



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

**MODELADO DE PROPAGACIÓN DE ONDAS EN
MEDIOS CON INTERFASES SÓLIDO-FLUIDAS USANDO
DIFERENCIAS FINITAS**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

PRESENTA:

NANCY REYNA AGUILAR

DIRECTORA DE TESIS:

DRA. URSULA X. ITURRARÁN VIVEROS

MÉXICO D.F., MÉXICO

MAYO de 2014





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1.-Datos del alumno

Reyna

Aguilar

Nancy

26-32-48-27

Universidad Nacional Autónoma de
México

Facultad de Ciencias

Matemáticas

9455921-1

2.-Datos de tutor

Dra.

Ursula Xiomara

Iturrarán

Viveros

3.-Datos del sinodal 1

Dr

Pablo

Barrera

Sánchez

4.-Datos del sinodal 2

Dr

Francisco José

Sánchez

Sesma

5.-Datos del sinodal 3

Dr

Jesús

López

Estrada

6.-Datos del sinodal 4

Dr

Pedro

González

Casanova

7.-Datos del trabajo escrito

Modelos de propagación de ondas en medios con
interfaces sólido-fluidas usando diferencias
finitas

Elastodinámica, Método de diferencias finitas

69 p.

2014

Dedicatoria

Este escrito esta dedicado principalmente a mis padres (Eva y Camilo), hermanos (Javier y Eva), amigos (Norma, Cecilia, Roxana, Sofia, Miriam, Maritza, Rocío, Beatriz, Beatriz, Francisco, Jorge, Juanita, Judith y Adán) y por supuesto a mi directora de tesis (Ursula Xiomara Iturrarán Viveros) que sin su apoyo no se hubiera podido llevar a cabo dicha recopilación.

De antemano gracias.

Índice general

1. Elastodinámica	5
1.1. Medio continuo	5
1.2. Ondas	5
1.2.1. Ondas en una dimensión	6
1.2.2. Ondas longitudinales y transversales	8
1.2.3. Ondas armónicas	8
1.2.4. Ondas en dos y tres dimensiones	10
1.3. Esfuerzo	12
1.4. Deformación	15
1.5. Ley de Hooke	18
1.5.1. Elasticidad y resortes	18
1.5.2. Resortes (Viscoelasticidad)	22
1.6. Segunda ley de Newton	27
1.6.1. La transformada de Fourier y las ondas planas	32
1.7. La fórmula de D'Alembert	33
1.8. Ecuación de Navier	34
1.8.1. Planteamiento del problema en 3-D	35
1.8.2. Planteamiento del problema en 2-D	36
2. Método de diferencias finitas	39
2.1. Diferencias finitas	40
2.2. Fórmulas de diferencias finitas	40
2.3. Esquemas explícito e implícito	45
2.3.1. Esquema explícito	45
2.3.2. Esquema implícito	46
2.3.3. Esquemas	48
2.4. Disipación y dispersión de los esquemas numéricos	61
3. Conclusiones	66

Introducción

Este trabajo es una pequeña recopilación de información relacionada con la solución numérica de la ecuación de onda, que como sabemos existen diferentes maneras de resolverla. En particular se puede resolver utilizando el método de diferencias finitas, el principal objetivo de este escrito es de dar a conocer dicho método y de proporcionar conceptos que guardan una estrecha relación con este. El siguiente documento está conformado de dos capítulos los cuales están constituidos de la siguiente manera:

- Primer capítulo:

Elastodinámica

Primeramente se da una breve definición de lo que es una onda, los elementos por los cuales está conformada, se mencionan algunas de las clasificaciones de esta como son: las ondas longitudinales y transversales, ondas planas y ondas esféricas. Por otro lado, se explica el esfuerzo y la deformación se enuncia la ley de Hooke, como esta está muy relacionada con el concepto de resorte, se da una definición de resorte, se visualizan los diferentes sistemas de resortes: en serie y en paralelo, se da una breve descripción del trabajo hecho por resortes, la fuerza conservativa de estos, la fuerza potencial, la fuerza cinética. Se enuncia la segunda ley de Newton que como sabemos por nuestros cursos de física es: $F=ma$; se explica que relación existe entre la transformada de Fourier con respecto a las ondas planas; y de la misma manera se explica en que consiste la fórmula de D'Alembert. Se desglosa la ecuación de Navier, la cual como sabemos se puede plantear tanto en 3-D como en 2-D y son las que veremos en el presente escrito.

- Segundo capítulo:

Método de diferencias finitas

Se explica en que consiste el método de diferencias finitas y se desglosa como se obtienen las fórmulas de este, se muestran las diferentes fórmulas de las diferencias finitas como son: la progresiva, la centrada y la regresiva y se extiende este procedimiento al caso de funciones de varias variables. Se da una definición de esquema explícito e implícito, se visualizan diferentes esquemas como el de contra el viento, el de Lax-Wendroff, el de caja, el de saltar por encima, así como se muestran sus

estenciles. Y por último se explica la propagación de paquetes de ondas, la disipación y dispersión de los esquemas numéricos.

Capítulo 1

Elastodinámica

La mecánica y la elasticidad de medios continuos (elastodinámica) estudian el comportamiento de la materia sin considerar su granularidad (estructura atómica). En la modelación de fenómenos ondulatorios la granularidad puede ser muy pequeña y depender de la relación entre el espectro de longitudes de onda que se propagan y las dimensiones de los objetos explorados. A continuación definiremos algunos conceptos relacionados con la *elastodinámica* tales como: *medio continuo*, algunos conceptos relacionados con las ondas, *esfuerzo* y *deformaciones*.

1.1. Medio continuo

Un medio continuo, es una porción de materia conformada por un conjunto "infinito" de partículas, sin considerar las posibles discontinuidades que existen en el nivel microscópico. Por lo tanto se suele decir que no hay discontinuidades entre sus partículas y que su descripción matemática y la de sus propiedades pueden realizarse a través de funciones continuas.

1.2. Ondas

Una onda es un disturbio ó una variación que transfiere energía consecutivamente de un punto a otro, en un medio y que puede poseer la forma de una deformación elástica, una



Figura 1.1: Un medio continuo

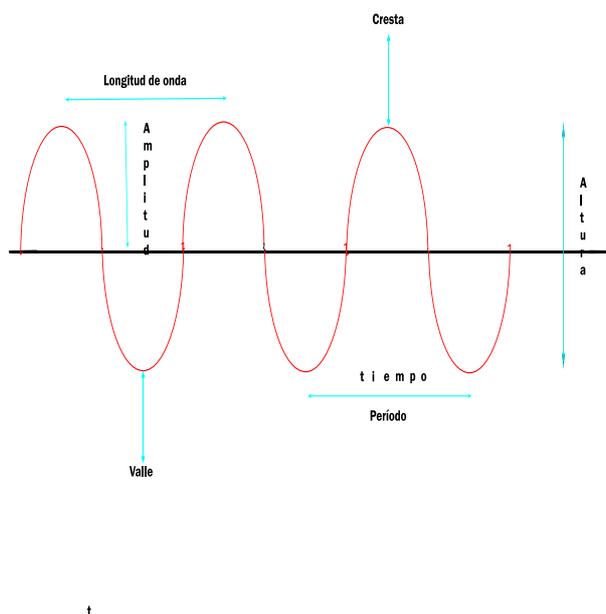


Figura 1.2: Elementos de una onda.

variación de presión, variación de intensidad eléctrica, etc. Las ondas están constituidas por: su *cresta* que es la parte superior de la onda, su *valle* que es la parte inferior de las ondas, su *amplitud* que es la mitad de la diferencia entre el máximo y el mínimo de la onda, *longitud de onda* que es la distancia entre dos máximos consecutivos, el *nodo* que es el punto de equilibrio entre la onda, el *período* que es el tiempo que pasa para que se generen dos máximos consecutivos y la *frecuencia* que es el inverso del período.

1.2.1. Ondas en una dimensión

Consideremos un pulso que se propaga en una cuerda (la cual es una onda mecánica que se propaga en un medio). Durante su trayecto, el pulso transmite movimiento a los puntos de la cuerda. Por otro lado, si hacemos un experimento observaremos que el pulso se propaga a través de la cuerda con una rapidez constante y casi sin deformación. Construyamos un modelo matemático para este "problema", sea un eje coordenado x a lo largo de la cuerda, imaginemos que enviamos un pulso tal que los puntos de la cuerda permanecen siempre en el mismo plano y escogemos el eje y para que el plano x - y coincida con el plano del movimiento de los puntos de la cuerda. Como podemos ver podemos utilizar la coordenada x para referirnos a los puntos de la cuerda. Por lo tanto la altura de un punto (P) de la cuerda estará en función de x_p (la posición del punto P) y del tiempo lo cual es: $y_P(t) = u(x_P, t)$. Sea $f(s)$ una función real de una variable real, cuyo grafo sea igual con una imagen instantánea del pulso (sea en $t = 0$), como sabemos si el pulso viaja sin deformación con una rapidez v a través de la cuerda la función $u(x, t)$ será de la forma $u(x, t) = f(x \pm vt)$ donde $+$ y $-$ nos indican un movimiento del pulso a la izquierda o a la derecha respectivamente. Si nosotros observamos las ondas producidas en la superficie

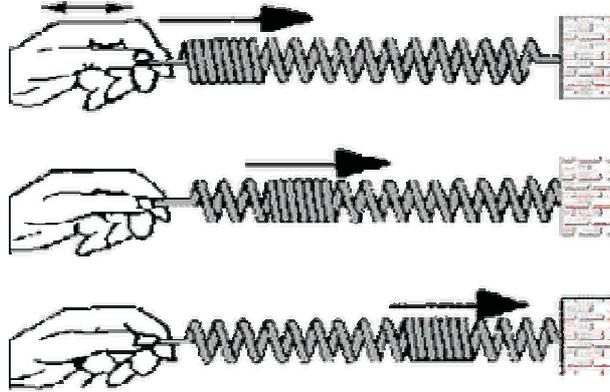


Figura 1.3: Ejemplo de onda en una dimensión

de un charco tranquilo, bajo algunas condiciones se podrían observar dos ondas que se encuentran interactuando produciendo una cresta más alta o anulándose por completo, para después seguir propagándose de la misma forma que tenían antes de interactuar. Este fenómeno se llama principio de superposición y las ondas que obedecen al principio de superposición las llamaremos ondas lineales. Sea $g(s) = \frac{d^2 f(s)}{ds^2}$, en este caso las segundas derivadas parciales de $u(x, t)$ son:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = g(x \pm vt) \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = v^2 g(x \pm vt) \quad (1.2)$$

de donde $u(x, t)$ satisface la siguiente ecuación diferencial hiperbólica en derivadas parciales de segundo orden:

$$\partial_x^2 u(x, t) - \frac{1}{v^2} \partial_t^2 u(x, t) = 0. \quad (1.3)$$

A esta ecuación la llamaremos *ecuación de onda unidimensional sin fuente*, y es el inicio de la modelación de los fenómenos ondulatorios. El parámetro v representa la velocidad de fase. Una de las propiedades de la ecuación de onda es que es lineal, por lo tanto las ondas que satisfagan la ecuación anterior satisfacen el principio de superposición. Supongamos que $u_1(x, t)$ y $u_2(x, t)$ son soluciones de la ecuación de onda y que α es un número real entonces

$$\begin{aligned} & \partial_x^2 [u_1(x, t) + \alpha u_2(x, t)] - \frac{1}{v^2} \partial_t^2 [u_1(x, t) + \alpha u_2(x, t)] = \\ & = \partial_x^2 u_1(x, t) - \frac{1}{v^2} \partial_t^2 u_1(x, t) + \alpha \left[\partial_x^2 u_2(x, t) - \frac{1}{v^2} \partial_t^2 u_2(x, t) \right] = 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

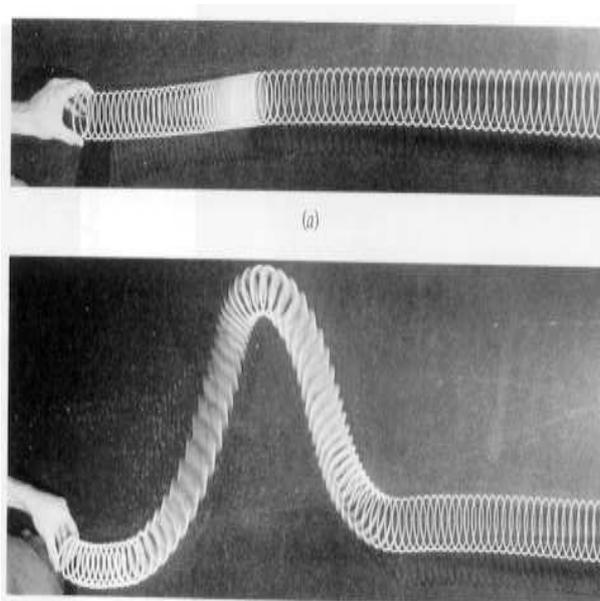


Figura 1.4: Onda longitudinal y onda transversal. En estas fotos podemos observar un ejemplo de onda longitudinal (arriba) y transversal (abajo) en un muelle.

Dicho de otra forma, $u(x, t) = u_1(x, t) + \alpha u_2(x, t)$ es una solución de la ecuación de onda, lo que es la representación matemática del principio de superposición.

1.2.2. Ondas longitudinales y transversales

Existen varias clasificaciones para las ondas. Una de ellas las clasifica en ondas longitudinales y ondas transversales. En las longitudinales la perturbación es paralela a la dirección de propagación. Ejemplo de estas son: las ondas de presión en un fluido y las ondas tipo P en un medio elástico. En las transversales la perturbación es ortogonal a la dirección de propagación. Ejemplo de estas son: las ondas electromagnéticas y las ondas S en un medio elástico.

1.2.3. Ondas armónicas

Existen algunas soluciones muy particulares de la ecuación de onda que las conocemos en conjunto como ondas armónicas monocromáticas. Dichas soluciones se pueden expresar en una de las siguientes formas:

$$u(x, t) = A \cos(kx - \omega t + \phi) \quad (1.5)$$

$$u(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \phi) \quad (1.6)$$

$$u(x, t) = \Re[\mathcal{A}e^{i(kx - \omega t)}] \quad (1.7)$$

$$u(x, t) = \Im[\mathcal{A}e^{i(kx - \omega t)}] \quad (1.8)$$

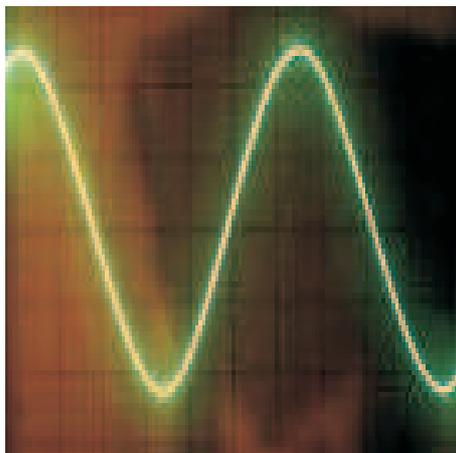


Figura 1.5: Onda armónica

donde A , k y w son constantes reales, y $y = Ae^{i\phi}$. Las constantes k y w llamadas número de onda y frecuencia angular respectivamente no son independientes, puesto que están relacionados por la velocidad de fase por medio de la relación de dispersión:

$$k^2 = \frac{w^2}{v} \quad (1.9)$$

ó $w = \pm |v|^{1/2} k$. La amplitud A en el caso de las ondas de campo eléctrico tiene una dimensión $[A] = \frac{\text{volt}}{m}$, y en el caso de las ondas transversales en una cuerda tiene dimensiones de longitud. La siguiente cantidad representa un período espacial de las ondas armónicas:

$$\lambda \equiv \frac{2\pi}{k} \quad (1.10)$$

como puede observarse de la cadena de igualdades:

$$\cos[k(x + \lambda) \pm wt + \phi] = \cos(kx \pm wt + \phi + 2\pi) = \cos(kx \pm wt + \phi). \quad (1.11)$$

Es por dicha razón que a λ se le llama *longitud de onda*. La *frecuencia angular* define el período temporal T de una onda armónica por medio de la identidad $T \equiv \frac{2\pi}{w}$. Las ondas armónicas poseen, una característica de acuerdo al teorema de Fourier:

Teorema 1.1 *Toda solución de la ecuación de onda unidimensional en un intervalo $[a, b]$ puede expresarse como:*

$$u(x, t) = \sum_w \mathcal{A}(w) e^{i(k(w)x - wt)} \quad (1.12)$$

en donde, la suma se da en las frecuencias, los números de onda dados a cada frecuencia son $k(w) = \frac{w}{v}$ y (w) nos dice que las amplitudes de las ondas armónicas cuya superposición sintetiza $u(x, t)$ son diferentes (y dependen de $u(x, t)$).

1.2.4. Ondas en dos y tres dimensiones

Los fenómenos ondulatorios lineales pueden producirse en dos y tres dimensiones espaciales. Por ejemplo: las vibraciones del cuero de un tambor, por otro lado en tres dimensiones tenemos las ondas acústicas y elásticas. Los modelos matemáticos que describen estos fenómenos se fundamentan en las soluciones de las ecuaciones de onda en dos y tres dimensiones (ó como lo denotan los físicos en 2+1 y 3+1 dimensiones).

$$\partial_x^2 u(x, y; t) + \partial_y^2 u(x, y; t) - \frac{1}{v^2} \partial_t^2 u(x, y; t) = 0 \quad (1.13)$$

para 2+1, y

$$\partial_x^2 u(x, y, z; t) + \partial_y^2 u(x, y, z; t) + \partial_z^2 u(x, y, z; t) - \frac{1}{v^2} \partial_t^2 u(x, y, z; t) = 0 \quad (1.14)$$

para 3+1.

Definiendo el operador de Laplace como:

$$\nabla^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \dots \quad (1.15)$$

se pueden resumir las ecuaciones de onda en los casos $d + 1$ como sigue:

$$\nabla^2 u(\vec{x}; t) - \frac{1}{v^2} \partial_t^2 u(\vec{x}; t) = 0 \quad (1.16)$$

para $d = 1, 2$ ó 3 .

Ondas planas

Estas se forman como generalizaciones de las ondas viajeras unidimensionales y necesitan de un vector unitario \hat{n} que dará la dirección de propagación de la onda y de una función real de variable real $f(s)$ la cual posee segunda derivada continua. Como podemos observar las funciones

$$u(\vec{x}; t) \equiv f(\hat{n} \cdot \vec{x} \pm vt) \quad (1.17)$$

son ondas que se propagan paralela o antiparalelamente al vector \hat{n} según el signo relativo que se da en el argumento. Las soluciones se llaman planas porque cuando nos encontramos en el caso tridimensional para cada instante tomando en cuenta un tiempo fijo, sea t_0 , el lugar geométrico de los puntos de fase constante son los planos siguientes:

$$\hat{n} \cdot \vec{x} = vt_0 \quad (1.18)$$

Estos planos son llamados *frentes de onda* los cuales como podemos observar son ortogonales a los vectores de propagación \hat{n} , cuya velocidad esta dada por: $\pm v$. Utilizando la notación de funciones complejas, sea entonces una onda armónica plana monocromática:

$$u(\vec{x}, t) = \mathcal{A} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - wt)} \quad (1.19)$$

donde el vector de onda \vec{k} está emparentado con la frecuencia angular por

$$|\vec{k}|^2 = \frac{w^2}{c^2} \quad (1.20)$$

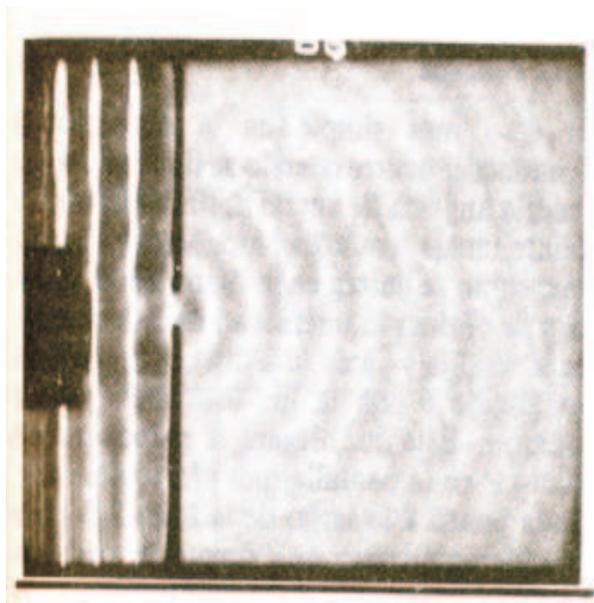


Figura 1.6: Fotografía de una onda plana. En la fotografía podemos ver a la izquierda una onda plana que se propaga, al llegar a una pared con un pequeño orificio la onda se abre formando ondas circulares.

