



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

CONTRIBUCIONES DE LOS QUARKS  
DEL MAR EN EL MOMENTO  
MAGNÉTICO DE LOS BARIONES DEL  
DECUPLETE

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
FÍSICO

PRESENTA:  
GUSTAVO HAZEL GUERRERO NAVARRO

DIRECTOR DE TESIS:  
DR. ROELOF BIJKER



CIUDAD UNIVERSITARIA, D.F.

2014



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## 1. Datos del alumno

Apellido paterno	Guerrero
Apellido materno	Navarro
Nombre	Gustavo Hazel
Teléfono	044 55 2201 6113
Universidad Nacional Autónoma de México	
Facultad de Ciencias	
Carrera	Física
Número de cuenta	306073164

## 2. Datos del tutor

Grado	Doctor
Nombre	Roelof
Apellido paterno	Bijker
Apellido materno	Bijker

## 3. Datos del sinodal 1

Grado	Doctora
Nombre	Elizabeth
Apellido paterno	Padilla
Apellido materno	Rodal

## 4. Datos del sinodal 2

Grado	Doctor
Nombre	Genaro
Apellido paterno	Toledo
Apellido materno	Sánchez

## 5. Datos del sinodal 3

Grado	Doctor
Nombre	Rodolfo Patricio
Apellido paterno	Martínez
Apellido materno	y Romero

## 6. Datos del sinodal 4

Grado	Doctor
Nombre	Eleazar
Apellido paterno	Cuautle
Apellido materno	Flores

## 7. Datos del trabajo escrito

Título	Contribuciones de los quarks del mar en el momento magnético de los bariones del decuplete
Número de páginas	88
Año	2014

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>5</b>
<b>1. El modelo de quarks</b>	<b>7</b>
1.1. Antecedentes . . . . .	7
1.2. Formulación . . . . .	8
1.3. Diagramas de peso . . . . .	9
1.4. Bariones $qqq$ . . . . .	14
1.4.1. Octete . . . . .	15
1.4.2. Decuplete . . . . .	18
1.5. Mesones $q\bar{q}$ . . . . .	21
1.5.1. construcción de la funciones de onda espín-sabor . . . . .	21
<b>2. Simetrías</b>	<b>25</b>
2.1. La simetría de isoespín $SU(2)$ . . . . .	26
2.2. Simetría de isoespín $SU(3)$ . . . . .	28
2.3. Simetría de espín-sabor $SU(6)$ . . . . .	30
<b>3. Extensiones al modelo de quarks</b>	<b>33</b>
3.1. El modelo de la nube mesónica MCM . . . . .	33
3.2. El modelo de quarks Unquenched . . . . .	40
<b>4. Momentos magnéticos</b>	<b>47</b>
4.1. Momentos magnéticos en el modelo de quarks . . . . .	48
4.2. Momentos magnéticos en el modelo de quarks Unquenched . . . . .	50
4.2.1. Octete . . . . .	51
4.2.2. Decuplete . . . . .	52
<b>5. Resultados</b>	<b>67</b>
<b>Conclusiones</b>	<b>71</b>
<b>Apéndice.</b>	<b>72</b>

<b>A.</b>	<b>73</b>
A.1. Funciones de onda de espín-sabor del octete de bariones en el modelo de quarks .	73
<b>B.</b>	<b>75</b>
B.1. El grupo de simetría SU(2) . . . . .	75
B.1.1. Multipletes . . . . .	76
B.2. El grupo de simetría SU(3) . . . . .	78
<b>C.</b>	<b>83</b>
C.1. Coeficientes de Clebsch-Gordan . . . . .	83
<b>D.</b>	<b>85</b>
D.1. El valor principal de Cauchy . . . . .	85
D.2. Valores de las masas de hadrones en la simetría de isospín . . . . .	86
<b>Bibliografía</b>	<b>87</b>

# Introducción

En la física nuclear y de partículas es de principal importancia poder describir de una forma más adecuada la estructura de los hadrones desde un punto de vista fundamental. En la cromodinámica cuántica podemos encontrar una explicación en la composición básica de esto y así mismo como sus grados de libertad posibles. Esta ha sido una muy buena base para dar una descripción bastante adecuada para el modelo de quarks, en el que se considera a la estructura interna de los hadrones como estados acoplados de estos constituyentes básicos, sin embargo la descripción que se da en el modelo de quarks ha sido un camino que no se ha completado aún, pues a pesar de varios éxitos de este modelo como lo son el resultado con una muy buena aproximación para los momentos magnéticos, se han encontrado resultados experimentales en el que se ha puesto en duda esto, como lo son los resultados para la asimetría del sabor para el protón. Han habido bastantes experimentos en los que se ha alcanzado una gran precisión para dar indicios de la compleja estructura del nucleón. En el contexto histórico se había considerado antes de los años 1930's que el protón tenía una estructura puntual pero esto dejó de considerarse así hasta que se obtuvieron las mediciones del momento magnético anómalo para este [20], las cuales determinaron ser cerca de 2.5 veces más grande como uno esperaría para una partícula de Dirac de espín  $\frac{1}{2}$ . El tamaño finito del protón fué medido en los años 1950's en experimentos de dispersión elástica en el SLAC el cual fue  $0.8 \text{ fm}$  [21] (el valor actual es de  $0,877 \pm 0,007 \text{ fm}$  [22]). La primera evidencia para constituyentes básicos (quarks) en el protón se encontró en experimentos de dispersión inelástica profunda a finales de los 1960's por la colaboración MIT-SLAC [23] que, eventualmente, junto con muchos otros desarrollos permitiría la formulación de la QCD en los años 1970's como la teoría de las partículas fuertemente interactuantes. La compleja estructura del nucleón se manifestó por sí misma una vez más en recientes experimentos de transferencia de polarización [24] en los cuales se mostró que el radio de los factores de forma eléctrico y magnético exhiben un comportamiento bastante diferente como una función de transferencia de momento comparada con el fenómeno de factor de forma de escala obtenida por el método de separación de Rosenbluth [25].

Experimentos variados de gran precisión sobre las propiedades del nucleón han dado indicio de la estructura interna a bajas energías para el mismo en el que se muestran datos de que este y los demás bariones están compuestos por estados base de quarks  $qqq$ . Entre ellos han sido experimentos en Jefferson Laboratory, MIT-Bates, LEGS en BNL, MAMI en Mainz, ELSA en Bonn y GRAAL en Grenoble [26].

Todo parecía ir en buen camino al plantearse el modelo de quarks, que daba una descripción del nucleón y los de más hadrones, como configuraciones de tres quarks,  $qqq$ , y en el que podían describirse bastante bien las masas y los momentos magnéticos, sin embargo hubo algunas dis-

crepancias sistemáticas con los datos experimentales sobre los acoplamientos electromagnéticos y fuertes que no podían explicarse en algún modelo basado únicamente en los quarks de valencia. Evidencia adicional sobre las componentes de Fock (tales como  $qqq - q\bar{q}$ ) de orden mayor y sobre la aún más extraña estructura del nucleón vino cuando se obtuvieron mediciones de la asimetría de sabor del mar  $\bar{d}/\bar{u}$  [27, 28] y de la violación de paridad en experimentos de dispersión del electrón, en los cuales se encontró una contribución de los quarks extraños en las propiedades electromagnéticas del protón.

La asimetría de sabor del protón está relacionada con la suma de Gottfried,  $S_G$ , por la diferencia de las funciones de estructura electromagnética del protón y del neutrón como

$$S_G = \int_0^1 dx \frac{F_{2p}(x) - F_{2n}(x)}{x} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \int_0^1 dx [\bar{d}(x) - \bar{u}(x)] \quad (1)$$

Experimentalmente se ha medido que la suma de Gottfried para el contenido de sabor en el protón es  $S_G = 0.2281 \pm 0.0065$ , es decir hay un exceso de antiquarks  $\bar{d}$  en relación a los antiquarks  $\bar{u}$ , i.e.,  $\bar{d} > \bar{u}$ . Una primera evidencia de la violación de la suma de Gottfried proviene de la NMC (New Muon Collaboration) [29] y posteriormente fue confirmada en los experimentos de Fermilab E866 Drell-Yann [30,31].

En consecuencia a la asimetría de sabor en el mar del protón se le atribuye un origen no perturbativo y debido a la dificultad de realizar cálculos en este régimen en QCD, es conveniente tratar este fenómeno a partir de modelos efectivos en los que se considera que los componentes constituyentes del nucleón, y en consecuencia de los hadrones, son los quarks de valencia y quarks del mar  $q\bar{q}$ .

En el presente trabajo se presenta un estudio sobre las contribuciones de los quarks del mar en modelos efectivos como lo son el modelo de la nube mesónica (MCM) y el modelo de quarks "Unquenched" (UQM) para obtener las funciones de onda de espín-sabor de los bariones del decuplete así como calcular los momentos magnéticos para estos mismos. En primer lugar se hace una revisión del modelo de quarks haciendo uso de los grupos de simetría  $SU(2)$  y  $SU(3)$  y se presenta una explicación de la construcción de las funciones de onda en este modelo, pasando posteriormente al siguiente capítulo en el que se da un tratamiento a las propiedades de simetría que existen entre ellos y la importancia que tiene en el cálculo de los momentos magnéticos. Por consiguiente se hace una breve presentación a los modelos efectivos del modelo de quarks, de los cuales se presenta una explicación a los fundamentos teóricos del MCM y del UQM para la construcción de las funciones de onda de los bariones del decuplete, así como el cálculo explícito de los coeficientes de acoplamiento de los estados intermedios correspondientes a los quarks del mar. Hecho esto se presenta la teoría para el momento magnético de los bariones tanto en el modelo de quarks como en sus extensiones (los modelos efectivos MCM y UQM) y los cálculos realizados para obtener los valores del momento magnético en el decuplete. Finalmente se presentan los resultados obtenidos y la comparación con el modelo de quarks y los datos experimentales así como los ajustes hechos en el momento magnético de los quarks.

# Capítulo 1

## El modelo de quarks

### 1.1. Antecedentes

Desde finales de la década de 1940 se han descubierto muchos hadrones, en rayos cósmicos y en aceleradores:  $\Lambda^0$ ,  $\Sigma^\pm$ ,  $\Sigma^0$ ,  $\Xi^-$ ,  $\Xi^0$ ,  $\Delta^{++}$ ,  $\Delta^\pm$ ,  $\Delta^0$ ,  $\Omega^-$ ,  $\rho^0$ ,  $\rho^\pm$ ,  $\omega^0$ ,  $\eta^0$ ,  $K^\pm$ ,  $K^0$  y numerosas versiones más pesadas de muchas de estas partículas con espín superior (indicadas por la adición de asteriscos a los símbolos) que se conocen como *recurrencias de Regge*. Esto hubiera sido totalmente descorcentante si no fuera por el hecho de que se observó que se agrupaban en ciertas familias, llamadas *multipletes*. Se obtuvo una buena comprensión (por parte de Murray Gell-Mann y Yuval Ne'eman en 1961) de la naturaleza de estos multipletes sobre la base de que tales multipletes proporcionan representaciones del grupo SU(3). Tal método se le conoció como el "Eightfold Way" (camino de las ocho vías, sobre el que se predijo la existencia antes de su descubrimiento de algunos otros hadrones) en el cual los bariones y mesones eran organizados en patrones geométricos de acuerdo a su carga y extrañeza. El "Eightfold Way" predijo una estructura organizacional para clasificar a estas partículas, a las que después se les llamó hadrones.

Un entendimiento de por qué el "Eightfold Way" funcionó tan bien vino en 1964 cuando M. Gell-Mann y G. Zweig independientemente propusieron la hipótesis que todos los hadrones eran compuestos de constituyentes más elementales, a los cuales Gell-Mann llamó **quarks**, con la misteriosa característica de que estos deben tener carga eléctrica fraccionaria, véase la tabla 1.1. Los tres quarks consisten de un doblete de isoespín,  $I = \frac{1}{2}$  y de extrañeza,  $S = 0$ , etiquetados  $u$  y  $d$ , posicionados para el isoespín "up" y "down", respectivamente. El tercer es un isosingulete  $S = -1$ , etiquetado como  $s$  (por su denominación en inglés *strange*). Será necesario explicar más a fondo sobre esto, de dónde podremos aclarar la forma de clasificar a los bariones y a los mesones dentro de este marco de elementos básicos constituyentes de quarks. Los bariones pueden verse como estados base de tres quarks,  $qqq$ , y los mesones son compuestos de un quark más un antiquark,  $q\bar{q}$ , respectivamente. En este momento fueron los tres sabores de quarks más los correspondientes antiquarks necesarios para explicar el espectro de los bariones que se habían y se seguían observando.



## 1.2. Formulación

El modelo de quarks lo entendemos actualmente como la descripción de la función de onda de los hadrones, bariones y mesones, como estados compuestos de constituyentes elementales llamados quarks. A la vez estos tienen distintos grados de libertad los cuales brindan la estructura organizacional y de simetría que caracterizan a cada hadrón, como la paridad, la carga, el número bariónico, el espín, la hipercarga, etc. Entre estos grados de libertad, así como la carga eléctrica para cada quark para la interacción electromagnética, existe la carga de color, la cual tiene que ver con la interacción fuerte, para ello existen tres tipos, **g** (green), **red** (r), **b** (blue). Estos grados de libertad para el color pueden verse como elementos que se transforman bajo el grupo de simetría  $SU_c(3)$ .

Tenemos además en el espacio de sabor los tres grados de libertad **u**, **d** y **s** que se mencionaron arriba, cuyos elementos se transformarán en un grupo de simetría independiente llamado  $SU_f(3)$ .

Como un tercer grado de libertad independiente tenemos el espacio de espín, **S**, cuyos elementos pueden representarse en dos grados de libertad internos como  $\uparrow$  (up) y  $\downarrow$  (down), que son las dos posibles proyecciones de espín  $S = \frac{1}{2}$ . En la representación de sus elementos estos se transformarían en el grupo de simetría  $SU_s(2)$ .

En este punto tenemos ya una noción del grupo de transformación de los grados de libertad para los quarks, el cuál no es sino el producto tensorial (directo) de los grupos de simetría para las transformaciones anteriores, el cuál puede cumplir ser un subconjunto de  $SU_f(3) \otimes SU_s(2) \otimes SU_c(3)$ . Como una generalización de este grupo de transformación en el modelo quarks con grados de libertad de espín, sabor y color podemos utilizar el grupo de simetría como

$$\mathcal{G}_{sfc} = SU(6)_{sf} \otimes SU(3)_c \quad (1.1)$$

de donde el grupo de simetría  $SU_{sf}(6)$  es el grupo de simetría para las transformaciones de espín y sabor

$$SU_{sf}(6) \supset SU_f(3) \otimes SU_s(2) \quad (1.2)$$

pero en este caso nos bastará con utilizar únicamente el producto de  $SU_f(3)$  y  $SU_s(2)$  como dos grupos independientes, donde el álgebra está descrita en el apéndice B y los cuáles se discuten en el capítulo 2. Al mismo tiempo podemos descomponer el grupo de simetría para el sabor, así como su álgebra, como

$$SU_f(3) \supset SU_I(2) \otimes U_Y(1) \quad (1.3)$$

de donde del grupo de simetría de isoespín (cuyos elementos son multipletes de sabor  $u$  y  $d$ )  $SU_I(2)$  pueden construirse los multipletes de isoespín,  $I$ , y con el grupo de simetría  $U_Y(1)$  que tiene que ver con la hipercarga,  $Y$ , como veremos a continuación. La importancia de estos números cuánticos definidos en los quarks también yace en la expresión para la carga eléctrica dada por la relación de Gell-Mann-Nishijima

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2} = I_3 + \frac{B + S}{2}, \quad (1.4)$$

donde  $B$  denota el número bariónico y  $S$  la extrañeza. Los números cuánticos de los tres quarks ligeros ( $u$ ,  $d$  y  $s$ ) y los correspondientes antiquarks están dados en la tabla 1.1.

Tabla 1.1: Números cuánticos de los quarks y antiquarks. J denota el espín, S la extrañeza, I el isoespín e  $I_3$  la proyección de isoespín.

	B	J	P	I	$I_3$	S	Y	Q
$u$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	+	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$d$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	+	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
$s$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	+	0	0	-1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$
$\bar{u}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	-	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
$\bar{d}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	-	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$\bar{s}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	-	0	0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

### 1.3. Diagramas de peso

Tomando como antecedente el grupo de transformaciones de SU(3) del apéndice B.2, en que encontramos los generadores del grupo, B.36, está definida el *subálgebra de Cartan* como el conjunto de generadores que conmutan entre sí. A este subconjunto de generadores se les conoce como *generadores de Cartan*.

En el caso del grupo SU(3) los generadores del álgebra  $\hat{F}_i$ , como se ve en la ecuación B.40, que forman el *subálgebra de Cartan* son los operadores  $\hat{F}_3$  y  $\hat{F}_8$  que en la física de partículas elementales están asociados con los operadores de proyección de isoespín e hipercarga correspondientemente como

$$\hat{F}_3 = \hat{I}_3 \quad \hat{F}_8 = \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{Y} \quad (1.5)$$

Siguiendo la misma idea y utilizando los demás generadores se pueden construir a los operadores de escalón para el álgebra de SU(3) en la física de la simetría de sabor (ver apéndice) como siguen

$$\hat{I}_\pm = \hat{F}_1 \pm i\hat{F}_2, \quad \hat{V}_\pm = \hat{F}_4 \pm i\hat{F}_5, \quad \hat{U}_\pm = \hat{F}_6 \pm i\hat{F}_7 \quad (1.6)$$

Teniendo estos operadores, puede reescribirse el álgebra del grupo SU(3) B.38 en terminos de ellos como

$$[\hat{U}_+, \hat{V}_+] = [\hat{U}_+, \hat{I}_-] = [\hat{V}_+, \hat{I}_+] = 0$$

$$\begin{aligned}
[\hat{Y}, \hat{I}_3] &= 0 \\
[\hat{Y}, \hat{I}_\pm] &= 0, \quad [\hat{Y}, \hat{U}_\pm] = \pm \hat{U}_\pm, \quad [\hat{Y}, \hat{V}_\pm] = \pm \hat{V}_\pm, \\
[\hat{I}_3, \hat{I}_\pm] &= \pm \hat{I}_\pm, \quad [\hat{I}_3, \hat{U}_\pm] = \mp \frac{1}{2} \hat{U}_\pm, \quad [\hat{I}_3, \hat{V}_\pm] = \pm \frac{1}{2} \hat{V}_\pm, \\
[\hat{I}_+, \hat{I}_-] &= 2\hat{I}_3, \quad [\hat{U}_+, \hat{U}_-] = \frac{3}{2} \hat{Y} - \hat{I}_3, \quad [\hat{V}_+, \hat{V}_-] = \frac{3}{2} \hat{Y} + \hat{I}_3, \\
[\hat{U}_+, \hat{V}_-] &= \hat{I}_-, \quad [\hat{I}_-, \hat{V}_+] = \hat{U}_+, \quad [\hat{I}_+, \hat{U}_+] = \hat{V}_+.
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Para construir el diagrama de peso de la representación fundamental tenemos que definir en primer lugar a  $|\phi_m\rangle$  como el vector en el espacio de la representación. Este vector tiene que cumplir la siguiente ecuación de eigenvalores

$$\hat{F}_i |\phi_m\rangle = m_i |\phi_m\rangle \tag{1.8}$$

donde  $\hat{F}_i$  corresponden únicamente a los generadores de Cartan que, en este caso y como vimos arriba, corresponden a los índices  $i = 3, 8$ . Al conjunto de eigenvalores,  $m_1, m_2, \dots$  se les asociarán las componentes de lo que llamaremos los vectores de peso de  $\phi$ .

Una vez que se encontraron los generadores de Cartan ( $\hat{I}_3$  y  $\hat{Y}$ ) procedemos a encontrar sus eigenvalores, por lo que para ello definiremos los vectores base

$$|u\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |d\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |s\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.9}$$

donde cada elemento de esta base está asociado a los sabores ligeros de los quarks  $u$ ,  $d$  y  $s$  como se muestra en el apéndice B.2. Hecho esto se obtienen las siguientes ecuaciones de eigenvalores

$$\begin{aligned}
\hat{I}_3 |u\rangle &= \frac{1}{2} |u\rangle & \hat{I}_3 |d\rangle &= -\frac{1}{2} |d\rangle & \hat{I}_3 |s\rangle &= 0 \\
\hat{Y} |u\rangle &= \frac{1}{3} |u\rangle & \hat{Y} |d\rangle &= \frac{1}{3} |d\rangle & \hat{Y} |s\rangle &= -\frac{2}{3} |s\rangle
\end{aligned} \tag{1.10}$$

El par ordenado de los valores propios  $(m_1, m_2)$  correspondiente cada vector base constituirá un punto en el diagrama de peso. Como resultado de ello obtenemos un triplete en el espacio cuyos ejes son  $I_3$  y  $Y$ , tal como se muestra en la figura 1.1.

Existe otra forma para clasificar los multipletes de un grupo de transformaciones utilizando las etiquetas  $(\lambda, \mu)$  o bien la dimensión de la representación

$$\dim(\lambda, \mu) = \frac{1}{2} (\lambda + 1)(\mu + 1)(\lambda + \mu + 2) \tag{1.11}$$

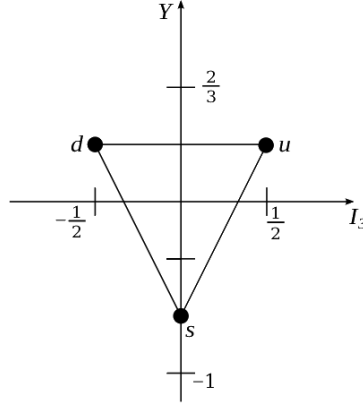


Figura 1.1: Diagrama de peso de la representación fundamental de  $SU(3)$  donde se muestra el triplete de quarks  $(1,0)$

Así entonces podemos identificar al triplete de la representación fundamental de  $SU(3)$  con las etiqueta  $(1,0)$  o en términos de su dimensión como  $\mathbf{3}$ . En el mismo sentido podemos expresar a los estados de la base 1.9 con las etiquetas  $|(\lambda, \mu)I, I_3, Y\rangle$  los cuales quedan como sigue

$$\begin{aligned}
 |u\rangle &= |(1,0)\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\rangle \\
 |d\rangle &= |(1,0)\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\rangle \\
 |s\rangle &= |(1,0)0, 0, -\frac{2}{3}\rangle.
 \end{aligned}
 \tag{1.12}$$

Teniendo estos estados y los operadores de escalón 1.6, se puede pasar de un vector de la base en el diagrama de peso haciendo uso de estos operadores. Al utilizar la representación matricial de ellos y usando la base 1.9 es sencillo concluir que (véase la figura 1.2)

$$\begin{aligned}
 \hat{U}_{\pm}|u\rangle &= \hat{I}_{+}|u\rangle = \hat{V}_{+}|u\rangle = 0 \\
 \hat{V}_{\pm}|d\rangle &= \hat{I}_{-}|d\rangle = \hat{U}_{+}|d\rangle = 0
 \end{aligned}
 \tag{1.13}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{I}_{\pm}|s\rangle &= \hat{V}_{-}|s\rangle = \hat{U}_{-}|s\rangle = 0 \\
 \hat{I}_{-}|u\rangle &= |d\rangle \quad \hat{I}_{+}|d\rangle = |u\rangle \\
 \hat{V}_{-}|u\rangle &= |s\rangle \quad \hat{V}_{+}|s\rangle = |u\rangle \\
 \hat{U}_{-}|d\rangle &= |s\rangle \quad \hat{U}_{+}|s\rangle = |d\rangle
 \end{aligned}
 \tag{1.14}$$

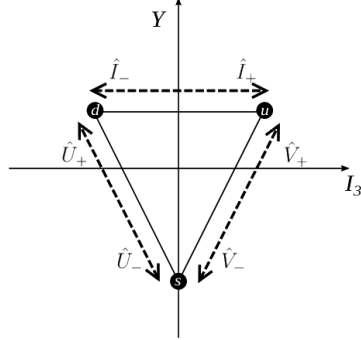


Figura 1.2: Acción de los operadores de escalón  $\hat{I}_\pm$ ,  $\hat{U}_\pm$  y  $\hat{V}_\pm$  en la representación del diagrama de peso  $I_3 - Y$

Como puede verse en la figura 1.2 y usando las ecuaciones de las relaciones de conmutación 1.7 puede obtenerse fácilmente que los operadores de escalón cambian el valor de isoespín,  $I$ , la proyección de isoespín,  $I_3$  y de la hipercarga  $Y$  de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 \hat{I}_\pm & : \quad \Delta I_3 = \pm 1, \quad \Delta Y = 0, \quad |\Delta I| = 0 \\
 \hat{V}_\pm & : \quad \Delta I_3 = \pm \frac{1}{2}, \quad \Delta Y = \pm 1, \quad |\Delta I| = \frac{1}{2} \\
 \hat{U}_\pm & : \quad \Delta I_3 = \mp \frac{1}{2}, \quad \Delta Y = \pm 1, \quad |\Delta I| = \frac{1}{2}
 \end{aligned} \tag{1.15}$$

Explícitamente al aplicar los operadores de escalón a cualquier vector  $|I, I_3, Y\rangle$  (donde a cualquier vector es referido a cualesquiera valores  $Y$ ,  $I$  y  $I_3$ , incluyendo los valores para los estados base de sabor de los quarks mencionados antes, y que nos serán útiles en los siguientes capítulos para los estados de multiquarks como los bariones y mesones) estos vienen como una ecuación de eigenvalores, cuyos valores propios están dados en una forma más general, la cuál viene como una forma larga aunque sencilla de demostrarse, como

$$\hat{I}_\pm |I, I_3, Y\rangle = \sqrt{(I \mp I_3)(I \pm I_3 + 1)} |I, I_3 \pm 1, Y\rangle, \tag{1.16}$$

$$\hat{V}_\pm |I, I_3, Y\rangle = a_\pm \left| I + \frac{1}{2}, I_3 \pm \frac{1}{2}, Y \pm 1 \right\rangle + b_\pm \left| I - \frac{1}{2}, I_3 \pm \frac{1}{2}, Y \pm 1 \right\rangle, \tag{1.17}$$

$$\hat{U}_\pm |I, I_3, Y\rangle = c_\pm \left| I + \frac{1}{2}, I_3 \mp \frac{1}{2}, Y \pm 1 \right\rangle + d_\pm \left| I - \frac{1}{2}, I_3 \mp \frac{1}{2}, Y \pm 1 \right\rangle, \tag{1.18}$$

donde los coeficientes vienen dados por los elementos de matriz

$$\begin{aligned}
 a_{\pm} &= |I, I_3, Y\rangle = \left\langle I + \frac{1}{2}, I_3 \pm \frac{1}{2}, Y \pm 1 \left| \hat{V}_{\pm} \right| I, I_3, Y \right\rangle \\
 b_{\pm} &= |I, I_3, Y\rangle = \left\langle I - \frac{1}{2}, I_3 \pm \frac{1}{2}, Y \pm 1 \left| \hat{V}_{\pm} \right| I, I_3, Y \right\rangle \\
 c_{\pm} &= |I, I_3, Y\rangle = \left\langle I + \frac{1}{2}, I_3 \mp \frac{1}{2}, Y \pm 1 \left| \hat{U}_{\pm} \right| I, I_3, Y \right\rangle \\
 d_{\pm} &= |I, I_3, Y\rangle = \left\langle I - \frac{1}{2}, I_3 \mp \frac{1}{2}, Y \pm 1 \left| \hat{U}_{\pm} \right| I, I_3, Y \right\rangle
 \end{aligned} \tag{1.19}$$

Una vez formulada el álgebra de los operadores  $SU(3)$  para el multiplete de quarks, terminaremos esta sección ahora siguiendo los mismos pasos que hemos hechos para la representación conjugada para el diagrama de peso visto anteriormente. Esto nos será de especial utilidad para describir las propiedades de los quarks "conjugados", o mejor dicho en física, de los antiquarks. El hecho de que esto funcione de manera análoga es que la diferencia fundamental entre los quarks y los antiquarks es el cambio de signo en la carga eléctrica. Es notable observar de nuevo la relación de Gell-Mann-Nishijima 1.4, de donde podemos concluir que la hipercarga y la proyección de isospín tienen que cambiar de signo. Esto se refleja en el diagrama de peso de la representación fundamental para los quarks como una reflexión en los ejes de hipercarga,  $Y$ , y de proyección de isospín,  $I_3$  para cada vértice, como de muestra en la figura 1.3 (véase apéndice B para la representación conjugada). A esta representación se le llamará el antitriplete de quarks o bien en términos de su dimensión como  $\bar{\mathbf{3}}$ .

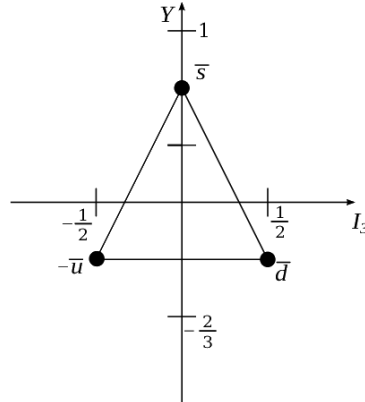


Figura 1.3: Diagrama de peso de la representación fundamental conjugada para los antiquarks en el espacio  $I_3 - Y$

Todo esto nos será útil más adelante, donde la representación fundamental de  $SU(3)$  y su

representación conjugada es justamente la base del modelo de quarks, donde los componentes en la función de onda de los bariones y los mesones corresponderan a la composición de la base esta representación.

## 1.4. Bariones $qqq$

Como vimos en la primera sección de este capítulo, se había encontrado que los hadrones encontrados tenían propiedades que formaban ciertos patrones al colocarlos como elementos que formaban multipletes, por lo que se asociaron grados de libertad además de la carga eléctrica, a saber la proyección de isoespín, fué uno de ellos. Un hecho notable era que en la composición de los vectores base de la representación fundamental, así como la representación conjugada, se podía ver como los disitintos multipletes que correspondían a las partículas encontradas hasta el momento, y algunas aún no observadas, en esto consistió el "Eightfold Way", y además se transformaban en los distintos grupos de simetría (véase 1.1, 1.2 y 1.3 ) al considerarse además el espín. En general, la función de onda total como un estado con grados de libertad como el color ( $c$ ), el espín,  $s$ , el sabor (isospín),  $I$ , el espacial (orbital),  $l$ , puede expresarse en términos independientes como

$$|\Psi\rangle_{total} = |\psi_r\rangle_{orb} \otimes |\phi\rangle_{sabor} \otimes |\chi\rangle_{espin} \otimes |\psi_c\rangle_{color}. \quad (1.20)$$

Un postulado fundamental propuesto por Gell-Mann era que los componentes de la función total, los quarks, tenían espín fraccionario, o en otras palabras, eran fermiones. Hecho esto cuando acoplamos el número cuántico de espín (así como de isoespín) para tres de ellos, el resultado es que el estado final también tenía que corresponder a un fermión, es decir, la función de onda total tenía que se una función antisimétrica bajo el intercambio de cualesquiera dos componentes. En este punto nadie tenía idea del grado de libertad del color en la función de onda de los bariones y un problema fundamental era que usando solamente el sabor y el espín en la descripción de los hadrones con la representación fundamental de  $SU(3)$  era que siempre se obtenía una función de onda simétrica, considerando el estado base ( $|\psi\rangle_{orb}$  simétrica).

