



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE POSGRADO EN ASTROFÍSICA
Instituto de Astronomía
Ciudad Universitaria

LA VALIDEZ DE LA RELACIÓN TITIUS-BODE EN LOS SISTEMAS
EXOPLANETARIOS Y SU CAPACIDAD PREDICTIVA

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRA EN CIENCIAS (ASTRONOMÍA)

PRESENTA:

PATRICIA LARA CRUZ

TUTORES

M. en C. CHRISTINE ALLEN ARMIÑO, INSTITUTO DE ASTRONOMÍA – UNAM
DR. ARCADIO POVEDA RICALDE, INSTITUTO DE ASTRONOMÍA – UNAM

MÉXICO, D. F. JUNIO 2014



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Dedicado a...

Mis padres que con su amor, ayuda y comprensión hicieron todo lo posible para que yo pudiera lograr todos mis anhelos.

A mi padre que donde quiera que este, espero este muy orgulloso de mi. A mi madre que con su ejemplo me ha mostrado como siempre salir adelante. A mi hermano que siempre esta al pendiente de mi.

A mi esposo que gracias a su amor, paciencia y comprensión, he podido terminar este trabajo tan importante para mi. Con tu cariño y sacrificio me inspiraste a ser mejor, ahora puedo decir que esta tesis lleva mucho de ti. Gracias por estar a mi lado.

A ellos les dedico esta tesis con todo corazón.

Agradecimientos

Quisiera expresar mi más profundo agradecimiento a la Maestra Chris Allen y al Doctor Arcadio Poveda por guiarme y asesorarme en esta tesis, pero sobretodo quisiera agradecerles por la motivación y apoyo que me han brindado desde el inicio de mi carrera astronómica. A ustedes que más que tutores, influyeron con sus lecciones y experiencias para poder formarme como una persona de bien y preparada para los retos que pone la vida y la astronomía.

Quisiera agradecer a mis sinodales que gracias a sus observaciones han hecho posible un mejor trabajo de tesis.

Tambien agradezco el apoyo del programa de posgrado de Astronomía-UNAM que gracias a su formación he podido obtener este grado de maestría. De la misma forma quisiera dar las gracias al CONACyT por su apoyo económico durante el transcurso de este programa.

En especial, agradezco a mis compañeros de maestría Zeus Valtierra, Gustavo Mendoza, Martin Herrera, Teresita Suarez, Rut Salazar, Monica Sanchez, Marco Muñoz, Roy Matadamas y Moises Magaña, donde su apoyo y amistad en ciertos tiempos que curse la maestría han hecho que yo pueda culminar esta etapa de mi vida.

Gracias a mis amigas Norma Figueroa, Erendira Lozano y mi nuevo amigo Edgar Mares por siempre estar a mi lado apoyandome en cada aspecto de mi vida. A Juanito Ramirez de Arellano por su amistad que siempre me ha enriquecido.

Índice general

Índice general	I
Índice de figuras	III
1. Introducción	1
2. Investigaciones recientes sobre la relación Titius-Bode	5
2.1. On the significance of the Titius-Bode law for the distribution of the planets. (Peter Lynch, 2003)	5
2.2. Predicting planets in known extrasolar planetary systems. Test particle simulations. (Barnes R. y Raymond S., 2004)	9
2.3. Predicting planets in known extrasolar planetary systems II. Testing for Saturn mass planets. (Sean Raymond y Rory Barnes, 2005)	13
2.3.1. 55 Cancri	14
2.3.2. HD 37124	17
2.3.3. HD 38529	20
2.3.4. HD 74156	20
2.3.5. Las zonas de estabilidad y la relación TB	24
2.4. Stability limits in extrasolar planetary systems. (Rory Barnes y Richard Greenberg, 2006)	31
2.4.1. Estabilidad de Hill	31
2.4.2. Estabilidad de Lagrange	32
2.5. Application of the Titius-Bode Rule to the 55 Cancri System: Tentative Prediction of a Possibly Habitable Planet. (Manfred Cuntz, 2012)	36
3. Aplicación de la relación TB a los sistemas exoplanetarios.	40

3.1. Sistemas exoplanetarios con 4 planetas	40
3.1.1. Sistema exoplanetario Gliese 581	41
3.1.2. Sistema exoplanetario Gliese 676A	44
3.1.3. Sistema exoplanetario Gliese 876	47
3.1.4. Sistema exoplanetario HR 8799	49
3.1.5. Sistema exoplanetario KOI-94	52
3.1.6. Sistema exoplanetario KOI-730	54
3.1.7. Sistema exoplanetario ν Andromeda	56
3.1.8. Sistema exoplanetario μ Arae	58
3.2. Sistemas exoplanetarios con 5 planetas	63
3.2.1. Sistema exoplanetario 55 Cancri	63
3.2.2. Sistema exoplanetario Kepler-20	65
3.2.3. Sistema Exoplanetario Kepler-33	68
3.2.4. Sistema Exoplanetario Kepler-62	71
3.2.5. Sistema exoplanetario Kepler-80	73
3.3. Sistemas exoplanetarios con 6 planetas	76
3.3.1. Sistema exoplanetario Gliese 667C	76
3.3.2. Sistema exoplanetario HD 40307	79
3.3.3. Sistema exoplanetario HD 10180	81
3.3.4. Sistema exoplanetario Kepler-11	83
3.4. Sistemas exoplanetarios con 7 planetas	88
3.4.1. Sistema exoplanetario Kepler-90	88
4. Discusión y Conclusiones	91
Bibliografía	97

Índice de figuras

2.1. Distribución Murray-Dermott para Urano	8
2.2. Estabilidad de los sistemas exoplanetarios HD 168443 y HD 74156	11
2.3. Estabilidad de las partículas prueba en HD 37124, HD 38529 y 55 Cancri.	12
2.4. Estabilidad de los sistemas exoplanetarios HD 168443 y HD 74156	15
2.5. Estabilidad del sistema exoplanetario 55 Cnc (masas tipo saturno)	16
2.6. Evolución orbital del sistema HD 37124	18
2.7. Tasa de supervivencia en HD 37124	19
2.8. Tasa de supervivencia en HD 37124	19
2.9. Tasa de supervivencia en HD 38529	21
2.10. Evolución orbital HD 74156	22
2.11. Evolución orbital HD 74156	22
2.12. Ajuste TB exponencial al sistema exoplanetario HD38529	25
2.13. Ajuste TB exponencial al sistema exoplanetario HD74156	26
2.14. Ajuste TB exponencial al sistema exoplanetario HD74156	28
2.15. Ajuste TB exponencial al sistema exoplanetario HD38529	29
2.17. Estabilidad de Lagrange para HD 12661	33
2.18. Estabilidad de Hill para HD 12661	34
2.19. Estabilidad de Lagrange para del sistema 47 UMa	35
3.1. Ajuste exponencial Gliese 581 (4 planetas)	43
3.2. Relación TB exponencial Gliese 581	43
3.3. Relación TB exponencial GJ 676A	46
3.4. Ajuste exponencial GJ 876 (4 planetas)	48
3.5. Relación TB exponencial GJ 876	49
3.6. Relación TB exponencial HR 8799	51
3.7. Relación TB exponencial KOI-94	53

3.8. Relación TB exponencial KOI-730	55
3.9. Ajuste exponencial v And	57
3.10. Relación TB exponencial v And	58
3.11. Ajuste exponencial μ Arae	60
3.12. Relación TB exponencial μ Arae	60
3.13. Relación TB Exponencial Poveda-Lara 55 Cancri	64
3.14. Relación TB exponencial 55 Cancri	65
3.15. Ajuste exponencial Kepler-20 (5 planetas)	67
3.16. Relación TB exponencial Kepler-20	67
3.17. Ajuste exponencial Kepler-33 (5 planetas)	69
3.18. Relación TB exponencial Kepler-33	70
3.19. Ajuste exponencial Kepler-62 (5 planetas)	72
3.20. Relación TB exponencial Kepler-62	72
3.21. Ajuste exponencial Kepler-80 (5 planetas)	74
3.22. Relación TB exponencial Kepler-80	74
3.23. Ajuste exponencial GJ 667C (6 planetas)	78
3.24. Relación TB exponencial (6 planetas)	78
3.25. Ajuste exponencial HD 40307 (6 planetas)	80
3.26. Relación TB exponencial HD 40307	80
3.27. Relación TB exponencial HD 10180 (6 planetas)	82
3.28. Relación TB exponencial HD 10180 (7 planetas)	82
3.29. Ajuste exponencial Kepler-11 (6 planetas)	84
3.30. Relación TB exponencial Kepler-11	85
3.31. Ajuste exponencial Kepler-90 (7 planetas)	89
3.32. Relación TB exponencial Kepler-90	90
4.1. Relación entre la estrella primaria y la relación TB	92

CAPÍTULO 1

Introducción

Antes del descubrimiento del primer planeta extrasolar, 51 Pegaso b en 1997, el Sistema Solar era el único sistema planetario que se podía observar y modelar teóricamente. La tecnología ha avanzado de una forma muy rápida, de tal manera que ya se han descubierto más de 1,000 planetas extrasolares, y esto ha permitido un gran avance en el análisis y estudio de los sistemas planetarios.

Las distancias planetarias del Sistema Solar son descritas por una relación empírica conocida como la Ley de Titius-Bode, formulada por Johann Daniel Titius (en 1766) y popularizada por Johann Bode. La relación Titius-Bode es una simple progresión geométrica que relaciona el semieje mayor de la órbita de un planeta con el número de orden ascendente de su posición respecto al Sol.

Esta "ley" no es una ley en el sentido físico sino una relación empírica numérica; debido a eso en este trabajo la señalaremos como la relación Titius-Bode o relación TB.

Titius resaltó que las distancias del Sol a los planetas conocidos en ese entonces en el Sistema Solar se aproximaban a la siguiente relación:

$$a_n = 0.4 + 0.3 \times 2^n, \tag{1.1}$$

donde $n = -\infty$ para Mercurio, 0 para Venus, 1 para la Tierra, 2 para Marte, 4 para Júpiter y 5 para Saturno.

La relación TB no tuvo gran impacto sino hasta el descubrimiento de Urano en 1781 que se ajustaba al orbital $n = 6$, y el descubrimiento de Ceres ($n = 3$) en 1801. Estos descubrimientos se consideraron como triunfos de esta relación. John Couch Adams y Urbain Leverrier tomaron como base el valor predicho por la relación para sus cálculos de la órbita del octavo planeta. La relación TB para $n = 7$ en el Sistema Solar predice un valor de 38.8 UA; el planeta descubierto fue Neptuno pero este tiene un semieje de 30.1 UA. Hasta el momento en que se descubrió Neptuno, la relación TB representaba muy bien las distancias de los planetas al Sol. Han pasado más de 250 años desde la publicación de la relación Titius-Bode y desde entonces, ésta ha estado sujeta a controversia y ha dividido la opinión de los científicos sobre su validez. Michael Nieto [76] realiza una recopilación muy completa sobre la historia y teorías que se han propuesto para esta relación a lo largo del tiempo.

La relación TB para los semiejes mayores de los 7 planetas internos del Sistema Solar (y de Ceres) tiene una precisión de 5% o mejor. Para el planeta más exterior (Neptuno), sin embargo, la precisión es de sólo 30%. Curiosamente, los principales satélites de Júpiter, Saturno, y Urano obedecen a una progresión similar (pero no idéntica), conocida en la literatura como la ley de Dermott. La ley de Dermott es una relación entre los períodos orbitales de los satélites y toma la forma:

$$P_n = P_0 \times k^n, \quad (1.2)$$

donde P_0 y k son constantes a determinar en cada uno de los ajustes a los periodos orbitales de los satelites; y donde n es 0 para el satélite más interior, 1 para el siguiente satélite, etc.

Para órbitas keplerianas, un sistema que obedece la ley de Dermott ((1.2)) obedecerá una ley similar para los semiejes mayores:

$$a_n = a_0 \times C^n = a_0 e^{bn}, \quad (1.3)$$

donde $n = 1, 2, 3 \dots$ es el número de orden ascendente de la posición del planeta con respecto a su estrella primaria.

Desde el descubrimiento de un quinto planeta en 55 Cancri, se empezó a desarrollar la idea de aplicar la relación TB exponencial (ecuación (1.1)) a los sistemas exoplanetarios. En el artículo de Poveda y Lara [78], se muestra que las órbitas planetarias del Sistema Solar pueden ser descritas por una ley de este tipo. La calidad del ajuste proporcionado por la ecuación (1.3) es más pobre que la proporcionada por la relación TB (ecuación (1.1)) para los siete planetas interiores, pero es mejor para Neptuno.

El hecho de que los planetas del Sistema Solar y 55 Cancri siguen una ley estructural similar sugiere que tales leyes son *más* que una mera coincidencia.

Desarrollando más este planteamiento, también se ha aplicado a los satélites mayores de Júpiter, Saturno y Urano, y a los sistemas exoplanetarios, con 4 o más planetas, conocidos hasta el 2010, como 55 Cancri, HD 10180, Gliese 581, Gliese 876 y μ Arae [48]. En este trabajo se hace una compilación histórica sobre el desarrollo que ha tenido esta relación y se busca encontrar una relación TB generalizada utilizando el método de mínimos cuadrados, la cual se aplica a los sistemas exoplanetarios conocidos hasta el 2010.

El objetivo de la presente tesis es el de verificar si la hipótesis de que la relación Titius-Bode exponencial aplicada a todos los sistemas planetarios se cumple o no. En este trabajo se sintetizan todos los sistemas extrasolares con 4 planetas o más, tanto los sistemas que ya han sido analizados como los sistemas recientemente descubiertos, con el propósito de encontrar una relación generalizada para que en el futuro sirva de herramienta para encontrar nuevos exoplanetas, así como sugerir una posible justificación física a esta relación empírica.

Gracias al gran avance en las técnicas de detección de exoplanetas, se han descubierto hasta la fecha (Noviembre 2013) más de 1,000 exoplanetas, 146 son sistemas múltiples de los cuales 18 contienen 4 o más planetas. Los sistemas que contienen 4 o más planetas girando alrededor de su estrella primaria son: Gliese 581 (4 planetas), Gliese 676A (4 planetas), Gliese 876 (4 planetas), HR 8799 (4 planetas), Kepler-89 (4 planetas), KOI-730 (4 planetas), ν And (4 planetas), μ Arae (4 planetas), 55 Cancri (5 planetas), Kepler-20 (5

planetas), Kepler-33 (5 planetas), Kepler-62 (5 planetas), Kepler-80 (5 planetas), Gliese 667C (6 planetas), HD 40307 (6 planetas), HD 10180 (6 planetas), Kepler-11 (6 planetas) y Kepler-90 (7 planetas).

Como ya se mencionó, este trabajo se enfoca solamente en aplicar la relación TB a los sistemas exoplanetarios con 4 planetas o más. Además, se actualizaron los valores de los elementos orbitales para los exoplanetas que ya se habían analizado en trabajos anteriores, y los cuales muestran un cambio en la relación TB. Por eso, y con la idea de poder visualizar la relación TB para todos los sistemas exoplanetarios, también se mostrará el análisis de los sistemas ya analizados anteriormente por Poveda y Lara [78] [48] (55 Cancri, GJ 876, GJ 581, HD 10180 y μ Arae).

Con respecto al sistema exoplanetario de 55 Cancri señalamos que, en noviembre del 2007, se descubrió su quinto planeta convirtiéndolo en el sistema con el mayor número de planetas extrasolares descubiertos en ese entonces. Dawson y Fabrycky [23] argumentaron que el semieje mayor del planeta más interior de este sistema (55 Cancri e) puede ser considerablemente más pequeño de lo que originalmente se pensó (0.016 UA en lugar de 0.038 UA). En este trabajo se realizó el ajuste exponencial utilizando la corrección en el semieje mayor de 55 Cancri e.

En agosto del 2010, Lovis y colaboradores [55] anunciaron el descubrimiento de hasta 7 exoplanetas que giran alrededor de la estrella HD 10180. En esa ocasión se confirmó la existencia de 6 planetas y se mencionó que faltaba un mejor procesamiento de datos para confirmar del planeta HD 10180b. Fue Tuomi [94], quien corroboró la existencia de este planeta, convirtiéndose en un sistema exoplanetario con 6 planetas descubiertos y con la posibilidad de la existencia de 7 planetas girando alrededor de HD 10180. De la misma manera, en abril del 2009 se anunció el descubrimiento del cuarto planeta en el sistema exoplanetario de Gliese 581 [65]. El descubrimiento del cuarto planeta para los sistemas Gliese 876 y HD 160691 (μ Arae) se reportaron en Junio del 2010 por Rivera, E. y colaboradores [84]; y en Agosto del 2006 por Pepe F. y colaboradores [77], respectivamente.

Los nuevos sistemas exoplanetarios múltiples que cumplen el criterio de tener 4 o más planetas, y que fueron añadidos a esta tesis, son los que se han descubierto desde agosto del 2010. En diciembre del 2010, se reportó la existencia de un cuarto planeta interior a los tres descubiertos previamente en la estrella HR 8799 [91] [62]. En el mismo mes, se descubrió el cuarto planeta en el sistema exoplanetario de ν Andromeda, Ups And e fue reportado por el equipo mexicano de Curiel y colaboradores en el 2010 [22]. Debido al avance en el procesamiento de datos recolectados por la misión espacial Kepler, que se especializa en detectar planetas por medio del método de tránsito, se encontró el sistema múltiple con 6 planetas denominado Kepler-11, reportado en febrero del 2011 por el equipo de Kepler [52]. Por medio de la misma técnica, se detectó el sistema exoplanetario designado como KOI-730 con 4 planetas alrededor de la primaria, en septiembre del 2011 [14]. Al final de este mismo año se descubrió un sistema con 5 planetas, Kepler-20 [36] (Gautier T. et al., 2012). La misión Kepler ha tenido una gran capacidad de detectar planetas. Han reportado también el descubrimiento de otros tres sistemas exoplanetario múltiples con 5 planetas designados como Kepler-33, Kepler-62 y Kepler-80, en enero del 2012 [53], abril del 2013 [13] y en agosto del 2012, respectivamente [79].

Otros dos sistemas exoplanetarios múltiples que recientemente se descubrieron por la técnica de velocidad radial son los sistemas HD 40307 y Gliese 667C. Estos sistemas contienen 6 planetas girando alrededor de su estrella primaria; se descubrieron en diciembre del 2012 [95] y junio del 2013 [5]. Por último, recientemente (Octubre, 2013) se descubrió el sistema

exoplanetario Kepler-90 con 7 planetas confirmados, convirtiéndose como el sistema con el mayor número de planetas descubiertos [18].

Desde el punto de vista de la mecánica celeste, se estudiará y profundizará en algunas preguntas como: ¿Es la relación TB consecuencia de las condiciones iniciales en el disco protoplanetario? ¿Es el reflejo de un proceso dinámico de relajación en un sistema de planetas sujeto a mutuas perturbaciones gravitacionales? ¿Es debida al azar? Para abordar estas preguntas se hizo una revisión de trabajos de investigación que muestran diversos enfoques acerca de que la relación TB sea reflejo de algún proceso físico. Por otro lado, también se hará mención de trabajos que han citado el trabajo de Poveda y Lara (2008) como la primera referencia de aplicación de la relación TB a los sistemas exoplanetarios y tomando en cuenta para diferentes estudios aplicados a dichos sistemas [78].

Cabe destacar que la aplicación a los sistemas exoplanetarios de la relación TB exponencial que se resume en este trabajo, ha sido presentada y divulgado en diversos foros de comunicación astronómica.

Es fundamental recalcar la importancia predictiva de la relación Titius-Bode pues, como se mostró en el pasado, esta relación sirvió para poder predecir y descubrir cuerpos del Sistema Solar, así como algunos satélites de Júpiter y Saturno que se ajustan a esta relación.

Si se encuentra que la relación TB también se aplica a los sistemas exoplanetarios, esto aportaría pautas para formular modelos teóricos para la formación planetaria. Además nos proporcionaría una pista para buscar nuevos exoplanetas, y para describir y analizar esta relación desde en punto de vista dinámico.

Investigaciones recientes sobre la relación Titius-Bode

En este capítulo haremos una breve reseña de las principales investigaciones sobre la relación TB que se han publicado en los últimos años. Revisaremos los trabajos de Peter Lynch (2003), Barnes R. y Raymond S. (2004), Raymond S. y Barnes R.(2005), Barnes R. y Greenberg R. (2006) y Manfred Cuntz (2012).

2.1. On the significance of the Titius-Bode law for the distribution of the planets.

(Peter Lynch, 2003)

En este trabajo se analiza si las distancias planetarias que se aproximan a una progresión geométrica tienen alguna base física o si esta progresión es debida al azar. Usando un método Monte Carlo, se estima la probabilidad de significancia para la distribución de las órbitas del Sistema Solar y los satélites de Urano. Este artículo se basa y compara los cálculos realizados en el trabajo de Murray y Dermott [74], en donde también analizan los satélites de Urano.

El autor empieza haciendo una recapitulación sobre la evolución que ha tenido la relación Titius-Bode aplicada al Sistema Solar. Menciona algunos trabajos dedicados a esta relación, como el de Nieto [76] que hace una revisión de algunos de los intentos para explicarla en términos físicos. Lynch cita el artículo de White [104], en el cual se argumenta que corrientes en chorros o "jet streams" podrían desarrollarse en los discos gaseosos en rotación a distancias orbitales dadas por una progresión geométrica. Es plausible que dicho proceso hidrodinámico pudiera determinar la mayoría de las características de la distribución planetaria del Sistema Solar. Incluso variaciones de estos procesos hidrodinámicos podrían estar asociadas con la tendencia aparente de que el sistema se mueve hacia configuraciones resonantes. Sobre este tema hace la referencia a Molchanov [71] donde se menciona la posible relación entre resonancias cercanas de los períodos en los sistemas planetarios (así como los satélites) y la relación Titius-Bode.

Por último, menciona el trabajo de Graner y Dubrulle [28] donde se expone que las relaciones tipo TB son consecuencia de la invariancia de escala y simetría rotacional en el disco

protoplanetario. Es decir, para sistemas donde la longitud escalar y rotacional (tamaño) del disco protoplanetario no varia, estos reflejan relaciones geométricas que son una característica genérica de una gran variedad de sistemas físicos.

Los valores en el número de orbital n , en la relación TB clásica para el Sistema Solar, parecen antinaturales y contribuyen a forzar el ajuste en especial como el caso de $n = -\infty$ para Mercurio. Por ello Lynch considera especialmente el trabajo de Dermott y Murray [74], quienes calculan la probabilidad que las configuraciones tipo TB observadas sean debidas al azar. Consideran una progresión para los períodos orbitales:

$$T_n = T_0 A^n, \quad (2.1)$$

con $n = 1, 2, 3, \dots$

Dermott y Murray comparan los valores obtenidos con esta fórmula con los períodos observados de los cinco satélites mayores de Urano. Los parámetros T_0 y A se obtienen del logaritmo de la ecuación (2.1) y minimizando la desviación cuadrática media.

$$\chi^2 = \frac{1}{5} \sum_{n=1}^5 (\log T_n^{obs} - (\log T_0 + n \log A))^2, \quad (2.2)$$

donde T_n^{obs} son los períodos observados (véase la Tabla 2.1). Los valores resultantes son $T_0 = 0.7919$ y $A = 1.777$. Para estos parámetros la discrepancia es $\chi = 0.0247$. La pregunta es que si esta discrepancia es estadísticamente significativa.

TABLA 2.1.

n	Satélite	Ajuste Murray-Dermott [días]	período observado [días]
1	Miranda	1.407	1.413
2	Ariel	2.500	2.520
3	Umbriel	4.442	4.144
4	Titania	7.893	8.706
5	Oberón	14.020	13.460

Para responder esta pregunta Murray y Dermott usan una técnica Monte Carlo. Generan 10^5 series de conjuntos de períodos para los 5 satélites, seleccionados al azar pero con ciertas restricciones en la distribución. El período del planeta más interno se fija de acuerdo con el período observado de Miranda ($T_1 = 1.413$). Los otros cuatro períodos se generan con la siguiente fórmula

$$\frac{T_{n+1}}{T_n} = L + x_n(U - L), \quad (2.3)$$

donde $n = 1, 2, 3, \dots$, L y U son los límites inferior y superior determinados por cocientes de períodos sucesivos y los valores x_n son escogidos al azar en un intervalo $[0, 1]$. Para el sistema observado, $L = 1.546$ y $U = 2.101$. La ecuación (2.3) es una forma lineal de generación de períodos al azar alrededor de los períodos observados. Para cada sistema los parámetros T_0 y A que minimizan χ se determinan. Se calcula el número de sistemas con una desviación rms menor que la desviación ($\chi_0 = 0.0247$) calculada para el sistema

observado, y entonces la probabilidad $P(\chi < \chi_0)$ de este evento es 0.79. Murray y Dermott concluyeron que la probabilidad que la configuración de satélites haya surgido por azar es del 80%. Lynch pone en duda esta conclusión y recalca que la pregunta todavía esta abierta.

La forma en que de Dermott y Murray generan una distribución (Ecuación 2.3) es una de infinitas posibilidades. Lynch considera otra alternativa, y genera una población alterna de grupos de períodos. Permite que el logaritmo de cada satélite tome un valor del período al azar dentro de una banda centrada en el mejor ajuste:

$$\log T_n = \log T_0 + (n + ky_n) \log A, \quad (2.4)$$

donde T_n es el período orbital, T_0, A son constantes, y_n es un número al azar en el intervalo $[-1/2, +1/2]$ y k es un parámetro fijo positivo que determina el ancho de la banda. Para $k = 1$ las bandas son contiguas. Lynch toma una muestra de conjuntos de períodos orbitales, de los cuales solo muestra 50 casos, donde $k = 2/3$ (Figura 2.1). Esta opción del valor de k es arbitraria, pero permite una variación en las configuraciones de satélites posibles, asegurando que los encuentros cercanos (los cuales pueden tener inestabilidades catastróficas) no ocurran. En la Figura 2.1, Lynch muestra la comparación de sus poblaciones con las obtenidas por Dermott y Murray.

De su muestra de 10^5 casos para los dos diferentes anchos de banda ($k = 1, 2/3$), Lynch estima que $P(\chi < \chi_0) = 0.20$ para un ancho banda $k = 2/3$ y cuando el ancho de banda se incrementa a $k = 1$ la probabilidad estimada del patrón observado se reduce a $P(\chi < \chi_0) = 0.05$, indicando que la actual disposición de satélites de Urano es muy difícil que haya surgido del azar, contrariamente a lo obtenido por Dermott y Murray.

TABLA 2.2.

n	Planeta	Distancias orbitales observadas [días]	Distancias orbitales por ajuste [días]
$-\infty$	Mercurio	0.39	0.37
0	Venus	0.72	0.63
1	Tierra	1.00	1.07
2	Marte	1.52	1.83
3	(Ceres)	2.77	3.13
4	Júpiter	5.20	5.36
5	Saturno	9.54	9.17
6	Urano	19.18	15.68
7	Neptuno	26.82	30.06
8	Plutón	39.44	45.88

A continuación hace el mismo análisis aplicado al Sistema Solar. En resumen, toma en cuenta diez cuerpos, los 8 planetas y los planetas enanos Ceres y Plutón (Tabla 2.2). Postula una progresión geométrica con las distancias orbitales. La relación es de la siguiente forma:

$$R_n = R_0 A^n, \quad (2.5)$$

con $n = 1, 2, 3, \dots$

Para minimizar la desviación estándar (rms) se escogen los parámetros R_0 y A aplicando la tercera ley de Kepler de donde se obtienen las distancias planetarias a partir de los períodos observados. Los valores resultantes son $R_0 = 0.2139$ y $A = 1.706$. Para estas constantes la discrepancia es $\chi_0 = 0.0544$.

Lynch calcula la población al azar para el Sistema Solar, utilizando como límites inferior y superior de los cocientes sucesivos de las distancias planetarias, $L = 1.503$ y $U = 2.851$, respectivamente. Genera 10^5 conjuntos de períodos orbitales; obtiene una probabilidad $P(\chi < \chi_0)$ de aproximadamente 0.39. Con estos resultados se puede concluir que la configuración planetaria que ajusta a una relación tipo TB tiene una probabilidad de 40% de que haya surgido por azar. Cuando se toma la población propuesta, con un ancho de banda con $k = 2/3$ la probabilidad es $P(\chi < \chi_0) = 0.99$ por lo que en este caso se concluye que esta muestra es completamente al azar. Cuando cambia el ancho de banda a $k = 1$, la probabilidad estimada $P(\chi < \chi_0) = 0.34$, casi el mismo valor que con la población de Dermott y Murray.

La conclusión más importante del trabajo de Lynch es que, tanto para el análisis probabilístico puede arrojar conclusiones contradictorias a la cuestión sobre la naturaleza azarosa o no azarosa de las configuraciones tipo TB observadas.

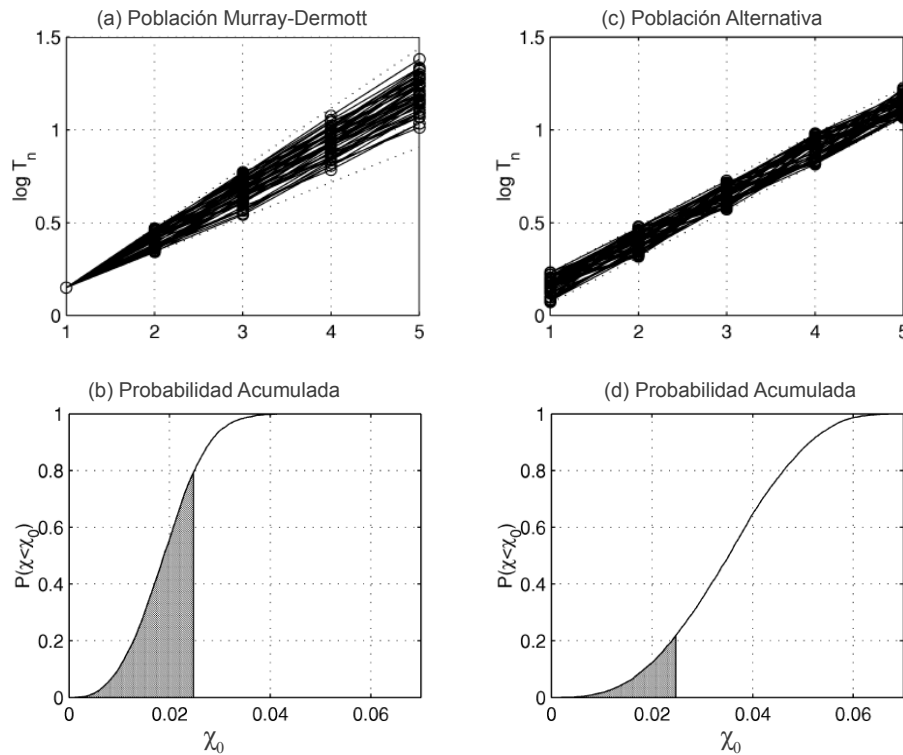


FIGURA 2.1. Distribución de los cinco satélites principales de Urano. (a) Logaritmo de los períodos dado por Murray y Dermott (1999), solo se muestran 50 casos. (b) Distribución de probabilidad acumulada calculada para 10^5 casos; la parte sombreada es para $\chi < \chi_0$. (c) Logaritmo de períodos dado por Lynch para $k = 2/3$, solo se muestran 50 casos. (d) Distribución de probabilidad acumulada para los 10^5 casos de la muestra de Lynch, la parte sombreada es para $\chi < \chi_0$.

2.2. Predicting planets in known extrasolar planetary systems. Test particle simulations.

(Barnes R. y Raymond S., 2004)

Barnes y Raymond han sugerido en algunos trabajos que algunos sistemas planetarios están situados cerca del límite de estabilidad [7]. Entonces proponen la hipótesis de que si todos los sistemas están cerca de la inestabilidad, entonces al menos un planeta adicional debe de existir, y debe encontrarse en regiones estables, en los sistemas exoplanetarios que consideran como separados, para así perturbar a los planetas al borde de la inestabilidad. Para comprobar esta hipótesis, examinaron ciertos sistemas exoplanetarios poniendo partículas prueba sin masa entre los planetas conocidos, y realizaron simulaciones que corrieron durante un tiempo de 1-10 millones de años. Los sistemas que se analizan son Gliese 876, HD 82943; 55 Cancri, Ups And; HD 12651, 47 UMa; HD 168443, HD 74156; HD 38529, HD 37124 y el Sistema Solar.

Barnes y sus colaboradores demostraron que los sistemas resonantes y en interacción conocidos (hasta ese momento) tenían grandes regiones de inestabilidad y que éstas se encuentran en el espacio permitido observacionalmente [7]. Con un mínimo cambio en los elementos orbitales, especialmente en la excentricidad, o en proximidad a una resonancia perfecta ¹, se produce una catastrófica ruptura del sistema. Esto sugiere que muchos sistemas están cerca del límite de inestabilidad.

Los sistemas planetarios cerca de ser inestables son estrechamente compactos, con lo cual no hay lugar para un planeta adicional. Se explora la posibilidad de que todos los sistemas sean compactos, lo cual implicaría la existencia de un planeta entre los planetas existentes de los sistemas separados. En esta hipótesis de sistemas planetarios compactos, los planetas no detectados no han sido observados porque no hay suficientes datos para descubrir planetas adicionales, o bien porque la masa planetaria está por debajo del límite de detección del método de velocidad radial.

El modelo asume que el proceso de formación planetaria es eficiente, esto es, que se forman todos los planetas posibles en los discos circumstelares. En este escenario el polvo se condensa, en cuerpos cada vez más grandes, y los protoplanetas se perturban entre ellos, conforme se incrementa su cantidad de masa. A medida que los protoplanetas se vuelven más masivos adquieren la posibilidad de empujar a otros planetas hacia posiciones favorables (dinámicamente estables) o, si las perturbaciones se vuelven muy grandes, de expulsarlos por completo del sistema.

La implicación es que en cualquier región estable entre los planetas conocidos alberga un planeta aún no detectado.

Para verificar esta hipótesis se realizaron simulaciones numéricas poniendo partículas prueba entre cada uno de los planetas conocidos de los sistemas con dos o más planetas para así encontrar regiones de estabilidad. Los sistemas estudiados se clasifican en 3 categorías: Sistemas resonantes, en interacción y separados.

Los sistemas resonantes contienen dos o más planetas en resonancia de movimiento medio. Estos sistemas son: Gliese 876, HD 82943 (resonancia 2:1) y 55 Cancri con dos planetas internos (resonancia 3:1). Los sistemas en interacción son aquellos que no están en reso-

¹Resonancia perfecta: es la resonancia donde el cociente de los periodos da como resultado un número entero.

nancia pero se encuentran lo suficientemente cerca como para perturbarse. Dichos sistemas en interacción son: Ups And, HD 12651, 47 UMa y el Sistema Solar. En los sistemas separados, los planetas están separados lo suficiente para no estar interactuando. Los sistemas separados que se tomaron en cuenta en este trabajo fueron: HD 168443, HD 74156, HD 38529 y HD 37124. También se tomó en cuenta 55 Cancri como separado y resonante a la vez.

La integración numérica se hizo con el integrador SWIFT [50]. Este código está diseñado para que un sistema sea simulado con rapidez, tomando en cuenta encuentros cercanos. La integración se realizó para un tiempo de 10^7 años, poniendo partículas prueba espaciadas cada 0.002 AU en el intervalo de semiejes disponible, y 0.05 en excentricidades.

Todos los sistemas presentados aquí son coplanares. Para la masa de los planetas observados se toma la masa mínima permitida del planeta. La anomalía media para cada una de las partículas se escoge uniformemente entre 0 y 2π . La longitud del nodo ascendente Ω no se toma en cuenta pues los sistemas son coplanares. En la Tabla 2.3 se muestran los elementos orbitales de todos los sistemas exoplanetarios que se utilizaron.

TABLA 2.3. Elementos orbitales

Sistema	Planeta	Masa	Período	a	e	ω	T (JD)
		$[M_{Jup}]$	$[días]$	[UA]			
HD 168443	b	7.73	58.1	0.295	0.53	172.9	2450047.58
	c	17.2	1770	2.87	0.2	63	2450250.6
HD 74156	b	1.56	51.61	0.28	0.649	183.7	2451981.4
	c	7.5	2 300	3.47	0.395	240	2450849
HD 37124	b	0.86	153	0.54	0.1	97	2451227
	c	1.01	1942	2.95	0.4	265	2451828
HD 38529	b	0.78	14.309	0.129	0.29	87.7	2450005.8
	c	12.8	2174.3	3.68	0.36	14.7	2450073.8
55 Cancri	b	0.84	14.653	0.115	0.02	99	2450001.479
	c	0.21	44.276	0.241	0.339	61	2450031.4
	d	4.05	5360	5.9	0.16	201	2452785
v And	b	0.69	4.61706	0.059	0.015	32	2450001.588
	c^*	1.96	241.1	0.83	0.25	251	2450160.1
	d	3.98	1309	2.5	0.34	255	2450044

*No se usó en estas simulaciones

En sus resultados encontraron que los sistemas exoplanetarios HD 74156 y HD 168443 son sistemas completos, es decir, no existe ninguna región de estabilidad entre los planetas conocidos. En HD 168443 se tiene un cociente de periodos, $R = 30.5$, y se pusieron 786 partículas para llenar la región entre los planetas b y c . En la Figura 2.2, se muestra que para cualquier valor del semieje o excentricidad, ninguna partícula prueba sobrevive durante más de dos millones de años.

HD 74156 consiste de dos planetas separados con un cociente entre los periodos de $R = 40.0$, por lo que se necesitaron 822 partículas prueba. En la Figura 2.2, se presenta la supervivencia de las partículas prueba en este sistema. Hay una región muy angosta de estabilidad alrededor de 0.6 UA, con $e > 0.1$. Por lo tanto, se concluye que los asteroides que podrían existir en esa zona deberían tener excentricidades altas.

Para los sistemas HD 37124 y HD 38529 se encuentran regiones de estabilidad y se pueden predecir planetas aún no detectados en dichas regiones. El cociente de los periodos de los dos planetas de HD 37124 es de $R = 12.7$, y se integraron 588 partículas prueba. En las simulaciones, este sistema sufre muchas expulsiones debido a las resonancias de orden superior. Sin embargo, tiene una región de estabilidad aproximadamente a 1 UA y con una excentricidad $0.15 \leq e \leq 0.2$ con lo cual se sugiere la existencia de un planeta. Se resalta que existe una región estable (que no es la más extensa) en $e = 0$, y se propone que la órbita de un posible planeta podría existir a una distancia alrededor de 1 UA, la cual corresponde a una resonancia 5:2 con el planeta b y con una excentricidad cerca de 0.15. En la Figura 2.3, también se puede observar que hay una banda adicional de estabilidad en $a = 1.2$ UA para e mayor que 0.1. Una tercera banda es visible en 0.9 UA, $e = 0.15$, una cuarta banda ocurre en $a = 1.7$ UA con $e > 0.3$. Estos resultados muestran que excentricidades no nulas no son perjudiciales para la estabilidad del sistema. Incluso estas excentricidades podrían propiciar estabilidad, pero al mismo tiempo, llegan a un valor crítico en el cual el sistema se vuelve inestable. Para $a \approx 0.8$ UA la excentricidad crítica es $e = 0.25$, pero para $a \approx 1.6$ UA se encuentran órbitas estables hasta $e = 0.4$.

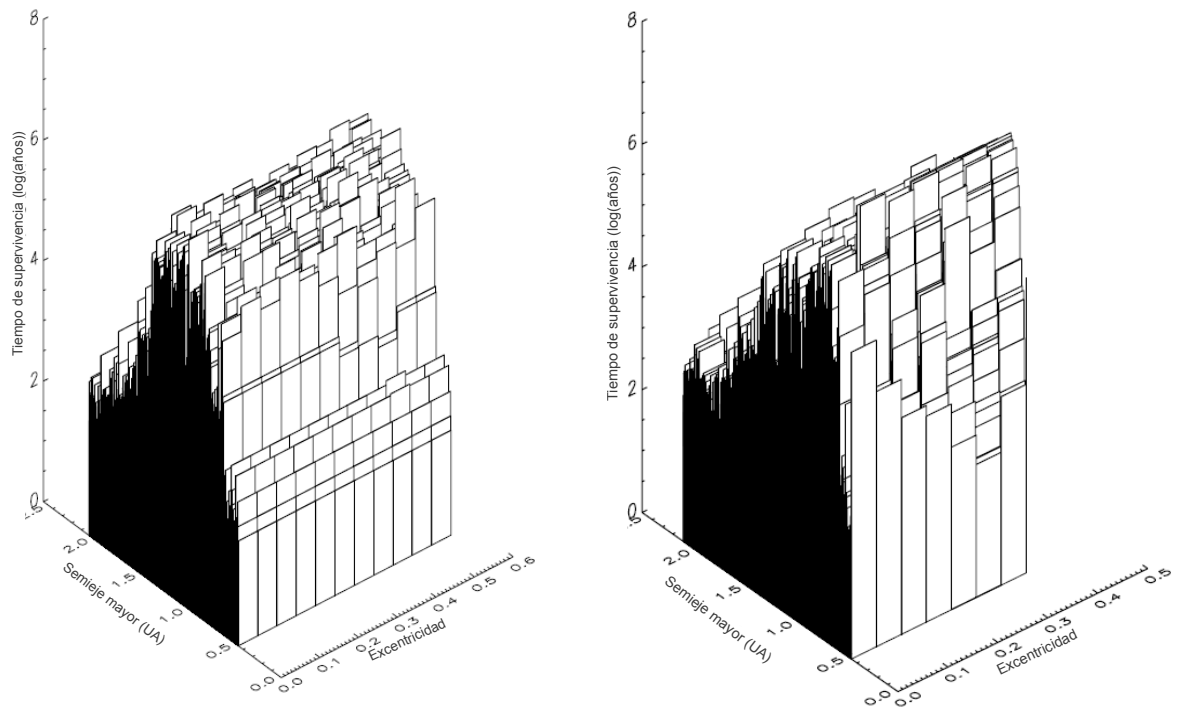


FIGURA 2.2. Estabilidad de las partículas prueba en los sistemas HD 168443(a) y HD 74156(b). La altura de las barras, muestra el tiempo en los que las partículas se mantiene ligadas a la estrella. La región estable localizada en $a = 0.6$ UA, $0.1 < e < 0.25$ están angosta que un planeta adicional en esta región, es poco probable

En HD 38529 con un cociente de los periodos orbitales de $R = 152$ y se integraron 1092 partículas prueba; se encuentra una región de estabilidad entre 0.25 - 0.75 UA y para una excentricidad $e < 0.3$, el límite interior de esta región puede estar delimitado por el planeta más externo de este sistema, que es 15 veces más grande que el interno. La zona de estabilidad de HD 38529 es mayor que la de HD 37124, por lo que es más probable que esta zona albergue un planeta.

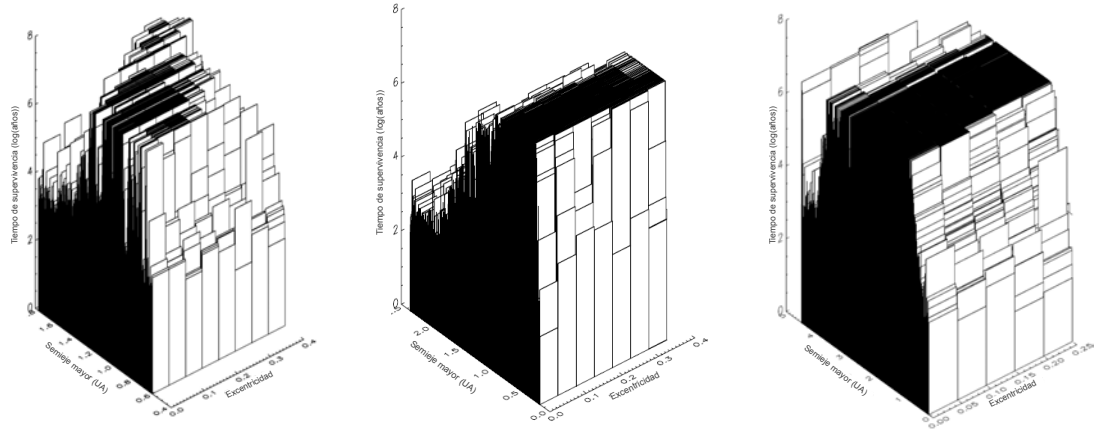


FIGURA 2.3. Estabilidad de las partículas prueba en HD 37124, HD 38529 y 55 Cancri.

De todos los sistemas analizados 55 Cancri es el que tiene la mayor separación entre sus planetas observados (con $R = 121$) por lo cual se requirieron 2164 partículas prueba. Las integraciones orbitales mostraron que 55 Cancri tiene una amplia región de estabilidad entre 0.9 – 2.8 UA para un intervalo de excentricidad entre $0 \leq e \leq 0.25$; con lo cual sugieren que puede existir un planeta a 2 UA aprox. con una excentricidad $e \leq 0.1$. También sugieren que en esta región puede existir un cinturón de asteroides o un planeta terrestre, en caso de no existir ahí un planeta gaseoso gigante.

Por último, y como una prueba de su método, realizan una integración numérica, la cual consiste en determinar si se puede predecir el planeta v And c que se encuentra en medio de los dos planetas en v And. Encuentran que, efectivamente, el planeta intermedio v And c sí se encuentra en una región estable.

El método de Barnes y Raymond se aplica al escenario de sistemas compactos.

2.3. Predicting planets in known extrasolar planetary systems II. Testing for Saturn mass planets.

(Sean Raymond y Rory Barnes, 2005)

En el trabajo anterior Barnes y Raymond mostraron que algunos de los sistemas planetarios extrasolares contienen regiones estables integrando las órbitas de partículas sin masa. En este artículo los autores examinan la posibilidad de que planetas con masa tipo Saturno existan en estos sistemas. Este tipo de planetas se encuentra justo debajo del límite de detección, por lo que el estudio de Raymond y Barnes podría predecir posibles elementos orbitales de estos planetas aún no detectados. [8]

Anteriormente Barnes y Quinn (2004) propusieron que una gran cantidad de sistemas exoplanetarios se encuentran al borde del límite de estabilidad: un pequeño cambio en el semieje ó en la excentricidad causa que el sistema se vuelva estable. La hipótesis de sistemas planetarios compactos presentada por Barnes y Raymond en el trabajo anterior (2004) predice que todos los sistemas planetarios extrasolares están en el límite estable. Esto da a lugar a la especulación que aquellos sistemas que parecen estables podrían albergar planetas, aún no detectados, que los empujarían a su límite de estabilidad. Esta hipótesis podría insinuar que si existe una región en el sistema planetario en donde la órbita de un planeta masivo es estable; entonces, esa región podría contener un planeta. [7]

En el primer artículo de esta serie [8] se usaron integraciones de partículas sin masa para mapear las regiones de estabilidad en ciertos sistemas extrasolares. De los cinco sistemas examinados, en tres (HD 37124, HD 38529, y 55 Cancri) se encontró que contenían regiones estables (a, e) entre los planetas gigantes conocidos, en las cuales las partículas prueba sobreviven de 5-10 millones de años. Sin embargo, en el, trabajo citado, sólo se tomaron partículas sin masa. Entonces, si se pusieran planetas con masa en estas regiones estables, ¿qué tanto se afectará el resultado de estabilidad para dichos planetas? Este análisis dinámico se enfoca a responder esta cuestión. [8]

En Raymond y Barnes [80] se investiga el efecto de la presencia de un planeta masivo aún no detectado en la zona de estabilidad previamente encontrada para cuatro sistemas exoplanetarios conocidos: HD 37124, HD 38529, 55 Cnc y HD 74156. Se escogieron planetas con masa igual a la de Saturno porque esta masa está en el límite de detección para la técnica de velocidad radial (la única con el mayor número de planetas descubiertos en ese entonces existía). También se realizó un pequeño número de simulaciones adicionales asignando al planeta no detectado una masa tipo joviana con el propósito de poder restringir dinámicamente la masa de dicho planeta.

