UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

ANÁLISIS DE PROBLEMA NO LINEAL PARA ECUACIÓN PSEUDODIFERENCIAL DEL TIPO SCHRÖDINGER SUBCUADRÁTICA EN SEMIRRECTA

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:
FERNANDO BERNAL VILCHIS

DIRECTOR Y EN SU CASO CODIRECTOR DE LA TESIS
DR. PAVEL NAUMKIN VENEDICTOVA, CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS, UNAM, UNIDAD MORELIA

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR
DRA. ELENA KAIKINA, CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS, UNAM
DR. MOUBARIZ GARAEV, CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS, UNAM

MÉXICO, D. F. FEBRERO, 2014.

Índice general

Prefacio

En la presente se estudia y analiza un problema con valor inicial y de frontera para una **ecuación pseudodiferencial no lineal del tipo Schrödinger**

$$\left\{ \begin{array}{c} u_t + \mathcal{N}(u) + \mathbb{K}u = 0,\ x > 0,\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x),\ x > 0 \\ u(0,t) = 0,\ t > 0 \end{array} \right., \tag{1}$$

donde u es una función de $x \in \mathbf{R}^+$ y del *tiempo* t, denotada por $u = u(x,t)$; $\mathcal{N}$ es el **término no lineal** definido por

$$\mathcal{N}(u) = \omega |u|^{\delta} u, \tag{2}$$

en el que $\omega \in \mathbf{C}$ y $\delta \in (0,1)$; y, siendo $u \in C_0^{\infty}(0,\infty)$, el **operador pseudodiferencial** $\mathbb{K}$ se define como

$$\mathbb{K}u(x,t) = H(x) \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{px} K(p)\, \widetilde{u}(p,t)\, dp, \tag{3}$$

donde $x \in \mathbf{R}$, $t \in \mathbf{R}^+$, y H es la **función de Heaviside**

$$H(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{array} \right., \tag{4}$$

el **símbolo del operador** $\mathbb{K}$, descrito por

$$K(p) = |p|^{\frac{1}{2}}, \tag{5}$$

para $\mathrm{Re}\, p \geq 0$, se define usando la rama principal del logaritmo (aunque se tratará muy especialmente por ser una función no analítica); y $\widetilde{u}$ es la **tranformada de Laplace** de la función u, con respecto a x, expresada como

$$\widetilde{u}(p,t) = \mathcal{L}_{x \to p} \{u(x,t)\} = \int_0^{\infty} e^{-px} u(x,t)\, dx, \tag{6}$$

para todo $p \in \mathbf{C}$. Nótese que la integral en (3) es convergente debido a que $\widetilde{u}$ decae cuando $|p| \to \infty$ (en los Preliminares se precisará la clase de funciones a que pertenece u).

El término (2) de la ecuación (1), junto con sus restricciones, deja claro que aquí se trata de una ecuación del tipo Schrödinger subcuadrática en semirrecta (para más detalles véase, por ejemplo, [15], [28], [49] u [82]); sin embargo, en el desarrollo de la presente se explicará por qué y en qué sentido (1) se considera una ecuación pseudodiferencial (para los fundamentos puede remitirse a [54], [72] o [76], entre otros).

Aún cuando en [5] se ha tratado un problema algo más complicado que el representado por la ecuación (1), el desarrollo que aquí se presenta constituye la técnica básica para analizar convenientemente ambos tipos de problemas (los capítulos 2, 3 y 4 de la presente constituyen el método en sí).

La investigación y el desarrollo de la presente han sido posibles gracias a las enseñanzas de mi director de tesis: **Dr. Pavel Naumkin Venedictova** y de mi codirectora: **Dra. Elena Igorevna Kaikina**; al financiamiento del **CONACYT** por la beca de doctorado, con registro **#104211**, que me otorgó (y conservé) durante cuatro años; a la **UNAM** por todos los beneficios académicos, económicos y administrativos que recibí; a la **UMSNH**: Particularmente al **IFM** y a **FisMat**, por el soporte que me ofrecieron en/con sus instalaciones, sus profesores y administrativos; a los sinodales y revisores: **Dr.Carlos Villegas Blas**, **Dr. Salvador Pérez Esteva**, **Dr. Pierre Bayard**, **Dr. José Antonio Zapata Ramírez** y **Dr. Isahí Sánchez Suárez**, quienes revisaron y corrigieron el contenido de esta tesis; así como a todas aquellas personas e instituciones que directa o indirectamente me apoyaron con este proyecto. (GRACIAS!)

Introducción

0.1. Antecedentes

La teoría de ecuaciones no lineales evolutivas desempeña un papel muy importante en el área de la Física Matemática contemporánea; más aún, tales ecuaciones aparecen no sólo en la Física Moderna, sino también en diversas ramas de la Tecnología e Ingenierías, así como en otros campos de la Ciencia como la Biología y la Química. Algunas de estas importantes ecuaciones son: La **ecuación de Otto-Sudan-Ostrovsky** con término no lineal $\mathcal{N}(u) = uu_x$,

$$u_t + uu_x + C_1 \int_0^x \frac{u_s(s)}{\sqrt{x-s}} ds = 0, \tag{7}$$

cuyo operador pseudodiferencial $\mathbb{K}u$ está definido, en este caso para un segmento de recta $(0, a)$, por la transformada inversa de Laplace en la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\mathbb{K}u &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{px} \left[\int_0^a e^{-px} \left\{ C_1 \int_0^x \frac{u_s(s)}{\sqrt{x-s}} ds \right\} dx \right] dp \\
&= \frac{C_1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{px} p \left\{ \widehat{u}(p) - \frac{u(0) - e^{-pa} u(a)}{p} \right\} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{p^{\frac{1}{2}}} dp \\
&= \frac{\sqrt{\pi} C_1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{px} p^{\frac{1}{2}} \left\{ \widehat{u}(p) - \frac{u(0) - e^{-pa} u(a)}{p} \right\} dp,
\end{aligned}$$

donde

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx = \sqrt{\pi}$$

con símbolo $K(p) = \sqrt{\pi} C_1 p^{\frac{1}{2}}$, donde C_1 se elige por la condición de disipación, tal que $\operatorname{Re} C_1 p^{\frac{1}{2}} > 0$ para $\operatorname{Re} p = 0$ (ver [32]). La **ecuación de Burgers**, estudiada en sistemas viscosos dominados, tiene el término no lineal $\mathcal{N}(u) = uu_x$

$$u_t + uu_x - u_{xx} = 0, \tag{8}$$

donde el operador pseudodiferencial $\mathbb{K}u$, en el segmento de recta $(0, a)$, se define por

$$\mathbb{K}u = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{px} \left[p^2 \left\{ \widehat{u}(p) - \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial_x^{j-1} u(0) - e^{-pa} \partial_x^{j-1} u(a)}{p^j} \right\} \right] dp,$$

donde $K(p) = p^{\alpha}$ y $\alpha = 2$ (ver [11]). La **ecuación de Korteweg-de Vries**, relacionada con sistemas no decayentes dispersivos, con término no lineal $\mathcal{N}(u) = uu_x$

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0, \tag{9}$$

donde $\mathbb{K}u$ se define, en el segmento $(0, a)$, como

$$\mathbb{K}u = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{px}\left[p^3\left\{\widehat{u}(p) - \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial_x^{j-1}u(0) - e^{-pa}\partial_x^{j-1}u(a)}{p^j}\right\}\right]dp,$$

con símbolo $K(p) = p^{\alpha}$ y $\alpha = 3$ (ver [34] y [57]). También es de gran interés en la Física Matemática, la combinación de estas dos ecuaciones, la así llamada **ecuación de Korteweg-de Vries Burgers**, que aparece en acústica no lineal para líquidos con burbujas de gas (ver [48], [75] [64], [86], [20]), definida como

$$u_t + uu_x + au_{xxx} - u_{xx} = 0, \tag{10}$$

donde el operador $\mathbb{K}u$ en el segmento $(0, a)$ se expresa por

$$\mathbb{K}u = \frac{a}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{px}\left[p^3\left\{\widehat{u}(p) - \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial_x^{j-1}u(0) - e^{-pa}\partial_x^{j-1}u(a)}{p^j}\right\}\right.$$
$$\left. - p^2\left\{\widehat{u}(p) - \sum_{j=1}^{2}\frac{\partial_x^{j-1}u(0) - e^{-pa}\partial_x^{j-1}u(a)}{p^j}\right\}\right]dp,$$

con el símbolo $K(p) = p^3 - p^2$. Más ejemplos interesantes afines a esta discusión como la **ecuación de Klein-Gordon**, que aparece en la teoría de campos (véase, por ejemplo, [20]) y, por supuesto, la **ecuación de Schrödinger**, que figura en mecánica cuántica (remítase a las referencias varias aquí citadas, p. e. [39]). Estas ecuaciones son deducidas de definiciones fundamentales y de leyes de conservación, tales como: la *ley de la conservación de la energía, de la masa o del impulso*, características esenciales de los objetos de estudio. Cabe mencionar también, que estas ecuaciones tienen una amplia aplicación en la descripción de distintos procesos en la propagación de ondas, fenómenos que son disímiles a primera vista.

Con el desarrollo de software y hardware que actualmente se tiene en los grandes sistemas de computo, se han podido efectuar complicados experimentos de cálculos numéricos para estudiar ecuaciones no lineales evolutivas, permitiéndole al investigador descubrir nuevas leyes y efectos no lineales que son difíciles de enunciar a simple vista y así abrir una nueva ruta de investigación para estudios futuros (ver [25]). De esta manera en 1967 fue desarrollado un método que se uso para encontrar explícitamente la solución de una clase particular de ecuaciones no lineales, este método es conocido actualmente como **"Transformada Inversa de Dispersión"**(IST) por sus siglas en ingles (ver [12]). Este método estudia las propiedades de esta clase particular de ecuaciones no lineales y es posible encontrar en muchos casos el comportamiento asintótico de las soluciones por medio de este método (ver [2] y la literatura señalada aquí).

Desgraciadamente no hay recetas para la solución de alguna ecuación no lineal evolutiva, porque cada ecuación posee su propia individualidad y requiere un enfoque especial y hasta un juego de métodos analíticos para su investigación. Sin embargo, es posible aplicar muchos de los métodos ya desarrollados a algunas ecuaciones particulares y generalizarlos para algunas clases de EDP no lineales.

Por otro lado, se puede desarrollar las soluciones de las EDP no lineales mediante métodos asintóticos; ya que en pocas ocasiones se puede resolver explícitamente una ecuación no lineal evolutiva. Es muy importante tener una representación analítica aproximada para las soluciones en forma explícita cerrada o desarrollada en serie para poder controlar los errores. Los desarrollos asintóticos se utilizan para deducir fácilmente las propiedades básicas de la solución tales como el crecimiento o decaimiento de la solución en diferentes regiones, nos permiten saber dónde oscila y dónde es monótona, además de que nos da información sobre los datos iníciales después de un tiempo grande.

Así, los métodos asintóticos son importantes no sólo desde el punto de vista teórico sino también son usados provechosamente en la práctica como un complemento para los métodos numéricos. Sin embargo los métodos asintóticos son difíciles aún en el caso de ecuaciones lineales evolutivas (ver [17], [84]). En el caso de ecuaciones no lineales es necesario probar la existencia global de soluciones clásicas y obtener algunas estimaciones adicionales para aclarar las expansiones asintóticas. Ya que los métodos asintóticos no representan un método general, es importante decir que cada tipo de no linealidad debe ser estudiado individualmente, especialmente en el caso de tener datos iníciales grandes, pero en este trabajo sólo trabajamos con datos iníciales pequeños ya que el método que aquí desarrollamos no se aplica para datos iníciales grandes, debido a que para probar la existencia y unicidad de la solución usamos el método de principio de contracción.

A pesar de la importancia y de la actualidad de los métodos asintóticos, hay relativamente pocos resultados para las ecuaciones evolutivas no lineales. Sin embargo una gran cantidad de publicaciones se han ocupado de la representación asintótica de soluciones al problema de Cauchy para las ecuaciones no lineales en los últimos veinte años. Mientras que aún no se ha proporcionado una revisión completa de este problema en las publicaciones anteriores mencionadas, a continuación referimos algunos resultados conocidos (ver [3], [6], [7], [8], [9],[10], [17], [18], [19], [22], [23], [35], [40], [47], [50], [66], [67], [68], [81], [88], [89]), donde hay estimaciones óptimas obtenidas del decaimiento del tiempo y fórmulas asintóticas de soluciones a diversas ecuaciones no lineales locales y no locales en el caso de los problemas de Cauchy. Sin embargo, hay sólo algunos resultados referentes al comportamiento asintótico del tiempo grande de las soluciones para los problemas del valor del inicial y de frontera. Observe que "tiempo grande", no significa valor necesariamente grande en la solución.

La investigación que se hace en torno a la teoría no lineal desempeña un papel importante en el desarrollo de la ciencia contemporánea en general. El problema de valor inicial y de frontera (1) es de gran interés y está íntimamente relacionado con ecuaciones no lineales que representan fenómenos en Física Moderna, Biología o Ingenierías. La descripción genérica (1) en realidad puede representar otras ecuaciones de la Física Matemática. Por ejemplo, la derivada fraccional (2.3) y el operador pseudodiferencial (3) están relacionados con el término

$$\int_0^\infty \frac{sgn\,(x-y)\,u_y\,(y,t)}{\sqrt{|x-y|}}dy \tag{11}$$

que aparece en la ecuación (7) de Ott-Sudan-Ostrovskiy (véase [71]), o generalizaciones de la ecuación KdV ([70]), Kobelev-Osrovskiy ([53]), Nakoryakov-Shreiber ([63]), entre otras (véanse también las ecuaciones (9 y 10, y la referencia [66], por ejemplo). Este problema lo podemos ver como una ecuación pseudodiferencial no lineal considerando

$$\mathbb{K}u = \int_0^\infty \frac{sgn\,(x-y)\,u_y\,(y,t)}{\sqrt{|x-y|}}dy,$$

y término no lineal $\mathcal{N}(u) = |u|^\delta\, u$, para la función $u = u\,(x,t)$, en la semirecta, con un símbolo no analítico $K\,(p) = |p|^\alpha$, con $\alpha \in (0,1)$, que incluye un potencial de Riesz (véase derivada fraccional 2.3, y las referencias [54], [72] o [76]).

En buena parte de la presente (capítulos 3 y 4), adoptamos el punto de vista que se trata en el libro ([27]), y que se basa en las estimaciones de la función de Green, como lo hacemos en el capítulo 2 al analizar el problema lineal.

0.2. Objetivo y Propósito

Se pretende desarrollar un método analítico para estudiar el comportamiento asintótico de la solución del problema de valor inicial y de frontera descrito en la ecuación (1).

El propósito de este trabajo es responder algunas de las preguntas más importantes en la teoría de ecuaciones diferenciales parciales no lineales, tales como la existencia (local), unicidad y el comportamiento asintótico de la solución para tiempos grandes. También se abordará la pregunta natural que surge al momento de definir nuestro problema : ¿Cuántos valores en frontera se deben considerar para la existencia y unicidad de la solución?

0.3. Descripción por capítulos

Este trabajo consta de cinco capítulos organizados de la siguiente manera.

El capítulo 1 de la presente, el de **Preliminares**, se centra en dar la teoría básica necesaria para facilitar la comprensión del contenido de este trabajo. Además se define y desarrolla el operador pseudodiferencial $\mathbb{K}u$, así como la definición de las integrales de tipo de Cauchy y del operador $\mathbb{P}$.

En el capítulo 2, que aborda **El Problema Lineal**, se presenta el desarrollo de la solución para la linealización del problema (1) empleando la metodología de la transformada de Laplace, las propiedades del operador $\mathbb{P}$ y teoremas de Cauchy para construir la función de Green. Al aplicar la transformada inversa de Laplace se encuentra la solución en forma integral del problema lineal.

El capítulo 3, de las **Primeras Estimaciones**, se presentan algunas estimaciones previas, así como los antecedente para la fórmula asintótica de la función de Green.

En el capítulo 4, sobre **El Problema no Lineal**, una vez determinada la solución al Problema Lineal del capítulo 2, aplicando el principio de Duhamel se encuentra la solución del problema no lineal. Aquí mismo se enuncia el teorema de existencia (local) y unicidad de la solución, así como la representación de la fórmula asintótica de la solución para tiempos grandes.

Finalmente, en el capítulo 5, de **Conclusiones**, resumimos los resultados más importantes en relación al propósito y objetivo propuesto en la presente.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se da a conocer la teoría básica necesaria para facilitar la comprensión y contextualizar el contenido del presente trabajo. Así mismo, se implementa la terminología y la notación que se aludirá en cada momento.

1.1. Clases de Funciones

Los teoremas sobre la inversión para la transformada integral de las soluciones para las ecuaciones diferenciales parciales son de un tipo muy general, pero puesto que estamos interesados sobre todo en usos físicos, consideraremos solamente las funciones del tipo que se presentan normalmente en el análisis de problemas físicos.

Si una función $f(x)$ es **continua** sobre un intervalo abierto (a, b), se dice que $f(x)$ pertenece a la clase de funciones $C(a, b)$; y si el intervalo sobre el cuál la función es continua es cerrado, se escribe $f \in C[a, b]$.

Una función $f(x)$ se dice que es **continua a trozos** en un intervalo (a, b), si el intervalo puede ser partido en un número finito de intervalos no autointersectados

$$(a, a_1), (a_1, a_2), \cdots, (a_{n-1}, b),$$

en cada uno de los cuales la función es continua y tiene límite finito cuando x se aproxima a cada uno de los puntos extremos de los subintervalos. Entonces se escribe que $f \in \mathcal{P}(a, b)$.

Si a_r es el punto extremo izquierdo de unos de los subintervalos en el cuál (a, b) es particionado, entonces por $f(a_r-)$ quiere decir $\lim_{\varepsilon \to 0} f(a_r - \varepsilon)$, donde ε tiende a cero a través de todos los posibles valores positivos de ε.

Cuando una función $f(x)$ y cada una de las primeras m derivadas $f'(x)$, $f^{(2)}(x), \cdots, f^{(m)}(x)$ son continuas sobre el intervalo abierto (a, b) se dice que f pertenece a la clase de funciones **continuamente diferenciables de orden** m y escribimos $f \in C^m(a, b)$.

Cuando una función $f(x)$ y cada una de sus derivadas hasta orden m son continuas a trozos en el intervalo abierto (a, b) se dice que $f(x)$ pertenece a la clase de funciones **continuamente diferenciables a trozos de orden** m y escribimos $f \in \mathcal{P}^m(a,b)$.

Si todas las derivadas son continuas por trozos en el intervalo abierto (a,b), es decir, si $f \in C^k(a,b)$ para todo k tal que $0 \leq k < \infty$, decimos que $f \in C^\infty(a,b)$, o que f es **infinitamente suave**.

Otro espacio de funciones las cuales toman interés en el espacio de distribuciones es el espacio $\mathcal{J}(\mathbf{R})$ de funciones de prueba de rápido descenso. Una función ϕ se dice que es una **función de prueba de rápido descenso** si $\phi \in C^\infty(\mathbf{R})$ y si ϕ y todas sus derivadas decrecen a cero más rápido que cualquier potencia de $|x|^{-1}$, es decir, si éstas satisfacen que

$$\left|x^m \phi^{(k)}(x)\right| \leq C_{mk}.$$

Está condición puede escribirse de forma alternativa como:

$$\left|\phi^{(k)}(x)\right| \leq \mathcal{O}\left(|x|^{-m}\right),$$

para enteros no negativos m y k y para todos los valores de x. Así, $\mathcal{J}(\mathbf{R})$ es llamado el **espacio de Schwartz**.

Para el mismo propósito se puede introducir el espacio de **funciones de lento crecimiento**, que denotaremos por $\mathcal{N}(\mathbf{R})$. Se dice que $\phi \in \mathcal{N}(\mathbf{R})$ si $\phi \in C^\infty(\mathbf{R})$ y existe un entero positivo N con la propiedad de que para todo entero no negativo r, ϕ satisface que $\left|x^{-N}\phi^{(r)}(x)\right| \leq C_r$. Está condición también puede ser escrita de forma alternativa como sigue

$$\left|\phi^{(r)}(x)\right| \leq \mathcal{O}\left(|x|^N\right), \text{ conforme } |x| \to \infty.$$

Ahora se define formalmente el espacio de **funciones de prueba con soporte compacto** sobre $\mathbf{R}$ como sigue

$$\mathcal{D}(\mathbf{R}) = \{\varphi \mid \varphi \in \mathbf{C}^\infty(\mathbf{R}), \text{ y con soporte compacto en } \mathbf{R}\}.$$

El concepto de convergencia en este espacio de funciones es importante desde el punto de vista de la teoría de distribuciones y por eso enunciamos la siguiente.

DEFINICIÓN 1.1 *Se dice que una **sucesión** de funciones de prueba* $\{\phi_l(x)\}_{l=1}^\infty$, *con* $x \in \mathbf{R}$, *es **convergente** en* $\mathcal{D}$ *si:*

1. $\phi_l(x) \in \mathcal{D}$, *para todo* $l = 1, 2, \cdots$.
2. *cada una de las funciones* $\phi_l(x)$ *se anulan fuera de un intervalo fijo* I, *donde este intervalo pertenece a la recta real,*
3. *para cada entero positivo fijo* k, $\left\{\phi_l^{(k)}(x)\right\}_{l=1}^\infty$ *converge uniformemente para todos los valores de* x.

Si $\phi(x)$ es la función límite de la sucesión $\{\phi_l(x)\}_{l=1}^{\infty}$, entonces es fácil mostrar que $\phi(x) \in \mathcal{D}$, ya que esta propiedad se hereda directamente del espacio $\mathcal{D}$ debido a que éste último es cerrado bajo convergencia.

Ahora introducimos el conjunto de **funciones absolutamente integrables** $\mathbf{L}^1(\mathbf{R})$. Decimos que $f \in \mathbf{L}^1(\mathbf{R})$ si f es absolutamente integrable sobre $\mathbf{R}$; es decir, si

$$\int_{\mathbf{R}} |f(x)|\, dx < \infty.$$

Similarmente decimos que $f \in \mathbf{L}^r(\mathbf{R})$ si se satisface que

$$\int_{\mathbf{R}} |f(x)|^r\, dx < \infty.$$

Si existen constantes reales $M > 0$ y γ tales que para todo $t > N$

$$\left|e^{-\gamma t} f(t)\right| < M, \text{ o bien, } |f(t)| < Me^{\gamma t}$$

se dice que $f(t)$ es una **función de orden exponencial** γ cuando $t \to \infty$, o simplemente, que es una función de orden exponencial.

Intuitivamente, las funciones de orden exponencial no pueden crecer en valor absoluto más rápidamente que $Me^{\gamma t}$ cuando t crece.

DEFINICIÓN 1.2 *Sea L un contorno suave y $\varphi(q)$ una función de posición en L. Decimos que la función $\varphi(q)$ satisface, en L, la **condición de Hölder**, o simplemente, que φ es **Hölder** en L, si para cualesquiera dos puntos q_1 y q_2 de esta curva L*

$$|\varphi(q_1) - \varphi(q_2)| \leq C\, |q_1 - q_2|^{\lambda}, \tag{1.1}$$

*donde C y λ son números reales positivos. La constante C es llamada la **constante de Hölder** y λ es el **índice de Hölder**. Si, para $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ tal que $\varphi(\tau)$ es Hölder para todo τ finito se verifica que: (1) $\varphi(\tau)$ tiende a $\varphi(\infty) = M < \infty$ conforme $\tau \to \pm\infty$, y (2) Para τ grande,*

$$|\varphi(\tau) - \varphi(\infty)| < \frac{A}{|\tau|^{\mu}},\ A, \mu > 0, \tag{1.2}$$

*decimos que φ es **Hölder en infinito**.*

DEFINICIÓN 1.3 *Una función analítica $\Phi(z)$ definida en los dos dominios D^+ y D^-, complementados uno al otro en todo el plano complejo por las dos expresiones independientes $\Phi^+(z)$ y $\Phi^-(z)$ será llamada frecuentemente una **función seccionalmente analítica**.*

1.2. Espacio de Sobolev

Ya que se tiene en mente una aplicación en ecuaciones diferenciales parciales, se utilizarán espacios de Sobolev para estimar las soluciones de los problemas de ecuaciones diferenciales parciales no lineales.

Se dice que $f(x)$ pertenece al espacio de Sobolev $\mathbf{H}_r^k(\mathbf{R}^+)$, si

$$\frac{d^j}{dx^j}f(x) \in \mathbf{L}^r\left(\mathbf{R}^+\right),$$

para $j \leq k$.

1.3. Notaciones asintóticas

Decimos que la función $f(x)$ es **equivalente** a la función $g(x)$ en algún punto x_0 y denotamos $f(x) \sim g(x)$ cuando $x \to x_0$ si $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Decimos que la función $f(x)$ es **infinitesimal** con respecto a la función $g(x)$ en algún punto x_0 y escribimos $f(x) = o(g(x))$ cuando $x \to x_0$ si $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Finalmente decimos que la función $f(x)$ es **del mismo orden** que la función $g(x)$ en algún punto x_0 y denotamos $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ cuando $x \to x_0$ si la desigualdad $|f(x)| \leq C|g(x)|$ es válida con una constante $C > 0$ para una vecindad del punto x_0. También es común escribir $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ para $x \in \mathbf{D}$, cuando la desigualdad $|f(x)| \leq C|g(x)|$ es verdadera para toda $x \in \mathbf{D} \subseteq \mathbf{R}^n$, donde $C > 0$ es alguna constante.

Decimos que la solución $u(x,t)$ tiene la **asintótica**:

$$u(x,t) = \Psi(x,t) + \mathcal{O}(\varphi(x,t)),$$

para un tiempo largo $t \to \infty$ uniformemente con respecto a $x > 0$ si existe algún $T_0 > 0$ y una constante $C > 0$ la cual no depende de los valores de las variables x y t, que satisfaga la siguiente estimación

$$|u(x,t) - \Psi(x,t)| \leq C|\varphi(x,t)|,$$

para todo $x > 0$, y para todo valor $t > T_0$.

1.4. Principio de mapeo de Contracción

Primero damos una definición.

DEFINICIÓN 1.4 *Llamamos a una transformación $\mathcal{A}$, un* ***mapeo de contracción*** *en un espacio métrico $\mathbf{X}$ con una distancia ρ si se cumple*

1. $\mathcal{A}$:$\mathbf{X} \to \mathbf{X}$.
2. $\rho(\mathcal{A}(x), \mathcal{A}(y)) \leq \lambda\rho(x,y)$, *para todo* $x, y \in \mathbf{X}$, *donde* $\lambda < 1$.

El siguiente resultado es usualmente llamado **Principio de mapeo de contracción**, y es un hecho bien conocido del análisis.

TEOREMA 1.1 *Sea $\mathbf{X}$ un espacio métrico completo, y $\mathcal{A} : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ un mapeo de contracción. Entonces existe un único punto fijo $\widetilde{x} \in \mathbf{X}$, esto es:*

$$\mathcal{A}(\widetilde{x}) = \widetilde{x}.$$

□

1.5. Completés de las funciones continuas

Mencionamos otro hecho clásico del analisis que dará consistencia al presente trabajo.

PROPOSICIÓN 1.1 *El conjunto de funciones continuas $\varphi \in \{\mathbf{C}([a,b])\}$ con la distancia*

$$\rho(f,g) = \max_{a \le t \le b} |g(t) - f(t)|,$$

forman un espacio métrico completo.□

1.6. Transformada de Fourier

DEFINICIÓN 1.5 *Definimos la* ***transformada de Fourier*** *como*

$$F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\xi t} dt \tag{1.3}$$

y la ***transformada inversa de Fourier*** *como*

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi)\, e^{i\xi t} d\xi \tag{1.4}$$

donde $f(t)$ es continuamente diferenciable a trozos y absolutamente integrable sobre $\mathbf{R}$.

El par de fórmulas (1.3) y (1.4) determinan el así llamado, **teorema de inversión de Fourier**.

Ahora, estamos interesados en dar un argumento formal en algún sentido para que la identidad

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} d\xi \int_{-i\infty}^{i\infty} f(u)\, e^{iu\xi} du, \tag{1.5}$$

sea válida. Esta identidad es conocida como el **teorema integral de Fourier**.

Se mostrará el teorema integral de Fourier para funciones $f(x)$ las cuales son continuamente diferenciables a trozos y absolutamente integrables sobre toda la recta real. El resultado preciso se ununcia a continuación.

TEOREMA 1.2 (de la integral de Fourier) *Sea $f(t) \in \mathcal{P}^1(\mathbf{R})$, y $f(t) \in \mathbf{L}^1(\mathbf{R})$, entonces para toda $x \in \mathbf{R}$, se tiene*

$$\frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos\{\xi(x-t)\} dt = \frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)].$$

DEMOSTRACIÓN. (ver [80]). ■

COROLARIO 1.1 *Si, además de los requisitos del teorema de la integral de Fourier, $f(t)$ es continua en el punto $t = x$, entonces la siguiente identidad es válida*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi}d\xi \int_{-i\infty}^{i\infty} f(t)\, e^{i\xi t}dt = f(x)\,. \tag{1.6}$$

□

Si $f(t)$ es una función de variable real con respecto de t, el complejo conjugado de su transformada de Fourier esta dada por

$$\mathcal{F}^*[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{i\xi t}dt, \tag{1.7}$$

así que

$$\mathcal{F}^*[f(t);\xi] = \mathcal{F}[f(t);-\xi]\,.$$

Con esta notación, se puede escribir (1.7) como

$$f = \mathcal{F}^* F,$$

y ya que $F = \mathcal{F}f$, entonces equivalentemente se puede escribir la ecuación

$$\mathcal{F}^*\mathcal{F} = I,$$

en donde I denota el operador identidad. Así, se escribe en forma alternativa

$$\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^*, \tag{1.8}$$

donde $\mathcal{F}^{-1}$ denota el operador inverso del operador $\mathcal{F}$.

1.7. Transformada de Laplace

Primero se dan algunas definiciones.

DEFINICIÓN 1.6 *La función $f(t)$ pertenece a la* ***clase de funciones*** *$\mathcal{T}_a$ si:*

1. *Para $t < 0$ se tiene que $f(t) \equiv 0$.*
2. *Para $t \geq 0 : \forall R_1, R_2$ tales que $t \in [R_1, R_2]$, la función $f(t)$ tiene un número finito de puntos de discontinuidad de primer tipo.*
3. *$f(t)$ tiene* ***orden exponencial*** *a, es decir, existen constantes $M > 0$ y a, tal que para algun $t_0 \geq 0$*
$$|f(t)| \leq Me^{at}, \tag{1.9}$$
para $t > t_0$.

