UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

MAESTRÍA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

FACULTAD DE CIENCIAS

El Problema de Pappus y el origen de la Geometría Analítica: Una propuesta para su enseñanza en el Bachillerato

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRO EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR (MATEMÁTICAS)

PRESENTA:

VÍCTOR FRANCISCO RODRÍGUEZ PÉREZ

Directora de tesis: Mtra. Consuelo Arce Ortiz
FES Iztacala

México D.F. Junio de 2014

ÍNDICE

Gracias a Dios por el don de la vida y las capacidades para proyectar metas y mantenerme hasta su realización. Con esto cierro una importante etapa en mi vida y abro otra más significativa aun.

A mis padres, impulso de mi existencia quienes con su amor, esfuerzo y consejos han contribuido a la realización de ésta y de las empresas más importantes de mi vida. Su ayuda permanente evita que claudique. Gracias.

A mis hermanas Paty, Silvia y Rocío por su presencia, apoyo y amor.

A la M.C. Lidia Ortega González, quien con su ejemplo, apoyo, aportaciones y consejos me ayudó a culminar este proyecto.

A la Mtra. Consuelo Arce Ortiz; por sus valiosas aportaciones, disponibilidad y paciencia para terminar este trabajo, por compartir su entusiasmo y conocimientos, y porque construimos juntos un horizonte para nuestra docencia.

A la Dra. Ofelia Contreras Gutiérrez, por su impulso a la graduación en MADEMS y su acompañamiento en mi proceso personal de llegar a ser Maestro.

A mis sinodales M. en C. Francisco de Jesús Struck Chávez, M. en C. Alejandro Bravo Mojica y M. en C. Juan Bautista Recio Zubieta, muchas gracias por sus aportaciones y apoyo para complementar este trabajo.

Resumen

Estudios sobre el aprendizaje de la Geometría Analítica señalan que el alto índice de reprobación en ésta puede asociarse con la forma de enseñarla: repetitiva, memorística y descontextualizada. Además, el uso de materiales didácticos tradicionales como el trazado con lápiz, no es suficiente para concretizar sus nociones; de ahí que los estudiantes la consideren un tema árido.

Con este referente surge la intención de promover un acercamiento al aprendizaje de la Geometría Analítica a través del enfoque histórico en la enseñanza de las matemáticas. Para ello, de la matemática griega se tomó el *Problema de Pappus*, de cuya solución pueden derivarse la mayoría de los temas de Geometría Analítica del programa de la Escuela Nacional Preparatoria de la UNAM.

La solución se realizó con el método propuesto en la *Geometría* por René Descartes en 1637, que involucra una parte algebraica y otra geométrica, y se complementó con un software interactivo para trazar la solución. En paralelo se revisaron los conceptos matemáticos que permitieron el nacimiento de la Geometría Analítica, lo que permitió la elaboración de asociaciones y analogías, así como la comprensión de la evolución histórica de ésta.

Los resultados mostraron la apropiación de conceptos propios de la Geometría Analítica, por lo que se sugiere que el empleo del enfoque histórico puede considerarse una opción para la enseñanza y aprendizaje de esta asignatura. Queda por explorar su impacto en el desarrollo de habilidades cognoscitivas complejas implicadas en el desarrollo de proyectos y elaboración de dispositivos.

Introducción

En la actualidad, en las diferentes asignaturas de matemáticas que se imparten en la Escuela Nacional Preparatoria (ENP) se reporta una cantidad elevada de alumnos reprobados; situación que se hace cada vez más crítica a pesar de los esfuerzos realizados por nuestra institución para resolver dicha problemática.

Desde la óptica del especialista la enseñanza de las matemáticas puede ser emocionante, pero ¿qué hay sobre los alumnos que deben aprender matemáticas para continuar con sus estudios? Esta pregunta surge cuando se observan las numerosas y profundas dificultades a las que se enfrenta el docente ante la enseñanza de las matemáticas y, en específico, de la Geometría Analítica, más compleja y con frecuencia menos exitosa que la enseñanza de las operaciones numéricas del álgebra elemental. ¿Por qué enseñar Geometría Analítica? ¿Cómo enseñar sus temas en el bachillerato? Con el fin de adelantar algunas ideas sobre este aspecto crucial debe tomarse en cuenta la complejidad cognitiva subyacente al aprendizaje de las matemáticas y, por ende, a la Geometría Analítica.

Hay muchas buenas razones para enseñar matemáticas, como sus posibles aplicaciones en tecnología o en el mundo real. Pero estas son buenas razones sólo para algunos alumnos, para los que pretenden estudiarlas o cursar alguna ingeniería, pero no son suficientes para motivar el aprendizaje de muchos otros. La razón del aprendizaje de esta disciplina para cualquiera que no planea transformarse en matemático o ingeniero es el desarrollo de habilidades de razonamiento y representación visual, así como la sinergia de estos dos procesos totalmente diferentes.

Aunque esta intención ha desempeñado un papel fundamental en el terreno de la investigación contemporánea, los *currículum* de matemáticas y los métodos de enseñanza han sido inspirados durante mucho tiempo sólo por ideas que provienen de la estructura de las matemáticas formales y por métodos didácticos apoyados principalmente en la memoria y en los procesos algorítmicos, en cuyo caso, los alumnos no encuentran una forma de percibir los vínculos que tienen los procedimientos con las aplicaciones más cercanas a su entorno y esto origina que no puedan aplicar o experimentar el conocimiento adquirido en otro lugar que no sea el salón de clase.

Existe un gran número de profesionales dedicados a investigar las causas de la falta de aprovechamiento de los estudiantes. El desarrollo de estos estudios ha estado motivado principalmente por el alto porcentaje de alumnos reprobados en asignaturas científicas y, específicamente, en matemáticas. Los resultados han servido para que varios profesores reconozcan y analicen los obstáculos que suponen para el aprendizaje las propias ideas y la motivación que el estudiante tiene en el aula, las cuales son producto de la interacción en su medio social o se han adquirido a lo largo de su propia experiencia escolar. La importancia de este asunto ha trascendido la atención a la didáctica de las diferentes disciplinas, y ha traído a escena la consideración de las preconcepciones y la motivación de los alumnos en el proceso de enseñanza-aprendizaje, factores que pueden obstaculizar o facilitar tanto la enseñanza como el aprendizaje de la disciplina.

En lo que respecta a las preconcepciones, en este trabajo se propone que, propiciar en los alumnos que cursan el quinto y sexto grado del bachillerato en la ENP el desarrollo de una visión histórico social de una disciplina rigurosa, llena de algoritmos, teoremas, axiomas y demás variantes propias como es la Matemática, revisando el origen histórico de temas de Geometría Analítica, puede cambiar la percepción de la dificultad e inaccesibilidad de los contenidos y favorecer la motivación de estudiarlos para alcanzar los aprendizajes de la asignatura. También se pretende mostrar que para llegar al nacimiento de la Geometría Analítica se pasó por diferentes etapas a lo largo de diversos momentos históricos, desde las aportaciones de los matemáticos y filósofos griegos hasta René Descartes que introdujo el álgebra en la geometría.

En las deducciones matemáticas y los caminos para llegar a los conceptos de la Geometría Analítica va implícita una actividad humana de muchos años; para destacarla, ha de generarse en los alumnos el interés por descubrir eventos y situaciones que condujeron a teoremas, axiomas y/o postulados. Esto es de suma importancia dado que los alumnos de la ENP asignan poco significado a la disciplina y a su aprendizaje, como demuestra el alto índice de reprobación en los últimos años tanto en los exámenes ordinarios como extraordinarios.

En 1996 la ENP renovó sus planes y programas de estudio con el objeto de brindar al alumno las herramientas necesarias para continuar con éxito sus estudios de licenciatura y modificó la forma de enseñanza de sus asignaturas, del conductismo al constructivismo, con la intención de que el alumno dejara de ser pasivo y se responsabilizace de sus propios aprendizajes con la ayuda o guía de su profesor. Este cambio, se pensó, traería consigo la disminución en la deserción y en los altos índices de reprobación de algunas de sus materias, lo cual hasta el momento no ha sucedido.

En el Plan y los programas de estudio de la ENP de 1996 se propone impulsar la enseñanza a partir de planteamientos interdisciplinarios, o al menos multidisciplinarios, que busquen la unidad de los procesos y objetos del conocimiento, así como el diseño de estrategias y actividades de aprendizaje acordes con el enfoque disciplinario, así como los criterios teóricos y didácticos para que los profesores organicen, diseñen, desarrollen su labor y evalúen los procesos de enseñanza y de aprendizaje.

Con este referente y como egresado de la Maestría en Docencia para la Educación Media Superior (MADEMS) en el área de Matemáticas, surge la inquietud de promover en los alumnos una motivación e interés por aprender matemáticas, no sólo de forma abstracta y rigurosa como es su enseñanza la mayoría de las veces, sino como reflejo de una actividad humana. Probablemente con este procedimiento los alumnos alcancen un aprendizaje más cercano a su realidad.

Este trabajo tiene como objetivo general reforzar los cursos de Matemáticas V y VI mediante la reflexión histórica del origen de la Geometría Analítica, pues tomando como referencia un problema de la matemática griega, el *Problema de Pappus*, pueden desarrollarse la mayoría de los temas de Geometría Analítica del programa de bachillerato de la ENP.

Los objetivos específicos son:

- Realizar la demostración matemática y presentar la solución del *Problema de Pappus* (también conocido como *el Problema de las tres o cuatro rectas*) con el método propuesto por René Descartes, para ofrecer una estrategia de enseñanza-aprendizaje alternativa para los docentes que imparten Matemáticas V y VI en la ENP.
- A partir de la demostración y solución del *Problema de Pappus*, identificar los diferentes conceptos y temas analizados en el curso de Matemáticas V: función (unidad I), ley de los senos (unidad II), propiedades de los triángulos y coordenadas cartesianas (unidad IV), ecuación de un lugar geométrico, definición de recta como lugar geométrico y distancia de un punto a una recta (unidad VI), ecuación de segundo grado y criterios para identificar a la cónica que representa una ecuación de segundo grado (unidad VII), circunferencia (unidad VIII) y cónicas (unidades XIX, X y XI); así como los temas de Geometría Analítica.
- Promover en los alumnos un acercamiento histórico-social a conceptos matemáticos como los ejes coordenados, que surgieron a través de una evolución histórica y que dieron origen a la Geometría Analítica.
- Proponer la interacción de la historia y las matemáticas para mejorar la comprensión de ésta, promover una perspectiva interdisciplinaria en la apropiación de los contenidos del bachillerato y contribuir a la formación integral del alumno de bachillerato de la UNAM.

Para cubrir los temas del programa de Matemáticas V no señalados en el segundo objetivo específico, podría proponerse una modificación al modo en que René Descartes resuelve el *Problema de Pappus*, propuesta que, sin embargo, en este momento rebaza los alcances de este trabajo.

En el primer capítulo se indican los propósitos y el perfil del alumno contemplados en el programa de estudios de Matemáticas V de la ENP, ya que esta propuesta pretende contribuir a reforzar particularmente este grado escolar. También se hace referencia al pensamiento matemático para tratar de comprender cómo aprenden las personas que estudian esta disciplina.

En el segundo capítulo se describe el sustento psicológico y didáctico de la propuesta; se aborda de manera general el constructivismo y una vertiente del mismo, el aprendizaje significativo de David Paul Ausubel, así como el enfoque histórico que proponemos para este trabajo apoyados en textos de ilustres matemáticos, pedagogos, historiadores y profesores, quienes reclaman una función didáctica para la historia de las Matemáticas como instrumento de comprensión de sus fundamentos y de las dificultades de sus conceptos para así responder a los retos de su aprendizaje.

En el capítulo 3 se atiende el tema de solución de problemas en geometría; se mencionan algunos datos de la vida de Pappus de Alejandría y temas tratados en su obra *La Colección Matemática,* como los aspectos generales del *Análisis Geométrico Griego* y la clasificación general de los problemas geométricos; se presentan dos ejemplos de problemas tomados del *Libro I* de *los Elementos* de Euclides: la Proposición 1, construcción de un triángulo equilátero sobre una recta finita dada, y la Proposición 9, bisectar un ángulo rectilíneo dado. También se revisan las soluciones que plantearon Pappus y el matemático francés François Viète al problema de la trisección de un ángulo, y se comparan sus formas de resolver este problema geométrico.

Los temas estudiados en la obra *La Colección Matemática* y la solución al problema de la trisección del ángulo de Viète se analizan por su importante influencia en el trabajo de René Descartes para la resolución del *Problema de Pappus*, desarrollado en este capítulo, y base del nacimiento de los diferentes conceptos y temas que dieron origen a la Geometría Analítica y al desarrollo de esta propuesta.

En el capítulo 4 se presenta la puesta en escena de la propuesta con alumnos de la ENP, del Plantel 9 “Pedro de Alba”: la secuenciación de la propuesta, la metodología empleada, la evaluación y los resultados obtenidos, así como el análisis correspondiente después de ocho sesiones. Se presenta el empleo de la historia de las matemáticas como un instrumento didáctico para incidir en el proceso de enseñanza-aprendizaje mediante una introducción histórica que sitúa el origen y la evolución del problema que se va a abordar en los contextos científico y cultural, y se involucra brevemente a los matemáticos o corrientes matemáticas que introdujeron un concepto nuevo, la demostración de un teorema o la resolución de un problema.

El capítulo 5 contiene las conclusiones de la puesta en práctica de la propuesta y sus perspectivas. Se resalta la importancia de utilizar el enfoque histórico en la enseñanza de las matemáticas, ya que como fuente de inspiración, autoformación y orientación en la actividad docente revela la dimensión cultural de la Matemática; cómo el legado histórico permite enriquecer su enseñanza y su integración en el conjunto de los saberes científicos, artísticos y humanísticos que constituyen la cultura; y la importancia también de utilizar un software de geometría dinámica para favorecer el aprendizaje.

En el último apartado se anexan los resultados cuantitativos de la evaluación de los alumnos en la práctica, los cuestionarios, exámenes y material de trabajo utilizados en esta propuesta. Al final del trabajo se presenta la bibliografía consultada.

Capítulo 1. Antecedentes

1.1. Programa de Matemáticas V de la Escuela Nacional Preparatoria

La asignatura de Matemáticas V se ubica en el mapa curricular de la ENP en el quinto grado del bachillerato. Es una materia obligatoria del núcleo Básico con carácter teórico y forma parte del área de formación. La enseñanza de esta asignatura se orienta hacia un aprendizaje basado en la solución de problemas (Escuela Nacional Preparatoria, 1996, Programa de Estudios de la Asignatura de Matemáticas).

El Programa de estudios menciona: "Por medio de los contenidos propuestos, el alumno conocerá, comprenderá y aplicará la simbología de las funciones con sus características, propiedades, clasificaciones y representación gráfica; la existencia del sistema de coordenadas polares y los conocimientos básicos de operación de la geometría analítica. La metodología aplicada privilegia el trabajo en el aula, y parte del planteamiento de problemas simples que irán aumentando su complejidad en el tratamiento de un mismo tema" (Escuela Nacional Preparatoria, 1996, Programa de Estudios de la Asignatura de Matemáticas V, Presentación, b) Exposición de motivos y propósitos generales del curso, página 2).

Los propósitos a los que se refiere este programa son (Escuela Nacional Preparatoria, 1996, Programa de Estudios de la Asignatura de Matemáticas V, páginas 2 y 3):

- Iniciar a los alumnos en el conocimiento, la comprensión y las aplicaciones de la geometría analítica, de esta manera adquirirán la preparación necesaria para acceder a los cursos de Matemáticas del sexto grado de bachillerato.
- Reafirmar y profundizar los conocimientos de geometría euclidiana y trigonometría adquiridos en cursos anteriores para plantear y resolver problemas de diversas disciplinas.
- Fomentar en los alumnos la capacidad de razonamiento lógico, su espíritu crítico y el deseo de investigar para adquirir nuevos conocimientos, lo que resulta necesario para plantear y resolver numerosos problemas de aplicación, tanto en la misma Matemática como en otras disciplinas.

Para desarrollar el perfil del alumno, en la estrategia de evaluación de este curso deberán considerarse los siguientes aspectos:

1. La capacidad para aplicar lo que ha aprendido durante el curso en el planteamiento y resolución de problemas de ésta y otras disciplinas.

2. El reconocimiento de los aspectos matemáticos que se relacionan entre sí, logrando aprendizajes significativos.
3. La importancia de la Matemática, su relación con otras ciencias, con los avances científicos y tecnológicos y con la sociedad.
4. La habilidad del alumno para la búsqueda, organización y aplicación de la información que obtiene en el análisis de problemas.
5. La capacidad del alumno para aplicar las técnicas de estudio de la Matemática en otras disciplinas.
6. La capacidad del alumno para aplicar los conocimientos matemáticos en actividades cotidianas para mejorar su calidad de vida y la de los demás, a través de desarrollar una actitud seria y responsable.
7. Desarrollar el interés del alumno por la asignatura e inclusive por una licenciatura del área Físico-Matemáticas e Ingenierías, que se refleje en un incremento de la matrícula en el área I del sexto grado del bachillerato.
8. Incrementar la participación de los alumnos en concursos de Matemáticas, que fomenten su superación académica.
9. La capacidad de trabajar en equipo, en actividades dentro del aula, en la resolución de problemas que impliquen el intercambio y la discusión de ideas.

La enseñanza de las matemáticas en la ENP está planeada para que en los tres años de este ciclo el alumno adquiera los conocimientos indispensables para consolidar las competencias matemáticas que le demanda el nivel superior, lo que implica la maduración de habilidades de razonamiento abstracto y el desarrollo del pensamiento matemático.

1.2. El pensamiento matemático

Cuando hablamos del pensamiento humano, de la memoria, del razonamiento, de la abstracción o, en general, de los procesos mentales, volteamos hacia la psicología y al estudio de las funciones mentales. Para algunos psicólogos las preguntas ¿cómo piensa la gente?, ¿cómo se desarrollan los procesos del pensamiento?, o ¿en qué medida la acción humana adquiere habilidad en la resolución de ciertas tareas?, constituyen la fuente de reflexión y experiencia cotidiana. De manera que el pensamiento, como una de las funciones mentales superiores, se estudia sistemática y cotidianamente en diversos escenarios profesionales (Cantoral y Farfán, 2000).

Es sabido que la psicología se ocupa de entender cómo aprende la gente, cómo realiza diversas tareas y cómo se desempeña en su actividad, pero para los profesionales de la enseñanza de las matemáticas, las preguntas anteriores se sintetizan en una: ¿qué es el pensamiento matemático? Desde una perspectiva global, el pensamiento matemático se refiere a las formas en que piensan las personas que se dedican profesionalmente al área de matemáticas; no obstante, las investigaciones sobre pensamiento matemático se ocupan de comprender cómo interpreta la gente un aspecto específico o un tema de matemáticas (Cantoral y Farfán, 2000).

Si se quisiera describir el proceso de desarrollo del pensamiento matemático se tendría que considerar que éste suele interpretarse de distintas formas; por un lado se le entiende como una reflexión que los matemáticos realizan sobre la naturaleza de su conocimiento así como del proceso de descubrimiento e invención en matemáticas. Por otra, se entiende el pensamiento matemático como parte de un ambiente científico en el cual los conceptos y las técnicas matemáticas surgen y se desarrollan en la resolución de tareas; finalmente se considera que el pensamiento matemático se desarrolla en todos los seres humanos en el enfrentamiento cotidiano a múltiples tareas que impliquen razonar, demostrar, argumentar, interpretar, identificar, relacionar, graficar, calcular, inferir, efectuar algoritmos y modelizar en general. Esta última interpretación es la que es útil al docente en esta área.

El objetivo entonces es entender los procedimientos, las explicaciones, la notación o las formulaciones verbales que la persona construye para responder a una actividad matemática, del mismo modo que nos ocupamos por descifrar los mecanismos mediante los cuales la cultura y el medio contribuyen en la formación de los pensamientos matemáticos. En este sentido, interesa analizar las operaciones de los alumnos ante tareas matemáticas, tanto simples como complejas, como formas de entender el proceso de construcción de los conceptos y procesos matemáticos; al mismo tiempo que sabremos que, en esa actividad, su propio pensamiento matemático está, también, en pleno curso de constitución.

Desde principios del siglo XX se han realizado estudios sobre la perspectiva teórica para los aspectos educativos. Destacados matemáticos como Poincaré, Polya y Frudenthal, así como teóricos del pensamiento como Piaget, llevaron a cabo estudios para explorar la psicología del razonamiento matemático al enfocarse a su propia actividad personal y analizar el comportamiento de estudiantes (Cantoral y Farfán, 2000).

Desde esta última perspectiva, el pensamiento matemático no tiene sus bases ni en los fundamentos de la matemática ni en la práctica exclusiva de los matemáticos, sino que consiste de todas las formas posibles de construir ideas matemáticas, incluidas aquellas que provienen de la vida cotidiana. Por ejemplo, para apropiarse del concepto de elipse, el cual está formado de diferentes propiedades y relaciones con otros conceptos matemáticos, los niños entre seis y siete años suelen ocuparse de objetos que tienen la forma de la elipse con lo que se familiarizan con ésta, y cuando son capaces de decir que algún objeto de esta forma es un círculo “achatado” o aplastado en sus extremos se aproximan a la construcción de este concepto, aunque la idea de elipse no esté plenamente representada en su pensamiento. En tanto que algunas propiedades de la elipse se abordan con ejemplos como el huevo o una nave espacial de juguete que tengan esta forma, las relaciones que se pueden encontrar entre su área y, si somos un poco más ambiciosos, su volumen se tratan en la escuela cuando los jóvenes tienen entre 15 y 18 años. Por lo tanto, puede decirse que la construcción del conocimiento matemático tiene muchos niveles y profundidades, que es un proceso que va cambiando a lo largo de la vida escolar y que la enseñanza y el aprendizaje en el aula debería tomar en cuenta esta evolución.

De este modo habremos de entender, en un sentido moderno, que el pensamiento matemático incluye por un lado, pensamiento sobre tópicos matemáticos y, por otro, procesos avanzados del pensamiento como abstracción, justificación, visualización, estimación o razonamiento bajo hipótesis.

El pensamiento matemático, entonces, debe operar sobre una red compleja de conceptos, unos avanzados y otros más elementales; quizá por ello a los estudiantes les resulte complicado entender lo que significa una ecuación de segundo grado, a menos que entiendan que va más allá del sólo manejo de las técnicas asociadas y que requieren de otros conceptos matemáticos como cónica, lugar geométrico, función, variable o incluso número, y que deben además articularlos bajo diferentes contextos de representación, como formas gráficas, ordenamientos numéricos, representaciones analíticas, lenguaje natural o procesamiento icónico de la información.

Para fomentar el pensamiento matemático en los alumnos podría utilizarse el enfoque histórico en la enseñanza de temas de matemáticas en general y, por nuestro interés particular, de Geometría Analítica, pues “la historia puede dar la perspectiva global del tema y relacionar las materias no sólo unas con otras sino también con las líneas centrales del pensamiento matemático” (Kline, 1992: 16).

Capítulo 2. Didáctica y cognición en la enseñanza de las matemáticas

2.1. El Constructivismo

Es a partir de la mitad del siglo pasado y hasta nuestros días, que el trabajo de los positivistas es duramente criticado por diversos autores. Se pueden citar entre ellos, además de Bachelard, a Popper, Kuhn, Feyerabend y Lakatos. Las ideas de estos autores han producido una nueva filosofía de la ciencia que establece que las observaciones realizadas dependen de la formación, experiencia y expectativas del observador y que por ello están influidas por el marco teórico del científico. El científico, a través de sus investigaciones descubre leyes, teorías y principios de nuestra realidad, pero su validez y eficacia (o verosimilitud) son convencionales, es decir, están sujetas a la decisión práctica que debe tomarse para considerar un grado de confirmación suficiente que les permita continuar vigentes como explicaciones válidas. Por ello, la nueva filosofía de la ciencia representa una perspectiva diferente. En un tiempo, la ciencia se concibió como exclusivamente atribuible al genio de los grandes hombres y como si estuviera divorciada de los efectos producidos en lo social y en lo económico. Muchas historias de la ciencia son algo más que el relato de los grandes descubrimientos, de las revoluciones trascendentes sobre los secretos de la naturaleza, algunas de ellas muestran la necesidad de que el individuo se encuentre impregnado del ambiente que lo rodea para que pueda comprender su época; la conciencia que el científico tenga sobre su propio contexto resulta un factor importante en su capacidad de cambiar el curso del conocimiento y de la acción (Bernal, 2005). Lo que el científico observa e investiga es una "construcción" de la realidad y esto va de acuerdo con su formación, marco teórico y hasta con sus valores sociales (Piaget y García, 1983).

Afortunadamente muchos profesores con formación científica y vocación humanista se interesan por la historia de la disciplina que cultivan e imparten, y hace ya algunos años que ha empezado a abrirse paso una incipiente institucionalización en algunas facultades científicas universitarias de los estudios de Historia de la Ciencia y de la Matemática, incluso en los niveles de Doctorado. Actualmente se organizan tanto en los Institutos de Ciencias de la Educación de las Universidades como en los Centros de Profesores y Recursos una gran variedad de conferencias, cursos y seminarios cuyo contenido versa sobre los más diversos aspectos de los temas históricos, muchos de los cuales se encargan de poner de manifiesto los seculares y recíprocos vínculos de la Matemática con los demás aspectos disciplinares de la cultura y el pensamiento. Como ejemplo puede señalarse la relevante actividad que desde hace más de una década desarrolla en Canarias el Seminario Orotava de Historia de la Ciencia, dirigido por el Profesor J. Montesinos (SUMA, año 2004).

2.1.1. El Modelo de aprendizaje significativo de David Paul Ausubel

Además de los aspectos históricos de la disciplina, la docencia de calidad implica el conocimiento de los procesos de enseñanza y de aprendizaje, así como la adopción de un modelo explicativo de éstos que se considere adecuado a la enseñanza de la disciplina que se imparte y a las características del estudiante.

Si, como ya se mencionó, el objetivo de enseñar matemáticas en el bachillerato es favorecer el desarrollo de habilidades de pensamiento, un enfoque cognitivo de la enseñanza y el aprendizaje parece pertinente. Consideramos que la teoría psicológica del aprendizaje de Jean Piaget fundamenta el modelo de recepción significativa de Ausubel, corriente pedagógica para la enseñanza a la que nos adherimos.

El modelo de recepción significativa desarrollado por Ausubel fue una reacción frente a la corriente del descubrimiento (Díaz-Barriga, 2007). Aunque puede interpretarse como un regreso a la enseñanza tradicional centrada en la transmisión de conceptos y conocimientos ya elaborados, superó al modelo de recepción/transmisión tradicional.

En virtud de la falta de capacidad de la mayoría de los alumnos para “descubrir autónomamente todo lo que deben saber”, Ausubel y sus colaboradores fundamentan la defensa de la enseñanza por transmisión significativa que, en teoría, debe lograr un aprendizaje por asimilación de conceptos (Ausubel, Novak y Hanesian, 1978).

Ausubel y su sucesor Novak muestran una indudable coherencia con los temas básicos de la epistemología contemporánea dada la importancia que conceden a los conocimientos previos de los alumnos y a la integración de nuevos conocimientos a las estructuras conceptuales del individuo, de acuerdo con la teoría del aprendizaje de Piaget. Del mismo modo, aciertan al resaltar el papel del profesor-guía quien puede jugar como facilitador de un aprendizaje significativo, en vez de ser un espectador que está esperando que sus estudiantes obtengan algunas adquisiciones dispersas a través de “los descubrimientos” incidentales del trabajo autónomo que realizan dentro y fuera de la escuela como tareas de aprendizaje.

De acuerdo con Ausubel, los nuevos conocimientos se incorporan en forma sustantiva en la estructura cognitiva del alumno. Esto se logra cuando el estudiante relaciona los nuevos conocimientos con los anteriormente adquiridos; pero también es necesario que el alumno se interese por aprender lo que se le está mostrando.

En este sentido, para muchas personas las matemáticas no son consideradas como una disciplina cultural más, sino como un lenguaje al servicio de las demás ciencias y, erróneamente, se la concibe como el instrumento utilizado por las instituciones para filtrar selectivamente al alumnado, lo que provoca sobre las matemáticas una extendida aversión, además de un cierto aislamiento que impide que se cumpla la pretensión de Puig Adam (1955): Presentar la Matemática como una unidad en relación con la vida natural y social. Por esto, muchos docentes que imparten matemáticas tienen el interés de eliminar los prejuicios hacia el estudio de la misma y enriquecer culturalmente su enseñanza para convertirla en una disciplina cultural en el más amplio sentido de la palabra.

Para el caso del problema eje de este trabajo, si se propone como actividad resolver el *Problema de Pappus* con el método descrito por René Descartes en su obra la *Geometría*, probablemente sería complicado que los alumnos encontraran la solución aun con la ayuda del profesor, debido a la complejidad en la lectura del texto de 1637 y a la aparente irrelevancia para este fin de sus conocimientos previos de Geometría Euclidiana y Geometría Analítica. No obstante, teniendo como instrumento básico la historia de las matemáticas, a través de la solución del *Problema de Pappus* los estudiantes no sólo aplican sus conocimientos y habilidades con este propósito sino aprecian el origen histórico de los diferentes conceptos y temas que contempla el programa de Matemáticas V de la ENP, con lo que es posible asignarles otro significado. A este fin sirve como instrumento básico la historia de las matemáticas, como veremos enseguida.

2.2. El Enfoque Histórico en la enseñanza de las matemáticas

En la mayoría de las teorías del aprendizaje se acepta la importancia de la motivación para su logro, debido a que es evidente que sólo construye el conocimiento el alumno que quiere aprender, es decir, el que tiene disposición hacia el aprendizaje. El enfoque histórico en la enseñanza de la ciencia, y en particular en la enseñanza de las matemáticas, puede representar una alternativa para lograr que el estudiante construya el conocimiento.

Se sabe que hay tres formas clásicas de enfocar la enseñanza de cualquier teoría científica: la primera es la conceptual; la segunda es la lógica o axiomática y la tercera forma de enseñar una ciencia es a través del enfoque histórico.

El enfoque histórico es una propuesta didáctica que tiene como objetivo despertar el interés del alumno hacia el estudio. Principalmente se utiliza como complemento de los otros enfoques y consiste en presentar cómo se han ido desarrollando los conceptos, quiénes intervinieron en su desarrollo y, si es posible, determinar las dificultades encontradas durante el mismo.

En la actualidad, la enseñanza de las matemáticas se efectúa a través de una transmisión del conocimiento casi dogmática, por lo que al adoptarse el enfoque histórico se estaría dando un gran avance al proporcionar a la estructura afectiva del estudiante el estado de motivación e interés propicio para el aprendizaje.

Conocer los motivos y dificultades que históricamente se presentaron en el desarrollo de las matemáticas podría servir como un incentivo para los alumnos, pues es más probable que se apropien paulatinamente del concepto o la idea que deben aprender. Además, permite que los estudiantes expresen su opinión o presenten respuestas alternativas a las situaciones con las que se enfrentaron los matemáticos de una época determinada. Utilizar la historia de las matemáticas permite mostrar que el desarrollo de los conceptos y temas no siempre se ha presentado de forma lineal y continua a través del tiempo. Pueden además enfatizarse los aspectos de teorías o conceptos que no fueron del todo aceptados en alguna etapa del desarrollo de las matemáticas, ya sea por dudas o por estar en contra de ciertos planteamientos filosóficos, por generar un conflicto con un conocimiento antiguo o por rivalidades entre algunos matemáticos de renombre.

Este enfoque en la enseñanza de las matemáticas, y en particular en la enseñanza de la Geometría Analítica en este reporte, actúa como un agente motivador en el alumno ya que a través de él descubrirá el origen de los conceptos y métodos que está aprendiendo en el aula. Debe estar en un nivel didáctico y no como objeto mismo de la enseñanza, esto es, como un elemento mediador, que permita a los estudiantes conseguir una mejor comprensión y entendimiento.

Leer un texto antiguo, como La *Geometría* de René Descartes, y retomar en la clase un problema que interesó a los antiguos matemáticos como Euclides, Apolonio y Pappus, en cuya resolución aplicaron sólo los procedimientos y conocimientos que se tenían entonces, puede propiciar una actitud favorable hacia el planteamiento y la solución de problemas que lleve a los alumnos a proponer alternativas diferentes. Con la guía y ayuda del profesor se analizan los conceptos que permitieron el nacimiento de la Geometría Analítica, se revisa cómo se plantearon en aquel momento y se contrasta con las posibilidades de estudio actuales. Los métodos modernos permitirán observar el desarrollo del pensamiento, establecer analogías e inducir el camino más natural para adquirir el conocimiento matemático, así como captar que la matemática no es estática sino que va evolucionando históricamente.

Además de las razones que ya se han descrito, Fauvel (1991) indica, entre otras, las siguientes ventajas de abordar la enseñanza a través del enfoque histórico:

1. Muestra el aspecto humano de las matemáticas.
2. Ayuda al desarrollo de un acercamiento multicultural.

3. Provee la posibilidad de un trabajo interdisciplinario con otros maestros.
4. Ayuda a ordenar la presentación de los tópicos en el currículo.
5. Indica cómo los conceptos fueron dilucidándose, ayudando esto a su comprensión.
6. Permite a los alumnos sentir bienestar al alcanzar la comprensión, y no sólo resolver algunos problemas.

Las matemáticas constituyen una de las grandes manifestaciones del pensamiento humano con un desarrollo de varios siglos interconectado estrechamente con el conocimiento y la cultura. Es sabida la relación de la matemáticas con las ciencias naturales, la tecnología y el arte; pero sus vínculos con la filosofía, el lenguaje, la literatura, la educación, la belleza, la religión, la política, etcétera, hacen de ella una manifestación de la racionalidad humana que, si revisamos a lo largo del tiempo, se encuentra vinculada desde las más remotas civilizaciones hasta nuestra era actual. La permanente interacción del desarrollo matemático con cualquier actividad humana hacen de esta ciencia uno de los grandes logros culturales de la humanidad.

Como ejemplo podemos mencionar su relación con la filosofía, la cual comparte con las matemáticas unas raíces históricas comunes en el horizonte pitagórico del siglo VI a.C. que conocemos relativamente bien a través de la Filosofía platónica y de La Metafísica de Aristóteles; y particularmente en este trabajo, el sueño de René Descartes de la unión del Álgebra y la Geometría como germen de un nuevo sistema filosófico, las matemáticas como base racional del pensamiento cartesiano, así como la utilización de los métodos del *Análisis* y la *Síntesis.*

Capítulo 3. Contexto histórico de la Geometría Analítica

3.1. Solución de Problemas

El campo de la solución de problemas pone de manifiesto, en su complejidad, las características y limitaciones cognoscitivas del ser humano. A lo largo de la historia, el hombre ha tenido que encontrar soluciones a diferentes problemas que se ha planteado, mostrando en su resolución una gran capacidad e inventiva. La adaptación de nuestro sistema cognoscitivo a este tipo de tareas se pone de manifiesto cuando no solamente resolvemos problemas de diversas clases en nuestro trabajo, sino también pasamos momentos de nuestro tiempo libre resolviendo problemas en forma de juegos.

En la escuela, las personas aprenden a resolver una gran cantidad de problemas en las diferentes asignaturas. En matemáticas, la solución de problemas prácticamente es sinónimo de “estudiar matemáticas”: los profesores emplean la mayor parte del tiempo de sus clases en la resolución de problemas sobre un tema determinado, los libros de texto incluyen extensas listas de ejercicios resueltos y de problemas propuestos para que el alumno participe en el tema en cuestión; la mayor parte de las tareas extraescolares consisten en la resolución de un gran número de problemas; y el sistema de evaluación generalmente se basa en solicitar a los alumnos que resuelvan un conjunto de problemas. Estudiar cómo las personas resuelven problemas, y cómo ello repercute en el ámbito educativo, es sin lugar a dudas una de las funciones esenciales de aquellos que estamos interesados en el área de la educación matemática.

A partir de la reforma de 1996, en el sistema de bachillerato de la UNAM se propone que los contenidos relativos a matemáticas se aborden mediante la solución de problemas como método integral. Allí se indica que la solución de problemas es un proceso que debe penetrar todo el diseño curricular y proveer el contexto en el cual los conceptos y las actitudes pueden ser aprendidos. La habilidad de plantear y resolver problemas con una variedad de estrategias y recursos aparece no sólo como contenido procedimental[1], sino también como una de las bases del enfoque general con que han de trabajarse los contenidos de matemáticas en el bachillerato, situándose como un aspecto central en la enseñanza y el aprendizaje en esta área (ENP, Programa de Estudios de la Asignatura de Matemáticas V, 1996).

La propuesta de abordar el estudio de la Geometría Analítica con una perspectiva histórica pretende contribuir a la visión planteada en los programas de estudio, ya que su desarrollo gira en torno a la solución de un problema matemático, el *Problema de Pappus*. Este problema fue planteado en el año 350 d.C. (Jones, 1986), y se

[1] El contenido procedimental es aquel conocimiento que se refiere a la ejecución de procedimientos, estrategias, técnicas, habilidades, destrezas y métodos.

conoce como *el lugar geométrico de las tres o cuatro rectas*. Al analizar y resolver este problema, considerado como una de las cuestiones más importantes en el desarrollo de las matemáticas, se pretende despertar la motivación y el interés de los alumnos de bachillerato para el estudio de las mismas cuya importancia, como ya se señaló, es reconocida por la mayoría de las teorías del aprendizaje.

El *Problema de Pappus* fue planteado en el texto de la *Colección Matemática,* obra del autor griego Pappus de Alejandría*,* que data del siglo IV de nuestra era. En este texto, además de analizar el problema, Pappus realizó una compilación, comentario, restauración, organización y clasificación del conocimiento matemático que se tenía en esa época, incluyendo el *Análisis Geométrico Griego*. Pappus afirmó que tanto Euclides de Alejandría como Apolonio de Perga habían realizado un estudio del problema sin éxito. Apolonio (dice Pappus), afirma que si el problema es planteado para tres o cuatro rectas, los puntos que describen el lugar geométrico de la solución se encuentran en una de las tres secciones cónicas (parábola, elipse o hipérbola). Además del comentario a Apolonio, Pappus realizó un análisis y obtuvo una respuesta parcial, pero no determinó la solución general.

En el texto la *Geometría* (uno de los tres ensayos que acompañaban el *Discurso del Método)*, publicado en 1637, el matemático y filósofo francés René Descartes determinó que con su *método* se podía obtener la solución general. Con esta solución al *Problema de Pappus* inicia históricamente la rama de las matemáticas conocida en la actualidad como Geometría Analítica.

