Figura 3-42. Espectro de transmitancia óptico $T(\lambda_0/X, \lambda_0/Y)$ para la polarización—s con parámetros $n_A=2.3$ y $n_B=1.55$ con un camino óptico de $n_A d_A = \lambda_0/X$ y $n_B d_B = \lambda_0/Y$ donde X y Y varía de $0.1 a 10$ y $\lambda_0 = 700\text{ nm}$ con una longitud de onda de $\lambda = 700\text{ nm}$ para un ángulo de incidencia de $\theta=0$.

Se puede observar que los espectros de transmitancia en las columnas aperiódicas (columnas 2, 3 y 4) muestran más zonas puntuales donde se presenta alta transmitancia en comparación con los espectros cuasiperiódicos (columna 1). También vemos que mientras más crece los números m y n de los ordenamientos de las capas que siguen las secuencias de Fibonacci generalizadas las zonas de alta reflectancia disminuyen. El espectro que presenta más zonas puntuales de alta transmitancia es el ordenamiento $m=3, n=3$ y $g=5$.

En la Fig. 3-43 se presentan los espectros de transmitancia con los mismos parámetros utilizados en la Fig. 3-41 pero tomando un ángulo de incidencia de $\theta=30$ considerando TE. Podemos observar una reducción en las zonas de transmitancia, pero aun así se puede apreciar que las columnas aperiódicas tienen más zonas en color rojo de las que presentan los espectros cuasiperiódicos (columna 1). Y como era de esperarse mantiene una semejanza con los espectros de la Fig. 3-42.

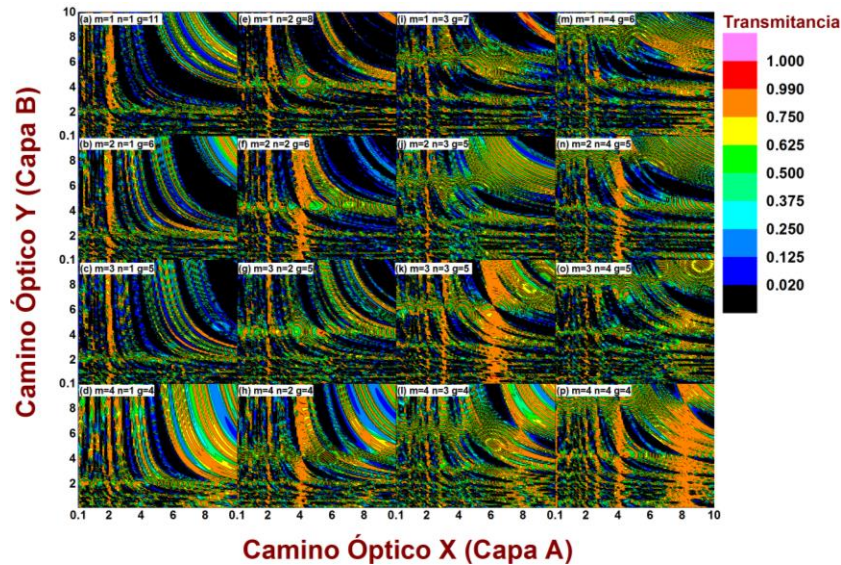


Figura 3-43. Espectro de transmitancia óptico $T(\lambda_0/X, \lambda_0/Y)$ para la polarización—s con parámetros $n_A=2.3$ y $n_B=1.55$ con un camino óptico de $n_A d_A = \lambda_0/X$ y $n_B d_B = \lambda_0/Y$ donde X y Y varía de $0.1 a 10$ y $\lambda_0 = 700nm$ con una longitud de onda de $\lambda = 700nm$ para un ángulo de incidencia de $\theta=30$.

En la Fig. 3-44 se muestran espectros de transmitancia con parámetros utilizados en la Fig. 3-41 con un ángulo de incidencia de $\theta=50$ y considerando TE. Podemos observar que las zonas de alta reflectancia se encuentran en mayor proporción en los espectros cuasiperiódicos que en los aperiódicos (columna 2, 3 y 4), las zonas de alta transmitancia son totalmente puntuales, por lo que para notarse se tendrían que amplificar ciertas zonas. Nótese también un decaimiento en los valores del espectro de transmitancia comparados con la Fig. 3-43.

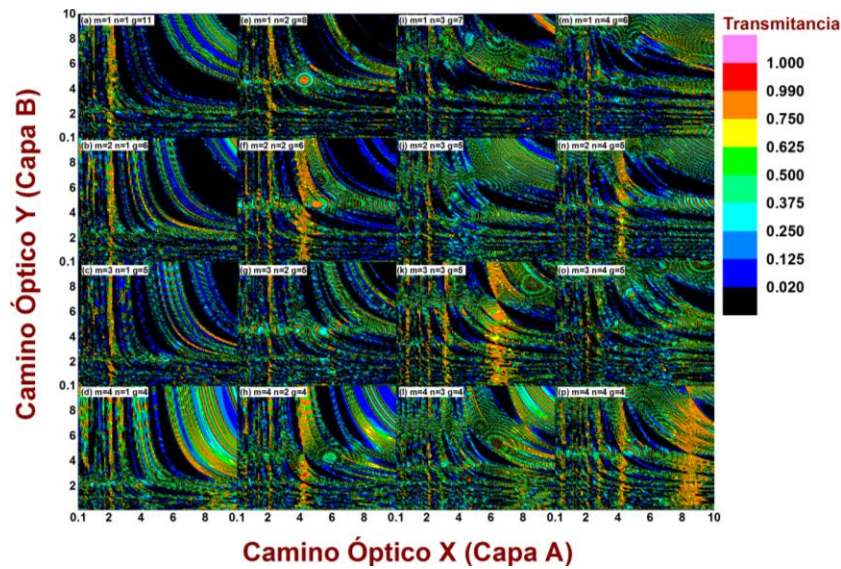


Figura 3-44. Espectro de transmitancia óptico $T(\lambda_0/X, \lambda_0/Y)$ para la polarización—s con parámetros $n_A = 2.3$ y $n_B = 1.55$ con un camino óptico de $n_A d_A = \lambda_0/X$ y $n_B d_B = \lambda_0/Y$ donde X y Y varia de $0.1 a 10$ y $\lambda_0 = 700nm$ con una longitud de onda de $\lambda = 700nm$ para un ángulo de incidencia de $\theta = 50$.

En la Fig. 3-45 se muestran los espectros de transmitancia con los mismos parámetros utilizados en la Fig. 3-41, solo que consideramos un ángulo de incidencia de $\theta = 60$ y para TE. Se observa un decremento en la transmitancia en lo general y hay zonas donde la alta reflectancia se mantiene a pesar de la variación de los ángulos.