DEFINICIÓN 1.7 *La* ***transformada de Laplace*** *de la función f está definida por la integral impropia*

$$\widehat{f}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)dt, \quad p \in \mathbf{C}. \tag{1.10}$$

La notación que adoptaremos complementa la usada en (1.10) como

$$\widehat{u}(x,\xi) = \mathcal{L}_{t\to\xi}\left\{u\left(x,t\right)\right\}, \text{ o bien, } \widetilde{u}(p,t) = \mathcal{L}_{x\to p}\left\{u\left(x,t\right)\right\}.$$

Y ya que habrá necesidad de utilizar dos transformadas de Laplace en una función $u\left(x,t\right)$, deberá quedar claro cuando escribamos

$$\widehat{\widetilde{u}}(p,\xi).$$

TEOREMA 1.3 *Si* $f(t) \in \mathcal{T}_a$ *la integral (1.10) es convergente en el dominio* $\operatorname{Re} p > a$. *También para cualquier* $x_0 > a$ *la integral (1.10) converge uniformemente con respecto a* $\operatorname{Re} p \geq x_0 > a$.

DEMOSTRACIÓN. Para $\operatorname{Re} p > a_1 = a+\varepsilon$ y $p = x+iy$ nosotros usamos la prueba de comparación para la convergencia de integrales impropias. Por una parte, considerando la integral del módulo, $\left|\widehat{f}(p)\right| = \left|\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt\right|$

$$\int_0^\infty \left|e^{-pt}f(t)\right| dt = \int_0^\infty \left|e^{-pt}\right| \left|f(t)dt\right|$$

y aplicando (1.9) y $|e^{-pt}| \leq e^{-\operatorname{Re} pt}$, se obtiene

$$\int_0^\infty \left|e^{-pt}f(t)\right| dt \leq M\int_0^\infty e^{-xt}e^{a_1 t}dt,$$

integrando se obtiene que

$$\begin{aligned}
\left|\widehat{f}(p)\right| &\leq \lim_{A\to\infty}\left(-\frac{M}{x-a_1}\, e^{-(x-a_1)t}\Big|_0^A\right) \\
&\leq -\lim_{A\to\infty}\frac{M}{x-a_1}e^{-(x-a_1)A} + \frac{M}{x-a_1} \\
&\leq \frac{M}{x-a_1},
\end{aligned}$$

por lo que $\widehat{f}(p)$ está acotada para $x > a_1$. Ahora como cada uno de los términos de la integral de la transformada de Laplace son positivos, la integral es monótona, de aquí la integral $\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt$ es convergente para $\operatorname{Re} p > a$. En forma análoga consideramos el caso para $\operatorname{Re} p \geq x_0 > a$, entonces

$$\begin{aligned}
\left|\widehat{f}(p)\right| = \left|\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt\right| &\leq M\int_0^\infty e^{-\operatorname{Re} pt}e^{a_1 t}dt \\
&\leq M\int_0^\infty e^{-(x_0-a_1)t}dt \\
&\leq -\frac{M}{x_0-a_1}\lim_{A\to\infty} e^{-(x_0-a_1)t}\Big|_0^A \\
&\leq \frac{M}{x_0-a_1}.
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Entonces $\widehat{f}(p)$ está acotada, es monótona y no depende de x, de aquí que $\widehat{f}(p)$ converge uniformemente con respecto al parámetro p en el dominio $\operatorname{Re} p \geq x_0 > a$. ■

TEOREMA 1.4 *Si $f(t) \in \mathcal{T}_a$, entonces la transformada de Laplace $\widehat{f}(p)$ es una función analítica para $\operatorname{Re} p > a$.*

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema 1.3 la integral

$$\int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt \tag{1.12}$$

converge en el dominio $\operatorname{Re} p > a$ y converge uniformemente para $\operatorname{Re} p \geq x_0 > a$. Ahora dividimos el intervalo de integración en subintervalos $[t_i, t_{i+1}]$ de longitud finita, donde $t_0 = 0$, y $t_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$. Entonces la función $\widehat{f}(p)$, para $\operatorname{Re} p > a$, es la suma de una serie

$$\widehat{f}(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt = \sum_{n=0}^\infty \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-pt} f(t)dt = \sum_{n=0}^\infty u_n(p), \tag{1.13}$$

donde $0 = t_0 < t_1 ... < t_n < t_{n+1} ... < \infty$. Note que a partir del n-ésimo término, la serie (1.13) es igual a $\int_{t_{n+1}}^\infty e^{-pt} f(t)dt$. Tomando en cuenta que

$$u_n(p) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-pt} f(t)dt.$$

Ahora probaremos que la serie $\sum_{n=0}^\infty u_n(p)$ converge uniformemente en el dominio $\operatorname{Re} p \geqslant x_0 > a$. Usando el criterio de Cauchy para convergencia uniforme se tiene

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A, \text{ tal que } \forall A_1, A_2 > A, \text{ y para } \forall \operatorname{Re} p \geq x_0$$

$$\left| \sum_{n=A_1}^{A_2} \int_{T_{A_1}}^{T_{A_2}} e^{-pt} f(t)dt \right| < \varepsilon.$$

Desarrollando la serie, se tiene

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{n=A_1}^{A_2}\int_{T_n}^{T_{n+1}} e^{-pt}f(t)dt\right| &\leq \sum_{n=A_1}^{A_2}\left|\int_{T_n}^{T_{n+1}} e^{-pt}f(t)dt\right| \\
&\leq \sum_{n=A_1}^{A_2}\int_{T_n}^{T_{n+1}} \left|e^{-pt}\right| |f(t)|\, dt \\
&\leq M\sum_{n=A_1}^{A_2}\int_{T_n}^{T_{n+1}} e^{-(x_0-a_1)t}dt \\
&\leq -\frac{M}{x_0-a_1}\sum_{n=A_1}^{A_2} e^{-(x_0-a_1)t}\Big|_{T_n}^{T_{n+1}} \\
&\leq -\frac{M}{x_0-a_1}\sum_{n=A_1}^{A_2}\left(e^{-(x_0-a_1)T_{n+1}}-e^{-(x_0-a_1)T_n}\right) \\
&\leq \frac{M}{x_0-a_1}\left(e^{-(x_0-a_1)T_{A_1}}-e^{-(x_0-a_1)T_{A_2}}\right) \\
&\leq \frac{M}{x_0-a_1}e^{-(x_0-a_1)T_{A_1}} < \varepsilon
\end{aligned}
$$

Eligiendo $A > T_{A_1}$, se cumple el criterio de Cauchy de convergencia uniforme de la serie para $\mathrm{Re}\, p \geq x_0 > a$. Cada una de las funciones

$$u_n(p) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-pt}f(t)dt$$

están definidas como una integral dependiente de un parámetro p, sobre un intervalo de longitud finita en el plano complejo t. Con base en las propiedades generales de integrales de funciones de dos variables complejas dependiente en un parámetro (ver [83]), las funciones $u_n(p)$ son funciones enteras con respecto a p. Del razonamiento anterior se sigue que la serie (1.13) en el dominio $\mathrm{Re}\, p > a$ satisface todas las condiciones del teorema de Weierstrass (ver [83]), de aquí, la función $\widehat{f}(p)$ es analítica en el dominio $\mathrm{Re}\, p > a$ y sus derivadas pueden calcularse diferenciando la función bajo la integral en (1.12) con respecto al parámetro p. ■

TEOREMA 1.5 *Si* $f(t) \in \mathcal{T}_a$ *y*

$$\widehat{f}(p) = \int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt,$$

entonces para $x > a$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt}\widehat{f}(p)dp. \tag{1.14}$$

La integral (1.14) es llamada **Transformada inversa de Laplace** o **fórmula de Mellin** (ver [83]).

DEMOSTRACIÓN. Por hipótesis la función $f(t)$ existe y tienen orden de crecimiento a, por lo que

$$|f(t)| \leq Me^{at} \leq Me^{xt},\ x > a.$$

Considerando una función auxiliar

$$\varphi(t) = e^{-xt} f(t),\ x > a, \tag{1.15}$$

que puede ser representada por la transformada de Fourier como.

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\eta) e^{i\xi(t-\eta)} d\eta. \tag{1.16}$$

Usando (1.15) en (1.16) se obtiene

$$e^{-xt} f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x\eta} f(\eta) e^{i\xi(t-\eta)} d\eta,$$

cambiando el orden de integración y como $f(\eta) = 0$ para $\eta < 0$ se tiene

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(x+i\xi)t} d\xi \int_{0}^{\infty} e^{-(x+i\xi)\eta} f(\eta) d\eta. \tag{1.17}$$

Denotando $p = x + i\xi$ y notamos que la integral interior de (1.17) es la transformación dada $\widehat{f}(p)$ de la función $f(t)$, entonces la expresión (1.17) se vuelve

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} \widehat{f}(p) dp, \tag{1.18}$$

que es por definición la fórmula de Mellin. ■

1.8. Transformada Inversa de Laplace

Aquí nosotros consideraremos algunas condiciones suficientes bajo las cuáles una función dada $\widehat{f}(p)$ es la transformación de alguna función $f(t)$. Primero definimos la clase de funciones $\mathcal{H}_a$.

DEFINICIÓN 1.8 *La función $\widehat{f}(p)$ pertenece a la clase de funciones $\mathcal{H}_a$ si:*

1. *se tiene que $\widehat{f}(p)$ es analítica en el dominio $\operatorname{Re} p > a$,*
2. *En el dominio $\operatorname{Re} p > a$*

$$\left| \widehat{f}(p) \right| \longrightarrow 0,\ \ |p| \longrightarrow \infty, \tag{1.19}$$

uniformemente con respecto al $\arg p$.

3. Para todo $\operatorname{Re} p = x > a$*, existe* $M \in \mathbf{R}^+$ *tal que*

$$\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \left|\widehat{f}(p)\right| dy < M, \text{ para todo } x > a. \tag{1.20}$$

El siguiente teorema nos da las condiciones suficientes para que la función $\widehat{f}(p)$ admita una inversión como en la ecuación (1.18), obtenida aplicando el teorema de inversión de Fourier y también las condiciones impuestas para la función $f(t)$ como consecuencias de la función $\widehat{f}(p)$.

TEOREMA 1.6 (transformada inversa de Laplace) *Si* $\widehat{f}(p) \in \mathcal{H}_a$*, entonces*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} \widehat{f}(p) dp, \text{ donde } x > a, \tag{1.21}$$

pertenece a $\mathcal{T}_a$*.*

DEMOSTRACIÓN. Para probar que la integral (1.21) es la original de la función dada por $\widehat{f}(p)$, nosotros debemos establecer que: (1) La integral (1.21) es independiente de x y define la función $f(t)$ y ésta función tiene orden de crecimiento a; (2) para $t < 0$, $f(t) \equiv 0$;(3) la función $\widehat{f}(p)$ es la transformada de Laplace de $f(t)$.Ahora probaremos cada una de estas proposiciones. (1) En el dominio $\operatorname{Re} p > a$, y para cualquier $x > x_0 > a$, se tiene

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} \widehat{f}(p) dp\right| &\le \frac{1}{2\pi} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \left|e^{pt} \widehat{f}(p) dp\right| \\ &\le \frac{1}{2\pi} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \left|e^{pt} \widehat{f}(p) dp\right| \\ &\le \frac{1}{2\pi} e^{xt} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \left|\widehat{f}(p)\right| dy, \end{aligned}$$

aplicando (1.20) se obtiene finalmente que

$$\left|\frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} \widehat{f}(p) dp\right| \le \frac{M}{2\pi} e^{xt}. \tag{1.22}$$

Ahora probaremos que (1.22) no depende de x, y que

$$|f(t)| \le M e^{at}, \ t > 0.$$

En el dominio $\operatorname{Re} p > a$, considerando el contorno cerrado Γ mostrado en la Figura 1.1.

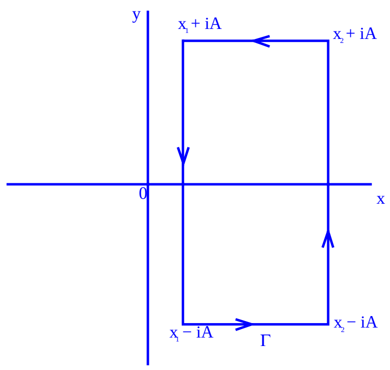

Fig. 1.1. Contorno cerrado Γ.

Integrando alrededor del contorno cerrado Γ, y como la función es analítica en el dominio $\operatorname{Re} p > a$, entonces por el teorema de Cauchy, la integral de la función $e^{pt}\widehat{f}(p)$ alrededor del contorno Γ es cero. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \lim_{A\to\infty} \Bigg[\int_{x_1-iA}^{x_2-iA} e^{pt}\widehat{f}(p)\,dp + \int_{x_2-iA}^{x_2+iA} e^{pt}\widehat{f}(p)\,dp \\ + \int_{x_2+iA}^{x_1+iA} e^{pt}\widehat{f}(p)\,dp + \int_{x_1+iA}^{x_1-iA} e^{pt}\widehat{f}(p)\,dp \Bigg] \\ = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0. \end{aligned}$$

Estimando cada integral por separado se obtiene

$$\begin{aligned} |I_1| = \lim_{A\to\infty} \left| \int_{x_1-iA}^{x_2-iA} e^{pt}\widehat{f}(p)\,dp \right| &\le \lim_{A\to\infty} \int_{x_1-iA}^{x_2-iA} \left| e^{pt}\widehat{f}(p)\,dp \right| \\ &\le \lim_{A\to\infty} \int_{x_1-iA}^{x_2-iA} \left| e^{pt} \right| \left| \widehat{f}(p) \right| |dp| . \end{aligned}$$

Usando la propiedad 2) de la definición 1.8, podemos acotar la transformada de Laplace como

$$\widehat{f}(p) \le \frac{C}{|p|}. \tag{1.23}$$

Entonces I_1, se puede representar como

$$|I_1| \le \lim_{A\to\infty} \int_{x_1-iA}^{x_2-iA} e^{xt} \frac{C}{|p|} |dp| ,$$

haciendo el cambio de variable

$$\begin{aligned} p &= x - iA \\ dp &= dx \end{aligned}$$

se obtiene

$$|I_1| \leq \lim_{A\to\infty} C\int_{x_1}^{x_2} \frac{e^{xt}}{|x-iA|}dx \leq \lim_{A\to\infty} \frac{C}{|x_1-iA|}\int_{x_1}^{x_2} e^{xt}dx$$
$$= \lim_{A\to\infty} \frac{C}{(x_1^2+A^2)^{\frac{1}{2}}}\left(e^{x_1 t}-e^{x_2 t}\right) \to 0.$$

También la integral $I_3 \to 0$, bajo las mismas condiciones. Por lo tanto

$$\lim_{A\to\infty}\int_{x_1+iA}^{x_1-iA} e^{pt}\widehat{f}(p)\,dp = \lim_{A\to\infty}\int_{x_2-iA}^{x_2+iA} e^{pt}\widehat{f}(p)\,dp.$$

y como x_1 y x_2 son arbitrarios, se prueba la proposición (1). Así la integral (1.21) es una función de la variable t. Y de la evaluación de (1.22) se sigue inmediatamente que la integral (1.21) es una función de orden de crecimiento limitado con respecto a t y el orden de crecimiento es a. (2) Ahora probaremos que

$$f(t) = 0,\ t < 0.$$

Considerando en el dominio $\mathrm{Re}\, p > a$, un contorno cerrado Γ como se muestra en la Figura 1.2, y por el teorema de Cauchy, la integral de la función $e^{pt}\widehat{f}(p)$ sobre el contorno cerrado Γ es cero.

$$\int_{\Gamma} e^{pt}\widehat{f}(p)\,dp = 0.$$

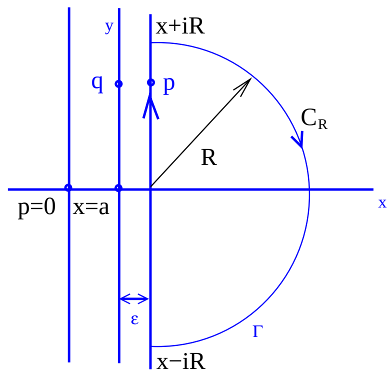

Fig. 1.2. Contorno Γ para $\mathrm{Re}\, p > a$.

Escribimos el círculo C_R en forma paramétrica con

$$p = x + Re^{i\varphi},\quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

y estimando la integral sobre el círculo

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_{C_R} e^{pt}\widehat{f}(p)\,dp\right| \leq \lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\left|e^{pt}\right|\left|\widehat{f}(p)\right|dp$$

usando (1.23)

$$\widehat{f}(p) \leq \frac{C}{|p|} \leq \frac{1}{R}$$

y

$$\left|e^{pt}\right| = \left|e^{\left(x+Re^{i\varphi}\right)t}\right| \leq e^{(x+R\cos\varphi)t}$$

por lo que la integral se estima como

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty}\left|\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{pt}\widehat{f}(p)\,dp\right| &\leq \lim_{R\to\infty}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{(x+R\cos\varphi)t}\frac{C}{R}Re^{i\varphi}d\varphi \\
&\leq \lim_{R\to\infty} C\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{(x+R\cos\varphi)t}d\varphi \to 0
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt}\widehat{f}(p)dp \equiv 0\,,\ \ t<0.$$

(3) Ahora probaremos que

$$\mathcal{L}\mathcal{L}^{-1} = E,$$

construyendo la transformada de Laplace de la función (1.21) y consideraremos éste valor para algún p_0 arbitrario, donde $\operatorname{Re} p_0 > a$. Escribimos la integral

$$\int_0^{\infty} e^{-p_0 t} f(t)\,dt = \int_0^{\infty} e^{-p_0 t}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt}\widehat{f}(p)dp\right]dt \tag{1.24}$$

donde la fórmula de Mellin en (1.24) es independiente de x. Elegimos un valor de x que satisfaga la condición

$$a < x < \operatorname{Re} p_0$$

y cambiando el orden de integración. Esto es posible debido a la convergencia uniforme de las integrales correspondientes. Nosotros obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} e^{-p_0 t} f(t)\,dt &= \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty}\widehat{f}(p)dp\int_0^{\infty} e^{-(p_0-p)t}dt \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty}\frac{\widehat{f}(p)}{p-p_0}dp. \qquad (1.25)
\end{aligned}$$

La integral (1.25) puede ser calculada con la ayuda de teoría de residuos, debido a la propiedad 2) de la definición 1.8, la función $\left|\widehat{f}(p)\right| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|p|}\right)$. Por lo tanto, tomando en cuenta que hay una singularidad (un polo simple) en el punto $p = p_0$ y cerrando el contorno hacia el semiplano derecho como se muestra en la Figura 1.3, e integrando en dirección negativa se obtiene

$$\int_0^{\infty} e^{-p_0 t} f(t)\,dt = \widehat{f}(p_0).$$

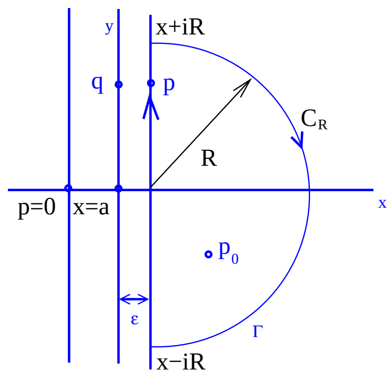

Fig. 1.3. Contorno Γ, $\operatorname{Re} p > a$, y p_0 punto singular.

Como p_0 es un punto arbitrario en el dominio $\operatorname{Re} p > a$, se prueba el teorema.

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \widehat{f}(p).$$

■

En seguida presentamos algunos hechos importantes a los que haremos referencia. Las demostraciones se pueden hallar en las referencias (véase, por ejemplo, [46]).

A pesar de que en la ecuación (6) del Prefacio se introdujo la transformada de Laplace $\widetilde{u}$, aquí comentamos la notación que se adopta al utilizar dos transformadas de Laplace simultáneamente. Al calcular $\mathcal{L}_{t\to\xi}\{f(t)\} = \widehat{f}(\xi)$, o bien, $\mathcal{L}_{x\to p}\{f(x)\} = \widetilde{f}(p)$, en una misma función $u(x,t)$, se escribirá

$$\widehat{\widetilde{u}}(p,\xi).$$

Así, tilde ($\tilde{}$) y circunflejo ($\hat{}$), denotan transformadas de Laplace con respecto a x y t, respectivamente.

TEOREMA 1.7 *Se tienen las siguientes propiedades de la Transformada Inversa de Laplace. Siendo $\widehat{\widetilde{u}}$ una función analítica,*

1. *Tenemos*
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\widehat{\widetilde{u}}(p,\xi)\right\} = \Theta(x)\,\mathcal{F}^{-1}\widehat{\widetilde{u}}(p,\xi),$$
para todos p,ξ tales que $\operatorname{Re}(p)$, $\operatorname{Re}(\xi) > 0$; y $\mathcal{F}^{-1}$ es la transformada de Fourier Inversa.

2. *Para el operador $\mathbb{P}$ definido en (2.14), se tiene que*
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\mathbb{P}\left\{|p|^{\frac{1}{2}}\left(\widetilde{u}(p,t) - \frac{u(0,t)}{p}\right)\right\}\right\} = \int_0^\infty \frac{sgn(x-y)\,u_y(y,t)}{\sqrt{|x-y|}}dy.$$

3. *En el sentido distribucional,*
$$\mathcal{L}^{-1}_{p\to x}\left\{e^{-py}\right\} = \delta(x-y)\,\mathcal{U}(x-y), \tag{1.26}$$
*donde $\mathcal{U}$ es el **escalón unitario**, y δ la **función delta de Dirac**.*

4. *Siendo* $|\partial_x|^{\alpha}$ *el operador derivada fraccional como en (4.2), para* $\alpha \in (0,1)$, *se tiene que*

$$\mathcal{L}^{-1}_{\xi\to t}\left\{|\partial_x|^{\alpha}\,\widehat{u}\,(x,\xi)\right\} = \mathcal{L}^{-1}_{\xi\to t}\left\{H\,(x)\,\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} e^{px}K\,(p)\,\widehat{\widetilde{u}}\,(p,\xi)\,dp\right\} \tag{1.27}$$

$$= H\,(x)\,\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} e^{px}K\,(p)\,\widetilde{u}\,(p,t)\,dp = |\partial_x|^{\alpha}\,u\,(x,t)\,,$$

donde H *es la* ***función de Heaviside*** *(4).*

1.9. Operadores pseudodiferenciales

DEFINICIÓN 1.9 *Sea* $g(x) \in \mathbf{L}^{\infty}\,(0,a)$ *y* $g(x)$ *se extiende a* $\mathbf{R}$ *con* $g(x) = 0$ *si* $x \notin (0,a)$, *definimos el espacio de funciones*

$$D_a = \left\{H\,(x)\,g\,(x) : g\,(x) \in \mathbf{H}^1_{\infty}\,(0,a)\right\}. \tag{1.28}$$

DEFINICIÓN 1.10 *Decimos que la función* $\widehat{g}(p)$ *pertenece a la* ***clase de funciones*** $\mathcal{A}_a$ *si*

1. *Es analítica en todo el plano complejo.*

2. $|\widehat{g}\,(p)| \leq \begin{cases} C \text{ para } |p| < 1 \\ \frac{1+\left|e^{-pa}\right|}{|p|} \text{ para } |p| >> 1. \end{cases}$.

TEOREMA 1.8 *Si* $g(x) \in D_a$, *entonces la transformada de Laplace* $\widehat{g}\,(p) \in \mathcal{A}_a$.

DEMOSTRACIÓN. Para demostrar 1) primero vamos a probar que la transformada de Laplace definida por

$$\widehat{g}\,(p) = \int_0^a e^{-px} g\,(x)\,dx$$

es convergente para todo p. Como la función $g\,(x) \equiv 0$ para $x \notin (0,a)$, tiene discontinuidades de primer tipo en los extremos del intervalo $(0,a)$ y esta acotada, podemos usar la prueba de comparación, obteniendo

$$\begin{aligned} |\widehat{g}\,(p)| &= \left|\int_0^a e^{-px} g\,(x)\,dx\right| \leq \int_0^a \left|e^{-px}\right| |g\,(x)|\,dx \\ &\leq M\int_0^a \left|e^{-px}\right| dx, \end{aligned}$$

y aplicando $|e^{-px}| \le e^{-\operatorname{Re} px}$, donde $p = \xi + i\eta$, por lo tanto

$$
\begin{aligned}
|\widehat{g}(p)| &\le M \int_0^a e^{-\xi x} dx \\
&\le \frac{M}{\xi}\left(1 - e^{-\xi a}\right) \\
&\le \frac{M}{\xi}.
\end{aligned}
$$

Ahora como cada uno de los términos de la integral de la transformada de Laplace son positivos, la integral es monótona, de aquí que la integral $\int_0^a e^{-px} g(x)\, dx$ es convergente para $\forall p \in \mathbf{C}$. Ahora dividimos el intervalo de integración en subintervalos $[t_i, t_{i+1}]$ de longitud finita, donde $t_0 = 0$ y $t_n \to a$ cuando $n \to \infty$. Entonces la función $\widehat{g}(p)$, es la suma de una serie

$$
\widehat{g}(p) = \int_0^a e^{-px} g(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-px} g(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(p).
$$

Como la función $g(x) \equiv 0$ para $x \notin (0, a)$ y tiene discontinuidad de primer tipo en los extremos del intervalo $(0, a)$ y esta acotada. Usando la convergencia de la serie (1.13) la serie $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(p)$ converge uniformemente en el dominio $0 \le \operatorname{Re} p \le a$. Cada una de las funciones

$$
u_n(p) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-px} g(x) dx
$$

están definidas como una integral dependiente de un parámetro p, sobre un intervalo de longitud finita. Por lo tanto las funciones $u_n(p)$ son funciones enteras con respecto a p y se satisfacen las condiciones del teorema de Weierstrass (ver [83]), de aquí, la función $\widehat{g}(p)$ es analítica $\forall p \in \mathbf{C}$.Ahora probamos 2) usando integración por partes con respecto a x para $p >> 1$

$$
\begin{aligned}
|\widehat{g}(p)| &= \left| \int_0^a e^{-px} g(x)\, dx \right| \\
&\le \left| \frac{1}{p}\left[g(0) - e^{-pa} g(a)\right] + \frac{1}{p}\int_0^a e^{-px} g'(x)\, dx \right| \\
&\le C\frac{1 + |e^{-pa}|}{|p|} + \frac{1}{|p|}\int_0^a \left|e^{-px}\right| |g'(x)\, dx| \\
&\le C\frac{1 + |e^{-pa}|}{|p|} + \frac{C}{|p|^2}\left(\left|e^{-pa}\right| - 1\right) \\
&\le C\frac{1 + |e^{-pa}|}{|p|} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|p|^2}\right).
\end{aligned}
$$

Para el caso $p < 1$, la exponencial esta acotada por $|e^{-pa}| < 1$, por lo que

$$
|\widehat{g}(p)| < C.
$$

■

PROPOSICIÓN 1.2 *Si* $g(x) \in \mathbf{C}^n$ *entonces*

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n g(x)}{dx^n}\right\} = p^n \left(\widehat{g}(p) - \sum_{j=1}^{n} \frac{d_x^{j-1} g(0) - e^{-pa} d_x^{j-1} g(a)}{p^j}\right). \tag{1.29}$$

DEMOSTRACIÓN. Usando el principio de inducción matemática, probaremos la fórmula (1.29). Para $k = 1$, debemos integrar por partes

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dx} g(x)\right\} &= \int_0^a e^{-px} g'(x) dx = \int_0^a e^{-px} d(g(x)) \\ &= e^{-px} g(x)\big|_0^a + p\int_0^a e^{-px} g(x) dx \\ &= p\widehat{g}(p) - \left[g(0) - e^{-pa} g(a)\right] \\ &= p\left[\widehat{g}(p) - \frac{g(0) - e^{-pa} g(a)}{p}\right].\end{aligned}$$

Ahora supongamos que para $k = n - 1$ se cumple la fórmula

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} g(x)\right\} = p^{n-1} \left(\widehat{g}(p) - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{d_x^{j-1}(g(0)) - e^{-pa} d_x^{j-1}(g(a))}{p^j}\right) \tag{1.30}$$

y probemos el caso $k = n$, integrando por partes

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\frac{d^n}{dx^n} g(x)\right\} &= \int_0^a e^{-px} g^{(n)}(x) dx = \int_0^a e^{-px} d\left(d_x^{n-1} g(x)\right) \\ &= e^{-px} d_x^{n-1} g(x)\big|_0^a + p\int_0^a e^{-px} g^{(n-1)}(x) dx. \end{aligned} \tag{1.31}$$

Usando la fórmula (1.30) en (1.31) se obtiene

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\frac{d^n}{dx^n} g(x)\right\} &= e^{-px} d_x^{n-1} g(x)\big|_0^a \\ &+p\left[p^{n-1}\left(\widehat{g}(p) - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{d_x^{j-1} g(0) - e^{-pa} d_x^{j-1} g(a)}{p^j}\right)\right] \\ &= e^{-pa} d_x^{n-1} g(a) - d_x^{n-1} g(0) \\ &+p^n\left(\widehat{g}(p) - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{d_x^{j-1} g(0) - e^{-pa} d_x^{j-1} g(a)}{p^j}\right),\end{aligned}$$

desarrollando y reagrupando la suma respecto a la potencia p^n se obtiene

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n}{dx^n}g\left(x\right)\right\} = p^n\left(\widehat{g}\left(p\right) - \frac{g\left(0\right) - e^{-pa}g\left(a\right)}{p} - \frac{g'\left(0\right) - e^{-pa}g'\left(a\right)}{p^2}\right.$$
$$\left.\cdots - \frac{g^{(n-2)}\left(0\right) - e^{-pa}g^{(n-2)}\left(a\right)}{p^{n-1}} - \frac{g^{(n-1)}(0) - e^{-pa}g^{(n-1)}(a)}{p^n}\right)$$
$$= p^n\left(\widehat{g}\left(p\right) - \sum_{j=1}^{n}\frac{d_x^{j-1}g\left(0\right) - e^{-pa}d_x^{j-1}g\left(a\right)}{p^j}\right).$$

Esta última escritura prueba que para $k = n$ se cumple la fórmula (1.29). Luego la fórmula (1.29) se cumple $n \geq 1$. ■

Por lo que podemos definir el operador diferencial de orden entero n, en términos de la transformada inversa de Laplace como

$$\frac{d^n}{dx^n} = \mathcal{L}^{-1}\left\{p^n\left[\widehat{g}\left(p\right) - \sum_{j=1}^{n}\frac{d_x^{j-1}g\left(0\right) - e^{-pa}d_x^{j-1}g\left(a\right)}{p^j}\right]\right\}.$$

Ahora definimos la derivada fraccional α, donde $\alpha \in (0,1)$ como

$$D^\alpha = H\left(x\right)\mathcal{L}^{-1}\left\{p^\alpha\mathcal{L}\right\}.$$

Notamos que la función p^α no es analítica en el semiplano complejo $\operatorname{Re} p < 0$, por lo que debemos hacer un corte Γ como se muestra en la Figura 1.4, donde el contorno Γ está definido como

$$\Gamma = \left\{p \in \left(\infty e^{-i\pi}; 0\right) \cup \left(0; \infty e^{i\pi}\right)\right\},$$

por lo tanto para la correcta definición de derivada fraccional α, se debe multiplicar por la característica $H\left(x\right)$.

