



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
ENERGÍA-PROCESOS Y USO EFICIENTE DE ENERGÍA**

ESTUDIOS DE AGITACIÓN ELECTROMAGNÉTICA CON LÍQUIDOS CONDUCTORES EN CONTENEDORES CILÍNDRICOS

TESIS

**QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA**

PRESENTA:

JOSÉ CARLOS DOMÍNGUEZ LOZOYA

TUTOR PRINCIPAL:

**DR. SERGIO CUEVAS GARCÍA
INSTITUTO DE ENERGÍAS RENOVABLES**

MÉXICO, D.F. JULIO 2014



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Ramos Mora Eduardo

Secretario: Dr. Cuevas García Sergio

Vocal: Dr. Vázquez Hurtado Federico

1er. Suplente: Dr. Rojas Menéndez Jorge Antonio

2do. Suplente: Dr. Figueroa Lara Aldo

Lugar donde se realizó la tesis: Instituto De Energías Renovables

TUTOR DE TESIS:
Dr. Cuevas García Sergio

FIRMA

Resumen

En este trabajo se estudia experimental y teóricamente la agitación electromagnética de un metal líquido (GaInSn) dentro de un contenedor cilíndrico producida por un campo magnético variable. El metal líquido es agitado mediante la fuerza magnética (fuerza de Lorentz), generada por la rotación de un arreglo de imanes permanentes. El propósito principal de esta tesis es proporcionar un entendimiento físico más profundo de la agitación electromagnética con imanes permanentes, además de desarrollar metodologías para su análisis. La principal motivación de este trabajo proviene de las diversas aplicaciones de la agitación electromagnética en la industria y en el área de procesamiento de materiales, donde la agitación de fluidos conductores de electricidad es de vital importancia. En el capítulo 1, se presenta una breve reseña histórica de la magnetohidrodinámica (MHD) y una introducción a las características de los sistemas de agitación electromagnética, marcando la importancia de las aplicaciones industriales. En el capítulo 2 se describe el equipo experimental, las diferentes condiciones en las que se puede operar el dispositivo y el procedimiento experimental realizado para llevar a cabo este trabajo. En el capítulo 3 se muestran los resultados experimentales para diferentes arreglos de imanes permanentes y con diferentes condiciones de operación, así como también se describe el análisis de imágenes utilizado para realizar la caracterización. El resultado más importante reportado en este trabajo es el descubrimiento de una inestabilidad producida por la fuerza de Lorentz en una capa delgada de metal líquido que ocasiona la ruptura de la capa y la aparición de distintas estructuras en la superficie libre del metal. Esta inestabilidad magnetohidrodinámica no ha sido reportada previamente en la literatura. En el capítulo 4 se presenta el modelo teórico preliminar propuesto con el fin de tratar de comprender lo observado en los experimentos. Finalmente, se establecen las conclusiones de este trabajo.

Índice general

1. Introducción	1
2. Equipo y metodología experimental	7
2.1. Descripción general de los experimentos	7
2.2. Equipo experimental	8
2.3. Metodología experimental	9
2.3.1. Distribuciones magnéticas	9
2.3.2. Metal líquido y frecuencias de trabajo	11
3. Resultados Experimentales	13
3.1. Resultados para el arreglo de un imán	13
3.2. Resultados para el arreglo de tres imanes	16
3.3. Resultados para el arreglo de cuatro imanes	17
3.4. Caracterización	18
3.4.1. Análisis de imágenes	18
4. Análisis teórico	25
4.1. Ecuaciones de la mecánica de fluidos	25
4.1.1. Conservación de masa	26
4.1.2. Conservación de la cantidad de movimiento	26
4.1.3. Conservación de la energía	26
4.2. Ecuaciones del campo electromagnético	27
4.2.1. Ecuaciones de Maxwell	27
4.2.2. Ley de Ohm	29
4.2.3. Fuerza de cuerpo electromagnética	29
4.3. Aproximación MHD	30
4.4. Modelo teórico	31
4.4.1. Campo magnético aplicado	33
4.4.2. Solución analítica	34
4.5. Modelo numérico	39
4.6. Resultados	41
4.6.1. Dominio cartesiano	41

4.6.2. Dominio polar	46
5. Conclusiones y trabajo a futuro	57
A. Ecuaciones adimensionales	59

Índice de figuras

1.1.	Panorama general del procesamiento electromagnético de materiales [1]. . .	2
1.2.	Agitador electromagnético conductivo, donde la interacción de la corriente eléctrica aplicada y el campo magnético externo genera la fuerza de Lorentz que agita al fluido eléctricamente conductor.	3
1.3.	Ejemplo de agitador electromagnético inductivo, donde la variación temporal del campo magnético, induciendo corrientes en el fluido de trabajo. Dichas corrientes interactúan con el campo magnético aplicado, dando lugar a la fuerza de Lorentz que agita al fluido conductor.	3
1.4.	Esquema general de diferentes campos magnéticos utilizados en el EPM [2].	4
2.1.	Modelo experimental de un agitador magnetohidrodinámico de metal líquido.	8
2.2.	Tipos de imanes utilizados en la caracterización del experimento. El color rojo representa la polaridad norte del imán y el color azul representa la polaridad sur.	9
2.3.	Bases de acrílico construidas para el dispositivo experimental. Las cavidades rectangulares sirven para alojar los imanes. Para el caso de uno y cuatro imanes, se utilizan piezas con dimensiones de 80 mm × 10 mm × 10 mm, mientras que para el caso de tres imanes se emplean imanes con dimensiones de 50.8 mm × 12.7 mm × 12.7 mm. El círculo de color amarillo representa el área que abarcan los imanes al rotar, en comparación con el área del fondo del recipiente. Para el caso de un imán el diámetro del círculo es de 8 cm, para el de tres imanes el diámetro es de 12 cm y para el caso de de cuatro imanes el área del círculo es de 18 cm.	10
2.4.	Configuraciones magnéticas que se pueden obtener con las bases para uno y tres imanes.	10
2.5.	Configuraciones magnéticas que se pueden obtener con la base para cuatro imanes.	11
2.6.	Relación entre la frecuencia de rotación de la base que aloja a los imanes (eje vertical izquierdo) y el voltaje suministrado al motor eléctrico.	12
3.1.	Flujos producidos por la rotación de un solo imán en una capa de 6 mm de metal líquido.	14

3.2. Diagrama de comportamiento del flujo con un imán en rotación, sin discontinuidad (puntos negros) o con discontinuidad (puntos rojos), para dos grosores de la capa de metal líquido, de acuerdo a la frecuencia de rotación de los imanes.	15
3.3. Imágenes del patrón obtenido experimentalmente con el arreglo de un imán para diferentes tiempos, donde se observa la rotación del agujero producido por la inestabilidad con respecto al eje del contenedor cilíndrico. La frecuencia de rotación del arreglo de imanes es aproximadamente de 7.0 Hz.	15
3.4. Imágenes del patrón obtenido experimentalmente con el arreglo de un imán para diferentes tiempos, cuando el agujero ha perdido estabilidad y se sale del centro del contenedor, girando alrededor del eje del contenedor.	16
3.5. Imágenes del patrón obtenido experimentalmente con el arreglo de tres imanes para diferentes tiempos, donde se observa que a cada instante la orientación es diferente debido a la rotación del polígono.	17
3.6. Patrón de flujo obtenido experimentalmente con el arreglo de cuatro imanes. En este caso, el polígono de cuatro lados no rota alrededor del eje de simetría.	18
3.7. Imágenes adquiridas con iluminación con diferente orientación. La iluminación por debajo fue de mayor utilidad para el análisis de imágenes	19
3.8. Etapas del análisis de imágenes. La línea de color verde en la figura d) es el contorno detectado por el programa de cómputo. La línea de color rojo en la figura e) representa a la figura geométrica ajustada a los datos obtenidos del contorno.	20
3.9. Ángulo formado por una línea horizontal a la imagen y el eje mayor de la elipse.	21
3.10. Transformada rápida de Fourier aplicada al ángulo formado entre el eje mayor de la elipse ajustada y una línea horizontal a la imagen (ver figura 3.9), para una frecuencia de rotación del campo magnético de 6.77 Hz. . . .	21
3.11. Comportamiento de la frecuencia de rotación del agujero con respecto a la frecuencia de rotación del campo magnético, donde se puede observar que existe una relación aproximadamente lineal.	22
3.12. Comportamiento del área promedio con respecto a la frecuencia de rotación del campo magnético.	22
3.13. Fluctuación del contorno del orificio respecto a una elipse ajustada a la imagen. La gráfica muestra la distancia entre el contorno y la elipse en cada punto del contorno. Cada línea corresponde a un tiempo dado. Se destacan tres picos, donde la distancia entre el contorno y la elipse ajustada es mayor.	23

4.1.	Distribución espacial de la componente x de la fuerza de Lorentz promedio producida por una barra de imán de sección rectangular como la utilizada en uno de los experimentos. La escala de colores representa la magnitud. Las dimensiones del imán son de $10\text{ cm} \times 1\text{ cm}$, con el eje de simetría en $x = 0$ y $y = 0$, estando el imán en posición horizontal.	38
4.2.	Distribución espacial de la componente y de la fuerza de Lorentz promedio producida por una barra de imán de sección rectangular como la utilizada en uno de los experimentos. La escala de colores representa la magnitud. Las dimensiones del imán son de $10\text{ cm} \times 1\text{ cm}$, con el eje de simetría en $x = 0$ y $y = 0$, estando el imán en posición horizontal.	38
4.3.	Campo vectorial de la fuerza de Lorentz promedio. Las dimensiones del imán son de $10\text{ cm} \times 1\text{ cm}$, con el eje de simetría en $x = 0$ y $y = 0$. El imán está en posición horizontal.	39
4.3.	Fuerza de Lorentz promedio en rotación uniforme en sentido horario en cuatro instantes distintos espaciados por el mismo intervalo de tiempo. La fuerza rotatoria simula el efecto de la rotación del imán sobre su propio eje.	40
4.4.	Componentes de la fuerza promedio en coordenadas polares, donde la escala de colores representa la magnitud.	41
4.5.	Líneas de corriente obtenidas imponiendo la fuerza promedio estática, para $t = 1s$, $Re = 10$, $Ha = 10$ y $z = 0.5$	42
4.6.	Líneas de corriente obtenidas imponiendo la fuerza promedio estática, para $t = 10s$, $Re = 10$, $Ha = 10$ y $z = 0.5$	42
4.7.	Líneas de corriente obtenidas imponiendo la fuerza promedio estática, para $t = 40s$, $Re = 10$, $Ha = 10$ y $z = 0.5$	43
4.8.	Líneas de corriente para el flujo desarrollado obtenidas imponiendo la fuerza promedio estática, para $t = 100s$, $Re = 10$, $Ha = 10$ y $z = 0.5$	43
4.9.	Líneas de corriente obtenidas imponiendo la fuerza promedio rotatoria, para $t = 1s$, $Re = 10$, $Ha = 10$ y $z = 0.5$	44
4.10.	Líneas de corriente obtenidas imponiendo la fuerza promedio rotatoria, para $t = 10s$, $Re = 10$, $Ha = 10$ y $z = 0.5$	44
4.11.	Líneas de corriente obtenidas imponiendo la fuerza promedio rotatoria, para $t = 40s$, $Re = 10$, $Ha = 10$ y $z = 0.5$	45
4.12.	Líneas de corriente obtenidas imponiendo la fuerza promedio rotatoria, para $t = 100s$, $Re = 10$, $Ha = 10$ y $z = 0.5$	45
4.13.	Campo de velocidad obtenido imponiendo la fuerza promedio estática en coordenadas polares, para $t = 1s$, $Re = 10$, $Ha = 10$ y con un valor de $z = 0.5$	46
4.14.	Campo de velocidad obtenido imponiendo la fuerza promedio estática en coordenadas polares, para $t = 5s$, $Re = 10$, $Ha = 10$ y con un valor de $z = 0.5$	47

4.15. Campo de velocidad obtenido imponiendo la fuerza promedio estática en coordenadas polares, para $t = 10s$, $Re = 10$, $Ha = 10$ y con un valor de $z = 0.5$	47
4.16. Campo de velocidad desarrollado obtenido imponiendo la fuerza promedio estática en coordenadas polares, para $t = 100s$, $Re = 10$, $Ha = 10$ y con un valor de $z = 0.5$	48
4.17. Distribución de la vorticidad obtenida imponiendo la fuerza promedio estática en coordenadas polares, para $t = 1s$, $Re = 10$, $Ha = 10$ y con un valor de $z = 0.5$	48
4.18. Distribución de la vorticidad obtenida imponiendo la fuerza promedio estática en coordenadas polares, para $t = 10s$, $Re = 10$, $Ha = 10$ y con un valor de $z = 0.5$	49
4.19. Distribución de la vorticidad obtenida imponiendo la fuerza promedio estática en coordenadas polares, para $t = 20s$, $Re = 10$, $Ha = 10$ y con un valor de $z = 0.5$	49
4.20. Distribución de la vorticidad obtenida imponiendo la fuerza promedio estática en coordenadas polares, para $t = 100s$, $Re = 10$, $Ha = 10$ y con un valor de $z = 0.5$	50
4.21. Campo de velocidad obtenido imponiendo la fuerza promedio rotatoria en coordenadas polares, para $t = 1s$, $Re = 10$, $Ha = 10$ y $z = 0.5$	51
4.22. Campo de velocidad obtenido imponiendo la fuerza promedio rotatoria en coordenadas polares, para $t = 1.25s$, $Re = 10$, $Ha = 10$ y $z = 0.5$	51
4.23. Campo de velocidad obtenido imponiendo la fuerza promedio rotatoria en coordenadas polares, para $t = 1.5s$, $Re = 10$, $Ha = 10$ y $z = 0.5$	52
4.24. Campo de velocidad obtenido imponiendo la fuerza promedio rotatoria en coordenadas polares, para $t = 1.75s$, $Re = 10$, $Ha = 10$ y $z = 0.5$	52
4.25. Distribución de vorticidad obtenida imponiendo la fuerza promedio rotatoria en coordenadas polares, para $t = 1s$, $Re = 10$, $Ha = 10$ y $z = 0.5$	53
4.26. Distribución de vorticidad obtenida imponiendo la fuerza promedio rotatoria en coordenadas polares, para $t = 1.25s$, $Re = 10$, $Ha = 10$ y $z = 0.5$	53
4.27. Distribución de vorticidad obtenida imponiendo la fuerza promedio rotatoria en coordenadas polares, para $t = 1.5s$, $Re = 10$, $Ha = 10$ y $z = 0.5$	54
4.28. Distribución de vorticidad obtenida imponiendo la fuerza promedio rotatoria en coordenadas polares, para $t = 1.75s$, $Re = 10$, $Ha = 10$ y $z = 0.5$	54

Capítulo 1

Introducción

Los campos electromagnéticos han sido utilizados ampliamente desde tiempo atrás en diversas aplicaciones industriales relacionadas con el procesamiento de materiales, lo que comúnmente se conoce como procesamiento electromagnético de materiales (EPM, por sus siglas en inglés). El EPM es un área de investigación que incluye diferentes disciplinas como son la termodinámica, la transferencia de calor y masa, la electroquímica, la física de plasmas, la ciencia de materiales y la ingeniería. El EPM se basa en la interacción de campos electromagnéticos con distintos medios conductores (metales líquidos y sólidos, semiconductores líquidos, plasmas, electrolitos, ferro-fluidos) y en una de sus aplicaciones principales utiliza a la fuerza electromagnética, conocida como fuerza de Lorentz para diversos propósitos. De hecho dicha fuerza permite controlar o manipular de manera no intrusiva a los diversos materiales, obteniendo como resultado un proceso adecuado y evitando la contaminación con materiales ajenos al proceso. Ejemplos de la aplicación de la fuerza de Lorentz son la levitación magnética de metales líquidos y sustancias diamagnéticas, el transporte de metales líquidos en la fundición, la agitación, el mezclado, el bombeo y la estabilización de fluidos conductores, entre otras aplicaciones [3]. En la figura 1.1 se ilustra un panorama general del procesamiento electromagnético de materiales. Las disciplinas que constituyen la base del EPM son representadas como las raíces del árbol mientras que las ramas y las hojas representan las aplicaciones y procesos relacionados al EPM [4]. Una de las áreas fundamentales para el EPM es la magnetohidrodinámica (MHD) que se define como la mecánica de los fluidos eléctricamente conductores (no magnetizables) en campos magnéticos.

El presente trabajo se enfoca principalmente en la agitación electromagnética y el mezclado de fluidos eléctricamente conductores. En un contexto general, La necesidad de obtener mezclas homogéneas ha llevado al desarrollo de diferentes métodos y dispositivos de mezclado, que podemos ver aplicados a diferentes procesos industriales, tales como en la aleación, la elaboración de pinturas, la preparación de alimentos o bebidas, el procesamiento de semiconductores, entre otros, donde es importante lograr un mezclado eficiente sin contaminar el producto con agentes externos. Comprender el mezclado de fluidos es en general

bastante difícil y se requiere de herramientas teóricas y experimentales. El mezclado se presenta mediante dos mecanismos fundamentales, la difusión y la advección. La difusión se presenta aun en ausencia de movimiento del fluido. Por ejemplo, cuando se vierte una gota de tinta en agua en reposo, si suponemos que la perturbación introducida por la gota al hacer contacto con el agua es despreciable, la tinta se mezcla debido al mecanismo de difusión molecular. Se sabe por experiencia que en este caso el mezclado tardará mucho más tiempo que si existiera movimiento en el fluido, activando entonces el mecanismo advectivo que lleva a una homogeneización mucho más rápida [5, 6]. Los métodos convencionales de mezclado utilizan sistemas basados en dispositivos mecánicos para agitar un fluido. Los agitadores mecánicos (agitador de paletas, agitador de hélice, agitador de turbina) están en contacto directo con el fluido de trabajo, lo que puede ser un inconveniente en procesos de alta pureza o donde las condiciones de trabajo pueden ser altamente corrosivas, como cuando se trabaja con metales líquidos a altas temperaturas. Estas restricciones obligan a tener sistemas de alta tecnología para poder realizar los procesos.

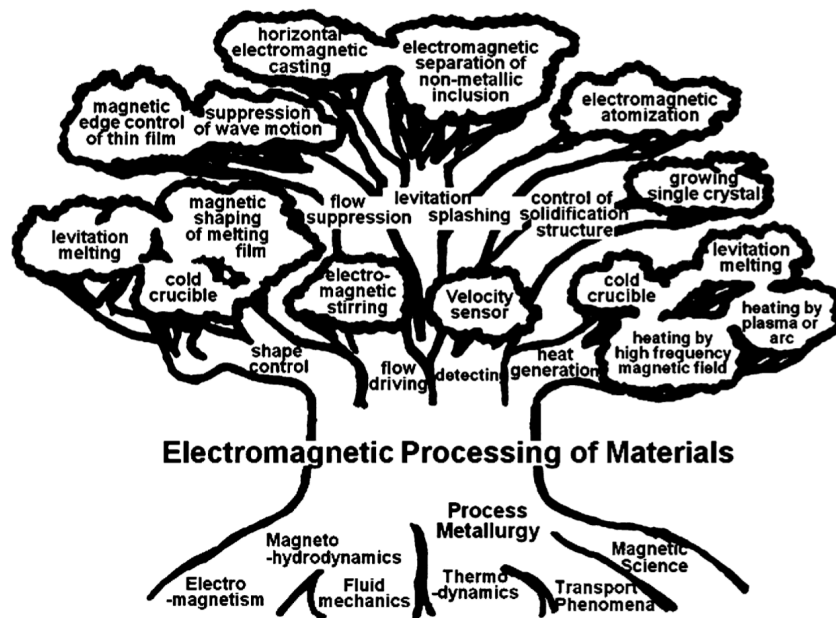


Fig. 1.1: Panorama general del procesamiento electromagnético de materiales [1].

Existen alternativas a los sistemas convencionales de agitación como lo son los sistemas de agitación por gradiente térmico de modo que se produzca convección natural [7]. Otra alternativa de agitar fluidos eléctricamente conductores, tales como los electrolitos y los metales líquidos, es mediante la agitación electromagnética en donde se utiliza una fuerza volumétrica (fuerza de Lorentz) para mover el fluido de trabajo. La agitación electromagnética puede llevarse a cabo por medio de dos técnicas, mediante la aplicación de una corriente eléctrica (conductiva) y mediante la inducción de corrientes en el fluido de trabajo (inductiva), ambas en presencia de un campo magnético externo. Las dos técnicas se basan en la generación de la fuerza de Lorentz. El principio básico de los agitadores elec-

Los agitadores magnéticos conductivos, también conocidos como agitadores magnetohidrodinámicos (MHD) conductivos, se establecen mediante la interacción de una corriente eléctrica (directa o alterna) aplicada a un fluido conductor a través de electrodos especialmente dispuestos y un campo magnético estático (establecido por imanes permanentes o por electroimanes). Esta interacción da lugar a la fuerza agitadora (fuerza de Lorentz), que es perpendicular tanto al campo magnético como a la corriente aplicada (ver figura 1.2).