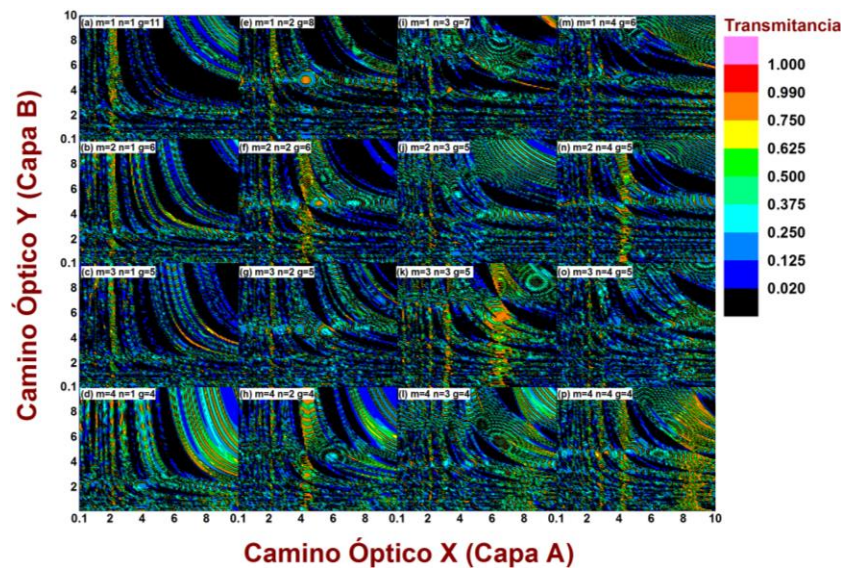


Figura 3-45. Espectro de transmitancia óptico $T(\lambda_0/X, \lambda_0/Y)$ para la polarización—s con parámetros $n_A = 2.3$ y $n_B = 1.55$ con un camino óptico de $n_A d_A = \lambda_0/X$ y $n_B d_B = \lambda_0/Y$ donde X y Y varia de $0.1 a 10$ y $\lambda_0 = 700nm$ con una longitud de onda de $\lambda = 700nm$ para un ángulo de incidencia de $\theta = 60$.

La Fig. 3-46 presenta los espectros de transmitancia considerando los mismos parámetros utilizados en la Fig. 3-41 y un ángulo de incidencia de $\theta = 70$ para TE. Nótese que hay zonas puntuales de alta transmitancia, así como se mantienen las regiones de alta reflectancia.

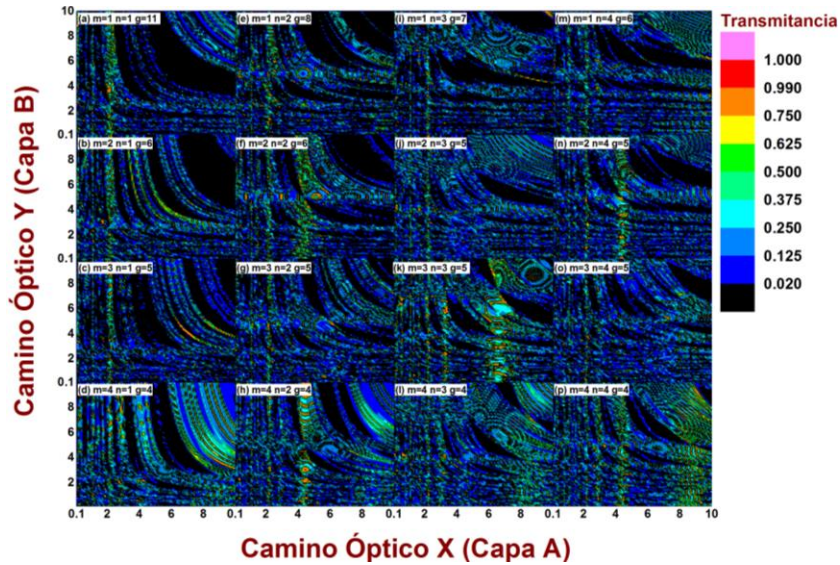


Figura 3-46. Espectro de transmitancia óptico $T(\lambda_0/X, \lambda_0/Y)$ para la polarización—s con parámetros $n_A=2.3$ y $n_B=1.55$ con un camino óptico de $n_A d_A = \lambda_0/X$ y $n_B d_B = \lambda_0/Y$ donde X y Y varía de $0.1 a 10$ y $\lambda_0 = 700nm$ con una longitud de onda de $\lambda = 700nm$ para un ángulo de incidencia de $\theta = 70^\circ$.

Ahora presentaremos los espectros para ondas transversales magnéticas (TM) con los mismos parámetros utilizados para ondas transversales eléctricos (TE). Para recordar mostraremos de nuevo estos parámetros, la capa A tendrá un índice de refracción de $n_A=2.3$ con un camino óptico de $n_A d_A = \lambda_0/X$ y la capa B tendrá un índice de refracción de $n_B=1.55$ y un camino óptico de $n_B d_B = \lambda_0/Y$, donde X e Y tienen valores de $0.1 a 10$ y $\lambda_0 = 700nm$. Los ordenamientos a seguir son (a) $m=1, n=1$ y $g=11$, (b) $m=2, n=1$ y $g=6$, (c) $m=3, n=1$ y $g=5$, (d) $m=4, n=1$ y $g=4$, (e) $m=1, n=2$ y $g=8$, (f) $m=2, n=2$ y $g=6$, (g) $m=3, n=2$ y $g=5$, (h) $m=4, n=2$ y $g=4$, (i) $m=1, n=3$ y $g=7$, (j) $m=2, n=3$ y $g=5$, (k) $m=3, n=3$ y $g=5$, (l) $m=4, n=3$ y $g=4$, (m) $m=1, n=4$ y $g=6$, (n) $m=2, n=4$ y $g=5$, (o) $m=3, n=4$ y $g=5$ y (p) $m=4, n=4$ y $g=4$.

Se observa en la Fig. 3-47 espectros de transmitancia para un ángulo de incidencia $\theta=30^\circ$, Los ordenamientos de las capas donde las secuencias son aperiódicas (columnas 2, 3 y 4) muestran más zonas puntuales de alta transmitancia en comparación con los espectros cuasiperiódicos (columna 1), donde casi son inexistentes. También notemos que el valor en los espectros de transmitancia que predominan en se encuentra en un rango de 0.75 a 0.99.