Como se sabía que esto debía ser un fermión y que cumpliera el principio de exclusión de Pauli, se introdujo así el estado de color  $|\psi\rangle_{color}$  como una función antisimétrica, considerando los tres grados de libertad correspondientes mencionados antes, *i.e.*

$$|\psi_B\rangle_{color} = \frac{1}{\sqrt{6}}(rgb - grb + brg - rbg + gbr - bgr) \quad (1.21)$$

donde  $|\psi_B\rangle_{color}$  denota la función de onda de color para estados de tres quarks, es decir, bariones. Una característica de las partículas físicas es que son escalares en el espacio de color (razón por la que también no se había observado esto como un grado de libertad), es decir, que  $grb = 0$  en cualquiera de sus combinaciones.

En cuanto al sabor, es importante mencionar la forma fundamental en que se acoplan los estados de tres quarks  $|q\rangle \otimes |q\rangle \otimes |q\rangle$ . Debido a que cada elemento  $|q\rangle$  es un elemento de la representación fundamental  $SU(3)$  o bien  $SU_f(3)$  entonces el producto directo se puede expresar como la suma directa de distintos grupos de acuerdo a sus propiedades de simetría en 27 combinaciones posibles la cuál queda como

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{1}_A \oplus \mathbf{8}_M \oplus \mathbf{8}_M \oplus \mathbf{10}_S. \quad (1.22)$$

Esto indica que existe un singulete antisimétrico,  $\mathbf{1}_A$ , dos octetes con simetría mixta,  $\mathbf{8}_M$ , y un decuplete totalmente simétrico,  $\mathbf{10}_S$ .

A continuación se discutirá la construcción de la función de onda de espín-sabor para el caso de los dos octetes posibles y el singulete, así como en otro caso el decuplete completamente simétrico.

### 1.4.1. Octete

Como vimos antes, los estados con simetría mixta del acoplamiento entre tres estados de sabor de quarks correspondían a dos octetes  $\mathbf{8}_M$ , los cuales cada uno tiene una simetría distinta respecto al intercambio de los primeros dos componentes (sabor). Las funciones de onda que corresponden a espín-sabor del octete de bariones,  $|\psi\rangle_{sabor} \otimes |\psi\rangle_{espin}$ , se obtienen al multiplicar los estados de simetría mixta como se muestra en la figura 1.4 su diagrama de peso y que se explicará a continuación esta construcción.

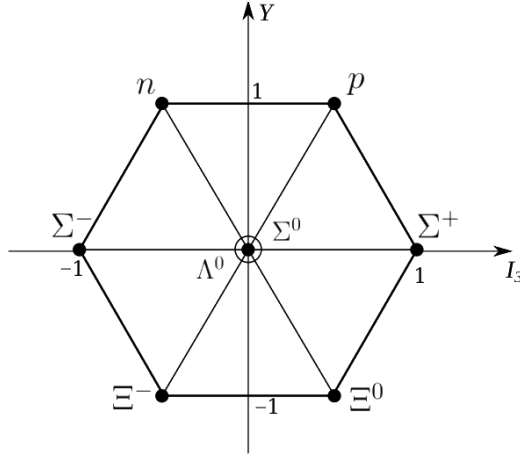


Figura 1.4: Diagrama de peso de los bariones del octete en el espacio  $I_3 - Y$

### Coordenadas de Jacobi

Para explicar los estados de simetría mixta en el octete de bariones es necesario introducir una base en la cuál se pueda expresar las simetrías mixtas del octete de sabores  $\mathbf{8}_M$ . A esta base se le conoce como la base de coordenadas de Jacobi para un sistema de tres componentes indistinguibles con masas idénticas como  $(\rho, \lambda, R)$ , donde

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{\sqrt{2}}(r_1 - r_2) \\ \lambda &= \frac{1}{\sqrt{6}}(r_1 + r_2 - 2r_3) \\ R &= \frac{1}{3}(r_1 + r_2 + r_3) \end{aligned} \tag{1.23}$$



Puede verse que las dos primeras coordenadas son los estados propios del operador de permutaciones  $P_{12}$  cuyo eigenvalor es 1, en otras palabras, son simétricas ante el intercambio de los primeros dos componentes 1 y 2. Por el otro lado, estas no son eigenestados para los componentes 2 y 3, ya que

$$P_{23}\lambda = -\frac{1}{2}\lambda + \frac{\sqrt{3}}{2}\rho, \quad P_{23}\rho = \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda + \frac{1}{2}\rho \quad (1.24)$$

Los estados que cumplan estas ecuaciones se les asociará con estas etiquetas, así entonces en la función de onda de sabor de los dos octetes con simetría mixta haremos la siguiente asociación

$$\mathbf{8}_M \rightarrow \phi^\rho, \phi^\lambda \quad (1.25)$$

La construcción de estas funciones de onda se explicará a continuación.

### Construcción de la funciones de onda espín-sabor.

Para obtener estas funciones de onda de sabor del octete de bariones, definimos el operador de antisimetrización

$$\mathcal{A} = \frac{1}{n!} \sum_P \delta_P P \quad (1.26)$$

donde  $\delta_P$  se refiere a la paridad de las permutaciones,  $P$ , como  $\delta_P = (-1)^{n-k}$  con  $k$  el número de ciclos y  $n$  el número de objetos. Así también el operador de simetrización está dado por

$$\mathcal{S} = \frac{1}{n!} \sum_P P \quad (1.27)$$

El siguiente paso es tomar un estado de tres partículas con dos partículas idénticas y luego antisimetrizar y simetrizar utilizando los operadores correspondientes 1.26 y 1.27. Se tomará en primer lugar el estado  $|uud\rangle$  como sigue

$$\begin{aligned} |\phi^1\rangle &= \mathcal{A}_{13}\mathcal{S}_{12}|uud\rangle = \frac{1}{4}(e - P_{13})(e + P_{12})|uud\rangle = \frac{1}{2}(|uud\rangle - |duu\rangle) \\ |\phi^2\rangle &= \mathcal{A}_{23}\mathcal{S}_{12}|uud\rangle = \frac{1}{4}(e - P_{23})(e + P_{12})|uud\rangle = \frac{1}{2}(|uud\rangle - |udu\rangle) \\ |\phi^3\rangle &= \mathcal{A}_{12}\mathcal{S}_{13}|uud\rangle = 0 \\ |\phi^4\rangle &= \mathcal{A}_{12}\mathcal{S}_{23}|uud\rangle = 0 \end{aligned} \quad (1.28)$$

Podemos observar que los estados  $|\phi^1\rangle$  y  $|\phi^2\rangle$  tienen la misma simetría que el caso de los estados  $|\phi^\lambda\rangle$  y  $|\phi^\rho\rangle$  respectivamente, por lo que se hará simplemente esta asociación a cada uno. Otra cosa importante es que los estados de sabor deben de ser una base ortonormal, pero

normalizando y haciendo la combinación lineal adecuada tenemos que la base ortonormal queda como

$$\begin{aligned}
|\phi^\lambda\rangle &= \mathcal{N}_\lambda(|\phi^1\rangle + |\phi^2\rangle) = \frac{1}{\sqrt{6}}(2|uud\rangle - |udu\rangle - |duu\rangle) \\
|\phi^\rho\rangle &= \mathcal{N}_\rho(|\phi^1\rangle - |\phi^2\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|udu\rangle - |duu\rangle)
\end{aligned}
\tag{1.29}$$

Estos estados corresponden a los estados de simetría mixta de sabor para el protón. El resto de los estados pueden obtenerse de manera análoga o bien usando los operadores de escalón en las ecuaciones 1.16, 1.18 y 1.17. Véase también en las figuras 1.2 y 1.4. Las funciones de sabor de simetría mixta para el octete de bariones están mostradas explícitamente en la tabla 1.2.

Barión	$ (\lambda, \mu)I, I_3, Y\rangle$	$ \phi^\lambda\rangle$	$ \phi^\rho\rangle$
p	$ (1, 1)\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{6}}(2 uud\rangle -  udu\rangle -  duu\rangle)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}( udu\rangle -  duu\rangle)$
n	$ (1, 1)\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{6}}( udd\rangle +  dud\rangle - 2 ddu\rangle)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}( udd\rangle -  dud\rangle)$
$\Sigma^+$	$ (1, 1)1, 1, 0\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{6}}( usu\rangle +  suu\rangle - 2 uus\rangle)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}( suu\rangle -  usu\rangle)$
$\Sigma^0$	$ (1, 1)1, 0, 0\rangle$	$-\frac{1}{\sqrt{12}}(2 uds\rangle + 2 dus\rangle -  sdu\rangle -  sud\rangle -  usd\rangle -  dsu\rangle)$	$\frac{1}{2}( sdu\rangle +  sud\rangle -  usd\rangle -  dsu\rangle)$
$\Sigma^-$	$ (1, 1)1, -1, 0\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{6}}( dsd\rangle +  sdd\rangle - 2 dds\rangle)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}( sdd\rangle -  dsd\rangle)$
$\Lambda^0$	$ (1, 1)0, 0, 0\rangle$	$\frac{1}{2}( sud\rangle -  sdu\rangle +  usd\rangle -  dsu\rangle)$	$\frac{1}{\sqrt{12}}(2 uds\rangle - 2 dus\rangle +  sdu\rangle -  sud\rangle +  usd\rangle -  dsu\rangle)$
$\Xi^0$	$ (1, 1)\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{6}}(2 ssu\rangle -  uss\rangle -  sus\rangle)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}( sus\rangle -  uss\rangle)$
$\Xi^-$	$ (1, 1)\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{6}}(2 ssd\rangle -  dss\rangle -  sds\rangle)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}( sds\rangle -  dss\rangle)$

Tabla 1.2: Estados de simetría mixta de tres quarks en los bariones del octete  $J^P = \frac{1}{2}^+$ .

Hemos ya discutido la estructura de las funciones de simetría mixta de sabor para el octete, por lo que ahora se discutirá la estructura de las funciones de onda (estados) de espín, para completar esta parte.

Para que la función de onda completa del barión 1.20 sea una función antisimétrica, el

producto  $\chi\phi$  debe de ser una función simétrica, por lo que tomamos

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi^\rho\phi^\rho + \chi^\lambda\phi^\lambda) \quad (1.30)$$

con  $\phi^\rho$  y  $\phi^\lambda$  definidas en la tabla 1.2.  $\chi^\rho$  y  $\chi^\lambda$  representan estados de espín  $S = \frac{1}{2}$  con simetría de permutación  $\rho$  y  $\lambda$ , respectivamente. Ellos pueden contruirse de igual manera a partir de  $\phi_{p(n)}^\rho$  y  $\phi_{p(n)}^\lambda$  si hacemos el reemplazamiento

$$u \rightarrow \uparrow, \quad d \rightarrow \downarrow$$

donde  $\uparrow$  y  $\downarrow$  son los estados de proyección de espín  $S_z = +\frac{1}{2}$  y  $S_z = -\frac{1}{2}$  respectivamente, i. e.

$$\chi_{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \uparrow; \quad \chi_{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \downarrow.$$

Los estados de tres partículas de simetría mixta y  $S = \frac{1}{2}$ ,  $S_z = +\frac{1}{2}$  son

$$\chi_{\frac{1}{2}}^\lambda = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\uparrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow) \quad (1.31)$$

$$\chi_{\frac{1}{2}}^\rho = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow) \quad (1.32)$$

utilizando de manera análoga el operador de escalón  $S_-$  como el caso  $I_-$  de la ecuación 1.16 con el reemplazamiento arriba señalado, pueden obtenerse aquellos estado de espín que tienen valores  $S = \frac{1}{2}$ ,  $S_z = -\frac{1}{2}$  los cuales son

$$\chi_{-\frac{1}{2}}^\lambda = -\frac{1}{\sqrt{6}}(2\downarrow\downarrow\uparrow - \uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\uparrow\downarrow) \quad (1.33)$$

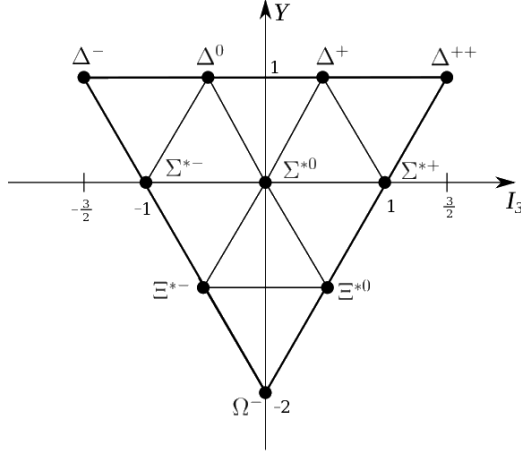
$$\chi_{-\frac{1}{2}}^\rho = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\uparrow\downarrow). \quad (1.34)$$

Una vez hecho esto, tenemos ya la estructura de la función de onda de espín-sabor para los estados del octete con espín  $J = \frac{1}{2}$  y  $J = -\frac{1}{2}$ . Los estados para el espín  $J = \frac{1}{2}$  se muestran en el apéndice A.

## 1.4.2. Decuplete

### Construcción de la funciones de onda

Para que la función de onda total de los bariones sea antisimétrica, las funciones en el espacio de espín-sabor, como se ha venido mencionando, deben ser simétricas. De esta manera, el decuplete de sabor  $\mathbf{10}_S$  se acopla con el estado de espín  $J = 3/2$  para formar estados completamente simétricos de espín-sabor. Estos estados corresponden al decuplete de bariones con proyección máxima  $J = \frac{3}{2}$  cuyo diagrama de peso se muestra en la Figura 1.5.

Figura 1.5: Diagrama de peso de los bariones del decuplete en el espacio  $I_3 - Y$ 

Como vemos la única combinación posible, tanto en el estado de sabor (isoespín) como en el estado de espín, cuyos valores tengan la proyección máxima, es la combinación simétrica para un sistema de tres componentes. El estado con proyección máxima de espín  $J_z = \frac{3}{2}$  completamente simétrico es

$$\chi_{\frac{3}{2}}^S = \uparrow\uparrow\uparrow \quad (1.35)$$

Y utilizando el operador de escalón  $\hat{S}_-$  se pueden obtener los estados completamente simétricos para los valores de proyección espín  $J_z = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$ , como

$$\begin{aligned} \chi_{\frac{1}{2}}^S &= \frac{1}{\sqrt{3}}(\uparrow\uparrow\downarrow + \uparrow\downarrow\uparrow + \downarrow\uparrow\uparrow) \\ \chi_{-\frac{1}{2}}^S &= \frac{1}{\sqrt{3}}(\uparrow\downarrow\downarrow + \downarrow\uparrow\downarrow + \downarrow\downarrow\uparrow) \\ \chi_{-\frac{3}{2}}^S &= \downarrow\downarrow\downarrow \end{aligned} \quad (1.36)$$

Para la parte de sabor es muy sencillo obtener los estados totalmente simétricos, los cuáles son los triviales  $|uuu\rangle, |ddd\rangle, |sss\rangle$ ; es fácil obtener los demás estados aplicando los operadores de escalón 1.16, 1.18, 1.17. Otra alternativa para los casos no triviales donde tenemos componentes no idénticos es sencillo obtener los estados simétricos aplicando el operador de simetrización 1.27 como en el caso anterior. Como un ejemplo ilustrativo para el estado  $|q_1 q_2 q_3\rangle$  tenemos el caso particular

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{123}|uus\rangle &= \frac{1}{3!}(e + P_{12} + P_{13} + P_{23} + P_{123} + P_{132})|uus\rangle \\ &= \frac{1}{3}(|uus\rangle + |usu\rangle + |suu\rangle) \end{aligned} \quad (1.37)$$

Cuando se normaliza adecuadamente este estado totalmente simétrico se obtiene la función de onda de sabor para el hiperón (estados con un quark extraño)  $\Sigma^{*+}$ . Pueden verse las funciones de onda de sabor para todos los bariones del decuplete en la tabla 1.3.

Barión	$ (\lambda, \mu)I, I_3, Y\rangle$	$ \phi^S\rangle$
$\Delta^{++}$	$ (3, 0)\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 1\rangle$	$ uuu\rangle$
$\Delta^+$	$ (3, 0)\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{3}}( uud\rangle +  udu\rangle +  duu\rangle)$
$\Delta^0$	$ (3, 0)\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 1\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{3}}( ddu\rangle +  dud\rangle +  udd\rangle)$
$\Delta^-$	$ (3, 0)\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 1\rangle$	$ ddd\rangle$
$\Sigma^{*+}$	$ (3, 0)1, 1, 0\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{3}}( uus\rangle +  usu\rangle +  suu\rangle)$
$\Sigma^{*0}$	$ (3, 0)1, 0, 0\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{6}}( uds\rangle +  dus\rangle +  usd\rangle +  sud\rangle +  sdu\rangle +  dsu\rangle)$
$\Sigma^{*-}$	$ (3, 0)1, -1, 0\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{3}}( dds\rangle +  dsd\rangle +  sdd\rangle)$
$\Xi^{*0}$	$ (3, 0)\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{3}}( uss\rangle +  sus\rangle +  ssu\rangle)$
$\Xi^{*-}$	$ (3, 0)\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{3}}( dss\rangle +  sds\rangle +  ssd\rangle)$
$\Omega^-$	$ (3, 0)0, 0, -2\rangle$	$ sss\rangle$

Tabla 1.3: Funciones de onda de sabor simétricas de los bariones del decuplete  $J^P = \frac{3}{2}^+$ .

Una vez obtenidos los estados simétricos para el espín y para el sabor, las funciones de onda de espín-sabor en los bariones del decuplete, por ser una función simétrica, es simplemente

$$\Psi = \phi^S \chi^S, \quad (1.38)$$

donde pueden obtenerse fácilmente para los distintos casos de sabor y de espín correspondientes.

## 1.5. Mesones $q\bar{q}$

La función de onda total para los estados de un mesón puede expresarse de la misma manera como en la ecuación 1.20 con los mismos grados de libertad para el caso del barión como mencionamos antes, la primer diferencia entre la función de onda explícita del barión será la parate correspondiente a la función de onda de color. Otra forma para obtener un estado neutro

en este grado de libertad es combinar un par quark-antiquark en un estado base. Debido a que hay 3 sabores, 2 partículas (quark y antiquark) y 2 posibles espines, hay un total de  $3 \times 3 \times 2 = 18$  combinaciones o distintos estados, o bien

$$\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} \otimes \mathbf{2} = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{1} \quad (1.39)$$

donde vemos que de acuerdo a su simetrías pueden existir dos octetes con sus respectivos singuletes.

Cabe mencionar que el principio de Pauli, para que la función de onda total sea antisimétrica, ya no es útil aquí, puesto que los componentes implicados en ella no son idénticos. La función de onda espacial seguirá siendo simétrica en el estado base. La función de onda de color es con toda comodidad una función neutra en el espacio de color, la cual se construye a partir de las combinaciones posibles de color y anti-color con la propiedad anterior como

$$|\psi_M\rangle_{color} = \frac{1}{\sqrt{3}}(r\bar{r} + b\bar{b} + g\bar{g}). \quad (1.40)$$

### 1.5.1. construcción de la funciones de onda espín-sabor

Comenzaremos con la construcción de la función de onda de espín para los mesones. Puesto que los mesones se proponen como estados de un quark y un antiquark, entonces cada uno de ellos puede llevar un espín  $s_i = \frac{1}{2}$  por lo que en el estado acoplado tenemos que la suma vectorial de los valores de espín cumple

$$|s_1 - s_2| \leq J \leq s_1 + s_2 \quad (1.41)$$

por lo que el espín total,  $J$ , del estado acoplado para el mesón puede tomar los valores posibles 1 y 0, es decir, existe un triplete de estados de espín con proyección  $J_z = 1, 0, -1$  correspondientes a  $J = 1$  como siguen

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \uparrow\uparrow, \\ \chi_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow), \\ \chi_{-1} &= \downarrow\downarrow, \end{aligned} \quad (1.42)$$

así como un singulete de espín correspondiente a  $J = 0, J_z = 0$  como

$$\chi_0^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow) \quad (1.43)$$

Estos dos posibles estados de espín son justamente lo que diferencian a los mesones vectoriales ( $J = 1$ ) y a los mesones pseudoescalares ( $J = 0$ ) los cuales cada uno forma un octete y un singulete, como se muestran en la figuras 1.6 y 1.7.

Para las funciones de onda que corresponden a los estado de sabor de los mesones vemos que para los mesones vectoriales y pseudoescalares estas son exactamente las mismas, como se ve en los diagramas de peso correspondientes, excepto por un signo, lo que hará que sean

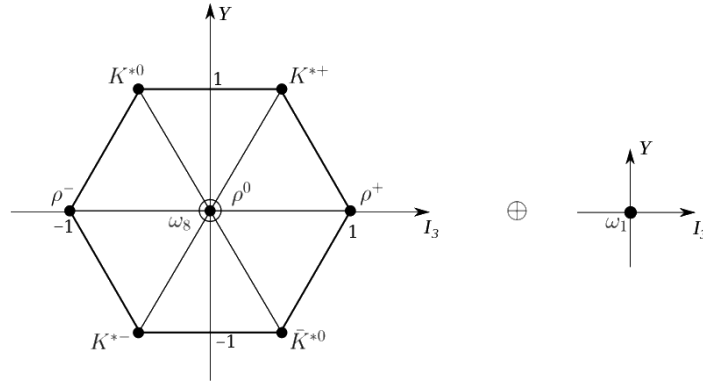


Figura 1.6: Diagrama de peso de los mesones vectoriales,  $J^P = 1^-$ , en el espacio  $I_3 - Y$

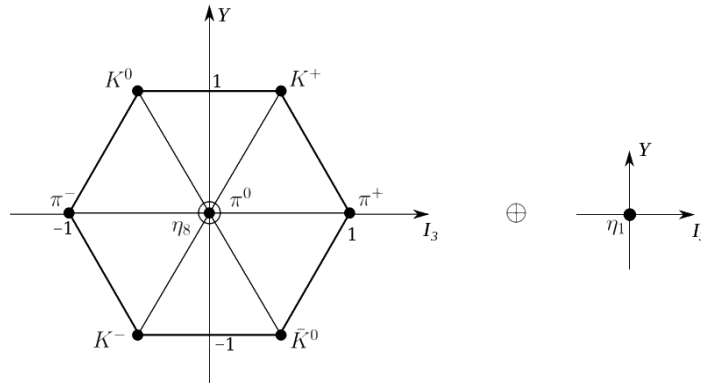


Figura 1.7: Diagrama de peso de los mesones pseudoescalares,  $J^P = 0^-$ , en el espacio  $I_3 - Y$

funciones ortogonales. De los diagramas de peso se observa que en cada octete hay dos dobletes de isoespín, un triplete y un singulete de sabor.

Para obtener los dobletes de isoespín se combinan un quark extraño,  $s$  o  $\bar{s}$ , con un quark  $u$  o  $d$ , o bien un  $\bar{u}$  o  $\bar{d}$ . De aquí resultan los estados como se muestran en la tabla 1.4, usando la convención de fases de De Swart [13].

Mesón pseudoescalar(vectorial)	Función de onda de sabor
$K^+(K^{+*})$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{s} \pm \bar{s}u)$
$K^0(K^{0*})$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}(d\bar{s} \pm \bar{s}d)$
$K^-(K^{-*})$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(s\bar{u} \pm \bar{u}s)$
$\bar{K}^0(\bar{K}^{0*})$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}(s\bar{d} \pm \bar{d}s)$
$\pi^+(\rho^+)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{d} \pm \bar{d}u)$
$\pi^-(\rho^-)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(d\bar{u} \pm \bar{u}d)$
$\pi^0(\rho^0)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}[(d\bar{d} - u\bar{u}) \pm (\bar{d}d - \bar{u}u)]$
$\eta_8^0(\omega_8^0)$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}[(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}) \pm (\bar{u}u - \bar{d}d - 2\bar{s}s)]$
$\eta_1^0(\omega_1^0)$	$\frac{1}{\sqrt{6}}[(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}) \pm (\bar{u}u - \bar{d}d + \bar{s}s)]$

Tabla 1.4: Estados de sabor y sus permutaciones para mesones pseudoescalares y vectoriales que contienen quarks  $u$ ,  $d$  y  $s$ .





## Capítulo 2

# Simetrías

Los espacios que son simétricos tienen una importancia fundamental en la física moderna, aunque cabría pensar que la simetría completamente simétrica es sólo algo que apareciera de forma excepcional, o quizá tan sólo como una aproximación conveniente. Un objeto simétrico, tal como una esfera o un cuadrado, tiene una existencia precisa como una estructura matemática idealizada, sin embargo cualquier realización *física* de un objeto semejante sería considerada únicamente como un tipo de representación aproximada de esta idealización matemática. Pese a todo, curiosamente, según las teorías físicas del siglo XX que han sido de gran éxito, como en la física de partículas elementales y la relatividad general, todas las interacciones físicas actúan con una idea que, estrictamente hablando, depende de forma crucial de estructuras físicas que poseen una simetría que, en un nivel de descripción fundamental como se vió en el capítulo anterior (véase también apéndice B), es necesariamente exacta.

En la física de partículas elementales la teoría de grupos ha resultado ser una herramienta poderosa y de gran simplicidad para obtener resultados directos haciendo uso únicamente de las propiedades y de los patrones que poseen estas partículas que pertenecen a cierto grupo de simetría sin necesidad de hacer un extenso cálculo sobre la dinámica de estas. Justo como se vió en el capítulo anterior, la estructura algebraica que poseen los quarks debido a sus grupos de transformaciones de simetría como el de espín-sabor  $SU_{sf}(6)$  y el de color como  $SU_c(3)$  y como vimos las posibles combinaciones de ellos nos pueden dar información de la estructura fundamental de los hadrones, que cumplen las mismas reglas de transformación. En este tema no se considerará la simetría de color, por lo que nos centraremos en la simetría de espín-sabor. Hemos visto que la simetría de espín-sabor puede descomponerse en dos grupos independientes, de espín y de sabor como

$$SU_{sf}(6) \supset SU_f(3) \otimes SU_s(2),$$

lo que a su vez, puede descomponerse la simetría de sabor (o bien de isoespín) en la simetría de sabor de los quarks  $u$  y  $d$  (incluye a los anti-quarks)  $SU_I(2)$  y simetría de hipercarga  $U_Y(1)$  para el quark extraño  $s(\bar{s})$

$$SU_f(3) \supset SU_I(2) \otimes U_Y(1).$$

A partir de aquí veremos las relaciones de simetría que existen entre los distintos estados que constituyen los bariones de octete y del decuplete que serán bastantes útiles para relacionar sus propiedades de acuerdo a sus valores de espín y de sabor.