Hay que resaltar que en el artículo de Barnes y Raymond de 2004 no se encontraron partículas en órbitas estables para el sistema exoplanetario HD 74156, más allá de unos pocos millones de años. Dvorak [29] hallaron órbitas estables para partículas prueba entre 0.9 y 1.4 UA. Por eso Raymond y Barnes (2005) también incluyen en su muestra este sistema extrasolar [8].

En la Tabla 2.4 se muestran los elementos orbitales que se usaron como condiciones iniciales para los cuatro sistemas extrasolares.

Para cada sistema planetario, se seleccionaron de 200 a 600 valores de a y e al azar, dentro de las regiones que se mostraron estables para las partículas prueba sin masa (*véase* Tabla

2.5). Para el caso de HD 74156, que no mostró ninguna región estable, se tomó el intervalo de la región: $\Delta a = 0.5 - 1.5$ UA, $\Delta e = 0.0 - 0.2$. A cada uno de los puntos (a, e) del hipotético planeta con masa saturnina se le asigna una inclinación de 0.1° , se escoge al azar la anomalía media. La longitud del periastro se escoge de manera que este alineada con el planeta más masivo en el sistema. Esta condición ayuda a encontrar más sistemas estables, ya que la mayoría de los sistemas conocidos con un cociente entre sus periodos menor que 5:1 se encuentran oscilando alrededor de una longitud de periastro común.

TABLA 2.4. Elementos orbitales

Sistema	Planeta	Masa [M_{Jup}]	a [UA]	e	ω	T (JD)
HD 37124	b	0.86	0.54	0.1	172.9	2451227
	c	1.01	2.95	0.4	265	2451828
HD 38529	b	0.78	0.129	0.29	87.7	2450005.8
	c	12.8	3.68	0.36	14.7	2450073.8
HD 74156	b	1.61	0.28	0.647	185.0	2451981.38
	c	8.21	3.82	0.354	272.0	2451012
55 Cancri	b	0.84	0.115	0.02	99.0	2450001.479
	c	0.21	0.241	0.339	61.0	2450031.4
	d	4.05	5.9	0.16	201.0	2452785

TABLA 2.5

Sistema	Δa [UA]	Δe	No. planetas
HD 37124	0.9 – 1.1	0.0 – 0.2	472
HD 38529	0.27 – 0.82	0.0 – 0.3	200
HD 74156	0.5 – 1.5	0.0 – 0.2	600
55 Cancri	0.7 – 3.2	0.0 – 0.2	512

El sistema de cuatro o cinco cuerpos se integra durante 100 millones de años, o hasta que el sistema se vuelve inestable, es decir, cuando ocurre una colisión o expulsión. Se utilizó el integrador híbrido en el código Mercury [20], el cual emplea un algoritmo simpléctico de segundo orden cuando los objetos están separados más de 3 radios de Hill, y un método Bulirsch-Stoer para encuentros más cercanos.

En la Tabla 2.5 se muestran las condiciones iniciales de las simulaciones para cada uno de los sistemas, incluyendo los elementos orbitales y el número de simulaciones.

2.3.1. 55 Cancri

El sistema 55 Cancri está compuesto por un par de planetas interiores situados cerca de una resonancia de movimiento medio 3:1, y un planeta distante y separado. En el trabajo de Barnes y Raymond [8] se muestra que existe una gran región entre el par de planetas internos y el planeta exterior que es estable para partículas prueba desde 0.7 UA a 3.4

UA, con excentricidades hasta 0.2. Esta región estable está acotada en su límite interno por la resonancia 1:5, con el planeta interno en 0.72 UA, y en su límite exterior por la resonancia 5:2, con el planeta exterior en 3.2 UA. Varias resonancias de movimiento medio con el planeta externo están localizadas en la región estable; es notable la resonancia 3:1 en 2.84 UA, la resonancia 4:1 en 2.34 UA y la resonancia 5:1 en 2.02 UA.

Se integraron órbitas con planetas con masa de Saturno en 512 ubicaciones dentro de esta zona; de éstas, 384 (75 %) sobrevivieron los 100 millones de años. En la Figura 2.4 (Panel Izquierdo), se muestra la distribución inicial (a, e) para todos los experimentos, en donde los puntos representan las simulaciones que resultaron estables y los signos “+” representan las inestables. Se muestra en la Figura 2.4 (Panel Derecho) los resultados de 512 simulaciones, agrupados en los ejes de excentricidad y semieje mayor. El sombreado de cada cuadrado representa la fracción de planetas que sobrevivieron en esa región, y con un error de Poisson estimado del 20 %. Las líneas punteadas indican la zona de habitabilidad.

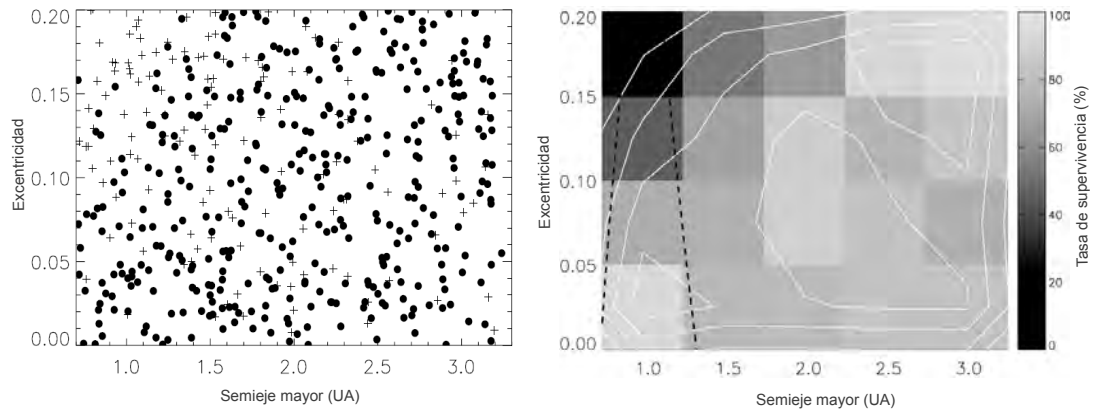


FIGURA 2.4. **Panel izquierdo:** Condiciones iniciales de los 512 planetas con masas de Saturno en 55 Cnc. Los puntos representan los planetas que fueron estables por más de 100 millones de años y los de signo “+” representan los inestables. **Panel derecho:** Datos de simulaciones de planetas con masa de Saturno. Las regiones sombreadas representa la fracción de planetas de ese bin que sobrevivieron los 100 millones de años. Las líneas punteadas negras muestran la Zona Habitable (ZH). Se indican también los contornos de tasas de supervivencia constantes.

Se encuentran tres máximos en la Figura 2.4: un máximo en $a \sim 1.0$ UA, $e \sim 0.03$, un segundo máximo extenso que se centra alrededor de $a \sim 2.0$ UA con $e \sim 0.08$, pero se extiende a valores mayores en a ; y un tercer máximo en $a \sim 3.0$ UA, $e \sim 0.17$. La región que se encuentra en el primer máximo es de interés astrobiológico, ya que esta región cae en la Zona de Habitabilidad de su estrella primaria. La región 3 esta delimitada por las resonancias de movimiento medio 3:1 (2.84 UA) y 5:2 (3.2 UA) con el planeta externo. El panel de la izquierda de la Figura 2.4 presenta los elementos orbitales iniciales de la fracción de planetas prueba que sobrevivieron 100 millones de años los planetas y no incorporan variaciones orbitales durante el transcurso de cada simulación.

En la Figura 2.5 (Panel izquierdo) se muestran los elementos orbitales (a, e) de seis planetas que resultaron ser estables durante los 100 millones de años de integración. Cada punto representa el resultado de una simulación, en la cual los elementos se muestrean cada 10^5 años. La excentricidad y semieje mayor de los planetas prueba cambian durante la

integración, aunque los cambios en el semieje mayor a son más pequeños que los de la excentricidad e . Además, la amplitud de las variaciones es diferente cada simulación. La simulación empiezan en $(a, e) = (2.82 \text{ UA}, 0.07)$ alcanzan un máximo de la excentricidad de 0.67 y un valor medio de 0.33 durante toda la simulación. En contraste, en la simulación que empieza en $(2.45 \text{ UA}, 0.10)$ la excentricidad no llega a ser menor que 0.05 ni mayor que 0.12.

La órbita del planeta que más probablemente se detecta alrededor de su estrella no corresponde a su posición inicial sino a aquella en la que pasa el mayor tiempo. La Figura 2.5 (Panel derecho) muestra el tiempo relativo que el planeta prueba se mantiene estable en dichos parámetros para cada región de la Figura 2.5 (Panel izquierdo) con una tasa de supervivencia superior a 75%. Los tonos grises representan el número total de resultados de salida de cada simulación que caía en esa región, normalizado con el valor máximo. El tiempo relativo que se mantiene en cada intervalo (a, e) incorpora las diferencias en la tasa de sobrevivencia y las variaciones seculares del semieje mayor y la excentricidad, y es una combinación de todos los planetas prueba estables (con masa de Saturno) que pasan tiempo en esa región. Un máximo en el tiempo relativo indica los parámetros orbitales en los cuales podría encontrarse un planeta adicional en 55 Cancr.

El máximo 1 que se muestra en la Figura 2.4 (Panel Derecho) en $a \sim 1.0 \text{ UA}$, $e \sim 0.03$, ha migrado a posiciones con excentricidades más altas, entre $0.04 - 0.10$ como se resalta en la Figura 2.5. Este es debido a las grandes variaciones en la excentricidad de los planetas con masa tipo Saturno en esa región. El máximo 2 ($a \sim 2.0 \text{ UA}$, $e \sim 0.08$) y máximo 3 ($a \sim 3.0 \text{ UA}$, $e \sim 0.17$) de la Figura 2.4, se mantienen aproximadamente en los mismos parámetros orbitales en la Figura 2.5. Tampoco los otros dos máximos en $(1.6 \text{ UA}, 0.07)$ y $(2.6 \text{ UA}, 0.09)$ varían apreciablemente. En estas posiciones la amplitud en las variaciones de la excentricidad es pequeña y la tasa de sobrevivencia es alta. Esta genera picos en el tiempo relativo que se mantienen los planetas prueba. Aunque la tasa de sobrevivencia de los planetas prueba, con condiciones iniciales en esta región, no haya sido máxima, los planetas estables permanecen mucho tiempo en estas regiones.

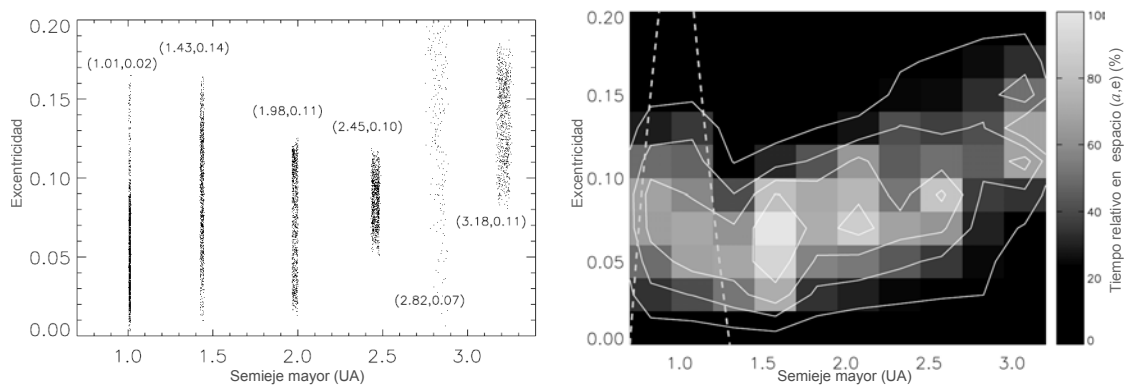


FIGURA 2.5. **Panel izquierdo:** Elementos orbitales ocupados por los seis planetas con masa tipo Saturno en 55 Cnc, que resultaron estables durante 1×10^8 años. **Panel derecho:** Tiempo relativo en el cual se mantienen estables las simulaciones en 55 Cnc en el espacio- (a, e) .

Para probar la sensibilidad de los resultados con la masa de los planetas prueba, se corrieron simulaciones adicionales incluyendo masas de $1 M_{Jup}$ y $10 M_{Jup}$. Las variaciones

en la velocidad radial de una estrella con dichos planetas masivos serían tan grandes que seguramente podrían ser detectados. Estas simulaciones pueden servir para restringir la masa de estos posibles planetas. Estos planetas más masivos inicialmente se colocaron en regiones donde los planetas tipo Saturno fueron más estables (máximos 1, 2 y 3 en la Fig. 2.4) y se integraron por más de 100 millones de años.

Ninguno de los planetas con $10 M_{Jup}$ fue estable. Tres de los 10 con $1 M_{Jup}$ que inicialmente se colocaron en el máximo 1 sobrevivieron los 100 millones de años. Diez de 20 colocados en el máximo 2 sobrevivieron y siete de 10 en el máximo 3 sobrevivieron. En la Tabla 2.6 (pag. 23) se muestra la tasa de sobrevivencia de los planetas con masa tipo Saturno en los 3 máximos que son: 93 % (máximo 1), 89 % (máximo 2), y 96 % (máximo 3). Estas tasas son mayores que las obtenidas para planetas con $1 M_{Jup}$. La tasa de sobrevivencia es mucho mayor que para los planetas con $1 M_{Jup}$, en los máximos 1 y 2, pero solo un poco mayor para el máximo 3. Los planetas menos masivos dinámicamente son más estables que los planetas con una masa joviana en los máximos 1 y 2. Entonces, actualmente en estas regiones es más probable encontrar planetas menos masivos por debajo de los límites de detección. Por lo tanto se puede poner una restricción para la masa de un planeta aún no detectado en la posición del máximo 1 y 2, además de las restricciones observacionales. Sin embargo, para el máximo 3 no puede hacerse dicha restricción debido a que este es estable tanto con masas tipo Saturno como con masas tipo Júpiter.

2.3.2. HD 37124

HD 37124 tiene una estructura resonante muy interesante. El cociente de los periodos de los dos planetas gigantes conocidos en este sistema es 12.7, haciéndolo el sistema más compacto de todos los sistemas planetarios que se estudian. En Barnes y Raymond [8] se encontró que las partículas prueba para este sistema son estables en un intervalo de semiejes de 0.9 – 1.1 UA, con excentricidades entre 0 y 0.25. Se integraron órbitas de 472 planetas con masa tipo Saturno, de las cuales 290 (61 %) sobrevivieron los 100 millones de años. En los dos planetas conocidos, la longitud del periastro del planeta interno y externo oscilan mutuamente con amplitud alrededor de 31° y con un periodo de precesión de 171 000 años. Cuando se inserta un planeta entre estos dos planeta masivos, se encuentra evidencia de resonancias seculares en varias configuraciones de los planetas prueba. En la Figura 2.6 se muestra el tiempo de evolución de la longitud de periastro para cada planeta en dos casos estables. Los elementos orbitales para estos dos casos son : $(a, e) = (0.90 \text{ UA}, 0.11)$ y $(a, e) = (1.01 \text{ UA}, 0.08)$. El panel superior muestra un sistema en el cual el planeta prueba está en una fuerte resonancia secular con el planeta interior gigante. El panel inferior muestra un caso en el cual la longitud del periastro del planeta prueba esta librando alrededor de la del planeta gigante externo. Al mismo tiempo, el planeta prueba sigue al planeta gigante interno durante casi la mitad de su periodo de precesión de 7 500 años. Otra oscilación de 1 500 años se sobrepone a la evolución del planeta prueba. La dinámica secular del planeta prueba se ve afectada por los planetas gigantes de forma compleja. Sin embargo, el planeta prueba es estable. Los autores mencionan que se esperaría que un sistema en resonancia secular debería ser estable debido a que evita los encuentros cercanos entres los planetas. Hay que resaltar que la tasa de precesión del planeta interno es distinta a la del planeta externo, debido a las diferentes posiciones de los planeta prueba. En la Figura 2.7 se observa la tasa de supervivencia de los planetas prueba con masa tipo Saturno como función del semieje mayor inicial. Se observa una caída en la tasa de sobrevivencia en la resonancia 2:5 con el planeta interno y, los picos

al interior y exterior. Existe un pequeño pico en $a \sim 0.90$ UA. No se encuentra ninguna dependencia fuerte con la anomalía media en la resonancia.

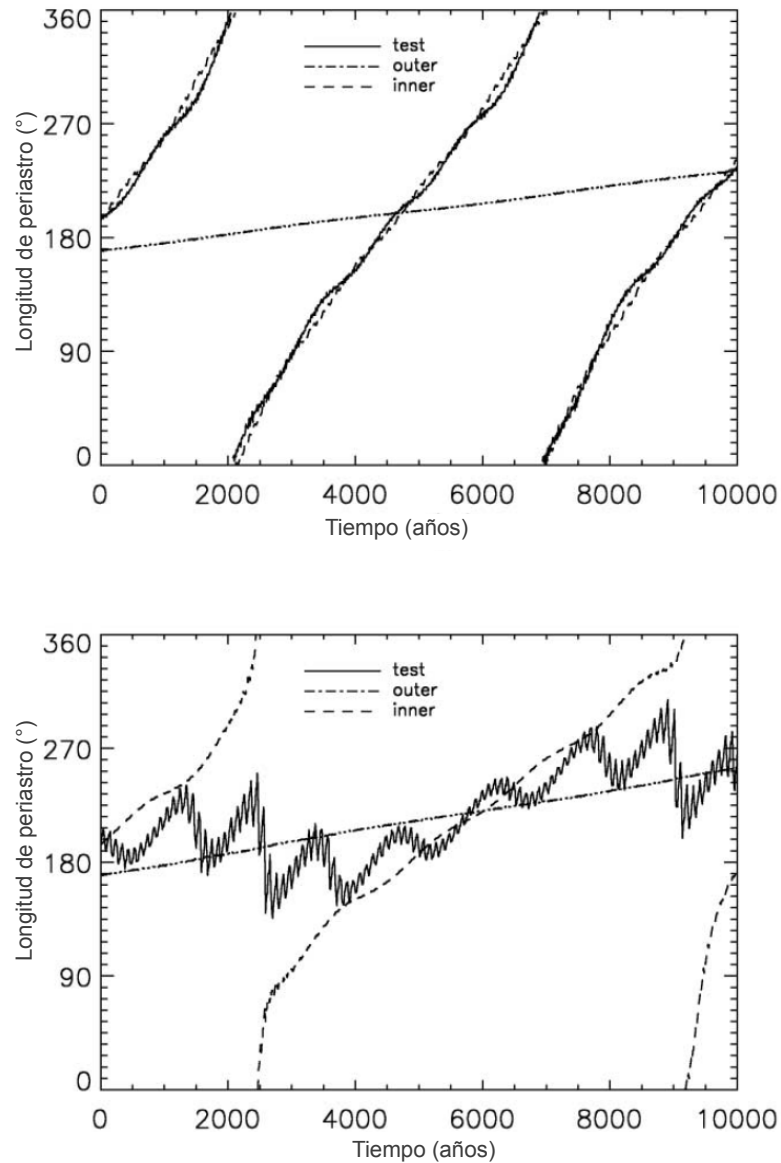


FIGURA 2.6. Evolución de la orientación de las órbitas (medidas por la longitud de periastro) para estos dos casos de prueba en el sistema HD 37124, con $(a, e) = (0.90 \text{ UA}, 0.11)$ y $(a, e) = (1.01 \text{ UA}, 0.08)$, respectivamente. Ambos casos resultaron estables durante los 100×10^6 años.

De la misma forma que para 55 Cancri, se representa la tasa de supervivencia con respecto a las condiciones iniciales de semieje y excentricidad (véase Figura 2.7). El límite exterior de la Zona de Habitabilidad (ZH) del sistema esta marcado por una línea punteada. Tres máximos locales son evidentes en la figura: (1) $a \sim 0.92$ UA, $e \sim 0.12$; (2) $a \sim 1.02$ UA, $e \sim 0.1$; y (3) un máximo absoluto en $a \sim 0.98$ UA, $e \sim 0.07$. Los tres máximos están localizados en la ZH del sistema, incluso el máximo 2 en el límite exterior.

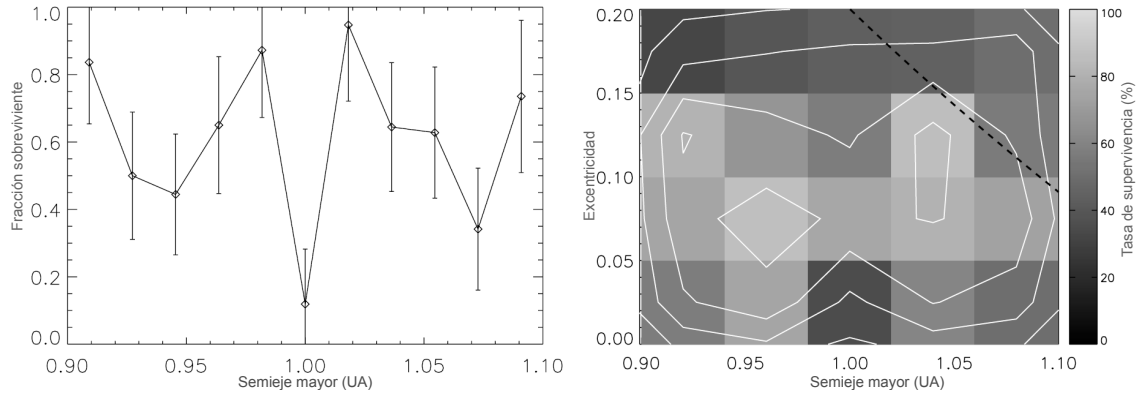


FIGURA 2.7. **Panel izquierdo:** Tasa de supervivencia de los planetas prueba ($1 M_{\odot}$) como función de su semieje mayor inicial. **Panel derecho:** Tasa de supervivencia para las condiciones iniciales de las 472 simulaciones en HD 37124. La línea punteada es el límite exterior de la ZH para este sistema.

La Figura 2.8 muestra la posición en el espacio- (a, e) para todos los planetas estables representados con pequeños puntos negros. Los resultados se muestrean cada 10^5 años durante los 100 millones de años. Los puntos grises muestran las posiciones de las simulaciones que resultaron inestables, justo antes de que se volvieran inestables. La resonancia 2:5 con el planeta exterior es claramente inestable, así como ciertas regiones que corresponden a resonancias de mayor orden en el movimiento medio. Existen grandes áreas en donde los sistemas no-inestables residen, que corresponden a los máximos visto en la Figura 2.7. La Figura 2.8 (Panel derecho) presenta los resultados de todas las simulaciones estables que tienen más del 70% de tasa de supervivencia, tomadas de la Figura 2.7. La línea punteada representa el límite exterior de la ZH del sistema HD 37124.

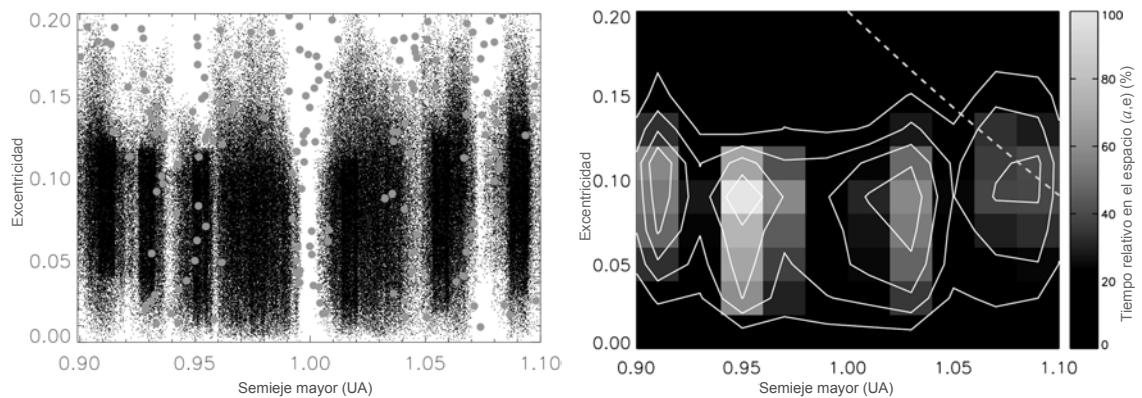


FIGURA 2.8. **Panel izquierdo:** Regiones en el espacio- (a, e) ocupados por los planetas prueba en HD 37124. Cada punto negro es un valor de cada simulación, con valores de salida cada 10^5 años. Los puntos grises indican la posición de los planetas prueba inestables, tomando su posición justo antes que se volvieran inestables. **Panel derecho:** Tiempo relativo que se mantienen en el espacio- (a, e) , los planetas prueba estables en HD 37124.

Todos los máximos que se encontraron en la Figura 2.7 se reencuentran aquí. El máximo 2 en 0.95 UA es el más prominente debido a la interacción entre la tasa de supervivencia y la amplitud de las variaciones en la excentricidad.

Como en el caso de 55 Cancri, se corrieron 30 simulaciones adicionales con una masa joviana y 10 simulaciones con 10 masas jovianas, con posiciones iniciales en máximos 1, 2 y 3. Hay que resaltar que entre los casos con 10 M_{Jup} , no se encontró ninguno estable. Seis de 10 (con 1 M_{Jup}) sobrevivieron en el máximo 1, ocho de 10 (con 1 M_{Jup}) sobrevivieron en el máximo 2 y cuatro de 10 (con 1 M_{Jup}) en el máximo 3. La tasa de supervivencia de los planetas prueba se encuentra entre el 81% y 89% para cada máximo. En el caso del máximo 2, la tasa de supervivencia de planetas con masa jovianas y saturninas son comparables. Por ello, dinámicamente no se puede restringir la masa del planeta aún no descubierto. Para los máximos 1 y 3 la tasa de supervivencia es significativamente más baja para planetas con una masa joviana, y por eso se sugiere que en estas regiones es más probable la existencia de planetas de baja masa que estarían por debajo de los límites observacionales en ese momento.

2.3.3. HD 38529

La estructura resonante de HD 38529 es un poco diferente que el de HD 37124, ya que la separación entre los dos planetas conocidos es mucho más grande. La región estable para partículas prueba cae entre 0.27 y 0.82 UA, con excentricidades de hasta 0.3. El límite interno está delimitado por la resonancia 1:3 con el planeta interior. No se observa evidencia de resonancias seculares que jueguen un rol primordial en la dinámica de este sistema. Se integraron 200 casos de planetas prueba con masa tipo Saturno en este sistema, de los cuales 191 (95%) sobrevivieron durante más de 100 millones de años. La Figura 2.9 (Panel Izquierdo) enseña que los elementos orbitales iniciales agrupadas. Las pocas regiones inestables en este sistema caen en valores pequeños del semieje mayor y altas excentricidades. La gran zona que es estable para las partículas prueba también lo es para los planetas prueba con masa tipo Saturno. En la Figura 2.9 (Panel derecho) se muestra el tiempo relativo que los planetas prueba se mantienen en las diferentes posiciones (a, e) , excepto aquellos que tienen semieje mayor bajo y excentricidades grandes. Un gran máximo aparece en $a \sim 0.7$, $e \sim 0.06 - 0.12$. Como se ha observado en otros casos, esto se debe a las pequeñas fluctuaciones en la excentricidad que experimentan los planetas prueba estables en esta región.

Se llevaron a cabo veinte simulaciones adicionales, 10 de ellas con una masa joviana y 10 con 10 masas jovianas, todas con condiciones iniciales, a , entre 0.5 y 0.6 UA, y $e < 0.1$. Todas fueron estables los 100 millones de años. En consecuencia, no podemos asignar un límite superior a la masa de un posible planeta predicho en esta región.

2.3.4. HD 74156

En el artículo de Barnes y Raymond [8] se encuentra que ninguna partícula prueba es estable en este sistema durante más de 1 millón de años. La región en la cual sobrevivían el mayor tiempo fue la de semiejes entre 0.5 y 1.5 UA con excentricidades bajas. Sin embargo, ahora se encontró que un número apreciable de planetas prueba con masa tipo Saturno sobreviven en este sistema por más de 100 millones de años. La razón parece ser un cambio en la dinámica secular del sistema. Aparece una nueva frecuencia por la presencia

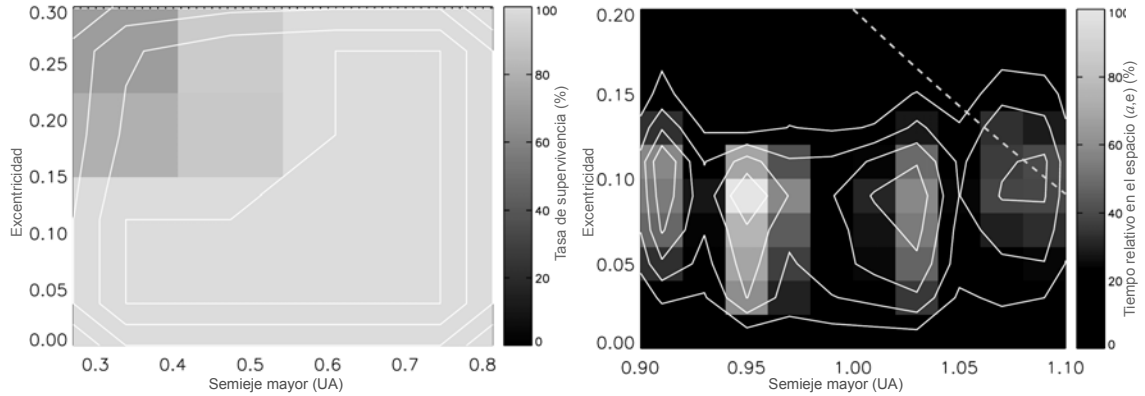


FIGURA 2.9. **Panel izquierdo:** Valores de las condiciones iniciales de 200 simulaciones de los planetas prueba en HD 38529, contornos de la tasa de supervivencia constante. **Panel derecho:** Tiempo relativo a los 100 millones de años en que se mantienen las simulaciones estables en el espacio- (a, e) .

del planeta prueba masivo. El planeta gigante exterior y el planeta prueba libran alrededor de una alineación absidal con esta nueva frecuencia de una manera estable. La Figura 2.10 (Panel izquierdo) muestra un ejemplo, en donde el planeta prueba libra alrededor de esta alineación perfecta con el planeta gigante externo. El sistema permaneció estable durante los 100 millones de años.

La resonancia de movimiento medio 1:5 con el planeta interno ocurre en 0.82 UA y la resonancia 5:1 (con el planeta exterior) ocurre en 1.3 UA, en la periferia de la región que se investigó. Por eso, solo se encontraron resonancias de alto orden en el centro.

Se realizaron 600 integraciones de planetas prueba con masa tipo Saturno en este sistema con semieje entre 0.5 y 1.5 y excentricidad entre 0 y 0.2. De estos 600 planetas prueba, 296 (49%) sobreviven los 100 millones de años. La Figura 2.10 (Panel derecho) presenta una fuerte tendencia en la tasa de supervivencia de los planetas en función de su semieje mayor inicial. La fracción de sistemas que son estables los 100 millones de años aumenta rápidamente entre 0.8 y 1.0 UA; luego la tasa de supervivencia disminuye a partir de 1.2 UA. La tasa de supervivencia como función de sus elementos orbitales iniciales se puede observar en la Figura 2.11 (Panel izquierdo), en esta figura podemos observar 3 pequeñas regiones de estabilidad en (1) $(a, e) \sim (1.0 \text{ UA}, 0.02)$, (2) $(a, e) \sim (1.0 \text{ UA}, 0.1)$ y (3) $(a, e) \sim (1.2, 0.13)$. Estas tres regiones tienen una mayor tasa de supervivencia que sus alrededores. Una región mayor de estabilidad se encuentra entre 0.9 y 1.2 UA con una excentricidad $e \leq 0.15$. Ahí la tasa de supervivencia es del 75%. Dos de estas regiones caen en la zona habitable de este sistema. El tiempo relativo que la configuración se mantiene en cada región de parámetros orbitales para todas las simulaciones estables con una tasa de supervivencia más alta del 68%, se muestra en la Figura 2.11 (Panel derecho). Los tres máximos que se encontraron forman una gran región en la cual un planeta no descubierto podría ser detectado en $1.0 < a < 1.4 \text{ UA}$, $0.05 < e < 0.18$. El pico está localizado en $a \sim 1.4 \text{ UA}$, $e \sim 0.14$, otra vez debido a la combinación de una tasa de supervivencia alta y variaciones de baja amplitud en la excentricidad.

Se corrieron adicionalmente 40 simulaciones en HD 74156 incluyendo planetas prueba más masivos: 30 casos con planetas de una masa joviana y 10 casos con 10 masas jovianas. Solo

un caso de los de 10 masas jovianas fue estable. 4 de 10 casos de $1 M_{Jup}$ que inicialmente se pusieron en el máximo 1 fueron estables, 4 de 10 en el máximo 2 fueron estables y 8 de 10 en el máximo 3 fueron estables. Las tasas de supervivencia para los planetas prueba con masa tipo Saturno en los tres máximos de estabilidad es un poco más del 80 % (ver Tabla 2.6). Por lo tanto dinámicamente podemos restringir los valores de la masa de un planeta no detectado, en los máximos 1 y 2, pero no en el máximo 3.

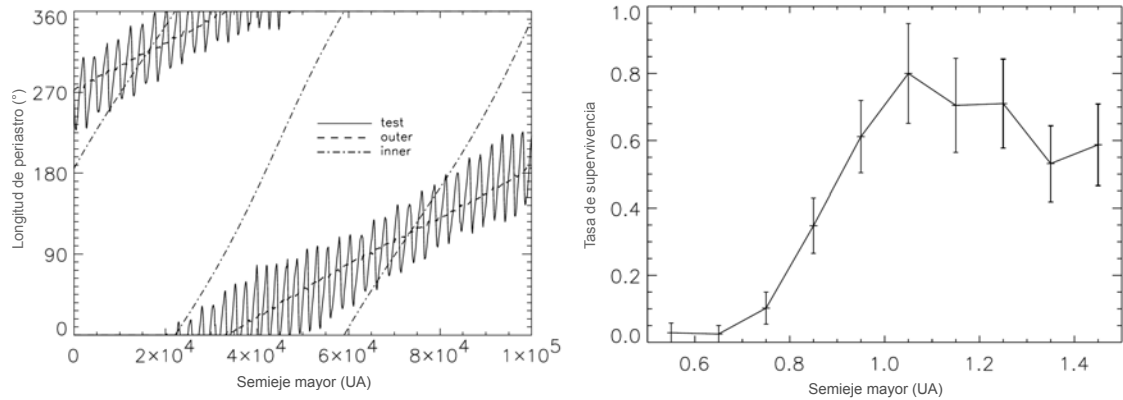


FIGURA 2.10. **Panel izquierdo:** Evolución de la orientación de las órbitas (medida por la longitud del periastró) para una simulación de HD 74156. **Panel derecho:** Tasa de supervivencia de los planetas prueba (1 MS) en HD 74156 como función del semieje mayor inicial. Hay que resaltar el incremento en una 1 UA.

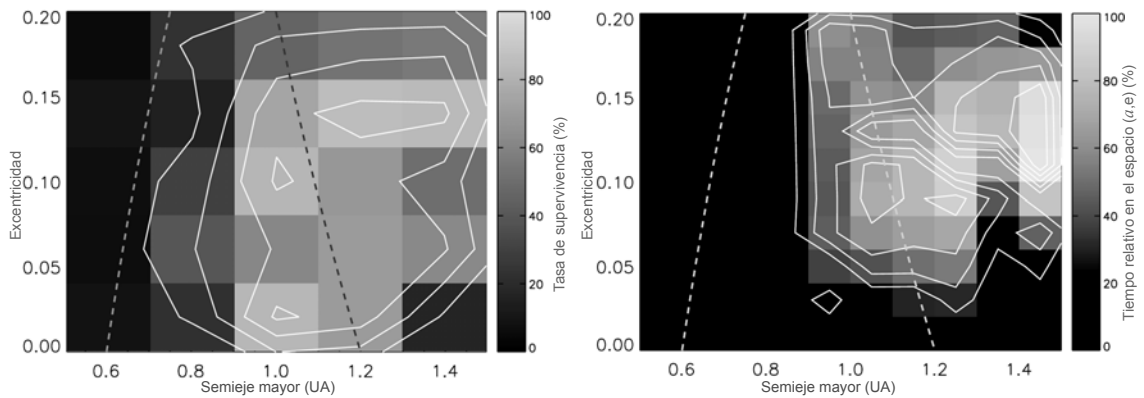


FIGURA 2.11. **Panel izquierdo:** Parámetros orbitales iniciales de 600 simulaciones de los planetas prueba en HD 74156. Las líneas punteadas indican los límites de la ZH. **Panel derecho:** Tiempo relativo que se mantienen todas las simulaciones estables en el espacio- (a, e) del sistema HD 74156.

Raymond y Barnes citan y discuten el trabajo de Menou y Tabachnik [69] en donde investigan la posibilidad de que planetas terrestres residan en las zonas de habitabilidad de los sistemas extrasolares conocidos. La posición de la ZH es función de la luminosidad y (por lo tanto de la masa) de la estrella primaria, así como la composición atmosférica del planeta. Para cada sistema, Menou y Tabachnik integraron las órbitas de 100 partículas prueba sin masa en la ZH por 1 millón de años. Consideraron los mismos cuatro sistemas

TABLA 2.6. Resultados de las simulaciones

Sistema	Región estable (a, e)	Tasa de supervivencia	Región de detección
55 Cancri	(1.0 UA, 0.03)	93 %	(1.0 UA, 0.07)
	(2.0 UA, 0.08)	89 %	(2.0 UA, 0.08)
	(3.0 UA, 0.17)	96 %	(3.1 UA, 0.12)
HD 37124	(0.92 UA, 0.12)	81 %	(0.91 UA, 0.11)
	(0.96 UA, 0.07)	87 %	(0.95 UA, 0.09)
HD 38529	(0.3-0.8 UA, 0.0-0.15)	100 %	(0.7 UA, 0.07)
HD 74156	(1.0 UA, 0.02)	83 %	(1.10 UA, 0.10)
	(1.0 UA, 0.10)	83 %	(1.10 UA, 0.10)
	(1.2 UA, 0.13)	86 %	(1.45 UA, 0.12)

abordados en este artículo. Las Zonas Habitables para cada sistema son: HD 37124, 0.6–1.2 UA; HD 38529, 1.4–3 UA; HD 74156, 0.6–1.2 UA; y 55 Cnc, 0.7–1.3 UA. Estos autores no encontraron ninguna partícula sobreviviente en la ZH de HD 37124. Su criterio de estabilidad requiere que una partícula se mantenga en la ZH todo el tiempo (1 millón de años) y limita la excentricidad para que tanto en el afelio como en el perihelio, la partícula se mantenga dentro de la ZH. En el artículo de Barnes y Raymond [8] se utilizaron más de 500 partículas prueba para sistemáticamente mapear la región estable de HD 37124, y se encontró que están concentradas alrededor de 1 UA. Las excentricidades en esta región estable son lo suficiente pequeñas para mantener las partículas prueba en la ZH. Además, se encontraron 3 máximos locales en la tasa de supervivencia para planetas con masa tipo Saturno en este sistema, cuyas órbitas se mantienen en la Zona Habitable.

Para el sistema HD 38529, los resultados obtenidos aquí concuerdan con los del trabajo de Menou y Tabachnik, ya que la región estable del artículo de Barnes y Raymond [8] caen en las regiones externas de las regiones de la Zona Habitable, y la región que se analizó con planetas con masa tipo Saturno no se superpone en la Zona Habitable. En el caso de 55 Cancri los resultados de este artículo también concuerdan con los de Menou y Tabachnik, quienes encuentran una fracción apreciable de partículas prueba de baja inclinación que sobreviven en 1 UA, con excentricidades de alrededor de 0.09. La región estable para 55 Cancri del artículo de Barnes y Raymond abarca toda la región de la ZH para excentricidades menores que 0.25. La Tabla 2.6 muestra un máximo en la tasa de supervivencia para planetas prueba (con 1 masa de Saturno) en $(a, e) = (1.0 \text{ UA}, 0.03)$, muy cerca al valor dado por Menou y Tabachnik. Los resultados que obtienen para HD 74156 son concordantes con el artículo de Barnes y Raymond [8], aunque encuentran dos regiones estables dentro de la ZH, que son estables para los planetas prueba el 83 % de los casos. Esto se debe a que se utilizaron diferentes elementos orbitales a los utilizados por Menou y Tabachnik. En particular, el semieje mayor del planeta exterior utilizado aquí fue más grande (3.82 UA vs. 3.47 UA). El incremento de la separación de los dos planetas gigantes posiblemente cause que la región ellos sea más estable [69].

Dvorak y colaboradores [29] investigaron la posibilidad de un planeta no detectado en HD 74156, usando partículas prueba y planetas con masa. Encontraron una extensa región relativamente estable para partículas prueba entre 0.9 y 1.4 UA, con una posición estable

localizada en $a = 1.25$ UA y $e < 0.2$. Esta es una región en la cual el trabajo de Barnes y Raymond no encontró órbitas estables. La Figura 2.10 (Panel derecho) muestra una región de estabilidad entre 1.0 y 1.25 UA. Dvorak y colaboradores no la encontraron, y concluyeron que la presencia de un planeta no visto en este sistema es muy improbable. Solo futuras observaciones podrían resolver esta discrepancia.

En resumen, se encontraron posiciones específicas en los cuatro sistemas exoplanetarios, en los cuales podrían existir planetas masivos (1 masa de Saturno) en órbitas estables. Dichos planetas caen por debajo del límite observacional de la técnica de velocidad radial (en 2005). En la Tabla 2.6 se resumen los resultados de este trabajo, detallando las posiciones (semieje mayor y excentricidad) de cada máximo en la tasa de supervivencia para cada uno de los sistemas estudiados.

Hay que recordar que este artículo es la continuación de un análisis dinámico, en el cual se quiere comprobar y analizar la hipótesis de “sistemas planetarios compactos”, la cual sugiere que todos los sistemas planetarios pueden contener tantos planetas como dinámicamente puedan mantenerse sin perturbarse apreciablemente unos a otros. Todos los sistemas pueden estar en el límite de estabilidad, pero las restricciones observacionales impiden la detección de planetas pequeños o distantes que podrían estar llevando a los sistemas estables a este límite. La hipótesis de los “sistemas planetarios compactos” sugiere que cada región estable en un sistema planetario está ocupada, aunque el cuerpo no necesita tener la masa máxima posible para la estabilidad.

2.3.5. Las zonas de estabilidad y la relación TB

En este trabajo se trata de comprobar la hipótesis de “sistemas planetarios compactos” para ciertos sistemas exoplanetarios, pero ahora hay que hacer unas preguntas fundamentales para esta tesis: ¿Las órbitas de los “sistemas planetarios compactos” cumplen con una relación Titius-Bode?, ¿Las regiones estables en las cuales se pueden predecir la existencia de un planeta, junto con los planetas observados siguen con la relación TB? Para esto se aplicó la relación TB exponencial a los sistemas planetarios analizados en este artículo de Raymond y Barnes, tomando en cuenta tanto los planetas observados como los planetas predichos por las regiones de estabilidad.

Para el caso de HD 38529 se tomó en cuenta los valores de semieje de los planetas observados (b,c) (véase Tabla 2.5) y la posición de la región de detección (véase Tabla 2.6) en la cual se predice un planeta aún no observado debido a las restricciones observacionales. En la Figura 2.12 podemos observar la relación TB aplicada a los parámetros orbitales ya mencionados para este sistema planetario. La relación TB exponencial (Ecuación (1.3)), obtiene como resultado los parámetros $a_0 = 0.02428$ y $b = 1.6754$.

Es de gran importancia destacar este ajuste TB exponencial. Se puede apreciar que las órbitas para este sistema exoplanetario, HD 38529, siguen esta relación exponencial de una manera muy precisa, esto se puede notar fácilmente en el coeficiente de correlación, que para este caso tiene un valor de $R^2 = 0.999$.

Otro de los sistemas extrasolares que se analizó fue el sistema HD 74156, que actualmente alberga 2 planetas girando alrededor de su estrella primaria. Como en el caso anterior, para comprobar si las órbitas planetarias siguen la relación TB, se tomarán en cuenta los elementos orbitales de los planetas observados y las regiones de estabilidad encontradas por Raymond y Barnes (ver Tablas 2.4 y 2.6). Como se muestra en la Tabla 2.6, se encuentran

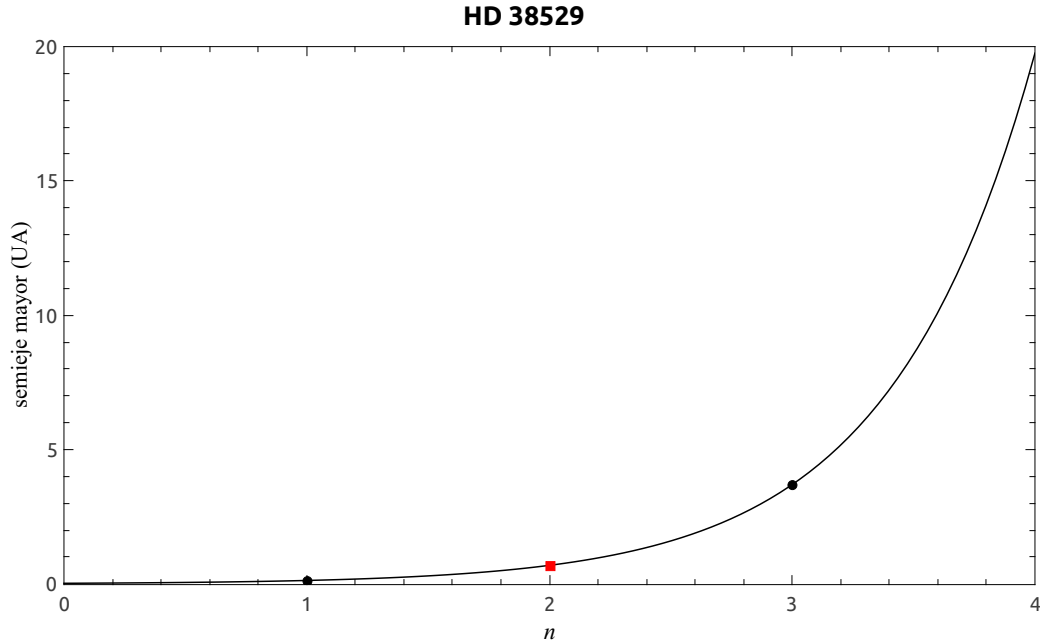


FIGURA 2.12. Ajuste TB exponencial a los semiejes mayores (UA) y a la posición del planeta aún no detectado en la región de estabilidad para el sistema exoplanetario de HD 38529. En círculos negros están los planetas observados y el planeta predicho por Raymond y Barnes se representa con un cuadrado rojo. Se puede resaltar el extraordinario ajuste TB, con un coeficiente de correlación $R^2 = 0.999$, tanto a los semiejes mayores como al planeta aún no detectado de este sistema extrasolar.

dos máximos de estabilidad y por lo tanto dos regiones de detección en $(a, e) = (1.10 \text{ UA}, 0.10)$ y $(a, e) = (1.45 \text{ UA}, 0.12)$. Se utilizaron estas posiciones por separado para comprobar la aplicación de la relación TB.