Ondas esféricas

Cuando el operador de Laplace ó laplaciano ∇^2 actúa sobre funciones, su acción toma la siguiente forma en coordenadas cilíndricas:

$$\nabla^2 \Psi(\rho, \phi, z) = \frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho \partial_\rho \Psi) + \frac{1}{\rho^2} \partial_\phi^2 \Psi + \partial_z^2 \Psi \quad (1.21)$$

y para coordenadas esféricas:

$$\nabla^2 \Psi = \frac{1}{r} \partial_r^2 (r \Psi) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta \Psi) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\phi^2 \Psi. \quad (1.22)$$

Nosotros nos enfocaremos al caso esféricamente simétrico, es decir a soluciones de la ecuación de onda que dependen solamente de la distancia radial r y del tiempo. En este caso, la ecuación de ondas es la siguiente:

$$\frac{1}{r} \partial_r^2 (ru(r, t)) - \frac{1}{v^2} \partial_t^2 u(r, t) = 0 \quad (1.23)$$

que tiene como solución general:

$$u(r, t) = \frac{1}{r} f_1(r + vt) + \frac{1}{r} f_2(r - vt) \quad (1.24)$$

donde $f_1(s)$ y $f_2(s)$ son funciones reales de una variable real con segundas derivadas continuas. Es fácil ver que en el caso de las ondas esféricas los frentes de onda son esféricas.

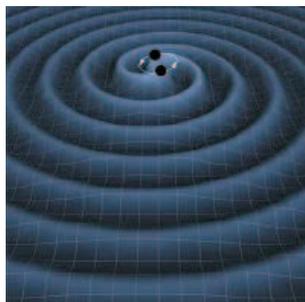


Figura 1.7: Onda esférica



Figura 1.8: Onda cilíndrica

Nosotros podemos encontrar el caso armónico monocromático, que trigonométricamente está dado por:

$$u(r, t) = \frac{A}{r} \cos(kr - \omega t + \phi), \quad \text{con} \quad k^2 = \frac{\omega^2}{v^2} \quad (1.25)$$

1.3. Esfuerzo

Las fuerzas internas de un elemento se encuentran dentro del material por tal motivo se distribuyen en toda el área; esto es lo que se llama *esfuerzo* a la fuerza por unidad de área, la cual denotaremos con la letra griega sigma σ

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad (1.26)$$

donde: $P \equiv$ Fuerza axial; $A \equiv$ Área de la sección transversal.

Hacemos notar que la fuerza empleada en la ecuación debe de ser perpendicular al área analizada y ubicada en el centroide del área para tener σ constante que se distribuye uniformemente en el área aplicada. La ecuación anterior no es válida para los otros tipos de fuerzas internas: fuerza cortante, momento flector y momento torsor. El esfuerzo se

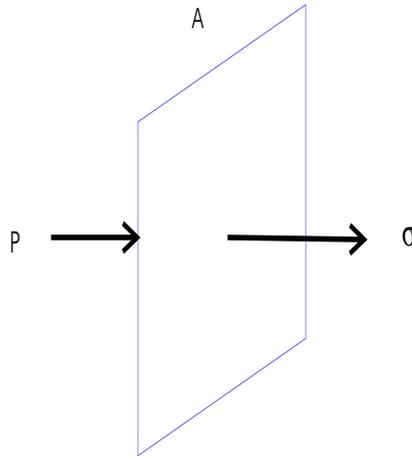


Figura 1.9: Ilustración del esfuerzo

mide por N/m^2 o pascal (Pa). Esta unidad es pequeña por lo tanto es más usual utilizar múltiplos como el kilopascal (kpa), megapascal (Mpa), o gigapascal (GPa). En el sistema americano, la fuerza se mide en libras y el área en pulgadas cuadradas, así el esfuerzo se mide en libras sobre pulgadas cuadradas (psi). Consideremos un corte imaginario en medio de la figura. Sea A el área de tal corte, subdividimos la superficie A en un elemento de área ΔA y sea \bar{n} el vector normal unitario asignado a ella. Una fuerza pequeña ΔF , que actúa sobre cada elemento, de los cuales uno contiene un punto P . Definimos el vector de esfuerzos $t^{\bar{n}}$ como:

$$t_i^{(\bar{n})} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_i}{\Delta A}, \quad (1.27)$$

el cual se ejerce sobre un elemento de superficie alrededor de P con normal \bar{n} . Los esfuerzos poseen dimensiones físicas de fuerzas por unidad de área. Sea un plano paralelo al plano x_2x_3 que corta un medio arbitrario para cualquier x_1 . Entonces expresamos las componentes del vector de esfuerzo sobre este plano como:

$$t_1^{(\bar{e}_1)} = \sigma_{11} \quad t_2^{(\bar{e}_1)} = \sigma_{12} \quad t_3^{(\bar{e}_1)} = \sigma_{13} \quad (1.28)$$

donde

$$\Delta F = \Delta F_1 \hat{i} + \Delta F_2 \hat{j} + \Delta F_3 \hat{k} \quad (1.29)$$

En σ_{ij} , el índice i nos indica la dirección del vector normal y el índice j nos indica la dirección en la que actúa la componente del vector tracción. Poniendo los otros planos en el punto P paralelos a los planos x_1x_2 y x_1x_3 , tenemos las otras seis componentes del tensor de esfuerzos $\sigma_{22}, \sigma_{21}, \sigma_{23}$ que actúan sobre la cara de x_2 y $\sigma_{33}, \sigma_{31}, \sigma_{32}$ que actúan sobre la cara de x_3 . Las componentes anteriores son funciones implícitas que dependen del espacio y del tiempo. Para representar la distribución completa de fuerzas internas en el punto P , para cualquier superficie posible que intersecta a P . Esto lo podemos hacer balanceando las fuerzas en un tetraedro con tres caras paralelas al plano cartesiano y las cuatro caras con una orientación arbitraria con normal \bar{n} . Tomando en cuenta los

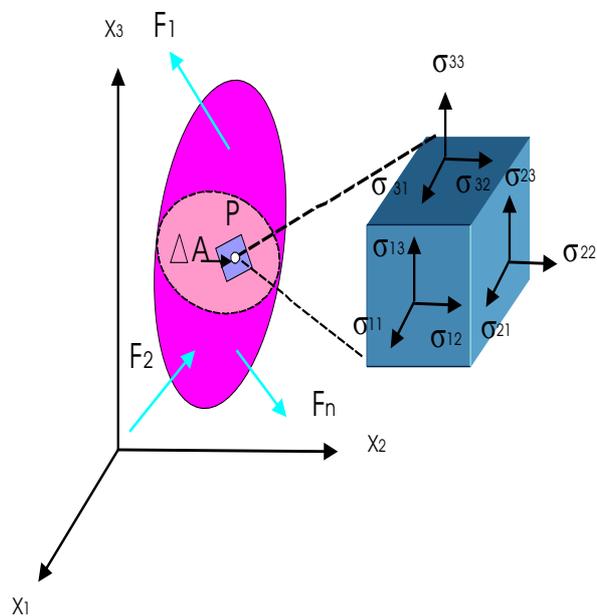


Figura 1.10:

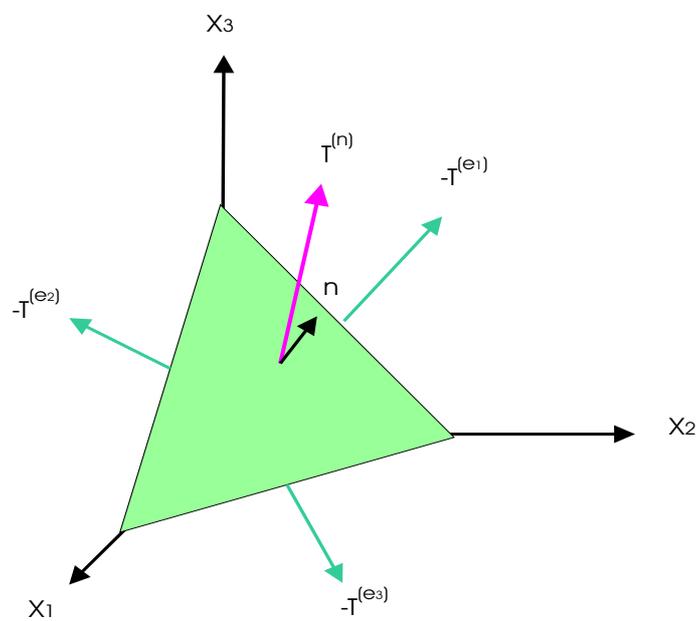


Figura 1.11:

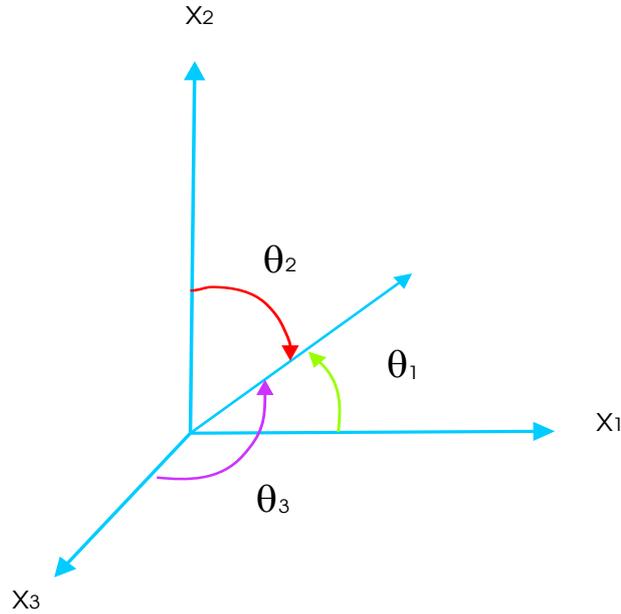


Figura 1.12:

términos de los cosenos directores definidos en la figura y elementos de área, tenemos que: $\Delta A_i = \Delta A \cos(\theta_i)$ y $n = n_1 \hat{i} + n_2 \hat{j} + n_3 \hat{k} = \cos(\theta_1) \hat{i} + \cos(\theta_2) \hat{j} + \cos(\theta_3) \hat{k}$. Como sabemos en un cuerpo en equilibrio la suma de las fuerzas que actúan en él, deben de ser cero, balanceando las fuerzas en la dirección de x_1 , tenemos que:

$$\sum F_{x_1} = 0 = t_1 \Delta A - \sigma_{11} \Delta A \cos(\theta_1) - \sigma_{21} \Delta A \cos(\theta_2) - \sigma_{31} \Delta A \cos(\theta_3). \quad (1.30)$$

entonces

$$t_1 = \sigma_{11} n_1 + \sigma_{21} n_2 + \sigma_{31} n_3. \quad (1.31)$$

De manera analoga, para $\sum F_{x_2} = \sum F_{x_3} = 0$, tenemos que:

$$t_2 = \sigma_{22} n_2 + \sigma_{12} n_1 + \sigma_{32} n_3. \quad (1.32)$$

$$t_3 = \sigma_{33} n_3 + \sigma_{13} n_1 + \sigma_{23} n_2. \quad (1.33)$$

De forma general:

$$t_i^{(\bar{n})} = \sigma_{ji} n_j, \quad (1.34)$$

que la conocemos como la *fórmula de Cauchy*.

1.4. Deformación

El análisis de las deformaciones se relaciona con los cambios en la estructura que forman las cargas aplicadas. Si a una barra le aplicamos una fuerza axial de tracción aumentara su longitud inicial; también podemos ver que bajo la misma carga pero con una longitud

mayor el aumento o alargamiento aumentará también. Por lo tanto matemáticamente la deformación es:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} \quad (1.35)$$

donde $\varepsilon = \text{deformación}$, $\delta = \text{alargamiento}$ y $L = \text{longitud inicial}$.

Al ver la ecuación anterior tenemos que la deformación es un valor adimensional teniendo un orden de magnitud en los casos del análisis estructural de alrededor de 10^{-6} . De-seamos describir la deformación arbitraria de un cuerpo, para esto consideremos el cuerpo mostrado en la figura 1.13. Sea $P(x_1, x_2, x_3)$, la posición inicial de un punto en el cuerpo y $P'(a_1, a_2, a_3)$, la posición final. Entonces el vector de desplazamiento es: $u_i = a_i - x_i$. Consideremos que a_i esta en función de x_1, x_2, x_3 , es decir, $a_i = a_i(x_1, x_2, x_3)$, donde P y Q son dos puntos cercanos con una distancia ds_0 y $Q(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3)$. Al deformarse el sólido la distancia entre P' y Q' será de ds , donde $Q'(a_1 + da_1, a_2 + da_2, a_3 + da_3)$. Entonces

$$(ds_0)^2 = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2 \quad (1.36)$$

y

$$(ds)^2 = (da_1)^2 + (da_2)^2 + (da_3)^2. \quad (1.37)$$

Con la convención de Einstein para índices, tenemos que:

$$(ds_0)^2 = dx_i dx_i \quad \text{y} \quad (ds)^2 = da_i da_i. \quad (1.38)$$

Tomando la diferencia, tenemos:

$$(ds)^2 - (ds_0)^2 = da_i da_i - dx_i dx_i. \quad (1.39)$$

Como $a_i = a_i(x_1, x_2, x_3)$ y $a_i = u_i + x_i$, tenemos que:

$$da_i = \frac{\partial a_i}{\partial x_j} dx_j = \left(\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) dx_j \quad (1.40)$$

entonces

$$\begin{aligned} da_i da_i &= \left(\delta_{lk} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \left(\delta_{il} + \frac{\partial u_i}{\partial x_l} \right) dx_k dx_l - \left(\delta_{kl} + \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} \right) dx_k dx_l \\ &= \left(\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) dx_i dx_j. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Por otro lado

$$dx_i dx_i = \delta_{ij} dx_i dx_j, \quad (1.42)$$

entonces

$$(ds)^2 - (ds_0)^2 = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) dx_i dx_j \implies (ds)^2 - (ds_0)^2 = 2E_{ij} dx_i dx_j, \quad (1.43)$$

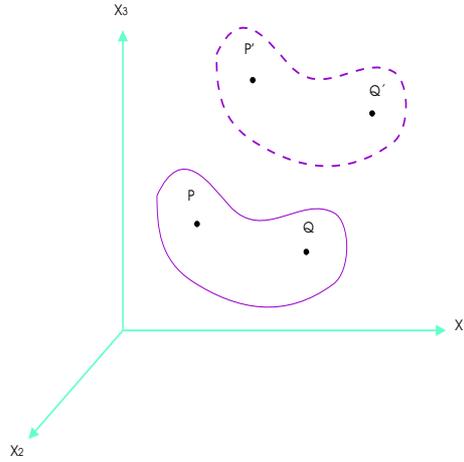


Figura 1.13:

de donde

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \quad (1.44)$$

la cual es conocida como el tensor de esfuerzos de deformación de Green y mide el cambio de longitudes en un medio. Si consideramos que las derivadas son pequeñas, entonces los productos de estas lo serán más, por lo que el término no lineal se puede eliminar. Así, tenemos que:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (1.45)$$

que es llamado el *tensor de deformaciones infinitesimales de Cauchy*. El desplazamiento de P a P' puede ser expresado como:

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = u_i(P), \quad (1.46)$$

de la misma forma, el desplazamiento de Q a Q' como:

$$u_i(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3) = u_i(Q), \quad (1.47)$$

desarrollando en serie de Taylor $u_i(Q)$ tenemos que:

$$u_i(Q) = u_i(x_1, x_2, x_3) + \frac{\partial u_i(P)}{\partial x_j} dx_j + \dots, \quad (1.48)$$

en donde se han quitado términos de orden superior. Esta ecuación puede expresarse como:

$$u_i(Q) = u_i(P) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)_P dx_j + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)_P dx_j. \quad (1.49)$$

En la ecuación anterior el primer término expresa una traslación del cuerpo rígido, el segundo expresa el tensor de deformación el cual mide cambios de longitud y el tercero

mide la rotación de las partículas. El siguiente tensor es conocido como tensor de rotación.

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.50)$$

Como podemos observar ε_{ij} es un tensor simétrico $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ y $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$.

1.5. Ley de Hooke

La ley de Hooke nos dice que el límite de la deformación de un cuerpo es directamente proporcional a la fuerza. Analizando e interpretando la ley de Hooke se pueden estudiar aspectos relacionados con la ley de fuerzas, trabajo, fuerzas conservativas y energía de resortes.

1.5.1. Elasticidad y resortes

Si a un cuerpo le aplicamos una fuerza que lo deforma, y regresa a su forma o tamaño original cuando desaparece la fuerza deformadora entonces decimos que es un cuerpo elástico. Las fuerzas elásticas reaccionan en contra de la fuerza deformadora para mantener estable la estructura molecular del cuerpo. El primero en demostrar el comportamiento sencillo relativo a la elasticidad de un cuerpo fue Robert Hooke (1635-1703) físico-matemático, químico y astrónomo inglés. Hooke estudió los efectos producidos por las fuerzas de tensión, observó que existía un incremento de la longitud del cuerpo el cual era proporcional a la fuerza aplicada.