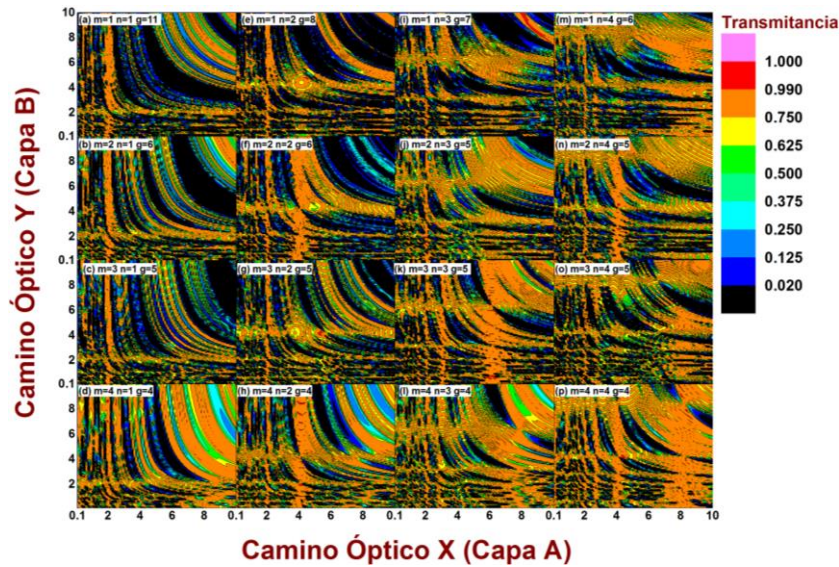


Figura 3-47. Espectro de transmitancia óptico $T(\lambda_0/X, \lambda_0/Y)$ para la polarización-p con parámetros $n_A = 2.3$ y $n_B = 1.55$ con un camino óptico de $n_A d_A = \lambda_0/X$ y $n_B d_B = \lambda_0/Y$ donde X y Y varia de $0.1 a 10$ y $\lambda_0 = 700nm$ con una longitud de onda de $\lambda = 700nm$ para un ángulo de incidencia de $\theta = 30$.

Si comparamos la Fig. 3-47 con la Fig. 3-43 que es su homologo pero en polarización-s, observamos que el valor en los espectros de transmitancia es superior al contrastarlos y en particular si comparamos específicamente el espectro (i) de cada figura podemos observar que la región de alta transmitancia es más grande para TM que en TE.

Se presenta en la Fig. 3-48 espectros de transmitancia para un ángulo de $\theta = 50$, aquí encontramos un comportamiento muy similar a los espectros que se encuentran en la figura anterior, excepto que se incrementan las zonas con valor del espectro de transmitancia en el intervalo 0.99 a 1.0 (color rojo).

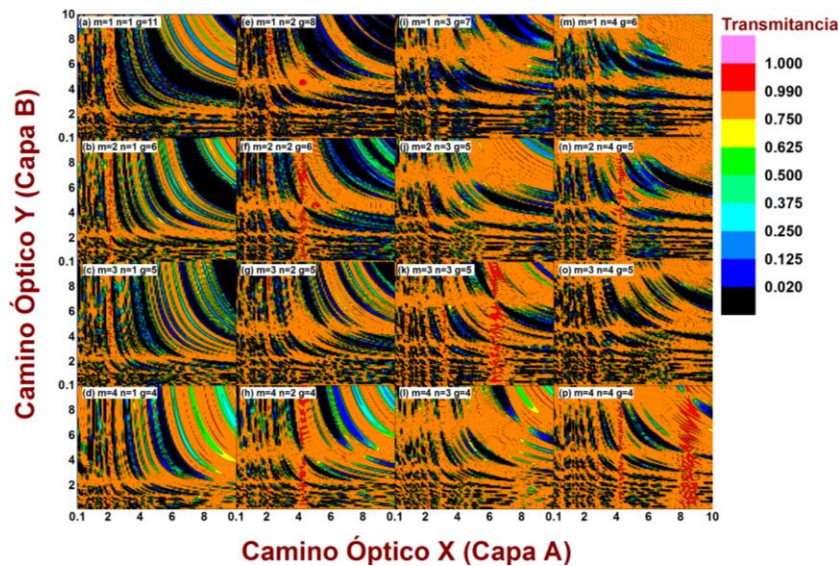


Figura 3-48. Espectro de transmitancia óptico $T(\lambda_0/X, \lambda_0/Y)$ para la polarización-p con parámetros $n_A = 2.3$ y $n_B = 1.55$ con un camino óptico de $n_A d_A = \lambda_0/X$ y $n_B d_B = \lambda_0/Y$ donde X y Y varia de $0.1 a 10$ y $\lambda_0 = 700nm$ con una longitud de onda de $\lambda = 700nm$ para un ángulo de incidencia de $\theta = 50$.

Al contrastar la Fig. 3-48 (TM) con la Fig. 3-44 (TE), observamos que mientras en uno aumenta las zonas de alta transmitancia en el otro decrecen, respectivamente. En los espectros se aprecia que las zonas de alta reflectancia son semejantes, lo cual nos dice que no importa con que polarización se trabaje las zonas de alta reflectancia se mantienen.

Se presenta en la Fig. 3-49 espectros de transmitancia para un ángulo de $\theta = 60$, las líneas de alta transmitancia que se presentaban en la Fig. 3-48 como discontinuas, ahora se presentan más llenas de puntos pareciendo casi continuas en ciertos valores de X . Los espectros de los ordenamientos aperiódicos de las capas (columnas 2, 3 y 4) siguen mostrando zonas de alta transmitancia y menos regiones de alta reflectancia en comparación con los generados por los ordenamientos cuasiperiódicos (columna 1).