La Figura 2.13 (Panel superior), enseña el ajuste exponencial utilizando la primera región de detección (1.10 UA, 0.10). Se puede evidenciar que, como el caso HD 38529, las órbitas en HD 74156 obedecen rigurosamente la relación TB, con un coeficiente de correlación de $R^2 = 0.9992$. La relación exponencial en este caso da como resultado los parámetros libres $a_0 = 0.0774$ y $b = 1.3066$. La Figura 2.13 (Panel inferior) presenta el segundo ajuste exponencial tomando en cuenta la región de detección (1.45 UA, 0.12). En este caso la precisión del ajuste es menor que en el caso anterior para este sistema, ya que le corresponde un coeficiente de correlación $R^2 = 0.9781$ para los parámetros $a_0 = 0.0848$ y $b = 1.3066$. Si usamos la capacidad predictiva de la relación TB y las predicciones de Raymond y Barnes para un planeta aún no observado, entonces podemos decir que los parámetros orbitales que se muestran en el primer caso para este sistema, corresponden a un planeta que tenga una masa saturnina.

En este trabajo también se analizó el sistema HD 37124, que tiene 3 regiones de estabilidad en las cuales puede existir un planeta aún no descubierto. Se probará la aplicación de la relación tomando en cuenta estas regiones, de forma análoga a los casos anteriores. Primero se utilizarán los elementos orbitales de la primera región de estabilidad $(a, e) = (0.91 \text{ UA}, 0.11)$ y de los planetas observados en HD 37124.

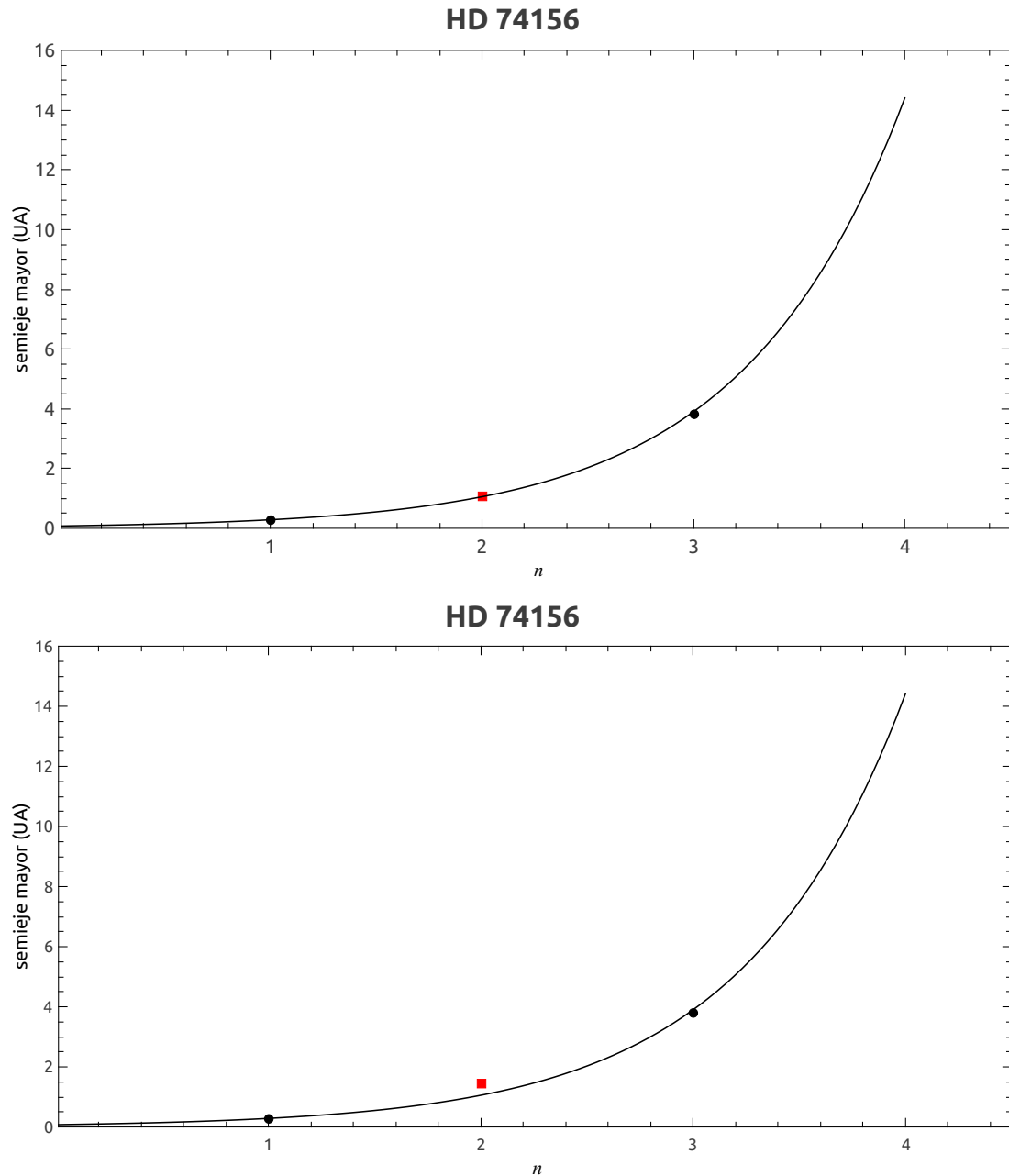


FIGURA 2.13. **Panel superior:** Ajuste TB exponencial a los semiejes mayores (UA) y a la posición del planeta aún no detectado en la región de estabilidad (1.10 UA, 0.10) para el sistema exoplanetario de HD 74156. En círculos negros están los planetas observados y el planeta predicho por Raymond y Barnes se representa con un cuadrado rojo. Se puede resaltar el extraordinario ajuste TB, con un coeficiente de correlación $R^2 = 0.9992$, tanto a los semiejes mayores como al planeta aún no detectado de este sistema extrasolar. **Panel inferior:** Segundo ajuste TB exponencial a los semiejes mayores (UA) y a la posición del planeta aún no detectado en la región de estabilidad (1.45 UA, 0.12) para el sistema exoplanetario de HD 74156. En círculos negros están los planetas observados y el planeta predicho por Raymond y Barnes se representa con un cuadrado rojo. La precisión del ajuste TB es menor, con un coeficiente de correlación $R^2 = 0.9781$.

Los semiejes mayores que se usaron en el ajuste de este primer caso siguen de buena manera la relación exponencial dada por la ecuación (1.3) donde $a_0 = 0.20717$ y $b = 0.8490$, con un coeficiente de correlación $R^2 = 0.9528$ (véase Figura 2.14 a). La Figura 2.14 b muestra el ajuste de la relación TB, tomando en cuenta los elementos orbitales de los planetas observados reportados Raymond y Barnes (Tabla 2.4) y la segunda región de estabilidad (0.95 UA, 0.09), donde los parámetros son $a_0 = 0.21016$ y $b = 0.8490$ con $R^2 = 0.96402$. El último caso que se exhibe en la Figura 2.14 c, es el ajuste usando la tercera región de estabilidad (1.03 UA, 0.08). El ajuste para estos semiejes mayores mejora comparando con los casos anteriores en este sistema, con un $R^2 = 0.98125$, $a_0 = 0.2159$ y $b = 0.8490$.

Los valores de los parámetros orbitales que se muestran en el trabajo de Raymond y Barnes (Tabla 2.4), se publicaron en 2005. Desde entonces estos elementos orbitales han cambiado e incluso se ha descubierto un planeta con un semieje mayor $a = 1.71$ UA [106].

Entonces si se utilizan los valores de los semiejes mayores actualizados y los del planeta recientemente descubierto, observamos que el ajuste al sistema extrasolar HD 37124 es muy preciso y tal que $a_0 = 0.3094$ y $b = 0.5575$, con $R^2 = 0.9985$ (Figura 2.15). Cabe resaltar que el mejor ajuste a los planetas observados en este sistema da como resultado una vacante en $n = 2$, con un semieje mayor $a = 0.9435$ UA, que coincide con el valor de la tercera región de estabilidad $a = 0.95$ UA reportada por Raymond y Barnes.

El último sistema planetario extrasolar que falta por analizar es el caso de 55 Cancri, para el cual Raymond y Barnes usan los elementos orbitales de los 3 planetas conocidos en ese entonces (Tabla 2.4). En este sistema planetario se encontró tres regiones de estabilidad y por lo tanto tres posiciones en los que podría existir un planeta: (1.0 UA, 0.07), (2.0 UA, 0.08) y (3.1 UA, 0.12).

En la Figura 2.16, se exhibe los diferentes ajustes de la relación TB aplicada a los semiejes de los planetas observados (en ese momento) y a las diferentes posiciones del posible planeta aún no observado, debido a que su masa se encuentra por debajo del límite observacional. En dicha figura, en el panel (a) se muestra el ajuste de la relación TB a los tres planetas observados y a la posición de detección (1.0 UA, 0.07), donde $a_0 = 0.0232$ y $b = 1.3236$ con un coeficiente de correlación de $R^2 = 0.9697$. Análogamente, en (b) se presenta el ajuste TB exponencial a los tres planetas observados y a la posición de detección (2.0 UA, 0.08), donde $a_0 = 0.0232$ y $b = 1.3929$ con un $R^2 = 0.9681$. De la misma manera, en (c) se enseña el ajuste TB exponencial a los semiejes mayores observados y al semieje mayor de detección (3.1 UA), en los cuales los parámetros libres a determinar en la ecuación (1.3) son $a_0 = 0.0232$ y $b = 1.4368$ con $R^2 = 0.9368$. Cabe resaltar que ninguno de los casos que se mencionaron tienen alta precisión los ajustes: todos tienen un coeficiente de correlación por debajo de 0.97.

En las Figuras 2.16 (d), (e) y (f) se toman en cuenta (además de los valores observacionales) 2 y 3 regiones de estabilidad al mismo tiempo. En el caso del panel (d), se utilizaron los semiejes observados (Tabla 2.4) y las regiones de estabilidad 1 y 2 UA; la relación exponencial muestra un coeficiente de correlación de $R^2 = 0.99047$, donde $a_0 = 0.03991$ y $b = 0.99917$. De la misma manera se tomaron los valores de las regiones de estabilidad a 2 UA y 3.1 UA, además de los valores observados, donde se encuentra $a_0 = 0.04388$ y $b = 1.04299$ con un coeficiente $R^2 = 0.9367$. Por último, en la gráfica (f) se presenta el ajuste a la relación TB exponencial, usando en el ajuste las tres regiones de estabilidad más los semiejes mayores observados. En este caso $a_0 = 0.06067$ y $b = 0.80129$, con $R^2 = 0.9675$.

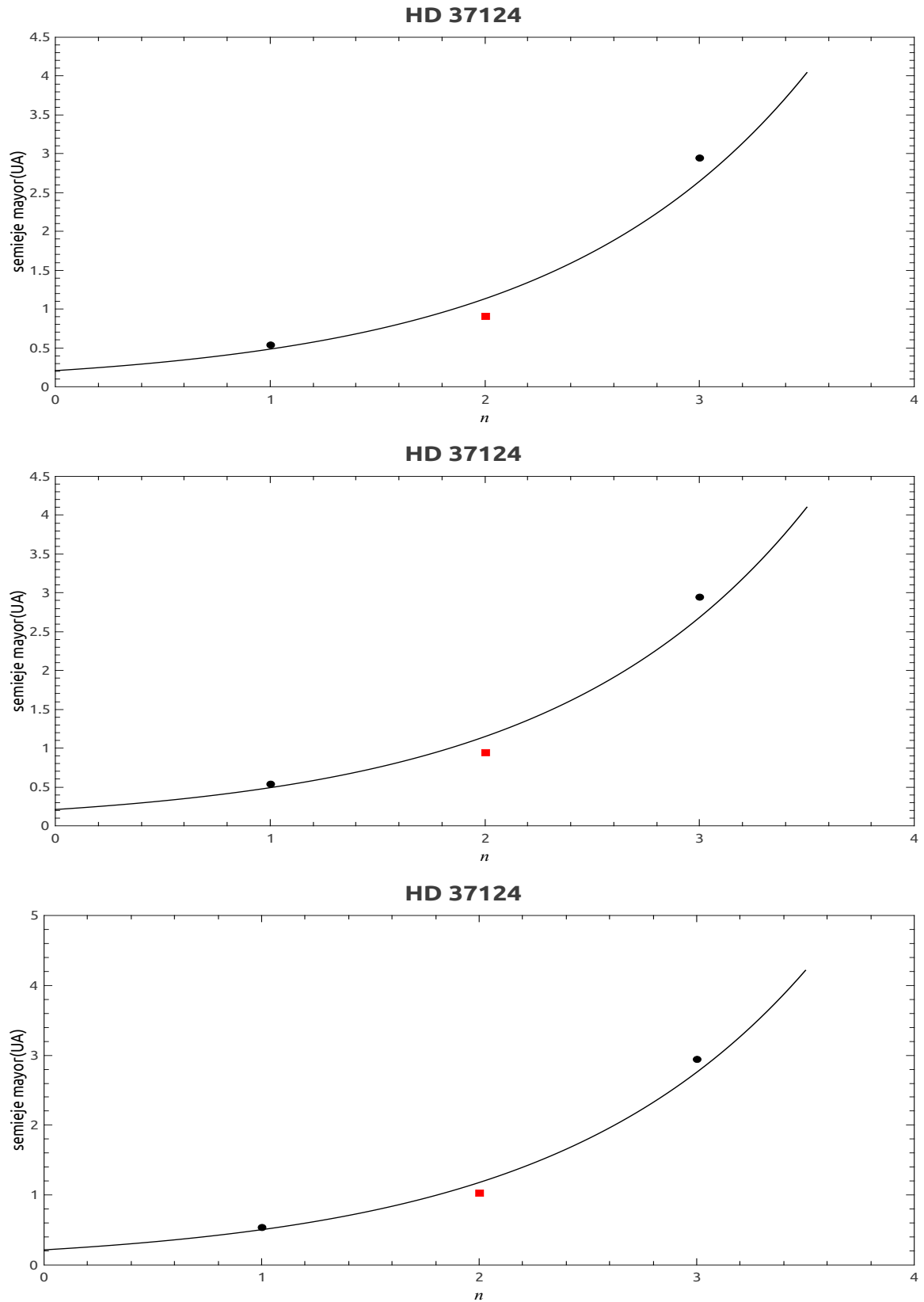


FIGURA 2.14. Ajustes TB exponenciales a los semiejes mayores (UA) y a las regiones de la posible detección del planeta aún no detectado en el sistema exoplanetario de HD 37124. (a) Se muestra el ajuste TB para la primera región de detección (0.91 UA, 0.11). (b) Se muestra el ajuste TB para la segunda región de detección (0.95 UA, 0.09) y (c) Se muestra el ajuste TB para la tercera región de detección (1.03 UA, 0.08). En círculos negros están los planetas observados. Los planetas predichos por Raymond y Barnes se representan con un cuadrado rojo

Desde este análisis de Raymond y Barnes se han descubierto más planetas en este sistema con semiejes mayores de 0.0156 UA y 0.781 UA, y se ha corregido el valor del semieje mayor de planeta más externo, de 5.9 UA a 5.76 UA. El caso se muestra en la Figura 2.16 (d), donde da como resultado un coeficiente $R^2 = 0.99917$, siendo el ajuste con mayor fidelidad a la relación exponencial. Este resultado es consistente con el valor del semieje mayor $a = 0.781$ UA (55Cnc f) de uno de los planetas descubiertos desde el 2005, ya que se asemeja a la región de estabilidad a 1 UA. También la región de estabilidad $a = 2$ UA, concuerda con la predicción que se hace en el trabajo de Poveda y Lara [78], con lo cual no se extraña que este ajuste sea el más preciso de todos casos que se realizaron para este sistema planetario extrasolar.

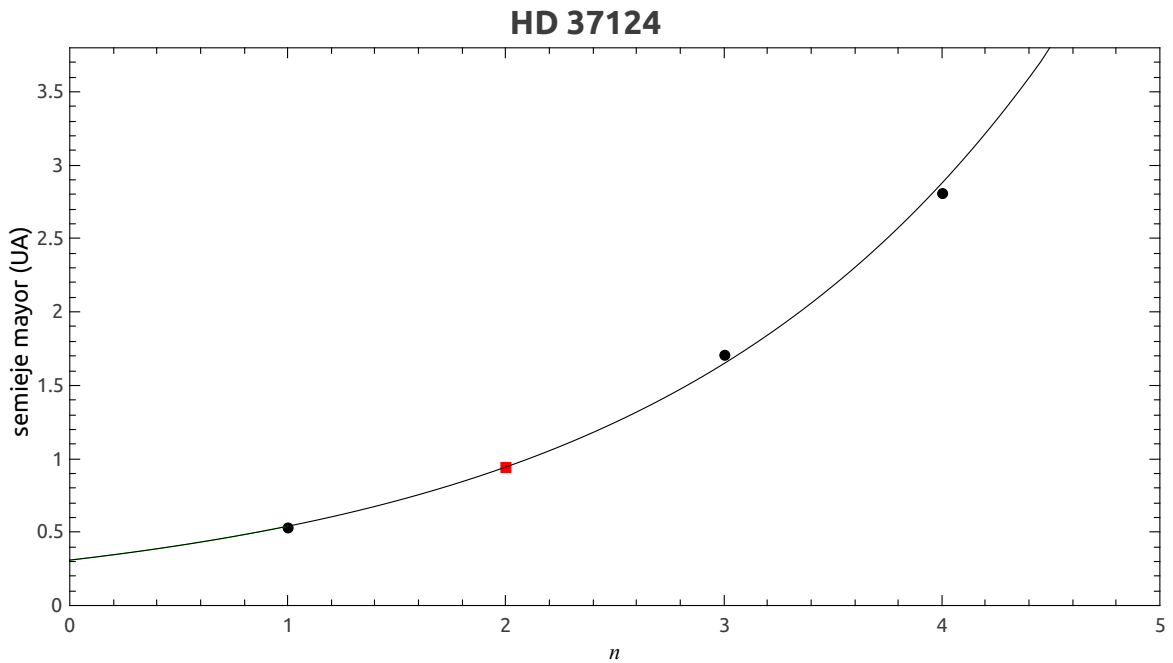


FIGURA 2.15. Ajuste TB exponencial a los tres semiejes mayores actualmente observados (UA) del sistema exoplanetario HD 37124. Los planetas observados están representados por círculos, el planeta predicho por el ajuste se resalta con un cuadrado rojo. El planeta que se predice con la relación TB concuerda con el valor predicho también por Raymond y Barnes, el ajuste concuerda muy bien a la relación exponencial, un coeficiente de correlación $R^2 = 0.9985$.

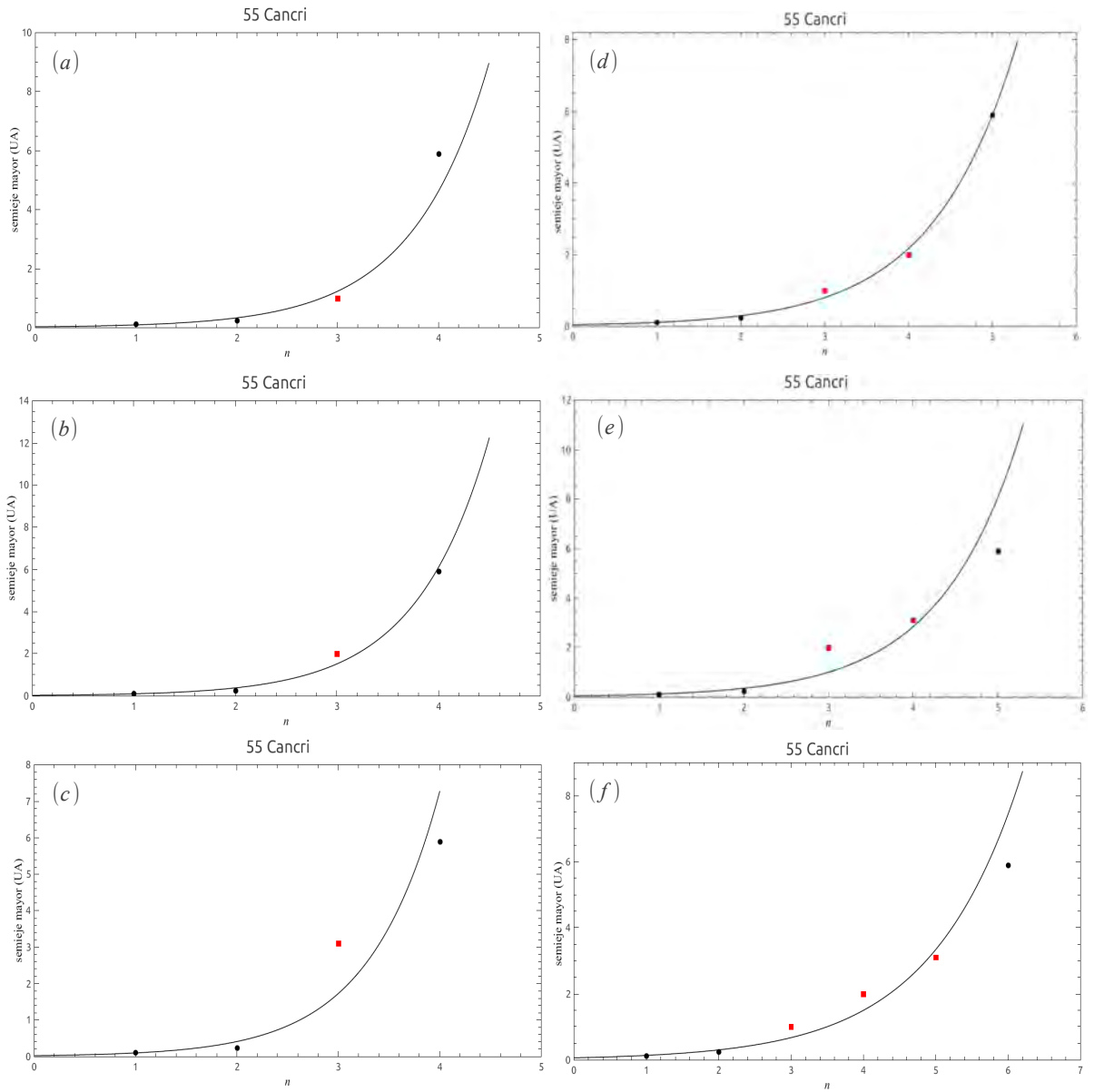


FIGURA 2.16. Ajustes TB exponencial a los tres semiejes mayores actualmente observados del sistema exoplanetario 55 Cancri y a las diferentes regiones de estabilidad encontrados por Raymond y Barnes. (a), (b) y (c) Se muestra el ajuste TB tomando los valores de los semiejes mayores observados y las regiones de detección 1 , 2 y 3.1 UA, respectivamente en cada una de las gráficas. En (d) y (e) se presenta el ajuste TB exponencial usando dos regiones de estabilidad simultáneamente, más los valores observados; para la gráfica (d) se utilizaron las regiones de estabilidad a 1 y 2 UA ,y para la gráfica (e) se tomaron en cuenta las regiones de estabilidad $a = 2$ y 3.1 UA. En el último panel (f) se tomaron en cuenta las tres regiones de estabilidad de forma simultánea más los valores observados. Los semiejes de los planetas observados están representados por círculos, los planetas predichos por Raymond y Barnes se resaltan con cuadrados rojos.

2.4. Stability limits in extrasolar planetary systems.

(Rory Barnes y Richard Greenberg, 2006)

En trabajos pasados, Barnes y Raymond [8] encontraron que los sistemas exoplanetarios se localizan en el límite de estabilidad. Siguiendo con esta línea de estudio, Barnes y Greenberg [6] tratan de cuantificar la estabilidad de algunos sistemas exoplanetarios. Para esto utilizan dos definiciones de estabilidad: estabilidad de Hill y estabilidad de Langrange. La estabilidad de Hill establece que el orden de los planetas en términos de sus distancias a la estrella primaria, se conserva. Sin embargo, el planeta más externo se puede escapar del sistema, el cual aún puede considerarse estable. La estabilidad de Langrange establece que los planetas se mantienen ligados a la estrella primaria, los cambios en el orden de los planetas están prohibidos, las variaciones en el semieje y la excentricidad también se mantienen dentro de ciertos límites.

2.4.1. Estabilidad de Hill

Este criterio de estabilidad es el resultado directo de la conservación del momento angular. Para el caso de dos planetas girando alrededor de una estrella mucho más masiva, el cambio en las excentricidades, resultado del intercambio del momento orbital, está limitado, y los planetas jamás experimentarán un encuentro tan cercano como para expulsar del sistema a un planeta interior.

Marchal y Bozis [57] cuantifican el criterio de estabilidad de Hill por la condición:

$$\frac{-2M}{G^2 M_p^3} c^2 h > 1 + 3^{3/4} \frac{m_1 m_2}{m_3^{2/3} (m_1 + m_2)^{4/3}} - m_1 m_2 \frac{11m_1 + 7m_2}{3m_3 (m_1 + m_2)^2} \quad (2.6)$$

donde M es la masa total del sistema, m_1 masa del planeta más interno, m_2 masa del planeta más externo, m_3 masa de la estrella, $M_p = m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3$, c es el momento angular total del sistema y h es la energía.

Si un sistema de 3 cuerpos satisface la desigualdad, entonces el sistema es estable (en el sentido de Hill) y los encuentros cercanos están prohibidos todo el tiempo. Si la desigualdad falla, entonces la estabilidad no esta garantizada.

Gladman [37] mostró que esta ecuación podría expresarse en términos de elementos orbitales baricéntricos y reescribió la ecuación (2.6) primer orden como:

$$\alpha^{-3} \left(\mu_1 + \frac{\mu_2}{\delta_2} \right) (\mu_1 \gamma_1 + \mu_2 \gamma_2 \delta)^2 > 1 + 3^{3/4} \frac{\mu_1 \mu_2}{\alpha^{4/3}} \quad (2.7)$$

donde $\mu_i = m_i/M$, $\alpha = \mu_1 + \mu_2$, $\gamma_i = (1 - e_1^2)^{1/2}$, $\delta = (a_2/a_1)^{1/2}$, e es la excentricidad, a es el semieje mayor, para $i = 1, 2$. Para cada una de las masas y de las excentricidades existe un valor crítico en el cociente de los semiejes (δ_{crit}) para el cual los dos lados de la ecuación (2.7) son iguales. Si $\delta = \frac{a_2}{a_1}$ es grande ($\delta > \delta_{crit}$) seguramente el sistema es estable en el sentido de Hill; si ocurre lo contrario, la estabilidad no está garantizada.

2.4.2. Estabilidad de Lagrange

La estabilidad de Lagrange es el tipo de estabilidad

Para analizar las estabildades de Hill y de Langrange, Barnes y Greenberg exploran dos sistemas hipotéticos con masas y elementos orbitales similares a los de 47 UMa y HD 12661, sistemas con dos planetas girando alrededor de la estrella primaria. Utilizando simulaciones numéricas de trabajos anteriores [9] [7], para cada uno de los sistemas se seleccionaron sus elementos orbitales iniciales tomando valores al azar con una distribución Gaussiana alrededor de los valores observados. Las inclinaciones fueron seleccionadas de una distribución uniforme entre 0° y 5° , y la longitud del nodo ascendente se seleccionó de una distribución uniforme entre 0 y 2π .

El resultado de la integración numérica, durante 4 millones de años para el sistema similar a HD 12661, se muestra en la Figura 2.17 la cual indica si el sistema fue estable en el sentido de Langrange o no, en función de los elementos orbitales e_b , e_c , a_c/a_b . La ecuación (2.7) se representa como una superficie. De acuerdo con ésta todas las configuraciones situadas en la parte de abajo a la izquierda (excentricidades pequeñas) son necesariamente Hill-estables. Hay que resaltar que también son posibles configuraciones estables de Hill fuera de esta región, por lo tanto el límite para la estabilidad de Hill debe encontrarse en la parte superior derecha de las gráficas. El límite de Lagrange se debe de encontrar debajo del límite de Hill, pues es un criterio más exigente. También se muestra las configuraciones Hill-estables y a la vez Langrange inestables, que son casos en los cuales cambió el orden de los planetas. En cada configuración Lagrange-inestable de HD 12661 siempre fue expulsado el planeta más externo (planeta c). A pesar de todo esto todas las configuraciones para este sistema son Hill-estables.

Con el propósito de cuantificar qué tan separado está el límite de Lagrange determinado numéricamente de la ecuación (2.7), se grafican δ/δ_{crit} y f , donde f es la fracción de sistemas Lagrange-estables por 4 millones de años (Figura 2.18), en cada intervalo. Se observa una transición muy rápida (independiente de la excentricidad) de configuraciones Lagrange-no estables a estables cerca $\delta/\delta_{crit} = 1.05$. Los autores comparan los resultados numéricos con el criterio de Hill, graficando $f = \beta/\beta_{crit}$, donde β es la parte izquierda de la ecuación (2.6) y β_{crit} parte derecha de dicha ecuación. Este criterio muestra una transición abrupta, cercana (5%) al límite establecido por la ecuación (2.6). Los valores que mejor se ajustan al sistema observado de HD 12661, son $\delta = 1.756$ y $\delta_{crit} = 1.476$. El cociente resultante es de 1.19 lo cual coloca al sistema en la región de estabilidad.

En la Figura 2.19 se muestra los resultados para el sistema 47 UMa. Se realizaron simulaciones para considerar un tiempo de evolución de 10^6 años, que fue suficiente para determinar la estabilidad en este sistema. Los intervalos de excentricidad son distintos de los de la Figura 2.17 debido a que las incertidumbres en las dos excentricidades son diferentes. Como se puede ver (Figura 2.19), el límite de estabilidad de Lagrange cae justo sobre la curva para la ecuación (2.7). También para 47 UMa se muestra la fracción de configuraciones estables de Lagrange en función de β/β_{crit} y δ/δ_{crit} . Como en el caso de HD 12661, la transición de estabilidad de Lagrange para cocientes críticos es cercana a 1. En cada configuración Lagrange-inestable fue expulsado el planeta más externo, confirmando el criterio de Hill. En la Figura 2.19 se observa que las dos curvas no se empalman exactamente, pero la numérica representa una aproximación adecuada de la ecuación (2.7). Los valores que mejor se ajustan al sistema observado 47 UMa, son $\delta = 1.336$ y $\delta_{crit} = 1.195$. El cociente es de 1.117, siendo un sistema probablemente estable.

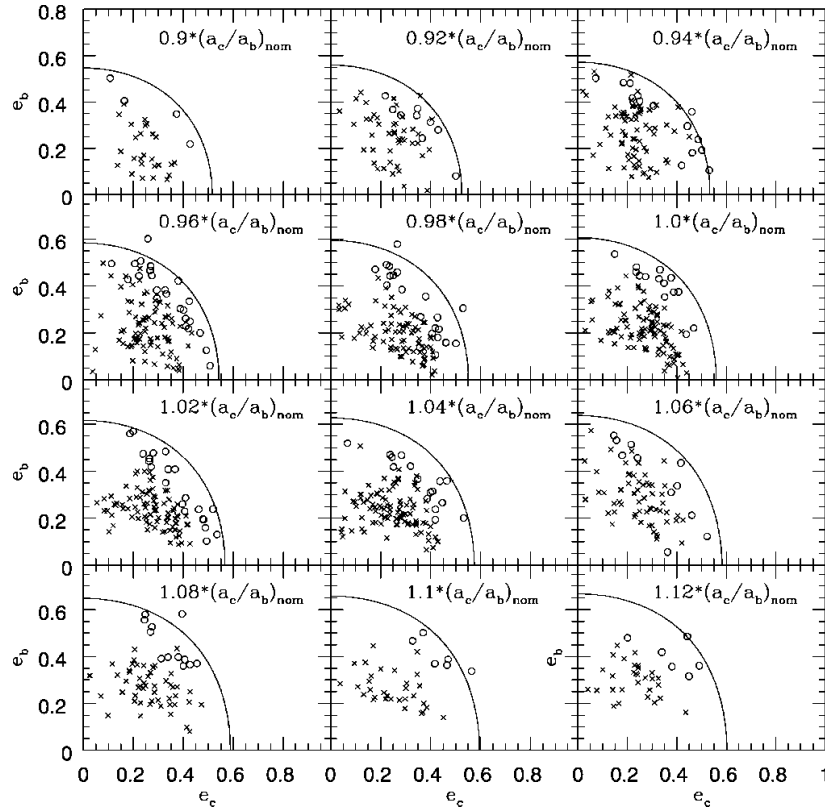


FIGURA 2.17. Estabilidad de Lagrange para diferentes configuraciones de HD 12661, tomando en cuenta e_b , e_c y a_c/a_b . Las configuraciones Lagrange-estables están representadas con cruces y las configuraciones Lagrange-inestables con círculos. La línea sólida representa la solución de la ecuación (2.7)

Barnes y Greenberg concluyen que aunque las ecuaciones (2.6) y (2.7) fueron obtenidas para la estabilidad de Hill, resultan también ser buenos predictores de la estabilidad de Lagrange. En términos de β/β_{crit} , la estabilidad de Lagrange se puede garantizar para valores pequeños. Se puede concluir que si un sistema de dos planetas cumple $\delta \geq 1.1\delta_{crit}$, entonces el sistema es Lagrange-estable. Por otro lado, si el cociente de los semiejes fuera distinto (1% y 4% para 47 UMa y HD 12661, respectivamente), entonces la estabilidad de Lagrange no se podría garantizar.

Con este trabajo se intuye que al parecer las ecuaciones (2.6) y (2.7) se aproximan mejor al límite de estabilidad de Lagrange. Si se pudiera relacionar y cuantificar alguna relación entre la ecuación (2.7) y el límite de Lagrange, o mejor aún dar una explicación física, se podría aplicar este criterio a un número arbitrario de planetas. Además sería interesante ver si la estabilidad de Hill tiende en algunos casos a una estabilidad de Lagrange.

La naturaleza de la estabilidad de Lagrange es una cuestión muy importante a estudiar debido a la proximidad de varios sistemas que se encuentran en el límite de la estabilidad e inestabilidad.

Las proximidades de estos sistemas a la inestabilidad de Lagrange lleva a sistemas planetarios comprimidos lo cual sugiere que todos los pares planetarios se formaron cerca

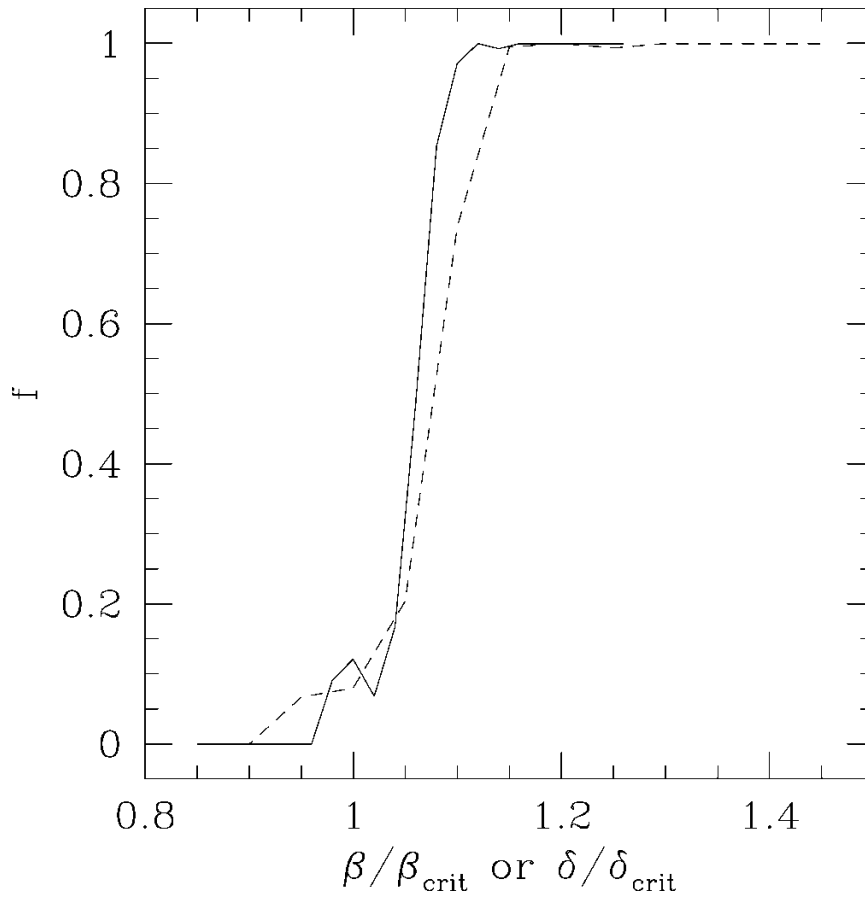


FIGURA 2.18. Se compara la solución exacta del límite de estabilidad de Hill con la fracción de casos Lagrange-estable. La línea sólida representa la solución exacta de la ecuación (2.6). La línea punteada representa las simulaciones de HD 12661. La transición de inestabilidad a estabilidad ocurre para valores cercanos a 1

del límite de estabilidad de Lagrange. La verificación de esta hipótesis dependerá de los avances teóricos y observacionales.

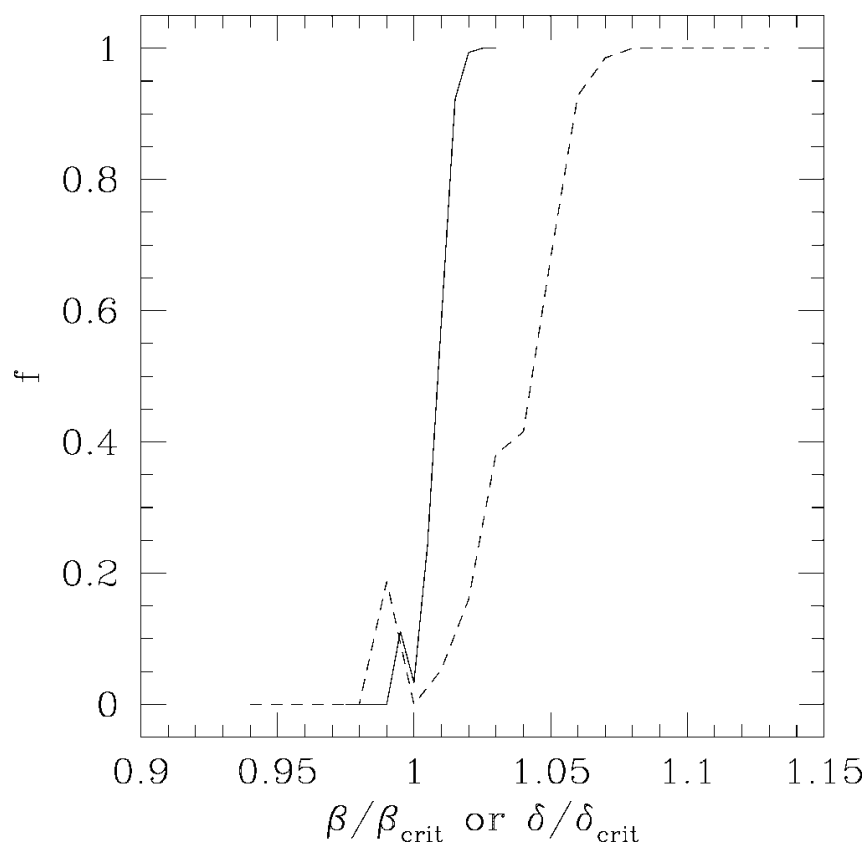


FIGURA 2.19. Estabilidad de Lagrange para configuraciones del sistema 47 UMa como función de β/β_{crit} (línea sólida) y δ/δ_{crit} (línea punteada)

2.5. Application of the Titius-Bode Rule to the 55 Cancri System: Tentative Prediction of a Possibly Habitable Planet. (Manfred Cuntz, 2012)

En este trabajo el autor sigue la noción de que la relación Titius-Bode es aplicable a todos los sistemas exoplanetarios, y en particular, la aplica al sistema 55 Cancri y propone una relación matemática de la forma:

$$a_i^{TB} = \begin{cases} A & \text{si } i = 1 \\ A + BZ^{i-2} & \text{si } i > 1 \end{cases} \quad (2.8)$$

donde A , B y Z son los parámetros libres por determinar tomando en cuenta los valores observacionales de los semiejes conocidos para este sistema exoplanetario. Resalta que esta propuesta de relación TB es de una forma muy parecida al relación clásica Titius-Bode para el Sistema Solar, donde los parámetros libres toman los siguientes valores: $A = 0.4$, $B = 0.3$, y $Z = 2.0$. Este trabajo se centra en obtener y optimizar los parámetros A , B y Z para así ajustar las 5 distancias conocidas en este sistema exoplanetario.

El autor propone que una relación TB en 55 Cancri en la cual la posición del planeta más interno es ahora: $a_1^{TB} = A/Z$. Esto es debido a la controversia surgida en torno a este planeta, basada en el re-análisis de los datos iniciales en la distancia, y que da como resultado un reposicionamiento de 55 Cancri e en 0.016 UA en lugar de 0.38 UA. Para el ajuste en la parte polinomial Z , no se toma en cuenta este planeta.

Haciendo varios ajustes prueba identifica la localización de planetas hipotéticos en 0.081, 0.41, 1.51 y 2.95 UA así como un planeta más externo entre 10.9 – 12.2 UA. A los planetas conocidos se les identifica como $i = 1, 3, 4, 6$ y 9 . Los parámetros fueron minimizados usando las diferencias numéricas entre los valores observados y predichos. Para eso se requiere tener un criterio de la diferencia entre ellos. Se utilizaron diferentes criterios: desviación lineal absoluta (MDIF 1), desviación lineal relativa (MDIF 2), desviación cuadrática absoluta (MDIF 3), y una desviación cuadrática relativa (MDIF 4). Estas diferencias se expresan, respectivamente, de la siguiente manera:

$$\delta r_i = |r_{pl,i} - r_{pl,i}^{TB}| \quad (2.9)$$

$$\delta r_i = \left| \frac{r_{pl,i} - r_{pl,i}^{TB}}{r_{pl,i}} \right| \quad (2.10)$$

$$\delta r_i = (r_{pl,i} - r_{pl,i}^{TB})^2 \quad (2.11)$$

$$\delta r_i = \left(\frac{r_{pl,i} - r_{pl,i}^{TB}}{r_{pl,i}} \right)^2 \quad (2.12)$$

donde $r_{pl,i}$ denota la distancia observada del planeta i a la estrella y $r_{pl,i}^{TB}$ es el valor de esta distancia aplicando la relación TB. Los valores de cada uno de los parámetros libres para cada caso se en listan en la Tabla 2.7, en la cual se puede ver que $A \approx 0.031$, $B \approx 0.049$ y $Z \approx 1.98$.

TABLA 2.7

MDIF	A	B	Z
MDIF 1	0.032 ± 0.003	0.049 ± 0.001	1.973 ± 0.006
MDIF 2	0.031 ± 0.001	0.050 ± 0.001	1.971 ± 0.006
MDIF 3	0.031 ± 0.002	0.050 ± 0.001	1.969 ± 0.006
MDIF 4	0.031 ± 0.001	0.047 ± 0.001	1.991 ± 0.004

TABLA 2.8

Planeta	a obs (UA)	Relación Titius-Bode			
		MDIF 1	MDIF 2	MDIF 3	MDIF 4
55 Cnc e	0.016	0.016	0.016	0.016	0.015
HPL1	-	0.082	0.081	0.081	0.078
55 Cnc b	0.115	0.130	0.129	0.13	0.125
55 Cnc c	0.24	0.224	0.224	0.225	0.218
HPL2	-	0.411	0.411	0.413	0.403
55 Cnc f	0.781	0.779	0.781	0.783	0.771
HPL3	-	1.506	1.509	1.511	1.504
HPL4	-	2.940	2.945	2.945	2.965
55 Cnc d	5.77	5.770	5.774	5.768	5.872

Para la obtención de los parámetros A , B y Z , fue necesario utilizar un criterio de precisión para el valor de las diferencias. El parámetro de precisión está dado de la forma 10^{-k} con $k = 1, 2, 3$ y 4 . El parámetro de control de la convergencia fue el residuo sumado a la diferencia de las posiciones entre las distancias observadas y ajustadas (o predichas) a los 5 planetas en 55 Cancri. Los residuos sumados que se encuentran nunca se aproximan a cero, sin importar el MDIF o el parámetro de precisión. Sin embargo el residuo converge a un límite muy pequeño (entre 10^{-2} y 5×10^{-4}); esto se observa especialmente en MDIF 3.

Otra parte importante de este trabajo es la posible localización de un nuevo planeta hipotético en la zona habitable de 55 Cancri. La Zona de Habitabilidad para este sistema se calcula utilizando el formalismo definido por Underwood y colaboradores, en el cual se proporciona un ajuste polinomial que depende de su luminosidad y temperatura efectiva estelar que permite calcular la extensión de la Zona Habitable (ZH) conservadora y otra generalizada. Basándose en los valores estándar de los parámetros estelares de 55 Cancri, los límites de la ZH conservadora están dados por 0.75 y 1.08 UA, y para la ZH generalizada están dados por 0.68 y 1.34 UA. La definición subyacente de habitabilidad consiste en la suposición de que el agua líquida es un pre-requisito para la vida y en una evaluación numérica de la concentración $\text{CO}_2/\text{H}_2\text{O}/\text{N}_2$ en una atmósfera para planetas tipo Tierra [97].

Para los límites exteriores de la Zona de Habitabilidad se toman en cuenta criterios menos conservadores [33] [70], los cuales asumen que el grosor relativo de la atmósfera de CO_2 provoca un fuerte calentamiento que aumenta debido a la presencia de nubes de cristales de CO_2 . Con este tipo de criterios, la ZH puede crecer hasta 2.4 UA para el caso del Sol. Sin embargo, depende de diferentes propiedades en la atmósfera de cada planeta.

Para el caso de 55 Cancri, con este nuevo criterio el límite exterior de ZH puede llegar a 1.85 UA para los parámetros estelares estándar, y hasta 2.3 UA para un valor mayor de la luminosidad estelar. Estos límites pueden ser considerados en la declaración de un planeta hipotético cerca de 1.51 UA, ya que este planeta puede estar localizado en la Zona Habitable extendida. Si se asume el valor de la luminosidad estelar de $0.9 L_{\odot}$, entonces éste podría estar localizado en la ZH generalizada. Otro aspecto importante es que 55 Cancri f se encuentra en los límites internos de la ZH, especialmente si se toma el valor estándar de la luminosidad de 55 Cancri. Sin embargo, este planeta es un Neptuno-Caliente con una masa del 15 % de la masa de Júpiter; por lo tanto, es imposible que albergue vida.