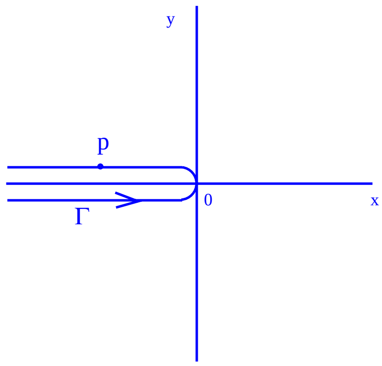

Fig. 1.4. Corte Γ, en $\operatorname{Re} p < 0$, para p^α.

Algunas otras fórmulas o propiedades útiles que incluimos sin más demostración.

TEOREMA 1.9 *Se cumplen las siguientes propiedades de la Transformada de Laplace:*

1. $\mathcal{L}_{x\to q}\{u(x,t)\} = \widetilde{u}(q,t)$. *En particular,*
$$\mathcal{L}_{t\to\xi}\{\widehat{u}(p,t)\} = \widetilde{\widehat{u}}(p,\xi) \tag{1.32}$$

2. $\mathcal{L}_{x\to q}\{u_t(x,t)\} = \widetilde{u}_t(q,t)$.

3. *En general, para* $n \geq 0$,
$$\mathcal{L}_{x\to p}\left\{f^{(n)}(x)\right\} = p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0),$$
donde
$$F(p) = \mathcal{L}_{x\to p}\{f(x)\} = \widetilde{f}(p).$$
En particular, para $u(x,t)$, *y* $n=1$, *se tiene*
$$\mathcal{L}_{x\to p}\{u_x(x,t)\} = p\left[\widetilde{u}(p,t) - \frac{u(0,t)}{p}\right] = \widetilde{u}_x(p,t).$$
Análogamente,
$$\mathcal{L}_{t\to\xi}\{\widetilde{u}_t(p,t)\} = \xi\left[\widehat{\widetilde{u}}(p,\xi) - \frac{\widetilde{u}(p,0)}{\xi}\right]. \tag{1.33}$$

4. $\mathcal{L}_{x\to p}\{u_{xx}\} = \widetilde{u}_{xx}(p,t) = p^2\left[\widetilde{u}(p,t) - \frac{u(0,t)}{p} - \frac{u_x(0,t)}{p^2}\right]$.

5. $\mathcal{L}_{x\to p}\{u_{xxx}\} = \widetilde{u}_{xxx}(p,t) = p^3\left[\widetilde{u}(p,t) - \left(\frac{u(0,t)}{p} + \frac{u_x(0,t)}{p^2} + \frac{u_{xx}(0,t)}{p^3}\right)\right]$.

6. $\mathcal{L}_{x\to q}\{\alpha u_{xxx}\} = \alpha q^3\left(\mathcal{L}_{x\to q}\{u\} - \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial_x^{j-1}u(0,t)}{q^j}\right)$

7. *En general se tiene la fórmula para la* j*-ésima derivada*
$$\widetilde{\partial_x^j u} = p^j\left[\widetilde{u} - \sum_{k=1}^{j}\frac{\partial_x^{k-1}u(a,t) - e^{-p}\partial_x^{k-1}u(b,t)}{p^k}\right].$$

8. *Ya que* $\mathcal{L}_{x\to q}\{u\}$ *es analítica para todo* $\operatorname{Re} q > 0$, *se tiene*
$$\widetilde{u}(q,t) = \mathcal{L}_{x\to q}\{u\} = \mathbb{P}_{p\to q}\{\widetilde{u}(p,t)\}. \tag{1.34}$$

9.
$$\mathcal{L}_{x\to q}\left\{\int_0^\infty \frac{sgn(x-y)\,u_y(y,t)}{\sqrt{|x-y|}}dy\right\} = \mathbb{P}_{p\to q}\left\{|p|^{\frac{1}{2}}\left(\widetilde{u}(p,t) - \frac{u(0,t)}{p}\right)\right\}. \tag{1.35}$$

10. *$\widetilde{u}(p,t)$ decae como $\frac{1}{p}$.*

11. *$\widetilde{u}(p,t)$ es analítica, para todo $\mathrm{Re}\, p > 0$.*

12. *Podemos concluir que*

$$\mathcal{L}_{x\to p}\{\delta(x-x_0)\} = e^{-px_0}, \tag{1.36}$$

para todo $x_0 > 0$; y, en particular,

$$\mathcal{L}_{x\to p}\{\delta(x)\} = 1.$$

Por otra parte, una vez desarrollada la teoría de distribuciones, fue posible probar que la solución de una ecuación de la forma

$$\mathbf{P}[u] = \delta,$$

donde **P** denota cualquier operador diferencial parcial lineal con coeficientes constantes, siempre existe como una distribución. A dicha solución se le conoce como **solución fundamental**. Una modificación de una solución fundamental diseñada para satisfacer algunas condiciones de frontera determinadas es usualmente llamada *función de Green.*

DEFINICIÓN 1.11 *Sea L_x un operador diferencial (ordinario o parcial) lineal de orden n (tal vez como $L_x g = a_n(x)\frac{d^n g}{dx^n} + ... + a_1(x)\frac{dg}{dx} + a_0(x)g$). Consideremos la ecuación de $n-$ésimo orden $L_x g(x,y) = \delta(x-y)$. Decimos que g es una **función de Green** si*

1. *$L_x g(x,y) = 0$, para $x \neq y$.*

2. *$g(x,y)$ es $(n-2)-$véces continuamente diferenciable, con respecto a x, en $x = y$.*

3. *$\left.\frac{d^{n-1}g(x,y)}{dx^{n-1}}\right|_{x=y^-}^{x=y^+} = \frac{1}{a_n(y)}$. Aquí $y^{\pm}$ denota los límites y^- y y^+ de $y-\varepsilon$ y $y+\varepsilon$, conforme $\varepsilon \to 0$, respectivamente, propiciando la **condición de salto** para la derivada $d^{n-1}g$.*

El siguiente resultado es conocido en la teoría de distribuciones. Para más detalles véase, por ejemplo, [29], [30], [46], o bien, [51].

TEOREMA 1.10 *La función de Green $g(x,y)$ satisface la ecuación de $n-$ésimo orden $L_x g(x,y) = \delta(x-y)$, en el sentido distribucional, si, y sólo si, g satisface las tres condiciones enlistadas en la definición (1.11). Más aún, si la función de Green $g(x,y)$ existe, entonces la solución de la ecuación $L_x u(x) = f(x)$ está dada por*

$$u(x) = \int_a^b g(x,y)\, f(y)\, dy.$$

□

1.10. Integrales del tipo de Cauchy

La integral de la forma

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbf{C}}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta,$$

donde $\varphi(\zeta)$ es una función continua en el contorno, a excepción, posiblemente de un número finito de puntos, donde tiene discontinuidades integrables, se llama integral de tipo de Cauchy. La función $\varphi(\zeta)$ se llama densidad y $\frac{1}{\zeta-z}$ el núcleo de la integral. La integral del tipo de Cauchy representa una función $F(z)$ analítica en todo recinto que no contiene puntos del contorno $\mathbf{C}$. Además

$$F^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{\mathbf{C}}\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta.$$

Supongamos que $\varphi(\zeta)$ verifica sobre el contorno $\mathbf{C}$ la condición de Hölder, esto es para dos puntos cualquiera ζ_1 y ζ_2 sobre $\mathbf{C}$

$$|\varphi(\zeta_1)-\varphi(\zeta_2)|\leq k\,|\zeta_1-\zeta_2|^{\alpha},$$

donde $k>0$, $0<\alpha\leq 1$, Si $\alpha=1$, la condición de Hölder se llama condición de Lipschitz. En estas condiciones, si el punto ζ_0 del contorno no es un extremo suyo, existe la integral singular

$$F(\zeta_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbf{C}}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-\zeta_0}d\zeta,$$

definida como el valor principal de tipo Cauchy.

Este valor principal se puede expresar a través de una integral impropia mediante la fórmula

$$F(\zeta_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbf{C}}\frac{\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}d\zeta+\frac{1}{2}\varphi(\zeta_0)+\frac{\varphi(\zeta_0)}{2\pi i}Ln\frac{b-\zeta_0}{a-\zeta_0},$$

donde los puntos a y b son los puntos extremos del contorno $\mathbf{C}$, si este no es cerrado. La rama uniforme de Ln se escoge de manera que en el caso de un contorno cerrado $(a=b)$ el término con el logaritmo desaparezca y la fórmula adquiera la forma

$$F(\zeta_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbf{C}}\frac{\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}d\zeta+\frac{1}{2}\varphi(\zeta_0).$$

Si designamos mediante $F^{+}(\zeta_0)$ y $F^{-}(\zeta_0)$ los valores frontera de la integral $F(z)$ de tipo de Cauchy cuando $z\to\zeta_0$ por la izquierda y por la derecha de $\mathbf{C}$, respectivamente, tendremos las conocidas **fórmulas de Sokhotski-Plemelj**

$$\begin{aligned} F^{+}(\zeta_0) &= F(\zeta_0)+\frac{1}{2}\varphi(\zeta_0), \qquad (1.37)\\ F^{-}(\zeta_0) &= F(\zeta_0)-\frac{1}{2}\varphi(\zeta_0), \end{aligned}$$

o bien

$$F(\zeta_0) = \frac{1}{2}\left[F^+(\zeta_0) + F^-(\zeta_0)\right], \tag{1.38}$$
$$F^+(\zeta_0) - F^-(\zeta_0) = \varphi(\zeta_0).$$

Si **C** es un contorno cerrado que se recorre como siempre, $F^+(\zeta)$ son los valores frontera de la función $F^+(z)$ definida en el interior del contorno (recinto D^+), mientras que $F^-(\zeta)$ son los valores frontera de la función $F^-(z)$ definida en el exterior del contorno (recinto D^-) (ver [1], o bien, [26]).

En seguida enunciamos algunos resultados importantes cuya demostración y argumentos pueden encontrarse en [1] o en [62]. Aunque los daremos por hecho como aparecen aquí, en el cuerpo del trabajo los enunciamos con la notación adoptada y, en algunos casos, comentamos de su validez en nuestra teoría.

LEMA 1.1 *Dada $H(p,\xi)$, definida para $\operatorname{Re} p = 0$ y $\xi \in \mathbf{C}$ fijo tal que $Re\xi > 0$, que satisface la condición de Hölder, se puede representar de manera única en la forma*

$$H(p,\xi) = U^+(p,\xi) - U^-(p,\xi),$$

donde $U^\pm(p,\xi)$ son los valores frontera de las funciones analíticas $U^\pm(z)$, además de verificarse la condición $U^\pm(\infty) = 0$. Estas funciones están determinadas por

$$U(z,\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{q-z} H(q,\xi)\,dq.$$

□

LEMA 1.2 *Dada $G(p,\xi)$, para $p \in i\mathbf{R}$ y $\xi \in \mathbf{C}$ fijo tal que $Re\xi > 0$, que satisface la condición de Hölder, y con índice* Ind

$$\operatorname{Ind} G(p,\xi) := \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} d\ln G(p,\xi) = 0,$$

se puede representar de manera única como

$$G(p,\xi) = \frac{X^+(p,\xi)}{X^-(p,\xi)},$$

donde $X^\pm(p,\xi)$ son los valores límite de las funciones analíticas $X^\pm(z,\xi)$, las cuales son analíticas en los semiplanos izquierdo y derecho, respectivamente, y sin ceros en los correspondientes semiplanos. Estas funciones están determinadas, salvo por un factor constante arbitrario, y están dadas por la fórmula

$$X^\pm(z,\xi) = e^{\Gamma^\pm(z,\xi)},$$

donde

$$\Gamma(z,\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{q-z} \ln G(q,\xi)\,dq.$$

□

1.11. Proyectores

En esta sección definimos el operador $\mathbb{P}$, y presentamos las propiedades más útiles para el desarrollo de nuestra teoría.

DEFINICIÓN 1.12 *Si $\phi(q)$ satisface la condición de Hölder, definimos el operador $\mathbb{P}$ como*

$$\mathbb{P}_{q\to z}\{\phi(q)\} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{1}{q-z}\phi(q)\,dq, \tag{1.39}$$

donde $\operatorname{Re} z \neq 0$.

TEOREMA 1.11 *Si $\widehat{f}(p) \in \mathcal{A}_a$, entonces $\mathbb{P}\left\{\widehat{f}(p)\right\} = \widehat{f}$.*

DEMOSTRACIÓN. Como $\widehat{f}(p)$ es analítica en todo el plano complejo, desarrollamos la integral en dos partes

$$\mathbb{P}\left\{\widehat{f}(p)\right\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{e^{(q-p)a}}{q-p}\widehat{f}(q)\,dq$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{1}{q-p}\widehat{f}(q)\,dq.$$

Esta integral la analizamos en tres casos: a) para $\operatorname{Re} p > 0$

$$\mathbb{P}\left\{\widehat{f}(p)\right\} = \frac{1}{2\pi i}e^{-pa}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{e^{qa}}{q-p}\widehat{f}(q)\,dq$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{1}{q-p}\widehat{f}(q)\,dq$$
$$= J_1 + J_2.$$

Para J_1, debemos cerrar el contorno para $\operatorname{Re} q < 0$, para que la función $e^{qa}\widehat{f}(q) \to 0$ cuando $q \to \infty$ sobre el contorno C_R, como se muestra en la Figura 1.5.

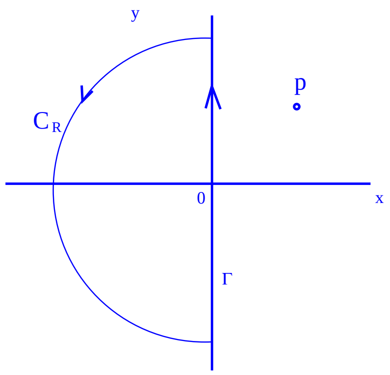

Fig. 1.5. Contorno para $\operatorname{Re} q < 0$.

Como la función $e^{qa}\widehat{f}(q)$ es analítica y dentro del contorno Γ no se encierra ningún punto singular, entonces aplicando el teorema de Cauchy

$$J_1 = 0.$$

Ahora evaluamos J_2 de la siguiente manera,

$$J_2 = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{1}{q-p}\widehat{f}(q)\, dq, \tag{1.40}$$

como la función $\widehat{f}(p)$ es analítica $\forall p \in \mathbf{C}$, la integral (1.40) puede ser calculada con la ayuda de residuos, tomando en cuenta que hay una singularidad (un polo simple) en el punto $q = p$ y cerrando el contorno hacia el semiplano derecho como se muestra en la Figura 1.6, la integración es realizada en dirección negativa, por lo que

$$J_2 = \widehat{f}(p).$$

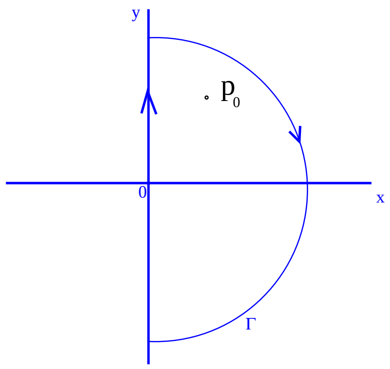

Fig. 1.6. Contorno para $\mathrm{Re}\, q > 0$ con punto singular p_0.

b) cuando $\mathrm{Re}\, p < 0$, debemos cerrar el contorno para J_1, para $\mathrm{Re}\, p < 0$ como se muestra en la Figura 1.5. Como la función $e^{qa}\widehat{f}(q)$ es analítica dentro del contorno Γ y tomando en cuenta que hay una singularidad (polo simple) en $q = p$, entonces aplicando el teorema de Cauchy se obtiene

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{2\pi i} e^{-pa} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{e^{qa}}{q-p}\widehat{f}(q)\, dq \\ &= e^{-pa} e^{pa}\widehat{f}(p) \\ &= \widehat{f}(p). \end{aligned}$$

Ahora para el término J_2, cerramos en contorno de integración a la derecha como se muestra en la Figura 1.6, y como $\mathrm{Re}\, p < 0$, no se encierra ningún punto singular, entonces aplicando el teorema de Cauchy

$$J_2 = 0.$$

c) Ahora consideramos el caso $\operatorname{Re} p = 0$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left\{\widehat{f}(p)\right\} &= \frac{1}{2\pi i} e^{-pa} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{e^{qa}}{q-p} \widehat{f}(q)\, dq \\ &- \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{1}{q-p} \widehat{f}(q)\, dq \\ &= J_1 + J_2.\end{aligned}$$

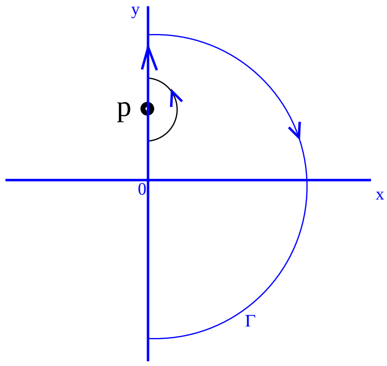

Fig. 1.7. Contorno para $\operatorname{Re} q > 0$.

Para cada una de las integrales J_1 y J_2, se debe cerrar el contorno para $\operatorname{Re} q > 0$ como se muestra en la Figura 1.7, y similarmente para $\operatorname{Re} q < 0$, debido a que $\operatorname{Re} p = 0$, debemos calcular la mitad del residuo en cada integral, por lo que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left\{\widehat{f}(p)\right\} &= \frac{1}{2} e^{-pa} e^{-pa} \widehat{f}(p) + \frac{1}{2} \widehat{f}(p) \\ &= \widehat{f}(p).\end{aligned}$$

■

TEOREMA 1.12 *Si* $\widehat{f}(p)$ *satisface la condición de Hölder para* $\operatorname{Re} p = 0$ *y* $\left|\widehat{f}(p)\right| \leq \frac{C}{|p|^{\gamma}}$, $\gamma > 0$ *y* $|p| > 1$ *entonces* $\mathbb{P}\left\{\widehat{f}(p)\right\} \in \mathcal{A}_a$ *y*

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\mathbb{P}\left\{\widehat{f}(p)\right\}\right\} = H(x) \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{px} \widehat{f}(p)\, dp.$$

DEMOSTRACIÓN. Tenemos por definición

$$\mathbb{P}\left\{\widehat{f}(p)\right\} = e^{-pa} J_1 + J_2,$$

donde

$$\begin{aligned}J_1 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \widehat{f}(q) \frac{e^{qa}}{q-p} dq, \\ J_2 &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \widehat{f}(q) \frac{1}{q-p} dq,\end{aligned}$$

Notamos que J_1 y J_2 son integrales de tipo de Cauchy con núcleos $\widehat{f}(q)\,e^{qa}$ y $-\widehat{f}(q)$ respectivamente. Debido a las condiciones del teorema ambos núcleos satisfacen la condición de Lipschitz y obtenemos que J_1 y J_2 son analíticos para $\operatorname{Re} p \neq 0$ y satisfacen condición

$$|J_i| \leq C\frac{1}{|p|}, |p| > 1, i = 1, 2.$$

Además para $\operatorname{Re} p = 0$

$$\begin{aligned} J_1^+ - J_1^- &= \widehat{f}(p)\,e^{pa} \\ J_2^+ - J_2^- &= \widehat{f}(p)\,, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} J_i^- &= \lim_{z\to p, \operatorname{Re} z>0} J_1(z) \\ J_i^+ &= \lim_{z\to p, \operatorname{Re} z<0} J_1(z). \end{aligned}$$

Entonces para $\operatorname{Re} p = 0$

$$\mathbb{P}\left\{\widehat{f}(p)\right\}^+ - \mathbb{P}\left\{\widehat{f}(p)\right\}^- = 0.$$

Por lo tanto, usando el teorema de unicidad de continuación analítica el operador $\mathbb{P}\left\{\widehat{f}(p)\right\} \in \mathcal{A}_a$.Ahora demostramos la propiedad

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\mathbb{P}\left\{\widehat{f}(p)\right\}\right\} = H(x)\,\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{px}\widehat{f}(p)\,dp.$$

Desarrollando la parte izquierda de la igualdad para $\operatorname{Re} p > 0$ con el contorno mostrado en la Figura 1.8, se obtiene

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\mathbb{P}\left\{\widehat{f}(p)\right\}\right\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+\varepsilon}^{+i\infty+\varepsilon} e^{px}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{e^{(q-p)a}-1}{q-p}\widehat{f}(q)\,dq\right]dp.$$

Usando el teorema de Fubini se puede cambiar el orden de integración para obtener

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\mathbb{P}\left\{\widehat{f}(p)\right\}\right\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\widehat{f}(q)\,dq\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+\varepsilon}^{+i\infty+\varepsilon}\frac{e^{qa+p(x-a)}-e^{px}}{q-p}dp. \tag{1.41}$$

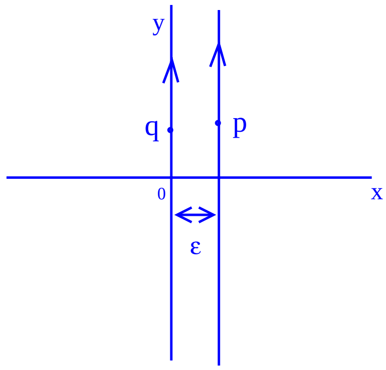

Fig. 1.8. Contorno para $\operatorname{Re} p > 0$.

Ahora desarrollamos la integral interior de (1.41) y la llamamos I_2

$$I_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+\varepsilon}^{+i\infty+\varepsilon} \frac{e^{qa}e^{p(x-a)} - e^{px}}{q-p}dp.$$

En el caso para $x < 0$ debemos cerrar el contorno a la derecha, como se muestra en la Figura 1.9, y el punto singular $p = q$ queda fuera del contorno de integración y como la función $\left(e^{qa}e^{p(x-a)} - e^{px}\right)$ es analítica dentro del contorno Γ, por lo tanto usando el teorema de Cauchy

$$I_2 = 0.$$

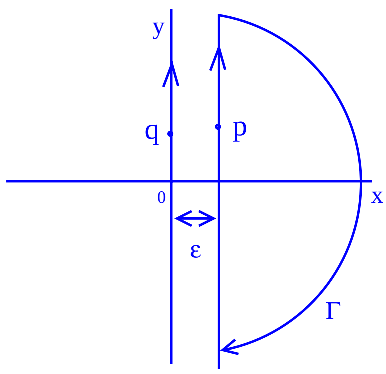

Fig. 1.9. Contorno cerrado para $\operatorname{Re} p > \varepsilon$.

En el caso para $x > a$ se debe cerrar el contorno a la izquierda, como se muestra en la Figura 1.10, por lo que debemos calcular el residuo en el punto singular $p = q$ (polo simple), aplicando la fórmula integral de Cauchy

$$I_2 = e^{qa}e^{q(x-a)} - e^{qx} = 0.$$

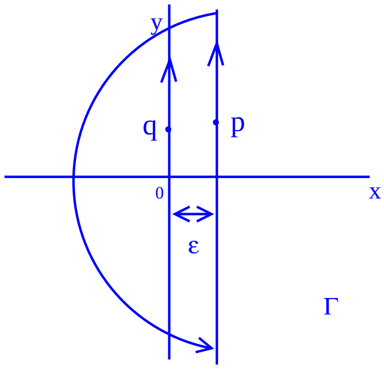

Fig. 1.10. Contorno cerrado para $\operatorname{Re} p < \varepsilon$.

Para el caso cuando $0 < x < a$ separamos I_2 en dos partes

$$I_2 = \frac{e^{qa}}{2\pi i} \int_{-i\infty+\varepsilon}^{+i\infty+\varepsilon} \frac{e^{p(x-a)}}{q-p} dp - \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\varepsilon}^{+i\infty+\varepsilon} \frac{e^{px}}{q-p} dp.$$

Para la primera integral se tiene que $x - a < 0$, por lo que se debe cerrar el contorno a la derecha, como se muestra en la Figura 1.9, por lo tanto no se encierra ningún punto singular entonces usando el teorema de Cauchy la primera integral es cero. Para la segunda integral cerramos el contorno de integración a la izquierda, como se muestra en la Figura 1.10, por lo que debemos calcular el residuo en el punto singular $p = q$, entonces obtenemos

$$I_2 = e^{qx}, \ 0 < x < a.$$

Por lo tanto finalmente obtenemos

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\mathbb{P}\left\{\widehat{f}(p)\right\}\right\} = H(x) \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{px} \widehat{f}(p)\, dp.$$

■

1.12. Operador $\mathbb{K}u$

Ahora definimos el operador $\mathbb{K}u$ en los siguientes términos:

$$\mathbb{K}(u)(x,t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{px} \left(\lim_{z \to p, \operatorname{Re} z > 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{q-z} K(q)\, \widetilde{u}(q,t)\, dq \right) dp, \tag{1.42}$$

donde $x, t \in \mathbf{R}^+$, $\widetilde{u}(q,t) \in \mathcal{A}_a$ y el símbolo $K(p) = |p|^{\frac{1}{2}}$, tal que el operador $\mathbb{K}$ sea **disipativo**, es decir,

$$\operatorname{Re} K(p) > 0 \text{ para valores de } p \in \mathbf{C} \text{ tales que } \operatorname{Re} p = 0. \tag{1.43}$$

Para probar la convergencia de la integral (1.42), separamos en dos intervalos de integración y aplicamos la desigualdad del triángulo

$$\begin{aligned}
|\mathbb{K}u| = &\left| \lim_{R_2\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_0^{+iR_2} e^{px}K(p)\,\widehat{u}(p)\,dp \right.\\
&\left. + \lim_{R_1\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{-iR_1}^{0} e^{px}K(p)\,\widehat{u}(p)\,dp \right| \\
&\leq \left| \lim_{R_2\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_0^{+iR_2} e^{px}K(p)\,\widehat{u}(p)\,dp \right| \\
&+ \left| \lim_{R_1\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{-iR_1}^{0} e^{px}K(p)\,\widehat{u}(p)\,dp \right| \\
&= I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned}
I_1 &= \left| \lim_{R_2\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_0^{+iR_2} e^{px}K(p)\,\widehat{u}(p)\,dp \right| \\
I_2 &= \left| \lim_{R_1\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{-iR_1}^{0} e^{px}K(p)\,\widehat{u}(p)\,dp \right|.
\end{aligned}$$

Ahora probaremos la convergencia del término I_1 usando el criterio de Cauchy para convergencia simple, es decir $\forall\varepsilon > 0$, $\exists A > 0$ tal que $\forall N > M > A$

$$\left| \frac{1}{2\pi i}\int_{iM}^{iN} e^{px}K(p)\,\widehat{u}(p)\,dp \right| < \varepsilon.$$

Integrando por partes con respecto a p y aplicando la desigualdad del triangulo se obtiene

$$
\begin{aligned}
\left| \int_{iM}^{iN} e^{px} K(p)\, \widehat{u}(p)\, dp \right| &= \left| \int_{iM}^{iN} \frac{1}{x} K(p)\, \widehat{u}(p)\, d(e^{px}) \right| \\
&= \left| \frac{1}{x}\, e^{px} K(p)\, \widehat{u}(p) \Big|_{iM}^{iN} \right. \\
&\quad \left. -\frac{1}{x} \int_{iM}^{iN} e^{px} \left(K'(p)\, \widehat{u}(p) + K(p)\, \widehat{u}'(p) \right) dp \right| \\
&\leq \left| \frac{1}{x}\, e^{px} K(p)\, \widehat{u}(p) \Big|_{iM}^{iN} \right| \\
&\quad + \left| \frac{1}{x} \int_{iM}^{iN} e^{px} K'(p)\, \widehat{u}(p)\, dp \right| + \left| \frac{1}{x} \int_{iM}^{iN} e^{px} K(p)\, \widehat{u}'(p)\, dp \right| \\
&\leq \frac{1}{x} \left| K(p)\, \widehat{u}(p) \Big|_{iM}^{iN} \right| + \frac{1}{x} \int_{iM}^{iN} |K'(p)|\, |\widehat{u}(p)|\, |dp| \\
&\quad + \frac{1}{x} \int_{iM}^{iN} |K(p)|\, |\widehat{u}'(p)|\, |dp| .
\end{aligned}
$$

Usando (1.23) se tiene que $|\widehat{u}(p)| \leq \frac{C}{|p|}$ y $|\widehat{u}'(p)| \leq \frac{C}{|p|^2}$, para $|p| > 1$ y $K(p) = C_\alpha p^\alpha$, y su derivada $K'(p) = Cp^{\alpha-1}$.

$$
\begin{aligned}
\left| \int_{iM}^{iN} e^{px} K(p)\, \widehat{u}(p)\, dp \right| &\leq \frac{1}{x} \left| C_\alpha\, |p|^\alpha\, \frac{C}{|p|} \right|_{iM}^{iN} \Bigg| + \frac{1}{x} \int_{iM}^{iN} \left| C_\alpha\, |p|^{\alpha-1} \right| \frac{1}{|p|}\, |dp| \\
&\quad + \frac{1}{x} \int_{iM}^{iN} |C_\alpha\, |p|^\alpha|\, \frac{1}{|p|^2}\, |dp| \\
&\leq C \left| |iN|^\alpha\, \frac{1}{|iN|} \right| + C \left| |iM|^\alpha\, \frac{1}{|iM|} \right| \\
&\quad + C \int_{iM}^{iN} |p|^{\alpha-2}\, |dp| \\
&\leq C \frac{1}{N^{1-\alpha}} + C \frac{1}{M^{1-\alpha}} + C\, |p|^{\alpha-1} \Big|_{iM}^{iN} \\
&\leq C \frac{1}{M^{1-\alpha}} + C \frac{1}{N^{1-\alpha}} + C \frac{1}{M^{1-\alpha}} \\
&\leq C \frac{1}{M^{1-\alpha}} .
\end{aligned}
$$

Para $N > M > A = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ se cumple el criterio de Cauchy de convergencia simple. En forma análoga se demuestra la convergencia para el término I_2.

1.13. Funciones inversas $K^{-1}(-\xi)$

Para que una ecuación en derivadas parciales (EDP) tenga solución única, se requieren especificar algunas condiciones adicionales tales como condiciones iníciales o de frontera.

