Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

TEOREMAS DE BORSUK-ULAM

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A

ERWING OMAR FLORES JAIMES

DIRECTOR DE TESIS

DR. CARLOS PRIETO DE CASTRO

2014

Universidad Nacional Autónoma de México
UNAM
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del tutor
Doctor
Carlos
Prieto
de Castro

2. Datos del sinodal 1
Doctor
Sergey
Antonyan

3. Datos del sinodal 2
Doctor
Alberto León
Kushner
Schnur

4. Datos del sinodal 3
Doctor
Oscar Alfredo
Palmas
Velasco

5. Datos del sinodal 4
M. en C.
Juan Carlos
Fernández
Morelos

Introducción

El objetivo de esta tesis es presentar de manera más comprensible la demostración del teorema de Borsuk y Ulam dada por Albrecht Dold y publicada en [2]. El teorema dice lo siguiente:

Teorema *Si una aplicación* $f : S^m \longrightarrow S^n$ *conmuta con ciertas acciones libres de un grupo finito no trivial en las esferas* S^m, S^n *entonces* $n \geq m$. *Si* $n = m$ *entonces* f *no es nulhomotópica.*

Para la demostración hará falta probar dos proposiciones.

En la primera abordaremos la discusión de cómo definir el grado de ciertas aplicaciones, para posteriormente, con base en el grado, definir el índice de punto fijo. El teorema de Sard jugará un rol muy importante en esta definición, ya que sin él no podríamos extender una primera definición de grado a una más general, haciendo uso de la existencia de valores regulares. Enseguida, usaremos las propiedades de homotopía del índice, así como el teorema de transversalidad de Thom y la teoría de levantamiento de aplicaciones para dar fin a la primera proposición, la cual nos dice qué condiciones le podemos poner a una aplicación para que su índice de punto fijo tenga un determinado valor.

En la segunda proposición nos interesa demostrar la existencia de dos aplicaciones de una esfera en sí misma, que conmuten con una acción libre de un grupo en ella. Para esto echaremos mano de la teoría de haces y de complejos simpliciales.

Finalmente utilizamos todas estas herramientas para presentar la prueba de Dold de manera más completa y comprensible.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo lo que se busca es que el lector se familiarice con los temas que serán usados en los siguientes capítulos, además de dar la prueba del teorema de Sard, el cual es de gran importancia en la topología diferencial.

1.1. Particiones de la unidad

Definición 1.1.1. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto cerrado y $V \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto que contiene a A, o sea $A \subset V \subset \mathbb{R}^n$. Una* ***función chipote*** *de A en V es una función lisa (o sea, que tiene derivadas continuas de todos los órdenes) $h : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, 1]$, que en A es constante igual a 1 y fuera de V es constante igual a 0.*

Ejemplo 1: Construyamos una función chipote de $[-1, 1]$ en $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, para esto definimos:

$$\alpha(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Esta función es lisa, pues la función $\varphi(x) = e^{-1/x^2}$ tiene por derivada; $\varphi'(x) = 2x^{-3}e^{-1/x^2}$, entonces $\varphi''(x) = (-6x^{-4} + 4x^{-6})e^{-1/x^2}$, así, en el caso general, podemos observar que $\varphi^{(n)}$ (la enésima derivada de φ) es $P_n(x^{-1}) \cdot e^{-1/x^2}$, donde $P_n(x^{-1})$ es un polinomio en x^{-1}. Podemos notar también que $1/x^t \cdot e^{-1/x^2} \to 0$ cuando $x \to 0^+$, de donde $\varphi^{(n)}(x) \to 0$ cuando $x \to 0^+$, tenemos pues, que $\alpha(x)$ es lisa, ya que tiene derivadas continuas de todos los órdenes.

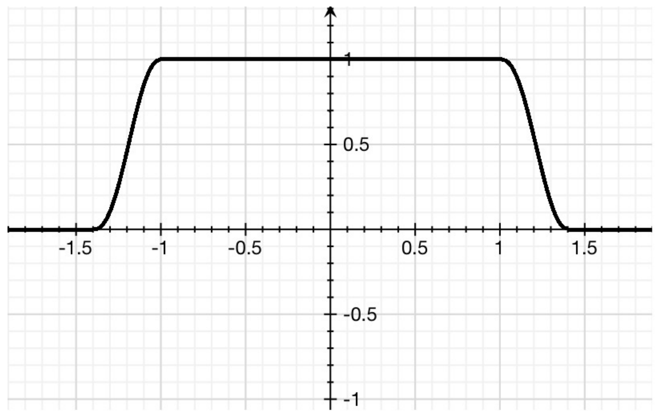

Figura 1.1: Función chipote

Consideremos ahora la función β, que también es lisa

$$\beta(x) = \frac{\alpha(1-x)}{\alpha(1-x)+\alpha(x)},$$

esta función es tal que

$$\begin{cases} \beta(x) = 1 & \text{si } x \leq 0, \\ 0 < \beta(x) < 1 & \text{si } 0 < x < 1, \\ \beta(x) = 0 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Consideremos la función $\gamma(x) = \beta(x^2-1)$. Para $x \in [-1,1]$ se tiene que $\gamma(x) = \beta(x^2-1) = 1$, y para $x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \bigcup (\sqrt{2}, \infty)$ se tiene $\beta(x^2-1) = 0$, entonces γ es una función chipote de $[-1,1]$ en $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, ver figura1.1.

Ejemplo 2: Consideremos $A = B(a,r)$ una bola en $\mathbb{R}^n$, y una bola abierta un poco más grande, $V = \overset{\circ}{B}(a,s)$, con $r < s$, entonces

$$h(x) = \beta\left(\frac{\|x-a\|^2 - r^2}{s^2 - r^2}\right) \tag{1.2}$$

es una función chipote de A en V, pues si $x \in A$ entonces $\|x-a\|^2 - r^2 < 0$ y $h(x) = 1$ y si $x \in V$ el numerador es mayor que el denominador y $h(x) = 0$.

Definición 1.1.2. *Sea $\mathcal{V}$ un sistema arbitrario de conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^n$ y $X = \bigcup\limits_{V\in\mathcal{V}} V$, X mismo es un abierto de $\mathbb{R}^n$. Una* ***partición de la unidad subordinada a*** $\mathcal{V}$ *es una familia de funciones lisas $\pi_V : X \longrightarrow [0,1]$ con las siguientes propiedades.*

1. *La función π_V se anula en $X \setminus V$, o sea, sólo es positiva en V.*

2. *Cada punto $x \in X$ tiene una vecindad en la cual casi todas las funciones π_V se anulan, o sea, sólo un número finito de las funciones toman valores positivos.*

3. $\sum\limits_{V\in\mathcal{V}} \pi_V(x) = 1$. *Por la propiedad 2 la suma tiene un número finito de términos para x fija, esta propiedad aclara la designación de partición de la unidad.*

El siguiente teorema es útil para los siguientes resultados, pero antes de probarlo demostraremos dos lemas.

Teorema 1.1.3. *Para cada sistema $\mathcal{V}$ de conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^n$ existe una partición de la unidad subordinada a él.*

Lema 1.1.4. *Sea $\mathcal{V}$ un sistema de conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^n$, entonces hay en $\mathbb{R}^n$ dos sucesiones de bolas $B(a_j, r_j) \subset B(a_j, s_j)$, $\quad 0 < r_j < s_j, j = 1, 2, 3...$ tales que se cumple lo siguiente.*

1. *Cada una de las bolas $B(a_j, s_j)$ está contenida en el menos uno de los conjuntos $V \in \mathcal{V}$.*

2. *Cada punto $x \in X = \bigcup\limits_{V\in\mathcal{V}} V$ yace en el interior de al menos una de las bolas $B(a_j, r_j)$.*

Demostración. Consideremos todos los puntos $a \in \mathbb{Q}^n$ y todos los números racionales $s > r > 0$ para los cuales $B(a, s)$ está contenido en al menos una $V \in \mathcal{V}$, o sea, de modo que *1* se satisface. Como $\mathbb{Q}^n$ es numerable, podemos ordenar el conjunto de las ternas (a, r, s) en una sucesión $\{a_j, r_j, s_j\}$ con j = 1,2,3.... Vamos a probar que se satisface *2*. Sea $x \in X$, x yace en alguno de los conjuntos $V \in \mathcal{V}$, digamos $x \in V_0$, como V_0 es abierto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset V_0$, luego elegimos $a \in \mathbb{Q}^n$ un punto racional y s, r números racionales de modo que

$$\|x - a\| < r < s < \varepsilon - \|x - a\|, \tag{1.3}$$

así, $x \in \overset{\circ}{B}(a, r)$. Sólo hay que mostrar que (a, r, s) está en la sucesión $\{a_j, r_j, s_j\}$ o sea, $B(a, s)$ está contenida en una V. Tenemos por (1.3) que los puntos $z \in B(a, s)$ satisfacen $\|z-x\| \leq \|z-a\|+\|x-a\| < s+\|x-a\| < \varepsilon$, o sea, $z \in B(x.\varepsilon) \subset V_0$, así $B(a, s) \subset V_0$. □

Lema 1.1.5. *Sea $\mathcal{V}$ un sistema de conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^n$ entonces existe una sucesión $\{V_j\}$ de conjuntos en $\mathcal{V}$ y una sucesión de funciones lisas $\eta_j : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, \infty), j = 1, 2, 3...,$ con las siguietes propiedades:*

1. *La función η_j se anula fuera de V_j para toda $j = 1, 2, 3 \ldots$.*
2. *Cada punto $x \in X = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V$ tiene una vecindad en la cual casi todas las η_j se anulan*[1]*.*
3. *$\forall x \in X$, $\sum_{j=1}^{\infty} \eta_j(x) > 0$, o sea, existe al menos una j para la cual $\eta_j(x) > 0$.*

Tenemos en particular que $X = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V = \bigcup_{j=1}^{\infty} V_j$, pasemos a la prueba del lema.

Demostración. Consideremos las bolas construidas en el lema anterior, cada bola $B(a_j, s_j)$ está contenida en al menos una $V \in \mathcal{V}$, escogemos una y la llamamos V_j, después tomamos funciones chipote $h_j : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, 1]$ de $B(a_j, r_j)$ en $\overset{\circ}{B}(a_j, s_j)$, digamos, como en (1.2). Estas funciones h_j se anulan en $\mathbb{R}^n \setminus B(a_j, s_j)$, por tanto también en $\mathbb{R}^n \setminus V_j$ pero en general no cumplen las condiciones *1* y *2*, así que tenemos que modificarlas un poco, definimos $\eta_j : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty)$ como:

$$\eta_j(x) = \alpha(h_j(x) - \sum_{\nu < j} h_\nu(x)),$$

con α como se definió en (1.1). Estas funciones satisfacen *1* pues si $h_j(x) = 0$, entonces $\eta_j(x) = 0$ ya que $\alpha(t) = 0$ si $t \leq 0$. Ahora consideremos k un índice fijo y la bola $B(a_k, r_k)$, ahí $h_k(x) = 1$. Para $j > k$ y $x \in B(a_k, r_k)$ se tiene que $h_j(x) - \sum_{\nu<j} h_\nu(x) \leq h_j(x) - 1 \leq 0$, pues $1 \leq \sum_{\nu<j} h_\nu(x)$. Tenemos entonces que cada $x \in X = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V = \bigcup_{j=i}^{\infty} \overset{\circ}{B}(a_j, r_j)$ tiene una vecindad en la que casi

[1] Todas excepto un número finito de las η_j.

todas las η_j se anulan. Esto prueba *2*.

Para probar *3* notemos que para cada $x \in X$ hay una j para la cual $h_j(x) > 0$, basta con que j sea tal que $x \in B(a_j, r_j)$ porque así $h_j(x) = 1$. Si tomamos la mínima de estas j, tenemos que $h_j(x) > 0$ y $h_\nu(x) = 0$ para $\nu < j$, entonces $\eta_j(x) = \alpha(h_j(x)) > 0$, que es lo que se quería probar. $\square$

Notemos que en la sucesión de las V_j puede haber repeticiones, es decir, puede ser que $V_j = V_i$ aunque $j \neq i$, de hecho si $\mathcal{V}$ es un conjunto finito deben existir dichas repeticiones. Con ayuda del lema anterior ya podemos probar el teorema 1.1.3.

Demostración. Consideremos las funciones lisas $\eta_j : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, \infty)$ y los conjuntos $V_j \in \mathcal{V} \quad j = 1, 2, 3...$ construidos en el lema anterior y juntemos aditivamente las funciones η_j que corresponden a la misma $V_j = V$ en una función $\eta_V : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, \infty)$ como sigue:

$$\eta_V(x) = \sum_{V_j = V} \eta_j(x).$$

Esta suma es no vacía para las $V \in \mathcal{V}$ que aparecen en la sucesión $\{V_j\}$ y si V no pertenece a $\{V_j\}$ definimos $\eta_V \equiv 0$.

Como cada $x \in X$ tiene una vecindad en la cual casi todas las η_j se anulan, entonces localmente la suma $\sum_{V_j = V} \eta_j$ tiene un número finito de términos, o sea, localmente $\sum_{V_j = V} \eta_j = \eta_V$ es una suma finita de funciones lisas, por lo tanto η_V es lisa, además en esta vecindad de x se anulan casi todas las η_V, pues estas se obtienen de juntar algunas η_j.

La función η_V se anula fuera de V, pues cada η_j se anula fuera de $V_j = V$, con esto ya tenemos que las η_V satisfacen los incisos *1* y *2* de la definición 1.1.2.

Por el inciso *3* del lema anterior 1.1.5, tenemos que $\sum_{V \in \mathcal{V}} \eta_V = \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j > 0$ para todo $x \in X$, entonces para $x \in X$ podemos dividir entre $\eta(x) = \sum_{V \in \mathcal{V}} \eta_V$ y obtener funciones

$$\pi_V(x) = \frac{\eta_V(x)}{\eta(x)},$$

que claramente siguen satisfaciendo *1* y *2* y además,

$$\sum_{V\in\mathcal{V}} \pi_V(x) = \sum_{V\in\mathcal{V}} \frac{\eta_V(x)}{\eta(x)} = \frac{\sum\limits_{V\in\mathcal{V}} \eta_V(x)}{\eta(x)} = \frac{\sum\limits_{V\in\mathcal{V}} \eta_V(x)}{\sum\limits_{V\in\mathcal{V}} \eta_V(x)} = 1.$$

□

Corolario 1.1.6. *Cada conjunto cerrado $A \subset \mathbb{R}^n$ tiene una función chipote en cada vecindad abierta U.*

Demostración. Tenemos que $V_1 = U, V_2 = \mathbb{R}^n \smallsetminus A$ forman un sistema $\mathcal{V}$ de dos conjuntos abiertos y $V_1 \cup V_2 = \mathbb{R}^n$. El teorema anterior nos da una partición de la unidad subordinada a él, es decir, dos funciones lisas π_1 y π_2 con $\pi_1 + \pi_2 = 1$ y $\pi_1|_{\mathbb{R}^n \smallsetminus U} = 0$, $\pi_2|_A = 0$, o sea $\pi_1|_A = 1$. La función $\pi_1 : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, 1]$ es así una función chipote de A en U. □

Podemos refinar un poco este resultado de la siguiente manera.

Corolario 1.1.7. ***(y definición)*** *Sea A un conjunto cerrado y $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto que contiene a A. Entonces existe una* ***función chipote fina*** *$h' : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, 1]$ de A en U, es decir, que incluso en una vecindad de A es constante igual a 1 y en una vecindad de $\mathbb{R}^n \smallsetminus U$ es constante igual a 0.*

Demostración. Partimos de una función chipote arbitraria h de A en U y se toma después una función chipote h' de $A' = h^{-1}[2/3, 1]$ en $U' = h^{-1}(1/3, 1]$. Esta será entonces 1 en la vecindad de $h^{-1}(2/3, 1)$ de A y se anulará en la vecindad $h^{-1}[0, 1/3)$ de $\mathbb{R}^n \smallsetminus U$. □

1.2. Teoremas de aproximación

Teorema 1.2.1. *Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto no vacío, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y $\varepsilon > 0$. Entonces hay una función lisa $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon$ para toda $x \in X$.*

Demostración. Para cada número entero $i \in \mathbb{Z}$ sea

$$V_i = \{x \in X \mid |f(x) - i\varepsilon| \leq \varepsilon\} = f^{-1}((i-1)\varepsilon, (i+1)\varepsilon),$$

este es un conjunto abierto por ser f continua, cada punto $x \in X$ está en al menos uno de los conjuntos V_i, pues $\{((i-1)\varepsilon, (i+1)\varepsilon)\}_{i\in\mathbb{Z}}$ cubre a $\mathbb{R}$ y como f es continua entonces $\{f^{-1}((i-1)\varepsilon, (i+1)\varepsilon)\}_{i\in\mathbb{Z}}$ cubre a X. Entonces existe $\{\pi_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ una partición de la unidad subordinada al sistema $\mathcal{V} = \{V_i\}$, así

$$g(x) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} i\varepsilon\pi_i(x)$$

es la aproximación buscada. Por la propiedad *3* de partición de la unidad se tiene que para x fijo, $g(x)$ tiene un número finito de términos, además $g(x)$ es lisa, porque las π_i son lisas. Veamos que $|f(x)-g(x)| \leq \varepsilon$ para toda $x \in X$.

Tomemos $x \in X$ fija, así $f(x)$ yace exactamente en uno de los intervalos $[k\varepsilon, (k+1)\varepsilon)$ con $k \in \mathbb{Z}$, así x no está en V_i, a menos que $i = k$ o $i = k+1$, entonces $\pi_i(x) = 0$, a menos que $i = k$ o $i = k+1$, y ya que estamos trabajando con una partición de la unidad se tiene que $\pi_k(x) + \pi_{k+1}(x) = 1$.

Entonces por la definición de g,

$$\begin{aligned} g(x) &= k\varepsilon\pi_k(x) + (k+1)\varepsilon\pi_{k+1}(x) \\ &= k\varepsilon(\pi_k(x) + \pi_{k+1}(x)) + \varepsilon\pi_{k+1}(x) \\ &= k\varepsilon + \varepsilon\pi_{k+1}(x). \end{aligned}$$

Como $\pi_{k+1}(x) \in [0,1]$, entonces $g(x) \in [k\varepsilon, (k+1)\varepsilon]$ y se concluye que

$$|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon.$$

□

Teorema 1.2.2. *Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto no vacío, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y sea $\varepsilon : X \longrightarrow (0, \infty)$ una función continua. Entonces existe una función lisa $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon(x)$ para toda $x \in X$.*

Demostración. Para cada número real $r \in \mathbb{R}$ sea

$$V_r = \{x \in X \mid |f(x) - r| < \varepsilon(x)\},$$

este conjunto es abierto por ser f y ε continuas. Cada punto $x \in X$ yace en al menos uno de los conjuntos V_r, por ejemplo $x \in V_{f(x)}$, por lo tanto $\bigcup_{r \in \mathbb{R}} V_r = X$.

Por el teorema 1.1.3 podemos tomar una partición de la unidad $\{\pi_r\}_{r \in \mathbb{R}}$ subordinada a $\mathcal{V} = \{V_r\}_{r \in \mathbb{R}}$ y definir $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ con

$$g(x) = \sum_{r \in \mathbb{R}} r\pi_r(x).$$

Por la propiedad *3* de partición de la unidad se tiene que para cada $x \in X$, $g(x)$ tiene un número finito de términos, y dado que las π_i son lisas, entonces $g(x)$ también es lisa. Como $\sum_{r\in\mathbb{R}} \pi_r(x) = 1$, entonces

$$|f(x) - g(x)| = |f(x) \sum_{r\in\mathbb{R}} \pi_r(x) - \sum_{r\in\mathbb{R}} r\pi_r(x)| = |\sum_{r\in\mathbb{R}} (f(x) - r)\pi_r(x)|.$$

Así, tenemos que de todas las funciones π_r, por lo menos se anulan en x aquellas para las cuales $|f(x) - r| \geq \varepsilon(x)$, pues en este caso x no está en V_r. Por lo tanto la última ecuación es menor o igual que

$$\sum_{r\in\mathbb{R}} |f(x) - r|\pi_r(x) \leq \sum_{r\in\mathbb{R}} \varepsilon(x)\pi_r(x) = \varepsilon(x),$$

esto último porque $\sum_{r\in\mathbb{R}} \pi_r(x) = 1$. Por lo tanto $|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon(x)$ $\square$

Teorema 1.2.3. *Sean $X \subset \mathbb{R}^n$, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varepsilon : X \longrightarrow (0, \infty)$ como en el teorema enterior, sea también $A \subset \mathbb{R}^n$ cerrado tal que f es lisa en una vecindad de $A \cap X$. Entonces existe una función lisa $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ que coincide con f en $A \cap X$, o sea $g|_{A\cap X} = f|_{A\cap X}$, y además, tal que $|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon(x)$ para toda $x \in X$.*

Demostración. Partiremos de una aproximación lisa $\gamma : X \longrightarrow \mathbb{R}$, como nos la da el teorema anterior 1.2.2, o sea, $|f(x) - \gamma(x)| \leq \varepsilon(x)$. Deseamos modificarla a una vecindad de A.

Por hipótesis f ya es lisa en una vecindad de $A \cap X$, entonces existe un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ que contiene a A y es tal que $f|_{U\cap X}$ es lisa. Tomemos una función chipote fina $h' : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, 1]$ de A en U como dice el corolario 1.1.7 y sea $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \gamma(x) + h'(x)(f(x) - \gamma(x)).$$

Por ser h' una función chipote fina, se anula en una vecindad V de $\mathbb{R} \setminus U$, así $g|_{V\cap X} = \gamma|_{V\cap X}$ es lisa. Se tiene además que $g|_{U\cap X}$ es claramente lisa, por lo tanto $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es lisa. Luego, si $x \in A \cap X$ entonces $h'(x) = 1$, y tenemos que

$$g(x) = \gamma(x) + f(x) - \gamma(x) = f(x),$$

finalmente, para todo $x \in X$, como $1 - h'(x) \leq 1$, entonces

$$
\begin{aligned}
|f(x)-g(x)| &= |f(x)-\gamma(x)-h'(x)(f(x)-\gamma(x))| \\
&= |(1-h'(x))(f(x)-\gamma(x))| \\
&= (1-h'(x))|(f(x)-\gamma(x))| \\
&\leq |(f(x)-\gamma(x))| \\
&\leq \varepsilon(x).
\end{aligned}
$$

□

Teorema 1.2.4. *Sean $X \subset \mathbb{R}^n, A \subset \mathbb{R}^n$ cerrado y Y tal que $X \subset Y \subset \mathbb{R}^n$. Sea $f : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua, que es lisa en una vecindad de $A \cap X$. Finalmente, sea $\varepsilon : Y \longrightarrow [0, \infty)$ una función continua que es positiva exactamente en X, es decir $X = \varepsilon^{-1}(0, \infty)$. Entonces existe una función continua $g : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ que es lisa en X y es tal que $|f(y) - g(y)| \leq \varepsilon(y)$ para toda $y \in Y$ y que $g(a) = f(a)$ para toda $a \in A$, diremos que g es un **alisamiento** de f.*

Demostración. Aplicamos primero el teorema 1.2.3 a $f|_X$ para encontrar una función lisa $\gamma : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $|f(x) - \gamma(x)| \leq \varepsilon(x)$ para $x \in X$ y $\gamma(a) = f(a)$ para $a \in X \bigcap A$. Después se define $g : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ como sigue

$$
g(y) = \begin{cases} \gamma(y), & \text{si } y \in X, \text{ o sea } \varepsilon(y) > 0, \\ f(y), & \text{si } y \in Y \setminus X, \text{ o sea } \varepsilon(y) = 0. \end{cases}
$$

Entonces si $y \in Y \smallsetminus X$ tenemos que $\varepsilon(y) = 0$ y $|f(y) - g(y)| \leq \varepsilon(y) = 0$. Por lo tanto solo falta ver que g es continua en $Y \smallsetminus X = \varepsilon^{-1}(0)$ para que tenga las propiedades deseadas.

Sea $z \in Y \smallsetminus X$, se tiene que para toda $y \in Y$

$$
\begin{aligned}
|g(y)-g(z)| &\leq |g(y)-f(y)| + |f(y)-f(z)| + |f(z)-g(z)| \\
&\leq \varepsilon(y) + |f(y)-f(z)| \\
&\leq |\varepsilon(y)-\varepsilon(z)| + |f(y)-f(z)|,
\end{aligned}
$$

dado que ε y f son continuas en z, la última expresión tiende a cero cuando y tiende a z, así también la primera expresión, por lo tanto g es continua en z. □

Hasta ahora sólo hemos trabajado con funciones $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, pero nos interesan aplicaciones $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))$, donde las f_i's son las componentes de f, y f es lisa si y sólo si cada componente lo es. Aproximar una aplicación continua $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^m$ por una aplicación lisa $g : X \longrightarrow \mathbb{R}^m$ significa aproximar la función continua f_i por una función lisa g_i para cada $i = 1, 2, \ldots, m$.

1.3. Aplicaciones de rango máximo

Definición 1.3.1. *Sean X y X' subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$. Una aplicación lisa $f : X \longrightarrow X'$ se llama* ***difeomorfismo****, si existe una aplicación lisa $g : X' \longrightarrow X$ tal que $gf(x) = x$, $fg(x') = x'$ para toda $x \in X, x' \in X'$.*

En otras palabras, f debe ser invertible y su inversa $g = f^{-1}$ también debe ser lisa.

Definición 1.3.2. *Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación lisa ($X \subset \mathbb{R}^n$ abierto) y $a \in X$. Decimos que f es un* ***difeomorfismo local*** *alrededor de a, si f aplica a una vecindad abierta U de a en X, difeomorfamente sobre $f(U)$.*

Sabemos del álgebra lineal que una aplicación lineal $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es invertible si y sólo si el determinante de su matriz es diferente de cero. Un análogo para aplicaciones lisas de este hecho es el teorma de la aplicación inversa.

Teorema 1.3.3. *Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación lisa ($X \subset \mathbb{R}^n$ abierto). Entonces f es un difeomorfismo local alrededor de $a \in X$ si y sólo si $\det(df_a) \neq 0$ (donde df_a denota la derivada de f en el punto a), o sea, si y sólo si $df_a : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es invertible.*

No incluimos la demostración de este teorema, pero es un resultado conocido de cálculo, y se puede consultar por ejemplo en [8].

Recordemos que el rango de una aplicación lineal $L : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es la dimensión de la imagen $L(\mathbb{R}^m)$ (no puede ser mayor que m o n).