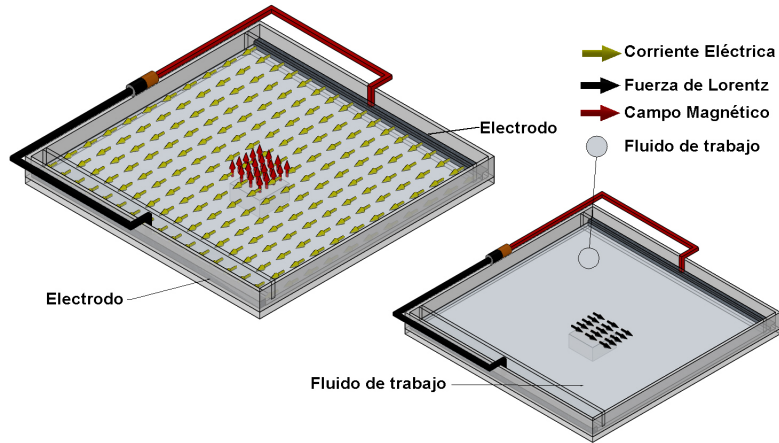


Fig. 1.2: Agitador electromagnético conductivo, donde la interacción de la corriente eléctrica aplicada y el campo magnético externo genera la fuerza de Lorentz que agita al fluido eléctricamente conductor.

Por otra parte, en los agitadores MHD inductivos las corrientes son inducidas mediante un campo magnético que varía con el tiempo y la fuerza de Lorentz es generada mediante la interacción de las corrientes inducidas en el medio con el campo magnético aplicado (ver figura 1.3).

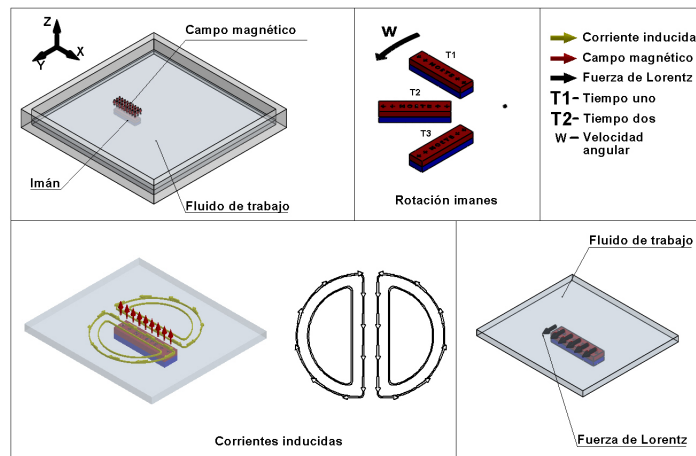


Fig. 1.3: Ejemplo de agitador electromagnético inductivo, donde la variación temporal del campo magnético, induciendo corrientes en el fluido de trabajo. Dichas corrientes interactúan con el campo magnético aplicado, dando lugar a la fuerza de Lorentz que agita al fluido conductor.

Los campos magnéticos requeridos en las distintas aplicaciones del EPM pueden obtenerse mediante imanes permanentes o electroimanes. En la figura 1.4 se muestran algunas configuraciones de campos magnéticos utilizados en el EPM [2]. En la actualidad tanto en la de investigación como en la industria, la utilización de campos magnéticos producidos por medio de electroimanes para agitar un fluido eléctricamente conductor es la más común, lo que se debe a la homogeneidad del campo magnético producido y a la fácil manipulación de la intensidad y variación espacial del mismo. La intensidad del campo magnético en un electroimán depende de la corriente eléctrica, por tal razón si se modifica la corriente eléctrica se modifica la intensidad del campo. Variar la corriente eléctrica suministrada al electroimán es sencillo de realizar.

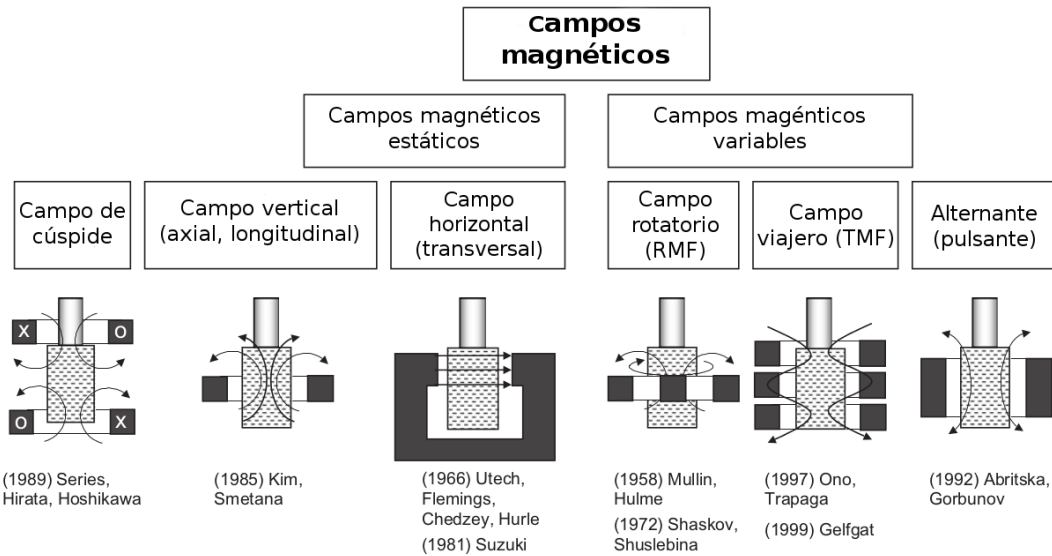


Fig. 1.4: Esquema general de diferentes campos magnéticos utilizados en el EPM [2].

Existen diferentes configuraciones de campos magnéticos generados con electroimanes, pero las dos más comunes son campos magnéticos rotatorios (RMF por sus siglas en inglés) y campos magnéticos viajeros (TMF por sus siglas en inglés). TMF se refiere a campos magnéticos que se mueven en una trayectoria recta y que son producidos por la aplicación de una corriente alterna a un arreglo lineal (horizontal o vertical) de bobinas [8, 2]. Por otra parte los RMF son aquellos que como su nombre lo indica, siguen una trayectoria circular. En este caso la componente principal del campo magnético es la componente radial [9, 10]. El principal inconveniente de utilizar campos magnéticos producidos por la inyección de corriente, es el alto consumo de energía eléctrica. Esto puede ser evitado con el uso de campos magnéticos generados por arreglos eficientes de imanes permanentes, los cuales no requieren de una inyección de corriente eléctrica. Los imanes permanentes pueden ser naturales (magnetita) o artificiales (fabricados por el hombre). Existen diferentes tipos de imanes artificiales, siendo la principal diferencia el material a imantar. Hay imanes de ferrita, los cuales están fabricados de ferrita de bario o ferrita de estroncio y son los que se fabrican con mayor frecuencia. También se encuentran imanes a base de aleaciones, como

imanes de *alnico*, aleación de aluminio, níquel y cobalto. Esta clase de imanes presentan un buen comportamiento a altas temperaturas, pero la intensidad del campo magnético es baja. Los imanes de *neodimio*, son los imanes a base de hierro, neodimio y boro, los cuales son los imanes permanentes de mayor intensidad fabricados por el hombre. Los imanes permanentes son competitivos con los electroimanes, para campos magnéticos de $2 T$ hasta $5 T$ [11].

Los dispositivos electromagnéticos de inducción basan su funcionamiento en el descubrimiento que realizó el inglés Michael Faraday en el siglo XIX, quien hizo público en 1831 que una variación en el flujo magnético que atraviesa un circuito cerrado da lugar a una corriente eléctrica, lo que más tarde sería conocido como la Ley de Inducción de Faraday. Dicha ley tiene innumerables usos, entre ellos, una de las primeras aplicaciones de la MHD, es decir, la medición de velocidades en líquidos conductores, idea originalmente propuesta por Faraday para medir el caudal del río Támesis. Sin embargo, fue hasta el siglo XX que la MHD empezó a tener auge en diversos procesos industriales, como el bombeo, el mezclado, el crecimiento de cristales y la generación de energía. En 1907 Northrup contruyó y patentó un prototipo de una bomba MHD de conducción [12]. En 1917 Kürth propuso la idea de agitar un metal durante el proceso de solidificación usando campos magnéticos variables [13]. En 1927 Albert Einstein y Leo Szilard patentaron un prototipo de bomba MHD de inducción [14]. En 1933 Shtanko realizó el primer experimento de agitación electromagnética, depositando una pequeña muestra de metal líquido dentro del estator de un motor eléctrico [13]. En 1937 Hartmann llevó a cabo el estudio teórico y experimental del flujo de mercurio en presencia de un campo magnético homogéneo. Por esta razón algunos consideran a Hartmann como el pionero de la MHD de metales líquidos [15, 16]. El nacimiento formal de la MHD se relaciona con Hannes Alfvén quien utilizó por primera vez este término en 1942, cuando estudiaba la interacción de plasmas (gases ionizados) y campos magnéticos que dio lugar al descubrimiento de las ondas de Alfvén, un fenómeno que es de gran importancia en astrofísica. En 1958 Mullin y Hulme propusieron por primera vez el uso de campos electromagnéticos en el procesamiento de semiconductores [17]. En los años 60s la MHD tomó importancia en la industria nuclear de fisión que requería el bombeo de sodio líquido que se utilizaba como refrigerante. Asimismo, se inició la investigación a gran escala de la generación de energía eléctrica mediante generadores MHD donde un gas ionizado es impulsado a través de un campo magnético. En la década de los 70's, en la industria metalúrgica se utilizaron campos magnéticos rotatorios, viajeros y pulsantes para agitar metales líquidos. En la actualidad la aplicación de campos electromagnéticos a diferentes procesos industriales es muy común y de mucha utilidad, en particular para lograr un mejor y más eficiente uso de la energía, razón por la cual realizar estudios de laboratorio de las posibles aplicaciones del EPM es de gran importancia. En particular, el uso de imanes permanentes en aplicaciones industriales ha sido muy poco investigado.

Con el objetivo de aportar conocimiento en el tema de la agitación electromagnética, en el Instituto de Energías Renovables de la UNAM se ha trabajado en el mezclado y agitación

de fluidos eléctricamente conductores, tales como los electrolitos y los metales líquidos, utilizando imanes permanentes y aplicando las dos técnicas de agitación electromagnética (conductiva e inductiva) [18, 19]. Con el propósito de seguir aportando conocimiento a la agitación y al mezclado de fluidos electricamente conductores, en este trabajo concentraremos nuestra atención en la agitación electromagnética de metal líquido (GaInSn) en contenedores cilíndricos con imanes permanentes en rotación (técnica inductiva). El objetivo principal de este trabajo es estudiar y caracterizar los flujos magnetohidrodinámicos generados en contenedores cilíndricos en presencia de diferentes arreglos de imanes permanentes. Para tal fin, se modificó el dispositivo experimental utilizado por Michel Alejandro Rivero Corona en su proyecto doctoral [18], que consta principalmente de un recipiente cilíndrico capaz de alojar el metal líquido. Por debajo del contenedor se localizan diferentes arreglos de imanes permanentes que se hacen rotar mediante un motor eléctrico. La variación del campo magnético en el metal líquido genera corrientes eléctricas que a su vez dan lugar a fuerzas de Lorentz que agitan el metal líquido.

En el capítulo 2 se presenta la descripción del dispositivo experimental, mencionando las principales modificaciones hechas al dispositivo que ya existía, así como también la metodología con la cual fueron realizados los experimentos.

En el capítulo 3 se muestran los resultados experimentales para diferentes condiciones de operación, así como también se hace una descripción del análisis de imágenes generado para realizar la caracterización. El resultado más importante de este trabajo es el descubrimiento de una nueva inestabilidad magnetohidrodinámica en una capa delgada de metal líquido que ocasiona la ruptura de la capa y da lugar a la formación de diversas estructuras en la superficie libre del líquido. Un fenómeno similar pero ocasionado por la rotación del fondo del recipiente ha sido reportado previamente [20, 21, 22].

En el capítulo 4 se realiza un análisis teórico preliminar del fenómeno estudiado experimentalmente. Primero, se presenta, una descripción breve de las ecuaciones que gobiernan la MHD. Posteriormente se propone un modelo sencillo que permite determinar analíticamente una expresión para la fuerza de Lorentz que actúa sobre el metal líquido. Dicha expresión se introduce en un código numérico que resuelve las ecuaciones de continuidad y Navier-Stokes, con el propósito de conocer los flujos generados por dicha fuerza.

Finalmente en el capítulo 5 se presentan las conclusiones y el trabajo a futuro de interés para el presente proyecto.

Capítulo 2

Equipo y metodología experimental

En este capítulo describiremos el equipo experimental utilizado para realizar el estudio de agitación electromagnética de metales líquidos, así como la metodología experimental utilizada para caracterizar los experimentos.

2.1. Descripción general de los experimentos

De manera general, los experimentos que se realizaron en este trabajo consisten en la agitación de una capa delgada de metal líquido mediante un arreglo de imanes rotatorios. Los elementos principales del dispositivo experimental, que serán descritos con mayor detalle en la siguiente sección, son: un contenedor cilíndrico de acrílico, una distribución de imanes permanentes que proporcione el campo magnético aplicado, un sistema motriz que haga variar espacial y temporalmente al campo magnético y el fluido de trabajo (metal líquido GaInSt). La descripción general de los experimentos es la siguiente. Se vierte una delgada capa de metal líquido dentro del contenedor cilíndrico. Por debajo del cilindro se coloca una base donde se disponen distintas configuraciones de imanes permanentes (barras de sección rectangular). La base se hace rotar mediante un motor eléctrico de modo que puede controlarse la frecuencia de rotación. La rotación de los imanes crea un campo magnético variable en el espacio y en el tiempo que induce corrientes eléctricas en el metal líquido. Dichas corrientes interactúan con el mismo campo magnético en rotación creando fuerzas de Lorentz que agitan al metal líquido. El movimiento del fluido depende de varios factores entre los que se cuentan la distribución de campo magnético, la intensidad de los imanes, la frecuencia de rotación de los imanes, el grosor de la capa de metal líquido y su conductividad eléctrica. El equipo experimental utilizado en este trabajo fue originalmente diseñado y construido para utilizar otro tipo de imanes permanentes (imanes cilíndricos) [18], por lo que fue necesario realizar modificaciones que serán descritas más adelante.

2.2. Equipo experimental

El equipo experimental utilizado consta de un contenedor cilíndrico de acrílico de 203.2 mm de diámetro exterior, con pared de 6 mm de espesor (ver figura 2.1), en la cual se deposita una capa de metal líquido de 6 mm de espesor. Por debajo del contenedor cilíndrico, a una distancia de 3 mm del fondo del recipiente, se colocan de uno a cuatro imanes en forma de barra sobre una base rotatoria. La intensidad máxima del campo magnético generado por un imán sobre su superficie y en el centro del mismo es de 0.28 T [23]. Dada esta intensidad y tomando como longitud característica el grosor de la capa de metal líquido, el número de Hartmann del flujo estudiado es $Ha=65$. La base con los imanes se hace rotar mediante un sistema de poleas unidas mediante una banda dentada que gira gracias a un motor eléctrico cuya frecuencia máxima de rotación es de 30.28 Hz. Dadas las condiciones del dispositivo experimental, la frecuencia máxima de rotación de los imanes es de 7.57 Hz. La rotación del motor y de los imanes es en sentido horario. Una descripción detallada del dispositivo y sus condiciones de operación se encuentra en la referencia [18]. Con el objetivo de disminuir la oxidación del metal líquido, se colocó una capa de aproximadamente 5 mm de ácido clorhídrico al 4 % ($HCl^{4\%V}$) sobre el metal líquido, evitando así su oxidación por el contacto directo con el aire del ambiente.

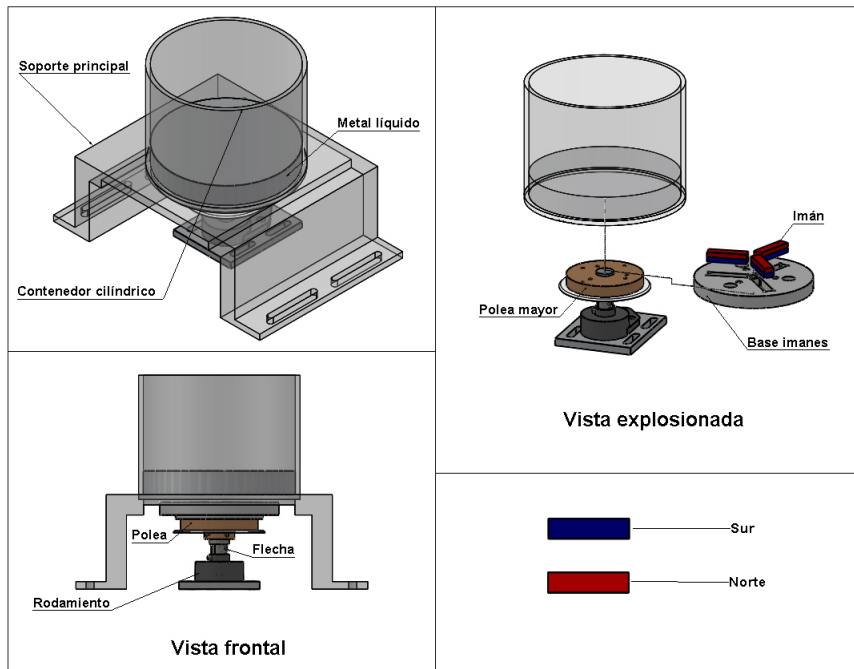


Fig. 2.1: Modelo experimental de un agitador magnetohidrodinámico de metal líquido.

2.3. Metodología experimental

2.3.1. Distribuciones magnéticas

Las diferentes distribuciones de campo magnético influyen directamente en el comportamiento del flujo producido, por lo que la principal modificación realizada al dispositivo experimental original, fue la utilización de barras de imán en forma rectangular dispuestas en distintas configuraciones. Por tanto, fue necesario diseñar y construir diferentes bases para imanes (ver figura 2.3). En total se diseñaron tres diferentes bases para imanes, que nos permitieron llevar a cabo experimentos con diferentes distribuciones de campo magnético. Se construyeron una base para un solo imán, una base para un arreglo de tres imanes y una base para un arreglo de cuatro imanes. Se utilizaron dos tamaños de imanes permanentes de neodimio de forma rectangular ($80 \text{ mm} \times 10 \text{ mm} \times 10 \text{ mm}$ y $50.8 \text{ mm} \times 12.7 \text{ mm} \times 12.7 \text{ mm}$) con magnetización normal a las caras de mayor área, como se muestra en la Fig 2.2.

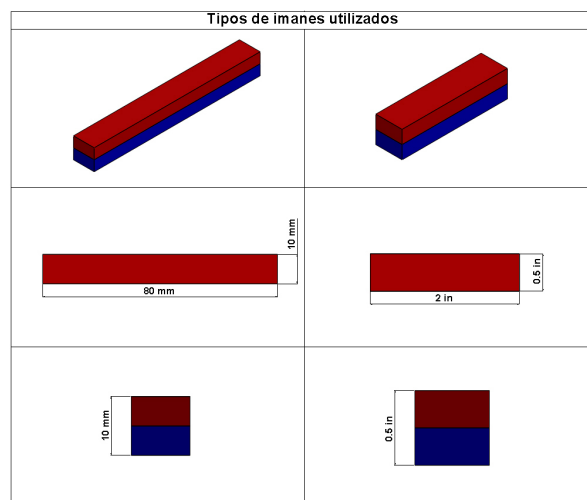


Fig. 2.2: Tipos de imanes utilizados en la caracterización del experimento. El color rojo representa la polaridad norte del imán y el color azul representa la polaridad sur.

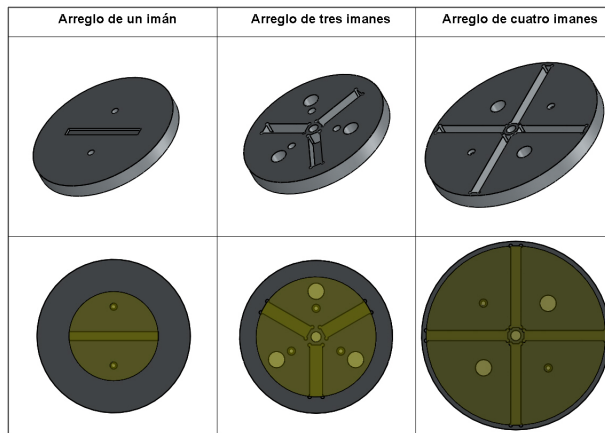


Fig. 2.3: Bases de acrílico construidas para el dispositivo experimental. Las cavidades rectangulares sirven para alojar los imanes. Para el caso de uno y cuatro imanes, se utilizan piezas con dimensiones de 80 mm × 10 mm × 10 mm, mientras que para el caso de tres imanes se emplean imanes con dimensiones de 50.8 mm × 12.7 mm × 12.7 mm. El círculo de color amarillo representa el área que abarcan los imanes al rotar, en comparación con el área del fondo del recipiente. Para el caso de un imán el diámetro del círculo es de 8 cm, para el de tres imanes el diámetro es de 12 cm y para el caso de de cuatro imanes el area del círculo es de 18 cm.

La Fig 2.3 muestra los esquemas de las bases de acrílico utilizadas para alojar los diferentes arreglos de uno, tres y cuatro imanes permanentes. Estos arreglos pueden dar lugar a más de una distribución o configuración de campo magnético, de acuerdo a la polaridad con que se dispongan los imanes. El arreglo para un solo imán tiene solamente dos posibilidades, montar el imán con la cara norte hacia arriba o con la cara sur hacia arriba. Por su parte, el arreglo de tres imanes tiene cuatro posibles maneras de ordenar los imanes, mientras que el de cuatro imanes tiene seis posibles formas de acomodar los imanes, como se muestra en las Figs. 2.4 y 2.5.

