



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

**POTENCIAL EFECTIVO DE UN CAMPO ESCALAR CARGADO EN PRESENCIA DE
CAMPO MAGNÉTICO EXTERNO CONSTANTE**

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:

JESÚS LÓPEZ FLORES

TUTOR PRINCIPAL:

DR. ALEJANDRO AYALA MERCADO
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

COMITÉ TUTOR:

MYRIAM MONDRAGÓN CEBALLOS
INSTITUTO DE FÍSICA
JUAN CARLOS D'OLIVO SAEZ
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

MÉXICO, D.F. MAYO 2014



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

Agradezco enorme y sinceramente al Dr. Alejandro Ayala por su asesoría, disposición y confianza no sólo en la realización de este trabajo, sino a lo largo de todo el tiempo de mi formación como investigador bajo su dirección. Agradezco también el haberme proporcionado los medios suficientes para la elaboración de esta tesis y por compartirme sus conocimientos.

Agradezco de manera especial a Ana Julia S. Mizher por sus comentarios, sugerencias, disponibilidad y por darme ánimos para terminar este trabajo.

Agradezco a mis sinodales, los doctores Ángel Sánchez, Sarira Sahu, Genaro Toledo y Luis Manuel Montaña el tiempo empleado para la revisión de la tesis, las sugerencias y aportaciones para la versión final.

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) el apoyo económico otorgado para realizar mis estudios de maestría.

Resumen

En este trabajo estudiamos la naturaleza de la transición de fase de escalares cargados en presencia de campo magnético para una teoría con rompimiento espontáneo de simetría. Calculamos correcciones magnéticas y térmicas hasta orden de diagramas de anillo en el límite de alta temperatura y presentamos un tratamiento del parámetro de masa cuadrado negativo. Presentamos el diagrama de fases el cual exhibe transiciones de primero y segundo orden para la región de parámetros explorada. También mostramos que la temperatura crítica en presencia de campo magnético es menor en comparación a la temperatura crítica cuando el campo magnético es cero.

Abstract

We study the nature of the phase transition for charged scalars in the presence of magnetic field for a theory with spontaneous symmetry breaking. We calculate magnetic and thermal corrections up to ring order in the high temperature limit and we show a treatment of the negative square mass parameter. We show the phase diagram, which displays first and second order transitions for the region of parameters explored. We also show that the critical temperature in the presence of magnetic field is lower than the critical temperature when the magnetic field is zero.

Índice general

Agradecimientos	I
Resumen	II
Introducción	v
1. Campos magnéticos y transiciones de fase	1
1.1. Transiciones de fase	2
1.1.1. Transiciones de fase continuas y puntos críticos	2
1.1.2. Parámetro de orden	3
1.1.3. Transiciones de primer orden	7
1.2. Campos magnéticos	8
1.2.1. Efecto del campo magnético sobre transiciones de fase	9
1.2.2. Campos magnéticos en colisiones de iones pesados	11
2. Propagador en presencia de campo magnético	16
2.1. Método del tiempo propio	17
2.2. Propagador escalar en presencia de campo magnético	18
2.3. Propagador fermiónico y bosónico en presencia de campo magnético	25
3. Teoría térmica de campos	30
3.1. Formalismo del tiempo imaginario	31
3.2. Correcciones a primer orden: propagador y función de partición	38
3.3. Reglas de transformación a temperatura finita	46
4. Potencial efectivo de un campo escalar en presencia de campo magnético	48
4.1. Modelo de Higgs Abeliano	49

Índice general

4.2. Energía del vacío	52
4.3. Correcciones térmicas a un loop	60
4.4. Diagramas de anillo	62
4.5. Espacio de parámetros	63
5. Conclusiones	68
Bibliografía	72

Introducción

En este trabajo presento el estudio de la naturaleza de las transiciones de fase de escalares cargados en presencia de campo magnético. La importancia, además de técnica, se centra en la descripción de sistemas con rompimiento espontáneo de simetría formados por escalares cargados en presencia de campo magnético. Por mencionar algunos ejemplos tenemos a los piones cargados que se forman en colisiones de iones pesados, en donde los campos magnéticos que se forman son intensos y el mecanismo de formación está bien comprendido. Otro ejemplo es el campo de Higgs en el universo temprano, en donde los campos magnéticos pueden haber surgido mediante la formación de un condensado de bosones cargados por un efecto análogo al de un ferromagneto[1]. Estos sistemas comparten una característica en particular, cuentan con el mecanismo de rompimiento espontáneo de la simetría. Para el caso de colisiones de iones pesados la simetría que se rompe es la simetría quiral mientras que para el universo temprano se trata de la simetría electrodébil.

Simultáneamente, los efectos de la temperatura se toman en cuenta. Durante la transición de fase los piones se encuentran en un medio caliente el cual modifica sus propiedades. Se sabe que si una simetría está rota a temperatura cero, tales efectos pueden restaurar la simetría cuando la temperatura alcance la temperatura crítica, si es que la hay. El caso en ausencia de campo magnético ha sido estudiado anteriormente para un campo escalar a temperatura finita y por los escenarios antes mencionados resulta natural la extensión que incluya efectos magnéticos.

En el mecanismo de Higgs, cuando los campos se expanden al rededor del mínimo v_0 , consecuencia del rompimiento espontáneo de simetría, el parámetro de masa queda dado en términos del parámetro de orden v , explícitamente $m^2 = \lambda v^2 - \mu^2$. Esto conduce a la posibilidad de valores negativos para m^2 en cierto dominio de v . Con un tratamiento adecuado de este caso obtendremos expresiones que de otro modo presentarían divergencias y singularidades.

A lo largo de este trabajo se presentan los elementos necesarios para hacer el estudio de las transiciones de fase para escalares cargados en presencia de campo magnético. El trabajo está organizado de la siguiente manera: En el primer capítulo hago una revisión

Índice general

general sobre transiciones de fase y analizo escenarios donde los campos magnéticos son relevantes. En el segundo capítulo desarrollo el método del tiempo propio, con el cual se incorporan el propagador escalar en presencia de campo magnético que posteriormente emplearemos en el cálculo del potencial efectivo. En el tercer capítulo introduzco los conceptos generales de teoría térmica de campos, marco teórico en el que trabajaremos para incorporar los efectos térmicos en el propagador escalar. En el capítulo cuarto presento el cálculo del potencial efectivo para un campo escalar y muestro gráficamente los resultados. Finalmente doy las conclusiones.

1 Campos magnéticos y transiciones de fase

Muchos problemas importantes tienen que ver de una u otra forma con las transiciones de fase. Se sabe que una gran cantidad de sistemas pueden mostrar un patrón de comportamiento cualitativo o fases. Estas fases corresponden a diferentes formas de la organización interna de los componentes del sistema y usualmente dos de estas fases están separadas por una frontera. Cruzar dicha frontera implica un cambio en el comportamiento y en las propiedades del sistema. El estudio de tales cambios o transiciones de fase es crucial para el entendimiento del entorno que nos rodean.

Las transiciones de fase están presentes en diversas áreas, sin embargo, nosotros estamos interesados en estudiar las transiciones de fase durante la evolución del universo, las cuales han dado lugar al universo tal y como lo conocemos actualmente. Este es un tema de intensa investigación gracias a los colisionadores de iones pesados como RHIC o el LHC en los que es posible recrear las condiciones que el universo tenía en sus primeros momentos y obtener información de este. La ocurrencia de una transición de fase depende de los parámetros del sistema, así como de agentes externos que modifiquen su comportamiento. En el caso del universo temprano, observaciones de un campo magnético remanente indican que tal background magnético tiene su origen en una etapa temprana del universo. Por ende, una pregunta natural es cómo estos campos magnéticos influyen en las transiciones de fase y las implicaciones físicas que su presencia pueda tener.

En este capítulo presento una revisión estándar de las transiciones de fase, introduciendo los conceptos más importantes como el orden de la transición y el parámetro de orden. En la segunda parte del capítulo hago una revisión de la influencia del campo magnético en las transiciones de fase en el contexto de las transiciones de fase electrodébil, quiral y de desconfinamiento. En la parte final presento un mecanismo simple de producción de campos magnéticos en colisiones de iones pesados relativistas.

1.1. Transiciones de fase

Los cambios de fase del agua son una experiencia de la vida cotidiana. El agua se convierte en vapor, el hielo en vapor, etc. Sería difícil imaginar la vida en nuestros días sin el incesante ciclo del agua de una fase a otra.

Bajo circunstancias ordinarias las transiciones de fase son transiciones de fase de “primer orden”. Las transiciones de fase de primer orden son aquellas que involucran un calor latente: cuando un material sufre una transición de fase de primer orden desde una temperatura alta hacia una fase de menor temperatura, una cantidad de calor, el calor latente, es cedida mientras el material se enfría a través de un rango de temperatura infinitesimal al rededor de la temperatura de transición T_t . Esta emisión de calor en la transición indica que la estructura del material está siendo reordenada a T_t . Por ejemplo, el calor latente $L \simeq 334 J g^{-1}$ de la transición agua-hielo es la energía liberada cuando las moléculas de agua se arreglan en una red cúbica. Por arriba del punto de congelamiento del agua no hay red cristalina, mientras que por debajo del punto de congelamiento, la red está bien definida. La transición de fase se realiza mientras el agua se enfría y la energía es liberada en forma de calor latente.

1.1.1. Transiciones de fase continuas y puntos críticos

Una transición de fase continua prototípica es la conversión, a la temperatura de Curie $T_c = 1043 K$, del hierro de su forma paramagnética a su forma ferromagnética. A $T > T_c$ el hierro, como otros metales, es paramagnético. Esto es, el material no está magnetizado en ausencia de un campo magnético aplicado. Si algún campo débil se aplica, el momento magnético del material por unidad de volumen es proporcional al campo aplicado: $\mathbf{m} \simeq \mu \mathbf{B}$ con μ una constante positiva. En el estado ferromagnético ($T < T_c$), el material está magnetizado aun cuando ningún campo se aplique, y cuando un campo externo se aplica esta magnetización se alinea instantáneamente con la dirección del campo aplicado. Como se muestra en la Fig. 1.1.1, la magnitud de la magnetización $\mathbf{m}_0(T)$ en $\mathbf{B} = 0$ se hace cero cuando $T \rightarrow T_c$ por la izquierda. Por lo tanto, cuando se calienta una muestra de hierro y se pasa a través de T_c en ausencia de campo magnético, nada dramático pasa en T_c . La magnetización decrece continuamente hasta alcanzar la temperatura crítica T_c , donde esta desaparece completamente. Lo que cambia discontinuamente en T_c es la tasa de cambio de \mathbf{m}_0 , en vez de \mathbf{m}_0 misma. La esencia de una transición de fase continua es que las propiedades del sistema no cambian discontinuamente en T_c , pero al menos una de sus tasas de cambio lo hace. En contraste, cuando el agua se enfría, hay un cambio abrupto en

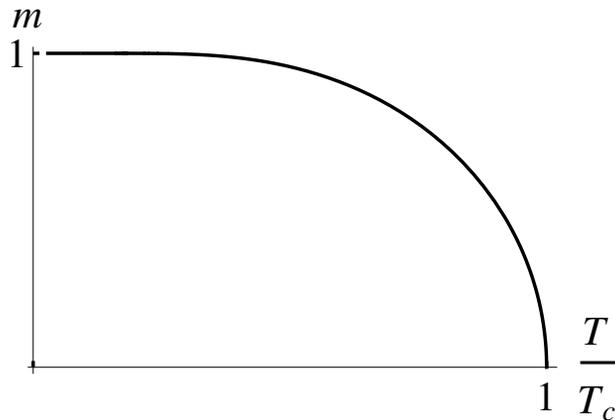


Figura 1.1.1: Magnetización del hierro.

las propiedades del sistema y no en sus derivadas, por ejemplo, en la densidad ρ y el calor específico c_v .

Como hemos visto hasta este momento, los cambios de fase del agua son de primer orden normalmente, aunque existen circunstancias especiales bajo las cuales la transición agua-vapor puede ser continua. Las transiciones de primer orden son, en general, definidas como aquellas en las que se involucra un calor latente y todos los demás cambios se consideran continuos. La mayoría de los cambios de fase de primer orden se reducen a cambios continuos en algún punto específico. Pero de ninguna forma todos los cambios de fase continuos surgen en esta forma[2].

1.1.2. Parámetro de orden

El desarrollo de una teoría cuantitativa de transiciones de fase continuas requiere introducir una cantidad llamada el parámetro de orden, cuyo promedio térmico se anula en un lado de la transición y se hace finito en el otro lado de la transición.

Se define el parámetro de orden como una cantidad que fluctúa en el tiempo y espacio y se introduce con el fin de interpretar fenómenos en términos de sus fluctuaciones. Sin embargo, en varias aplicaciones estamos sólo interesados en el promedio térmico del parámetro de orden. No hay un esquema general para encontrar el parámetro de orden; se tiene entonces que considerar cada sistema físico por separado para asignarle un parámetro de orden adecuado.

En 1930, Landau propuso una teoría de campo medio para las transiciones de fase continuas que relaciona el parámetro de orden con las subyacentes simetrías del sistema. Una de las características que distinguen las transiciones de fase de primer orden de las con-

1 Campos magnéticos y transiciones de fase

tinuas es el comportamiento del parámetro de orden en el punto de transición. En una transición de primer orden, el parámetro de orden cambia discontinuamente al cruzar la línea de coexistencia. Además, las transiciones de primer orden pueden o no involucrar el rompimiento de simetría del sistema. Por ejemplo, en las transiciones líquido-sólido y vapor-sólido, la simetría traslacional de la fase de temperatura alta se rompe, pero para las transiciones vapor-líquido ninguna simetría del sistema se rompe.

En una transición de fase de primer orden, la pendiente de la energía libre cambia discontinuamente en el punto de transición y una simetría puede o no ser rota. En una transición de fase continua, la pendiente de la curva de energía libre cambia continuamente y una simetría siempre se rompe. En transiciones continuas, una fase es menos simétrica que la otra. Usualmente la fase de menor temperatura es menos simétrica, pero este no es siempre el caso.

Todas las transiciones que involucran una simetría rota y un cambio continuo en la pendiente de la energía libre pueden ser descritas en el marco de una teoría de campo medio. Cerca de la transición de fase continua la energía libre es una función analítica del parámetro de orden asociado con la fase de menor simetría.

Llamemos, por simplicidad, a la fase más simétrica simplemente la fase simétrica y a la fase de menor simetría la fase con simetría rota.

Denotemos el parámetro de orden mediante η , tal que toma un valor distinto de cero en la fase rota y cero en la fase simétrica. La simetría del sistema se incrementa sólo cuando η es exactamente cero; cualquier valor distinto de cero del parámetro de orden, aunque pequeño, trae consigo una disminución de la simetría.

Matemáticamente, el punto de transición en un cambio continuo es una singularidad de las cantidades termodinámicas y en particular del potencial termodinámico Φ . Para ver esto, recordemos que el punto de transición para una transición de primer orden no es una singularidad sino que es un punto en el que los potenciales termodinámicos $\Phi_1(P, T)$ y $\Phi_2(P, T)$ de las dos fases son iguales. Cada una de las funciones Φ_1 y Φ_2 en ambos lados del punto de transición corresponden a un estado de equilibrio del sistema. En una transición de fase de segundo orden, sin embargo, el potencial termodinámico de cada fase, no corresponde a un estado de equilibrio, es decir a un mínimo de Φ .

El tratamiento cuantitativo de las transiciones de fase de segundo orden se basa en la consideración de las cantidades termodinámicas del sistema para determinadas desviaciones del estado de simetría; se puede representar el potencial termodinámico como una función de P , T y η [3, 4].

La continuidad del cambio de estado en una transición de fase de segundo orden se

1 Campos magnéticos y transiciones de fase

expresa matemáticamente por el hecho de que la cantidad η toma valores arbitrariamente pequeños cerca del punto de transición. Considerando la vecindad de este punto, se expande $\Phi(P, T, \eta)$ en potencias de η

$$\Phi(P, T, \eta) = \Phi_0 + \alpha\eta + A\eta^2 + C\eta^3 + B\eta^4 + \dots, \quad (1.1.1)$$

donde los coeficientes α, A, B, C, \dots son funciones de P y T .

Se puede demostrar que [3], si los estados con $\eta = 0$ y $\eta \neq 0$ son de diferente simetría, como se supone, el término de primer orden en la expansión 1.1.1 es idénticamente cero: $\alpha \equiv 0$. El coeficiente $A(P, T)$ en el segundo término se anula justo en el punto de transición, ya que en la fase simétrica el valor $\eta = 0$ debe corresponder a un mínimo de Φ , y para que esto ocurra se necesita que $A > 0$, mientras que en el otro lado del punto de transición, en la fase no simétrica, $\eta \neq 0$ corresponde a un estado estable, es decir al mínimo de Φ y esto sólo es posible si $A < 0$. La Fig. 1.1.2 muestra la forma de la función $\Phi(\eta)$ para $A < 0$ y $A > 0$. Debido que A es positiva en un lado del punto de transición y negativa en el otro, se tiene que, en el punto mismo debe ser cero.

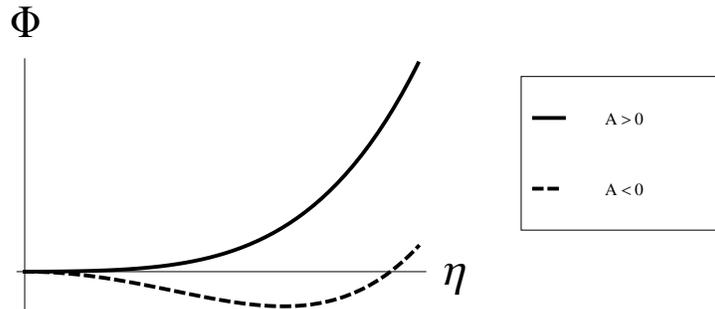


Figura 1.1.2: Transición de segundo orden. La figura muestra el comportamiento de la función Φ para $A < 0$ y $A > 0$. De aquí se ve que en el punto de transición $A = 0$.

Si el punto de transición mismo es un estado estable, es decir, si Φ como función de η tiene un mínimo en $\eta = 0$, es necesario que el término de tercer orden en la expansión deba ser cero y el término cuártico positivo:

$$A_c(P, T) = 0, \quad (1.1.2)$$

$$C_c(P, T) = 0, \quad (1.1.3)$$

$$B_c(P, T) > 0, \quad (1.1.4)$$

1 Campos magnéticos y transiciones de fase

donde el subíndice c hace referencia al punto de transición.

El coeficiente B , el cual es positivo en el punto de transición, es desde luego también positivo en la vecindad del punto.

Pueden darse dos casos. Por un lado, el término cúbico puede ser idénticamente cero debido a la simetría del sistema: $C(P, T) = 0$. Entonces sólo queda la condición $A(P, T) = 0$ en el punto de transición, que determina P como función de T . Se tiene entonces que en el plano PT se dibuja una línea de puntos de transición de fase de segundo orden.

Si, por otra parte, C no es idénticamente cero, los puntos de transición están determinados por las dos condiciones $A(P, T) = 0$, $C(P, T) = 0$. En este caso, la transición de fase continua puede ocurrir sólo en puntos aislados.

En lo que sigue trataremos sólo el caso en el que existe una línea de puntos de transiciones de fase. Supondremos entonces $C \equiv 0$ y la expansión para el potencial termodinámico toma la forma

$$\Phi(P, T, \eta) = \Phi_0(P, T) + A(P, T)\eta^2 + B(P, T)\eta^4. \quad (1.1.5)$$

Aquí $B > 0$, mientras que el coeficiente $A > 0$ en la fase simétrica y $A < 0$ en la fase no simétrica; los puntos de transición están determinados por la condición $A(P, T) = 0$.

El coeficiente $A(P, T)$ no tiene singularidades en el punto de transición, se puede entonces hacer una expansión al rededor de este punto en potencias de la “distancia” a la transición

$$A(P, T) = a(P)(T - T_c), \quad (1.1.6)$$

donde T_c es la temperatura de transición. El coeficiente $B(P, T)$ se puede remplazar por $B(P, T_c)$. La expansión del potencial termodinámico se convierte en

$$\Phi(P, T) = \Phi_0(P, T) + a(T)(T - T_c)\eta^2 + B(P, T_c)\eta^4, \quad (1.1.7)$$

con $B(P) > 0$.

La dependencia de η con la temperatura, cerca del punto de transición, en la fase no simétrica, está determinada por la condición de que Φ sea un mínimo como función de η . Igualando la derivada $\partial\Phi/\partial\eta$ a cero, se obtiene $\eta(A + 2B\eta^2) = 0$, luego

$$\eta^2 = -\frac{A}{2B} = a\frac{(T_c - T)}{2B}; \quad (1.1.8)$$

la solución $\eta = 0$ con $A < 0$ corresponde a un máximo de Φ , no a un mínimo. Notemos también, que la configuración de las dos fases depende del signo de a : para $a > 0$ y $a < 0$,

1 Campos magnéticos y transiciones de fase

la fase rota corresponde a las temperaturas $T < T_c$ y $T > T_c$ respectivamente. Supongamos que $a > 0$, de acuerdo con lo anterior, la fase rota corresponde a las temperaturas $T < T_c$ y, como sucede en la mayoría de los casos, en la fase simétrica $T > T_c$. Despreciando términos de orden superior de η , se encuentra que la entropía es

$$S = -\frac{\partial\Phi}{\partial T} = S_0 - \left(\frac{\partial A}{\partial T}\right) \eta^2; \quad (1.1.9)$$

el término que contiene a la derivada de η con respecto a la temperatura es cero, porque $\partial\Phi/\partial\eta = 0$. En la fase simétrica, $\eta = 0$ y $S = S_0$; en la fase no simétrica

$$S = S_0 + \left(\frac{a^2}{2B}\right) (T - T_c). \quad (1.1.10)$$

En el punto de transición mismo, esta expresión se reduce a S_0 y la entropía es continua como se espera.

Determinemos el calor específico $C_p = T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P$ de las dos fases e el punto de transición. Para la fase no simétrica se tiene, derivando Ec. 1.1.10

$$C_p = C_{p0} + a^2 \frac{T_c}{2B}. \quad (1.1.11)$$

Para la fase simétrica $S = S_0$, y por lo tanto $C_p = C_{p0}$. Así el calor específico tiene una discontinuidad en el punto de transición de la fase.

1.1.3. Transiciones de primer orden

Si el parámetro de orden es un escalar, entonces no hay razón para deshacerse del término cúbico en la expansión de Φ . En dichos casos, tales sistemas no pueden exhibir una transición de fase continua. Para ver esto escribamos Φ de la siguiente forma

$$\Phi(P, T) = \Phi_0(P, T) + A\eta^2 + C\eta^3 + B\eta^4 + \dots, \quad (1.1.12)$$

los extremos están dados por la condición $(\partial\Phi/\partial\eta) = 0$, la cual tiene soluciones

$$\eta = 0, \quad \eta = \frac{-3C \pm \sqrt{9C^2 - 32AB}}{8B}. \quad (1.1.13)$$

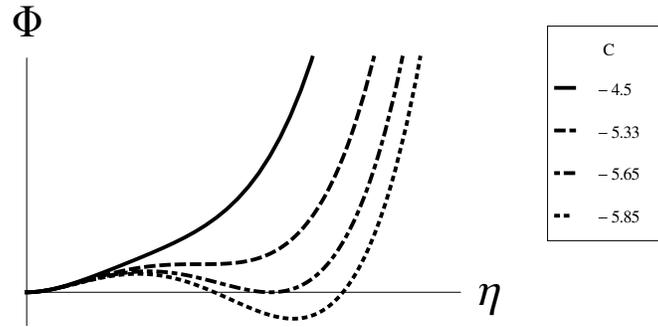


Figura 1.1.3: Transición de primer orden. Comportamiento de $\Phi = A\eta^2 + C\eta^3 + B\eta^4$, para $A = 2$, $B = 4$, y (a) $C = -4.5$, (b) $C = -5.33$, (c) $C = -5.65$, (d) $C = -5.85$.