## 2.1. La simetría de isospín $SU(2)$

Siguiendo el sentido histórico de como iban descubriéndose las simetrías de acuerdo a sus propiedades, discutiremos primeramente la simetría de isospín  $SU_I(2)$ . La idea de que este grupo de simetría podía describir, en un principio al protón y al neutrón, surge a partir de que en ausencia de la interacción electromagnética estas, aparentemente distintas, partículas correspondían a un sólo estado llamado *Nucleón* ante la interacción nuclear fuerte y que formaba un doblete (el neutrón y el protón considerándose que sus masas eran iguales por evitar este rompimiento de simetría) en analogía al doblete de espín para  $S = 1/2$ . De aquí nace la idea de el número cuántico de isospín  $I$ , que es independiente al espín y se consideraría un grado de libertad más. Puede verse la tabla 1.2 para ver sus respectivos valores de isospín. El respectivo doblete del nucleón es

$$|p\rangle = \left| I = \frac{1}{2}, I_3 = \frac{1}{2} \right\rangle \quad |n\rangle = \left| I = \frac{1}{2}, I_3 = -\frac{1}{2} \right\rangle \quad (2.1)$$

Como vimos en el capítulo anterior, en el modelo de quarks, el protón y el neutrón pueden considerarse compuestos por estados más fundamentales como los quarks  $uud$  y  $ddu$  respectivamente (figura 1.4). En este mismo sentido puede llevarse la simetría de isospín a los mismos estados de quarks  $u$  y  $d$  (o bien  $\bar{d}$  o  $-\bar{u}$  pues se transforman de la misma forma como se ve en el apéndice B.2) los cuales forman el doblete de isospín de  $SU_I(2)$ . (Véase la figura 1.1 y 1.3). Como se ve en la tabla 1.2 o en 2.1 para los valores de isospín del protón y el neutrón y de acuerdo a la ecuación 1.16, estos dos estados están relacionados como

$$|\psi_p\rangle = I_+ |\psi_n\rangle \quad |\psi_n\rangle = I_- |\psi_p\rangle \quad (2.2)$$

por lo que podemos calcular el valor esperado para cualquier operador (lo que más adelante nos servirá para calcular el valor observable que justamente es el valor esperado para el operador de momento magnético) y este expresarlo para los distintos multipletes en términos de uno solo, una herramienta completamente práctica con el sólo uso de la simetría de isospín a la que pertenecen estas partículas. Como ejemplo tenemos la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \langle \psi_n | \hat{O} | \psi_n \rangle &= \langle \psi_n | \hat{O} I_- | \psi_p \rangle \\ &= \langle \psi_n | I_- \hat{O} + [\hat{O}, I_-] | \psi_p \rangle \\ &= \langle \psi_p | \hat{O} | \psi_p \rangle + \langle \psi_p | [I_+, [\hat{O}, I_-]] | \psi_p \rangle \end{aligned} \quad (2.3)$$

También tenemos el caso inverso

$$\langle \psi_p | \hat{O} | \psi_p \rangle = \langle \psi_n | \hat{O} | \psi_n \rangle + \langle \psi_n | [I_-, [\hat{O}, I_+]] | \psi_n \rangle \quad (2.4)$$

Esto mismo se puede hacer para los demás multipletes de bariones. En el caso del multiplete de bariones  $\Sigma$  del octete y  $\Sigma^*$  del decuplete, se ven identicos frente al número cuántico de isoespín de acuerdo a la correspondiente carga. De esta forma ocurre también para las partículas  $\Xi$  y  $\Xi^*$ . Así para los del decuplete tenemos el mismo caso en el octete de la siguientes identidades de estas partículas. Por la ecuación 1.16, como antes, tenemos que

$$\begin{aligned} I_+ |\psi_{\Sigma^{(*)+}}\rangle &= 0 & I_+ |\psi_{\Sigma^{(*)0}}\rangle &= \sqrt{2} |\psi_{\Sigma^{(*)+}}\rangle & I_+ |\psi_{\Sigma^{(*)-}}\rangle &= \sqrt{2} |\psi_{\Sigma^{(*)0}}\rangle \\ I_- |\psi_{\Sigma^{(*)+}}\rangle &= \sqrt{2} |\psi_{\Sigma^{(*)0}}\rangle & I_- |\psi_{\Sigma^{(*)0}}\rangle &= \sqrt{2} |\psi_{\Sigma^{(*)-}}\rangle & I_- |\psi_{\Sigma^{(*)-}}\rangle &= 0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

por lo que tenemos que

$$\langle \psi_{\Sigma^{(*)0}} | \hat{O} | \psi_{\Sigma^{(*)0}} \rangle = \langle \psi_{\Sigma^{(*)+}} | \hat{O} | \psi_{\Sigma^{(*)+}} \rangle + \frac{1}{2} \langle \psi_{\Sigma^{(*)+}} | [I_+, [\hat{O}, I_-]] | \psi_{\Sigma^{(*)+}} \rangle \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \langle \psi_{\Sigma^{(*)-}} | \hat{O} | \psi_{\Sigma^{(*)-}} \rangle &= \langle \psi_{\Sigma^{(*)0}} | \hat{O} | \psi_{\Sigma^{(*)0}} \rangle + \frac{1}{2} \left( \langle \psi_{\Sigma^{(*)0}} | [I_+, [\hat{O}, I_-]] | \psi_{\Sigma^{(*)0}} \rangle \right. \\ &\quad \left. + \langle \psi_{\Sigma^{(*)+}} | [I_+, [\hat{O}, I_-]] | \psi_{\Sigma^{(*)+}} \rangle \right) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Para el multiplete de bariones  $\Xi$  y  $\Xi^*$  tenemos el caso análogo al caso del protón y el neutrón en las ecuaciones 2.4 y 2.3 puesto que tienen el mismo número de isoespín correspondiente, ya que forma un doblete de isoespín de la manera análoga. Así entonces

$$\langle \psi_{\Xi^{(*)-}} | \hat{O} | \psi_{\Xi^{(*)-}} \rangle = \langle \psi_{\Xi^{(*)0}} | \hat{O} | \psi_{\Xi^{(*)0}} \rangle + \langle \psi_{\Xi^{(*)0}} | [I_+, [\hat{O}, I_-]] | \psi_{\Xi^{(*)0}} \rangle \quad (2.8)$$

Para el caso del multiplete  $\Delta$  que es el único que tiene una degeneración en un cuadruplete debido a su valor de isoespín  $I = \frac{3}{2}$  tenemos que

$$\langle \psi_{\Delta+} | \hat{O} | \psi_{\Delta+} \rangle = \langle \psi_{\Delta++} | \hat{O} | \psi_{\Delta++} \rangle + \frac{1}{3} \langle \psi_{\Delta++} | [I_+, [\hat{O}, I_-]] | \psi_{\Delta++} \rangle \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \langle \psi_{\Delta^0} | \hat{O} | \psi_{\Delta^0} \rangle &= \langle \psi_{\Delta+} | \hat{O} | \psi_{\Delta+} \rangle + \frac{1}{4} \left( \langle \psi_{\Delta+} | [I_+, [\hat{O}, I_-]] | \psi_{\Delta+} \rangle \right. \\ &\quad \left. + \langle \psi_{\Delta++} | [I_+, [\hat{O}, I_-]] | \psi_{\Delta++} \rangle \right) \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \langle \psi_{\Delta-} | \hat{O} | \psi_{\Delta-} \rangle &= \langle \psi_{\Delta^0} | \hat{O} | \psi_{\Delta^0} \rangle + \frac{1}{3} \left( \langle \psi_{\Delta^0} | [I_+, [\hat{O}, I_-]] | \psi_{\Delta^0} \rangle \right. \\ &\quad \left. + \langle \psi_{\Delta+} | [I_+, [\hat{O}, I_-]] | \psi_{\Delta+} \rangle + \langle \psi_{\Delta++} | [I_+, [\hat{O}, I_-]] | \psi_{\Delta++} \rangle \right) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Puede verse directamente que los elementos de matriz mostrados arriba pueden expresarse todos completamente en términos del elemento de matriz con mayor proyección de isoespín por simple sustitución. Por ejemplo el elemento de matriz 2.11 contiene términos de  $\Delta^0$ ,  $\Delta^+$  y

$\Delta^{++}$ , pero utilizando las dos ecuaciones anteriores puede expresarse en términos de únicamente  $\Delta^{++}$ . Cabe mencionar que existe una expresión que generaliza los casos anteriores sobre el valor esperado de un operador  $\hat{O}$  de un estado de multiplete de isoespín  $I$  y proyección  $I_3 = I - k - 1$  para expresarlo en términos de los estados de mayor proyección, y que fácilmente puede demostrarse que es

$$\langle I, I - k - 1 | \hat{O} | I, I - k - 1 \rangle = \langle I, I - k | \hat{O} | I, I - k \rangle + \frac{\sum_{i=0}^k \langle I, I - k + i | [I_+, [\hat{O}, I_-]] | I, I - k + i \rangle}{(2I - k)(k + 1)} \quad (2.12)$$

Es notable mencionar que estas expresiones pueden usarse en pruebas de consistencia como por ejemplo usar el operador  $\hat{O}$ , como el operador de momento magnético o como el operador de contenido de sabor que veremos más adelante.

## 2.2. Simetría de isoespín SU(3)

Como podemos ver en las figuras 1.4-1.7 el arreglo de los bariones y los mesones no solamente constituyen arreglos en multipletes de isoespín de la representación de  $SU_I(2)$  sino que también están dispuestos en una simetría extra llamada simetría de hipercarga, debido a los números cuánticos de extrañeza que se les asoció a estas partículas *extrañas* que iban descubriéndose en los decaimientos de la partícula  $\Lambda$  así como en colisiones *nucleón-pión*, y que sugerían que debería existir un tercer quark, nombrado  $s$  (véase 1.1).

La asignación de los números cuánticos de extrañeza e isoespín pronto se volvieron azarosos y caóticos, por lo que debió ser mucho mejor organizar las partículas en algún otro grupo de simetría, cosa que Gell-Mann y George Zweig hicieron, introduciendo la simetría  $SU(3)$ . El arreglo de los bariones en esta simetría se vuelve exacta cuando se considera que la masa del quark  $s$  es cero, de esta forma es idealizado que constituyen la representación del grupo de simetría  $SU_f(3)$  (véase la ecuación 1.3). Cuando se supone esta simetría de sabor cuando la masa del quark  $s$  se vuelve despreciable, los elementos de matriz de los operadores, que cambian la hipercarga (o como veremos más adelante crean o aniquilan un quark extraño)  $U_{\pm}$  y  $V_{\pm}$ , entre los multipletes de sabor (figuras 1.4 y 1.5) pueden relacionarse con algún otro estado del multiplete, ya sean del decuplete o del octete, justamente como en la sección anterior para la simetría  $SU_I(2)$ . Como ejemplo de ello tomaremos al hiperón  $\Lambda^0$  que es justamente un singulete de sabor. Usando los operadores de escalón de las ecuaciones 1.18 y 1.17 y los hacemos actuar sobre los estados del protón y el neutrón, obteniendo que

$$\hat{V}_- |\psi_p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\psi_{\Sigma^0}\rangle + \sqrt{\frac{3}{2}} |\psi_{\Lambda^0}\rangle, \quad (2.13)$$

$$\hat{U}_- |\psi_n\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} |\psi_{\Sigma^0}\rangle + \sqrt{\frac{3}{2}} |\psi_{\Lambda^0}\rangle. \quad (2.14)$$

Así entonces se obtiene que este hiperón puede expresarse en términos del protón y del neutrón como

$$|\psi_{\Lambda^0}\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} (\hat{V}_- |\psi_p\rangle + \hat{U}_- |\psi_n\rangle). \quad (2.15)$$

Así también por otro lado

$$\hat{V}_+|\psi_{\Lambda^0}\rangle = \sqrt{\frac{3}{2}}|\psi_p\rangle, \quad \hat{U}_+|\psi_{\Lambda^0}\rangle = \sqrt{\frac{3}{2}}|\psi_n\rangle \quad (2.16)$$

Con estas ecuaciones, podemos expresar el valor esperado de un operador, siguiendo el mismo procedimiento de la sección anterior, para expresarlo en términos del valor esperado del multiplete de sabor del protón y el neutrón (que a la vez están relacionados entre sí 2.3). Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} \langle \psi_{\Lambda^0} | \hat{O} | \psi_{\Lambda^0} \rangle &= \frac{1}{6} \left[ 3 \left( \langle \psi_p | \hat{O} | \psi_p \rangle + \langle \psi_n | \hat{O} | \psi_n \rangle \right) \right. \\ &\quad + \langle \psi_p | [\hat{V}_+, [\hat{O}, \hat{V}_-]] | \psi_p \rangle + \langle \psi_p | [I_+, [\hat{U}_+, [\hat{O}, \hat{V}_-]]] | \psi_p \rangle \\ &\quad \left. - \langle \psi_n | [I_-, [\hat{V}_+, [\hat{O}, \hat{U}_-]]] | \psi_n \rangle + \langle \psi_n | [\hat{U}_+, [\hat{O}, \hat{U}_-]] | \psi_n \rangle \right] \end{aligned} \quad (2.17)$$

Así como el multiplete de isoespín del protón y el neutrón, se obtuvieron las relaciones de los elementos de matriz para los demás multipletes de isoespín, por lo que ahora falta relacionar a estos distintos multipletes entre si. Siguiendo el mismo procedimiento se obtienen las relaciones para el octete como

$$\langle \psi_{\Sigma^+} | \hat{O} | \psi_{\Sigma^+} \rangle = \langle \psi_p | \hat{O} | \psi_p \rangle + \langle \psi_p | [\hat{U}_+, [\hat{O}, \hat{U}_-]] | \psi_p \rangle, \quad (2.18)$$

y

$$\langle \psi_{\Xi^0} | \hat{O} | \psi_{\Xi^0} \rangle = \langle \psi_{\Sigma^+} | \hat{O} | \psi_{\Sigma^+} \rangle + \langle \psi_{\Sigma^+} | [\hat{V}_+, [\hat{O}, \hat{V}_-]] | \psi_{\Sigma^+} \rangle. \quad (2.19)$$

Con esto basta y quedan completamente relacionados los elementos de matriz entre todos los bariones de octete. Ahora, a diferencia de la simetría  $SU_I(2)$  del caso anterior, como los operadores de escalón  $\bar{U}_\pm$  y  $\bar{V}_\pm$  dependen de las etiquetas  $(\lambda, \mu)$  y están diferentes entre el octete y el decuplete, tendremos expresiones distintas al aplicar estos operadores en los bariones del octete. Por ello mismo obtenemos las siguientes expresiones que relacionan los valores esperados, para el caso del decuplete, como

$$\langle \psi_{\Sigma^{*+}} | \hat{O} | \psi_{\Sigma^{*+}} \rangle = \langle \psi_{\Delta^{*+}} | \hat{O} | \psi_{\Delta^{*+}} \rangle + \frac{1}{3} \langle \psi_{\Delta^{*+}} | [\hat{V}_+, [\hat{O}, \hat{V}_-]] | \psi_{\Delta^{*+}} \rangle, \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} \langle \psi_{\Xi^{*0}} | \hat{O} | \psi_{\Xi^{*0}} \rangle &= \langle \psi_{\Sigma^{*+}} | \hat{O} | \psi_{\Sigma^{*+}} \rangle + \frac{1}{4} \left( \langle \psi_{\Sigma^{*+}} | [\hat{V}_+, [\hat{O}, \hat{V}_-]] | \psi_{\Sigma^{*+}} \rangle \right. \\ &\quad \left. + \langle \psi_{\Delta^{*+}} | [\hat{V}_+, [\hat{O}, \hat{V}_-]] | \psi_{\Delta^{*+}} \rangle \right), \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \langle \psi_{\Omega^-} | \hat{O} | \psi_{\Omega^-} \rangle &= \langle \psi_{\Xi^{*-}} | \hat{O} | \psi_{\Xi^{*-}} \rangle + \frac{1}{3} \left( \langle \psi_{\Xi^{*-}} | [\hat{V}_+, [\hat{O}, \hat{V}_-]] | \psi_{\Xi^{*-}} \rangle \right. \\ &\quad \left. + \langle \psi_{\Sigma^{*+}} | [\hat{V}_+, [\hat{O}, \hat{V}_-]] | \psi_{\Sigma^{*+}} \rangle + \langle \psi_{\Delta^{*+}} | [\hat{V}_+, [\hat{O}, \hat{V}_-]] | \psi_{\Delta^{*+}} \rangle \right). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Teniendo estas tres ecuaciones y en conjunto con las ecuaciones \*\* tenemos relacionados todos los elementos de matriz entre los bariones del decuplete entre si. Sin embargo, cabe mencionar que, los elementos de matriz entre el octete y el decuplete no están completamente relacionados únicamente usando el grupo de simetría  $SU_f(3)$ . Es decir no tenemos aquí una relación completamente directa entre el elemento de matriz de un barión del octete y un barión del decuplete. Algo que veremos en la siguiente sección.

### 2.3. Simetría de espín-sabor $SU(6)$

Al ampliar la simetría de sabor  $SU_f(3)$  a la simetría de espín sabor  $SU_{sf}(6)$ , además de utilizar los operadores de escalón 1.16, 1.18, 1.17, es necesario definir un nuevo operador que actúe en el espacio de sabor y en el espacio de espín, que como sigue es conveniente expresarlo en terminos de los operadores de creación y aniquilación como

$$\hat{T}_- = d_{\downarrow}^{\dagger} u_{\uparrow} \quad \hat{T}_+ = u_{\uparrow}^{\dagger} d_{\downarrow} \quad (2.23)$$

donde el operador  $d_{\downarrow}^{\dagger}$  y  $d_{\downarrow}$  son el operadores de creación y aniquilación de un quark  $d$  respectivamente con proyección de espín  $S = -\frac{1}{2}$ , mientras que  $u_{\uparrow}^{\dagger}$  y  $u_{\uparrow}$  son los operadores de creación y aniquilación de un quark  $u$  con proyección de espín  $\frac{1}{2}$ . La naturaleza de este operador es la de cambiar la proyección de espín en  $\Delta S_z = \pm 1$  a la vez que la proyección de isospín en  $\Delta I_3 = \pm 1$  según sea el caso. Este operador nos ayudará a relacionar los estados del octete de bariones, cuya proyección máxima de espín es de  $S_z = \frac{1}{2}$  con los bariones del octete con proyección máxima de espín  $S_z = \frac{3}{2}$ . Para ello encontraremos la relación más directa la cuál es entre el protón con proyección de espín  $S_z = \frac{1}{2}$ ,  $|\psi_p, \frac{1}{2}\rangle$  y la delta ++ con proyección  $S_z = \frac{3}{2}$ ,  $|\psi_{\Delta^{++}}, \frac{3}{2}\rangle$ . De acuerdo a esto aplicamos los operadores  $\hat{T}_{\pm}$  y se encuentra que

$$\hat{T}_+ \left| \psi_{p, \frac{1}{2}} \right\rangle = \sqrt{2} \left| \psi_{\Delta^{++}, \frac{3}{2}} \right\rangle, \quad (2.24)$$

$$\hat{T}_- \left| \psi_{\Delta^{++}} \right\rangle = \sqrt{2} \left| \psi_{p, \frac{1}{2}} \right\rangle + \left| \psi_{\Delta^+, \frac{1}{2}} \right\rangle, \quad (2.25)$$

y

$$\hat{T}_+ \left| \psi_{\Delta^+, \frac{1}{2}} \right\rangle = \left| \psi_{\Delta^{++}, \frac{3}{2}} \right\rangle \quad (2.26)$$

Teniendo estas identidades, es necesario establecer expresiones para los operadores de escalón  $I_{\pm}$  y  $S_{\pm}$  en términos de los operadores de creación y aniquilación en el espacio de espín-sabor, por lo que tenemos las siguientes expresiones como

$$\hat{I}_+ = u_{\uparrow}^{\dagger} d_{\uparrow} + u_{\downarrow}^{\dagger} d_{\downarrow}, \quad \hat{I}_- = d_{\uparrow}^{\dagger} u_{\uparrow} + d_{\downarrow}^{\dagger} u_{\downarrow} \quad (2.27)$$

$$\hat{S}_+ = u_{\uparrow}^{\dagger} u_{\downarrow} + d_{\uparrow}^{\dagger} d_{\downarrow}, \quad \hat{S}_- = u_{\downarrow}^{\dagger} u_{\uparrow} + d_{\downarrow}^{\dagger} d_{\uparrow} \quad (2.28)$$

donde cabe notar que los correspondientes operadores sólo cambian un quark con el correspondiente sabor o proyección de espín según correspondan. Otra forma de decirlo es que el

operador de escalón de isoespín  $I_{\pm}$  no afecta a la proyección de espín, es decir, es un escalar en este último. Lo mismo ocurre con  $S_{\pm}$  el cuál es un escalar en el espacio de isoespín. Puede mostrarse también que

$$[\hat{I}_{\pm}, \hat{S}_{\pm}] = 0 \quad (2.29)$$

Teniendo en cuenta todo ello y usando la identidad en si más general para el conmutador entre operadores de creación y aniquilación,

$$[q_i^{\dagger} q_j, q_k^{\dagger} q_l] = q_i^{\dagger} q_l \delta_{q_j, q_k} - q_k^{\dagger} q_j \delta_{q_i, q_l}, \quad (2.30)$$

donde se considera que las expresiones  $q_i$ ,  $q_j$ ,  $q_k$  y  $q_l$  son iguales sóloamente cuando corresponden al mismo sabor y a la misma proyección de isoespín, podemos expresar el elemento de matriz del estado del octete  $|\psi_p, \frac{1}{2}\rangle$  en términos del estado del decuplete  $|\psi_{\Delta^{++}}, \frac{3}{2}\rangle$  como

$$\begin{aligned} \left\langle \psi_p, \frac{1}{2} \left| \hat{\mathcal{O}} \right| \psi_p, \frac{1}{2} \right\rangle &= \left\langle \psi_{\Delta^{++}}, \frac{3}{2} \left| \hat{\mathcal{O}} \right| \psi_{\Delta^{++}}, \frac{3}{2} \right\rangle \\ &+ \frac{1}{2} \left\langle \psi_{\Delta^{++}}, \frac{3}{2} \left| [\hat{T}_+, [\hat{\mathcal{O}}, \hat{T}_-]] \right| \psi_{\Delta^{++}}, \frac{3}{2} \right\rangle \\ &+ \frac{1}{6} \left( \left\langle \psi_{\Delta^{++}}, \frac{3}{2} \left| [\hat{S}_+, [\hat{\mathcal{O}}, \hat{S}_-]] \right| \psi_{\Delta^{++}}, \frac{3}{2} \right\rangle \right. \\ &+ \left\langle \psi_{\Delta^{++}}, \frac{3}{2} \left| [\hat{I}_+, [\hat{\mathcal{O}}, \hat{I}_-]] \right| \psi_{\Delta^{++}}, \frac{3}{2} \right\rangle \quad (2.31) \\ &- \left\langle \psi_{\Delta^{++}}, \frac{3}{2} \left| [\hat{S}_+, [\hat{I}_+, [\hat{\mathcal{O}}, \hat{T}_-]]] \right| \psi_{\Delta^{++}}, \frac{3}{2} \right\rangle \\ &- \left. \left\langle \psi_{\Delta^{++}}, \frac{3}{2} \left| [[[\hat{T}_+, \hat{\mathcal{O}}], \hat{I}_-], \hat{S}_-] \right| \psi_{\Delta^{++}}, \frac{3}{2} \right\rangle \right) \\ &+ \frac{1}{18} \left\langle \psi_{\Delta^{++}}, \frac{3}{2} \left| [\hat{S}_+, [[\hat{I}_+, [\hat{\mathcal{O}}, \hat{I}_-], \hat{S}_-]]] \right| \psi_{\Delta^{++}}, \frac{3}{2} \right\rangle \end{aligned}$$

Existe un intento por obtener la expresión inversa, es decir, obtener el elemento de matriz de un operador  $\hat{\mathcal{O}}$  para el estado  $|\psi_{\Delta^{++}}, \frac{3}{2}\rangle$  en terminos del estado  $|\psi_p, \frac{1}{2}\rangle$ , sin embargo aún es un problema que queda abierto. Un posible camino por obtener esta expresión es la de definir nuevos operadores de escalón, por ejemplo  $\hat{W}_{\pm}$  y  $\hat{W}'_{\pm}$  como

$$\begin{aligned} I_{\pm} &= \hat{W}_{\pm} + \hat{W}'_{\pm} \quad i.e. \\ W_+ &= u_{\uparrow}^{\dagger} d_{\uparrow} \quad W'_+ = u_{\downarrow}^{\dagger} d_{\downarrow} \\ W'_- &= d_{\downarrow}^{\dagger} u_{\downarrow} \quad W_- = d_{\uparrow}^{\dagger} u_{\uparrow} \end{aligned} \quad (2.32)$$



de donde se obtienen las expresiones en la tabla 2.1. Resolver este problema nos ayudaría a obtener las expresiones de simetría entre todos los bariones en el espacio espín-sabor para algún valor esperado, como el momento magnético.

$ B, S_z\rangle$	$W_+ = u_\uparrow^\dagger d_\uparrow$	$W'_+ = u_\downarrow^\dagger d_\downarrow$	$W'_- = d_\downarrow^\dagger u_\downarrow$	$W_- = d_\uparrow^\dagger u_\uparrow$
$ \Delta^{++}, \frac{3}{2}\rangle$	0	0	0	$\sqrt{3} \Delta^+, \frac{3}{2}\rangle$
$ \Delta^{++}, \frac{1}{2}\rangle$	0	0	$\frac{1}{\sqrt{3}} \Delta^+, \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} p, \frac{1}{2}\rangle$	$\frac{2}{\sqrt{3}} \Delta^+, \frac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} p, \frac{1}{2}\rangle$
$ \Delta^+, \frac{3}{2}\rangle$	$\sqrt{3} \Delta^{++}, \frac{3}{2}\rangle$	0	0	$2 \Delta^0, \frac{3}{2}\rangle$
$ \Delta^+, \frac{1}{2}\rangle$	$\frac{2}{\sqrt{3}} \Delta^{++}, \frac{1}{2}\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{3}} \Delta^{++}, \frac{1}{2}\rangle$	$\frac{2}{3} \Delta^0, \frac{1}{2}\rangle + \frac{\sqrt{2}}{3} n, \frac{1}{2}\rangle$	$\frac{4}{3} \Delta^0, \frac{1}{2}\rangle - \frac{\sqrt{2}}{3} n, \frac{1}{2}\rangle$
$ p, \frac{1}{2}\rangle$	$-\sqrt{\frac{2}{3}} \Delta^{++}, \frac{1}{2}\rangle$	$\sqrt{\frac{2}{3}} \Delta^{++}, \frac{1}{2}\rangle$	$-\frac{\sqrt{2}}{3} \Delta^0, \frac{1}{2}\rangle - \frac{1}{3} n, \frac{1}{2}\rangle$	$\frac{\sqrt{2}}{3} \Delta^0, \frac{1}{2}\rangle + \frac{4}{3} n, \frac{1}{2}\rangle$
$ n, \frac{1}{2}\rangle$	$-\frac{\sqrt{2}}{3} \Delta^+, \frac{1}{2}\rangle + \frac{4}{3} p, \frac{1}{2}\rangle$	$\frac{\sqrt{2}}{3} \Delta^+, \frac{1}{2}\rangle - \frac{1}{3} p, \frac{1}{2}\rangle$	$-\sqrt{\frac{2}{3}} \Delta^-, \frac{1}{2}\rangle$	$\sqrt{\frac{2}{3}} \Delta^-, \frac{1}{2}\rangle$
$\Delta^0, \frac{1}{2}$	$\frac{4}{3} \Delta^+, \frac{1}{2}\rangle + \frac{\sqrt{2}}{3} p, \frac{1}{2}\rangle$	$\frac{2}{3} \Delta^+, \frac{1}{2}\rangle - \frac{\sqrt{2}}{3} p, \frac{1}{2}\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{3}} \Delta^-, \frac{1}{2}\rangle$	$\frac{2}{\sqrt{3}} \Delta^-, \frac{1}{2}\rangle$
$ \Delta^0, \frac{3}{2}\rangle$	$2 \Delta^+, \frac{3}{2}\rangle$	0	0	$\sqrt{3} \Delta^-, \frac{3}{2}\rangle$
$ \Delta^-, \frac{1}{2}\rangle$	$\frac{2}{\sqrt{3}} \Delta^0, \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} n, \frac{1}{2}\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{3}} \Delta^0, \frac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} n, \frac{1}{2}\rangle$	0	0
$ \Delta^-, \frac{3}{2}\rangle$	$\sqrt{3} \Delta^0, \frac{3}{2}\rangle$	0	0	0

Tabla 2.1: Resultados de aplicar los operadores  $\hat{W}_\pm$  y  $\hat{W}'_\pm$  a las funciones de onda de espín-sabor del barión correspondiente  $B$  con proyección de espín  $S_z$ .

## Capítulo 3

# Extensiones al modelo de quarks

Uno de los objetivos en la física hadrónica es la de describir la estructura de los bariones en terminos de grados de libertad efectivos y, en un nivel más fundamental, la emergencia de esos grados de libertad desde la cromodinámica cuántica (QCD). A pesar de los progresos realizados en los complicados cálculos, sigue siendo un problema de proporciones enormes para resolver las ecuaciones de la QCD en la región no perturbativa. Es por ello que se han desarrollado modelos de hadrones efectivos, tales como el modelos de bolsa, modelos de quarks quirales ( $\chi$ QM), modelos de solitones, modelo del "instanton" líquido y los modelos de quarks contituyentes (CQM). Una importante clase está provista por los modelos de quarks contituyentes los cuales están basados en grados de libertad de quarks constituyentes (efectivos). Como hemos visto al principio, a la asimetría de sabor existente en el protón dió inicio a la creación de varios modelos efectivos que dieran cabida a esta descorcentante y clara propiedad. Entre ellos se encuentran el modelo de la nube mesónica, MCM, por sus siglas en inglés, y el modelo de quarks constituyentes Unquenched, UQM. En esta parte se explicará la base teórica de estos dos últimos en la cuál nos basaremos para estudiar los momentos magnéticos en estos modelos.

### 3.1. El modelo de la nube mesónica MCM

El modelo de la nube mesonica ha sido uno de los intentos por explicar la asimetría de sabor existente en el nucleón. Sullivan [14] fue uno de quienes estudiaron por primera vez este modelo, en el que mostró que el estado de un barión está compuesto por las contribuciones de los quarks de valencia, tal como en el modelo de quarks, y las contribuciones de los quarks del mar, es decir, las contribuciones debidas al par quark-antiquark como estados que se presentan como acoplamientos barión-mesón ( $qqq - q\bar{q}$ ). Thomas [15] hizo un estudio del rompimiento de la simetría  $SU(3)$  en el mar del nucleón y sobre las contribuciones de la nube mesonica de los quarks del mar, en particular la nube piónica, en la que mostró la importancia de estos estados a la función de onda del barión, y aún más tarde estudiado por Henley y Miller [19].

De acuerdo a este modelo, el estado de la función de onda del barión puede escribirse como una contribución de los quarks de valencia, que corresponde a la función de espín-sabor del modelo de quarks (capítulo 1), más una contribución de los quarks de mar, en el que se

considera que un mesón es emitido por el barión del modelo de quarks como un par quark-antiquark (figura 3.1) y que se acopla al barión inicial creando un par a la vez barión mesón.

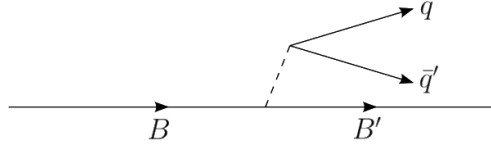


Figura 3.1: Diagrama del proceso de emisión de un mesón por un barión en el modelo MCM

Como un ejemplo de la construcción de la función de onda en este modelo, podemos escribir para el caso del multiplete de bariones del decuplete para  $\Delta$  y considerando únicamente la nube piónica que

$$|\Psi_{\Delta}\rangle = \mathcal{N}_{\Delta} \left[ |\Delta\rangle + a_{\Delta \rightarrow N\pi} |N\pi\rangle + b_{\Delta \rightarrow \Delta\pi} |\Delta\pi\rangle \right] \quad (3.1)$$

en donde  $|\Delta\rangle$  es el barión inicial, los términos  $|N\pi\rangle$  y  $|\Delta\pi\rangle$  son los acoplamientos barión-mesón con el barión del octete y del decuplete respectivamente que corresponden a los acoplamientos de los quarks del mar y los coeficientes  $a_{\Delta \rightarrow N\pi}$  y  $b_{\Delta \rightarrow \Delta\pi}$  se refieren a la amplitud de probabilidad correspondientes a los estados del vacío, que veremos en la siguiente sección. Nótese que cada término de la nube mesónica debe corresponder a los mismos números cuánticos del barión inicial como ejemplo la hipercarga, isoespín y carga eléctrica.