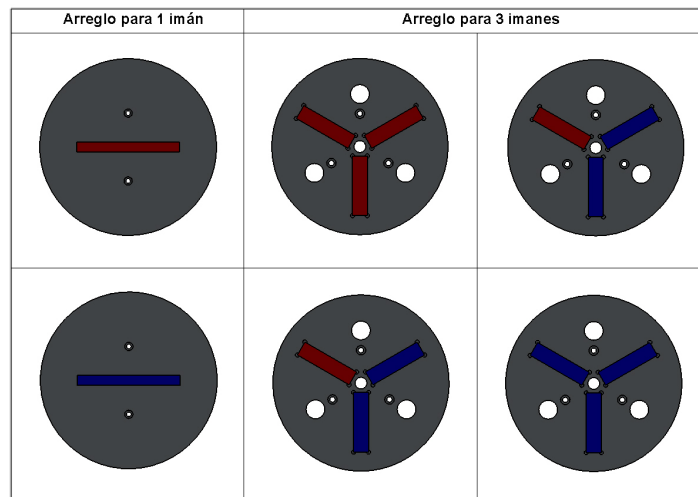


Fig. 2.4: Configuraciones magnéticas que se pueden obtener con las bases para uno y tres imanes.

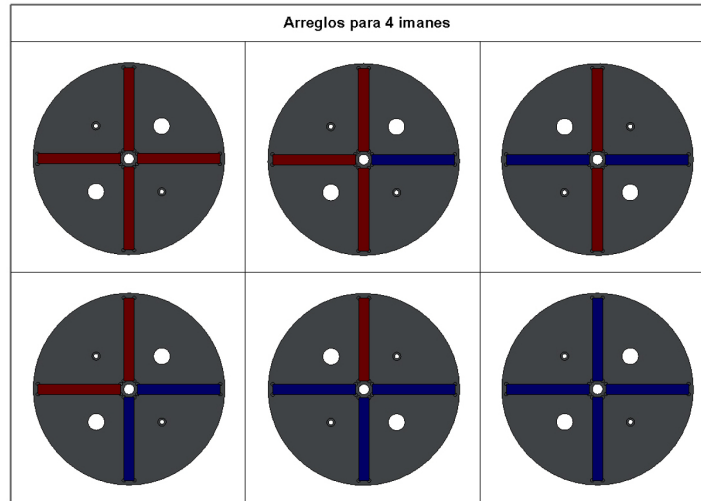


Fig. 2.5: Configuraciones magneticas que se pueden obtener con la base para cuatro imanes.

2.3.2. Metal líquido y frecuencias de trabajo

Los experimentos se realizaron con metal líquido como fluido de trabajo, en particular con la aleación eutéctica de $Ga^{68\%}In^{20\%}Sn^{12\%}$. Esta aleación permanece en estado líquido a temperaturas mayores a $10.5^{\circ}C$ y a diferencia del mercurio no tiene efectos nosivos para la salud, lo que la convierte en un fluido adecuado para realizar experimentos de MHD. En la tabla 2.1 se muestran las propiedades físicas del $GaInSn$.

Densidad	$6360 [kg m^{-3}]$
Viscosidad dinámica	$2.2 \times 10^{-3} [kg m^{-1} s^{-1}]$
Viscosidad cinemática	$3.3 \times 10^{-7} [m^2 s^{-1}]$
Tensión superficial	$0.533 [N m^{-1}]$
Conductividad Eléctrica	$3.46 \times 10^6 [\Omega^{-1} m^{-1}]$
Velocidad del sonido	$2725 [m s^{-1}]$
Conductividad térmica	$39 [W K^{-1} m^{-1}]$
Calor específico	$39 [J kg^{-1} K^{-1}]$
Permeabilidad magnética	$4 \pi \times 10^{-7} [N A^{-2}]$
Temperatura de fusión	$10.5 [^{\circ}C]$

Cuadro 2.1: Propiedades físicas del fluido de trabajo $Ga^{68\%}In^{20\%}Sn^{12\%}$ a $20^{\circ}C$.

En la caracterización del equipo experimental, se encontró una relación lineal entre la frecuencia de rotación de la base que aloja a los imanes y el voltaje de alimentación del motor eléctrico (Baldor modelo AP7401, 13 Hp) . La Fig. 2.6 muestra dicha relación lineal, donde el eje vertical derecho corresponde a la frecuencia de rotación de la base con imanes y el eje horizontal al voltaje aplicado al motor. El eje vertical izquierdo corresponde a la frecuencia

de rotación de la polea menor utilizada en el dispositivo y cuyo valor no es de relevancia para los experimentos que se discutirán en el siguiente capítulo.

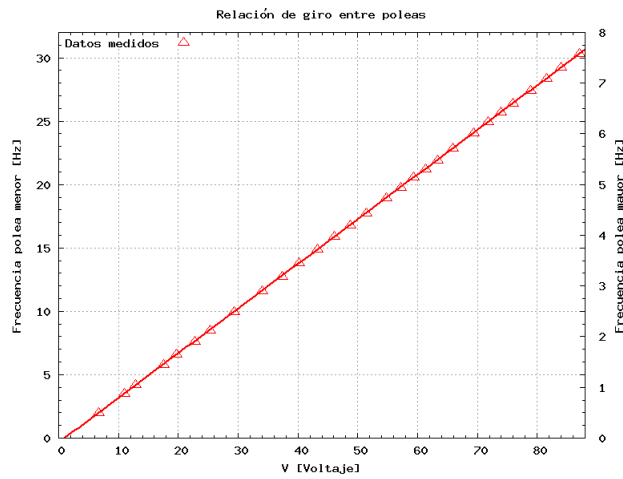


Fig. 2.6: Relación entre la frecuencia de rotación de la base que aloja a los imanes (eje vertical izquierdo) y el voltaje suministrado al motor eléctrico.

Capítulo 3

Resultados Experimentales

En este capítulo se presentan los resultados experimentales obtenidos en el dispositivo experimental descrito en el capítulo anterior. Los resultados muestran los flujos obtenidos a partir de los diferentes arreglos o configuraciones de uno, dos y tres imanes. Los experimentos se llevaron a cabo realizando un barrido en la frecuencia de rotación del arreglo de imanes, donde la frecuencia mínima utilizada fue cercana a 0.5 Hz y la máxima fue de 7.57 Hz. Para determinadas condiciones físicas se encontró que la capa de líquido sufre una inestabilidad que da lugar a la formación de una oquedad o agujero, es decir, una región donde hay ausencia de fluido. Dicha región muestra distintas formas, en particular, polígonos. La inestabilidad observada no ha sido reportada previamente en la literatura. Para el análisis de los resultados se llevó a cabo procesamiento de imágenes mediante un programa capaz de identificar algunas de las características principales de los flujos.

3.1. Resultados para el arreglo de un imán

Con el arreglo de un imán se obtuvieron dos diferentes comportamientos, un flujo sin discontinuidad (flujo base) en la capa de metal líquido y un flujo discontinuo, donde aparece un agujero en la capa de metal líquido, dejando al descubierto el fondo del contenedor cilíndrico. En la figura 3.1 se muestran los dos comportamientos encontrados, donde la discontinuidad se hace presente con un patrón que asemeja una elipse. Los resultados y análisis experimentales se enfocaron al flujo con discontinuidad, que se obtiene a partir de una perturbación espontánea en la superficie del metal líquido, cuando el flujo base está presente. La perturbación se genera por la oscilación de la superficie libre del metal líquido, la cual crece con el aumento de la frecuencia de rotación del campo magnético. Aunque en este trabajo solamente se utilizó la perturbación espontánea generada por la oscilación de la superficie libre del metal líquido, también es posible generar una perturbación ajena al flujo, ya sea inyectando en el centro del contenedor una gota de ácido clorhídrico o un chorro de aire. La rotación del campo magnético modifica el espesor del metal líquido, formando un menisco, debido a la fuerza centrífuga que actúa sobre el fluido de trabajo. Para frecuencias bajas (< 1 Hz) el espesor en el centro del contenedor y el espesor en la pared

son muy parecidos, debido a que la fuerza centrífuga es muy pequeña. Para frecuencias altas (> 5 Hz) el espesor del metal líquido en el centro del contenedor cilíndrico disminuye mientras que el espesor aumenta cerca de la pared del contenedor. Debido a la disminución del espesor de metal líquido en el centro del contenedor, la perturbación requerida para generar la discontinuidad a frecuencias altas es menor que la requerida para generar la discontinuidad a frecuencias bajas. En otras palabras, es más sencillo generar la discontinuidad a frecuencias altas. Ya que el interés principal del trabajo es la descripción de la discontinuidad, los experimentos se realizaron con condición inicial de frecuencia máxima, lo que aseguraba la obtención instantánea de la discontinuidad. Una vez que se presenta la inestabilidad que da lugar a la ruptura de la superficie libre, la fuerza de tensión superficial y la fuerza centrífuga se manifiestan claramente. La fuerza centrífuga mantiene al fluido fuera del centro del contenedor mientras que la fuerza de tensión superficial trata de cerrar el agujero. Dado a que la fuerza centrífuga depende de la frecuencia de rotación del campo magnético aplicado, a frecuencias bajas dicha fuerza es pequeña, predominando la tensión superficial que evita que se abra el agujero. En la figura 3.2 se muestra el comportamiento del flujo producido por un imán en rotación (con discontinuidad y sin discontinuidad) para dos grosores de la capa de metal líquido, de acuerdo a la frecuencia de rotación de los imanes. Se observó que el orificio originado por la inestabilidad en el metal líquido rota sobre su propio eje, siendo la frecuencia de rotación del orificio mucho menor que la frecuencia de rotación del imán. En la figura 3.3 se muestra un ejemplo de la secuencia de rotación del orificio. También se observó que la frontera del orificio oscila de tal forma que parece que el agujero se contrae y se expande. Esta contracción y expansión hacen que el área del agujero cambie en el tiempo. Se observó también que para ciertas frecuencias ($4.8\text{Hz} \leq f \leq 5.03$ Hz) de rotación del campo magnético aplicado el agujero se desestabiliza, lo que ocasiona que se salga del centro del contenedor cilíndrico y se traslade en trayectorias circulares con respecto al centro del contenedor. En la figura 3.4 se muestra una secuencia del comportamiento del orificio cuando se desestabiliza.

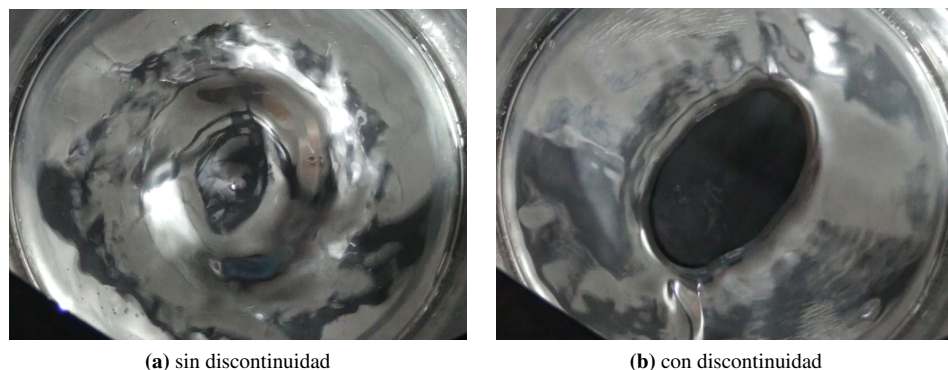


Fig. 3.1: Flujos producidos por la rotación de un solo imán en una capa de 6 mm de metal líquido.

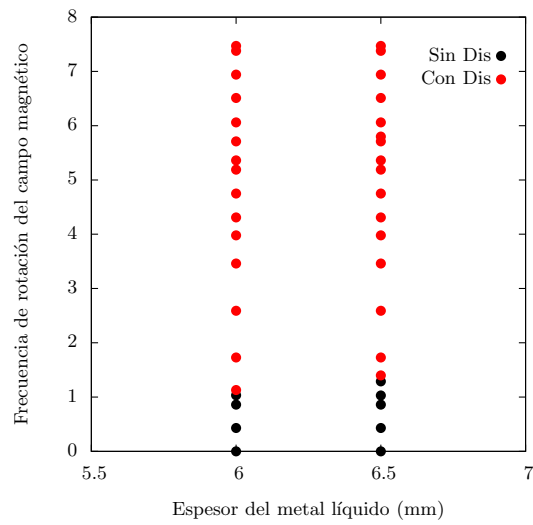


Fig. 3.2: Diagrama de comportamiento del flujo con un imán en rotación, sin discontinuidad (puntos negros) o con discontinuidad (puntos rojos), para dos grosores de la capa de metal líquido, de acuerdo a la frecuencia de rotación de los imanes.

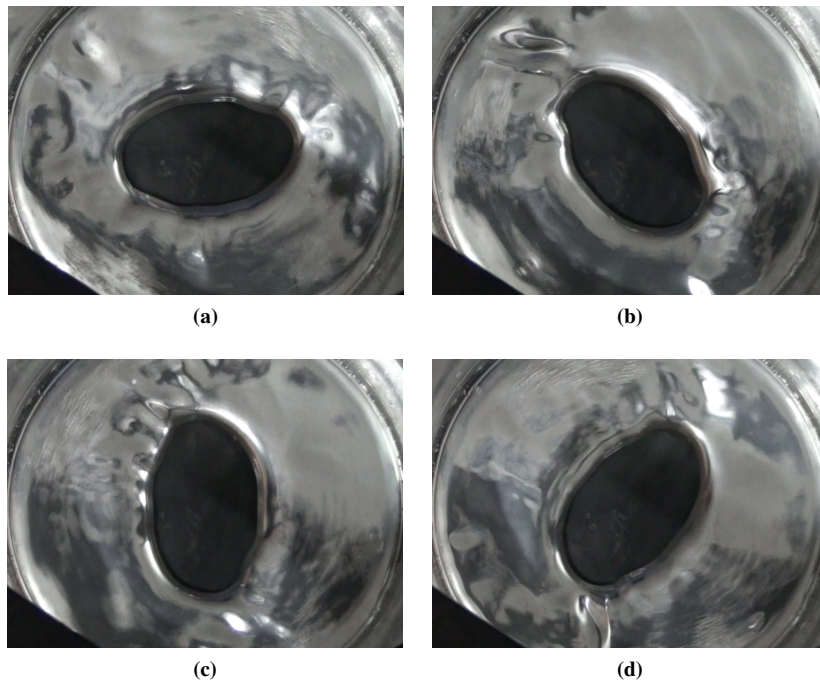


Fig. 3.3: Imágenes del patrón obtenido experimentalmente con el arreglo de un imán para diferentes tiempos, donde se observa la rotación del agujero producido por la inestabilidad con respecto al eje del contenedor cilíndrico. La frecuencia de rotación del arreglo de imanes es aproximadamente de 7.0 Hz.

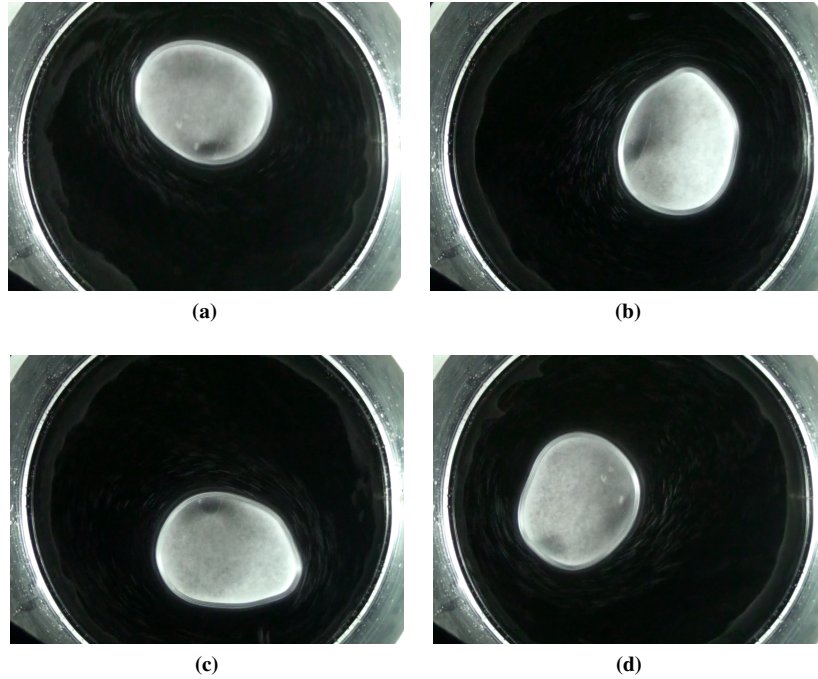


Fig. 3.4: Imágenes del patrón obtenido experimentalmente con el arreglo de un imán para diferentes tiempos, cuando el agujero ha perdido estabilidad y se sale del centro del contenedor, girando alrededor del eje del contenedor.

3.2. Resultados para el arreglo de tres imanes

El arreglo de tres imanes se exploró primero colocando todos los imanes con la misma polaridad. En este caso se observó la agitación del metal líquido al poner en rotación al arreglo de imanes, así como la creación de un menisco en la superficie libre del metal líquido. Sin embargo, dentro del rango de frecuencias de rotación exploradas, no se observó la aparición de la inestabilidad que da lugar al agujero en la capa de líquido. Se procedió entonces a cambiar la polaridad de uno de los imanes y en tal caso sí se observó el surgimiento de la inestabilidad. Es decir, en esta configuración fue posible observar tanto el flujo sin discontinuidad como el flujo con discontinuidad, observándose entonces un agujero en la capa de metal líquido que deja al descubierto el fondo del contenedor. La discontinuidad se genera de la misma forma que para el caso de un imán, es decir, mediante una perturbación espontánea en la superficie del metal líquido que se manifiesta como una oscilación de dicha superficie. Para el caso de tres imanes la inestabilidad da lugar a la formación de un triángulo aproximadamente equilátero, que refleja la simetría de la distribución del campo magnético rotatorio. Al igual que el agujero generado con un imán, el orificio generado con el arreglo de tres imanes también gira sobre su propio eje y la frecuencia de rotación del polígono es menor que la frecuencia de rotación del arreglo de imanes. En la figura 3.5 se muestra la secuencia de rotación del polígono triangular.

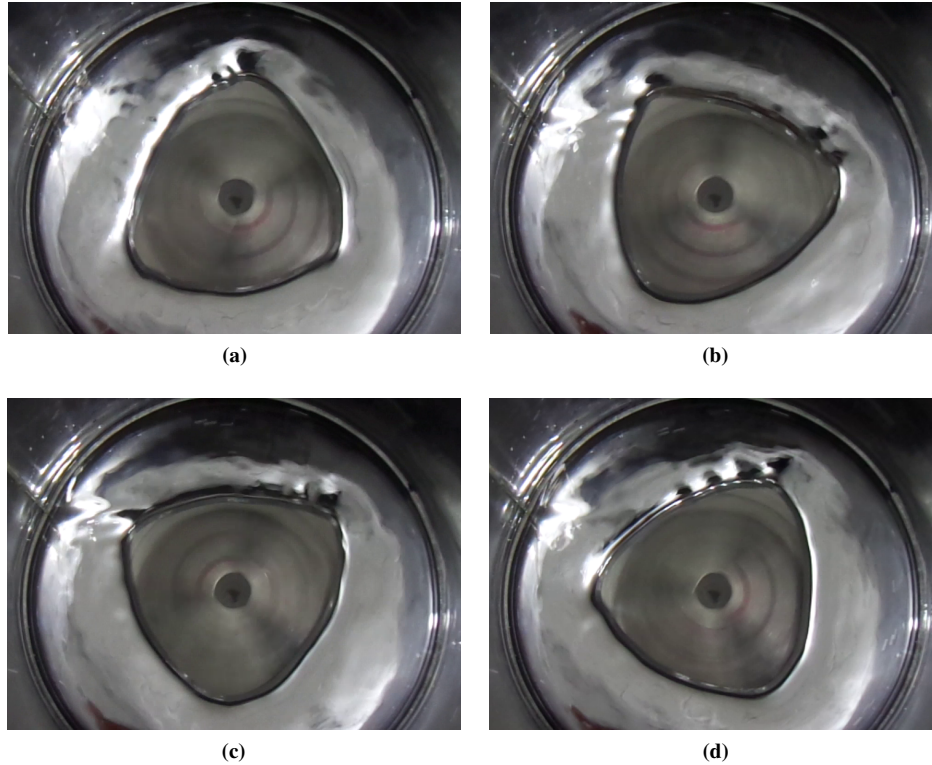


Fig. 3.5: Imágenes del patrón obtenido experimentalmente con el arreglo de tres imanes para diferentes tiempos, donde se observa que a cada instante la orientación es diferente debido a la rotación del polígono.

3.3. Resultados para el arreglo de cuatro imanes

Como se mostró en el capítulo 2, en el arreglo de cuatro imanes, éstos están dispuestos formando una cruzeta, donde los extremos de los imanes se localizan muy cerca de las paredes del contenedor. De esta forma, la influencia del campo magnético rotatorio abarca prácticamente toda la capa de fluido, a diferencia del arreglo con tres imanes donde la longitud de éstos es menor que el radio del contenedor. Los experimentos con el arreglo de cuatro imanes se realizaron disponiéndolos todos con la misma polaridad y se observó tanto el flujo sin discontinuidad como el flujo con discontinuidad, surgida a partir de la aparición de la inestabilidad. Como es de esperarse a partir de los resultados previos para uno y tres imanes, con el arreglo de cuatro imanes se observó la formación de una estructura cuadrada. A diferencia de las estructuras formadas con uno y tres imanes, el orificio generado con el arreglo de cuatro imanes no gira sobre su propio eje, permanece estático, lo cual se atribuye a la configuración y tamaño de los imanes utilizados. Como se mencionó, para este caso el área donde el campo magnético tiene presencia abarca prácticamente toda la capa de líquido, haciendo que la pared del contenedor tenga una mayor influencia en el flujo. En la figura (3.6) se muestra la forma del orificio generado con cuatro imanes.



