



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

VARIEDADES ÁNGULO-MOMENTO Y VARIEDADES DE
CONTACTO EN DIMENSIONES ALTAS

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTORA EN CIENCIAS

PRESENTA:
YADIRA LIZETH BARRETO FELIPE

DIRECTOR DE LA TESIS:
DR. S. ALBERTO VERJOVSKY SOLÁ
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS UNAM-UNIDAD CUERNAVACA

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:
DR. ENRIQUE RAMIREZ LOSADA
POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

DR. JACOB MOSTOVOY
POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

MÉXICO, D. F. A 5 DE SEPTIEMBRE DE 2013.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*A mi bebé hermoso:
Ian Aldair.*

Queda Prohibido

Queda prohibido llorar sin aprender,
levantarte un día sin saber que hacer,
tener miedo a tus recuerdos.

Queda prohibido no sonreír a los problemas,
no luchar por lo que quieres,
abandonarlo todo por miedo,
no convertir en realidad tus sueños.

Queda prohibido no demostrar tu amor,
hacer que alguien pague tus deudas y mal humor.

Queda prohibido dejar a tus amigos,
no intentar comprender lo que vivieron juntos,
llamarles solo cuando los necesitas.

Queda prohibido no ser tú ante la gente,
fingir ante las personas que no te importan,
hacerte el gracioso con tal de que te recuerden,
olvidar a toda la gente que te quiere.

Queda prohibido no hacer las cosas por ti mismo,
no creer en Dios y hacer tu destino,
tener miedo a la vida y a sus compromisos,
no vivir cada día como si fuera un último suspiro.

Queda prohibido echar a alguien de menos sin alegrarte,
olvidar sus ojos, su risa, todo,
porque sus caminos han dejado de abrazarse,
olvidar su pasado y pagarlo con su presente.

Queda prohibido no intentar comprender a las personas,
pensar que sus vidas valen mas que la tuya,
no saber que cada uno tiene su camino y su dicha.

Queda prohibido no crear tu historia,
dejar de dar las gracias a Dios por tu vida,
no tener un momento para la gente que te necesita,
no comprender que lo que la vida te da, también te lo quita.

Queda prohibido no buscar tu felicidad,
no vivir tu vida con una actitud positiva,
no pensar en que podemos ser mejores,
no sentir que sin ti este mundo no sería igual.

Pablo Neruda.

Índice general

Queda Prohibido	III
Índice general	V
Índice de figuras	VII
Agradecimientos.	IX
Contenido General.	XV
Introducción.	XVII
I. Un poco de geometría.	1
§ 1. Campos Vectoriales	2
§ 1.1. El Corchete de Campos Vectoriales.	3
§ 2. Formas Diferenciales.	4
§ 2.1. Relación entre Λ_n^* y $\mathbf{T}_0(\mathbb{R}^n)$	6
§ 2.2. Formas Diferenciales sobre Variedades Diferenciables.	7
§ 2.3. Operaciones Sobre Formas Diferenciales.	8
§ 3. Teorema de Frobenius.	11
§ 3.1. Teorema de Frobenius para Campos Vectoriales.	11
§ 3.2. Teorema de Frobenius para Formas Diferenciales.	11
§ 3.3. Subespacio Característico.	13
§ 4. Politopos Convexos.	15
§ 4.1. Politopos combinatoriamente equivalentes.	16
§ 5. Estructuras Simpléticas y Complejas.	16
§ 5.1. Variedades Simpléticas.	16
§ 5.2. Variedades Casi Complejas y Variedades Complejas.	18
§ 5.3. Variedades Kähler.	20
§ 5.4. Variedades Presimpléticas o de Casi Contacto.	20
§ 6. Geometría de Contacto.	21
§ 6.1. Estructuras de Contacto.	21

§ 6.2.	Campo de Reeb	25
§ 6.3.	Clasificación de Estructuras de Contacto.	26
§ 7.	Confoliaciones Positivas.	27
§ 7.1.	Foliaciones.	27
§ 7.2.	Confoliaciones Positivas.	27
§ 8.	Descomposición de Libro Abierto	29
§ 9.	Variedades de Poisson.	30
§ 9.1.	Campos de Multivectores.	31
§ 9.2.	El Corchete de Shouten.	32
§ 9.3.	Estructuras Simplécticas y Estructuras de Poisson.	32
§ 9.4.	Estructuras Regulares de Poisson.	34
II.	¿Estructuras de Contacto o Libros Abiertos?	35
§ 1.	Dominios de Liouville y Variedades Weinstein.	35
§ 2.	De Libros Abiertos a Estructuras de Contacto.	36
§ 3.	De Estructuras de Contacto a Libros Abiertos.	37
III.	Variedades Ángulo-Momento y Ángulo-Momento Mixtas.	39
§ 1.	Variedades Ángulo-Momento.	39
§ 2.	Fibraciones Calabi-Eckmann Generalizadas.	50
§ 3.	Variedades Ángulo-Momento Mixtas.	52
IV.	Distintas Estructuras Geométricas.	61
§ 1.	Libros Abiertos.	61
§ 2.	Estructura de Casi-Contacto.	67
§ 3.	Estructuras de Contacto.	68
§ 4.	Estructura Regular de Poisson.	69
V.	Variedades de Contacto en Dimensiones Altas.	79
§ 1.	Confoliaciones Conductivas sobre $M_1^{(\Lambda,1,n+1)}$ y $M_1^{(\Lambda,m,n)}$	97
Epílogo.		105
Apéndice I		107
A.	Variedades Stein.	107
B.	Las variedades $M_1^{(\Lambda,1,n+1)}$ admiten una estructura de contacto.	108
Índice de Notación.		111
Referencias		115

Índice de figuras

I.1. Estructura de contacto ξ_1 sobre \mathbb{R}^3	24
I.2. Descomposición de Libro Abierto.	29
III.1. Representación de las soluciones de la versión real del sistema (III.1).	40
III.2. Configuración admisible de cinco puntos distintos.	45
III.3. Configuración admisible de tres puntos, donde uno de ellos es de multiplicidad dos.	46
III.4. Configuración admisible de siete puntos distintos.	46
III.5. Configuración admisible de cinco puntos, donde uno de ellos tiene multiplicidad dos.	47

Agradecimientos.

A veces podemos pasarnos años
sin vivir en absoluto,
y de pronto toda nuestra vida
se concentra en un solo instante.

Oscar Wilde.

Hacer una lista de todas las personas a las cuales quiero **agradecerles de todo corazón** por ayudarme de una u otra manera a decir hoy: *mi tesis está terminada* pero sobre todo por aguantarme los últimos meses. Segura estoy se me escapará mencionar a alguien, así que de antemano, si es el caso, les pido una disculpa aunque pueden estar seguros que todos comparten un lugar muy especial en mi gran baúl de tesoros (mi corazón).

A Dios por haberme puesto en este mundo en el momento adecuado y en el lugar preciso, rodeado de las personas y del ambiente matemático indispensable que me ha permitido terminar mi tesis.

A mis papás porque sin su **amor incondicional**, es decir un amor infinito que soporta todo aún a pesar de nuestros errores (como hijos), su respeto, su comprensión, su paciencia (sobre todo de mi madre) y apoyo en todos los sentidos (emocional, económico, etc), yo no sería quien soy ahora ni estaría aquí, con una tesis de doctorado redactada. A la negra (mi hermanita) por todo su cariño, apoyo y todas sus porras, además de ayudarme con los dibujos de esta tesis, al saladito (mi primo Esteban) por todo su apoyo y siempre hacerme reír con sus ocurrencias y a mi comadre y más que eso, mi hermana Alma, por su cariño y apoyo en todos los aspectos. A mi familia en general, a Fray y a TODOS mis amigos de San Quintín, por el cariño, la confianza y las palabras de aliento que siempre me han brindado.

A Juan Cosme Miranda por haberme contagiado, cuando estudié la secundaria, la emoción que despierta el estudiar matemáticas . A Álvaro Álvarez por haberme recomendado con Alberto Verjovsky para que me aceptara co-

mo su estudiante, lo cual ha sido de las mejores cosas que me han sucedido en la vida.

Al mejor operador de cabina de radio de todo Morelos: Ramón Quintana (aún cuando nuestras vidas estén desfasadas tanto en tiempo como en espacio), por haberme hecho aquel domingo de mayo de 2008 la siguiente pregunta: ¿quieres ser mi amiga? y con algo tan sencillo haber escrito la primera página de la mejor etapa de mi vida: ser madre y en particular madre de Ian. Sr. ingeniero **gracias** por ser el papá de Ian.

A mi Ian por iluminar y llenar toda mi vida con su sonrisa, por favor nunca dejes de sonreír, la vida segundo tras segundo nos ofrece todo para que siempre dibujemos una sonrisa en nuestro rostro. Por decir siempre con entusiasmo: “mi mamá va al instituto” y por aguantar mis momentos de estrés al intentar terminar esta tesis. Pero sobretodo, por ayudarme a descubrir de nuevo el mundo a través de sus ojos, lo cual ha sido la mejor experiencia de toda mi vida: encontrar la belleza de algunos bichos, perfumarme con el aroma de las flores, explorar el jardín en busca de caracoles y gusanos, abrazar una serpiente, buscar telarañas gigantes, etc...

A Alberto Verjovsky por la confianza que depositó en mi desde el día en que nos conocimos personalmente y me aceptó como su alumna de maestría (aún recuerdo que ese día me invitó al seminario de sus estudiantes). Desde ese momento se convirtió en mi *papá académico*, me regañó cuando hubo razón para ello, me regaló un abrazo de vez en cuando y siempre tuvo un comentario para impulsarme a continuar. Por enseñarme que se vale llorar, gritar, enojarse y demás siempre y cuando eso nos sirva para renovar fuerzas y seguir trabajando. Le agradezco, el haberme guiado a través de este mundo maravilloso que son las matemáticas y haberme enseñado a descubrir un sin fin de cosas fascinantes, pero sobre todo porque descubrí que las matemáticas llenan mi vida y mi ser. Más aún, por haberme dedicado gran parte de su tiempo estos últimos meses y haberse sentado conmigo a leer y revisar detenidamente cada página de mi tesis, por haberme escuchado en nuestro *seminario de hermanitos* y haberme hecho observaciones relevantes para mi trabajo.

Pero sobre todo, **gracias** Alberto porque ahora sé que sólo necesito traer una pluma en el bolsillo, no olvidar el niño que todos llevamos dentro, es decir, desempolvar la curiosidad y la imaginación, así como tener las manos libres para comenzar a hacer matemáticas.

A Pepe Seade por haberme dicho aquel día que no dejaría que me fuera a hacer un doctorado a otra parte. Por haber aceptado ser mi codirector de tesis, por toda la confianza que depositó en mi y por ofrecerme su amistad y ayuda en todo momento. Por tener siempre un espacio para escucharme y haberme hecho observaciones importantes y preguntas interesantes. Por haberme apoyado económicamente con una beca de ayudante de Investigador SNI para poder concluir esta tesis.

A Enrique Ramirez Losada por haber aceptado ser parte de mi comite tutor, haberme recibido en Cimat durante una semana en la cual le expuse mi trabajo hasta ese momento. Por todo el interés en mi trabajo, apoyo y disponibilidad que siempre ha tenido hacia mi, aún a pesar de la distancia física.

A Luis Hernández Lamonedá por haberse interesado en mi trabajo y haber asistido a mis exposiciones cuando estuve en Cimat trabajando con Enrique. Por sus comentarios y observaciones, los cuales fueron de mucha ayuda para mi.

A Omegar Calvo por el tiempo que me dedicó cuando estuve en Cimat, por explicarme algunas ideas, darme algunas referencias bibliográficas y por interesarse en mis exposiciones.

A Jacob Mostovoy por haber aceptado ser parte de mi comite tutor y por el interés que siempre mostró en mi trabajo.

A E. Giroux por haberme enviado un borrador de uno de sus artículos (el cual aún no está publicado) donde explica la relación que existe entre descomposiciones de libro abierto y estructuras de contacto en dimensión mayor a tres.

A Marcel Nicolau por el interés que mostró en mi trabajo y por haberme escuchado aquella tarde de agosto de 2011 en CIMAT.

A Santiago López de Medrano por haber aceptado ser tanto sinodal de mi examen doctoral como sinodal de mi examen de candidatura y a raíz de eso, haberme invitado a escribir un artículo en conjunto con él y con Alberto Verjovsky. Por su gran paciencia al realizar dicho proyecto y por contestar siempre a mis múltiples preguntas. Por todas las observaciones hechas a mi tesis.

A Xavier Gómez-Mont por haber aceptado ser sinodal de mi examen doctoral y por el interés mostrado en mi trabajo.

A Pablo Suarez Serrato por haber aceptado ser tanto sinodal de mi examen doctoral como sinodal de mi examen de candidatura. Por todo el interés que siempre ha mostrado hacia mi trabajo, por haberme invitado a dar una plática en el “Colima Workshop on Geometry” y por todas las observaciones y correcciones hechas a mi tesis.

A Ernesto Lupercio por haber aceptado ser sinodal de mi examen doctoral y por todo el interés que siempre ha mostrado en mi trabajo.

A Ana Rechtman por todo el interés que siempre ha mostrado en mi trabajo.

A Andrés Pedroza por haberme invitado y apoyado para participar en el “Colima Workshop on Geometry” y por el interés mostrado en mi trabajo.

A Thomas Vogel por el interés hacia mi trabajo y por sus múltiples observaciones las cuales fueron de mucha ayuda para mi.

A Laurent Meersseman por haberme escuchado aquella tarde en la palapa grande del Instituto de Matemáticas con tanto interés.

A D. Pancholi por todas las observaciones y comentarios, los cuales fueron de suma importancia al momento de escribir esta tesis.

A S. J. Altschuler por haberse tomado el tiempo de aclarar algunas dudas sobre su trabajo en confoliaciones positivas, las cuales eran relevantes para concluir esta tesis.

A Pedro Frejlich y Rui Loja Fernandes por su ayuda mientras trataba de entender un poco más sobre estructuras de Poisson y foliaciones simplécticas.

A mis hermanitos Juan Pablo, Samuel y José ya que sin sus ganas no hubiésemos podido llevar a cabo nuestro seminario de hermanitos durante algunos semestres en compañía de Alberto. Por la paciencia que siempre mostraron tratando de entender mi tesis al escucharme exponer y sobre todo, porque siempre estuvieron a mi lado brindándome todo su apoyo.

A todos mis amigos y compañeros: Victor Hugo, Ramón, Kary-Kary, Germán, Ataulfo, Bety, Daniel, ρ , Toño, Gustavo, Pare, Daisy, Erick, Mario, Vanessa, Marina, Pedro, Toña, Hugo, Hector, Aurelio, Margareta, Haydee, Carlos Cabrera, Jannina, Oscar, en fin a todos, desde la A hasta la Z (para evitar omisiones) ya que siempre recibí de ellos (y aún sigo recibiendo) un abrazo, un saludo, una palabra de aliento en el momento justo en que lo necesitaba para continuar... y sobre todo, por haberme brindado su amistad sincera.

A Angel Cano por haberme apoyado con una beca de proyecto PAPPIT IA100112 para ayudarme a concluir mi tesis.

A Liz por que siempre se preocupó por mi más allá de los aspectos académicos y siempre se tomó el tiempo para ayudarme con toda mi papelería. Además, porque siempre me recibió con una sonrisa y por haberme enseñado que cuando las cosas se hacen con una actitud positiva hacia todo y todos, éstas salen bien.

A Pilar y a Ángeles porque siempre me consiguieron los artículos y libros que necesité (los cuales fueron muchísimos) en el menor tiempo posible y sobre todo por haberse tomado siempre la molestia de entregármelos directamente en mi cubo.

A las Sras. Vero y Agri, a Rica, Mónica y Caro, a la Sras. Celia y Albi, a Sergio y a Don Seve, porque siempre estuvieron al pendiente de mi y en particular, por todas las porras que recibí de ellos.

A todos los investigadores y personal que labora en el IMATE-Cuernavaca, ya que siempre recibí de todos ellos una sonrisa, un saludo, apoyo académico y muchas cosas más ...

A las chicas de posgrado Laura, María Inés, Socorro, Alexia, Lucía y María Teresa, ya que siempre me ayudaron a resolver los distintos problemas académicos que se me presentaron mientras estuve en el doctorado y durante todo el tiempo que me llevó terminar mi tesis.

A mis amigos de la Tremendisima por sus saludos, porras y por la música que en algunas ocasiones me dedicaron.

A CONACyT por el apoyo otorgado a través de una beca para realizar mis estudios de doctorado y por la beca de ayudante de investigador Nacional Nivel III con No. de expediente 1170.

A PAPIIT por la beca otorgada a través del proyecto IA100112 para continuar con esta tesis.

Contenido General.

Después de todo, todo ha sido nada,
a pesar de que un día fué todo.
Después de nada, o después de todo
supe que todo no era más que nada.

José Hierro.

Vida.

En esta tesis se construyen nuevos ejemplos de variedades de contacto en dimensiones arbitrariamente grandes. Estas variedades, las cuales llamamos *variedades ángulo-momento mixtas*, están relacionadas con las variedades ángulo-momento clásicas:

- **Capítulo III.** Se definen las variedades ángulo-momento así como una generalización de dichas variedades a las cuales llamamos variedades ángulo-momento mixtas.
- **Capítulo IV.** Se describen distintas estructuras geométricas que admiten las variedades ángulo-momento como descomposición de libro abierto y estructura regular de Poisson, así como ejemplos de descomposiciones de libro abierto de dichas variedades.
- **Capítulo V.** Se presenta el resultado principal de esta tesis: la construcción de una estructura de contacto sobre las variedades ángulo-momento mixtas. La construcción que se presenta es, en cierto sentido, explícita.

Se hace énfasis que tanto en el capítulo I como en el capítulo II se da una breve introducción sobre conceptos y resultados básicos: formas diferenciales, politopos, variedades simplécticas, geometría de contacto, descomposición de libro abierto, confoliaciones y variedades de Poisson. Se presenta la correspondencia que existe entre estructuras de contacto y libros abiertos y viceversa.

Ésto debido a que dichos conceptos serán utilizados a lo largo de toda la tesis. **El lector familiarizado con este material puede omitirlo y comenzar en el capítulo III.**

En el apéndice I se muestra que un caso particular de variedades ángulo-momento mixtas admiten estructuras de contacto. Ésto como una consecuencia de un resultado de C. Meckert y de trabajos de Y. Eliashberg y A. Weinstein (observación hecha por D. Pancholi).

Introducción.

Be content with what you have
rejoice in the way things are.
When you realize there is nothing lacking,
the whole world belongs to you.

Lao-tzu.

Tao Te Ching.

La topología de la intersección de cuádricas en \mathbb{C}^n de la forma

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j |z_j|^2 = 0, \quad \sum_{j=1}^n |z_j|^2 = 1,$$

donde $\lambda_j = (\lambda_j^1, \dots, \lambda_j^m) \in \mathbb{C}^m$ para $m \geq 1$ y $n > 2m$ tal que la configuración $\mathbf{\Lambda}$ satisface la condición de hiperbolicidad débil ha sido estudiada por diferentes matemáticos. S. López de Medrano y A. Verjovsky en [LdMV97] estudiaron el caso $m = 1$. Aquí, dichas intersecciones son difeomorfas a productos de tres esferas o a la suma conexas de variedades que son producto de dos esferas. La generalización a $m > 1$ fue dada por L. Meersseman en [Mee00], donde se remarca la belleza, la rica geometría y topología de dichas variedades (también se puede consultar el artículo de S. Gitler y S. López de Medrano [GLdM13]).

Para $m \geq 1$ estas variedades se conocen como *variedades ángulo-momento* y las denotamos por $\mathcal{M}_1^{(\mathbf{\Lambda}, m, n)}$. Estas variedades son haces principales sobre variedades compactas complejas que en general no son Kähler (ver [LdMV97] y [Mee00]). Estas variedades han sido estudiadas por V. Buchstaber y T. Panov, entre otros (ver [BBCG10], [BP02] y [DJ91]).

Las variedades ángulo-momento son muy interesantes pues, aparte de que tienen una topología muy rica, tienen estructura de libros abiertos y admiten diferentes estructuras geométricas (ver capítulo IV). Las variedades ángulo-momento admiten una acción localmente libre de \mathbb{R}^{2k} con $k \in \{1, \dots, m\}$,

(ver [Mee00]) y por tanto, las órbitas determinan una foliación simpléctica de manera natural y como consecuencia, dichas variedades son variedades regulares de Poisson (ver sección § 4 del capítulo IV).

En [MV04] L. Meersseman y A. Verjovsky mostraron que para cada $m \geq 1$ la variedad compacta compleja (la cual en general no es Kähler), obtenida como el espacio de órbitas de la acción de \mathbb{S}^1 sobre una variedad ángulo-momento, admite una acción holomorfa localmente libre de \mathbb{C}^m . Más aún, la foliación holomorfa \mathcal{F} de dimensión m obtenida por esta acción es una foliación transversalmente Kähler (ver [LJJ99]).

Bajo una condición de racionalidad sobre la configuración de vectores $\mathbf{\Lambda}$, el espacio de hojas de \mathcal{F} es una variedad algebraica tórica o un orbifold algebraico tórico. Más aún, *toda variedad tórica (u orbifold) con singularidades cociente se obtiene por esta construcción*. El conjunto de configuraciones satisfaciendo la condición de racionalidad es densa en el conjunto de configuraciones.

Un artículo fundamental que interrelaciona cuádricas reales en \mathbb{C}^n , variedades complejas y combinatoria de politopos es [BM06], cuyos autores son L. Meersseman and F. Bosio, publicado en *Acta Mathematica*.

En el capítulo III definimos una generalización de las variedades ángulo-momento, a las cuales llamamos *variedades ángulo-momento mixtas*, obtenidas por la intersección de las siguientes cuádricas no coaxiales (ver [GGLdM] para el caso $m = 1$):

- Para $m = 1$ y $s \geq 1$:

$$\sum_{r=1}^s w_r^2 + \sum_{j=1}^n \lambda_j |z_j|^2 = 0, \quad \sum_{r=1}^s |w_r|^2 + \sum_{j=1}^n |z_j|^2 = 1,$$

donde $\lambda_j \in \mathbb{C}$ para toda $j \in \{1, \dots, n\}$.

- Para $m > 1$:

$$\mathbf{w}^2 + \sum_{j=1}^n \boldsymbol{\lambda}_j |z_j|^2 = 0, \quad \sum_{k=1}^m |w_k|^2 + \sum_{j=1}^n |z_j|^2 = 1,$$

donde $\mathbf{w}^2 = (w_1^2, \dots, w_m^2) \in \mathbb{C}^m$ con $w_k \in \mathbb{C}$, $k \in \{1, \dots, m\}$ y $\boldsymbol{\lambda}_j = (\lambda_j^1, \dots, \lambda_j^m) \in \mathbb{C}^m$ para toda $j \in \{1, \dots, n\}$.

En el primer caso, las variedades obtenidas son sumas conexas de productos de dos esferas (ver [GGLdM] y sección § 3 del capítulo III) y también admiten una descomposición de libro abierto (ver [GLdM13], [LdM] y [BLdMV]).

Observemos que para $m \geq 1$ cuando $s = 0$ y $\mathbf{w}^2 = (0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^m$, obtenemos una variedad ángulo-momento $\mathcal{M}_1^{(\Lambda, m, n)}$.

Por otro lado, uno de los problemas fundamentales de la topología de contacto es saber que variedades admiten una estructura de contacto sobre ellas. En dimensión tres toda variedad admite una estructura de contacto (ver [Lut79] y [Mar71]). Estas estructuras de contacto se clasifican en *torcidas* y *tensas*. La clasificación de estructuras de contacto torcidas fue dada por Y. Eliashberg y puede consultarse en [Eli89]. La clasificación de estructuras de contacto tensas puede consultarse en los siguientes artículos de K. Honda [Hon00a] y [Hon00b].

La primera construcción de variedades de contacto en dimensiones altas fue dada por W. M. Boothby y H. C. Wang en [BW58]. Este trabajo fue extendido por C. B. Thomas (ver [Tho76]) quien dió muchos ejemplos de variedades de contacto en dimensiones altas. R. Lutz demostró que el toro de dimensión cinco admite una estructura de contacto (ver [Lut79]).

S. J. Altschuler en [Alt95] introdujo, para dimensión tres, el concepto de *confoliaciones conductivas*; esto es, confoliaciones que tienen la propiedad de propagar “contacto” a todos los puntos de una variedad por medio de caminos con ciertas características. Estas ideas fueron generalizadas por S. J. Altschuler en conjunto con L. F. Wu en [AW00] (ver capítulo I, sección § 5).

En 2002 F. Bourgeois demostró que todo toro de dimensión impar admite una estructura de contacto (ver [Bou02]). Su construcción se basa en resultados de E. Giroux y J. P. Mohsen sobre la correspondencia entre libros abiertos y estructuras de contacto en conjunto con la demostración de R. Lutz de que el toro de dimensión cinco es variedad de contacto (ver [Gir02], [GM] y [Lut79]).

En esta tesis se demuestra que la 1-forma canónica en \mathbb{C}^N dada por

$$\alpha = i \sum_{j=1}^N (z_j d\bar{z}_j - \bar{z}_j dz_j),$$

cuando se restringe al haz tangente de una variedad ángulo-momento es no trivial pero no define una estructura de contacto. Sin embargo, se define una estructura regular de Poisson tal que las hojas de su foliación simpléctica asociada corresponden a las órbitas de una acción localmente libre de \mathbb{R}^{2m} (ver sección § 4 del capítulo IV).

Por otro lado, para una variedad ángulo-momento mixta esta 1-forma real es no trivial y más aún, puede ser deformada, por una perturbación C^∞ arbitrariamente pequeña, a una forma de contacto. La construcción que se presenta es, en cierto sentido, explícita pues es la difusión instantánea a través del flujo del calor de una 1-forma explícita, la cual es una confoliación positiva (ver capítulo V).

CAPÍTULO I

Un poco de geometría.

I can remember absorbing each of these concepts as something new and interesting, and spending a good deal of mental time and effort digesting and practicing with each, reconciling it with the others.

William P. Thurston.

On Proof and Progress in Mathematics.

Antes de definir las variedades ángulo-momento mixtas y construir una estructura de contacto sobre ellas, es importante tener una idea acerca de algunos conceptos que se utilizarán en toda la tesis. Por este motivo se incluye este capítulo, haciendo énfasis en que si **el lector está familiarizado con este material, puede omitirlo y comenzar en el capítulo II o incluso en el capítulo III.**

Brevemente se introduce el concepto de forma diferencial, politopo convexo, así mismo, se define variedad simpléctica, variedad compleja, variedad presimpléctica o de casi contacto, foliación simpléctica sobre variedades de Poisson. Presentamos un poco de geometría de contacto y confoliaciones¹ positivas. Siguiendo con la definición de libro abierto y presentando ejemplos.

Para un estudio mas detallado de todos estos conceptos se recomiendan las siguientes referencias: [Mor01], [Ste83], [Gru03], [TC03], [HW], [MMP04], [Gei01], [Gei], [Etn03], [Gra59], [Lut79], [Mar71], [Ale23], [Win73], [TW75], [BJ82], [EG92], [Lie72], [Ben83], [EH01], [Nie06], [Pre07], [NVK07], [Mec82], [AW00], [ET98], [Tam72], [Vai94], [Mat], [Tro05], [LFM14], entre otras.

¹confoliations.

§ 1. Campos Vectoriales

Sea \mathcal{M} una n -variedad diferenciable.

Definición I.1. La función $\mathcal{X} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbf{T}(\mathcal{M})$, con valores vectoriales, que asigna a cada punto $p \in \mathcal{M}$ un vector tangente $v_p \in \mathbf{T}_p(\mathcal{M})$ es llamada *campo vectorial sobre \mathcal{M}* .