Teorema 1.3.4. *Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación lisa ($X \subset \mathbb{R}^m$ abierto y $m \geq n$), y $a \in X$ un punto en el cual df_a tiene rango n. Entonces hay un difeomorfismo φ que aplica a una vecindad $U \subset \mathbb{R}^m$ del origen sobre una vecindad $\varphi(U) \subset X$ del punto a de tal forma que $\varphi(0) = a$ y $f\varphi(x_1, \ldots, x_m) - f(a) = (x_1, \ldots, x_n)$ para $x \in U$.*

Demostración. Por hipótesis, el jacobiano $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)$ $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$ tiene rango n en el punto a, por lo tanto, tiene n columnas linealmente independientes. Permutando (si es necesario) las coordenadas de $\mathbb{R}^m$, tenemos que, precisamente las primeras n columnas son linealmente independientes, es decir, la matriz $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)$ $i,j = 1,\ldots,n$. Podemos suponer además que $f(a) = 0$ (si no, sustituimos a f por $f - f(a)$). Definamos

$$\psi : X \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad \psi(x) = (f_1(x),\ldots,f_n(x),x_{n+1},\ldots,x_m).$$

Esta es una aplicación lisa cuya matriz funcional tiene la siguiente forma

$$\left(\begin{array}{c|ccc} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} & & * & \\ \hline & 1 & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 1 \end{array}\right) i,j = 1,\ldots,n.$$

Esta matriz de $m \times m$ tiene en el punto a el rango $n + (m - n) = m$, y por tanto es invertible. Por el teorema 1.3.3, ψ es un difeomorfismo local alrededor de a, y aplica a una vecindad de a difeomorfamente sobre una vecindad U de $\psi(a) = 0$. La aplicación inversa φ aplica a U difeomorfamente en una vecindad $\varphi(U)$ de a, y $\psi(\varphi(x)) = x$ para toda $x \in U$, pero $\psi(\varphi(x)) = (f_1(\varphi(x)),\ldots,f_n(\varphi(x)),x_{n+1},\ldots,x_m)$, así, $f_i(\varphi(x)) = x_i$ para $i = 1,\ldots,n$ como se afirmó. $\square$

Definición 1.3.5. *Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación lisa ($X \subset \mathbb{R}^m$ abierto). Decimos que un punto $x \in X$ es un* ***punto regular*** *de f si* $\mathrm{rango}(df_x)$ *es máximo, es decir, igual al mínimo entre m y n. Un punto $x \in X$ se llama* ***punto crítico*** *de f si* $\mathrm{rango}(df_x)$ *no es máximo, es decir, si es menor que el mínimo entre m y n. Supongamos que $y \in \mathbb{R}^n$ tiene la propiedad de que* $\mathrm{rango}(df_x)$ *es máximo para toda $x \in f^{-1}(y)$, es decir, cada punto en la preimagen de y es un punto regular, a tal punto y se le llama* ***valor regular*** *de f. Así, un valor regular de f es un punto $y \in \mathbb{R}^n$ en cuya preimagen no hay ningún punto crítico.*

Consideremos ahora $m = n$, es decir, $\mathbb{R}^n \supset X \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n$. Vamos a denotar por $Sf = \{x \in X \mid \mathrm{rango}(df_x) < n\}$ al conjunto de los puntos críticos de f y entonces $f(Sf)$ será el conjunto de valores críticos.

Lo que nos interesa estudiar es $\mathbb{R}^n \setminus f(Sf)$ que es el conjunto de los valores regulares de f. Veremos en la sección 1.5 que este conjunto es denso en $\mathbb{R}^n$.

Proposición 1.3.6. *Si y es un valor regular de f, entonces cada punto $x \in f^{-1}(y)$ tiene una vecindad abierta $V = V_x \subset \mathbb{R}^n$ a la cual aplica f difeomorfamente sobre una vecindad abierta $W_x = f(V_x)$ de y.*

Demostración. Como y es un valor regular entonces rango$(df_x) = n$ para todo $x \in f^{-1}(y)$ y sabemos que si esto pasa entonces $f|_{f^{-1}}(y)$ es un difeomorfismo, o sea que aquí f es invertible, entonces podemos aplicar el teorema de la aplicación inversa 1.3.3 □

Tenemos en particular que V_x no contiene puntos de $f^{-1}(y)$ a excepción de x mismo.

Proposición 1.3.7. *Si y es un valor regular de f, entonces el conjunto $f^{-1}(y)$ no tiene puntos de acumulación en X, es finito o numerable.*

Demostración. Si $x \in f^{-1}(y)$, entonces por la proposición anterior, x es el único punto de $f^{-1}(y)$ que está en V_x, así, $V_x \cap f^{-1}(y) = x$, por lo tanto x no es un punto de acumulación. Tenemos pues, que $f^{-1}(y)$ es un conjunto discreto, y sabemos que todo conjunto discreto es a lo más numerable. □

Proposición 1.3.8. *Si $f^{-1}(y)$ es finito, digamos $f^{-1}(y) = \{x_1, x_2, ..., x_p\}$, entonces los puntos x_j tiene vecindades abiertas ajenas, $V_j \subset X, V_i \cap V_j = \emptyset$ si $i \neq j$, a cada una de las cuales la aplica f sobre la misma vecindad abierta W de y.*

Demostración. Consideremos las vecindades abiertas V_{x_j} de x_j, para $j = 1, \dots p$ de la proposición 1.3.6. Se escogen vecindades abiertas ajenas $V'_j \subset V_{x_j}$ de x_j, y se hace $W'_j = f(V'_j)$. Poniendo $W = \bigcap_{j=1}^{p} W'_j$ y $V_j = V'_j \cap f^{-1}(W)$ se obtienen las vecindades buscadas. □

Teorema 1.3.9. *Si $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una aplicación lisa ($X \subset \mathbb{R}^n$ abierto), $Y \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto que contiene a $f(X)$, y si $f : X \longrightarrow Y$ es cerrada. Entonces cada valor regular $y \in Y$ tiene una vecindad abierta $W \subset \mathbb{R}^n$ tal que $f^{-1}(W)$ se descompone en un número finito de conjuntos abiertos ajenos $\widetilde{W}_1, ..., \widetilde{W}_p$, de los cuales cada uno es aplicado difeomorfamente por f sobre W. Cada valor regular $y \in Y$ tiene sólo un número finito de preimágenes; el número de puntos en $f^{-1}(y)$ es localmente constante como función de $y \in Y$.*

Demostración. Primero demostraremos que la imagen inversa $f^{-1}(y)$ de cada valor regular es finita. Supongamos que no es así; tomemos una sucesión de preimágenes $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}, x_j \in X, f(x_j) = y$ y para cada una de ellas una vecindad abierta $V_i \subset X$, a la que aplica difeomorfamente sobre la vecindad abierta $W_i = f(V_i) \subset \mathbb{R}^n$ de y (ver 1.3.6). Para cada i escogemos un punto $z_i \in V_i$ tal que $z_i \neq x_i, \|z_i - x_i\| < \frac{1}{i}, \|f(z_i) - y\| < \frac{1}{i}$. Como en V_i f es biyectiva entonces $f(z_i) \neq f(x_i) = y$, pero la sucesión $\{f(z_i)\}_{i=1}^{\infty}$ converge a y, en particular $\{f(z_i)\}_{i=1}^{\infty}$ no es un conjunto cerrado en Y. Por otro lado, la sucesión $\{z_i\}_{i=1}^{\infty}$ no tiene puntos de acumulación, ya que, si z fuera punto de acumulación de $\{z_i\}_{i=1}^{\infty}$ entonces también lo sería de $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, pues $\|z_i - x_i\| < \frac{1}{i}$, lo que contradice a 1.3.7.

Ya que $\{z_i\}_{i=1}^{\infty}$ no tiene puntos de acumulación en X, entonces este es un conjunto cerrado en X, y como $\{f(z_i)\}_{i=1}^{\infty}$ no es cerrado, tenemos una contradicción al hecho de que f aplica conjuntos cerrados en conjuntos cerrados, de este modo, concluimos que $f^{-1}(y)$ es finito.

Vamos a construir ahora la vecindad W de y deseada. Ya sabemos que $f^{-1}(y)$ es finito, digamos que $f^{-1}(y) = \{x_1, ..., x_p\}$. Por 1.3.8, los puntos x_j tienen vecindades ajenas $V_j \subset X$ a cada una de las cuales aplica f difeomorfamente sobre la misma vecindad abierta W' de y. Para cada $\varepsilon > 0$ consideremos el conjunto $W_\varepsilon = \{\xi \in W' \mid \|y - \xi\| < \varepsilon\}$, esta es una vecindad abierta de y en W'. Afirmamos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $f^{-1}(W_\varepsilon) \subset \bigcup_{j=1}^{p} Vj$, para demostrarlo supongamos que no es así, es decir, supongamos que $f^{-1}(W_\varepsilon) \not\subset \bigcup_{j=1}^{p} V_j$ para toda $\varepsilon > 0$, entonces, no lo está en particular, para $\varepsilon = \frac{1}{\nu}$ con $\nu = 1, 2, ...$ Podemos escoger puntos $\xi_\nu \in W_{\frac{1}{\nu}}$ y $z_\nu \in f^{-1}(\xi_\nu)$ tales que $z_\nu \notin \bigcup_{j=1}^{p} Vj$ para $\nu = 1, 2, ...$ La sucesión $\{z_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ no tiene puntos de acumulación en X, de lo contrario, si z fuera un punto de acumulación, y puesto que $\lim_{\nu\to\infty}\{f(z_\nu)\} = y$, se tendria que $f(z) = y$, así, z sería uno de los puntos x_j, lo que es absurdo pues la sucesión $\{z_\nu\}$ no toca a la vecindad V_j. Ya que la sucesión $\{z_\nu\}$ no se acumula en X, es cerrada en X. Por ser f cerrada, la imagen $f\{z_\nu\} = \{\xi_\nu\}$ es cerrada en Y, y esto contradice el hecho de que $\lim_{\nu\to\infty}\{f(z_\nu)\} = y$. Así pues existe $\varepsilon > 0$ tal que $f^{-1}(W_\varepsilon) \subset \bigcup_{j=1}^{p} V_j$.

Vamos a construir nuestra vecindad deseada W como sigue: elegimos ε de tal modo que satisfaga la afirmación anterior, tomamos W_ε, y definimos $W = W_\varepsilon \subset W'$, así, $f^{-1}(W) \subset \bigcup_{j=1}^{p} V_j$, entonces $\widetilde{W} = f^{-1}(W) \cap V_j$ es abierto, f aplica difeomorfamente a $\widetilde{W}_j$ sobre W y $f^{-1}(W) = \bigcup_{j=1}^{p} \widetilde{W}_j$ como se deseaba. □

1.4. Conjuntos nulos

Recordaremos conceptos sobre conjuntos nulos (también conocidos como conjuntos de medida cero), que son intuitivamente fáciles de comprender y vamos a enunciar algunos resultados, cuyas demostraciones en algunos casos son sencillas y en otros un poco laboriosas, pero que de igual forma no son difíciles de seguir y entender. Las demostraciones de algunos de éstos pueden consultarse en [3], en la segunda unidad, sección 4.

Definición 1.4.1. *Un conjunto arbitrario A en $\mathbb{R}^n$ es un **conjunto nulo** (se dice también que tiene **medida cero**) si puede ser cubierto por una familia numerable de sólidos rectangulares (ya sean abiertos, cerrados o parcialmente cerrados), con volumen total arbitrariamente pequeño. Un sólido rectangular en $\mathbb{R}^n$ no es más que un producto cartesiano de n intervalos en $\mathbb{R}$ y su volumen es el producto de las longitudes de los n intervalos. Así, A es un conjunto nulo si, para cada $\varepsilon > 0$, existe una colección numerable $\{S_1, S_2, ...\}$ de sólidos rectangulares en $\mathbb{R}^n$ tales que A está contenido en la unión de ellos y $\sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{vol}(S_i) < \varepsilon$.*

Teorema 1.4.2.

i) Si $B \subset A \subset \mathbb{R}^n$ y A es un conjunto nulo, entonces también B es un conjunto nulo.

ii) Si $A_j \subset \mathbb{R}^n$ son conjuntos nulos para $j = 1, 2, ...$, entonces también $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ es un conjunto nulo.

iii) Permutando las coordenadas en $\mathbb{R}^n$ va a dar cada conjunto nulo en un conjunto nulo.

Teorema 1.4.3. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ una unión de una colección a lo más numerable de compactos y sea $n > 1$. Más aún, supongamos que para cada $t \in \mathbb{R}$ la **t-sección***

$$A_t = \{y \in \mathbb{R}^{n-1} \mid (t, y) \in A\} \tag{1.4}$$

de A es un conjunto nulo en $\mathbb{R}^{n-1}$. Entonces A mismo es un conjunto nulo, la figura 1.2 da una idea de esto.

Demostración. Fijémonos en la aplicación $\pi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\pi(x) = x_1$, que denota la proyección en la primera coordenada. Si suponemos que A es compacto entonces también $\pi(A)$ es compacto, y en particular acotado, es decir, existe una cota $\rho > 0$ tal que $A_t = \emptyset$ si $|t| \geq \rho$.

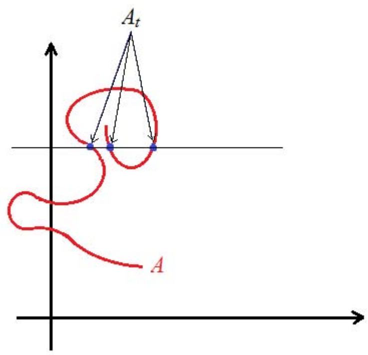

Figura 1.2: A es un conjunto nulo en $\mathbb{R}^2$

Sea $\varepsilon > 0$, sabemos que para cada t con $|t| < \rho$ hay una sucesión de prismas abiertos $\{Q_i^t\}_{i=1}^{\infty}$, con $Q_i^t \subset \mathbb{R}^{n-1}$ tal que $A_t \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i^t = V^t$ y $\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{vol}(Q_i^t) < \frac{\varepsilon}{4\rho}$. Notemos que no sólo $A_t \subset V^t$ sino que también $A_\tau \subset V^t$ para toda τ suficientemente cercana a t. Para probar esto consideremos el conjunto $A \setminus (\mathbb{R} \times V^t)$ que es un subconjunto compacto de A pues $\mathbb{R} \times V^t$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. Así pues, $\pi(A \setminus (\mathbb{R} \times V^t))$ es compacto y en particular cerrado.

Ya que $\tau \in \pi(A \setminus (\mathbb{R} \times V^t)) \Leftrightarrow (\tau, x_2, ..., x_n) \in A \setminus (\mathbb{R} \times V^t) \Leftrightarrow (x_2, ..., x_n) \notin V^t \Leftrightarrow A_\tau \not\subset V^t$ tenemos que $\pi(A \setminus (\mathbb{R} \times V^t)) = \{\tau \in \mathbb{R} \mid A_\tau \not\subset V^t\}$, cuyo complemento $\{\tau \in \mathbb{R} \mid A_\tau \subset V^t\}$ es abierto y contiene a t, y por lo tanto también contiene a un intervalo (t^-, t^+) alrededor de t, así pues

$$A_\tau \subset V^t \text{ para cada } \tau \in (t^-, t^+), \tag{1.5}$$

como queríamos. Como $|t| < \rho$ podemos tomar también $|t^-|, |t^+| < \rho$.

Por otro lado, ya que $\pi(A)$ es compacto, queda cubierto por un número finito de los intervalos (t^-, t^+), digamos que por los intervalos (t_j^-, t_j^+) para $j = 1, 2, ..., k$, omitiendo aquellos intervalos superfluos, es decir, de modo que $\pi(A)$ ya no queda cubierto por $k - 1$ de estos intervalos. Consideremos la colección numerable de prismas $Q_i^j = (t_j^-, t_j^+) \times Q_i^{t_j}$ para $j = 1, 2, ..., k$, $i = 1, 2, \ldots$. Cada punto $a \in A$ tiene la forma $a = (\pi(a), a')$ donde $a' \in A_{\pi(a)}$. El número $\pi(a)$ yace en al menos uno de los intervalos (t_j^-, t_j^+), así $a' \in A_{\pi(a)} \subset$

$V^{t_j} = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} Q_i^{t_j}$ por (1.5), por lo tanto $a = (\pi(a), a') \in (t_j^-, t_j^+) \times (\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} Q_i^{t_j}) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} Q_i^j$. Entonces los prismas Q_i^j con $j = 1, \dots, k$ e $i = 1, 2, \dots$ cubren a todo A. La suma de sus volúmenes es

$$\sum_{i,j} (Q_i^j) = \sum_{j=1}^{k} (t_j^+ - t_j^-) \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{vol}(Q_i^{t_j}) < \sum_{j=1}^{k} (t_j^+ - t_j^-) \frac{\varepsilon}{4\rho}.$$

Sólo nos faltaría probar que $\sum\limits_{j=1}^{k} (t_j^+ - t_j^-) < 4\rho$. Para esto numeremos a los intervalos según el tamaño de sus extremos izquierdos t_j^-, es decir tal que $t_j^- \leq t_{j+1}^-$ para toda j, se tiene también que $t_j^+ \leq t_{j+1}^+$, de otro modo el intervalo (t_{j+1}^-, t_{j+1}^+) sería superfluo. Por otro lado tenemos que $t_j^+ < t_{j+2}^-$, si no, se tendría que $t_j^- \leq t_{j+1}^- \leq t_{j+2}^- \leq t_j^+ \leq t_{j+1}^+ \leq t_{j+2}^+$ y el intervalo (t_{j+1}^-, t_{j+1}^+) sería superfluo.

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k} (t_j^+ - t_j^-) &= \sum_{j=1}^{k} (t_{j+1}^- - t_j^-) + \sum_{j=1}^{k} (t_j^+ - t_{j+1}^-) \\
&\leq \sum_{j=1}^{k} (t_{j+1}^- - t_j^-) + \sum_{j=1}^{k} (t_{j+2}^- - t_{j+1}^-) \\
&= t_{k+1}^- - t_1^- + t_{k+2}^- - t_2^- < 4\rho.
\end{aligned}$$

Esto demuestra el teorema 1.4.3 para A compacto.

Si A no fuera compacto de todos modos se tiene que $A = \bigcup\limits_{\nu=1}^{\infty} K_\nu$ con cada K_ν compacta, así, como claramente la t-sección $(K_\nu)_t \subset A_t$, se tiene que $(K_\nu)_t$ es un conjunto nulo por 1.4.2, por lo tanto K_ν es un conjunto nulo por la parte ya probada del teorema 1.4.3, y por 1.4.2 $A = \bigcup\limits_{\nu=1}^{\infty} K_\nu$ también es un conjunto nulo. □

Teorema 1.4.4. *Un conjunto nulo $A \subset \mathbb{R}^n$ no tiene puntos interiores ($\overset{\circ}{A} = \emptyset$), es decir, su complemento es denso, $\overline{\mathbb{R}^n \setminus A} = \mathbb{R}^n$.*

□

Ver [3] para la demostración.
A continuación presentamos algunos ejemplos de conjuntos nulos.

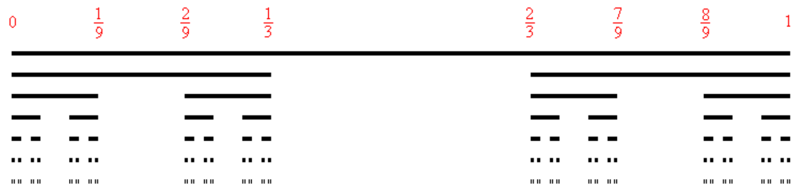

Figura 1.3: El conjunto de Cantor

1. $\emptyset$.
2. En $\mathbb{R}^n$, cualquier punto p.
3. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ el conjunto de números racionales.
4. El conjunto de Cantor (figura 1.3), que se obtiene de quitar primero a $[0,1]$ el tercio medio abierto, luego, a los dos intervalos restantes de longitud $1/3$ quitar nuevamente el tercio medio abierto, etc.

1.5. Teorema de Sard

El propósito de esta sección es demostrar el teorema de Sard, el cual tendrá un papel muy importante en la definición de grado y por lo tanto en la del índice de punto fijo; empezamos con la siguiente afirmación.

Proposición 1.5.1. *Todo conjunto abierto, todo conjunto cerrado, toda intersección de un conjunto abierto con un conjunto cerrado pueden ser expresados como una unión a lo más numerable de conjuntos compactos.*

$\square$

Teorema 1.5.2. ***(de Sard)*** *Si $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una aplicación lisa ($X \subset \mathbb{R}^m$ abierto) y si $Sf = \{x \in X \mid \text{rango}(df_x) < n\}$ es el conjunto de los puntos críticos de f, entonces su imagen $f(Sf) \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto nulo.*

Demostración. Recordemos que f está dada por n funciones lisas $f_i : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3 \ldots, n$. Haremos la demostración por inducción sobre m. Para tener una base de inducción cómoda, empezaremos con el espacio de dimensión cero $\mathbb{R}^0$, que consta de un solo punto, el que consideraremos como prisma de volumen 1. El único conjunto nulo en $\mathbb{R}^0$ es el vacío.

Si $n = 0$, entonces $Sf = \emptyset$, obviamente, así $f(Sf) = \emptyset$ es un conjunto nulo.

Si $n > 0$, entonces $f(Sf)$ consta de a lo más un punto y por tanto es también un conjunto nulo. Supongamos que el teorema es cierto para $m-1$.

Vamos a descomponer al conjunto Sf de los puntos críticos en varios subconjuntos y probaremos que cada una de estos es aplicado por f en un conjunto nulo. Para $p = 0, 1, 2 \ldots$, sea S_pf el conjunto de todos los puntos $a \in Sf$ en los cuales todas las derivadas parciales hasta la p-ésima incluso, se anulan, es decir,

$$S_pf = \{a \in Sf \mid \frac{\partial^l f_i}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_l}}(a) = 0, \forall\ l, i, j,\ 1 \leq l \leq p, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j_l \leq m\}$$

Notemos que estos conjuntos forman una sucesión de conjuntos anidados $Sf = S_0f \supset S_1f \supset S_2f \ldots$. Demostraremos consecutivamente los siguientes lemas

Lema 1.5.3. *$f(S_0f \smallsetminus S_1f)$ es un conjunto nulo.*

Lema 1.5.4. *$f(S_pf \smallsetminus S_{p+1}f)$ es un conjunto nulo para $p > 0$.*

Lema 1.5.5. *$f(S_kf)$ es un conjunto nulo para $k > (\frac{m}{n} - 1)$.*

Ya que $S(f) = (\bigcup_{p \geq 0}(S_pf \smallsetminus S_{p+1}f)) \bigcup S_kf$ quedará probado el teorema. Empecemos pues con el primer lema.

Demostración. (**De 1.5.3**) Si $n = 1$, entonces $S_0f = S_1f$, pues, si $a \in S_0f$ es un punto critico de f, entonces la matriz jacobiana tiene dimensión cero, es decir, sólo consta del vector cero, y se anulan todas las primeras derivadas parciales en a, así $a \in S_1f$, por lo tanto tenemos que $f(S_0f \smallsetminus S_1f) = \emptyset$. Supongamos que $n > 1$.

Sea $a \in S_0f \smallsetminus S_1f$. Entonces al menos una de las derivadas parciales $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \neq 0$. Supongamos que $i = j = 1$, o sea, $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) \neq 0$ (si no, permutamos las coordenadas, lo cual no afecta los conjuntos nulos).

Consideremos la siguiente aplicación lisa

$$h : X \longrightarrow \mathbb{R}^m,\ h(x) = (f_1(x), x_2, ..., x_m),$$

su matriz jacobiana tiene la forma

$$\left(\begin{array}{c|ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & & * & \\ \hline & 1 & & \\ \Large 0 & & \ddots & \\ & & & 1 \end{array} \right).$$

En el punto a su determinante es $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) \neq 0$. Así, por el teorema 1.3.3, h es un difeomorfismo alrededor de a y aplica a una vecindad abierta $V \subset X$ de a difeomorfamente en un abierto hV.

Si probamos que $f(S_0 f \cap V)$ es un conjunto nulo habremos terminado la demostración de 1.5.3, pues cada punto $a \in (S_0 f \smallsetminus S_1 f)$ tendrá una vecindad tal $V = V(a)$ y entre todas ellas por 1.1.5 hay una sucesión $\{V_j\}_{j=1}^{\infty}$, con $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} V_j = \bigcup\limits_{a} V(a)$,

$\Rightarrow (S_0 f \smallsetminus S_1 f) \subset \bigcup\limits_{a} V(a) = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} V_j$

$\Rightarrow (S_0 f \smallsetminus S_1 f) \subset S_0 f \cap (\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} V_j)$

$\Rightarrow (S_0 f \smallsetminus S_1 f) \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} (S_0 f \cap V_j)$

$\Rightarrow f(S_0 f \smallsetminus S_1 f) \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} f(S_0 f \cap V_j)$

y este último es es un conjunto nulo por 1.4.2

Probemos pues que $f(S_0 f \cap V)$ es un conjunto nulo. Para esto vamos a considerar la aplicación lisa $g = fh^{-1} : hV \longrightarrow \mathbb{R}^n$, que se distingue de $f|_V$ sólo por la transformación de coordenadas h; tenemos en particular que $S_0 g = h(S_0 f \cap V) = h(Sf \cap V)$, pues si $x \in h(Sf \cap V) \Rightarrow \exists y \in Sf \cap V$ tal que $h(y) = x \Rightarrow$ rango$(df_y) < n \Rightarrow$ rango$(d(fh^{-1})_x) < n \Rightarrow$ rango$(dg_x) < n \Rightarrow x \in S_0 g$, por otro lado, si $x \in S_0 g \Rightarrow$ rango$(dg_x) < n \Rightarrow$ rango$(d(fh^{-1})_x) < n$ con $h^{-1}(x) \in Sf \cap V \Rightarrow x \in h(Sf \cap V)$. Así, $g(S_0 g) = gh(S_0 f \cap V) = f(S_0 f \cap V)$. Tenemos que probar que $g(S_0 g)$ es un conjunto nulo. Escribamos los puntos de hV en la forma (t, y) con $t \in \mathbb{R}$, $y = (y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$, entonces $(t, y) = h(x) = (f_1(x), x_2, ..., x_m)$ con $x = h^{-1}(t, y) \in V$, en particular $t = f_1(x)$. Tenemos que

$$g(t, y) = gh(x) = fh^{-1}h(x) = f(x) = (t, f_2(x), ..., f_m(x)),$$

así, g conserva la primera coordenada. Podemos escribir

$$g(t,y) = (t, g_t(y)), \tag{1.6}$$

donde $g_t : (hV)_t \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ es una aplicación lisa que depende de t y $(hV)_t = \{y \in \mathbb{R}^{m-1} \mid (t,y) \in hV\}$ es la t-sección de hV (como en (1.4)).