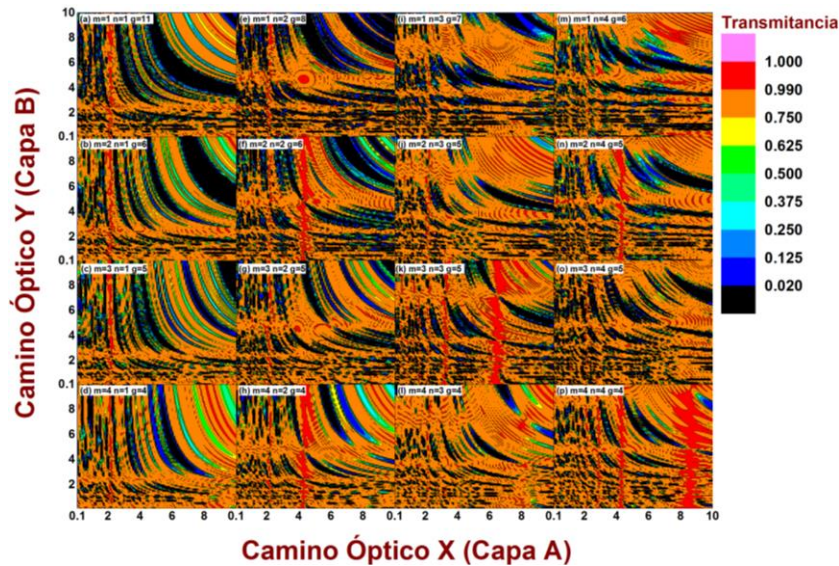


Figura 3-49. Espectro de transmitancia óptico $T(\lambda_0/X, \lambda_0/Y)$ para la polarización—p con parámetros $n_A = 2.3$ y $n_B = 1.55$ con un camino óptico de $n_A d_A = \lambda_0/X$ y $n_B d_B = \lambda_0/Y$ donde X y Y varia de $0.1 a 10$ y $\lambda_0 = 700nm$ con una longitud de onda de $\lambda = 700nm$ para un ángulo de incidencia de $\theta = 60$.

En la Fig. 3-50 se presentan los espectros de transmitancia para un ángulo de $\theta = 70$, las zonas de alta transmitancia han decrecido en comparación para el ángulo $\theta = 60$ pero se mantienen algunos puntos en las mismas regiones. Además, los efectos siguen siendo muy parecidos a los descritos en la figura anterior.

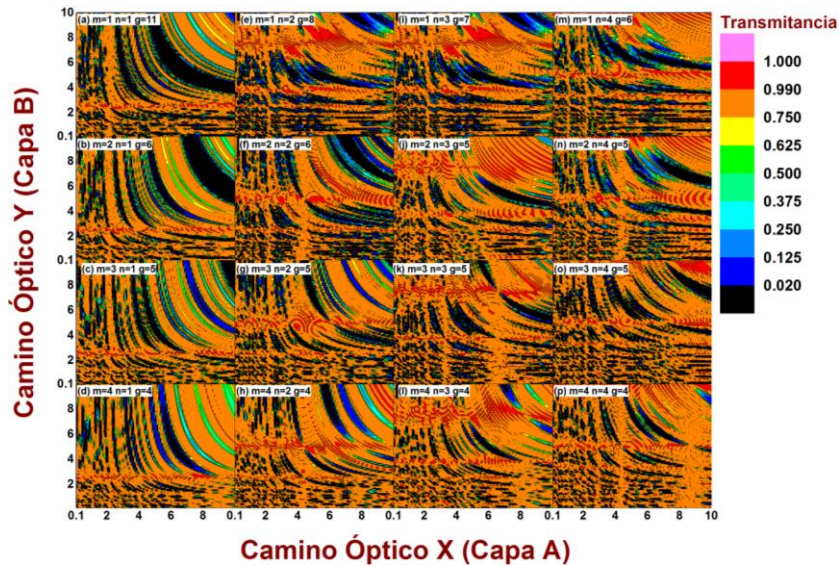


Figura 3-50. Espectro de transmitancia óptico $T(\lambda_0/X, \lambda_0/Y)$ para la polarización-p con parámetros $n_A = 2.3$ y $n_B = 1.55$ con un camino óptico de $n_A d_A = \lambda_0/X$ y $n_B d_B = \lambda_0/Y$ donde X y Y varia de $0.1 a 10$ y $\lambda_0 = 700nm$ con una longitud de onda de $\lambda = 700nm$ para un ángulo de incidencia de $\theta = 70^\circ$.

Al contrastar la Fig. 3-50 (TM) con la Fig. 3-46 (TE), observamos que en la primera figura el promedio en los valores de los espectros de transmitancia se mantiene en un rango de 0.75-0.99, presentando aun manteniendo zonas de alta transmitancia y en la otra figura es de 0.02- 0.25 y sin tener regiones de alta transmitancia.

Un parámetro importante para caracterizar la naturaleza física de los sistemas cuasiperiódicos y aperiódicos por medio de las matrices de transferencia es el Coeficiente de Lyapunov. En la siguiente sección se presenta un análisis detallado de este coeficiente.

3.9 Localización

A continuación calcularemos la localización con el coeficiente de Lyapunov .En la Fig. 3-51 se muestran los espectros del coeficiente de Lyapunov para las ondas TE y TM, ya que a un ángulo de incidencia $\theta = 0$ cómo lo habíamos dicho sus espectros son iguales, consideramos ordenamientos de las capas que siguen la secuencia de Fibonacci generalizada y el número de ellas es mayor a 100, por eso varían las generaciones en los distintos arreglos. Este coeficiente nos dice en qué frecuencias tenemos mayor localización, además se puede observar que los espectros son simétricos alrededor de $\omega/\omega_0 = 1$. En general cuando los ordenamientos de las capas siguen una secuencia cuasiperiódica los espectros son auto similares alrededor de la frecuencia de simetría.

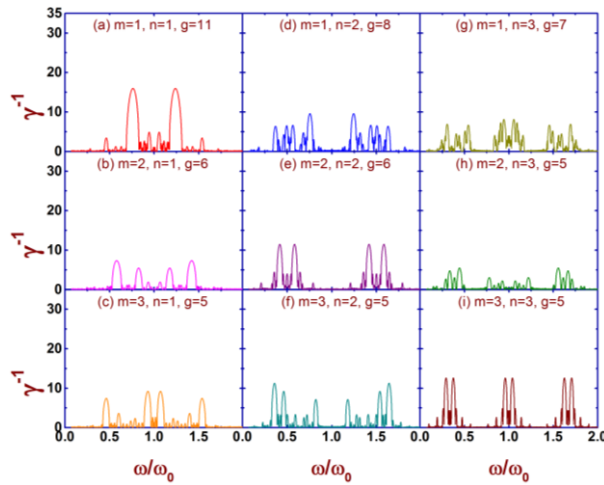


Figura 3-51. Frecuencia normalizada (ω/ω_0) versus Localización (γ^{-1}) para las ondas Transversales Eléctricas (TE) para las secuencias de Fibonacci Generalizado, con índices de refracción y grosores $n_A=2.3$, $d_A=76\text{ nm}$ y $n_B=1.55$, $d_B=113\text{ nm}$ respectivamente, que siguen un camino óptico de $n_A d_A = n_B d_B = \lambda_0/4$, donde $\lambda_0 = 700\text{ nm}$ y el ángulo de incidencia es $\theta=0$.

