



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

MODELOS MATEMÁTICOS DE
FLUJO MONOFÁSICO ANÓMALO
EN MEDIOS POROSOS CON
PROPIEDADES FRACTALES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C O

PRESENTA:

JUAN EDUARDO LINARES PÉREZ



DIRECTOR DE TESIS:
DR. MARTÍN ALBERTO DÍAZ VIERA

2014



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de datos del jurado

1. Datos del alumno

Linares
Pérez
Juan Eduardo
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
304201040

2. Datos del tutor

Dr.
Martín Alberto
Díaz
Viera

3. Datos del sinodal 1

Dr.
Arturo
Ortiz
Tapia

4. Datos del sinodal 2

Dr.
Ramón Gabriel
Plaza
Villegas

5. Datos del sinodal 3

Dr.
Manuel
Coronado
Gallardo

6. Datos del sinodal 4

Dr.
Pedro
González-Casanova
Villegas

7. Datos del trabajo escrito.

Modelos matemáticos de flujo monofásico anómalo en medios porosos con propiedades fractales.
130 p.
2014

Dedicatoria

Dedicado a:

Mis padres y abuelos, que hicieron todo lo posible en la vida para que pudiera lograr éste sueño, brindándome sus sabios consejos cuando más los he necesitado, a ustedes por siempre con todo mi corazón y agradecimiento, esta tesis lleva mucho de ustedes.

Cada uno de mis profesores que influyeron con sus lecciones y experiencias en formarme como una persona de bien, preparada para los retos que pone la vida.

Todas las personas que han formado parte de mi vida, que siempre estuvieron listas para brindarme su ayuda, palabras de aliento, consejos, sonrisas, confianza, amistad y un trato amable, ahora me toca regresar un poquito de todo lo inmenso que me han otorgado.

Todos ustedes me han inspirado para mejorar día con día, por dicha razón, con gran afecto y admiración, les dedico cada una de las páginas de esta tesis.

Agradecimientos

A Dios por permitirme realizar un paso más en mi vida profesional.

Un especial agradecimiento a el Dr. Martín Alberto Díaz Viera, por su disposición para dirigir el presente trabajo de tesis, y también por su comprensión, consejos, paciencia y confianza en mi persona.

Al Instituto Mexicano del Petróleo, por brindarme una beca y un espacio en sus instalaciones para realizar mi tesis de licenciatura.

A los sinodales que con mucha amabilidad revisaron el presente trabajo:

Dr. Arturo Ortiz Tapia

Dr. Ramón Gabriel Plaza Villegas

Dr. Manuel Coronado Gallardo

Dr. Pedro González-Casanova Villegas

A la Facultad de Ciencias y a la Universidad Nacional Autónoma de México.

Resumen

La motivación fundamental del presente trabajo fue desarrollar modelos matemáticos de flujo monofásico anómalo, debido a que en ciertos casos se ha observado que las pruebas de presión en yacimientos naturalmente fracturados, exhiben un comportamiento diferente al previsto por modelos obtenidos con geometría Euclidiana. Algunos autores consideran que dicho comportamiento se puede describir mediante modelos que consideren las características fractales de los yacimientos. Más recientemente se han introducido medidas fraccionales para medios fractales isótropos o anisótropos y se han aplicado a problemas en mecánica de medios continuos desde un enfoque fractal.

El objetivo de esta tesis fue establecer una metodología sistemática para derivar modelos en medios continuos con propiedades fractales, partiendo de una revisión de la metodología sistemática de la modelación de medios continuos y después generalizándola con la teoría de medios continuos fractales desarrollada primero para medios isótropos y luego para medios anisótropos.

Aplicando la metodología establecida, se derivaron tres modelos de flujo monofásico en medios porosos con propiedades fractales desde un enfoque de la modelación matemática y computacional. Primero se desarrollaron dos modelos para medios isótropos fractales, uno basado en la ley de Darcy convencional y otro basado en una ley de Darcy derivada para medios fractales isótropos, luego se desarrolló un tercer modelo para medios fractales anisótropos basado en una ley de Darcy derivada para medios fractales anisótropos.

Las ecuaciones diferenciales fraccionales de los modelos obtenidos se pueden expresar como ecuaciones convencionales en derivadas enteras con coeficientes numéricos adicionales. Los experimentos numéricos arrojaron un comportamiento coherente con la cuestión de la difusión anómala, donde la presión cae a un ritmo más rápido o más lento con respecto al modelo de flujo convencional en función de los parámetros fractales de los modelos, es decir, de la dimensión fractal de masa (D) o de la dimensión fractal de frontera (d).

Índice general

Dedicatoria	I
Agradecimientos	III
Resumen	V
Índice general	X
Lista de figuras	XII
Lista de cuadros	XIII
Introducción	XV
1. Modelación de Sistemas Continuos	1
1.1. Teoría de los sistemas continuos	2
1.2. Propiedades intensivas	4
1.2.1. Representación Lagrangiana	4
1.2.2. Representación Euleriana	4
1.2.3. La derivada material	5
1.3. Propiedades extensivas	5
1.4. Ecuación de balance global	6
1.5. Condiciones de balance local	7
1.5.1. Ecuación diferencial de balance local	8
1.5.2. Condición de salto de balance local	8
1.6. Teoremas	9
1.6.1. Teorema de Gauss extendido	9
1.6.2. Teorema de transporte de Reynolds extendido	9
1.6.3. Lema de Dubois-Reymond extendido	9
1.7. De la ecuación de balance global a las ecuaciones de balance local	10
1.8. Ejemplo	11

1.9.	Ecuaciones básicas de la MMC	12
1.9.1.	Ecuaciones de balance de masa	12
1.9.2.	Ecuaciones de balance de momento lineal	12
1.9.3.	Ecuaciones de balance de energía	15
1.10.	Modelos de fases múltiples	16
1.11.	Modelos completos	19
1.11.1.	Condiciones iniciales	19
1.11.2.	Condiciones de frontera	19
2.	Modelo de Flujo Monofásico	21
2.1.	Modelo conceptual	22
2.2.	Modelo matemático	23
2.3.	Modelo numérico	36
2.4.	Modelo computacional	37
2.4.1.	Geometría	37
2.4.2.	Mallado	37
2.4.3.	Fronteras	37
2.5.	Implementación en COMSOL	39
3.	Revisión de Modelos de Flujo Anómalo	43
3.1.	Modelo de Barker	44
3.1.1.	Supuestos	44
3.1.2.	Descripción de la derivación	45
3.1.3.	Modelo resultante	47
3.1.4.	Interpretación del modelo	47
3.2.	Modelo de Chang y Yortsos	48
3.2.1.	Supuestos	48
3.2.2.	Descripción de la derivación	49
3.2.3.	Modelo resultante	51
3.2.4.	Interpretación del modelo	51
3.3.	Modelo de Metzler	52
3.3.1.	Supuestos	52
3.3.2.	Descripción de la derivación	52
3.3.3.	Modelo resultante	54
3.3.4.	Interpretación del Modelo	54
4.	Modelación de Sistemas Continuos Fractales	55
4.1.	Dimensión de masa fractal	56
4.2.	Medios continuos fractales isótropos	56
4.2.1.	Operadores fraccionales	57
4.2.2.	Propiedades intensivas y extensivas	58

4.2.3.	Ecuación de balance global	58
4.2.4.	Condiciones de balance local	59
4.2.5.	Teoremas	59
4.2.6.	De la ecuación de balance global a las ecuaciones de balance local	62
4.2.7.	Ec. básicas de la MMC fraccional	63
4.3.	Medios continuos fractales anisótropos	69
4.3.1.	Proceso de homogenización para fractales	71
4.3.2.	Operadores fraccionales	71
4.3.3.	Teoremas fraccionales	72
4.3.4.	Propiedades extensivas e intensivas	72
4.3.5.	Ecuación de balance global fraccional	72
4.3.6.	Ecuación de balance local fraccional	72
4.3.7.	De la ecuación de balance global a la ecuación de balance local	73
4.3.8.	Ecuación de conservación de la masa fraccional	73
4.3.9.	Ecuación de balance de momento lineal fraccional	74
4.3.10.	Ecuación de flujo de Navier-Stokes fraccional para medios anisótropos	74
5.	Modelos de Flujo Monofásico Fraccional	75
5.1.	Modelo uno	76
5.1.1.	Modelo conceptual	76
5.1.2.	Modelo matemático	77
5.1.3.	Implementación en COMSOL	79
5.1.4.	Modelo uno con simetría radial	80
5.2.	Modelo dos	82
5.2.1.	Modelo conceptual	82
5.2.2.	Modelo matemático	83
5.2.3.	Implementación en COMSOL	85
5.2.4.	Modelo dos con simetría radial	86
5.3.	Modelo tres	87
5.3.1.	Modelo conceptual	87
5.3.2.	Modelo matemático	88
5.3.3.	Implementación en COMSOL	90
6.	Simulaciones Numéricas y Análisis de Resultados	91
6.1.	Simulaciones del modelo uno	92
6.2.	Simulaciones del modelo dos	100
6.3.	Simulaciones del modelo tres	108
6.4.	Análisis de resultados	118

Conclusiones	119
Apéndices	121
A. Ley de Darcy Convencional	123
B. Ley de Darcy Fraccional para medios isótropos	127
C. Ley de Darcy Fraccional para medios anisótropos	129
Bibliografía	133

Lista de figuras

1.1. Esquema de un cuerpo material $B(t)$ en movimiento	3
1.2. Esquema de un cuerpo material $B(t)$	6
2.1. Flujo radial unidimensional	26
2.2. Gráfica de $-Ei(-y)$	31
2.3. Gráfica de la solución semi-analítica del modelo convencional .	35
2.4. Dominio de definición del modelo computacional	37
2.5. Mallado del dominio del modelo computacional	38
2.6. Fronteras del dominio del modelo computacional	38
2.7. Solución numérica en la malla del modelo de flujo convencional	40
2.8. Evolución de la presión en el pozo	41
2.9. Gráfica de la presión vs. distancia al pozo para distintos tiempos	41
4.1. Relación entre los coeficientes de transformación anisótropos .	70
6.1. Modelo 1: presión vs. tiempo ($D = 2$)	92
6.2. Modelo 1: presión vs. distancia al pozo ($D = 2$)	93
6.3. Modelo 1: presión vs. tiempo ($D = 1.5$)	94
6.4. Modelo 1: presión vs. distancia al pozo ($D = 1.5$)	95
6.5. Modelo 1: presión vs tiempo ($d = 1$)	96
6.6. Modelo 1: presión vs. distancia al pozo ($d = 1$)	97
6.7. Modelo 1: presión vs tiempo ($d = 1.5$)	98
6.8. Modelo 1: presión vs. distancia al pozo ($d = 1.5$)	99
6.9. Modelo 2: presión vs tiempo ($D = 2$)	100
6.10. Modelo 2: presión vs distancia al pozo ($D = 2$)	101
6.11. Modelo 2: presión vs. el tiempo ($D = 1.5$)	102
6.12. Modelo 2: presión vs. distancia al pozo ($D = 1.5$)	103
6.13. Modelo 2: presión vs. tiempo ($d = 1$)	104
6.14. Modelo 2: presión vs. distancia al pozo ($d = 1$)	105
6.15. Modelo 2: presión vs. tiempo ($d = 1.5$)	106
6.16. Modelo 2: presión vs. distancia al pozo ($d = 1.5$)	107

6.17. Modelo 3: presión vs. tiempo ($\alpha_1 = 1.0$)	108
6.18. Modelo 3: presión vs. tiempo ($\alpha_1 = 0.9$)	109
6.19. Modelo 3: presión vs. tiempo ($\alpha_1 = 0.75$)	110
6.20. Modelo 3: presión vs. tiempo ($\alpha_1 = 0.6$)	111
6.21. Modelo 3: Solución en la malla con $\alpha_1 = 0.9$ y $\alpha_2 = 0.9$	112
6.22. Modelo 3: Solución en la malla con $\alpha_1 = 1.0$ y $\alpha_2 = 0.9$	113
6.23. Modelo 3: Solución en la malla con $\alpha_1 = 0.75$ y $\alpha_2 = 0.75$	114
6.24. Modelo 3: Solución en la malla con $\alpha_1 = 0.9$ y $\alpha_2 = 0.75$	115
6.25. Modelo 3: Solución en la malla con $\alpha_1 = 0.6$ y $\alpha_2 = 0.6$	116
6.26. Modelo 3: Solución en la malla con $\alpha_1 = 0.75$ y $\alpha_2 = 0.6$	117

Lista de cuadros

2.1. Parámetros para un yacimiento	32
2.2. Conversión de unidades al sistema <i>cgs</i>	32
2.3. Valores de la presión obtenidos con la solución semi-analítica para distintos tiempos.	35

Introducción

La motivación fundamental del presente trabajo fue desarrollar modelos matemáticos de flujo monofásico anómalo en medios porosos con propiedades fractales, debido a que en ciertos casos se ha observado que las pruebas de presión para prever la producción en yacimientos naturalmente fracturados, exhiben un comportamiento diferente de la presión al previsto por modelos obtenidos con geometría Euclidiana.

Algunos autores como Camacho [5], Barker [3], Metzler [17], Chang y Yortsos [7], entre muchos otros, consideran que la razón de dicho comportamiento diferente en la presión se puede encontrar en la distribución de fracturas dentro del yacimiento y proponen que la teoría fractal puede contribuir a explicar lo anterior. Por lo tanto desarrollaron algunos modelos matemáticos en medios continuos que describen este tipo de comportamiento anómalo de la presión; sin embargo el desarrollo de dichos modelos no fue muy riguroso debido a que sólo hacen algunas modificaciones al modelo de flujo convencional, tomando en cuenta algunas características fractales del medio. Más recientemente, Tarasov [27] [24] [22] [26] [25] [23] y Ostoja [21] [19] [20] [13] [14] [15] introdujeron medidas fraccionales para medios con propiedades fractales isótropos y anisótropos respectivamente.

El objetivo de esta tesis fue establecer una metodología sistemática para derivar de manera simplificada y elegante modelos matemáticos siguiendo el enfoque de los medios continuos fractales usando dos cosas, primero, haciendo una revisión de la metodología sistemática clásica de la modelación de medios continuos, y luego generalizándola, usando la teoría de medios continuos fractales. Una vez establecida dicha metodología, se derivaron tres modelos de flujo monofásico para medios porosos con propiedades fractales, para estudiar sus características a partir de las soluciones numéricas.

La manera en que se derivaron los modelos fue siguiendo el enfoque de la *modelación matemática y computacional*, la cual es una metodología conveniente para modelar que consta de cuatro etapas. En la primera etapa se define un *modelo conceptual* del problema a resolver donde se establecen los supuestos, los alcances y las limitaciones del modelo. En la segunda etapa se deriva el *modelo matemático*, que consiste en el conjunto de ecuaciones diferenciales parciales con condiciones iniciales y valores de fronteras que describen satisfactoriamente las hipótesis del modelo conceptual, aplicando la formulación sistemática de la modelación de medios continuos fractales. Mientras que en la tercera etapa se elige el *modelo numérico* que siempre es una versión discretizada del modelo matemático, donde en éste caso se aplicó el método de elementos finitos. Finalmente, en la cuarta etapa se

implementa el *modelo computacional* que consiste en la programación del método numérico en una plataforma computacional y para este fin se usó el programa COMSOL Multiphysics en el modo PDE en la forma de coeficientes para el análisis dependiente del tiempo.

En el **capítulo uno** se hizo una revisión de la metodología sistemática de la modelación de los medios continuos convencional, haciendo un breve repaso a la teoría de los sistemas continuos, donde se definen y se relacionan las propiedades intensivas y extensivas, se enuncia la ecuación de balance global y a partir de ésta, se deducen las ecuaciones de balance local, se derivan algunas de las ecuaciones de balance básicas de la mecánica de los medios continuos. Finalmente se explican brevemente los modelos de fases múltiples así como los modelos completos.

En el **capítulo dos**, se desarrolló un modelo de flujo monofásico convencional. El modelo matemático se derivó aplicando la metodología del capítulo anterior. Se encontró una solución semi-analítica y se comparó con la solución numérica para un caso particular. Se describe el método numérico y el modelo computacional que se utilizó en todos los modelos posteriores, puesto que los problemas se plantearon en un dominio circular donde hay un pozo productor en el centro, las fronteras están cerradas al flujo y en el pozo hay una tasa de producción constante.

En el **capítulo tres**, se hizo una revisión de tres modelos clásicos de flujo anómalo, de los siguientes autores: Barker [3], Chang y Yortsos [7] y Metzler [17]. En cada modelo se consideraron, los supuestos, la notación, la descripción de la derivación, el modelo resultante y la interpretación del modelo.

En el **capítulo cuatro** se generalizó la metodología sistemática de la modelación de medios continuos con la teoría de medios continuos fractales desarrollada primero para medios isótropos considerando que existe simetría radial alrededor del pozo y posteriormente para medios anisótropos considerando una medida producto la cual puede tener diferentes dimensiones en diferentes direcciones, captando mejor la anisotropía de la geometría fractal. Las ecuaciones derivadas para medios fractales dependen explícitamente de la dimensión fractal y se pueden expresar en términos de integrales y derivadas fraccionales las cuales se reducen con coeficientes numéricos adicionales a ecuaciones convencionales para medios continuos con geometría Euclidiana con dimensiones enteras.

En el **capítulo cinco** se derivaron tres modelos de flujo anómalo. Primero se desarrollaron dos modelos para medios fractales isótropos, uno basado en la ley de Darcy convencional y otro en una ley de Darcy para medios fractales isótropos, luego se desarrolló un tercer modelo para medios fractales anisótropos basado en una ley de Darcy para medios fractales anisótropos. Ambas leyes de Darcy para medios fractales fueron derivadas a partir de la ecuación de balance de momento lineal para medios fractales.

En el **capítulo seis**, se realizaron las simulaciones numéricas de cada uno de los tres modelos de flujo anómalo, para diferentes valores de la dimensión fractal de masa (D) y la dimensión fractal de la frontera (d) en el caso de los dos modelos para medios fractales isótropos y para diferentes valores de $D = \alpha_1 + \alpha_2$ en el caso del modelo para medios fractales anisótropos. Posteriormente, se analizaron e interpretaron los resultados obtenidos de los experimentos numéricos de cada uno de los modelos de flujo anómalo.

Se demostró que la metodología de la modelación matemática y computacional es una metodología adecuada y apropiada para desarrollar modelos. Por otro lado, aplicando la metodología sistemática desarrollada, resulta suficiente con establecer las relaciones entre propiedades intensivas y extensivas para derivar modelos matemáticos de medios continuos con propiedades fractales de manera directa, simple y elegante.

Una de las ventajas de los modelos matemáticos de flujo anómalo obtenidos en el presente trabajo es que son ecuaciones diferenciales convencionales con coeficientes numéricos adicionales, es decir, las ecuaciones diferenciales fraccionales se pueden expresar como ecuaciones con derivadas enteras, lo cual es una gran ventaja en su solución numérica y sobre todo en su implementación computacional. Los experimentos numéricos arrojaron un comportamiento coherente con la cuestión de la difusión anómala, donde la presión cae a un ritmo más rápido o más lento con respecto al modelo de flujo convencional en función de los parámetros fractales de los modelos.

Como trabajo futuro, la metodología desarrollada se puede extender a modelos multicomponentes y multifásicos de transporte en medios porosos con propiedades fractales, con un gran potencial en su aplicación a la modelación de yacimientos heterogéneos.

Capítulo 1

Modelación de Sistemas Continuos

1.1. Teoría de los sistemas continuos

Los **sistemas continuos** están constituidos por cuerpos. Un **cuerpo** es un conjunto infinito de puntos materiales que en cualquier instante dado ocupa una región o dominio, en el sentido matemático, del espacio tridimensional.

Un **punto espacial** es un punto fijo en el espacio y un **punto material** es un punto que puede ocupar distintos puntos espaciales en su movimiento a lo largo del tiempo.

Hipótesis básica de los sistemas continuos

Consiste en considerar que un sistema continuo llena todo el espacio que ocupa, es decir, cada punto del sistema continuo está lleno de materia. En la teoría de los sistemas continuos se trabaja con los promedios de sus propiedades físicas y existe un volumen llamado representativo, para el cual se calculan y son válidos los promedios de dichas propiedades.

Sea \mathbf{B} un cuerpo y $B(t)$ el dominio ocupado por \mathbf{B} en el instante t . Debido a la hipótesis básica de los sistemas continuos, en cualquier instante de tiempo t fijo, y en cada punto $\underline{x} \in B(t)$ de la región ocupada por el cuerpo, hay solo un punto material del cuerpo \mathbf{B} (ver figura 1.1).

La **configuración espacial** del cuerpo \mathbf{B} en el instante t , es el lugar geométrico de las posiciones que ocupan en el espacio los puntos materiales del cuerpo en dicho instante. Se le denomina **configuración de referencia** a la configuración espacial en el instante inicial t_0 del intervalo de interés.

Coordenadas materiales o lagrangianas: Son las coordenadas del vector de posición $\underline{X} = (X_1, X_2, X_3)$ que ocupa un punto material del cuerpo \mathbf{B} en el instante inicial t_0 en la configuración de referencia.

Coordenadas espaciales o eulerianas: Son las coordenadas del vector de posición $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3) = \underline{p}(\underline{X}, t) = (p_1, p_2, p_3)$ que ocupa el punto material \underline{X} del cuerpo \mathbf{B} en el instante t en la configuración espacial.

Al haber una relación biunívoca, podemos definir la inversa de la función $\underline{p}(\underline{X}, t)$ a la cual denotaremos por $\underline{p}^{-1}(\underline{x}, t) \equiv \underline{X}$. La región ocupada por el cuerpo \mathbf{B} cambia con el tiempo debido al movimiento y la definiremos formalmente para cualquier instante t en el tiempo como

$$B(t) \equiv \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \exists \underline{X} \in \mathbf{B} \text{ y } \underline{x} = \underline{p}(\underline{X}, t) \}.$$

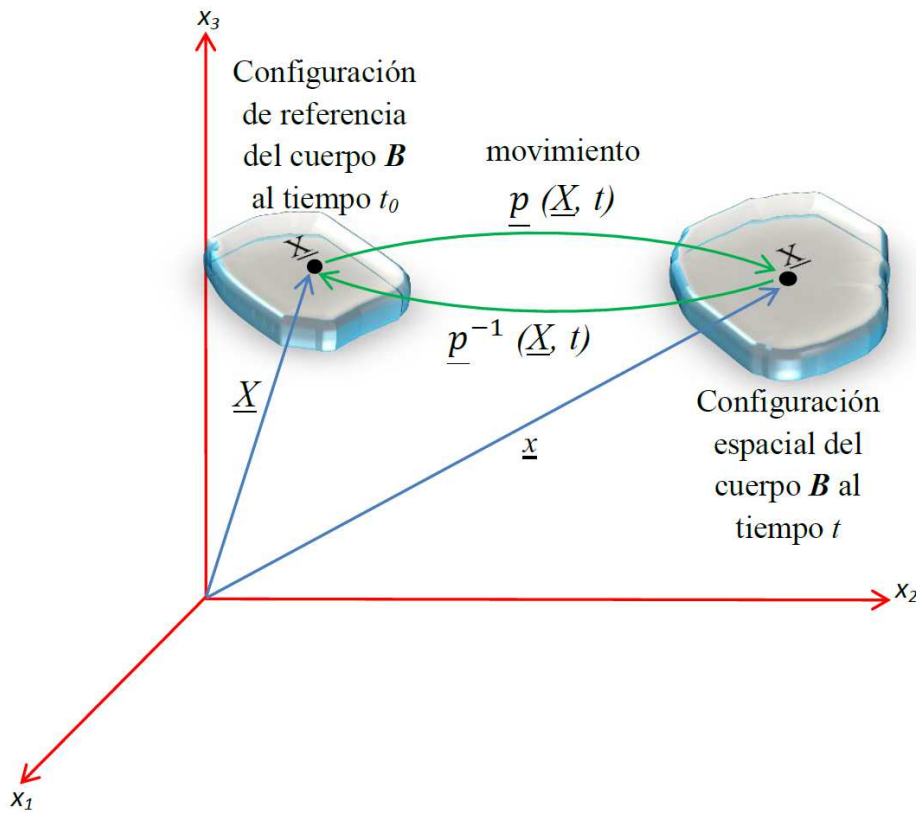


Figura 1.1: Esquema de la relación entre la configuración de referencia del cuerpo B , las coordenadas materiales \underline{X} y las coordenadas espaciales \underline{x} de un punto material $\underline{X} \in B$.

Si fijamos el tiempo t entonces $B(t) = \underline{p}(B, t)$. Para observar la trayectoria de un punto material \underline{X} , sólo debemos fijar dicho punto y variar t en la función $\underline{p}(\underline{X}, t)$, lo cual permite obtener la velocidad $\underline{V}(\underline{X}, t)$ de cualquier punto material \underline{X} , importante para describir su movimiento. La velocidad se define como la derivada con respecto al tiempo a la posición cuando el punto material se mantiene fijo, es decir,

$$\underline{V}(\underline{X}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \underline{p}(\underline{X}, t)$$

1.2. Propiedades intensivas

Son propiedades muy específicas que no dependen de la cantidad de la materia, por ejemplo, la densidad de masa o la densidad de volumen y que pueden expresarse como funciones definidas para cada tiempo en cada uno de los puntos del sistema continuo, es decir, son funciones que están definidas en la posición \underline{x} del punto material \underline{X} al tiempo t . Pueden ser funciones escalares como la concentración de cierta sustancia al tiempo t o vectoriales como la velocidad, que depende del punto material \underline{X} y del tiempo t . Una propiedad intensiva con valores vectoriales es equivalente a tres escalares, correspondientes a cada una de sus tres componentes. En resumen, las propiedades intensivas son funciones definidas en los puntos materiales de un cuerpo, es decir, son funciones que hacen corresponder a cada punto material y cada tiempo en un número real o un vector del espacio Euclidiano tridimensional \mathbb{R}^3 . Hay dos formas de representar a las propiedades intensivas: la representación euleriana y la representación lagrangiana.

1.2.1. Representación Lagrangiana

Consideremos una propiedad intensiva escalar, tal que en el instante t toma en el punto material \underline{X} el valor

$$\phi(\underline{X}, t)$$

definiendo una función $\phi : \mathbf{B} \rightarrow \mathbb{R}^1$ para cada instante t , a la que se le llama representación lagrangiana de la propiedad intensiva considerada. Esta representación es más utilizada en el estudio de los sólidos.

1.2.2. Representación Euleriana

Consideremos una propiedad intensiva, tal que en el instante t toma en el punto material que ocupa la posición \underline{x} el valor

$$\psi(\underline{x}, t)$$

definiendo una función $\psi : B(t) \rightarrow \mathbb{R}^1$ para cada instante t , a la que se le llama representación euleriana de la función considerada. Esta representación es más utilizada en el estudio de los fluidos.

Ambas representaciones satisfacen las siguientes identidades

$$\phi(\underline{X}, t) \equiv \psi(\underline{p}(\underline{X}, t), t) \quad y \quad \psi(\underline{x}, t) \equiv \phi(\underline{p}^{-1}(\underline{x}, t), t)$$

Por ejemplo, la representación lagrangiana de la velocidad de un punto material

$$\frac{\partial \underline{p}}{\partial t}(\underline{X}, t) = \underline{V}(\underline{X}, t) \equiv \underline{v}(\underline{p}(\underline{X}, t), t)$$

donde $\underline{v}(\underline{x}, t)$ es la representación euleriana de la velocidad, entonces

$$\underline{v}(\underline{x}, t) \equiv \underline{V}(\underline{p}^{-1}(\underline{x}, t), t)$$

Es decir, que la velocidad en el punto \underline{x} del espacio físico, es igual a la velocidad del punto material que pasa por dicho punto en el instante t .

1.2.3. La derivada material

Si obtenemos la derivada parcial con respecto al tiempo de la representación lagrangiana, $\phi(\underline{X}, t)$, de una propiedad intensiva, de acuerdo a la definición de la derivada parcial de una función, es la tasa de cambio con respecto al tiempo que ocurre en un punto material fijo. Es decir, si nos montamos en un punto material y medimos a la propiedad intensiva y luego los valores así obtenidos los derivamos con respecto al tiempo, el resultado final es

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(\underline{X}, t) = \frac{\partial \psi}{\partial t}(\underline{p}(\underline{X}, t), t) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(\underline{p}(\underline{X}, t), t) \frac{\partial p_i}{\partial t}(\underline{X}, t) = \frac{\partial \psi}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla \psi$$

Tiene interés evaluar la tasa de cambio con respecto al tiempo que ocurre en un punto material fijo. La derivada material se puede denotar por el siguiente operador:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla \quad (1.1)$$

1.3. Propiedades extensivas

Son propiedades muy generales de cualquier sustancia que dependen de la cantidad de la materia, por ejemplo, el peso, la masa, el volumen, la longitud, etc. Se denotan por $E(t)$ o bien $E(B, t)$ y funciones que a cada cuerpo B de un sistema continuo y a cada tiempo t le asocia un número real o un vector en \mathbb{R}^3 y puede expresarse como sigue:

$$E(t) = \int_{B(t)} \psi(\underline{x}, t) d\underline{x} \quad (1.2)$$

donde $\psi(\underline{x}, t)$ es la representación euleriana de una propiedad intensiva.

Existe una relación biunívoca entre las propiedades extensivas e intensivas, por que dada la representación euleriana $\psi(\underline{x}, t)$ de cualquier propiedad intensiva, su integral sobre el dominio ocupado por cualquier cuerpo define una propiedad extensiva e inversamente, dada una propiedad extensiva cuando el integrando se expresa en la forma de la ecuación de arriba define una propiedad intensiva, por ejemplo, la masa y la densidad de masa.

1.4. Ecuación de balance global

Los modelos matemáticos de los sistemas continuos están constituidos por balances de propiedades extensivas. En la mecánica de medios continuos se realiza un balance de las propiedades extensivas en las que se basa el modelo, en cada cuerpo del sistema continuo. Para realizar estos balances, debemos identificar las causas por las que las propiedades extensivas de cualquier cuerpo pueden cambiar, las cuales pueden ser:

- Por lo que se genera o se destruye en el interior del cuerpo.
- Por el flujo que se importa o exporta a través de la frontera.

En la teoría de sistemas continuos, la hipótesis básica desde el punto de vista físico para la formulación de las ecuaciones de balance de las propiedades extensivas es que *cualquier variación de la propiedad extensiva proviene de lo que se genera o se destruye dentro del cuerpo o de lo que entra o sale a través de su frontera*, pero también debemos tener en cuenta que puede haber discontinuidades (ver figura 1.2).

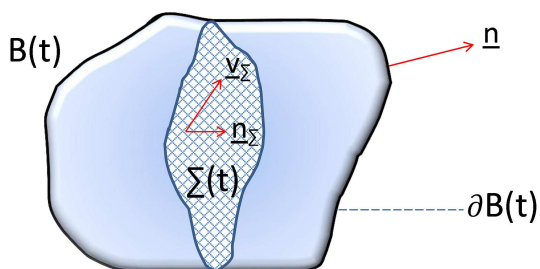


Figura 1.2: Esquema de un cuerpo material $B(t)$ con frontera $\partial B(t)$, donde \underline{n} es su vector normal externo. La superficie de discontinuidad $\Sigma(t)$ tiene vector normal \underline{n}_Σ y se mueve con velocidad \underline{v}_Σ . $B(t)$ se mueve a velocidad \underline{v} .

Esto conduce a la siguiente ecuación de balance global:

$$\frac{d}{dt}E(t) = \int_{B(t)} g(\underline{x}, t) d\underline{x} + \int_{\partial B(t)} q(\underline{x}, t) d\underline{x} + \int_{\Sigma(t)} g_{\Sigma}(\underline{x}, t) d\underline{x} \quad (1.3)$$

- $g(\underline{x}, t)$ es el término fuente en el interior del cuerpo $B(t)$, por unidad de volumen por unidad de tiempo.
- $q(\underline{x}, t)$ es lo que se importa o exporta a través de la frontera del cuerpo $\partial B(t)$, es decir, es el flujo de la propiedad extensiva a través de la frontera del cuerpo, por unidad de área, por unidad de tiempo.
- $g_{\Sigma}(\underline{x}, t)$ es término fuente por unidad de área en $\Sigma(t)$.

Como para cada tiempo t , existe un campo vectorial $\underline{\tau}(\underline{x}, t)$ tal que

$$q(\underline{x}, t) \equiv \underline{\tau}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}(\underline{x}, t)$$

donde \underline{n} es la normal exterior a la frontera $\partial B(t)$ (ver figura 1.2), entonces

$$\frac{d}{dt}E(t) = \int_{B(t)} g(\underline{x}, t) d\underline{x} + \int_{\partial B(t)} \underline{\tau}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}(\underline{x}, t) d\underline{x} + \int_{\Sigma(t)} g_{\Sigma}(\underline{x}, t) d\underline{x} \quad (1.4)$$

- $g(\underline{x}, t)$ es el término fuente en $B(t)$.
- $\underline{\tau}(\underline{x}, t)$ es el campo de flujo.
- $\underline{n}(\underline{x}, t)$ es la normal exterior a la frontera $\partial B(t)$.
- $g_{\Sigma}(\underline{x}, t)$ es término fuente en $\Sigma(t)$

1.5. Condiciones de balance local

Las ecuaciones de balance correspondientes a una colección de propiedades extensivas constituyen a los modelos de los sistemas continuos, de esta manera, a cada sistema continuo le corresponde una familia de propiedades extensivas, tal que, el modelo matemático del sistema está constituido por las condiciones de balance de cada una de las propiedades extensivas de dicha familia. Sin embargo, las propiedades extensivas mismas no se utilizan directamente en la formulación del modelo, en su lugar se usan las propiedades intensivas asociadas a cada una de ellas. Esto es posible porque las *ecuaciones de balance global* son equivalentes a las llamadas *condiciones de balance local*, las cuales se expresan en términos de las propiedades intensivas correspondientes. Las condiciones de balance local son de dos clases: las ecuaciones diferenciales de balance local y las condiciones de salto.

1.5.1. Ecuación diferencial de balance local

Son ecuaciones diferenciales parciales que se deben satisfacer en cada punto del espacio ocupado por el sistema continuo, y son de la forma:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \cdot (\psi \underline{v}) = g + \nabla \cdot \underline{\tau} \quad \forall \underline{x} \in B(t) \setminus \Sigma(t) \quad (1.5)$$

desarrollando la divergencia en el lado izquierdo

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla \psi + \psi \nabla \cdot \underline{v} = g + \nabla \cdot \underline{\tau} \quad \forall \underline{x} \in B(t) \setminus \Sigma(t) \quad (1.6)$$

por definición de derivada material de ψ , obtenemos

$$\frac{D\psi}{Dt} + \psi \nabla \cdot \underline{v} = g + \nabla \cdot \underline{\tau} \quad \forall \underline{x} \in B(t) \setminus \Sigma(t) \quad (1.7)$$

Por lo tanto, la ecuación diferencial de balance local puede expresarse en términos de la derivada material, que usaremos para expresar la ecuación diferencial de balance local de las ecuaciones básicas de la mecánica de medios continuos.

1.5.2. Condición de salto de balance local

Las condiciones de salto son ecuaciones algebraicas que las discontinuidades deben satisfacer donde ocurren, es decir, en cada punto de la superficie de discontinuidad $\Sigma(t)$. Las propiedades intensivas pueden tener discontinuidades de salto exclusivamente a través de la superficie $\Sigma(t)$, donde los límites por ambos lados de $\Sigma(t)$ existen, pero son diferentes.

$$[[\psi(\underline{v} - \underline{v}_\Sigma) - \underline{\tau}]] \cdot \underline{n}_\Sigma = g_\Sigma \quad \forall \underline{x} \in \Sigma(t). \quad (1.8)$$

donde $[[f]] = \lim_{\underline{x} \rightarrow \Sigma^+} f(\underline{x}) - \lim_{\underline{x} \rightarrow \Sigma^-} f(\underline{x})$ es el salto de la función f .