Ley de Hooke: Cuando se trata de deformar un sólido, este se opone a la deformación, siempre que esta no sea demasiado grande. Hooke estableció una ley que relaciona la fuerza aplicada y la deformación producida. Para una deformación unidimensional, la ley de Hooke se puede expresar de la siguiente manera:

$$\vec{F} = -k\vec{X} \quad (1.51)$$

donde: k es la constante de proporcionalidad o de elasticidad y \vec{X} es la deformación, que es lo que se ha comprimido o estirado el cuerpo el cual inicia a partir del estado que no hay deformación. También es conocida como el alargamiento de su posición de equilibrio. Por otro lado tenemos que \vec{F} es la fuerza de resistencia del sólido. El signo (-) es debido a la fuerza restauradora que posee sentido contrario al desplazamiento. Esta fuerza se opone o se resiste a la deformación. Las unidades son: *Newton/metro* (New/m), *Libras/pies* (Lb/p). Si el cuerpo se deforma más allá de un cierto punto y el cuerpo no vuelve a su tamaño o forma original, entonces ha adquirido una deformación permanente. Nosotros llamamos límite de elasticidad a la fuerza más pequeña que produce la deformación permanente. El límite de elasticidad es la mayor longitud a la que puede alargarse un cuerpo elástico sin perder sus características originales. Para fuerzas deformadoras que rebasan el límite de

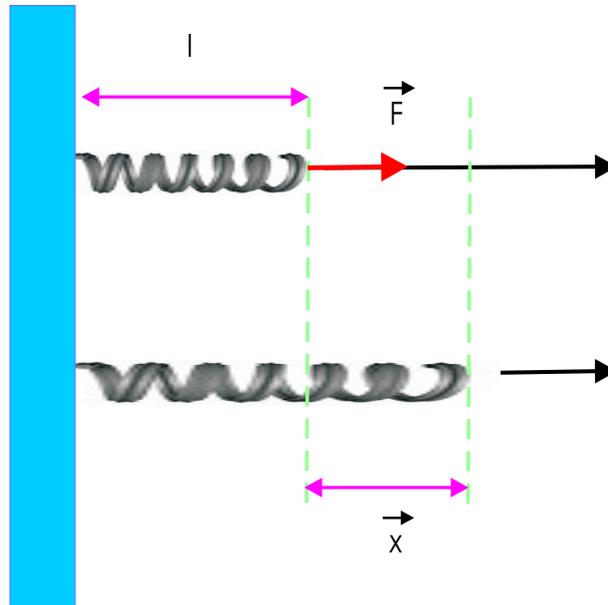


Figura 1.14: Ley de Hooke

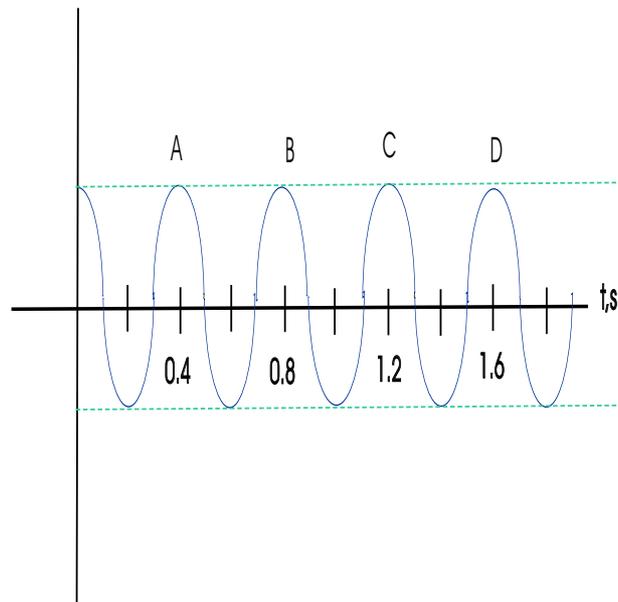


Figura 1.15: Límite de elasticidad.

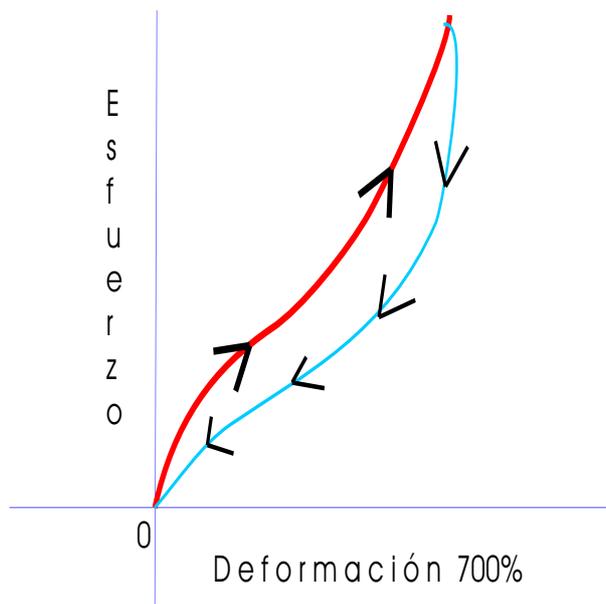


Figura 1.16: Módulo de elasticidad.

elasticidad no es aplicable la ley de Hooke. Mientras la deformación no sobrepase el límite elástico, las vibraciones mecánicas son iguales a las de los osciladores armónicos.

Módulo de elasticidad. La relación que existe entre cada uno de los tres tipos de esfuerzo (tensor-normal-tangencial) y sus deformaciones son muy importantes en la rama de la física llamada teoría de la elasticidad o su equivalente de ingeniería, resistencias de materiales. Al inicio de la curva el esfuerzo y la deformación son proporcionales hasta el punto H , el cual es el límite de proporcionalidad. Este hecho de que el esfuerzo y la deformación sean proporcionales en una región se le llama *ley de Hooke*. De H a E , el esfuerzo y la deformación son proporcionales; sin embargo si quitamos el esfuerzo en cualquier punto localizado entre O y E , la curva recorrerá el itinerario inverso y el material regresará a su longitud inicial. En la región OE , decimos que el material es elástico y el punto E lo llamamos límite de elasticidad. Hasta este punto, las fuerzas ejercidas por el material son conservativas; cuando el material vuelve a su forma original, se recupera el trabajo hecho en la producción de la deformación. En este caso decimos que la deformación es reversible.

Si continuamos cargando el material, la deformación se incrementa rápidamente, pero si quitamos la carga en cualquier punto más allá de E , por ejemplo C , el material no regresa a su longitud inicial. El cuerpo no conserva sus características de cohesión molecular. La longitud que esta asignada al esfuerzo nulo es mayor que la longitud inicial, y decimos que el material presenta una deformación permanente. Al incrementar la carga más allá de C , se realiza un gran incremento de la deformación hasta el punto R , donde se produce la ruptura. De E a R , decimos que el metal tiene deformación plástica.

Una deformación plástica es irreversible, si existe una deformación plástica grande entre

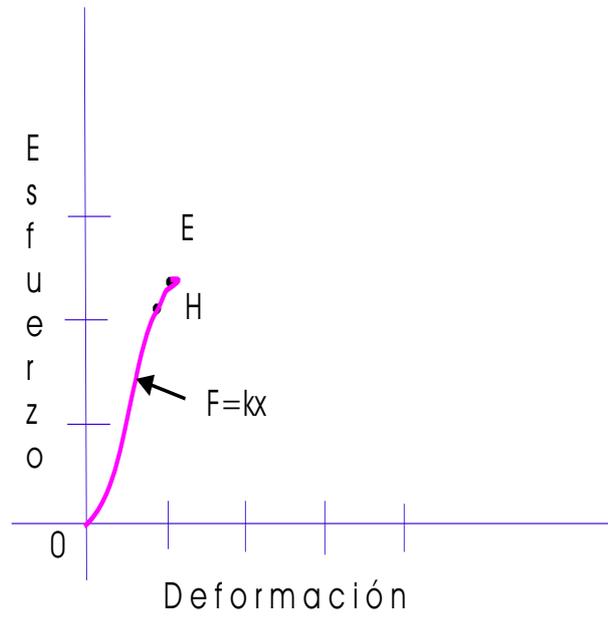


Figura 1.17:

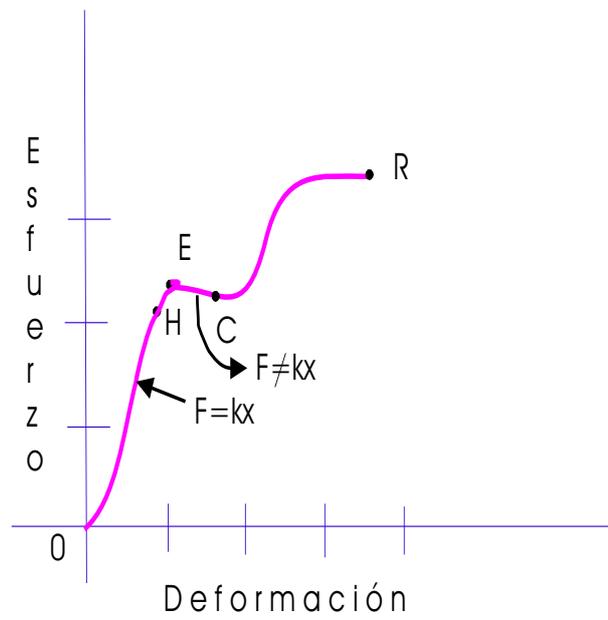


Figura 1.18:

el límite de elasticidad y el punto de fractura, el material es dúctil. Por otro lado, si la fractura sucede después del límite de elasticidad, el material se llama quebradizo. La mayoría de las estructuras se fabrican para sufrir pequeñas deformaciones, que tocan solo la parte lineal del diagrama esfuerzo-deformación, donde el esfuerzo P es directamente proporcional a la deformación unitaria D y se puede expresar de la siguiente manera: $P = Y.D$. Donde Y se conoce como el *módulo de elasticidad* o *módulo de Young*.

1.5.2. Resortes (Viscoelásticidad)

El resorte es un artefacto fabricado con un material elástico, en el cual se realiza una deformación significativa que sin embargo es reversible cuando se le aplica una fuerza. Los resortes son de gran utilidad para pesar objetos en las básculas de resorte o para almacenar energía mecánica, un ejemplo de esto son los relojes de cuerda. Estos también son utilizados para absorber impactos y reducir vibraciones, como en los resortes de ballestas empleados en las suspensiones de automóvil. Existen diferentes formas de resortes, por ejemplo en una báscula de resorte por lo regular esta arrollado en forma de hélice y su elongación (estiramiento) es proporcional a la fuerza aplicada. A estos resortes helicoidales se les llama muelles. Los resortes de relojes están arrollados en forma de espiral. Los resortes de ballesta están conformados por un grupo de láminas u hojas que están colocadas una sobre otra.

Sistemas de resortes

Los resortes se pueden configurar en dos sistemas: *en serie* y *en paralelo*. *Sistema en serie*, es cuando se dispone de los resortes uno a continuación del otro. La constante elástica equivalente (k_{eq}) la definimos de la siguiente manera:

$$\frac{1}{k_{eq}} = \sum \frac{1}{k_i} \quad (1.52)$$

Por ejemplo:

- Para dos resortes iguales la constante de elasticidad del sistema es: $k/2$
- Para n resortes iguales la constante es: k/n .

Un *sistema de resortes en paralelo* es cuando los resortes poseen un punto en común de conexión. La constante elástica equivalente k_{eq} la definimos de la siguiente manera:

$$k_{eq} = \sum k_i \quad (1.53)$$

Por ejemplo:

- Para dos resortes iguales la constante de elasticidad del sistema es: $2k$.
- Para n resortes iguales la constante es: nk .
- Para dos resortes diferentes en paralelos la constante es:

$$k = k_1 + k_2 \quad (1.54)$$

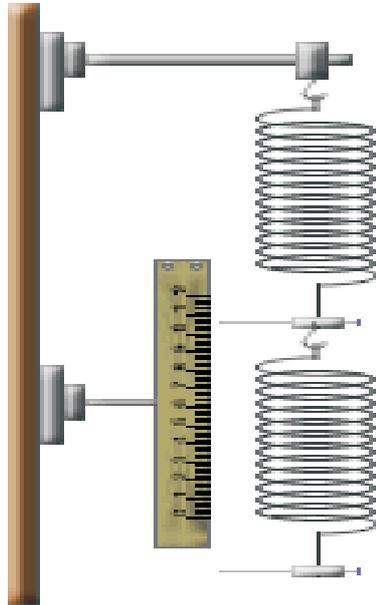


Figura 1.19: Sistema de resortes en serie.

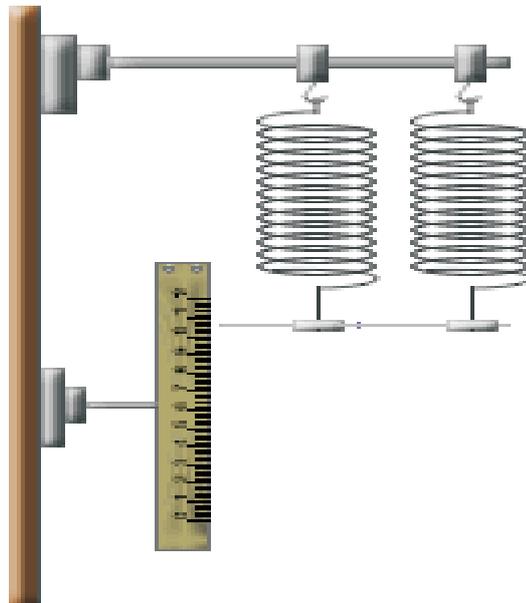


Figura 1.20: Sistema de resortes en paralelo.

La ley de fuerzas de resortes

La ley de fuerza para el resorte es la Ley de Hooke. Según lo cual el resorte es estirado (o comprimido) cada vez más, la fuerza de recuperación del resorte se hace mayor y por lo tanto es necesario aplicarle una fuerza mayor. Entonces tenemos que la fuerza aplicada F es directamente proporcional al desplazamiento o al cambio de longitud del resorte. Esto lo podemos ver como:

$$F = k\Delta X = k(X - X_0) \quad (1.55)$$

$$\text{o con } X_0 = 0, F = kX \quad (1.56)$$

Como podemos observar la fuerza varía con X . Esto lo expresamos diciendo que la fuerza esta en función de la posición. La k es una constante de proporcionalidad y se le suele llamar la constante del resorte o de la fuerza restauradora. Entre más grande sea el valor de k , más rígido o fuerte será el resorte. La ecuación anterior la satisfacen sólo los resortes ideales. Los resortes verdaderos sólo se aproximan a esta relación lineal dentro de ciertos límites.

Un resorte ejerce una fuerza (F_s) igual y opuesta

$$F_s = -kX \quad (1.57)$$

$$F_s = -k(X - X_0) \quad (1.58)$$

El signo menos nos indica que la fuerza del resorte es opuesta al desplazamiento si el resorte se estira o se comprime. Esta ecuación es una derivación de la ley de Hooke. Esta es la magnitud de la fuerza ejercida por un resorte que es estirado de una posición de reposo X_0 a una posición X . Dado que el desplazamiento tiene posición vertical, las X por lo regular son reemplazados por Y . De los resortes se deriva el movimiento armónico simple (M.A.S.)

Trabajo hecho por resortes

El trabajo también lo puede hacer una fuerza que varíe en magnitud o dirección en el desplazamiento del cuerpo en el que actúa. Un resorte realiza un trabajo con una fuerza variable. Puesto que cuando se tira lentamente de un resorte, la fuerza que se necesita para estirarlo se incrementa poco a poco a medida que este se alarga. Sea una masa m ligada horizontalmente a un resorte. Apliquemos una fuerza \vec{F} sobre la masa, con el propósito de estirar el resorte, así logramos que la masa m se desplace con respecto a la posición X_0 la cual es su posición inicial. La fuerza que se ejerce según Hooke es:

$$\vec{F} = -k\vec{X} \quad (1.59)$$

Calculamos el área bajo la curva para una compresión X , y dicha área corresponde a la medida de la energía que se transfiere al empujar el resorte, y entonces es igual al trabajo

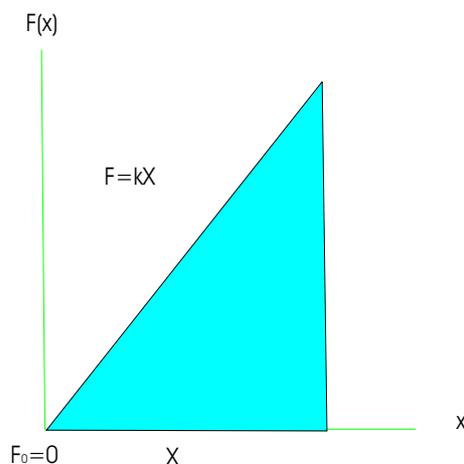


Figura 1.21:

realizado el cual numéricamente es igual al área del triángulo. La pendiente de la gráfica es k . \vec{F} aumenta uniformemente con X . La fuerza promedio (\vec{F}_{prom}) es:

$$\vec{F}_{prom} = \frac{\vec{F} + \vec{F}_0}{2} \quad \text{En particular, si } \vec{F}_0 = 0 \quad \text{entonces} \quad \vec{F}_{prom} = \frac{\vec{F}}{2}. \quad (1.60)$$

Así para obtener el trabajo realizado al estirar o comprimir el resorte es:

$$T = \vec{F}_{prom}X = \frac{\vec{F}}{2}X; \quad \text{como} \quad \vec{F} = kX \quad (1.61)$$

El trabajo realizado es:

$$T = \frac{1}{2}k(X)^2 \quad (1.62)$$

El trabajo de estirar un resorte de X_1 a X_2 es:

$$T_{12} = \frac{1}{2}k(X_2)^2 - \frac{1}{2}k(X_1)^2. \quad (1.63)$$

Fuerza conservativa de resortes

La ley de Hooke es una fuerza conservativa de característica variable. Si unimos un objeto a un resorte el cual se mueve desde un valor de alargamiento del resorte a cualquier otro, el trabajo de la fuerza elástica es también independiente de la trayectoria y de hecho es igual a la diferencia de los valores final e inicial de una función llamada energía potencial elástica. Si solamente la fuerza elástica actúa sobre el objeto, entonces se conserva la suma las energías cinética y potencial elástica; entonces, la fuerza elástica es una fuerza conservativa. Si tomamos un resorte de masa despreciable atorado por uno de sus extremos a un muro y un bloque de masa m ; los dos en el piso, así que si impulsamos el bloque, se dirigirá hacia el resorte con una velocidad constante \vec{V} (en el supuesto de que la fuerza de rozamiento entre el bloque y el piso es cero). Por lo tanto la única fuerza exterior que actúa

sobre el movimiento del cuerpo viene del resorte. Conforme el bloque va comprimiendo al resorte tanto su velocidad como su energía cinética se van disminuyendo hasta que se detienen. Al aplicar la ley Hooke podemos calcular la compresión que se produce. Después el bloque invierte el sentido de su movimiento y conserva su dirección, va incrementando su velocidad de tal manera que el resorte regresa a su longitud original; cuando ocurre esto el bloque posee la misma velocidad (signo contrario) que tenía antes de comprimir el resorte. La energía cinética disminuye en el bloque durante su movimiento pero se vuelve a incrementar totalmente cuando retorna al punto de partida. Recordemos que la variación de la energía cinética nos indica que hay trabajo mecánico; como podemos observar, al finalizar un recorrido de ida y vuelta, la capacidad del bloque permanece igual para realizar trabajo; se conservó. A la fuerza elástica que es ejercida por el resorte ideal y a otras fuerzas cuyo comportamiento es igual se les llaman fuerzas conservativas. A las fuerzas que no son conservativas se les llama *disipativas*. Un ejemplo de fuerza conservativa es la fuerza de gravedad.

Por otro lado podemos definir a una fuerza conservativa por el trabajo hecho por la fuerza. Si no existe cambio en la energía cinética de un cuerpo, el trabajo realizado en el debe ser cero si dicha trayectoria es cerrada. $T = E_c = 0$. La fuerza del resorte debe de ser conservativa porque el trabajo realizado a través de cualquier trayectoria es siempre igual.

Energía potencial de resortes

La energía potencial E_p que esta almacenada en un resorte estirado o comprimido se puede obtener por:

$$E_p = \frac{1}{2}k(X)^2 \quad (\text{Energía potencial elástica}) \quad (1.64)$$

que es igual al trabajo realizado por el resorte.

Energía cinética de resortes

La energía cinética de un cuerpo es el trabajo que puede realizar antes de permanecer en reposo. Así que si tenemos una masa m que oscila en un resorte posee energía cinética:

$$E_c = \frac{1}{2}m(V)^2 \quad (1.65)$$

De esta manera la energía cinética y la energía potencial juntas nos dan la energía mecánica total del sistema

$$E = \frac{1}{2}m(V)^2 + \frac{1}{2}k(X)^2 \quad (1.66)$$

Después de analizar a un resorte que se comprime una distancia X_0 . Durante un período, la masa pasa por $X = 0$, se estira $X = X_0$ y retorna a $X = -X_0$. Al moverse la masa cambian las energías cinética y potencial asociadas al sistema. Estas energías son inversamente proporcionales, una aumenta y la otra disminuye.