En el libro primero de los tres que componen la *Geometría*, Descartes específica la unificación del álgebra con la geometría al señalar en su primer párrafo:

> *Todos los problemas geométricos pueden ser reducidos fácilmente a términos tales que no sea necesario posteriormente para construirlos sino conocer la longitud de algunas líneas.*

Llevó a cabo esta unificación mediante un recurso simple, propuso una lectura de la geometría por medio del álgebra realizando una reinterpretación de los *Elementos* de Euclides*,* se auxilió del *Análisis Geométrico Griego* y de la posible influencia de los trabajos del matemático también francés, François Viète.

Una diferencia esencial entre las magnitudes geométricas (segmentos) y los elementos algebraicos (letras), es que con las letras pueden realizarse operaciones aritméticas en un número ilimitado, obteniendo como resultado nuevas combinaciones de letras, y con los segmentos, las combinaciones quedan restringidas para el caso de la dimensión del resultado, que puede ser 1, 2, 3, y en combinaciones superiores el resultado deja de ser inteligible, es decir, de ser expresable en términos de figuras geométricas: líneas, áreas o volúmenes.

En la *Geometría*, Descartes introduce el álgebra para la resolución de problemas liberándola de la dependencia de la estructura geométrica de las figuras. Expone los procedimientos para construir geométricamente las operaciones de la aritmética, define la multiplicación, la división y la extracción de raíces cuadradas empleando el concepto de segmento *unidad*. Establece que el producto entre dos segmentos sigue siendo un segmento; es decir, define que la potencia de un segmento sigue siendo un segmento, de modo que cuadrado y cubo ya no son magnitudes planas o espaciales, sino la segunda o tercera potencia de un número; de este modo, las operaciones aritméticas quedan incluidas en un terreno algebraico.

Esta interpretación algebraico-geométrica de las operaciones aritméticas marca un punto clave en el desarrollo en la historia de las matemáticas porque permite romper con el problema de la homogeneidad dimensional que había sido, sin duda, una limitante en la aplicación del álgebra en la geometría y que también impidió encontrar la solución general del *Problema de Pappus*. Fue el inicio de un cambio y progreso en las matemáticas mediante la introducción de los métodos analíticos y algebraicos para la solución de los problemas geométricos basada en la aplicación del *Análisis Geométrico Griego*.

3.2. La tradición del *Problema de Pappus* y el *Análisis Geométrico Griego*

3.2.1. Pappus de Alejandría

A principios del siglo IV se produjo un renacimiento en el desarrollo de las matemáticas, cuando algo del entusiasmo pitagórico por el álgebra y la geometría volvió a existir en Alejandría bajo la influencia de Pappus y Diofanto. Pappus escribió el texto de la *Colección Matemática*, en el que aportó comentarios a obras más antiguas como los *Elementos* de Euclides, las *Cónicas* de Apolonio, el *Almagesto* de Ptolomeo y otras en las que se detallan los grandes conocimientos de la geometría griega.

De acuerdo con Jones (1986), los datos que se tienen de la vida de Pappus son casi nulos. El único documento que puede considerarse como su biografía es un pequeño artículo en *SUDA*[2], de Theon de Alejandría, el cual data del siglo X d.C.:

> *Pappus de Alejandría, vivió en el reino del Emperador Theodosio el Grande, en la época en que Theon escribió el Canon de Ptolomeo y destacaba, también, como filósofo.*

Según este artículo, Pappus vivió a finales del siglo III a.C., sin embargo, por el comentario que éste hace en el libro V del *Almagesto* de Ptolomeo, sobre el eclipse solar que se observó en Alejandría el 18 de octubre del año

[2] El **Suda** es una escritura del periodo Bizantino que se empezó a utilizar para redactar en las enciclopedias de la biblioteca real los conocimientos disponibles del siglo X d.C.

320, Jones supone que vivió en el siglo IV d. C. Una nota en los escritos de Proclo referida por Jones indica que Pappus dirigió una escuela en Alejandría.

La obra principal de Pappus, la *Colección Matemática*, reviste importancia desde el punto de vista histórico porque, además de ser una exposición completa y sistemática de los conocimientos de su época, recoge fragmentos, a veces íntegros, de las obras que constituían los fundamentos de la enseñanza de las matemáticas en la ciudad de Alejandría, hoy en gran parte perdidas. Esta obra cuenta además con *teoremas* y *problemas* sobre geometría (no incluida en los *Elementos* de Euclides), y con un gran número de temas que se vinculan con las raíces históricas de la Geometría Analítica, como la clasificación de los problemas geométricos, los métodos del *Análisis* y la *Síntesis*, soluciones a problemas como la duplicación del cubo y la trisección del ángulo, así como estudios y propiedades de las secciones cónicas.

3.2.2. Análisis Geométrico Griego

Al revisar los *Elementos* de Euclides se aprecia que contiene definiciones, nociones comunes, postulados y proposiciones perfectamente bien estructurados. Puede constatarse que las proposiciones ahí enunciadas se dividen en dos tipos: los problemas, que para resolverlos se requiere una construcción, y los teoremas, en los que se realiza una demostración. Para resolver problemas y demostrar teoremas se hacía uso del *Análisis Geométrico Griego* (*Análisis*).

El *Análisis* es un procedimiento o técnica para resolver problemas y demostrar teoremas. El principio general del *Análisis* es "suponer que el problema está resuelto". En varios estudios sobre este tema se ha encontrado que existen muchos "métodos" o procedimientos de *Análisis*, que dependen principalmente del uso que hace cada matemático y del problema en cuestión.

Es sus estudios sobre Euclides y Apolonio, Pappus reconoció los dos aspectos en los cuales se puede clasificar al *Análisis*: el *Análisis Teoremático* (demostrar teoremas) y el *Análisis Problemático* (resolver problemas).

En lo que sigue revisaremos el concepto del *Análisis* tal como Pappus lo describió en el *Libro VII* de la *Colección Matemática*, el cual engloba el concepto del *Análisis Geométrico Griego* que tanto Viète como Descartes tomaron como base en sus respectivos trabajos, con los que contribuyeron al nacimiento de la Geometría Analítica.

3.2.3. El método del Análisis de Pappus

De acuerdo con Jones (1986), al inicio del *Libro VII* de la *Colección Matemática* de Pappus se escribe:

> *Hay dos tipos de Análisis: el que busca la verdad, el cual se llama teórico (teoremático); y el que obtiene [la solución del problema] además lo establecido, llamado problemático.*

Al hablar sobre *Análisis* se encuentra otra palabra que era usada frecuentemente: la *Síntesis*. Estos dos conceptos también se definen al inicio del libro antes citado. Pappus afirma que:

> *El Análisis es el camino de lo que se busca, como si ya estuviera dado, por medio de sus consecuencias, hacia algo que se establece por la Síntesis. En el Análisis por un lado, se asume lo que se busca como si se hubiera alcanzado y se busca aquello de lo que se sigue, y esto a su vez de lo que se sigue, hasta que por este camino llegamos a algo que es conocido, y este procedimiento nosotros lo llamamos Análisis. En la Síntesis, por otro lado, asumimos lo que se había obtenido al final del Análisis como ya logrado, y poniendo ahora en orden natural, como antecedente lo que antes seguía, y ligando uno con el otro, llegamos finalmente a la construcción de lo buscado; y esto lo llamamos Síntesis.*

En el *Análisis* entonces, se asume como cierto aquello que hay que probar y se razona con base en esta suposición hasta llegar a algo que forma parte de los principios (postulados o axiomas), o a aquellos resultados que ya han sido previamente establecidos. Si entonces podemos invertir la secuencia de los pasos anteriores se obtiene una demostración del teorema que había que probar (*Análisis teoremático*).

Básicamente, el *Análisis* (*Análisis problemático*) empieza observando cuáles son las condiciones o las características del objeto; entonces, se identifican las condiciones necesarias y suficientes para la construcción del objeto.

En todo problema que se quiere resolver, al matemático se le proporciona una serie de datos, y en éstos está la solución del problema. Pero se parte del principio de que el problema está resuelto.

3.2.4. Clasificación de los problemas geométricos

Pappus menciona que los problemas geométricos pueden clasificarse en tres tipos: *planos, sólidos y curvilíneos* (lineales). Esta clasificación se realiza dependiendo de la forma o herramientas que se necesitan para resolverlos. Si para resolver un problema dado se requiere del uso de rectas y círculos (regla y compás), entonces es un problema plano; si se utilizan secciones cónicas (parábola, elipse e hipérbola), el problema es sólido; y si se emplean curvas más complejas que las secciones cónicas (concoide, cisoide o cuadratríz), el problema es lineal.

Podemos suponer que esta clasificación se basa en el grado de dificultad del trazado de las curvas que se utilizan para encontrar la solución de un problema geométrico. En otras palabras, si se ordenaran las líneas que existen en geometría en grados de dificultad, la recta y el círculo serían las más fáciles en su trazo, en un siguiente grado de dificultad la parábola, la elipse y la hipérbola, y por último las curvas de grado superior a las cónicas. Pappus en su clasificación, jerarquiza las formas de solucionar los diferentes tipos de problemas. En la actualidad esta clasificación sigue vigente en los cursos de geometría que se imparten a los estudiantes en México.

En la primaria y en la secundaria lo único que se enseña en geometría tiene que ver con polígonos (líneas rectas) y circunferencias.

En el bachillerato, en el quinto grado de la ENP el curso está estructurado en cuatro bloques:

1. Se reafirman, enriquecen y profundizan los conceptos de relación y función.
2. Funciones trigonométricas y exponenciales.
3. Conceptos básicos de la geometría plana.
4. Conceptos de Geometría Analítica y cónicas.

Los temas del cuarto bloque son los siguientes: Ecuación general de segundo grado, circunferencia, parábola, elipse e hipérbola. A excepción de la circunferencia, las cónicas se abordan con un grado de dificultad mayor a lo aprendido en secundaria. En la clasificación de Pappus, los temas anteriores (sin la circunferencia) pertenecen a problemas sólidos. En el sexto grado, en Cálculo Diferencial e Integral se imparten temas que involucran curvas de grado superior a las cónicas; lo cual indica que son problemas lineales.

De lo anterior podemos afirmar que los temas de geometría vistos en primaria, secundaria, bachillerato y en el nivel superior, se organizan para que los alumnos vayan teniendo acceso gradualmente a contenidos cada vez más complejos y puedan establecer conexiones entre lo que ya saben y lo que están por aprender. Por lo tanto, la forma en la que se estructuran los temas impartidos en los cursos de geometría obedece a la clasificación de los problemas geométricos de Pappus. Es decir, todo estudiante que ingresa al nivel medio superior ya tiene los métodos, el conocimiento y la capacidad para la resolución de los problemas planos; cuando finalizan el curso de quinto grado en la ENP, los alumnos pueden resolver problemas sólidos, y cuando concluyen Cálculo

Diferencial e Integral o cursos más avanzados de matemáticas en la licenciatura están en condiciones de solucionar problemas lineales.

Es importante mencionar que el *Análisis* es el que permite determinar si un problema es plano, sólido o lineal. De acuerdo con lo mencionado anteriormente, el *Análisis* tiene como primicia que el problema está resuelto, después, se identifican las condiciones necesarias y suficientes para la construcción de éste, y es entonces cuando se determina si es que se requiere de la regla y el compás o de las secciones cónicas o de curvas de grado superior para realizar la construcción. Por lo tanto, el *Análisis* es lo que subyace a la clasificación de los problemas.

Otra cuestión que es necesario explicar es que la clasificación de Pappus para los problemas geométricos en planos, sólidos y lineales no significa que un problema plano se refiera a un problema de la geometría "plana"; es decir, un problema plano no necesariamente se resuelve en la geometría "plana" o en dos dimensiones, si no que puede ser tridimensional. De igual forma, que se trate de un problema sólido no tiene nada que ver con que éste pertenezca a la geometría "sólida" o tridimensional, sino que puede resolverse en dos dimensiones.

El *Libro XIII* de los *Elementos* proporciona y demuestra las construcciones de los cinco poliedros regulares o sólidos platónicos (Tetraedro, Exaedro, Octaedro, Icosaedro y Dodecaedro); sin embargo, a pesar de que un poliedro regular es un cuerpo "sólido" o pertenece a la Geometría en tres dimensiones, para su construcción sólo se requiere de la regla y el compás; por lo que se trata de un problema plano[3]. Por el contrario, el problema de *la trisección del ángulo* (que analizaremos más adelante), que se resuelve en la geometría "plana" requiere para su construcción el uso de curvas más sofisticadas que las líneas rectas y circunferencias; las secciones cónicas, por lo que es un problema sólido.

Para atender el objetivo de esta tesis de analizar un problema planteado hace mucho tiempo, y que representa el nacimiento histórico de la Geometría Analítica, es necesario revisar los temas que se vinculan con esta cuestión y la clasificación de Pappus de los problemas geométricos es parte de ello.

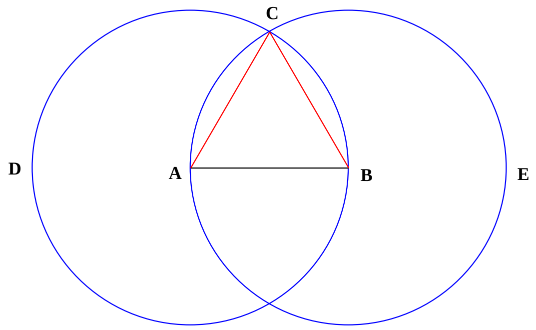
Una vez definido lo que es un problema plano, sólido y lineal, ejemplificaremos un problema plano. La *Proposición 1* del primer Libro de los *Elementos* de Euclides dice:

Proposición I-1. *Construir un triángulo equilátero sobre una recta finita dada.*

---

[3] Aquí debemos mencionar que la geometría de los "*Elementos*" de Euclides consiste en todo aquello que es posible construir usando solamente la regla y el compás. Es precisamente esto lo que imponen los tres primeros postulados de Euclides.

Tenemos una recta. Sea *AB* la recta finita dada, entonces debemos construir sobre la recta *AB* un triángulo equilátero.



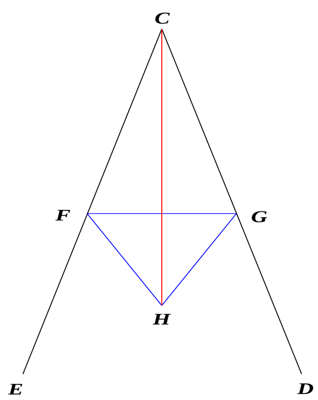
1. Con centro en *A* y radio *AB*, se traza el círculo *BCD* (Postulado 3 del *Libro 1* de los *Elementos*: "Postúlese describir un círculo con cualquier centro y distancia")
2. Con centro en *B* y radio *AB*, se traza el círculo *ACE* (Postulado 3)
3. A partir del punto *C*, donde los círculos se cortan entre sí, se traza las rectas *CA* y *CB* hasta los puntos *A* y *B* (Postulado 1 del *Libro 1* de los *Elementos*: "Postúlese el trazar una línea recta desde un punto cualquiera).

Ahora, el punto *A* es el centro del círculo *BCD*, *AC* = *AB*. El punto *B* es el centro del círculo *ACE*, *CB* = *AB*. Entonces las líneas *AB*, *CA* y *CB* son iguales (*AB* = *CA* = *CB*). Por lo tanto, tenemos el triángulo equilátero *ABC*.

La *Proposición I-1* se refiere a la igualdad (o desigualdad) en el tamaño de segmentos. Otro ejemplo de problema plano es la *Proposición 9* del primer *Libro* que se refiere a bisectar un ángulo:

Proposición I-9. *Dividir en dos partes iguales un ángulo rectilíneo dado.*

Sea *ECD* el ángulo rectilíneo dado. Entonces, hay que dividirlo en dos partes iguales.



1. Se toma al azar un punto *F* en la recta *CE*.

2. Se encuentra en la recta *CD* el punto G, donde *CG* es igual *CF* (Proposición 3 del *Libro 1* de los *Elementos*: "Dadas dos rectas desiguales, quitar de la mayor una recta igual a la menor".
3. Se traza *FG* y se construye el triángulo equilátero *FHG* (Proposición 1 del *Libro 1* de los *Elementos*: "Construir un triángulo equilátero sobre una recta finita dada").
4. Se traza la recta *CH*.

El ángulo *ECD* se ha divido en dos partes iguales por la recta *CH*. Si observamos la recta *CF* es igual a la recta *CG* y *CH* es común a ambas, las dos rectas *CF*, *CH* son iguales respectivamente a las dos rectas *CG*, *CH*. Y la base *FH* es igual a la base *GH*; por lo tanto, el ángulo *FCH* es igual al ángulo *GCH* (Proposición 8 del *Libro 1* de los *Elementos*: "Si dos triángulos tienen dos lados del uno iguales respectivamente a dos lados del otro y tienen también iguales sus bases respectivas, también tendrán iguales los ángulos comprendidos por las rectas iguales). Entonces, el ángulo rectilíneo dado *ECD* ha sido dividido en dos partes iguales por la recta *CH*.

Como se observó anteriormente, los dos problemas son resolubles con regla y compás; empleamos rectas y circunferencias para su *construcción.* Estos problemas planos pueden ser resueltos por alumnos que hayan terminado el ciclo de secundaria.

Si se quisiera dividir un ángulo en 4, 8, 16, 32, 64 partes iguales, no es difícil probar que el problema seguiría siendo plano; pero los antiguos geómetras se plantearon el reto de dividirlo en tres partes iguales y se sorprendieron cuando no pudieron hacerlo con los recursos de la regla y el compás. Lograron dividir un ángulo recto, un llano (dos rectos), y dos llanos (cuatro rectos) en tres partes iguales con rectas y círculos, pero para el caso de un ángulo cualquiera, no encontraron la respuesta.

Dividir en tres partes un ángulo dado, o la *trisección del ángulo*, forma parte de los llamados "tres problemas clásicos de la geometría euclidiana" los cuales se caracterizan por no ser resolubles con regla y compás. En la *Colección Matemática*, Pappus expuso la solución para este problema, pero no con el uso de regla y compás sino con secciones cónicas, lo que lo convierte en un problema sólido.

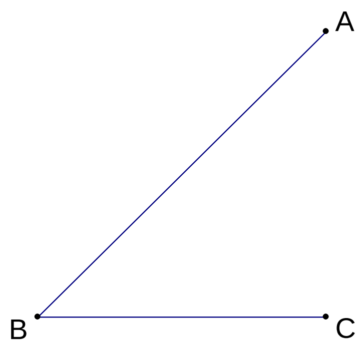
3.2.5. La trisección del ángulo

Revisemos el problema sólido de la *trisección del ángulo*. Se presentan las formas en que Pappus y Viète resolvieron este problema, con el fin de observar las diferencias en el empleo del método del *Análisis* en dos épocas distintas.

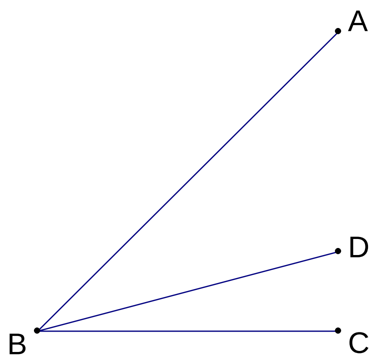
Empecemos con la aplicación del método del *Análisis* de Pappus. Recordemos que el problema consiste en trisectar un ángulo; es decir, dividir un ángulo cualquiera en tres partes iguales. Este problema llamó la atención tal vez por la desconcertante discrepancia entre la sencillez de sus términos y la imposibilidad de resolverlo con los medios elementales de la geometría, imposibilidad tanto más llamativa cuanto que con esos medios podía dividirse un ángulo cualquiera en 2, 4, 8,… partes iguales, y también podían trisectarse algunos ángulos especiales como el recto y el llano.

En el *Libro IV* de la *Colección Matemática*, Pappus plantea la siguiente solución al problema de dividir un ángulo en tres partes iguales.

Se va a trisectar el ángulo $\angle ABC$ mostrado en la siguiente figura:

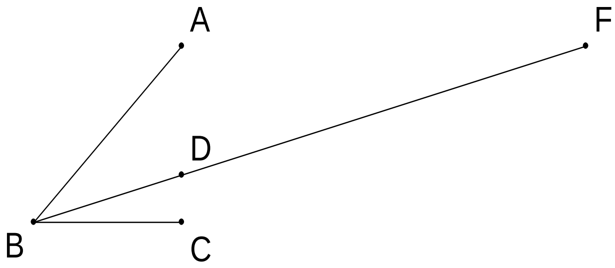


Ahora, suponemos que el problema está resuelto (*Análisis*); es decir, el ángulo $\angle DBC$ es un tercio del ángulo $\angle ABC$.

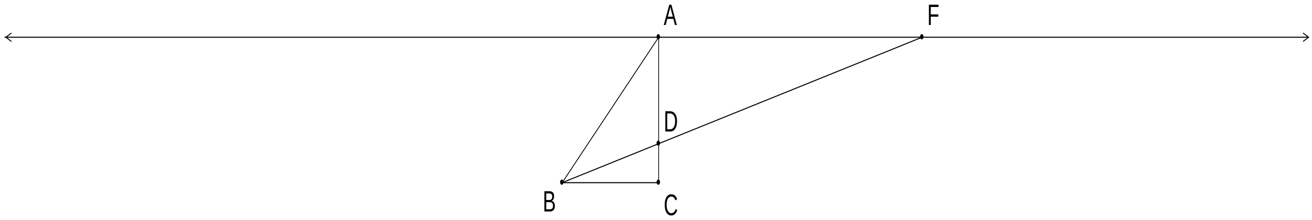


Análisis:

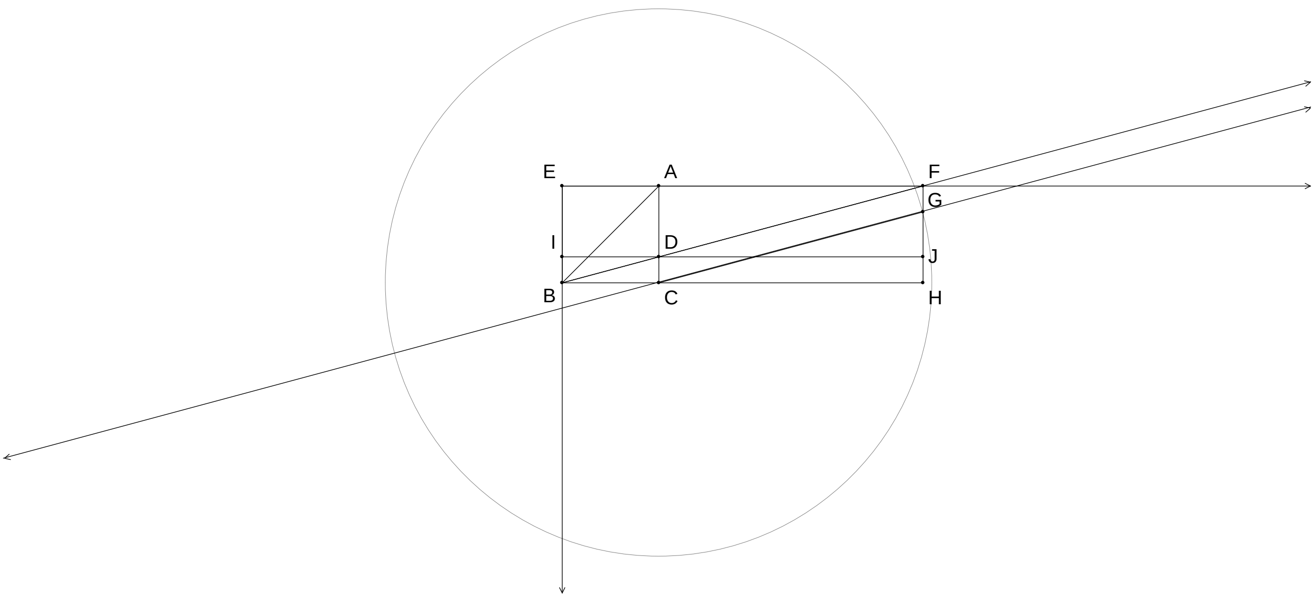
Partimos de la hipótesis que $\boldsymbol{DF} = 2\boldsymbol{AB}$



1. Se traza una paralela a *BC* en *A* y se prolonga.
2. Se traza una perpendicular a *BC* en C, que corte en a *A*.
3. Se traza una recta desde *B* que corte la perpendicular en *D* y la línea paralela a *BC* en *F*.



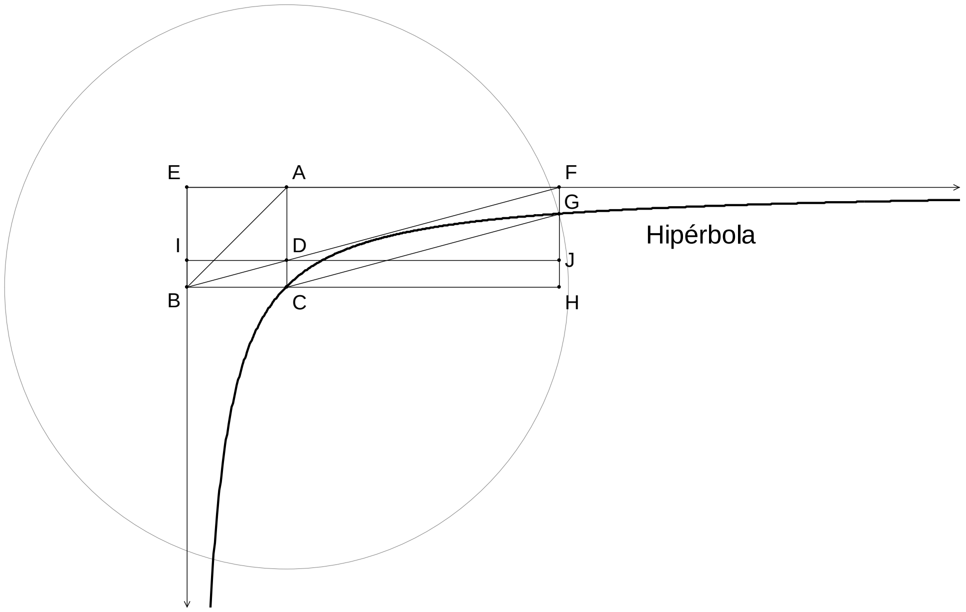
4. Se traza una paralela a *DF* a partir de *C*
5. Con centro en *C,* y radio *DF*, se traza una circunferencia y se encuentra el punto *G* (*CG* = *DF*)
6. Completamos los paralelogramos *EBCA* y *EBHF,* y se traza *IDJ* paralela a *BH*.



7. Entonces, los paralelogramos *EBCA* e *IBHJ* son iguales (en área), y *EC* = *IH, donde:*

$$\frac{EA}{AC} = \frac{IJ}{JH} = \frac{EF}{CD} = \frac{EF}{FG}$$

8. De acuerdo a la *Proposición 4* del *Segundo Libro* de las *Cónicas* de Apolonio (II-4), "*Dadas las asíntotas y un punto de la hipérbola, la hipérbola está determinada*", el punto *G* está en una hipérbola teniendo a *EF* y *EB* como sus asíntotas y, también, pasa por el punto *C.*



Entonces si suponemos que el problema está resuelto, la línea que da una tercera parte del ángulo es una línea *DF* tal que:

$$DF = 2AB$$

De esta solución de Pappus al problema de trisectar un ángulo podemos observar lo siguiente:

Primero, Pappus parte de un problema geométrico (trisectar el ángulo $\angle ABC$).
Segundo, supone resuelto el problema (el ángulo $\angle DBC$ es un tercio del ángulo $\angle ABC$).

$$\angle DBC = \tfrac{1}{3}\angle ABC$$

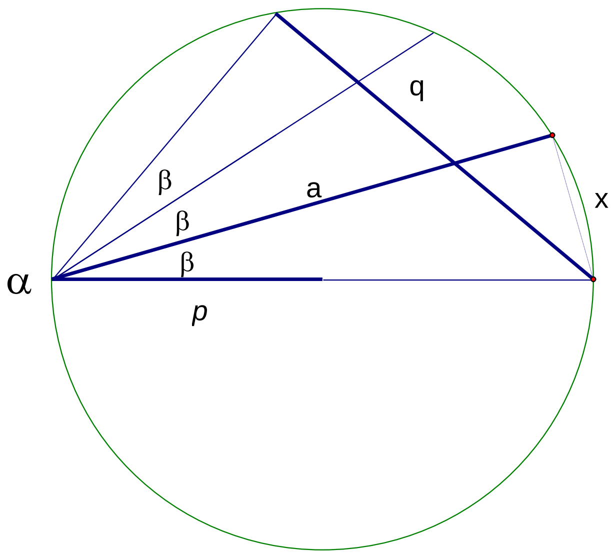
Tercero, reduce el problema geométrico que quiere resolver (trisectar el ángulo $\angle ABC$) a otro problema geométrico que ya sabe resolver (obtener la línea *DF* tal que su magnitud es el doble de la línea *AB*).

$$DF = 2AB$$

Es decir, la solución de Pappus es una solución que inicia con un problema geométrico y finaliza con la solución de un problema geométrico.

Ahora, vamos a presentar para este mismo problema de trisectar un ángulo, la solución siguiendo el método del *Análisis* de Francois Viète, un matemático moderno:

Se va a trisectar el ángulo $\angle\alpha$ inscrito en una circunferencia con radio *ρ*, como se muestra en la siguiente figura:



Viète retoma el método del *Análisis* de los antiguos y, supone que el problema está resuelto; es decir, el ángulo $\angle\beta$ es un tercio del ángulo $\angle\alpha$:

$$\beta = \frac{1}{3}\alpha$$

Tiene como datos la cuerda *q*, que es la cuerda del ángulo α inscrito en la circunferencia, el radio ρ, la cuerda ***x***, que corresponde a la tercera parte del ángulo α y el lado ***a*** que va del vértice del ángulo α a la cuerda ***x***. Entonces, tiene los siguientes datos:

Cuerda = *q*

Radio= ρ

$\alpha = 3\beta$

Por trigonometría[4]

$$sen\ \alpha = \frac{q}{2\rho}$$

$$sen\ \beta = \frac{x}{2\rho}$$

Por Pitágoras:

$$x^2 + a^2 = (2\rho)^2$$

$$a^2 = (2\rho)^2 - x^2$$

$$sen\ \alpha = sen\ 3\beta$$

$$sen\ 3\beta = sen\ (2\beta + \beta)$$

Pero:

$$sen\ (2\beta + \beta) = sen\ 2\beta \cos\beta + \cos 2\beta\ sen\beta$$

$$sen\ 3\beta = sen\ 2\beta \cos\beta + \cos 2\beta\ sen\beta$$

Pero:

$$sen\ 2\beta = 2sen\ \beta \cos\beta$$

$$\cos 2\beta = \cos^2\ \beta - sen^2\ \beta$$

Entonces:

$$sen\ 3\beta = 2sen\ \beta \cos\beta \cos\beta + \left(\cos^2\ \beta - sen^2\ \beta\right) sen\ \beta$$

$$sen\ 3\beta = 2sen\ \beta \cos^2\beta + sen\ \beta \cos^2\ \beta - sen^3\ \beta$$

$$sen\ 3\beta = 3sen\ \beta \cos^2\beta - sen^3\ \beta$$

Pero:

$$sen\ 3\beta = sen\ \alpha = \frac{q}{2\rho}$$

$$sen\ \beta = \frac{x}{2\rho}$$

$$\cos\ \beta = \frac{a}{2\rho}$$

$$\frac{q}{2\rho} = 3\left(\frac{x}{2\rho}\right)\left(\frac{a}{2\rho}\right)^2 - \left(\frac{x}{2\rho}\right)^3$$

[4] Es en este inicio donde puede apreciarse la diferencia entre el nuevo Análisis de Viète y el de Pappus; a diferencia de éste, Viète utiliza funciones trigonométricas apartándose del problema geométrico.

Multiplicando por (2ρ):

$$q = 3x\left(\frac{a^2}{(2\rho)^2}\right) - \frac{x^3}{(2\rho)^2}$$

Pero $a^2 = (2\rho)^2 - x^2$

$$q = 3x\left(\frac{(2\rho)^2 - x^2}{(2\rho)^2}\right) - \frac{x^3}{(2\rho)^2}$$

$$q = \frac{3x(2\rho)^2 - 3x^3}{(2\rho)^2} - \frac{x^3}{(2\rho)^2}$$

$$q = 3x - \frac{3x^3}{(2\rho)^2} - \frac{x^3}{(2\rho)^2}$$

$$q = 3x - \frac{4x^3}{(2\rho)^2} \quad \rightarrow \quad q = 3x - \frac{4x^3}{4\rho^2}$$

$$\boxed{q = 3x - \frac{x^3}{\rho^2}} \text{[5]} \qquad (1)$$

La solución de esta ecuación (1), es lo que permite determinar la solución del problema.

Podemos observar en estas dos soluciones en las que se utiliza el método del *Análisis*, que tanto Pappus como Viète están tratando de resolver el mismo problema. Ambos parten del problema geométrico, pero Pappus encuentra la solución resolviendo un problema más sencillo al problema inicial (trisectar un ángulo), mientras que Viète llega a una ecuación (1), y la solución de esa ecuación le permite trisectar un ángulo.

En la solución de Pappus se resuelve el problema únicamente de forma geométrica, mientras que en la de Viète pasa por tres momentos, los cuales son:

---

[5] El método de solución de Viète a este problema de la trisección del ángulo al emplear funciones trigonométricas, y en específico de la fórmula del seno del ángulo múltiple $sen\ (n\alpha)$ permite dividir cualquier ángulo en *n* partes iguales. Es decir, este algoritmo le permite dividir cualquier ángulo en cualquier número de partes iguales. Por ejemplo, si se quiere dividir en 5 partes iguales el ángulo α de la figura anterior, tendríamos que tomar la fórmula:

$$sen\ 5\alpha = sen\ (3\alpha + 2\alpha) = sen\ 3\alpha \cos 2\alpha + sen\ 2\alpha \cos 3\alpha$$

La cual conduce a la ecuación:

$$q = 5x + \frac{x^5}{\rho^4} - \frac{5x^3}{\rho^2}$$

Para un estudio más profundo de este tema, puede consultarse el texto *Universal Theorems on the Análisis of Angular sections with demonstrations* de *Alexander Anderson.*

- Primer momento: *Zetética.*
- Segundo momento: *Porística.*
- Tercer momento: *Exegética*[6]**.**

En la *Zetética* debemos obtener una ecuación algebraica a partir de buscar la solución de un problema geométrico.

En la *Porística* una vez obtenidas las raíces de la ecuación, debemos constatar que la solución de la ecuación conducirá a la solución del problema geométrico.

Finalmente en la *Exegética,* una vez obtenido el resultado de la ecuación se regresa al problema geométrico para interpretar este resultado.

Una vez ejemplificado el análisis tanto antiguo como moderno en el problema de la trisección del ángulo, se detallará el problema que es el objetivo de esta tesis: el *Problema de Pappus* para cuatro líneas rectas y la solución de Descartes con su método del análisis.

3.3. René Descartes y el método analítico

Analizada la herencia de la geometría griega, y antes de señalar algunos aspectos de los conceptos algebraicos abordados por Descartes retomemos a Viète quien en su texto *Introducción al Arte Analítico* presenta una serie de reglas de operación entre cantidades "abstractas", cuya naturaleza queda subordinada al carácter formal de las leyes que rigen su operación. La notación con letras –consonantes para las cantidades conocidas y vocales para las incógnitas- se utiliza para subrayar el carácter no numérico de las entidades involucradas en las operaciones.

En 1637 Descartes publicó el *Discurso del Método* acompañado de tres ensayos, los *Meteoros*, la *Dióptrica* y la *Geometría*. En la *Geometría* Descartes introduce el álgebra en la geometría y de ahí, nace la Geometría Analítica. Al utilizar el álgebra simbólica como herramienta algorítmica básica, Descartes realiza una nueva lectura de la geometría griega, específicamente en los *Elementos* de Euclides, que supera sus limitaciones y rebasa sus conquistas geométricas. Descartes desarrolla una herramienta para enfrentar y resolver problemas geométricos antiguos y modernos, libera a la geometría de la dependencia de las estructuras geométricas de las figuras y propone una forma de solución a los problemas basada en la aplicación del *Análisis* y con la ayuda del álgebra.

---

[6] Zetética, porística y exegética son palabras con las cuales Viète bautizó a los tres momentos por los que pasa la solución de problemas en su método de *Análisis*.

Esencialmente, el cambio a buscar la solución de una ecuación por la deducción de un conjunto de proposiciones es lo que diferencia el método analítico de Descartes de la forma en que se procede en los *Elementos*.

Por lo tanto, conviene explicar un poco en qué medida la Geometría Analítica recibe su nombre precisamente del método de *Análisis* de los griegos. Como se mencionó antes, en el *Análisis* se asume como cierto aquello que hay que probar. Esto es precisamente un principio que aplica Descartes desde el comienzo de la *Geometría*. Por ejemplo, en el *Libro I* hay una parte que se titula*: "Sobre el procedimiento para acceder a las ecuaciones que sirven para resolver los problemas,"*[7] en la que Descartes escribe:

> «Si pues, deseamos resolver un problema, inicialmente debe suponerse efectuada la resolución...»

Después, define con la aplicación de su método del *Análisis* el planteamiento y resolución de ecuaciones que corresponden a los problemas planos. Desarrolla nuevamente lo mencionado arriba (suponer el problema resuelto) y, además denomina con letras a todos los segmentos que parecen necesarios para representar los datos del problema, tanto los conocidos como los desconocidos, determina la ecuación entre las longitudes conocidas y las desconocidas, y al resolver la ecuación resultante, construye geométricamente la solución. Se trata de un método de resolución de problemas geométricos donde se transita de forma reversible de la geometría al álgebra y del álgebra a la geometría.

En la *Geometría* expone la solución del *Problema de Pappus* para cuatro líneas, donde introduce el primer sistema de coordenadas de la geometría. Es en este problema donde puede observarse la potencialidad del método analítico cartesiano en geometría en un asunto que desbordó a lo largo de los siglos las posibilidades del *Análisis*.

Al inicio de la respuesta al *Problema de Pappus*, puede observarse que Descartes utiliza el *Análisis* para la solución del problema. Esto se afirma porque al iniciar la solución menciona:

> *"En primer lugar, supongo resuelto el problema"*[8]

La innovación de Descartes radica en expresar todas las magnitudes involucradas en un problema como longitudes de líneas, lo que hace posible que los términos involucrados en este primer paso permitan hacer del *Análisis* la condición de la conversión del problema geométrico en un problema algebraico o en una ecuación. En un principio, Descartes supone que conoce las cantidades desconocidas con el fin de obtener una expresión

[7] DESCARTES, René. El Discurso del Método, la Geometría, p 282. Alfaguara, Madrid, 1981.
[8] Ibit.

algebraica que establezca la relación de dependencia de unas con otras, y después se plantea el objetivo de averiguar el valor de las cantidades desconocidas. Esto último es lo que le permite efectuar la *Síntesis* requerida en el problema.