Podemos aplicar a g_t la hipótesis de inducción, así, $g_t(S_0 g_t) \subset \mathbb{R}^{n-1}$ es un conjunto nulo para toda t. Por otro lado, por (1.6) notamos que la matriz funcional dg de g tiene la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & d(g_t) \end{pmatrix}.$$

Además $y \in S_0(g_t) \Leftrightarrow (t,y) \in S_0(g)$, es decir, $S_0(g_t) = (S_0 g)_t$, así, podemos notar nuevamente por (1.6) que

$$g_t(S_0(g_t)) = g_t((S_0 g)_t) = (g(S_0 g))_t.$$

Queremos aplicar 1.4.3, para esto sólo nos falfa checar que $g(S_0 g)$ es una unión a lo más numerable de conjuntos compactos, pero esto es fácil, ya que, $S_0 g$ es cerrado en el abierto hV y por 1.5.1, es una unión a lo más numerable de compactos, por lo tanto también $g(S_0 g)$. Ahora sí, por 1.4.3 $g(S_0)g$ es un conjunto nulo. $\square$

Demostración. (**De 1.5.4**) Sea $a \in (S_p f \setminus S_{p+1} f)$, entonces se anulan en el punto a todas las derivadas parciales de todas las f_i hasta la p-ésima, pero al menos hay una derivada parcial de orden $p+1$ que se no anula en el punto a; hay pues, al menos una derivada parcial de orden p $w : X \longrightarrow \mathbb{R}$ y una $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ tal que, $\frac{\partial w}{\partial x_j}(a) \neq 0$. Supongamos que $j = 1$ (si no, permutamos las coordenadas) y así $\frac{\partial w}{\partial x_1}(a) \neq 0$. Consideremos la aplicación lisa

$$h : X \longrightarrow \mathbb{R}^m,\ h(x) = (w(x), x_2, \dots, x_m).$$

Su determinante funcional en el punto a es $\frac{\partial w}{\partial x_1}(a) \neq 0$, por lo tanto por 1.3.3, h aplica a una vecindad abierta adecuada $V \subset X$ de a difeomorfamente en un abierto $hV \subset \mathbb{R}^m$. Si podemos probar que $f(S_0 f \bigcap V)$ es un conjunto nulo habremos terminado con 1.5.4, pues cada punto $a \in (S_p f \setminus S_{p+1} f)$

tendrá una vecindad tal $V = V(a)$ y entre todas ellas por 1.1.5 hay una sucesión $\{V_j\}_{j=1}^{\infty}$, con $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} V_j = \bigcup\limits_{a} V(a)$,

$$\Rightarrow (S_p f \setminus S_{p+1} f) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} (S_p f \cap V_j)$$

$$\Rightarrow f(S_p f \setminus S_{p+1} f) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} f(S_p f \cap V_j)$$

y este será nulo por 1.4.2. Demostremos que $f(S_p f \cap V)$ es nulo; tenemos que para $x \in (S_p f \cap V)$, $w(x) = 0$ pues w es una derivada parcial de orden p, por lo tanto $h(x) = (0, x_2, \ldots, x_m)$ y

$$f(x) = (fh^{-1})(h(x)) = fh^{-1}(0, x_2, \ldots, x_m) = \gamma(x_2, \ldots, x_m)$$

donde $\gamma : (hV)_0 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es la aplicación lisa definida por la última igualdad; $(hV)_0 = \{y \in \mathbb{R}^{m-1} \mid (0, y) \in hV\}$ es la 0-sección de hV.

Por hipótesis de inducción $\gamma(S_0\gamma)$ es un conjunto nulo, veamos que $f(S_p f \cap V) \subset \gamma(S_0\gamma)$ y por lo tanto también es un conjunto nulo. Sea $x \in f(S_p f \cap V)$ así $h(x) = (0, x_2, \ldots, x_m) = (0, y) \in hV$, entonces $x = h^{-1}(0, y)$, así $d\gamma_y = df_x dh^{-1}_{(0,y)} = 0$, esto porque $df_x = 0$ pues $x \in S_p\gamma \subset S_1\gamma$, pero $d\gamma_y = 0$ implica que $y \in S_1\gamma \subset S_0\gamma$. De este modo $f(x) = \gamma(y) \in \gamma(S_0\gamma)$ para toda $x \in (S_p f \bigcap V)$ como queríamos. $\square$

Demostración. (**de 1.5.5**) Consideremos un cubo cerrado $I \subset X$, probaremos que $f(S_k f \cap I)$ es un conjunto nulo. De ahí se obtiene que $f(S_k(f))$ es también un conjunto nulo, pues una sucesión adecuada de tales cubos $\{I_j\}_{1=1}^{\infty}$ cubre a todo X. Obtenemos que $f(S_k f) = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} (f(S_k f) \cap I)$ y por 1.4.2 es un conjunto nulo. Tomemos pues $a \in f(S_k) \cap I$ y consideremos el desarrollo de Taylor de orden $k+1$ en el punto a para las componentes $f_i : X \longrightarrow \mathbb{R}$ de f. Este puede escribirse en la siguiente forma

$$f_j(a+h) - f_j(a) = T_j(a,h) + \sum_{\alpha} c_j^{\alpha}(a + \delta_j h)h^{\alpha}, \tag{1.7}$$

donde T_j es el polinomio de Taylor de orden k que se anula en el punto a (pues $a \in S_k f$), por tanto sólo aparece el término del lado derecho, que está formado por las funciones c_j^{α} esencialmente (salvo factores constantes) coinciden con las derivadas parciales de orden $k+1$. Las c_j^{α} se toman en un punto $a + \delta_j h$ que vive en la recta que une a con $a+h$, o sea, $0 \leq \delta_j \leq 1$.

La suma la tomamos sobre todas las m-adas $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ de números naturales para los cuales $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m = k+1$ (esto es porque estamos tomando las derivadas parciales de orden $k+1$), y $h^\alpha = h_1^{\alpha_1} \cdot h_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot h_m^{\alpha_m}$. La fórmula 1.7 vale para toda $h = (h_1, h_2, \ldots, h_m)$ para la cual $(a+h) \in I$.

En 1.7 sustituimos $\sum\limits_\alpha c_j^\alpha(a + \delta_j h)$ por una cota superior c de la función continua $\sum\limits_\alpha |c_j^\alpha|$ en I y los factores h_i por $< h >= \max\limits_{i=1,2,\ldots,m}(|h_i|)$, o sea, h^α por $< h >^{k+1}$.

Obtenemos que

$$|f_j(a+h) - f_j(a)| \leq c < h >^{k+1}, \tag{1.8}$$

donde la constante c sólo depende de I y de f (no de a ni de h). Además esto es cierto también para todo cubo $I' \subset I$ y cualquier $a \in (S_k f \cap I'), a+h \in I'$.

Descomponemos ahora el cubo I en muchos cubos más pequeños I', descomponiendo cada arista de I en r partes iguales. En cada uno de los cubos más chicos I' vale la misma estimación 1.8, suponiendo, eso sí, que exista un punto $a \in (S_k f \bigcap I')$; los cubos I' para los cuales $S_k f \bigcap I' = \emptyset$ de cualquier forma no nos interesan, puesto que no contribuyen a $f(S_k f)$. Denotamos por δ a la longitud de las aristas del cubo I, o sea δ/r es la longitud de las aristas de cada cubo I', aplicando 1.8 a I' tenemos en particular que $f(S_k f \bigcap I')$ está contenido en un cubo de $\mathbb{R}^n$ (con centro en $f(a)$ si $a \in (S_k f \bigcap I')$), la longitud de cuyas aristas no excede $2c(\delta/r)^{k+1}$, y cuyo volumen por tanto no excede a $Dr^{-n(k+1)}$, donde $D = (2c\delta^{k+1})^n$. El número de los cubos I' es r^m, así, $f(S_k f \bigcap I)$ está contenido en una unión de r^m cubos, tales que la suma de sus volúmenes no excede a

$$r^m D r^{-n(k+1)} = D r^{m-n(k+1)}.$$

Este número es tan pequeño como se quiera si se toma r suficientemente grande, pues $m - n(k+1) < 0$ por hipótesis. Así $f(S_k f \bigcap I)$ es un conjunto nulo como se afirmaba. $\square$

Con esto queda terminada la prueba del teorema de Sard. $\square$

Capítulo 2

El grado de una aplicación

A lo largo del presente capítulo hablaremos del grado de una aplicación, el cual es un número entero que puede ser asignado a cualquier aplicación continua. Primeramente, definiremos el grado bajo ciertas restriciones de las cuales nos iremos desprendiendo y al final del capítulo lo que nos intersa es definir el indice de punto fijo de una aplicación continua, el cual es un caso particular del grado.

2.1. Primeras construcciones del grado

Proposición 2.1.1. *Si $f : Z \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es continua y Z es un espacio compacto ($Z \subset \mathbb{R}^n$ o $Z \subset \mathbb{R}^{n+1}$), entonces f es una aplicación cerrada. Más en general, se tiene que para todo subconjunto $Y \subset \mathbb{R}^n$ la aplicación restringida*

$$f_Y = f|_{f^{-1}(Y)} : f^{-1}(Y) \longrightarrow Y$$

también es cerrada.

Demostración. Sea $A \subset f^{-1}(Y)$ un cerrado relativo, es decir $\overline{A} \cap f^{-1}(Y) = A$ donde $\overline{A}$ denota la cerradura de A en Z. Tenemos que probar que $f(A)$ es también un cerrado relativo en Y. $\overline{A}$ es cerrado en Z, por tanto es compacto, y como f es continua, entonces $f(\overline{A})$ es compacto, por lo tanto cerrado en $\mathbb{R}^n$, así $f(\overline{A}) \cap Y$ es un cerrado relativo en Y. Pero como $\overline{A} \cap f^{-1}(Y) = A$ se deduce que $f(\overline{A}) \cap Y = f(A)$. $\square$

Sea $W \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado y

$$g : \overline{W} \longrightarrow \mathbb{R}^n \tag{2.1}$$

una aplicación continua, cuya restricción $g|_W$ es lisa. La cerradura $\overline{W}$ es compacta, así también $\overline{W} \setminus W$ lo es, por lo tanto $g(\overline{W} \setminus W)$ es compacto y en particular cerrado. Así $Y = \mathbb{R}^n \setminus g(\overline{W} \setminus W) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid g^{-1}(y) \subset W\}$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, y $g^{-1}(Y)$ es un subconjunto abierto de W, por lo tanto también de $\mathbb{R}^n$. La aplicación $g_Y = g|_{g^{-1}(Y)} : g^{-1}(Y) \longrightarrow Y$ es lisa y cerrada por 2.1.1.

Si $y \in Y$ es un valor regular de g_Y (por lo tanto también valor regular de $g|_W$), entonces $g^{-1}(y)$ es finito (ver 1.3.7), digamos $g^{-1}(y) = \{x_1, x_2, ..., x_r\}$. En cada punto x_j, el determinante del jacobiano $\det(dg_{x_j}) \neq 0$, de modo que es positivo o negativo. Denotamos por $\langle g, y, + \rangle$ al número de puntos $x_j \in g^{-1}(y)$ para los cuales $\det(dg_{x_j}) > 0$ y, correspondientemente, por $\langle g, y, - \rangle$ al número de las x_j para las cuales $\det(dg_{x_j}) < 0$; en partícular $\langle g, y, + \rangle + \langle g, y, - \rangle = |g^{-1}(y)| = r$.

Definimos

$$\text{grado}(g; y) = \langle g, y, + \rangle - \langle g, y, - \rangle,$$

y llamamos a este número entero el **grado de g en y**.

Por lo pronto sólo definimos el grado cuando $y \in \mathbb{R}^n \setminus g(\overline{W} \setminus W)$ es un valor regular de la aplicación lisa $g|_W$. Sin embargo, por el teorema de Sard 1.5, hay muchas tales y.

Teorema 2.1.2. *Cada valor regular $y \in \mathbb{R}^n \setminus g(\overline{W} \setminus W)$ de $g|_W$ tiene una vecindad abierta $V \subset \mathbb{R}^n \setminus g(\overline{W} \setminus W)$ tal que toda $z \in V$ es también valor regular de $g|_W$ y además*

$$\text{grado}(g; z) = \text{grado}(g; y)$$

Demostración. Tenemos que para $Y = \mathbb{R}^n \setminus g(\overline{W} \setminus W)$ la aplicación $g_Y : g^{-1}(Y) \longrightarrow Y$ es lisa, pues $g|_W$ lo es, y es cerrada por 2.1.1, al ser $\overline{W}$ compacto. Aplicando el teorema 1.3.9 tenemos que cada valor regular $y \in Y$ tiene una vecindad abierta $V \subset \mathbb{R}^n$ tal que $g_Y^{-1}(V)$ se descompone en un número finito de conjuntos abiertos ajenos $\widetilde{V}_1, \widetilde{V}_2, ..., \widetilde{V}_r$, cada uno de los cuales es aplicado por g_Y difeomorfamente sobre V. Lo que vale para V claramente también vale para una vecindad abierta de y más pequeña, y como Y es un abierto de $\mathbb{R}^n$, podemos suponer que $V \subset Y$, de este modo $g_Y^{-1}(V) = g^{-1}(V)$. También podemos suponer que V es conexa, digamos una bola abierta. Como V es conexa entonces también lo es cada $\widetilde{V}_j$ pues es difeomorfa a V. Pero ahora, el $\det(dg_x)$ no puede cambiar de signo en $\widetilde{V}_j$ es decir, $\det(dg_x) < 0$ para toda $x \in \widetilde{V}_j$ o $\det(dg_x) > 0$ para toda $x \in \widetilde{V}_j$. Así, no sólo cada punto $z \in V$ tiene el mismo número de preimágenes, a saber r, sino también los números $\langle g, z, + \rangle$ y $\langle g, z, - \rangle$ son los mismos. □

Definición 2.1.3. *Sean I el intervalo unitario $[0,1]$ en $\mathbb{R}$, $f_0 : X \longrightarrow Y$, $f_1 : X \longrightarrow Y$ dos aplicaciones entre espacios topológicos X, Y. Decimos que f_0 y f_1 son homotópicas si existe una aplicación continua $F : X \times I \longrightarrow Y$ tal que $F(x, 0) = f_0(x)$ y $F(x, 1) = f_1(x)$. Diremos que F es una **homotopía** entre f_0 y f_1.*

Lo que esto quiere decir es que si tenemos una aplicación f_0 podemos deformarla mediante una familia de aplicaciones $f_t : X \longrightarrow Y$ (donde $f_t(x) = F(x,t)$) que cambia gradualmente. El grado puede ser invariante bajo homotopías, como veremos con el siguiente teorema.

Teorema 2.1.4. *Sea $F : W \times I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una homotopía, $y \in \mathbb{R}^n$ un punto con las siguientes propiedades:*

i) $y \notin f_t(\overline{W} \setminus W)$, es decir $f_t^{-1}(y) \subset W$ para toda $t \in [0,1]$,

ii) $f_0|_W$ y $f_1|_W$ son ambas lisas, con valor regular y.

Entonces $\text{grado}(f_0; y) = \text{grado}(f_1; y)$.

Como la demostración de este teorema es larga, no la damos aquí. En el apéndice A se da una idea de la demostración.

Teorema 2.1.5. *Sea $g : \overline{W} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, con $W \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado, tal que $g|_W$ es lisa. Entonces cada punto $y \in \mathbb{R}^n \setminus g(\overline{W} \setminus W)$ (regular o no) tiene una vecindad abierta $V \subset \mathbb{R}^n \setminus g(\overline{W} \setminus W)$, tal que* $\text{grado}(g; z)$ *tiene el mismo valor para toda $z \in V$ que es valor regular de $g|_W$. Es decir, si $z, z' \in V$ y ambos son valores regulares para $g|_W$, entonces* $\text{grado}(g; z) = \text{grado}(g; z')$.

Demostración. Podemos tomar V como el conjunto $\{w \in W \mid \|w - y\| < \eta\}$, donde $\eta = \eta(y)$ denota al mínimo de la función $\|g(x) - y\|$ para $x \in \overline{W} \setminus W$.

Tomemos z, z' dos valores regulares de $g|_W$ tales que $\|z - y\| < \|g(x) - y\|, \|z' - y\| < \|g(x) - y\|$ para toda $x \in \overline{W} \setminus W$. Tenemos que mostrar que $\text{grado}(g; z) = \text{grado}(g; z')$ y para esto queremos aplicar el teorema 2.1.4. Consideremos pues la homotopía $F : W \times I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, dada por

$$F(x,t) = g(x) + t(z - z').$$

Veremos que z es un punto que satisface las condidiones *i)* y *ii)* del teorema 2.1.4. Para *i)* debemos probar que $z \neq F(x,t)$ para $x \in (\overline{W} \smallsetminus W)$ y toda $t \in I$. En efecto,

$$\begin{aligned} z - F(x,t) &= z - g(x) - t(z - z') \\ &= z - y + y - tz + tz' - ty + ty - g(x) \\ &= z - y - tz + ty + tz' - ty + y - g(x) \\ &= (1-t)(z-y) + t(z'-y) + y - g(x) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \|(1-t)(z-y) + t(z'-y)\| &\leq (1-t)\|(z-y)\| + t\|(z'-y)\| \\ &< (1-t)\|g(x) - y\| + t\|g(x) - y\| \\ &= \|g(x) - y\|, \end{aligned}$$

por lo tanto $z - F(x,t) \neq 0$ y $z \neq F(x,t)$. La condición *ii)* se satisface ya que $f_0 = g$ y $f_1 - z = g - z'$ lo que implica que $df_1 = dg$. Nótese además que $\text{grado}(f_1; z) = \text{grado}(g; z')$, pues si $x \in f_1^{-1}(z)$ entonces $f_1(x) = z$, lo que quiere decir que $g(x) - z' = 0$, o sea, $g(x) = z'$, por lo tanto x aporta lo mismo tanto en $\text{grado}(f_1; z)$ como en $\text{grado}(g; z')$. El teorema 2.1.4 nos asegura que $\text{grado}(f_0; z) = \text{grado}(f_1; z)$, es decir $\text{grado}(g; z) = \text{grado}(g; z')$ como se afirmó. □

Teorema 2.1.6. *Sean $g_0, g_1 : \overline{W} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dos aplicaciones como en* (2.1)*, que coinciden en $\overline{W} \smallsetminus W$, o sea $g_0|_{\overline{W} \smallsetminus W} = g_1|_{\overline{W} \smallsetminus W}$, entonces*

$$\text{grado}(g_0; y) = \text{grado}(g_1; y)$$

para todo valor $y \in \mathbb{R}^n \smallsetminus g_0(\overline{W} \smallsetminus W) = \mathbb{R}^n \smallsetminus g_1(\overline{W} \smallsetminus W)$, que es regular de $g_0|_W$ y de $g_1|_W$.

Demostración. Consideremos la homotopía $F : \overline{W} \times I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida como $F(x,t) = (1-t)g_0 + tg_1$. F satisface la condición *i)* de 2.1.4 pues $g_0(x) = g_1(x)$ para toda $x \in (\overline{W} \smallsetminus W)$, así $f_t(x) = (1-t)g_0(x) + tg_0(x) = g_0(x)$ para toda $x \in (\overline{W} \smallsetminus W)$ y toda $t \in I$, por lo que $y \notin f_t(\overline{W} \smallsetminus W) = g_0(\overline{W} \smallsetminus W)$. También satisface la condición *ii)* pues $f_0 = g_0$ y $f_1 = g_1$. Aplicando el teorema 2.1.4 tenemos que $\text{grado}(f_0; y) = \text{grado}(g_0; y) = \text{grado}(g_1; y) = \text{grado}(f_1; y)$ para todo y que satisface lo enunciado en el teorema. □

2.2. Definición general del grado de un aplicación

Después de todos estos resultados ya podemos pasar a la definición general del grado de una aplicación arbitraria $f : \overline{W} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ en un punto arbitrario $y \in \mathbb{R}^n \smallsetminus f(\overline{W} \smallsetminus W)$, donde W es, como antes, un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$.

Elegimos un alisamiento g de f, es decir, una aplicación continua $g : \overline{W} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que coincide con f en $\overline{W} \smallsetminus W$ tal que $g|_W$ es lisa. Tal alisamiento existe por el teorema 1.2.4 con $Y = \overline{W}$, $X = W$, $A = \overline{W} \smallsetminus W$ y $\varepsilon(x) =$ distancia de x a $\overline{W} \smallsetminus W$.

Si y es un valor regular de $g|_W$ definimos $\operatorname{grado}(f; y) = \operatorname{grado}(g; y)$. En general, y no es valor regular, pero los valores regulares de $g|_W$ en $\mathbb{R}^n$ yacen densamente en virtud del teorema 1.5. En cada vecindad V de y hay valores regulares z de $g|_W$, y por 2.1.5 podemos tomar a V suficientemente pequeña de modo que $\operatorname{grado}(g; z)$ es independiete de $z \in V$. Entonces definimos

$$\operatorname{grado}(f; y) = \operatorname{grado}(g; z), \tag{2.2}$$

donde z es un valor regular arbitrario de $g|_W$ suficientemente cercano a y.

Esta definición es independiente de la elección de z. Veamos que tampoco depende de la elección del alisamiento g. Sean g_0 y g_1 dos alisamientos de f, por lo tanto coinciden en $\overline{W} \smallsetminus W$; tenemos por 2.1.6 que $\operatorname{grado}(g_0; z) = \operatorname{grado}(g_1; z)$ para toda $z \in (\mathbb{R}^n \smallsetminus f(\overline{W} \smallsetminus W)$ que es valor regular para $g_0|_W$ y $g_1|_W$. Estas z también yacen densamente en $\mathbb{R}^n$, pues los valores regulares de g_0, g_1 forman un conjunto abierto por 2.1.2. Así, podemos primero elegir un valor regular z_0 de $g_0|_W$ cercano a y y después un valor regular z cercano a z_0; si éste está suficientemente cercano a z_0 también resultará valor regular de $g_0|_W$, de donde

$$\operatorname{grado}(g_0; z) = \operatorname{grado}(f; y) = \operatorname{grado}(g_1; z).$$

Concluimos pues que la definición de grado (2.2) no depende, ni de la elección de z, ni del alisamiento de f, y con esto queda completa la definición de grado de una aplicación.

Ejemplo. Si $\alpha : \overline{W} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una aplicación afín no degenerada, es decir, $\alpha(x) = L(x) + a$, donde $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un isomorfismo lineal y a es un punto dado, entonces

$$\operatorname{grado}(\alpha; y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \notin \alpha(\overline{W}) \\ \frac{\det(L)}{|\det(L)|} = \pm 1 & \text{si } y \in \alpha(W). \end{cases} \tag{2.3}$$

2.3. Algunas propiedades del grado

Como antes, sea $f : \overline{W} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación continua, donde $W \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y acotado, de manerea que su cerradura, $\overline{W}$, es compacta. Luego, $\operatorname{grado}(f; y) \in \mathbb{Z}$ está definido para toda $y \in (\mathbb{R}^n \setminus f(\overline{W} \setminus W))$, es decir, para toda $y \in \mathbb{R}^n$ con $f^{-1}(y) \subset W$. Fijando a f, podemos ver al grado como una función de y:

$$\operatorname{grado}(f; \quad) : \mathbb{R}^n \setminus f(\overline{W} \setminus W) \longrightarrow \mathbb{Z}.$$

Como tal, es continua, por ser localmente constante. Concretamente, cada punto $y_0 \in \mathbb{R}^n \setminus f(\overline{W} \setminus W)$ tiene una vecindad V tal que $\operatorname{grado}(f; y) = \operatorname{grado}(f; y_0)$ para toda $y \in V$.

Presentamos a continuación algunas propiedades del grado. Las que más nos interesan son 2.3.2 y 2.3.3, así que sólo haremos las demostraciones de éstas. La referencia para las demás es [3], vol II, tercera unidad, sección 6.

Teorema 2.3.1. ***(Invariancia bajo escisión)*** *Sean $f : \overline{W} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación continua con $W \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado, $y \in (\mathbb{R}^n \setminus f(\overline{W} \setminus W))$ y $V \subset W$ un conjunto abierto que contiene a $f^{-1}(y)$, entonces*

$$\operatorname{grado}(f; y) = \operatorname{grado}(f|_{\overline{V}}; y).$$

□

Teorema 2.3.2. ***(Invariancia bajo homotopías)*** *Si $F : \overline{W} \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una homotopía y $y \in (\mathbb{R}^n \setminus F((\overline{W} \setminus W) \times [0,1]))$, entonces*

$$\operatorname{grado}(F_0; y) = \operatorname{grado}(F_1; y).$$

Demostración. Tomamos alisamientos $g_0, g_1 : \overline{W} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de F_0 y F_1 respectivamente. Entonces

$$\operatorname{grado}(F_i; y) = \operatorname{grado}(g_i; z), \qquad i = 0, 1,$$

donde z es un valor regular de g_0 y de g_1 suficientemente cercano a y. Probaremos que $\operatorname{grado}(g_0; z) = \operatorname{grado}(g_1; z)$. Consideremos homotopía $G : \overline{W} \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$:

$$G(x,t) = \begin{cases} (1-3t)g_0(x) + 3tF_0(x) & \text{para} \quad 0 \leq 3t \leq 1 \\ F(x, 3t-1) & \text{para} \quad 1 \leq 3t \leq 2 \\ (3-3t)F_1(x) + (3t-2)g_1(x) & \text{para} \quad 2 \leq 3t \leq 3. \end{cases}$$

Cuando $3t = 1$ tenemos

$$(1-3t)g_0(x) + 3tF_0(x) = F_0(x) = F(x, 3t-1)$$

y cuando $3t = 2$,

$$(3-3t)F_1(x) + (3t-2)g_1(x) = F_1(x) = F(x, 3t-1)$$

Así, G está bien definida y es continua. Para $x \in (\overline{W} \setminus W)$, $g_0(x) = F_0(x)$ por definición de alisamiento, si además $3t \leq 1$ tenemos que $G(x,t) = F_0(x)$. Análogamente para $x \in (\overline{W} \setminus W)$ y $2 \leq 3t$ tenemos que $G(x,t) = F_1(x)$. Finalmente si $1 \leq 3t \leq 2$, $G(x,t) = F(x, 3t-1)$. En particular tenemos que y no pertenece a

$$G((\overline{W} \setminus W) \times [0,1]) = F((\overline{W} \setminus W).$$

Los extremos G_0 y G_1 de la homotopía G coinciden con g_0 y g_1 que son lisos en W y tienen a z como valor regular. Podemos aplicar el teorema 2.1.4 a G y obtener $\text{grado}(g_0; z) = \text{grado}(g_1; z)$. □

Teorema 2.3.3. ***(Aditividad)*** *Sean $W \subset \mathbb{R}^n$, abierto y acotado, $f : \overline{W} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación continua y $y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\overline{W} \setminus W)$ un punto cuya imagen inversa $f^{-1}(y)$ se descompone en dos conjuntos cerrados ajenos; $f^{-1}(y) = A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Si $W_1, W_2 \subset W$ son vecindades abiertas ajenas de A_1 y A_2 o, más generalmente, conjuntos abiertos tales que $A_j \subset W_j \subset W$, $A_1 \cap \overline{W_2} = \emptyset = \overline{W_1} \cap A_2$, entonces se tiene para las aplicaciones $f_j = f|_{\overline{W}_j}$, con $j = 1, 2$, que*

$$\text{grado}(f; y) = \text{grado}(f_1; y) + \text{grado}(f_2; y).$$

□

Demostración. Podemos suponer que $\overline{W_1} \cap \overline{W_2} = \emptyset$. Por 2.3.1 $\text{grado}(f; y) = \text{grado}(f|_{\overline{W_1 \cup W_2}}; y)$ y por tanto, podemos suponer que $W_1 \cup W_2 = W$. Ahora escogemos un alisamiento $g : \overline{W_1 \cup W_2} = \overline{W_1} \cup \overline{W_2} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de f y un valor regular z de $g|_{W_1 \cup W_2}$ cercano a y, así $\text{grado}(f; y) = \text{grado}(g; z)$. Entonces

$g_j = g|_{\overline{W_j}}$ es también un alisamiento de $f_j = f|_{\overline{W_j}}$ y z es un valor regular de $g_j|_{W_j}$ con grado$(f_j; y) =$ grado$(g_j; z)$. Pero grado$(g; z)$ es el número de puntos en $g^{-1}(z) = g_1^{-1}(z) \cup g_2^{-1}(z)$ contados con ± 1, de modo que grado$(g; z) =$ grado$(g_1; z) +$ grado$(g_2; z)$ $\square$

El teorema anterior se puede generalizar, si en vez de pedir que $f^{-1}(y)$ se descomponga en dos conjuntos cerrados ajenos, lo haga en n conjuntos cerrados ajenos. Así, obtenemos una conclusión correspondiente, en la cual, el grado de f será la suma de n drados de ciertas funciones f_i.