La Fig. 3-52 muestra los espectros del coeficiente de Lyapunov para los mismos parámetros considerados en la figura anterior, el único que cambia es el ángulo de incidencia a $\theta=30$ en ondas TE. Obsérvese la pérdida de simetría de los espectros, pero la altura de los picos es muy similar a los de la Fig. 3-51.

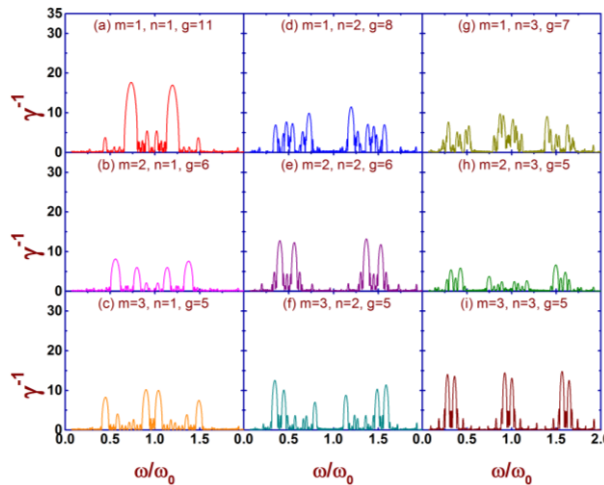


Figura 3-52. Frecuencia normalizada (ω/ω_0) versus Localización (γ^{-1}) para las ondas Transversales Eléctricas (TE) para las secuencias de Fibonacci Generalizado, con índices de refracción y grosores $n_A=2.3$, $d_A=76\text{ nm}$ y $n_B=1.55$, $d_B=113\text{ nm}$ respectivamente, que siguen un camino óptico de $n_A d_A = n_B d_B = \lambda_0/4$, donde $\lambda_0 = 700\text{ nm}$ y el ángulo de incidencia es $\theta=30$.

En la Fig. 3-53 se muestran los espectros del Coeficiente de Lyapunov utilizando los mismos parámetros de la Fig 3-52, solo que el ángulo de incidencia es $\theta=60$ y es para TE. Nótese que la asimetría en los picos del espectro es evidente y la altura de los picos aumenta, lo que nos dice en que frecuencias están más localizados los fotones.

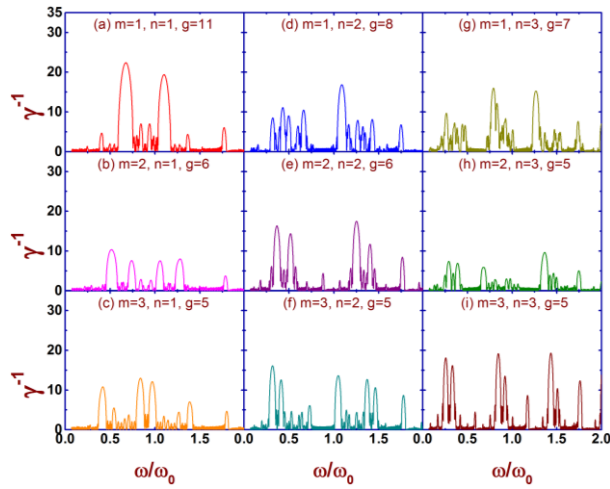


Figura 3-53. Frecuencia normalizada (ω/ω_0) versus Localización (γ^{-1}) para las ondas Transversales Eléctricas (TE) para las secuencias de Fibonacci Generalizado, con índices de refracción y grosores $n_A=2.3$, $d_A=76\text{ nm}$ y $n_B=1.55$, $d_B=113\text{ nm}$ respectivamente, que siguen un camino óptico de $n_A d_A = n_B d_B = \lambda_0/4$, donde $\lambda_0 = 700\text{ nm}$ y el ángulo de incidencia es $\theta = 60$.

Realizamos el mismo estudio para un ángulo de incidencia $\theta = 89$, el cual es presentado en la Fig. 3-54. Obsérvese que la localización se presenta en un mayor rango de frecuencias en cualquiera de los ordenamientos y los espectros autosimilares que se presentaban en los ordenamientos cuasiperiódicos desaparecen al ir incrementando el ángulo de incidencia.

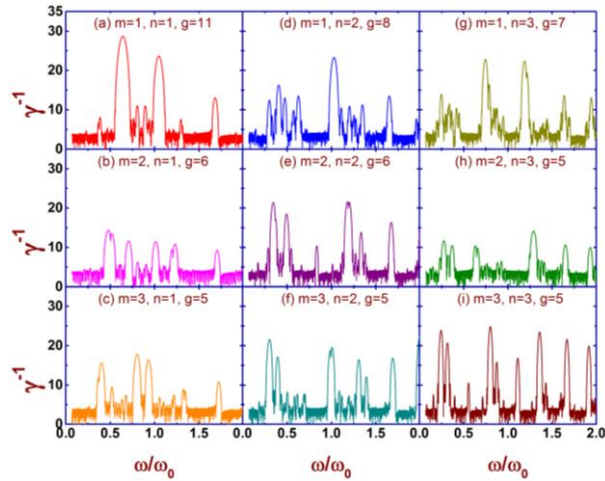


Figura 3-54. Frecuencia normalizada (ω/ω_0) versus Localización (γ^{-1}) para las ondas Transversales Eléctricas (TE) para las secuencias de Fibonacci Generalizado, con índices de refracción y grosores $n_A=2.3$, $d_A=76\text{ nm}$ y $n_B=1.55$, $d_B=113\text{ nm}$ respectivamente, que siguen un camino óptico de $n_A d_A = n_B d_B = \lambda_0/4$, donde $\lambda_0 = 700\text{ nm}$ y el ángulo de incidencia es $\theta = 89$.

Ahora presentaremos el mismo estudio realizado solo que consideraremos la polarización-p, tomando ángulos de incidencia $\theta = 30$ (Fig. 3-55), $\theta = 60$ (Fig. 3-56) y $\theta = 89$ (Fig. 3-57). Los parámetros restantes son los mismos que los de la Fig. 3-51. Obsérvese que la asimetría en todos los espectros es más notoria cuando el ángulo de incidencia se incrementa. Además, la altura de los picos en los espectros decrece cuando el

ángulo crece, por lo que es menor la localización para cuando consideramos polarización-
p. Aún que tenemos más frecuencias de localización.

