Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Una descripción de órdenes lineales a través de sus condensaciones

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

PRESENTA:

Alfonso González López

TUTORA:
Dra. Gabriela Campero Arena

México, D.F. 2014

Índice general

Introducción

Los órdenes lineales surgen de conceptos simples y muy comunes en la vida real: las filas o las listas de objetos. Como sucede muchas veces al generalizar conceptos en las matemáticas, las filas ("de la vida real") terminan siendo los órdenes lineales más simples.

Como su nombre lo indica, un orden lineal es un objeto matemático que puede ser representado sobre una línea. Para describirlo usamos un conjunto L y una relación binaria sobre él, muchas veces denotada como $<$. Su teoría consta de sólo tres axiomas: el que afirma la antirreflexividad de $<$, el que garantiza la transitividad de $<$, y el que declara la tricotomía de $<$. Desde el punto de vista de la Lógica Matemática, la podemos pensar como una teoría "simple", pero esto no significa que sea trivial, pues es esta misma "simplicidad" la que permite tener una gran variedad de órdenes diferentes entre sí, convirtiendo su estudio en algo complicado e interesante. Más aún, hay estructuras muy importantes que son órdenes lineales, algunos ejemplos de éstas son el conjunto de los números naturales, el de los enteros, el de los racionales, el de los reales y cualquier número ordinal.

En cuanto al estudio o clasificación de los órdenes lineales podemos mencionar que una de las consecuencias del Teorema de Inestabilidad de Shelah es que la Teoría de Órdenes Lineales es inestable, lo cual puede expresarse de la siguiente manera: para un cardinal arbitrario κ hay una gran cantidad de órdenes lineales no isomorfos, de hecho hay 2^κ. Esto ya es poco manejable en el caso en que $\kappa = \omega$ y mucho peor si el cardinal es aún más grande. Una forma de interpretar lo anterior es que no es sencillo encontrar una clasificación para los órdenes lineales.

Guardando el debido respeto a este resultado, trataremos de abordar el estudio de los órdenes lineales desde una perspectiva distinta. Lo que haremos será estudiar dos tipos concretos y muy conocidos de órdenes lineales, los discretos y los densos, para mostrar después el aspecto que tiene un orden lineal con base en ellos. Claro está que esto no será una clasificación, pero es una pequeña aproximación a este estudio, que nos permite entender, quizá, cómo está dispuesto el orden, al tener una imagen más clara, o al menos diferente de cómo luce un orden lineal.

Para lograr lo anterior hemos dividido este trabajo en cuatro capítulos. El primero está dedicado a los conceptos básicos acerca de los órdenes lineales para homologar la notación y obtener los resultados más generales que se usarán en el resto del trabajo. En el segundo capítulo recordamos algunas de las propiedades de los ordinales, en particular aquellas relacionadas con su orden, el comportamiento de las relaciones $\subsetneq$ y $\in$, así como los Teoremas de Recursión e Inducción y los conceptos de cofinalidad y coinicialidad. El tercer capítulo está dedicado a los órdenes discretos y densos y a explorar sus características. También en este capítulo introducimos los órdenes $\mathbb{Z}^{\alpha}$'s y los η_{α}'s. En el capítulo cuarto desarrollamos la herramienta de las condensaciones y aplicamos los conceptos y resultados del capítulo tercero para obtener el resultado deseado: todo orden lineal es una concatenación densa de órdenes discretos. Más aún, esta representación puede encontrarse de forma que la concatenación sea la más pequeña posible. Por último, incluimos el concepto de la 1-homogeneidad, mostrando que en los órdenes que cumplen esta propiedad se simplifica la representación arriba mencionada.

Se ocuparán ampliamente los conceptos básicos relacionados con órdenes lineales y con los ordinales, estos incluyen definiciones, operaciones y relaciones entre ellos. Aunque varios de los resultados que los involucran se recuerdan en los capítulos primero y segundo, se asumirá que las personas que lean este trabajo conocen estos conceptos previamente. Por todo lo anterior, se aconseja que las personas que lean este trabajo hayan cursado los primeros dos cursos de Teoría de Conjuntos o sus equivalentes, en los cuales se aprenden la mayoría de los conceptos que se utilizan a lo largo de esta tesis.

Capítulo 1

Preliminares

Este primer capítulo está dedicado a las propiedades básicas de los órdenes lineales, así como a los conceptos necesarios para desarrollar este trabajo.

El propósito de incluir un capítulo así es el de prevenir confusiones en cuanto al uso de ciertos conceptos y notaciones, por lo que aquellos teoremas o construcciones cuyas demostraciones sean demasiado largas o no estén inspiradas en el estudio de órdenes lineales se omitiran, pero pueden consultarse en (ACM11) o en (HJ99).

1.1. Órdenes Parciales, Lineales y Buenos Órdenes

Las relaciones son objetos matemáticos que aparecen en diferentes áreas, en particular destacan las relaciones binarias. Comenzamos dando las siguientes definiciones que las involucran.

Definición 1.1. I) Sean P un conjunto y $<$ una relación binaria sobre P.

Decimos que $\langle P, <\rangle$ es un *orden parcial* si y sólo si

i) $\forall x \in P(x \not< x)$ ($<$ es antirreflexiva) y

ii) $\forall x, y, z \in P[(x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z]$ ($<$ es transitiva).

Al conjunto P se le suele llamar el *campo del orden parcial* y se le puede denotar como $cam(<)$.

II) Sean L un conjunto y $<$ una relación binaria sobre L.

Decimos que $\langle L, <\rangle$ es un *orden lineal* (u *orden total*), si y sólo si $\langle L, <\rangle$ es un orden parcial y para cualesquiera $x, y, z \in L$ se cumple una de las siguientes condiciones: $x < y$, $y < x$ o $x = y$ ($<$ es tricotómica).

III) Sean B un conjunto y $<$ una relación binaria sobre B.

Decimos que $\langle B, <\rangle$ es un *conjunto bien ordenado* (o un *buen orden*) si y sólo si $\langle B, <\rangle$ es un orden parcial y para cualquier subconjunto no vacío X de B se cumple que $\exists x \in X \forall y \in X(x < y \vee x = y)$ (es decir, X tiene un $<$-mínimo).

Cuando $\langle P, < \rangle$ es un orden parcial y x y y son elementos de P, la notación $x \leq y$ puede usarse para abreviar el hecho $x < y \vee x = y$, es importante mencionar esto porque es algo que utilizaremos frecuentemente.

Los siguientes hechos son bien conocidos.

Proposición 1.2. *i) Si $\langle L, < \rangle$ es un buen orden, entonces $\langle L, < \rangle$ es un orden lineal.*

ii) Si $\langle P, < \rangle$ es un orden parcial y $X \subseteq P$, entonces $\langle X, <' \rangle$ es un orden parcial, donde $<' = < \cap (X \times X)$. Al orden $<'$ se le llama la restricción del orden $<$ al conjunto X y se denota como $< \restriction_X$,[1] *pero por lo general únicamente se escribe $<$.*[2]

Además también es cierto que si $\langle L, < \rangle$ es un orden lineal o un buen orden, entonces $\langle X, < \restriction_X \rangle$ es un orden lineal o un buen orden, correspondientemente.

Demostración. i) Supongamos que $\langle L, < \rangle$ es un buen orden. Sean $a, b \in P$. Es suficiente ver que $a \leq b$ o $b \leq a$ para demostrar que es un orden lineal. Tenemos que $\emptyset \neq \{a, b\} \subseteq P$, por lo que $\{a, b\}$ tiene un primer elemento, el cual puede ser a o b. Así, $a \leq b$ o $b \leq a$.

ii) Supongamos que $\langle P, < \rangle$ es un orden parcial y que $X \subseteq P$. Debemos demostrar que $\langle X, < \restriction_X \rangle$ es un orden parcial. Sean $x, y, z \in X$. Demostraremos que: $\cdot$) $x \not< \restriction_X x$ y que $\cdot\cdot$) si $x < \restriction_X y$ y $y < \restriction_X z$, entonces $x < \restriction_X z$.

Para ver $\cdot$), supongamos que $x < \restriction_X x$, entonces $\langle x, x \rangle \in < \restriction_X = < \cap (X \times X)$, por lo que $\langle x, x \rangle \in <$. Es decir, $x < x$, lo cual es una contradicción, pues $x \in P$ y $<$ es antirreflexiva en P.

Resta verificar el inciso $\cdot\cdot$). Supongamos que $x < \restriction_X y$ y que $y < \restriction_X z$. De manera similar a como se hizo en el párrafo anterior, se puede ver que $x < y$ y $y < z$. Por la transitividad de $<$, se tiene que $x < z$, lo que significa que $\langle x, z \rangle \in <$. Además, $x, z \in X$, por lo que $\langle x, z \rangle \in < \cap (X \times X)$, es decir, $x < \restriction_X z$.

La demostración de que $\langle X, < \restriction_X \rangle$ es un orden lineal o un buen orden cuando $\langle L, < \rangle$ es un orden lineal o un buen orden correspondientemente se hace de manera similar a la prueba anterior. $\square$

Dado un orden parcial $\langle P, < \rangle$, podemos definir otro orden parcial, denotado por $\langle P, < \rangle^*$, cuyo dominio sea P de manera que se "voltee" la relación simplemente tomando la relación $<^{-1} = \{\langle y, x \rangle : \langle x, y \rangle \in <\}$. Si además $\langle P, < \rangle$ es un orden lineal, entonces se puede demostrar que $\langle P, < \rangle^* = \langle P, <^{-1} \rangle$ es un orden lineal, pero el hecho análogo para buenos órdenes no siempre sucede, como veremos en uno de los ejemplos siguientes.

Ejemplos 1.3. 1. Si A es un conjunto y $r = \{\langle y, z \rangle \in A \times A : y \subsetneq z\}$, entonces $\langle A, r \rangle$ es un orden parcial, aunque en general al orden r se le denota precisamente con $\subsetneq$, es decir, $\langle A, \subsetneq \rangle$ es un orden parcial[3].

[1] Aunque esta misma notación también es utilizada para las restricciones de funciones, el contexto indicará su uso.

[2] Además, cuando se haga referencia al subconjunto X como un orden parcial, debe entenderse que se le está considerando con la relación $< \restriction_X$, a menos que se haga otra indicación.

[3] Esta notación se utiliza también con la pertenencia, pues escribimos $\langle A, \in \rangle$ en lugar de escribir $\langle A, s \rangle$, donde $s = \{\langle x, y \rangle \in A \times A : x \in y\}$.

2. Las estructuras numéricas $\langle \mathbb{N}, <_{\mathbb{N}} \rangle$, $\langle \mathbb{Z}, <_{\mathbb{Z}} \rangle$, $\langle \mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}} \rangle$ y $\langle \mathbb{R}, <_{\mathbb{R}} \rangle$ son órdenes lineales. Su construcción conjuntista puede consultarse en (ACM11). Más aún, $\langle \mathbb{N}, <_{\mathbb{N}} \rangle$ es un buen orden. Más adelante, veremos las caracterizaciones de estas estructuras como órdenes lineales.

3. Dado un conjunto x, denotamos con $s(x)$, llamado el sucesor de x, al conjunto $x \cup \{x\}$. Un conjunto A es inductivo, si y sólo si: *i)* $\emptyset \in A$ y *ii)* si $x \in A$, entonces $s(x) \in A$. Se define ω como el mínimo (con respecto a la contención) conjunto inductivo. Se puede demostrar que $\langle \omega, \in \rangle$ es un buen orden, pero $\langle \omega, \in^{-1} \rangle$ no lo es. En efecto, basta ver que para cada elemento x en ω hay otro (también en ω) que es $\in^{-1}$-menor, algo que se obtiene de la definición de inductivo, pues si $x \in \omega$ entonces $s(x) \in \omega$ y como $x \in s(x)$, entonces $s(x) \in^{-1} x$.

Consideremos ahora un orden lineal $\langle L, < \rangle$ cualquiera. Hay ciertos subconjuntos de L a los cuales llamamos intervalos, el lector posiblemente ya está familiarizado con este concepto. Un intervalo I es un subconjunto de L de manera que para cualesquiera $x, y, z \in L$ tales que $x < y < z$ y $x, z \in I$, se tiene que $y \in I$. Repasamos aquí esta noción, puesto que modificaremos un tanto la notación usual para ciertos tipos de intervalos.

Si $x, y \in L$, escribiremos (x, y) para indicar la colección de elementos de L que están entre x y y, es decir:

$$(x, y) = \begin{cases} \{z \in L \mid x < z < y\}, & \text{si } x \leq y, \\ \{z \in L \mid y < z < x\}, & \text{si } y \leq x. \end{cases}$$

También denotamos con $[x, y]$ a la colección de elementos de L que están entre x y y incluyendo a x y a y, en otras palabras:

$$[x, y] = \begin{cases} \{z \in L \mid x \leq z \leq y\}, & \text{si } x \leq y, \\ \{z \in L \mid y \leq z \leq x\}, & \text{si } y \leq x. \end{cases}$$

Ambos conjuntos, (x, y) y $[x, y]$, son intervalos de $\langle L, < \rangle$.

Ahora, en la mayoría de los textos se escribe (x, y) o $[x, y]$, cuando sabemos que $x \leq y$, pero esta notación se utilizará sin importar si $x \leq y$ o $y \leq x$. Veamos un ejemplo, consideremos a $\langle \mathbb{Z}, <_{\mathbb{Z}} \rangle$, comúnmente se escribe $(0, 3)$ para referirse al conjunto de números formado por 1 y 2, nosotros podremos representarlo así o también como $(3, 0)$.

Definición 1.4. Sean $\langle A, r \rangle$ y $\langle B, s \rangle$ órdenes parciales y $f : A \to B$ una función. Decimos que f es un *morfismo de órdenes* (o simplemente un *morfismo*) si y sólo si

$$\forall x, y \in A (x \, r \, y \leftrightarrow f(x) s f(y)),$$

en cuyo caso lo denotaremos como $f : \langle A, r \rangle \to \langle B, s \rangle$ o $\langle A, r \rangle \precsim_f \langle B, s \rangle$ (y también de manera simple como $\langle A, r \rangle \precsim \langle B, s \rangle$). Si la función f es biyectiva y además es un morfismo, diremos que f es un *isomorfismo de órdenes* (o simplemente *isomorfismo*), y que $\langle A, r \rangle$ y $\langle B, s \rangle$ son *isomorfos*, en tal caso lo denotaremos como: $\langle A, r \rangle \cong \langle B, s \rangle$. Si $\langle A, r \rangle \precsim \langle B, s \rangle$, pero no ocurre $\langle A, r \rangle \cong \langle B, s \rangle$, podremos denotar este hecho como $\langle A, r \rangle \precnsim \langle B, s \rangle$. Si $\langle A, r \rangle = \langle B, s \rangle$ y f es un isomorfismo, podremos llamar a f un *automorfismo de* $\langle A, r \rangle$ (o simplemente un *automorfismo*).

La *dominancia*, la *dominacia estricta* y la *equipotencia* de conjuntos tienen notaciones y definiciones similares a las anteriores, pero es importante recalcar aquí su diferencia. Se dice que x está *dominado* por y, escrito $x \preceq y$, si y sólo si hay una función inyectiva con dominio x e imagen contenida en y. La *equipotencia* de conjuntos es denotada por $\sim$ y se define como $x \sim y$ si y sólo si hay una función inyectiva cuyo dominio es x y cuya imagen es y. Finalmente, la *dominancia estricta* de conjuntos, denotada por $\prec$, está definida como $x \prec y$ si y sólo si $x \preceq y$ y $x \nsim y$. Las diferencias radican en que en la dominacia y equipotencia no se está considerando un orden para los elementos de los conjuntos, por ejemplo, $\mathbb{N} \preceq \mathbb{N}$, pero no ocurre que $\langle \mathbb{N}, <_{\mathbb{N}} \rangle \precsim \langle \mathbb{N}, <_{\mathbb{N}} \rangle^*$, ni que $\langle \mathbb{N}, <_{\mathbb{N}} \rangle^* \precsim \langle \mathbb{N}, <_{\mathbb{N}} \rangle$. De la misma forma $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$, con lo cual también $\mathbb{N} \preceq \mathbb{Z}$, pero no ocurre que $\langle \mathbb{N}, <_{\mathbb{N}} \rangle \cong \langle \mathbb{Z}, <_{\mathbb{Z}} \rangle$ y sí se tiene que $\langle \mathbb{N}, <_{\mathbb{N}} \rangle \precnsim \langle \mathbb{Z}, <_{\mathbb{Z}} \rangle$, algo que haremos un poco más específico en uno de los ejemplos al final de esta sección.

Proposición 1.5. *Si $\langle P, < \rangle$ es un orden parcial, entonces existe un conjunto A tal que $\langle P, < \rangle \cong \langle A, \subsetneq \rangle$.*

Demostración. Dado $x \in P$, sean

$$x_{\leq} := \{y \in P : y < x \vee y = x\} \quad \text{y} \quad A := \{x_{\leq} : x \in P\}.$$

Definimos $f : P \to A$ tal que para cada $x \in P$, $f(x) = x_{\leq}$. Sean $a, b \in P$. Si $f(a) \subsetneq f(b)$, entonces $a_{\leq} \subsetneq b_{\leq}$, de aquí que $a \neq b$ y $a \in b_{\leq}$. Por lo tanto, $a < b \vee a = b$ y, como $a \neq b$, tenemos que $a < b$.

Supongamos ahora que $a < b$. Sea $z \in P$ tal que $z \leq a$, entonces por la transitividad de la relación $<$ se tiene que $z < b$. Por lo tanto, $z \in b_{\leq}$, con lo cual $a_{\leq} \subseteq b_{\leq}$. Por otro lado, $b \nless a$ y $a \neq b$, pues $a < b$, por lo que $b \notin a_{\leq}$, pero $b \in b_{\leq}$. Así, $a_{\leq} \subsetneq b_{\leq}$. Hemos probado que f es un morfismo.

Por como se definieron el conjunto A y la función f es claro que f es sobre. Así, sólo queda demostrar que f es inyectiva. Sean $x, y \in P$ tales que $f(x) = f(y)$, entonces $x_{\leq} = y_{\leq}$. Utilizando este último hecho y la definición de $x_{\leq}$, obtenemos que $x \in y_{\leq}$, con lo cual $x = y$ o $x < y$. Si sucediera que $x \neq y$, entonces $x < y$ y, como $y \in y_{\leq} = x_{\leq}$ y $x \neq y$, se tiene que $y < x$; pero, por la transitividad de $<$, se tendría que $x < x$, lo cual es una contradicción. Es por esto que $x = y$. Por lo tanto, f es inyectiva. □

La proposición anterior afirma que básicamente el único orden parcial es la contención, sin embargo, este resultado no vuelve trivial el estudio de los órdenes parciales, pues la contención puede comportarse de maneras muy distintas y complejas.

La siguiente proposición es muy útil, pues obtendremos condiciones necesarias y suficientes, además de sencillas, para probar que una función es un morfismo de órdenes lineales.

Proposición 1.6. *Sean $\langle A, r \rangle$ y $\langle B, s \rangle$ dos órdenes lineales y sea $f : A \to B$. Si $\forall x, y \in A(x\, r\, y \to f(x) s f(y))$, entonces la función f es inyectiva y*

$$\forall x, y \in A(x\, r\, y \leftrightarrow f(x) s f(y)).$$

Demostración. Veamos primero que f es un morfismo. Por las hipótesis basta, ver que

$$\forall x, y \in A(f(x) s f(y) \to x \; r \; y).$$

Sean $x, y \in A$ tales que $f(x) s f(y)$. Entonces $f(x) \neq f(y)$, por lo que $x \neq y$. Si $y \; r \; x$, entonces $f(y) s f(x)$ y, por la transitividad de s, se tendría que $f(x) s f(x)$, lo que contradice la definición de orden lineal. Por lo tanto, $x \; r \; y$, con lo cual queda demostrado que f es un morfismo.

Veamos ahora que f es inyectiva. Sean $a, b \in A$, tales que $f(a) = f(b)$. Para demostrar que $a = b$, es suficiente probar que no sucede $a \; r \; b$ ni $b \; r \; a$. Como $f(a) = f(b)$, no sucede que $f(a) s f(b)$ ni que $f(b) s f(a)$ y, dado que f es un morfismo, no se puede tener que $a \; r \; b$ ni que $b \; r \; a$. □

Lo anterior nos dice que los morfismos de órdenes lineales son todos inyectivos, y una forma de interpretar esto es que dado un morfismo de $\langle L, < \rangle$ en $\langle L', <' \rangle$, hay una copia fidedigna de $\langle L, < \rangle$ dentro de $\langle L', <' \rangle$.

Esto no siempre sucede con los órdenes parciales, veamos un ejemplo. Consideremos los conjuntos $\{0, 1\}$ y $\{0, 1, 2\}$, las relaciones $<_0 = \{\langle 0, 1 \rangle\}$ y $<_1 = \{\langle 0, 1 \rangle, \langle 0, 2 \rangle\}$ y la función $f : \{0, 1, 2\} \to \{0, 1\}$ tal que $f(0) = 0$ y $f(1) = 1 = f(2)$. Entonces f es un morfismo de $\langle \{0, 1, 2\}, <_1 \rangle$ en $\langle \{0, 1\}, <_0 \rangle$ que no es inyectivo. Véase la figura 1.1, donde queda claro que no hay una copia fidedigna de el primer orden parcial en el segundo.

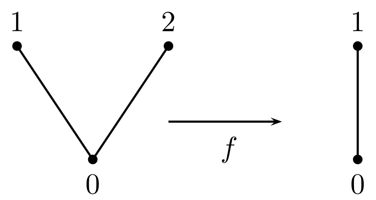

Figura 1.1: La función $f : \{0, 1, 2\} \to \{0, 1\}$

Proposición 1.7. *La relación $\cong$ se comporta como una relación de equivalencia en la clase de los órdenes parciales. Es decir, dados $\langle L, < \rangle$, $\langle L', <' \rangle$ y $\langle L'', <'' \rangle$, órdenes parciales, se tiene que*

i) $\langle L, < \rangle \cong \langle L, < \rangle$;

ii) si $\langle L, < \rangle \cong \langle L', <' \rangle$, *entonces* $\langle L', <' \rangle \cong \langle L, < \rangle$; *y*

iii) si $\langle L, < \rangle \cong \langle L', <' \rangle$ *y* $\langle L', <' \rangle \cong \langle L'', <'' \rangle$, *entonces* $\langle L, < \rangle \cong \langle L'', <'' \rangle$.

Demostración. i) La función identidad de L es un isomorfismo de $\langle L, < \rangle$ en $\langle L, < \rangle$.

ii) Si $\langle L, < \rangle \cong \langle L', <' \rangle$, hay una función biyectiva $f : L \to L'$ que cumple la propiedad de ser un morfismo de $\langle L, < \rangle$ en $\langle L', <' \rangle$, entonces f^{-1} es una función biyectiva y más aún, es un morfismo de $\langle L', <' \rangle$ en $\langle L, < \rangle$.

iii) Supongamos ahora que $\langle L, <\rangle \cong \langle L', <'\rangle$ y $\langle L', <'\rangle \cong \langle L'', <''\rangle$, entonces existen isomorfismos $f : \langle L, <\rangle \to \langle L', <'\rangle$ y $g : \langle L', <'\rangle \to \langle L', <''\rangle$. De manera que $g \circ f : L \to L''$ es un isomorfismo de $\langle L, <\rangle$ en $\langle L', <''\rangle$. □

Ejemplos 1.8.

1. Las inclusiones naturales son morfismos, es decir, si $\langle A, r\rangle$ y $B \subseteq A$, entonces la inclusión $i : B \to A$ tal que $i(x) = x$, es un morfismo de órdenes.

2. Aunque los conjuntos $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ son ajenos, suelen verse como si $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$, en realidad lo que sucede es que hay un morfismo de órdenes (que preserva estructura no sólo de orden) de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Z}$. Más adelante en este capítulo veremos las caracterizaciones de estos dos órdenes con lo cual será claro que no son isomorfos, veamos el morfismo. Definimos $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ por recursión para naturales como sigue,

   - $g(0_\mathbb{N}) = 0_\mathbb{Z}$,
   - si $n \in \mathbb{N}$, entonces $g(s(n)) = g(n) +_\mathbb{Z} 1_\mathbb{Z}$.

   Para probar que g es un morfismo mostraremos por inducción para naturales sobre x que
   $$\forall x, y \in \mathbb{N}(y <_\mathbb{N} x \to g(y) <_\mathbb{Z} g(x)).$$
   El caso $x = 0$ se tiene por vacuidad. Sea $n \in \mathbb{N}$ y supongamos que
   $$\forall y \in \mathbb{N}(y <_\mathbb{N} n \to g(y) <_\mathbb{Z} g(n)).$$
   Sea $m \in s(n)$. Si $m = n$,
   $$g(m) = g(n) <_\mathbb{Z} g(n) +_\mathbb{Z} 1_\mathbb{Z} = g(s(n)).$$
   Supongamos ahora que $m <_\mathbb{N} n$, entonces, por la hipótesis de inducción y lo que acabamos de probar en la línea anterior,
   $$g(m) <_\mathbb{Z} g(n) <_\mathbb{Z} g(s(n)).$$
   Por lo tanto, de la inducción para naturales obtenemos que,
   $$\forall x, y \in \mathbb{N}(y <_\mathbb{N} (x \to g(y) <_\mathbb{Z} g(x)),$$
   y, por la proposición 1.6, g es un morfismo.

3. Si consideramos el conjunto $(-1, 1) \subseteq \mathbb{R}$ y la función $f : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ de manera que $f(x) = x/(|x| + 1)$, f resulta ser un morfismo del orden $\langle \mathbb{R}, <_\mathbb{R}\rangle$ en el orden $\langle(-1, 1), <_\mathbb{R}\rangle$, lo cual probaremos en el siguiente párrafo. Más aún, f es un isomorfismo entre estos órdenes. La función $g : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, definida como $g(x) = x/(1 - |x|)$ es la inversa de f, por lo que f es biyectiva.

   Veamos ahora que f es un morfismo. Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x < y$. Si $0 \leq x$, entonces $|x| = x$, como $x < y$, $|y| = y$, por lo que $x|y| = y|x|$.
   Supongamos que $y < 0$, entonces tanto $|x| = -x$ como $|y| = -y$, por lo que

también $x|y| = y|x|$. Por último, supongamos que $x < 0 \leq y$, entonces $x|y| \leq 0 \leq y|x|$. Luego, si $x < y$, entonces $x|y| \leq y|x|$.
Por lo anterior, tenemos que

$$x(|y|+1) = x|y| + x < y|x| + y = y(|x|+1)$$

y, por tanto,

$$f(x) = x/(|x|+1) < y/(|y|+1) = f(y).$$

Esto demuestra que f es un morfismo.

4. Si $a, b \in \mathbb{R}$ con $a <_{\mathbb{R}} b$, entonces el intervalo (a,b) es isomorfo al intervalo $(0,1)$. Se puede verificar que la función $f : (0,1) \to (a,b)$ tal que $f(x) = (b-a)x + a$ es un isomorfismo.

1.2. Tipos de orden

Definiremos ahora el tipo de orden de un orden lineal, aunque en realidad sólo definiremos lo que significa que dos órdenes lineales tengan el mismo tipo de orden, de manera similar a como muchas veces se define el concepto de cardinalidad.

El tipo de orden es una herramienta de gran utilidad en el estudio de los órdenes, ya que permite conocer propiedades, así como comparar órdenes de una manera más sencilla. En cierto sentido, el tipo de orden de un orden lineal es la esencia del orden que posee.

Definición 1.9. Sean $\langle A, r\rangle$ y $\langle B, s\rangle$ dos órdenes lineales. Decimos que $\langle A, r\rangle$ y $\langle B, s\rangle$ tienen *el mismo tipo de orden* si y sólo si $\langle A, r\rangle \cong \langle B, s\rangle$.

Aunque no hemos definido qué es el tipo de orden de un orden lineal, ya que sólo hemos dicho qué significa tener el mismo tipo de orden, podemos considerar que el tipo de orden es un representante de la clase de los órdenes lineales isomorfos, esto es útil además de cómodo cuando se estudian órdenes.

Una forma de definir el tipo de orden como un representante es utilizando el Axioma de Elección Global[1], aunque con sólo el Axioma de Elección se puede definir el tipo de orden como un conjunto[2]. Como ya se dijo en el párrafo anterior, para propósitos de esta tesis el tipo de orden es un orden lineal.

[1] El Axioma de Elección Global dice lo siguiente: "Hay un funcional biyectivo entre V y OR". Este no es un axioma usual de la axiomatización de Zermelo Fraenkel con Elección (ZFE) que es la más común en Teoría de Conjuntos.

[2] Recordemos que el Axioma de Elección es equivalente a la afirmación "Todo conjunto tiene un cardinal". Entonces podemos definir el tipo de orden de $\langle L, <\rangle$ como el conjunto $\{\langle \kappa, <'\rangle : \langle \kappa, <'\rangle \cong \langle L, <\rangle\} \subseteq \mathcal{P}(\kappa) \times \mathcal{P}(\kappa \times \kappa)$, si $\kappa = |L|$, el representante que se quiere expresar es el conjunto formado por todos los ordenes isomorfos a $\langle L, <\rangle$, cuyo campo sea κ. Si, además, se acepta utilizar el Axioma de Elección Global, podemos elegir un representante de cada una de estas colecciones, logrando así que un tipo de orden sea un solo orden lineal (en lugar de un conjunto de órdenes lineales).

Definición 1.10. Sean $\langle A, r\rangle$ y $\langle B, s\rangle$ dos órdenes lineales. Denotaremos al *tipo de orden de* $\langle A, r\rangle$ como $\tau(\langle A, r\rangle)$.

Si μ y ν son dos tipos de orden, entonces:

i) decimos que $\nu = \mu$ si y sólo si hay $\langle A, r\rangle$, $\langle B, s\rangle$ órdenes lineales tales que $\langle A, r\rangle \cong \langle B, s\rangle$ y $\nu = \tau(\langle A, r\rangle)$, $\mu = \tau(\langle B, s\rangle)$;

ii) decimos que $\nu \leq \mu$ si y sólo si hay $\langle A, r\rangle$, $\langle B, s\rangle$ órdenes lineales, un morfismo $f : \langle A, r\rangle \to \langle B, s\rangle$ y $\nu = \tau(\langle A, r\rangle)$, $\mu = \tau(\langle B, s\rangle)$;

iii) decimos que $\nu < \mu$ si y sólo si $\nu \leq \mu$ y $\nu \neq \mu$.

Es sencillo constatar que las definiciones anteriores no dependen de los representantes que se utilicen para determinarlas.

Cabe señalar que hay una notación particular para los tipos de orden que resultan de "voltear" a otro: si τ es el tipo de orden de $\langle A, r\rangle$, entonces el tipo de orden de $\langle A, r^{-1}\rangle$ es denotado por τ^*.

Ahora bien, el tipo de orden de un orden lineal es de cierta manera una radiografía de éste, pues sólo resalta la estructura y se olvida de qué son sus componentes. Es decir, si imaginamos que los órdenes lineales son filas, entonces el tipo de orden nos indica la clase de fila que es, sin importarle qué o quiénes la forman. Es por esto que para entender cómo se comportan ciertos órdenes utilizamos otros que le son isomorfos con los que estamos más familiarizados, ya que comparten las mismas características que nos interesa estudiar.

Para poder dar ejemplos concretos de la definición anterior, caracterizaremos a las estructuras númericas conocidas como $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$. Como ya se dijo, no haremos la construcción de estas estructuras en este trabajo, que pueden consultarse en (ACM11), pero dado que ocuparemos algunas de ellas ampliamente es importante recordar las propiedades de sus órdenes. Las demostraciones completas de estas caracterizaciones también pueden consultarse en (ACM11).

Definición 1.11. Sean $\langle P, <\rangle$ un orden parcial, $X \subseteq P$ y $p \in P$.

i) Decimos que p es una *cota inferior de* X si y sólo si $\forall x \in X (p < x \vee p = x)$.

ii) Decimos que p es una *cota superior de* X si y sólo si $\forall x \in X (x < p \vee x = p)$.

iii) Decimos que p es un *$<$-mínimo* (o simplemente un *mínimo*) *de* X si y sólo si $p \in X$ y p es cota inferior de X.

iv) Decimos que p es un *$<$-máximo* (o simplemente un *máximo*) *de* X si y sólo si $p \in X$ y p es cota superior de X.

Un hecho que se puede demostrar rápidamente es que si un subconjunto X de P tiene mínimo o máximo, éste es único.

Teorema 1.12 (Caracterización del tipo de orden de $\mathbb{N}$)**.** *Todo buen orden $\langle L, <\rangle$ sin máximo, en el que todo subconjunto acotado superiormente tiene máximo es isomorfo a $\langle \omega, \in\rangle$.*

Demostración. La prueba formal de este teorema utiliza el Teorema de Recursíon para $\mathbb{N}$, al construir una función f tal que $f(0) = l$, donde l es el mínimo de $\langle L, <\rangle$, y $f(s(n)) = b$, si b es el mínimo del conjunto $\{x : f(n) < x\}$. Se prueba que esta función f preserva el orden y que es suprayectiva. $\square$

Teorema 1.13 (Caracterización del tipo de orden de $\mathbb{Z}$)**.** *Todo orden lineal $\langle L, <\rangle$ sin mínimo, ni máximo, en el que cualquier subconjunto acotado superiormente tiene máximo y todo subconjunto acotado inferiormente tiene mínimo es isomorfo a $\langle \mathbb{Z}, <_{\mathbb{Z}}\rangle$.*

Demostración. Se selecciona un elemento $l \in L$ y se demuestra que el conjunto $\{x : l \leq x\}$ con el orden inducido $<$ y el conjunto $\{y : y < l\}$ con el orden $<^{-1}$ son ambos isomorfos a $\mathbb{N}$ utilizando el resultado anterior. Luego se induce una función f de L en $\mathbb{Z}$ a través de los isomorfismos que son provistos de los hechos anteriores. Se prueba que esta función f es un isomorfismo. $\square$

Dadas las caracterizaciones de $\langle \mathbb{Z}, <_{\mathbb{Z}}\rangle$ y de $\langle \mathbb{N}, <_{\mathbb{N}}\rangle$, podemos ahora sí asegurar que no son isomorfos como ya habíamos mencionado.

Definición 1.14. Sea $\langle L, <\rangle$ un orden lineal y $X \subseteq L$.

i) Decimos que $\langle L, <\rangle$ es *denso* si y sólo si para cualesquiera $y, z \in L$ tales que $y < z$, hay $x \in L$ con $y < x < z$.

ii) Decimos que X es *sin extremo izquierdo* si y sólo si X no tiene mínimo.

iii) Decimos que X es *sin extremo derecho* si y sólo si X no tiene máximo.

iv) Decimos que X es *sin extremos* si y sólo si no tiene máximo ni mínimo.

Teorema 1.15 (Caracterización del tipo de orden de $\mathbb{Q}$)**.** *Todo orden denso, numerable, sin extremos es isomorfo a $\langle \mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}}\rangle$.*

Hay varias maneras de probar este resultado pero la mayoría se basan en el llamado “back and forth”, la diferencia entre estas demostraciones reside en cómo es presentada esta idea.

Definición 1.16. Sean $\langle L, <\rangle$ un orden lineal, $X, Y \subseteq L$ y $a \in L$.

i) Decimos que X es *denso en L* (o simplemente *denso*) si y sólo si para cualesquiera $y, z \in L$ tales que $y < z$, hay $x \in X$ con $y < x < z$.

ii) Decimos que $\langle L, <\rangle$ es *separable* si y sólo hay un subconjunto denso en L y numerable.

iii) Decimos que a es $<$*-supremo* (o simplemente *supremo*) de X si y sólo si a es la mínima cota superior de X (es decir, si a es el mínimo del conjunto de las cotas superiores de X).

iv) Decimos que L es *completo* si y sólo si cualquier subconjunto no vacío de L tiene supremo.

Teorema 1.17 (Caracterización del tipo de orden de $\mathbb{R}$)**.** *Todo orden lineal $\langle L, <\rangle$ separable, completo y sin extremos es isomorfo a $\langle \mathbb{R}, <_{\mathbb{R}}\rangle$.*

La prueba de este resultado se hace utilizando la caracterización anterior aplicada al subconjunto separable de $\langle L, <\rangle$, pues este subconjunto es isomorfo a $\mathbb{Q}$. Con este isomorfismo se induce uno sobre L a través de los supremos.

Dado que hemos caracterizado a las estructuras númericas, daremos nombres especiales a sus tipos de orden. El tipo de orden de $\langle \omega, \in\rangle$ será denotado por ω; el de $\langle \mathbb{Z}, <_{\mathbb{Z}}\rangle$ por ζ (aunque a veces se le llama $\omega^* + \omega$, notación que se justifica en la siguiente sección); para el de $\langle \mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}}\rangle$ utilizaremos η; y, para el tipo de orden de $\langle \mathbb{R}, <_{\mathbb{R}}\rangle$ utilizaremos λ. Finalmente, es importante mencionar, dado que se usara en algunos ejemplos, que si $n \in \mathbb{N}$, el tipo de orden del orden $\langle \{m \in \mathbb{N} : m <_{\mathbb{N}} n\}, <_{\mathbb{N}}\rangle$, es precisamente n, en otras palabras, el tipo de orden de un segmento inicial de naturales es el número natural que lo determina.

1.3. Operaciones con órdenes lineales y tipos de orden

En esta sección vemos cómo combinar órdenes lineales para obtener nuevos órdenes. Una vez definidas estas operaciones, podremos usarlas junto con las caracterizaciones de las estructuras numéricas usuales para dar ejemplos comparando tipos de orden.