Las ecuaciones diferenciales de balance local son de uso mucho más amplio que las condiciones de salto, pues estas últimas únicamente se aplican en problemas de carácter especial donde las propiedades intensivas son discontinuas, mientras que las primeras en todo punto del espacio ocupado por el sistema continuo.

1.6. Teoremas

En esta sección, enunciamos los teoremas que se utilizarán en la derivación de las condiciones de balance local, a partir de la ecuación de balance global.

1.6.1. Teorema de Gauss extendido

Sea $B(t)$ una región conexa con frontera $\partial B(t)$ donde \underline{n} es un vector normal unitario y $\underline{\tau}(\underline{x}, t)$ una función vectorial continuamente diferenciable en $B(t)$ excepto en $\Sigma(t)$ con vector normal unitario \underline{n}_Σ , entonces

$$\int_{\partial B(t)} \underline{\tau} \cdot \underline{n} d\underline{x} = \int_{B(t)} \nabla \cdot \underline{\tau} d\underline{x} + \int_{\Sigma(t)} \llbracket \underline{\tau} \rrbracket \cdot \underline{n}_\Sigma d\underline{x} \quad (1.9)$$

1.6.2. Teorema de transporte de Reynolds extendido

Sea $B(t)$ una región conexa (el dominio de un cuerpo) con velocidad \underline{v} y $\Sigma(t)$ una superficie que interseca a $B(t)$, con vector normal unitario \underline{n}_Σ y velocidad \underline{v}_Σ . Si $\psi(\underline{x}, t)$ es una función de valores reales definida en $B(t)$ continuamente diferenciable excepto en la superficie $\Sigma(t)$, entonces

$$\frac{d}{dt} \int_{B(t)} \psi(\underline{x}, t) d\underline{x} = \int_{B(t)} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \cdot (\psi \underline{v}) \right) d\underline{x} + \int_{\Sigma(t)} \llbracket \psi(\underline{v} - \underline{v}_\Sigma) \rrbracket \cdot \underline{n}_\Sigma d\underline{x} \quad (1.10)$$

1.6.3. Lema de Dubois-Reymond extendido

Sea $f(\underline{x})$ continua excepto en $\Sigma(t)$ y $g(\underline{x})$ continua en $\Sigma(t)$. Si

$$\int_{B(t)} f(\underline{x}) d\underline{x} + \int_{\Sigma(t)} g(\underline{x}) d\underline{x} = 0 \quad (1.11)$$

entonces $f(\underline{x}) = 0$, $\forall \underline{x} \in B(t) \setminus \Sigma(t)$ y $g(\underline{x}) = 0$, $\forall \underline{x} \in \Sigma(t)$.

1.7. De la ecuación de balance global a las ecuaciones de balance local

Afirmamos que en un sistema continuo, la *ecuación de balance global*, se satisface para todo cuerpo del sistema continuo, si y solamente si, se cumplen las *condiciones de balance local*. En efecto, sustituyendo en la ecuación de balance global (1.4) la definición de propiedad extensiva (1.2)

$$\frac{d}{dt} \int_{B(t)} \psi d\underline{x} = \int_{B(t)} g d\underline{x} + \int_{\partial B(t)} \underline{\tau} \cdot \underline{n} d\underline{x} + \int_{\Sigma(t)} g_{\Sigma} d\underline{x} \quad (1.12)$$

aplicando al segundo sumando (1.9) el teorema de Gauss extendido

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{B(t)} \psi d\underline{x} &= \int_{B(t)} g d\underline{x} + \int_{B(t)} \nabla \cdot \underline{\tau} d\underline{x} + \int_{\Sigma(t)} \llbracket \underline{\tau} \rrbracket \cdot \underline{n}_{\Sigma} d\underline{x} + \int_{\Sigma(t)} g_{\Sigma} d\underline{x} \\ &= \int_{B(t)} (g + \nabla \cdot \underline{\tau}) d\underline{x} + \int_{\Sigma(t)} (\llbracket \underline{\tau} \rrbracket \cdot \underline{n}_{\Sigma} + g_{\Sigma}) d\underline{x} \end{aligned} \quad (1.13)$$

aplicando en la izquierda (1.10) el teorema de transporte de Reynolds extendido

$$\begin{aligned} &\int_{B(t)} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \cdot (\psi \underline{v}) \right) d\underline{x} + \int_{\Sigma(t)} \llbracket \psi(\underline{v} - \underline{v}_{\Sigma}) \rrbracket \cdot \underline{n}_{\Sigma} d\underline{x} \\ &= \int_{B(t)} (g(\underline{x}, t) + \nabla \cdot \underline{\tau}) d\underline{x} + \int_{\Sigma(t)} (\llbracket \underline{\tau} \rrbracket \cdot \underline{n}_{\Sigma} + g_{\Sigma}(\underline{x}, t)) d\underline{x} \end{aligned} \quad (1.14)$$

agrupando términos del lado izquierdo de la igualdad

$$\begin{aligned} &\int_{B(t)} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \cdot (\psi \underline{v}) - (g(\underline{x}, t) + \nabla \cdot \underline{\tau}) \right) d\underline{x} \\ &+ \int_{\Sigma(t)} (\llbracket \psi(\underline{v} - \underline{v}_{\Sigma}) - \underline{\tau} \rrbracket \cdot \underline{n}_{\Sigma} - g_{\Sigma}(\underline{x}, t)) d\underline{x} = 0 \end{aligned} \quad (1.15)$$

aplicando (1.11) el lema de Dubois-Reymond extendido, obtenemos la ecuación de balance local y la condición de salto de balance local respectivamente:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \cdot (\psi \underline{v}) = g(\underline{x}, t) + \nabla \cdot \underline{\tau}, \quad \forall \underline{x} \in B(t) \setminus \Sigma(t) \quad (1.16)$$

$$\llbracket \psi(\underline{v} - \underline{v}_{\Sigma}) - \underline{\tau} \rrbracket \cdot \underline{n}_{\Sigma} = g_{\Sigma}(\underline{x}, t), \quad \forall \underline{x} \in \Sigma(t) \quad (1.17)$$

1.8. Ejemplo

Consideremos el cuerpo de un fluido incompresible, el cual llena completamente el volumen en que se encuentra. Su movimiento ocurre en un espacio libre tomando en cuenta la siguiente hipótesis:

Los cuerpos conservan su volumen en el movimiento de sustancias incompresibles (sólidas o fluidas).

Sea $V_f(t)$ el volumen del fluido contenido en el cuerpo y $B(t)$ el dominio del espacio físico ocupado por el cuerpo, de esta manera, el volumen del fluido es igual al volumen de la región que ocupa y esto se expresa de la siguiente forma:

$$V_f(t) = \int_{B(t)} d\underline{x} \quad (1.18)$$

El volumen del fluido es una propiedad extensiva $\implies E(t) \equiv V_f(t)$
y su propiedad intensiva correspondiente esta dada por $\psi(\underline{x}, t) \equiv 1$

Por hipótesis, el volumen de los cuerpos se conserva durante su movimiento:

$$\frac{d}{dt}V_f(t) = 0 \quad (1.19)$$

Es decir, la **ecuación de balance global** esta dada por

$$\frac{d}{dt}V_f(t) = \int_{B(t)} 0d\underline{x} + \int_{\partial B(t)} 0d\underline{x} + \int_{\Sigma(t)} 0d\underline{x} = 0 \quad (1.20)$$

ecuación diferencial de balance local:

$$\nabla \cdot \underline{v} = 0 \quad \forall \underline{x} \in B(t) \setminus \Sigma(t) \quad (1.21)$$

condición de salto de balance local:

$$[[\underline{v}]] \cdot \underline{n}_\Sigma = 0 \quad \forall \underline{x} \in \Sigma(t) \quad (1.22)$$

1.9. Ecuaciones básicas de la MMC

1.9.1. Ecuaciones de balance de masa

$$M(t) = \int_{B(t)} \rho(\underline{x}, t) d\underline{x} \quad (1.23)$$

Propiedad extensiva: masa $M(t)$

Propiedad intensiva: densidad $\psi \equiv \rho$

Si tenemos que: $g \equiv 0$, $g_\Sigma \equiv 0$ y $\underline{\tau} \equiv 0$, existe conservación de masa

Ecuación de balance global

$$\frac{d}{dt} M(t) = 0 \quad (1.24)$$

Ecuación de balance local:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \underline{v} = 0 \quad ; \quad \forall \underline{x} \in B(t) \setminus \Sigma(t). \quad (1.25)$$

también es conocida como *ecuación de continuidad en mecánica de fluidos*.

Condiciones de salto:

$$[[\rho(\underline{v} - \underline{v}_\Sigma)]] \cdot \underline{n}_\Sigma = 0 \quad ; \quad \forall \underline{x} \in \Sigma(t). \quad (1.26)$$

1.9.2. Ecuaciones de balance de momento lineal

$$\underline{\mathfrak{M}}(t) = \int_{B(t)} \rho(\underline{x}, t) \underline{v}(\underline{x}, t) d\underline{x} \quad (1.27)$$

Propiedad extensiva: momento lineal $\underline{\mathfrak{M}}(t)$

Propiedad intensiva: densidad de momento lineal $\psi \equiv \rho \underline{v}$.

Si tenemos que $g \equiv \rho \underline{b}$, $g_\Sigma \equiv 0$ y $\underline{\tau} \equiv \underline{\underline{\sigma}}$

donde

- $\rho \underline{b}$ – fuerzas de cuerpo por unidad de volumen
- $\underline{\underline{\sigma}}$ – tensor de los esfuerzos
- $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{T}$ – fuerzas de tracción.

Ecuación de balance global:

$$\frac{d}{dt} \mathfrak{M}(t) = \int_{B(t)} \rho \underline{b} d\underline{x} + \int_{\partial B(t)} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} d\underline{x} \quad (1.28)$$

Ecuación de balance local:

$$\frac{D\rho \underline{v}}{Dt} + \rho \underline{v} \nabla \cdot \underline{v} = \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \rho \underline{b} \quad ; \quad \forall \underline{x} \in B(t) \setminus \Sigma(t) \quad (1.29)$$

Esta ecuación se puede interpretar como un sistema de ecuaciones si la expresamos como

$$\frac{D\rho v_i}{Dt} + \rho v_i \nabla \cdot \underline{v} = \nabla \cdot \sigma_i + \rho b_i \quad ; \quad i = 1, 2, 3; \quad (1.30)$$

donde $\underline{\underline{\sigma}} = (\underline{\sigma}_1, \underline{\sigma}_2, \underline{\sigma}_3)$; $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$.

Desarrollando la derivada material en el término izquierdo

$$\left(\rho \frac{D\underline{v}}{Dt} + \underline{v} \frac{D\rho}{Dt} \right) + \rho \underline{v} \nabla \cdot \underline{v} = \rho \frac{D\underline{v}}{Dt} + \underline{v} \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \underline{v} \right) = \rho \frac{D\underline{v}}{Dt} \quad (1.31)$$

ya que $\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \underline{v} = 0$ por conservación de la masa. Entonces obtenemos la ecuación

$$\rho \frac{D\underline{v}}{Dt} = \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \rho \underline{b} \quad \forall \underline{x} \in B(t) \setminus \Sigma(t) \quad (1.32)$$

que constituye la 1ª ley de cauchy de la mecánica de medios continuos.

Condiciones de salto:

$$\llbracket \rho \underline{v} (\underline{v} - \underline{v}_\Sigma) - \underline{\underline{\sigma}} \rrbracket \cdot \underline{n}_\Sigma = 0; \quad \forall \underline{x} \in \Sigma(t). \quad (1.33)$$

Ecuación general de flujo de Navier-Stokes

Sean

- $\rho \underline{b}$ - fuerzas de cuerpo por unidad de volumen.
- \underline{D} - la parte simétrica del tensor de las velocidades $\nabla \underline{v}$, donde $\underline{D} = \frac{1}{2}(\nabla \underline{v} + (\nabla \underline{v})^T)$, es decir, $D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$
- $\underline{\sigma} = -p \underline{I} + \lambda(\nabla \cdot \underline{v}) \underline{I} + 2\mu \underline{D}$ - es el tensor de los esfuerzos.

Usando la notación de Einstein para los índices repetidos

$$\nabla \cdot (-p \underline{I}) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} = -\nabla p$$

Análogamente

$$\nabla \cdot (\lambda(\nabla \cdot \underline{v}) \underline{I}) = \lambda \nabla(\nabla \cdot \underline{v})$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (2\mu \underline{D}) &= \mu \nabla \cdot (2\underline{D}) = \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \\ &= \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = \mu \nabla(\nabla \cdot \underline{v}) + \mu \nabla^2 \underline{v} \end{aligned}$$

Como la divergencia es un operador lineal

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \underline{\sigma} &= \nabla \cdot (-p \underline{I}) + \nabla \cdot (\lambda(\nabla \cdot \underline{v}) \underline{I}) + \nabla \cdot (2\mu \underline{D}) \\ &= -\nabla p + \mu \nabla^2 \underline{v} + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \underline{v}) \end{aligned}$$

al sustituir en la ecuación de balance de momento lineal, obtenemos

$$\rho \frac{D}{Dt} \underline{v} = \rho \underline{b} - \nabla p + \mu \nabla^2 \underline{v} + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \underline{v}) \quad (1.34)$$

que es la ecuación general de flujo de Navier-Stokes.

Desarrollando en la izquierda la derivada material y dividiendo entre ρ de ambos lados, es la ecuación que utilizaremos para deducir la ley de Darcy.

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{v} + \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} = \underline{b} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \underline{v} + \frac{1}{\rho} (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \underline{v}) \quad (1.35)$$

1.9.3. Ecuaciones de balance de energía

$$\mathcal{E}(t) = \int_{B(t)} \rho \left(E + \frac{1}{2} |\underline{v}|^2 \right) d\underline{x} \quad (1.36)$$

Propiedad extensiva: Energía $\mathcal{E}(t)$

Propiedad intensiva: $\psi \equiv \rho(E + \frac{1}{2} |\underline{v}|^2)$

donde E es la energía interna por unidad de masa.

Si tenemos que: $g \equiv \rho(h + \underline{b} \cdot \underline{v})$, $g_\Sigma \equiv 0$ y $\underline{\tau} \equiv \underline{q} + \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{v}$ donde

- ρh - fuente de calor por unidad de volumen
- $\rho \underline{b} \cdot \underline{v}$ - trabajo por unidad de tiempo por unidad de volumen realizado por las fuerzas del cuerpo
- $\underline{q} \cdot \underline{n}$ - flujo de calor a través de la frontera por unidad de tiempo por unidad de área
- $(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{v}) \cdot \underline{n} = (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{v}) \cdot \underline{v} = \underline{\tau} \cdot \underline{v}$ - trabajo por unidad de tiempo por unidad de área realizado por las fuerzas de tracción.

Ecuación de balance global:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) = \int_{B(t)} \rho(h + \underline{b} \cdot \underline{v}) d\underline{x} + \int_{\partial B(t)} (\underline{q} + \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{v}) \cdot \underline{n} d\underline{x} \quad (1.37)$$

Ecuación de balance local:

$$\frac{D}{Dt} \left(\rho \left(E + \frac{1}{2} \underline{v} \cdot \underline{v} \right) \right) + \rho \left(E + \frac{1}{2} \underline{v} \cdot \underline{v} \right) \nabla \cdot \underline{v} = \nabla \cdot (\underline{q} + \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{v}) + \rho(h + \underline{b} \cdot \underline{v}) \quad (1.38)$$

Desarrollando el término de la derivada material resulta:

$$\frac{D}{Dt} \left(\rho \left(E + \frac{1}{2} \underline{v} \cdot \underline{v} \right) \right) = \rho \frac{DE}{Dt} + \rho \frac{D(\frac{1}{2} \underline{v} \cdot \underline{v})}{Dt} + \frac{D\rho}{Dt} \left(E + \frac{1}{2} \underline{v} \cdot \underline{v} \right) \quad (1.39)$$

Sustituyendo (2.30) en el miembro izquierdo de la ecuación (2.28) obtenemos:

$$\rho \frac{DE}{Dt} + \rho \frac{D(\frac{1}{2} \underline{v} \cdot \underline{v})}{Dt} + \left(E + \frac{1}{2} \underline{v} \cdot \underline{v} \right) \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \underline{v} \right) = \nabla \cdot (\underline{q} + \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{v}) + \rho(h + \underline{b} \cdot \underline{v}) \quad (1.40)$$

ya que $\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \underline{v} = 0$ por conservación de masa, resulta:

$$\rho \frac{DE}{Dt} + \rho \frac{D(\frac{1}{2}\underline{v} \cdot \underline{v})}{Dt} = \nabla \cdot (\underline{q} + \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{v}) + \rho(h + \underline{b} \cdot \underline{v}). \quad (1.41)$$

Si tenemos en cuenta que:

$$\nabla \cdot (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{v}) = \underline{v} \cdot (\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}) + \underline{\underline{\sigma}} \cdot \nabla \underline{v} \quad y \quad \frac{D(\frac{1}{2}\underline{v} \cdot \underline{v})}{Dt} = \underline{v} \cdot \frac{D\underline{v}}{Dt}$$

entonces

$$\rho \frac{DE}{Dt} + \underline{v} \cdot \left(\rho \frac{D\underline{v}}{Dt} - \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} - \rho \underline{b} \right) = \nabla \cdot \underline{q} + \rho h + \underline{\underline{\sigma}} \cdot \nabla \underline{v}. \quad (1.42)$$

Si tenemos en cuenta que $\rho \frac{D\underline{v}}{Dt} - \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} - \rho \underline{b} = 0$ por la ecuación de balance del momento lineal, obtenemos la ecuación de balance de energía:

$$\rho \frac{DE}{Dt} = \nabla \cdot \underline{q} + \rho h + \underline{\underline{\sigma}} \cdot \nabla \underline{v}, \quad \forall \underline{x} \in B(t) \setminus \Sigma(t) \quad (1.43)$$

donde $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \nabla \underline{v} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$

Condiciones de salto:

$$\left[\left[\rho \left(E + \frac{1}{2} \underline{v} \cdot \underline{v} \right) (\underline{v} - \underline{v}_\Sigma) - (\underline{q} + \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{v}) \right] \right] \cdot \underline{n}_\Sigma = 0, \quad \forall \underline{x} \in \Sigma(t) \quad (1.44)$$

1.10. Modelos de fases múltiples

Como introducción a los modelos de sistemas continuos de fases múltiples, comenzaremos con un ejemplo muy sencillo, para después dar un salto a las ecuaciones de los modelos de fases múltiples y varias componentes. Imaginemos un vaso de vidrio transparente con agua de sabor y algunos hielos. Si miramos el contenido dentro del vaso, observaremos que hay dos fases:

Fase 1: La fase líquida (agua de sabor)

Fase 2: La fase sólida (hielos)

Desde este enfoque macroscópico suponemos que en cada punto de la región ocupada por el contenido del vaso en el espacio físico (\mathbb{R}^3), existe sólo un punto material de cada una de las fases y cada una se mueve con su propia velocidad. Ahora, si agitamos circularmente el vaso, observaremos que ambas fases se mueven con distintas velocidades.

El agua de sabor (la fase líquida) tiene dos componentes:

* **Componente 1:** agua pura líquida

* **Componente 2:** saborizante

La fase sólida sólo tiene una componente: **agua pura sólida**

En la teoría de los sistemas continuos, los modelos para procesos como el que se acaba de describir, se conceptualizan como se explica a continuación. Se considera que hay dos fases: la fase líquida y la fase sólida. En cada punto del espacio físico (\mathbb{R}^3) hay un punto material de cada una de las fases y cada una de ellas se mueve con su propia velocidad. Por lo mismo, cada dominio de \mathbb{R}^3 define dos cuerpos, que son los formados por los conjuntos de puntos materiales correspondientes a cada una de las fases. Además, en cada punto tenemos definidas dos velocidades, que en general pueden ser diferentes, por lo que los dos cuerpos que en un tiempo ocupan el mismo dominio de \mathbb{R}^3 , en general en otros tiempos ocupan dominios que no coinciden. En el caso que nos ocupa es posible hacer el balance de masa o de otras propiedades extensivas, pero en ellas debe utilizarse la velocidad asociada con la fase que corresponda.

Las **ecuaciones de balance global** del ejemplo son las siguientes:

$$\frac{d}{dt}E_1^1(t) = \int_{B(t)} g_1^1(\underline{x}, t) d\underline{x} + \int_{\partial B(t)} \underline{\tau}_1^1(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}(\underline{x}, t) d\underline{x} + \int_{\Sigma(t)} g_{\Sigma_1^1}(\underline{x}, t) d\underline{x}$$

$$\frac{d}{dt}E_2^1(t) = \int_{B(t)} g_2^1(\underline{x}, t) d\underline{x} + \int_{\partial B(t)} \underline{\tau}_2^1(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}(\underline{x}, t) d\underline{x} + \int_{\Sigma(t)} g_{\Sigma_2^1}(\underline{x}, t) d\underline{x}$$

$$\frac{d}{dt}E_1^2(t) = \int_{B(t)} g_1^2(\underline{x}, t) d\underline{x} + \int_{\partial B(t)} \underline{\tau}_1^2(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}(\underline{x}, t) d\underline{x} + \int_{\Sigma(t)} g_{\Sigma_1^2}(\underline{x}, t) d\underline{x}$$

Ecuaciones diferenciales de balance local

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi_1^1 + \nabla \cdot (\psi_1^1 \underline{v}^1) = g_1^1 + \nabla \cdot \underline{\tau}_1^1, \quad \forall \underline{x} \in B(t) \setminus \Sigma(t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi_2^1 + \nabla \cdot (\psi_2^1 \underline{v}^1) = g_2^1 + \nabla \cdot \underline{\tau}_2^1, \quad \forall \underline{x} \in B(t) \setminus \Sigma(t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi_1^2 + \nabla \cdot (\psi_1^2 \underline{v}^2) = g_1^2 + \nabla \cdot \underline{\tau}_1^2, \quad \forall \underline{x} \in B(t) \setminus \Sigma(t)$$

Condiciones de salto de balance local

$$\begin{aligned} \llbracket \psi_1^1(\underline{v}^1 - \underline{v}_\Sigma^1) - \underline{\tau}_1^1 \rrbracket \cdot \underline{n}_\Sigma &= g_{\Sigma_1^1}, & \forall \underline{x} \in \Sigma(t) \\ \llbracket \psi_2^1(\underline{v}^1 - \underline{v}_\Sigma^1) - \underline{\tau}_2^1 \rrbracket \cdot \underline{n}_\Sigma &= g_{\Sigma_2^1}, & \forall \underline{x} \in \Sigma(t) \\ \llbracket \psi_1^2(\underline{v}^2 - \underline{v}_\Sigma^2) - \underline{\tau}_1^2 \rrbracket \cdot \underline{n}_\Sigma &= g_{\Sigma_1^2}, & \forall \underline{x} \in \Sigma(t) \end{aligned}$$

A continuación se explica como se construyen los modelos de los procesos, pues más que los sistemas mismos, se modelan sus procesos. Primero, se identifica a un conjunto finito, o familia, de propiedades extensivas, luego a cada una de las propiedades extensivas de esa familia se les impone la condición de satisfacer la ecuación de balance global en cada cuerpo del sistema continuo, lo cual es equivalente a la ecuación diferencial de balance local y a la condición de salto. Esta forma de proceder se aplica no solamente a sistemas continuos de una sola fase, sino también a sistemas de varias fases.

Las fases contienen varios componentes superpuestos que se mueven a la misma velocidad. Si consideramos un sistema con N fases donde cada fase tiene M_α componentes y a cada componente le corresponde una propiedad intensiva ψ_γ^α asociada a la propiedad extensiva E_γ^α , donde α denota el número de la fase ($\alpha = 1, \dots, N$) y γ denota el número de la componente dentro de dicha fase ($\gamma = 1, \dots, M_\alpha$), entonces las ecuaciones de balance global, al igual que las ecuaciones de balance local, se plantean por componentes.

La *propiedad intensiva* asociada a la propiedad extensiva E_γ^α es $\psi_\gamma^\alpha(\underline{x}, t)$:

$$E_\gamma^\alpha(t) = \int_{B(t)} \psi_\gamma^\alpha(\underline{x}, t) d\underline{x} \quad (1.45)$$

Ecuaciones de balance global

$$\frac{d}{dt} E_\gamma^\alpha(t) = \int_{B(t)} g_\gamma^\alpha(\underline{x}, t) d\underline{x} + \int_{\partial B(t)} \underline{\tau}_\gamma^\alpha(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}(\underline{x}, t) d\underline{x} + \int_{\Sigma(t)} g_{\Sigma_\gamma^\alpha}(\underline{x}, t) d\underline{x} \quad (1.46)$$

Ecuaciones diferenciales de balance local

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi_\gamma^\alpha + \nabla \cdot (\psi_\gamma^\alpha \underline{v}^\alpha) = g_\gamma^\alpha + \nabla \cdot \underline{\tau}_\gamma^\alpha, \quad \forall \underline{x} \in B(t) \setminus \Sigma(t) \quad (1.47)$$

Condiciones de salto de balance local

$$\llbracket \psi_\gamma^\alpha(\underline{v}^\alpha - \underline{v}_\Sigma^\alpha) - \underline{\tau}_\gamma^\alpha \rrbracket \cdot \underline{n}_\Sigma = g_{\Sigma_\gamma^\alpha}, \quad \forall \underline{x} \in \Sigma(t) \quad (1.48)$$

Estas son las ecuaciones básicas que gobiernan a una gran diversidad de sistemas continuos. Sin embargo, ellas no constituyen modelos completos, los cuales explicaremos con más detalle a continuación.

1.11. Modelos completos

En general las ecuaciones diferenciales tienen muchas soluciones, por lo que es necesario complementarlas con condiciones iniciales y de frontera. El modelo de un sistema continuo es completo si define un problema bien planteado. Un problema de valores iniciales y de frontera es bien planteado si se cumple que existe una única solución y ésta depende de las condiciones iniciales y de frontera de manera continua.

1.11.1. Condiciones iniciales

Cuando en la ecuación diferencial interviene el tiempo, se incluyen condiciones iniciales que expresan el valor de la función al tiempo inicial $t = 0$.

$$c(\underline{x}, 0) = c_0(\underline{x}) \quad (1.49)$$

1.11.2. Condiciones de frontera

Se imponen en la frontera exterior del dominio

(a) Dirichlet

Especifica los valores que toma la función $c(\underline{x}, t)$ en la frontera $\partial B(t)$

$$c(\underline{x}, t) = f(\underline{x}) \quad (1.50)$$

(b) Neuman

Se prescribe la derivada normal en la frontera, por lo tanto aquí se conoce el valor de la derivada de la función $c(\underline{x}, t)$ con respecto a la normal \underline{n} a lo largo de la frontera $\partial B(t)$

$$\nabla c(\underline{x}, t) \cdot \underline{n} = g(\underline{x}) \quad (1.51)$$

(c) Robin

Esta condición es una combinación lineal de las dos anteriores.

$$a(\underline{x})c(\underline{x}, t) + b(\underline{x})\nabla c(\underline{x}, t) \cdot \underline{n} = \gamma(\underline{x}, t) \quad (1.52)$$

$\gamma(\underline{x}, t)$ es la función prescrita en la frontera exterior.

Para obtener *modelos completos*, además de las condiciones de balance local, ecuación diferencial de balance local y condición de salto de balance local, es necesario evaluar la *generación interna*, determinada por $g(\underline{x}, t)$ y $g_{\Sigma}(\underline{x}, t)$, y el campo de flujo $\underline{\tau}(\underline{x}, t)$, en términos de las funciones conocidas de las propiedades intensivas asociadas. A través de estas ecuaciones constitutivas, se integra el conocimiento científico y tecnológico en los modelos matemáticos, todo depende de la clase de los procesos involucrados. En conclusión, los modelos de los sistemas continuos están constituidos por:

- Una colección de propiedades intensivas y extensivas.
- Un conjunto de condiciones de balance local correspondientes a cada propiedad intensiva, en cada una de las cuales, la velocidad de los puntos materiales es la de la fase correspondiente.
- Condiciones iniciales y de frontera que deben satisfacer las propiedades intensivas.
- Suficientes relaciones que ligan a las propiedades intensivas entre sí y que definen a g , $\underline{\tau}$ y \underline{v} en términos de éstas, conocidas como leyes constitutivas.

Capítulo 2

Modelo de Flujo Monofásico

2.1. Modelo conceptual

1. El flujo del fluido en el medio poroso es monofásico con un componente.
2. Consideraremos un fluido Newtoniano que ocupa el espacio intersticial del medio poroso, bajo condiciones isotérmicas.
3. Se considera la ley de Darcy.
4. El flujo de la masa debido a la dispersión y difusión son tan pequeños con relación al flujo de la masa que se pueden despreciar.
5. La interfase fluido-sólido es una superficie material con respecto a la masa del fluido tal que ninguna masa del fluido puede cruzarla.
6. Hay conservación en la masa del fluido.
7. El medio es isótropo y el sistema de flujo es radial hacia un pozo.

Notación

- ϕ - porosidad en el medio poroso
- ρ - densidad del fluido por unidad de volumen
- \underline{u} - velocidad de Darcy
- \underline{k} - tensor de permeabilidad absoluta del medio poroso
- μ - viscosidad del fluido
- γ - magnitud de la aceleración gravitacional
- z - profundidad
- p - presión
- c_f - Compresibilidad del fluido
- c_R - Compresibilidad de la roca
- c_t - Compresibilidad total
- r_w - Radio del pozo

2.2. Modelo matemático

Los modelos matemáticos de yacimientos petroleros han sido utilizados desde el siglo *XIX* y consisten en un conjunto de ecuaciones que describen el flujo de fluidos en un yacimiento petrolero, junto con un conjunto apropiado de condiciones iniciales y de frontera. El movimiento del fluido está gobernado por las ecuaciones de conservación de masa, momento y energía.

Usando el enfoque sistemático para la modelación de sistemas continuos derivaremos a continuación las ecuaciones que constituyen el modelo matemático de flujo monofásico a través de un medio poroso [1]. El sistema está formado por dos fases; pero el movimiento de la fase sólida está en reposo, trataremos solamente la fase fluida que consta de una sola componente [10].

El modelo del flujo se construye basándose en una **propiedad extensiva**: la masa del fluido M_f y por la hipótesis de que el medio poroso está saturado, la **propiedad intensiva** es el producto de la densidad por la porosidad $\rho(\underline{x}, t)\phi(\underline{x}, t)$, donde ϕ es la porosidad, es decir, la fracción del volumen del espacio físico ocupado por los poros y como el material poroso está saturado, es igual a la fracción de volumen ocupado por el fluido.

$$M_f(t) = \int_{B(t)} \rho(\underline{x}, t)\phi(\underline{x}, t) \, d\underline{x} \quad (2.1)$$

Al considerar que hay conservación en la masa del fluido, entonces no hay una fuente y no existen discontinuidades, por lo tanto, la ecuación de balance global está expresada de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dt}M_f(t) = 0 \quad (2.2)$$

y la ecuación diferencial de balance local esta determinada por:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \nabla \cdot (\rho\phi\underline{v}) = 0, \quad \forall \underline{x} \in B(t) \setminus \Sigma(t) \quad (2.3)$$

La velocidad en el medio poroso o velocidad de Darcy se define como $\underline{u} = \phi\underline{v}$, entonces la ecuación de balance local en un medio poroso se define como:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi\rho) = -\nabla \cdot (\rho\underline{u}), \quad \forall \underline{x} \in B(t) \setminus \Sigma(t) \quad (2.4)$$

Efecto de la elasticidad del sistema fluido-sólido

Podemos expresar el término $\partial\phi\rho/\partial t$ en una forma ampliamente utilizada en la aplicaciones de este tipo [10]. Desarrollando éste término, obtenemos que

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi\rho) = \phi\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\frac{\partial\phi}{\partial t} \quad (2.5)$$

Esta ecuación está integrada por la contribución de la compresibilidad del fluido y por la contribución de la compresibilidad de la roca.

La compresibilidad del fluido c_f se define como [10]:

$$c_f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial\rho}{\partial p} \quad (2.6)$$

La compresibilidad de la roca c_R se define como [8]:

$$c_R = \frac{1}{\phi} \frac{\partial\phi}{\partial p} \quad (2.7)$$

La compresibilidad total c_t se define como [8]:

$$c_t = c_f + c_R = \frac{1}{\rho} \frac{\partial\rho}{\partial p} + \frac{1}{\phi} \frac{\partial\phi}{\partial p} \quad (2.8)$$

La densidad del fluido satisface una ecuación de estado de acuerdo con la cual la densidad del agua es una función de su presión [10]

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{\partial\rho}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2.9)$$

por definición de compresibilidad del fluido (2.6), tenemos que

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = c_f \rho \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2.10)$$

Análogamente, la porosidad de la roca satisface una ecuación de estado de acuerdo con la cual la porosidad de la roca es una función de su presión

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{\partial\phi}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2.11)$$

por definición de compresibilidad de la roca (2.7), tenemos que

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = c_R \phi \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2.12)$$

sustituyendo (2.10) y (2.12) en (2.5), obtenemos que

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} = \phi \rho c_f \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \phi c_R \frac{\partial p}{\partial t} = \phi \rho (c_f + c_R) \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2.13)$$

por definición de compresibilidad total (2.8), obtenemos que

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} = \phi \rho c_t \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2.14)$$

sustituyendo en la ecuación (2.4) obtenemos que

$$\phi \rho c_t \frac{\partial p}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \underline{u}), \quad \forall \underline{x} \in B(t) \setminus \Sigma(t) \quad (2.15)$$

Modelo resultante

Aplicando la ley de Darcy convencional (ver apéndice A), obtenemos la ecuación diferencial básica que describe el flujo de un fluido ligeramente compresible en un medio poroso $B(t) \subseteq \mathbb{R}^n$ con $1 \leq n \leq 3$ [8].

$$\phi \rho c_t \frac{\partial p}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\frac{\rho}{\mu} \underline{k} \cdot (\nabla p - \rho \gamma \nabla z) \right), \quad \forall \underline{x} \in B(t) \setminus \Sigma(t) \quad (2.16)$$

ϕ — es la porosidad del medio.

ρ — es la densidad del fluido.

c_t — es la compresibilidad total $\equiv c_f + c_R$

p — es la presión del fluido.

μ — es la viscosidad del fluido.

\underline{k} — es el tensor de permeabilidad del medio poroso.

γ — es la magnitud de la aceleración gravitacional.

z — es la altura.

Solución semi-analítica

En ésta sección, se obtiene una solución semi-analítica para la ecuación (2.16) que se puede utilizar para compararse con una solución obtenida mediante un método numérico para el flujo de un fluido en medios porosos [8]. Supongamos que $B(t)$ es un medio isótropo, entonces $\underline{K} = k \underline{I}$, donde \underline{I} es el tensor identidad y $k = cte$.

En coordenadas cilíndricas (r, θ, x_3) la ecuación (2.16) esta dada por:

$$\begin{aligned} \phi \rho c_t \frac{\partial p}{\partial t} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{r \rho k}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial r} - \rho \gamma \frac{\partial z}{\partial r} \right) \right] \\ &+ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\rho k}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial \theta} - \rho \gamma \frac{\partial z}{\partial \theta} \right) \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_3} \left[\frac{\rho k}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x_3} - \rho \gamma \frac{\partial z}{\partial x_3} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.17)$$

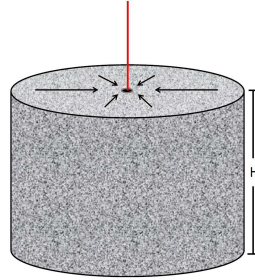


Figura 2.1: Flujo radial unidimensional

Consideremos un yacimiento B con una extensión infinita en dirección horizontal. Supongamos que hay un pozo con una producción aislada (localizada en $(0, 0, x_3)$) en este yacimiento, que todas sus propiedades son simétricas con respecto al eje de éste pozo y que el yacimiento es homogéneo en dirección vertical (ver figura 2.1). Si el efecto de gravedad y el cambio de densidad son ignorados, entonces la ecuación (2.17) se reduce a

$$\phi c_t \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r k}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right) \right) \quad (2.18)$$

Así la presión p es una función de r y t solamente. Es decir, el flujo es unidimensional en la dirección radial. Encontraremos ahora una solución semi-analítica a la ecuación unidimensional (2.18).