Si $9C^2 - 32AB < 0$, el único mínimo ocurre en $\eta = 0$, ya que otros valores de η son complejos y no físicos. Pero cuando $9C^2 - 32AB > 0$, hay dos mínimos y un máximo. La Fig.1.1.3 muestra el comportamiento de Φ para $A > 0$, $B > 0$ y un rango de valores para C . Como se ve en la figura, para las curvas a, b y c el estado de equilibrio ocurre en $\eta = 0$. La curva con $C = -5.65$ muestra el comportamiento en la temperatura crítica del sistema. En este punto el estado de equilibrio con parámetro de orden $\eta = 0$, cambia a un estado de equilibrio con $\eta = \eta_D$. Por lo tanto esta es una transición de fase de primer orden. El punto de transición para la transición de primer orden debe satisfacer las condiciones

$$\Phi - \Phi_0 = 0, \quad (1.1.14)$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right)_{P,T} = 0. \quad (1.1.15)$$

Estas dos condiciones dan como solución $\eta = -C/2B$ y $A = C^2/4B$. Por lo tanto, la transición de fase de primer orden ocurre cuando $A > 0$ y ocurre antes de cualquier transición continua a medida que se baja la temperatura. Si $C < 0$, entonces la transición ocurrirá para un valor positivo del parámetro de orden. Mientras que si $C > 0$, entonces esta ocurre para un valor negativo del parámetro de orden.

1.2. Campos magnéticos

Los campos magnéticos están presentes en muchos sistemas físicos y juegan un papel importante pues se sabe que pueden modificar o determinar las propiedades estadísticas de las partículas que forman algún sistema.

En el contexto que nos interesa, podemos mencionar escenarios en los que el campo

magnético puede determinar la naturaleza de la transición de fase del sistema. Tenemos por ejemplo las colisiones de iones pesados, las estrellas de neutrones y el universo temprano, en los que los campos magnéticos pueden modificar o ayudar a catalizar la restauración quirral, la fase superfluida y la transición de fase electrodébil, respectivamente.

Las implicaciones de la presencia de campos magnéticos en la evolución del universo son varias, una de ellas es la bariogénesis. La presencia de campo magnético puede hacer la transición de fase electrodébil fuertemente de primer orden y esto podría explicar la bariogénesis en el modelo estándar.

1.2.1. Efecto del campo magnético sobre transiciones de fase

Recientemente se ha puesto atención en las propiedades de QCD a temperatura finita, con el fin de describir fenómenos como las colisiones de iones pesados, estrellas de neutrones y el universo temprano. Dichos sistemas están a menudo sujetos a los efectos de campos magnéticos. En colisiones periféricas de iones pesados relativistas se estima que se puedan producir campos magnéticos del orden $10^{18} - 10^{19}G$, en el interior de una estrella de neutrones los campos magnéticos que se pueden alcanzar son del orden de $10^{12}G$.

En el contexto de QCD, se ha puesto atención en la estructura de fase en presencia de campos magnéticos. En simulaciones de Lattice por ejemplo, se ha mostrado que la presencia de campo magnético incrementa la temperatura crítica conforme la intensidad del campo magnético aumenta[5].

En QCD se espera que la transición de fase ocurra a escalas de energía comparables a $\Lambda_{QCD} \sim 200MeV$. En consecuencia, se está interesado en campos magnéticos del orden de $B \sim (200MeV)^2 \simeq 2 \times 10^8G$. Lo que es compatible con las estimaciones que se han hecho hasta ahora.

Los escenarios antes mencionados son los únicos en los que podemos probar “experimentalmente” la estructura de fase de QCD. Se espera que los experimentos de colisiones de iones pesados se localicen en una región del diagrama de fase donde pueda ocurrir la transición de desconfinamiento o restauración de simetría quirral y de ahí su relevancia.

Un buen ejemplo a citar para ilustrar el efecto de un campo magnético en una transición de fase es la transición de fase electrodébil. Sabemos que el universo comenzó con una gran explosión y al evolucionar se ha ido enfriando y expandiendo, pasando de un estado en condiciones extremas de densidad y temperatura al universo que conocemos ahora. Esto sugiere que el universo, eventualmente, tuvo una o más transiciones de fase[6]. Cuando se emplea el modelo estándar para modelar la transición de fase por la que atravesó el universo a una temperatura del orden de 100 GeV, se está hablando de la transición de

1 Campos magnéticos y transiciones de fase

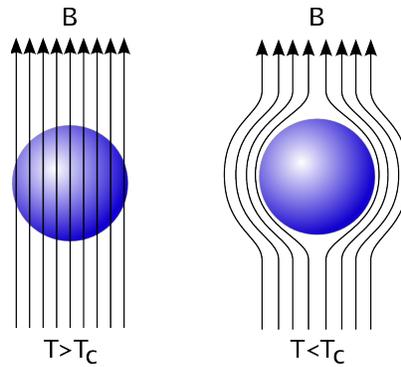


Figura 1.2.1: Efecto Meissner. Cuando el superconductor alcanza la temperatura crítica, el campo magnético puede penetrar en el material sin oposición alguna, es decir, el efecto Meissner desaparece.

fase electrodébil, la cual consiste en ir de un estado con partículas no masivas a un estado con partículas masivas.

Hacia finales de los 90's era generalmente aceptado que la bariogénesis no era posible dentro del modelo estándar. Sin embargo, a finales de esta década se vió que la presencia de un campo hipermagnético externo en la transición de fase electrodébil afecta la transición de fase volviéndola fuertemente de primer orden, con esto se revivió la posibilidad de que se pudiera dar la bariogénesis en el modelo estándar[6].

Los campos magnéticos en el universo temprano pueden hacer la transición de fase electrodébil de primer orden incrementando la diferencia de energía libre entre la fase rota y la simétrica. Existen varias propuestas de cómo se generan estos campos magnéticos. Ciertos tipos de modelos de inflación pueden producir campos magnéticos[6]. Otros mecanismos sugieren que la producción de campos magnéticos se debe a fluctuaciones cuánticas durante la época inflacionaria. Mientras que otros proponen la formación de dominios ferromagnéticos de bosones W en la fase rota de la teoría electrodébil. Dichos dominios pueden crear campos magnéticos que sobrevivirían al decaimiento de los dominios [7, 1].

Aunque al final estamos interesados en determinar si puede ocurrir la bariogénesis, en primera instancia exploraremos el efecto de campo magnético mismo, es decir, cómo se ve afectada la transición de fase por el campo magnético. El fenómeno es análogo a lo que ocurre en superconductores tipo I bajo la influencia de campo magnético externo. Estos materiales no permiten en absoluto que penetre el campo magnético externo, lo cual conlleva un esfuerzo energético alto y si se supera la temperatura crítica, se rompe bruscamente el estado superconductor. Cuando un material superconductor tipo I está fuera del alcance del campo magnético, la transición a la fase superconductora es una transición

1 Campos magnéticos y transiciones de fase

continua de segundo orden, pero cuando el campo magnético está presente la transición es de primer orden. Esto no es otra cosa que el efecto Meissner, ver Fig. 1.2.1; en la fase superconductor el campo magnético no se propaga, esto crea una presión extra que actúa sobre la pared superconductor aumentando la energía dentro de la cavidad.

Ya que el universo temprano puede considerarse como un superconductor podemos hacer una analogía entre lo que pasa a los materiales superconductores tipo I y el universo temprano durante la transición de fase electrodébil, esta vez en presencia de un campo hipermagnético externo. Durante la fase simétrica el campo hipermagnético permea todo el espacio. Después, cuando ocurre la transición de fase electrodébil, una componente del campo hipermagnético se expulsa de la fase rota y penetra sólo la componente electromagnética. Esto hace que la diferencia de energía entre las dos fases crezca y como consecuencia la transición de fase se haga más fuerte de primer orden.

Otro escenario en el que los campos magnéticos resultan cruciales es el diagrama de fases de QCD. Como se mencionó antes, los campos magnéticos están presentes en la formación del universo temprano en la transición de fase electrodébil pero también en la transición de fase quiral y de desconfinamiento. Resulta entonces viable preguntarse acerca del efecto que tiene el campo magnético sobre estas últimas transiciones de fase.

Resultados de lattice muestran que las transiciones quiral y de desconfinamiento ocurren en el mismo intervalo de temperatura en ausencia de campo magnético. Por otro lado, se ha calculado que la presencia de campo magnético intenso debería separar estas dos líneas de transición [8]. En la Fig. (1.2.2) se muestra un esquema de como se verían afectadas las líneas de transición en presencia de campo magnético. La transición de desconfinamiento ocurre a una menor temperatura en comparación con la transición de fase quiral en presencia de campo magnético. La separación entre estas dos líneas de transición se hace mayor mientras el campo magnético se intensifica. En la Ref. [8] muestran que la contribución al potencial termodinámico del sector de quarks juega un papel determinante en el sentido de que su contribución produce que las líneas de transición, quiral y de desconfinamiento, se separen. De otra forma, al no incluir esta contribución, estas líneas no muestran separación y coexisten en el mismo rango de temperatura. Además, se espera que esta separación pueda darse para la intensidad de campo alcanzada en colisiones de iones pesados, logrando un diferencia de temperaturas críticas al rededor de 10 MeV.

1.2.2. Campos magnéticos en colisiones de iones pesados

En el universo de hoy en día los componentes fundamentales de la materia se encuentran confinados dentro de los núcleos atómicos. Las colisiones de iones pesados llevadas a

1 Campos magnéticos y transiciones de fase

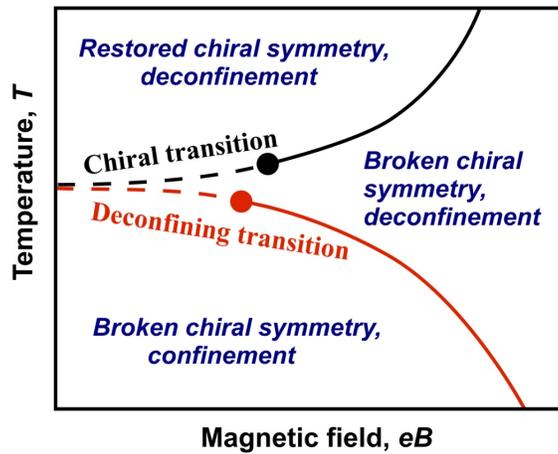


Figura 1.2.2: Imagen del diagrama de fases de QCD a temperatura finita en presencia de campo magnético[8]. Las líneas punteadas representan crossovers, mientras que las líneas solidas representan transiciones de primer orden. Una nueva fase con simetría quiral rota y desconfinamiento aparece en la presencia de un campo magnético fuerte.

cabo en los colisionadores de partículas como en RHIC o el LHC, hacen posible explorar esta nueva forma de materia, que de otra forma sería inaccesible, recreando las condiciones del universo temprano a una escala microscópica. Las temperaturas alcanzadas en las colisiones liberan a los quarks y gluones que forman los protones y neutrones de los núcleos atómicos por un breve lapso de tiempo para formar lo que se conoce como la sopa de quarks y gluones.

De entre las colisiones podemos distinguir entre centrales y periféricas, en estas últimas se ha estudiado la generación de campo magnético a partir de que ocurre la colisión. Se ha estimado que la intensidad del campo magnético alcanzable en colisiones periféricas de iones pesados en RHIC por ejemplo, para una energía $\sqrt{S_{NN}} = 200 \text{ GeV}$, es de $eB \approx 3m_{\pi}^2$ [9]. El mismo cálculo muestra que el campo magnético es suficientemente homogéneo en la región central de la colisión y el análisis de la densidad de energía en esta región permite concluir que el sistema puede alcanzar la restauración de la simetría quiral.

De un análisis geométrico se puede estimar el campo magnético producido. La geometría para una colisión periférica se muestra en la Fig. 1.2.3 en el plano transversal de la colisión. El traslape, que es la región de interacción, tiene la forma de una almendra y es en esta región donde el campo puede considerarse homogéneo. La región externa a esta región central corresponde a la región de partículas espectadoras, es decir, las partículas que no participan en la colisión.

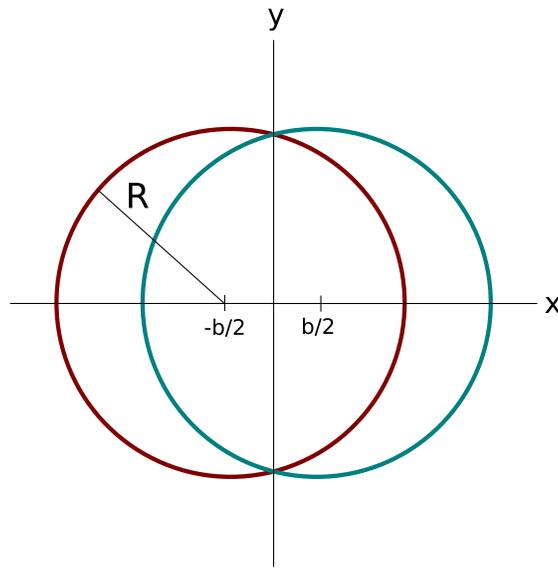


Figura 1.2.3: Vista transversal de una colisión de iones pesados a lo largo del eje del haz (eje z). Los núcleos tienen radio R y viajan en direcciones opuestas. La colisión tiene un parámetro de impacto b . El plano $y = 0$ es el plano de reacción. La región en la que los dos núcleos se intersectan contiene a los participantes de la colisión y es en donde se forma el campo magnético, mientras que las demás regiones corresponden a las partículas espectadoras.

Consideremos dos núcleos similares de carga Z y radio R , viajando a una rapidez Y_0 en sentidos opuestos en la dirección z . Supongamos que al tiempo $t = 0$ estos núcleos chocan con un parámetro de impacto b . Al tiempo $t = 0$, el centro de cada núcleo está a una distancia $x = \pm b/2$ alejado del origen como lo muestra la Fig. 1.2.3

En colisiones de iones pesados, los núcleos viajan a velocidades comparables a la de la luz. Por ejemplo en RHIC, colisiones Au-Au se llevan a cabo con energías de 200 GeV en el centro de masa, lo cual corresponde a una rapidez $v_0 \approx 5.4$, el factor de Lorentz es aproximadamente $\gamma = 100$.

Calculemos el campo magnético de una partícula originado por una partícula de carga q que se mueve en la dirección positiva del eje z con una rapidez v en la posición $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_\perp, z)$. \mathbf{x}_\perp es un vector perpendicular al eje del haz. Se sabe que en este caso, el campo magnético se puede calcular a través de los potenciales de Liénard-Wiechert y está dado como

$$eB(\mathbf{x}) = q\alpha_{EM} \sinh(v) \frac{(\mathbf{x}'_\perp - \mathbf{x}_\perp) \times \hat{z}}{[(\mathbf{x}'_\perp - \mathbf{x}_\perp)^2 + (t \sinh v - z \cosh v)^2]^{3/2}}. \quad (1.2.1)$$

Ahora podemos estimar la intensidad del campo magnético durante la colisión sumando la

1 Campos magnéticos y transiciones de fase

contribución de cada una de las partículas en el núcleo. Podemos distinguir entre el campo magnético producido por las partículas participantes de la colisión y el originado por los espectadores, de esta manera tendríamos

$$B = B_E^+ + B_E^- + B_P^+ + B_P^-, \quad (1.2.2)$$

donde \pm se refiere a la dirección en la que viajan las partículas, negativa o positiva. En primera instancia los espectadores de la colisión no se dispersan y su velocidad es v_0 . Supondremos que al colisionar, los núcleos tendrán una densidad dada por

$$\rho_{\pm}(\mathbf{x}'_{\perp}) = \frac{2}{\frac{4}{3}\pi R^3} \sqrt{R^2 - (\mathbf{x}' \pm \mathbf{b}/2)^2} \theta_{\pm}(\mathbf{x}'_{\perp}), \quad (1.2.3)$$

donde \mathbf{x}'_{\perp} es un vector transversal al haz y

$$\theta_{\pm}(\mathbf{x}'_{\perp}) = \theta \left[R^2 - (\mathbf{x}' \pm \mathbf{b}/2)^2 \right]. \quad (1.2.4)$$

Las funciones $\theta_{\pm}(\mathbf{x}'_{\perp})$ son las proyecciones de los núcleos sobre el plano transversal al eje del haz. De las Ecs. 1.2.1 y 1.2.3 se encuentra

$$\begin{aligned} B_E^{\pm}(\mathbf{x}) &= \pm q\alpha_{EM} \sinh(v_0 \mp \eta) \int d^2\mathbf{x}'_{\perp} \rho_{\pm}(\mathbf{x}'_{\perp}) [1 - \theta_{\mp}(\mathbf{x}'_{\perp})] \\ &\times \frac{(\mathbf{x}'_{\perp} - \mathbf{x}_{\perp}) \times \hat{z}}{[(\mathbf{x}'_{\perp} - \mathbf{x}_{\perp})^2 + \tau \sinh(v_0 \mp \eta)^2]^{3/2}}. \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

Muchas partículas se crearán por la interacción entre las partículas participantes de la colisión. Sin embargo la carga total se conserva. Por otra parte la distribución de estas partículas producidas es casi esférica. De modo que se espera que la contribución al campo magnético de estas cargas sea muy pequeña y aun despreciable. Por lo tanto sólo se tiene que tomar en cuenta la contribución de las partículas participantes. Para los participantes se sabe que viajan de acuerdo con la siguiente función de distribución

$$f(v) = \frac{a}{2 \sinh(av_0)} e^{av},$$

$-v_0 < v < v_0$. Se encuentra experimentalmente que $a \approx 1/2$. A diferencia del caso de los

1 Campos magnéticos y transiciones de fase

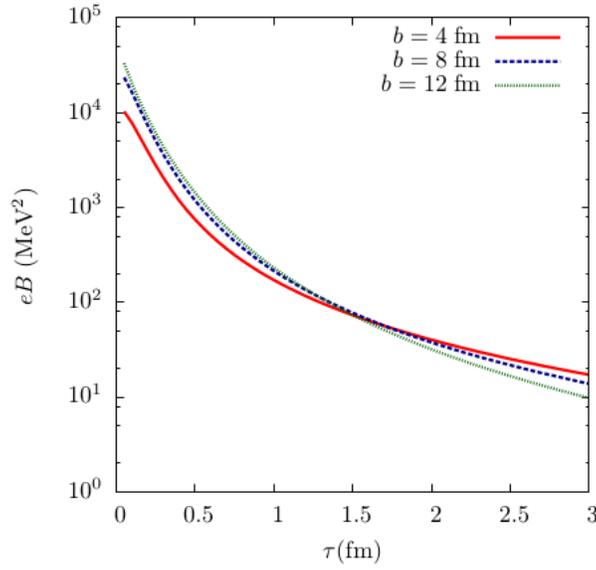


Figura 1.2.4: Campo magnético en el centro de una colisión Au-Au para diferentes parámetros de impacto: $b = 4, 8, 12 \text{ fm}$ [9]. Como se aprecia en la gráfica, el campo magnético decrece rápidamente con el tiempo. Para $\tau = 1.5 \text{ fm}$ el campo magnético ha disminuido casi 3 órdenes de magnitud.

espectadores donde $f = v_0$. Para los participantes se encuentra

$$B_P^\pm(\mathbf{x}) = \pm q \alpha_{EM} \int d^2 \mathbf{x}'_\perp \int_{-v_0}^{v_0} dv f \sinh(v_0 \mp \eta) \rho_\pm(\mathbf{x}'_\perp) \theta_\mp(\mathbf{x}'_\perp) \\ \times \frac{(\mathbf{x}'_\perp - \mathbf{x}_\perp) \times \hat{z}}{[(\mathbf{x}'_\perp - \mathbf{x}_\perp)^2 + \tau \sinh(v_0 \mp \eta)^2]^{3/2}}.$$

Kharzeev et al. han evaluado numéricamente la magnitud que pueden alcanzar estos campos magnéticos en colisiones de iones pesados. Para colisiones de oro ($R = 79 \text{ fm}$) y para diferentes valores de rapidez ($Y = 4.19, Y = 5.36$) los resultados se muestran en la Fig. 1.2.4. El campo magnético medido en el origen apunta en dirección y . Especialmente para parámetros de impacto grandes el campo magnético que se produce es mayor que para parámetros de impacto menores, sin embargo, este disminuye más rápidamente que el campo que se produce con parámetros de impacto menores.

Vemos entonces que en distintos sistemas físicos aparecen de forma natural campos magnéticos que pueden influir en el tipo de transición de fase que tales sistemas presentan. En el siguiente capítulo el esquema teórico que permite calcular el efecto de estos campos magnéticos dentro de una teoría cuántica de campos, el llamado formalismo del tiempo propio de Schwinger.

2 Propagador en presencia de campo magnético

El problema de partículas cargadas interactuando con campos electromagnéticos es de interés general no sólo desde el punto de vista académico sino también porque en configuraciones especiales de campo homogéneo externo es relativamente simple de tratar, además de ser una forma realista de aproximar algunas situaciones físicas. Se sabe que la presencia de un campo magnético externo sobre un sistema físico determina las propiedades físicas de este. Un ejemplo simple a nivel clásico es el comportamiento de partículas cargadas que se muevan bajo la influencia de un campo magnético constante. En este caso el campo externo rompe la isotropía del espacio y el movimiento de las cargas estará descrito por la ley de Lorentz.

Una cantidad importante en teoría de campos es el propagador o función de Green, la cual contiene toda la información del sistema físico. En este trabajo estamos interesados en incorporar efectos de campo magnético mediante la propagación de un campo escalar en presencia de un campo magnético externo constante. Para esto es necesario emplear las técnicas apropiadas que nos permitan hacer esta implementación. Se han desarrollado una variedad de técnicas para el cálculo de la función de propagación en presencia de un campo magnético externo constante, podemos citar a Schwinger, Feynman, Dittrich, etc. que tienen en común el uso de método del tiempo propio.

En el tratamiento de Schwinger, el cual seguiremos en este trabajo, el parámetro llamado tiempo propio juega el papel del tiempo en las ecuaciones de movimiento y estas ecuaciones sólo involucran los campos electromagnéticos. La utilidad de la técnica del tiempo propio, además de obtener soluciones exactas formales en algunos pocos casos de forma sencilla, está en el aislamiento de divergencias en el cálculo de integrales con respecto al tiempo propio, un parámetro que no hace referencia al sistema de coordenadas o la norma. En el trabajo de Schwinger se dan soluciones explícitas en dos configuraciones de campo constante.

Este capítulo se centra en presentar el método del tiempo propio de Schwinger y se usa

para dar una expresión exacta del propagador escalar sometido a un campo magnético uniforme constante.