Definición 1.18. Sean $\langle A, r\rangle$ y $\langle B, s\rangle$ dos órdenes lineales y ν y μ sus tipos de orden, respectivamente.

i) Definimos la *suma de $\langle A, r\rangle$ y $\langle B, s\rangle$* denotada por $\langle A, r\rangle + \langle B, s\rangle$ como $\langle (A \times \{0\} \cup B \times \{1\}), <_{+,r,s}\rangle$ (o $\langle (A \times \{0\} \cup B \times \{1\}), <_{+}\rangle$, si es claro sobre qué órdenes estamos haciendo la suma), donde:

$$\langle x, a\rangle <_{+,r,s} \langle y, b\rangle \text{ si y sólo si } \begin{cases} x \in A \text{ y } y \in B \text{ ó}, \\ x, y \in A \text{ y } x\, r\, y \text{ ó}, \\ x, y \in B \text{ y } x\, s\, y. \end{cases}$$

ii) Definimos el *producto de $\langle A, r\rangle$ y $\langle B, s\rangle$* denotado por $\langle A, r\rangle \cdot \langle B, s\rangle$ como $\langle (A \times B), <_{\cdot,r,s}\rangle$ (o sólo $\langle A \times B, <_{\cdot}\rangle$, si no hay confusión sobre qué órdenes se está multiplicando), donde:

$$\langle x, y\rangle <_{\cdot,r,s} \langle w, z\rangle \text{ si y sólo si } \begin{cases} y\, s\, z \text{ ó}, \\ y = z \text{ y } x\, r\, w. \end{cases}$$

iii) Definimos la *suma de ν más μ*, denotada $\nu + \mu$, como el tipo de orden de $\langle A, r\rangle + \langle B, s\rangle$ si y sólo si $\nu = \tau(\langle A, r\rangle)$ y $\mu = \tau(\langle B, s\rangle)$.

iv) Definimos el *producto de ν por μ* (o ν, μ veces), denotado por $\nu \cdot \mu$, como el tipo de orden de $\langle A, r\rangle \cdot \langle B, s\rangle$ si y sólo si $\nu = \tau(\langle A, r\rangle)$ y $\mu = \tau(\langle B, s\rangle)$.

Es sencillo mostrar que si $\langle A, r\rangle$ y $\langle B, s\rangle$ son dos órdenes lineales, entonces $\langle (A \times \{0\} \cup B \times \{1\}), <_{+,r,s}\rangle$ y $\langle (A \times B), <_{\cdot,r,s}\rangle$ son órdenes lineales. Además, las definiciones del producto y suma de tipos de orden no dependen de los representantes elegidos para determinarlos.

Repasemos la idea de la suma y el producto de tipos de orden, pues básicamente son estos los que será útil operar.

La suma $\nu + \mu$ es únicamente la concatenación de órdenes de manera que primero coloquemos a ν y en seguida a μ, es por esto que en la suma de órdenes se requiere que los conjuntos sean disjuntos antes de sumarlos, véase la figura 1.2.

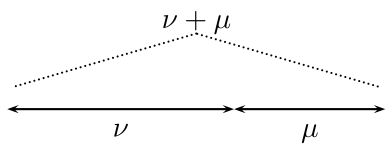

Figura 1.2: La suma $\nu + \mu$

Describir el producto $\nu \cdot \mu$ es menos sencillo, el orden que define es llamado antilexicográfico, pues en las parejas ordenadas que lo componen, para saber quién es mayor, primero comparamos las segundas entradas y después las primeras. Imaginemos a μ, ahora cada punto que conforma a μ debemos sustituirlo por una copia de ν (véase la figura 1.3).

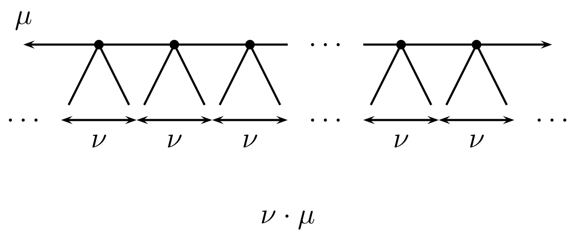

Figura 1.3: El producto $\nu \cdot \mu$

Otra manera es la siguiente: dado que μ es un orden lineal podemos imaginarlo como una línea, coloquémosla de manera vertical de forma que si un punto es mayor que otro, el mayor quede por encima del menor, y en cada punto de μ coloquemos una línea horizontal que represente a ν, donde ahora los mayores se sitúen a la derecha de los menores. El orden $\nu \cdot \mu$ es el que resulta de considerar que cada punto sobre una línea horizontal (cada punto de alguna copia de ν) es mayor que otro si está más arriba o más a la derecha que el primero, véase la figura 1.4.

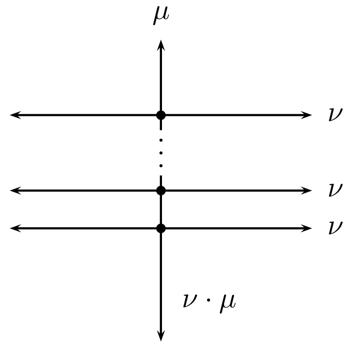

Figura 1.4: El producto $\nu \cdot \mu$

Tomemos $\langle A, r\rangle$ y $\langle B, s\rangle$ dos órdenes lineales. Ahora supongamos que $A \cap B = \emptyset$, definimos $<_{A\cup B} \subseteq (A \cup B) \times (A \cup B)$ de manera que

$$x <_{A\cup B} y \text{ si y sólo si } \begin{cases} x \in A \text{ y } y \in B \text{ ó}, \\ x, y \in A \text{ y } x\, r\, y \text{ ó}, \\ x, y \in B \text{ y } x\, s\, y. \end{cases}$$

En este caso, se puede demostrar que $\langle (A \times \{0\} \cup B \times \{1\}), <_{+,r,s}\rangle \cong \langle A \cup B, <_{A\cup B}\rangle$, es decir, si ν y μ son los tipos de orden de $\langle A, r\rangle$ y $\langle B, s\rangle$ correspondientemente, entonces $\tau(\langle A \cup B, <_{A\cup B}\rangle) = \nu + \mu$, pues el orden que acabamos de definir es la concatenación de A y B con el orden que se induce de forma natural.

Ejemplos 1.19. Como habíamos prometido, en los siguientes ejemplos usamos las operaciones y las estructuras númericas para comparar tipos de orden.

1. Denotamos con $\mathbb{N}^+$ al conjunto $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, con $\mathbb{Q}^+$ a $\{q \in \mathbb{Q} : 0 <_{\mathbb{Q}} q\}$ y con $\mathbb{R}^+$ a $\{q \in \mathbb{R} : 0 <_{\mathbb{R}} q\}$. Gracias a las caracterizaciones, podemos concluir que $\langle \mathbb{N}^+, <_{\mathbb{N}}\rangle$ y $\langle \mathbb{N}, <_{\mathbb{N}}\rangle$ son isomorfos, así como $\langle \mathbb{Q}^+, <_{\mathbb{Q}}\rangle$ y $\langle \mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}}\rangle$, y $\langle \mathbb{R}^+, <_{\mathbb{R}}\rangle$ y $\langle \mathbb{R}, <_{\mathbb{R}}\rangle$ son isomorfos respectivamente. Esto se verifica al revisar que $\langle \mathbb{N}^+, <_{\mathbb{N}}\rangle$ es un buen orden, sin máximo y tal que todo subconjunto no vacío y acotado superiormente tiene máximo; que $\langle \mathbb{Q}^+, <_{\mathbb{Q}}\rangle$ es un orden lineal numerable, denso y sin extremos; y $\langle \mathbb{R}^+, <_{\mathbb{R}}\rangle$ cumple con ser separable, completo y sin extremos.

2. El tipo de orden ζ es el mismo que $\omega^* + \omega$. Una función que atestigua esto es la siguiente: $f : \mathbb{Z} \to (\mathbb{N}^+ \times \{0\}) \times (\mathbb{N} \times \{1\})$, tal que

$$f(z) = \begin{cases} \langle -z, 0\rangle & \text{si } z <_{\mathbb{Z}} 0, \\ \langle z, 1\rangle & \text{si } 0 \leq_{\mathbb{Z}} z. \end{cases}$$

Estamos usando como representante del tipo de orden ω tanto a $\mathbb{N}$ como a $\mathbb{N}^+$. Además, asumiremos que, $\mathbb{Z}^- = \{x \in \mathbb{Z} : -x \in \mathbb{N}^+\}$; y que $\mathbb{Z}$ se puede ver como la unión de $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}^-$. Mostremos que esta función es un isomorfismo. Sean $x, y \in \mathbb{Z}$, tales que $x <_{\mathbb{Z}} y$.

Si $0 \leq_{\mathbb{Z}} x$, entonces $0 \leq_{\mathbb{Z}} y$. Por lo tanto,

$$f(x) = \langle x, 1\rangle <_+ \langle y, 1\rangle = f(y).$$

Si $y <_{\mathbb{Z}} 0$, tenemos que $x <_{\mathbb{Z}} y <_{\mathbb{Z}} 0$ de manera que $-y <_{\mathbb{N}} -x$, por lo que $-x <^*_{\mathbb{N}} -y$. Por lo tanto,

$$f(x) = \langle -x, 0\rangle <_+ \langle -y, 0\rangle = f(y).$$

Si $x <_{\mathbb{Z}} 0 \leq_{\mathbb{Z}} y$, se tiene que

$$f(x) = \langle x, 0\rangle <_+ \langle y, 1\rangle = f(y).$$

Es por lo anterior y por la proposición 1.6 que f es un morfismo y una función inyectiva.

Veamos ahora que f es sobre. Sea $x \in (\mathbb{N}^+ \times \{0\}) \cup (\mathbb{N} \times \{1\})$.

Si $x = \langle n, 0\rangle$ para algún $n \in \mathbb{N}^+$, entonces $-n \in \mathbb{Z}$, y $f(-n) = \langle n, 0\rangle = x$.

Si $x = \langle n, 1\rangle$ con $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $f(n) = \langle n, 1\rangle = x$.

Esto demuestra que f es sobre. Por lo tanto, f es un isomofismo.

3. Para visualizar el producto $\langle \mathbb{Z}, <_{\mathbb{Z}}\rangle \cdot \langle \mathbb{Z}, <_{\mathbb{Z}}\rangle$, consideremos los puntos cuyas coordenadas son enteros en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, y sobre ese conjunto diremos que un punto a es mayor que otro b si la ordenada de a es mayor que la de b, o si las ordenadas de a y b son iguales, pero la abscisa de a es mayor que la de b. Véase la figura 1.5.

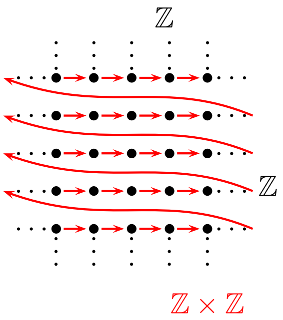

Figura 1.5: $\langle \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, <.\rangle$

A pesar de que en este orden todo punto tiene un sucesor inmediato y también un predecesor inmediato, no es isomorfo a $\mathbb{Z}$. Veamos, por ejemplo, que el subconjunto $\mathbb{Z} \times \{0\}$ de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ está acotado superiormente por $\langle 0, 1\rangle$, pero no tiene máximo. Supongamos que sí lo tiene, sea $\langle a, b\rangle$ dicho máximo, entonces $b = 0$ con lo que $\langle a, b\rangle = \langle a, 0\rangle <. \langle a + 1, 0\rangle$, lo cual es una contradicción pues $\langle a + 1, 0\rangle$ está en el $\mathbb{Z} \times \{0\}$. Por lo tanto, $\mathbb{Z} \times \{0\}$ no tiene máximo (de hecho tampoco mínimo) y utilizando la caracterización de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}$ no son isomorfos.

4. La suma de $\langle \omega, \in \rangle + \langle \mathbb{R}, <_{\mathbb{R}} \rangle$ tiene el mismo tipo de orden que el subconjunto de $\mathbb{R}$ dado por $\{-1/n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \cup (0,1)$ (ya se mencionó que $(0,1)$ y $\mathbb{R}$ son isomorfos) véase la figura 1.6. La función

$$f : (\omega \times \{0\}) \cup (0,1) \to \{-1/n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \cup ((0,1) \times \{1\})$$

tal que $f(x,0) = -1/(x+1)$ y $f(x,1) = x$ es un isomorfismo. Así,

$$\tau[\{-1/n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \cup (0,1)] = \omega + \lambda.$$

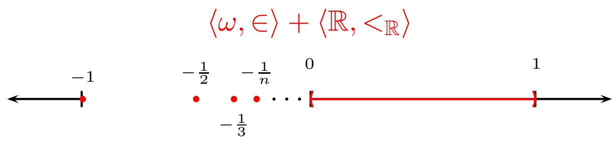

Figura 1.6: $\omega + \mathbb{R}$

5. Ahora que hemos definido los tipos de orden de las estructuras numéricas y las operaciones de tipos de orden, podemos dar una respuesta a la pregunta ¿será cierto que $\tau \leq \mu$ y $\mu \leq \tau$ implica que $\tau = \mu$? La respuesta es negativa, pues veamos, por ejemplo, que $\lambda \leq \lambda + \lambda$, $\lambda + \lambda \leq \lambda$, pero $\lambda + \lambda \neq \lambda$.

   El hecho de que $\lambda \leq \lambda + \lambda$ se sigue de que la función

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \{0\} \cup \mathbb{R} \times \{1\},$$

   definida como $f(x) = \langle x, 0 \rangle$ es un morfismo de órdenes.

   Ya se ha mencionado que $(0,1), (1,2) \subseteq \mathbb{R}$ tienen el mismo tipo de orden que $\mathbb{R}$. Si $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ y $g : (1,2) \to \mathbb{R}$ son isomorfismos, entonces

$$h : (0,1) \cup (1,2) \to \mathbb{R} \times \{0\} \cup \mathbb{R} \times \{1\}$$

   definida como
$$h(x) = \begin{cases} \langle f(x), 0 \rangle & \text{si } x < 1, \\ \langle g(x), 1 \rangle & \text{si } 1 < x; \end{cases}$$
   es un isomorfismo, de forma que, como $\tau[(0,1) \cup (1,2)] = \lambda + \lambda$, obtenemos que $\lambda + \lambda \leq \lambda$.

   Observemos que si consideramos a $(0,1)$ como subconjunto de $(0,1) \cup (1,2)$, este intervalo no tiene supremo. En efecto, si $x \in (0,1)$ por la densidad de $\mathbb{R}$, hay $z \in \mathbb{R}$ tal que $x < z < 1$, de forma que x no es cota superior de $(0,1)$. Por otro lado, si $x \in (1,2)$, x es cota superior de $(0,1)$, pero volviendo a usar la densidad de $\mathbb{R}$, hay $z \in \mathbb{R}$ tal que $1 < z < x$, de manera que $z \in (1,2)$ y es una cota superior de $(0,1)$. Sin embargo, $z < x$, por lo que x no puede ser el supremo de $(0,1)$. Hemos probado que el $(0,1)$ no tiene supremo en $(0,1) \cup (1,2)$, por lo tanto, $(0,1) \cup (1,2)$ no es completo.

   Así, queda demostrado que $\lambda \neq \lambda + \lambda$.

6. El producto $\langle\mathbb{R}, <_{\mathbb{R}}\rangle \cdot \langle\omega, \in\rangle$ es algo que parece complicado, pero en realidad no lo es. Imaginemos a los naturales con su orden usual, dentro de la línea de $\mathbb{R}$, entonces debemos sustituir a cada natural por el intervalo $(0, 1) \subseteq \mathbb{R}$ (usando que $(0, 1)$ tiene el mismo tipo de orden que $\mathbb{R}$), pero en lugar de esto coloquémoslo enfrente, entre el natural y su sucesor, así obtendremos que $\langle\mathbb{R}, <_{\mathbb{R}}\rangle \cdot \langle\omega \in\rangle$ es isomorfo al orden lineal que resulta de $\mathbb{R}^+$ al borrarle los enteros positivos, véase la figura 1.7. Se puede verificar que la función $f : (0, 1) \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ definida como $f(\langle x, n\rangle) = n + x$ es un isomorfismo.

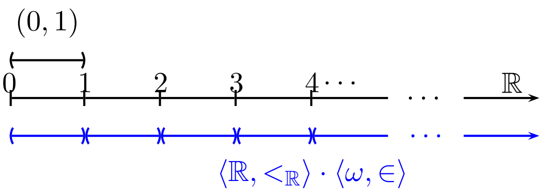

Figura 1.7: $\mathbb{R} \cdot \omega$

El tipo de orden del producto $\langle\mathbb{R}, <_{\mathbb{R}}\rangle \cdot \langle\omega \in\rangle$ es $\lambda \cdot \omega$. Como este producto puede sumergirse en $\mathbb{R}$, obtenemos que $\lambda \cdot \omega \leq \lambda$, y es claro que $\lambda \leq \lambda \cdot \omega$. Sin embargo, puede demostrarse de manera similar a como se hizo en el inciso anterior que $\lambda \neq \lambda \cdot \omega$.

7. Puede representarse a λ como $(\lambda + 1) \cdot \omega$, o como $(\lambda + 1) \cdot \zeta$.

   Veamos primero que $\lambda = (\lambda + 1) \cdot \zeta$. Para ello primero observamos que un representante para el tipo de orden $\lambda + 1$ es el intervalo $(0, 1]$ contenido en $\mathbb{R}$. Ahora, definimos la función $f : (0, 1] \times \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ de forma que $f(x, n) = n + x$. Mostremos que tal función es un isomorfismo.

   Sean $\langle x, n\rangle, \langle y, m\rangle \in (0, 1] \times \mathbb{Z}$ tales que $\langle x, n\rangle <. \langle y, m\rangle$. Supongamos que $n <_{\mathbb{Z}} m$, entonces $n+x \leq_{\mathbb{R}} m <_{\mathbb{R}} m+y$, pues $x, y \in (0, 1]$. Por otro lado, si $n = m$ y $x <_{\mathbb{R}} y$, es claro que $n + x = m + x <_{\mathbb{R}} m + y$. Esto demuestra que f es un morfismo, resta ver que f es sobre.

   Sea $w \in \mathbb{R}$, puede demostrarse que hay un único, $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \leq w < n + 1$, si $x = w - n$, $x \in (0, 1]$, además $f(x, n) = w$. Por lo tanto, f es un isomorfismo.

   Para ver que $\lambda = (\lambda + 1) \cdot \omega$, es suficiente demostrar que la función $g : (0, 1] \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ definida como $g(x, n) = n + x$ es un isomorfismo, lo cual se hace de manera similar a lo hecho en el párrafo anterior.

Para terminar esta sección generalicemos la suma de órdenes lineales.

Definición 1.20. Sea $\langle I, <_I\rangle$ un orden lineal y para cada $i \in I$, sea $\langle L_i, <_i\rangle$ un orden lineal. Definimos la suma

$$\sum_{i \in \langle I, <_I\rangle} \langle L_i, <_i\rangle$$

(o simplemente $\sum_{i\in I} L_i$, si es claro qué órdenes se están considerando tanto para I, como para cada L_i), como el orden:

$$\left\langle \bigcup_{i\in I} L_i \times \{i\}, <_{\sum} \right\rangle,$$

donde $\langle x, i\rangle <_{\sum} \langle y, j\rangle$ si y sólo si:

a) $i = j$ y $x <_i y$, o

b) $i <_I j$.

Es sencillo verificar que la suma generalizada de órdenes lineales es un orden lineal.

En el caso en que para todo $i \in I$, $\langle L_i, <_i\rangle = \langle L, <\rangle$ para algún $\langle L, <\rangle$ fijo denotamos con $\sum_{i\in I} L$ a $\sum_{i\in I} L_i$.

Proposición 1.21. *Si $\langle L, <\rangle$ y $\langle I, <_I\rangle$ son dos órdenes lineales, entonces*

$$\sum_{i\in I} L = \langle L, <\rangle \cdot \langle I, <_I\rangle.$$

Demostración. Observemos que $\bigcup_{i\in I} L \times \{i\} = L \times I$, por lo que sólo resta probar que $<. = <_{\sum}$. Sean $x, y \in L$ e $i, j \in I$. Tenemos que $\langle x, i\rangle <_{\sum} \langle y, j\rangle$ si y sólo $i = j$ y $x < y$, o $i <_I j$, y esto último equivale a que $\langle x, i\rangle <. \langle y, j\rangle$. ☐

Ejemplos 1.22. 1. La proposición anterior nos permite expresar los siguientes tipos de orden de la siguiente forma:

i) $\lambda \cdot \omega = \sum_{n\in\omega} \lambda$;

ii) $\lambda = (\lambda + 1) \cdot \zeta = \sum_{i\in\zeta} \lambda + 1$.

2. Se ha mencionado ya que la suma de órdenes lineales es siempre un orden lineal, incluso al tratarse de la suma generalizada. En el siguiente capítulo veremos que la suma de buenos órdenes resulta ser un buen orden; también el producto de buenos órdenes es un buen orden. Sin embargo, a través de la suma generalizada podemos encontrar una forma de sumar de buenos órdenes de manera que el resultado no sea un buen orden (aunque claro está que debemos involucrar un orden que no sea buen orden para lograrlo). La suma

$$\sum_{n\in\omega^*} n = \omega^*,$$

es decir no es un buen orden. Para comprobar esta igualdad basta tomar $\left(\sum_{n\in\omega^*} n\right)^*$ y mostrar que es isomorfo a $\mathbb{N}^+$, pues así la suma $\sum_{n\in\omega^*} n$ será isomorfo a $\mathbb{N}^*$.

La función

$$f : \left(\sum_{n\in\omega^*} n\right)^* \to \mathbb{N}^+$$

tal que

$$f(\langle n, m\rangle) = \left(\sum_{i=0}^{m} i\right) - n,$$

es un isomorfismo.

Para probar esto, hay que considerar la siguiente propiedad: para cada natural positivo n hay un único natural b tal que

$$\sum_{i=0}^{b} i < n \leq \sum_{i=0}^{b+1} i$$

(este resultado puede probarse definiendo para cada $n \in \mathbb{N}$ el número $b := min\{k \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{k} i \leq n\}$).

Sean $\langle n, m\rangle, \langle i, j\rangle \in \bigcup_{l\in\omega} l \times \{l\}$ tales que $\langle n, m\rangle <_{\sum^{-1}} \langle i, j\rangle$. Entonces $\langle i, j\rangle <_{\sum} \langle n, m\rangle$, de donde $j <^{-1} m$, o $j = m$ y $i < n$. Así, $m \leq j$ y

$$\sum_{k=0}^{m} k \leq \sum_{k=0}^{j} k.$$

Si $m < j$, entonces

$$j \leq \sum_{k=0}^{j} k - \sum_{k=0}^{m} k,$$

y, como además $i < j$, pues $\langle i, j\rangle \in j \times j$,

$$f(\langle n, m\rangle) = \left(\sum_{k=0}^{m} k\right) - n \leq \sum_{k=0}^{m} k < \left(\sum_{k=0}^{j} k\right) - i = f(\langle i, j\rangle).$$

Si $m = j$ y $i < n$,

$$f(\langle n, m\rangle) = \left(\sum_{k=0}^{m} k\right) - n < \left(\sum_{k=0}^{m} k\right) - i = \left(\sum_{k=0}^{j} k\right) - i = f(\langle i, j\rangle).$$

Lo anterior prueba que f es un morfismo de órdenes y una función inyectiva, esto gracias a la proposición 1.6.

Sea $m \in \mathbb{N}^{+}$. Por la propiedad mencionada al inicio de la prueba, hay un único $b \in \omega$ tal que

$$\sum_{i=0}^{b} i < m \leq \sum_{i=0}^{b+1} i.$$

Entonces si

$$a = \left(\sum_{i=0}^{b+1} i\right) - m,$$

obtenemos que

$$a = \left(\sum_{i=0}^{b+1} i\right) - m < \sum_{i=0}^{b+1} i - \sum_{i=0}^{b} i = b + 1 \quad y$$

$$m = \left(\sum_{i=0}^{b+1} i\right) - a = f(\langle a, b+1 \rangle).$$

Por lo que f es suprayectiva y, dado que se mostró que es un morfismo y una función inyectiva, f es un isomorfismo de órdenes.

Capítulo 2

Ordinales

Ahora pasemos al estudio de los ordinales y las propiedades referentes a su estructura como buenos órdenes, entre ellas, veremos los Teoremas de Inducción y Recursión, pues estos resultados serán ampliamente utilizados en los capítulos siguientes. Como en el capítulo anterior, nuestro propósito es que el lector recuerde estos conocimientos, por lo que no se darán todas las pruebas.

2.1. Introducción

Un ordinal es un conjunto que generalmente se utiliza para enlistar a los elementos de otro de una manera similar a como usamos los números naturales para contar a los conjuntos finitos. Ejemplos de esto son listas de los alumnos de un cierto grupo escolar, las instrucciones para ensamblar un equipo de sonido, que justamente enlistamos utilizando los números naturales (aunque generalmente sin utilizar al cero). Sin embargo, en matemáticas también queremos enlistar a conjuntos infinitos, por lo que necesitamos también definir ordinales infinitos, además de considerar ordinales finitos, que serán precisamente los muy conocidos números naturales.

Definición 2.1. Sea x un conjunto.

Decimos que x es un *ordinal* si y sólo si $\forall y(y \in x \to y \subseteq x)$ (es decir, x es un conjunto *transitivo*) y $\langle x, \in \rangle$ es un buen orden.

Decimos que x es un *número natural* si y sólo si $\forall y(y \in x \to y \subseteq x)$ y $\langle x, \in \rangle$ y $\langle x, \in^{-1} \rangle$ ambos son buenos órdenes.

La definición de ordinal puede expresarse en una fórmula del lenguaje de la teoría de conjuntos únicamente traduciendo a este lenguaje la definición anterior; denotemos a esta fórmula por $ord(x)$, de manera que α sea un ordinal si y sólo si se cumple que $ord(\alpha)$.

Es inmediato de la definición que cualquier número natural es un ordinal, así que, por ejemplo, $0 = \emptyset$, $1 = \{\emptyset\}$, $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ son todos ordinales. Las definiciones de los conjuntos ω y $\mathbb{N}$ con todas sus propiedades se pueden consultar en (ACM11) de manera más detallada; aquí sólo enunciaremos algunas de ellas. Como ya mencionamos en el capítulo anterior, el conjunto ω se define como el mínimo de los conjuntos inductivos. Ahora, $\mathbb{N}$ se define como la clase de los números naturales. Se puede demostrar que $\omega = \mathbb{N}$, por lo que obviamente el tipo de orden de $\mathbb{N}$ es el mismo que el de ω. También se puede demostrar que ω es un conjunto transitivo y que, como ya dijimos, $\langle \omega, \in \rangle$ es un buen orden, por lo que que ω es un ordinal.

Proposición 2.2. *Sean α y β ordinales. Se tiene lo siguiente.*

i) $\alpha \notin \alpha$.[1]

ii) $s(\alpha) := \alpha \cup \{\alpha\}$ *es un ordinal.*

iii) $\alpha = \{\gamma \in \alpha : \gamma \text{ es un ordinal}\}$.

iv) $\alpha \subsetneq \beta$ *si y sólo si* $\alpha \in \beta$.

v) Se cumple una y sólo una de las siguiente afirmaciones: $\alpha \in \beta$, $\alpha = \beta$ *o* $\beta \in \alpha$.

Las afirmaciones anteriores nos indican varias cosas, como el hecho de que el orden en los ordinales sea la contención propia y al mismo tiempo la pertenencia, es decir si α y β son ordinales entonces, $\alpha \in \beta$ si y sólo si $\alpha \subsetneq \beta$ como afirma el inciso *iv*) de la proposición anterior, pero además $\alpha \subseteq \beta$ si y sólo si $\alpha \in \beta$ o $\alpha = \beta$, remarcamos estos hechos porque serán usados ampliamente.

Teorema 2.3 (Principio del Mínimo Ordinal)**.** *Cualquier clase no vacía de ordinales tiene un elemento mínimo, es decir, si $\mathcal{C}$ es una clase no vacía de ordinales, entonces existe $\alpha \in \mathcal{C}$ tal que para cualquier $\beta \in \mathcal{C}$ se cumple que $\alpha \in \beta$ o $\alpha = \beta$.*

Recordemos que una clase es una colección cuyos elementos son conjuntos, la cual está determinada por una fórmula. Algunas de estas clases resultan ser conjuntos, aquellas que no lo son reciben el nombre de "clases propias". Ahora bien, la fórmula $ord(x)$ indica si un conjunto es un ordinal o no, de manera que hay una clase determinada por ella a la que llamaremos OR, es decir, $OR := \{\alpha : ord(\alpha)\}$. El teorema anterior nos indica que si OR fuera un conjunto, entonces $\langle OR, \in \rangle$ sería un buen orden, es por esto que en este capítulo utilizaremos la notación $\alpha < \beta$ siempre que $\alpha \in \beta$ y $\alpha \leq \beta$ siempre que $\alpha \subseteq \beta$ cuando α y β sean ordinales.

Corolario 2.4 (Paradoja de Burali-Forti)**.** *La clase de los ordinales no es un conjunto, en otras palabras, la clase OR es una clase propia.*

Definición 2.5. Sea α un ordinal.

Decimos que α es un *ordinal sucesor* si y sólo si hay un ordinal β tal que $s(\beta) = \alpha$.

Decimos que α es un *ordinal límite* si y sólo si $\alpha \neq \emptyset$ y α no es ordinal sucesor.

Proposición 2.6. *Sean α un ordinal y A un conjunto de ordinales. Se tiene lo siguiente.*

[1] Este hecho es una consecuencia de la definición de ordinal, sin necesidad de acudir al Axioma de Buena Fundación.

i) $\bigcup s(\alpha) = \alpha$.

ii) α *es un ordinal límite si y sólo si* $\bigcup \alpha = \alpha$ *y* $\alpha \neq 0$.

iii) $\bigcup A$ *es un ordinal y es el supremo de* A.

iv) Si $A \neq \emptyset$, *entonces* $\bigcap A$ *es un ordinal y es el mínimo de* A.

v) α *es un ordinal límite si y sólo si hay un conjunto de ordinales* X *sin máximo, tal que* $\bigcup X = \alpha$ *y* $\alpha \neq 0$.

Demostración. i) Si $\beta \in \alpha$, como $\alpha \in s(\alpha)$, entonces $\beta \in \bigcup s(\alpha)$. Por lo que $\alpha \subseteq \bigcup s(\alpha)$.
Sea $\beta \in \bigcup s(\alpha)$, entonces hay $x \in s(\alpha)$ tal que $\beta \in x$. Como $x \in s(\alpha)$, $x = \alpha$ o $x \in \alpha$. Si $x = \alpha$, $\beta \in \alpha$. Supongamos que $x \in \alpha$, pero dado que α es un ordinal, es transitivo, por lo que $x \subseteq \alpha$, de lo cual obtenemos que $\beta \in \alpha$. Por lo tanto, también ocurre que $\bigcup s(\alpha) \subseteq \alpha$.

ii) Sea α un ordinal límite, entonces $\alpha \neq 0$. Como α es transitivo, $\bigcup \alpha \subseteq \alpha$. Sea $\beta \in \alpha$. No es posible que $\alpha \in s(\beta)$, pues si $\alpha \in s(\beta)$, entonces por el inciso *ii*) de la proposición 2.2 $\alpha \in \beta$ o $\alpha = \beta$, lo cual es una contradicción al inciso *v*) de la misma proposición. Por lo tanto, $s(\beta) \leq \alpha$, pero α es límite, de donde $\beta \in s(\beta) \in \alpha$. Así, $\alpha \subseteq \bigcup \alpha$.
Ahora supongamos que $\alpha = \bigcup \alpha$. Si hubiera un ordinal β tal que $\alpha = s(\beta)$, entonces, ocupando el inciso anterior y estas hipótesis, obtenemos que

$$\beta = \bigcup s(\beta) = \bigcup \alpha = \alpha$$

lo cual contradice que $\alpha = s(\beta)$. Por lo tanto, no hay un ordinal β tal que $\alpha = s(\beta)$ y, dado que por hipótesis $\alpha \neq 0$, α es un ordinal límite.

iii) Por el Teorema 2.3, basta probar que $\bigcup A$ es un conjunto de ordinales para que $\langle \bigcup A, \in \rangle$ sea un buen orden. Si $x \in \bigcup A$, entonces hay $a \in A$ tal que $x \in a$, pero A es un conjunto de ordinales, por lo que a es un ordinal. Como todos los elementos de un ordinal son ordinales, x también es un ordinal.
Resta mostrar que $\bigcup A$ es transitivo. Sean $y \in \bigcup A$ y $x \in y$. Entonces hay $a \in A$ tal que $y \in a$, como a es un ordinal, $x \in a$, por lo cual $y \in \bigcup A$. Con esto queda demostrado que $\bigcup A$ es transitivo y como también $\langle \bigcup A, \in \rangle$ es un buen orden, tenemos que $\bigcup A$ es un ordinal. Como $\bigcup A$ es el menor de todos los conjuntos x tales que para cualquier $y \in A$ se tiene $y \subseteq x$, $\bigcup A$ es el supremo de A.

iv) Sea a el mínimo de A, usando el Teorema 2.3. Como para cualquier $x \in A$, $\bigcap A \subseteq x$, entonces $\bigcap A \subseteq a$. Por otro lado, como para cualquier $x \in A$, $a \subseteq x$ y $\bigcap A$ es el más grande de todos los conjutos que cumple con esta propiedad, tenemos que $a \subseteq \bigcap A$. Por lo tanto, $\bigcap A$ es el mínimo de A.

v) Sea α un ordinal. Si α es límite, por el inciso *ii)* $\alpha = \bigcup \alpha$ y por el inciso *iii)*, $\bigcup \alpha$ es el supremo de α, por lo que α no tiene máximo y $\alpha = \bigcup \alpha$.
Ahora, supongamos que X es un conjunto de ordinales sin máximo y que $0 \neq \alpha = \bigcup X$. Si hubiera un ordinal β tal que $s(\beta) = \alpha$, entonces $\beta \in \alpha = \bigcup X$. Así, habría $\delta \in X$, tal que $\beta \in \delta$, de manera que $\alpha = s(\beta) \leq \delta$, pero por el inciso *ii)*, $\delta \leq \alpha$ (pues α es el supremo de X), de donde, $\delta = \alpha$. Por lo tanto, $\alpha \in X$ y α es el máximo de los ordinales de X, lo cual es una contradicción.

□

2.2. Teoremas de Inducción, Enumeración y Recursión

Los Teoremas de Inducción y Recursión tienen gran importancia, pues nos brindan una manera de demostrar propiedades de los ordinales y de definir conceptos a partir de ellos. Por otra parte, el Teorema de Enumeración tiene una relación más cercana con los órdenes lineales, pues es a través de este teorema que podemos clasificar a los buenos órdenes.

Teorema 2.7 (Principio de Inducción Ordinal)**.** *Sea φ una fórmula de la teoría de conjuntos. Si se tiene*

$$\forall \alpha \in OR[\forall \beta(\beta \in \alpha \to \varphi(\beta)) \to \varphi(\alpha)],$$

entonces $\forall \alpha \in OR(\varphi(\alpha))$.[1]

Corolario 2.8 (Principio de Inducción, segunda forma)**.** *Sea φ una fórmula de la teoría de conjuntos. Si se cumple que:*

a) $\varphi(0)$*,*

b) $\forall \alpha \in OR[\varphi(\alpha) \to \varphi(s(\alpha))]$*, y*

c) $\forall \alpha \in OR[\alpha \textit{ es límite} \wedge \forall \beta(\beta \in \alpha \to \varphi(\beta) \to \varphi(\alpha))]$*,*

entonces se tiene $\forall \alpha \in OR(\varphi(\alpha))$.

Cabe destacar que hay más versiones del principio de inducción para ordinales, todas ellas (incluyendo las dos anteriores) equivalentes, pero incluimos sólo aquéllas que utilizaremos más frecuentemente en este trabajo. Pasemos ahora al Teorema de Enumeración.

Teorema 2.9 (Teorema de Enumeración)**.** *Si $\langle B, < \rangle$ es un buen orden, entonces hay un único ordinal α tal que $\langle B, < \rangle \cong \langle \alpha, \in \rangle$.*

[1] Recordemos que OR es la clase propia de los ordinales, de manera que si escribimos $\alpha \in OR$, es sólo una abreviatura de $ord(\alpha)$.

Se habló en el capítulo anterior acerca de los tipos de orden y de lo complicado que resulta dar una definición de tipo de orden de manera que éste resulte un conjunto y, más aún, un orden lineal. Sin embargo, gracias al Teorema de Enumeración, en el caso de los órdenes lineales que son buenos órdenes esto resulta muy sencillo, pues cada ordinal resultará ser de hecho el tipo de orden de los buenos órdenes isomorfos a él.

Definición 2.10. Sea $\langle B, <\rangle$ un buen orden. El *tipo de orden de* $\langle B, <\rangle$ denotado como $\tau(\langle B, <\rangle)$ es el único ordinal α que cumple $\langle B, <\rangle \cong \langle \alpha, \in\rangle$.

Pasemos ahora al Teorema de Recursión. Algunas clases tienen como elementos únicamente parejas ordenadas, a tal tipo de clases las llamamos relacionales, claro que la utilidad de este nombre es sólo cuando el relacional no es un conjunto (cuando lo es, decimos que es una relación). Ahora bien, hay ciertos relacionales no conjuntos, que poseen una característica especial, la cual es que se comportan como una función, de hecho no pueden ser llamados función sólo porque no son conjuntos.

Digamos de manera más formal qué son un relacional y un funcional. Si $\mathcal{C} = \{a : \psi(a)\}$ es una clase, diremos que $\mathcal{C}$ es un relacional si y sólo si todos los elementos de $\mathcal{C}$ son parejas ordenadas o, equivalentemente, si hay una fórmula φ del lenguaje de la teoría de conjuntos (con dos variables libres) tal que $\mathcal{C} = \{\langle x, y\rangle : \varphi(x, y)\}$. Si F es un relacional determinado por la fórmula φ, entonces diremos que F es un funcional si y sólo si

$$\forall x, y, z((\varphi(x, y) \wedge \varphi(x, z)) \rightarrow y = z).$$

Además, si $\forall x \exists y(\varphi(x, y))$, diremos que F es un funcional del universo. De hecho, llamaremos $dom(F)$ a la clase $\{x : \exists y(\varphi(x, y))\}$ y si ocurre que $\varphi(a, b)$, al conjunto b lo denotaremos por $F(a)$, aunque estrictamente todos éstos son abusos de notación.

