



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**INFLUENCIA DE LA FUERZA DE BASSET EN LA TRAYECTORIA DE LAS  
GOTAS**

**TESIS**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
INGENIERO MECÁNICO**

**PRESENTA:**

**EDGAR ALI RAMOS GÓMEZ**

**DIRECTOR DE TESIS:  
DR. FEDERICO MÉNDEZ LAVIELLE  
2014**

# Resumen

En esta tesis se desarrolló un modelo analítico que describe la trayectoria de una gota que es expulsada de una tobera de manera horizontal. Se estudió el comportamiento de la gota en vuelo y como este comportamiento era afectado por los distintos parámetros adimensionales utilizados para este trabajo.

Dentro de este estudio, se considera el efecto de la fuerza de Basset, efecto que junto a la fuerza de arrastre, al de la tensión superficial y a la gravedad serán los que determinaran el comportamiento del modelo analítico estudiado. Una vez que es aplicada la segunda ley de Newton considerando los efectos de la fuerza de arrastre, las fuerzas de presión, la masa agregada, la fuerza de Basset y la gravedad, se adimensionalizo con el fin de observar cuales efectos pueden ser despreciados para su simplicidad del modelo.

Adimensionalizado el modelo analítico, se resolvió por medio de la teoría de perturbaciones, ayudando herramientas matemáticas como son; la transformada de Laplace, descomposición en fracciones parciales, así como la teoría de las ecuaciones trascendentales. Dentro de la solución del modelo, se llega a la discusión en la que nos vemos en dos panoramas, los cuales hacen referencia al tiempo y la fuerza de arrastre. La discusión radica en que tanto grande o chica puede llegar a ser el parámetro que representa el arrastre en comparación con el que tiempo adimensionalizado, generando un par de soluciones diferentes que conlleva dos resultados diferentes.

Una vez analizado cada una de las soluciones, se aprecia cuál de los dos es el enfoque correcto, con el fin de usar ese enfoque y con este observar la influencia de cada uno de los parámetros utilizados en el modelo.

# Índice

|  |    |
|--|----|
| Capítulo 1 .....                                     | 1  |
| Introducción .....                                   | 1  |
| 1.1 Aspectos Fundamentales .....                     | 2  |
| 1.2 Antecedentes.....                                | 3  |
| 1.2.1 Estudios Previos.....                          | 3  |
| 1.2.2. Antecedentes directos.....                    | 6  |
| 1.3. Objetivo .....                                  | 8  |
| Capítulo 2 .....                                     | 9  |
| Modelo Físico .....                                  | 9  |
| 2.1. Breve Descripción.....                          | 9  |
| 2.2. Ecuaciones de Conservación .....                | 18 |
| 2.3. Suposiciones .....                              | 19 |
| 2.4. Ecuaciones Adimensionales .....                 | 20 |
| Capítulo 3 .....                                     | 28 |
| Solución del modelo analítico.....                   | 28 |
| 3.1. Consideraciones al modelo analítico.....        | 28 |
| 3.2. Teoría de Perturbaciones .....                  | 29 |
| 3.2.1. Desarrollo perturbativo.....                  | 29 |
| 3.3. Condiciones iniciales.....                      | 32 |
| 3.4. Transformada de Laplace .....                   | 32 |
| 3.4.1. Descomposición en fracciones racionales ..... | 34 |
| 3.6. Ecuaciones Trascendentales .....                | 36 |
| 3.7. Propiedad de convolución .....                  | 37 |
| Capítulo 4 .....                                     | 40 |
| Resultados.....                                      | 40 |
| Capítulo 5 .....                                     | 46 |
| Conclusiones .....                                   | 46 |
| Bibliografía.....                                    | 49 |

## Vocabulario

|               |   |
|---------------|---|
| $\vec{v}$     | Velocidad de la partícula                             |
| $\vec{u}$     | Velocidad de la gota                                  |
| $P$           | Presión   |
| $\rho$        | Densidad de la gota                                   |
| $\rho_f$      | Densidad del fluido                                   |
| $\mu_f$       | Viscosidad del fluido                                 |
| $R$           | Radio de la esfera                                    |
| $L$           | Longitud horizontal de la trayectoria de la gota      |
| $\delta$      | Perdida de altura de la gota                          |
| $Re_p$        | Reynolds de la partícula                              |
| $We$          | Número de Weber                                       |
| $Z$           | Inversa del número de Ohnesorge                       |
| $\tau$        | Variable de tiempo para Basset                        |
| $\xi$         | Variable adimensional en x                            |
| $\eta$        | Variable adimensional en y                            |
| $\beta$       | Variable adimensional para la fuerza de arrastre      |
| $\omega$      | Variable adimensional para la fuerza de masa agregada |
| $\varepsilon$ | Variable adimensional para la fuerza de Basset        |

# Capítulo 1

## Introducción

La mecánica de fluidos es un campo extensamente amplio que abarca tres estados de la materia (líquido, gas y plasma). Las situaciones físicas en las cuales se involucra un fluido son innumerables y la dinámica del mismo puede depender de numerosos factores tales como la temperatura, la presión, la densidad, la viscosidad entre otras de gran importancia fundamental y práctica en la ingeniería. Razón por la cual su estudio constituye un tema central en Física e Ingeniería, por lo que los problemas generados en estos campos es indispensable el análisis físico, matemático, numérico, así como pruebas experimentales desarrolladas en laboratorios (Diego Córdoba *et al.* 2005).

Una de estas innumerables situaciones donde la física se involucra es la dinámica de las gotas, refiriéndonos a ellas como gotas de agua, aceite, tinta, etc. Estas pueden ser encontradas en la naturaleza y en una gran variedad de aplicaciones. En la naturaleza pueden ser encontradas en el rocío, la niebla, el arcoíris, las nubes, en la lluvia, en las brisas, etc. Una gran cantidad de gotas en el aire circundante pueden ser generadas por mangueras de jardín, aerosoles y muchos otros dispositivos de pulverización (Huimin Liu. 2000).

El estudio de gotas líquidas y aerosoles se ha desarrollado rápidamente durante las últimas dos décadas debido a su amplia variedad de aplicaciones en el campo de la Ciencia, como motores de combustión, medicamentos en aerosoles, intercambiadores de calor, generación de energía, tecnologías de pulverización dentro de las áreas aeroespacial, metalúrgica,

química, procesamiento de alimentos, agricultura, meteorología, así como la emergente fabricación de sistemas micro electromecánicos para el uso de la bioquímica y la biomédica entre otras (George Karniadakis *et al.* 2005; William A. Sirignano. 1999). Es por ello que el estudio de este tópico es de suma importancia en la mecánica de los fluidos, razón por la cual modelaremos el comportamiento de una gota una vez que es expulsada por una tobera de forma horizontal, con la finalidad de observar su trayectoria y por ende saber la importancia de cada efecto hidrodinámico involucrado con la física del problema por plantear.

### **1.1. Aspectos Fundamentales**

Las gotas pueden ser formadas por un gran número de dispositivos diferentes entre ellos, que en algunos casos pueden llegar a ser un tanto complejos. En muchas investigaciones dedicadas al estudio de la impresión mediante el empleo de la inyección de tinta que resulta en la ruptura de gotas (drop-on-demand), donde la distancia de la boquilla y el sustrato es pequeña, ha sido investigada teóricamente tomando en cuenta la importancia de conocer con precisión las diferentes trayectorias y regímenes dinámicos involucrados. En la impresión de inyección de tinta, la velocidad de la gota puede ser obtenida con una cámara fotográfica de alta velocidad o por métodos láser (Mohammad Masoud Mohebi *et al.* 2005). Lamentablemente al no contar con este tipo de tecnologías avanzadas, se hace uso de un modelo analítico, que será tema central de este trabajo y con el cual se obtendrá un resultado que será comparado con los resultados obtenidos con la cámara de alta velocidad que describe el movimiento real de la gota. La técnica que se estudia en este trabajo consiste en las trayectorias de vuelo horizontales, que tiene como objetivo observar la pérdida de altura de la gota una vez que es expulsada de la tobera.

La trayectoria de la gota puede modelarse mediante una ecuación de movimiento, que puede deducirse de la segunda ley de Newton. La ecuación de movimiento de pequeñas partículas en un fluido viscoso en reposo se remonta al trabajo de Basset, Boussinesq y Oseen (Mohammad Rostami *et al.* 2006), y se conoce comúnmente como la ecuación de

BBO. Con base a esta ecuación se modelara la trayectoria y el comportamiento de la gota una vez que ha sido expulsada.

La ecuación de BBO incluye la presencia de cinco efectos hidrodinámicos que corresponden básicamente a la fuerza que está actuando sobre la partícula debido a un flujo viscoso estacionario, la existencia de gradientes de presión en el fluido que lo rodea, el efecto inercial debido a la masa agregada a la partícula, el efecto temporal representado por la historia integral de Basset y las fuerzas externas como la gravedad (P.J. Thomas. 1992; P.J. Thomas. 1997; Mohammad Rostamiet *al.* 2006). En la siguiente sección se dará con mayor detalle y claridad los antecedentes mismos del problema.

## **1.2. Antecedentes**

### **1.2.1. Estudios Previos**

Las amplias aplicaciones asociadas a mejorar la calidad de la impresión mediante el empleo de las técnicas de inyección de tinta han estimulado la investigación y el desarrollo fundamental de las técnicas asociadas a la dinámica de las gotas a pequeña escala. En los últimos años, los esfuerzos de sólidas investigaciones han dado lugar a avances significativos en estudios teóricos y experimentales sobre los procesos en la generación de gotas. Grandes avances tecnológicos han permitido la modelización numérica directa de ciertas propiedades de la gota. Gracias a ello se ha mejorado significativamente la comprensión fundamental de los fenómenos y procesos asociados con pequeñas gotas. Los conceptos estudiados comúnmente son la tensión superficial, presión interna, inestabilidad de las gotas, termodinámica de las gotas, generación de las gotas, deformación de las gotas, así como sus características de las mismas en las que una de estas variables involucra la relación entre el número de Reynolds,  $Re$ , y el número de Weber,  $We$ , de suma importancia para la validación de este trabajo, etc. A continuación se describirán brevemente algunas de estas investigaciones.

Charles N. Baroudet *al.* 2010, analizaron la formación, el transporte y fusión de pequeñas gotas microfluídicas. En este trabajo se concentran en las características físicas que determinan el flujo de las gotas en microcanales y utilizando conceptos clásicos de la

dinámica de fluidos, consiguen explicar el comportamiento observado. También se estudian tres aspectos a detalle: la formación de las gotas y las interacciones dominantes dependiendo de la geometría en que son formadas; el transporte de las gotas, particularmente, la evaluación de la velocidad de caída, las relaciones de presión-velocidad, y el campo de flujo inducido por la gota y la fusión de las gotas.

P. Garstecki *et al.* 2005, estudiaron con técnicas hidrodinámicas la formación de burbujas de gas en un líquido en sistemas microfluídicos. Estos sistemas comprenden conductos que tienen anchuras del orden de micrómetros produciendo burbujas con distribuciones de tamaño estrechas. La tasa de flujo de los líquidos a través de los dispositivos determina el mecanismo de formación de las burbujas de ruptura controlada por la tasa de flujo del líquido (con bajos números capilares y en la presencia de fuerte confinamiento por las paredes de los microcanales) o bien aquellos casos en que la dinámica es dominada por los efectos de la inercia (a números altos de Weber).

En el trabajo de G. V. Kharlamov *et al.* 2010, se presentan los resultados de los cálculos de la dinámica molecular de nanogotas. Los perfiles de densidad, presión, los radios de las gotas, los radios de la tensión, así como las tensiones superficiales mecánicas y termodinámicas han sido calculados. Se muestra la disminución de tensión superficial mecánica y termodinámica con la disminución del radio de la gota y como es que puede llegar a ser cero con el mismo radio inicial dependiendo de la temperatura.

H. Tenget *al.* 1994, hicieron uso de una ecuación dinámica para predecir el tamaño de las gotas durante la ruptura de chorros cilíndricos líquidos. Esta ecuación de gotas se aplica a baja velocidad, líquido en líquido y chorros de líquido en gas con fluidos newtonianos o no-newtonianos. Este trabajo demuestra claramente la dependencia del tamaño de la gota con el número de Ohnesorge.

En el trabajo de N. Nikolopoulos *et al.* 2011, la colisión binaria central de dos gotas de diferente tamaño se investigó numéricamente empleando para ello la metodología del volumen del fluido. El método numérico basado en la solución de las ecuaciones de continuidad y momento en la formación axisimétrica se acopla con una cuadrícula local adaptativa desarrollada recientemente, permitiendo de este modo una representación precisa

de la interfaz entre el líquido y la fase gaseosa. Este trabajo se llevó a cabo considerando una velocidad relativa constante de las gotas que chocan y tomando en cuenta la combinación de los parámetros adimensionales que afectan el proceso de colisión; es decir, la influencia de los números de Weber y Ohnesorge.