El autor hace también un recuento de trabajos anteriores aplicados a 55 Cancri; resalta el trabajo de Raymond y colaboradores en el que se realizan simulaciones de estabilidad orbital tomando en cuenta los 5 planetas en este sistema exoplanetario [81].

En este estudio Raymond y Barnes se concentran en los efectos de las resonancias de movimiento medio debidas a los planetas de 55 Cancri f y 55 Cancri d. Ellos muestran que podrían existir planetas adicionales entre estos dos planetas, lo cuales podrían estar localizados entre 1.51 y 2.95 UA. Mediante simulaciones de estabilidad orbital, encuentran regiones de estabilidad en la cual pueden existir dos planetas hipotéticos. Las regiones de estabilidad estarían entre 1.3 – 1.6 UA o bien 2.2 – 3.3 UA. Otro estudio de estabilidad orbital es el trabajo de Ji y colaboradores [46]. Ellos también toman en cuenta el impacto de las resonancias en este sistema e identifican varias regiones inestables. Sin embargo, encuentran un gran región de estabilidad orbital entre 1.0 y 2.3 UA, la cual sería un sitio ideal para albergar planetas terrestres. Estos posibles planetas tendrían excentricidades bajas.

Cuntz resalta el hecho que los trabajos de Raymond y Ji, también apoyan la idea de la existencia de un planeta exterior aún no descubierto, que debería estar localizado entre 10.9 y 12.2 UA de la estrella primaria.

Con la intención de hacer una recopilación más completa sobre la aplicación de la relación Titius-Bode. Cuntz cita el trabajo de Poveda y Lara (2008), y hace un análisis detallado sobre este artículo [78].

Uno de los aspectos más importantes de este estudio es el de evaluar la significación estadística de la relación TB obtenida. En este caso sigue el método previamente presentado por Lynch aplicado al Sistema Solar y a los satélites de Saturno [56]. Primero se calcula la desviación cuadrática. Aplicando la relación propuesta en este artículo, se tiene que

$$\chi_{fit}^2 = \frac{1}{4} \sum_i (\log(a_i - A) - (\log B + (i - 2) \log Z))^2 \quad (2.13)$$

donde a_i son las distancias observadas para los planetas en los orbitales $i = 3, 4, 6$ y 9 . Para A, B y Z , se toma en cuenta el promedio de los valores obtenidos de los cuatro diferentes ajustes (MDIF). Además, se calcula un número suficientemente grande N de corridas para este modelo estadístico, donde para cada modelo se obtiene

$$\chi_{fit}^2 = \frac{1}{4} \sum_i (\log(a_i - A) - (\log B + (i - 2ky_i) \log Z))^2 \quad (2.14)$$

donde y_i es un número al azar en un intervalo de $[-1/2, +1/2]$ y $k = 2/3$ [56]. Para la relación TB propuesta, se encuentra $\chi_{fit} = 8.47 \times 10^{-2}$; mientras que el valor promedio de χ_j está dado por 1.56×10^{-1} , con $N = 10^7$. La cantidad de χ_j con valores $\chi_j \leq \chi_{fit}$ da la probabilidad de que la secuencia calculada por la relación TB pueda ocurrir debido al azar. Este método, que fue planteado por Lynch, también se aplica a la versión de la relación TB propuesta por Poveda y Lara (2008), con lo que se encuentra

$$\chi_{fit}^2 = \frac{1}{4} \sum_i (\log(a_i) - (\log \alpha + i\lambda))^2 \quad (2.15)$$

para $i = 2, 3, 4$ y 6 .

$$\chi_{fit}^2 = \frac{1}{4} \sum_i (\log(a_i) - (\log \alpha + (i + ky_i)\lambda))^2 \quad (2.16)$$

Para esta relación TB exponencial (Poveda-Lara) se encuentra que $\chi_{fit} = 9.67 \times 10^{-2}$ y el valor medio es igual a $\chi_j = 2.15 \times 10^{-1}$. Basándose en este enfoque, se encuentra que la nueva relación propuesta por Cuntz es significativa a un nivel del 91.8%, mientras que la relación TB propuesta por Poveda y Lara es significativa a un nivel del 96.5%. En este análisis se muestra la significación (o peso) estadístico de estas dos diferentes versiones de la relación TB para 55 Cancri, y se concluye que las dos son altamente significativas.

El trabajo de Cuntz se centra en presentar una aplicación de la relación TB para el sistema exoplanetario de 55 Cancri. La relación propuesta predice 4 nuevas posiciones planetarias internas al planeta conocido más externo (55 Cancri d). Las distancias para estos nuevos planetas predichos son: 0.081, 0.41, 1.51, y 2.95 UA. En las posiciones “vacías” puede existir un cinturón de asteroides o cometas (como en el Sistema Solar). Su estudio también predice un planeta externo a los planetas conocidos, que se encontraría en una región entre 10.9 y 12.2 UA.

Aplicación de la relación TB a los sistemas exoplanetarios.

Desde el descubrimiento del primer planeta extrasolar en 1995, se han encontrado más de 1 000 planetas fuera del Sistema Solar. En trabajos anteriores Poveda y Lara [49] [48] han mostrado la aplicación de la relación TB a los planetas del Sistema Solar, a los satélites de Júpiter, Saturno y Urano, así como a algunos sistemas exoplanetarios. Cada uno de estos sistemas planetarios (y de satélites) cumple con el criterio de tener 4 planetas o más girando alrededor de su cuerpo central. En el trabajo de Poveda y Lara [78] se mostró la aplicación de la relación TB exponencial al Sistema Solar y al sistema exoplanetario 55 Cancri, el cual era el sistema extrasolar con el mayor número de planetas (5 planetas) detectados alrededor de su estrella. En ese primer trabajo se prueba la hipótesis y validez de la relación TB a los sistemas exoplanetarios.

La parte fundamental de este trabajo es la comprobación de la aplicación y validez de la relación TB a los sistemas exoplanetarios para así intentar encontrar alguna generalización en la distribución orbital de los sistemas planetarios. Estas configuraciones orbitales nos servirán para análisis dinámicos posteriores, con el proposito de comprobar si la relación TB es un reflejo de la estabilidad planetaria. En este trabajo nos concentraremos en los sistemas exoplanetarios que actualmente contienen 4 o más planetas girando alrededor de su estrella primaria, a saber: Gliese 581, Gliese 676A, Gliese 876, HR 8799, KOI-94, KOI-730, ν And, μ Arae, 55 Cancri, Kepler-20, Kepler-33, Kepler-62, Kepler-80, Gliese 667C, HD 40307, HD 10180, Kepler-11 y Kepler-90 [89].

3.1. Sistemas exoplanetarios con 4 planetas

Los sistemas planetarios extrasolares que albergan 4 planetas son Gliese 581, Gliese 676A, Gliese 876, HR 8799, KOI-94, KOI-730, ν And y μ Arae. Se puede resaltar que el sistema planetario HR 8799 es el primer sistema que se detecta por medio de la técnica de imagen directa, utilizando el telescopio espacial Hubble. KOI-94 y KOI-730 se han descubierto empleando el método de tránsito, con los datos recopilados por la sonda espacial Kepler. Los planetas de los sistemas Gliese 581, Gliese 676A, Gliese 876, ν Andromeda y μ Arae se han ido detectado a lo largo de los años por medio de la técnica de velocidad radial [89].

3.1.1. Sistema exoplanetario Gliese 581

Gliese 581 tiene cuatro exoplanetas conocidos, el primero de los cuales fue descubierto en 2005. Los cuatro planetas fueron detectados por las mediciones de velocidad radial. Este sistema es de particular interés, debido a que al menos uno de sus planetas está localizado en la Zona Habitable determinada para el tipo espectral de la estrella primaria [89].

La estrella Gliese 581(HIP 74995, LHS 394) es una estrella M2.5 de secuencia principal, a una distancia al Sol de 6.21 ± 0.1 pc. Su masa es $0.31 \pm 0.02 M_{\odot}$, su luminosidad de solo $0.013L_{\odot}$, su magnitud aparente $V = 10.55$, su metalicidad $[Fe/H] = -0.135$, su temperatura efectiva $T_{eff} = 3498 \pm 56$ K y su radio $R = 0.3 \pm 0.01R_{\odot}$. La mayoría de los indicadores de edad para esta estrella apuntan a una edad de 8 mil millones de años. Sus propiedades se enlistan en la Tabla 3.1.

TABLA 3.1. Parámetros físicos para Gliese 581

Magnitud Visual Aparente	10.55
Paralaje Hipparcos	$160.91 \pm 2.62mas^*$
Distancia	6.21 ± 0.1 pc
Magnitud Visual Absoluta	11.55
Velocidad radial	-9.5 ± 0.5 km/s
Luminosidad	$0.013L_{\odot}$
Tipo espectral	M2.5V
Masa estelar	$0.31 \pm 0.02M_{\odot}$
Metalicidad [Fe/H]	-0.135
Edad	8×10^9 años

*milisegundo de arco

Este sistema planetario alberga 4 planetas con masas de tipo terrestre y uno más masivo con una masa $m_{seni} = 16M_{\oplus}$ (tipo Neptuno) [34]. Gliese 581c tiene 5 veces la masa de la Tierra y se puede suponer que tiene un radio de 1.5 veces el radio terrestre. Debido a su posición, el planeta está bajo la influencia de las fuerzas de marea y podemos suponer la rotación sincrónica con respecto a su estrella primaria. Gliese 581e tiene la peculiaridad de ser el más pequeño de los exoplanetas conocidos, con una masa mínima $m_{seni} = 1.9M_{\oplus}$, y Gliese 581d tiene una masa de 6 masas terrestres[12] [96] [65].

El planeta Gliese 581d es un exoplaneta de interés astrobiológico porque se encuentran en la zona habitable correspondiente a esta estrella. Varios estudios han mostrado que Gliese 581d está en el límite exterior de la Zona Habitable y, debido a sus condiciones, sólo podrían existir en él formas primitivas de vida [90] [99].

Con respecto a los elementos orbitales inicialmente reportados, en el exoplaneta Gliese 581d se realizó una corrección para el valor del periodo orbital. El periodo conocido era de 88 días y cambió a un valor corregido de 66.8 días [65].

Tomando en cuenta los 4 semiejes observados de este sistema planetario se realiza el ajuste exponencial, en unidades astronómicas, asignándoles a cada uno su respectivo número orbital ascendente. Este ajuste está representado por la relación exponencial dada por la ecuación 1.3 con $a_0 = 0.0121$ y $b = 0.6761$, con un índice de correlación $R^2 = 0.9439$. Este índice de correlación muestra que la precisión de este ajuste, no es óptima, cosa que

TABLA 3.2. Elementos orbitales de los planetas en el sistema Gliese 581

n	Planeta	a [UA]	p [días]	e	M_{semi} [M_{\oplus}]	Año de descubrimiento
1	e	0.028	3.14945 $\pm 1.7 \times 10^{-4}$	0.32	1.94	2009
2	b	0.041	5.36874 $\pm 9.0 \times 10^{-5}$	0.031	15.65	2005
3	c	0.073	12.9182 ± 0.0022	0.07	5.36	2007
4	g^*	0.146	36.65 ± 0.052	-	3.19	2010
5	d	0.22	66.64 ± 0.08	0.205	7.09	2007
6	f^*	0.758	433 ± 13	-	7.34	2010

*Planetas cuya certeza de existencia continua en controversia.

también se observa en los errores porcentuales que van del 15 % al 26 %. En particular, es grande el error para $n = 3$ (véase Figura 3.1).

Debido a estos errores porcentuales tan altos, se buscará un mejor ajuste a la relación TB; tratamiento que se realizará en todos los sistemas exoplanetarios, si se da el caso. En la Figura 3.2 se muestra el ajuste óptimo a la relación TB exponencial (ecuación (1.3)). Este ajuste representa a los semiejes mayores confirmados en el sistema Gliese 581, con $a_0 = 0.0189$ y $b = 0.4145$, pero ahora con dos vacantes entre los planetas conocidos. Tal ajuste muestra un coeficiente de correlación $R^2 = 0.9933$ y un valor $\chi^2 = 0.1009$ (ver Tabla 3.17). Se obtiene un error porcentual no mayor al 10 % entre los valores observados y los predichos por la relación TB. Las dos vacantes se sitúan en los orbitales $n = 4, 5$, que corresponden a semiejes mayores $a = 0.099$ y $a = 0.150$ UA.

Vogt y co-autores anunciaron el descubrimiento de dos planetas más en este sistema (Gliese 581 g y f), con semiejes mayores $a = 0.146$ y $a = 0.76$ UA. El semieje mayor de Gliese 581g encaja perfectamente en el valor previsto por la relación TB en el orbital $n = 4$ ($a = 0.15$ UA). Sin embargo, este exoplaneta aún no ha sido confirmado por otras mediciones, por lo que el descubrimiento continúa en verificación. Si extrapolamos la relación TB exponencial seguida por este sistema, podemos encontrar el valor del semieje mayor que corresponde a la órbita $n = 9$ ($a = 0.75$ UA), y este valor es muy similar al determinado para el semieje mayor de Gliese 581f, es decir, $a = 0.76$ UA, con error menor al 4 % (véase en la Tabla 3.17) [98].

La existencia de los planetas Gliese 581g y f sigue en controversia; sin embargo, no se han descartado completamente. Recientemente M. Tadeu dos Santos y colaboradores [92], han expuesto el hecho que estadísticamente no es incorrecto declarar la existencia de Gliese 581g, ya que éste puede existir si se supone que las órbitas de los otros 4 planetas son circulares. También, debido a que dinámicamente Gliese 581g estaría en resonancia con Gliese 581d (el periodo de d es el doble que el de g), y a la gran excentricidad de Gliese 581d, su señal se sobrepone a la señal de g, haciendo imposible que se detecte por medio del método de velocidad radial. Gliese 581 f se ajustaría en el orbital $n = 9$ con un error porcentual del 4.0 % respecto al valor observado determinado por Vogt y colaboradores

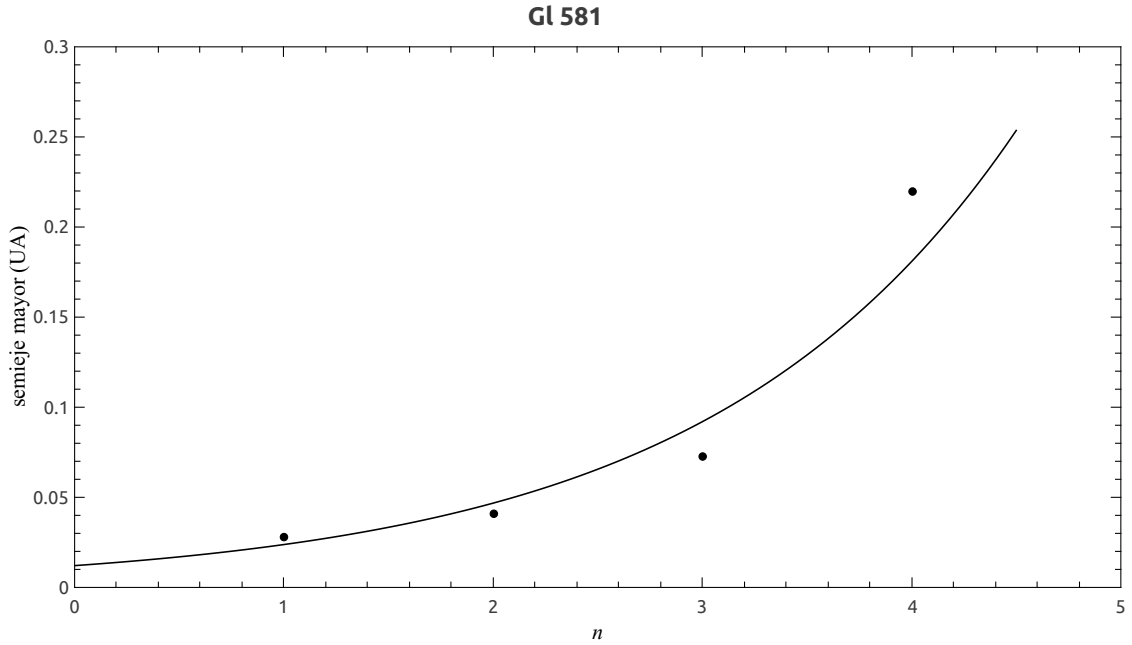


FIGURA 3.1. Ajuste de la relación TB exponencial para el sistema Gliese 581, tomando los valores determinados para los cuatro planetas observados. Este ajuste muestra un índice de correlación de $R^2 = 0.9763$.

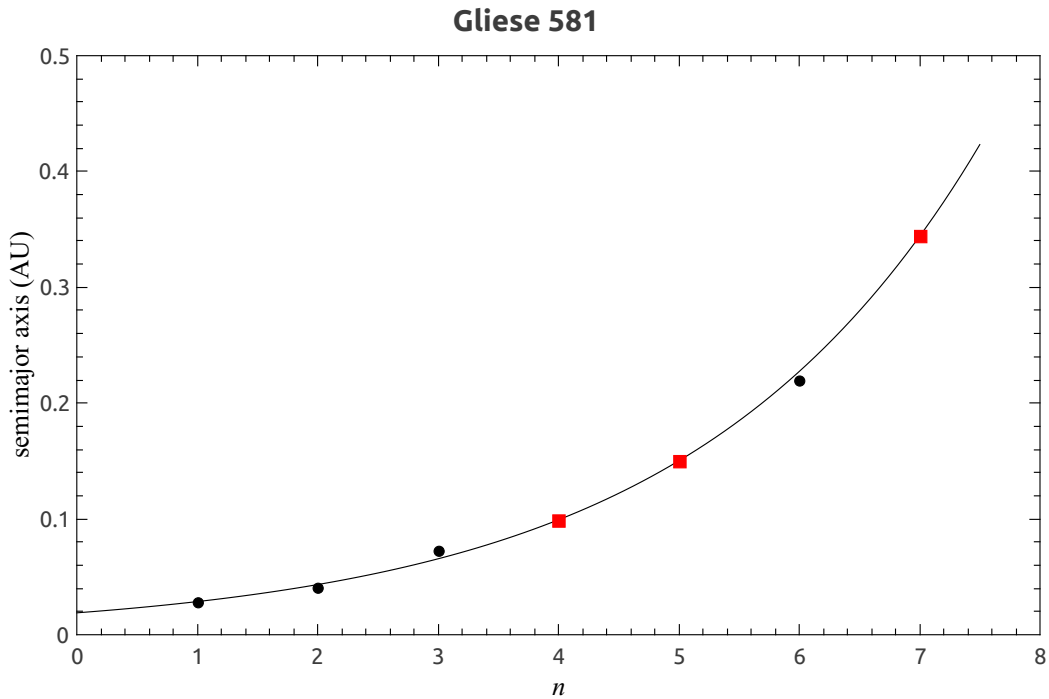


FIGURA 3.2. Ajuste TB exponencial para el sistema exoplanetario Gliese 581, tomando los valores de los semiejes mayores (UA) de los cuatro planetas observados y de los dos posibles planetas extrasolares. Los planetas observados están marcados con círculos y los planetas por confirmar ($n = 4$, $n = 5$ y $n = 7$), marcados por cuadrados.

[98]. En el trabajo antes citado, Tadeau y co-autores [92], encuentran la señal de este sexto planeta, pero esta señal se encuentra por debajo del límite de confianza observacional, con lo que se mantienen escépticos sobre la existencia de Gliese 581f. Debido a la controversia todavía en curso acerca de la existencia de este planeta, sólo podemos destacar el buen resultado del ajuste. Estos resultados contribuyen a dar validez a la capacidad predictiva de la relación TB.

La existencia de Gliese 581g, además de que es importante para verificar la capacidad predictiva de la relación TB, también es de gran interés astrobiológico. Von Braun K. y colegas [100] calculan los parámetros estelares necesarios para determinar la Zona de Habitabilidad (ZH) de este sistema planetario ($a_{ZH} = 0.11 - 0.21$ UA), según ciertos escenarios, teniendo en cuenta los 4 planetas confirmados y la hipótesis de la existencia de 6 planetas (Gliese 581f y g). En uno de los escenarios, el planeta d pasa parte de su órbita en la ZH. Resalta que debido a la excentricidad de la órbita, la temperatura de equilibrio del planeta varía de 229K en periastro a 154 K en apoastro, haciendo que periódicamente se encuentre dentro y fuera de la ZH. El segundo escenario toma en cuenta los parámetros orbitales de Vogt y colaboradores [98], motivado por la discusión de Anglada-Escudé y co-autores [3] y señala que, con una órbita excéntrica de uno de los dos cuerpos, éstos podrían encontrarse en resonancia, y en consecuencia podrían ocultar la señal del otro cuerpo con órbita circular. Con esto, señalan que los planetas d y g podrían tener órbitas circulares. En este escenario Gliese 581g pasaría toda su órbita en la ZH con un semieje mayor $a_g = 0.15$ UA, mientras que el planeta d se encontraría en el borde de la ZH con $a_d = 0.22$ UA.

3.1.2. Sistema exoplanetario Gliese 676A

Después de los sistemas exoplanetarios Gliese 876 y Gliese 581, GJ 676A es el tercer sistema descubierto con 4 planetas detectados. Su estrella primaria es de tipo espectral M. La estrella primaria esta situada en la constelación Ara. El descubrimiento del primer planeta Gliese 676A b fue hecho en el 2009, pero fue reportado por Forveille y colaboradores en el 2011 [34]. La publicación de los últimos tres planetas se hizo en el 2012 por Anglada-Escudé G. y Tuomi M. [4]. Todos los planetas fueron detectados por la técnica de velocidad radial.

Gliese 676 es una estrella binaria, compuesta por un par de estrellas enanas tipo M; con una separación mínima de 800 UA y un período orbital de más de 20 000 años. La estrella primaria GJ 676A (HIP 85647 / LTT6947) ha sido clasificada como una estrella M0V. Usando la fotometría 2MASS y su paralaje trigonométrica, se deriva una masa de $0.71 M_{\odot}$ para GJ 676A. La estrella no muestra fuerte evidencia de actividad o de juventud y, por lo tanto, es un buen candidato para los estudios de velocidad radial de alta precisión. El miembro más débil del par (GJ 676B) ha sido clasificado como M3V. Las características físicas de la estrella GJ 676A se resumen en la Tabla 3.3 [4] [89] [103].

En 2009, se descubrió un planeta gigante gaseoso (Gliese 676A b) en órbita alrededor de la estrella principal. Además de su confirmación en 2011 también hubo una fuerte indicación de otro compañero, el segundo gigante gaseoso (GJ 676A c) que se caracterizó en 2012, junto con dos planetas mucho más pequeños (Gliese 676A d y e). Este sistema exoplanetario muestra un amplio intervalo de masas planetarias, desde 4.5 masas terrestres (GJ 676A d) hasta 5 masas jovianas (GJ 676A b) [34] [4].

TABLA 3.3. Parámetros físicos para Gliese 676A

Magnitud Visual Aparente	9.59
Paralaje Hipparcos	$60.79 \pm 1.62 mas$
Distancia	$16.45 \pm 0.44 pc$
Magnitud Visual Absoluta	8.55
Velocidad radial	$-39.08 \pm 0.01 km/s$
Luminosidad	$0.082 L_{\odot}$
Tipo espectral	M0V
Masa estelar	$0.71 \pm 0.04 M_{\odot}$
Metalicidad [Fe/H]	0.23 ± 0.10

TABLA 3.4. Elementos orbitales de los planetas en el sistema Gliese 676A

n	Planeta	a [UA]	p [días]	e	M_{seni} [M_{Jup}]	Año de descubrimiento
1	d	0.0413 ± 0.0014	3.6 ± 0.0008	0.15 ± 0.09	0.014 ± 0.002	2012
2	e	0.187 ± 0.007	35.37 ± 0.07	0.24 ± 0.12	0.036 ± 0.005	2012
3	b	1.8 ± 0.07	1050.3 ± 1.2	0.324 ± 0.004	4.95 ± 0.31	2009
4	c	5.2	4400	0.2	3	2012
		—	—	—	—	

El ajuste exponencial a los 4 semiejes observados en este sistema planetario muestra un coeficiente de correlación $R^2 = 0.9831$ con $a_0 = 0.0078$ y $b = 1.6771$ (véase la parte superior de la Figura 3.3). Este ajuste no es tan preciso (como en el caso de Gliese 581), por lo que se buscará un ajuste óptimo a la relación TB.

Los semiejes mayores están mejor representados por la relación TB exponencial (ecuación (1.3)) con $a_0 = 0.0144$ y $b = 1.1936$, con un valor $\chi^2 = 0.0150$ y un coeficiente de correlación $R^2 = 0.9958$ (véase Tabla 4.1). Esta relación muestra un error porcentual no mayor del 17% entre los valores observados y los predichos por la relación TB. Vemos que la relación TB mejora con una vacante entre los planetas conocidos, dando como resultado la predicción de un planeta con un semieje mayor $a = 0.52$ UA ($n = 3$). Si extrapolamos, se puede conjeturar otro planeta en el orbital $n = 6$ con semieje mayor $a = 18.56$ UA (véase Tabla 3.17 y Figura 3.3(Panel inferior)).

En el trabajo previamente citado, Anglada-Escudé y Tuomi [4] abordan la hipótesis de que este sistema podría albergar más planetas. Mencionan que este sistema planetario no es “compacto”¹, y la existencia de más planetas no causaría ningún problema de inestabilidad dinámica; a pesar del gran intervalo de masas ($5 M_{\oplus} - 5 M_{Jup}$) y periodos (3.6 - 4 400 días) que tienen los planetas observados en este sistema. Las órbitas planetarias dan un gran margen para la existencia de planetas en órbitas intermedias. Futuras observaciones de la velocidad radial de la estrella primaria podrían confirmar la existencia de estos planetas.

¹Definimos un sistema “compacto” como aquel sistema exoplanetario que alberga planetas hasta un intervalo de 0.4 UA en el semieje mayor.

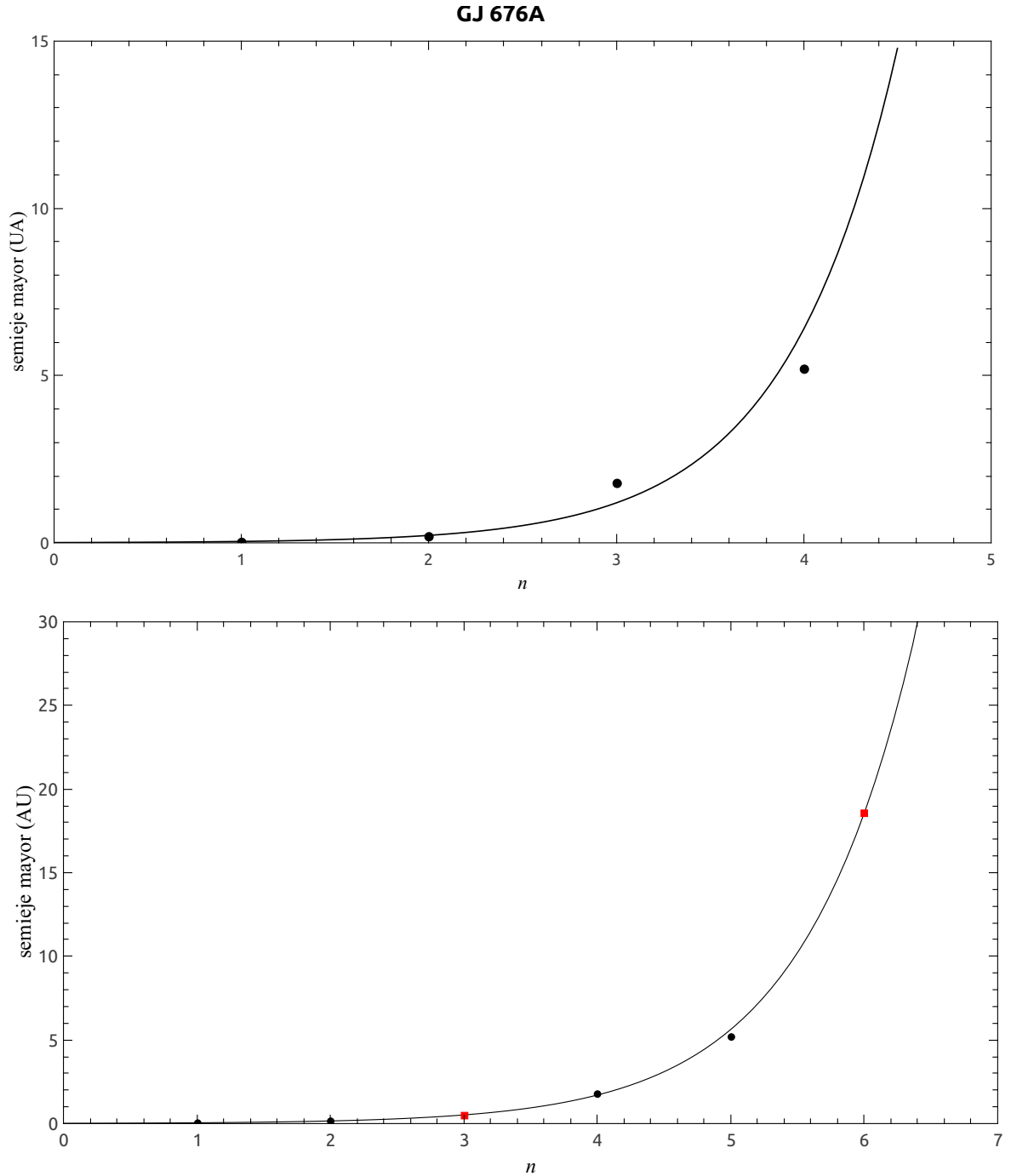


FIGURA 3.3. **Panel superior:** Ajuste de la relación TB exponencial para el sistema GJ 676A, tomando los valores de los semiejes de los cuatro planetas observados. Este ajuste muestra un coeficiente de correlación de $R^2 = 0.9831$.

Panel inferior: Ajuste TB exponencial para el sistema exoplanetario GJ 676A, tomando los valores de los semiejes mayores (UA) de los cuatro planetas observados y de los dos posibles planetas extrasolares. Los planetas observados están marcados con círculos y los planetas por confirmar, en $a = 0.52\text{UA}$ ($n = 3$) y $a = 18.56\text{ UA}$ ($n = 6$), marcados por cuadros

3.1.3. Sistema exoplanetario Gliese 876

El primer planeta alrededor de esta estrella fue descubierto en 1996. En la actualidad, en el sistema de exoplanetario Gliese 876 se han detectado cuatro planetas [89]. Ha sido un sistema ampliamente estudiado desde el descubrimiento de Gliese 876b, reportado por dos equipos independientes liderados por Marcy [60] y Delfosse [25].

La estrella Gliese 876 (HIP 113020, NLTT 55130, V* IL Aqr, HIC 113020) es una enana roja, con tipo espectral M4V. Es la 40a estrella más cercana al Sol, con una distancia estimada de 4.69 pc (Hipparcos), y se encuentra en la constelación de Acuario. Es una estrella variable tipo IL Aquarii, su magnitud fluctúa alrededor de 0.04 mag. cada 97 días. Posee una magnitud visual aparente de 10.17, por lo que no se puede observar a simple vista. Tiene un tercio de la masa solar. En la Tabla 3.5 se muestran sus características físicas. Diferentes modelos que analizan la actividad cromosférica de esta estrella estiman que la edad es de $\sim 0.1 - 5$ Giga-años [89] [103].

TABLA 3.5. Parámetros físicos para Gliese 876

Magnitud Visual Aparente	10.17
Paralaje Hipparcos	$212.69 \pm 2.10mas$
Distancia	$4.7 \pm 0.01 pc$
Magnitud Visual Absoluta	11.82
Velocidad radial	$-1.7 \pm 0.5 km/s$
Luminosidad	$0.0124L_{\odot}$
Tipo espectral	M4V
Masa estelar	$0.334 \pm 0.03M_{\odot}$
Metalicidad [Fe/H]	0.05 ± 0.2
Edad	$0.1 - 0.5 \times 10^9 años$

TABLA 3.6. Elementos orbitales de los planetas en el sistema Gliese 876

n	Planeta	a [UA]	p [días]	e	M_{seni} [M_{Jup}]	Año de descubrimiento
1	d	0.0208 $\pm 1.5 \times 10^{-7}$	1.9378 $\pm 2 \times 10^{-5}$	0.207	0.021 ± 0.001	2005
2	c	0.1296 $\pm 2.4 \times 10^{-5}$	30.088 ± 0.0082	0.256	0.7142 ± 0.0039	2000
3	b	0.2081 $\pm 2 \times 10^{-5}$	61.117 ± 0.0086	0.0324	2.276 ± 0.0045	1998
4	e	0.334 ± 0.0013	124.26 ± 0.7	0.055	0.046 ± 0.005	2010

Dos de sus exoplanetas tienen masas jovianas; el más cercano (Gliese 876d) tiene masa de 6.7 masas terrestres y el más externo (Gliese 876e) tiene una masa como la de Urano. Los exoplanetas Gliese 876b y Gliese 876c con masas de 2.3 y 0.714 masas jovianas, respectivamente, se encuentran en la Zona Habitable determinada para este tipo de estrellas. Debido a que éstos son muy masivos, es muy poco probable la existencia de vida [60] [25] [58] [85].

Cabe señalar que los períodos orbitales de los planetas en este sistema muestran una relación interesante. Los planetas Gliese 876 c, b y e están en resonancia orbital 1:2:4, un ejemplo de las resonancias conocidas como de Laplace. Los elementos orbitales de los planetas en este sistema se resumen en la Tabla 3.6. Estos valores se utilizarán para el ajuste exponencial.

El ajuste exponencial a los semiejes mayores de los cuatro planetas observados se muestra en la Figura 3.4 donde $a_0 = 0.0130$ y $b = 0.8805$, con $R^2 = 0.8755$; el ajuste no muestra un buen acoplamiento a la relación exponencial. Debido a esto, se buscará un mejor ajuste.

La relación TB que representa muy bien a los semiejes mayores de este sistema de cuatro exoplanetas (ecuación (1.3)) con $a_0 = 0.0124$ y $b = 0.5612$, muestra un coeficiente de correlación $R^2 = 0.996$ y un valor de $\chi^2 = 0.0045$. En la Tabla 3.17 se resumen los valores obtenidos con este ajuste, así como sus respectivos errores. Este ajuste predice la existencia de dos planetas adicionales entre los planetas conocidos, en los orbitales $n = 2$ y $n = 3$ y con los semiejes mayores $a = 0.038$ ($p = 4.5$ días) y $a = 0.067$ UA ($p = 10.5$ días), respectivamente. Si extrapolamos la relación TB para este sistema daría el semieje mayor $a = 0.63$ UA ($n = 7$), de un tercer posible planeta (véase Figura 3.5). Este ha sido el mejor ajuste que se ha encontrado para este sistema, pues muestra un error porcentual máximo de alrededor del 10%.

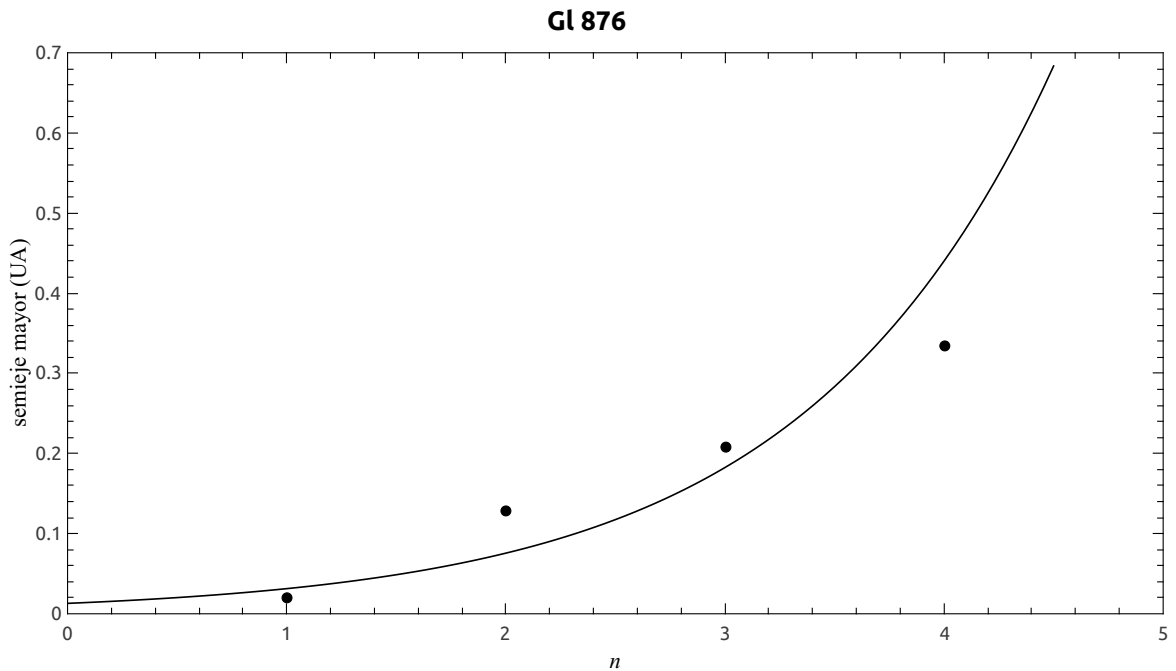


FIGURA 3.4. Ajuste de la relación TB exponencial a los semiejes mayores de los cuatro planetas observados para el sistema Gliese 876. Este ajuste muestra un índice de correlación de $R^2 = 0.8755$.

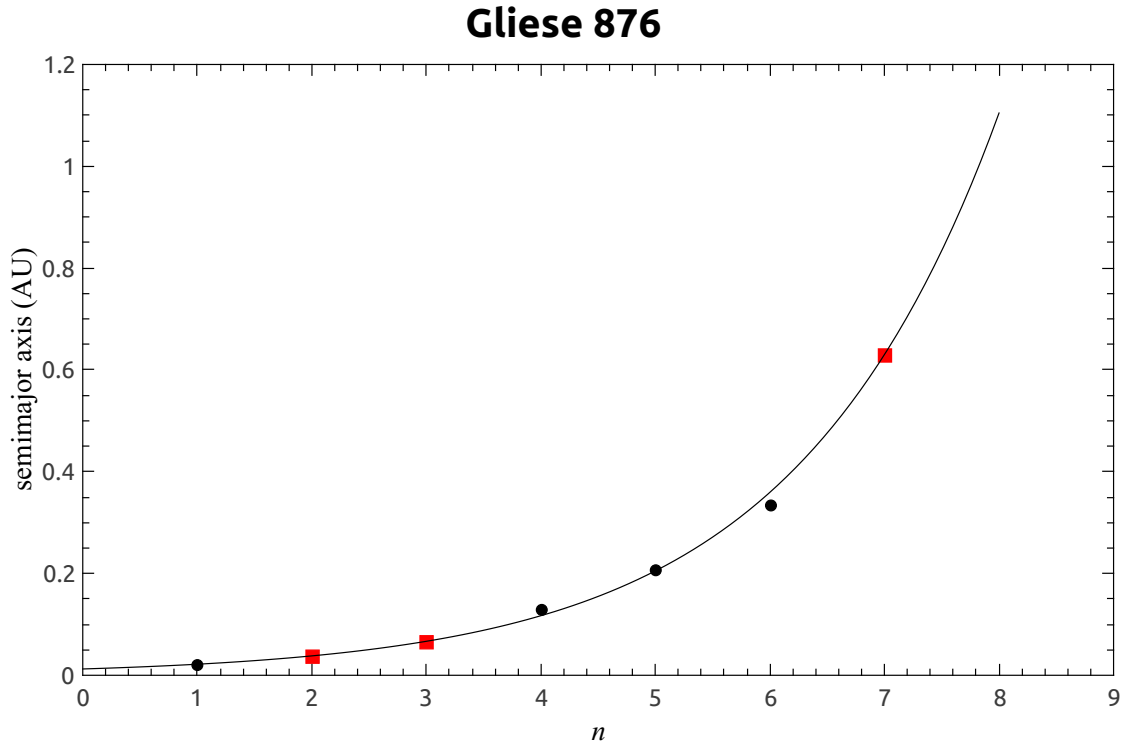


FIGURA 3.5. Ajuste TB exponencial para el sistema exoplanetario Gliese 581, tomando los valores de los semiejes mayores (UA) de los cuatro planetas observados y de los dos posibles planetas adicionales entre los planetas conocidos. La extrapolación de la relación TB daría un tercer posible planeta en el orbital $n = 7$. Los planetas observados están marcados con círculos, los planetas predichos por la relación TB ($n = 2$, $n = 3$ y $n = 7$) están marcados por cuadros.

3.1.4. Sistema exoplanetario HR 8799

HR 8799 (HD 218396 / HIP 114189 / GC 32209) es el primer sistema exoplanetario detectado por el método de imagen directa usando el telescopio espacial Hubble. HR 8799 es una estrella blanca A5V, en la constelación de Pegasus, a una distancia de 39.55 ± 1.23 pc. Tiene una masa de $\approx 1.5 M_{\odot}$, una de luminosidad $4.9 L_{\odot}$ y una velocidad radial de -12.60 km/s. También está clasificada como estrella variable tipo Gamma Doradus (estrellas variables cuyas fluctuaciones de luminosidad se deben a pulsaciones no radiales de su superficie) y como estrella Lambda Boötis (estrellas de Población I de baja metalicidad). El sistema planetario se encuentra dentro de un disco de polvo. La edad de la estrella primaria se calcula en 30-160 millones de años [89] [103].

En 2008 se anunció el descubrimiento de tres planetas extrasolares alrededor de esta estrella, siendo éste el primer sistema planetario múltiple que se detectó mediante el método de imagen directa. El cuarto planeta fue descubierto en 2010. Los planetas en este sistema son masivos, con masas entre 7-10 masas jovianas. Los cuatro planetas son rojizos debido a su corta edad; y son más grandes que Júpiter. Con el tiempo se enfriarán y reducirán su tamaño hasta 0.8 – 1.0 radios de Júpiter [61] [62].

La relación TB exponencial (ecuación (1.3)) representa fielmente a los semiejes mayores observados de este sistema exoplanetario HR 8799, con $a_0 = 9.1368$ y $b = 0.5099$ (véase Figura 3.6), con un coeficiente de correlación $R^2 = 0.9941$ y una $\chi^2 = 0.0019$. La extrapolación de esta relación TB muestra que podría existir un planeta con un semieje mayor $a = 116.96$ UA ($n = 5$). La relación TB asociada a este sistema no requiere ninguna vacante entre los planetas observados. Sin embargo, debido al amplio intervalo de separación entre el planeta más interno (~ 15 UA) y la estrella primaria podemos conjeturar la existencia de un planeta más interno al planeta e, con un semieje mayor $a = 9.13$ UA. Los valores de los semiejes mayores que predice la relación TB se resumen en la Tabla 3.17; igualmente se muestra que el error porcentual es menor al 6% con respecto a los valores observados.

Desde el descubrimiento de los primeros tres planetas (HR 8799 *b*, *c* y *d*) se había notado que los periodos de las órbitas de estos se encontraban en resonancia 1:2:4, conocida como “Resonancia de Laplace” [38] [30]. Con el descubrimiento del cuarto planeta “e”, el sistema se encuentra en una situación aún más peculiar: todos los planetas se encuentran en un doble resonancia, es decir, los cocientes de los periodos orbitales muestran la relación $1e:2d:4c:8b$, siendo *e*, *d*, *c* y *b* la designación correspondiente de cada planeta [39]. Debido a esta peculiar situación orbital, se han realizado diversos análisis dinámicos sobre la estabilidad planetaria en este sistema. En especial hay que realzar el trabajo de Gozdziewski y Migaszewski [39], en el cual realizan simulaciones numéricas de N-cuerpos y se concentran en encontrar configuraciones estables o inestables en este sistema planetario. En cada una de sus simulaciones, toman en cuenta casos con 3, 4 y 5 planetas en el sistema, y en cada uno de los casos consideran fenómenos como la migración planetaria, resonancias y perturbaciones debido al disco circumestelar que tiene este sistema planetario. Como resultado encuentran que las órbitas están fuertemente estables debido a la resonancia doble de Laplace $1e:2d:4c:8b$, y por lo tanto no hay lugar para otro planeta entre los planetas conocidos.

También mencionan que los casos donde toman en cuenta configuraciones con tres planeta en HR 8799, son marginalmente estables y después caóticas. En los casos con cuatro planetas, el sistema se vuelve aparentemente aún más inestable. No obstante, en los casos con cinco planetas, se observa que las configuraciones son totalmente ordenadas y estables, si es que no se introducen perturbaciones significativas. La posición de este quinto planeta se encontraría en la región interior al planeta “e”, aproximadamente entre 7 – 9 UA.

TABLA 3.7. Parámetros físicos para HR 8799

Magnitud Visual Aparente	5.953
Paralaje Hipparcos	$25.38 \pm 0.70 mas$
Distancia	$39.55 \pm 1.231 pc$
Magnitud Visual Absoluta	2.98
Velocidad radial	$-12.60 \pm 1.4 km/s$
Luminosidad	$4.92 L_{\odot} \pm 0.41$
Tipo espectral	A5V
Masa estelar	$1.47 \pm 0.30 M_{\odot}$
Metalicidad [Fe/H]	-0.47 ± 0.10
Edad	$30 - 160 \times 10^6 años$

TABLA 3.8. Elementos orbitales de los planetas en el sistema HR 8799

n	Planeta	a [UA]	p [días]	e	M_{seni} [M_{Jup}]	Año de descubrimiento
1	e	14.5	18 000	-	9.0	2010
2	d	27.0	41 054	0.1	10.0	2008
3	c	42.9	82 145	-	10.0	2008
4	b	68.0	164 250	-	7.0	2008

Estos resultados son congruentes con lo que predice la relación TB. Como ya se mencionó se puede conjeturar un quinto planeta en $a = 9.3$ UA, posición que encontramos Goździewski y Migaszewski [39] como estable. Hay que recordar que también encontraron que no existe ningún otro planeta entre los planetas conocidos, hecho que también se muestra en la relación TB al no requerir ninguna vacante en este sistema exoplanetario.