Teorema 2.11 (de Recursión Ordinal)**.** *Si G es un funcional del universo, podemos definir un único funcional F tal que:*

a) $dom(F) = OR$, y

b) $\forall \alpha \in OR(F(\alpha) = G(F[\alpha]))$.

Corolario 2.12 (Teorema de Recursión, segunda versión)**.** *Si G y H son funcionales del universo y a es un conjunto, podemos definir un único funcional F tal que:*

a) $dom(F) = OR$,

b) $F(0) = a$,

c) $\forall \alpha \in OR[F(s(\alpha)) = G(F(\alpha))]$, y

d) $\forall \alpha \in OR[\alpha$ es límite $\rightarrow F(\alpha) = H(F[\alpha])]$.

De manera similar como comentamos para el principio de inducción para ordinales, las versiones del Teorema de Recursión que se presentaron son equivalentes y son las que se usarán. Podría pensarse que el Teorema de Recursión habla de la existencia o la posible construcción de una fórmula del lenguaje de la teoría de conjuntos (pues en pocas palabras el Teorema de Recursión habla de la existencia de un funcional y en ZFE la manera de referirse a un funcional de manera formal es a través de una fórmula), pero no es así, pues el teorema puede enunciarse también de la siguiente manera.

Si φ es una fórmula de la teoría de conjuntos (con dos variables libres) tal que $\forall x, y, z((\varphi(x,y) \wedge \varphi(x,z)) \to y = z)$, entonces $\forall \alpha \in OR$ existe una única función f_α tal que $\forall \alpha, \beta \in OR$:

i) $dom(f_\alpha) = \alpha$,

ii) $\alpha \in \beta \to f_\alpha \subseteq f_\beta$, y

iii) $\alpha \in \beta \to \big(f_\beta(\alpha) = z \leftrightarrow \varphi(f_\beta[\alpha], z)\big)$
En otras palabras, el último inciso afirma que si G es el funcional determinado por φ, entonces $f_\beta(\alpha) = G(f_\beta[\alpha])$.

Escrito de esta manera, es claro que lo que se postula es la existencia de una sucesión de funciones que tienen las propiedades que deseamos y aproximan al funcional descrito en el Teorema 2.11, pero el enunciado del Teorema 2.11 es mucho mas fácil de comprender y aplicar.

2.3. Aritmética ordinal

Definiremos la suma, producto y la exponenciación ordinal utilizando el Teorema de Recursión.

Definición 2.13. (Suma Ordinal) Sean α y β ordinales.

Definimos la suma ordinal α *más* β denotada por $\alpha+\beta$, por recursión de la siguiente manera:

1. $\alpha + 0 = \alpha$,
2. $\forall \delta \in OR(\alpha + s(\delta) = s(\alpha + \delta))$,
3. $\alpha + \gamma = \bigcup_{\delta<\gamma} \alpha + \delta$, para cualquier ordinal límite γ.

Proposición 2.14. *Sean α, β y γ son ordinales. Se cumplen las siguientes propiedades.*

i) $\alpha < \beta$ *si y sólo si* $\gamma + \alpha < \gamma + \beta$.

ii) $\alpha = \beta$ *si y sólo si* $\gamma + \alpha = \gamma + \beta$ *(ley de la cancelación de la suma).*

iii) $\alpha \leq \alpha + \beta$ *y* $\alpha \leq \beta + \alpha$.

iv) Si $\alpha \leq \beta$, *entonces hay un único ordinal* δ *que cumple que* $\alpha + \delta = \beta$, *el cual suele denotarse como* $\beta - \alpha$.

v) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ *(asociatividad de la suma).*

Demostración. i) Demostraremos por inducción que para todo $\beta \in OR$ se tiene que

$$\forall\alpha\forall\gamma(\alpha < \beta \rightarrow \gamma + \alpha < \gamma + \beta).$$

Por vacuidad tenemos que

$$\forall\alpha\forall\gamma(\alpha < 0 \rightarrow \gamma + \alpha < \gamma + 0).$$

Sea $\beta \in OR$ y supongamos que

$$\forall\alpha\forall\gamma(\alpha < \beta \rightarrow \gamma + \alpha < \gamma + \beta).$$

Sean $\gamma \in OR$ y $\alpha < s(\beta)$, entonces $\alpha = \beta$ o $\alpha < \beta$.
Supongamos que $\alpha = \beta$, entonces

$$\gamma + \alpha = \gamma + \beta < s(\gamma + \beta) = \gamma + s(\beta).$$

Si $\alpha < \beta$, entonces $\gamma + \alpha < \gamma + \beta$ (por hipótesis de inducción) y $\gamma + \beta < \gamma + s(\beta)$.
Sea β un ordinal límite, supongamos que si $\delta < \beta$, entonces

$$\forall\alpha\forall\gamma(\alpha < \delta \rightarrow \gamma + \alpha < \gamma + \delta).$$

Sean $\gamma \in OR$ y $\alpha < \beta$, entonces $s(\alpha) < \beta$, y por lo tanto

$$\gamma + \alpha < \gamma + s(\alpha) \leq \bigcup_{\delta < \beta} \gamma + \delta = \gamma + \beta.$$

Hemos demostrado que para cualesquiera α, β y γ

$$\alpha < \beta \rightarrow \gamma + \alpha < \gamma + \beta$$

Sean α, β y γ ordinales. Supongamos que $\gamma + \alpha < \gamma + \beta$, como $\gamma +$ es un funcional, $\alpha \neq \beta$ y también por lo anterior $\beta \not< \alpha$, entonces $\alpha < \beta$.

ii) Si α, β y γ son ordinales tales que $\gamma + \alpha = \gamma + \beta$, entonces, por el inciso anterior, $\alpha \not< \beta$ y $\beta \not< \alpha$, por lo que $\alpha = \beta$.

iii) Si α y β son ordinales, el que $\alpha \leq \alpha + \beta$ se desprende del inciso *i*). Pasemos a la otra parte de la arfirmación.
Sea β un ordinal, mostraremos por inducción que para cualquier ordinal α se tiene que $\alpha \leq \beta + \alpha$. Tenemos que $0 \leq \beta = \beta + 0$. Ahora supongamos que para un ordinal α ocurre que $\alpha \leq \beta + \alpha$. Entonces

$$s(\alpha) \leq s(\beta + \alpha) = \beta + s(\alpha).$$

Por último supongamos que α es un ordinal límite y que para cualquier $\delta < \alpha$ ocurre que $\delta \leq \beta + \delta$. Por lo tanto,

$$\alpha = \bigcup_{\delta<\alpha} \delta \leq \bigcup_{\delta<\alpha} (\beta + \delta) = \beta + \alpha$$

iv) Sean α y β ordinales tales que $\alpha \leq \beta$. Si $\alpha = \beta$, entonces $\alpha + 0 = \alpha = \beta$. Supongamos que $\alpha < \beta$. Por el inciso *iii*), $\beta \leq \alpha + \beta$. Sea

$$\delta = min\{\gamma : \beta \leq \alpha + \gamma\},$$

entonces $\beta \leq \alpha + \delta$ y si $\epsilon < \delta$, entonces $\alpha + \epsilon < \beta$.
Si hay $\gamma \in OR$ tal que $s(\gamma) = \delta$, entonces

$$\alpha + \gamma < \beta \leq \alpha + \delta = \alpha + s(\gamma) = s(\alpha + \gamma),$$

por lo que $\alpha + \delta = \beta$.
Si δ es un ordinal límite, tenemos que si $\epsilon < \delta$, entonces $\alpha + \epsilon < \beta$, por lo cual

$$\alpha + \delta = \bigcup_{\epsilon<\delta} \alpha + \epsilon \leq \beta \leq \alpha + \delta.$$

La unicidad es una consecuencia del inciso *ii*).

v) Se puede demostrar por inducción, usando el inciso anterior para el caso límite.

□

Definición 2.15. (Producto Ordinal) Sean α y β ordinales.

Definimos el producto ordinal α *por* β denotado por $\alpha \cdot \beta$, por recursión de la siguiente manera:

1. $\alpha \cdot 0 = 0$,
2. $\forall \delta \in OR(\alpha \cdot s(\delta) = \alpha \cdot \delta + \alpha)$,
3. $\alpha \cdot \gamma = \bigcup_{\delta<\gamma} (\alpha \cdot \delta)$, para cualquier ordinal límite γ.

El producto ordinal tiene las siguientes propiedades.

Proposición 2.16. *Si α, β y γ son ordinales, se cumplen las siguientes afirmaciones.*

i) Si $\gamma \neq 0$, entonces $\alpha < \beta$ si y sólo si $\gamma \cdot \alpha < \gamma \cdot \beta$.

ii) Si $\gamma \neq 0$, entonces $\alpha = \beta$ si y sólo si $\gamma \cdot \alpha = \gamma \cdot \beta$ (ley de la cancelación del producto).

iii) $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$.

iv) Si $\beta \neq \emptyset$, $\alpha \leq \alpha \cdot \beta$ y $\alpha \leq \beta \cdot \alpha$.

v) $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$.

Demostración. i) Procederemos de manera similar a la demostración del inciso *i*) de la proposición 2.14.

El hecho de que

$$\forall \alpha \forall \gamma \neq 0(\alpha < 0 \to \gamma \cdot \alpha < \gamma \cdot 0),$$

se tiene por vacuidad.

Sea $\beta \in OR$ y supongamos que

$$\forall \alpha \forall \gamma \neq 0(\alpha < \beta \to \gamma \cdot \alpha < \gamma \cdot \beta).$$

Sean $\gamma \neq 0$ y $\alpha < s(\beta)$, entonces $\alpha = \beta$ o $\alpha < \beta$.

Supongamos que $\alpha = \beta$, entonces

$$\gamma \cdot \alpha = \gamma \cdot \beta < \gamma \cdot \beta + \gamma = \gamma \cdot s(\beta),$$

pues $0 < \gamma$.

Si $\alpha < \beta$, entonces, por hipótesis de inducción $\gamma \cdot \alpha < \gamma \cdot \beta$. Por el caso anterior, sabemos que $y \cdot \beta < y \cdot s(\beta)$, por lo que $y \cdot \alpha < y \cdot s(\beta)$.

Sea β un ordinal límite, supongamos que si $\delta < \beta$, entonces

$$\forall \alpha \forall \gamma \neq 0(\alpha < \delta \to \gamma \cdot \alpha < \gamma \cdot \delta).$$

Sean $\gamma \neq 0$ y $\alpha < \beta$, entonces $s(\alpha) < \beta$. Y por el caso anterior,

$$\gamma \cdot \alpha < \gamma \cdot s(\alpha) \leq \bigcup_{\delta < \beta} (\gamma \cdot \delta) = \gamma \cdot \beta.$$

Por lo tanto, utilizando el Teorema de Inducción, para cualesquiera α, β y γ se tiene que

$$\alpha < \beta \to \gamma \cdot \alpha < \gamma \cdot \beta.$$

Sean α, β y γ ordinales. Supongamos que $\gamma \cdot \alpha < \gamma \cdot \beta$, dado que $\gamma \cdot$ es un funcional, $\alpha \neq \beta$ y por lo que acabamos de demostrar $\beta \not< \alpha$, entonces $\alpha < \beta$.

ii) Utilizando el inciso anterior tenemos que si α, β y γ son ordinales tales que $\gamma \cdot \alpha = \gamma \cdot \beta$, entonces $\alpha \not< \beta$ y $\beta \not< \alpha$, por lo que $\alpha = \beta$.

iii) Se puede demostrar por inducción sobre γ.

iv) Este hecho se prueba de manera similar a como se demostro el inciso *iii*) de la proposición 2.14.

v) Demostremos esta afirmación por inducción sobre γ. Sean α y β dos ordinales,

$$\alpha \cdot (\beta + 0) = \alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot 0.$$

Sea γ un ordinal y supongamos que $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$, tenemos que

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma + 1) = \alpha \cdot (\beta + \gamma) + \alpha = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma + \alpha = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot (\gamma + 1).$$

Sea γ un ordinal límite y supongamos que para cualquier $\delta < \gamma$,

$$\alpha \cdot (\beta + \delta) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \delta.$$

Dado que $\beta + \gamma = \bigcup_{\delta<\gamma}(\beta + \delta)$, por el inciso ii) de la proposición 2.14 y el inciso v) de la proposición 2.6, $\beta + \gamma$ es un ordinal límite, por lo que

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \bigcup_{\delta<\beta+\gamma} \alpha \cdot \delta.$$

Utilizando el inciso i) de la proposición 2.14,

$$\{\alpha \cdot (\beta + \delta) : \delta < \gamma\} \subseteq \{a \cdot \delta : \delta < \beta + \gamma\}$$

tenemos que

$$\bigcup \{\alpha \cdot (\beta + \delta) : \delta < \gamma\} \subseteq \bigcup \{\alpha \cdot \delta : \delta < \beta + \gamma\} = \alpha \cdot (\beta + \gamma).$$

También, usando los incisos iv) y i) de la proposición 2.14, para cualquier $\delta \in \beta+\gamma$ hay $\epsilon \in \gamma$ tal que $\delta < \beta + \epsilon$, por lo cual,

$$\bigcup \{\alpha \cdot \delta : \delta < \beta + \gamma\} \subseteq \bigcup \{\alpha \cdot (\beta + \delta) : \delta < \gamma\}.$$

Es decir, $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \bigcup \{\alpha \cdot (\beta + \delta) : \delta < \gamma\}$. Por otro lado, utilizando argumentos similares a los anteriores, se puede demostrar que

$$\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma = \alpha \cdot \beta + \bigcup_{\delta<\gamma} \alpha \cdot \delta = \bigcup_{\delta<\gamma} (\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \delta).$$

Ahora bien, utilizando la hipótesis de inducción,

$$\bigcup_{\delta<\gamma} \alpha \cdot (\beta + \delta) = \bigcup_{\delta<\gamma} (\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \delta).$$

Por lo tanto, $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$.

□

Definición 2.17. (Exponenciación Ordinal) Sean α y β ordinales.
Definimos la exponenciación ordinal α^β, por recursión de la siguiente manera:

1. $\alpha^0 = 1$,

2. $\forall\delta \in OR(\alpha^{s(\delta)} = \alpha^{\delta} \cdot \alpha)$,
3. $\alpha^{\gamma} = \bigcup_{\delta<\gamma} \alpha^{\delta}$, para cualquier ordinal límite γ.

Proposición 2.18. *Sean α, β y γ ordinales. Se cumplen las siguientes propiedades.*

i) Si $1 < \gamma$, entonces $\alpha < \beta$ si y sólo si $\gamma^{\alpha} < \gamma^{\beta}$.

ii) Si $1 < \gamma$, entonces $\alpha = \beta$ si y sólo si $\gamma^{\alpha} = \gamma^{\beta}$ (ley de la cancelación de la exponenciación).

iii) Si $1 < \alpha, \beta$, entonces $\alpha \leq \alpha^{\beta}$ y $\alpha \leq \beta^{\alpha}$.

Demostración. i) Este inciso se prueba de manera similar al incisos i) de las proposiciones 2.14 y 2.16.

ii) Un corolario del inciso anterior pues si α, β y γ son ordinales tales que $\gamma^{\alpha} = \gamma^{\beta}$, entonces $\alpha \not< \beta$ y $\beta \not< \alpha$, por lo que $\alpha = \beta$.

iii) La primera parte de este inciso se tiene gracias al inciso i), la segunda parte se hace por inducción de una manera similar a como se probó el inciso iv) de la proposición 2.14.

□

Sin embargo, es importante recalcar que las operaciones con ordinales no son conmutativas, por ejemplo, tenemos que:

- $\omega \leq 1 + \omega = \bigcup_{n\in\omega} 1 + n \leq \omega$, pero $\omega + 1 = s(\omega)$, por lo que $1 + \omega \neq \omega + 1$.
- $\omega \leq 2 \cdot \omega = \bigcup_{n\in\omega} 2 \cdot n \leq \omega$ y $\omega \in \omega + 1 \in \omega + \omega = (\omega \cdot 1) + \omega = \omega \cdot 2$.
- $1^2 = 1$ y $2^1 = 2$.

La siguiente proposición nos muestra la influencia que tienen los ordinales límite en las operaciones de ordinales.

Proposición 2.19. *Sean α y γ ordinales. Si γ es un ordinal límite, entonces*

$\cdot$) *$\alpha + \gamma$ es límite;*

$\cdot\cdot$) *$\alpha \cdot \gamma$ es límite;*

$\cdots$) *α^{γ} es límite.*

Demostración. Sean $\alpha \in OR$ y γ un ordinal límite. Demostremos $\cdot$). Por el inciso i) de la proposición 2.14 tenemos que el conjunto $\{\alpha + \epsilon : \epsilon \in \gamma\}$ no tiene máximo, por lo tanto, utilizando la proposición 2.6

$$\alpha + \gamma = \bigcup\{\alpha + \epsilon : \epsilon \in \gamma\}$$

es un ordinal límite.
Las demostraciones de $\cdot\cdot$) y $\cdots$) son análogas a la anterior usando el inciso i) de las proposiciones 2.16 y 2.18 correspondientemente. □

Teorema 2.20 (Algoritmo de la División para Ordinales)**.** *Sean α y β ordinales. Si $\alpha \neq 0$, entonces existen ordinales únicos γ y δ tales que:*

$$\beta = \alpha \cdot \gamma + \delta \text{ y } \delta < \alpha.$$

Demostración. Por los incisos i) y iv) de la proposición 2.16, $\beta \leq \alpha \cdot \beta < \alpha \cdot s(\beta)$. Por el principio del mínimo ordinal, sea γ' el mínimo ordinal que cumple que $\beta < \alpha \cdot \gamma'$. Si γ' fuera límite, como tenemos que

$$\beta < \alpha \cdot \gamma' = \bigcup_{\epsilon < \gamma'} (\alpha \cdot \epsilon),$$

entonces habría $\epsilon < \gamma'$ tal que $\beta \in \alpha \cdot \epsilon$. Es decir, $\beta < \alpha \cdot \epsilon$, pero esto contradice la minimalidad de γ'. Por lo tanto, γ' es un ordinal sucesor o $\gamma' = 0$. Como $\alpha \cdot 0 = 0$ y $\beta \in \alpha \cdot \gamma'$, tenemos que $\gamma' \neq 0$, lo que implica que γ' es un ordinal sucesor.

Sea $\gamma \in OR$ tal que $\gamma' = s(\gamma)$, tenemos que

$$\alpha \cdot \gamma \leq \beta < \alpha \cdot \gamma',$$

entonces, por el inciso iv) de la proposición 2.14, hay un unico ordinal δ tal que $(\alpha \cdot \gamma) + \delta = \beta$. Si $\alpha \leq \delta$ (utilizando de nuevo el inciso iv) de la proposición 2.14), hay $\delta' \in OR$ tal que $\delta = \alpha + \delta'$, entonces

$$\beta = (\alpha \cdot \gamma) + \delta = (\alpha \cdot \gamma) + \alpha + \delta' = [\alpha \cdot (\gamma + 1)] + \delta' \geq \alpha \cdot \gamma' > \beta.$$

Así, de suponer que $\alpha \leq \delta$, obtenemos una contradicción. Por lo tanto, $\delta < \alpha$.

Ahora pasemos a demostrar la unicidad de γ y de δ. Sean $\gamma_1, \delta_1 \in OR$ tales que $\beta = (\alpha \cdot \gamma_1) + \delta_1$ con $\delta_1 < \alpha$. Entonces

$$\beta = (\alpha \cdot \gamma_1) + \delta_1 < (\alpha \cdot \gamma_1) + \alpha = \alpha \cdot (\gamma_1 + 1)$$

y, por la minimalidad del ordinal γ' definido arriba, $\gamma' \leq \gamma_1 + 1$ con lo que $\gamma \leq \gamma_1$, pues $\gamma' = s(\gamma)$.

También ocurre que

$$\alpha \cdot \gamma_1 \leq (\alpha \cdot \gamma_1) + \delta_1 = \beta < \alpha \cdot \gamma',$$

lo cual implica que $\gamma_1 < \gamma' = s(\gamma)$, entonces $\gamma_1 \leq \gamma$. Por lo tanto, $\gamma = \gamma_1$.

Por lo anterior tenemos que $\alpha \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma_1$, de modo que

$$(\alpha \cdot \gamma) + \delta = \beta = (\alpha \cdot \gamma) + \delta_1.$$

Utilizando esto y el inciso ii) de la proposición 2.14 obtenemos que $\delta = \delta_1$. $\square$

Veamos que las operaciones con ordinales son compatibles con las definidas para los tipos de orden.

Lema 2.21. *Si α y β son ordinales, entonces*

$$\langle \alpha, \in \rangle + \langle \beta, \in \rangle \cong \langle \alpha + \beta, \in \rangle \text{ y } \langle \alpha, \in \rangle \cdot \langle \beta, \in \rangle \cong \langle \alpha \cdot \beta, \in \rangle.$$

Demostración. Sean α y β ordinales. Mostremos primero que

$$\langle \alpha + \beta, \in \rangle \cong \langle \alpha, \in \rangle + \langle \beta, \in \rangle.$$

Definimos $f : \alpha + \beta \to \alpha \times \{0\} \cup \beta \times \{1\}$ tal que

$$f(\delta) = \begin{cases} \langle \delta, 0 \rangle & \text{si } \delta < \alpha, \\ \langle \delta - \alpha, 1 \rangle & \text{si } \alpha \leq \delta. \end{cases}$$

Veamos que f es sobre. Sea $\langle x, y \rangle \in \alpha \times \{0\} \cup \beta \times \{1\}$. Si $y = 0$, entonces $x \in \alpha$, de manera que $f(x) = \langle x, 0 \rangle = \langle x, y \rangle$. Supongamos que $y = 1$, entonces $x \in \beta$, por lo que $\alpha \leq \alpha + x \in \alpha + \beta$. También $(\alpha + x) - \alpha = x$, por la unicidad mencionada en la proposición 2.14, y

$$f(\alpha + x) = \langle (\alpha + x) - \alpha, 1 \rangle = \langle x, 1 \rangle = \langle x, y \rangle.$$

Probaremos ahora que f es un morfismo. Sean $\delta, \gamma \in \alpha + \beta$ con $\delta < \gamma$. Si $\delta < \alpha$ y $\alpha \leq \gamma$, entonces $f(\delta) \in \alpha \times \{0\}$ y $f(\gamma) \in \beta \times \{1\}$ por lo que $f(\delta) <_+ f(\gamma)$. Supongamos que $\gamma < \alpha$, entonces $f(\delta) = \langle \delta, 0 \rangle$ y $f(\gamma) = \langle \gamma, 0 \rangle$ y como $\delta < \gamma$, $f(\delta) <_+ f(\gamma)$.

Supongamos ahora que $\alpha \leq \delta$. Tenemos que

$$\alpha + (\delta - \alpha) = \delta < \gamma = \alpha + (\gamma - \alpha)$$

y utilizando la cancelación de la suma ordinal $(\delta - \alpha) < (\gamma - \alpha)$. Pero también

$$\alpha + (\delta - \alpha) = \delta < \alpha + \beta,$$

y de nuevo por la cancelación de la suma ordinal $(\delta - \alpha) \in \beta$. El hecho $\gamma - \alpha \in \beta$ se demuestra de manera similar a lo anterior. Por lo tanto,

$$f(\delta) = \langle \delta - \alpha, 1 \rangle <_+ \langle \gamma - \alpha, 1 \rangle = f(\gamma).$$

Gracias a la proposición 1.6, hemos demostrado que f es un morfismo y que es una función inyectiva, y cómo anteriormente probamos que era un función suprayectiva, f es un isomorfismo.

Resta mostrar que

$$\langle \alpha \cdot \beta, \in \rangle \cong \langle \alpha \in \rangle \cdot \langle \beta, \in \rangle.$$

Definimos $f : \alpha \times \beta \to \alpha \cdot \beta$ tal que $f(\langle x, y \rangle) = \alpha \cdot y + x$. Verifiquemos primero que si $\langle x, y \rangle \in \alpha \times \beta$, entonces $\alpha \cdot y + x \in \alpha \cdot \beta$. Sabemos que $x \in \alpha$ y $y \in \beta$, de manera que $s(x) \leq \alpha$ y $s(y) \leq \beta$, por lo que

$$(\alpha \cdot y) + x < (\alpha \cdot y) + s(x) \leq (\alpha \cdot y) + \alpha = \alpha \cdot s(y) \leq \alpha \cdot \beta.$$

Sea $\epsilon < \alpha \cdot \beta$. Utilizando el teorema 2.20 hay ordinales únicos γ y δ tales que $\epsilon = \alpha \cdot \gamma + \delta$ y $\delta < \alpha$. Si $\beta \leq \gamma$, entonces

$$\alpha \cdot \beta \leq \alpha \cdot \gamma + \delta = \epsilon$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\gamma \in \beta$, entonces $\langle \delta, \gamma \rangle \in \alpha \times \beta$, además

$$f(\langle \delta, \gamma \rangle) = \alpha \cdot \gamma + \delta = \epsilon,$$

lo que demuestra que f es sobre.
Veamos que f es un morfismo. Sean $\langle \delta_0, \gamma_0 \rangle, \langle \delta_1, \gamma_1 \rangle \in \alpha \times \beta$ tales que $\langle \delta_0, \gamma_0 \rangle <. \langle \delta_1, \gamma_1 \rangle$. Si $\gamma_0 < \gamma_1$, entonces $s(\gamma_0) \leq \gamma_1$ de donde

$$f(\langle \delta_0, \gamma_0 \rangle) = \alpha \cdot \gamma_0 + \delta_0 < \alpha \cdot s(\gamma_0) \leq \alpha \cdot \gamma_1 \leq \alpha \cdot \gamma_1 + \delta_1 = f(\langle \delta_1, \gamma_1 \rangle).$$

Supongamos que $\gamma_0 = \gamma_1$ y que $\delta_0 < \delta_1$. Entonces

$$f(\langle \delta_0, \gamma_0 \rangle) = \alpha \cdot \gamma_0 + \delta_0 < \alpha \cdot \gamma_0 + \delta_1 = \alpha \cdot \gamma_1 + \delta_1 = f(\langle \delta_1, \gamma_1 \rangle).$$

Por lo anterior y la proposición 1.6, f es un morfismo y una función inyectiva.
Por lo tanto, f es un isomorfismo. □

Mencionaremos ahora algunas propiedades de los ordinales iniciales y de los cardinales. La construcción de los ordinales iniciales ω_α está motivada por el concepto de buen orden. En cambio la construcción de los cardinales $\aleph_\alpha$ está basada en encontrar la cardinalidad siguiente. En realidad ω_α resultará ser el mismo conjunto que $\aleph_\alpha$ y es en gran parte gracias a esto que los conceptos de ordinal inicial y cardinal coinciden. Sin embargo, como es usual, en esta tesis, usaremos a ω_α cuando el orden sea de interés y a $\aleph_\alpha$ cuando sólo importe el tamaño de los conjuntos.

Comencemos por los ordinales iniciales.

Definición 2.22. Si α es un ordinal, decimos que α es un *ordinal inicial* si y sólo si no es biyectable con ningún ordinal menor a él.

Equivalentemente, α es un ordinal inicial si y sólo si para todo ordinal $\beta \in \alpha$, $\beta \prec \alpha$.

Se puede demostrar que si α es un ordinal, la colección dada por $\{\beta : ord(\beta) \wedge \beta \preceq \alpha\}$ es un conjunto, pero incluso se puede demostrar que es un ordinal. Definiremos ahora los ω_α's por recursión, los cuales son ordinales iniciales infinitos, mas aún, resultan ser todos los ordinales iniciales infinitos.

Definición 2.23.

1. $\omega_0 = \omega$.
2. Si α es un ordinal, entonces $\omega_{s(\alpha)} = \{\beta : ord(\beta) \wedge \beta \preceq \omega_\alpha\}$.
3. Si α es un ordinal límite, $\omega_\alpha = \bigcup_{\beta \in \alpha} \omega_\beta$.

Como ya se dijo, cada ω_α es un ordinal inicial y si γ es un ordinal inicial, hay un ordinal β tal que $\gamma = \omega_\beta$. Pasemos ahora a los cardinales.

Definición 2.24. Un *cardinal* es un ordinal inicial, es decir, un ordinal no biyectable con ningún ordial menor.

Es entonces claro que los conceptos de ordinal inicial y de cardinal coinciden, pero dadas las múltiples propiedades que tienen, nos referimos a ellos como cardinales cuando nos estemos concentrando en su tamaño y como ordinales iniciales cuando queramos destacar su comportamiento como buenos órdenes.

Recordemos que si x y y son dos conjuntos x está dominado por y, lo cual se denota por $x \preceq y$, si y sólo si hay una función inyectiva cuyo dominio es x y su imagen está contenida en y.

Teorema 2.25 (Teorema de Hartog)**.** *Para todo conjunto A existe un mínimo cardinal κ no dominado por A y dominado por $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A \times A))$.*

Demostración. Ya hemos mencionado que cuando A es un ordinal, la colección $\{\alpha : ord(\alpha) \wedge \alpha \preceq A\}$ es un ordinal. Demostraremos esto ahora y también comprobaremos que tal colección está dominada por $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A \times A))$.

Sean A un conjunto y $\kappa = \{\alpha : ord(\alpha) \wedge \alpha \preceq A\}$. Supongamos que $A \neq \emptyset$. Demostraremos que κ es un conjunto más adelante. Suponiendo que sí lo es, basta demostrar que sea transitivo para que sea un ordinal. Sean $\alpha \in \beta \in \kappa$, entonces también ocurre que $\alpha \subseteq \beta \preceq A$, por lo que $\alpha \in \kappa$. Verifiquemos que κ es un ordinal inicial, sea $\gamma \in \kappa$, entonces $\gamma \preceq A$, si además $\gamma \sim \kappa$, ocurriría que $\kappa \sim \gamma \preceq A$, lo que significa que $\kappa \in \kappa$, esto contradice el que κ sea un ordinal. Por lo tanto, si κ es un conjunto, κ es un ordinal inicial, es decir, un cardinal. Para comprobar que en efecto es el mínimo, sea μ un ordinal no dominado por A; si $\mu \in \kappa$, $\mu \preceq A$, contradiciendo nuestra suposición, por lo cual $\kappa \subseteq \mu$. Aunque no se dijo κ no está dominado por A, pues observemos que, por ser κ un ordinal $\kappa \notin \kappa$, de donde $\kappa \not\preceq A$.

Para terminar esta parte de la prueba debemos ver que κ es un conjunto.

Definimos $f : \mathcal{P}(A \times A) \to OR$ usando el Teorema de Enumeración de manera que

$$f(r) = \begin{cases} \alpha & \text{si } \langle cam(r), r\rangle \cong \langle \alpha, \in\rangle; \\ 1 & \text{si } \langle cam(r), r\rangle \text{ no es un buen orden.} \end{cases}$$

Veamos que $f[\mathcal{P}(A \times A)] = \kappa$. Observemos primero que si $r \in \mathcal{P}(A \times A)$, $cam(r) \subseteq A$. Ahora bien, si $\langle cam(r), r\rangle \cong \langle \alpha, \in\rangle$, $f(r) = \alpha \sim cam(r) \subseteq A$, por lo que $f(r) = \alpha \in \kappa$. Si $\langle cam(r), r\rangle$ no es un buen orden, $f(r) = 1 \preceq A$, pues $A \neq \emptyset$.

Sea $\alpha \preceq A$, y $h : \alpha \to A$ una función inyectiva. Si r es el orden que resulta de copiar el orden $\in$ a $h[\alpha]$ a través de h, obtenemos que $h(r) = \alpha$ si y sólo si $r \neq \emptyset$ o $h[\alpha]$ no es un unitario[1], pues en tal caso, $\langle h[\alpha], r\rangle \cong \langle \alpha, \in\rangle$. Supongamos que r es vacía y que $h[\alpha]$ consta de un solo elemento, entonces $\alpha = 1$, como $A \neq \emptyset$, hay $a \in A$, además $f(\{\langle a, a\rangle\}) = 1$.

Resta probar que $\kappa \preceq \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \times A))$, definimos $g : \kappa \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \times A))$ tal que $g(\alpha) = f^{-1}[\alpha]$. Sean $\alpha, \beta \in \kappa$, tales que $g(\alpha) = g(\beta)$. Si $\alpha \neq 1$, y $r \in g(\alpha) = g(\beta)$,

[1]Es un hecho, que si $\langle L, <\rangle$ es un orden lineal, $L = cam(<)$ si y sólo si $<$ es no vacía o L consta de más de un elemento.

entonces por la definición de f, $\langle cam(r), r\rangle \cong \langle \alpha, \in\rangle$ y $\langle cam(r), r\rangle \cong \langle \beta, \in\rangle$, por lo cual $\langle \alpha, \in\rangle \cong \langle \beta, \in\rangle$, y por el Teorema de Enumeración $\alpha = \beta$. Si $\alpha = 1$, y $x \in A$, tenemos que $f(\{\langle x, x\rangle\}) = 1$, por lo cual $\{\langle x, x\rangle\} \in g(\alpha) = g(\beta)$ lo cual implica que $1 = f(\{\langle x, x\rangle\}) = \beta$. Por lo tanto, g es inyectiva y $\kappa \preceq \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \times A))$.

En el caso $A = \emptyset$, se puede ver que 1 es el cardinal deseado, pues $\emptyset$ no domina a 1 y $1 \preceq 2 \sim \mathcal{P}(1) \sim \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) \sim \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset \times \emptyset))$ y dado que 1 es el ordinal siguiente a $\emptyset$ no puede haber uno menor con tal propiedad. □

Definición 2.26 (Número de Hartog)**.** Dado un conjunto A, sea $H(A)$ el mínimo cardinal no dominado por A, llamado el *número de Hartog de A*. Al número de Hartog de un ordinal α lo denotamos por α^+.

Definición 2.27. El funcional $\aleph : OR \to OR$ se define mediante el Teorema de Recursión como sigue:

i) $\aleph_0 = \omega$.

ii) Si α es un ordinal, $\aleph_{\alpha+1} = \aleph_\alpha^+$.

iii) Si α es un ordinal límite, $\aleph_\alpha = \bigcup_{\beta\in\alpha} \aleph_\beta$.

A los ordinales $\aleph_\alpha$ con α un ordinal se les puede llamar los "alef's".

Proposición 2.28. *Los alef's son todos y los únicos cardinales infinitos, es decir, para cada ordinal α, $\aleph_\alpha$ es un cardinal infinito y si κ es un cardinal infinito, hay un ordinal α tal que $\kappa = \aleph_\alpha$.*

Demostración. Se puede demostrar por inducción que para todo ordinal α, $\aleph_\alpha$ es un cardinal infinito. La prueba de que cualquier cardinal infinito es un alef puede hacerse por contraddición, usando el principio del mínimo ordinal. □

Lema 2.29. *Para cada ordinal α, $\aleph_\alpha = \omega_\alpha$.*

Demostración. Observemos que para definir por recursión los $\aleph_\alpha$'s y los ω_α's, se usaron los mismos funcionales, además de que se usó el mismo elemento como base de la recursión. Formalmente, se necesitan dos funcionales para definir por recursión un funcional, como se hizo tanto en el caso del funcional $\omega_{(\cdot)}$ como en el del funcional $\aleph_{(\cdot)}$, además del conjunto que se usa como la base de la recursión.

Ahora bien, consideremos el conjunto ω y los funcionales $\bigcup$ (unión de un conjunto) y H (número de Hartog de un conjunto), una de las versiones del Teorema de Recursión nos asegura la existencia de un único funcional F, de manera que

i) $F(0) = \omega$;

ii) para cada ordinal α, $F(\alpha) = H(F(\alpha))$; y

iii) para cada ordinal límite γ, $F(\gamma) = \bigcup F[\gamma] = \bigcup\{F(\beta) : \beta \in \gamma\}$.

Con esto en mente, repasemos las definiciones de ω y $\aleph$,

1. $\aleph_0 = \omega$ y $\omega_0 = \omega$;
2. para cada ordinal α, $\aleph_{\alpha+1} = \aleph_\alpha^+ = H(\aleph_\alpha)$ y
$$\omega_{\alpha+1} = \{\beta : ord(\beta) \wedge \beta \preceq \omega_\alpha\} = H(\omega_\alpha)$$
3. para cada ordinal límite γ,
$$\aleph_\gamma = \bigcup_{\beta\in\gamma} \aleph_\beta = \bigcup\{\aleph_\beta : \beta \in \gamma\} \quad \text{y} \quad \omega_\gamma = \bigcup_{\beta\in\gamma} \omega_\beta = \bigcup\{\omega_\beta : \beta \in \gamma\}$$

De esta manera, podemos ver que los funcionales $\aleph_{(\cdot)}$ y $\omega_{(\cdot)}$ coinciden con el funcional F y, por lo tanto, coinciden entre ellos. □

2.4. Cofinalidad y Coinicialidad

Para finalizar el capítulo hablaremos un poco acerca de cofinalidad y coinicialidad, pues usaremos estos resultados en los capítulos posteriores.

Definición 2.30. Sean $\langle L, < \rangle$ un orden lineal, $X \subseteq L$, Y un conjunto y $f : Y \to L$

i) Decimos que X *es cofinal en* $\langle L, < \rangle$ (o simplemente *cofinal*) si y sólo si
$$\forall l \in L \exists x \in X[l \leq x].$$

ii) Decimos que X *es coinicial en* $\langle L, < \rangle$ (o simplemente *coinicial*) si y sólo si
$$\forall l \in L \exists x \in X[x \leq l].$$

iii) Decimos que f *es cofinal en* $\langle L, < \rangle$ (o simplemente *cofinal*) si y sólo si $f[Y]$ es cofinal es $\langle L, < \rangle$.

iv) Decimos que f *es coinicial en* $\langle L, < \rangle$ (o simplemente *coinicial*) si y sólo si $f[Y]$ es coinicial es $\langle L, < \rangle$.