Se puede afirmar que la solución al *Problema de Pappus* descrita en la *Geometría* es una de las cuestiones más importantes en el desarrollo de las matemáticas, es uno de los momentos en que se plantea claramente el paso de la gráfica de una curva a su expresión simbólica que, por lo tanto, es el nacimiento de la Geometría Analítica.

Ahora, hay que aclarar una cuestión, la solución planteada en los *Libros 1* y *2* es para un *Problema de Pappus* de cuatro líneas; es decir, se restringe a un problema *plano*, ya que en la solución se obtiene una ecuación de segundo grado, en ***x*** y ***y,*** lo cual representa una cónica, y también se requiere determinar una raíz cuadrada o un número elevado al cuadrado, lo cual es posible con regla y compás (con la media proporcional). A partir del procedimiento de la solución puede desprenderse el desarrollo de la mayoría de los temas de Geometría Analítica, y proponer una forma de abordar la enseñanza-aprendizaje, contemplado en el programa de Matemáticas V de la ENP, objetivo de esta tesis.

3.4. Respuesta al *Problema de Pappus*

En el *Libro I* de la *Geometría* Descartes inicia con una advertencia para el lector:

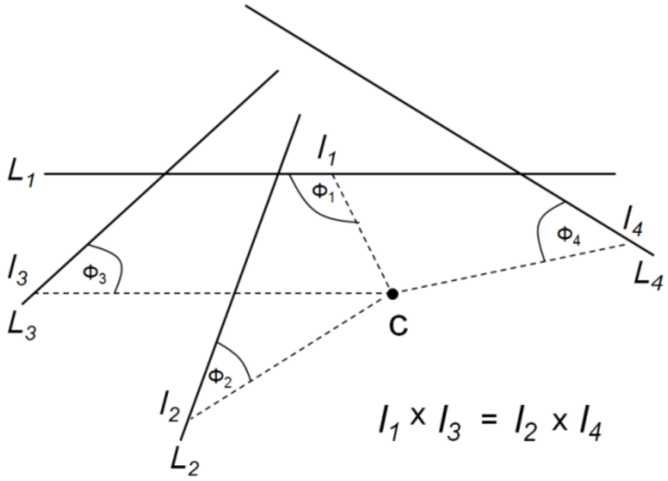
> *"Hasta aquí he intentado que cualquier persona pudiera entender mis escritos; sin embargo, temo que este tratado no podrá ser leído sino por aquellos que ya tienen conocimientos de lo que se expone en los estudios de geometría, pues considerando que incluyen verdades muy correctamente demostradas que me han sido de gran utilidad, he considerado superfluo repetirlas. "*

Esta advertencia indica que Descartes estaba consciente de la dificultad que podía tener la lectura de su documento, ya que en sus desarrollos, omitió muchos de los pasos intermedios. En las notas referentes al ensayo de la *Geometría* de la edición de Alfaguara (p 477), se menciona la posible explicación de esto:

> *"Tales dificultades aumentaban al no facilitar los pasos intermedios bien por evitar pérdida de tiempo, o bien por evitar críticas"*

El *Problema de Pappus* para cuatro rectas que Descartes resolvió en la *Geometría*, es descrito como sigue:

"Teniendo cuatro rectas dadas en posición[9] (L_1, L_2, L_3 y L_4)[10], se intenta hallar, un punto (C) desde el cual se pudiesen trazar cuatro líneas rectas (l_1, l_2, l_3 y l_4), una sobre cada uno de las dadas, formando ángulos dados (φ_1, φ_2, φ_3 y φ_4) de modo que el paralelogramo formado por dos de las trazadas desde el mismo punto (esto es, el producto de estos dos segmentos) guarde una proporción dada con el paralelogramo formado por el producto de las otras dos".

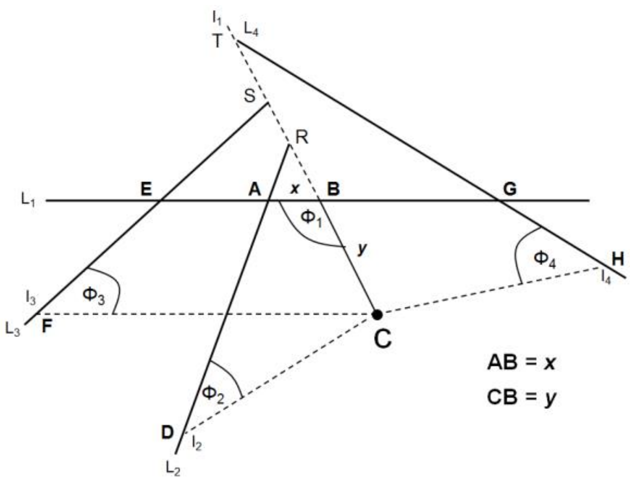


Descartes afirma en primer lugar, que la solución de este caso de tres o cuatro rectas se puede determinar mediante la geometría simple (retomando la clasificación de Pappus, se trata de un problema plano), es decir, utilizando sólo regla y compás. En segundo lugar, afirma que los puntos que resuelven el problema se encuentran todos en alguna de las tres secciones cónicas (parábola, elipse e hipérbola) y, en algunas ocasiones, en la circunferencia o en una línea recta.

Para la solución de este problema supone que el *problema está resuelto* (*Análisis*); después refiere que tomará para la resolución una de las líneas dadas y una de las que va a determinar. Rotula las intersecciones de las cuatro líneas dadas (en: *A, B, D*, *E, F, G* y *H*) y posteriormente toma una de las rectas dadas; el segmento *AB* de la recta L_1, el cual denomina ***x*** y elige una de las que hay que determinar; al segmento *CB* o la línea l_1, le llama ***y***. Prolonga la línea l_1 de modo que se intersecte con las otras rectas dadas en posición (en *R, S* y *T* respectivamente).

[9] En posición significa:
1. Que se conocen los puntos donde se cortan las líneas.
2. Que se conocen en magnitud los ángulos que se forman.

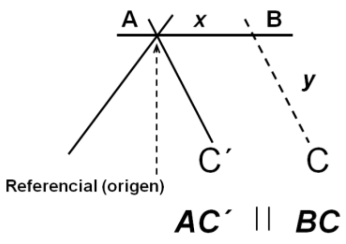
[10] Por lo tanto, las líneas *(L_1, L_2, L_3 y L_4)* están dadas en posición, y no en magnitud.



Una vez que a las líneas, los ángulos y las intersecciones se les han asignado letras, podemos observar que las rectas que va a emplear para determinar la solución son la recta L_1 (que es conocida) y la recta l_1 (que es desconocida)[11]. De esta forma, estas dos rectas son sus líneas de *referencia* con las cuales va a determinar la longitud de todas las demás. Descartes introduce un sistema de coordenadas eligiendo a ***x*** (L_1) y ***y*** (l_1); es decir, el sistema de coordenadas es intrínseco al problema.

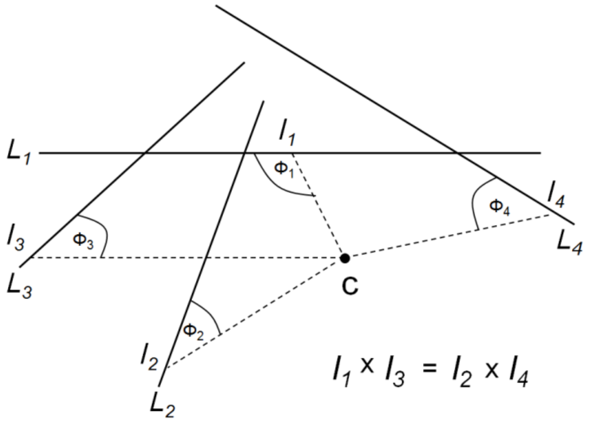
En la *Geometría*, en la figura referida al *Problema de Pappus*, Descartes no especifica dónde está ubicado el "eje" **y**. La línea l_1 la cual es nombrada **y**, indica que es la ordenada del punto *C*; por lo tanto, si trazamos una paralela a l_1 que pase por el punto *A*, determinamos el eje ***y:***

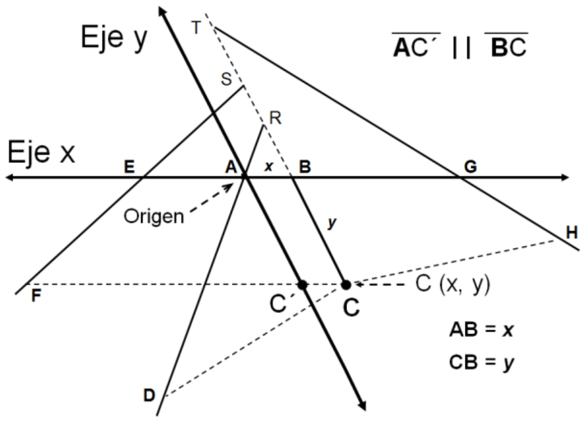
> *"Que el segmento de la línea **AB** que está entre los puntos **A** y **B** sea denominado **x** y que el de **CB** sea denominado **y**",* nos indica que Descartes presenta una referencia (**REFERENCIAL**) como un ordenamiento[12].



Descartes no considera tomar un ángulo recto (90°) entre las líneas ***AB*** y ***CB*** como lo hacemos actualmente, ya que su sistema de coordenadas (ejes cartesianos) se basa en una **referencia**; es decir, es el caso general (el ángulo *CBA* = Φ_1 puede tener el valor de cualquier real positivo). En la figura de la derecha, se puede observar el eje ***y***.

[11] Estas líneas de referencia se convertirán en los ejes coordenados, durante el desarrollo de la solución del problema, lo cual juega un papel importante en el desarrollo de la Geometría Analítica.
[12] Descartes y la ciencia del siglo XVII. Carlos Álvarez J. Edit. siglo XXI. Pp 77.

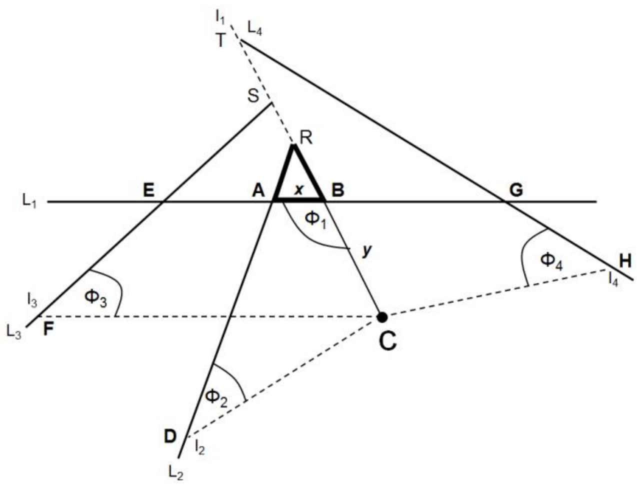




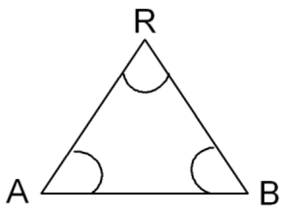
Vamos a empezar el análisis con las líneas *AB* y *CB* (***L₁*** y ***l₁***) es decir, *AB* fue dada y *CB* la vamos a calcular. Procederemos a encontrar la longitud ***y*** que define en este sistema general de ejes coordenados la "posición" del punto "***C***" (o el conjunto de puntos "***C***") que satisface la condición del problema (el **lugar geométrico**).

Cálculo de *CB*

El triángulo *ABR* en la siguiente figura es conocido en *especie*[13] por lo que, para determinar la recta *CB*, Descartes toma este triángulo que está dado en especie.



En el triángulo ***ABR***.



[13] Dos figuras pertenecientes a la misma especie son semejantes en la forma que tienen

Los ángulos son: ***ABR***, ***BAR*** *y* ***ARB:***

ABR = *Es el suplemento de* ϕ_1.

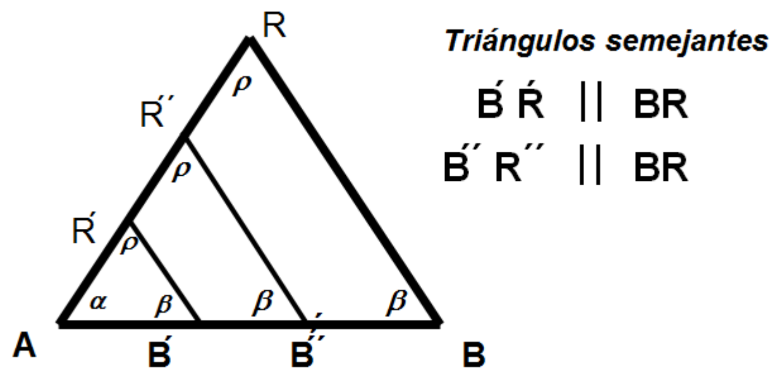
BAR = *Está formado por dos líneas dadas en posición (L1 y L2).*

ARB = *Es el suplemento de ABR y BAR.*

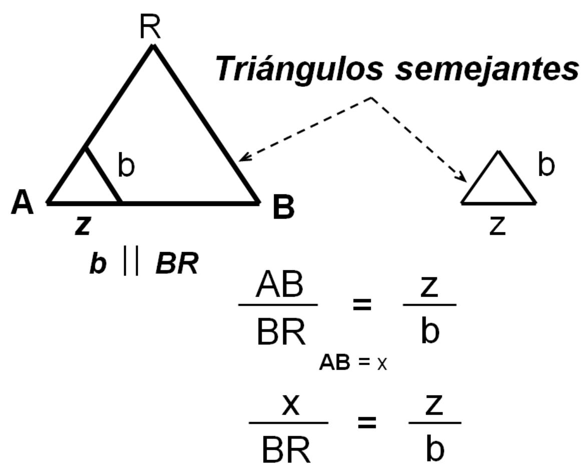
La razón entre los lados AB y BR es conocida, es decir:

$$\frac{AB}{BR} = \frac{sen\ ARB}{sen\ BAR}$$

Tomamos $\frac{AB}{BR}$. Al revisar esta razón podemos observar que aunque aumente o disminuya la longitud de los lados, el valor de la razón y el valor de sus ángulos no cambian, pongamos nombre a los ángulos del triángulo.



Esta razón de los lados *AB* y *BR* es así conocida y, si tomamos una cantidad "*z*" como parámetro, puede encontrarse la magnitud "*b*" como la cuarta proporcional.



La *homogeneidad* entre estas magnitudes *AB*, *BR*, *z* y *b*, permiten transformar esta expresión, ya que lo que queremos es calcular a *CB* = l_1, despejamos a *BR* y tenemos una parte de *CB* o l_1, o más bien su prolongación.

$$\frac{x}{BR} = \frac{z}{b}$$

$$BR = \frac{b\,x}{z}$$

por lo tanto:

$$CR = CB + BR$$

$$CR = y + \frac{b}{z}x$$

CB y *BR* tienen signo positivo, pero si *R* estuviese entre *C* y *B* la expresión sería:

$$CR = y - \frac{b}{z}x$$

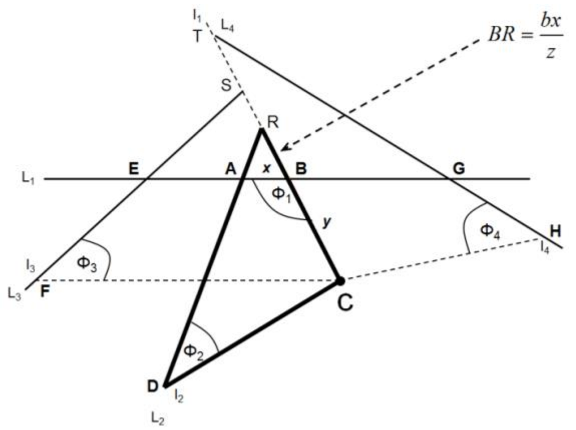
y si *C* se encontraría entre *B* y *R* sería:

$$CR = \frac{b}{z}x - y$$

El cambio en los signos de las expresiones anteriores indica que Descartes no tomó en cuenta sólo la longitud de los segmentos sino también su sentido a partir del punto de referencia (origen) del sistema de ejes.

Cálculo de *CD*

Para determinar la línea *CD* empleamos el triángulo ***CDR***:



Tomamos $\frac{CD}{CR}$. Nuevamente, al revisar esta razón podemos observar que aunque aumente o disminuya la longitud de los lados, el valor de la razón y el valor de sus ángulos no cambian. Esta razón de los lados *CD* y *CR* es así conocida y si tomamos nuevamente la cantidad "*z*" (como parámetro) se puede determinar la magnitud "*c*" como la cuarta proporcional.

$$\frac{CR}{CD} = \frac{z}{c}$$

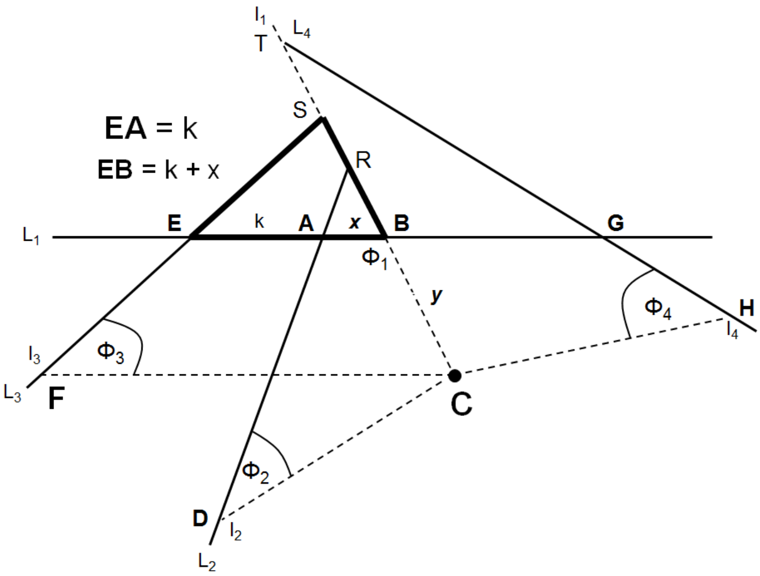
$$CD = \frac{c\,CR}{z} \quad , \qquad \text{pero} \qquad CR = \frac{bx + zy}{z}$$

entonces, la línea buscada *CD* es igual a:

$$\boxed{CD = \frac{bcx + czy}{z^2}}$$

Cálculo de *CF*

Puesto que las líneas *AB* (L_1), *AD* (L_2) *y EF* (L_3) están dadas en posición, la distancia que hay entre *A* y *E* también es conocida (también por los ángulos), si a tal distancia la llamamos "*k*", entonces *EA* = *k*, y *EB* = *k* + *x* (aunque *EB* podría ser *x* – *k* o *k* – *x* dependiendo de la ubicación de los puntos *E*, *A* y *B*), podemos entonces tomar el triángulo *EBS.*



ES se encuentra en la recta L_3, *EB* = *k* + *x*, por lo tanto, debemos calcular *BS***.** Determinamos la razón entre los lados *EB* y *BS*.

Tomamos $\frac{EB}{BS}$. Esta razón de los lados *EB* y *BS* es así conocida, tomando a "*z***"** determinamos "*d*" como la cuarta proporcional.

$$\frac{EB}{BS} = \frac{z}{d}$$

$$BS = \frac{d\;EB}{z}, \qquad \text{pero} \qquad EB = x + k$$

entonces, *BS* es:

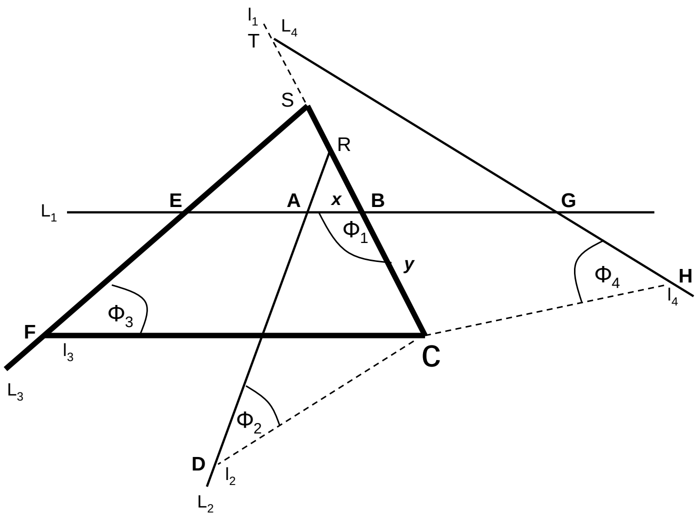
$$BS = \frac{dx + dk}{z}$$

y como sabemos que el segmento *CS* es:

$$CS = CB + BS$$

$$CS = y + \frac{dx + dk}{z} \qquad \text{o} \qquad \boxed{CS = \frac{dx + zy + dk}{z}}$$

Ahora, analicemos el triángulo *CFS*:



FS se encuentra en la recta L_3, *CS* la obtuvimos anteriormente, la recta que buscamos es $CF = l_3$. Debemos encontrar la razón entre los lados *CS* y *CF*.

La razón $\frac{CS}{CF}$ es conocida, obtenemos la cuarta proporcional *"e"* tomando a *"z"*.

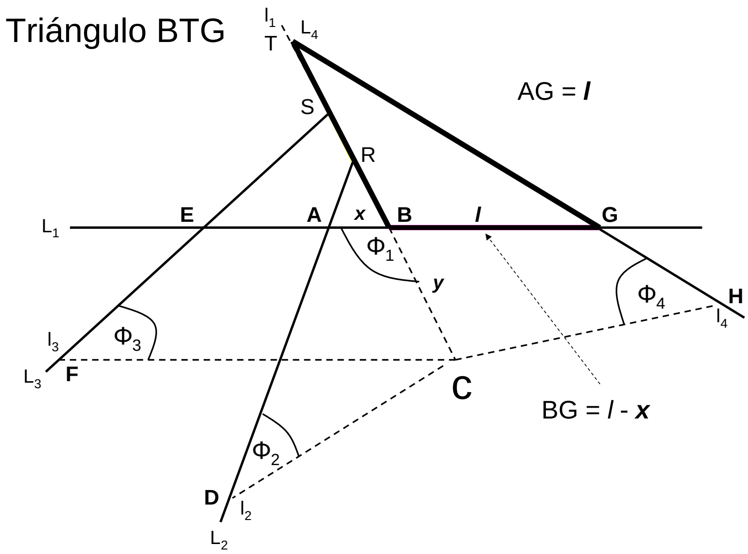
$$\frac{CS}{CF} = \frac{e}{z}$$

$$CF = \frac{e\,CS}{z}, \quad \text{pero} \quad CS = \frac{dx + zy + dk}{z}$$

$$\boxed{CF = \frac{dex + ezy + dek}{z^2}}$$

Cálculo de *CH*

Si llamamos al segmento *AG* = *ℓ* (la distancia *AG*), entonces *BG* = *ℓ - x* Podemos hacer esto porque *AG* es una distancia conocida (debido a que el punto *A* es la intersección de L_1 y L_2 y *G* es la intersección de L_1 y L_4). Tomemos el triángulo *BTG*:



De la razón $\frac{BG}{BT}$, encontramos la cuarta proporcional *"f"* introduciendo *"z"*

$$\frac{BG}{BT} = \frac{z}{f}$$

$$BT = \frac{f\ BG}{z}, \quad \text{pero} \quad BG = \ell - x$$

entonces

$$BT = \frac{-fx + fl}{z}$$

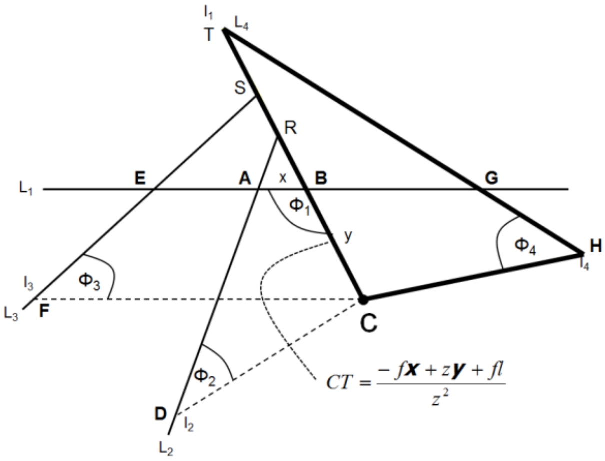
La línea completa *CT* es:

$$CT = CB + BT$$

o

$$CT = y + \frac{-fx + fl}{z} \qquad \rightarrow \qquad \boxed{CT = \frac{-fx + zy + fl}{z}}$$

Ahora, analicemos el triángulo *CHT* para determinar *CH*:



TH es L_4 que está dada en posición, *CT* la calculamos anteriormente y *CH* es l_4 que es la que necesitamos obtener. Del triángulo *CTH*, tomamos la razón $\frac{CT}{CH}$ y determinamos el valor de *CH* con la cuarta proporcional *"g"*.

$$\frac{CT}{CH} = \frac{z}{g}$$

$$CH = \frac{g\,CT}{z}, \quad \text{pero} \quad CT = \frac{-fx + zy + fl}{z}$$

$$\boxed{CH = \frac{-fgx + gzy + fgl}{z^2}}$$

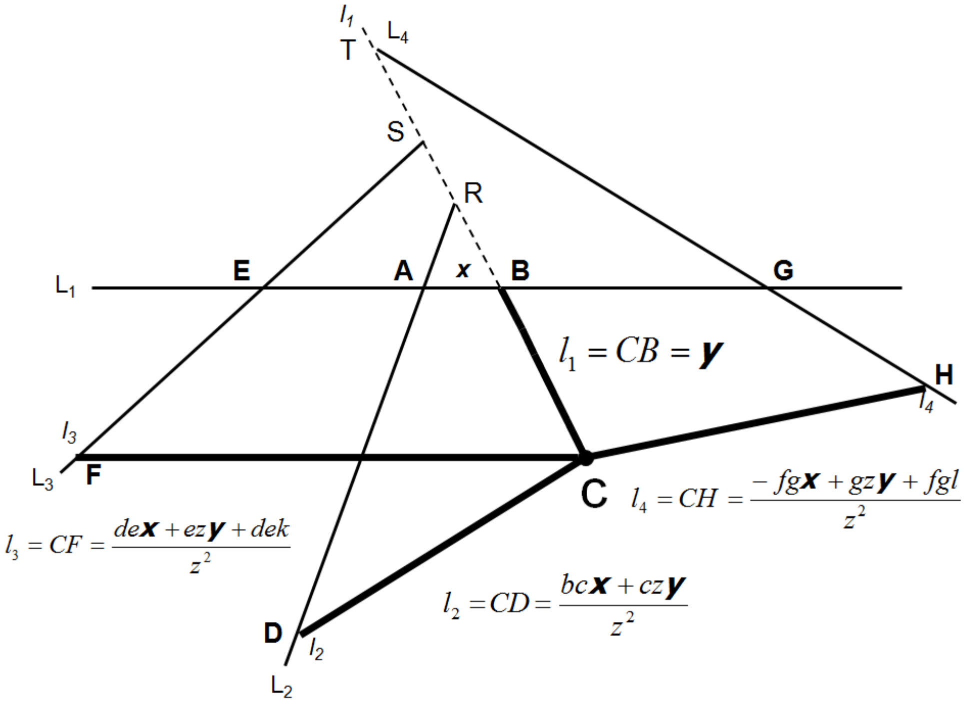
De esta manera tenemos las cuatro líneas *CB, CD, CF y CH*, las cuales son:

$$CB = y \quad \text{--------------------------------}\blacktriangleright \quad CB = y$$

$$CD = \frac{bcx + czy}{z^2} \quad \text{--------------------------------}\blacktriangleright \quad CD = \frac{bc}{z^2}x + \frac{c}{z}y$$

$$CF = \frac{dex + ezy + dek}{z^2} \quad \text{--------------------------------}\blacktriangleright \quad CF = \frac{de}{z^2}x + \frac{e}{z}y + \frac{dek}{z^2}$$

$$CH = \frac{-fgx + gzy + fgl}{z^2} \quad \text{--------------------------------}\blacktriangleright \quad CH = -\frac{fg}{z^2}x + \frac{g}{z}y + \frac{fgl}{z^2}$$



Si observamos las expresiones de las cuatro líneas, son de la forma:

$$l_i = \alpha_i \boldsymbol{x} + \beta_i \boldsymbol{y} + \gamma_i$$ [14]

Es decir:

$CB = y$ ----------------------------▶ $l_1 = CB = y$

$CD = \frac{bc}{z^2}x + \frac{c}{z}y$ ----------------------------▶ $l_2 = CD = \alpha_2 \boldsymbol{x} + \beta_2 \boldsymbol{y}$

$CF = \frac{de}{z^2}x + \frac{e}{z}y + \frac{dek}{z^2}$ ----------------------------▶ $l_3 = CF = \alpha_3 \boldsymbol{x} + \beta_3 \boldsymbol{y} + \gamma_3$

$CH = -\frac{fg}{z^2}x + \frac{g}{z}y + \frac{fgl}{z^2}$ ----------------------------▶ $l_4 = CH = -\alpha_4 \boldsymbol{x} + \beta_4 \boldsymbol{y} + \gamma_4$

Una de las condiciones iniciales del problema es que si el punto *C* (o el conjunto de puntos *C*) es la solución, entonces el producto de dos de las líneas es igual al producto de las otras dos.

Vamos a realizar el producto de las rectas anteriores mediante la siguiente expresión:

$$CB \cdot CF = CD \cdot CH$$

[14] Descartes y la ciencia del siglo XVII. Carlos Álvarez J. Edit siglo XXI. pp 48.

$$y(\alpha_3\boldsymbol{x}+\beta_3\boldsymbol{y}+\gamma_3)=(\alpha_2\boldsymbol{x}+\beta_2\boldsymbol{y})(-\alpha_4\boldsymbol{x}+\beta_4\boldsymbol{y}+\gamma_4)$$

$$\alpha_3\boldsymbol{xy}+\beta_3\boldsymbol{y^2}+\gamma_3\boldsymbol{y}=-\alpha_2\alpha_4\boldsymbol{x^2}+\alpha_2\beta_4\boldsymbol{xy}+\alpha_2\gamma_4\boldsymbol{x}-\alpha_4\beta_2\boldsymbol{xy}+\beta_2\beta_4\boldsymbol{y^2}+\beta_2\gamma_4\boldsymbol{y}$$

$$\beta_3\boldsymbol{y^2}-\beta_2\beta_4\boldsymbol{y^2}=-\alpha_2\alpha_4\boldsymbol{x^2}+\alpha_2\beta_4\boldsymbol{xy}-\alpha_4\beta_2\boldsymbol{xy}-\alpha_3\boldsymbol{xy}+\alpha_2\gamma_4\boldsymbol{x}+\beta_2\gamma_4\boldsymbol{y}-\gamma_3\boldsymbol{y}$$

$$(\beta_3-\beta_2\beta_4)\boldsymbol{y^2}=-\alpha_2\alpha_4\boldsymbol{x^2}+(\alpha_2\beta_4-\alpha_4\beta_2-\alpha_3)\boldsymbol{xy}+\alpha_2\gamma_4\boldsymbol{x}+(\beta_2\gamma_4-\gamma_3)\boldsymbol{y}$$

Despejando a $\boldsymbol{y^2}$:

$$\boldsymbol{y^2}=\frac{-\alpha_2\alpha_4\boldsymbol{x^2}-(\alpha_4\beta_2+\alpha_3-\alpha_2\beta_4)\boldsymbol{xy}+\alpha_2\gamma_4\boldsymbol{x}+(\beta_2\gamma_4-\gamma_3)\boldsymbol{y}}{\beta_3-\beta_2\beta_4}$$

o bien:

$$\boldsymbol{y^2}=-\frac{\alpha_2\alpha_4}{\beta_3-\beta_2\beta_4}\boldsymbol{x^2}-\frac{\alpha_4\beta_2+\alpha_3-\alpha_2\beta_4}{\beta_3-\beta_2\beta_4}\boldsymbol{xy}+\frac{\alpha_2\gamma_4}{\beta_3-\beta_2\beta_4}\boldsymbol{x}+\frac{\beta_2\gamma_4-\gamma_3}{\beta_3-\beta_2\beta_4}\boldsymbol{y}$$

Realizamos las siguientes sustituciones ya que todas ellas son cantidades dadas:

$$\alpha=\frac{\alpha_2\alpha_4}{\beta_3-\beta_2\beta_4}\qquad 2\beta=\frac{\alpha_4\beta_2+\alpha_3-\alpha_2\beta_4}{\beta_3-\beta_2\beta_4}\qquad \gamma=\frac{\alpha_2\gamma_4}{\beta_3-\beta_2\beta_4}\qquad 2\delta=\frac{\beta_2\gamma_4-\gamma_3}{\beta_3-\beta_2\beta_4}$$

tenemos:

$$\boldsymbol{y^2}=-\alpha\boldsymbol{x^2}-2\beta\boldsymbol{xy}+\gamma\boldsymbol{x}+2\delta\boldsymbol{y}$$

Si de la ecuación anterior, factorizamos a $\boldsymbol{y}$:

$$\boldsymbol{y^2}-2\delta\boldsymbol{y}+2\beta\boldsymbol{xy}=-\alpha\boldsymbol{x^2}+\gamma\boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{y^2}-2(\delta\boldsymbol{y}-\beta\boldsymbol{xy})=-\alpha\boldsymbol{x^2}+\gamma\boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{y^2}-2(\delta-\beta\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}=-\alpha\boldsymbol{x^2}+\gamma\boldsymbol{x}$$

completando cuadrados:

$$\boldsymbol{y^2}-2(\delta-\beta\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}+\left[\frac{-2(\delta-\beta\boldsymbol{x})}{2}\right]^2=-\alpha\boldsymbol{x^2}+\gamma\boldsymbol{x}+\left[\frac{-2(\delta-\beta\boldsymbol{x})}{2}\right]^2$$

$$[\boldsymbol{y}-(\delta-\beta\boldsymbol{x})]^2=-\alpha\boldsymbol{x^2}+\gamma\boldsymbol{x}+(\delta-\beta\boldsymbol{x})^2$$

o bien:

$$[\boldsymbol{y}-(\delta-\beta\boldsymbol{x})]^2=-\alpha\boldsymbol{x^2}+\gamma\boldsymbol{x}+\delta^2-2\delta\beta\boldsymbol{x}+\beta^2\boldsymbol{x^2}$$

$$[\boldsymbol{y}-(\delta-\beta\boldsymbol{x})]^2=(\beta^2-\alpha)\boldsymbol{x}^2+(\gamma-2\delta\beta)\boldsymbol{x}+\delta^2$$

despejando a ***y***:

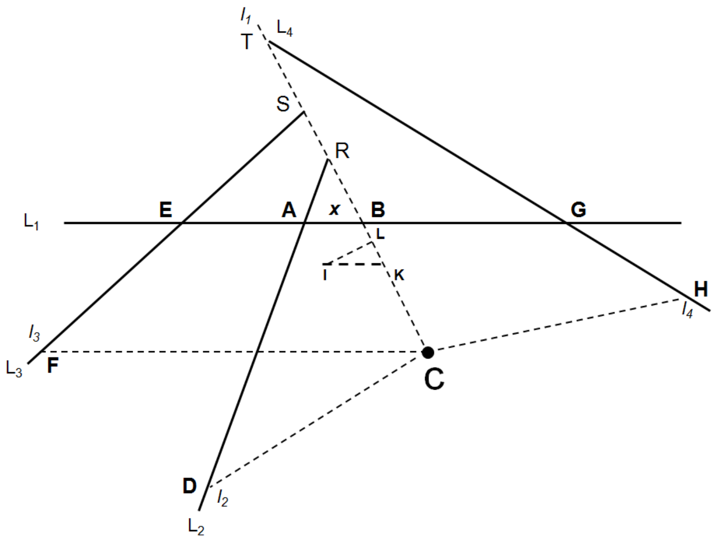
$$\boldsymbol{y}-(\delta-\beta\boldsymbol{x})=\sqrt{(\beta^2-\alpha)\boldsymbol{x}^2+(\gamma-2\delta\beta)\boldsymbol{x}+\delta^2} \quad [15]$$

$$\boxed{\boldsymbol{y}=\delta-\beta\boldsymbol{x}+\sqrt{(\beta^2-\alpha)\boldsymbol{x}^2+(\gamma-2\delta\beta)\boldsymbol{x}+\delta^2}}$$

Ésta debe ser la magnitud de la recta ***y*** (*CB*), la cual determina la coordenada del punto *C* en ***y***, quedando ***x*** indeterminada[16].

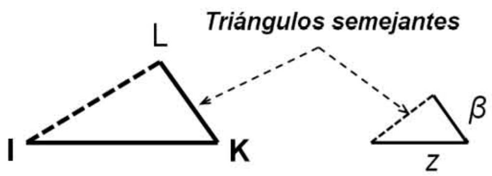
Una vez obtenido algebraicamente el valor de *CB*, ahora procederemos a su construcción geométrica. Como se realizó en la resolución geométrica, utilizamos triángulos para determinar ***y***.

Regresando a la figura, trazamos ***KI*** igual y paralela a *AB*= *x*



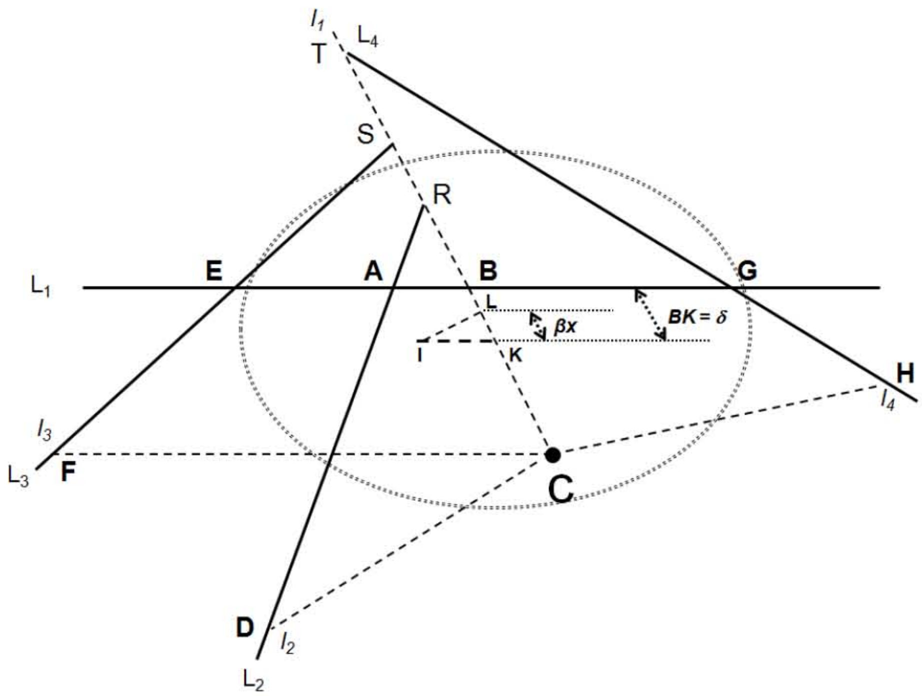
De la recta *CB (y)* obtenemos el segmento *BK* igual a δ, y se traza *IL.* La razón de los lados del triángulo *IKL* puede ser conocida; nuevamente si tomamos una cantidad "*z*" (como parámetro), podemos encontrar la magnitud "β" como la cuarta proporcional.