Sea $(\mathcal{U}; x_1, \dots, x_n)$ un sistema de coordenadas locales alrededor de $p \in \mathcal{U}$, $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$. Escribimos el vector tangente v_p de la siguiente manera:

$$v_p = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

donde a_i es una función definida sobre \mathcal{U} . Decimos que v_p es de clase C^∞ , con respecto a p , si todo coeficiente a_i es una función de clase C^∞ .

Consideremos otro sistema de coordenadas locales, $(\mathcal{U}; y_1, \dots, y_n)$, alrededor de p . Entonces,

$$v_p = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial y_j}{\partial x_i}(p) \right) \frac{\partial}{\partial y_j}.$$

Por lo tanto, la condición de que todo coeficiente sea una función de clase C^∞ no depende de la elección de coordenadas locales. Sea $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ el conjunto de todos los campos vectoriales sobre \mathcal{M} . Este conjunto define un espacio vectorial sobre \mathbb{R} .

Sea f una función de clase C^∞ sobre \mathcal{M} ; es decir, $f \in C^\infty(\mathcal{M})$. Un campo vectorial \mathcal{X} sobre \mathcal{M} actúa sobre f de la siguiente forma:

$$(\mathcal{X}f)(p) = v_p(f), \quad p \in \mathcal{M}.$$

En coordenadas locales escribimos

$$(\mathcal{X}f)(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p),$$

de modo que $\mathcal{X}f$ es una función de clase C^∞ sobre \mathcal{M} llamada *derivada de f por el campo vectorial \mathcal{X}* . Tenemos un mapeo:

$$(\mathcal{X}, f) \mapsto \mathcal{X}f,$$

donde $(\mathcal{X}, f) \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times C^\infty(\mathcal{M})$ y $\mathcal{X}f \in C^\infty(\mathcal{M})$.

Definición I.2. Sea $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ y $\mathcal{X} \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$. Decimos que f es una *derivación* si satisface las siguientes propiedades:

1. $\mathcal{X}(af + bg) = a\mathcal{X}f + b\mathcal{X}g$, donde $a, b \in \mathbb{R}$ y $g \in C^\infty(\mathcal{M})$.
2. $\mathcal{X}(fg) = (\mathcal{X}f)g + f(\mathcal{X}g)$, con $g \in C^\infty(\mathcal{M})$.

§ 1.1. El Corchete de Campos Vectoriales.

Sean $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ dos campos vectoriales sobre una n -variedad \mathcal{M} diferenciable. Entonces, \mathcal{X} y \mathcal{Y} actúan sobre el conjunto de todas las funciones de clase C^∞ sobre \mathcal{M} como derivaciones.

Sea $f \in C^\infty(\mathcal{M})$. Consideremos el mapeo $f \mapsto \mathcal{X}(\mathcal{Y}f) - \mathcal{Y}(\mathcal{X}f)$, en este caso $\mathcal{X}(\mathcal{Y}f) - \mathcal{Y}(\mathcal{X}f) \in C^\infty(\mathcal{M})$.

Reescribimos $\mathcal{X}(\mathcal{Y}f) - \mathcal{Y}(\mathcal{X}f)$ como $(\mathcal{X}\mathcal{Y} - \mathcal{Y}\mathcal{X})f$, para indicar que $\mathcal{X}\mathcal{Y} - \mathcal{Y}\mathcal{X}$ expresa un campo vectorial sobre \mathcal{M} . Sea $[\mathcal{X}, \mathcal{Y}] = \mathcal{X}\mathcal{Y} - \mathcal{Y}\mathcal{X}$ y consideremos, en cada punto $p \in \mathcal{M}$, la correspondencia

$$f \mapsto [\mathcal{X}, \mathcal{Y}]_p f = \mathcal{X}_p(\mathcal{Y}f) - \mathcal{Y}_p(\mathcal{X}f) \in \mathbb{R}.$$

Observemos que podemos considerar $[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]_p$ como un vector tangente a \mathcal{M} en p (ver [Mor01, Definition 1.32]). Expresando \mathcal{X} y \mathcal{Y} en coordenadas locales:

$$\mathcal{X} = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \mathcal{Y} = \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

tenemos que

$$[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]_p f = \sum_{i,j=1}^n \left(a_i(p) \frac{\partial b_j}{\partial x_i}(p) - b_i(p) \frac{\partial a_j}{\partial x_i}(p) \right) \frac{\partial f}{\partial x_j}(p).$$

Entonces, $[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$ define un campo vectorial sobre \mathcal{M} , el cual llamamos *corchete* de \mathcal{X} y \mathcal{Y} y su expresión local está dada por

$$[\mathcal{X}, \mathcal{Y}] = \sum_{i,j=1}^n \left(a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Proposición I.1. *El corchete de campos vectoriales satisface las siguientes propiedades:*

- $[a\mathcal{X} + b\mathcal{X}', \mathcal{Y}] = a[\mathcal{X}, \mathcal{Y}] + b[\mathcal{X}', \mathcal{Y}]$, con $a, b \in \mathbb{R}$ y lo mismo para \mathcal{Y} .
- $[\mathcal{Y}, \mathcal{X}] = -[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$.
- *Identidad de Jacobi:* $[[\mathcal{X}, \mathcal{Y}], \mathcal{R}] + [[\mathcal{Y}, \mathcal{R}], \mathcal{X}] + [[\mathcal{R}, \mathcal{X}], \mathcal{Y}] = 0$.
- $[f\mathcal{X}, g\mathcal{Y}] = fg[\mathcal{X}, \mathcal{Y}] + f(\mathcal{X}g)\mathcal{Y} - g(\mathcal{Y}f)\mathcal{X}$, con f y g funciones de clase C^∞ sobre \mathcal{M} .

Definición I.3. Llamamos *álgebra de Lie* a un espacio vectorial bajo la operación corchete $[\ , \]$, de modo que $[\ , \]$ satisface las propiedades de la proposición I.1.

Observación I.1. $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ es un álgebra de Lie sobre \mathbb{R} bajo la operación corchete.

§ 2. Formas Diferenciales.

Consideremos el álgebra con unidad 1 sobre \mathbb{R} , la cual denotamos por Λ_n^* , generada por dx_1, \dots, dx_n y que satisface la siguiente ecuación para todo i, j :

$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i.$$

Esta álgebra se conoce como *álgebra exterior generada por dx_1, \dots, dx_n* .

Observación I.2. $dx_i \wedge dx_i = 0$ para toda i .

Si definimos que el grado de dx_i sea igual a uno, entonces el grado de cada monomio en Λ_n^* estará definido.

Consideremos ahora el conjunto Λ_n^k de todas las combinaciones lineales de monomios de grado k , se tiene entonces que

$$\Lambda_n^* = \bigoplus_{k=0}^n \Lambda_n^k = \Lambda_n^0 \oplus \dots \oplus \Lambda_n^n.$$

Observación I.3.

- Podemos tomar $dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$, $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ como una base de Λ_n^k .

- $\dim \Lambda_n^k = \binom{n}{k}$.
- Si $k > n$, entonces $\Lambda_n^k = 0$ y $\dim \Lambda_n^* = 2^n$.

Definición I.4. Una *forma diferencial de grado k sobre \mathbb{R}^n* o *k -forma* es una combinación lineal de los elementos de la base $dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$, cuyos coeficientes son funciones de clase C^∞ sobre \mathbb{R}^n :

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} f_{i_1} \cdots f_{i_k}(x_1, \dots, x_n) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}.$$

Denotamos por $A^k(\mathbb{R}^n)$ al conjunto de todas las k -formas sobre \mathbb{R}^n , esto es:

$$A^k(\mathbb{R}^n) = \left\{ \omega : \mathbb{R}^n \rightarrow \Lambda_n^k \mid \omega \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \right\}.$$

Del mismo modo podemos considerar el álgebra de todas las formas diferenciales sobre \mathbb{R}^n :

$$A^*(\mathbb{R}^n) = \bigoplus_{k=0}^n A^k(\mathbb{R}^n).$$

Observemos que $A^0(\mathbb{R}^n) = C^\infty(\mathbb{R}^n)$; esto es, las formas diferenciales de grado cero sobre \mathbb{R}^n corresponden a funciones sobre \mathbb{R}^n de clase C^∞ .

Sean $\omega \in A^k(\mathbb{R}^n)$ y $\eta \in A^\ell(\mathbb{R}^n)$ una k -forma y una ℓ -forma respectivamente. Definimos el *producto exterior* de ω y η como sigue:

$$\omega \wedge \eta = \sum_{I, J} f_I g_J dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_\ell},$$

donde

$$\omega = \sum_I f_I dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}, \quad \eta = \sum_J g_J dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_\ell}.$$

Vamos a definir un mapeo lineal $d : A^k(\mathbb{R}^n) \rightarrow A^{k+1}(\mathbb{R}^n)$ como sigue: sea $\omega = f(x_1, \dots, x_n) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$, entonces

$$d\omega = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}.$$

Este mapeo se conoce como *derivada exterior*.

Definición I.5. Una forma diferencial ω es *cerrada* si $d\omega = 0$. Si una forma diferencial η se puede escribir como $\eta = d\omega$ con ω una forma diferencial, llamamos a η *forma exacta*.

Observación I.4.

- $d(d\omega) = 0$.
- Una forma exacta siempre es una forma cerrada.

Proposición I.2. Sean $\omega \in A^k(\mathbb{R}^n)$ y $\eta \in A^\ell(\mathbb{R}^n)$, entonces

- i) $\eta \wedge \omega = (-1)^{k\ell} \omega \wedge \eta$.
- ii) $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$.

Sean $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ y $\mathcal{U}' \subset \mathbb{R}^n$ abiertos de \mathbb{R}^n y sea $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}'$ un difeomorfismo. Definimos un homomorfismo $\varphi^* : A^*(\mathcal{U}') \rightarrow A^*(\mathcal{U})$ del álgebra de todas las formas diferenciales sobre \mathcal{U} al álgebra de todas las formas diferenciales sobre \mathcal{U}' como sigue: consideremos una función arbitraria $f \in A^0(\mathcal{U}')$ entonces $\varphi^*(f) = f \circ \varphi \in A^0(\mathcal{U})$ y sea

$$\varphi^*(dx_i) = d\left(\varphi^*(x_i)\right).$$

Extendemos φ^* a formas diferenciales de cualquier grado de modo que se satisfaga

$$\varphi^*(\omega \wedge \eta) = \varphi^*(\omega) \wedge \varphi^*(\eta),$$

para el producto exterior de dos formas diferenciales.

§ 2.1. Relación entre Λ_n^* y $\mathbf{T}_0(\mathbb{R}^n)$.

El espacio tangente a \mathbb{R}^n en el origen, $\mathbf{T}_0(\mathbb{R}^n)$, es un espacio vectorial de dimensión n cuya base está formada por $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$, donde cada dx_i se considera como un elemento en el espacio dual $\mathbf{T}_0^*(\mathbb{R}^n)$ de $\mathbf{T}_0(\mathbb{R}^n)$. Esto porque estamos considerando a $x_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ como una función de clase C^∞ y su diferencial en el origen, $dx_i : \mathbf{T}_0(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$, es lineal. Se sigue entonces que

$$dx_i \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \delta_{ij}.$$

Observación I.5. $\Lambda_n^1 = \mathbf{T}_0^*(\mathbb{R}^n)$.

En general, cualquier elemento de Λ_n^k es una combinación lineal de elementos de la forma $\omega = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k$, donde $\alpha_i \in \Lambda_n^1$. Consideremos $\mathcal{X}_i \in \mathbf{T}_0(\mathbb{R}^n)$ con $i = 1, \dots, k$, definimos el mapeo

$$\omega : \mathbf{T}_0(\mathbb{R}^n) \times \cdots \times \mathbf{T}_0(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$$

de la siguiente manera

$$\omega(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_k) = \frac{1}{k!} \det\left(\alpha_i(\mathcal{X}_j)\right),$$

donde $\left(\alpha_i(\mathcal{X}_j)\right)$ es una matriz cuya entrada (i, j) corresponde a $\alpha_i(\mathcal{X}_j)$.

El mapeo ω satisface las siguientes propiedades:

- Es multilineal: sea \mathcal{X}_i arbitrario, entonces

$$\begin{aligned} \omega(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_{i-1}, a\mathcal{X}_i + b\mathcal{X}'_i, \mathcal{X}_{i+1}, \dots, \mathcal{X}_k) \\ = a\omega(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_i, \dots, \mathcal{X}_k) + b\omega(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}'_i, \dots, \mathcal{X}_k). \end{aligned}$$

- Es alternante: para una permutación arbitraria de n letras $\sigma \in \mathfrak{S}_n$,

$$\omega(\mathcal{X}_{\sigma(1)}, \dots, \mathcal{X}_{\sigma(n)}) = \text{sgn}(\sigma)\omega(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n),$$

donde $\text{sgn}(\sigma)$ es el signo de σ y \mathfrak{S}_n son todas las permutaciones de n elementos.

Definición I.6. El mapeo ω satisfaciendo las propiedades mencionadas se conoce como *forma alternante de grado k* sobre $\mathbf{T}_0(\mathbb{R}^n)$.

§ 2.2. Formas Diferenciales sobre Variedades Diferenciables.

Ahora vamos a definir formas diferenciales sobre una variedad diferenciable arbitraria.

El espacio dual, $\mathbf{T}_p^*(\mathcal{M})$, del espacio tangente $\mathbf{T}_p(\mathcal{M})$ en $p \in \mathcal{M}$ es llamado espacio cotangente en p y podemos considerar su álgebra exterior $\Lambda^*\mathbf{T}_p^*(\mathcal{M})$.

Definición I.7. Sea \mathcal{M} una variedad diferenciable. Decimos que ω es una *k -forma* en \mathcal{M} si a cada punto $p \in \mathcal{M}$ le asigna $\omega_p \in \Lambda^*\mathbf{T}_p^*(\mathcal{M})$ tal que ω_p es de clase C^∞ , con respecto a p .

Sea \mathcal{U} una vecindad arbitraria y consideremos x_1, \dots, x_n , funciones coordenadas definidas sobre \mathcal{U} . Para cualquier punto $p \in \mathcal{U}$, el siguiente conjunto es una base del espacio tangente a \mathcal{M} en p :

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)_p \right\}.$$

Observemos que las funciones x_i pueden pensarse como funciones $x_i : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^∞ . Ahora consideremos el diferencial de dichas funciones en el punto p , $(dx_i)_p : \mathbf{T}_p(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbf{T}_{x_i(p)}(\mathbb{R})$. Ya que podemos identificar $\mathbf{T}_{x_i(p)}(\mathbb{R})$ con \mathbb{R} , consideramos a $(dx_i)_p$ como un elemento de $\mathbf{T}_p^*(\mathcal{M})$ y se tiene

$$dx_i \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \delta_{ij}.$$

Definimos la base dual de $\mathbf{T}_p^*(\mathcal{M})$ como el conjunto $\left\{ (dx_1)_p, \dots, (dx_n)_p \right\}$. Por tanto, expresamos ω_p de la siguiente forma:

$$\omega_p = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1 \dots i_k}(p) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}, \quad (\text{I.1})$$

dicha expresión se conoce como *expresión local* de la k -forma ω sobre \mathcal{M} .

Observación I.6. ω_p es de clase C^∞ siempre que $f_{i_1 \dots i_k}(p)$ sea de clase C^∞ como función de p .

§ 2.3. Operaciones Sobre Formas Diferenciales.

a) Producto Exterior.

Sean $\omega \in A^k(\mathcal{M})$ una k -forma sobre \mathcal{M} y $\eta \in A^\ell(\mathcal{M})$ una ℓ -forma sobre \mathcal{M} . Para todo $p \in \mathcal{M}$ el producto $\omega_p \wedge \eta_p \in \Lambda^{k+\ell} \mathbf{T}_p^*(\mathcal{M})$ está definido:

$$(\omega \wedge \eta)_p = \omega_p \wedge \eta_p.$$

Expresando ω_p y η_p en coordenadas locales: $\omega = f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$, $\eta = g dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_\ell}$, tenemos

$$\omega \wedge \eta = f g dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_\ell}.$$

Sea $(\omega, \eta) \in A^k(\mathcal{M}) \times A^\ell(\mathcal{M})$, el producto exterior induce un mapeo bilineal:

$$(\omega, \eta) \mapsto \omega \wedge \eta \in A^{k+\ell}(\mathcal{M}).$$

Este mapeo satisface las siguientes propiedades:

- $\eta \wedge \omega = (-1)^{k\ell} \omega \wedge \eta$.
- Sean $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_{k+\ell} \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ campos vectoriales arbitrarios, entonces:

$$\begin{aligned} & \omega \wedge \eta(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_{k+\ell}) \\ &= \frac{1}{(k+\ell)!} \sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) \omega(\mathcal{X}_{\sigma(1)}, \dots, \mathcal{X}_{\sigma(k)}) \eta(\mathcal{X}_{\sigma(k+1)}, \dots, \mathcal{X}_{\sigma(k+\ell)}), \end{aligned}$$

donde σ varía sobre el conjunto $\mathfrak{S}_{k+\ell}$ de todas las permutaciones de $k+\ell$ letras $1, 2, \dots, k+\ell$.

b) **Derivada Exterior.**

Sea $\omega \in A^k(\mathcal{M})$ una k -forma sobre \mathcal{M} . Definimos su *derivada exterior* $d\omega \in A^{k+1}(\mathcal{M})$ como

$$d\omega = \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k},$$

donde $\omega = f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ localmente.

La derivada exterior define un mapeo lineal de grado uno

$$d : A^k(\mathcal{M}) \rightarrow A^{k+1}(\mathcal{M}),$$

que satisface las siguientes propiedades:

- $d \circ d = 0$.
- Sea $\omega \in A^k(\mathcal{M})$, se tiene que

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta.$$

Teorema I.1. *Sea \mathcal{M} una variedad de clase C^∞ y sea $\omega \in A^k(\mathcal{M})$ una k -forma arbitraria sobre \mathcal{M} . Para campos vectoriales arbitrarios $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_{k+1} \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, se tiene*

$$\begin{aligned} d\omega(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_{k+1}) &= \\ & \frac{1}{k+1} \left\{ \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} \mathcal{X}_i \left(\omega(\mathcal{X}_1, \dots, \hat{\mathcal{X}}_i, \dots, \mathcal{X}_{k+1}) \right) \right. \\ & \left. + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega \left([\mathcal{X}_i, \mathcal{X}_j], \mathcal{X}_1, \dots, \hat{\mathcal{X}}_i, \dots, \hat{\mathcal{X}}_j, \dots, \mathcal{X}_{k+1} \right) \right\}, \end{aligned}$$

donde $\hat{\mathcal{X}}_i$ significa que \mathcal{X}_i ha sido omitido.

c) **Pullback por un Mapeo.**

Sean \mathcal{M} una variedad C^∞ y $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ un mapeo de clase C^∞ . Consideremos el diferencial de f en cada punto $p \in \mathcal{M}$, esto es

$$f_* : \mathbf{T}_p(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbf{T}_{f(p)}(\mathcal{N}).$$

El mapeo dual inducido por f_* es $f^* : \mathbf{T}_{f(p)}^*(\mathcal{N}) \rightarrow \mathbf{T}_p^*(\mathcal{M})$; esto es, el mapeo definido por

$$f^*(\alpha)(\mathcal{X}) = \alpha\left(f_*(\mathcal{X})\right),$$

con $\alpha \in \mathbf{T}_{f(p)}^*(\mathcal{N})$ y $\mathcal{X} \in \mathbf{T}_p(\mathcal{M})$.

f^* induce, para k arbitraria, un mapeo lineal

$$f^* : \Lambda^k \mathbf{T}_{f(p)}^*(\mathcal{N}) \rightarrow \Lambda^k \mathbf{T}_p^*(\mathcal{M})$$

e induce un homomorfismo de álgebras:

$$f^* : A^*(\mathcal{N}) \rightarrow A^*(\mathcal{M}).$$

Sea $\omega \in A^k(\mathcal{N})$ una forma diferencial sobre \mathcal{N} , $f^*\omega \in A^k(\mathcal{M})$ es llamada *pullback* por f .

Proposición I.3. Sean \mathcal{M}, \mathcal{N} variedades C^∞ . Sea $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ un mapeo de clase C^∞ y $f^* : A^*(\mathcal{N}) \rightarrow A^*(\mathcal{M})$ el mapeo inducido por f . Entonces, f^* es lineal y satisface las siguientes propiedades:

- $f^*(\omega \wedge \eta) = f^*\omega \wedge f^*\eta$ con $\omega \in A^k(\mathcal{N})$ y $\eta \in A^\ell(\mathcal{N})$.
- $d(f^*\omega) = f^*(d\omega)$, con $\omega \in A^k(\mathcal{M})$.

d) **Producto Interior.** Sea \mathcal{M} una variedad C^∞ y $\mathcal{X} \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ un campo vectorial sobre \mathcal{M} . Definimos un mapeo lineal, llamado *producto interior*, $\iota_{\mathcal{X}} : A^k(\mathcal{M}) \rightarrow A^{k-1}(\mathcal{M})$ como

$$\iota_{\mathcal{X}}\omega(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_{k-1}) = k\omega(\mathcal{X}, \mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_{k-1}),$$

para $\omega \in A^k(\mathcal{M})$, $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_{k-1} \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$. Si $k = 0$, definimos $\iota_{\mathcal{X}} = 0$. Este mapeo es una *anti derivación* de grado -1 ; esto es,

$$\iota_{\mathcal{X}}(\omega \wedge \eta) = \iota_{\mathcal{X}}\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge \iota_{\mathcal{X}}\eta,$$

con $\omega \in A^k(\mathcal{M})$ y $\eta \in A^\ell(\mathcal{M})$.

§ 3. Teorema de Frobenius.

§ 3.1. Teorema de Frobenius para Campos Vectoriales.

Vamos a estudiar campos de subespacios de dimensión r .

Sea $\mathcal{D} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbf{T}(\mathcal{M})$ una función que asigna a cada punto $p \in \mathcal{M}$ un subespacio, $\mathcal{D}_p \subset \mathbf{T}_p(\mathcal{M})$, de dimensión r de modo que existen r campos vectoriales $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_r$, definidos en una vecindad \mathcal{U} de cada punto p , tales que $\{\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_r\}$ es una base de \mathcal{D}_q , en todo punto $q \in \mathcal{U}$.

Definición I.8. \mathcal{D} es llamada *r-distribución* sobre \mathcal{M} .

Sea \mathcal{N} una subvariedad de \mathcal{M} y sea \mathcal{D} una r -distribución sobre \mathcal{M} . Si $\mathbf{T}_p(\mathcal{N}) = \mathcal{D}_p$, para $p \in \mathcal{N}$ arbitrario, decimos que \mathcal{N} es una *variedad integrable* de \mathcal{D} .

Definición I.9. Una r -distribución \mathcal{D} es *completamente integrable* si, para todo $p \in \mathcal{M}$, existe una variedad integrable.

Observación I.7. Una 1-distribución siempre es completamente integrable.

Sea \mathcal{D} una r -distribución. Denotamos por $\mathfrak{X}(\mathcal{D})$ al conjunto de todos los campos vectoriales \mathcal{X} , tales que $\mathcal{X}_p \in \mathcal{D}_p$ para todo $p \in \mathcal{M}$. Si $\mathcal{X} \in \mathfrak{X}(\mathcal{D})$ decimos que \mathcal{X} pertenece a \mathcal{D} .

Definición I.10. Una r -distribución \mathcal{D} sobre una variedad diferenciable \mathcal{M} es *involutiva* si, para cualesquiera dos campos vectoriales arbitrarios \mathcal{X}, \mathcal{Y} pertenecientes a \mathcal{D} , el corchete $[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$ también pertenece a \mathcal{D} .

Teorema I.2 (Teorema de Frobenius para campos vectoriales). *Una r-distribución \mathcal{D} sobre una variedad diferenciable \mathcal{M} es completamente integrable si y solo si \mathcal{D} es involutiva.*

§ 3.2. Teorema de Frobenius para Formas Diferenciales.

Sea \mathcal{D} una r -distribución sobre una n -variedad diferenciable \mathcal{M} . Vamos a dar una representación de \mathcal{D} en términos de formas diferenciales.

Para $k \geq 1$ arbitrario, sean

$$I^k(\mathcal{D}) = \left\{ \omega \in A^k(\mathcal{M}) \mid \omega(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_k) = 0, \mathcal{X}_i \in \mathcal{D} \right\},$$

y

$$I(\mathcal{D}) = \bigoplus_{k=1}^n I^k(\mathcal{D}),$$

donde $I(\mathcal{D})$ corresponde al conjunto de todas las formas diferenciales sobre \mathcal{M} que se anulan sobre \mathcal{D} . Tenemos el siguiente lema:

Lema I.1.

- $I(\mathcal{D})$ es un ideal de $A^*(\mathcal{M})$. Esto es, $I(\mathcal{D})$ es un subespacio lineal de $A^*(\mathcal{M})$ y se tiene $\theta \wedge \omega \in I(\mathcal{D})$ para $\theta \in A^*(\mathcal{M})$ arbitrario y $\omega \in I(\mathcal{D})$.
- Localmente $I(\mathcal{D})$ está generado por $s = (n - r)$ 1-formas linealmente independientes. Esto es, para $p \in \mathcal{M}$ arbitrario, existe una vecindad abierta \mathcal{U} de p y 1-formas $\omega_1, \dots, \omega_s$, linealmente independientes en cada punto de \mathcal{U} , tal que $\omega \in I(\mathcal{D})$ arbitraria se escribe de la siguiente forma:

$$\omega = \sum_{i=1}^s \theta_i \wedge \omega_i.$$

Los θ_i son formas diferenciales sobre \mathcal{U} . Para un punto arbitrario $q \in \mathcal{U}$ se tiene:

$$\mathcal{D}_q = \left\{ \mathcal{X} \in \mathbf{T}_q(\mathcal{M}) \mid \omega_1(\mathcal{X}) = \dots = \omega_s(\mathcal{X}) = 0 \right\}.$$

Consideremos una r -distribución \mathcal{D} sobre \mathcal{M} y el ideal $I(\mathcal{D})$ de $A^*(\mathcal{M})$, que consiste de todas las formas diferenciales que se anulan sobre \mathcal{D} .

Proposición I.4. \mathcal{D} es involutiva si y solo si $I(\mathcal{D})$ es cerrado con respecto a la operación de derivada exterior, es decir:

$$dI(\mathcal{D}) \subset I(\mathcal{D}).$$

Por otro lado, una r -distribución \mathcal{D} arbitraria sobre una n -variedad diferenciable \mathcal{M} se puede representar localmente por las siguientes ecuaciones:

$$\omega_1 = \cdots = \omega_s = 0,$$

donde $\omega_1, \dots, \omega_s$ son $s = (n - r)$ 1-formas linealmente independientes sobre una vecindad \mathcal{U} de un punto $p \in \mathcal{M}$ dado. Esto es,

$$\mathcal{D}_q = \left\{ \mathcal{X} \in \mathbf{T}_q(\mathcal{M}) \mid \omega_1(\mathcal{X}) = \cdots = \omega_s(\mathcal{X}) = 0 \right\}$$

en un punto $q \in \mathcal{U}$ arbitrario. Entonces podemos reescribir la proposición anterior de la siguiente manera:

\mathcal{D} es involutiva si y solo satisface la siguiente *condición de integrabilidad*: existen 1-formas ω_{ij} sobre \mathcal{U} , tales que

$$d\omega_i = \sum_{j=1}^s \omega_{ij} \wedge \omega_j, \quad i = 1, \dots, s.$$

Teorema I.3 (Teorema de Frobenius para formas diferenciales). *Una r -distribución \mathcal{D} sobre una n -variedad diferenciable \mathcal{M} es completamente integrable si y solo si las 1-formas $\omega_1, \dots, \omega_s$ son linealmente independientes sobre una vecindad abierta de todo punto sobre \mathcal{M} , tales que*

$$\mathcal{D}_q = \left\{ \mathcal{X} \in \mathbf{T}_q(\mathcal{M}) \mid \omega_1(\mathcal{X}) = \cdots = \omega_s(\mathcal{X}) = 0 \right\},$$

satisfacen la condición de integrabilidad.