Condición inicial:

$$p(r, 0) = p_o \quad \text{con } r \in [0, \infty) \quad \text{y } p_o = \text{cte.} \quad (2.19)$$

Condiciones de frontera:

$$p(r, t) = p_o \quad \text{con } r \rightarrow \infty \quad \text{y } t \geq 0 \quad (2.20)$$

$$r \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{Q\mu}{2\pi kH} \quad \text{con } r \longrightarrow 0 \quad y \quad t > 0 \quad (2.21)$$

donde

r = radio del pozo

Q = tasa fija de producción del pozo

μ = viscosidad del fluido

k = permeabilidad del medio poroso

H = grosor de la reserva

Desarrollando el lado derecho de la ecuación (2.18)

$$\phi c_t \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{k}{\mu} \frac{1}{r} \left(r \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \frac{k}{\mu} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} \right) \quad (2.22)$$

despejando

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{k}{\mu \phi c_t} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} \right) \quad (2.23)$$

Si definimos

$$\chi = \frac{k}{\phi \mu c_t} \quad (2.24)$$

y sustituimos en la ecuación (2.23) obtenemos

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \chi \left(\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} \right) \quad (2.25)$$

haciendo un sencillo despeje

$$\frac{1}{\chi} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (2.26)$$

Buscaremos una solución analítica a esta ecuación unidimensional, introduciendo el siguiente cambio de variable

$$y = \frac{r^2}{4t\chi} \quad \text{con } t > 0 \quad (2.27)$$

entonces:

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{r}{2t\chi} \quad y \quad \frac{\partial y}{\partial t} = -\frac{r^2}{4t^2\chi} \quad (2.28)$$

de esta manera, al derivar p con respecto a r

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{dp}{dy} \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{dp}{dy} \frac{r}{2t\chi} \quad (2.29)$$

derivando nuevamente p con respecto a r

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{dp}{dy} \frac{r}{2t\chi} \right) \\
&= \frac{dp}{dy} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r}{2t\chi} \right) + \frac{r}{2t\chi} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{dp}{dy} \right) \\
&= \frac{dp}{dy} \left(\frac{1}{2t\chi} \right) + \frac{r}{2t\chi} \frac{d}{dy} \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right) \\
&= \frac{1}{2t\chi} \frac{dp}{dy} + \frac{r}{2t\chi} \frac{d}{dy} \left(\frac{dp}{dy} \frac{\partial y}{\partial r} \right) \\
&= \frac{1}{2t\chi} \frac{dp}{dy} + \frac{r}{2t\chi} \frac{d^2 p}{dy^2} \left(\frac{r}{2t\chi} \right) \\
&= \frac{d^2 p}{dy^2} \left(\frac{r}{2t\chi} \right)^2 + \frac{dp}{dy} \frac{1}{2t\chi}
\end{aligned} \tag{2.30}$$

ahora derivando p con respecto a t

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{dp}{dy} \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{dp}{dy} \left(\frac{-r^2}{4t^2\chi} \right) = -\frac{dp}{dy} \frac{r^2}{4t^2\chi} \tag{2.31}$$

Sustituyendo (2.29), (2.30) y (2.31) en (2.26)

$$\frac{1}{\chi} \left(-\frac{r^2}{4t^2\chi} \frac{dp}{dy} \right) = \left(\frac{1}{2t\chi} \frac{dp}{dy} + \left(\frac{r}{2t\chi} \right)^2 \frac{d^2 p}{dy^2} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{r}{2t\chi} \frac{dp}{dy} \right) \tag{2.32}$$

despejando

$$\left(\frac{1}{2t\chi} \frac{dp}{dy} + \left(\frac{r^2}{4t^2\chi^2} \right) \frac{d^2 p}{dy^2} \right) + \frac{1}{2t\chi} \frac{dp}{dy} + \frac{r^2}{4t^2\chi^2} \frac{dp}{dy} = 0 \tag{2.33}$$

reagrupando términos

$$\frac{r^2}{4t^2\chi^2} \frac{d^2 p}{dy^2} + \left(\frac{1}{t\chi} + \frac{r^2}{4t^2\chi^2} \right) \frac{dp}{dy} = 0 \tag{2.34}$$

multiplicando por $t\chi$ de ambos lados

$$\frac{r^2}{4t\chi} \frac{d^2 p}{dy^2} + \left(1 + \frac{r^2}{4t\chi} \right) \frac{dp}{dy} = 0 \tag{2.35}$$

y por definición de y en (2.27), obtenemos la siguiente ecuación diferencial

$$y \frac{d^2 p}{dy^2} + (1 + y) \frac{dp}{dy} = 0 \tag{2.36}$$

Para resolver esta ecuación diferencial, definimos

$$w(y) = \frac{dp}{dy} \quad (2.37)$$

sustituyendo en (2.36)

$$y \frac{dw(y)}{dy} + (1+y)w(y) = 0 \quad (2.38)$$

entonces

$$\frac{dw(y)}{dy} = -\frac{(y+1)w(y)}{y} \quad (2.39)$$

haciendo un sencillo despeje

$$\frac{1}{w(y)} \frac{dw(y)}{dy} = -\frac{y+1}{y} \quad (2.40)$$

integrando de ambos lados

$$\int \frac{w'(y)}{w(y)} dy = -\int \frac{y+1}{y} dy \quad (2.41)$$

Solución de la integral izquierda en (2.41)

$$\text{Sea } u = w(y) \implies du = w'(y)dy$$

sustituyendo

$$\int \frac{w'(y)}{w} dy = \int \frac{1}{u} du = \log(u) + C = \log(w(y)) + C \quad (2.42)$$

Solución de la integral derecha en (2.41)

$$\text{Sea } s = y+1 \implies ds = dy$$

sustituyendo

$$\begin{aligned} \int \frac{y+1}{y} dy &= \int \frac{y+1}{(y+1)-1} = \int \frac{s}{s-1} ds = \int \left(\frac{1}{s-1} + 1 \right) ds \\ &= \int \left(\frac{1}{s-1} \right) ds + \int ds = \log(s-1) + s + c_1 \\ &= \log((y+1)-1) + (y+1) + c_1 = \log(y) + y - c \end{aligned} \quad (2.43)$$

Sustituyendo (2.42) y (2.43) en (2.41)

$$\log(w(y)) = -y - \log(y) + c \quad (2.44)$$

Despejando $w(y)$ con ayuda de la función exponencial

$$w(y) = \frac{c}{y} e^{-y} \quad \text{con } c = \text{cte.} \quad (2.45)$$

por definición de $w(y)$ en (2.37) y aplicando la condición de frontera

$$\frac{dp}{dy} = \frac{c}{y} e^{-y} = \frac{Q\mu}{4\pi kH} \frac{e^{-y}}{y} \quad (2.46)$$

Notemos que

$$\text{Si } y = \infty \quad y \quad t = 0 \quad \implies \quad p = p_o \quad (2.47)$$

$$\text{Si } y = \frac{r^2}{4t\chi} \quad y \quad t > 0 \quad \implies \quad p = p(r, t) \quad (2.48)$$

Integrando la ecuación (2.46) desde 0 a cualquier t

$$p(r, t) = p_o - \frac{Q\mu}{4\pi kH} \int_{\frac{r^2}{4t\chi}}^{\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy \quad (2.49)$$

Por definición de la función integral exponencial

$$\int_{\frac{r^2}{4t\chi}}^{\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy = -E_i \left(-\frac{r^2}{4t\chi} \right) = E_i(-y) \quad (2.50)$$

Por consiguiente, se deduce de (2.49) que la presión para cualquier r es:

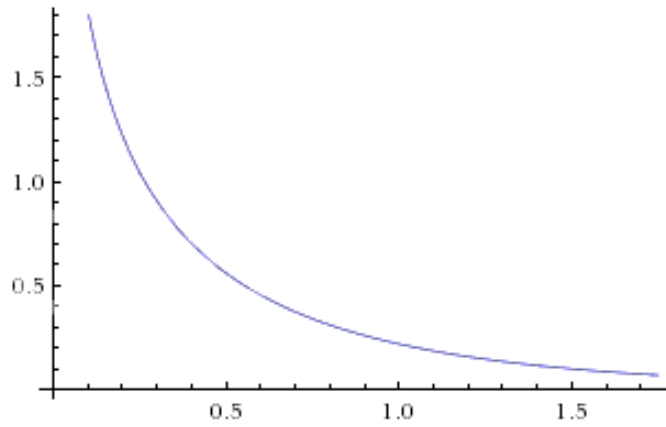
$$p(r, t) = p_o + \frac{Q\mu}{4\pi kH} E_i \left(-\frac{r^2}{4t\chi} \right) \quad \text{con } t > 0 \quad (2.51)$$

La gráfica de $-E_i(-y)$ en términos de y (Figura 2.2), demuestra que conforme y aumenta (r incrementa o t disminuye), $-E_i(-y)$ disminuye, por lo que $p(r, t)$ incrementa y $p_o - p$ disminuye. La función integral exponencial $E_i(-y)$, puede ser expandida en la serie

$$E_i(-y) = \gamma + \ln(y) - y + \frac{1}{2 \cdot 2!} y^2 - \frac{1}{3 \cdot 3!} y^3 + \dots \quad (2.52)$$

donde γ es la constante de Euler y esta definida como

$$\gamma = - \int_0^{\infty} e^{-y} \ln(y) dy \approx 0.5772 \quad (2.53)$$

Figura 2.2: Gráfica de $-Ei(-y)$

Si $0 < y < 0.1$ entonces $Ei(-y) \approx \ln(y) + \gamma$. Dado que $r = r_w$ es pequeño, entonces en pocos segundos

$$y = \frac{r^2}{4t\chi} < 0.01 \quad (2.54)$$

así que una buena aproximación de la función integral exponencial es:

$$Ei\left(-\frac{r^2}{4t\chi}\right) \approx -\ln\left(\frac{4t\chi}{r^2}\right) + 0.5772 = -\ln\left(\frac{2.25t\chi}{r^2}\right) \quad (2.55)$$

con un error de aproximación menor a 0.25 por ciento.

Por lo tanto la solución semi-analítica es:

$$p(r, t) \approx p_0 - \frac{Q\mu}{4\pi kH} \ln\left(\frac{2.25t\chi}{r^2}\right) \quad (2.56)$$

Para observar la forma que toma la solución semi-analítica, consideraremos un yacimiento cuyos parámetros se encuentran en el cuadro (2.1):

símbolo	Descripción	Valor	Unidad
p_o	Presión inicial	3600	psi
μ	Viscosidad del petróleo	1.06	cP
k	Permeabilidad	0.3	$darcy$
H	Grosor del yacimiento	100	ft
r_w	Radio del pozo	0.1875	ft
c_f	Compresibilidad del petróleo	0.00001	$1/psi$
c_R	Compresibilidad de la roca	0.000004	$1/psi$
c_t	Compresibilidad total	0.000014	$1/psi$
ϕ	Porosidad	0.2	Constante
Q_o	Tasa de producción de petróleo	300	STB/D
p_b	Presión en el punto de burbujeo	2000	psi
B_{ob}	Factor de volumen de la formación de petróleo en p_b	1.063	Constante

Cuadro 2.1: Parámetros para un yacimiento

Con el cuadro (2.2), podemos hacer las conversiones de unidades al sistema cgs y al final expresar la solución semi-analítica en psi .

Unidad	Nombre	Conversión
psi	Pounds per Square Inch	$1psi = 68947.5729 \left(\frac{g}{cm \cdot s^2}\right)$
P	Poise	$1 P = 1 \left(\frac{g}{cm \cdot s}\right)$
cP	centiPoise	$1 cP = 0.01 \left(\frac{g}{cm \cdot s}\right)$
d	darcy	$1 darcy = 9.86923 \times 10^{-9} cm^2$
ft	feet (pie)	$1 ft = 30.48 cm$
STB/D	Stock Tank Barrels / Day	$1 STB/D = \frac{0.1589873 \times 10^6}{86400} \left(\frac{cm^3}{s}\right)$

Cuadro 2.2: Conversión de unidades al sistema cgs

$$p_0 = 3600 \text{ psi}$$

$$\mu = 1.06 \text{ cp} = (1.06) \left(0.01 \frac{g}{cm \cdot s} \right) = 106 \times 10^{-4} \frac{g}{cm \cdot s}$$

$$k = 0.3 \text{ darcy} = (0.3)(9.86923 \times 10^{-9} \text{ cm}^2) = 2.960769 \times 10^{-9} \text{ cm}^2$$

$$H = 100 \text{ ft} = (100)(30.48 \text{ cm}) = 3048 \text{ cm}$$

$$r_w = 0.1875 \text{ ft} = (0.1875)(30.48 \text{ cm}) = 5.715 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} c_f &= 1 \times 10^{-5} \frac{1}{\text{psi}} = (1 \times 10^{-5}) \left(145 \times 10^{-7} \frac{\text{cm} \cdot \text{s}^2}{g} \right) \\ &= 145 \times 10^{-12} \frac{\text{cm} \cdot \text{s}^2}{g} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_R &= 4 \times 10^{-6} \frac{1}{\text{psi}} = (4 \times 10^{-6}) \left(145 \times 10^{-7} \frac{\text{cm} \cdot \text{s}^2}{g} \right) \\ &= 58 \times 10^{-12} \frac{\text{cm} \cdot \text{s}^2}{g} \end{aligned}$$

$$c_t = c_f + c_R = 203 \times 10^{-12} \frac{\text{cm} \cdot \text{s}^2}{g}$$

$$\phi = 0.2$$

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{k}{\phi \mu c_t} = \frac{0.3 \times 10^{-8} \text{ cm}^2}{(0.2)(106 \times 10^{-4} \frac{g}{\text{cm} \cdot \text{s}})(203 \times 10^{-12} \frac{\text{cm} \cdot \text{s}^2}{g})} \\ &= 6970.908077 \frac{\text{cm}^2}{s} \end{aligned}$$

$$Q_0 = 300 \frac{STB}{D} = (300) \left(\frac{0.1589873 \times 10^6 \text{ cm}^3}{86400 \text{ s}} \right) = 552.0392 \frac{\text{cm}^3}{s}$$

$$B_{ob} = 1.063$$

$$p_b = 2000 \text{ psi}$$

$$\begin{aligned} B_0 &= B_{ob}(1 - c_f(p_0 - p_b)) \\ &= (1.063) \left(1 - 1 \times 10^{-5} \frac{1}{\text{psi}} (3600 \text{ psi} - 2000 \text{ psi}) \right) \\ &= 1.045992 \end{aligned}$$

$$Q = B_0 Q_0 = (1.045992) \left(552.0392 \frac{\text{cm}^3}{\text{s}} \right) = 577.4286 \frac{\text{cm}^3}{\text{s}}$$

$$1 \text{ psi} = 68947.5729 \frac{\text{g}}{\text{cm} \cdot \text{s}^2} \implies 1 \frac{\text{g}}{\text{cm} \cdot \text{s}^2} = \frac{1}{68947.5729} \text{ psi}$$

$$\begin{aligned} \frac{Q\mu}{4\pi kH} &= \frac{(577.4286 \frac{\text{cm}^3}{\text{s}})(106 \times 10^{-4} \frac{\text{g}}{\text{cm} \cdot \text{s}})}{4\pi(2.960769 \times 10^{-9} \text{ cm}^2)(3048 \text{ cm})} = 53266.8554 \frac{\text{g}}{\text{cm} \cdot \text{s}^2} \\ &= (53266.8554) \left(\frac{1}{68947.5729} \text{ psi} \right) = 0.77257 \text{ psi} \end{aligned}$$

Por otro lado, como el tiempo lo estamos midiendo en segundos, entonces

$$\text{Ln} \left(\frac{2.25t\chi}{r^2} \right) = \text{Ln} \left(\frac{(2.25)(t \text{ s})(6970.908077 \frac{\text{cm}^2}{\text{s}})}{(5.715)^2 \text{ cm}^2} \right) \approx \text{Ln}(480.2191 t)$$

así que

$$\frac{Q\mu}{4\pi kH} \text{Ln} \left(\frac{2.25t\chi}{r^2} \right) = (0.77257) \text{Ln}(480.2191 t) \text{ psi}$$

y como $p_0 = 3600 \text{ psi}$ entonces expresando la presión (en unidades psi) obtenida en la solución semi-analítica (ecuación 2.56) tenemos que

$$p(r, t) \approx 3600 \text{ psi} - (0.77257) \text{Ln}(480.2191 t) \text{ psi} \quad (2.57)$$

tiempo [días]	p [psi]	tiempo [días]	p [psi]	tiempo [días]	p [psi]
0.1	3588.08	1.5	3585.96	2.8	3585.47
0.2	3587.54	1.6	3585.91	2.9	3585.45
0.3	3587.22	1.7	3585.86	3.0	3585.42
0.4	3587.00	1.8	3585.82	3.1	3585.39
0.5	3586.82	1.9	3585.78	3.2	3585.37
0.6	3586.68	2.0	3585.74	3.3	3585.34
0.7	3586.56	2.1	3585.70	3.4	3585.32
0.8	3586.45	2.2	3585.66	3.5	3585.30
0.9	3586.36	2.3	3585.63	3.6	3585.28
1.0	3586.28	2.4	3585.59	3.7	3585.25
1.1	3586.20	2.5	3585.56	3.8	3585.23
1.2	3586.14	2.6	3585.53	3.9	3585.21
1.3	3586.07	2.7	3585.50	4.0	3585.19

Cuadro 2.3: Valores de la presión obtenidos con la solución semi-analítica para distintos tiempos.

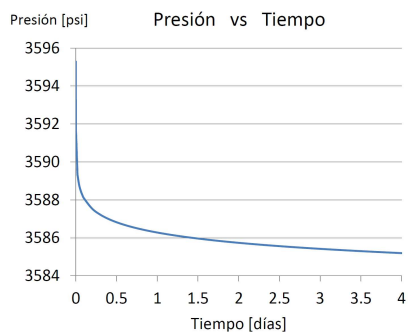


Figura 2.3: Evolución de la presión en el pozo al transcurrir el tiempo durante 4 días.

2.3. Modelo numérico

La etapa de la *modelación numérica* consiste en hacer una aproximación numérica a partir del modelo matemático desarrollado, la cual pueda ser implementada en un programa de cómputo. Los modelos numéricos son versiones discretas de los modelos matemáticos, cuyas soluciones son aproximadas hasta cierto nivel de error pero a su vez deben ser consistentes con la solución del modelo matemático. La modelación numérica de las ecuaciones de flujo monofásico fue realizada mediante la formulación estándar del método de elementos finitos y su implementación fue realizada en el modo de PDE en la forma de coeficientes para el análisis dependiente del tiempo en COMSOL Multiphysics.

El método de elementos finitos provee una manera sistemática y simple de generar funciones base en un dominio con geometría poligonal [6], lo cual permite obtener una solución numérica aproximada sobre un cuerpo, estructura o dominio (medio continuo, sobre el que están definidas las ecuaciones diferenciales que caracterizan el problema físico del problema), dividiéndolo en subdominios no intersectantes entre sí, denominados *elementos finitos*.

El conjunto de elementos finitos forma una partición del dominio también denominada discretización. Dentro de cada elemento se distinguen una serie de puntos representativos llamados *nodos*. Dos nodos son adyacentes si pertenecen al mismo elemento finito; un nodo puede pertenecer a varios elementos. El conjunto de nodos considerando sus relaciones de adyacencia se llama *malla*. De acuerdo con estas relaciones de adyacencia o conectividad se relaciona el valor de un conjunto de variables incógnitas definidas en cada nodo y denominadas *grados de libertad*.

El conjunto de relaciones entre el valor de una determinada variable entre los nodos se puede escribir en forma de sistema de ecuaciones lineales (o linealizadas). El número de ecuaciones de dicho sistema es proporcional al número de nodos. La solución obtenida por el método de elementos finitos es sólo aproximada en un número finito de puntos llamados nodos, mientras que en los puntos que no son nodos, la solución se obtiene interpolando a partir de los resultados obtenidos para los nodos.

En el capítulo donde se derivan los modelos de flujo anómalo, se aplicó el mismo método numérico al usado en la presente sección.

2.4. Modelo computacional

Describiremos los aspectos de la implementación computacional del modelo de flujo en COMSOL Multiphysics (2008) cuya plataforma numérica se basa en el método de elementos finitos para la solución de problemas de ecuaciones diferenciales parciales con condiciones iniciales y de frontera.

2.4.1. Geometría

El dominio del modelo computacional es un círculo de radio= 1234.44[m].

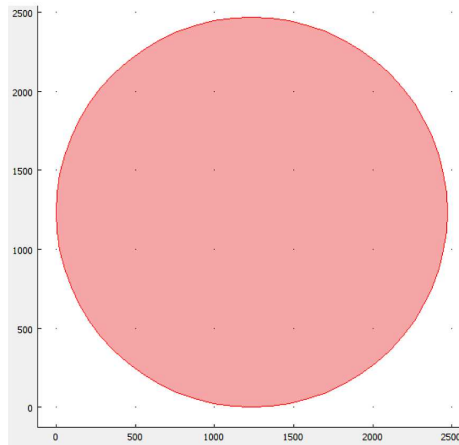


Figura 2.4: Dominio de definición del modelo computacional

2.4.2. Mallado

Como el método numérico en el que está basado el software es el método de elemento finito, entonces, para resolver el problema planteado, se genera una malla formada por triángulos (figura 2.5), la cual se adapta a la fuente que está en el centro. Observamos que es una malla casi uniforme.

2.4.3. Fronteras

En la figura (2.6) se muestran las fronteras de nuestro dominio y la indexación convenida por COMSOL en automático.

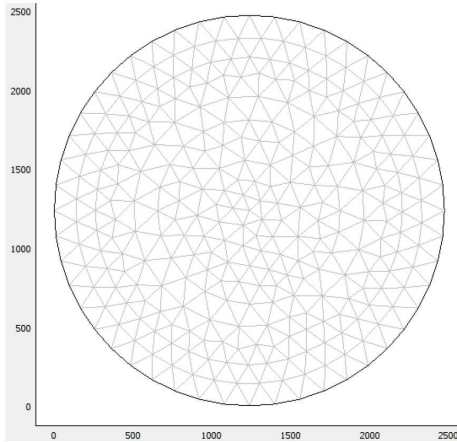


Figura 2.5: Mallado del dominio de definición, con 4,021 grados de libertad y 1,954 elementos triangulares del tipo Lagrange cuadráticos.

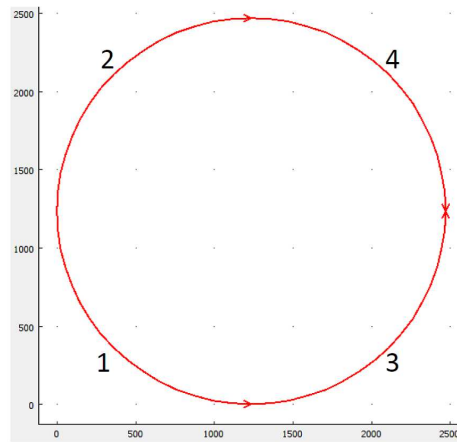


Figura 2.6: Fronteras con su indexación, del dominio computacional.

En el capítulo donde se derivan los modelos de flujo anómalo, se aplicó el mismo modelo computacional al usado en la presente sección.

2.5. Implementación en COMSOL

La implementación fué realizada en el modo de PDE en la forma de coeficientes para el análisis dependiente del tiempo en COMSOL Multiphysics.

Considerando que el efecto de gravedad y el cambio de densidad son ignorados, entonces la ecuación diferencial (2.16) del modelo matemático de flujo monofásico a través de un medio poroso, se puede reescribir para una región en dos dimensiones de la siguiente manera:

$$\phi c_t \frac{\partial p}{\partial t} - \nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu} \underline{k} \cdot \nabla p \right) = 0 \quad (2.58)$$

Donde en notación de COMSOL (PDE, Coefficient Form):

$$e_a \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + d_a \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nabla \cdot (c \nabla \mathbf{u} + \alpha \mathbf{u} - \gamma) + \beta \cdot \nabla \mathbf{u} + a \mathbf{u} = f \quad (2.59)$$

$\mathbf{u} \equiv p$, $d_a \equiv \phi c_t$ y $c \equiv \frac{1}{\mu} \underline{k}$, mientras que $\alpha = \gamma = \beta = a = e_a = f \equiv 0$, que es como se expresó en la ecuación (2.58).

El tensor de permeabilidad se puede escribir para el caso simétrico como:

$$\underline{k} = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 \\ 0 & k_{22} \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

Condición inicial

$$p(t_0) = p_0 \quad (2.61)$$

Condiciones de frontera

En las cuatro fronteras de no flujo (1-4) (ver figura 2.6) se han implementado condiciones de frontera de tipo Neumann como a continuación:

$$\underline{n} \cdot \nabla p = 0 \quad (2.62)$$

COMSOL tiene una forma generalizada para las condiciones de frontera de tipo Neumann, que se expresa de la siguiente manera:

$$n \cdot (\nabla p + ap - \gamma) + qp = g \quad (2.63)$$

donde $a = q = g = 0$ es como se expresaron en la ecuación (2.62).

Solución numérica

La solución numérica sobre el dominio definido en la malla se puede observar en la figura 2.7.

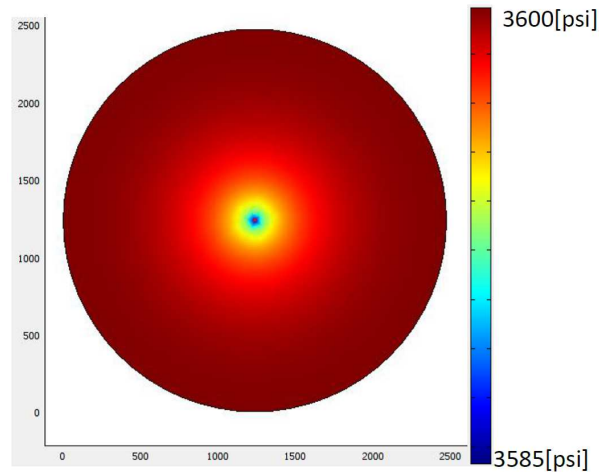


Figura 2.7: Solución numérica en la malla del modelo de flujo convencional

En la figura (2.8) se muestra la gráfica de la evolución de la presión en el pozo que se encuentra en el centro del dominio, durante un periodo de cuatro días. La forma de la curva en la figura (2.8) se debe a que al estar produciendo, la presión disminuye conforme transcurre el tiempo, comenzando desde la presión inicial, cuando el yacimiento se encontraba en reposo, es decir, en 3,600 [psi], hasta el día cuatro cuando se produjo a una tasa fija. Al igual que en la solución semi-analítica, podemos observar que la presión en el pozo decae rápidamente en los primeros instantes de tiempo y después disminuye más lentamente.

En la figura (2.9) se muestra la gráfica de la presión vs. distancia al pozo para distintos tiempos, donde podemos ver que cuando el pozo está en reposo, la presión es la misma en cualquier dirección y longitud cerca o lejos del pozo, pero en cuanto comienza a producir, obtenemos curvas que registran diariamente cómo era la presión en el yacimiento. Claramente observamos que la presión en cada punto es diferente conforme pasan los días cuando se está produciendo en dicho pozo. La presión disminuye conforme transcurren los días cerca del pozo, pero tiende a converger a la presión inicial, conforme uno se va alejando del pozo, aunque pasen los días y el pozo continúe produciendo.

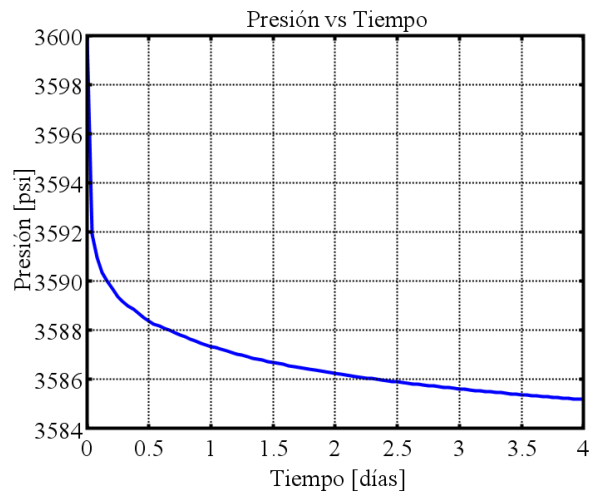


Figura 2.8: Evolución de la presión en el pozo durante 4 días.

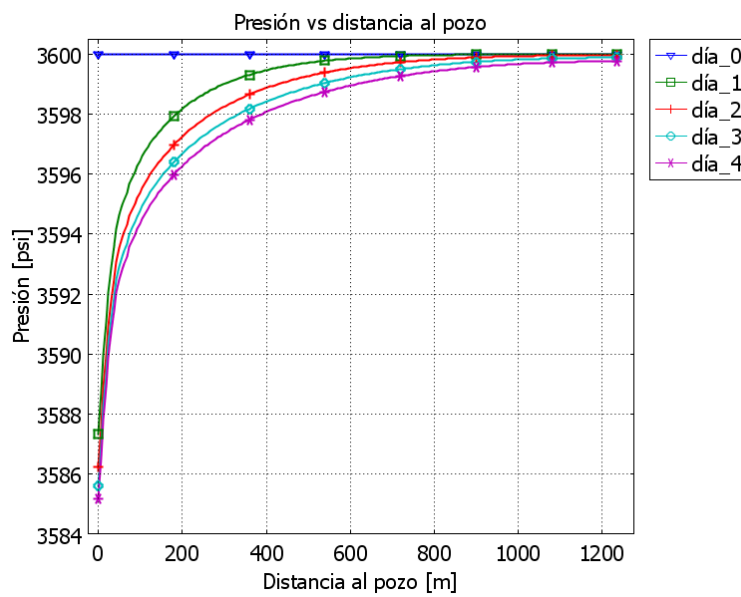


Figura 2.9: Gráfica de la presión vs. distancia al pozo para distintos tiempos

Capítulo 3

Revisión de Modelos de Flujo Anómalo

3.1. Modelo de Barker

El modelo propuesto por Barker [3] se define como sigue:

3.1.1. Supuestos

1. El flujo es radial y n -dimensional de una sola fuente en un medio fracturado isótropo y homogéneo, caracterizado por una conductividad hidráulica k_f y almacenamiento S_{Sf} .
2. La ley de Darcy se aplica a través de todo el sistema.
3. La fuente es una esfera n -dimensional (proyectado a través de un espacio tridimensional, por ejemplo, un cilindro finito en dos dimensiones) de radio r_w y capacidad de almacenamiento S_w .
4. La fuente tiene una cubierta infinitesimal caracterizada por un factor de cubierta S_f : la pérdida de presión cruzando la superficie de la fuente es proporcional a S_f y la velocidad de flujo a través de la superficie.
5. Cualquier piezómetro en el sistema de fracturas tiene un tamaño y capacidad de almacenamiento insignificante.

Notación

- k_f - conductividad hidráulica en el sistema de fracturas.
- S_{Sf} - almacenamiento específico del sistema de fracturas.
- r - distancia radial desde el centro de la fuente.
- n - dimensión del flujo del sistema de fracturas.
- α_n - área de una esfera unitaria en n -dimensiones.
- p - presión en el sistema de fracturas.
- V - volumen de agua en el sistema de fracturas.
- q - velocidad de flujo de agua.
- b - extensión de la región de flujo.

3.1.2. Descripción de la derivación

Barker [3] consideró una prueba típica hidráulica en roca fracturada, donde el agua se inyecta dentro de un intervalo en un pozo que contiene al menos una fractura y afirmó que el problema que naturalmente surge cuando se analizan los datos de una prueba es el de elegir una geometría apropiada para el sistema de fracturas en la que se produce el flujo, dado que si la densidad de fractura es grande y la distribución tiene isotropía, entonces una geometría de tres dimensiones puede ser apropiada; pero si la densidad de fractura es baja o el sistema es muy anisótropo, entonces un modelo de flujo de una o dos dimensiones probablemente será el adecuado.

Cuando surgió el problema de elegir una dimensión, se hicieron varios intentos para utilizar modelos de una, dos y tres dimensiones, pero ninguno de los modelos fué claramente superior, o dio una representación satisfactoria del conjunto de datos entero. Después de considerar posibles variaciones en los modelos se decidió generalizar la dimensión del flujo a valores no enteros, manteniendo los mismos supuestos de flujo radial y homogeneidad [3].

Los problemas asociados con el modelo, fueron discutidos y relacionados con problemas prácticos de aplicación a los datos de campo, éstas dificultades dejaron ver la necesidad de desarrollar un modelo que representara el flujo en las dimensiones no enteras y se generalizaran los resultados conocidos en una, dos y tres dimensiones.

Ecuaciones

Consideremos una región acotada por dos superficies de radio r y $r + \Delta r$. Estas superficies son proyecciones de esferas n -dimensionales a través del espacio tridimensional en una cantidad de b^{3-n} .

Por ejemplo, cuando $n = 2$, las superficies son cilindros de longitud b .

Una esfera de radio r tiene un área $\alpha_n r^{n-1}$ donde α_n es el área de una esfera unitaria en n -dimensiones, es decir:

$$\alpha_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \quad (3.1)$$

donde:

$\Gamma(x)$ - es la función Gamma.

La región entre las cáscaras tienen un volumen

$$b^{3-n}\alpha_n r^{n-1}\Delta r \quad (3.2)$$

donde Δr es pequeño.

Supongamos que durante un periodo pequeño Δt , la presión en ésta cáscara cambia por Δp . Así que el volumen V del agua entrando en el depósito es

$$\Delta V = S_{S_f} b^{3-n}\alpha_n r^{n-1}\Delta r\Delta p \quad (3.3)$$

que se desprende de la definición de almacenamiento específico.

De la ley de Darcy, la velocidad de flujo hacia el interior de la cáscara es:

$$q = K_f b^{3-n}\alpha_n \left[(r + \Delta r)^{n-1} \frac{\partial}{\partial r} p(r + \Delta r, t) - r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r} p(r, t) \right] \quad (3.4)$$

donde

q - es la velocidad de flujo de agua.

K_f - es la conductividad hidráulica del sistema de fracturas.

$p(r, t)$ - es la presión.

α_n - es el área de la esfera unitaria en n -dimensiones

n - es la dimensión de flujo del sistema de fracturas.

La ecuación de conservación para el agua en la cáscara toma la forma simple

$$\Delta V = q\Delta t \quad (3.5)$$

Sustituyendo ΔV y q de (3.3) y (3.4) respectivamente en (3.5) obtenemos

$$S_{S_f} b^{3-n}\alpha_n r^{n-1}\Delta r\Delta p = \Delta t K_f b^{3-n}\alpha_n \left[(r + \Delta r)^{n-1} \frac{\partial}{\partial r} p(r + \Delta r, t) - r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r} p(r, t) \right] \quad (3.6)$$

despejando algunos términos y eliminando otros, obtenemos

$$S_{sf} \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{K}{r^{n-1}} \frac{(r + \Delta r)^{n-1} \frac{\partial}{\partial r} p(r + \Delta r, t) - r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r} p(r, t)}{\Delta r} \quad (3.7)$$

Finalmente tomando los límites en (3.7), obtenemos la ecuación de Barker

$$S_{sf} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{K_f}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{n-1} \frac{\partial p}{\partial r} \right) \quad (3.8)$$

3.1.3. Modelo resultante

Barker lo llamó modelo de flujo radial generalizado.

$$S_{sf} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{K_f}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{n-1} \frac{\partial p}{\partial r} \right) \quad (3.9)$$

donde:

S_{sf} = Almacenamiento específico en el sistema de fracturas.

$p(r, t)$ = presión en el sistema de fracturas.