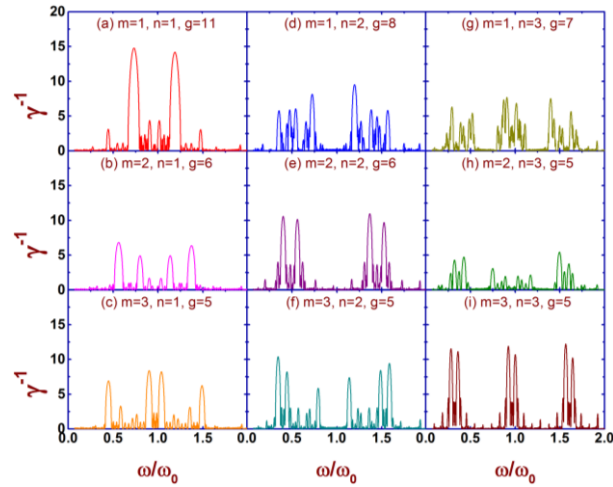


Figura 3-55. Frecuencia normalizada (ω/ω_0) versus Localización (γ^{-1}) para las ondas Transversales Magnéticas (TM) para las secuencias de Fibonacci Generalizado, con índices de refracción y grosores $n_A=2.3$, $d_A=76\text{ nm}$ y $n_B=1.55$, $d_B=113\text{ nm}$ respectivamente, que siguen un camino óptico de $n_A d_A = n_B d_B = \lambda_0/4$, donde $\lambda_0 = 700\text{ nm}$ y el ángulo de incidencia es $\theta=30$.

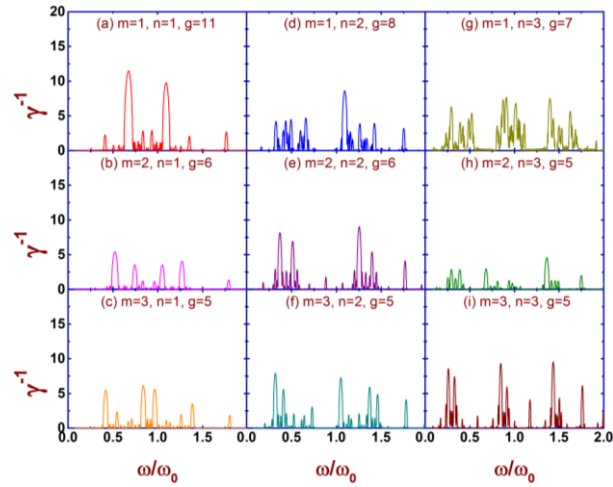


Figura 3-56. Frecuencia normalizada (ω/ω_0) versus Localización (γ^{-1}) para las ondas Transversales Magnéticas (TM) para las secuencias de Fibonacci Generalizado, con índices de refracción y grosores $n_A=2.3$, $d_A=76\text{ nm}$ y $n_B=1.55$, $d_B=113\text{ nm}$ respectivamente, que siguen un camino óptico de $n_A d_A = n_B d_B = \lambda_0/4$, donde $\lambda_0 = 700\text{ nm}$ y el ángulo de incidencia es $\theta=60$.

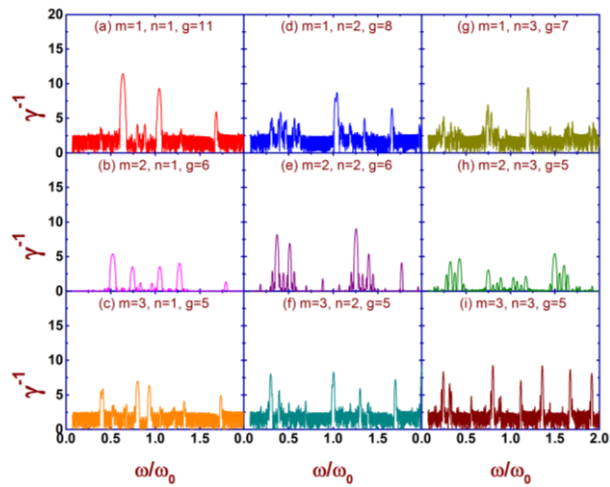


Figura 3-57. Frecuencia normalizada (ω/ω_0) versus Localización (γ^{-1}) para las ondas Transversales Magnéticas (TM) para las secuencias de Fibonacci Generalizado, con índices de refracción y grosores $n_A=2.3$, $d_A=76\text{ nm}$ y $n_B=1.55$, $d_B=113\text{ nm}$ respectivamente, que siguen un camino óptico de $n_A d_A = n_B d_B = \lambda_0/4$, donde $\lambda_0=700\text{ nm}$ y el ángulo de incidencia es $\theta=89^\circ$.

En resumen, los espectros con polarización-s presentan mayor localización que los de polarización-p. Además, para cualquier ángulo de incidencia distinto de cero la autosimilaridad que tienen los espectros cuando las capas siguen un orden cuasiperiódico se pierde.

Conclusiones

En este trabajo se realizó un estudio detallado de la transmitancia fotónica y el coeficiente de Lyapunov para ondas transversales eléctricas (TE) y magnéticas (TM) en multicapas cuasiperiódicas y aperiódicas que siguen la secuencia de Fibonacci Generalizada. Para llevar a cabo la investigación desarrollamos un nuevo método unificado de renormalización para la matriz de transferencia de estas multicapas y así poder analizar la transmitancia (T) y el coeficiente de Lyapunov (γ) para cualquier número de capas en los diferentes sistemas. Estudiamos los efectos de las dos propiedades físicas mencionadas al ir variando el grosor de las multicapas, el ángulo de incidencia, la longitud de onda y el camino óptico. A continuación puntualizamos los siguientes resultados.

- Con el método de renormalización podemos estudiar la transmitancia y γ desde tres hasta 10^8 capas, siendo un método exacto, para sistemas cuasiperiódicos, aperiódicos y periódicos.
- Obtuvimos una ecuación analítica de la transmitancia para cuando el número de capas se encuentra en la generación 2 de cualquier sistema de Fibonacci generalizado.
- En el ángulo de incidencia cero los espectros de T y γ , presentan autosimilaridad cuando el ordenamiento de las capas es cuasiperiódico y zonas de oscilaciones periódicas cuando su ordenamiento es aperiódico no importando si es TE o TM.
- El camino óptico nos limita los grosores de las capas presentándose como regiones indeterminadas en los espectros de T , sin importar el ordenamiento de las capas y la polarización.
- Los espectros de T para la polarización-p tienen valores de mayor transmitancia en comparación con los de la polarización-s.
- Se encontró transmitancia cercana a uno cuando el ángulo de incidencia está dentro del intervalo de 50 a 70 grados, considerando la polarización-p.
- Cuando el ordenamiento de las capas es cuasiperiódico el espectro de transmitancia presenta más zonas de alta reflectancia en comparación con los ordenamientos aperiódicos, al crecer el grosor de las capas o el ángulo de incidencia aumenta. Esto es más evidente cuando la polarización es -s que en la -p.
- Se obtienen valores de más alta transmitancia cuando se consideran valores diferentes a un cuarto del camino óptico.
- Los espectros están más localizados en TE que en TM cuando el ángulo de incidencia se incrementa.
- El espectro de transmisión es muy sensible al modificar el índice de refracción, haciendo que los máximos se recorran a frecuencia más bajas al ir incrementando el índice de refracción.