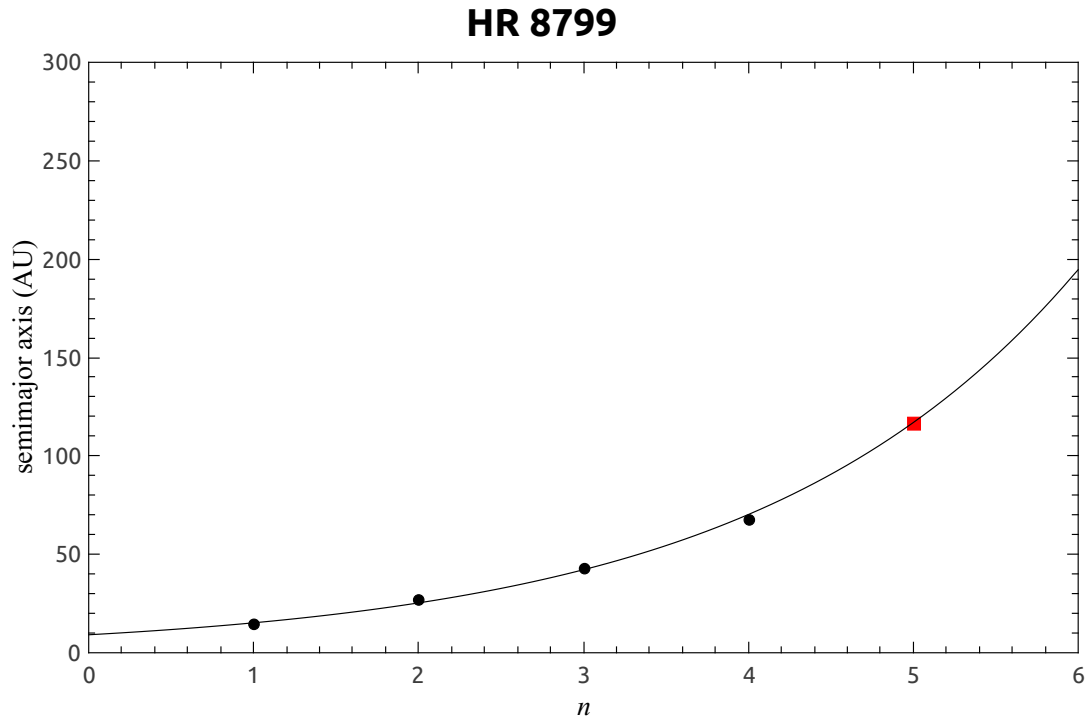


FIGURA 3.6. Ajuste TB exponencial para el sistema exoplanetario HR 8799, tomando los valores de los semiejes mayores (UA) de los cuatro planetas observados. Los planetas observados están marcados con círculos, los planetas predichos por la relación TB ($n = 5$) están marcados por cuadros.

3.1.5. Sistema exoplanetario KOI-94

La estrella denominada KOI-94 (Kepler-89) alberga 4 planetas extrasolares, los cuales fueron detectados gracias a los datos obtenidos por el telescopio espacial Kepler mediante la técnica de tránsitos. KOI-94 es una estrella brillante F tardía, con una masa de $1.25 \pm 0.04M_{\odot}$, un radio de $1.656R_{\odot}$ y una magnitud visual aparente de 12.4. Esta estrella tiene una metalicidad $[\text{Fe}/\text{H}] = -0.01 \pm 0.04$ y una edad de 3.9 ± 0.3 Ga [1] [103].

KOI-94 es un sistema notable ya que experimenta un evento de “doble tránsito” debido al tránsito simultáneo de dos planetas por el disco estelar, y un eclipse “planeta-planeta” es causado por la superposición parcial de los dos planetas en la fase del tránsito. Los cuatro planetas de esta estrella son de masa pequeña: KOI-94 b y KOI-94 c tienen una masa de aproximadamente 10.5 y 16 masas terrestres, respectivamente. KOI-94 d y e son un poco más masivos, con 0.33 y 0.22 M_{Jup} [45] [89].

TABLA 3.9. Parámetros físicos para KOI-94

Magnitud Visual Aparente	12.4
Distancia	426 pc
Tipo espectral	F
Masa estelar	$1.25 \pm 0.04M_{\odot}$
Metalicidad $[\text{Fe}/\text{H}]$	-0.01 ± 0.04
Temperatura efectiva	6116 ± 30 K
Edad	$3.9 \pm 0.3[\times 10^9]$ años

TABLA 3.10. Elementos orbitales de los planetas en el sistema KOI-94

n	Planeta	a [UA]	p [días]	e	M_{seni} [M_{Jup}]	Año de descubrimiento
1	b	0.05	3.74325 $\pm 3.1 \times 10^{-5}$	-	0.033 ± 0.014	2012
2	c	0.099	10.4237 $\pm 2.6 \times 10^{-5}$	-	0.03 ± 0.018	2012
3	d	0.165	22.343 $\pm 1.1 \times 10^{-5}$	-	0.164 ± 0.022	2012
4	e	0.298	54.3199 ± 0.00012	-	0.041 ± 0.008	2012

Los semiejes mayores de este sistema se representan acertadamente por la relación TB exponencial (ecuación (1.3)), con $a_0 = 0.0288$ y $b = 0.5866$ (véase Tabla 4.1), con un coeficiente de correlación $R^2 = 0.997$ y un valor de $\chi^2 = 0.001325$. La relación no predice ningún planeta entre los planetas conocidos del sistema; incluso se puede resaltar que el ajuste muestra un error porcentual no mayor al 6% entre los planetas observados y los planetas que predice la relación TB. Debido al adecuado ajuste de la relación TB, con mayor confianza podemos predecir un planeta exterior con un semieje mayor $a = 0.54$ UA ($n = 5$) (véase Tabla 3.17 y Figura 3.7).

Este sistema exoplanetario fue descubierto mediante la técnica de tránsito y por la falta de observaciones con el método de velocidad radial, no se han podido determinar las

excentricidades de los planetas. Las órbitas planetarias de este sistema se caracterizan por ser muy compactas; sin embargo, este sistema parecer ser estable. Esto fue analizado por Weiss [102], quienes hicieron simulaciones numéricas de n-cuerpos; donde encuentran que la mayoría de las configuraciones orbitales son estables (por lo menos durante 1 millón de años) si las órbitas de estos cuatro planetas son circulares. También encuentra algunos casos estables con excentricidad diferente de cero. Este resultado que es congruente con la relación TB para este sistema exoplanetario, la cual no predice ningún otro planeta entre los planetas conocidos.

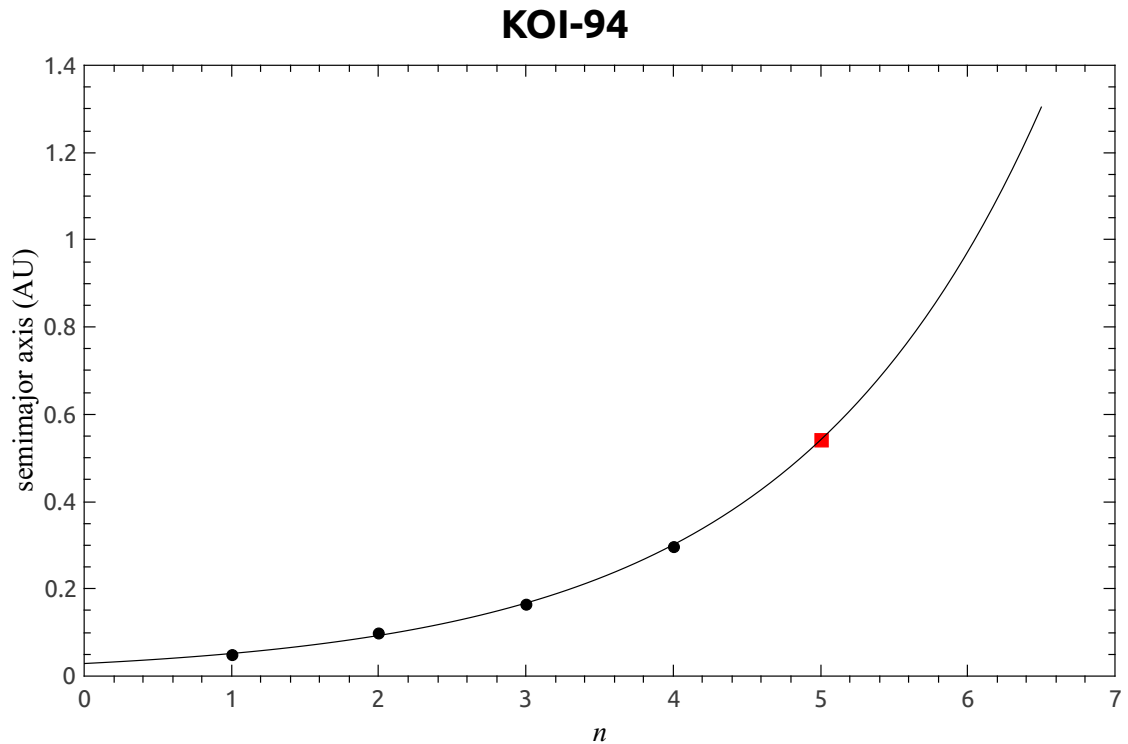


FIGURA 3.7. Ajuste TB exponencial para el sistema exoplanetario KOI-94, tomando los valores de los semiejes mayores (UA) de los cuatro planetas observados. Este ajuste tiene un coeficiente de correlación de $R^2 = 0.9969$ y un valor $\chi^2 = 0.01326$. Los planetas observados están marcados con círculos, el planeta (aún no detectado) predicho por la relación TB ($n = 5$) están marcado con un cuadro.

3.1.6. Sistema exoplanetario KOI-730

El sistema exoplanetario KOI-730 es otro más de los sistemas detectados por medio de la técnica de tránsito con la misión Kepler. Este sistema planetario alberga 4 planetas. KOI-730 es una estrella con una magnitud aparente $V = 15$; tiene una masa $M = 1.07 M_{\odot}$, con un radio $R = 1.1 R_{\odot}$ y una temperatura efectiva $T_{eff} = 5590.0$ K (véase Tabla 3.11) [1].

TABLA 3.11. Parámetros físicos para KOI-730

Magnitud Visual Aparente	15
Masa estelar	$1.07 \pm 0.04 M_{\odot}$
Metalicidad [Fe/H]	-0.01 ± 0.04
Temperatura efectiva	5590.0 ± 30 K

Este sistema tiene la peculiaridad de que los períodos orbitales de los cuatro exoplanetas conocidos se encuentran en resonancia 3:4:6:8. A pesar de la ausencia de confirmación por mediciones de velocidad radial, es probable que la resonancia sea verdadera (Lissauer et al., 2011). Este sistema planetario es un sistema compacto, ya que el planeta más externo (KOI-730e) tiene un periodo alrededor de 20 días ($a = 0.145$ UA). Los planetas en este sistema planetario tienen masas entre $0.18 - 0.30$ masas jovianas [54] [14].

Los semiejes mayores observados se ajustan muy bien a la relación TB exponencial (ecuación (1.3)) con $a_0 = 0.0605$ y $b = 0.2204$; un coeficiente de correlación $R^2 = 0.9953$ y un valor de $\chi^2 = 0.00028$. En la Figura 3.8 se observa el ajuste que representa a las órbitas de este sistema planetario. Hay que destacar que la relación TB para este sistema muestra un error porcentual no mayor al 3% entre los valores observados y no predice ningún planeta entre los planetas observados. Extrapolando la relación TB podemos predecir un planeta aún no detectado con un semieje mayor $a = 0.182$ UA ($p = 27.9$ días). Los valores predichos por la relación TB se muestran en la Tabla 3.17.

Como ya se mencionó, este sistema exoplanetario contiene planetas con períodos que satisfacen las resonancias 8:6:4:3. Estas relaciones implican que el planeta interior se encuentra en (o están cerca de) una resonancia de 4:3 con el planeta exterior, y que el par de planetas intermedios están en una resonancia 3:2. Moore [72] analizan la posibilidad de que la resonancia se pueda romper y estudian la posibilidad de que este sistema se pueda convertir en uno más estable. Para ello, realizan simulaciones de n-cuerpos. En cada caso comienza con los 4 planetas observados en resonancia y añaden un disco planetesimal frío al exterior del sistema. Encuentran que si un planetesimo con masa tipo marciana, migrando hacia adentro cruza las órbitas de los planetas observados, esto es suficiente para sacar al sistema planetario de la resonancia en que se encuentra. Debido a que el sistema se encuentra actualmente cerca o en la resonancia, deducen que este sistema carece de un disco de escombros o contiene uno que es muy difuso, con menos de una masa terrestre. Esto es congruente con los resultados de la relación TB, ya que ésta no predice otro cuerpo planetario entre las órbitas conocidas y predece otro planeta menos masivo, por debajo del límite actual de detección [54].

TABLA 3.12. Elementos orbitales de los planetas en el sistema KOI-730

n	Planeta	a [UA]	p [días]	e	M_{seni} [M_{Jup}]	Año de descubrimiento
1	e	0.076	7.3831 ± 0.0004	-	-	2011
2	c	0.092	9.8499 ± 0.0003	-	-	2011
3	b	0.120	14.7903 ± 0.0002	-	-	2011
4	d	0.145	19.7216 ± 0.0004	-	-	2011

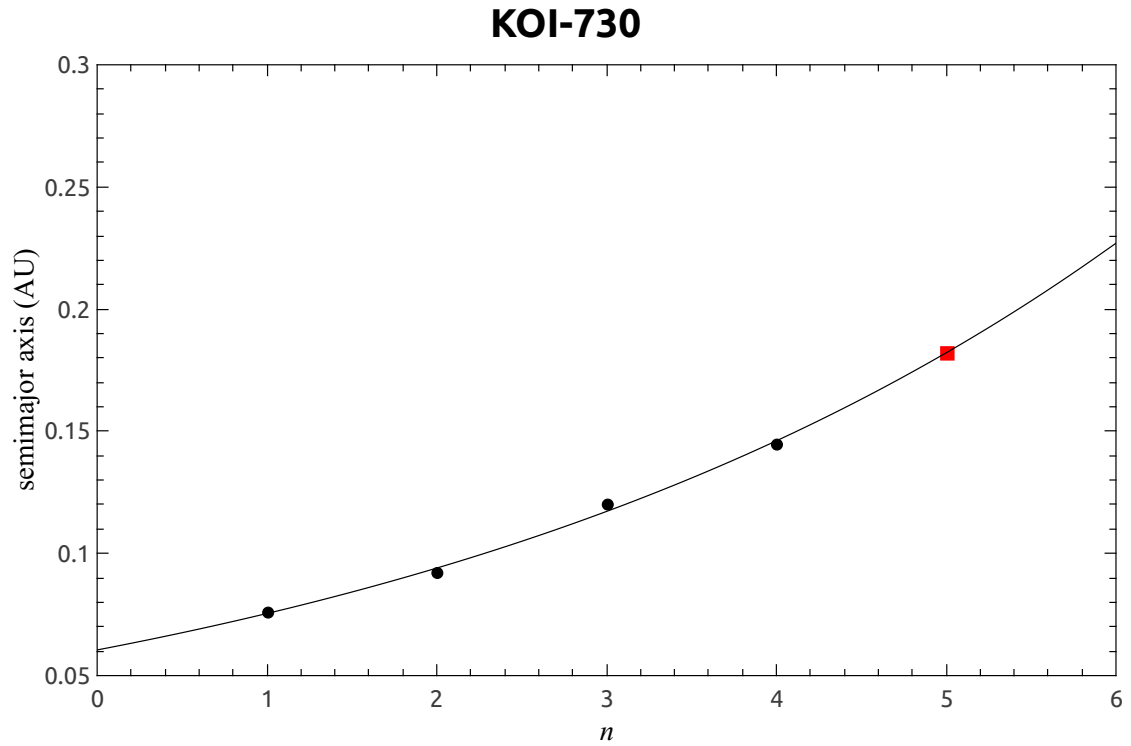


FIGURA 3.8. Ajuste de la relación TB exponencial para el sistema exoplanetario KOI-730, tomando los valores observados de los semiejes mayores (UA) de los cuatro planetas en este sistema, donde $a_0 = 0.0605$ y $b = 0.2204$; con $R^2 = 0.9953$ y $\chi^2 = 0.00028$. Los planetas observados están marcados con círculos, el planeta predicho por la relación TB ($a = 0.182$ UA, $n = 5$) está marcado con un cuadro rojo.

3.1.7. Sistema exoplanetario ν Andromeda

ν Andromeda ha sido el primer sistema exoplanetario múltiple descubierto alrededor de una estrella principal, y también ha sido el primer sistema exoplanetario múltiple conocido en un sistema múltiple estelar. Este sistema planetario extrasolar tiene cuatro planetas conocidos [15].

ν And es una estrella brillante F8V con una masa de $1.3 M_{\odot}$ y un radio estelar de $1.56 R_{\odot}$. La distancia a esta estrella se estima en 13.47 pc. La edad estimada es de 3.8×10^9 años y el período de rotación de 12 días. Estudios más recientes sugieren que el período de rotación es probablemente ≤ 9 días y que su velocidad de “bamboleo” es de 10 m/s [15] [89].

Es un sistema estelar binario en la constelación de Andromeda. La estrella primaria ν And A es una estrella blanca-amarilla de secuencia principal, un poco más joven que el Sol. La segunda estrella en el sistema, ν And B, se localiza en una órbita amplia. ν And B es de tipo espectral M4.5V y esta a una distancia de 750 UA de su estrella primaria [103] [89].

TABLA 3.13. Parámetros físicos para ν Andromeda

Magnitud Visual Aparente	4.09
Paralaje Hipparcos	$74.12 \pm 0.19 mas$
Distancia	$13.47 \pm 0.13 pc$
Magnitud Visual Absoluta	3.44
Velocidad radial	$-28.59 \pm 0.08 km/s$
Luminosidad	$3.57 L_{\odot}$
Tipo espectral	F8V
Masa estelar	$1.27 \pm 0.06 M_{\odot}$
Metalicidad [Fe/H]	0.09 ± 0.06
Edad	$3.8 \pm 1 [\times 10^9] años$

El planeta interior de ν And fue descubierto en 1996 (y anunciado 1997) gracias a las mediciones de la velocidad radial de la estrella. Debido a su cercanía a la estrella primaria, induce una gran oscilación y por eso se pudo detectar fácilmente. Incluso se puede decir que la actividad cromosférica de la estrella está asociada a este planeta. Cabe resaltar que el planeta ν And d reside en la Zona de Habitabilidad correspondiente a este sistema [16] [15] [22].

El sistema no es coplanar ni con la estrella, ni entre los propios planetas conocidos. La inclinación entre los planetas ν And c y d es de 30° . El período del planeta ν And e está en resonancia 3:1 con el del planeta ν And d. Todos los planetas en este sistema exoplanetario son masivos, con masas están entre 0.6 y 3.8 masas jovianas. En la Figura 3.9 se muestra el ajuste exponencial a los semiejes mayores de los planetas observados. Los valores de los elementos orbitales de estos planetas se resumen en la Tabla 3.14.

El ajuste TB exponencial a los 4 cuatro planetas observados, con $a_0 = 0.0239$ y $b = 1.4549$; es poco satisfactorio y esto se refleja en el coeficiente de correlación $R^2 = 0.9109$. (Figura 3.9)

Los semiejes mayores de este sistema están mejor representados por la relación TB exponencial con una vacante dada en la ecuación 1.3, con $a_0 = 0.0221$ y $b = 1.1438$, con $R^2 = 0.9852$ y un valor de $\chi^2 = 0.04294$. El ajuste predice un planeta en la órbita $n = 2$,

TABLA 3.14. Elementos orbitales de los planetas en el sistema ν Andromeda

n	Planeta	a [UA]	p [días]	e	M_{semi} [M_{Jup}]	Año de descubrimiento
1	b	0.059 ± 0.001	4.617136 $\pm 4.7 \times 10^{-5}$	0.013	0.62 ± 0.09	1996
2	c	0.861	237.7 ± 0.2	0.24	1.8 ± 0.26	1999
3	d	2.55	1302.61	0.274	10.19	1999
4	e	5.2456 $\pm 6.4 \times 10^{-4}$	3848.86 ± 0.74	0.00536	1.059 ± 0.028	2010

con un semieje mayor $a = 0.218$ UA y un período de alrededor de 32 días. La extrapolación del ajuste también postula la existencia de un planeta en la órbita $n = 6$, con un semieje mayor $a = 21.128$ UA (véase Figura 3.10). En este ajuste podemos resaltar que el error porcentual entre los valores de los semiejes mayores de planetas observados y los planetas predichos por la relación TB exponencial disminuye considerablemente. El mayor error porcentual es de 29%. Los semiejes mayores que predice la relación TB para este sistema exoplanetario están resumidos en la Tabla 3.17.

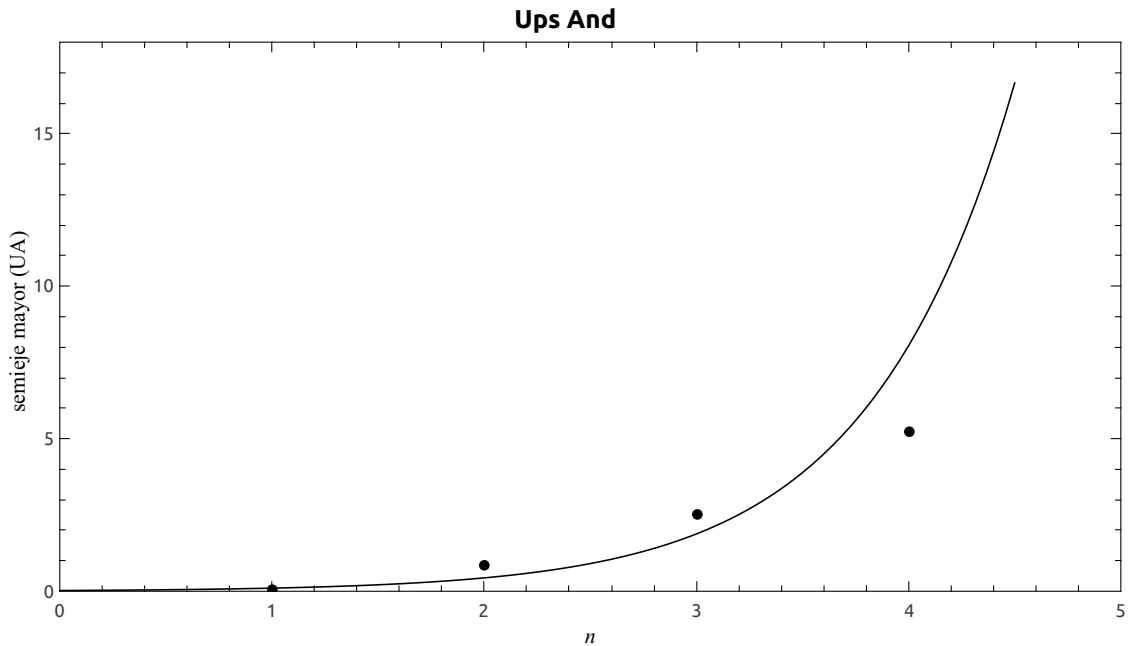


FIGURA 3.9. Ajuste de la relación TB exponencial a los semiejes mayores de los cuatro planetas observados para el sistema ν And. Este ajuste muestra un índice de correlación de $R^2 = 0.9109$.

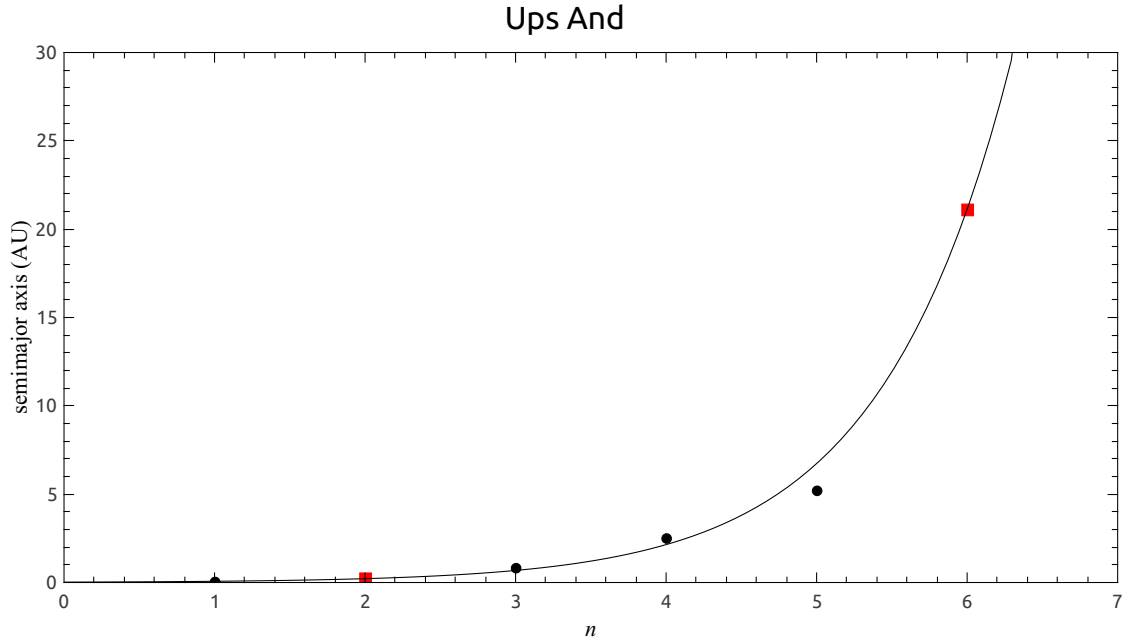


FIGURA 3.10. Ajuste TB exponencial para el sistema exoplanetario v Andromeda, tomando los valores de los semiejes mayores (UA) de los cuatro planetas observados y de los dos posibles planetas extrasolares. Los planetas observados están marcados con círculos, los planetas predichos por la relación TB en $a = 0.218$ UA ($n = 2$) y $a = 21.128$ UA ($n = 6$) están marcados por cuadros.

3.1.8. Sistema exoplanetario μ Arae

El sistema exoplanetario μ Arae se encuentra a 15.3 parsecs de distancia en la constelación Ara. Es un sistema exoplanetario que tiene 4 planetas. La estrella primaria μ Arae (HD 160691, Gl 691, HIP 86796, HR 6585, SAO 244981) es una estrella sub-gigante con un tipo espectral G3. Su magnitud aparente es de $V = 5.15$. Se estima que tiene una masa $M = 1.08 M_{\odot}$. Según los datos obtenidos por el satélite Hipparcos, tiene una paralaje de 64.47 milisegundos de arco. Su luminosidad $L = 1.7 L_{\odot}$ y se sospecha que está evolucionada, moviéndose a la fase de subgigante. μ Arae tiene una temperatura efectiva $T_{eff} = 5700$ K. Es un más poco rica en metales que el Sol. Se calcula que tiene una edad 6.41×10^9 años (véase Tabla 3.15) [89] [77][89] [103].

Los datos del primer exoplaneta se reportaron en el 2000, confirmando la existencia de un planeta gigante más masivo que Júpiter. El descubrimiento de los 3 exoplanetas adicionales fue gradual. Tres de los exoplanetas son masivos (probablemente gaseosos). Los elementos orbitales de los planetas en este sistema exoplanetario se resumen en la Tabla 3.16 [17] [68] [87] [77].

El planeta gigante gaseoso μ Arae b se encuentra en la zona habitable en donde el agua puede estar líquida, pero por ser muy masivo la posibilidad de que exista vida en ese planeta es casi nula. El planeta más interno en este sistema planetario, μ Arae c, tiene una masa de aproximadamente $11 M_{\oplus}$, por lo que se cree que es una planeta rocoso. Debido a su cercanía a la estrella primaria la probabilidad de la existencia de agua líquida, y por lo tanto, de vida en este planeta es muy pequeña.

El planeta μ Arae e es el más externo y más masivo del sistema exoplanetario. μ Arae d y b se encuentran cerca de la resonancia orbital 2:1, lo cual les hace sufrir interacciones fuertes. Se han hecho simulaciones que resaltan que este sistema es realmente inestable; estos mismos resultados sugieren que sistema sufrirá modificaciones drásticas al cabo de 78 millones de años [83].

En la Figura 3.11 se muestra el ajuste exponencial a los planetas observados, con $a_0 = 0.0381$ y $b = 1.2647$. Este ajuste tiene un coeficiente de correlación $R^2 = 0.9281$, valor no muy adecuado.

Como se observa en la Figura 3.12 los semiejes mayores muestran una mejor representación con una vacante en la relación TB, que queda dada por la ecuación 1.3, con $a_0 = 0.0367$ y $b = 0.9847$, y con un coeficiente de correlación $R^2 = 0.9847$ y un valor de $\chi^2 = 0.03290$. La relación TB exponencial de este sistema predice un planeta en $a = 0.263$ UA con un período de 47.4 días; también podemos conjeturar otro exoplaneta en la órbita $n = 6$, con $a = 13.5$ UA y $p = 17396$ días. Los valores de los semiejes que la relación TB predice para los planetas en este sistema planetario se resumen en la Tabla 3.17.

TABLA 3.15. Parámetros físicos para μ Arae

Magnitud Visual Aparente	5.15
Paralaje Hipparcos	64.47 ± 0.31 mas
Distancia	15.3 pc
Magnitud Visual Absoluta	4.28
Velocidad radial	-9.0 ± 0.50 km/s
Luminosidad	$1.7L_{\odot}$
Tipo espectral	G3IV-V
Masa estelar	$1.08 \pm 0.05M_{\odot}$
Metalicidad [Fe/H]	0.28 ± 0.04
Edad	6.41×10^9 años

TABLA 3.16. Elementos orbitales de los planetas en el sistema μ Arae

n	Planeta	a [UA]	p [días]	e	M_{seni} [M_{Jup}]	Año de descubrimiento
1	c	0.09094	9.6386 ± 0.0015	0.172 0.04	0.03321	2004
2	d	0.921	310.55 ± 0.83	0.0666 ± 0.0122	0.5219	2004
3	b	1.5 ± 0.02	643.25 ± 0.9	0.128 ± 0.017	1.676	2000
4	e	5.235	4205.8 ± 758.9	0.0985 ± 0.0627	1.814	2006

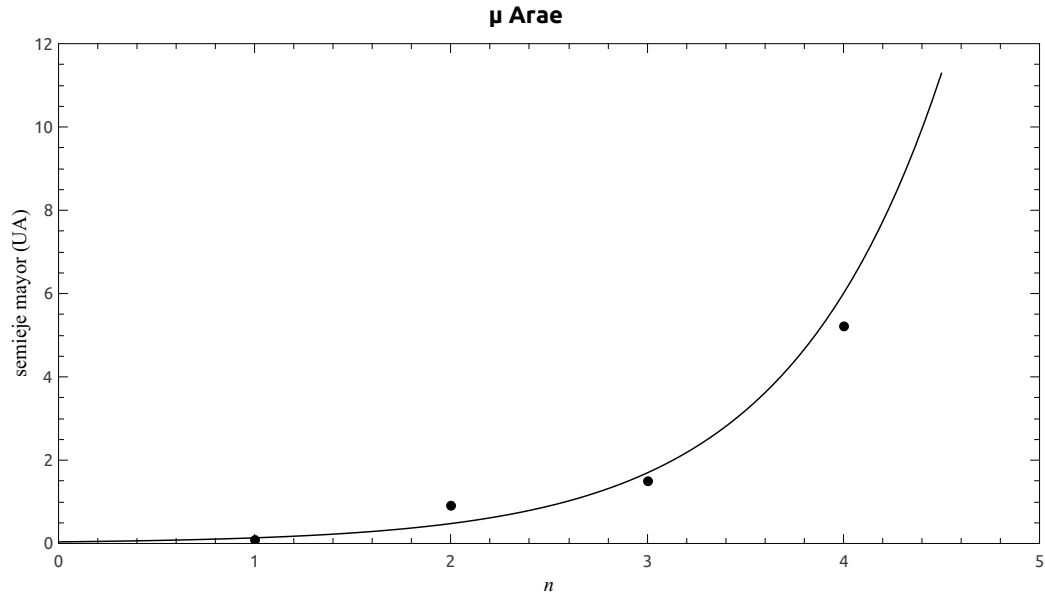


FIGURA 3.11. Ajuste de la relación TB exponencial a los semiejes mayores de los cuatro planetas observados para el sistema μ Arae. Este ajuste muestra un índice de correlación de $R^2 = 0.9281$, donde $a_0 = 0.0381$ y $b = 1.2647$.

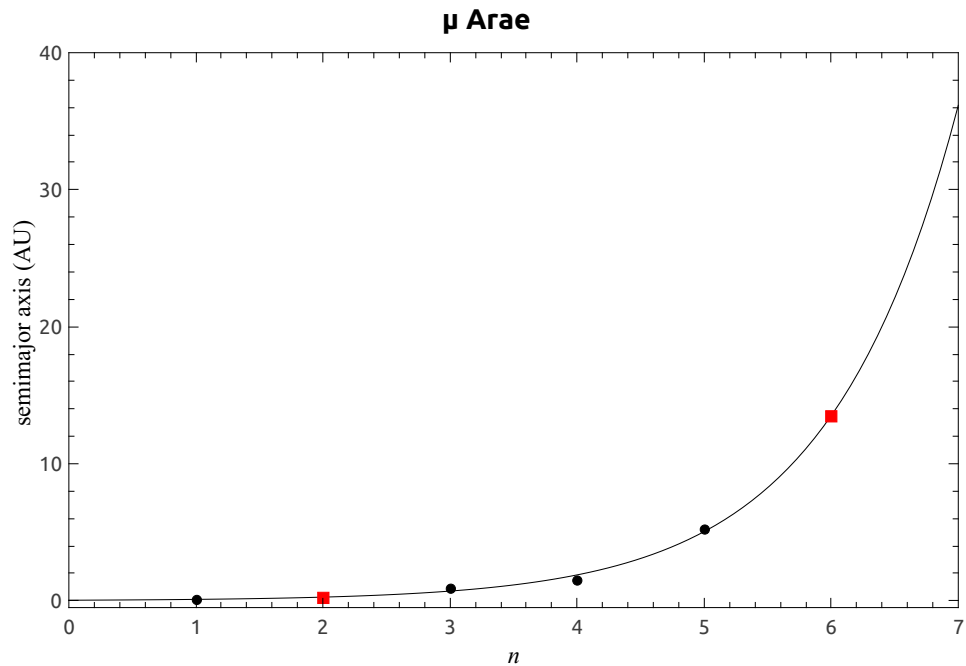


FIGURA 3.12. Ajuste TB exponencial para el sistema exoplanetario μ Arae, tomando los valores de los semiejes mayores (UA) de los cuatro planetas observados y de los dos posibles planetas extrasolares. Los planetas observados están marcados con círculos, los planetas predichos por la relación TB en $a = 0.2630$ UA ($n = 2$) y $a = 13.5$ UA ($n = 6$) están marcados por cuadros.

La Tabla 3.17 resume las principales características físicas y orbitales de los sistemas exoplanetarios con 4 planetas, así como los resultados obtenidos y predichos por la relación TB.

TABLA 3.17. Elementos imagen observados y valores predichos por la relación TB para los sistemas exoplanetarios con 4 planetas

Sistema	n	Planeta	p [días]	a [UA]	a TB [UA]	Error %
Gliese 581	1	e	3.149	0.028	0.029	2.17
	2	b	5.369	0.041	0.043	5.61
	3	c	12.918	0.073	0.066	10.22
	4	-	-	-	0.099	-
	5	g^*	36.65	0.146	0.150	2.85
	6	d	66.64	0.22	0.227	3.31
	7	-	-	-	0.344	-
	8	-	-	-	0.521	-
	9	f^*	433.00	0.758	0.788	4.00
Gliese 676A	1	d	3.60	0.0413	0.0475	15.20
	2	e	35.37	0.187	0.1567	16.20
	3	-	-	-	0.517	-
	4	b	1050.3	1.8	1.706	5.25
	5	c	4400.0	5.2	5.626	8.20
	6	-	-	-	18.56	-
Gliese 876	1	d	1.938	0.0208	0.022	4.46
	2	-	-	-	0.038	-
	3	-	-	-	0.067	-
	4	c	30.088	0.1296	0.117	9.69
	5	b	61.117	0.2083	0.205	1.525
	6	e	124.26	0.3343	0.360	7.56
	7	-	-	-	0.63	-
HR 8799	1	e	18 000	14.5	15.21	4.92
	2	d	41 054	27.0	25.33	6.17
	3	c	82 145	42.9	42.18	1.67
	4	b	164 250	68.0	70.24	3.29
	5	-	-	-	116.96	-
KOI-94	1	b	3.743	0.05	0.052	3.56
	2	c	10.424	0.099	0.093	5.97
	3	d	22.343	0.165	0.167	1.43
	4	e	54.320	0.298	0.301	0.97
	5	-	-	-	0.541	-
KOI-730	1	e	7.383	0.076	0.075	0.77
	2	c	9.850	0.092	0.094	2.19

Tabla 3.17 – continúa de la pagina anterior

Sistema	n	Planeta	p	a	a TB	Error %
	3	b	14.790	0.120	0.117	2.34
	4	d	19.722	0.145	0.146	0.75
	5	-	-	-	0.182	-
v And	1	b	4.617	0.059	0.069	17.57
	2	-	-	-	0.218	-
	3	c	237.7	0.861	0.683	20.64
	4	d	1302.61	2.550	2.145	15.89
	5	e	3848.86	5.246	6.732	28.33
	6	-	-	-	21.128	-
μ Arae	1	c	9.639	0.091	0.098	8.03
	2	-	-	-	0.263	-
	3	d	310.55	0.921	0.704	23.55
	4	b	643.25	1.500	1.885	25.65
	5	e	4205.8	5.235	5.046	3.62
	6	-	-	-	13.507	-

* Planetas cuya existencia continua en controversia.

Los semiejes en negritas corresponden a nuevos planetas predichos por la relación TB.

3.2. Sistemas exoplanetarios con 5 planetas

Los sistemas exoplanetarios con 5 planetas girando alrededor de su estrella primaria son: 55 Cancri, Kepler-20, Kepler-33, Kepler-62 y Kepler-80. Todos estos sistemas, exceptuando a 55 Cancri, se han descubierto por medio de la técnica de tránsito gracias a los datos obtenidos por la sonda espacial Kepler. 55 Cancri se distingue por ser el primer sistema exoplanetario descubierto que alberga 5 planetas alrededor de la estrella primaria de un sistema binario [89][31].

3.2.1. Sistema exoplanetario 55 Cancri

El sistema exoplanetario 55 Cancri alberga 5 planetas, todos ellos descubiertos mediante la técnica de velocidad radial [16][59][67][31].

55 Cancri (55 Cnc = HD 75732 = HR3522 = HIP 43587 = GJ 324A) es una estrella tipo G8V, a una distancia de 12.34 parsecs, en la constelación de Cáncer. Tiene una magnitud aparente $V = 5.96$, y una luminosidad $L = 0.6L_{\odot}$. 55 Cancri tiene alrededor $10.2 \pm 2.5 \times 10^9$ años de edad. Es un poco menos masiva que el Sol, con $M = 0.9 M_{\odot}$, y tiene una temperatura efectiva de 5196 ± 24 K. La estrella es un sistema estelar binario. 55 Cancri B, es una estrella débil roja, de magnitud visual aparente $V = 13$, de tipo espectral M4V. Gira alrededor de la componente A (55 Cancri A) a una distancia de ≈ 1065 UA [101] [103] [89].

Las órbitas de los planetas en este sistema son casi circulares. 55 Cancri f, tiene una masa de 46 masas terrestres y un periodo de 260 días. Con ello, se encuentra en la Zona Habitable de su sistema, pero debido a su composición gaseosa no es probable que albergue vida. Todos los planetas extrasolares del sistema, exceptuando 55 Cancri e, son masivos y de estructura gaseosa. 55 Cancri e tiene una masa aproximadamente de 8 masas terrestres y 2 veces el radio terrestre por lo que se cree que es un planeta rocoso; por la cercanía a su estrella primaria podría tener actividad volcánica [101].

TABLA 3.18. Parámetros físicos para 55 Cancri

Magnitud Visual Aparente	5.96
Paralaje Hipparcos	81.03 ± 0.75 mas
Distancia	12.34 ± 0.4 pc
Magnitud Visual Absoluta	5.46
Velocidad radial	27.58 ± 0.07 km/s
Luminosidad	$0.63L_{\odot}$
Tipo espectral	K0IV-V
Masa estelar	$0.905 \pm 0.015M_{\odot}$
Metalicidad [Fe/H]	0.31 ± 0.04
Edad	$10.2 \pm 2.5 [\times 10^9]$ años

La validez de la relación TB exponencial dada por la ecuación (1.3) para este sistema fue examinada en detalle por Poveda y Lara (2008). Se encuentra que el mejor ajuste corresponde $a_0 = 0.0142$ y $b = 0.9975$. Se predice un planeta aún no descubierto con un semieje $a = 2.1$ UA ($p = 1130$) días. En promedio, las predicciones concuerdan con las

TABLA 3.19. Elementos orbitales de los planetas en el sistema 55 Cancri

n	Planeta	a [UA]	p [días]	e	M_{seni} [M_{Jup}]	Año de descubrimiento
1	e^*	0.0156 ± 0.0011	0.73546 $\pm 3 \times 10^{-6}$	0.06	0.0263 ± 0.0012	2004
2	b	0.1134 ± 0.0006	14.651 ± 0.0001	0.0159	0.80 ± 0.012	1996
3	c	0.2403 ± 0.0017	44.3446 ± 0.007	0.053	0.169 ± 0.008	2002
4	f	0.781 ± 0.006	260.7 ± 1.1	0.0002	0.144 ± 0.04	2007
5	d	5.76 ± 0.06	5218.0 ± 230	0.025	3.835 ± 0.08	2002

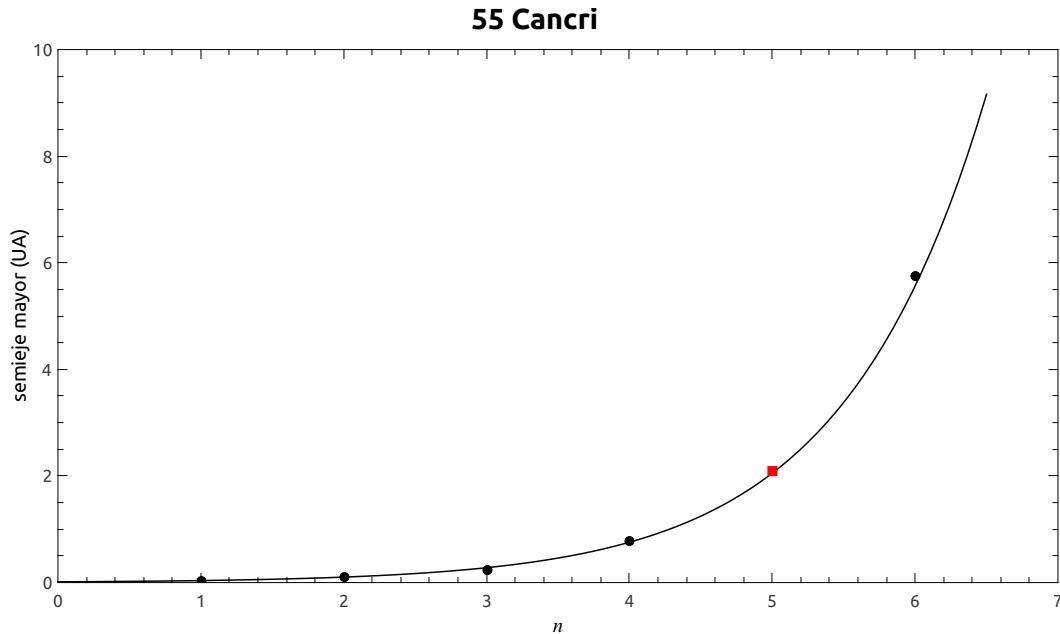


FIGURA 3.13. Ajuste TB exponencial dado por Poveda y Lara (2008) para el sistema exoplanetario 55 Cancri, tomando los valores de los semiejes mayores (UA) conocidos a los cinco planetas observados. Los planetas observados están marcados con círculos, los planetas predichos por la relación TB ($n = 5$) están marcados por cuadros.

observaciones con un error de menos del 7%; la concordancia tiene un error menor que 3% para tres de los cinco planetas (véase Figura 3.13) [78].

Dawson y Fabrycky [23] han argumentado que el semieje mayor del planeta más interior de 55 Cancri (55 Cancri e) podría ser considerablemente más pequeño de lo que originalmente se pensó ($a = 0.0156$ AU en lugar de $a = 0.038$ UA). Esto fue confirmado mediante el técnica de tránsito. Tomando en cuenta esta corrección, el ajuste TB exponencial a los cinco planetas de 55 Cancri da como resultado los parámetros $a_0 = 0.0056$ y $b = 0.9832$, con un coeficiente de correlación $R^2 = 0.9980$ y un valor de $\chi^2 = 0.0077$ (ver Tabla 3.28).

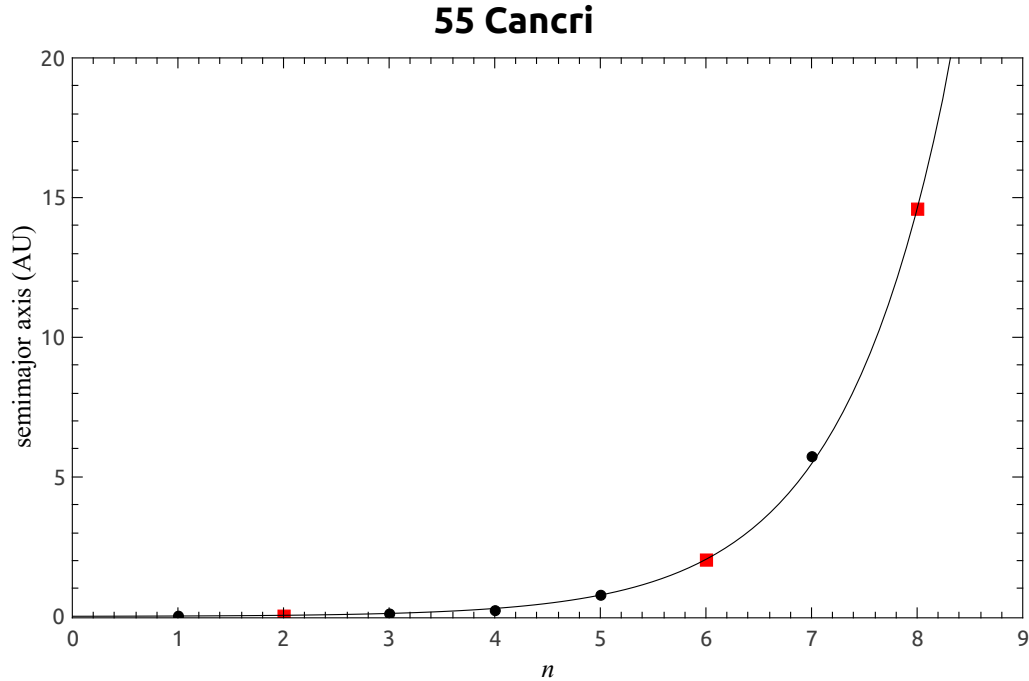


FIGURA 3.14. Ajuste TB exponencial para el sistema exoplanetario 55 Cancri, usando los valores de los semiejes mayores de los 5 planetas observados, además se toma en cuenta valor corregido al semieje mayor de 55 Cancri e ($n = 1, a = 0.0156$ UA). Los planetas observados están marcados con círculos, los planetas predichos por la relación TB están marcados por cuadros ($n = 2, 6$ y 8).

Curiosamente, el mejor ajuste de la relación TB a los planetas en 55 Cancri implicaría la existencia de dos planetas- aún no detectados - en $a = 0.040$ UA ($n = 2$) y $a = 2.035$ UA ($n = 6$) (véase Figura 3.14). Extrapolando la relación TB para este sistema, se predice un planeta con semieje $a = 14.52$ UA ($n = 8$). En la Tabla 3.28 se muestran los valores de los semiejes mayores de los nuevos planetas predichos por la relación TB. La detección de planetas con estas características daría credibilidad adicional a la relación TB mostrando su capacidad predictiva tal como ocurrió con la relación Titius-Bode clásica para el Sistema Solar. Si se extrapola la relación TB exponencial pueden predecirse planetas exteriores adicionales.

El sistema 55 Cancri ha sido objeto de varios estudios dinámicos, que hemos reseñado con detalle en el capítulo 2.