1.6. Segunda ley de Newton

La segunda ley de Newton, también es conocida como la ley Fundamental de la Dinámica, la cual determina que existe una relación proporcional entre la fuerza y la variación de la cantidad de movimiento o momento lineal del cuerpo. Dicho de otra manera, la fuerza es directamente proporcional a la masa y a la aceleración del cuerpo.

$$\text{Fuerza/masa} = \text{aceleracion} \quad (1.67)$$

$$F = ma \quad (1.68)$$

Por otro lado, la Física Clásica de Newton sostenía que una fuerza constante podría acelerar una masa hasta el infinito. Durante el transcurso de los años se le han realizado varias modificaciones a la segunda ley de Newton una de ellas por la Teoría de la Relatividad Especial de Einstein al tomar el fenómeno del aumento de la masa de un cuerpo con la velocidad y, después por la Relatividad General al introducir perturbaciones del espacio-tiempo. Con esto una fuerza constante ya no puede acelerar una masa hasta el infinito. Sin embargo la relación de proporcionalidad entre masa y fuerza que genera la aceleración se sigue conservando para la masa en un instante determinado. De esta manera la masa y la energía se transforman en dos manifestaciones de la misma cosa. Los principios de la conservación de la masa y de la energía de la mecánica clásica pasan a conformar el principio de conservación de la energía-masa relativista más en general. Sin embargo, la Teoría de la Relatividad de Einstein no nos dice que es eso que se manifiesta como masa o como energía.

Además de la Teoría de la Equivalencia Global se derivan varias cosas relacionadas a la no existencia de las típicas singularidades relativistas y de la compatibilidad entre la teoría del átomo. El principio de igualdad que existe entre masa inercial y masa gravitatoria nos deja encuadrar en la *Ley Fundamental de la Dinámica* a la fuerza de gravedad de los planetas. Sin embargo la física Relativista de Einstein mantiene dicho principio, pero cambia el espacio y el tiempo para que cuadren pequeñas diferencias que fueron observadas en la órbita de Mercurio y de los planetas.

Además de introducir la variación de la masa física con la velocidad, la Ley de la Gravedad Global introduce la variación de la fuerza gravitacional con la velocidad para un mismo punto de la globina. En el nuevo modelo de la Dinámica Global, la segunda ley de Newton, se continua cumpliendo en lo que respecta a la proporcionalidad entre fuerza, masa y aceleración. Cuando la velocidad es parecida a la velocidad de la luz, el incremento de la masa física es provocado por la conversión entre la fuerza aplicada la cual proviene o no de la energía gravitacional y de la energía cinética. Dicho incremento será compensado con un aumento de la atracción gravitacional. Dicho de otra manera, de las dos componentes de la atractis causa, de la originada de la tensión de la curvatura longitudinal de la globina y la originada de la velocidad de los cuerpos con masa respecto a la globina, solamente la segunda es la que ocasiona la variación adicional de la fuerza gravitacional que provoca

la precesión anómala de las órbitas de los planetas en lo que respecta a lo visto por la ley de Gravitación Universal de Newton.

En resumen, la Dinámica Global conserva idéntico el comportamiento de la masa física en movimiento con o sin fuerzas de gravedad en lo que respecta a la proporcionalidad entre fuerza, masa y aceleración, con algunas modificaciones:

- El principio de igualdad que existe entre masa inercial y masa gravitatoria de Newton y Einstein se convierte en una realidad de las características del movimiento de la masa física.
- Debido a la velocidad se incrementa la masa física. Sin embargo, con algunas diferencias conceptuales con respecto al marco de referencia del movimiento, de manera parecida sucede en la Mecánica Relativista y en la Dinámica Global.
- La precesión anómala que existe en la órbita de los planetas se entiende en la Dinámica Global como una fuerza extra de la interacción masa-globina que surge de la velocidad. En la Mecánica Relativista de Einstein y en la Mecánica Cuántica, tal precesión se explica con modificaciones del espacio-tiempo.

Recordemos que la Teoría de la Equivalencia Global matiza la Segunda ley de Newton y lo hace a través de un contexto en el que el movimiento de los cuerpos no se realiza en un vacío abstracto sino en la estructura reticular tridimensional de la materia o globina, con su respectiva característica de simetría radial en un espacio euclidiano. La Mecánica Global explica el efecto túnel y el experimento de doble rendija y sostiene que el movimiento de la órbita de los electrones se debe al movimiento de los puntos de relajación de la tensión gravito-magnética de la globina.

El Newton en el Sistema Internacional es la unidad de fuerza y se representa por una N . Un Newton es la fuerza que hay que aplicar en un cuerpo de un kilogramo de masa para que tenga una aceleración de $1m/s^2$, es decir, $1N = 1Kg. 1m/s^2$. La ecuación anterior se cumple para cuerpos cuya masa sea constante. En el caso de que la masa varíe, como por ejemplo en un cohete que va quemando combustible, no ocurre puesto que para que esto suceda debemos generalizarla. Para esto primero definimos una magnitud física que es la cantidad de movimiento que la representaremos por una p y que se define como el producto de la masa de un cuerpo por su velocidad, esto es

$$p = m.v \tag{1.69}$$

A la cantidad de movimiento también se le suele llamar momento lineal. La cantidad de movimiento es una magnitud vectorial y, en el Sistema Internacional se mide en $kg.m/s$. En términos de esta magnitud física, la Segunda ley de Newton queda expresada de la siguiente manera: La Fuerza que actúa sobre un cuerpo es igual a la variación temporal de la cantidad de movimiento de dicho cuerpo, esto es:

$$F = dp/dt \tag{1.70}$$

de esta manera cubrimos el caso de cuerpos cuya masa no sea constante. Para verificar que dicha generalización también nos sirve para el caso de que la masa sea constante, recordando la definición de cantidad de movimiento y la regla para derivar un producto tenemos:

$$F = d(m.v)/dt = m.dv/dt + dm/dt.v \quad (1.71)$$

como la masa es constante entonces:

$$dm/dt = 0 \quad (1.72)$$

y utilizando la definición de aceleración, tenemos que:

$$F = ma \quad (1.73)$$

que es lo que habíamos visto anteriormente.

Otra derivación de la expresión de la Segunda ley de Newton utilizando la cantidad de movimiento es lo que se llama Principio de conservación de la cantidad de movimiento. Si la fuerza total que es ejercida en un cuerpo es cero, la Segunda ley de Newton nos dice que:

$$0 = dp/dt \quad (1.74)$$

es decir, la derivada de la cantidad de movimiento con respecto al tiempo es cero. Como sabemos de nuestros cursos de cálculo esto nos dice que la cantidad de movimiento debe ser constante en el tiempo. Esto es lo que se conoce como *Principio de conservación de la cantidad de movimiento*: si la fuerza total que actúa sobre un cuerpo es nula, la cantidad de movimiento del cuerpo permanece constante en el tiempo.

Sea una partícula de masa m sometida a varias fuerzas la segunda ley de Newton nos dice que:

$$\sum F = ma \quad (1.75)$$

nosotros podemos considerar al vector de aceleración como $a = (a_1, a_2, a_3)^T$ que tiene componentes a_j para las tres direcciones x_j con $j = 1, 2$ y 3 . Y como sabemos el índice superior T nos indica la operación transpuesta. Como la velocidad es el cambio del desplazamiento con el tiempo y la aceleración es el cambio de la velocidad con el tiempo. Entonces, de lo anterior tenemos que la aceleración es la segunda derivada del desplazamiento \mathfrak{d} con respecto al tiempo lo cual denotamos como:

$$a = \frac{d^2\mathfrak{d}}{dt^2} \quad (1.76)$$

La mecánica de Newton explica el movimiento tanto de los cuerpos celestes como de los objetos comunes. Sean las coordenadas cartesianas y teniendo el equilibrio dentro de un continuo nosotros podemos plantear la segunda ley de Newton por unidad de volumen de manera actualizada usando notación indizada y derivadas parciales con respecto a las

variables. Esto lo podemos realizar gracias a la definición del tensor tensión desarrollado por Cauchy. Entonces podemos escribir:

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0 \quad (1.77)$$

donde $u_i(x, t)$ es el vector de desplazamiento del punto x el cual representamos por x_j con $j = 1, 2$ y 3 , respectivamente, o por x, y y z . El tiempo esta dado por t , $\sigma_{ji}(x, t)$ son las componentes del tensor tensión que esta sobre las caras de una partícula orientada hacia el eje j , f_i es la fuerza del cuerpo por unidad de volumen, ρ es la densidad de masa y el lado derecho de la ecuación es la masa por unidad de volumen multiplicado por la aceleración. Por otro lado podemos garantizar sobre los momentos de equilibrio que el tensor tensión puede ser simétrico, es decir $\sigma_{ji} = \sigma_{ij}$. El equilibrio nos proporciona una frontera sujeta a atracciones o fuerzas por unidad de área la cual nos conduce a la ecuación de Cauchy $\sigma_{ij}n_j = t_i^{(n)}$ el cual relaciona el tensor tensión en un punto con la tracción asociada a un vector normal dado.

Si el movimiento en el punto $x + dx$ esta dentro de una vecindad alrededor de x lo podemos expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} u_i(x + dx, t) &= u_i(x, t) + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k \\ &= u_i(x, t) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) dx_k \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) dx_k. \end{aligned} \quad (1.78)$$

El primero y tercer término de la ecuación anterior nos muestra al movimiento $x + dx$ como la composición de un cuerpo rígido trasladado y rotado lo cual no produce ningún esfuerzo. El segundo término implica esfuerzo y es el producto del tensor de esfuerzo infinitesimal de Cauchy y las diferenciales espaciales dx_k .

$$e_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right), \quad (1.79)$$

En la actualidad nosotros expresamos la ley de Hooke de la siguiente forma: $F = k \times \delta$ donde F es la fuerza, k es la constante de elasticidad o rigidez, y δ es el desplazamiento. Para materiales elásticos lineales la ley constitutiva más general esta dada por:

$$\sigma_{ij} = c_{ijpq} e_{pq}, \quad (1.80)$$

llamada ley de Hooke que expresa una relación lineal entre la tensión σ_{ij} y el esfuerzo e_{pq} en un punto. En el tensor c_{ijpq} podemos apreciar las propiedades elasticas y el cual como observamos es de cuarto orden. Dado un punto, esto nos genera 81 entradas, pero al considerar las simetrias de los tensores de tensión y esfuerzo nosotros solamente tenemos 36

constantes independientes. Debido a las consideraciones de la energía solamente podemos tener 21 constantes para un sólido anisótropo en general. Si el medio es isótropo tenemos la siguiente ecuación:

$$c_{ijpq} = \lambda \delta_{ij} \delta_{pq} + \mu (\delta_{ip} \delta_{jq} + \delta_{iq} \delta_{jp}), \quad (1.81)$$

donde δ_{ij} es la delta de Kronecker que como sabemos es igual a 1 si $i = j$; y es igual a 0 si $i \neq j$; por otro lado notamos que $\delta_{jj} = 3$ y las constantes λ, μ son las constantes de Lamé. En la ecuación (1.81) podemos ver que con solo dos constantes independientes podemos expresar un sólido isótropo lineal. Para materiales isotropicos la ley de Hooke se puede expresar:

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}. \quad (1.82)$$

Sustituyendo σ_{ij} de la ecuación (1.82) en la ecuación (1.77) y considerando la ecuación de esfuerzo en (1.79) entonces nosotros podemos expresar la ecuación de movimiento dentro de un medio elastico como:

$$\mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_j} + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad (1.83)$$

conocida como la ecuación de Navier. Podemos ver que bajo ciertas circunstancias las soluciones homogéneas para $f_i = 0$ se puede representar como:

$$u_i = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \varepsilon_{ijk} \frac{\partial \psi_k}{\partial x_j} \quad \text{con} \quad \frac{\partial \psi_k}{\partial x_k} = 0, \quad (1.84)$$

donde $\varphi = \varphi(x, t)$ y $\psi_k = \psi_k(x, t)$ son funciones que se conocen como potenciales. El primero es un escalar y el segundo es un vector. Incluso estas funciones pueden ser soluciones de las ecuaciones de onda homogéneo.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial t^2} \quad (1.85)$$

Esto es sustentado por el teorema de Lamé, donde $\alpha = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ y $\beta = \sqrt{\mu/\rho}$ son las velocidades de onda compresional o P y ondas de corte o S . La existencia de estos dos tipos de ondas fue descubierto gracias a experimentos realizados que muestran a la luz como ondas polarizadas transversalmente. Por otro lado Poisson utilizó fuerzas elásticas intermoleculares newtonianas y encontró teóricamente la existencia de las ondas P y S . Sus aceveraciones le permitieron concluir que $\alpha = \sqrt{3}\beta$. Esto ocurre cuando $\lambda = \mu$ (o $\nu = 0,25$), a un medio con esta característica es llamado sólido de Poisson.

Para medios lineales elásticos, isótropos, elásticos homogéneos la ecuación de Navier se puede resolver a través de superposiciones de soluciones de la ecuación de onda conocidas como potenciales. Existen muchos métodos para encontrar las soluciones. Probablemente la solución más simple es la que propuso D'Alembert un personaje que vivió en Francia en el siglo dieciocho. Extendiendo su idea nosotros tenemos que:

$$\Phi(x, t) = f\left(t - \frac{x_k n_k}{\alpha}\right) + g\left(t + \frac{x_k n_k}{\alpha}\right), \quad (1.86)$$

la cual es una solución de la ecuación de onda para casi cualquier función f y g , que se propagan a lo largo de los vectores unitarios n_k y $-n_k$, respectivamente. Sean $x_k n_k = s$ que es la ecuación de un plano en el espacio de 3D y que está a una distancia s del origen, medido a lo largo de n_k . Lo cual nosotros podemos expresar como: $x \cdot n = s$. Esta es la definición de una nueva coordenada s

1.6.1. La transformada de Fourier y las ondas planas

Consideremos la siguiente función:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(+i\omega t) d\omega, \quad (1.87)$$

donde $F(\omega)$ es la transformada de Fourier de $f(t)$ dada por:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i\omega t) dt. \quad (1.88)$$

La ecuación (1.87) nos muestra una función arbitraria en términos de superposición continua de senos y cosenos. Como t es variable entonces nosotros lo podemos sustituir por el argumento de D'Alembert ($t - s/c$) por lo tanto tenemos que:

$$\begin{aligned} f(t - s/c) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp[+i\omega(t - s/c)] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp[-i\omega s/c] \exp[+i\omega t] d\omega. \end{aligned} \quad (1.89)$$

La contribución de la onda plana la da la función de transferencia que multiplica la transformada de Fourier de la señal. Sea la función de transferencia:

$$\exp[-i\omega s/c] = \exp[-i(\omega/c)n \cdot x] = \exp[-ik \cdot x], \quad (1.90)$$

la cual simboliza una onda plana armónica que se propaga e indica que el vector de onda $k = (\omega/c)n$ nos proporciona la dirección de propagación de la onda plana, donde n es un vector unitario ($n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$). De hecho se puede extender la idea del vector unitario n de que este pueda tener valores complejos por lo tanto nosotros podemos tener ondas planas no homogéneas. Ejemplo de esto es una onda esférica armónica que es el resultado de la superposición de ondas planas homogéneas y no homogéneas, utilizando la integral de Weyl tenemos que:

$$\frac{1}{R} \exp\left(-i\omega \frac{R}{c}\right) = \frac{1}{2\pi} \int \int \frac{\exp(-ik_x x - ik_y y - \gamma |z|)}{\gamma} dk_x dk_y, \quad (1.91)$$

donde $\gamma = \sqrt{\omega^2/c^2 - k_x^2 - k_y^2}$, por el signo nos damos cuenta que $\text{Re } \gamma > 0$ y que $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Entonces las ondas planas son trozos edificados para construir soluciones para problemas de espacios medios y capas medias.

1.7. La fórmula de D'Alembert

Sea el problema de Cauchy en todo \mathbb{R} .

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1.92)$$

a $u_{tt} - u_{xx}$ se le suele llamar el d'alembertiano el cual es un operador que involucra derivadas parciales, de hecho se suele simbolizar con \square . Su versión multi-dimensional de este es:

$$\square = \partial_t^2 - \Delta_x = \partial_t^2 - \sum_{i=1}^N \partial_{x_i}^2. \quad (1.93)$$

En un espacio de una dimensión la ecuación de onda es un modelo que simplifica las vibraciones de pequeña amplitud de una cuerda y qué através de $u = u(x, t)$ describe las deformaciones verticales de esta. La solución de (1.92) puede calcularse de manera explícita. De hecho dicha solución es de la forma:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[f(x+t) + f(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \psi(s) ds. \quad (1.94)$$

donde u es de la siguiente forma:

$$u(x, t) = \mathfrak{F}(x+t) + G(x-t) \quad (1.95)$$

y

$$\mathfrak{F}(s) = \frac{1}{2}f(s) + \frac{1}{2} \int_0^s \psi(\sigma) d\sigma, \quad (1.96)$$

$$G(s) = \frac{1}{2}f(s) + \frac{1}{2} \int_s^0 \psi(\sigma) d\sigma. \quad (1.97)$$

Por otro lado es bueno mencionar que cualquier función de la forma (1.95) es solución de (1.92). Esto corresponde a la factorización del operador de D'Alembert

$$\square = \partial_t^2 - \partial_x^2 = (\partial_t - \partial_x)(\partial_t + \partial_x) = (\partial_t + \partial_x)(\partial_t - \partial_x), \quad (1.98)$$

la cual nos dice que el operador de onda es la composición de los dos operadores de transporte de primer orden $\partial_t \pm \partial_x$, en donde sus soluciones son ondas viajeras de la forma $\mathfrak{F}(x+t)$ o $G(x-t)$.

En (1.93) podemos observar otra de las propiedades de la ecuación de onda: la velocidad finita de propagación. Así que el valor de la solución u en el punto (x, t) depende de los valores de los datos iniciales en el intervalo de dependencia $[x-t, x+t]$. Por otro lado, una perturbación de los datos iniciales en el instante $t = 0$ en el punto x_0 solamente afecta al valor de la solución en el cono de influencia $|x - x_0| < |t|$.

Otra de las propiedades es la de no tener efecto regularizante. Podemos deducir que la solución u , en cualquier instante $t > 0$, es tan regular como el dato inicial f para la posición y adquiere una derivada con respecto a la velocidad inicial ψ . De la misma manera la velocidad u_t posee la misma regularidad que ψ y pierde una derivada con respecto a f .

Como podemos observar las incógnitas del problema son u y u_t . Por tal motivo debemos dar los datos iniciales de las dos incógnitas para asegurar la existencia y la unicidad de las soluciones. Considerando lo anterior es usual escribir la ecuación (1.92) como un sistema de la siguiente forma:

$$\begin{cases} u_t = v \\ v_t = u_{xx} \end{cases} \quad (1.99)$$

o como un sistema de leyes de conservación hiperbólica

$$\begin{cases} u_t = w_x \\ w_t = u_x \end{cases} \quad (1.100)$$

Algunas de estas propiedades de la ecuación prevalecen en más de una dimensión espacial. Otra de las propiedades de la ecuación de onda es la ley de conservación de la energía. En esta ocasión la energía correspondiente es:

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} [|u_x(x, t)|^2 + |u_t(x, t)|^2] dx \quad (1.101)$$

lo cual podemos comprobar multiplicando (1.92) por u_t e integrando en \mathbb{R} . Esta ley nos dice que el espacio $H^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$ es un marco funcional el cual es propicio para la resolución de la ecuación de onda. Por lo tanto tenemos que para todo dato inicial $(f, \psi) \in H^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$ hay una única solución de (1.92) en la clase u que pertenece $C([0, \infty); H^1(\mathbb{R})) \cap C^1([0, \infty); L^2(\mathbb{R}))$. Como podemos observar el vector incógnita conserva la continuidad en el tiempo, la regularidad en los datos iniciales.