K_f = conductividad hidráulica en el sistema de fracturas.

r = distancia radial desde el centro de la fuente.

n = dimensión del sistema de flujo fracturado.

3.1.4. Interpretación del modelo

Este modelo es una generalización de los modelos comunmente usados en la época de Barker, para el análisis de datos de pruebas hidráulicas con respecto a la dimensión de la corriente, pues considera a la dimensión como un parámetro no necesariamente entero y que puede ser determinado empíricamente. El modelo fue presentado como un modelo de medios fracturados, de los que es más probable encontrar una aplicación debido al problema de la elección de la dimensión de flujo apropiada.

3.2. Modelo de Chang y Yortsos

El modelo propuesto por Chang y Yortsos [7] se define como sigue:

3.2.1. Supuestos

1. Hay dos medios (matriz / red de fracturas) con diferente permeabilidad y porosidad.
2. La matriz es un objeto Euclidiano (es decir, de dimensión $D = 2$ para una reserva de simetría cilíndrica) en el que la red de fracturas está incorporada. La red de fracturas es también Euclidiana con dimensión $D = 2$ en el caso de porosidad dual o $D = 1$ en el caso de una fractura.
3. La matriz no esta interconectada, por lo tanto el flujo de fluido hacia y desde los pozos se produce sólo a través de la red de fracturas perfectamente conectado.

Notación

- V_s - Volumen promedio de los poros
- $n(r)$ - número de poros
- c_f - Compresibilidad del fluido
- p - presión
- ρ - densidad
- a - porosidad de la fractura
- r - radio
- G - Geometría del pozo
- ϕ - porosidad
- u - velocidad de Darcy
- Q_r - velocidad de flujo volumétrico
- μ - viscosidad
- m - permeabilidad

- θ - exponente espectral de la red fractal
- D - Dimensión de masa fractal
- t - tiempo
- S_{Sf} - almacenamiento del Sistema de fracturas
- $\frac{\partial^\gamma}{\partial t^\gamma}$ - derivada fraccional de orden γ

3.2.2. Descripción de la derivación

Supongamos que el almacenamiento del flujo en el fractal ocurre en sitios de volumen V_s (suponiendo lo mismo para cada sitio) y densidad $n(r)$, tal que $n(r)dr$ es el número de sitios en la cáscara Euclidiana encerrada entre r y $r + dr$. Denotemos la velocidad de flujo cruzando la cáscara como Q_r . Chang y Yortsos [7] propusieron la siguiente ecuación diferencial de balance de masa para un fluido ligeramente compresible.

$$V_s n(r) c_f \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} Q_r = 0 \quad (3.10)$$

Como el objeto es fractal y los sitios son de volumen constante, n expresa la masa fractal; entonces debe estar relacionado a la dimensión de masa fractal D

$$n_r = ar^{D-1} \quad (3.11)$$

Notemos que en el límite Euclidiano ($D = d$), el parámetro a está directamente relacionado a la porosidad de la fractura. Si G describe la simetría apropiada, por ejemplo una simetría rectilinear o una cilíndrica o una esférica, entonces

$$G\phi = aV_s \quad (3.12)$$

Inversamente si definimos a la porosidad de la fractura en este contexto, obtendremos en la cáscara ($r, r + dr$)

$$\phi_f = \frac{Vol(poros)}{Vol(masa)} = \frac{V_s ar^{D-1} \Delta r}{Gr d - 1 \Delta r} \quad (3.13)$$

entonces

$$\phi_f = \frac{aV_s r^{D-d}}{G} \quad (3.14)$$

NOTA: ϕ_f no es constante para una red de fractura fractal. Por otro lado, si consideramos la velocidad de flujo u , donde

$$Q_r = Gr^{D-1}u \quad (3.15)$$

Chang y Yortsos [7] proponen la siguiente forma lineal de la ley de Darcy, la cual, afirman que bajo condiciones de flujo lento, no debería estar afectado por esta geometría.

$$u = -\frac{k_f(r)}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (3.16)$$

En contraste a un objeto Euclidiano, la permeabilidad convencional para el flujo del fluido en el fractal no es constante, ni es una propiedad local del medio.

$$k_f(r) = \frac{aV_s}{G} m r^{-\theta} \quad (3.17)$$

donde m es una propiedad estructural local de la red fractal similar a la permeabilidad convencional y expresa la conectividad y la conductancia del flujo.

Por otro lado, θ está relacionado al exponente espectral de la red fractal, y en principio, esta definida desde la estructura del objeto. En general, la relación entre θ y D en un objeto multifractal es desconocido, aunque varias conjeturas han sido propuestas para fractales derivados en percolación. Lo anterior es para reducir las nociones familiares en el caso de las geometrías euclidianas $D = d$ y $\theta = 0$, donde m se convierte en

$$m = \frac{k_f}{\phi_f} \quad (3.18)$$

Insertando la ecuación (3.17) dentro de las ecuaciones (3.16) y (3.15)

$$Q_r = -\frac{G r^{D-1} k_f(r)}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (3.19)$$

Ahora, combinando esta ecuación con las ecuaciones (3.10) y (3.11), podemos obtener la ecuación que describe el flujo de un fluido ligeramente compresible en una red fractal en términos de D , θ y m .

$$c_f \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{m}{\mu} \frac{1}{r^{D-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^\beta \frac{\partial p}{\partial r} \right) \quad (3.20)$$

donde $\beta = D - \theta - 1$

3.2.3. Modelo resultante

$$c_f \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{m}{\mu} \frac{1}{r^{D-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^\beta \frac{\partial p}{\partial r} \right) \quad (3.21)$$

donde:

C_f – compresibilidad del fluido

$p(r, t)$ – presión

m – permeabilidad

μ – viscosidad

r – radio

$\beta = D - \theta - 1$

D – Dimensión de masa fractal

θ – exponente espectral de la red fractal

3.2.4. Interpretación del modelo

Este modelo es una generalización no local para cualquier D de la ecuación de difusión tradicional, usada rutinariamente para pruebas de pozos y también abarca los casos con geometría Euclidiana ($D = 1, 2, 3$ y $\theta = 0$).

3.3. Modelo de Metzler

El modelo propuesto por Metzler [17] se define como sigue:

3.3.1. Supuestos

1. El proceso de difusión anómala está representado por el desplazamiento de una caminata aleatoria $\langle r^2(t) \rangle \approx t^{2/d_w}$, donde d_w es el exponente de difusión anómala en un espacio regular euclidiano de dimensión d , con d un entero positivo.
2. Existen obstáculos geométricos en todas las escalas de longitud que ralentizan la caminata aleatoria.

3.3.2. Descripción de la derivación

El fenómeno de la difusión anómala ha atraído más y más la atención. Varios autores presentaron funciones de densidad de probabilidad para la ubicación de una caminata aleatoria en un objeto fractal. Como esta función de densidad y la dependencia del tiempo de su segundo momento se encuentran bien establecidos, se formula una ecuación de difusión modificada que proporciona el resultado correcto.

En espacios euclidianos regulares de dimensión entera positiva d , el desplazamiento de un caminante aleatorio está dado por $\langle r^2(t) \rangle \sim t$. Sin embargo, la difusión anómala está teóricamente predicha y observada experimentalmente. Un proceso se conoce como difusión anómala si

$$\langle r^2(t) \rangle \sim t^{2/d_w} \quad (3.22)$$

donde d_w es el exponente de difusión anómala. En ambos casos el aumento y la reducción de la velocidad de difusión son posibles, sin embargo, para una caminata aleatoria en un objeto fractal sólo el segundo caso ocurre, es decir, $d_w > 2$. La razón es que los obstáculos geométricos existen en todas las escalas de longitud alentando la caminata aleatoria. Además d_w puede ser calculada.

Sea

$$P(r, t) \sim At^{-d_f/d_w} e^{-c(r/R)} \quad (3.23)$$

la densidad de probabilidad con $r/R \gg 1$ y $t \rightarrow \infty$.

Sean

$$R = (\langle r^2(t) \rangle)^{1/2} \quad (3.24)$$

$$u = \frac{d_w}{d_w - 1} \quad (3.25)$$

Sin embargo, este comportamiento puede considerarse como una propiedad general de paseos aleatorios en objetos fractales de cualquier tipo. La limitación asintótica donde (3.23) es válida cuando se habla del comportamiento asintótico de las densidades de probabilidad. En (3.23) dos parámetros libres se producen: El exponente difusión anómala d_w y la dimensión fractal d_f del objeto. La fracción $2d_f/d_w$ es la dimensión fraccional del fractal.

Metzler [17] demostró que la difusión anómala (3.23) es proporcionada por la ecuación de difusión

$$\frac{\partial^{2/d_w}}{\partial t^{2/d_w}} P(r, t) = \frac{1}{r^{d-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{d-1} \frac{\partial}{\partial r} P(r, t) \right) \quad (3.26)$$

la cual es una ecuación diferencial parcial fraccionaria en el tiempo. En comparación con la ecuación de difusión isotrópica ordinaria en d dimensiones

$$\frac{\partial}{\partial t} P(r, t) = \frac{1}{r^{d-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{d-1} \frac{\partial}{\partial r} P(r, t) \right) \quad (3.27)$$

el operador laplaciano es generalizado mediante la introducción de una dimensión d no entera y el operador diferencial se sustituye por una derivación fraccional de orden $2/d_w$, que se define a través de la convolución

$$\frac{\partial^{2/d_w}}{\partial t^{2/d_w}} P(r, t) = \frac{1}{\Gamma(1 - 2/d_w)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t d\tau \frac{P(r, \tau)}{(t - \tau)^{2/d_w}} \quad (3.28)$$

para $0 \leq 2/d_w < 1$. A partir de una ecuación de difusión modificada muy general, la ecuación de difusión fraccional es compatible con las condiciones (3.22) y (3.23) y los parámetros en (3.26) se determinan de manera única.

Ecuaciones propuestas anteriormente

Antes de empezar a derivar la ecuación (3.5), primero repasaremos algunas ecuaciones de difusión modificadas. O'Shaughnessy y Procaccia derivaron la ecuación

$$\frac{\partial P(r, t)}{\partial t} = \frac{1}{r^{D-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(K(r) r^{D-1} \frac{\partial P(r, t)}{\partial r} \right) \quad (3.29)$$

donde $K(r) = Kr^{-\Theta}$ con K constante y $\Theta = D + \alpha - 2$. El operador laplaciano es modificado por la introducción de una dimensión general D en el exponente de r . D es la dimensión de Hausdorff de la estructura fractal y α un coeficiente de dispersión espectral modificado.

Caso general

Metzler propone la siguiente una ecuación de difusión generalizada

$$\frac{\partial^\gamma}{\partial t^\gamma} P(r, t) = \frac{1}{r^{D-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{-\Theta} r^{D-1} \frac{\partial}{\partial r} P(r, t) \right) \quad (3.30)$$

donde

$$\frac{2\gamma}{2 + \Theta} = \frac{2}{d_w} \quad (3.31)$$

La ecuación de difusión estandar en una dimensión es

$$\frac{\partial}{\partial t} P(r, t) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} P(r, t) \quad (3.32)$$

luego

$$\frac{\partial^{1/2}}{\partial t^{1/2}} P(r, t) = -\frac{\partial}{\partial r} P(r, t) \quad (3.33)$$

y después de varios cálculos

$$\frac{\partial^{1/d_w}}{\partial t^{1/d_w}} P(r, t) = -r^{1/2-d/2} \frac{\partial}{\partial r} r^{d/2-1/2} P(r, t) \quad (3.34)$$

3.3.3. Modelo resultante

Metzler lo llamó modelo de ecuación fraccional para difusión anómala

$$\frac{\partial^\gamma P}{\partial t^\gamma} = \frac{1}{r^{D-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(K r^{D-\theta-1} \frac{\partial P}{\partial r} \right) \quad (3.35)$$

3.3.4. Interpretación del Modelo

Los parámetros de esta ecuación diferencial parcial fraccional están determinados únicamente por la dimensión fractal de Hausdorff del objeto y el exponente de difusión anómala.

Capítulo 4

Modelación de Sistemas Continuos Fractales

4.1. Dimensión de masa fractal

El pilar de los fractales es el significado de la dimensión fractal que puede ser fácilmente medida para un medio fractal por el método de conteo de cajas, dibujando una caja de tamaño R y contando la masa que hay dentro. La masa de un medio fractal obedece a la siguiente relación de potencia

$$M = \rho R^D \quad (D < n) \quad (4.1)$$

donde M es la masa del medio fractal, ρ es la densidad de la masa, R es el tamaño de la caja (o el radio de una esfera en \mathbb{R}^n) y D es la dimensión de masa fractal.

La dimensión de masa fractal se puede obtener despejando D de la ecuación (4.1). Los fractales son conjuntos métricos medibles cuya propiedad principal es una dimensión no entera.

Definición: Conjunto fractal

Sea B un conjunto en \mathbb{R}^n con dimensión de masa fractal D . Si D es no entera, se dice que el conjunto B es un conjunto fractal.

4.2. Medios continuos fractales isótropos

Un medio fractal es llamado medio fractal homogéneo si la relación de potencia (ec. 4.1) no depende de la traslación o rotación de la región. Podemos considerar a los medios porosos como medios fractales homogéneos [24].

Para describir los medios fractales, podemos usar los modelos en medios continuos tales que las propiedades de fractalidad y homogeneidad se cumplen de la siguiente forma:

- **Fractalidad:**

La masa de la región B en \mathbb{R}^n del medio fractal obedece a la siguiente relación de potencia:

$$M_D(B) = \rho R^D$$

donde $D < n$ y R es el radio de la bola.

- **Homogeneidad:**

La densidad local del medio fractal homogéneo es invariante bajo traslaciones y rotaciones que tienen la forma: $\rho(\underline{x}) = \rho_0 = \text{constante}$.

4.2.1. Operadores fraccionales

Integral fraccional

La dimensión de masa fractal está relacionada con el orden de las integrales fraccionales. Por lo tanto, las integrales fraccionales pueden ser usadas para describir medios fractales con dimensiones de masa no enteras.

Sea B un conjunto fractal con dimensión de masa fractal D y $\underline{x}_0 \in B$. Definimos la integral fraccional en \mathbb{R}^n en la forma de Riesz por la ecuación:

$$(I^D \psi(\underline{x}_0)) = \int_B \psi(\underline{x}) d\mu_D \quad (4.2)$$

donde

$$d\mu_D = c_n(D, r) d\mu_n$$

$$c_n(D, r) = 2^{n-D} \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma(D/2)} r^{D-n} d\mu_n,$$

μ_n es la medida de Lebesgue

$$r = |\underline{x} - \underline{x}_0| \text{ donde } \underline{x} \in B$$

y \underline{x}_0 es el punto inicial de la integral fraccional.

Localizaremos el punto inicial de la integral fraccional en $\underline{x}_0 = \underline{0}$. Debido a que $c_n(D, r)$ sólo depende de r , entonces se está suponiendo isotropía alrededor de $r = 0$.

Derivada material fraccional

$$\left(\frac{d}{dt} \right)_D \psi = \frac{\partial}{\partial t} \psi + c(D, d, r) \underline{v} \cdot \nabla \psi \quad (4.3)$$

- $c(D, d, r) = c_n^{-1}(D, r) c_{n-1}(d, r) = 2^{D-d-1} \frac{\Gamma(D/2) \Gamma((n-1)/2)}{\Gamma(n/2) \Gamma(d/2)} r^{1+d-D}$
- d es la dimensión en la frontera ∂B
- $c_n^{-1}(D, r) = 2^{D-n} \frac{\Gamma(D/2)}{\Gamma(n/2)} r^{n-D}$
- $c_{n-1}(d, r) = 2^{n-1-d} \frac{\Gamma((n-1)/2)}{\Gamma(d/2)} r^{d+1-n}$

Observación: La forma de la derivada material fraccional tiene una gran similitud con la forma de la derivada material (1.1).

Divergencia fraccional

$$\nabla^D \cdot A = c_n^{-1}(D, r) \nabla \cdot (c_{n-1}(d, r)A) \quad (4.4)$$

Gradiente fraccional

$$\nabla^D A = c_n^{-1}(D, r) \nabla (c_{n-1}(d, r)A) \quad (4.5)$$

Derivada fraccional respecto a cada coordenada

$$\nabla_k^D A = c_n^{-1}(D, r) \frac{\partial c_{n-1}(d, r)A}{\partial x_k} \quad (4.6)$$

Integral fraccional sobre la frontera

Sea d la dimensión fractal de la frontera ∂B

$$\int_{\partial B(t)} \underline{\tau}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}(\underline{x}, t) d\mu_d = \int_{\partial B(t)} c_{n-1}(d, r) \underline{\tau}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}(\underline{x}, t) d\mu_{n-1} \quad (4.7)$$

- $d\mu_d = c_{n-1}(d, r) d\mu_{n-1}$
- $c_{n-1}(d, r) = 2^{n-1-d} \frac{\Gamma((n-1)/2)}{\Gamma(d/2)} r^{d-n+1}$

4.2.2. Propiedades intensivas y extensivas

Recordemos que las propiedades intensivas están definidas para cada punto material de un cuerpo y para cada tiempo, mientras que las propiedades extensivas están expresadas como la integral de una propiedad intensiva sobre el cuerpo. La integración fraccional, puede ser utilizada para describir procesos dinámicos en los medios fractales. Consideremos la región $B(t)$ del medio, con dimensión de masa fractal D . Las propiedades extensivas $E(t)$ y las propiedades intensivas $\psi(\underline{x}, t)$ se relacionan de la siguiente forma:

$$E(t) = \int_{B(t)} \psi(\underline{x}, t) d\mu_D \quad (4.8)$$

4.2.3. Ecuación de balance global

La ecuación de balance global para medios continuos fraccionales es

$$\frac{d}{dt} E(t) = \int_{B(t)} g(\underline{x}, t) d\mu_D + \int_{\partial B(t)} \underline{\tau}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}(\underline{x}, t) d\mu_d + \int_{\Sigma(t)} g_{\Sigma}(\underline{x}, t) d\mu_d \quad (4.9)$$

$g(\underline{x}, t)$ es lo que se genera o se destruye en el interior del cuerpo fractal $B(t)$
 $\underline{\tau}(\underline{x}, t)$ es lo que se importa o exporta a través de la frontera $\partial B(t)$
 $\underline{n}(\underline{x}, t)$ es la normal exterior a la frontera $\partial B(t)$
 $\Sigma(t)$ es la superficie de discontinuidad dentro del cuerpo $B(t)$
 $g_\Sigma(\underline{x}, t)$ es el término fuente en $\Sigma(t)$

4.2.4. Condiciones de balance local

Ecuación diferencial de balance local

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_D \psi + \psi \nabla^D \cdot \underline{v} = g + \nabla^D \cdot \underline{\tau}, \quad \forall \underline{x} \in B(t) \setminus \Sigma(t) \quad (4.10)$$

La forma de esta ecuación tiene un gran parecido con la forma de la ecuación diferencial de balance local (ver cap. 2) en términos de la derivada material (1.1). La ecuación (4.10) también puede expresarse de la siguiente manera

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla^D \cdot (\psi \underline{v}) = g + \nabla^D \cdot \underline{\tau} \quad (4.11)$$

debido a que

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt}\right)_D \psi + \psi \nabla^D \cdot \underline{v} &= \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + c(D, d, r, n) \underline{v} \cdot \nabla \psi\right) + \psi \nabla^D \cdot \underline{v} \\ &= \frac{\partial \psi}{\partial t} + c_n^{-1}(D, r) c_{n-1}(d, r) \underline{v} \cdot \nabla \psi + \psi (c_n^{-1}(D, r) \nabla \cdot (c_{n-1}(d, r) \underline{v})) \\ &= \frac{\partial \psi}{\partial t} + c_n^{-1}(D, r) ((c_{n-1}(d, r) \underline{v}) \cdot \nabla \psi + \psi \nabla \cdot (c_{n-1}(d, r) \underline{v})) \\ &= \frac{\partial \psi}{\partial t} + c_n^{-1}(D, r) \nabla \cdot (c_{n-1}(d, r) \underline{v} \psi) = \frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla^D \cdot (\psi \underline{v}) \end{aligned}$$

sustituyendo en la ecuación (4.10), obtenemos la ecuación (4.11).

Condición de salto de balance local

$$\llbracket \psi (\underline{v} - \underline{v}_\Sigma) - \underline{\tau} \rrbracket \cdot \underline{n}_\Sigma = g_\Sigma, \quad \forall \underline{x} \in \Sigma(t) \quad (4.12)$$

4.2.5. Teoremas

Tarasov [24] y Ostojica [20] derivaron el teorema de Gauss fraccional y el teorema de transporte de Reynolds fraccional respectivamente. En esta sección derivaremos sus extensiones para el ajuste con un salto $\llbracket \underline{\tau} \rrbracket$ sobre una superficie de discontinuidad Σ cruzando al conjunto B .

Teorema de Gauss fraccional

Siguiendo a Tarasov [24] y a Ostoja [20] derivaremos la generalización fraccional del teorema de Gauss. Sea d la dimensión fractal de la frontera ∂B . Aplicando la definición de integral fraccional sobre la frontera (4.7)

$$\int_{\partial B(t)} \underline{\tau}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}(\underline{x}, t) d\mu_d = \int_{\partial B(t)} c_{n-1}(d, r) \underline{\tau}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}(\underline{x}, t) d\mu_{n-1} \quad (4.13)$$

aplicando el teorema de Gauss estandar por la derecha

$$\int_{\partial B(t)} \underline{\tau}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}(\underline{x}, t) d\mu_d = \int_{B(t)} \nabla \cdot (c_{n-1}(d, r) \underline{\tau}(\underline{x}, t)) d\mu_n \quad (4.14)$$

y sustituyendo $d\mu_n = c_n^{-1}(D, r) d\mu_D$ obtenemos el teo. fracc. de Gauss:

$$\int_{\partial B(t)} \underline{\tau} \cdot \underline{n} d\mu_d = \int_{B(t)} c_n^{-1}(D, r) \nabla \cdot (c_{n-1}(d, r) \underline{\tau}) d\mu_D = \int_{B(t)} \nabla^D \cdot \underline{\tau} d\mu_D \quad (4.15)$$

Teorema de Gauss fraccional extendido

Ahora derivaremos el teorema de Gauss fraccional extendido para el ajuste con un salto $[[\underline{\tau}]]$ sobre una superficie de discontinuidad Σ cruzando a B . Siguiendo el mismo camino que en mecánica de medios continuos convencional: dividiendo la región B en dos partes separadas por Σ y aplicando el teorema de Gauss fraccional a cada parte mientras se toma en cuenta el salto desde cada lado y combinando ambos resultados [20]. Aplicando el teorema de Gauss fraccional a $B_+(t)$ y $B_-(t)$, obtenemos

$$\int_{B_+(t)} \nabla^D \cdot \underline{\tau} d\mu_D = \int_{\partial B_+(t)} \underline{\tau} \cdot \underline{n} d\mu_d - \int_{\Sigma_+(t)} \left[\left[\lim_{\underline{x} \rightarrow \Sigma^+} \underline{\tau} \right] \right] \cdot \underline{n}_\Sigma d\mu_d \quad (4.16)$$

$$\int_{B_-(t)} \nabla^D \cdot \underline{\tau} d\mu_D = \int_{\partial B_-(t)} \underline{\tau} \cdot \underline{n} d\mu_d - \int_{\Sigma_-(t)} \left[\left[\lim_{\underline{x} \rightarrow \Sigma^-} \underline{\tau} \right] \right] \cdot (-\underline{n}_\Sigma) d\mu_d \quad (4.17)$$

sumando las dos ecuaciones anteriores

$$\int_{B(t)} \nabla^D \cdot \underline{\tau} d\mu_D = \int_{\partial B(t)} \underline{\tau} \cdot \underline{n} d\mu_d - \int_{\Sigma(t)} [[\underline{\tau}]] \cdot \underline{n}_\Sigma d\mu_d \quad (4.18)$$

finalmente haciendo un sencillo despeje llegamos al resultado deseado

$$\int_{\partial B(t)} \underline{\tau} \cdot \underline{n} \, d\mu_d = \int_{B(t)} \nabla^D \cdot \underline{\tau} \, d\mu_D + \int_{\Sigma(t)} \llbracket \underline{\tau} \rrbracket \cdot \underline{n}_\Sigma \, d\mu_d \quad (4.19)$$

Teorema de Reynolds fraccional extendido

Derivaremos el teorema fraccional de transporte de Reynolds extendido para el ajuste con un salto $\llbracket \cdot \rrbracket$ sobre una superficie de discontinuidad Σ cruzando B .

Partiendo del teorema fraccional de transporte de Reynolds [20]

$$\frac{d}{dt} \int_{B(t)} \psi \, d\mu_D = \int_{B(t)} \left(\frac{d}{dt} \right)_D \psi \, d\mu_D + \int_{B(t)} \psi \nabla^D \cdot \underline{v} \, d\mu_D \quad (4.20)$$

aplicamos el teorema de Gauss fraccional al segundo término de la derecha

$$\frac{d}{dt} \int_{B(t)} \psi \, d\mu_D = \int_{B(t)} \left(\frac{d}{dt} \right)_D \psi \, d\mu_D + \int_{\partial B(t)} \psi \underline{v} \cdot \underline{n} \, d\mu_d \quad (4.21)$$

aplicando ésta ecuación a las regiones $B_+(t)$ y $B_-(t)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{B_+(t)} \psi \, d\mu_D &= \int_{B_+(t)} \left(\frac{d}{dt} \right)_D \psi \, d\mu_D + \int_{\partial B_+(t)} \psi \underline{v} \cdot \underline{n} \, d\mu_d \\ &+ \int_{\Sigma_+(t)} \left(\lim_{\underline{x} \rightarrow \Sigma^+} \psi \underline{v}_\Sigma \right) \cdot (-\underline{n}_\Sigma) \, d\mu_D \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{B_-(t)} \psi \, d\mu_D &= \int_{B_-(t)} \left(\frac{d}{dt} \right)_D \psi \, d\mu_D + \int_{\partial B_-(t)} \psi \underline{v} \cdot \underline{n} \, d\mu_d \\ &- \int_{\Sigma_-(t)} \left(\lim_{\underline{x} \rightarrow \Sigma^-} \psi \underline{v}_\Sigma \right) \cdot \underline{n}_\Sigma \, d\mu_d \end{aligned} \quad (4.23)$$

sumando las dos ecuaciones anteriores

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{B(t)} \psi \, d\mu_D &= \int_{B(t)} \left(\frac{d}{dt} \right)_D \psi \, d\mu_D + \int_{\partial B(t)} \psi \underline{v} \cdot \underline{n} \, d\mu_d \\ &- \int_{\Sigma(t)} \llbracket \psi \underline{v}_\Sigma \rrbracket \cdot \underline{n}_\Sigma \, d\mu_d \end{aligned}$$

aplicando el teorema de Gauss fraccional extendido al segundo sumando

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{B(t)} \psi d\mu_D &= \int_{B(t)} \left(\frac{d}{dt} \right)_D \psi d\mu_D + \int_{B(t)} \psi \nabla^D \cdot \underline{v} d\mu_D \\
&+ \int_{\Sigma(t)} \llbracket \psi \underline{v} \rrbracket \cdot \underline{n}_\Sigma d\mu_d - \int_{\Sigma(t)} \llbracket \psi \underline{v}_\Sigma \rrbracket \cdot \underline{n}_\Sigma d\mu_d \\
&= \int_{B(t)} \left(\left(\frac{d}{dt} \right)_D \psi + \psi \nabla^D \cdot \underline{v} \right) d\mu_D \quad (4.24) \\
&+ \int_{\Sigma(t)} \llbracket \psi (\underline{v} - \underline{v}_\Sigma) \rrbracket \cdot \underline{n}_\Sigma d\mu_d
\end{aligned}$$

4.2.6. De la ecuación de balance global a las ecuaciones de balance local

En esta sección demostraremos la manera en que puede ser derivada la ecuación diferencial de balance local y la condición de salto de balance local a partir de la ecuación de balance global, aplicando los teoremas fraccionales extendidos en presencia de discontinuidades.

Partiendo de la ecuación de balance global y sustituyendo en el lado izquierdo la definición de propiedad extensiva obtenemos la siguiente expresión

$$\frac{d}{dt} \int_{B(t)} \psi d\mu_D = \int_{B(t)} g d\mu_D + \int_{\partial B(t)} \underline{\tau} \cdot \underline{n} d\mu_d + \int_{\Sigma(t)} g_\Sigma d\mu_d \quad (4.25)$$

aplicando el teorema de Gauss generalizado fraccional al segundo sumando

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{B(t)} \psi d\mu_D &= \int_{B(t)} g d\mu_D + \int_{B(t)} \nabla^D \cdot \underline{\tau} d\mu_D \\
&+ \int_{\Sigma(t)} \llbracket \underline{\tau} \rrbracket \cdot \underline{n}_\Sigma d\mu_d + \int_{\Sigma(t)} g_\Sigma d\mu_d \quad (4.26) \\
&= \int_{B(t)} (g + \nabla^D \cdot \underline{\tau}) d\mu_D + \int_{\Sigma(t)} (\llbracket \underline{\tau} \rrbracket \cdot \underline{n}_\Sigma + g_\Sigma) d\mu_d
\end{aligned}$$

aplicando el teorema de transporte de Reynolds fraccional extendido

$$\begin{aligned} & \int_{B(t)} \left(\left(\frac{d}{dt} \right)_D \psi + \psi \nabla^D \cdot \underline{v} \right) d\mu_D + \int_{\Sigma(t)} \llbracket \psi (\underline{v} - \underline{v}_\Sigma) \rrbracket \cdot \underline{n}_\Sigma d\mu_d \\ &= \int_{B(t)} (g + \nabla^D \cdot \underline{\tau}) d\mu_D + \int_{\Sigma(t)} (\llbracket \underline{\tau} \rrbracket \cdot \underline{n}_\Sigma + g_\Sigma) d\mu_d \end{aligned} \quad (4.27)$$

restando los términos de la derecha a los de la izquierda y reagrupandolos

$$\begin{aligned} & \int_{B(t)} \left(\left(\frac{d}{dt} \right)_D \psi + \psi \nabla^D \cdot \underline{v} - (g + \nabla^D \cdot \underline{\tau}) \right) d\mu_D \\ &+ \int_{\Sigma(t)} (\llbracket \psi (\underline{v} - \underline{v}_\Sigma) - \underline{\tau} \rrbracket \cdot \underline{n}_\Sigma - g_\Sigma) d\mu_d = 0 \end{aligned} \quad (4.28)$$

aplicando el lema de Dubois-Reymond

$$\left(\frac{d}{dt} \right)_D \psi + \psi \nabla^D \cdot \underline{v} - (g + \nabla^D \cdot \underline{\tau}) = 0, \quad \forall \underline{x} \in B(t) \setminus \Sigma(t)$$

y también

$$\llbracket \psi (\underline{v} - \underline{v}_\Sigma) - \underline{\tau} \rrbracket \cdot \underline{n}_\Sigma - g_\Sigma = 0, \quad \forall \underline{x} \in \Sigma(t)$$

haciendo un despeje obtenemos la ecuación diferencial de balance local

$$\left(\frac{d}{dt} \right)_D \psi + \psi \nabla^D \cdot \underline{v} = g + \nabla^D \cdot \underline{\tau}, \quad \forall \underline{x} \in B(t) \setminus \Sigma(t)$$

y la condición de salto de balance local

$$\llbracket \psi (\underline{v} - \underline{v}_\Sigma) - \underline{\tau} \rrbracket \cdot \underline{n}_\Sigma = g_\Sigma, \quad \forall \underline{x} \in \Sigma(t)$$

4.2.7. Ec. básicas de la MMC fraccional

Las integrales fraccionales además de ser utilizadas para calcular la dimensión de la masa del medio fractal, también se utilizan para describir los procesos dimámicos en el medio fractal [22]. Usando integrales fraccionales, podemos derivar la generalización fraccional de las ecuaciones básicas de la mecánica de medios continuos para medios fractales.

Ecuación de balance de densidad de masaPropiedad extensiva: masa $M_D(t)$ Propiedad intensiva: densidad $\psi \equiv \rho$

$$M_D(t) = \int_{B(t)} \rho(\underline{x}, t) d\mu_D \quad (4.29)$$

Si $g \equiv 0$, $g_\Sigma \equiv 0$ y $\underline{\tau} \equiv 0$, existe conservación de la masa y la ecuación de balance de masa está descrita por la siguiente ecuación

Ecuación de balance global

$$\frac{d}{dt} M_D(t) = 0 \quad (4.30)$$

Ecuación diferencial de balance local:

$$\left(\frac{d}{dt} \right)_D \rho + \rho \nabla^D \cdot \underline{v} = 0, \quad \forall \underline{x} \in B(t) \setminus \Sigma(t) \quad (4.31)$$

Condición de salto de balance local

$$\llbracket \rho (\underline{v} - \underline{v}_\Sigma) \rrbracket \cdot \underline{n}_\Sigma = 0, \quad \forall \underline{x} \in \Sigma(t) \quad (4.32)$$

Ecuaciones de balance de densidad de momento lineal

$$\underline{M}_L(t) = \int_{B(t)} \rho \underline{v} d\mu_D \quad (4.33)$$

Propiedad extensiva: momento lineal $M_L(t)$ Propiedad intensiva: densidad de momento lineal $\psi \equiv \rho \underline{v}$.

Si tenemos que $g \equiv \rho \underline{b}$, $g_\Sigma \equiv 0$ y $\underline{\tau} \equiv \underline{\underline{\sigma}}$, donde

- $\rho \underline{b}$ — fuerzas del cuerpo por unidad de volumen
- $\underline{\underline{\sigma}}$ — tensor de los esfuerzos.
- $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{T}$ — fuerzas de tracción.

Ecuación de balance global de densidad de momento lineal

$$\frac{d}{dt} M_L(t) = \int_{B(t)} \rho \underline{b} \, d\mu_D + \int_{\partial B(t)} \underline{\sigma} \cdot \underline{n} \, d\mu_d \quad (4.34)$$

Ecuación diferencial de balance local de densidad de momento lineal

$$\left(\frac{d}{dt} \right)_D (\rho \underline{v}) + (\rho \underline{v}) \nabla^D \cdot \underline{v} = \rho \underline{b} + \nabla^D \cdot \underline{\sigma}, \quad \forall \underline{x} \in B(t) \setminus \Sigma(t) \quad (4.35)$$

esta ecuación se puede interpretar como un sistema de ecuaciones si

$$\left(\frac{d}{dt} \right)_D (\rho v_i) + (\rho v_i) \nabla^D \cdot \underline{v} = \rho b_i + \nabla^D \cdot \underline{\sigma}_i \quad ; \quad i = 1, \dots, n;$$

donde $\underline{\sigma} = (\underline{\sigma}_1, \dots, \underline{\sigma}_n)$; $\underline{b} = (b_1, \dots, b_n)$.

Desarrollando la derivada material fraccional en el término izquierdo

$$\left(\rho \left(\frac{d}{dt} \right)_D \underline{v} + \underline{v} \left(\frac{d}{dt} \right)_D \rho \right) + \rho \underline{v} \nabla^D \cdot \underline{v} \quad (4.36)$$

$$= \rho \left(\frac{d}{dt} \right)_D \underline{v} + \underline{v} \left(\left(\frac{d}{dt} \right)_D \rho + \rho \nabla^D \cdot \underline{v} \right) = \rho \left(\frac{d}{dt} \right)_D \underline{v} \quad (4.37)$$

ya que por conservación de la masa, el segundo sumando es igual a cero

$$\therefore \rho \left(\frac{d}{dt} \right)_D \underline{v} = \rho \underline{b} + \nabla^D \cdot \underline{\sigma}, \quad \forall \underline{x} \in B(t) \setminus \Sigma(t) \quad (4.38)$$

Condición de salto de balance local

$$\llbracket \rho \underline{v} (\underline{v} - \underline{v}_\Sigma) - \underline{\sigma} \rrbracket \cdot \underline{n}_\Sigma = 0, \quad \forall \underline{x} \in \Sigma(t) \quad (4.39)$$

Ecuación fraccional de flujo de Navier-Stokes

Sean

- $\rho \underline{b}$ = fuerzas de cuerpo por unidad de volumen.
- $\underline{D} = \frac{1}{2}(\nabla \underline{v} + (\nabla \underline{v})^T)$ = parte simétrica del tensor de velocidades $\nabla \underline{v}$.
- $D_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_i} v_j + \frac{\partial}{\partial x_j} v_i)$
- $\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{I} + \lambda(\nabla \cdot \underline{v})\underline{I} + 2\mu\underline{D}$ = tensor de los esfuerzos.