Fig. 3.6: Patrón de flujo obtenido experimentalmente con el arreglo de cuatro imanes. En este caso, el polígono de cuatro lados no rota alrededor del eje de simetría.

3.4. Caracterización

La técnica de medición comúnmente utilizada para caracterizar flujos de líquidos opacos como los metales líquidos, es la de Velocimetría Doppler Ultrasónica (UDV, por sus siglas en inglés)[18, 23]. Debido a que el interés principal del trabajo es caracterizar flujos donde aparecen discontinuidades que no permiten la transmisión de una señal acústica, se optó por caracterizar las estructuras de flujo mediante análisis de imágenes. De esta forma fue posible obtener parámetros de interés como la velocidad de rotación de la estructura así como su área promedio. Debido a la complejidad y el tiempo requerido para analizar los datos, en este trabajo solamente se caracterizó el flujo generado con un imán con un espesor del metal líquido de 6 mm .

3.4.1. Análisis de imágenes

El análisis de imágenes se enfoca principalmente a la identificación de patrones y sus propiedades, por ejemplo, el área y la frecuencia de rotación del agujero creado por la inestabilidad. Para poder realizar el procesamiento de imágenes es necesario contar con una base

de datos (imágenes) con la cual trabajar. Con el fin de obtener la base de datos necesaria, se tomaron videos del flujo producido por la fuerza de Lorentz, los cuales fueron transformados a imágenes individuales en cuadros por segundo. Los videos fueron tomados por medio de una cámara Sony Handycam con una frecuencia de muestreo de 30 cuadros por segundo, la cual fue colocada por encima del contenedor cilíndrico, perpendicular a la superficie libre del metal líquido. Para realizar el análisis de cada imagen generada a partir de los videos se desarrolló un código que permite identificar, seguir y obtener las propiedades de los contornos del patrón formado por la inestabilidad, en este caso, el agujero elíptico. Dado a que el metal líquido tiene una superficie altamente reflejante, se tuvieron problemas al aplicar el análisis de imágenes cuando la iluminación se aplicó por encima de la superficie libre. Por tal motivo, se optó por colocar la iluminación por debajo del contenedor cilíndrico, de modo que solamente iluminara el agujero, haciendo posible una mejor identificación de los contornos en las imágenes obtenidas. En la figura 3.7 se muestran imágenes obtenidas para cada tipo de iluminación.

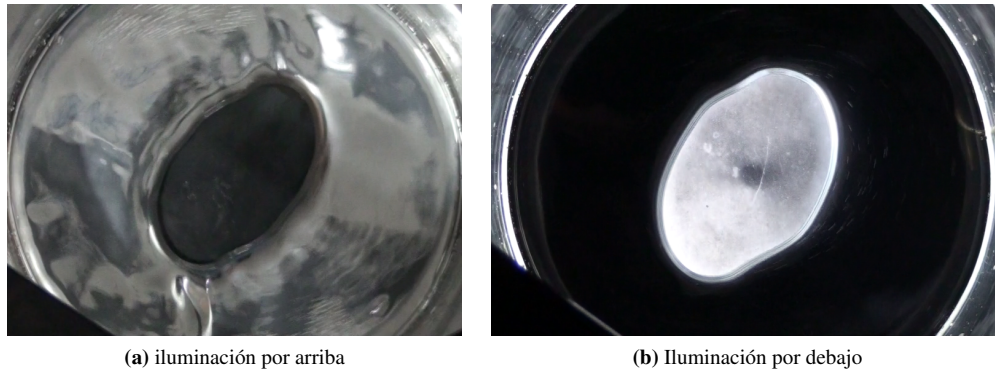


Fig. 3.7: Imágenes adquiridas con iluminación con diferente orientación. La iluminación por debajo fue de mayor utilidad para el análisis de imágenes

El primer paso del análisis de imágenes, como ya se mencionó, es obtener las imágenes a partir de los videos adquiridos. El segundo paso es transformar las imágenes a escala de grises y obtener un umbral máximo (cambio máximo en la escala de color) en la escala de grises. Dicho umbral es utilizado en el siguiente paso, que consiste en transformar la imagen a escala de blanco y negro. El cuarto paso es identificar el contorno del orificio a partir de la imagen en blanco y negro. Una vez identificado el borde del orificio se procede al último paso, que consiste en ajustar la ecuación geométrica de una figura (elipse, círculo, entre otras) al contorno detectado. En la figura 3.8 se pueden observar ejemplos de la aplicación de cada etapa del análisis de imágenes. Con el ajuste de la figura se pueden conocer diferentes propiedades del patrón para una sola imagen, como el área y el perímetro. Debido a que la forma y orientación del orificio tienen una dependencia temporal, también se pueden obtener propiedades como la velocidad angular, la fluctuación del contorno con respecto al tiempo y el área promedio, si se efectúa el análisis para un conjunto de imágenes. Con el fin de caracterizar la rotación del orificio se obtuvo el ángulo formado entre uno de los ejes

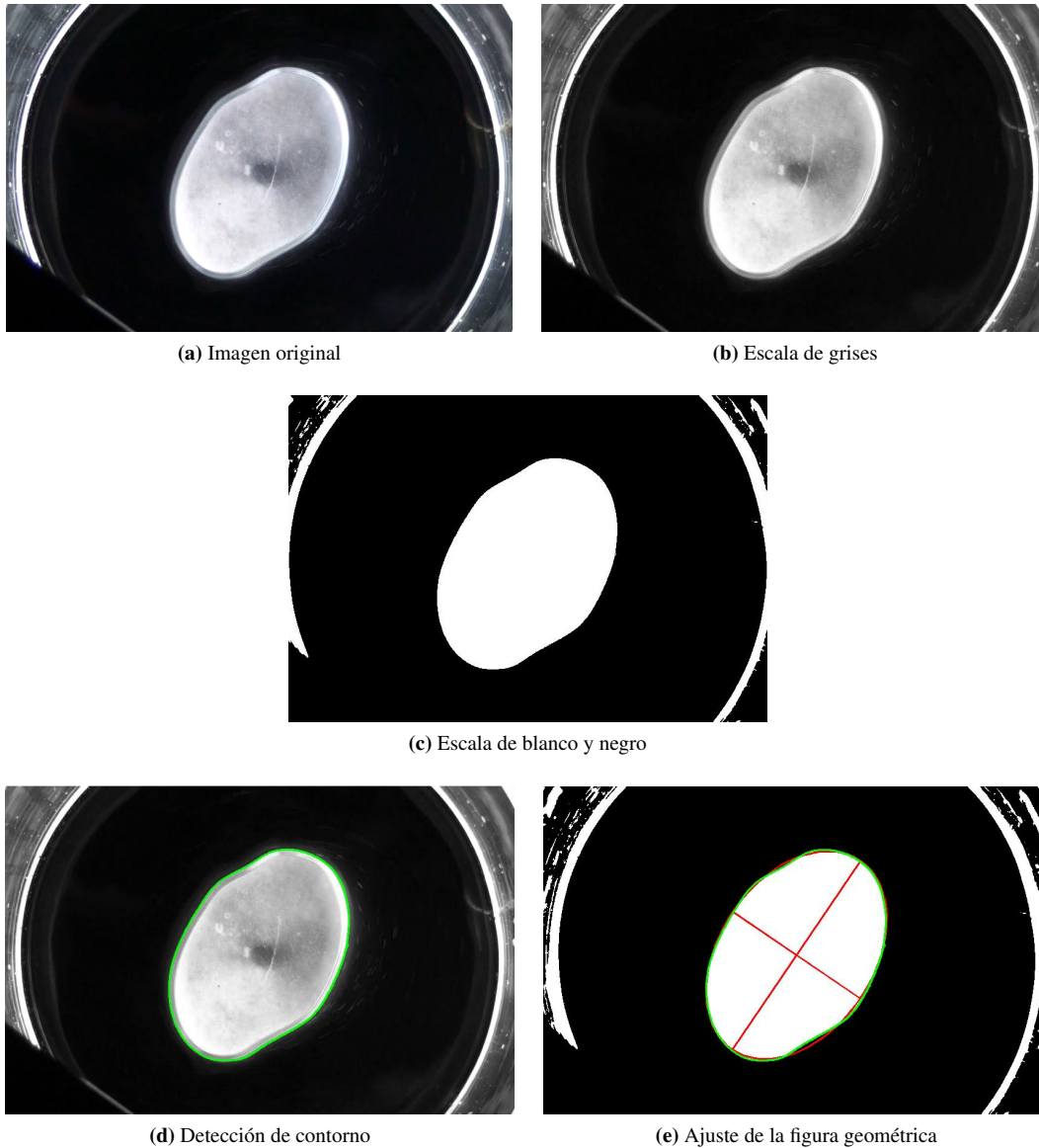


Fig. 3.8: Etapas del análisis de imágenes. La línea de color verde en la figura d) es el contorno detectado por el programa de cómputo. La línea de color rojo en la figura e) representa a la figura geométrica ajustada a los datos obtenidos del contorno.

de la elipse ajustada (eje mayor o eje menor) y una línea horizontal que intersecte la elipse. En la figura 3.9 se muestra el ángulo obtenido con el procesamiento de imágenes. Debido a que el orificio rota, el ángulo cambia con el tiempo. Si se conoce el valor del ángulo para diferentes tiempos, entonces podemos conocer la frecuencia de rotación del orificio y por consiguiente la velocidad angular del orificio. La frecuencia de rotación del orificio se obtuvo aplicando la Transformada rápida de Fourier (FFT, por sus siglas en inglés) a los valores

del ángulo registrados. En la figura 3.10 se muestra un ejemplo de la aplicación de la FFT al ángulo de rotación, donde se observa la frecuencia dominante y los armónicos correspondientes. Se aplicó la FFT para diferentes frecuencias de rotación del campo magnético, lo cual se puede observar en la figura 3.11, donde se muestra la frecuencia de rotación del agujero como función de la frecuencia de rotación del campo magnético. Nótese que existe una relación cercanamente lineal, donde la frecuencia de rotación de la estructura es mucho menor que la del campo magnético. Para la frecuencia máxima de rotación de los imanes de 7.59 Hz, la frecuencia de rotación de la estructura apenas alcanza 0.26 Hz. La velocidad angular está definida por $\omega = 2\pi f$, donde ω es la velocidad angular y f es la frecuencia de rotación.

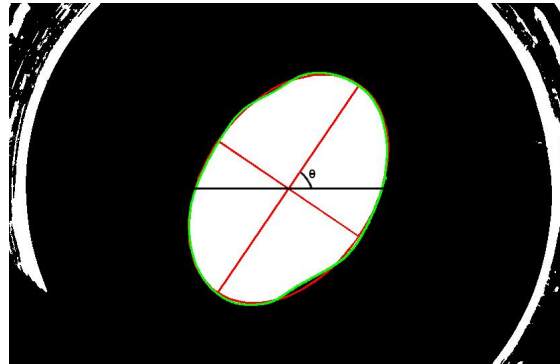


Fig. 3.9: Ángulo formado por una línea horizontal a la imagen y el eje mayor de la elipse.

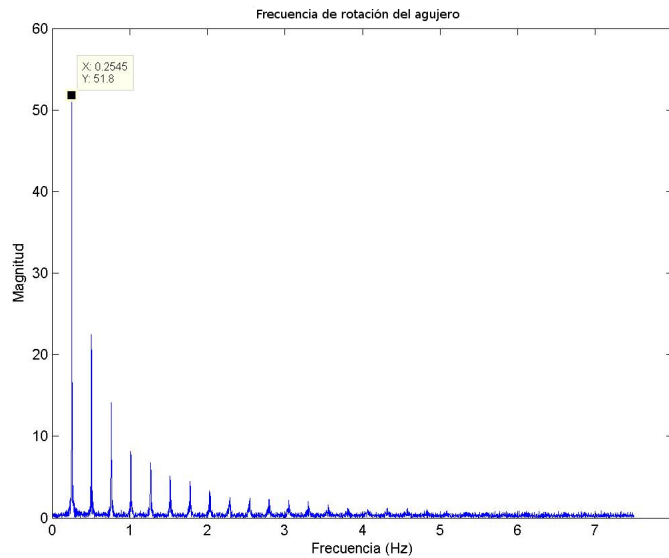


Fig. 3.10: Transformada rápida de Fourier aplicada al ángulo formado entre el eje mayor de la elipse ajustada y una línea horizontal a la imagen (ver figura 3.9), para una frecuencia de rotación del campo magnético de 6.77 Hz.

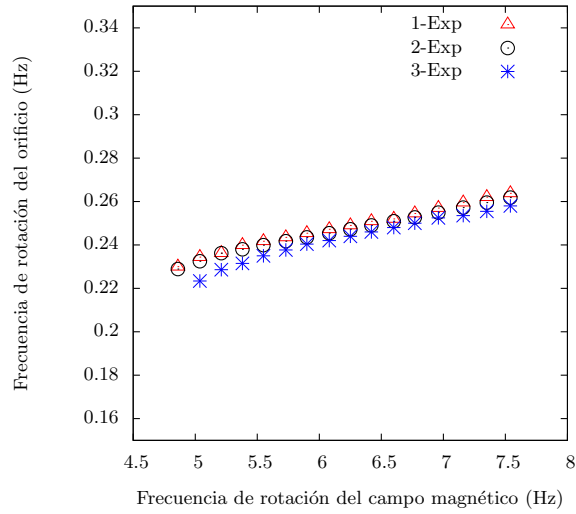


Fig. 3.11: Comportamiento de la frecuencia de rotación del agujero con respecto a la frecuencia de rotación del campo magnético, donde se puede observar que existe una relación aproximadamente lineal.

Debido a que el área fluctúa temporalmente, también se obtuvo el área promedio en el tiempo. En la figura 3.12 se muestra el comportamiento del área promedio para diferentes frecuencias de rotación del campo magnético, donde se puede observar que también tiene un comportamiento cuasi-lineal creciente, es decir, el área promedio aumenta al incrementarse la frecuencia de rotación del campo magnético.

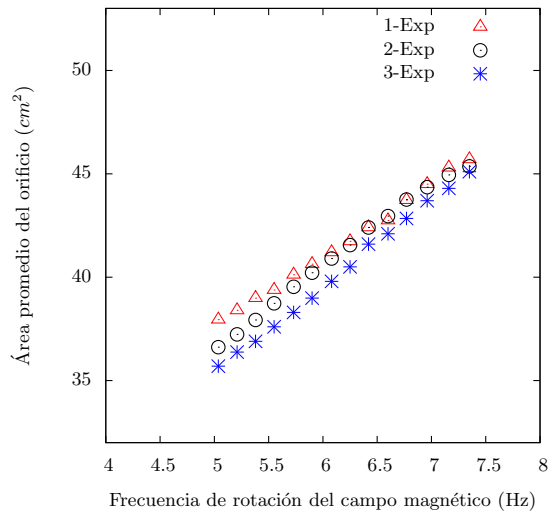


Fig. 3.12: Comportamiento del área promedio con respecto a la frecuencia de rotación del campo magnético.

Con el fin de caracterizar la fluctuación del contorno del agujero, se obtuvo la distancia entre cada punto del contorno del agujero y la elipse ajustada mediante el análisis de imáge-

nes, para lo que se realizaron los siguientes pasos. Primero se obtuvo el vector normal para cada punto del contorno. Después con los vectores normales al contorno se obtuvieron las ecuaciones de la recta correspondientes para cada vector, donde las rectas también son normales a cada punto del contorno. El tercer paso consiste en igualar cada ecuación de la recta con la ecuación correspondiente a la elipse ajustada, formando así n sistemas de ecuaciones, donde n representa el número de puntos del contorno. El cuarto paso consiste en solucionar el sistema de ecuaciones para cada punto del contorno, encontrando así el punto donde la recta normal a cada punto del contorno se intersecta con la elipse. Por último se obtiene la distancia entre el punto donde la recta intersecta la elipse y el punto correspondiente al contorno encontrado con el análisis de imágenes. En la figura 3.13 se muestra la fluctuación del contorno.

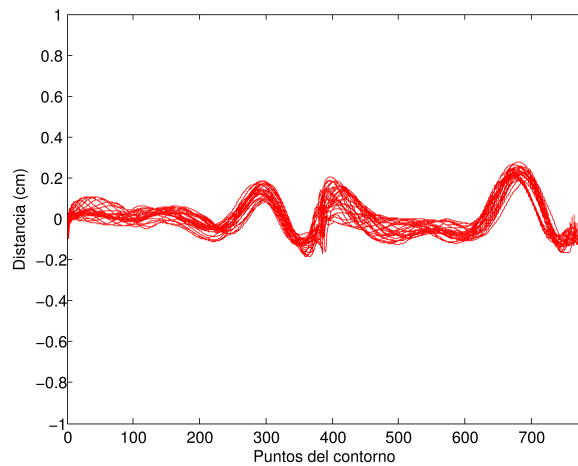


Fig. 3.13: Fluctuación del contorno del orificio respecto a una elipse ajustada a la imagen. La gráfica muestra la distancia entre el contorno y la elipse en cada punto del contorno. Cada línea corresponde a un tiempo dado. Se destacan tres picos, donde la distancia entre el contorno y la elipse ajustada es mayor.

De la figura 3.13 se puede concluir que el contorno mantiene la misma forma, cambiando únicamente la magnitud de la distancia del contorno a la elipse de referencia, lo cual puede interpretarse como una onda que viaja por el contorno del orificio.

En el siguiente capítulo se presentarán algunos elementos teóricos para tratar de modelar parcialmente los fenómenos observados experimentalmente.

Capítulo 4

Análisis teórico

En este capítulo se presenta un modelo teórico preliminar propuesto con el fin de tratar de comprender los tipos de flujos que se pueden presentar en el dispositivo experimental. Debido a la complejidad de la inestabilidad observada experimentalmente, la elaboración de un modelo completo que describa dicho fenómeno está más allá del alcance de este trabajo. Se pretende únicamente dar algunos elementos que pueden ayudar a la comprensión de los flujos obtenidos mediante agitación electromagnética. Para poder plantear un modelo del flujo observado, es necesario establecer las ecuaciones que describen el fenómeno, es decir, las ecuaciones que de la magnetohidrodinámica (MHD). La MHD se define comúnmente como el estudio del movimiento de fluidos no magnetizables eléctricamente conductores (líquidos o gases) en presencia de campos magnéticos. Cuando un fluido eléctricamente conductor, se encuentra en movimiento relativo a un campo magnético, se presentan dos fenómenos básicos de acoplamiento. Primero, se inducen corrientes eléctricas en el medio, que a su vez inducen un campo magnético que modifica el campo existente. Segundo, la interacción del campo magnético y la corriente eléctrica inducida produce una fuerza volumétrica sobre el fluido conocida como fuerza de Lorentz, que modifica el estado dinámico del fluido. Por lo tanto para poder describir fenómenos magnetohidrodinámicos, es necesario hacer uso de las ecuaciones de la mecánica de fluidos acopladas a las ecuaciones del electromagnetismo. A continuación se presentarán brevemente las ecuaciones fundamentales de la MHD y se utilizarán para el desarrollo de un modelo que combina aspectos analíticos y cálculos numéricos. Posteriormente, se presentarán los resultados teóricos obtenidos con el modelo.

4.1. Ecuaciones de la mecánica de fluidos

Las ecuaciones de la mecánica de fluidos están basadas en la hipótesis del continuo, que permite ignorar la estructura molecular del medio. Con la hipótesis del continuo se considera que las variables físicas del fluido son funciones continuas, que dependen de la posición y del tiempo. Ejemplos de estas variables físicas son la presión, la temperatura, la densidad y la velocidad. Las ecuaciones que determinan la variación temporal y espacial de las varia-

bles que describen al fluido se obtienen de los principios de conservación de masa, cantidad de movimiento (momentum) y energía, así como de ecuaciones constitutivas y ecuaciones de estado.

4.1.1. Conservación de masa

El principio de conservación de la masa indica que la masa m contenida en un volumen V se mantiene constante. Para una gran cantidad de aplicaciones, tanto los líquidos como los gases pueden considerarse incompresibles, es decir, su volumen es inalterable ante esfuerzos normales de tipo compresional y por lo tanto su densidad se mantiene constante. En tal caso la ecuación de conservación de la masa o ecuación de continuidad toma la forma [24, 25, 26]:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad (4.1)$$

donde \vec{u} es el campo vectorial de velocidad.

4.1.2. Conservación de la cantidad de movimiento

La ecuación de balance de cantidad de movimiento para un fluido, se obtiene al aplicar la *Segunda Ley de Newton* a un elemento de volumen del fluido. Podemos considerar el metal líquido como un fluido Newtoniano. Entonces si aplicamos la *Segunda ley de Newton* a un fluido Newtoniano, obtenemos como resultado las ecuaciones de Navier-Stokes que en forma diferencial se expresan como [24, 25, 26]:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{u} + \frac{1}{\rho} \vec{f}, \quad (4.2)$$

donde ρ , ν , p y \vec{f} son la densidad del fluido, la viscosidad cinemática, la presión y las fuerzas de cuerpo externas, respectivamente. Para fluidos eléctricamente conductores en presencia de campos magnéticos, la fuerza de cuerpo de mayor relevancia es la fuerza de Lorentz que se presentará posteriormente.