El paso siguiente es ahora especificar el valor de proyección de isoespín,  $I_3$  para la función de onda. Haremos el caso  $I_3 = \frac{3}{2}$ , es decir, para el estado correspondiente a  $\Delta^{++}$ . Lo que se hace en este caso es especificar el valor de isoespín teniendo el valor de la hipercarga ( $Y = 1$  para  $\Delta$ ), teniendo que especificar las funciones de onda barión-mesón en el espacio de sabor  $SU_f(3)$  mediante

$$U_Y(1) \rightarrow SU_f(3) \supset U_Y(1) \otimes SU_I(2). \quad (3.2)$$

Hecho esto tenemos que

$$|\Psi_{\Delta^{++}}\rangle = \mathcal{N}_{\Delta} \left[ |\Delta^{++}\rangle + a_{\Delta \rightarrow N\pi} |p\pi^+\rangle + b_{\Delta \rightarrow \Delta\pi} \left( \sqrt{\frac{3}{5}} |\Delta^{++}\pi^0\rangle - \sqrt{\frac{2}{5}} |\Delta^+\pi^+\rangle \right) \right] \quad (3.3)$$

donde ahora los términos acoplados barión-mesón tienen especificado como valor de isoespín  $I = \frac{3}{2}$ ,  $I_3 = \frac{3}{2}$ , mediante la siguiente manera

$$\begin{aligned} |N\pi\rangle \rightarrow |N\pi\rangle_{I=\frac{3}{2}, I_3=\frac{3}{2}} &= \left( \left| \frac{1}{2} I_3^B \right\rangle \left| 1 I_3^C \right\rangle \right)_{I=\frac{3}{2}, I_3=\frac{3}{2}} \\ &= \left\langle \frac{3}{2} \frac{3}{2} \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2}, 11 \right\rangle \left| \frac{3}{2} \frac{3}{2} \right\rangle \right\rangle = 1 \left| \frac{3}{2} \frac{3}{2} \right\rangle = 1 |p\pi^+\rangle. \end{aligned} \quad (3.4)$$

En este caso el coeficiente de Clebsch-Gordan es  $\left\langle \frac{3}{2} \frac{3}{2} \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2}, 11 \right\rangle \left| \frac{3}{2} \frac{3}{2} \right\rangle \right\rangle = 1$ . El estado de isoespín del nucleón es  $|p\rangle = \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle$  y del pión es  $|\pi^+\rangle = |11\rangle$ . Nótese que la carga eléctrica correspondiente

al estado  $|p\pi^+\rangle$  es  $Q = 2$  como lo es también para el estado inicial; esto mismo debe cumplirse para los demás estados de la ecuación 3.1 y puede servir de ayuda para saber cuáles son los correspondientes estados barión-mesón para la función de onda total. Para el caso en que se acoplan los bariones del decuplete con los estados del pión tenemos que

$$\begin{aligned}
|\Delta\pi\rangle \rightarrow |\Delta\pi\rangle_{I_{\frac{3}{2}}, I_3=\frac{3}{2}} &= \left( \left| \frac{3}{2} I_3^B \right\rangle \left| 1 I_3^C \right\rangle \right)_{I=\frac{3}{2}, I_3=\frac{3}{2}} \\
&= \left\langle \frac{3}{2} \frac{3}{2} \left| \frac{3}{2} \frac{3}{2}, 10 \right\rangle \left| \frac{3}{2} \frac{3}{2} \right\rangle' + \left\langle \frac{3}{2} \frac{3}{2} \left| \frac{3}{2} \frac{1}{2}, 11 \right\rangle \left| \frac{3}{2} \frac{3}{2} \right\rangle'' \right. \\
&= \sqrt{\frac{3}{5}} \left| \frac{3}{2} \frac{3}{2} \right\rangle' - \sqrt{\frac{2}{5}} \left| \frac{3}{2} \frac{3}{2} \right\rangle'' = \sqrt{\frac{3}{5}} |\Delta^{++}\pi^0\rangle - \sqrt{\frac{2}{5}} |\Delta^+\pi^+\rangle
\end{aligned} \tag{3.5}$$

con  $|\frac{3}{2} \frac{3}{2}\rangle' = |\Delta^{++}\pi^0\rangle$  y  $|\frac{3}{2} \frac{3}{2}\rangle'' = |\Delta^+\pi^+\rangle$  que corresponden a los acoplamientos y que pueden ser vistos desde los coeficientes de Clebsch-Gordan correspondientes. Una vez especificados los estados intermedios y los coeficientes de Clebsch-Gordan de isoespín queda completamente justificada la ecuación 3.3. Ahora queda especificar cada uno de los estados para el barión principal y los estados intermedios que están en el espacio de isoespín (sabor) para expresarlos en el espacio de espín.sabor. Para ello consideraremos la siguiente ampliación del grupo

$$SU_f(3) \rightarrow SU_f(3) \otimes SU_s(2) \tag{3.6}$$

lo que quiere decir que cada estado que compone el estado total de la ecuación 3.3 debe estar especificado ahora en el espacio de espín, donde la proyección de espín de cada uno debe ser la misma que la del estado total  $|\Psi_{\Delta^{++}}\rangle$  que en este caso por conveniencia la consideraremos máxima,  $S_z = \frac{3}{2}$ . Así, de acuerdo a 3.6, haremos

$$\begin{aligned}
|p\pi^+\rangle &\rightarrow |p\pi^+\rangle_{S_z=\frac{3}{2}} \\
|\Delta^{++}\pi^0\rangle &\rightarrow |\Delta^{++}\pi^0\rangle_{S_z=\frac{3}{2}} \quad |\Delta^+\pi^+\rangle \rightarrow |\Delta^+\pi^+\rangle_{S_z=\frac{3}{2}}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

cuyos acoplamientos deberán tener esta vez los correspondientes coeficientes de Clebsch-Gordan con los números cuánticos de espín. Para ello consideraremos los números cuánticos de la paridad y el espín para los piones, los nucleones las deltas en las tablas 1.4, 1.2 y 1.3 respectivamente. Al acoplarse dos partículas en el espacio de espín debemos considerar la regla de adición vectorial para el espín en la teoría del momento angular como

$$|l - S_T| \leq J \leq l + S_T \tag{3.8}$$

donde  $\vec{J} = \vec{S}_B + \vec{S}_C + \vec{l} = \vec{S}_T + \vec{l}$  es el momento angular de espín total y que debe de corresponder al espín del barión de la función de onda completa y que en este caso es  $J = \frac{3}{2}$  para  $\Delta^{++}$ .  $S_T$  se refiere al espín total del sistema barión-mesón que en este caso es únicamente igual al espín del barión, pues el pión es un mesón pseudoscalar ( $S_z = 0$ ) por lo que  $S_T = \frac{1}{2}$  para el acoplamiento nucleón-pión y  $S_T = \frac{3}{2}$  para el acoplamiento delta-pión.  $l$  es el momento angular total relativo entre el barión y el mesón. Teniendo en cuenta la conservación de la paridad tenemos que la paridad de  $\Delta^{++}$  es  $P = +$ , para los bariones aquí utilizados es  $P(B) = +$  y  $P(C) = (-)$  para

el mesón  $\pi$  y además existe una dependencia debida al momento angular relativo en la función de onda espacial como  $(-)^l$ . Así tenemos que la paridad del sistema barión-mesón debe cumplir

$$P = P(B)P(C)(-)^l \quad (3.9)$$

es decir

$$(+)=+(-)(-)^l \quad (3.10)$$

de esta forma sabemos que  $l$  debe de tomar valores impares, es decir,  $l = 1, 3, 5, \dots$ , así por la ecuación 3.8 y de acuerdo a los valores de espín para cada barión y mesón, puede fijarse el valor de  $l$ . Para el caso nucleón-pión, el único valor posible es  $l = 1$ . De esta manera, como se hizo en el caso anterior para el isoespín, obtenemos los coeficientes de Clebsch-Gordan para el acoplamiento de espín. Entonces de 3.7 y acoplado a la proyección máxima de espín de la función total para la  $\Delta^{++}$  como  $J_z = \frac{3}{2}$

$$\begin{aligned} |p\pi^+\rangle_{\frac{3}{2}} &= \sum_{m_l m'_l} \langle S_T = \frac{1}{2} m'_l, l m_l | \frac{3}{2} \frac{3}{2} \rangle |p, m'_l, \pi^+, 0; l m_l \rangle \\ &= \sum_{m_l m'_l} \langle \frac{1}{2} m'_l, 1 m_l | \frac{3}{2} \frac{3}{2} \rangle |p, m'_l, \pi^+, 1 m_l \rangle \\ &= \langle \frac{1}{2} \frac{1}{2}, 1 1 | \frac{3}{2} \frac{3}{2} \rangle |p, \frac{1}{2}, \pi^+, 1 1 \rangle = |p, \frac{1}{2}, \pi^+, 1 1 \rangle. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Nótese que en esta última ecuación se omite la proyección de espín del pión, pues esta es cero y tomamos como la total la del protón. Así hemos encontrado en este caso la expresión explícita para el acoplamiento protón-pión+ en el espacio de espín. La escribimos especificando sus números cuánticos como

$$|p\pi^+\rangle_{\frac{3}{2}} = \left| p, \frac{1}{2}, \pi^+, l = 1, m_l = 1 \right\rangle \quad (3.12)$$

Para los acoplamientos que corresponden a  $\Delta\pi$  tenemos que los valores posibles del momento angular relativo entre el barión y el mesón, por las ecuaciones 3.8 y 3.10, es  $l = 1, 3$ . En este caso tomaremos únicamente el caso  $l = 1$  pues para los fines que veremos en el próximo capítulo los términos relacionados a este valor al calcular el momento magnético se anulan. Así tenemos que

$$\begin{aligned} |\Delta^{++}\pi^0\rangle_{\frac{3}{2}} &= \sum_{m_l m'_l} \langle \frac{3}{2} m'_l, 1 m_l | \frac{3}{2} \frac{3}{2} \rangle |\Delta^{++}, m'_l, \pi; 1 m_l \rangle \\ &= \langle \frac{3}{2} \frac{3}{2} 1 0 | \frac{3}{2} \frac{3}{2} \rangle |\Delta^{++}, \frac{3}{2}, \pi; 1 0 \rangle \\ &\quad + \langle \frac{3}{2} \frac{1}{2} 1 1 | \frac{3}{2} \frac{3}{2} \rangle |\Delta^{++}, \frac{1}{2}, \pi; 1 1 \rangle \\ &= \sqrt{\frac{3}{5}} |\Delta^{++}, \frac{3}{2}, \pi; 1 0 \rangle - \sqrt{\frac{2}{5}} |\Delta^{++}, \frac{1}{2}, \pi; 1 1 \rangle. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Explícitamente tenemos que

$$|\Delta^{++}\pi^0\rangle_{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{3}{5}} \left| \Delta^{++}, \frac{3}{2}, \pi^0; l = 1, m_l = 0 \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{5}} \left| \Delta^{++}, \frac{1}{2}, \pi^0; l = 1, m_l = 1 \right\rangle \quad (3.14)$$

Por último de forma totalmente análoga se hace para el acoplamiento de espín correspondiente a  $\Delta^+\pi^+$ , obteniendo

$$|\Delta^+\pi^+\rangle_{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{3}{5}} \left| \Delta^+, \frac{3}{2}, \pi^+, 0; l=1, m_l=0 \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{5}} \left| \Delta^+, \frac{1}{2}, \pi^+, 0; l=1, m_l=1 \right\rangle. \quad (3.15)$$

Estas últimas ecuaciones las sustituimos en la ecuación 3.3, de esta forma, la ecuación para la función de onda en el espacio de espín-sabor  $|\Psi_B, J_z\rangle$  para  $\Delta^{++}$  considerando los quarks de valencia (barión principal) y los quarks del mar (estados intermedios) queda como

$$\begin{aligned} |\Psi_{\Delta^{++}, \frac{3}{2}}\rangle &= \mathcal{N}_\Delta \left[ \left| \Delta^{++}, \frac{3}{2} \right\rangle + a_{\Delta \rightarrow N\pi} \left| p, \frac{1}{2}, \pi^+; l=1, m_l=1 \right\rangle \right. \\ &+ b_{\Delta \rightarrow \Delta\pi} \left( \sqrt{\frac{3}{5}} \left[ \sqrt{\frac{3}{5}} \left| \Delta^{++}, \frac{3}{2}, \pi^0; l=1, m_l=0 \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{5}} \left| \Delta^{++}, \frac{1}{2}, \pi^0; l=1, m_l=1 \right\rangle \right] \right. \\ &\left. \left. - \sqrt{\frac{2}{5}} \left[ \sqrt{\frac{3}{5}} \left| \Delta^+, \frac{3}{2}, \pi^+; l=1, m_l=0 \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{5}} \left| \Delta^+, \frac{1}{2}, \pi^+; l=1, m_l=1 \right\rangle \right] \right) \right] \quad (3.16) \end{aligned}$$

Hecho esto para el estado  $|\Psi_{\Delta^{++}, \frac{3}{2}}\rangle$  se procede a hacer lo mismo para el resto de los bariones del decuplete. Para  $|\Psi_{\Delta^+, \frac{3}{2}}\rangle$  tenemos

$$\begin{aligned} |\Psi_{\Delta^+, \frac{3}{2}}\rangle &= \mathcal{N}_\Delta \left[ \left| \Delta^+, \frac{3}{2} \right\rangle + a_{\Delta \rightarrow N\pi} \left( \sqrt{\frac{1}{3}} \left| n, \frac{1}{2}, \pi^+; l=1, m_l=1 \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| p, \frac{1}{2}, \pi^0; l=1, m_l=1 \right\rangle \right) \right. \\ &+ b_{\Delta \rightarrow \Delta\pi} \left( \sqrt{\frac{1}{15}} \left[ \sqrt{\frac{3}{5}} \left| \Delta^+, \frac{3}{2}, \pi^0; l=1, m_l=0 \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{5}} \left| \Delta^+, \frac{1}{2}, \pi^0; l=1, m_l=1 \right\rangle \right] \right. \\ &- \sqrt{\frac{8}{15}} \left[ \sqrt{\frac{3}{5}} \left| \Delta^0, \frac{3}{2}, \pi^+; l=1, m_l=0 \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{5}} \left| \Delta^0, \frac{1}{2}, \pi^+; l=1, m_l=1 \right\rangle \right] \\ &\left. \left. + \sqrt{\frac{2}{5}} \left[ \sqrt{\frac{3}{5}} \left| \Delta^{++}, \frac{3}{2}, \pi^-; l=1, m_l=0 \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{5}} \left| \Delta^{++}, \frac{1}{2}, \pi^-; l=1, m_l=1 \right\rangle \right] \right) \right]. \quad (3.17) \end{aligned}$$

Sucesivamente se muestran los siguientes estados

$$\begin{aligned} |\Psi_{\Delta^0, \frac{3}{2}}\rangle &= \mathcal{N}_\Delta \left[ \left| \Delta^0, \frac{3}{2} \right\rangle + a_{\Delta \rightarrow N\pi} \left( \sqrt{\frac{2}{3}} \left| n, \frac{1}{2}, \pi^0; l=1, m_l=1 \right\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} \left| p, \frac{1}{2}, \pi^-; l=1, m_l=1 \right\rangle \right) \right. \\ &+ b_{\Delta \rightarrow \Delta\pi} \left( \sqrt{\frac{8}{15}} \left[ \sqrt{\frac{3}{5}} \left| \Delta^+, \frac{3}{2}, \pi^-; l=1, m_l=0 \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{5}} \left| \Delta^+, \frac{1}{2}, \pi^-; l=1, m_l=1 \right\rangle \right] \right. \\ &\left. - \sqrt{\frac{1}{15}} \left[ \sqrt{\frac{3}{5}} \left| \Delta^0, \frac{3}{2}, \pi^0; l=1, m_l=0 \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{5}} \left| \Delta^0, \frac{1}{2}, \pi^0; l=1, m_l=1 \right\rangle \right] \right) \right] \end{aligned}$$

$$- \sqrt{\frac{2}{5}} \left[ \sqrt{\frac{3}{5}} \left| \Delta^-, \frac{3}{2}, \pi^+; l=1, m_l=0 \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{5}} \left| \Delta^-, \frac{1}{2}, \pi^+; l=1, m_l=1 \right\rangle \right] \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \left| \Psi_{\Delta^-, \frac{3}{2}} \right\rangle &= \mathcal{N}_\Delta \left[ \left| \Delta^-, \frac{3}{2} \right\rangle + a_{\Delta \rightarrow N\pi} \left| n, \frac{1}{2}, \pi^-; l=1, m_l=1 \right\rangle \right. \\ &+ b_{\Delta \rightarrow \Delta\pi} \left( \sqrt{\frac{2}{5}} \left[ \sqrt{\frac{3}{5}} \left| \Delta^0, \frac{3}{2}, \pi^-; l=1, m_l=0 \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{5}} \left| \Delta^0, \frac{1}{2}, \pi^-; l=1, m_l=1 \right\rangle \right] \right. \\ &\left. \left. - \sqrt{\frac{3}{5}} \left[ \sqrt{\frac{3}{5}} \left| \Delta^-, \frac{3}{2}, \pi^0; l=1, m_l=0 \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{5}} \left| \Delta^-, \frac{1}{2}, \pi^0; l=1, m_l=1 \right\rangle \right] \right) \right] \quad (3.19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \Psi_{\Sigma^{*+}, \frac{3}{2}} \right\rangle &= \mathcal{N}_{\Sigma^*} \left[ \left| \Sigma^{*+}, \frac{3}{2} \right\rangle + a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma\pi} \left( \sqrt{\frac{1}{2}} \left| \Sigma^+, \frac{1}{2}, \pi^0; l=1, m_l=1 \right\rangle - \sqrt{\frac{1}{2}} \left| \Sigma^0, \frac{1}{2}, \pi^+; l=1, m_l=1 \right\rangle \right) \right. \\ &+ b_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma\pi} \left( \sqrt{\frac{1}{2}} \left[ \sqrt{\frac{3}{5}} \left| \Sigma^{*+}, \frac{3}{2}, \pi^0; l=1, m_l=0 \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{5}} \left| \Sigma^{*+}, \frac{1}{2}, \pi^0; l=1, m_l=1 \right\rangle \right] \right. \\ &\left. - \sqrt{\frac{1}{2}} \left[ \sqrt{\frac{3}{5}} \left| \Sigma^{*0}, \frac{3}{2}, \pi^+; l=1, m_l=0 \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{5}} \left| \Sigma^{*0}, \frac{1}{2}, \pi^+; l=1, m_l=1 \right\rangle \right] \right) \\ &\left. + a_{\Lambda \rightarrow \Lambda\pi} \left| \Lambda, \frac{1}{2}, \pi^+; l=1, m_l=1 \right\rangle \right] \quad (3.20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \Psi_{\Sigma^{*0}, \frac{3}{2}} \right\rangle &= \mathcal{N}_{\Sigma^*} \left[ \left| \Sigma^{*0}, \frac{3}{2} \right\rangle + a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma\pi} \left( \sqrt{\frac{1}{2}} \left| \Sigma^+, \frac{1}{2}, \pi^-; l=1, m_l=1 \right\rangle - \sqrt{\frac{1}{2}} \left| \Sigma^-, \frac{1}{2}, \pi^+; l=1, m_l=1 \right\rangle \right) \right. \\ &+ b_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma\pi} \left( \sqrt{\frac{1}{2}} \left[ \sqrt{\frac{3}{5}} \left| \Sigma^{*+}, \frac{3}{2}, \pi^-; l=1, m_l=0 \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{5}} \left| \Sigma^{*+}, \frac{1}{2}, \pi^-; l=1, m_l=1 \right\rangle \right] \right. \\ &\left. - \sqrt{\frac{1}{2}} \left[ \sqrt{\frac{3}{5}} \left| \Sigma^{*-}, \frac{3}{2}, \pi^+; l=1, m_l=0 \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{5}} \left| \Sigma^{*-}, \frac{1}{2}, \pi^+; l=1, m_l=1 \right\rangle \right] \right) \\ &\left. + a_{\Lambda \rightarrow \Lambda\pi} \left| \Lambda, \frac{1}{2}, \pi^0; l=1, m_l=1 \right\rangle \right] \quad (3.21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left| \Psi_{\Sigma^{*-}, \frac{3}{2}} \right\rangle &= \mathcal{N}_{\Sigma^*} \left[ \left| \Sigma^{*-}, \frac{3}{2} \right\rangle \right. \\
&+ a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma \pi} \left( \sqrt{\frac{1}{2}} \left| \Sigma^0, \frac{1}{2}, \pi^-; l=1, m_l=1 \right\rangle - \sqrt{\frac{1}{2}} \left| \Sigma^-, \frac{1}{2}, \pi^0; l=1, m_l=1 \right\rangle \right) \\
&+ b_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma \pi} \left( \sqrt{\frac{1}{2}} \left[ \sqrt{\frac{3}{5}} \left| \Sigma^{*0}, \frac{3}{2}, \pi^-; l=1, m_l=0 \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{5}} \left| \Sigma^{*0}, \frac{1}{2}, \pi^-; l=1, m_l=1 \right\rangle \right] \right. \\
&- \left. \sqrt{\frac{1}{2}} \left[ \sqrt{\frac{3}{5}} \left| \Sigma^{*-}, \frac{3}{2}, \pi^0; l=1, m_l=0 \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{5}} \left| \Sigma^{*-}, \frac{1}{2}, \pi^0; l=1, m_l=1 \right\rangle \right] \right) \\
&\left. + a_{\Lambda \rightarrow \Lambda \pi} \left| \Lambda, \frac{1}{2}, \pi^-; l=1, m_l=1 \right\rangle \right] \quad (3.22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left| \Psi_{\Xi^{*0}, \frac{3}{2}} \right\rangle &= \mathcal{N}_{\Xi^*} \left[ \left| \Xi^{*0}, \frac{3}{2} \right\rangle \right. \\
&+ a_{\Xi^* \rightarrow \Xi \pi} \left( \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \Xi^0, \frac{1}{2}, \pi^0; l=1, m_l=1 \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \Xi^-, \frac{1}{2}, \pi^+; l=1, m_l=1 \right\rangle \right) \\
&+ b_{\Xi^* \rightarrow \Xi \pi} \left( \sqrt{\frac{1}{3}} \left[ \sqrt{\frac{3}{5}} \left| \Xi^{*0}, \frac{3}{2}, \pi^0; l=1, m_l=0 \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{5}} \left| \Xi^{*0}, \frac{1}{2}, \pi^0; l=1, m_l=1 \right\rangle \right] \right. \\
&- \left. \sqrt{\frac{2}{3}} \left[ \sqrt{\frac{3}{5}} \left| \Xi^{*-}, \frac{3}{2}, \pi^+; l=1, m_l=0 \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{5}} \left| \Xi^{*-}, \frac{1}{2}, \pi^+; l=1, m_l=1 \right\rangle \right] \right) \left. \right] \quad (3.23)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left| \Psi_{\Xi^{*-}, \frac{3}{2}} \right\rangle &= \mathcal{N}_{\Xi^*} \left[ \left| \Xi^{*-}, \frac{3}{2} \right\rangle \right. \\
&+ a_{\Xi^* \rightarrow \Xi \pi} \left( \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \Xi^0, \frac{1}{2}, \pi^-; l=1, m_l=1 \right\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \Xi^-, \frac{1}{2}, \pi^0; l=1, m_l=1 \right\rangle \right) \\
&+ b_{\Xi^* \rightarrow \Xi \pi} \left( \sqrt{\frac{2}{3}} \left[ \sqrt{\frac{3}{5}} \left| \Xi^{*0}, \frac{3}{2}, \pi^-; l=1, m_l=0 \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{5}} \left| \Xi^{*0}, \frac{1}{2}, \pi^-; l=1, m_l=1 \right\rangle \right] \right. \\
&- \left. \sqrt{\frac{1}{3}} \left[ \sqrt{\frac{3}{5}} \left| \Xi^{*-}, \frac{3}{2}, \pi^0; l=1, m_l=0 \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{5}} \left| \Xi^{*-}, \frac{1}{2}, \pi^0; l=1, m_l=1 \right\rangle \right] \right) \left. \right] \quad (3.24)
\end{aligned}$$

Tenemos el caso especial para  $\left| \Psi_{\Omega^-, \frac{3}{2}} \right\rangle$  pues en este caso no existen acoplamientos del tipo barión-pión por el contenido de extrañeza, sin embargo existen acoplamientos que involucran a los kaones pseudoescalares, quedando la función de onda de espín-sabor extendida como



$$\begin{aligned}
\left| \Psi_{\Omega^-, \frac{3}{2}} \right\rangle &= \mathcal{N}_{\Omega} \left[ \left| \Omega^-, \frac{3}{2} \right\rangle \right. \\
&+ a_{\Omega \rightarrow \Xi K} \left( \sqrt{\frac{1}{2}} \left| \Xi^-, \frac{1}{2}, K^0, 0; l=1, m_l=1 \right\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}} \left| \Xi^0, \frac{1}{2}, K^-, 0; l=1, m_l=1 \right\rangle \right) \\
&+ b_{\Omega \rightarrow \Xi^* K} \left( \sqrt{\frac{1}{2}} \left[ \sqrt{\frac{3}{5}} \left| \Xi^{*-}, \frac{3}{2}, K^0, 0; l=1, m_l=0 \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{5}} \left| \Xi^{*-}, \frac{1}{2}, K^0, 0; l=1, m_l=1 \right\rangle \right] \right. \\
&\left. - \sqrt{\frac{1}{2}} \left[ \sqrt{\frac{3}{5}} \left| \Xi^{*0}, \frac{3}{2}, K^-, 0; l=1, m_l=0 \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{5}} \left| \Xi^{*0}, \frac{1}{2}, K^-, 0; l=1, m_l=1 \right\rangle \right] \right) \left. \right] \quad (3.25)
\end{aligned}$$

Una vez obtenidas las funciones de onda de espín-sabor de los bariones del decuplete en el MCM, lo único que basta es obtener los valores para las amplitudes de probabilidad para que estén completamente determinadas. Existen varios métodos para obtenerlas. En la siguiente sección nos centraremos en el modelos de quarks constituyentes Unquenched, UQM, para obtener estos valores.

### 3.2. El modelo de quarks Unquenched

En esta sección se presenta el procedimiento para construir el modelo de quarks Unquenched en el cual los efectos de la creación de pares quark-antiquark son introducidos explícitamente en el CQM mediante el mecanismo inspirado en la creación de pares del estado del vacío  ${}^3P_0$  de la QCD. Este enfoque fue motivado por el trabajo de Geiger e Isgur con sus colaboradores sobre el modelo de la rotura del tubo de flujo, en el cual mostraron que la emergencia del CQM esta dada por el limite adiabático del modelo del tubo de flujo para el cual los efectos de la creacion de pares  $q\bar{q}$  son añadidos como una perturbación [16].

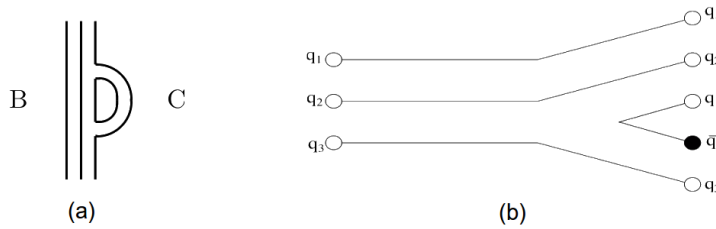


Figura 3.2: (a) Diagrama de un bucle para la corrección mesónica,  $C$ , en el estado del barión  $B$  al nivel de quarks. (b) Creación de un par quark-antiquark a través del mecanismo  ${}^3P_0$ .

El mecanismo de la creación de pares es insertado al nivel de quarks los diagramas de anillos de orden uno son calculados por la suma de un conjunto completo de estados intermedios barión-mesón,  $BC$  en figura 3.2(a). Bajo esas suposiciones, la función de onda de los estados de los

bariones consisten de una configuración de tres quarks de orden cero,  $|A\rangle$ , más una suma sobre todas las componentes de Fock debidas a la creación de pares quark-antiquark en el estado de vacío  ${}^3P_0$ . A primer orden en la creación de pares, la función de onda de bariones se puede escribir de la siguiente manera

$$|\psi_A\rangle = \mathcal{N} \left[ |A\rangle + \sum_{BClJ} \int d\vec{K}_0 k_0^2 dk_0 |BC\vec{K}_0 k_0 l J\rangle \frac{\langle BC\vec{K}_0 k_0 l J | T^\dagger | A \rangle}{m_A - E_B(k_0) - E_C(k_0)} \right] \quad (3.26)$$

de donde  $A$  denota a el barión inicial,  $B$  y  $C$  representan al barión y al mesón intermedios, y  $m_A$ ,  $E_B$  y  $E_C$  son sus respectivas energías,  $\vec{K}_0$  y  $l$  son el momento radial relativo y el momento angular orbital de  $B$  y  $C$ , y  $J$  es el momento angular total  $\vec{J} = \vec{J}_B + \vec{J}_C + \vec{l}$ .  $T^\dagger$  es el operador de creación de pares en el vacío, cuyos números cuánticos están dados como  $L = S = 1$ ,  $J = 0$  siendo además un singlete de sabor y un singlete de color.

$$T^\dagger = T^\dagger({}^3P_0) \quad (3.27)$$

Explícitamente tenemos [12, 17, 18]

$$T^\dagger = -3 \sum_{ij} \int d\vec{p}_i d\vec{p}_j \delta(\vec{p}_i + \vec{p}_j) C_{ij} F_{ij} \Gamma(\vec{p}_i - \vec{p}_j) [\chi_{ij} \times \mathcal{Y}_1(\vec{p}_i - \vec{p}_j)]^{(0)} b_i^\dagger(\vec{p}_i) d_j^\dagger(\vec{p}_j). \quad (3.28)$$

Aquí  $b_i^\dagger(\vec{p}_i)$  y  $d_j^\dagger(\vec{p}_j)$  son los operadores de creación para un quarks y un antiquark con momento  $\vec{p}_i$  y  $\vec{p}_j$  respectivamente. El par de quarks está caracterizado por una función de onda de singlete de color,  $C_{ij}$ , una función de onda de singlete de sabor,  $F_{ij}$ , y una función de onda de triplete de espín,  $\chi_{ij}$  con espín  $S = 1$ . El armónico sólido  $\mathcal{Y}_1(\vec{p}_i - \vec{p}_j)$  indica que el quark y el antiquark se encuentran en una onda relativa  $P$ . Debido a que el operador  $T^\dagger$  crea un par de quarks constituyentes, una función gaussiana de quark-antiquark de creación de vértice fué introducida para la cual el par es creado como un objeto finito con un tamaño efectivo, más que un objeto puntual. In el espacio de momentos esta está dada por

$$\Gamma(\vec{p}_i - \vec{p}_j) = \gamma e^{-r_q^2(\vec{p}_i - \vec{p}_j)^2/6} \quad (3.29)$$

donde  $\gamma = 20.025$  es una constante adimensional la cual fué determinada a partir de [33].