1.8. Ecuación de Navier

Se puede demostrar que en un sólido que es continuo, elástico, homogéneo e isotropo la ecuación que representa la propagación de las ondas, se puede escribir de la siguiente manera:

$$\mu \nabla^2 \vec{u} + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) + f = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \quad (1.102)$$

donde $\vec{u} = (u, v, w)$ es un vector que simboliza el desplazamiento en las tres direcciones del espacio x, y, z , correspondientes, y t representa el tiempo, λ y μ son los parámetros de Lamé y ρ es la densidad. ∇^2 es el laplaciano y ∇ es el operador nabla. Esta es la llamada ecuación de Navier sin fuerzas de volumen. Para un campo vectorial dado V , se puede demostrar que se satisface utilizando el teorema de Helmholtz,

$$\nabla^2 \vec{V} = \nabla(\nabla \cdot \vec{V}) + \nabla \times (\nabla \times \vec{V}) \quad (1.103)$$

en la ecuación de Navier (1.102) se tiene:

$$(\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla \cdot \vec{u}) + \mu\nabla \times (\nabla \times \vec{u}) + f = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \quad (1.104)$$

Expresada de esta manera la podemos separar en dos partes. Por una parte podemos suponer que el desplazamiento se origina sin alterar el volúmen, por tal motivo su divergencia es cero, y entonces tenemos que:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{u}) + f = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \quad (1.105)$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (1.106)$$

donde $\beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$, es la velocidad con que se propagan las ondas equivolúmetricas o de portante. Estas son las llamadas ondas S u ondas secundarias o de cizalla. En esta ecuación el vector de desplazamiento es perpendicular a la dirección de propagación. A estas ondas se les suele clasificar según su polarización en ondas SH y ondas SV , ambas pertenecientes al plano perpendicular a la dirección de propagación del frente de ondas. Las ondas SH están polarizadas en el plano horizontal, y las ondas SV están polarizadas en el plano vertical.

Por otra parte, considerando que el movimiento se origina sin rotación de partículas, de tal manera que el rotacional de la ecuación se anula, entonces obtenemos que:

$$f + \nabla^2 \vec{u} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \quad (1.107)$$

$$\nabla \times \vec{u} = 0 \quad (1.108)$$

donde $\alpha = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$ es la velocidad de propagación de las ondas compresionales o irrotacionales. A estas se les denomina ondas P y su velocidad de propagación es mayor que las de las ondas S , por tal razón se les suele llamar primarias. En esta ocasión el campo de desplazamientos es paralelo a la dirección en la que se propaga la onda.

1.8.1. Planteamiento del problema en 3-D

La primera ecuación se puede expresar en varios sistemas de coordenadas, como en las cartesianas, coordenadas polares, cilíndricas, esféricas, etc. El esquema en desplazamientos para coordenadas cartesianas en 3D, lo podemos escribir como:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} + f_x \quad (1.109)$$

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y} + f_y \quad (1.110)$$

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} + f_z \quad (1.111)$$

donde f_x , f_y , f_z simbolizan la fuerza por unidad de volúmen en las tres direcciones del espacio x , y y z , respectivamente. La expresión en desplazamientos-esfuerzos de la misma ecuación es:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + f_x \quad (1.112)$$

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + f_y \quad (1.113)$$

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z \quad (1.114)$$

donde σ_{ij} es el tensor de esfuerzos, que podemos escribir como:

$$\sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \frac{\partial w}{\partial z} \quad (1.115)$$

$$\sigma_{yy} = \lambda \frac{\partial u}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \frac{\partial w}{\partial z} \quad (1.116)$$

$$\sigma_{zz} = \lambda \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial y} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial w}{\partial z} \quad (1.117)$$

$$\sigma_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (1.118)$$

$$\sigma_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (1.119)$$

$$\sigma_{yz} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (1.120)$$

Las dos expresiones anteriores son formas diferentes de representar la ecuación de Navier. Aunque en realidad es la misma ecuación, el utilizar una expresión o la otra, nos lleva a esquemas de diferencias finitas distintos. Nosotros desarrollaremos un esquema en la expresión en desplazamientos.

1.8.2. Planteamiento del problema en 2-D

Cuando se plantea el problema de la propagación de ondas en dos dimensiones, se separa el problema en dos partes. Por una parte se trabaja con las ondas SH , y por la otra con las ondas P y SV . El problema SH es un problema escalar en donde el desplazamiento de la partícula es perpendicular al sentido de propagación de la onda y al plano $2 - D$. Por otro lado, el problema $P - SV$ es un problema vectorial, en donde el desplazamiento se produce en el plano que se consideró. Aquí el desplazamiento de la partícula y la dirección de propagación de la onda están en el mismo plano.

Ondas SH. El plano de propagación de estas ondas es el x, z . Sin embargo, sólo hay desplazamiento en la dirección y , en otras palabras el desplazamiento ν . La expresión en desplazamientos es:

$$\rho \frac{\partial^2 \nu}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \nu}{\partial z^2} + f_y \quad (1.121)$$

En esta ocasión se trata de una ecuación en la que tenemos tres derivadas parciales de segundo orden. Estas pueden ser aproximadas por esquemas de diferencias finitas. Sin embargo, existen otras expresiones, como por ejemplo la expresión en desplazamientos-esfuerzos, que para esta ocasión *SH* lo podemos expresar como:

$$\rho \frac{\partial^2 \nu}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + f_y \quad (1.122)$$

$$\sigma_{xy} = \mu \frac{\partial \nu}{\partial x} \quad (1.123)$$

$$\sigma_{yz} = \mu \frac{\partial \nu}{\partial z} \quad (1.124)$$

Por otro lado, la expresión en velocidad-esfuerzos nos queda como:

$$\rho \frac{\partial \nu}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + f_y \quad (1.125)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial t} = \mu \frac{\partial \nu}{\partial x} \quad (1.126)$$

$$\frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial t} = \mu \frac{\partial \nu}{\partial z} \quad (1.127)$$

donde v es la velocidad del desplazamiento ν , dicho de otra forma $v = \frac{\partial \nu}{\partial t}$.

Ondas P-SV. Como en las ondas *SH*, el movimiento se realiza en el plano $x - z$, siempre y cuando no exista desplazamiento en la dirección y . Considerando lo anterior podemos escribir las ecuaciones que representan el problema *P - SV* en la expresión de desplazamientos en coordenadas cartesianas, como:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \lambda \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + f_x \quad (1.128)$$

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} + \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + f_z \quad (1.129)$$

A continuación se presenta la expresión de esta ecuación en términos de desplazamientos-esfuerzos,

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + f_x \quad (1.130)$$

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z \quad (1.131)$$

$$\sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial w}{\partial z} \quad (1.132)$$

$$\sigma_{zz} = \lambda \frac{\partial u}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial w}{\partial z} \quad (1.133)$$

$$\sigma_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (1.134)$$

Por último, se presenta la expresión en velocidad-esfuerzos, la cual queda como:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + f_x \quad (1.135)$$

$$\rho \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z \quad (1.136)$$

$$\sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial w}{\partial z} \quad (1.137)$$

$$\sigma_{zz} = \lambda \frac{\partial u}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial w}{\partial z} \quad (1.138)$$

$$\sigma_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (1.139)$$

donde u y w es la velocidad en las direcciones del espacio x y z respectivamente, es decir, $u = \frac{\partial u}{\partial t}$ y $w = \frac{\partial w}{\partial t}$.

Capítulo 2

Método de diferencias finitas

Consideremos la siguiente ecuación diferencial parcial lineal de segundo orden.

$$A \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + D \frac{\partial \Phi}{\partial x} + E \frac{\partial \Phi}{\partial y} + F \Phi + G = 0 \quad (2.1)$$

donde $\Phi = \Phi(x, y)$ es una función y x, y son las variables independientes, en algún punto en particular (x, y) del dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ de la función, la cual se clasifica en:

- Elíptica si $(B^2 - 4AC) < 0$, (No existe dirección característica en (a, b));
cuya ecuación es:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad \circ \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \xi(x, y) \quad (2.3)$$

entre estas encontramos la ecuación de Laplace y la ecuación de Poisson.

- Parabólica si $(B^2 - 4AC) = 0$, (Existe 1 dirección característica en (a, b));

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \quad (2.4)$$

con λ constante. Ejemplos de estas son la ecuación de Fourier y la ecuación de difusión pura.

- Hiperbólica si $(B^2 - 4AC) > 0$, (Existen 2 direcciones características en (a, b));

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \quad \circ \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + k \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \quad (2.6)$$

con C, k constantes. Entre estas están la ecuación de onda y la ecuación de advección pura.

Para resolver dichas ecuaciones existen varios métodos, pero en el presente trabajo nos enfocaremos en uno en particular, que es el método de diferencias finitas, el cual en páginas posteriores utilizaremos para resolver la ecuación de onda.

2.1. Diferencias finitas

El método de diferencias finitas se fundamenta en lo siguiente: las funciones de argumentos continuos que muestran el estado del flujo son sustituidos por funciones que son definidas en un número finito de puntos de la grilla o malla del dominio considerado. Las derivadas son sustituidas por diferencias divididas. Así, dicha ecuación diferencial es sustituida por operaciones algebraicas de diferencias finitas. La grilla de cálculo es una región finita de puntos que cubren el mismo dominio en el plano (x, t) como pasa con las funciones de argumentos continuos. Este cuadrillado es el dominio de definición de las funciones de argumentos discretos a los cuales conoceremos como funciones de grilla ó malla.

2.2. Fórmulas de diferencias finitas

La sustitución de la expresión diferencial por su análoga diferencia finita es una aproximación cuyo grado se le llama *error de truncamiento* u *orden de aproximación*. Las aproximaciones pueden desarrollarse de la siguiente manera. Sea $u(x)$ una función de clase $C^{m+1}([0, L])$ y h un número real, el valor de la función en $(x + h)$ puede desarrollarse en serie de Taylor por:

$$u(x + h) = u(x) + h \cdot \frac{du}{dx}(x) + \frac{h^2}{2} \cdot \frac{d^2u}{dx^2}(x) + \dots + \frac{h^m}{m!} \cdot \frac{d^m u}{dx^m}(x) + \frac{h^{m+1}}{(m+1)!} \cdot \frac{d^{m+1}u}{dx^{m+1}}(\xi) \quad (2.7)$$

donde $x < \xi < x + h$. En la ecuación anterior al último sumando se le suele llamar *el resto*. Si se comete un error en el resto del desarrollo lo cual denotaremos como $O(h^{m+1})$ este se produce debido al truncamiento del desarrollo de Taylor en su término $(m + 1)$ -ésimo y por tal razón se le nombra como error de truncamiento (o de truncatura).

Sea $m = 1$ y $h > 0$ entonces:

$$u(x + h) \approx u(x) + h \cdot \frac{du}{dx}(x) \quad (2.8)$$

de lo cual

$$\frac{du}{dx}(x) \approx \frac{u(x + h) - u(x)}{h} \quad (2.9)$$

en donde el error de truncamiento es:

$$E_{tr} = -\frac{h}{2} \cdot \frac{d^2u}{dx^2}(\xi) \longrightarrow E_{tr} = O(h) \quad (2.10)$$

La ecuación (2.9) se conoce como fórmula en diferencias finitas progresivas de primer orden que se utiliza para aproximar la primera derivada de una función, puesto que si

$h > 0$ se utiliza para aproximar el valor de la primera derivada en x a la función evaluada en x y en un punto $(x + h)$ adelantado respecto a x .

Con $h > 0$ consideremos el siguiente desarrollo:

$$u(x - h) = u(x) - h \cdot \frac{du}{dx}(x) + \frac{h^2}{2} \cdot \frac{d^2u}{dx^2}(\xi) \quad (2.11)$$

lo cual haciendo el proceso anterior, obtendremos la fórmula en diferencias finitas regresiva de primer orden para aproximar la primera derivada de una función:

$$\frac{du}{dx}(x) \approx \frac{u(x) - u(x - h)}{h} \quad (2.12)$$

en la cual existe un error de truncamiento:

$$E_{tr} = \frac{h}{2} \cdot \frac{d^2u}{dx^2}(\xi) \longrightarrow E_{tr} = O(h) \quad (2.13)$$

Pero por otro lado también podemos combinar desarrollos en serie. Así, si tenemos:

$$u(x + h) = u(x) + h \cdot \frac{du}{dx}(x) + \frac{h^2}{2} \cdot \frac{d^2u}{dx^2}(x) + \frac{h^3}{6} \cdot \frac{d^3u}{dx^3}(\xi') \quad (2.14)$$

$$u(x - h) = u(x) - h \cdot \frac{du}{dx}(x) + \frac{h^2}{2} \cdot \frac{d^2u}{dx^2}(x) - \frac{h^3}{6} \cdot \frac{d^3u}{dx^3}(\xi'') \quad (2.15)$$

si a la primera ecuación le restamos la segunda obtenemos:

$$u(x + h) - u(x - h) = 2h \cdot \frac{du}{dx}(x) + \frac{h^3}{6} \cdot \left(\frac{d^3u}{dx^3}(\xi') + \frac{d^3u}{dx^3}(\xi'') \right) \quad (2.16)$$

y utilizando la igualdad $\frac{d^3u}{dx^3}(\xi') + \frac{d^3u}{dx^3}(\xi'') = 2 \cdot \frac{d^3u}{dx^3}(\xi)$ la cual obtenemos del siguiente teorema:

Teorema 2.1 *Sea f una función continua en $[a, b]$, con $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ un conjunto de puntos de $[a, b]$ y $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ un conjunto de números reales del mismo signo, diferentes de cero entonces existe un punto $\xi \in [a, b]$ tal que:*

$$\sum_n \alpha_i \cdot f(\xi_i) = \left(\sum_n \alpha_i \right) \cdot f(\xi) \quad (2.17)$$

entonces tenemos que:

$$\frac{du}{dx}(x) = \frac{u(x + h) - u(x - h)}{2h} - \frac{h^2}{6} \cdot \frac{d^3u}{dx^3}(\xi) \quad (2.18)$$

donde $x - h < \xi < x + h$. De esta ecuación obtenemos la fórmula de diferencias finitas centrada:

$$\frac{du}{dx}(x) \approx \frac{u(x + h) - u(x - h)}{2h} \quad (2.19)$$

en la cual el error de truncamiento es:

$$E_{tr} = -\frac{h^2}{6} \cdot \frac{d^3u}{dx^3}(\xi) \longrightarrow E_{tr} = O(h^2) \quad (2.20)$$

Ahora sumando los siguientes desarrollos en serie:

$$u(x+h) = u(x) + h \cdot \frac{du}{dx}(x) + \frac{h^2}{2} \cdot \frac{d^2u}{dx^2}(x) + \frac{h^3}{6} \cdot \frac{d^3u}{dx^3}(x) + \frac{h^4}{24} \cdot \frac{d^4u}{dx^4}(\xi') \quad (2.21)$$

$$u(x-h) = u(x) - h \cdot \frac{du}{dx}(x) + \frac{h^2}{2} \cdot \frac{d^2u}{dx^2}(x) - \frac{h^3}{6} \cdot \frac{d^3u}{dx^3}(x) + \frac{h^4}{24} \cdot \frac{d^4u}{dx^4}(\xi'') \quad (2.22)$$

de lo cual:

$$u(x+h) + u(x-h) = 2 \cdot u(x) + h^2 \cdot \frac{d^2u}{dx^2}(x) + \frac{h^4}{24} \cdot \left(\frac{d^4u}{dx^4}(\xi') + \frac{d^4u}{dx^4}(\xi'') \right) \quad (2.23)$$

de donde tenemos que:

$$\frac{d^2u}{dx^2}(x) \approx \frac{u(x-h) - 2 \cdot u(x) + u(x+h)}{h^2} \quad (2.24)$$

en donde existe un error de truncamiento:

$$E_{tr} = -\frac{h^2}{12} \cdot \frac{d^4u}{dx^4}(\xi) \longrightarrow E_{tr} = O(h^2) \quad (2.25)$$

Podemos extender este procedimiento al caso de funciones de varias variables. En esta ocasión lo expondremos para funciones de 2 variables. Para esto suponemos la suficiente regularidad a nuestras funciones y con $h > 0$ y $k > 0$ consideraremos los siguientes desarrollos en serie:

$$u(x+h, y) = u(x, y) + h \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{h^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{h^3}{6} \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x, y) + \frac{h^4}{24} \cdot \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, y) + \dots \quad (2.26)$$

$$u(x-h, y) = u(x, y) - h \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{h^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) - \frac{h^3}{6} \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x, y) + \frac{h^4}{24} \cdot \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, y) + \dots \quad (2.27)$$

$$u(x, y+k) = u(x, y) + k \cdot \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + \frac{k^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) + \frac{k^3}{6} \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x, y) + \frac{k^4}{24} \cdot \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x, y) + \dots \quad (2.28)$$

$$u(x, y-k) = u(x, y) - k \cdot \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + \frac{k^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) - \frac{k^3}{6} \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x, y) + \dots \quad (2.29)$$

$$\frac{k^4}{24} \cdot \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x, y) + \dots$$

$$\begin{aligned} u(x+h, y+h) = & u(x, y) + h \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + k \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + \frac{h^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) \\ & + h \cdot k \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y) + \frac{k^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) + \frac{h^3}{6} \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x, y) + \\ & \frac{h^2 \cdot k}{2} \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}(x, y) + \frac{h \cdot k^2}{2} \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}(x, y) + \frac{k^3}{6} \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x, y) + \dots \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} u(x+h, y-k) = & u(x, y) + h \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) - k \cdot \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + \frac{h^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \\ & - h \cdot k \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y) + \frac{k^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) + \frac{h^3}{6} \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x, y) - \frac{h^2 \cdot k}{2} \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}(x, y) + \\ & + \frac{h \cdot k^2}{2} \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}(x, y) - \frac{k^3}{6} \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x, y) + \dots \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} u(x-h, y+k) = & u(x, y) - h \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + k \cdot \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + \frac{h^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \\ & - h \cdot k \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y) + \frac{k^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) - \frac{h^3}{6} \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x, y) + \frac{h^2 \cdot k}{2} \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}(x, y) - \\ & - \frac{h \cdot k^2}{2} \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}(x, y) + \frac{k^3}{6} \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x, y) + \dots \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} u(x-h, y-k) = & u(x, y) - h \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) - k \cdot \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + \frac{h^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \\ & + h \cdot k \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y) + \frac{k^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) - \frac{h^3}{6} \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x, y) - \frac{h^2 \cdot k}{2} \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}(x, y) - \\ & - \frac{h \cdot k^2}{2} \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}(x, y) - \frac{k^3}{6} \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x, y) + \dots \end{aligned} \quad (2.33)$$

De la ecuación (2.26) despejamos la primera derivada parcial de u con respecto a x obteniendo:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \approx \frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h} \quad (2.34)$$

la cual es la fórmula de diferencias finitas progresiva con la que podemos aproximar la derivada parcial con respecto a x de la función u en (x, y) la cual posee un error de truncatura:

$$E_{tr} = -\frac{h}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\xi, y) \longrightarrow E_{tr} = O(h) \quad (2.35)$$

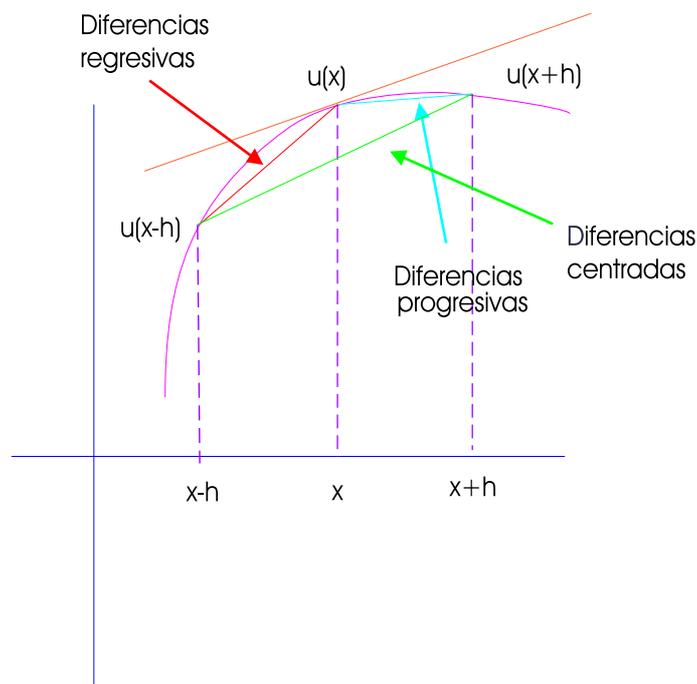


Figura 2.1:

De la ecuación (2.27) despejamos la derivada parcial con respecto a x en la cual obtenemos:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \approx \frac{u(x, y) - u(x - h, y)}{h} \quad (2.36)$$

la cual es la fórmula de diferencias finitas regresiva la que nos permite aproximar la derivada parcial con respecto a x de la función u en el punto (x, y) con un error de truncatura:

$$E_{tr} = \frac{h}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\xi, y) \longrightarrow E_{tr} = O(h) \quad (2.37)$$

Si restamos la segunda a la primera obtenemos la fórmula centrada:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \approx \frac{u(x + h, y) - u(x - h, y)}{2h} \quad (2.38)$$

la cual tiene un error de truncatura:

$$E_{tr} = -\frac{h^2}{3} \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\xi, y) \longrightarrow E_{tr} = O(h^2) \quad (2.39)$$

Haciendo lo mismo con las ecuaciones (2.28) y (2.29) obtenemos para aproximar la primera derivada parcial con respecto a y las siguientes fórmulas:

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \approx \frac{u(x, y + k) - u(x, y)}{k} \quad (2.40)$$

$$E_{tr} = -\frac{k}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, \zeta) \longrightarrow E_{tr} = O(k) \quad (2.41)$$

que es la fórmula progresiva

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \approx \frac{u(x, y) - u(x, y - k)}{k} \quad (2.42)$$

$$E_{tr} = \frac{k}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, \zeta) \longrightarrow E_{tr} = O(k) \quad (2.43)$$

que es la fórmula regresiva

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \approx \frac{u(x, y + k) - u(x, y - k)}{2k} \quad (2.44)$$

$$E_{tr} = -\frac{k^2}{3} \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x, \zeta) \longrightarrow E_{tr} = O(k^2) \quad (2.45)$$

que es la fórmula centrada.