El trabajo realizado en esta tesis se puede extender a más dimensiones empleando los métodos de renormalización y convolución. También se pueden estudiar microcavidades e incluir impurezas para modificar sus propiedades físicas con el objetivos de realizar dispositivos ópticos.

Apéndice A

Método de Renormalización para la Transmitancia

La transmitancia puede ser obtenida por [Kohmoto, 1987]

$$T = \frac{4}{(\tau_{11} + \tau_{22})^2 + (\tau_{12} - \tau_{21})^2}$$

donde τ es la matriz de transferencia total, esta matriz se puede obtener como el producto de tres matrices las cuales definiremos como matriz inicial, matriz final y una matriz media. La cual está dada por

$$\tau(k) = \begin{pmatrix} F_{11}(k) & 0.0 \\ 0.0 & F_{22}(k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{11}(k) & M_{12}(k) \\ M_{21}(k) & M_{22}(k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{11}(k) & 0.0 \\ 0.0 & I_{22}(k) \end{pmatrix}$$

siendo la matriz inicial de la forma siguiente

$$I(k) = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & \sqrt{\frac{\varepsilon_V \mu_A \cos \theta_V}{\mu_V \varepsilon_A \cos \theta_A}} \end{pmatrix}$$

pero en el caso de la matriz final este cambiara dependiendo de cómo incide el campo eléctrico en plano de incidencia, si es de manera perpendicular (TE) o paralela (TM) y también cambiara dependiendo de la generación k con la que se trabaje,

$$F(k) = \begin{cases} F(k) = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & \sqrt{\frac{\varepsilon_V \mu_B \cos \theta_V}{\mu_V \varepsilon_B \cos \theta_B}} \end{pmatrix} & \text{para } n \text{ par} \\ F^{TE}(k) = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & \sqrt{\frac{\varepsilon_V \mu_A \cos \theta_V}{\mu_V \varepsilon_A \cos \theta_A}} \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad F^{TM}(k) = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & \sqrt{\frac{\varepsilon_V \mu_A \cos \theta_A}{\mu_V \varepsilon_A \cos \theta_V}} \end{pmatrix} & \text{para } n \text{ impar} \end{cases}$$

La matriz inicial como la final serán las mismas para cualquier variación de las cadenas de Fibonacci ($A \rightarrow A^m B^n$).

Proceso de Renormalización

La matriz media a su vez se puede describir como la multiplicación de tres matrices recurrentes, las cuales dos de ellas están en función de las generaciones anteriores a la generación que se estudia como también dependerán de los índices que definen a Fibonacci

generalizado $A \rightarrow A^m B^n$ y la tercera depende de la matriz que define a la frontera de la capa que hay en esta generación.

$$M(k) = \underbrace{M(k-2)U_2(k)M(k-2)\cdots U(k)}_{n\text{-veces}} \underbrace{M(k-1)U_1(k)M(k-1)\cdots}_{m\text{-veces}}$$

que se rescribiría de esta forma

$$M(k) = MY(n_{MAX})U(k)MX(m_{MAX})$$

Donde las entradas de la matriz media se definen como

$$\begin{aligned} M_{1,1}(k) &= M_{1,1}^m(m_{\max})M_{1,1}^n(n_{\max})U_{1,1}(k) + M_{2,1}^m(m_{\max})M_{1,2}^n(n_{\max})U_{2,2}(k) \\ M_{1,2}(k) &= M_{1,2}^m(m_{\max})M_{1,1}^n(n_{\max})U_{1,1}(k) + M_{2,2}^m(m_{\max})M_{1,2}^n(n_{\max})U_{2,2}(k) \\ M_{2,1}(k) &= M_{1,1}^m(m_{\max})M_{2,1}^n(n_{\max})U_{1,1}(k) + M_{2,1}^m(m_{\max})M_{2,2}^n(n_{\max})U_{2,2}(k) \\ M_{2,2}(k) &= M_{1,2}^m(m_{\max})M_{2,1}^n(n_{\max})U_{1,1}(k) + M_{2,2}^m(m_{\max})M_{2,2}^n(n_{\max})U_{2,2}(k) \end{aligned}$$

La matriz de unión queda definida de la siguiente manera para el caso de TE o TM,

$$U(n) = \begin{cases} U(n) = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 \end{pmatrix} & \text{para } n \text{ par} \\ U^{TE}(n) = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & \sqrt{\frac{\varepsilon_B \mu_A \cos \theta_B}{\mu_B \varepsilon_A \cos \theta_A}} \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad U^{TM}(n) = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & \sqrt{\frac{\varepsilon_B \mu_A \cos \theta_A}{\mu_B \varepsilon_A \cos \theta_B}} \end{pmatrix} & \text{para } n \text{ impar} \end{cases}$$

Las otras dos matrices se definen a continuación, especificando que la variable x hace referencia a los parámetros m y n que describen la forma en que crece la cadena de Fibonacci $A \rightarrow A^m B^n$,

$$M(k) = \underbrace{M(k-2)U_2(k)M(k-2)\cdots U(k)}_{n\text{-veces}} \underbrace{M(k-1)U_1(k)M(k-1)\cdots}_{m\text{-veces}}$$

podemos que observar que funcionan para ambos casos

$$\begin{aligned} M_{1,1}^x(x) &= M_{1,1}^x(x-1)M_{1,1}^x(1)U_{1,1}^x + M_{2,1}^x(x-1)M_{1,2}^x(1)U_{2,2}^x \\ M_{1,2}^x(x) &= M_{1,2}^x(x-1)M_{1,1}^x(1)U_{1,1}^x + M_{2,2}^x(x-1)M_{1,2}^x(1)U_{2,2}^x \\ M_{2,1}^x(x) &= M_{1,1}^x(x-1)M_{2,1}^x(1)U_{1,1}^x + M_{2,1}^x(x-1)M_{2,2}^x(1)U_{2,2}^x \\ M_{2,2}^x(x) &= M_{1,2}^x(x-1)M_{2,1}^x(1)U_{1,1}^x + M_{2,2}^x(x-1)M_{2,2}^x(1)U_{2,2}^x, \end{aligned}$$