Por otro lado, utilizando la notación de Einstein para índices repetidos

$$\nabla^D \cdot (-p\underline{I}) = -\nabla_i^D p = -\nabla^D p$$

Análogamente

$$\nabla^D \cdot (\lambda(\nabla \cdot \underline{v})\underline{I}) = \lambda \nabla^D (\nabla \cdot \underline{v})$$

$$\nabla^D \cdot (2\mu\underline{D}) = \mu \nabla_i^D \frac{\partial}{\partial x_i} v_j + \mu \nabla_i^D \frac{\partial}{\partial x_j} v_i = \mu \nabla^D \cdot (\nabla \underline{v}) + \mu \nabla^D (\nabla \underline{v})^T$$

ahora, utilizando estos tres resultados

$$\nabla^D \cdot \underline{\underline{\sigma}} = -\nabla^D p + \lambda \nabla^D (\nabla \cdot \underline{v}) + \mu \nabla^D \cdot (\nabla \underline{v}) + \mu \nabla^D (\nabla \cdot \underline{v})^T \quad (4.40)$$

al sustituir en la ecuación de balance de momento lineal, obtenemos

$$\rho \left(\frac{d}{dt} \right)_D \underline{v} = \rho \underline{b} - \nabla^D p + \lambda \nabla^D (\nabla \cdot \underline{v}) + \mu \nabla^D \cdot (\nabla \underline{v}) + \mu \nabla^D (\nabla \cdot \underline{v})^T \quad (4.41)$$

que es la *ecuación fraccional de flujo de Navier-Stokes*.

Ecuaciones de balance de energía

$$\mathcal{E}(t) = \int_{B(t)} \rho \left(E + \frac{1}{2} |\underline{v}|^2 \right) d\mu_D \quad (4.42)$$

Propiedad extensiva: energía $\mathcal{E}(t)$.

Propiedad intensiva: $\psi \equiv \rho(E + \frac{1}{2} |\underline{v}|^2)$

donde E es la energía interna por unidad de masa.

Si tenemos que: $g \equiv \rho(h + \underline{b} \cdot \underline{v})$, $g_{\Sigma} \equiv 0$ y $\underline{\tau} \equiv \underline{q} + \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{v}$ donde

- ρh - fuente de calor por unidad de volumen

- $\rho \underline{b} \cdot \underline{v}$ - trabajo por unidad de tiempo por unidad de volumen realizado por las fuerzas del cuerpo
- $\underline{q} \cdot \underline{n}$ - flujo de calor a través de la frontera por unidad de tiempo por unidad de área
- $(\underline{\sigma} \cdot \underline{v}) \cdot \underline{n} = (\underline{\sigma} \cdot \underline{v}) \cdot \underline{v} = \underline{T} \cdot \underline{v}$ - trabajo por unidad de tiempo por unidad de área realizado por las fuerzas de tracción.

Ecuación de balance global:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) = \int_{B(t)} \rho(h + \underline{b} \cdot \underline{v}) d\mu_D + \int_{\partial B(t)} (\underline{q} + \underline{\sigma} \cdot \underline{v}) \cdot \underline{n} d\mu_d \quad (4.43)$$

Ecuación de balance local:

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_D \rho \left(E + \frac{1}{2} |\underline{v}|^2\right) + \rho \left(E + \frac{1}{2} |\underline{v}|^2\right) \nabla^D \cdot \underline{v} = \rho(h + \underline{b} \cdot \underline{v}) + \nabla^D \cdot (\underline{q} + \underline{\sigma} \cdot \underline{v}) \quad (4.44)$$

desarrollando el término de la derivada material fraccional

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_D \rho \left(E + \frac{1}{2} |\underline{v}|^2\right) = \rho \left(\frac{d}{dt}\right)_D E + \rho \left(\frac{d}{dt}\right)_D \frac{1}{2} |\underline{v}|^2 + \left(E + \frac{1}{2} |\underline{v}|^2\right) \left(\frac{d}{dt}\right)_D \rho \quad (4.45)$$

Sustituyendo esta ecuación en la ecuación anterior

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{d}{dt}\right)_D E + \rho \left(\frac{d}{dt}\right)_D \frac{1}{2} \underline{v} \cdot \underline{v} + \left(E + \frac{1}{2} \underline{v} \cdot \underline{v}\right) \left(\left(\frac{d}{dt}\right)_D \rho + \rho \nabla^D \cdot \underline{v}\right) \\ = \rho(h + \underline{b} \cdot \underline{v}) + \nabla^D \cdot (\underline{q} + \underline{\sigma} \cdot \underline{v}) \end{aligned} \quad (4.46)$$

como $\left(\frac{d}{dt}\right)_D \rho + \rho \nabla^D \cdot \underline{v} = 0$ por conservación de masa, resulta:

$$\rho \left(\frac{d}{dt}\right)_D E + \rho \left(\frac{d}{dt}\right)_D \frac{1}{2} \underline{v} \cdot \underline{v} = \rho(h + \underline{b} \cdot \underline{v}) + \nabla^D \cdot (\underline{q} + \underline{\sigma} \cdot \underline{v}) \quad (4.47)$$

Si tenemos en cuenta que

$$\nabla^D \cdot (\underline{\sigma} \cdot \underline{v}) = \underline{v} \cdot \nabla^D \cdot \underline{\sigma} + C(D, d, n, r) \underline{\sigma} \cdot \nabla \underline{v} \quad (4.48)$$

y que

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_D \frac{1}{2} \underline{v} \cdot \underline{v} = \underline{v} \cdot \left(\frac{d}{dt}\right)_D \underline{v} \quad (4.49)$$

entonces

$$\rho \left(\frac{d}{dt} \right)_D E + \underline{v} \cdot \left(\rho \left(\frac{d}{dt} \right)_D \underline{v} - \nabla^D \cdot \underline{\underline{\sigma}} - \rho \underline{b} \right) = \nabla^D \cdot \underline{q} + \rho h + c(D, d, n, r) \underline{\underline{\sigma}} \cdot \nabla \underline{v} \quad (4.50)$$

Si tenemos en cuenta que $\rho \left(\frac{d}{dt} \right)_D \underline{v} - \nabla^D \cdot \underline{\underline{\sigma}} - \rho \underline{b} = 0$ por la ecuación de balance del momento lineal, obtenemos la ecuación de balance de energía:

$$\rho \left(\frac{d}{dt} \right)_D E = \rho h + C(D, d, n, r) \underline{\underline{\sigma}} \cdot \nabla \underline{v} + \nabla^D \cdot \underline{q}, \quad \forall \underline{x} \in B(t) \setminus \Sigma(t) \quad (4.51)$$

donde $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \nabla \underline{v} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$

Condiciones de salto:

$$\left[\left[\rho \left(E + \frac{1}{2} \underline{v} \cdot \underline{v} \right) (\underline{v} - \underline{v}_\Sigma) - (\underline{q} + \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{v}) \right] \right] \cdot \underline{n}_\Sigma = 0, \quad \forall \underline{x} \in \Sigma(t) \quad (4.52)$$

4.3. Medios continuos fractales anisótropos

Tarasov [24] [27] [22] [26] [25] [23] utiliza la regularización dimensional para mapear un problema de la mecánica de un fractal sobre un problema en el espacio euclidiano en el que se incluye este fractal. Su acercamiento a la regularización dimensional de los objetos fractales emplea integrales fraccionales en el espacio euclidiano y se basa en el potencial de Riesz, lo cual es más apropiado para medios isótropos fractales pero tiene algunos inconvenientes:

1. Involucra una derivada fraccional (Riemann-Liouville), que cuando se opera en una constante, generalmente no da cero.
2. Es limitada a los medios isótropos.

Estas cuestiones motivaron a Li y Ostoja-Starzewski [21] [19] [20] [13] [14] [15] a desarrollar otra formulación, sin estos inconvenientes para representar a medios heterogéneos más generales, introduciendo un modelo basado en una medida producto. Esta medida tiene diferentes dimensiones fractales en diferentes direcciones y capta mejor la anisotropía de la geometría fractal. Consideraremos una relación de potencia respecto a cada coordenada.

$$m(x_1, x_2, x_3) \sim x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} \quad (4.53)$$

La distribución de la masa se especifica a través de una medida producto

$$m(B) = \int \int \int \rho(x_1, x_2, x_3) dl_{\alpha_1}(x_1) dl_{\alpha_2}(x_2) dl_{\alpha_3}(x_3) \quad (4.54)$$

mientras que la medida de longitud a lo largo de cada coordenada se da a través de los coeficientes de transformación $c_1^{(k)}$

$$dl_{\alpha_k}(x_k) = c_1^{(k)}(\alpha_k, x_k) dx_k, \quad k = 1, 2, 3 \quad (\text{no suma}) \quad (4.55)$$

La ecuación (4.53) implica que la dimensión de masa fractal $D = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ a lo largo de las diagonales, $|x_1| = |x_2| = |x_3|$, donde α_k es la dimensión fractal en la dirección x_k . Si bien se observa que, en otras direcciones la dimensión fractal de un cuerpo fractal anisótropo no es necesariamente la suma de las dimensiones fractales proyectadas, dado que muchos fractales encontrados en la práctica no son en realidad productos, pero en lo que sigue, esperamos que la igualdad $D = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ se mantenga para fractales encontrados en la práctica, mientras que una prueba rigurosa de esta propiedad sigue siendo un tema abierto de investigación.

El elemento de volumen infinitesimal fraccional dV_D es

$$dV_D = dl_{\alpha_1}(x_2)dl_{\alpha_2}(x_2)dl_{\alpha_3}(x_3) = c_1^{(1)}c_1^{(2)}c_1^{(3)}dx_1dx_2dx_3 = c_3dV_3 \quad (4.56)$$

Para el coeficiente de transformación de superficie $c_2^{(k)}$, considramos un elemento de volumen cúbico, $dV_3 = dx_1dx_2dx_3$, cuyos elementos de superficie están especificados por el vector normal a lo largo de los ejes i, j o k en la figura (4.1). por lo tanto, $c_2^{(k)}$ asociada con la superficie $S_d^{(k)}$ es

$$c_2^{(k)} = c_1^{(i)}c_1^{(j)} = c_3/c_1^{(k)}, \quad i \neq j, \quad i, j \neq k \quad (4.57)$$

La suma $d^{(k)} = \alpha_i + \alpha_j$ con $i \neq j$ e $i, j \neq k$, es la dimensión fractal de la superficie $S_d^{(k)}$ a lo largo de las diagonales $|x_i| = |x_j|$ en $S_d^{(k)}$. Esta igualdad no es necesariamente cierto en otras partes, pero se espera que se mantenga durante los fractales encontrados en la práctica como se ha discutido anteriormente. La figura (4.1) ilustra la relación entre los coeficientes de transformación $c_1^{(k)}$ y los respectivos coeficientes de transformación de superficie y volumen $c_2^{(k)}$ y c_3 que se definirán. Notemos que, cuando $D \rightarrow 3$ con cada $\alpha_i \rightarrow 1$ el concepto convencional de la masa es recuperado. Adoptamos la integral fraccional de Riemann-Liouville modificada de Jumarie para los coeficientes de transformación $c_1^{(k)}$

$$c_1^{(k)} = \alpha_k \left(\frac{l_k - x_k}{l_{k0}} \right)^{\alpha_k - 1}, \quad k = 1, 2, 3 \quad (\text{no suma}) \quad (4.58)$$

donde l_k es la longitud total a lo largo de x_k y l_{k0} es la longitud característica en la dirección dada.

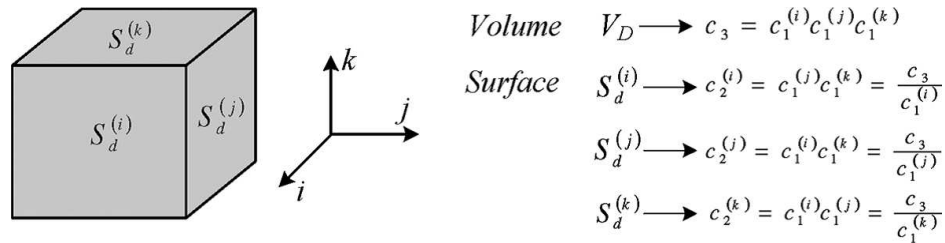


Figura 4.1: Relación entre los coeficientes de transformación $c_1^{(i)}, c_2^{(k)}$ y c_3 en la homogeneización de un cuerpo fractal de volumen dV_D , superficie dS_d , y longitudes dl_α en un paralelepípedo de volumen euclidiano dV_3 , superficie dS_2 y longitud dx .

4.3.1. Proceso de homogenización para fractales

La ecuación (4.54) para la masa fractal expresa la ley de potencia de masa con las integrales fraccionarias. Desde un punto de vista de la homogeneización, esta relación permite una interpretación del medio fractal como un continuo intrínsecamente discontinuo con una métrica fractal contenido en el modelo continuo homogeneizado equivalente como se muestra en la figura (4.1). En esta figura, dl_α , dS_d , dV_D representan a los elementos de línea, superficie y volumen en el medio fractal respectivamente, mientras dx_i , dS_2 y dV_3 , denotan a estos elementos en el modelo continuo homogeneizado, respectivamente.

Los coeficientes $c_1^{(i)}$, $c_2^{(k)}$, c_3 proporcionan la relación entre el medio fractal y el modelo continuo homogeneizado:

$$dl_{\alpha_i} = c_1^i dx_i, \quad dS_d = c_2^{(k)} dS_2, \quad dV_D = c_3 dV_3, \quad (\text{no suma}) \quad (4.59)$$

Las formulaciones anteriores proporcionan una opción del cálculo de los fractales, es decir, a través de productos integrales fraccionarios (ec. 4.54) para reflejar la ley de escala masiva (ec. 4.53) de los medios de fractales. La ventaja de éste enfoque es que se conecta con el cálculo convencional a través de los coeficientes c_1 , c_2 , c_3 y por lo tanto es muy adecuado para el desarrollo de la mecánica de medios continuos y las ecuaciones diferenciales parciales en medios fractales como veremos en las siguientes secciones. Además, la formulación del producto permite un desacoplamiento de las coordenadas de las variables, lo que simplifica profundamente muchos resultados.

4.3.2. Operadores fraccionales

Gradiente fraccional

$$\nabla^D f = (\nabla_1^D f, \nabla_2^D f, \nabla_3^D f) = \left(\frac{1}{c_1^{(1)}} \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{1}{c_1^{(2)}} \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{1}{c_1^{(3)}} \frac{\partial f}{\partial x_3} \right)$$

Divergencia fraccional

$$\nabla^D \cdot \underline{f} = \left(\frac{1}{c_1^{(1)}} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \frac{1}{c_1^{(2)}} \frac{\partial f_2}{\partial x_2}, \frac{1}{c_1^{(3)}} \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \right) \cdot (f_1, f_2, f_3) = \frac{1}{c_1^{(1)}} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{1}{c_1^{(2)}} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{1}{c_1^{(3)}} \frac{\partial f_3}{\partial x_3}$$

Derivada material fraccional

$$\left(\frac{d}{dt} \right)_D \psi = \frac{\partial \psi}{\partial t} + \underline{v} \nabla \psi$$

La derivada material fraccional = la derivada material convencional.

4.3.3. Teoremas fraccionales

Teorema de Gauss fraccional

$$\int_{\partial B} \underline{f} \cdot \underline{n} \, dS_d = \int_B (\nabla^D \cdot \underline{f}) \, dV_D \quad (4.60)$$

Teorema de transporte de Reynolds fraccional

$$\frac{d}{dt} \int_{B(t)} \psi \, dV_D = \int_{B(t)} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \cdot (\psi \underline{v}) \right) \, dV_D \quad (4.61)$$

Ahora tenemos el marco para desarrollar la mecánica de medios continuos en un entorno fractal. En este caso, las ecuaciones de los medios fractales se formularán de manera análoga a las ecuaciones de campo de la mecánica de medios continuos clásica, pero se expresan en términos de integrales fraccionarias y derivadas fractales.

4.3.4. Propiedades extensivas e intensivas

$$E(t) = \int_{B(t)} \psi(\underline{x}, t) \, dV_D \quad (4.62)$$

donde $E(t)$ es la propiedad extensiva y $\psi(\underline{x}, t)$ es la propiedad intensiva.

4.3.5. Ecuación de balance global fraccional

$$\frac{d}{dt} E(t) = \int_{B(t)} g(\underline{x}, t) \, dV_D + \int_{\partial B(t)} \underline{\tau}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}(\underline{x}, t) \, dS_d \quad (4.63)$$

$g(\underline{x}, t)$ es lo que se genera o se destruye en el interior del cuerpo fractal $B(t)$
 $\underline{\tau}(\underline{x}, t)$ es lo que se importa o exporta a través de la frontera $\partial B(t)$
 $\underline{n}(\underline{x}, t)$ es la normal exterior a la frontera $\partial B(t)$

4.3.6. Ecuación de balance local fraccional

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \cdot (\psi \underline{v}) = g + \nabla^D \cdot \underline{\tau} \quad (4.64)$$

4.3.7. De la ecuación de balance global a la ecuación de balance local

Partiendo de la definición de propiedad extensiva y aplicando el teorema de transporte de Reynolds fraccional

$$\frac{d}{dt}E(t) = \int_{B(t)} \psi(\underline{x}, t) dV_D = \int_{B(t)} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \cdot (\psi \underline{v}) \right) dV_D \quad (4.65)$$

Por otro lado, aplicando el teorema de Gauss fraccional

$$\int_{B(t)} g(\underline{x}, t) dV_D + \int_{\partial B(t)} \underline{\tau}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}(\underline{x}, t) dS_d = \int_B (g + \nabla^D \cdot \underline{\tau}) dV_D \quad (4.66)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.65) y (4.66) en la ecuación (4.63)

$$\int_{B(t)} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \cdot (\psi \underline{v}) \right) dV_D = \int_B (g + \nabla^D \cdot \underline{\tau}) dV_D \quad (4.67)$$

restando el lado izquierdo a el lado derecho

$$\int_{B(t)} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \cdot (\psi \underline{v}) - (g + \nabla^D \cdot \underline{\tau}) \right) dV_D = 0 \quad (4.68)$$

aplicando el lema de Dubois-Reymond

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \cdot (\psi \underline{v}) = g + \nabla^D \cdot \underline{\tau} \quad (4.69)$$

4.3.8. Ecuación de conservación de la masa fraccional

Propiedad Extensiva

$$M(t) = \int_{B(t)} \rho(\underline{x}, t) dV_D \quad (4.70)$$

Ecuación de balance global

$$\frac{d}{dt}M(t) = 0 \quad (4.71)$$

Ecuación de balance local

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{v}) = 0 \quad (4.72)$$

4.3.9. Ecuación de balance de momento lineal fraccional

Propiedad extensiva

$$\underline{M}(t) = \int_{B(t)} \rho \underline{v} dV_D \quad (4.73)$$

Ecuación de balance global

$$\frac{d}{dt} \underline{M}(t) = \int_{B(t)} \rho \underline{b} dV_D + \int_{\partial B(t)} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} dS_d \quad (4.74)$$

Ecuación de balance local

$$\frac{\partial \rho \underline{v}}{\partial t} + \nabla \cdot ((\rho \underline{v}) \underline{v}) = \rho \underline{b} + \nabla^D \cdot \underline{\underline{\sigma}} \quad (4.75)$$

Por otro lado observemos que

$$\frac{\partial \rho \underline{v}}{\partial t} + \nabla \cdot ((\rho \underline{v}) \underline{v}) = \rho \left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \nabla \cdot \underline{v} \right) + \underline{v} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{v}) \right) = \rho \left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \nabla \cdot \underline{v} \right) \quad (4.76)$$

pues por conservación de la masa $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{v}) = 0$ sustituyendo en la ecuación anterior tenemos que la ecuación de balance de momento lineal fraccional puede quedar como sigue

$$\rho \left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \nabla \cdot \underline{v} \right) = \rho \underline{b} + \nabla^D \cdot \underline{\underline{\sigma}} \quad (4.77)$$

4.3.10. Ecuación de flujo de Navier-Stokes fraccional para medios anisótropos

Sean

- $\underline{\underline{D}} = \frac{1}{2}(\nabla \underline{v} + (\nabla \underline{v})^T)$ = parte simétrica del tensor de velocidades $\nabla \underline{v}$.
- $\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{I} + \lambda(\nabla \cdot \underline{v}) \underline{I} + 2\mu \underline{\underline{D}}$ = tensor de los esfuerzos.

entonces

$$\nabla^D \cdot \underline{\underline{\sigma}} = -\nabla^D p + \lambda \nabla^D (\nabla \cdot \underline{v}) + \mu \nabla^D \cdot (\nabla \underline{v} + (\nabla \underline{v})^T) \quad (4.78)$$

al sustituir en la ecuación de balance de momento lineal, obtenemos

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} \underline{v} + \underline{v} \nabla \cdot \underline{v} \right) = \rho \underline{b} - \nabla^D p + \lambda \nabla^D (\nabla \cdot \underline{v}) + \mu \nabla^D \cdot (\nabla \underline{v} + (\nabla \underline{v})^T) \quad (4.79)$$

que es la *ecuación de flujo de Navier-Stokes fraccional para medios anisótropos*.

Capítulo 5

Modelos de Flujo Monofásico Fraccional

5.1. Modelo uno

5.1.1. Modelo conceptual

1. El flujo del fluido en el medio poroso fractal es monofásico con un componente.
2. El fluido ocupa el espacio intersticial del medio poroso fractal.
3. Se considera la ley de Darcy convencional.
4. El flujo de la masa debido a la dispersión y difusión son tan pequeños con relación al flujo de la masa que se pueden despreciar.
5. La interfase fluido-sólido es una superficie material con respecto a la masa del fluido tal que ninguna masa del fluido puede cruzarla.
6. Hay conservación en la masa del fluido en el medio poroso fractal.
7. El medio poroso fractal es isótropo y el sistema de flujo es radial hacia un pozo.

Notación

- M_D - masa del fluido en el medio poroso fractal
- D - dimensión de masa fractal
- $B(t)$ - medio poroso fractal homogéneo
- d - dimensión de la frontera $\partial B(t)$
- ρ - densidad local de la masa para un medio fractal homogéneo
- ϕ - porosidad del medio fractal
- \underline{u} - velocidad de Darcy
- \underline{k} - tensor de permeabilidad absoluta del medio poroso
- μ - viscosidad del fluido
- p - presión
- c_f - compresibilidad del fluido
- c_R - compresibilidad de la roca
- c_t - compresibilidad total

5.1.2. Modelo matemático

Aplicando la teoría de los modelos continuos fraccionales del capítulo anterior, definimos a la propiedad extensiva como la masa del fluido en el medio fractal homogéneo M_D y la propiedad intensiva como el producto de la densidad ρ por la porosidad ϕ en un medio fractal

$$M_D(t) = \int_{B(t)} \rho(\underline{x}, t) \phi(\underline{x}, t) d\mu_D \quad (5.1)$$

como hay conservación de la masa del fluido entonces la ecuación de balance global de la masa del fluido para el medio poroso fractal es

$$\frac{d}{dt} M_D(t) = 0 \quad (5.2)$$

y la ecuación diferencial fraccional de balance local es

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \nabla^D \cdot (\rho\phi\underline{v}) = 0, \quad \forall \underline{x} \in B(t) \setminus \Sigma(t) \quad (5.3)$$

como la velocidad de un fluido en un medio poroso es $\underline{u} = \phi\underline{v}$, entonces

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \nabla^D \cdot (\rho\underline{u}) = 0, \quad \forall \underline{x} \in B(t) \setminus \Sigma(t) \quad (5.4)$$

Podemos expresar el término $\partial\phi\rho/\partial t$ en una forma ampliamente utilizada en la aplicaciones de este tipo [10]. Desarrollando éste término, obtenemos que

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi\rho) = \phi \frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial\phi}{\partial t} \quad (5.5)$$

Esta ecuación está integrada por la contribución de la compresibilidad del fluido y por la contribución de la compresibilidad de la roca.

La compresibilidad del fluido c_f se define como [10]:

$$c_f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial\rho}{\partial p} \quad (5.6)$$

La compresibilidad de la roca c_R se define como [8]:

$$c_R = \frac{1}{\phi} \frac{\partial\phi}{\partial p} \quad (5.7)$$

La compresibilidad total c_t se define como [8]:

$$c_t = c_f + c_R = \frac{1}{\rho} \frac{\partial\rho}{\partial p} + \frac{1}{\phi} \frac{\partial\phi}{\partial p} \quad (5.8)$$

La densidad del fluido satisface una ecuación de estado de acuerdo con la cual la densidad del agua es una función de su presión [10]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (5.9)$$

por definición de compresibilidad del fluido (ecuación 5.6), tenemos que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = c_f \rho \frac{\partial p}{\partial t} \quad (5.10)$$

Análogamente, la porosidad de la roca satisface una ecuación de estado de acuerdo con la cual la porosidad de la roca es una función de su presión

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (5.11)$$

por definición de compresibilidad de la roca (ecuación 5.7), tenemos que

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = c_R \phi \frac{\partial p}{\partial t} \quad (5.12)$$

sustituyendo (5.10) y (5.12) en (5.5) y por definición de compresibilidad total (ecuación 5.8), tenemos que

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} = \phi \rho c_f \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \phi c_R \frac{\partial p}{\partial t} = \phi \rho (c_f + c_R) \frac{\partial p}{\partial t} = \phi \rho c_t \frac{\partial p}{\partial t} \quad (5.13)$$

sustituyendo en la ecuación (5.4) y aplicando la ley de Darcy convencional (ver apéndice A), despreciando el efecto de gravedad, obtenemos la ecuación del **modelo uno** que describe el flujo de un fluido ligeramente compresible en un medio poroso fractal.

$$\rho \phi c_t \frac{\partial p}{\partial t} = \nabla^D \cdot \left(\frac{\rho}{\mu} \underline{k} \cdot \nabla p \right), \quad \forall \underline{x} \in B(t) \setminus \Sigma(t) \quad (5.14)$$

donde ρ es la densidad del fluido, ϕ es la porosidad de la roca, c_t es la compresibilidad total, p es la presión del fluido, μ es la viscosidad del fluido y \underline{k} es el tensor de permeabilidad del medio poroso. Debido a que el operador fraccionario ∇^D involucra a $c(n, r)$, se está suponiendo que hay simetría alrededor de $r = 0$ y la presión p es slo función de r y t .

5.1.3. Implementación en COMSOL

Considerando que el cambio de densidad es ignorado, entonces la ecuación diferencial fraccional (5.14) del modelo matemático uno de flujo monofásico anómalo, a través de un medio poroso con propiedades fractales, se puede expresar como:

$$\phi c_t \frac{\partial p}{\partial t} - \nabla^D \cdot \left(\frac{1}{\mu} \underline{k} \cdot \nabla p \right) = 0 \quad (5.15)$$

Para una región en dos dimensiones, desarrollamos la divergencia fraccional en \mathbb{R}^2 (ver capítulo 4) y multiplicamos ambos lados por $c_2(D, r)$, para obtener la siguiente ecuación diferencial con una divergencia convencional

$$c_2(D, r) \phi c_t \frac{\partial p}{\partial t} - \nabla \cdot \left(c_1(d, r) \frac{1}{\mu} \underline{k} \cdot \nabla p \right) = 0 \quad (5.16)$$

Donde en notación de COMSOL (PDE, Coefficient Form):

$$e_a \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + d_a \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nabla \cdot (c \nabla \mathbf{u} + \alpha \mathbf{u} - \gamma) + \beta \cdot \nabla \mathbf{u} + a \mathbf{u} = f \quad (5.17)$$

$\mathbf{u} \equiv p$, $d_a \equiv \phi c_t c_2(D, r)$, $c \equiv c_1(d, r) \frac{1}{\mu} \underline{k}$ y $e_a = \alpha = \gamma = \beta = a = f \equiv 0$, que es la manera como se expresó en la ecuación (5.16).

El tensor de permeabilidad se puede escribir como:

$$\underline{k} = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 \\ 0 & k_{22} \end{bmatrix}$$

Condición inicial

$$p(t_0) = p_0 \quad (5.18)$$

Condiciones de frontera

En las cuatro fronteras de no flujo (1-4) (ver figura 2.6) se han implementado condiciones de frontera de tipo Neumann como a continuación:

$$\underline{n} \cdot \nabla p = 0 \quad (5.19)$$

COMSOL tiene una forma generalizada para las condiciones de frontera de tipo Neumann, que se expresa de la siguiente manera:

$$n \cdot (\nabla p + ap - \gamma) + qp = g \quad (5.20)$$

donde $a = \gamma = q = g = 0$ es como se expresaron en la ecuación (5.19).

5.1.4. Modelo uno con simetría radial

Por definición de divergencia fraccional en la ec. (5.14), obtenemos

$$\begin{aligned} \rho\phi c_t \frac{\partial p}{\partial t} &= C_n^{-1}(D, r) \nabla \cdot \left(C_{n-1}(d, r) \frac{\rho}{\mu} \underline{k} \cdot \nabla p \right) \\ &= a(D, d, n) \frac{1}{r^{D-n}} \nabla \cdot \left(r^{d-(n-1)} \frac{\rho}{\mu} \underline{k} \cdot \nabla p \right) \end{aligned} \quad (5.21)$$

donde

$$a(D, d, n) = 2^{D-d-1} \frac{\Gamma(D/2)\Gamma((n-1)/2)}{\Gamma(n/2)\Gamma(d/2)}$$

multiplicando por $a^{-1}(D, d, n)$ de ambos lados obtenemos que

$$\begin{aligned} a^{-1}(D, d, n) \rho\phi c_t \frac{\partial p}{\partial t} &= \frac{1}{r^{D-n}} \nabla \cdot \left(r^{d-(n-1)} \frac{\rho}{\mu} \underline{k} \cdot \nabla p \right) \\ &= \frac{1}{r^{D-(n-1)}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{d-(n-2)} \frac{\rho k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \right) \end{aligned} \quad (5.22)$$

Si consideramos un medio fractal en 3 dimensiones ($n = 3$) y tomamos $D = 3$ y $d = 2$, el modelo uno se reduce al modelo convencional. Si queremos obtener un modelo para un medio fractal en dos dimensiones ($n = 2$) y consideramos que el cambio de densidad es ignorado, entonces el *modelo uno* queda como sigue:

$$a^{-1} \phi c_t \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{r^{D-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^d \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \right) \quad (5.23)$$

donde $a = \sqrt{\pi} 2^{D-d-1} \Gamma(D/2) / \Gamma(d/2)$. Observemos que si tomamos $D = 2$ y $d = 1$, obtenemos el modelo convencional.

Comparación con los modelos clásicos

Modelo obtenido en esta tesis

$$a^{-1} \phi c_t \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{r^{D-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^d \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \right) \quad (5.24)$$

Ecuación de difusión en n-dimensiones

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{n-1} \frac{\partial p}{\partial r} \right) \quad (5.25)$$

En un espacio euclidiano, la dimensión de masa es n y la dimensión de su frontera es $n - 1$ con n un valor entero, desde luego $a = 1$ para estos valores enteros.

Barker [3]

$$S_{Sf} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{r^{D-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{D-1} \frac{\partial p}{\partial r} \right) \quad (5.26)$$

Este modelo es muy parecido al modelo de difusión n dimensional, pero con valores no enteros para la dimensión de masa D , y la dimensión de la frontera la dedujo como $d = D - 1$, desde luego agrega el coeficiente S_{Sf} para describir la interacción entre la porosidad del medio y las características del fluido.

O'Shaughnessy y Procaccia [17]

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{r^{D-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(K r^{D-\theta-1} \frac{\partial p}{\partial r} \right) \quad (5.27)$$

El dimensión de la frontera se puede tomar como $d = D - \theta - 1$, entonces $d \neq D - 1$ cuando $\theta \neq 0$, lo cual hace una mejor aproximación al concepto de la dimensión de la frontera. Desde luego, K denota la interacción entre las propiedades del medio y el fluido.

Chang y Yortsos [7]

$$c_f \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{m}{\mu} \frac{1}{r^{D-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{D-\theta-1} \frac{\partial p}{\partial r} \right) \quad (5.28)$$

Entre el modelo de Chang y Yortsos y el de O'Shaughnessy y Procaccia, solamente se diferencian en que las propiedades del medio y el fluido las consideran constantes. La dimensión de la frontera se puede ver al igual que en el modelo anterior como $d = D - \theta - 1$.

5.2. Modelo dos

5.2.1. Modelo conceptual

1. El flujo del fluido en el medio poroso fractal es monofásico con un componente.
2. El fluido ocupa el espacio intersticial del medio poroso fractal.
3. Se considera una ley de Darcy para medios fractales.
4. El flujo de la masa debido a la dispersión y difusión son tan pequeños con relación al flujo de la masa que se pueden despreciar.
5. La interfase fluido-sólido es una superficie material con respecto a la masa del fluido tal que ninguna masa del fluido puede cruzarla.
6. Hay conservación en la masa del fluido en el medio poroso fractal.
7. El medio poroso fractal es isótropo y el sistema de flujo es radial hacia un pozo.

Notación

- M_D - masa del fluido en el medio poroso fractal
- D - dimensión de masa fractal
- $B(t)$ - medio poroso fractal homogéneo
- d - dimensión de la frontera $\partial B(t)$
- ρ - densidad local de la masa para un medio fractal homogéneo
- ϕ - porosidad del medio fractal
- \underline{u} - velocidad de Darcy
- \underline{k} - tensor de permeabilidad absoluta del medio poroso
- μ - viscosidad del fluido
- p - presión
- c_f - compresibilidad del fluido
- c_R - compresibilidad de la roca
- c_t - compresibilidad total

5.2.2. Modelo matemático

Aplicando la teoría de los modelos continuos fraccionales del capítulo anterior, definimos a la propiedad extensiva como la masa del fluido en el medio fractal homogéneo M_D y la propiedad intensiva como el producto de la densidad ρ por la porosidad ϕ en un medio fractal

$$M_D(t) = \int_{B(t)} \rho(\underline{x}, t) \phi(\underline{x}, t) d\mu_D \quad (5.29)$$

como hay conservación de la masa del fluido entonces la ecuación de balance global de la masa del fluido para el medio poroso fractal es

$$\frac{d}{dt} M_D(t) = 0 \quad (5.30)$$

y la ecuación diferencial fraccional de balance local es

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \nabla^D \cdot (\rho\phi\underline{v}) = 0, \quad \forall \underline{x} \in B(t) \setminus \Sigma(t) \quad (5.31)$$

como la velocidad de un fluido en un medio poroso es $\underline{u} = \phi\underline{v}$, entonces

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \nabla^D \cdot (\rho\underline{u}) = 0, \quad \forall \underline{x} \in B(t) \setminus \Sigma(t) \quad (5.32)$$

Podemos expresar el término $\partial\phi\rho/\partial t$ en una forma ampliamente utilizada en la aplicaciones de este tipo [10]. Desarrollando éste término, obtenemos que

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi\rho) = \phi \frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial\phi}{\partial t} \quad (5.33)$$

Esta ecuación está integrada por la contribución de la compresibilidad del fluido y por la contribución de la compresibilidad de la roca.