Jianzhong Lin *et al.* 2009, utilizaron un modelo integral basado en las ecuaciones de Navier-Stokes junto con el método de seguimiento de partículas para estudiar la atomización efervescente para establecer la relación entre la velocidad de la pequeña gota cerca de la placa y las diferentes condiciones de funcionamiento. Los modelos y código numérico se validaron mediante la comparación de los resultados numéricos con los resultados experimentales publicados. Los efectos de la relación de aire a líquido, diámetro de la boquilla, la tasa de flujo del líquido, y la posición de la placa que coincide con el número de Weber, así como la deposición de gotas sobre la placa se discutieron ampliamente.

Boon-Beng Lee *et al.* 2008, tomando en cuenta el peso de la gota analizaron que la tensión superficial puede ser influenciada por las propiedades del líquido. Este estudio tuvo como objetivo verificar la validez de los factores de corrección de Harkins-Brown (P. Alart *et al.* 2006), y la correlación del número de Bond. Las muestras de líquidos de tensión superficial conocida y la viscosidad fueron escogidas y clasificadas en seis diferentes grupos. La validación se lleva a cabo mediante la comparación de los datos recogidos en este estudio con la correlación existente y con la ayuda también del análisis adimensional.

S. Sikalo *et al.* 2006, observaron diferentes elementos característicos de los fenómenos que pueden aparecer cuando una gota impacta en una superficie. El resultado del impacto depende de las propiedades de la gota y de la superficie impactada, que puede ser, por ejemplo, una superficie seca o líquida. Siguiendo un análisis dimensional, el número de parámetros independientes se puede reducir a un conjunto de grupos dimensionales que rigen un proceso considerado. Dentro de estos, un parámetro adimensional de suma importancia para entender los procesos de impacto es el número de Weber.

### 1.2.2. Antecedentes directos

Este trabajo se basa principalmente en tres artículos de los cuales se tomaron varias ideas y se modificaron algunos detalles. A continuación se describen brevemente cada uno de ellos y las condiciones a las que llegaron los autores:

- Mohammad Masoud Mohebi *et al.* 2005. En este trabajo los resultados de una simple medida experimental fue empleada para estudiar las trayectorias de las gotas expulsadas por una impresora de inyección de tinta. Las gotas de un diámetro promedio de  $224\mu\text{m}$  fueron expulsadas desde un inyector con una boquilla de  $76\mu\text{m}$ . el recorrido del vuelo registrado se utilizó para encontrar la fuerza de arrastre, la desaceleración y por lo tanto la pérdida de altura cuando las gotas fueron expulsadas horizontalmente. Usando diversos enfoques para flujos semi-turbulentos, se obtuvieron buenos ajustes para la trayectoria. Se desarrolló un modelo para incluir el efecto del cambio de forma de la gota, de cilindro a esfera durante el vuelo, pero esto no mejoró el ajuste de la trayectoria.
- P.J. Thomas. 1992, presento un estudio de parámetros sobre el desarrollo de la integral de Basset que aparece en la ecuación de movimiento de una partícula que se mueve a través de un fluido. El movimiento de las partículas se investiga numéricamente para un flujo a través de una descarga aerodinámica. Se ha encontrado que, para este tipo de flujo, la fuerza de la historia de Basset que actúa sobre la partícula se describe por la integral de Basset que puede llegar a ser muchas veces mayor que el arrastre debido a la viscosidad en la región de choque inmediato. Se demuestra cómo esta fuerza afecta el movimiento de las partículas a través del choque con partículas diferentes. Sin embargo, los resultados obtenidos muestran que es justificado despreciar la integral de Basset para la descripción teórica del movimiento de los tipos de partículas de uso general en técnicas de trazadores de medición de flujo para el tipo de flujo que considero.

- Daehwan Jang et al. 2008. En este trabajo se puede apreciar la importancia de la impresión de inyección de tinta y los patrones que se requieren para obtener una buena impresión. Para llevar a cabo lo anterior, los fluidos utilizados como suelen ser tintas industriales deben tener la capacidad de ser de forma estable y precisa. En este trabajo se investigan la interrelación entre la capacidad de impresión de chorro de tinta y propiedades de los fluidos físicos mediante la supervisión de la dinámica de la formación de las gotas. La capacidad de impresión de los fluidos se determinó utilizando el inverso  $Z$  del número de Ohnesorge,  $Oh$ , que relaciona a la viscosidad, tensión superficial y la densidad del fluido. Experimentalmente se ha definido que el rango de impresión óptima se encuentra en el dominio de  $4 \leq Z \leq 14$ .

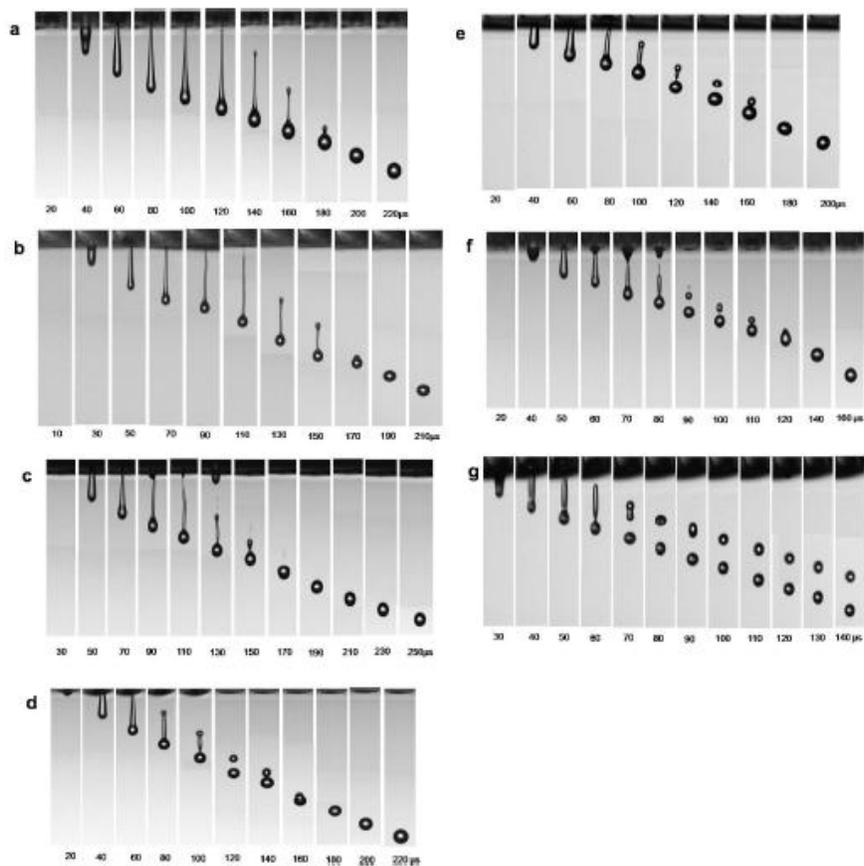


Figura 1. 1. Secuencia de fotos representativas de la formación de gotas con valores de  $Z$  que van desde 2 a 17: (a)  $Z = 2.17$ ; (b)  $Z = 3.57$ ; (c)  $Z = 4.08$ ; (d)  $Z = 6.57$ ; (e)  $Z = 7.32$ ; (f)  $Z = 13.68$ ; and (g)  $Z = 17.32$ .

### 1.3. Objetivo

En este trabajo se desarrollará un modelo analítico bidimensional para una pequeña gota expulsada por una boquilla con objeto de poder predecir la trayectoria, siguiendo un procedimiento similar al de Mohammad Masoud Mohebiet *al.* 2005; sin embargo, la diferencia fundamental radica en que además de la posición de la gota, en este trabajo se analiza de manera complementaria la influencia de cinco efectos hidrodinámicos, los cuales cuatro de ellos ratifican el trabajo de P.J. Thomas. 1997, y uno más será el efecto de la tensión superficial de la gota. Cabe mencionar que en este trabajo idealizaremos que la pequeña gota que se estudia será rígida y no deformable.

Se plantearán las ecuaciones de cantidad de movimiento en coordenadas cartesianas, sujetas a las condiciones iniciales para la posición de la gota. La manera de adimensionalizar las ecuaciones fue tomando en cuenta que las fuerzas inerciales deben ser controladas por las fuerzas gravitatorias en primera aproximación y en consecuencia la gota no puede describir totalmente una trayectoria horizontal antes de llegar a la superficie. Lo anterior revela claramente que las correspondientes ecuaciones de movimiento al menos dependerán de los números de Reynolds, Weber y de la inversa del número de Ohnesorge. Una vez que se tiene la ecuación adimensionalizada se pueden estudiar los diferentes patrones o trayectorias en términos de estos parámetros.

En consecuencia el objetivo central de este trabajo es la predicción teórica de la trayectoria de la gota una vez que es expulsada por la boquilla y en aquellos casos que sea posible compararla con los resultados experimentales obtenidos en el trabajo de Mohammad Masoud Mohebiet *al.* 2005 mediante el empleo de la cámara de alta velocidad utilizada. En la comparación anterior, se considera que el término de Basset incluido en el presente trabajo, puede influir notoriamente la trayectoria de la gota, ya que la pérdida de altura no se controla únicamente por la fuerza de gravedad. También como se verá más adelante es importante anticipar la importancia que existirá entre el número de Reynolds y el número de Weber.

## Capítulo 2

# Modelo Físico

En este capítulo se explicará con detalle el problema físico, así como el modelo matemático que describe el problema en cuestión.

### 2.1. Breve Descripción del modelo a resolver.

Como se dijo anteriormente, el objetivo de este trabajo es analizar la trayectoria de la gota, así como determinar la influencia que tiene cada uno de los efectos hidrodinámicos sobre la trayectoria. Como también se menciona en el trabajo de MohammadMasoudMohebiet *al.* 2005, para modelar el problema físico se hace uso de un simple arreglo experimental para estudiar las trayectorias de las gotas expulsadas por una impresora de inyección de tinta. Pequeñas gotas con un diámetro de  $224\mu\text{m}$  fueron expulsadas desde una boquilla con un orificio de  $76\mu\text{m}$ . Una estación de impresión diseñada para suspensiones cerámicas fue modificada para estudiar la trayectoria horizontal de las gotas expulsadas de la boquilla para modelar el vuelo de las gotas, así como su pérdida de altura como se muestra en la siguiente figura.

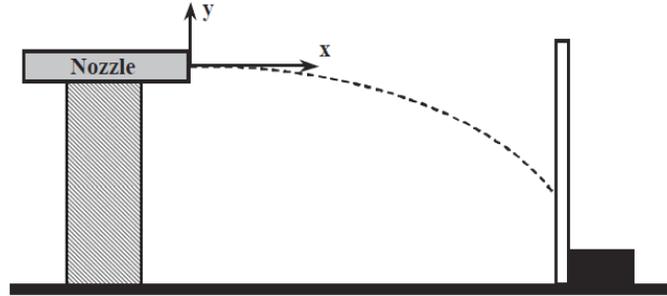


Figura 2.1. Esquema físico del movimiento de la gota.

Ahora bien, analizado el arreglo experimental por el cual se modelara la trayectoria de la gota, solo queda describir los efectos hidrodinámicos con los cuales se van hacer el modelo analítico a resolver siendo estos que se mencionan a continuación.

Un cuerpo inmerso en un fluido, que se desplaza con velocidad relativa no nula respecto a éste, sufre una fuerza de resistencia al movimiento, debida al efecto neto de la presión ejercida por el fluido y del esfuerzo de corte producido por la viscosidad del fluido. La fuerza resultante de ambas contribuciones se denomina arrastre.

La expresión más general para el arrastre sobre cuerpos sumergidos es,

$$F_d = C_D A \rho \frac{v^2}{2} \quad (2.1)$$

Donde  $A$  es el área normal proyectada en la dirección del flujo,  $v$  la velocidad,  $\rho$  la densidad y  $C_D$  es el coeficiente de arrastre. Este último es un número adimensional, que es función de la forma del cuerpo y del número de Reynolds. En el caso particular de esferas en régimen laminar, es decir para números de Reynolds  $< 1$ , se aplica la ley de Stokes,

$$C_D = \frac{24}{Re} \quad (2.2)$$

Por lo que la fuerza de arrastre es equivalente a,

$$F_d = 6\pi R\mu_f \quad (2.3)$$

En donde  $R$  es el radio de la esfera.

Cabe mencionar que el número de Reynolds  $Re$  es una magnitud adimensional definida como,

$$Re = \frac{\rho v R}{\mu} \quad (2.4)$$

Donde  $\mu$  es la viscosidad.

Físicamente, el número de Reynolds es un cociente entre las fuerzas inerciales, asociadas a la velocidad y las fuerzas de resistencia viscosa, asociadas a la viscosidad (G. Ahmadi).

La fuerza debido al gradiente de presión es la fuerza que se produce cuando hay una diferencia en la presión a través de una superficie. Una diferencia en la presión puede resultar en una aceleración de acuerdo con la segunda ley de Newton, si no hay ninguna fuerza adicional para equilibrarlo. La fuerza resultante se dirige siempre a partir de la región de presión más alta a la región de menor presión. Cuando un fluido está en un estado de equilibrio, el sistema se conoce como estado en equilibrio hidrostático.