Observemos que si $X \subseteq L$ no está acotado superiormente, es cofinal en $\langle L, < \rangle$. De igual manera, si X no está acotado inferiormente, es coinicial en $\langle L, < \rangle$. También sucede que X es cofinal en $\langle L, < \rangle$ si y sólo si X es coinicial en $\langle L, < \rangle^*$ y esto implica que $f : Y \to L$ es cofinal en $\langle L, < \rangle$ si y sólo si f es coinicial en $\langle L, < \rangle^*$. Pero no es cierto que los conjuntos cofinales son aquellos que no están acotados superiormente, de la misma manera que los coiniciales no son los que no están acotados inferiormente, el siguiente ejemplo muestra estos hechos. Consideremos al número natural 3, el conjunto $\{2\}$ es cofinal en 3, pero está acotado superiormente y el conjunto $\{0\}$ es coinicial en 3 y está acotado inferiormente.

En este trabajo, consideramos las enumeraciones como la imagen de una función biyectiva entre la cardinalidad del conjunto y el conjunto mismo. Es decir, en las enumeraciones no hay repetición de elementos.

Teorema 2.31. *Si $\langle L, <\rangle$ es un orden lineal, entonces hay un ordinal α y un morfismo $f : \langle \alpha, \in\rangle \to \langle L, <\rangle$ tal que f es cofinal en $\langle L, <\rangle$.*

Demostración. Si $L = \emptyset$, o si por otro lado $\langle L, <\rangle$ está acotado superiormente (es decir, tiene máximo), el ordinal que podemos utilizar para la función es 0 o 1 respectivamente. Supongamos que $\langle L, <\rangle$ no está acotado superiormente. Sea $\{l_\delta\}_{\delta\in\kappa}$ una enumeración de L, donde $|L| = \kappa$.

Definiremos una sucesión $\{x_\beta\}_{\beta\in OR}$ contenida en L por recursión.
$x_0 = l_0$;
si $\alpha \in OR$, entonces

$$x_{\alpha+1} = \begin{cases} l_0 & \text{si } x_\alpha = l_0 \text{ y } \alpha \neq 0, \\ l_{\delta'} & \text{si } x_\alpha \neq l_0 \text{ o } \alpha = 0, \\ & \text{donde } \delta' \text{ es el mínimo ordinal} \\ & \text{tal que } x_\alpha < l_{\delta'} \text{ y } l_{\alpha+1} < l_{\delta'} \end{cases}$$

y si $\alpha \in OR$ es límite, entonces

$$x_\alpha = \begin{cases} l_0 & \text{si el conjunto } \{x_\beta : \beta \in \alpha\} \text{ no está acotado superiormente,} \\ l_{\delta'} & \text{si el conjunto } \{x_\beta : \beta \in \alpha\} \text{ está acotado superiormente,} \\ & \text{donde } \delta' \text{ es el mínimo ordinal tal que } l_{\delta'} \\ & \text{es cota superior de } \{x_\beta : \beta \in \alpha\} \cup \{l_\alpha\}. \end{cases}$$

Como $\{x_\beta : \beta \in OR\} \subseteq L$, la sucesión no puede ser inyectiva y, por cómo fue construida, hay $\gamma \in OR$ distinto de cero, tal que $x_\gamma = l_0$. Sea α el mínimo de estos ordinales (no cero), entonces α es límite, pues si $x_{\beta+1} = l_0$, $x_\beta = l_0$ también.

Demostraremos ahora que $\forall\gamma \in OR$, $x_{\alpha+\gamma} = l_0$.

El caso $\gamma = 0$, es inmediato.

Sea $\gamma \in OR$ y supongamos que $x_{\alpha+\gamma} = l_0$. Como $0 \neq \alpha$, tenemos que $0 \neq \alpha + \gamma < \alpha + \gamma + 1$ y, por la definición de la sucesión $x_{\alpha+\gamma+1} = l_0$.

Sea γ un ordinal límite tal que $\forall\beta \in \gamma$, $x_{\alpha+\beta} = l_0$. Como $x_\alpha = l_0$ y α es límite, tenemos que $\{x_\beta : \beta \in \alpha\}$ no está acotado, por lo que $\{x_\beta : \beta \in (\alpha+\gamma)\}$ no está acotado, así $x_{\alpha+\gamma} = l_0$. Entonces si $\alpha \leq \delta$, $x_\delta = l_0$.

Por cómo se construyó la sucesión $\{x_\beta\}_{\beta\in OR}$, $\{x_\beta\}_{\beta\in\alpha}$ es creciente, mostremos que además es no acotada en $\langle L, <\rangle$, es decir, que $\forall l \in L \exists\gamma \in \alpha(l \leq x_\gamma)$, esto probará que es cofinal en $\langle L, <\rangle$.

Sea $l \in L$, si $l \leq l_0$, es claro, pues $x_0 = l_0$.

Supongamos que $l_0 < l$, entonces hay $\delta \in \kappa$ tal que $l = l_\delta$ y $\delta \neq 0$. Por cómo construimos la sucesión, se tiene que $l_\delta \leq x_\delta$.

Definiendo $f : \alpha \to L$ como $f(\beta) = x_\beta$ obtenemos una función creciente. Así, utilizando la proposición 1.6, f es un morfismo y además es cofinal en $\langle L, <\rangle$, pues su imagen $\{x_\beta\}_{\beta\in\alpha}$ es cofinal en $\langle L, <\rangle$. □

Corolario 2.32. *Si $\langle L, <\rangle$ es un orden lineal, entonces hay un ordinal α y una morfismo $f : \langle \alpha, \in\rangle^* \to \langle L, <\rangle$ tal que f es coinicial en $\langle L, <\rangle$.*

Demostración. Por el teorema anterior, sabemos que hay un ordinal α y una función $f : \langle \alpha, \in \rangle \to \langle L, < \rangle^*$ cofinal, pues $\langle L, < \rangle^*$ es un orden lineal. Entonces la función $f : \alpha \to L$ es un morfismo de $\langle \alpha, \in \rangle^*$ en $\langle L, < \rangle$ y además es coinicial en $\langle L, < \rangle$. $\square$

Definición 2.33. Sea $\langle L, < \rangle$ un orden lineal.
Definimos la *cofinalidad* de $\langle L, < \rangle$ denotada por $cof(\langle L, < \rangle)$ (o simplemente $cof(L)$) como el mínimo ordinal α tal que hay $f : \alpha \to L$ cofinal.
Definimos la *coinicilidad* de $\langle L, < \rangle$ denotada por $coin(\langle L, < \rangle)$ (o simplemente $coin(L)$) como α^*, donde α es el mínimo ordinal tal que hay $f : \alpha \to L$ coinicial.

Definimos así la cofinalidad y la coinicialidad para que éstas representen la forma en que "terminan" o "inician" los órdenes lineales. Aunque no pedimos que las funciones sean morfismos, puede demostrarse que si $cof(L) = \alpha$, entonces existe un morfismo[1] cofinal $g : \alpha \to L$, usando la misma técnica que en el teorema 2.31. Lo análogo se puede afirmar para el caso de la coinicialidad.

Una forma de interpretar la cofinalidad es como "la mínima cantidad de pasos necesarios para llegar hasta el final de $\langle L, < \rangle$, sin importar en qué elemento de L empecemos a contar o el tamaño de los pasos"; con la coinicialidad pasa lo dual, la coinicialidad es "la menor cantidad de pasos que tenemos que retroceder para llegar hasta el inicio de $\langle L, < \rangle$, y no importa en qué elemento empecemos a contar, ni el tamaño de los pasos"(véase la figura 2.1).

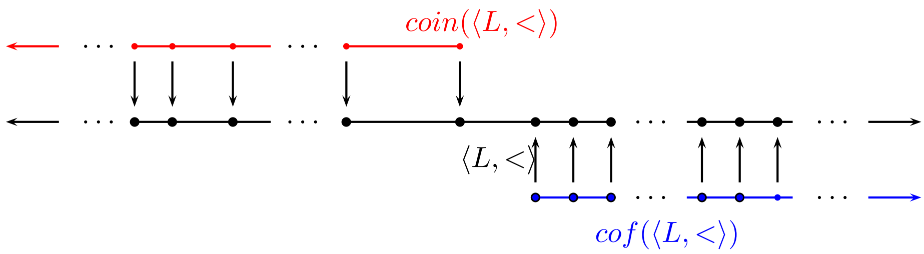

Figura 2.1: Cofinalidad y Coinicialidad

Proposición 2.34. *Si $\langle L, < \rangle$ es un orden lineal, entonces*

$$cof(\langle L, < \rangle) = coin(\langle L, < \rangle^*).$$

Demostración. Recordemos que $f : Y \to L$ es cofinal en $\langle L, < \rangle$ si y sólo si es coinicial en $\langle L, < \rangle^*$.

Si $g : cof(\langle L, < \rangle) \to L$ es cofinal en $\langle L, < \rangle$, g es coinicial en $\langle L, < \rangle^*$, por lo que $coin(\langle L, < \rangle^*) \subseteq cof(\langle L, < \rangle)$.

Si $h : coin(\langle L, < \rangle^*) \to L$ es coinicial en $\langle L, < \rangle$, h es cofinal en $\langle L, < \rangle$, entonces $cof(\langle L, < \rangle) \subseteq coin(\langle L, < \rangle^*)$. $\square$

[1] En libros de teoría de conjuntos se demuestra que siempre existe una función cofinal y creciente de la cofinalidad de un ordinal en un ordinal. En este caso, ser creciente es quivalente a ser morfismo.

Por último es importante señalar un hecho que ocurre con cualquier orden lineal $\langle L, <\rangle$,

$$cf(cof(\langle L, <\rangle)) = cof(\langle L, <\rangle) \quad \text{y} \quad cf(coin(\langle L, <\rangle)^*) = coin(\langle L, <\rangle)^*,$$

es decir, tanto $cof(\langle L, <\rangle)$ como $coin(\langle L, <\rangle)^*$ son ordinales regulares.

Capítulo 3

Órdenes discretos y densos

Estudiaremos primero algunas propiedades acerca de los órdenes discretos empezando por los órdenes $\mathbb{Z}^\alpha$ y después viendo algunas propiedades más generales acerca de ellos. Seguiremos con los órdenes densos, los cuales estudiaremos a través de los η_α's.

En los dos capítulos siguientes, para hablar de un orden lineal en general usaremos la notación $\langle L, < \rangle$, lo cual implica que el orden para los elementos del conjunto L es $<$, el mismo símbolo que en el capítulo anterior se usó para el orden entre ordinales, para evitar confusiones y abusos de notación, cuando hablemos de ordinales y relaciones de orden entre ellos usaremos los símbolos $\in$ y $\subseteq$.

3.1. Los órdenes $\mathbb{Z}^\alpha$

Como su nombre lo indica los órdenes $\mathbb{Z}^\alpha$ son una generalización de la exponenciación de $\mathbb{Z}$ para cualquier ordinal α, pues hasta ahora sólo tenemos una definición para $\mathbb{Z}^n$ cuando n es un número natural, gracias a la multiplicación de órdenes, haciendo su definición por recursión. Es gracias a los órdenes $\mathbb{Z}^\alpha$ junto con la herramienta de las condensaciones iteradas que obtendremos una caracterización de los órdenes discretos.

Definición 3.1. Sea α un ordinal.

1. Definimos el conjunto $\mathbb{Z}^\alpha$ como[1]

$$\mathbb{Z}^\alpha = \{x \in {}^{\alpha}\mathbb{Z} : |\{\beta \in \alpha : x(\beta) \neq 0\}| \in \aleph_0\}.$$

2. Definimos $<^\alpha \subseteq \mathbb{Z}^\alpha \times \mathbb{Z}^\alpha$ por recursión de manera que:

   i) $<^0 := \emptyset$;

   ii) si $<^\alpha$ está definida, entonces $x <^{\alpha+1} y$ si y sólo si

$$x(\alpha) <_{\mathbb{Z}} y(\alpha), \quad \text{o} \quad x(\alpha) = y(\alpha) \quad \text{y} \quad x{\restriction_\alpha} <^\alpha y{\restriction_\alpha};$$

[1] Como es costumbre, denotamos por ${}^{X}Y$ al conjunto de las funciones cuyo dominio es X y codominio es Y.

iii) si α es un ordinal límite y se tiene definido $<^\delta$ para cada $\delta \in \alpha$, entonces $x <^\alpha y$ si y sólo si hay $\beta \in \alpha$ tal que $x\restriction_\beta <^\beta y\restriction_\beta$ y para cualquier ordinal $\delta \in \alpha$, si $\beta \subseteq \delta$, $x(\delta) = 0 = y(\delta)$.

Por la definición anterior, para cada ordinal α, $\mathbb{Z}^\alpha$ es el conjunto de las sucesiones de longitud α con un número finito de entradas no cero.

Proposición 3.2. *Las siguientes afirmaciones son válidas.*

i) Si $\alpha \in \gamma$ y $x, y \in \mathbb{Z}^\gamma$ son tales que $x(\delta) = 0 = y(\delta)$ para cualquier δ con $\alpha \in \delta \subseteq \gamma$ y $x\restriction_\alpha <^\alpha y\restriction_\alpha$, entonces $x <^\gamma y$.

ii) $\langle \mathbb{Z}^\alpha, <^\alpha \rangle$ es un orden lineal para cada ordinal α.

iii) Si $\alpha \in \gamma$ y $x, y \in \mathbb{Z}^\gamma$ con $x <^\gamma y$ y siempre que $\alpha \subseteq \delta$, se tiene que $x(\delta) = 0 = y(\delta)$, entonces $x\restriction_\alpha <^\alpha y\restriction_\alpha$.

Demostración. i) Haremos la prueba por inducción. El caso $\gamma = 0$ se tiene por vacuidad. Sea γ un ordinal, supongamos que el hecho se tiene para γ, que hay $\alpha \in \gamma + 1$ tal que $x\restriction_\alpha <^\alpha y\restriction_\alpha$ y que

$$\forall \beta \subseteq \gamma + 1\Big(\alpha \in \beta \to \big(x(\beta) = 0 = y(\beta)\big)\Big).$$

Si $\gamma = \alpha$, entonces $x(\gamma + 1) = 0 = y(\gamma + 1)$, por lo que de la definición de $<^{\gamma+1}$, $x <^{\gamma+1} y$.

Supongamos que $\alpha \in \gamma$, entonces, por la hipótesis de inducción, $x\restriction_\gamma <^\gamma y\restriction_\gamma$ además de que $x(\gamma + 1) = 0 = y(\gamma + 1)$, y de la definición de $<^{\gamma+1}$ obtenemos que $x <^{\gamma+1} y$.

El caso en que γ es límite se tiene por la definición de $<^\gamma$.

ii) Al igual que en la prueba anterior, demostraremos esto por inducción.

Tenemos que $\langle \mathbb{Z}^0, <^0 \rangle = \langle \{\emptyset\}, \emptyset \rangle$, es claro entonces que $\langle \mathbb{Z}^0, <^0 \rangle$ es un orden lineal.

Sea α un ordinal. Supongamos que $\langle \mathbb{Z}^\alpha, <^\alpha \rangle$ es un orden lineal. Sea $x \in \mathbb{Z}^{\alpha+1}$, si $x <^{\alpha+1} x$, entonces $x(\alpha) <_{\mathbb{Z}} x(\alpha)$, o $x(\alpha) = x(\alpha)$ y $x\restriction_\alpha <^\alpha x\restriction_\alpha$, en el primer caso esto contradice la definición del orden $<_{\mathbb{Z}}$, el segundo caso contradice la hipótesis de inducción.

Sean $x, y, z \in \mathbb{Z}^{\alpha+1}$, tales que $x <^{\alpha+1} y$ y $y <^{\alpha+1} z$. Por definición de $<^{\alpha+1}$, obtenemos que:

$$x(\alpha) <_{\mathbb{Z}} y(\alpha), \quad \text{o} \quad x(\alpha) = y(\alpha) \quad \text{y} \quad x\restriction_\alpha <^\alpha y\restriction_\alpha \quad \text{y}$$

$$y(\alpha) <_{\mathbb{Z}} z(\alpha), \quad \text{o} \quad y(\alpha) = z(\alpha) \quad \text{y} \quad y\restriction_\alpha <^\alpha z\restriction_\alpha .$$

Si

i) $x(\alpha) <_{\mathbb{Z}} y(\alpha)$ y $y(\alpha) <_{\mathbb{Z}} z(\alpha)$;
ii) $x(\alpha) <_{\mathbb{Z}} y(\alpha)$, y $y(\alpha) = z(\alpha)$ y $y{\restriction_\alpha} <^\alpha z{\restriction_\alpha}$ o
iii) $x(\alpha) = y(\alpha)$ y $x{\restriction_\alpha} <^\alpha y{\restriction_\alpha}$, y $y(\alpha) <_{\mathbb{Z}} z(\alpha)$,

entonces $x(\alpha) <_{\mathbb{Z}} z(\alpha)$, con lo cual $x <^{\alpha+1} z$.

Supongamos ahora el último caso: $x(\alpha) = y(\alpha)$ y $x{\restriction_\alpha} <^\alpha y{\restriction_\alpha}$ y $y(\alpha) = z(\alpha)$ y $y{\restriction_\alpha} <^\alpha z{\restriction_\alpha}$. Como por hipótesis de inducción, $<^\alpha$ es un orden lineal, $x{\restriction_\alpha} <^\alpha z{\restriction_\alpha}$. Además, por nuestra suposición $x(\alpha) = z(\alpha)$, por lo que $x <^{\alpha+1} z$. Por lo tanto, $\langle \mathbb{Z}^{\alpha+1}, <^{\alpha+1}\rangle$ es un orden parcial.

Para ver que $<^{\alpha+1}$ es tricotómica, sean $x, y \in \mathbb{Z}^{\alpha+1}$, con $x \neq y$ y $x \not<^{\alpha+1} y$. Por la definición de $<^{\alpha+1}$, tenemos que $x(\alpha) \not<_{\mathbb{Z}} y(\alpha)$, de donde $y(\alpha) \leq_{\mathbb{Z}} x(\alpha)$. Si $y(\alpha) <_{\mathbb{Z}} x(\alpha)$, entonces $y <^{\alpha+1} x$. Supongamos que $x(\alpha) = y(\alpha)$, de esto como $x \not<^{\alpha+1} y$, tenemos que $x{\restriction_\alpha} \not<^\alpha y{\restriction_\alpha}$ y, por la hipótesis de inducción, obtenemos que $y{\restriction_\alpha} \leq^\alpha x{\restriction_\alpha}$. Pero $x \neq y$ y $x(\alpha) = y(\alpha)$, entonces $x{\restriction_\alpha} \neq y{\restriction_\alpha}$, con lo que $y{\restriction_\alpha} <^\alpha x{\restriction_\alpha}$. Por lo tanto, $y <^{\alpha+1} x$.

Supongamos que α es límite y para todo $\beta \in \alpha$, $\langle \mathbb{Z}^\beta, <^\beta\rangle$ es un orden lineal.

Sea $x \in \mathbb{Z}^\alpha$, como para todo $\beta \in \alpha$, $x \not<^\beta x$, por la contrapositiva de la definición de $<^\alpha$, $x \not<^\alpha x$.

Sean $x, y, z \in \mathbb{Z}^\alpha$, tales que $x <^\alpha y$ y $y <^\alpha z$. De la definición de $<^\alpha$ hay ordinales β y γ tales que $x{\restriction_\beta} <^\beta y{\restriction_\beta}$, $y{\restriction_\gamma} <^\gamma z{\restriction_\gamma}$,

$$\forall \delta \in \alpha\Big(\beta \subseteq \delta \to \big(x(\delta) = 0 = y(\delta)\big)\Big) \quad \text{y}$$

$$\forall \delta \in \alpha\Big(\gamma \subseteq \delta \to \big(z(\delta) = 0 = y(\delta)\big)\Big).$$

Si $\beta \subseteq \gamma$, por el inciso anterior de esta proposición, se tiene que $x{\restriction_\gamma} <^\gamma y{\restriction_\gamma}$ y también que

$$\forall \delta \in \alpha\Big(\gamma \subseteq \delta \to \big(x(\delta) = 0 = y(\delta)\big)\Big).$$

De lo anterior y de que por la hipótesis de inducción $<^\gamma$ es un orden lineal, se desprende que $x{\restriction_\gamma} <^\gamma z{\restriction_\gamma}$, además como también

$$\forall \delta \in \alpha\Big(\gamma \subseteq \delta \to \big(x(\delta) = 0 = z(\delta)\big)\Big),$$

se tiene, por la definición de $<^\alpha$, que $x <^\alpha z$. El caso $\gamma \subseteq \beta$ es similar al anterior. Por lo tanto, $\langle \mathbb{Z}^\alpha, <^\alpha\rangle$ es un orden parcial.

Para demostrar la tricotomía, sean $x, y \in \mathbb{Z}^\alpha$, tales que $x \neq y$ y $x \not<^\alpha y$. Como x y y son sucesiones con un número finito de entradas no-cero, hay un ordinal $\gamma \in \alpha$ tal que

$$\forall \beta \in \alpha\Big(\gamma \subseteq \beta \to \big(x(\beta) = 0 = y(\beta)\big)\Big),$$

de forma que $x{\restriction_\gamma}, y{\restriction_\gamma} \in \mathbb{Z}^\gamma$ y $x{\restriction_\gamma} \neq y{\restriction_\gamma}$, pues $x \neq y$, pero $x \not<^\alpha y$, por lo que $x{\restriction_\gamma} \not<^\gamma y{\restriction_\gamma}$. De lo anterior y de la hipótesis de inducción, obtenemos que $y{\restriction_\gamma} <^\gamma x{\restriction_\gamma}$. Por lo tanto, $y <^\alpha x$.

iii) Haremos la prueba por inducción. El caso $\gamma = 0$ se tiene por vacuidad. Sea γ un ordinal, supongamos que el hecho se tiene para γ, que $x <^{\gamma+1} y$ y $\alpha \in \gamma + 1$ es tal que

$$\forall \beta \in \gamma + 1 \Big(\alpha \subseteq \beta \to \big(x(\beta) = 0 = y(\beta) \big) \Big).$$

Si $\gamma = \alpha$, entonces $x(\alpha + 1) = 0 = y(\alpha + 1)$, por lo que de la definición de $<^{\alpha+1}$, $x\restriction_\alpha <^\alpha y\restriction_\alpha$.

Supongamos que $\alpha \in \gamma$, entonces, por la definición de $<^{\gamma+1}$ y dado que $x(\gamma) = 0 = y(\gamma)$, $x\restriction_\gamma <^\gamma y\restriction_\gamma$, y de la hipótesis de inducción, se desprende $x\restriction_\alpha <^\alpha y\restriction_\alpha$.

Supongamos ahora que γ es un ordinal límite, que el hecho se tiene para todo $\beta \in \gamma$, que $x <^\gamma y$, que $\alpha \in \gamma$, que

$$\forall \beta \in \gamma \Big(\alpha \subseteq \beta \to \big(x(\beta) = 0 = y(\beta) \big) \Big),$$

y también que $x\restriction_\alpha \not<^\alpha y\restriction_\alpha$. Dado que por el inciso anterior de esta misma proposición $\langle \mathbb{Z}^\alpha, <^\alpha \rangle$ es un orden lineal, entonces $y\restriction_\alpha \leq^\alpha x\restriction_\alpha$ y por la definición de $<^\gamma$, $y \leq^\gamma x$, lo cual contradice el que $\langle \mathbb{Z}^\gamma, <^\gamma \rangle$ sea un orden lineal. Por lo tanto, $x\restriction_\alpha <^\alpha y\restriction_\alpha$.

□

Cada $\mathbb{Z}^\alpha$ se puede pensar como un subconjunto de un producto cartesiano y sus elementos como α-adas ordenadas las cuales están ordenadas de manera antilexicográfica, hacemos esto así, ya que no podemos iterar el producto cartesiano de conjuntos una cantidad infinita de veces por lo que, en principio, tampoco la multiplicación de órdenes lineales.

Definición 3.3. Sean α y β ordinales, $\beta \subseteq \alpha$.

I) Definimos $\zeta^\alpha = \tau(\langle \mathbb{Z}^\alpha, <^\alpha \rangle)$, es decir, ζ^α es el tipo de orden de $\langle \mathbb{Z}^\alpha, <^\alpha \rangle$.

II) Definimos la *inclusión canónica* $i_{\alpha,\beta}$ de $\mathbb{Z}^\beta$ en $\mathbb{Z}^\alpha$ como $i_{\alpha,\beta} : \mathbb{Z}^\beta \to \mathbb{Z}^\alpha$ tal que para $x \in {}^\beta\mathbb{Z}$, $i_{\alpha,\beta}(x) : \alpha \to \mathbb{Z}$ y

$$i_{\alpha,\beta}(x)(\gamma) = \begin{cases} x(\gamma) & \text{si } \gamma \in \beta, \\ 0 & \text{si } \beta \subseteq \gamma. \end{cases}$$

En las siguiente dos proposiciones, mostramos que nuestra construcción de los órdenes $\mathbb{Z}^\alpha$ es "apropiada", es decir, generaliza la multiplicación de las potencias finitas del orden lineal $\mathbb{Z}$ para poder iterarla una cantidad infinita de veces, además, de que nos muestra cómo "lucen" estos órdenes.

Proposición 3.4. *Las siguientes afirmaciones son válidas.*

1. $\zeta^1 = \zeta$.

2. *Si α es un ordinal, entonces $\zeta^{\alpha+1} = \zeta^\alpha \cdot \zeta$.*

3. *Para cualesquiera ordinales α y β con $\alpha \subseteq \beta$ y $x \in \mathbb{Z}^\alpha$, $i_{\beta,\alpha}(x)\restriction_\alpha = x$.*

4. *Para cada ordinal α, $i_{\alpha,\alpha} = id_{\mathbb{Z}^\alpha}$.*

5. *Para cada cualesquiera ordinales α, β y γ, si $\alpha \subseteq \beta \subseteq \gamma$, entonces $i_{\gamma,\beta} \circ i_{\beta,\alpha} = i_{\gamma,\alpha}$.*

Demostración. 1. Dada la definición, $\mathbb{Z}^1 = {}^1\mathbb{Z}$, la función $f : \mathbb{Z}^1 \to \mathbb{Z}$ tal que $f(x) = x(0)$ es un isomorfismo, véase figura 3.1.

2. Sea α un ordinal, para ver que $\zeta^{\alpha+1} = \zeta^\alpha \cdot \zeta$, demostraremos que

$$\langle \mathbb{Z}^{\alpha+1}, <^{\alpha+1} \rangle \cong \langle \mathbb{Z}^\alpha, <^\alpha \rangle \cdot \langle \mathbb{Z}, <_\mathbb{Z} \rangle.$$

Definimos $f : \mathbb{Z}^{\alpha+1} \to \mathbb{Z}^\alpha \times \mathbb{Z}$ como $f(x) = \langle x \restriction_\alpha, x(\alpha) \rangle$. Veamos que es un isomorfismo.

Sean $x, y \in \mathbb{Z}^{\alpha+1}$, tales que $x <^{\alpha+1} y$. Si $x(\alpha) <_\mathbb{Z} y(\alpha)$, por definición de $<.$, tenemos que

$$f(x) = \langle x\restriction_\alpha, x(\alpha) \rangle <. \langle y\restriction_\alpha, y(\alpha) \rangle = f(y).$$

Si $x(\alpha) = y(\alpha)$ y $x\restriction_\alpha <^\alpha y\restriction_\alpha$, la definición de $<.$ indica que

$$f(x) = \langle x\restriction_\alpha, x(\alpha) \rangle <. \langle y\restriction_\alpha, y(\alpha) \rangle = f(y).$$

Por lo tanto, f es un morfismo de órdenes y una función inyectiva, resta probar que es sobre.

Sea $\langle x, y \rangle \in \mathbb{Z}^\alpha \times \mathbb{Z}$, entonces $y \in \mathbb{Z}$ y $x \in \mathbb{Z}^\alpha$, con lo que $x : \alpha \to \mathbb{Z}$.

Definimos $z : s(\alpha) \to \mathbb{Z}$, tal que

i) $z(\beta) = x(\beta)$ si $\beta \in \alpha$ y

ii) $z(\alpha) = y$

Por cómo fue construido z, tenemos que $z \restriction_\alpha = x$ y $z(\alpha) = y$. Por lo tanto, $z \in \mathbb{Z}^{\alpha+1}$, pues x tiene sólo un número finito de entradas no-cero y

$$f(z) = \langle z\restriction_\alpha, z(\alpha) \rangle = \langle x, y \rangle.$$

3. y 4. Estas afirmaciones son claras, pues $i_{\beta,\alpha}(x)$ es una sucesión cuyas primeras α entradas son las de x.

5. Como acabamos de mencionar, $i_{\gamma,\alpha}(x)$ es una sucesión cuyas primeras α entradas son las de x y las restantes son cero, por otro lado $i_{\gamma,\beta} \circ i_{\beta,\alpha}(x)$ es una sucesión cuyas entradas son cero, salvo por las primeras β entradas que son las de $i_{\beta,\alpha}(x)$, pero las primeras α entradas de $i_{\beta,\alpha}(x)$ son las de x, y las demás son cero, es por esto que $i_{\gamma,\beta} \circ i_{\beta,\alpha} = i_{\gamma,\alpha}$.

□

Proposición 3.5. *Las siguientes afirmaciones son válidas.*

1. *Si* γ *es un ordinal límite, entonces* $\mathbb{Z}^\gamma = \bigcup_{\beta<\gamma} i_{\gamma,\beta}[\mathbb{Z}^\beta]$.

2. *Si* γ *es un ordinal límite, entonces*

$$\mathbb{Z}^\gamma \cong \Big[\sum_{\alpha\in\gamma^*} \mathbb{Z}^\alpha \cdot \omega^*\Big] + \Big[\sum_{\alpha\in\gamma} \mathbb{Z}^\alpha \cdot \omega\Big].$$

Demostración. 1. Sea γ un ordinal límite, la contención de derecha a izquierda es por la definición, veamos la otra. Sea $x \in \mathbb{Z}^\gamma$, como x es una sucesión de longitud γ con un número finito de entradas no-cero, hay un ordinal $\beta \in \gamma$ (pues γ es límite) tal que para cualquier ordinal α mayor o igual que β y menor que γ, $x(\alpha) = 0$, de modo que $i_{\gamma,\beta}(x\restriction_\beta) = x$, y $x\restriction_\beta \in \mathbb{Z}^\beta$.

2. Los órdenes que describiremos a continuación son el resultado de "copiar" el orden de $\sum_{\alpha\in\gamma}(\mathbb{Z}^\alpha\cdot\omega)$ y $\sum_{\alpha\in\gamma^*}(\mathbb{Z}^\alpha\cdot\omega^*)$ a los conjuntos $\bigcup_{\alpha\in\gamma}(\mathbb{Z}^\alpha\times\mathbb{Z}^+)$ y $\bigcup_{\alpha\in\gamma}(\mathbb{Z}^\alpha\times\mathbb{Z}^-)$ respectivamente[1].

   a) Se tiene que
   $$\sum_{\alpha\in\gamma^*}(\mathbb{Z}^\alpha\cdot\omega^*) \cong \langle \bigcup_{\alpha\in\gamma}(\mathbb{Z}^\alpha\times\mathbb{Z}^-), <_-\rangle,$$
   donde $\langle x, n\rangle <_- \langle y, m\rangle$ si y sólo si

   i) la *longitud* de x es mayor que la de y, esto es, $x \in \mathbb{Z}^\alpha$, $y \in \mathbb{Z}^\beta$ y $\beta \in \alpha$,

   ii) las longitudes de x y y son las mismas y $n < m$, o

   iii) las longitudes de x y y son las mismas, $n = m$ y $x <^\alpha y$, donde $x, y \in \mathbb{Z}^\alpha$.

   b) También
   $$\sum_{\alpha\in\gamma}(\mathbb{Z}^\alpha\cdot\omega) \cong \langle \bigcup_{\alpha\in\gamma}(\mathbb{Z}^\alpha\times\mathbb{Z}^+), <_+\rangle,$$
   donde $\langle x, n\rangle <_+ \langle y, m\rangle$ si y sólo si

   i) la longitud de x es menor que la de y, es decir, $x \in \mathbb{Z}^\alpha$, $y \in \mathbb{Z}^\beta$ y $\alpha \in \beta$,

   ii) las longitudes de x y y son las mismas y $n < m$, o

   iii) las longitudes de x y y son las mismas, $n = m$ y $x <^\alpha y$, donde $x, y \in \mathbb{Z}^\alpha$.

   c) Además, $1 = \langle\{\emptyset\}, \in\rangle$.

[1] Recordemos que $\mathbb{Z}^+ = \{z \in \mathbb{Z} : 0 <_\mathbb{Z} z\}$ y que $\mathbb{Z}^- = \{z \in \mathbb{Z} : z <_\mathbb{Z} 0\}$

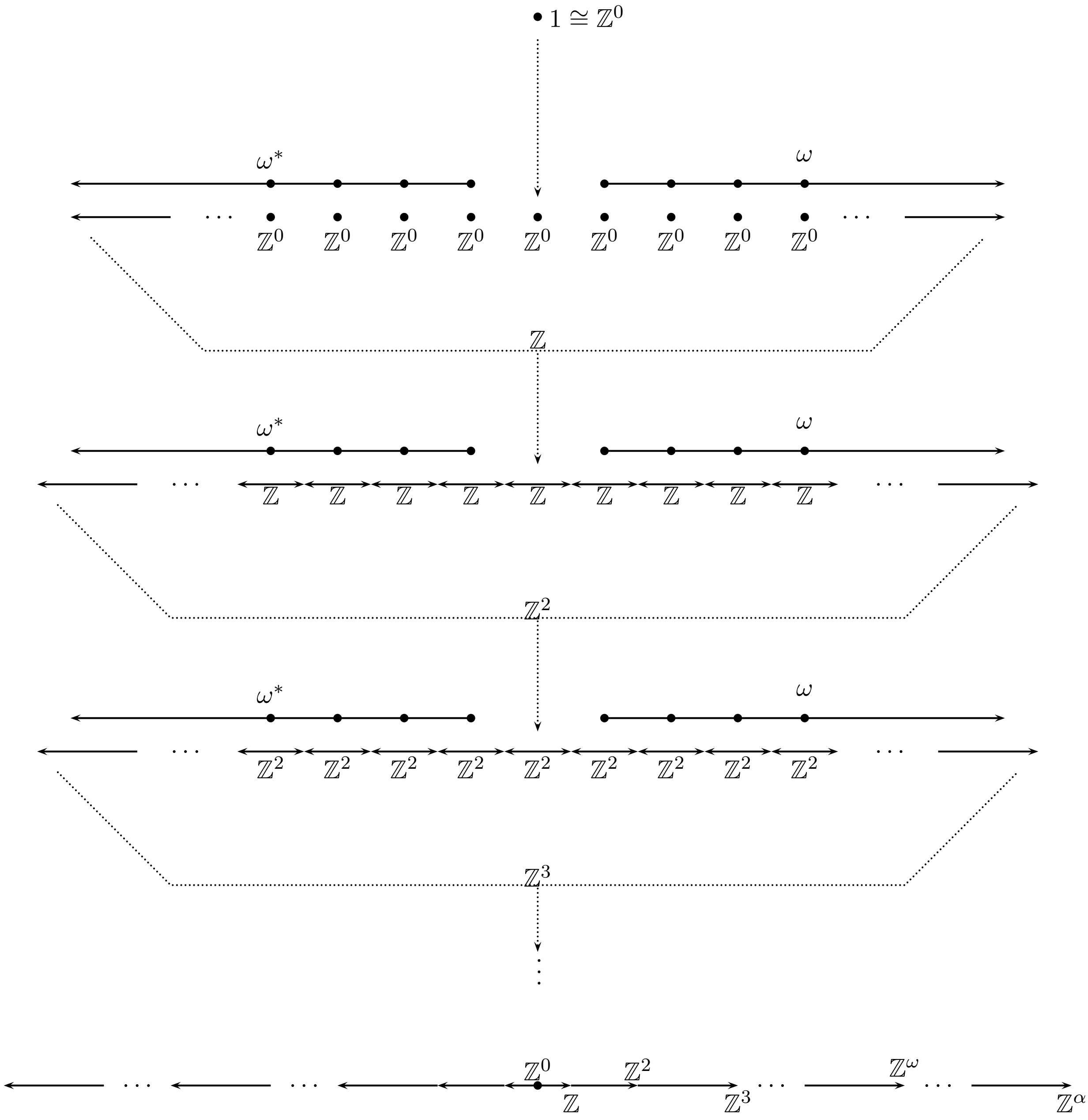

Figura 3.1: Los órdenes $\mathbb{Z}^\alpha$. El punto en la parte superior o en el primer nivel de la figura, representa a $\mathbb{Z}^0$, en el segundo nivel se coloca un punto al centro, su izquierda están representados ω^* puntos; y su derecha ω puntos, lo cual es una forma de describir a $\mathbb{Z}$. En el tercer y cuerto nivel se procesde de manera similar al nivel dos, sólo que ahora se sustituyen los puntos por el orden $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{Z}^2$ correspondientemente, así obtenemos los órdenes $\mathbb{Z}^2$ y $\mathbb{Z}^3$ respectivamente. En el cuarto nivel expresa que repitiendo este proceso una cantidad α de veces obtenemos el orden $\mathbb{Z}^\alpha$.