4.1.3. Conservación de la energía

La ecuación de balance de energía o ecuación de transferencia de calor, se obtiene al aplicar la primera ley de la termodinámica a un elemento de volumen de fluido en movimiento, utilizando la hipótesis de equilibrio local. Para un fluido incompresible, esta ecuación está desacoplada de la ecuación de conservación de masa y la ecuación de balance de cantidad de movimiento, y sólo se presenta aquí para completar el sistema de ecuaciones, ya

que para el problema que se pretende abordar en este trabajo esta ecuación no es de relevancia pues no se tratarán problemas de transferencia de calor. Cuando existe interacción electromagnética esta ecuación tiene la forma [24, 25, 26]:

$$\rho c_p \left[\frac{\partial T}{\partial t} + (T \cdot \nabla)T \right] = \nabla \cdot (k \nabla T) + \frac{\vec{j}^2}{\sigma} + \Phi_v, \quad (4.3)$$

donde c_p es el calor específico a presión constante, T es el campo de temperatura, k es la conductividad térmica, \vec{j} es el vector densidad de corriente eléctrica, σ es la conductividad eléctrica del medio y Φ_v denota la disipación viscosa la cual involucra términos cuadráticos de los gradientes de velocidad. El penúltimo término del lado derecho de la ecuación (4.3) corresponde a la disipación óhmica generada por la circulación de corrientes eléctricas en el fluido.

4.2. Ecuaciones del campo electromagnético

Debido a que el problema físico que se trata en este trabajo está relacionado con fluidos conductores de electricidad y con campos electromagnéticos, las ecuaciones de la mecánica de fluidos son insuficientes para representar de una manera adecuada el comportamiento físico del problema, razón por la que debemos incluir las ecuaciones del electromagnetismo (las ecuaciones de Maxwell, las ecuaciones constitutivas y la ecuación de la fuerza del electromagnetismo). Las leyes del electromagnetismo se resumen en una serie de expresiones conocidas como las ecuaciones de Maxwell, que son un conjunto de cuatro ecuaciones que incluyen a la ley de Gauss para el campo eléctrico, la ley de Gauss para el campo magnético, la ley de inducción de Faraday y la ley de Ampère-Maxwell, las cuales sintetizan el comportamiento experimental de los fenómenos electromagnéticos. Estas ecuaciones relacionan los vectores de intensidad de campo eléctrico (\vec{E}), y de inducción magnética (\vec{B}), con sus fuentes, que son las cargas y las corrientes eléctricas. A continuación se describen brevemente las ecuaciones macroscópicas de Maxwell en un medio homogéneo, isotrópico y lineal [27].

4.2.1. Ecuaciones de Maxwell

La ley de Gauss para el campo eléctrico indica que el flujo de campo eléctrico a través de una superficie cerrada es igual a la carga total que se encuentra en el volumen limitado por esta superficie. En forma diferencial la ley de Gauss se expresa como

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon}, \quad (4.4)$$

donde ρ_e es la densidad de carga eléctrica y ϵ la permitividad eléctrica del medio. Esta ley indica que las distribuciones de carga eléctrica son fuentes de campo eléctrico.

La ley de Gauss para el campo magnético expresa la inexistencia de cargas magnéticas aisladas, o como se conocen habitualmente, monopolos magnéticos. Las distribuciones de fuentes magnéticas son siempre neutras en el sentido de que poseen un polo norte y un polo sur, por lo que su flujo a través de cualquier superficie cerrada es nulo, de modo que en forma diferencial tenemos

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (4.5)$$

La ley de Faraday establece que la fuerza electromotriz inducida en un circuito es directamente proporcional a la rapidez con la que cambia el flujo magnético que lo atraviesa. En otras palabras, establece la posibilidad de producir campos eléctricos a partir de campos magnéticos variables en el tiempo. En forma diferencial la ley de Faraday se expresa como

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (4.6)$$

La ley de Ampère-Maxwell o ley de Ampère generalizada, establece que los campos magnéticos pueden producirse por medio de corrientes eléctricas o bien debido a la variación temporal de campos eléctricos. La expresión diferencial de dicha ley tiene la forma

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \vec{j} + \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (4.7)$$

donde μ es la permeabilidad magnética del medio. La permeabilidad magnética de los metales líquidos y de los electrolitos es aproximadamente igual a la del vacío μ_0 . El segundo término del lado derecho se denomina la corriente de desplazamiento de Maxwell y es indispensable para la descripción de los fenómenos donde la frecuencia del campo electromagnético es muy alta.

Al aplicar el operador divergencia a la ecuación 4.7 y utilizar la ley de Gauss 4.4, obtenemos la ecuación de conservación de la carga eléctrica o ecuación de continuidad, la cual establece que no hay destrucción ni creación neta de carga eléctrica, y que en todo proceso electromagnético la carga total de un sistema aislado se conserva. De manera que si en una superficie cerrada la carga eléctrica contenida en su interior disminuye, debe existir

un flujo de corriente neto hacia el exterior del sistema, mientras que si la carga eléctrica contenida aumenta, debe ser por la existencia de un flujo neto de corriente hacia el interior del sistema. En su forma diferencial la ecuación de conservación de carga tiene la siguiente forma

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho_e}{\partial t} = 0. \quad (4.8)$$

4.2.2. Ley de Ohm

Es necesario proporcionar una ecuación constitutiva que establezca la relación entre la densidad de corriente eléctrica y los campos eléctrico y magnético. La ecuación más común, válida para líquidos y gases conductores, es la llamada ley de Ohm. En un conductor en reposo se encuentra que la densidad de corriente eléctrica \vec{j} es proporcional a la fuerza experimentada por las cargas libres. Esto está reflejado en la forma convencional de la ley de Ohm [28]

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}_r, \quad (4.9)$$

donde \vec{E}_r es el campo eléctrico en el sistema en reposo, y la conductividad eléctrica se puede suponer constante como una buena aproximación. Si el conductor se desplaza respecto al sistema de laboratorio con velocidad \vec{u} , la ley de Ohm toma la forma

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) + \rho_e \vec{u}, \quad (4.10)$$

donde el término $\rho_e \vec{u}$ se conoce como la corriente convectiva.

4.2.3. Fuerza de cuerpo electromagnética

Para que las interacciones electromagnéticas influyan en la dinámica del medio conductor (fluido de trabajo), debemos considerar la fuerza electromagnética ejercida sobre el medio debido a la interacción de los campos eléctrico (\vec{E}) y magnético (\vec{B}). En un medio continuo con una distribución de densidad de carga eléctrica ρ_e y una densidad de corriente \vec{j} , la fuerza electromagnética que experimenta el medio continuo al moverse a través de un campo magnético está dada por

$$\vec{f} = \rho_e \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}, \quad (4.11)$$

que se conoce como la fuerza de Lorentz.

4.3. Aproximación MHD

El acoplamiento de las ecuaciones de la dinámica de fluidos y las ecuaciones electromagnéticas presenta algunas dificultades. Las ecuaciones de la dinámica de fluidos son ecuaciones no relativistas, las cuales son invariantes ante transformaciones galileanas. Las ecuaciones electromagnéticas son ecuaciones relativistas, por tanto son invariantes ante transformaciones de Lorentz. Mezclar ecuaciones con distintas propiedades de invarianza podría dar lugar a una descripción errónea del fenómeno a considerar. Para resolver esta incompatibilidad se utiliza lo que se conoce como la aproximación MHD [29], la cual se basa en la simplificación de las ecuaciones electromagnéticas utilizando las siguientes suposiciones:

- No se consideran fenómenos relativistas. La velocidad del fluido en problemas de laboratorio es mucho menor que la velocidad de la luz (c), es decir $c^2 \gg u^2$. De esta manera las ecuaciones de Maxwell pierden la forma relativista y así pueden ser acopladas a las ecuaciones de balance de la dinámica de fluidos. Esta suposición nos permite despreciar la corriente de convección en la ley de Ohm ($\rho_e \vec{u}$) y el término eléctrico de la ecuación de la fuerza ($\rho_e \vec{E}$)
- Los flujos tienen lugar en campos magnéticos cuasi-estacionarios o a bajas frecuencias, implicando de esta forma que el término de la corriente de desplazamiento ($\mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$) de la ley Ampère-Maxwell (Ecu.4.7) sea despreciable.
- Se considera que los campos eléctricos inducidos son de orden $\vec{u} \times \vec{B}$, lo que es equivalente a suponer que el campo magnético inducido es mucho más pequeño que el campo externo aplicado. Esto implica que el campo magnético es el mismo en cualquier marco de referencia..

Bajo esta aproximación las ecuaciones electromagnéticas se simplifican, haciendo posible que se puedan fusionar con las ecuaciones de la dinámica de fluidos y generando las ecuaciones que gobiernan los fenómenos MHD. El conjunto de ecuaciones resultante al aplicar la aproximación MHD tiene la siguiente forma

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{u} + \frac{1}{\rho} \vec{j} \times \vec{B}, \quad (4.13)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (4.14)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (4.15)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \vec{j}, \quad (4.16)$$

$$\vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}). \quad (4.17)$$

Nótese que la ecuación de conservación de energía (4.3) no se encuentra explícita, dado a que en este trabajo de investigación no es importante determinar los campos de temperatura. Se ha ignorado la ecuación de Gauss para el campo eléctrico, esto debido a que dicho campo queda completamente definido por la ley de Faraday (4.15), la ley de Ampère (4.16) y la ley de Ohm (4.17). La ecuación de la fuerza de Lorentz está implícita en la ecuación de Navier-Stokes, como una fuerza de cuerpo.

Es posible obtener la ecuación de inducción para el campo magnético que describe el transporte de campo magnético por difusión y por convección. Esta ecuación se obtiene a partir de las ecuaciones [(4.14)-(4.17)] y tiene la siguiente forma.

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nu_m \nabla^2 \vec{B} + \nabla \times (\vec{u} \times \vec{B}), \quad (4.18)$$

donde $\nu_m = \frac{1}{\mu\sigma}$ se conoce como la difusividad magnética. En esta ecuación el transporte de campo magnético inducido por difusión está representado por $\nu_m \nabla^2 \vec{B}$, mientras que el transporte por convección viene dado por el término $\nabla \times (\vec{u} \times \vec{B})$. Nótese que la ecuación (4.18) está acoplada por el término convectivo a las ecuaciones de la dinámica de fluidos (Eqs. (4.12) y (4.13)). Las ecuaciones (4.12), (4.13) y (4.18), representan un sistema completo de siete ecuaciones y siete incógnitas, donde \vec{u} , \vec{B} y p son las variables dependientes.

4.4. Modelo teórico

Dada la complejidad del flujo estudiado experimentalmente, en esta sección se propone un primer modelo que introduce algunos de los elementos físicos esenciales del problema, al tiempo que se hacen simplificaciones fuertes que permiten encontrar analíticamente la fuerza de Lorentz que actúa sobre el fluido. El sistema de ecuaciones obtenido a partir de la aproximación MHD, es un sistema cerrado y acoplado de siete ecuaciones con siete incógnitas que en principio se puede resolver analíticamente, pero debido a los términos no lineales presentes, en la práctica, encontrar soluciones analíticas es muy complicado y en ocasiones imposible. Dado a que el sistema de ecuaciones es difícil de resolver analíticamente, es necesario hacer consideraciones que permitan simplificar el sistema de ecuaciones y en consecuencia encontrar una solución aproximada al problema en consideración. El modelo desarrollado en este trabajo tiene una parte analítica que consiste en encontrar el campo magnético inducido en el metal líquido y con esto las corrientes inducidas que permiten encontrar una expresión explícita para la fuerza de Lorentz. Esta fuerza se introduce en un modelo numérico basado en el método de volumen finito que resuelve la ecuación de Navier-Stokes para un fluido incompresible en dos dimensiones, dando como resultado el campo de velocidades y presiones. Aunque las coordenadas que mejor se adaptan a la geometría del experimento son las polares, la determinación de la fuerza de Lorentz

se realizó en coordenadas cartesianas, por simplicidad. En general, encontrar las corrientes inducidas en un metal líquido debido a un campo magnético rotatorio puede resultar extremadamente difícil. Dichas corrientes se presentan debido al movimiento relativo del líquido conductor y el campo aplicado, de acuerdo a la Ley de Inducción de Faraday. Estas corrientes a su vez, dan lugar a un campo magnético inducido. Lo que se requiere entonces es encontrar primero el campo magnético inducido en el metal debido a la variación del campo magnético aplicado. Para esto debe resolverse la ecuación de inducción (4.18) presentada en la sección anterior. Sin embargo, esta ecuación está acoplada a las ecuaciones de Navier-Stokes y a la ecuación de continuidad a través del término convectivo ($\nabla \times (u \times B)$). Por tanto, el campo inducido debe calcularse simultáneamente al campo de velocidades. Para romper este acoplamiento, aquí suponemos que para efectos del cálculo del campo magnético inducido, la velocidad del fluido es cero, de modo que el fluido se considera como un sólido. Ésta es una aproximación común en MHD de metales líquidos ya que los efectos de transporte convectivo de campo magnético son despreciables en condiciones de laboratorio o en aplicaciones industriales [30]. Entonces el campo magnético total será ahora el campo aplicado más el campo inducido por la corriente que circula en el fluido:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{b} \quad (4.19)$$

donde \vec{B} , \vec{B}_0 y \vec{b} son el campo magnético total, el campo magnético aplicado y el campo magnético inducido, respectivamente. Entonces, de acuerdo a las aproximaciones previas, al despreciar el término convectivo en la ecuación de inducción se obtiene la ecuación de difusión para el campo magnético, es decir,

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nu_m \nabla^2 \vec{B}. \quad (4.20)$$

Además aunque el campo magnético es tridimensional, con el fin de simplificar aún más el problema, en este modelo se considera que la componente normal al plano $x - y$ es la única relevante, lo que implica que las componentes x y y del campo magnético aplicado y del campo magnético inducido no son tomadas en cuenta. Este tipo de suposición para modelar campos magnéticos no uniformes ha dado resultados razonables [31]. De igual manera se supone que tanto la componente z del campo aplicado como la componente z del campo inducido dependen de las coordenadas espaciales x , y , z y del tiempo, es decir,

$$\vec{B}_0 = (0, 0, B_{0z}(x, y, t)) \quad \vec{b} = (0, 0, b_z(x, y, z, t)), \quad (4.21)$$

donde el campo aplicado \vec{B}_0 se supone conocido. Sustituyendo la ecuación (4.19) en la ecuación (4.20) y tomando en cuenta la ecuación (4.21), obtenemos la ecuación para el campo magnético inducido, el cual utilizaremos para obtener las corrientes inducidas que

a su vez utilizaremos para encontrar la expresión analítica de la fuerza de Lorentz. Para poder obtener una expresión analítica sencilla, al aplicar el Laplaciano al campo magnético inducido, únicamente consideraremos la dependencia en la coordenada z , de modo que la ecuación de difusión queda

$$\frac{\partial b_z}{\partial t} + \frac{\partial B_{0z}}{\partial t} = \nu_m \frac{\partial^2 b_z}{\partial z^2}. \quad (4.22)$$

La dependencia del campo b_z en las coordenadas x y y será introducida a través del campo magnético aplicado, como se verá posteriormente. Una vez conocido b_z , las corrientes inducidas se calculan a partir de la Ley de Ampère, es decir,

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{b}, \quad (4.23)$$

donde \vec{j} es la corriente inducida. Ya que la única componente del campo inducido está en dirección z , la corriente inducida tiene solo componentes en el plano $x - y$, es decir,

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial b_z}{\partial y}, -\frac{\partial b_z}{\partial x}, 0 \right). \quad (4.24)$$

Finalmente la ecuación para la fuerza de Lorentz se expresa de la forma

$$\vec{f} = \vec{j} \times \vec{B}_0. \quad (4.25)$$

Puesto que la corriente inducida está solo en el plano $x - y$ y el campo aplicado tiene solo componente z , la fuerza de Lorentz tiene solo componentes en el plano $x - y$, es decir,

$$\vec{f} = \frac{1}{\mu} \left(-B_{0z} \frac{\partial b_z}{\partial x}, -B_{0z} \frac{\partial b_z}{\partial y}, 0 \right). \quad (4.26)$$

Se puede observar que la fuerza depende tanto del campo magnético aplicado como del campo magnético inducido. Ahora se procederá a determinar dichos campos explícitamente.

4.4.1. Campo magnético aplicado

El campo magnético aplicado de un imán permanente consistente en una placa rectangular magnetizada en dirección normal está dado por una expresión analítica encontrada por McCaig [32]. En términos dimensionales, poniendo el sistema coordenado en el centro de la superficie rectangular magnetizada cuyas dimensiones son $X_0 = 2\alpha$ y $Y_0 = 2\beta$, la

componente normal del campo producido por la superficie magnetizada situada en el plano $z = z_0$, está dada por [32]

$$\begin{aligned}
 B_{Mz}(x, y) = \gamma B_{max} \left\{ \tan^{-1} \left(\frac{(x + \alpha)(y + \beta)}{z_0 \left[(x + \alpha)^2 + (y + \beta)^2 + z_0^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \right) \right. \\
 + \tan^{-1} \left(\frac{(x - \alpha)(y - \beta)}{z_0 \left[(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + z_0^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \right) \\
 - \tan^{-1} \left(\frac{(x + \alpha)(y - \beta)}{z_0 \left[(x + \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + z_0^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \right) \\
 \left. - \tan^{-1} \left(\frac{(x - \alpha)(y + \beta)}{z_0 \left[(x - \alpha)^2 + (y + \beta)^2 + z_0^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \right) \right\} \quad (4.27)
 \end{aligned}$$

donde γ es una constante de normalización y B_{max} es la magnitud máxima de la intensidad del campo. Ya que en el modelo el flujo tiene lugar únicamente en un plano $z = z_0 =$ constante, el campo magnético aplicado no es función de la coordenada z . En la figura se muestra la distribución de campo magnético obtenida con la ecuación (4.27). La ecuación de McCaig ha sido utilizada en diferentes trabajos en el IER, obteniendo buenos resultados [19, 33, 34, 35, 36]. Utilizando la expresión (4.28) es posible modelar de forma aproximada el campo magnético producido por las barras de imán utilizadas en el experimento. Para nuestro caso de estudio el campo magnético aplicado varía con el tiempo de manera periódica, de modo que se puede expresar como

$$B_{0z}(x, y, t) = B_{Mz}(x, y)e^{i\omega t} \quad (4.28)$$

donde

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \operatorname{sen} \omega t \quad (4.29)$$

siendo ω la frecuencia angular con la que varía el campo magnético.

4.4.2. Solución analítica

Como se planteó en la sección anterior el modelo analítico se basa en encontrar la expresión analítica de la fuerza, que depende de los campos magnéticos inducido y aplicado.