Si hay un fluido, el cual no es viscoso no puede haber fricción o cizallamiento entre el fluido y cualquier superficie que este en contacto. Esto significa que la única fuerza de un fluido no viscoso puede ejercer contra un límite es normal a la frontera. La componente de la fuerza perpendicular a la frontera es causada por una presión.

$$P = \frac{\vec{F} \cdot \vec{n}}{A} \quad (2.5)$$

El límite no necesita ser el límite real entre el fluido y un objeto. Puede ser una frontera imaginaria dentro del fluido que nos permitirá analizar como la presión contribuye al movimiento de un fluido. En un fluido no viscoso, la presión es un escalar; sin embargo, la fuerza es un vector de modo que podríamos esperar que esté relacionado por el gradiente. Analizando la siguiente figura

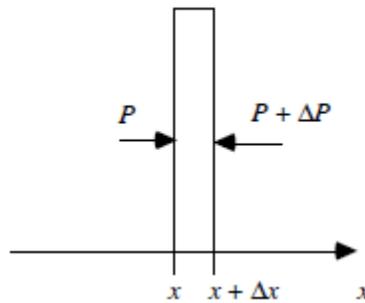


Figura 2.2. Presión neta en dirección  $x$  sobre un elemento diferencial.

Sumando las fuerzas en la dirección  $x$  se tiene que,

$$\Delta F_x = +PA - (P + \Delta P)A = -A \Delta P \quad (2.6)$$

$$\Delta V = A \Delta x \quad (2.7)$$

$$\frac{F_x}{V} = \frac{-A \Delta P}{A \Delta x} \quad (2.8)$$

Cancelando el área y tomando el límite  $\Delta x$  que tienda a infinito.

$$f = \frac{F_x}{V} = -\frac{dP}{dx} \quad (2.9)$$

Generalizando fácilmente a tres dimensiones se tiene que (Frank M. White. 2008),

$$f = -\nabla P \quad (2.10)$$

Cuando una partícula se mueve a través del aire, el aire ejerce una fuerza sobre la partícula. Para una partícula en movimiento a velocidad constante con respecto al aire, esta se le llama la fuerza de arrastre y que ha sido bien medida. Si la esfera se mueve con una velocidad no constante hay fuerzas adicionales (A. H. Techet. 2005). Estas fuerzas inestables dependen de la aceleración de la partícula. Es obvio que el aire circundante tiene un profundo efecto sobre el movimiento de la partícula, lo que reduce su aceleración. Una de las razones por las que la aceleración se reduce es la fuerza de flotación. Esta fuerza actúa frente a la fuerza de gravedad y reduce la fuerza neta sobre la partícula. También hay otro efecto de igual importancia. Cuando la partícula no solo es la única que se acelera, sino que también se puede acelerar por el aire que lo rodea. Así, la partícula se puede mover a través del aire que tiene una inercia mayor que una que se mueve a través del vacío. Este aumento de la inercia también reduce la aceleración de la fuerza de gravedad que actúa sobre la partícula. El aumento de la inercia de un objeto que se mueve a través de un líquido por lo general se le llama masa añadida o masa agregada (J. Pantaleone et al.).

Esta fuerza es usualmente escrita como,

$$F_a = -m_a \left( \frac{dv}{dt} \right) \quad (2.11)$$

La masa añadida es la parte  $C$  de la masa del fluido desplazado por la partícula del volumen  $V$ .

$$m_a = C\rho V \quad (2.12)$$

Donde  $C$  es el coeficiente de la masa agregada.

En el caso más sencillo a considerar, en el que la partícula es de la forma más simple (esfera) y se traslada sin rotación en el fluido no viscoso, la constante  $C$  es un escalar y toma el valor de 0.5 (M. Simcik et al. 2008).

De manera adicional a las fuerzas anteriores, en un cuerpo sumergido en un fluido, las fuerzas inestables ya mencionadas no son las únicas y también se puede tomar en cuenta la influencia de la fuerza de Basset. La trayectoria seguida por una partícula pequeña suspendida en una corriente de fluido; en general se rige por una serie de fuerzas que actúan sobre la partícula. De estas, las fuerzas causadas por un campo externo que interactúa con la inercia de la partícula son las más demandantes pero las fuerzas hidrodinámicas pueden actuar de una manera compleja en la determinación de la trayectoria de las partículas. En este sentido, el término fuerza de Basset describe la fuerza debido al desarrollo de la capa límite en retraso con el cambio de la velocidad relativa de los cuerpos que se mueven a través del fluido. El término Basset aborda efectos viscosos, así como el retraso temporal en el desarrollo de la capa límite. La fuerza de Basset es difícil de implementar y se descuida comúnmente por razones prácticas; sin embargo, puede ser sustancialmente grande cuando el cuerpo se acelera a una velocidad alta.

En la mayoría de las investigaciones se supone que la fuerza de arrastre que actúa sobre la partícula por el fluido se da mediante la ley de Stokes y es proporcional a la velocidad relativa de la partícula con respecto al fluido. La suposición de que la fuerza de arrastre está dada por esta ley es; sin embargo, válida solo para una partícula esférica en suspensión en un flujo uniforme. Para un flujo de fluido viscoso arbitrario, en la ausencia de fronteras exteriores, el arrastre sobre una partícula se puede evaluar usando las leyes de Faxen en lugar de la ley de Stokes. Para el movimiento de una partícula inestable, incluso las leyes de Faxen logran dar la descripción completa de las fuerzas hidrodinámicas que actúan sobre la partícula. Deben tenerse en cuenta entonces que para la aceleración del fluido a lo largo de la partícula se incluya también la historia pasada de la aceleración del fluido, dando lugar a la masa agregada ya mencionada y la fuerza de Basset que actúa sobre la partícula, respectivamente (P. J. Thomas. 1997).

La fuerza de Basset se define como,

$$F_B = -\frac{3}{2}D^2\sqrt{\pi\mu_f\rho_f}\int_0^t\frac{dv}{\sqrt{t-\tau}}d\tau \quad (2.13)$$

En donde  $\tau$  es una variable muda (N. Lukerchenko; Michael R. Krecic et al. 1996).

Por otro lado, una gota de líquido al no ser capaz de expansionarse libremente, puede formar una interfaz con un segundo líquido o un gas. Las moléculas inmersas en la masa líquida se repelen mutuamente debido a su proximidad, pero las moléculas de la superficie libre están menos apretadas y se atraen unas a otras. Al faltarles la mitad de sus vecinas, estas moléculas están en desequilibrio, y por ello la superficie está sometida a tensión. Estos efectos de superficie son los que englobados en Mecánica de Fluidos dentro del concepto de tensión superficial (Frank M. White. 2008).

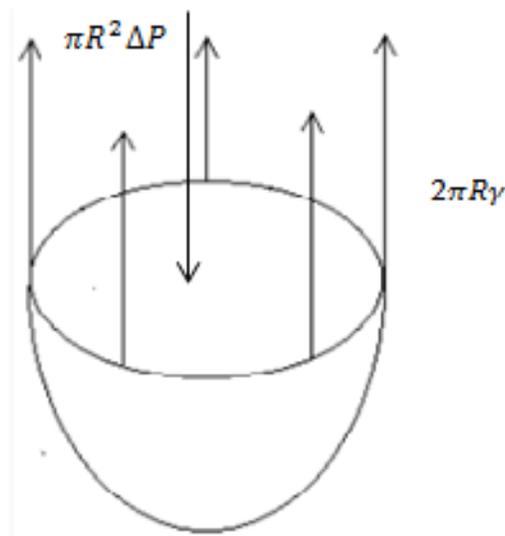


Figura 2.3. Aumento de presión a través de una interfase curvada por efecto de la tensión superficial en el interior de una gota esférica.

En la figura 2.3 se puede ver que el aumento de presión en el interior de una gota esférica equilibra una fuerza distribuida anularmente, debido a la tensión superficial, de magnitud:

$$\pi R^2 \Delta P = 2\pi R \gamma \quad (2.14)$$

$$\Delta P = \frac{2\gamma}{R} \quad (2.15)$$

Podemos usar este resultado para predecir el aumento de presión existente en el interior de una pompa de jabón, que tiene dos interfaces con el aire, una interior y otra exterior, prácticamente con el mismo radio R,

$$\Delta P = 2\Delta P_{gota} = \frac{4\gamma}{R} \quad (2.16)$$

En el siglo XVII no era clara la razón por qué lo que nos tiene sujetos al piso es el mismo efecto que sostiene a la Luna en órbita alrededor de la Tierra. Fue Newton quien asoció estos dos fenómenos físicos mediante el descubrimiento de la gravedad. Fue él quien dedujo que esta está presente en todo el universo. Cuando Newton publicó por primera vez su teoría de la gravitación, para sus contemporáneos fue difícil aceptar la idea de un campo de fuerza que pudiera actuar a través de la distancia. Un planteamiento alternativo en la descripción de la interacción gravitacional, por lo tanto es introducir el concepto de un campo gravitacional que cubre cada punto en el espacio (Julio Cesar Macías Zamora). Cuando una partícula de masa  $m$  se sitúa en un punto donde el campo es el vector  $g$ , la partícula experimenta una fuerza dada por,

$$F_g = mg \quad (2.17)$$

La formación de gotas en un fenómeno extremadamente genérico, coincidente a cualquier flujo de superficie libre. La fuerza impulsora detrás de la separación de las gotas es la tensión superficial, que por definición es una energía por unidad de área. Esta es la razón por la cual la tensión superficial favorece configuraciones con una superficie mínima, es decir, gotas esféricas. Lo que determina la distribución del tamaño de gotas en un aerosol es en gran parte desconocida y ciertamente depende del carácter del flujo, pero incluso el caso más sencillo posible de la ruptura de un chorro cilíndrico es no trivial. Es evidente que no es sólo un tipo de gota producido en el proceso, debido a la generación de gotas mucho más pequeñas conocidas como gotas satélite formadas a partir del cuello alargado entre dos gotas adyacentes.

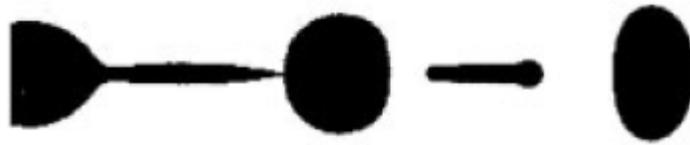


Figura 2.4. Formación del efecto satélite.

La formación de gotas del tipo ilustrado en la figura 2.4, tiene aplicaciones muy amplias. Para todas estas aplicaciones, es muy importante controlar con precisión el tamaño de la gota, de este modo gotas satélite son perjudiciales para la calidad, ya que resultan en al menos dos tamaños de gotas diferentes. Por lo tanto, es una cuestión natural preguntarse si es posible controlar la excitación del chorro dando lugar a la ruptura, de tal manera que sólo un tipo de gota vaya a generar. Razón por la cual se hará uso del trabajo de Daehwan Jang et al. 2008, en donde se plantea la forma de evitar el efecto de las gotas satélite considerando el número de Reynolds  $Re$ , el número de Weber  $We$  y la inversa del número de Ohnesorge  $Oh$ , conocido como  $Z$ .

$$We = \frac{v^2 R \rho}{\gamma}$$

Y quedando  $Z$  como,

$$Z = \frac{(R\rho\gamma)^{1/2}}{\mu} = \frac{Re}{(We)^{1/2}}$$

## 2.2. Ecuaciones de Conservación

En esta sección se describirán las ecuaciones de conservación que gobiernan el movimiento de la gota una vez que es expulsada por la boquilla de la impresora. Las ecuaciones que se plantean son las de cantidad de movimiento para un flujo bidimensional tomando como base el trabajo descrito por P. J. Thomas. 1997, quien deduce teóricamente el movimiento de una partícula esférica no deformable (del orden de  $\mu\text{m}$ ). La ecuación actualmente se denomina por la ecuación de Basset-Boussinesq-Ossen (BBO) y es dada mediante la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}\pi R^3\rho\frac{d\vec{v}}{dt} = & \frac{4}{3}\pi R^3\rho G(\vec{u} - \vec{v}) - \frac{4}{3}\pi R^3\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\rho_f\right)\frac{d}{dt}(\vec{u} - \vec{v}) \\ & + 6R^2\sqrt{\pi\rho_f\mu_f}\int_0^t\frac{d}{d\tau}(\vec{u} - \vec{v})\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} + \vec{F}_g \end{aligned} \quad (2.18)$$

Con

$$G = \frac{3}{8}C_D\frac{\rho_f}{R\rho}(\vec{u} - \vec{v}), [s^{-1}]$$

En la ecuación 2.18,  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  denotan la velocidad del fluido y de la partícula respectivamente. El significado de los cinco términos descritos al lado derecho de la ecuación ha sido comentado brevemente en la descripción teórica del movimiento de la gota, tomando en cuenta que se considera a la gota esférica y no deformable en todo su trayecto. Sin embargo, con la idea de ser más precisos en esta sección se pueden hacer los siguientes comentarios. El primer término representa la fuerza que actúa sobre la partícula debido a un flujo viscoso estacionario, mejor conocido como la fuerza de arrastre. El segundo término es debido al gradiente de presión en el fluido circundante. El tercer término es referido a la masa agregada o aparente y representa la fuerza necesaria para acelerar la masa del fluido que rodea a la partícula y la que se está moviéndose con ella; siendo el incremento de un medio de la masa del fluido desplazado. El cuarto término es la integral de la historia de Basset, la cual ya se ha comentado y cuya contribución al movimiento de la partícula es el objeto de estudio. El quinto denota las fuerzas externas como la gravedad.