entonces la matriz de transferencia es

$$\tau(n) = F(n)M(n)I(n)$$

$$\tau(k) = \begin{pmatrix} F_{11}(k) & 0.0 \\ 0.0 & F_{22}(k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{11}(k) & M_{12}(k) \\ M_{21}(k) & M_{22}(k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{11}(k) & 0.0 \\ 0.0 & I_{22}(k) \end{pmatrix}$$

$$\tau_{1,1}(k) = I_{1,1}(k)F_{1,1}(k)M_{1,1}(k)$$

$$\tau_{1,2}(k) = I_{2,2}(k)F_{1,1}(k)M_{1,2}(k)$$

$$\tau_{2,1}(k) = I_{2,2}(k)F_{2,2}(k)M_{2,1}(k)$$

$$\tau_{2,2}(k) = I_{2,2}(k)F_{2,2}(k)M_{2,2}(k)$$

Las entradas de la matriz de transferencia se utilizaron en un programa en fortran para obtener la transmitancia y el coeficiente de Lyapunov de las multicapas ordenadas siguiendo la secuencia de Fibonacci generalizada.

Referencias

- [Ashcroft, 1976] N.W. Ashcroft, D.N. Mermin, *Solid State Physics* (Harcourt, 1976).
- [Bykov, 1972] V. P. Bykov, *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics* **35**, 269 (1972).
- [Canham, 1990] L.T. Canham, *Appl. Phys. Lett.* **57**, 1046, (1990).
- [Cassels, 1957] J.W.S. Cassels, *An Introduction to Diophantine Approximation* (Cambridge University Press, 1957) p. 133.
- [Fan, 1995] S. Fan, P. R. Villeneuve y J. D. Joannopoulos, *J. Appl. Phys.* **78**, 1415 (1995).
- [Fauchet, 1995] P.M. Fauchet, L. Tsybeskov, C. Peng, S.P. Duttagupta, J. von Behren, Y. Kostoulas, J.M.V. Vandyshev y K.D. Hirschmen, *IEEE J. Select. Topics Quantum Electron.* **1**, 1126 (1995).
- [Hattori, 1994] T. Hattori, N. Tsurumachi, S. Kawato y H. Nakatsuka, *Phys. Rev. B* **50**, 4220 (1994).
- [Ishii, 1973] K. Ishii, *Suppl. Prog. Theor. Phys.* **53**, 77 (1973).
- [Jackson, 1999] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd Ed. (John Wiley, 1999).
- [Janot, 1994] C. Janot, *Quasicrystals: A Primer* (Oxford University Press, 1994).
- [Janssen, 2007] T. Janssen, G. Chapuis y M. de Boissieu, *Aperiodic Crystals* (Oxford University Press, 2007).
- [John, 1984] S. John, *Phys. Rev. Lett.* **53**, 2169 (1984).
- [John, 1987] S. John, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 2486 (1987).
- [Joannopoulos, 2008] J.D. Joannopoulos, S.G. Johnson, J.N. Winn, R.D. Meade, *Photonic Crystals: Molding The Flow of Light*, 2nd Ed. (Princeton University Press, 2008).
- [Khalfoun, 2009] H. Khalfoun, M. Bouamoud, S. Bentata, L. Henrard y C. Vandembem, *J. Opt. A: Pure Appl. Opt* **11** 125102 (2009).
- [Kittel, 1996] C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics*, 7th Ed. (John Wiley and Sons, 1996).
- [Kirkman, 1984] P. D. Kirkman and J. B. Pendry, *J. Phys. C.: Solid State Phys.* **17**, 4327 (1984).

- [Kohmoto, 1987] M. Kohmoto, B. Sutherland y K. Iguchi, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 2436 (1987).
- [Lyapunov, 1949] A.M. Lyapunov, “*Probleme General de la Stabilité du Movement*”, Reprinted in *Annals of Mathematical Studies* No. 17, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1949.
- [Maciá, 2009] E. Maciá, *Aperiodic Structures in Condensed Matter. Fundamentals and Applications* (CRC Press, Boca Raton, 2009) p. 132.
- [Maciá, 2012] E. Maciá, *Rep. Prog. Phys.* **75**, 036502 (2012).
- [Méndez, 2010] A. A. Méndez, X. I. S. Saldaña y M. P. Sampedro, *Superficies y Vacío* **23(4)**, 9 (2010).
- [Nava, 2003] R. Nava, V. Agarwal, J.A. del Río, C. Wang, *J. of Non-Crystalline Solids* **329**, 140 (2003).
- [Nava, 2009] R. Nava, J. Tagüeña-Martínez, J. A del Río y G. G. Naumis, *J. Phys: Condens. Matter* **21**, 155901 (2009).
- [Palavicini, 2013] A. Palavicini y C. Wang, *Optics and Photonics Journal* **3**, 20 (2013).
- [Rayleigh, 1888] J. W. S. Rayleigh, *Phil. Mag.* **26**, 256 (1888).
- [Rodríguez, 2005] A. Rodríguez, M. Ibanescu, J.D. Joannopoulos y S.G. Johnson, *Opt. Lett.* **30**, 3192 (2005).
- [Shechtman, 1984] D. Shechtman, I. Blech, D. Gratias, y J.W. Cahn. *Phys. Rev. Lett.* **53**, 1951 (1984).
- [Thiem, 2010] S. Thiem y M. Schreiber, *Eur. Phys J. B* **76**, 339 (2010).
- [Turner, 1958] D.R. Turner, *J. Electrochem. Soc.* **105**, 402 (1958).
- [Yablonovitch, 1987] E. Yablonovitch, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 2059 (1987).
- [Yeh, 1998] Pochi Yeh, *Optical Waves in Layered Media*, 1st Ed. (Wiley-Interscience, 1998).
- [Zallen, 1998] Zallen R. *The physics of amorphous solids* (Wiley-VCH, 1998).
- [Zhukovsky, 2010] Sergei V. Zhukovsky, *Phys. Rev. A* **81**, 053808 (2010).
- [Zhao, 2007] Z. Zhao, F. Gao, R.W. Peng, L.S. Cao, D. Li, Z. Wang, X.P. Hao, M. Wang y C. Ferrari, *Phys. Rev. B* **75**, 165117 (2007).