El paso siguiente en este trabajo es demostrar que sólo se requiere una condición inicial y no se necesita ninguna condición en frontera, para el problema (1).

Puesto que en el problema (1) sólo existe la primera derivada respecto a t, se requiere únicamente una condición inicial

$$u(x,0) = u_0(x).$$

Ahora para plantear la cantidad de condiciones en frontera del problema (1), damos la siguiente.

DEFINICIÓN 1.13 *El* ***símbolo*** $K(p)$ *es* ***disipativo*** *si se cumple*

$$\operatorname{Re} K(p) > 0 \text{ para valores de } p \in \mathbf{C} \text{ tales que } \operatorname{Re} p = 0.$$

El siguiente Lema nos muestra que si $\alpha \in (0,1)$, no es necesaria ninguna condición de frontera.

LEMA 1.3 *Sea $K(p) = C_\alpha p^\alpha$, $\alpha \in (0,1)$, $K(p)$ es disipativo, entonces no existen funciones inversas para $\operatorname{Re}\xi > 0$ tales que $\varphi(\xi) = K^{-1}(-\xi)$, para $\operatorname{Re}\varphi(\xi) > 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $K(p)$ una función analítica definida en el semiplano complejo $\operatorname{Re} p \geq 0$, y elegimos la rama principal de la función analítica $C_\alpha p^\alpha$ en el semiplano complejo $\operatorname{Re} p \geq 0$. Haciendo un cambio de variable con $K(p) = C_\alpha p^\alpha = -\xi$ para $\operatorname{Re}\xi > 0$ y

$$-\frac{\pi}{2} < \arg\xi < \frac{\pi}{2}. \tag{1.44}$$

El primer paso es hallar las raíces de p como sigue

$$p = \frac{|\xi|^{\frac{1}{\alpha}}}{|C_\alpha|^{\frac{1}{\alpha}}} e^{i(\pi + \arg\xi - \arg C_\alpha + 2\pi k)\frac{1}{\alpha}} = \varphi(\xi)$$

donde $\varphi(\xi)$ son las funciones inversas. Tomando

$$\operatorname{Re}\varphi(\xi) = C\cos\left((\pi + \arg\xi - \arg C_\alpha + 2\pi k)\frac{1}{\alpha}\right) > 0,$$

el argumento de $\varphi(\xi)$ debe estar entre los valores

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{\alpha} + \frac{\arg\xi}{\alpha} - \frac{\arg C_\alpha}{\alpha} + \frac{2\pi k}{\alpha} < \frac{\pi}{2}, \tag{1.45}$$

despejando el valor de k de la desigualdad (1.45) se obtiene que

$$-\frac{\alpha}{4}-\frac{1}{2}-\frac{\arg\xi}{2\pi}+\frac{\arg C_\alpha}{2\pi}<k<\frac{\alpha}{4}-\frac{1}{2}-\frac{\arg\xi}{2\pi}+\frac{\arg C_\alpha}{2\pi},$$

denotando una nueva variable $\psi=-\frac{1}{2}-\frac{\arg\xi}{2\pi}+\frac{\arg C_\alpha}{2\pi}$, reescribimos la desigualdad

$$-\frac{\alpha}{4}+\psi<k<\frac{\alpha}{4}+\psi,\ k\in\mathbb{Z}. \tag{1.46}$$

Usando (1.44) tenemos que

$$-\frac{1}{4}<\frac{\arg\xi}{2\pi}<\frac{1}{4}. \tag{1.47}$$

Como $K(p)$ es disipativo representamos

$$K(p)=|C_\alpha p^\alpha|\,e^{i(\theta_\alpha\pm\frac{\pi}{2}\alpha)},$$

donde $\theta_\alpha=\arg C_\alpha$, $p=iy$, $y\in\mathbf{R}$. Notamos que $\cos(\theta_\alpha\pm\frac{\pi}{2}\alpha)>0$, y por lo tanto

$$\begin{cases} -\frac{1}{4}+m-\frac{\alpha}{4}<\frac{\arg C_\alpha}{2\pi}<\frac{1}{4}+m-\frac{\alpha}{4} \\ -\frac{1}{4}+n+\frac{\alpha}{4}<\frac{\arg C_\alpha}{2\pi}<\frac{1}{4}+n+\frac{\alpha}{4}. \end{cases} \tag{1.48}$$

Resolviendo el sistema obtenido tenemos

$$-\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}<m-n<\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}.$$

Tal que $\alpha<1$ y m, n son enteros, vemos que un valor posible es $m=n=0$. Por eso

$$\frac{\alpha-1}{4}<\frac{\arg C_\alpha}{2\pi}<\frac{1-\alpha}{4}. \tag{1.49}$$

Usando (1.49) y (1.47) obtenemos para (1.46)

$$-\frac{\alpha}{4}-\frac{1}{2}-\frac{\arg\xi}{2\pi}+\frac{\arg C_\alpha}{2\pi}<k<\frac{\alpha}{4}-\frac{1}{2}-\frac{\arg\xi}{2\pi}+\frac{\arg C_\alpha}{2\pi}.$$

Tomando el máximo de la parte izquierda y el mínimo de la parte derecha de la desigualdad se obtiene una nueva desigualdad para α

$$\psi=-\frac{1}{2}-\frac{\arg\xi}{2\pi}+\frac{\arg C_\alpha}{2\pi}$$

$$\begin{aligned} \text{máx}\{\psi\} &= -\frac{3}{4}+\frac{1-\alpha}{4} \\ \text{mín}\{\psi\} &= -\frac{1}{4}+\frac{\alpha-1}{4}, \end{aligned}$$

tomando la desigualdad

$$\begin{aligned}
-\frac{\alpha}{4} + \text{mín}\{\psi\} &< \frac{\alpha}{4} + \text{máx}\{\psi\} \\
-\frac{\alpha}{4} - \frac{1}{4} + \frac{\alpha - 1}{4} &< \frac{\alpha}{4} - \frac{3}{4} + \frac{1-\alpha}{4}
\end{aligned}$$

se cancela el argumento de $\frac{\arg C_\alpha}{2\pi}$, por lo que queda

$$\begin{aligned}
-\frac{\alpha}{4} - \frac{1}{4} &< \frac{\alpha}{4} - \frac{3}{4} \\
\frac{1}{2} &< \frac{\alpha}{2} \\
1 &< \alpha,
\end{aligned}$$

por lo que sólo existen valores de k cuando $\alpha > 1$. ■

Entonces se demuestra que no es necesario poner condiciones en frontera al problema (1) para que la solución sea única.

Capítulo 2

El problema lineal

Al plantear nuestro problema original

$$\left.\begin{array}{c} u_t + \mathcal{N}(u) + \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{px} K(p)\, \widetilde{u}(p,t)\, dp = 0,\ x>0,\ t>0, \\ u(x,0) = u_0(x),\ x>0 \\ u(0,t) = 0,\ t>0 \end{array}\right\}, \tag{2.1}$$

para una función $u = u(x,t)$, mencionamos que el símbolo $K(p) = |p|^{\frac{1}{2}}$, es una función no analítica. Para resolver el problema (2.1), a lo largo de la presente tesis desarrollaremos un nuevo método que, en primer lugar, resolverá el *problema lineal* asociado con este último. A su vez, mostraremos que la solución al problema lineal puede obtenerse, escencialmente, de una *función de Green* que construiremos, y de cierta relación de esta última con las condiciones iniciales y de frontera.

2.1. La linealización

Asociamos a (2.1) el siguiente **problema lineal**

$$\left.\begin{array}{c} u_t(x,t) + |\partial_x|^{\frac{1}{2}}\, u(x,t) = 0,\ \text{donde}\ x>0,\ t>0; \\ u(x,0) = u_0(x),\ x>0 \\ u(0,t) = 0,\ t>0, \end{array}\right\}, \tag{2.2}$$

donde $|\partial_x|^{\frac{1}{2}}\, u$ es el **operador pseudodiferencial derivada módulo-fraccional** definido en $\mathbf{R}$ por la ecuación

$$|\partial_x|^{\frac{1}{2}}\, u(x,t) = H(x)\, \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{px}\, |p|^{\frac{1}{2}}\, \widetilde{u}(p,t)\, dp, \tag{2.3}$$

donde $\widetilde{u}$ es la *transformada de Laplace* $\mathcal{L}_{x\to p}$ de u, con respecto a x, definida explícitamente por

$$\mathcal{L}_{x\to p}\{u(x,t)\} = \widetilde{u}(p,t) = \int_0^{\infty} e^{-px} u(x,t)\, dx, \tag{2.4}$$

y H es la *función de Heaviside*

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} . \tag{2.5}$$

2.2. La función de Green y la solución del problema lineal

En esta sección construiremos la función de Green asociada al problema lineal (2.2), y más adelante verificaremos que esta función es solución de dicho problema.

Para hablar propiamente de la función de Green que construiremos, introducimos el **operador de Green** $\mathcal{G}$ mediante la fórmula integral definida por

$$\mathcal{G}(t)\varphi(x) = \int_0^\infty G(x,y,t)\varphi(y)\,dy, \tag{2.6}$$

donde G es lo que consideraremos como **función de Green** y que, según nuestra construcción, quedará determinada por

$$G(x,y,t) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-i\infty}^{i\infty} e^{\xi t}d\xi \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{px}\frac{Y^+(p,\xi)}{|p|^{\frac{1}{2}}+\xi} Z^-(p,\xi,y)\,dp, \tag{2.7}$$

donde Z^- es

$$\begin{aligned} Z^-(p,\xi,y) &= \lim_{z\to p,\mathrm{Re}\, z>0} \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{-qy}}{q-z}\frac{1}{Y^+(q,\xi)}dq \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{e^{-qy}}{q-p}\frac{1}{Y^+(q,\xi)}dq, \end{aligned} \tag{2.8}$$

y Y^+ es

$$Y^+(p,\xi) = e^{\Gamma^+(p,\xi)}\omega^+(p), \tag{2.9}$$

en la que

$$\begin{aligned} \Gamma^+(p,\xi) &= \lim_{z\to p,\mathrm{Re}\, z<0}\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{1}{q-z}\ln\left\{\left(\frac{|q|^{\frac{1}{2}}+\xi}{q^{\frac{1}{2}}+\xi}\right)\frac{\omega^-(q)}{\omega^+(q)}\right\}dq \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{1}{q-p}\ln\left\{\left(\frac{|q|^{\frac{1}{2}}+\xi}{q^{\frac{1}{2}}+\xi}\right)\frac{\omega^-(q)}{\omega^+(q)}\right\}dq, \end{aligned} \tag{2.10}$$

y

$$\omega^\pm(q) = (q\mp 1)^{\frac{1}{4}}. \tag{2.11}$$

PROPOSICIÓN 2.1 *Sea el valor inicial* $u_0(x) \in \mathbf{L}^1(\mathbf{R}^+)\cup\mathbf{L}^{1,\mu}(\mathbf{R}^+)\cup\mathbf{L}^\infty(\mathbf{R}^+)$. *Entonces existe una, y sólo una, solución u del problema (2.2), que tiene una representación integral con base en el operador de Green como*

$$u(x,t) = \mathcal{G}(t)u_0(x) = \int_0^\infty G(x,y,t)u_0(y)\,dy, \tag{2.12}$$

donde la función de Green G está dada por la fórmula (2.7) antes mencionada, y el ***espacio pesado*** $\mathbf{L}^{1,\mu}\left(\mathbf{R}^{+}\right)$ *se define*[1] *como*

$$\mathbf{L}^{1,\mu}\left(\mathbf{R}^{+}\right)=\left\{f:\|f\|_{1,\mu}=\int\limits_{\mathbf{R}^{+}}|x|^{\mu}\,|f(x)|\,dx\right\},$$

para $\mu\in\mathbf{R}$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que existe u solución de (2.2), tal que

$$u(x,t)=0,\ \text{para todo } x<0,$$

y veamos qué apariencia debe tener esta función. Aplicando la transformada de Laplace, con respecto a x, al problema lineal (2.2) obtenemos

$$\mathcal{L}_{x\to q}\left\{u_t(x,t)+|\partial_x|^{\frac{1}{2}}u(x,t)\right\}=\widetilde{u_t}(q,t)+\mathcal{L}_{x\to q}\left\{|\partial_x|^{\frac{1}{2}}u(x,t)\right\}=0. \quad (2.13)$$

Por otra parte, definiendo el **operador Proyector** $\mathbb{P}$ como

$$\mathbb{P}_{p\to z}\{\varphi(p)\}=-\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{1}{p-z}\varphi(p)\,dp, \quad (2.14)$$

para $\operatorname{Re}z\neq0$, podemos expresar el segundo término en (2.13) según este proyector:

(para $\operatorname{Re}p=0$, y $\operatorname{Re}q>0$ tenemos $\int_0^{\infty}e^{(p-q)x}dx=\left.\frac{e^{(p-q)x}}{p-q}\right|_0^{\infty}=-\frac{1}{p-q}$)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{x\to q}\left\{|\partial_x|^{\frac{1}{2}}u(x,t)\right\}&=\int_0^{\infty}e^{-qx}\,|\partial_x|^{\frac{1}{2}}u(x,t)\,dx\\
&=\int_0^{\infty}dx e^{-qx}H(x)\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}e^{px}\,|p|^{\frac{1}{2}}\,\widetilde{u}(p,t)\,dp\\
&\qquad\text{(por el \textbf{teorema de Fubini})}\\
&=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}dp\,|p|^{\frac{1}{2}}\,\widetilde{u}(p,t)\int_0^{\infty}e^{(p-q)x}dx\\
&=-\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{1}{p-q}\,|p|^{\frac{1}{2}}\,\widetilde{u}(p,t)\,dp\\
&=\mathbb{P}_{p\to q}\left\{|p|^{\frac{1}{2}}\,\widetilde{u}(p,t)\right\}.
\end{aligned}$$

---

[1] En general, los **espacios $\mathbf{L}^s$ con peso** μ, se definen en $\mathbf{R}^n$ como

$$\mathbf{L}^{s,\mu}\left(\mathbf{R}^{n}\right)=\left\{f:\|f\|_{s,\mu}=\left(\int\limits_{\mathbf{R}^{n}}|x|^{\mu}\,|f(x)|^{s}\,dx\right)^{\frac{1}{s}}\right\},$$

para $0\leq s<\infty$.

De aquí que

$$\mathcal{L}_{x\to q}\left\{|\partial_x|^{\frac{1}{2}} u\,(x,t)\right\} = \mathbb{P}_{p\to q}\left\{K\,(p)\,\widetilde{u}\,(p,t)\right\}, \tag{2.15}$$

para $\operatorname{Re} q > 0$. También, como la función $\widetilde{u_t}\,(p,t)$ es analítica, para $\operatorname{Re} p > 0$, usando la *fórmula integral de Cauchy* se obtiene

$$\mathbb{P}_{p\to q}\left\{\widetilde{u_t}\,(p,t)\right\} = \widetilde{u_t}\,(q,t)\,. \tag{2.16}$$

Entonces, reescribiendo la ecuación (2.13), utilizando las fórmulas (2.15) y (2.16), se tiene

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{p\to q}\left\{\widetilde{u_t}\,(p,t) + K\,(p)\,\widetilde{u}\,(p,t)\right\} &= 0 \\ \widetilde{u}(p,0) &= \widetilde{u_0}\,(p)\,. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Reescribamos (2.17) en la forma

$$\left.\begin{aligned} \widetilde{u_t}\,(p,t) + K(p)\widetilde{u}(p,t) = \Phi(p,t), \\ \widetilde{u}(p,0) = \widetilde{u_0}\,(p)\,, \end{aligned}\right\} \tag{2.18}$$

para alguna función $\Phi(p,t)$ que le pedimos

$$\mathbb{P}_{p\to q}\left\{\Phi(p,t)\right\} = 0, \text{ para todo } p \text{ tal que } \operatorname{Re} p > 0, \tag{2.19}$$

y la condición

$$|\Phi\,(p,t)| \le C\,|p|^{-\frac{3}{4}-\varepsilon}, \text{ para } p \in \mathbf{C} \text{ tal que } |p| > 1,$$

para asegurar la convergencia de integrales que involucran algún término de Φ (véase, por ejemplo, ecuación (2.24) y (2.27), y las estimaciones relacionadas).

Ahora aplicando la transformada de Laplace $\mathcal{L}_{t\to\xi}$ (con respecto a t), al problema (2.18), se obtiene

$$\mathcal{L}_{t\to\xi}\left\{\widetilde{u_t}\,(p,t) + K(p)\widetilde{u}(p,t)\right\} = \mathcal{L}_{t\to\xi}\left\{\Phi(p,t)\right\} = \hat{\Phi}(p,\xi).$$

Y dado que

$$\mathcal{L}_{t\to\xi}\left\{K(p)\widetilde{u}(p,t)\right\} = K(p)\widehat{\widetilde{u}}\,(p,\xi)$$

y

$$\mathcal{L}_{t\to\xi}\left\{\widetilde{u_t}\,(p,t)\right\} = \xi\left[\widehat{\widetilde{u}}\,(p,\xi) - \frac{\widetilde{u}\,(p,0)}{\xi}\right],$$

podemos reescribir la ecuación anterior como

$$\xi\widehat{\widetilde{u}}\,(p,\xi) - \widetilde{u}\,(p,0) + K(p)\widehat{\widetilde{u}}(p,\xi) = \widehat{\Phi}(p,\xi),$$

que, sustituyendo $\widetilde{u}(p,0) = \widetilde{u}_0(p)$, nos conviene escribir mejor como,

$$\widehat{\widetilde{u}}\,(p,\xi) = \frac{1}{K\,(p) + \xi}\left(\widetilde{u}_0\,(p) + \widehat{\Phi}\,(p,\xi)\right), \tag{2.20}$$

para $\operatorname{Re} p > 0$ y $\operatorname{Re} \xi > 0$.

Para obtener una fórmula integral para la solución $u\,(x,t)$ del problema lineal (2.2), es necesario conocer la función $\Phi\,(p,t)$ (2.18); sin embargo, según podemos ver en 2.20), debemos hallar primero $\widehat{\Phi}\,(p,\xi)$, usando propiedades analíticas de $\widehat{\widetilde{u}}$. En este sentido, primero extendemos $\widehat{\widetilde{u}}\,(p,\xi)$, para $\operatorname{Re} p = 0$.

LEMA 2.1 (de valor límite) *Sea $f^-(p)$ Hölder en $\operatorname{Re} p = 0$ y Hölder en el infinito. Entonces para $\operatorname{Re} p = 0$, se tiene*

$$f^-(p) = -\frac{1}{\pi i} \fint_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{q-p} f^-(q)\, dq. \tag{2.21}$$

DEMOSTRACIÓN. *De la definición (2.14) del proyector $\mathbb{P}$, y del hecho de que tenemos definida la función analítica*

$$f(z) = \mathbb{P}_{p\to z}\left\{f^-(p)\right\} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{q-z} f^-(q)\, dq,$$

para $\operatorname{Re} z > 0$. Después junto con la primera fórmula de Sokhotski-Plemelj (1.37) para el proyector de f^- implican que

$$\begin{aligned} f^-(p) &= \lim_{z\to p, \operatorname{Re} z>0, \operatorname{Re} p=0} \left[-\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{q-z} f^-(q)\, dq\right] \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \fint_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{q-p} f^-(q)\, dq + \frac{1}{2} f^-(p). \end{aligned}$$

De esta última igualdad, después de simplificar, se deduce nuestra afirmación (fin de lema 2.1). ■

En seguida estableceremos relaciones útiles para plantear y resolver un problema de Riemann-Hilbert, así como para determinar la desconocida $\widehat{\Phi}$ (y por lo tanto Φ) de la ecuación (2.23). Específicamente, la primera parte del siguiente lema representa un **problema de Riemann-Hilbert** que, en este caso, consiste en hallar una función seccionalmente analítica Ω, y cuya solución se conocerá hasta después de este lema.

LEMA 2.2 *Existen funciones seccionalmente analíticas Ω y Λ que satisfacen:*

1. *Para $\operatorname{Re} p = 0$,*

$$\Omega^+(p,\xi) = \frac{K(p)+\xi}{\xi}\Omega^-(p,\xi) - K(p)\Lambda^+(p,\xi), \tag{2.22}$$

y, además,

2. *Si Ω^- decae más que $\sqrt{|p|}$, se verifica que*

$$\widehat{\Phi}(p,\xi) = \frac{K(p)+\xi}{K(p)}\left(\Omega^+(p,\xi) - \Omega^-(p,\xi)\right). \tag{2.23}$$

DEMOSTRACIÓN. *Definamos las funciones auxiliares (seccionalmente analíticas), dadas por las integrales de tipo Cauchy,*

$$\Theta(z,\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{q-z}\frac{1}{K(q)+\xi}\widehat{\Phi}(q,\xi)\, dq, \tag{2.24}$$

y

$$\Lambda\left(z,\xi\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{1}{q-z}\frac{1}{K\left(q\right)+\xi}\widetilde{u}_{0}\left(q\right)dq. \tag{2.25}$$

De las fórmulas de Sokhotzki-Plemelj aplicadas a la función (2.24) se obtiene

$$\Theta^{+}\left(p,\xi\right)=\frac{1}{2\pi i}\fint_{-i\infty}^{i\infty}\frac{1}{q-p}\frac{\widehat{\Phi}\left(q,\xi\right)}{K\left(q\right)+\xi}dq+\frac{1}{2}\frac{\widehat{\Phi}\left(p,\xi\right)}{K\left(p\right)+\xi}.$$

Análogamente, para Λ^{+} *obtenemos*

$$\Lambda^{+}\left(p,\xi\right)=\frac{1}{2\pi i}\fint_{-i\infty}^{i\infty}\frac{1}{q-p}\frac{\widetilde{u}_{0}\left(q\right)}{K\left(q\right)+\xi}dq+\frac{1}{2}\frac{\widetilde{u}_{0}\left(p\right)+\widehat{\Phi}\left(p,\xi\right)}{K\left(p\right)+\xi}.$$

De aquí que, sumando ambos términos, se tiene

$$\begin{aligned}\Theta^{+}+\Lambda^{+} &= \frac{1}{2\pi i}\fint_{-i\infty}^{i\infty}\frac{1}{q-p}\frac{1}{K\left(q\right)+\xi}\left[\widetilde{u}_{0}\left(q\right)+\widehat{\Phi}\left(q,\xi\right)\right]dq+\\ &\quad +\frac{1}{2}\frac{1}{K\left(p\right)+\xi}\left[\widetilde{u}_{0}\left(p\right)+\widehat{\Phi}\left(p,\xi\right)+\widehat{\Phi}\left(p,\xi\right)\right]\\ &= \frac{1}{2\pi i}\fint_{-i\infty}^{i\infty}\frac{1}{q-p}\widehat{\widetilde{u}}\left(q,\xi\right)dq+\frac{1}{2}\widehat{\widetilde{u}}\left(p,\xi\right),\end{aligned}$$

y, sustituyendo (2.21) en el segundo sumando de la derecha, se obtiene

$$\Theta^{+}+\Lambda^{+}=0. \tag{2.26}$$

Definamos ahora la función auxiliar Ω *(seccionalmente analítica):*

$$\Omega\left(z,\xi\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{1}{q-z}\frac{K\left(q\right)}{K\left(q\right)+\xi}\widehat{\Phi}\left(q,\xi\right)dq. \tag{2.27}$$

Reescribimos Ω *como*

$$\begin{aligned}\Omega\left(z,\xi\right) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{1}{q-z}\frac{K\left(q\right)+\xi-\xi}{K\left(q\right)+\xi}\widehat{\Phi}\left(q,\xi\right)dq\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{1}{q-z}\widehat{\Phi}\left(q,\xi\right)dq-\frac{\xi}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{1}{q-z}\frac{\widehat{\Phi}\left(q,\xi\right)}{K\left(q\right)+\xi}dq\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{1}{q-z}\widehat{\Phi}\left(q,\xi\right)dq-\xi\Theta\left(z,\xi\right),\ \text{según la definción (2.24) de }\Theta,\end{aligned}$$

y, tomando límite en esta ecuación, por la derecha, tenemos

$$\begin{aligned}\Omega^{-}\left(p,\xi\right) &= \lim_{z\to p,Rez>0,Rep=0}\Omega\left(z,\xi\right)\\ &= \lim_{z\to p,Rez>0,Rep=0}\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{1}{q-z}\widehat{\Phi}\left(q,\xi\right)dq-\lim_{z\to p,Rez>0,Rep=0}\xi\Theta\left(z,\xi\right)\end{aligned}$$

pero como se había requerido,

$$0 = \mathbb{P}\left(\widehat{\Phi}(p,\xi)\right) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{q-z}\widehat{\Phi}(q,\xi)\,dq,$$

se tendría

$$\Omega^{-}(p,\xi) = -\xi\Theta^{-}(p,\xi). \tag{2.28}$$

Observemos que, más generalmente, bajo el requisito de que el proyector se anule en $\widehat{\Phi}$*, para* $\operatorname{Re} z > 0$*, se tiene*

$$\Omega(z,\xi) = -\xi\Theta(z,\xi).$$

Finalmente, para mostrar que se verifica (2.23), utilizamos la definición (2.27) de Ω *junto con la segunda fórmula de Sokhotzki-Plemelj para obtener*

$$\Omega^{+}(p,\xi) - \Omega^{-}(p,\xi) = \frac{K(p)}{K(p)+\xi}\widehat{\Phi}(p,\xi). \tag{2.29}$$

Análogamente, de la definición (2.24) de Θ*, y la fórmula de Sokhotzki-Plemelj se tiene*

$$\Theta^{+}(p,\xi) - \Theta^{-}(p,\xi) = \frac{\widehat{\Phi}(p,\xi)}{K(p)+\xi}. \tag{2.30}$$

De aquí que

$$K(p)\left(\Theta^{+}(p,\xi) - \Theta^{-}(p,\xi)\right) = \frac{K(p)}{K(p)+\xi}\widehat{\Phi}(p,\xi). \tag{2.31}$$

Entonces, de (2.29), (2.31), (2.26) y (2.28),obtenemos

$$\begin{aligned}
\Omega^{+}(p,\xi) - \Omega^{-}(p,\xi) &= K(p)\left(\Theta^{+}(p,\xi) - \Theta^{-}(p,\xi)\right) \\
&= K(p)\left(-\Lambda^{+}(p,\xi) + \frac{1}{\xi}\Omega^{-}(p,\xi)\right) \\
&= -K(p)\Lambda^{+}(p,\xi) + \frac{K(p)}{\xi}\Omega^{-}(p,\xi),
\end{aligned}$$

y, despejando Ω^{+} *de esta última igualdad, se ha planteado el problema de Riemann-Hilbert (fin de lema 2.2).* ■

LEMA 2.3 (Solución del Problema RH) *Existe una función seccionalmente analítica* U *tal que la función* Ω *descrita en (2.27), que es solución del problema de Riemann-Hilbert (2.22), tiene la representación seccional*

$$\begin{aligned}
\Omega^{+}(p,\xi) &= \xi\Lambda^{+}(p,\xi) - Y^{+}(p,\xi)U^{+}(p,\xi) \qquad (2.32)\\
\Omega^{-}(p,\xi) &= \xi\Lambda^{-}(p,\xi) - \frac{\xi}{p^{\frac{1}{2}}+\xi}Y^{-}(p,\xi)U^{-}(p,\xi),
\end{aligned}$$

para $\operatorname{Re} p > 0$ *y* $\operatorname{Re}\xi > 0$.