### 2.3. Suposiciones

Debido a la dificultad del proceso y naturaleza de los fenómenos que se pueden llegar a presentar a escalas muy pequeñas, las cuales aún no están totalmente comprendidas, es importante establecer ciertas suposiciones que se tomaran en cuenta para simplificar el problema y facilitar la solución. Las suposiciones de este trabajo se enlistan a continuación.

- El fluido expulsado por la tobera es incompresible y newtoniano.
- Se considera que el movimiento de la gota es similar al movimiento de una partícula esférica en un fluido viscoso.
- El movimiento de la partícula a través de un fluido será descrita por la ecuación de Basset-Boussinesq-Ossen (BBO).
- Para el flujo analizado en este trabajo; es decir, para el flujo a través de un choque oblicuo, el término de la presión desaparece en la región aguas abajo, donde las condiciones del flujo se consideran constantes.
- Se considerará la tensión superficial como segundo efecto de estudio en este trabajo.
- Una vez adimensionalizada la ecuación, se tomará muy en cuenta aquellos términos que puedan ser despreciables en comparación con las de mayor peso para poder despreciarlos y hacer más accesible la solución del problema.

Como se mencionó en una de las suposiciones, en donde se toma en cuenta a la tensión superficial como otro efecto de estudio para este trabajo por lo que se tendrá que agregar a la ecuación 2.18, de la misma manera en que se considera la suposición número 4 en donde se despreciara el efecto del gradiente de presión quedando así la ecuación con la cual se utilizara para este trabajo de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \frac{d\vec{v}}{dt} &= \frac{4}{3}\pi R^3 \rho G(\vec{u} - \vec{v}) + \frac{14}{23}\pi R^3 \rho_f \frac{d}{dt}(\vec{u} - \vec{v}) \\ &+ 6R^2 \sqrt{\pi \rho_f \mu_f} \int_0^t \frac{d}{d\tau}(\vec{u} - \vec{v}) \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} + \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \mathbf{g} + 4\pi R \gamma \end{aligned} \quad (2.19)$$

Con

$$G = \frac{3}{8} C_D \frac{\rho_f}{R\rho} (\vec{u} - \vec{v}), [s^{-1}]$$

Introduciendo a  $G$  y al  $C_D$  dentro de la ecuación 2.19, se tiene que,

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \frac{d\vec{v}}{dt} &= 6\pi R \mu_F (\vec{u} - \vec{v}) + \frac{14}{23}\pi R^3 \rho_f \frac{d}{dt}(\vec{u} - \vec{v}) \\ &+ 6R^2 \sqrt{\pi \rho_f \mu_f} \int_0^t \frac{d}{d\tau}(\vec{u} - \vec{v}) \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} + \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \mathbf{g} + 4\pi R \gamma \end{aligned} \quad (2.20)$$

## 2.4. Ecuaciones Adimensionales

A continuación se describe la manera de adimensionalizar la ecuación de cantidad de movimiento 2.20 tomando en cuenta la forma en que la gota va perdiendo altura una vez que es expulsada por la boquilla de la impresora de forma horizontal como se muestra en la siguiente figura.

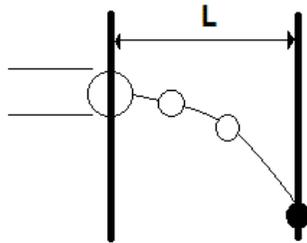


Fig. 2.5. Pérdida de altura de la gota una vez que es expulsada por la boquilla.

Como se observa en la figura 2.4 existe una distancia entre la boquilla y el substrato en el cual chocará la gota a una distancia  $L$ , así como una pérdida de altura una vez que es expulsada la gota hasta que llega al punto de choque nombrada  $\delta$ . Por otro lado y como se mencionó anteriormente, se considera a la fuerza de arrastre y a la fuerza de gravedad como los principales efectos que se deben considerar para este modelo. Al trabajar con un flujo de baja viscosidad como lo es el aire, se puede considerar en primera aproximación que la fuerza de arrastre juega un papel menor dentro del modelo y debido a ello se considerara que el factor más importante es la gravedad ya que es un factor que no se puede depreciar debido a que la gota pierde altura una vez que es expulsada por la boquilla. De este modo, una balance de orden de magnitud en primera aproximación pondrá a competir a la inercia de la gota con la fuerza de gravedad de tal suerte que podemos escribir que,

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \rho \frac{dv}{dt} \sim \frac{4}{3}\pi R^3 \rho g \quad (2.21)$$

Considerando que la velocidad de la partícula tendrá una velocidad inicial y una final y nombrando al tiempo que tarda la gota una vez que es expulsada al substrato como  $t_{vuelo}$  se tiene que,

$$v_f - v_i \sim g t_{vuelo} \quad (2.22)$$

Considerando que la gota es expulsada con una velocidad inicial de cero y considerando que  $\frac{L}{v} = t_{vuelo}$  se puede apreciar que,

$$v_f \sim \frac{gL}{v} \quad (2.23)$$

Como sabemos la partícula lleva una trayectoria desde que es expulsado, razón por la cual la velocidad puede ser puesta en función de la posición y del tiempo.

$$v = \frac{dy}{dt} \int dy = \int v dt \quad y = vt \quad (2.24)$$

Considerando a  $y$  como a  $y_{caract}$  y sustituyendo al tiempo y a la velocidad se tiene que,

$$y_{caract} = v dt = \left(\frac{gL}{v}\right) \left(\frac{L}{v}\right) = \frac{gL^2}{v^2} \quad (2.25)$$

Que permite relacionar a la  $y_{caract}$  con la pérdida de altura  $\delta$  mediante la expresión siguiente,

$$\delta = \frac{gL^2}{v^2} \quad (2.26)$$

Por lo tanto, nuestras variables adimensionales son,

$$\xi = \frac{x}{L}, \eta = \frac{y}{\delta}, \sigma = \frac{t}{t_{vuelo}}, \sigma_m = \frac{\tau}{t_{vuelo}}$$

Cabe mencionar que la cuarta variable adimensional se explicara más adelante ya que requerirá de una idealización para la solución del modelo. Como se mencionó anteriormente, en el presente trabajo se considera un modelo bidimensional y la ecuación 2.20 será la misma tanto para el eje de las abscisas y ordenadas, con la única diferencia en que para el eje  $x$  no se agrega el efecto de la gravedad.

Sustituyendo en 2.20 las variables adimensionales y factorizando se tiene que,

En la dirección  $x$ :

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} = & \frac{9}{2} \frac{\mu_F}{\rho R^2} \left( u - \frac{dx}{dt} \right) + \frac{1}{2} \frac{\rho_F}{\rho R^2} \frac{d}{dt} \left( u - \frac{dx}{dt} \right) \\ & + \frac{9}{2} \frac{\sqrt{\pi \rho_F \mu_F}}{\pi \rho R} \int_0^t \frac{d}{d\tau} \left( u - \frac{dx}{dt} \right) \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} + 3 \frac{\gamma}{\rho R^2} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Como se puede apreciar en esta ecuación, la derivada es función de la posición y del tiempo por lo que se requiere una adecuada adimensionalización para cada una de estas variables, razón por la cual utilizando la variable adimensionalizada que corresponde a la de la distancia recorrida por la gota de forma horizontal se requerirá el álgebra y las sustituciones necesarias para tener a la ecuación 2.27 totalmente adimensionalizada.

Tomando la variable adimensional,

$$\xi L = X$$

y realizando el cambio de variable, se puede escribir que:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = L \frac{d^2\xi}{dt^2}; \quad \frac{d\xi}{d\sigma} \frac{d\sigma}{dt} = \frac{d\xi}{d\sigma} \frac{1}{t_{vuelo}}$$

y

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{d\xi}{dt} \right] = \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{t_{vuelo}} \frac{d\xi}{d\sigma} \right] = \frac{1}{t_{vuelo}} \frac{d}{d\sigma} \left[ \frac{d\xi}{dt} \right] = \frac{1}{t_{vuelo}} \frac{d}{d\sigma} \left[ \frac{d\xi}{d\sigma} \frac{1}{t_{vuelo}} \right]$$

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{1}{t_{vuelo}^2} \frac{d^2\xi}{d\sigma^2}; \quad \frac{d^2x}{dt^2} = L \frac{1}{t_{vuelo}^2} \frac{d^2\xi}{d\sigma^2} = \frac{L}{t_{vuelo}^2} \frac{d^2\xi}{d\sigma^2}$$

$$\frac{dx}{dt} = L \frac{d\xi}{dt} = \frac{d\xi}{d\sigma} \frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{t_{vuelo}} \therefore \frac{dx}{dt} = \frac{L}{t_{vuelo}} \frac{d\xi}{d\sigma}$$

Sabiendo que  $t_{vuelo} = \frac{L}{v}$  y sustituyendo lo anterior en la ecuación 2.27 se tiene que,

$$\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{d\sigma^2} &= \frac{9}{2} \frac{\mu_F L u}{\rho R^2 v^2} \left(1 - \frac{v}{u} \frac{d\xi}{d\sigma}\right) + \frac{1}{2} \frac{\rho_F u}{\rho v} \frac{d}{d\sigma} \left(1 - \frac{v}{u} \frac{d\xi}{d\sigma}\right) \\ &+ \frac{9}{2} \frac{\sqrt{\pi \rho_F \mu_F L v} u}{\pi \rho R v^2} \int_0^{t/t_{vuelo}} \frac{d}{d\sigma_m} \left(1 - \frac{v}{u} \frac{d\xi}{d\sigma}\right) \frac{d\sigma_m}{\sqrt{\sigma - \sigma_m}} + \frac{3\gamma}{\rho R^2} \frac{L}{v^2} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Que puede reescribirse como,

$$\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{d\sigma^2} &= \frac{9}{2} \frac{\mu_F L u}{\rho R^2 v^2} - \frac{9}{2} \frac{\mu_F L}{\rho R^2 v} \frac{d\xi}{d\sigma} - \frac{1}{2} \frac{\rho_F}{\rho} \frac{d^2\xi}{d\sigma^2} \\ &- \frac{9}{2} \frac{\sqrt{\pi \rho_F \mu_F L v}}{\pi \rho R v} \int_0^{t/t_{vuelo}} \frac{d}{d\sigma_m} \left(\frac{d\xi}{d\sigma}\right) \frac{d\sigma_m}{\sqrt{\sigma - \sigma_m}} + \frac{3\gamma L}{\rho R^2 v^2} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Llevando a cabo el mismo procedimiento ahora para el eje de las ordenadas con la única diferencia que en este caso es indispensable incluir el efecto de la fuerza de la gravedad ya que será la causante de la pérdida de la altura, se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} \pi \rho R^3 \frac{d^2y}{dt^2} &= 6\pi R \mu_F \left(u - \frac{dy}{dt}\right) + \frac{2}{3} \pi R^3 \rho_F \frac{d}{dt} \left(u - \frac{dy}{dt}\right) \\ &+ 6R^2 \sqrt{\pi \rho_F \mu_F} \int_0^t \frac{d}{d\tau} \left(u - \frac{dy}{dt}\right) \frac{d\tau}{\sqrt{t - \tau}} + \frac{4}{3} \pi R^3 \rho g + 4\pi R \gamma \end{aligned} \quad (2.30)$$

Aplicando ahora las mismas consideraciones que se hicieron para  $x$  pero ahora considerando la variable adimensional  $\delta = \frac{gL^2}{v^2}$ , así como el cambio de variable, se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dt^2} &= \delta \frac{d^2R}{dt^2}; \frac{dR}{dt} = \frac{dR}{d\sigma} \frac{d\sigma}{dt} = \frac{dR}{d\sigma} \frac{1}{t_{velo}} \\ \frac{d^2R}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left[\frac{dR}{dt}\right] = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{t_{velo}} \frac{dR}{d\sigma}\right] = \frac{1}{t_{velo}} \frac{d}{d\sigma} \left[\frac{dR}{dt}\right] = \frac{1}{t_{velo}} \frac{d}{d\sigma} \left[\frac{dR}{d\sigma} \frac{1}{t_{velo}}\right] \end{aligned}$$

$$\frac{d^2R}{dt^2} = \frac{1}{t_{velo}^2} \frac{d^2R}{d^2\sigma}; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \delta \frac{1}{t_{velo}^2} \frac{d^2R}{d^2\sigma}$$

Y sustituyendo en la ecuación 2.30

$$\begin{aligned} \frac{d^2\eta}{d\sigma^2} = & \frac{9}{2} \frac{\mu_F u}{\rho R^2 g} \left(1 - \frac{gL}{vu} \frac{d\eta}{d\sigma}\right) + \frac{1}{2} \frac{\rho_F v u}{\rho g L} \frac{d}{d\sigma} \left(1 - \frac{gL}{vu} \frac{d\eta}{d\sigma}\right) \\ & + \frac{9}{2} \frac{\sqrt{\pi \rho_F \mu_F v u}}{\pi \rho R g \sqrt{L}} \int_0^{t/tvuelo} \frac{d}{d\sigma_m} \left(1 - \frac{gL}{vu} \frac{d\eta}{d\sigma}\right) \frac{d\sigma_m}{\sqrt{\sigma - \sigma_m}} + \frac{3\gamma}{\rho R^2 g} + 1 \end{aligned} \quad (2.31)$$