Es por esto que

$$\sum_{\alpha\in\gamma^*}(\mathbb{Z}^\alpha\cdot\omega^*)+1+\sum_{\alpha\in\gamma}(\mathbb{Z}^\alpha\cdot\omega)\cong\langle\bigcup_{\alpha\in\gamma}(\mathbb{Z}^\alpha\times\mathbb{Z}^-)\cup\{\emptyset\}\cup\bigcup_{\alpha\in\gamma}(\mathbb{Z}^\alpha\times\mathbb{Z}^+),<\rangle,$$

donde $<$ es el orden inducido por los órdenes $<_-$, $\in$ y $<_+$. Por otro lado, tenemos que

$$\Big[\sum_{\alpha\in\gamma^*}(\mathbb{Z}^\alpha\cdot\omega^*)\Big]+1+\Big[\sum_{\alpha\in\gamma}(\mathbb{Z}^\alpha\cdot\omega)\Big]\cong\Big[\sum_{\alpha\in\gamma^*}(\mathbb{Z}^\alpha\cdot\omega^*)\Big]+\Big[\sum_{\alpha\in\gamma}(\mathbb{Z}^\alpha\cdot\omega)\Big],$$

pues podemos identificar al 1 de la primera suma con el primer punto de $\sum_{\alpha\in\gamma}(\mathbb{Z}^\alpha\times\omega)$ e ir recorriendo el resto de los puntos. En vista de lo anterior, demostraremos que (véase la figura 3.1)

$$\mathbb{Z}^\gamma\cong\Big[\sum_{\alpha\in\gamma^*}(\mathbb{Z}^\alpha\cdot\omega^*)\Big]+1+\Big[\sum_{\alpha\in\gamma}(\mathbb{Z}^\alpha\cdot\omega)\Big].$$

Denotaremos con $\bar{0}$ al elemento de $\mathbb{Z}^\gamma$ que es la función constante 0. Definimos

$$f:\mathbb{Z}^\gamma\to\bigcup_{\alpha\in\gamma}(\mathbb{Z}^\alpha\times\mathbb{Z}^-)\cup\{\emptyset\}\cup\bigcup_{\alpha\in\gamma}(\mathbb{Z}^\alpha\times\mathbb{Z}^+),$$

tal que $f(\bar{0})=\emptyset$ y si $x\neq\bar{0}$, entonces $f(x)=\langle x{\restriction}_{\beta_x},x(\beta_x)\rangle$, donde β_x es el último ordinal β tal que $x(\beta)\neq 0$. Véase la figura 3.2.

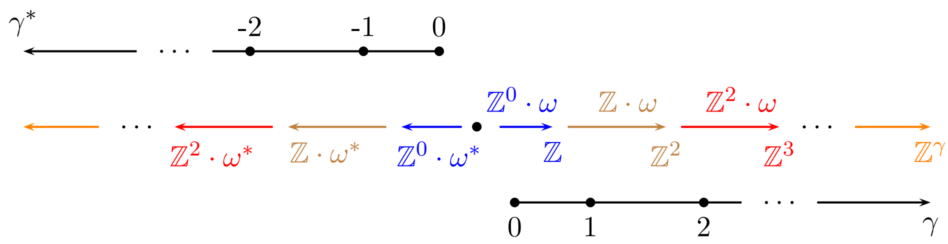

Figura 3.2: El orden $\mathbb{Z}^\gamma$

El isomorfismo propuesto corta a $\mathbb{Z}^\gamma$ en tres, como se ve en la figura 3.3.

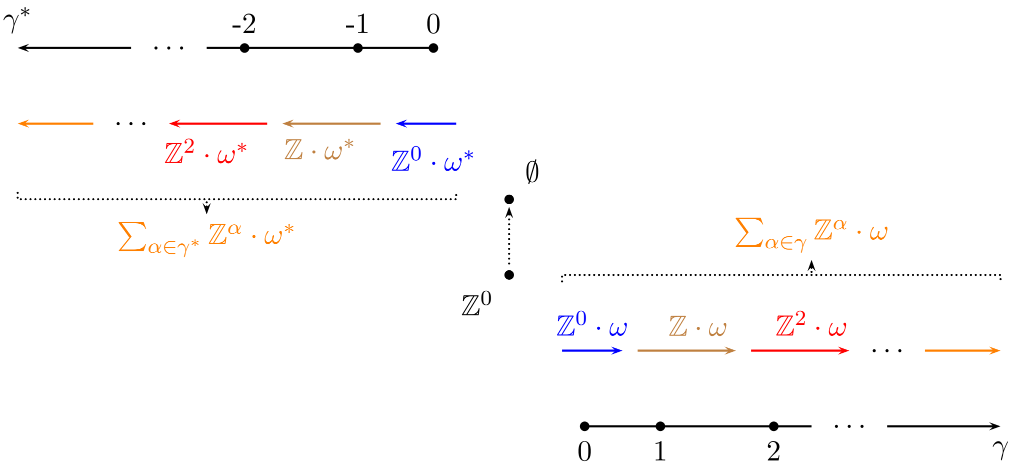

Figura 3.3: Comportamiento de f.

Sean $x, y \in \mathbb{Z}^\gamma$, tales que $x <^\gamma y$.

Si $y = \bar{0}$, entonces $f(y) = \emptyset$. Como $x <^\gamma y = \bar{0}$, por el inciso iii) de la proposición 3.2, $x(\beta_x) <_\mathbb{Z} 0$, con lo cual $f(x) \in \bigcup_{\alpha\in\gamma} \mathbb{Z}^\gamma \times \mathbb{Z}^-$. Por lo tanto, $f(x) < f(y)$.

El caso $x = \bar{0}$ es similar al anterior. Si $x = \bar{0}$, entonces $f(x) = \emptyset$. Tenemos que $\bar{0} = x <^\gamma y$, entonces $0 <_\mathbb{Z} y(\beta_y)$, de modo que $f(y) \in \bigcup_{\alpha\in\gamma} \mathbb{Z}^\alpha \times \mathbb{Z}^+$. Por lo tanto, $f(x) < f(y)$.

Supongamos que tanto x como y son distintos de $\bar{0}$.

I) Si $\beta_x = \beta_y$, por el inciso iii) de la proposición 3.2, obtenemos que $x{\restriction}_{\beta_x+1} <^{\beta_x+1} y{\restriction}_{\beta_x+1}$ y por definición tenemos que:

- ■ $x(\beta_x) <_\mathbb{Z} y(\beta_x) = y(\beta_y)$ o
- ■■ $x(\beta_x) = y(\beta_x) = y(\beta_y)$ y $x{\restriction}_{\beta_x} <^{\beta_x} y{\restriction}_{\beta_x} = y{\restriction}_{\beta_y}$.

■ Supongamos que $x(\beta_x) <_\mathbb{Z} y(\beta_y)$.

Supongamos que $x(\beta_x) <_\mathbb{Z} y(\beta_y) <_\mathbb{Z} 0$, entonces

$$f(x), f(y) \in \bigcup_{\alpha\in\gamma} \mathbb{Z}^\gamma \times \mathbb{Z}^-$$

y por la definición de $<_-$, $f(x) <_- f(y)$. Por lo tanto, $f(x) < f(y)$.

El caso $0 <_\mathbb{Z} x(\beta_x) <_\mathbb{Z} y(\beta_y)$ es similar al anterior. Si $0 <_\mathbb{Z} x(\beta_x) <_\mathbb{Z} y(\beta_y)$, entonces

$$f(x), f(y) \in \bigcup_{\alpha\in\gamma} \mathbb{Z}^\gamma \times \mathbb{Z}^+$$

y de la definición de $<_+$, $f(x) <_+ f(y)$ y, por lo tanto, $f(x) < f(y)$.
Si $x(\beta_x) <_{\mathbb{Z}} 0 <_{\mathbb{Z}} y(\beta_y)$, entonces

$$f(x) = \langle x\restriction_{\beta_x}, x(\beta_x)\rangle \in \bigcup_{\alpha\in\gamma} \mathbb{Z}^\alpha \times \mathbb{Z}^- \quad \text{y}$$

$$f(y) = \langle y\restriction_{\beta_y}, y(\beta_y)\rangle \in \bigcup_{\alpha\in\gamma} \mathbb{Z}^\alpha \times \mathbb{Z}^+.$$

Por lo tanto, de la definición de $<$, $f(x) < f(y)$.
■■ Si $x(\beta_x) = y(\beta_x) = y(\beta_y)$ y $x\restriction_{\beta_x} <^{\beta_x} y\restriction_{\beta_x} = y\restriction_{\beta_y}$, entonces

$$f(x), f(y) \in \bigcup_{\alpha\in\gamma} \mathbb{Z}^\gamma \times \mathbb{Z}^- \quad \text{o}$$

$$f(x), f(y) \in \bigcup_{\alpha\in\gamma} \mathbb{Z}^\gamma \times \mathbb{Z}^+$$

y, por la definición de $<_-$ o $<_+$,

$$f(x) = \langle x\restriction_{\beta_x}, x(\beta_x)\rangle <_- \langle y\restriction_{\beta_y}, y(\beta_y)\rangle = f(y) \quad \text{o}$$

$$f(x) = \langle x\restriction_{\beta_x}, x(\beta_x)\rangle <_+ \langle y\restriction_{\beta_y}, y(\beta_y)\rangle = f(y)$$

y, por lo tanto, $f(x) < f(y)$.
II) Si $\beta_x \in \beta_y$, entonces $x(\beta_y) = 0$. Por el inciso iii) de la proposición 3.2, tenemos que $x\restriction_{\beta_y+1} <^{\beta_y+1} y\restriction_{\beta_y+1}$ y de la definición de $<^{\beta_y+1}$,

- $x(\beta_y) <_{\mathbb{Z}} y(\beta_y)$, o
- $x(\beta_y) = y(\beta_y)$ y $x\restriction_{\beta_y} <^{\beta_y} y\restriction_{\beta_y}$,

pero $y(\beta_y) \neq 0 = x(\beta_y)$. Por lo cual $0 = x(\beta_y) <_{\mathbb{Z}} y(\beta_y)$, entonces

$$f(y) = \langle y\restriction_{\beta_y}, y(\beta_y)\rangle \in \bigcup_{\alpha\in\gamma} \mathbb{Z}^\alpha \times \mathbb{Z}^+.$$

Si $x(\beta_x) \in \mathbb{Z}^+$, como la longitud de $y\restriction_{\beta_y}$ es mayor que la de $x\restriction_{\beta_x}$, por la definición de $<^+$, tenemos que

$$f(x) = \langle x\restriction_{\beta_x}, x(\beta_x)\rangle <^+ \langle y\restriction_{\beta_y}, y(\beta_y)\rangle = f(y),$$

por lo tanto, $f(x) < f(y)$.
Si $x(\beta_x) \in \mathbb{Z}^-$, tenemos que

$$f(x) = \langle x\restriction_{\beta_x}, x(\beta_x)\rangle \in \bigcup_{\alpha\in\gamma} \mathbb{Z}^\alpha \times \mathbb{Z}^-,$$

por lo tanto, de la definición de $<$, $f(x) < f(y)$.
III) El caso $\beta_y \in \beta_x$ es similar al anterior. Si $\beta_y \in \beta_x$, entonces $y(\beta_x) = 0$ y por el inciso iii) de la proposición 3.2, tenemos que $x\restriction_{\beta_x+1} <^{\beta_x+1} y\restriction_{\beta_x+1}$. Por la definición de $<^{\beta_x+1}$, obtenemos que

- $x(\beta_x) <_{\mathbb{Z}} y(\beta_x)$, o
- $x(\beta_x) = y(\beta_x)$ y $x{\restriction_{\beta_x}} <^{\beta_x} y{\restriction_{\beta_x}}$,

pero $x(\beta_x) \neq 0 = y(\beta_x)$. Por lo cual $x(\beta_x) <_{\mathbb{Z}} y(\beta_x) = 0$, entonces

$$f(x) = \langle x{\restriction_{\beta_x}}, x(\beta_x)\rangle \in \bigcup_{\alpha\in\gamma} \mathbb{Z}^\alpha \times \mathbb{Z}^-.$$

Si $y(\beta_y) \in \mathbb{Z}^+$, tenemos que

$$f(y) = \langle y{\restriction_{\beta_y}}, y(\beta_y)\rangle \in \bigcup_{\alpha\in\gamma} \mathbb{Z}^\alpha \times \mathbb{Z}^+,$$

por lo tanto, de la definición de $<$, $f(x) < f(y)$.

Si $y(\beta_y) \in \mathbb{Z}^-$, como la longitud de $x{\restriction_{\beta_x}}$ es mayor que la de $y{\restriction_{\beta_y}}$, por la definición de $<_-$, tenemos que

$$f(x) = \langle x{\restriction_{\beta_x}}, x(\beta_x)\rangle <_- \langle y{\restriction_{\beta_y}}, y(\beta_y)\rangle = f(y),$$

por lo tanto, $f(x) < f(y)$.

Hemos demostrado que f es un morfismo, para terminar esta prueba demostraremos que f es también suprayectiva. Sea

$$z \in \bigcup_{\alpha\in\gamma} (\mathbb{Z}^\alpha \times \mathbb{Z}^-) \cup \{\emptyset\} \cup \bigcup_{\alpha\in\gamma} (\mathbb{Z}^\alpha \times \mathbb{Z}^+).$$

Si $z = \emptyset$, $f(\bar{0}) = \emptyset$. Supongamos que $z \in \bigcup_{\alpha\in\gamma}(\mathbb{Z}^\alpha \times \mathbb{Z}^-)$, entonces hay $\delta \in \gamma$ tal que $z \in \mathbb{Z}^\delta \times \mathbb{Z}^-$, por lo que $z = \langle y, m\rangle$, con $y \in \mathbb{Z}^\delta$ y $m \in \mathbb{Z}^-$. Si consideramos la sucesión $w \in \mathbb{Z}^\gamma$ tal que $w \restriction_\alpha = z$, $w(\alpha) = m$ y si $\alpha \in \beta \in \gamma$, $w(\beta) = 0$, entonces $f(w) = z$.

El caso $z \in \bigcup_{\alpha\in\gamma}(\mathbb{Z}^\alpha \times \mathbb{Z}^+)$, es análogo al anterior.

Por lo tanto, f es un isomorfismo.

□

3.2. Órdenes Discretos

Esta sección está dedicada a propiedades de los órdenes discretos, pero su estudio y caracterización los terminaremos en el siguiente capítulo cuando la herramienta de condensaciones iteradas esté desarrollada.

Definición 3.6. Sea $\langle L, <\rangle$ un orden lineal. Decimos que $\langle L, <\rangle$ es *discreto* si y sólo si para todo $D \subseteq L$, con al menos dos elementos, $\langle D, <{\restriction_D}\rangle$ no es denso; es decir, si para todo $D \subseteq L$ con al menos dos elementos, hay $x, y \in D$ tales que $x < y$ y no hay $z \in D$ con $x < z < y$.

Obsérvese que cualquier suborden de un orden discreto es discreto.
Ejemplos

1. Cada número natural es un orden discreto.

2. Los conjuntos ω, y $\mathbb{Z}$ con el orden usual son discretos.

3. Cada ordinal es un orden discreto y, por lo tanto, cualquier buen orden también lo es.

4. Los órdenes $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ con su orden usual no son discretos.

5. Si $\langle L, <\rangle$ es discreto, entonces $\langle L, <^{-1}\rangle$ es discreto. La prueba se hace demostrando que un subconjunto de $\langle L, <\rangle$ es denso si y sólo si también lo es en $\langle L, <^{-1}\rangle$.

Teorema 3.7. *Sea $\langle L, <\rangle$ un orden lineal. $\langle L, <\rangle$ es discreto si y sólo si $\eta \not\precsim \langle L, <\rangle$.*

Demostración. Supongamos que $\eta \precsim \langle L, <\rangle$. Sea $f : \mathbb{Q} \to L$ un morfismo de órdenes. Mostraremos que $\langle f[\mathbb{Q}], <\restriction_{f[\mathbb{Q}]}\rangle$ es denso. Sean $x, y \in f[\mathbb{Q}]$ tales que $x < y$, entonces hay $p, q \in \mathbb{Q}$ tales que $f(p) = x$ y $f(q) = y$. Dado que f es un isomorfismo, $p <_{\mathbb{Q}} q$, y como $\mathbb{Q}$ es denso, hay $r \in \mathbb{Q}$, tal que $p <_{\mathbb{Q}} r <_{\mathbb{Q}} q$. Como f es isomorfismo,

$$x = f(p) < f(r) < f(q) = y.$$

Por lo tanto, $\langle L, <\rangle$ no es discreto.
Ahora supongamos que $\langle L, <\rangle$ no es discreto. Entonces hay $D \subseteq L$, con $2 \leq |D|$, tal que $\langle D, <\restriction_D\rangle$ es denso. Veamos que $\mathbb{Q} \precsim D$. Sea $\{q_n\}_{n\in\omega}$ una enumeración de $\mathbb{Q}$, D' el subconjunto de D que resulta de quitarle a D el mínimo y el máximo (si los tiene) y $E : \mathcal{P}(D') \setminus \{\emptyset\} \to D'$ una función de elección. Definimos la función $f : \mathbb{Q} \to D$ por recursión: $f(q_0) = E(D')$ y si se tiene definida f para q_i con $i \leq_\omega n \in \omega$, entonces $f(q_{n+1}) = a$, donde[1]:

i) $a = E(\{d \in D' : d < f(q_i) \text{ para toda } i \leq_\omega n\})$, si $q_{n+1} <_{\mathbb{Q}} q_i$ para toda $i \leq_\omega n$;

ii) $a = E(\{d \in D' : d > f(q_i) \text{ para toda } i \leq_\omega n\})$, si $q_{n+1} >_{\mathbb{Q}} q_i$ para toda $i \leq_\omega n$;

iii) $a = E(\{d \in D' : f(q_i) < d < f(q_i + 1)\})$, si $q_i <_{\mathbb{Q}} q_{n+1} <_{\mathbb{Q}} q_{i+1}$ para alguna $i <_\omega n$.

Definida así la función f es un morfismo de órdenes, lo cual es sencillo verificar (aunque algo laborioso). De manera que $\mathbb{Q} \precsim D \precsim L$. □

Teorema 3.8. *Si I es un orden discreto y para cada $i \in I$ L_i es un orden discreto, entonces $\sum_{i\in I} L_i$ es discreto.*

[1] aunque la siguiente definición es algo extensa, únicamente se quiere que la relación que guarda q_n con los q_m con $m < n$ se preserve bajo el morfismo

Demostración. Supongamos que $\sum_{i\in I} L_i$ no es discreto, entonces $\mathbb{Q} \precsim \sum_{i\in I} L_i$.

Sea $f : \mathbb{Q} \to \sum_{i\in I} L_i$ un morfismo. Si para cada $i \in I$, $im(f) \cap [L_i \times \{i\}]$ es un unitario, la función $g : \mathbb{Q} \to I$, con regla de correspondencia $g(q) = i$ si y sólo si $f(q) \in L_i \times \{i\}$ es un morfismo de órdenes, lo cual es una contradicción pues I es discreto.

Por lo anterior, hay $i \in I$ y $p, q \in \mathbb{Q}$ tales que $p <_{\mathbb{Q}} q$ y $\{f(p), f(q)\} \subseteq L_i \times \{i\}$. Como f es un morfismo, se tiene que $f(p) < f(q)$ y si r es un racional tal que $p <_{\mathbb{Q}} r <_{\mathbb{Q}} q$, obtenemos que $f(p) < f(r) < f(q)$. Así, se desprende que

$$\mathbb{Q} \cong (p, q) \precsim_f L_i \times \{i\} \cong L_i,$$

lo cual contradice que L_i sea discreto. □

El teorema anterior puede probarse sin usar el teorema 3.7. Más aún, puede probarse sin necesidad del Axioma de Elección, utilizando el denso apropiado en vez de $\mathbb{Q}$.

Corolario 3.9. *Si L_1 y L_2 son dos órdenes discretos, entonces $L_1 \cdot L_2$ es un orden discreto.*

Demostración. Recordemos que $L_1 \cdot L_2 = \sum_{i\in L_2} L_1$, utilizando este hecho y el teorema anterior, tenemos que $L_1 \cdot L_2$ es discreto. □

Proposición 3.10. *Para cada ordinal α, $\mathbb{Z}^\alpha$ es un orden discreto.*

Demostración. Haremos la prueba por inducción.

Es claro que $\mathbb{Z}^0$ es discreto.

Sea α un ordinal y supongamos que $\mathbb{Z}^\alpha$ es discreto. Hemos visto ya que $\mathbb{Z}^{\alpha+1} \cong \mathbb{Z}^\alpha \cdot \mathbb{Z}$. Por lo tanto, por la hipótesis de inducción y el corolario anterior, $\mathbb{Z}^{\alpha+1}$ es discreto.

Sea γ un ordinal límite y supongamos que para todo $\alpha < \gamma$, $\mathbb{Z}^\alpha$ es discreto. Recordemos que

$$\mathbb{Z}^\gamma \cong \Big[\sum_{\alpha\in\gamma^*} \mathbb{Z}^\alpha \cdot \omega^*\Big] + \Big[\sum_{\alpha\in\gamma} \mathbb{Z}^\alpha \cdot \omega\Big],$$

entonces para cada $\alpha \in \gamma$, $\mathbb{Z}^\alpha \cdot \omega$ y $\mathbb{Z}^\alpha \cdot \omega^*$ son discretos, con lo cual

$$\sum_{\alpha\in\gamma^*} \mathbb{Z}^\alpha \cdot \omega^* \text{ y } \sum_{\alpha\in\gamma} \mathbb{Z}^\alpha \cdot \omega$$

son discretos. Por lo tanto,

$$\Big[\sum_{\alpha\in\gamma^*} \mathbb{Z}^\alpha \cdot \omega^*\Big] + \Big[\sum_{\alpha\in\gamma} \mathbb{Z}^\alpha \cdot \omega\Big] \cong \mathbb{Z}^\gamma$$

es discreto. □

Cuando se haya desarrollado la herramienta de las condensaciones iteradas, terminaremos la clasificación de este tipo de órdenes.

Para terminar esta sección veamos el siguiente ejemplo.

Consideremos las sucesiones siguientes $\{a_n\}_{n\in\omega}$ y $\{b_n\}_{n\in\omega}$ tales que

$$a_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \text{ es par,} \\ 1 & \text{si } i \text{ es impar.} \end{cases}$$

$$b_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ es par,} \\ 0 & \text{si } i \text{ es impar.} \end{cases}$$

Mostraremos que los órdenes

$$\sum_{n\in\omega} \mathbb{Z}^{a_n} \text{ y } \sum_{n\in\omega} \mathbb{Z}^{b_n},$$

no son isomorfos, pero

$$\sum_{n\in\omega} \mathbb{Z}^{a_n} \precsim \sum_{n\in\omega} \mathbb{Z}^{b_n} \text{ y } \sum_{n\in\omega} \mathbb{Z}^{b_n} \precsim \sum_{n\in\omega} \mathbb{Z}^{a_n},$$

concluyendo así que la relación $\precsim$ no es antisimétrica (incluso si sólo consideramos órdenes discretos).

La forma de estos órdenes no es muy complicada, veámoslo. Las sucesiones son de ceros y unos, de forma alternada, una empieza por cero y la otra por el uno, por lo que podemos imaginar estas sucesiones como unas líneas de ceros y unos, lo único que hacemos es sustituir los ceros por un punto y los unos por $\mathbb{Z}$ en cada una y así obtenemos una "imagen"de cada orden, véase la figura 3.4.

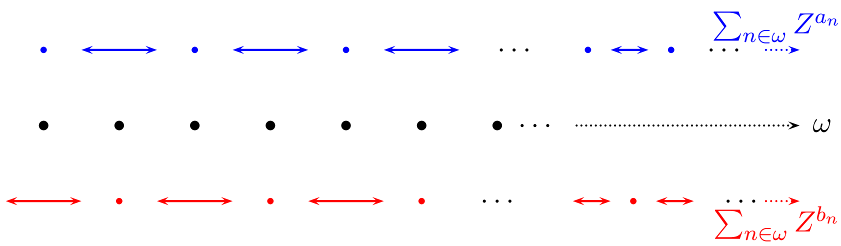

Figura 3.4: Las sucesiones $\sum_{n\in\omega} \mathbb{Z}^{a_n}$ y $\sum_{n\in\omega} \mathbb{Z}^{b_n}$

Verificar que no son isomorfos es sencillo, pues el orden $\sum_{n\in\omega} \mathbb{Z}^{a_n}$ tiene mínimo (este es el único elemento del primer sumando, pues el primer sumando es $\mathbb{Z}^0$), pero $\sum_{n\in\omega} \mathbb{Z}^{b_n}$ no (de tener un primer elemento éste estaría en el primer sumando que es $\mathbb{Z}$, lo cual no puede suceder).

Las funciones

$$f : \bigcup_{n\in\omega} \mathbb{Z}^{a_n} \times \{n\} \to \bigcup_{n\in\omega} \mathbb{Z}^{b_n} \times \{n\},$$

tal que $f(x, n) = \langle x, n + 1\rangle$ y

$$g : \bigcup_{n\in\omega} \mathbb{Z}^{b_n} \times \{n\} \to \bigcup_{n\in\omega} \mathbb{Z}^{a_n} \times \{n\},$$

tal que $g(x,n) = \langle x, n+1\rangle$ son morfismos lo que hacen estas funciones es "recorrer" las sucesiones. Dicho de otra manera, cada sucesión es una subsucesión de la otra, lo que se hace con f y g es reflejar este hecho en los órdenes.

Veamos que f es un morfismo, la demostración de que g también lo es, es análoga a esta prueba y por ende será omitida.

Primero mostremos que $f(z)$ está bien definido para cada z. Sea

$$\langle x, n\rangle \in \bigcup_{l\in\omega} \mathbb{Z}^{a_l} \times \{l\}.$$

Si n es par, entonces $n+1$ es impar y $x = 0$, de modo que

$$f(x,n) = \langle x, n+1\rangle \in \mathbb{Z}^0 \times \{n+1\} \subseteq \bigcup_{l\in\omega} \mathbb{Z}^{b_l} \times \{l\}.$$

Si n es impar, entonces $n+1$ es par y $x \in \mathbb{Z}$, por lo que

$$f(x,n) = \langle x, n+1\rangle \in \mathbb{Z} \times \{n+1\} \subseteq \bigcup_{l\in\omega} \mathbb{Z}^{b_l} \times \{l\}.$$

Sean

$$\langle x, n\rangle, \langle y, m\rangle \in \bigcup_{l\in\omega} \mathbb{Z}^{a_l} \times \{n\},$$

tales que $\langle x, n\rangle < \langle y, m\rangle$ (en el orden de $\sum_{l\in\omega} \mathbb{Z}^{a_l}$). Entonces $n \in m$, o $m = n$ y $x <_{\mathbb{Z}^{a_n}} y$.

Si $n \in m$, $n+1 \in m+1$ y, por lo tanto,

$$f(x,n) = \langle x, n+1\rangle < \langle y, m+1\rangle = f(y,m)$$

(en el orden de $\sum_{l\in\omega} \mathbb{Z}^{b_l}$). Supongamos ahora que $m = n$ y $x <_{\mathbb{Z}^{a_n}} y$. Por esto obtenemos que $x \neq y$, entonces n no es par, por lo que $n+1$ sí lo es y $x <_{\mathbb{Z}} y$, por lo tanto,

$$f(x,n) = \langle x, n+1\rangle < \langle y, m+1\rangle = f(y,m)$$

(en el orden de $\sum_{l\in\omega} \mathbb{Z}^{b_l}$). Esto prueba que f es un morfismo.

Hemos probado que

$$\sum_{n\in\omega} \mathbb{Z}^{a_n} \prec \sum_{n\in\omega} \mathbb{Z}^{b_n}, \quad \sum_{n\in\omega} \mathbb{Z}^{a_n} \prec \sum_{n\in\omega} \mathbb{Z}^{a_n} \text{ y } \sum_{n\in\omega} \mathbb{Z}^{a_n} \not\cong \sum_{n\in\omega} \mathbb{Z}^{a_n}.$$

Así, tenemos un ejemplo de órdenes discretos que no cumplen la antisimétria de la relación $\precsim$.

3.3. Órdenes densos

Recordemos la definición de orden denso.

Definición 3.11. Sean $\langle L, <\rangle$ un orden lineal y $X \subseteq L$.
Decimos que X es *denso en* L (o simplemente *denso*) si y sólo si tiene al menos dos elementos y $\forall y, z \in L[y < z \to \exists x \in X(y < x < z)]$.

Proposición 3.12. *Si $\langle L, <\rangle$ es un orden lineal denso e $I \subseteq L$ es un intervalo con mas de dos elementos, entonces $\langle I, <\rangle$ es denso.*

Demostración. Sean $a, b \in I$ tales que $a < b$, al ser $\langle L, <\rangle$ denso, hay $c \in L$, tal que $a < c < b$, pero como I es un intervalo, $c \in I$. Por lo tanto, $\langle I, <\rangle$ es denso. □

Pasemos ahora a definir los órdenes lineales que de alguna manera representarán a los órdenes densos, los $\eta_\alpha' s$.

Si X y Y son subconjuntos de un orden lineal, denotaremos con $X < Y$ al hecho de que $\forall x \in X \forall y \in Y(x < y)$. En el caso en que X o Y consistan de un solo elemento a lo anterior podemos denotarlo como $a < Y$ o $X < a$. Además, si a es un elemento del orden lineal denotamos con $X < a < Y$ al hecho de que $\forall x \in X \forall y \in Y(x < a < y)$.

Definición 3.13. Sean α un ordinal y $\langle L, <\rangle$ un orden lineal.
Decimos que $\langle L, <\rangle$ es un η_α*-orden* (o simplemente un η_α) si y sólo si para cualesquiera $X, Y \subseteq L$, de cardinalidad menor que $\aleph_\alpha$ tales que $X < Y$, existe $a \in L$ tal que $X < a < Y$.

Ahora bien, observemos que $\mathbb{Q}$ puede separar conjuntos finitos, es decir, separa conjuntos de cardinal menor que $\aleph_0$, pues de hecho esto es equivalente a la densidad. Es precisamente por esto que $\mathbb{Q}$ es un η_0, por lo que podemos decir que η es un η_0.

Hemos observado lo que hace un η_0 lo que facilita imaginar cómo se comportan los η_α's. La propiedad a simple vista nos indica que un η_α separa conjuntos de cardinalidad menor que $\aleph_\alpha$, pero de hecho esta propiedad implica varias más.

Si consideramos al conjunto vacío como subconjunto de un η_α, se cumple que $\emptyset < \emptyset$, de aquí se desprende que un η_α es no vacío. También, si tomamos al subconjunto vacío y un elemento x del η_α, tenemos que $\emptyset < \{x\}$ y $\{x\} < \emptyset$, así, deducimos que un η_α no tiene extremos y tiene al menos dos elementos. Pero incluso podemos tomar un subconjunto X del η_α con cardinalidad menor que $\aleph_\alpha$ y ocurre que $\emptyset < X$, $X < \emptyset$ y la definición nos dice que el conjunto X está acotado, tanto superiormente como inferiormente. Lo anterior puede ser expresado también de la siguiente forma: "cualquier subconjunto X de un η_α no acotado superiormente o inferiormente tiene cardinal mayor o igual a $\aleph_\alpha$", lo cual es una condición interesante.

Por último, notemos que la propiedad de ser η_α es descendente, en el siguiente sentido: si $\langle L, <\rangle$ es un η_α y $\beta \in \alpha$, entonces $\langle L, <\rangle$ también es un η_β. Por lo anterior, obtenemos que todos los η_α's son densos, de hecho el concepto de η_α puede entenderse como una generalización del de densidad.

Teorema 3.14. *Sean* $\langle L, < \rangle$ *un* η_α *y* $D \subseteq L$.
Si D *es denso en* $\langle L, < \rangle$*, entonces* $\langle D, < \rangle$ *es también un* η_α.

Demostración. Sean $X, Y \subseteq D$, con $X < Y$, y de cardinal menor que $\aleph_\alpha$. Tenemos que también $X, Y \subseteq L$, usando la propiedad de η_α (dos veces) para $\langle L, < \rangle$ hay $a, b \in L$ tales que $X < a < Y$ y $\{a\} < b < Y$. Tenemos que $a < b$ y dado que D es denso en $\langle L, < \rangle$, hay $c \in D$ que cumple que $a < c < b$, por lo que $X < c < Y$. $\square$

Corolario 3.15. *Si* $\langle L, < \rangle$ *es un* η_α *e* I *es un intervalo de* $\langle L, < \rangle$ *con al menos dos elementos, entonces* $\langle I, < \rangle$ *es un* η_α.

Demostración. Como I es un intervalo con mas de dos elementos, $\langle I, < \rangle$ es denso, usando la proposición anterior se tiene que $\langle I, < \rangle$ es un η_α. $\square$

A continuación introducimos la noción de cortadura de un orden lineal, pues la usaremos tanto para caracterizar a los η_α's, como en ciertas demostraciones posteriores.

Definición 3.16. Sean $\langle L, < \rangle$ un orden lineal y $X, Y \subseteq L$. Decimos que $\langle X, Y \rangle$ es una cortadura de $\langle L, < \rangle$ si y sólo si

a) $\forall x \in X \forall y \in Y (x < y)$ y

b) $X \cup Y = L$.

Observemos que en la definición de cortadura no pedimos que ambos conjuntos sean no vacíos, algo que es muy común, lo hacemos así, porque será de utilidad.

Teorema 3.17. *Sean* $\langle L, < \rangle$ *un orden lineal y* α *un ordinal.*
$\langle L, < \rangle$ *es un* η_α *si y sólo si* $L \neq \emptyset$ *y para cualquier cortadura* $\langle A, B \rangle$ *de* $\langle L, < \rangle$*, se tiene que* $\omega_\alpha \subseteq cof(A) \cup (coin(B)^*)$.

Demostración. Supongamos que $\langle L, < \rangle$ es un η_α. Sean $\langle A, B \rangle$ una cortadura de $\langle L, < \rangle$, $A' \subseteq A$ cofinal en A y $B' \subseteq B$ coinicial en B tales que $A' \cong cof(A)$ y $B' \cong coin(B)$. Como $A < B$, también $A' < B'$ y dado que $\langle A, B \rangle$ es una cortadura, no hay elementos que separen a A y B, por lo que tampoco los hay que separen a A' y B', pues estos últimos son cofinal y coinicial a A y B respectivamente. Por la contrapuesta de la definición de η_α, tenemos que

$$\omega_\alpha = \aleph_\alpha \subseteq |A'| \cup |B'| = cof(A) \cup coin(B)^*.$$

Para el recíproco, supongamos que para cualquier cortadura $\langle A, B \rangle$ de $\langle L, < \rangle$ se tiene que $\omega_\alpha \subseteq cof(A) \cup coin(B)^*$ y $L \neq \emptyset$. Sean $X, Y \subseteq L$ tales que $|X|, |Y| \in \aleph_\alpha$ y $X < Y$.

El caso en que $X = \emptyset = Y$ es consecuencia de que $L \neq \emptyset$.

Supongamos que X y Y son distintos del vacío y que no hay elementos de L que separen a X y Y. Definimos los siguientes conjuntos

$$A = \{l \in L : \exists x \in X (l \leq x)\} \quad \text{y} \quad B = \{l \in L : \exists y \in Y (y \leq l)\}.$$

Entonces tenemos que $A < B$, pues $X < Y$. Además, por la tricotomía de $\langle L, < \rangle$ y porque no hay elementos entre X y Y, $A \cup B = L$, lo que hace a $\langle A, B \rangle$ una cortadura de $\langle L, < \rangle$. Observemos que $X \subseteq A$ y que $Y \subseteq B$, además, veamos que $cof(A) = cof(X)$ y que $coin(B)^* = coin(Y)^*$.

Sean $f : cof(A) \to A$ cofinal en A, y para cada $a \in A$, elijamos $x_a \in X$ tal que $a \leq x_a$. La función $g : cof(A) \to X$ tal que $g(\alpha) = x_{f(\alpha)}$ es cofinal en X, pues si $x \in X$ como $X \subseteq A$ hay $\alpha \in cof(A)$ tal que $x \leq f(\alpha) \leq x_{f(\alpha)} = g(\alpha)$. Por lo tanto, $cof(X) \subseteq cof(A)$

Si $h : cof(X) \to X$ es cofinal en X, es también cofinal en A, pues si $a \in A$, hay $x \in X$ tal que $a \leq x$ y, como h es cofinal en X, hay $\alpha \in cof(X)$ tal que $x \leq h(\alpha)$, con lo que $a \leq h(\alpha)$. Por lo tanto, $cof(A) \subseteq cof(X)$.

La igualdad en el caso de las coinicialidades se obtiene como consecuencia de lo anterior aplicado al orden $\langle L, < \rangle^*$. Así, $cof(A) = cof(X) \subseteq |X|$ y $coin(B)^* = coin(Y)^* \subseteq |Y|$. Por la hipótesis obtenemos que

$$\omega_\alpha \subseteq cof(A) \cup coin(B)^* = cof(X) \cup coin(Y)^* \subseteq |X| \cup |Y| \in \aleph_\alpha,$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto, hay elementos de L que separan a X y a Y.

Los casos $X = \emptyset$, $Y \neq \emptyset$ y $X \neq \emptyset$, $Y = \emptyset$, son similares entre sí y se hacen de manera parecida al caso anterior, pero cuando $X = \emptyset$ se debe considerar $A = L \setminus B$ y cuando $Y = \emptyset$ a $B = L \setminus A$. □

Teorema 3.18. *Si $\langle A, <_A \rangle$ y $\langle B, <_B \rangle$ son dos η_α-órdenes y ambos tienen cardinal $\aleph_\alpha$, entonces son isomorfos.*

Demostración. Para probar este teorema utilizaremos una técnica usada también para demostrar la caracterización del tipo de orden de $\mathbb{Q}$, véase por ejemplo (ACM11). Sean $\{a_\beta : \beta \in \aleph_\alpha\}$ y $\{b_\beta : \beta \in \aleph_\alpha\}$ enumeraciones de A y B respectivamente.