§ 3.3. Subespacio Característico.

Sea α una 1-forma definida en un abierto \mathcal{U} de una n -variedad diferenciable \mathcal{M} . Definimos el *espacio característico* de α en el punto $x \in \mathcal{U}$ como sigue:

$$\mathcal{C}_x(\alpha) = \left\{ \mathcal{X}_x \in \mathbf{T}_x(\mathcal{M}) \mid \iota_{\mathcal{X}_x} \alpha_x = 0, \quad \iota_{\mathcal{X}_x} d\alpha_x = 0 \right\}.$$

La dimensión de $\mathcal{C}_x(\alpha)$ es el *rango* de α en el punto x y su codimensión se conoce como *clase* de α en x .

Asociando a cada punto $x \in \mathcal{U}$ el espacio $\mathcal{C}_x(\alpha)$ obtenemos un subhaz $\mathcal{C}(\alpha) \subset \mathbf{T}(\mathcal{M})$ del haz tangente, el cual llamamos *subhaz característico* de α .

Definición I.11. Una forma α de clase m es *regular* si no se anula en ningún punto y es de clase constante m en todo abierto donde está definida.

Definición I.12. Dada una 1-forma α , definida en un abierto \mathcal{U} , llamamos *campos característicos* de α a las secciones del subhaz característico.

Los campos característicos son aquellos que satisfacen las condiciones

$$\iota_{\mathcal{X}}\alpha = 0, \quad \iota_{\mathcal{X}}d\alpha = 0.$$

Proposición I.5. *Un campo es característico si y solo si satisface*

$$\iota_{\mathcal{X}}\alpha = 0, \quad \mathcal{L}_{\mathcal{X}}\alpha = 0,$$

donde $\mathcal{L}_{\mathcal{X}}$ denota la derivada de Lie.

Proposición I.6. *El conjunto de campos característicos de α es un álgebra de Lie.*

Aplicando el teorema de Frobenius (ver teorema I.2), el subhaz característico de α es completamente integrable.

Definición I.13. Sea ω una 2-forma cerrada definida sobre una n -variedad diferenciable \mathcal{M} . El *espacio característico* de ω en el punto x se define como

$$\mathcal{L}_x = \text{rad } \omega_x,$$

donde rad denota el radical² de ω .

Igual que en el caso de 1-formas, tenemos el *subhaz característico*, $\mathcal{L} \subset \mathbf{T}(\mathcal{M})$. En este caso, un campo vectorial \mathcal{X} es llamado *campo característico* si $\iota_{\mathcal{X}}\omega = 0$.

Cuando ω es de rango constante, el subhaz \mathcal{L} es diferenciable.

Proposición I.7. *Sea ω una 2-forma cerrada de rango constante sobre \mathcal{M} . Entonces, \mathcal{L} es completamente integrable.*

Demostración. Sean \mathcal{X} y \mathcal{Y} dos campos característicos, entonces

$$\iota_{[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]}\omega = \mathcal{L}_{\mathcal{X}}(\iota_{\mathcal{Y}}\omega) - \iota_{\mathcal{Y}}(\mathcal{L}_{\mathcal{X}}\omega) = -\iota_{\mathcal{Y}}(\mathcal{L}_{\mathcal{X}}\omega) = \iota_{\mathcal{Y}}(\iota_{\mathcal{X}}\omega + d\iota_{\mathcal{X}}\omega) = 0,$$

por lo que $[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$ es un campo característico.

Aplicando el teorema de Frobenius (teorema I.2), \mathcal{L} es completamente integrable. ■

²El núcleo de la polaridad asociada.

§ 4. Polítopos Convexos.

Sea $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^d$ un subconjunto de \mathbb{R}^d . Decimos que \mathcal{V} es un *conjunto convexo* si para cada par de puntos distintos $a, b \in \mathcal{V}$, el segmento cerrado cuyos puntos extremos son a y b está contenido en \mathcal{V} .

Definición I.14. La *envolvente convexa*, $\mathcal{H}(S)$, de un conjunto no vacío $S \subset \mathbb{R}^d$ es el conjunto de todos los puntos que pueden representarse como combinaciones convexas de puntos en S ; esto es, puntos que pueden expresarse en la forma

$$\left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i \mid \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1, \quad x_i \in S \quad \text{y} \quad \lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0 \right\}.$$

Esto es, a cada x_i en S le asignamos un coeficiente λ_i , tales coeficientes son no negativos y su suma es igual a uno. Para cada elección de coeficientes, la combinación convexa resultante es un punto en la envolvente convexa y toda la envolvente convexa se puede construir escogiendo coeficientes en todas las maneras posibles.

El siguiente teorema, conocido como *teorema de Carathéodory*, es uno de los resultados básicos en convexidad.

Teorema I.4 (Carathéodory [Gru03]). *Si S es un subconjunto de \mathbb{R}^d , entonces todo $x \in \mathcal{H}(S)$ se expresa como una combinación convexa de a lo más $d + 1$ puntos en S .*

B. Grünbaum, en su libro *Convex Polytopes* ([Gru03]), define un polítopo convexo como un conjunto convexo compacto, con un número finito de puntos extremos. Esto nos dice que un polítopo convexo compacto \mathcal{P} es la envolvente convexa de un conjunto finito de puntos S , tal que S contiene a los puntos extremos de \mathcal{P} .

Dado un hiperplano $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^d$ denotamos por \mathcal{H}^+ y \mathcal{H}^- a los dos semiespacios cerrados cuya frontera es \mathcal{H} .

Definición I.15. Un hiperplano $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^d$ de \mathbb{R}^d se dice que *soporta* a \mathcal{P} si alguno de los semiespacios cerrados \mathcal{H}^+ , \mathcal{H}^- contiene a \mathcal{P} .

Un subconjunto $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}$ de \mathcal{P} es una *cara* de \mathcal{P} si es el conjunto vacío, el mismo \mathcal{P} o la intersección de \mathcal{P} con un hiperplano que lo soporta.

§ 4.1. Polítopos combinatoriamente equivalentes.

El concepto de polítopos combinatoriamente equivalentes es muy importante pues muchas propiedades de éstos, solo dependen de su tipo combinatorio.

Sean \mathcal{P} y \mathcal{P}' dos polítopos. Decimos que \mathcal{P} y \mathcal{P}' son *combinatorialmente equivalentes* si existe una correspondencia uno a uno φ entre el conjunto $\{\mathcal{F}\}$ de todas las caras de \mathcal{P} y el conjunto $\{\mathcal{F}'\}$ de todas las caras de \mathcal{P}' tal que φ preserva inclusiones: $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ si y solo si $\varphi(\mathcal{F}_1) \subset \varphi(\mathcal{F}_2)$.

Observación I.8. Ser combinatoriamente equivalente es una relación de equivalencia.

§ 5. Estructuras Simplécticas y Complejas.

§ 5.1. Variedades Simplécticas.

Sea V un espacio vectorial real de dimensión m y sea $\Omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ un mapeo bilineal. Decimos que Ω es *antisimétrico* si

$$\Omega(u, v) = -\Omega(v, u), \quad \forall u, v \in V.$$

Teorema I.5. Sea Ω un mapeo bilineal antisimétrico sobre V . Entonces, existe una base $\{u_1, \dots, u_k, e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$ de V tal que

- $\Omega(u_i, v) = 0$ para toda i y para todo $v \in V$.
- $\Omega(e_i, e_j) = 0 = \Omega(f_i, f_j)$ para toda i, j .
- $\Omega(e_i, f_j) = \delta_{ij}$ para toda i, j .

Dicha base se conoce como *base canónica* (aunque no es única).

Demostración. La demostración es por inducción. Sea

$$\mathcal{U} := \left\{ u \in V \mid \Omega(u, v) = 0 \forall v \in V \right\}.$$

Escogemos una base u_1, \dots, u_k de \mathcal{U} y un espacio W complementario a \mathcal{U} en V , esto es $V = \mathcal{U} \oplus W$.

Sea $e_1 \in W$ distinto de cero. Entonces, existe $f_1 \in W$ tal que $\Omega(e_1, f_1) \neq 0$. Asumimos que $\Omega(e_1, f_1) = 1$. Sea W_1 el espacio generado por e_1 y f_1 y $W_1^\Omega = \{w \in W \mid \Omega(w, v) = 0 \forall v \in W_1\}$.

Supongamos que $v = ae_1 + bf_1 \in W_1 \cap W_1^\Omega$. Tenemos que

$$0 = \Omega(v, e_1) = -b \quad 0 = \Omega(v, f_1) = a.$$

Por tanto, $v = 0$ y se sigue que $W_1 \cap W_1^\Omega = \{0\}$.

Supongamos que $v \in W$ es tal que $\Omega(v, e_1) = c$ y $\Omega(v, f_1) = d$. Entonces,

$$v = (-cf_1 + de_1) + (v + cf_1 - de_1).$$

Sea $e_2 \in W_1^\Omega$, $e_2 \neq 0$. Existe $f_2 \in W_1^\Omega$ tal que $\Omega(e_2, f_2) \neq 0$. Asumimos que $\Omega(e_2, f_2) = 1$. Sea W_2 el subespacio generado por e_2 y f_2 y se sigue el mismo procedimiento anterior.

Este proceso se detiene eventualmente pues $\dim V < \infty$. Entonces tenemos

$$V = \mathcal{U} \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_n,$$

donde todos los sumandos son ortogonales con respecto a Ω y donde W_i tiene base e_i, f_i con $\Omega(e_i, f_i) = 1$. ■

Sea $\tilde{\Omega} : V \rightarrow V^*$ un mapeo lineal definido por

$$\tilde{\Omega}(v)(u) := \Omega(v, u).$$

Observemos que el núcleo de $\tilde{\Omega}$ es el subespacio \mathcal{U} definido en la demostración del teorema anterior.

Definición I.16. Un mapeo bilineal antisimétrico Ω es llamado *simplético* o *no degenerado* si el mapeo $\tilde{\Omega}$ es biyectivo, esto es, $\mathcal{U} = \{0\}$.

En este caso, Ω se conoce como *estructura simplética* lineal sobre V y la pareja (V, Ω) es un *espacio vectorial simplético*.

Sea ω una 2-forma sobre una variedad \mathcal{M} tal que para cada $p \in \mathcal{M}$ el mapeo

$$\omega_p : \mathbf{T}_p(\mathcal{M}) \times \mathbf{T}_p(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}$$

es antisimétrico y bilineal sobre $\mathbf{T}_p(\mathcal{M})$ y ω_p es diferenciable en p .

Definición I.17. Una 2-forma ω es *simplética* si es cerrada y ω_p es simplética para todo $p \in \mathcal{M}$.

Sea \mathcal{M} una variedad y ω una 2-forma simplética, llamamos a la pareja (\mathcal{M}, ω) *variedad simplética*.

Observación I.9. Las variedades simplécticas (\mathcal{M}, ω) son de dimensión par y ω^n es una forma de volumen sobre \mathcal{M} .

Ejemplo I.1. Consideremos $\mathcal{M} = \mathbb{R}^{2n}$ con coordenadas $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$. La 2-forma

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i$$

es simpléctica y el conjunto

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial y_1} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial y_n} \right)_p \right\}$$

es una base simpléctica de $\mathbf{T}_p(\mathcal{M})$.

Teorema I.6 (Darboux). *Sea (\mathcal{M}, ω) una $2n$ -variedad simpléctica y sea p un punto en \mathcal{M} . Entonces, existe una carta coordenada $(\mathcal{U}; x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ tal que sobre \mathcal{U}*

$$\omega = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i.$$

§ 5.2. Variedades Casi Complejas y Variedades Complejas.

Una *estructura compleja* sobre un espacio vectorial V es un mapeo lineal $J : V \rightarrow V$ tal que $J^2 = -Id$. La pareja (V, J) es llamada *espacio vectorial complejo*.

Una estructura compleja J sobre V es equivalente a tener una estructura de espacio vectorial sobre \mathbb{C} , donde el mapeo J corresponde a la multiplicación por i .

Sea (V, Ω) un espacio vectorial simpléctico. Una estructura compleja J sobre V es *compatible* con ω si el mapeo lineal $G_J : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $G_J(u, v) = \Omega(u, Jv)$ para todo $u, v \in V$, es un producto interno positivo sobre V .

Proposición I.8. *Sea (V, Ω) un espacio vectorial simpléctico con un producto interno G . Entonces, existe una estructura compleja compatible, J , sobre V .*

Una *estructura casi compleja* sobre una variedad \mathcal{M} es un campo diferenciable de estructuras complejas sobre los espacios tangentes

$$p \mapsto J_p : \mathbf{T}_p(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbf{T}_p(\mathcal{M}),$$

con $p \in \mathcal{M}$, lineal y tal que $J_p^2 = -Id$.

La pareja (\mathcal{M}, J) se conoce como *variedad casi compleja*.

Definición I.18. Sea (\mathcal{M}, ω) una variedad simpléctica. Una estructura casi compleja J sobre \mathcal{M} es llamada ω -*compatible* si el mapeo que asigna a cada punto $p \in \mathcal{M}$ el pareamiento bilineal

$$g_p : \mathbf{T}_p(\mathcal{M}) \times \mathbf{T}_p(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{tal que} \quad g_p(u, v) := \omega_p(u, J_p v)$$

es una métrica riemanniana sobre \mathcal{M} .

Ejemplo I.2. Vamos a identificar \mathbb{R}^{2n} con \mathbb{C}^n usando coordenadas $z_j = x_j + iy_j$. Multiplicando por i inducimos un mapeo constante lineal, J_0 , sobre los espacios tangentes de modo que $J_0^2 = -Id$. Este mapeo se conoce como *estructura casi compleja natural* sobre \mathbb{R}^{2n} :

$$J_0 \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial y_j}, \quad J_0 \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \right) = -\frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Para la forma simpléctica natural $\omega_0 = \sum dx_j \wedge dy_j$ y el producto interno euclidiano $g_0 = \langle \cdot, \cdot \rangle$, la relación de compatibilidad se satisface

$$\omega_0(u, v) = g_0(J_0(u), v).$$

Proposición I.9. Sean (\mathcal{M}, ω) variedad simpléctica y g una métrica riemanniana sobre \mathcal{M} . Entonces, existe una estructura casi compleja natural J sobre \mathcal{M} que es ω -compatible.

Corolario I.1. Toda variedad simpléctica (\mathcal{M}, ω) tiene estructuras casi complejas ω -compatibles.

Definición I.19. Una *variedad compleja* de dimensión compleja n es un conjunto \mathcal{M} con un atlas complejo completo:

$$\mathcal{A} = \left\{ \left(\mathcal{U}_\alpha, \mathcal{V}_\alpha, \phi_\alpha \right) \right\},$$

donde $\mathcal{M} = \cup_\alpha \mathcal{U}_\alpha$, los \mathcal{V}_α son subconjuntos abiertos de \mathbb{C}^n y los mapeos $\phi_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \rightarrow \mathcal{V}_\alpha$ son tales que los mapeos de transición $\psi_{\alpha\beta}$ son biholomorfismos como mapeos sobre subconjuntos abiertos de \mathbb{C}^n .

Proposición I.10. Toda variedad compleja tiene una estructura casi compleja.

§ 5.3. Variedades Kähler.

Ahora vamos a definir ciertas variedades que admiten tres estructuras compatibles entre si: son variedades simplécticas, complejas y riemannianas.

Definición I.20. Una *variedad Kähler* es una variedad simpléctica (\mathcal{M}, ω) dotada con una estructura casi compleja ω -compatible que es integrable. La forma simpléctica ω se conoce como *forma Kähler*.

Observación I.10.

- Si (\mathcal{M}, ω) es Kähler, entonces \mathcal{M} es una variedad compleja.
- Una forma Kähler ω es una 2-forma compatible con la estructura compleja, cerrada, no degenerada.

§ 5.4. Variedades Presimplécticas o de Casi Contacto.

Entre las estructuras simplécticas y de contacto encontramos las estructuras presimplécticas o también conocidas como de casi contacto, las cuales definimos a continuación.

Definición I.21. Sea ω una 2-forma cerrada de rango máximo sobre una $(2n + 1)$ -variedad \mathcal{M} . Llamamos a ω *forma presimpléctica* y decimos que (\mathcal{M}, ω) es una *variedad presimpléctica*.

En otras palabras, en cada punto $p \in \mathcal{M}$ existe un subespacio de codimensión uno de $\mathbf{T}_p(\mathcal{M})$ (el cual puede ser no único), tal que ω es una forma lineal simpléctica sobre éste.

Observación I.11. El rango de ω es $2n$.

Tenemos entonces un subhaz lineal simpléctico con estructura compleja y un subhaz único de dimensión uno:

$$\mathcal{R} = \left\{ v \in \mathbf{T}_p(\mathcal{M}) \mid \iota_v \omega = 0 \right\}.$$

En particular, $\mathbf{T}_p(\mathcal{M})$ tiene una reducción de grupo estructural a $\mathbf{U}(n) \times \mathbf{1}$.

Por lo tanto, si una variedad orientada \mathcal{M} admite una forma presimpléctica ω , su haz tangente $\mathbf{T}(\mathcal{M})$ tiene una reducción a $\mathbf{U}(n) \times \mathbf{1}$ definido por el subhaz de Reeb y una elección de una estructura compleja en un haz simpléctico complementario.

La existencia de tal reducción es equivalente a la existencia de una 2-forma de rango máximo (no necesariamente cerrada). La existencia de una 2-forma de rango máximo es suficiente para la existencia de una forma presimpléctica (ver [EM02]).

Teorema I.7. *Cualquier 2-forma ω de rango máximo se puede deformar, en el espacio de formas de rango máximo, a una forma presimpléctica ω' .*

Definición I.22. Sea \mathcal{M} una variedad cerrada de dimensión $2n+1$. Decimos que \mathcal{M} es *homotópicamente simpléctica* si su haz tangente $\mathbf{T}(\mathcal{M})$ admite una reducción a $\mathbf{U}(n) \times \mathbf{1}$. El término *variedad de casi contacto* también es usado para esta estructura.

Por otro lado, se tiene la siguiente definición:

Definición I.23. Una $(2n + 1)$ -variedad \mathcal{M} es llamada variedad de *cuasi-contacto* si admite una 2-forma cerrada ω tal que ω^n es una $2n$ -forma distinta de cero en toda la variedad.

D. McDuff mostró en [McD87] que dada una variedad de casi contacto \mathcal{M} existe una estructura de cuasi-contacto ω en \mathcal{M} . Y existe la conjetura de que toda variedad de casi contacto es en realidad una variedad de contacto.

§ 6. Geometría de Contacto.

Se considera que todo comenzó alrededor de 1872 con S. Lie en su artículo [Lie72]; en el cual introdujo la noción de elemento de contacto y transformación de contacto como herramientas geométricas para estudiar sistemas de ecuaciones diferenciales. El uso moderno del término variedad de contacto y estructura de contacto inició en los años 1958 y 1959.

§ 6.1. Estructuras de Contacto.

Definición I.24. Un *elemento de contacto* sobre una variedad \mathcal{M} es un punto $p \in \mathcal{M}$, llamado *punto de contacto*, junto con un hiperplano tangente³ en p , $\mathcal{D}_p \subset \mathbf{T}_p(\mathcal{M})$.

Lema I.2. *Existe una correspondencia uno a uno entre hiperplanos $\mathcal{D}_p \subset \mathbf{T}_p(\mathcal{M})$ y la proyectivización de $\mathbf{T}_p^*(\mathcal{M})$.*

³Un hiperplano tangente es un subespacio de codimensión uno de $\mathbf{T}_p(\mathcal{M})$.

Supongamos que $\mathcal{D} \subset \mathbf{T}(\mathcal{M})$ es una distribución diferenciable de elementos de contacto (es decir, de hiperplanos tangentes) sobre \mathcal{M} :

$$\mathcal{D} : p \mapsto \mathcal{D}_p \subset \mathbf{T}_p(\mathcal{M}).$$

Entonces, localmente $\mathcal{D} = \ker(\alpha)$ para alguna 1-forma α . Esta 1-forma es única, salvo multiplicación escalar.

Definición I.25. Una *estructura de contacto* sobre \mathcal{M} es una distribución diferenciable de hiperplanos $\mathcal{D} \subset \mathbf{T}(\mathcal{M})$, tal que, para toda 1-forma α con $\mathcal{D} = \ker(\alpha)$ localmente, se tiene que $d\alpha|_{\mathcal{D}}$ es simpléctica⁴. La pareja $(\mathcal{M}, \mathcal{D})$ es llamada *variedad de contacto* y α *forma de contacto*.

Sean $(\mathcal{M}, \mathcal{D})$ una variedad de contacto, $p \in \mathcal{M}$ y α una forma de contacto local en una vecindad \mathcal{U} de p . Entonces, $d\alpha_p|_{\mathcal{D}_p}$ es una 2-forma simpléctica. Se sigue que la dimensión de \mathcal{D}_p es par, digamos $2n$ y por tanto la dimensión de $\mathbf{T}_p(\mathcal{M})$ es impar: $2n + 1$. Concluimos que toda variedad de contacto $(\mathcal{M}, \mathcal{D})$ tiene dimensión impar $2n + 1$.

Proposición I.11. Sea $(\mathcal{M}, \mathcal{D})$ una variedad de contacto. Para todo $p \in \mathcal{M}$,

$$\mathbf{T}_p(\mathcal{M}) = \ker(\alpha_p) \oplus \ker(d\alpha_p).$$

Demostración. Ya que $d\alpha_p|_{\mathcal{D}_p}$ es simpléctica, tenemos que

$$\ker(d\alpha_p) \cap \mathcal{D}_p = \{0\}.$$

Ahora, como la dimensión de $\mathbf{T}_p(\mathcal{M})$ corresponde a la dimensión de \mathcal{D}_p más uno, la dimensión de $\ker(d\alpha_p)$ es cero o uno.

Supongamos que $\ker(d\alpha_p)$ es trivial. En este caso, $d\alpha_p$ es una 2-forma simpléctica sobre $\mathbf{T}_p(\mathcal{M})$ y se sigue que la dimensión de $\mathbf{T}_p(\mathcal{M})$ es par y entonces, \mathcal{D}_p no es un hiperplano tangente.

Por lo tanto, la dimensión de $\ker(d\alpha_p)$ es uno y como $\mathcal{D}_p = \ker(\alpha_p)$ se satisface que

$$\mathbf{T}_p(\mathcal{M}) = \ker(\alpha_p) \oplus \ker(d\alpha_p).$$

■

Proposición I.12. Sea \mathcal{D} una distribución diferenciable de hiperplanos tangentes sobre \mathcal{M} . Entonces, \mathcal{D} es una estructura de contacto si y solo si $\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0$ para toda 1-forma α tal que $\mathcal{D} = \ker(\alpha)$ localmente.

⁴Ver definición I.17

Demostración.

\Rightarrow) Supongamos que \mathcal{D} es una estructura de contacto; esto es, para todo $p \in \mathcal{U}$ con \mathcal{U} abierto de \mathcal{M} y para toda 1-forma α localmente definida tenemos que $d\alpha_p|_{\mathcal{D}_p}$ es simpléctica y por tanto, $(d\alpha_p)^n$ es una 2-forma no nula⁵ sobre \mathcal{D}_p .

Como $\alpha_p|_{\ker(d\alpha_p)}$ es no degenerada, entonces α_p es de clase máxima $2n + 1$ y por tanto, $\alpha_p \wedge (d\alpha_p)^n$ es una $(2n + 1)$ -forma sobre \mathcal{U} .

Para todo $p \in \mathcal{U}$, sean v_1, v_2 vectores en \mathcal{D}_p tales que $d\alpha_p(v_1, v_2) \neq 0$ y sea w un vector en $\ker(d\alpha_p)$, entonces

$$\alpha_p \wedge (d\alpha_p)^n(w, v_1, v_2, \dots, v_1, v_2) = [\alpha_p(w)] [d\alpha_p(v_1, v_2)]^n \neq 0.$$

Por tanto, $\alpha_p \wedge (d\alpha_p)^n \neq 0$ para todo $p \in \mathcal{U}$ y para todo abierto $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$. Entonces, $\alpha_p \wedge (d\alpha_p)^n$ es una $(2n + 1)$ -forma no nula sobre \mathcal{U} , para todo $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$.

\Leftarrow) Supongamos que para toda 1-forma α tal que $\mathcal{D} = \ker(\alpha)$, $\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0$. Localmente existe un haz \mathcal{L} tal que $\mathbf{T}(\mathcal{M}) = \ker(\alpha) \oplus \mathcal{L}$ y con una trivialización local $\{e_1, f_1, \dots, e_n, f_n, r\}$, donde los e_i, f_i generan a $\ker(\alpha)$ y r genera a \mathcal{L} .

Ya que $\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0$ y $\alpha(r) \neq 0$, tenemos

$$\left(\alpha \wedge (d\alpha)^n\right)(e_1, f_1, \dots, e_n, f_n, r) = [\alpha(r)] [(d\alpha)^n(e_1, f_1, \dots, e_n, f_n, r)] \neq 0.$$

Entonces, $(d\alpha)^n|_{\mathcal{D}} \neq 0$ y se sigue que $d\alpha|_{\mathcal{D}}$ es simpléctico. Por lo tanto, \mathcal{D} es una estructura de contacto sobre \mathcal{M} . ■

También podemos definir una estructura de contacto como sigue:

Definición I.26. Una *estructura de contacto* sobre una $(2n + 1)$ -variedad \mathcal{M} es una 1-forma, α , regular de clase máxima⁶, $2n + 1$, definida en toda \mathcal{M} . A la pareja (\mathcal{M}, α) se le llama *variedad de contacto* y α es la *forma de contacto*.

⁵Ver corolario 2.5 en [MS95].

⁶ver definición I.11

La diferencial de la forma de contacto, $d\alpha$, no es una forma simpléctica. Su rango es $2n$ y su radical es de dimensión uno en todo punto. De la definición se sigue entonces que en todo punto $p \in \mathcal{M}$, el espacio característico de α es nulo y los subespacios $\ker(\alpha_x)$ y $\text{rad}(d\alpha_x)$ tienen intersección nula.

Utilizando una versión general del teorema de Darboux (ver [Ste83, Thm 6.2]), podemos escribir la definición I.26 como sigue:

Definición I.27. Una *forma de contacto* sobre \mathcal{M} es una 1-forma α que satisface

$$\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0,$$

en todo punto de \mathcal{M} .

Por la proposición I.12, tenemos que tanto la definición I.26 como la definición I.27 son equivalentes a la definición I.25.

Corolario I.2. *Toda variedad de contacto (\mathcal{M}, α) es orientable.*

Demostración. Tenemos que $\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0$ en todo punto de \mathcal{M} , por tanto define una forma de volumen sobre \mathcal{M} . ■

Ejemplos.

1. **Estructura de Contacto Natural sobre \mathbb{R}^3 .**

Consideremos \mathbb{R}^3 con coordenadas (x, y, z) y la 1-forma $\alpha_1 = dz + xdy$, la cual es una forma de contacto, pues $\alpha \wedge d\alpha = dz \wedge dx \wedge dy \neq 0$ y el campo de 2-planos \mathcal{D}_1 está generado por $\left\{ \frac{\partial}{\partial x}, x \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial y} \right\}$.

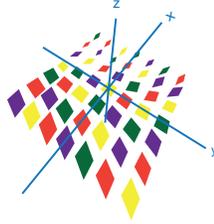


Figura I.1: Estructura de contacto ξ_1 sobre \mathbb{R}^3 .

2. Otra Estructura de Contacto sobre \mathbb{R}^3 .

Consideremos de nuevo \mathbb{R}^3 pero ahora con coordenadas cilíndricas (r, θ, z) y la 1-forma diferencial $\alpha_2 = dz + r^2 d\theta$ que es de contacto.

El campo de 2-planos \mathcal{D}_2 está generado por $\left\{ \frac{\partial}{\partial r}, r^2 \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \theta} \right\}$.