Eliminando los términos que salen sobrando se tiene la ecuación adimensionalizada para el eje y:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\eta}{d\sigma^2} = & \frac{9}{2} \frac{\mu_F u}{\rho R^2 g} - \frac{9}{2} \frac{\mu_F L}{\rho R^2 v} \frac{d\eta}{d\sigma} - \frac{1}{2} \frac{\rho_F}{\rho} \frac{d^2\eta}{d\sigma^2} \\ & - \frac{9}{2} \frac{\sqrt{\pi \rho_F \mu_F L}}{\pi \rho R \sqrt{v}} \int_0^{t/tvuelo} \frac{d}{d\sigma_m} \left(\frac{d\eta}{d\sigma}\right) \frac{d\sigma_m}{\sqrt{\sigma - \sigma_m}} + \frac{3\gamma}{\rho R^2 g} + 1 \end{aligned} \quad (2.32)$$

En la ecuación 2.29 y la ecuación 2.32 se definen los siguientes parámetros adimensionales.

$$\alpha = \frac{9}{2} \frac{\mu_F L u}{\rho R^2 v^2}$$

$$\beta = \frac{9}{2} \frac{\mu_F L}{\rho R^2 v}$$

$$\omega = \frac{1}{2} \frac{\rho_F}{\rho}$$

$$\varepsilon = \frac{9}{2} \frac{\sqrt{\pi \rho_F \mu_F L v}}{\pi \rho R v}$$

$$\alpha' = \frac{9 \mu_F u}{2 \rho R^2 g}$$

$$\beta' = \frac{9 \mu_F L}{2 \rho R^2 v}$$

$$\omega' = \frac{1 \rho_F}{2 \rho}$$

$$\varepsilon' = \frac{9 \sqrt{\pi \rho_F \mu_F L}}{2 \pi \rho R \sqrt{v}}$$

Como se puede observar en las ecuaciones 2.29 y 2.32 el efecto de la tensión superficial, que para las dos representan el quinto término son casi parecidos ya que para una depende de la trayectoria recorrida por la gota de manera horizontal y la velocidad y la otra de la gravedad respectivamente, por lo que con la ayuda del trabajo de DaehwanJang et al. 2008, se pondrán ambos términos en función del parámetro adimensional  $Z$ , que es la inversa del número de Ohnesorge que a su vez es la relación del número de Reynolds y el Número de Weber.

Para la ecuación 2.29,

$$Re_p = \frac{v R \rho_F}{\mu_F}$$

$$We = \frac{v^2 R \rho_F}{\gamma}$$

$$Z = \frac{Re_p}{(We)^{\frac{1}{2}}}$$

Poniendo el siguiente factor en términos de la tensión superficial y en términos de  $Z$ , se tiene que

$$\frac{3\gamma L}{\rho R^2 v^2} = \frac{3 \frac{\rho_F v^2 R}{We} L}{v^2 R^2 \rho} = \frac{3 \rho_F L}{We R \rho} = \frac{3 \rho_F L}{We R \rho} = 3 \frac{L \rho_F}{R \rho} \frac{1}{We} = 3 \frac{L \rho_F}{R \rho} \frac{1}{\frac{Re_p^2}{Z^2}} = 3 \frac{L \rho_F}{R \rho} \frac{Z^2}{Re_p^2}$$

Por lo que nuestro nuevo número adimensional resulta

$$\lambda = 3 \frac{L\rho_F}{R\rho Re_p^2}$$

Para la ecuación 2.32 poniendo el término de la tensión superficial en términos de  $Re_p$ ,  $We$  y  $Z$  ya comentados se tiene que,

$$\frac{3\gamma}{\rho R^2 g} = \frac{3L \frac{\rho_F v^2 R}{We}}{\rho R^2 g} = \frac{3L\rho_F v^2 R}{\rho R^2 We g} = \frac{3L\rho_F v^2}{\rho R g We} = \frac{3L\rho_F v^2}{\rho R g} \frac{Z^2}{Re_p^2}$$

Por lo que el nuevo parámetro adimensional para  $\gamma$  resulta

$$\lambda' = \frac{3L\rho_F v^2}{\rho R g Re_p^2}$$

Concluyendo este capítulo las ecuaciones adimensionalizadas se pueden escribir de la manera siguiente.

En la dirección x:

$$\frac{d^2\xi}{d\sigma^2} = \alpha - \beta \frac{d\xi}{d\sigma} + \omega \frac{d^2\xi}{d\sigma^2} + \varepsilon \int_0^{t/t_{vuelo}} \frac{d}{d\sigma_m} \left( \frac{d\xi}{d\sigma} \right) \frac{d\sigma_m}{\sqrt{\sigma - \sigma_m}} + \lambda Z^2 \quad (2.33)$$

En la dirección y:

$$\frac{d^2\eta}{d\sigma^2} = \alpha' - \beta' \frac{d\eta}{d\sigma} + \omega' \frac{d^2\eta}{d\sigma^2} + \varepsilon' \int_0^{t/t_{vuelo}} \frac{d}{d\sigma_m} \left( \frac{d\eta}{d\sigma} \right) \frac{d\sigma_m}{\sqrt{\sigma - \sigma_m}} + \lambda Z^2 + 1 \quad (2.34)$$

## Capítulo 3

# Solución del modelo analítico

En este capítulo se resolverán las ecuaciones 2.33 y 2.34 que se estuvieron trabajando en el capítulo 2 considerando ciertas simplificaciones para su solución.

### 3.1. Consideraciones al modelo analítico

Dándole valores específicos a los parámetros adimensionales con objeto de identificar los efectos hidrodinámicos más importantes de las ecuaciones, tenemos que los parámetros  $\beta$ ,  $\varepsilon$  y  $\lambda$  representan los efectos de la fuerza de arrastre, el efecto de la fuerza de Basset y el efecto de la tensión superficial; respectivamente, y son algunos de los efectos más importantes y que dependiendo de los valores que asuman permanecerán en las ecuaciones permitiendo despreciar otros efectos para la mayor simplicidad del modelo. Por otro lado, un punto importante que conviene destacar en la integral que considera al efecto de la fuerza de Basset de la ecs. (2.33) y (2.34) son los productos de derivadas de  $\sigma_m$  y  $\sigma$ , por lo que se simplifica considerando que  $\sigma = \sigma_m$ .

Ahora bien, despreciando algunos términos y dejando a otros ya comentados en el párrafo anterior las ecuaciones que modelaran la trayectoria de la gota quedaran de la siguiente manera.

En la dirección  $x$ ,

$$\frac{d^2\xi}{d\sigma^2} = -\beta \frac{d\xi}{d\sigma} + \varepsilon \int_0^{t/t_{vuelo}} \frac{d^2\xi}{d\sigma_m^2} \frac{d\sigma_m}{\sqrt{\sigma - \sigma_m}} + \lambda Z^2 \quad (3.1)$$

En la dirección  $y$ ,

$$\frac{d^2\eta}{d\sigma^2} = -\beta' \frac{d\eta}{d\sigma} + \varepsilon' \int_0^{t/t_{vuelo}} \frac{d^2\eta}{d\sigma_m^2} \frac{d\sigma_m}{\sqrt{\sigma - \sigma_m}} + \lambda' Z^2 + 1 \quad (3.2)$$

### 3.2. Teoría de Perturbaciones

La teoría de perturbaciones permite obtener aproximaciones de los valores y funciones propios de un sistema tomado como punto de partida a un sistema de referencia, que preferentemente debe tener alguna semejanza con el sistema que se debe estudiar. Este método de aproximación se usa ampliamente en diversas ramas de las matemáticas aplicadas para encontrar soluciones aproximadas de mucho tipos de ecuaciones, incluyendo tanto a las algebraicas, como a las integro-diferenciales.

#### 3.2.1. Desarrollo perturbativo

La elección del sistema de referencia no es única, sin embargo es necesario que su solución pueda alcanzarse y que sea lo más parecido posible al sistema real. Cuando esto ocurre la diferencia entre el Hamiltoniano de referencia y el real será pequeña, y se espera que sus soluciones no sean muy diferentes. De tal forma que esa diferencia pueda considerarse como una pequeña perturbación sobre el sistema de referencia. Ahora bien, para hablar del Hamiltoniano, es indispensable la definición una función que describa el estado de un sistema mecánico que nos permite hallar las ecuaciones de movimiento buscadas, es por ello que a nuestra solución, en nuestro caso  $\xi$  y  $\eta$  será indispensable hacer una separación como la que se muestra a continuación.

Supongamos que se desea obtener en forma aproximada los autovalores y las autofunciones del operador Hamilton  $H$ , que para este trabajo son  $\xi$  y  $\eta$ . En este caso, la solución se puede separar de la siguiente manera,

$$\xi = \xi_0 + \varepsilon \xi_1 + \dots \quad (3.3)$$

$$\eta = \eta_0 + \varepsilon \eta_1 + \dots \quad (3.4)$$

Como se aprecia, el orden de la aproximación puede ser mayor pero en nuestro caso se trata de cambios muy pequeños con respecto al orden 1 y en consecuencia, es más que suficiente para acercarnos a la solución. Las funciones  $\xi_0$  y  $\eta_0$  representan nuestros hamiltonianos no perturbados mientras que  $\xi_1$  y  $\eta_1$  son los términos perturbativos adicionales a los hamiltonianos. El parámetro  $\varepsilon$  adimensional representa el efecto de la fuerza de Basset y su valor es mucho menor que uno. Tomando en cuenta estas consideraciones, las ecuaciones a resolver quedaran de la siguiente manera.

En el caso de la dirección en  $x$ :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \xi_0}{d\sigma^2} + \varepsilon \frac{d^2 \xi_1}{d\sigma^2} = & -\beta \left( \frac{d\xi_0}{d\sigma} + \varepsilon \frac{d\xi_1}{d\sigma} \right) - \varepsilon \int_0^{t/t_{vuelo}} \left( \frac{d^2 \xi_0}{d\sigma_m^2} + \varepsilon \frac{d^2 \xi_1}{d\sigma_m^2} \right) \frac{d\sigma_m}{\sqrt{\sigma - \sigma_m}} \\ & + \lambda Z^2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

de esta manera para la función  $\xi_0$  se tiene que,

$$\frac{d^2 \xi_0}{d\sigma^2} = -\beta \frac{d\xi_0}{d\sigma} + \lambda Z^2 \quad (3.6)$$

y para  $\xi_1$ ,

$$\frac{d^2\xi_1}{d\sigma^2} = -\beta \frac{d\xi_1}{d\sigma} - \int \frac{d^2\xi_0}{d\sigma_m^2} \frac{d\sigma_m}{\sqrt{\sigma - \sigma_m}} \quad (3.7)$$

En el caso de la dirección en y:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\eta_0}{d\sigma^2} + \varepsilon \frac{d^2\eta_1}{d\sigma^2} = & -\beta \left( \frac{d\eta_0}{d\sigma} + \varepsilon \frac{d\eta_1}{d\sigma} \right) - \varepsilon \int_0^{t/t_{vuelo}} \left( \frac{d^2\eta_0}{d\sigma_m^2} + \varepsilon \frac{d^2\eta_1}{d\sigma_m^2} \right) \frac{d\sigma_m}{\sqrt{\sigma - \sigma_m}} \\ & + \lambda Z^2 + 1 \end{aligned} \quad (3.8)$$

y de igual forma  $\eta_0$  satisface la siguiente ecuación:

$$\frac{d^2\eta_0}{d\sigma^2} = -\beta' \frac{d\eta_0}{d\sigma} + \lambda' Z^2 + 1 \quad (3.9)$$

y similarmente  $\eta_1$  es gobernada por la ecuación,

$$\frac{d^2\eta_1}{d\sigma^2} = -\beta' \frac{d\eta_1}{d\sigma} - \int \frac{d^2\eta_0}{d\sigma_m^2} \frac{d\sigma_m}{\sqrt{\sigma - \sigma_m}} \quad (3.10)$$

Una vez obtenido el sistema anterior de ecuaciones, se pueden obtener también las correspondientes condiciones iniciales para la solución completa del modelo analítico.