Hemos definido el grado de aplicaciones continuas $f : \overline{W} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, donde W era un conjunto abierto acotado y $y \in \mathbb{R}^n$ un punto que no yace en $f(\overline{W} \setminus W)$. Ahora definiremos el grado de una aplicación $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$, donde $X \subset \mathbb{R}^n$ es abierto, y un punto $y \in \mathbb{R}^n$ con preimagen compacta.

Definición 2.3.4. *Sean $X \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continua, y $y \in \mathbb{R}^n$ tal que $f^{-1}(y)$ es compacto. Entonces $f^{-1}(y)$ tiene una distancia positiva $d > 0$ a $\mathbb{R}^n \setminus X$ y podemos encontrar una vecindad abierta acotada W de $f^{-1}(y)$, cuya cerradura también yazca en X, así $f^{-1}(y) \subset W \subset \overline{W} \subset X$. Definimos*

$$\text{grado}(f; y) = \text{grado}(f|_{\overline{W}}; y),$$

donde el miembro del lado derecho se define como antes.

Notemos que la última ecuación no depende de la elección de W en virtud del teorema 2.3.1

Afortunadamente bajo esta nueva definición el teorema de invariancia bajo homotopías sigue valiendo. Presentamos la versión de este teorema bajo la nueva definición:

Teorema 2.3.5. ***(Invariancia bajo homotopías)*** *Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $F : X \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continua, $y \in \mathbb{R}^n$ tal que $F^{-1}(y)$ es compacto. Entonces*

$$\text{grado}(F_0; y) = \text{grado}(F_1; y).$$

Demostración. El conjunto compacto $F^{-1}(y)$ tiene una distancia positiva $d > 0$ a $(\mathbb{R}^n \setminus X) \times [0,1]$. Podemos encontrar un conjunto abierto acotado $W \subset X$ tal que $F^{-1}(y) \subset W \times [0,1]$ y $\overline{W} \times [0,1] \subset X \times [0,1]$. Ahora consideramos la homotopía

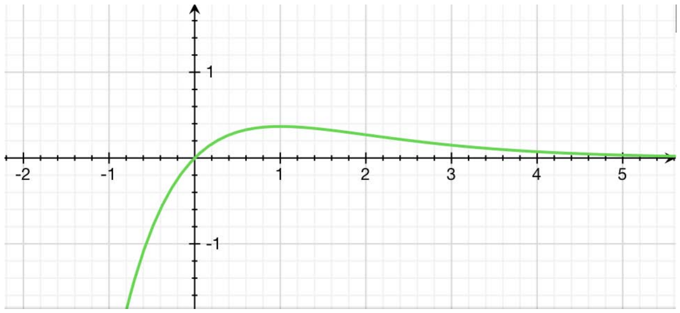

Figura 2.1: Gráfica de $f(x) = xe^{-x}$

$$G = F|_{\overline{W}\times[0,1]} : \overline{W} \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

en el sentido de 2.3.2. $G^{-1}(y) = F^{-1}(y) \subset W \times [0,1]$ pues $F^{-1}(y) \subset W \times [0,1]$. Por 2.3.2, $\text{grado}(G_0; y) = \text{grado}(G_1; y)$. Pero $\text{grado}(G_0; y) = \text{grado}(F_0; y)$ y $\text{grado}(G_1; y) = \text{grado}(F_1; y)$ por la definición 2.3.4 □

Ejemplo. Consideremos la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = xe^{-x}$ (figura 2.1) . La derivada $f'(x) = (1-x)e^{-x}$ es positiva para $x < 1$ y negativa para $x > 1$. De hecho $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

La imagen inversa $f^{-1}(y)$ consta de un punto si $y \leq 0$ o $y = 1/e$, de dos puntos si $0 < y < 1/e$ y $f^{-1}(y) = \emptyset$ si $y > 1/e$. El grado es

$$\text{grado}(f, y) = \begin{cases} 1 & si \quad y \leq 0 \\ 0 & si \quad y > 0. \end{cases}$$

Notemos que en este caso el grado no depende continuamente de y, pues no es localmente constante.

Teorema 2.3.6. *Sean $X \subset \mathbb{R}^n$, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continua y $y \in \mathbb{R}^n$. Si y tiene una vecindad K cuya imagen inversa $f^{-1}(K)$ sea compacta, entonces* $\text{grado}(f; z)$ *es continuo en el punto y. Así, y tiene una vecindad $V \subset K$ tal que* $\text{grado}(f; z) = \text{grado}(f; y)$ *para toda $z \in V$. Más aún, si K es cmpacta,* $\text{grado}(f; z)$ *está definida para toda $z \in K$.*

Demostración. Existe un conjunto abierto acotado $W \subset X$ tal que $f^{-1}(K) \subset W$ y $\overline{W} \subset X$. Entonces $\text{grado}(f; z) = \text{grado}(f|_{\overline{W}}; z)$ para toda $z \in K$. El lado derecho depende continuamente de z pues es el grado de $f|_{\overline{W}}$ definido en la sección 2.2. □

2.4. Índice de punto fijo

Definición 2.4.1. *Sea $W \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado y $f : \overline{W} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación continua. Denotamos por* $\mathrm{Fix}(f)$ *al conjunto de puntos fijos de f, es decir,* $\mathrm{Fix}(f) = \{x \in \overline{W} \mid f(x) = x\}$. *Este es un subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}^n$ que coincide con el conjunto de ceros de $(i - f) : \overline{W} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, donde $i : \overline{W} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ denota la inclusión. Si* $\mathrm{Fix}(f) \subset W$*, o sea, cuando no hay puntos fijos de f en $\overline{W} \setminus W$, entonces, por lo visto en la sección 2.2, el grado de $(i - f)$ está definido en 0. A este número entero lo llamamos* ***índice de punto fijo*** *de f y lo denotamos por I_f o $I(f)$, así,*

$$I_f = I(f) = \mathrm{grado}(i - f, 0).$$

Ejemplo. Si f es una aplicación constante, es decir, $f(\overline{W})$ es un solo punto en $\mathbb{R}^n$, entonces

$$I_f = \begin{cases} 0 & \text{si } p \notin \overline{W} \\ 1 & \text{si } p \in W. \end{cases} \tag{2.4}$$

Esto se obtiene del ejemplo al final de la sección 2.2, pues $\alpha = i - f$ es, en este caso, una aplicación afín no degenerada, a saber, una traslación. En la notación del ejemplo en 2.2, $L = Id$, $a = -p$.

Los teoremas que nos interesan, pero esta vez para el índice de punto fijo, son el teorema de invariancia bajo homotopías y el de aditividad.

Teorema 2.4.2. ***(Invariancia bajo homotopías)*** *Sea $F : \overline{W} \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una homotopía tal que* $\mathrm{Fix}(F_t) \subset W$ *para toda* $t \in [0,1]$, *entonces* $I(F_0) = I(F_1)$.

Demostración. Como $\mathrm{Fix}(F_t) \subset W$, entonces F_t no tiene puntos fijos en la orilla $\overline{W} \setminus W$ para ningún tiempo t, es decir, para $y = 0$ el grado de $i - F_t$ está definido. Consideremos la homotopía $G : \overline{W} \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida como $G(x,t) = x - F(x,t)$. El teorema 2.3.2 asegura que para $y = 0$ $\mathrm{grado}(G_0; 0) = \mathrm{grado}(G_1; 0)$, pero $G_0 = i - F_0$ y $G_1 = i - F_1$, así que $I(F_0) = \mathrm{grado}(G_0; 0) = \mathrm{grado}(G_1; 0) = I(F_1)$. □

Teorema 2.4.3. ***(Aditividad)*** *Sea $f : \overline{W} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación continua ($W \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado,* $\mathrm{Fix}(f) \subset W$*), cuyo conjunto de puntos fijos se descompone en n conjuntos cerrados ajenos;* $\mathrm{Fix}(f) = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$. *Para toda*

$j = 1, \ldots, n$, sea $W_j \subset W$ un conjunto abierto tal que $A_j \subset W_j$ y $A_j \cap \overline{W}_i = \emptyset$ si $i \neq j$, entonces se tiene para el índice de punto fijo que

$$I(f) = \sum_{j=1}^{n} I(f|_{\overline{W}_j}).$$

Demostración. Se obtiene directamente de 2.3.3 pues $(i - f)^{-1}(0) = Fix(f)$ y descomponiendo $(i - f)^{-1}(0)$ en n conjuntos cerrados ajenos en vez de dos. □

El siguiente teorema lo necesitaremos en la siguiente sección para poder extender nuestra definición del índice de punto fijo. No damos la demostración pero se puede consultar en [3] vol II.

Teorema 2.4.4. ***(Conmutatividad)***

Sean $V \subset \mathbb{R}^m$, $W \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos abiertos acotados y $\alpha : \overline{V} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\beta : \overline{W} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ aplicaciones continuas. Consideremos las siguientes composiciones

$$\beta \circ \alpha : \overline{V \cap \alpha^{-1}(W)} \longrightarrow \mathbb{R}^m,\ \alpha \circ \beta : \overline{W \cap \beta^{-1}(V)} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

y supongamos que

$$\mathrm{Fix}(\beta \circ \alpha) \subset (V \cap \alpha^{-1}(W)),\ \mathrm{Fix}(\alpha \circ \beta) \subset (W \cap \beta^{-1}(V)).$$

Entonces se tiene para los índices de punto fijo que $I(\beta \circ \alpha) = I(\alpha \circ \beta)$.

□

2.5. Retractos de vecindad euclidiana

Definición 2.5.1. *Un subespacio X de un espacio topológico Y se llama **retracto** de Y, si existe una aplicación continua $r : Y \longrightarrow X$ tal que $r(x) = x$ para toda $x \in X$. Si denotamos la inclusión con $i : X \hookrightarrow Y$, en vez de escribir $r(x) = x$ podemos escribir $r \circ i = I_X$, donde I_X es la identidad en X.*

Definición 2.5.2. *Un subespacio X de Y se llama **retracto de vecindad** de Y si es retracto de una vecindad en Y, es decir, si existe un conjunto abierto $V \subset Y$ que contiene a X y una retracción $r : V \longrightarrow X$.*

A diferencia de la definición anterior la retracción r no tiene que estar definida en todo Y, sino sólo "cerca"de X.

Ejemplo: La esfera estándar $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n | \parallel x \parallel = 1\}$ es retracto de vecindad, como lo muestra la aplicación $r : \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\} \longrightarrow S^{n-1}$ dada por $r(x) = x / \parallel x \parallel$.

Teorema 2.5.3. *Sea X un retracto de vecindad de $\mathbb{R}^m$ y sea $Z \subset \mathbb{R}^n$ homeomorfo a X, entonces Z es un retracto de vecindad de $\mathbb{R}^n$.*

Lo que el teorema dice, es que la propiedad de $X \subset \mathbb{R}^m$ de ser retracto de vecindad sólo depende de X mismo y no de la manera en la que está metido en el espacio euclidiano que lo rodea. Por ejemplo, el círculo $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ es retracto de vecindad, así cualquier nudo manso (formado por un número finito de segmentos) $K \subset \mathbb{R}^3$, no importa de qué manera complicada pueda estar enredado, es un retracto de vecindad. La demostración del teorema se puede ver en [3], vol II.

Definición 2.5.4. *Un espacio topológico Y se llama* ***retracto de vecindad euclidiana*** *(escribiremos* ***ENR****, por sus siglas en inglés), si es homeomorfo a un retracto de vecindad de un $\mathbb{R}^n$. Esto significa que hay un abierto U en un $\mathbb{R}^n$ y aplicaciones continuas $i : Y \longrightarrow U$ y $r : U \longrightarrow Y$ tales que $r \circ i(y) = y$ para toda $y \in Y$. En otras palabras, todos los retractos de vecindad euclidiana de un $\mathbb{R}^n$ y todos los espacios homeomorfos a ellos son ENR´s.*

Nos interesa definir el índice de punto fijo para ENRs; empezaremos con un lema.

Lema 2.5.5. *Sean Y un ENR, $V \subset Y$ un conjunto abierto* ***relativamente compacto*** *(o sea $\overline{V}$ es compacto) y $g : \overline{V} \longrightarrow Y$ una aplicación continua. Entonces existe un conjunto abierto acotado W en un espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ y aplicaciones continuas $\alpha : \overline{V} \longrightarrow \overline{W}$, $\beta : \overline{W} \longrightarrow Y$ tales que $\beta \circ \alpha = g$ y $\alpha(V) \subset W$.*

Decimos que $\overline{V} \xrightarrow{\alpha} \overline{W} \xrightarrow{\beta} Y$ es una **descomposición euclidiana** de g.

Demostración. Como Y es un ENR, existe un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ y aplicaciones continuas $i : Y \longrightarrow U$, $r : U \longrightarrow Y$ con $r \circ i = I_Y$. Ya que $\overline{V}$ es compacto también $i(\overline{V})$ lo es y, por lo tanto, es cerrado y acotado en $\mathbb{R}^n$. Este conjunto tiene así una vecindad compacta en U, es decir, hay un conjunto abierto acotado U' tal que $i(\overline{V}) \subset U'$ y $\overline{U'} \subset U$. Sea $W = r^{-1}(V) \cap U'$.

Este conjunto contiene a $i(V)$ pues $i(V) \subset U'$ y también $i(V) \subset r^{-1}(V)$, esto último ya que $r(i(v)) = v$ para toda $v \in V$. Además, $r(W) \subset V$, así $r(\overline{W}) \subset \overline{V}$ y como $W \subset U'$, W es acotado. Entonces podemos definir las aplicaciones α y β como sigue:

$$\alpha(v) = i(v) \qquad \beta(w) = g(r(w)),$$

entonces $\beta \circ \alpha(v) = g \circ r \circ i(v) = g(v)$. $\square$

Lema 2.5.6. *Con la misma notación del lema anterior se tiene que: Si* $\mathrm{Fix}(g) \subset V$*, entonces el conjunto de puntos fijos de la aplicación* $\alpha \circ \beta : \overline{W \cap \beta^{-1}(V)} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *yace en* $W \cap \beta^{-1}(V)$*, así*

$$\mathrm{Fix}(g) \subset V \Rightarrow \mathrm{Fix}(\alpha \circ \beta) \subset (W \cap \beta^{-1}(V))$$

y las aplicaciones α*,* β *definen homeomorfismos inversos uno del otro*

$$\alpha : \mathrm{Fix}(g) \longrightarrow \mathrm{Fix}(\alpha \circ \beta) \text{ y } \beta : \mathrm{Fix}(\beta \circ \alpha) \longrightarrow \mathrm{Fix}(g).$$

Demostración. Si $z \in \mathrm{Fix}(\alpha \circ \beta)$ entonces $z \in \overline{W \cap \beta^{-1}(V)}$ y $\alpha \circ \beta(z) = z \Rightarrow \beta(z) \in \overline{V} \Rightarrow g(\beta(z)) = \beta \circ \alpha(\beta(z)) = \beta(\alpha \circ \beta(z)) = \beta(z) \Rightarrow \beta(z) \in \mathrm{Fix}(g) \subset V \Rightarrow z = \alpha(\beta(z)) \in \alpha(V) \subset W$, por lo tanto, $z \in W \cap \beta^{-1}V$. Lo anterior también prueba que $\beta(\mathrm{Fix}(\alpha \circ \beta)) \subset \mathrm{Fix}(g)$. Si $y \in \mathrm{Fix}(g) \Rightarrow y \in V$ y como $\beta \circ \alpha(y) = y \Rightarrow \alpha(y) \in (W \cap \beta^{-1}V)$ y $\alpha \circ \beta(\alpha(y)) = \alpha(\beta \circ \alpha(y)) = \alpha(y) \Rightarrow \alpha(y) \in \mathrm{Fix}(\alpha \circ \beta) \Rightarrow \alpha(\mathrm{Fix}(g)) \subset \mathrm{Fix}(\alpha \circ \beta)$. Con esto queda completa la prueba del lema. $\square$

Bajo las hipótesis del lema anterior el índice de punto fijo de $\alpha \circ \beta : \overline{W \cap \beta^{-1}(V)} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ está definido. Ahora sólo nos hace falta verificar que no depende de la forma en que hayamos descompuesto a g como $g = \beta \circ \alpha$. El siguiente teorema nos resuelve este problema.

Teorema y definición 2.5.7. *Sea* Y *un ENR,* $V \subset Y$ *un conjunto abierto relativamente compacto y* $g : \overline{V} \longrightarrow Y$ *una aplicación continua cuyo conjunto de puntos fijos yace en* V*. Entonces* g *puede descomponerse (por 2.5.5) en la forma* $\beta \circ \alpha = g$ *tal que* $\alpha : \overline{V} \longrightarrow \overline{W}$*,* $\beta : \overline{W} \longrightarrow Y$ *con* $\alpha(V) \subset W$ *y* $W \subset \mathbb{R}^n$ *abierto y acotado. El conjunto de puntos fijos de la aplicación* $\alpha \circ \beta : \overline{W \cap \beta^{-1}(V)} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *yace en* $W \cap \beta^{-1}V$ *por 2.5.6. Entonces el índice de punto fijo* $I(\alpha \circ \beta)$ *depende sólo de* g*. Lo denotamos por* ***I(g)*** *y lo llamamos* ***índice de punto fijo*** *de* g*, es decir* $I(g) = I(\alpha \circ \beta)$*.*

Demostración. Consideremos la inclusión $j : \overline{V} \longrightarrow Y$ y la descomponemos según 2.5.5 como

$$j : \overline{V} \xrightarrow{\gamma} \overline{U} \xrightarrow{\delta} Y,\; j = \delta \circ \gamma,$$

donde $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y acotado y $\gamma(V) \subset U$. Ahora tomamos

$$\begin{gathered} \alpha \circ \delta : \overline{U \cap \delta^{-1}(V)} \longrightarrow \mathbb{R}^n, \\ \gamma \circ \beta : \overline{W \cap \beta^{-1}(U)} \longrightarrow \mathbb{R}^m \end{gathered}$$

y les aplicamos la conmutatividad del índice de punto fijo (ver 2.4.4). Así, obtenemos las siguientes composiciones

$$\begin{gathered} (\gamma \circ \beta) \circ (\alpha \circ \delta) = \gamma \circ g \circ \delta : \overline{U \cap \delta^{-1}(V) \cap \delta^{-1}(g^{-1}(V))} \longrightarrow \mathbb{R}^m \\ (\alpha \circ \delta) \circ (\gamma \circ \beta) = \alpha \circ \beta : \overline{W \cap \beta^{-1}(V)} \longrightarrow \mathbb{R}^n \end{gathered}$$

y $\mathrm{Fix}(\alpha \circ \beta) \subset (W \cap \beta^{-1}(V))$ por 2.5.6. Sólo nos falta verificar que $\mathrm{Fix}(\gamma \circ g \circ \delta) \subset (U \cap \delta^{-1}(V) \cap \delta^{-1}(g^{-1}(V)))$. En efecto, si $x = \gamma \circ g \circ \delta(x)$, entonces $\delta(x) = \delta \circ \gamma \circ g \circ \delta(x) = g \circ \delta(x) \in \mathrm{Fix}(g) \subset V$; en particular $x \in \delta^{-1}(V) \cap \delta^{-1}(g^{-1}(V))$. Más aún, $x = \gamma \circ g \circ \delta(x) = \gamma \circ \delta(x) \in \gamma(V) \subset U$, así $x \in (U \cap \delta^{-1}(V) \cap \delta^{-1}(g^{-1}(V)))$.

Podemos entonces aplicar 2.4.4 y obtener que $I(\alpha \circ \beta) = I(\gamma \circ g \circ \delta)$. El lado derecho es independiente de la descomposición de g, por lo tanto el lado izquierdo también. □

Como antes, los resultados que nos interesan son el de invariancia bajo homotopías y el de aditividad, cuyas demostraciones se pueden ver en [3], vol III sexta unidad, sección 10. Se basan en la aplicación de los teoremas 2.4.2 y 2.4.3.

Teorema 2.5.8. ***(Invariancia bajo homotopías)*** *Sea Y un ENR, $V \subset Y$ un conjunto abierto relativamente compacto. Si $G : \overline{V} \times [0,1] \longrightarrow Y$ es una homotopía tal que* $\mathrm{Fix}(G_t) \subset Y$ *para toda $t \in [0,1]$, entonces $I(G_0) = I(G_1)$.*

□

Teorema 2.5.9. ***(Aditividad)*** *Sea Y un ENR, $V \subset Y$ un conjunto abierto relativamente compacto y $g : \overline{V} \longrightarrow Y$ una aplicación continua cuyo conjunto de puntos fijos yace en V. Si el conjunto de puntos fijos de $g : \overline{V} \longrightarrow Y$ se descompone en n conjuntos cerrados ajenos*

$$\mathrm{Fix}(g) = \bigcup_{j=1}^{n} A_j,\; A_i \cap A_j = \emptyset$$

para $i \neq j$, *y si* $V_j \subset V$ *es un conjunto abierto tal que* $\overline{V_j} \cap \mathrm{Fix}(g) = A_j \subset V_j$ *para toda* $j = 1, 2, \ldots, n$, *entonces*

$$I(g) = \sum_{j=1}^{n} I(g|_{\overline{V}_j}).$$

$\square$

Capítulo 3

Un poco de topología diferencial

En este capítulo llameremos variedades a los espacios donde el entorno de cada punto es justo como una pequeña parte del espacio euclidiano. A estos espacios les dedicamos la primera sección, en la cual se intenta dar una idea clara de lo que son las variedades y algunas de sus propiedades. Los ejemplos usuales de variedades son las superficies lisas, como la esfera o el toro, donde cada punto está en un pequeño disco “curvo”que es homeomorfo a un disco en el plano.

El teorema que es importante para nosotros es el que presentamos al final de este capítulo, que es el teorema de homotopía y transversalidad, el cual es indispensable en las demostraciones del último capítulo.

3.1. Variedades

Si $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una aplicacíon donde $X \subset \mathbb{R}^n$ es cualquier subconjunto, diremos que f es lisa si se puede extender localmente a una aplicación lisa definida en un conjunto abierto, esto es, para cada $x \in X$ existe $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y una aplicación lisa $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que esxtiende a f es decir $F|_{U \cap X} = f$.

Supongamos que X es un subconjunto de algún $\mathbb{R}^N$. Entonces X es una **variedad lisa** (en adelante escribiremos variedad en lugar de variedad lisa) de dimensión k si es localmente difeomorfo a $\mathbb{R}^k$ (la definición de difeomorfismo se dió en 1.3.1), lo que quiere decir que cada punto x tiene una vecindad

V en X que es difeomorfa a un conjunto abierto U de $\mathbb{R}^k$. Cabe señalar que la definición original de variedad es diferente a lo que presentamos aquí; el hecho de que podamos tomar las variedades metidas en algún $\mathbb{R}^N$ se debe a Whitney.

Un difeomorfismo $\varphi : U \longrightarrow V$ es una parametrización de la vecindad V. El difeomorfismo inverso $\varphi^{-1} : V \longrightarrow U$ es un sistema de coordenadas. Si escribimos la aplicación φ^{-1} en coordenadas, $\varphi^{-1} = (x_1, ..., x_k)$, las k funciones lisas se usan para identificar a V con U de manera implícita y un punto $v \in V$ se identifica con sus coordenadas $(x_1(v), ..., x_k(v)) \in U$.

Ahora podemos enunciar un teorema que nos conecta con el capítulo anterior. No lo demostramos aquí pero la referencia es [3], vol III, séptima unidad, sección 12.

Teorema 3.1.1. *Toda variedad lisa es un retracto de vecindad euclidiana.*

□

El siguiente teorema es fácil de probar pero no incluimos la demostración (ver [6]).

Teorema 3.1.2. *Si X y Y son variedades, tambien lo es $X \times Y$ y*

$$\dim X \times Y = \dim X + \dim Y.$$

Sea X una variedad de dimensión n. Entonces un subconjunto Z de X es llamado una **subvariedad de dimensión** k, si para cada punto $x \in Z$ existe una vecindad $V' \subset X$ que contiene a x y un difeomorfismo $\varphi : U' \longrightarrow Z \bigcap V'$, donde U' es un abierto de $\mathbb{R}^k$. Definimos la **codimensión** de una subvariedad Z de X mediante la formula $\text{codim} Z = \dim X - \dim Z$.

Traduciremos la definición de derivada que conocemos para aplicaciones que van de un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ a aplicaciones entre variedades cualesquiera. Sabemos que la derivada de una aplicación es su mejor aproximación lineal, por lo tanto, podemos usar las derivadas para identificar el espacio lineal que mejor aproxima a una variedad X en el punto x. Sean $X \subset \mathbb{R}^N$, y $\varphi : U \longrightarrow X$ una parametrización local en torno de x, donde U es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^k$, y supongamos que $\varphi(0) = x$. La mejor aproximación lineal a $\varphi : U \longrightarrow X$ en 0 es la aplicación

$$u \longrightarrow \varphi(0) + d\varphi_0(u) = x + d\varphi_0(u).$$

Definimos el **espacio tangente** de X en x como la imagen de la transformación lineal $d\varphi_0 : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^N$. El espacio tangente de X, que denotamos por $T_x(X)$, es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^N$ cuya traslación paralela $x + T_x(X)$ es la aproximación plana más cercana a X que pasa por x.

Veamos cual es la mejor aproximanción lineal de una aplicación lisa entre variedades arbitrarias $f : X \longrightarrow Y$ en un punto x. Si $f(x) = y$, esta **derivada** debe ser una tranformación lineal entre los espacios tangentes, es decir, $df_x : T_x(X) \longrightarrow T_y(Y)$. Sean $\varphi' : U' \longrightarrow X$ y $\psi : V \longrightarrow Y$ parametrizaciones de X y Y alrededor x y y respectivamente, donde $U' \subset \mathbb{R}^k$, $V \subset \mathbb{R}^l$ y, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\varphi'(0) = x$ y $\psi(0) = y$. Ahora, sean $U = (\psi^{-1} \circ f \circ \varphi)^{-1}(V) \cap U'$, $h = (\psi^{-1} \circ f \circ \varphi)|_U$ y $\varphi = \varphi'|_U$ [1]. Se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \varphi \big\uparrow & & \psi \big\uparrow \\ U & \xrightarrow[h=\psi^{-1}\circ f \circ \varphi]{} & V. \end{array}$$

La regla de la cadena nos convierte el diagrama anterior en un diagrama conmutativo de transformaciones lineales:

$$\begin{array}{ccc} T_x(X) & \xrightarrow{d\psi_0 \circ dh_0 \circ d\varphi_0^{-1}} & T_y(Y) \\ d\varphi_0 \big\uparrow & & d\psi_0 \big\uparrow \\ \mathbb{R}^k & \xrightarrow[dh_0]{} & \mathbb{R}^l. \end{array}$$

Como $d\varphi_0$ y $d\psi_0$ son isomorfismos, podemos definir df_x, como

$$df_x = d\psi_0 \circ dh_0 \circ d\varphi_0^{-1}.$$

3.2. Inmersiones y sumersiones

El teorema de la función inversa escrito para variedades dice lo siguiente: Sean X, Y variedades de la misma dimensión y supongamos que $f : X \longrightarrow Y$ es una aplicación lisa cuya derivada df_x en el punto x es invertible, entonces

[1] En ocasiones en lugar de intersecar conjuntos y restringir funciones diremos que las vecindades en cuestión son suficientemente pequeñas o que se pueden reducir de modo que las comoposiciones estén bien definidas.

f es un difeomorfismo local en x.