2.1. Método del tiempo propio

El método del tiempo propio fue introducido por Schwinger en 1951. Fue desarrollado para tratar acciones efectivas en QED y desde entonces ha sido empleado en diversos problemas relativistas[10]. Está basado en la solución de las ecuaciones de Heisenberg, el uso de productos ordenados de operadores y condiciones iniciales. La idea es considerar H como un Hamiltoniano que describe la evolución en el tiempo propio de algún sistema, para el cual buscamos la función de Green $G(x, x')$ que satisface[11]

$$H(x, i\partial_x) G(x, x') = \delta^4(x - x') \quad (2.1.1)$$

donde H es un polinomio en ∂_x . La ecuación anterior es la definición de la función de Green para $H(x, p)$ en la representación x , en donde

$$\begin{aligned} \langle x | x' \rangle &= \delta^4(x - x') \\ [x^\mu, p^\nu] &= -ig^{\mu\nu} \\ p_\mu &= i\partial_\mu \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

Introducimos ahora el operador de evolución temporal $U(x, x'; s)$ mediante la ecuación

$$i\frac{\partial}{\partial s} U(x, x'; s) = H(x, p) U(x, x'; s) \quad (2.1.3)$$

y las condiciones de borde

$$\lim_{s \rightarrow 0} U(x, x'; s) = \delta^4(x - x'), \quad (2.1.4)$$

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} U(x, x'; s) = 0, \quad (2.1.5)$$

tenemos entonces

$$U(x, x'; s) = \langle x | e^{-iHs} | x' \rangle \equiv \langle x | U(s) | x' \rangle \quad (2.1.6)$$

$$G(x, x') = -i \int_{-\infty}^0 ds U(x, x'; s). \quad (2.1.7)$$

2 Propagador en presencia de campo magnético

La ecuación 2.1.3 puede escribirse como

$$\begin{aligned} i\partial_s \langle x | U(s) | x' \rangle &= \langle x | H(x, p) U(s) | x' \rangle \\ &= \langle x | U(s) U^\dagger(s) H(x, p) U(s) | x' \rangle, \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

o de otra forma

$$i\partial_s \langle x(s) | x'(0) \rangle = \langle x(s) | H(x(s), p(s)) | x'(0) \rangle. \quad (2.1.9)$$

Expresamos ahora $H(x(s), p(s))$ como función de los operadores $x(s)$ y $x'(0)$ ordenados apropiadamente:

$$\langle x(s) | H(x(s), p(s)) | x'(0) \rangle = F(x, x'; s) \langle x(s) | x'(0) \rangle. \quad (2.1.10)$$

Con esto la ecuación para $U(x, x'; s)$ se convierte en una ecuación diferencial lineal ordinaria que se puede integrar

$$U(x, x'; s) = \exp \left[-i \int^s ds' F(x, x'; s') \right] C(x, x'), \quad (2.1.11)$$

donde la función $C(x, x')$ tiene que ser determinada de tal modo que $U(x, x'; s)$ satisfaga las relaciones correctas entre posición y momento; por ejemplo

$$[i\partial_\mu^x - eA_\mu(x)] \langle x(s) | x'(0) \rangle = \langle x(s) | \pi_\mu(s) | x(0) \rangle \quad (2.1.12)$$

$$[i\partial_\mu^x - eA_\mu(x)] \langle x(s) | x'(0) \rangle = \langle x(s) | \pi_\mu(0) | x(0) \rangle, \quad (2.1.13)$$

donde

$$\pi_\mu \equiv p_\mu - eA_\mu. \quad (2.1.14)$$

2.2. Propagador escalar en presencia de campo magnético

En el caso de una partícula escalar que interactúa con un campo magnético externo calculemos la evolución temporal tomando como operador Hamiltoniano

$$H = \pi^2,$$

y escojamos el campo magnético $\mathbf{B} = B\hat{z}$. Esta elección del campo magnético nos per-

2 Propagador en presencia de campo magnético

mite distinguir entre direcciones preferenciales y descomponer el Hamiltoniano en parte transversal y paralela que más adelante nos ayudará a simplificar los cálculos. Usemos el método de Schwinger para calcular el propagador. Procedamos entonces con el cálculo de los elementos de matriz del lado derecho de la Ec. 2.1.9[12], para esto requerimos resolver las ecuaciones de Heisenberg y escribir H en términos de los operadores $x(s)$ y $x(0)$ apropiadamente ordenados[13]:

$$\frac{dx_\mu(s)}{ds} = i[H, x_\mu], \quad (2.2.1)$$

$$\frac{d\pi_\mu(s)}{ds} = i[H, \pi_\mu], \quad (2.2.2)$$

el cálculo del conmutador entre el Hamiltoniano y el operador de posición resulta ser

$$\begin{aligned} [H, x_\mu] &= [\pi^\nu \pi_\nu, x_\mu] \\ &= \pi^\nu [\pi_\nu, x_\mu] + [\pi^\nu, x_\mu] \pi_\nu \\ &= 2i\pi_\mu, \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

mientras que

$$\begin{aligned} [H, \pi_\mu] &= [\pi^\nu \pi_\nu, \pi_\mu] \\ &= \pi^\nu [\pi_\nu, \pi_\mu] + [\pi^\nu, \pi_\mu] \pi_\nu \\ &= ie(\pi^\nu F_{\mu\nu} + F_{\mu\nu} \pi^\nu) \\ &= ie(2F_{\mu\nu} \pi^\nu + i\partial^\nu F_{\mu\nu}), \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

para calcular este último se ha hecho uso de $[\pi_\nu, \pi_\mu] = ieF_{\mu\nu}$, $\pi^\nu F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} \pi^\nu + i\partial^\nu F_{\mu\nu}$. Considerando que para nuestro caso de campo constante $\partial^\nu F_{\mu\nu} = 0$, las ecuaciones 2.2.1 y 2.2.2 se escriben ahora como

$$\frac{dx_\mu}{ds} = -2\pi_\mu, \quad (2.2.5)$$

$$\frac{d\pi_\mu}{ds} = -2eF_{\mu\nu} \pi^\nu. \quad (2.2.6)$$

Es conveniente introducir la notación

$$a_{\parallel} = (a^0, 0, 0, a^3), \quad a_{\perp} = (0, -a^1, -a^2, 0), \quad (2.2.7)$$

2 Propagador en presencia de campo magnético

para vectores arbitrarios a, b . Con estas definiciones

$$(a \cdot b)_{\parallel} = a^0 b^0 - a^3 b^3, \quad (2.2.8)$$

$$(a \cdot b)_{\perp} = a^1 b^1 + a^2 b^2. \quad (2.2.9)$$

Al separar las Ecs. 2.2.5 y 2.2.6 en parte perpendicular y paralela, estas toman la forma

$$\begin{cases} \frac{dx_{\perp}}{ds} = -2\pi_{\perp} \\ \frac{d\pi_{\perp}}{ds} = -2eF^{ij}\pi_j, \quad i, j = 1, 2 \end{cases} \quad (2.2.10)$$

$$\begin{cases} \frac{dx_{\parallel}}{ds} = -2p_{\parallel} \\ \frac{dp_{\parallel}}{ds} = 0 \end{cases} \quad (2.2.11)$$

Trabajemos primero con el conjunto de ecuaciones correspondientes a la componente transversal. Resolvamos el sistema que corresponde a la componente transversal empleando lenguaje matricial, para esto introduzcamos la siguiente notación

$$X_{\perp}(s) = \begin{pmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{pmatrix}; \quad \Pi_{\perp}(s) = \begin{pmatrix} \pi_1(s) \\ \pi_2(s) \end{pmatrix}, \quad (2.2.12)$$

en este lenguaje, las Ecs. 2.2.10 se escriben simplemente como

$$\frac{dX_{\perp}(s)}{ds} = -2\Pi_{\perp}(s), \quad (2.2.13)$$

$$\frac{d\Pi_{\perp}(s)}{ds} = -2eB\mathbb{F}\Pi_{\perp}(s), \quad (2.2.14)$$

donde $\mathbb{F} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Integrando la ecuación 2.2.14 tenemos

$$\Pi_{\perp}(s) = e^{-2eB\mathbb{F}s}\Pi_{\perp}(0). \quad (2.2.15)$$

Sustituyendo en la ecuación 2.2.13 e integrando una vez más se tiene

$$X_{\perp}(s) - X_{\perp}(0) = -\frac{2 \sin(eBs)}{eB} e^{-eB\mathbb{F}s} \Pi_{\perp}(0), \quad (2.2.16)$$

donde se han ocupado las siguientes propiedades de la matriz \mathbb{F} : $\mathbb{F}^2 = -\mathbb{I}$, $\mathbb{F}^{-1} = -\mathbb{F} = \mathbb{F}^T$,

2 Propagador en presencia de campo magnético

$e^{\alpha\mathbb{F}} = \cos(\alpha)\mathbb{I} + \sin(\alpha)\mathbb{F}$, donde \mathbb{F}^T corresponde a la transpuesta de \mathbb{F} . Combinando las ecuaciones 2.2.15 y 2.2.16 se puede escribir $\Pi(0)$ en términos de los operadores $X(s)$ y $X(0)$ como

$$\Pi_{\perp}(0) = -\frac{eB}{2\sin(eBs)}e^{eB\mathbb{F}s}(X_{\perp}(s) - X_{\perp}(0)). \quad (2.2.17)$$

El siguiente paso es escribir el Hamiltoniano como función de los operadores $X_{\perp}(0)$ y $X_{\perp}(s)$ con la ayuda de la ecuación anterior. Además los operadores de posición tienen que aparecer en el orden adecuado, a saber, el operador $X(s)$ tiene que aparecer a la izquierda de cada término, mientras que $X(0)$ debe aparecer del lado derecho en cada término. Luego se tiene

$$\begin{aligned} H_{\perp} &= \Pi_{\perp}^{\dagger}(0)\Pi_{\perp}(0) \\ &= \frac{(eB)^2}{4\sin^2(eBs)} \\ &\times \left(X_{\perp}^{\dagger}(s)X_{\perp}(s) - X_{\perp}^{\dagger}(0)X_{\perp}(s) - X_{\perp}^{\dagger}(s)X_{\perp}(0) + X_{\perp}^{\dagger}(0)X_{\perp}(0) \right), \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

el último término en el lado derecho de la 2.2.18 no está ordenado apropiadamente. Para escribir el Hamiltoniano con los operadores en el orden correcto notemos que

$$X_{\perp}^{\dagger}(0)X_{\perp}(s) - X_{\perp}^{\dagger}(s)X_{\perp}(0) = \sum_{i=1}^2 [x_i(0), x_i(s)], \quad (2.2.19)$$

y usando la Ec. 2.2.16, el conmutador $[x_i(0), \pi_j(0)] = i\delta_{ij}$ y las propiedades de la matriz \mathbb{F} se puede mostrar que

$$\sum_{i=1}^2 [x_i(0), x_i(s)] = 4i\frac{\sin(eBs)}{eB}\cos(eBs). \quad (2.2.20)$$

Se tiene entonces que H_{\perp} escrito con los operadores de posición en el orden adecuado es

$$\begin{aligned} H_{\perp} &= \frac{(eB)^2}{4\sin^2(eBs)} \left(X_{\perp}^{\dagger}(s)X_{\perp}(s) + X_{\perp}^{\dagger}(0)X_{\perp}(0) - 2X_{\perp}^{\dagger}(s)X_{\perp}(0) \right) \\ &- ieB\cot(eBs). \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

2 Propagador en presencia de campo magnético

Similarmente, la parte longitudinal de las ecuaciones de Heisenberg es

$$\frac{dX_{\parallel}(s)}{ds} = -2\Pi_{\parallel}(s), \quad (2.2.22)$$

$$\frac{d\Pi_{\parallel}(s)}{ds} = 0, \quad (2.2.23)$$

y lo que resta es escribir H_{\parallel} en términos de los operadores de posición en el orden adecuado. Para este fin ocupamos

$$X_{\parallel}(0) \cdot X_{\parallel}(s) = X_{\parallel}(s) \cdot X_{\parallel}(0) + i2s. \quad (2.2.24)$$

Por lo tanto

$$H_{\parallel} = \Pi_{\parallel}^2(s) \quad (2.2.25)$$

$$= \frac{1}{4s^2} (X_{\parallel}^2(s) + X_{\parallel}^2(0) - 2X_{\parallel}^T(s) \cdot X_{\parallel}(0) - i4s). \quad (2.2.26)$$

El par de Ecs. 2.2.21 y 2.2.26 nos permite escribir el Hamiltoniano total de la forma

$$\begin{aligned} H &= \Pi_{\perp}^2 + \Pi_{\parallel}^2 \\ &= \frac{(eB)^2}{4 \sin^2(eBs)} \left(X_{\perp}^{\dagger}(s) X_{\perp}(s) + X^{\dagger}(0) X_{\perp}(0) - 2X_{\perp}^{\dagger}(s) X_{\perp}(0) \right) \\ &\quad - ieB \cot(eBs) \\ &\quad + \frac{1}{4s^2} \left(X_{\parallel}^{\dagger}(s) X_{\parallel}(s) + X_{\parallel}^{\dagger}(0) X_{\parallel}(0) - 2X_{\parallel}^{\dagger}(s) \cdot X_{\parallel}(0) - i4s \right). \end{aligned} \quad (2.2.27)$$

Una vez escrito el Hamiltoniano de esta forma, se puede evaluar el lado derecho de la ecuación diferencial que define al propagador, Ec. 2.1.9

$$\langle x(s) | x''(0) \rangle = \langle x'(s) | H | x''(0) \rangle, \quad (2.2.28)$$

2 Propagador en presencia de campo magnético

esto es

$$\begin{aligned}
 \langle x'(s) | H | x''(0) \rangle &= \langle x'(s) | H_{\parallel} + H_{\perp} | x''(0) \rangle \\
 &= \left\langle x'(s) \left| \frac{(eB)^2}{4 \sin^2(eBs)} \left(X_{\perp}^2(s) + X_{\perp}^2(0) - 2X_{\perp}^{\dagger}(s) X_{\perp}(0) \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - ieB \cot(eBs) \right| x''(0) \right\rangle \\
 &\quad + \frac{1}{4s} \left\langle x'(s) \left| \left(X_{\parallel}^2(s) + X_{\parallel}^2(0) - 2X_{\parallel}^{\dagger}(s) \cdot X_{\parallel}(0) - i4s \right) \right| x''(0) \right\rangle \\
 &= \langle x'(s) | x''(0) \rangle \\
 &\times \left\{ \frac{(eB)^2}{4 \sin^2(eBs)} (x'_{\perp}{}^2 + x''_{\perp}{}^2 - 2x'_{\perp} x''_{\perp}) \right. \\
 &\quad \left. - ieB \cot(eBs) + \frac{1}{4s} (x'_{\parallel}{}^2 + x''_{\parallel}{}^2 - 2x'_{\parallel} x''_{\parallel} - i4s) \right\}. \tag{2.2.29}
 \end{aligned}$$

Integrando la Ec. 2.2.28 se tiene

$$\langle x'(s) | x''(0) \rangle = \frac{C(x', x'')}{s \sin(eBs)} e^{\frac{ieB}{4}(x' - x'')_{\perp}^2 \cot(eBs) + \frac{i}{4s}(x' - x'')_{\parallel}^2}, \tag{2.2.30}$$

donde $C(x', x'')$ es una función por hallar a partir de condiciones de borde. Para determinar la función $C(r, r')$ empleamos

$$\begin{aligned}
 \langle x'(s) | \pi_{\mu}(s) | x''(0) \rangle &= \left(-i \frac{\partial}{\partial x'_{\mu}} - eA_{\mu}(x') \right) \langle x'(s) | x''(0) \rangle \\
 \langle x'(s) | \pi_{\mu}(0) | x''(0) \rangle &= \left(i \frac{\partial}{\partial x''_{\mu}} - eA_{\mu}(x'') \right) \langle x'(s) | x''(0) \rangle, \tag{2.2.31}
 \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}
 \langle x'(s) | \pi_{\perp}(s) | x''(0) \rangle &= -\frac{eB}{2} \langle x'(s) | x''(0) \rangle \\
 &\quad \times (\cot(eBs) (x'_j - x''_j) + \epsilon_{jk3} (x'_k - x''_k)) \tag{2.2.32}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle x'(s) | \pi_{\perp}(0) | x''(0) \rangle &= -\frac{eB}{2} \langle x'(s) | x''(0) \rangle \\
 &\quad \times (\cot(eBs) (x'_j - x''_j) - \epsilon_{jk3} (x'_k - x''_k)), \tag{2.2.33}
 \end{aligned}$$

2 Propagador en presencia de campo magnético

de donde se obtienen el siguiente sistema de ecuaciones para la función $C(x', x'')$

$$\left(i \frac{\partial}{\partial x'_\mu} + eA_\mu(x') + \frac{eB}{2} F_{\mu\nu}(x' - x'')_\nu \right) C(x', x'') = 0, \quad (2.2.34)$$

$$\left(i \frac{\partial}{\partial x''_\mu} - eA_\mu(x'') - \frac{eB}{2} F_{\mu\nu}(x' - x'')_\nu \right) C(x', x'') = 0. \quad (2.2.35)$$

La solución al sistema de ecuaciones es

$$C(x', x'') = C(x'') e^{ie \int dx (A_j(x) + \frac{1}{2} F(x-x''))}, \quad (2.2.36)$$

en donde la integral en la Ec. 2.2.36 no depende de la trayectoria de integración ya que el rotacional del integrando es cero. Eligiendo como trayectoria de integración una línea recta se puede mostrar que el segundo término en la integral del exponente de la Ec. 2.2.36 no contribuye de modo que

$$C(x', x'') = C_0 e^{ie \int_{x''}^{x'} dx A(x)}. \quad (2.2.37)$$

Para determinar C_0 usamos la Ec. 2.2.30 y la condición 2.1.4. El valor de las constante es

$$C_0 = -\frac{ieB}{(4\pi)^2}. \quad (2.2.38)$$

De forma similar para la parte longitudinal la constante que acompaña al propagador es

$$C_0 = \frac{1}{4\pi i}.$$

La Ec.2.2.30 se escribe entonces como

$$G(x', x'') = -\frac{eB}{(4\pi)^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \frac{\phi(x', x'')}{\sin(eBs)} e^{-im^2 s + i \frac{eB}{4} (x' - x'')_\perp^2 \cot(eBs) + \frac{i}{4s} (x' - x'')_\parallel^2} \quad (2.2.39)$$

donde $\phi(x', x'') = e^{ie \int_{x''}^{x'} dx A(x)}$. Es conveniente reescribir la Ec. 2.2.39 en representación de momento[14]

$$\begin{aligned} G(x', x'') &= \phi(x', x'') \mathcal{G}(x' - x'') \\ &= \phi(x', x'') \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (x' - x'')} \mathcal{G}(k), \end{aligned} \quad (2.2.40)$$

2 Propagador en presencia de campo magnético

donde

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(k) &= \int \frac{d^4x}{(2\pi)^4} e^{ik \cdot x} \mathcal{G}(x) \\ &= \int \frac{ds}{\cos(eBs)} e^{-is(m^2 + k_{\parallel}^2 + \frac{\tan(eBs)}{eBs} k_{\perp}^2)}.\end{aligned}\quad (2.2.41)$$

Para obtener la Ec. 2.2.41 se realizaron explícitamente las integrales espaciales que involucran integrales Gaussianas.

2.3. Propagador fermiónico y bosónico en presencia de campo magnético

A manera de completez se bosqueja la demostración de la obtención del propagador para una partícula fermiónica en presencia de campo magnético y se da a conocer el de una partícula de norma. El cálculo para estos propagadores sigue las mismas líneas que el caso del propagador escalar.

La función de Green asociada a un campo de Dirac satisface la siguiente ecuación

$$(\not{\mathbb{I}} - m) G(x, x') = \delta^4(x, x'), \quad (2.3.1)$$

donde $\not{\mathbb{I}} = \Pi_{\mu} \gamma^{\mu}$ y $\Pi_{\mu} = P_{\mu} + eA_{\mu}$. Las siguientes relaciones de conmutación se satisfacen

$$[\Pi_{\mu}, x] = ig_{\mu\nu}, \quad (2.3.2)$$

$$[\Pi_{\mu}, \Pi_{\nu}] = ieF_{\mu\nu}^{ext}, \quad (2.3.3)$$

donde $F_{\mu\nu}^{ext} = \partial_{\mu} B_{\nu} - \partial_{\nu} B_{\mu}$ es el tensor de campo electromagnético.

Escribiendo de forma matricial la Ec. 2.3.1 se tiene

$$(\not{\mathbb{I}} - m) G = 1, \quad (2.3.4)$$

de aquí se tiene

$$G(x, x') = -i \int_0^{\infty} ds e^{-im^2s} \langle x'(0) | (\not{\mathbb{I}} + m) U(s) | x(0) \rangle, \quad (2.3.5)$$

2 Propagador en presencia de campo magnético

donde $U(s) = e^{-iHs}$ es el operador de evolución temporal para H , la cual esta dada por

$$\begin{aligned} H &= (\mathbb{H})^2 \\ &= -\Pi^2 - \frac{1}{2}e\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

Las ecuaciones de Heisenberg para los operadores de posición y momento son

$$\frac{dx_\mu}{ds} = -i[\Pi_\mu, H] \quad (2.3.7)$$

$$= 2\Pi_\mu \quad (2.3.8)$$

$$\frac{d\Pi_\mu}{ds} = -i[x_\mu, H] \quad (2.3.9)$$

$$= -2F_{\mu\nu}\Pi^\nu, \quad (2.3.10)$$

donde se ha considerado el caso de campo constante.

Recordemos que la ecuación que define al propagador es

$$i\partial_s \langle x'(0) | x(0) \rangle = \langle x'(0) | H(x, p) | x(s) \rangle. \quad (2.3.11)$$

Haciendo uso de las relaciones de conmutación y de las ecuaciones de Heisenberg, H se escribe en términos de los operadores de posición ordenados adecuadamente

$$\begin{aligned} H &= -x(s)Kx(s) + x(s)Kx(0) - x(0)Kx(0) - \frac{1}{2}e\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ &\quad - \frac{i}{2}Tr[eF \coth(eFs)] - m^2, \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

donde $K = \frac{1}{4}(eF)^2 [\sinh(eFs)]^{-2}$.