Para obtener una aproximación de la segunda derivada parcial de u con respecto a x en el punto (x, y) , sumamos la primera y la segunda ecuación con lo cual obtenemos:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) \approx \frac{u(x - h, y) - 2u(x, y) + u(x + h, y)}{h^2} \quad (2.46)$$

que es una fórmula centrada en la que se tiene un error de truncatura:

$$E_{tr} = -\frac{h^2}{12} \cdot \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi, y) \longrightarrow E_{tr} = O(h^2) \quad (2.47)$$

2.3. Esquemas explícito e implícito

2.3.1. Esquema explícito

Un esquema de diferencia explícita es en el cual las variables de flujo en cualquier punto j en el nivel de tiempo t_{n+1} pueden ser obtenidos basándose en unos cuantos puntos adyacentes en el nivel de tiempo t_n . Este tipo de esquemas no nos lleva a un sistema de ecuaciones algebraicas, ya que cada punto puede ser obtenido separadamente. O dicho de otra manera, es un esquema que puede ser escrito de la forma:

$$v_m^{n+1} = a \quad \text{que es una suma finita de } v_m^{n'} \quad \text{con } n' \leq n. \quad (2.48)$$

Estos esquemas deben de cumplir con un criterio de estabilidad la cual se refiere a la habilidad del esquema para no permitir que los errores numéricos crezcan sin cota alguna.

Teorema 2.2 *Para un esquema explícito de la ecuación hipérbolica $u_t + au_x = 0$ de la forma $v_m^{n+1} = \alpha v_{m-1}^n + \beta v_m^n + \gamma v_{m+1}^n$ con $k/h = \lambda$ que permanece constante, es necesaria para la estabilidad la condición de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL)*

$$|a\lambda| \leq 1. \quad (2.49)$$

Para sistemas de ecuaciones en los cuales v es un vector y α, β, γ son matrices, nosotros podemos tener $|a_i\lambda| \leq 1$ para todos los eigenvalores a_i de la matriz A .

Primer caso: sea una ecuación simple. Si $|a\lambda| > 1$, entonces consideremos el punto $(t, x) = (1, 0)$ como podemos ver la solución de la ecuación diferencial parcial depende de los valores de $u_0(x)$ en $x = \pm a$. Pero el esquema v_0^n tendrá que depender de v_m^0 sólo para $m \leq n$, por el comportamiento del esquema. Por tal motivo $h = \lambda^{-1}k$, nosotros tenemos que: $mh \leq \lambda^{-1}kn = \lambda^{-1}$, entonces $kn = 1$. Así v_0^n depende de x solo para $|x| \leq \lambda^{-1} < |a|$. De esto tenemos que: v_0^n no puede converger a $u(1, 0)$ cuando $h \rightarrow 0$, con $h/k = 1$. Con esto se demuestra el teorema para este caso.

Segundo caso: sea un sistema de ecuaciones. Tenemos que: $u(1, x)$ depende de $u_0(x)$ para x que pertenece al intervalo $[-a, a]$, donde a es la magnitud máxima de la velocidad característica a_i . Si $|a_i\lambda| > 1$ para alguna velocidad característica a_i , entonces podemos tomar los datos iniciales que son cero en el intervalo $[-\lambda^{-1}, \lambda^{-1}]$ pero que no sean cero cerca de a_i . Entonces $u(1, x)$ no será cero, en general, y aún v_0^n con $nk = 1$ será cero. Por lo tanto v^n no converge a $u(1, \cdot)$

Del mismo modo existe otro teorema que nos dice que no hay un esquema explícito que sea consistente para las ecuaciones diferenciales parciales hipérbolicas que sea estable para todos los valores de λ (con λ constante cuando $h, k \rightarrow 0$.)

A continuación enunciamos el teorema:

Teorema 2.3 *No existe un esquema explícito, incondicionalmente estable, consistente de esquemas de diferencia finita para los sistemas hiperbólicos de ecuaciones diferenciales parciales.*

.

2.3.2. Esquema implícito

Un esquema de diferencia implícita es cuando las incógnitas para más de un punto o para cada una de las filas de puntos en el tiempo se resuelven de una vez. Las ecuaciones en diferencias en el tiempo a calcular se desarrollan de tal manera que a cada punto de la malla en la dirección x son incluidos. El esquema se forma de tal manera que cuando se evalúan las ecuaciones en los puntos de la malla existen igual número de incógnitas que de ecuaciones.

A continuación nosotros veremos dos esquemas implícitos para la ecuación de onda en una dirección, estos son consistentes y estables para todos los valores de λ , esto nos dice

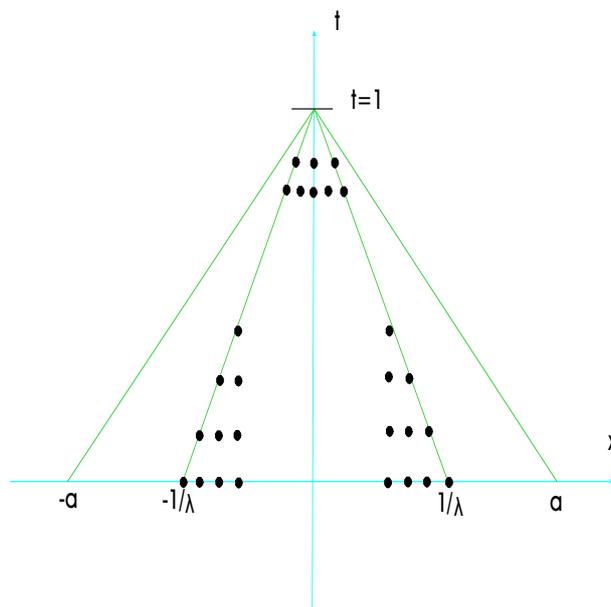


Figura 2.2:

que el teorema 2.3 no se aplica a los esquemas implícitos, los esquemas son el esquema tiempo-hacia atrás, espacio-central

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{k} + a \frac{v_{m+1}^{n+1} - v_{m-1}^{n+1}}{2h} = 0 \quad (2.50)$$

y el esquema tiempo-hacia atrás, espacio-hacia atrás

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{k} + a \frac{v_m^{n+1} - v_{m-1}^{n+1}}{h} = 0 \quad (2.51)$$

a nosotros no nos interesa en este punto como resolver para los valores v_m^{n+1} dados los valores en el nivel n del tiempo, no es difícil de verificar que los esquemas son consistentes.

Ejemplo: Demostraremos que el esquema tiempo- hacia atrás espacio-hacia atrás es estable cuando a es positivo y λ es algún número positivo. Esto demuestra que el teorema 2.3 no se aplica a esquemas implícitos.

Primero nosotros escribimos el esquema 2.51 como:

$$(1 + a\lambda)v_m^{n+1} = v_m^n + a\lambda v_{m-1}^{n+1} \quad (2.52)$$

elevando al cuadrado obtenemos:

$$(1 + a\lambda)^2 |v_m^{n+1}|^2 \leq |v_m^n|^2 + 2a\lambda |v_m^n| |v_{m-1}^{n+1}| + (a\lambda)^2 |v_{m-1}^{n+1}|^2 \quad (2.53)$$

$$\leq (1 + a\lambda) |v_m^n|^2 + (a\lambda + (a\lambda)^2) |v_{m-1}^{n+1}|^2 \quad (2.54)$$

tomando la sumatoria de todos los valores de m tenemos:

$$(1 + a\lambda)^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} |v_m^{n+1}|^2 \leq (1 + a\lambda) \sum_{m=-\infty}^{\infty} |v_m^n|^2 + (a\lambda + (a\lambda)^2) \sum_{m=-\infty}^{\infty} |v_m^{n+1}|^2, \quad (2.55)$$

lo cual nos da el estimado

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} |v_m^{n+1}|^2 \leq \sum_{m=-\infty}^{\infty} |v_m^n|^2 \quad (2.56)$$

con esto demostramos que el esquema es estable para cada valor de λ cuando a es mayor que cero.

2.3.3. Esquemas

El esquema llamado contra el viento

Para calcular una solución numérica del problema con valores iniciales

$$\frac{\partial u}{\partial t} + b \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (2.57)$$

con

$$u(x, 0) = v(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.58)$$

nosotros vamos a utilizar una malla de puntos de la forma (x_j, t^n) que definimos por:

$$x_j := j\Delta x \quad (j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad t^n := n\Delta t \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (2.59)$$

para alguna malla espacial de tamaño Δx y el paso del tiempo Δt . Para esto nosotros vamos a considerar dos casos.

Primer caso: cuando " $b > 0$ "; es decir, $u(x, t) = v(x - bt)$ es la onda de propagación en la dirección positiva x . Para la derivada del tiempo $\frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t^n)$ utilizamos la aproximación de diferencias hacia adelante. Escogemos la derivada espacial $\frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n)$, como podemos ver $u(x, t)$ es constante a lo largo de la característica $x - bt = C$ con $C \in \mathbb{R}$. En particular, nosotros tenemos que $u(x_j, t^{n+1}) = u(x_j - b\Delta t, t^n)$ y, por lo tanto $b > 0$, esta ecuación nos sugiere utilizar la aproximación de diferencias hacia atrás para la derivada espacial $\frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n)$. A la aproximación de $u(x_j, t^n)$ nosotros la denotamos por u_j^n , entonces nosotros obtenemos el esquema de diferencias

$$\frac{1}{\Delta t}(u_j^{n+1} - u_j^n) + \frac{b}{\Delta x}(u_j^n - u_{j-1}^n) = 0. \quad (2.60)$$

A este esquema se le conoce como el esquema contra el viento porque utiliza la solución numérica en la malla de puntos (x_{j-1}, t^n) , la cual tiende a contra el viento de (x_j, t^{n+1}) . La dependencia de los valores numéricos u_j^{n+1} en el recién nivel de tiempo t^{n+1} sobre los

Por otro lado nosotros notamos que:

$$u_j^n = \lambda^n e^{ij\varphi}. \quad (2.66)$$

Combinando (2.64) y (2.65) tenemos que:

$$\lambda(\varphi) = 1 - c(1 - e^{-i\varphi}) = 1 - 2c\text{sen}^2\left(\frac{1}{2}\varphi\right) - ic\text{sen}\varphi. \quad (2.67)$$

Los modos de Fourier (2.65) se pueden representar en una malla de espacio fijo que tiene una fase φ que se extiende desde cero, que corresponden a la constante modo $u_j^n = \lambda^n$, hasta π , que corresponde al modo de gran frecuencia $u_j^n = \lambda^n(-1)^j$ de longitud de onda $2\pi/\kappa = 2\Delta x$. Entonces nosotros analizaremos $\lambda(\varphi)$ para $0 < \varphi < \pi$. Aplicando el módulo a (2.67), tenemos que:

$$|\lambda(\varphi)|^2 = \left(1 - 2c\text{sen}^2\left(\frac{1}{2}\varphi\right)\right)^2 + c^2\text{sen}^2\varphi \quad (2.68)$$

$$= 1 - 4c(1 - c)\text{sen}^2\left(\frac{1}{2}\varphi\right) \quad (2.69)$$

para que sea estable se requiere que $|\lambda(\varphi)| \leq 1$; y esto sucede cuando

$$c = \frac{b\Delta t}{\Delta x} \leq 1. \quad (2.70)$$

Esto restringe el seleccionar del paso del tiempo por esta razón el esquema es solamente condicionalmente estable. A continuación terminaremos nuestro cálculo del error de discretización local d_j^n , el cual definimos como:

$$d_j^n := \frac{1}{\Delta t}(u(x_j, t^{n+1}) - u(x_j, t^n)) + \frac{b}{\Delta x}(u(x_j, t^n) - u(x_{j-1}, t^n)). \quad (2.71)$$

entonces el error d_j^n es el residuo del esquema diferencia (2.60) después de haber sustituido la solución exacta de la siguiente ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} + b\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (2.72)$$

Suponiendo que $u(x, t)$ es suave y utilizando las expansiones de series de Taylor de $u(x, t)$ alrededor de (x_j, t^n) , tenemos que:

$$\begin{aligned} d_j^n &= \frac{1}{2}\Delta t \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t^n) - \frac{1}{2}b\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^n) + O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2) \\ &= \frac{1}{2}\Delta t \left(1 - \frac{1}{c}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t^n) + O(\Delta t^2). \end{aligned} \quad (2.73)$$

El segundo renglón de (2.73) se sigue de la siguiente relación $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, la cual se sigue de (2.72). Entonces tenemos que el esquema es consistente en primer orden en el paso Δt

y en el tamaño de la malla espacial Δx , lo cual es lo que nosotros sospechábamos que sucedía, por lo tanto nosotros solamente utilizaremos un lado de las diferencias para las dos $\frac{\partial u}{\partial t}$ y $\frac{\partial u}{\partial x}$.

Segundo caso: Para el otro caso, donde " $b < 0$," la derivación es análoga. En este caso nosotros usamos la aproximación en diferencias progresivas para la derivada espacial $\frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n)$ con lo cual tenemos:

$$\frac{1}{\Delta t}(u_j^{n+1} - u_j^n) + \frac{b}{\Delta x}(u_{j+1}^n - u_j^n) = 0. \quad (2.74)$$

El número de Courant es negativo y la condición de estabilidad es:

$$\frac{b\Delta t}{\Delta x} \geq -1 \quad (2.75)$$

Este esquema vuelve a ser consistente de primer orden en Δt y Δx , por lo tanto nosotros utilizamos un lado de las diferencias para las derivadas $\frac{\partial u}{\partial t}$ y $\frac{\partial u}{\partial x}$. De hecho nosotros podemos combinar los esquemas de diferencias (2.60) y (2.74) para el caso general es decir cuando el $\text{signo}(b)$ no se conoce. Al realizar esto nosotros dividimos la velocidad b en:

$$b = b^+ + b^-, \quad b^+ := \max(b, 0) \geq 0, \quad b^- := \min(b, 0) \leq 0. \quad (2.76)$$

Una generalización directa de ambos esquemas sería:

$$\frac{1}{\Delta t}(u_j^{n+1} - u_j^n) + \frac{b^+}{\Delta x}(u_j^n - u_{j-1}^n) + \frac{b^-}{\Delta x}(u_{j+1}^n - u_j^n) = 0 \quad (2.77)$$

donde b^+ es la aproximación en diferencias regresivas de $b^+ \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n)$ y representa una onda de propagación en la dirección x positiva. Por otro lado, el término b^- en (2.77) es la aproximación en diferencias progresivas de $b^- \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n)$ y es la onda de propagación en la dirección x negativa. Como podemos ver el signo de b^\pm determina la dirección de contra el viento es decir la dirección de un lado de la aproximación de $\frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n)$. De esta manera deducimos que esta versión del esquema contra el viento es consistente de primer orden en Δt y Δx . Por último veremos la estabilidad del esquema (2.77), sustituyendo la moda de Fourier (2.66) en (2.77), nosotros tenemos la siguiente expresión para el factor de amplificación:

$$|\lambda(\varphi)|^2 = 1 - 4|c|(1 - |c|)\text{sen}^2\left(\frac{1}{2}\varphi\right) \quad (2.78)$$

de (2.78) nosotros tenemos que el esquema contra el viento (2.77) es estable con la condición

$$\frac{|b|\Delta t}{\Delta x} \leq 1. \quad (2.79)$$

Esta condición puede ser interpretado como la condición CFL.

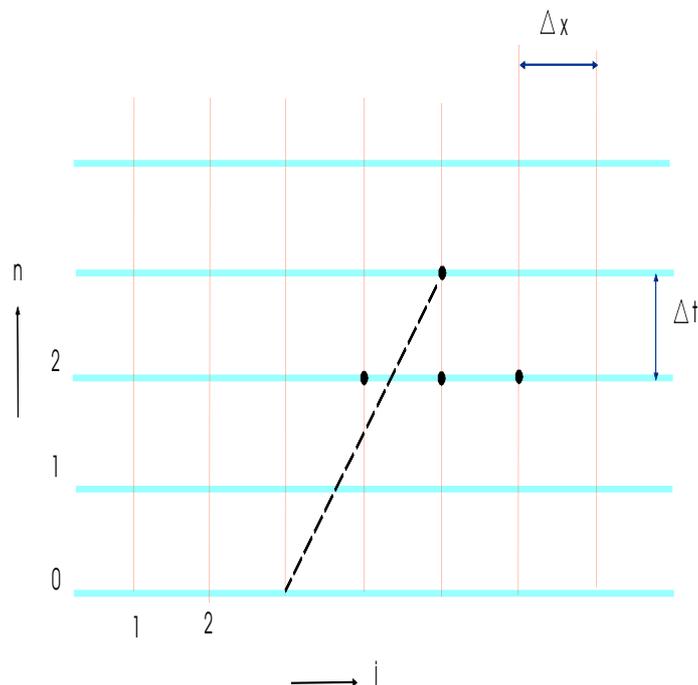


Figura 2.4: Estencil para el esquema de Lax-Wendroff

El esquema de Lax-Wendroff

Consideremos la expansión en series de Taylor

$$u(x_j, t^{n+1}) = u(x_j, t^n) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t^n) + \frac{1}{2} \Delta t^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t^n) + O(\Delta t^3), \quad (2.80)$$

la cual logra una exactitud de segundo orden en Δt . Utilizando la relación $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ y sustituyendola en (2.80) tenemos la siguiente expansión:

$$u(x_j, t^{n+1}) = u(x_j, t^n) - b \Delta t \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) + \frac{1}{2} b^2 \Delta t^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^n) + O(\Delta t^3). \quad (2.81)$$

para obtener un esquema que sea también de segundo orden de exactitud en Δx , aproximamos el espacio derivado en (2.81) por las diferencias centrales para obtener el esquema Lax-Wendroff

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{1}{2} c (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{1}{2} c^2 (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n). \quad (2.82)$$

El estencil de este esquema lo podemos ver en la figura 2.4. Una derivación alternativa de (2.82) es la aproximación $u(x_j, t^{n+1}) = u(x_j - b \Delta t, t^n)$ por interpolación cuadrática de los valores $u_k^n (k = j, j \pm 1)$ en el nivel de tiempo t^n .