La compresibilidad del fluido c_f se define como [10]:

$$c_f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial\rho}{\partial p} \quad (5.34)$$

La compresibilidad de la roca c_R se define como [8]:

$$c_R = \frac{1}{\phi} \frac{\partial\phi}{\partial p} \quad (5.35)$$

La compresibilidad total c_t se define como [8]:

$$c_t = c_f + c_R = \frac{1}{\rho} \frac{\partial\rho}{\partial p} + \frac{1}{\phi} \frac{\partial\phi}{\partial p} \quad (5.36)$$

La densidad del fluido satisface una ecuación de estado de acuerdo con la cual la densidad del agua es una función de su presión [10]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (5.37)$$

por definición de compresibilidad del fluido (5.34), tenemos que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = c_f \rho \frac{\partial p}{\partial t} \quad (5.38)$$

Análogamente, la porosidad de la roca satisface una ecuación de estado de acuerdo con la cual la porosidad de la roca es una función de su presión

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (5.39)$$

por definición de compresibilidad de la roca (5.35), tenemos que

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = c_R \phi \frac{\partial p}{\partial t} \quad (5.40)$$

sustituyendo (5.38) y (5.40) en (5.33)

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} = \phi \rho c_f \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \phi c_R \frac{\partial p}{\partial t} = \phi \rho (c_f + c_R) \frac{\partial p}{\partial t} \quad (5.41)$$

por definición de compresibilidad de total (5.36), obtenemos que

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} = \phi \rho c_t \frac{\partial p}{\partial t} \quad (5.42)$$

sustituyendo en la ecuación (5.32) y aplicando la ley de Darcy fraccional (ver apéndice B), despreciando el efecto de gravedad obtenemos la ecuación del **modelo dos** que describe el flujo de un fluido ligeramente compresible en un medio poroso fractal.

$$\rho \phi c_t \frac{\partial p}{\partial t} = \nabla^D \cdot \left(\frac{\rho}{\mu} \underline{\underline{k}} \cdot \nabla^D p \right) \quad (5.43)$$

donde ρ es la densidad del fluido, ϕ es la porosidad de la roca, c_t es la compresibilidad total, μ es la viscosidad del fluido, $\underline{\underline{k}}$ es el tensor de permeabilidad del medio poroso y p es la presión del fluido.

5.2.3. Implementación en COMSOL

Considerando que el cambio de densidad es ignorado, entonces la ecuación diferencial fraccional (5.43) del modelo matemático dos de flujo monofásico anómalo, a través de un medio poroso con propiedades fractales, se puede expresar como:

$$\phi c_t \frac{\partial p}{\partial t} - \nabla^D \cdot \left(\frac{1}{\mu} \underline{k} \cdot \nabla^D p \right) = 0 \quad (5.44)$$

Para una región en dos dimensiones, desarrollamos la divergencia fraccional en \mathbb{R}^2 (ver capítulo 4) y multiplicamos ambos lados por $c_2(D, r)$, para obtener la siguiente ecuación diferencial con una divergencia convencional

$$c_2(D, r) \phi c_t \frac{\partial p}{\partial t} - \nabla \cdot \left(c(D, d, 2, r) \frac{1}{\mu} \underline{k} \cdot \nabla (c_1(d, r)p) \right) = 0 \quad (5.45)$$

desarrollando el gradiente del producto

$$\phi c_t c_2(D, r) \frac{\partial p}{\partial t} - \nabla \cdot \left(\zeta \frac{1}{\mu} \underline{k} \cdot \nabla p + \zeta \frac{1}{\mu} \underline{k} (d-1) r^{-2} \underline{x} p \right) = 0 \quad (5.46)$$

donde $\zeta := c_2^{-1}(D, r) c_1(d, r) c_1(d, r)$.

En notación de COMSOL (PDE, Coefficient Form):

$$e_a \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + d_a \frac{\partial p}{\partial t} - \nabla \cdot (c \nabla p + \alpha p - \gamma) + \beta \cdot \nabla p + a p = f \quad (5.47)$$

donde $d_a \equiv \phi c_t c_2(D, r)$, $c \equiv \zeta \frac{1}{\mu} \underline{k}$ y $\alpha \equiv \zeta \frac{1}{\mu} \underline{k} (d-1) r^{-2} \underline{x}$ mientras que $e_a = \gamma = \beta = a = f \equiv 0$, que es como se expresó en la ecuación (5.46).

Condición inicial

$$p(t_0) = p_0 \quad (5.48)$$

Condiciones de frontera

En las cuatro fronteras de no flujo (1-4) (ver figura 2.6) se han implementado condiciones de frontera de tipo Neumann como a continuación:

$$\underline{n} \cdot \nabla p = 0 \quad (5.49)$$

COMSOL tiene una forma generalizada para las condiciones de frontera de tipo Neumann, que se expresa de la siguiente manera:

$$\underline{n} \cdot (\nabla p + a p - \gamma) + q p = g \quad (5.50)$$

donde $a = \gamma = q = g = 0$ es como se expresaron en la ecuación (5.49).

5.2.4. Modelo dos con simetría radial

Por definición de divergencia fraccional y gradiente fraccional en la ecuación (5.43) (ver capítulo 4), dado que $c_n(D, r)$ entonces para ser consistentes se debe tener simetría radial.

$$\begin{aligned} \rho \phi c_t \frac{\partial p}{\partial t} &= C_n^{-1}(D, r) \nabla \cdot \left(C_{n-1}(d, r) \frac{\rho}{\mu} \underline{k} \cdot \nabla (C_{n-1}(d, r)p) \right) \\ &= a^2(D, d, n) \frac{1}{r^{D-n}} \nabla \cdot \left(r^{d-(D-1)} \frac{\rho}{\mu} \underline{k} \cdot \nabla (r^{d-(n-1)}p) \right) \end{aligned} \quad (5.51)$$

donde

$$a(D, d, n) = 2^{D-d-1} \frac{\Gamma(D/2)\Gamma((n-1)/2)}{\Gamma(n/2)\Gamma(d/2)}$$

multiplicando por $a^{-2}(D, d, n)$ de ambos lados e ignorando el cambio de densidad

$$\begin{aligned} a^{-2}(D, d, n) \phi c_t \frac{\partial p}{\partial t} &= \frac{1}{r^{D-n}} \nabla \cdot \left(r^{d-(D-1)} \frac{1}{\mu} \underline{k} \cdot \nabla (r^{d-(D-1)}p) \right) \\ &= \frac{1}{r^{D-(n-1)}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{d-(D-2)} \frac{k}{\mu} \frac{\partial}{\partial r} (r^{d-(n-1)}p) \right) \end{aligned} \quad (5.52)$$

Si consideramos un medio fractal en 3 dimensiones ($n = 3$) y tomamos $D = 3$ y $d = 2$, el modelo dos se reduce al modelo convencional. Si queremos obtener un modelo para un medio fractal en dos dimensiones ($n = 2$), entonces el *modelo dos* queda como sigue:

$$a^{-2} \phi c_t \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{r^{D-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{d-(D-2)} \frac{k}{\mu} \frac{\partial}{\partial r} (r^{d-1}p) \right) \quad (5.53)$$

donde $a = \sqrt{\pi} 2^{D-d-1} \Gamma(D/2) / \Gamma(d/2)$.

Observemos que si tomamos $D = 2$ y $d = 1$, obtenemos el modelo convencional. En el presente modelo dos, podemos observar algunas diferencias con el modelo uno (ecuación 5.23) en los exponentes y un término nuevo, debido a que en el modelo dos se ha aplicado la ley de Darcy para medios fractales, la cual impone un gradiente fraccional a la presión.

5.3. Modelo tres

5.3.1. Modelo conceptual

1. El flujo del fluido en el medio poroso fractal es monofásico con un componente.
2. El fluido ocupa el espacio intersticial del medio poroso fractal.
3. Se considera la ley de Darcy convencional.
4. El flujo de la masa debido a la dispersión y difusión son tan pequeños con relación al flujo de la masa que se pueden despreciar.
5. La interfase fluido-sólido es una superficie material con respecto a la masa del fluido tal que ninguna masa del fluido puede cruzarla.
6. Hay conservación en la masa del fluido en el medio poroso fractal.
7. El medio poroso fractal es anisótropo y el sistema de flujo es hacia un pozo.

Notación

- M_D - masa del fluido en el medio poroso fractal
- D - dimensión de masa fractal
- $B(t)$ - medio poroso fractal homogéneo
- d - dimensión de la frontera $\partial B(t)$
- ρ - densidad local de la masa para un medio fractal homogéneo
- ϕ - porosidad del medio fractal
- \underline{u} - velocidad de Darcy
- \underline{k} - tensor de permeabilidad absoluta del medio poroso
- μ - viscosidad del fluido
- p - presión
- c_f - compresibilidad del fluido
- c_R - compresibilidad de la roca
- c_t - compresibilidad total

5.3.2. Modelo matemático

Aplicando la teoría de los modelos continuos fraccionales para medios anisótropos, definimos a la propiedad extensiva como la masa del fluido en el medio fractal homogéneo M_D y la propiedad intensiva como el producto de la densidad ρ por la porosidad ϕ en un medio fractal

$$M_D(t) = \int_{B(t)} \rho(\underline{x}, t) \phi(\underline{x}, t) d\mu_D \quad (5.54)$$

como hay conservación de la masa del fluido entonces la ecuación de balance global de la masa del fluido para el medio poroso fractal es

$$\frac{d}{dt} M_D(t) = 0 \quad (5.55)$$

y la ecuación diferencial fraccional de balance local es

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \nabla \cdot (\rho\phi\underline{v}) = 0, \quad \forall \underline{x} \in B(t) \setminus \Sigma(t) \quad (5.56)$$

como la velocidad de un fluido en un medio poroso es $\underline{u} = \phi\underline{v}$, entonces

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \nabla \cdot (\rho\underline{u}) = 0, \quad \forall \underline{x} \in B(t) \setminus \Sigma(t) \quad (5.57)$$

Podemos expresar el término $\partial\phi\rho/\partial t$ en una forma ampliamente utilizada en la aplicaciones de este tipo [10]. Desarrollando éste término, obtenemos que

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi\rho) = \phi \frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial\phi}{\partial t} \quad (5.58)$$

Esta ecuación está integrada por la contribución de la compresibilidad del fluido y por la contribución de la compresibilidad de la roca.

La compresibilidad del fluido c_f se define como [10]:

$$c_f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial\rho}{\partial p} \quad (5.59)$$

La compresibilidad de la roca c_R se define como [8]:

$$c_R = \frac{1}{\phi} \frac{\partial\phi}{\partial p} \quad (5.60)$$

La compresibilidad total c_t se define como [8]:

$$c_t = c_f + c_R = \frac{1}{\rho} \frac{\partial\rho}{\partial p} + \frac{1}{\phi} \frac{\partial\phi}{\partial p} \quad (5.61)$$

La densidad del fluido satisface una ecuación de estado de acuerdo con la cual la densidad del agua es una función de su presión [10]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (5.62)$$

por definición de compresibilidad del fluido (ecuación 5.59), tenemos que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = c_f \rho \frac{\partial p}{\partial t} \quad (5.63)$$

Análogamente, la porosidad de la roca satisface una ecuación de estado de acuerdo con la cual la porosidad de la roca es una función de su presión

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (5.64)$$

por definición de compresibilidad de la roca (ecuación 5.60), tenemos que

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = c_R \phi \frac{\partial p}{\partial t} \quad (5.65)$$

sustituyendo (5.63) y (5.65) en (5.58) y por definición de compresibilidad total (ecuación 5.61), tenemos que

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} = \phi \rho c_f \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \phi c_R \frac{\partial p}{\partial t} = \phi \rho (c_f + c_R) \frac{\partial p}{\partial t} = \phi \rho c_t \frac{\partial p}{\partial t} \quad (5.66)$$

sustituyendo en la ecuación (5.57) y aplicando la ley de Darcy fractal para medios anisótropos (ver apéndice C), despreciando el efecto de gravedad, obtenemos **el modelo de flujo monofásico fractal anisótropo** que describe el flujo de un fluido en un medio poroso fractal anisótropo.

$$\rho \phi c_t \frac{\partial p}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\frac{\rho}{\mu} \underline{k} \cdot \nabla^D p \right), \quad \forall \underline{x} \in B(t) \setminus \Sigma(t) \quad (5.67)$$

donde ρ es la densidad del fluido, ϕ es la porosidad de la roca, c_t es la compresibilidad total, p es la presión del fluido, μ es la viscosidad del fluido y \underline{k} es el tensor de permeabilidad del medio poroso.

5.3.3. Implementación en COMSOL

Considerando que el cambio de densidad es ignorado, entonces la ecuación diferencial fraccional (5.67) del modelo matemático de flujo monofásico anómalo, a través de un medio poroso anisótropo con propiedades fractales, se puede expresar como:

$$\phi c_t \frac{\partial p}{\partial t} - \nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu} \underline{k} \cdot \nabla^D p \right) = 0 \quad (5.68)$$

donde en notación de COMSOL (PDE, Coefficient Form):

$$e_a \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + d_a \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nabla \cdot (c \nabla \mathbf{u} + \alpha \mathbf{u} - \gamma) + \beta \cdot \nabla \mathbf{u} + a \mathbf{u} = f \quad (5.69)$$

$$\mathbf{u} \equiv p, \quad d_a \equiv \phi c_t, \quad c \equiv \underline{k} \quad y \quad e_a = \alpha = \gamma = \beta = a = f \equiv 0$$

y el tensor de permeabilidad se puede escribir como:

$$\underline{k} = \begin{bmatrix} k_{11}/c_1^{(1)} & 0 \\ 0 & k_{22}/c_1^{(2)} \end{bmatrix}$$

que es la manera como se expresó en la ecuación (5.68).

Condición inicial

$$p(t_0) = p_0 \quad (5.70)$$

Condiciones de frontera

En las cuatro fronteras de no flujo (1-4) (ver figura 2.6) se han implementado condiciones de frontera de tipo Neumann como a continuación:

$$\underline{n} \cdot \nabla p = 0 \quad (5.71)$$

COMSOL tiene una forma generalizada para las condiciones de frontera de tipo Neumann, que se expresa de la siguiente manera:

$$n \cdot (\nabla p + ap - \gamma) + qp = g \quad (5.72)$$

donde $a = \gamma = q = g = 0$ es como se expresaron en la ecuación (5.71).

Capítulo 6

Simulaciones Numéricas y Análisis de Resultados

6.1. Simulaciones del modelo uno

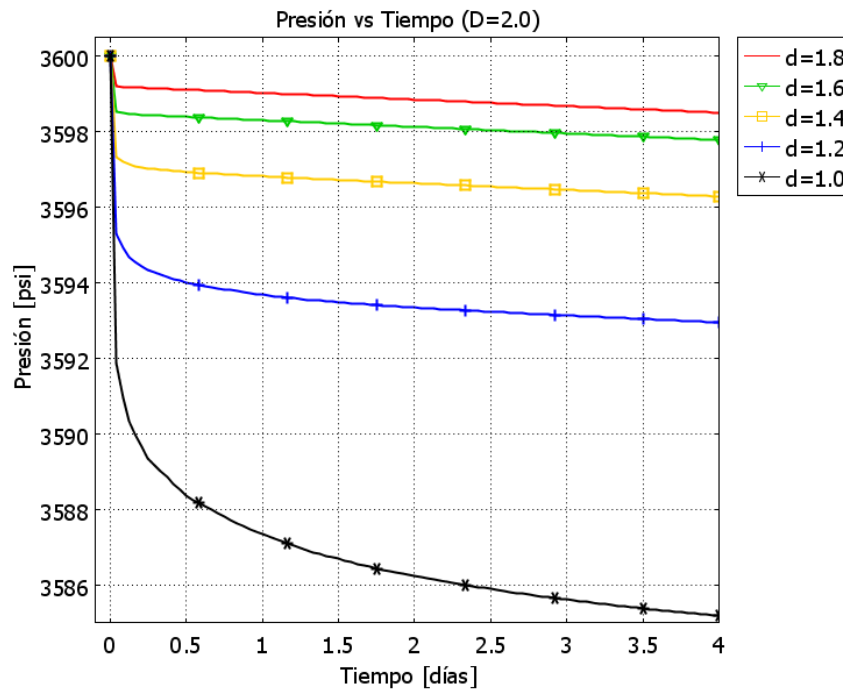


Figura 6.1: Presión en el pozo durante 4 días, para distintos valores de la dimensión de la frontera ($1 \leq d < 2$), mientras que la dimensión de masa fractal se mantiene fija en $D = 2$ y la presión inicial es $p_0 = 3600$ [psi]. Se compara con el modelo convencional donde la dimensión de masa fractal $D = 2$ y la dimensión de la frontera $d = 1$.

En la figura (6.1), observamos que la presión en el pozo es menor, produciendo en una menor cantidad, conforme el valor de la dimensión de la frontera (d) aumenta y se aproxima al valor de la dimensión de masa fractal (D), esto se puede interpretar como que la conectividad del medio crece con el valor de la dimensión de la frontera (d).

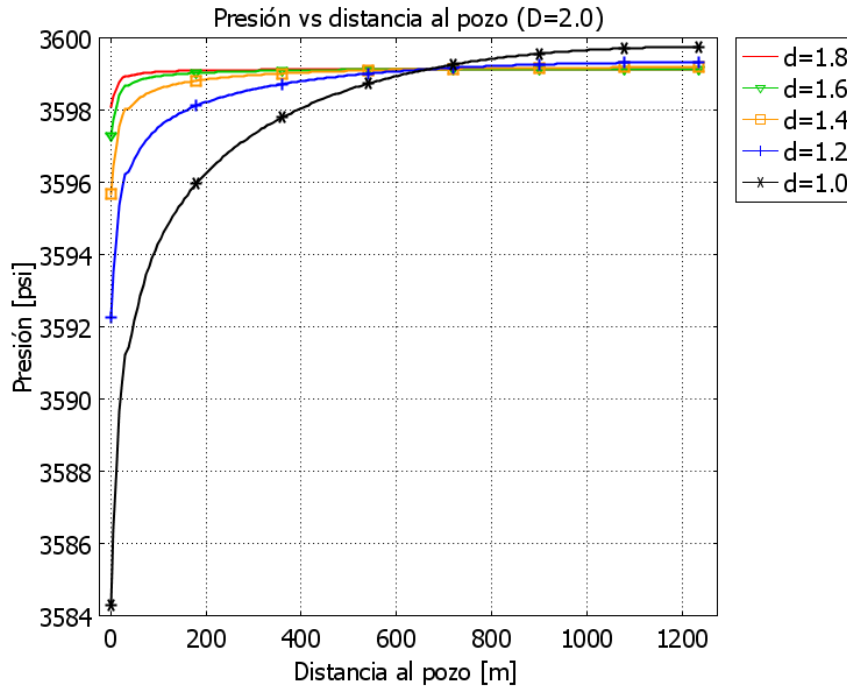


Figura 6.2: Comportamiento de la presión vs. distancia al pozo en el yacimiento al día cuatro, para distintos valores de la dimensión de la frontera ($1 < d < 2$), mientras que la dimensión de masa fractal se mantiene fija en $D = 2$. Se muestra el comportamiento de la presión vs. distancia al pozo del modelo convencional ($D = 2$ y $d = 1$).

En la figura (6.2), observamos que si la dimensión de la frontera (d) aumenta y se aproxima a la dimensión de masa fractal $D = 2$, la presión se estabiliza a una menor distancia al pozo, aproximándose a la presión inicial a una mayor distancia; por otro lado, si la dimensión de la frontera disminuye y se aleja de la dimensión de masa fractal $D = 2$, la presión se estabiliza a una mayor distancia al pozo y se aproxima a la presión inicial a una menor distancia, provocando que se observe un punto de cruce donde independientemente del valor de la dimensión de la frontera (d), la presión es la misma a una distancia de $700[m]$ aproximadamente.

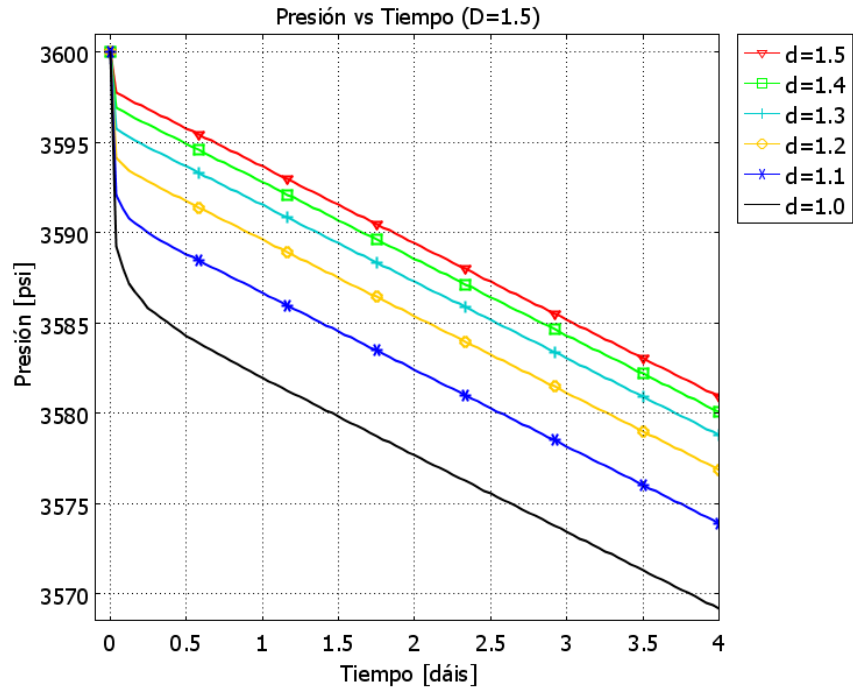


Figura 6.3: Presión en el pozo durante 4 días, para distintos valores de la dimensión de la frontera ($1 \leq d \leq 1.5$), mientras que la dimensión de masa fractal se mantiene fija en $D = 1.5$ y la presión inicial es $p_0 = 3600[psi]$.

En la figura (6.3), observamos que la presión en el pozo decae linealmente en el tiempo con la misma pendiente para cualquier valor de la dimensión de la frontera (d). Conforme el valor de la dimensión de la frontera (d) aumenta y se aproxima al valor de la dimensión de masa fractal (D), la caída de presión es menor, produciendo en una menor cantidad.

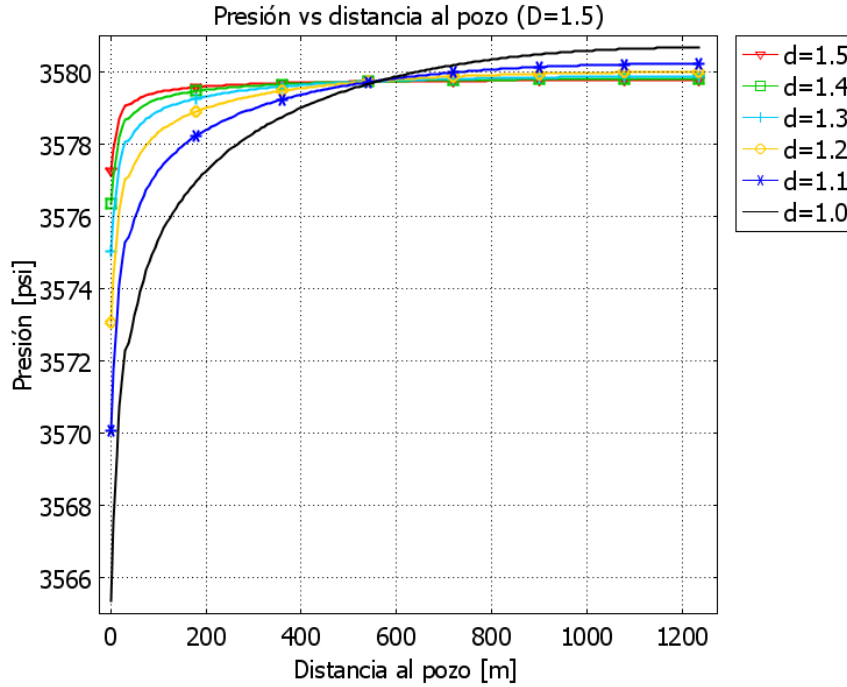


Figura 6.4: Presión vs. distancia al pozo en el yacimiento al día cuatro, para distintos valores de la dimensión de la frontera ($1 \leq d \leq 1.5$), mientras que la dimensión de masa fractal se mantiene fija en $D = 1.5$.

En la figura (6.4), observamos que si la dimensión de la frontera (d) aumenta y se aproxima al valor de la dimensión de masa fractal $D = 1.5$, la presión se estabiliza a una menor distancia al pozo, pero se aproxima a la presión inicial a una mayor distancia; por otro lado, si la dimensión de la frontera disminuye y se aleja de la dimensión de masa fractal $D = 1.5$, la presión se estabiliza a una mayor distancia al pozo y se aproxima a la presión inicial a una menor distancia, provocando que se observe un punto de cruce donde independientemente del valor de la dimensión de la frontera (d), la presión es la misma a una distancia de 550[m] aproximadamente.

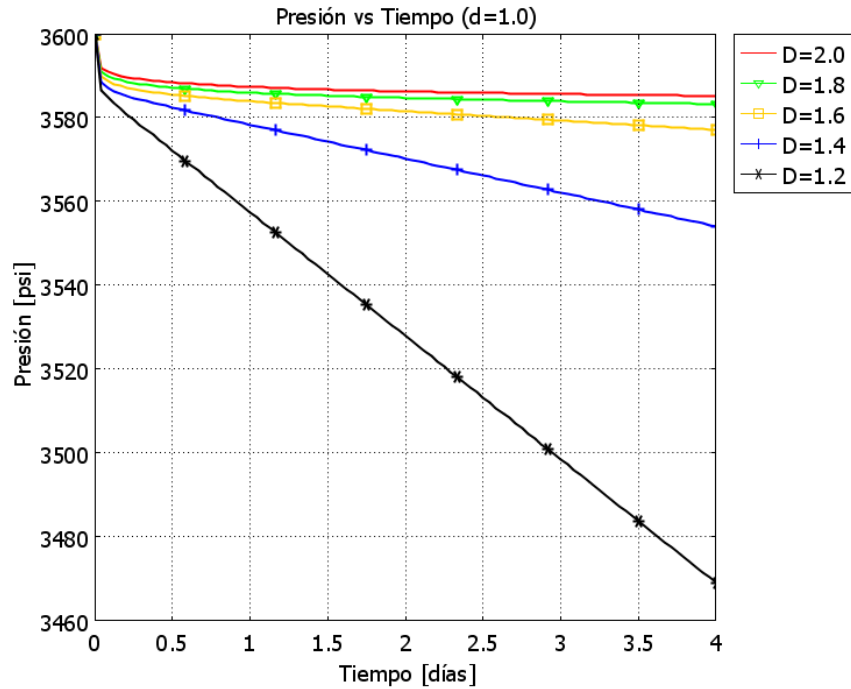


Figura 6.5: Presión en el pozo durante 4 días, para distintos valores de la dimensión de masa fractal ($1 < D < 2$), mientras que la dimensión de la frontera se mantiene fija en $d = 1$ y la presión inicial es $p_0 = 3600$ [psi]. Se compara con el modelo convencional ($D = 2$ y $d = 1$).

En la figura (6.5), observamos que la caída de la presión en el pozo es mayor, produciendo en una mayor cantidad, conforme el valor de la dimensión de masa fractal (D) disminuye y se aproxima al valor de la dimensión de la frontera (d), esto se puede interpretar como que la conectividad del medio disminuye con el valor de la dimensión de masa fractal (D). La presión en el pozo decae linealmente en el tiempo en curvas que se estabilizan en rectas con distinta pendiente para cada valor de la dimensión de masa fractal (D).

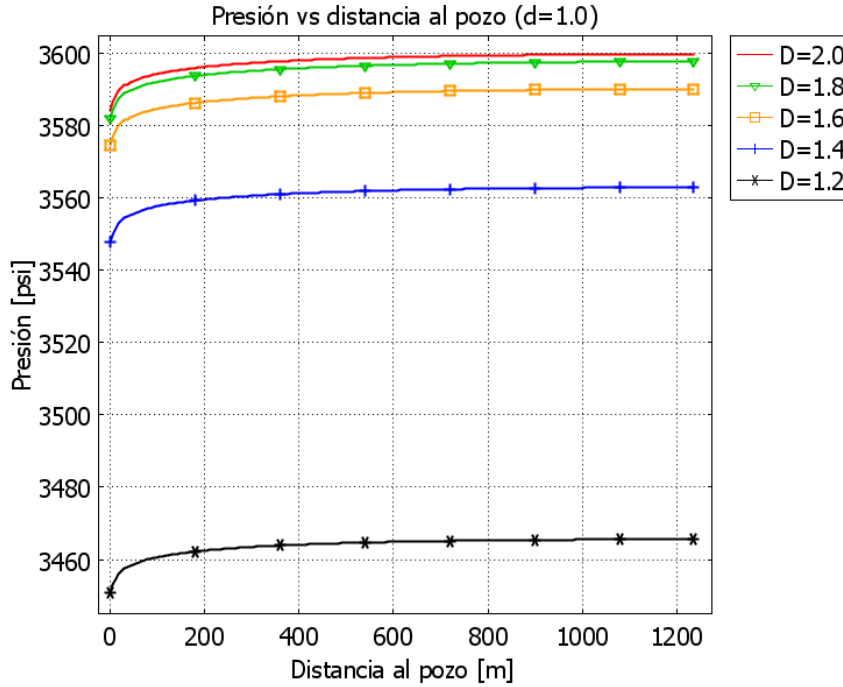


Figura 6.6: Comportamiento de la presión vs. distancia al pozo en el yacimiento al día cuatro, para distintos valores de la dimensión de masa fractal ($1 < D < 2$), mientras que la dimensión de la frontera se mantiene fija en $d = 1$. Se hace la comparación con el modelo convencional ($D = 2$ y $d = 1$).

En la figura (6.6), observamos que cuando el valor de la dimensión de masa fractal (D) disminuye y se aproxima al valor de la dimensión de la frontera que está fijo en $d = 1$, la presión en el yacimiento alrededor del pozo, se estabiliza casi de la misma manera para cualquier valor de la dimensión de masa fractal (D), de hecho, la forma de la curva es casi la misma, sólo que está movida verticalmente y se aproxima a la presión inicial a una mayor distancia al pozo.

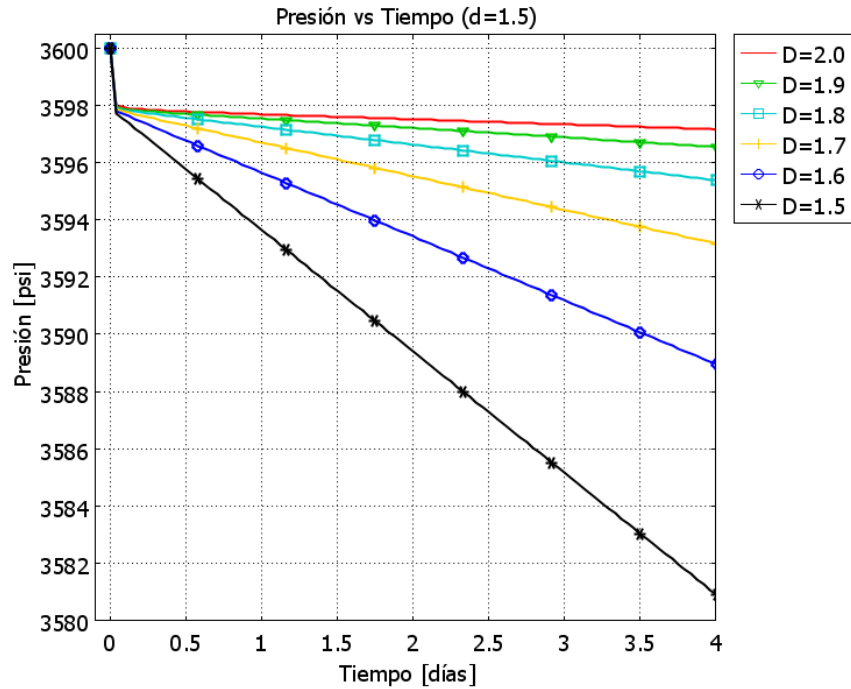


Figura 6.7: Presión en el pozo durante 4 días, para distintos valores de la dimensión de masa fractal ($1.5 \leq D \leq 2$), mientras que la dimensión de la frontera se mantiene fija en $d = 1.5$ y la presión inicial es $p_0 = 3600$ [psi].

En la figura (6.7), observamos que la presión en el pozo es mayor, produciendo en una mayor cantidad, conforme el valor de la dimensión de masa fractal (D) disminuye y se aproxima al valor de la dimensión de la frontera (d), esto se puede interpretar como que la conectividad del medio disminuye con el valor de la dimensión de masa fractal (D). La presión en el pozo decae linealmente en el tiempo en curvas que se estabilizan en rectas con distinta pendiente para cada valor de la dimensión de masa fractal (D).

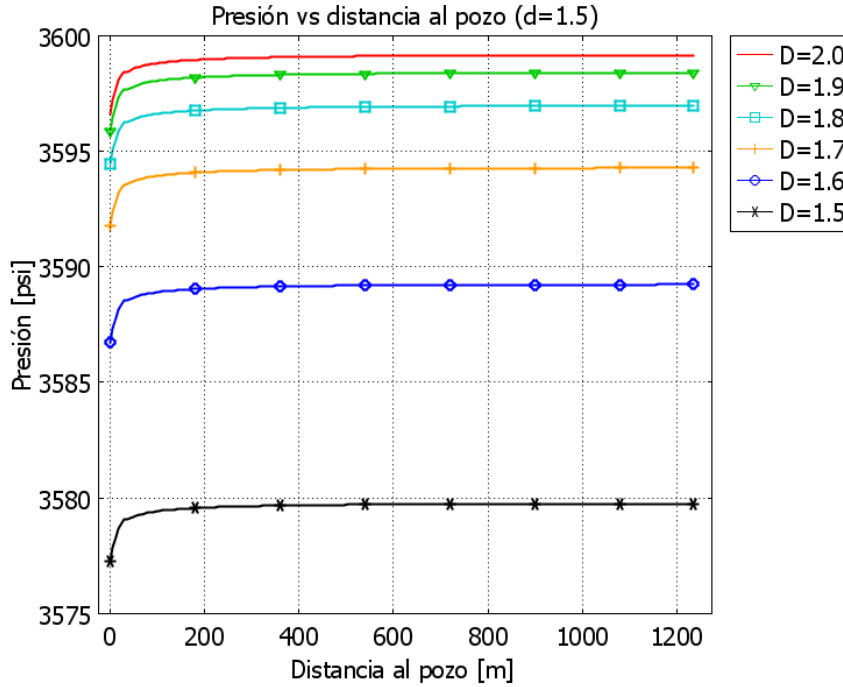


Figura 6.8: Comportamiento de la presión vs. distancia al pozo en el yacimiento al día cuatro, para distintos valores de la dimensión de masa fractal ($1.5 \leq D \leq 2$), mientras que la dimensión de la frontera se mantiene fija en $d = 1.5$.

En la figura (6.8), observamos que cuando el valor de la dimensión de masa fractal (D) disminuye y se aproxima al valor de la dimensión de la frontera que está fija en $d = 1.5$, la presión en el yacimiento alrededor del pozo, se estabiliza casi de la misma manera para cualquier valor de la dimensión de masa fractal (D), de hecho, la forma de la curva es casi la misma, sólo que está movida verticalmente y se aproxima a la presión inicial a una mayor distancia al pozo.