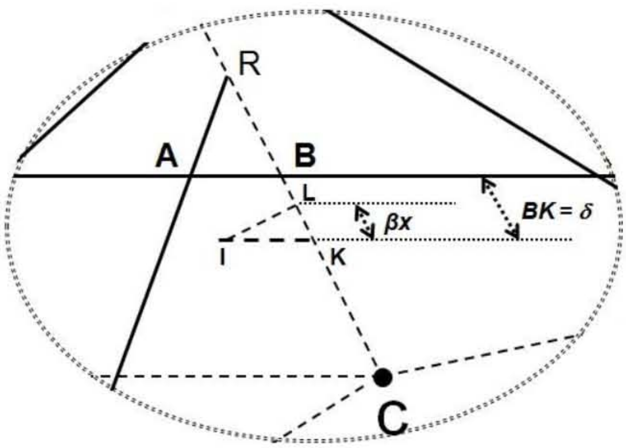
[15] En la *Geometría* Descartes toma la raíz positiva del radical; sin embargo, si se eligiera la raíz negativa, entonces se obtendría otro lugar geométrico. En este desarrollo, también elegimos la raíz positiva.
[16] Esto podría ser una de las primeras definiciones de "función" en la historia de las matemáticas.



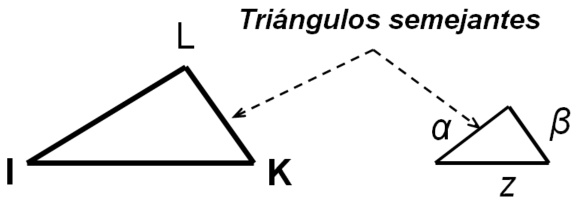
$$\frac{KI}{KL} = \frac{z}{\beta}, \quad \text{pero} \quad z = 1, \quad \text{entonces:} \quad \frac{KI}{KL} = \frac{1}{\beta}$$

$$KL = \beta x$$





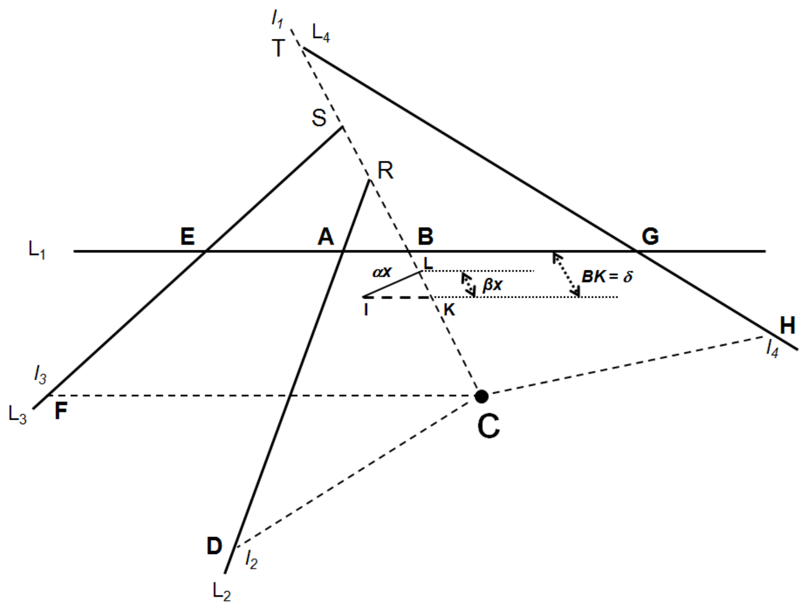
De la misma forma conocemos la proporción entre *KL* e *IL,*

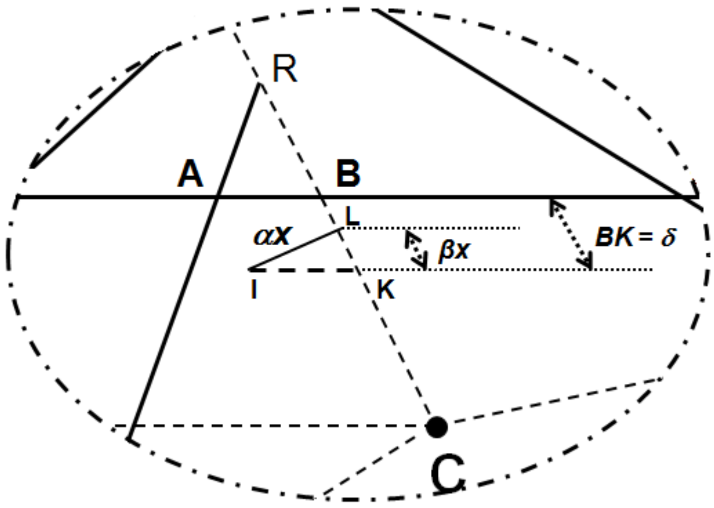


$$\frac{KL}{IL} = \frac{\beta}{\alpha}$$

$$IL = \frac{KL\,\alpha}{\beta}, \quad \text{pero} \quad KL = \beta x \quad \rightarrow \quad IL = \frac{(\beta x)\alpha}{\beta}$$

$$IL = \alpha x$$





De este modo se establece el punto *K* entre *L* y *C* debido a que la ecuación está dada como − *βx*; si hubiéramos obtenido + *βx* se establecería que *L* está entre *K* y *C*, y no se hubiera trazado si *βx* = *0*.

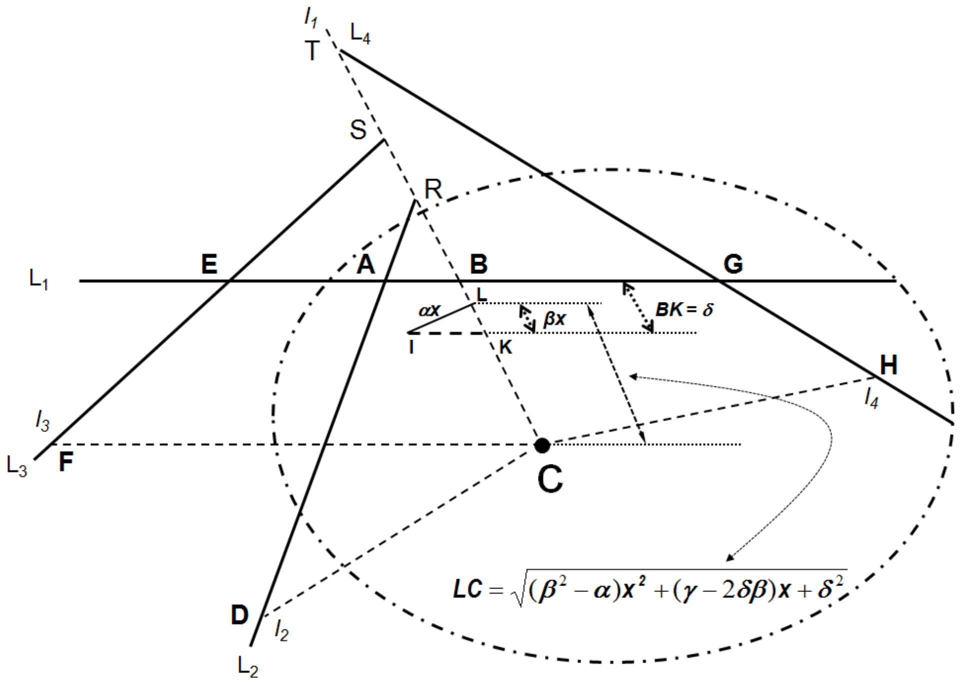
Ahora, como: $$y = BC = BK - KL + LC$$

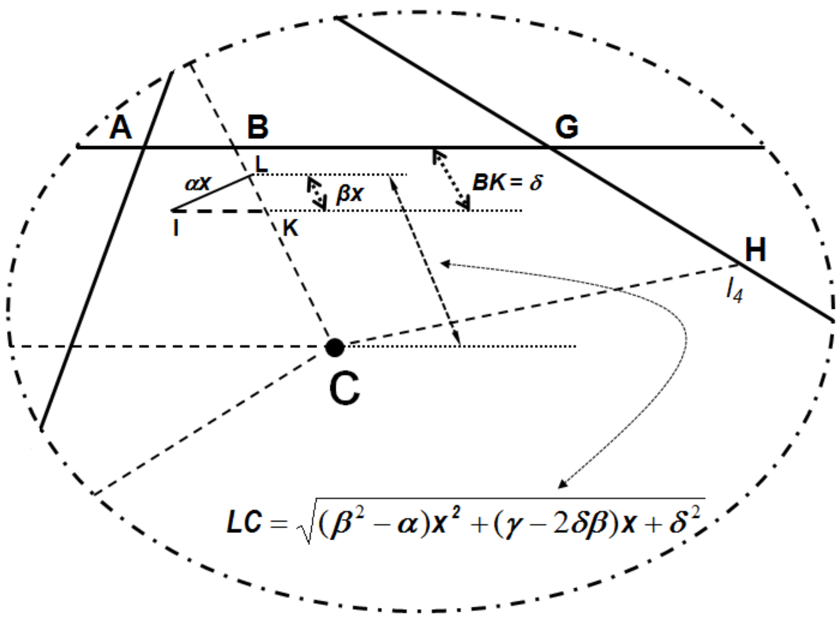
Puede verse que $$y = BC = \delta - \beta x + LC$$

y se obtiene que:

$$LC = \sqrt{(\beta^2 - \alpha)x^2 + (\gamma - 2\delta\beta)x + \delta^2}$$

Estas expresiones pueden observarse en la siguiente figura:





A partir de *LC* Descartes determinó el tipo de lugar geométrico con el criterio del discriminante:

$$\text{Si} \quad \begin{cases} \beta^2 - \alpha = 0 & \rightarrow Parábola \\ \beta^2 - \alpha > 0 & \rightarrow Hipérbola \\ \beta^2 - \alpha < 0 & \rightarrow Elipse \end{cases}$$

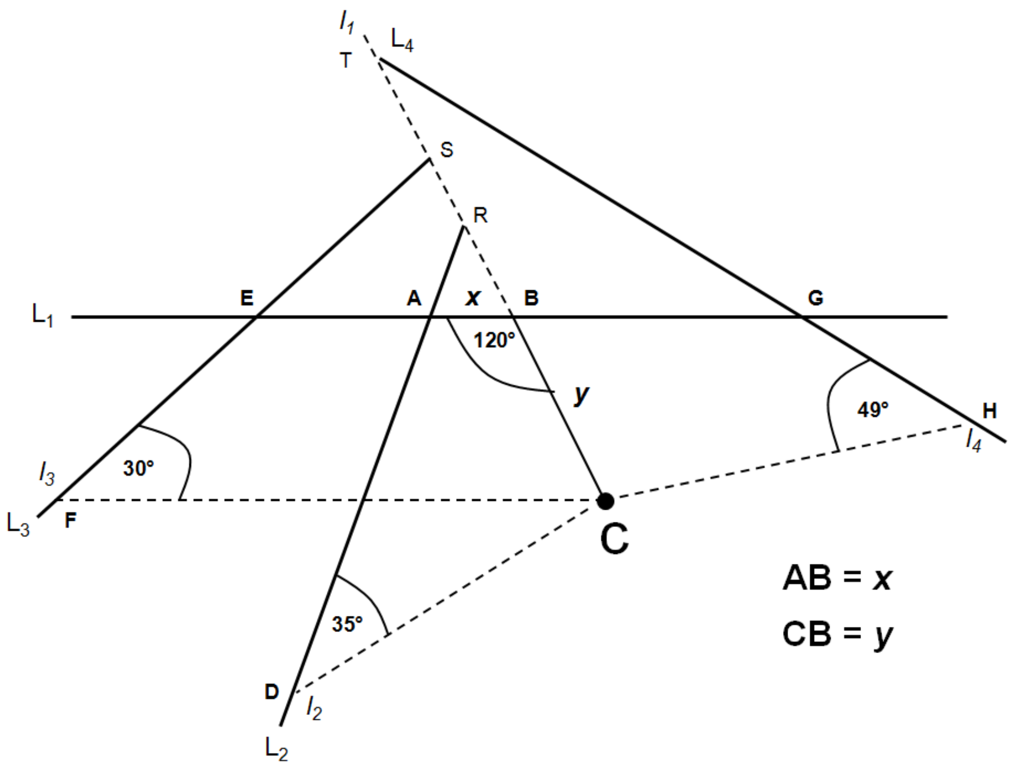
Para comprobar lo anteriormente expuesto, resolvamos el ejemplo que propuso Descartes.

3.5. Ejemplo tomado del texto de la *Geometría.*

En la *Geometría* encontramos un ejemplo a manera de comprobación de su método en la solución del *Problema de Pappus*:

"Si deseamos explicar todas las cantidades dadas mediante números, suponemos, por ejemplo que EA = 3, AG = 5, AB = BR, BS = $\frac{1}{2}$ *BE, GB = BT, CD =* $\frac{3}{2}$ *CR, CF = 2CS, CH =* $\frac{2}{3}$ *CT, el ángulo ABR = 60° y finalmente, suponemos que CB · CF = CD ·CH."*[17]

Entonces, los ángulos dados son: φ_1= 120°, φ_2= 35°, φ_3= 30° y φ_4= 49°.



A partir de los datos anteriores, determinamos las demás cantidades:

[17] Descartes, René (1981) *Discurso del método, Dióptrica, Meteoros y Geometría*. Pág. 309. Ediciones Alfaguara.

Primero $EA = 3$, y $AB = x$, entonces

$$EB = x + 3$$

$AG = 5$, y $AB = x$, por lo tanto

$$BG = 5 - x = -x + 5$$

$BS = \frac{1}{2} BE$, $BE = x + 3$

$$BS = \frac{x+3}{2}$$

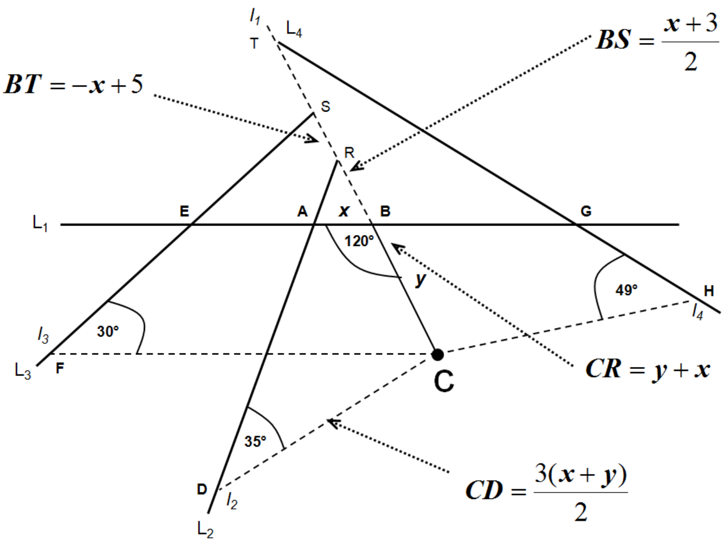
La línea $BG = BT$, $BG = -x + 5$

$$BT = -x + 5$$

$CD = \frac{3}{2} CR$, $CR = CB + BR$, $CR = y + x$

entonces

$$CD = \frac{3}{2}(x+y) \quad \rightarrow \quad CD = \frac{3(x+y)}{2}$$



La recta $CF = 2\,CS$, $CS = CB + BS$, y $BS = \frac{x+3}{2}$

$$CS = y + \frac{x+3}{2}$$

$$CS = \frac{x+2y+3}{2}$$

entonces; $CF = x + 2y + 3$

Si $CH = \frac{2}{3}\ CT$, $CT = CB + BT$ y $BT = GB$

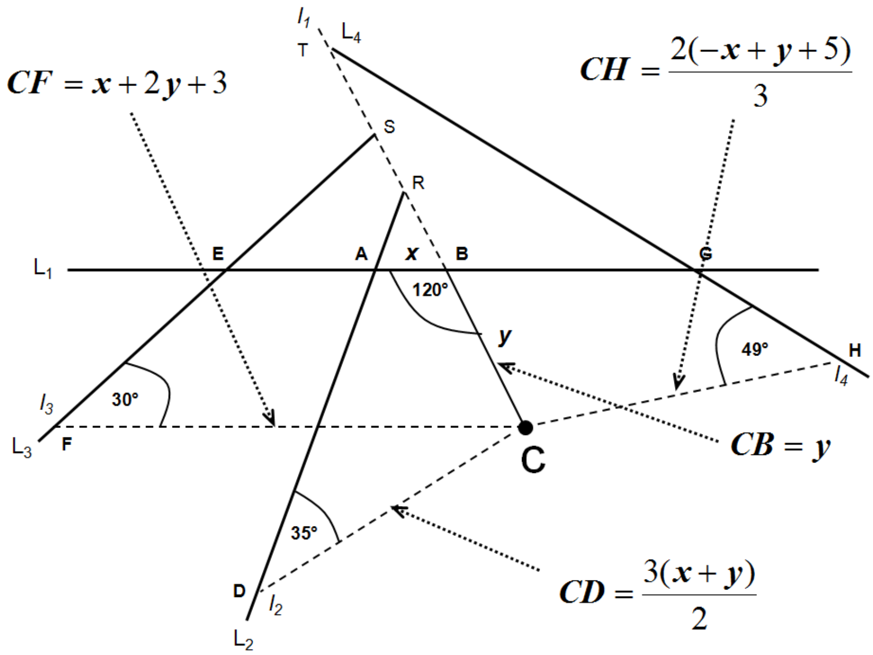
$CT = y - x + 5$

entonces;

$$CH = \frac{2}{3}(-x + y + 5) \quad \rightarrow \quad CH = \frac{2(-x + y + 5)}{3}$$

Las expresiones de las líneas son:

- $l_1 = CB = y$
- $l_2 = CD = \frac{3(x + y)}{2}$
- $l_3 = CF = x + 2y + 3$
- $l_4 = CH = \frac{2(-x + y + 5)}{3}$



Al realizar el producto de las líneas:

$$CB \cdot CF = CD \cdot CH$$

tendríamos:

$$y(x+2y+3)=\left(\frac{3(x+y)}{2}\right)\left(\frac{2(-x+y+5)}{3}\right)$$

$$(\boldsymbol{xy}+2\boldsymbol{y}^2+3\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})(-\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+5)$$

$$2y^2+3y+xy=-x^2+5x+y^2+5y$$

$$\boxed{y^2=2y-xy+5x-x^2}$$ [18]

Tenemos que determinar el valor de *y*, por lo tanto, vamos a despejarla:

$$y^2-2y+xy=5x-x^2$$

$$y^2-(2-x)y=5x-x^2$$

Completando cuadrados:

$$y^2-(2-x)y+\left(\frac{-(2-x)}{2}\right)^2=5x-x^2+\left(\frac{-(2-x)}{2}\right)^2$$

$$\left(y-\frac{(2-x)}{2}\right)^2=5x-x^2+\left(\frac{-(2-x)}{2}\right)^2$$

$$\left(y-\frac{(2-x)}{2}\right)^2=5x-x^2+1-x+\frac{1}{4}x^2$$

$$\left(y-\frac{(2-x)}{2}\right)^2=1+4x-\frac{3}{4}x^2$$

$$y-1+\frac{1}{2}x=\sqrt{1+4x-\frac{3}{4}x^2}$$

$$\boxed{y=1-\frac{1}{2}x+\sqrt{1+4x-\frac{3}{4}x^2}}$$

Según el criterio del discriminante, el coeficiente de x^2 permite determinar a la cónica:

$$\beta^2-\alpha=-\frac{3}{4}$$

[18] Ésta es la expresión algebraica de la cónica encontrada a partir del método de Descartes, que como podemos apreciar es idéntico a nuestro lenguaje algebraico actual.

Como $\beta^2 - \alpha$ es menor que cero, la cónica es una **elipse** (en este caso una circunferencia que se puede considerar como una cónica degenerada).

Al sustituir el valor de $x = 1$ en la expresión

$$y = 1 - \frac{1}{2}x + \sqrt{1 + 4x - \frac{3}{4}x^2}$$

obtenemos que ***y*** tiene el valor:

$$y = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$$

Y al sustituir el valor de x y y en las expresiones obtenidas anteriormente, podemos determinar el valor de cada recta.

Si $x = 1$, entonces

$$EB = 4$$

$$BG = 4$$

$$BS = 2$$

$$GB = BT = 4$$

Si $CB = y = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$ entonces

$CR = y + x$

$$CR = \frac{3+\sqrt{17}}{2}$$

$CD = \frac{3}{2}\, CR$

$$CD = \frac{9+3\sqrt{17}}{4}$$

$CS = CB + BS$,

$$CS = \frac{5+\sqrt{17}}{2}$$

$CF = 2\, CS$,

$$CF = \frac{10+2\sqrt{17}}{2}$$

CT = CB + BT

$$CT = \frac{9+\sqrt{17}}{2}$$

$CH = \frac{2}{3}\ CT$

$$CH = \frac{9+\sqrt{17}}{3}$$

Vamos a comprobar que el producto de las líneas es igual:

$$CB \cdot CF = CD \cdot CH$$

$$\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)\left(\frac{10+2\sqrt{17}}{2}\right) = \left(\frac{9+3\sqrt{17}}{4}\right)\left(\frac{9+\sqrt{17}}{3}\right)$$

$$11+3\sqrt{17} = 11+3\sqrt{17}$$

Para el trazo de la cónica, empleamos los criterios que menciona Descartes en la *Geometría*, los cuales son referencias del libro de Las *Cónicas* de Apolonio (problemas segundo y tercero del primer libro[19]).

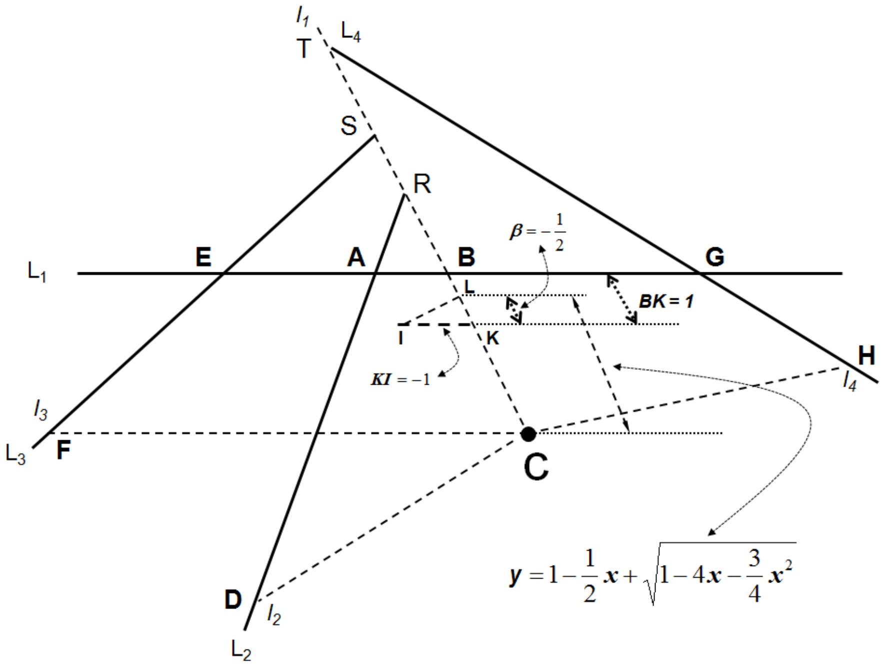
Tenemos que:

$$y = 1 - \frac{1}{2}x + \sqrt{1+4x-\frac{3}{4}x^2}$$

y la expresión general es:

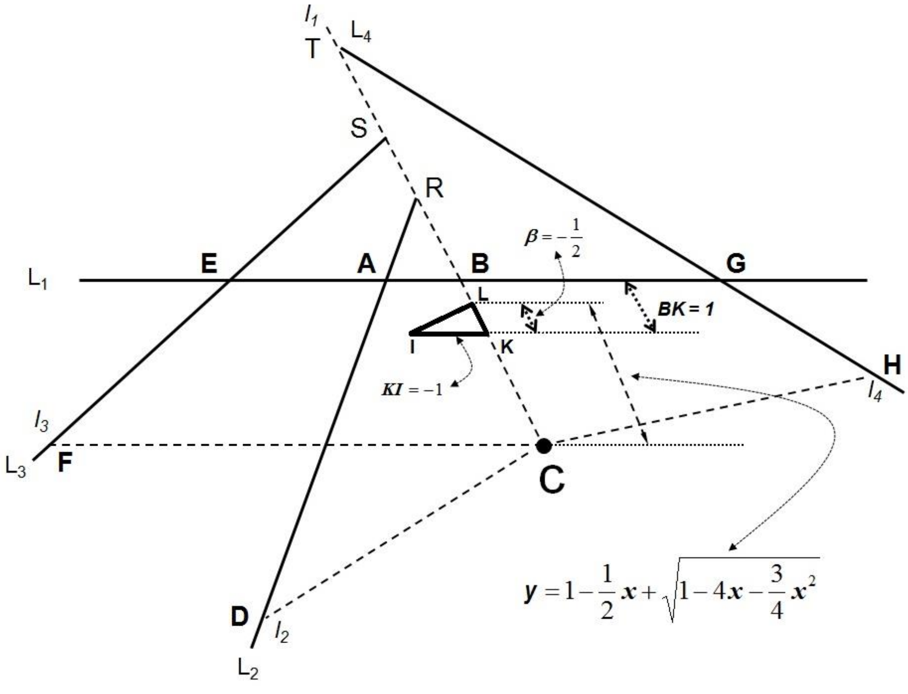
$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\delta} - \boldsymbol{\beta x} + \sqrt{(\boldsymbol{\beta}^2 - \boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{x}^2 + (\boldsymbol{\gamma} - 2\boldsymbol{\delta\beta})\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\delta}^2}$$

[19] Descartes, René (1981). El *Discurso del Método*, la *Geometría*, Págs. 305 y 306. Alfaguara, Madrid.



Al trazar el triángulo *IKL*, podemos observar que es un triángulo rectángulo.

Entonces



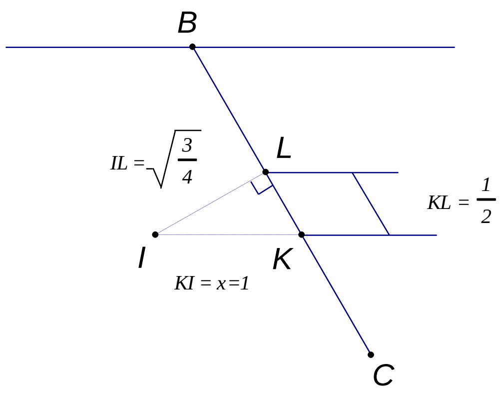
$$KI^2 = KL^2 + IL^2$$

$$(1)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = IL^2$$

$$IL = \sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$Il=\alpha \quad \rightarrow \quad \alpha=\sqrt{\tfrac{3}{4}}$$

Como se puede observar en la siguiente figura:



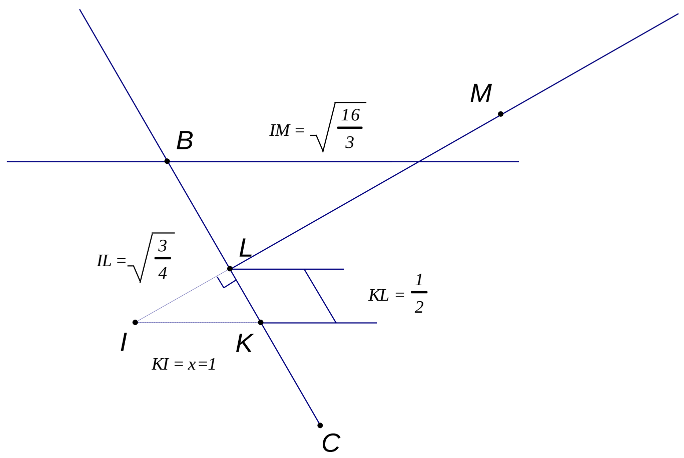
Cuando el ángulo *ILK* es recto, tenemos un círculo en vez de una elipse[20]. Para determinar el centro y el radio, debemos prolongar *IL* en dirección de *L*. Para determinar el centro (*M*) el cual siempre se encuentra en la línea recta *IL* y puede ser hallado aplicando la siguiente fórmula:

$$IM=\frac{\alpha\cdot(\gamma-2\delta\beta)\cdot\delta}{2(\beta^2-\alpha)}$$

Sustituyendo valores

$$IM=\frac{\sqrt{\frac{3}{4}}\cdot 4\cdot 1}{2\cdot\frac{3}{4}}$$

$$IM=\sqrt{\frac{16}{3}}$$



[20] DESCARTES, René. El *Discurso del Método*, la *Geometría*, Págs. 305. Alfaguara, Madrid, 1981.

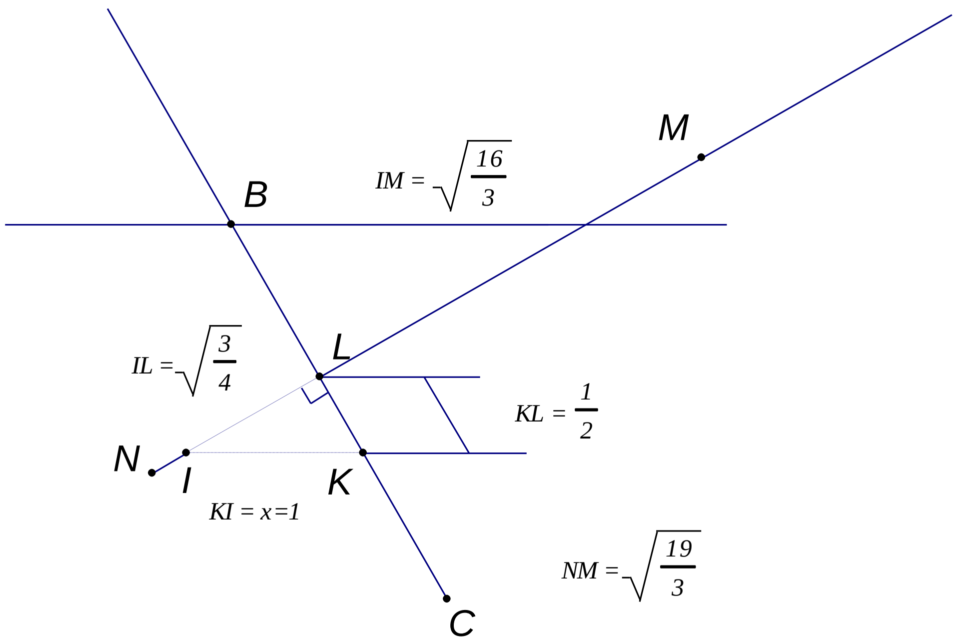
Para encontrar el radio, utilizamos la siguiente fórmula:

$$NM=\frac{\alpha}{2(\beta^2-\alpha)}\sqrt{(\gamma-2\delta\beta)^2+4\delta(\beta^2-\alpha)}$$

Sustituyendo valores

$$NM=\frac{\sqrt{\frac{3}{4}}}{2\left(\frac{3}{4}\right)}\sqrt{(4)^2+4\left(\frac{3}{4}\right)}$$

$$NM=\sqrt{\frac{19}{3}}$$



Obtenidas las cantidades anteriores, trazamos el círculo con centro en *M* y radio *NM* donde *M* es el centro del círculo. Además, vamos a escribir los resultados obtenidos hasta ahora en forma decimal.

Datos:

$$y^2 = 2y - xy + 5x - x^2$$

EA = 3 cm
AG = 5 cm
AB = BR = 1 cm
BE = 4 cm
$BS = \frac{1}{2} BE$
BS = 2 cm
GB = BT
BG = 4 cm
BT = 4 cm
CR= 3.56 cm
$CD = \frac{3}{2} CR = \frac{3 \cdot CR}{2} = 5{,}33$ cm
CS = 4.56 cm
CF = 2CS = 9,11 cm
CT = CB + CS = CT = 6,56 cm
$CH = \frac{2 \cdot CT}{3} = 4{,}37$ cm

Ángulos dados:

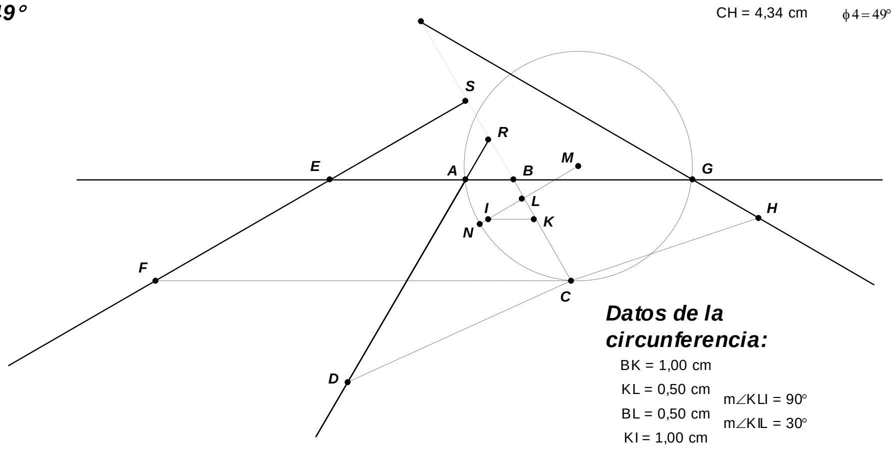
$\varphi_1 = 120°$
$\varphi_2 = 35°$
$\varphi_3 = 30°$
$\varphi_4 = 49°$

Producto de las rectas

CB·CF = 23,5 cm^2
CD·CH = 23,5 cm^2

Valores de las líneas y ángulos dados:

CB = 2,56 cm	$\phi 1 = 120°$
CD = 5,42 cm	$\phi 2 = 30°$
CF = 9,17 cm	$\phi 3 = 35°$
CH = 4,34 cm	$\phi 4 = 49°$



Datos de la circunferencia:

BK = 1,00 cm
KL = 0,50 cm
BL = 0,50 cm
KI = 1,00 cm
IM = 2,30 cm
MN = 2,51 cm (radio)
m∠KLI = 90°
m∠KIL = 30°

Si movemos el punto *C* en el círculo, se puede comprobar que el producto de las líneas es constante

Datos:

$$y^2 = 2y - xy + 5x - x^2$$

EA = 3 cm
AG = 5 cm
AB = 2 cm
BE = 5 cm
$BS = \frac{1}{2} BE$
BS = 3 cm
GB = BT
BG = 3 cm
BT = 4,70 cm
CR = 4,10 cm
$CD = \frac{3}{2} CR =$ CD = 6,82 cm
CS = 5,07 cm
CF = 9,93 cm
CT = CB + CS = CT = 7,05 cm
CH = CH = 3,47 cm

Ángulos dados:

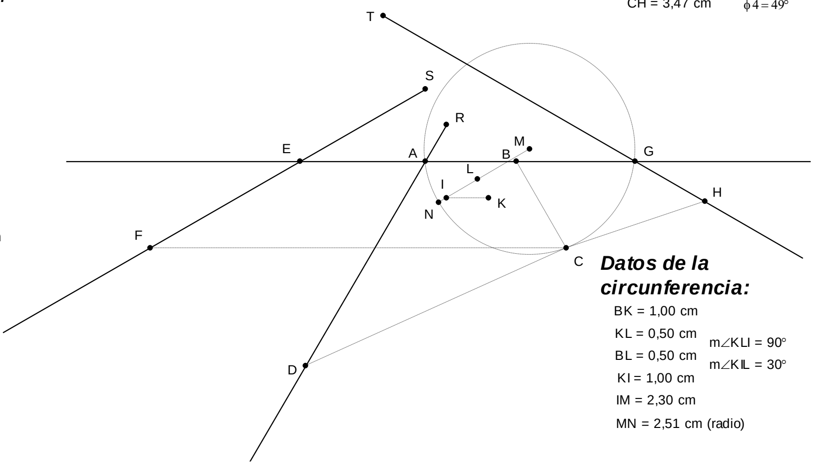
$\varphi_1 = 120°$
$\varphi_2 = 35°$
$\varphi_3 = 30°$
$\varphi_4 = 49°$

Producto de las rectas

CB·CF = 23,7 cm^2
CD·CH = 23,7 cm^2

Valores de las rectas y ángulos dados:

CB = 2,38 cm	$\phi 1 = 120°$
CD = 6,82 cm	$\phi 2 = 30°$
CF = 9,93 cm	$\phi 3 = 35°$
CH = 3,47 cm	$\phi 4 = 49°$



Datos de la circunferencia:

BK = 1,00 cm
KL = 0,50 cm
BL = 0,50 cm
KI = 1,00 cm
IM = 2,30 cm
MN = 2,51 cm (radio)
m∠KLI = 90°
m∠KIL = 30°

$$y^2 = 2y - xy + 5x - x^2$$

Datos:

EA = 3 cm

AG = 5 cm

AB = 4 cm

BE = 7 cm

$BS = \frac{1}{2} BE$

BS = 4 cm

GB = BT

BG = 1 cm

BT = 6,16 cm

CR = 4,54 cm

$CD = \frac{3}{2} CR =$ CD = 7,79 cm

CS = 5,38 cm

CF = 9,34 cm

CT = CB + CS = CT = 7,19 cm

CH = CH = 1,36 cm

Ángulos dados:

$\varphi_1 = 120°$

$\varphi_2 = 35°$

$\varphi_3 = 30°$

$\varphi_4 = 49°$

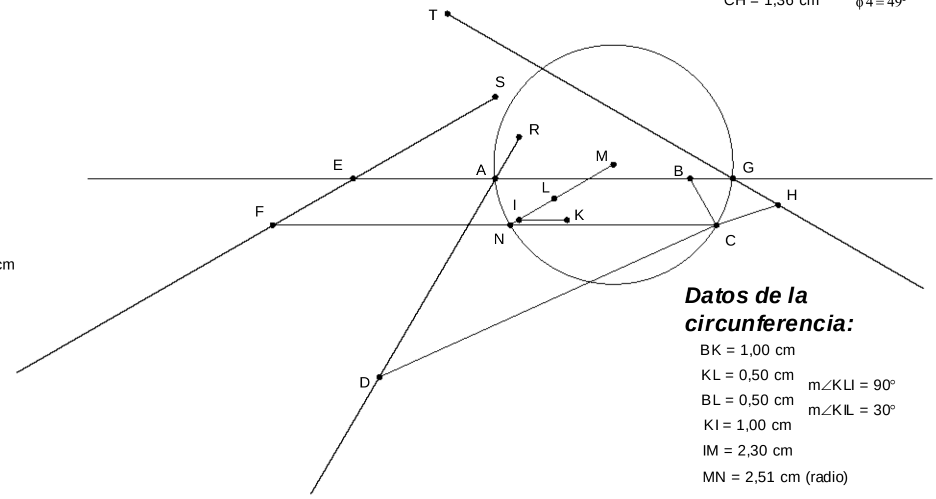
Producto de las rectas

$CB \cdot CF = 10{,}6\ cm^2$

$CD \cdot CH = 10{,}6\ cm^2$

Valores de las rectas y ángulos dados:

CB = 1,13 cm	$\phi 1 = 120°$
CD = 7,79 cm	$\phi 2 = 30°$
CF = 9,34 cm	$\phi 3 = 35°$
CH = 1,36 cm	$\phi 4 = 49°$



Datos de la circunferencia:

BK = 1,00 cm

KL = 0,50 cm

BL = 0,50 cm

KI = 1,00 cm

IM = 2,30 cm

MN = 2,51 cm (radio)

m∠KLI = 90°

m∠KIL = 30°

$$y^2 = 2y - xy + 5x - x^2$$

Datos:

EA = 3 cm

AG = 5 cm

AB = 1 cm

BE = 4 cm

$BS = \frac{1}{2} BE$

BS = 2 cm

GB = BT

BG = 4 cm

BT = 4,09 cm

CR = 0,68 cm

$CD = \frac{3}{2} CR =$ CD = 0,87 cm

CS = 0,37 cm

CF = 0,68 cm

CT = CB + CS = CT = 2,35 cm

CH = CH = 1,39 cm

Ángulos dados:

$\varphi_1 = 120°$

$\varphi_2 = 35°$

$\varphi_3 = 30°$

$\varphi_4 = 49°$

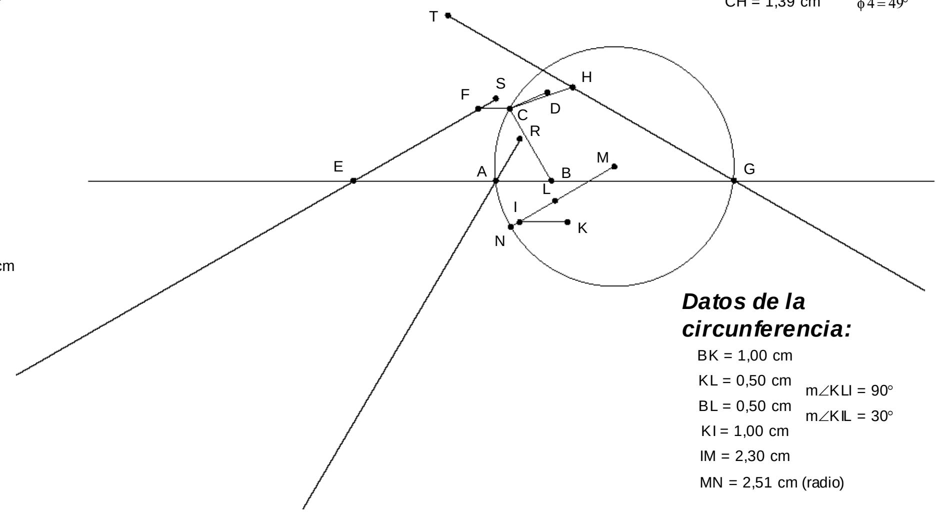
Producto de las rectas

$CB \cdot CF = 1{,}2\ cm^2$

$CD \cdot CH = 1{,}2\ cm^2$

Valores de las rectas y ángulos dados:

CB = 1,74 cm	$\phi 1 = 60°$
CD = 0,87 cm	$\phi 2 = 30°$
CF = 0,68 cm	$\phi 3 = 35°$
CH = 1,39 cm	$\phi 4 = 49°$



Datos de la circunferencia:

BK = 1,00 cm

KL = 0,50 cm

BL = 0,50 cm

KI = 1,00 cm

IM = 2,30 cm

MN = 2,51 cm (radio)

m∠KLI = 90°

m∠KIL = 30°

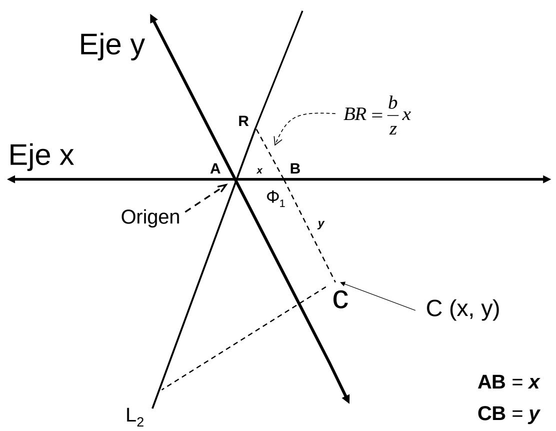
3.6. Comparación entre ejes.