Durante esta demostración diremos que una función f es un isomorfismo parcial si y sólo si f es un isomorfismo de un subconjunto de A en B.

Probaremos que para cualquier isomorfismo parcial f con $|dom(f)| \in \aleph_\alpha$ y cualesquiera $a \in A$ y $b \in B$, hay un isomorfismo parcial $f_{a,b}$ tal que $f \subseteq f_{a,b}$, $a \in dom(f_{a,b})$ y $b \in im(f_{a,b})$.

Si $a \in dom(f)$, definimos $f_a = f$.

Si $a \notin dom(f)$, consideremos siguientes los conjuntos, $f[a_{<_A}]$ y $f[a_{>_A}]$. Como $|dom(f)| \in \aleph_\alpha$ y f es un isomorfismo, tenemos que

$$f[a_{<_A}] \cup f[a_{>_A}] \subseteq im(f) \prec \aleph_\alpha,$$

donde aquí $\prec$ es la dominancia de conjuntos (es decir, se afirma que hay una función inyectiva de $im(f)$ en $\aleph_\alpha$). Además, $f[a_{<_A}] <_B f[a_{>_A}]$. Dado que $\langle B, <_B \rangle$ es un η_α, hay elementos en B que separan a $f[a_{<_A}]$ y $f[a_{>_A}]$. Sea $b_a = b_{\beta'}$, donde β' es el mínimo ordinal tal que $f[a_{<_A}] <_B b_{\beta'} <_B f[a_{>_A}]$. Con esto definimos $f_a = f \cup \{\langle a, b_a \rangle\}$.

Por como fue definida, f_a resulta ser un isomorfismo parcial, para cualquier $a \in A$, y $|dom(f_a)| \in \aleph_\alpha$.

Si $b \in im(f_a)$, definimos $f_{a,b} = f_a$.

Supongamos que $b \notin im(f_a)$. Observemos que los conjuntos $f^{-1}[b_{<_B}]$ y $f^{-1}[b_{>_B}]$ cumplen que

$$f^{-1}[b_{<_B}] \cup f^{-1}[b_{>_B}] \subseteq dom(f_a) \prec \aleph_\alpha,$$

y $f^{-1}[b_{<_B}] <_A f^{-1}[b_{>_B}]$. Como $\langle A, <_A \rangle$ es un η_α, hay elementos en A que separan a $f^{-1}[b_{<_B}]$ y $f^{-1}[b_{>_B}]$. Sea $a_b = a_{\delta'}$, donde δ' es el primer ordinal tal que $a_{\delta'}$ separa a $f^{-1}[b_{<_B}]$ y $f^{-1}[b_{>_B}]$. Definimos $f_{a,b} = f_a \cup \{\langle a_b, b \rangle\}$.

Hemos definido $f_{a,b}$ para cualesquiera $a \in A$, $b \in B$ y f isomorfismo parcial, de forma que $f_{a,b}$ resulta ser un isomorfismo parcial y $dom(f_{a,b}) \prec \aleph_\alpha$.

También veamos que si $\gamma, \kappa \in \aleph_\alpha$ y $\{f_\beta\}_{\beta\in\gamma}$ con $|dom(f_\beta)| \in \kappa$ para cada $\beta \in \gamma$ es una sucesión de funciones anidadas (con respecto a la contención), entonces $\bigcup_{\beta\in\gamma} f_\beta$ es un isomorfismo parcial y

$$\left| dom\left(\bigcup_{\beta\in\gamma} f_\beta\right)\right| \in \aleph_\alpha.$$

Sabemos que al estar anidadas las funciones, $\bigcup_{\beta\in\gamma} f_\beta$ es una función, además

$$\left| dom\left(\bigcup_{\beta\in\gamma} f_\beta\right)\right| = \left|\bigcup_{\beta\in\gamma} dom(f_\beta)\right| \leq \sum_{\beta\in\gamma} |dom(f_\beta)| = sup\{|dom(f_\beta)|\}_{\beta\in\gamma} \cdot |\gamma|,$$

y dado que para todo $\beta \in \gamma$, $|dom(f_\beta)| \in \kappa$,

$$sup\{|dom(f_\beta)|\}_{\beta\in\gamma} \cdot |\gamma| \in \kappa \cdot |\gamma| \in \aleph_\alpha.$$

Sólo queda demostrar que $\bigcup_{\beta\in\gamma} f_\beta$ es un morfismo para que sea un isomorfismo parcial. Sean $x, y \in dom\left(\bigcup_{\beta\in\gamma} f_\beta\right)$ tales que $x <_A y$. Como la sucesión de funciones está anidada, hay $\delta \in \gamma$, tal que $x, y \in dom(f_\delta)$ y dado que f_δ es un isomorfismo parcial tenemos que

$$\left(\bigcup_{\beta\in\gamma} f_\beta\right)(x) = f_\delta(x) <_B f_\delta(y) = \left(\bigcup_{\beta\in\gamma} f_\beta\right)(y),$$

lo que prueba que $\bigcup_{\beta\in\gamma} f_\beta$ es un morfismo.

Ahora definiremos una sucesión creciente de isomorfismos parciales h_β para cada $\beta \in \aleph_\alpha$ por recursión y de tal modo que las condiciones siguientes se satisfagan.

1. $h_0 = \emptyset$.

2. Si h_β está definida para $\beta < \aleph_\alpha$, entonces $h_{\beta+1} = (h_\beta)_{a_\beta, b_\beta}$.

3. Si $\gamma \in \aleph_\alpha$ es límite y para toda $\delta \in \gamma$, h_δ está definida, entonces

$$h_\gamma = \bigcup_{\delta\in\gamma} h_\delta.$$

Dado que tenemos una restricciones en cuanto al cardinal del dominio en cada caso, veamos que para toda $\beta \in \aleph_\alpha$,

$$|dom(h_\beta)| \subseteq |\{a_\delta\}_{\delta\in\beta} \cup \{b_\delta\}_{\delta\in\beta}|.$$

La prueba de lo anterior se hace por inducción. El caso 0 se tiene, pues $dom(h_0) = \emptyset \subseteq \{a_0\} \cup \{b_0\}$. Si $\beta \in \aleph_\alpha$ y

$$|dom(h_\beta)| \subseteq |\{a_\delta\}_{\delta\in\beta} \cup \{b_\delta\}_{\delta\in\beta}|,$$

entonces

$$dom(h_{\beta+1}) \subseteq dom(h_\beta) \cup \{a_\beta\} \cup \{(h_\beta)^{-1}_{a_\beta,b_\beta}(b_\beta)\}.$$

Por hipótesis de inducción,

$$|dom(h_\beta) \cup \{a_\beta\} \cup \{(h_\beta)^{-1}_{a_\beta,b_\beta}(b_\beta)\}| \subseteq |\{a_\delta\}_{\delta\in\beta} \cup \{b_\delta\}_{\delta\in\beta} \cup \{a_\beta\} \cup \{(h_\beta)^{-1}_{a_\beta,b_\beta}(b_\beta)\}|,$$

$$|\{a_\delta\}_{\delta\in\beta} \cup \{b_\delta\}_{\delta\in\beta} \cup \{a_\beta\} \cup \{(h_\beta)^{-1}_{a_\beta,b_\beta}(b_\beta)\}| \subseteq |\{a_\delta\}_{\delta\in\beta} \cup \{b_\delta\}_{\delta\in\beta} \cup \{a_\beta\} \cup \{b_\beta\}|$$

y

$$|\{a_\delta\}_{\delta\in\beta} \cup \{b_\delta\}_{\delta\in\beta} \cup \{a_\beta\} \cup \{b_\beta\}| = |\{a_\delta\}_{\delta\in\beta+1} \cup \{b_\delta\}_{\delta\in\beta+1}|.$$

Sea $\beta \in \aleph_\alpha$ un ordinal límite y supongamos que la propiedad se cumple para cualquier $\gamma \in \beta$, entonces

$$dom(h_\beta) = dom(\bigcup_{\gamma\in\beta} h_\gamma) = \bigcup_{\gamma\in\beta} dom(h_\gamma),$$

$$\left|\bigcup_{\gamma\in\beta} dom(h_\gamma)\right| \subseteq \sum_{\gamma\in\beta} |dom(h_\gamma)| \subseteq \sum_{\gamma\in\beta} |(\{a_\delta\}_{\delta\in\gamma} \cup \{b_\delta\}_{\delta\in\gamma})|,$$

$$\sum_{\gamma\in\beta} |(\{a_\delta\}_{\delta\in\gamma} \cup \{b_\delta\}_{\delta\in\gamma})| = |(\{a_\delta\}_{\delta\in\beta} \cup \{b_\delta\}_{\delta\in\beta})| \cdot |\beta|$$

y

$$|(\{a_\delta\}_{\delta\in\beta} \cup \{b_\delta\}_{\delta\in\beta})| \cdot |\beta| = |(\{a_\delta\}_{\delta\in\beta} \cup \{b_\delta\}_{\delta\in\beta})|.$$

Por lo anterior, cada h_β está bien definido y es un isomorfismo parcial. También se puede ver que $\{h_\beta\}_{\beta\in\aleph_\alpha}$ es una sucesión creciente de isomorfismos parciales.

Definimos

$$h = \bigcup_{\beta<\aleph_\alpha} h_\beta,$$

entonces h es una función, $dom(h) \subseteq A$ y $im(h) \subseteq B$. Pero, si $\beta \in \aleph_\alpha$, entonces

$$a_\beta \in dom(h_{\beta+1}) \subseteq dom(h) \text{ y } b_\beta \in im(h_{\beta+1}) \subseteq im(h),$$

por lo que $A \subseteq dom(h)$ y $B \subseteq im(h)$, con lo cual $A = dom(h)$ y $B = im(h)$.

Demostremos ahora que h es un morfismo. Sean $\beta, \delta \in \aleph_\alpha$ tales que $a_\beta <_A a_\delta$. Como $\{h_\gamma\}_{\gamma \in \aleph_\alpha}$ está anidada, hay $\epsilon \in \aleph_\alpha$ tal que $a_\beta, a_\delta \in dom(h_\epsilon)$ y como h_ϵ es un isomorfismo parcial, tenemos que

$$h(a_\beta) = h_\epsilon(a_\beta) <_B h_\epsilon(a_\delta) = h(a_\delta),$$

lo que demuestra que h es un morfismo.

Hemos demostrado que h es un morfismo, que $dom(h) = A$ y que $im(h) = B$. Por lo tanto, h es un isomorfismo de $\langle A, <_A \rangle$ en $\langle B, <_B \rangle$. □

Teorema 3.19. *Si $\langle L, < \rangle$ es un η_α y $\aleph_\alpha$ es singular, entonces $\langle L, < \rangle$ es un $\eta_{\alpha+1}$.*

Demostración. Sea $\langle A, B \rangle$ una cortadura de $\langle L, < \rangle$, entonces por el teorema 3.17, tenemos que $\omega_\alpha \subseteq cof(A) \cup (coin(B)^*)$. Por hipótesis $\omega_\alpha = \aleph_\alpha$ es singular, pero $cof(A)$ y $coin(B)$ son cardinales regulares, por lo que $\omega_\alpha \in cof(A) \cup coin(B)^*$, es decir, $\omega_{\alpha+1} \subseteq cof(A) \cup coin(B)^*$, y de nuevo utilizando el teorema 3.17, $\langle L, < \rangle$ es un $\eta_{\alpha+1}$. □

Teorema 3.20. *Sea $\langle L, < \rangle$ un η_α para algún ordinal α. Sea $\langle A, <_A \rangle$ un orden lineal.*

i) Si $|A| \leq \aleph_\alpha$, entonces $\langle A, <_A \rangle \precsim \langle L, < \rangle$.

ii) Si $\omega_\alpha \not\precsim \langle A, <_A \rangle$ y $\omega_\alpha^* \not\precsim \langle A, <_A \rangle$, entonces $\langle A, <_A \rangle \precsim \langle L, < \rangle$.[1]

Demostración. $i)$ Sea $\{a_\delta : \delta \in \kappa\}$ una enumeración de A, donde $|A| = \kappa \leq \aleph_\alpha$.

Definiremos un morfismo $f : \langle A, <_A \rangle \to \langle L, < \rangle$ por inducción fuerte.

Sea $\beta \in \kappa$. Consideremos los conjuntos:

$$A^- = \{f(a_\delta) : \delta \in \beta \text{ y } a_\delta <_A a_\beta\} \quad \text{y}$$

$$A^+ = \{f(a_\delta) : \delta \in \beta \text{ y } a_\beta <_A a_\delta\}.$$

Ambos conjuntos tienen cardinal menor o igual que β y por tanto, menor que $\aleph_\alpha$. Además, $A^- < A^+$. Como $\langle L, < \rangle$ es un η_α, hay $z \in L$ tal que $A^- < z < A^+$, dicho de otra forma, hay elementos en L que separan a A^- y A^+, elegimos $f(a_\beta)$ como uno de esos elementos.

Ya tenemos definida la función f, veamos que f resulta ser un morfismo de órdenes.

Sean $\beta, \gamma \in \kappa$, tales que $a_\beta <_A a_\gamma$. Como $\beta \neq \gamma$, $\beta \in \gamma$ o $\gamma \in \beta$, supongamos que $\gamma \in \beta$. Entonces

$$f(a_\gamma) \in \{f(a_\delta) : \delta \in \beta \text{ y } a_\beta <_A a_\delta\} > f(a_\beta),$$

por lo que $f(a_\beta) < f(a_\gamma)$. Si $\beta \in \gamma$, entonces

$$f(a_\beta) \in \{f(a_\delta) : \delta \in \gamma \text{ y } a_\delta <_A a_\gamma\} < f(a_\gamma),$$

con lo cual $f(a_\beta) < f(a_\gamma)$.

Por lo tanto, $\langle A, <_A \rangle \precsim \langle L, < \rangle$.

[1] Aunque no se menciona, el orden que se toma al referirse a ω_α es $\langle \omega_\alpha, \in \rangle$ y para ω_α^* es $\langle \omega_\alpha, \in \rangle^*$.

ii) Sean $\kappa = |A|$ y $\{a_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ una enumeración de A.

Definiremos $f : \langle A, <_A\rangle \to \langle L, <\rangle$, por inducción fuerte para cada $\alpha \in \kappa$. Sea $\beta \in \kappa$ tal que

$$\forall \delta, \gamma \in \beta[a_\delta <_A a_\gamma \to f(a_\delta) < f(a_\gamma)].$$

Definimos

$$L_1 = \{f(a_\gamma) : \gamma \in \beta \wedge a_\gamma <_A a_\beta\} \quad \text{y}$$

$$L_2 = \{f(a_\gamma) : \gamma \in \beta \wedge a_\beta <_A a_\gamma\},$$

entonces $L_1 < L_2$. Como $\{f(a_\gamma)\}_{\gamma\in\beta}$ es un morfismo de un subconjunto de A en L, tenemos que $\langle L_1, <\rangle, \langle L_2, <\rangle \precsim \langle A, <_A\rangle$.

Sean $A_1 \subseteq L_1$ cofinal en L_1 y $A_2 \subseteq L_2$ coinicial en L_2 tales que $A_1 \cong cof(L_1)$ y $A_2 \cong coin(L_2)$, entonces $A_1 < A_2$.

Si $\omega_\alpha \subseteq cof(L_1)$, entonces

$$\omega_\alpha \precsim cof(L_1) \precsim \langle L_1, <\rangle \precsim \langle A, <_A\rangle,$$

lo cual es una contradicción, por lo que $cof(L_1) \in \omega_\alpha$.

Si $\omega_\alpha \subseteq coin(L_2)^*$, entonces

$$\omega_\alpha^* \precsim coin(L_2) \precsim \langle L_2, <\rangle \precsim \langle A, <_A\rangle,$$

lo cual es una contradicción, por lo que $coin(L_2)^* \in \omega_\alpha$. Por lo anterior, tenemos que $|A_1|, |A_2| \in \aleph_\alpha$.

Como $\langle L, <\rangle$ es un η_α, hay elementos en L que separan a A_1 y a A_2, elegimos a $f(a_\beta)$ como uno de ellos. Dado que A_1 es cofinal en L_1 y A_2 es coinicial en L_2, $f(a_\beta)$ también separa a L_1 y a L_2.

El demostrar que f es un morfismo se hace de forma análoga a como se hizo en el inciso *i*) de este mismo teorema.

Por lo tanto, $\langle A, <_A\rangle \precsim \langle L, <\rangle$. □

Hasta ahora hemos probado varias propiedades de los η_α's, sin embargo, sólo sabemos de la existencia de los η_0's, pues ya discutimos que $\langle \mathbb{Q}, <_\mathbb{Q}\rangle$ es un η_0.

Definiremos ahora los conjuntos Q_α para cada ordinal α.

$$Q_\alpha = \{x \in {}^{\omega_\alpha}2 : \exists\gamma[x(\gamma) = 1 \wedge \forall\beta \in \omega_\alpha(\gamma \in \beta \to (x(\beta) = 0)]\},$$

es decir, Q_α es el conjunto de las sucesiones de ceros y unos de longitud ω_α que tienen una última entrada con valor uno. Ordenaremos a estos conjuntos de manera lexicográfica, es decir, definimos el orden $<_{Q_\alpha}$ de la siguiente manera: si $x, y \in Q_\alpha$ y $x \neq y$, entonces $x <_{Q_\alpha} y$ si y sólo si $x(\gamma) \in y(\gamma)$, donde γ es el primer ordinal tal que $x(\gamma) \neq y(\gamma)$.

La construcción de estos Q_α's tiene como propósito mostrar que en efecto existen los η_α's. Además, gracias a ellos podremos comprender el aspecto de un η_α. A continuación estudiaremos algunas de sus propiedades.

Se define $2^{<\aleph_\alpha}$ como $sup\{2^\kappa : \kappa \in \aleph_\alpha\}$, usandoo esta notación probaremos que la cardinalidad de cada Q_α es:

1. $2^{\aleph_\beta}$, si $\alpha = \beta + 1$;

2. $2^{<\aleph_\alpha}$, si α es un ordinal límite o cero.

Si $\delta \in \omega_\alpha$, definimos $Q_\alpha(\delta)$ como la colección de sucesiones cuya última entrada "1" es δ. De esta manera, tenemos que $\{Q_\alpha(\delta) : \delta \in \omega_\alpha\}$ es una partición de Q_α y entonces

$$|Q_\alpha| = \sum_{\delta \in \aleph_\alpha} |Q_\alpha(\delta)|.$$

Ahora bien, $Q_\alpha(\delta) \preceq {}^\delta 2 \sim Q_\alpha(\delta + 1)$. De manera que

$$|Q_\alpha| = \sum_{\delta \in \aleph_\alpha} |Q_\alpha(\delta)| \subseteq \sum_{\delta \in \omega_\alpha} 2^{|\delta|} = \sum_{\delta \in \aleph_\alpha} |Q_\alpha(\delta + 1)| \subseteq \sum_{\delta \in \aleph_\alpha} |Q_\alpha(\delta)| = |Q_\alpha|.$$

Por lo que

$$|Q_\alpha| = \sum_{\delta \in \omega_\alpha} 2^{|\delta|} = sup\{2^{|\delta|} : \delta \in \omega_\alpha\} \cdot \aleph_\alpha = 2^{<\aleph_\alpha} \cdot \aleph_\alpha = 2^{<\aleph_\alpha}.$$

Si además $\alpha = s(\beta)$, se tiene que $2^{<\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\beta}$.

Teorema 3.21. *Si $\aleph_\alpha$ es un cardinal regular, entonces Q_α es un η_α.*

Demostración. Sean $X, Y \subseteq Q_\alpha$, ambos de cardinal menor que $\aleph_\alpha$, tales que $X <_{Q_\alpha} Y$.

Sea $B = \{\beta \in \omega_\alpha : \exists x \in X[x(\beta) = 1]\}$, veamos que, como $\aleph_\alpha$ es regular, B está acotado superiormente en ω_α.

Para cada $x \in X$, sea β_x el último ordinal β tal que $x(\beta) = 1$. Entonces $\{\beta_x : x \in X\} \preceq X \prec \omega_\alpha$. Además $\{\beta_x : x \in X\} \subseteq B \subseteq \omega_\alpha$. Como ω_α es regular, $\{\beta_x : x \in X\}$ está acotado superiormente, sea $\delta \in \omega_\alpha$ una de tales cotas. Si $\beta \in B$, hay $x \in X$ tal que $x(\beta) = 1$, entonces $\beta \subseteq \beta_x \subseteq \delta$. Por lo tanto, B está acotado superiormente (por δ) en ω_α. Definimos $\rho(X)$ como el supremo de B. Obsérvese que $\rho(X) \in \omega_\alpha$, pues la cota superior δ está en ω_α.

Ahora, sea $C = \{\beta \in \omega_\alpha : \exists y \in Y[y(\beta) = 1]\}$, se puede ver que C está acotado superiormente de manera análoga a lo hecho líneas arriba. Sea $\rho(Y)$ el supremo de C y sea $\epsilon = max\{\rho(X), \rho(Y)\} + 1$. Obsérvese que entonces $\epsilon \in \omega_\alpha$.

Definiremos un elemento $t \in Q_\alpha$ que separa a X y a Y, por recursión. Sea $\gamma \in \omega_\alpha$ y supongamos que $t(\delta)$ está definido para cualquier $\delta \in \gamma$, definimos $t(\gamma)$ como sigue:

i) $t(\gamma) = 1$, si $\gamma = \epsilon$ o si hay $x \in X$ tal que $x(\gamma) = 1$ y $x \restriction_\gamma = t \restriction_\gamma$;

ii) $t(\gamma) = 0$, en cualquier otro caso.

Observemos que si $t(\gamma) = 1$, $\gamma \subseteq \epsilon$, pues en el caso en que haya $x \in X$ tal que $x(\gamma) = 1$, $\gamma \in B$ y $\gamma \subseteq sup(B) \in \epsilon$. También obsérvese que si $z \in X \cup Y$, $z(\epsilon) = 0$.

Veamos que $X <_{Q_\alpha} t$. Sea $x \in X$, como $x(\epsilon) = 0$ y $t(\epsilon) = 1$, $t \neq x$. Sea β el primer ordinal tal que $x(\beta) \neq t(\beta)$, entonces $x\restriction_\beta = t\restriction_\beta$. Si, además, $x(\beta) = 1$, por la definición de t ocurre que $t(\beta) = 1$, lo cual es una contradicción. Entonces $x(\beta) = 0$ y $t(\beta) = 1$, lo que significa que $x <_{Q_\alpha} t$. Por lo tanto, $X <_{Q_\alpha} t$.

Nos queda demostrar que $t <_{Q_\alpha} Y$. Sea $y \in Y$, como $y(\epsilon) = 0$ y $t(\epsilon) = 1$, $y \neq s$. Sea γ el primer ordinal tal que $y(\gamma) \neq t(\gamma)$, entonces $y\restriction_\gamma = t\restriction_\gamma$.

Supongamos, para llegar a una contradicción que $t(\gamma) = 1$ y $y(\gamma) = 0$, por la definición de t tendríamos que $\gamma = \epsilon$ o $\gamma \in \epsilon$ y hay $x \in X$ tal que $x(\gamma) = 1$ y $x\restriction_\gamma = t\restriction_\gamma$.

En el segundo caso, como $x\restriction_\gamma = y\restriction_\gamma$ y $y(\gamma) = 0$, obtendríamos que $y <_{Q_\alpha} x$, lo cual contradice el que $X < Y$.

Si se diera el primer caso, que $\gamma = \epsilon$, entonces $y(\gamma) = y(\epsilon) = 0$, $t(\gamma) = t(\epsilon) = 1$ y

$$y\restriction_\epsilon = y\restriction_\gamma = t\restriction_\gamma = t\restriction_\epsilon .$$

Sea δ el último ordinal tal que $y(\delta) = 1$. Entonces $\delta \subseteq \rho(Y) \in \epsilon$, como $y\restriction_\epsilon = t\restriction_\epsilon$, tenemos que $y\restriction_\delta = t\restriction_\delta$ y $1 = y(\delta) = t(\delta)$. Por la definición de t, tenemos que hay $x \in X$ tal que $x\restriction_\delta = t\restriction_\delta$ y $x(\delta) = 1$. Con lo cual $x\restriction_\delta = y\restriction_\delta$ y $y(\delta) = x(\delta)$, esto aunado al hecho de que si $\delta \in \beta$, $y(\beta) = 0$, dan como resultado que $y \leq_{Q_\alpha} x$, lo cual es una contradicción a la hipótesis $X < Y$. Así, no es posible que $\gamma = \epsilon$.

Por lo anterior, $t <_{Q_\alpha} Y$. Hemos mostrado que $X <_{Q_\alpha} t <_{Q_\alpha} Y$. Por lo tanto, Q_α es un η_α. $\square$

Decimos que un cardinal κ es inaccesible fuerte si y sólo si κ es regular y $\kappa = 2^{<\kappa}$.

Corolario 3.22. *Las siguientes afirmaciones son válidas.*

i) Para cada ordinal α, hay un $\eta_{\alpha+1}$-orden de cardinalidad $2^{\aleph_\alpha}$.

ii) Asumiendo la Hipótesis Generalizada del Continuo (HGC), para cada ordinal α hay un $\eta_{\alpha+1}$-orden de cardinalidad $\aleph_{\alpha+1}$.

iii) Si $\aleph_\alpha$ es un cardinal inaccesible fuerte, entonces hay un η_α-orden de cardinal $\aleph_\alpha$.

iv) Si $\langle L, <\rangle$ es un orden lineal tal que $\omega_{\alpha+1} \not\lesssim \langle L, <\rangle$ y $\omega^*_{\alpha+1} \not\lesssim \langle L, <\rangle$, entonces $|L| \leq 2^{\aleph_\alpha}$.

Demostración. i) Si α es un ordinal, $\aleph_{\alpha+1}$ es regular, con lo cual $Q_{\alpha+1}$ es un $\eta_{\alpha+1}$. Además, ya hemos demostrado que $|Q_{\alpha+1}| = 2^{\aleph_\alpha}$.

ii) Por el teorema anterior, cada $Q_{\alpha+1}$ es un $\eta_{\alpha+1}$. Y asumiendo la Hipótesis Generalizada del Continuo, obtenemos que

$$|Q_{\alpha+1}| = 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}.$$

iii) Como $\aleph_\alpha$ es inaccesible fuerte,

$$\aleph_\alpha = 2^{<\aleph_\alpha} = |Q_\alpha|,$$

y por ser un cardinal regular, Q_α es un η_α.

iv) Por el inciso ii) del teorema 3.20, $\langle L, < \rangle \precsim \langle Q_{\alpha+1}, <_{Q_{\alpha+1}} \rangle$, entonces en particular existe una función inyectiva de L en $Q_{\alpha+1}$, por lo que $L \preceq Q_{\alpha+1} \sim 2^{\aleph_\alpha}$. Por lo tanto, $|L| \leq 2^{\aleph_\alpha}$.

$\square$

Veamos a continuación que los Q_α's con $\aleph_\alpha$ singular no son η_α's.

Sean $\aleph_\alpha$ un ordinal singular y $f : cof(\aleph_\alpha) \to \aleph_\alpha$ cofinal. Definimos la sucesión $A = \{a_i\}_{i \in cf(\aleph_\alpha)} \subseteq Q_\alpha$ como

$$a_i(\delta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \delta \subseteq f(i), \\ 0 & \text{si } f(i) \in \delta. \end{cases}$$

De este modo, $|A| = |\{a_i\}_{i \in cf(\aleph_\alpha)}| = cof(\aleph_\alpha) < \aleph_\alpha$, pues $\aleph_\alpha$ es singular.

Mostraremos que A no está acotado superiormente. Sean $b \in Q_\alpha$, β el último ordinal tal que $b(\beta) = 1$ y γ el primer ordinal tal que $b(\gamma) = 0$. Entonces $\gamma \subseteq s(\beta)$, pero $\gamma \neq \beta$. Como $\beta \in \omega_\alpha$, $s(\beta) \in \omega_\alpha$, por lo que hay $\epsilon \in cof(\aleph_\alpha)$ tal que $s(\beta) \subseteq f(\epsilon)$. De modo que $b \restriction_\gamma = a_{f(\epsilon)} \restriction_\gamma$, y $b(\gamma) = 0$. Como $\gamma \subseteq s(\beta) \subseteq f(\epsilon)$, $a_{f(\epsilon)}(\gamma) = 1$, así, tenemos que $b \restriction_\gamma = a_{f(\epsilon)} \restriction_\gamma$ y $b(\gamma) \in a_{f(\epsilon}(\gamma)$, de modo que $b <_{Q_\alpha} a_{f(\epsilon)}$, lo cual significa que b no es cota superior de A. Por lo tanto, Q_α no es un η_α.

Capítulo 4

Condensaciones y Homogeneidad

En este capítulo desarrollaremos las herramientas llamadas condensaciones y proseguiremos con las condensaciones iteradas, pues gracias a ellas podremos expresar a cualquier orden lineal como una suma densa de órdenes discretos. También con ellas obtendremos algunos resultados interesantes acerca de los órdenes discretos y los η_α's. Posteriormente, introduciremos el concepto de 1-homogeneidad y veremos que, cuando un orden lineal lo cumple, se simplifica la expresión antes mencionada.

4.1. Condensaciones

Recuérdese del capítulo 1 que un intervalo I de un orden lineal $\langle L, < \rangle$ es un subconjunto de L tal que si $x, y \in I$ y $x < z < y$, entonces $z \in I$. Obsérvese que no hemos pedido que los intervalos sean no vacíos o que tengan más de un elemento.

Si tenemos un orden lineal $\langle L, < \rangle$ y una familia de intervalos A de L ajenos dos a dos, $<$ induce un orden en A al que llamaremos $<(<)_A$ de la siguiente manera: si $I, J \in A$, entonces $I <(<)_A J$ si y sólo si $\forall x \in I \forall y \in J (x < y)$. Dado que los elementos de A son intervalos ajenos, para demostrar que $I <(<)_A J$ basta probar que $I \neq J$ y $\exists x \in I \exists y \in J(x < y)$.

Definición 4.1. Sean $\langle L, < \rangle$ un orden lineal, y L' una colección de intervalos de L. Decimos que $\langle L', < (<)_{L'} \rangle$ es una *condensación de* $\langle L, < \rangle$ si y sólo si L' es una partición de L.

La notación $< (<)_{L'}$ parece a primera vista complicada, pero su utilidad saldrá a relucir más adelante en este capítulo, aunque si es claro el conjunto de intervalos y el orden sobre el cual estamos trabajando sólo escribiremos $\ll$. Más aún, en la mayor parte de este capítulo usaremos esta última opción.

Observemos que para definir una condensación $\langle L', \ll \rangle$ sobre $\langle L, < \rangle$ es suficiente especificar a L', pues en cualquier caso el orden $\ll$ es el inducido por $<$ en L'. Es por esto que para definir una condensación sobre $\langle L, < \rangle$ sólo es necesario conocer el conjunto de intervalos ajenos cuya unión es L. .

Si $\langle L', \ll \rangle$ es una condensación de $\langle L, < \rangle$, L' induce una relación de equivalencia sobre L. De manera inversa, si $\sim$ es una relación de equivalencia sobre L de manera que para cada $x \in L$, $[x]_\sim$ es un intervalo, entonces $\langle L/\sim, \ll \rangle$ es una condensación de $\langle L, < \rangle$. Es por esto que, en principio, tenemos dos formas de definir una condensación: *i*) especificando sus elementos y mostrando que cumplen la definición o *ii*) definiendo una relación de equivalencia y verificando que las clases de equivalencia sean intervalos. En ambos casos se toma el orden inducido.

Ejemplos 4.2. Daremos ahora algunos ejemplos de condensaciones e introduciremos la definición de la condensación finita, que usaremos más adelante.

1. En el orden $\langle \mathbb{R}, <_\mathbb{R} \rangle$, la colección de intervalos de la forma $\{[n, n+1) | n \in \mathbb{Z}\}$ es una condensación.

2. Consideremos ahora el conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ con el orden producto. La colección $\{\mathbb{Z} \times \{z\} | z \in \mathbb{Z}\}$ es una condensación.

En los siguientes lemas vemos ejemplos de condensaciones para cualquier orden lineal. Recuérdese que en el capítulo uno, dijimos que la notación $[a, b]$ no necesariamente implica que $a \leq b$, simplemente denota a todos los elementos que están entre a y b o son a o b.

Teorema 4.3. *Si $\langle L, < \rangle$ es un orden lineal, definimos la siguiente relación sobre L, si $x, y \in L$, $x \sim_{\mathrm{f}(<)} y$ si y sólo si $[x, y]$ es finito. Entonces $\sim_{\mathrm{f}(<)}$ induce una condensación sobre L a la que llamamos la condensación finita.*

Demostración. El demostrar que es reflexiva y simétrica es sencillo, pues para cualesquiera $x, y \in L$, $[x, x] = \{x\}$ y $[x, y] = [y, x]$, pero el demostrar que es transitiva requiere revisar varios casos. Sean $x, y, z \in L$, tales que $x \sim_{\mathrm{f}(<)} y$ y $y \sim_{\mathrm{f}(<)} z$, entonces $[x, y]$ y $[y, z]$ son finitos.

Supongamos que $x \leq y$. Si $z \leq x$,

$$[x, z] = [z, x] \subseteq [z, y] = [y, z],$$

con lo que $[x, z]$ es finito, lo que implica que $x \sim_{\mathrm{f}(<)} z$. Supongamos que $x \leq z \leq y$, $[x, z] \subseteq [x, y]$, por lo que $[x, z]$ es finito y $x \sim_{\mathrm{f}(<)} z$. Si por otro lado, $y \leq z$, $[x, z] = [x, y] \cup [y, z]$, por lo que $[x, z]$ es finito y $x \sim_{\mathrm{f}(<)} z$.

El caso en que $y \leq x$ se verifica de manera análoga. □

Lema 4.4. *Si $\langle L, < \rangle$ es un orden lineal, definimos la siguiente relación sobre L, $x \sim_b y$ si y sólo $\langle [x, y], < \rangle$ es un buen orden. Entonces $\sim_b$ induce una condensación, llamada la condensación del buen orden.*

Demostración. De manera similar al lema anterior, la reflexividad y la simetría son fáciles de demostrar, y la transitividad se puede demostrar de manera análoga a como se hizo líneas arriba, sólo que ahora se hará referencia a buen orden en lugar de a la finitud. □

Cuando sea claro qué orden lineal estamos condensando, sólo escribiremos $\sim_{\mathrm{f}}$ en lugar de $\sim_{\mathrm{f}(<)}$ y $[x]_{\mathrm{f}}$ para las clase de equivalencia de $x \in L$. Observemos que de hecho $\langle L/\sim_{\mathrm{f}}, \ll\rangle$ es un orden lineal, por lo que podemos condensarlo a él como hicimos con $\langle L, <\rangle$ y referirnos a sus elementos o intervalos como con cualquier otro orden lineal, por ejemplo, si $x, y \in L$ $[[x]_{\mathrm{f}}, [y]_{\mathrm{f}}]$ denota a los elementos de $L/\sim_{\mathrm{f}}$ entre $[x]_{\mathrm{f}}$ y $[y]_{\mathrm{f}}$, junto con $[x]_{\mathrm{f}}$ y $[y]_{\mathrm{f}}$ mismos. Así, podemos iterar ésta acción, pues cada vez que condensamos, obtenemos un orden lineal.

Lema 4.5. *Si $\langle L, <\rangle$ es un orden lineal, entonces para cada $x \in L$, $[x]_{\mathrm{f}}$ tiene tipo de orden finito, ω, ω^* o ζ.*

Demostración. Sea $x \in L$, veamos que cualquier subconjunto no vacío de $[x]_{\mathrm{f}}$ acotado superiormente tiene máximo y cualquier subconjunto no vacío de $[x]_{\mathrm{f}}$ acotado inferiormente tiene mínimo. Una vez verificado esto, haremos un análisis, con el que obtendremos que $[x]_{\mathrm{f}}$ tiene tipo de orden finito, ω, ω^* o ζ.

Sea $X \subseteq [x]_{\mathrm{f}}$ no vacío y acotado superiormente. Tomemos $y \in X$ y $a \in [x]_{\mathrm{f}}$ una cota superior de X. Tenemos que $y \in [y, a] \cap X$ y además $[y, a]$ es finito, pues $y \sim_{\mathrm{f}} x \sim_{\mathrm{f}} a$. Por lo tanto, $[y, a] \cap X$ tiene máximo, digamos b. Veamos que b es también el máximo de X.

Si $z \in X$, $z < y$ o $y \leq z$. Si $z < y$, $z < y \leq b$. Si $y \leq z$, $z \in [y, a] \cap X$. Por lo tanto, $z \leq b$. Esto demuestra que X tiene máximo.

La demostración de que cualquier subconjunto no vacío de $[x]_{\mathrm{f}}$ acotado inferiormente tiene mínimo es similar a la anterior.

Sabemos entonces que para cada $x \in L$, $[x]_{\mathrm{f}}$ cumple que cualquier subconjunto no vacío acotado inferiormente tiene mínimo y cualquier subconjunto no vacío acotado superiormente tiene máximo. Se pueden dar los siguientes casos.

1. Ocurre que $[x]_{\mathrm{f}}$ tiene tanto máximo como mínimo, lo que implica que $[x]_{\mathrm{f}}$ es finito.

2. El conjunto $[x]_{\mathrm{f}}$ tiene mínimo pero no máximo, y por el teorema 1.12, $\langle [x]_{\mathrm{f}}, <\rangle$ es isomorfo a $\langle \mathbb{N}, <_{\mathbb{N}}\rangle = \langle \omega, \in\rangle$.

3. La clase de equivalencia $[x]_{\mathrm{f}}$ no tiene máximo, ni mínimo, por lo que utilizando el teorema 1.13, $\langle [x]_{\mathrm{f}}, <\rangle$ es isomorfo a $\langle \mathbb{Z}, <_{\mathbb{Z}}\rangle$.