3. Estructura de Contacto Natural sobre \mathbb{S}^3 .

Este es un ejemplo de una estructura de contacto sobre una variedad cerrada; es decir, compacta y sin frontera. Consideremos la 3-esfera unitaria $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ y la 1-forma definida sobre \mathbb{R}^4 y restringida a \mathbb{S}^3

$$\alpha = (x_1 dy_1 - y_1 dx_1 + x_2 dy_2 - y_2 dx_2) \Big|_{\mathbb{S}^3},$$

la cual es de contacto.

4. Estructura de Contacto Natural sobre el 3-Toro \mathbb{T}^3 .

Consideremos el 3-toro $\mathbb{T}^3 \cong \mathbb{R}^3 / \mathbb{Z}^3$ con coordenadas (x, y, z) , $n \in \mathbb{Z}^+$; es decir, \mathbb{T}^3 es el toro en dimensión tres. Consideremos la 1-forma de contacto

$$\alpha_n = \sin(2\pi n z) dx + \cos(2\pi n z) dy,$$

cuyo núcleo está generado por

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial z}, \cos(2\pi n z) \frac{\partial}{\partial x} - \sin(2\pi n z) \frac{\partial}{\partial y} \right\}.$$

§ 6.2. Campo de Reeb

Proposición I.13. *En una variedad de contacto existe un único campo \mathcal{R} que cumple:*

1. $\iota_{\mathcal{R}} \alpha = 1$
2. $\iota_{\mathcal{R}} d\alpha = 0$

Demostración. Sea (\mathcal{M}, α) una variedad de contacto. Gracias al teorema de Darboux, podemos considerar α en coordenadas canónicas locales. Si se satisface 2 necesariamente $\mathcal{R} = f \frac{\partial}{\partial t}$, esto porque el radical de la métrica $d\alpha$ es unidimensional.

Ahora, de 1 se sigue que f debe ser uno. Esto nos da la existencia y unicidad, en coordenadas locales y por lo tanto también su existencia y unicidad en coordenadas globales. ■

Definición I.28. El campo construido en la proposición anterior se llama *campo de Reeb*.

Corolario I.3. *El campo de Reeb conserva la forma de contacto.*

Corolario I.4. *El campo de Reeb nunca es nulo y además cumple*

$$\iota_{\mathcal{R}}(\alpha \wedge (d\alpha)^n) = (d\alpha)^n.$$

§ 6.3. Clasificación de Estructuras de Contacto.

En los años 70, J. Martinet y R. Lutz demostraron que toda 3-variedad cerrada y orientable admite una estructura de contacto (ver [Lut79] y [Mar71]). Años más tarde W. P. Thurston y H. E. Winkelnkemper (ver [TW75]) se dieron cuenta de que la existencia de formas de contacto sobre 3-variedades es una consecuencia del teorema de Alexander [Ale23].

En los siguientes veinte años surgió la idea de que no todas las estructuras de contacto, al menos en dimensión tres, eran de la misma naturaleza. Con los trabajos de D. Bennequin y de Y. Eliashberg se clasifican las estructuras de contacto, en dimensión tres, en dos clases: *tensas* y *torcidas* (ver [Ben83] y [Eli92]) y con estos resultados comenzó la época de la geometría de contacto moderna.

Definición I.29. Una 3-variedad de contacto $(\mathcal{M}, \mathcal{D})$ es llamada *torcida* (overtwisted o vrillée) si podemos encajar un disco \mathbb{D} en ella, de modo que su interior es transversal a \mathcal{D} en todas partes excepto en un punto y su frontera es tangente a \mathcal{D} ; es decir, $\mathcal{D}_p = T_p\mathbb{D}$ en todo $p \in \partial\mathbb{D}$. Si $(\mathcal{M}, \mathcal{D})$ no es torcida, la llamamos *tensa* (tight o tendue).

Por definición, las estructuras de contacto torcidas no son tensas.

Teorema I.8 (D. Bennequin [Ben83]). *La estructura de contacto natural \mathcal{D}_0 sobre \mathbb{S}^3 es tensa.*

Corolario I.5. *La estructura de contacto natural sobre \mathbb{R}^3 es tensa.*

Observación I.12. Por el teorema de Darboux, toda estructura de contacto es *localmente tensa* y por lo tanto, la condición de ser torcida es *global*.

La primera 3-variedad que no admite una estructura de contacto tensa fue descubierta en 2001.

Teorema I.9 (Etnyre-Honda [EH01]). *La suma conexa de la esfera homológica de Poincaré P con $-P$ no admite una estructura de contacto tensa.*

§ 7. Confoliaciones Positivas.

§ 7.1. Foliaciones.

Definición I.30. Una *foliación* \mathcal{F} de dimensión d (o codimensión n) sobre una $(n + d)$ -variedad diferenciable es un atlas maximal compatible con la estructura diferenciable de \mathcal{M} , de modo que los cambios de coordenadas de una carta (\mathcal{U}, ϕ) a (\mathcal{V}, ψ) están dados por

$$\phi \circ \psi^{-1}(x, y) = (f(x, y), g(y)), \quad x \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^n,$$

donde por un atlas compatible nos referimos a que $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ si \mathcal{A} es la estructura diferenciable de \mathcal{M} .

Una *hoja* de una foliación \mathcal{F} es una clase de equivalencia de puntos de \mathcal{M} , donde dos puntos p y q son equivalentes si existe un número finito de cartas de \mathcal{F} , digamos $(\mathcal{U}_1, \phi_1), \dots, (\mathcal{U}_n, \phi_n)$ y puntos $p = p_1, \dots, p_n = q$, donde $p_i \in \mathcal{U}_i$ para $i = \{1, \dots, n\}$ tal que p_i y p_{i-1} pertenecen a $\phi_i(\mathbb{R}^d \times r_i)$ para algún $r_i \in \mathbb{R}^n$.

Existe una relación entre foliaciones y la noción de integrabilidad (asumiendo siempre que todo es diferenciable).

Dado un campo vectorial \mathcal{X} distinto de cero en todo punto sobre \mathcal{M} , sus curvas integrales definen una foliación de dimensión uno; esto es, una foliación de codimensión $n - 1$. Ésto generaliza el teorema de Frobenius⁷.

Una condición necesaria y suficiente para que una distribución sea tangente a las hojas de una foliación es que el conjunto de campos vectoriales tangentes a la distribución sea cerrado bajo el corchete de Lie.

§ 7.2. Confoliaciones Positivas.

Introduciremos algunas definiciones siguiendo las ideas de Y. Eliashberg y W. P. Thurston en [ET98] y de S. J. Altschuler y L. F. Wu en [Alt95] y [AW00].

⁷Ver sección § 3 de este capítulo.

Denotamos por $*$ al operador de Hodge. Sea \mathcal{M} una $(2n + 1)$ -variedad diferenciable, compacta, orientable y con una métrica riemanniana dada. Sea η una 1-forma sobre \mathcal{M} . Si η satisface la desigualdad

$$*(\eta \wedge (d\eta)^n) > 0,$$

la llamamos *confoliación* (ver [ET98]).

Definición I.31. El espacio de las *confoliaciones conductivas*, $\mathbf{Con}(\mathcal{M}^{2\ell+1})$, se define como el subconjunto de $\alpha \in \mathbf{\Lambda}^1(\mathcal{M}^{2\ell+1})$ tal que

- α es una confoliación positiva : $*(\alpha \wedge (d\alpha)^\ell) \geq 0$;
- todo punto $p \in \mathcal{M}^{2\ell+1}$ es accesible desde un punto de contacto $q \in \mathcal{M}^{2\ell+1}$ de α : hay un camino diferenciable $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}^{2\ell+1}$ de p a q con $\gamma'(x)$ en el complemento ortogonal de $\ker\left(*\left(\alpha \wedge (d\alpha)^{\ell-1}\right)\right)$ para todo x .

Observemos que $*(\alpha \wedge (d\alpha)^{\ell-1})$ es una 2-forma, la cual denotaremos por τ . El complemento ortogonal de $\ker(\tau)$ lo denotamos por $[\ker(\tau)]^\perp$ y por $[\ker(\tau)]^\perp(P)$ al subespacio de $\mathbf{T}_P(\mathcal{M}^{2\ell+1})$ en el punto $P \in \mathcal{M}^{2\ell+1}$.

Observación I.13.

- Para un punto en \mathcal{M} donde $\text{Rank}(d\alpha|_{\ker(\alpha)}) = 2\ell$, la forma α es una forma de contacto sobre \mathcal{M} y $[\ker(\tau)]^\perp = \ker(\alpha)$ en dicho punto. La dimensión de $[\ker(\tau)]^\perp$ es igual a 2ℓ .
- Para un punto $P \in \mathcal{M}$ donde $\text{Rank}(d\alpha|_{\ker(\alpha)}) = 2\ell - 2$, la dimensión de $[\ker(\tau)]^\perp$ es dos. En este caso

$$[\ker(\tau)]^\perp(P) = [\ker(\alpha) \cap \ker(d\alpha)](P).$$

- Para un punto en \mathcal{M} donde $\text{Rank}(d\alpha|_{\ker(\alpha)}) < 2\ell - 2$, se tiene que $[\ker(\tau)]^\perp = \{0\}$.

Teorema I.10 (Theorem 2.8, [AW00]). *Si $\alpha \in \mathbf{Con}(\mathcal{M}^{2\ell+1})$, entonces α es C^∞ cercana a una forma de contacto.*

Estas formas también se conocen como *confoliaciones transitivas* (definición dada por Y. Eliashberg y W. P. Thurston en [ET98]), esto porque podemos conectar cualquier punto de la variedad a un punto donde la forma α es de contacto, por medio de un camino legendriano de longitud finita.

§ 8. Descomposición de Libro Abierto

Las descomposiciones de libro abierto fueron introducidas de manera formal en 1973 por H. E. Winkelnkemper [Win73] e I. Tamura [Tam72]. Aunque en 1923 J. W. Alexander ya había mostrado el primer resultado acerca de dichas descomposiciones (ver [Ale23]).

Los libros abiertos aparecen bajo distintos nombres en la literatura, por ejemplo: secciones globales de Poincaré-Birkhoff, suspensiones, fibraciones de Milnor entre otros, los cuales reflejan los diversos contextos en donde aparecen de modo natural.

Definición I.32. Un *libro abierto* sobre una variedad diferenciable real \mathcal{M} es una pareja (\mathcal{K}, f) que consiste de lo siguiente:

- una subvariedad propia $\mathcal{K} \subset \mathcal{M}$ de codimensión dos cuyo haz normal es trivial, por lo tanto \mathcal{K} admite una vecindad \mathbf{N} difeomorfa a $\mathbb{D}^2 \times \mathcal{K}$.
- Una fibración localmente trivial $f : \mathcal{M} - \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{S}^1$ tal que en una vecindad \mathbf{N} de \mathcal{K} , como la ya mencionada, coincide con la coordenada normal angular.

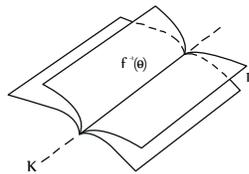


Figura I.2: Descomposición de Libro Abierto.

La subvariedad \mathcal{K} es llamada *lomo* del libro abierto, mientras que la cerradura de las fibras de f son las *páginas* del libro abierto (\mathcal{K}, f) .

Ejemplo I.3. Descomposición de libro abierto de \mathbb{R}^2 . En este caso el lomo corresponde al origen y las páginas son las semirectas $\theta = \text{constante}$.

Existe otra manera de definir un libro abierto: Sean \mathcal{P} una variedad con frontera y $\phi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ un difeomorfismo de \mathcal{P} tal que $\phi|_{\partial\mathcal{P}} = \mathbf{Id}_{\partial\mathcal{P}}$.

Definimos la *suspensión* de ϕ por

$$\Sigma(\mathcal{P}, \phi) = \mathcal{P} \times [0, 1] / \sim \quad \text{donde} \quad (p, 1) \sim (\phi(p), 0),$$

la cual es una variedad con frontera

$$\partial\Sigma(\mathcal{P}, \phi) = \partial\mathcal{P} \times [0, 1] / \sim = \partial\mathcal{P} \times \mathbb{S}^1.$$

Colapsando cada círculo $\{p\} \times [0, 1] / \sim$ a un punto $\{p\} \in \partial\mathcal{P}$ obtenemos una variedad sin frontera $\bar{\Sigma}(\mathcal{P}, \phi)$ llamada *suspensión relativa* de ϕ . Esta variedad es un libro abierto cuyo lomo es una copia de $\partial\mathcal{P}$ colapsada $\partial\mathcal{P} \times [0, 1] / \sim$ y el mapeo inducido por la proyección $\mathcal{P} \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es una fibración localmente trivial. Las páginas resultan ser copias de \mathcal{P} .

Sea (\mathcal{K}, f) un libro abierto en una variedad \mathcal{M} . Sea $\varphi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ un difeomorfismo de \mathcal{P} de modo que existe un difeomorfismo $\bar{\Sigma}(\mathcal{P}, \phi) \rightarrow \mathcal{M}$ que lleva el libro abierto dado por la suspensión relativa de ϕ : $\bar{\Sigma}(\mathcal{P}, \phi)$ a (\mathcal{K}, f) . El difeomorfismo φ es llamado *monodromía* del libro abierto (\mathcal{K}, f) .

§ 9. Variedades de Poisson.

Definición I.33. Un *corchete de Poisson* sobre una variedad \mathcal{M} es una operación binaria $C^\infty(\mathcal{M}) \times C^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{M})$, tal que $(f, g) \mapsto \{f, g\}$, satisfaciendo:

1. Antisimetría: $\{f, g\} = -\{g, f\}$.
2. \mathbb{R} -Bilineal: $\{f, ag + bh\} = a\{f, g\} + b\{f, h\}$, para toda $a, b \in \mathbb{R}$.
3. Identidad de Jacobi: $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$.
4. Regla de la derivada de Leibniz: $\{h, fg\} = \{h, f\}g + f\{h, g\}$.

La pareja $(\mathcal{M}, \{, \})$ es llamada *variedad de Poisson*.

La identidad de Leibniz para el corchete de Poisson permite escribir la siguiente definición:

Definición I.34. Sea $(\mathcal{M}, \{, \})$ una variedad de Poisson. El *campo vectorial hamiltoniano* de $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ es el campo vectorial $\mathcal{X}_f \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ definido por

$$\mathcal{X}_f(g) := \{f, g\}, \quad \forall g \in C^\infty(\mathcal{M}).$$

La función g es llamada *función hamiltoniana*.

§ 9.1. Campos de Multivectores.

Recordemos que las formas diferenciales suaves $\Omega^k(\mathcal{M}) := \Gamma(\Lambda^k \mathbf{T}^*(\mathcal{M}))$ se puede identificar con los mapeos alternantes $C^\infty(\mathcal{M})$ -multilineales de grado k :

$$\omega : \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \cdots \times \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{M}).$$

Los campos multivectores suaves $\mathfrak{X}^k(\mathcal{M}) := \Gamma(\Lambda^k \mathbf{T}(\mathcal{M}))$ se pueden identificar con los mapeos alternantes $C^\infty(\mathcal{M})$ -multilineales de grado k :

$$\vartheta : \Omega^1(\mathcal{M}) \times \cdots \times \Omega^1(\mathcal{M}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{M}).$$

Si $(\mathcal{U}, x^1, \dots, x^m)$ son coordenadas locales para \mathcal{M} , tenemos representaciones locales:

$$\omega|_{\mathcal{U}} = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \omega_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}, \quad \vartheta|_{\mathcal{U}} = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \vartheta^{i_1, \dots, i_k} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_k}},$$

con $\omega_{i_1, \dots, i_k}, \vartheta^{i_1, \dots, i_k} \in C^\infty(\mathcal{U})$.

Dada una variedad de Poisson $(\mathcal{M}, \{, \})$ podemos definir un campo bivector $\pi \in \mathfrak{X}^2(\mathcal{M})$ por $\pi(df, dg) := \{f, g\}$.

Si $(\mathcal{U}, x^1, \dots, x^m)$ son coordenadas locales para \mathcal{M} , la descripción en coordenadas locales del campo bivector π es

$$\pi|_{\mathcal{U}} = \sum_{i < j} \pi^{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j},$$

donde $\pi^{ij}(x) = \{x^i, x^j\}(x)$.

Así mismo, dado un campo bivector $\pi \in \mathfrak{X}^2(\mathcal{M})$ podemos definir un corchete sobre funciones suaves por $\{f, g\} := \pi(df, dg)$.

Este corchete es \mathbb{R} -bilineal, antisimétrico y satisface la identidad de Leibniz. En general, no satisface la identidad de Jacobi.

§ 9.2. El Corchete de Shouten.

Definición I.35. Sean $\vartheta \in \mathfrak{X}^k(\mathcal{M})$ y $\zeta \in \mathfrak{X}^\ell(\mathcal{M})$ campos multivectores. El corchete de Shouten de ϑ y ζ es el campo multivector $[\vartheta, \zeta] \in \mathfrak{X}^{k+\ell-1}(\mathcal{M})$ definido por

$$[\vartheta, \zeta] = \vartheta \circ \zeta - (-1)^{(k-1)(\ell-1)} \zeta \circ \vartheta, \quad (\text{I.2})$$

donde

$$\zeta \circ \vartheta (df_1, \dots, df_{k+\ell-1}) := \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} \bar{\zeta} (\bar{\vartheta} (f_{\sigma(1)}, \dots, f_{\sigma(k)}), f_{\sigma(k+1)}, \dots, f_{\sigma(k+\ell-1)}),$$

la suma es sobre todas las $(k, \ell - 1)$ combinaciones y

$$\bar{\vartheta} (f_1, \dots, f_k) = \vartheta (df_1, \dots, df_k).$$

Sea $\pi \in \mathfrak{X}^2(\mathcal{M})$ un campo bivector cuyo corchete asociado es de la forma $\{f, g\} = \pi(df, dg)$. De la ecuación (I.2) se tiene

$$\frac{1}{2}[\pi, \pi] (df_1, df_2, df_3) = \{ \{f_1, f_2\}, f_3 \} + \{ \{f_2, f_3\}, f_1 \} + \{ \{f_3, f_1\}, f_2 \}.$$

Entonces, la identidad de Jacobi para $\{, \}$ es equivalente al hecho de que $[\pi, \pi] = 0$ como nos dice la siguiente proposición:

Proposición I.14. Sea $(\mathcal{M}, \{, \})$ una variedad de Poisson. Entonces el campo bivector asociado $\pi \in \mathfrak{X}^2(\mathcal{M})$ satisface $[\pi, \pi] = 0$. Todo campo bivector $\pi \in \mathfrak{X}^2(\mathcal{M})$ satisfaciendo $[\pi, \pi] = 0$ define un corchete de Poisson $\{f, g\} := \pi(df, dg)$.

Tenemos la siguiente definición:

Definición I.36. Un campo bivector $\pi \in \mathfrak{X}^2(\mathcal{M})$ satisfaciendo $[\pi, \pi] = 0$ es llamado *estructura de Poisson* sobre \mathcal{M} . Una pareja (\mathcal{M}, π) , donde π es una estructura de Poisson sobre \mathcal{M} es llamada *variedad de Poisson*.

§ 9.3. Estructuras Simplécticas y Estructuras de Poisson.

Dado un campo de k -vectores $\vartheta \in \mathfrak{X}^k(\mathcal{M})$ y una forma diferencial $\alpha \in \Omega^1(\mathcal{M})$, el *producto interior* de ϑ por α , denotado por $\iota_{\alpha}\vartheta \in \mathfrak{X}^{k-1}(\mathcal{M})$ es el campo de $(k - 1)$ -vectores definido por

$$\iota_{\alpha}\vartheta (\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}) = \vartheta (\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}).$$

Para un campo bivector $\pi \in \mathfrak{X}^2(\mathcal{M})$, el producto interior define un mapeo $\Omega^1(\mathcal{M}) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ dado por $\alpha \mapsto \iota_\alpha \pi$. Este mapeo usualmente se denota por

$$\pi^\sharp : \Omega^1(\mathcal{M}) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{M}).$$

Ya que el producto interior es una operación puntual, este mapeo es inducido por un mapeo suave de haces el cual denotamos por el mismo símbolo $\pi^\sharp : \mathbf{T}^*(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbf{T}(\mathcal{M})$ tal que

$$\pi_x^\sharp : \mathbf{T}_x^*(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbf{T}_x(\mathcal{M}), \quad \alpha \mapsto \iota_\alpha \pi_x.$$

Un campo bivector $\pi \in \mathfrak{X}^2(\mathcal{M})$ es llamado *no degenerado en $x \in \mathcal{M}$* si π_x^\sharp es un isomorfismo. Se dice que $\pi \in \mathfrak{X}^2(\mathcal{M})$ es *no degenerado* si es no degenerado en todo punto $x \in \mathcal{M}$.

Si pensamos en un campo bivector $\pi \in \mathfrak{X}^2(\mathcal{M})$ dando en cada $x \in \mathcal{M}$ una forma bilineal antisimétrica $\pi_x : \mathbf{T}_x^*(\mathcal{M}) \times \mathbf{T}_x^*(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}$, el que π sea no degenerado en x es lo mismo que el hecho que la forma bilineal antisimétrica sea no degenerada en x .

De manera análoga, una 2-forma $\omega \in \Omega^2(\mathcal{M})$ determina un mapeo $\omega^\flat : \mathbf{T}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbf{T}^*(\mathcal{M})$, tal que

$$\omega_x^\flat : \mathbf{T}_x(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbf{T}_x^*(\mathcal{M}), \quad v \mapsto \iota_v \omega_x.$$

Una 2-forma $\omega \in \Omega^2(\mathcal{M})$ es *no degenerada en $x \in \mathcal{M}$* si ω_x^\flat es un isomorfismo. Decimos que $\omega \in \Omega^2(\mathcal{M})$ es *no degenerada* si es no degenerada en todo $x \in \mathcal{M}$.

Si pensamos en una 2-forma $\omega \in \Omega^2(\mathcal{M})$ dando en cada $x \in \mathcal{M}$ una forma bilineal antisimétrica $\omega_x : \mathbf{T}_x(\mathcal{M}) \times \mathbf{T}_x(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}$, el que ω sea no degenerada en $x \in \mathcal{M}$ es lo mismo que el hecho que la forma bilineal antisimétrica sea no degenerada en x .

Lema I.3. *Existe una correspondencia inyectiva entre campos bivectores no degenerados $\pi \in \mathfrak{X}^2(\mathcal{M})$ y 2-formas no degeneradas $\omega \in \Omega^2(\mathcal{M})$:*

$$\omega^\flat = \left(\pi^\sharp\right)^{-1} \longleftrightarrow \pi^\sharp = \left(\omega^\flat\right)^{-1}.$$

Bajo esta correspondencia, si π está asociado con ω , se tiene

$$[\pi, \pi](\alpha, \beta, \gamma) = -2d\omega \left(\pi^\sharp(\alpha), \pi^\sharp(\beta), \pi^\sharp(\gamma) \right), \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{T}^*(\mathcal{M}).$$

Y se sigue la siguiente proposición:

Proposición I.15. *Existe una correspondencia inyectiva entre estructuras de Poisson no degeneradas y estructuras simplécticas sobre una variedad \mathcal{M} .*

§ 9.4. Estructuras Regulares de Poisson.

Sea $\pi \in \mathfrak{X}^2(\mathcal{M})$ un campo bivector. El *rango* de π en $x \in \mathcal{M}$ es el rango del mapeo lineal π_x^\sharp . Por la antisimetría, el rango en cualquier punto es un número par. En general, el rango varía de punto en punto.

Ejemplos. Una estructura de Poisson no degenerada, es decir, una estructura simpléctica, es una estructura de Poisson π para la cual $\text{Rank}\pi_x = \dim \mathcal{M}$ para toda $x \in \mathcal{M}$.

Cuando el rango de un campo bivector $\pi \in \mathfrak{X}^2(\mathcal{M})$ es constante sobre toda la variedad \mathcal{M} obtenemos una distribución $x \mapsto \text{Im}(\pi_x^\sharp) \subset \mathbf{T}_x(\mathcal{M})$. Esta es una distribución suave pues es generada por campos vectoriales de la forma $\mathcal{X}_f = \pi^\sharp df$.

Teorema I.11. *Para un campo bivector de Poisson $\pi \in \mathfrak{X}^2(\mathcal{M})$ de rango constante la distribución $\text{Im}(\pi^\sharp)$ es integrable. Cada hoja \mathcal{S} de $\text{Im}(\pi^\sharp)$ es una subvariedad de Poisson de (\mathcal{M}, π) y la estructura de Poisson inducida $\pi_{\mathcal{S}} \in \mathfrak{X}^2(\mathcal{S})$ es no degenerada.*

Definición I.37. Una *estructura regular de Poisson* $\pi \in \mathfrak{X}^2(\mathcal{M})$ es una estructura de Poisson cuyo rango es constante.

Se sigue que una variedad regular de Poisson (\mathcal{M}, π) está foliada por hojas simplécticas. Dada una variedad regular de Poisson (\mathcal{M}, π) denotamos por \mathcal{F} a su foliación simpléctica. Las formas simplécticas sobre las hojas generan una sección suave $\omega_{\mathcal{F}} \in \Omega^2(\mathcal{F}) := \Gamma(\Lambda^2 \mathbf{T}\mathcal{F})$. Esta forma es no degenerada y además $d_{\mathcal{F}}\omega = 0$. Se dice que $\omega_{\mathcal{F}}$ es una *forma simpléctica foliada*.

Proposición I.16. *Dada una foliación \mathcal{F} de una variedad \mathcal{M} con una forma simpléctica foliada $\omega_{\mathcal{F}} \in \Omega^2(\mathcal{F})$ existe una única estructura regular de Poisson $\pi \in \mathfrak{X}^2(\mathcal{M})$ tal que $(\mathcal{F}, \omega_{\mathcal{F}})$ es la foliación simpléctica de π .*

Por tanto, existe una correspondencia inyectiva entre estructuras regulares de Poisson sobre \mathcal{M} y foliaciones simplécticas sobre \mathcal{M} .

CAPÍTULO II

¿Estructuras de Contacto o Libros Abiertos?

La belleza que atrae, rara vez coincide
con la belleza que enamora.

José Ortega y Gasset.
Filósofo español.

En este capítulo presentamos la correspondencia que existe entre estructuras de contacto y descomposiciones de libro abierto siguiendo las ideas de E. Giroux (ver [GM] y [Gir02]).

§ 1. Dominios de Liouville y Variedades Weinstein.

Sea \mathcal{M} una variedad compacta con frontera $\partial\mathcal{M}$.

Definición II.1. Llamamos *forma de Liouville* a una 1-forma α que satisface lo siguiente:

- El diferencial $d\alpha = \omega$ es una forma simpléctica en el interior de \mathcal{M} y determina una orientación de \mathcal{M} .
- La forma inducida por α sobre $\partial\mathcal{M}$ es una forma de contacto positiva para la orientación frontera de $\partial\mathcal{M}$.

Observemos que la ecuación $d\alpha = \omega$ es equivalente a la ecuación $\mathcal{L}_{\mathcal{X}}\omega = \omega$. Dada una forma de Liouville sobre una variedad \mathcal{M} tenemos un *campo vectorial de Liouville* \mathcal{X} asociado. Este campo está definido por la condición $\iota_{\mathcal{X}}\omega = \alpha$ en donde ω es no degenerada, en particular en el interior de \mathcal{M} .

Este campo vectorial satisface

$$\iota_{\mathcal{X}}\omega^m = m\alpha \wedge (d\alpha)^{m-1}, \quad m \geq 1,$$

cuando ω es no degenerada sobre $\partial\mathcal{M}$ la condición anterior se puede expresar diciendo que el campo vectorial de Liouville asociado \mathcal{X} es transversal y apunta hacia afuera a lo largo de $\partial\mathcal{M}$.

Definición II.2. Un *dominio de Liouville* es una variedad compacta \mathcal{M} con una forma de Liouville α .