De acuerdo a la ecuación para la función de onda de un barión en el modelo de quarks Unquenched 3.26, el factor de normalización está dado por

$$1 = \mathcal{N}_a^2 \left( 1 + \sum_{BClJ} \int k_0^2 dk_0 \frac{|M_{A \rightarrow BC}(k_0)|^2}{[m_a - E_B(k_0) - E_C(k_0)]^2} \right) \quad (3.30)$$

donde usamos (véase [19])

$$M_{A \rightarrow BC}(k_0) = \int d\vec{K}_0 \langle BC\vec{K}_0 k_0 l J T^\dagger | A \rangle \quad (3.31)$$

de donde el factor

$$M_{A \rightarrow BC}(k_0) = 6\gamma\theta_{A \rightarrow BC} \epsilon(l_{\lambda_b}, l_c, L_{bc}, l, l_{\lambda_a}, L, k_0) \quad (3.32)$$

Los coeficientes  $\theta_{A \rightarrow BC}$  se refieren a los acoplamientos de color-espín-sabor entre el barión inicial y los estados intermedios barión-mesón debido a los pares quark-antiquark. Para bariones y mesones sin excitaciones orbitales, i.e.,  $l_{\lambda_A} = l_{\lambda_B} = l_{\lambda_C} = 0$  se reducen a

$$\theta_{A \rightarrow BC} = -\frac{1}{3} \sqrt{\frac{2J_b + 1}{2}} (-1)^{J_\rho + J_a - \frac{1}{2}} \begin{bmatrix} J_a & 1 & J_b \\ \frac{1}{2} & J_b & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \mathcal{F}_{A \rightarrow BC} \quad (3.33)$$

Estos se reducen, para el caso de bariones del decuplete,  $A_{10} \rightarrow B_8 + C_8$

$$\begin{pmatrix} \Delta \\ \Sigma^* \\ \Xi^* \\ \Omega \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} N\pi & \Lambda\pi \\ \Sigma\pi & \Lambda\pi \\ \Xi\pi & \Xi\bar{K} \\ \Xi\bar{K} & \Xi\bar{K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{9\sqrt{3}} & \\ \frac{\sqrt{2}}{27} & -\frac{1}{9\sqrt{3}} \\ \frac{1}{9\sqrt{3}} & \\ \frac{1}{9\sqrt{3}} & \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

Los coeficientes de espín-sabor-color para los acoplamientos  $A_{10} \rightarrow B_{10} + C_8$  son

$$\begin{pmatrix} \Delta \\ \Sigma^* \\ \Xi^* \\ \Omega \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \Delta\pi & & \\ \Sigma^*\pi & & \\ \Xi^*\pi & & \\ \Xi^*\bar{K} & \Omega\eta_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{18\sqrt{3}} & & \\ -\frac{\sqrt{10}}{27} & & \\ -\frac{\sqrt{5}}{18\sqrt{3}} & & \\ -\frac{\sqrt{5}}{9\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{5}}{9\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

Por el otro lado tenemos el factor  $\epsilon(l_{\lambda_b}, l_c, L_{bc}, l, l_{\lambda_a}, L, k_0)$  el cuál de acuerdo a [12] puede expresarse como

$$\epsilon(k_0) = -\frac{1}{2} \left( \frac{9\alpha_b^4 \alpha_c^2}{\pi} \right)^{3/4} \frac{4\alpha_b^2 + \alpha_c^2}{(3\alpha_b^2 + \alpha_c^2 + \alpha_d^2)^{5/2}} k_0 e^{-F^2 k_0^2} = \epsilon' k_0 e^{-F^2 k_0^2} \quad (3.36)$$

con

$$F^2 = \frac{\alpha_b^2(12\alpha_b^2 + 5\alpha_c^2) + \alpha_d^2(20\alpha_d^2 + 3\alpha_c^2)}{24(3\alpha_b^2 + \alpha_c^2 + \alpha_d^2)} \quad (3.37)$$

Con  $\alpha_b^2 = 9.77 \text{ GeV}^{-2}$ ,  $\alpha_c^2 = 6.25 \text{ GeV}^{-2}$  y  $\alpha_d^2 = 0.0 \text{ GeV}^{-2}$ . Teniendo todo esto estamos en la posibilidad de obtener el coeficiente de normalización de la ecuación 3.26, así como sus coeficientes de acoplamiento  $a_{A \rightarrow B_8 C_8}$  y  $b_{A \rightarrow B_{10} C_8}$ , como se muestra en la ecuación de la sección anterior 3.1, en la que sólo se consideran contribuciones de la nube piónica. El factor de normalización queda como

$$\mathcal{N}_A = \left( 1 + \sum_{BC} \int_0^\infty dk_0 k_0^2 \frac{(6\gamma\theta_{A \rightarrow BC} \epsilon(k_0))^2}{[m_A - \sqrt{m_B^2 + k_0^2} - \sqrt{m_C^2 + k_0^2}]^2} \right)^{-1/2} \quad (3.38)$$

Por el otro lado, como se puede ver en la ecuación 3.1 de MCM y en la ecuación 3.26 del UQM, los coeficientes de amplitud de probabilidad que corresponden a la primera quedan completamente determinados en el UQM como la probabilidad, es decir su cuadrado es

$$c_{A \rightarrow BC}^2 = (6\gamma\theta_{A \rightarrow BC} \epsilon')^2 \int_0^\infty dk_0 \frac{k_0^4 e^{-2F^2 k_0^2}}{[m_A - \sqrt{m_B^2 + k_0^2} - \sqrt{m_C^2 + k_0^2}]^2}. \quad (3.39)$$

De esta forma el factor de normalización es

$$\mathcal{N}_A^2 = \left( 1 + \sum_{BC} c_{A \rightarrow BC}^2 \right)^{-1} \quad (3.40)$$

Como ejemplo, los factores  $a_{A \rightarrow B_8 C}$  de la ecuación 3.1 están dados por

$$a_{A \rightarrow B_8 C}^2 = (6\gamma\theta_{A \rightarrow B_8 C}\varepsilon')^2 \int_0^\infty dk_0 \frac{k_0^4 e^{-2F^2 k_0^2}}{\left[ m_A - \sqrt{m_{B_8}^2 + k_0^2} - \sqrt{m_C^2 + k_0^2} \right]^2} \quad (3.41)$$

y los coeficientes  $b_{A \rightarrow B_{10} C}$  quedan como

$$b_{A \rightarrow B_{10} C}^2 = (6\gamma\theta_{A \rightarrow B_{10} C}\varepsilon')^2 \int_0^\infty dk_0 \frac{k_0^4 e^{-2F^2 k_0^2}}{\left[ m_A - \sqrt{m_{B_{10}}^2 + k_0^2} - \sqrt{m_C^2 + k_0^2} \right]^2} \quad (3.42)$$

Algo que nos será de bastante utilidad en el siguiente capítulo al calcular los valores esperados del operador de momento magnético para un estado son los términos cruzados los cuales no son simplemente la multiplicación directa, sino, estrictamente hablando, el siguiente término con la integral dada como

$$a_{A \rightarrow B_8 C} b_{A \rightarrow B_{10} C} = (6\gamma\varepsilon')^2 \theta_{A \rightarrow B_{10} C} \theta_{A \rightarrow B_8 C} \times \int_0^\infty dk_0 \frac{k_0^4 e^{-2F^2 k_0^2}}{\left[ m_A - \sqrt{m_{B_8}^2 + k_0^2} - \sqrt{m_C^2 + k_0^2} \right] \left[ m_A - \sqrt{m_{B_{10}}^2 + k_0^2} - \sqrt{m_C^2 + k_0^2} \right]} \quad (3.43)$$

Si observamos en las integrales de las ecuaciones 3.2, 3.42 y 3.43, debemos de tener especial cuidado al calcularlas numéricamente, pues en el caso en que  $m_A > M_B + M_C$  tenemos que existen valos de  $k_0$  en los cuáles existen polos en la integral (son polos dobles), por lo que deben tratarse con la adecuada herramienta. Para el caso en que  $m_A \leq M_B + M_C$  no se tiene ningún problema en resolver estas integrales. En los casos en que se tienen polos son para las integrales correspondientes a  $a_{N \rightarrow \pi}^2$ ,  $a_{\Sigma \rightarrow \pi}^2$ ,  $b_{\Sigma^* \rightarrow \pi}^2$  y  $a_{\Xi \rightarrow \pi}^2$ . Como en estos casos se tienen polos dobles en las correspondientes integrales es bastante conveniente hacer el siguiente cambio de variable

$$k_0 \longrightarrow E_{BC} = \sqrt{M_B^2 + k_0^2} + \sqrt{M_C^2 + k_0^2}. \quad (3.44)$$

Así la integral correspondiente queda como

$$\int_0^\infty dk_0 \frac{k_0^4 e^{-2F^2 k_0^2}}{\left[ m_A - \sqrt{m_B^2 + k_0^2} - \sqrt{m_C^2 + k_0^2} \right]^2} = \int_{M_B + M_C}^\infty dE_{BC} \frac{f(E_{BC}) e^{-2F^2 A/E_{BC}^2}}{M_A - E_{BC}} \quad (3.45)$$

con

$$A = A(E_{BC}) = \left( \frac{1}{4} [E_{BC}^2 - M_B^2 - M_C^2]^2 - M_B^2 M_C^2 \right), \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned}
f(E_{BC}) = & (-2F^2) \left( 2 \frac{A^{5/2}}{E_{BC}^7} (E_{BC}^2 - M_B^2 - M_C^2) - \frac{A^{3/2}}{2E_{BC}^5} (E_{BC}^2 - M_B^2 - M_C^2)^2 - 2 \frac{A^{7/2}}{E_{BC}^9} \right) \\
& + \frac{9}{2} \frac{A^{3/2}}{E_{BC}^5} (E_{BC}^2 - M_B^2 - M_C^2) - \frac{3}{4} \frac{A^{1/2}}{E_{BC}^3} (E_{BC}^2 - M_B^2 - M_C^2)^2 - 6 \frac{A^{5/2}}{E_{BC}^7} - \frac{A^{3/2}}{E_{BC}^3}
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Así podemos ver que de la ecuación 3.45 es solamente necesario calcular numéricamente la integral alrededor de un sólo polo (que incluso podía tener multiplicidad 2). El método usado aquí para calcularla fue mediante el valor principal de Cauchy (apéndice D). Las masas utilizadas para el cálculo se tomaron como el promedio entre el multiplete de isospín (pues aquí suponemos la simetría de isospín con la masa del quark  $u$  idéntica a la masa del quark  $d$ ) de las últimas mediciones reportadas en el Particle Data Group[32], y que se muestran en la tabla D.1. Los resultados para los coeficientes de amplitud de probabilidad calculados se muestran en la tabla 3.2.

Con los valores ya obtenidos para las amplitudes de probabilidad, y como se mencionó anteriormente, es posible tener las funciones de onda de espín-sabor para los bariones del decuplete en UQM, que corresponden a las funciones de MCM 3.16-3.25, las cuales nos serán útiles para el cálculo de los momentos magnéticos de estos bariones en el UQM en el siguiente capítulo.

Hadrón	masa (GeV)
$\Delta$	1.232
$\Sigma^*$	1.384
$\Xi^*$	1.533
$\Omega$	1.672
$N$	0.939
$\Sigma$	1.193
$\Xi$	1.318
$\Lambda$	1.116
$\pi$	0.138
$\bar{K}$	0.495

Tabla 3.1: Masas correspondientes para los multipletes de isospín de los hadrones correspondientes.

---

$a_{\Delta \rightarrow N\pi}^2$	0.366562
$b_{\Delta \rightarrow \Delta\pi}^2$	0.513754
$a_{\Delta \rightarrow N\pi} b_{\Delta \rightarrow \Delta\pi}$	0.52161
$a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma\pi}^2$	0.130517
$b_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma^*\pi}^2$	0.283628
$a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma\pi} b_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma^*\pi}$	-0.195867
$a_{\Lambda \rightarrow \Sigma\pi}^2$	0.203568
$a_{\Lambda \rightarrow \Sigma\pi} b_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma^*\pi}$	0.2772241
$a_{\Lambda \rightarrow \Sigma\pi} a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma\pi}$	-0.166176
$a_{\Xi^* \rightarrow \Xi\pi}^2$	0.21351
$b_{\Xi^* \rightarrow \Xi^*\pi}^2$	0.109453
$a_{\Xi^* \rightarrow \Xi\pi} b_{\Xi^* \rightarrow \Xi^*\pi}$	-0.16155
$a_{\Omega \rightarrow \Xi\bar{K}}^2$	0.599612
$b_{\Omega \rightarrow \Xi^*\bar{K}}^2$	0.379231
$a_{\Omega \rightarrow \Xi\bar{K}} b_{\Omega \rightarrow \Xi^*\bar{K}}$	-0.471309

---

Tabla 3.2: Valores numéricos para los coeficientes de acoplamiento de las funciones de onda del decuplete en el UQM.



## Capítulo 4

# Momentos magnéticos

En la electrodinámica clásica es sabido que un cuerpo eléctricamente cargado que se encuentra en rotación posee un momento dipolar magnético. Esto llegó a ser muy extraño al descubrirse que el electrón, vista como una partícula elemental, pudiera poseer un momento magnético al realizarse el experimento hecho por Otto Stern y Walther Gerlach en 1922 cuando se observó que al mandar haces de estas partículas y hacerlas pasar por un campo magnético inhomogéneo se separaban en dos haces distintos, como si tuvieran dos momentos angulares intrínsecos. Esta idea no podía concebirse para este tipo de partículas, las cuáles se esperaba que no fueran afectadas por el campo magnético, por lo que se les asoció un grado de libertad cuya cantidad asociada era análoga al momento angular clásico, al cuál se le llamó espín. Se encontró que para la mecánica cuántica las partículas con espín distinto de cero pueden poseer un momento magnético, que ahora era una función del espín, se obtiene a partir del operador

$$\vec{\mu} = \frac{g_s q}{2mc} \vec{S}. \quad (4.1)$$

A  $g_s$  se le conoce como el factor giromagnético de espín y toma el valor de 1 únicamente para rotaciones orbitales, suponiendo que la masa y la carga ocupan esferas de igual radio y  $q$  es la carga eléctrica de la partícula ( $q = e$  en este caso). Así mismo para un conjunto de partículas cuánticas tenemos que

$$\hat{\mu}(\vec{S}, \vec{l}) = \sum_i \mu_i (2\vec{S}_i + \vec{l}_i). \quad (4.2)$$

con  $\mu_i$  el momento magnético de cada elemento,  $\vec{S}_i = \frac{\hbar}{2} \sigma_i$  ( $\sigma_i$  son las matrices de Pauli como se dan en B,7) y de donde  $\vec{l}_i$  se refiere al momento angular orbital relativo que se genera para cada par de partículas. Este último caso es de especial utilidad al calcular el momento magnético para objetos cuánticos que se consideran compuestos por elementos constituyentes, tales como los hadrones, y que se explicará a continuación. Por conveniencia se utilizarán unidades Gaussianas ( $\hbar = 1, c = 1$ ) a partir de aquí.



## 4.1. Momentos magnéticos en el modelo de quarks

Uno de los grandes triunfos del modelo de quarks (QM) ha sido la predicción de los momentos magnéticos de los bariones y mesones con muy buena aproximación. Existe un formalismo matemático para obtener los valores del momento magnético de los bariones a partir de las funciones de onda de espín-sabor con el operador 4.2 (o bien 4.1). En el QM, como se mostró en el capítulo 1, se construyeron las funciones de espín-sabor. En este punto suponemos que no existen excitaciones orbitales en los elementos constituyentes, entonces el operador de momento magnético puede expresarse sencillamente como

$$\vec{\mu} = \sum_i 2\mu_i \vec{s}_i + \sum_i \mu_i \vec{l}_i = \vec{\mu}_{\text{espin}} + \vec{\mu}_{\text{orbital}} = \vec{\mu}_{\text{espin}} \quad (4.3)$$

con  $\mu_i$  como se muestra en 4.1 y además en el que consideraremos únicamente la parte de espín  $\vec{\mu}_{\text{espin}}$ .

Con lo anterior en cuenta, puede obtenerse de forma sencilla el valor esperado (que es un observable) del momento magnético para los bariones del octete y decuplete tomando las funciones de onda espín-sabor con la proyección máxima de espín ( $S_z = \frac{1}{2}$  para el octete y  $S_z = \frac{3}{2}$  para el decuplete) y el operador 4.3 expresándose como sigue

$$\mu(B) = \langle \psi_B, S_z | \vec{\mu} | \psi_B, S_z \rangle \quad (4.4)$$

Teniendo en cuenta que  $S_z |\psi_B, S_z\rangle = S_z |\psi_B, S_z\rangle$  y  $\vec{S} |\psi_B, S_z\rangle = 3S_z(1) |\psi_B, S_z\rangle$ . Como ejemplo tomaremos el caso del protón. Para ello tomaremos su función de onda de espín-sabor, mostrada explícitamente en el apéndice A, por lo que se obtiene al aplicar a cada quark con su correspondiente espín, que

$$\mu(p) = \left\langle \psi_p, \frac{1}{2} \left| \vec{\mu} \right| \psi_p, \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{4\mu_u - \mu_d}{3} \quad (4.5)$$

Esta expresión queda completamente en función de los momentos magnéticos de los quarks, cuyos valores no pueden obtenerse directamente del modelo de quarks, sino que existe una vía indirecta, en la cuál pueden medirse experimentalmente los momentos magnéticos del neutrón y de  $\Lambda^0$  en el que tenemos tres ecuaciones con tres incógnitas (los momentos magnéticos de los tres quarks ligeros  $u$ ,  $d$  y  $s$ ). Para obtener el valor esperado del momento magnético para el protón no es necesario hacer el cálculo de nuevo con el operador 4.3, sino que pueden usarse las propiedades de simetría con la identidad 2.4 que se vio en el capítulo 2, y con el operador de momento magnético definido en términos de los operadores de creación y aniquilación (véase también 2.30), como  $\vec{\mu}_z$ . De esta manera tenemos en la simetría de isoespín que

$$\mu(n) = \left\langle \psi_n, \frac{1}{2} \left| \vec{\mu} \right| \psi_n, \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{4\mu_d - \mu_u}{3} \quad (4.6)$$

donde puede verse la simetría que tiene en el caso del protón únicamente intercambiando el quark  $u$  por el quark  $d$ . De la misma forma tenemos que

$$\mu(\Lambda^0) = \left\langle \psi_{\Lambda^0}, \frac{1}{2} \left| \vec{\mu} \right| \psi_{\Lambda^0}, \frac{1}{2} \right\rangle = \mu_s. \quad (4.7)$$

De esta manera teniendo los valores experimentales para estos bariones, resolviendo el sistema de ecuaciones, los momentos magnéticos  $\mu_u$ ,  $\mu_d$  y  $\mu_s$  son determinados a partir de los momentos magnéticos del protón, p, el neutrón, n, y lambda,  $\Lambda^0$ , los cuales se muestran en la tabla 4.1. Los momentos magnéticos calculados (obtenidos fácilmente utilizando las propiedades de simetría del capítulo 2) para el resto de los bariones, así como los resultados experimentales [32] se muestran en las tablas 4.2 y 4.3 en unidades del magnetón de Bohr,  $\mu_N = e/2m_e$  (en unidades Gaussianas).

$$\begin{array}{l} \hline \mu_u \quad 1,852\mu_N \\ \mu_d \quad -0,972\mu_N \\ \mu_s \quad -0,613\mu_N \\ \hline \end{array}$$

Tabla 4.1: Momentos magnéticos para los quarks  $u$ ,  $d$  y  $s$ 

Barión	$\mu$	$\mu_{calc}(\mu_N)$	$\mu_{exp}(\mu_N)$
p	$(4\mu_u - \mu_d)/3$	2.793*	2.973
n	$(4\mu_d - \mu_u)/3$	-1.913*	-1.913
$\Sigma^+$	$(4\mu_u - \mu_s)/3$	2.673	$2.458 \pm 0.010$
$\Sigma^0$	$(2\mu_u + 2\mu_d - \mu_s)/3$	0.791	-
$\Sigma^-$	$(4\mu_d - \mu_s)/3$	-1.091	$-1.160 \pm 0.025$
$\Lambda^0$	$\mu_s$	-0.613*	$-0.613 \pm 0.004$
$\Xi^0$	$(4\mu_s - \mu_u)/3$	-1.435	$-1.250 \pm 0.014$
$\Xi^-$	$(4\mu_s - \mu_d)/3$	-0.493	$-0.651 \pm 0.003$
$\Xi^0/\Lambda^0$	$(\mu_u - \mu_d)/\sqrt{3}$	1.620	$1.610 \pm 0.08$

Tabla 4.2: Momentos magnéticos de los bariones del octete

Teniendo los valores para los momentos magnéticos de los bariones en el QM puede proseguirse al cálculo de los momentos magnéticos de los mismos en el modelo de quarks efectivo UQM, en el que se utilizan los valores encontrados aquí para la parte de los quarks de valencia (que pertenecen al barión principal de la función de onda total en el UQM). En el siguiente

Barión	$\mu$	$\mu_{calc}(\mu_N)$	$\mu_{exp}(\mu_N)$
$\Delta^{++}$	$3\mu_u$	5.556	3.7 a 7.5
$\Delta^+$	$2\mu_u + \mu_d$	3.091	-
$\Delta^0$	$\mu_u + 2\mu_d$	-0.092	-
$\Delta^-$	$3\mu_d$	-2.916	-
$\Sigma^{*+}$	$2\mu_u + \mu_s$	3.091	-
$\Sigma^{*0}$	$\mu_u + \mu_d + \mu_s$	0.267	-
$\Sigma^{*-}$	$2\mu_d + \mu_s$	-2.557	-
$\Xi^{*0}$	$\mu_u + 2\mu_s$	0.626	-
$\Xi^{*-}$	$\mu_d + 2\mu_s$	-2.198	-
$\Omega^-$	$3\mu_s$	-1.839	$-2.02 \pm 0.05$

Tabla 4.3: Momentos magnéticos de los bariones del decuplete

capítulo se explicará la forma de obtener el momento magnético considerando las contribuciones de los quarks de mar (correspondientes a los términos barión-mesón) siendo necesario ampliar la expresión del momento magnético para considerar a los antiquarks involucrados.

## 4.2. Momentos magnéticos en el modelo de quarks Unquenched

En esta sección se mostrará la base de los momentos magnéticos en el UQM para obtener los valores del momento magnético de los bariones, centrándonos en la obtención de estos para el decuplete de bariones. Debido a que en este modelo existen contribuciones del tipo barión-mesón, existen antiquarks involucrados debido al mesón, así como momentos angulares relativos  $\vec{l}_i$  debido a este acoplamiento, se define el operador de momento magnético de forma práctica, a partir de 4.2, como

$$\vec{\mu} = \sum_q \mu_q \left[ 2\vec{s}(q) + \vec{l}(q) - 2\vec{s}(\bar{q}) - \vec{l}(\bar{q}) \right] \quad (4.8)$$

de donde el índice  $q$  corre sobre todos los quarks y antiquarks en la funciones de espín-sabor. Cabe mencionar que el momento magnético de los antiquarks es sencillamente menos el momento magnético de los correspondientes quarks, pues estos dependen directamente de la carga eléctrica, ver 4.1, y en cuyo caso la correspondiente antipartícula es de carga opuesta, es decir

$$\mu_q = -\mu_{\bar{q}} \quad (4.9)$$

El siguiente paso será utilizar explícitamente este operador 4.8 para calcular los momentos magnéticos en el UQM.

#### 4.2.1. Octete

En esta sección se hace una breve discusión sobre el caso particular de los momentos magnéticos en el UQM para los bariones del octete, donde la explicación explícita se dará para el caso de los bariones del decuplete que es completamente similar a este caso. El cálculo de estos valores [33] se realizó de forma análoga que en modelo de quarks con el caso especial del operador 4.8 y los correspondientes coeficientes de amplitud de probabilidad como se vió en 3.2, obteniendo los valores que se muestran en la tabla 4.4. Los resultados experimentales corresponden a los últimos publicados [32].

Barión	QM ( $\mu_N$ )	UQM ( $\mu_N$ )	$\mu_{exp}$ ( $\mu_N$ )
p	2.793	2.793*	2.793
n	-1.913	-1.913*	-1.913
$\Sigma^+$	2.673	2.589	2.458±0.010
$\Sigma^0$	0.791	0.783	-
$\Sigma^-$	-1.091	-1.023	-1.160±0.025
$\Lambda$	-0.613	-0.613*	-0.613±0.004
$\Xi^0$	-1.435	-1.359	-1.250±0.014
$\Xi^-$	-0.493	-0.530	-0.651±0.003
$\Xi^0/\Lambda^0$	1.630	1.640	1.610±0.08

Tabla 4.4: Momentos magnéticos de los bariones del octete

### 4.2.2. Decuplete

En este punto se entenderán los cálculos hechos para los momentos magnéticos del decuplete de bariones en el UQM así como los resultados. Para comenzar consideraremos el operador para el momento magnético 4.8 expresándolo convenientemente en las partes de espín y de momento angular orbital como

$$\vec{\mu} = \sum_q \mu_q 2(\vec{s}(q) - \vec{s}(\bar{q})) + \sum_q \mu_q (\vec{l}(q) - \vec{l}(\bar{q})) = \vec{\mu}_S + \vec{\mu}_l. \quad (4.10)$$

Consideraremos también las funciones de onda de espín-sabor del UQM para los bariones del decuplete mostradas en 4.2, en la cuales consideraremos primero los efectos que tiene el espín en estas con el operador 4.10 y luego el efecto del momento angular orbital en este mismo contexto. Es decir

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{B, \frac{3}{2}} | \vec{\mu} | \Psi_{B, \frac{3}{2}} \rangle &= \langle \Psi_{B, \frac{3}{2}} | \vec{\mu}_S | \Psi_{B, \frac{3}{2}} \rangle + \langle \Psi_{B, \frac{3}{2}} | \vec{\mu}_l | \Psi_{B, \frac{3}{2}} \rangle \\ &= \mu_S(B) + \mu_l(B) \end{aligned} \quad (4.11)$$

con  $\mu_S(B)$  y  $\mu_l(B)$  los momentos magnéticos del barión  $B$  debido al espín y al momento angular relativo respectivamente. De esta forma el momento magnético del barión (y en general del hadrón) está dado por la suma de las contribuciones de espín y de momento angular relativo de forma independiente, por lo que se analizará en la siguiente sección las contribuciones de espín.

### Contribuciones del espín

Al obtener el valor esperado del operador  $\vec{\mu}_S$  de la ecuación 4.10 a un estado en general del UQM para un barión del decuplete  $B_{10}$ , ver como ejemplo ecuación 3.1, con únicamente la nube piónica como en el capítulo 3 obtendremos que

$$\begin{aligned} \mu_S(B_{10}) &= \langle \Psi_{B_{10}} | \vec{\mu}_S | \Psi_{B_{10}} \rangle \\ &= \mathcal{N}_{B_{10}}^2 \left[ \langle B_{10} | \vec{\mu}_S | B_{10} \rangle \right. \\ &+ a_{B_{10} \rightarrow B_8 \pi}^2 \langle B_8 \pi | \vec{\mu}_S | B_8 \pi \rangle + b_{B_{10} \rightarrow B_{10} \pi}^2 \langle B_{10} \pi' | \vec{\mu}_S | B_{10} \pi' \rangle \\ &+ 2a_{B_{10} \rightarrow B_8 \pi} b_{B_{10} \rightarrow B_{10} \pi} \langle B_8 \pi | \vec{\mu}_S | B_{10} \pi' \rangle \\ &\left. + 2(a_{B_{10} \rightarrow B_8 \pi} \langle B_8 \pi | \vec{\mu}_S | B_{10} \rangle + b_{B_{10} \rightarrow B_{10} \pi} \langle B_{10} \pi' | \vec{\mu}_S | B_{10} \rangle) \right]. \end{aligned} \quad (4.12)$$

A partir de aquí se puede reconocer que el primer término de esta ecuación pertenece al momento magnético del barión  $B_{10}$  del modelo de quarks. Los demás términos corresponden a las contribuciones debidas a los estados intermedios del UQM. Para calcular estos términos es

bastante fácil obtener una expresión simple por la naturaleza del operador  $\vec{\mu}_S$ , es decir, por la ecuación 4.10 tenemos que

$$\begin{aligned} \langle B_i \pi | \vec{\mu} | B_j \rangle &= 0, \quad \forall i, j \quad ; \\ \langle B_i \pi_j | \vec{\mu} | B_k \pi_l \rangle &= \langle B_i | \vec{\mu} | B_k \rangle \delta_{jl} + \langle \pi_j | \vec{\mu} | \pi_l \rangle \delta_{ik} \\ &= \langle B_i | \vec{\mu} | B_k \rangle \delta_{jl}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

donde el término  $\langle \pi_j | \vec{\mu} | \pi_l \rangle \delta_{ik} = 0$  pues el pión es un mesón pseudoescalar ( $S = 0$ ), así el estado puro del pión no contribuirá en el momento magnético. De esta manera el momento magnético como se muestra en la ecuación 4.12 queda sencillamente como

$$\begin{aligned} \mu_S(B_{10}) &= \langle \Psi_{B_{10}} | \vec{\mu}_S | \Psi_{B_{10}} \rangle \\ &= \mathcal{N}_{B_{10}}^2 \left[ \langle B_{10} | \vec{\mu}_S | B_{10} \rangle + a_{B_{10} \rightarrow B_8 \pi}^2 \langle B_8 | \vec{\mu}_S | B_8 \rangle \right. \\ &\quad \left. + b_{B_{10} \rightarrow B_{10} \pi}^2 \langle B_{10} | \vec{\mu}_S | B_{10} \rangle + 2a_{B_{10} \rightarrow B_8 \pi} b_{B_{10} \rightarrow B_{10} \pi} \langle B_8 | \vec{\mu}_S | B_{10} \rangle \delta_{\pi\pi'} \right]. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Lo que resta hacer ahora es obtener los valores esperados correspondientes de la última ecuación con los correspondientes estados especificados en el espacio de espín-sabor, es decir, cada estado contiene el desarrollo con los correspondientes coeficientes de Clebsch-Gordan de espín y de sabor (veáanse el caso particular de las ecuaciones 3.12, 3.14, 3.15). Como un ejemplo, se ilustra el caso para la partícula  $\Delta^{++}$  con proyección máxima de espín,  $S_z = \frac{3}{2}$ . Para ello tomaremos su función de onda en el UQM como en 3.16 y de acuerdo a 4.14, entonces

$$\begin{aligned} \mu_S(\Delta^{++}) &= \left\langle \Psi_{\Delta^{++}}, \frac{3}{2} \middle| \vec{\mu}_S \middle| \Psi_{\Delta^{++}}, \frac{3}{2} \right\rangle \\ &= \mathcal{N}_{\Delta}^2 \left[ \left\langle \Delta^{++}, \frac{3}{2} \middle| \vec{\mu}_S \middle| \Delta^{++}, \frac{3}{2} \right\rangle + a_{\Delta \rightarrow N \pi}^2 \left\langle p, \frac{1}{2} \middle| \vec{\mu}_S \middle| p, \frac{1}{2} \right\rangle \right. \\ &\quad + b_{\Delta \rightarrow \Delta \pi}^2 \left( \frac{9}{25} \left\langle \Delta^{++}, \frac{3}{2} \middle| \vec{\mu}_S \middle| \Delta^{++}, \frac{3}{2} \right\rangle + \frac{6}{25} \left\langle \Delta^{++}, \frac{1}{2} \middle| \vec{\mu}_S \middle| \Delta^{++}, \frac{1}{2} \right\rangle \right) \\ &\quad + \left. \frac{6}{25} \left\langle \Delta^+, \frac{3}{2} \middle| \vec{\mu}_S \middle| \Delta^+, \frac{3}{2} \right\rangle + \frac{4}{25} \left\langle \Delta^+, \frac{1}{2} \middle| \vec{\mu}_S \middle| \Delta^+, \frac{1}{2} \right\rangle \right) \\ &\quad + 2a_{\Delta \rightarrow N \pi} b_{\Delta \rightarrow \Delta \pi} \frac{2}{5} \left\langle p, \frac{1}{2} \middle| \vec{\mu}_S \middle| \Delta^+, \frac{1}{2} \right\rangle \right]. \end{aligned} \quad (4.15)$$

de esta forma, como se ve en el último termino, existe un término cruzado, el cual se trata simplemente como en el QM así como el resto de los términos cruzados que aparecen en los

demás bariones. En este caso tenemos que  $\langle p, \frac{1}{2} | \vec{\mu}_S | \Delta^+, \frac{1}{2} \rangle = \frac{2\sqrt{2}}{3}(\mu_u - \mu_d)$ . Para los demás términos de la ecuación de arriba se obtienen a partir del QM como se muestran explícitamente en las tablas 4.2 y 4.3 del capítulo. De esta manera tenemos que el momento magnético de  $\Delta^{++}$  en UQM queda como

$$\begin{aligned}
\mu_S(\Delta^{++}) &= \left\langle \Psi_{\Delta^{++}, \frac{3}{2}} \left| \mu_z(\mathbf{S}) \right| \Psi_{\Delta^{++}, \frac{3}{2}} \right\rangle \\
&= \mathcal{N}_\Delta^2 \left[ 3\mu_u + a_{\Delta \rightarrow N\pi}^2 \frac{4\mu_u - \mu_d}{3} \right. \\
&\quad + b_{\Delta \rightarrow \Delta\pi}^2 \left( \frac{33}{25}\mu_u + \frac{6}{25}(2\mu_u + \mu_d) + \frac{4}{25} \frac{2\mu_u + \mu_d}{3} \right) \\
&\quad \left. + a_{\Delta \rightarrow N\pi} b_{\Delta \rightarrow \Delta\pi} \frac{8\sqrt{2}}{15} (\mu_u - \mu_d) \right]
\end{aligned} \tag{4.16}$$

con los coeficientes de amplitud de probabilidad mostrados en la tabla 3.2. De forma completamente análoga se realiza lo mismo para el resto de los bariones del decuplete, por lo que se muestran los resultados obtenidos a continuación.