También podemos reformularlo utilizando coordenadas locales; si df_x es un isomorfismo, entonces existen parametrizaciones locales $\varphi : U \longrightarrow X, \psi : U \longrightarrow Y$ con el mismo dominio abierto en $\mathbb{R}^k$, tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \varphi\uparrow & & \psi\uparrow \\ U & \xrightarrow[Id_U]{} & U. \end{array}$$

Definición 3.2.1. *Se dice que dos aplicaciones $f : X \longrightarrow Y$ y $f' : X' \longrightarrow Y'$ son **equivalentes** si existen difeomorfismos α y β tales que el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \alpha\uparrow & & \beta\uparrow \\ X' & \xrightarrow[f']{} & Y'. \end{array}$$

conmuta.

Así, el teorema de la función inversa dice que si df_x es un isomorfismo, entonces f es localmente equivalente a la identidad.

Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación que lleva x en y, donde $\dim X < \dim Y$. Si $df_x : T_x(X) \longrightarrow T_y(Y)$ es inyectiva, se dice que f es una **inmersión en** x. Si f es una inmersión en cada punto se dice que es una **inmersión**. La **inmersión canónica** es la inclusión natural de $\mathbb{R}^k$ en $\mathbb{R}^l$ para $l \geq k$, donde $(a_1, ...a_k)$ se aplica en $(a_1, ...a_k, 0, ..., 0)$ y de hecho, localmente ésta es la única inmersión salvo difeomorfismos.

Teorema 3.2.2. ***(De inmersión local)*** *Supongamos que $f : X \longrightarrow Y$ es una inmersión en x, y $y = f(x)$. Entonces existen coordenadas locales en torno de x y de y tales que*

$$f(x_1, \ldots, x_k) = (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0).$$

En otras palabras, f es localmente equivalente a la inmersión canónica cerca de x.

Demostración. Elegimos parametrizaciones locales alrededor de x y de $y = f(x)$ de modo que tenemos el siguiente diagrama sea conmutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ U \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "g"'] & V, \arrow[u, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

tal que $\varphi(0) = x, \psi(0) = y$, donde $g = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ y $U \subset \mathbb{R}^k$, $V \subset \mathbb{R}^l$ son abiertos.

Como $dg_0 : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^l$ es inyectiva, entonces podemos suponer, mediante un cambio de base en $\mathbb{R}^l$, que tiene una matriz asociada de $l \times k$ de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} I_k \\ 0 \end{pmatrix},$$

donde I_k es la matriz identidad $k \times k$.

Si definimos $G : U \times \mathbb{R}^{l-k} \longrightarrow \mathbb{R}^l$ como $G(x, z) = g(x) + (0, z)$, podemos notar que la matriz de dG_0 es I_l y que G va de un conjunto abierto de $\mathbb{R}^l$ a $\mathbb{R}^l$, por lo tanto, podemos aplicar el teorema de la función inversa y obtener que G es un difeomorfismo local alrededor de 0. Notemos también que hemos definido G de modo que $g = G \circ$(inmersión canónica). Como ψ y G son difeomorfismos locales en 0, también $\psi \circ G$ lo es; de este modo $\psi \circ G$ es una parametrización local de Y alrededor de y. Además, si tomamos U y V suficientemente pequeños, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ U \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\text{Inm c.}"'] & V \arrow[u, "\psi\circ G"'] \end{tikzcd}$$

donde, por supuesto, Inm c. quiere decir inmersión canónica. Con esto queda terminada la prueba. $\square$

Decimos que una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ es **propia** si la imagen inversa de todo conjunto compacto en Y es compacta en X. A una inmersión que es inyectiva y propia se le llama **encaje**.

Teorema 3.2.3. *Un encaje $f : X \longrightarrow Y$ aplica a X de manera difeomorfa sobre una subvariedad de Y.*

Demostración. Por el teorema de inmersión local tenemos que f aplica cualquier vecindad W suficientemente pequeña de un punto arbitrario x difeomorfamente sobre su imagen $f(W)$ en Y. Para ver que $f(X)$ es una variedad sólo nos falta ver que $f(W)$ es un abierto de $f(X)$. Supongamos que $f(W)$ no es abierto en $f(X)$, entonces existe una sucesión de puntos $y_i \in f(X)$ que no pertenecen a $f(W)$ y que convergen a un punto $y \in f(W)$. Como el conjunto $\{y, y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es compacto, entonces su imagen inversa en X también compacta. Cada punto y_i tiene una imagen inversa $x_i \in X$, y y tiene una imagen inversa x que debe pertenecer a W. Como $\{x, x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es compacto, entonces tiene una subsucesión convergente, podemos suponer que (para no complicar la notación) la misma sucesión $x_{i i\in\mathbb{N}}$ converge a un punto $z \in X$. Entonces $f(x_i) \longrightarrow f(z)$, pero como $f(x_i) \longrightarrow f(x) = y$, la inyectividad local de f implica que $z = x$. Por otro lado, W es abierto, de modo que como $x_i \longrightarrow x$, concluimos que, para i suficientemente grande, $x_i \in W$. Pero esto en una contradicción al hecho de que y_i no pertenece a $f(W)$. Por lo tanto, $f(X)$ es una variedad. Más aún $f : X \longrightarrow f(X)$ es un difeomorfismo pues, como f biyectiva y además es un difeomorfismo local de X en $f(X)$ entonces $f^{-1} : f(X) \longrightarrow X$ está bien definida como aplicación entre conjuntos, además, localmente, f^{-1} es lisa, por lo tanto es lisa. □

Sea $f : X \longrightarrow Y$ es una aplicación que lleva x en y, donde $\dim X \geq \dim Y$. Si $df_x : T_x(X) \longrightarrow T_y(Y)$ es suprayectiva, se dice que f es una **sumersión en** x. Una aplicación que es una sumersión en cada punto se llama **sumersión**. La sumersión canónica es la proyección natural de $\mathbb{R}^k$ sobre $\mathbb{R}^l$ para $k > l$, en la cual $(a_1, \ldots, a_l, \ldots, a_k)$ se aplica en $(a_1, \ldots, a_l)$. Como en las inmersiones, toda sumersión es localmente canónica, salvo difeomorfismos.

Teorema 3.2.4. ***(De sumersión local)*** *Supongamos que $f : X \longrightarrow Y$ es una sumersión en x, y $y = f(x)$. Entonces existen coordenadas locales en torno de x y de y tales que*

$$f(x_1, \ldots, x_k) = (x_1, \ldots, x_l).$$

La demostración ya la hicimos en 1.3.4

Lema 3.2.5. *Sean X y Y dos variedades de dimensión n y m respectivamente. Si X es una subvariedad de Y, entonces para cada punto $x \in M$ hay una vecindad abierta U de x en Y y una sumersión $g : U \longrightarrow \mathbb{R}^{m-n}$ tal que $g^{-1}(0) = X \cap U$.*

Demostración. Por definición de subvariedad existe una carta coordenada $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ alrededor de x en Y tal que si $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$, entonces $\varphi^{-1}(\mathbb{R}^n \times \{0\}) = X \cap U$. Entonces $g = \pi \circ \varphi$, donde $\pi : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^{m-n}$ es la proyección en el segundo factor, es una sumersión con $g^{-1}(0) = X \cap U$. $\square$

Podemos dar una definición de valor regular para una aplicación entre variedades.

Sea $f : X \longrightarrow Y$ lisa, decimos que un punto $y \in Y$ es un **valor regular** de f si $df_x : T_x(X) \longrightarrow T_y(Y)$ es suprayectiva en cada punto x tal que $f(x) = y$. Si $x \in f^{-1}(y)$, y y valor regular, diremos que x es un **punto regular**, o que f **es regular en** x.

Teorema 3.2.6. ***(De la imagen inversa)*** *Sean X y Y dos variedades de dimensión n y m respectivamente, donde $m \geq n$. Si y es un valor regular de una aplicación lisa $f : X \longrightarrow Y$, entonces $f^{-1}(y)$ es una subvariedad de X de dimensión $n - m$.*

Demostración. Ya que f es una sumersión en el punto $x \in f^{-1}(y)$, podemos elegir sistemas de coordenadas locales alrededor de x y de y tales que $f(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_m)$ y que y corresponda a (0,...,0). Por lo tanto, si U es la vecindad coordenada en x en la cual las funciones $x_1, ..., x_n$ están definidas, entonces $f^{-1}(y) \cap U$ es el conjunto de puntos $(0, ..., 0, x_{m+1}, ...x_n)$. Así, las funciones $x_{m+1}, ...x_n$ forman un sistema de coordenadas en el abierto relativo $f^{-1}(y) \cap U$ de $f^{-1}(y)$. $\square$

Sean $g_1, \ldots, g_l$ funciones reales lisas en una variedad X de dimensión $k \geq l$. ¿Qué podemos decir del conjunto de ceros comunes de las funciones g_i?

Podemos definir $g = (g_1, \ldots, g_l) : X \longrightarrow \mathbb{R}^l$, así, el conjunto $Z = g^{-1}(0)$ es una subvariedad de X si 0 es un valor regular de g. Por otro lado como cada g_i es un función lisa de X a $\mathbb{R}$, su derivada en x es una transformación lineal $d(g_i)_x : T_x(X) \longrightarrow \mathbb{R}$, o sea, para cada i, $d(g_i)_x$ es una funcional lineal en el espacio vectorial $T_x(X)$. Además, $dg_x : T_x(X) \longrightarrow \mathbb{R}^l$ es suprayectiva si y sólo si las funcionales $d(g_1)_x, \ldots, d(g_l)_x$ son linealmente independientes en $T_x(X)$. Si las funciones g_i satisfacen lo anterior, diremos que las l funciones $g_1, \ldots, g_l$ son **independientes** en x. El teorema de la función inversa se traduce en:

Teorema 3.2.7. *Si las funciones reales lisas $g_1, \ldots, g_l$ definidas en X son independientes en cada punto donde se anulen, entonces el conjunto Z de ceros comunes es una subvariedad de X con dimensión igual a $\dim X - l$.*

□

Podemos decir que las l funciones independientes modelan una subvariedad de X de codimensión l. Algo similar sucede en el otro sentido, es decir, toda subvariedad de una variedad X se modela localmente mediante funciones independentes, más especificamente; sea Z una subvariedad de X de codimensión l, y sea z cualquier punto de Z. Entonces existen l funciones independientes $g_1, \ldots, g_l$ definidas en alguna vecindad abierta W de z en X de modo que $Z \cap X$ es el conjunto de ceros comunes de las g_i. Esto es una consecuencia del teorema de imersión local.

Lema 3.2.8. *Sea Z la imagen inversa de un valor regular $y \in Y$ bajo la aplicación lisa $f : X \longrightarrow Y$. Entonces el núcleo, N,de la derivada $df_x : T_x(X) \longrightarrow T_{f(x)}(Y)$ en cualquier punto $x \in Z$ es el espacio tangente a Z, $T_x(Z)$.*

Demostración. Claramente f es constante en Z, por lo tanto, df_x se anula en $T_x(Z)$ y como y es valor regular, $df_x : T_x(X) \longrightarrow T_{f(x)}(Y)$ es suprayectiva; podemos aplicar el teorema de la imagen inversa (3.2.6) y obtener que la dimensión del núcleo de df_x es

$$\dim T_x(X) - \dim T_{f(x)} = \dim X - \dim Y = \dim Z.$$

Así, $T_x(Z)$ es un subespacio de N que tiene la misma dimensión que N, por lo tanto, $T_x(Z) = N$. □

3.3. Transversalidad

Ahora supongamos que Z es una subvariedad de Y y que $f : X \longrightarrow Y$ es una aplicación lisa. Queremos cuándo $f^{-1}(Z)$ es una variedad, es decir, queremos ver que cada punto $x \in f^{-1}(Z)$ tiene una vecindad U en X tal que $f^{-1}(Z) \cap U$ es una variedad.

Si $x \in f^{-1}(Z)$ entonces $f(x) = y \in Z$, es decir, podemos ver a Z como una vecindad de y. Por otro lado, como Z es una subvariedad de Y, existen funciones independientes $g_1, \ldots, g_l$ que se anulan en Z, donde l es la codimensión de Z en Y. Entonces, cerca de x, $f^{-1}(Z)$ es el conjunto donde se anulan las funciones $g_1 \circ f, \ldots, g_l \circ f$. Sea $g = (g_1, \ldots, g_l) : Y \longrightarrow \mathbb{R}^l$ la sumersión definida alrededor de y. Aplicando lo que discutimos en la sección anterior a la aplicación $g \circ f : X \longrightarrow \mathbb{R}^l$ tenemos que $(g \circ f)^{-1}(0)$ es una variedad cuando 0 es un valor regular de $g \circ f$.

Como $d(g \circ f)_x = dg_y \circ df_x$, la transformación lineal $d(g \circ f)_x : T_x(X) \longrightarrow \mathbb{R}^l$ es suprayectiva si y sólo si dg_y lleva la imagen de df_x sobre $\mathbb{R}^l$. Pero $dg_y : T_y(Y) \longrightarrow \mathbb{R}^l$ es una transformación lineal suprayectiva (pues g es una sumersión en y). Por 3.2.8 el núcleo de dg_y es el subespacio $T_y(Z)$. Por lo tanto, dg_y lleva un subespacio de $T_y(Y)$ sobre $\mathbb{R}^l$ si ese subespacio y $T_y(Z)$ generan a $T_y(Y)$. Así $g \circ f$ es una sumersión en el punto $x \in f^{-1}(Z)$ si y sólo si $df_x(T_x(X)) + T_y(Z) = T_y(Y)$.

Llegamos así a una nueva definición.

Definición 3.3.1. *Sean X y Y dos variedades, y Z una subvariedad de Y. Entonces se dice que una aplicación lisa $f : X \longrightarrow Y$ es* ***transversal a*** *Z* ***en el punto*** *$x \in f^{-1}(Z)$ si $df_x(T_x(X)) + T_{f(x)}(Z) = T_{f(x)}(Y)$.*

Decimos que f es ***transversal a*** *Z si f es transversal a Z en x para toda $x \in f^{-1}(Z)$.*

Hemos probado el siguiente teorema.

Teorema 3.3.2. *Si la aplicación lisa $f : X \longrightarrow Y$ es transversal a una subvariedad $Z \subset Y$ entonces $f^{-1}(Z)$ es una subvariedad de X. Si $f^{-1}(Z)$ no es vacia, la codimensión de $f^{-1}(Z)$ en X es igual a la codimensión de Z en Y.*

□

Tenemos una nueva definición y un corolario muy interesante de este teorema, aunque no lo necesitaremos.

Definición 3.3.3. *Dos subvariedades X, Z de una variedad Y son transversales si la aplicación inclusión $i : X \longrightarrow Y$ es transversal a Z.*

Entonces la condición de transversalidad dice que $\forall x \in X \cap Z$, $T_x(X) + T_x(Z) = T_x(Y)$, ya que di_x es la inclusión de $T_x(X)$ en $T_x(Y)$.

Corolario 3.3.4. *La intersección de dos subvariedades X, Z, transversales en Y, es de nuevo una subvariedad. Además*

$$\operatorname{codim}(X \cap Z) = \operatorname{codim} X + \operatorname{codim} Z.$$

Los detalles de la demostración se pueden ver en [6], capítulo 1, sección 5. □

Observación 3.3.5. *La transvarsalidad de dos subvariedades depende de la dimensión de la variedad donde están metidas. Por ejemplo, los dos ejes coordenados son transversales en $\mathbb{R}^2$, pero no lo son en $\mathbb{R}^3$.*

3.4. Variedades con frontera

Un subconjunto X de $\mathbb{R}^N$ es una **variedad con frontera** de dimensión k, si cada punto de X tiene una vecindad difeomorfa a un conjunto abierto en el espacio $\mathbb{H}^k \subset \mathbb{R}^k$, el semiespacio superior que consta de todos los puntos cuya última coordenada es no negativa, tal difeomorfismo se llama una parametrización local de X. **La frontera** de X, denotada por ∂X, consta de todos aquellos puntos que pertenecen a la imagen de la frontera de $\mathbb{H}^k$ bajo alguna parametrización local. Su complemento es el interior de X, e $\text{int}X = X \setminus \partial X$.

Proposición 3.4.1. *El producto de una variedad sin frontera X y una variedad con frontera Y es otra variedad con frontera. Además*

$$\partial(X \times Y) = X \times \partial Y$$

y

$$\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y$$

Demostración. Sean $\varphi : U \longrightarrow X$ y $\psi : V \longrightarrow Y$ parametrizaciones locales, con $U \subset \mathbb{R}^k$ y $V \subset \mathbb{H}^l$ abiertos. Se tiene que $U \times V \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{H}^l = \mathbb{H}^{k+l}$ es abierto y $\varphi \times \psi : U \times V \longrightarrow X \times Y$ es una paramettrización local de $X \times Y$. □

Hay que definir espacios tangentes y derivadas también para variedades con frontera. Sea $g : U \subset \mathbb{H}^k \longrightarrow \mathbb{R}^l$ una aplicación lisa, si u es un punto interior de U, entonces la derivada ya la hemos definido. Si $u \in \partial U$, como g es lisa, la podemos extender a otra aplicación lisa $\widetilde{g}$ definida en una vecindad abierta de u en $\mathbb{R}^k$. Definimos dg_u como la derivada $d\widetilde{g}_u : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^l$. Se puede demostrar que la definición de dg_u no depende de la elección de la extensión, es decir, si $\widetilde{\widetilde{g}}$ es otra extensión, entonces $d\widetilde{g}_u = d\widetilde{\widetilde{g}}_u$.

Si $X \subset \mathbb{R}^N$ es una variedad de dimensión k con frontera, definimos su espacio tangente $T_x(X)$ en un punto $x \in X$ como la imagen de la derivada de cualquier parametrización local alrededor de x. En el caso de variedades con frontera, $T_x(X)$ es también un subespacio lineal de $\mathbb{R}^N$ de dimensión k, aunque x sea un punto frontera, y la definición del espacio tangente es independiente de la parametrización.

Así, podemos definir la derivada de una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ exactamente como antes. Además, la regla de la cadena sigue siendo válida.

A continuación hacemos dos afirmaciones, la primera de ellas es obvia y la segunda se puede ver en [6], capítulo 2, sección 1.

1. Si X es una variedad con frontera, entonces $\mathrm{Int}(X)$ es una variedad sin frontera de la misma dimensión que X.
2. Si X es una variedad de dimensión k con frontera, entonces ∂X es una variedad de dimensión $k-1$ sin frontera.

Si M es una variedad con frontera y $f : M \longrightarrow N$ es una aplicación lisa, entonces ∂f denotará la restricción $f|_{\partial M} : \partial M \longrightarrow N$.

El siguiente resultado es una generalización de 3.3.2. Para su demostración ver [6].

Teorema 3.4.2. *Sean X una variedad con frontera, Y una variedad sin frontera, Z una subvariedad de Y sin frontera y $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación lisa. Entonces, si ambos f y ∂f son transversales a Z, la imagen inversa $f^{-1}(Z)$ es una subvariedad de X con frontera*

$$\partial(f^{-1}(Z)) = f^{-1}(Z) \cap \partial X,$$

y la codimensión de $f^{-1}(Z)$ en X es igual a la de Z en Y.

A continuación presentamos una versión del teorema de Sard para variedades sin frontera.

Teorema 3.4.3. *Si $f : X \longrightarrow Y$ es cualquier aplicación lisa entre variedades, entonces casi todo punto de Y es un valor regular.*

La demostración de esta versión es análoga a la discutida en la sección 1.5.

Igualmente, hay una versión del teorema de Sard para variedades con frontera.

Teorema 3.4.4. *Para cualquier aplicación lisa f de una variedad con frontera X en una variedad sin frontera Y, casi cualquier punto de Y es un valor regular de $f : X \longrightarrow Y$ y de $\partial f ; X \longrightarrow Y$.*

Demostración. Como la derivada de ∂f en un punto $x \in \partial X$ es la restricción de df_x al subespacio $T_x(\partial X) \subset T_x(X)$, es claro que si x es un valor regular para ∂f, entonces también es valor regular para f. Así, un punto $y \in Y$ no es valor regular de ambas funciones $f : X \longrightarrow Y$ y $\partial f : \partial X \longrightarrow Y$ sólo cuando es valor crítico de f : Int(X) $\longrightarrow Y$ o de $\partial f : \partial X \longrightarrow Y$. Como mencionamos arriba, Int(X) y ∂X son ambas variedades sin frontera, Así, los conjuntos de valores críticos de f y ∂f tienen medida cero. Entonces, el complemento del conjunto de valores regulares comunes para f y ∂f es la unión de dos conjuntos de medida cero y por lo tanto, tiene medida cero. $\square$

Hemos llegado a la parte más importante de esta sección: El teorema de transversalidad, y un poco más importante para nuestros fines, el teorema de homotopía y transversalidad.

Teorema 3.4.5. *Sean X, S, Y variedades, donde sólo X tiene frontera, Z una subvariedad sin frontera de Y y $F : X \times S \longrightarrow Y$ es una aplicación lisa. Ahora, para cada $s \in S$, sea $f_s : X \longrightarrow Y$ la aplicación definida por $f_s(x) = F(x, s)$. Si F y ∂f son transversales a Z. Entonces para casi toda $s \in S$, tanto f_s : como ∂f_s son transversales a Z.*

Demostración. $W = F^{-1}(Z)$ es una subvariedad de $X \times S$ con frontera $\partial W = W \bigcap \partial(X \times S)$ por 3.4.2. Sea $\pi : X \times S \longrightarrow S$ la proyección natural.

Sea $s \in S$ un valor regular para π. Mostraremos que f_s es transversal a Z, para esto, supongamos que $f_s(x) = z \in Z$. Como $F(x, s) = z$ y F es transversal a Z, entonces

$$dF_{(x,s)}T_{(x,s)}(X \times S) + T_z(Z) = T_z(Y);$$

es decir, dado $a \in T_z(Y)$, existe un $b \in T_{(x,s)}(X \times S)$ tal que

$$dF_{(x,s)}(b) - a \in T_z(Z).$$

Queremos exhibir $v \in T_x(X)$ tal que $df_s(v) - a \in T_z(Z)$. Ahora,

$$T_{(x,s)}(X \times S) = T_x(X) \times T_s(S),$$

de modo que $b = (w, e)$ para ciertos $w \in T_x(X)$ y $e \in T_s(S)$. Si e se anulara, ya habríamos acabado, pues, como la restricción de F a $X \times \{s\}$ es f_s, se sigue que

$$dF_{(x,s)}(w, 0) = df_s(w).$$

Aunque e no tiene por que anularse, podemos usar la proyección π para eliminarlo. Como

$$d\pi_{(x,s)} : T_x(X) \times T_s(S) \longrightarrow T_s(S)$$

es la proyección en el segundo factor, la hipótesis de regularidad de que $d\pi_{(x,s)}$ aplica $T_{(x,s)}(W)$ sobre $T_s(S)$ nos dice que existe un vector de la forma (u, e) en $T_{(x,s)}(W)$. Pero como $F : W \longrightarrow Z$, se tiene que $dF_{(x,s)}(u, e) \in T_z(Z)$. Así, $v = w - u \in T_x(X)$ es nuestra solución, pues

$$df_s(v) - a = dF_{(x,s)}((w, e) - (u, e)) - a = (dF_{(x,s)}(w, e) - a) - dF_{(x,s)}(u, e),$$

y los últimos vectores pertenecen a $T_z(Z)$.

El mismo argumento muestra que ∂f_s es tranversal a Z siempre que s sea un valor regular de $\partial\pi$. Por el teorema de Sard, casi cualquier $s \in S$ es un valor regular de ambas aplicaciones, π y $\partial\pi$, de donde se sigue el teorema. □

El siguiente teorema es útil para terminar con esta sección, su demostración se puede ver en [6] capítulo 2, sección 3.

Teorema 3.4.6. ***(De la ε-vecindad)*** *Para una variedad compacta y sin frontera Y en $\mathbb{R}^M$ y un número positivo ε, sea Y^ε el conjunto abierto de puntos en $\mathbb{R}^M$ cuya distancia a Y es menor que ε. Si ε es suficientemente pequeño, entonces cada punto punto $w \in Y^\varepsilon$ tiene un único punto más cercano en Y, denotado $\pi(w)$. Además, la aplicación $\pi : Y^\varepsilon \longrightarrow Y$ es una sumersión. Si Y no es compacta sigue existiendo una sumersión $\pi : Y^\varepsilon \longrightarrow Y$ que es la identidad en Y, pero ahora se permite que ε sea una función lisa y positiva definida en Y, y Y^ε se define como*

$$\{w \in \mathbb{R}^M \mid |w - y| < \varepsilon(y) \quad \textit{para algún} \quad y \in Y\}.$$

Corolario 3.4.7. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación lisa, donde Y no tiene frontera. Entonces existe una bola abierta S en algún espacio euclidiano y una aplicación lisa $F : X \times S \longrightarrow Y$ tal que $F(x, 0) = f(x)$ y para cualquier $x \in X$ ocurre que la aplicación $s \longmapsto F(x, s)$ es una sumersión $S \longrightarrow Y$. En particular tanto F como ∂F son sumersiones.*

Demostración. Si $\mathbb{R}^M$ es el espacio euclidiano ambiente de Y y $S \subset \mathbb{R}^M$ la bola unitaria, podemos definir $F : X \times S \longrightarrow Y$ por

$$F(x,s) = \pi(f(x) + \varepsilon(f(s))s).$$

$\pi : Y^\varepsilon \longrightarrow Y$ restringido a Y es la identidad, así, $F(x,0) = f(x)$. Ahora, para x fijo,

$$s \longmapsto f(x) + (\varepsilon f(x))s$$

es una sumersión de $S \longrightarrow Y$, pues es lineal. La aplicación dada por $s \longmapsto F(x,s)$ es una sumersión, por ser composición de dos sumersiones. F y ∂F son sumersiones, pues lo son restringidas a la subvariedad $\{x\} \times S$ y por cada punto de $X \times S$ y de $(\partial F) \times S$ pasa una de tales subvariedades. $\square$

Finalmente llegamos al teorema más importante de esta sección.

Teorema 3.4.8. ***(De homotopía y transversalidad)*** *Para cualquier aplicación lisa $f : X \longrightarrow Y$ y cualquier subvariedad sin frontera Z de la variedad sin frontera Y, existe una aplicación lisa $g : X \longrightarrow Y$ homotópica a f tal que g y ∂g son transveersales a Z.*

Demostración. Sea $F : X \times S \longrightarrow Y$ dada por en el corolario 3.4.7. El teorema de transversalidad 3.4.5 implica que f_s y ∂f_s son transversales a Z para casi toda $s \in S$, pues como F y ∂F son sumersiones, en particular son sumersiones en cada punto de $F^{-1}(Z)$ y $(\partial F)^{-1}(Z)$ respectivamente, o sea F y ∂F son transversales a Z. Ademas, la aplicación $H : X \times I \longrightarrow Y$ dada por $H(x,t) = F(x,ts)$ es una homotopía entre f_s y f para cada s. $\square$

Capítulo 4

Un poco de topología algebraica

En este capítulo abordaremos varios temas de topología algebraica, no profundizaremos mucho en ellos, sin embargo, sera suficiente para el propósito de este trabajo ya que cada tema jugará en papel importante en los resultados del siguiente capitulo.