6.2. Simulaciones del modelo dos

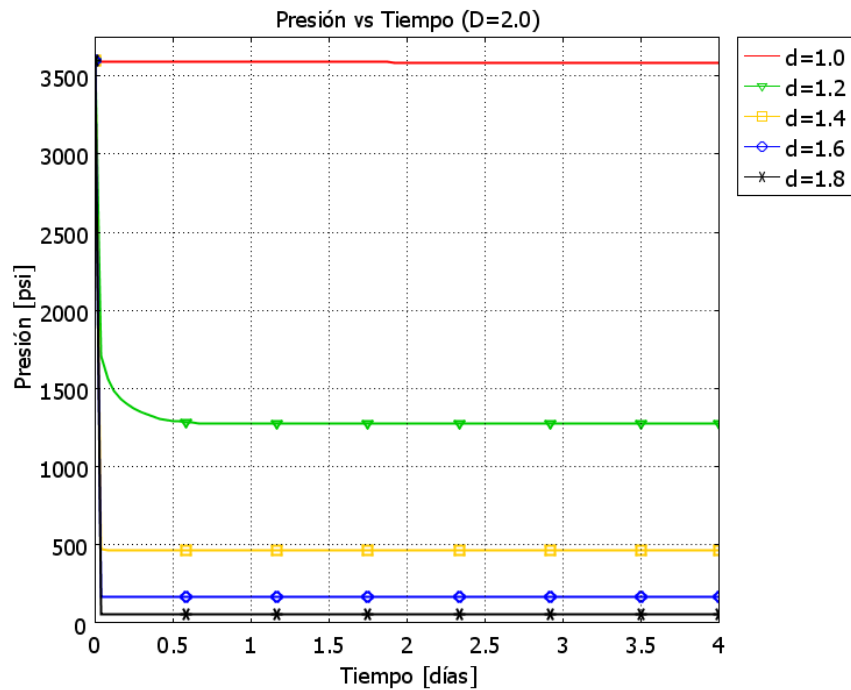


Figura 6.9: Presión en el pozo durante 4 días, para distintos valores de la dimensión de la frontera ($1 < d < 2$), mientras dimensión de masa fractal se mantiene fija en $D = 2$ y la presión inicial es $p_0 = 3600$ [psi]. Se hace la comparación con el modelo convencional ($D = 2$ y $d = 1$).

En la figura (6.9), observamos que la caída de presión en el pozo es mayor, produciendo en una mayor cantidad, conforme el valor de la dimensión de la frontera (d) aumenta y se aproxima al valor de la dimensión de masa fractal (D). La presión en el pozo decae linealmente en el tiempo en curvas que se estabilizan en rectas casi horizontales sólo que están movidas verticalmente.

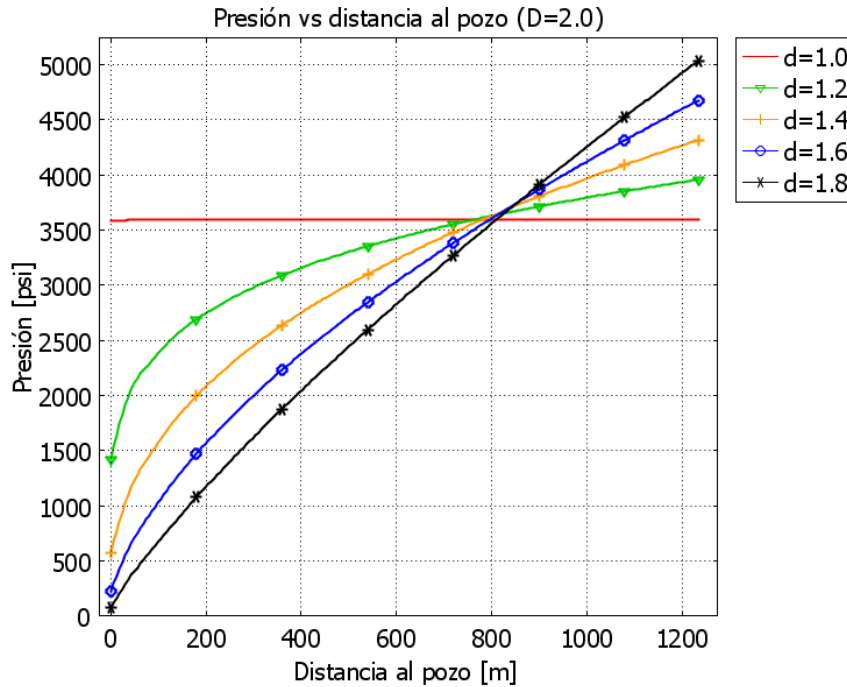


Figura 6.10: Comportamiento de la presión vs. distancia al pozo en el yacimiento al día cuatro, para distintos valores de la dimensión de la frontera ($1 < d < 2$), mientras que la dimensión de masa fractal se mantiene fija en $D = 2$. Se hace la comparación con el modelo convencional ($D = 2$ y $d = 1$).

En la figura (6.10), observamos que cuando la dimensión de la frontera (d) aumenta y se aproxima a la dimensión de masa fractal $D = 2$, la presión en el yacimiento alrededor del pozo se estabiliza a una mayor distancia al pozo; por otro lado, conforme la dimensión de la frontera (d) disminuye y se aleja de la dimensión de masa fractal $D = 2$, la presión en el yacimiento alrededor del pozo, se estabiliza a una menor distancia al pozo. La presión en el yacimiento rebasa a la presión inicial a una distancia al pozo de $800[m]$ aproximadamente independientemente del valor de la dimensión de la frontera (d).

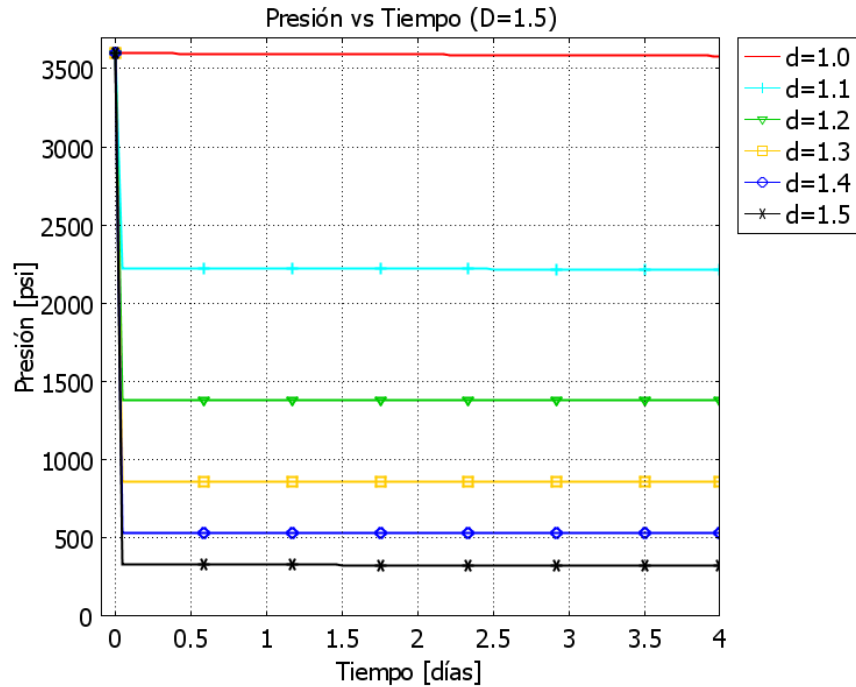


Figura 6.11: Presión en el pozo durante 4 días, para distintos valores de la dimensión de la frontera ($1 \leq d \leq 1.5$), mientras que la dimensión de masa fractal se mantiene fija en $D = 1.5$ y la presión inicial es $p_0 = 3600$ [psi].

En la figura (6.11), observamos que la presión en el pozo es mayor, produciendo en una mayor cantidad, conforme el valor de la dimensión de la frontera (d) aumenta y se aproxima al valor de la dimensión de masa fractal (D). La presión en el pozo decae linealmente en el tiempo en curvas que se estabilizan en rectas casi horizontales sólo que están movidas verticalmente.

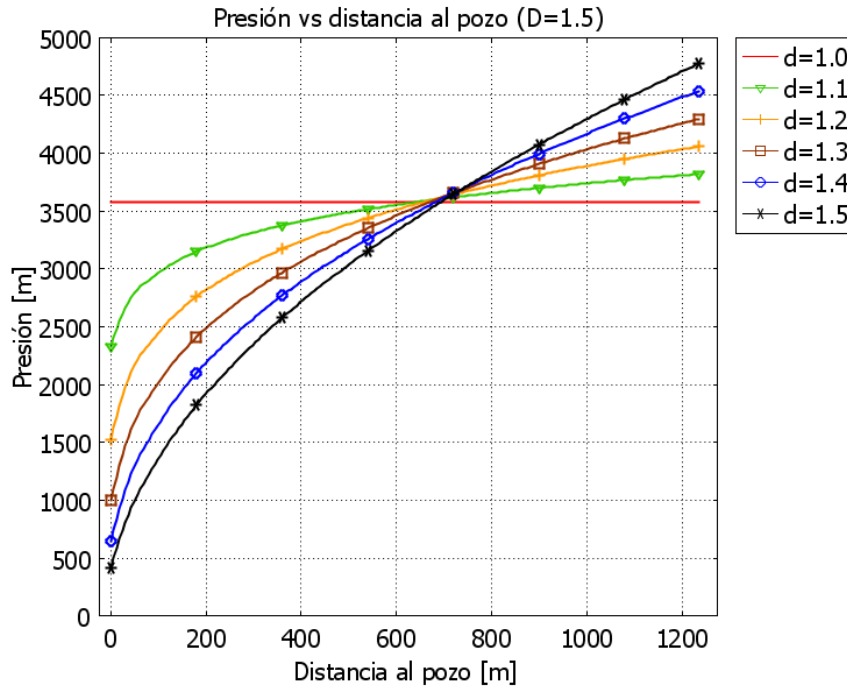


Figura 6.12: Comportamiento de la presión vs. distancia al pozo en el yacimiento al día cuatro, para distintos valores de la dimensión de la frontera ($1 \leq d \leq 1.5$), mientras que la dimensión de masa fractal se mantiene fija en $D = 1.5$.

En la figura (6.12), observamos que cuando la dimensión de la frontera (d) aumenta y se aproxima a la dimensión de masa fractal $D = 1.5$, la presión se estabiliza a una mayor distancia al pozo; por otro lado, conforme la dimensión de la frontera (d) disminuye y se aleja de la dimensión de masa fractal $D = 1.5$, la presión en el yacimiento alrededor del pozo, se estabiliza a una menor distancia. La presión en el yacimiento rebasa a la presión inicial a una distancia al pozo de $700[m]$ aproximadamente independientemente del valor de la dimensión de la frontera (d).

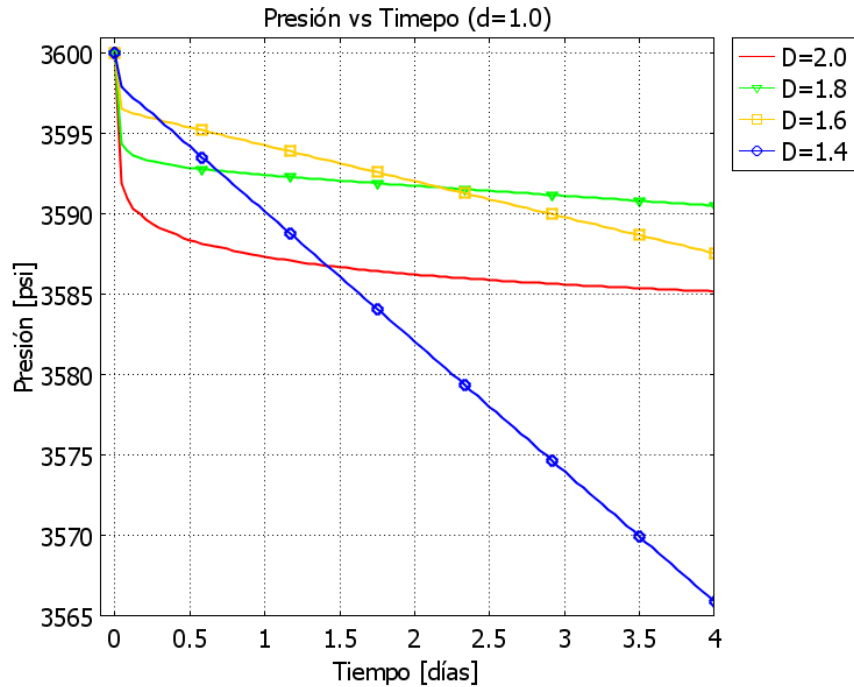


Figura 6.13: Presión en el pozo durante 4 días, para distintos valores de la dimensión de masa fractal ($1 < D < 2$), mientras que la dimensión de la frontera se mantiene fija en $d = 1$ y la presión inicial es $p_0 = 3600$ [psi]. Se hace la comparación con el modelo convencional ($D = 2$ y $d = 1$).

En la figura (6.13), observamos que la presión es mayor, produciendo en una mayor cantidad, conforme el valor de la dimensión de masa fractal (D) disminuye y se aproxima al valor de la dimensión de la frontera (d), esto se puede interpretar como que la conectividad del medio disminuye con el valor de la dimensión de masa fractal (D). La presión en el pozo decae linealmente en el tiempo en curvas que se estabilizan en rectas con distinta pendiente para cada valor de la dimensión de masa fractal (D).

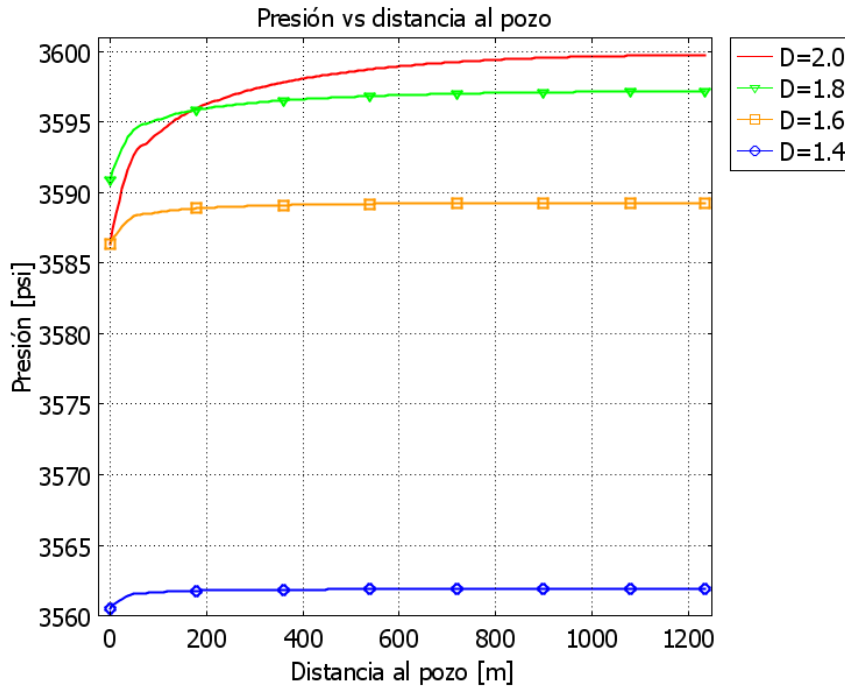


Figura 6.14: Comportamiento de la presión vs. distancia al pozo en el yacimiento al día cuatro, para distintos valores de la dimensión de masa fractal ($1 < D < 2$), mientras que la dimensión de frontera se mantiene fija en $d = 1$. Se hace la comparación con el modelo convencional ($D = 2$ y $d = 1$).

En la figura (6.14), observamos que cuando el valor de la dimensión de masa fractal (D) disminuye y se aproxima al valor de la dimensión de la frontera que está fija en $d = 1$, la presión en el yacimiento alrededor del pozo, se estabiliza más rápido, pero se aproxima a la presión inicial a una mayor distancia al pozo. Si el valor de la dimensión de masa fractal (D) aumenta y se aleja del valor de la dimensión de la frontera que está fija en $d = 1$, la presión que existe en el yacimiento alrededor del pozo se aproxima a la presión inicial en una menor distancia al pozo y la forma de la curva es casi la misma, sólo que está movida verticalmente.

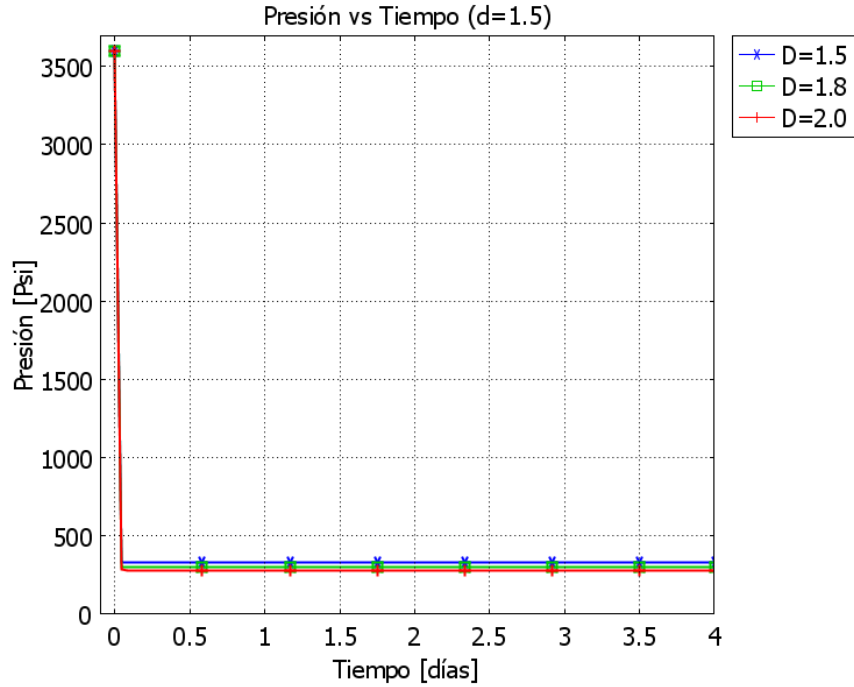


Figura 6.15: Presión en el pozo durante 4 días, para distintos valores de la dimensión de masa fractal ($1.5 \leq D \leq 2$), mientras que la dimensión de la frontera se mantiene fija en $d = 1.5$ y la presión inicial es $p_0 = 3600$ [psi].

En la figura (6.15), observamos que la presión en el pozo es ligeramente mayor, produciendo en una mayor cantidad, aunque sin mucha diferencia, conforme el valor de la dimensión de masa fractal (D) aumenta y se aleja del valor de la dimensión de la frontera (d). La presión en el pozo decae linealmente en el tiempo en curvas muy cercanas que se estabilizan en rectas casi horizontales sólo que están movidas verticalmente.

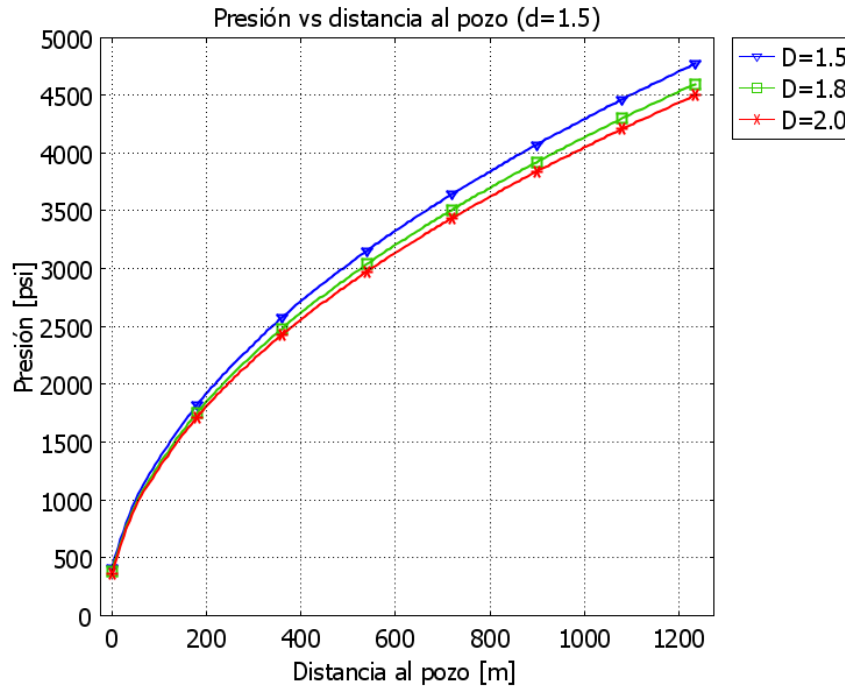


Figura 6.16: Comportamiento de la presión vs. distancia al pozo en el yacimiento al día cuatro, para distintos valores de la dimensión de masa fractal ($1.5 \leq D \leq 2$), mientras que la dimensión de la frontera se mantiene fija en $d = 1.5$.

En la figura (6.16), observamos que cuando el valor de la dimensión de masa fractal (D) disminuye y se aproxima al valor de la dimensión de la frontera $d = 1.5$, la presión en el yacimiento alrededor del pozo rebasa la presión inicial a una menor distancia al pozo. Conforme el valor de la dimensión de masa fractal (D) aumenta y se aleja del valor de la dimensión de la frontera en $d = 1.5$, la presión que existe en el yacimiento alrededor del pozo, se estabiliza a una menor distancia al pozo.

6.3. Simulaciones del modelo tres

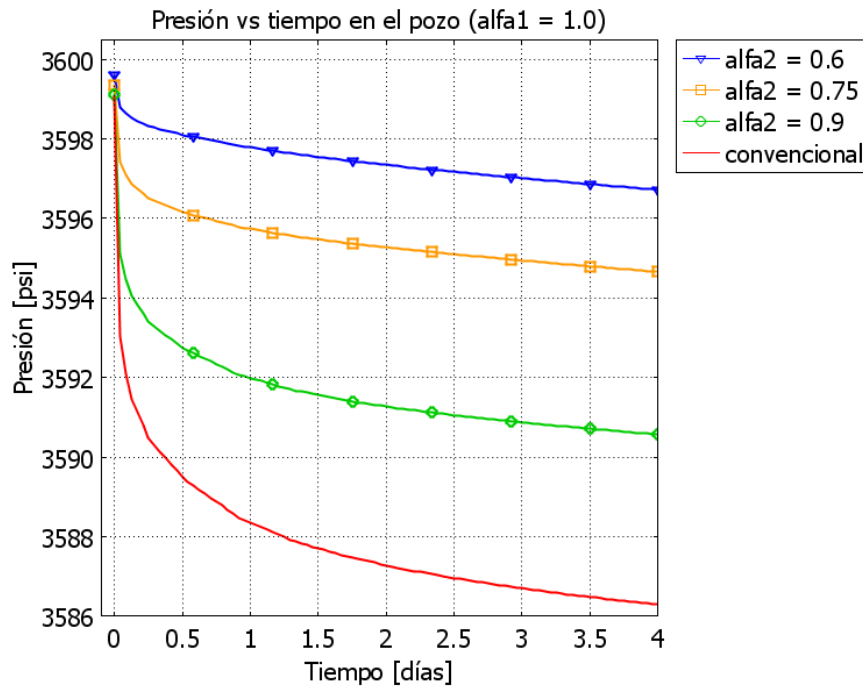


Figura 6.17: Presión en el pozo durante 4 días, para distintos valores de α_2 , mientras $\alpha_1 = 1.0$ y la presión inicial es $p_0 = 3600[psi]$. Se hace la comparación con el modelo convencional donde $\alpha_1 = 1 = \alpha_2$

En la figura (6.17), se observa que la presión en el pozo decae linealmente en el tiempo. La presión es mayor, produciendo en una mayor cantidad conforme el valor de la dimensión fractal de masa $D = \alpha_1 + \alpha_2$ aumenta y se aproxima al valor de la dimensión Euclidiana $D = 2$, esto se puede interpretar como que la conectividad del medio decrece conforme el valor de la dimensión fractal de masa aumenta. La presión es menor que la obtenida por el modelo convencional.

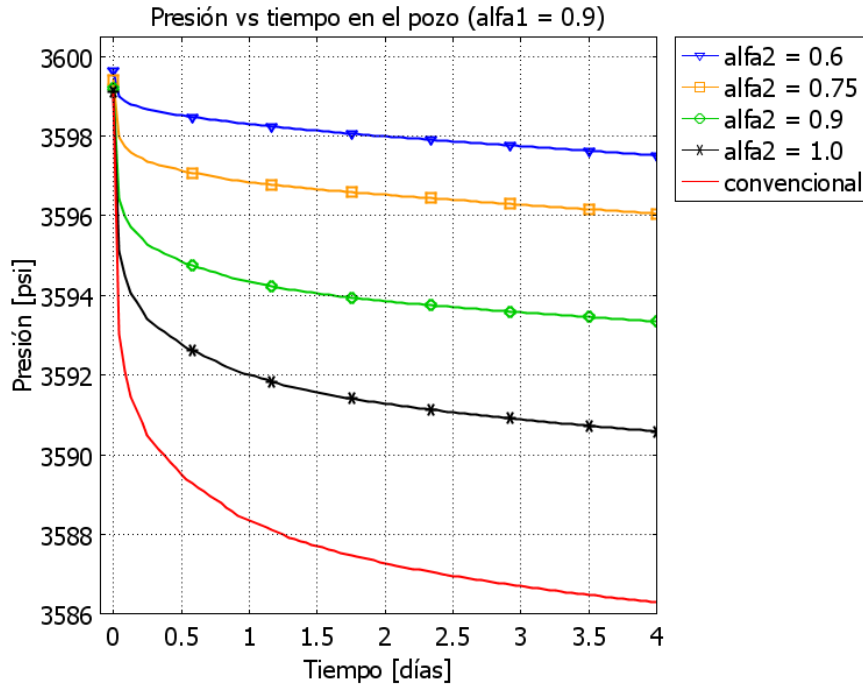


Figura 6.18: Presión en el pozo durante 4 días, para distintos valores de α_2 , mientras $\alpha_1 = 0.9$ y la presión inicial es $p_0 = 3600[psi]$. Se hace la comparación con el modelo convencional donde $\alpha_1 = 1 = \alpha_2$

En la figura (6.18), se observa que la presión es mayor, produciendo en una mayor cantidad conforme el valor de la dimensión fractal de masa $D = \alpha_1 + \alpha_2$ aumenta, esto se puede interpretar como que la conectividad del medio decrece conforme el valor de la dimensión fractal de masa aumenta. La presión en el pozo decae linealmente en el tiempo y es menor que la obtenida por el modelo convencional.

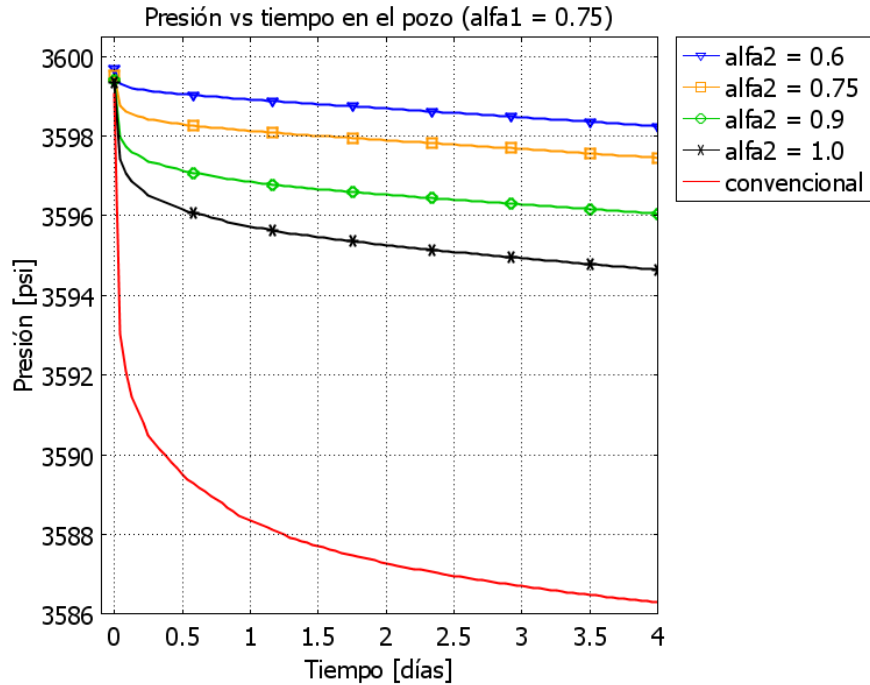


Figura 6.19: Presión en el pozo durante 4 días, para distintos valores de α_2 , mientras $\alpha_1 = 0.75$ y la presión inicial es $p_0 = 3600[psi]$. Se hace la comparación con el modelo convencional donde $\alpha_1 = 1 = \alpha_2$

En la figura (6.19) se observa que la presión decae linealmente en el tiempo y es menor que la obtenida por el modelo convencional. Conforme el valor de la dimensión fractal de masa $D = \alpha_1 + \alpha_2$ aumenta, la presión es mayor, produciendo en una mayor cantidad, lo cual se puede interpretar como que la conectividad del medio decrece conforme el valor de la dimensión fractal de masa aumenta.

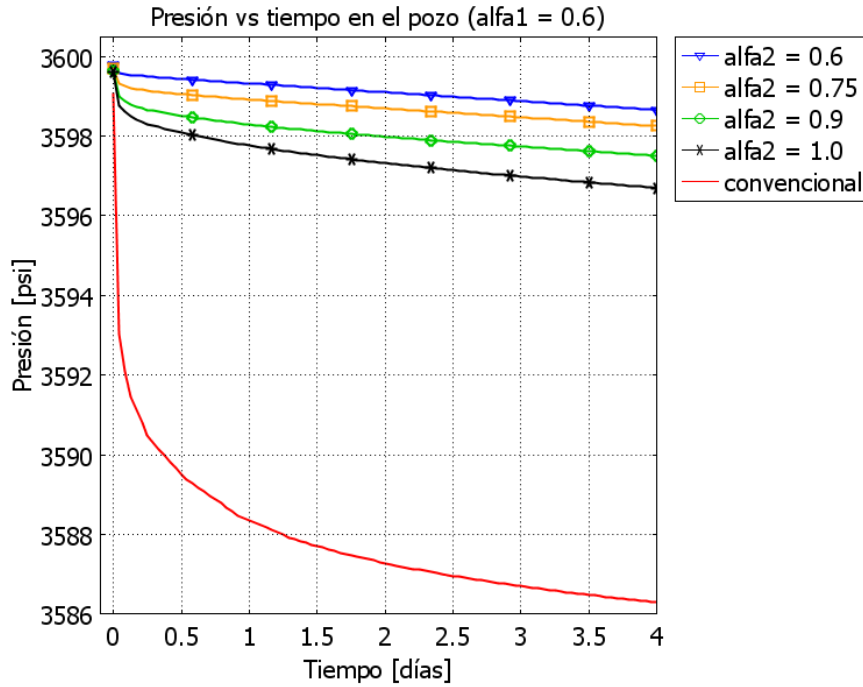


Figura 6.20: Presión en el pozo durante 4 días, para distintos valores de α_2 , mientras $\alpha_1 = 0.6$ y la presión inicial es $p_0 = 3600[psi]$. Se compara con el modelo convencional ($\alpha_1 = 1 = \alpha_2$).

En la figura (6.20) se observa que conforme el valor de la dimensión fractal de masa $D = \alpha_1 + \alpha_2$ aumenta, la caída de la presión es mayor, produciendo en una mayor cantidad, lo cual se puede interpretar como que la conectividad del medio decrece conforme el valor de la dimensión fractal de masa aumenta. La presión en el pozo decae linealmente en el tiempo y es menor que la obtenida con el modelo convencional.

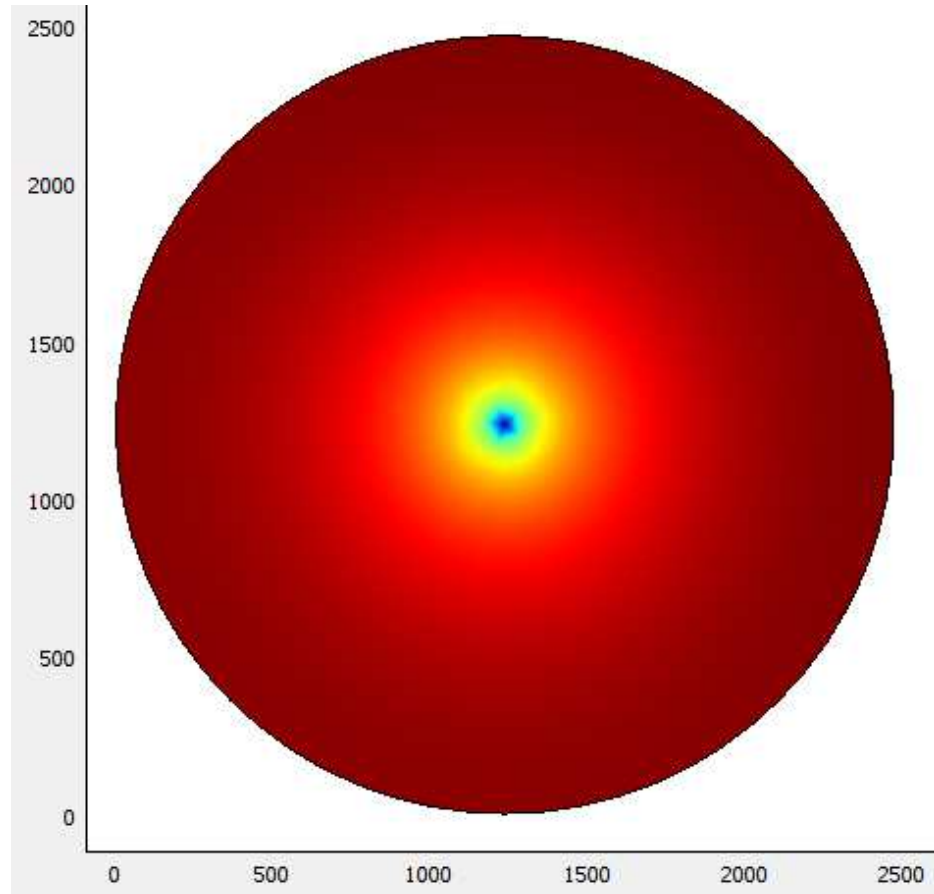


Figura 6.21: Solución en la malla con $\alpha_1 = 0.9$ y $\alpha_2 = 0.9$.

En la figura (6.21), se muestra el comportamiento de la presión en el yacimiento cuando la dimensión fractal de masa $D = 1.8$ y $\alpha_1 = 0.9 = \alpha_2$ debido a que el medio fractal es isótropo. Podemos observar que hay cierta simetría alrededor del pozo y se puede apreciar mejor que el comportamiento de la presión en el yacimiento es muy diferente a la presión en el yacimiento del modelo de flujo convencional (figura 2.7).

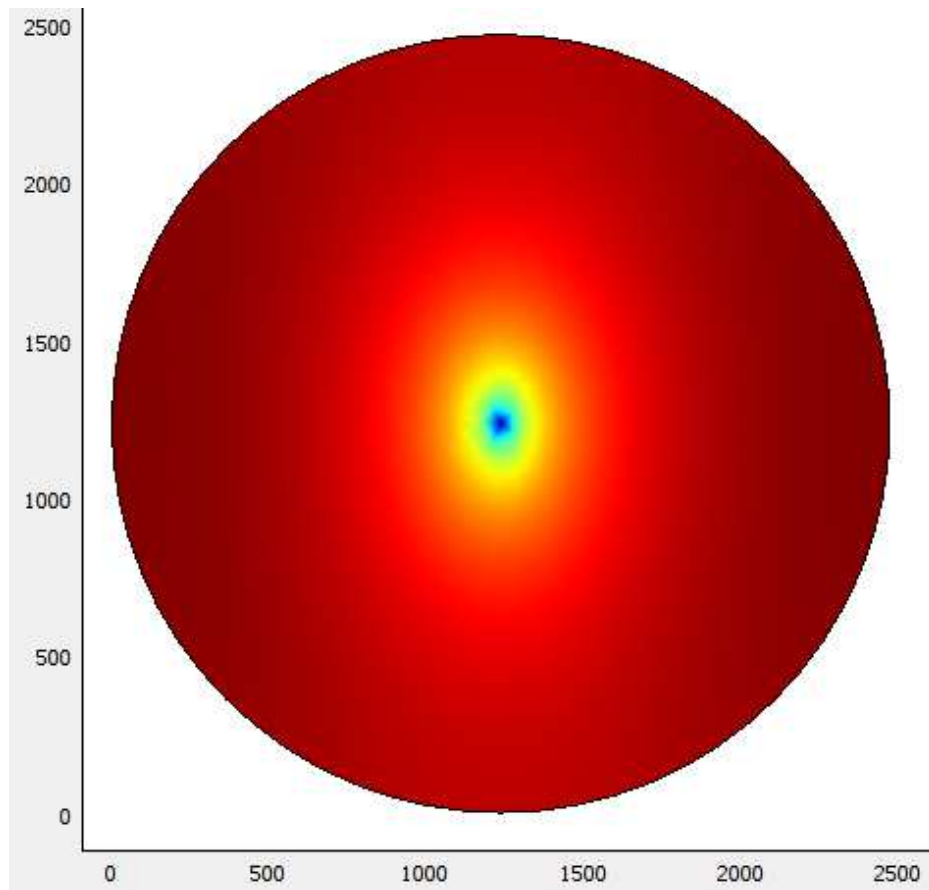


Figura 6.22: Solución en la malla con $\alpha_1 = 1.0$ y $\alpha_2 = 0.9$.