En el caso de la primera expresión que encuentra Descartes:

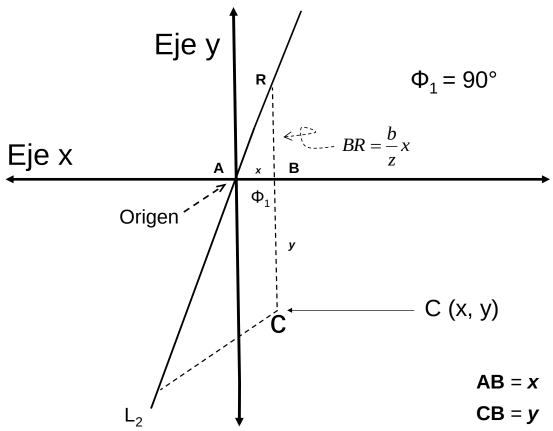
$$BR = \frac{b}{z}x$$

Podemos identificar en nuestro lenguaje contemporáneo que lo que nos proporciona es la ecuación de una recta en su forma $y = mx + b$, ya que si revisamos el esquema de Descartes y lo comparamos con un sistema de ejes "cartesianos" ortogonales, tendríamos:

Ejes Generales



Ejes Ortogonales



Donde de la expresión:

$$BR = \frac{b}{z}x \quad \rightarrow \quad y = \frac{b}{z}x, \quad \text{de donde } \frac{b}{z} = m$$

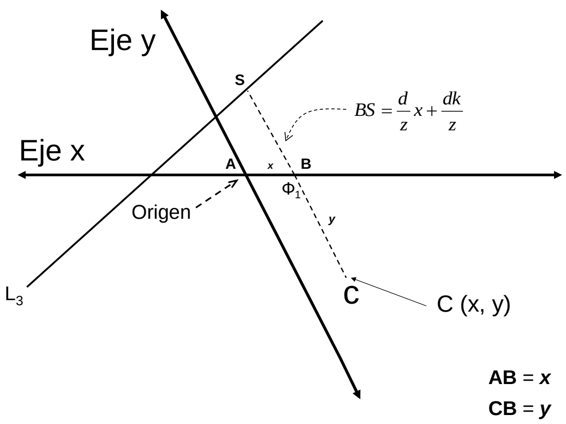
Representa la pendiente de la línea L_2 tanto en los ejes generales y los ejes ortogonales, siempre teniendo un punto de referencia (origen). La ausencia de un término independiente en la expresión de Descartes, se refiere a que la línea L_2, pasa por el origen.

Para la línea L_3, podemos observar la expresión:

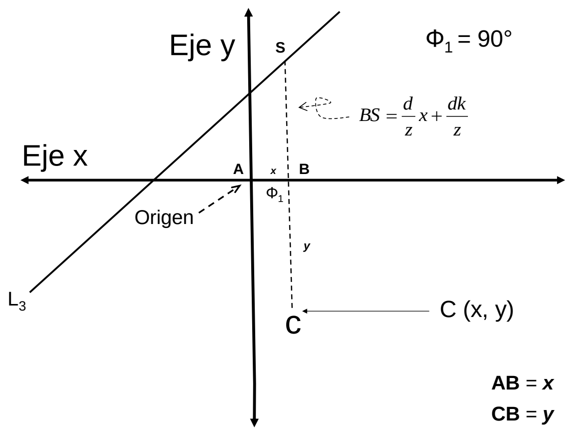
$$BS = \frac{d}{z}x + \frac{dk}{z}$$

Igual que en el caso anterior identificamos la ecuación de una recta en su forma $y = mx + b$, como podemos observar en las siguientes figuras:

Ejes Generales



Ejes Ortogonales



En este caso, podemos observar que existe el término independiente $\frac{dk}{z}$, lo cual nos indica que la recta no pasa por el origen y es el término "b" (el punto de intersección de la recta con el eje "*y*") en la forma de la recta $y = mx + b$.

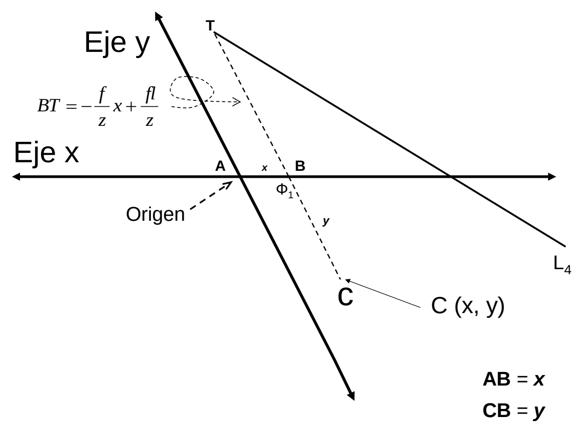
$$BS = \frac{d}{z}x + \frac{dk}{z} \leftarrow b$$

Para la línea L_4 tenemos:

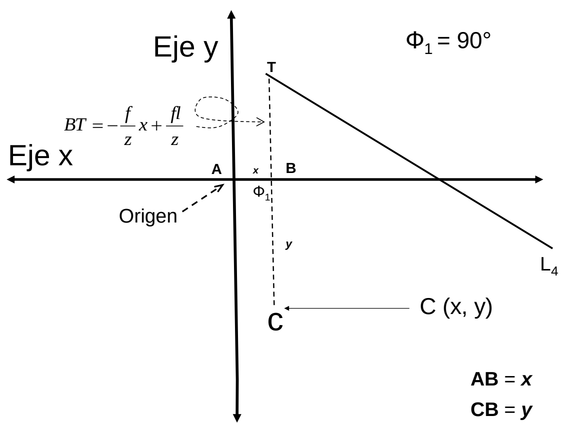
$$BT = -\frac{f}{z}x + \frac{fl}{z}$$

Como en los dos casos anteriores se observa la ecuación de una recta en su forma $y = mx + b$, como podemos apreciar en las siguientes figuras:

Ejes Generales



Ejes Ortogonales



En la expresión de esta última línea, podemos observar que existe (al igual que en el caso anterior) el término independiente $\frac{fl}{z}$, lo cual indica que la recta no pasa por el origen y es el término "*b*" (el punto de intersección de la recta con el eje "*y*") en la forma de la recta $y = mx + b$.

$$BT = -\frac{f}{z}x + \frac{fl}{z} \quad \leftarrow b$$

Además, se advierte un cambio en el signo de la expresión (-), lo cual nos indica que Descartes no tomó en cuenta sólo la longitud de los segmentos sino también su sentido a partir del punto de referencia (origen).

3.7. Distancia de un punto a una recta

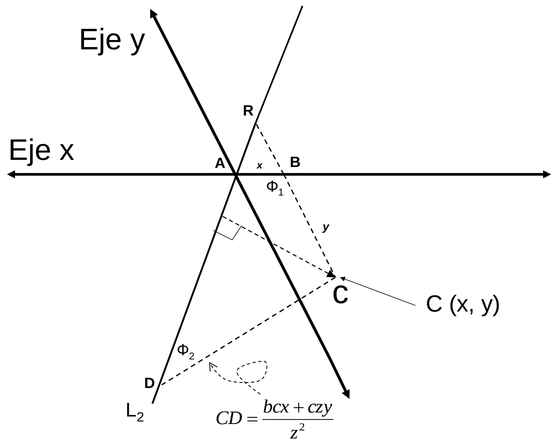
Para las expresiones de *CD*, *CF* y *CH* también podemos realizar una analogía con los ejes ortogonales como los utilizamos actualmente.

Para *CD* tenemos la expresión:

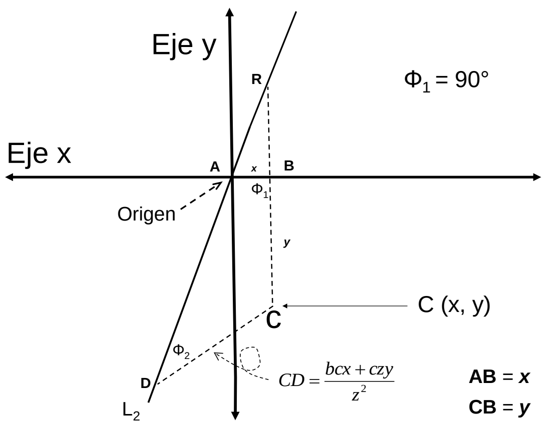
$$CD = \frac{bcx + czy}{z^2}$$

y la figura nos muestra que se refiere a la distancia del punto *C*, a la línea L_2.

Ejes Generales



Ejes Ortogonales



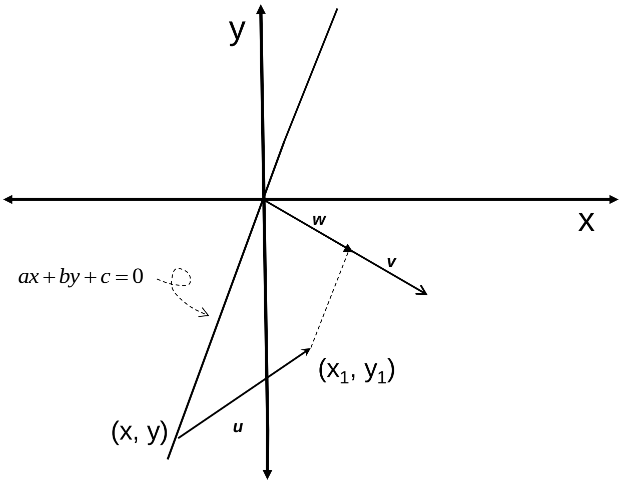
En este caso, se refiere a la "distancia" de un punto a una recta, sin embargo; al compararlo con la figura en la que el ángulo $\varphi_1 = 90°$, podemos observar que no es una distancia perpendicular la del punto *C* a la recta L_2. Entonces, lo que ocurre es que la expresión de Descartes es la distancia de un punto a una recta con un ángulo diferente a un ángulo recto, o más bien, esta expresión al igual que todas las encontradas en el desarrollo de la solución del *Problema de Pappus*, son expresiones generales (el ángulo en este caso es φ_2).

Para la demostración de esta expresión, debemos recurrir a los vectores. Antes de revisar la distancia de un punto a una recta, es conveniente recordar que el vector $v = ai + bj$ es perpendicular a la $ax + by + c = 0$. Ahora, la distancia de un punto de coordenadas (x_1, y_1) a la recta $ax + by + c = 0$ es:

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

La distancia que usamos en los cursos de Geometría Analítica actual, es la distancia más corta entre el punto y la recta, es decir, la distancia perpendicular. Como se mencionó, el vector $v = ai + bj$ es perpendicular a la $ax + by + c = 0$, y sea ***u*** el vector representado por el segmento que va de (x, y) a (x_1, y_1), entonces:

$$u = (x_1 - x)i + (y_1 - y)j$$



→ *c = 0* ya que la recta pasa por el origen

Tomaremos el valor de ***c*** en la ecuación para determinar el resultado, pero en el caso de la recta de la figura, es una recta que pasa por el origen y entonces *c = 0*. La longitud que se busca es la de la proyección *w* del vector *u* sobre el vector *v.*

$$d = |w| = \frac{|v \cdot u|}{|v|}$$

$$d = \frac{|a(x_1 - x) + b(y_1 - y)|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

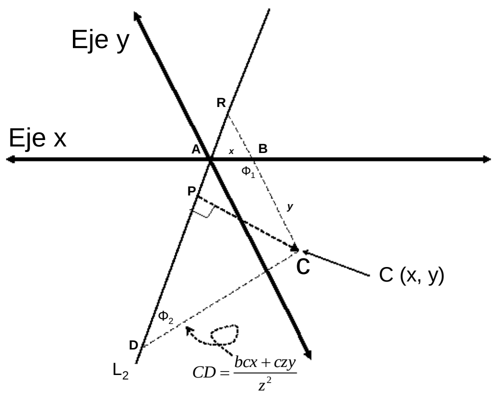
$$d = \frac{|ax_1 - ax + by_1 - by|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 - ax - by|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{pero} \rightarrow \quad c = -ax - by$$

Entonces:

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Pero la expresión de Descartes nos indica una distancia que ha sido tomada con un ángulo no recto, es decir un ángulo φ_2. Si vemos la siguiente figura:



$$sen\ \varphi_2 = \frac{CP}{CD}\ , \qquad CD = \frac{CP}{sen\ \varphi_2}$$

o lo que es igual a:

$$CD = \frac{bcx + czy}{sen\ \varphi_2 \cdot z^2}$$

z^2 es la norma del vector ortogonal a la recta $L_{2;}$ si este vector es unitario.

De donde en este caso no hay valor constante o el valor de ***c*** en la ecuación de Descartes, ya que la recta pasa por origen.

Podemos notar que la expresión de Descartes es la forma general de la distancia de un punto a una recta y que la que utilizamos en la actualidad es un caso particular (el ángulo sería $\varphi_2 = 90°$).

De forma semejante, se pueden identificar a las líneas *CF* y *CH*.

Capítulo 4. Propuesta didáctica

4.1. Planteamiento del Problema

Seguramente enseñar matemáticas no es algo sencillo, existen muchas variables que se combinan y que hacen que sea una tarea muy compleja como:

- La diversidad de los alumnos, de sus aspiraciones y de sus expectativas.
- Las presiones económicas sobre la educación, especialmente para que se forme a los jóvenes para el trabajo y para los estudios universitarios.
- Los aspectos políticos en torno al currículo de matemáticas y la decisión de a quién va a corresponder la responsabilidad de establecerlo.
- Las presiones de otros campos de conocimiento para que las matemáticas sean más relevantes según sus necesidades.

En el programa de estudios de Matemáticas V se menciona que su enfoque metodológico se orienta hacia un aprendizaje basado en la solución de problemas y que:

"Por medio de los contenidos propuestos, el alumno ahora conocerá, comprenderá y aplicará la simbología de las funciones con sus características y propiedades, así como su representación gráfica en el plano cartesiano; las funciones trigonométricas, directas e inversas; las funciones exponencial y logarítmica; la localización de puntos en tres dimensiones; la existencia del sistema de coordenadas polares; los conocimientos básicos de operación de la geometría analítica; la discusión de una ecuación y la obtención de la ecuación de un lugar geométrico, el planteamiento de problemas de la propia geometría analítica, que se resuelven aplicando los conocimientos ya mencionados. La aplicación de esta metodología privilegia el trabajo en el aula, ya que el profesor identificará con el grupo problemas "tipo", posibles de resolver con los temas en cuestión".

Así que con la anterior descripción se anuncia que la intención del presente trabajo es proporcionar una visión histórica de los conceptos y temas del Programa de Matemáticas V; a partir de la resolución de un problema de la antigüedad, con la propuesta de que se muestre el origen de los conceptos que dieron surgimiento a la Geometría Analítica y tratar de proporcionar un nuevo significado a la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

4.2. Descripción de la propuesta

La puesta en escena de la propuesta se llevó a cabo en la Escuela Nacional Preparatoria, Plantel 9 “Pedro de Alba”. Se realizó con el grupo 602 de área I (38 alumnos), del turno matutino, bajo la supervisión del Ing. Alberto García Pimentel, responsable de la asignatura de Matemáticas VI. Durante el desarrollo de las actividades se tomaron en cuenta las sugerencias tanto del supervisor anterior, el Act. Alfonso García Durán, como de la profesora de Práctica Docente III, Arq. María Margarita Sánchez Flores, así como de compañeros de la MADEMS.

Se inició con un examen de diagnóstico para revisar los conocimientos previos de los alumnos en los temas por desarrollar en la práctica docente (se anexa el examen diagnóstico). Se procedió a revisar el álgebra de segmentos (suma, resta, multiplicación y división), criterios de semejanza en triángulos y el *Teorema de Tales*; esto se hizo con el objetivo de que los estudiantes tuvieran las herramientas básicas para la solución del *Problema de Pappus*. Se hizo una presentación histórica del desarrollo de la Geometría Analítica para contextualizar al grupo; esto tuvo como objetivo sensibilizar a los alumnos y motivarlos introduciendo el enfoque histórico, que como se mencionó anteriormente, es una estrategia didáctica recomendada para el logro de aprendizajes significativos en el aula. Se realizó la demostración en dos partes de la solución del *Problema de Pappus* (geométrica-algebraica) con el método de Descartes, pero también se realizaron analogías de conceptos de Geometría Analítica en forma general y particular. Se finalizó la práctica docente con una actividad en el centro de cómputo y un examen (incluido más adelante) de los temas vistos. El trabajo de los alumnos en el centro de cómputo consistió en el uso del *software* interactivo de geometría *The Geometer's Sketchpad* para el trazo de la cónica y compararlo con el resultado obtenido con regla y compás. Se emplearon ocho sesiones con un total de 14 horas, desde el examen diagnóstico, hasta el examen de conocimientos adquiridos.

4.3. Objetivos general y particulares de las sesiones

El objetivo general de la propuesta fue que el alumno enriquezca sus conocimientos en Matemáticas mediante la reflexión histórica y origen de la Geometría Analítica en torno de la solución de un problema. Que identifique diferentes conceptos contenidos en el programa de Matemáticas V: función, ley de los senos, propiedades de los triángulos y coordenadas cartesianas, ecuación de un lugar geométrico, definición de recta como lugar geométrico y distancia de un punto a una recta, ecuación de segundo grado y criterios para identificar a la cónica que representa una ecuación de segundo grado, circunferencia, cónicas, así como los temas de Geometría Analítica, a través de la demostración y solución del *Problema de Pappus*, con base en el método analítico de René Descartes, para fomentar sus capacidades de razonamiento lógico matemático, su espíritu crítico y el deseo de investigar para adquirir nuevos conocimientos.

Los objetivos particulares para los alumnos en las ocho sesiones en las que se trabajó con el grupo fueron:

1ª sesión (dos horas)

- Reafirmará conocimientos de Geometría Euclidiana adquiridos en cursos anteriores.
- Conocerá y diferenciará las cuatro operaciones básicas del álgebra de segmentos.
- Analizará el *Teorema de Tales* a partir de su demostración.
- Identificará si dos triángulos son semejantes con base en los criterios de semejanza.
- Aplicará los conocimientos adquiridos en la sesión para la resolución de ejercicios de segmentos.

2ª sesión (dos horas)

- Comprenderá el desarrollo histórico de la Geometría Analítica.
- Analizará y comprenderá la solución que Descartes propone para el *Problema de Pappus* en la parte geométrica.
- Aplicará los conocimientos adquiridos para la resolución de triángulos semejantes e interpretará el Teorema de Tales en la ecuación de la recta.

3ª sesión (una hora)

- Reafirmará y comprenderá la solución que Descartes propone para el *Problema de Pappus* en la parte geométrica.
- Aplicará los conocimientos adquiridos para la resolución y para terminar la demostración geométrica.

4ª sesión (dos horas)

- Comparará diferentes conceptos de Geometría Analítica en el caso general de la solución de Descartes y el caso particular cuando se utiliza un sistema de ejes ortogonal.
- Comprenderá la demostración de la fórmula de la distancia de un punto a una recta en su forma vectorial.
- Analizará la solución que Descartes propone para el *Problema de Pappus* en la parte algebraica.

5ª sesión (dos horas)

- Comprenderá la solución que Descartes propone para el *Problema de Pappus* en la parte algebraica.
- Identificará las expresiones obtenidas en el desarrollo algebraico para la interpretación de la ecuación de segundo grado.

- Identificará el lugar geométrico obtenido de la ecuación de segundo grado por medio del criterio del discriminante.

6ª sesión (una hora)

- Aplicará los conocimientos adquiridos para dar solución a un ejercicio del *Problema de Pappus*.
- Identificará que la solución de todo *Problema de Pappus* es una cónica y que toda cónica es la solución a un *Problema de Pappus*.
- Trazará la gráfica de la cónica con regla y compás.

7ª sesión (dos horas)

- Con los conocimientos adquiridos en las seis sesiones anteriores y con la utilización del *software* interactivo de geometría *The Geometer's Sketchpad*, será capaz de terminar la construcción del *Problema de Pappus* en la computadora. De esta forma, se apoyará la generalización del aprendizaje en otro escenario de los temas vistos con el expositor.
- Trabajará con álgebra de segmentos y aplicará el método analítico de Descartes para resolver ejercicios del *Problema de Pappus* e identificará cada uno de los conceptos de Geometría Analítica

8ª sesión (dos horas)

  - Aplicación del examen de conocimientos de los temas vistos en las siete sesiones y del cuestionario de desempeño docente.

4.4. Secuenciación de los contenidos

La secuenciación de los contenidos fue la siguiente:

- Álgebra de segmentos. (suma, resta, multiplicación y división).
- Teorema de Tales.
- Repaso de las características y propiedades de la semejanza en triángulos.
- El *Problema de Pappus*.
  - Análisis Histórico.
  - Análisis Geométrico.
  - Análisis Algebraico.
- Análisis del trazado de la cónica.
- Conceptos de Geometría Analítica.

La planeación por sesión se presenta en las siguientes páginas.

Secuenciación de contenidos (desglosado):

Número	Apertura	Desarrollo	Cierre	OBJETIVOS	TEMA Contenidos	ACTIVIDADES DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE	ESTRATEGIAS DE ENSEÑANZA	ASPECTO EVALUADO	MATERIAL DE APOYO	T (H)
1ª sesión				Esperar al grupo	Tolerancia reglamentaria					10 min. 12:50-13:00
				Conocimiento del expositor e inducción del grupo.	Datos del expositor	El expositor se presentará ante el grupo.	Estrategia motivadora de romper el hielo.	Motivación. Nivel de participación grupal. Comentarios de los alumnos.	Gis Pizarrón. Oral	5 min. 13:00-13:05
				El expositor identificará los conocimientos previos de los alumnos.	Examen Diagnóstico	El expositor aplicará un examen diagnóstico para determinar el conocimiento acerca de conceptos de Geometría Analítica.		**<u>Diagnóstica:</u>** Evaluación de conocimientos previos	Hoja de reactivos.	15 min. 13:05-13:20
				El alumno conocerá el objetivo general, objetivos específicos, la forma de trabajo, la descripción de la exposición de los temas y el sistema de evaluación.	Encuadre de la exposición de los temas.	El expositor dará a conocer sus expectativas y objetivos respecto a los temas. Se realizará un resumen preliminar.	Objetivos e intenciones	Motivación. Nivel de participación grupal. Comentarios de los alumnos.	Copias con los objetivos y orden del día.	10 min. 13:20-13:30
				El alumno conocerá el álgebra de segmentos.	Álgebra de segmentos: Suma y resta de segmentos.	El expositor hará uso del método inductivo (de lo particular a lo general) para analizar con los alumnos la estructura algebraica de los segmentos, con la cual se podrá definir la suma y la resta.	Activación de conocimientos previos. Señalizaciones. Ilustraciones.	**<u>Formativa:</u>** Capacidad inductiva.	Oral Gises. Pizarrón. Borrador.	10 min. 13:30-13:40

El alumno recordará el Teorema de Tales	Razones, proporciones, Teorema de Tales y cuarta proporcional.	El expositor hará uso del método inductivo (de lo particular a lo general) para recordar a los alumnos el Teorema de Tales. Ejercicios del tipo: *Determina la cuarta proporcional de los siguientes ejercicios:* a) $m = 10$, $n = 6$ *y* $p = 8$. b) $a = 6$, $b = 4$ *y* $c = 9$. c) $d = 3.5$, $e = 2$ *y* $f = 4$.	Activación de conocimientos previos. Señalizaciones. Ilustraciones. Preguntas intercaladas. Ilustraciones en acto (demostraciones).	**Formativa:** Capacidad inductiva. Nivel de participación grupal.	Oral Gises. Pizarrón. Borrador.	10 min. 13:40-13:50
El alumno identificará cuándo dos triángulos son semejantes, determinará las proporciones entre los lados de los triángulos.	Criterios de semejanza en Triángulos.	El expositor analizará con los alumnos los tres criterios de semejanza de triángulos y resolverá ejercicios del tipo: *De la siguiente figura encuentra:* • *EC* si $AD = 3$, $BD = 2$ y $AE = 4$. • *AE* si $AE = BD$, $AD = 16$ y $EC = 4$. • En la figura *EB* es paralelo a *CD*, $AB = 2$, $BC = 18$ y $BE = 3$, determina CD.	Activación de conocimientos previos. Señalizaciones. Ilustraciones. Preguntas intercaladas. Analogías. Ilustraciones en acto (demostraciones).	**Formativa:** Capacidad inductiva. Nivel de participación grupal.	Oral Gises. Pizarrón. Borrador. Hoja de reactivos.	15 min. 13:50-14:05
El alumno realizará productos y cocientes de segmentos con base en razones y proporciones.	Álgebra de segmentos: multiplicación y división	El expositor explicará al grupo, en qué consiste el producto y la división de segmentos. Los alumnos resolverán ejercicios del tipo: Reliza las siguientes multiplicaciones y divisiones de segmentos: • $a = 4 \times b = 2$. • $m = 5 \times n = 3$. • $c = 8 / d = 2$. • $o = 3/2 / p = 8/6$	Señalizaciones. Ilustraciones. Preguntas intercaladas. Analogías.	**Formativa:** Capacidad inductiva. Nivel de participación grupal.	Oral Gises. Pizarrón. Borrador.	15 min. 14:05-14:20
Englobar los conceptos vistos en la sesión.	Resumen. Cierre de la primera sesión.	El expositor realizará un resumen de lo realizado en clase. Peguntará al alumno su apreciación sobre la conducción y exposición de la sesión; también definirá los ejercicios de tarea y la lectura histórica. Conocerá la opinión de los alumnos acerca de lo expuesto y resolverá dudas del grupo si existieran.	Preguntas al grupo.	**Diagnóstica:** Comentarios de los alumnos. Retroalimentación del grupo para el expositor	Oral Hoja de reactivos.	10 min. 14:20- 14:30

Número	Apertura	Desarrollo	Cierre	OBJETIVOS	TEMA Contenidos	ACTIVIDADES DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE	ESTRATEGIAS DE ENSEÑANZA	ASPECTO EVALUADO	MATERIAL DE APOYO	T (H)
2ª Sesión				Esperar al grupo	Tolerancia reglamentaria					5 min. 11;10-11:15
				Dar a conocer los objetivos la metodología de trabajo y las expectativas del expositor para esta sesión	Encuadre de la segunda sesión.	El expositor presentará al grupo de manera verbal y por escrito los contenidos y su metodología.	Técnica expositiva. Objetivos.	**Diagnóstica:** Motivación Nivel de participación grupal Comentarios de los alumnos.	Orden del día.	5 min. 11:15-11:20
				Reforzamiento del tema visto en la sesión anterior.	Tarea	El expositor invitará a 6 alumnos a resolver los ejercicios de tarea en el pizarrón. Revisará los planteamientos y respuestas de los alumnos. Cuestionará y aclarará las dudas del tema si es que existen.	Participación directa de los alumnos en la solución de los problemas planteados	**Sumativa:** Aprendizaje de conceptos. Habilidad para resolver problemas con el método analizado.	Oral. Pizarrón. Marcadores. Borrador. Hojas de reactivos.	10 min. 11:20-11:30
				El alumno reforzará el conocimiento acerca de la lectura dejada de tarea.	Desarrollo histórico de la Geometría Analítica.	El expositor explicará quiénes fueron los personajes que a lo largo de la historia contribuyeron al desarrollo de la Geometría Analítica como hoy la conocemos. Los alumnos responderán preguntas como: • Menciona quiénes fueron los siete más importantes geómetras griegos. • Menciona el nombre de la obra más importante de Euclides. • ¿Sobre qué temas trabajo Apolonio? • ¿En qué consiste el método del *Análisis* de Descartes?	Participación directa de los alumnos. Ilustraciones. Discusión guiada. Preguntas intercaladas.	**Formativa:** Motivación Nivel de participación grupal Respuestas y comentarios de los alumnos.	Oral. Lectura. Computadora. Cañón. Presentación en Power Point.	10 min. 11:30-11:40

				Que el alumno aplique los conocimientos adquiridos en la primera sesión para la demostración de la solución del *Problema de Pappus*. El expositor engarzará los procesos de construcción del alumno con el saber colectivo.	El *Problema de Pappus*. Método de Descartes.	El expositor realizará la solución del *Problema de Pappus* (parte geométrica), junto con el grupo aplicando el álgebra de segmentos. Los alumnos bajo la supervisión del expositor, en el aula, realizarán algunas demostraciones de la parte geométrica.	Técnica expositiva. Preguntas intercaladas. Ilustraciones. Organizadores gráficos. Señalizaciones. Analogías. Ilustraciones en acto (demostraciones).	**<u>Formativa:</u>** Recuperación de conocimientos previos. La actividad mental constructiva del alumno.	Oral. Material de trabajo Marcadores. Pizarrón. Borrador. Cuaderno. Escuadras. Computadora. Cañón.	55 min. 11:40-12:35
				Englobar los conceptos vistos en la sesión. Que el alumno reconozca la utilidad del álgebra de segmentos.	Resumen. Cierre de la segunda sesión.	El expositor realizará un resumen de lo realizado en clase. Agrupación y comparación de los temas vistos en la primera y segunda sesión. El expositor preguntará al alumno su apreciación sobre la conducción y exposición de la sesión; definirá el trabajo para la casa. Inquirirá la opinión de los alumnos acerca de lo expuesto. Conocer y aclarar, si existieran, dudas del grupo	Preguntas al grupo.	**<u>Formativa:</u>** Comentarios de los alumnos Retroalimentación del grupo para el expositor. El fomento a la adquisición de aprendizajes significativos	Oral Marcadores Pizarrón Borrador Material de trabajo.	15 min. 12:35-12:50

Número	Apertura	Desarrollo	Cierre	OBJETIVOS	TEMA Contenidos	ACTIVIDADES DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE	ESTRATEGIAS DE ENSEÑANZA	ASPECTO EVALUADO	MATERIAL DE APOYO	T (H)
3ª Sesión				Esperar al grupo	Tolerancia reglamentaria					5 min. 8:40-8:45
				Conocer objetivos, metodología de trabajo y expectativas del expositor para la sesión	Encuadre de la tercera sesión.	El expositor presentará al grupo de manera verbal y por escrito los contenidos y su metodología.	Técnica expositiva. Objetivos.	**<u>Diagnóstica:</u>** Motivación Nivel de participación grupal Comentarios de los alumnos.	Orden del día.	5 min. 8:45-8:50
				Reforzamiento del tema visto en la sesión anterior.	Tarea	El expositor preguntará al alumno si es que existen dudas acerca de la tarea; si existieran procederá a disiparlas invitando a un alumno a que pase al pizarrón.	Participación directa de los alumnos.	**<u>Formativa:</u>** Aprendizaje de conceptos. Habilidad para resolver problemas con el método analizado.	Oral Pizarrón. Marcadores Borrador.	10 min. 8:50-9:00
				Que el alumno aplique los conocimientos adquiridos para la resolución del *Problema de Pappus*. El expositor engarzará los procesos de construcción del alumno con el saber colectivo.	El *Problema de Pappus*. Método de Descartes.	El expositor terminará de realizar la solución del *Problema de Pappus* (parte geométrica), junto con el grupo aplicando el álgebra de segmentos. Los alumnos bajo la supervisión del expositor, en el aula, terminarán de resolver la parte geométrica del *Problema de Pappus.*	Técnica expositiva. Preguntas intercaladas. Ilustraciones. Organizadores gráficos. Señalizaciones. Analogías. Ilustraciones en acto (demostraciones).	**<u>Formativa:</u>** Recuperación de conocimientos previos. La actividad mental constructiva del alumno.	Material de trabajo Oral. Marcadores. Pizarrón. Borrador. Escuadras. Computadora. Cañón.	20 min. 9:00-9:20
				Englobar los conceptos vistos en la sesión.	Cierre de la tercera sesión	El expositor realizará un resumen de la clase. Agrupación y comparación con los temas vistos en la segunda sesión. El expositor preguntará al alumno su apreciación sobre la conducción y exposición de la sesión; y definirá el trabajo para la casa. Inquirirá la opinión de los alumnos acerca de lo expuesto. Conocerá y aclarará, si existieran, dudas del grupo	Preguntas al grupo.	Retroalimentación del grupo para el expositor	Material de trabajo.	10 min. 9:20-9:30

Número	Apertura	Desarrollo	Cierre	OBJETIVOS	TEMA Contenidos	ACTIVIDADES DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE	ESTRATEGIAS DE ENSEÑANZA	ASPECTO EVALUADO	MATERIAL DE APOYO	T (H)
4ª Sesión				Esperar al grupo	Tolerancia reglamentaria					5 min. 12:50-12:55
				Conocer los objetivos, la metodología de trabajo y las expectativas del expositor para esta sesión	Encuadre de la cuarta sesión.	El expositor presentará al grupo de manera verbal y por escrito los contenidos y su metodología.	Técnica expositiva. Objetivos.	**Diagnóstica:** Motivación Nivel de participación grupal Comentarios de los alumnos.	Oral. Orden del día.	5 min. 12:55-13:00
				Reforzamiento del tema visto en la sesión anterior.	Tarea.	El expositor invitará a los alumnos a resolver los reactivos de tarea en el pizarrón. Revisará los planteamientos y respuestas. Cuestionará y aclarará las dudas del tema si es que existen.	Participación directa de los alumnos.	**Formativa:** Aprendizaje de conceptos. Habilidad para resolver problemas con el método analizado	Oral Gises Pizarrón Borrador Material de trabajo.	15 min. 13:00-13:15
				Que el alumno aplique los conocimientos adquiridos para la resolución del *Problema de Pappus*.	El *Problema de Pappus*. Método de Descartes.	El expositor explicará la interpretación de los temas vistos hasta la sesión anterior. Se revisará la demostración de la fórmula de la distancia de un punto a una recta en la forma vectorial. Los alumnos bajo la supervisión del expositor, en el aula, realizarán parte de las demostraciones.	Técnica expositiva. Preguntas intercaladas. Ilustraciones. Señalizaciones. Analogías. Ilustraciones en acto (demostraciones).	**Formativa:** Recuperación de conocimientos previos. Habilidad para resolver problemas.	Material de trabajo Oral. Gises Pizarrón. Borrador. Cuaderno.	25 min. 13:15-13:50
				Que el alumno aplique los conocimientos adquiridos para la resolución del *Problema de Pappus*.	El *Problema de Pappus*. Método de Descartes.	El expositor realizará la solución del *Problema de Pappus* (parte algebraica), Los alumnos bajo la supervisión del expositor, en el aula, procederán a desarrollar la parte algebraica de la solución del *Problema de Pappus*.	Técnica expositiva. Preguntas intercaladas. Ilustraciones. Ilustraciones en acto (demostraciones).	**Formativa:** Recuperación de conocimientos previos. La actividad mental constructiva del alumno.	Material de trabajo Oral. Gises. Pizarrón. Borrador. Cuaderno.	30 min. 13:50-14:20
				Englobar los conceptos vistos en la sesión.	Cierre de la cuarta sesión	El expositor realizará un resumen de lo visto en clase, preguntará al grupo si es que existen dudas con respecto a la demostración algebraica. Definirá la tarea para la quinta sesión.	Preguntas al grupo	Retroalimentación del grupo para el expositor	Oral Gises. Pizarrón. Borrador. Material de trabajo.	10 min. 14:20-14:30