DEMOSTRACIÓN. *La ecuación (2.3) corresponde a la condición de frontera de un problema de tipo Riemann-Hilbert no homogéneo para un semiplano. Para resolverlo debemos modificar su coeficiente, y resolver el problema equivalente:*

$$\Omega^{+}(p,\xi)=\frac{K_1(p)+\xi}{\xi}\frac{K(p)+\xi}{K_1(p)+\xi}\Omega^{-}(p,\xi)-K(p)\Lambda^{+}(p,\xi),$$

donde

$$K_1(p)=p^{\frac{1}{2}},\ p\in\mathbf{C}. \tag{2.33}$$

Entonces, para algún punto fijo $\xi\in\mathbf{C}$, *tal que* $\operatorname{Re}\xi>0$*; y para* $\operatorname{Re}p>0$, *definamos*

$$\widetilde{G}(p,\xi)=\frac{K(p)+\xi}{K_1(p)+\xi}\frac{\omega^{-}(p)}{\omega^{+}(p)}, \tag{2.34}$$

donde

$$\omega^{\pm}(p)=\frac{p^{\frac{1}{4}}}{(p\mp z_o)^{\frac{1}{4}}},\ \textit{para}\ z_0\in\mathbf{R}^{+}. \tag{2.35}$$

Ahora, observando que (2.34) satisface la condición de Hölder, y que el índice de $\tilde{G}$

$$\operatorname{Ind}\left(\widetilde{G}(p,\xi)\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}d\ln\tilde{G}(p,\xi)=0,$$

según el Lema 1.2, existe $X(z,\xi)$ *tal que*

$$X^{\pm}(z,\xi)=e^{\Gamma^{\pm}(z,\xi)},$$

donde

$$\begin{aligned}\Gamma(z,\xi)&=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{1}{q-z}\ln\left\{\widetilde{G}(q,\xi)\right\}dq \\ &=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{1}{q-z}\ln\left\{\frac{K(q)+\xi}{K_1(q)+\xi}\frac{\omega^{-}(q)}{\omega^{+}(q)}\right\}dq\end{aligned} \tag{2.36}$$

de manera tal que

$$\widetilde{G}(p,\xi)=\frac{X^{+}(p,\xi)}{X^{-}(p,\xi)}, \tag{2.37}$$

donde

$$X^{\pm}(p,\xi)=\lim_{z\to p,\pm\operatorname{Re}z<0}X(z,\xi)=\lim_{z\to p,\pm\operatorname{Re}z<0}e^{\Gamma(z,\xi)}=e^{\Gamma^{\pm}(p,\xi)}, \tag{2.38}$$

y, por otra parte, definiendo

$$Y^{\pm}(p,\xi):=X^{\pm}(p,\xi)\,\omega^{\pm}(p)=e^{\Gamma^{\pm}(p,\xi)}\omega^{\pm}(p), \tag{2.39}$$

de las ecuaciones (2.34) y (2.37), se tiene

$$K(p)+\xi=(K_1(p)+\xi)\frac{Y^{+}(p,\xi)}{Y^{-}(p,\xi)}, \tag{2.40}$$

o, equivalentemente,

$$\frac{K(p)+\xi}{\xi} = \frac{Y^{+}(p,\xi)}{Y^{-}(p,\xi)} \left(\frac{K_1(p)+\xi}{\xi} \right). \tag{2.41}$$

Ahora, después de sustituir la expresión (2.41) en (2.22), dividir por Y^{+} *y sumar el término* $-\frac{\xi}{Y^{+}}\Lambda^{+}$ *en ambos miembros de (2.22), obtenemos*

$$\frac{\Omega^{+}-\xi\Lambda^{+}}{Y^{+}} = \frac{K_1(p)+\xi}{\xi}\frac{\Omega^{-}}{Y^{-}} - \frac{K(p)+\xi}{Y^{+}}\Lambda^{+}. \tag{2.42}$$

Además, por las fórmulas (1.37, 1.38) de Sokhotzki-Plemelj, y de la representación (2.25) para Λ*, tenemos*

$$\Lambda^{+}(p,\xi) = \Lambda^{-}(p,\xi) + \frac{\widetilde{u}_0(p)}{K(p)+\xi}.$$

Ahora, al sustituir esta representación de Λ^{+} *en el lado derecho de (2.42), y haciendo uso de (2.40) obtenemos*

$$\frac{\Omega^{+}-\xi\Lambda^{+}}{Y^{+}} = \frac{K_1(p)+\xi}{\xi} \left(\frac{\Omega^{-}-\xi\Lambda^{-}}{Y^{-}} \right) - \frac{\widetilde{u}_0(p)}{Y^{+}(p,\xi)}. \tag{2.43}$$

Por otra parte, ya que $\widetilde{u}_0(p)$ *satisface, para* $\operatorname{Re} p = 0$*, la condición de Hölder, la función* $\frac{\widetilde{u}_0(p)}{Y^{+}(p,\xi)}$ *también satisface esta condición. Por tanto, de acuerdo con el Lema (1.1), esta última se puede representar de manera única en la forma*

$$\frac{\widetilde{u}_0(p)}{Y^{+}(p,\xi)} = U^{+}(p,\xi) - U^{-}(p,\xi), \tag{2.44}$$

donde $U^{\pm}$ *son los valores límite (izq. y der.) de la función analítica* U *definida por la ecuación*

$$U(z,\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{q-z}\frac{\widetilde{u}_0(q)}{Y^{+}(q,\xi)}dq. \tag{2.45}$$

De aquí que la ecuación (2.43) se transforma en

$$\frac{\Omega^{+}-\xi\Lambda^{+}}{Y^{+}} + U^{+} = \frac{K_1(p)+\xi}{\xi} \left(\frac{\Omega^{-}-\xi\Lambda^{-}}{Y^{-}} \right) + U^{-},$$

que es válida para todo p tal que $\operatorname{Re} = 0$*; siendo las funciones* $\frac{\Omega^{+}-\xi\Lambda^{+}}{Y^{+}} + U^{+}$*, y* $\frac{K_1(p)+\xi}{\xi}\left(\frac{\Omega^{-}-\xi\Lambda^{-}}{Y^{-}}\right) + U^{-}$ *analíticas en los semiplanos* $\operatorname{Re} z < 0$*, y* $\operatorname{Re} z > 0$*, respectivamente. De aquí que, si definimos*

$$F(z,\xi) = \begin{cases} \frac{\Omega^{+}-\xi\Lambda^{+}}{Y^{+}} + U^{+}, & \operatorname{Re} z < 0 \\ \frac{K_1(p)+\xi}{\xi}\left(\frac{\Omega^{-}-\xi\Lambda^{-}}{Y^{-}}\right) + U^{-}, & \operatorname{Re} z > 0, \end{cases}$$

podemos demostrar, mediante el teorema de Morera, que F es analítica en todo $\mathbf{C}$*. Además, siendo F acotada, el teorema de Liouville nos permite concluir que F es una constante A. Por lo tanto, la solución del problema de Riemann, definida por la condición de frontera (2.22) se determina por*

$$\begin{aligned} \Omega^{+} &= Y^{+}\left(A-U^{+}\right)+\xi\Lambda^{+} \\ \Omega^{-} &= \frac{\xi}{K_{1}(p)+\xi}Y^{-}\left(A-U^{-}\right)+\xi\Lambda^{-}. \end{aligned} \tag{2.46}$$

Sólo nos resta mostrar que $A=0$. Para tal fin, observemos que, siendo Ω una integral de tipo Cauchy, con densidad ψ, las fórmulas (1.37, 1.38) de Sokhotzki-Plemelj nos permiten escribir

$$\Omega^{\pm}(z,\xi)=\pm\frac{1}{2}\psi(z,\xi)+\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\psi(q,\xi)}{q-z}dq.$$

De aquí que

$$\lim_{z\to\infty,\mp\operatorname{Re}z>0}\Omega^{\pm}(z,\xi)=\pm\frac{1}{2}\psi(\infty,\xi)=0;$$

y, por lo tanto, concluimos que $A=0$. Y, finalmente, la solución (2.46) del problema de Riemann la podemos escribir como se indica en (2.32). Esto demuestra el lema 2.3. ■

Finalmente, exhibiremos la forma explícita de la solución u descrita en (2.12) de nuestra Proposición, y de la función de Green descrita en (2.7). Observemos que, de la ecuación (2.32) para (Ω^{-}), de la relación (2.40), y de las fórmulas (1.37, 1.38) aplicadas a(2.45), podemos escribir

$$\Omega^{-}(p,\xi)=-\frac{\xi}{K(p)+\xi}Y^{+}U^{+}+\frac{\xi}{K(p)+\xi}\widetilde{u}_{0}(p)+\xi\Lambda^{-}.$$

De ésta última ecuación, y de la expresión (2.32) para Ω^{+}, obtenemos

$$\Omega^{+}(p,\xi)-\Omega^{-}(p,\xi)=\left[\frac{\xi}{K(p)+\xi}-1\right]Y^{+}U^{+}+\xi\left[\Lambda^{+}-\Lambda^{-}-\frac{\xi}{K(p)+\xi}\widetilde{u}_{0}(p)\right].$$

Luego, tomando en cuenta (2.23), podemos hallar la función desconocida $\widehat{\Phi}$ de (2.20), mediante

$$\widehat{\Phi}(p,\xi)=-Y^{+}(p,\xi)\,U^{+}(p,\xi). \tag{2.47}$$

Entonces podemos concluir que $\widehat{\Phi}$ es un valor de frontera de una función analítica en el semiplano complejo izquierdo y, por lo tanto, satisface nuestra petición:

$$\mathbb{P}_{p\to z}\left\{\widehat{\Phi}(p,\xi)\right\}=0,$$

para $\operatorname{Re}z>0$. Habiendo determinado la función $\widehat{\Phi}$, mediante la ecuación (2.20) para $\widehat{\widetilde{u}}$, podemos describir complétamente esta última función como

$$\widehat{\widetilde{u}}(p,\xi)=\frac{1}{K(p)+\xi}\left(\widetilde{u}_{0}(p)-Y^{+}(p,\xi)\,U^{+}(p,\xi)\right). \tag{2.48}$$

Más aún, de la ecuación (2.40) despejando $K(p) + \xi$, y de las fórmulas de Sokhotzki (1.37, 1.38) aplicadas a U, definida en (2.45), obtenemos

$$\widehat{\widetilde{u}}(p,\xi) = -\frac{1}{K_1(p)+\xi} Y^-(p,\xi)\, U^-(p,\xi)\,. \tag{2.49}$$

Esta última ecuación implica que $\widehat{\widetilde{u}}$ es el valor límite de una función analítica en el semiplano derecho ($\operatorname{Re} z > 0$). Y aplicando transformadas inversas de Laplace, con respecto a x y t, según la expresión (2.49) obtenemos

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{\xi t} d\xi \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{px} \frac{Y^+(p,\xi)}{K(p)+\xi} U^-(p,\xi)\, dp. \tag{2.50}$$

Finalmente, recordando que

$$U^-(p,\xi) = \lim_{z\to p, \operatorname{Re} z>0} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{q-z} \frac{\widetilde{u}_0(q)}{Y^+(q,\xi)} dq, \tag{2.51}$$

sustituyendo aquí la definición (1.7) de la transformada de Laplace para $\widetilde{u}_0(q)$, e intercambiando las integrales, se obtiene la fórmula (2.7) para la función de Green, lo que nos permite escribir la solución u del problema como

$$u(x,t) = \mathcal{G}(t)\, u_0(x) = \int_0^\infty G(x,y,t)\, u_0(y)\, dy$$

donde la función de Green G está definida por la fórmula (2.7). Esto demuestra nuestro resultado (Proposición 2.1). ■

Capítulo 3

Primeras Estimaciones

Considerando el operador de Green $\mathcal{G}$ definido por

$$\mathcal{G}(t)\,\varphi(x) = \int_0^\infty G(x,y,t)\,\varphi(y)\,dy, \tag{3.1}$$

está claro que las estimaciones que involucren a $\mathcal{G}$ demanden desarrollos similares para la función de Green G.

3.1. Estimaciones para la función de Green

En esta sección demostraremos la siguiente.

PROPOSICIÓN 3.1 *La función de Green, dada por la fórmula*

$$G(x,y,t) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-i\infty}^{i\infty} e^{\xi t}d\xi \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{px}\frac{Y^+(p,\xi)}{|p|^{\frac{1}{2}}+\xi}Z^-(p,\xi,y)\,dp, \tag{3.2}$$

donde la función Y^+se describe por

$$Y^+(p,\xi) = e^{\widetilde{\Gamma^+}(p,\xi)}, \tag{3.3}$$

para

$$\widetilde{\Gamma^+}(p,\xi) = \Gamma^+(p,\xi) + \ln\omega^+(p)\,, \tag{3.4}$$

en la que

$$\Gamma^+(p,\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{1}{q-p}\ln\left\{\left(\frac{|q|^{\frac{1}{2}}+\xi}{q^{\frac{1}{2}}+\xi}\right)\frac{\omega^-(q)}{\omega^+(q)}\right\}dq, \tag{3.5}$$

$$\omega^{\pm}(q) = (q\mp 1)^{\frac{1}{4}}\,; \tag{3.6}$$

y

$$Z^{-}(p,\xi,y)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{e^{-qy}}{q-p}\frac{1}{Y^{+}(q,\xi)}dq, \tag{3.7}$$

satisface la representación asintótica

$$G(x,y,t)=t^{-2}\Lambda\left(xt^{-2}\right)+\mathcal{O}\left(t^{-2(\mu+1)}y^{\mu}\right), \tag{3.8}$$

para $0\leq\mu<1$, *y para la cual* $\Lambda(s)\in\mathbf{L}^{\infty}(\mathbf{R}^{+})$, *se define por*

$$\Lambda(s)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}e^{ps-|p|^{\frac{1}{2}}}dp+\frac{e^{i\frac{\pi}{8}}}{4\pi^{2}}\int_{-i\infty}^{i\infty}e^{ps}\frac{e^{\Gamma_{0}^{+}(p,\xi)}\omega^{+}(p)-e^{-i\frac{\pi}{8}}}{|p|^{\frac{1}{2}}+\xi}dp, \tag{3.9}$$

donde

$$\Gamma_{0}^{+}(p,\xi)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{1}{q-p}\ln\left\{\left(\frac{|q|^{\frac{1}{2}}+\xi}{q^{\frac{1}{2}}+\xi}\right)\frac{\omega^{+}(q)}{\omega^{-}(q)}\right\}dq.$$

DEMOSTRACIÓN. Ya que de la fórmula (1.37) de Sokhotzki-Plemelj se obtiene

$$Z^{-}(p,\xi,y)=Z^{+}(p,\xi,y)-\frac{e^{-py}}{Y^{+}(p,\xi)}, \tag{3.10}$$

podemos reescribir la fución de Green (3.2), como

$$\begin{aligned}G(x,y,t)&=\frac{1}{4\pi^{2}}\int_{-i\infty}^{i\infty}e^{\xi t}d\xi\int_{-i\infty}^{i\infty}e^{px}\frac{Y^{+}(p,\xi)}{|p|^{\frac{1}{2}}+\xi}\Big(\big(Z^{+}(p,\xi,y)-\\&\qquad-\frac{e^{-py}}{Y^{+}(p,\xi)}\big)\Big)dp\\&=G_{1}(x,y,t)+G_{2}(x,y,t),\end{aligned} \tag{3.11}$$

donde las **componentes de Green** quedan definidas por las integrales

$$G_{1}(x,y,t)=-\frac{1}{4\pi^{2}}\int_{-i\infty}^{i\infty}e^{\xi t}d\xi\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{e^{p(x-y)}}{|p|^{\frac{1}{2}}+\xi}dp, \tag{3.12}$$

o, equivalentemente, de acuerdo con el teorema de Fubini y la fórmula integral de Cauchy,

$$G_{1}(x-y,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}e^{p(x-y)-|p|^{\frac{1}{2}}t}dp; \tag{3.13}$$

y, por otra parte,

$$\begin{aligned}G_{2}(x,y,t)&=\frac{1}{4\pi^{2}}\int_{-i\infty}^{i\infty}e^{\xi t}d\xi\int_{-i\infty}^{i\infty}e^{px}\frac{Y^{+}(p,\xi)}{|p|^{\frac{1}{2}}+\xi}Z^{+}(p,\xi,y)\,dp\\&=\frac{1}{4\pi^{2}}\int_{C_{1}}e^{\xi t}d\xi\int_{C_{2}}e^{px}\frac{Y^{+}(p,\xi)}{|p|^{\frac{1}{2}}+\xi}Z^{+}(p,\xi,y)\,dp,\end{aligned} \tag{3.14}$$

para los contornos

$$C_1 = \left\{ \xi \in \mathbf{C} : \xi = |\xi| \, e^{\pm i\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon_1\right)} \right\}$$

y

$$C_2 = \left\{ p \in \mathbf{C} : p = |p| \, e^{\pm i\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon_1\right)} \right\},$$

para $t, x > 0$, donde $\varepsilon_1 > 0$.

LEMA 3.1 *Para el sumando G_1 se verifica la estimación*

$$|G_1 (x-y,t)| \leq Ct^{-2(1-\gamma)} |x-y|^{-\gamma}, \tag{3.15}$$

para $\gamma > 0$.

DEMOSTRACIÓN. *Para estimar G_1, usamos la representación*

$$G_1 (r,t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\pm} e^{pr - |p|^{\frac{1}{2}} t} dp,$$

para $\pm r > 0$, donde

$$C_\pm = \left\{ p \in \left(\infty e^{-i\left(\frac{\pi}{2}\pm\varepsilon\right)}, 0 \right) \cup \left(0, \infty e^{i\left(\frac{\pi}{2}\pm\varepsilon\right)} \right) \right\}, \ \varepsilon > 0.$$

Haciendo el cambio de variable $p = zt^{-2}$, y usando la desigualdad $|e^z| \leq |z|^{-\gamma}$, para $\gamma > 0$, se obtiene la estimación

$$|G_1 (r,t)| \leq Ct^{-2(1-\gamma)} |r|^{-\gamma},$$

o, equivalentemente, para $x, y > 0$,

$$|G_1 (x-y,t)| \leq Ct^{-2(1-\gamma)} |x-y|^{-\gamma}.$$

(esto demuestra el lema 3.1). ■

Continuamos con un segundo lema para estimaciones.

LEMA 3.2 *Para la función Γ, descrita en (2.36), se tiene la siguiente estimación*

$$\Gamma (z,\xi) = i\frac{\pi}{8} \operatorname{sgn} (\operatorname{Re} z) + \mathcal{O}\left(\frac{\xi}{z^{\frac{1}{2}}} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{z_0^{1-\varepsilon}}{z^{1-\varepsilon}} \right).$$

En particular,

$$\Gamma^+ (q,\xi) = -i\frac{\pi}{8} + \mathcal{O}\left(\frac{\xi}{q^{\frac{1}{2}}} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{z_0^{1-\varepsilon}}{q^{1-\varepsilon}} \right),$$

y, de acuerdo con (2.39), se tiene

$$Y^+ (q,\xi) = e^{-i\frac{\pi}{8}} + \mathcal{O}\left(\frac{\xi}{q^{\frac{1}{2}}} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{z_0^{1-\varepsilon}}{q^{1-\varepsilon}} \right)$$

y

$$\frac{1}{Y^{+}(q,\xi)} = e^{i\frac{\pi}{8}} + \mathcal{O}\left(\frac{\xi}{q^{\frac{1}{2}}}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{z_0^{1-\varepsilon}}{q^{1-\varepsilon}}\right).$$

Equivalentemente, para esta última ecuación,

$$\left|\frac{1}{Y^{+}(q,\xi)} - e^{i\frac{\pi}{8}}\right| \leq C\left(\frac{|\xi|}{|q|^{\frac{1}{2}}} + \frac{|z_0|^{1-\varepsilon}}{|q|^{1-\varepsilon}}\right).$$

Considerando, en cada situación, $\varepsilon > 0$ (véase demostración).

DEMOSTRACIÓN. *(1) Primero, integrando por partes la fórmula integral (3.5) de Γ^{+}, para $\operatorname{Re} z > 0$, obtenemos*

$$\begin{aligned}
\Gamma^{+}(p,\xi) &= \int_{-i\infty}^{i\infty} \ln\left\{\left(\frac{|q|^{\frac{1}{2}}+\xi}{q^{\frac{1}{2}}+\xi}\right)\frac{\omega^{-}(q)}{\omega^{+}(q)}\right\} d\ln(q-z) \\
&= \ln\left\{\left(\frac{|q|^{\frac{1}{2}}+\xi}{q^{\frac{1}{2}}+\xi}\right)\frac{\omega^{-}(q)}{\omega^{+}(q)}\right\}\ln(q-p)\Bigg|_{q=-i\infty}^{q=i\infty} \\
&\quad -\int_{-i\infty}^{i\infty} \ln(q-p)\, d\ln\left\{\left(\frac{|q|^{\frac{1}{2}}+\xi}{q^{\frac{1}{2}}+\xi}\right)\frac{\omega^{-}(q)}{\omega^{+}(q)}\right\} \\
&= \lim_{R\to\infty}\left(\ln\left\{\left(\frac{|R|^{\frac{1}{2}}+\xi}{(iR)^{\frac{1}{2}}+\xi}\right)\frac{\omega^{-}(iR)}{\omega^{+}(iR)}\right\}\ln(iR-p)\right. \\
&\quad \left. -\ln\left\{\left(\frac{|R|^{\frac{1}{2}}+\xi}{(-iR)^{\frac{1}{2}}+\xi}\right)\frac{\omega^{-}(-iR)}{\omega^{+}(-iR)}\right\}\ln(-iR-p)\right) \\
&\quad -\int_{-i\infty}^{i\infty} \ln(q-p)\, d\left(\ln\left(\frac{|q|^{\frac{1}{2}}+\xi}{q^{\frac{1}{2}}+\xi}\right) + \ln\left(\frac{\omega^{-}(q)}{\omega^{+}(q)}\right)\right) \\
&= -\int_{-i\infty}^{i\infty} \ln(q-p)\, d\ln\left(\frac{|q|^{\frac{1}{2}}+\xi}{q^{\frac{1}{2}}+\xi}\right) \\
&\quad -\int_{-i\infty}^{i\infty} \ln(q-p)\, d\ln\left(\frac{\omega^{-}(q)}{\omega^{+}(q)}\right), \text{ (términos con } R \text{ son cero)} \\
&= -\int_{-i\infty}^{i\infty} \ln(q-p)\left(\frac{K'(q)}{K(q)+\xi} - \frac{K_1'(q)}{K_1(q)+\xi}\right) dq \\
&\quad -\frac{1}{4}\int_{-i\infty}^{i\infty} \ln(q-p)\left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{q-1}\right) dq, \\
&= -\int_{-i\infty}^{i\infty} \ln(q-p)\frac{K'(q)-K_1'(q)}{(K(q)+\xi)(K_1(q)+\xi)} dq \\
&\quad +\frac{1}{2}\int_{-i\infty}^{i\infty} \ln(q-p)\frac{1}{(q+1)(q-1)} dq,
\end{aligned}$$

donde $K(q) = |q|^{\frac{1}{2}}$, $K_1(q) = q^{\frac{1}{2}}$. *Como* $K'(q) = \frac{1}{2q}K(q)$, $K_1'(q) = \frac{1}{2q}K_1(q)$. *Además,*

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{4}\int_{-i\infty}^{i\infty} \ln(q-p)\frac{2}{(q-1)(q+1)}dq &= \frac{1}{4}\ln(1-z) \\ &= \ln(1-z)^{\frac{1}{4}} = \ln\omega^+(p), \end{aligned}$$

de donde

$$\widetilde{\Gamma^+}(p,\xi) = \Gamma^+(p,\xi) + \ln\omega^+(p),$$

y se tiene

$$\begin{aligned} \widetilde{\Gamma^+}(p,\xi) &= \lim_{z\to p, \operatorname{Re} z<0} \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{q-z}\ln\left\{\left(\frac{|q|^{\frac{1}{2}}+\xi}{q^{\frac{1}{2}}+\xi}\right)\frac{\omega^-(q)}{\omega^+(q)}\right\}dq + \ln\omega^+(p) \\ &= -\lim_{z\to p, \operatorname{Re} z<0} \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \ln(q-z)\left(\frac{K'(q)}{K(q)+\xi} - \frac{K_1'(q)}{K_1(q)+\xi}\right)dq, \end{aligned}$$

que se reduce a

$$\widetilde{\Gamma^+}(p,\xi) = -\xi \lim_{z\to p, \operatorname{Re} z<0} \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \ln(q-z)\frac{K'(q)-K_1'(q)}{(K(q)+\xi)(K_1(q)+\xi)}dq.$$

(2). Análogamente, para Γ^- *se tiene*

$$Y^-(p,\xi) = e^{\widetilde{\Gamma^-}(p,\xi)},$$

donde

$$\begin{aligned} \widetilde{\Gamma^-}(p,\xi) &= -\lim_{z\to p, \operatorname{Re} z>0} \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \ln(q-z)\left(\frac{K'(q)}{K(q)+\xi} - \frac{K_1'(q)}{K_1(q)+\xi}\right)dq \\ &= -\xi \lim_{z\to p, \operatorname{Re} z>0} \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \ln(q-z)\frac{K'(q)-K_1'(q)}{(K(q)+\xi)(K_1(q)+\xi)}dq. \end{aligned}$$

Con el cambio de variable $\frac{q}{|z|} = q_1$, $K(q) = |q|^{\frac{1}{2}}$, $K'(q) = \frac{1}{2q}|q|^{\frac{1}{2}}$, $K_1(q) = q^{\frac{1}{2}}$,

$K_1'(q) = \frac{1}{2q}q^{\frac{1}{2}}$, *se tiene*

$$\widetilde{\Gamma^-}(p,\xi) = -\lim_{z\to p, \operatorname{Re} z>0} \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \ln(q-z)\left(\frac{K'(q)}{K(q)+\xi} - \frac{K_1'(q)}{K_1(q)+\xi}\right)dq$$

$$= -\lim_{z\to p, \operatorname{Re} z>0} \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \ln\left(|z|\left(\frac{q}{|z|} - \frac{z}{|z|}\right)\right)\left(\frac{K'(q)}{K(q)+\xi} - \frac{K_1'(q)}{K_1(q)+\xi}\right)dq$$

$$= -\lim_{z\to p, \operatorname{Re} z>0} \frac{|z|}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \ln\left(|z|\left(q_1 - \frac{z}{|z|}\right)\right)\left(\frac{\frac{1}{2q_1|z|}\left|q_1|z|\right|^{\frac{1}{2}}}{\left|q_1|z|\right|^{\frac{1}{2}}+\xi} - \frac{\frac{1}{2q_1|z|}\left(q_1|z|\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(q_1|z|\right)^{\frac{1}{2}}+\xi}\right)dq_1$$

$$= -\lim_{z\to p, \operatorname{Re} z>0} \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \ln\left(|z|\left(q_1 - \frac{z}{|z|}\right)\right)\left(\frac{|q_1|^{\frac{1}{2}}}{|q_1|^{\frac{1}{2}}+\frac{\xi}{|z|^{\frac{1}{2}}}} - \frac{q_1^{\frac{1}{2}}}{q_1^{\frac{1}{2}}+\frac{\xi}{|z|^{\frac{1}{2}}}}\right)\frac{dq_1}{2q_1}$$

$$= -\lim_{z\to p, \operatorname{Re} z>0} \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \left(\ln|z| + \ln\left(q_1 - \frac{z}{|z|}\right)\right)\left(\frac{K'(q)}{K(q)+\frac{\xi}{|z|^{\frac{1}{2}}}} - \frac{K_1'(q)}{K_1(q)+\frac{\xi}{|z|^{\frac{1}{2}}}}\right)dq$$

$$= -\ln|z|\lim_{z\to p, \operatorname{Re} z>0} \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} d\ln\left(\frac{K(q)+\frac{\xi}{|z|^{\frac{1}{2}}}}{K_1(q)+\frac{\xi}{|z|^{\frac{1}{2}}}}\right)dq$$

$$-\lim_{z\to p, \operatorname{Re} z>0} \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \ln\left(q_1 - \frac{z}{|z|}\right)\left(\frac{K'(q)}{K(q)+\frac{\xi}{|z|^{\frac{1}{2}}}} - \frac{K_1'(q)}{K_1(q)+\frac{\xi}{|z|^{\frac{1}{2}}}}\right)dq$$

$$= -Ind\left(\frac{K(q)+\frac{\xi}{|z|^{\frac{1}{2}}}}{K_1(q)+\frac{\xi}{|z|^{\frac{1}{2}}}}\right)\ln|z|$$

$$-\lim_{z\to p, \operatorname{Re} z>0} \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \ln\left(q_1 - \frac{z}{|z|}\right)\left(\frac{K'(q)}{K(q)+\frac{\xi}{|z|^{\frac{1}{2}}}} - \frac{K_1'(q)}{K_1(q)+\frac{\xi}{|z|^{\frac{1}{2}}}}\right)dq$$

$$= -Ind\left(\frac{K(q)+\frac{\xi}{|z|^{\frac{1}{2}}}}{K_1(q)+\frac{\xi}{|z|^{\frac{1}{2}}}}\right)\ln|z|$$

$$-\frac{\xi}{|z|^{\frac{1}{2}}}\lim_{z\to p, \operatorname{Re} z>0} \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \ln\left(q - \frac{z}{|z|}\right)\frac{K'(q)-K_1'(q)}{\left(K(q)+\frac{\xi}{|z|^{\frac{1}{2}}}\right)\left(K_1(q)+\frac{\xi}{|z|^{\frac{1}{2}}}\right)}dq,$$

(3) Ahora debemos estimar, para $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Re}\xi < 0$. *Denotamos* $\frac{\xi}{|z|^{\frac{1}{2}}} = \zeta$,

$$\Gamma_{10}(\zeta, z) = -\frac{\zeta}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \ln\left(q - \frac{z}{|z|}\right)\frac{K'(q)-K_1'(q)}{(K(q)+\zeta)(K_1(q)+\zeta)}dq.$$

Sea $|\zeta| \leq 1$, $|K(q)+\zeta| \geq C\left(|q|^{\frac{1}{2}}+|\zeta|\right)$; *analogamente, con* $|K_1(q)+\zeta| \geq$

$C\left(|q|^{\frac{1}{2}}+|\zeta|\right)$ *y* $|K'(q)-K_1'(q)|\leq \frac{C}{|q|^{\frac{1}{2}}}$, $\left|\ln\left(q-\frac{z}{|z|}\right)\right|\leq C\ln(1+|q|)\leq C(1+|q|)^{\varepsilon}$

$$\begin{aligned}|\Gamma_{10}(\zeta,z)| &= C|\zeta|\int_{-i\infty}^{i\infty}\left|\ln\left(q-\frac{z}{|z|}\right)\right|\left|\frac{K'(q)-K_1'(q)}{(K(q)+\zeta)(K_1(q)+\zeta)}\right||dq|\\ &\leq C|\zeta|\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{(1+|q|)^{\varepsilon}|dq|}{|q|^{\frac{1}{2}}\left(|q|^{\frac{1}{2}}+|\zeta|\right)^2}\\ &\leq C|\zeta|\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{|\zeta|^2\left(1+|\zeta|^2\left(\frac{|q|}{|\zeta|^2}\right)\right)^{\varepsilon}d\left(\frac{|q|}{|\zeta|^2}\right)}{|\zeta|^3\left(\frac{|q|}{|\zeta|^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\left(\frac{|q|}{|\zeta|^2}\right)^{\frac{1}{2}}+1\right)^2}\\ &\leq C\int_0^{\infty}\frac{\left(1+|\zeta|^2q_1\right)^{\varepsilon}dq_1}{q_1^{\frac{1}{2}}\left(q_1^{\frac{1}{2}}+1\right)^2}\leq C\int_0^{\infty}\frac{(1+q_1)^{\varepsilon}dq_1}{q_1^{\frac{1}{2}}\left(q_1^{\frac{1}{2}}+1\right)^2}\\ &\leq C\int_0^1\frac{dq_1}{q_1^{\frac{1}{2}}}+C\int_1^{\infty}\frac{(1+q_1)^{\varepsilon}dq_1}{q_1^{\frac{3}{2}}}\leq C.\end{aligned}$$

Sea $|\zeta|>1$,

$$\Gamma_{10}(\zeta,z)=-\frac{\zeta}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\ln\left(q-\frac{z}{|z|}\right)\frac{K'(q)-K_1'(q)}{(K(q)+\zeta)(K_1(q)+\zeta)}dq.$$

Cambiar $\frac{q}{|\zeta|^2}=q_1$, $q=q_1|\zeta|^2$

$$\Gamma_{10}(\zeta,z)=-\frac{\zeta}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\ln\left(|\zeta|^2q_1-\frac{z}{|z|}\right)\frac{\frac{1}{|\zeta|}(K'(q_1)-K_1'(q_1))}{(|\zeta|K(q_1)+\zeta)(|\zeta|K_1(q_1)+\zeta)}|\zeta|^2dq_1$$

$$=-\frac{\zeta}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\ln\left(|\zeta|^2q_1-\frac{z}{|z|}\right)\frac{|\zeta|^2(K'(q_1)-K_1'(q_1))}{|\zeta|^3\left(K(q_1)+\frac{\zeta}{|\zeta|}\right)\left(K_1(q_1)+\frac{\zeta}{|\zeta|}\right)}dq_1$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{\zeta}{|\zeta|}\right)\int_{-i\infty}^{i\infty}\ln\left(|\zeta|^2\left(q_1-\frac{z}{|z||\zeta|^2}\right)\right)\frac{(K'(q_1)-K_1'(q_1))}{\left(K(q_1)+\frac{\zeta}{|\zeta|}\right)\left(K_1(q_1)+\frac{\zeta}{|\zeta|}\right)}dq_1$$

$$=-\left(\frac{\zeta}{|\zeta|}\right)\ln|\zeta|^2\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{(K'(q_1)-K_1'(q_1))}{\left(K(q_1)+\frac{\zeta}{|\zeta|}\right)\left(K_1(q_1)+\frac{\zeta}{|\zeta|}\right)}dq_1$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{\zeta}{|\zeta|}\right)\int_{-i\infty}^{i\infty}\ln\left(q_1-\frac{z}{|z||\zeta|^2}\right)\frac{(K'(q_1)-K_1'(q_1))}{\left(K(q_1)+\frac{\zeta}{|\zeta|}\right)\left(K_1(q_1)+\frac{\zeta}{|\zeta|}\right)}dq_1$$

$$=-\left(\frac{\zeta}{|\zeta|}\right)\ln|\zeta|^2\,Ind\left(\frac{K(q_1)+\frac{\zeta}{|\zeta|}}{K_1(q_1)+\frac{\zeta}{|\zeta|}}\right)$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{\zeta}{|\zeta|}\right)\int_{-i\infty}^{i\infty}\ln\left(q_1-\frac{z}{|z||\zeta|^2}\right)\frac{(K'(q_1)-K_1'(q_1))}{\left(K(q_1)+\frac{\zeta}{|\zeta|}\right)\left(K_1(q_1)+\frac{\zeta}{|\zeta|}\right)}dq_1.$$