En la figura (6.22), se muestra el comportamiento de la presión en el yacimiento cuando la dimensión fractal de masa $D = \alpha_1 + \alpha_2 = 1.0 + 0.9 = 1.9$. Se puede apreciar mejor el comportamiento asimétrico de la presión alrededor del pozo debido a que el medio fractal es anisótropo.

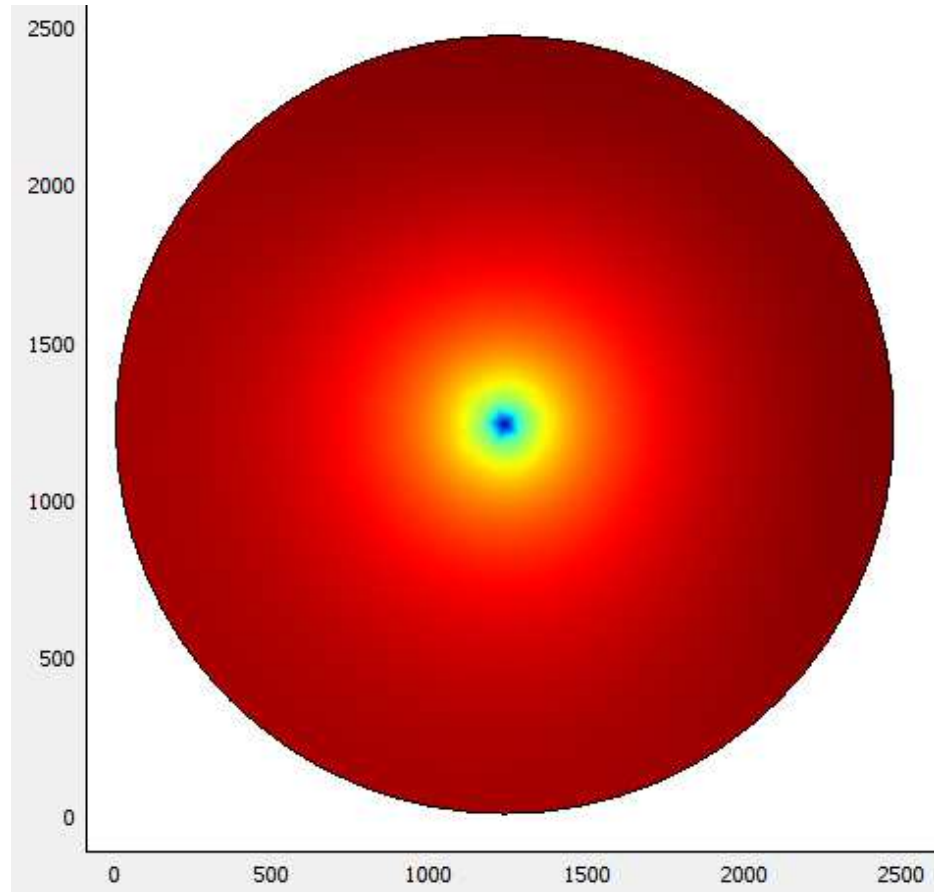


Figura 6.23: Solución en la malla con $\alpha_1 = 0.75$ y $\alpha_2 = 0.75$.

En la figura (6.23), se muestra el comportamiento de la presión en el yacimiento cuando la dimensión fractal de masa $D = 1.5$ y $\alpha_1 = 0.75 = \alpha_2$ debido a que el medio fractal es isótropo. Podemos observar que hay cierta simetría alrededor del pozo y se puede apreciar mejor que el comportamiento de la presión en el yacimiento es muy diferente a la presión en el yacimiento del modelo de flujo convencional (figura 2.7).

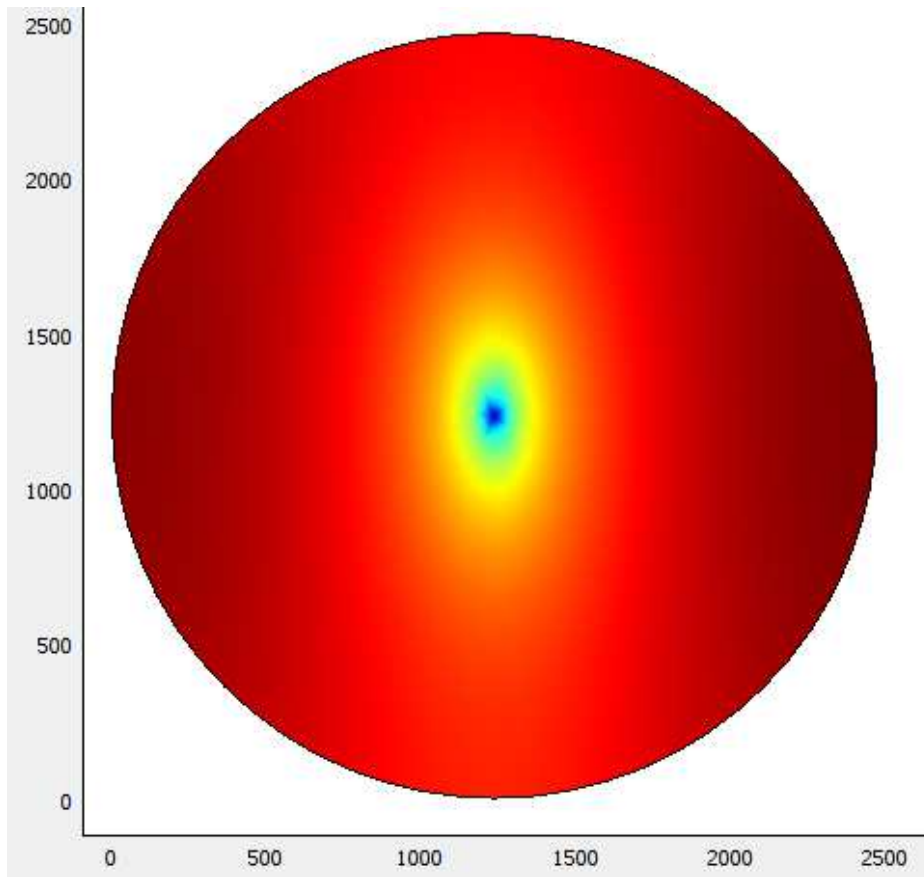


Figura 6.24: Solución en la malla con $\alpha_1 = 0.9$ y $\alpha_2 = 0.75$.

En la figura (6.24), se muestra el comportamiento de la presión en el yacimiento cuando la dimensión fractal de masa $D = \alpha_1 + \alpha_2 = 0.9 + 0.75 = 1.65$. Se puede apreciar mejor el comportamiento asimétrico de la presión alrededor del pozo debido a que el medio fractal es anisótropo.

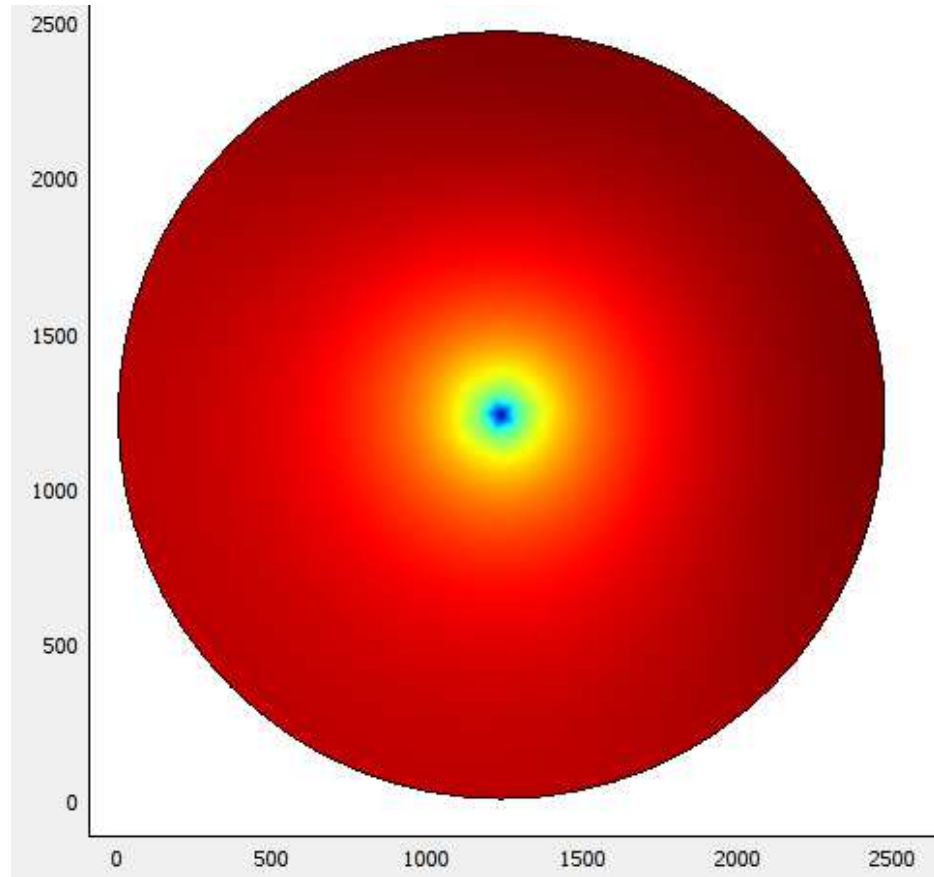


Figura 6.25: Solución en la malla con $\alpha_1 = 0.6$ y $\alpha_2 = 0.6$.

En la figura (6.25), se muestra el comportamiento de la presión en el yacimiento cuando la dimensión fractal de masa $D = 1.2$ y $\alpha_1 = 0.6 = \alpha_2$ debido a que el medio fractal es isótropo. Podemos observar que hay cierta simetría alrededor del pozo y se puede apreciar mejor que el comportamiento de la presión en el yacimiento es muy diferente a la presión en el yacimiento del modelo de flujo convencional (figura 2.7).

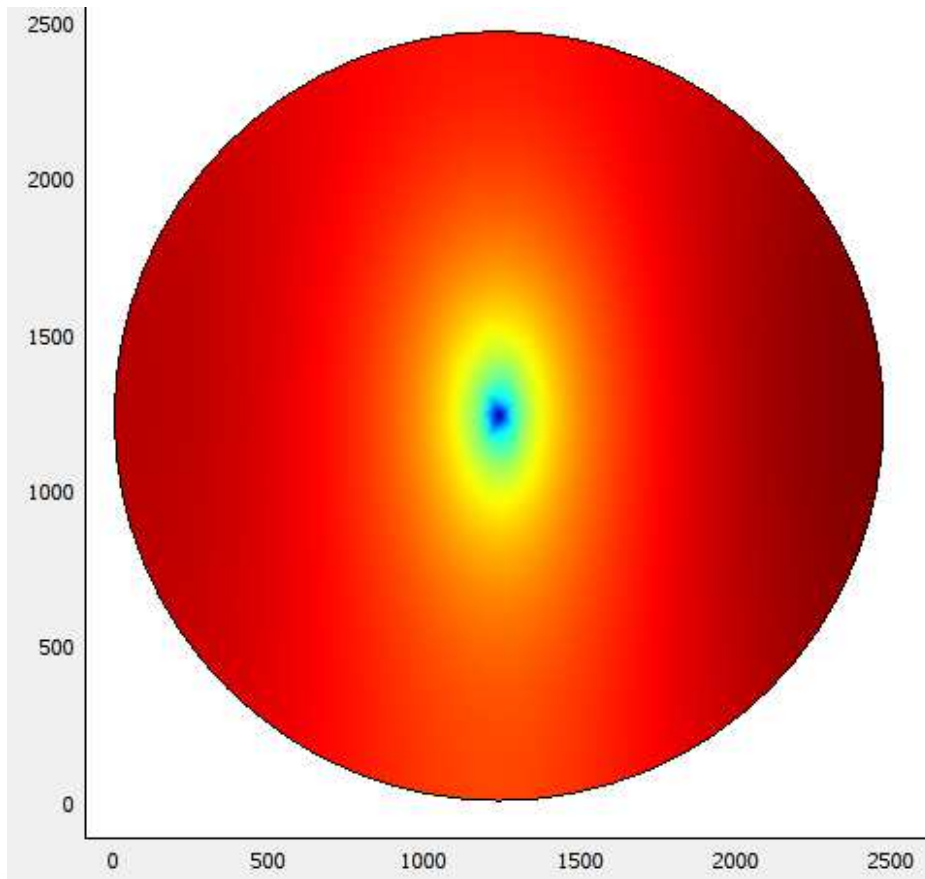


Figura 6.26: Solución en la malla con $\alpha_1 = 0.75$ y $\alpha_2 = 0.6$.

En la figura (6.26), se muestra el comportamiento de la presión en el yacimiento cuando la dimensión fractal de masa $D = \alpha_1 + \alpha_2 = 0.75 + 0.6 = 1.35$. Se puede apreciar mejor el comportamiento asimétrico de la presión alrededor del pozo debido a que el medio fractal es anisótropo.

6.4. Análisis de resultados

Los experimentos numéricos que se realizaron con los tres modelos arrojaron un comportamiento coherente con la cuestión de la difusión anómala, donde la presión cae a un ritmo más rápido o más lento con respecto al modelo de flujo convencional en función de los parámetros fractales de los modelos. Las soluciones numéricas de los modelos de flujo anómalo se reducen a la solución numérica del modelo convencional si se toman las dimensiones enteras correspondientes al modelo convencional ($D = 2$ y $d = 1$ o $\alpha_1 = 1 = \alpha_2$). Otra observación es que la presión en el pozo decae linealmente en el tiempo.

En el modelo uno, la caída de la presión en el pozo es mayor, produciendo en una mayor cantidad, conforme la dimensión de masa fractal (D) y la dimensión de la frontera (d) se aproximan a $n - 1$ y los cambios en la dimensión de masa fractal (D) producen una influencia más significativa que la dimensión de la frontera (d) en la presión en el yacimiento alrededor del pozo.

En el modelo dos, la caída de la presión en el pozo es mayor, produciendo en una mayor cantidad, conforme el valor tanto de la dimensión de masa fractal (D), como el valor de la dimensión de la frontera (d) son muy próximos y los cambios tanto en la dimensión de masa fractal (D) como en la dimensión de la frontera ($d > 1$) tienen una influencia igual de significativa en la presión en el yacimiento alrededor del pozo y llega a haber cierta distancia al pozo en el yacimiento en la que se produce una presión mayor que la inicial.

Al aplicar la ley de Darcy no convencional al modelo dos de flujo anómalo, se impone un gradiente fraccional de la presión, lo que originó un cambio en el comportamiento tanto en la gráfica de la caída de la presión en el pozo, como en la gráfica de la presión vs. distancia al pozo, en comparación con las gráficas del modelo uno al que se le aplicó la ley de Darcy convencional.

En el modelo tres, la caída de la presión en el pozo es mayor, produciendo en una mayor cantidad conforme el valor de la dimensión fractal de masa $D = \alpha_1 + \alpha_2$ aumenta, esto se puede interpretar como que la conectividad del medio decrece conforme el valor de la dimensión fractal de masa aumenta. La presión en el pozo decae linealmente en el tiempo y es menor que la caída de la presión del modelo de flujo convencional. El comportamiento de la presión en el yacimiento alrededor del pozo es simétrico si el medio fractal es isótropo ($\alpha_1 = \alpha_2$) y asimétrico si el medio fractal es anisótropo ($\alpha_1 \neq \alpha_2$).

Conclusiones

Se estableció una metodología para derivar sistemáticamente modelos matemáticos de medios continuos fractales de manera simple y elegante. Al combinar las medidas fraccionales de medios con propiedades fractales introducidas por Tarasov [27] [24] [22] [26] [25] [23] y Ostoja [21] [19] [20] [13] [14] [15] con la metodología sistemática establecida para medios continuos convencionales se obtuvieron dos formulaciones para medios continuos fractales isótropos y anisótropos respectivamente.

Aplicando la metodología desarrollada, resulta suficiente establecer las relaciones entre propiedades intensivas y extensivas para poder derivar las ecuaciones de balance local de masa, momento lineal y energía para problemas en medios con propiedades fractales de manera sencilla y directa.

Uno de los aspectos mas importantes a destacar es que todos los modelos desarrollados fueron derivados siguiendo el enfoque metodológico de la *modelación matemática y computacional*, el cual consta de cuatro etapas. En la primera etapa se define un *modelo conceptual* del problema a resolver donde se establecen los supuestos, los alcances y las limitaciones del modelo. En la segunda etapa se deriva el *modelo matemático*, que consiste en el conjunto de ecuaciones diferenciales parciales con condiciones iniciales y valores de fronteras que describen satisfactoriamente las hipótesis del modelo conceptual, aplicando la formulación sistemática de la modelación de medios continuos fractales. Mientras que en la tercera etapa se elige el *modelo numérico* que siempre es una versión discretizada del modelo matemático, donde en éste caso se aplicó el método de elementos finitos. Finalmente, en la cuarta etapa se implementa el *modelo computacional* que consiste en la programación del método numérico en una plataforma computacional y para este fin se usó el programa COMSOL Multiphysics en el modo PDE en la forma de coeficientes para el análisis dependiente del tiempo.

A partir de la ecuación de balance de masa para medios fractales, se derivaron tres modelos de flujo anómalo. Primero se desarrollaron dos modelos para medios fractales isótropos, uno basado en la ley de Darcy convencional del cual pueden derivarse tanto el modelo convencional, como los modelos clásicos de flujo anómalo de Barker [3], Chang y Yortsos [7], y Metzler [17], e incluso los modelos recientes publicados en 2012 por Balankin [2] y por Herrera-Hernández [11]; mientras que el segundo modelo se basó en una ley de Darcy para medios fractales isótropos. Después se desarrolló un tercer modelo para medios anisótropos basado en una ley de Darcy para medios fractales anisótropos. Ambas leyes de Darcy para medios fractales fueron derivadas a partir de la ecuación de balance de momento lineal para medios fractales. Los experimentos numéricos arrojaron un comportamiento coherente con la cuestión de la difusión anómala, donde la presión cae a un ritmo más rápido o más lento con respecto al modelo de flujo convencional en función de los parámetros fractales de los modelos.

Una de las ventajas de los modelos matemáticos de flujo anómalo obtenidos en el presente trabajo es que son ecuaciones diferenciales convencionales con coeficientes numéricos adicionales, es decir, las ecuaciones diferenciales fraccionales se pueden expresar en ecuaciones en derivadas enteras, siendo esto último una gran ventaja para su solución numérica e implementación computacional. Las soluciones numéricas de los modelos de flujo anómalo se reducen a la solución numérica del modelo convencional si se toman las dimensiones enteras correspondientes al modelo convencional ($D = 2$ y $d = 1$ o $\alpha_1 = 1 = \alpha_2$), debido a que bajo dichas condiciones, los modelos de flujo anómalo se reducen al modelo de flujo monofásico convencional.

Al aplicar la ley de Darcy no convencional al modelo dos, se impone un gradiente fraccional de la presión, lo que origina un comportamiento diferente en la gráfica de la caída de la presión en el pozo y en la gráfica de la presión contra distancia al pozo, en comparación con las gráficas del modelo uno al que se le aplicó la ley de Darcy convencional. En el modelo tres, la caída de la presión en el pozo es mayor, produciendo en una mayor cantidad conforme la dimensión fractal de masa D aumenta y el comportamiento de la presión en el yacimiento alrededor del pozo es simétrico si el medio fractal es isótropo ($\alpha_1 = \alpha_2$) y asimétrico si el medio fractal es anisótropo ($\alpha_1 \neq \alpha_2$).

Como trabajo futuro, la metodología desarrollada se puede extender a modelos multicomponentes y multifásicos de transporte en medios porosos con propiedades fractales [11], con un gran potencial en su aplicación a la modelación de yacimientos heterogéneos.

Apéndice

Apéndice A

Ley de Darcy Convencional

El movimiento del fluido en una reserva petrolera está gobernado por las ecuaciones de conservación de la masa, momento y energía (ver capítulo 1). En la simulación del flujo en la reserva, la ecuación de balance de momento está dada en la forma de la ley de Darcy [8]. Sus bases teóricas fueron proporcionadas por Bear [4], pero en general hay bastante literatura de flujo de fluidos en medios porosos.

La ley de Darcy, fué propuesta en el siglo *XIX* por el ingeniero francés Darcy. Esta ley es una ecuación constitutiva, empírica, que relaciona a la velocidad efectiva del fluido con su presión, indicando una relación lineal entre la velocidad del fluido en el medio poroso y el gradiente de la presión, siendo utilizada ampliamente para la modelación de flujo en medios porosos [10].

Para derivar la **ley de Darcy**, necesitamos suponer que el flujo es

1. Incompresible
2. Estacionario
3. Laminar

Cada uno de éstos conceptos los explicaremos más detalladamente en las siguientes páginas, pues los aplicaremos a la ecuación de general de flujo de Navier-Stokes derivada a partir de la ecuación de balance de momento lineal.

Incompresibilidad

Un fluido es incompresible si todo cuerpo conserva el volumen de fluido en su movimiento [10]. Cuando un fluido llena completamente el espacio físico que ocupa el cuerpo, el volumen del fluido $V_f(t)$ es igual al volumen del dominio que ocupa el cuerpo, de esta manera:

$$V_f(t) = \int_{B(t)} d\mathbf{x} \quad (\text{A.1})$$

El volumen del fluido es una *propiedad extensiva* y su *propiedad intensiva* correspondiente es $\psi \equiv 1$. Por otro lado, por hipótesis de incompresibilidad $g = g_\Sigma \equiv 0$ y $\underline{\tau} \equiv 0$ entonces *la ecuación de balance global* es:

$$\frac{d}{dt}V_f(t) = 0 \quad (\text{A.2})$$

Finalmente, *La ecuación diferencial de balance local* es

$$\nabla \cdot \underline{v} = 0 \quad (\text{A.3})$$

Esta ecuación es conocida como *condición de incompresibilidad* y cualquier fluido incompresible satisface esta ecuación.

Número de Reynolds

El número de Reynolds, es un número adimensional introducido por Osborne Reynolds y denota la razón entre las fuerzas inerciales y las fuerzas viscosas, es decir:

$$R_e = \frac{\text{fuerzas inerciales}}{\text{fuerzas viscosas}} \quad (\text{A.4})$$

La fuerza de inercia por unidad de volumen $\equiv \frac{\rho v^2}{L}$

La fuerza viscosa por unidad de volumen $\equiv \frac{\mu v}{L^2}$

$$R_e = \frac{\frac{\rho v^2}{L}}{\frac{\mu v}{L^2}} = \frac{\rho v^2 L^2}{\mu v L} = \frac{\rho v L}{\mu} = \frac{v L}{\frac{\mu}{\rho}} = \frac{v L}{\mathbf{v}} \quad (\text{A.5})$$

v = velocidad media del fluido. (cm/s)

L = longitud característica. (cm)

μ = viscosidad dinámica (absoluta) del fluido.

$\mathbf{v} = \mu/\rho$ = viscosidad cinemática del fluido. (cm²/s)

ρ = densidad del fluido.

Flujo laminar

El flujo laminar ocurre donde las fuerzas viscosas son dominantes y se caracteriza por un movimiento del fluido suave y constante [9]. El movimiento del fluido es casi estático y la rapidez de cambio del momento es despreciable, esto significa que la teoría considera movimientos del fluido, en que los cambios de la velocidad del fluido ocurren muy lentamente [10]. El flujo laminar ocurre a números de Reynolds pequeños, es decir, $Re \ll 1$.

Derivación de la ley de Darcy

Considerando la ecuación general de flujo de Navier-Stokes (1.35) para un flujo incompresible ($\nabla \cdot \underline{v} = 0$) y estacionario ($\frac{\partial}{\partial t} \underline{v} = 0$)

$$\underline{v} \cdot \nabla \underline{v} = \underline{b} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \underline{v} \quad (\text{A.6})$$

$\underline{v} \cdot \nabla \underline{v}$ es del orden de magnitud de $\frac{v^2}{L}$
 $\frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \underline{v}$ es del orden de magnitud de $\frac{\mu v}{\rho L^2}$

La relación entre ambos es precisamente el número de Reynolds

$$\frac{\frac{v^2}{L}}{\frac{\mu v}{\rho L^2}} = \frac{v^2 \rho L^2}{\mu v L} = \frac{v \rho L}{\mu} = \frac{v L}{\frac{\mu}{\rho}} = \frac{v L}{\nu} = Re \quad (\text{A.7})$$

Por esta razón, si el número de Reynolds es pequeño, el término $\underline{v} \cdot \nabla \underline{v}$ puede despreciarse de la ecuación de Navier-Stokes [12], de modo que si la velocidad del fluido \underline{v} es pequeña, la aceleración advectiva $\underline{v} \cdot \nabla \underline{v}$ se puede despreciar [16], obteniendo

$$\mu \nabla^2 \underline{v} - \nabla p + \rho \underline{b} = 0 \quad (\text{A.8})$$

despejando el laplaciano de la velocidad

$$\nabla^2 \underline{v} = \frac{1}{\mu} (\nabla p - \rho \underline{b}) \quad (\text{A.9})$$

Suponiendo que la fuerza de resistencia viscosa es proporcional a la velocidad [18]

$$- \phi \underline{v} \underline{k}^{-1} = \frac{1}{\mu} (\nabla p - \rho \underline{b}) \quad (\text{A.10})$$

depejando la velocidad de Darcy $\underline{u} = \phi \underline{v}$

$$\underline{u} = -\frac{1}{\mu} \underline{k} \cdot (\nabla p - \rho \underline{b}) \quad (\text{A.11})$$

Ahora, tomando en cuenta que $\underline{b} = \underline{g}$ y si consideramos a z como la altura respecto a un nivel de referencia dado y la coordenada $x_3 \equiv z$ [10], entonces el vector aceleración de la gravedad se puede expresar como

$$\underline{g} = -\gamma \nabla z \quad (\text{A.12})$$

donde γ es la constante de gravedad y sustituyendo en la ecuación anterior obtenemos la ley de Darcy

$$\underline{u} = -\frac{1}{\mu} \underline{k} \cdot (\nabla p + \rho \gamma \nabla z) \quad (\text{A.13})$$

μ – viscosidad del fluido.

\underline{k} – tensor de permeabilidad del medio poroso.

p – presión del fluido.

ρ – densidad del fluido.

γ – magnitud de la aceleración gravitacional.

z – altura.

En algunos casos es posible suponer que $\underline{k} = \text{diag}(k_{11}, k_{22}, k_{33})$.

Un medio es isótropo si $k_{11} = k_{22} = k_{33}$, en otro caso es anisótropo.

Apéndice B

Ley de Darcy Fraccional para medios isotrópicos

Considerando la *ecuación fraccional de flujo de Navier-Stokes para medios isótropas* (ec. 4.41), para un flujo incompresible, estacionario y laminar:

$$\rho \underline{b} - \nabla^D p + \mu \nabla^D \cdot (\nabla \underline{v}) + \mu \nabla^D (\nabla \underline{v})^T = 0 \quad (\text{B.1})$$

entonces

$$\nabla^D \cdot (\nabla \underline{v}) + \nabla^D (\nabla \underline{v})^T = \frac{1}{\mu} (\nabla^D p - \rho \underline{b}) \quad (\text{B.2})$$

Suponiendo que la fuerza de resistencia viscosa es proporcional a la velocidad en el medio poroso [18]

$$-\phi \underline{v} \underline{k}^{-1} = \frac{1}{\mu} (\nabla^D p - \rho \underline{b}) \quad (\text{B.3})$$

depejando la velocidad de Darcy $\underline{u} = \phi \underline{v}$

$$\underline{u} = -\frac{1}{\mu} \underline{k} \cdot (\nabla^D p - \rho \underline{b}) \quad (\text{B.4})$$

Ahora, tomando en cuenta que $\underline{b} = \underline{g}$ y si consideramos a z como la altura respecto a un nivel de referencia dado, entonces el vector aceleración de la gravedad se puede expresar como

$$\underline{g} = -\gamma \nabla z \quad (\text{B.5})$$

donde γ es la constante de gravedad y sustituyendo en la ecuación anterior obtenemos la ley de Darcy equivalente para medios porosos fractales

$$\underline{u} = -\frac{1}{\mu} \underline{k} \cdot (\nabla^D p + \rho \gamma \nabla z) \quad (\text{B.6})$$

donde μ es la viscosidad del fluido, \underline{k} es el tensor de permeabilidad del medio poroso, p es la presión del fluido, ρ es la densidad del fluido, γ es la magnitud de la aceleración gravitacional, z es la altura.

Al comparar con la ley de Darcy convencional, observamos que se tienen gradientes fraccionales, en lugar de gradientes convencionales. La forma de ésta ley de Darcy para medios fractales, es similar a la obtenida recientemente por Balankin [2].

Apéndice C

Ley de Darcy Fraccional para medios anisótropos

Considerando la *ecuación fraccional de flujo de Navier-Stokes para medios anisótropos* (ec. 4.79), para un flujo incompresible, estacionario y laminar:

$$\rho \underline{b} - \nabla^D p + \mu \nabla^D \cdot (\nabla \underline{v} + (\nabla \underline{v})^T) = 0 \quad (\text{C.1})$$

entonces

$$\nabla^D \cdot (\nabla \underline{v} + (\nabla \underline{v})^T) = \frac{1}{\mu} (\nabla^D p - \rho \underline{b}) \quad (\text{C.2})$$

Suponiendo que la fuerza de resistencia viscosa es proporcional a la velocidad en el medio poroso [18]

$$-\phi \underline{v} \underline{k}^{-1} = \frac{1}{\mu} (\nabla^D p - \rho \underline{b}) \quad (\text{C.3})$$

depejando la velocidad de Darcy $\underline{u} = \phi \underline{v}$

$$\underline{u} = -\frac{1}{\mu} \underline{k} \cdot (\nabla^D p - \rho \underline{b}) \quad (\text{C.4})$$

Ahora, tomando en cuenta que $\underline{b} = \underline{g}$ y si consideramos a z como la altura respecto a un nivel de referencia dado, entonces el vector aceleración de la gravedad se puede expresar como $\underline{g} = -\gamma \nabla z$ donde γ es la constante de gravedad y sustituyendo en la ecuación anterior obtenemos la ley de Darcy equivalente para medios porosos fractales

$$\underline{u} = -\frac{1}{\mu} \underline{k} \cdot (\nabla^D p + \rho \gamma \nabla z) \quad (\text{C.5})$$

donde μ es la viscosidad del fluido, \underline{k} es el tensor de permeabilidad del medio poroso, p es la presión del fluido, ρ es la densidad del fluido, γ es la magnitud de la aceleración gravitacional, z es la altura.

Bibliografía

- [1] ALLEN, M. B., HERRERA, I., AND PINDER, G. F. *Numerical modeling in science and engineering*. John Wiley & Sons, 1988.
- [2] BALANKIN, A., AND ESPINOZA, E. B. Map of fluid flow in fractal porous medium into fractal continuum flow. *Physical Review, American Physical Society* 85 (2012), 1–19.
- [3] BARKER, J. A. A generalized radial flow model for hydraulic tests in fractured rock. *Water Resources Research* 24, 10 (October 1988), 1796–1804.
- [4] BEAR, J. *Dynamics of Fluids in Porous Media*. Dover, Inc. New York, 1988.
- [5] CAMACHO-VELÁZQUEZ, R., FUENTES CRUZ, G., AND VÁZQUEZ-CRUZ, M. Decline curve analysis of fractured reservoirs with fractal geometry. *Society of Petroleum Engineers SPE*, 104009 (2006), 1–14.
- [6] CARRILLO, A., HERRERA, I., AND YATES, R. *Método de Elementos Finitos*. Instituto de Geofísica, UNAM y Grupo de Modelación Matemática y Computacional, 2008.
- [7] CHANG, J., AND YORTSOS, Y. C. Pressure-transient analysis of fractal reservoirs. *Society of Petroleum Engineers SPE Formation Evaluation* (March 1990), 31–38.
- [8] CHEN, Z., HUAN, G., AND MA, Y. *Computational methods for multiphase flows in porous media*, vol. 2. Siam, 2006.
- [9] DÍAZ-VIERA, M. *Método sistemático para la formulación de los modelos de medios continuos*. Instituto Mexicano del Petróleo., 2010.
- [10] HERRERA, I. *Modelación matemática de sistemas terrestres*. Instituto de Geofísica, UNAM, 2010.

- [11] HERRERA-HERNÁNDEZ, E. C., CORONADO, M., AND HERNÁNDEZ-CORONADO, H. Fractal continuum model for tracer transport in a porous medium. *Physical Review E, American Physical Society* 88, 063004 (2013), 1–14.
- [12] LANDAU, L. D., AND LIFSHITZ, E. M. *Fluid Mechanics*. Pergamon Press, 1987.
- [13] LI, J., AND OSTOJA-STARZEWSKI, M. Fractal materials, beams, and fracture mechanics. *ZAMP* 60 (2009), 1–12.
- [14] LI, J., AND OSTOJA-STARZEWSKI, M. Fractal solids, product measures and fractional wave equations. *The Royal Society* 465 (June 2009), 2521–2536.
- [15] LI, J., AND OSTOJA-STARZEWSKI, M. Micropolar continuum mechanics of fractal media. *International Journal of Engineering Science* (2011), 1–9.
- [16] MERUANE, C. N. *Mecánica de Medios Continuos, Bases Matemáticas de la Mecánica de Fluidos*. Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile, 2005.
- [17] METZLER, R., GLOCKLE, W. G., AND NONNENMANCHER, T. F. Fractional model equation for anomalous diffusion. *Physica A* 211 (March 1994), 13–24.
- [18] NEUMAN, S. P. A theoretical derivation of darcy’s law. *Acta Mechanica, Springer-Verlag* 25 (1977), 153–170.
- [19] OSTOJA-STARZEWSKI, M. Towards thermoelasticity of fractal media. *Journal of Thermal Stresses* 30 (2007), 889–896.
- [20] OSTOJA-STARZEWSKI, M. Continuum mechanics models of fractal porous media: Integral relations and extremum principles. *Journal of Mechanics of Materials and Structures* 4, 5 (May 2009), 901–912.
- [21] OSTOJA-STARZEWSKI, M., LI, J., JOUMAA, H., AND N. DEMMIE, P. From fractal media to continuum mechanics. *WILEY, online library* (2013), 1–29.
- [22] TARASOV, V. E. Continuous medium model for fractal media. *Annals of Physics* No. (January 2005), 318.

- [23] TARASOV, V. E. Dynamics of fractal solids. *International Journal of Modern Physics B* 19 (2005), 4103–4114.
- [24] TARASOV, V. E. Fractional hydrodynamic equations for fractal media. *Annals of Physics No.* (January 2005), 318.
- [25] TARASOV, V. E. Gravitational field of fractal distribution of particles. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 94 (2005), 1–15.
- [26] TARASOV, V. E. Possible experimental test of continuous medium model for fractal media. *Physics Letters A* 341 (2005), 467–472.
- [27] TARASOV, V. E. Magnetohydrodynamics of fractal media. *Physics of Plasmas* 13, 052107 (2006), 1–28.