3.2.2. Sistema exoplanetario Kepler-20

El sistema exoplanetario Kepler-20 alberga 5 planetas. Los planetas en este sistema fueron detectados gracias al análisis de las curvas de luz, obtenidas por la misión Kepler. Kepler-20 (KOI-70, 2MASS J19104752+4220194) se encuentra a una distancia de 290 ± 30 pc. Todas las estrellas estudiadas por la sonda Kepler pertenecen a las constelaciones del Cisne, Lira y el Dragón. Esta estrella pertenece a la constelación Lira. Su magnitud aparente es $V = 12.51$ y de tipo espectral G8. Es una estrella más pequeña que el Sol, con

una masa $M = 0.920 M_{\odot}$ y un radio $R = 0.944 R_{\odot}$. La temperatura efectiva $T_{eff} = 5466$ K; esta estrella tiene una edad de 8.8×10^9 años (véase Tabla 3.20) [89] [36].

TABLA 3.20. Parámetros físicos para Kepler-20

Magnitud Visual Aparente	12.5
Distancia	290 ± 30 pc
Tipo espectral	G8
Masa estelar	$0.912 \pm 0.035 M_{\odot}$
Metalicidad [Fe/H]	0.02 ± 0.04
Temperatura efectiva	5466 ± 93 K
Edad	8.8×10^9 años

El sistema exoplanetario es un sistema compacto, con los periodos orbitales de los planetas en el intervalo de 3 – 77 días. Sus excentricidades son muy altas (0.3 - 0.6); todos se destacan por ser planetas con masas terrestres, siendo Kepler-20e el menos masivo con 3 masas terrestres [36].

Tomando en cuenta los valores observacionales de los semiejes mayores y asignándoles su respectivo valor orbital como se muestran en la Tabla 3.21, el ajuste a la relación TB tiene un coeficiente de correlación de $R^2 = 0.8893$, con $a_0 = 0.0225$ y $b = 0.4834$ (Figura 3.15). Este ajuste no tiene el grado de precisión que requerimos por lo que se realizará un mejor ajuste a la relación TB exponencial.

Los semiejes mayores de los cinco planetas están mejor representados por la relación TB exponencial (ecuación (1.3)) con dos vacantes y $a_0 = 0.0293$, $b = 0.3488$, y un coeficiente de correlación $R^2 = 0.9818$ y un valor de $\chi^2 = 0.0095$. El ajuste predice dos planetas en $a = 0.168$ y $a = 0.238$ UA ($n = 5$ y 6), los cuales tendrían periodos de 29.45 y 49.08 días, respectivamente (véase Figura 3.16). Extrapolando la relación TB exponencial, se podría predecir un planeta exterior con un semieje mayor $a = 0.477$ UA ($n = 8$).

En la Tabla 3.28 se resumen valores predichos por la relación TB para este sistema. Se observa que tienen un error porcentual no mayor al 10% respecto a los datos observacionales.

TABLA 3.21. Elementos orbitales de los planetas en el sistema Kepler-20

n	Planeta	a [UA]	p [días]	e	M_{seni} [M_{Jup}]	Año de descubrimiento
1	b	0.04537 $\pm 6 \times 10^{-4}$	3.69612	0.32	0.027 ± 0.007	2011
2	e	0.0507 ± 0.0067	6.09849 $\pm 6.5 \times 10^{-5}$	-	0.0097	2011
3	c	0.093 ± 0.001	10.8541 $\pm 1.3 \times 10^{-5}$	0.40	0.051 ± 0.01	2011
4	f	0.11 ± 0.01	19.5771 $\pm 5.2 \times 10^{-4}$	-	0.045	2011
5	d	0.3453 ± 0.0046	77.6119 $\pm 3.7 \times 10^{-4}$	0.60	0.06	2011

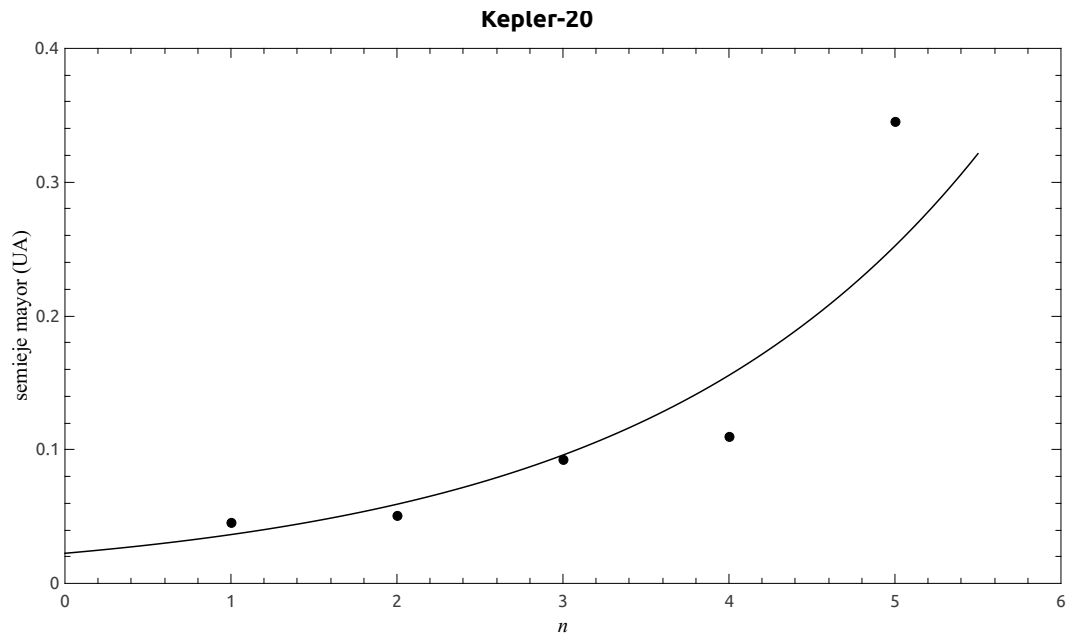


FIGURA 3.15. Ajuste exponencial a los semiejes mayores de los cinco planetas observados para el sistema Kepler-20. Este ajuste muestra un índice de correlación de $R^2 = 0.8893$.

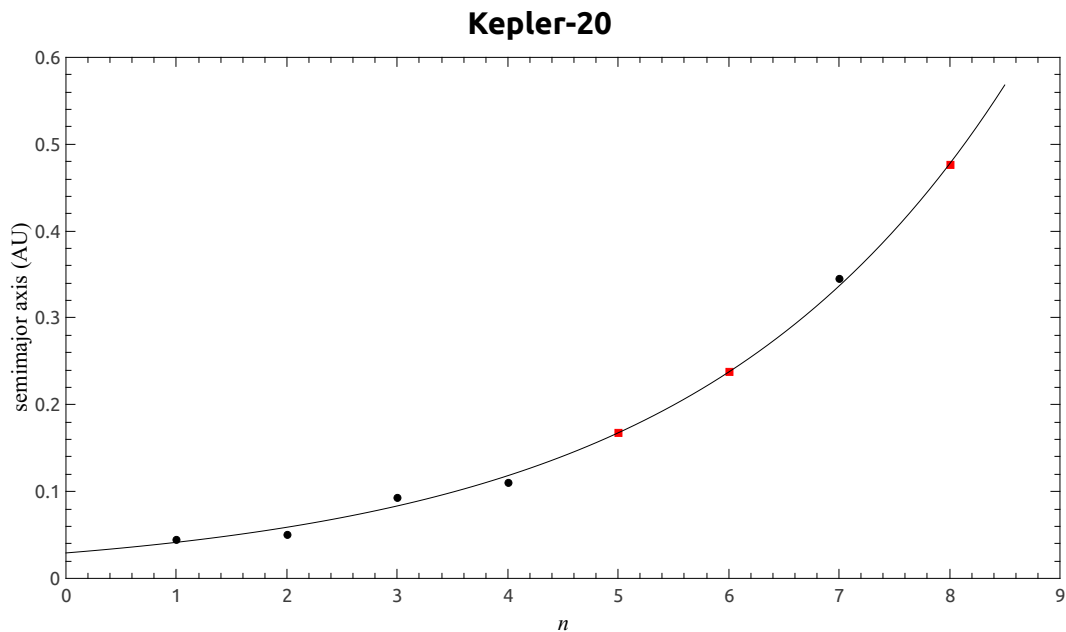


FIGURA 3.16. Ajuste de la relación TB exponencial para el sistema exoplanetario Kepler-20, tomando los valores de los semiejes mayores (UA) de los cuatro planetas observados y de los dos posibles planetas extrasolares. Los planetas observados están marcados con círculos, los planetas predichos por la relación TB en $a = 0.168$ UA ($n = 5$), $a = 0.238$ UA ($n = 6$) y $a = 0.477$ UA ($n = 8$) están marcados por cuadros.

3.2.3. Sistema Exoplanetario Kepler-33

Kepler-33 es otro de los sistemas exoplanetarios con cinco planetas. Los instrumentos de detección de la sonda Kepler muestran que Kepler-33 (KOI-707) tiene una magnitud visual aparente de $V = 14.0$. Es una estrella más grande y más vieja que el Sol; tiene una masa $M = 1.291M_{\odot}$ y un radio $R = 1.82 R_{\odot}$; su temperatura efectiva es $T_{eff} = 5204 \text{ K}$ y se ha calculado que tiene una edad aproximada de 4.27×10^9 años. Su tipo espectral es G1IV [53] [89].

TABLA 3.22. Parámetros físicos para Kepler-33

Magnitud Visual Aparente	14
Tipo espectral	G1IV
Edad	$4.27 \times 10^6 \pm 0.87$
Masa estelar	$1.291 \pm 0.121M_{\odot}$
Radio estelar	$1.82 \pm 0.18R_{\odot}$
Metalicidad [Fe/H]	0.025
Temperatura efectiva	$5204 \pm 47 \text{ K}$
Edad	$4.27 \pm 0.87 [\times 10^9]$ años

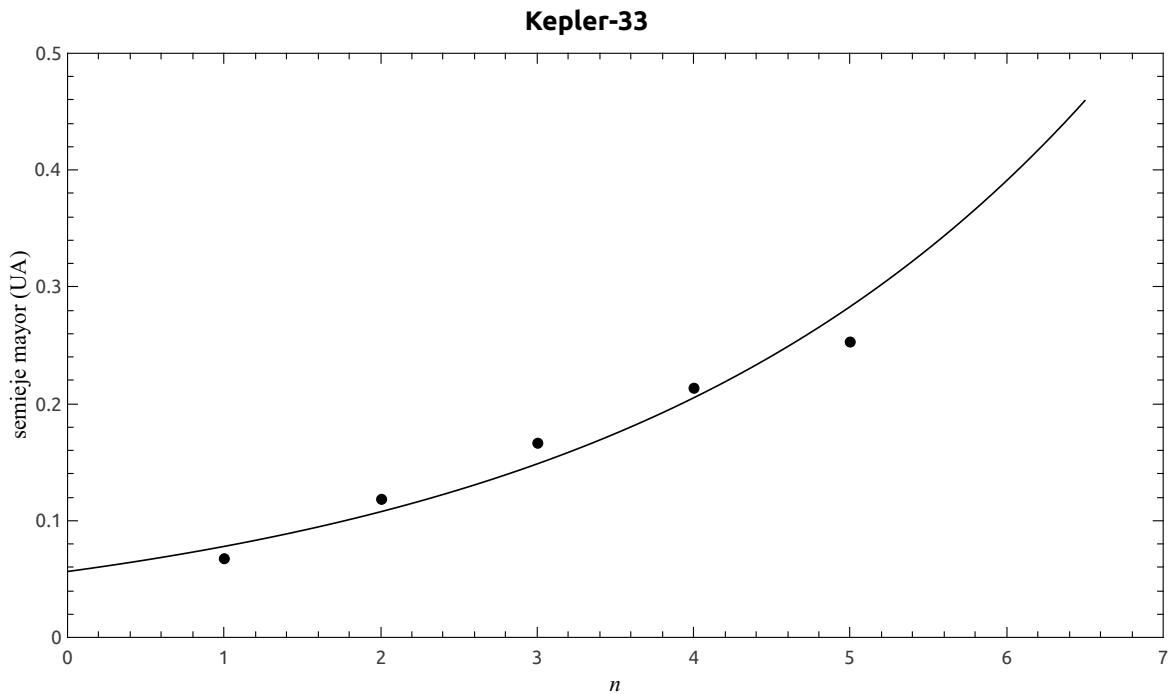
El anuncio del descubrimiento de los cinco planetas en este sistema extrasolar planetario se hizo en enero de 2012; sin embargo, a diferencia de otros planetas confirmados por la misión Kepler, la masa de los planetas descubiertos no ha sido determinada. Juzgando por el radio planetario de los planetas se infiere estos pueden tener masas tipo super-Tierras o Neptunos pequeños. De manera análoga a otros sistemas planetarios reportados por la misión Kepler, Kepler-33 es un sistema compacto con planetas que tienen periodos entre 5 - 41 días. Los planetas Kepler-33 b y Kepler-33 c podrían estar en una resonancia 07:03, pero con una discrepancia de 0.05 días; también existe una resonancia 5:3 entre los planetas c y d, con una discrepancia de 0.18 días (*véase* Tabla 3.23) [53].

Los semiejes mayores observados de los 5 planetas se ajustan con la relación TB exponencial con un coeficiente de correlación $R^2 = 0.9487$, $a_0 = 0.0564$ y $b = 0.3227$ (Figura 3.17). Debido a que este ajuste no reproduce del todo las observaciones se hará otro ajuste.

Los semiejes mayores de las cinco exoplanetas están mejor representado por la relación TB exponencial (ecuación (1.3)) con una vacante, con valores $a_0 = 0.053$ y $b = 0.2712$, un coeficiente de correlación $R^2 = 0.9914$ y un valor de $\chi^2 = 0.0018$. El ajuste predice un planeta en el orbital $n = 2$, que corresponde a un semieje mayor $a = 0.091 \text{ UA}$ y a un período $p = 8.86$ días. También puede hacerse la predicción de un planeta externo con semieje mayor $a = 0.354 \text{ UA}$ ($n = 7$) (*véase* Figura 3.18). Cabe destacar que el ajuste exhibe un error no mayor del 6.5% entre los valores predichos por la relación TB y los observados. Todos estos resultados se resumen en la Tabla 3.28.

TABLA 3.23. Elementos orbitales de los planetas en el sistema Kepler-33

n	Planeta	a [UA]	p [días]	e	M_{seni} [M_{Jup}]	Año de descubrimiento
1	b	0.0677 ± 0.0014	5.66793 ± 0.00012	-	-	2012
2	c	0.1189 ± 0.0026	13.1756 $\pm 1.4 \times 10^{-4}$	-	-	2012
3	d	0.1662 ± 0.0035	21.776 ± 0.00011	-	-	2012
4	e	0.2138 ± 0.0045	31.7844 $\pm 3.9 \times 10^{-4}$	-	-	2012
5	f	0.2535 ± 0.0054	41.02902 $\pm 4.2 \times 10^{-4}$	-	-	2012

FIGURA 3.17. Ajuste exponencial a los semiejes mayores de los cinco planetas observados para el sistema Kepler-33. Este ajuste muestra un índice de correlación de $R^2 = 0.9487$.

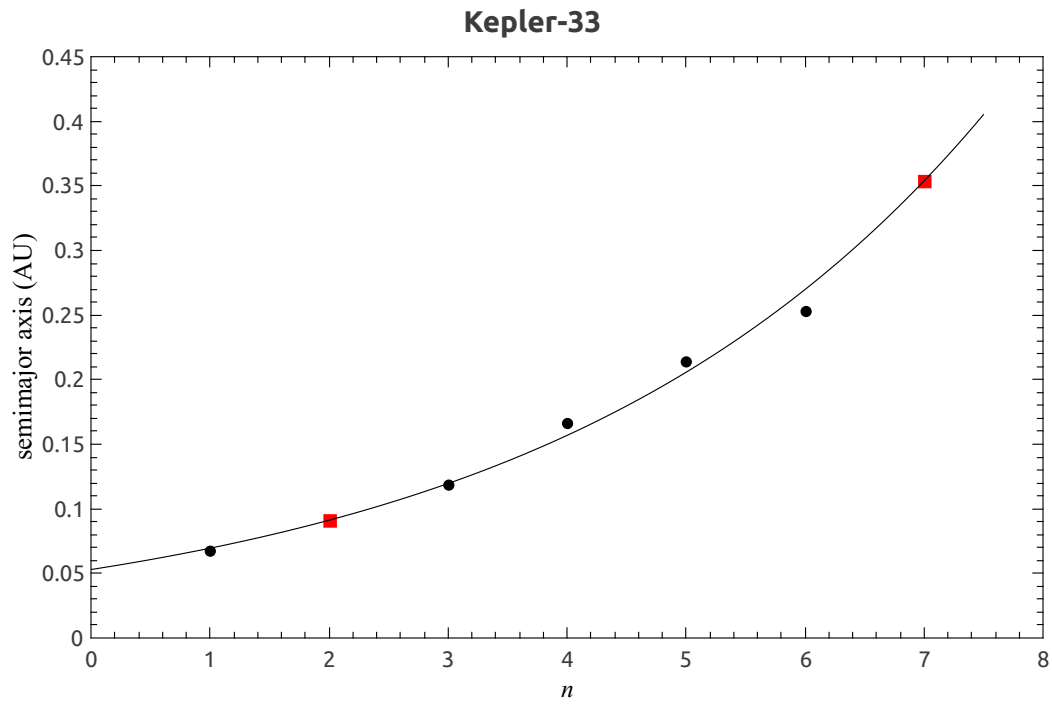


FIGURA 3.18. Ajuste de la relación TB exponencial para el sistema exoplanetario Kepler-33, tomando los valores de los semiejes mayores (UA) de los cuatro planetas observados y el posible planeta. Los planetas observados están marcados con círculos, los planetas predichos por la relación TB en $a = 0.091$ UA ($n = 2$) y $a = 0.354$ UA ($n = 7$) están marcados por cuadros.

3.2.4. Sistema Exoplanetario Kepler-62

El sistema exoplanetario Kepler-62 se conoce por albergar 5 planetas. La primaria es una estrella situada a 368 pc. de la Tierra; como otras estudiadas por la misión Kepler, esta estrella se encuentra en la constelación Lira. Kepler-62 (KOI-701, 2MASS J18525105+4520595) es una estrella de tipo espectral K2V con una magnitud visual aparente de 13.65. Esta estrella es más fría y más pequeña que el Sol, con un radio estelar $R = 0.63 R_{\odot}$, una masa $M = 0.69 M_{\odot}$ y una temperatura efectiva $T_{eff} = 4869$ K. Se calcula que tiene una edad 7 mil millones de años (véase Tabla 3.24) [13][89].

TABLA 3.24. Parámetros físicos para Kepler-62

Magnitud Visual Aparente	13.65
Tipo espectral	K2V
Distancia	368 pc
Masa estelar	$0.69 \pm 0.02 M_{\odot}$
Radio estelar	$0.64 \pm 0.04 R_{\odot}$
Metalicidad [Fe/H]	-0.21
Temperatura efectiva	4869 K
Edad	$7 \pm 4 \times 10^9$ años

TABLA 3.25. Elementos orbitales de los planetas en el sistema Kepler-62

n	Planeta	a [UA]	p [días]	e	M_{semi} [M_{Jup}]	Año de descubrimiento
1	b	0.0553 $\pm 5 \times 10^{-4}$	5.71493 $\pm 9 \times 10^{-6}$	-	0.28	2013
2	c	0.0929 ± 0.0004	12.4417 $\pm 1 \times 10^{-4}$	-	0.0126	2013
3	d	0.12 ± 0.001	18.1641 $\pm 1 \times 10^{-5}$	-	0.044	2013
4	e	0.427 ± 0.04	122.387 ± 0.008	-	0.113	2013
5	f	0.781 ± 0.007	267.291 ± 0.005	-	0.11	2013

En abril del 2013 se reportó la existencia de 5 planetas en este sistema planetario extrasolar. Las masas de estos planetas son del tipo terrestre; varían entre 9 y 36 masas terrestres y los radios planetarios se ubican entre 0.54 y 1.96 radios terrestres. Las excentricidades en este sistema no se han podido determinar. Kepler-62e y Kepler-62f, son planetas rocosos que se encuentran en la Zona Habitable determinada para este tipo de estrella (véase Tabla 3.25) [13].

Con los valores de los semiejes mayores, reportados por el equipo de Kepler, el ajuste resultante a la relación TB exponencial con $a_0 = 0.0244$ y $b = 0.6653$, muestra un coeficiente de correlación $R^2 = 0.9508$. (Figura 3.19). La relación TB exponencial que representa mucho mejor a la distribución de los semiejes mayores de este sistema exoplanetario tiene $a_0 = 0.0371$ y $b = 0.4159$ y exhibe un coeficiente $R^2 = 0.996$ y un valor de $\chi^2 = 0.0037$. El mejor ajuste de la relación TB para este sistema predice la existencia de dos planetas

en $a = 0.196$ UA ($n = 4$) y $a = 0.297$ UA ($n = 5$). Extrapolando puede predecirse un planeta externo en $a = 1.033$ UA ($n = 8$) (véase Figura 3.20). Los valores predichos por la relación TB que se muestran en la Tabla 3.28, presentan un error porcentual no mayor del 9%, respecto a los valores observados en este sistema planetario.

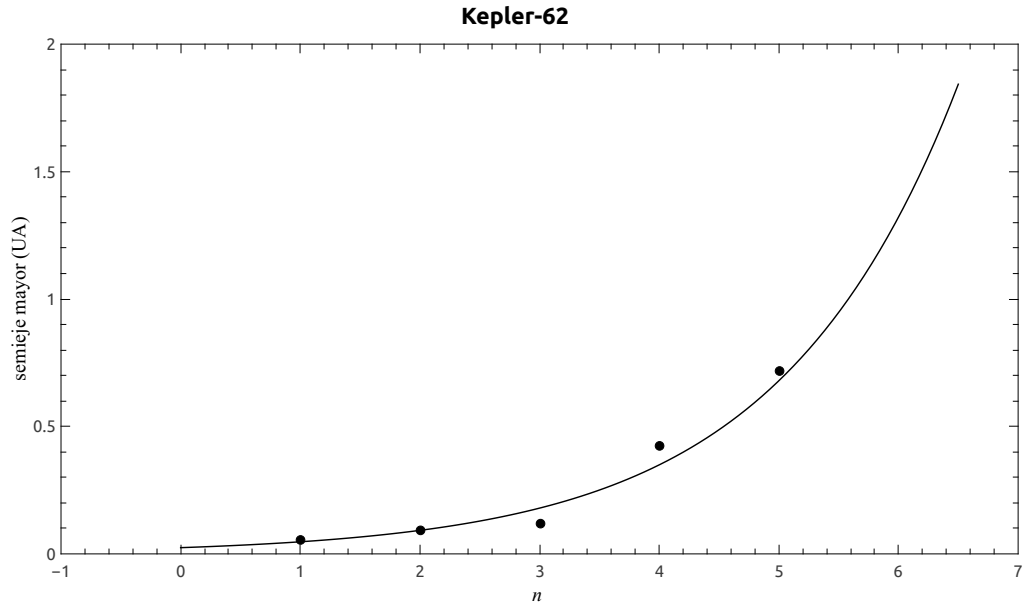


FIGURA 3.19. Ajuste exponencial a los semiejes mayores de los seis planetas observados para el sistema Kepler-62. Este ajuste muestra un índice de correlación de $R^2 = 0.9508$.

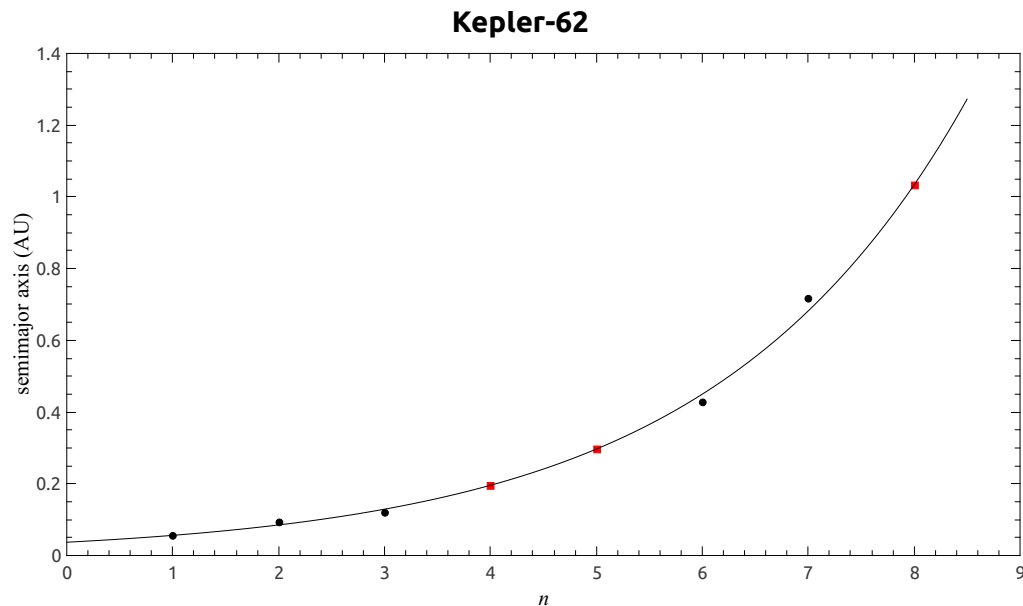


FIGURA 3.20. Ajuste a la relación TB exponencial para el sistema exoplanetario Kepler-62, tomando los valores de los semiejes mayores (UA) de los cuatro planetas observados y los dos posibles planetas. Los planetas observados están marcados con círculos, los planetas predichos por la relación TB en $a = 0.196$ UA ($n = 4$), $a = 0.297$ UA ($n = 5$) y $a = 1.033$ UA ($n = 8$) están marcados por cuadros.

3.2.5. Sistema exoplanetario Kepler-80

El telescopio espacial Kepler ha descubierto un sistema planetario muy compacto con cinco planetas orbitando a la estrella Kepler-80 (KOI-500), una estrella a 330 pc de la Tierra. Kepler-80 se encuentra, como algunos de los sistemas observados por Kepler, en la constelación de Lira. Se le ha calculado un radio estelar de $R = 0.738R_{\odot}$ y una temperatura efectiva $T_{eff} = 4250$ K [89].

Este es el sistema más compacto encontrado hasta la fecha, con los cinco planetas en una región de sólo 1/12 (0.1 UA) de la distancia entre la Tierra y el Sol. Los periodos orbitales estimados van de 1.0 a 9.5 días y los radios planetarios varían entre 1.3 a 2.6 radios terrestres [89] [79].

En este sistema planetario no se ha podido determinar la masa de la estrella Kepler-80, y solamente se han publicado los periodos orbitales de los 5 planetas anunciados. Debido a esto se hará el ajuste a los 5 periodos observados y se ajustará una relación de la forma $p = a_0 \times e^{bn}$. Esta sería una versión de la relación TB para periodos orbitales equivalente a la que hemos estudiado para los semiejes. El ajuste a los periodos de dicha relación exponencial muestra unos valores de $a_0 = 0.7891$ y $b = 0.5358$, con un coeficiente de correlación $R^2 = 0.9221$ (Figura 3.21).

La mejor relación TB exponencial que representa a esta configuración de periodos orbitales tiene dos vacantes, un coeficiente de correlación $R^2 = 0.9987$ y un valor de $\chi^2 = 0.0004$, para los valores $a_0 = 0.6762$ y $b = 0.3830$. La relación TB pronostica 2 planetas, entre los planetas conocidos, con periodos orbitales $p = 1.4546$ días ($n = 2$) y $p = 2.1334$ días ($n = 3$). Confiando en la capacidad predictiva de la relación podríamos extrapolar al orbital $n = 8$, donde podemos predecir la presencia de otro planeta con un periodo orbital $p = 14.48$ días. El error porcentual entre los valores que pronostica la relación TB exponencial respecto a los valores observados es menor que 5% (véase Tabla 3.28).

TABLA 3.26. Parámetros físicos para Kepler-80

Magnitud Visual Aparente	15
Distancia	330 pc
Radio estelar	$0.738R_{\odot}$
Metalicidad [Fe/H]	-0.56
Temperatura efectiva	4250 K

TABLA 3.27. Elementos orbitales de los planetas en el sistema Kepler-80

n	Planeta	Periodo [días]	Radio [R_{\oplus}]	Año de descubrimiento
1	<i>f</i>	0.99	1.30	2012
2	<i>d</i>	3.07	1.40	2012
3	<i>e</i>	4.64	1.50	2012
4	<i>b</i>	7.05	2.35	2012
5	<i>c</i>	9.52	2.58	2012

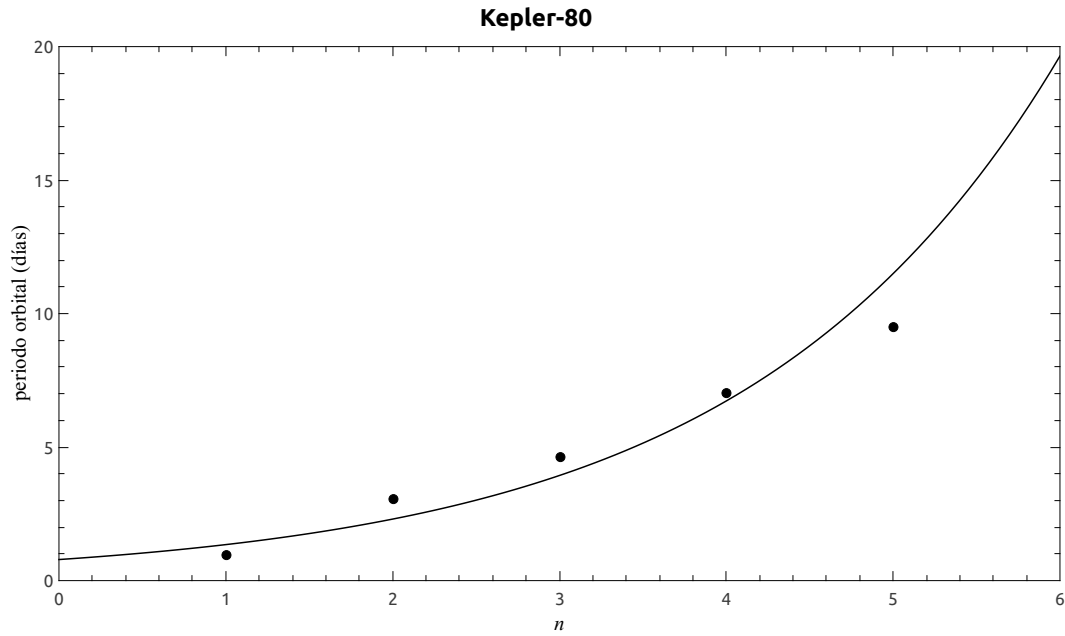


FIGURA 3.21. Ajuste exponencial a los periodos orbitales de los cinco planetas observados para el sistema Kepler-80, sus unidades están medidos en días. Este ajuste muestra un índice de correlación de $R^2 = 0.9221$.

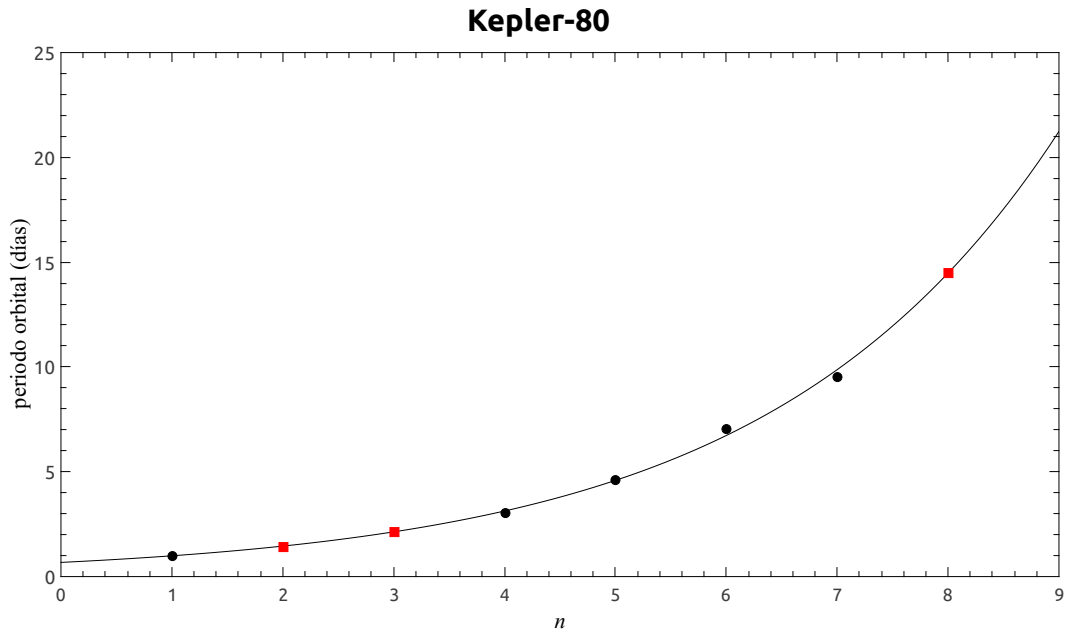


FIGURA 3.22. Ajuste a la relación TB exponencial para el sistema exoplanetario Kepler-80, tomando los valores de los periodos orbitales (días) de los 5 planetas observados y tres posibles planetas. Los planetas observados están marcados con círculos, los planetas predichos por la relación TB con periodos orbitales $p = 1.4546$ días ($n = 2$), $p = 2.1334$ días ($n = 3$) y la extrapolación en el orbital $n = 8$ ($p = 14.48$), están marcados por cuadros.

La Tabla 3.28 resume las principales características físicas y orbitales de los sistemas exoplanetarios con 5 planetas, así como los resultados obtenidos y predichos por la relación TB. En el sistema Kepler-80 solo se conocen sus periodos orbitales, sus datos también se muestran en esta tabla.

TABLA 3.28. Elementos orbitales observados y valores predichos por la relación TB para los sistemas exoplanetarios con 5 planetas

Sistema	n	Planeta	p [días]	a [UA]	a TB [UA]	Error %
55 Cancri	1	e	0.7365	0.0156	0.015	4.10
	2	-	-	-	0.040	—
	3	b	14.651	0.1134	0.107	5.857
	4	c	44.3446	0.2403	0.285	18.68
	5	f	260.7	0.781	0.762	2.45
	6	-	-	-	2.035	—
	7	d	5218.0	5.76	5.437	5.609
	8	-	-	-	14.524	—
Kepler-20	1	b	3.696	0.0454	0.042	8.466
	2	e	6.0985	0.0507	0.059	16.098
	3	c	10.8541	0.093	0.083	10.292
	4	f	19.5771	0.110	0.118	7.499
	5	-	-	-	0.168	—
	6	-	-	-	0.238	—
	7	d	77.6119	0.3453	0.337	2.49
	8	-	-	-	0.477	—
Kepler-33	1	b	5.668	0.068	0.070	2.68
	2	-	-	-	0.091	—
	3	c	13.176	0.119	0.120	0.56
	4	d	21.776	0.166	0.157	5.64
	5	e	31.784	0.214	0.206	3.80
	6	f	41.030	0.254	0.270	6.41
	7	-	-	-	0.354	—
Kepler-62	1	b	5.715	0.055	0.056	1.69
	2	c	12.442	0.093	0.085	8.25
	3	d	18.164	0.120	0.129	7.66
	4	-	-	-	0.196	—
	5	-	-	-	0.297	—
	6	e	122.39	0.427	0.450	5.36
	7	f	267.29	0.718	0.682	5.02
	8	-	-	-	1.033	—
Kepler-80	1	f	0.99	-	0.991	0.17
	2	-	-	-	1.455	—
	3	-	-	-	2.133	—
	4	d	3.07	-	3.129	1.92
	5	e	4.64	-	4.590	1.09
	6	b	7.05	-	6.731	4.52
	7	c	9.52	-	9.872	3.70
	8	-	-	-	14.479	—

Los semiejes en negritas corresponden a nuevos planetas predichos por la relación TB.

3.3. Sistemas exoplanetarios con 6 planetas

Hasta el momento solo se han descubierto 4 sistemas exoplanetarios con 6 planetas girando alrededor de su estrella primaria: GJ 667C, HD 40307, HD 10180 y Kepler-11. Los sistemas HD 40307 y HD 10180 se han descubierto mediante el método de velocidad radial, mientras que el sistema planetario de Kepler-11 se ha detectado utilizando la técnica de tránsito planetario. Hay que mencionar que en el sistema planetario HD 10180, cabe la posibilidad de la existencia de más planetas, posibilidad que se analizará en esta sección. Kepler-11 es el primer múltiple con 6 planetas en ser reportado por el equipo del telescopio espacial Kepler. HD 40307 es de interés astrobiológico ya que uno de sus planetas se encuentra en la zona de habitabilidad determinada para esa estrella [89].

3.3.1. Sistema exoplanetario Gliese 667C

En este sistema planetario sólo se conocían originalmente dos planetas (GJ 667C b y c); Anglada-Escudé y colaboradores [2] reportaron de datos de cuatro planetas más y un posible séptimo planeta más incierto. Gliese 667 es un sistema triple de estrellas en la constelación del Escorpión, cuyos componentes tienen masas más pequeñas que el Sol. El sistema se encuentra a una distancia de alrededor de 6.8 pc. de la Tierra [11] [5].

Los dos componentes más brillantes de este sistema, GJ 667A y GJ 667B, se encuentran en órbita a una distancia angular media de 1.81 segundos de arco con una alta excentricidad de 0.58. A la distancia estimada de este sistema, esto es equivalente a una separación física de alrededor de 12.6 UA. La órbita excéntrica de GJ 667AB tiene un periodo de aproximadamente 42.15 años y una inclinación de 128° con la línea de visión desde la Tierra. El tercer componente, GJ 667 C, gira alrededor de GJ 667AB a una separación angular de aproximadamente $30''$, lo que equivale a una separación mínima de 230 UA [103].

Gliese 667 C es una estrella roja de secuencia principal, de tipo espectral M1.5, con una luminosidad de $0.014 L_\odot$ y una temperatura efectiva relativamente fría de 3600 K. Es la estrella más pequeña y menos masiva del sistema Gliese 667. La magnitud aparente de este componente es 10.22, lo que implica una magnitud absoluta de aproximadamente 11.03 [103] [89].

TABLA 3.29. Parámetros físicos para GJ 667C

Magnitud Visual Aparente	10.22
Distancia	6.84 ± 0.4 pc
Tipo espectral	M1.5V
Luminosidad	$0.014 L_\odot$
Masa estelar	$0.33 M_\odot$
Metalicidad [Fe/H]	-0.55
Temperatura efectiva	3600 K
Edad	2×10^9 años

Tres planetas en la zona habitable se confirman como súper-Tierras. Estos son planetas más masivos que la Tierra, pero menos masivos que planetas como Urano o Neptuno. Esta es la primera vez que tres súper-Tierras han sido descubiertas orbitando en la zona habitable en el mismo sistema. Otros dos planetas no confirmados pueden existir en el sistema, aunque ninguno se considera para ser habitable.

En las estrellas como Gliese 667C que son más frías y menos brillantes que el Sol, la zona habitable se encuentra totalmente dentro de una órbita del tamaño de la de Mercurio, mucho más pequeña

de que para nuestro Sol. Es el primer ejemplo de un sistema en el que una estrella de tan poca masa alberga a varios planetas potencialmente rocosos en la zona habitable [41] [11].

El ajuste TB exponencial a los semiejes mayores de los 6 planetas observados y confirmados, no es muy preciso, con $a_0 = 0.0407$ y $b = 0.4260$, y un coeficiente de correlación $R^2 = 0.9573$ (Figura 3.23).

El mejor ajuste de la relación TB exponencial que reproduce la distribución orbital de los semiejes observados en este sistema tiene 3 vacantes, un coeficiente de correlación $R^2 = 0.9984$ y $\chi^2 = 0.0013$, con $a_0 = 0.0369$ y $b = 0.2979$. La diferencia entre los valores observados y los predichos por la relación TB tiene un error de menos del 5% (véase Tabla 3.37). Se predice la existencia de 3 planetas internos en $a = 0.0670$ UA ($n = 2$), $a = 0.0902$ UA ($n = 3$) y $a = 0.400$ UA ($n = 8$). Extrapolando también podría predecirse un planeta externo con un semieje mayor $a = 0.7258$ UA ($n = 10$) (véase Figura 3.24).

Anglada-Escudé y colaboradores [2] han mencionado que existe la posibilidad de un séptimo planeta en este sistema exoplanetario GJ667C h que de existir, tendría un semieje mayor $a = 0.0893$ UA. Se tiene que resaltar que uno de los planetas que predice la relación TB exponencial, en el orbital $n = 3$, le corresponde un semieje mayor $a = 0.0902$ UA (véase Tabla 3.37 y Figura 3.24). Este resultado muestra que el valor del semieje mayor de GJ667C h encaja con la relación TB exponencial, con un error del 1%. Debido a la controversia que aún existe en este planeta, solo podemos resaltar este buen resultado.

TABLA 3.30. Elementos orbitales de los planetas en el sistema GJ 667C

n	Planeta	a [UA]	p [días]	e	M_{seni} [M_{Jup}]	Año de descubrimiento
1	b	0.0504	7.199	0.09	0.01718	2009
		-	± 0.001	± 0.05	-	
2	c	0.1251	28.13	0.34	0.0134	2011
		-	± 0.03	± 0.1	-	
3	f	0.156	39.026	0.03	0.0085	2013
		$+0.014$ -0.017	± 0.2	$+0.16$ -0.03	$+0.0044$ -0.0038	
4	e	0.213	62.24	0.02	0.085	2013
		± 0.02	$+0.55$ -0.75	$+0.22$ -0.02	$+0.005$ -0.0044	
5	d	0.3035	106.4	0.68	0.0218	2012
		-	± 0.1	± 0.06	-	
6	g	0.549	256.22	0.08	0.0145	2013
		± 0.05	$+14$ -18	$+0.4$ -0.08	$+0.008$ -0.0072	

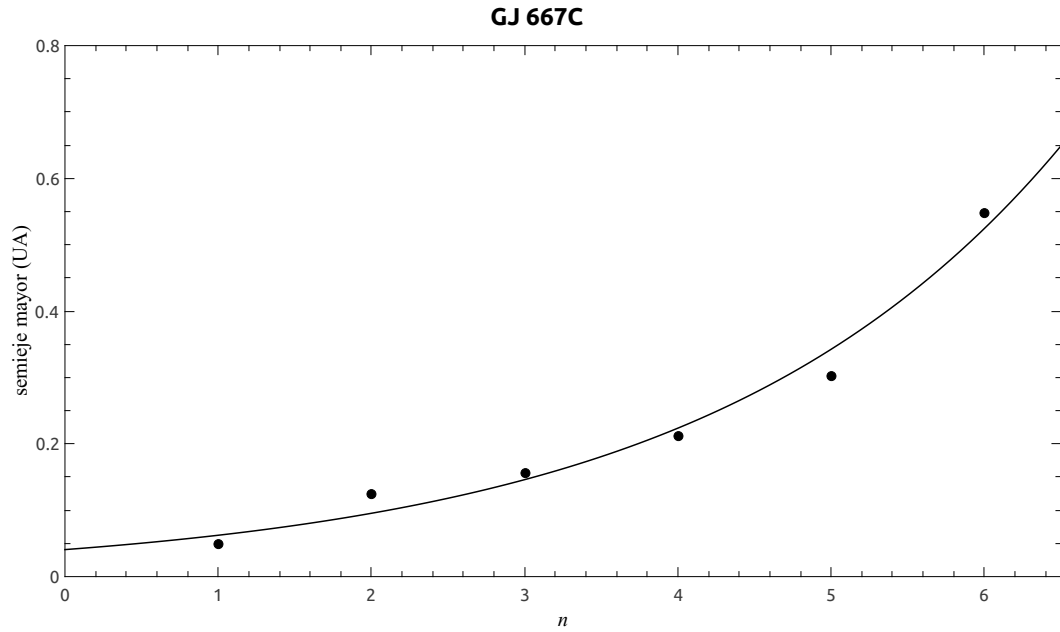


FIGURA 3.23. Ajuste exponencial a los semiejes mayores de los seis planetas observados para el sistema GJ 667C. Este ajuste muestra un índice de correlación de $R^2 = 0.9573$.

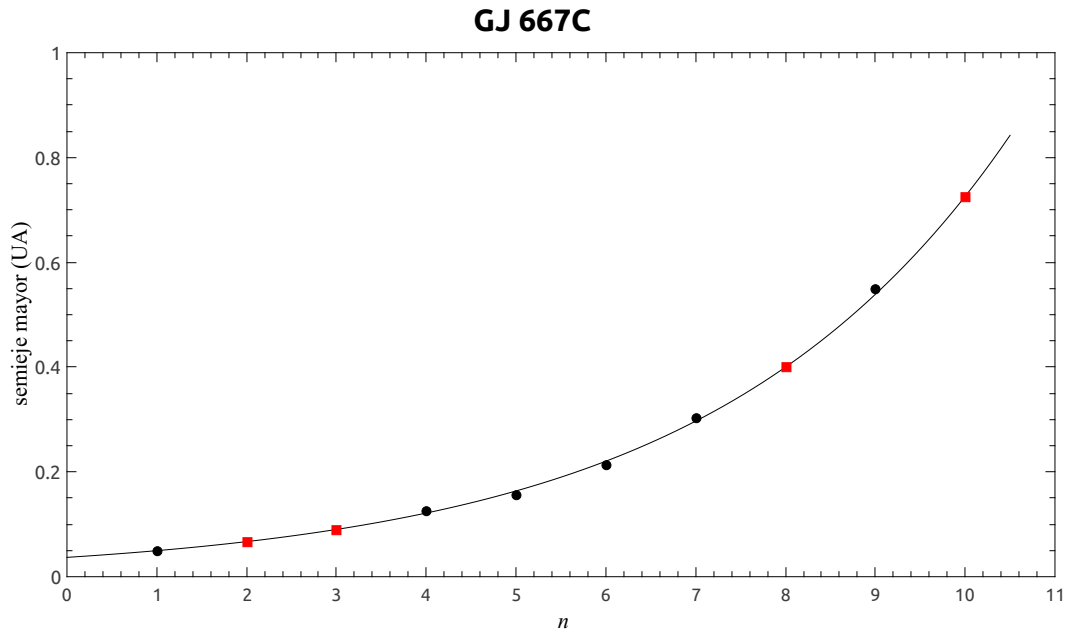


FIGURA 3.24. Ajuste de la relación TB exponencial para el sistema exoplanetario GJ 667C, tomando los valores de los semiejes mayores (UA) de los seis planetas observados y cuatro posibles planetas. Los planetas observados están marcados con círculos, los planetas predichos por la relación TB en $a = 0.0607$ UA ($n = 2$), $a = 0.0902$ UA ($n = 3$) y $a = 0.400$ UA ($n = 8$) y extrapolando un planeta externo en $a = 0.7258$ UA ($n = 10$) señalado con cuadrados. En el orbital $n = 3$ encaja con el semieje mayor $a = 0.08993$, del planeta en controversia GJ667C h, con un error del 1%.