$$\begin{aligned}
\mu_S(\Delta^+) &= \left\langle \Psi_{\Delta^+, \frac{3}{2}} \left| \mu_z(\mathbf{S}) \right| \Psi_{\Delta^+, \frac{3}{2}} \right\rangle \\
&= \mathcal{N}_\Delta^2 \left[ 2\mu_u + \mu_d + a_{\Delta \rightarrow N\pi}^2 \left( \frac{1}{3} \frac{4\mu_d - \mu_u}{3} + \frac{2}{3} \frac{4\mu_u - \mu_d}{3} \right) \right. \\
&\quad + b_{\Delta \rightarrow \Delta\pi}^2 \left( \frac{3}{75}(2\mu_u + \mu_d) + \frac{2}{75} \frac{2\mu_u + \mu_d}{3} + \frac{24}{75}(2\mu_d + \mu_u) + \frac{16}{75} \frac{2\mu_d + \mu_u}{3} + \frac{22}{25}\mu_u \right) \\
&\quad \left. + a_{\Delta \rightarrow N\pi} b_{\Delta \rightarrow \Delta\pi} \frac{2\sqrt{2}}{3} \left( \frac{8}{15}(\mu_u - \mu_d) - \frac{4}{15}(\mu_u - \mu_d) \right) \right]
\end{aligned} \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned}
\mu_S(\Delta^0) &= \left\langle \Psi_{\Delta^0, \frac{3}{2}} \left| \mu_z(\mathbf{S}) \right| \Psi_{\Delta^0, \frac{3}{2}} \right\rangle \\
&= \mathcal{N}_\Delta^2 \left[ 2\mu_d + \mu_u + a_{\Delta \rightarrow N\pi}^2 \left( d_{\frac{2}{3}}^2 \frac{4\mu_d - \mu_u}{3} + \frac{1}{3} \frac{4\mu_u - \mu_d}{3} \right) \right. \\
&\quad + b_{\Delta \rightarrow \Delta\pi}^2 \left( \frac{24}{75}(2\mu_u + \mu_d) + \frac{16}{75} \frac{2\mu_u + \mu_d}{3} + \frac{3}{75}(2\mu_d + \mu_u) + \frac{2}{75} \frac{2\mu_d + \mu_u}{3} + \frac{22}{25}\mu_d \right) \\
&\quad \left. + a_{\Delta \rightarrow N\pi} b_{\Delta \rightarrow \Delta\pi} \frac{2\sqrt{2}}{3} \left( \frac{4}{15}(\mu_u - \mu_d) - \frac{8}{15}(\mu_u - \mu_d) \right) \right]
\end{aligned} \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned}
 \mu_S(\Delta^-) &= \left\langle \Psi_{\Delta^-}, \frac{3}{2} \left| \mu_z(\mathbf{S}) \right| \Psi_{\Delta^-}, \frac{3}{2} \right\rangle \\
 &= \mathcal{N}_\Delta^2 \left[ 3\mu_d + a_{\Delta \rightarrow N\pi}^2 \frac{4\mu_d - \mu_u}{3} \right. \\
 &\quad + b_{\Delta \rightarrow \Delta\pi}^2 \left( \frac{33}{25}\mu_d + \frac{6}{25}(2\mu_d + \mu_u) + \frac{4}{25} \frac{2\mu_d + \mu_u}{3} \right) \\
 &\quad \left. + a_{\Delta \rightarrow N\pi} b_{\Delta \rightarrow \Delta\pi} \frac{8\sqrt{2}}{15} (\mu_d - \mu_u) \right] \tag{4.19}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mu_S(\Sigma^{*+}) &= \left\langle \Psi_{\Sigma^{*+}}, \frac{3}{2} \left| \mu_z(\mathbf{S}) \right| \Psi_{\Sigma^{*+}}, \frac{3}{2} \right\rangle \\
 &= \mathcal{N}_{\Sigma^*}^2 \left[ 2\mu_u + \mu_s + a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma\pi}^2 \left( \frac{1}{2} \frac{4\mu_u - \mu_s}{3} + \frac{1}{2} \frac{2\mu_u + 2\mu_d - \mu_s}{3} \right) \right. \\
 &\quad + b_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma^*\pi}^2 \left( \frac{3}{10}(2\mu_u + \mu_s) + \frac{2}{10} \frac{2\mu_u + \mu_s}{3} + \frac{3}{10}(\mu_u + \mu_d + \mu_s) + \frac{2}{10} \frac{\mu_u + \mu_d + \mu_s}{3} \right) \\
 &\quad + a_{\Sigma^* \rightarrow \Lambda\pi}^2 \mu_s + 2a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma\pi} b_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma^*\pi} \left( \frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} \right) \left( \frac{2\sqrt{2}}{3}(\mu_s - \mu_u) + \frac{\sqrt{2}}{3}(2\mu_s - \mu_u - \mu_d) \right) \\
 &\quad \left. + 2a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma\pi} a_{\Sigma^* \rightarrow \Lambda\pi} \left( \frac{-1}{\sqrt{2}} \right) \left( \frac{\mu_u - \mu_d}{\sqrt{3}} \right) + 2a_{\Sigma^* \rightarrow \Lambda\pi} b_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma^*\pi} \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \sqrt{\frac{2}{3}}(\mu_u - \mu_d) \right) \right] \tag{4.20}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mu_S(\Sigma^{*0}) &= \left\langle \Psi_{\Sigma^{*0}}, \frac{3}{2} \left| \mu_z(\mathbf{S}) \right| \Psi_{\Sigma^{*0}}, \frac{3}{2} \right\rangle \\
 &= \mathcal{N}_{\Sigma^*}^2 \left[ \mu_u + \mu_d + \mu_s + a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma\pi}^2 \left( \frac{1}{2} \frac{4\mu_u - \mu_s}{3} + \frac{1}{2} \frac{4\mu_d - \mu_s}{3} \right) \right. \\
 &\quad + b_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma^*\pi}^2 \left( \frac{3}{10}(2\mu_u + \mu_s) + \frac{2}{10} \frac{2\mu_u + \mu_s}{3} + \frac{3}{10}(2\mu_d + \mu_s) + \frac{2}{10} \frac{2\mu_d + \mu_s}{3} \right) \\
 &\quad \left. + a_{\Sigma^* \rightarrow \Lambda\pi}^2 \mu_s + \sqrt{\frac{2}{5}} a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma\pi} b_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma^*\pi} \left( -\frac{2\sqrt{2}}{3}(\mu_s - \mu_u) - \frac{2\sqrt{2}}{3}(\mu_s - \mu_d) \right) \right] \tag{4.21}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\mu_S(\Sigma^{*-}) &= \left\langle \Psi_{\Sigma^{*-}, \frac{3}{2}} \left| \mu_z(\mathbf{S}) \right| \Psi_{\Sigma^{*-}, \frac{3}{2}} \right\rangle \\
&= \mathcal{N}_{\Sigma^*}^2 \left[ 2\mu_d + \mu_s + a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma\pi}^2 \left( \frac{1}{2} \frac{2\mu_u + 2\mu_d - \mu_s}{3} + \frac{1}{2} \frac{4\mu_d - \mu_s}{3} \right) \right. \\
&+ b_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma^*\pi}^2 \left( \frac{3}{10}(\mu_u + \mu_d + \mu_s) + \frac{2}{10} \frac{\mu_u + \mu_d + \mu_s}{3} + \frac{3}{10}(2\mu_d + \mu_s) + \frac{2}{10} \frac{2\mu_d + \mu_s}{3} \right) \\
&+ a_{\Sigma^* \rightarrow \Lambda\pi}^2 \mu_s + 2a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma\pi} b_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma^*\pi} \left( \frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} \right) \left( \frac{2}{3\sqrt{2}}(2\mu_s - \mu_u - \mu_d) + \frac{2\sqrt{2}}{3}(\mu_s - \mu_d) \right) \\
&+ \left. 2a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma\pi} a_{\Sigma^* \rightarrow \Lambda\pi} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left( \frac{\mu_u - \mu_d}{\sqrt{3}} \right) + 2a_{\Sigma^* \rightarrow \Lambda\pi} b_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma^*\pi} \frac{-1}{\sqrt{5}} \left( \sqrt{\frac{2}{3}}(\mu_u - \mu_d) \right) \right] \\
&\tag{4.22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_S(\Xi^{*0}) &= \left\langle \Psi_{\Xi^{*0}, \frac{3}{2}} \left| \mu_z(\mathbf{S}) \right| \Psi_{\Xi^{*0}, \frac{3}{2}} \right\rangle \\
&= \mathcal{N}_{\Xi^*}^2 \left[ 2\mu_s + \mu_u + a_{\Xi^* \rightarrow \Xi\pi}^2 \left( \frac{1}{3} \frac{4\mu_s - \mu_u}{3} + \frac{2}{3} \frac{4\mu_s - \mu_d}{3} \right) \right. \\
&+ b_{\Xi^* \rightarrow \Xi^*\pi}^2 \left( \frac{1}{5}(2\mu_s + \mu_u) + \frac{2}{15} \frac{2\mu_s + \mu_u}{3} + \frac{2}{5}(2\mu_s + \mu_d) + \frac{4}{15} \frac{2\mu_s + \mu_d}{3} \right) \\
&+ \left. 2a_{\Xi^* \rightarrow \Xi\pi} b_{\Xi^* \rightarrow \Xi^*\pi} \sqrt{\frac{2}{5}} \left( -\frac{1}{3} \frac{2\sqrt{2}}{3}(\mu_s - \mu_u) - \frac{2}{3} \frac{2\sqrt{2}}{3}(\mu_s - \mu_d) \right) \right] \\
&\tag{4.23}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_S(\Xi^{*-}) &= \left\langle \Psi_{\Xi^{*-}, \frac{3}{2}} \left| \mu_z(\mathbf{S}) \right| \Psi_{\Xi^{*-}, \frac{3}{2}} \right\rangle \\
&= \mathcal{N}_{\Xi^*}^2 \left[ 2\mu_s + \mu_d + a_{\Xi^* \rightarrow \Xi\pi}^2 \left( \frac{2}{3} \frac{4\mu_s - \mu_u}{3} + \frac{1}{3} \frac{4\mu_s - \mu_d}{3} \right) \right. \\
&+ b_{\Xi^* \rightarrow \Xi^*\pi}^2 \left( \frac{2}{5}(2\mu_s + \mu_u) + \frac{4}{15} \frac{2\mu_s + \mu_u}{3} + \frac{1}{5}(2\mu_s + \mu_d) + \frac{2}{15} \frac{2\mu_s + \mu_d}{3} \right) \\
&+ \left. 2a_{\Xi^* \rightarrow \Xi\pi} b_{\Xi^* \rightarrow \Xi^*\pi} \sqrt{\frac{2}{5}} \left( -\frac{2}{3} \frac{2\sqrt{2}}{3}(\mu_s - \mu_u) - \frac{1}{3} \frac{2\sqrt{2}}{3}(\mu_s - \mu_d) \right) \right] \\
&\tag{4.24}
\end{aligned}$$

Puesto que en el caso de  $\Omega^-$  no se encuentran piones, sino los kaones pseudoescalares, sigue siendo aplicable lo anterior realizado para la obtención del momento magnético, el cuál queda

con las contribuciones barión-kaón como

$$\begin{aligned}
 \mu_S(\Omega^-) &= \left\langle \Psi_{\Omega^-, \frac{3}{2}} \left| \mu_z(\mathbf{S}) \right| \Psi_{\Omega^-, \frac{3}{2}} \right\rangle \\
 &= \mathcal{N}_\Omega^2 \left[ 3\mu_s + a_{\Omega \rightarrow \Xi K}^2 \left( \frac{1}{2} \frac{4\mu_s - \mu_d}{3} + \frac{1}{2} \frac{4\mu_s - \mu_u}{3} \right) \right. \\
 &\quad + b_{\Omega \rightarrow \Xi^* K}^2 \left( \frac{3}{10} (2\mu_s + \mu_d) + \frac{2}{10} \frac{2\mu_s + \mu_d}{3} + \frac{3}{10} (2\mu_s + \mu_u) + \frac{2}{10} \frac{2\mu_s + \mu_u}{3} \right) \\
 &\quad \left. + a_{\Omega \rightarrow \Xi K} b_{\Omega \rightarrow \Xi^* K} \sqrt{\frac{2}{5}} \left( -\frac{2\sqrt{2}}{3} (\mu_s - \mu_u) - \frac{2\sqrt{2}}{3} (\mu_s - \mu_d) \right) \right]
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

Una vez obtenidas las ecuaciones para los momentos magnéticos en este caso, puede calcularse el valor numérico, a partir de los valores para el momento magnético de los quarks como se dan en la tabla 4.1 y las amplitudes de probabilidad en 3.2. Estos resultados se muestran en la tabla 5.1.

### Contribuciones del momento angular orbital relativo

En esta parte se discutirá a fondo las contribución del momento angular relativo de los quarks del mar (los quarks de valencia se supone que forman el barión principal en el estado base) que forman el par barión-mesón. Para ello analizaremos la naturaleza del operador del momento magnético debido al momento angular. Por la ecuación 4.10 tenemos que este operador sólo depende de la proyección de momento angular de la función de onda a la que se aplique. Sin embargo, debido a que las funciones de onda de los bariones se construyeron en un sistema de coordenadas de Jacobi (véanse 1.4 y 1.5), este operador debe de expresarse también en estas coordenadas. Para ello supondremos que a cada quark constituyente del barión (incluidos los antiquarks) le corresponde la  $i$ -ésima coordenada espacial  $\vec{r}_i$ , de esta manera introduciendo las coordenadas de Jacobi tenemos

$$\left. \begin{aligned}
 \vec{\rho} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \\
 \vec{\lambda} &= \frac{1}{\sqrt{6}}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 - 2\vec{r}_3) \\
 \vec{R}_B &= \frac{1}{3}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3)
 \end{aligned} \right\} \begin{aligned}
 \vec{r}_1 &= \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{\lambda} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\rho} + \vec{R}_B \\
 \vec{r}_2 &= \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{\lambda} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\rho} + \vec{R}_B \\
 \vec{r}_3 &= \vec{R}_B - \frac{\sqrt{6}}{3}\vec{\lambda}
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \vec{r}_C &= \vec{r}_4 - \vec{r}_5 \\
 \vec{R}_C &= \frac{1}{2}(\vec{r}_4 + \vec{r}_5)
 \end{aligned} \right\} \begin{aligned}
 \vec{r}_4 &= \vec{R}_C + \frac{1}{2}\vec{r}_C \\
 \vec{r}_5 &= \vec{R}_C - \frac{1}{2}\vec{r}_C
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

con las coordenadas  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$  correspondientes a los quarks del barión ( $qqq$ ),  $\vec{r}_4$  y  $\vec{r}_5$  se refieren a los quarks del mesón ( $q\bar{q}$ ) y donde las coordenadas  $\vec{r}_C$  y  $\vec{R}_C$  corresponden a las coordenadas espaciales relativas entre los quarks del mesón,  $C$ .

Hay otra transformación de coordenadas hacia las coordenadas del centro de masa entre el barión,  $B$ , y el mesón  $C$ ,  $\vec{R}$ , y el vector relativo entre el barión y el mesón,  $\vec{r}$ , la cuál queda

como sigue

$$\left. \begin{aligned} \vec{r} &= \vec{R}_B - \vec{R}_C \\ \vec{R} &= \frac{m_B \vec{R}_B + m_C \vec{R}_C}{m_B + m_C} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \vec{R}_B &= \vec{R} + \frac{m_C}{m_B + m_C} \vec{r} \\ \vec{R}_C &= \vec{R} - \frac{m_B}{m_B + m_C} \vec{r} \end{aligned} \quad (4.28)$$

entonces, las coordenadas quedan transformadas en términos de las coordenadas de Jacobi y del centro de masa como

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \frac{1}{\sqrt{6}} \vec{\lambda} + \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{\rho} + \vec{R} + \frac{m_C}{m_B + m_C} \vec{r} \\ \vec{r}_2 &= \frac{1}{\sqrt{6}} \vec{\lambda} - \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{\rho} + \vec{R} + \frac{m_C}{m_B + m_C} \vec{r} \\ \vec{r}_3 &= \vec{R} + \frac{m_C}{m_B + m_C} \vec{r} - \frac{\sqrt{6}}{3} \vec{\lambda} \\ \vec{r}_4 &= \vec{R} - \frac{m_B}{m_B + m_C} \vec{r} + \frac{1}{2} \vec{r}_C \\ \vec{r}_5 &= \vec{R} - \frac{m_B}{m_B + m_C} \vec{r} - \frac{1}{2} \vec{r}_C \end{aligned} \quad (4.29)$$

Puede así también expresarse esta transformación de coordenadas en notación tensorial, utilizando la convención de suma de Einstein, así

$$\vec{r}_i = \sum_{k=1}^5 T_i^k \vec{\alpha}_k = T_i^k \vec{\alpha}_k \quad (4.30)$$

con  $T_i^k$  el tensor de transformación de coordenadas,  $\vec{\alpha}_k$  la  $k$ -ésima coordenada de Jacobi, y debido a que toda transformación lineal de coordenadas se puede expresar como  $T_i^k = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \vec{\alpha}_k}$ , se tiene que la transformación a las coordenadas de Jacobi se expresa simplemente como sigue

$$\vec{r}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \vec{\alpha}_k} \vec{\alpha}_k \quad (4.31)$$

donde de la regla de correspondencia de la ecuación 4.29 tenemos que las coordenadas correspondientes son  $\vec{\alpha}_1 = \vec{\lambda}$ ,  $\vec{\alpha}_2 = \vec{\rho}$ ,  $\vec{\alpha}_3 = \vec{R}$ ,  $\vec{\alpha}_4 = \vec{r}_C$  y  $\vec{\alpha}_5 = \vec{r}$  para la regla de transformación de la ecuación anterior. Similarmente puede obtenerse una regla de transformación de coordenadas para el operador de momento como

$$\vec{p}_i = i\hbar \frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} = i\hbar \sum_{j=1}^5 \frac{\partial \vec{\alpha}_j}{\partial \vec{r}_i} \frac{\partial}{\partial \vec{\alpha}_j} = i \frac{\partial \vec{\alpha}_j}{\partial \vec{r}_i} \frac{\partial}{\partial \vec{\alpha}_j} \quad (4.32)$$

así la ecuación para la transformación de coordenadas del momento es

$$\vec{p}_i = \frac{\partial \vec{\alpha}_j}{\partial \vec{r}_i} \vec{p}_{\alpha_j} \quad (4.33)$$

con  $\vec{p}_{\alpha_j} = i \frac{\partial}{\partial \vec{\alpha}_j}$  el momento en las coordenadas de Jacobi. De esta forma podemos obtener una expresión para el momento magnético debido al momento angular relativo en términos de las coordenadas de Jacobi, utilizando a las coordenadas  $\vec{\alpha}_k$  y los momentos  $\vec{p}_{\alpha_j}$  a partir de la definición del momento angular como

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^5 \mu_i \vec{l}_i &= \sum_{i=1}^5 \mu_i (\vec{r}_i \times \vec{p}_i) \\
 &= \sum_{i=1}^5 \mu_i \left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \vec{\alpha}_k} \vec{\alpha}_k \times \frac{\partial \vec{\alpha}_j}{\partial \vec{r}_i} \vec{p}_{\alpha_j} \right) \\
 &= \sum_{i=1}^5 \mu_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \vec{\alpha}_k} \frac{\partial \vec{\alpha}_j}{\partial \vec{r}_i} (\vec{\alpha}_k \times \vec{p}_{\alpha_j}) \\
 &= B_j^k (\vec{\alpha}_k \times \vec{p}_{\alpha_j})
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

de donde el tensor  $B_j^k$  es el tensor de transformación de coordenadas para el momento magnético angular y es simplemente el producto como

$$B_j^k = \sum_{i=1}^5 \mu_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \vec{\alpha}_k} \frac{\partial \vec{\alpha}_j}{\partial \vec{r}_i} = \left( \frac{\partial \vec{\alpha}_j}{\partial \vec{r}_i} \right) (\mu_i) \left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \vec{\alpha}_k} \right) \tag{4.35}$$

donde las correspondientes representaciones matriciales de las transformaciones de coordenadas son

$$\left( \frac{\partial \vec{\alpha}_j}{\partial \vec{r}_i} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{m_B}{3M} & \frac{m_B}{3M} & \frac{m_B}{3M} & \frac{m_C}{2M} & \frac{m_C}{2M} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \tag{4.36}$$

$$\left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \vec{\alpha}_k} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 & \frac{m_C}{M} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 & \frac{m_C}{M} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & 1 & 0 & \frac{m_C}{M} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{m_B}{M} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{m_B}{M} \end{pmatrix} \tag{4.37}$$

y

$$(\mu_i) = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_5 \end{pmatrix} \tag{4.38}$$

con  $M = M_B + M_C$ . Así entonces, el producto queda como

$$(B_j^k) = \begin{pmatrix} \frac{\mu_1}{6} + \frac{\mu_2}{6} + \frac{2}{3}\mu_3 & \frac{\mu_1 - \mu_2}{2\sqrt{3}} & \frac{\mu_1 + \mu_2 - 2\mu_3}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{m_C}{\sqrt{6}M}(\mu_1 + \mu_2 - 2\mu_3) \\ \frac{\mu_1 - \mu_2}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2) & \frac{1}{\sqrt{2}}(\mu_1 - \mu_2) & 0 & \frac{m_C}{\sqrt{2}M}(\mu_1 - \mu_2) \\ \frac{m_B}{3M} \left( \frac{\mu_1 - \mu_2}{\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{6}}{3}\mu_3 \right) & \frac{m_B}{3\sqrt{2}(\mu_1 - \mu_2)} & \frac{m_B(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)}{3M} + \frac{m_C(\mu_4 + \mu_5)}{2M} & \frac{m_C}{4M}(\mu_4 - \mu_5) & \frac{m_B m_C}{M^2} \left( \frac{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3}{3} - \frac{\mu_4 + \mu_5}{2} \right) \\ 0 & 0 & \mu_4 - \mu_5 & \frac{\mu_4 + \mu_5}{2} & -\frac{m_B}{M}(\mu_4 - \mu_5) \\ \frac{\mu_1 + \mu_2}{3\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{6}}{9}\mu_3 & \frac{1}{3\sqrt{2}}(\mu_1 - \mu_2) & \frac{(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)}{3} - \frac{(\mu_4 + \mu_5)}{2} & -\frac{1}{2}(\mu_4 - \mu_5) & \frac{m_C(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)}{3M} + \frac{m_B(\mu_4 + \mu_5)}{2M} \end{pmatrix} \quad (4.39)$$

Una vez calculado explícitamente este tensor de transformación, entonces tenemos que la expresión para el operador de momento magnético angular, por la ecuación 4.34, queda transformado a las coordenadas de Jacobi como

$$\begin{aligned} \sum_i \mu_i \vec{l}_i &= B_j^k (\vec{\alpha}_k \times \vec{p}_{\alpha_j}) \\ &= \sum_{kj} B_{jk} (\vec{\alpha}_k \times \vec{p}_{\alpha_j}) \\ &= B_{11}(\vec{\alpha}_1 \times \vec{p}_{\alpha_1}) + B_{12}(\vec{\alpha}_2 \times \vec{p}_{\alpha_1}) + \dots + B_{55}(\vec{\alpha}_5 \times \vec{p}_{\alpha_5}) \\ &= B_{11}(\vec{\lambda} \times \vec{p}_\lambda) + B_{12}(\vec{\rho} \times \vec{p}_\lambda) + B_{13}(\vec{R} \times \vec{p}_\lambda) + B_{14}(\vec{r}_C \times \vec{p}_\lambda) + B_{15}(\vec{r} \times \vec{p}_\lambda) \\ &+ B_{21}(\vec{\lambda} \times \vec{p}_\rho) + B_{22}(\vec{\rho} \times \vec{p}_\rho) + B_{23}(\vec{R} \times \vec{p}_\rho) + B_{24}(\vec{r}_C \times \vec{p}_\rho) + B_{25}(\vec{r} \times \vec{p}_\rho) \\ &+ B_{31}(\vec{\lambda} \times \vec{p}_R) + B_{32}(\vec{\rho} \times \vec{p}_R) + B_{33}(\vec{R} \times \vec{p}_R) + B_{34}(\vec{r}_C \times \vec{p}_R) + B_{35}(\vec{r} \times \vec{p}_R) \\ &+ B_{41}(\vec{\lambda} \times \vec{p}_{r_C}) + B_{42}(\vec{\rho} \times \vec{p}_{r_C}) + B_{43}(\vec{R} \times \vec{p}_{r_C}) + B_{44}(\vec{r}_C \times \vec{p}_{r_C}) + B_{45}(\vec{r} \times \vec{p}_{r_C}) \\ &+ B_{51}(\vec{\lambda} \times \vec{p}_r) + B_{52}(\vec{\rho} \times \vec{p}_r) + B_{53}(\vec{R} \times \vec{p}_r) + B_{54}(\vec{r}_C \times \vec{p}_r) + B_{55}(\vec{r} \times \vec{p}_r). \end{aligned} \quad (4.40)$$

Aquí todos los términos relacionados con el momento angular debido a las coordenadas asociadas a las coordenadas de Jacobi para los quarks, así como para las coordenadas para la nube mesónica  $r_C$  y  $r$  y las relativas entre ellas pueden despreciarse (citar tesis correspondiente). Con lo que únicamente queda el término más significativo el cual corresponde al término de posición relativa entre el barión y el mesón ( $\vec{r} \times \vec{p}_r$ ). Así entonces el momento magnético debido al momento angular relativo del sistema barión-mesón es

$$\begin{aligned} \sum_i \mu_i \vec{l}_i &= B_{55}(\vec{r} \times \vec{p}_r) \\ &= \left( \frac{m_C}{3M}(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) + \frac{m_B}{2M}(\mu_4 + \mu_5) \right) (\vec{r} \times \vec{p}_r) \end{aligned} \quad (4.41)$$

El paso siguiente es ahora utilizar este operador para obtener el momento magnético de los bariones del decuplete en el UQM debido al momento angular relativo. En la funciones de onda

de espín-sabor correspondientes 3.16-3.25 podemos observar que los únicos estados que tienen valores para  $l$  distintos de cero son los estados intermedios barión-mesón, pues se supuso que el barión correspondiente a los quarks de valencia no presenta excitaciones orbitales, por ello serán los únicos que contribuirán en este caso. De forma clara tenemos que para un estado como en 3.1

$$\begin{aligned}
 \mu_l(B_{10}) &= \mathcal{N}_{B_{10}}^2 \left[ a_{B_{10} \rightarrow B_8 \pi}^2 \langle B_8 \pi | \vec{\mu}_l | B_8 \pi \rangle + b_{B_{10} \rightarrow B_{10} \pi}^2 \langle B'_{10} \pi' | \vec{\mu}_l | B'_{10} \pi' \rangle \right] \\
 &= \mathcal{N}_{B_{10}}^2 \left[ a_{B_{10} \rightarrow B_8 \pi}^2 \left( \frac{m_\pi}{3(m_{B_8} + m_\pi)} (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) + \frac{m_{B_8}}{3(m_{B_8} + m_\pi)} (\mu_4 + \mu_5) \right) \right. \\
 &\quad \left. + b_{B_{10} \rightarrow B_{10} \pi}^2 \left( \frac{m_{\pi'}}{3(m_{B'_{10}} + m_{\pi'})} (\mu'_1 + \mu'_2 + \mu'_3) + \frac{m_{B'_{10}}}{3(m_{B'_{10}} + m_{\pi'})} (\mu'_4 + \mu'_5) \right) \right] \quad (4.42)
 \end{aligned}$$