4.1. Grupos de homotopía

Dada una trayectoria $\omega : I = [0,1] \longrightarrow X$, donde X es un espacio topológico, definimos la **trayectoria inversa** como $\overline{\omega} : I \longrightarrow X$ tal que $\overline{\omega}(t) = w(1-t)$. Si $\omega(0) = x_0$ y $\omega(1) = x_1$ entonces $\overline{\omega}(0) = x_1$ y $\overline{\omega}(1) = x_0$. Dos trayectorias ω, σ son **conectables** o **enchufables** si $\omega(0) = \sigma(1)$; en este caso podemos definir el **producto** de ω y σ como la trayectoria $\omega\sigma : I \longrightarrow X$, tal que

$$(\omega\sigma)(t) = \begin{cases} \omega(2t) & \text{si} \quad 0 \leq t \leq 1/2 \\ \sigma(2t-1) & \text{si} \quad 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Podemos definir una relación de equivalencia: diremos que dos trayectorias ω, σ, están relacionadas si son homotópicas; denotaremos la clase de equivalencia de ω por $[\omega]$ y le llamaremos **clase de homotopía** de ω. Nos interesaremos, en particular, por las clases de lazos basados en un punto específico x_0, es decir, en trayectorias que empiezan y terminan en el punto x_0.

Si H es una homotopía entre ω_0 y ω_1 y K es una homotopía entre σ_0 y σ_1, entonces la homotopía $HK : I \times I \longrightarrow X$, tal que

$$HK(s,t) = \begin{cases} H(2s,t) & \text{si } 0 \leq s \leq 1/2 \\ K(2s-1,t) & \text{si } 1/2 \leq s \leq 1, \end{cases} \tag{4.1}$$

está bien definida y HK es una homotopía entre $\omega_0\sigma_0$ y $\omega_1\sigma_1$. Entonces podemos definir el producto de clases de homotopía de dos trayectorias ω y σ conectables (o enchufables) por la fórmula

$$[\omega][\sigma] = [\omega\sigma].$$

Teorema y definición 4.1.1. *Sea (X, x_0) un espacio punteado. Entonces el conjunto*

$$\pi_1(X, x_0) = \{[\lambda] \mid \lambda \textit{ es un lazo basado en } x_0\}$$

es un grupo respecto a la multiplicación $[\lambda][\mu] = [\lambda\mu]$, con elemento neutro la clase del lazo constante en x_0, $[c_{x_0}]$, y con $[\,\overline{\lambda}\,] = [\lambda]^{-1}$ como inverso de $[\lambda]$. A este grupo se la llama grupo fundamental de X basado en el punto x_0.

□

La definición del **n-ésimo grupo de homotopía**, $\pi_n(X, x_0)$, de un espacio X, es estrictamente análoga a la del grupo fundamental. Reemplazamos el intervalo $I = [0,1]$ por el n-cubo I^n que consiste de los puntos $(t_1, \ldots, t_n)$ en el espacio euclidiano tal que $0 \leq t_i \leq 1$ (i=1,. . . ,n). Una $(n-1)$-cara de I^n es obtenida poniendo algún t_i igual a 0 o 1, la unión de las $(n-1)$-caras forman la frontera ∂I^n de I^n. Consideramos las aplicaiones de I^n a X que mandan ∂I^n a x_0, entonces los elementos de $\pi_n(X, x_0)$ son las clases de homotopía de estas aplicaciones.

Denotamos la primera $n-1$ cara de I^n por I^{n-1} poniendo $t_n = 0$. La unión de todas las $n-1$ caras restantes de I^n la denotamos por J^{n-1}. Asi

$$\partial I^n = I^{n-1} \cup J^{n-1}, \qquad \partial I^{n-1} = I^{n-1} \cap J^{n-1}.$$

Sean A un subespacio de X y x_0 un punto de A. Entonces

$$f : (I^n, I^{n-1}, J^{n-1}) \longrightarrow (X, A, x_0)$$

denotará a una aplicación continua de I^n a X que lleva I^{n-1} en A y J^{n-1} en x_0. En particular, f lleva ∂I^n en A y ∂I^{n-1} en x_0. Denotamos por $F^n(X, A, x_0) = F^n$ al conjunto de todas tales funciones.

Si f_1, f_2 están en F^n, con $n \geq 2$, definimos su **producto** como la aplicación

$$(f_1f_2)(t) = \begin{cases} f_1(2t_1, t_2, \ldots, t_n) & \text{si } 0 \leq t_1 \leq 1/2, \\ f_2(2t_1 - 1, t_2, \ldots, t_n) & \text{si } 1/2 \leq t_1 \leq 1, \end{cases}$$

que vuelve a estar en F^n.

Ahora, si f_1, f_2 son homotópicas a f_1' y f_2' respectivamente, podemos combinar ambas homotopías y obtener una homotopía entre f_1f_2 y $f_1'f_2'$. Así, análogamente a lo dicho para el grupo fundamental, tenemos definido un producto en el conjunto de clases de homotopía $\pi_n(X, x_0)$, donde el elemento neutro es la clase de homotopía de la aplicación constante $f_0(I^n) = x_0$.

En el caso de esferas se tiene que $\pi_q(\mathbb{S}^n, x)$ es el grupo trivial, para cualquier $x \in \mathbb{S}^n$ y para todo $q < n$. Esto último se puede consultar en [11].

4.2. Aplicaciones cubrientes

Definición 4.2.1. *Sea X un espacio topológico.* ***Una aplicación cubriente*** *sobre X es una aplicación continua $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$, $\widetilde{X} \neq \emptyset$, tal que cada punto $x \in X$ tiene una vecindad U en X que satisface lo siguiente:*

1. *La imagen inversa de U, $p^{-1}(U)$, es la unión ajena de abiertos $\widetilde{U}_j \subset \widetilde{X}$, $j \in J$, donde J es algún conjunto no vacío de índices.*
2. *Para cada $j \in J$, la restricción $p|_{\widetilde{U}_j} : \widetilde{U}_j \longrightarrow U$ es un homeomorfismo.*

En particular, por *1*, p es suprayectiva. A $\widetilde{X}$ se le llama el **espacio total** y para cada $x \in X$, a $p^{-1}(x)$ se le conoce como la **fibra** sobre x, la cual es no vacía por ser p suprayectiva. Una vecindad U que satisface *1* y *2* se dice que está **cubierta parejamente** por p y a los conjuntos $\widetilde{U}_j$ se les llaman **hojas** sobre U.

Proposición 4.2.2. *Sea $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ una aplicación cubriente, tal que X es conexo. Si $x, y \in X$, entonces las fibras $p^{-1}(x)$ y $p^{-1}(y)$ tienen la misma cardinalidad. A esta cardinalidad se le llama multiplicidad de la aplicación cubriente. Puede ser finita o infinita.*

Demostración. Por *1* de la definición 4.2.1, el conjunto de todos los puntos de X cuyas fibras tienen la misma cardinalidad que $p^{-1}(x)$ es abierto. Si suponemos que $p^{-1}(y)$ tiene otra cardinalidad, entonces también el conjunto de todos los puntos de X cuya fibra tiene cardinalidad distinta de $p^{-1}(x)$ es abierto y no vacío. Esto último contradice la conexidad de X. $\square$

A continuación enlistamos algunas propiedades de una aplicación cubriente $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$.

1. Para cada $x \in X$ la fibra $p^{-1}(x)$ es un espacio discreto.

2. Las vecindades en X cubiertas parejamente forman una base para la topología de X; Las hojas que yacen sobre ellas forman una base para la topología de $\widetilde{X}$.

3. p es un homeomorfismo local. De hecho, si X es conexo, p es continua, suprayectiva y abierta.

Ejemplo. Sea $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$, tal que $p(t) = \mathrm{e}^{2\pi it}$. Si tomamos $U = \mathbb{S}^1 \setminus \{1\}$, entonces $p^{-1}(U) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, de hecho, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}(n, n+1)$ y para cada n, $p|_{(n,n+1)} : (n, n+1) \longrightarrow U$ en un homeomorfismo. Análogamente el abierto $\mathbb{S}^1 \setminus \{-1\}$ está cubierto parejamente. Más generalmente, si $U \subset \mathbb{S}^1$ es cualquier abierto distinto de $\mathbb{S}^1$, entonces $p^{-1}(U) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \widetilde{U}_n$ y $p|_{\widetilde{U}_n} : \widetilde{U}_n \longrightarrow U$ es un homeomorfismo, donde los $\widetilde{U}_n$ son abiertos ajenos de $\mathbb{R}$.

4.3. Grupos de transformaciones

Se dice que un grupo G es un **grupo topológico** si es un espacio topológico y tanto el producto de G, $G \times G \longrightarrow G$, como la función de G en G que manda a cada elemento a su inverso, son continuas.

Definición 4.3.1. *Sea G un grupo topológico. Una* ***acción (izquierda)*** *de G en un espacio X es una aplicación continua*

$$\mu : G \times X \longrightarrow X,$$

donde escribiremos gx en lugar de $\mu(g, x)$, que satisface las siguientes condiciones:

1. $1x = x$,

2. $g_1(g_2x) = (g_1g_2)x$.

Se dice que la acción es **pareja** o que G **actúa parejamente**[1] sobre X si todo punto $x \in X$ tiene una vecindad V, tal que $V \cap gV = \emptyset$ para todo $g \in G$ distinto de 1, donde $gV = \{gx | x \in V\}$, es abierto pues para cada $g \in G$ la aplicación $f_g : X \longrightarrow X$ dada por $f_g(x) = gx$ es un homeomorfismo. Se dice que una acción es **libre** o que G **actúa libremente** sobre X si para todo $x \in X$ y para todo $g \neq 1 \in G$, $gx \neq x$. Dado $x \in X$, al subconjunto $Gx = \{gx | g \in G\}$ de X, se le llama la **órbita** de x bajo la acción de G en X. El **espacio de órbitas** o **espacio cociente** de la acción de G en X es el espacio cociente $X/G = X/\sim$, donde $x_1 \sim x_2$ si y sólo si $x_2 = gx_1$ para algún $g \in G$.

Los siguientes dos resultados son fáciles de probar.

Proposición 4.3.2. *Si G es un grupo finito que actúa en forma libre en un espacio de Hausdorff X, entonces la acción es pareja.*

Proposición 4.3.3. *Si G es un grupo que actúa libremente sobre un espacio X, entonces X es una variedad de dimensión n si y sólo si X/G es una variedad de dimensión n.*

Teorema 4.3.4. *Si el grupo topológico G actúa parejamente en el espacio topológico X, entonces la aplicación cociente $q : X \longrightarrow X/G$ es una aplicación cubriente, cuya multiplicidad es la cardinalidad del grupo G.*

Demostración. Sea $x \in X$ y sea V una vecindad de x tal que $g_1V \cap g_2V = \emptyset$ para todo par de elementos $g_1 \neq g_2 \in G$, entonces la vecindad $U = q(V)$ de $q(x)$ está cubierta parejamente por q, ya que $q^{-1}(U) = \sqcup_{g \in G} gV \subset X$ ($\sqcup$ quiere decir unión ajena), así, cada fibra es equivalente, como conjunto, a G pues la aplicación $h : G \longrightarrow q^{-1}q(x) = \{gx | g \in G\}$, dada por $h(g) = gx$, es biyectiva. Por lo tanto la multiplicidad de q es la cardinalidad de G. $\square$

Ejemplo. Consideremos la $(2n-1)$-esfera

$$\mathbb{S}^{2n-1} = \{z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n | \quad |z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2 = 1\},$$

que es un espacio de Hausdorff y a $\mathbb{Z}_k$ el grupo multiplicativo de las k-raíces de 1 en $\mathbb{S}^1$. Hay una acción de $\mathbb{Z}_k$ en $\mathbb{S}^{2n-1}$, dada por $(\zeta, z) \mapsto (\zeta z_1, \ldots, \zeta z_n)$.

[1]Otros autores le llaman acción propiamente discontinua, pero nosotros consideramos más conveniente esta designación.

Esta acción es libre pues para toda raíz de 1, ζ, distinta de 1, $\zeta z_i \neq z_i$ con $i \in \{1, \ldots, n\}$, y por 4.3.2 es pareja. Por lo tanto, por 4.3.4,

$$q : \mathbb{S}^{2n-1} \longrightarrow \mathbb{S}^{2n-1}/Z_k \tag{4.2}$$

es una aplicación cubriente.

Cuando k es primo, al espacio $\mathbb{S}^{2n-1}/Z_k$ se le llama espacio **lente**, donde $2n-1$ es la dimensión de esta variedad.

El siguiente teorema es muy importante. Su demostración se basa en el grado de una aplicación pero definido de forma diferente a la que presentamos en el segundo capítulo de este trabajo. En [7] se puede consultar la demostración, en la cual definen grado grado a travez de la homología pero este tema se sale de nuestro objetivo.

Teorema 4.3.5. *$\mathbb{Z}_2$ es el único grupo no trivial que actúa libremente en la esfera $\mathbb{S}^n$ si n es par.*

Definición 4.3.6. *Un **grupo topológico de transformaciones** (G, X, μ) consta de un grupo topológico G, un espacio topológico X y una acción continua $\mu : G \times X \longrightarrow X$.*

Definición 4.3.7. *Sean (G, X, μ) y (G', X', μ') dos grupos topológicos de transformaciones y $\alpha : G \longrightarrow G'$ un morfismo de grupos topológicos. Se dice que una aplicación continua $f : X \longrightarrow X'$ **conmuta** con las acciones μ y μ' o que f es α-**equivariante** si se satisface lo siguiente:*

$$f(gx) = \alpha(g)f(x) \text{ para todo } g \in G \text{ y } x \in X.$$

Lo anterior es equivalente a decir que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
G \times X \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\alpha\times f"'] & X \arrow[d, "f"] \\
G' \times X' \arrow[r, "\mu'"'] & X',
\end{tikzcd}$$

asi, f induce una aplicación continua $\overline{f}$ tal que también el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{CD} X @>f>> X' \\ @V{\pi}VV @VV{\pi}V \\ X/G @>>{\overline{f}}> X'/G. \end{CD}$$

4.4. Levantamiento

Una de las propiedades más importantes de las aplicaciones cubrientes es la de levantamiento, la cual analizaremos un poco en esta sección.

Definición 4.4.1. *Sea $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ una aplicación cubriente y $f : Y \longrightarrow X$ continua. A una aplicación $\widetilde{f} : Y \longrightarrow \widetilde{X}$ se le llama un **levantamiento** de f si $p \circ \widetilde{f} = f$, es decir, si el siguiente diagrama es conmutativo*

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{X} \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[ur, dashed, "\widetilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & X. \end{tikzcd}$$

Teorema 4.4.2. *Sea $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ una aplicación cubriente. Si Y es un espacio conexo y $\widetilde{f}, \widetilde{g} : Y \longrightarrow \widetilde{X}$ son aplicaciones continuas, tales que $p \circ \widetilde{f} = p \circ \widetilde{g}$, entonces $\widetilde{f} = \widetilde{g}$ si y sólo si existe un punto $y \in Y$, tal que $\widetilde{f}(y) = \widetilde{g}(y)$.*

Demostración. Basta con demostrar el regreso. Sean $y \in Y$ tal que $\widetilde{f}(y) = \widetilde{g}(y)$ y U una vecindad de $p\widetilde{f}(y) = p\widetilde{g}(y)$ cubierta parejamente por p. Si $\widetilde{U}_1$ es la vecindad de $\widetilde{f}(y)$ y $\widetilde{U}_2$ es la vecindad de $\widetilde{g}(y)$, tales que $p : \widetilde{U}_1 \approx U$ (o sea, U_1 y U son homeomorfos) y $p : \widetilde{U}_2 \approx U$, entonces $V = \widetilde{f}^{-1}(\widetilde{U}_1) \bigcap \widetilde{g}^{-1}(\widetilde{U}_2)$ es una vecindad de y en Y. Como $\widetilde{f}(y) = \widetilde{g}(y)$, entonces $\widetilde{U}_1 = \widetilde{U}_2$ y $\widetilde{f}(y') = \widetilde{g}(y')$ para todo punto $y' \in V$. Así, el conjunto en el que coinciden $\widetilde{f}$ y $\widetilde{g}$ es abierto. Si $\widetilde{f}(y) \neq \widetilde{g}(y)$, entonces $\widetilde{U}_1 \bigcap \widetilde{U}_2 = \emptyset$ y, por tanto, $\widetilde{f}(y') \neq \widetilde{g}(y')$ para todo punto $y' \in V$. Así, el conjunto en el cual difieren $\widetilde{f}$ y $\widetilde{g}$ también es abierto. Como Y es conexo y $\widetilde{f}, \widetilde{g}$ coinciden en y, entonces el conjunto abierto donde difieren debe ser vacío. Así, $\widetilde{f}$ y $\widetilde{g}$ coinciden en todo punto de Y. $\square$

Lema 4.4.3. *Sea $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ una aplicación cubriente, entonces para cada aplicación $H : I^2 \longrightarrow X$ continua y para cada punto $\widetilde{x}$ en la fibra sobre $H(0,0)$ existe una única aplicación $\widetilde{H} : I^2 \longrightarrow \widetilde{X}$, tal que $p \circ \widetilde{H} = H$ y $\widetilde{H}(0,0) = \widetilde{x}$*

Este lema lo usaremos para probar el siguiente teorema. Su demostración se puede consultar en [9].

Teorema 4.4.4. ***(Levantamiento único de trayectorias)*** *Consideremos una aplicación cubriente $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$. Para cada trayectoria $\omega : I \longrightarrow X$ y para cada punto $\widetilde{x}$, tal que $p(\widetilde{x}) = \omega(0)$, existe un único levantamiento de ω, $\widetilde{w} : I \longrightarrow \widetilde{X}$, tal que $\widetilde{\omega}(0) = \widetilde{x}$; llamemos a este levantamiento $L(\omega, \widetilde{x})$. Más aún, si ω_0 y ω_1 son trayectorias en X, tales que $\omega_0 \simeq \omega_1$ rel ∂I(o sea que existe una homotopía entre ω_0 y ω_1 tal que $H(x,t) = \omega_0(x) = \omega_1(x)$ para $x \in \{0,1\}$), y $\widetilde{x}$ es un punto tal que $p(\widetilde{x}) = \omega_0(0) = \omega_1(0)$, entonces $L(\omega_0, \widetilde{x}) \simeq L(\omega_1, \widetilde{x})$ rel ∂I en $\widetilde{X}$; en paricular, coinciden los destinos de ambos levantamientos, es decir, $L(\omega_0, \widetilde{x})(1) = L(\omega_1, \widetilde{x})(1)$.*

Demostración. Sea $\omega : I \longrightarrow X$ una trayectoria, definimos una homotopía $H : I \times I \longrightarrow \widetilde{X}$, dada por $H(s,t) = \omega(s)$, así $H(0,0) = \omega(0)$ y si $p(\widetilde{x}) = \omega(0)$, por el lema 4.4.3 existe $\widetilde{H} : I \times I \longrightarrow \widetilde{X}$, tal que $\widetilde{H}(0,0) = \widetilde{x}$ y $p \circ \widetilde{H} = H$. Si definimos la trayectoria $\widetilde{\omega} : I \longrightarrow \widetilde{X}$, por $\widetilde{\omega}(s) = \widetilde{H}(s,0)$, se tiene que $\widetilde{\omega}(0) = \widetilde{x}$ y $p \circ \widetilde{\omega} = \omega$, es decir, es un levantamiento de ω que comienza en $\widetilde{x}$ y, por la unicidad, sabemos que este es el único.

Si $\omega_0, \omega_1 : I \longrightarrow X$ son dos trayectorias homotopicas relativamente a ∂I, y $H : I^2 \longrightarrow X$ es dicha homotopía, entonces, por 4.4.3, existe una homotopía $\widetilde{H} : I^2 \longrightarrow \widetilde{X}$, tal que $p \circ \widetilde{H} = H$ y $\widetilde{H}(0,0) = \widetilde{x}$. Pero la trayectoria $t \mapsto \widetilde{H}(0,t)$ yace sobre la fibra de $\omega_0(0) = \omega_1(0)$ y, como las fibras son discretas, entonces tal trayectoria debe ser constante, análogamente, la trayectoria $t \mapsto \widetilde{H}(1,t)$ es constante. Así, $\widetilde{H}(0,t) = \widetilde{x}$ y $\widetilde{H}(1,t) = \widetilde{y}$, para algún punto $\widetilde{y} \in \widetilde{X}$ fijo en la fibra sobre $\omega_0(1) = \omega_1(1)$ y para todo $t \in I$. Por otro lado, la trayectoria $s \mapsto \widetilde{H}(s,0)$ es un levantamiento de ω_0 que empieza en $\widetilde{x}$ y por 4.4.2, $\widetilde{H}(s,0)$ y $\omega_0(s)$ deben coincidir, análogamente, $\widetilde{H}(s,1)$ y $\omega_0(s)$ coinciden, por lo tanto, el levantamiento de H, $\widetilde{H}$, es una homotopía $\widetilde{\omega}_0 \simeq \widetilde{\omega}_1$ rel ∂I. □

4.5. Complejos simpliciales, complejos CW y fibraciones

Empezaremos describiendo brevemente a los complejos simpliciales.

Definición 4.5.1. *Un **complejo simplicial** K consiste en un conjunto V_K de puntos, llamados **vértices**, y para cada entero $n \geq 0$ un conjunto K^n cuyos elementos son subconjuntos no vacíos de V_K de cardinalidad $n+1$,* *llamados* ***n-simplejos*** *(o* ***simplejos de dimensión n****), con las siguientes propiedades:*

1. *Para cada vértice de $v \in V_K$, $\{v\} \in K^0$,*

2. *Cada subconjunto de un conjunto en K^n con $j+1$ elementos yace en K^j.*

Nótese que un simplejo $\sigma \in K$ también puede ser considerado un complejo simplicial.

Ejemplo. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos un complejo simplicial D_n como sigue. Consideramos $V_{D_n} = \{0, 1, \ldots, n\}$, $n \geq 0$. Entonces D_n^k consta de todos los subconjuntos de la forma $\{i_0, i_1, \ldots, i_k\}$ tal que $i_0 \leq i_1 \leq \ldots, \leq i_k$.

Definición 4.5.2. *Dado un complejo simplicial K, definimos su* ***realización geométrica*** *como el conjunto*

$$|K| = \{\alpha : V_k \longrightarrow I \mid \alpha^{-1}(0,1] \text{ es un simplejo de } K \text{ y } \sum_{v \in V_K} \alpha(v) = 1\}.$$

Podemos notar que $\alpha^{-1}(0,1]$ es finito. La topología métrica de $|K|$ está dada por la métrica definida por $\mu_k(\alpha, \beta) = \sqrt{\sum_{v \in V_k} (\alpha(v) - \beta(v))^2}$, donde la suma es finita. Podemos denotar a este espacio métrico por $|K|_\mu$. Al restringir la métrica a la realización geométrica, $|\sigma|$, del simplejo σ de K, podemos darle una topología a $|\sigma|$. La topología que le damos a $|K|$ es la siguiente: diremos que $A \subset |K|$ es cerrado si y sólo si $A \cap |\sigma|$ es cerrado para todos los simplejos $\sigma \in K$.

Definición 4.5.3. *Dado $n \geq 0$, el n-**simplejo estándar** es el espacio topológico*

$$\triangle^n = \{(t_0, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} | \quad \sum_{i=0}^{n} t_i = 1, \quad t_i \geq 0 \quad \forall i\}.$$

Lema 4.5.4. *Dado un $n-$simplejo σ en un complejo simplicial K, la realización geométrica $|\sigma|$ es homeomorfa al $n-$simplejo estándar $\triangle^n$.*

Demostración. Dado $\alpha \in \sigma$, donde $\sigma = \{v_0, v_1, \ldots, v_k\}$, definimos $\varphi : |\sigma| \longrightarrow \triangle^n$ por

$$\varphi(\alpha) = \sum_{i=0}^{n} \alpha(v_i) e_i,$$

donde e_i es un generador canónico de $\mathbb{R}^{n+1}$. Entonces φ es un homeomorfismo con inversa $\psi : \triangle^n \longrightarrow |\sigma|$ dada por

$$\psi(\sum_{i=0}^{n} t_i e_i)(v_j) = t_j.$$

□

Definición 4.5.5. *Si x es un punto de $|K|$, entonces x está en el interior de exactamente un simplejo de $|K|$, cuyos vértices son $a_0, \ldots, a_n$. Si v es un vértice arbitrario de K, definimos la* ***coordenada baricéntrica*** *$t_v : K \longrightarrow [0,1]$ de x con respecto a v, poniendo $t_v(x) = 0$ si v no es uno de los vértices a_i y $t_v(x) = t_i$ si $v = a_i$ para alguna $i = 0, 1, \ldots, n$. Así $x = \sum_{i=0}^{n} t_i a_i$.*

Definición 4.5.6. *Un* ***morfismo simplicial*** *$f : K \longrightarrow L$ entre complejos simpliciales es una función (de conjuntos) $f : V_K \longrightarrow V_L$ tal que $f(S)$ es un simplejo siempre que S sea un simplejo.*

A continuación vamos a hablar un poco de complejos CW.

Sea $\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de conjuntos ajenos tal que $I_0 \neq \emptyset$. Empezando con esta sucesión, inductivamente construimos una sucesión de espacios topológicos $\{X^n\}$ como sigue:

i) Para $n = 0$ ponemos $X^0 = I_0$ con la topología discreta en I_0.

ii) Si X^{n-1} ha sido ya construido, entonces ponemos $X^n = X^{n-1}$ si $I_n = \emptyset$. Sin embargo, si $I_n \neq \emptyset$, asumimos que tenemos una familia de aplicaciones $\{\varphi^i : \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow X^{n-1} | i \in I_n\}$, llamadas **aplicaciones características**, y ponemos $D_n = \coprod_{i \in I_n} \mathbb{D}_i^n$ y $S_n = \coprod_{i \in I_n} \mathbb{S}_i^{n-1} \subset D_n$, (el simbolo $\coprod$ representa la suma topológica de espacios), donde $\mathbb{D}_i^n = \mathbb{D}^n$ (el disco de dimensión n) y $\mathbb{S}_i^{n-1} = \mathbb{S}^{n-1}$. La familia $\{\varphi^i\}$ determina una aplicación $\varphi_n : S_n \longrightarrow X^{n-1}$ definida por $\varphi_n|_{\mathbb{S}_i^{n-1} = \varphi^i}$. Entonces definimos $X^n = X^{n-1} \cup_{\varphi_n} D_n$ (la suma conexa de X^{n-1} y D_n).

iii) Tenemos encajes cerrados $X^{n-1} \subset X^n$. Definimos $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X^n$ con la topología de la unión, esto es, $K \subset X$ es cerrado $\Leftrightarrow$ $K \cap X^n$ es cerrado para toda n.

Definición 4.5.7. *Un espacio topológico homeomorfo a un espacio X obtenido de esta forma es llamado un* ***complejo CW****. El subespacio X^n es llamado el* ***n-esqueleto*** *de X.*

Si $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X^n$ es un complejo CW, de modo que $\emptyset \neq X^m = X^{m+1} = X^{m+2} = \ldots$, es decir, $X = \bigcup_{n=0}^{m} X^n$, entonces a X le llamaremos **complejo de dimensión** m o $m-$**complejo**.

A un subespacio Y de X que a su vez satisface las tres condiciones anteriores se le denomina **subcomplejo** de X.