3.3.2. Sistema exoplanetario HD 40307

El sistema exoplanetario HD 40307 consiste de 6 planetas girando alrededor de su estrella primaria. Se ha reportado que alberga 3 súper-Tierras y podría tener un planeta con condiciones de habitabilidad. HD 40307 es una estrella K2.5 perteneciente a la secuencia principal, localizada aproximadamente a 12.8 pc., en la constelación del Pictor, con una paralaje Hipparcos de 77.95 ± 0.53 mas. Se ha calculado que es un poco menos masiva que el Sol, con una masa $M = 0.77 \pm 0.05 M_{\odot}$. ; y menos luminosa, con $L = 0.23 L_{\odot}$. Es probable que HD 40307 tenga una edad similar a la del Sol (4.6×10^9 años), y es relativamente pobre en metales con $[\text{Fe}/\text{H}] = -0.31 \pm 0.03$ [89] [103]. Debido a que esta estrella carece de compañeros planetarios masivos, fue un blanco ideal para las mediciones de velocidad radial de alta precisión; dando como resultado la detección de planetas de baja masa.

TABLA 3.31. Parámetros físicos para HD 40307

Magnitud Visual Aparente	7.17
Paralaje Hipparcos	77.95 ± 0.53 mas
Distancia	12.8 ± 0.9 pc
Tipo espectral	K2.5V
Masa estelar	$0.77 \pm 0.05 M_{\odot}$
Luminosidad	$0.23 L_{\odot}$
Metalicidad $[\text{Fe}/\text{H}]$	-0.31 ± 0.03
Temperatura efectiva	4977 ± 59 K
Edad	4.5×10^9 años

TABLA 3.32. Elementos orbitales de los planetas en el sistema HD 40307

n	Planeta	a [UA]	p [días]	e	M_{seni} [M_{Jup}]	Año de descubrimiento
1	b	0.0468 ± 0.0024	4.3123 ± 0.0012	0.2 ± 0.16	0.0126 ± 0.025	2008
2	c	0.0799 ± 0.004	9.6184 ± 0.005	0.06 $^{+0.11}_{-0.06}$	0.0208 ± 0.0035	2008
3	d	0.1321 ± 0.0034	20.432 ± 0.024	0.07 $^{+0.11}_{-0.07}$	0.0299 ± 0.0022	2008
4	e	0.1886 $^{+0.0083}_{-0.0104}$	34.62 ± 0.21	0.15 ± 0.15	0.011 ± 0.0044	2012
5	f	0.247 ± 0.014	51.76 ± 0.5	0.02 $^{+0.2}_{-0.02}$	0.0164 ± 0.005	2012
6	g	0.6 ± 0.034	197.8 $^{+5.7}_{-9}$	0.29 ± 0.29	0.0233 ± 0.0082	2012

HD 40307 tiene 6 planetas conocidos, tres descubiertos en 2008 y tres más en el 2010. Las masas de estos planetas son tipo terrestre, entre 3.5 y $7.5 M_{\oplus}$. A este tipo de planetas se les denomina súper-Tierras. HD 40307 g, es una super-Tierra que se encuentra en la zona habitable, con un periodo orbital $p = 200$ días. Este planeta podría ser capaz de albergar agua líquida en su superficie [66] [95].

El ajuste que se hace a los semiejes mayores de los 6 planetas observados (véase Tabla 3.32) no muestra una precisión buena a la relación exponencial, con un coeficiente de correlación $R^2 = 0.9753$, con $a_0 = 0.0298$ y $b = 0.4713$. En la Figura 3.26 se expone la relación TB exponencial

mejorada que representa a los semiejes mayores de este sistema exoplanetario con una vacante, con $a_0 = 0.0342$ y $b = 0.4115$, se muestra un coeficiente de correlación $R^2 = 0.992$ y $\chi^2 = 0.0057$. Esta relación TB predice un planeta -aún no descubierto- con un semieje mayor $a = 0.4039$ UA ($n = 6$). Si confiamos en el ajuste y extrapolamos, también se predice otro planeta en el orbital $n = 8$ con un semieje mayor $a = 0.92$ UA.

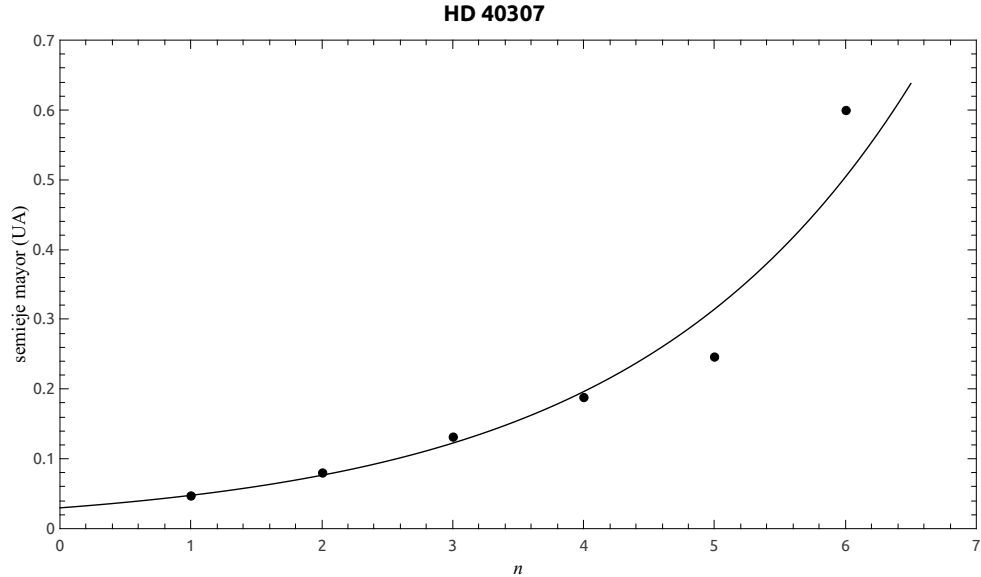


FIGURA 3.25. Ajuste exponencial a los semiejes mayores de los seis planetas observados para el sistema HD 40307. Este ajuste muestra un índice de correlación de $R^2 = 0.9753$.

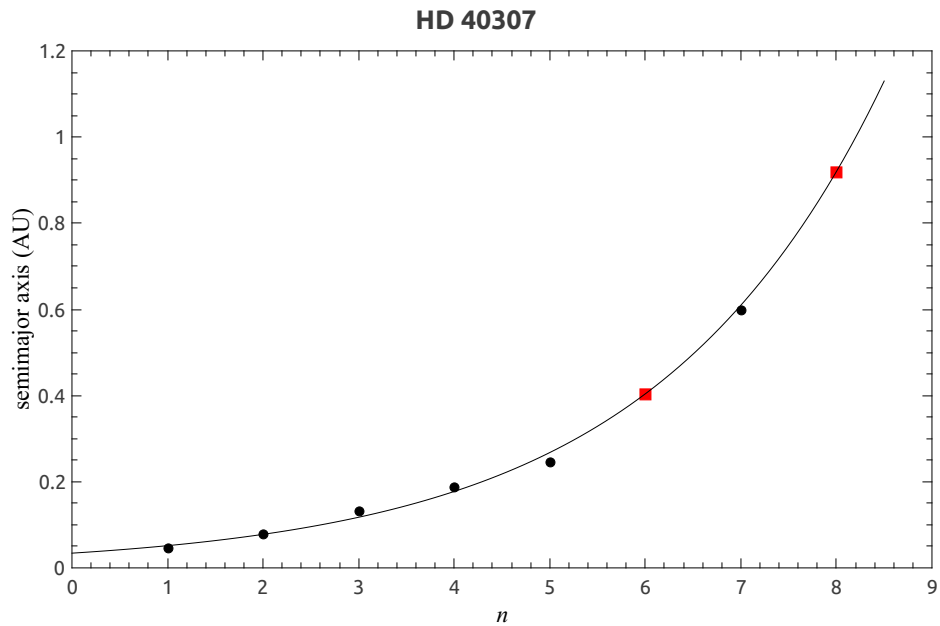


FIGURA 3.26. Ajuste de la relación TB exponencial para el sistema exoplanetario HD 40307, tomando los valores de los semiejes mayores (UA) de los cuatro planetas observados y el posible planeta. Los planetas observados están marcados con círculos, los planetas predichos por la relación TB en $a = 0.404$ UA ($n = 6$), $a = 0.92$ UA ($n = 8$) están marcados por cuadros.

3.3.3. Sistema exoplanetario HD 10180

Originalmente se confirmó que el sistema exoplanetario HD 10180 albergaba 6 planetas. En una publicación reciente se menciona que existe evidencia de la existencia de hasta 9 exoplanetas en este sistema [55] [94].

La estrella HD 10180 (HIP 7599, SAO 248411) se encuentra a una distancia de 39.4 pc, en la constelación de Hydra. Tiene un tipo espectral G1V, con una magnitud aparente de $V = 7.33$. Tiene una masa $M = 1.06 M_{\odot}$ y una metalicidad $[Fe/H] = 0.08$. HD 10180 tiene una edad de aproximadamente 4.3×10^9 años. Esta estrella tiene por lo menos 5 planetas extrasolares con masas semejantes a las de Neptuno. Todos los parámetros físicos de la estrella se resumen en la Tabla 3.33 [89] [55].

En este sistema exoplanetario se ha validado la existencia de 6 planetas; las órbitas de estos exoplanetas son casi circulares, y sus distancias a su estrella son pequeñas, con excepción de HD 10180g con una distancia de 1.42 UA y una excentricidad 0.19. Las masas de los planetas son del tipo Neptuno. Los semiejes mayores de los seis planetas originalmente reportados (*véase* Tabla 3.34), muestran un excelente ajuste a la relación TB exponencial, con $a_0 = 0.0263$, $b = 0.7905$, $R^2 = 0.993$ y un valor de $\chi^2 = 0.0135$. (Figura 3.27). En este caso, todos los valores de n parecen estar ocupados; cualquier planeta adicional en este sistema tendría que estar en $n > 6$. Este planeta podría situarse en $n = 7$ con un semieje mayor $a = 6.655$ UA (*véase* Tabla 3.38).

TABLA 3.33. Parámetros físicos para HD 10180

Magnitud Visual Aparente	7.33
Distancia	39.4 ± 1 pc
Tipo espectral	G1V
Masa estelar	$1.06 \pm 0.05 M_{\odot}$
Metalicidad [Fe/H]	0.08 ± 0.01
Temperatura efectiva	5911 ± 0.01 K
Edad	$4.3 \times 10^9 \pm 0.5$ años

TABLA 3.34. Elementos orbitales de los planetas en el sistema HD 10180

n	Planeta	a [UA]	p [días]	e	M_{seni} [M_{Jup}]	Año de descubrimiento
1	c	0.0641 $\pm 5 \times 10^{-4}$	5.75979 $\pm 9 \times 10^{-6}$	0.045 ± 0.026	0.041217	2010
2	d	0.1286 ± 0.002	16.3579 ± 0.039	0.088 ± 0.041	0.0369695	2010
3	e	0.2699 ± 0.0042	49.745 ± 0.022	0.026 ± 0.036	0.078973	2010
4	f	0.4929 ± 0.0078	122.76 ± 0.17	0.135	0.0751974	2010
5	g	1.422 ± 0.026	601.2 ± 8.1	0.19 ± 0.14	0.0673316	2010
6	h	3.4 ± 0.11	2222.0 ± 91	0.08 ± 0.07	0.202624	2010

Tuomi y colaboradores [94], argumentan la existencia de hasta 9 planetas en este sistema exoplanetario. En este trabajo reproducen y confirman la señal que se interpretaría como un posible planeta (HD 10180b) que Lovis y colegas [55] habían señalado pero que no podía confirmar debido a que

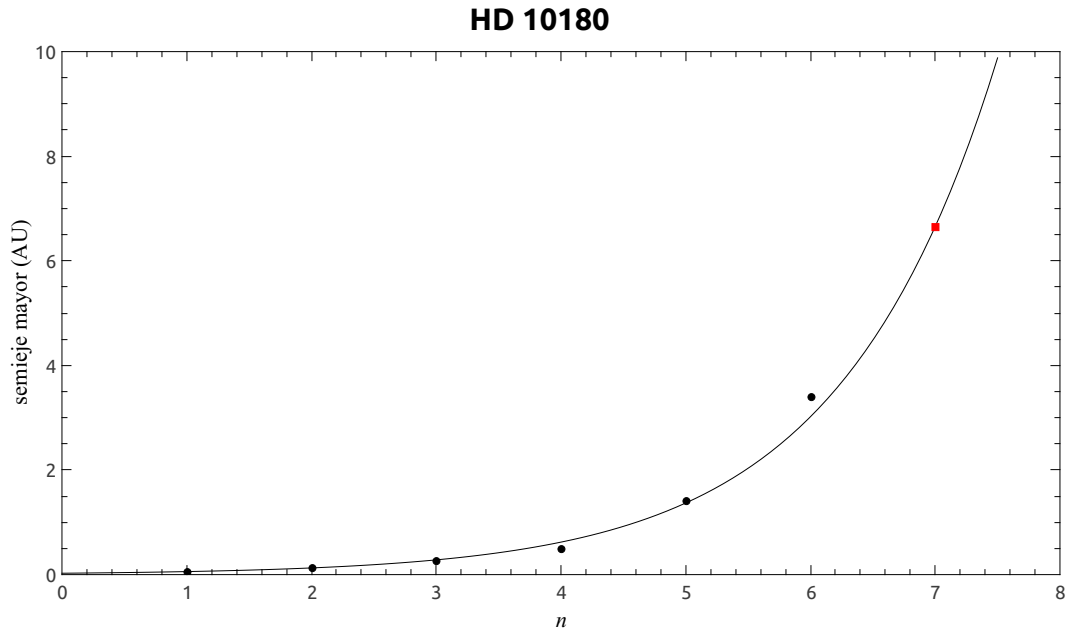


FIGURA 3.27. Ajuste exponencial a los semiejes mayores de los seis planetas observados para el sistema HD 10180. Este ajuste muestra un índice de correlación de $R^2 = 0.993$. Los planetas observados están marcados con círculos, el planeta predicho por la relación TB en $a = 6.655$ UA ($n = 7$) está marcado por un cuadro.

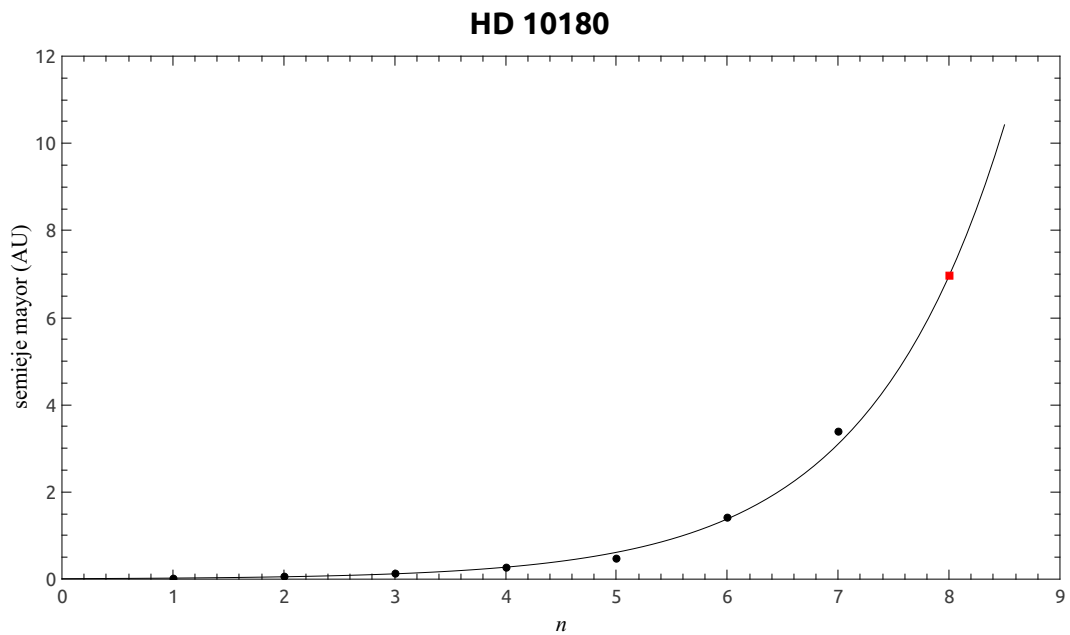


FIGURA 3.28. Ajuste de la relación TB exponencial a los semiejes mayores de los seis planetas observados y el planeta más interno confirmado por Tuomi (HD 10180b) del sistema exoplanetario HD 10180. Este ajuste muestra un índice de correlación de $R^2 = 0.9948$. Los planetas observados están marcados con círculos, el planeta exterior predicho por la relación TB en $a = 6.97$ UA ($n = 8$) está marcado por un cuadro rojo.

se necesitaba mayor procesamiento de datos. HD 10180b tiene un semieje mayor $a = 0.0222$ AU ($p = 0.17766$ días). Este posible exoplaneta se estima que tendría 1.4 masas terrestres. También anuncian la existencia de dos planetas (HD 10180i y HD 10180j), gracias a que encuentran sus respectivas señales, de manera estadísticamente significativa, con semiejes mayores $a = 0.0904$ UA ($p = 9.655$ días) y $a = 0.330$ UA ($p = 67.55$ días), respectivamente.

La relación TB exponencial tomando en cuenta los seis planetas confirmados por Lovis y el descubrimiento del planeta HD 10180b hecha por Tuomi, muestra un ajuste excepcional con un coeficiente de correlación $R^2 = 0.9948$, donde $a_0 = 0.0108$ y $b = 0.8085$. Con este ajuste se predice un planeta externo en $a = 6.97$ UA ($n = 8$) (véase Figura 3.28 y Tabla 3.38).

3.3.4. Sistema exoplanetario Kepler-11

El sistema exoplanetario Kepler-11 alberga seis planetas girando alrededor de su estrella primaria. Es el primer sistema planetario descubierto con seis planetas en tránsito [52] [51][89].

Kepler-11 (KOI-157, KIC 6541920) es una estrella similar al Sol en la constelación del Cisne, situado a 613 pc. de la Tierra. Es una estrella del tipo espectral GV, con una luminosidad $L = 1.13 L_{\odot}$. Se han estimado valores para su masa $M = 0.975 \pm 0.031 M_{\odot}$, su radio $R_{\star} = 1.193 \pm 0.115 R_{\odot}$, su temperatura efectiva $T_{eff} = 5666 \pm 60$ K, su velocidad de rotación proyectada $v_{sen(i)} = 3.86 \pm 0.85$ km/s y metalicidad $[Fe/H] = 0.002 \pm 0.040$. Se ha calculado una edad estelar de $9.7 \times 10^9 \pm 1.5$ años [103] [1] [52].

Este sistema planetario es uno de los sistemas más compactos y más planos hasta ahora descubiertos. Todos los planetas descubiertos son más grandes que la Tierra y aproximadamente del tamaño de Neptuno. Las órbitas de los planetas b - f cabrían fácilmente en el interior de la órbita de Mercurio; Kepler-11g estaría un poco fuera de ella.

A pesar de este empaquetamiento compacto de las órbitas, las integraciones dinámicas indican que el sistema puede ser estable. Ninguno de los planetas en este sistema está en resonancia orbital. Sin embargo, los periodos de Kepler-11b y Kepler-11c están cerca de una relación de 5:4.

TABLA 3.35. Parámetros físicos para HD Kepler-11

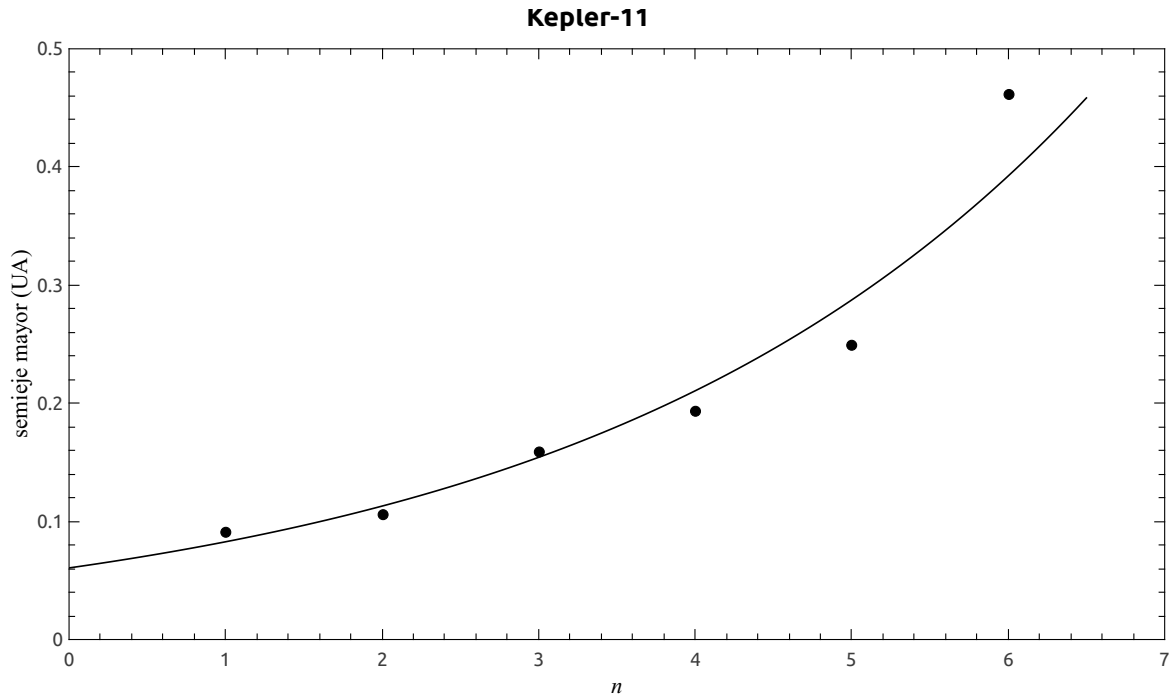
Magnitud Visual Aparente	13.7
Distancia	613 pc
Tipo espectral	GV
Edad	$9.7 \times 10^9 \pm 1.5$ años
Masa estelar	$0.975 \pm 0.031 M_{\odot}$
Luminosidad	$1.13 L_{\odot}$
Radio estelar	$1.193 \pm 0.115 R_{\odot}$
Metalicidad [Fe/H]	0.002 ± 0.040
Temperatura efectiva	5666 ± 60 K

El ajuste de la relación TB exponencial a los planetas observados en este sistema no reproduce la distribución orbital de dichos planetas; se obtiene $a_0 = 0.0606$, $b = 0.3113$, y un coeficiente de correlación $R^2 = 0.9621$ (Figura 3.29).

Con la relación TB exponencial mejorada, con una vacante, que representa a los semiejes mayores de estos seis planetas se obtiene $a_0 = 0.0661$ y $b = 0.2738$, con $R^2 = 0.9923$ y un valor $\chi^2 = 0.0023$ (véase Figura 3.30). El ajuste predice la existencia de un planeta en la órbita $n = 6$ con un semieje mayor $a = 0.342$ UA y un período de unos 75 días. Extrapolando el ajuste, podemos postular la existencia de otro planeta en $a = 0.591$ UA (con un período de 158 días) correspondiente a la órbita $n = 8$. En promedio, los valores obtenidos a partir de los ajustes para este sistema tienen errores de menos de 8%.

TABLA 3.36. Elementos orbitales de los planetas en el sistema Kepler-11

n	Planeta	a [UA]	p [días]	e	Masa [M_{\oplus}]	Año de descubrimiento
1	b	0.091 ± 0.003	10.3038 ± 0.00016	-	1.9 $+1.4$ -1	2011
2	c	0.106 ± 0.004	13.025 $\pm 8 \times 10^{-5}$	-	2.9 $+2.9$ -1.6	2011
3	d	0.159 ± 0.005	22.6872 ± 0.00021	-	7.3 $+0.8$ -1.5	2011
4	e	0.194 ± 0.007	31.9959 ± 0.00028	-	8.40025 $+1.9$ -2.5	2011
5	f	0.25 ± 0.009	46.6888 ± 0.00074	-	2.0 $+0.8$ -0.9	2011
6	g	0.462 ± 0.016	118.378 ± 0.00112	-	301.938 $+0.0$ -0.95	2013

FIGURA 3.29. Ajuste exponencial a los semiejes mayores de los seis planetas observados para el sistema Kepler-11. Este ajuste muestra un índice de correlación de $R^2 = 0.9621$.

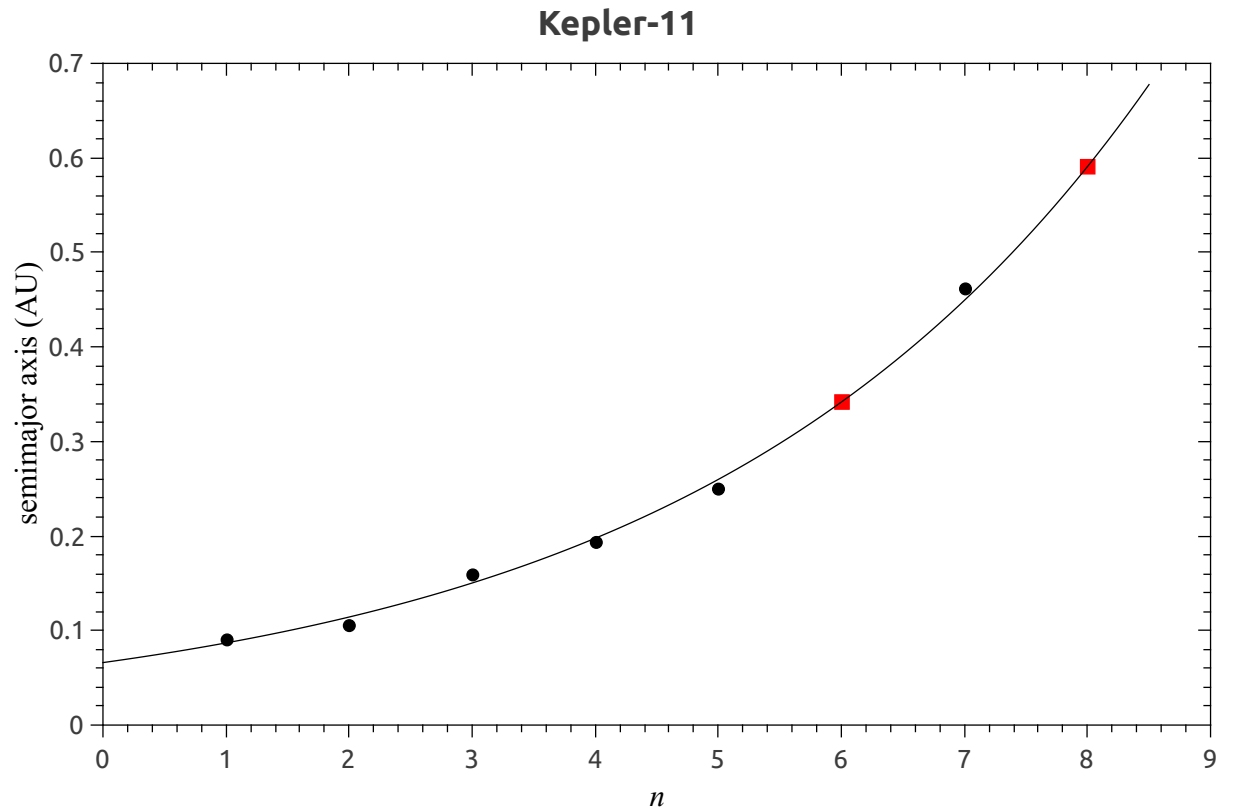


FIGURA 3.30. Ajuste de la relación TB exponencial a los semiejes mayores de los seis planetas observados para el sistema Kepler-11. Este ajuste muestra un índice de correlación de $R^2 = 0.9923$. Los planetas observados están marcados con círculos, los planetas predichos por la relación TB en $a = 0.342$ UA ($n = 6$) y $a = 0.591$ ($n = 8$) están marcados por cuadros.

La Tabla 3.37 resume las principales características físicas y orbitales de los sistemas exoplanetarios con 6 planetas, así como los resultados obtenidos y predichos por la relación TB. Debido a que en el sistema exoplanetario HD 10180 se hacen dos diferentes predicciones; sus resultados se mostrarán en la Tabla 3.38.

TABLA 3.37. Elementos orbitales observados y valores predichos por la relación TB para los sistemas exoplanetarios con 6 planetas

Sistema	n	Planeta	p [días]	a [UA]	a TB [UA]	Error %
GJ 667C	1	b	7.199	0.050	0.0497	1.38
	2	-	-	-	0.067	-
	3	-	-	-	0.090	-
	4	c	28.130	0.125	0.122	2.89
	5	f	39.026	0.156	0.164	4.90
	6	e	62.240	0.213	0.220	3.49
	7	d	106.40	0.304	0.297	2.16
	8	-	-	-	0.400	-
	9	g	256.20	0.549	0.539	1.86
	10	-	-	-	0.726	-
HD 40307	1	b	4.312	0.047	0.052	9.32
	2	c	9.618	0.080	0.078	2.59
	3	d	20.432	0.132	0.117	12.39
	4	e	34.620	0.189	0.177	6.33
	5	f	51.760	0.247	0.268	7.72
	6	-	-	-	0.404	-
	7	g	197.80	0.600	0.610	1.57
	8	-	-	-	0.920	-
Kepler-11	1	b	10.3037	0.091	0.087	4.49
	2	c	13.025	0.106	0.114	7.82
	3	d	22.687	0.159	0.150	5.48
	4	e	31.996	0.194	0.198	1.87
	5	f	46.688	0.250	0.260	3.95
	6	-	-	-	0.342	-
	7	g	118.38	0.462	0.449	2.74
	8	-	-	-	0.591	-

Los semiejes en negritas corresponden a nuevos planetas predichos por la relación TB.

TABLA 3.38. Elementos orbitales observados y valores predichos por la relación TB para el sistema exoplanetario HD 10180

n	Planeta	a [UA]	a TB ¹ [UA]	Error %	n	Planeta	a [UA]	a TB ² [UA]	Error %
1	c	0.064	0.058	9.55	1	b^*	0.022	0.024	9.19
2	d	0.129	0.128	0.61	2	c	0.064	0.054	15.12
3	e	0.270	0.282	4.40	3	d	0.129	0.122	5.03
4	f	0.493	0.621	26.02	4	e	0.270	0.274	1.56
5	g	1.422	1.369	3.70	5	f	0.493	0.615	24.82
6	h	3.400	3.019	11.22	6	g	1.422	1.381	2.88
7	-	-	6.655	-	7	h	3.400	3.100	8.83
					8	-	-	6.97	-

*Planetas cuya afirmación de su existencia continua en controversia.

¹ Valores predichos por la relación TB teniendo en cuenta los seis planetas confirmados.

² Valores predichos por la relación TB considerando el semieje mayor del planeta más interno (HD 10180b), planeta cuya existencia corrobora Tuomi.

3.4. Sistemas exoplanetarios con 7 planetas

3.4.1. Sistema exoplanetario Kepler-90

El recientemente descubierto sistema exoplanetario Kepler-90 alberga 7 planetas confirmados, siendo el sistema planetario con mayor número de planetas. Como todos los planetas denominados Kepler, fueron descubiertos mediante el método de tránsito planetario. El catálogo de entrada de la misión Kepler (con sus siglas en inglés, KIC) proporciona estimaciones de los parámetros estelares (T_{eff} , $\log(g)$, $[Fe/H]$, R_* , tipo espectral) de las estrellas en el campo de Kepler. La estrella Kepler-90 (KOI-351) se encuentra a una distancia de 780 ± 100 pc, es un poco más grande y más masiva que el Sol. Tiene un radio de $R = 1.14 \pm 0.1 R_{\odot}$, una masa $M = 1.13 \pm 0.1 M_{\odot}$ y luminosidad $L = 1.60 L_{\odot}$. También se ha calculado que tiene una temperatura efectiva $T_{eff} = 5930$ K y una metalicidad $[Fe/H] = -0.17$ [1] [88] [18].

TABLA 3.39. Parámetros físicos para HD Kepler-90

Magnitud Visual Aparente	14
Distancia	780 ± 100 pc
Masa estelar	$1.13 \pm 0.1 M_{\odot}$
Radio estelar	$1.14 \pm 0.15 R_{\odot}$
Luminosidad	$1.60 \pm 0.5 L_{\odot}$
Metalicidad $[Fe/H]$	-0.17 ± 0.21
Temperatura efectiva	5930 ± 320 K

Este es un sistema donde todos los planetas están dentro de una distancia orbital de 1 UA. Se muestran ser planetas pequeños con radios que varían de $1.3 R_{\oplus}$ a $11.3 R_{\oplus}$. Los dos planetas más internos son tamaño terrestre. El planeta más interno tiene un $R = 1.02 R_{\oplus}$ y el siguiente $R = 1.18 R_{\oplus}$. Se supone que ambos son rocosos, ya que son muy pequeños. Dichos planetas orbitan a la estrella en tan sólo 7 días y 9 días, respectivamente [88] [89].

TABLA 3.40. Elementos orbitales de los planetas en el sistema Kepler-90

n	Planeta	a [UA]	p [días]	e	Radio [R_{\oplus}]	Año de descubrimiento
1	b	0.074 ± 0.016	7.00815 $\pm 1.9 \times 10^{-05}$	-	1.31145 ± 0.168135	2013
2	c	0.089 ± 0.012	8.71937 $\pm 2.7 \times 10^{-5}$	-	1.18815 ± 0.145717	2013
3	d	0.32 ± 0.05	59.7367 ± 0.00038	-	2.88071 ± 0.302642	2013
4	e	0.42 ± 0.06	91.9391 ± 0.00073	-	2.66774 ± 0.291433	2013
5	f	0.48 ± 0.09	124.914 ± 0.0019	-	2.89192 ± 0.526822	2013
6	g	0.71 ± 0.08	210.607 ± 0.00043	-	8.12651 ± 0.807047	2013
7	h	1.01 ± 0.11	331.601 ± 0.00037	-	11.321 ± 1.00881	2013

Haciendo el ajuste exponencial a los 7 planetas observados en este sistema exoplanetario, se obtiene $a_0 = 0.0535$ y $b = 0.4428$, con un coeficiente de correlación $R^2 = 0.9191$ (véase Figura 3.31). Es evidente que el ajuste puede mejorarse.

Con la relación TB exponencial que mejor representa fielmente a los semiejes mayores de este sistema Kepler-90 y que incluye 3 vacantes, se obtiene $a_0 = 0.05306$ y $b = 0.28972$ con un coeficiente de correlación $R^2 = 0.9955$ y un valor de $\chi^2 = 0.0038$ (Figura 3.32). Esta relación hace la predicción de tres planetas internos en los semiejes $a = 0.127$ UA ($n = 3$), $a = 0.169$ UA ($n = 4$) y $a = 0.226$ UA ($n = 5$). Si extrapolamos podría haber, uno más en $a = 1.285$ UA ($n = 11$). Los valores que se predicen en la relación TB se sintetizan en la Tabla 3.41. El error porcentual entre los valores observados y predichos es menor que 13%.

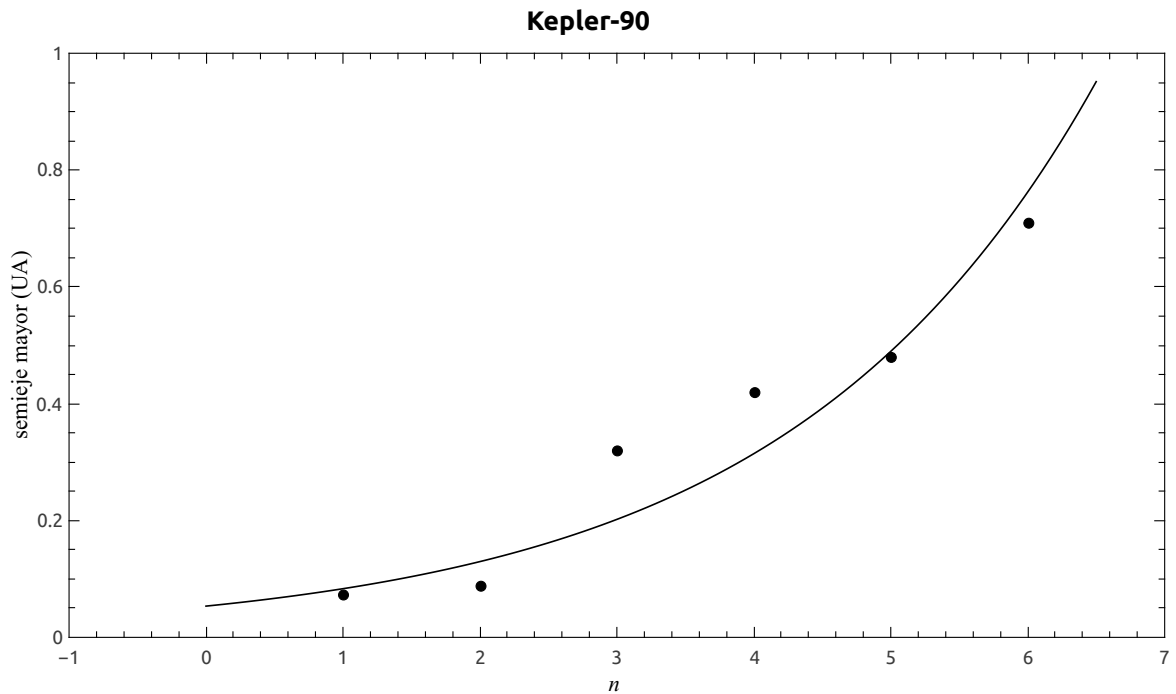


FIGURA 3.31. Ajuste exponencial a los semiejes mayores de los seis planetas observados para el sistema Kepler-90. Este ajuste muestra un índice de correlación de $R^2 = 0.9191$.

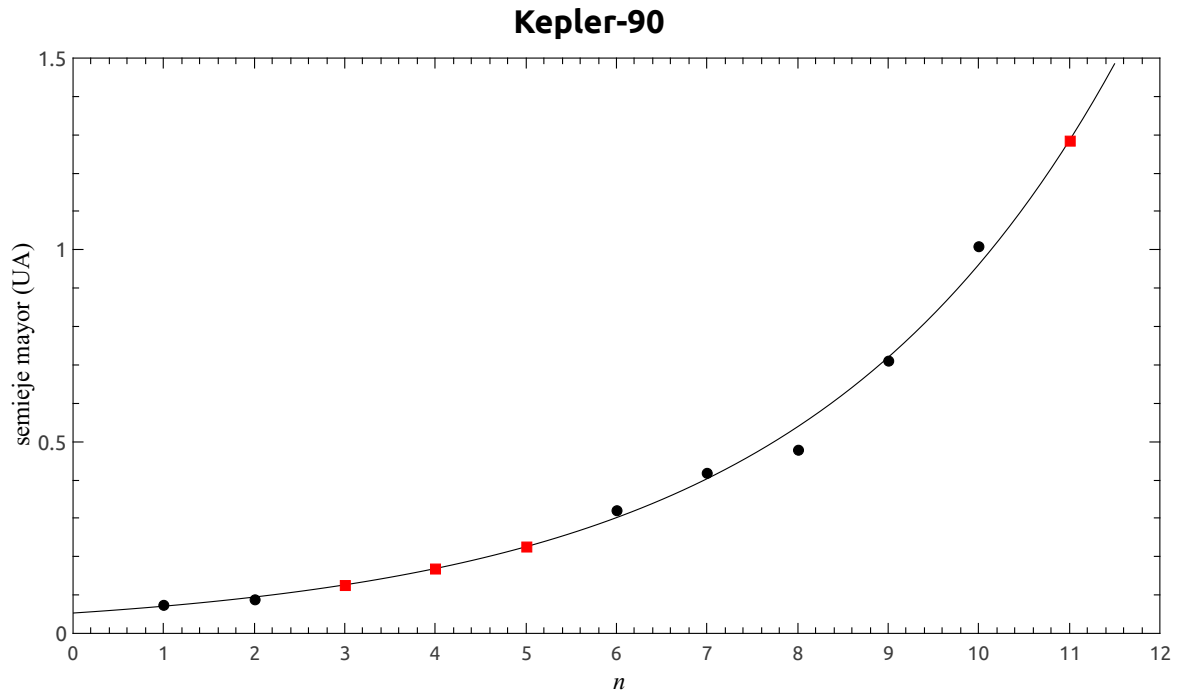


FIGURA 3.32. Ajuste de la relación TB exponencial a los semiejes mayores de los seis planetas observados para el sistema Kepler-90. Este ajuste muestra un índice de correlación de $R^2 = 0.9955$. Los planetas observados están marcados con círculos, los planetas predichos por la relación TB con semiejes mayores $a = 0.127$ UA ($n = 3$), $a = 0.169$ UA ($n = 4$), $a = 0.226$ UA ($n = 5$) y la extrapolación en $a = 1.285$ UA ($n = 11$) están marcados por cuadros.

TABLA 3.41. Elementos orbitales observados y valores predichos por la relación TB para el sistema exoplanetario Kepler-90

n	Planeta	p [días]	a [UA]	a TB [UA]	Error %
1	b	7.008	0.074	0.071	4.20
2	c	8.720	0.089	0.095	6.42
3	-	-	-	0.127	-
4	-	-	-	0.169	-
5	-	-	-	0.226	-
6	d	59.737	0.320	0.302	5.70
7	e	91.939	0.420	0.403	3.40
8	f	124.914	0.480	0.539	12.23
9	g	210.607	0.710	0.720	1.37
10	h	331.601	1.01	0.962	4.79
11	-	-	-	1.285	-

Discusión y Conclusiones

Los resultados que hemos obtenido demuestran que los 18 sistemas exoplanetarios que albergan 4 o más planetas obedecen una relación tipo Titius-Bode en su forma exponencial. Esto sugiere que la relación TB exponencial podría ser una característica bastante universal de los sistemas planetarios, y plantea de nuevo la cuestión de su origen.

Los dos parámetros que entran en la formulación exponencial usada aquí caracterizan dos aspectos diferentes de los sistemas. a_0 es esencialmente una medida de la compactibilidad global del sistema planetario, es una medida de qué tan cerca de la estrella está el primer planeta; b caracteriza la separación (en unidades de a_0) entre los planetas sucesivos en el sistema (*véase* Tabla 4.1).

Los valores de b reportados aquí se sitúan en el intervalo de 0.22 – 1.20. Es interesante observar que son bastante similares para todos los sistemas exoplanetarios, así como para el Sistema Solar ($b = 0.56$). No encontramos ninguna relación entre el valor de b y las características intrínsecas como: metalicidad, masa estelar, masa planetaria, tipo espectral y luminosidad estelar, de los sistemas considerados. Esto parece sugerir que el origen de la relación TB exponencial no está relacionada con los mecanismos de formación de los sistemas, sino puede ser más bien con su posterior evolución dinámica.

El estudio de sistemas extrasolares se ha expandido de una forma muy rápida. Conforme avanzan tecnológicamente los métodos de detección, las observaciones son más precisas dando como resultado correcciones a los elementos orbitales de los planetas en intervalos cortos de tiempo. Esto da lugar a cambios en los elementos orbitales, como en los casos de 55 Cancri e y Gliese 581d. Inicialmente en el 2004, el semieje mayor de 55 Cancri e se reportó a 0.038 UA pero Dawson y Fabricki [23] hicieron una corrección a este semieje, dando un valor de 0.0262 UA. En el caso de Gliese 581 d, Mayor y colaboradores [65] hicieron la corrección al semieje mayor, y dan un valor corregido de 0.22 UA. Hemos utilizado todas las correcciones y los valores actuales a los semiejes mayores para los ajustes de la relación TB exponencial.

Se analizaron 8 sistemas que albergan 4 exoplanetas, 5 sistemas con 5 exoplanetas, 4 sistemas con 6 exoplanetas y un sistema con 7 exoplanetas. Los resultados muestran que en 4 sistemas exoplanetarios (HR 8799, KOI-94, KOI-730 y HD 10180) no se obtienen vacantes en las cuales cabría la posibilidad de planetas aún no descubiertos. También se encontraron 6 sistemas exoplanetarios (Gliese 676A, v And, μ Arae, Kepler-33, HD 40307 y Kepler-11) con una vacante, que podría indicar un planeta aún por descubrir entre los planetas conocidos, 6 sistemas (Gliese 581, Gliese 876, 55 Cancri, Kepler-20, Kepler-62 y Kepler-80) con dos vacantes, correspondiendo a dos posibles planetas aún no descubiertos, y dos sistemas (Gliese 667C y Kepler-90) con 3 vacantes, esto es 3 posibles planetas aún no descubiertos. Esto da como resultado la predicción de un total de 31 planetas aún por descubrir; los semiejes mayores de estos planetas se listan en las Tablas 3.17, 3.27 y 3.37.

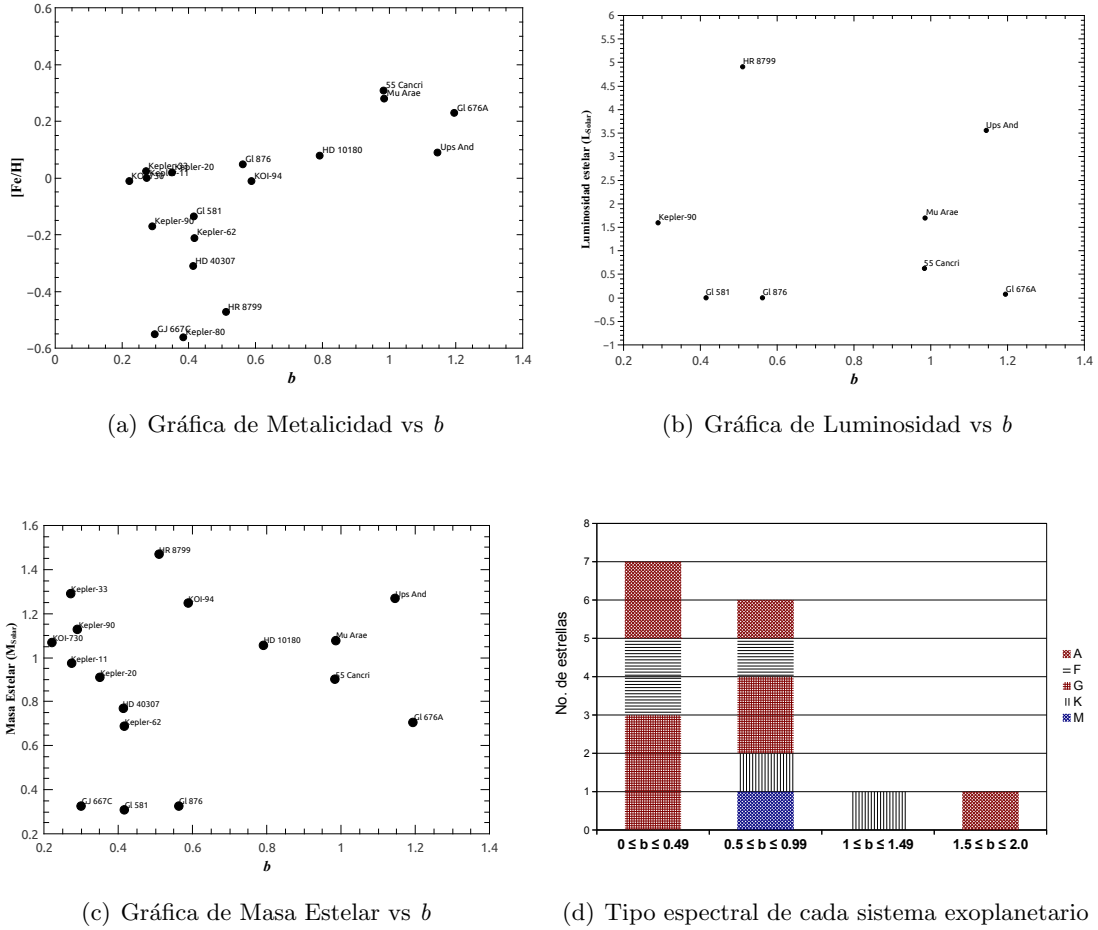


FIGURA 4.1. Estas cuatro figuras muestran que no existe una relación clara en los parámetros físicos de la estrella primaria y constante b de la relación TB.