A continuación veremos la estabilidad de (2.82) sustituyendo la moda de Fourier en (2.66), nosotros tenemos la siguiente ecuación para el factor de amplificación:

$$\lambda(\varphi) = 1 - 2c^2 \text{sen}^2 \left(\frac{1}{2} \varphi \right) - ic \text{sen} \varphi. \quad (2.83)$$

sacándole el módulo a $\lambda(\varphi)$, tenemos:

$$|\lambda(\varphi)|^2 = 1 - 4c^2(1 - c^2)\text{sen}^4\left(\frac{1}{2}\varphi\right), \quad (2.84)$$

de lo cual concluimos que el esquema de Lax-Wendroff es estable si

$$|c| = \frac{|b|\Delta t}{\Delta x} \leq 1. \quad (2.85)$$

Para localizar el error de discretización local, nosotros tenemos que adaptar (2.82) para que sea compatible con la ecuación de advección (2.57), para obtener:

$$\frac{1}{\Delta t}(u_j^{n+1} - u_j^n) + \frac{b}{2\Delta x}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) - \frac{b^2\Delta t}{2\Delta x^2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) = 0. \quad (2.86)$$

el error d_j^n del esquema Lax-Wendroff lo encontramos como el residuo de (2.86) después de haber sustituido la solución exacta. Así que nosotros obtenemos:

$$d_j^n := \frac{1}{\Delta t}(u(x_j, t^{n+1}) - u(x_j, t^n)) + \frac{b}{2\Delta x}(u(x_{j+1}, t^n) - u(x_{j-1}, t^n)) - \frac{b^2\Delta t}{2\Delta x^2}(u(x_{j+1}, t^n) - 2u(x_j, t^n) + u(x_{j-1}, t^n)) \quad (2.87)$$

suponiendo que $u(x, t)$ es suficientemente suave, nosotros podemos calcular d_j^n sustituyendo expansiones de Taylor de $u(x, t)$ alrededor de (x_j, t^n) en (2.87) para tener:

$$\begin{aligned} d_j^n &= \frac{1}{6}\Delta t^2 \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_j, t^n) + \frac{1}{6}b\Delta x^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_j, t^n) + O(\Delta t^3) + O(\Delta x^3) \\ &= \frac{1}{6}\Delta t^2 \left(1 - \frac{1}{c^2}\right) \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_j, t^n) + O(\Delta t^3). \end{aligned} \quad (2.88)$$

el segundo renglón en (2.88) viene de la relación $\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} = -b^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$, como podemos ver el esquema de Lax-Wendroff es de segundo orden consistente en Δt y Δx .

Esquemas no disipativos

Los esquemas numéricos que nosotros hemos visto son disipativos, lo cual nos dice que la solución numérica esta amortiguada. A continuación veremos dos esquemas no disipativos: el esquema caja y el esquema salto por encima, estos esquemas son muy convenientes para el cálculo de soluciones suaves de (2.72), sin embargo para soluciones no suaves estos métodos no son recomendables debido a la fase error y a la falta de amortiguamiento.

El esquema caja

Consideremos la siguiente ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{du}{dt} = -i\omega u, \quad \omega \in \mathbb{R} \quad (2.89)$$

una solución típica es $u(x, t) = Ce^{-i\omega t}$, la cual posee la propiedad que $|u(t)| = |C|$ para toda t . Utilizando la regla trapezoidal en (2.89) nos queda:

$$u^{n+1} = \frac{1 - \frac{1}{2}i\omega\Delta t}{1 + \frac{1}{2}i\omega\Delta t} u^n, \quad (2.90)$$

con u^n siendo la aproximación numérica de $u(t^n)$. Como podemos ver $|u^{n+1}| = |u^n|$ lo cual es no creciente y no descomponible cuyas propiedades surgen de la solución exacta. Entonces nosotros llamamos al tiempo del esquema de integración (2.90) no disipativo. Supongamos que (2.72) esta definido en $x \in (0, 1)$, si $b > 0$ entonces nosotros tenemos que establecer u en la frontera izquierda $x = 0$, si $b < 0$ entonces nosotros establecemos esto en $x = 1$. Para calcular una solución numérica, nosotros cubrimos el dominio $\Omega = [0, 1] \times [0, \infty)$ con una malla que contenga los puntos (x_j, t^n) la cual esta definida como:

$$x_j := j\Delta x \quad (j = 0, 1, 2, \dots, M), \quad t^n := n\Delta t \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (2.91)$$

con la malla espacial de tamaño $\Delta x = 1/M$ y el paso del tiempo $\Delta t > 0$. Para la integración del tiempo nosotros utilizamos la regla trapezoidal. Para analizar el comportamiento de segundo orden de la regla trapezoidal, nosotros utilizamos la aproximación de diferencias central para el espacio derivativo. Para conservar el estencil compacto, aplicamos el esquema de diferencias central en los puntos intermedios $x_{j+1/2}$ dados como:

$$x_{j+1/2} := \frac{1}{2}(x_j + x_{j+1}), \quad (j = 0, 1, \dots, M-1). \quad (2.92)$$

así nosotros obtenemos el esquema:

$$\frac{1}{\Delta t}(u_{j+1/2}^{n+1} - u_{j+1/2}^n) + \frac{1}{2} \frac{b}{\Delta x} ((u_{j+1}^n - u_j^n) + (u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1})) = 0. \quad (2.93)$$

Por último, nosotros aproximamos los valores intermedios $u(x_{j+1/2}, t^m)$ ($m = n, n+1$) por interpolación lineal directa, la cual es de segundo orden de exactitud, para encontrar el esquema caja

$$u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1} - (u_j^n + u_{j+1}^n) + c(u_{j+1}^n - u_j^n + u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}) = 0. \quad (2.94)$$

El estencil de este esquema lo podemos ver en la figura 2.5.

Este esquema es implícito con dos variables desconocidas en el nuevo nivel de tiempo t^{n+1} , esto nos conduce a un sistema lineal bidiagonal. Si $b > 0$, entonces u_0^{n+1} esta dado y nosotros podemos calcular otros valores u_j^{n+1} en orden creciente de j desde

$$u_{j+1}^{n+1} = u_j^n + \frac{1-c}{1+c}(u_{j+1}^n - u_j^{n+1}), \quad (j = 0, 1, \dots, M-1). \quad (2.95)$$

De la misma manera, si $b < 0$, el valor frontera u_M^{n+1} esta dado y nosotros podemos calcular u_j^{n+1} en orden decreciente de j desde

$$u_j^{n+1} = u_{j+1}^n + \frac{1+c}{1-c}(u_j^n - u_{j+1}^{n+1}), \quad (j = M-1, M-2, \dots, 0). \quad (2.96)$$

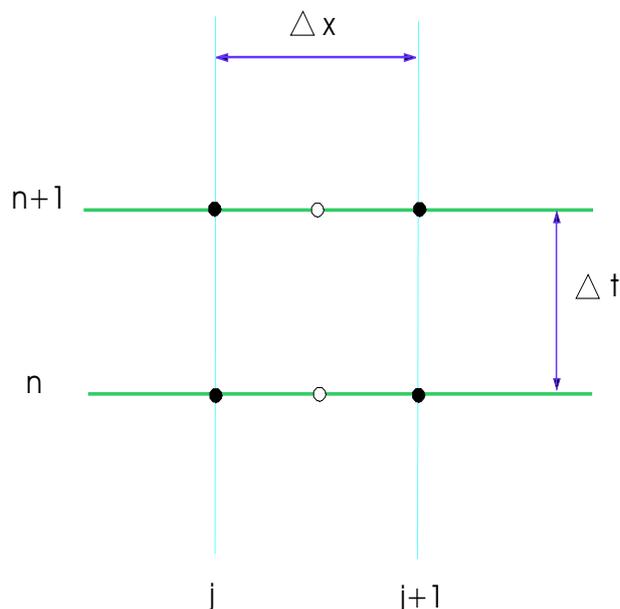


Figura 2.5: Estencil para el esquema caja.

Los círculos abiertos son los puntos intermedios de la malla.

Ahora veremos la relación de dispersión numérica, sustituimos el modo (2.65) en (2.95) y nosotros obtenemos la relación

$$\lambda e^{i\varphi} = 1 + \frac{1-c}{1+c}(e^{i\varphi} - \lambda), \quad (2.97)$$

donde $\varphi = \kappa\Delta x$. Entonces nosotros tenemos que:

$$\lambda(\varphi) = \frac{(1+c)e^{-i\varphi/2} + (1-c)e^{i\varphi/2}}{(1+c)e^{i\varphi/2} + (1-c)e^{-i\varphi/2}} = \frac{\cos\frac{1}{2}\varphi - ic\text{sen}\frac{1}{2}\varphi}{\cos\frac{1}{2}\varphi + ic\text{sen}\frac{1}{2}\varphi} \quad (2.98)$$

de esto nosotros decimos que $|\lambda(\varphi)| = 1$, existe un pequeño inconveniente en el esquema, este sufre de dispersión. Al comparar (2.98) con la representación polar $\lambda = |\lambda| e^{-i\psi}$, utilizando fórmulas de trigonometría elemental, nosotros tenemos que:

$$\cos\frac{1}{2}\varphi \cos\psi + c\text{sen}\frac{1}{2}\varphi \text{sen}\psi = \cos\frac{1}{2}\varphi \quad (2.99)$$

$$-c\text{sen}\frac{1}{2}\varphi \cos\psi + \cos\frac{1}{2}\varphi \text{sen}\psi = c\text{sen}\frac{1}{2}\varphi \quad (2.100)$$

de este sistema nosotros tenemos para el ángulo fase ψ que:

$$\tan\frac{1}{2}\psi = c\tan\frac{1}{2}\varphi. \quad (2.101)$$

el error fase del esquema caja es:

$$\epsilon_f = 1 - \frac{2}{c\varphi} \tan^{-1} \left(c\tan\frac{1}{2}\varphi \right), \quad (2.102)$$

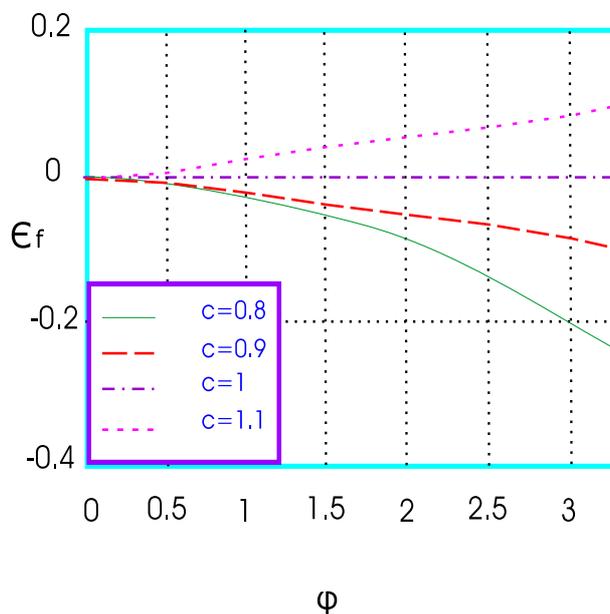


Figura 2.6: La fase de error del esquema caja

donde $\tan^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow [0, \pi)$ esta definida como:

$$\tan^{-1}(q) := \begin{cases} \arctan q & \text{si } q \geq 0, \\ \arctan q + \pi & \text{si } q < 0. \end{cases} \quad (2.103)$$

lo cual lo podemos ver en la figura 2.6

Ejemplo: Calculemos dos soluciones numéricas de la ecuación de advección (2.57) en el intervalo $(0, 1)$ utilizando el esquema caja (2.95). La condición inicial es $v(x, t) = \sin 8\pi(x - 0,2t)$ o la función paso

$$v(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0,2 \\ 0 & \text{si } x > 0,2 \end{cases}$$

También nosotros escogemos los valores de los parámetros $b = 0,2$, $\Delta x = 2,5 \times 10^{-2}$, y $\Delta t = 5 \times 10^{-2}$. La solución numérica después de 40 pasos de tiempo lo podemos ver en las figuras 2.7 y 2.8. La onda seno es bien resuelta y solamente una pequeña fase cambiada se puede observar. Por otro lado la función paso es corrompida por oscilaciones que son originadas por la gran fase de error de los componentes de gran frecuencia en la solución.

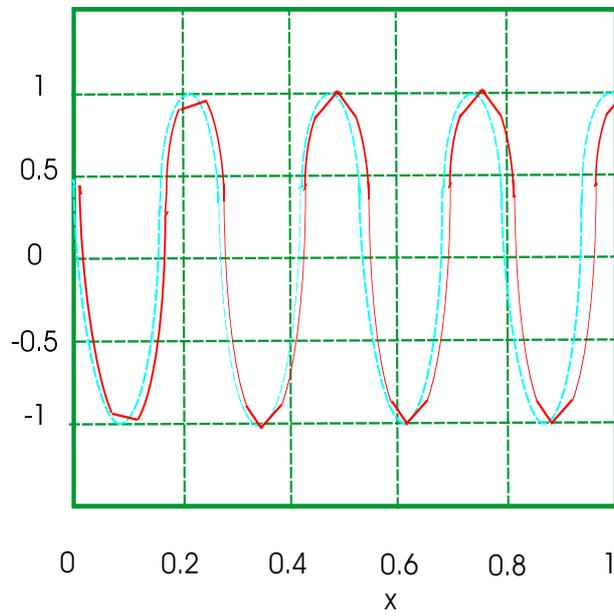


Figura 2.7: Seno de la onda numerica

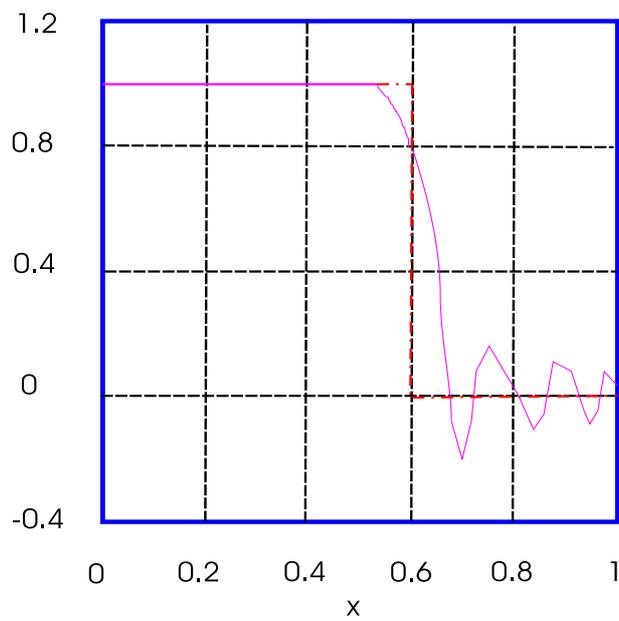


Figura 2.8: La función paso calculada con el esquema caja

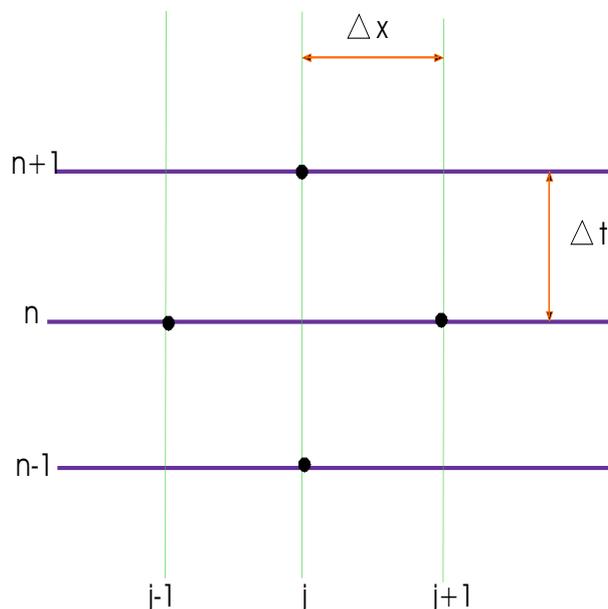


Figura 2.9: Estencil para el esquema saltar por encima

El esquema saltar por encima

Como anteriormente nosotros consideramos la ecuación de advección en el intervalo $(0, 1)$ y para encontrar su solución numérica nosotros utilizamos la malla que definimos en (2.91), el esquema numérico es la regla del medio punto para la integración del tiempo con la contribución del esquema de diferencias central para el espacio derivado. Los dos son de segundo orden de exactitud, el esquema que nos resulta es el siguiente:

$$\frac{1}{2\Delta t}(u_j^{n+1} - u_j^{n-1}) + \frac{b}{2\Delta x}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) = 0 \quad (2.105)$$

reacomodando términos tenemos:

$$u_j^{n+1} = u_j^{n-1} - c(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n); \quad (2.106)$$

que se le conoce como el esquema saltar por encima, su estencil lo podemos ver en la figura 2.9, nosotros hemos encontrado una segunda condición "inicial" en $t^1 = \Delta t$, nosotros podemos obtener una relación de dispersión numérica:

$$\lambda = \frac{1}{\lambda} - c(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) \quad (2.107)$$

por lo tanto el factor de amplificación cumple la ecuación cuadrática siguiente:

$$\lambda^2 + 2ic\lambda \operatorname{sen}\varphi - 1 = 0 \quad (2.108)$$

la cual tiene como soluciones:

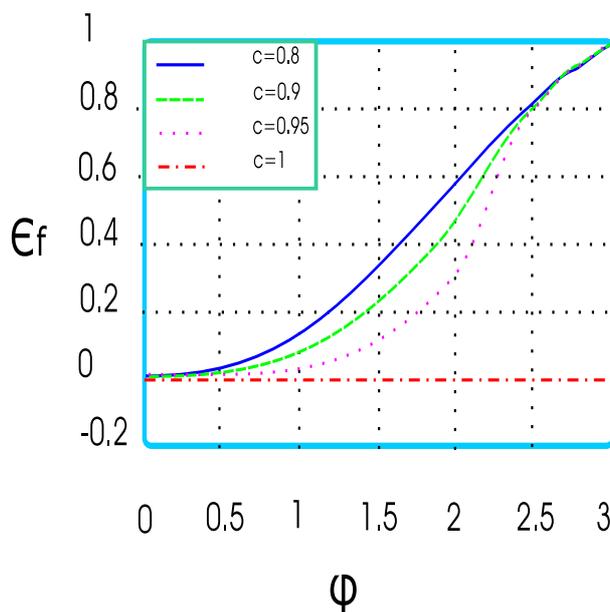


Figura 2.10: Fase de error relativo del esquema saltar por encima

$$\lambda(\varphi) = \pm\sqrt{1 - c^2 \text{sen}^2 \varphi} - ic \text{sen} \varphi \quad (2.109)$$

como podemos observar si $|c| \leq 1$, entonces $|\lambda(\varphi)| = 1$; por otro lado, el producto de dichas raíces es -1 ; entonces son totalmente complejas. Por lo tanto, las dos raíces son unimodulares, entonces el esquema es no disipativo, si $|c| > 1$, entonces $|\lambda(\varphi)| > 1$ para algún φ , quedandonos un esquema inestable. Una de las características del esquema saltar por encima es que introduce soluciones adicionales, para ver esto, nosotros aplicamos la regla del medio punto en la ecuación diferencial ordinaria del problema (2.89), lo cual nos resulta:

$$u^{n+1} = u^{n-1} - 2i\omega\Delta t u^n \quad (2.110)$$

donde u^n es la aproximación de $u(t^n)$. Una solución típica es: $u^n = \mu^n$ la cual existe si cumple la ecuación característica:

$$\mu^2 + 2i\omega\Delta t\mu - 1 = 0. \quad (2.111)$$

para $\Delta t \rightarrow 0$ nosotros obtenemos "las dos expansiones" para las dos raíces

$$\mu_1 \doteq 1 - i\omega\Delta t + \frac{1}{2}\omega^2\Delta t^2, \quad \mu_2 \doteq -1 - i\omega\Delta t - \frac{1}{2}\omega^2\Delta t^2 \quad (2.112)$$

como aproximaciones del factor de amplificación exacto $e^{-i\omega\Delta t}$. De las dos anteriores raíces solamente la primera tiene sentido, para esta raíz nosotros podemos deducir de (2.89) y de su representación polar $\lambda = |\lambda| e^{-i\psi}$ la siguiente relación:

$$\text{sen}\psi = c\text{sen}\varphi, \quad \text{cos}\psi \geq 0 \quad (2.113)$$

para la fase ψ . Por otro lado, invirtiendo esta relación, nosotros tenemos la fase error

$$\epsilon_f = 1 - \frac{1}{c\varphi} \text{arcsen}(c\text{sen}\varphi) \quad (2.114)$$

de la figura 2.10 nosotros podemos concluir que la fase error del esquema saltar por encima es extenso y por lo tanto el esquema es ampliamente dispersivo.