Sea $q_n : D_n \sqcup X^{n-1} \longrightarrow X^n$ la identificación de (ii), y ponemos $\widetilde{\varphi}^i = q_n|_{\mathbb{D}_i^n}$. Decimos que $e_i^n = \widetilde{\varphi}^i(\mathring{\mathbb{D}}_i^n)$ es una $n-$**célula abierta** de X, la cual es abierta en X^n pero en general no es abierta en X. También es homeomorfa a $\mathring{\mathbb{D}}^n$, y decimos que $\overline{e}_i^n = \widetilde{\varphi}^i(\mathbb{D}_i^n)$ es una $n-$**célula cerrada** de X, la cual es cerrada tanto en X^n como en X.

Ejemplo. La esfera $\mathbb{S}^n$ es un complejo CW. Esta tiene dos $0-$células (los polos), dos $1-$células,..., y dos $n-$células (los dos hemisferios).

Ejemplo. Toda variedad topológica es del mismo tipo de homotopía que algún complejo CW. Esto se puede ver en [5].

Ahora vamos a definir qué es una fibración.

Definición 4.5.8. *Supongamos que $p : E \longrightarrow B$ es continua y que $\mathcal{C}$ es una clase de espacios topológicos. Decimos que p tiene la **propiedad de levantamiento de homotopías con respecto a** $\mathcal{C}$, denotado por $\mathcal{C}$-PLH, si para todo $X \in \mathcal{C}$, toda aplicación $f : X \longrightarrow E$ y toda homotopía $H : X \times I \longrightarrow B$ que inicia con $p \circ f$, podemos **levantar** H a una homotopía $\widetilde{H} : X \times I \longrightarrow E$ que inicia con f, es decir, $p \circ \widetilde{H} = H$ y $\widetilde{H}(x, 0) = f(x)$. Si una aplicación tiene la $\mathcal{C}$-PLH, también diremos que es una $\mathcal{C}$**-fibración**.*

Si ponemos esta definición en un diagrama, tenemos que p tiene la $\mathcal{C}$-PLH si y sólo si para todo cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[r, "H"] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{H}"] & B, \end{tikzcd}$$

donde $X \in \mathcal{C}$ y $j_0 : X \longrightarrow X \times I$ es la inclusión $j_0(x) = (x, 0)$, existe una aplicación $\widetilde{H}$, como lo indica la flecha punteada, que hace a los dos triángulos conmutativos.

Definición 4.5.9. *Sea $p : E \longrightarrow B$ una $\mathcal{C}$-fibración. Si $\mathcal{C}$ es la clase de complejos CW (o equivalentemente, la clase de hipercubos I^n) entonces decimos que $\mathcal{C}$ es una fibración de Serre.*

Definición 4.5.10. *Una aplicación $p : E \longrightarrow B$ es un **haz localmente trivial** con **fibra** F si todo punto $b \in B$ tiene una vecindad $U \subset B$ y existe un homeomorfismo $\varphi_U : U \times F \longrightarrow p^{-1}(U)$ que hace al siguiente triángulo conmutativo*

$$\begin{tikzcd} U \times F \arrow[rr, "\varphi_U"] \arrow[dr, "\pi"'] & & p^{-1}(U) \arrow[dl, "p_U"] \\ & U, & \end{tikzcd}$$

donde $p_U = p|p^{-1}(U) : p^{-1}(U) \longrightarrow U$ y π es la proyección en U.

La cubierta abierta de tales conjuntos U se llama **cubierta trivializadora** del haz y las aplicaciones φ_U **aplicaciones trivializadoras**.

Ejemplo. Un haz localmente trivial $p : E \longrightarrow B$ cuya fibra F es un espacio discreto es una aplicación cubriente.

Teorema 4.5.11. *Todo haz localmente trivial es una fibración de Serre.*

La demostración de este teorema se puede consultar en [1] capítulo 4, sección 5.

4.6. Más acerca de particiones de la unidad

La siguiente definición de partición de la unidad es menos restrictiva que la que teníamos en 1.1.2 (no se pide que esté subordinada a una familia de conjuntos), sin embargo, en lo que sigue manejaremos ambas definiciones.

Definición 4.6.1. *Una familia de funciones $\Pi = \{\pi_s : X \longrightarrow [0,1]\}_{s\in S}$, donde X es un espacio topológico y π_s es continua para cada $s \in S$, es una **partición de la unidad en** X si $\sum_{s\in S} \pi_s = 1$.*

Definición 4.6.2. *Un espacio de Hausdorff X es **paracompacto** si para cualquier cubierta abierta $\{U_s\}_{s\in S}$ en X hay una partición de la unidad $\{\pi_s\}_{s\in S}$ en X tal que $\pi_s(X \setminus U_s) \subset \{0\}$ para toda $s \in S$, es decir, que está subordinada a $\{U_s\}$.*

Definición 4.6.3. *Una partición de la unidad* $\{\pi_s\}_{s\in S}$ *en* X *es de* ***orden a lo más*** n*, si para cada* $x \in X$*, la cardinalidad del conjunto* $\{s \in S|\pi_s(x) \geq 0\}$ *es a lo más* $n+1$*.*

Definición 4.6.4. *Una partición de la unidad* $\{\eta_s\}_{s\in S}$ *en* X *es una* ***aproximación*** *de una partición de la unidad* $\{\pi_s\}_{s\in S}$*, si* $\eta_s(x) > 0$ *implica que* $\pi_s(x) > 0$ *para toda* $s \in S$*.*

Definición 4.6.5. *Dada una partición de la unidad* $\Pi = \{\pi_s\}_{s\in S}$ *en un espacio* X*, su* ***nervio*** $N(\Pi)$ *está definido como el conjunto de todos los subconjuntos finitos* T *de* S *con la propiedad de que existe* $x \in X$ *tal que* $\pi_s(x) > 0$ *para toda* $s \in T$*.*

Notemos que el nervio $N(\Pi)$ de una partición de la unidad π es un complejo simplicial cuyo conjunto de vértices es el conjunto de índices S y sus simplejos son los subconjuntos finitos de S mencionados arriba. Gracias al lema 4.5.4 podemos notar tembién que cada simplejo σ de $|N(\Pi)|$ satisface que $|\sigma|$ es homeomorfo a algún simplejo estándar, asi pues, trataremos al nervio $|N(\Pi)|$ como un complejo simplicial cuyos simplejos son simplejos estárdar.

Definición 4.6.6. *Sea* U *una cubierta abierta de un espacio* X*. El* ***orden*** *de* U*,* $\mathrm{ord}(U)$*, es el entero más pequeño* n*, con la propiedad de que cualquier familia* $U_1, \ldots, U_{n+2}$ *de diferentes elementos de* U *tiene intersección vacía.*

Lema 4.6.7. *Sea* $n \geq 0$*. Si* X *es un espacio paracompacto, entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. *Cualquier cubierta* $\{U_s\}$ *de* X *tiene un refinamiento* V*, con* $\mathrm{ord}(V) \leq n$*.*

2. *Para cualquier cubierta abierta* $\{U_s\}_{s\in S}$ *de* X*, hay una partición de la unidad* $\{\pi_s\}_{s\in S}$ *de orden a lo más* n *tal que,* $\pi_s(X \setminus U_s) \subset \{0\}$ *para toda* $s \in S$*.*

3. *cualquier partición de la unidad* $\{\pi_s\}_{s\in S}$ *en* X *es aproximable por particiones de la unidad de orden a lo más* n*.*

Demostración. (*1* $\Rightarrow$ *2*). Sea $\{U_s\}_{s\in S}$ una cubierta abierta de X. Elegimos un refinamiento $\{V_t\}_{t\in T}$ de $\{U_s\}_{s\in S}$ cuyo orden es a lo más n. Sea $\{\eta_t\}_{t\in T}$ una partición de la unidad en X tal que $\eta_t(X \setminus V_t) \subset \{0\}$ para toda $t \in T$. Notemos que el orden de $\{\eta_t\}_{t\in T}$ es a lo más n. Hacemos una partición de T en subconjuntos ajenos T_s, $s \in S$, tal que $\eta_t(X \setminus U_s) \subset \{0\}$ para toda

$t \in T_s$. Si $T_s = \emptyset$ definimos $\pi_s = 0$, si no, $\pi_s = \sum_{t \in T_s} \eta_t$, es inmediato que $\{\pi_s\}_{s\in S}$ es la partición de la unidad con la propiedad deseada.

(*2* $\Rightarrow$ *3*). Dada una partición de la unidad $\{\pi_s\}_{s\in S}$ en X ponemos $V_s = \pi_s^{-1}(0,1], s \in S$. Tenemos una partición de la unidad $\{\eta_s\}_{s\in S}$ en X de orden a lo más n tal que $\eta_s(X \smallsetminus V_s) \subset \{0\}$ para cada $s \in S$. Claramente $\{\eta_s\}_{s\in S}$ aproxima a $\{\pi_s\}_{s\in S}$.

(*3* $\Rightarrow$ *1*). Dada una cubierta abierta $\{U_s\}_{s\in S}$ en X, tenemos una partición de la unidad $\{\pi_s\}_{s\in S}$ tal que $\pi_s(X \smallsetminus U_s) \subset \{0\}$ para cada $s \in S$. Podemos aproximar a $\{\pi_s\}_{s\in S}$ por $\{\eta_s\}_{s\in S}$ cuyo orden es a lo más n. Ponemos $V_s = \eta_s^{-1}(0,1]$ y es claro que $\{V_s\}_{s\in S}$ es un refinamiento de $\{U_s\}_{s\in S}$ y su orden es a lo más n. $\square$

Definición 4.6.8. *Sea X un espacio paracompacto y $n \geq -1$. $\dim(X) = -1$ significa que X es vacío. Supongamos que $n \geq 0$, decimos que X es* ***a lo más de dimensión*** *n ($\dim(X) \leq n$), si alguna de las condiciones 1, 2, o 3 del lema anterior se satisface. Decimos que X es de* ***dimensión*** *n ($\dim(X) = n$) si $\dim(X) \leq n$ y $\dim(X) \leq n-1$ no se satisface.*

La siguiente proposición nos será útil más adelante.

Proposición 4.6.9. *Si Z es un complejo CW y Y es un espacio paracompacto de dimensión $d < \infty$, entonces toda aplicación $\eta : Y \longrightarrow Z$ puede ser deformada a una aplicación cuya imagen yazca en el d-esqueleto Z^d de Z.*

Demostración. Si Z es simplicial con coordenadas baricéntricas $\lambda_j : Z \longrightarrow [0,1]$, $j \in J$ (ver 4.5.1 y 4.5.5), entonces $\{\lambda_j \circ \eta\}_{j\in J}$ es una partición de la unidad en Y (ver 4.6.1), la cual, por 4.6.7, tiene una aproximación $\{\mu_k : Y \longrightarrow [0,1]\}_{k\in K}$ de orden a lo más d, es decir, para todo punto $y \in Y$ la cardinalidad del conjunto $\{k \in K| \quad \mu_k(y) > 0\}$ es a lo más $d+1$.

Denotamos por N al nervio de $\{\mu_k\}$, que es un complejo simplicial, damos una aplicación $\mu : Y \longrightarrow |N|$ como sigue.

Sea $U_k = \mu_k^{-1}(0,1]$, tenemos que $\{U_k\}_{k\in K}$ es una cubierta abierta de Y, entonces para todo $x \in Y$ existen a lo más $d+1$ elementos de la cubierta, digamos $U_1, U_2, \ldots, U_q$ con $q \leq d+1$, que contienen a x, y en $|N|$ tenemos que $1, 2, \ldots, q$ son los vértices del q-simplejo estándar en el cual vive x, definimos entonces $\mu(x) \in |N|$ como el punto que tiene por coordenadas baricéntricas las definidas por estos $1, 2, \ldots, q$ vértices.

Ahora damos una aplicación simplicial $f : |N| \longrightarrow Z^d$; mandamos cada vértice i a un vértice j tal que $\mu^{-1}(0,1] \subset \eta^{-1}\lambda^{-1}(0,1]$, de esta forma, claramente f es una aplicación simplicial.

Entonces podemos factorizar η como $Y \xrightarrow{\mu} |N| \xrightarrow{f} Z^d \subset Z$

En general, Z puede no ser simplicial pero $D = Z^r \setminus Z^{r-1}$, que es una unión ajena de células, sí lo es, y puede ser usado como arriba para deformar η fuera de D para $r > d$. □

4.7. Haces

Definición 4.7.1. *Un **haz fibrado** (o simplemente **haz**) $\mathcal{B}$ consta de:*

1. *Un espacio E llamado **espacio total**.*
2. *Un espacio X llamado **espacio base**.*
3. *Una aplicación continua $p : E \longrightarrow X$ llamada la **proyección**.*
4. *Un espacio F llamado la **fibra**.*
5. *Un grupo topológico G que actúa **efectivamente** en F, es decir, si $g \cdot y = y\ \forall y \Rightarrow g = e$, donde e es el idéntico del grupo, G es llamado el **grupo estructural**.*
6. *Una familia $\{V_j\}_{j\in J}$ de conjuntos abiertos que cubren a X llamados **vecindades coordenadas**.*
7. *Para cada $j \in J$ hay un homeomorfismo $\varphi_j : V_j \times F \longrightarrow p^{-1}(V_j)$ llamado **función coordenada**.*

Las funciones coordenadas deben satisfacer las siguientes condiciones.

1. $p\varphi_j(x, y) = x \quad \forall x \in V_j, y \in F$, es decir, conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} V_j \times F \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[d, "proy"'] & p^{-1}(V_j) \arrow[dl, "p"] \\ V_j. & \end{tikzcd}$$

2. Si la aplicación $\varphi_{j,x} : F \longrightarrow p^{-1}(x)$ está definida poniendo

$$\varphi_{j,x}(y) = \varphi_j(x, y),$$

entonces para cada par $i, j \in J$ y cada $x \in V_i \cap V_j$, el homeomorfismo $\varphi_{j,x}^{-1}\varphi_{i,x} : F \longrightarrow F$ coincide con la operación de un elemento de G.

3. Para cada par $i, j \in J$ la aplicación

$$g_{ji} : V_i \cap V_j \longrightarrow G$$

definida por $g_{ij}(x) = \varphi_{j,x}^{-1}\varphi_{i,x}$ es continua

Notemos que la definición de g_{ji} nos dice que a cada $x \in V_i \cap V_j$ lo mandamos a la función $\varphi_{j,x}^{-1}\varphi_{i,x}$ que por 2. es un elemento de G. Las g_{ji} son llamadas **transformaciones coordenadas.**

Vamos a denotar a $p^{-1}(x)$ por F_x y la llamaremos la fibra de x.

Definición 4.7.2. *Sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ dos haces que tienen la misma fibra y el mismo grupo estructural. Una* ***aplicación entre haces*** *$h : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}'$ es una aplicación continua $h : E \longrightarrow E'$ con las siguientes propiedades:*

1. *h manda a cada fibra F_x de $\mathcal{B}$ de manera homeomorfa a una fibra $F_{x'}$ de $\mathcal{B}'$ e induce una aplicación continua $\overline{h} : X \longrightarrow X'$ tal que*

   $p'h = \overline{h}p$

2. *Si $x \in V_j \cap \overline{h}^{-1}(V_k')$, y $h_x : F_x \longrightarrow F_{\overline{h}(x)}$ es la aplicación inducida por h, entonces la aplicación $\overline{g}_{kj} : F \longrightarrow F$ tal que*

   $\overline{g}_{kj}(x) = \varphi_{k,x'}'^{-1} h_x \varphi_{j,x} = p_k' h_x \varphi_{j,x}$ coincide con la operación de un elemento de G

3. *La aplicación obtenida*

   $\overline{g}_{kj} : V_j \bigcap \overline{h}^{-1}(V_k') \longrightarrow G$ es continua.

Una aplicación entre haces común, es la aplicación inclusión $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$ que se obtiene como sigue. Sea $\mathcal{B}'$ un haz sobre X' (es decir, X' el espacio base del haz $\mathcal{B}'$) y X un subespacio de X'. Sean $E = p'^{-1}(X)$, $p = p'|_E$ y definimos las funciones coordenadas de $\mathcal{B}$ por $\varphi_j = \varphi_j'|_{(V_j' \cap X) \times F}$. Entonces $\mathcal{B}$ es un haz y la aplicación inclusión $E \longrightarrow E'$ es una aplicación entre haces $\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}'$. Decimos que $\mathcal{B}$ es $\mathcal{B}'$ restringido a X y usamos la notación $\mathcal{B} = \mathcal{B}'|_X$.

Definición 4.7.3. *Sean E un grupo topológico y G un subgrupo de cerrado E, si $x \in E/G$ (el grupo cociente) y $g \in E$ definimos la* ***traslación izquierda de*** *x* ***por*** *g como*

$$g \cdot x = p(g \cdot e), \text{ donde } e \in p^{-1}(x),$$

y $p : E \longrightarrow E/G$ denota la proyección natural.

Definición 4.7.4. *Un haz $\mathcal{B} = \{E, p, X, F, G\}$ es llamado* ***haz principal*** *si $F \approx G$ y G actúa en F por traslaciones izquierdas.*

Definición 4.7.5. *Sea $\mathcal{B}$ un haz principal sobre un espacio X con grupo G. $\mathcal{B}$ es* ***n-universal****, si para cualquier n-complejo K, subcomplejo L de K, haz principal $\mathcal{B}'$ sobre K con grupo G y cualquier aplicación entre haces $h : \mathcal{B}'|_L \longrightarrow \mathcal{B}$, hay una extensión de h a una aplicación de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$.*

Esta condición puede ser parafraseada diciendo que cualquier aplicación parcial de un haz a $\mathcal{B}$ se puede extender a todo el haz

Ejemplo 4.7.6. *Si $\mathcal{B}$ es un haz $n-$universal y $\mathcal{B}'$ es cualquier haz sobre el $n-$complejo K, entonces existe una aplicación entre haces $h : \mathcal{B}' \longrightarrow \mathcal{B}$. Esto se sigue si tomamos a L como el conjunto vacío.*

Cerramos este capítulo con el siguiente teorema, el cual caracteriza los haces universales.

Teorema 4.7.7. *Un haz principal $\mathcal{B}$ es* ***n-universal*** *si y sólo si E es conectable por trayectorias y $\pi_i(E) = 0$ para toda $1 \leq i < n$, donde $\pi_i(E)$ denota al $i-$ésimo grupo de homotopía de E.*

□

La demostración de este resultado en realidad no es simple pero se puede consultar en [11] en la sección 19.4.

Capítulo 5

Resultados de Borsuk-Ulam

Demostrar el siguiente resultado es el propósito de este trabajo.

Teorema 5.0.8. *Si una aplicación $f : \mathbb{S}^m \longrightarrow \mathbb{S}^n$ conmuta con algunas acciones libres de un grupo finito $G \neq 1$ en las esferas $\mathbb{S}^m$, $\mathbb{S}^n$ entonces $n \geq m$. Si $n = m$, f no es nulhomotópica.*

La prueba la haremos por contradicción, pero antes de comenzar con ella requerimos probar dos lemas, para los cuales necesitamos lo siguiente: Dado que G es un grupo finito, este contiene algún subgrupo cíclico de orden p, con p primo. Podemos suponer entonces que G mismo es de orden primo, digamos

$$G = \{z \in \mathbb{C} \mid z^p = 1\}, \quad p \text{ primo} \tag{5.1}$$

y probaremos el teorema para G tomado de esta forma. Recordemos también que si la dimensión de una esfera es par, entonces necesariamente $G = \mathbb{Z}_2$ por 4.3.5.

La multiplicación por escalares define la acción estándar de G en la esfera unitaria en $\mathbb{C}^r$, respectivamente $\mathbb{R}^r$ si $p = 2$. Escribimos $\$^k$ para indicar que que la k-esfera es tomada con esta operación estándar.

Empezamos por demostrar lo siguiente:

Lema 5.0.9. *Si una aplicación continua $\alpha : \$^k \longrightarrow \$^k$ conmuta con la acción estándar de G, entonces el índice de punto fijo de alpha, $I(\alpha) \equiv 0$ mod p*

Demostración. Sea $\pi : \mathbb{S}^k \longrightarrow L^k = \mathbb{S}^k/G$, la proyección al espacio de órbitas (o espacio lente), el cual es una variedad lisa. De la definición 4.3.7 se tiene que la aplicación α induce una aplicación $\overline{\alpha} : L^k \longrightarrow L^k$ tal que, $\overline{\alpha} \circ \pi = \pi \circ \alpha$, que es lisa, pues α y π lo son. A su vez $\overline{\alpha}$ define una aplicación $\widetilde{\alpha} : L^k \longrightarrow L^k \times L^k$, dada por $\widetilde{\alpha}(x) = (x, \overline{\alpha}(x))$; la imagen de esta aplicación es la gráfica de $\overline{\alpha}$, y no es difícil verificar que es una subvariedad de dimensión k de la variedad de dimensión $2k$, $L^k \times L^k$. Podemos notar también que $\triangle = \{(x,x) \mid x \in L^k\}$, la diagonal de $L^k \times L^k$, es otra subvariedad de dimensión k de $L^k \times L^k$. Así, si usamos el teorema 3.4.8, con $X = L^k, Y = L^k \times L^k, f = \widetilde{\alpha}$ y $Z = \triangle$, entonces existe una aplicación lisa $\widetilde{\beta} : L^k \longrightarrow L^k \times L^k$ homotópica a $\widetilde{\alpha}$ y que en particular es transversal a $\triangle$. Si llamamos $\widetilde{H}$ a la homotopía entre $\widetilde{\alpha}$ y $\widetilde{\beta}$, tenemos que $\widetilde{H}(x,1) = \widetilde{\beta}(x) = (x, \overline{\beta}(x))$, donde $\overline{\beta}$ es homotópica a $\overline{\alpha}$ bajo una homotopía $\overline{H} : L^k \times I \longrightarrow L^k$ que se obtiene al componer $\widetilde{H}$ con la proyección al segundo factor.

Por otro lado, por 3.3.2 $\widetilde{\beta}^{-1}(\triangle)$ es una subvariedad de L^k de codimensión k, o sea, de dimensión cero, y como $\triangle$ es cerrado en $L^k \times L^k$, $\widetilde{\beta}^{-1}(\triangle)$ es cerrado en L^k. Por lo tanto $\widetilde{\beta}^{-1}(\triangle)$ no puede tener puntos de acumulación y como L^k es compacto, $\widetilde{\beta}^{-1}(\triangle)$ es finito, pero $\widetilde{\beta}^{-1}(\triangle)$, de hecho consta de los puntos fijos de $\overline{\beta}$, sean pues $b_1, \ldots, b_s$, éstos.

Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{S}^k \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[d, "j_0"'] & & \mathbb{S}^k \arrow[d, "\pi"] \\
\mathbb{S}^k \times I \arrow[r, "(\pi, Id_I)"'] & L^k \times I \arrow[r, "\overline{H}"'] & L^k,
\end{tikzcd}$$

donde j_0 es la inclusión $j_0(x) = (x, 0)$. Como

$$\overline{H} \circ (\pi, Id_I)(x,0) = \overline{H}(\pi(x), 0) = \overline{\alpha}(\pi(x)) = \pi(\alpha(x)),$$

entonces $\overline{H} \circ (\pi, Id_I)$ es una homotopía que empieza en $\pi \circ \alpha$, además $\pi : \mathbb{S}^k \longrightarrow L^k$ es una aplicación cubriente (ver el ejemplo del teorema 4.3.4) y $\mathbb{S}^k$ es un complejo CW, entonces $\pi : \mathbb{S}^k \longrightarrow L^k$ es una fibración de Serre (ver 4.5.11) y por lo tanto existe una homotopía $H : \mathbb{S}^k \times I \longrightarrow \mathbb{S}^k$ que empieza en α, es decir, $H(x,0) = \alpha(x)$ y tal que los dos triángulos del siguiente diagrama conmutan

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{S}^k \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[d, "j_0"'] & & \mathbb{S}^k \arrow[d, "\pi"] \\
\mathbb{S}^k \times I \arrow[r, "(\pi, Id_I)"'] \arrow[rru, dashed, "H"'] & \mathbb{L}^k \times I \arrow[r, "\overline{H}"'] & L^k.
\end{tikzcd}$$

Tenemos que $\pi(H(x,1)) = (\overline{H} \circ (\pi, Id_I))(x,1) = \overline{\beta}(\pi(x))$ para toda $x \in \mathbb{S}^k$. Sea β el final de H, es decir, $\beta(x) = H(x,1)$ para toda $x \in \mathbb{S}^k$, entonces $\pi \circ \beta = \overline{\beta} \circ \pi$. Utilizando la invariancia bajo homotopías del índice de punto fijo (ver 2.5.8 y 3.1.1) tenemos que $I(\alpha) = I(\beta)$.

Ahora veamos que β también conmuta con la acción. Tomemos $r \in G$, un generador y definamos dos trayectorias $\sigma, \tau : [0,1] \longrightarrow \mathbb{S}^k$ dadas por:

$$\sigma(t) = H(rx,t) \quad \text{y} \quad \tau(t) = rH(x,t)$$

con $x \in \mathbb{S}^k$ fijo. Entonces

$$\begin{aligned}
\pi(\sigma(t)) = \pi(H(rx,t)) = \overline{H}(\pi(rx),t) = \overline{H}(\pi(x),t), \\
\pi(\tau(t)) = \pi(rH(x,t)) = \pi(H(x,t)) = \overline{H}(\pi(x),t).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\pi \circ \sigma$ y $\pi \circ \tau$ son trayectorias en L^k, homotópicas relativamente a ∂I, y además $\sigma(0) = H(rx,0) = \alpha(rx) = r(\alpha(x)) = rH(x,0) = \tau(0)$, ya que α conmuta con la acción. Entonces por 4.4.4 $\tau(1) = \sigma(1)$, pues τ y σ son levantamientos de $\pi \circ \tau$ y $\pi \circ \sigma$ respectivamente. Pero $\tau(1) = rH(x,1) = r\beta(x)$ y $\sigma(1) = H(rx,1) = \beta(rx)$, por lo tanto β conmuta con la acción estándar.

Finalmente, el conjunto de puntos fijos de β consiste en algunas de las órbitas $\pi^{-1}(b_j)$, pues G es cíclico, actúa libremente en $\mathbb{S}^k$ y β conmuta con la acción. Así, podemos separar $\mathrm{Fix}(\beta)$ en ps conjuntos cerrados ajenos donde s es el número de puntos fijos de $\overline{\beta}$ y p era el orden de G (o la multiplicidad de la aplicación cubriente π). Para cada punto a_{ij}, con $i = 1, \ldots, p$ en $\pi^{-1}(b_j)$, con j fijo y $j = 1, \ldots, s$, a_{ij} yace en un abierto U_{ij} homeomorfo a la vecindad abierta $V_j = \pi(U_{ij})$ de b_j, entonces $I(\beta|_{\overline{U}_{ij}}) = I(\overline{\beta}|_{\overline{V}_j})$ para toda $i = 1, \ldots, p$. Entonces por el teorema de aditividad del índice de punto fijo 2.5.9,

$$I(\beta) = \sum_{j=1}^{s} \sum_{i=1}^{p} I(\beta|_{\overline{U}_{ij}}) = \sum_{j=1}^{s} p(I(\beta|_{\overline{V}_j})) = p \sum_{j=1}^{s} I(\beta|_{\overline{V}_j})$$

Por lo tanto $I(\alpha) = I(\beta) \equiv 0 \bmod p$.