Estimamos

$$\Gamma_{11}(\zeta,z) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{\zeta}{|\zeta|}\right)\int_{-i\infty}^{i\infty}\ln\left(q_1-\frac{z}{|z|\,|\zeta|^2}\right)\frac{(K'(q_1)-K_1'(q_1))}{\left(K(q_1)+\frac{\zeta}{|\zeta|}\right)\left(K_1(q_1)+\frac{\zeta}{|\zeta|}\right)}dq_1.$$

$\left|\ln\left(q_1-\frac{z}{|z||\zeta|^2}\right)\right| \le C\left(|q_1|+\frac{1}{|q_1|}\right)^{\varepsilon}$ *porque* $\left|\frac{z}{|z||\zeta|^2}\right|\le 1$

$$\begin{aligned}
|\Gamma_{11}(\zeta,z)| &= C\int_{-i\infty}^{i\infty}\left|\ln\left(q_1-\frac{z}{|z|\,|\zeta|^2}\right)\right|\left|\frac{(K'(q_1)-K_1'(q_1))}{\left(K(q_1)+\frac{\zeta}{|\zeta|}\right)\left(K_1(q_1)+\frac{\zeta}{|\zeta|}\right)}\right||dq_1| \\
&= C\int_{-i\infty}^{i\infty}\left(|q_1|+\frac{1}{|q_1|}\right)^{\varepsilon}\left|\frac{(K'(q_1)-K_1'(q_1))}{\left(K(q_1)+\frac{\zeta}{|\zeta|}\right)\left(K_1(q_1)+\frac{\zeta}{|\zeta|}\right)}\right||dq_1| \\
&\le C\int_0^{\infty}\frac{\left(|q_1|+\frac{1}{|q_1|}\right)^{\varepsilon}dq_1}{|q_1|^{\frac12}\left(q_1^{\frac12}+1\right)^2}\le C\int_0^1\frac{dq_1}{|q_1|^{\frac12+\varepsilon}}+C\int_1^{\infty}\frac{|q_1|^{\varepsilon}dq_1}{|q_1|^{\frac32}}\le C.
\end{aligned}$$

Obtenemos para $\frac{|\xi|}{|z|^{\frac12}}\le 1$, $\operatorname{Re} z\neq 0$, $\operatorname{Re}\xi<0$

$$\widetilde{\Gamma} = -Ind\left(\frac{K(q)+\frac{\xi}{|z|^{\frac12}}}{K_1(q)+\frac{\xi}{|z|^{\frac12}}}\right)\ln|z|+\mathcal{O}(1) = -\left(-\frac14\right)\ln|z|+\mathcal{O}(1)=\ln|z|^{\frac14}+\mathcal{O}(1),$$

para $\frac{|\xi|}{|z|^{\frac12}}\ge 1$, $\operatorname{Re} z\neq 0$, $\operatorname{Re}\xi<0$, $\zeta=\frac{\xi}{|z|^{\frac12}}$, $\zeta\,|z|^{\frac12}=\xi$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Gamma} &= -Ind\left(\frac{K(q)+\frac{\xi}{|z|^{\frac12}}}{K_1(q)+\frac{\xi}{|z|^{\frac12}}}\right)\ln|z| - Ind\left(\frac{K(q_1)+\frac{\zeta}{|\zeta|}}{K_1(q_1)+\frac{\zeta}{|\zeta|}}\right)\left(\frac{\zeta}{|\zeta|}\right)\ln|\zeta|^2+\mathcal{O}(1) \\
&= \ln|z|^{\frac14}+\frac14\left(\frac{\zeta}{|\zeta|}\right)\ln|\zeta|^2+\mathcal{O}(1) \\
&= \ln|z|^{\frac14}+\left(\frac{\zeta}{|\zeta|}\right)\ln|\zeta|^{\frac12}+\mathcal{O}(1) \\
&= \ln\left(|z|^{\frac14}\,|\zeta|^{\frac12\left(\frac{\zeta}{|\zeta|}\right)}\right)+\mathcal{O}(1) \\
&= \ln\left(\left||z|^{\frac12}\,\zeta\right|^{\frac12\frac{\xi}{|\xi|}}\right)+\mathcal{O}(1) \\
&= \ln\left(|\xi|^{\frac{\xi}{2|\xi|}}\right)+\mathcal{O}(1).
\end{aligned}$$

Además, se tiene

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Gamma}(z,\xi) &= -\frac{\xi}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\ln(q-z)\frac{K'(q)-K_1'(q)}{(K(q)+\xi)(K_1(q)+\xi)}dq \\
&= -\frac{\xi}{2\pi i}\ln(-z)\int_{-i\infty}^{i\infty}d\ln\left(\frac{|q|^{\frac{1}{2}}+\xi}{q^{\frac{1}{2}}+\xi}\right) \\
&\quad -\frac{\xi}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\ln\left(\frac{q-z}{-z}\right)\frac{K'(q)-K_1'(q)}{(K(q)+\xi)(K_1(q)+\xi)}dq \\
&= -\frac{\xi}{2\pi i}\ln(-z)\, Ind\left(\frac{|q|^{\frac{1}{2}}+\xi}{q^{\frac{1}{2}}+\xi}\right) \\
&\quad -\frac{\xi}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\ln\left(\frac{q-z}{-z}\right)\frac{K'(q)-K_1'(q)}{(K(q)+\xi)(K_1(q)+\xi)}dq \\
&= \frac{\xi}{2\pi i}\frac{1}{4}\ln(-z)-\frac{\xi}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\ln\left(1-\frac{q}{z}\right)\frac{K'(q)-K_1'(q)}{(K(q)+\xi)(K_1(q)+\xi)}dq \\
&= -\frac{\xi}{2\pi i}\ln(-z)^{-\frac{1}{4}}-\frac{\xi}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\ln\left(1-\frac{q}{z}\right)\frac{K'(q)-K_1'(q)}{(K(q)+\xi)(K_1(q)+\xi)}dq.
\end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Gamma}(z,\xi) &= \int_{-i\infty}^{i\infty}\ln(q-z)\frac{K'(q)-K_1'(q)}{(K(q)+\xi)(K_1(q)+\xi)}dq \\
&= \ln(-z)\int_{-i\infty}^{i\infty}d\ln\left(\frac{|q|^{\frac{1}{2}}+\xi}{q^{\frac{1}{2}}+\xi}\right)+\int_{-i\infty}^{i\infty}\ln\left(\frac{q-z}{-z}\right)\frac{K'(q)-K_1'(q)}{(K(q)+\xi)(K_1(q)+\xi)}dq \\
&= \ln(-z)\, Ind\left(\frac{|q|^{\frac{1}{2}}+\xi}{q^{\frac{1}{2}}+\xi}\right)+\int_{-i\infty}^{i\infty}\ln\left(\frac{q-z}{-z}\right)\frac{K'(q)-K_1'(q)}{(K(q)+\xi)(K_1(q)+\xi)}dq \\
&= -\frac{1}{4}\ln(-z)+\int_{-i\infty}^{i\infty}\ln\left(1-\frac{q}{z}\right)\frac{K'(q)-K_1'(q)}{(K(q)+\xi)(K_1(q)+\xi)}dq \\
&= \ln(-z)^{-\frac{1}{4}}+\int_{-i\infty}^{i\infty}\ln\left(1-\frac{q}{z}\right)\frac{K'(q)-K_1'(q)}{(K(q)+\xi)(K_1(q)+\xi)}dq,
\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
\left|\widetilde{\Gamma^{+}}(z,\xi)\right| &\leq C\left|\int_{-i}^{i}\ln(q-z)\left(\frac{K'(q)}{K(q)+\xi}-\frac{K_1'(q)}{K_1(q)+\xi}\right)dq\right| \\
&\quad +C\left|\xi\int_{\operatorname{Re} q=0,|q|\geq 1}\ln(q-z)\left(\frac{K'(q)-K_1'(q)}{(K(q)+\xi)(K_1(q)+\xi)}\right)dq\right| \\
&\leq C\left|\int_{-i}^{i}|q-z|^{\varepsilon}\frac{1}{q}dq\right|+C\int_{|q|\geq 1}|q-z|^{\varepsilon}\frac{dq}{|q|^{\frac{3}{2}}},
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\left|\widetilde{\Gamma^{+}}(p,\xi)-\ln(-p)^{-\frac{1}{4}}\right| &\leq C \\
\left|\widetilde{\Gamma^{+}}(p,\xi)-\ln(-p)^{\frac{1}{4}}\right| &\leq C.
\end{aligned}$$

Esto demuestra el lema 3.2. ■

LEMA 3.3 *Con base en la definición (3.23) de la función Z, se tiene que*

1. *La función Z admite la representación*

$$Z(z,\xi,y)=e^{i\frac{\pi}{8}}e^{-zy}+Z_0(z,\xi,y),$$

para $\operatorname{Re} z>0$, *donde*

$$Z_0(z,\xi,y)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{1}{q-z}\left(\frac{1}{Y^{+}(q,\xi)}-e^{i\frac{\pi}{8}}\right)\left(e^{-qy}-e^{-zy}\right)dq. \quad (3.16)$$

2. *En particular, la función Z^{-} se puede escribir como*

$$Z^{-}(p,\xi,y)=e^{i\frac{\pi}{8}}e^{-py}+Z_0^{-}(p,\xi,y),$$

donde

$$Z_0^{-}(p,\xi,y)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{1}{q-p}\left(\frac{1}{Y^{+}(q,\xi)}-e^{i\frac{\pi}{8}}\right)\left(e^{-qy}-e^{-py}\right)dq,$$

para la cual se tiene la estimación

$$\left|Z_0^{-}(p,\xi,y)\right|\leq Cy^{\mu}\left(\frac{|\xi|}{|p|^{\frac{1}{2}-\mu}}+\frac{|z_0|^{1-\varepsilon}}{|p|^{1-\varepsilon-\mu}}\right),$$

siempre que $\mu<\min\left\{\frac{1}{2},1-\varepsilon\right\}$.

3. *De donde*

$$\left|Z^{-}(p,\xi,y)\right|\leq\left|e^{-py}\right|+Cy^{\mu}\left(\frac{|\xi|}{|p|^{\frac{1}{2}-\mu}}+\frac{|z_0|^{1-\varepsilon}}{|p|^{1-\varepsilon-\mu}}\right)$$

DEMOSTRACIÓN. *Empecemos por considerar la función Z, definida por*

$$\begin{aligned}
Z^{-}(p,\xi,y) &= \lim_{z\to p,\operatorname{Re} z>0}\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{e^{-qy}}{q-z}\frac{1}{Y^{+}(q,\xi)}dq \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{e^{-qy}}{q-p}\frac{1}{Y^{+}(q,\xi)}dq \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{e^{-qy}}{q-p}\frac{1}{Y^{-}(q,\xi)}\frac{K_1(q)+\xi}{K(q)+\xi}dq \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_3}\frac{e^{-qy}}{q-p}\frac{1}{Y^{-}(q,\xi)}\frac{K_1(q)+\xi}{K(q)+\xi}dq,
\end{aligned}$$

donde $C_3 = \left\{ q \in C; q = |q| e^{\pm i\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon_1\right)} \right\}$. $|q-p| \geq C|q| + C|p|$, $\left| \frac{q^{\frac{1}{2}}+\xi}{|q|^{\frac{1}{2}}+\xi} \right| \leq C$, $|e^{-qy}| \leq \frac{C}{(1+yq_1)}$

$$
\begin{aligned}
\left|Z^{+}(p,\xi,y)\right| &\leq C \int_{C_3} \frac{|e^{-qy}|}{|q-p|} \frac{1}{|Y^{-}(q,\xi)|} \left| \frac{K_1(q)+\xi}{K(q)+\xi} \right| |dq| \\
&\leq C \int_{C_3} \frac{|e^{-qy}|}{|q-p|} \left(|q|^{-\frac{1}{4}} + |\xi|^{\gamma} \right) \left| \frac{q^{\frac{1}{2}}+\xi}{|q|^{\frac{1}{2}}+\xi} \right| |dq| \\
&\leq C \int_{0}^{\infty} \frac{1}{(q_1+|p|)(1+yq_1)} \left(q_1^{-\frac{1}{4}} + |\xi|^{\gamma} \right) dq_1 \leq C |\xi|^{\gamma} |p|^{-\alpha} y^{-\beta}.
\end{aligned}
$$

Esto demuestra el lema 3.3. ■

LEMA 3.4 *Para* $\operatorname{Re} z \neq 0$, $\operatorname{Re} \xi < 0$ *obtenemos*

1. *Se puede estimar*

$$|Y| \leq C + \text{máx}\left(|z|^{\frac{1}{4}}, |\xi|^{-\frac{\varepsilon_2}{2}} \right) \leq C + |z|^{\frac{1}{4}} + |\xi|^{-\frac{\varepsilon_2}{2}}, \ \xi \in C_1 \tag{3.17}$$

y

$$|Y| \geq \frac{C}{\text{máx}\left(|z|^{-\frac{1}{4}}, |\xi|^{\frac{\varepsilon_2}{2}} \right)} \geq \frac{C}{|z|^{-\frac{1}{4}} + |\xi|^{\frac{\varepsilon_2}{2}}}, \ \xi \in C_1. \tag{3.18}$$

2. *Se tiene*

$$\left|Y^{+}(p,\xi)\right| \leq C_2 (1+|p|)^{-\frac{1}{4}} \tag{3.19}$$

y

$$\left|Y^{-}(p,\xi)\right| \geq C_3 (1+|p|)^{\frac{1}{4}}. \tag{3.20}$$

3. *Para* Z^{+} *se tiene*

$$\left|Z^{+}(p,\xi,y)\right| \leq C |\xi|^{\gamma} |p|^{-\alpha} y^{-\beta}. \tag{3.21}$$

4. *Se tienen las estimaciones del segundo término (3.14) de la función de Green:*

$$
\begin{aligned}
|G_2(x,y,t)| \leq Cy^{-\mu} \int_{C_1} |d\xi| e^{-C|\xi|t} \int_{C_2} e^{-C|p|x} \frac{p^{-\mu-\frac{1}{4}} \left(p^{\frac{1}{4}} + |\xi|^{-\gamma} \right) |dp|}{\left| |p|^{\frac{1}{2}} + \xi \right|} \\
+ Cy^{-\mu_2} \int_{C_1} |d\xi| e^{-C|\xi|t} \int_{C_2} e^{-C|p|x} \frac{p^{-\mu_2} \left(|\xi|^{\gamma} p^{\frac{1}{4}} + 1 \right) |dp|}{\left| |p|^{\frac{1}{2}} + \xi \right|},
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

para $\mu < \frac{3}{4}$ *y* $\mu_2 < 1$.

DEMOSTRACIÓN. *(1) De la definición para Y se obtiene*

$$
\begin{aligned}
|Y| &= \left|e^{\widetilde{\Gamma}}\right| \\
&= \begin{cases} |z|^{\frac{1}{4}} + \mathcal{O}(1), & para\ |\xi| \leq |z|^{\frac{1}{2}} \\ \left|e^{\frac{\xi}{2|\xi|}\ln|\xi|}\right| + \mathcal{O}(1), & para\ |\xi| \geq |z|^{\frac{1}{2}} \end{cases} \\
&= \begin{cases} |z|^{\frac{1}{4}} + \mathcal{O}(1), & para\ |\xi| \leq |z|^{\frac{1}{2}} \\ e^{\mathrm{Re}\,\frac{\xi}{2|\xi|}\ln|\xi|} + \mathcal{O}(1), & para\ |\xi| \geq |z|^{\frac{1}{2}} \end{cases},
\end{aligned}
$$

donde $e^{\mathrm{Re}\,\frac{\xi}{2|\xi|}\ln|\xi|} = e^{\frac{1}{2}(\cos\arg\xi)\ln|\xi|} = e^{-\frac{\varepsilon_2}{2}\ln|\xi|} = |\xi|^{-\frac{\varepsilon_2}{2}}$ *en contorno $\xi \in C_1$, o bien,*

$$
|Y| = \left|e^{\widetilde{\Gamma}}\right| = \begin{cases} |z|^{\frac{1}{4}} + \mathcal{O}(1), & para\ |\xi| \leq |z|^{\frac{1}{2}} \\ |\xi|^{-\frac{\varepsilon_2}{2}} + \mathcal{O}(1), & para\ |\xi| \geq |z|^{\frac{1}{2}}, \xi \in C_1 \end{cases}.
$$

(2) Empecemos por considerar la función Z, definida para $\mathrm{Re}\, z \neq 0$, como

$$
Z(z,\xi,y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{q-z}\frac{1}{Y^{+}(q,\xi)} e^{-qy} dq. \tag{3.23}
$$

De donde obtenemos

$$
\begin{aligned}
Z^{-}(p,\xi,y) &= \lim_{z\to p,\mathrm{Re}\,z>0} \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{-qy}}{q-z}\frac{1}{Y^{+}(q,\xi)} dq \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{-qy}}{q-p}\frac{1}{Y^{+}(q,\xi)} dq \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{-qy}}{q-p}\frac{1}{Y^{-}(q,\xi)}\frac{K_1(q)+\xi}{K(q)+\xi} dq \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_3} \frac{e^{-qy}}{q-p}\frac{1}{Y^{-}(q,\xi)}\frac{K_1(q)+\xi}{K(q)+\xi} dq,
\end{aligned}
$$

donde $C_3 = \left\{q \in \mathbf{C} : q = |q|\, e^{\pm i\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon_1\right)}\right\}$. *(3) Se tiene*

$$
\begin{aligned}
\left|Z^{+}(p,\xi,y)\right| &\leq C\int_{C_3} \frac{\left|e^{-qy}\right|}{|q-p|}\frac{1}{|Y^{-}(q,\xi)|}\left|\frac{K_1(q)+\xi}{K(q)+\xi}\right| |dq| \\
&\leq C\int_{C_3} \frac{\left|e^{-qy}\right|}{|q-p|}\left(|q|^{-\frac{1}{4}} + |\xi|^{\gamma}\right)\left|\frac{q^{\frac{1}{2}}+\xi}{|q|^{\frac{1}{2}}+\xi}\right| |dq| \\
&\leq C\int_{0}^{\infty} \frac{1}{(q_1+|p|)(1+yq_1)}\left(q_1^{-\frac{1}{4}} + |\xi|^{\gamma}\right) dq_1 \\
&\leq C\,|\xi|^{\gamma}\,|p|^{-\alpha}\, y^{-\beta},
\end{aligned}
$$

donde $C_3 = \left\{q \in \mathbf{C} : q = |q|\, e^{\pm i\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon_1\right)}\right\}$, $|q-p| \geq C\,|q| + C\,|p|$, $\left|\frac{q^{\frac{1}{2}}+\xi}{|q|^{\frac{1}{2}}+\xi}\right| \leq C$ *y*

$|e^{-qy}| \leq \frac{C}{(1+yq_1)}$ *(4) Por otra parte, de la fórmula para* G_2*, se obtiene*

$$|G_2(x,y,t)| \leq C\int_{C_1} |d\xi|\, e^{-C|\xi|t} \int_{C_2} e^{-C|p|x} \frac{|Y^+(p,\xi)|}{\left||p|^{\frac{1}{2}}+\xi\right|} \left|Z^+(p,\xi,y)\right| |dp|$$

$$\leq C\int_{C_1} |d\xi|\, e^{-C|\xi|t} \int_{C_2} e^{-C|p|x} \frac{\left(p^{\frac{1}{4}}\,|\xi|^{-\gamma}\right)}{\left||p|^{\frac{1}{2}}+\xi\right|} \int_0^\infty \frac{1}{(q_1+|p|)(1+yq_1)^{\mu}} \left(q_1^{-\frac{1}{4}}\,|\xi|^{\gamma}\right) dq_1\, |dp|$$

$$\leq Cy^{-\mu}\int_{C_1} |d\xi|\, e^{-C|\xi|t} \int_{C_2} e^{-C|p|x} \frac{p^{\frac{1}{4}-\mu-\frac{1}{4}}}{\left||p|^{\frac{1}{2}}+\xi\right|} \left(\int_0^\infty \frac{1}{(q_1+1)\,q_1^{\mu}} q_1^{-\frac{1}{4}} dq_1\right) |dp|\,,\ \left(\mu+\frac{1}{4}<1\right)$$

$$+Cy^{-\mu_2}\int_{C_1} |d\xi|\,|\xi|^{\gamma}\, e^{-C|\xi|t} \int_{C_2} e^{-C|p|x} \frac{p^{\frac{1}{4}-\mu_2}}{\left||p|^{\frac{1}{2}}+\xi\right|} \left(\int_0^\infty \frac{1}{(q_1+1)\,q_1^{\mu_2}} dq_1\right) |dp|\,, (\mu_2<1)$$

$$+Cy^{-\mu}\int_{C_1} |d\xi|\,|\xi|^{-\gamma}\, e^{-C|\xi|t} \int_{C_2} e^{-C|p|x} \frac{p^{-\mu-\frac{1}{4}}}{\left||p|^{\frac{1}{2}}+\xi\right|} \left(\int_0^\infty \frac{1}{(q_1+1)\,(q_1)^{\mu}} q_1^{-\frac{1}{4}} dq_1\right) |dp|\,, \left(\mu+\frac{1}{4}<1\right)$$

$$+Cy^{-\mu_2}\int_{C_1} |d\xi|\, e^{-C|\xi|t} \int_{C_2} e^{-C|p|x} \frac{p^{-\mu_2}}{\left||p|^{\frac{1}{2}}+\xi\right|} \left(\int_0^\infty \frac{1}{(q_1+1)\,q_1^{\mu_2}} dq_1\right) |dp|\,, (\mu_2<1)$$

$$\leq Cy^{-\mu}\int_{C_1} |d\xi|\, e^{-C|\xi|t} \int_{C_2} e^{-C|p|x} \frac{p^{-\mu-\frac{1}{4}}\left(p^{\frac{1}{4}}+|\xi|^{-\gamma}\right)|dp|}{\left||p|^{\frac{1}{2}}+\xi\right|}, \left(\mu<\frac{3}{4}\right)$$

$$+Cy^{-\mu_2}\int_{C_1} |d\xi|\, e^{-C|\xi|t} \int_{C_2} e^{-C|p|x} \frac{p^{-\mu_2}\left(|\xi|^{\gamma}\,p^{\frac{1}{4}}+1\right)|dp|}{\left||p|^{\frac{1}{2}}+\xi\right|}, (\mu_2<1)\,,$$

donde, recordemos, los contornos C_1 *y* C_2 *están definidos por* $C_1 = \left\{\xi \in \mathbf{C} : \xi = |\xi|\, e^{\pm i\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon_1\right)}\right\}$ *y* $C_2 = \left\{p \in \mathbf{C} : p = |p|\, e^{\pm i\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon_1\right)}\right\}$*, para* $t, x > 0$*, donde* $\varepsilon_1 > 0$*. Esto demuestra el lema 3.4.* ■

Finalmente, de los lemas se demuestra la afirmación (Fin de la Proposición 3.1). ■

3.2. Estimaciones para el Operador de Green

En la presente sección se mostrarán estimaciones para tiempos pequeños en espacios $\mathbf{L}^{s,\mu}(\mathbf{R}^+)$, con $1 \leq s \leq \infty$ y $\mu \geq 0$, del operador de Green $\mathcal{G}$ definido en (3.1) como

$$\mathcal{G}(t)\,\varphi(x) = \int_0^\infty G(x,y,t)\,\varphi(y)\,dy.$$

LEMA 3.5 *Estimaciones, para* $t < 1$*, en los espacios* $\mathbf{L}^\infty(\mathbf{R}^+)$ *y* $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^+)$

1. En $\mathbf{L}^{\infty}(\mathbf{R}^{+})$ *se verifica que*

$$\|\mathcal{G}(t)\varphi\|_{\mathbf{L}^{\infty}} \leq Ct^{-\frac{1}{2}-\gamma}\left(\|\varphi\|_{\mathbf{L}^{1}} + \|\varphi\|_{\mathbf{L}^{\infty}}\right), \tag{3.24}$$

donde $\frac{1}{2} < \gamma < 1$. *Además,*

2. La estimación en $\mathbf{L}^{2}$

$$\|\mathcal{G}(t)\varphi\|_{\mathbf{L}^{2}} \leq C\left(\|\varphi\|_{\mathbf{L}^{2}} + \|\varphi\|_{\mathbf{L}^{\infty}}\right). \tag{3.25}$$

DEMOSTRACIÓN. La estimación del operador de Green $\mathcal{G}$ se obtiene de estimaciones para $\mathcal{G}_1(t)\varphi(x)$ y $\mathcal{G}_2(t)\varphi(x)$ definidos como

$$\mathcal{G}_i(t)\varphi(x) = \int_0^{\infty} G_i(x,y,t)\varphi(y)\,dy,\ i = 1,2,$$

de acuerdo con (3.12) y (3.14), respectivamente. De la estimación (3.22) para el segundo término de la función de Green, se tiene

$$\|\mathcal{G}_2(t)\varphi(x)\|_{L_x^{\infty}} \leq C\left\|y^{-\mu}\int_{C_1}|d\xi|\,e^{-C|\xi|t}\int_{C_2}e^{-C|p|x}\frac{p^{-\mu-\frac{1}{4}}\left(p^{\frac{1}{4}}+|\xi|^{-\gamma}\right)|dp|}{\left||p|^{\frac{1}{2}}+\xi\right|}\right\|_{L_x^{\infty}}$$
$$+\left\|y^{-\mu_2}\int_{C_1}|d\xi|\,e^{-C|\xi|t}\int_{C_2}e^{-C|p|x}\frac{p^{-\mu_2}\left(|\xi|^{\gamma}p^{\frac{1}{4}}+1\right)|dp|}{\left||p|^{\frac{1}{2}}+\xi\right|}\right\|_{L_x^{\infty}}$$

considerando $\mu < \frac{3}{4}$ y $\mu_2 < 1$, de lo que se obtiene

$$\|\mathcal{G}_2(t)\varphi(x)\|_{L_x^{\infty}} \leq Cy^{-\mu}\int_{C_1}|d\xi|\,e^{-C|\xi|t}\int_{C_2}\frac{p^{-\mu-\frac{1}{4}}\left(p^{\frac{1}{4}}+|\xi|^{-\gamma}\right)|dp|}{\left||p|^{\frac{1}{2}}+\xi\right|},$$
$$+y^{-\mu_2}\int_{C_1}|d\xi|\,e^{-C|\xi|t}\int_{C_2}\frac{p^{-\mu_2}\left(|\xi|^{\gamma}p^{\frac{1}{4}}+1\right)|dp|}{\left||p|^{\frac{1}{2}}+\xi\right|},$$

y, mediante los cambios de variable $p = p_1 t^{-2}, \xi t = \xi_1$, se deduce

$$\|\|_{L_x^{\infty}} \leq Cy^{-\mu}t^{-1+1+2\mu+\frac{1}{2}}\left(t^{-\frac{1}{2}}+t^{2\gamma}\right)t^{-2}\int_{C_1}|d\xi_1|\,e^{-C|\xi_1|}\int_{C_2}\frac{p^{-\mu-\frac{1}{4}}\left(p^{\frac{1}{4}}+|\xi|^{-\gamma}\right)|dp|}{\left||p|^{\frac{1}{2}}+\xi_1\right|}$$
$$+y^{-\mu_2}t^{-1+1+2\mu_2}\left(t^{-2\gamma}t^{-\frac{1}{2}}+1\right)t^{-2}\int_{C_1}|d\xi|\,e^{-C|\xi|t}\int_{C_2}\frac{p^{-\mu_2}\left(|\xi|^{\gamma}p^{\frac{1}{4}}+1\right)|dp|}{\left||p|^{\frac{1}{2}}+\xi\right|},$$

que resulta en

$$\|\mathcal{G}_2(t)\varphi(x)\|_{L_x^{\infty}} \leq Cy^{-1+\gamma}t^{-\frac{1}{2}-\gamma}.$$

Además, por otra parte,

$$\|\mathcal{G}_2(t)\varphi\|_{L_x^2} \leq C\left\|y^{-\mu}\int_{C_1}|d\xi|\,e^{-C|\xi|t}\int_{C_2}e^{-C|p|x}\frac{p^{-\mu-\frac{1}{4}}\left(p^{\frac{1}{4}}+|\xi|^{-\gamma}\right)|dp|}{\left||p|^{\frac{1}{2}}+\xi\right|}\right\|_{L_x^2}$$
$$+\left\|y^{-\mu_2}\int_{C_1}|d\xi|\,e^{-C|\xi|t}\int_{C_2}e^{-C|p|x}\frac{p^{-\mu_2}\left(|\xi|^{\gamma}p^{\frac{1}{4}}+1\right)|dp|}{\left||p|^{\frac{1}{2}}+\xi\right|}\right\|_{L_x^2},$$

para $\mu < \frac{3}{4}$ y $\mu_2 < 1$; de lo que se obtiene

$$\|\mathcal{G}_2(t)\varphi(x)\|_{L_x^2} \leq Cy^{-\mu}\int_{C_1}|d\xi|\,e^{-C|\xi|t}\int_{C_2}\frac{p^{-\mu-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}\left(p^{\frac{1}{4}}+|\xi|^{-\gamma}\right)|dp|}{\left||p|^{\frac{1}{2}}+\xi\right|}$$
$$+y^{-\mu_2}\int_{C_1}|d\xi|\,e^{-C|\xi|t}\int_{C_2}\frac{p^{-\mu_2-\frac{1}{2}}\left(|\xi|^{\gamma}p^{\frac{1}{4}}+1\right)|dp|}{\left||p|^{\frac{1}{2}}+\xi\right|}.$$