Propagación de paquetes de ondas

Los paquetes de ondas son superposiciones de ondas planas donde casi todas tienen el mismo número de onda y de la fase de velocidad. Consideremos la siguiente ecuación

$$u(x, 0) = e^{i\kappa_0 x} f(\varepsilon x) \quad (2.115)$$

que representa un paquete de onda en el tiempo $t = 0$ para un particular número de onda κ_0 y un parámetro ε . Supongamos que los modos que constituyen el paquete de onda cumple la relación de dispersión $\omega = \omega(\kappa)$, el paquete de onda correspondiente a (2.115) es el siguiente:

$$u(x, t) = e^{i\kappa_0 x - i\omega_0 t} f(\varepsilon(x - \omega'_0 t)), \quad (2.116)$$

donde $\omega_0 = \omega(\kappa_0)$ y $\omega'_0 = \omega'(\kappa_0)$. Esto nos dice que todas las crestas de las ondas se propagan con velocidad fase ω_0/κ_0 ; por otro lado, la cubierta del paquete se propaga con la velocidad del grupo ω'_0 . Para el caso particular de la ecuación de advección nosotros tenemos que: $\omega(\kappa) = b\kappa$; y por lo tanto $\omega_0/\kappa_0 = \omega'_0 = b$. Los modos se propagan en fases diferentes de velocidades con aproximaciones numéricas de paquetes de ondas, con lo que concluimos que un esquema numérico es dispersivo. Formulemos la relación de dispersión discreta en términos de la frecuencia numérica real Ω como sigue:

$$\Omega(\kappa) := \beta\kappa = \Psi/\Delta t, \quad (2.117)$$

donde β es la fase de velocidad numérica, de la misma manera se hace con el caso continuo, nosotros definimos el grupo de velocidades numérica v_{ng} como:

$$v_{ng} := \frac{d\Omega}{d\kappa} = \frac{1}{\Delta t} \frac{d\Psi}{d\kappa}. \quad (2.118)$$

combinando la relación (2.101) con la definición de v_{ng} , nosotros tenemos que:

$$\frac{v_{ng}}{b} = \frac{\text{cos}^2 \frac{1}{2}\psi}{\text{cos}^2 \frac{1}{2}\varphi} = \left(\text{cos}^2 \left(\frac{1}{2}\varphi \right) + c^2 \text{sen}^2 \left(\frac{1}{2}\varphi \right) \right)^{-1} \quad (2.119)$$

para el grupo de velocidades numérico. En la figura 2.11 tenemos los dibujos de las gráficas de estas funciones para varios valores de c .

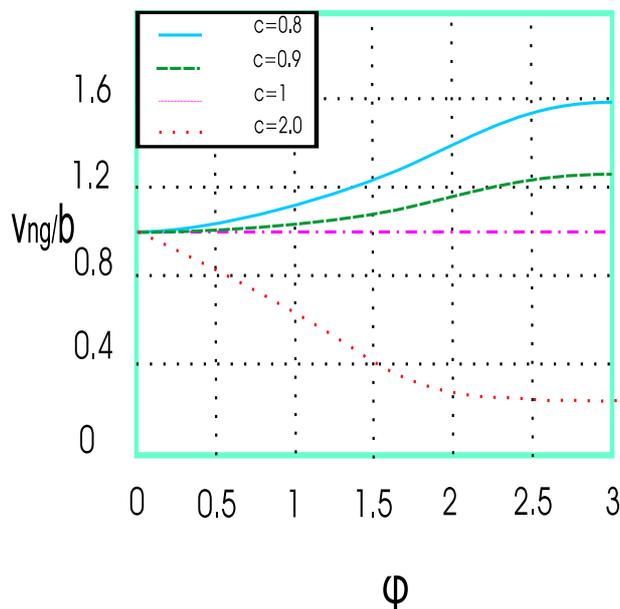


Figura 2.11: Grupo de velocidades numéricas del esquema caja

Ejemplo: Ilustremos el efecto del grupo de velocidades numérico en un paquete de ondas, nosotros calculamos una solución numérica de la ecuación de advección (2.57) en el intervalo $(0, 4)$, que satisface la siguiente condición inicial

$$v(x) = e^{-\varepsilon(x-1)^2} \text{sen}(\alpha\pi x). \quad (2.120)$$

escogiendo los valores de los parámetros $b = 1, \varepsilon = 10$, y $\alpha = 16$, aplicamos el esquema caja con $\Delta x = 1,25 \times 10^{-2}$ y $\Delta t = 2,5 \times 10^{-2}$, con $c = 2$, lo que sucede en $t = 2$ lo podemos ver en la figura 2.12, la línea sólida nos indica el paquete de ondas numérico y la línea de puntos nos indica la cobertura de la solución exacta. En esta circunstancia la solución numérica posee una fase $\varphi = \alpha\pi\Delta x = \pi/5$, y debido a esto $v_{ng} \approx 0,78$, lo cual lo podemos ver en la figura 2.11, los paquetes de ondas exacto y numérico han viajado a las distancias 1.55 y 2 en $t = 2$, como podemos observar en la figura 2.12.

2.4. Disipación y dispersión de los esquemas numéricos

En esta sección nosotros veremos un análisis de Fourier para el esquema contra el viento y el esquema de Lax-Wendroff, consideremos la ecuación $\frac{\partial u}{\partial t} + b\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, con $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, nosotros buscaremos una solución de una onda plana de la forma:

$$u(x, t) = e^{i(\kappa x - \omega t)} \quad (2.121)$$

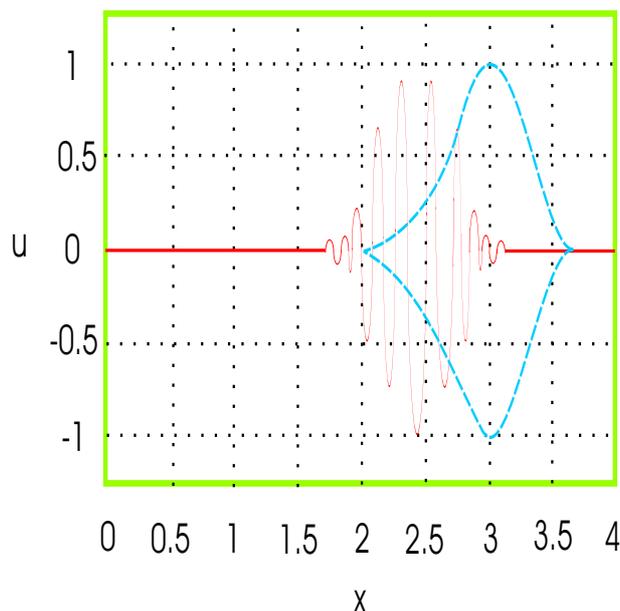


Figura 2.12: Efecto del grupo de velocidades numerico en un paquete de ondas calculado con el esquema caja

donde κ es el número de onda y ω es la frecuencia, sustituyendo (2.121) en $\frac{\partial u}{\partial t} + b \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ nosotros obtenemos la relación de dispersión

$$\omega(\kappa) = b\kappa \quad (2.122)$$

esto nos dice que cada modo de la forma (2.122) se propaga con velocidad fase $b = \omega/\kappa$, así que también nosotros podríamos escribir

$$u(x,t) = e^{i\kappa(x-bt)} \quad (2.123)$$

de (2.121) y (2.122) concluimos que la onda plana exacta multiplicada por el factor $e^{-ib\kappa\Delta t} = e^{-ic\varphi}$ por el paso del tiempo Δt , nos queda:

$$u(x_j, t^{n+1}) = e^{-ib\kappa\Delta t} u(x_j, t^n) = e^{-ic\varphi} u(x_j, t^n) \quad (2.124)$$

nosotros comparamos esta multiplicación con la solución numérica, utilizando la relación de dispersión numérica formulada en términos del factor de multiplicación y ángulo fase, nosotros obtenemos la siguiente relación $\lambda = \lambda(\varphi)$, como podemos observar el factor de multiplicación $\lambda(\varphi)$ de la solución numérica es una aproximación del factor de multiplicación $e^{-ic\varphi}$ de la onda plana exacta, así que tiene sentido escribir λ de manera polar:

$$\lambda = |\lambda| e^{-i\psi} \quad (2.125)$$

donde $|\lambda|$ es la amplitud y ψ es la fase del factor de multiplicación, el argumento ψ es como una aproximación de $c\varphi = b\kappa\Delta t$, entonces nosotros definimos una velocidad fase numérica β como

$$\beta := \frac{\psi}{\kappa\Delta t} \quad (2.126)$$

introduciendo (2.125) y (2.126), nosotros obtenemos la siguiente expresión del modo numérico (2.66):

$$u_j^n = |\lambda|^n e^{i\kappa(x_j - \beta t^n)} \quad (2.127)$$

este es el modo de propagación con velocidad β , para comparar (2.127) con (2.123) definiremos el error de amplitud ϵ_a y el error de fase relativo ϵ_f :

$$\epsilon_a := 1 - |\lambda|, \quad \epsilon_f := \frac{c\varphi - \psi}{c\varphi} = 1 - \frac{\beta}{b} \quad (2.128)$$

para comprender la definición del error de amplitud ϵ_a , uno podría pensar que la solución exacta tiene una amplitud $|e^{-ic\varphi}| = 1$, si $0 \leq \epsilon_a < 1$ y esto ocurre cuando el esquema es estable, por otro lado concluimos que para $\epsilon_f > 0$ la solución numérica se retrasa atrás de la solución exacta, mientras que para $\epsilon_f < 0$ se propaga más rápido, combinando las definiciones de ϵ_a y ϵ_f con la expresión (2.127), nosotros obtenemos la siguiente relación entre los modos exactos y numéricos:

$$u_j^n = ((1 - \epsilon_a) \exp(i\epsilon_f c\varphi))^n u(x_j, t^n) \quad (2.129)$$

Aplicamos esto al esquema contra el viento, combinando la expresión polar (2.61) con la expresión (2.67), nosotros obtenemos las siguientes relaciones para la amplitud $|\lambda|$ y la fase ψ :

$$|\lambda| = \sqrt{1 - 4c(1-c)\text{sen}^2\left(\frac{1}{2}\varphi\right)}, \quad \tan\psi = \frac{c\text{sen}\varphi}{1 - 2c\text{sen}^2\left(\frac{1}{2}\varphi\right)} \quad (2.130)$$

de la primera relación nosotros podemos determinar el error de amplitud, para derivar una expresión para la fase error, nosotros invertimos la segunda relación de (2.130), entonces $0 \leq \psi \leq \pi$ y

$$\psi = \tan^{-1}\left(\frac{c\text{sen}\varphi}{1 - 2c\text{sen}^2\left(\frac{1}{2}\varphi\right)}\right), \quad (2.131)$$

donde $\tan^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow [0, \pi)$ es la función dada por:

$$\tan^{-1}(q) := \begin{cases} \arctan q & \text{si } q \geq 0, \\ \arctan q + \pi & \text{si } q < 0 \end{cases} \quad (2.132)$$

en la figura 2.13 podemos ver dibujado a ϵ_a y ϵ_f como funciones de φ , nosotros podemos observar que las componentes de baja frecuencia, se caracterizan por tener un número de onda pequeño κ y una fase pequeña del ángulo φ . Por otro lado, los componentes de alta frecuencia los cuales $\kappa \approx \pi/\Delta x$ y $\varphi \approx \pi$, poseen una amplitud y errores de fase significante, estos son gravemente amortiguados y propagados en una velocidad inadecuada.

Consideremos el esquema de Lax-Wendroff (2.82), el factor de amplificación $\lambda(\varphi)$ el de la ecuación (2.83), con la amplitud $|\lambda|$ y la fase ψ entonces tenemos que:

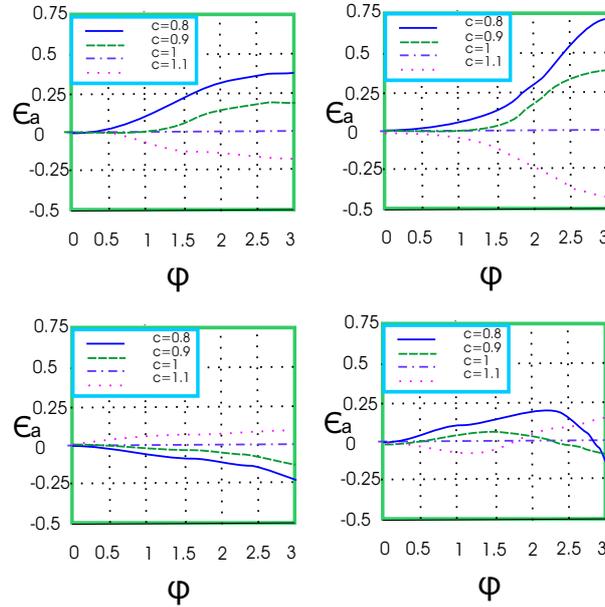


Figura 2.13: La amplitud y errores de fase del esquema contra el viento (izquierda) y el esquema de Lax-Wendroff (derecha)

$$|\lambda| = \sqrt{1 - 4c^2(1 - c^2)\text{sen}^4\left(\frac{1}{2}\varphi\right)}, \quad \tan\psi = \frac{c\text{sen}\varphi}{1 - 2c^2\text{sen}^2\left(\frac{1}{2}\varphi\right)} \quad (2.133)$$

mezclando las ecuaciones (2.128) y (2.133), obtenemos la amplitud y las fases de los errores del esquema de Lax-Wendroff, los cuales podemos ver en la figura 2.13, comparando el esquema contra el viento con el esquema de Lax-Wendroff notamos que el error de amplitud del segundo es mucho más cercano a cero para modos de frecuencia bajo, esto quiere decir que los modos de Fourier no son tan grandemente amortiguados por el esquema de Lax-Wendroff como por el esquema contra el viento.

El crecimiento o decrecimiento del modo numérico (2.127) es establecido por la amplitud $|\lambda(\varphi)|$, de hecho debe satisfacer $|\lambda(\varphi)| \leq 1$; i. e. el esquema tiene que ser estable, basándonos en esto tenemos la siguiente definición.

Definición 2.1 *Un esquema numérico para la ecuación de advección $\frac{\partial u}{\partial t} + b\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, con $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$ se dice ser disipativo si $|\lambda(\varphi)| \leq 1$ para toda φ ($0 \leq \varphi \leq \pi$) y la desigualdad se mantiene para al menos una φ , por otro lado un esquema numérico se dice ser no disipativo si $|\lambda(\varphi)| = 1$ para toda φ ($0 \leq \varphi \leq \pi$).*

Un esquema no disipativo no amortigua la solución numérica y de esta manera le corresponde un error de amplitud $\epsilon_a = 0$, en estos es más difícil de recuperar la velocidad fase corregida, de hecho la fase de velocidad numérica β depende del número de onda κ . Esto nos lleva a la siguiente definición.

Definición 2.2 *Un esquema numérico para la ecuación de advección $\frac{\partial u}{\partial t} + b \frac{\partial u}{\partial x} = 0$, con $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$ se dice ser dispersivo si la fase de velocidad numérica β depende del número de onda κ i.e. $d\beta/d\kappa \neq 0$.*

En un esquema dispersivo cada modo en una solución se propagara con su propia fase de velocidad numérica β dependiendo del número de onda κ , por tal razón la solución se dispersa.

Capítulo 3

Conclusiones

Como pudimos observar a través del siguiente escrito, el método de diferencias finitas pertenece al conjunto de soluciones de la ecuación de onda y como se vio dicho método se puede generalizar para funciones de 2 variables o más e incluso se puede calcular el error de truncamiento de las diferentes fórmulas de las diferencias finitas, las cuales como pudimos ver las podemos obtener a través de desarrollos de series de Taylor, con todo esto concluimos que dicho método es muy fácil y práctico para poder resolver dicha ecuación, como se vio existen diferentes clasificaciones para las ondas, vimos la diferencia que existe entre el esfuerzo y la deformación, la ley de Hooke, los resortes, la segunda ley de Newton, la transformada de Fourier y la fórmula de D'Alembert, la ecuación de Navier, se visualizaron los diferentes tipos de esquemas (explícito e implícito), se mostraron varios estenciles de estos, la disipación y dispersión de los esquemas numéricos.

Bibliografía

- 1.- Ursula Iturrarán-Viveros, *Elastic Wave Propagation: Fundamentals*, Springer, Science+Business Media B.V. ,
- 2.- C. Conde (UPM), E. Schiavi (URJC) y A.I. Muñoz (URJC), tema 6: *Métodos en diferencias finitas para la resolución de problemas de contorno*.
- 3.- Mario I. Caicedo Departamento de Física , Plácido J. Mora Departamento de Ciencias de la Tierra, *Temas de Propagación de Ondas*, Universidad Simón Bolívar,
- 4.- Juan Luís Vázquez, *La ecuación de Navier-Stokes. Un reto físico-matemático para el siglo XXI*, Monografías de la Real Academia de Ciencias de Zaragoza, 26: 31-56,(2004), Univ. Autónoma de Madrid
- 5.-Enrique Zuazua, *Ecuaciones en Derivadas Parciales*, www.cienciamatematica.com
- 6.-*Ondas Electromagnéticas. Conceptos Básicos*
- 7.-Ursula Iturrarán-Viveros and Francisco J. Sánchez-Sesma, *Seismic wave propagation in real media: numerical modeling approaches* Solid Earth Geophysics Encyclopedia (2nd Edition) "Seismology".
- 8.- J. W. Thomas Department of Mathematics Colorado State University Fort Collins, CO 80543 USA
- 9.- Iván Hernández Orzuna, *Modelado de propagación de ondas en 2-D usando diferencias finitas*. Tesis para obtener el título de Maestro en Ciencias Matemáticas. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
- 10.- The finite-difference and finite-element modeling of seismic wave propagation and earthquake motion *acta physica slovacica* vol. 57 No. 2, 177 - 406

11.-Jorge O. Medina, *Esfuerzo y deformación*, Facultad de Arquitectura y Diseño Sistemas Estructurales Universidad de Los Andes, Venezuela

12.-R. M. M. Mattheij S. W. Rienstra J. H. M. ten Thije Boonkkamp, *Partial Differential Equations Modeling, Analysis, Computation*. Technische Universiteit Eindhoven Eindhoven, The Netherlands

13.- Mauricio Arellano Guzmán, *Respuesta sísmica de inclusiones tridimensionales en un semiespacio elástico* tesis para obtener el título de físico. Universidad Nacional Autónoma de México