Número	Apertura	Desarrollo	Cierre	OBJETIVOS	TEMA Contenidos	ACTIVIDADES DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE	ESTRATEGIAS DE ENSEÑANZA	ASPECTO EVALUADO	MATERIAL DE APOYO	T (H)
5ª Sesión				Esperar al grupo	Tolerancia reglamentaria					5 min. 11:10-11:15
				Conocerá los objetivos, la metodología de trabajo y las expectativas del expositor para esta sesión	Encuadre de la quinta sesión.	El expositor presentará al grupo de manera verbal y por escrito los contenidos y su metodología.	Técnica expositiva. Objetivos.	**Diagnóstica:** Motivación Nivel de participación grupal Comentarios de los alumnos.	Orden del día.	5 min. 11:15-11:20
				Reforzamiento del tema visto en la sesión anterior.	Tarea.	El expositor invitará a los alumnos a resolver los reactivos de tarea en el pizarrón. Revisará los planteamientos y respuestas de los alumnos. Cuestionará y aclarará las dudas del tema si es que existen.	Participación directa de los alumnos.	**Formativa:** Aprendizaje de conceptos. Habilidad para resolver problemas con el método analizado	Oral Pizarrón Marcadores. Borrador. Cuaderno.	15 min. 11:20-11:35
				Que el alumno aplique los conocimientos adquiridos para la resolución del *Problema de Pappus*.	El *Problema de Pappus*. Método de Descartes.	El expositor explicará la interpretación de los temas vistos hasta la sesión anterior. Se terminará la demostración algebraica de desarrollo del *Problema de Pappus*. Los alumnos bajo la supervisión del expositor, en el aula, realizarán parte de las demostraciones.	Técnica expositiva. Preguntas intercaladas. Ilustraciones. Organizadores gráficos. Señalizaciones. Analogías. Ilustraciones en acto (demostraciones).	**Formativa:** Habilidad para resolver problemas con el método analizado.	Oral. Marcadores. Pizarrón. Borrador. Cuaderno. Escuadras. Computadora. Cañón.	25 min. 11:35-12:00
				Interpretación de la expresión de Descartes por parte de los alumnos	Expresión general de segundo grado y criterio de clasificación de las cónicas (discriminante).	El expositor explicará la interpretación de la ecuación de segundo grado obtenida por Descartes, así como la clasificación de las cónicas con base en el criterio del discriminante.	Técnica expositiva. Preguntas intercaladas. Ilustraciones. Organizadores gráficos. Ilustraciones en acto (demostraciones).	**Formativa:** Habilidad para la solución de problemas con el método analizado	Oral Pizarrón Marcadores Borrador Computadora. Cañón.	25 min. 12:00-12:25

				El alumno reforzará el conocimiento recién aprendido	Cónicas	El expositor auxiliará a los alumnos para resolver un ejercicio del tipo: Teniendo las líneas en posición con valor de: *EA = 3, AG =5, AB = BR, BS =* $\frac{1}{2}$ *BE, GB=BT,* *CD =* $\frac{3}{2}$ *CR, CF = 2CS, CH =* $\frac{2}{3}$ *CT*, y los ángulos $\phi_1 = 120^\circ$, $\phi_2 = 35^\circ$, $\phi_3 = 30^\circ$ *y* $\phi_4 = 48^\circ$; determina la solución y define de cuál cónica se trata. Los alumnos en equipos, determinarán la solución del ejercicio.	Organizadores previos. Activación de conocimientos previos. Planteamiento y resolución de casos. Participación directa de los alumnos en equipos.	Capacidad inductiva. Destreza y capacidad de análisis para resolver un problema. Habilidad para el trabajo en equipo	Oral Pizarrón Marcadores. Borrador. Cuaderno.	20 min. 12:25-12:45
				Englobar los conceptos vistos en la sesión.	Cierre de la quinta sesión	El expositor realizará un resumen de la sesión, preguntará al grupo si es que existen dudas con respecto al ejercicio resuelto y definirá la actividad para la casa.	Preguntas al grupo	Retroalimentación del grupo para el expositor	Oral Marcadores. Pizarrón. Borrador. Cuaderno.	5 min. 12:45-12:50

Número	Apertura	Desarrollo	Cierre	OBJETIVOS	TEMA Contenidos	ACTIVIDADES DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE	ESTRATEGIAS DE ENSEÑANZA	ASPECTO EVALUADO	MATERIAL DE APOYO	T (H)
6ª Sesión				Esperar al grupo	Tolerancia reglamentaria					5 min. 8:40-8:45
				Conocerá los objetivos, la metodología de trabajo y las expectativas del expositor para esta sesión	Encuadre de la sexta sesión.	El expositor presentará al grupo de manera verbal y por escrito los contenidos y su metodología.	Técnica expositiva. Objetivos.	**Diagnóstica:** Motivación Nivel de participación grupal Comentarios de los alumnos.	Orden del día.	5 min. 8:45-8:50
				Reforzamiento del tema visto en la sesión anterior.	Tarea	El expositor preguntará al alumno si es que existen dudas acerca de la tarea; si existieran procederá a disiparlas invitando a un alumno a que pase al pizarrón.	Participación directa de los alumnos.	**Formativa:** Aprendizaje de conceptos. Habilidad para resolver problemas con el método analizado.	Oral Gises Pizarrón. Borrador.	10 min. 8:50-9:00
				Que el alumno aplique los conocimientos adquiridos para la resolución del *Problema de Pappus*. El expositor engarzará los procesos de construcción del alumno con el saber colectivo.	El *Problema de Pappus*. Método de Descartes.	El expositor guiará a los alumnos para terminar el ejemplo del texto de la *Geometría* de Descartes. Los alumnos bajo la supervisión del expositor, en el aula, determinarán el tipo de cónica del ejemplo por medio del criterio del discriminante. Obtendrán los valores para el trazo de la cónica.	Preguntas intercaladas. Ilustraciones. Organizadores gráficos. Señalizaciones. Analogías.	**Formativa:** Recuperación de conocimientos previos. La actividad mental constructiva del alumno.	Oral. Gises Pizarrón. Borrador. Cuaderno. Calculadora.	20 min. 9:00-9:20
				Englobar los conceptos vistos en la sesión.	Cierre de la sexta sesión	El expositor realizará un resumen de lo realizado en clase. El expositor preguntará al alumno su apreciación sobre la conducción y exposición de la sesión; y definirá el trabajo para la casa. Inquirirá la opinión de los alumnos acerca de lo expuesto. Conocerá y aclarará, si existieran, dudas del grupo	Preguntas al grupo.	Retroalimentación del grupo para el expositor	Oral. Gises. Borrador. Pizarrón.	10 min. 9:20-9:30

Número	Apertura	Desarrollo	Cierre	OBJETIVOS	TEMA Contenidos	ACTIVIDADES DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE	ESTRATEGIAS DE ENSEÑANZA	ASPECTO EVALUADO	MATERIAL DE APOYO	T (H)
7ª Sesión				Esperar al grupo	Tolerancia reglamentaria					5 min. 12:50-12:55
				Conocerá los objetivos, la metodología de trabajo y las expectativas del expositor para esta sesión	Encuadre de la séptima sesión.	El expositor presentará al grupo de manera verbal y por escrito los contenidos y su metodología.	Técnica expositiva. Objetivos.	**Diagnóstica:** Motivación Nivel de participación grupal Comentarios de los alumnos.	Oral. Orden del día.	5 min. 12:55-13:00
				Utilizar en forma general The *Geometer's Sketchpad*	Introducción al uso de *The Geometer's Sketchpad.*	El expositor explicará en forma breve las herramientas básicas software interactivo de geometría.	Técnica expositiva.	**Diagnóstica:** Evaluación de conocimientos previos.	Oral. Computadora.	20 min. 13:00-13:20
				Trazo del ejemplo de el texto de la *Geometría* de Descartes	Elipse.	El expositor guiará a los alumnos para realizar el trazo de la cónica. El alumno bajo la supervisión del expositor seguirá los pasos para el tazo de la cónica.	Activación de conocimientos previos. Señalizaciones. Ilustraciones.	Motivación. Nivel de participación grupal. Comentarios de los alumnos.	Oral. Computadora	50 min. 13:20-14:10
						Los alumnos procederán, una vez obtenido en el trazo del ejemplo, a imprimir su actividad. El profesor recogerá el material de los alumnos.		**Sumativa:** Habilidad para resolver problemas Nivel de participación Comentarios de los alumnos.	Oral. Computadora Impresora	10 min. 14:10-14:20
				Englobar los conceptos vistos en la sesión.	Resumen. Cierre de la séptima sesión.	El expositor realizará un resumen de lo realizado en clase. Peguntará al alumno su apreciación sobre la conducción y exposición de la sesión.	Preguntas al grupo.	**Diagnóstica:** Comentarios de los alumnos. Retroalimentación del grupo para el expositor	Oral	10 min. 14:20- 14:30

Número	Apertura	Desarrollo	Cierre	OBJETIVOS	TEMA Contenidos	ACTIVIDADES DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE	ESTRATEGIAS DE ENSEÑANZA	ASPECTO EVALUADO	MATERIAL DE APOYO	T (H)
8ª Sesión				Esperar al grupo	Tolerancia reglamentaria					5 min. 11:10-11:15
				Conocerá los objetivos, la metodología de trabajo y las expectativas del expositor para esta sesión	Encuadre de la octava sesión.	El expositor presentará al grupo de manera verbal los contenidos y su metodología.	Técnica expositiva. Objetivos.	**Diagnóstica:** Motivación Nivel de participación grupal Comentarios de los alumnos.	Oral. Orden del día.	5 min. 11:15-11:20
				El expositor identificará los conocimientos adquiridos de los alumnos de los temas vistos.	Examen de conocimientos.	El expositor aplicará un examen para evaluar los conocimientos acerca de los temas vistos en las siete sesiones.		**Diagnóstica:** Evaluación de conocimientos.	Hoja de reactivos.	60 min. 11:20-12:20
				El expositor identificará los conocimientos adquiridos de los alumnos de los temas vistos.	Cuestionario de desempeño docente.	El expositor aplicará un cuestionario para rebabar la opinión de los alumnos acerca del profesor y de los temas vistos.		**Diagnóstica:** Apreciación de la opinión de los alumnos relativa al desempeño del profesor y los temas vistos	Hoja de reactivos.	10 min. 12:20-12:30

4.5. Metodología

De acuerdo con Ausubel (1976), se logrará aprendizaje significativo cuando el aprendiz pueda obtener el significado del contenido académico y pueda relacionarlo con sus ideas y conocimientos previos de manera comprensible y útil, por lo que durante el desarrollo de los temas en las sesiones se hizo referencia a los conocimientos previos del alumno, y los contenidos se desarrollaron de la siguiente forma:

- Los temas se expusieron en clase con la participación activa y discusión con los alumnos.
- Para la solución del *Problema de Pappus*, el expositor estableció mecanismos de análisis de los componentes conceptuales y operativos del problema en cuestión, a fin de que el alumno, en lo posible, lograra racionalizar, identificar sus elementos y la relación entre ellos, así como su representación, solución e interpretación.
- Los alumnos tomaron nota, así como observaciones y reflexiones sobre los temas vistos en su cuaderno y el material de trabajo proporcionado por el profesor.
- Los alumnos trabajaron en equipo.
- Los contenidos se adaptaron en función de las necesidades de los alumnos.

4.6. Evaluación

La forma de evaluación fue la siguiente:

Descripción	Porcentaje (%)
Examen escrito	80
Participación en clase individual y grupal	10
Tareas e investigaciones	10
Total	100

La forma de evaluación por sesión fue la siguiente:

Sesión 1

La participación consistió en:

- Determinar la cuarta proporcional de tres ejercicios. Se registró la participación de seis alumnos por ejercicio: cinco lo resolvieron en su cuaderno y uno en el pizarrón

- Determinar la multiplicación (dos ejercicios) y la división (dos ejercicios) de segmentos (adquisición del aprendizaje). Se registró la participación de seis alumnos por los ejercicios de multiplicación y seis por el de la división: cinco lo resolvieron en su cuaderno y uno en el pizarrón.

Como se les comentó a los alumnos que sólo se registrarían cinco participaciones para cada ejercicio (debido a lo corto del tiempo), en esta sesión participaron ocho de los 38 alumnos (algunos con una o más participaciones), ya que fueron los que terminaron primero. Cabe señalar que además de los ocho alumnos señalados otros más terminaron los ejercicios.

La tarea para la segunda sesión consistió en:

- Realizar un resumen de la lectura histórica proporcionada por el profesor, las biografías de Apolonio y Euclides, y seis ejercicios para determinar: la cuarta proporcional (dos), multiplicación (dos) y división (dos) de segmentos (consolidación del aprendizaje).

Observaciones: Los alumnos se mostraron entusiasmados y participativos en una gran parte de la sesión (80 % del tiempo). Mencionaron que fue atractivo el uso de gises de colores. Aunque la participación individual de los alumnos no fue constante, si hubo participación en forma grupal. Los ejercicios contemplados por el profesor fueron adecuados. No pudieron realizarse más ejercicios de la multiplicación y división de segmentos, debido a que los alumnos tuvieron duda en la demostración del Teorema de Tales, en los ejercicios de la cuarta proporcional y en los criterios de semejanza en triángulos.

Reflexión: Al parecer el tiempo destinado para cada una de las actividades no fue suficiente. El examen diagnóstico restó tiempo a las actividades planeadas originalmente.

Sesión 2

La tarea consistió de dos partes: los ejercicios y el resumen. 32 alumnos entregaron las dos partes, seis entregaron sólo una de las dos partes (cuatro no entregaron el resumen y dos no entregaron los ejercicios). En lo que se refiere a los ejercicios, se les realizaron correcciones y observaciones a nueve alumnos (retroalimentación y seguimiento).

La participación consistió en:

- Contestar cuatro preguntas con respecto a la lectura dejada de tarea, se registró la participación de 12 alumnos.

- Participar en la resolución de la parte geométrica del *Problema de Pappus*. Tres alumnos pasaron al pizarrón y a siete se les revisó en el cuaderno (adquisición del aprendizaje).

Se registraron diez participaciones en el ejercicio (debido a lo corto del tiempo). En esta sesión participaron 14 de los 38 alumnos (algunos con una o dos participaciones), los que levantaron la mano para contestar las preguntas y los que acabaron primero el ejercicio. Cabe mencionar que hubo participación general del grupo durante las dos presentaciones *Power Point*.

La tarea para la tercera consistió en:

- 15 ejercicios de la ecuación de una recta, en la forma general (cinco), punto-pendiente (cinco) y pendiente-ordenada al origen (cinco) (activación de conocimientos previos).

Observaciones: La presentación *Power Point* de la parte histórica fomentó el interés en el grupo ya que tuvieron una participación constante durante la misma (aunque no se registró en forma individual, para no perder tiempo). En el desarrollo geométrico surgieron dudas de temas que se supone, lo alumnos conocían. Los alumnos tuvieron duda en el concepto de *línea en posición dada*, en la ecuación general de la recta, la pendiente, y en el cálculo de las líneas *CB* y *CD*, en el inicio de la solución del *Problema de Pappus*.

Reflexión: Los recursos didácticos utilizados en la sesión: la presentación *Power Point* y el pizarrón blanco fomentaron el entusiasmo y la participación general de los alumnos. Sin embargo, el tiempo programado para las dos presentaciones (histórica y geométrica) no fue suficiente. Es necesario reducir el tiempo de la presentación histórica. Al término de la sesión, 24 alumnos acudieron a la asesoría para revisar los temas de: ley de los senos, pendiente de una recta y ecuación de la recta (seguimiento y retroalimentación). Cabe señalar que los temas referentes a la ecuación de la recta, fueron los que se dejaron para traer de tarea, por lo que, sería más recomendable dejar esta tarea en la primera sesión.

Sesión 3

Tarea

31 alumnos entregaron la tarea, no hubo observaciones o correcciones del profesor.

La participación consistió en:

- Pasar al pizarrón para completar la demostración geométrica del *Problema de Pappus*. Cinco alumnos pasaron al pizarrón.

La tarea para la cuarta sesión consistió en:

- Realizar tres ejercicios sobre la demostración geométrica del *Problema de Pappus*.

Observaciones: El grupo se mostró participativo en la clase, se puede afirmar que el tema no es complicado para ellos. No se pudo terminar la actividad debido a que el técnico no había instalado el cañón y la computadora, y además esta sesión sólo fue de 50 min. Surgieron dudas en la interpretación cartesiana actual y la empleada por Descartes en los temas de distancia de un punto a una recta, pendiente y ecuación de primer grado. Al término de la sesión diez alumnos acudieron a la asesoría para revisar los temas de: pendiente de una recta y ecuación de la recta, así como la interpretación cartesiana actual y la empleada por Descartes en los temas de distancia de un punto a una recta (seguimiento y retroalimentación).

Reflexión: Es necesario trabajar con un mínimo de dos horas por sesión en la parte de la demostración geométrica, principalmente por los contratiempos que pudieran surgir como, por ejemplo, la instalación del equipo. En general fue favorable la participación e interés del grupo.

Sesión 4

Tarea

31 de los 38 alumnos entregaron la tarea. A once se les realizaron observaciones. En la sesión no se resolvió la tarea en el pizarrón debido a la falta de tiempo.

La participación consistió en:

- Trabajar en equipos de cuatro para determinar las ecuaciones de las rectas *CF* y *CH*, e iniciar la resolución de la parte algebraica del *Problema de Pappus*, al realizar el producto de las rectas *CB* por *CF* y *CD* por *CH*. Pasaron cuatro alumnos al pizarrón y a 32 se les revisó en el cuaderno (integrantes de ocho equipos).

La tarea para la quinta sesión consistió en:

- Terminar el producto de las rectas *CB* por *CF* y *CD* por *CH*, cinco ejercicios del método de completar el cuadrado para resolver ecuaciones cuadráticas, la definición de discriminante para clasificar a las cónicas y tres ejercicios sobre la distancia de un punto a una recta en forma vectorial.

Observaciones: Los alumnos no estuvieron muy convencidos en la demostración de la fórmula de la distancia de un punto a una recta en la forma vectorial. Esto se pudo observar ya que existieron dudas durante el desarrollo de la misma. Pese a lo anterior, hubo participación e interés en forma general del grupo a lo largo de la sesión.

Reflexión: Suponemos que es necesario contemplar más tiempo en las comparaciones entre los temas con respecto a cómo lo estableció Descartes y cómo se trabaja actualmente. Sería importante incluir en el programa de bachillerato de Matemáticas V el enfoque vectorial, ya que facilita las demostraciones de algunos conceptos de Geometría Analítica. Otro aspecto que no se tenía contemplado fue el gran interés manifestado por el grupo en lo relativo al origen de los ejes coordenados. Como sucedió en la primera sesión, no asistieron a la asesoría en ésta. El motivo, suponemos que fue el horario.

Sesión 5

Tarea

31 de los 38 alumnos entregaron la tarea completa.

La tarea consistió de dos partes: Terminar el producto de las rectas, y los ejercicios y la definición. 31 alumnos entregaron las dos partes, seis entregaron sólo una de las dos partes y uno no entrego ninguno de los dos (uno no entregó el producto de las rectas y cinco no entregaron los ejercicios ni la definición). En lo que se refiere a los ejercicios, se les realizaron correcciones y observaciones a 17 alumnos.

La participación consistió en:

- Trabajar en equipos de cuatro para resolver el ejercicio tomado del texto de la *Geometría.* Tres alumnos pasaron al pizarrón y a 25 se les revisó en el cuaderno (integrantes de siete equipos).

La tarea para la sexta sesión consistió en:

- Cinco ejercicios para identificar la cónica a partir del criterio del discriminante y repasar las ecuaciones de las cónicas en su forma canónica y general.

Observaciones: La presentación con la computadora fue atractiva para los alumnos, sin embargo es necesario mejorarla. Existieron dudas en la interpretación de la cónica, pero se tuvo éxito en los objetivos contemplados para la sesión. En forma general, los alumnos pudieron resolver el ejemplo tomado de la *Geometría* en el tiempo destinado. En esta sesión, 30 alumnos acudieron a la asesoría y se procedió a resolver las dudas que tenían. Las dudas fueron principalmente para adelantar el resultado y trazar la cónica; lo cual hace suponer que tienen interés en el tema.

Reflexión: Los recursos didácticos empleados en la sesión como fueron: la presentación en la computadora y el pizarrón blanco fomentaron el entusiasmo y la participación general de los alumnos. Esta quinta sesión fue importante debido a que uno de los objetivos era verificar si los alumnos podrían resolver el ejemplo original tomado de la *Geometría*. Pienso que fue un éxito ya que la mayoría de los equipos realizaron la actividad y se mostraron interesados en el resultado.

Sesión 6

Tarea

34 de los 38 alumnos entregaron la tarea. A ocho se les realizaron observaciones.

La participación consistió en:

- Verificar el producto de las rectas y las coordenadas del punto *C,* del ejercicio tomado del texto de la *Geometría*, e identificar conceptos de Geometría Analítica como: Ecuaciones de primer y segundo grado, y la expresión del discriminante.
- Obtener los valores para el trazado de la cónica con la guía del profesor, utilizando las definiciones de las *Cónicas* de Apolonio.

Participaron 34 de los 38 alumnos, cuatro pasaron al pizarrón y a 30 se les revisó el cuaderno

La tarea para la séptima sesión consistió en:

- Trazar la gráfica del ejercicio de la *Geometría*, con regla y compás.

Observaciones: El grupo se mantuvo atento y participativo en clase. Los alumnos estuvieron expectantes para verificar si el valor del producto de las líneas era correcto. En esta sesión hubo una reiterada participación de la gran mayoría de los alumnos del grupo. Tuvieron dudas en temas de álgebra como son la simplificación de expresiones algebraicas, fracciones y radicales. También hubo dudas en el producto de las rectas.

Reflexión: Es necesario trabajar con dos horas para realizar el trazo de la cónica en clase y no dejarlo de tarea, ya que se puede prestar a que los alumnos sólo copien y que no lo hagan por ellos mismos. Pienso que es más atractivo para los alumnos resolver ejemplos, ya que en la parte de la demostración de las sesiones anteriores no participaban constantemente como en las últimas dos sesiones.

Sesión 7

Tarea

35 de los 38 alumnos entregaron la tarea. A seis se les realizaron observaciones y correcciones.

La participación consistió en:

- Entregar el trabajo del trazo de la cónica con el *software* interactivo de geometría *The Geometer's Sketchpad*. El trabajo se realizó en equipos de dos, debido a que no se contó con las computadoras necesarias para que los alumnos trabajaran en forma individual. Se registró la participación de 36 alumnos

Observaciones: El nivel de entusiasmo y participación de los alumnos fue el más alto con respecto a las seis sesiones anteriores. Se tuvo que realizar la actividad por parejas debido a la falta de equipo para que se trabajara en forma individual, esto porque al iniciar la clase, no estaba instalado el programa en el centro de cómputo y la sesión comenzó a las 13:20 horas. También hay que mencionar que sólo se pudo trabajar con la mitad de las computadoras porque no alcanzaron a instalar el programa en todas las máquinas. Los alumnos tuvieron duda en el manejo del paquete de cómputo. Sólo dos alumnos no entregaron la actividad del trazo de la cónica.

Reflexión: Se observó que a los alumnos les gusto trabajar con *The Geometer's Sketchpad*, lo que puede resultar una alternativa para tomar en cuenta por aquellos que están interesados en la enseñanza de Geometría Euclidiana y Geometría Analítica.

Sesión 8

Aplicación del examen de conocimientos y del cuestionario de desempeño docente.

Se aplicó un examen para calificar el aprendizaje de los temas vistos y un cuestionario para recabar la opinión de los alumnos relativa al desempeño del profesor durante el desarrollo de las clases. Se evaluaron 38 alumnos tomando en cuenta los tres aspectos mencionados anteriormente (examen, tareas y participación). Los resultados fueron los siguientes:

Calificación	Número de alumnos	Porcentaje (%)
10	7	18.4
9	10	26.3
8	9	23.7
7	7	18.4
6	3	7.9
5	2	5.3
Total	38	100

Como puede apreciarse, casi el 70% del grupo obtuvo una calificación más que aceptable. En el anexo se encuentra el desglose de los aspectos evaluados por sesión de los 38 alumnos

Evaluación final

Rubro evaluado	Promedio (Media)
Examen (valor máximo 8)	6.4
Participación (Máximo 12)	5.3
Tareas e investigaciones (Máximo 8)	7.1
Calificación final (Máximo 10)	8.1

Observaciones: Se generó la curiosidad del grupo de muchas formas; la reacción de los alumnos en relación con los temas se refleja en los resultados del reactivo 14 del cuestionario de desempeño docente, "El expositor despertó tu interés y sus respuestas te ayudaron a aclarar los temas en clase": el 63.2% contestaron "Siempre" y el 31.6% contestaron "Casi siempre", lo que representa más del 90% de aceptación; así como los del reactivo 15, "¿Te pareció interesante el *Problema de Pappus* y el origen de la Geometría Analítica?": el 47.4% y 39.5% contestaron "Totalmente de acuerdo" y "de acuerdo" respectivamente. En lo que se refiere a la participación del grupo, en los videos puede apreciarse la atención y participación activa de los alumnos en cada uno de los temas desarrollados durante la puesta en práctica de la propuesta.

En lo que respecta a los temas de Geometría Euclidiana, o problemas Planos según la clasificación de los problemas geométricos de Pappus, vistos en la primera sesión, se despertó y mantuvo el interés y entusiasmo de los alumnos para quienes, por ser del Área I, resultaron sencillos.

En la sesión 2 el entusiasmo y la participación constante del grupo fue evidente tanto en los comentarios a la presentación histórica como en el interés mostrado en el desarrollo geométrico de la demostración. En la sesión 3, con la solución de dudas se fomentó la participación de los alumnos en el desarrollo del tema.

La sesión 4 con la demostración con vectores de la distancia de un punto a una recta hubo menor entusiasmo y participación, quizá porque no resultó muy fácil ya que los alumnos no tenían presente el conocimiento previo del tema de vectores, por lo que es importante dejar de tarea antes de esta sesión, un repaso de este tema. Sin embargo, en las sesiones 5, 6 y 7 con la resolución del ejemplo y el trazado de la cónica con regla y compás, así como con la computadora, se recapturaron la atención y el interés.

4.7. Recursos y materiales didácticos utilizados y resultados de su empleo en clase.

El material didáctico que se empleó con los alumnos durante las siete sesiones de clase y el examen fue:

- Primera sesión. Copias con el objetivo general, temas, metodología, forma de evaluación, bibliografía, objetivos particulares de la primera sesión, la lectura histórica y formatos del examen diagnóstico. Gises de colores, pizarrón y borrador.
- Segunda sesión. Orden del día con los objetivos particulares de la segunda sesión, copias con el desarrollo geométrico del *Problema de Pappus*, computadora, cañón, presentaciones Power Point (histórica y geométrica), pizarrón blanco, plumones y borrador.
- Tercera sesión. Orden del día con los objetivos específicos de la tercera sesión, copias con el desarrollo geométrico del *Problema de Pappus*, computadora, cañón, presentaciones histórica y geométrica, pizarrón blanco, plumones y borrador.
- Cuarta sesión. Copias con los objetivos específicos de la cuarta sesión, gises de colores, pizarrón y borrador.
- Quinta sesión. Orden del día con los objetivos particulares de la quinta sesión, computadora, cañón, presentación algebraica, pizarrón blanco, plumones y borrador.
- Sexta sesión. Copias con los objetivos particulares de la sexta sesión, gises de colores, pizarrón y borrador.
- Séptima sesión. Orden del día con los objetivos particulares de la séptima sesión, computadora, cañón, pizarrón blanco, plumones, borrador. Sala de cómputo: computadoras y el *software* interactivo de geometría *The Geometer's Sketchpad* instalado.
- Octava sesión: Formato del examen de conocimientos y cuestionario de desempeño docente.

Además de lo anterior, se utilizaron copias del libro de René Descartes la *Geometría,* de la editorial Alfaguara, el libro de Joaquín Ruiz Basto de *Geometría Analítica* de la editorial Publicaciones Cultural y los alumnos trabajaron en forma individual con un cuaderno, lápices, plumas regla, compás y calculadora.

Capítulo 5. Conclusiones

Para la puesta en práctica de la propuesta se fundamentó el modelo constructivista de recepción significativa de Ausubel, aunque cabe señalar que el tiempo fue una limitante en la adopción al 100% de éste.

El modelo se pudo ajustar a la propuesta de tesis ya que, como se mencionó en el capítulo 2, no se puede esperar que el alumno construya independientemente los temas abordados en la resolución del *Problema de Pappus*; se requiere de la guía del docente.

La estructuración y la secuenciación de los temas vistos en el desarrollo de la práctica fueron aceptables; sin embargo, como se refirió en el capítulo anterior, deben realizarse algunas modificaciones a las actividades principalmente con el empleo de la computadora, ya que algunos alumnos mencionaron que podría mejorarse las presentaciones con el programa Flash.

En lo que se refiere a las estrategias de enseñanza, se requiere propiciar más la participación de los alumnos, aunque la limitante del tiempo siempre representa un obstáculo. No obstante, puede mejorarse si se realizan las demostraciones formales durante una clase de dos horas y se proponen más ejercicios para fomentar la participación.

Las técnicas de motivación fueron pertinentes, en especial el manejo de expectativas a partir de los materiales de apoyo y el acompañamiento del profesor para resolver dudas o dificultades, y debe resaltarse que en las sesiones 5 y 7 el entusiasmo, ánimo y participación en forma general del grupo fue constante.

Se fomentó la motivación de los alumnos de diversas formas, una de ellas fue la presentación de los objetivos, reactivos de trabajo, tareas y actividades que se realizaron en las siete sesiones por medio de un formato de copias que el profesor entregó a cada uno de los integrantes del grupo. Otra, que en la primera sesión, en el formato de copias iba incluida una lectura acerca del origen de la geometría analítica, lo cual pensamos pudo funcionar como un detonador del interés de los alumnos, ya que en los resúmenes que entregaron de tarea hicieron comentarios acerca de lo interesante que les resultó, además de que en la sesión 2, donde se abordó este tema, fue constante la participación del grupo en general completando las oraciones del expositor durante la sesión. Otro recurso favorable fue el juego de copias que contenía el desarrollo geométrico de la solución del *Problema de Pappus*.

Durante la puesta en escena de la propuesta, se desarrollaron los contenidos que se especificaron en la planeación. La reflexión en los alumnos se fomentó tanto con el análisis y discusión de la lectura dejada en casa, la cual tenía como objetivo que realizaran un resumen rescatando las partes más importantes de la misma, como con la conclusión a la que se llegó con la demostración del procedimiento completo de Descartes en la solución de *Problema de Pappus*, a partir de la cual alcanzaron una visión distinta de lo que es una cónica así como la noción de ejes cartesianos.

El uso de la tecnología (cañón y computadora) a través de las presentaciones en *Power Point* representó un recurso visual que, además de atractivo para los alumnos, ayudó a la identificación de los diferentes aspectos y términos que fueron apareciendo durante el desarrollo de la temática porque permitieron un camino de "ida y vuelta" entre lo concreto de las visualizaciones y lo abstracto de las explicaciones matemáticas. Por ejemplo, en la segunda sesión se despertó el interés de los alumnos con una introducción histórica de los principales personajes que contribuyeron al desarrollo de la geometría analítica como la conocemos hoy; una segunda presentación consistió en el desarrollo de la solución del *Problema de Pappus* en su parte geométrica, la cual ayudó a determinar las expresiones de las líneas y facilitó la comprensión de esta parte del tema. En la cuarta y quinta sesiones se utilizó una presentación de la solución del *Problema de Pappus* en su forma algebraica, así como el trazo de la cónica. Esta presentación facilitó la comprensión de las últimas dos partes de la demostración, ya que como sucedió en la segunda sesión, se contó con un recurso visual con el que se desglosaron y mostraron todas las operaciones y simplificaciones algebraicas.

Debe mencionarse que como un elemento contextual, fue muy importante para el aprendizaje de los contenidos realizar las sesiones en la sala de conferencias 1 del plantel, debido a que se tiene la posibilidad de tener dos pizarrones y espacio para la proyección de las presentaciones *Power point*, así como que los alumnos tienen una mejor visión. Desde nuestro punto de vista, para aumentar el aprendizaje del tema es necesario contar con más sesiones en ese lugar o en alguno con condiciones semejantes porque se minimizan distractores y se capitaliza la atención e interés para la realización de las actividades programadas para fomentar el aprendizaje; por ejemplo, hace posible una mayor agilización para el trabajo en equipos con los alumnos, exigida por la dinámica de la enseñanza.

Las técnicas o estrategias utilizadas durante el desarrollo de la propuesta fueron útiles; sin embargo, es necesario fomentar aún más participación activa de los alumnos en el proceso. También sería conveniente trabajar dos o tres sesiones en el centro de cómputo, ya que el grupo mostró un gran interés en el uso del *software* interactivo de geometría *The Geometer's Sketchpad.* Esto permitirá ampliar los formatos de presentación de un tema y lograr o consolidar la representación del conocimiento iniciada con la explicación convencional del profesor.

Aunque las estrategias de enseñanza y aprendizaje fueron en general las pertinentes, debido a lo reducido del tiempo, la participación activa de los alumnos no fue tan constante como se tenía planeado, como se puede observar en el concentrado de las participaciones del grupo.

Los resultados mostraron la apropiación de conceptos propios de la Geometría Analítica, por lo que se sugiere que el empleo del enfoque histórico puede considerarse una opción para la enseñanza y aprendizaje de esta asignatura. Queda por explorar su impacto en el desarrollo de habilidades cognoscitivas complejas implicadas en el desarrollo de proyectos y elaboración de dispositivos.