Y, considerando los cambios de variable $p = p_1t^{-2}, \xi t = \xi_1$,

$$\|\mathcal{G}_2(t)\varphi(x)\|_{L_x^2} \leq Cy^{-\mu}t^{-1+1+2\mu+\frac{1}{2}+1}\left(t^{-\frac{1}{2}}+t^{2\gamma}\right)t^{-2}\int_{C_1}|d\xi_1|\,e^{-C|\xi_1|}\int_{C_2}\frac{p^{-\mu-\frac{1}{4}}\left(p^{\frac{1}{4}}+|\xi|^{-\gamma}\right)|dp|}{\left||p|^{\frac{1}{2}}+\xi_1\right|}$$
$$+y^{-\mu_2}t^{-1+1+2\mu_2+1}\left(t^{-2\gamma}t^{-\frac{1}{2}}+1\right)t^{-2}\int_{C_1}|d\xi|\,e^{-C|\xi|t}\int_{C_2}\frac{p^{-\mu_2}\left(|\xi|^{\gamma}p^{\frac{1}{4}}+1\right)|dp|}{\left||p|^{\frac{1}{2}}+\xi\right|},$$

lo que resulta en

$$\|\mathcal{G}_2(t)\varphi(x)\|_{L_x^2} \leq Cy^{-1+\gamma}.$$

Entonces se tiene

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{G}_2\phi(x)\|_{L_x^\infty} &\leq \left\|\int_0^\infty G_2(x,y,t)\,\phi(y)\,dy\right\|_{L_x^\infty} \\
&\leq Ct^{-\frac{1}{2}-\gamma}\int_0^\infty \phi(y)\,y^{-1+\gamma}dy \\
&\leq Ct^{-\frac{1}{2}-\gamma}\int_0^1 \phi(y)\,y^{-1+\gamma}dy + Ct^{-\frac{1}{2}-\gamma}\int_1^\infty \phi(y)\,y^{-1+\gamma}dy \\
&\leq Ct^{-\frac{1}{2}-\gamma}\|\phi\|_{L^\infty}\int_0^1 y^{-1+\gamma}dy + Ct^{-\frac{1}{2}-\gamma}\left(\int_1^\infty \phi^2(y)\,dy\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_1^\infty y^{-2+2\gamma}dy\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq Ct^{-\frac{1}{2}-\gamma}\left(\|\phi\|_{L^\infty}+\|\phi\|_{L^2}\right).
\end{aligned}$$

Además,

$$
\begin{aligned}
\left\|\mathcal{G}_2(t)\,\phi(x)\right\|_{L_x^2} \leq \left\|\int_0^\infty G_2(x,y,t)\,\phi(y)\,dy\right\|_{L_x^2} &\leq C\int_0^\infty \phi(y)\,y^{-1+\gamma}dy \\
&\leq C\int_0^1 \phi(y)\,y^{-1+\gamma}dy + C\int_1^\infty \phi(y)\,y^{-1+\gamma}dy \\
&\leq C\left\|\phi\right\|_{L^\infty}\int_0^1 y^{-1+\gamma}dy + C\left(\int_1^\infty \phi^2(y)\,dy\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_1^\infty y^{-2+2\gamma}dy\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\left\|\phi\right\|_{L^\infty} + C\left\|\phi\right\|_{L^2}.
\end{aligned}
$$

De aquí que

$$
\left\|\mathcal{G}(t)\,\varphi(x)\right\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq Ct^{-\frac{1}{2}-\gamma}\left(\left\|\varphi\right\|_{\mathbf{L}^2} + \left\|\varphi\right\|_{\mathbf{L}^\infty}\right),
$$

y

$$
\left\|\mathcal{G}(t)\,\varphi(x)\right\|_{\mathbf{L}^2} \leq C\left(\left\|\varphi\right\|_{\mathbf{L}^2} + \left\|\varphi\right\|_{\mathbf{L}^\infty}\right).
$$

Esto demuestra la afirmación (fin del lema 3.5). ■

Capítulo 4

El problema no lineal

Retomando el **problema no lineal** (1), reescribiéndolo como

$$\left\{ \begin{array}{c} u_t + \mathcal{N}(u) + |\partial_x|^{\frac{1}{2}} u = 0,\ t > 0,\ x > 0; \\ u(x,0) = u_0(x),\ x > 0 \\ u(0,t) = 0,\ t > 0 \end{array} \right., \tag{4.1}$$

donde el **término no lineal** $\mathcal{N}$ se representa por

$$\mathcal{N}(u) = \omega |u|^{\delta} u, \tag{2}$$

para $\delta \in (0,1)$, y la **derivada fraccionaria** $|\partial_x|^{\frac{1}{2}}$ se determina por

$$|\partial_x|^{\frac{1}{2}} u(x,t) = H(x) \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{px} |p|^{\frac{1}{2}} \widetilde{u}(p,t)\, dp, \tag{4.2}$$

en la que H es la **función de Heaviside** (2.5),

$$H(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{array} \right., \tag{2.5}$$

y $\widetilde{u}$ es la **transformada de Laplace** (1.7) de u

$$\widetilde{u}(p,t) = \int_0^{\infty} e^{-px} u(x,t)\, dx. \tag{1.7}$$

Mostraremos que, al menos localmente, el problema (4.1) tiene una, y sólo una, solución, utilizando las estimaciones del capítulo 3, y resultados conocidos de problemas no lineales en general (véase, por ejemplo, [31], [65]).

4.1. Estimación a priori de una solución

De acuerdo con la Proposición 2.1, la única solución del problema lineal (2.2), se representa por la ecuación integral (2.12). Ahora, según el *principio de*

Duhamel, el problema con valor inicial y de frontera (4.1) tiene una solución u que podemos reescribir como

$$u(x,t) = \mathcal{G}(t)\, u_0(x) - \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau)\, \mathcal{N}(u)(\tau)\, d\tau, \tag{4.3}$$

que, de acuerdo con la definición del **operador de Green** $\mathcal{G}$ para $u_0(x)$, y $\mathcal{N}(u)(\tau)$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(t)\, u_0(x) &= \int_0^\infty G(x,y,t)\, u_0(y)\, dy, \qquad (2.3)\\ \mathcal{G}(t-\tau)\, \mathcal{N}(u)(\tau) &= \int_0^\infty G(x,y,t-\tau)\, \mathcal{N}(u(y,\tau))\, dy, \end{aligned}$$

se puede reescribir como

$$u(x,t) = \int_0^\infty G(x,y,t)\, u_0(y)\, dy - \int_0^t d\tau \int_0^\infty G(x,y,t-\tau)\, \mathcal{N}(u(y,\tau))\, dy, \tag{4.4}$$

donde la **función de Green** G se define por

$$G(x,y,t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{\xi t} d\xi \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{px} \frac{Y^+(p,\xi)}{|p|^{\frac{1}{2}} + \xi} Z^-(p,\xi,y)\, dp, \tag{2.4}$$

donde

$$\begin{aligned} Z^-(p,\xi,y) &= \lim_{z\to p, \operatorname{Re} z>0} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{-qy}}{q-z} \frac{1}{Y^+(q,\xi)} dq \qquad (3.6)\\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{-qy}}{q-p} \frac{1}{Y^+(q,\xi)} dq, \end{aligned}$$

y Y^+ es

$$Y^+(p,\xi) = e^{\Gamma^+(p,\xi)} \omega^+(p), \tag{2.6}$$

y

$$\begin{aligned} \Gamma^+(p,\xi) &= \lim_{z\to p, \operatorname{Re} z<0} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{q-z} \ln\left\{ \left(\frac{|q|^{\frac{1}{2}} + \xi}{q^{\frac{1}{2}} + \xi} \right) \frac{\omega^-(q)}{\omega^+(q)} \right\} dq \qquad (3.4)\\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{q-p} \ln\left\{ \left(\frac{|q|^{\frac{1}{2}} + \xi}{q^{\frac{1}{2}} + \xi} \right) \frac{\omega^-(q)}{\omega^+(q)} \right\} dq, \end{aligned}$$

y ω es la función de la ecuación (2.11)

$$\omega^\pm(q) = (q \mp 1)^{\frac{1}{4}}. \tag{2.11}$$

Ahora desmostraremos que si una función u satisface la ecuación (4.4) anterior, también satisface el problema no lineal (4.1). Para esto, nótese que es suficiente probar que la función de Green G satisface la **propiedad distribucional**

$$G(x,y,0)=\delta(y-x),$$

donde $\delta(y-x)$ es la *funcion delta de Dirac*, y la **ecuación lineal asociada** a (4.1)

$$G_t+|\partial_x|^{\frac{1}{2}}G=0.$$

En efecto, asumiendo por el momento (véase lema 4.1) que la función de Green G verifica estas dos ecuaciones, de la ecuacion integral (4.4), empleando convenientemente la *regla de Leibniz* para derivación de integrales, así como propiedades del operador derivada fraccional, se tiene

$$\begin{aligned}
u_t+|\partial_x|^{\frac{1}{2}}u &= \frac{d}{dt}\left(\int_0^\infty G(x,y,t)\,u_0(y)\,dy-\int_0^t d\tau\int_0^\infty G(x,y,t-\tau)\,\mathcal{N}(u(y,\tau))\,dy\right)\\
&+|\partial_x|^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^\infty G(x,y,t)\,u_0(y)\,dy-\int_0^t d\tau\int_0^\infty G(x,y,t-\tau)\,\mathcal{N}(u(y,\tau))\,dy\right)\\
&=\int_0^\infty\left(G_t+|\partial_x|^{\frac{1}{2}}G\right)u_0(y)\,dy\\
&-\int_0^t d\tau\int_0^\infty\left(G_t+|\partial_x|^{\frac{1}{2}}G\right)\mathcal{N}(u(y,t-\tau))\,dy\\
&-\int_0^\infty G(x,y,0)\,\mathcal{N}(u(y,t))\,dy\\
&=-\mathcal{N}(u).
\end{aligned}$$

En resumen, los cálculos anteriores podemos resumirlos en los siguientes hechos:

i La función G es realmente una función de Green; para lo cual presentamos en esta sección el Lema 4.1.

ii Para hallar una (y sólo una) solución al problema (4.1) sólo hace falta encontrar una solución u de la ecuación integral (4.4); lo cual haremos en la siguiente sección (véase Teorema 4.1.

LEMA 4.1 *La función $G(x,y,t)$, definida en la ecuación (3.2), es realmente una función de Green (véase definición (1.11)); esto es, G satisface:*

1. *que*

$$G(x,y,0)=\delta(x-y). \tag{4.5}$$

2. *Además,*

$$G_t+|\partial_x|^{\frac{1}{2}}G=0. \tag{4.6}$$

De aquí que G satisface la ecuación lineal (2.2) asociada al problema (4.1).

DEMOSTRACIÓN. (1) Observemos primero que podemos descomponer a la función de Green G como $G = G_1 + G_2$. Sustituyendo el valor (3.7) de Z^- dentro de la definición (3.2) de G, se tiene

$$G(x,y,t) = G_1(x-y,t) + G_2(x,y,t), \tag{4.7}$$

donde

$$G_1(x-y,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} e^{p(x-y)-K(p)t}dp, \tag{4.8}$$

y

$$G_2(x,y,t) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-i\infty}^{i\infty} e^{\xi t}d\xi \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{px}\frac{Y^+(p,\xi)}{K(p)+\xi}Z^+(p,\xi,y)\,dp. \tag{4.9}$$

Ahora, considerando la propiedad distribucional, la transformada de Laplace y la integral de Mellin, podemos concluir que

$$G_1(x-y,0) = \delta(x-y),$$

por lo que sólo nos resta probar que $G_2(x,y,0) = 0$. Para esto recordemos primero la expresión para Z^+ y, observando que, para $\operatorname{Re} p < 0$, la fórmula integral de Cauchy permite escribir

$$Z^+(p,\xi,y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{e^{-qy}}{q-p}\left(\frac{1}{Y^+(q,\xi)} - e^{-i\frac{\pi}{8}}\right)dq; \tag{4.10}$$

donde, para $|\xi| \geq K(q)$, se tiene la estimación

$$\left|\frac{1}{Y^+(q,\xi)} - e^{-i\frac{\pi}{8}}\right| \leq C\frac{(K(q))^\gamma}{|\xi|^\gamma},\ 0 < \gamma \leq 1. \tag{4.11}$$

Ahora, reescribiendo (4.9), luego de sustituir (4.10) ahí, de mover los contornos de integración para tener C_1, C_2 y C_3, respectivamente (véase comentario más abajo, y estimaciones 3.7 en capítulo 3), y de usar el teorema de Fubinni (dos veces) para intercambiar el orden de integración, se obtiene

$$G_2(x,y,t) = -\frac{1}{(2\pi i)^3}\int_{C_2} e^{px}\left(\int_{C_3}\frac{e^{-qy}}{q-p}\left(\int_{C_1} e^{\xi t}\frac{Y^+(p,\xi)}{K(p)+\xi}\left(\frac{1}{Y^+(q,\xi)} - e^{-i\frac{\pi}{8}}\right)d\xi\right)dq\right)dp, \tag{4.12}$$

donde C_1, C_2 y C_3 se construyen para convergencia: Existen ángulos φ_1, φ_2 y φ_3, suficientemente pequeños, mayores que cero que permiten *mover* el eje $i\mathbf{R}$ a la izquierda, para integrar en C_1 ($\arg\xi = \pm\frac{\pi}{2} \pm \varphi_1$); a la izquierda para integrar en C_2 ($\arg p = \pm\frac{\pi}{2} \pm \varphi_2$); y a la derecha para integrar en C_3 ($\arg q = \pm\frac{\pi}{2} \mp \varphi_3$). Finalmente, de la estimación (4.11), y de la analiticidad de la función

$$\frac{Y^+(p,\xi)}{K(p)+\xi}\left(\frac{1}{Y^+(q,\xi)} - e^{-i\frac{\pi}{8}}\right),$$

con respecto de ξ, se obtiene

$$\int_{C_1}\frac{Y^+(p,\xi)}{K(p)+\xi}\left(\frac{1}{Y^+(q,\xi)} - e^{-i\frac{\pi}{8}}\right)d\xi = 0. \tag{4.13}$$

De esta última igualdad (4.13), y de la ecuación(4.12) concluimos que $G_2(x, y, 0) = 0$.

(2) Consideremos la ecuación (3.2). Tomando ahí las transformadas de Laplace con respecto a x y t, respectivamente, se obtiene

$$\widehat{\widetilde{G}}(p, \xi, y) = -\frac{1}{K(p) + \xi} Y^{+}(p, \xi) Z^{-}(p, \xi, y). \tag{4.14}$$

De aquí, al multiplicar (4.14) por ξ y luego de sumar y restar $K(p)$ y simplificar convenientemente usando de nuevo (4.14), obtenemos,

$$\xi \widehat{\widetilde{G}} = -Y^{+} Z^{-} - K(p) \widehat{\widetilde{G}}. \tag{4.15}$$

Ahora, sustituyendo el valor (3.7) de Z^{-} en (4.15), resulta

$$\xi \widehat{\widetilde{G}} - e^{-py} + K(p) \widehat{\widetilde{G}} = -Y^{+} Z^{+}.$$

En seguida, tomando la transformada inversa de Laplace, con respecto a p, recordando propiedades como (1.26) del Teorema 1.7, se tiene

$$\xi \widetilde{G}(x, y, \xi) - \delta(x - y) \mathcal{U}(x - y) + H(x) \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{px} K(p) \widehat{\widetilde{G}}(p, y, \xi)\, dp = \tag{4.16a}$$

$$= -H(x) \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{px} Y^{+}(p, \xi) Z^{+}(p, \xi, y)\, dp;$$

sin embargo, de acuerdo con la estimación de Z^{+}, para el miembro derecho de (4.16a), se tiene

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{px} Y^{+}(p, \xi) Z^{+}(p, \xi, y)\, dp = 0.$$

Por lo que, tomando Laplace inversa, con respecto a ξ, y las correspondientes propiedades: (1.33), (4.5) y (1.27), en lo que quedó de (4.16a), se verifica la segunda parte deseada, lo que demuestra el resultado (lema 4.1). ■

4.2. Teorema de Existencia Local

En esta sección probaremos existencia local, respecto del tiempo t, de soluciones para el problema con valor incial y de frontera (*4.1*) usando el *Principio del Mapeo de Contracción, el principio de Duhamel*, propiedades de la *Función de Green G*, y de las *Distribuciones* (véase, por ejemplo, [46]).

TEOREMA 4.1 (de existencia local) *Considérese el problema*

$$\left.\begin{array}{c} u_t(x, t) + \mathcal{N}(u(x, t)) + \mathbb{K}u(x, t) = 0,\ x > 0,\ 0 < t. \\ u(x, 0) = u_0(x),\ x > 0. \\ u(0, t) = 0,\ t > 0. \end{array}\right\} \tag{4.17}$$

Sea la condición inicial $u_0(x) \in \mathbf{Z}$, *donde*

$$\mathbf{Z} = \mathbf{L}^2 \cap \mathbf{L}^\infty,$$

en el que, para $\varphi \in \mathbf{Z}$, *se tiene* $\|\varphi\|_{\mathbf{Z}} < \infty$, *siendo*

$$\|\varphi\|_{\mathbf{Z}} = \|\varphi\|_{\mathbf{L}^2} + \|\varphi\|_{\mathbf{L}^\infty}.$$

Entonces, para algún $T > 0$, *existe una única solución* $u \in \mathbf{X}_T$ *al problema de valor inicial y de frontera (4.17), para*

$$\mathbf{X}_T = \left\{ \varphi \in \mathbf{C}\left([0,T]; \mathbf{L}^2\right) \cap \mathbf{C}\left((0,T]; \mathbf{L}^\infty\right) : \|\varphi\|_{\mathbf{X}_T} < \infty \right\},$$

donde

$$\|\varphi\|_{\mathbf{X}_T} = \sup_{t\in[0,T]} \|\varphi\|_{\mathbf{L}^2} + \sup_{t\in(0,T]} t^{\frac{1}{2}+\gamma} \|\varphi\|_{\mathbf{L}^\infty},$$

para $\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)(1+\delta) < 1$, *donde*

$$\mathcal{N}(u(x,t)) = \omega |u|^\delta u,$$

para $\delta \in (0,1)$. *Además, el tiempo de existencia* T *satisface*

$$T \le C \|\varphi\|_{\mathbf{Z}}^{-\frac{\sigma}{k}}, \text{ donde } k \in (0,1) \text{ y } \sigma > 0.$$

DEMOSTRACIÓN. Definamos el operador integral

$$\mathcal{M}(u)(x,t) = \mathcal{G}(t) u_0(x) - \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau) \mathcal{N}(u(x,\tau))\, d\tau,$$

en términos del operador de Green $\mathcal{G} : \mathbf{Z} \to \mathbf{X}_T$, expresado anteriormente como

$$\mathcal{G}(t) u_0(x) = \int_0^\infty G(x,y,t) u_0(x)\, dy$$
$$= \int_0^\infty G_1(x,y,t) u_0(x)\, dy + \int_0^\infty G_2(x,y,t) u_0(x)\, dy, \text{ (véase 3.12 y 3.14)}$$
$$= \mathcal{G}_1(t) u_0(x) + \mathcal{G}_2(t) u_0(x).$$

Demostramos que $\mathcal{M}$ es mapeo de contraccion. Estimamos $\|\mathcal{M}(u)\|_{\mathbf{X}_T}$. Primero en espacios $\mathbf{L}^2$, luego en $\mathbf{L}^\infty$. Usamos estimaciones $\|\varphi\|_{\mathbf{Z}}$ (véase Lema 3.5, y anteriores)

$$\|\mathcal{G}_1(t)\phi\|_{\mathbf{L}^2} \le C \|\phi\|_{\mathbf{L}^2} \le C \left(\|\varphi\|_{\mathbf{L}^2} + \|\varphi\|_{\mathbf{L}^\infty}\right)$$

$$\|\mathcal{G}_1(t)\phi\|_{\mathbf{L}^\infty} \le C \|\phi\|_{\mathbf{L}^\infty} \le C t^{-\frac{1}{2}-\gamma} \|\phi\|_{\mathbf{L}^\infty} \le C t^{-\frac{1}{2}-\gamma} \left(\|\varphi\|_{\mathbf{L}^2} + \|\varphi\|_{\mathbf{L}^\infty}\right).$$

Análogamente para$\|\mathcal{G}_2(t)\phi\|_{\mathbf{L}^2}$ y $\|\mathcal{G}_2(t)\phi\|_{\mathbf{L}^\infty}$. De aquí que se tiene

$$\|\mathcal{G}(t)\varphi\|_{\mathbf{L}^\infty} \le C t^{-\frac{1}{2}-\gamma} \left(\|\varphi\|_{\mathbf{L}^2} + \|\varphi\|_{\mathbf{L}^\infty}\right), \tag{4.18}$$

y

$$\|\mathcal{G}(t)\varphi\|_{\mathbf{L}^2} \leq C\left(\|\varphi\|_{\mathbf{L}^2} + \|\varphi\|_{\mathbf{L}^\infty}\right). \tag{4.19}$$

Por otra parte, siendo $\mathcal{N}(u(x,\tau)) = \omega|u|^\delta u$, para $\delta \in (0,1)$, se tiene

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{M}(u)\|_{\mathbf{L}^2} &\leq \|\mathcal{G}(t)u_0\|_{\mathbf{L}^2} + \left\|\int_0^t \mathcal{G}(t-\tau)\mathcal{N}(u(x,\tau))\,d\tau\right\|_{\mathbf{L}^2} \\
&\leq C\left(\|u_0\|_{\mathbf{L}^2} + \|u_0\|_{\mathbf{L}^\infty}\right) + \int_0^t \|\mathcal{G}(t-\tau)\mathcal{N}(u(x,\tau))\|_{\mathbf{L}^2}\,d\tau \\
&\leq C\|u_0\|_{\mathbf{Z}} + C\int_0^t \left(\|\mathcal{N}(u(x,\tau))\|_{\mathbf{L}^2} + \|\mathcal{N}(u(x,\tau))\|_{\mathbf{L}^\infty}\right)d\tau, \text{ según (4.19)} \\
&\leq C\|u_0\|_{\mathbf{Z}} + C\int_0^t \left(\|u(x,\tau)\|_{\mathbf{L}^{2+2\delta}}^{1+\delta} + \|u(x,\tau)\|_{\mathbf{L}^\infty}^{1+\delta}\right)d\tau.
\end{aligned}$$

Ahora, considerando

$$\|u(x,\tau)\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq \tau^{-\frac{1}{2}-\gamma}\|u\|_{\mathbf{X}_T},$$

y

$$\|u(x,\tau)\|_{\mathbf{L}^2} \leq \|u\|_{\mathbf{X}_T},$$

se tendrá

$$\|u(x,\tau)\|_{\mathbf{L}^\infty}^{1+\delta} \leq \tau^{-\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)(1+\delta)}\|u\|_{\mathbf{X}_T}^{1+\delta},$$

y

$$\|u(x,\tau)\|_{\mathbf{L}^2}^{1+\delta} \leq \|u\|_{\mathbf{X}_T}^{1+\delta}.$$

Además, usando

$$\begin{aligned}
\|u(x,\tau)\|_{\mathbf{L}^{2+2\delta}} &\leq \left(\int_0^\infty |u(x,\tau)|^{2+2\delta}\right)^{\frac{1}{2+2\delta}} \\
&\leq \|u(x,\tau)\|_{\mathbf{L}^\infty}^{\frac{2\delta}{2+2\delta}}\left(\int_0^\infty |u(x,\tau)|^2\right)^{\frac{1}{2}\frac{2}{2+2\delta}} \\
&\leq \|u(x,\tau)\|_{\mathbf{L}^\infty}^{\frac{2\delta}{2+2\delta}}\|u(x,\tau)\|_{\mathbf{L}^2}^{\frac{2}{2+2\delta}} \\
&\leq \tau^{-\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)\frac{2\delta}{2+2\delta}}\|u\|_{\mathbf{X}_T}^{\frac{2\delta}{2+2\delta}}\|u\|_{\mathbf{X}_T}^{\frac{2}{2+2\delta}} \leq \tau^{-\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)\frac{2\delta}{2+2\delta}}\|u\|_{\mathbf{X}_T};
\end{aligned}$$

con la condición de convergencia $\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)(1+\delta) < 1$, habiendo supuesto $\delta \in (0,1)$, entonces esta es la condición para $\gamma > 0$ suficientemente pequeño. En resumen, tenemos

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{M}(u)\|_{\mathbf{L}^2} &\leq C\|u_0\|_{\mathbf{Z}} + C\int_0^t \left(\tau^{-\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)\frac{2\delta}{2+2\delta}(1+\delta)}\|u\|_{\mathbf{X}_T}^{1+\delta} + \tau^{-\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)(1+\delta)}\|u\|_{\mathbf{X}_T}^{1+\delta}\right)d\tau \\
&\leq C\|u_0\|_{\mathbf{Z}} + C\|u\|_{\mathbf{X}_T}^{1+\delta}\int_0^t \left(\tau^{-\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)\frac{2\delta}{2+2\delta}(1+\delta)} + \tau^{-\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)(1+\delta)}\right)d\tau \\
&\leq C\|u_0\|_{\mathbf{Z}} + C\|u\|_{\mathbf{X}_T}^{1+\delta}t^{1-\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)(1+\delta)}.
\end{aligned}$$

Análogamente,

$$
\begin{aligned}
\left\|\mathcal{M}\left(u\right)\right\|_{\mathbf{L}^\infty} &\leq \left\|\mathcal{G}\left(t\right)u_0\right\|_{\mathbf{L}^\infty} + \left\|\int_0^t \mathcal{G}\left(t-\tau\right)\mathcal{N}\left(u\left(x,\tau\right)\right)d\tau\right\|_{\mathbf{L}^\infty} \\
&\leq Ct^{-\frac{1}{2}-\gamma}\left(\left\|u_0\right\|_{\mathbf{L}^2} + \left\|u_0\right\|_{\mathbf{L}^\infty}\right) + \int_0^t \left\|\mathcal{G}\left(t-\tau\right)\mathcal{N}\left(u\left(x,\tau\right)\right)\right\|_{\mathbf{L}^\infty} d\tau \\
&\leq Ct^{-\frac{1}{2}-\gamma}\left(\left\|u_0\right\|_{\mathbf{L}^2} + \left\|u_0\right\|_{\mathbf{L}^\infty}\right) + C\int_0^t \left(t-\tau\right)^{-\frac{1}{2}-\gamma}\left(\left\|\mathcal{N}\left(u\left(x,\tau\right)\right)\right\|_{\mathbf{L}^2} + \right. \\
&\qquad \left. + \left\|\mathcal{N}\left(u\left(x,\tau\right)\right)\right\|_{\mathbf{L}^\infty}\right) d\tau \\
&\leq Ct^{-\frac{1}{2}-\gamma}\left\|u_0\right\|_{\mathbf{Z}} + C\int_0^t \left(t-\tau\right)^{-\frac{1}{2}-\gamma}\left(\left\|u\left(x,\tau\right)\right\|_{\mathbf{L}^{2+2\delta}}^{1+\delta} + \left\|u\left(x,\tau\right)\right\|_{\mathbf{L}^\infty}^{1+\delta}\right) d\tau \\
&\leq Ct^{-\frac{1}{2}-\gamma}\left\|u_0\right\|_{\mathbf{Z}} + C\int_0^t \left(t-\tau\right)^{-\frac{1}{2}-\gamma}\left(\tau^{-\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)\frac{2\delta}{2+2\delta}(1+\delta)}\left\|u\right\|_{\mathbf{X}_T}^{1+\delta} + \right. \\
&\qquad \left. + \tau^{-\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)(1+\delta)}\left\|u\right\|_{\mathbf{X}_T}^{1+\delta}\right) d\tau \\
&\leq Ct^{-\frac{1}{2}-\gamma}\left\|u_0\right\|_{\mathbf{Z}} + C\left\|u\right\|_{\mathbf{X}_T}^{1+\delta}\int_0^t \left(t-\tau\right)^{-\frac{1}{2}-\gamma}\tau^{-\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)(1+\delta)}d\tau;
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t \left(t-\tau\right)^{-\frac{1}{2}-\gamma}\tau^{-\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)(1+\delta)}d\tau \\
&\leq \int_0^{\frac{t}{2}} \left(t-\tau\right)^{-\frac{1}{2}-\gamma}\tau^{-\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)(1+\delta)}d\tau + \int_{\frac{t}{2}}^t \left(t-\tau\right)^{-\frac{1}{2}-\gamma}\tau^{-\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)(1+\delta)}d\tau \\
&\leq \left(\frac{t}{2}\right)^{-\frac{1}{2}-\gamma}\int_0^{\frac{t}{2}} \tau^{-\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)(1+\delta)}d\tau + \left(\frac{t}{2}\right)^{-\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)(1+\delta)}\int_{\frac{t}{2}}^t \left(t-\tau\right)^{-\frac{1}{2}-\gamma}d\tau \\
&\leq C\left(\frac{t}{2}\right)^{-\frac{1}{2}-\gamma}\left(\frac{t}{2}\right)^{1-\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)(1+\delta)} + C\left(\frac{t}{2}\right)^{-\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)(1+\delta)}\left(\frac{t}{2}\right)^{1-\frac{1}{2}-\gamma} \\
&\leq Ct^{-\frac{1}{2}-\gamma+1-\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)(1+\delta)}.
\end{aligned}
$$

Obtenemos

$$
\begin{aligned}
\left\|\mathcal{M}\left(u\right)\right\|_{\mathbf{L}^\infty} &\leq Ct^{-\frac{1}{2}-\gamma}\left\|u_0\right\|_{\mathbf{Z}} + C\left\|u\right\|_{\mathbf{X}_T}^{1+\delta}t^{-\frac{1}{2}-\gamma+1-\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)(1+\delta)} \\
&\leq Ct^{-\frac{1}{2}-\gamma}\left(\left\|u_0\right\|_{\mathbf{Z}} + \left\|u\right\|_{\mathbf{X}_T}^{1+\delta}t^{1-\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)(1+\delta)}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\left\|\mathcal{M}\left(u\right)\right\|_{\mathbf{L}^2} \leq C\left(\left\|u_0\right\|_{\mathbf{Z}} + \left\|u\right\|_{\mathbf{X}_T}^{1+\delta}t^{1-\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)(1+\delta)}\right)
$$

$$
t^{\frac{1}{2}+\gamma}\left\|\mathcal{M}\left(u\right)\right\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C\left(\left\|u_0\right\|_{\mathbf{Z}} + \left\|u\right\|_{\mathbf{X}_T}^{1+\delta}t^{1-\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)(1+\delta)}\right).
$$