Debido a que el campo magnético aplicado es conocido y está totalmente definido, podemos encontrar la solución analítica para el campo inducido a partir de la ecuación (4.22). Al sustituir la ecuación (4.28) en la ecuación (4.22) obtenemos

$$v_m \frac{\partial^2 b_z}{\partial z^2} - \frac{\partial b_z}{\partial t} = i\omega B_{Mz}(x, y)e^{i\omega t}. \quad (4.30)$$

La ecuación (4.30) es una ecuación diferencial parcial no homogénea de segundo orden, la cual puede ser solucionada. Debido a que b_z está en función de B_{0z} y ésta satisface la ecuación (4.28), podemos suponer que b_z es de la forma

$$b_z(x, y, z, t) = b_{0z}(x, y, z)e^{i\omega t}. \quad (4.31)$$

Esta solución desprecia el transitorio de la ecuación (4.30), por lo que la solución encontrada en este trabajo solamente es válida para flujos desarrollados. Si sustituimos la ecuación (4.31) en la ecuación (4.30) obtenemos una ecuación para la parte espacial del campo magnético inducido que tiene la forma

$$\frac{\partial^2 b_{0z}}{\partial z^2} - \eta b_{0z} = \eta B_{Mz}(x, y) \quad (4.32)$$

donde $\eta = \frac{i\omega}{v_m}$. La ecuación (4.32) es una ecuación diferencial ordinaria no homogénea de segundo orden. Las condiciones de frontera para el campo magnético inducido deben de aproximarse a las condiciones experimentales. Ya que el metal líquido está confinado en una capa delgada con superficie libre, el campo magnético inducido debe de anularse en todo lugar donde no esté presente dicho conductor, y por tanto, no existan corrientes inducidas. Las condiciones de frontera para el campo inducido están dadas por

$$b_{0z}(x, y, 0) = 0, \quad b_{0z}(x, y, h) = 0, \quad (4.33)$$

donde $z = 0$ representa el fondo del contenedor cilíndrico y $z = h$ representa la superficie libre del conductor. La solución de la ecuación (4.32) que satisface las condiciones a la frontera (4.33) está dada por la siguiente expresión

$$b_{0z}(x, y, z) = B_{Mz}(x, y) \left(-1 + \cosh [z\eta] + \sinh [z\eta] \left[\frac{1 - \cosh [h\eta]}{\sinh [h\eta]} \right] \right). \quad (4.34)$$

Si sustituimos la ecuación (4.34) en la ecuación (4.31), obtenemos la expresión analítica para el campo magnético inducido con dependencia espacial y temporal.

$$b_z(x, y, z, t) = B_{Mz}(x, y) \left(-1 + \cosh [z\eta] + \sinh [z\eta] \left[\frac{1 - \cosh [h\eta]}{\sinh [h\eta]} \right] \right) e^{i\omega t}. \quad (4.35)$$

Utilizando la expresión para el campo magnético inducido, la distribución de corrientes eléctricas inducidas en el plano $x - y$ puede obtenerse de la ley de Ampère (4.24) en la forma

$$j_x = \frac{1}{\mu} \frac{\partial B_{M_z}(x, y)}{\partial y} \left(-1 + \cosh [z\eta] + \sinh [z\eta] \left[\frac{1 - \cosh [h\eta]}{\sinh [h\eta]} \right] \right) e^{i\omega t}, \quad (4.36)$$

$$j_y = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial B_{M_z}(x, y)}{\partial x} \left(-1 + \cosh [z\eta] + \sinh [z\eta] \left[\frac{1 - \cosh [h\eta]}{\sinh [h\eta]} \right] \right) e^{i\omega t}. \quad (4.37)$$

Debido a que la fuerza electromagnética (4.26) está definida por el producto del campo magnético aplicado (4.28) y la corriente inducida (Ecs. (4.36) y (4.37)), que son funciones complejas, es necesario obtener las partes reales de estas cantidades para obtener la correcta expresión de la fuerza. La parte real del campo y de la corriente tienen la forma

$$B_{0z} = B_{M_z}(x, y) \cos [\omega t], \quad (4.38)$$

$$j_x = \frac{1}{\mu} \frac{\partial B_{M_z}(x, y)}{\partial y} (A \cos [\omega t] + B \sin [\omega t]), \quad (4.39)$$

$$j_y = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial B_{M_z}(x, y)}{\partial x} (A \cos [\omega t] + B \sin [\omega t]), \quad (4.40)$$

donde A y B dependen de z y tienen la siguiente forma.

$$A = -1 + \cos \left[\frac{z}{\delta} \right] \cosh \left[\frac{z}{\delta} \right] + \frac{\cosh \left[\frac{z}{\delta} \right] \sin \left[\frac{h}{\delta} \right] \sin \left[\frac{z}{\delta} \right]}{\cos \left[\frac{h}{\delta} \right] + \cosh \left[\frac{h}{\delta} \right]} - \frac{\cos \left[\frac{z}{\delta} \right] \sinh \left[\frac{h}{\delta} \right] \sinh \left[\frac{z}{\delta} \right]}{\cos \left[\frac{h}{\delta} \right] + \cosh \left[\frac{h}{\delta} \right]}, \quad (4.41)$$

$$B = -\sin \left[\frac{z}{\delta} \right] \sinh \left[\frac{z}{\delta} \right] + \frac{\cosh \left[\frac{z}{\delta} \right] \sinh \left[\frac{h}{\delta} \right] \sin \left[\frac{z}{\delta} \right]}{\cos \left[\frac{h}{\delta} \right] + \cosh \left[\frac{h}{\delta} \right]} - \frac{\cos \left[\frac{z}{\delta} \right] \sinh \left[\frac{h}{\delta} \right] \sin \left[\frac{z}{\delta} \right]}{\cos \left[\frac{h}{\delta} \right] + \cosh \left[\frac{h}{\delta} \right]}. \quad (4.42)$$

Utilizando las ecuaciones (4.38), (4.39) y (4.40), la expresión analítica de las componentes de la fuerza de Lorentz toma la siguiente forma

$$f_x = -\frac{1}{\mu} B_{M_z}(x, y) \frac{\partial B_{M_z}(x, y)}{\partial x} (A \cos [\omega t] + B \sin [\omega t]) \cos [\omega t], \quad (4.43)$$

$$f_y = -\frac{1}{\mu} B_{M_z}(x, y) \frac{\partial B_{M_z}(x, y)}{\partial y} (A \cos [\omega t] + B \sin [\omega t]) \cos [\omega t] \quad (4.44)$$

que puede expresarse en la forma

$$f_x = -\frac{1}{\mu} B_{Mz}(x, y) \frac{\partial B_{Mz}(x, y)}{\partial x} \left(A \frac{1}{2} - A \frac{\cos[2\omega t]}{2} + B \frac{\sin[2\omega t]}{2} \right), \quad (4.45)$$

$$f_y = -\frac{1}{\mu} B_{Mz}(x, y) \frac{\partial B_{Mz}(x, y)}{\partial y} \left(A \frac{1}{2} - A \frac{\cos[2\omega t]}{2} + B \frac{\sin[2\omega t]}{2} \right). \quad (4.46)$$

El primer término dentro de los parentesis en las ecuaciones (4.45) y (4.46) es independiente del tiempo, mientras que los otros dos términos dependen del tiempo periódicamente. Por consiguiente al tomar el promedio temporal de las ecuaciones (4.45) y (4.46), los términos desaparecen. Entonces, las componentes de la fuerza de Lorentz promedio tienen la forma

$$\overline{f_x} = -\frac{A}{2\mu} B_{Mz}(x, y) \frac{\partial B_{Mz}(x, y)}{\partial x} \quad (4.47)$$

$$\overline{f_y} = -\frac{A}{2\mu} B_{Mz}(x, y) \frac{\partial B_{Mz}(x, y)}{\partial y}. \quad (4.48)$$

Estas ecuaciones indican que independientemente de la frecuencia a la que varíe el campo magnético, siempre existirá una fuerza neta (promedio) que actúa sobre el conductor. Nótese que la fuerza promedio depende de las tres coordenadas, sin embargo, en los cálculos que se presentan a continuación se fijará la altura a la mitad del grosor de la capa de líquido, eliminando la dependencia en la coordenada z . Como ejemplo, se considerará la fuerza promedio producida por una barra de imán alargada similar a la que se utilizó en el experimento, cuya longitud abarca la mitad del diámetro del contenedor cilíndrico. En las figuras 4.1 y 4.2 se muestran las distribuciones de las componentes de la fuerza promedio $\overline{f_x}$ y $\overline{f_y}$ para dicha barra de imán, respectivamente, que está colocada horizontalmente a lo largo del eje x , quedando el centro de la barra en el punto $x = 0$, $y = 0$. Además, en la figura 4.3 se muestra el campo vectorial de la fuerza promedio ($\overline{f} = (\overline{f_x}, \overline{f_y}, 0)$).

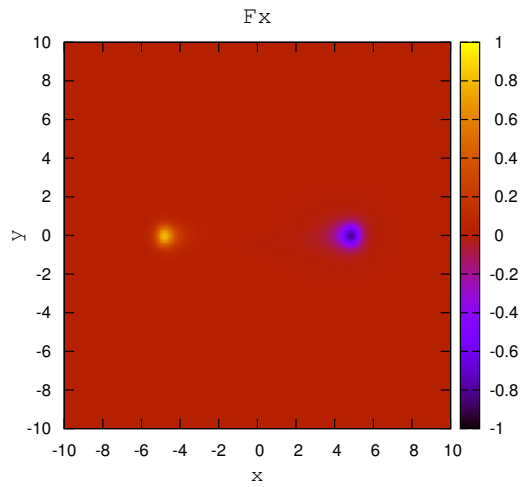


Fig. 4.1: Distribución espacial de la componente x de la fuerza de Lorentz promedio producida por una barra de imán de sección rectangular como la utilizada en uno de los experimentos. La escala de colores representa la magnitud. Las dimensiones del imán son de $10\text{ cm} \times 1\text{ cm}$, con el eje de simetría en $x = 0$ y $y = 0$, estando el imán en posición horizontal.

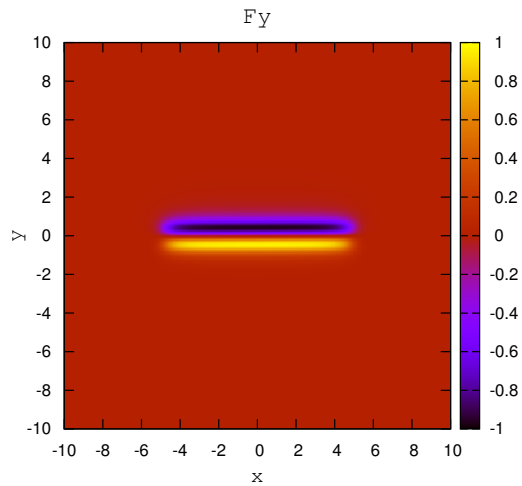


Fig. 4.2: Distribución espacial de la componente y de la fuerza de Lorentz promedio producida por una barra de imán de sección rectangular como la utilizada en uno de los experimentos. La escala de colores representa la magnitud. Las dimensiones del imán son de $10\text{ cm} \times 1\text{ cm}$, con el eje de simetría en $x = 0$ y $y = 0$, estando el imán en posición horizontal.

La figura 4.3 se muestra el campo vectorial de la fuerza promedio, donde se presentan solo

pocos vectores para lograr una mejor visualización. Se observa que a lo largo del imán, el campo de fuerza es esencialmente vertical, en dirección positiva para $y < 0$ y negativa para $y > 0$, es decir, apuntando hacia el eje de simetría de la barra de imán. En los extremos de la barra, la fuerza promedio deja de ser vertical pero sigue apuntando hacia el imán.

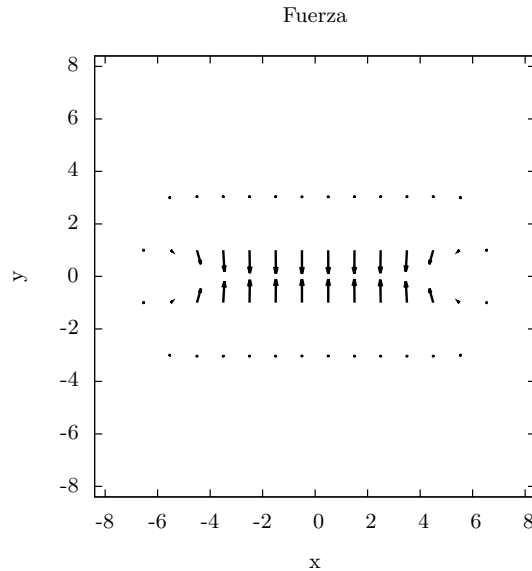


Fig. 4.3: Campo vectorial de la fuerza de Lorentz promedio. Las dimensiones del imán son de $10\text{ cm} \times 1\text{ cm}$, con el eje de simetría en $x = 0$ y $y = 0$. El imán está en posición horizontal.

Debido a que el análisis se llevó a cabo en el sistema de referencia del material conductor, considerándolo como un medio en reposo, la dirección y sentido de la fuerza promedio no cambia.

4.5. Modelo numérico

Resolver analíticamente las ecuaciones de movimiento del fluido una vez conocida la fuerza de Lorentz resulta es aún una tarea extremadamente compleja. Por tanto, se hace uso de una metodología numérica que consiste en introducir la expresión analítica de la fuerza de Lorentz promedio obtenida en la sección anterior en un código numérico, que resuelve las ecuaciones adimensionalizadas de la dinámica de fluidos (ver apéndice A), en un dominio bidimensional. Para la solución numérica de las ecuaciones de continuidad y Navier-Stokes se utiliza un método de volumen finito que considera a la velocidad y a la presión como variables primitivas [37, 38]. Se obtuvieron soluciones numéricas para cuatro casos, dos de ellos en un dominio rectangular, utilizando un sistema de coordenadas cartesianas, y dos en un dominio circular, usando coordenadas polares. Aunque esta última geometría es la que se asemeja al experimento, la geometría rectangular resulta también de interés para comprender el flujo y es susceptible de implementarse experimentalmente. Para cada geometría

se obtuvo primero una solución con una fuerza estática, es decir, un campo de fuerzas fijo como el que se presenta en la figura 4.3 donde a todo tiempo el imán se mantiene en posición horizontal. La segunda solución corresponde a un campo de fuerzas rotatorio obtenido mediante la rotación con velocidad angular constante de la fuerza de Lorentz promedio dada por las componentes (4.47) y (4.48). La figura 4.6 muestra el campo de fuerza promedio a cuatro distintos instantes espaciados por el mismo intervalo de tiempo.

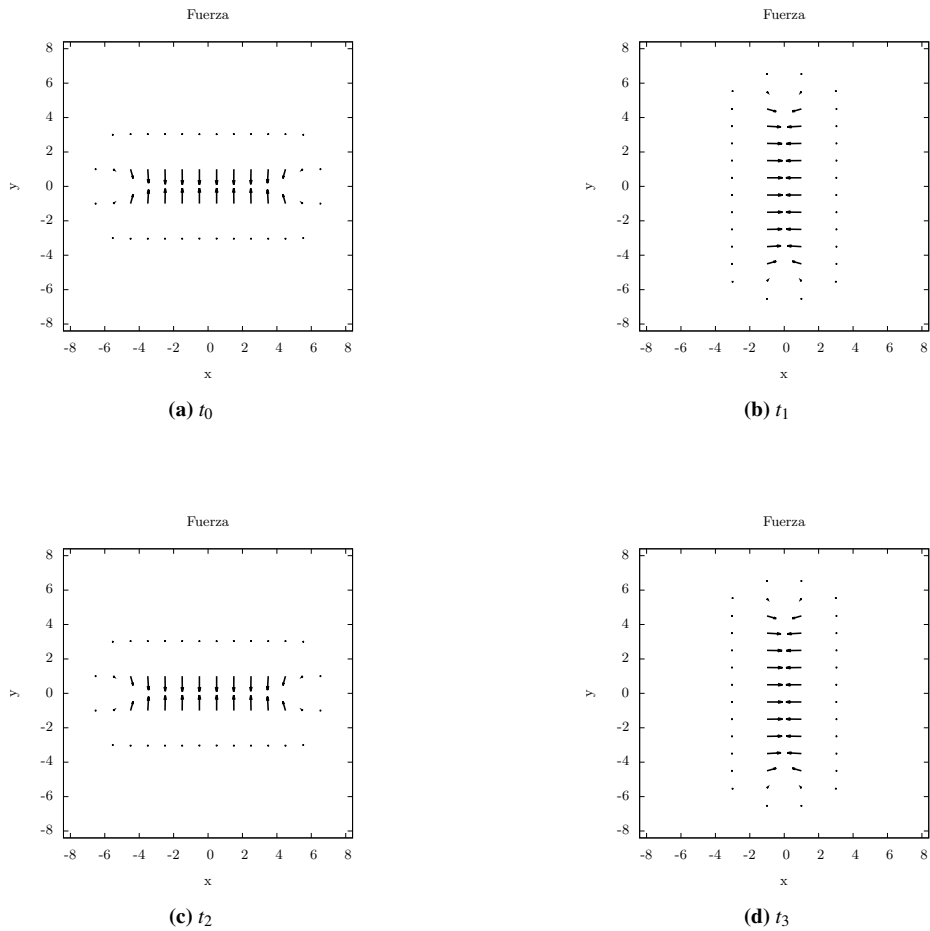


Fig. 4.3: Fuerza de Lorentz promedio en rotación uniforme en sentido horario en cuatro instantes distintos espaciados por el mismo intervalo de tiempo. La fuerza rotatoria simula el efecto de la rotación del imán sobre su propio eje.

Para la geometría cartesiana se utilizó un dominio cuadrado de 20 cm de lado, donde la fuerza promedio está centrada en el eje de simetría ($x = 0, y = 0$). Debido a que la expresión analítica de la fuerza promedio está en coordenadas cartesianas, puede ser utilizada directamente en el código numérico. Para el dominio polar se utilizó un círculo de 20 cm de diámetro. Para el dominio polar es necesario aplicar a la fuerza promedio una transformación de coordenadas (cartesiana a polar), con el fin de poder utilizar la fuerza promedio

en el esquema numérico. Dicha transformación de coordenadas está dada de la siguiente forma

$$\overline{f}_r = \overline{f}_x \cos \theta + \overline{f}_y \sin \theta \quad (4.49)$$

$$\overline{f}_\theta = -\overline{f}_x \sin \theta + \overline{f}_y \cos \theta \quad (4.50)$$

donde \overline{f}_r y \overline{f}_θ son las componentes de la fuerza promedio en coordenadas polares ($\vec{f} = (\overline{f}_r, \overline{f}_\theta, 0)$). En la figura 4.4 se pueden observar la distribución de las componentes de la fuerza promedio polar (\overline{f}_r y \overline{f}_θ).

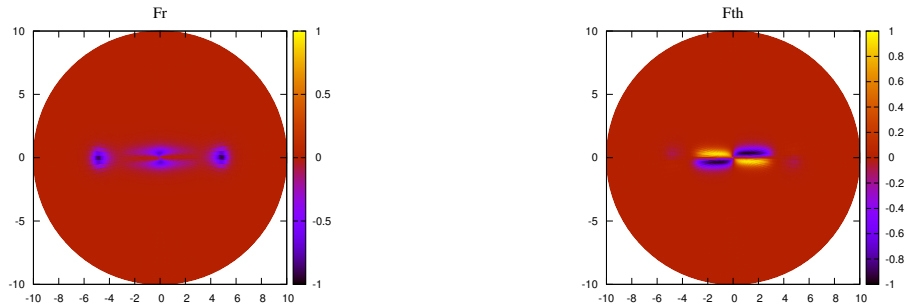


Fig. 4.4: Componentes de la fuerza promedio en coordenadas polares, donde la escala de colores representa la magnitud.

4.6. Resultados

Los resultados presentados a continuación son para los cuatro casos: dominio cartesiano con fuerza estática, dominio cartesiano con fuerza rotatoria, dominio polar con fuerza estática y dominio polar con fuerza rotatoria. Los casos estáticos dan lugar a flujos que no se podrían obtener fácilmente en laboratorio pues la fuerza que los produce es difícil de emular. Sin embargo, se presentan aquí como una etapa introductoria para la comprensión de los flujos producidos por fuerzas rotatorias.

4.6.1. Dominio cartesiano

Se resolvieron numéricamente las ecuaciones de la dinámica de fluidos (ecuaciones (4.1) y 4.2)) introduciendo la fuerza promedio (ecuaciones (4.47) y 4.48)) como término fuente. Se utilizó un número de Hartmann $Ha=10$ que es del mismo orden de magnitud al utilizado en el experimento. Por su parte, con el fin de evitar problemas numéricos, el número de

Reynolds es muy pequeño ($Re=10$). Para el caso de la fuerza estática, las líneas de corriente obtenidas numéricamente se muestran en las figuras 4.5, 4.6, 4.7 y 4.8, donde se puede observar la evolución de un flujo con ocho vórtices.

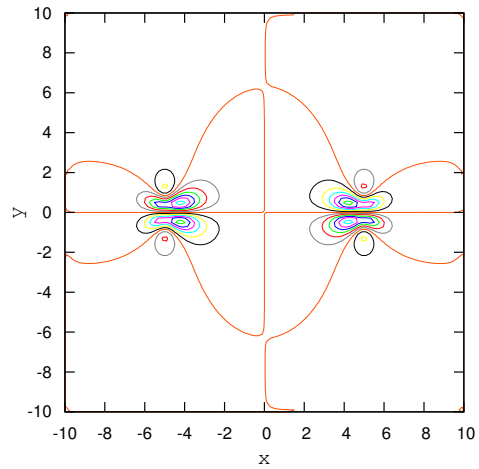


Fig. 4.5: Líneas de corriente obtenidas imponiendo la fuerza promedio estática, para $t = 1s$, $Re = 10$, $Ha = 10$ y $z = 0.5$.

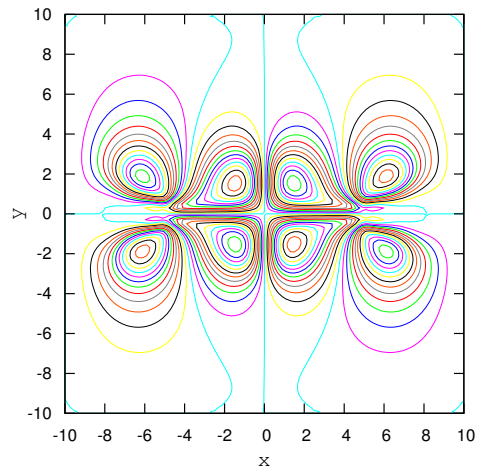


Fig. 4.6: Líneas de corriente obtenidas imponiendo la fuerza promedio estática, para $t = 10s$, $Re = 10$, $Ha = 10$ y $z = 0.5$.

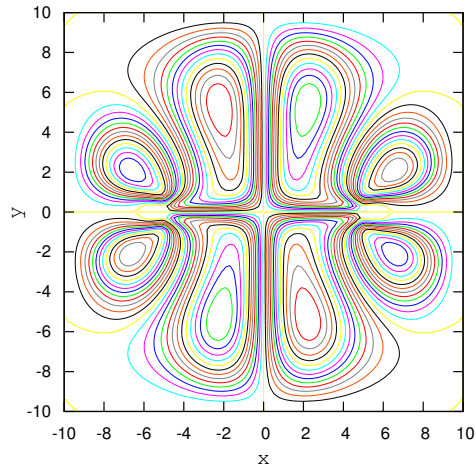


Fig. 4.7: Líneas de corriente obtenidas imponiendo la fuerza promedio estática, para $t = 40s$, $Re = 10$, $Ha = 10$ y $z = 0.5$.

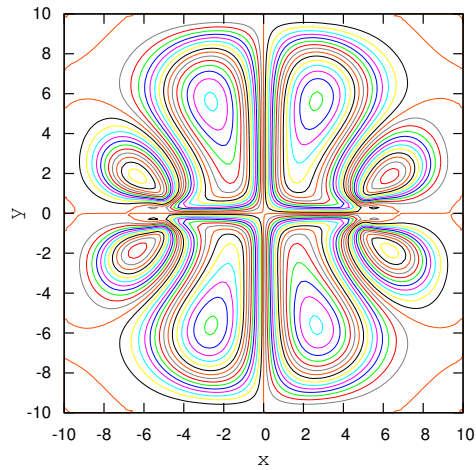


Fig. 4.8: Líneas de corriente para el flujo desarrollado obtenidas imponiendo la fuerza promedio estática, para $t = 100s$, $Re = 10$, $Ha = 10$ y $z = 0.5$.