### 3.3. Condiciones iniciales

Para la ecuación en la dirección en  $x$ :

$$\sigma = 0; \quad \xi_0 = 0; \quad \frac{d\xi_0}{d\sigma} = 1$$

$$\sigma = 0; \quad \xi_1 = \frac{d\xi_1}{d\xi} = 0$$

Y equivalentemente para la ecuación en la dirección en  $y$ :

$$\sigma = 0; \quad \eta_0 = \frac{d\eta_0}{d\sigma} = 0$$

$$\sigma = 0; \quad \eta_1 = \frac{d\eta_1}{d\sigma} = 0$$

### 3.4. Transformada de Laplace

La transformada de Laplace es un operador lineal muy útil para la resolución de ecuaciones diferenciales. Es común, sobretodo en física matemática, encontrar pares de funciones relacionadas por expresiones de la forma:

$$g(\theta) = \int_a^b f(t)K(\theta, t)dt$$

donde  $g(\theta)$  se le llama la transformada integral de la función  $f(t)$  por el kernel  $K(\theta, t)$ . Ahora bien, en vista de la infinidad de kernels y límites de integración que se nos pueden ocurrir, la variedad de transformadas integrales posibles para una función  $f(t)$  es infinita, aunque la más comúnmente utilizada, ya sea en análisis matemático o en aplicaciones matemáticas es la Transformada de Laplace, que se define mediante la siguiente regla de correspondencia:

$$g(\theta) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-\theta t} dt$$

Utilizando la definición de Laplace para las ecuaciones adimensionales con sus respectivas condiciones iniciales se tienen los siguientes resultados.

Para  $x$

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{d^2 \xi_0}{d\sigma^2} + \beta \frac{d\xi_0}{d\sigma} = \lambda Z^2 \right\} \quad (3.11)$$

Que puede resolverse fácilmente y expresarse como,

$$\xi_0(S) = \frac{\lambda Z^2 + S}{S^2(S + \beta)} \quad (3.12)$$

Para  $y$

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{d^2 \eta_0}{\sigma^2} + \beta' \frac{d\eta_0}{d\sigma} = \lambda' Z^2 + 1 \right\} \quad (3.13)$$

Quedando como

$$\eta_0(S) = \frac{\lambda' Z^2 + 1}{S^2(S + \beta')} \quad (3.14)$$

Ahora bien, como se puede observar para ambas ecuaciones transformadas en el espacio de Laplace, es indispensable la descomposición en fracciones racionales de las funciones así derivadas ya que de esta manera será posible poder aplicar la anti transformada de Laplace para encontrar la solución y regresar a la variable independiente original que en este caso es el tiempo. En consecuencia, en la próxima sección se dan los detalles de lo anterior.

### 3.4.1. Descomposición en fracciones racionales

Si P y Q son funciones polinómicas, siempre es teóricamente posible resolver integrales de la forma:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

En la práctica, la obtención de dichas integrales depende de que sea posible factorizar el denominador  $Q(x)$ . Siendo este el caso, para nuestras ecuaciones a resolver se aplica el caso 1 y el caso 2 de nuestra referencia de fracciones racionales quedando de la siguiente manera.

$$\xi_0(S) = \frac{\lambda Z^2 + S}{S^2(S + \beta)} = \frac{\beta - \lambda Z^2}{\beta^2 S} + \frac{\lambda Z^2}{\beta S} + \frac{\lambda Z^2 - \beta}{\beta^2(S + \beta)} \quad (3.15)$$

$$\eta_0(S) = \frac{\lambda' Z^2 + 1}{S^2(S + \beta')} = -\frac{\beta' Z^2 + 1}{\beta'^2 S} + \frac{\lambda' Z^2 + 1}{\beta' S^2} + \frac{\lambda' Z^2 + 1}{\beta'^2(S + \beta')} \quad (3.16)$$

Aplicando la antitransformada de Laplace para estas dos ecuaciones, tenemos.

$$\xi_0 = \frac{\lambda Z^2 - \beta}{\beta^2} e^{-\beta\sigma} + \frac{\lambda Z^2}{\beta} \sigma + \frac{\beta - \lambda Z^2}{\beta^2} \quad (3.17)$$

$$\eta_0 = \frac{\lambda' Z^2 + 1}{\beta'^2} e^{-\beta'\sigma} + \frac{\lambda' Z^2 + 1}{\beta'} \sigma - \frac{\lambda' Z^2 + 1}{\beta'^2} \quad (3.18)$$

### 3.5. Sustitución en las ecuaciones adimensionales de primer orden

Haciendo la siguiente suposición

$$\frac{d\xi_0}{d\sigma} = \frac{d\xi_0}{d\sigma_m}$$

$$\frac{d\eta_0}{d\sigma} = \frac{d\eta_0}{d\sigma_m}$$

Las ecuaciones de orden uno se pueden escribir como,

$$\frac{d^2\xi_1}{d\sigma^2} = -\beta \frac{d\xi_1}{d\sigma} - \int_0^{t/t_{vuelo}} (\lambda Z^2 - \beta) e^{-\beta\sigma_m} \frac{d\sigma_m}{\sqrt{\sigma - \sigma_m}} \quad (3.19)$$

$$\frac{d^2\eta_1}{d\sigma^2} = -\beta' \frac{d\eta_1}{d\sigma} - \int_0^{t/t_{vuelo}} (\lambda' Z^2 + 1) e^{-\beta'\sigma_m} \frac{d\sigma_m}{\sqrt{\sigma - \sigma_m}} \quad (3.20)$$

Como se puede apreciar en las dos ecuaciones, la integral es la misma, razón por la cual se requerirá de una variable con la finalidad de que sea más fácil de resolver nuestro modelo.

Para este fin, se define la siguiente variable

$$\chi = \frac{\sigma_m}{\sigma}$$

$$d\sigma_m = \sigma d\chi$$

Por lo que nuestras ecuaciones quedan de la siguiente manera,

$$\frac{d^2\xi_1}{d\sigma^2} = -\beta \frac{d\xi_1}{d\sigma} - (\lambda Z^2 - \beta) \sigma^{\frac{1}{2}} \int_0^1 e^{-\beta\sigma\chi} \frac{d\chi}{\sqrt{1-\chi}} \quad (3.21)$$

$$\frac{d^2\eta_1}{d\sigma^2} = -\beta' \frac{d\eta_1}{d\sigma} - (\lambda'Z^2 + 1)\sigma^{\frac{1}{2}} \int_0^1 e^{-\beta'\sigma\chi} \frac{d\chi}{\sqrt{1-\chi}} \quad (3.22)$$

### 3.6. Ecuaciones Trascendentales

Por lo que se aprecian en nuestras ecuaciones, el efecto de la fuerza de Basset viene acompañado de una integral trascendental que se resolverá con el método de Laplace (Carl M. Bender et al. 1978) quedando la solución de la misma de la siguiente manera.

$$\int_0^1 e^{-\beta\sigma\chi} \frac{d\chi}{\sqrt{1-\chi}} \sim \frac{1}{\beta\sigma}$$

$$\int_0^1 e^{-\beta'\sigma\chi} \frac{d\chi}{\sqrt{1-\chi}} \sim \frac{1}{\beta'\sigma}$$

Por lo que las ecuaciones a resolver del orden uno se pueden escribir como,

$$\frac{d^2\xi_1}{d\sigma^2} = -\beta \frac{d\xi_1}{d\sigma} - \frac{(\lambda Z^2 - \beta)}{\beta} \sigma^{-\frac{1}{2}} \quad (3.23)$$

$$\frac{d^2\eta_1}{d\sigma^2} = -\beta' \frac{d\eta_1}{d\sigma} - \frac{(\lambda'Z^2 + 1)}{\beta'} \sigma^{-\frac{1}{2}} \quad (3.24)$$

Haciendo uso nuevamente de la transformada de Laplace se tiene que,

Para  $x$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{d^2 \xi_1}{d\sigma^2} = -\beta \frac{d\xi_1}{d\sigma} - \frac{(\lambda Z^2 - \beta)}{\beta} \sigma^{-\frac{1}{2}} \right\}$$

Cuya solución se puede escribir como:

$$\xi_1(S) = -\frac{\lambda Z^2 - \beta}{\beta(S^2 + \beta S)} \sqrt{\frac{\pi}{S}}$$

Para  $y$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{d^2 \eta_1}{d\sigma^2} = -\beta' \frac{d\eta_1}{d\sigma} - \frac{(\lambda' Z^2 + 1)}{\beta'} \sigma^{-\frac{1}{2}} \right\}$$

Donde la solución equivalentemente será:

$$\eta_1(S) = -\frac{\lambda' Z^2 + 1}{\beta'(S^2 + \beta' S)} \sqrt{\frac{\pi}{S}}$$

Como se puede ver, la solución  $\xi_1(S)$  como la solución  $\eta_1(S)$ , se tienen productos de dos funciones, razón por la que se hará uso de las propiedades de convolución.

### 3.7. Propiedad de convolución

Considerando las funciones  $f$  y  $g$  que poseen transformada de Laplace  $F(S)$  y  $G(S)$ , respectivamente, la convolución de  $f$  y  $g$  denotada por  $f * g$  es la integral que se puede definir mediante la expresión siguiente:

$$f * g = \int_0^\phi f(t - \phi) g(\phi) d\phi = \mathcal{L}^{-1}[F(S)G(S)]$$

Aplicando este teorema a las ecuaciones se tiene que,

$$\xi_1(\sigma) = -\frac{\lambda Z^2 - \beta}{\beta} \left\{ \frac{1}{\beta} \int_0^\sigma \frac{1}{\phi} [1 - e^{-\beta(\sigma-\phi)}] d\phi \right\}$$

$$\eta_1(\sigma) = -\frac{\lambda'Z^2 + 1}{\beta'} \left\{ \frac{1}{\beta'} \int_0^\sigma \frac{1}{\phi} [1 - e^{-\beta'(\sigma-\phi)}] d\phi \right\}$$

Para la solución de este par de ecuaciones se puede apreciar que para cada una se tendrá un par de integrales en donde obtendremos dos soluciones para cada una ya que consideraremos dos apreciaciones diferentes. De esta manera podemos escribir,

- Cuando  $\beta \ll \sigma$  y  $\beta' \ll \sigma$

En esta apreciación se interpreta que el término que representa a la fuerza de arrastre es mucho menor que el termino adimensional que representa al tiempo, por lo que la solución será.

$$\xi(\sigma) = \frac{\lambda Z^2 - \beta}{\beta^2} e^{-\lambda\sigma} + \frac{\lambda Z^2}{\beta} \sigma + \frac{\beta - \lambda Z^2}{\beta^2} + \varepsilon \left\{ - \left( \frac{\lambda Z^2 - \beta}{\beta} \right) \left[ \frac{\Gamma(2)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} \right] \right\} \sigma^{\frac{3}{2}} \quad (3.25)$$

$$\eta(\sigma) = \frac{\lambda'Z^2 + 1}{\beta'^2} e^{-\beta'\sigma} + \frac{\lambda'Z^2 + 1}{\beta'} \sigma - \frac{\lambda'Z^2 + 1}{\beta'^2} + \varepsilon \left\{ - \left( \frac{\lambda'Z^2 + 1}{\beta'} \right) \left[ \frac{\Gamma(2)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} \right] \right\} \sigma^{\frac{3}{2}} \quad (3.26)$$

- Cuando  $\beta \gg \sigma$  y  $\beta' \gg \sigma$

En esta segunda consideración, el enfoque es que el término de la fuerza de arrastre es mucho mayor a la adimensionalización del tiempo quedando la solución de la siguiente manera.

$$\xi(\sigma) = \frac{\lambda Z^2 - \beta}{\beta^2} e^{-\beta\sigma} + \frac{\lambda Z^2}{\beta} \sigma + \frac{\beta - \lambda Z^2}{\beta^2} + \varepsilon \left\{ - \left( \frac{\lambda Z^2 - \beta}{\beta} \right) \left[ \frac{2}{\beta} \sigma^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\beta^2} \sigma^{-\frac{1}{2}} - \frac{2\sigma^{\frac{1}{2}}}{\beta} e^{-\beta\sigma} \right] \right\} \quad (3.27)$$

$$\eta(\sigma) = \frac{\lambda' Z^2 + 1}{\beta'^2} e^{-\beta'\sigma} + \frac{\lambda' Z^2 + 1}{\beta'} \sigma - \frac{\lambda' Z^2 + 1}{\beta'^2} + \varepsilon \left\{ - \left( \frac{\lambda' Z^2 + 1}{\beta'} \right) \left[ \frac{2}{\beta'} \sigma^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\beta'^2} \sigma^{-\frac{1}{2}} - \frac{2\sigma^{\frac{1}{2}}}{\beta'} e^{-\beta'\sigma} \right] \right\} \quad (3.28)$$

## Capítulo 4

# Resultados

En el capítulo anterior obtuvimos las ecuaciones que definen la posición de la trayectoria de la gota. Ahora en este capítulo se presentan los resultados por lo que ahora corresponde graficar esas ecuaciones y en el capítulo siguiente se pueda dar las correspondientes conclusiones. Como referencia, en la Fig. 4.1 se aprecia los valores experimentales obtenidos por medio de una cámara de alta velocidad, para la trayectoria real de las gotas una vez que fueron expulsadas de la tobera. Esta grafica es tomada del experimento de MohammadMasoudMohebi et al. 2005.