De donde,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{M}(u)\|_{\mathbf{X}_T} &= \sup_{t\in[0,T]} \|\mathcal{M}(u)\|_{\mathbf{L}^2} + \sup_{t\in(0,T]} t^{\frac{1}{2}+\gamma} \|\mathcal{M}(u)\|_{\mathbf{L}^\infty} \\
&\leq \sup_{t\in[0,T]} C\left(\|u_0\|_{\mathbf{Z}} + \|u\|_{\mathbf{X}_T}^{1+\delta} t^{1-\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)(1+\delta)}\right) \\
&+ \sup_{t\in(0,T]} C\left(\|u_0\|_{\mathbf{Z}} + \|u\|_{\mathbf{X}_T}^{1+\delta} t^{1-\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)(1+\delta)}\right) \\
&\leq C\|u_0\|_{\mathbf{Z}} + C\|u\|_{\mathbf{X}_T}^{1+\delta} \sup_{t\in(0,T]} t^{1-\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)(1+\delta)} \\
&\leq C\|u_0\|_{\mathbf{Z}} + CT^{1-\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)(1+\delta)} \|u\|_{\mathbf{X}_T}^{1+\delta} \leq \frac{\rho}{2} + CT^{1-\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)(1+\delta)}\rho^{1+\delta} \leq \rho;
\end{aligned}$$

y podríamos elegir $\rho \geq 2C\|u_0\|_{\mathbf{Z}}$ para $T > 0$ tal que $CT^{1-\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)(1+\delta)}\rho^{1+\delta} \leq \frac{\rho}{2}$. Esto es,

$$T^{1-\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)(1+\delta)} \leq \frac{1}{2C\rho^\delta}.$$

De modo que si $\|u\|_{\mathbf{X}_T} \leq \rho$, entonces $\|\mathcal{M}(u)\|_{\mathbf{X}_T} \leq \rho$. Consideramos

$$\mathcal{M}(u) - \mathcal{M}(v) = -\int_0^t \mathcal{G}(t-\tau)\left(\mathcal{N}(u(x,\tau)) - \mathcal{N}(v(x,\tau))\right) d\tau.$$

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{M}(u) - \mathcal{M}(v)\|_{\mathbf{L}^\infty} &\leq \left\| \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau)\left(\mathcal{N}(u(x,\tau)) - \mathcal{N}(v(x,\tau))\right) d\tau \right\|_{\mathbf{L}^\infty} \\
&\leq \int_0^t \|\mathcal{G}(t-\tau)\left(\mathcal{N}(u(x,\tau)) - \mathcal{N}(v(x,\tau))\right)\|_{\mathbf{L}^\infty} d\tau \\
&\leq C\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}-\gamma} \left(\|(\mathcal{N}(u(x,\tau)) - \mathcal{N}(v(x,\tau)))\|_{\mathbf{L}^2} + \|(\mathcal{N}(u(x,\tau)) - \mathcal{N}(v(x,\tau)))\|_{\mathbf{L}^\infty}\right) d\tau,
\end{aligned}$$

y estimando separadamente,

$$|\mathcal{N}(u) - \mathcal{N}(v)| = \left||u|^\delta u - |v|^\delta v\right| = \left|\int_u^v \frac{d}{dz}\left(|z|^\delta z\right) dz\right| \leq C\int_u^v |z|^\delta dz \leq C|u-v|\left(|u|^\delta + |v|^\delta\right)$$

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{N}(u(x,\tau)) - \mathcal{N}(v(x,\tau))\|_{\mathbf{L}^2} &\leq C\left\||u-v|\left(|u|^\delta + |v|^\delta\right)\right\|_{\mathbf{L}^2} \\
&\leq C\left(\|u(x,\tau)\|_{\mathbf{L}^\infty}^\delta + \|v(x,\tau)\|_{\mathbf{L}^\infty}^\delta\right)\|u(x,\tau) - v(x,\tau)\|_{\mathbf{L}^2}
\end{aligned}$$

$$\|\mathcal{N}(u(x,\tau)) - \mathcal{N}(v(x,\tau))\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C\left(\|u(x,\tau)\|_{\mathbf{L}^\infty}^\delta + \|v(x,\tau)\|_{\mathbf{L}^\infty}^\delta\right)\|u(x,\tau) - v(x,\tau)\|_{\mathbf{L}^\infty},$$

donde los últimos factores se estiman como

$$\|u(x,\tau) - v(x,\tau)\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq \tau^{-\frac{1}{2}-\gamma}\|u-v\|_{\mathbf{X}_T},$$

y

$$\left\|u(x,\tau)-v(x,\tau)\right\|_{\mathbf{L}^2}\leq\left\|u-v\right\|_{\mathbf{X}_T},$$

se tiene

$$\begin{aligned}
\left\|\mathcal{M}(u)-\mathcal{M}(v)\right\|_{\mathbf{L}^\infty} &\leq C\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}-\gamma}\left(\left\|\left(\mathcal{N}(u(x,\tau))-\mathcal{N}(v(x,\tau))\right)\right\|_{\mathbf{L}^2}+\right.\\
&\quad\left.+\left\|\left(\mathcal{N}(u(x,\tau))-\mathcal{N}(v(x,\tau))\right)\right\|_{\mathbf{L}^\infty}\right)d\tau\\
&\leq C\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}-\gamma}\left(\left(\left\|u(x,\tau)\right\|_{\mathbf{L}^\infty}^{\delta}+\left\|v(x,\tau)\right\|_{\mathbf{L}^\infty}^{\delta}\right)\cdot\right.\\
&\quad\left.\cdot\left(\left\|u(x,\tau)-v(x,\tau)\right\|_{\mathbf{L}^2}+\left\|u(x,\tau)-v(x,\tau)\right\|_{\mathbf{L}^\infty}\right)\right)d\tau\\
&\leq C\left(\|u\|_{\mathbf{X}_T}^{\delta}+\|v\|_{\mathbf{X}_T}^{\delta}\right)\|u-v\|_{\mathbf{X}_T}\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}-\gamma}\left(\tau^{-\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)\frac{2\delta}{2+2\delta}(1+\delta)}+\right.\\
&\quad\left.+\tau^{-\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)(1+\delta)}\right)d\tau\\
&\leq C\left(\|u\|_{\mathbf{X}_T}^{\delta}+\|v\|_{\mathbf{X}_T}^{\delta}\right)\|u-v\|_{\mathbf{X}_T}\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}-\gamma}\tau^{-\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)(1+\delta)}d\tau\\
&\leq C\left(\|u\|_{\mathbf{X}_T}^{\delta}+\|v\|_{\mathbf{X}_T}^{\delta}\right)\|u-v\|_{\mathbf{X}_T}Ct^{-\frac{1}{2}-\gamma+1-\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)(1+\delta)}.
\end{aligned}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned}
\left\|\mathcal{M}(u)-\mathcal{M}(v)\right\|_{\mathbf{L}^2} &\leq\left\|\int_0^t \mathcal{G}(t-\tau)\left(\mathcal{N}(u(x,\tau))-\mathcal{N}(v(x,\tau))\right)d\tau\right\|_{\mathbf{L}^2}\\
&\leq\int_0^t \left\|\mathcal{G}(t-\tau)\left(\mathcal{N}(u(x,\tau))-\mathcal{N}(v(x,\tau))\right)\right\|_{\mathbf{L}^2}d\tau
\end{aligned}$$

$$\leq C\int_0^t\left(\left\|\left(\mathcal{N}(u(x,\tau))-\mathcal{N}(v(x,\tau))\right)\right\|_{\mathbf{L}^2}+\left\|\left(\mathcal{N}(u(x,\tau))-\mathcal{N}(v(x,\tau))\right)\right\|_{\mathbf{L}^\infty}\right)d\tau,$$

y

$$\begin{aligned}
\left\|\mathcal{M}(u)-\mathcal{M}(v)\right\|_{\mathbf{L}^2} &\leq C\int_0^t\left(\left\|\left(\mathcal{N}(u(x,\tau))-\mathcal{N}(v(x,\tau))\right)\right\|_{\mathbf{L}^2}+\right.\\
&\quad\left.+\left\|\left(\mathcal{N}(u(x,\tau))-\mathcal{N}(v(x,\tau))\right)\right\|_{\mathbf{L}^\infty}\right)d\tau\\
&\leq C\int_0^t\left(\left(\left\|u(x,\tau)\right\|_{\mathbf{L}^\infty}^{\delta}+\left\|v(x,\tau)\right\|_{\mathbf{L}^\infty}^{\delta}\right)\cdot\right.\\
&\quad\left.\cdot\left(\left\|u(x,\tau)-v(x,\tau)\right\|_{\mathbf{L}^2}+\left\|u(x,\tau)-v(x,\tau)\right\|_{\mathbf{L}^\infty}\right)\right)d\tau\\
&\leq C\left(\|u\|_{\mathbf{X}_T}^{\delta}+\|v\|_{\mathbf{X}_T}^{\delta}\right)\|u-v\|_{\mathbf{X}_T}\int_0^t\left(\tau^{-\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)\frac{2\delta}{2+2\delta}(1+\delta)}+\tau^{-\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)(1+\delta)}\right)d\tau\\
&\leq C\left(\|u\|_{\mathbf{X}_T}^{\delta}+\|v\|_{\mathbf{X}_T}^{\delta}\right)\|u-v\|_{\mathbf{X}_T}\int_0^t \tau^{-\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)(1+\delta)}d\tau\\
&\leq C\left(\|u\|_{\mathbf{X}_T}^{\delta}+\|v\|_{\mathbf{X}_T}^{\delta}\right)\|u-v\|_{\mathbf{X}_T}Ct^{1-\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)(1+\delta)}.
\end{aligned}$$

Finalmente obtenemos

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{M}(u)-\mathcal{M}(v)\|_{\mathbf{X}_T} &= \sup_{t\in[0,T]}\|\mathcal{M}(u)-\mathcal{M}(v)\|_{\mathbf{L}^2} + \sup_{t\in(0,T]} t^{\frac{1}{2}+\gamma}\|\mathcal{M}(u)-\mathcal{M}(v)\|_{\mathbf{L}^\infty} \\
&\le \sup_{t\in[0,T]} C\left(\|u\|_{\mathbf{X}_T}^{\delta}+\|v\|_{\mathbf{X}_T}^{\delta}\right)\|u-v\|_{\mathbf{X}_T} t^{1-\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)(1+\delta)} \\
&+ \sup_{t\in(0,T]} C\left(\|u\|_{\mathbf{X}_T}^{\delta}+\|v\|_{\mathbf{X}_T}^{\delta}\right)\|u-v\|_{\mathbf{X}_T} t^{1-\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)(1+\delta)} \\
&\le C\left(\|u\|_{\mathbf{X}_T}^{\delta}+\|v\|_{\mathbf{X}_T}^{\delta}\right)\|u-v\|_{\mathbf{X}_T}\sup_{t\in(0,T]} t^{1-\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)(1+\delta)} \\
&\le CT^{1-\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)(1+\delta)}\left(\|u\|_{\mathbf{X}_T}^{\delta}+\|v\|_{\mathbf{X}_T}^{\delta}\right)\|u-v\|_{\mathbf{X}_T} \\
&\le CT^{1-\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)(1+\delta)}\rho^{\delta}\|u-v\|_{\mathbf{X}_T},
\end{aligned}$$

eligiendo $T>0$ tal que

$$CT^{1-\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)(1+\delta)}\rho^{\delta}\le\frac{1}{2}. \tag{4.20}$$

De esta manera concluimos que

$$\|\mathcal{M}(u)-\mathcal{M}(v)\|_{\mathbf{X}_T}\le\frac{1}{2}\|u-v\|_{\mathbf{X}_T},$$

de donde se infiere que $\mathcal{M}(u)$ es mapeo de contraccion en el espacio $\mathbf{X}_T$ con $T>0$ pequeño conforme indica (4.20). Entonces existe la solucion unica en $\mathbf{X}_T$ (esto demuestra el teorema local). ∎

Capítulo 5

Conclusiones

De las conclusiones que podemos resumir del presente trabajo son

- Se planteó el problema no lineal para una ecuación del tipo Schrödinger con condiciones iníciales y de frontera en la semirrecta para la ecuación

$$\left\{\begin{array}{c} u_t + \omega \left|u\right|^{\delta} u + \left|\partial_x\right|^{\frac{1}{2}} u = 0,\ t > 0,\ x > 0; \\ u\left(x,0\right) = u_0\left(x\right),\ x > 0 \\ u\left(0,t\right) = 0,\ t > 0 \end{array}\right. \tag{5.1}$$

  donde $\delta \in (0,1)$ y $\left|\partial_x\right|^{\frac{1}{2}} u$ es el operador pseudodiferencial fraccional en la semirrecta definido como

$$\left|\partial_x\right|^{\frac{1}{2}} u\left(x,t\right) = H\left(x\right) \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{px} \left|p\right|^{\frac{1}{2}} \widetilde{u}\left(p,t\right) dp, \tag{5.2}$$

  donde

$$H\left(x\right) = \left\{\begin{array}{c} 1,\ x > 0 \\ 0, x < 0 \end{array}\right. .$$

- Se presentó el problema lineal asociado y se resolvió a través de la construcción de la función de Green.

- Se analizaron las funciones inversas de $K\left(p\right) = \left|p\right|^{\frac{1}{2}}$ para demostrar que solo se requiere una condición inicial y no se necesita ninguna condición en frontera para el problema planteado tenga solución única.

- Se analizaron las propiedades básicas y estimaciones para la función de Green.

- Se presentaron y se demostraron los siguientes teoremas que verifican la unicidad de la solución obtenida.

  - Considérese el problema

$$\left.\begin{array}{c} u_t\left(x,t\right) + \mathcal{N}\left(u\left(x,t\right)\right) + \mathbb{K}u\left(x,t\right) = 0,\ x > 0,\ 0 < t. \\ u\left(x,0\right) = u_0\left(x\right),\ x > 0. \\ u\left(0,t\right) = 0,\ t > 0. \end{array}\right\} \tag{5.3}$$

Sea la condición inicial $u_0(x) \in \mathbf{Z}$, donde

$$\mathbf{Z} = \left\{ \varphi \in \mathbf{L}^2 \cap \mathbf{L}^\infty : \|\varphi\|_{\mathbf{Z}} < \infty \right\}, \text{ donde } \|\varphi\|_{\mathbf{Z}} = \|\varphi\|_{\mathbf{L}^2} + \|\varphi\|_{\mathbf{L}^\infty}.$$

Entonces, para algún $T > 0$, existe una única solución $u \in \mathbf{X}_T$ al problema de valor inicial y de frontera (4.17), para

$$\mathbf{X}_T = \left\{ \varphi \in \mathbf{C}\left([0,T]; \mathbf{L}^2\right) \cap \mathbf{C}\left((0,T]; \mathbf{L}^\infty\right) : \|\varphi\|_{\mathbf{X}_T} < \infty \right\},$$

donde

$$\|\varphi\|_{\mathbf{X}_T} = \sup_{t \in [0,T]} \|\varphi\|_{\mathbf{L}^2} + \sup_{t \in (0,T]} t^{\frac{1}{2}+\gamma} \|\varphi\|_{\mathbf{L}^\infty},$$

para $\left(\frac{1}{2} + \gamma\right)(1+\delta) < 1$, donde

$$\mathcal{N}\left(u\left(x,\tau\right)\right) = \omega \left|u\right|^\delta u,$$

para $\delta \in (0,1)$ y $\omega \in \mathbf{C}$. Además, el tiempo de existencia T satisface

$$T \leq C \|\varphi\|_{\mathbf{Z}}^{-\frac{\sigma}{k}}, \text{ donde } k \in (0,1) \text{ y } \sigma > 0.$$

Bibliografía

[1] Mark J. Ablowitz, Athanassios S. Fokas**. Complex variables, Introduction and Applications**. Cambridge University Press, 1997, 514-538.

[2] M.J. Ablowitz and H. Segur. **Solitons and Inverse Scattering Transform**, SIAM., 1980.

[3] C.J. Amick, J.L. Bona and M.E. Schonbek**. Decay af solutions of some nonlinear wave equations**, J. Diff. Eq. 81 (1989), 1-49.

[4] T.B. Benjamin, J.L. Bona and J.J. Mahony**. Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems**. Phil. Trans. Roy. Soc. A, 272 (1972), 47-54.

[5] Bernal-Vílchis, Fernando; Hayashi, Nakao; Naumkin, Pavel I. Quadratic derivative nonlinear Schrödinger equations in two space dimensions. NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. 18 (2011), no. 3, 329–355.

[6] P. Biller. *A***symptotic behavior in time of solutions to some equations generalizing the Korteweg-de Vries-Burgers equation**. Bull. Polish. Acad. Sc. Math., 32 (1984), 275-282.

[7] Biller, G. Karch and W. Woyczynski. **Multifractal and Levy conservation laws**, C.R. Acad. Sci., Paris, Ser.1, Math. 330 (2000), no 5, 343-348.

[8] J.L. Bona and L. Luo. **Asymptotic decomposition of nonlinear, dispersive wave equations with dissipation**, Advances in Nonlinear Mathematics and Science, Phys. D 152/153 (2001), 363-383.

[9] J.L. Bona and L. Luo**. More results on the decay of the solutions to nonlinear dispersive wave equations***,* Discrete and Continuous Dynamical System*,* 1 (1995), 151-193.

[10] J.L. Bona, F. Demengel and K.S. Promislov. **Fourier splitting and dissipation nonlineal dispersive waves**, Proc. Roy. Soc. Edinburg Sect. A 129 **(**1999), no. 3, 477-502.

[11] J.M. Burgers. **A mathematical model ilustrating the theory of turbulence**, Adv. Appl. Mech. 1 (1948), 171-199.

[12] F. Calodgero and A. Degasperis. **Spectral Transform and Solitons: Tools to Solve and Investigate Nonlinear Evolution Equations**, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1982.

[13] Rosa E. Cardiel Cervantes. **Asymptotic for Whitham equation on half-line with a Source**, International Journal on Pure and Applied Mathematical., 2003.

[14] K.M. Case, **The Benjamin-Otto equation: a remarkable Dynamical system**, Ann. Nuclear Energy 7 (1980), 273-277.

[15] Cazenave, Th.: **Semilinear Schrödinger equations**, Courant Institute of Mathematical Sciences, Nueva York. pp xiv+323. American Mathematical Society, Providence, RI (2003).

[16] H.H. Chen and Y.C. Lee. **Interval wave solitons of fluids with depth**, Phys. Rev. Lett. **43 (**1979), 264-266**.**

[17] D.B. Dix. **Large Time Behavior of Solutions of Linear Dispersive Equations**, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1668, 1997.

[18] D.B. Dix. **The dissipation of nonlinear dispersive waves; the case of asymptotic weak nonlinearity**, Comm. P.D.E., 17 (1992), 1665-1693.

[19] D.B. Dix. **Temporal asymptotic behavior of solutions of the Benjamin-Ono- Burgers equations**, J. Diff. Eqs. 90 (1991), 238-287.

[20] R. K. Dodd, J. C. Eilbeck, J. D. Gibbon & H. C. Morris. **Solitons and nonlinear wave equations**. Academic Press. Nueva York, 1982.

[21] G. F. D. Duff. **Partial Differential Equations**. Univ. of Toronto Press, Toronto. 1956.

[22] M. Escobedo, O. Kavian and H. Matano**. Large time behavior of solutions of a dissipative nonlinear heat equation**. Comm. P.D.E., 20 (1995), 1427-1452.

[23] M. Escobedo, J.L. Vazquez and E. Zuazua**. Asymptotic behavior and source-type solutions for a diffusion-convection equations**, Arch. Ration. Mech. Anal. 124 (1993), no. 1, 43-65.

[24] A.S. Fokas and M.J. Ablowitz. **The inverse scattering transform for the benjamin-Ono equation. A pivot to multidimensional problems**, Stud. Appl. Math. 68 (1983), 1-10.

[25] G.E. Forsyte, M.A. Malcolm, C.A. Moler. **Computer methods for mathematical computations**, Prentice-Hall, Englewood Clifts, N.J., 1977.

[26] F. D. Gajov. **Problemas de contorno**. Mir: Moscú. 1980.

[27] N. Hayashi & E. Kaikina. **Nonlinear theory of pseudodifferential equations on a half-line**. Elsevier. Amsterdam, 2004.

[28] Ginibre, J.: **Introduction aux équations de Schrödinger non linéaires** (Paris Onze Edition). pp. L161. Université Paris-Sud, France (1998).

[29] E. A. González-Velasco. **Fourier Analysis and Boundary Value Problems**. Academic Press. San Diego, 1995. pp451-505 (Distribuciones y Funciones de Green).

[30] G. Grubb. **Distributions and Operators**. Springer-Verlag.

[31] Hayashi, N., Kaikina, E. I., Naumkin, P. I. y Shishmarev, I. A. (2006). **Asymptotics for Dissipative Nonlinear Equations**. Springer-Verlag: Holanda.

[32] N. Hayashi and E.I. Kaikina. **Nonlinear Nonlocal Equations on Half-Line**, *Mathematics Studies*, Elseiver, 194 (2003).

[33] N. Hayashi and E.I. Kaikina**, Local existence of solutions to the Cauchy problem for nonlinear Schrödinger equations**, SUT Journal of Mathematics, 34, No. 2 (1998), 111-137.

[34] N. Hayashi, E.I. Kaikina and J.L Guardado Zavala**. On the boundary-value problem for the Korteweg-de Vries equation**, to appear.

[35] N. Hayashi, E.I. Kaikina and P.I. Naumkin. **Large time behavior of solutions to the dissipative nonlinear Schrödinger equation**, Proceedings of the Royal Soc. Edingburgh, 130-A (2000), 1029-1043.

[36] N. Hayashi, E.I. Kaikina and R. Manzo**. Local and global existence of solutions to the nonlocal Whitham equation on half-line**, Nonlinear Analysis, 48 (2002), 53-75.

[37] N. Hayashi, E.I. Kaikina and F.R. Paredez**. Boundary-value problem for the Korteweg-de Vries-Burgers type equation**, Nonlinear Differential Equations and Applications, 8 (2002), 439-463.

[38] N. Hayashi, E.I. Kaikina and I.A. Shishmarev**. Asymptotics of Solutions to the Boundary-Value Problem for the Korteweg-de Vries-Burgers equation on a Half-Line**, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 265 (2002), No. 2, 343-370.

[39] N. Hayashi, K. Nakamitsu and M. Tsutsumi, *On solutions of the initial value problem for nonlinear Schrödinger equations,* J. Funct. Anal., 71 (1987), pp. 218-245.

[40] A.M. Il'in and O.A. Oleinik. **Asymptotic behavior of solutions of the Cauchy problem for some quasilinear equations for large values of time**, Mat. Sbornik. 51 (1960), 191-216.

[41] V. Illín, E. Pozniak. **Fundamentos del Análisis Matemático 3**. Mir. Moscu, 1980, 292-293.

[42] Kaikina, Elena I. Pseudodifferential operator with a nonanalytic symbol on a half-line,J. of Mathematical Physics 48, (2007), no. 11, 1341–1370.

[43] R.J. Josep. **Solitary waves in a finite depth fluid**, J. Phys. A 10 (1977), 225-227.

[44] E.I. Kaikina, P.I. Naumkin and I.A. Shishmarev. **Asymptotic behavior for large time of solutions to the nonlinear nonlocal Schrödinger equation on half-line**, SUT Journal of Mathematics, 35, No.1 (1999), 37-79.

[45] E.I. Kaikina, I.A. Shishmarev and M. Tsutsumi. **Asymptotics in time for nonlinear Schrödinger equations with a source**, J. Math. Soc. Japan, 51, No. 2, (1999), 463-483.

[46] Kanwal, R. P. (1983). **Generalized Functions, theory and technique**. 1a. ed. Academic Press: Nueva York.

[47] G. Karch, **Self-similar large time behavior of solution to the Korteweg-de Vries-Burgers equation**, Nonlinear anal., T.M.A. 35A (1999), no. 2, 199-219.

[48] V.I. Karpman. **Nonlinear waves in dispersive media**, "Nauka", Moscow, 1973; English trasl., Pergamon Press, New York, 1975.

[49] Kato, J.: **Nonlinear Schrödinger Equations**. In: Olden, H., Jensen, A. (eds.) Schrödinger Operators, Lecture Notes in Physics, vol. 345, pp. 218-263. Springer, Berlin (1989).

[50] O. Kavian. **Remarks on the large time behavior of a nonlinear diffusion equation**, Ann. Inst. Henrri Poncairé, Analyse non linéaire, 4 (5) (1987), 423-452.

[51] J. P. Keener. **Principles of Applied Mathematics**. Westview. 2000. pp133-176 (Operadores Diferenciales)

[52] K. Knopp. **Theory of Functions, Vol. I**. Dover, Nueva York. 1945.

[53] Yu. A. Kobelev and L.A. Ostrovskii, *Nonlinear acoustics. Theoretical and experimental studies,* Gorky, 1980, pp. 143-160.

[54] H. Kober. **On Fractional Integrals and Derivatives**. Quart. J. Math. Oxford Ser. 11, 193-211.

[55] Y: Kodama, M.J. Ablowitz and L. Satsuma. **Direct and inverse scattering problems of the nonlinear intermediate long-wave equation**, J. Math. Phys. 23 (1982), 564-576.

[56] A.N.KolmogorovS.V.Fomin. **Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional**. MIR. Moscu, 1975, 51-86.

[57] D.J. Kortewer and G. de Vries**. On the change of form of long waves advancing in a new type of long stationary waves**, Philos. Mag. 5 (1895), 422-443.

[58] T. Kubota, D.R. Ko and D. Dobbis**. Weakly nonlinear long stratifield fluids on finite depth**, AIAA J. Hydronautics 12 (1978), 157-165.

[59] Y. Kuramoto**. Chemical oscillations, waves and turvulence***,* Springer ser. Synergetics, vol. 19, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1984.

[60] J.L. Lions. **Quelques méthodes de résolution des problemas aux limites non-linéaires***,* Dunod, Paris, 1969.

[61] J. Lions and E. Magenes**. Non-Homogeneous Boundary value Problems and Applications**, Springer, N.Y., 1972

[62] N.i. Muskhelishvili. **Singular integral equations : Boundary problems of function theory and their application to mathematical physics**. Nauka.

[63] V.E. Nakoryakov and I.P. Shreiber, **A model for propagation of distribution in a vapor-liquid mixture***,* High Temperature, **17**, (1979),pp.798-803.

[64] G.A.Naribori and A. Sedov. **Burgers-Kortewer-de Vries equation for viscoelastic rods paltes***,* J. Math. anal. Appl. 32 (1970), 661-677.

[65] Naumkin, P. I. y Shishmarev, I. A. (1994). **Nonlinear Nonlocal Equations in the Theory of Waves**. Translations of Mathematical Monographs. Vol. 133. American Mathematical Society: Providence, RI.

[66] P.I. Naumkin and I.A. Shishmarev**. Nonlinear Nonlocal Equations in the Theory of Waves***,* Transl. of Math. Monographs, AMS, Providence, R.I., 133, 1994, 209-210.

[67] P.I. Naumkin and I.A. Shishmarev. **Asymptotic as time tends to infinity of solutions to the nonlinear equations with large initial data**. Matematicheskie Zametki 59 (1996), no. 6, 855-864.

[68] P.I. Naumkin and I.A. Shishmarev**. Asymptotics relationship as** $t \to \infty$ **between solutions to some nonlinear equations I, II**, Differential Equations 30 (1994), 806-814; 1329-1340.

[69] **A. Novick-Cohen and G.I. Sivashinsky.** *On the solidification from of a dilute binary alloy: thermal diffusitity effects and breathing solutions,* Phys. D 20 (986), 237-258.

[70] L.A. Ostrovsky, **Short-wave asymptotics for weak-shock waves and solitons in Mechanics**, Int. J. Non-Linear Mechanics, **11** (1976), pp. 401 - 416.

[71] E. Ott and R.N. Sudan, **Nonlinear theory of ion acoustic waves with Landau damping**, Phys. Fluids, **12,** no. 11 (1969), pp. 2388 - 2394.

[72] K. B. Oldham y J.Spanier. **The Fractional Calculus**. **Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order**. Dover. Nueva York, 2002.

[73] Michael Reed and Barry Simon. **Functional Analysis**, Department of Mathematics Duke University and Department of Mathematics and Physics Princeton University, Academic Press. INC. San Diego, California, 1980.

[74] M. Riesz. **L'intégral de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy**. Acta Math. 81, 1.1949.

[75] O.V. Rudenko and S.T. Soluyan. **Theoretical foundations of nonlinear acoustic**, "Nauka", Moscow, 1975; English trasl., Consultants Bureau. New York and London, 1977.

[76] S. G. Samko, A. A. Kilbas y O. I. Marichev. **Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications**. Gordon and Breach Science Publishers. Amsterdan, 1983.

[77] Sánchez, S. I. y Naumkin, P. **On the critical nongauge invariant nonlinear Schrödinger equation**. Discrete Contin. Dyn. Syst. 30 (2011), no. 3, 807–834. (Reviewer: Yuichiro Kawahara) 35Q55 (35B40)

[78] Sánchez, S. I., Kaikina, E. y Naumkin, P. **Onlinear nonlocal Schrödinger type equations on a segment**. SUT J. Math. 40 (2004), no. 1, 75–90. (Reviewer: Olivier J. Goubet) 35Q55 (35B40)

[79] M.E. Schonbek**. Lower bounds of rates of decay for solutions to the Navier-Stokes equations**, J. Amer. Math. Soc. 4 (1991), no.3, 423-449.

[80] Ian N. Sneddon**. The Use of integral Transforms**, Simson Professor of Mathematics, University of Glasgow, McGraw-Hill Book Company. United States of America, 1972.

[81] W.A. Strauss. **Nonlinear scattering at low energy**, J. Funct. Anal. 41 (1981), pp. 110-133.

[82] Sulem, C., Sulem, P.-L.: **The Nonlinear Schrödinger Equation, Self-Focusing and Wave Collapse**, Applied Mathematical Sciences, vol. 139. Springer, Nueva York (1999)

[83] A.G. Sveshnikov, A. N. Tikhonov. **The Theory of Functions of a Complex Variable**. MIR. Moscu, 1971, 51-56, 216-240.

[84] M.I. Vishik. **Asymptotic Behavior of Solutions of Evolutionary Equations**, Lezioni Lincee, Cambridge University Press Cambridge, 1992.

[85] V. S. Vladimirov. **Equations of Mathematical Physics**. E. Yankovsky. Moscow, 1996.

[86] G.B. Whitham**. Linear and Nonlinear Waves**, Wiley, N.Y., 1974.

[87] David Vernon Widder. **The Laplace transform**. Princeton University Press, 1946.

[88] E. Zuazua. **A dynamical system approach to the self-similar large time behavior in scalar convection-diffusion equation**, J. Diff. Eqs. 108 (1994). 1-35.

[89] E. Zuazua. **Some recent results on the large time behavior for scalar parabolic conservation laws, in. Elliptic and Parabolic Problems**. Proc, 2nd European Conference, 325 (1995), 251-263.