ANEXOS

Participaciones por sesión

Núm	Nombre	Sesión 1						Sesión 2			Sesión 3		Sesión 4			Sesión 5		Sesión 6		Sesión 7		Total	
																						Núm.	Puntos
1	Aguilar Espíndola Ossiel												•	•	2					•	1	3	0
2	Alavez Barrita Luís Uriel								•	1			•	•	2	•	1	•	1	•	1	6	1
3	Arcadia Barrón David	•	•	•	•		4	•	•	2			•	•	2	•	1	•	1	•	1	11	1
4	Benítez Alonso Adonai												•	•	2	•	1	•	1	•	1	5	1
5	Cerón Mayo Ana Rocío												•	•	2	•	1	•	1	•	1	5	1
6	Contreras Guzmán Juan Carlos							•		1				•	1	•	1	•	1	•	1	5	1
7	Cruz García Viridiana América	•	•	•	•		4	•	•	2	•	1	•		1	•	1	•	1	•	1	11	1
8	Cuellar Ramírez Palmira Consuelo													•	1			•	1	•	1	3	0
9	De La Riva Valdés Verónica							•	•	2	•	1	•		1	•	1	•	1	•	1	7	1
10	Durán Osuna José de Jesús													•	1	•	1	•	1	•	1	4	0.5
11	Espinosa Ángeles Diana Elena																	•	1	•	1	2	0
12	Fragoso Vargas Nelly Alejandra												•	•	2	•	1	•	1	•	1	5	1
13	García García Elisa Delannie	•	•	•	•		4	•		1	•	1	•		1	•	1	•	1	•	1	10	1
14	Garduño Moncada Raúl Rodrigo													•	1			•	1	•	1	3	0
15	Gil Jacobb Simac												•	•	2	•	1	•	1	•	1	5	1
16	González Reyes Marco Antonio												•	•	2	•	1	•	1	•	1	5	1
17	Gutiérrez Landa Rodrigo																	•	1	•	1	2	0
18	Hernández Barroso Andrea Saraí							•	•	2			•	•	2	•	1	•	1	•	1	7	1
19	Hernández García Felipe de Jesús																	•	1	•	1	2	0
20	Ibarra Trujillo Cesar												•	•	2	•	1	•	1			5	1
21	Lira Segura Carlos												•	•	2							2	0
22	López Cedillo Luís Ángel				•		1	•	•	2			•	•	2	•	1	•	1	•	1	8	1
23	Martínez Gutiérrez Luís Enrique												•	•	2	•	1	•	1	•	1	5	1
24	Moo Vergara Jesús Emanuel							•	•	2	•	1	•	•	2	•	1	•	1	•	1	8	1
25	Morales Rojas Juan Carlos													•	1	•	1					2	0
26	Nava Moctezuma Irasema	•	•	•	•	•	5	•	•	2			•	•	2	•	1	•	1	•	1	12	1
27	Nieto Zamora Mariana	•	•	•			3						•	•	2	•	1	•	1	•	1	8	1
28	Pérez Chávez Ricardo					•	1						•	•	2	•	1	•	1	•	1	6	1
29	Pérez Ortiz Abigail							•		1			•	•	2	•	1	•	1	•	1	6	1
30	Rodríguez Arcos Marisol															•	1	•	1	•	1	3	0
31	Romero Alvarado Marco Antonio												•		1			•	1	•	1	3	0
32	Ruvalcaba Sánchez Roberto de Jesús												•		1	•	1	•	1	•	1	4	0.5
33	Saavedra Flores Lizbeth Anahí															•	1	•	1	•	1	3	0
34	Sandoval Márquez David												•	•	2			•	1	•	1	4	0.5
35	Solís Campos Francisco							•		1			•	•	2	•	1	•	1	•	1	6	1
36	Torres Corrales Ana Victoria								•	1			•	•	2	•	1	•	1	•	1	6	1
37	Ugalde Calvillo Luís Gerardo																			•	1	1	0
38	Vidal Gutiérrez Miravi Rebeca		•	•		•	3	•		1	•	1	•	•	2	•	1	•	1	•	1	10	1

Tareas por sesión

Núm	Nombre	Sesión 1		Sesión 2	Sesión 3	Sesión 4		Sesión 5	Sesión 6	Total	
										Núm.	Puntos
1	Aguilar Espíndola Ossiel	x	T	T	x	T	x	T	T	5	0.5
2	Alavez Barrita Luís Uriel	T	T	T	T	T	T	T	T	8	1
3	Arcadia Barrón David	T	T	T	T	T	T	T	T	8	1
4	Benítez Alonso Adonai	T	T	T	T	T	T	T	T	8	1
5	Cerón Mayo Ana Rocío	T	T	T	T	T	T	T	T	8	1
6	Contreras Guzmán Juan Carlos	T	T	T	x	T	T	T	T	7	1
7	Cruz García Viridiana América	T	T	T	T	T	T	T	T	8	1
8	Cuellar Ramírez Palmira Consuelo	T	T	T	x	T	T	T	T	7	1
9	De La Riva Valdés Verónica	T	T	T	T	T	T	T	T	8	1
10	Durán Osuna José de Jesús	T	T	T	T	T	T	T	T	8	1
11	Espinosa Ángeles Diana Elena	T	x	x	T	x	x	T	T	4	0.5
12	Fragoso Vargas Nelly Alejandra	T	T	T	T	T	T	T	T	8	1
13	García García Elisa Delannie	T	T	T	T	T	T	T	T	8	1
14	Garduño Moncada Raúl Rodrigo	T	T	T	x	T	T	T	T	7	1
15	Gil Jacobb Simac	T	T	T	T	T	T	T	T	8	1
16	González Reyes Marco Antonio	T	T	T	T	T	T	T	T	8	1
17	Gutiérrez Landa Rodrigo	x	T	x	T	T	T	T	T	6	1
18	Hernández Barroso Andrea Saraí	T	T	T	T	T	T	T	T	8	1
19	Hernández García Felipe de Jesús	T	x	T	x	T	x	x	T	4	0.5
20	Ibarra Trujillo Cesar	T	T	x	T	T	T	T	T	7	1
21	Lira Segura Carlos	T	T	x	x	T	T	x	x	4	0.5
22	López Cedillo Luís Ángel	T	T	T	T	T	T	T	T	8	1
23	Martínez Gutiérrez Luís Enrique	T	T	T	T	T	T	T	T	8	1
24	Moo Vergara Jesús Emanuel	T	T	T	T	T	T	T	T	8	1
25	Morales Rojas Juan Carlos	x	T	x	T	x	T	x	x	3	0
26	Nava Moctezuma Irasema	T	T	T	T	T	T	T	T	8	1
27	Nieto Zamora Mariana	T	T	T	T	T	T	T	T	8	1
28	Pérez Chávez Ricardo	T	T	T	T	T	T	T	T	8	1
29	Pérez Ortiz Abigail	T	T	T	T	T	T	T	T	8	1
30	Rodríguez Arcos Marisol	T	T	T	T	T	T	T	T	8	1
31	Romero Alvarado Marco Antonio	T	T	x	T	T	x	T	x	5	0.5
32	Ruvalcaba Sánchez Roberto de Jesús	T	T	T	T	T	T	T	T	8	1
33	Saavedra Flores Lizbeth Anahí	T	T	T	T	T	T	T	T	8	1
34	Sandoval Márquez David	x	T	x	x	T	x	T	T	4	0.5
35	Solís Campos Francisco	T	T	T	T	T	T	T	T	8	1
36	Torres Corrales Ana Victoria	T	T	T	T	T	T	T	T	8	1
37	Ugalde Calvillo Luís Gerardo	T	T	T	T	T	x	x	T	6	1
38	Vidal Gutiérrez Miravi Rebeca	T	T	T	T	T	T	T	T	8	1

El punto rojo en el ángulo superior derecho de la celda, indica a los alumnos a los que se les realizó una observación o corrección

Evaluación final

Núm	Nombre	Examen	Participación	Tarea		Suma	Calif. Final
1	Aguilar Espíndola Ossiel	5.3	0	0.5		5.8	6
2	Alavez Barrita Luís Uriel	7.3	1	1		9.3	9
3	Arcadia Barrón David	7.6	1	1		9.6	10
4	Benítez Alonso Adonai	6	1	1		8	8
5	Cerón Mayo Ana Rocío	5.6	1	1		7.6	8
6	Contreras Guzmán Juan Carlos	6	1	1		8	8
7	Cruz García Viridiana América	7.8	1	1		9.8	10
8	Cuellar Ramírez Palmira Consuelo	5.6	0	1		6.6	7
9	De La Riva Valdés Verónica	8	1	1		10	10
10	Durán Osuna José de Jesús	6.3	0.5	1		7.8	8
11	Espinosa Ángeles Diana Elena	6	0	0.5		6.5	6
12	Fragoso Vargas Nelly Alejandra	5.6	1	1		7.6	8
13	García García Elisa Delannie	8	1	1		10	10
14	Garduño Moncada Raúl Rodrigo	6.3	0	1		7.3	7
15	Gil Jacobb Simac	6	1	1		8	8
16	González Reyes Marco Antonio	5.6	1	1		7.6	8
17	Gutiérrez Landa Rodrigo	6	0	1		7	7
18	Hernández Barroso Andrea Saraí	7	1	1		9	9
19	Hernández García Felipe de Jesús	5.6	0	0.5		6.1	6
20	Ibarra Trujillo Cesar	4.6	1	1		6.6	7
21	Lira Segura Carlos	4	0	0.5		4.5	5
22	López Cedillo Luís Ángel	7	1	1		9	9
23	Martínez Gutiérrez Luís Enrique	7	1	1		9	9
24	Moo Vergara Jesús Emanuel	7.6	1	1		9.6	10
25	Morales Rojas Juan Carlos	3	0	0		3	5
26	Nava Moctezuma Irasema	8	1	1		10	10
27	Nieto Zamora Mariana	6.6	1	1		8.6	9
28	Pérez Chávez Ricardo	7	1	1		9	9
29	Pérez Ortiz Abigail	7	1	1		9	9
30	Rodríguez Arcos Marisol	6.6	0	1		7.6	8
31	Romero Alvarado Marco Antonio	6.3	0	0.5		6.8	7
32	Ruvalcaba Sánchez Roberto de Jesús	7.6	0.5	1		9.1	9
33	Saavedra Flores Lizbeth Anahí	6.6	0	1		7.6	8
34	Sandoval Márquez David	6.3	0.5	0.5		7.3	7
35	Solís Campos Francisco	7.3	1	1		9.3	9
36	Torres Corrales Ana Victoria	6.6	1	1		8.6	9
37	Ugalde Calvillo Luís Gerardo	5.6	0	1		6.6	7
38	Vidal Gutiérrez Miravi Rebeca	8	1	1		10	10

EXAMEN DIAGNÓSTICO

Nombre del Alumno: ____

Instrucciones:

- *Anotará su nombre comenzando por apellido paterno, materno y nombre(s).*
- *Los resultados de cada pregunta deberán ser escritos sin borraduras ni tachones.*

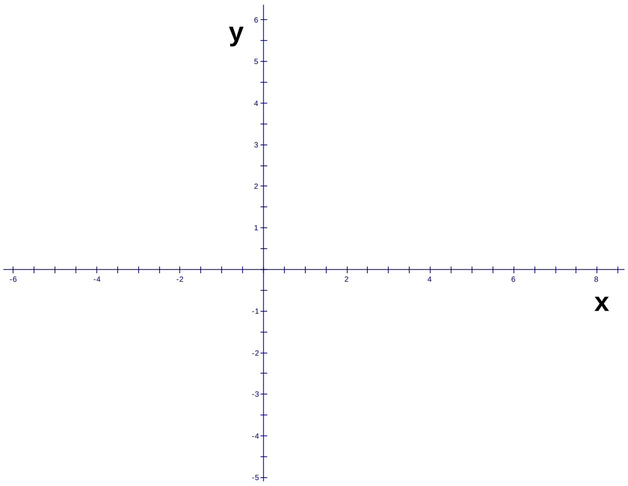
PREGUNTAS

1.- ¿En honor a quién se les llama ejes cartesianos a los ejes x e y?

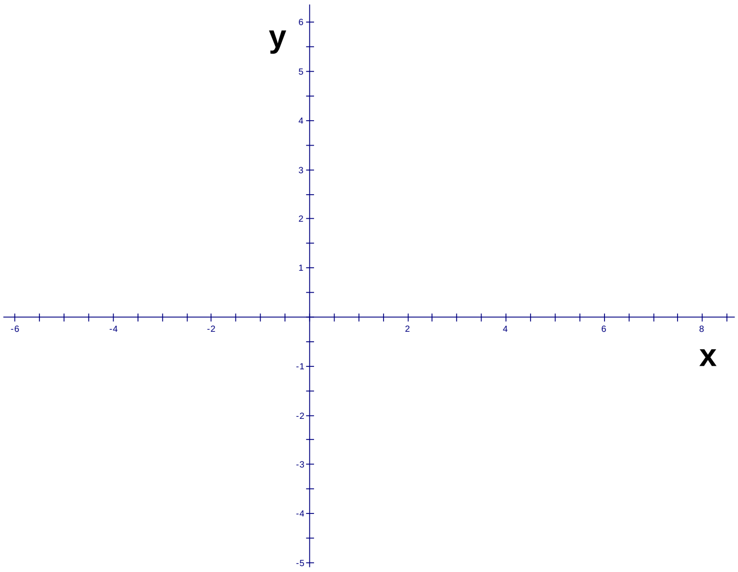
2.- ¿Cuántos criterios se conocen para afirmar que dos triángulos son semejantes?

3.- Menciona un criterio de semejanza.

4.- Encuentra la distancia entre los puntos P (4,6) y Q (1,2)

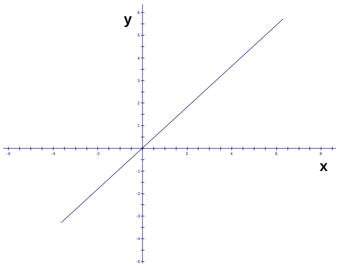


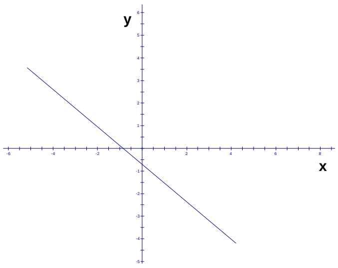
5.- Determina la gráfica y la ecuación de la recta que pasa por el punto **A** (3, 2) y tiene pendiente m = $\frac{4}{3}$

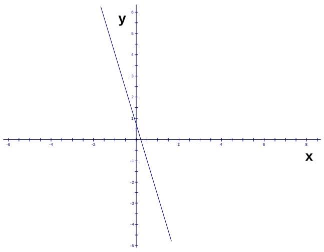


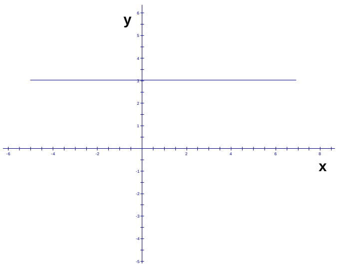
6.- Indica si la recta tiene:

a) *Pendiente positiva.*
b) *Pendiente negativa.*
c) *Pendiente igual a cero.*
d) *Pendiente infinita.*



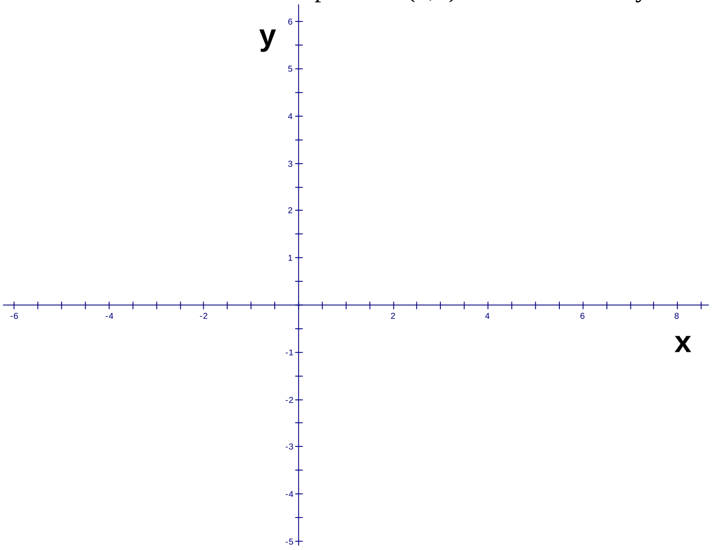






______________ ______________ ______________ ______________

7.- Encuentra la distancia del punto B (1,2) a la recta 3x + 4y – 21 = 0



8.- La ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ es una:

- Elipse si $B^2 - 4AC$ *es* _____
- Parábola si $B^2 - 4AC$ *es* _____
- Hipérbola si $B^2 - 4AC$ *es* _____

CUESTIONARIO DE DESEMPEÑO DOCENTE

Este cuestionario tiene como objetivo proporcionar datos acerca del expositor, del tema y de los materiales empleados. Subraya la opción que, de acuerdo a tu criterio es la respuesta más adecuada a cada una de las preguntas (contesta con toda sinceridad).

1) **El inicio y término de las sesiones se llevo a cabo puntualmente.**

a) Siempre b) Casi siempre c) Ocasionalmente d) Rara vez e) nunca

2) **El expositor inició las sesiones mencionando el tema, los objetivos y las actividades a realizar.**

a) Siempre b) Casi siempre c) Ocasionalmente d) Rara vez e) nunca

3) **El expositor demostró dominio de los temas presentados.**

a) Siempre b) Casi siempre c) Ocasionalmente d) Rara vez e) nunca

4) **La presentación y explicaciones del expositor fueron claras.**

a) Siempre b) Casi siempre c) Ocasionalmente d) Rara vez e) nunca

5) **El expositor distribuyó adecuadamente el tiempo para las actividades realizadas en las sesiones.**

a) Siempre b) Casi siempre c) Ocasionalmente d) Rara vez e) nunca

6) **El expositor fomentó la participación de los alumnos durante el desarrollo de los temas.**

a) Siempre b) Casi siempre c) Ocasionalmente d) Rara vez e) nunca

7) **El expositor realizó un resumen al finalizar cada sesión.**

a) Siempre b) Casi siempre c) Ocasionalmente d) Rara vez e) nunca

8) **Fue suficiente el tiempo que se empleo para realizar todas las actividades planteadas por el expositor.**

a) Totalmente de acuerdo b) De acuerdo c) Parcialmente de acuerdo d) En desacuerdo e) Totalmente en desacuerdo

9) **La lectura histórica contribuyó a la comprensión de los conceptos e ideas fundamentales.**

a) Totalmente de acuerdo b) De acuerdo c) Parcialmente de acuerdo d) En desacuerdo e) Totalmente en desacuerdo

10) **El material empleado por el expositor durante el desarrollo de los temas fue el adecuado.**

a) Siempre b) Casi siempre c) Ocasionalmente d) Rara vez e) nunca

11) **Las presentaciones con la computadora te parecieron.**

a) Excelentes b) Buenas c) Aceptables d) Podrían mejorarse e) Insuficientes

12) **El tema que te presentó el expositor es complicado para el grado escolar en el que estás actualmente.**

a) Totalmente de acuerdo b) De acuerdo c) Parcialmente de acuerdo d) En desacuerdo e) Totalmente en desacuerdo

13) Los recursos (pizarrón, computadora, copias u otros) del expositor te ayudaron a aclarar los temas vistos en clase

a) Siempre b) Casi siempre c) Ocasionalmente d) Rara vez e) nunca

14) El expositor despertó tu interés y sus respuestas te ayudaron a aclaran los temas en clase.

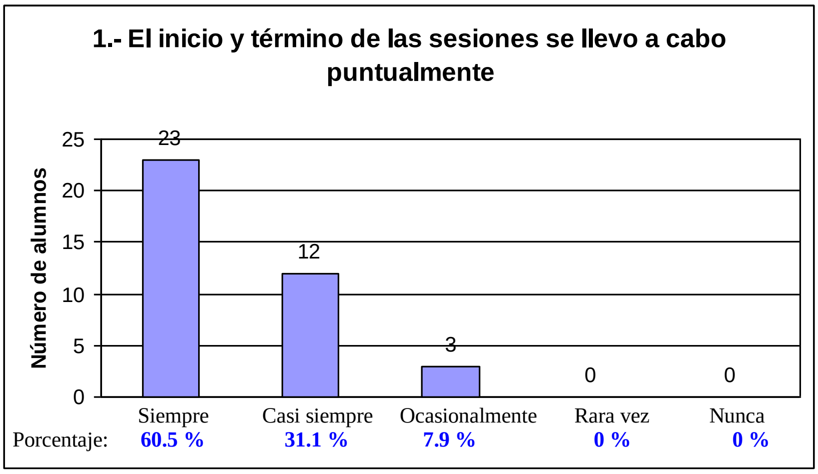
a) Siempre b) Casi siempre c) Ocasionalmente d) Rara vez e) nunca

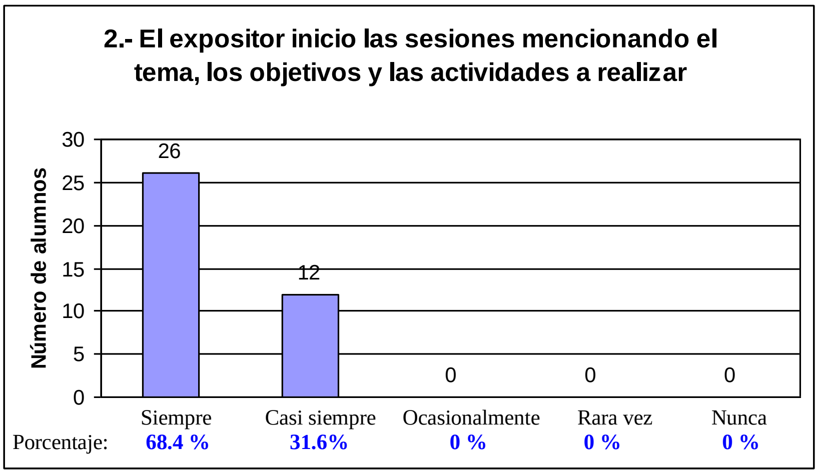
15) ¿Te pareció interesante el problema de Pappus y el origen de la Geometría Analítica?

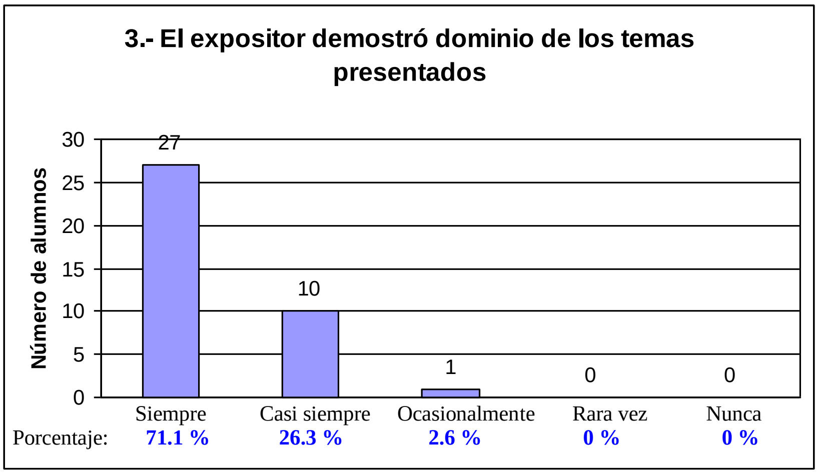
a) Totalmente de acuerdo b) De acuerdo c) Parcialmente de acuerdo d) En desacuerdo e) Totalmente en desacuerdo

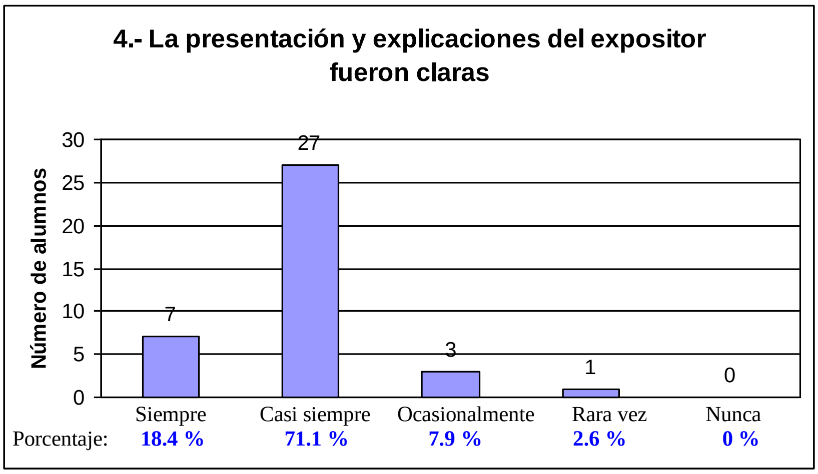
Cuestionario de Desempeño Docente. Resultados

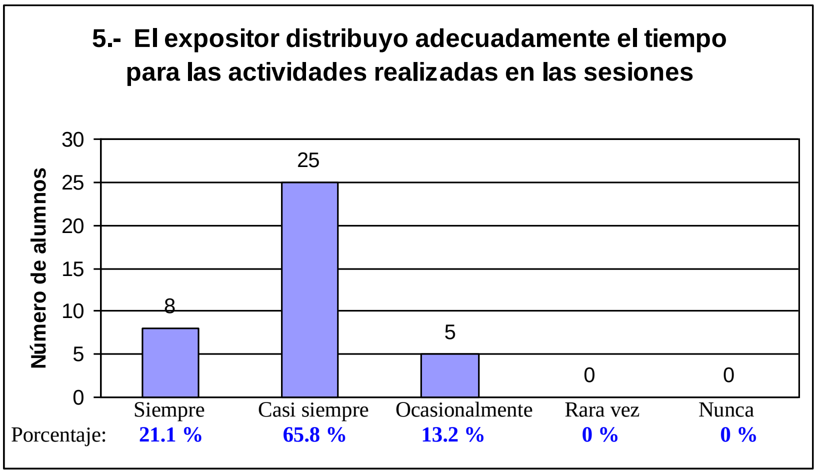
Este cuestionario se aplicó el jueves 23 de noviembre del 2006 a 38 alumnos del grupo 602.

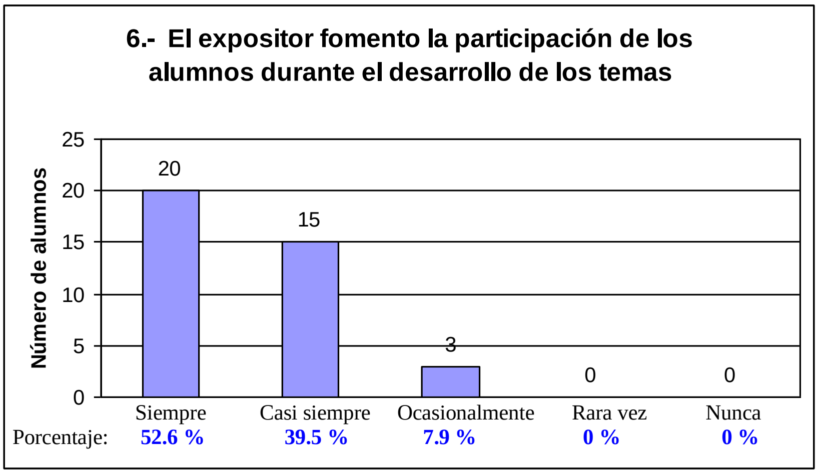




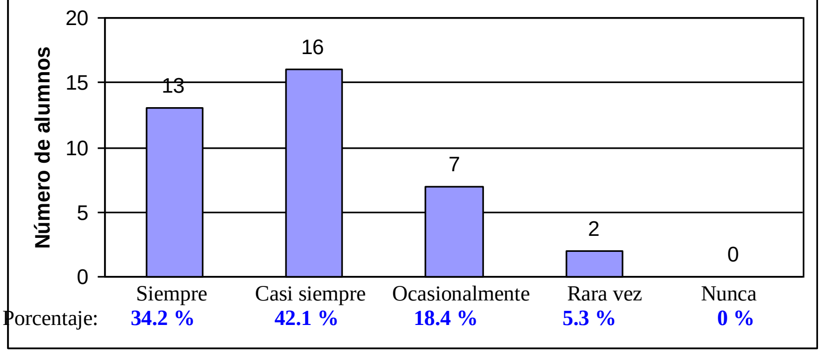



4.- La presentación y explicaciones del expositor fueron claras
Número de alumnos
30
25
20
15
10
5
0
7
27
3
1
0
Siempre
Casi siempre
Ocasionalmente
Rara vez
Nunca
Porcentaje:
18.4 %
71.1 %
7.9 %
2.6 %
0 %

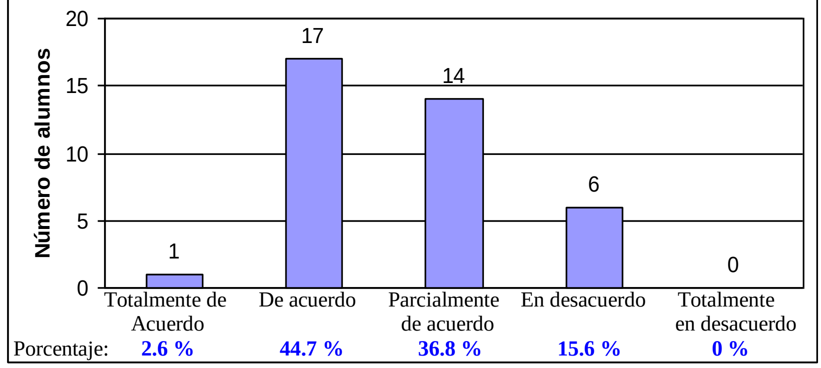

5.- El expositor distribuyo adecuadamente el tiempo para las actividades realizadas en las sesiones
Número de alumnos
30
25
20
15
10
5
0
8
25
5
0
0
Siempre
Casi siempre
Ocasionalmente
Rara vez
Nunca
Porcentaje:
21.1 %
65.8 %
13.2 %
0 %
0 %


6.- El expositor fomento la participación de los alumnos durante el desarrollo de los temas
Número de alumnos
25
20
15
10
5
0
20
15
3
0
0
Siempre
Casi siempre
Ocasionalmente
Rara vez
Nunca
Porcentaje:
52.6 %
39.5 %
7.9 %
0 %
0 %

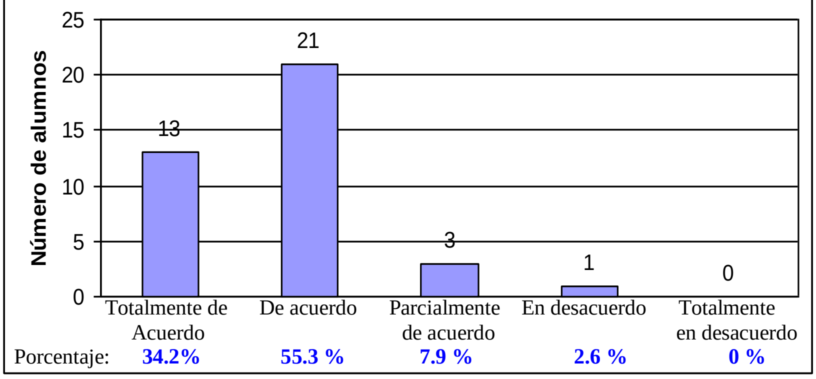
7.- El expositor realizó un resumen al finalizar cada sesión

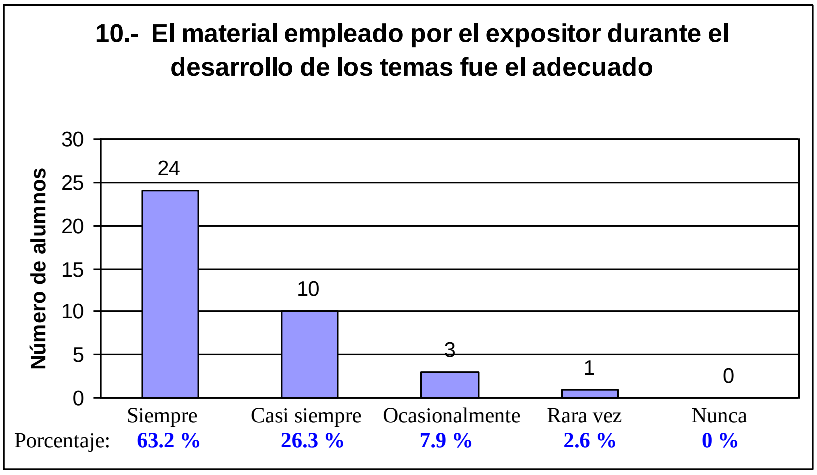


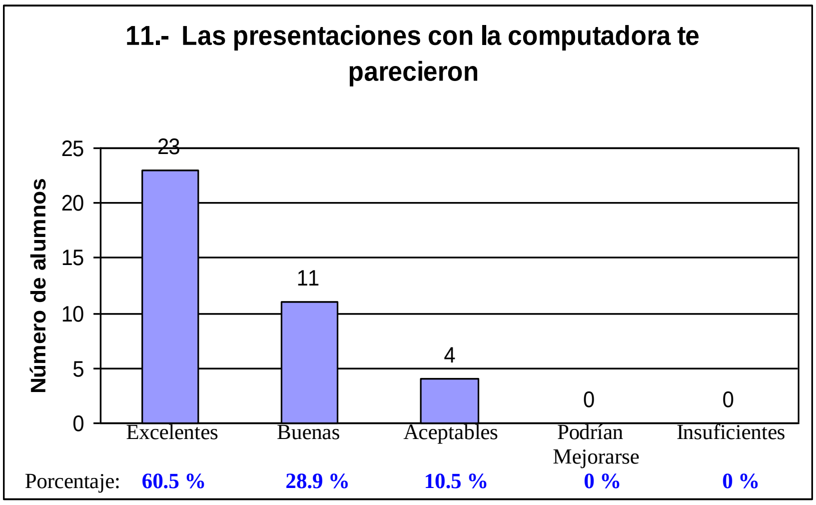
8.- Fue suficiente el tiempo que se empleo para realizar todas las actividades planeadas por el expositor

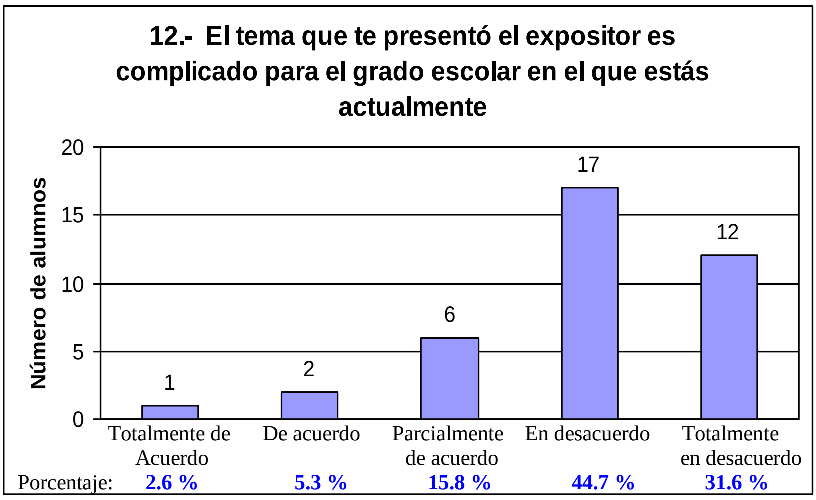


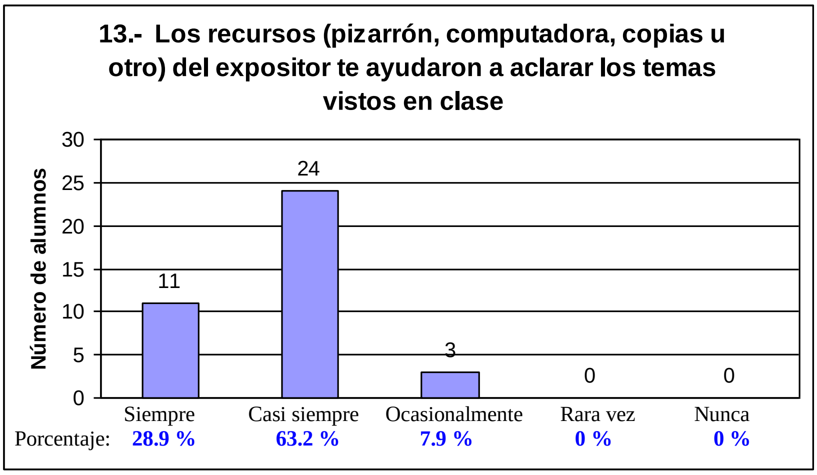
9.- La lectura histórica contribuyó a la comprensión de los conceptos e ideas fundamentales

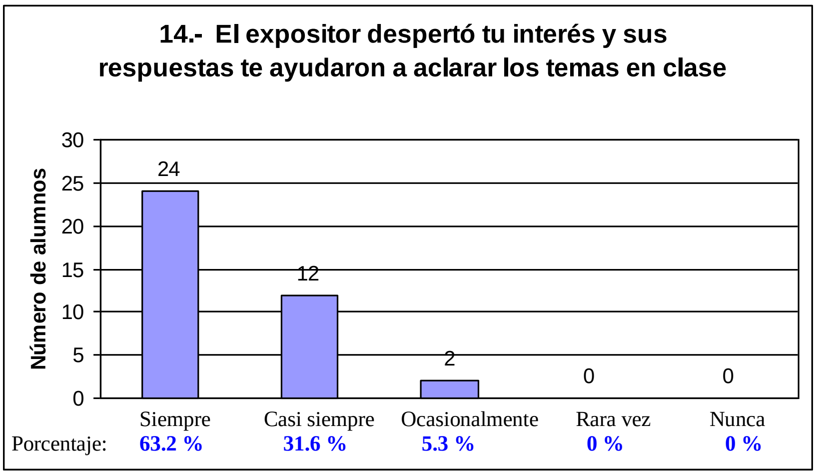


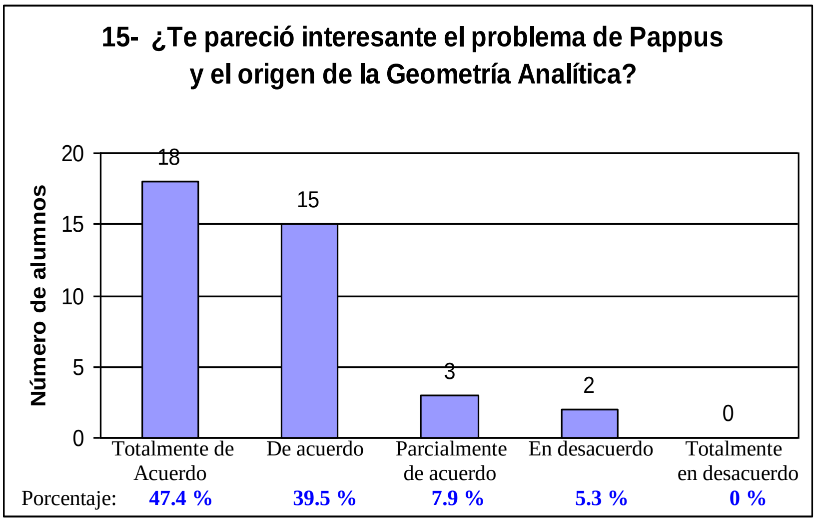

10.- El material empleado por el expositor durante el desarrollo de los temas fue el adecuado
Número de alumnos
30
25
20
15
10
5
0
24
10
3
1
0
Siempre
Casi siempre
Ocasionalmente
Rara vez
Nunca
Porcentaje:
63.2 %
26.3 %
7.9 %
2.6 %
0 %


11.- Las presentaciones con la computadora te parecieron
Número de alumnos
25
20
15
10
5
0
23
11
4
0
0
Excelentes
Buenas
Aceptables
Podrían Mejorarse
Insuficientes
Porcentaje:
60.5 %
28.9 %
10.5 %
0 %
0 %


12.- El tema que te presentó el expositor es complicado para el grado escolar en el que estás actualmente
Número de alumnos
20
15
10
5
0
1
2
6
17
12
Totalmente de Acuerdo
De acuerdo
Parcialmente de acuerdo
En desacuerdo
Totalmente en desacuerdo
Porcentaje:
2.6 %
5.3 %
15.8 %
44.7 %
31.6 %


13.- Los recursos (pizarrón, computadora, copias u otro) del expositor te ayudaron a aclarar los temas vistos en clase
Número de alumnos
30
25
20
15
10
5
0
11
24
3
0
0
Siempre
Casi siempre
Ocasionalmente
Rara vez
Nunca
Porcentaje:
28.9 %
63.2 %
7.9 %
0 %
0 %


14.- El expositor despertó tu interés y sus respuestas te ayudaron a aclarar los temas en clase
Número de alumnos
30
25
20
15
10
5
0
24
12
2
0
0
Siempre
Casi siempre
Ocasionalmente
Rara vez
Nunca
Porcentaje:
63.2 %
31.6 %
5.3 %
0 %
0 %


15- ¿Te pareció interesante el problema de Pappus y el origen de la Geometría Analítica?
Número de alumnos
20
15
10
5
0
18
15
3
2
0
Totalmente de Acuerdo
De acuerdo
Parcialmente de acuerdo
En desacuerdo
Totalmente en desacuerdo
Porcentaje:
47.4 %
39.5 %
7.9 %
5.3 %
0 %

EXAMEN DE CONOCIMIENTOS

Nombre del Alumno: ____

Instrucciones:

- Anota tu nombre comenzando por apellido paterno, materno y nombre(s).
- Los resultados de cada pregunta deberán ser escritos sin borraduras ni tachones.

1. ¿Qué diferencia existe entre una razón y una proporción?

2. Multiplica los segmentos a = 7, b = 2 y traza su representación gráfica.

3. ¿Qué significa que una recta esté dada en posición?

5. Escribe el nombre de tres matemáticos griegos de la antigüedad y alguna de sus obras.

4. Menciona 5 conceptos que se presentan en la solución del problema de Pappus (Descartes) que tienen que ver con conceptos propios de la Geometría Analítica actual.