Definición II.3. Una variedad simpléctica (\mathcal{M}, ω) es una *variedad Weinstein*, si existe una función $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ y un campo vectorial \mathcal{X} tales que

1. f es una función de Morse propia y positiva;
2. \mathcal{X} es un campo vectorial tipo gradiente para f ; esto es, $df(\mathcal{X}) \geq 0$ y $df(\mathcal{X}) = 0$ sólo en puntos críticos;
3. $\mathcal{L}_{\mathcal{X}}\omega = \omega$, es decir, ω es una forma simpléctica en el interior de \mathcal{M} ;
4. $\partial\mathcal{P}$ es un conjunto de nivel regular de f .

La terna (ω, \mathcal{X}, f) es llamada *estructura Weinstein* sobre \mathcal{M} .

En una variedad Weinstein $(\mathcal{M}, \omega, \mathcal{X}, f)$ todo conjunto de nivel regular $\Sigma_c = f^{-1}(c)$ lleva una estructura de contacto natural \mathcal{D}_c , definida por una forma de contacto $\alpha_c := (\iota_{\mathcal{X}}\omega)|_{\Sigma_c}$.

§ 2. De Libros Abiertos a Estructuras de Contacto.

El siguiente teorema establece una correspondencia entre descomposiciones de libro abierto y estructuras de contacto, fue demostrado por W. P. Thurston y H. E. Winkelnkemper en [TW75] para el caso $n = 1$ y por E. Giroux para todo $n > 1$.

Teorema II.1. *Sea \mathcal{M} una $(2n + 1)$ -variedad con una descomposición de libro abierto (\mathcal{K}, f) tal que*

1. *la página \mathcal{P} es una variedad compacta que admite una forma simpléctica exacta $\omega = d\beta$,*
2. *el campo vectorial \mathcal{X} definido por $\iota_{\mathcal{X}}\omega = \beta$ es transversal a \mathcal{K} y apunta hacia afuera,*
3. *la monodromía del libro abierto (\mathcal{K}, f) es un simplectomorfismo de (\mathcal{P}, ω) .*

Entonces \mathcal{M} admite una única estructura de contacto $\xi_{(\mathcal{K}, f)}$ para la cual hay una forma de contacto α que satisface:

- a) *α induce una forma de contacto positiva sobre el lomo \mathcal{K} y*
- b) *$d\alpha$ induce una forma simpléctica sobre cada página \mathcal{P} .*

Se dice que una estructura de contacto $\xi_{(\mathcal{K}, f)}$, como la mencionada en el teorema, está *soportada* por el libro abierto (\mathcal{K}, f) .

§ 3. De Estructuras de Contacto a Libros Abiertos.

El siguiente teorema fue desmostrado por E. Giroux y J. P. Mohsen ([GM]) y su enunciado así como un esbozo de la demostración aparecen en el artículo [Gir02].

Teorema II.2 (Teorema 10, [Gir02]). *Sea \mathcal{M} una $(2n + 1)$ -variedad cerrada. Toda estructura de contacto dada sobre \mathcal{M} está soportada por algún libro abierto (\mathcal{K}, f) . Más aún, se puede asumir que las fibras son variedades Weinstein y la monodromía un simplectomorfismo.*

Como corolario a este teorema tenemos el siguiente resultado de F. Bourgeois:

Corolario II.1 (Teorema 1, [Bou02]). *Sea \mathcal{M} una variedad de contacto cerrada. Entonces, la variedad $\mathcal{M} \times \mathbb{T}^2$ admite una estructura de contacto.*

Demostración. Sea $\xi = \ker(\alpha)$, con α una 1-forma de contacto sobre \mathcal{M} , la estructura de contacto sobre \mathcal{M} . Por el teorema II.2 se sigue que dicha estructura de contacto está soportada por un libro abierto (\mathcal{K}, f) .

Sea $\mathbf{N} = \mathcal{K} \times \mathbb{D}^2$ una vecindad tubular de $\mathcal{K} = \mathcal{K} \times \{0\}$ tal que f se extiende a todo \mathbf{N} como la coordenada angular sobre \mathbb{D}^2 . Sea r la coordenada radial en \mathbf{N} . Para r_0 lo suficientemente pequeño, la 1-forma

$$\tilde{\alpha} = g(r) (\cos f dx_1 + \sin f dx_2) + \alpha,$$

es una forma de contacto sobre $\mathcal{M} \times \mathbb{T}^2$, con $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ y $g(r)$ una función tal que

$$\begin{cases} g(r) = r, & r \leq r_0, \\ g(r) = 1, & r \geq 2r_0, \\ g'(r) \geq 0. \end{cases}$$

■

CAPÍTULO III

Variedades Ángulo-Momento y Ángulo-Momento Mixtas.

La sabiduría no nos es dada;
debemos descubrirla por nosotros mismos
tras un largo viaje
que nadie puede evitarnos
ni recorrer por nosotros.

Marcel Proust.

En este capítulo presentamos unas variedades conocidas como variedades ángulo-momento. Así mismo, definimos las variedades ángulo-momento mixtas, las cuales son una generalización de las variedades ángulo-momento. Presentamos ejemplos de ellas, así como sus propiedades.

§ 1. Variedades Ángulo-Momento.

Sean m y n dos enteros positivos tales que $n > 2m$. Sea $\mathbf{\Lambda} = (\boldsymbol{\lambda}_1, \dots, \boldsymbol{\lambda}_n)$ una n -tupla de vectores de \mathbb{C}^m y $\boldsymbol{\lambda}_j = (\lambda_j^1, \dots, \lambda_j^m) \in \mathbb{C}^m$, para $j \in \{1, \dots, n\}$. Sea $\mathcal{H}(\mathbf{\Lambda})$ la envolvente convexa de $\mathbf{\Lambda}$ en \mathbb{C}^m .

Definición III.1. Llamamos *configuración admisible* a una n -tupla $\mathbf{\Lambda}$ que satisface lo siguiente:

- 1) **Condición de Siegel:** $0 \in \mathcal{H}(\mathbf{\Lambda})$.
- 2) **Condición de hiperbolicidad débil:** para cada $2m$ -tupla de enteros (j_1, \dots, j_{2m}) tales que $1 \leq j_1 < \dots < j_{2m} \leq n$, se tiene que

$$0 \notin \mathcal{H}(\{\boldsymbol{\lambda}_{j_1}, \dots, \boldsymbol{\lambda}_{j_{2m}}\}).$$

Toda configuración admisible satisface la siguiente propiedad de regularidad:

Lema III.1. [Mee00, Lemma I.1] Sea $\lambda'_j = (\lambda_j, 1) \in \mathbb{C}^{m+1}$ con $j \in \{1, \dots, n\}$. Para todo conjunto de enteros J entre 1 y n tales que $0 \in \mathcal{H}((\lambda_j)_{j \in J})$, el rango complejo de la matriz cuyas columnas son los vectores $(\lambda'_j)_{j \in J}$ es igual a $m + 1$, por tanto es maximal.

La demostración se sigue directamente del teorema de Carathéodory (ver teorema I.4 de la sección §4 del capítulo I) y puede consultarse en [MV04].

Definición III.2. Sea $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ una configuración de n vectores en \mathbb{C}^m . Decimos que $\lambda_j \in \Lambda$ es *indispensable* si la configuración $(\lambda_i)_{i \in \{j\}^c}$ no es admisible. Sea $I \subset \{1, \dots, n\}$, la configuración $(\lambda_j)_{j \in I}$ es *removable* si $(\lambda_i)_{i \in I^c}$ es admisible.

Sea Λ una configuración admisible y consideremos $\mathcal{A} \in \mathbf{GL}(m, \mathbb{C})$ y $B \in \mathbb{C}^m$ pequeño. Entonces, se tiene que la configuración $\Lambda' = (\mathcal{A}\lambda_1 + B, \dots, \mathcal{A}\lambda_n + B)$ también es admisible.

A continuación presentamos la construcción de las variedades complejas asociadas a las variedades ángulo-momento para el caso en que $m = 1$, dada por S. López de Medrano y A. Verjovsky en [LdMV97].

Sea $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}$ una configuración admisible y consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales, lineales, complejas en \mathbb{C}^n :

$$\dot{z}_j = \lambda_j z_j, \quad \lambda_j \in \Lambda. \quad (\text{III.1})$$

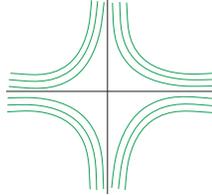


Figura III.1: Representación de las soluciones de la versión real del sistema (III.1).

Las soluciones distintas de cero del sistema (III.1) son subvariedades complejas de \mathbb{C}^n de dimensión 1. Estas subvariedades corresponden a las hojas de una foliación de $\mathbb{C}^n - \{(0, \dots, 0)\}$.

Cuando el origen pertenece a la cerradura de una de esas hojas, decimos que esa hoja es de *Poincaré*. En caso contrario decimos que es de *Siegel*.

Sea $Z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n - \{(0, \dots, 0)\}$, definimos

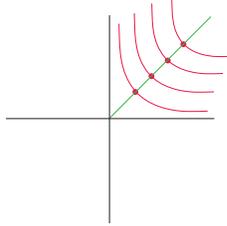
$$F(Z) := \sum_{j=1}^n \lambda_j |z_j|^2, \quad \rho(Z) := \sum_{j=1}^n |z_j|^2,$$

donde $\lambda_j \in \mathbb{C}$ para toda $j \in \{1, \dots, n\}$.

Consideremos el siguiente conjunto de puntos en \mathbb{C}^n :

$$\mathcal{M}^{(\mathbf{\Lambda}, 1, n)} = \left\{ Z \in \mathbb{C}^n - \{(0, \dots, 0)\} \mid F(Z) = 0 \right\}.$$

Este conjunto coincide con el conjunto de puntos tales que su distancia al origen es mínima sobre cada hoja de Siegel. Existe un único punto en cada hoja de Siegel que pertenece a este conjunto (ver [CKP78]).



$\mathcal{M}^{(\mathbf{\Lambda}, 1, n)}$ tiene una estructura cónica con vértice en el origen, por tanto su cociente por la acción radial de \mathbb{R}^+ se identifica con la variedad compacta

$$\mathcal{M}_1^{(\mathbf{\Lambda}, 1, n)} = \left\{ Z \in \mathcal{M}^{(\mathbf{\Lambda}, 1, n)} \mid \rho(Z) = 1 \right\},$$

a la que llamamos *variedad ángulo-momento* de tipo $(\mathbf{\Lambda}, 1, n)$ (también es conocida como *aureola* o *link* de $\mathcal{M}^{(\mathbf{\Lambda}, 1, n)}$), cuya dimensión real es $2n - 3$.

El cociente de $\mathcal{M}_1^{(\mathbf{A},1,n)}$ por la acción escalar de \mathbb{S}^1

$$\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \left(\mathcal{M}_1^{(\mathbf{A},1,n)} / \mathbb{S}^1 \right) \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1},$$

es una variedad compacta y diferenciable debido a la condición de hiperbolicidad débil ya mencionada (ver [Mee00]) y se conoce como *variedad \mathbf{LV}* . Estas variedades admiten una estructura compleja natural (ver [LdMV97]).

También podemos definir estas variedades de la siguiente manera:

Sea

$$\mathcal{Y} = \sum_{j=1}^n \lambda_j z_j \frac{\partial}{\partial z_j}$$

un campo vectorial holomorfo sobre \mathbb{C}^n , el cual induce una acción de \mathbb{C} sobre \mathbb{C}^n de la siguiente manera

$$(t, Z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \mapsto \left(e^{\lambda_1 t} z_1, \dots, e^{\lambda_n t} z_n \right) \in \mathbb{C}^n.$$

Sea $Z \in \mathbb{C}^n - \{(0, \dots, 0)\}$, definimos el subconjunto I_Z de $\{1, \dots, n\}$ como sigue:

$$I_Z = \left\{ j \in \{1, \dots, n\} \mid z_j \neq 0 \right\}.$$

Sea

$$\mathcal{S} = \left\{ Z \in \mathbb{C}^n - \{(0, \dots, 0)\} \mid 0 \in \mathcal{H} \left((\lambda_j)_{j \in I_Z} \right) \right\}.$$

Este conjunto es un abierto en \mathbb{C}^n y corresponde a la unión de todas las órbitas de \mathcal{Y} que no se acumulan en el origen (en otras palabras, las órbitas que son hojas de Siegel).

Por otro lado, consideremos la acción de \mathbb{C}^* dada por todas las homotecias distintas de cero de \mathbb{C}^n , esta acción está dada por un campo vectorial radial

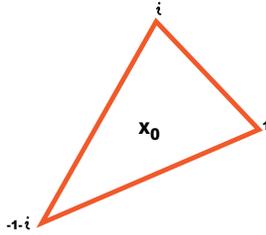
$$\mathcal{R} = \sum_{j=1}^n z_j \frac{\partial}{\partial z_j}.$$

Por tanto, los campos vectoriales \mathcal{Y} y \mathcal{R} definen una acción de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ sobre \mathcal{S} . El cociente $\mathcal{S} / \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ corresponde a la variedad $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ definida anteriormente (ver [LdMV97]).

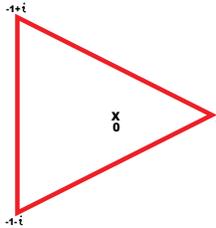
Observación III.1. Sea $\mathbf{\Lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ una configuración admisible. Entonces, las variedades $\mathcal{N}(\mathbf{\Lambda})$ y $\mathcal{N}(\mathbf{\Lambda}')$ son biholomorfas, donde $\mathbf{\Lambda}' = (\mathcal{A}\lambda_1 + B, \dots, \mathcal{A}\lambda_n + B)$, $\mathcal{A} \in \mathbf{GL}(1, \mathbb{C})$ y $B \in \mathbb{C}$ pequeño. Ésto debido a que $\mathbf{\Lambda}'$ también es una configuración admisible y los conjuntos \mathcal{S} correspondientes en ambos casos son el mismo.

Ejemplos.

1. Sea $\mathbf{\Lambda}$ la configuración admisible $(1, i, i, -1 - i, -1 - i)$. En este caso, la variedad ángulo-momento y la variedad \mathbf{LV} correspondientes son $\mathcal{M}_1^{(\mathbf{\Lambda}, 1, 5)} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ y $\mathcal{N}(\mathbf{\Lambda}) = \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$, respectivamente.



2. Sea $\mathbf{\Lambda} = (1, i, -1 - i, -1 - i, -1 - i)$ una configuración admisible. Aquí, $\mathcal{M}_1^{(\mathbf{\Lambda}, 1, 5)} = \mathbb{T}^2 \times \mathbb{S}^5$ y $\mathcal{N}(\mathbf{\Lambda}) = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^5$ son la variedad ángulo-momento y la variedad \mathbf{LV} asociadas, respectivamente.
3. Para la configuración admisible $\mathbf{\Lambda} = (1, -1 + i, -1 - i)$ la variedad ángulo-momento y la variedad \mathbf{LV} que corresponden, respectivamente, son $\mathcal{M}_1^{(\mathbf{\Lambda}, 1, 3)} = \mathbb{T}^3$ y $\mathcal{N}(\mathbf{\Lambda}) = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.



Una *partición cíclica impar* de un entero positivo n es una clase de equivalencia de particiones $n = n_1 + \dots + n_k$ de n en un número impar k de enteros

positivos. Dos particiones son equivalentes si difieren por una permutación cíclica de los n_i .

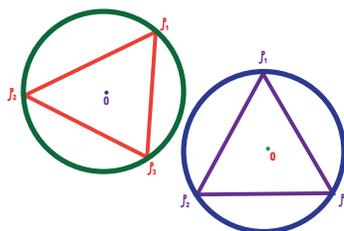
Asociamos a cada partición cíclica impar una configuración natural: consideremos un k -gono regular con centro en el origen y la configuración $\mathbf{\Lambda}$ que consiste de los vértices de este polígono con multiplicidades n_i en la dirección positiva.

Teorema III.1. *Existe una correspondencia uno a uno entre el conjunto de componentes conexas del espacio de configuraciones que satisfacen la condición de hiperbolicidad débil y el conjunto de particiones cíclicas impares de n .*

Demostración. Cualquier configuración $\mathbf{\Lambda}$ puede ser deformada a una configuración natural. ■

Consideremos la variedad ángulo-momento $\mathcal{M}_1^{(\mathbf{\Lambda}, 1, 3)} = \mathbb{T}^3$, la cual corresponde a la configuración admisible $\mathbf{\Lambda} = (1, -1 + i, -1 - i)$.

- Podemos deformar $\mathbf{\Lambda}$ de modo que coincida con los vértices de un 3-gono regular en el círculo unitario; de hecho, dichos vértices corresponden a raíces cúbicas de la unidad.



- Para cualquier otra configuración $\mathbf{\Lambda}'$ cuyos λ_i son múltiplos de las raíces cúbicas de la unidad, obtenemos una variedad \mathbf{LV} que es difeomorfa a la variedad \mathbf{LV} asociada a la configuración $\mathbf{\Lambda}$.
- Entonces las variedades $\mathcal{N}(\mathbf{\Lambda})$ asociadas a las configuraciones con $n = k = 3$ son difeomorfas. Pero no todas son biholomórficamente equivalentes, dos de ellas lo son si y sólo si los triángulos que forman son semejantes (ver [LdMV97]).

Concluimos que la topología de $\mathcal{M}_1^{(\mathbf{A},1,n)}$ está descrita totalmente por una partición cíclica impar y se tiene la siguiente clasificación:

Teorema III.2. ([LdM89, Thm 2],[LdMV97, Thm 1]) Sea $\mathcal{M}_1^{(\mathbf{A},1,n)}$ la variedad que corresponde a la partición cíclica impar $n = n_1 + \dots + n_k$.

- 1) Si $k = 1$, entonces $\mathcal{M}_1^{(\mathbf{A},1,n)} = \emptyset$,
- 2) Si $k = 3$, entonces $\mathcal{M}_1^{(\mathbf{A},1,n)} = \mathbb{S}^{2n_1-1} \times \mathbb{S}^{2n_2-1} \times \mathbb{S}^{2n_3-1}$,
- 3) Si $k = 2\ell + 1 > 3$, entonces $\mathcal{M}_1^{(\mathbf{A},1,n)}$ es difeomorfa a

$$\prod_{i=1}^{\ell} \mathbb{S}^{2d_i-1} \times \mathbb{S}^{2n-2d_i-2},$$

donde $d_i = n_i + \dots + n_{i+\ell-1}$.

Si deformamos de manera continua una configuración de n puntos en \mathbb{C} satisfaciendo la condición de admisibilidad, sin romper dicha condición, entonces la topología de la variedad no cambia (ver [LdM89] y [BM06]). Veamos algunos ejemplos:

Ejemplos.

1. Sea $\mathbf{A} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5)$ una configuración con $n = k = 5$. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que λ_i corresponde a la i -ésima raíz quinta de la unidad (teorema III.1).

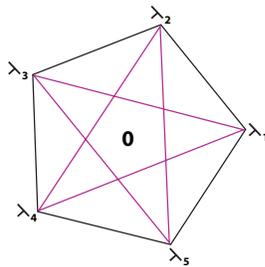


Figura III.2: Configuración admisible de cinco puntos distintos.

De la figura III.2 vemos que \mathbf{A} satisface la condición de Siegel y la condición de hiperbolicidad débil, es decir, \mathbf{A} es admisible.

Por el teorema III.2, la variedad ángulo-momento asociada a $\mathbf{\Lambda}$ es $\mathcal{M}_1^{(\mathbf{\Lambda}, 1, 5)} = \#_5 \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^4$.

Ahora consideremos la configuración admisible $\mathbf{\Lambda}' = (\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5)$ obtenida de $\mathbf{\Lambda}$ por suprimir λ_1 . Observemos que λ_2 y λ_5 son puntos indispensables de $\mathbf{\Lambda}'$, λ_3 y λ_4 se pueden juntar en un solo punto sin que la configuración deje de ser admisible. Por tanto, tenemos una configuración de tres puntos donde uno de ellos es de multiplicidad dos.

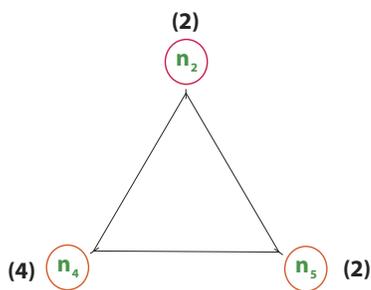


Figura III.3: Configuración admisible de tres puntos, donde uno de ellos es de multiplicidad dos.

La variedad ángulo-momento asociada a $\mathbf{\Lambda}'$ es $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{S}^3$ (ver teorema III.2).

- Sea $\mathbf{\Lambda}$ una configuración admisible de siete puntos distintos en \mathbb{C} , digamos las raíces séptimas de la unidad.

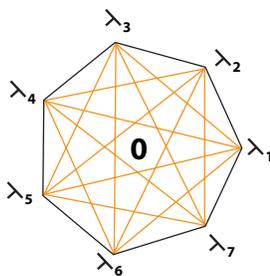


Figura III.4: Configuración admisible de siete puntos distintos.

De la figura III.4 vemos que $\mathbf{\Lambda}$ satisface la condición de Siegel y la condición de hiperbolicidad débil.

En este caso, se sigue del teorema III.2 que la variedad ángulo-momento asociada es $\mathcal{M}_1^{(\mathbf{\Lambda}, 1, 7)} = \sharp_7 \mathbb{S}^5 \times \mathbb{S}^6$.

De dicha configuración suprimimos λ_1 y consideramos la configuración admisible de seis puntos distintos $\mathbf{\Lambda}' = (\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7)$. Observemos que en este caso λ_4 y λ_5 se pueden juntar en un solo punto sin que la configuración deje de ser admisible, lo que nos produce una configuración admisible de 5 puntos, donde uno de ellos tiene multiplicidad dos.

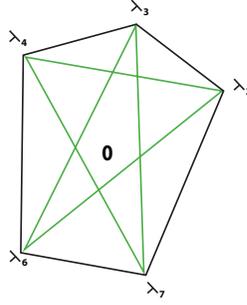


Figura III.5: Configuración admisible de cinco puntos, donde uno de ellos tiene multiplicidad dos.

Por el teorema III.2, la variedad ángulo-momento asociada a la configuración $\mathbf{\Lambda}'$ es $\sharp_2 \mathbb{S}^5 \times \mathbb{S}^4 \sharp_3 \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^6$.

Ahora, siguiendo la construcción dada por L. Meersseman en [Mee00], vamos a generalizar la construcción de las variedades ángulo-momento para el caso en que $m > 1$.

Sea $m > 1$ y $n > 3$ tal que $n > 2m$. Sea $\mathbf{\Lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ una configuración admisible, donde $\lambda_j = (\lambda_j^1, \dots, \lambda_j^m) \in \mathbb{C}^m$, para toda $j \in \{1, \dots, n\}$ (ver definición III.1). Esta configuración define m campos vectoriales holomorfos que conmutan en \mathbb{C}^n :

$$\mathcal{X}_k : (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mapsto \sum \lambda_j^k z_j \frac{\partial}{\partial z_j}, \quad k \in \{1, \dots, m\},$$

los cuales inducen una acción de \mathbb{C}^m sobre \mathbb{C}^n de la siguiente manera:

$$(W, Z) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n \mapsto \left(e^{\langle \lambda_1, W \rangle} z_1, \dots, e^{\langle \lambda_n, W \rangle} z_n \right) \in \mathbb{C}^n. \quad (\text{III.2})$$

Bajo las condiciones dadas en la definición III.1, la acción (III.2) induce una foliación \mathcal{F} , la cual es holomorfa y singular.

Al igual que para $m = 1$, denotamos por \mathcal{S} al conjunto que corresponde a la unión de las hojas de Siegel. Este conjunto es un abierto denso de \mathbb{C}^n . La función $|Z|^2$ tiene un único punto mínimo sobre cada hoja de Siegel (ver [CKP78]).

El espacio de todas las hojas de Siegel es una variedad compleja que se identifica, de una manera diferenciable, con la unión de dichos puntos mínimos:

$$\mathcal{M}^{(\Lambda, m, n)} \simeq \left\{ Z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid \sum_{j=1}^n \lambda_j |z_j|^2 = 0 \right\}.$$

Definimos la *variedad ángulo-momento* $\mathcal{M}_1^{(\Lambda, m, n)}$ como la intersección de $\mathcal{M}^{(\Lambda, m, n)}$ con la esfera unitaria en \mathbb{C}^n :

$$\mathcal{M}_1^{(\Lambda, m, n)} \simeq \left\{ Z \in \mathcal{M}^{(\Lambda, m, n)} \mid \sum_{j=1}^n |z_j|^2 = 1 \right\},$$

cuya dimensión real es $2(n - m) - 1$.

Observemos que la acción por homotecias de \mathbb{C}^* sobre \mathbb{C}^n preserva \mathcal{S} y conmuta con la acción (III.2).

Sea $\mathcal{N}(\Lambda)$ el espacio cociente de \mathcal{S} por la acción total de $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^*$. La condición de hiperbolicidad débil nos permite decir que $\mathcal{N}(\Lambda)$ es una variedad compacta, compleja de dimensión $n - m - 1$ (ver [Mee00]). Llamamos a esta variedad *variedad LV-M*.

Existe una acción natural θ' de $(\mathbb{S}^1)^n$ sobre la variedad $\mathcal{M}_1^{(\Lambda, m, n)}$ definida de la siguiente manera: sean $Z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathcal{M}_1^{(\Lambda, 1, n)}$ y $(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}) \in (\mathbb{S}^1)^n$

$$\left(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}, Z \right) \xrightarrow{\theta'} \left(e^{i\theta_1} z_1, \dots, e^{i\theta_n} z_n \right) \in \mathcal{M}_1^{(\Lambda, m, n)}.$$

El cociente de $\mathcal{M}_1^{(\mathbf{A},1,n)}$ por esta acción se escribe como sigue:

$$\mathbf{K} = \left\{ r \in (\mathbb{R}^+)^n \mid \sum_{j=1}^n r_j \boldsymbol{\lambda}_j = 0, \quad \sum_{j=1}^n r_j = 1 \right\}.$$

El conjunto \mathbf{K} se define como el conjunto de coeficientes de la envolvente convexa de \mathbf{A} , por tanto es un politopo de dimensión $n - 2m - 1$.

Llamamos a este politopo *el politopo asociado de $\mathcal{M}_1^{(\mathbf{A},1,n)}$* .

Definición III.3. Sea \mathbf{A} una configuración admisible y sea \mathcal{S} la unión de las hojas de Siegel correspondientes a dicha configuración. Decimos que la coordenada z_j es un *punto indispensable* de la configuración si

$$\mathcal{S} \subset \left\{ Z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid z_j \neq 0 \right\}.$$

Denotaremos por i el número de puntos indispensables de una configuración.

El politopo asociado a la configuración admisible \mathbf{A} tiene $n - i$ caras.

Consideremos el siguiente mapeo:

$$\mu' : Z \in \mathcal{M}_1^{(\mathbf{A},m,n)} \mapsto (|z_1|^2, \dots, |z_n|^2) \in \mathbb{R}^n,$$

su imagen corresponde al politopo convexo \mathbf{K} y es invariante bajo la acción θ' definida anteriormente.

Proposición III.1. Sea $\mathcal{M}_1^{(\mathbf{A},m,n)}$ una variedad ángulo-momento y ω' el pullback sobre $\mathcal{M}_1^{(\mathbf{A},m,n)}$ de la forma canónica de Euler ω del haz $\mathcal{M}_1^{(\mathbf{A},m,n)} \rightarrow \mathcal{N}(\mathbf{A})$. Entonces,

- $(\mathcal{M}_1^{(\mathbf{A},m,n)}, \omega')$ es una variedad presimpléctica¹,
- ω' es invariante bajo la acción θ' ,
- el mapeo μ' es un mapeo tipo momento para ω' y θ' .