Con el Hamiltoniano ordenado adecuadamente, los elementos de matriz del lado derecho de la Ec.2.3.11 se pueden evaluar directamente

$$\begin{aligned} \langle x'(0) | H(x, p) | x(s) \rangle &= -\frac{1}{2}e\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - (x - x')K(x - x') \\ &\quad - \frac{i}{2}Tr[eF \coth(eFs)] \langle x'(0) | x(s) \rangle. \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

2 Propagador en presencia de campo magnético

Sustituyendo en la Ec. 2.3.11 y haciendo una integración sobre s tenemos

$$\begin{aligned} \langle x'(0) | x(s) \rangle &= C(x, x') s^{-2} \exp \left[-\frac{1}{2} \text{Tr} \ln [(eFs)^{-1} \sinh(eFs)] \right] \\ &\times \exp \left[\frac{-i}{4} (x - x') eF \coth(eFs) (x - x') + \frac{i}{2} e\sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right]. \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

La función $C(x, x')$ se determina a partir de las condiciones

$$\begin{aligned} (i\partial_\mu + eA_\mu(x)) \langle x'(0) | x(s) \rangle &= \langle x'(0) | \Pi_\mu(s) | x(0) \rangle, \\ (-i\partial'_\mu + eA_\mu(x')) \langle x'(0) | x(s) \rangle &= \langle x'(0) | \Pi_\mu(0) | x(0) \rangle. \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

El lado derecho de la Ec. 2.3.15 está dado por

$$\begin{aligned} \langle x'(0) | \Pi_\mu(s) | x(s) \rangle &= \frac{1}{2} [eF \coth(eFs) - eF] (x - x') \langle x'(0) | x(s) \rangle, \\ \langle x'(0) | \Pi_\mu(0) | x(s) \rangle &= \frac{1}{2} [eF \coth(eFs) - eF] (x - x') \langle x'(0) | x(s) \rangle. \end{aligned} \quad (2.3.16)$$

Con lo anterior, la función $C(x, x')$ queda determinada por las siguientes ecuaciones

$$\left[i\partial_\mu + eA_\mu(x) - \frac{1}{2} eF_{\mu\nu} (x - x')^\nu \right] C(x, x') = 0 \quad (2.3.17)$$

$$\left[-i\partial'_\mu + eA_\mu(x') + \frac{1}{2} eF_{\mu\nu} (x - x')^\nu \right] C(x, x') = 0. \quad (2.3.18)$$

La solución de este sistema de ecuaciones nos da

$$\begin{aligned} C(x, x') &= C(x') \exp \left[ie \int_{x'}^x d\xi \left(A_\mu + \frac{1}{2} eF_{\mu\nu} (\xi - x')^\nu \right) \right] \\ &= C(x) \exp \left[ie \int_{x'}^x d\xi \left(A_\mu + \frac{1}{2} eF_{\mu\nu} (\xi - x')^\nu \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.3.19)$$

se puede mostrar que el rotacional del integrando es nulo por lo que la integral en la Ec. 2.3.17 es independiente de la trayectoria entre x y x' . Escogiendo una línea recta como trayectoria de integración podemos escribir $C(x, x')$ de la forma

$$C(x, x') = C \exp \left[ie \int_{x'}^x d\xi A_\mu(\xi) \right]. \quad (2.3.20)$$

2 Propagador en presencia de campo magnético

De las condiciones de frontera sobre el propagador se determina la constante C

$$C = -i(4\pi)^{-2}. \quad (2.3.21)$$

El propagador fermiónico para fermiones cargados en presencia de campo magnético lo podemos escribir como

$$G(x, x') = \Phi(x, x') \mathcal{G}(x, x'), \quad (2.3.22)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(x, x') = & -(4\pi)^{-2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^2} \left[m + \frac{1}{2} \gamma (eF \coth(eFs) - eF) (x - x') \right] \\ & \times \exp \left[\frac{i}{2} \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - im^2 s \right] \\ & \times \exp \left[-\frac{1}{2} \text{Tr} \ln \left((eFs)^{-1} \sinh(eFs) \right) - \frac{i}{4} (x - x') (eF \coth(eFs)) (x - x') \right] \end{aligned} \quad (2.3.23)$$

y

$$\Phi(x - x') = \exp \left[ie \int_{x'}^x d\xi^\mu A_\mu(\xi) \right]. \quad (2.3.24)$$

En el caso particular de un campo magnético constante en la dirección z , solamente las componentes $F_{12} = -F_{21} = B$ son distintas de cero. El propagador se simplifica un poco y lo podemos escribir como sigue

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(x, x') = & -i(4\pi)^{-2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^2} \frac{eBs}{\sin(eBs)} \exp \left[-i(m^2 + i\epsilon) s + ieBs\sigma_3 \right] \\ & \times \exp \left[-\frac{i}{4s} x_\parallel^2 - eBs \cot(eBs) x_\perp^2 \right] \\ & \times \left[m + \frac{1}{2s} \left(\gamma \cdot x_\parallel - \frac{eBs}{\sin(eBs)} \exp(-ieBs\sigma_3) \gamma \cdot x_\perp \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.3.25)$$

La representación en el espacio de momentos del propagador se obtiene haciendo una transformada de Fourier

$$\mathcal{G}(x, x') = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (x-x')} \mathcal{G}(p). \quad (2.3.26)$$

Finalmente después de efectuar integrales Gaussianas como en el caso escalar, el propaga-

2 Propagador en presencia de campo magnético

el propagador fermiónico se escribe como[15][16]

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}_B(k) &= -i \int_0^\infty \frac{ds}{\cos(eBs)} \\
 &\times \exp \left\{ is \left(k_\parallel^2 + k_\perp^2 \frac{\tan(eBs)}{eBs} - m^2 + i\epsilon \right) \right\} \\
 &\times \left((m + k_\parallel) e^{i\epsilon Bs \sigma_3} - \frac{k_\perp}{\cos(eBs)} \right), \tag{2.3.27}
 \end{aligned}$$

donde m es la masa del fermión correspondiente.

Este método de tiempo propio se ha extendido también al caso de otros campos como los bosones vectoriales cargados W^\pm para los cuales se tiene

$$iG_B^{\mu\nu}(x, x') = \Phi(x, x') \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (x-x')} G^{\mu\nu}(k). \tag{2.3.28}$$

En el espacio de momento las partes traslacionalmente invariantes del propagador anterior son

$$\begin{aligned}
 iG_B^{\mu\nu}(k) &= \int_0^\infty \frac{ds}{\cos(eBs)} e^{is(k_\parallel^2 - k_\perp^2 \frac{\tan(eBs)}{eBs} - m^2 + i\epsilon)} \\
 &\times \left\{ \left[g_\parallel^{\mu\nu} + g_\perp^{\mu\nu} \cos(2eBs) \right] + F^{\mu\nu} \frac{\sin(2eBs)}{B} - \left(\frac{1 - e^{-is(1-\xi)M^2}}{M^2} \right) \right. \\
 &+ \left[(k^\mu + k_\lambda F^{\mu\lambda}(\tan(eBs)) / B) \times ((k^\nu + k_\rho F^{\rho\nu}(\tan(eBs)) / B) \right. \\
 &\left. \left. + i \frac{e}{2} (F^{\mu\nu} - g_\perp^{\mu\nu}) B \tan(eBs) \right] \right\}. \tag{2.3.29}
 \end{aligned}$$

Cada uno de los propagadores anteriores representan la interacción de alguna partícula, ya sea escalar, fermiónica o de norma, con el campo magnético. En este trabajo consideraremos partículas escalares por lo que sólo ocuparemos el propagador escalar. Sin embargo, un trabajo más completo en el que se incluyan partículas bosónicas y fermiónicas requeriría el uso de estos propagadores.

En el capítulo 4 retomaremos el propagador escalar que hemos obtenido en este capítulo para introducir el efecto de campo magnético sobre el campo escalar en el cálculo del potencial efectivo. En el capítulo siguiente desarrollaremos el formalismo de teoría térmica de campos, que es el marco teórico en el que se basa nuestro trabajo.

3 Teoría térmica de campos

La teoría térmica de campos tiene sus orígenes en los años 50 en la descripción de materia condensada bajo condiciones normales de laboratorio pero fue reinventada y estudiada en 1965 por Fradkin. Su principal motivación fue el estudio de la transición de fase que ocurría en la teoría electrodébil a temperatura finita.

La teoría térmica de campos (TTC) es una combinación de la teoría cuántica de campos y la mecánica estadística. La razón por la que estudiamos TTC es que al juntar estos dos formalismos tenemos la herramienta necesaria para estudiar sistemas sujetos a condiciones extremas de temperatura y densidad. Las aplicaciones son varias; el universo temprano, cosmología, transiciones de fase en QCD, estrellas compactas, etc.

El universo temprano está constituido en su mayoría de materia, y sólo una mínima cantidad de antimateria. Al proceso por el cual ocurrió este fenómeno se le conoce como bariogénesis, y de acuerdo con las condiciones de Shakarov, el universo tuvo que haber estado en desequilibrio, además de que debió haber violación de número bariónico y violación de CP. Aunque la violación de número bariónico está considerablemente suprimida a $T = 0$, a altas temperaturas no es así. Se tiene entonces que el universo temprano es un escenario óptimo para la ocurrencia de bariogénesis y por esto ha sido objeto de una amplia investigación.

La otra aplicación importante de la teoría térmica de campos es en colisiones de iones pesados. En años recientes se hizo factible la creación en el laboratorio del llamado plasma de quarks y gluones. Cálculos de lattice apuntan a que QCD sufra una transición de fase a una temperatura crítica por encima de la cual los quarks y gluones están desconfiados y donde la simetría quiral se restaura. En este escenario la materia está descrita en términos de un plasma de quarks y gluones interactuantes y los procesos que ocurren en este plasma se estudian a través de TTC.

La teoría térmica de campos es la herramienta para describir los anteriormente mencionados fenómenos. Aunque existen varios formalismos, en este capítulo se sigue la formulación de tiempo imaginario. La otra alternativa es el formalismo de tiempo real, la cual a diferencia del formalismo de tiempo imaginario, puede describir fenómenos fuera de equi-

libro. A continuación se muestran los aspectos generales de la teoría y se ejemplifica la teoría con el caso de un campo escalar.

3.1. Formalismo del tiempo imaginario

En la imagen de Schrödinger, sean $\hat{\phi}(x, 0)$ un operador de campo al tiempo $t = 0$ y $\hat{\pi}(x, 0)$ su operador de momento conjugado. Etiquetemos los eigenestados del operador de campo como $|\phi\rangle$ que satisfacen[17]

$$\hat{\phi}(x, 0) |\phi\rangle = \phi(x) |\phi\rangle, \quad (3.1.1)$$

donde $\phi(x)$ es el eigenvalor. Además se satisfacen las relaciones de completos y ortogonalidad

$$\int d\phi(x) |\phi\rangle \langle\phi| = 1 \quad (3.1.2)$$

$$\langle\phi_a | \phi_b\rangle = \delta[\phi_a(x) - \phi_b(x)]. \quad (3.1.3)$$

De forma similar, para el operador de momento los eigenestados están etiquetados por $|\pi\rangle$ y satisfacen

$$\hat{\pi}(x, 0) |\pi\rangle = \pi(x) |\pi\rangle. \quad (3.1.4)$$

Y las condiciones de completos y ortogonalidad son

$$\int \frac{d\phi(x)}{2\pi} |\pi\rangle \langle\pi| = 1 \quad (3.1.5)$$

$$\langle\pi_a | \pi_b\rangle = \delta[\pi_a(x) - \pi_b(x)]. \quad (3.1.6)$$

En teoría de campos, el traslape se puede definir de la siguiente manera

$$\langle\phi | \pi\rangle = \exp \left[i \int d^3x \pi(x) \phi(x) \right]. \quad (3.1.7)$$

Esta es una generalización natural de la mecánica cuántica a un número infinito de grados de libertad en teoría cuántica de campos.

La dinámica del sistema está contenida en el Hamiltoniano, el cual se expresa como una funcional del campo y de su momento conjugado

$$H = \int d^3x \mathcal{H}(\hat{\pi}, \hat{\phi}). \quad (3.1.8)$$

3 Teoría térmica de campos

Dado el Hamiltoniano, podemos definir el operador de evolución que lleva el estado $|\phi_a\rangle$, al tiempo $t = 0$, al estado $e^{-iHt_f} |\phi_a\rangle$ al tiempo t_f . Se tiene pues que, la amplitud de transición de ir del estado $|\phi_a\rangle$ al estado $|\phi_b\rangle$, después de un tiempo t_f , es $\langle \phi_a | e^{-iHt_f} | \phi_b \rangle$.

Querimos de la mecánica estadística para describir el comportamiento de un sistema de muchas partículas en teoría de campos. Por este motivo, estamos interesados en el caso en que el sistema regresa al estado inicial después de un tiempo t_f . Con el fin de evaluar la amplitud de transición en la que estamos interesados, a saber $\langle \phi_a | e^{-iHt_f} | \phi_a \rangle$, dividimos el intervalo temporal $(0, t_f)$ en N subintervalos $\Delta t = t_f/N$. Ahora, en cada subintervalo de tiempo insertamos un conjunto completo de estados, alternando entre estados de campo 3.1.2 y momento 3.1.5.

$$\begin{aligned} \langle \phi_a | e^{-iHt_f} | \phi_a \rangle &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \left(\prod_{i=1}^N \frac{d\pi_i}{2\pi} d\phi_i \right) \\ &\quad \times \langle \phi_a | \pi_N \rangle \langle \pi_N | e^{-iH\Delta t} | \phi_N \rangle \langle \phi_N | \pi_{N-1} \rangle \\ &\quad \times \langle \pi_{N-1} | e^{-iH\Delta t} | \phi_{N-1} \rangle \times \cdots \times \langle \phi_2 | \pi_1 \rangle \langle \pi_1 | e^{-iH\Delta t} | \phi_1 \rangle \langle \phi_1 | \phi_a \rangle \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

y ya que cuando $\Delta t \rightarrow 0$ el operador de evolución se puede expresar de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \langle \pi_i | e^{-iH\Delta t} | \phi_i \rangle &\simeq \langle \pi_i | 1 - iH\Delta t | \phi_i \rangle \\ &= \langle \pi_i | \phi_i \rangle (1 - iH_i\Delta t) \\ &= (1 - iH_i\Delta t) \exp \left[-i \int d^3x \pi_i(x) \phi_i(x) \right] \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

donde $H_i = \int d^3x \mathcal{H}(\pi_i, \phi_i)$.

Juntando todos estos resultados tenemos

$$\begin{aligned} \langle \phi_a | e^{-iHt_f} | \phi_a \rangle &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \left(\prod_{i=1}^N \frac{d\pi_i}{2\pi} d\phi_i \right) \delta(\phi_1 - \phi_a) \\ &\quad \times \exp \left\{ -i\Delta t \sum_{j=1}^N \int d^3x [\mathcal{H}(\pi_j, \phi_j) - \pi_j(\phi_{j+1} - \phi_j)/\Delta t] \right\} \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

donde $\phi_{N+1} = \phi_a = \phi_1$.

3 Teoría térmica de campos

Tomando el límite continuo de la Ec. 3.1.11, finalmente, se tiene

$$\begin{aligned} \langle \phi_a | e^{-iHt_f} | \phi_a \rangle &= \int [d\pi] \int_{\phi(x,0)}^{\phi(x,t_f)} [d\phi] \\ &\times \exp \left[i \int_0^{t_f} \int d^3x \left(\pi(x,t) \frac{\partial \phi(x,t)}{\partial t} - \mathcal{H}(\pi(x,t), \phi(x,t)) \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

Los símbolos $[d\pi]$ y $[d\phi]$ indican integración funcional definida en 3.1.12. La integración sobre $\phi(x,t)$ está restringida por las condiciones de periodicidad mientras que la integración sobre $\pi(x,t)$ no tiene alguna restricción.

Para hacer contacto con la mecánica estadística recordemos que la función de partición se escribe como

$$Z = \text{Tr} e^{-\beta H} \quad (3.1.13)$$

$$= \int d\phi_a \langle \phi_a | e^{-\beta H} | \phi_a \rangle. \quad (3.1.14)$$

Notemos que la función de partición tiene una estructura semejante a la amplitud de transición Ec. 3.1.12. Aún más, se puede expresar Z como una integral sobre campos y sus momentos conjugados tal como 3.1.12 efectuando el cambio a una variable imaginaria $\tau = it$, con límites de integración entre 0 y β . La traza que aparece en Ec. 3.1.14 significa integrar sobre todos los ϕ_a . Se tiene entonces la relación fundamental

$$Z = \int [d\pi] \int_{\text{periódicas}} [d\phi] e^{\int_0^\beta d\tau \int d^3x (i\pi \frac{\partial \phi}{\partial \tau} - \mathcal{H}(\pi, \phi))}, \quad (3.1.15)$$

aquí, el término periódicas se refiere a las condiciones de equilibrio o condiciones periódicas sobre ϕ : $\phi(x, 0) = \phi(x, \beta) = \phi_a$.

Para ilustrar lo desarrollado hasta ahora, tratemos el caso de un campo escalar cuyo Lagrangiano está dado como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - U(\phi) \quad (3.1.16)$$

donde el potencial es

$$U(\phi) = g\phi^3 + \lambda\phi^4 \quad (3.1.17)$$

3 Teoría térmica de campos

y $\lambda \geq 0$ para la estabilidad del vacío. El momento conjugado está dado como

$$\begin{aligned}\pi &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi)} \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial t},\end{aligned}\tag{3.1.18}$$

entonces el Hamiltoniano es

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \pi \frac{\partial \phi}{\partial t} - \mathcal{L} \\ &= \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + U(\phi).\end{aligned}\tag{3.1.19}$$

Para calcular la función de partición tomemos la Ec. 3.1.11:

$$\begin{aligned}Z &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\prod_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\pi_i}{2\pi} \int_{\text{periódicas}} d\phi_i \right) \\ &\quad \times \exp \left[\sum_{j=1}^N \int d^3x \left(i\pi_j (\phi_{j+1} - \phi_j) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \Delta\tau \left(\frac{1}{2} \pi_j^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi_j)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi_j^2 + U(\phi_j) \right) \right) \right].\end{aligned}\tag{3.1.20}$$

Las integrales con respecto al momento se pueden realizar inmediatamente pues son integrales Gaussianas, veamos

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\pi_i}{2\pi} \exp \left\{ \left[i\pi_j (\phi_{j+1} - \phi_j) - \left(\frac{\Delta\tau}{2} \pi_j^2 \right) \right] \right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\pi_i}{2\pi} \exp \left\{ - \left(\frac{\Delta\tau}{2} \right) \left[\pi_j - \frac{i}{\Delta\tau} (\phi_{j+1} - \phi_j) \right]^2 - \frac{i}{\Delta\tau^2} (\phi_{j+1} - \phi_j)^2 \right\} \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{\Delta\tau}} \exp \left[- \frac{(\phi_{j+1} - \phi_j)^2}{2\Delta\tau} \right].\end{aligned}\tag{3.1.21}$$

3 Teoría térmica de campos

El cálculo de las integrales Gaussianas nos permite escribir la función de partición como

$$\begin{aligned}
 Z &= \lim_{N \rightarrow \infty} (2\pi)^{-N/2} \int \left[\prod_{i=1}^N d\phi_i \right] \\
 &\times \exp \left\{ \Delta\tau \sum_{j=1}^N \int d^3x \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{(\phi_{j+1} - \phi_j)}{\Delta\tau} \right)^2 \right. \right. \\
 &\left. \left. - \frac{1}{2} (\nabla\phi_j)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi_j^2 - U(\phi_j) \right] \right\}. \tag{3.1.22}
 \end{aligned}$$

Tomando el límite al continuo finalmente se obtiene

$$\begin{aligned}
 Z &= N' \int_{\text{periódicas}} [d\phi] \\
 &\times \exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau \int d^3x \left(\left(\frac{\partial\phi}{\partial\tau} \right)^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2 + U(\phi) \right) \right) \tag{3.1.23}
 \end{aligned}$$

donde N' es una constante de normalización y el argumento de la exponencial no es otra cosa que la acción euclidiana

$$S_E = -\frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau \int d^3x \left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial\tau} \right)^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2 + U(\phi) \right], \tag{3.1.24}$$

en el caso de campos escalares sin interacciones tomamos $U(\phi) = 0$. Realicemos la integral sobre τ en la 3.1.23, se tiene

$$\int_0^\beta d\tau \left(\frac{\partial\phi}{\partial\tau} \right)^2 = \int_0^\beta d\tau \left(\frac{\partial\phi}{\partial\tau} \right) \left(\frac{\partial\phi}{\partial\tau} \right) \tag{3.1.25}$$

$$= \int_0^\beta d\tau \left[\frac{\partial}{\partial\tau} \left(\phi \frac{\partial\phi}{\partial\tau} \right) - \phi \frac{\partial^2\phi}{\partial\tau^2} \right] \tag{3.1.26}$$

$$= - \int_0^\beta \frac{\partial^2\phi}{\partial\tau^2} d\tau. \tag{3.1.27}$$

Este último paso nos sirve para reescribir la acción Euclideana de la siguiente forma

$$S_E = -\frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau \int d^3x \phi \left[-\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} - \nabla^2 + m^2 \right] \phi. \tag{3.1.28}$$

3 Teoría térmica de campos

Haciendo una descomposición del campo en modos de Fourier

$$\phi(\mathbf{x}, \tau) = \left(\frac{\beta}{V}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{\mathbf{p}} e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} + \omega_n \tau)} \phi_n(\mathbf{p}), \quad (3.1.29)$$

donde $\omega_n = 2\pi nT$, debido a las condiciones de periodicidad $\phi(\mathbf{x}, \beta) = \phi(\mathbf{x}, 0)$ para todas \mathbf{x} . ω_n son las llamadas frecuencias de Matsubara. Notemos además que $\phi_{-n}(-\mathbf{p}) = \phi_n^*(\mathbf{p})$ ya que $\phi(\mathbf{x}, \tau)$, se tiene que

$$\phi^*(\mathbf{x}, \tau) = \left(\frac{\beta}{V}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n'=-\infty}^{\infty} \sum_{\mathbf{p}'} e^{-i(\mathbf{p}'\cdot\mathbf{x} - \omega_{n'}\tau)} \phi_{n'}^*(\mathbf{p}'). \quad (3.1.30)$$

Al sustituir las Ecs. 3.1.29 y 3.1.30 en la Ec. 3.1.28 se encuentra que

$$\begin{aligned} S_E &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{V}\right) \int_0^\beta d\tau \int d^3x \\ &\quad \times \sum_{n,n'} \sum_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} \phi_n(\mathbf{p}) \phi_{n'}^*(\mathbf{p}') (\omega_{n'}^2 + \mathbf{p}^2 + m^2) e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} + \omega_n \tau)} e^{i(\mathbf{p}'\cdot\mathbf{x}' + \omega_{n'}\tau)} \\ &= -\frac{1}{2} \beta \sum_{n,n'} \sum_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} \int_0^\beta d\tau e^{i(\omega_n + \omega_{n'})\tau} \int \frac{d^3x}{V} e^{i(\mathbf{p} + \mathbf{p}')\cdot\mathbf{x}} \phi_n(\mathbf{p}) \phi_{n'}^*(\mathbf{p}') (\omega_{n'}^2 + \mathbf{p}^2 + m^2) \\ &\quad - \frac{1}{2} \beta^2 \sum_{n,p} (\omega_n^2 + \omega^2) \phi_n(\mathbf{p}) \phi_n^*(\mathbf{p}), \quad (3.1.31) \end{aligned}$$

donde $\omega = (p^2 + m^2)^{\frac{1}{2}}$.