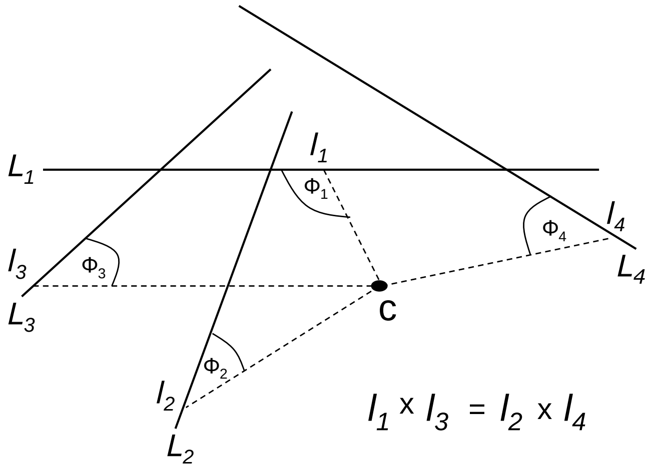
6. Determina la ecuación del lugar geométrico (cónica) que es la solución del siguiente problema de Pappus:

Datos:

EA = 5
AB = BR = x
BS = EB
AG = 6
GB = BT
CD = CR
CF = 3 CS
CH = 5 CT

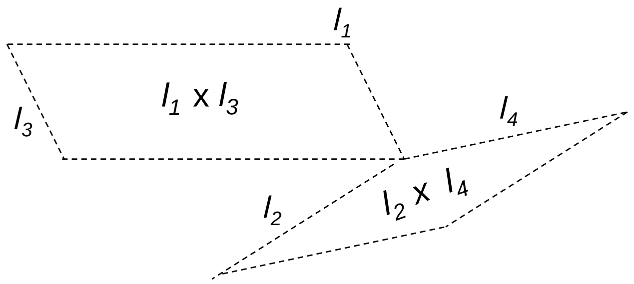
MATERIAL DE TRABAJO DE LOS ALUMNOS
El Problema de Pappus

Teniendo cuatro rectas dadas en posición (L_1*,* L_2*,* L_3 *y* L_4*), se intenta hallar, un punto (C) desde el cual se pudiesen trazar cuatro líneas rectas (*l_1*,* l_2*,* l_3 *y* l_4*), una sobre cada uno de las dadas, formando ángulos dados (* ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 *y* ϕ_4*) de modo que*

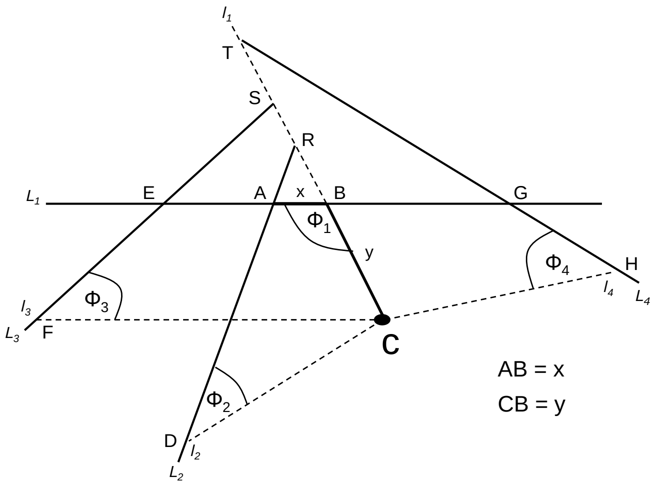


el paralelogramo formado por dos de las trazadas desde el mismo punto (esto es, el producto de estos dos segmentos) guarde una proporción dada con el paralelogramo formado por el producto de las otras dos.

$$l_1 \times l_3 = l_2 \times l_4$$

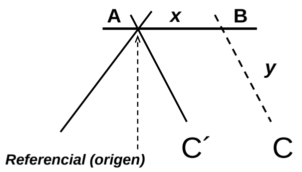


Primero, rotulamos las intersecciones de las cuatro líneas dadas (A, B, D, E, F, G y H), después el segmento AB de la recta L_1 le llamamos ***x*** y al segmento CB, la línea l_1, le llamamos ***y***. en caso necesario (como vamos a proceder) la línea l_1 se prolonga de modo que se intersecte con las otras rectas dadas en posición (en R, S y T respectivamente).



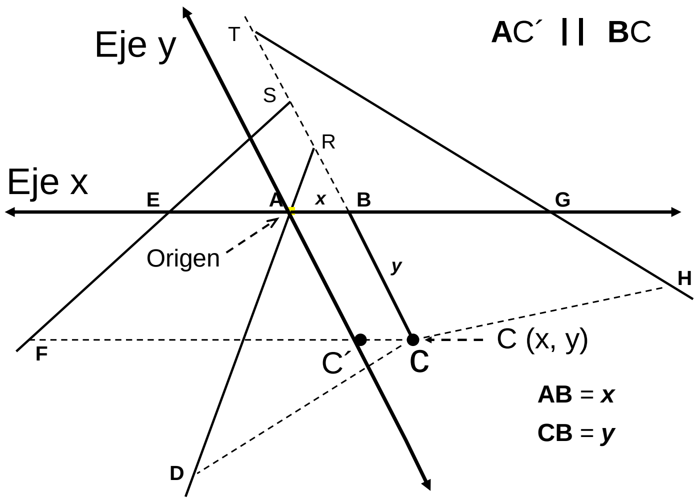
AB = L_1 = ***x***	**CB** = l_1 = ***y***	**CBA** = $\mathbf{\Phi_1}$
AD = L_2	CD = l_2	CDA = Φ_2
EF = L_3	CF = l_3	CFE = Φ_3
GH = L_4	CH = l_4	CHG = Φ_4

*"Que el segmento de la línea **AB** que está entre los puntos **A** y **B** sea denominado **x** y que el de **CB** sea denominado **y**",* nos indica que Descartes presenta una referencia (**<u>REFERENCIAL</u>**) como un ordenamiento.



AC´* || *BC

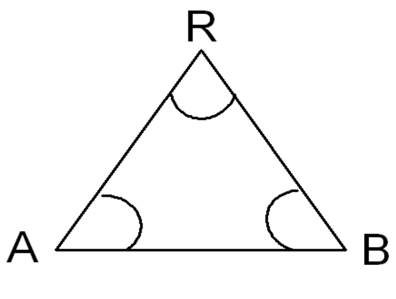
Hay una elección de dos longitudes geométricas: ***x***, ***y***, y tomando a una de ellas como la base, todas las otras longitudes serán medidas. Descartes no considera el tomar un ángulo recto (90°) entre las líneas **AB** y **CB** como lo hacemos actualmente, ya que su sistema de ejes CARTESIANOS se basa en una **referencia**; es decir, es el caso general (el ángulo **CBA** = $\mathbf{\Phi_1}$ puede tener el valor de cualquier real positivo).



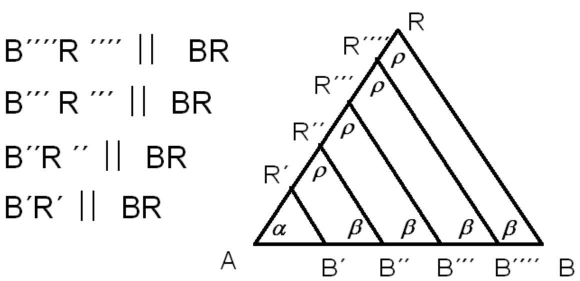
Vamos a empezar el análisis con las líneas **AB** y **CB** (**L_1** y ***l_1***) es decir, **AB** fue dada y **CB** la vamos a calcular. Procederemos a encontrar la longitud ***y*** que define en este sistema general de ejes coordenados la "posición" del punto "**C**" (o el conjunto de puntos "**C**") que satisface la condición del problema (el **lugar geométrico**).

Cálculo de CB

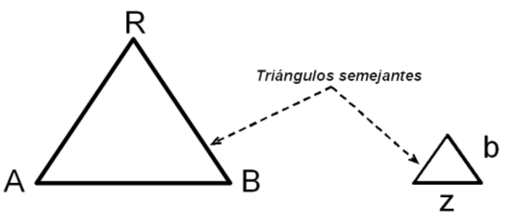
Tomamos el triángulo **ABR**. *Los ángulos son:* ***ABR***, ***BAR*** *y* ***ARB***



Tomamos $\frac{AB}{BR}$. Pero al revisar esta **razón**, podemos observar que aunque aumente o disminuya la longitud de los lados, el valor de la razón y el valor de sus ángulos no cambian

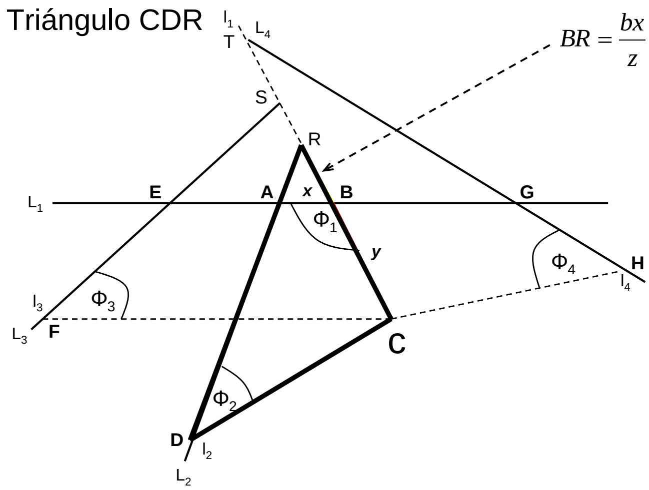


Esta razón de los lados **AB** y **BR** es así conocida y si tomamos una cantidad "***z"*** (como parámetro) se puede encontrar la magnitud "***b***" como la ***cuarta proporcional***.



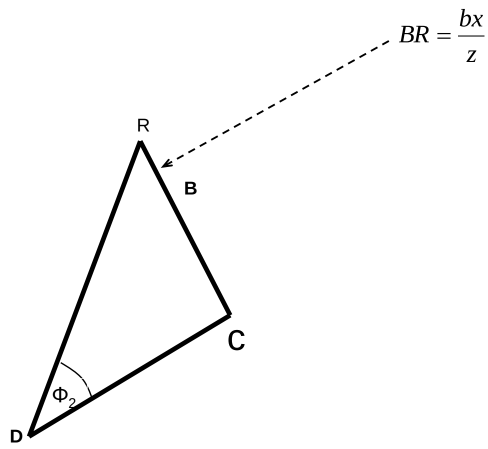
La **homogeneidad** entre estas cuatro magnitudes permiten transformar esta expresión, ya que lo que queremos es calcular a **CB** = $\boldsymbol{l_1}$, despejamos a **BR** y tenemos una parte de **CB** o $\boldsymbol{l_1}$, o más bien su prolongación.

Cálculo de CD



Tomando el triángulo **CDR**:

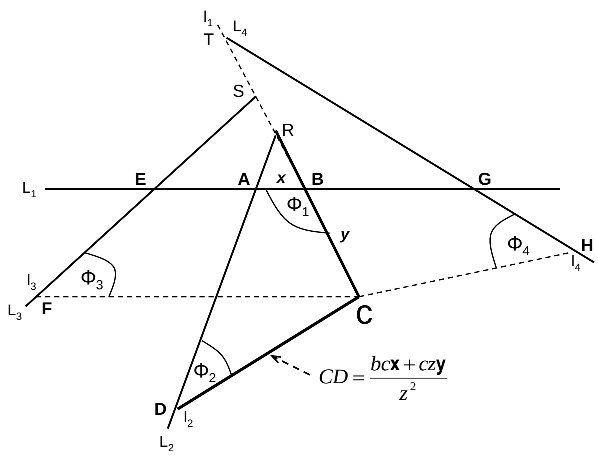
Los ángulos son:



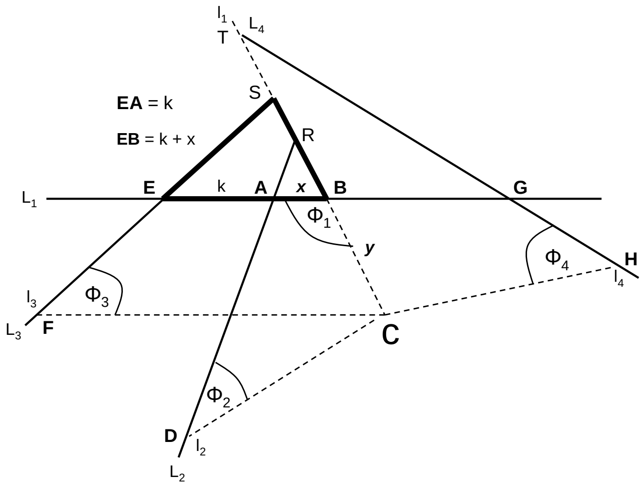
Tomamos $\frac{CD}{CR}$. Pero al revisar esta razón, podemos observar que aunque aumente o disminuya la longitud de los lados, el valor de la razón y el valor de sus ángulos no cambian. Esta razón de los lados **CD** y **CR** es así conocida y si tomamos una cantidad "**z"** (como parámetro) se puede encontrar la magnitud "**c**" como la cuarta proporcional.

Cálculo de CF

Después de esto, puesto que las líneas **AB** (**L**$_1$), **AD** (**L**$_2$) y **EF** (**L**$_3$) están dadas en posición, la distancia que hay entre **A** y **E** también es conocida (también por los ángulos), si a tal distancia la llamamos "**K**", entonces:



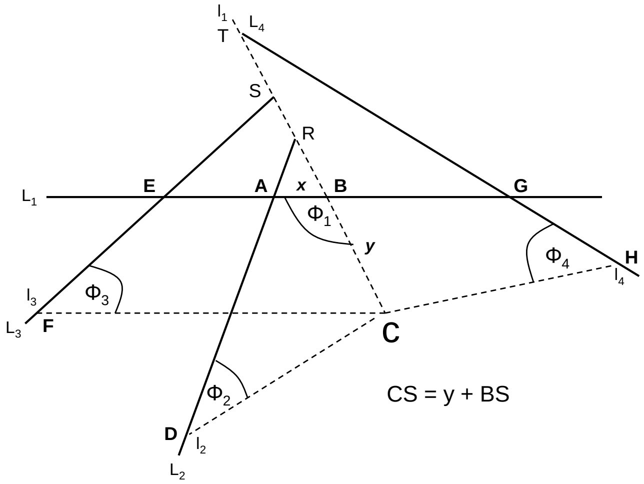
Ahora, tomemos el triángulo **EBS.** ***Los ángulos son:***



ES se encuentra en la recta $\mathbf{L_2}$, **EB = k + x**, por lo tanto, debemos calcular **BS.** Determinamos la razón entre los lados **EB** y **BS**.

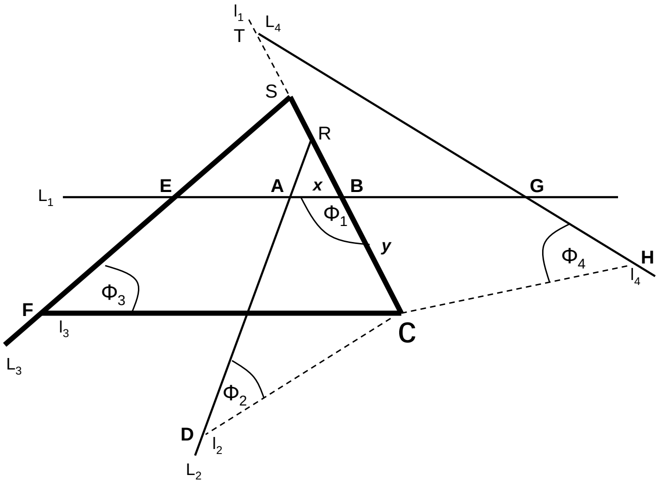
Tomamos $\frac{EB}{BS}$. Esta razón de los lados _____ y _____ es así conocida y si tomamos una cantidad "**z"** (como parámetro) se puede encontrar la magnitud "**d**" como la cuarta proporcional.

CS =



Ahora, analicemos el triángulo **CFS**:

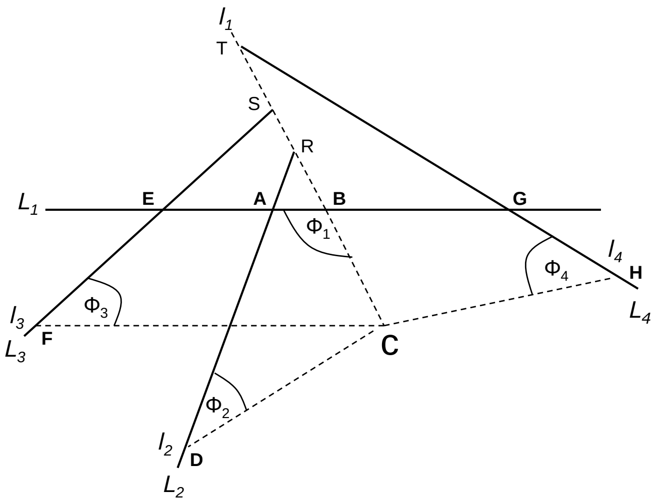
Los ángulos son:



FS se encuentra en la recta **L_3**, **CS** la obtuvimos anteriormente, la recta que buscamos es **CF = l_3**. Debemos encontrar la razón entre los lados___________.

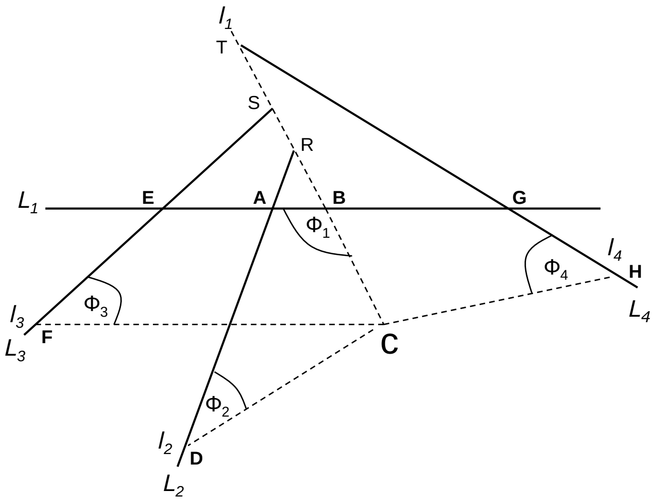
Tomamos ------

Esta razón de los lados _____ y _____ es así conocida y si tomamos una cantidad "**z"** (como parámetro) se puede encontrar la magnitud "**e**" como la cuarta proporcional.

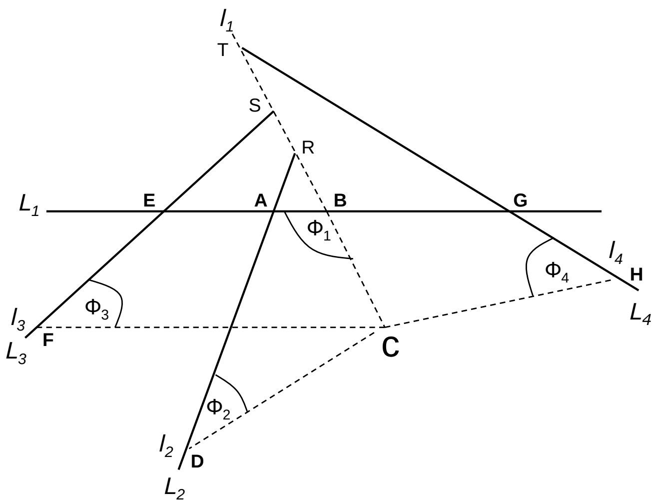


Cálculo de CH

Si llamamos al segmento **AG = ℓ** (la distancia **AG**), entonces **BG** será igual a __________. Podemos hacer esto porque **AG** es una distancia conocida (debido a que el punto **A** es la intersección de L_1 y L_2 y **G** es la intersección de L_1 y L_4).



Ahora, tomemos el triángulo **BTG**: ***Los ángulos son:***

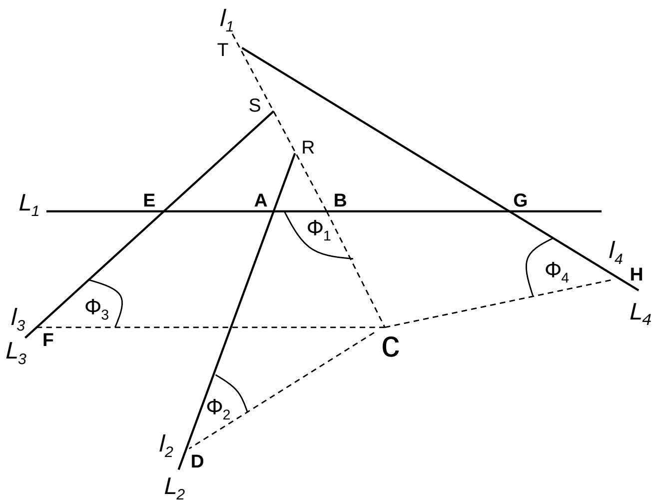


El segmento **BG** está en $\mathbf{L_1}$ y su valor es ____________ , **GT** es la línea $\mathbf{L_4}$, la cual es dada. Debemos encontrar el lado ______ ya que es la prolongación de ______. Entonces, buscamos la razón entre los lados _____ y _____.

Tomamos ------

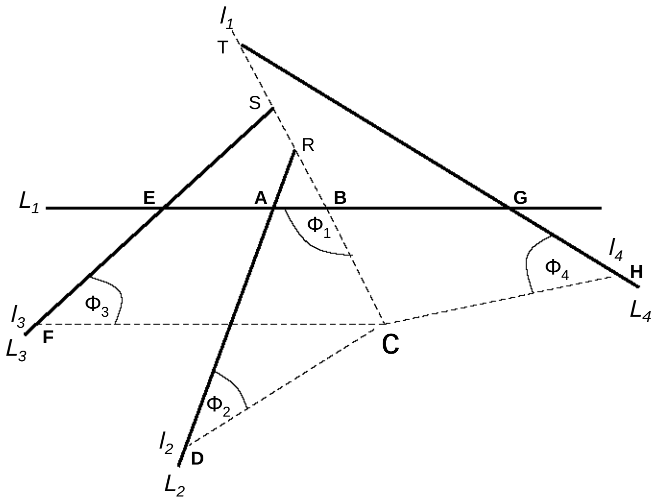
Esta razón de los lados _____ y _____ es así conocida y si tomamos una cantidad "**z"** (como parámetro) se puede encontrar la magnitud "**f**" como la cuarta proporcional.

CT =

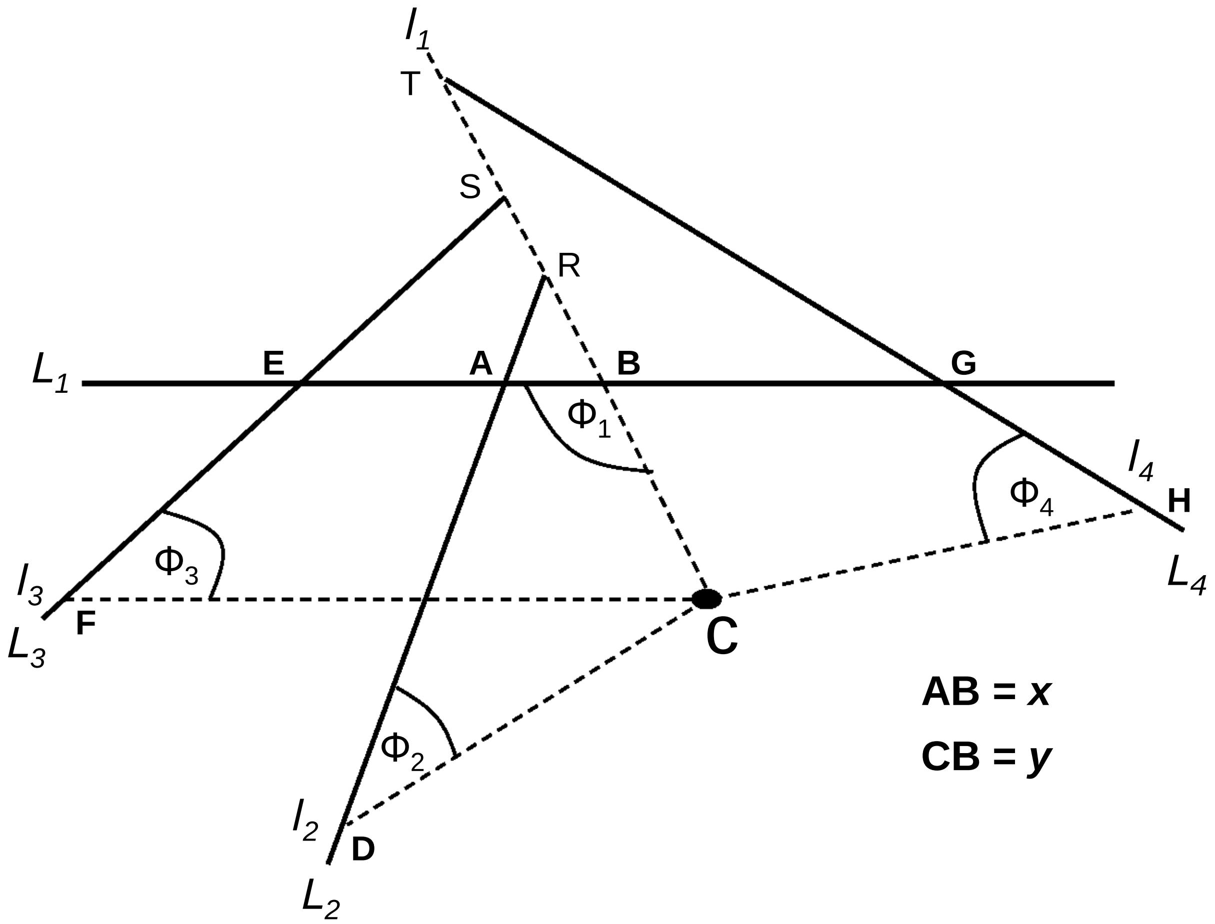


Para finalizar, analicemos el triángulo _____________.

Los ángulos son:



l_1
T
S
R
L_1
E
A
B
G
Φ_1
l_4
Φ_4
H
L_4
l_3
Φ_3
F
L_3
C
Φ_2
l_2
D
L_2


l_1
T
S
R
L_1
E
A
B
G
Φ_1
l_4
Φ_4
H
L_4
Φ_3
l_3
F
L_3
C
Φ_2
l_2
D
L_2
AB = x
CB = y

LECTURA HISTÓRICA
El Problema de Pappus y el origen de la Geometría Analítica

La geometría analítica no es una nueva geometría, sino la geometría misma estudiada con el auxilio del análisis una vez establecidos sus fundamentos con sus propios recursos. Así la concibió René Descartes, el sabio filósofo y matemático francés a quien se considera como el creador de este ingenioso método científico por haberlo dado a conocer públicamente, antes que nadie, en uno de los tres apéndices que acompañaban a su famoso "Discurso del Método", obra que se publicó 1637. Descartes, atendiendo más al carácter de los temas que al nuevo método científico de que se valió para desarrollarlos, no asignó a este último un nombre especial y tituló a su trabajo "***La Geometría***". El nombre de Geometría Analítica con que actualmente se designa a esta disciplina es muy posterior. Descartes propone en su método analítico que constituye la esencia de la Geometría Analítica los siguientes pasos:

- Considerar que el problema está resuelto.
- Transformación del problema geométrico a uno algebraico considerado en un problema de análisis matemático.
- Resolución de este nuevo problema mediante los recursos propios del referido análisis (álgebra).
- Interpretación geométrica de la solución analítica (algebraica) obtenida. Esta interpretación geométrica constituye la solución del problema.

Los antiguos geómetras habían procedido justamente a la inversa para resolver cuestiones de análisis por medio de la geometría, ideando así un método indirecto que bien podría llamarse análisis geométrico. Pitágoras, por ejemplo, en el siglo VI a.C., representaba las unidades numéricas por bolitas de un ábaco y, disponiéndolas geométricamente (en forma de cuadrados o triángulos), deducía de las propiedades de las figuras obtenidas, las fórmulas de la suma de los "n" primeros números impares y de la suma de los "n" primeros números naturales. Los nombres de cuadrado o cubo, que todavía conservan la segunda y tercera potencia de un número, provienen de que los números se representaban por segmentos, superficies o volúmenes cuyas medidas fueran iguales a ellos, y así: un producto de dos números se representaba por un rectángulo cuyos lados fueran los representantes geométricos de los factores; un producto de tres números por un paralelepípedo rectángulo cuyas aristas representaran estos factores y, como caso particular, la segunda y tercera potencia por el cuadrado o cubo correspondiente. Es posible que el análisis geométrico de los antiguos haya sugerido, por contraste, el método opuesto de la Geometría Analítica y un modo sencillo de hacer efectivos sus pasos primero y tercero.

Puesto que las medidas de las cantidades geométricas son números abstractos, resulta natural representar a dichas cantidades por estos números tan íntimamente vinculados a ellas y, luego de operar con tales representantes, reponer, en lugar de los resultados numéricos obtenidos, las cantidades cuyas mediadas expresen. Esto es precisamente lo que hacían los algebristas árabes para resolver problemas geométricos, cuyas correspondientes construcciones justificaban por medio de las ecuaciones a que daban lugar dichos problemas, y de igual procedimiento se valió más tarde Leonardo de Pisa. Pero este tipo de representación numérica de los elementos geométricos tiene un alcance restringido. No todos esos elementos son cantidades. Los entes fundamentales (punto, recta y plano), por ejemplo, no son medibles; y tampoco lo son las líneas y superficies infinitas. El gran mérito de la geometría analítica cartesiana consistió en representar a los puntos por coordenadas, y a las líneas y superficies por ecuaciones cuyas variables son las coordenadas de los puntos que las constituyen.

Tampoco era nuevo el concepto de coordenada, pero no había sido usado aún como medio de representación analítica sino como recurso para ubicar puntos, cuerpos, sitios, etc. Los cuatro puntos cardinales, concebidos desde la más remota antigüedad, determinan con el punto ocupado por el observador dos ejes perpendiculares con respecto a los cuales se establecen, mediante ángulos, los demás rumbos. Los más viejos conocimientos astronómicos incluyen las coordenadas celestes para determinar la posición de los astros; Hiparco, en el siglo II a.C., introdujo las coordenadas geográficas (longitud o/y latitud) para la ubicación de puntos sobre la superficie terrestre; los romanos al fundar ciudades, acostumbraban a trazar en el lugar dos surcos perpendiculares entre sí, a los cuales referían la futura posición de casas, plazas, caminos, etc. y en el delineamiento de las ciudades fundadas en nuestro suelo por los conquistadores españoles se advierte siempre un perfecto sistema de coordenadas, tanto en la elección de dos calles principales perpendiculares entre sí (ejes), a partir de las cuales las que las cortan cambian de nombre (lo que equivale a la distinción de signos), como en la división en manzanas cuadradas y la asignación, a cada casa, de un número que expresa su distancia a contar de la correspondiente calle principal.

La genial idea de introducir las coordenadas en la geometría trajo consecuencias insospechadas. Problemas que no se habían podido resolver por los métodos de la geometría pura encontraron rápida y segura solución.

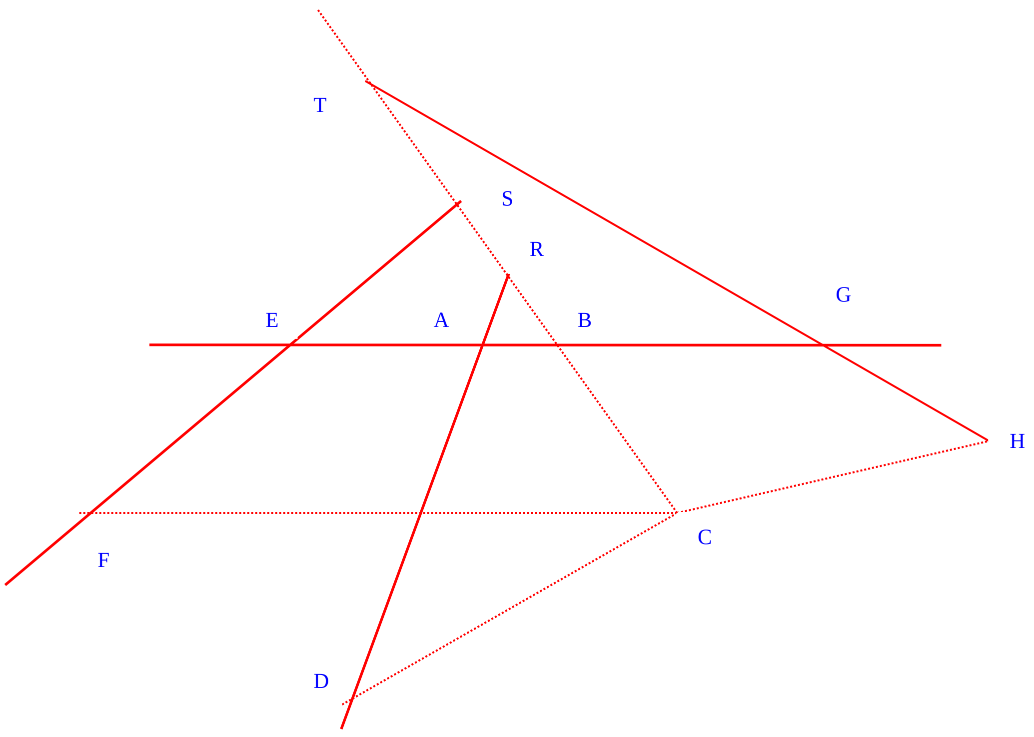
En su obra "***La Geometría",*** Descartes planteó un nuevo método para la solución de problemas geométricos. Este método lo aplica para resolver ***el Problema de Pappus*** que durante siglos había desafiado el ingenio de los matemáticos sin que hasta entonces nadie hubiera podido hallar una solución general, cosa que consiguió aquel sabio gracias al empleo de su método analítico.

Tratándose de una obra revolucionaria, puede hacerse aquí un paréntesis para citar una de las historias que describen cómo surgen en Descartes las primeras ideas sobre la Geometría Analítica y que muestran cómo se atribuye una causa casi legendaria a los tremendos conocimientos del filósofo: es común la que reza que cuando observaba a una mosca caminar sobre el techo de su habitación, cerca de una esquina, imaginó que su trayectoria podría ser descrita, si se conociera la relación que conecta las posiciones inicial y final de la mosca, usando la esquina como sistema de referencia.

El ***Problema de Pappus*** (llamado en su enunciado más sencillo *lugar de tres o cuatro rectas*), es una de las cuestiones más importantes de toda la Historia de la Geometría, por ser la piedra de toque de aplicación de los diversos métodos y técnicas geométricos. Planteado por los geómetras griegos a partir de Euclides, estudiado por Apolonio y sobre todo por Pappus, su dificultad desbordaba, siglo tras siglo, las posibilidades del Análisis geométrico griego. El ***Problema de Pappus*** campea a lo largo de "***La Geometría"*** de Descartes, como si fuera su punto de inspiración, casi como un reto a alcanzar. Como un bautismo de fuego que debe pasar su obra geométrica, será Descartes quien lo resuelva de forma brillante y general poniendo de manifiesto la potencia de su método analítico. Este trabajo fraguó una conexión entre geometría y el álgebra al demostrar cómo aplicar los métodos de una disciplina en la otra, que en el curso de los años se convertirán en la esencia de la Geometría Analítica en la que las figuras se representan mediante expresiones algebraicas.

El problema de Pappus es enunciado por Descartes de la siguiente forma:

"Teniendo cuatro rectas dadas en posición, se intenta hallar, un punto desde el cual se pudiesen trazar cuatro líneas rectas, una sobre cada uno de las dadas, formando ángulos dados, de modo que el rectángulo formado por dos de las trazadas desde el mismo punto (esto es, el producto de estos dos segmentos) guarde una proporción dada con el rectángulo formado por el producto de las otras dos".



Pappus asegura que la solución de este problema es que el lugar geométrico de los puntos forma una cónica, pero no da prueba de este hecho.

Bibliografía

- Abbagnano, N. (2004) Diccionario de Filosofía. Edit. Fondo de Cultura Económica. México.
- Alanís, J., Cantoral, R., Cordero, F., Farfán, R., Garza, A., Rodríguez, R. (2008). Desarrollo del pensamiento matemático. Edit. Trillas. México.
- Álvarez, C. (2000) Descartes y la ciencia del siglo XVII. Edit. Siglo XXI. México.
- Apollonius (1963) Les Coniques. La Librairie scientifique et technique Albert Blanchard. París.
- Ausubel, D.P. Novak, J.D., Hanesian, H. (1978) Psicología educativa, un punto de vista cognitivo. Edit. Trillas. México.
- Boyer, Carl. (2004) Hystory of Analitic Geometry. Edit. Dover. USA.
- C. Adam; P.Tannery (1964) Oeuvres de Descartes. Edit. Philos. París.
- Chica, A. (2001) Descartes, Geometría y Método. Edit. Nivola. España.
- Descartes, R. (1954) The Geometry, Edit. Dover. USA.
- Díaz Barriga, F. (2010) Estrategias Docentes para un Aprendizaje Significativo. Una interpretación Constructivista. Edit. McGraw-Hill. México.
- Euclid (2004) Thirteen Books of Euclid's Elements 3 Volume Set. Edit. Dover. USA.
- Euclides (1991) *Elementos*. Edit. Gredos, Madrid.
- Fauvel, J. (1991) Using history in mathematics education. For the learning of mathematics. Vol 11 Nº 2. Montreal.
- Frank J. Swetz, F. (1994) The European Mathematical Awakening: A Journey Through the History of Mathematics from 1000 to 1800. Edit Dover. USA.
- González, P (2003) Los orígenes de la Geometría Analítica. Fundación Canaria Orotava de Historia de la Ciencia. Tenerife.
- Hawking, S (2006) Dios creó los números. Edit Egdesa. España.
- Heath, T. (1981) A History of Greek Mathematics, Volume I: From Thales to Euclid. Edit. Dover. USA.
- Heath, T. (1983) A History of Greek Mathematics, Volume II: From Aristarchus to Diophantus. Edit Dover. USA.
- Heath, T. (1992) A Manual of Greek Mathematics. Edit. Dover. USA.
- Jones, A. (1986) Pappus de Alexandria. The Collection. Edit. Springer-Verlag. USA.
- Knorr, W. (1986) The Ancient Tradition of Geometric Problems. Edit Dover. USA.

- Mahoney,m.s (1968) Another Look at Greek Geometrical Analysis. Archiv of History of Exactes Sciences. USA
- Sullivan, M.l (2001) Trigonometría y Geometría Analítica. Edit. Pearson. México.
- Pappus D'alexandrie (1982) La Collection Mathémathique. Librairie scientifique et technique A. Blanchard, París.
- Piaget, J. García P. (1984) Psicogénesis e historia de la ciencia. Edit. Siglo XXI. México.
- Escuela Nacional Preparatoria (1996) Plan de Estudios. UNAM. México.
- Raths, L. (1967) El sentido de los valores en la enseñanza. Edit. Hispano americana. México.
- Rodrigo, M (1997) La construcción del conocimiento escolar. Edit. Paidós. México.
- Rey Pastor, J. (2000) Historia de la Matemática, Volumen 2. Edit. Gedisa. España
- Ruiz Basto, J. (2002) Geometría Analítica. Edit. Publicaciones Cultural. México.
- Santrock, J. (2002) Psicología de la Educación. Edit. McGraw Hill, México.
- Vera, F. (1970) Científicos griegos (Ediciones en español de Los Elementos de Euclides, Las Cónicas de Apolonio, La Aritmética de Diofanto y La Colección Matemática de Pappus). Edit. Aguilar. Madrid.
- Viéte, F. (1983) The Analytic Art. Edit Dover. USA.
- Woolfolk, A. (1996) Psicología educativa. Edit. Prentice Hall. México.