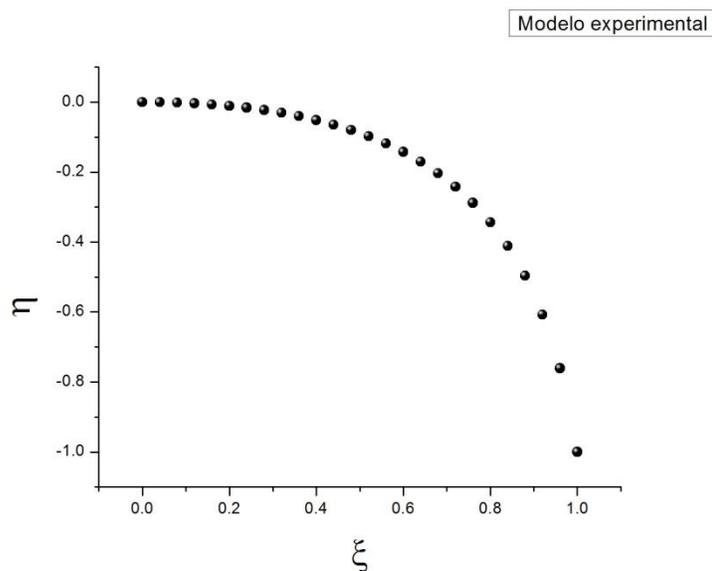


Figura 4.1. Modelo experimental tomado por una cámara de alta velocidad.

Ahora bien, se comentó en el capítulo anterior que se encontraron dos enfoques, por ende dos posibles soluciones, razón por la cual se van a graficar y acorde a lo visto se analizaran los efectos hidrodinámicos a más detalle.

Para el primer caso, en donde los efectos de la fuerza de arrastre son mucho menores que los del tiempo  $\beta \ll \sigma$  y  $\beta' \ll \sigma$ .

$$\xi(\sigma) = \frac{\lambda Z^2 - \beta}{\beta^2} e^{-\beta\sigma} + \frac{\lambda Z^2}{\beta} \sigma + \frac{\beta - \lambda Z^2}{\beta^2} + \varepsilon \left\{ - \left( \frac{\lambda Z^2 - \beta}{\beta} \right) \left[ \frac{\Gamma(2)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} \right] \right\} \sigma^{\frac{3}{2}}$$

$$\eta(\sigma) = \frac{\lambda' Z^2 + 1}{\beta'^2} e^{-\beta'\sigma} + \frac{\lambda' Z^2 + 1}{\beta'} \sigma - \frac{\lambda' Z^2 + 1}{\beta'^2} + \varepsilon \left\{ - \left( \frac{\lambda' Z^2 + 1}{\beta'} \right) \left[ \frac{\Gamma(2)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} \right] \right\} \sigma^{\frac{3}{2}}$$

Bajo esto límites, se pueden obtener como resultados las siguientes gráficas.

Para la figura 4.2 se varía el parámetro de Z, dándole un rango de 4 a 10 para poder apreciar su comportamiento una vez que la gota es expulsada por la boquilla.

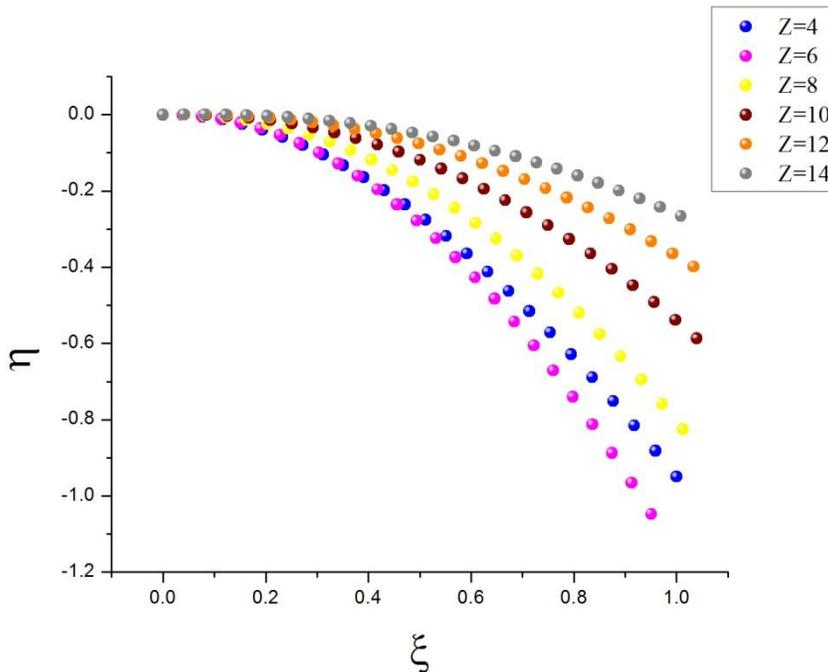


Figura 4.2. Modelo analítico con diferentes números de Z.

Como se puede apreciar para valores crecientes del parámetro  $Z$  se atenúa el efecto gravitatorio.

En la Fig. 4.3 se puede apreciar la comparación entre el modelo experimental de la figura 4.1 y el mejor modelo analítico cuando se varía el parámetro adimensional  $Z$ . Como se puede ver los resultados de tal comparación son satisfactorios desde el punto de vista cuantitativo.

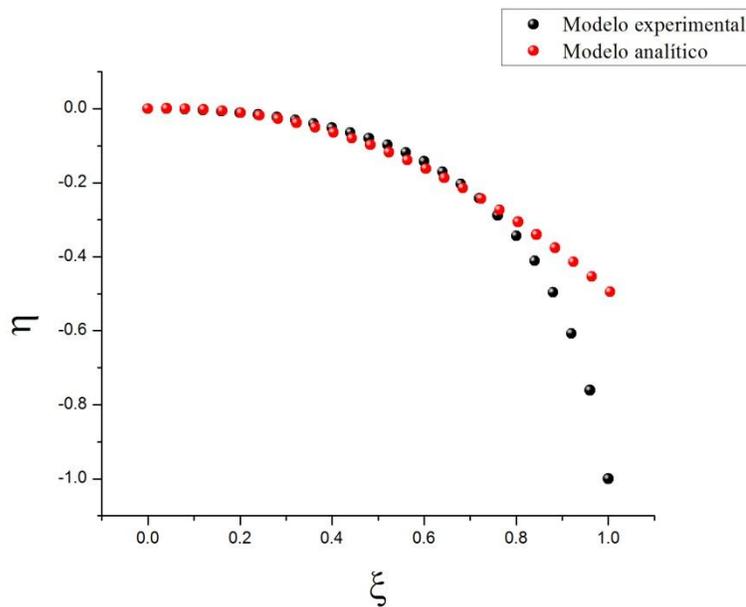


Figura 4.3. Modelo experimental vs Modelo analítico considerando  $Z=10.5$ .

En la Fig. 4.4 se observa la influencia del efecto Basset, y a su vez la importancia de este mismo efecto para cada uno de los ejes del plano cartesiano, manteniendo el efecto para  $\varepsilon_\xi$  y  $\varepsilon_\eta = 0$  que se ve representado con la trayectoria en color rojo, mientras que la representación de la trayectoria de la gota en color amarillo es la que mantiene el efecto para  $\varepsilon_\eta$  y  $\varepsilon_\xi = 0$ .

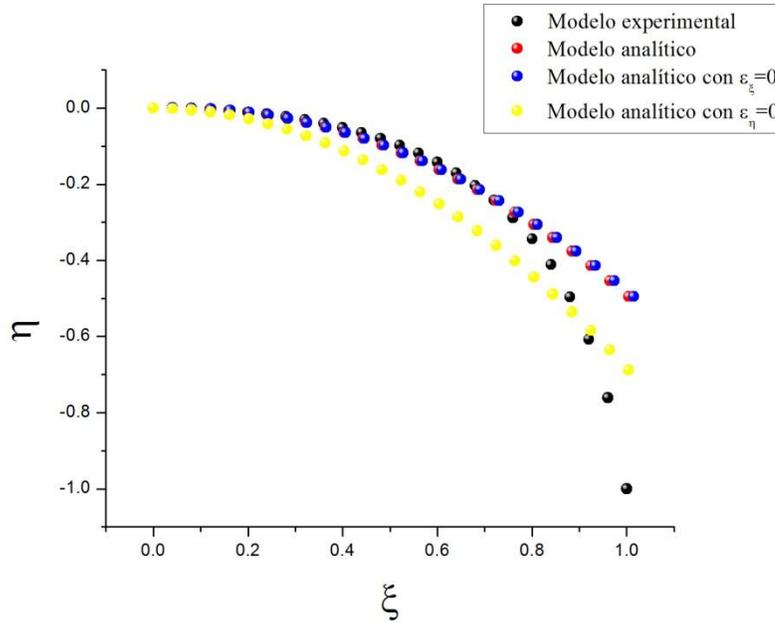


Figura 4.4 Influencia del efecto Basset=0 tanto para  $\eta$  como para  $\xi$ .

En la Fig. 4.5 se observa la mejor representación de  $Z$  que es igual a 14.5 para evitar la máxima pérdida de altura, llamándole a esta situación, el aumento de la eficiencia.

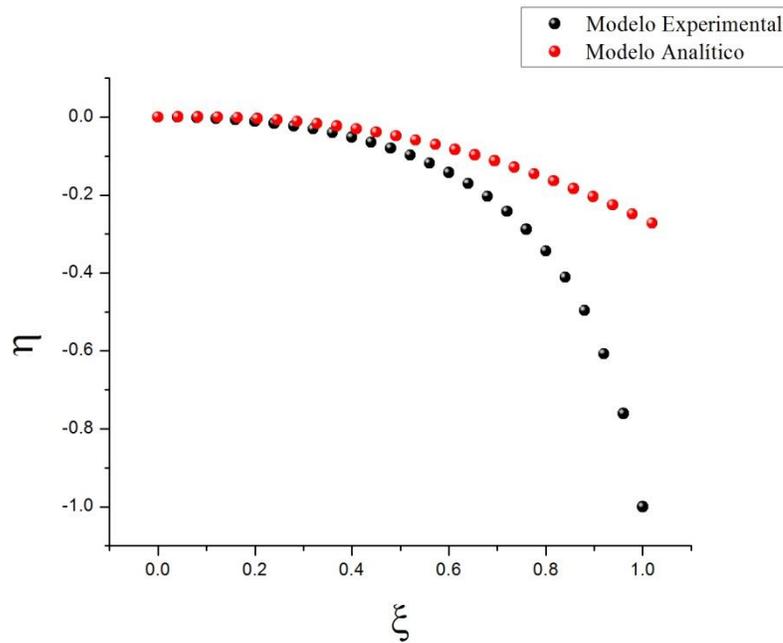


Figura 4.5. Pérdida de altura cuando  $Z=14$ .

En la fig. 4.6 se aprecia la variación del efecto de la fuerza de Basset.

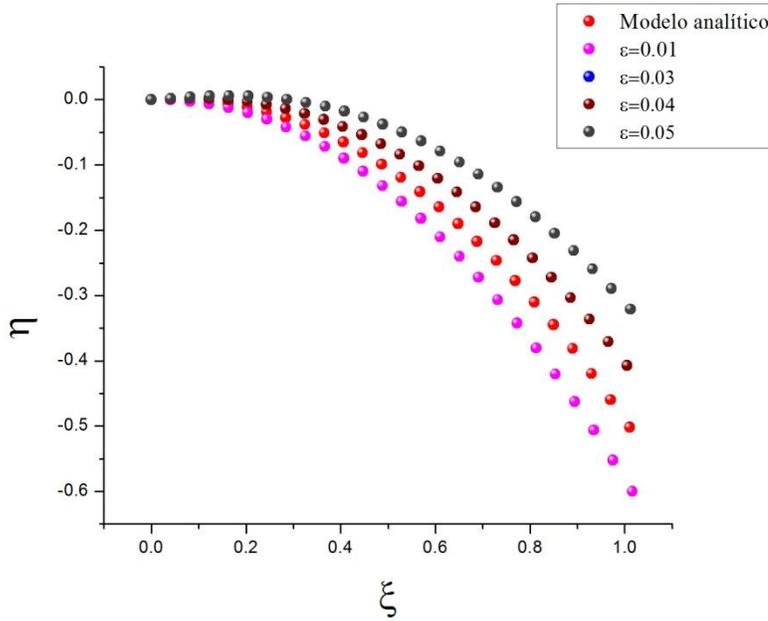


Figura 4.6. Aumento de  $\varepsilon$ , manteniendo a  $Z=10.5$ .

Para el segundo caso, donde los efectos de la fuerza de arrastre son mayores a los del tiempo  $\beta \gg \sigma$  y  $\beta' \gg \sigma$ .

$$\xi(\sigma) = \frac{\lambda Z^2 - \beta}{\beta^2} e^{-\beta\sigma} + \frac{\lambda Z^2}{\beta} \sigma + \frac{\beta - \lambda Z^2}{\beta^2} + \varepsilon \left\{ - \left( \frac{\lambda Z^2 - \beta}{\beta} \right) \left[ \frac{2}{\beta} \sigma^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\beta^2} \sigma^{-\frac{1}{2}} - \frac{2\sigma^{\frac{1}{2}}}{\beta} e^{-\beta\sigma} \right] \right\}$$

$$\eta(\sigma) = \frac{\lambda' Z^2 + 1}{\beta'^2} e^{-\beta'\sigma} + \frac{\lambda' Z^2 + 1}{\beta'} \sigma - \frac{\lambda' Z^2 + 1}{\beta'^2} + \varepsilon \left\{ - \left( \frac{\lambda' Z^2 + 1}{\beta'} \right) \left[ \frac{2}{\beta'} \sigma^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\beta'^2} \sigma^{-\frac{1}{2}} - \frac{2\sigma^{\frac{1}{2}}}{\beta'} e^{-\beta'\sigma} \right] \right\}$$

Obteniendo como resultado la siguientes gráfica.