Teorema III.3. [Mee00, Teorema 12] Sea $\mathbf{A} = (\boldsymbol{\lambda}_1, \dots, \boldsymbol{\lambda}_n) \in \mathbb{C}^m$ una configuración admisible. Si el número de puntos indispensables i es mayor que uno, entonces existe una configuración admisible $\mathbf{A}' = (\boldsymbol{\lambda}'_1, \dots, \boldsymbol{\lambda}'_{n-2})$, tal que $\mathcal{M}_1^{(\mathbf{A},m,n)}$ es difeomorfa a $\mathcal{M}_1^{(\mathbf{A}',m,n)'} \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, donde $\mathcal{M}_1^{(\mathbf{A},m,n)}$ y $\mathcal{M}_1^{(\mathbf{A}',m,n)'}$ son las variedades ángulo-momento asociadas a \mathbf{A} y \mathbf{A}' , respectivamente.

¹Ver definición I.21 de la sección § 5 del capítulo I.

Observación III.2. La configuración admisible $\mathbf{\Lambda}$ corresponde a una acción de \mathbb{C}^m , pero la configuración admisible $\mathbf{\Lambda}'$ corresponde a una acción de \mathbb{C}^{m-1} .

§ 2. Fibraciones Calabi-Eckmann Generalizadas.

Siguiendo la idea de la demostración dada por E. Calabi y B. Eckmann en [CE53, Thm II], se tiene el siguiente resultado:

Teorema III.4. *Para toda configuración admisible $\mathbf{\Lambda}$ la variedad*

$$\hat{\mathcal{M}}_1(\mathbf{\Lambda}) := \mathcal{M}_1^{(\mathbf{\Lambda}, m, n)} \times \mathbb{S}^1$$

es variedad compacta compleja. Más aún, existe una fibrición localmente trivial $\pi_{\mathbf{\Lambda}} : \hat{\mathcal{M}}_1(\mathbf{\Lambda}) \rightarrow \mathcal{N}(\mathbf{\Lambda})$ con fibra una curva elíptica.

En [MV04], L. Meersseman y A. Verjovsky mostraron que para toda configuración admisible $\mathbf{\Lambda}$, la variedad $\mathcal{N}(\mathbf{\Lambda})$ admite una acción holomorfa, localmente libre de \mathbb{C}^m , cuyas órbitas determinan una foliación transversalmente Kähler, \mathcal{F} , de dimensión compleja m , la cual describimos a continuación.

Sea $\lambda_j = (\lambda_j^1, \dots, \lambda_j^m) \in \mathbb{C}^m$, con $j \in \{1, \dots, n\}$. Definimos los siguientes m campos vectoriales, los cuales conmutan entre si, sobre \mathcal{S} :

$$\eta_i = \sum_{j=1}^n \Re(\lambda_j^i) z_j \frac{\partial}{\partial z_j},$$

para $i \in \{1, \dots, m\}$.

El siguiente teorema es una generalización de un resultado de J. J. Loeb y M. Nicolau (ver [LJJ99]).

Teorema III.5. *[Mee00, Teorema 7] La proyección sobre $\mathcal{N}(\mathbf{\Lambda})$ de los campos vectoriales (η_1, \dots, η_m) define sobre $\mathcal{N}(\mathbf{\Lambda})$ una foliación regular holomorfa, \mathcal{F} , de dimensión m . Más aún, la foliación \mathcal{F} es transversalmente Kähler con respecto a ω , la forma canónica de Euler del haz $\mathcal{M}_1^{(\mathbf{\Lambda}, m, n)} \rightarrow \mathcal{N}(\mathbf{\Lambda})$.*

Recordemos que ser transversalmente Kähler significa :

- i) \mathcal{F} es el núcleo de ω .
- ii) ω es cerrada y real.
- iii) La forma cuadrática $h(-, -) = \omega(J-, -) + i\omega(-, -)$ define una métrica hermitiana sobre el haz normal de la foliación.

Definición III.4. Una configuración admisible $\mathbf{\Lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ satisface la condición **(K)** si y sólo si podemos escoger, para el espacio de soluciones reales del sistema

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n s_j \lambda_j = 0, \\ \sum_{j=1}^n s_j = 0, \end{cases}$$

una base con coordenadas enteras.

Asumiremos que $0 \in \mathcal{H}(\lambda_1, \dots, \lambda_{2m+1})$. Recordemos que, por el teorema de Carathéodory (ver teorema I.4 en la sección § 4 del capítulo I), 0 siempre pertenece a un simplejo $\mathcal{H}(\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_{2m+1}})$, asumiendo que $i_p = p$ para $1 \leq p \leq 2m+1$. Entonces, la configuración $\mathbf{\Lambda}$ satisface la condición **(K)** si y sólo si, para cada $2m+2 \leq j \leq n$, el vector $\lambda_j - \lambda_1$ es una combinación lineal de $(\lambda_2 - \lambda_1, \dots, \lambda_{2m+1} - \lambda_1)$ con coeficientes racionales. Esta caracterización tiene la siguiente consecuencia.

Lema III.2. [MV04, Lema 2.3] Una configuración admisible $\mathbf{\Lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ satisface la condición **(K)** si y sólo si existe una transformación real afín de \mathbb{R}^{2m} que manda $\mathbf{\Lambda}$ sobre una configuración admisible $\mathbf{\Lambda}' = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_n)$ talque

- i) \mathcal{S} y \mathcal{S}' son iguales como conjuntos.
- ii) Los vectores reales $\Re(\lambda'_j)$ y $\Im(\lambda'_j)$ tienen coordenadas enteras para todo $1 \leq j \leq n$.

El resultado principal del artículo [MV04] es el siguiente:

Teorema III.6. [MV04, Thm A] Sea $\mathbf{\Lambda}$ una configuración admisible que satisface la condición **(K)**. Entonces,

- Las hojas de la foliación \mathcal{F} de $\mathcal{N}(\mathbf{\Lambda})$ son toros compactos, complejos de dimensión compleja m .

- El espacio cociente $\mathcal{N}(\mathbf{\Lambda})/\mathcal{F}$ es una variedad tórica proyectiva de dimensión compleja $n - 2m - 1$. La denotamos por $\mathcal{N}_T(\mathbf{\Lambda})$.
- La forma transversalmente Kähler ω de $\mathcal{N}(\mathbf{\Lambda})$ se proyecta a una forma Kähler $\tilde{\omega}$ de $\mathcal{N}_T(\mathbf{\Lambda})$.

Definición III.5. Llamamos al haz $\mathcal{N}(\mathbf{\Lambda}) \rightarrow \mathcal{N}_T(\mathbf{\Lambda})$ *fibración Calabi-Eckmann generalizada* sobre $\mathcal{N}_T(\mathbf{\Lambda})$.

Tenemos el siguiente corolario:

Corolario III.1. Sea $\mathcal{N}(\mathbf{\Lambda})$ una variedad LV-M. Entonces existe una deformación arbitrariamente pequeña de la estructura compleja de $\mathcal{N}(\mathbf{\Lambda})$ tal que la variedad deformada es el espacio total de una fibración Calabi-Eckmann generalizada.

§ 3. Variedades Ángulo-Momento Mixtas.

En [GGLdM], V. Gómez generalizó el teorema 2 de [LdM89] al caso donde la variedad está dada por dos formas cuadráticas, las cuales no necesariamente son simultáneamente diagonalizables. Esto incluye las variedades que construimos a continuación.

Sean $m = 1$, $n > 3$ y $s > 0$. Sea $\mathbf{\Lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ una configuración admisible, con $\lambda_j \in \mathbb{C}$ para toda $j \in \{1, \dots, n\}$.

Definición III.6. Una *variedad ángulo-momento mixta* de tipo $(\mathbf{\Lambda}, 1, n+s)$ es una variedad $\mathbf{M}_1^{(\mathbf{\Lambda}, 1, n+s)}$ definida por las ecuaciones cuadráticas:

$$F_s(X) := \sum_{r=1}^s w_r^2 + \sum_{j=1}^n \lambda_j |z_j|^2 = 0, \quad (\text{III.3})$$

$$\rho_s(X) := \sum_{r=1}^s |w_r|^2 + \sum_{j=1}^n |z_j|^2 = 1, \quad (\text{III.4})$$

donde $X = (w_1, \dots, w_s, z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+s}$. Esta variedad tiene dimensión real $2n + 2s - 3 > 5$.

Observación III.3. V. Gómez mostró que $\mathbf{M}_1^{(\mathbf{\Lambda}, 1, n+s)}$ es una variedad (ver [GGLdM]).

La razón por la cual estas variedades han sido llamadas *variedades ángulo-momento mixtas* es porque cuando $s = 0$, la variedad obtenida es llamada variedad ángulo-momento (see [LdM89], [LdMV97]). En nuestro caso, las variedades $\mathbf{M}_1^{(\mathbf{A},1,n+s)}$ también admiten una acción del n -toro $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$ y corresponden a la intersección de hipercuádricas que no son coaxiales.

Definición III.7. Denotamos por $\mathbf{M}^{(\mathbf{A},1,n+s)}$ a la variedad obtenida por la ecuación (III.3) en $\mathbb{C}^{n+s} - \{(0, \dots, 0)\}$.

Observación III.4. $\mathbf{M}^{(\mathbf{A},1,n+s)}$ es variedad pues su única singularidad dada por (III.3), es el origen.

La topología de las variedades $\mathbf{M}_1^{(\mathbf{A},1,n+s)}$ está entendida por completo como vemos en el siguiente teorema:

Teorema III.7. [GGLdM] Sea $n > 3$, $s \geq 1$ y $\mathbf{A} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ una configuración admisible. Entonces la variedad $\mathbf{M}_1^{(\mathbf{A},1,n+s)}$ es difeomorfa a:

$$\prod_{j=1}^{2\ell+1} \left(\mathbb{S}^{2d_j+s-1} \times \mathbb{S}^{2n-2d_j+s-2} \right), \quad \text{donde} \quad d_j = n_j + \cdots + n_{j+\ell-1}.$$

Observación III.5. V. Gómez mostró en [GGLdM] que $\mathbf{M}_1^{(\mathbf{A},1,n+s)}$ es un cubriente doble ramificado de la esfera $\mathbb{S}^{2(n+s)-3}$, ramificado sobre $\mathcal{M}_1^{(\mathbf{A},1,n+s-1)}$. Esto permite describir $\mathbf{M}_1^{(\mathbf{A},1,n+s)}$ como una sucesión iterada de cubrientes dobles ramificados.

Consideremos ahora $m > 1$, $n > 3$ talque $n > 2m$.

Sea $\mathbf{A} = (\boldsymbol{\lambda}_1, \dots, \boldsymbol{\lambda}_n)$ una n -tupla de vectores en \mathbb{C}^m con $\boldsymbol{\lambda}_j = (\lambda_j^1, \dots, \lambda_j^m)$ para toda $j \in \{1, \dots, n\}$ y sea $w_k \in \mathbb{C}$ para toda $k \in \{1, \dots, m\}$.

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones cuadráticas:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1(X) &:= w_1^2 + \sum_{j=1}^n \lambda_j^1 |z_j|^2 = 0, \\ &\vdots \\ \mathbf{F}_m(X) &:= w_m^2 + \sum_{j=1}^n \lambda_j^m |z_j|^2 = 0. \end{aligned} \tag{III.5}$$

De aquí en adelante usaremos la siguiente notación:

$$F_k(Z) = \sum_{j=1}^n \lambda_j^k |z_j|^2, \quad G_k(X) = w_k^2 + \sum_{j=1}^n \lambda_j^k |z_j|^2.$$

Proposición III.2. *El conjunto de ceros del sistema (III.5) es una variedad regular fuera del origen si y sólo si, para toda colección $K \subset \{1, \dots, m\}$ el conjunto de ceros del sistema*

$$F_k(Z) = 0, \quad k \in K, \quad (\text{III.6})$$

es una variedad regular fuera del origen.

Demostración. \Rightarrow) Supongamos que el conjunto de ceros de (III.5) no es una variedad regular fuera del origen. Sea $(W, Z) \neq (0, 0)$ una solución singular de (III.5), donde $W = (w_1, \dots, w_m)$ y $Z = (z_1, \dots, z_n)$.

Sea K el conjunto de $k \in \{1, \dots, m\}$ tal que $w_k = 0$. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $K = \{r+1, \dots, m\}$, con $1 \leq r \leq m$. Entonces, la matriz jacobiana del sistema (III.5) es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{W}_{2r \times 2m} & \mathcal{A}_{2r \times 2n} \\ \mathbf{0}_{2(m-r) \times 2m} & \mathcal{B}_{2(m-r) \times 2n} \end{bmatrix},$$

donde $\mathbf{0}_{2(m-r) \times 2m}$ es la matriz $2(m-r) \times 2m$ de ceros y $\mathcal{W}_{2r \times 2m}$ es una matriz $2r \times 2m$ diagonal de rango $2r$, donde los elementos de la diagonal son matrices 2×2 . $\mathcal{A}_{2r \times 2n}$ es la matriz jacobiana $2r \times 2n$ del sistema dado por las ecuaciones $F_k(Z)$ para $k \in \{1, \dots, r\}$ y $\mathcal{B}_{2(m-r) \times 2n}$ es la matriz jacobiana $2(m-r) \times 2n$ del sistema (III.6) con $k \in K = \{r+1, \dots, m\}$, entonces $\text{Rank}(\mathcal{B}) < 2(m-r)$ en el punto $Z = (z_1, \dots, z_n)$.

Observemos que si $Z = (0, \dots, 0)$, w_k sería 0 para toda $k \in \{1, \dots, m\}$.

Entonces, el conjunto de ceros del sistema (III.6) no es una variedad regular fuera del origen.

\Leftarrow) Supongamos que $\mathcal{B}_{2(m-r) \times 2n}$ es singular en el punto $Z \neq 0$ el cual es una solución del sistema (III.6) y sea $w_k = 0$ para $k \in K = \{r+1, \dots, m\}$. Observemos que Z es una solución de las ecuaciones $F_k(Z) = 0$ para $k \in \{1, \dots, r\}$. Podemos encontrar w_k para $k \in \{1, \dots, r\}$ tal que $G_k((W, Z)) = 0$ para $k \in \{1, \dots, r\}$.

Entonces, el punto (W, Z) es una solución de (III.5) y el rango de la matriz jacobiana de (III.5) es menor que $2m$. ■

Proposición III.3. Sean $m > 1$, $n > 3$ tal que $n > 2m$. Sea $\mathbf{\Lambda} = (\boldsymbol{\lambda}_1, \dots, \boldsymbol{\lambda}_n)$ una n -tupla de vectores en \mathbb{C}^m y sea $w_k \in \mathbb{C}$ para toda $k \in \{1, \dots, m\}$. La intersección de las variedades definidas por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1(X) &:= w_1^2 + \sum_{j=1}^n \lambda_j^1 |z_j|^2 = 0, \\ &\vdots \\ \mathbf{F}_m(X) &:= w_m^2 + \sum_{j=1}^n \lambda_j^m |z_j|^2 = 0, \\ \boldsymbol{\rho}(X) &:= \sum_{k=1}^m |w_k|^2 + \sum_{j=1}^n |z_j|^2 = 1, \end{aligned}$$

define una variedad $\mathbf{M}_1^{(\mathbf{\Lambda}, m, n)}$ de dimensión real $2n - 1$ si

1. $\mathbf{\Lambda}$ es una configuración admisible en \mathbb{C}^m ,
2. para toda colección de $k \in \{1, \dots, m\}$ tales que $w_k = 0$, digamos $K = \{r_1, \dots, r_\ell\}$ con $1 \leq r_\ell \leq m$ y $\ell \in \{1, \dots, m\}$, tenemos que la n -tupla $\mathbf{\Lambda}' = (\boldsymbol{\lambda}'_1, \dots, \boldsymbol{\lambda}'_n)$ de vectores $\boldsymbol{\lambda}'_j = (\lambda_j^{r_1}, \dots, \lambda_j^{r_\ell}) \in \mathbb{C}^{m-\ell}$ es una configuración admisible.

Demostración. La demostración se sigue de la demostración de la proposición III.2, pues las variedades determinadas por la ecuación (III.5) son transversales a la esfera unitaria ya que son homogéneas de grado dos. ■

Observación III.6. $\mathbf{M}_1^{(\mathbf{\Lambda}, m, n)}$ es no vacía pues $\mathbf{\Lambda}$ es una configuración admisible en \mathbb{C}^m y por tanto $\mathbf{M}_1^{(\mathbf{\Lambda}, m, n)}$ contiene la subvariedad de puntos tales que $w_k = 0$ para toda $k \in \{1, \dots, m\}$.

Definición III.8. Llamamos a $\mathbf{M}_1^{(\mathbf{\Lambda}, m, n)}$ variedad ángulo-momento mixta de tipo $(\mathbf{\Lambda}, m, n)$ correspondiente a la configuración admisible $\mathbf{\Lambda} \in \mathbb{C}^m$.

Definición III.9. Denotamos por $\mathbf{M}^{(\mathbf{\Lambda}, m, n)}$ a la variedad obtenida por el sistema (III.5) en $\mathbb{C}^{n+m} - \{(0, \dots, 0)\}$.

Más aún, $\mathbf{M}^{(\Lambda, m, n)}$ es una $2n$ -variedad pues la única singularidad de la variedad dada por (III.5) es el origen. Si $(w_1, \dots, w_m, z_1, \dots, z_n)$ satisface (III.5), entonces para todo número real t el punto $(tw_1, \dots, tw_m, tz_1, \dots, tz_n)$ también satisface (III.5), por tanto si añadimos el origen obtenemos un cono real con vértice en el origen y tenemos que

$$\mathbf{M}_1^{(\Lambda, m, n)} = \mathbf{M}^{(\Lambda, m, n)} \cap \mathbb{S}^{2n+2m-1}.$$

La siguiente proposición muestra que existe una relación entre las variedades ángulo-momento clásicas y las variedades ángulo-momento mixtas, cuando $m > 1$.

Proposición III.4. *Sea $m > 1$, $n > 3$ tal que $n > 2m$. Sea $\hat{p} : \mathbf{M}^{(\Lambda, m, n)} \rightarrow \mathbb{C}^n - \{(0, \dots, 0)\}$ el mapeo dado por*

$$\hat{p}(w_1, \dots, w_m, z_1, \dots, z_n) = (z_1, \dots, z_n).$$

Entonces, \hat{p} es un cubriente diferenciable ramificado de orden 2^m . El cual es singular precisamente en el conjunto $\tilde{\Sigma} = S \cap \mathbf{M}^{(\Lambda, m, n)}$, donde $S = \left\{ (w_1, \dots, w_m, z_1, \dots, z_n) \mid w_1 \dots w_m = 0 \right\}$. Más aún, \hat{p} induce un cubriente diferenciable ramificado $p : \mathbf{M}_1^{(\Lambda, m, n)} \rightarrow \mathbb{S}^{2n-1}$ de orden 2^m que es singular en $\Sigma = S \cap \mathbf{M}_1^{(\Lambda, m, n)}$.

Demostración. \hat{p} es sobreyectivo pues podemos escoger un punto arbitrario $Z = (z_1, \dots, z_n) \neq (0, \dots, 0)$ y utilizando el sistema (III.5), encontrar las coordenadas (w_1, \dots, w_m) tal que $(w_1, \dots, w_m, z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{M}^{(\Lambda, m, n)}$.

Si un punto $X = (w_1, \dots, w_m, z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{M}^{(\Lambda, m, n)}$ es tal que $w_1 w_2 \dots w_m \neq 0$, entonces \hat{p} es un difeomorfismo local en una vecindad de X .

Si $\hat{p}^{-1}(z_1, \dots, z_n)$ contiene un punto $X = (w_1, \dots, w_m, z_1, \dots, z_n)$ tal que $w_k \neq 0$ para exactamente ℓ índices k , entonces la cardinalidad de $\hat{p}^{-1}(z_1, \dots, z_n)$ es 2^ℓ .

Recordemos que $\mathbf{M}^{(\Lambda, m, n)} \subset \mathbb{C}^{n+m}$ es un cono real con vértice el origen de \mathbb{C}^{n+m} . Para un punto $X = (w_1, \dots, w_m, z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{M}^{(\Lambda, m, n)}$ consideremos el rayo

$$\mathbf{R}(X) = \left\{ t(w_1, \dots, w_m, z_1, \dots, z_n) \mid t > 0 \right\}.$$

Entonces, \hat{p} manda de manera biyectiva $R(X)$ sobre el rayo que pasa por $\hat{p}(X)$:

$$R(\hat{p}(X)) = \left\{ t(z_1, \dots, z_n) \mid t > 0 \right\},$$

entonces el mapeo:

$$p(X) = |\hat{p}(X)|^{-1} \hat{p}(X), \quad \text{para } X \in \mathbf{M}_1^{(\Lambda, m, n)}$$

es el cubriente ramificado de orden 2^m buscado. ■

Existe otra manera de describir este cubriente ramificado. Sea $G = \mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\}$ el grupo multiplicativo con dos elementos. Existe una acción natural de G^m sobre $\mathbf{M}_1^{(\Lambda, m, n)}$ como sigue:

$$T_{(\sigma_1, \dots, \sigma_m)}(w_1, \dots, w_m, z_1, \dots, z_n) = (\sigma_1 w_1, \dots, \sigma_m w_m, z_1, \dots, z_n),$$

donde $(\sigma_1, \dots, \sigma_m) \in G^m$.

Se sigue de la ecuación (III.5) que el conjunto de puntos fijos de esta acción es $\mathcal{M}_1^{(\Lambda, m, n)}$ (identificada como el conjunto de puntos en $\mathbf{M}_1^{(\Lambda, m, n)}$ tales que $w_k = 0$ para $k \in \{1, \dots, m\}$).

El espacio de órbitas de la acción de G^m sobre $\mathbf{M}_1^{(\Lambda, m, n)}$ es la esfera \mathbb{S}^{2n-1} . El subconjunto con grupo de isotropía distinto de la identidad son las subvariedades $M_K \subset \mathbf{M}_1^{(\Lambda, m, n)}$:

$$M_K := \left\{ (w_1, \dots, w_m, z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{M}_1^{(\Lambda, m, n)} \mid F_k(z_1, \dots, z_n) = 0, \quad k \in K \right\},$$

donde $\emptyset \neq K \subset \{1, \dots, m\}$ y $F_k(Z) = \sum_{j=1}^n \lambda_j^k |z_j|^2$. Todas estas variedades son subvariedades de $\mathbf{M}_1^{(\Lambda, m, n)}$. En particular, las subvariedades M_K corresponden a variedades ángulo-momento.

Tenemos una acción del n -toro $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1$ sobre $\mathbf{M}_1^{(\Lambda, m, n)}$ definida de la siguiente manera:

$$\mathcal{T}_{\mathbf{u}}(w_1, \dots, w_m, z_1, \dots, z_n) = (w_1, \dots, w_m, u_1 z_1, \dots, u_n z_n), \quad (\text{III.7})$$

donde $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{T}^n$.

Vamos a describir el espacio de órbitas de esta acción de \mathbb{T}^n , así como el mapeo momento asociado.

Consideremos el mapeo $\mathfrak{m} : \mathbf{M}_1^{(\Lambda, m, n)} \rightarrow \mathbb{C}^m$ definido por:

$$\mathfrak{m}(w_1, \dots, w_m, z_1, \dots, z_n) = (w_1, \dots, w_m),$$

y el mapeo $\mathfrak{M} : \mathbf{M}_1^{(\Lambda, m, n)} \rightarrow \mathbb{C}^m \times \mathbb{R}_+^n$ dado por:

$$\mathfrak{M}(w_1, \dots, w_m, z_1, \dots, z_n) = (w_1, \dots, w_m, |z_1|^2, \dots, |z_n|^2).$$

Sea $(w_1, \dots, w_m, z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{M}_1^{(\Lambda, m, n)}$, entonces $|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 \neq 0$, pues de otro modo tendríamos que $w_r = 0$ para $r \in \{1, \dots, m\}$. Como $\mathbf{M}_1^{(\Lambda, m, n)}$ es compacta, existe $c > 0$ tal que

$$c = \inf \left\{ |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 \mid (w_1, \dots, w_m, z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{M}_1^{(\Lambda, m, n)} \right\} < 1.$$

De las ecuaciones que definen $\mathbf{M}_1^{(\Lambda, m, n)}$ se sigue que:

$$P(\Lambda) := \mathfrak{m} \left(\mathbf{M}_1^{(\Lambda, m, n)} \right) \subset \mathcal{H}(c\lambda_1, \dots, c\lambda_n),$$

donde $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ es la configuración admisible asociada a $\mathbf{M}_1^{(\Lambda, m, n)}$ y $\mathcal{H}(c\lambda_1, \dots, c\lambda_n)$ es la envolvente convexa en \mathbb{C}^m del conjunto $(c\lambda_1, \dots, c\lambda_n)$, de modo que $\mathcal{H}(c\lambda_1, \dots, c\lambda_n) = c\mathcal{H}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Por hipótesis Λ es una configuración admisible y por tanto $c\mathcal{H}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ es un politopo completo de dimensión $2m$ con n vértices.

Su transformada de Gale $\hat{P}(\Lambda)$ es un politopo convexo de dimensión $n - 2m - 1$:

$$\hat{P}(\Lambda) = \left\{ (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n \mid t_j \geq 0, \sum_{j=1}^n t_j c\lambda_j = 0, \sum_{j=1}^n t_j = 1 \right\}.$$

Se sigue inmediatamente que si $\mathbf{w} \in P(\Lambda)$ entonces $r\mathbf{w} \in P(\Lambda)$ para toda $r \in [0, 1]$. Además, existe $\epsilon > 0$ tal que $\mathbf{w} \in P(\Lambda)$ si $|\mathbf{w}| < \epsilon$. Por tanto tenemos:

Proposición III.5. *$P(\Lambda)$ es un conjunto estrellado con respecto al origen, cuyo interior es no vacío.*

Sea $\mathbf{w} := (w_1, \dots, w_m) \in P(\mathbf{\Lambda})$ y consideremos el politopo simple convexo de dimensión $n - 2m - 1$:

$$P_{\mathbf{w}}(\mathbf{\Lambda}) = \left\{ (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}_+^n \mid \sum_{j=1}^n t_j \lambda_j = \mathbf{w}^2, \sum_{j=1}^n t_j = 1 - \sum_{k=1}^m |w_k|^2 \right\}.$$

Entonces, la imagen de $\mathbf{M}_1^{(\mathbf{\Lambda}, m, n)}$ bajo \mathfrak{M} , corresponde a

$$P(\mathbf{\Lambda}) = \left\{ (\mathbf{w}, \mathbf{t}) \mid \mathbf{w} \in P(\mathbf{\Lambda}), \mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n) \in P_{\mathbf{w}}(\mathbf{\Lambda}) \right\}.$$

Un punto en $P(\mathbf{\Lambda})$ determina una única órbita de la acción del toro y a toda órbita le corresponde, en la manera natural, un punto en $P(\mathbf{\Lambda})$. Por tanto tenemos:

Proposición III.6. $P(\mathbf{\Lambda})$ es el espacio de órbitas de la acción de \mathbb{T}^m sobre $\mathbf{M}_1^{(\mathbf{\Lambda}, m, n)}$.

Por tanto, \mathfrak{M} toma el papel del mapeo momento de la acción y la topología de $\mathbf{M}_1^{(\mathbf{\Lambda}, m, n)}$ está completamente descrita por la combinatoria de $P(\mathbf{\Lambda})$, $P(\mathbf{\Lambda})$ y $\hat{P}(\mathbf{\Lambda})$.

CAPÍTULO IV

Distintas Estructuras Geométricas.

He aquí mi secreto
que no puede ser más simple:
sólo con el corazón se puede ver bien;
lo esencial es invisible para los ojos.

Antonie de Saint-Exupéry.

El principito.

En este capítulo se describen distintas estructuras geométricas que admiten las variedades ángulo-momento: descomposiciones de libro abierto (ver [GLdM13] y [BLdMV]), estructuras presimplécticas o de casi-contacto y estructura regular de Poisson.

§ 1. Libros Abiertos.

Recientemente S. Gitler y S. López de Medrano en [GLdM13], describieron una descomposición de libro abierto¹ para una familia muy general de variedades difeomorfas a sumas conexas de productos de esferas; en particular, incluye a las variedades ángulo-momento $\mathcal{M}_1^{(\Lambda, m, n)}$.