Reescribiendo el campo escalar como $\phi_n(\mathbf{p}) = e^{i\alpha} A_n(\mathbf{p})$ y usando el resultado de la Ec. 3.1.31, escribimos la Ec. 3.1.23 después de una integración

$$Z = N' \prod_n \prod_{\mathbf{p}} \left[\int dA_n(\mathbf{p}) e^{-\frac{1}{2} \beta^2 (\omega_n^2 + \omega^2) A_n^2(\mathbf{p})} \right] \quad (3.1.32)$$

$$= N' \prod_n \prod_{\mathbf{p}} \left[\beta^2 (\omega_n^2 + \omega^2)^{\frac{1}{2}} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (3.1.33)$$

de forma más formal se puede expresar (3.1.23) como

$$\begin{aligned} Z &= N' \int [d\phi] \exp \left[-\frac{1}{2} (\phi, D\phi) \right] \\ &= N' cte. (\det D)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.1.34) \end{aligned}$$

3 Teoría térmica de campos

aquí

$$D = \beta^2 \left(-\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \quad (3.1.35)$$

en el espacio (\mathbf{x}, τ) , mientras que

$$D = \beta^2 (-\omega_n^2 + \omega^2) \quad (3.1.36)$$

en el espacio (\mathbf{p}, ω_n) . $(\phi, D\phi)$ denota el producto interno sobre el espacio de funciones. La constante que aparece no afecta a la termodinámica y en lo posterior se omitirá. La relación 3.1.34 se sigue de la fórmula para integrales de Riemann

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \dots dx_n e^{-x_i D_{ij} x_j} = \pi^{\frac{n}{2}} (\det D)^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.1.37)$$

Tomando el logaritmo natural de la función de partición, Ec. 3.1.33

$$\ln Z = -\frac{1}{2} \sum_n \sum_{\mathbf{p}} \ln [\beta^2 (\omega_n^2 + \omega^2)] \quad (3.1.38)$$

a partir de la cual, en principio, podemos extraer toda la termodinámica. Antes de obtener las cantidades termodinámicas notemos que

$$\ln [(2\pi n)^2 + \beta^2 \omega^2] = \int_1^{\beta^2 \omega^2} \frac{d\theta^2}{\theta^2 + (2\pi n)^2} + \ln [1 + (2\pi n)^2]. \quad (3.1.39)$$

El último término de la relación anterior es independiente de β y no tiene contribución a la termodinámica por lo que puede ser ignorado. Por lo tanto,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + (\theta/2\pi)^2} = \frac{2\pi^2}{\theta} \left(1 + \frac{2}{e^\theta - 1} \right). \quad (3.1.40)$$

Finalmente,

$$\ln Z = - \sum_{\mathbf{p}} \int_1^{\beta\omega} d\theta \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^\theta - 1} \right). \quad (3.1.41)$$

Llevando a cabo la integración sobre θ e ignorando la parte que no tiene dependencia en β , finalmente se tiene

$$\ln Z = V \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left[-\frac{1}{2} \beta \omega - \ln (1 - e^{-\beta \omega}) \right]. \quad (3.1.42)$$

3 Teoría térmica de campos

Tenemos así que la energía libre dada por $\Omega = -\beta^{-1} \ln Z$ es

$$\Omega = V \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[\frac{\omega}{2} + \beta^{-1} \ln(1 - e^{-\beta\omega}) \right], \quad (3.1.43)$$

el primer término es independiente de la temperatura y corresponde a la contribución del vacío, mientras que el segundo término es la aportación de materia. En el límite $m^2 \ll T^2$ y realizando una integración por partes se obtiene

$$\begin{aligned} \Omega &= -\frac{VT^4}{6\pi^2} \int_0^\infty dx \frac{x^3}{e^x - 1} \\ &= -\frac{\pi^2 VT^4}{90}. \end{aligned} \quad (3.1.44)$$

Podemos obtener de forma similar la presión y la densidad de energía mediante $P = \frac{\partial\Omega}{\partial V}$ y $\epsilon \equiv \frac{E}{V} = 3P$

$$P = \frac{\pi^2 T^4}{90}, \quad (3.1.45)$$

$$\epsilon = \frac{\pi^2 T^4}{30}. \quad (3.1.46)$$

3.2. Correcciones a primer orden: propagador y función de partición

Como ejemplo de cálculo perturbativo, tomemos como término de interacción en la Ec. 3.1.24[18]

$$U(\phi) = \frac{\lambda}{4!} \phi^4. \quad (3.2.1)$$

El propagador está dado por

$$\Delta(x-y) = \frac{1}{Z(\beta)} \int [d\phi] \phi(x) \phi(y) e^{S(\beta)_E}, \quad (3.2.2)$$

sujeto a las condiciones $\phi(0, \mathbf{x}) = \phi(\beta, \mathbf{x})$. Haciendo una expansión a primer orden en λ , se tiene

$$e^{S_E(\beta)} \simeq e^{S_E^{(F)}(\beta)} \left(1 - \frac{\lambda}{4!} \int_0^\beta d^4z \phi^4(z) \right), \quad (3.2.3)$$

donde $S_E^{(F)}(\beta)$ es la acción euclidiana libre. Evaluemos la siguiente cantidad usando el

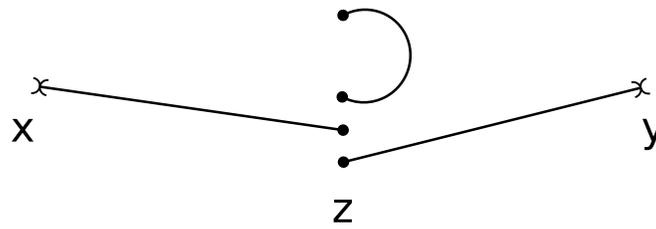


Figura 3.2.1: Teorema de Wick. Cada contracción esta representada por una línea uniendo los argumentos de ϕ . La figura muestra las dos posibilidades de términos que son posibles.

teorema de Wick

$$I(x, y) = \int [d\phi] \phi(x) \phi(y) e^{S_E^F(\beta)} \left(1 - \frac{\lambda}{4!} \int_0^\beta d^4 z \phi^4(z) \right). \quad (3.2.4)$$

El número de contracciones que vienen del segundo término de la Ec. 3.2.4 es igual al número de contracciones de $\phi(x)$, $\phi(y)$ y $\phi^4(z)$. Resulta conveniente representar estas contracciones mediante un diagrama, dibujando dos puntos externos x y y marcados con cruces; un vértice z , que se deriva de la expansión en potencias de λ y sobre el cual se hará la integración. Dado que $\phi(z)$ está a la cuarta potencia, el punto z se dibuja como cuatro puntos separados. Cada contracción se representa por una línea uniendo los argumentos de ϕ . Dos tipos de términos son posibles, véase la Fig. 3.2.1 y el número de términos es $12 + 3 = (6 - 1)!!$. Para simplificar el diagrama, los cuatro puntos z se juntan en un solo punto, con el resultado mostrado en la Fig. 3.2.2.

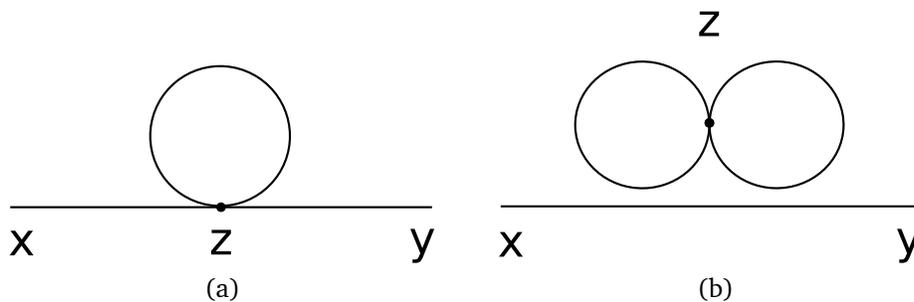


Figura 3.2.2: Diagramas de Feynman. En la figura se muestran los diagramas conectados (a) y desconectados (b) que contribuyen a la función de partición. Los diagramas conectados son los únicos que contribuyen.

Los diagramas de la figura tal se conocen como diagramas de Feynman, cada diagrama corresponde a un grupo de términos de la expansión perturbativa. Nuestra integral queda

3 Teoría térmica de campos

como

$$I(x, y) = Z_F(\beta) \left(\Delta_F(x-y) - \frac{1}{2}\lambda \int_0^\beta d^4z \Delta_F(x-z) \Delta_F(z=0) \Delta_F(z-y) - \frac{1}{8}\lambda \int_0^\beta d^4z \Delta_F(x-y) \Delta_F^2(z=0) \right), \quad (3.2.5)$$

donde $Z_F(\beta)$ es la función de partición libre. Los factores $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{8}$ en la Ec. 3.2.5 se derivan de la combinatoria del teorema de Wick y se llaman factores de simetría. Para obtener el propagador, aún se tiene que dividir por la función de partición total, calculada al mismo orden en λ

$$\begin{aligned} Z(\beta) &\simeq \int [d\phi] e^{S_E^F(\beta)} \left(1 - \frac{\lambda}{4!} \int_0^\beta d^4z \phi^4(z) \right) \\ &= Z_F(\beta) \left[1 - \frac{1}{8}\lambda (\Delta_F(x=0))^2 \int_0^\beta d^4z \right]. \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

El segundo término en los paréntesis cuadrados en la Ec. 3.2.6 esta representado por la Fig. 3.2.3. Para obtener el propagador a primer orden en λ , se divide la Ec. 3.2.5 por 3.2.6

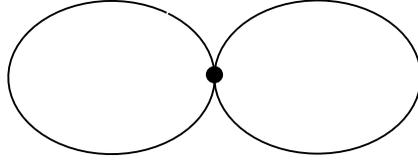


Figura 3.2.3: Corrección a primer orden de la función de partición.

de lo cual se tiene

$$\begin{aligned} \Delta(x-y) &= \Delta_F(x-y) - \frac{1}{2}\lambda \int_0^\beta d^4z \Delta_F(x-z) \\ &\quad \times \Delta_F(z=0) \Delta_F(z-y) + O(\lambda^2) \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

La Ec. 3.2.7 se representa gráficamente en la Fig.3.2.4. La línea sólida representa el propagador total o vestido a orden λ . Mientras que los diagramas desconectados desaparecen al dividir por $Z(\beta)$.

3 Teoría térmica de campos



Figura 3.2.4: Corrección a primer orden del propagador.

En espacio de Fourier

$$\Delta(i\omega_n, k) = \Delta_F(i\omega_n, k) - \frac{\lambda}{2} \Delta_F(i\omega_n, k) \times \left(T \sum_m \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \Delta(i\omega_n, k') \right) \Delta(i\omega_n, k). \quad (3.2.8)$$

En general, la auto-energía Π se define a través de

$$\Delta^{-1}(i\omega_n, k) = \Delta_F^{-1}(i\omega_n, k) + \Pi(i\omega_n, k). \quad (3.2.9)$$

De la Ec. 3.2.8 se tiene que Π es independiente del momento externo k a primer orden en λ y está dada por

$$\Pi = \frac{\lambda}{2} \Delta_F(x=0) = \frac{\lambda T}{2} \sum_m \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \Delta_F(i\omega_m, k') \quad (3.2.10)$$

$$= \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} (1 + 2n(\omega_k)). \quad (3.2.11)$$

A este orden en λ , Π puede interpretarse como una simple corrección a la masa al cuadrado: $m^2 \rightarrow m^2 + \Pi$. Sin embargo, la parte que no depende de la temperatura de la Ec. 3.2.11 contiene una divergencia ultravioleta. Para remediar esto, se tiene que renormalizar la teoría introduciendo un contra término de masa en la acción Euclideana

$$\delta S_E = \frac{1}{2} \delta m^2 \int_0^\beta d^4 x \phi^2(x), \quad (3.2.12)$$

con $\delta m^2 = -\Pi_{T=0}$. Entonces m es a masa física de la partícula a $T = 0$; si el contra término se toma en cuenta, Π estará dado por una integral convergente, que se puede integrar

3 Teoría térmica de campos

analíticamente en el caso $m = 0$

$$\begin{aligned}
 \Pi &= \delta m_\beta^2 \\
 &= \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{n(k)}{k} \\
 &= \frac{\lambda T^2}{24}.
 \end{aligned} \tag{3.2.13}$$

Fijémosnos ahora en la energía libre, de la Ec. 3.2.6 se tiene

$$\Omega(\beta) = -\frac{1}{\beta} \ln Z_F(\beta) + \frac{1}{8} \lambda V (\Delta_F(x=0))^2. \tag{3.2.14}$$

El segundo término en 3.2.14 está representado gráficamente por la Fig. 3.2.3. En el cálculo de $\Delta_F(x=0)$ encontramos nuevamente una divergencia ultravioleta ligada a $T = 0$. Pero se debe tomar en cuenta el contra término de masa 3.2.12, el cual se trata como un término de interacción en la acción Euclideana. Para escribir $\Omega(\beta)$ convenientemente, separemos Δ_F de la siguiente forma

$$\Delta_F = \Delta_F^{T=0} + \Delta_F^T \tag{3.2.15}$$

donde el primer término del lado derecho de la relación anterior es independiente de la temperatura, mientras que el segundo término toma en cuenta las contribuciones térmicas al propagador. Se tiene entonces que

$$\delta m^2 = -\frac{\lambda}{2} \Delta_F^{T=0}(x=0). \tag{3.2.16}$$

La contribución del contra término a $\Omega(\beta)$ es

$$\frac{V}{2} \delta m^2 \Delta_F(x=0) = -\frac{\lambda V}{4} \Delta_F^{T=0}(x=0) \Delta_F(x=0), \tag{3.2.17}$$

de modo que la energía libre renormalizada está dada como

$$\Omega(\beta) = -\frac{1}{\beta} \ln Z_F(\beta) - \frac{\lambda V}{8} (\Delta_F^{T=0}(x=0))^2 + \frac{\lambda V}{8} (\Delta_F^T(x=0))^2. \tag{3.2.18}$$

El término proporcional a $\Delta_F^{T=0}(x=0) \times \Delta_F^T(x=0)$ se ha cancelado gracias a la renormalización de la masa. Sin embargo el segundo término del lado derecho de la Ec. 3.2.18 es aún divergente; afortunadamente dicho término es independiente de T y puede ser ignorado.

3 Teoría térmica de campos

Se define la energía libre renormalizada $\Omega_R(\beta)$ a través de

$$\Omega_R(T, m^2, \lambda) = \Omega_R(T, m^2, \lambda) - \Omega_R(T = 0, m^2, \lambda) \quad (3.2.19)$$

con la misma masa en los tres términos. De esta última relación, se obtiene la corrección a orden λ a la presión del gas ideal; en el caso $m = 0$

$$P = -\frac{1}{\beta} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \ln(1 - e^{-\beta k}) - \frac{\lambda}{8} \left(\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{n(k)}{k} \right)^2 \quad (3.2.20)$$

$$= \frac{\pi^2 T^4}{90} \left(1 - \frac{5\lambda}{64\pi^2} \right). \quad (3.2.21)$$

Hasta ahora ninguna divergencia ultravioleta ha aparecido por efecto de la temperatura. Estas divergencias aparecen en el caso $T = 0$. Así que, cualquier esquema de regularización y renormalización es necesario a $T = 0$ y este mismo es suficiente para $T > 0$.

Como se vio, la auto energía calculada a primer orden en λ , Ec. 3.2.13, es independiente del momento externo. Se encontró

$$\Pi_1 = \frac{\lambda T^2}{24} \quad (3.2.22)$$

y ahora añadimos el subíndice 1 para enfatizar que es a primer orden en λ . Este término se puede interpretar como una masa puramente de origen térmico $\delta m_\beta^2 = \Pi_1$, de orden λT^2 . Recordemos que para el caso $m = 0$, el inverso del propagador a primer orden en λ está dado como

$$\Delta^{-1}(i\omega_n, \mathbf{k}) = \omega_n^2 + \mathbf{k}^2 + \delta m_\beta^2 \quad (3.2.23)$$

Para momentos a lo más del orden de la masa térmica, $\mathbf{k}^2 \leq \lambda T^2$, el propagador libre inverso $\Delta_0^{-1}(i\omega_n, \mathbf{k}) = \omega_n^2 + \mathbf{k}^2$ es a lo más del orden λT^2 y, como se menciono antes, la corrección que viene de la auto energía es de orden λT^2 . Esto indica que nuestra serie perturbativa podría no ser un procedimiento correcto. De hecho, veremos que se necesita “resumar” una cierta clase de un número infinito de diagramas, debido a una divergencia infrarroja[19].

La contribución más importante en el límite infrarrojo ($k \rightarrow 0$) es la siguiente

$$3! \times 2\lambda T \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (\Delta_F \Pi_1)^{N-1} \Delta_F = 12\lambda T \sum \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (\Pi_1)^{N-1} \Delta_F. \quad (3.2.24)$$

Resumación significa considerar todas las correcciones perturbativas, sumando todas es-

3 Teoría térmica de campos

tas correcciones desde $N = 1$ hasta ∞ tenemos

$$\begin{aligned}
 12\lambda T \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} [\Delta_F + \Delta_F \Pi_1 \Delta_F + \Delta_F \Pi_1 \Delta_F \Pi_1 \Delta_F + \dots] \\
 = 12\lambda T \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\Delta_0}{1 + \Delta_0 \Pi_1} \\
 = 12\lambda T \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\Delta_0 + \Pi_1}, \quad (3.2.25)
 \end{aligned}$$

En la expresión anterior vemos que la auto energía es un loop que tiene insertadas auto energías. Los diagramas correspondientes consisten de un loop con N loops insertados a este, los llamados “daisy diagrams” o diagramas de anillo. Nótese que aun sumando sobre todos estos diagramas no se toman en cuenta otra clase de diagramas que no tienen contribución pero que están presentes.

Tenemos entonces que

$$\Pi = \frac{12\lambda}{4!} T \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_n^2 + \mathbf{k}^2 + \Pi_1}, \quad (3.2.26)$$

en esta ecuación la mejor aproximación es insertar la misma Π

$$\Pi = \frac{\lambda}{2} T \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_n^2 + \mathbf{k}^2 + \Pi}, \quad (3.2.27)$$

esta última es una ecuación integral para Π . Para realizar la suma sobre n ocupamos la siguiente relación

$$\sum_n \frac{1}{\omega^2 + \omega_n^2} = \frac{\beta}{2\omega} (1 + 2n(\omega)) \quad (3.2.28)$$

y tomamos sólo la parte dependiente de la temperatura de Π

$$\Pi_\beta = \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{n(\sqrt{\mathbf{k}^2 + \Pi_\beta})}{\sqrt{\mathbf{k}^2 + \Pi_\beta}}, \quad (3.2.29)$$

efectuando el cambio de variable $x = \sqrt{\mathbf{k}^2/\Pi + 1}$ en la Ec. 3.2.29 se obtiene

$$1 = \frac{\lambda}{4\pi^2} \int_1^\infty dx \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{\exp(\beta \Pi_\beta^{1/2} x) - 1}. \quad (3.2.30)$$

3 Teoría térmica de campos

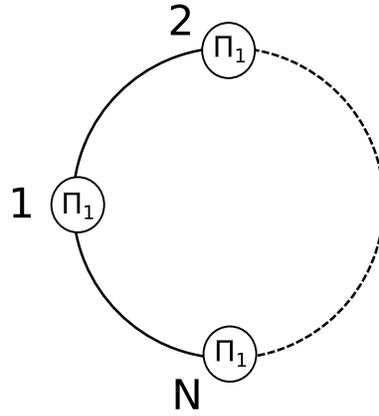


Figura 3.2.5: Diagramas de anillo. La suma sobre N en la Ec. 3.2.33 comienza en $N = 2$, porque el diagrama de la Fig. 3.2.3 ya toma en cuenta la corrección a primer orden.

Si se quiere considerar todos los diagramas se tiene que proceder numéricamente. Sin embargo, podemos extraer un resultado analítico usando una expansión en serie de la siguiente función

$$F(u) = \int_1^\infty dx \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{e^{ux} - 1} = \frac{2\pi^2}{u^2} \left(\frac{1}{12} - \frac{u}{4\pi} + O(u^2 \ln u) \right). \quad (3.2.31)$$

Insertando esta expansión en la Ec. 3.2.30 se muestra un resultado interesante

$$\Pi_\beta = \frac{\lambda T^2}{24} \left[1 - 3 \left(\frac{\lambda}{24\pi^2} \right)^{1/2} + \dots \right]. \quad (3.2.32)$$

El término siguiente que corrige a Π_β no es λ^2 , como se esperaría en teoría de perturbaciones común y corriente, isino que es del orden $\lambda^{3/2}$!

Este mismo comportamiento aparece en la expansión perturbativa de la función de partición. La resumación conduce a los llamados diagramas de anillo, Fig. 3.2.5, los cuales contribuyen a $\Omega = -\frac{1}{\beta} \ln Z(\beta)$

$$\Omega_{ring} = -\frac{1}{2} \sum_{N=2}^{\infty} \frac{1}{N} VT \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (-\Pi_1 \Delta_F(i\omega_n, \mathbf{k}))^N \quad (3.2.33)$$

3 Teoría térmica de campos

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2}V \left[\sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N} T \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (-\Pi_1 \Delta_F(i\omega_n, \mathbf{k}))^N + \Pi_1 \Delta_F(i\omega_n, \mathbf{k}) \right] \\
&= \frac{1}{2}VT \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} [\ln(1 + \Pi_1 \Delta_F(i\omega_n, \mathbf{k})) - \Pi_1 \Delta_F(i\omega_n, \mathbf{k})] \\
&= \frac{1}{2}VT \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[\ln \left(1 + \frac{\lambda T^2/24}{\omega_n^2 + \mathbf{k}^2} \right) - \frac{\lambda T^2/24}{\omega_n^2 + \mathbf{k}^2} \right].
\end{aligned}$$

El término $n = 0$ en la ecuación anterior se conoce como el modo estático. Restringiéndose a este término se encuentra

$$\Omega_{ring} \simeq -\frac{VT^4}{12\pi} \left(\frac{\lambda}{24} \right)^{3/2}. \quad (3.2.34)$$

Una vez más, la corrección es del orden $\lambda^{3/2}$. De la Ec. 3.2.34 y de los anteriores resultados que obtuvimos para la presión se tiene

$$P = \frac{\pi^2 T^4}{90} \left(1 - \frac{15}{8} \left(\frac{\lambda}{24\pi^2} \right) + \frac{15}{2} \left(\frac{\lambda}{24\pi^2} \right)^{3/2} + \dots \right), \quad (3.2.35)$$

el primer término corresponde al gas ideal de bosones, el segundo al diagrama 3.2.3 y el tercer término corresponde a los diagramas de anillo.

3.3. Reglas de transformación a temperatura finita

A temperatura finita podemos establecer ciertas reglas las cuales ocuparemos para convertir expresiones conocidas de teoría de campo a $T = 0$ a expresiones con $T \neq 0$.

Notemos que el cambio de variable $t \rightarrow -i\tau$ para un campo escalar libre en el espacio de configuraciones nos lleva a un cambio de la métrica de Minkowski a la métrica de Euclides, esto es

$$(\partial_\mu \partial^\mu - m^2) \rightarrow \left(-\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \nabla^2 + m^2 \right), \quad (3.3.1)$$

y que en el espacio de momento

$$(k_\mu k^\mu - m^2) \rightarrow (-1) (\omega_n + \mathbf{k}^2 + m^2), \quad (3.3.2)$$

Veamos que si en la Ec. 3.3.2 hacemos el cambio de variable $k_0 \rightarrow i\omega_n$ en el lado izquierdo,

3 Teoría térmica de campos

obtenemos esencialmente el lado derecho salvo un signo negativo, tenemos entonces que

$$k_0 \rightarrow i\omega_n, \quad (k_\mu k^\mu - m^2)^\sigma \rightarrow (-1)^\sigma (\omega_n + \mathbf{k}^2 + m^2)^\sigma. \quad (3.3.3)$$

Por otro lado las condiciones de frontera impuestas sobre los campos afectan al elemento de volumen

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \rightarrow \int \frac{dk_0}{2\pi} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3}. \quad (3.3.4)$$

A temperatura cero, los vértices y las funciones de Green de dos puntos están acompañados por un factor i . En cambio a temperatura distinta de cero, el factor i está ausente de la función generatriz y como consecuencia ni vértices ni propagadores estarán acompañados por factores de i .