Hecho este ejemplo en general, tenemos que para las funciones de onda del decuplete en el UQM, es bastante fácil realizar este cálculo, tomando únicamente los elementos de matriz que corresponden a los estados intermedios que tienen proyección de momento angular relativo  $m_l \neq 0$  que son los estado cuyos valores propios son distintos de cero y el elemento de matriz no se anula. Como ejemplo tomaremos el caso de  $\Delta^{++}$  como sigue

$$\begin{aligned}
 \mu_l(\Delta^{++}) &= \left\langle \Psi_{\Delta^{++}, \frac{3}{2}} \left| \mu_z(\mathbf{l}) \right| \Psi_{\Delta^{++}, \frac{3}{2}} \right\rangle \\
 &= \mathcal{N}_\Delta^2 \left[ a_{\Delta \rightarrow N \pi}^2 \langle p \pi^+, l=1, m_l=1 | \mu_z(\mathbf{l}) | p \pi^+, l=1, m_l=1 \rangle \right. \\
 &\quad + b_{\Delta \rightarrow \Delta \pi}^2 \left( \frac{6}{25} \langle \Delta^{++} \pi^0, l=1, m_l=1 | \mu_z(\mathbf{l}) | \Delta^{++} \pi^0, l=1, m_l=1 \rangle \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{4}{25} \langle \Delta^+ \pi^+, l=1, m_l=1 | \mu_z(\mathbf{l}) | \Delta^+ \pi^+, l=1, m_l=1 \rangle \right) \right]. \quad (4.43)
 \end{aligned}$$

De esta manera tenemos al resolver los valores esperados de esta última ecuación, tenemos

sencillamente que el momento magnético debido al momento angular esta dado por

$$\begin{aligned}
\mu_l(\Delta^{++}) &= \left\langle \Psi_{\Delta^{++}}, \frac{3}{2} \left| \mu_z(\mathbf{l}) \right| \Psi_{\Delta^{++}}, \frac{3}{2} \right\rangle \\
&= \mathcal{N}_{\Delta^*}^2 \left[ a_{\Delta \rightarrow N\pi}^2 \left( \frac{m_{\pi^+}}{3(m_p + m_{\pi^+})} (2\mu_u + \mu_d) + \frac{m_p}{2(m_p + m_{\pi^+})} (\mu_u - \mu_d) \right) \right. \\
&\quad + b_{\Delta \rightarrow \Delta\pi}^2 \left( \frac{6}{25} \left[ \frac{m_{\pi^0}}{3(m_{\Delta^{++}} + m_{\pi^0})} (3\mu_u) \right] + \frac{4}{25} \left[ \frac{m_{\pi^+}}{3(m_{\Delta^+} + m_{\pi^+})} (2\mu_u + \mu_d) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{m_{\Delta^+}}{2(m_{\Delta^+} + m_{\pi^+})} (\mu_u - \mu_d) \right] \right) \right].
\end{aligned} \tag{4.44}$$

La diferencia que existe en este caso con el momento magnético debido al espín es que ahora tenemos una dependencia de las masas de los bariones y los mesones. Ahora para el resto de los bariones del octete se procede de forma totalmente análoga al caso de  $\Delta^{++}$  obteniendo las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}
\mu_l(\Delta^+) &= \left\langle \Psi_{\Delta^+}, \frac{3}{2} \left| \mu_z(\mathbf{l}) \right| \Psi_{\Delta^+}, \frac{3}{2} \right\rangle \\
&= \mathcal{N}_{\Delta^*}^2 \left[ a_{\Delta \rightarrow N\pi}^2 \left( \frac{1}{3} \left[ \frac{m_{\pi^+}}{3(m_n + m_{\pi^+})} (2\mu_d + \mu_u) + \frac{m_n}{2(m_n + m_{\pi^+})} (\mu_u - \mu_d) \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{2}{3} \left[ \frac{m_{\pi^0}}{3(m_p + m_{\pi^0})} (2\mu_u + \mu_d) \right] \right) + b_{\Delta \rightarrow \Delta\pi}^2 \left( \frac{2}{75} \left[ \frac{m_{\pi^0}}{3(m_{\Delta^+} + m_{\pi^0})} (2\mu_u - \mu_d) \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{16}{75} \left[ \frac{m_{\pi^+}}{3(m_{\Delta^0} + m_{\pi^+})} (2\mu_d + \mu_u) + \frac{m_{\pi^+}}{2(m_{\Delta^0} + m_{\pi^+})} (\mu_u - \mu_d) \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{4}{25} \left[ \frac{m_{\pi^-}}{3(m_{\Delta^{++}} + m_{\pi^-})} (3\mu_u) + \frac{m_{\Delta^{++}}}{2(m_{\Delta^{++}} + m_{\pi^-})} (\mu_d - \mu_u) \right] \right) \right),
\end{aligned} \tag{4.45}$$

$$\begin{aligned}
 \mu_l(\Delta^0) &= \left\langle \Psi_{\Delta^0}, \frac{3}{2} \left| \mu_z(\mathbf{l}) \right| \Psi_{\Delta^0}, \frac{3}{2} \right\rangle \\
 &= \mathcal{N}_{\Delta^*}^2 \left[ a_{\Delta^0 \rightarrow N\pi}^2 \left( \frac{1}{3} \left[ \frac{m_{\pi^-}}{3(m_p + m_{\pi^-})} (2\mu_u + \mu_d) + \frac{m_p}{2(m_p + m_{\pi^-})} (\mu_d - \mu_u) \right] \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{2}{3} \left[ \frac{m_{\pi^0}}{3(m_n + m_{\pi^0})} (2\mu_d + \mu_u) \right] \right) + b_{\Delta^0 \rightarrow \Delta\pi}^2 \left( \frac{2}{75} \left[ \frac{m_{\pi^0}}{3(m_{\Delta^0} + m_{\pi^0})} (2\mu_d + \mu_u) \right] \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{16}{75} \left[ \frac{m_{\pi^-}}{3(m_{\Delta^+} + m_{\pi^-})} (2\mu_u + \mu_d) + \frac{m_{\Delta^+}}{2(m_{\Delta^+} + m_{\pi^-})} (\mu_d - \mu_u) \right] \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{4}{25} \left[ \frac{m_{\pi^+}}{3(m_{\Delta^-} + m_{\pi^+})} (3\mu_d) + \frac{m_{\Delta^-}}{2(m_{\Delta^-} + m_{\pi^+})} (\mu_u - \mu_d) \right] \right) \right], \tag{4.46}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mu_l(\Delta^-) &= \left\langle \Psi_{\Delta^-}, \frac{3}{2} \left| \mu_z(\mathbf{l}) \right| \Psi_{\Delta^-}, \frac{3}{2} \right\rangle \\
 &= \mathcal{N}_{\Delta^*}^2 \left[ a_{\Delta^- \rightarrow N\pi}^2 \left( \frac{m_{\pi^-}}{3(m_n + m_{\pi^-})} (2\mu_d + \mu_u) + \frac{m_n}{2(m_n + m_{\pi^-})} (\mu_d - \mu_u) \right) \right. \\
 &\quad \left. + b_{\Delta^- \rightarrow \Delta\pi}^2 \left( \frac{6}{25} \left[ \frac{m_{\pi^0}}{3(m_{\Delta^-} + m_{\pi^0})} (3\mu_d) \right] + \frac{4}{25} \left[ \frac{m_{\pi^-}}{3(m_{\Delta^0} + m_{\pi^-})} (2\mu_d + \mu_u) \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. + \frac{m_{\Delta^0}}{2(m_{\Delta^0} + m_{\pi^-})} (\mu_d - \mu_u) \right] \right) \right], \tag{4.47}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mu_l(\Sigma^{*+}) &= \left\langle \Psi_{\Sigma^{*+}}, \frac{3}{2} \left| \mu_z(\mathbf{l}) \right| \Psi_{\Sigma^{*+}}, \frac{3}{2} \right\rangle \\
 &= \mathcal{N}_{\Sigma^*}^2 \left[ a_{\Sigma^{*+} \rightarrow \Sigma\pi}^2 \left( \frac{1}{2} \left[ \frac{m_{\pi^+}}{3(m_{\Sigma^0} + m_{\pi^+})} (\mu_u + \mu_d + \mu_s) + \frac{m_{\Sigma^0}}{2(m_{\Sigma^0} + m_{\pi^+})} (\mu_u - \mu_d) \right] \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \left[ \frac{m_{\pi^0}}{3(m_{\Sigma^+} + m_{\pi^0})} (2\mu_u + \mu_s) \right] \right) + b_{\Sigma^{*+} \rightarrow \Sigma^*\pi}^2 \left( \frac{1}{5} \left[ \frac{m_{\pi^0}}{3(m_{\Sigma^{*+}} + m_{\pi^0})} (2\mu_u + \mu_s) \right] \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{5} \left[ \frac{m_{\pi^+}}{3(m_{\Sigma^{*0}} + m_{\pi^+})} (\mu_u + \mu_d + \mu_s) + \frac{m_{\Sigma^{*0}}}{2(m_{\Sigma^{*0}} + m_{\pi^+})} (\mu_u - \mu_d) \right] \right) \right) \\
 &\quad \left. + a_{\Sigma^{*+} \rightarrow \Lambda\pi}^2 \left( \frac{m_{\pi^+}}{3(m_{\Lambda^0} + m_{\pi^+})} (\mu_u + \mu_d + \mu_s) + \frac{m_{\Lambda^0}}{2(m_{\Lambda^0} + m_{\pi^+})} (\mu_u - \mu_d) \right) \right], \tag{4.48}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\mu_l(\Sigma^{*0}) &= \left\langle \Psi_{\Sigma^{*0}}, \frac{3}{2} \left| \mu_z(\mathbf{l}) \right| \Psi_{\Sigma^{*0}}, \frac{3}{2} \right\rangle \\
&= \mathcal{N}_{\Sigma^*}^2 \left[ a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma\pi}^2 \left( \frac{1}{2} \left[ \frac{m_{\pi^-}}{3(m_{\Sigma^+} + m_{\pi^-})} (2\mu_u + \mu_s) + \frac{m_{\Sigma^+}}{2(m_{\Sigma^+} + m_{\pi^-})} (\mu_d - \mu_u) \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \left[ \frac{m_{\pi^+}}{3(m_{\Sigma^-} + m_{\pi^+})} (2\mu_d + \mu_s) + \frac{m_{\Sigma^-}}{2(m_{\Sigma^-} + m_{\pi^+})} (\mu_u - \mu_d) \right] \right) \right. \\
&\quad \left. + b_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma^*\pi}^2 \left( \frac{1}{5} \left[ \frac{m_{\pi^-}}{3(m_{\Sigma^{*+}} + m_{\pi^-})} (2\mu_u + \mu_s) + \frac{m_{\Sigma^{*+}}}{2(m_{\Sigma^{*+}} + m_{\pi^-})} (\mu_d - \mu_u) \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{5} \left[ \frac{m_{\pi^+}}{3(m_{\Sigma^{*-}} + m_{\pi^+})} (2\mu_d + \mu_s) + \frac{m_{\Sigma^{*-}}}{2(m_{\Sigma^{*-}} + m_{\pi^+})} (\mu_u - \mu_d) \right] \right) \right. \\
&\quad \left. + a_{\Sigma^* \rightarrow \Lambda\pi}^2 \left( \frac{m_{\pi^0}}{3(m_{\Lambda^0} + m_{\pi^0})} (\mu_u + \mu_d + \mu_s) \right) \right], \tag{4.49}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_l(\Sigma^{*-}) &= \left\langle \Psi_{\Sigma^{*-}}, \frac{3}{2} \left| \mu_z(\mathbf{l}) \right| \Psi_{\Sigma^{*-}}, \frac{3}{2} \right\rangle \\
&= \mathcal{N}_{\Sigma^*}^2 \left[ a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma\pi}^2 \left( \frac{1}{2} \left[ \frac{m_{\pi^-}}{3(m_{\Sigma^0} + m_{\pi^-})} (\mu_u + \mu_d + \mu_s) + \frac{m_{\Sigma^0}}{2(m_{\Sigma^0} + m_{\pi^-})} (\mu_d - \mu_u) \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \left[ \frac{m_{\pi^0}}{3(m_{\Sigma^-} + m_{\pi^0})} (2\mu_d + \mu_s) \right] \right) + b_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma^*\pi}^2 \left( \frac{1}{5} \left[ \frac{m_{\pi^0}}{3(m_{\Sigma^{*-}} + m_{\pi^0})} (2\mu_d + \mu_s) \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{5} \left[ \frac{m_{\pi^-}}{3(m_{\Sigma^{*0}} + m_{\pi^-})} (\mu_u + \mu_d + \mu_s) + \frac{m_{\Sigma^{*0}}}{2(m_{\Sigma^{*0}} + m_{\pi^-})} (\mu_d - \mu_u) \right] \right) \right. \\
&\quad \left. + a_{\Sigma^* \rightarrow \Lambda\pi}^2 \left( \frac{m_{\pi^-}}{3(m_{\Lambda^0} + m_{\pi^-})} (\mu_u + \mu_d + \mu_s) + \frac{m_{\Lambda^0}}{2(m_{\Lambda^0} + m_{\pi^-})} (\mu_d - \mu_u) \right) \right], \tag{4.50}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mu_l(\Xi^{*0}) &= \left\langle \Psi_{\Xi^{*0}, \frac{3}{2}} \left| \mu_z(\mathbf{l}) \right| \Psi_{\Xi^{*0}, \frac{3}{2}} \right\rangle \\
 &= \mathcal{N}_{\Xi^*}^2 \left[ a_{\Xi^* \rightarrow \Xi \pi}^2 \left( \frac{2}{3} \left[ \frac{m_{\pi^+}}{3(m_{\Xi^-} + m_{\pi^+})} (2\mu_s + \mu_d) + \frac{m_{\Xi^-}}{2(m_{\Xi^-} + m_{\pi^+})} (\mu_u - \mu_d) \right] \right. \right. \\
 &+ \left. \frac{1}{3} \left[ \frac{m_{\pi^0}}{3(m_{\Xi^0} + m_{\pi^0})} (2\mu_s + \mu_u) \right] \right) + b_{\Xi^* \rightarrow \Xi^* \pi}^2 \left( \frac{2}{15} \left[ \frac{m_{\pi^0}}{3(m_{\Xi^{*0}} + m_{\pi^0})} (2\mu_s + \mu_u) \right] \right. \\
 &+ \left. \left. \frac{4}{15} \left[ \frac{m_{\pi^+}}{3(m_{\Xi^{*-}} + m_{\pi^+})} (2\mu_s + \mu_d) + \frac{m_{\Xi^{*-}}}{2(m_{\Xi^{*-}} + m_{\pi^+})} (\mu_u - \mu_d) \right] \right) \right], \tag{4.51}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mu_l(\Xi^{*-}) &= \left\langle \Psi_{\Xi^{*-}, \frac{3}{2}} \left| \mu_z(\mathbf{l}) \right| \Psi_{\Xi^{*-}, \frac{3}{2}} \right\rangle \\
 &= \mathcal{N}_{\Xi^*}^2 \left[ a_{\Xi^* \rightarrow \Xi \pi}^2 \left( \frac{2}{3} \left[ \frac{m_{\pi^-}}{3(m_{\Xi^0} + m_{\pi^-})} (2\mu_s + \mu_u) + \frac{m_{\Xi^0}}{2(m_{\Xi^0} + m_{\pi^-})} (\mu_d - \mu_u) \right] \right. \right. \\
 &+ \left. \frac{1}{3} \left[ \frac{m_{\pi^0}}{3(m_{\Xi^-} + m_{\pi^0})} (2\mu_s + \mu_d) \right] \right) + b_{\Xi^* \rightarrow \Xi^* \pi}^2 \left( \frac{2}{15} \left[ \frac{m_{\pi^0}}{3(m_{\Xi^{*-}} + m_{\pi^0})} (2\mu_s + \mu_d) \right] \right. \\
 &+ \left. \left. \frac{4}{15} \left[ \frac{m_{\pi^-}}{3(m_{\Xi^{*0}} + m_{\pi^-})} (2\mu_s + \mu_u) + \frac{m_{\Xi^{*0}}}{2(m_{\Xi^{*0}} + m_{\pi^-})} (\mu_d - \mu_u) \right] \right) \right], \tag{4.52}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mu_l(\Omega^-) &= \left\langle \Psi_{\Omega^-, \frac{3}{2}} \left| \mu_z(\mathbf{l}) \right| \Psi_{\Omega^-, \frac{3}{2}} \right\rangle \\
 &= \mathcal{N}_{\Omega}^2 \left[ a_{\Omega \rightarrow \Xi K}^2 \left( \frac{1}{2} \left[ \frac{m_{K^0}}{3(m_{\Xi^-} + m_{K^0})} (2\mu_s + \mu_d) + \frac{m_{\Xi^-}}{2(m_{\Xi^-} + m_{K^0})} (\mu_s - \mu_d) \right] \right. \right. \\
 &+ \left. \frac{1}{2} \left[ \frac{m_{K^-}}{3(m_{\Xi^0} + m_{K^-})} (2\mu_s + \mu_u) + \frac{m_{\Xi^0}}{2(m_{\Xi^0} + m_{K^-})} (\mu_s - \mu_u) \right] \right) \\
 &+ b_{\Omega \rightarrow \Xi^* K}^2 \left( \frac{1}{5} \left[ \frac{m_{K^0}}{3(m_{\Xi^{*-}} + m_{K^0})} (2\mu_s + \mu_d) + \frac{m_{\Xi^{*-}}}{2(m_{\Xi^{*-}} + m_{K^0})} (\mu_s - \mu_d) \right] \right. \\
 &+ \left. \left. \frac{1}{5} \left[ \frac{m_{K^-}}{3(m_{\Xi^{*0}} + m_{K^-})} (2\mu_s + \mu_u) + \frac{m_{\Xi^{*0}}}{2(m_{\Xi^{*0}} + m_{K^-})} (\mu_s - \mu_u) \right] \right) \right]. \tag{4.53}
 \end{aligned}$$

Como se hizo antes para la parte de espín, en este punto es posible obtener los valores numéricos para estos momentos magnéticos, sustituyendo los valores para las amplitudes de

probabilidad correspondientes, así como los valores para los momentos magnéticos de los quarks, sin embargo se supone aquí la simetría de isoespín, es decir, se considera que las masas de los quarks  $u$  y  $d$  son iguales, teniendo de esta forma que los valores para las masas de cada multiplete de isoespín son las mismas ( $m_N = m_p = m_n$ ,  $m_\Sigma = m_{\Sigma^+} = m_{\Sigma^0} = m_{\Sigma^-}$ , ...). Los valores de las masas se toman como el promedio de las últimas reportadas [32]. Por último los cálculos obtenidos para los momentos magnéticos se muestran en la tabla 5.1.

## Capítulo 5

# Resultados

Los resultados que se han obtenido hasta ahora sobre los momentos magnéticos de los bariones del decuplete en el UQM se han obtenido de forma separada de acuerdo a la contribución de espín debida a los quarks de valencia como también a los quarks del mar en los estados intermedios barión-mesón; la contribución por el momento orbital angular generada por el acoplamiento de estos estados intermedios de los quarks del mar ha contribuido únicamente en este caso en que se supone que el barón principal está en el estado base y que todos los momentos angulares relativos entre los quarks del mar se suponen despreciables excepto la contribución relativa antes mencionada.

Los resultados para estos valores encontrados se dan en la tabla 5.1. Cabe mencionar que para obtener estos valores se han obtenido otros resultados básicos como lo son los coeficientes para la amplitud de probabilidad  ${}^3P_0$  que se dan en la tabla 3.2, para los cuáles no se han encontrado resultados alternos con los cuáles se pueda comparar estos valores.

En cuanto a los valores de la tabla 5.1 puede observarse que el decuplete de bariones en el UQM la contribución del momento angular relativo (únicamente los quarks del mar) es de cerca del 10% y cerca del 50% para los barión  $\Xi^{*-}$  del momento magnético total, mientras que la contribuciones. Las contribuciones de espín, tanto del barión inicial como de los estados intermedios barión mesón, resultan tener la mayor parte de la contribución al momento magnético total. Si se hacen los cálculos por separado para la parte de espín de los quarks de valencia y los quark del mar(barión-mesón), como se muestra en la tabla 5.1, puede verse que la contribución de espín al momento magnético por los quarks de valencia es tan importante como la contribución debida a los quarks del mar, lo que da indicios de la importancia de los estados intermedios en el UQM para los momentos magnéticos, volviéndose las contribuciones de estos en más de la mitad al momento magnético.

Con el fin de hacer una comparación de los resultados obtenidos, se hace referencia primeramente a los resultados dados por el QM en el momento magnético de los bariones, véase 4.1. Es sabido que el modelo de quarks ha sido muy exitoso en la predicción que da a los momentos magnéticos de los bariones del octete y los resultados experimentales (tabla 4.2), sin embargo para el decuplete de bariones aún no existen valores experimentales para todos ellos como punto de comparación, tanto para el mismo QM como para el UQM. Por consiguiente puede

Barión	$\mu(\vec{s})$ val ( $\mu_N$ )	$\mu(\vec{s})$ mar ( $\mu_N$ )	$\mu(\vec{s})$ ( $\mu_N$ )	$\mu(\vec{l})$ ( $\mu_N$ )	$\mu(\vec{s}, \vec{l})$ ( $\mu_N$ )
$\Delta^{++}$	2.954	2.022	4.977	0.334	5.312
$\Delta^+$	1.453	0.907	2.361	0.122	2.483
$\Delta^0$	-0.049	-0.207	-0.256	-0.090	-0.346
$\Delta^-$	-1.551	-1.322	-2.873	-0.303	-3.175
$\Sigma^{*+}$	1.911	0.615	2.526	0.264	2.789
$\Sigma^{*0}$	0.165	-0.1310	0.034	0.003	0.037
$\Sigma^{*-}$	-1.580	-0.877	-2.458	-0.259	-2.716
$\Xi^{*0}$	0.473	-0.291	0.182	0.159	0.340
$\Xi^{*-}$	-1.661	-0.422	-2.083	-0.168	-2.251
$\Omega^-$	-0.929	-0.755	-1.6848	-0.173	-1.858

Tabla 5.1: Resultados de los momentos magnéticos de los bariones del decuplete en el UQM para la contribución del espín,  $\mu(\vec{s})$ , del momento angular relativo,  $\mu(\vec{l})$  y el total,  $\mu(\vec{s}, \vec{l})$ .

hacerse una comparación de los momentos magnéticos del decuplete en el UQM con los mismos resultados en el QM. Para ello pueden verse los datos en la tabla 5.2, donde se presentan los resultados en ambos modelos de quarks y los únicos resultados experimentales para  $\Delta^{++}$  y  $\Omega^-$  reportados recientemente [32]. Es bastante notable que los resultados dados por el UQM son bastante cercanos a los calculados en el QM cuya diferencia relativa al QM está entre el 2% y 10%. La mayor diferencia puede verse en  $\Delta^0$  de donde el momento magnético se aleja cerca de un 60% del valor dado por el QM. Pueden verse estos datos de forma más ilustrativa en la gráfica de la figura 5.

Barión	QM ( $\mu_N$ )	UQM ( $\mu_N$ )	Exp ( $\mu_N$ )
$\Delta^{++}$	5.556	5.31165	3.7 a 7.5
$\Delta^+$	2.7318	2.48262	-
$\Delta^0$	-0.092	-0.346408	-
$\Delta^-$	-2.916	-3.17544	-
$\Sigma^{*+}$	3.091	2.78921	-
$\Sigma^{*0}$	0.267	0.036555	-
$\Sigma^{*-}$	-2.557	-2.71611	-
$\Xi^{*0}$	0.626	0.340423	-
$\Xi^{*-}$	-2.198	-2.25133	-
$\Omega^-$	-1.839	-1.85787	$-2.02 \pm 0.05$

Tabla 5.2: Comparación de los momentos magnéticos con los resultados del QM y los resultados experimentales

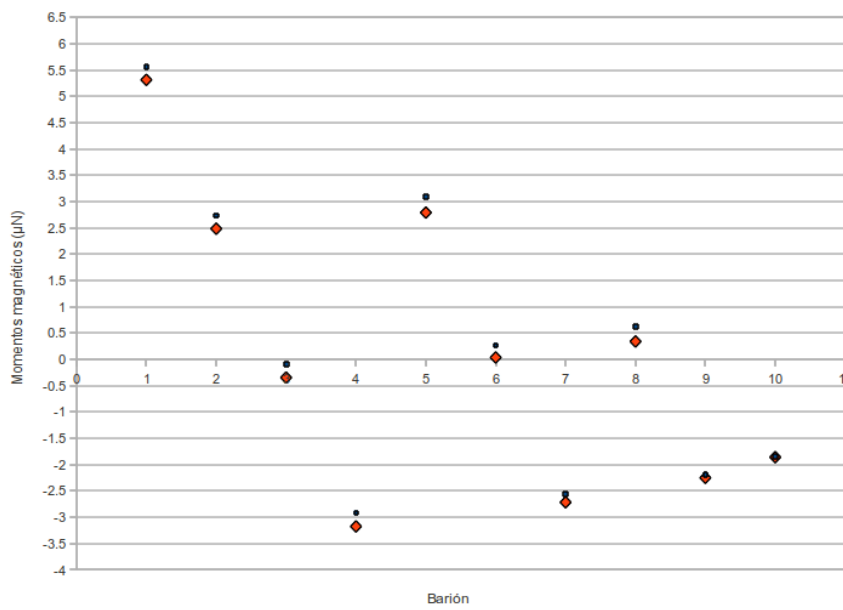


Figura 5.1: Gráfica de los momentos magnéticos de los bariones del decuplete en el QM (puntos azules) y en el UQM (cuadros rojos) y de donde los números del dominio corresponden en orden a como se muestran los bariones en la tabla 5.2, p.ej. 1( $\Delta^{++}$ ), 2( $\Delta^+$ ), ... 10( $\Omega^-$ ).

# Conclusiones

En este trabajo se estableció un estudio del UQM con el estudio de los momentos magnéticos para los bariones que corresponden a los multipletes del decuplete. Para ello se hizo un tratamiento sobre la construcción de las funciones de onda en este modelo, haciendo incapie en la analogía que tenía con el MCM en la representación en el espacio de espín-sabor, obteniéndose los coeficientes de amplitud de probabilidad para el UQM el cual consideraba que los estados intermedios barión-mesón eran creados por el mecanismo del vacío  ${}^3P_0$  al romperse la simetría de sabor. Se estableció por ello un método para obtener estos valores mediante el valor principal de Cauchy debido a que se encontró la peculiaridad de que en el cálculo particular del decuplete de bariones, a diferencia del octete, existían singularidades, en las cuales la densidad de amplitud de probabilidad divergía en valores específicos del momento  $k_0$ . Esto quedó resuelto dando así los valores numéricos con los que pueden obtenerse las probabilidades de encontrar a los estados intermedios barión-mesón en las funciones de onda de decuplete de bariones, las cuales tomaban valores entre cerca de  $\frac{1}{10}$  y  $\frac{1}{2}$ , así como los valores específicos en el cálculo de los momentos magnéticos.

En cuanto a los valores numéricos encontrados para los momentos magnéticos del decuplete en el UQM se encontró que existe en este modelo una gran contribución de los quarks del mar en cerca de un 60 % a este valor, de donde la contribución debido al espín es la más considerable, aunque siguen siendo de vital importancia las excitaciones orbitales entre el barión y el mesón del mar. Se ha observado que los valores obtenidos se acercan bastante a los predichos por el QM con una diferencia máxima entre ambos modelos de  $0.25 \mu_N$  para el caso de  $\Delta^0$  y  $0.30 \mu_N$  para  $\Sigma^{*+}$ .

Debido a la falta de datos experimentales para los momentos magnéticos del decuplete, excepto para  $\Omega^-$  no fue posible establecer parámetros en los cuales comparar los resultados, tanto del QM como del UQM. En el único caso que existe información experimental,  $\Omega^-$ , y el cual es el único que no contiene la contribución de los piones en los estados intermedios del UQM, se encuentra que la diferencia efectiva entre el momento magnético dado por UQM y el experimental es de  $0.16 \mu_N$ , mientras que la diferencia del QM con el experimental es de  $0.18 \mu_N$ , pero debido a la incertidumbre experimental de  $0.05 \mu_N$  no puede decirse nada sobre qué modelo predice mejor este resultado.

Existen varias propuestas sobre experimentos en los que pueden estudiarse los efectos de los estados intermedios debido a la creación de pares quark-antiquark, como los propuestos por Alberg, Falter y Henley [35] usando procesos de Drell-Yan inducidos por hiperones con haces de  $\Sigma^{+-}$  en protones. La evidencia experimental es de gran importancia para hacer una compa-



ración cualitativa sobre la eficiencia de los distintos modelos de quarks constituyentes, con el fin de establecer parámetros que puedan ser un marco de referencia sobre los resultados teóricos.

Por otro lado pudo comprobarse que las simetrías existentes entre los estados del UQM siguen siendo válidas en cuanto al momento magnético, como ejemplo de ello, el momento magnético de  $\Sigma^{*0}$  sigue siendo el promedio de  $\Sigma^{*+}$  y  $\Sigma^{*-}$  que existe en UQM, como también ocurre en QM. Las relaciones de simetría que existen en los bariones con los operadores dados en 2.3 pueden ser de gran importancia en el cálculo de observables, tanto en el QM como en sus extensiones, sin embargo aún queda como un problema abierto establecer una relación completa entre los bariones del octete y los bariones del decuplete en términos de conmutadores de operadores de ascenso y descenso.

Finalmente con los valores obtenidos para los momentos magnéticos del decuplete en el UQM se concluye la gran importancia de los quarks del mar en este valor, pero es vital poder tener información experimental con mayor precisión, por lo que en este momento no puede decirse nada sobre la confiabilidad de los distintos modelos.