Sea $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ una configuración admisible. Las variedades ángulo-momento $\mathcal{M}_1^{(\Lambda, m, n)}$ ($m \geq 1$) definidas en el capítulo anterior, admiten una acción de \mathbb{S}^1 sobre la variable z_1 cuyo cociente, el cual denotaremos por $\mathcal{P}(\Lambda)$, corresponde a la intersección de $\mathcal{M}_1^{(\Lambda, m, n)}$ con $\Re(z_1) > 0$.

Consideremos la intersección de $\mathcal{M}_1^{(\Lambda, m, n)}$ con el hiperplano $z_1 = 0$. La variedad obtenida, $\mathcal{M}_1^{(\Lambda', m, n-1)}$, corresponde con la frontera de $\mathcal{P}(\Lambda)$.

¹Ver definición I.32.

Observación IV.1.

- La variedad $\mathcal{M}_1^{(\Lambda', m, n-1)}$ es una variedad ángulo-momento.
- En general, podemos considerar la acción de \mathbb{S}^1 sobre cualquier z_j , con $j \in \{1, \dots, n\}$.

Teorema IV.1. [GLdM13]. Sea $m \geq 1$. Toda variedad ángulo-momento $\mathcal{M}_1^{(\Lambda, m, n)}$ admite una descomposición de libro abierto $(\mathcal{M}_1^{(\Lambda', m, n-1)}, f)$. El lomo corresponde a la variedad $\mathcal{M}_1^{(\Lambda', m, n-1)}$ y una página es $\mathcal{P}(\Lambda)$. La holonomía es trivial y f es el mapeo $f : \mathcal{M}_1^{(\Lambda, m, n)} - \mathcal{M}_1^{(\Lambda', m, n-1)} \rightarrow \mathbb{S}^1$.

Lema IV.1. Sea $m = 1$. La acción natural de \mathbb{S}^1 sobre $\mathcal{M}_1^{(\Lambda, 1, n)}$ tiene la propiedad de que cada órbita interseca a la página $\mathcal{P}(\Lambda)$ en un único punto y cada punto en $\mathcal{P}(\Lambda)$ es intersecado transversalmente por las órbitas.

Este lema implica que la restricción de la proyección canónica π a cada página es un difeomorfismo sobre su imagen $\mathcal{N}(\Lambda) - \mathcal{N}(\Lambda')$. Por tanto obtenemos:

Corolario IV.1. La página $\mathcal{P}(\Lambda)$ del libro abierto asociado a la variedad $\mathcal{M}_1^{(\Lambda, 1, n)}$ es una variedad compleja biholomorfa a $\mathcal{N}(\Lambda) - \mathcal{N}(\Lambda')$.

El siguiente teorema describe como son las páginas del libro abierto asociado a la variedad ángulo-momento $\mathcal{M}_1^{(\Lambda, 1, n)}$ ($m = 1$). La demostración dada por S. López de Medrano puede consultarse en [BLdMV].

Teorema IV.2. [BLdMV, S. López de Medrano] Sea $m = 1$. Sea $\mathcal{M}_1^{(\Lambda, 1, n)}$ la variedad ángulo-momento asociada a la partición cíclica $n = n_1 + \dots + n_{2\ell+1}$. Consideremos el libro abierto de $\mathcal{M}_1^{(\Lambda, 1, n)}$ dado por el teorema IV.1. Entonces, la página de esta descomposición es difeomorfa a:

a) Si $\ell = 1$, el producto

$$\mathbb{S}^{2n_2-1} \times \mathbb{S}^{2n_3-1} \times \mathbb{D}^{2n_1-2}.$$

b) Si $\ell > 1$ y $n_1 > 1$, la suma conexa a lo largo de la frontera de $2\ell + 1$ variedades:

$$\prod_{i=2}^{\ell+2} \left(\mathbb{S}^{2d_i-1} \times \mathbb{D}^{2n-2d_i-3} \right) \prod_{i=\ell+3}^1 \left(\mathbb{D}^{2d_i-2} \times \mathbb{S}^{2n-2d_i-2} \right).$$

c) Si $n_1 = 1$ y $\ell > 2$, la suma conexa a lo largo de la frontera de 2ℓ variedades:

$$\prod_{i=3}^{\ell+1} \left(\mathbb{S}^{2d_i-1} \times \mathbb{D}^{2n-2d_i-3} \right) \prod_{i=\ell+3}^1 \left(\mathbb{D}^{2d_i-2} \times \mathbb{S}^{2n-2d_i-2} \right) \\ \amalg \left(\mathbb{S}^{2d_2-1} \times \mathbb{S}^{2d_{\ell+2}-1} - \mathbb{D}^{2n-4} \right).$$

d) Si $n = 1$ y $\ell = 2$, una suma conexa a lo largo de la frontera de dos variedades:

$$\left(\mathbb{S}^{2d_2-1} \times \mathbb{S}^{2d_4-1} - \mathbb{D}^{2n-4} \right) \amalg \tilde{\mathcal{E}},$$

donde $\tilde{\mathcal{E}}$ es el exterior de un encaje $\mathbb{S}^{2n_2-1} \times \mathbb{S}^{2n_5-1}$ en \mathbb{S}^{2n-4} .

Ejemplos. Sea $m = 1$. Describimos tres descomposiciones distintas de libro abierto para la misma variedad ángulo-momento $\mathcal{M}_1^{(\mathbf{A},1,n)}$.

- Sea $\mathbf{A} = (\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5)$ una configuración admisible formada por las cinco raíces quintas de la unidad, donde la multiplicidad de λ_1 es igual a tres.

Por el teorema III.2 del capítulo III, \mathbf{A} está asociada a la variedad ángulo-momento:

$$\mathcal{M}_1^{(\mathbf{A},1,7)} = \#_2 \mathbb{S}^7 \times \mathbb{S}^4 \#_3 \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^8.$$

Vamos a describir el libro abierto asociado a $\mathcal{M}_1^{(\mathbf{A},1,7)}$.

Si $z_1 = 0$ nuestra configuración sigue siendo una configuración admisible \mathbf{A}' , pero la multiplicidad de λ_1 ahora es dos. Entonces, el lomo de dicha descomposición corresponde a la variedad ángulo-momento:

$$\mathcal{M}_1^{(\mathbf{A}',1,6)} = \#_2 \mathbb{S}^5 \times \mathbb{S}^4 \#_3 \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^6.$$

La página, por el teorema IV.2 (b) de este capítulo, en este caso es la variedad:

$$\mathcal{P}(\mathbf{A}) = \left(\prod_3 \mathbb{S}^3 \times \mathbb{D}^7 \right) \amalg \left(\prod_2 \mathbb{D}^5 \times \mathbb{S}^5 \right).$$

- Sea $\mathbf{\Lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_2, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5)$ la configuración admisible formada por las cinco raíces quintas de la unidad tal que la multiplicidad de λ_2 es igual a tres.

Por el teorema III.2 del capítulo III, la variedad ángulo-momento asociada es:

$$\mathcal{M}_1^{(\mathbf{\Lambda}, 1, 7)} = \#_2 \mathbb{S}^7 \times \mathbb{S}^4 \#_3 \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^8.$$

Para este caso, cuando $z_1 = 0$ tenemos de nuevo una configuración admisible $\mathbf{\Lambda}' = (\lambda_2, \lambda_2, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5)$, donde λ_3 y λ_4 se juntan en un punto. Por lo tanto, el lomo del libro abierto asociado a $\mathcal{M}_1^{(\mathbf{\Lambda}, 1, 7)}$ ahora corresponde a la variedad ángulo-momento:

$$\mathcal{M}_1^{(\mathbf{\Lambda}', 1, 6)} = \mathbb{S}^5 \times \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1.$$

Por el teorema IV.2 (d) de este capítulo, la página es:

$$\mathcal{P}(\mathbf{\Lambda}) = \left(\mathbb{S}^7 \times \mathbb{S}^3 - \mathbb{D}^{10} \right) \amalg \tilde{\mathcal{E}},$$

donde $\tilde{\mathcal{E}}$ es el encaje $\mathbb{S}^5 \times \mathbb{S}^1$ en \mathbb{S}^{10} .

- Sea $\mathbf{\Lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_3, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5)$ una configuración admisible formada por las cinco raíces quintas de la unidad, donde λ_3 tiene multiplicidad igual a tres.

La variedad ángulo-momento asociada es:

$$\mathcal{M}_1^{(\mathbf{\Lambda}, 1, 7)} = \#_3 \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^8 \#_2 \mathbb{S}^7 \times \mathbb{S}^4.$$

Cuando $z_1 = 0$ nuevamente tenemos una configuración admisible $\mathbf{\Lambda}' = (\lambda_2, \lambda_3, \lambda_3, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5)$, donde λ_2 y λ_5 son puntos indispensables. Entonces, el lomo del libro abierto corresponde a la variedad ángulo-momento:

$$\mathcal{M}_1^{(\mathbf{\Lambda}', 1, 6)} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^7 \times \mathbb{S}^1.$$

La página, por el teorema IV.2 (d) de este capítulo, es:

$$\mathcal{P}(\mathbf{\Lambda}) = \left(\mathbb{S}^7 \times \mathbb{S}^3 - \mathbb{D}^{10} \right) \amalg \tilde{\mathcal{E}},$$

donde $\tilde{\mathcal{E}}$ es el encaje $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ en \mathbb{S}^{10} .

- Para la configuración admisible $\mathbf{\Lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_4, \lambda_4, \lambda_5)$, formada por las cinco raíces quintas de la unidad con multiplicidad de λ_4 igual a tres, obtenemos la misma descomposición de libro abierto sobre la variedad ángulo-momento $\mathcal{M}_1^{(\mathbf{\Lambda}, 1, 7)} = \#_3 \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^8 \#_2 \mathbb{S}^7 \times \mathbb{S}^4$ que en el caso en que la multiplicidad de λ_3 es igual a tres.
- Si $\mathbf{\Lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_5, \lambda_5)$ es la configuración admisible formada por las cinco raíces quintas de la unidad con multiplicidad de λ_5 igual a tres, se tiene la misma descomposición de libro abierto sobre la variedad ángulo-momento $\mathcal{M}_1^{(\mathbf{\Lambda}, 1, 7)} = \#_3 \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^8 \#_2 \mathbb{S}^7 \times \mathbb{S}^4$ que para el caso en que la multiplicidad de λ_2 es igual a tres.

En la siguiente tabla se describen descomposiciones de libro abierto asociadas a algunas variedades ángulo-momento $\mathcal{M}_1^{(\mathbf{\Lambda}, 1, n)}$.

Sea $\mathbf{\Lambda}$ una configuración admisible,
 $\mathcal{M}_1^{(\mathbf{\Lambda},1,n)}$ la variedad ángulo-momento asociada a $\mathbf{\Lambda}$,
 $\mathcal{P}(\mathbf{\Lambda})$ la página y $\mathcal{M}_1^{(\mathbf{\Lambda}',1,n-1)}$ el lomo de una descomposición de libro abierto
asociada a $\mathcal{M}_1^{(\mathbf{\Lambda},1,n)}$.

Configuración Admisible	Variedad Ángulo-Momento	Lomo	Página
$\mathbf{\Lambda} = (1, 1, i, -1 - i)$	$\mathcal{M}_1^{(\mathbf{\Lambda},1,4)} = \mathbb{T}^2 \times \mathbb{S}^3$	$\mathcal{M}_1^{(\mathbf{\Lambda}',1,3)} = \mathbb{T}^3$	$\mathcal{P}(\mathbf{\Lambda}) = \mathbb{T}^2 \times \mathbb{D}^2$
$\mathbf{\Lambda} = (1^{n-2}, i, -1 - i)$	$\mathcal{M}_1^{(\mathbf{\Lambda},1,n)} = \mathbb{T}^2 \times \mathbb{S}^{2n-5}$	$\mathcal{M}_1^{(\mathbf{\Lambda}',1,n-1)} = \mathbb{T}^2 \times \mathbb{S}^{2n-7}$	$\mathcal{P}(\mathbf{\Lambda}) = \mathbb{T}^2 \times \mathbb{D}^{2n-6}$
$\mathbf{\Lambda} = (i, i, 1, -1 - i, -1 - i)$	$\mathcal{M}_1^{(\mathbf{\Lambda},1,5)} = \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$	$\mathcal{M}_1^{(\mathbf{\Lambda}',1,4)} = \mathbb{T}^2 \times \mathbb{S}^3$	$\mathcal{P}(\mathbf{\Lambda}) = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3 \times \mathbb{D}^2$
$\mathbf{\Lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5)$ donde los λ_i son las raíces quintas de la unidad.	$\mathcal{M}_1^{(\mathbf{\Lambda},1,5)} = \#_5 \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^4$	$\mathcal{M}_1^{(\mathbf{\Lambda}',1,4)} = \mathbb{T}^2 \times \mathbb{S}^3$	$\mathcal{P}(\mathbf{\Lambda}) = (\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3 - \mathbb{D}^6) \amalg \tilde{\mathcal{E}}$, donde $\tilde{\mathcal{E}}$ es el exterior de un encaje canónico \mathbb{T}^2 en \mathbb{S}^6 .
$\mathbf{\Lambda} = (\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5)$ donde los λ_i son las raíces quintas de la unidad.	$\mathcal{M}_1^{(\mathbf{\Lambda},1,6)} = \#_2 \mathbb{S}^5 \times \mathbb{S}^4 \#_3 \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^6$	$\mathcal{M}_1^{(\mathbf{\Lambda}',1,5)} = \#_5 \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^4$	$\mathcal{P}(\mathbf{\Lambda}) =$ $\amalg_2 (\mathbb{D}^4 \times \mathbb{S}^4) \amalg_3 \amalg_3 (\mathbb{S}^3 \times \mathbb{D}^5)$
$\mathbf{\Lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7)$ donde λ_i son las raíces séptimas de la unidad .	$\mathcal{M}_1^{(\mathbf{\Lambda},1,7)} = \#_7 \mathbb{S}^5 \times \mathbb{S}^6$	$\mathcal{M}_1^{(\mathbf{\Lambda}',1,6)} =$ $\#_2 \mathbb{S}^5 \times \mathbb{S}^4 \#_3 \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^6$	$\mathcal{P}(\mathbf{\Lambda}) =$ $\amalg_2 (\mathbb{S}^5 \times \mathbb{D}^5) \amalg_3 (\amalg_3 \mathbb{D}^4 \times \mathbb{S}^6)$ $\amalg ((\mathbb{S}^5 \times \mathbb{S}^5) - \mathbb{D}^{10})$

Cuadro IV.1: Descomposiciones de libro abierto de algunas variedades ángulo-momento.

§ 2. Estructura de Casi-Contanto.

Sea $m = 1$. Las variedades ángulo-momento $\mathcal{M}_1^{(\mathbf{A},1,n)}$ admiten estructuras un poco más débiles que las estructuras de contacto.

Proposición IV.1. *Sea $m = 1$. La variedad ángulo-momento $\mathcal{M}_1^{(\mathbf{A},1,n)}$ es una variedad de casi contacto ².*

Demostración. Consideremos la fibración $\pi_{\mathbf{A}} : \mathcal{M}_1^{(\mathbf{A},1,n)} \rightarrow \mathcal{N}(\mathbf{A})$, con fibra el círculo, definida por tomar el cociente bajo la acción diagonal. Ya que $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ es una variedad compleja, la foliación definida por la acción del círculo es transversalmente holomorfa (ver [Mee00, Thm. 7], [Hae85], [LJJ96] y [LJJ99]). Entonces, $\mathcal{M}_1^{(\mathbf{A},1,n)}$ tiene un atlas modelado sobre $\mathbb{C}^{n-2} \times \mathbb{R}$ con cambios de coordenadas de cartas de la forma³:

$$\left((z_1, \dots, z_{n-2}), t \right) \mapsto \left(h(z_1, \dots, z_{n-2}, t), g(z_1, \dots, z_{n-2}, t) \right),$$

con $h : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}^{n-2}$ y $g : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$, donde \mathcal{U} es un conjunto abierto en $\mathbb{C}^{n-2} \times \mathbb{R}$ y, para cada t fija, la función $(z_1, \dots, z_{n-2}) \mapsto h(z_1, \dots, z_{n-2}, t)$ es un biholomorfismo sobre un conjunto abierto de $\mathbb{C}^{n-2} \times \{t\}$.

Esto significa que el diferencial, en las coordenadas dadas, se representa por una matriz de la forma

$$\left[\begin{array}{ccc|c} & & & * \\ \hline \mathcal{A} & & & \\ \hline 0 & \dots & 0 & r \end{array} \right],$$

donde $*$ denota un vector columna de dimensión real $(n-2)$ y $\mathcal{A} \in \mathbf{GL}(n-2, \mathbb{C})$.

El conjunto de matrices de la forma anterior forma un subgrupo de $\mathbf{GL}(2n-3, \mathbb{R})$. Por Gram-Schmidt este grupo se retracta sobre $\mathbf{U}(n-2) \times \mathbb{R}$.

Esto muestra que $\mathcal{M}_1^{(\mathbf{A},1,n)}$ es una variedad de casi contacto. ■

²Ver definición I.22 en la sección § 5.4 del capítulo I.

³Esto por definición de ser transversalmente holomorfa.

§ 3. Estructuras de Contacto.

Las variedades ángulo-momento que son producto de un 2-toro con una esfera de dimensión impar son variedades de contacto. Esto se sigue inmediatamente de Thm 1 en [Bou02] debido a F. Bourgeois (corolario II.1, del capítulo II). Más aún, las variedades de la forma $\mathbb{S}^{2n-5} \times \mathbb{T}^{2k}$, con $n > 3$ y k un entero positivo, son variedades de contacto.

La variedad ángulo-momento $\mathcal{M}_1^{(\Lambda,1,n)} = \mathbb{S}^{2n-5} \times \mathbb{T}^2$ admite una descomposición de libro abierto $(\mathbb{S}^{2n-7} \times \mathbb{T}^2, f)$ (ver cuadro IV.1). Observemos lo siguiente:

1. La variedad compacta $(\mathbb{D}^{2n-6} \times \mathbb{T}^2, \omega)$ es una variedad simpléctica, con forma simpléctica $\omega = d\beta$ correspondiendo a

$$2 \sum_{j=1}^{n-3} (dx_j \wedge dy_j) + \sum_{j=1}^2 d\varphi_j d\theta_j.$$

2. El campo vectorial \mathcal{X} definido por $\iota_{\mathcal{X}}\omega = \beta$ es

$$\mathcal{X} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-3} (x_j \partial_{x_j} + y_j \partial_{y_j}) - \sum_{j=2}^2 \varphi_j \partial_{\varphi_j},$$

\mathcal{X} es transversal a $\mathbb{S}^{2n-7} \times \mathbb{T}^2$ y apunta hacia afuera.

3. El mapeo $\mathbf{Id} : (\mathbb{D}^{2n-6} \times \mathbb{T}^2, \omega) \rightarrow (\mathbb{D}^{2n-6} \times \mathbb{T}^2, \omega)$ es un simplectomorfismo.

Por tanto, por el teorema II.2 del capítulo II, la variedad $\mathbb{S}^{2n-5} \times \mathbb{T}^2$ admite una única estructura de contacto $\xi_{(\mathbb{S}^{2n-7} \times \mathbb{T}^2, \mathbf{Id})}$ que corresponde al núcleo de la 1-forma

$$\alpha = \sum_{j=1}^{n-2} (x_j dy_j - y_j dx_j) + \sum_{j=1}^2 \varphi_j d\theta_j,$$

la cual induce una forma de contacto positiva $\alpha|_{\mathbb{S}^{2n-7} \times \mathbb{T}^2}$ en $\mathbb{S}^{2n-7} \times \mathbb{T}^2$, que en este caso coincide con β y $d\alpha$ induce una forma simpléctica $d\alpha|_{\mathbb{D}^{2n-6} \times \mathbb{T}^2}$ en $\mathbb{D}^{2n-6} \times \mathbb{T}^2$ que corresponde a $d\beta = \omega$.

Por lo tanto, concluimos que la estructura de contacto sobre $\mathbb{S}^{2n-5} \times \mathbb{T}^2$, dada por Thm 1 en [Bou02], está soportada por el libro abierto $(\mathbb{S}^{2n-7} \times \mathbb{T}^2, \mathbf{Id})$.

§ 4. Estructura Regular de Poisson.

Sea $m \geq 1$. En general no se sabe hasta el momento si las variedades ángulo-momento $\mathcal{M}_1^{(\Lambda, m, n)}$ admiten una estructura de contacto, pero dichas variedades son variedades regulares de Poisson como veremos a continuación.

Recordemos que las variedades $\mathcal{M}_1^{(\Lambda, m, n)}$ se definen como la intersección de las siguientes cuádricas en \mathbb{C}^n (ver sección § 1 del capítulo III):

$$F(Z) := \sum_{j=1}^n \lambda_j |z_j|^2 = 0, \quad \rho(Z) := \sum_{j=1}^n |z_j|^2 = 1,$$

donde $\lambda_j = (\lambda_j^1, \dots, \lambda_j^m) \in \mathbb{C}^m$ para $m \geq 1$ y $n > 2m$.

En otras palabras,

$$\begin{aligned} F_1(Z) &:= \sum_{j=1}^n \lambda_j^1 |z_j|^2 = 0, \\ &\vdots \\ F_m(Z) &:= \sum_{j=1}^n \lambda_j^m |z_j|^2 = 0, \\ \rho(Z) &:= \sum_{j=1}^n |z_j|^2 = 1. \end{aligned} \tag{IV.1}$$

Consideremos sobre \mathbb{C}^n la siguiente 1-forma real

$$\alpha := i \sum_{j=1}^n (z_j d\bar{z}_j - \bar{z}_j dz_j),$$

en este caso $d\alpha$ corresponde a la 2-forma

$$d\alpha = i \sum_{j=1}^n (dz_j d\bar{z}_j - d\bar{z}_j dz_j). \tag{IV.2}$$

Observación IV.2. En general se puede considerar la 1-forma

$$\alpha := i \sum_{j=1}^n a_j (z_j d\bar{z}_j - \bar{z}_j dz_j),$$

con a_j un real positivo.

Lema IV.2. Para todo $Z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathcal{M}_1^{(\Lambda, m, n)}$ la 1-forma α restringida al espacio tangente $\mathbf{T}_Z \left(\mathcal{M}_1^{(\Lambda, m, n)} \right)$ es una forma no trivial.

Demostración. Sea $Z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathcal{M}_1^{(\Lambda, m, n)}$, la función lineal

$$\alpha_Z : \mathbf{T}_Z \left(\mathcal{M}_1^{(\Lambda, m, n)} \right) \rightarrow \mathbb{R}$$

es trivial si y sólo si existen $T_k \in \mathbb{C}$, con $k = 1, \dots, m$ y $\mu \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\begin{aligned} i \sum_{j=1}^n (z_j d\bar{z}_j - \bar{z}_j dz_j) &= \sum_{k=1}^m T_k dF_k + \sum_{k=1}^m \bar{T}_k d\bar{F}_k + \mu d\rho \\ &= \sum_{k=1}^m \left[T_k \sum_{j=1}^n \lambda_j^k (\bar{z}_j dz_j + z_j d\bar{z}_j) \right] + \sum_{k=1}^m \left[\bar{T}_k \sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_j^k (z_j d\bar{z}_j + \bar{z}_j dz_j) \right] \\ &\quad + \mu \sum_{j=1}^n (z_j d\bar{z}_j + \bar{z}_j dz_j). \quad (\text{IV.3}) \end{aligned}$$

Esto es cierto porque la dimensión de la variedad $\mathcal{M}_1^{(\Lambda, m, n)}$ es $2n - 2m - 1$ y para $Z \in \mathcal{M}_1^{(\Lambda, m, n)}$, el espacio de todas las 1-formas reales en $\mathbf{T}_Z(\mathbb{C}^n)$ que se anulan sobre $\mathbf{T}_Z \left(\mathcal{M}_1^{(\Lambda, m, n)} \right)$ es de dimensión $2m + 1$.⁴

Sean

$$\omega_1^k(Z) = d\Re(F_k)(Z), \quad \omega_2^k(Z) = d\Im(F_k)(Z), \quad \omega_3(Z) = d\rho(Z),$$

con $k = 1, \dots, m$.

Como el conjunto de 1-formas

$$\mathcal{B} = \left\{ \omega_1^1(Z), \dots, \omega_1^m(Z), \omega_2^1(Z), \dots, \omega_2^m(Z), \omega_3(Z) \right\},$$

es linealmente independiente⁵, el espacio de 1-formas de tipo

$$\sum_{k=1}^m \left[(a_k + ib_k) dF_k \right] + \sum_{k=1}^m \left[(a_k - ib_k) d\bar{F}_k \right] + \mu d\rho,$$

⁴Esto se sigue del siguiente teorema de álgebra lineal: Sea V un subespacio de \mathbb{R}^n talque $\text{codim}V = k$ con $0 \leq k \leq 1$. Sea W el subespacio de 1-formas lineales que se anulan en V , entonces $\dim W = k$.

⁵Esto se sigue del teorema local de submersiones.

es de dimensión $2m+1$, parametrizado por $T_k \in \mathbb{C}$ con $k = 1, \dots, m$ y $\mu \in \mathbb{R}$.

Comparando coeficientes en la ecuación (IV.3) tenemos:

$$iz_j = \left(2\Re \left(\sum_{k=1}^m T_k \lambda_j^k \right) + \mu \right) z_j.$$

Se sigue entonces que el origen $Z = (0, \dots, 0)$ es el único punto que satisface esta última ecuación. Pero el origen no pertenece a $\mathcal{M}_1^{(\Lambda, m, n)}$. Concluimos que α es no trivial sobre la variedad ángulo-momento $\mathcal{M}_1^{(\Lambda, m, n)}$. ■

Sean

$$\mathcal{K}_\alpha(Z) = \left\{ v \in \mathbf{T}_Z \left(\mathcal{M}_1^{(\Lambda, m, n)} \right) \mid \alpha(v) = 0 \right\} \quad y$$

$$\mathcal{K}_{d\alpha}(Z) = \left\{ v \in \mathbf{T}_Z \left(\mathcal{M}_1^{(\Lambda, m, n)} \right) \mid d\alpha(v, v') = 0 \forall v' \in \mathbf{T}_Z \left(\mathcal{M}_1^{(\Lambda, m, n)} \right) \right\}$$

el núcleo de α y el núcleo de $d\alpha$ en el punto $Z \in \mathcal{M}_1^{(\Lambda, m, n)}$, respectivamente.

Observemos que $\mathcal{K}_{d\alpha}(Z) = \iota_v d\alpha = 0$, para todo $v \in \mathbf{T}_Z \left(\mathcal{M}_1^{(\Lambda, m, n)} \right)$.

Proposición IV.2. Sean $n > 3$ y $m \geq 1$ tales que $n > 2m$. El núcleo de $d\alpha$ para toda $Z \in \mathcal{M}_1^{(\Lambda, m, n)}$, es un subespacio real de $\mathbf{T} \left(\mathcal{M}_1^{(\Lambda, m, n)} \right)$ de dimensión $2m+1$.