Puede observarse que cuando la fuerza es estática el flujo tiende a un estado estacionario compuesto por ocho vórtices bien definidos que abarcan casi todo el dominio de integración. Para el caso de la fuerza rotatoria se impuso una rotación horaria de la fuerza promedio a una frecuencia de rotación de $7Hz$, que es muy cercana a la frecuencia de rotación máxima del arreglo experimental. Para este caso de estudio también se encuentran ocho vórtices,

pero a diferencia del caso estático los vórtices se forman de una manera simétrica alrededor del origen ($x = 0, y = 0$). En las figuras 4.9, 4.10, 4.11 y 4.12 se puede observar las líneas de corriente, que definen claramente la formación y desarrollo de los vórtices.

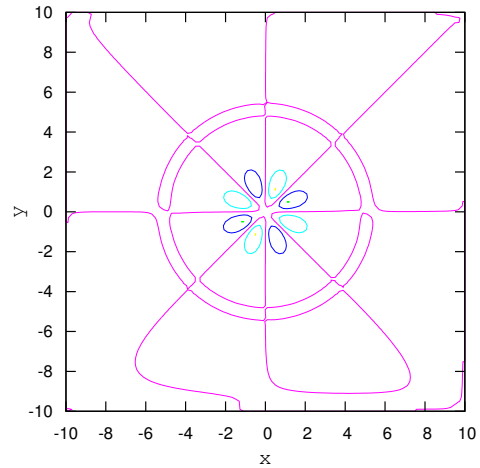


Fig. 4.9: Líneas de corriente obtenidas imponiendo la fuerza promedio rotatoria, para $t = 1s$, $Re = 10$, $Ha = 10$ y $z = 0.5$.

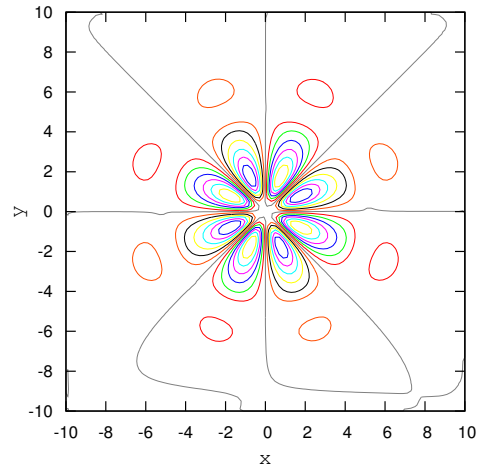


Fig. 4.10: Líneas de corriente obtenidas imponiendo la fuerza promedio rotatoria, para $t = 10s$, $Re = 10$, $Ha = 10$ y $z = 0.5$.

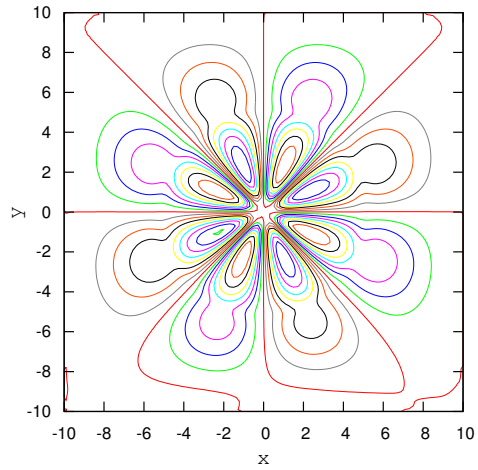


Fig. 4.11: Líneas de corriente obtenidas imponiendo la fuerza promedio rotatoria, para $t = 40s$, $Re = 10$, $Ha = 10$ y $z = 0.5$.

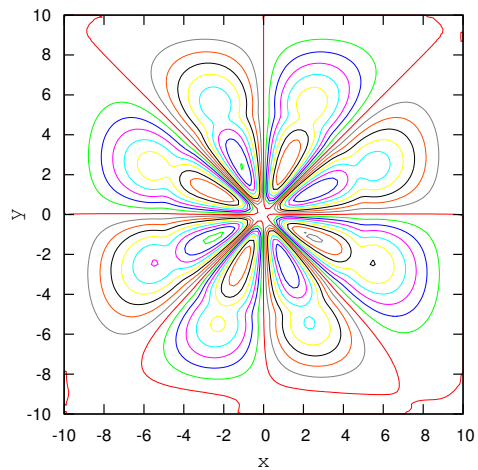


Fig. 4.12: Líneas de corriente obtenidas imponiendo la fuerza promedio rotatoria, para $t = 100s$, $Re = 10$, $Ha = 10$ y $z = 0.5$.

Resumiendo para ambos casos se encuentran ocho vórtices. Para el caso donde la fuerza promedio no varía con el tiempo el flujo evoluciona hacia un flujo desarrollado que no varía con el tiempo. Para el caso donde la fuerza promedio es rotatoria el flujo evoluciona hacia un patron periódico, caracterizado por ocho vórtices regulares.

4.6.2. Dominio polar

Para el dominio polar, las ecuaciones de balance se resolvieron numéricamente en coordenadas polares introduciendo como término fuente las expresiones para la fuerza dadas por las ecuaciones (4.49) y (4.50)). Para el caso de la fuerza estática, el campo de velocidades obtenido numéricamente se muestra en las figuras 4.13, 4.14, 4.15 y 4.16, donde se puede observar la evolución del campo de velocidades en cuatro distintos instantes y con los mismos valores de Re y Ha utilizados en la geometría cartesiana. Por razones técnicas, en la geometría polar se muestran solo campos de velocidades y no líneas de corriente. Se puede observar la formación de cuatro vórtices que inicialmente se encuentran cerca de los extremos de la barra de imán. Eventualmente estos vórtices crecen y van ocupando una región mayor del dominio hasta formar una recirculación en cada cuadrante y alcanzar un estado independiente del tiempo. En las figuras 4.17, 4.18, 4.19 y 4.20, se muestran las distribuciones espaciales de la vorticidad correspondientes a los campos de velocidades mostrados de la figura 4.13 a la 4.16.

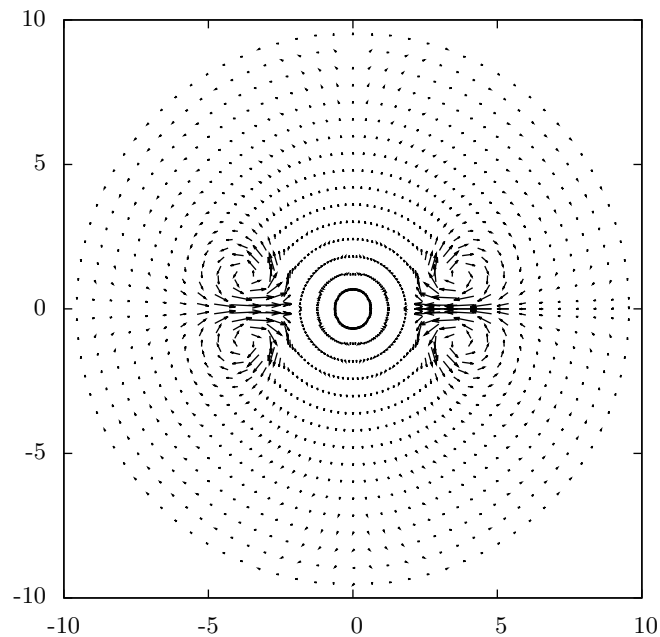


Fig. 4.13: Campo de velocidad obtenido imponiendo la fuerza promedio estática en coordenadas polares, para $t = 1s$, $Re = 10$, $Ha = 10$ y con un valor de $z = 0.5$.

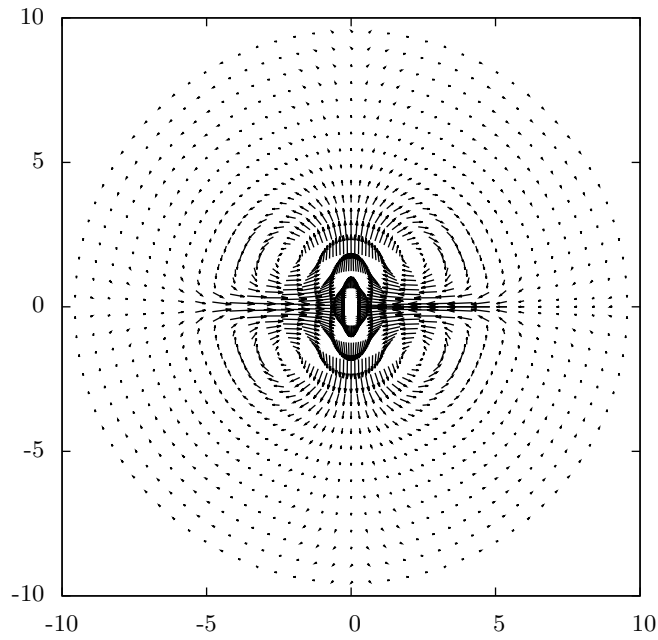


Fig. 4.14: Campo de velocidad obtenido imponiendo la fuerza promedio estática en coordenadas polares, para $t = 5s$, $Re = 10$, $Ha = 10$ y con un valor de $z = 0.5$.

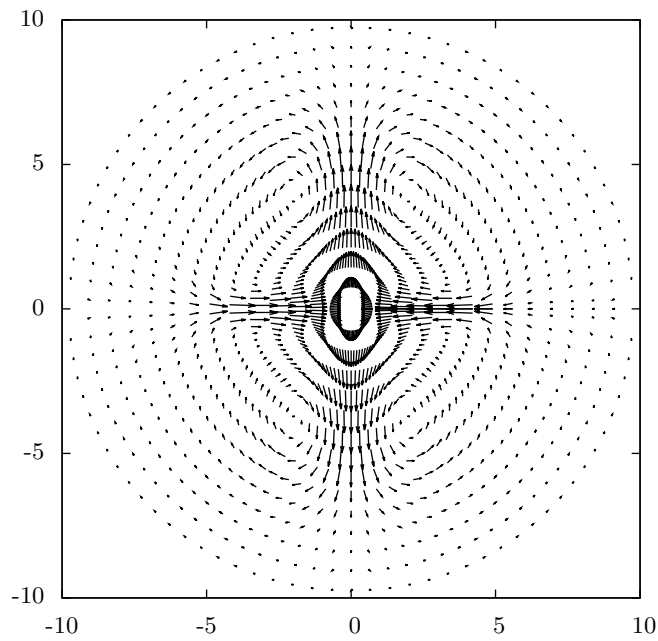


Fig. 4.15: Campo de velocidad obtenido imponiendo la fuerza promedio estática en coordenadas polares, para $t = 10s$, $Re = 10$, $Ha = 10$ y con un valor de $z = 0.5$.

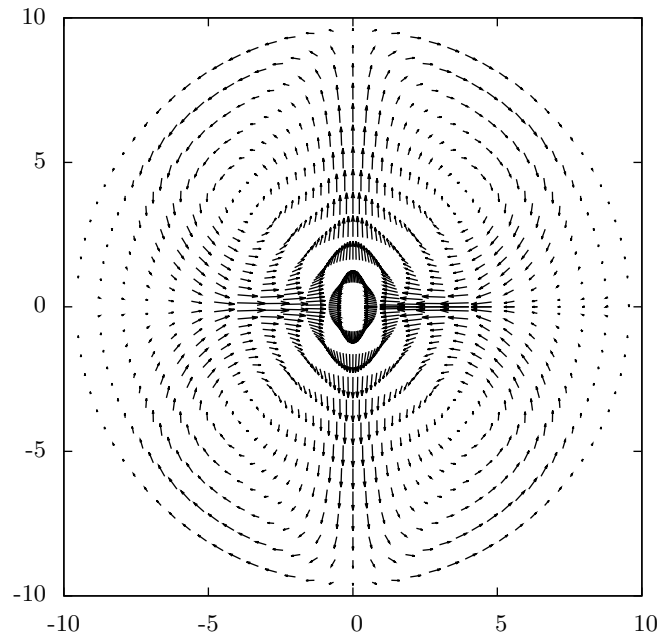


Fig. 4.16: Campo de velocidad desarrollado obtenido imponiendo la fuerza promedio estática en coordenadas polares, para $t = 100s$, $Re = 10$, $Ha = 10$ y con un valor de $z = 0.5$.

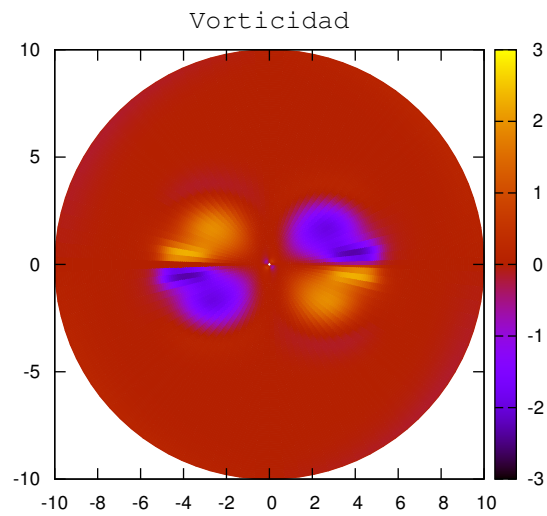


Fig. 4.17: Distribución de la vorticidad obtenida imponiendo la fuerza promedio estática en coordenadas polares, para $t = 1s$, $Re = 10$, $Ha = 10$ y con un valor de $z = 0.5$.

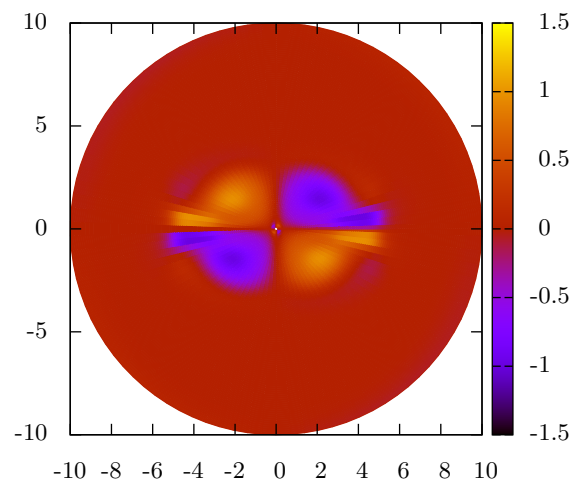


Fig. 4.18: Distribución de la vorticidad obtenida imponiendo la fuerza promedio estática en coordenadas polares, para $t = 10s$, $Re = 10$, $Ha = 10$ y con un valor de $z = 0.5$.

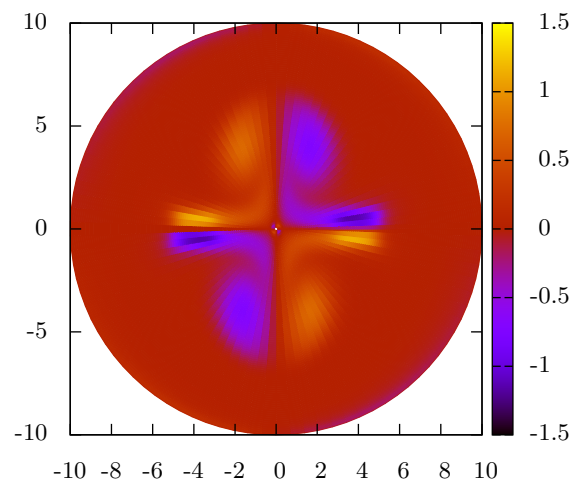


Fig. 4.19: Distribución de la vorticidad obtenida imponiendo la fuerza promedio estática en coordenadas polares, para $t = 20s$, $Re = 10$, $Ha = 10$ y con un valor de $z = 0.5$.

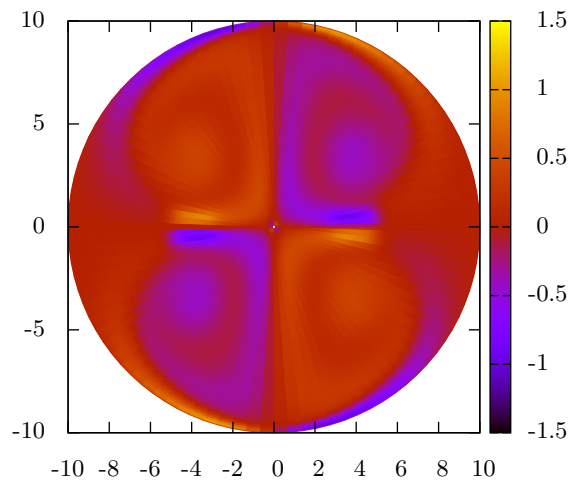


Fig. 4.20: Distribución de la vorticidad obtenida imponiendo la fuerza promedio estática en coordenadas polares, para $t = 100s$, $Re = 10$, $Ha = 10$ y con un valor de $z = 0.5$.

Para el caso de la fuerza rotatoria se utilizó también una frecuencia de rotación de 7 Hz. Los campos de velocidad obtenidos numéricamente se muestran en las figuras 4.21, 4.22, 4.23, 4.24, donde se puede observar el comportamiento periódico que cambia de una patrón de cuatro vórtices localizados a lo largo del eje de simetría del imán, a ocho vórtices que forman un patrón bastante complejo y que ocupa una región considerable del dominio. En las figuras 4.25, 4.26, 4.27 y 4.28, se muestran las distribuciones espaciales de la vorticidad correspondientes a los campos de velocidades mostrados de la figura 4.21 a la 4.16.

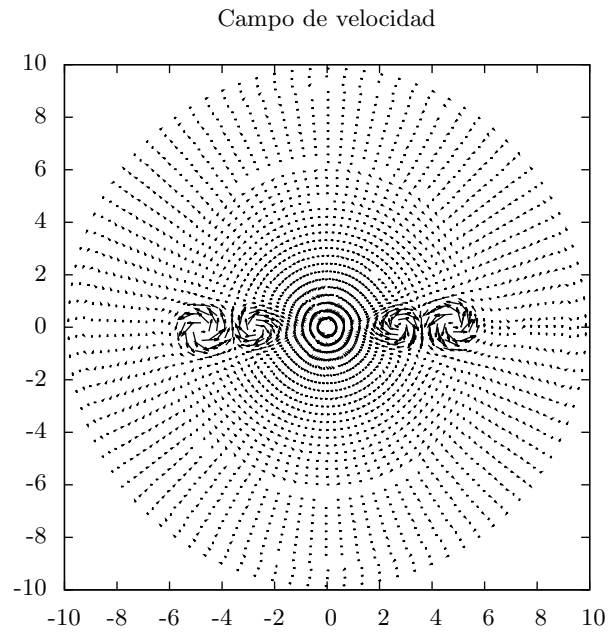


Fig. 4.21: Campo de velocidad obtenido imponiendo la fuerza promedio rotatoria en coordenadas polares, para $t = 1s$, $Re = 10$, $Ha = 10$ y $z = 0.5$.

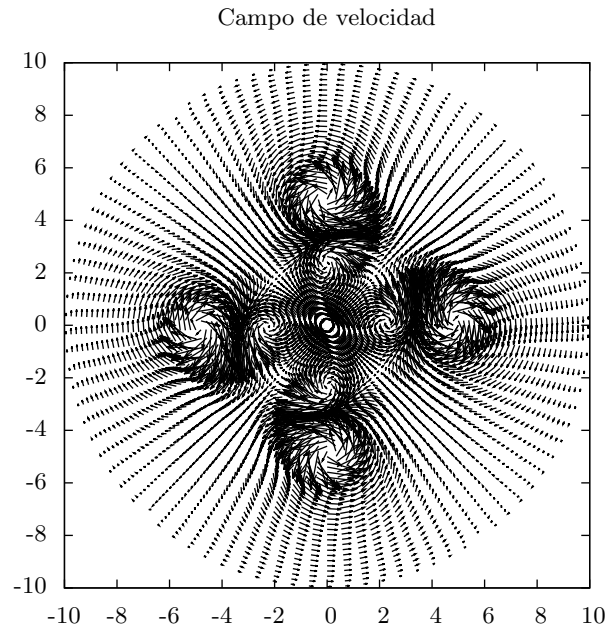


Fig. 4.22: Campo de velocidad obtenido imponiendo la fuerza promedio rotatoria en coordenadas polares, para $t = 1.25s$, $Re = 10$, $Ha = 10$ y $z = 0.5$.

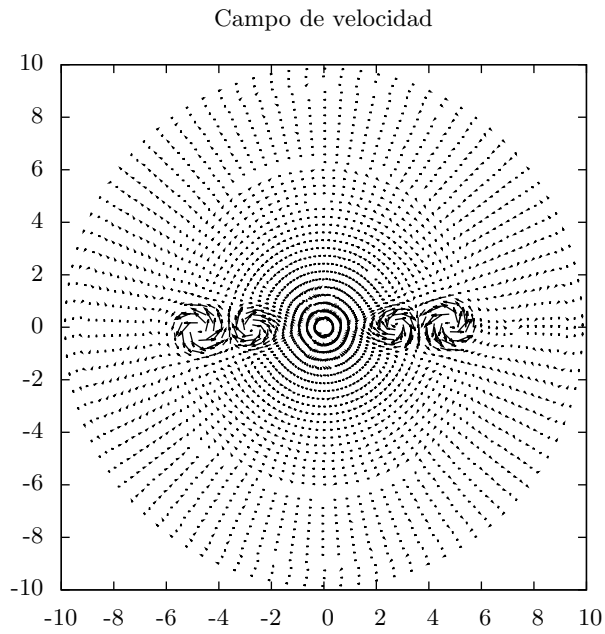


Fig. 4.23: Campo de velocidad obtenido imponiendo la fuerza promedio rotatoria en coordenadas polares, para $t = 1.5s$, $Re = 10$, $Ha = 10$ y $z = 0.5$.