De todo lo anterior se desprende que los efectos térmicos que aparecen en los loops sólo serán visibles en los propagadores.

En el siguiente capítulo utilizaremos los anteriormente descritos elementos de la TTC junto con la expresión del propagador de Schwinger para incluir los efectos de un campo magnético externo en el cálculo del potencial efectivo de un campo escalar cargado en presencia de un campo magnético externo.

El estudio de este sistema permite entender si el espacio de parámetros permite distintos tipos de transiciones de fase que pueden ser de interés en el estudio de sistema realistas donde aparecen bosones escalares cargados.

4 Potencial efectivo de un campo escalar en presencia de campo magnético

El potencial clásico juega un papel crucial en el estudio del rompimiento de simetría. Sin embargo, las correcciones radiativas pueden cambiar el comportamiento del potencial clásico. Se puede dar el caso de que el mínimo del potencial clásico sea inestable ante correcciones radiativas, También podemos tener el caso de que una simetría rota a nivel clásico se restaure ante correcciones radiativas o viceversa, que una simetría restaurada se rompa ante los efectos cuánticos. De aquí la consideración para estudiar el potencial efectivo como cantidad importante pues este contiene las correcciones cuánticas a una teoría. El potencial efectivo a diferencia del potencial clásico, es una expansión perturbativa y por eso lo más conveniente es analizarlo orden por orden.

Coleman y Wienberg[20] estudiaron los efectos de las correcciones cuánticas sobre el potencial clásico. En su trabajo muestran que es posible modificar la simetría de la teoría al incluir las correcciones cuánticas. A diferencia de Coleman y Wienberg, en cuyo trabajo no se toman en cuenta los efectos de la temperatura, Dolan y Jackiw [19] muestran que la simetría puede ser restaurada por arriba de una cierta temperatura crítica.

En este trabajo estamos interesados en hacer una extensión a los trabajos anteriores que incorpore el efecto de un campo magnético externo. Para incorporar tal efecto se necesita de alguna manera modelar la interacción del campo magnético con un campo escalar cargado. Nuestra elección para trabajar es el modelo de Higgs Abeliano. Este modelo ha sido estudiado extensamente y proporciona interacción entre campos escalares complejos y campos de norma. A continuación presento las generalidades del modelo de Higgs Abeliano así como una breve discusión de la llamada norma R_ξ . En la segunda parte de este capítulo muestro el cálculo explícito del potencial efectivo para un campo escalar cargado en presencia de campo magnético hasta orden de diagramas de anillo y finalmente muestro los resultados y doy las conclusiones.

4.1. Modelo de Higgs Abeliano

Consideremos una teoría con campo escalar complejo. La densidad Lagrangiana tiene la forma[21]

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^\dagger D^\mu \phi + \mu^2 \phi^\dagger \phi - \frac{\lambda}{4} (\phi^\dagger \phi)^2 \quad (4.1.1)$$

donde

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi - ie A_\mu \phi, \quad (4.1.2)$$

A_μ representa el potencial vectorial correspondiente a un campo magnético a lo largo de la dirección \hat{z} ,

$$A^\mu = \frac{B}{2} (0, -y, x, 0) \quad (4.1.3)$$

y e la constante de acoplamiento o intensidad de la interacción. El parámetro de masa al cuadrado μ^2 y el autoacoplamiento λ se tomarán positivos. Este modelo se conoce comúnmente como el modelo de Higgs Abeliano.

Los campos complejos pueden expresarse de forma equivalente en términos de campos reales σ y χ . Así, definamos

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma(x) + i\chi(x)), \quad (4.1.4)$$

$$\phi^\dagger(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma(x) - i\chi(x)). \quad (4.1.5)$$

Para que se dé el rompimiento espontáneo de la simetría, el campo σ deberá desarrollar un valor de expectación v

$$\sigma \rightarrow \sigma + v, \quad (4.1.6)$$

la simetría se rompe espontáneamente y haciendo una expansión alrededor de v , nuestro Lagrangiano toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - m^2 \sigma^2 + \frac{m^4}{2\lambda} + \frac{e^2 v^2}{2} A_\mu A^\mu - ev \partial_\mu A^\mu \\ &+ e (\chi \partial_\mu \sigma - \sigma \partial_\mu \chi) A^\mu + e^2 v \sigma A_\mu A^\mu + e^2 (\sigma^2 + \chi^2) A_\mu A^\mu \\ &- \frac{\lambda v}{2} \sigma (\sigma^2 + \chi^2) - \frac{\lambda}{8} (\sigma^2 + \chi^2)^2. \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

La Ec. 4.1.7 nos muestra que el campo de norma Abeliano y el campo χ , que es el campo de Goldston, se mezclan después del rompimiento de simetría. Consideremos únicamente los términos cuadráticos del Lagrangiano en la Ec. 4.5.5, sabemos que estos términos están

4 Potencial efectivo de un campo escalar en presencia de campo magnético

relacionados con la masa de las partículas así que serán suficientes si queremos ver el espectro de la teoría.

$$\mathcal{L}_{qua} = \frac{1}{2}\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma + \frac{1}{2}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi - m^2\sigma^2 + \frac{e^2v^2}{2}A_\mu A^\mu - ev\partial_\mu\chi A^\mu. \quad (4.1.8)$$

Si definimos ahora

$$B_\mu = A_\mu - \frac{1}{ev}\partial_\mu\chi \quad (4.1.9)$$

entonces, nuestro Lagrangiano de términos cuadráticos Ec. 4.1.8 nos queda

$$\mathcal{L}_{qua} = \frac{1}{2}\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma - m^2\sigma^2 + \frac{e^2v^2}{2}B_\mu B^\mu,$$

donde vemos que el bosón Goldstone ha desaparecido completamente de nuestro Lagrangiano. Se dice entonces que el campo χ ha sido absorbido en los grados de libertad del campo A_μ y ha dado masa al campo de norma. La definición en la Ec. 4.1.9 tiene la forma de una transformación de norma. En nuestro caso trabajaremos en la llamada norma R_ξ . Aunque la elección de norma es arbitraria y no tiene efectos físicos a veces resulta más conveniente para los cálculos escoger o trabajar alguna norma en particular. Para trabajar en la norma R_ξ uno tiene que añadir al Lagrangiano original, Ec. 4.1.7, nuevos términos, \mathcal{L}_{fg} y \mathcal{L}_{ghost} . El primero es el Lagrangiano que fija la norma, mientras que el segundo es Lagrangiano de fantasmas:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{fg} + \mathcal{L}_{ghost} &= -\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu + \xi ev\chi)^2 + \partial_\mu\bar{c}\partial^\mu c - \xi(ev)^2\bar{c}c - \xi e^2v\sigma\bar{c}c \\ &= -\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2 - ev\chi\partial_\mu A^\mu - \frac{\xi(ev)^2}{2}\chi^2 + \partial_\mu\bar{c}\partial^\mu c - \xi(ev)^2\bar{c}c - \xi e^2v\sigma\bar{c}c. \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

Comparando con la Ec. 4.1.7, vemos que los términos que mezclan el campo χ y el campo de A_μ se cancelan en esta norma. Sin embargo, los campos χ y fantasmas originaran términos de masa dependientes de la norma

$$m_\chi^2 = m_{ghost}^2 = \xi(ev)^2 = \xi m_{norma}^2. \quad (4.1.11)$$

Pudimos haber escogido otra norma, por ejemplo, una para la cual

$$\chi = 0. \quad (4.1.12)$$

4 Potencial efectivo de un campo escalar en presencia de campo magnético

En esta norma el Lagrangiano 4.1.7 se escribe únicamente en términos de variables físicas, pues $\chi = 0$. Sin embargo, a diferencia de nuestra elección de norma, tendríamos términos que mezclan campos χ y campos de norma.

Dicho lo anterior escribimos el Lagrangiano en términos de los campos σ y χ , el cual después de efectuar el desplazamiento de la Ec.4.1.6, toma la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{2} [\sigma (\partial_\mu - ieA_\mu)^2 \sigma] - \frac{1}{2} \left(\frac{3\lambda v^2}{4} - \mu^2 \right) \sigma^2 - \frac{\lambda}{16} \sigma^4 \\ & - \frac{1}{2} [\chi (\partial_\mu - ieA_\mu)^2 \chi] - \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda v^2}{4} - \mu^2 \right) \chi^2 - \frac{\lambda}{16} \chi^4 \\ & + \frac{\mu^2}{2} v^2 - \frac{\lambda}{16} v^4 + \mathcal{L}_I. \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

\mathcal{L}_I representa los términos de interacción después del rompimiento de simetría. De la Ec. 4.1.13 vemos que las masas para los campos σ y χ son

$$m_\sigma^2 = \frac{3}{4}\lambda v^2 - \mu^2, \quad (4.1.14)$$

$$m_\chi^2 = \frac{1}{4}\lambda v^2 - \mu^2. \quad (4.1.15)$$

A nivel árbol el potencial esta dado por

$$V^{(\text{árbol})} = -\frac{1}{2}\mu^2 v^2 + \frac{\lambda}{16} v^4. \quad (4.1.16)$$

Derivando e igualando a cero se obtiene el mínimo dado por

$$v_0 = \frac{2\mu}{\sqrt{\lambda}}. \quad (4.1.17)$$

Una condición física importante, a saber, relaciona a la masa con la segunda derivada del potencial

$$\frac{d^2 V^{(\text{árbol})}}{dv^2} = \frac{3\lambda}{4} v^2 - \mu^2 \quad (4.1.18)$$

$$= m_\sigma^2 \quad (4.1.19)$$

además de que el campo χ corresponde al bosón de Goldstone.

Como se mencionó anteriormente, el potencial efectivo recibe correcciones cuánticas orden por orden, tanto del vacío como térmicas, las cuales calculamos a continuación te-

niendo en cuenta la presencia del campo magnético externo uniforme.

4.2. Energía del vacío

Cuando se escribe el campo escalar cargado en términos de sus componentes reales, como en las Ecs. (4.1.4) y (4.1.5), la forma explícita de la energía del vacío para una de estas componentes en presencia de campo magnético viene dada por[22]

$$V_B^{(1)} = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \ln(iD)^{-1/2} \quad (4.2.1)$$

$$= -\frac{1}{2} \int dm^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} D \quad (4.2.2)$$

donde D es el propagador que toma en cuenta la presencia de campo magnético uniforme y m^2 es la masa del campo al cuadrado. Aquí es donde se introduce el propagador calculado en el capítulo 2 dado por el método de Schwinger, a saber

$$D = \int_{0-i\delta}^{\infty-i\delta} \frac{ds}{\cos(qBs)} e^{is(k_{\parallel}^2 - k_{\perp}^2 \frac{\tan(qBs)}{qBs} - m^2 + i\epsilon)}. \quad (4.2.3)$$

Recordemos que la convención para las componentes transversa y longitudinal del momento es $k_{\parallel}^2 = k_0^2 - k_3^2$ y $k_{\perp}^2 = k_1^2 + k_2^2$ y el campo magnético está a lo largo del eje z . Para efectuar la integración sobre el parámetro del tiempo propio hacemos una extensión hacia el plano complejo y escogemos una trayectoria adecuada con el fin de que la integral converja. La trayectoria escogida se muestra en la Fig. 4.2.1.

4 Potencial efectivo de un campo escalar en presencia de campo magnético

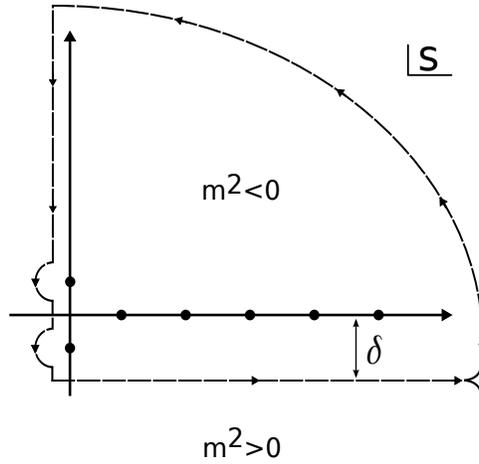


Figura 4.2.1: Trayectoria de integración. La trayectoria de integración para la Ec.4.2.3 se señala con la línea punteada, justo por debajo del eje real. Los puntos representan polos del integrando. Estos polos surgen bajo la condición de que $\sin(qBs) = 0$ y ocurren todos sobre el eje real. En particular para el origen se tiene un polo doble y es necesario separarlo. Para el caso en que $m^2 < 0$ la trayectoria se cerrará por el semiplano superior y la integral tendrá contribuciones de los polos encerrados.

La integración sobre momentos cuenta con divergencias ultravioletas y para regularizarla se emplea el esquema de regularización dimensional y después de realizar una rotación de Wick la integral sobre momentos adquiere la siguiente forma

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \rightarrow -i\Lambda^{4-d} \int \frac{d^{d-2} k_{\parallel}}{(2\pi)^{d-2}} \int \frac{d^2 k_{\perp}^2}{(2\pi)^2}, \quad (4.2.4)$$

donde Λ es la escala de renormalización y el momento transversal k_{\parallel} esta ahora en espacio euclidiano: $k_0 \rightarrow -ik_4$ [18].

Si calculamos la integral sobre momentos, se tiene que

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} D &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_{0-i\delta}^{\infty-i\delta} \frac{ds}{\cos(qBs)} e^{is(k_{\parallel}^2 - k_{\perp}^2 \frac{\tan(qBs)}{qBs} - m^2 + i\epsilon)} \\ &= \int_{0-i\delta}^{\infty-i\delta} \frac{ds}{\cos(qBs)} \int \frac{d^2 k_{\perp}}{(2\pi)^2} \frac{d^{d-2} k_{\parallel}}{(2\pi)^{d-2}} e^{is(k_{\parallel}^2 - k_{\perp}^2 \frac{\tan(qBs)}{qBs} - m^2 + i\epsilon)}. \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

4 Potencial efectivo de un campo escalar en presencia de campo magnético

Las integrales sobre los momentos son Gaussianas complejas y están dadas por

$$\begin{aligned} \int \frac{d^2 k_{\perp}}{(2\pi)^2} e^{-ik_{\perp}^2 \frac{\tan(qBs)}{qB}} &= \frac{1}{(2\pi)^2} \left(\sqrt{\frac{\pi qB}{i \tan(qBs)}} \right)^2 \\ &= \frac{-iqB \cos(qBs)}{4\pi \sin(qBs)} \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

mientras que

$$\begin{aligned} \int \frac{d^{d-2} k_{\parallel}}{(2\pi)^{d-2}} e^{-ik_{\parallel}^2 s} &= \frac{1}{(2\pi)^{d-2}} \left(\sqrt{\frac{\pi}{is}} \right)^2 \\ &= \frac{1}{(4\pi is)^{\frac{d-2}{2}}}, \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

la convergencia de la integral longitudinal está asegurada si $Re(d) > 2$.

Una vez hechas estas integrales, la Ec. 4.2.1 toma la siguiente forma

$$V_B^{(1)} = \frac{1}{2} \frac{qB}{4\pi} \frac{\Lambda^{4-d}}{(4\pi)^{\frac{d-2}{2}}} \int dm^2 \int_{0-i\delta}^{\infty-i\delta} \frac{s}{\sin(qBs)} \frac{e^{-is(m^2-i\epsilon)}}{(is)^{\frac{d-2}{2}}}. \quad (4.2.8)$$

Antes de proceder a calcular la integral sobre el parámetro de tiempo propio s , debemos resaltar que los términos de masa en la expansión de la Ec. 4.1.13 pueden tomar valores negativos, esto es, $m_{\sigma,\chi}^2$ puede tomar valores negativos en algún intervalo entre $0 \leq v \leq v_0$. Debido a esto, se distinguen dos casos a tratar para la convergencia de la integral en la Ec. 4.2.8: $m^2 < 0$ y $m^2 > 0$. El primer caso, $m^2 < 0$, puede conducir a divergencias para la energía del vacío. Sin embargo, en este trabajo se muestra que un tratamiento adecuado hace posible tener una expresión analítica para la contribución de la energía del vacío en el caso $m^2 < 0$. Este tratamiento consiste, como veremos en seguida, en la elección de un contorno apropiado para dicha integral y la separación de los polos que subyacen en el origen en la Ec. 4.2.8. El contorno que nos servirá para realizar la integración se muestra en la Fig. 4.2.1, dicho contorno avanza por debajo del eje real, continua por el semiplano superior y se cierra por el eje imaginario, de modo que los polos del integrando de la Ec. 4.2.1 son encerrados por dicha trayectoria. Para el caso $m^2 > 0$ el contorno de integración se cierra por el semiplano inferior. Con esta elección ningún polo del integrando de la Ec. 4.2.1 estará dentro del contorno de integración, lo cual conllevará una simplificación al cálculo de esta integral.

Desarrollemos paso a paso el primer caso, $m^2 < 0$. Extendamos la integral en la Ec. 4.2.8

4 Potencial efectivo de un campo escalar en presencia de campo magnético

al plano complejo. La integral entonces se puede escribir sobre un contorno cerrado y para calcularla emplearemos el teorema de Cauchy.

$$\oint \frac{ds}{\sin(qBs)} \frac{e^{-is(m^2-i\epsilon)}}{(is)^{\frac{d-2}{2}}} = 2\pi i \sum_{res} \frac{1}{\sin(qBs)} \frac{e^{-is(m^2-i\epsilon)}}{(is)^{\frac{d-2}{2}}} \quad (4.2.9)$$

$$= I_1 + I_2 + I_3, \quad (4.2.10)$$

Por otro lado, al efectuar las integrales explícitamente sobre las trayectorias elegidas podremos calcular la integral que nos interesa. En la Ec. 4.2.10 las I 's están definidas como

$$I_1 \equiv \int_{0-i\delta}^{\infty-i\delta} \frac{ds}{\sin(qBs)} \frac{e^{-is(m^2-i\epsilon)}}{(is)^{\frac{d-2}{2}}} \quad (4.2.11)$$

$$I_3 \equiv \int_{i\infty}^{0-i\delta} \frac{ds}{\sin(qBs)} \frac{e^{-is(m^2-i\epsilon)}}{(is)^{\frac{d-2}{2}}}, \quad (4.2.12)$$

y la integral I_2 es la integral sobre el cuarto de círculo al infinito, la cual se anula. La integral que nos interesa es I_1 .

Para evaluar la integral I_3 hacemos el cambio de variable $s = i\tau$ y separamos la contribución del polo doble en el origen para hacer un tratamiento adecuado de este. La integral entonces tiene dos contribuciones; la primera proveniente de todos los polos simples del integrando y la segunda que proviene del polo doble en el origen. La Ec. 4.2.12 toma la siguiente forma

$$\begin{aligned} I_3 &= -\frac{1}{(i)^{d-2}} \int_0^{\infty} \frac{d\tau}{\sinh(qB\tau)} \frac{e^{\tau m^2}}{\tau^{\frac{d-2}{2}}} + I_0 \\ &= 2 \sum_{l=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{d\tau}{(\tau)^{\frac{d-2}{2}}} e^{\tau[m^2-(2l+1)qB]} + I_0 \\ &= 2\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{[(2l+1)qB - m^2]^{2-\frac{d}{2}}} + I_0 \\ &= 2 \frac{\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \zeta\left(2 - \frac{d}{2}, \frac{1}{2} - \frac{m^2}{2qB}\right)}{(2qB)^{2-\frac{d}{2}}} + I_0, \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

donde Γ es la función gamma y ζ es la función zeta de Hurwitz¹. El término I_0 corresponde a la contribución del polo doble en $s = 0$. Para calcular I_0 separamos los polos mediante el

4 Potencial efectivo de un campo escalar en presencia de campo magnético

cambio $\tau \rightarrow \tau \pm \delta'$:

$$\frac{1}{(\tau - \delta') \sinh(qB(\tau + \delta'))} \quad (4.2.14)$$

donde $0 < \delta' < \delta$. Tomando en cuenta que las singularidades se encuentran a lo largo de la trayectoria de integración, se deforma el contorno de integración tal que los polos sean contenidos por semicírculos de radio infinitesimal como se muestra en la Fig. 4.2.1. Cada uno de los polos tiene una contribución que está dada por el valor principal de Cauchy, de acuerdo con esto

$$\begin{aligned} I_0 &= -\frac{i\pi}{i^2} \sum_{res} \left(\frac{1}{\sinh(qB\tau)} \frac{e^{\tau m^2}}{\tau} \right) \\ &= i\pi \lim_{\delta' \rightarrow 0} \left(\frac{e^{m^2\delta'}}{\sinh(2qB\delta')} - \frac{e^{-m^2\delta'}}{2qB\delta'} \right) \\ &= \frac{i\pi m^2}{qB}. \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

Para emplear el teorema de Cauchy evaluaremos la suma sobre los residuos, Ec. 4.2.9, tomando $d = 4$

$$\begin{aligned} \sum_{res} \frac{e^{-ism^2}}{(is) \sin(qBs)} &= \frac{1}{i\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-i\frac{n\pi m^2}{qB}} \\ &= -\frac{1}{i\pi} \ln \left[e^{-i\frac{\pi}{2} \left(\frac{m^2}{qB} + 1 \right)} \left(e^{i\frac{\pi}{2} \left(\frac{m^2}{qB} + 1 \right)} - e^{-i\frac{\pi}{2} \left(\frac{m^2}{qB} + 1 \right)} \right) \right] \\ &= -\frac{1}{i\pi} \left[\ln(2) + \ln \left| \cos \left(\frac{\pi m^2}{2qB} \right) \right| - \frac{i\pi m^2}{2qB} \right], \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

donde m^2 se debe entender como $m^2 - i\epsilon$.