# Apéndice A

## A.1. Funciones de onda de espín-sabor del octete de bariones en el modelo de quarks

$$\begin{aligned}
 \left| p, \frac{1}{2} \right\rangle &= \frac{1}{3\sqrt{2}} |wud(2 \uparrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow) \\
 &\quad + dud(2 \uparrow\downarrow\uparrow - \uparrow\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\uparrow) \\
 &\quad + duu(2 \downarrow\uparrow\uparrow - \uparrow\downarrow\uparrow - \uparrow\uparrow\downarrow)\rangle
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

$$\begin{aligned}
 \left| n, \frac{1}{2} \right\rangle &= \frac{-1}{3\sqrt{2}} |ddu(2 \uparrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow) \\
 &\quad + udu(2 \uparrow\downarrow\uparrow - \uparrow\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\uparrow) \\
 &\quad + udd(2 \downarrow\uparrow\uparrow - \uparrow\downarrow\uparrow - \uparrow\uparrow\downarrow)\rangle
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

$$\begin{aligned}
 \left| \Sigma^+, \frac{1}{2} \right\rangle &= \frac{-1}{3\sqrt{2}} |uus(2 \uparrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow) \\
 &\quad + usu(2 \uparrow\downarrow\uparrow - \uparrow\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\uparrow) \\
 &\quad + suu(2 \downarrow\uparrow\uparrow - \uparrow\downarrow\uparrow - \uparrow\uparrow\downarrow)\rangle
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

$$\begin{aligned}
 \left| \Sigma^0, \frac{1}{2} \right\rangle &= \frac{-1}{6} |(dus + uds)(2 \uparrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow) \\
 &\quad + (dsu + usd)(2 \uparrow\downarrow\uparrow - \uparrow\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\uparrow) \\
 &\quad + (sdu + sud)(2 \downarrow\uparrow\uparrow - \uparrow\downarrow\uparrow - \uparrow\uparrow\downarrow)\rangle
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

$$\begin{aligned}
 \left| \Sigma^-, \frac{1}{2} \right\rangle &= \frac{-1}{3\sqrt{2}} |dds(2 \uparrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow) \\
 &\quad + dsd(2 \uparrow\downarrow\uparrow - \uparrow\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\uparrow) \\
 &\quad + sdd(2 \downarrow\uparrow\uparrow - \uparrow\downarrow\uparrow - \uparrow\uparrow\downarrow)\rangle
 \end{aligned} \tag{A.5}$$

$$\begin{aligned}
\left| \Lambda^0, \frac{1}{2} \right\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{3}} |(sud - sdu)(\uparrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\uparrow) \\
&\quad + (usd - dsu)(\uparrow\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\uparrow) \\
&\quad + (uds - dus)(\uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow)\rangle
\end{aligned} \tag{A.6}$$

$$\begin{aligned}
\left| \Xi^0, \frac{1}{2} \right\rangle &= \frac{1}{3\sqrt{2}} |ssu(2\uparrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow) \\
&\quad + sus(2\uparrow\downarrow\uparrow - \uparrow\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\uparrow) \\
&\quad + uss(2\downarrow\uparrow\uparrow - \uparrow\downarrow\uparrow - \uparrow\uparrow\downarrow)\rangle
\end{aligned} \tag{A.7}$$

$$\begin{aligned}
\left| \Xi^-, \frac{1}{2} \right\rangle &= \frac{1}{3\sqrt{2}} |ssd(2\uparrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow) \\
&\quad + sds(2\uparrow\downarrow\uparrow - \uparrow\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\uparrow) \\
&\quad + dss(2\downarrow\uparrow\uparrow - \uparrow\downarrow\uparrow - \uparrow\uparrow\downarrow)\rangle
\end{aligned} \tag{A.8}$$

# Apéndice B

En la física de partículas elementales la teoría de grupos ha resultado ser una herramienta poderosa y de gran simplicidad para obtener resultados directos haciendo uso únicamente de las propiedades y de los patrones que poseen estas partículas que pertenecen a cierto grupo de simetría sin necesidad de hacer un extenso cálculo sobre la dinámica de estas.

## B.1. El grupo de simetría SU(2)

Comenzaremos con el grupo de simetría que es utilizado en la descripción de las simetrías en mecánica cuántica como lo son el espín o el isoespín en el caso de cantidades que puedan tener dos grados de libertad. Para ello discutiremos la parametrización del grupo SU(2).

Un elemento de SU(2) es una matriz unitaria de  $2 \times 2$

$$u = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

donde los elementos  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  son números complejos, i.e. existen ocho parámetros reales. Además se cumple la condición

$$\det u = 1. \quad (\text{B.2})$$

La inversa de B.1 es

$$u^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad (\text{B.3})$$

Y por la condición de unitariedad  $u^\dagger = u^{-1}$  se requiere que  $d = a^*$  y que  $c = -b^*$ , entonces tenemos que  $u$  puede expresarse de la forma

$$u = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \quad (\text{B.4})$$

por lo que ahora contiene solamente cuatro parámetros. Si se utiliza además la condición B.2 se tiene la restricción

$$aa^* + bb^* = 1 \quad (\text{B.5})$$

lo que sólo nos deja con tres parámetros libres.

Para una transformación infinitesimal es muy útil introducir las siguientes parametrizaciones

$$a = 1 - \frac{i}{2}a_{11}, \quad b = -\frac{1}{2}b_{12} - \frac{i}{2}a_{12} \quad (\text{B.6})$$

la cual es consistente con  $\det u = 1$ . Así entonces podemos escribir en forma matricial que

$$\begin{aligned} u &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{i}{2}a_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \frac{i}{2}a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{b_{12}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{1}_2 - \frac{i}{2}a_{11}\sigma_z - \frac{i}{2}a_{12}\sigma_x - \frac{i}{2}b_{12}\sigma_y \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

donde  $\mathbf{1}_2$  es la matriz unitaria de  $2 \times 2$  y  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\sigma_z$  son las matrices de Pauli

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.8})$$

Usando el hecho de que este operador podemos expresarlo como un operador infinitesimal (colocar un pie de página aquí) podemos entonces identificar los tres generadores de  $SU(2)$  con las tres componentes de espín

$$J_i = S_i = \frac{1}{2}\sigma_i, \quad (i = x, y, z) \quad (\text{B.9})$$

Así también la transformación finita queda como

$$u = e^{i\omega \cdot J} \quad (\text{B.10})$$

desde la cual se puede obtener la ecuación B.7 una vez más tomando a  $\omega = (-a_{12}, -b_{12}, -a_{11})$ . Esto tiene la misma forma que el operador de rotación con  $\mathbf{J} = \mathbf{S}$  en lugar de  $\mathbf{J} = \mathbf{L}$ . Nótese que a partir de las matrices de Pauli puede seguirse el álgebra de  $SU(2)$ .

### B.1.1. Multipletes

Ahora lo que nos interesa es dar una representación para la transformación  $u$  que podamos expresar en términos de una base más conocida como los operadores de escalón. en Por razones que nos serán convenientes en los siguientes capítulos en la siguiente ecuación de transformación

$$\phi' = u\phi \quad (\text{B.11})$$

definiremos, s.p.g, a

$$\phi = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad (\text{B.12})$$

y respectivamente

$$\phi' = \begin{pmatrix} u' \\ d' \end{pmatrix} \quad (\text{B.13})$$

. En cuanto a la transformación  $u$  como en la ecuación B.10 usaremos a  $\omega = \frac{\theta}{2}\hat{n}$ , así entonces podemos hacer la expansión en Taylor en torno a la transformación unitaria

$$\begin{aligned} u &= e^{i\frac{\theta}{2}\hat{n}\cdot\hat{J}} = \mathbf{1}_2 + i\frac{\theta}{2}\hat{n}\cdot\hat{J} + \frac{1}{2!}\left(i\frac{\theta}{2}\right)^2(\hat{n}\cdot\hat{J})^2 + \dots \\ &= \mathbf{1}_2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 + \dots + i\hat{n}\cdot\hat{J}\left[\theta - \frac{1}{3!}\left(\frac{\theta}{2}\right)^3 + \dots\right] \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

usando  $\hat{J}^2 = \mathbf{1}_2$  y  $\hat{n} = (0, 2, 0)$ , s.p.g., entonces

$$\begin{aligned} u &= \mathbf{1}_2 \cos \frac{\theta}{2} + i2J_2 \sin \frac{\theta}{2} \\ &= \mathbf{1}_2 \cos \frac{\theta}{2} + i\sigma_2 \sin \frac{\theta}{2} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

lo cuál nos da un caso general en como se transforman los vectores  $\phi$ . A partir de aquí podemos definir las transformaciones triviales llamadas operadores de escalón, sobre las cuales se basa la idea de los multipletes de escalón como

$$I_+ = J_x + iJ_y \quad I_- = J_x - iJ_y \quad (\text{B.16})$$

de donde

$$\begin{aligned} I_+ d &= u & I_- u &= d \\ I_+ u &= 0 & I_- d &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

o bien

$$I_+ \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad I_- \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad (\text{B.18})$$

Esta es la forma en que se transforma la representación en  $\phi$  como la definimos arriba, sin embargo hay otra representación la cuál es la conjugada y será útil en la representación de la transformación de SU(2) para antipartículas en los capítulos siguientes.

## Representación conjugada

En la representación conjugada utilizaremos el operador de conjugación de carga,  $C$ , el cuál actúa en el doblete que representamos arriba como

$$C \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \end{pmatrix} \quad (\text{B.19})$$

cambiando los valores de proyección  $J_3$  para  $u$  y  $d$  como

$$\bar{u} \rightarrow J_3 = -\frac{1}{2} \quad \bar{d} \rightarrow J_3 = \frac{1}{2} \quad (\text{B.20})$$

lo cual al momento de obtener una transformación de  $u^*$  correspondiente, como se hizo arriba, tenemos que

$$\begin{pmatrix} \bar{u}' \\ \bar{d}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -\sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \end{pmatrix} \quad (\text{B.21})$$

cuya matriz de transformación corresponde a la conjugación compleja de B.15. Pero si lo que queremos es que exista una sólo transformación,  $u$ , para la representación del doblete de SU(2) y su conjugada, debemos entonces redefinir un doblete en la representación conjugada, así

$$\phi^* = \begin{pmatrix} \bar{d} \\ -\bar{u} \end{pmatrix} \quad (\text{B.22})$$

por lo que la transformación para este doblete queda exactamente igual, i.e.

$$\begin{pmatrix} \bar{d}' \\ -\bar{u}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{d} \\ -\bar{u} \end{pmatrix} \quad (\text{B.23})$$

Y debido a que  $\phi$  y  $\phi^*$  son dobletes que se transforman de la misma manera, los operadores de escalón se mantienen de igual forma para ambos casos

$$I_+ \begin{pmatrix} \bar{d} \\ -\bar{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{d} \\ -\bar{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\bar{u} \\ 0 \end{pmatrix} \quad I_+ \begin{pmatrix} \bar{d} \\ -\bar{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{d} \\ -\bar{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{d} \end{pmatrix} \quad (\text{B.24})$$

. Por lo que en este punto tenemos ya una descripción para los operadores de escalón para ambos dobletes de SU(2).

## B.2. El grupo de simetría SU(3)

Comenzaremos con la representación fundamental del grupo SU(3) la cuál es una matriz unitaria de  $3 \times 3$ . En la vecindad de la unidad, la transformación se puede escribir como

$$u = \mathbf{1}_3 + i\rho \quad (\text{B.25})$$

donde  $\mathbf{1}_3$  es la matriz unitaria de  $3 \times 3$  y  $\rho$  es una matriz de  $3 \times 3$  con entradas complejas que satisface la propiedad

$$\rho = \rho^\dagger \quad (\text{B.26})$$

que es requerida por la condición de unitariedad. Entonces, si  $\rho_{ij} = a_{ij} + ib_{ij}$ , debemos tener

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad b_{ij} = -b_{ji} \quad (\text{B.27})$$

lo cual significa que  $b_{ii} = 0$ . En este caso es muy conveniente trabajar con una base esférica donde las coordenadas de un punto se definen como  $x_1$ ,  $x_0$  y  $x_{-1}$  cuya regla de transformación es

$$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(x + iy) = r \left( \frac{4\pi}{3} \right)^{1/2} Y_{11} \quad (\text{B.28})$$

$$x_0 = z = r \left( \frac{4\pi}{3} \right)^{1/2} Y_{10} \quad (\text{B.29})$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(x - iy) = r \left( \frac{4\pi}{3} \right)^{1/2} Y_{1-1} \quad (\text{B.30})$$

que son mostradas en terminos de los armónicos esféricos<sup>1</sup>,  $Y_{lm}$ . Entonces la transformación unitaria introducida arriba cambia  $x_i$  en  $x'_i$  como

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_0 \\ x'_{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + ia_{11} & ia_{10} - b_{10} & ia_{1-1} - b_{1-1} \\ ia_{10} + b_{10} & 1 + ia_{00} & ia_{0-1} - b_{0-1} \\ ia_{1-1} + b_{1-1} & ia_{0-1} + b_{0-1} & 1 + ia_{-1-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \\ x_{-1} \end{pmatrix} \quad (\text{B.31})$$

Aquí, tratamos con la transformación especial, i.e.  $\det u = 1$ . Los parámetros de una transformación especial infinitesimal entonces tiene que cumplir con la restricción (terminos de segundo orden en  $\rho_{ij}$  son anulados)

$$a_{11} + a_{10} + a_{-1-1} = 0 \quad (\text{B.32})$$

Así, eliminando  $a_{-1-1}$ , la matriz de transformación en B.31 depende de ocho parámetros independientes  $a_{11}$ ,  $a_{00}$ ,  $a_{10}$ ,  $b_{10}$ ,  $a_{1-1}$ ,  $b_{1-1}$ ,  $a_{0-1}$  y  $b_{0-1}$  y el orden de SU(3) es ocho. Bajo una transformación infinitesimal, una función escalar  $F$  cambia a

$$\begin{aligned} F(x'_1, x'_0, x'_1) &= SF(x_1, x_0, x_1) = F(x_1, x_0, x_1) + \sum_i (x'_i - x_i) \frac{\partial F}{\partial x_i} \\ &= \left[ 1 + ia_{11} \left( x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_{-1} \frac{\partial}{\partial x_{-1}} \right) + ia_{00} \left( x_0 \frac{\partial}{\partial x_0} - x_{-1} \frac{\partial}{\partial x_{-1}} \right) \right. \\ &\quad + ia_{10} \left( x_1 \frac{\partial}{\partial x_0} + x_0 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + ia_{1-1} \left( x_1 \frac{\partial}{\partial x_{-1}} + x_{-1} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + ia_{0-1} \left( x_0 \frac{\partial}{\partial x_{-1}} + x_{-1} \frac{\partial}{\partial x_0} \right) \\ &\quad + b_{10} \left( x_1 \frac{\partial}{\partial x_0} - x_0 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + b_{1-1} \left( x_1 \frac{\partial}{\partial x_{-1}} - x_{-1} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \\ &\quad \left. + b_{0-1} \left( x_0 \frac{\partial}{\partial x_{-1}} - x_{-1} \frac{\partial}{\partial x_0} \right) F \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

---

<sup>1</sup>Las funciones  $Y_{lm}$  están definidas por

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \left[ \frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right]^{1/2} P_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi}$$

donde  $P_l^m$  son los polinomios asociados de Legendre.



Hecho esto, vamos a identificar los siguientes operadores con el fin de simplificar el álgebra como

$$\begin{aligned}
\hat{X}_{11} &= \left( x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_{-1} \frac{\partial}{\partial x_{-1}} \right), & \hat{X}_{00} &= \left( x_0 \frac{\partial}{\partial x_0} - x_{-1} \frac{\partial}{\partial x_{-1}} \right) \\
\hat{X}_{10} &= \left( x_1 \frac{\partial}{\partial x_0} + x_0 \frac{\partial}{\partial x_1} \right), & \hat{Y}_{10} &= -i \left( x_1 \frac{\partial}{\partial x_0} - x_0 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \\
\hat{X}_{1-1} &= \left( x_1 \frac{\partial}{\partial x_{-1}} + x_{-1} \frac{\partial}{\partial x_1} \right), & \hat{Y}_{1-1} &= -i \left( x_1 \frac{\partial}{\partial x_{-1}} - x_{-1} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \\
\hat{X}_{0-1} &= \left( x_0 \frac{\partial}{\partial x_{-1}} + x_{-1} \frac{\partial}{\partial x_0} \right), & \hat{Y}_{0-1} &= -i \left( x_0 \frac{\partial}{\partial x_{-1}} - x_{-1} \frac{\partial}{\partial x_0} \right).
\end{aligned} \tag{B.34}$$

Para cada una de esos operadores podemos asociar una matriz. Por ejemplo,

$$\hat{X}_{11} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \\ x_{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \\ x_{-1} \end{pmatrix}, \text{ etc.} \tag{B.35}$$

Las matrices resultantes están relacionadas con las ocho matrices de Gell-Mann  $\lambda_i (i = 1, \dots, 8)$  como siguen

$$\begin{aligned}
X_{11} + X_{00} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \sqrt{3} \lambda_8 & X_{11} - X_{00} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda_3 \\
X_{10} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 & Y_{10} &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda_2 \\
X_{1-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda_4 & Y_{1-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda_5 \\
X_{0-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \lambda_6 & Y_{0-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} = \lambda_7
\end{aligned} \tag{B.36}$$

Debemos notar que las matrices de Gell-Mann tienen traza nula y cumplen la condición de normalización B.37

$$tr(\lambda_i \lambda_j) = 2\delta_{ij} \tag{B.37}$$

Por cálculo directo, podemos encontrar que el álgebra de Lie de  $su(3)$  es

$$[\lambda_k, \lambda_l] = 2if_{klm} \lambda_m \tag{B.38}$$

donde los  $f_{klm}$  son antisimétricos bajo el intercambio de cualesquiera dos índices. Los únicos diferentes de cero son las permutaciones de

$$\begin{aligned} f_{123} &= 1, & f_{147} &= f_{165} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{376} = \frac{1}{2} \\ f_{458} &= f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned} \quad (\text{B.39})$$

Similarmente a SU(2), pueden introducirse los generadores del álgebra como

$$\hat{F}_i = \frac{1}{2}\lambda_i \quad (\text{B.40})$$

que cumplen con la siguiente ley de conmutación como consecuencia de la ecuación B.38

$$[\hat{F}_k, \hat{F}_l] = if_{klm}\hat{F}_m \quad (\text{B.41})$$

la cuál representa otra forma del álgebra de Lie su(3)

Hecho esto, se pueden usar los operadores  $\hat{F}_i$  para reescribir las transformación definida en la ecuación B.33 la cual queda como

$$S = 1 + i\delta\theta_i\hat{F}_i \quad (\text{B.42})$$

y la forma finita, la cuál corresponde al límite en que  $\delta\theta_i \rightarrow 0$ , es

$$S = e^{i\theta_i\hat{F}_i} \quad (\text{B.43})$$

la cual es unitaria debido a que  $\theta_i$  son reales y  $\hat{F}_i$  son hermitianos.



# Apéndice C

## C.1. Coeficientes de Clebsch-Gordan

Tal como se utilizan los coeficientes de Clebsch-Gordan para obtener los coeficientes de acoplamiento en el espacio de sabor y de espín entre dos hadrones en el capítulo 3, se hace una breve descripción para obtener sus valores.

Los coeficientes de Clebsch-Gordan pertenecen a los coeficientes asociados a la expansión en una base de momentos angulares parciales en la que están definidos los estados correspondientes en una combinación lineal como sigue

$$|(j_1, j_2), JM\rangle = \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} |j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | JM\rangle \quad (\text{C.1})$$

con  $M = m_1 + m_2$  y donde  $\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | JM\rangle$  son los coeficientes de Clebsch-Gordan y funcionan en ambos sentidos de la ecuación.

La expresión explícita para calcularlos está dada por

$$\begin{aligned} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm\rangle &= \delta_{m, m_1 + m_2} \sqrt{\frac{(2j+1)!(j+j_1-j_2)!(j-j_1+j_2)!(j_1+j_2-j)!}{(j_1+j_2+j+1)!}} \times \\ &\quad \sqrt{(j+m)!(j-m)!(j_1-m_1)!(j_1+m_1)!(j_2-m_2)!(j_2+m_2)!} \times \\ &\quad \sum_k \frac{(-1)^k}{k!(j_1+j_2-j-k)!(j_1-m_1-k)!(j_2+m_2-k)!(j-j_2+m_1+k)!(j-j_1-m_2+k)!} \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

En la siguiente figura se muestran los valores explícitos para estos valores para los distintos valores de momento angular parcial,  $j_1$ ,  $j_2$  y total,  $J$ .

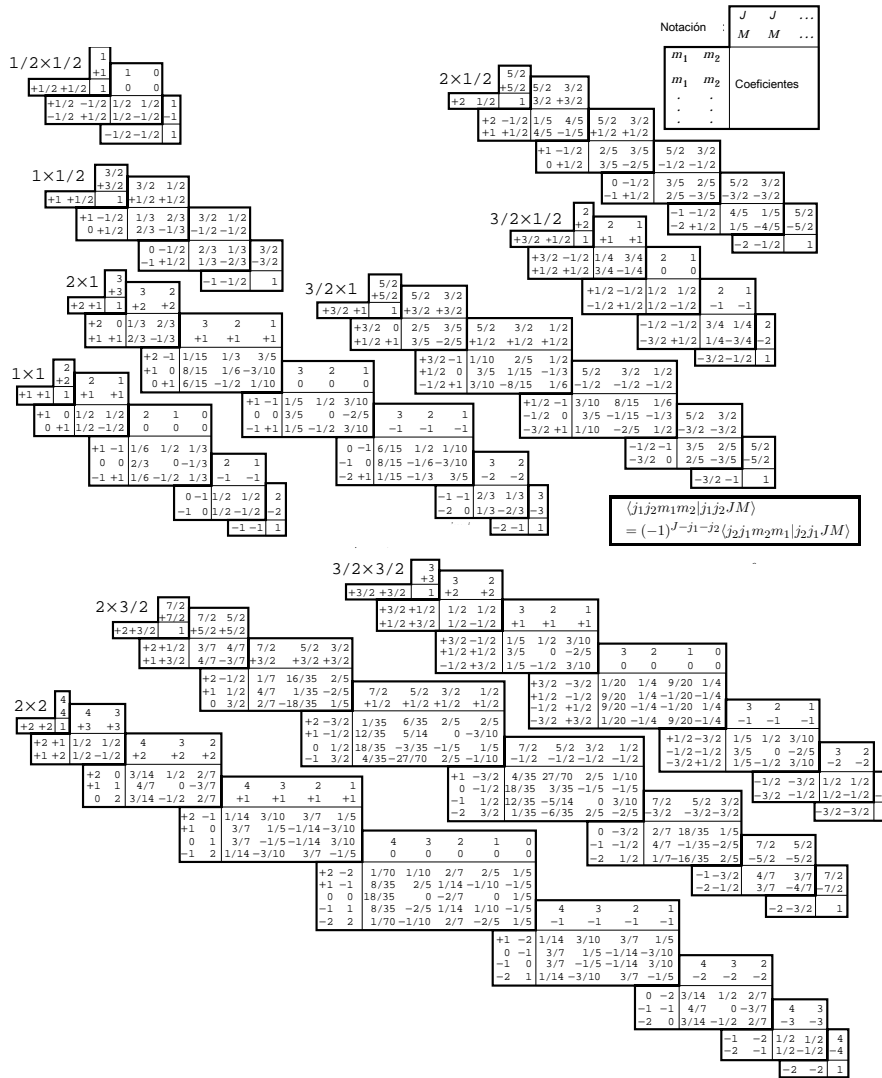


Figura C.1: Coeficientes de Clebsch-Gordan donde se usa la convención de suma de Wigner (*Group Theory*, Academic Press, New York, 1959). El signo para la raíz cuadrada se sobrentiende, por ejemplo, para  $-8/15$  el coeficiente es  $-\sqrt{8/15}$ .

# Apéndice D

## D.1. El valor principal de Cauchy

Como se vió en 4.2 el cálculo de los coeficientes involucra el cálculo de la integral de la forma

$$\int_0^\infty dk \frac{k^4 e^{-Ck^2}}{[m_A - \sqrt{m_B^2 - k^2} - \sqrt{m_C^2 - k^2}]^2} \quad (\text{D.1})$$

y que podía ser tratada de acuerdo al cambio de variable  $k \rightarrow E_{BC} = \sqrt{m_B^2 - k^2} + \sqrt{m_C^2 - k^2}$  y  $E_A = m_A$  quedando en forma general como

$$f'(E_A) \int_{M_B+M_C}^\infty \frac{1}{E_{BC} - E_A} dE_{BC} \quad (\text{D.2})$$

La cuál es una integral impropia que puede resolverse mediante el valor principal Cauchy, el cual es un método que permite asignar valores finitos a ciertas integrales impropias que en otro caso resultarían indefinidas, haciendo la siguiente aproximación

$$\begin{aligned} \int_{M_B+M_C}^\infty \frac{1}{E_{BC} - E_A} dE_{BC} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{M_B+M_C}^{E_A-\varepsilon} \frac{dE_{BC}}{E_{BC} - E_A} + \int_{E_A-\varepsilon}^D \frac{dE_{BC}}{E_{BC} - E_A} \right) \\ &\quad + \int_D^\infty \frac{dE_{BC}}{E_{BC} - E_A}, \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

donde  $D$  toma valores muy grandes, por lo que el último término puede descartarse. Entonces

$$\begin{aligned} \int_{M_B+M_C}^\infty \frac{1}{E_{BC} - E_A} dE_{BC} &= \ln(E_{BC} - E_A) \Big|_{M_B+M_C}^{E_A-\varepsilon} + \ln(E_{BC} - E_A) \Big|_{E_A+\varepsilon}^D \\ &= \ln(-\varepsilon) - \ln(M_B + M_C - E_A) + \ln(D - E_A) - \ln(\varepsilon) \\ &= \ln \frac{-\varepsilon}{M_B + M_C - E_A} + \ln \frac{D - E_A}{\varepsilon} = \ln \frac{E_A - D}{M_B + M_C - E_A}. \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

Esta última expresión puede resolverse fácilmente con métodos numéricos, cuyos programas eligen un valor adecuado para  $D$  y usan este caso para la resolución de esta integral.

## D.2. Valores de las masas de hadrones en la simetría de isoespín

En el cálculo de los coeficientes de amplitud de probabilidad en 3.2 así como en el cálculo de los momentos magnéticos debido al momento angular en 4.2.2 se utilizan valores para las masas de los bariones y mesones en la simetría de isoespín, las cuales, como se ha mencionado, corresponden al promedio de las masas de los multipletes de isoespín últimamente publicadas [32]. Los valores se muestran en la tabla D.1.

Hadrón	m (GeV)
$\Delta$	1.232
$\Sigma^*$	1.384
$\Xi^*$	1.533
$\Omega$	1.672
$N$	0.939
$\Sigma$	1.193
$\Xi$	-1.318
$\Lambda$	1.116
$\pi$	0.138
$K$	0.495

Tabla D.1: Valores para las masas,  $m$ , de los bariones y mesones en la simetría de isoespín

# Bibliografía

- [1] H. Holtmann, A. Szczurek and J. Speth, Nucl. Phys. A **596**, 631-669 (1996).
- [2] Nathan Isgur, Spin structure of the proton: A Quark modeler's view, Jefferson Lab, 10-13 (1996), [JLAB-THY-96-14].
- [3] Hyun-Chul Kim, MichaÅ, PraszkaÅ,owicz, and Klaus Goeke, Phys. Rev. D **61**, 114006 (2000).
- [4] Gerald T. Garvey Phys. Rev. C **81**, 055212 (2010)
- [5] A. Le Yaouanc, *Hadron Transitions of the Quark Model*, (Gordon and Breach Science Publishers. 1988).
- [6] Murray Gell-mann, Yuval Neéman, New York, (1964) *The Eightfold Way*,
- [7] R. Bijker, J. Ferretti and H. García,  $^3P_0$  *Amplitudes*, Lecture notes: Instituto de Ciencias Nucleares, UNAM.
- [8] Fl. Stancu, *Group Theory in Subnuclear Physics*, (Oxford University Press, 1996).
- [9] D. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles*, (2<sup>nd</sup> Revised Edition. WILEY- VCH. 2010).
- [10] R. Bijker, *Quark models of the nucleon*, Lecture notes: VIII Escuela Mexicana de Física Nuclear, (2012).
- [11] F.E. Close, *An Introduction to Quarks and Partons*, (Academic Press. 1982).
- [12] W. Roberts and Silvestre-Brac, Few-Body Syst. 11, 171 (1992).
- [13] J.J. de Swart, Rev. Mod. Phys. D 35, 916 (1963).
- [14] J.D. Sullivan, Phys. Rev. D 5, 1732(1972).
- [15] A.W. Thomas, Phys. Lett. B 126, 97 (1983).
- [16] P. Geiger y N. Isgur, Phys. Rev. D 55, 299 (1997).
- [17] R. Bijker y E. Santopinto, Phys. Rev. C 80, 065210 (2009).



- [18] E. Santopinto y R. Bijker, Phys. Rev. C 82, 062202(R) (2010).
- [19] E.M. Henley and G.A. Miller, Phys. Lett. B 251, 453-454 (1990).
- [20] I. Estermann, R. Frisch y O. Stern, Nature 132, 169 (1933).
- [21] R. Hofstadter, Annu. Rev. Nucl. Sci. 7, 231 (1957)
- [22] K. Nakamura *et. al.*, J.Phys. G: Nucl. Part. Phys. 37, 075021 (2010)
- [23] J.I. Friedman y H.W. Kendall, Annu. Rev. Nucl. Sci. 22, 203 (1972)
- [24] M.K. Jones *et. al.*, Phys. Rev. Lett. 84, 1398 (2000);  
O. Gayou *et. al.*, Phys. Rev. Lett. 88, 092301 (2002)
- [25] See *e. g.* C.E. Hyde-Wright and K. de Jager, Annu. Rev. Nucl. Part. Sci. 54, 217 (2004).
- [26] See *e.g.* V.D. Burkert y T.-S.H. Lee, Int. J. Mod. Phys. E 13, 1035 (2004) [arXiv:nucl-ex/0407020].
- [27] S. Kumano, Phys. Rep. 303, 183 (1998)
- [28] G.T. Garvey and J.-C. Peng, Prog. Part. Nucl. Phys. 47, 203 (2001)
- [29] P. Amaudruz *et al.*, Phys. Rev. Lett. 66, 2712 (1991); M. Arneodo *et al.*, Nucl. Phys. B 487, 3 (1997).
- [30] A. Baldit *et al.*, Phys. Lett. B 332, 244 (1994).
- [31] E.A Hawker *et al.* (E866/NuSea Collaboration), Phys. Rev. Lett. 80, 3715 (1998); J.C. Peng *et al.*, Phys. Rev. D 58, 092004 (1998); R.S. Towell *et al.*, Phys. Rev. D 64, 052002 (2001).
- [32] J. Beringer *et al.* (Particle Data Group), Phys. Rev. D86, 010001 (2012)
- [33] S. Díaz, Los momentos magnéticos de bariones: quarks de valencia y del mar, Tesis, F.C. UNAM (2013)
- [34] R. Bijker, Quark Models of the Nucleon, Lecture Notes:”VIII Escuela Mexicana de Física Nuclear”, (2013)