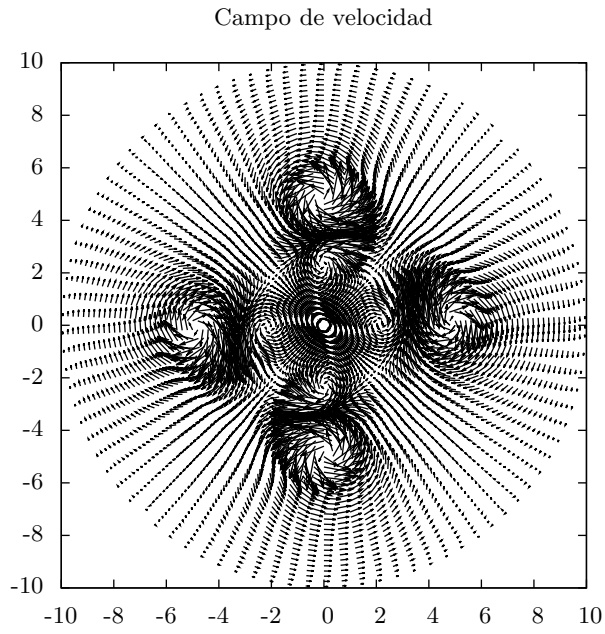


Fig. 4.24: Campo de velocidad obtenido imponiendo la fuerza promedio rotatoria en coordenadas polares, para $t = 1.75s$, $Re = 10$, $Ha = 10$ y $z = 0.5$.

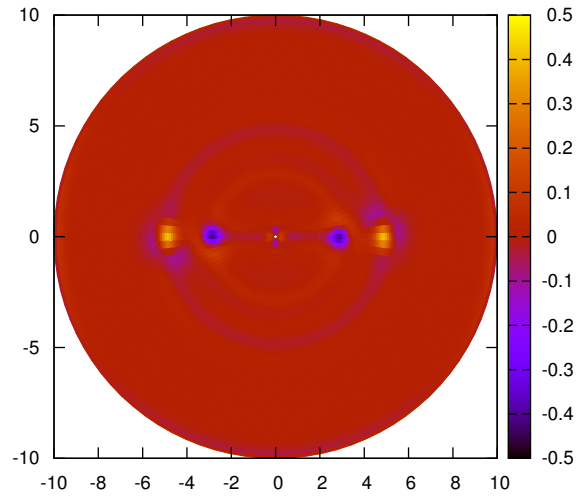


Fig. 4.25: Distribución de vorticidad obtenida imponiendo la fuerza promedio rotatoria en coordenadas polares, para $t = 1s$, $Re = 10$, $Ha = 10$ y $z = 0.5$.

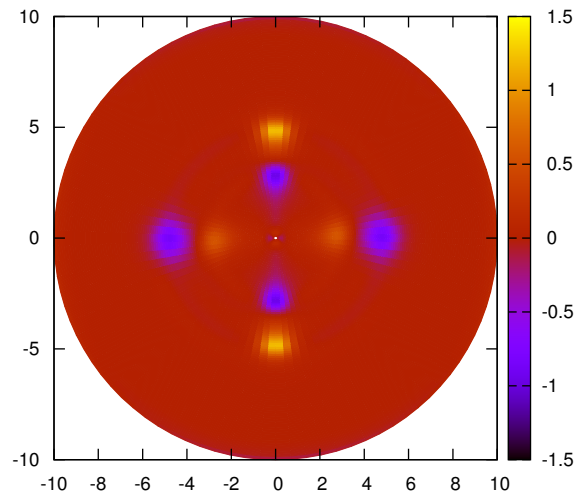


Fig. 4.26: Distribución de vorticidad obtenida imponiendo la fuerza promedio rotatoria en coordenadas polares, para $t = 1.25s$, $Re = 10$, $Ha = 10$ y $z = 0.5$.

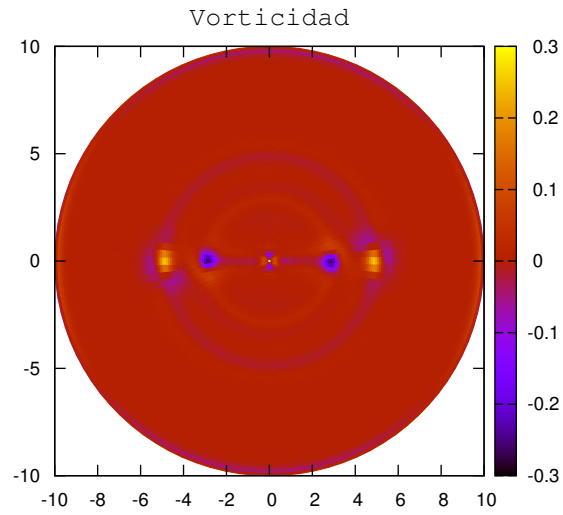


Fig. 4.27: Distribución de vorticidad obtenida imponiendo la fuerza promedio rotatoria en coordenadas polares, para $t = 1.5s$, $Re = 10$, $Ha = 10$ y $z = 0.5$.

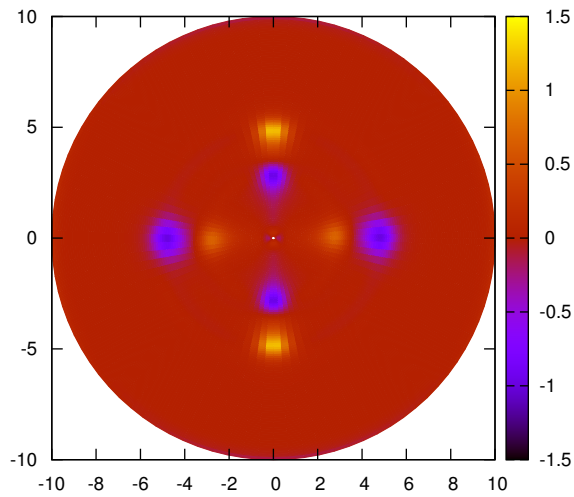


Fig. 4.28: Distribución de vorticidad obtenida imponiendo la fuerza promedio rotatoria en coordenadas polares, para $t = 1.75s$, $Re = 10$, $Ha = 10$ y $z = 0.5$.

En resumen, para ambos casos se encontraron estructuras vorticosas. En el caso donde la fuerza es estática el flujo inicia con la formación de cuatro vórtices localizados en los extremos de la barra de imán, los cuales debido a la dinámica se extienden ampliamente y llegan a ocupar los cuatro cuadrantes del dominio. En el caso de la fuerza rotatoria se observa un comportamiento periódico, debido a la fuerza impuesta. El flujo varía periódicamente de cuatro a ocho vórtices. Se encontraron vórtices estáticos, los cuales mantienen su posición para todo tiempo y también vórtices viajeros, que se desplazan en la dirección de la fuerza impuesta. Cuando el vórtice viajero se superpone al vórtice estacionario la magnitud de la vorticidad se ve reducida, debido a que estos tienen vorticidad opuesta.

Las soluciones obtenidas en este capítulo muestran que el flujo producido por la agitación electromagnética puede ser muy complicado, aun cuando las condiciones utilizadas para la simulación, en particular el número de Reynolds, se encuentran alejadas del experimento. Aunque difícilmente se puede extrapolar el comportamiento encontrado en las simulaciones a las inestabilidades observadas experimentalmente, el presente análisis ofrece un primer acercamiento a la simulación de los flujos experimentales.

Capítulo 5

Conclusiones y trabajo a futuro

En este trabajo se realizó un estudio experimental y teórico de los flujos de metal líquido generados mediante la rotación de imanes permanentes. La motivación principal de este trabajo fue contribuir en el entendimiento de la agitación de metales líquidos mediante fuerzas electromagnéticas, la cual es muy importante en áreas como la metalurgia. Se estudiaron experimentalmente los flujos de metal líquido generados mediante la rotación de diferentes distribuciones de imanes permanentes de sección rectangular en un contenedor cilíndrico. Uno de los objetivos principales fue caracterizar de manera experimental los flujos para diferentes distribuciones magnéticas y frecuencias de rotación.

Para realizar experimentos con diferentes distribuciones de imanes permanentes, se diseñaron y construyeron distintas bases de acrílico capaces de alojar uno, tres y cuatro imanes rectangulares, obteniendo una gama de distribuciones magnéticas. Se realizaron experimentos para diferentes configuraciones de imanes permanentes y para diferentes frecuencias de rotación. Para todas las distribuciones de campo magnético se encontró una inestabilidad que da lugar a un rompimiento de la superficie libre del líquido, lo que origina la formación de un agujero en el fluido de trabajo que deja al descubierto el fondo del recipiente. El descubrimiento de dicha inestabilidad magnetohidrodinámica, que no se ha reportado previamente en la literatura, es el resultado más importante del presente trabajo. La forma de dicho agujero depende del campo magnético aplicado; para el caso de una sola barra de imán se encontró un agujero con una forma cercana a una elipse, mientras que para el caso de tres imanes la oquedad tiene tres esquinas y cuatro esquinas para el caso de cuatro imanes. Se observó que para el caso de uno y tres imanes la estructura discontinua rota sobre su propio eje. El agujero elíptico formado por un solo imán, fue caracterizado por medio de análisis de imágenes, por lo que se desarrolló un código capaz de identificar ciertas propiedades de la discontinuidad, como el contorno, el área promedio y la frecuencia de rotación. Se encontró que la frecuencia de rotación de la discontinuidad es mucho menor que la frecuencia de rotación del campo magnético aplicado y se encontró que la frecuencia de rotación y el área promedio de la discontinuidad tienen un comportamiento casi lineal con relación a la frecuencia de rotación del arreglo de imanes. También se ca-

racterizó el contorno de la discontinuidad, observándose que mantiene la misma forma en el tiempo.

Por otra parte, se efectuó un análisis teórico preliminar con el objeto de simular algunos de los flujos que pueden obtenerse mediante la rotación de imanes permanentes. De esta forma, se obtuvo una expresión analítica de la fuerza de Lorentz a partir de calcular el campo magnético inducido por la rotación del campo aplicado en el metal líquido. Aunque la expresión analítica de la fuerza depende de las coordenadas espaciales y del tiempo, se encontró una fuerza promedio (neta), que solamente depende del espacio. La fuerza promedio fue introducida en un código numérico que resuelve las ecuaciones de Navier-Stokes mediante el método volumen finito, con el fin de conocer los flujos generados por dicha fuerza. Se obtuvieron soluciones numéricas bidimensionales en un dominio cuadrado y en uno circular, tanto para el caso de una fuerza promedio estática como para una fuerza promedio rotatoria. Para el caso cartesiano con la fuerza estática se encontró un flujo con ocho vórtices que muestra simetría tanto en el eje x como en el eje y . Para el caso cartesiano con la fuerza rotatoria se encontró un flujo periódico consistente en ocho vórtices orientados de forma simétrica al origen ($x = 0, y = 0$), donde cada vórtice es forzado periódicamente. Para el caso polar con la fuerza estática se encontró un flujo desarrollado de cuatro vórtices simétricos, mientras que para la fuerza rotatoria se encontró periódico que oscila entre cuatro y ocho vórtices. Se identificaron vórtices viajeros y vórtices estáticos, siendo los vórtices viajeros impulsados la fuerza promedio.

Para trabajo futuro pretende caracterizar los flujos utilizando todas las configuraciones magnéticas posibles, así como diseñar y contruir una base de acrílico que sea capaz de alojar cinco imanes, ésto con el objetivo de buscar la formación de un agujero con cinco esquinas. En la parte teórica se pretende desarrollar un código numérico que resuelva las ecuaciones tridimensionales de la MHD y que permita simular de el fenómeno estudiado experimentalmente.

El trabajo reportado en esta tesis constituye un aporte relevante para el estudio experimental de flujos magnetohidrodinámicos en el Instituto de Energías Renovables de la UNAM.

Apéndice A

Ecuaciones adimensionales

La adimensionalización es una técnica matemática en la cual las variables de interés se expresan sin dimensiones por medio de un reescalamiento en el que las magnitudes características del problema se incorporan de manera implícita. Esto permite obtener resultados más generales, al ser éstos independientes de las dimensiones particulares de un sistema. Con el fin de adimensionalizar las ecuacion 4.13 se definen las siguientes variables

$$p^* = \frac{p}{\rho u_c^2}, \quad \vec{u}^* = \frac{\vec{u}}{u_c}, \quad \vec{x}^* = \frac{\vec{x}}{L} \quad (\text{A.1})$$

$$t^* = \frac{t}{L/u_c}, \quad \vec{B}^* = \frac{\vec{B}}{B_c}, \quad \vec{j}^* = \frac{\vec{j}}{\sigma u_c B_c} \quad (\text{A.2})$$

donde L , u_c y B_c son valores característicos para las variables de, longitud, velocidad y campo magnético. Las variables que aparecen en estas ecuaciones pueden ser normalizadas en varias maneras, no hay un forma universal para adimensionalizar la ecuaciones o para determinar los valores característicos del sistema.

Estas nuevas variables adimensionales deben substituirse en el modelo matemático dimensional para obtener el modelo adimensionalizado. Para las ecuaciones de Navier-Stokes en coordenadas cartesianas se obtiene

$$\frac{\partial \vec{u}^*}{\partial t^*} + (\vec{u}^* \cdot \nabla^*) \vec{u}^* = -\frac{1}{\rho} \nabla^* p^* + \frac{\nu}{u_c L} \nabla^{*2} \vec{u}^* + \frac{\sigma B_c^2 L}{\rho u_c} \vec{j}^* \times \vec{B}^*, \quad (\text{A.3})$$

o bien

$$\frac{\partial \vec{u}^*}{\partial t^*} + (\vec{u}^* \cdot \nabla^*) \vec{u}^* = -\frac{1}{\rho} \nabla^* p^* + \frac{1}{Re} \nabla^{*2} \vec{u}^* + \frac{Ha^2}{Re} \vec{f}^*, \quad (\text{A.4})$$

donde Re es el número de Reynolds basado en la velocidad característica u_c y Ha es el número de Hartmann basado en el campo campo característico B_c . El número de Reynolds es el cociente entre las fuerzas inerciales y las fuerzas viscosas. Si el número de Reynolds es grande quiere decir que los efectos convectivos tienen una mayor importancia y si el número de Reynolds es pequeño quiere decir que los efectos viscosos son más importantes. El número de Hartmann es la comparación entre la fuerza de Lorentz y las fuerzas inerciales. Si el número de Hartmann es pequeño la fuerza de Lorentz es chica y si el número de Hartmann es grande la fuerza de Lorentz es grande.

$$Re = \frac{u_c L}{\nu}, \quad Ha = B_c L \sqrt{\frac{\sigma}{\rho \nu}} \quad (\text{A.5})$$

Para poder resolver numericamente el caso polar es necesario obtener las ecuaciones adimensionales de Navier-Stokes en coordenadas polares, las cuales pueden ser revisadas en la referencia [34].

Bibliografía

- [1] Shigeo Asai. *Electromagnetic processing of materials*. Fluid Mechanics and Its Applications. Springer, 2012.
- [2] Peter Rudolph. Travelling magnetic fields applied to bulk crystal growth from the melt: The step from basic research to industrial scale. *Journal of Crystal Growth*, 310(7&9):1298 – 1306, 2008.
- [3] Shigeo Asai. Recent development and prospect of electromagnetic processing of materials. *Science and Technology of Advanced Materials*, 1(4):191–200, 2000.
- [4] Shigeo Asai. Development of electromagnetic processing of materials. In *Electromagnetic Processing of Materials*, volume 99 of *Fluid Mechanics and Its Applications*, pages 1–7. Springer Netherlands, 2012.
- [5] Julio M. Ottino. The mixing of fluids. *Scientific American*, 260:56 – 67, January 1989.
- [6] S. Cuevas and A. Figueroa. ¿cómo se mezclan los fluidos? pages 1 – 25, 2013.
- [7] L.M. de la Cruz and E. Ramos. Mixing with time dependent natural convection. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 33(2):191 – 198, 2006.
- [8] R. Lantzsch, V. Galindo, I. Grants, C. Zhang, O. Pätzold, G. Gerbeth, and M. Stelter. Experimental and numerical results on the fluid flow driven by a traveling magnetic field. *Journal of Crystal Growth*, 305(1):249 – 256, 2007.
- [9] P. Dold, A. Cröll, M. Lichtensteiger, Th. Kaiser, and K.W. Benz. Floating zone growth of silicon in magnetic fields:: Iv. rotating magnetic fields. *Journal of Crystal Growth*, 231(1 - 2):95 – 106, 2001.
- [10] K.-H. Spitzer. Application of rotating magnetic fields in czochralski crystal growth. *Progress in Crystal Growth and Characterization of Materials*, 38(1 - 4):59 – 71, 1999.
- [11] J.M.D. Coey. Permanent magnet applications. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 248(3):441 – 456, 2002.

- [12] E.F. Northrup. Some newly observed manifestations of forces in the interior of an electric conductor. *Phys. Rev. (Series I)*, 24:474–497, jun 1907.
- [13] P. Dold and K.W. Benz. Rotating magnetic fields: Fluid flow and crystal growth applications. *Progress in Crystal Growth and Characterization of Materials*, 38(1 - 4):39 – 58, 1999.
- [14] G. Dannen. The einstein-szilard refrigerators. *Scientific American*, January 1997.
- [15] J. Hartman y F. Lazarus. Hg-dynamics i - theory of the laminar flow of an electrically conductive liquid in a homogeneous magnetic field. *Mathematisk- Fysiske Meddelelser*, 15(6), 1937.
- [16] J. Hartman y F. Lazarus. Hg-dynamics ii - experimental investigations on the flow of mercury in a homogeneous magnetic field. *Mathematisk- Fysiske Meddelelser*, 15(7), 1937.
- [17] J. B. Mullin and K. F. Hulme. The use of electromagnetic stirring in zone refining. *Journal of Electronics and Control*, 4(2):170–174, 1958.
- [18] Michel Rivero Corona. *Estudio experimental de flujos en dispositivos de bombeo y agitación electromagnética*. Tesis de Doctorado, Centro de investigación en energía, Universidad Nacional Autónoma de México, 2012.
- [19] Aldo Figueroa Lara. *Generación de vorticidad mediante fuerzas magnéticas*. Tesis de Maestría, Centro de investigación en energía, Universidad Nacional Autónoma de México, 2006.
- [20] R. Bergmann, L. Tophøj, T. Homan, P. Hersen, A. Andersen, and T. Bohr. Polygon formation and surface flow on a rotating fluid surface. *Journal of Fluid Mechanics*, 679:415–431, 2011.
- [21] L. Tophøj, J. Mougel, T. Bohr, and D. Fabre. Rotating polygon instability of a swirling free surface flow. *Phys Rev Lett*, 110(19):194502, 2013.
- [22] Thomas R. N. Jansson, Martin P. Haspang, Kåre H. Jensen, Pascal Hersen, and Tomas Bohr. Polygons on a rotating fluid surface. *Phys. Rev. Lett.*, 96:174502, May 2006.
- [23] David Domínguez Lozoya. *Diseño, construcción y caracterización de un circuito de metal líquido impulsado por una bomba de inducción MHD*. Tesis de Maestría, Instituto de Energías Renovables, Universidad Nacional Autónoma de México, 2013.
- [24] I.G. Currie. *Fundamental Mechanics of Fluids*. Marcel Dekker, inc., third edition.
- [25] L.D. Landau y E.M Lifshitz. *Fluid Mechanics*. Pergamon Press, 1930.
- [26] G.K. Batchelor. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, 1967.

- [27] J.D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. John Wiley Sons, 1975.
- [28] P.A. Davidson. *An Introduction to Magnetohydrodynamics*. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, 2001.
- [29] W.F. Hughes y F.J. Young. *Electromagnetodynamics of Fluids*. Krieger Publishing Company, 1989.
- [30] R. Moreau. *Magnetohydrodynamics*. Kluwer Academic Publishers, 1990.
- [31] Aldo Figueroa, François Demiaux, Sergio Cuevas, and Eduardo Ramos. Electrically driven vortices in a weak dipolar magnetic field in a shallow electrolytic layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 641:245–261, 12 2009.
- [32] Malcolm MacCaig. *Permanent magnets in theory and practice; 2nd ed.* Pentech Press, London, 1987.
- [33] José Joel Roman. *Estudio numérico de la transferencia de calor en un flujo a través de arreglos de obstáculos magnéticos*. Tesis de Maestría, Centro de investigación en energía, Universidad Nacional Autónoma de México, 2013.
- [34] José Nuñez Gonzáles. *Transferencia de calor en un flujo magnetohidrodinámico en ductos anulares*. Tesis de Maestría, Centro de investigación en energía, Universidad Nacional Autónoma de México, 2008.
- [35] James Pérez Barrera. *Estudio teórico del flujo producido por una fuerza de Lorentz azimutal en un agitador electromagnético*. Tesis de Maestría, Instituto de Energías Renovables, Universidad Nacional Autónoma de México, 2013.
- [36] Cinthya Gutiérrez Lara. *Estudio teórico-experimental de la agitación electromagnética de flujos en aguas someras*. Tesis de Maestría, Centro de investigación en energía, Universidad Nacional Autónoma de México, 2013.
- [37] H. K. Versteeg and W. Malalasekera. *An Introduction to Computational Fluid Dynamics. The Finite Volume Method*. Longman Group Ltd., London, 1995.
- [38] Michael Griebel, Thomas Dornsheifer, and Tilman Neunhoffer. *Numerical Simulation in Fluid Dynamics: A Practical Introduction (Monographs on Mathematical Modeling and Computation)*. SIAM: Society for Industrial and Applied Mathematics, illustrated edition edition, December 1997.