4. Si $[x]_{\mathrm{f}}$ no tiene mínimo, pero sí máximo, $\langle [x]_{\mathrm{f}}, <^{-1}\rangle$ cumple las hipótesis del teorema 1.12, por lo que es isomorfo a $\langle \mathbb{N}, <_{\mathbb{N}}\rangle$ y por consecuencia, $\langle [x]_{\mathrm{f}}, <\rangle$ es isomorfo a $\langle \omega, \in\rangle^*$.

□

Es importante que ahora observemos algo que no se hizo explícito al definir los órdenes discretos. Recordemos, un orden $\langle L, <\rangle$ es discreto si no contiene subconjuntos densos, lo que implica que en particular el propio orden $\langle L, <\rangle$ no es denso, es por esto, que un orden no puede ser discreto y denso.

Lema 4.6. *Si $\langle L, <\rangle$ es un orden denso, entonces $\langle L, <\rangle \cong \langle L/\sim_{\mathrm{f}}, \ll\rangle$.*

Demostración. Para esto demostraremos que para cualquier $x \in L$, $[x]_{\mathrm{f}} = \{x\}$.

Sea $x \in L$, supongamos que hay $y \in [x]_{\mathrm{f}}$, $x \neq y$, entonces $[x, y]$ es finito, y por el teorema 3.7 es también discreto. Por otro lado, $\langle L, < \rangle$ es denso y como $[x, y]$ es uno de sus intervalos, $[x, y]$ es denso y, por lo anterior, también discreto, lo cual es una contradicción. El isomorfismo buscado es entonces el que a cada x le asocia su unitario. □

Ejemplos 4.7. Las condensaciones finita y del buen orden son distintas, aunque pueden coincidir en ciertos casos, veamos ejemplos de esto.

1. Si consideramos el orden $\langle \mathbb{Z}, <_{\mathbb{Z}} \rangle$, entonces para cada $x \in \mathbb{Z}$, $[x]_{\mathrm{f}} = \mathbb{Z} = [x]_{\sim_b}$. Observamos que en este ejemplo tanto la condensación finita como la del buen orden coinciden. Es interesante observar además que las clases de equivalencia de la condensación del buen orden no son en general buenos órdenes; tampoco las clases de equivalencia de la condensación finita resultan siempre finitas.

2. En el orden $\langle \omega + \omega, \in \rangle$, tenemos que para cada $x \in L$, $[x]_{\sim_b} = \omega + \omega$. Sin embargo, $[0]_{\mathrm{f}} = \omega$ y
$$[\omega]_{\mathrm{f}} = \omega + \omega \setminus \omega = \{\omega + n : n \in \omega\}.$$
En este ejemplo, las clases de equivalencia de la condensación del buen orden no coinciden con las de la condensación finita.

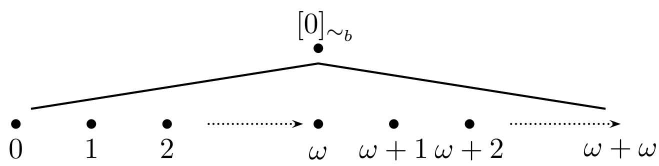

Figura 4.1: Condensación del buen orden

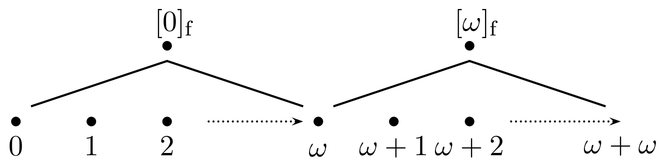

Figura 4.2: Condensación finita

4.2. Condensaciones iteradas

Como ya observamos líneas arriba, el hecho de que la condensación de un orden lineal sea a su vez un orden lineal nos permite volver a condensar el orden lineal resultante.

Sin embargo, los elementos de esta última condensación ya no serían subconjuntos del orden lineal original, por lo que necesitamos hacer algunas adecuaciones a esta iteración de condensaciones.

Definición 4.8. Sea $\langle L, <\rangle$ un orden lineal.
Definimos simultáneamente por recursión, para cada ordinal α tanto la condensación $\langle L_\alpha, <_\alpha\rangle$, como la relación de equivalencia $\sim_\alpha$ y los conjuntos $[x]_\alpha$ de la siguiente manera:

- $\sim_0 = Id_L$, es decir $\sim_0 = \{\langle x, x\rangle : x \in L\}$;
- $L_0 = \{\{x\} | x \in L\} = L/{\sim_0}$;
- $<_0 = <(<)_{L_0}$ y
- $\forall x \in L([x]_0 = \{x\})$.

Si α es un ordinal:

- $\sim_{s(\alpha)} \subseteq L \times L$, tal que $\forall x, y \in L(x \sim_{s(\alpha)} y \leftrightarrow [x]_\alpha \sim_{\mathrm{f}(<_\alpha)} [y]_\alpha)$;
- $L_{s(\alpha)} = L/{\sim_{s(\alpha)}}$;
- $\forall x \in L([x]_{s(\alpha)} = [x]_{\sim_{s(\alpha)}})$ y
- $<_{s(\alpha)} = <(<)_{L_{s(\alpha)}}$.

Si α es un ordinal límite:

- $\sim_\alpha \subseteq L \times L$, tal que $\forall x, y \in L(x \sim_\alpha y \leftrightarrow \exists \beta \in \alpha(x \sim_\beta y))$;
- $L_\alpha = L/{\sim_\alpha}$;
- $\forall x \in L([x]_\alpha = [x]_{\sim_\alpha})$ y
- $<_\alpha = <(<)_{L_\alpha}$.

Lema 4.9. *Se cumplen las siguientes afirmaciones.*

1. *Para cualesquiera $x \in L$ y γ un ordinal límite,* $\Big(\big([x]_\gamma = \bigcup_{\beta\in\gamma} [x]_\beta\big)\Big)$.
2. *Para cualesquiera $x \in L$ y ordinales α y β,* $\big(\alpha \subseteq \beta \to [x]_\alpha \subseteq [x]_\beta\big)$.
3. *Para cualesquiera $x \in L$ y α un ordinal no cero,* $\big([x]_\alpha = \bigcup_{\beta\in\alpha} [x]_{\beta+1}\big)$.

Demostración. 1. Sean $x \in L$ y γ un ordinal límite.

$$\begin{aligned} z \in [x]_\gamma \quad &\text{si y sólo si} \quad z \sim_\gamma x \\ &\text{si y sólo si} \quad \exists \beta \in \gamma(z \sim_\beta x) \\ &\text{si y sólo si} \quad z \in \textstyle\bigcup_{\beta\in\gamma} [x]_\beta. \end{aligned}$$

2. Este hecho se demuestra por inducción usando que $[x]_\alpha \subseteq [x]_{\alpha+1}$, gracias a que $[x]_\alpha \sim_{\mathrm{f}} [x]_\alpha$, junto con el inciso anterior.

3. Este inciso se demuestra por casos. El caso en que α límite se tiene gracias al inciso i) de este lema. Si $s(\delta) = \alpha$, utilizando el inciso anterior y el hecho de que $max\{\beta : \beta \in \alpha\} = \delta$, obtenemos que

$$\bigcup_{\beta \in \alpha} [x]_{\beta+1} = [x]_{\delta+1} = [x]_\alpha.$$

□

Lema 4.10. *Sea $\langle L, <\rangle$ orden lineal. Si $x \in L$, entonces*

$$\forall \alpha \in OR([x]_{\alpha+1} = \bigcup \left[[x]_\alpha\right]_1).$$

Demostración. Sea $x \in L$, entonces:

$$\begin{aligned} y \in \bigcup \left[[x]_\alpha\right]_1 \quad & \text{si y sólo si} \quad \text{hay } z \in \left[[x]_\alpha\right]_1 \text{ tal que } y \in z \\ & \text{si y sólo si} \quad \text{hay } w \in L \text{ tal que } y \in [w]_\alpha \in \left[[x]_\alpha\right]_1 \\ & \text{si y sólo si} \quad [y]_\alpha \in \left[[x]_\alpha\right]_1 \\ & \text{si y sólo si} \quad \left[[x]_\alpha, [y]_\alpha\right] \text{ es finito} \\ & \text{si y sólo si} \quad x \sim_{\alpha+1} y \\ & \text{si y sólo si} \quad y \in [x]_{\alpha+1}. \end{aligned}$$

□

La condensación finita y sus iteraciones generan órdenes colapsando elementos de uno previo, por lo que en principio los que obtenemos son diferentes al inicial. Sin embargo, el siguiente teorema nos indica que hay un momento en el que seguir condensando no tiene sentido.

Teorema 4.11. *Sea $\langle L, <\rangle$ un orden lineal no vacío. Si $|L| = \kappa$, entonces hay un ordinal $\alpha \in \kappa^+$ tal que para cada $x \in L$ y β ordinal con $\alpha \subseteq \beta$, se tiene que $[x]_\alpha = [x]_\beta$.*

Demostración. Veamos por inducción que si α es un ordinal y para cada $x \in L$, $[x]_\alpha = [x]_{\alpha+1}$, entonces para cualquier $x \in L$ y cualquier ordinal γ con $\alpha \subseteq \gamma$, se tiene que $[x_\alpha] = [x]_\gamma$; para esto probaremos que si para cada $x \in L$ $[x]_\alpha = [x]_{\alpha+1}$, entonces

$$\forall x \in L \forall \beta \in OR([x]_\alpha = [x]_{\alpha+\beta}).$$

Los casos $\beta = 0$ y β límite son claros, ya sea por la definición o por la hipótesis de inducción, usando que $\alpha + \beta$ es límite cada que β sea límite.

Sea β un ordinal y supongamos que

$$\forall x \in L([x]_\alpha = [x]_{\alpha+\beta}).$$

Sea $y \in L$,

$$\begin{aligned} y \in [x]_{\alpha+\beta+1} \quad & \text{si y sólo si} \quad [[x]_{\alpha+\beta}, [y]_{\alpha+\beta}] \text{ es finito} \\ & \text{si y sólo si} \quad [[x]_{\alpha}, [y]_{\alpha}] \text{ es finito,} \\ & \text{si y sólo si} \quad x \sim_{\alpha+1} y \\ & \text{si y sólo si} \quad y \in [x]_{\alpha+1} \\ & \text{si y sólo si} \quad y \in [x]_{\alpha}. \end{aligned}$$

De lo anterior podemos concluir que, si para cada $x \in L$, $[x]_\alpha = [x]_{\alpha+1}$, entonces

$$\forall x \in L \forall \gamma \in OR(\alpha \subseteq \gamma \to [x]_\alpha = [x]_\gamma).$$

Si $x \in L$ y α es un ordinal, $[x]_\alpha \subseteq L$ con lo que no es posible que para cualesquiera ordinales α y β con $\alpha \in \beta$ se tenga que $[x]_\alpha \neq [x]_\beta$, y como consecuencia de esto, de lo que acabamos de probar y de que las clases de equivalencia inducidas por las condensaciones iteradas están anidadas, tenemos que hay un ordinal $\alpha \in 2^\kappa$, tal que, $[x]_\alpha \neq [x]_{\alpha+1}$, pues sólo hay 2^κ subconjuntos de L. De hecho,

$$\delta := \{\alpha \in OR | \exists x \in L([x]_\alpha \neq [x]_{\alpha+1})\},$$

es un ordinal, pues $\delta \subseteq 2^\kappa$, lo que implica que es un conjunto y por lo que probamos líneas arriba, es un segmento inicial de ordinales. [1]

Ahora bien, si $\alpha \in \delta$, entonces hay $x \in L$ tal que $[x]_\alpha \neq [x]_{\alpha+1}$, por lo que existe

$$y \in [x]_{\alpha+1} \setminus [x]_\alpha,$$

de modo que $[x]_{\alpha+1} = [y]_{\alpha+1}$ y $[x]_\alpha \neq [y]_\alpha$. Es por esto que, utilizando el axioma de elección, existe una función inyectiva de δ en $L \times L$. Si $E : \mathcal{P}(L) \to L$ es una función de elección, entonces la función $f : \delta \to L \times L$ con la regla $f(\alpha) = \langle x_\alpha, y_\alpha \rangle$, donde

$$x_\alpha = E(\{x \in L : [x]_\alpha \neq [x]_{\alpha+1}\}) \quad \text{y}$$

$$y_\alpha = E(\{y \in L : [x_\alpha]_{\alpha+1} = [y]_{\alpha+1} \wedge [x_\alpha]_\alpha \neq [y]_\alpha\})$$

es inyectiva. Así, $\delta \preceq L \times L$. Si L es finito, $\forall x \in L(L = [x]_1)$, con lo cual $\delta = 1 \in \kappa^+$. Si L es infinito como $\delta \preceq L \times L$, tenemos que $\delta \preceq \kappa$, con lo cual $\delta \in \kappa^+$. Como $\delta \notin \delta$, $\forall x \in L([x]_\delta = [x]_\delta)$.

Por lo tanto, $\delta \in \kappa^+$ y

$$\forall x \in L \forall \beta \in OR\big(\delta \subseteq \beta \to ([x]_\delta = [x]_\beta)\big).$$

□

Es natural ahora pensar qué ocurre en el preciso momento en el que las condesaciones de un orden lineal $\langle L, < \rangle$ empiezan a ser las mismas, es decir, el primer ordinal α en el que la condensación α-ésima es la misma que la $\alpha + 1$-ésima, pues como veremos más adelante, este momento nos indica la "longitud más grande" de los segmentos discretos del orden $\langle L, < \rangle$. De aquí que presentamos la siguiente definición.

[1] Ser un segmento inicial de ordinales implica ser un conjunto transitivo de ordinales.

Definición 4.12. Sea $\langle L, <\rangle$ un orden lineal.

Definimos el f-*rango* de $\langle L, <\rangle$ como el menor ordinal α que cumple que

$$\forall x \in L \forall \beta((\alpha \in \beta \wedge ord(\beta)) \to ([x]_\alpha = [x]_\beta)).$$

A tal ordinal lo denotaremos como $r_{\mathrm{f}}(\langle L, <\rangle)$.

Ahora responderemos algunas preguntas acerca del comportamiento de las condensaciones iteradas y lo que ocurre con el f-rango. Para comenzar hablaremos de lo que ocurre con $\langle L, <\rangle$ cuando hacemos la condensación $r_{\mathrm{f}}(\langle L, <\rangle)$-ésima.

Teorema 4.13. *Si $\langle L, <\rangle$ es un orden lineal y $\alpha = r_{\mathrm{f}}(\langle L, <\rangle)$, entonces $\langle L_\alpha, <_\alpha\rangle$ es un orden denso o es isomorfo a* 1.

Demostración. Supongamos que $\langle L_\alpha, <_\alpha\rangle$ no es isomorfo a 1. Sean $x, y \in L$ tales que $[x]_\alpha <_\alpha [y]_\alpha$. Como $\alpha = r_{\mathrm{f}}(\langle L, <\rangle)$, $\forall l \in L([l]_\alpha = [l]_{\alpha+1})$, también tenemos que $y \notin [x]_\alpha$, pues $[x]_\alpha \neq [y]_\alpha$.

Si $\big[[x]_\alpha, [y]_\alpha\big]$ fuera finito, entonces $x, y \in [x]_{\alpha+1}$, lo cual es una contradicción, pues $[x]_\alpha = [x]_{\alpha+1}$. Entonces $\big[[x]_\alpha, [y]_\alpha\big]$ no es finito, por lo que hay $z \in L$ tal que $[x]_\alpha <_\alpha [z]_\alpha <_\alpha [y]_\alpha$.

Por lo tanto, $\langle L_\alpha, <_\alpha\rangle$ es denso. $\square$

El siguiente teorema nos habla del comportamiento de las clases de equivalencia de cada una de las condensaciones iteradas.

Teorema 4.14. *Si $\langle L, <\rangle$ es un orden lineal y $\alpha = r_{\mathrm{f}}(\langle L, <\rangle)$, entonces para cualquier ordinal $\beta \subseteq \alpha$ y para cualquier $x \in L$, $\langle [x]_\beta, <\rangle \precsim \langle \mathbb{Z}^\beta, <^\beta\rangle$.*

Demostración. Recordemos que $i_{\alpha,\beta}$ es la inclusión canónica de $\mathbb{Z}^\beta$ en $\mathbb{Z}^\alpha$. Demostraremos que para todo $x \in L$ hay una sucesión de morfismos de órdenes $\{f_\beta : [x]_\beta \to \mathbb{Z}^\beta\}_{\beta\in\alpha+1}$ tales que $\{i_{\alpha,\beta} \circ f_\beta\}_{\beta\in\alpha+1}$ es un sistema de funciones compatibles.

Sea $\beta \subseteq \alpha$ un ordinal tal que para cualquier $l \in L$ tenemos definidas las sucesiones $\{f_\delta : [l]_\delta \to \mathbb{Z}^\delta\}_{\delta\in\beta}$.

Si $\beta = 0$, entonces para cada $x \in L$, definimos $f_0 : [x]_0 \to \mathbb{Z}^0$ tal que $f_0(x) = \emptyset$.

Supongamos que $\beta = \beta' + 1$. Recordemos que para cada $l \in L$

$$\bigcup \big[[l]_{\beta'}\big]_1 = [l]_{\beta'+1} = [l]_\beta$$

y que $\zeta^{\beta'+1} = \zeta^{\beta'} \cdot \zeta$, con lo cual para demostrar que $\langle [l]_\beta, <\rangle \precsim \langle \mathbb{Z}^\beta, <^\beta\rangle$ basta mostrar que hay un morfismo de $[l]_\beta = [l]_{\beta'+1}$ en $\mathbb{Z}^{\beta'} \cdot \mathbb{Z}$.

Sea $x \in L$, como $\big[[x]_{\beta'}\big]_1$ tiene tipo de orden finito, ω, ω^* o ζ, hay un morfismo $g : \big[[x]_{\beta'}\big]_1 \to \mathbb{Z}$, más aún, podemos pedir que $g([x]_{\beta'}) = 0$. Sea $I = im(g)$ y para cada $i \in I$ y $z \in [[x]_{\beta'}]_1$, elegimos un morfismo $g_i : z \to \mathbb{Z}^{\beta'}$, usando la hipótesis de inducción, donde $g(z) = i$ y además $g_0 = f_{\beta'}$.

Definimos $f_\beta : [x]_\beta \to \mathbb{Z}^{\beta'} \times \mathbb{Z}$ de forma que $f_\beta(y) = \langle g_i(y), i\rangle$, donde $g([y]_{\beta'}) = i$. Veamos que f_β es un morfismo. Sean $a, b \in [x]_\beta$, tales que $a < b$. Si $[a]_{\beta'} \neq [b]_{\beta'}$, entonces

$[a]_{\beta'} <_{\beta'} [b]_{\beta'}$ y, por lo tanto, $g([a]_{\beta'}) <_{\mathbb{Z}} g([b]_{\beta'})$. Así, de la definición de orden de un producto, obtenemos que

$$f(a) = \langle g_i(a), i\rangle <. \langle g_j(b), j\rangle = f(b),$$

donde $g([a]_{\beta'}) = i$ y $g([b]_{\beta'}) = j$.

Si $[a]_{\beta'} = [b]_{\beta'}$, como cada g_i es un morfismo, si $i = g([a]_{\beta'}) = g([b]_{\beta'})$, tenemos que $g_i(a) <^{\beta'} g_i(b)$, por lo que $f_\beta(a) <. f_\beta(b)$. La propiedad de compatibilidad entre la sucesión $\{i_{\alpha,\delta} \circ f_\delta\}_{\delta\subseteq\beta}$ se tiene gracias a que si $y \in [x]_{\beta'}$, entonces

$$f_\beta(y) = i_{\beta,\beta'} \circ f_{\beta'}(y) \quad \text{y}$$

$$\bigcup\{dom(i_{\alpha,\delta} \circ f_\delta) : \delta \in \beta\} = [x]_{\beta'}.$$

Si β es límite y tenemos definida la sucesión $\{f_\delta\}_{\delta\in\beta}$, de forma que para cada $\delta \in \beta$ las colecciones $\{i_{\delta,\epsilon} \circ f_\epsilon\}_{\epsilon\in\delta}$ son compatibles, entonces definimos

$$f_\beta = \bigcup_{\delta\in\beta} i_{\beta,\delta} \circ f_\delta.$$

Así definida, f_β resulta ser un morfismo (al final de la demostración verificaremos que f_β sea una función), además cumple con la siguiente propiedad

$$i_{\alpha,\beta} \circ \Big[\bigcup_{\delta\in\beta} i_{\beta,\delta} \circ f_\delta\Big] = \bigcup_{\delta\in\beta}(i_{\alpha,\beta} \circ i_{\beta,\delta} \circ f_\delta) = \bigcup_{\delta\in\beta} i_{\alpha,\delta} \circ f_\delta$$

Así

$$i_{\alpha,\beta} \circ f_\beta = i_{\alpha,\beta} \circ \Big[\bigcup_{\delta\in\beta} i_{\beta,\delta} \circ f_\delta\Big] = \bigcup_{\delta\in\beta} i_{\alpha,\delta} \circ f_\delta,$$

por lo cual se sigue cumpliendo la propiedad de compatibilidad.

Para ver que f_β es una función, debemos mostrar que $\{i_{\beta,\delta} \circ f_\delta\}_{\delta\in\beta}$ son compatibles. Sean $\delta, \delta' \in \beta$, con $\delta' \in \delta$ y $l \in dom(f_\delta) \cap dom(f_{\delta'})$. Por la hipótesis de inducción tenemos que $f_\delta(l) = i_{\delta,\delta'} \circ f_{\delta'}(l)$, por lo cual,

$$i_{\beta,\delta} \circ f_\delta(l) = i_{\beta,\delta} \circ i_{\delta,\delta'} \circ f_{\delta'}(l) = i_{\beta,\delta'} \circ f_{\delta'}(l).$$

□

Hemos hablado de algunas propiedades de las condensaciones iteradas de un orden $\langle L, <\rangle$, pero no de cómo esta herramienta se ajusta a nuestra meta. La condensación finita de un orden colapsa elementos x y y cuyo intervalo $[x, y]$ sea finito, pero precisamente todos los intervalos cerrados de $\mathbb{Z}$ son de este tipo. La segunda condensación iterada de $\langle L, <\rangle$, no sólo colapsa a aquellos elementos $[x, y]$ cuyo intervalo entra en $\mathbb{Z}$, sino a aquéllos cuyo intervalo $[x, y]$ es inmersible en $\mathbb{Z}^2$. Siguiendo con esta explicación, los elementos x y y colapsados en la iteración α-ésima, son aquéllos cuyo intervalo $[x, y]$ puede meterse en $\mathbb{Z}^\alpha$. Por lo que en la condensación correspondiente a $r_{\mathrm{f}}(\langle L, <\rangle)$, al ser la última que tiene sentido hacer, estamos condensando a los elementos x y y de $\langle L, <\rangle$ cuyo intervalo es discreto; es decir, las clases de equivalencia son los "trozos discretos" del orden $\langle L, <\rangle$, algo que se obtiene como consecuencia del próximo resultado que presentamos, el corolario 4.15. Más aún, si $\sim_d$ es la relación dada por $x \sim_d y$ si y sólo si $[x, y]$ es discreto, $\sim_d$ induce una condensación en $\langle L, <\rangle$ y $\langle L/\sim_d, \ll\rangle \cong \langle L_\alpha, <_\alpha\rangle$, si $\alpha = r_{\mathrm{f}}(\langle L, <\rangle)$. En los siguientes corolarios veremos por qué en este trabajo usamos la condensación finita y sus iteraciones.

Corolario 4.15. *Sea $\langle L, <\rangle$ un orden lineal. $\langle L, <\rangle$ es un orden lineal discreto si y sólo si hay un ordinal γ tal que $\langle L, <\rangle \precsim \mathbb{Z}^\gamma$.*

Demostración. Sea $\alpha = r_{\mathrm{f}}(\langle L, <\rangle)$. Por el teorema 4.13, L_α, es denso o isomorfo a 1.

Si L_α es denso, usando el Axioma de Elección, podemos elegir un elemento y_z de cada $z \in L_\alpha$, por lo que $\{y_z : z \in L_\alpha\}$ sería denso, lo cual es una contradicción a que $\langle L, <\rangle$ es discreto.

Entonces, L_α es isomorfo a 1, lo que significa que para cualquier $l \in L$, $[l]_\alpha = L$. Por lo tanto, $\langle L, <\rangle \precsim \mathbb{Z}^\alpha$. El recíproco es consecuencia de que cada $\mathbb{Z}^\gamma$ sea discreto. □

En el párrafo anterior a este corolario, mencionamos que las clases de equivalencia de la última condensación son los "trozos discretos", aclaremos esta afirmación. Por el teorema 4.14, la longitud de una clase de equivalencia de una condensación iterada del orden $\langle L, <\rangle$ está acotada por $\mathbb{Z}^\alpha$, donde $\alpha = r_{\mathrm{f}}(\langle L, <\rangle)$. Ahora bien, se puede demostrar por inducción que $[x, y] \precsim \mathbb{Z}^\beta$ si y sólo si $y \in [x]_\beta$. Así, utilizando el corolario anterior, y de nuevo el teorema 4.14, obtenemos que la longitud de un intervalo cerrado y discreto de $\langle L, <\rangle$ esta acotada por $\mathbb{Z}^\alpha$. Es está la razón por la que se utilizó la condensación finita y sus iteraciones, pues gracias a ella y a la inducción, obtenemos una mejor imagen de cómo luce la última iteración, además de cómo lucen las clases de equivalencia de cualquier iteración. Esto nos permite manejar mejor la última condensación iterada, lo cual veremos en los siguientes corolarios.

Corolario 4.16. *Si $\langle L, <\rangle$ es un orden lineal, entonces $\langle L, <\rangle$ es discreto, o hay un orden denso $\langle \mathbb{D}, <_{\mathbb{D}}\rangle$ y para cada $d \in \mathbb{D}$ órdenes discretos $\mathcal{D}_d$ tales que*

$$\langle L, <\rangle \cong \sum_{d \in \mathbb{D}} \mathcal{D}_d.$$

Demostración. Sea $\alpha = r_{\mathrm{f}}(\langle L, <\rangle)$. Si L_α es isomorfo a 1, entonces $L = [l]_\alpha$ para cualquier $l \in L$ y por el teorema y corolario anteriores obtenemos que $\langle L, <\rangle$ es discreto.

Supongamos que L_α es denso, entonces $\langle L, <\rangle \cong \sum_{X \in L_\alpha} X$, donde cada X es una clase de equivalencia de la condensación α-ésima y en la suma usamos el orden $<_\alpha$. Además cada $X \in L_\alpha$ es discreto por el teorema y corolario anteriores. □

Corolario 4.17. *Si $\langle L, <\rangle$ es un orden lineal y $\kappa = |L|$, entonces hay un ordinal $\alpha \in \kappa^+$ tal que $\langle L, <\rangle \precsim \mathbb{Z}^\alpha$, o hay ordinales $\alpha, \beta \in \kappa^+$ tales que $\langle L, <\rangle \precsim \mathbb{Z}^\alpha \cdot \mathbb{D}$, donde $\mathbb{D}$ es un η_β.*

Demostración. Sea $\alpha = r_{\mathrm{f}}(\langle L, <\rangle)$. Si L_α es isomorfo a 1, entonces $L = [l]_\alpha$ para cualquier $l \in L$, usando el teorema y corolarios anteriores obtenemos que $\langle L, <\rangle \precsim \mathbb{Z}^\alpha$.

Supongamos que L_α es denso, entonces sea $\langle \mathbb{D}, <_{\mathbb{D}}\rangle$ un η_β, donde $|L_\alpha| = \aleph_\beta$. Como para cada $l \in L$, $[l]_\alpha \precsim \mathbb{Z}^\alpha$, entonces tenemos que $\langle L, <\rangle \precsim \mathbb{Z}^\alpha \cdot \mathbb{D}$. El que $\alpha \in \kappa^+$ se sigue del teorema 4.11; el que $\beta \in \kappa^+$ es porque $|L_\alpha| \subseteq |L| = \kappa$. □

4.3. Órdenes 1-homogéneos

En esta sección introduciremos el concepto de 1-homogeneidad, el cual nos permitirá simplificar la expresión de "suma densa de órdenes discretos" a "producto de un discreto por un denso", pero además este último orden discreto no será nada menos que un $\mathbb{Z}^\alpha$.

Definición 4.18. Sean $\langle L, <\rangle$ un orden lineal y $n \in \omega$.
Decimos que $\langle L, <\rangle$ es 1-*homogéneo* si y sólo si para cualesquiera $x, y \in L$ hay un automorfismo f de $\langle L, <\rangle$, tal que $f(x) = y$.
Decimos que $\langle L, <\rangle$ es n-*homogéneo* si y sólo si para cualquier número natural $m \subseteq n$ y para cualesquiera elementos de L, $a_1 < ... < a_m$ y $b_1 < ... < b_m$, existe un automorfismo f de $\langle L, <\rangle$ tal que para cada $i \leq m$, $f(a_i) = b_i$.

Lema 4.19. *1. Si $\langle L, <\rangle$ es 1-homogéneo y tiene primer o último elemento, entonces $\langle L, <\rangle \cong 1$.*

2. Si $\langle L, <\rangle$ es 1-homogéneo y $\langle L, <\rangle \ncong 1$, entonces L es infinito.

Demostración. 1. Supongamos que $2 \leq |L|$ y que $\langle L, <\rangle$ tiene último elemento. Sea $l \in L$ el último elemento de $\langle L, <\rangle$ y sea $x \in L$ con $x \neq l$. Como $\langle L, <\rangle$ es 1-homogéneo, hay un automorfismo f tal que $f(x) = l$, sabemos que $x < l$, por lo que $l = f(x) < f(l)$, lo cual es una contradicción pues l es el último elemento de $\langle L, <\rangle$.

El caso en que $\langle L, <\rangle$ tenga primer elemento es análogo al anterior.

2. Demostraremos que para cada elemento de L existe otro mayor. Sea $x \in L$, como $\langle L, <\rangle \ncong 1$, hay $y \in L$, $x \neq y$. Si $x < y$, y es el elemento buscado. Si $y < x$, como $\langle L, <\rangle$ es 1-homogéneo, entonces hay un morfismo f, tal que $f(y) = x$. Dado que $y < x$, se tiene que $x = f(y) < f(x)$. Así, $f(x)$ es el elemento buscado.

□

Proposición 4.20. *Sea $\langle L, <\rangle$ un orden lineal. Las siguiente afirmaciones son equivalentes.*

i) $\langle L, <\rangle$ es 2-homogéneo.

ii) $\langle L, <\rangle$ es n-homogéneo para cualquier natural n mayor que 2.

iii) $\langle L, <\rangle$ es n-homogéneo para algún natural n mayor que 2.

Demostración. Son claras las implicaciones del inciso *ii*) al *iii*), y del *iii*) al *i*), ya sea por el mismo enunciado o la definición. Veamos que el inciso *i*) implica el inciso *ii*). Sea $n \in \mathbb{N}$, tal que $2 \subseteq n$ y sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $0 \in k \in n$. Sean $a_1, ..., a_k, b_1, ..., b_k \in L$. Si $k = 1$, como $\langle L, < \rangle$ es 2-homogéneo, es 1-homogéneo y hay un automorfismo llevando a a_1 en b_1. En otro caso, como $\langle L, < \rangle$ es 2-homogéneo, para cada $i \in \{1, ..., k-1\}$, hay un automorfismo f_i tal que $f_i(a_i) = b_i$ y $f_i(a_{i+1}) = b_{i+1}$.

Definimos $g : L \to L$ tal que para cada $x \in L$

$$g(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \leq a_1, \\ f_i(x) & \text{si } a_i < x \leq a_{i+1} \text{ y} \\ f_{k-1}(x) & \text{si } a_{k-1} < x. \end{cases}$$

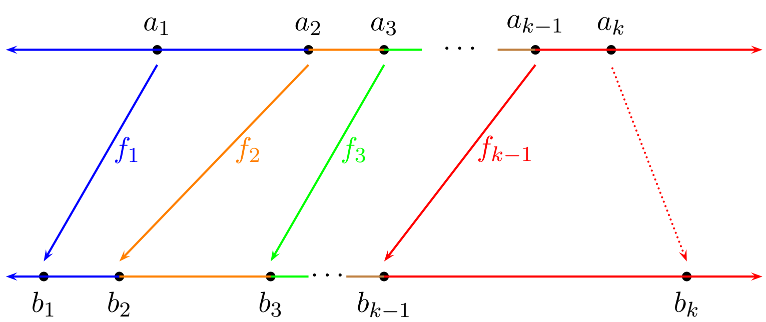

Figura 4.3: Comportamiento de g.

El que g sea sobre es gracias a que $\langle L, < \rangle$ es un orden lineal, pues los conjuntos $\{x \in L : x \leq b_1\}$, $\{x \in L : b_k < x\}$ y $(b_i, b_{i+1}]$ tal que $1 \leq i < k$ forman una partición de L.

Observemos que si $a_i \leq x$, obtenemos que $f_i(x) \leq g(x)$ y si $x \leq a_i$, entonces $g(x) \leq f_i(x)$.

Veamos que g es un morfismo. Sean $x, y \in L$, tales que $x < y$.

Si $y \leq a_1$, $a_k \leq x$, o $a_i \leq x < y \leq a_{i+1}$, entonces

$$g(x) = f_j(x) < f_j(y) = g(y),$$

donde $j = 1$, $j = k$, o $j = i$ correspondientemente.

Si $x < a_1 \leq y$, entonces $g(x) = f_1(x) < f_1(a_1) \leq f_1(y) \leq g(y)$.

Si $x \leq a_k < y$, entonces $g(x) \leq f_k(x) \leq f_k(a_k) < f_k(y) = g(y)$.

Si hay $i, j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$ tales que $a_i \leq x < a_{i+1}$ y $a_j < y \leq a_{j+1}$, entonces $i \in j$, por lo que $i + 1 \in j$ y $b_{i+1} \leq b_j$ de manera que

$$g(x) \leq f_{i+1}(x) < f_{i+1}(a_{i+1}) = b_{i+1} \leq b_j = f_j(a_j) \leq f_j(y) = g(y).$$

Por lo anterior, g es un automorfismo. $\square$

Lema 4.21. *Si $\langle A, <_A \rangle$ y $\langle B, <_B \rangle$ son dos órdenes lineales 1-homogéneos, entonces $\langle A, <_A \rangle \cdot \langle B, <_B \rangle$ y $\langle A, <_A \rangle^*$ son 1-homogéneos.*

Demostración. Si $\langle A, <_A \rangle$ es 1-homogéneo y $a_1, a_2 \in A$, el hecho de que hay un morfismo $g : \langle A, <_A \rangle^* \to \langle A, <_A \rangle^*$ tal que $g(a_1) = a_2$, se basa en que haya un morfismo $f : \langle A, <_A \rangle \to \langle A, <_A \rangle$, tal que $f(a_1) = a_2$. Esta misma función f es un automorfismo de $\langle A, <_A \rangle^*$, con lo cual $\langle A, <_A \rangle^*$ es 1-homogéneo.

Supongamos que $\langle A, <_A \rangle$ y $\langle B, <_B \rangle$ son 1-homogéneos. Sean

$$\langle a_1, b_1 \rangle, \langle a_2, b_2 \rangle \in A \times B.$$

Por la 1-homogeneidad, hay morfismos

$$f : \langle A, <_A \rangle \to \langle A, <_A \rangle \quad \text{y} \quad g : \langle B, <_B \rangle \to \langle B, <_B \rangle,$$

tales que $f(a_1) = a_2$ y $g(b_1) = b_2$. La función $f \cdot g : A \times B \to A \times B$ con regla de correspondencia $f \cdot g(\langle x, y \rangle) = \langle f(x), g(y) \rangle$ es un automorfismo de $\langle A, <_A \rangle \cdot \langle B, <_B \rangle$ y cumple que $f \cdot g(\langle a_1, b_1 \rangle) = \langle a_2, b_2 \rangle$. Por lo tanto, $\langle A, <_A \rangle \cdot \langle B, <_B \rangle$ es 1-homogéneo. □

Ejemplos 4.22.

1. Los conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ cada uno con su orden usual son 1-homogéneos. La función de translación es la que permite esto, es decir, si a, b son números enteros, racionales o reales, la función f, tal que $f(x) = x + b - a$ es la que atestigua que estos conjuntos son 1-homogéneos

2. En cambio, ω y cualquier número ordinal mayor o igual que 2 no son 1-homogéneos, esto por el lema 4.19.

3. El orden $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ no es 1-homogéneo. Formalmente nos referimos al orden $\langle \mathbb{Z}, <_\mathbb{Z} \rangle + \langle \mathbb{Z}, <_\mathbb{Z} \rangle$, el cual es por definición $\langle (\mathbb{Z} \times \{0\}) \cup (\mathbb{Z} \times \{1\}), <_+ \rangle$. Ahora bien, si $\overline{0} = \langle 0, 0 \rangle$ y $\widehat{0} = \langle 0, 1 \rangle$, $\overline{0} <_+ \widehat{0}$. Observemos que si $X \subseteq (\mathbb{Z} \times \{0\}) \cup (\mathbb{Z} \times \{1\})$ y $\widehat{0} <_+ X$, X tiene mínimo. Por otro lado, la colección $A = \{\langle n, 1 \rangle : n \in \mathbb{Z}\}$ cumple que $\overline{0} <_+ A$, pero no tiene mínimo. Si suponemos que $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ es 1-homogéneo, obtendremos una contradicción, ya que habría un automorfismo f de $\langle \mathbb{Z}, <_\mathbb{Z} \rangle + \langle \mathbb{Z}, <_\mathbb{Z} \rangle$, tal que $f(\overline{0}) = \widehat{0}$. Dado que f es un morfismo y $\overline{0} <_+ A$, $\widehat{0} = f(\overline{0}) <_+ f[A]$, por lo cual $f[A]$ tendría un mínimo, digamos a, y dado que f es un automorfismo, $f^{-1}(a)$ sería el mínimo de A. Esto demuestra que $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ no es 1-homogéneo.