En la Fig. 4.7 se aprecia la variación del parámetro  $Z = 5, 8.5$  Y  $10$  del segundo enfoque.

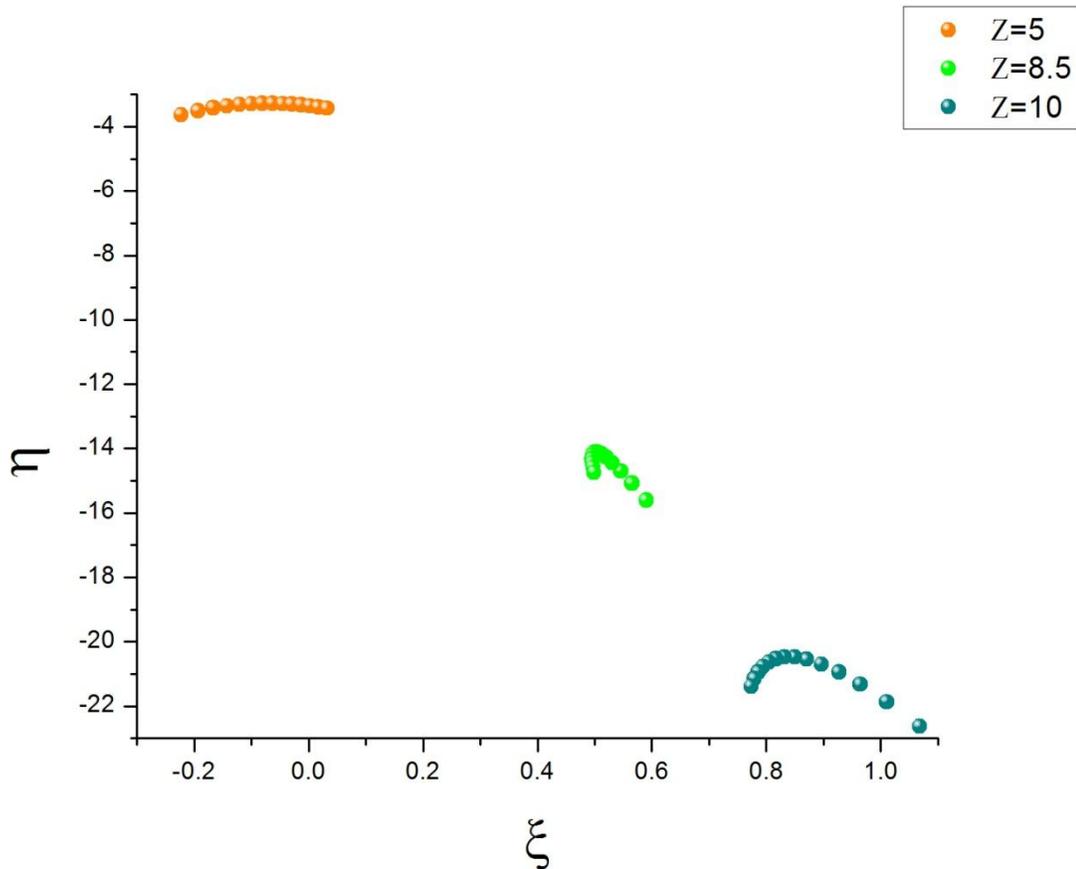


Figura 4.7. Segundo modelo analítico con diferentes números de  $Z$ .

Como se puede apreciar en esta última figura, los resultados carecen de significado físico, razón por la cual no se realizaron las demás gráficas, pero esto se hablara más a detalle en las conclusiones.

## Capítulo 5

### Conclusiones

Como se comentó para el modelo analítico, se generaron dos soluciones, una donde se consideraba  $\beta$  y  $\beta'$  que son los valores adimensionales de la fuerza de arrastre muy grandes o muy pequeñas en comparación con  $\sigma$  que es el tiempo adimensionalizado. Una vez graficadas las dos aproximaciones, se aprecia que del límite de  $\beta$  muy grande se obtiene la Fig. 4.7, con distintos números de  $Z$  para apreciar mejor su comportamiento. Este comportamiento se desvía dramáticamente y sin sentido de los resultados experimentales proporcionados por la Fig. 4.1 que muestra la verdadera trayectoria de la gota ya que los resultados obtenidos en la figura 7 son mucho mayores y por ende muy desviados a los de la verdadera trayectoria y pérdida de altura obtenida con los del diseño experimental, por lo que se considera que este modelo analítico obtenido por la consideración de que  $\beta \gg \sigma$  carece de significado físico.

Contrario a lo que se aprecia en el enfoque donde  $\beta \ll \sigma$ , se aprecia el movimiento de la gota recorriendo una trayectoria como la del modelo experimental por lo se puede comentar que tiene un enorme sentido físico y que este modelo analítico obtenido es una importante aproximación al comportamiento de una gota que ha sido expulsada por una boquilla. En primera instancia se compara el modelo analítico vs el modelo experimental y se aprecia que con un número de  $Z = 10.5$  con nuestro modelo se registra la mejor trayectoria de la gota, teniendo una ligera desviación a partir de los 20 centímetros en el eje de las abscisas, apreciándose con esta una menor pérdida de altura que la que es efectuada realmente una vez que llega al sustrato a los 25 centímetros.

En la figura 4.3 se aprecia la influencia de los distintos números de  $Z$  en un rango de 4 a 10 y en el dominio del 4 al 7, ocurre que la gota no cruza los 25 centímetros de distancia recorrida, a diferencia de cuando  $Z = 8, 9$  o  $10$ . Esto es lo que realmente explica el número  $Z$ , que como se sabe, es la relación del número de Reynolds con el número de Weber y que describe si se generará el efecto satélite una vez que el líquido es expulsado por la boquilla. Por lo que se puede concluir para esta figura, que cuando la gota no cruza los 25 centímetros se genera el efecto satélite y por ende la gota colapsa en cientos de gotitas.

En la figura 4.4 se aprecia la importancia del efecto Basset ya que cuando este efecto es eliminado en el eje de las abscisas, la trayectoria generada es casi igual a la trayectoria del modelo analítico. Un punto a considerar es que cuando se elimina el efecto Basset para la componente de las ordenadas, se observa que pierde toda relación con la trayectoria generada por el modelo analítico. Sin embargo, cabe mencionar que observando el modelo experimental y en especial en el punto donde la gota llega a los 25 centímetros, esto casi coincide para la misma distancia recorrida con el modelo analítico desarrollado en este trabajo despreciando el efecto de la fuerza de Basset para la coordenada de la ordenada. Se puede apreciar la importancia de este efecto en el eje de las “ $y$ ” ya que hay mucho mayor influencia para esta que en el eje de las “ $x$ ” como se aprecia en la figura 4.4 gráfica, observando con ello la importancia que involucra el no despreciar el efecto Basset; logrando con esto, tener la mejor aproximación a nuestro modelo experimental teniendo una mejor apreciación a la trayectoria real de la gota.

En la figura 4.5 se hace un comparativo entre la trayectoria experimental de la gota contra el modelo analítico cuando  $Z=14$  y observando que con este número se obtiene la mejor eficiencia, llamando a esta como la mejor forma de evitar pérdida de altura una vez que es expulsada la gota de la boquilla. Esto es de gran importancia en la industria ya que para ciertos procesos de impresión de tinta de forma vertical con una cierta distancia de separación entre la boquilla y el substrato, teniendo como objetivo final que la gota sea impresa de tal forma que no haya pérdida de altura una vez que ha sido expulsada para lograr que se impregne de forma correcta.

Como una conclusión general se puede llegar a decir que la ecuación de Basset–Boussinesq–Oseen que modela el comportamiento del movimiento de una partícula puede

ser utilizada para obtener una muy buena aproximación de la trayectoria de una gota una vez que es expulsada de una boquilla. De los puntos de mayor interés se aprecia que cuando se trata de escalas muy pequeñas ciertos efectos son de gran importancia como se aprecia en el efecto Basset que es despreciable cuando se habla de magnitudes mayores, así como la importancia de la tensión superficial, tema de gran interés permitiendo con esta que la gota permanezca en una sola y no en cientos debido al efecto satélite, provocando desprendimiento dentro de ella.

# Bibliografía

- [1] A. H. Techet. (2005). Added Mass. *Hydrodynamics*, Vol. 3, pp. 1-9.
- [2] Boon-Beng Lee, Pogaku Ravindra y Eng-Seng Chan. (2008). New drop weight analysis for surface tension determination of liquids. *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects*, 332, pp. 112-120.
- [3] Carl M. Bender y Steven A. Orszag.(1978). Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers. *McGraw-Hill Book Company*, pp. 261-263.
- [4] Daehwan Jang, Dongjo Kim y Joocho Moon. (2008). Influence of Fluid Physical Properties on Ink-Jet Printability. *Department of Materials Science and Engineering*, 25, pp. 2629-2635.
- [5] Diego Córdoba, Marco Antonio Fontelos y José Luis Rodrigo. (2005). Las matemáticas de los fluidos: torbellinos, gotas y olas. *La Gaceta de la RSME*, Vol. 8.3, pp. 53-83.
- [6] Frank M. White. (2008). Mecánica de Fluidos. *McGRAW-Hill*, 6, pp. 3-60.
- [7] G. Ahmadi. Hydrodynamic Forces. *Clarkson University*, pp. 1-11.
- [8] G.V. Kharlamov, A.A. Onischuk, S.V. Vosel y P.A. Purtov. (2011). Molecular dynamics calculations of small drops surface tension. *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects*, 379, pp. 10-13.
- [9] George Karniadakis, Ali Beskok y Narayan Aluru. (2005). Microflows and Nanoflows. Fundamentals and Simulation. *Springer*, pp. 5.
- [10] H. Teng, C.M. Kinoshita y S.M. Masutani. (1995). Prediction of droplet size from the breakup of cylindrical liquid jets. *Int. J. Multiphase Flow*, Vol. 21, pp. 129-135.
- [11] Huimin Liu. (2000). Science and Engineering of Droplets. Fundamentals and Applications. *Noyes Publications / William Publishing, LLC*, pp. 1-116.

- [12] J. Pantaleone y J. Messer. The added mass of a spherical projectile. *Department of Physics*, pp. 1-27.
- [13] Jianzhong Lin, Lijuanqian, HongbinXiong y Tat Leung Chan. (2009). Effects of operating conditions on droplet deposition onto surface of atomization impinging spray. *Surface and Coatings Tecnology*, 203, pp. 1733-1740.
- [14] Julio Cesar Macias Zamora. Dinámica de la Rotación, pp.1-28.
- [15] M. Simcik, M.C. Ruzicka y J. Drahos. (2008). Computing the added mass of dispersed particles. *Chemical Engineering Science*, 63, pp. 4580-4595.
- [16] Michael R. Krecic y Daniel M. Hanes. (1996). An Analysis of Particle Saltation Dynamics. *Coastal Engineering*, pp. 3846-3859.
- [17] Mohammad Masoud Mohebi y Julian R. G. Evans. (2005). The trajectory of ink-jet droplets: Modelling and experiment. *Chemical Engineering Science*, 60, pp. 3469-3476.
- [18] Mohammad Rostami y Abdullah Ardeshir. (2006). Can the history force be neglected for the motion of particles at high subcritical Reynolds number range?. *Department of Civil and Environmental Engineering*, Vol. 19, pp. 23-34.
- [19] N. Lukerchenko. Basset History Force for the Bed Load Sediment Transport. *Institute of Hydrodynamics of Academy of Sciences of Czech Republic*.
- [20] N. Nikolopoulos, G. Strotos, K.S. Nikas y G. Bergeles. (2011). The effect of Weber number on the central binary collision outcome between unequal-sized droplets. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 55, pp. 2137-2150.
- [21] P. Alart, O. Maisonneuve, R.T. Rockafellar. (2006). Nonsmooth Mechanics and Analysis: Theoretical and Numerical Advances. *Springer*, pp. 161-172.
- [22] P. Garstecki, A. M. Gañán-Calvo y G. M. Whitesides. (2005). Formation of bubbles and droplets in microfluidic systems. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences*, Vol. 53, pp. 361-372.

[23] P. J. Thomas. (1997). A numerical study of the influence of the Basset force on the statistics of LDV velocity data sampled in a flow region with a large spatial velocity gradient. *Experiments in Fluids*, 23, pp. 48-53.

[24] P. J. Thomas. (1992). On the influence of the Basset history force on the motion of a particle through a fluid. *Phys. Fluids A*, Vol. 4, pp. 2090-2093.

[25] S. Sikalo y E.N. Ganic. (2006). Phenomena of droplet-surface interactions. *Experimental Thermal and Fluid Science*, 31, pp. 97-110.

[26] William A. Sirignano. (1999). Fluid Dynamics and Transport of Droplets and Sprays. *Cambridge University Press*, pp. 1-6.