Juntando los resultados de las Ecs. 4.2.13, 4.2.15 y 4.2.16 se tiene una expresión para la integral que nos interesa

$$\begin{aligned} I_1 &= 2\pi i \sum_{res} \frac{e^{-ism^2}}{(is) \sin(qBs)} - \left(2 \frac{\Gamma \left(2 - \frac{d}{2} \right) \zeta \left(2 - \frac{d}{2}, \frac{1}{2} - \frac{m^2}{2qB} \right)}{(2qB)^{2-\frac{d}{2}}} + I_0 \right) \\ &= -\frac{2\pi i}{i\pi} \left[\ln(2) + \ln \left| \cos \left(\frac{\pi m^2}{2qB} \right) \right| - \frac{i\pi m^2}{2qB} \right] \\ &\quad - 2 \frac{\Gamma \left(2 - \frac{d}{2} \right) \zeta \left(2 - \frac{d}{2}, \frac{1}{2} - \frac{m^2}{2qB} \right)}{(2qB)^{2-\frac{d}{2}}} - \frac{i\pi m^2}{qB} \end{aligned}$$

4 Potencial efectivo de un campo escalar en presencia de campo magnético

$$= -2 \left[\ln(2) + \ln \left| \cos \left(\frac{\pi m^2}{2qB} \right) \right| + \frac{\Gamma \left(2 - \frac{d}{2} \right) \zeta \left(2 - \frac{d}{2}, \frac{1}{2} - \frac{m^2}{2qB} \right)}{(2qB)^{2-\frac{d}{2}}} \right]. \quad (4.2.17)$$

Al haber obtenido este resultado podemos escribir la energía del vacío Ec. 4.2.1 como sigue

$$\begin{aligned} V_B^{(1)} &= \frac{1}{2} \frac{qB}{4\pi} \frac{\Lambda^{4-d}}{(4\pi)^{\frac{d-2}{2}}} \int dm^2 \int_{0-i\delta}^{\infty-i\delta} \frac{s}{\sin(qBs)} \frac{e^{-is(m^2-i\epsilon)}}{(is)^{\frac{d-2}{2}}} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{2qB}{(4\pi)^2} \left(\frac{4\pi\Lambda}{2qB} \right)^{\frac{4-d}{2}} \int dm^2 \\ &\quad \times \left[\ln(2) + \ln \left| \cos \left(\frac{\pi m^2}{2qB} \right) \right| + \Gamma \left(2 - \frac{d}{2} \right) \zeta \left(2 - \frac{d}{2}, \frac{1}{2} - \frac{m^2}{2qB} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.2.18)$$

La función $\Gamma(z)$ es analítica excepto en $z = 0, -1, -2, \dots$, mientras que la función zeta de Hurwitz¹ $\zeta(s, a)$ tiene una singularidad en 0. Para aislar las singularidades de la Ec. 4.2.18 expandimos al rededor de $\frac{4-d}{2} = \epsilon$, tomando del límite cuando $\epsilon \rightarrow 0$ se tiene

$$\begin{aligned} V_B^{(1)} &= -\frac{1}{2} \frac{2qB}{(4\pi)^2} \left(1 + \epsilon \ln \left(\frac{4\pi\Lambda^2}{2qB} \right) \right) \\ &\quad \times \int dm^2 \left\{ \ln(2) + \ln \left| \cos \left(\frac{\pi m^2}{2qB} \right) \right| \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma \right) \left[\zeta \left(0, \frac{1}{2} - \frac{m^2}{2qB} \right) + \epsilon \zeta' \left(0, \frac{1}{2} - \frac{m^2}{2qB} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.2.19)$$

aquí $\zeta'(0, a) = \frac{d\zeta(x, a)}{dx} \Big|_{x=0}$ y γ es la gamma de Euler. Las siguientes relaciones nos serán útiles para reescribir la ecuación anterior; $\zeta(0, a) = \frac{1}{2} - a$ y $\zeta'(0, a) = \ln(\Gamma(a)/\sqrt{2\pi})$. Quitando los términos irrelevantes cuando $\epsilon \rightarrow 0$ y reordenando los términos se tiene

$$\begin{aligned} V_B^{(1)} &= -\frac{1}{2(4\pi)^2} \int dm^2 \left\{ m^2 \left[\frac{1}{\epsilon} + \ln(4\pi) - \gamma + \ln \left(\frac{\Lambda^2}{2qB} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + 2qB \left[\ln \left| \cos \left(\frac{\pi m^2}{2qB} \right) \right| + \ln \left(\Gamma \left(\frac{1}{2} - \frac{m^2}{2qB} \right) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right) \right] \right\} \\ &= -\frac{1}{2(4\pi)^2} \int dm^2 \left\{ m^2 \left[\frac{1}{\epsilon} + \ln(4\pi) - \gamma - 1 + \ln \left(\frac{\mu^2}{2qB} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + 2qB \left[\ln \left| \cos \left(\frac{\pi m^2}{2qB} \right) \right| + \ln \left(\Gamma \left(\frac{1}{2} - \frac{m^2}{2qB} \right) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.2.20)$$

¹Ver apéndice

4 Potencial efectivo de un campo escalar en presencia de campo magnético

En el último paso se ha elegido $\Lambda = \mu e^{-1/2}$ como nuestra escala de renormalización. μ es el parámetro de masa que aparece en el Lagrangiano antes del rompimiento de simetría.

La implementación de la renormalización de $V_B^{(1)}$ la llevamos a cabo al mismo estilo que en el capítulo 3, mediante la introducción de contratérminos que cancelen la divergencia de términos proporcionales a $1/\epsilon$, y algunas constantes. Específicamente, mediante el proceso de renormalización podemos deshacernos de la cantidad $m^2 (1/\epsilon + \ln(2\pi) - \gamma)$. Con este procedimiento de *renormalización de la masa* obtenemos una expresión para V_B^1 , la cual está libre de singularidades y divergencias.

El tratamiento anterior es válido para $m^2 < 0$, lo cual ciertamente sucederá en algún subintervalo de $0 \leq v \leq v_0$. La energía del vacío es

$$V_{B,m^2 < 0}^{(1)} = -\frac{1}{2(4\pi)^2} \int dm^2 m^2 \left\{ -1 + \ln \left(\frac{\mu^2}{qB} \right) + \frac{2qB}{m^2} \left(\ln \left| \cos \left(\frac{\pi m^2}{2qB} \right) \right| + \ln \left(\Gamma \left(\frac{1}{2} - \frac{m^2}{2qB} \right) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right) \right) \right\} \quad (4.2.21)$$

La idea para calcular la integral en la Ec. 4.2.8 cuando $m^2 > 0$ es similar al caso precedente. Esta vez, el contorno que nos ayudará, Fig. 4.2.1, será uno que avanza por debajo del eje real en el sentido positivo, continúa por el cuarto de círculo al infinito localizado en el semiplano inferior y finalmente se cierra a lo largo del eje imaginario negativo. Tal contorno no encierra ningún polo del integrando, por consiguiente, la suma sobre los residuos del teorema de Cauchy, Ec. 4.2.9, es nula. Esto simplifica un poco los cálculos y una vez más invocando el teorema de Cauchy se tiene

$$\oint \frac{ds}{\sin(qBs)} \frac{e^{-is(m^2 - i\epsilon)}}{(is)^{\frac{d-2}{2}}} \equiv 0 = I_1 + I_2 + I_3, \quad (4.2.22)$$

de nuevo, la integral I_2 se anula cuando el radio del semicírculo va a infinito y nuestra

4 Potencial efectivo de un campo escalar en presencia de campo magnético

tarea es calcular I_3 . De forma análoga a la Ec. 4.2.13 obtenemos

$$\begin{aligned}
 I_3 &= -\frac{1}{(i)^{d-2}} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\sinh(qB\tau)} \frac{e^{\tau m^2}}{\tau^{\frac{d-2}{2}}} \\
 &- \frac{1}{2(4\pi)^2} \int dm^2 m^2 \left\{ -1 + \ln\left(\frac{\mu^2}{qB}\right) \right. \\
 &- \left. \frac{2qB}{m^2} \ln\left(\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{m^2}{2qB}\right) / \sqrt{2\pi}\right) \right\}. \tag{4.2.23}
 \end{aligned}$$

Siguiendo el mismo esquema de renormalización obtenemos para la energía del vacío

$$\begin{aligned}
 V_{B,m^2>0}^{(1)} &= -\frac{1}{2(4\pi)^2} \\
 &\times \int dm^2 m^2 \left\{ -1 + \ln\left(\frac{\mu^2}{qB}\right) - \frac{2qB}{m^2} \left(\ln\left(\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{m^2}{2qB}\right) / \sqrt{2\pi}\right) \right) \right\} \tag{4.2.24}
 \end{aligned}$$

A nivel un loop, el potencial efectivo recibe correcciones del vacío con $qB = 0$, que denotaremos por $V^{(1)}$, y correcciones que toman en cuenta el efecto del campo magnético. Ambas calculadas en la sección anterior. En esta sección escribiremos el potencial hasta orden un loop juntando las piezas que tenemos hasta ahora.

Una condición física importante que le pediremos al potencial hasta orden un loop con $qB = 0$, es que su mínimo y masa permanezcan en sus valores clásicos, a saber

$$\left. \frac{dV}{dv} \right|_{v=v_0} = 0, \quad \left. \frac{d^2V}{dv^2} \right|_{v=v_0} = 2\mu^2, \tag{4.2.25}$$

donde $V(v) = V^{(tree)}(v) + V^{(1)}(v)$ y recordemos que $V^{(tree)}(v)$ está dado por la Ec. 4.1.16

$$V^{(tree)} = -\frac{1}{2}\mu^2 v^2 + \frac{\lambda}{16}v^4. \tag{4.2.26}$$

Lo anterior lo lograremos añadiendo contratérminos a $V(v)$ de tal forma que

$$\begin{aligned}
 V(v) &= V^{(tree)}(v) + V^{(1)}(v) - \frac{\delta\mu^2}{2}v^2 + \frac{\delta\lambda}{16}v^4 \\
 &= -\frac{\mu^2}{2}v^2 + \frac{\lambda}{16}v^4 - \frac{m_\sigma^4}{(8\pi)^2} \left[\frac{1}{2} + \ln\left|\frac{2\mu^2}{m_\sigma^2}\right| \right] - \frac{m_\sigma^4}{(8\pi)^2} \left[\frac{1}{2} + \ln\left|\frac{2\mu^2}{m_\sigma^2}\right| \right] \\
 &- \frac{\delta\mu^2}{2}v^2 + \frac{\delta\lambda}{16}v^4. \tag{4.2.27}
 \end{aligned}$$

4 Potencial efectivo de un campo escalar en presencia de campo magnético

Para determinar $\delta\mu^2$ y $\delta\lambda$ usamos las *condiciones de estabilidad* dadas por las Ecs. 4.2.25. La solución a las ecuaciones impuestas sobre V para los contratérminos arrojan

$$\delta\mu^2 = -\frac{9\lambda}{(8\pi)^2}\mu^2, \quad \delta\lambda = -\frac{9\lambda^2}{(8\pi)^2}. \quad (4.2.28)$$

Estamos en la posibilidad de escribir la energía del vacío incluyendo las correcciones magnéticas y las condiciones de estabilidad. Juntando las Ecs. 4.2.28, 4.1.16, 4.2.21 y 4.2.24 se tiene

$$\begin{aligned} V_B = & -\left(1 - \frac{9\lambda}{(8\pi)^2}\right) \frac{\mu^2}{2} v^2 + \left(1 - \frac{9\lambda}{(8\pi)^2}\right) \frac{\lambda}{16} v^4 \\ & + \sum_{i=\sigma,\chi} \left(V_B^1|_{m_i^2 < 0} + V_B^1|_{m_i^2 > 0} \right). \end{aligned} \quad (4.2.29)$$

4.3. Correcciones térmicas a un loop

Como ya se ha mencionado, en modelos con rompimiento espontáneo de simetría, la naturaleza de la restauración de la simetría está determinada por el potencial efectivo a temperatura finita. Además, el hecho de que la simetría se restaure a altas temperaturas es consecuencia de la aparición de un término proporcional a $T^2 m^2$ en la corrección térmica a un loop. Conforme la temperatura crezca, las fluctuaciones térmicas dominaran los términos de masa cuadrada negativa y la simetría se restaurará eventualmente. El potencial efectivo a un loop de una teoría escalar a temperatura finita tiene un término dominante $\sim \lambda v^2 T^2$ y otro término $\sim \lambda^{3/2} v^3 T$. En principio este último término podría dar origen a una transición de fase de primer orden. Sin embargo, las contribuciones de los diagramas de anillo también son de orden $\lambda^{3/2}$ y cancelan exactamente el término cúbico que viene del orden un loop.

Al incluir la contribución de los diagramas de anillo al potencial efectivo el término $\lambda^{3/2} v^3 T$ es reemplazado por uno que tiene la forma $\lambda^{3/2} [m^2 + \mu\lambda T^2]^{3/2} T$ que para T suficientemente grande es real. Este término es el que da origen a una transición de primer orden en una teoría escalar simple. En este trabajo investigaremos lo correspondiente pero en presencia del campo magnético.

Calculemos ahora las correcciones debidas al efecto de la temperatura sobre el sistema. Como hemos visto en el capítulo 3, la teoría térmica de campos en su formulación de tiempo imaginario nos da las herramientas para hacer este tipo de cálculos. La contribución a un loop a temperatura finita al potencial efectivo ante la presencia de campo magnético está

4 Potencial efectivo de un campo escalar en presencia de campo magnético

dada como

$$\begin{aligned} V_{B,T}^{(1)} &= \sum_{i=\sigma,\chi} \frac{T}{2} \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \ln \left[\Delta_{B,T}(\omega_n, k; m_i^2)^{-1} \right] \\ &= \sum_{i=\sigma,\chi} \frac{T}{2} \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int dm_i^2 \Delta_{B,T}(\omega_n, k; m_i^2), \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

donde la integración sobre el momento se ha llevado a espacio Euclideo, $\omega_n = -ik_0 = 2n\pi T$ corresponde a las frecuencias de Matsubara como ya se había visto anteriormente y $\Delta_{B,T}(\omega_n, k; m_i^2)$, el propagador de Matsubara viene dado como

$$\Delta_{B,T}(\omega_n, k; m_i^2) = iD(k_0 = i\omega_n, k; m_i^2).$$

Tomemos la siguiente jerarquía de energías

$$T^2 \gg |m_i^2|, qB,$$

lo menos que se quiere es restringir el espacio de parámetros. Es por eso que una forma conveniente de trabajar con la Ec. 4.3.1 es separar el modo $n = 0$ del resto como veremos a continuación

$$\Delta_{B,T}(\omega_n, k; m_i^2) = \Delta_{B,T}(\omega_{n \neq 0}, k; m_i^2) + \Delta_{B,T}(\omega_{n=0}, k; m_i^2). \quad (4.3.2)$$

Para los modos $n \neq 0$ se puede hacer una expansión del propagador de Matsubara en la Ec. 4.3.1 en potencias de qB/T^2 como se hace en la Ref. [23]. Para $n = 0$, sin embargo, hacer la misma expansión nos restringiría a la condición $qB \ll |m_i^2|$. Para el primer término de la Ec. 4.3.2 usamos la expansión de campo débil

$$\begin{aligned} \Delta_{B,T}(\omega_{n \neq 0}, k; m_i^2) &\simeq \frac{1}{\omega_n^2 + k^2 + m_i^2} \\ &\times \left(1 - \frac{(qB)^2}{(\omega_n^2 + k^2 + m_i^2)^2} + \frac{2(qB)^2 k_\perp^2}{(\omega_n^2 + k^2 + m_i^2)^3} \right), \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

mientras que

$$\Delta_{B,T}(\omega_{n=0}, k; m_i^2) = \int_{0-i\delta}^{\infty-i\delta} \frac{ds}{\cos(qBs)} e^{-is(k_z^2 + k_\perp^2 \frac{\tan(qBs)}{qBs} + m_i^2 - i\epsilon)}. \quad (4.3.4)$$

4 Potencial efectivo de un campo escalar en presencia de campo magnético

Insertando las Ecs. 4.3.3 y 4.3.4 en la Ec. 4.3.1 se obtiene

$$\begin{aligned}
 V_{B,T}^{(1)} &= \frac{T}{2} \sum_{i=\sigma,\chi} \sum_{n \neq 0} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \int dm_i^2 \Delta_{B,T}(\omega_{n \neq 0}, k; m_i^2) \\
 &+ \frac{T}{2} \sum_{i=\sigma,\chi} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \int dm_i^2 \Delta_{B,T}(\omega_{n=0}, k; m_i^2). \tag{4.3.5}
 \end{aligned}$$

El primer término de la Ec. 4.3.5 se calcula mediante la técnica de la transformada de Mellin [35], ver apéndice. Y para calcular las integrales que involucra el modo cero, pedimos que la $m_i^2 + (2l + 1)qB > 0$. La condición para que esto suceda es que $qB > |m^2|$. Bajo estas condiciones

$$\begin{aligned}
 V_{B,T}^{(1)} &= \sum_{i=\sigma,\chi} \left\{ -\frac{T^4 \pi}{90} + \frac{T^2 m_i^2}{24} - \frac{m_i^2}{64\pi^2} \left[\ln \left(\frac{|m_i^2|}{(4\pi T)^2} \right) + 2\gamma - \frac{3}{2} \right] \right\} \\
 &+ \frac{(qB)^2}{48\pi} \left[\ln \left(\frac{|\mu|}{(2\pi T)^2} \right) + \gamma + \frac{1}{2} \right] \\
 &- (qB)^2 \left[\frac{\zeta(3)}{192\pi^2} \left(\frac{m_i}{2\pi T} \right)^2 + \frac{\zeta(5)}{256\pi^2} \left(\frac{m_i}{2\pi T} \right)^4 \right] + \mathcal{O} \left[(m^2/T^2)^3 \right] \\
 &+ \sum_{i=\sigma,\chi} \frac{T(2qB)^{3/2}}{8\pi} \zeta \left(-\frac{1}{2}, \frac{m_i^2 + qB}{2qB} \right). \tag{4.3.6}
 \end{aligned}$$

4.4. Diagramas de anillo

Como vimos en el capítulo 2, la corrección a siguiente orden no es dos loops sino las correcciones siguientes se deben a los diagramas de anillo. Dichas correcciones son de orden $\lambda^{3/2}$, debido a una divergencia infrarroja en la expansión perturbativa. Estas divergencias son independientes de las divergencias ultravioletas que aparecen a $T = 0$. Más bien, las divergencias a $T > 0$, cuando $m = 0$ se deben al hecho de que $\Pi_1 \neq 0$. Los campos escalares desarrollan una masa dinámica cuadrada, $m^2 = \Pi_1^{ren} \sim \lambda T^2$. Π entonces actúa como un regulador infrarrojo que evita que la masa cuadrada sea negativa. Para nuestros cálculos es suficiente tomar el límite infrarrojo de Π_1 , que es independiente del momento. Además la contribución dominante a los diagramas de ring viene del límite infrarrojo de Π_1 .

La contribución de los diagramas de anillo esta dada por [18]

$$V_{B,T}^{(ring)} = \frac{T}{2} \sum_{i=\sigma,\chi} \sum_n \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \ln [1 + \Pi \Delta_{B,T}(\omega_n, k; m_i^2)], \tag{4.4.1}$$

4 Potencial efectivo de un campo escalar en presencia de campo magnético

para este cálculo tomaremos el término dominante de Π en el límite de temperatura alta

$$\Pi = \lambda \frac{T^2}{12}. \quad (4.4.2)$$

Con esta elección la auto energía es independiente de la masa. Si nos restringimos al modo estático $n = 0$, lo cual es suficiente para tomar los efectos de apantallamiento del plasma

$$\begin{aligned} V_{B,T}^{ring} &= \frac{T}{2} \Pi \sum_{i=\sigma,\chi} \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \ln [1 + \Pi \Delta_{B,T}(\omega_n, k; m_i^2)] \\ &\simeq \frac{T}{2} \Pi \sum_{i=\sigma,\chi} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} [\Delta_{B,T}(\omega_n, k; m_i^2)] \\ &= \Pi \sum_{i=\sigma,\chi} \frac{T (2qB)^{\frac{1}{2}}}{8\pi} \zeta \left(\frac{1}{2}, \frac{m_i^2 + qB}{2qB} \right). \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

4.5. Espacio de parámetros

Después de haber calculado el potencial efectivo, nuestro siguiente paso es la exploración de su comportamiento. Existen varias regiones del espacio de parámetros que consideraremos.

El potencial efectivo a temperatura finita en presencia de campo magnético, considerando correcciones hasta orden ring, es

$$V_B^{(eff)} = V_B + V_{B,T}^{(1)} + V_{B,T}^{(ring)}, \quad (4.5.1)$$

los términos anteriores están dados por las Ecs. 4.2.29, 4.3.6 y 4.4.3 respectivamente.

El primer caso que presentaremos es el caso en el que no hay campo magnético, $qB = 0$. Este caso ha sido tratado con anterioridad en A. Ayala et al. (2005) [23] y viene dado por

$$\begin{aligned} V_0^{(eff)} &= - \left(1 - \frac{9\lambda}{(8\pi)^2} \right) \frac{\mu^2}{2} v^2 + \left(1 - \frac{9\lambda}{(8\pi)^2} \right) \frac{\lambda}{16} v^4 \\ &+ \sum_{i=\sigma,\chi} \left\{ - \frac{m_i^4}{64\pi^2} \left(\frac{1}{2} + \ln \left[\frac{2\mu^2}{(4\pi T)^2} \right] \right) \right. \\ &\left. - \frac{\pi^2 T^4}{90} + \frac{T^2 m_i^2}{24} - \frac{T}{12\pi} (m_i^2 + \Pi)^{3/2} \right\}. \end{aligned} \quad (4.5.2)$$

Para representar los resultados graficaremos el potencial efectivo en unidades de μ^4 , defi-

4 Potencial efectivo de un campo escalar en presencia de campo magnético

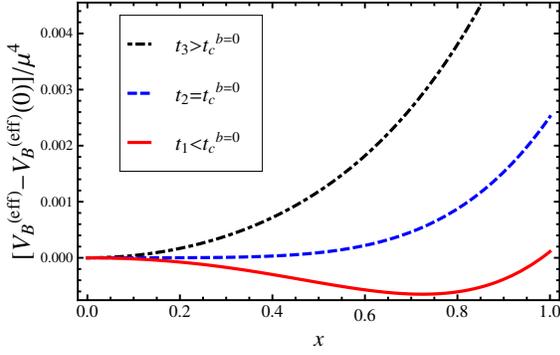


Figura 4.5.1: Potencial efectivo V^{eff}/μ^4 para $b = 0$, $\lambda = 0.1$ y tres valores de $t = T/\mu$, los valores de T están al rededor de la temperatura crítica para el caso $qB = 0$.

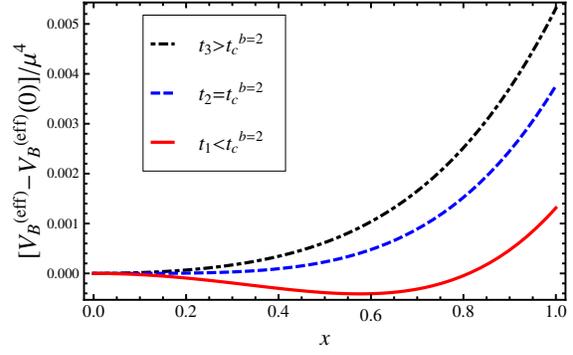


Figura 4.5.2: Potencial efectivo como función de $x = v/\mu$ para los valores de $b = 2$, $\lambda = 0.1$ y tres valores de t . Aquí se aprecia que la transición es de segundo orden.

niendo los siguientes parámetros adimensionales: $x \equiv v/\mu$, $b \equiv qB/\mu^2$, $t \equiv T/\mu$.

El potencial efectivo en el caso sin campo magnético, $qB = 0$, se muestra en la Fig. 4.5.1 para tres diferentes temperaturas y con el valor fijo $\lambda = 0.1$. Aquí se aprecia que existe una temperatura crítica a partir de la cual la simetría se restaura. En lo que sigue incluiremos los efectos del campo magnético y veremos como modifica el comportamiento del sistema.