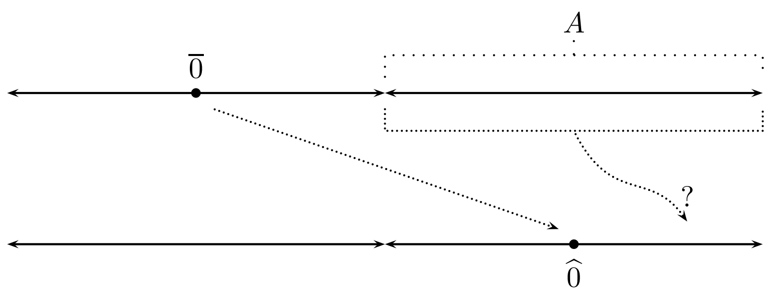

Figura 4.4: $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ no es 1-homogéneo.

Lema 4.23. *Sea $\langle L, < \rangle$ un orden lineal. Si $f : L \to L$ es un automorfismo, entonces para cada ordinal α se tiene que*

- $\forall x \in L(f\big[[x]_\alpha\big] = [f(x)]_\alpha)$, *donde $f[A]$ es la imagen directa de A bajo f, y*
- $f_\alpha : L_\alpha \to L_\alpha$ *tal que*
$$\forall x \in L(f_\alpha\big([x]_\alpha\big) = [f(x)]_\alpha)$$
es un automorfismo.

Demostración. Haremos la prueba de ambos incisos por inducción simultáneamente.

Sea $x \in L$,
$$f\big[[x]_0\big] = f[\{x\}] = \{f(x)\} = [f(x)]_0.$$
Y es claro que f_0 es un isomorfismo.

Sea α un ordinal, supongamos que
$$\forall x \in L(f[[x]_\alpha] = [f(x)]_\alpha)$$
y que f_α es un automorfismo.

Ahora bien, sean $x, y \in L$, entonces
$$\begin{aligned} f(y) \in f\big[[x]_{\alpha+1}\big] \quad & \text{si y sólo si} \quad y \in [x]_{\alpha+1} \\ & \text{si y sólo si} \quad x \sim_{a+1} y \\ & \text{si y sólo si} \quad \big[[x]_\alpha, [y]_\alpha\big] \text{ es finito} \\ & \text{si y sólo si} \quad [f_\alpha([x_\alpha]), f_\alpha([y]_\alpha)] \text{ es finito} \\ & \text{si y sólo si} \quad \big[[f(x)]_\alpha, [f(y)]_\alpha\big] \text{ es finito} \\ & \text{si y sólo si} \quad f(x) \sim_{\alpha+1} f(y) \\ & \text{si y sólo si} \quad f(y) \in [f(x)]_{\alpha+1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f\big[[x]_{\alpha+1}\big] = [f(x)]_{\alpha+1}$.

Veamos que $f_{\alpha+1}$ es automorfismo. Sean $x, y \in L$. Como
$$\begin{aligned} f_{\alpha+1}([x]_{\alpha+1}) = f_{\alpha+1}([y]_{\alpha+1}) \quad & \text{si y sólo si} \quad f\big[[x]_{\alpha+1}\big] = f\big[[y]_{\alpha+1}\big] \\ & \text{si y sólo si} \quad [x]_{\alpha+1} = [y]_{\alpha+1}, \end{aligned}$$
$f_{\alpha+1}$ es una función y además es inyectiva. Si $z \in L$, entonces, como f es un automorfismo, hay $w \in L$ tal que $f(w) = z$, de modo que
$$[z]_{\alpha+1} = [f(w)]_{\alpha+1} = f_{\alpha+1}([w]_{\alpha+1}).$$

Por lo que $f_{\alpha+1}$ es sobre. Sean $x, y \in L$, supongamos que $[x]_{\alpha+1} <_{\alpha+1} [y]_{\alpha+1}$, de modo que $[x]_{\alpha+1} \neq [y]_{\alpha+1}$. Como $f_{\alpha+1}$ es inyectiva,
$$[f(x)]_{\alpha+1} = f_{\alpha+1}([x]_{\alpha+1}) \neq f_{\alpha+1}([y]_{\alpha+1}) = [f(y)]_{\alpha+1}.$$

También se tiene que $x < y$ y f es automorfismo por lo que $f(x) < f(y)$. Entonces $[f(x)]_{\alpha+1} <_{\alpha+1} [f(y)]_{\alpha+1}$. Por lo tanto, $f_{\alpha+1}$ preserva el orden.

Así, $f_{\alpha+1}$ es un automorfismo.

Sea γ un ordinal límite, supongamos que para cualquier $\alpha \in \gamma$,

- $\forall x \in L(f[[x]_\alpha]) = [f(x)]_\alpha$ y
- f_α es un automorfismo.

Sean $x, y \in L$. Tenemos que

$$\begin{array}{rll} f(y) \in f\left[[x]_\gamma\right] & \text{si y sólo si} & y \in [x]_\gamma \\ & \text{si y sólo si} & \text{hay } \alpha \in \gamma \text{ tal que } y \in [x]_\alpha \\ & \text{si y sólo si} & \text{hay } \alpha \in \gamma \text{ tal que } f(y) \in f\left[[x]_\alpha\right] \\ & \text{si y sólo si} & \text{hay } \alpha \in \gamma \text{ tal que } f(y) \in [f(x)]_\alpha \\ & \text{si y sólo si} & f(y) \in [f(x)]_\gamma. \end{array}$$

Por lo tanto, $f\left[[x]\right]_\gamma = [f(x)]_\gamma$. Ahora,

$$\begin{array}{rll} [x]_\gamma = [y]_\gamma & \text{si y sólo si} & f\left[[x]_\gamma\right] = f\left[[y]_\gamma\right] \\ & \text{si y sólo si} & [f(x)]_\gamma = [f(y)]_\gamma \\ & \text{si y sólo si} & f_\gamma([x]_\gamma) = f_\gamma([y]_\gamma). \end{array}$$

De manera que f_γ es una función inyectiva. Si $z \in L$, entonces hay $w \in L$ tal que $f(w) = z$, con lo cual, $f_\gamma([w]_\gamma) = [f(w)]_\gamma = [z]_\gamma$. Así que f_γ es sobre. Si $[x]_\gamma < [y]_\gamma$, entonces $[x]_\gamma \neq [y]_\gamma$ y $x < y$, de modo que

$$[f(x)]_\gamma = f_\gamma([x]_\gamma) \neq f_\gamma([y]_\gamma) = [f(y)]_\gamma$$

y $f(x) < f(y)$, por lo tanto, $f_\gamma([x]_\gamma) <_\gamma f_\gamma([y]_\gamma)$. Así, f_γ preserva el orden.

Por lo tanto, f_γ es un automorfismo. □

Corolario 4.24. *Sean $\langle L, < \rangle$ un orden lineal y $f : L \to L$ un automorfismo. Se tiene que para cualquier ordinal α y cualesquiera $x, y \in L$ si $f(x) = y$, entonces $f{\restriction}_{[x]_\alpha}$ es un isomorfismo entre $[x]_\alpha$ y $[y]_\alpha$.*

Demostración. Como f es un automorfismo, $f{\restriction}_{[x]_\alpha}$ es un isomorfismo entre $[x]_\alpha$ y $f[[x]_\alpha]$, además, por el teorema anterior, $f[[x]_\alpha] = [y]_\alpha$. □

Corolario 4.25. *Sean $\langle L, < \rangle$ un orden lineal. Si $\langle L, < \rangle$ es 1-hommogéneo, entonces para cualquier ordinal α y cualquier $l \in L$, $\langle [l]_\alpha, < \rangle$ es 1-homogéneo.*

Demostración. Sean α un ordinal, $l \in L$, y $x, y \in [l]_\alpha$. Como $\langle L, < \rangle$ es 1-homogéneo, hay un automorfismo $f : L \to L$, tal que $f(x) = y$. Así, por el corolario anterior, $f{\restriction}_{[x]_\alpha}$ es un isomorfismo entre $[x]_\alpha = [l]_\alpha$ y $[y]_\alpha = [l]_\alpha$, es decir, un automorfismo de $\langle [l]_\alpha, < \rangle$. □

Teorema 4.26. *Sea $\langle L, < \rangle$ un orden lineal no vacío.*

Si $\langle L, < \rangle$ es 1-homogéneo, entonces:

1. *$\langle L, < \rangle$ es discreto; o*

2. *hay $\langle D, <_D\rangle$ denso y $\langle \mathcal{D}, <_{\mathcal{D}}\rangle$ discreto, ambos 1-homogéneos, tales que*

$$\langle L, <\rangle \cong \langle \mathcal{D}, <_{\mathcal{D}}\rangle \cdot \langle D, <_D\rangle.$$

Demostración. Para cualesquiera $a, b \in L$, hay $f : L \to L$, tal que $f(a) = b$. Por el corolario anterior, se tiene que para cualquier ordinal β, $[a]_\beta \cong [b]_\beta$.

Sean $\alpha = r_{\mathrm{f}}(L)$, $D = L_\alpha$, $a_0 \in L$ y $\mathcal{D} = [a_0]_\alpha$.

Tenemos que para cualquier $a \in L$ hay un isomorfismo $h : [a]_\alpha \to [a_0]_\alpha$, por el Axioma de Elección, para cada $x \in L_\alpha = D$, elijamos un isomorfismo $h_x : x \to [a_0]_\alpha$. Definimos $h : L \to \mathcal{D} \times D$ como

$$h(a) = \langle h_{[a]_\alpha}(a), [a]_\alpha\rangle.$$

Veamos que h es un isomorfismo.

Sean $a, b \in L$, supongamos que $a < b$, entonces $[a]_\alpha \leq [b]_\alpha$.

Si $[a]_\alpha < [b]_\alpha$, entonces $h(a) < h(b)$.

Si $[a]_\alpha = [b]_\alpha$, como $h_{[a]_\alpha}$ es un isomorfismo, entonces $h_{[a]_\alpha}(a) < h_{[a]_\alpha}(b)$, por lo tanto, $h(a) < h(b)$.

Es por esto que h es inyectiva y, además es un morfismo de órdenes.

Sólo queda mostrar que h es sobre.

Sea $\langle x, y\rangle \in \mathcal{D} \times D$, entonces hay $a \in L$ tal que $y = [a]_\alpha$, y como $h_{[a]_\alpha}$ es un isomorfismo, hay $b \in [a]_\alpha = [b]_\alpha$ tal que $h_{[a]_\alpha}(b) = x$, de manera que

$$h(b) = \langle h_{[b]_\alpha}(b), [b]_\alpha\rangle = \langle h_{[a]_\alpha}(b), [a]_\alpha\rangle = \langle x, y\rangle.$$

Por lo tanto, h es sobre.

El que el orden $\langle D. <_D\rangle$ sea 1-homogéneo es consecuencia del segundo punto del lema 4.23. Por otro lado, tenemos que $\langle \mathcal{D}, <_{\mathcal{D}}\rangle = \langle [a_0], <\rangle$, y por el corolario anterior, $\langle [a_0], <\rangle$ es 1-homogéneo. □

Lema 4.27. *Sean $\langle L, <\rangle$ discreto y 1-homogéneo y $a \in L$, si $[a]_\alpha \neq [a]_{\alpha+1}$ para algún $\alpha \in OR$, entonces hay $a_i \in L$, $i \in \mathbb{Z}$, tales que*

$$[a]_{\alpha+1} = \bigcup \{[a_i]_\alpha | i \in \mathbb{Z}\},$$

más aún

$$[a]_{\alpha+1} \cong \sum_{i\in\mathbb{Z}} [a_i]_\alpha.$$

Demostración. Por el lema 4.10, tenemos que

$$[a]_{\alpha+1} = \bigcup \left[[a]_\alpha\right]_1 = \bigcup \{[b]_\alpha : \left[[a]_\alpha, [b]_\alpha\right] \text{ es finito}\}.$$

Sabemos por el lema 4.5, que el tipo de orden de $[[a]_\alpha]_1$ es finito, ω, ω^* o ζ, por el lema 4.19, basta demostrar que $[[a]_\alpha]_1$ es 1-homogéneo y que tiene más de un elemento.

Como consecuencia del lema 4.23, y del que $\langle L, <\rangle$ sea 1-homogéneo, $\langle L_1, <_1\rangle$ es 1-homogéneo. Así, por el corolario 4.25, $[[a]_\alpha]_1$ es 1-homogéneo. Por otro lado, tenemos que $[a]_\alpha, [a]_{\alpha+1} \subseteq L$, $[a]_\alpha \subseteq [a]_{\alpha+1}$ y $[a]_\alpha \neq [a]_{\alpha+1}$, por lo que hay $b \in L$ tal que $b \in [a]_{\alpha+1}$ y $b \in [a]_\alpha$, lo cual es equivalente a que hay $b \in L$ tal que $[b]_{\alpha+1} = [a]_{\alpha+1}$ y $[b]_\alpha \neq [a]_\alpha$, de manera que, por la defiicion de condensación iterada $[[a]_\alpha], [b]_\alpha]$ es finito, es decir, $[b]_\alpha \in \big[[a]_\alpha\big]_1$

De lo anterior tenemos que el tipo de orden de $[[a]_\alpha]_1$ es ζ, por lo tanto hay $a_i \in L$ para cada $i \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\big[[a]_\alpha\big]_1 = \{[a_i]_\alpha : i \in \mathbb{Z}\},$$

podemos suponer además que $a = a_0$, entonces

$$[a]_{\alpha+1} = \bigcup \big[[a]_\alpha\big]_1 = \bigcup \{[a_i]_\alpha : i \in \mathbb{Z}\},$$

de hecho por nuestra construcción,

$$[a]_{\alpha+1} \cong \sum_{i\in\mathbb{Z}} [a_i]_\alpha.$$

$\square$

Corolario 4.28. *Si $\langle L, <\rangle$ es discreto y 1-homogéneo, entonces $\langle L, <\rangle \cong \mathbb{Z}^\gamma$ donde $\gamma = r_{\mathrm{f}}(L)$.*

Demostración. La demostración es análoga al teorema 4.15, salvo que ahora para obtener un isomorfismo utilizamos el lema anterior. $\square$

Corolario 4.29. *i) Un orden lineal es 1-homogéneo si y sólo si es isomorfo a $\mathbb{Z}^\alpha$ o $\mathbb{Z}^\alpha \cdot D$ para algún ordinal α y D un orden lineal denso y 1-homogéneo.*

ii) Un orden lineal contable[1] es 1-homogéneo si y sólo si tiene tipo de orden ζ^α o $\zeta^\alpha \cdot \eta$ para algún $\alpha \in \omega_1$.

Demostración. i) Si $\langle L, <\rangle$ es un orden lineal 1-homogéneo, por el teorema 4.26, $\langle L, <\rangle$ es discreto y 1-homogéneo, o existen $\langle \mathcal{D}, <_{\mathcal{D}}\rangle$ discreto y $\langle D, <_D\rangle$ denso ambos 1-homogéneos, tales que $\langle L, <\rangle \cong \langle \mathcal{D}, <_{\mathcal{D}}\rangle \cdot \langle D, <_D\rangle$. Por el corolario anterior, en cualquier caso hay un ordinal α tal que $\langle L, <\rangle \cong \mathbb{Z}^\alpha$ o $\langle L, <\rangle \cong \mathbb{Z}^\alpha \cdot \langle D, <_D\rangle$.

ii) Este resultado es un caso particular del inciso anterior, la restricción para el orden denso se tiene porque $\mathbb{Q}$ es el único orden denso, contable y 1-homogéneo, salvo isomorfismos; y para el ordinal α, porque sólo si $\alpha \in \omega_1$, ζ^α es contable.

$\square$

Ahora bien, aunque $\langle L, <\rangle$ no sea un orden 1-homogéneo, por el corolario 4.16, es un hecho que si $\alpha = r_{\mathrm{f}}(\langle L, <\rangle)$,

$$\langle L, <\rangle \cong \sum_{x\in L_\alpha} x,$$

[1] En este trabajo consideraremos que un conjunto contable es un conjunto cuya cardinalidad es menor o igual a $\aleph_0$.

es decir, cualquier orden puede expresarse como una suma densa de órdenes discretos (o es un orden discreto). Cuando este orden es 1-homogéneo, obtenemos que esos órdenes discretos son de hecho isomorfos a un solo $\mathbb{Z}^\beta$. Es natural pensar ahora qué condición, si es que existe, será suficiente y quizá también necesaria para que $\langle L_\alpha, <_\alpha\rangle$ sea un η_γ. La siguiente proposición nos proporciona dicha condición, aunque debemos pedir que también se cumpla la 1-homogeneidad.

Recuérdese que la notación $d_<$ representa al conjunto de los menores que d. Además, $d_\leq$, $d_>$ y $d_\geq$ representan lo equivalente.

Proposición 4.30. *Sean $\langle L, <\rangle$ un orden lineal, $\alpha = r_{\mathrm{f}}(\langle L, <\rangle)$ y $D \subseteq L$. Si*

i) *$\langle L, <\rangle$ es 1-homogéneo,*

ii) *$\langle D, <\rangle$ es un η_γ para algún ordinal γ y*

iii) *si $x, y \in L$ y $[x, y]$ no es discreto, entonces $(x, y) \cap D \neq \emptyset$.*

Entonces $\langle L_\alpha, <_\alpha\rangle$ es un η_γ.

Demostración. Sean $X, Y \subseteq L_\alpha$, con $|X| \cup |Y| \in \aleph_\gamma$ y $X <_\alpha Y$. Entonces $cof(X), coin^*(Y) \in \omega_\gamma$. Consideraremos los siguientes casos:

a) $cof(X) = 1 = coin^*(Y)$,

b) $cof(X) \neq 1 \neq coin^*(Y)$ y

c) $cof(X) = 1 \neq coin^*(y)$.

Con el último caso se puede demostrar el caso en que $cof(X) \neq 1 = coin^*(Y)$ simplemente volteando el orden $\langle L, <\rangle$.
a) Supongamos $cof(X) = 1 = coin^*(Y)$, entonces X y Y tienen máximo y mínimo correspondientemente, digamos $[x]_\alpha$ y $[y]_\alpha$ respectivamente. Así, $[x]_\alpha <_\alpha [y]_\alpha$ por lo que $[x, y]$ no es discreto, con lo cual $(x, y) \cap D \neq \emptyset$. Ahora bien, por el teorema 4.14 y el corolario 4.15, $[x]_\alpha \cup [y]_\alpha$ es discreto, pero $(x, y) \cap D$ es un intervalo en $\langle D, <\rangle$ lo que implica que es denso, por lo que $(x, y) \cap D \nsubseteq [x]_\alpha \cup [y]_\alpha$.

Sea $d \in (x, y) \cap D$ tal que $d \notin [x]_\alpha \cup [y]_\alpha$, entonces $[x]_\alpha <_\alpha [d]_\alpha <_\alpha [y]_\alpha$, es decir, $[d]_\alpha$ separa a X y a Y.
b) Si $cof(X) \neq 1 \neq coin^*(Y)$. Definamos los conjuntos

$$A = \{d \in D : \exists x \in X([d]_\alpha \leq_\alpha x)\} \quad \text{y}$$

$$B = \{d \in D : \exists y \in Y(y \leq_\alpha [d]_\alpha)\}.$$

Observemos que A y B son intervalos en $\langle D, <\rangle$, además $A < B$. Demostraremos que $cof(A) \subseteq cof(X)$. Sea $f : cof(X) \to X$ cofinal y creciente. Definiremos $g : cof(X) \to A$ cofinal. Si $\beta \in cof(X)$, tenemos que $\beta+1, \beta+2 \in cof(X)$, pues $cof(X) \neq 1$ y entonces $f(\beta+1) <_\alpha f(\beta+2)$. Sean $x_{\beta+1}, x_{\beta+2} \in L$ tales que $f(\beta+1) = [x_{\beta+1}]_\alpha$ y $f(\beta+2) = [x_{\beta+2}]_\alpha$ entonces $[x_{\beta+1}, x_{\beta+2}]$ no es discreto por lo tanto $(x_{\beta+1}, x_{\beta+2}) \cap D \neq \emptyset$, elegimos

$g(\beta)$ como uno de estos elementos. Observemos que se tiene que $f(\beta) <_\alpha [g(\beta)]_\alpha$. Veamos que g es cofinal en A. Si $d \in A$, entonces hay $l \in L$ tal que $[d]_\alpha \leq_\alpha [l]_\alpha$ y $[l]_\alpha \in X$. Como f es cofinal, hay $\beta \in cof(X)$ tal que

$$[l]_\alpha \leq_\alpha f(\beta) <_\alpha [g(\beta)]_\alpha,$$

por lo cual $l < g(\beta)$.

Si consideramos este resultado y lo aplicamos a $\langle L, < \rangle^*$, obtenemos que $coin^*(B) \subseteq coin^*(Y)$.

Tenemos entonces que $cof(A), coin^*(B) \in \omega_\gamma$, por lo cual, gracias al teorema 3.17, $\langle A, B \rangle$ no es una cortadura de $\langle D, < \rangle$. Es por esto que hay $z \in D$ que separa a A y a B.

Si $[z]_\alpha \leq_\alpha x$ para algún $x \in X$, $z \in A$, lo cual es una contradicción. Si hay $y \in Y$ tal que $y \leq_\alpha [z]_\alpha$, entonces $z \in B$, lo cual también es un contradicción. Por lo tanto, $X <_\alpha [z]_\alpha <_\alpha Y$.

c) Supongamos que $cof(X) = 1$ y $coin^*(Y) \neq 1$, entonces podemos definir

$$B = \{d \in D : \exists y \in Y (y \leq_\alpha [d]_\alpha)\}$$

de la misma manera que en el inciso *b*) y obtener que $coin^*(B) \subseteq coin^*(Y) \in \omega_\gamma$. Necesitamos comprobar que se cumplen las siguientes afirmaciones.

Afirmación 1 $\langle L_\alpha, <_\alpha \rangle$ es 1-homogéneo y por ende para cualesquiera $x, y \in L_\alpha$, $cof(x_{<_\alpha}) = cof(y_{<_\alpha})$ y $coin^*(x_{>_\alpha}) = coin^*(y_{>_\alpha})$.

Este es un hecho que se desprende de la 1-homogeneidad de $\langle L, < \rangle$, pues como se ha visto cada automorfismo f de $\langle L, < \rangle$ induce un automorfismo f_α sobre $\langle L_\alpha, <_\alpha \rangle$, de manera que para construir un automorfismo que envíe a x en y sólo se necesita uno que envíe un elemento de x en y. La misma cualidad de 1-homogeneidad nos indica que todos los segmentos iniciales y finales determinados por elementos del orden son isomorfos, con lo cual obtenemos la segunda parte de la afirmación.

Afirmación 2 Para todo $d \in D$, $\omega_\gamma \subseteq (cof(d_< \cap D)) \cap (coin^*(d_> \cap D))$.

Observemos que tanto $\langle (d_< \cap D), (d_\geq \cap D) \rangle$ como $\langle (d_\leq \cap D), (d_> \cap D) \rangle$ son cortaduras de $\langle D, < \rangle$. Por el teorema 3.17, como $\langle D, < \rangle$ es un η_γ,

$$\omega_\gamma \subseteq (cof(d_< \cap D) \cup coin^*(d_\geq)) \quad \text{y} \quad \omega_\gamma \subseteq (cof(d_\leq \cap D) \cup coin^*(d_> \cap D)).$$

Dado que

$$cof(d_\leq \cap D) = 1 = coin^*(d_\geq \cap D),$$

obtenemos que

$$\omega_\gamma \subseteq (cof(d_< \cap D)) \cap (coin^*(d_< \cap D)).$$

Afirmación 3 Para todo $d \in D$,

$$cof(d_< \cap D) = cof(([d]_\alpha)_{<_\alpha}) \quad \text{y} \quad coin^*(d_> \cap D) = coin^*(([d]_\alpha)_{>_\alpha}).$$

Para esto probaremos que

$$cof(d_< \cap D) \subseteq cof\left(([d]_\alpha)_{<_\alpha}\right) \quad \text{y} \quad cof\left(([d]_\alpha)_{<_\alpha}\right) \subseteq cof(d_< \cap D),$$

la prueba para las coinicialidades se obtiene de esto mismo aplicado al orden $\langle L, <\rangle^*$.

Sea $d \in D$. Supongamos que $f : cof(d_< \cap D) \to (d_< \cap D)$ es cofinal y creciente. Definimos $f_\alpha : cof(d_< \cap D) \to ([d]_\alpha)_{<_\alpha}$ tal que $f_\alpha(\beta) = [f(\beta)]_\alpha$. Veamos que la imagen de f_α efectivamente está contenida en $([d]_\alpha)_{<_\alpha}$. Si $\beta \in cof(d_< \cap D)$, $f(\beta) \in (d_< \cap D)$, por lo cual $f(\beta) \in D$. Como $\langle D, <\rangle$ es denso, $(f(\beta), d) \cap D$ lo es también, lo que implica que $[f(\beta), d]$ no es discreto, por lo cual $[f(\beta)]_\alpha \neq [d]_\alpha$. Dado que $f(\beta) \in (d_< \cap D)$, $f(\beta) < d$, por lo tanto, $[f(\beta)]_\alpha <_\alpha [d]_\alpha$, es decir, $[f(\beta)]_\alpha \in ([d]_\alpha)_{<_\alpha}$. Demostremos que f es cofinal en $([d]_\alpha)_{<_\alpha}$, sea $l \in L$ tal que $[l]_\alpha <_\alpha [d]_\alpha$. Entonces $l < d$ y $[l, d]$ no es discreto, por lo que $(l, d) \cap D \neq \emptyset$. Sea $d' \in (l, d) \cap D$, por un argumento análogo al usado anteriormente, usando que D es denso, $[d', d]$ no es discreto. Por lo tanto, $[d']_\alpha <_\alpha [d]_\alpha$ y dado que $l < d'$, $[l]_\alpha \leq_\alpha [d']_\alpha$. Como f es cofinal en $d_< \cap D$, hay $\beta \in cof(d_< \cap D)$, tal que $d' \leq f(\beta)$, por lo cual

$$[l]_\alpha \leq_\alpha [d']_\alpha \leq_\alpha [f(\beta)]_\alpha = f_\alpha(\beta).$$

Esto prueba que f_α es cofinal en $([d]_\alpha)_{<_\alpha}$. Por lo tanto, $cof\left(([d]_\alpha)_{<_\alpha}\right) \subseteq cof(d_< \cap D)$.

Sea $g : cof\left(([d]_\alpha)_{<_\alpha}\right) \to [d]_{\alpha_{<_\alpha}}$ cofinal y creciente. Para cada $x \in L_\alpha$, sea $l_x \in L$ tal que $[l_x]_\alpha = x$. Si $x <_\alpha [d]_\alpha$, $[l_x]_\alpha = x \neq [d]_\alpha$, por lo que $[l_x, d]$ no es discreto, así $(l_x, d) \cap D \neq \emptyset$. Para cada $x \in ([d]_\alpha)_{<_\alpha}$, sea $d_x \in (l_x, d) \cap D$. Observemos que si $x <_\alpha [d]_\alpha$,

$$x = [l_x]_\alpha \leq_\alpha [d_x]_\alpha.$$

Definimos $g' : cof\left(([d]_\alpha)_{<_\alpha}\right) \to (d_< \cap D)$ como $g'(\beta) = d_{g(\beta+1)}$. Sea $d' < d$ con $d' \in D$, entonces $[d', d]$ no es discreto, pues $(d', d) \cap D$ es denso. Así, $[d'] <_\alpha [d]_\alpha$ y como g es cofinal, hay $\beta \in cof\left(([d]_\alpha)_{<_\alpha}\right)$ tal que

$$[d']_\alpha \leq_\alpha g(\beta) <_\alpha g(\beta+1) = [l_{g(\beta+1)}]_\alpha \leq_\alpha [d_{g(\beta+1)}]_\alpha = [g'(\beta)]_\alpha,$$

lo cual implica que $d' < g'(\beta)$. Así, g' es cofinal en $d_< \cap D$. Por lo tanto, $cof(d_< \cap D) \subseteq cof\left(([d]_\alpha)_{<_\alpha}\right)$.

De las afirmaciones 2 y 3 obtenemos que para todo $d \in D$,

$$\omega_\gamma \subseteq \left(cof\left(([d]_\alpha)_{<_\alpha}\right) \cap coin^*\left((d_\alpha)_{>_\alpha}\right)\right).$$

Como $D \neq \emptyset$, hay un $[d]_\alpha \in L_\alpha$ con $d \in D$. Gracias a la afirmación 1, el conjunto de todos los menores que algún elemento de L_α tienen la misma cofinalidad y coinicialidad. Así,

$$\forall x \in L_\alpha \left(\omega_\gamma \subseteq \left(cof(x_{<_\alpha}) \cap coin^*(x_{>_\alpha})\right)\right).$$

Es por esto que Y no es coinicial en $x_{>_\alpha}$ para ningún $x \in L_\alpha$, pues $coin^*(Y) \in \omega_\gamma$. En particular, Y no es coinicial en $x_{0_{>_\alpha}}$ donde x_0 es el máximo de X. De lo anterior obtenemos que hay elementos que separan a X y Y.

Por lo tanto, $\langle L_\alpha, <_\alpha\rangle$ es un η_α. □

Obsérvese que la hipótesis de 1-homogeneidad sólo fue necesaria para el caso c) de la demostración anterior y por ende también es necesaria para el caso análogo en que $coin^*(Y) = 1$ y $cof(X) \neq 1$.

Corolario 4.31. *Si $\langle L, < \rangle$ es un orden lineal 1-homogéneo y $D \subseteq L$ es denso en L y es un η_γ para algún ordinal γ, entonces $\langle L, < \rangle$ es un η_γ.*

Demostración. Observemos que el hecho de que D sea denso en L, hace que $\langle L, < \rangle$ sea denso, entonces por el lema 4.6, $\langle L, < \rangle \cong \langle L_\alpha, <_\alpha \rangle$, donde $\alpha = r_{\mathrm{f}}(\langle L, < \rangle)$. Así, utilizando la proposición anterior, obtenemos que $\langle L, < \rangle$ es un η_γ. □

El siguiente ejemplo muestra que la condición de 1-homogeneidad es necesaria en la proposición 4.30. Recordemos que se definieron los órdenes lineales Q_α, para cada ordinal α en la sección 3.3 de este trabajo, antes del teorema 3.21 y que cada Q_α es un η_α, si $\aleph_\alpha$ es regular.

Ejemplos 4.32. Consideremos el orden $\langle L, < \rangle = Q_1 \cdot \omega + 1 + Q_1$ del cual tomaremos como representante de su tipo de orden a $L = (Q_1 \times \omega) \cup \{1\} \cup Q_1$ y $<$ como el orden de la unión sobre los conjuntos $Q_1 \times \omega$, $\{1\}$ y Q_1 (para el conjunto $Q_1 \times \omega$ el orden del producto y sobre Q_1, ω y $\{1\}$ el orden usual). Observemos que $(Q_1 \times \omega) \cup Q_1$ es denso en $\langle L, < \rangle$ (recordemos que Q_1, por ser un η_1, no tiene extremos, tal y como se probó al principio de la sección 3.3). Además veamos que es un η_1.

Sean $X, Y \subseteq (Q_1 \times \omega) \cup Q_1$ tales que $|X|, |Y| \leq \aleph_0$ y $X < Y$.
Caso 1) Si $X \cap Q_1 \neq \emptyset$, es decir, si X "toca la última copia de Q_1", entonces $Y \subseteq Q_1$. Como X es contable, $X \cap Q_1$ también lo es y dado que Q_1 es un η_1, hay z que separa a $X \cap Q_1$ y a Y. Por cómo está definido el orden $<$, tenemos que $X \leq X \cap Q_1$, por lo cual z separa a X y a Y.
Caso 2) Supongamos que $X \subseteq Q_1 \times \omega$ y que $Y \subseteq Q_1$. Como Y es contable, $\emptyset < Y$ y Q_1 es un η_1, Y está acotado inferiormente en Q_1, sea z una de tales cotas inferiores. Dado que $z \in Q_1$, $X < z$, además $z < Y$, por lo que z separa a X y a Y.
Caso 3) Supongamos que $X \subseteq Q_1 \times \omega$ y $Y \cap (Q_1 \times \omega) \neq \emptyset$. Sea

$$n = min\{m \in \omega : Y \cap (Q_1 \times \{m\}) \neq \emptyset\}.$$

i) Si $X \cap (Q_1 \times \{n\}) \neq \emptyset$, separamos a X y a Y de manera similar a como hicimos en el caso 1), pues $Q_1 \times \{n\}$ tiene el mismo tipo de orden que Q_1.
ii) Si $X \cap (Q_1 \times \{n\}) = \emptyset$, procedemos de manera similar a como lo hicimos en el caso 2).

Por lo tanto, $\langle (Q_1 \times \omega) \cup Q_1, < \rangle$, es un η_1.

Ahora bien, aunque $\langle (Q_1 \times \omega) \cup Q_1, < \rangle$ es un η_1, observemos que $\langle L, < \rangle$ no lo es. Si x es un elemento de Q_1, entonces cualquier subconjunto de L de la forma $\{\langle x, k \rangle : k \in \omega\}$ no puede ser separado del conjunto $\{1\}$ y ambos son contables. Definimos $\langle L, < \rangle$ de esta manera para que no fuera 1-homogéneo, pero sí cumpliera con las demás las hipótesis de la proposición 4.30.

Se probó en el capítulo 3 que un η_α es también un $\aleph_\alpha$-universal, es decir, si $\langle L, < \rangle$ es un η_α, para cualquier $\langle A, <_A \rangle$ orden lineal tal que $|A| \leq \aleph_\alpha$ ocurre que $\langle A, <_A \rangle \precsim \langle L, < \rangle$

(por el inciso i del teroema 3.20). Así, es natural preguntarse si cualquier $\aleph_\alpha$-universal es un η_α. La respuesta es negativa y el ejemplo anterior o parte de él nos lo muestra.

El orden $Q_1 \cdot \omega$ es un $\aleph_1$-universal, puesto que Q_1 lo es y $Q_1 \precsim Q_1 \cdot \omega$. Sin embargo, si $x \in Q_1$ el conjunto $\{\langle x, n\rangle : n \in \omega\}$ es contable y no acotado, por lo que $Q_1 \cdot \omega$ no es un η_1.

Recapitulemos lo que hemos hecho. Hemos visto que cualquier orden lineal $\langle L, <\rangle$ puede expresarse como una suma densa de órdenes discretos. Además, si el orden $\langle L, <\rangle$ es 1-homogéneo, esta suma se puede ver como un producto de un orden discreto por uno denso; más aún, el orden discreto es algún $\mathbb{Z}^\alpha$. Es por esto que dedicamos parte de este trabajo a los órdenes discreto y densos, ya que a raíz de este resultado, cualquier orden puede ponerse en términos de estos dos tipos específicos de órdenes lineales.

Con respecto a los órdenes discretos, estudiamos algunas de las propiedades de los $\mathbb{Z}^\alpha$'s y demostramos que cualquier orden discreto es isomorfo a un subconjunto de alguno de estos órdenes, con lo que dimos por terminada esta descripción.

En cuanto a los órdenes densos, introducimos el concepto de η_α, el cual resultó ser una generalización del de densidad, pues en cierto sentido mide qué tan denso es un orden. Para comprobar que en realidad sí existían órdenes η_α, definimos a los Q_α's. Además, mostramos que si se cumple la Hipótesis Generalizada del Continuo, estos conjuntos Q_α cumplen una propiedad muy interesante que también cumple $\mathbb{Q}$, nos referimos a la llamada κ-categoricidad; en concreto, suponiendo la Hipótesis Generalizada del Continuo, para cada ordinal sucesor α, Q_α es el único orden η_α de cardinal $\aleph_\alpha$, salvo por isomorfismos. Otra propiedad interesante que tienen estos η_α's es que son $\aleph_\alpha$-universales, lo cual quiere decir que si $\langle L, <\rangle$ es un η_α y $\langle A, <_A\rangle$ es un orden lineal y $|A| \in \aleph_\alpha$, $\langle A, <_A\rangle \precsim \langle L, <\rangle$. Sin embargo, en nuestro último ejemplo, vimos que no todos los $\aleph_\alpha$-universales son η_α's. A pesar de todos estos resultados sobre órdenes densos, aún hay mucho camino por recorrer para describirlos en su totalidad.

Algunas de las preguntas que se podrían considerar para continuar con este trabajo, en cuanto a los Q_α's, dado que en cierto sentido sentido son una generalización de $\mathbb{Q}$ son ¿serán estos 1-homogéneos? y no sólo eso, $\mathbb{Q}$ es k-homogéneo para toda $k \in \omega$, ¿también estos Q_α cumplirán algo similar? Es decir, si A y B son subconjuntos isomorfos de Q_α, de cardinal menor que $\aleph_\alpha$ ¿podrá extenderse este isomorfismo a todo Q_α? De manera más formal, si $A, B \subseteq Q_\alpha$, $|A|, |B| \subseteq \aleph_\alpha$ y $f : \langle A, <_{Q_\alpha}\rangle \to \langle B, <_{Q_\alpha}\rangle$ es un isomorfismo, ¿habrá un isomorfismo $g : Q_\alpha \to Q_\alpha$ tal que $g \restriction_A = f$?

Bibliografía

[R82] Rosensteien, Joseph G., Linear Ordering, Academic Press, 1982.

[H05] Harzheim, Egbert, Ordered Sets, Springer, 2005.

[HJ99] K. Hrbacek, T. Jech, Introduction to Set Theory, Marcel Dekker Inc., 1999.

[ACM11] Amor y Montaño José Alfredo, Campero Arena Gabriela, Miranda Perea Flavio Ezequiel, Teoría de Conjuntos, curso intermedio, Las prensas de Ciencias, 2011.

1