$\square$

Recordemos que al escribir $\$^k$ estamos diciendo que la acción de $G = \{z \in \mathbb{C} \mid z^p = 1\}$ en $\mathbb{S}^k$ es la estándar, así podemos enunciar el siguiente resultado:

Lema 5.0.10. *Para cualquier G-acción libre en la k-esfera $\mathbb{S}^k$ existen aplicaciones*

1. $\gamma : \mathbb{S}^k \longrightarrow \$^k$
2. $\delta : \$^k \longrightarrow \mathbb{S}^k$.

que conmutan con las acciones.

Demostración. El inciso *2* se tiene por 4.7.6, pues $\mathbb{S}^k$ es $n-$universal, ya que satisface las condiciones del teorema 4.7.7, y además $\$^k/G$ es un n-complejo por ser una variedad.

Para *1*, primero vamos a construir una G-aplicación $\Gamma : \mathbb{S}^k \longrightarrow \$^{2k-1}$ para algún k. Tomamos una cubierta abierta finita $\mathcal{V} = \{U_1, ..., U_k\}$ de $\mathbb{S}^k/G$, que sea una cubierta trivializadora del haz localmente trivial $\pi : \mathbb{S}^k \longrightarrow \mathbb{S}^k/G$ (ver 4.5.10); entonces, para cada $j = 1, ..., k$ tenemos una aplicación $q_j : \pi^{-1}(U_j) \approx U_j \times G \longrightarrow G \subset \mathbb{C}$ dada por la proyección en G que conmuta con la acción de G en $\mathbb{S}^k$. Se tiene el siguiente diagrama conmutivo

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U_j) \arrow[r, "\varphi", "\approx"'] \arrow[dr, dashed, "q_j"'] & U_j \times G \arrow[d, "proy\ en\ G"] \\
& G.
\end{tikzcd}$$

También, tomamos una partición de la unidad $\rho_j : \mathbb{S}^k/G \longrightarrow [0,1]$ subordinada $\mathcal{V}$ y definimos $\Gamma : \mathbb{S}^k \longrightarrow \$^{2k-1} \subset \mathbb{C}^k$ con componentes $\Gamma_j : \mathbb{S}^k \longrightarrow \mathbb{C}$, $j = 1, \ldots, k$, dadas por $\Gamma_j(x) = \sqrt{\rho_j(\pi(x))}q_j(x)$; notemos que $\Gamma_j(x) = 0$ si $\pi(x)$ no está en U_j.

Γ conmuta con las acciones, pues para cada $j = 1, \ldots, k$ se tiene que $\Gamma_j(gx) = \sqrt{\rho_j(\pi(gx))}q_j(gx) = \sqrt{\rho_j(\pi(x))}gq_j(x) = g\sqrt{\rho_j(\pi(x))}q_j(x) = g\Gamma_j(x)$ para todo $g \in G$

La aplicación Γ induce una aplicación $\overline{\Gamma} : \mathbb{S}^k/G \longrightarrow \$^{2k-1}/G = L^{2k-1}$. Usando 4.6.9 podemos deformar $\overline{\Gamma}$ a una aplicación $\overline{\gamma}$ cuya imagen viva en L^k. Así, existe una homotopía H tal que $H(x,0) = \overline{\Gamma}$ y $H(x,1) = \overline{\gamma}$. Se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{S}^k \arrow[rr, "\Gamma"] \arrow[d, "j_0"'] & & \$^{2k-1} \arrow[d, "\pi"] \\
\mathbb{S}^k \times I \arrow[r, "(\pi', Id_I)"'] \arrow[urr, dashed, "\widetilde{H}"] & (\mathbb{S}^k/G) \times I \arrow[r, "H"'] & L^{2k-1}/G,
\end{tikzcd}$$

donde $\pi' : \mathbb{S}^k \longrightarrow \mathbb{S}^k/G$ y $\widetilde{H}$ es un levantamiento de la homotopía $H \circ (\pi, Id_I)$, esto último porque π es una fibración.

Ahora, sea $\gamma(x) = \widetilde{H}(x,1)$, el final de $\widetilde{H}$. Se tiene que $\gamma : \mathbb{S}^k \longrightarrow \$^k$ ya que

$$\pi(\gamma(x)) = \pi(\widetilde{H}(x,1)) = H(\pi(x),1) = \overline{\gamma}(\pi(x)) \in \$^k/G = L^k.$$

Sólo nos falta ver que γ conmuta con las acciones, para esto definimos, para cada $g \in G$, la aplicación $\widetilde{H}_g : \mathbb{S}^k \times I \longrightarrow \$^{2k-1}$ por $\widetilde{H}_g(x,t) = g^{-1}\widetilde{H}(gx,t)$. Tenemos que

$$\widetilde{H}_g(x,0) = g^{-1}\widetilde{H}(gx,t) = g^{-1}\Gamma(gx) = g^{-1}g\Gamma(x) = \Gamma(x),$$

además

$$\begin{gathered}\pi(\widetilde{H}_g(x,t)) = \pi(g^{-1}\widetilde{H}(gx,t)) = \pi(\widetilde{H}(gx,t)) = \\ H(\pi'(gx),t) = H(\pi'(x),t) = \pi(\widetilde{H}(x,t)),\end{gathered}$$

por lo tanto

$$\widetilde{H} = \widetilde{H}_g$$

Por último

$$\gamma(x) = \widetilde{H}(x,1) = \widetilde{H}_g(x,1) = g^{-1}(\widetilde{H}(gx,1)) = g^{-1}(\gamma(gx)).$$

Así $g\gamma(x) = \gamma(gx)$. $\square$

El siguiente resultado es muy interesante y lo vamos a usar junto con los dos lemas anteriores para demostrar 5.0.8. En el libro de Spanier [10], en la sección 4 del capítulo 3 se puede ver la demostración, la cual es consecuencia de la teoría de los complejos simplicales.

Teorema 5.0.11. *Si $m < n$, entonces cualquier aplicación continua $f : S^m \longrightarrow S^n$ es nulhomotópica.*

□

Pasemos a la prueba de 5.0.8.

Demostración. Por 5.0.10, tenemos aplicaciones $\gamma : \mathbb{S}^n \longrightarrow \$^n$ y $\delta : \$^m \longrightarrow \mathbb{S}^m$. Consideremos la siguiente composición

$$\$^m \xrightarrow{\delta} \mathbb{S}^m \xrightarrow{f} \mathbb{S}^n \xrightarrow{\gamma} \$^n \xhookrightarrow{i} \$^m,$$

la cual conmuta con las acciones pues las componentes conmutan. Por el lema 5.0.9 tenemos que $\mathrm{I}(i \circ \gamma \circ f \circ \delta) = 0 \bmod p$. Ahora, supongamos que $n < m$, entonces f es nulhomotópica por 5.0.11, y por lo tanto también $i \circ \gamma \circ f \circ \delta$ lo es, así, se tiene que $I(i \circ \gamma \circ f \circ \delta) = 1$ por 2.5.8 y el primer ejemplo de la sección 2.4, lo que es una contradicción.

Más aún, si $n = m$ y suponemos que f es nulhomotópica llegamos a la misma contradicción. □

Con esto damos por terminado este trabajo.

Apéndice

Apéndice A

Teorema 2.1.4

Pospusimos a este apéndice la demostración del teorema 2.1.4, por conveniencia para el lector volvemos a enunciarlo.

Teorema A.0.12. *Sea $F : W \times I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una homotopía, $y \in \mathbb{R}^n$ un punto con las siguientes propiedades:*

i) $y \notin f_t(\overline{W} \setminus W)$, es decir $f_t^{-1}(y) \subset W$ para toda $t \in [0,1]$,

ii) $f_0|_W$ y $f_1|_W$ son ambas lisas, además y es valor regular para ambas.

Entonces $\text{grado}(f_0; y) = \text{grado}(f_1; y)$.

Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación lisa con X un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^{n+1}$, si $df_a : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tiene rango máximo n en el punto a, entonces el teorema 1.3.4 nos da una buena descripción de f en él cerca de a. Hay un difeomorfismo φ que lleva a una vecindad $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ del origen a una vecindad $\varphi(U) \subset X$ de a tal que $\varphi(0) = a$ y $f\varphi(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) - f(a) = (x_1, \ldots, x_n)$ $\forall x \in U$. Podemos suponer que U es una bola de radio ε al rededor del origen; $U = B(0, \varepsilon)$. La imagen inversa de $b = f(a)$ por la aplicación $f|_{\varphi(U)}$ tiene la siguiente forma

$$f^{-1}(b) \bigcap \varphi(U) = \varphi(\{x \in \mathbb{R}^{n+1} | 0 = x_1 = x_2 = \ldots = x_n,\, |x_{n+1}| < \varepsilon\}),$$

o sea, la imagen bajo φ del intervalo abierto $|x_{n+1}| < \varepsilon$ sobre el último eje coordenado, en otras palabras, $f^{-1}(b) \bigcap \varphi(U)$ es un arco de curva simple en $\varphi(U)$.

Lo mismo decimos del conjunto de puntos $x \in X$ tal que $f(x) = y$, siempre y cuando x yazca en $\varphi(U)$ y $\|y - b\| < \varepsilon$; este conjunto tiene la forma

$$f^{-1}(y) \bigcap \varphi(U) = \varphi(\{x \in \mathbb{R}^{n+1} | x_j = y_j - b_j, 1 \leq j \leq \text{ y } \|x\| < \varepsilon\}),$$

que también es un arco de curva simple en $\varphi(U)$ (de hecho, es una línea coordenada).

Si $y \in \mathbb{R}^n$ es un valor regular de f, cada punto $x \in f^{-1}(y)$ tiene una vecindad abierta $V = V_x$ tal que $f^{-1}(y) \bigcap V$ es un arco liso (como en el parrafo enterior, poniendo $\varphi(U) = V$).

Las componentes K de $f^{-1}(y)$ (es decir, los conjuntos conexos máximos) son tanto abiertas como cerradas en $f^{-1}(y)$, también son cerrados en X (pero en general nos son abiertos), ya que $f^{-1}(y)$ es cerrado en X. Cada punto $x \in X$ tiene una vecindad abierta V_x en X tal que, V_x no interseca a $f^{-1}(y)$ (si $x \notin f^{-1}(y)$) o lo intersecta sólo en una comoponente K (si $x \in K$).

Cada subconjunto compacto T de X interseca sólo un número finito de componentes de $f^{-1}(y)$, pues T se puede cubrir con un número finito de las V_x. Cada componente compacta K de $f^{-1}(y)$ queda cubierta por un número finito de V_x, en este caso K es una curva cerrada que es homeomorfa al círculo $\mathbb{S}^1$. Las componentes no compactas K de $f^{-1}(y)$ no están contenidas en ningún conjunto compacto T de X, ya que son cerradas en X y los subconjuntos de un conjunto compacto son compactos, así pues, las componentes no compactas de $f^{-1}(y)$ o son no acotadas en $\mathbb{R}^n$ o son no cerradas en $\mathbb{R}^n$, en este último caso los puntos de acumulación de K están fuera de X; las componentes no compactas de $f^{-1}(y)$ son homeomorfas a la recta real.

En cualquier caso $f^{-1}(y)$ tiene un conjunto a lo más numerable de componentes (esto es análogo a 1.3.7), pues X mismo se puede cubrir por un número a lo más numerable de las V_x y cada V_x interseca a lo más una componente.

Ahora daremos unas propiedades analíticas de $f^{-1}(y)$, la cual es una curva, en la que cada punto $x \in f^{-1}(y)$ tiene un espacio tangente T_x de dimensión 1, a saber, el núcleo de $df_x : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$. El subespacio de dimensión n normal a T_x, $N_x \subset \mathbb{R}^{n+1}$, es el hiperplano normal a la curva

$f^{-1}(y)$ en x, la derivada df_x lo aplica isomorfamente sobre $\mathbb{R}^n$, en particular hay vectores normales bien definidos $v_1(x), v_2(x), \ldots, v_n(x) \in N_x$ (que dependen lisamente de $x \in f^{-1}(y)$) que bajo df_x van a los vectores básicos canónicos $e_1, e_2, \ldots, e_n$ en $\mathbb{R}^n$. Los $\{v_i(x)\}_i^n$ constituyen una base de N_x que depende lisamente de $x \in f^{-1}(y)$. Si $\tau \in T_x$ es un vector tangente distinto de cero, entonces $v_1(x), \ldots, v_n(x), \tau$ es una base de $\mathbb{R}^{n+1}$. Decimos que τ está orientado positivamente (negativamente) si el determinante de esta base es positivo (negativo), en particular uno de los dos vectores unitarios de T_x está orientado positivamente y el otro negativamente. El vector orientado positivamente, nos da un sentido de recorrido positivo para la curva $f^{-1}(y)$.

De todo lo dicho anteriormente obtenemos el siguiente teorema; no vamos a dar la prueba aquí pero también se puede consultar en [3].

Teorema A.0.13. *Sea y un valor regular de $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (X abierto en $\mathbb{R}^{n+1}$) y K una componente de $f^{-1}(y)$. Entonces existe una aplicación lisa $k : \mathbb{R} \longrightarrow X$ de rango constante igual a 1 que aplica a $\mathbb{R}$ sobre K, es decir, $k(\mathbb{R}) = K$ y tal que satisface lo siguiente.*

1. *Si K no es compacto, entonces k es un homeomorfismo.*

2. *Si K es compacto, entonces k tiene periodo 1, es decir $k(t_1) = k(t_2) \Leftrightarrow t_1 - t_2 \in \mathbb{Z}$, en este caso k induce un homeomorfismo de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ con K.*

Podemos pasar ahora a la demostración de 2.1.4

Demostración. (de 2.1.4) La prueba es tal que tenemos que hacer las siguientes hipótesis adicionales, de las cuales nos iremos desprendiendo poco a poco.

Caso 1. Agreguemos las siguientes hipótesis a y b.

a) $F|_{W\times(0,1)}$ es lisa y y es valor regular de $F|_{W\times(0,1)}$.

b) $F_t = F_0$ y $F_{1-t} = F_1$ $\forall\, t$ suficientemente pequeño, o sea, $\exists\, \varepsilon \in (0, 1/2)$ tal que $F(x,t) = F(x,0)$ y $F(x, 1-t) = F(x,1)$ $\forall\, t \in [0,\varepsilon]$ y $\forall x \in \overline{W}$.

Con estas hipótesis nuevas sabemos lo siguiente de $f^{-1}(y)$.

c) $F_0^{-1}(y) = F_t^{-1}(y)$ es finito para $0 \leq t \leq \varepsilon$, pues y es valor regular para F_0 y $y \notin F_0(\overline{W} \setminus W)$. Digamos que $F_0^{-1}(y) = \{a_1, a_2, \ldots, a_p\} \subset W$, ya que lo mismo vale para $F_t^{-1}(y)$ con $0 \leq t \leq \varepsilon$, vemos que $F^{-1}(y) \bigcap (\overline{W} \times [0,\varepsilon])$

consta de un número finito de segmentos, a saber, $\{a_i \times [0, \varepsilon]\}_{i=1,\ldots,p}$.

d) $F_1^{-1}(y) \subset W$ consta de un número finito de puntos $\{b_1, \ldots, b_q\}$ y $F^{-1}(y) \bigcap (\overline{W} \times [1-\varepsilon, 1])$ consta del número finito de segmentos $\{b_j \times [1-\varepsilon, 1]\}_{j=1,\ldots,q}$.

e) Como $F^{-1}(y)$ es cerrado en $\overline{W} \times [0,1]$, por ser F continua, entonces $F^{-1}(y)$ es compacto y además yace en $W \times [0,1]$, pues $y \notin F_t(\overline{W} \setminus W)$, igualmente $F^{-1}(y) \bigcap (W \times [\varepsilon, 1-\varepsilon]) = F^{-1}(y) \bigcap (\overline{W} \times [\varepsilon, 1-\varepsilon])$ es compacto. $F^{-1}(y) \bigcap (W \times (0,1))$ consiste en un sistema de curvas k_μ de las cuales cada una de ellas es homeomorfa a la recta real $\mathbb{R}$ o al círculo unitario $\mathbb{S}^1$ (ver A.0.13 con $X = W \times (0,1)$), estas curvas son las componentes de $F^{-1}(y) \bigcap (W \times (0,1))$. Ya que $F^{-1}(y) \bigcap (W \times [\varepsilon, 1-\varepsilon])$ es compacto, sólo un número finito de las k_μ intervienen en este conjunto. Más aún, por *c*) y *d*), sólo un número finito de las k_μ intersecan a $W \times (0, \varepsilon]$ y a $W \times [1-\varepsilon, 1)$, por lo tanto, sólo hay un número finito de las k_μ. Las K_μ compactas no intersecan a $W \times (0, \varepsilon]$ ni a $W \times [1-\varepsilon)$, es decir, yacen en $W \times (\varepsilon, 1-\varepsilon)$. Por otro lado, las k_μ no compactas no pueden yacer en $W \times [\varepsilon, 1-\varepsilon]$; ninguna de las dos partes de k_μ que correponden a las semirrectas $[0, \infty)$ y $(-\infty, 0]$ de $\mathbb{R}$ pueden yacer $W \times [\varepsilon, 1-\varepsilon]$. Las k_μ no compactas contienen exáctamante dos de los segmentos $a_i \times (0, \varepsilon]$ o $b_j \times [1-\varepsilon, 1)$ pues cada uno debe corresponder a un intervalo de la forma $[r, s)$ o $(s, r]$ en $\mathbb{R}$ y tienen que ser cerrados, pero los únicos intervalos en $\mathbb{R}$ tales son de la forma $[r, +\infty)$ o $(-\infty, r]$. La figura A.1, la cual se tomó del libro [3], vol II, da una idea intuitiva de $F^{-1}(y)$.

En la figura A.1 hemos representado por pequeñas flechas el sentido de recorrido (el vector tangente positivamente definido). El homeomorfismo $\mathbb{R} \approx k_\mu$ del teorema A.0.13 (ver demostración en [3]) está dado por una parametrización lisa que también fija el sentido de recorrido. En particular el vector tangente en el segmento $a_i \times (0, \varepsilon)$ apunta hacia abajo o hacia arriba, según si corresponde en $\mathbb{R}$ a un intervalo $(r, +\infty)$ o $(-\infty, r)$; en $b_j \times (1-\varepsilon, 1)$ es al revez.

Consideremos un punto $a_i \in F_0^{-1}(y)$, este contribuye con 1 o -1 a grado(F_0, y), dependiendo de si el determinante de $d(F_0)_{a_i}$ es mayor que cero o menor que cero. Los vectores normales $\{v_k\}_{k=1,\ldots,n}$ al segmento $a_i \times (0, \varepsilon)$ yacen en $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ y el vector tangente τ en $\{0\} \times \mathbb{R}$, es decir $\tau = (0, \ldots, 0, \tau_{n+1})$. Por lo tanto tenemos para el determinante de $(v_1, \ldots, v_n, \tau)$, que es el que fija la dirección, que

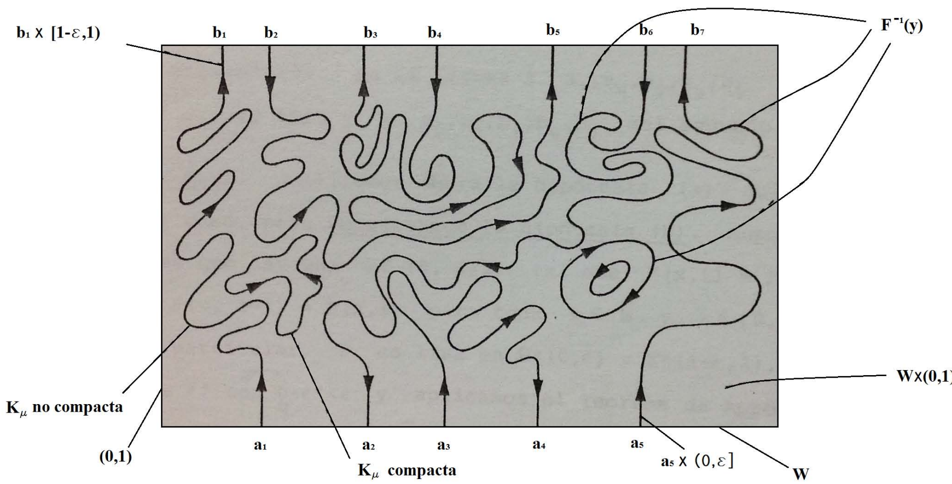

Figura A.1: Idea intuitiva de $F^{-1}(y)$.

$$\det(v_1, \ldots, v_n, \tau) = \tau_{n+1} \det(d(F_0)_{a_i})^{-1};$$

notemos que $d(F_t)_{a_i} = d(F_0)_{a_i}$ para $t \in (0, \varepsilon)$, y $d(F_t)_{a_i}(v_k) = e_k \in \mathbb{R}^n$. Vemos así que a_i contribuye con $+1$ ó -1 al grado$(F_0; y)$ según si τ_{n-1} es mayor o menor que cero. Lo mismo es cierto para la contribución de $b_j \in F_1^{-1}(y)$ al grado$(F_1; y)$. El segmento $a_i \times (0, \varepsilon)$ yace en una las curvas no compactas k_ν, y k_ν contiene otro segmento $a_{i'} \times (0, \varepsilon)$ ó $b_{j'} \times (1 - \varepsilon, 1)$. En el primer caso el vector tangente τ' del segmento $a_{i'} \times (0, \varepsilon)$ tiene la dirección opuesta a la del vector tangente de $a_i \times (0, \varepsilon)$. las contribuciones de a_i y $a_{i'}$ al grado$(F_0; y)$ se cancelan. En el segundo caso el vector tangente τ'' del segmento $b_{j'} \times (1 - \varepsilon, 1)$ tiene la misma dirección que τ; las contribuciones de a_1 y b_j a grado(F_0, y) (respectivamente grado(F_1, y)) coinciden. Para el conteo del grado$(F_0; y)$ necesitamos considerar sólo las a_i del segundo tipo, estas a_i contribuyen al grado$(F_0; y)$ lo mismo que sus asociadas b_j a grado$(F_1; y)$ y por lo tanto vale la igualdad del teorema 2.1.4.

Caso 2. Omitamos ahora la primera hipótesis a) del caso 1 pero conservemos la hipótesis b). Supongamos pues que hay una $\varepsilon \in (0, 1/2)$ tal que $F(x, t) = F(x, 0)$ y $F(x, 1 - t) = F(x, 1)$ para $x \in \overline{W}$ y $t \in [0, \varepsilon]$. En particular F es lisa en $W \times (0, \varepsilon)$ y $W \times (1 - \varepsilon, 1)$ elegimos ε' con $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ y aplicamos el teorema de aproximacón 1.2.4 a $F : \overline{W} \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (o mejor dicho a las componentes $F_i : \overline{W} \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ de F). En la notación de 1.2.4 $Y = \overline{W} \times [0,1]$, $X = W \times (0,1)$, $A = \overline{W} \times [0,\varepsilon'] \bigcup W \times [1-\varepsilon', 1]$; así $W \times (0,\varepsilon) \bigcup W \times (1-\varepsilon, 1)$ es una vecindad abierta de $A \bigcap X$, en el cual F es lisa. Por 1.2.4 hay una aplicación $F' : \overline{W} \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, que es lisa en $W \times (0,1)$ y es tal que

$$\|F'(x,t) - F(x,t)\| \leq ((x,t), Y \setminus X)$$

para toda $(x,t) \in Y = \overline{W} \times [0,1]$, $F'(x,t) = F(x,t)$ para toda $a \in A$. En particular $F'(x,t) = F(x,t)$ si $x \in \overline{W} \setminus W$ o $t \in [0,\varepsilon'] \bigcup [1-\varepsilon', 1]$, así $F'_t(\overline{W} \setminus W) = F_t(\overline{W} \setminus W)$ y

$$F'_t = F_t = F_0 = F'_0, \quad F'_{1-t} = F_{1-t} = F_1 = F'_1$$

para toda $t \in [0,\varepsilon']$. Por lo tanto la aplicación F' satisface también las hipótesis del teorema 2.1.4 y la hipótesis adicional b). También es lisa en $W \times (0,1)$, sin embargo, no satisface en general la hipótesis a) del caso 1 pues y no tiene por qué ser valor regular de $F'|_{W\times(0,1)}$ en toda vecindad de y. Por otro lado, Por el teorema 2.1.2 y tiene una vecindad $V \subset \mathbb{R}^n$ tal que toda $z \in V$ es regular para F_0 y F_1 y

$$\text{grado}(F_0; z) = \text{grado}(F_0; y), \quad \text{grado}(F_1; z) = \text{grado}(F_1; y).$$

Podemos elegir a V suficientemente pequeña para que $V \subset \mathbb{R}^n \setminus F'_t(\overline{W} \setminus W)$ para toda t, pues $\bigcup\limits_{t\in[0,1]} F'_t(\overline{W} \setminus W) = F((\overline{W} \setminus W) \times [0,1])$ es cerrado (por ser compacto). Escogemos ahora un valor regular y' de $F'|W \times (0,1)$ en V, así podemos aplicar el primer caso de la demostración a F' en el punto y' y obtener $\text{grado}(F'_0; y') = \text{grado}(F'_1; y')$ que por las igualdades dichas anteriormente se convierte en $\text{grado}(F_0, y) = \text{grado}(F_1; y)$ como deseábamos.

Ahora demostraremos el teorema 2.1.4 sin hipótesis adicionales. Definimos la siguiente homotopía $\Phi : \overline{W} \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ como sigue

$$\Phi(x,t) = \begin{cases} F_0(x) = F(x,0) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/3 \\ F(x, 3t-1) & \text{si } 1/3 \leq t \leq 2/3 \\ F_1(x) = F(x,1) & \text{si } 2/3 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Esta homotopía también satisface las hipótesis del teorema 2.1.4 y además la hipótesis adicional b) con $\varepsilon = 1/3$. Así que podemos utilizar el caso 2 y obtener que $\text{grado}(\Phi_0; y) = \text{grado}(\Phi_1; y)$ pero $\Phi_0 = F_0$ y $\Phi_1 = F_1$, Con lo que terminamos la demostración. □

Bibliografía

[1] M. Aguilar, S. Gitler, C. Prieto, *Algebraic Topology from a Homotopical Viewpoint* Springer, 2002.

[2] A. Dold, Simple proofs of some Borsuk-Ulam results, *Proceedings of the Northwestern Homotopy Theory Conference*, Contemporary Mathematics. vol 19, American Mathematical Society, 1983, pp 65-69.

[3] A. Dold, *Teoría del punto fijo*, vols. I, II y III, traducido y adaptado por C. Prieto Monografías del Instituto de matemáticas, UNAM, 1984.

[4] J. Dydak, *Partitions of unity*, 2003.

[5] A. Feragen, *A topological manifold is homotopy equivalent to some CW-complex*, 2004.

[6] V. Guillemin, A. Pollack, *Topolgía Diferencial*, Sociedad matemática mexicana. 2003.

[7] A. Hatcher *Algebraic Topology*,Cambridge University Press, 2002.

[8] J. E. Marsden, A.J. Tromba, *Cálculo vectorial*, cuarta edición, 1998.

[9] C. Prieto, *Topología Básica*, Fondo de Cultura Económica, 2003.

[10] E. H. Spanier, *Algebraic Topology*, McGraw-hill, New York, 1966.

[11] N. Steenrod, *The Topology of Fibre Bundles*, Princeton University Press 1951.