Los resultados resaltan que la relación TB exponencial se cumple para todos los sistemas exoplanetarios con 4 planetas o más; si se acepta la posibilidad de planetas aún no descubiertos en algunos sistemas.

Todos los ajustes aplicados a los sistemas exoplanetarios muestran errores porcentuales desde 0.17% hasta 28% entre los valores de los semiejes observados y los predichos por la relación TB. μ Arae y v Andromeda muestran los peores ajustes, presentando errores porcentuales de hasta un 28%. Kepler-80 y Kepler-33 se exponen como los mejores ejemplos de la relación TB exponencial, ya que muestran errores porcentuales no mayores al 5.6%.

A lo largo del análisis se ha mencionado que algunos de los planetas de los sistemas planetarios que se estudiaron se encuentran en configuraciones resonantes, por ejemplo: Kepler-33b y Kepler-33c (7:3), Kepler-33c y Kepler-33d (5:3), v And e y v And d (3:1), μ Arae d y μ Arae b (2:1). Incluso resonancias tan peculiares como “la resonancia de Laplace” que ocurre en los sistemas exoplanetarios HR 8799 y Gliese 876. El sistema KOI-730 presenta una resonancia 3:4:6:8 entre los períodos de los cuatro planetas conocidos. Los sistemas exoplanetarios HR 8799, KOI-730 y Kepler-33 que presentan estas resonancias se encuentran entre los mejores ajustes de la relación TB exponencial. Esto se resalta en el hecho que HR 8799 tiene un coeficiente de correlación $R^2 = 0.9941$, una $\chi^2 = 0.0019$ y no muestra ninguna vacante. KOI-730 muestra un coeficiente $R^2 = 0.9953$, un valor de $\chi^2 = 0.0019$ y tampoco presenta vacantes. Por último el sistema exoplanetario Gliese 876 exhibe un coeficiente de correlación $R^2 = 0.9960$, un valor de $\chi^2 = 0.0045$ y con una vacante. Esta situación, en la cual se encuentran resonancias en los sistemas exoplanetarios coincidiendo con la

mejor representación de la relación TB, se repite con la aplicación de la relación TB a los satélites de Júpiter (Io, Europa, Ganímedes y Calisto). Estos satélites también muestran la resonancia de “Laplace” y el ajuste de la relación TB aplicada a dichos satélites de Júpiter presenta un coeficiente de $R^2 = 0.997$ y sin vacantes.

Para algunos de los sistemas estudiados existen trabajos que encuentran o justifican por diferentes análisis dinámicos configuraciones orbitales en las que se cumple la relación TB exponencial. Un ejemplo es el caso del sistema planetario HR 8799, para el cual Gozdziewski K. y Migaszewski C. [39] muestran que la estabilidad se da solo si no existe ningún planeta entre los planetas conocidos, tal como lo predice la relación TB. Para el sistema exoplanetario KOI-94, Weiss y colaboradores [102] realiza un análisis de estabilidad planetaria. En sus resultados encuentra que no pueden existir más planetas entre los planetas conocidos, como ocurre en HR 8799; de igual manera, la relación TB no predice ningún planeta entre los planetas conocidos del sistema KOI-94.

TABLA 4.1. Parámetros de la relación TB para todos sistemas exoplanetarios.

	Sistema	No. planetas	a_0	b	R^2	χ^2	No. vacantes*
1	Gliese 581	4	0.0189	0.4145	0.9933	0.1009	2
2	Gliese 676A	4	0.0144	1.1936	0.9958	0.0150	1
3	Gliese 876	4	0.0124	0.5612	0.9960	0.0045	2
4	HR 8799	4	9.1368	0.5099	0.9941	0.0019	0
5	KOI-94	4	0.0288	0.5866	0.9970	0.01326	0
6	KOI-730	4	0.0605	0.2204	0.9953	0.00028	0
7	ν And	4	0.0221	1.1438	0.9852	0.04294	1
8	μ Arae	4	0.0367	0.9847	0.9847	0.03290	1
9	55 Cancri	5	0.0056	0.9832	0.9980	0.0077	2
10	Kepler-20	5	0.0293	0.3488	0.9818	0.0095	2
11	Kepler-33	5	0.0530	0.2712	0.9914	0.0018	1
12	Kepler-62	5	0.0371	0.4159	0.9960	0.0037	2
13	Kepler-80	5	0.6762	0.3830	0.9987	0.0004	2
14	Gliese 667C	6	0.0369	0.2979	0.9984	0.0013	3
15	HD 40307	6	0.0342	0.4115	0.9912	0.0057	1
16	HD 10180	6	0.0263	0.7905	0.9926	0.0135	0
17	Kepler-11	6	0.0661	0.2738	0.9923	0.0023	1
18	Kepler-90	7	0.0531	0.2897	0.9955	0.0038	3
19	Sistema Solar	9	0.1912	0.5594	0.9920	0.0147	0

*Se refiere al número de vacantes entre los planetas conocidos de cada sistema

En algunos sistemas exoplanetarios nuestro análisis requiere de vacantes en diferentes distancias orbitales, con lo cual se hipotetiza la existencia de planetas aún no detectados. En la Sección 2, se analizaron y resumieron algunos trabajos que se pueden vincular a la relación TB. En particular se estudiaron los trabajos de Barnes y Raymond (2004), Raymond y Barnes (2005) y Barnes y Greenberg (2006) ; estos autores se enfocaron al análisis dinámico de ciertos sistemas exoplanetarios. En Barnes y Raymond (2004) se estudiaron los sistemas exoplanetarios HD 168443, HD 74156, HD 37124, HD 38529 y 55 Cancri; con el propósito de encontrar regiones de estabilidad. Para ello, se colocan partículas sin masa entre los planetas conocidos de estos sistemas. Solamente encontraron regiones estables en los sistemas: HD 74156, HD 37124, HD 38529 y 55 Cancri. Estos

sistemas posteriormente se analizaron por Raymond y Barnes (2005) para encontrar regiones de estabilidad, pero ahora con partículas con masa de tipo Neptuno.

El propósito de los trabajos de Raymond y Barnes, es el de encontrar regiones estables con la finalidad de comprobar la hipótesis de que los sistemas planetarios son estrechamente compactos. Este modelo asume que el proceso de formación planetaria es eficiente, en el sentido de que se forman todos los planetas posibles en los discos circunestelares. En este escenario el polvo se condensa, en cuerpos cada vez más grandes, y los protoplanetas se perturban entre ellos, conforme se incrementa su masa. A medida que los protoplanetas se vuelven más masivos adquieren la posibilidad de empujar a otros planetas hacia posiciones favorables (dinámicamente estables) o, si las perturbaciones se vuelven muy grandes, de expulsarlos por completo del sistema [8] [80].

Raymond y Barnes [80] encuentran regiones de estabilidad en donde pueden existir planetas, los cuales por estar debajo del límite observacional no se han podido detectar. Encontraron regiones de estabilidad en los cuatro sistemas analizados. En HD 38529, la región estable se encuentra en $a = 0.7$ UA y $e = 0.07$. HD 741256 las regiones estables que se encontraron fueron: (1.0 UA, $e = 0.1$) y (1.45 UA, $e = 0.12$); para HD 37124 fueron: (0.91 UA, $e = 0.11$) y (0.95 UA, $e = 0.09$). De los sistemas exoplanetarios estudiados 55 Cancri es el único sistema planetario en común con este trabajo, por ser el sistema exoplanetario con el mayor número de planetas conocidos (2005). En 55 Cancri, Barnes y Raymond encontraron 3 regiones de estabilidad: (1.0 UA, $e = 0.07$), (2.0 UA, $e = 0.07$) y (3.1 UA, $e = 0.12$).

Tomando en cuenta estos resultados, se aplicó la relación TB exponencial para comprobar si estas configuraciones orbitales (semiejes observados y regiones de estabilidad) de los sistemas exoplanetarios estudiados por Barnes y Raymond siguen esta relación. Se encontró que dichas configuraciones orbitales estables de los sistemas exoplanetarios HD 37124, HD 38529, 55 Cnc y HD 74156 cumplen una relación TB exponencial. Los ajustes son muy precisos para todos estos casos. En HD 38529 la relación TB exponencial exhibe un coeficiente de correlación de $R^2 = 0.9990$. Para el caso del sistema exoplanetario HD 74156, la relación TB exponencial tomando en cuenta la región de estabilidad de (1.10 UA) se obtiene un coeficiente de correlación $R^2 = 0.9992$. En HD 37124, la precisión en los ajustes a la relación TB disminuye, ya que el mejor ajuste tiene un valor $R^2 = 0.9813$. Sin embargo, los valores observacionales en este sistema han cambiando. Si se aplica la relación TB exponencial a los valores corregidos del semieje mayor de estos exoplanetas, el ajuste muestra un coeficiente de correlación $R^2 = 0.9985$ y predice una vacante en $a = 0.9435$, valor que coincide con la región de estabilidad ($a = 0.95$ UA) reportada por Raymond y Barnes [80].

Para el sistema exoplanetario de 55 Cancri, Raymond y Barnes [80] encontraron 3 regiones de estabilidad. Se aplicó la relación TB usando los semiejes observados y las regiones de estabilidad de Raymond y Barnes. Se hicieron diversos ajustes a la relación TB exponencial, usando 1, 2 o 3 regiones de estabilidad al mismo tiempo. El mejor ajuste a la relación TB se encontró en el caso donde se toman los valores observados de los semiejes mayores y las dos regiones de estabilidad $a = 1.0$ UA y $a = 2.0$ UA; el coeficiente de este ajuste fue de $R^2 = 0.9905$.

Con estos resultados se puede observar que todos los sistemas exoplanetarios con configuraciones orbitales estables cumplen muy bien la relación TB exponencial. Este resultado sugiere que la relación TB es una consecuencia de la estabilidad de los sistemas planetarios.

Es importante la referencia a estos trabajos ya que apoyan a la hipótesis de que la relación TB es el reflejo de la evolución dinámica de los sistemas exoplanetarios.

En la Sección 2 se estudió el artículo de Cuntz, en donde muestra una versión alterna de la relación TB aplicada al sistema exoplanetario 55 Cancri. Cuntz presenta una relación matemática con tres constantes a determinar (A, B, Z). Usando su versión de relación Titius-Bode encuentra 4 posiciones disponibles en las cuales podría existir un planeta aún no descubierto ($a \approx 0.081, 0.410, 1.51, 2.95$ UA). Cuntz estima el significado estadístico de la relación TB para la distribución de las órbitas de este sistema exoplanetario, como lo hizo Lynch (2003) para el Sistema Solar y los satélites de Urano. Como se vio anteriormente Cuntz encontró que su relación y la de Poveda-Lara son altamente significativas [21] [56].

Conforme han avanzado los análisis de los sistemas exoplanetarios, se han puesto en duda los descubrimientos de algunos planetas, por ejemplo: los exoplanetas Gliese 581f, Gliese 581g, HD 10180b, HD 10180i, HD 10180j y GJ 667C h. Incluso está en controversia todo el sistema exoplanetario de Kepler-79 que contiene 4 planetas, con lo que hubiera sido candidato para entrar en el análisis de este trabajo. Debido a que los cuatro planetas se encuentran en controversia no se incorporó a este trabajo.

En la Sección 3 se realizaron los ajustes de la relación TB exponencial tomando en cuenta solo planetas confirmados. Sin embargo, para el sistema exoplanetario HD 10180, se realizó un ajuste considerando los planetas conocidos y HD 10180b, exoplaneta que se encuentra en controversia. La relación TB exponencial usando HD 10180b y los 5 planetas confirmados, tiene una precisión muy buena y no muestra ninguna vacante. Confiando en la capacidad predictiva de la relación TB, apoyamos la hipótesis de la existencia de HD 10180b hecha por Toumi [94].

Con el mejor ajuste de la relación TB para el sistema GJ 677C, se predicen tres vacantes en $a = 0.0607$ UA ($n = 2$), $a = 0.0902$ UA ($n = 3$) y $a = 0.400$ UA ($n = 8$); una de estas vacantes coincide con el valor del semieje mayor de GJ 677C h ($a = 0.0893$ UA), con un error porcentual del 1%. Con este resultado podemos apoyar la existencia de GJ667C h. Debido a que este planeta se encuentra aún en controversia sólo podemos resaltar este muy buen resultado.

Desde su formulación, la relación TB ha tenido una gran capacidad predictiva. Por eso el curioso caso del sistema planetario Gliese 581 es muy interesante. De no haberse descalificado el descubrimiento de Gliese 581g como planeta, hubiera sido el primer sistema en cumplir una de las predicciones de la relación TB exponencial. Sin embargo, este planeta sigue en controversia razón por la cual seguiremos a la espera de la confirmación del mismo.

Nuestro trabajo se ha centrado en comprobar la aplicación y validez de la relación TB exponencial. Hemos encontrado que los 18 sistemas exoplanetarios cumplen esta progresión geométrica, dando como resultado la predicción de 31 planetas adicionales en estos sistemas extrasolares. Los semiejes que predecimos podrían ayudar a encontrarlas las observaciones en dichas posiciones y así confirmar o no la existencia de dichos planetas. El descubrimiento de estos planetas podrá darle validez a esta relación TB exponencial y subsecuentemente a su interpretación dinámica.

Desde la primera aplicación de la relación TB a un sistema exoplanetario (55 Cancri) hecho por Poveda y Lara [78], se han publicado diversos artículos sobre el tema (Kotliarov [47]; Flores-Gutiérrez y García-Guerra [32]; Cuntz [21]); todos tratando de encontrar alguna generalización a las configuraciones orbitales de los sistemas planetarios. A pesar de dichos esfuerzos, todavía se está muy lejos de tener alguna explicación física de la relación Titius-Bode. Confiando en la capacidad predictiva que la relación TB ha tenido en el pasado, el descubrimiento de los planetas predichos en este trabajo le otorgará validez. Esperando que esto sea una pista para ayudar al estudio de la formación y evolución de los sistemas exoplanetarios. [?]

*When it is all finished
you will discovered it was never
random*

Bibliografía

- [1] R. L. Akeson, X. Chen, D. Ciardi, M. Crane, J. Good, M. Harbut, E. Jackson, S. R. Kane, A. C. Laity, S. Leifer, M. Lynn, D. L. McElroy, M. Papin, P. Plavchan, S. V. Ramírez, R. Rey, K. von Braun, M. Wittman, M. Abajian, B. Ali, C. Beichman, A. Beekley, G. B. Berriman, S. Berukoff, G. Bryden, B. Chan, S. Groom, C. Lau, A. N. Payne, M. Regelson, M. Saucedo, M. Schmitz, J. Stauffer, P. Wyatt, and A. Zhang, *The NASA Exoplanet Archive: Data and Tools for Exoplanet Research*, *PASP* **125** (2013), 989–999.
- [2] G. Anglada-Escude, P. Arriagada, S. S. Vogt, E. J. Rivera, R. P. Butler, J. D. Crane, S. A. Shectman, I. B. Thompson, D. Minniti, N. Haghighipour, B. D. Carter, C. G. Tinney, R. A. Wittenmyer, J. A. Bailey, S. J. O’Toole, H. R. A. Jones, and J. S. Jenkins, *A Planetary System around the nearby M Dwarf GJ 667C with At Least One Super-Earth in Its Habitable Zone*, *ApJL* **751** (2012), L16.
- [3] G. Anglada-Escude, M. Lopez-Morales, and J. E. Chambers, *How Eccentric Orbital Solutions Can Hide Planetary Systems in 2:1 Resonant Orbits*, *ApJ* **709** (2010), 168–178.
- [4] G. Anglada-Escude and M. Tuomi, *A planetary system with gas giants and super-Earths around the nearby M dwarf GJ 676A. Optimizing data analysis techniques for the detection of multi-planetary systems*, *A&A* **548** (2012), A58.
- [5] G. Anglada-Escude, M. Tuomi, E. Gerlach, R. Barnes, R. Heller, J. S. Jenkins, S. Wende, S. S. Vogt, R. P. Butler, A. Reiners, and H. R. A. Jones, *A dynamically-packed planetary system around GJ 667C with three super-Earths in its habitable zone*, *A&A* **556** (2013), A126.
- [6] R. Barnes and R. Greenberg, *Stability Limits in Extrasolar Planetary Systems*, *ApJL* **647** (2006), L163–L166.
- [7] R. Barnes and T. Quinn, *The (In)stability of Planetary Systems*, *ApJ* **611** (2004), 494–516.
- [8] R. Barnes and S. N. Raymond, *Predicting Planets in Known Extrasolar Planetary Systems. I. Test Particle Simulations*, *ApJ* **617** (2004), 569–574.
- [9] R. K. Barnes and T. R. Quinn, *Planet Scattering and Exoplanet Orbits*, AAS/Division of Dynamical Astronomy Meeting #34, Bulletin of the American Astronomical Society, vol. 35, August 2003, p. 1041.

-
- [10] J. Bohr and K. Olsen, *Long-range order between the planets in the Solar system*, MNRAS **403** (2010), L59–L63.
- [11] X. Bonfils, X. Delfosse, S. Udry, T. Forveille, M. Mayor, C. Perrier, F. Bouchy, M. Gillon, C. Lovis, F. Pepe, D. Queloz, N. C. Santos, D. Segransan, and J.-L. Bertaux, *The HARPS search for southern extra-solar planets. XXXI. The M-dwarf sample*, A&A **549** (2013), A109.
- [12] X. Bonfils, T. Forveille, X. Delfosse, S. Udry, M. Mayor, C. Perrier, F. Bouchy, F. Pepe, D. Queloz, and J.-L. Bertaux, *The HARPS search for southern extra-solar planets. VI. A Neptune-mass planet around the nearby M dwarf Gl 581*, A&A **443** (2005), L15–L18.
- [13] W. J. Borucki, E. Agol, F. Fressin, L. Kaltenegger, J. Rowe, H. Isaacson, D. Fischer, N. Batalha, J. J. Lissauer, G. W. Marcy, D. Fabrycky, J.-M. Desert, S. T. Bryson, T. Barclay, F. Bastien, A. Boss, E. Brugamyer, L. A. Buchhave, C. Burke, D. A. Caldwell, J. Carter, D. Charbonneau, J. R. Crepp, J. Christensen-Dalsgaard, J. L. Christiansen, D. Ciardi, W. D. Cochran, E. DeVore, L. Doyle, A. K. Dupree, M. Endl, M. E. Everett, E. B. Ford, J. Fortney, T. N. Gautier, J. C. Geary, A. Gould, M. Haas, C. Henze, A. W. Howard, S. B. Howell, D. Huber, J. M. Jenkins, H. Kjeldsen, R. Kolbl, J. Kolodziejczak, D. W. Latham, B. L. Lee, E. Lopez, F. Mullally, J. A. Orosz, A. Prsa, E. V. Quintana, R. Sanchis-Ojeda, D. Sasselov, S. Seader, A. Shporer, J. H. Steffen, M. Still, P. Tenenbaum, S. E. Thompson, G. Torres, J. D. Twicken, W. F. Welsh, and J. N. Winn, *Kepler-62: A Five-Planet System with Planets of 1.4 and 1.6 Earth Radii in the Habitable Zone*, Science **340** (2013), 587–590.
- [14] W. J. Borucki, D. G. Koch, G. Basri, N. Batalha, T. M. Brown, S. T. Bryson, D. Caldwell, J. Christensen-Dalsgaard, W. D. Cochran, E. DeVore, E. W. Dunham, T. N. Gautier, III, J. C. Geary, R. Gilliland, A. Gould, S. B. Howell, J. M. Jenkins, D. W. Latham, J. J. Lissauer, G. W. Marcy, J. Rowe, D. Sasselov, A. Boss, D. Charbonneau, D. Ciardi, L. Doyle, A. K. Dupree, E. B. Ford, J. Fortney, M. J. Holman, S. Seager, J. H. Steffen, J. Tarter, W. F. Welsh, C. Allen, L. A. Buchhave, J. L. Christiansen, B. D. Clarke, S. Das, J.-M. Desert, M. Endl, D. Fabrycky, F. Fressin, M. Haas, E. Horch, A. Howard, H. Isaacson, H. Kjeldsen, J. Kolodziejczak, C. Kulesa, J. Li, P. W. Lucas, P. Machalek, D. McCarthy, P. MacQueen, S. Meibom, T. Miquel, A. Prsa, S. N. Quinn, E. V. Quintana, D. Ragozzine, W. Sherry, A. Shporer, P. Tenenbaum, G. Torres, J. D. Twicken, J. Van Cleve, L. Walkowicz, F. C. Witteborn, and M. Still, *Characteristics of Planetary Candidates Observed by Kepler. II. Analysis of the First Four Months of Data*, ApJ **736** (2011), 19.
- [15] R. P. Butler, G. W. Marcy, D. A. Fischer, T. M. Brown, A. R. Contos, S. G. Korzennik, P. Nisenson, and R. W. Noyes, *Evidence for Multiple Companions to ν Andromedae*, ApJ **526** (1999), 916–927.
- [16] R. P. Butler, G. W. Marcy, E. Williams, H. Hauser, and P. Shirts, *Three New "51 Pegasi-Type" Planets*, ApJL **474** (1997), L115.
- [17] R. P. Butler, C. G. Tinney, G. W. Marcy, H. R. A. Jones, A. J. Penny, and K. Apps, *Two New Planets from the Anglo-Australian Planet Search*, ApJ **555** (2001), 410–417.

-
- [18] J. Cabrera, S. Csizmadia, H. Lehmann, R. Dvorak, D. Gandolfi, H. Rauer, A. Erikson, C. Dreyer, P. Eigmüller, and A. Hatzes, *The Planetary System to KIC 11442793: A Compact Analogue to the Solar System*, ArXiv e-prints (2013).
- [19] E. Carrasco, R. Avila, and A. Carramiana, *High-Altitude Wind Velocity at Sierra Negra and San Pedro Mártir*, PASP **117** (2005), 104–110.
- [20] J. E. Chambers, *A hybrid symplectic integrator that permits close encounters between massive bodies*, MNRAS **304** (1999), 793–799.
- [21] M. Cuntz, *Application of the Titius-Bode Rule to the 55 Cancri System: Tentative Prediction of a Possibly Habitable Planet*, PASJ **64** (2012), 73.
- [22] S. Curiel, J. Canto, L. Georgiev, C. E. Chavez, and A. Poveda, *A fourth planet orbiting ν Andromedae*, A&A **525** (2011), A78.
- [23] R. I. Dawson and D. C. Fabrycky, *Radial Velocity Planets De-aliased: A New, Short Period for Super-Earth 55 Cnc e*, ApJ **722** (2010), 937–953.
- [24] C. de la Fuente Marcos and R. de la Fuente Marcos, *Drag-induced resonant capture in a multiplanet scenario: An application to 55 Cancri A*, NewA **15** (2010), 260–273.
- [25] X. Delfosse, T. Forveille, M. Mayor, C. Perrier, D. Naef, and D. Queloz, *The closest extrasolar planet. A giant planet around the M4 dwarf GL 876*, A&A **338** (1998), L67–L70.
- [26] S. F. Dermott, *On the origin of commensurabilities in the solar system-I. The tidal hypothesis*, MNRAS **141** (1968), 349.
- [27] ———, *On the origin of commensurabilities in the solar system-II. The orbital period relation*, MNRAS **141** (1968), 363.
- [28] B. Dubrulle and F. Graner, *Titius-Bode laws in the solar system. 2: Build your own law from disk models*, A&A **282** (1994), 269–276.
- [29] R. Dvorak, E. Pilat-Lohinger, B. Funk, and F. Freistetter, *A study of the stable regions in the planetary system HD 74156 - Can it host earthlike planets in habitable zones?*, A&A **410** (2003), L13–L16.
- [30] D. C. Fabrycky and R. A. Murray-Clay, *Stability of the Directly Imaged Multiplanet System HR 8799: Resonance and Masses*, ApJ **710** (2010), 1408–1421.
- [31] D. A. Fischer, G. W. Marcy, R. P. Butler, S. S. Vogt, G. Laughlin, G. W. Henry, D. Abouav, K. M. G. Peek, J. T. Wright, J. A. Johnson, C. McCarthy, and H. Isaacson, *Five Planets Orbiting 55 Cancri*, ApJ **675** (2008), 790–801.
- [32] J. D. Flores-Gutierrez and C. Garcia-Guerra, *A variant of the Titius-Bode Law*, RMxAA **47** (2011), 173–184.
- [33] F. Forget and R. T. Pierrehumbert, *Warming Early Mars with Carbon Dioxide Clouds That Scatter Infrared Radiation*, Science **278** (1997), 1273.
- [34] T. Forveille, X. Bonfils, G. Lo Curto, X. Delfosse, S. Udry, F. Bouchy, C. Lovis, M. Mayor, C. Moutou, D. Naef, F. Pepe, C. Perrier, D. Queloz, and N. Santos, *The HARPS search for southern extra-solar planets. XXVI. Two giant planets around M0 dwarfs*, A&A **526** (2011), A141.

-
- [35] T. Gallardo, *The Mars 1:2 resonant population*, *Icarus* **190** (2007), 280–282.
- [36] T. N. Gautier, III, D. Charbonneau, J. F. Rowe, G. W. Marcy, H. Isaacson, G. Torres, F. Fressin, L. A. Rogers, J.-M. Desert, L. A. Buchhave, D. W. Latham, S. N. Quinn, D. R. Ciardi, D. C. Fabrycky, E. B. Ford, R. L. Gilliland, L. M. Walkowicz, S. T. Bryson, W. D. Cochran, M. Endl, D. A. Fischer, S. B. Howell, E. P. Horch, T. Barclay, N. Batalha, W. J. Borucki, J. L. Christiansen, J. C. Geary, C. E. Henze, M. J. Holman, K. Ibrahim, J. M. Jenkins, K. Kinemuchi, D. G. Koch, J. J. Lissauer, D. T. Sanderfer, D. D. Sasselov, S. Seager, K. Silverio, J. C. Smith, M. Still, M. C. Stumpe, P. Tenenbaum, and J. Van Cleve, *Kepler-20: A Sun-like Star with Three Sub-Neptune Exoplanets and Two Earth-size Candidates*, *ApJ* **749** (2012), 15.
- [37] B. Gladman, *Dynamics of systems of two close planets*, *Icarus* **106** (1993), 247.
- [38] K. Gozdziewski and C. Migaszewski, *Is the HR8799 extrasolar system destined for planetary scattering?*, *MNRAS* **397** (2009), L16–L20.
- [39] ———, *Multiple mean motion resonances in the HR 8799 planetary system*, ArXiv e-prints (2013).
- [40] F. Graner and B. Dubrulle, *Titius-Bode laws in the solar system. 1: Scale invariance explains everything*, *A&A* **282** (1994), 262–268.
- [41] P. C. Gregory, *Additional Keplerian Signals in the HARPS data for Gliese 667C from a Bayesian Re-analysis*, ArXiv e-prints (2012).
- [42] W. Hayes and S. Tremaine, *Fitting Selected Random Planetary Systems to Titius-Bode Laws*, *Icarus* **135** (1998), 549–557.
- [43] K. Heng and S. S. Vogt, *Gliese 581g as a scaled-up version of Earth: atmospheric circulation simulations*, *MNRAS* **415** (2011), 2145–2157.
- [44] J. G. Hills, *Dynamic Relaxation of Planetary Systems and Bode’s Law*, *Natur* **225** (1970), 840–842.
- [45] T. Hirano, N. Narita, B. Sato, Y. H. Takahashi, K. Masuda, Y. Takeda, W. Aoki, M. Tamura, and Y. Suto, *Planet-Planet Eclipse and the Rossiter-McLaughlin Effect of a Multiple Transiting System: Joint Analysis of the Subaru Spectroscopy and the Kepler Photometry*, *ApJL* **759** (2012), L36.
- [46] J.-H. Ji, H. Kinoshita, L. Liu, and G.-Y. Li, *RESEARCH PAPER: The dynamical architecture and habitable zones of the quintuplet planetary system 55 Cancri*, *RAA* **9** (2009), 703–711.
- [47] I. Kotliarov, *A structural law of planetary systems*, *MNRAS* **390** (2008), 1411–1412.
- [48] P. Lara, *La relacion de Titius-Bode y los sistemas exoplanetarios. Tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias. Universidad Nacional Autonoma de Mexico., Ciudad Universitaria, Mexico D.F., 2012.*
- [49] P. Lara, A. Poveda, and C. Allen, *On the structural law of exoplanetary systems*, American Institute of Physics Conference Series (T. E. Simos, G. Psihoyios, C. Tsitouras, and Z. Anastassi, eds.), American Institute of Physics Conference Series, vol. 1479, September 2012, pp. 2356–2359.

-
- [50] H. F. Levison and M. J. Duncan, *The long-term dynamical behavior of short-period comets*, *Icarus* **108** (1994), 18–36.
- [51] J. J. Lissauer, D. Fabrycky, J. Jenkins, and Kepler Science Team, *Kepler-11: Oddball or Extreme Member of a Class of Densely-Packed Planetary Systems?*, American Astronomical Society Meeting Abstracts #218, May 2011, p. 203.03.
- [52] J. J. Lissauer, D. C. Fabrycky, E. B. Ford, W. J. Borucki, F. Fressin, G. W. Marcy, J. A. Orosz, J. F. Rowe, G. Torres, W. F. Welsh, N. M. Batalha, S. T. Bryson, L. A. Buchhave, D. A. Caldwell, J. A. Carter, D. Charbonneau, J. L. Christiansen, W. D. Cochran, J.-M. Desert, E. W. Dunham, M. N. Fanelli, J. J. Fortney, T. N. Gautier, III, J. C. Geary, R. L. Gilliland, M. R. Haas, J. R. Hall, M. J. Holman, D. G. Koch, D. W. Latham, E. Lopez, S. McCauliff, N. Miller, R. C. Morehead, E. V. Quintana, D. Ragozzine, D. Sasselov, D. R. Short, and J. H. Steffen, *A closely packed system of low-mass, low-density planets transiting Kepler-11*, *Natur* **470** (2011), 53–58.
- [53] J. J. Lissauer, G. W. Marcy, J. F. Rowe, S. T. Bryson, E. Adams, L. A. Buchhave, D. R. Ciardi, W. D. Cochran, D. C. Fabrycky, E. B. Ford, F. Fressin, J. Geary, R. L. Gilliland, M. J. Holman, S. B. Howell, J. M. Jenkins, K. Kinemuchi, D. G. Koch, R. C. Morehead, D. Ragozzine, S. E. Seader, P. G. Tanenbaum, G. Torres, and J. D. Twicken, *Almost All of Kepler’s Multiple-planet Candidates Are Planets*, *ApJ* **750** (2012), 112.
- [54] J. J. Lissauer, D. Ragozzine, D. C. Fabrycky, J. H. Steffen, E. B. Ford, J. M. Jenkins, A. Shporer, M. J. Holman, J. F. Rowe, E. V. Quintana, N. M. Batalha, W. J. Borucki, S. T. Bryson, D. A. Caldwell, J. A. Carter, D. Ciardi, E. W. Dunham, J. J. Fortney, T. N. Gautier, III, S. B. Howell, D. G. Koch, D. W. Latham, G. W. Marcy, R. C. Morehead, and D. Sasselov, *Architecture and Dynamics of Kepler’s Candidate Multiple Transiting Planet Systems*, *ApJS* **197** (2011), 8.
- [55] C. Lovis, D. Segransan, M. Mayor, S. Udry, W. Benz, J.-L. Bertaux, F. Bouchy, A. C. M. Correia, J. Laskar, G. Lo Curto, C. Mordasini, F. Pepe, D. Queloz, and N. C. Santos, *The HARPS search for southern extra-solar planets. XXVIII. Up to seven planets orbiting HD 10180: probing the architecture of low-mass planetary systems*, *A&A* **528** (2011), A112.
- [56] P. Lynch, *On the significance of the Titius-Bode law for the distribution of the planets*, *MNRAS* **341** (2003), 1174–1178.
- [57] C. Marchal and G. Bozis, *Hill Stability and Distance Curves for the General Three-Body Problem*, *Celestial Mechanics* **26** (1982), 311–333.
- [58] G. W. Marcy, R. P. Butler, D. Fischer, S. S. Vogt, J. J. Lissauer, and E. J. Rivera, *A Pair of Resonant Planets Orbiting GJ 876*, *ApJ* **556** (2001), 296–301.
- [59] G. W. Marcy, R. P. Butler, D. A. Fischer, G. Laughlin, S. S. Vogt, G. W. Henry, and D. Pourbaix, *A Planet at 5 AU around 55 Cancri*, *ApJ* **581** (2002), 1375–1388.
- [60] G. W. Marcy, R. P. Butler, S. S. Vogt, D. Fischer, and J. J. Lissauer, *A Planetary Companion to a Nearby M4 Dwarf, Gliese 876*, *ApJL* **505** (1998), L147–L149.
- [61] C. Marois, B. Macintosh, T. Barman, B. Zuckerman, I. Song, J. Patience, D. Lafreniere, and R. Doyon, *Direct Imaging of Multiple Planets Orbiting the Star HR 8799*, *Science* **322** (2008), 1348–.

-
- [62] C. Marois, B. Zuckerman, Q. M. Konopacky, B. Macintosh, and T. Barman, *Images of a fourth planet orbiting HR 8799*, *Natur* **468** (2010), 1080–1083.
- [63] F. Marzari, H. Scholl, and P. Tricarico, *Frequency map analysis of the 3/1 resonance between planets b and c in the 55 Cancri system*, *A&A* **442** (2005), 359–364.
- [64] K. Masuda, T. Hirano, A. Taruya, M. Nagasawa, and Y. Suto, *Characterization of the KOI-94 System with Transit Timing Variation Analysis: Implication for the Planet-Planet Eclipse*, *ApJ* **778** (2013), 185.
- [65] M. Mayor, X. Bonfils, T. Forveille, X. Delfosse, S. Udry, J.-L. Bertaux, H. Beust, F. Bouchy, C. Lovis, F. Pepe, C. Perrier, D. Queloz, and N. C. Santos, *The HARPS search for southern extra-solar planets. XVIII. An Earth-mass planet in the GJ 581 planetary system*, *A&A* **507** (2009), 487–494.
- [66] M. Mayor, S. Udry, C. Lovis, F. Pepe, D. Queloz, W. Benz, J.-L. Bertaux, F. Bouchy, C. Mordasini, and D. Segransan, *The HARPS search for southern extra-solar planets. XIII. A planetary system with 3 super-Earths (4.2, 6.9, and 9.2 M_{\oplus})*, *A&A* **493** (2009), 639–644.
- [67] B. E. McArthur, M. Endl, W. D. Cochran, G. F. Benedict, D. A. Fischer, G. W. Marcy, R. P. Butler, D. Naef, M. Mayor, D. Queloz, S. Udry, and T. E. Harrison, *Detection of a Neptune-Mass Planet in the ρ^1 Cancri System Using the Hobby-Eberly Telescope*, *ApJL* **614** (2004), L81–L84.
- [68] C. McCarthy, R. P. Butler, C. G. Tinney, H. R. A. Jones, G. W. Marcy, B. Carter, A. J. Penny, and D. A. Fischer, *Multiple Companions to HD 154857 and HD 160691*, *ApJ* **617** (2004), 575–579.
- [69] K. Menou and S. Tabachnik, *Dynamical Habitability of Known Extrasolar Planetary Systems*, *ApJ* **583** (2003), 473–488.
- [70] M. A. Mischna, J. F. Kasting, A. Pavlov, and R. Freedman, *Influence of Carbon Dioxide Clouds on Early Martian Climate*, *Icarus* **145** (2000), 546–554.
- [71] A. M. Molchanov, *The resonant structure of the solar system The law of planetary distances*, *Icarus* **8** (1968), 203–215.
- [72] A. Moore, I. Hasan, and A. C. Quillen, *Limits on orbit-crossing planetesimals in the resonant multiple planet system, KOI-730*, *MNRAS* **432** (2013), 1196–1202.
- [73] E. Munini and A. Armellini, *Ricerca di leggi empiriche sul sistema solare.*, *Coelum* **46** (1978), 223–233.
- [74] C.D. Murray and S.F. Dermott, *Solar system dynamics*, Cambridge University Press, 1999.
- [75] L. Neslusan, *The significance of the Titius-Bode law and the peculiar location of the Earth's orbit*, *MNRAS* **351** (2004), 133–136.
- [76] M. M. Nieto, *The Titius-Bode law of planetary distances: Its history and theory*, 1972.

-
- [77] F. Pepe, A. C. M. Correia, M. Mayor, O. Tamuz, J. Couetdic, W. Benz, J.-L. Bertaux, F. Bouchy, J. Laskar, C. Lovis, D. Naef, D. Queloz, N. C. Santos, J.-P. Sivan, D. Sosnowska, and S. Udry, *The HARPS search for southern extra-solar planets. VIII. μ Arae, a system with four planets*, A&A **462** (2007), 769–776.
- [78] A. Poveda and P. Lara, *The exo-planetary system of 55 Cancri and the Titius-Bode Law*, RMxAA **44** (2008), 243–246.
- [79] D. Ragozzine and Kepler Team, *The Very Compact Five Exoplanet System KOI-500: Mass Constraints from TTVs, Resonances, and Implications*, AAS/Division for Planetary Sciences Meeting Abstracts, AAS/Division for Planetary Sciences Meeting Abstracts, vol. 44, October 2012, p. 200.04.
- [80] S. N. Raymond and R. Barnes, *Predicting Planets in Known Extrasolar Planetary Systems. II. Testing for Saturn Mass Planets*, ApJ **619** (2005), 549–557.
- [81] S. N. Raymond, R. Barnes, and N. Gorelick, *A Dynamical Perspective on Additional Planets in 55 Cancri*, ApJ **689** (2008), 478–491.
- [82] S. N. Raymond, R. Barnes, D. Veras, P. J. Armitage, N. Gorelick, and R. Greenberg, *Planet-Planet Scattering Leads to Tightly Packed Planetary Systems*, ApJL **696** (2009), L98–L101.
- [83] E. Rivera and N. Haghighipour, *On the stability of test particles in extrasolar multiple planet systems*, MNRAS **374** (2007), 599–613.
- [84] E. J. Rivera, G. Laughlin, R. P. Butler, S. S. Vogt, N. Haghighipour, and S. Meschiari, *The Lick-Carnegie Exoplanet Survey: a Uranus-Mass Fourth Planet for GJ 876 in an Extrasolar Laplace Configuration*, ApJ **719** (2010), 890–899.
- [85] E. J. Rivera, J. J. Lissauer, R. P. Butler, G. W. Marcy, S. S. Vogt, D. A. Fischer, T. M. Brown, G. Laughlin, and G. W. Henry, *A $7.5 M_{\oplus}$ Planet Orbiting the Nearby Star, GJ 876*, ApJ **634** (2005), 625–640.
- [86] A. E. Roy and M. W. Ovenden, *On the occurrence of commensurable mean motions in the solar system*, MNRAS **114** (1954), 232.
- [87] N. C. Santos, F. Bouchy, M. Mayor, F. Pepe, D. Queloz, S. Udry, C. Lovis, M. Bazot, W. Benz, J.-L. Bertaux, G. Lo Curto, X. Delfosse, C. Mordasini, D. Naef, J.-P. Sivan, and S. Vauclair, *The HARPS survey for southern extra-solar planets. II. A 14 Earth-masses exoplanet around μ Arae*, A&A **426** (2004), L19–L23.
- [88] J. R. Schmitt, J. Wang, D. A. Fischer, K. J. Jek, J. C. Moriarty, T. S. Boyajian, M. E. Schwamb, C. Lintott, A. M. Smith, M. Parrish, K. Schawinski, S. Lynn, R. Simpson, M. Omohundro, T. Winarski, S. J. Goodman, T. Jebson, and D. Lacourse, *Planet Hunters VI: The First Kepler Seven Planet Candidate System and 13 Other Planet Candidates from the Kepler Archival Data*, ArXiv e-prints (2013).
- [89] J. Schneider, *The extrasolar planets encyclopaedia*, <http://exoplanet.eu/catalog.php>.
- [90] F. Selsis, J. F. Kasting, B. Levrard, J. Paillet, I. Ribas, and X. Delfosse, *Habitable planets around the star Gliese 581?*, A&A **476** (2007), 1373–1387.

-
- [91] R. Soummer, J. Brendan Hagan, L. Pueyo, A. Thormann, A. Rajan, and C. Marois, *Orbital Motion of HR 8799 b, c, d Using Hubble Space Telescope Data from 1998: Constraints on Inclination, Eccentricity, and Stability*, *ApJ* **741** (2011), 55.
- [92] M. Tadeu dos Santos, G. G. Silva, S. Ferraz-Mello, and T. A. Michtchenko, *A new analysis of the GJ581 extrasolar planetary system*, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **113** (2012), 49–62.
- [93] Y. H. Takahashi, N. Narita, T. Hirano, M. Kuzuhara, M. Tamura, T. Kudo, N. Kusakabe, J. Hashimoto, B. Sato, L. Abe, W. Brandner, T. D. Brandt, J. C. Carson, T. Currie, S. Egner, M. Feldt, M. Goto, C. A. Grady, O. Guyon, Y. Hayano, M. Hayashi, S. S. Hayashi, T. Henning, K. W. Hodapp, M. Ishii, M. Iye, M. Janson, R. Kandori, G. R. Knapp, J. Kwon, T. Matsuo, M. W. McElwain, S. Miyama, J.-I. Morino, A. Moro-Martin, T. Nishimura, T.-S. Pyo, E. Serabyn, T. Suenaga, H. Suto, R. Suzuki, M. Takami, N. Takato, H. Terada, C. Thalmann, D. Tomono, E. L. Turner, M. Watanabe, J. Wisniewski, T. Yamada, H. Takami, and T. Usuda, *A Discovery of a Candidate Companion to a Transiting System KOI-94: A Direct Imaging Study for a Possibility of a False Positive*, *ArXiv e-prints* (2013).
- [94] M. Tuomi, *Evidence for nine planets in the HD 10180 system*, *A&A* **543** (2012), A52.
- [95] M. Tuomi, G. Anglada-Escude, E. Gerlach, H. R. A. Jones, A. Reiners, E. J. Rivera, S. S. Vogt, and R. P. Butler, *Habitable-zone super-Earth candidate in a six-planet system around the K2.5V star HD 40307*, *A&A* **549** (2013), A48.
- [96] S. Udry, X. Bonfils, X. Delfosse, T. Forveille, M. Mayor, C. Perrier, F. Bouchy, C. Lovis, F. Pepe, D. Queloz, and J.-L. Bertaux, *The HARPS search for southern extra-solar planets. XI. Super-Earths (5 and 8 M_{\oplus}) in a 3-planet system*, *A&A* **469** (2007), L43–L47.
- [97] D. R. Underwood, B. W. Jones, and P. N. Sleep, *The evolution of habitable zones during stellar lifetimes and its implications on the search for extraterrestrial life*, *International Journal of Astrobiology* **2** (2003), 289–299.
- [98] S. S. Vogt, R. P. Butler, E. J. Rivera, N. Haghighipour, G. W. Henry, and M. H. Williamson, *The Lick-Carnegie Exoplanet Survey: A 3.1 M_{\odot} Planet in the Habitable Zone of the Nearby M3V Star Gliese 581*, *ApJ* **723** (2010), 954–965.
- [99] W. von Bloh, C. Bounama, M. Cuntz, and S. Franck, *The habitability of super-Earths in Gliese 581*, *A&A* **476** (2007), 1365–1371.
- [100] K. von Braun, T. S. Boyajian, S. R. Kane, G. T. van Belle, D. R. Ciardi, M. Lopez-Morales, H. A. McAlister, T. J. Henry, W.-C. Jao, A. R. Riedel, J. P. Subasavage, G. Schaefer, T. A. ten Brummelaar, S. Ridgway, L. Sturmann, J. Sturmann, J. Mazingue, N. H. Turner, C. Farrington, P. J. Goldfinger, and A. F. Boden, *Astrophysical Parameters and Habitable Zone of the Exoplanet Hosting Star GJ 581*, *ApJL* **729** (2011), L26.
- [101] K. von Braun, T. S. Boyajian, T. A. ten Brummelaar, S. R. Kane, G. T. van Belle, D. R. Ciardi, S. N. Raymond, M. Lopez-Morales, H. A. McAlister, G. Schaefer, S. T. Ridgway, L. Sturmann, J. Sturmann, R. White, N. H. Turner, C. Farrington, and P. J. Goldfinger, *55 Cancri: Stellar Astrophysical Parameters, a Planet in the*

-
- Habitable Zone, and Implications for the Radius of a Transiting Super-Earth*, ApJ **740** (2011), 49.
- [102] L. M. Weiss, G. W. Marcy, J. F. Rowe, A. W. Howard, H. Isaacson, J. J. Fortney, N. Miller, B.-O. Demory, D. A. Fischer, E. R. Adams, A. K. Dupree, S. B. Howell, R. Kolbl, J. A. Johnson, E. P. Horch, M. E. Everett, D. C. Fabrycky, and S. Seager, *The Mass of KOI-94d and a Relation for Planet Radius, Mass, and Incident Flux*, ApJ **768** (2013), 14.
- [103] Marc Wenger, Francois Ochsenbein, Daniel Egret, Pascal Dubois, Francois Bonnarel, Suzanne Borde, Genova Gerard Jasniewicz, Suzanne Laloe, Soizick Lesteven, and Richard Monier, *The simbad astronomical database - the cds reference database for astronomical objects*, 1999.
- [104] M. L. White, *Jet Streams and the Development of the Solar System*, Nature Physical Science **238** (1972), 104–105.
- [105] R. D. Wordsworth, F. Forget, F. Selsis, J.-B. Madeleine, E. Millour, and V. Eymet, *Is Gliese 581d habitable? Some constraints from radiative-convective climate modeling*, A&A **522** (2010), A22.
- [106] J. T. Wright, D. Veras, E. B. Ford, J. A. Johnson, G. W. Marcy, A. W. Howard, H. Isaacson, D. A. Fischer, J. Spronck, J. Anderson, and J. Valenti, *The California Planet Survey. III. A Possible 2:1 Resonance in the Exoplanetary Triple System HD 37124*, ApJ **730** (2011), 93.
- [107] L.-Y. Zhou, S. Ferraz-Mello, and Y.-S. Sun, *Formation and transformation of the 3:1 mean-motion resonance in 55 Cancri System*, IAU Symposium (Y.-S. Sun, S. Ferraz-Mello, and J.-L. Zhou, eds.), IAU Symposium, vol. 249, May 2008, pp. 485–490.