El siguiente escenario que nos interesa es cuando el campo magnético es diferente de cero, $qB \neq 0$. La Fig. 4.5.2 muestra el potencial efectivo para tres valores de T y las cantidades fijas $qB/\mu^2 = 2$ y $\lambda = 0.1$. Los valores que se escogen para $t = T/\mu$ están por abajo y por arriba de $t_c^{b=0}$, la temperatura crítica cuando $qB = 0$. Con el fin investigar el comportamiento del caso $qB \neq 0$ con respecto a $qB = 0$, mostramos las curvas para el potencial efectivo en ambos casos para una misma temperatura a saber, la temperatura crítica para $qB = 0$ y $\lambda = 0.1$. Dicha gráfica corresponde a la Fig. 4.5.3 en donde se nota que la transición de fase en presencia de campo magnético está retrasada con respecto al caso $qB = 0$.

4 Potencial efectivo de un campo escalar en presencia de campo magnético

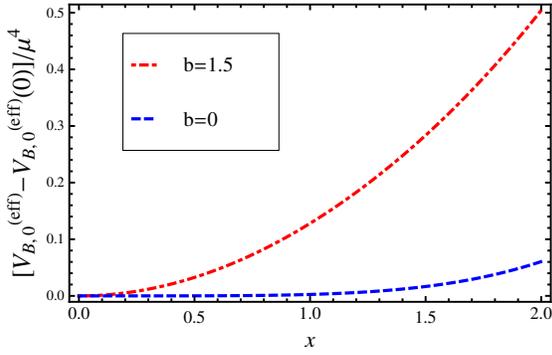


Figura 4.5.3: Para la temperatura crítica en el caso $b = 0$, se muestran los potenciales efectivos con $b = qB/\mu^2 = 0, 1.5$ y $\lambda = 0.1$

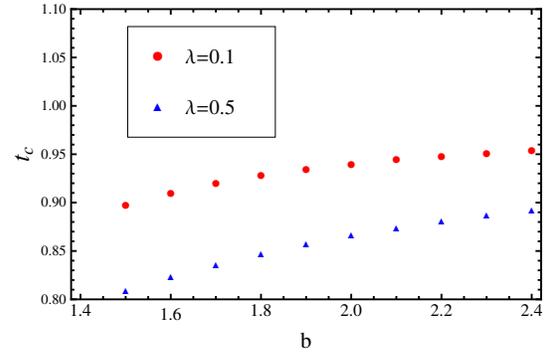


Figura 4.5.4: Comportamiento de la temperatura crítica en función del campo magnético. Los puntos mostrados son para valores de $\lambda = 0.1, 0.5$

Un punto interesante es preguntarse acerca de la relación entre las correspondientes temperaturas críticas para $qB = 0$ y $qB \neq 0$. La Fig. 4.5.4 muestra que mientras el campo magnético se incrementa, la temperatura crítica también crece pero se mantiene por debajo del caso $qB = 0$, para los valores $\lambda = 0.1, 0.5$. Esto es, la presencia de campo magnético retrasa la transición de fase, asimismo, la transición se ve retrasada cuando el valor de la constante de acoplamiento λ crece.

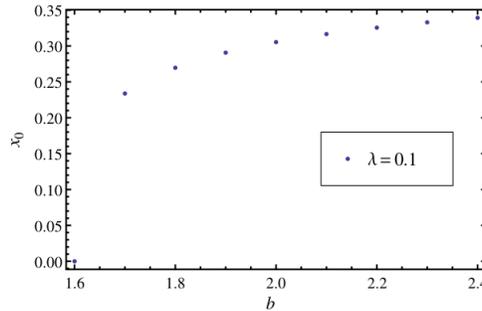


Figura 4.5.5: El condensado v_0 , dependiente del campo magnético $b \equiv qB/\mu^2$, en unidades de μ . $x_0 = v_0/\mu$ para $\lambda = 0.1$.

Otro objeto importante es v_0 , el valor del parámetro de orden. Este crece con la intensidad del campo magnético como se muestra en la Fig. 4.5.5, La gráfica muestra $x_0 \equiv v_0/\mu$ como función de b para $\lambda = 0.1$ y T tomada como la temperatura crítica para el valor $b = 1.6$.

El sistema con campo magnético presenta una transición de fase de segundo orden en el espacio de parámetros que hemos explorado, pues como se ha visto hasta ahora, la curva de

4 Potencial efectivo de un campo escalar en presencia de campo magnético

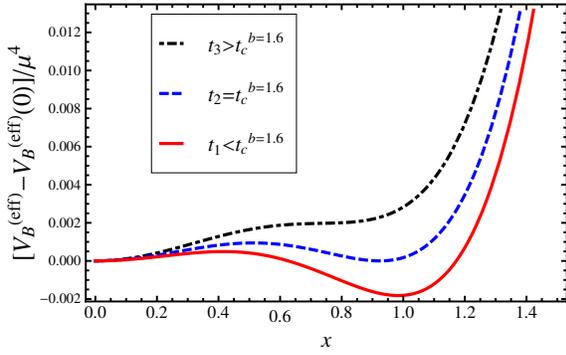


Figura 4.5.6: En esta figura se muestra el potencial efectivo y se ve que para cierta elección de parámetros puede darse una transición de primer orden. Los parámetros usados $b = 1.6$, $\lambda = 0.5$ y tres valores de t .

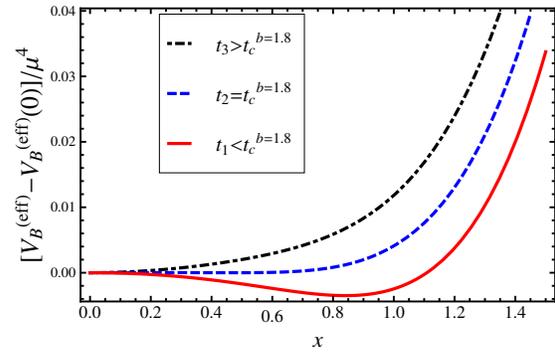


Figura 4.5.7: Potencial efectivo en unidades de μ^4 para $b = 1.8$, $\lambda = 0.5$, y tres valores de t como función de $x = v/\mu$. Esta transición es de segundo orden para los parámetros escogidos.

potencial presenta sólo un mínimo. Como veremos a continuación existe una región en el espacio de parámetros en donde la transición puede ser de primer orden. En la Fig. 4.5.6 se muestra la transición de fase de primer orden para tres valores de la variable la temperatura y los valores específicos de $qB/\mu^2 = 1.6$, y $\lambda = 0.5$. Dicha transición se caracteriza por presentar mínimos degenerados como se muestra en la figura. Esta región del espacio de parámetros es pequeña ya que al aumentar la intensidad del campo magnético, la transición se convierte en una de segundo orden nuevamente. Dicho de otro modo, la transición de primer orden que presenta el sistema es débil.

4 Potencial efectivo de un campo escalar en presencia de campo magnético

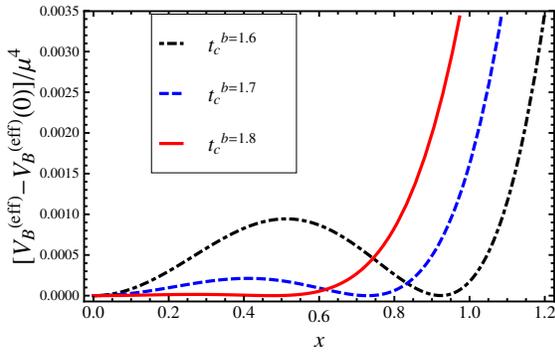


Figura 4.5.8: Aquí se aprecia una transición de fase de primer orden débil a uno de segundo orden, en función del campo magnético. El potencial efectivo está en unidades de μ^4 , $\lambda = 0.5$ y tres valores de b a su correspondiente temperatura crítica.

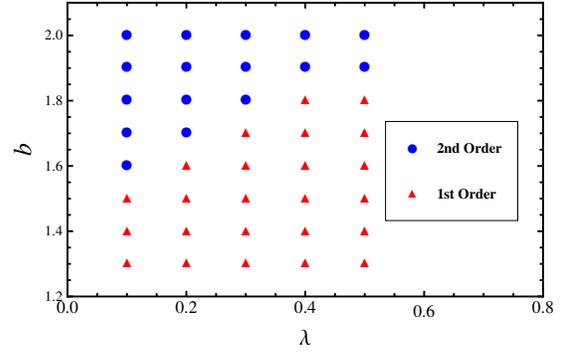


Figura 4.5.9: Diagrama de fase para bosones escalares cargados en presencia de campo magnético a temperatura finita. La parte inferior corresponde a transiciones de primer orden y la esquina superior izquierda a transiciones de segundo orden. En el eje horizontal se encuentra el autoacoplamiento y en el eje vertical el campo magnético en unidades de μ^2 .

Empezando con el caso de una transición de primer orden, como el que se muestra en la Fig. 4.5.6, esta se vuelve de segundo orden cuando el campo magnético aumenta. La Fig. 4.5.7 muestra dicho comportamiento para tres valores de la temperatura en unidades de μ , el valor fijo $b = 1.8$ y $\lambda = 0.5$.

El paso de la transición de primer orden a la de segundo orden, gobernada por la variación del campo magnético se ilustra en la Fig. 4.5.8, donde se muestra la gráfica del potencial efectivo para tres valores de qB/μ^2 a sus correspondientes temperaturas críticas.

Los resultados anteriores se pueden reunir en un diagrama de fases en las variables campo magnético y autoacoplamiento. En la Fig. 4.5.9 se muestra dicho diagrama de fase, los triángulos en rojo corresponden a la transición de fase de primer orden, mientras que los círculos en azul corresponden a transiciones de fase de segundo orden. La transición de fase de primer orden corresponde a la parte inferior del diagrama y vemos que para valores suficientemente grandes de campo magnético podemos lograr que la transición se vuelva de segundo orden. Vemos entonces que este tipo de sistemas presenta un diagrama de fases no trivial al variar la intensidad del campo magnético externo y la intensidad del acoplamiento λ .

5 Conclusiones

En el capítulo 4 calculamos el potencial efectivo de un campo escalar cargado en presencia de un campo magnético uniforme. Trabajamos en el marco del modelo de Higgs Abelian con rompimiento espontáneo de simetría para implementar la interacción entre el campo magnético y el campo escalar. Consideramos que la jerarquía de escalas es $T^2 \gg qB > |m^2|$, es decir, nuestra escala más grande es la temperatura y el cuadrado de la masa menor que el campo magnético, esta condición se establece al calcular la contribución a un loop térmica. La revisión de la técnica del tiempo propio de Schwinger que hicimos en el capítulo 2 la empleamos para escribir el propagador del campo escalar cargado incluyendo el efecto del campo magnético y calcular las correcciones cuánticas y térmicas hasta orden un loop y anillo respectivamente al potencial efectivo.

La primera dificultad con la que nos encontramos fue al calcular la primera corrección al potencial efectivo; ya que el parámetro de masa puede tomar valores positivos y negativos, las integrales que involucra la contribución a la energía del vacío se tienen que hacer con una elección conveniente de los contornos de integración, pues de otro modo tendríamos expresiones divergentes. El procedimiento en general es ingenioso, pero el caso $m^2 < 0$ es un resultado a resaltar en este trabajo que hasta ahora no se había tratado en la literatura. El contorno de dicha integral encierra en su mayoría polos simples pero, el situado en el origen es un polo doble el cual se tiene que separar para contar cada contribución de acuerdo al método de Cauchy.

Después de haber calculado las correcciones a un loop térmicas y las correcciones de los diagramas de anillo, encontramos que el sistema puede desarrollar transiciones de fase de primer y segundo orden. Tenemos entonces que las contribuciones térmicas tienen un papel esencial. Encontramos que las correcciones provenientes de los diagramas de anillo son las causantes de que el sistema tenga transición de fase de primer orden. De alguna manera esta estructura era de esperarse por los resultados que se han obtenido a temperatura finita con $B = 0$, en donde se muestra que el sistema presenta transición de fase de primer orden. Otras contribuciones atenúan la contribución de anillo de modo que como resultado tenemos una transición de primer orden débil. El comportamiento depende, des-

de luego, de la región del espacio de parámetros en que uno se fije; para valores pequeños del campo magnético podemos encontrar una región en el espacio de parámetros en la que el sistema tenga una transición de primer orden aunque esta sea débil, teniendo en mente la restricción $qB > |m^2|$. La transición cambia al aumentar la intensidad del campo magnético, con un valor fijo de λ , la transición cambia de primero a segundo orden. En comparación con el caso $qB = 0$ obtenemos que a medida que el campo magnético crece, la temperatura crítica también lo hace pero se mantiene por debajo de $T_c^{B=0}$. Tenemos que mencionar que existe un intervalo de valores para el campo magnético restringido por la condición $qB > |m^2|$, en el que desconocemos el comportamiento de la temperatura crítica. Esta condición deriva del tratamiento matemático sobre la corrección térmica a un loop, el cual involucró la separación del modo $\omega_{n=0}$ para después hacer un tratamiento similar al hecho en la contribución del vacío. En esta dirección queda trabajo por hacer, un tratamiento adecuado para valores del campo magnético tales que $qB < |m^2|$ nos daría acceso a la región del espacio de parámetros restante y nos daría el comportamiento de la temperatura crítica en esta región.

Otra posible jerarquía de escala es cuando T es pequeña comparada con m^2 y B . No podemos anticipar el comportamiento del sistema en esta jerarquía de escalas. Sin embargo, parece un escenario en el que los bosones, gracias a sus propiedades de condensación, puedan mostrar un comportamiento interesante.

En este trabajo hemos tratado únicamente con bosones cargados, que debido a sus propiedades de condensación, son importantes en la descripción en las transiciones de fase. Cabe señalar que nuestro modelo describe de forma efectiva un sistema de bosones cargados, como los que se producen en colisiones de iones pesados relativistas. Una situación más realista incluiría la adición de partículas fermiónicas al estudio para poder dar una conclusión global sobre el efecto que tiene el campo magnético sobre sistemas que contengan partículas fermiónicas y bosónicas, como es el caso de QCD. Sin embargo, este modelo es un buen comienzo con miras hacia un estudio más detallado y completo que incluya partículas fermiónicas, ya que como se ha visto el comportamiento de los bosones cargados está lleno de matices.

La inclusión de un campo magnético en sistemas y su efecto sobre estos es un campo de investigación intensa en el que no esta dicha la última palabra. A pesar de nuestros resultados en este trabajo no podemos predecir el comportamiento de un sistema tomando en cuenta grados de libertad fermiónicos, los cuales serían un sistema más realista. Vimos que aun para escalares el cálculo involucra manipulaciones matemáticas adecuadas y sutilezas físicas.

Apéndice

Transformada de Mellin

La técnica de la transformada de Mellin nos permite evaluar integrales en el régimen de alta temperatura. En este apéndice se muestran los resultados relevantes de esta técnica, los detalles pueden consultarse en la Ref. [24]. La transformada de Mellin se define como

$$F(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} f(x) dx, \quad \alpha < \text{Re}(s) < \beta, \quad (5.0.1)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-p} F(s) ds, \quad \alpha < c < \beta,$$

la variable de la transformada de Mellin, s , es compleja, $f(x)$ es la transformada inversa que está definida en el intervalo $(0, \infty)$.

Estamos interesados en evaluar sumas infinitas del tipo

$$I = \frac{1}{\beta} \sum_{n \neq 0} f(\omega_n), \quad (5.0.2)$$

donde

$$f(\omega_n) = \int \frac{d^d p}{(2\pi)} \frac{\omega_n^{2t}}{(p^2 + \omega_n^2 + m^2)^\sigma},$$

en este trabajo $\omega_n = 2\pi n/\beta$ pues trabajamos con bosones. Notese que el término $n = 0$ esta excluido de la suma.

Al tomar la transformada de Mellin de la Ec. 5.0.2 con respecto a ω_n , la suma se representa como

$$I = \frac{1}{\pi i \beta} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^{-s} \zeta(s) F(s) ds. \quad (5.0.3)$$

Ahora fijémonos en la transformada de Mellin de f . Utilizando integración en d -dimensiones,

se tiene

$$\begin{aligned}
 F(s) &= \int_0^\infty dy y^{s-1} \int \frac{d^d p}{(2\pi)} \frac{y^{2t}}{(p^2 + y^2 + m^2)^\sigma} \\
 &= \frac{\Gamma(s/2 + t)}{2\pi^{s/2+t}} \int d^{s+2t} y \int \frac{d^d p}{(2\pi)} \frac{1}{(p^2 + y^2 + m^2)^\sigma}
 \end{aligned} \tag{5.0.4}$$

combinando las Ecs. 5.0.3 y 5.0.4 podemos escribir

$$F(s) = \frac{\Gamma(s/2 + t)}{2\pi^{s/2+t}} \int \frac{d^{d+s+2t} p}{(2\pi)} \frac{1}{(p^2 + y^2 + m^2)^\sigma},$$

la transformada de Mellin en conjunto con la integración d -dimensional nos ha ayudado a escribir $F(s)$ en términos de funciones gamma Γ

$$F(s) = \frac{\Gamma(s/2 + t)}{2(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(\sigma - d/2 - s/2 - t)}{m^{2\sigma - d - s - 2t} \Gamma(\sigma)} \tag{5.0.5}$$

con $t, \sigma > 0$, la integral converge cuando $d < 2(\sigma - t) - s$.

Combinando las Ecs. 5.0.3 y 5.0.5 obtenemos

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{m^{-2\sigma + d + 2t}}{\Gamma(\sigma) (4\pi)^{d/2} \beta} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(\frac{2\pi}{m\beta}\right)^{-s} \\
 &\times \zeta(s) \Gamma(s/2 + t) \Gamma(\sigma - d/2 - s/2 - t) ds.
 \end{aligned} \tag{5.0.6}$$

Por el comportamiento del integrando en la ecuación anterior, un contorno de integración puede escogerse hacia el infinito en el semiplano real positivo. Los polos que encierra este contorno son aquellos que provienen de $\Gamma(\sigma - d/2 - s/2 - t)$, los cuales son polos simples en $s = 2(\sigma - t) - d + 2k$, para $k = 0, 1, 2, \dots$

Finalmente, al evaluar los residuos el resultado general es

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{2(4\pi)^{-d/2}}{\Gamma(\sigma) \beta} \left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^{d-2(\sigma-t)} \\
 &\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \zeta(2(k + \sigma - t) - d) \Gamma(k + \sigma - d/2) \left(\frac{m\beta^{2k}}{2\pi}\right).
 \end{aligned} \tag{5.0.7}$$

Función Zeta de Hurwitz

La función Zeta de Hurwitz es una generalización de la función ζ . Entre muchas de sus representaciones podemos dar la siguiente como definición

$$\zeta(s, v) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+v)^{-s}, \quad \operatorname{Re}(s) > 1, v \neq 0, -1, -2, \dots$$

Una de sus posibles representaciones integrales es la siguiente

$$\zeta(s, v) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} dt \frac{e^{-tv}}{1 - e^{-t}} t^{s-1}, \quad \operatorname{Re}(s) > 1, \operatorname{Re}(v) > 0.$$

con esto, se puede mostrar que $\zeta(s, v)$ tiene sólo una singularidad, a saber, un polo simple en $s = 1$ con residuo 1, y se puede hacer una continuación analítica al resto del plano complejo s .

Algunos valores especiales son

$$\begin{aligned} \zeta(0, v) &= \frac{1}{2} - v, \\ \zeta(-m, v) &= \frac{B_{m+1}(v)}{m+1}, \end{aligned} \quad m \in \mathbf{N},$$

donde $B_{\tau}(v)$ denota el τ -ésimo polinomio de Bernoulli.

Su derivada

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial s} \zeta(s, a) \right|_{s=0} &= \ln \Gamma(a) - \frac{1}{2} \ln(2\pi) \\ &= \ln \left(\frac{a}{\sqrt{2\pi}} \right). \end{aligned}$$

Bibliografía

- [1] Alexander D. Dolgov, Angela Lepidi, and Gabriella Piccinelli. Ferromagnetic properties of charged vector boson condensate. *JCAP*, 1008:031, 2010.
- [2] J. Binney. *The Theory of Critical Phenomena: An Introduction to the Renormalization Group*. Oxford Science Publ. Clarendon Press, 1992.
- [3] L.D. Landau and E.M. Lifshitz. *Statistical Physics*. Number v. 5. Elsevier Science, 1996.
- [4] L.E. Reichl. *A Modern Course in Statistical Physics*. Physics textbook. Wiley, 2009.
- [5] G.S. Bali, F. Bruckmann, G. Endrodi, Z. Fodor, S.D. Katz, et al. The QCD phase diagram for external magnetic fields. *JHEP*, 1202:044, 2012.
- [6] Elmfors, Kari Enqvist, and Kimmo Kainulainen. *Physics Letters B*, 440:269 – 274, 1998.
- [7] Alejandra Kandus, Kerstin E. Kunze, and Christos G. Tsagas. Primordial magnetogenesis. *Phys.Rept.*, 505:1–58, 2011.
- [8] Ana Júlia Mizher, M. N. Chernodub, and Eduardo S. Fraga. Phase diagram of hot qcd in an external magnetic field: Possible splitting of deconfinement and chiral transitions. *Phys. Rev. D*, 82:105016, Nov 2010.
- [9] Dmitri E. Kharzeev, Larry D. McLerran, and Harmen J. Warringa. *Nuclear Physics A*, 803:227 – 253, 2008.
- [10] Julian Schwinger. *Phys. Rev.*, 82:664–679, Jun 1951.
- [11] C. Itzykson and J.B. Zuber. *Quantum Field Theory*. Dover Books on Physics. Dover Publications, 2012.
- [12] A. Aragao, H. Boschi-Filho, C. Farina, and F.A. Barone. *Braz.J.Phys.*, 37:1260–1268, 2007.

- [13] J.S. Schwinger. *Particles, Sources, And Fields*. Number v. 3 in Advanced Book Classics. Advanced Book Program, Perseus Books, 1998.
- [14] Wu-yang Tsai and Thomas Erber. Photon pair creation in intense magnetic fields. *Phys. Rev. D*, 10:492–499, Jul 1974.
- [15] A. Erdas and G. Feldman. *Nuclear Physics B*, 343(3):597 – 621, 1990.
- [16] Alejandro Ayala, Angel Sánchez, Gabriella Piccinelli, and Sarira Sahu. *Phys. Rev. D*, 71:023004, Jan 2005.
- [17] J.I. Kapusta and C. Gale. *Finite-Temperature Field Theory: Principles and Applications*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2006.
- [18] M.L. Bellac. *Thermal Field Theory*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2000.
- [19] L. Dolan and R. Jackiw. Symmetry behavior at finite temperature. *Phys. Rev. D*, 9:3320–3341, Jun 1974.
- [20] Sidney Coleman and Erick Weinberg. Radiative corrections as the origin of spontaneous symmetry breaking. *Phys. Rev. D*, 7:1888–1910, Mar 1973.
- [21] A. Das. *Finite Temperature Field Theory*. World scientific lecture notes in physics. World Scientific Publishing Company, Incorporated, 1997.
- [22] Alejandro Ayala, Luis Alberto Hernández, Jesús López, Ana Júlia Mizher, Juan Cristóbal Rojas, and Cristián Villavicencio. Phase diagram for charged scalars in a magnetic field at finite temperature. *Phys. Rev. D*, 88:036010, Aug 2013.
- [23] Alejandro Ayala, Angel Sanchez, Gabriella Piccinelli, and Sarira Sahu. *Phys.Rev.*, D71:023004, 2005.
- [24] D.J. Bedingham. Dimensional regularization and Mellin summation in high temperature calculations. pages 226–230, 2000.