Demostración. Puntos $v \in \mathbb{C}^n$ que pertenecen a $\mathcal{K}_{d\alpha}|_{\mathbf{T}(\mathcal{M}_1^{(\Lambda, m, n)})}$ satisfacen:

$$\begin{cases} dF_1(v) = 0, \\ \vdots \\ dF_m(v) = 0, \\ d\rho(v) = 0, \\ \iota_v d\alpha = \sum_{k=1}^m T_k dF_k + \sum_{k=1}^m \bar{T}_k d\bar{F}_k + \mu d\rho, \end{cases} \quad (\text{IV.4})$$

donde $dF_k(v) = \sum_{j=1}^n \lambda_j^k \left(z_j d\bar{z}_j(v) + \bar{z}_j dz_j(v) \right)$, para $k = 1, \dots, m$ y como

$$\iota_v d\alpha = d\alpha(v, \cdot) = i \sum_{j=1}^n \left(dz_j(v) d\bar{z}_j - d\bar{z}_j(v) dz_j \right),$$

es una 1-forma restringida a $\mathbf{T}_Z \left(\mathcal{M}_1^{(\Lambda, m, n)} \right)$ y queremos saber donde es idénticamente cero, la escribimos como una combinación lineal de

$$\omega_1^k(Z) = d\Re(F_k)(Z); \quad \omega_2^k(Z) = d\Im(F_k)(Z), \quad \omega_3(Z) = d\rho(Z).$$

Sea $Z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathcal{M}_1^{(\Lambda, m, n)}$ y $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbf{T}_Z \left(\mathcal{M}_1^{(\Lambda, m, n)} \right)$. El sistema (IV.4) corresponde a las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \lambda_j^1 \left(z_j d\bar{z}_j(v) + \bar{z}_j dz_j(v) \right) &= 0, \\ &\vdots \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j^m \left(z_j d\bar{z}_j(v) + \bar{z}_j dz_j(v) \right) &= 0, \\ \sum_{j=1}^n \left(\bar{z}_j dz_j(v) + z_j d\bar{z}_j(v) \right) &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i \sum_{j=1}^n \left(dz_j(v) d\bar{z}_j - d\bar{z}_j(v) dz_j \right) &= \\ \sum_{k=1}^m \left[T_k \sum_{j=1}^n \lambda_j^k (\bar{z}_j dz_j + z_j d\bar{z}_j) \right] &+ \sum_{k=1}^m \left[\bar{T}_k \sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_j^k (z_j d\bar{z}_j + \bar{z}_j dz_j) \right] \\ &+ \mu \sum_{j=1}^n (z_j d\bar{z}_j + \bar{z}_j dz_j). \quad (\text{IV.5}) \end{aligned}$$

Observación IV.3. De aquí en adelante, consideraremos al vector v anclado en el punto $Z \in \mathcal{M}_1^{(\Lambda, m, n)}$.

Comparando coeficientes en la ecuación (IV.5) tenemos:

$$i dz_j(v) = \left[2\Re \left(\sum_{k=1}^m T_k \lambda_j^k \right) + \mu \right] z_j, \quad j \in \{1, \dots, n\}.$$

Entonces, para $Z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathcal{M}_1^{(\Lambda, m, n)}$ los vectores $v \in \mathbf{T}_Z \left(\mathcal{M}_1^{(\Lambda, m, n)} \right)$ que pertenecen a $\mathcal{K}_{d\alpha}(Z)$ son de la forma:

$$v(T_1, \dots, T_m, \mu; Z) = -i \left(\left(2\Re \left(\sum_{k=1}^m T_k \lambda_1^k \right) + \mu \right) z_1, \dots, \left(2\Re \left(\sum_{k=1}^m T_k \lambda_n^k \right) + \mu \right) z_n \right),$$

donde $T_1, \dots, T_m \in \mathbb{C}$ y $\mu \in \mathbb{R}$.

El vector $v(T_1, \dots, T_m, \mu; Z)$ es tangente a la esfera $\mathbb{S}^{2n-2m+1}$ y satisface la condición $dF_k(v) = 0$ para toda $k \in \{1, \dots, m\}$.

Ya que el mapeo \mathbb{R} -lineal $\phi_Z : \mathbb{C}^m \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^{2m+1} \rightarrow \mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ definido por

$$\phi_Z(T_1, \dots, T_m, \mu) = v(T_1, \dots, T_m, \mu; Z),$$

es inyectivo, concluimos que $\mathcal{K}_{d\alpha}(Z)$ tiene dimensión real $2m + 1$. ■

Lema IV.3. *El mapeo \mathbb{R} -lineal $\phi_Z : \mathbb{C}^m \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^{2m+1} \rightarrow \mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ definido por*

$$\phi_Z(T_1, \dots, T_m, \mu) = v(T_1, \dots, T_m, \mu; Z),$$

es inyectivo.

Demostración. Ya que $\mathbf{\Lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ es una configuración admisible, la matriz cuyas columnas son de la forma $\lambda_j' = (\lambda_j, 1) \in \mathbb{C}^{m+1}$ es de rango máximo (ver lema III.1 del capítulo III). Por tanto, se sigue que el núcleo de ϕ_Z es trivial. ■

Sea $v(T_1, \dots, T_m, \mu; Z)$ un vector en $\mathcal{K}_{d\alpha}(Z)$. Nos interesa saber bajo que condiciones este vector pertenece al núcleo de α_Z ; es decir, cuándo satisface la siguiente ecuación:

$$\sum_{j=1}^n \left(\left(2\Re \left(\sum_{k=1}^m T_k \lambda_j^k \right) + \mu \right) |z_j|^2 + \left(2\Re \left(\sum_{k=1}^m T_k \lambda_j^k \right) + \mu \right) |z_j|^2 \right) = 0.$$

Se sigue

$$\mu + 2 \sum_{j=1}^n \Re \left(\sum_{k=1}^m T_k \lambda_j^k \right) |z_j|^2 = 0$$

y concluimos que $\mu = 0$.

Entonces,

$$\mathcal{K}_\alpha(Z) \cap \mathcal{K}_{d\alpha}(Z) = \left\{ v(T_1, \dots, T_m, 0; Z) \mid T_k \in \mathbb{C} \forall k = 1, \dots, m \right\},$$

donde los vectores $v(T_1, \dots, T_m, 0; Z)$ son de la forma:

$$-i \left(2\Re \left(\sum_{k=1}^m T_k \lambda_1^k \right) z_1, \dots, 2\Re \left(\sum_{k=1}^m T_k \lambda_n^k \right) z_n \right). \quad (\text{IV.6})$$

Por tanto para todo $Z \in \mathcal{M}_1^{(\Lambda, m, n)}$:

$$\dim (\mathcal{K}_\alpha(Z) \cap \mathcal{K}_{d\alpha}(Z)) = 2m.$$

Tenemos que $d\alpha$ tiene rango constante $2n - 4m - 2$. Además

$$\alpha \wedge d\alpha^{n-2m-1} \neq 0,$$

esto porque $\dim (\mathcal{K}_\alpha(Z) \cap \mathcal{K}_{d\alpha}(Z)) = 2m$.

Vamos a considerar la siguiente versión general del teorema de Darboux [Ste83, Thm 6.2]:

Teorema IV.3 (Darboux). *Sea θ una 1-forma diferencial sobre una n -variedad tal que $d\theta$ tiene rango constante p .*

1. *Si $\theta \neq 0$ y $\theta \wedge (d\theta)^p = 0$ en todo punto, entonces existe un sistema de coordenadas locales $x_1, \dots, x_{n-p}, y_1, \dots, y_p$ tal que*

$$\theta = x_1 dy_1 + \dots + x_p dy_p.$$

2. *Si $\theta \neq 0$ y $\theta \wedge (d\theta)^p \neq 0$ en todo punto, entonces existe un sistema de coordenadas locales $x_1, \dots, x_{n-p}, y_1, \dots, y_p$ tal que*

$$\theta = x_1 dy_1 + \dots + x_p dy_p + dx_{p+1}.$$

Del inciso 2 de este teorema tenemos que para cada $Z \in \mathcal{M}_1^{(\Lambda, m, n)}$ existen coordenadas locales

$$(x_1, y_1, \dots, x_m, y_m, z, u_1, v_1, \dots, u_{n-2m-1}, v_{n-2m-1}) \in \mathbb{R}^{2n-2m-1},$$

en una vecindad abierta \mathcal{U} de Z tal que la 1-forma α se puede escribir como

$$\alpha = dz + u_1 dv_1 + \dots + u_{n-2m-1} dv_{n-2m-1}.$$

Corolario IV.2. *Las órbitas de la acción localmente libre de $\mathbb{C}^m \cong \mathbb{R}^{2m}$ sobre $\mathcal{M}_1^{(\Lambda, m, n)}$ dada por*

$$\psi_{(T_1, \dots, T_m)}(z_1, \dots, z_n) = \left(e^{-2i\Re(\sum_{k=1}^m T_k \lambda_1^k)} z_1, \dots, e^{-2i\Re(\sum_{k=1}^m T_k \lambda_n^k)} z_n \right), \quad T_1, \dots, T_m \in \mathbb{C} \quad (\text{IV.7})$$

son tangentes a los vectores de la forma

$$-i \left(2\Re \left(\sum_{k=1}^m T_k \lambda_1^k \right) z_1, \dots, 2\Re \left(\sum_{k=1}^m T_k \lambda_n^k \right) z_n \right).$$

Demostración. Consideremos $T_2 = \dots = T_m = 0$ y $T_1 = t \in \mathbb{R}$. Entonces tenemos una curva real parametrizada por t

$$\psi_{(t, 0, \dots, 0)}(z_1, \dots, z_n) = \left(e^{-2it\Re(\lambda_1^1)} z_1, \dots, e^{-2it\Re(\lambda_n^1)} z_n \right).$$

La derivada de $\psi_{(t, 0, \dots, 0)}$ con respecto a t , evaluada en $t = 0$ corresponde al vector tangente

$$B_1 = -i \left(2\Re(\lambda_1^1) z_1, \dots, 2\Re(\lambda_n^1) z_n \right).$$

Para $T_2 = \dots = T_m = 0$ y $T_1 = 1$, este vector tangente es de la forma

$$-i \left(2\Re \left(\sum_{k=1}^m T_k \lambda_1^k \right) z_1, \dots, 2\Re \left(\sum_{k=1}^m T_k \lambda_n^k \right) z_n \right).$$

Ahora, si consideramos $T_2 = \dots = T_m = 0$ y $T_1 = it$ con $t \in \mathbb{R}$, tenemos la siguiente curva parametrizada por un imaginario puro

$$\psi_{(it, 0, \dots, 0)}(z_1, \dots, z_n) = \left(e^{-2i\Re(it\lambda_1^1)} z_1, \dots, e^{-2i\Re(it\lambda_n^1)} z_n \right).$$

La derivada de $\psi_{(it, 0, \dots, 0)}$ con respecto a t , evaluada en $t = 0$ corresponde al vector tangente

$$B'_1 = -i \left(2\Re(i\lambda_1^1) z_1, \dots, 2\Re(i\lambda_n^1) z_n \right).$$

Para $T_2 = \dots = T_m = 0$ y $T_1 = i$, este vector tangente es un vector de la forma

$$-i \left(2\Re \left(\sum_{k=1}^m T_k \lambda_1^k \right) z_1, \dots, 2\Re \left(\sum_{k=1}^m T_k \lambda_n^k \right) z_n \right).$$

De manera análoga se demuestra que los vectores tangentes B_k y B'_k son de la forma

$$-i \left(2\Re \left(\sum_{k=1}^m T_k \lambda_1^k \right) z_1, \dots, 2\Re \left(\sum_{k=1}^m T_k \lambda_n^k \right) z_n \right),$$

donde $T_k = 1$ y $T_k = i$, respectivamente y $T_\ell = 0$ para toda $\ell \neq k$ con $k \in \{1, \dots, m\}$.

Como ya se mencionó, los vectores

$$-i \left(2\Re \left(\sum_{k=1}^m T_k \lambda_1^k \right) z_1, \dots, 2\Re \left(\sum_{k=1}^m T_k \lambda_n^k \right) z_n \right) \quad (\text{IV.8})$$

forman el espacio vectorial real $\mathcal{K}_\alpha \cap \mathcal{K}_{d\alpha}$ de dimensión $2m$ y por tanto toda base para este espacio consta de $2m$ vectores de la forma (IV.8).

La acción es localmente libre porque los $2m$ campos vectoriales determinados por los subgrupos a un parámetro que corresponden a la base canónica de \mathbb{R}^{2m} (base del álgebra de Lie de \mathbb{R}^{2m}), es decir los $2m$ vectores de la forma B_k y B'_k con $k = 1, \dots, m$ son linealmente independientes (esto se sigue del lema IV.3).

Además estos $2m$ campos vectoriales conmutan puesto que vienen de una acción del grupo abeliano \mathbb{R}^{2m} . Esto campos nos dan una trivialización del espacio tangente a la foliación \mathcal{F}_α de $\mathcal{M}_1^{(\Lambda, m, n)}$ generada por la acción (IV.7) cuyas hojas corresponden a las órbitas de dicha acción, las cuales son de dimensión $2m$. ■

Corolario IV.3. *Las hojas \mathcal{F}_Z de \mathcal{F}_α son subvariedades integrables de la $2m$ -distribución $\mathcal{K}_\alpha \cap \mathcal{K}_{d\alpha}$.*

Demostración. Se sigue del teorema de Frobenius que las hojas de \mathcal{F}_α son involutivas y por lo tanto son subvariedades integrables de $\mathcal{K}_\alpha \cap \mathcal{K}_{d\alpha}$. ■

Proposición IV.3. *Las hojas \mathcal{F}_Z de la foliación \mathcal{F}_α admiten una estructura simpléctica.*

Demostración. La foliación tangente a $\mathcal{K}_\alpha \cap \mathcal{K}_{d\alpha}$ está dada por las órbitas de una acción localmente libre de \mathbb{R}^{2m} . En el punto $Z \in \mathcal{M}_1^{(\Lambda, m, n)}$ los vectores B_k, B'_k con $k = 1, \dots, m$ descritos en la demostración del corolario IV.2 son

base del espacio tangente a la hoja que pasa por Z .

Se puede considerar, por ejemplo, la 2-forma ω_Z cuya matriz $\mathcal{J}_{2m \times 2m}$ asociada, en términos de la base precedente, es:

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} J & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J \end{pmatrix},$$

donde $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. ■

Observación IV.4. En lugar de \mathcal{J} podemos usar cualquier matriz $2m \times 2m$ antisimétrica no singular.

Observación IV.5. Sean $X = (x_1, y_1, \dots, y_m, x_m)$ y $Y = (v_1, w_1, \dots, v_m, w_m)$, se tiene que

$$\omega_Z(X, Y) = X \mathcal{J} Y^t = \sum_{k=1}^m (x_k w_k - y_k v_k).$$

Es decir, coincide con la forma simpléctica canónica de $\mathbb{C}^m \cong \mathbb{R}^{2m}$.

Sea $\omega_{\mathcal{F}_\alpha} \in \Gamma(\Lambda^2 \mathbf{T}^*(\mathcal{F}_\alpha))$ una sección suave tal que a cada $Z \in \mathcal{F}_Z$ le asocia la 2-forma diferencial $\omega_Z \in \Omega^2(\mathbf{T}_Z(\mathcal{F}_\alpha))$. Observemos que $\omega_{\mathcal{F}_\alpha}$ restringida a cada hoja \mathcal{F}_Z de la foliación \mathcal{F}_α es no degenerada. Además, el diferencial exterior está definido sobre cada hoja \mathcal{F}_Z y lo denotamos por $d_{\mathcal{F}_\alpha}$ y tenemos que $d_{\mathcal{F}_\alpha} \omega_Z = 0$, esto es ω_Z es cerrada, $Z \in \mathcal{F}_Z$. Por lo tanto, $\omega_{\mathcal{F}_\alpha}$ es una 2-forma diferencial cuya restricción a cada hoja \mathcal{F}_Z de \mathcal{F}_α es una forma simpléctica.

Observación IV.6. $\mathbf{T}(\mathcal{F}_\alpha)$ admite una estructura de haz vectorial simpléctico. Esto es, para cada $Z \in \mathcal{M}_1^{(\mathbf{A}, m, n)}$, $(\mathbf{T}(\mathcal{F}_Z), \omega_Z)$ es un espacio vectorial simpléctico.

Teorema IV.4. Sean $m \geq 1$, $n > 3$ tal que $n > 2m$ y \mathbf{A} una configuración admisible. La variedad ángulo-momento $\mathcal{M}_1^{(\mathbf{A}, m, n)}$ asociada a \mathbf{A} admite una estructura regular de Poisson π , cuya foliación simpléctica asociada es \mathcal{F}_α .

Demostración. Del hecho que existe una correspondencia inyectiva entre estructuras de Poisson no degeneradas y estructuras simplécticas,⁶ tenemos un campo bivector de Poisson sobre cada hoja \mathcal{F}_Z de la foliación \mathcal{F}_α :

⁶Ver proposición I.15 en la sección § 9 del capítulo I.

$$\pi_{\mathcal{F}_Z}(\alpha, \beta) = \omega_Z \left(\omega_Z^\sharp(\alpha), \omega_Z^\sharp(\beta) \right), \quad \alpha, \beta \in \mathbf{T}_Z^*(\mathcal{F}_\alpha),$$

donde $\omega_Z^\sharp : \mathbf{T}_Z^*(\mathcal{F}_\alpha) \rightarrow \mathbf{T}_Z(\mathcal{F}_\alpha)$.

Vamos a definir un campo bivector sobre $\mathcal{M}_1^{(\Lambda, m, n)}$ de la siguiente manera:

$$\pi(\alpha, \beta) := \pi_{\mathcal{F}_Z}(\alpha|_{\mathcal{F}_Z}, \beta|_{\mathcal{F}_Z}), \quad \alpha, \beta \in \mathbf{T}_Z^* \left(\mathcal{M}_1^{(\Lambda, m, n)} \right).$$

Este campo bivector es un bivector de Poisson sobre $\mathcal{M}_1^{(\Lambda, m, n)}$. ■

Observación IV.7. En general las demostraciones y construcciones precedentes implican que toda variedad compacta que admite una acción localmente libre de \mathbb{R}^{2m} es una variedad de Poisson regular.

CAPÍTULO V

Variedades de Contacto en Dimensiones Altas.

Me lo contaron y lo olvidé;
lo vi y lo entendí;
lo hice y lo aprendí.

Confucio.

Vamos a considerar sobre \mathbb{C}^{n+s} la siguiente 1-forma real

$$\alpha := i \left[\sum_{r=1}^s (w_r d\bar{w}_r - \bar{w}_r dw_r) + \sum_{j=1}^n (z_j d\bar{z}_j - \bar{z}_j dz_j) \right],$$

en este caso $d\alpha$ corresponde a

$$d\alpha = i \left[\sum_{r=1}^s (dw_r d\bar{w}_r - d\bar{w}_r dw_r) + \sum_{j=1}^n (dz_j d\bar{z}_j - d\bar{z}_j dz_j) \right].$$

Observación V.1. En general se puede considerar la 1-forma

$$\alpha := i \left[\sum_{r=1}^s a_r (w_r d\bar{w}_r - \bar{w}_r dw_r) + \sum_{j=1}^n b_j (z_j d\bar{z}_j - \bar{z}_j dz_j) \right],$$

con $\{a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_n\}$ un conjunto de $s + n$ reales positivos.

Lema V.1. Sean $m = 1$, $n > 3$ y $s \geq 1$. Sea $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ una configuración admisible en \mathbb{C} . Entonces, para todo $X = (w_1, \dots, w_s, z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{M}_1^{(\Lambda, 1, n+s)}$ la 1-forma α restringida al espacio tangente $\mathbf{T}_X(\mathbf{M}_1^{(\Lambda, 1, n+s)})$ es una forma no trivial.

Demostración. Para $X = (w_1, \dots, w_s, z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{M}_1^{(\Lambda, 1, n+s)}$, la función lineal

$$\alpha_X : \mathbf{T}_X \left(\mathbf{M}_1^{(\Lambda, 1, n+s)} \right) \rightarrow \mathbb{R}$$

es trivial si y solo si existen $T \in \mathbb{C}$ y $\mu \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} i \left[\sum_{r=1}^s (w_r d\bar{w}_r - \bar{w}_r dw_r) + \sum_{j=1}^n (z_j d\bar{z}_j - \bar{z}_j dz_j) \right] = \\ T \left[\sum_{r=1}^s 2w_r dw_r + \sum_{j=1}^n \lambda_j (\bar{z}_j dz_j + z_j d\bar{z}_j) \right] + \\ \bar{T} \left[\sum_{r=1}^s 2\bar{w}_r d\bar{w}_r + \sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_j (z_j d\bar{z}_j - \bar{z}_j dz_j) \right] + \\ \mu \left[\sum_{r=1}^s (w_r d\bar{w}_r + \bar{w}_r dw_r) + \sum_{j=1}^n (z_j d\bar{z}_j + \bar{z}_j dz_j) \right]. \quad (\text{V.1}) \end{aligned}$$

Esto es cierto porque la dimensión de la variedad $\mathbf{M}_1^{(\Lambda, 1, n+s)}$ es $2n + 2s - 3$ y para $X \in \mathbf{M}_1^{(\Lambda, 1, n+s)}$, el conjunto de todas 1-formas reales en $\mathbf{T}_X(\mathbb{C}^{n+s})$ que se anulan restringidas a $\mathbf{T}_X(\mathbf{M}_1^{(\Lambda, 1, n+s)})$ es de dimensión tres.

Sean

$$\omega_1(X) = d\Re(F_s(X)); \quad \omega_2(X) = d\Im(F_s(X)); \quad \omega_3(X) = d\rho_s(X).$$

Como el conjunto de 1-formas

$$\mathcal{B} = \left\{ \omega_1(X), \omega_2(X), \omega_3(X) \right\}$$

es linealmente independiente, el espacio de 1-formas de tipo

$$(a + ib)dF_s + (a - ib)d\bar{F}_s + \mu d\rho_s$$

es de dimensión tres, parametrizado por $T \in \mathbb{C}$ y $\mu \in \mathbb{R}$.

Comparando coeficientes en la ecuación (V.1) tenemos:

$$iw_r = 2\bar{T}\bar{w}_r + \mu w_r, \quad r \in \{1, \dots, s\}, \quad (\text{V.2})$$

$$iz_j = (2\Re(T\lambda_j) + \mu)z_j, \quad j \in \{1, \dots, n\}. \quad (\text{V.3})$$

Concluimos lo siguiente:

- Para $s = 1$ el único punto satisfaciendo las ecuaciones (V.2) y (V.3) es el origen $(0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^{n+1}$. Sin embargo, el origen no pertenece a $\mathbf{M}_1^{(\mathbf{A}, 1, n+s)}$.
- Para $s > 1$, tenemos que los puntos satisfaciendo las ecuaciones (V.2) y (V.3) son de la forma $(w_1, \dots, w_s, 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^{n+s}$ donde al menos dos w_r son distintos de cero. Pero en este caso, las ecuaciones $F_s(X) = 0$ y $\rho_s(X) = 1$ definen la variedad de Brieskorn $w_1^2 + \dots + w_s^2 = 0$ en la esfera unitaria de \mathbb{C}^s y $\alpha = i \sum_{r=1}^s (w_r d\bar{w}_r - \bar{w}_r dw_r)$ es una forma de contacto sobre estas variedades como demostraron R. Lutz y C. Meckert en [LM76], en particular es no trivial sobre ellas (también puede consultarse [Gei08]).

Por lo tanto α es no trivial sobre la variedad ángulo-momento mixta $\mathbf{M}_1^{(\mathbf{A}, 1, n+s)}$ para toda $s \geq 1$. ■

Sean

$$\mathcal{K}_\alpha(X) = \left\{ v \in \mathbf{T}_X \left(\mathbf{M}_1^{(\mathbf{A}, 1, n+s)} \right) \mid \alpha(v) = 0 \right\} \quad \text{y}$$

$$\mathcal{K}_{d\alpha}(X) = \left\{ v \in \mathbf{T}_X \left(\mathbf{M}_1^{(\mathbf{A}, 1, n+s)} \right) \mid d\alpha(v, v') = 0 \forall v' \in \mathbf{T}_X \left(\mathbf{M}_1^{(\mathbf{A}, 1, n+s)} \right) \right\}$$

el núcleo de α y el núcleo de $d\alpha$ en el punto $X \in \mathbf{M}_1^{(\mathbf{A}, 1, n+s)}$, respectivamente.

Observemos que $\mathcal{K}_{d\alpha}(X) = \iota_v d\alpha = 0$, para todo $v \in \mathbf{T}_X \left(\mathbf{M}_1^{(\mathbf{A}, 1, n+s)} \right)$.

La restricción de $d\alpha$ a cada espacio tangente $\mathbf{T}_X \left(\mathbf{M}_1^{(\mathbf{A}, 1, n+s)} \right)$ es antisimétrica y como la dimensión de $\mathbf{M}_1^{(\mathbf{A}, 1, n+s)}$ es impar, $\mathcal{K}_{d\alpha}$ debe ser de dimensión al menos uno.

Proposición V.1. *Sean $m = 1$, $n > 3$, $s \geq 1$. Entonces:*

- Si $X \in \mathbf{M}_1^{(\mathbf{A}, 1, n+s)}$ es tal que $w_1^2 + \dots + w_s^2 \neq 0$, el núcleo de $d\alpha$ en X es un subespacio real de $\mathbf{T} \left(\mathbf{M}_1^{(\mathbf{A}, 1, n+s)} \right)$ de dimensión uno.
- Si $X \in \mathbf{M}_1^{(\mathbf{A}, 1, n+s)}$ es tal que $w_1^2 + \dots + w_s^2 = 0$, el núcleo de $d\alpha$ en X es un subespacio real de $\mathbf{T} \left(\mathbf{M}_1^{(\mathbf{A}, 1, n+s)} \right)$ de dimensión tres.

Demostración. El núcleo de $d\alpha$ restringido a $\mathbf{T}\left(\mathbf{M}_1^{(\Lambda,1,n+s)}\right)$ consiste de todos los puntos $v \in \mathbb{C}^{n+s}$ satisfaciendo las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} dF_s(v) = 0, \\ d\rho_s(v) = 0, \\ \iota_v d\alpha = TdF_s + \bar{T}d\bar{F}_s + \mu d\rho_s, \end{cases} \quad (\text{V.4})$$

donde $dF_s(v) = \sum_{r=1}^s 2w_r dw_r(v) + \sum_{j=1}^n \lambda_j \left(z_j d\bar{z}_j(v) + \bar{z}_j dz_j(v) \right)$ y ya que

$$\begin{aligned} \iota_v d\alpha &= d\alpha(v, \cdot) \\ &= i \left[\sum_{r=1}^s \left(dw_r(v) d\bar{w}_r - d\bar{w}_r(v) dw_r \right) + \sum_{j=1}^n \left(dz_j(v) d\bar{z}_j - d\bar{z}_j(v) dz_j \right) \right] \end{aligned}$$

es una 1-forma restringida a $\mathbf{T}_X\left(\mathbf{M}_1^{(\Lambda,1,n+s)}\right)$ y queremos saber donde es idénticamente cero, la escribimos como una combinación lineal de

$$\omega_1(X) = d\Re(F_s(X)); \quad \omega_2(X) = d\Im(F_s(X)), \quad \omega_3(X) = d\rho(X).$$

Sean $X = (w_1, \dots, w_s, z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{M}_1^{(\Lambda,1,n+s)}$ y $v = (u_1, \dots, u_s, v_1, \dots, v_n) \in \mathbf{T}_X\left(\mathbf{M}_1^{(\Lambda,1,n+s)}\right)$. El sistema (V.4) corresponde a las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^s 2w_r dw_r(v) + \sum_{j=1}^n \lambda_j \left(z_j d\bar{z}_j(v) + \bar{z}_j dz_j(v) \right) &= 0, \\ \sum_{r=1}^s \left(\bar{w}_r dw_r(v) + w_r d\bar{w}_r(v) \right) + \sum_{j=1}^n \left(\bar{z}_j dz_j(v) + z_j d\bar{z}_j(v) \right) &= 0, \\ i \left[\sum_{r=1}^s \left(dw_r(v) d\bar{w}_r - d\bar{w}_r(v) dw_r \right) + \sum_{j=1}^n \left(dz_j(v) d\bar{z}_j - d\bar{z}_j(v) dz_j \right) \right] \\ &= T \left[\sum_{r=1}^s 2w_r dw_r + \sum_{j=1}^n \lambda_j (\bar{z}_j dz_j + z_j d\bar{z}_j) \right] \\ &+ \bar{T} \left[\sum_{r=1}^s 2\bar{w}_r d\bar{w}_r + \sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_j (z_j d\bar{z}_j - \bar{z}_j dz_j) \right] \quad (\text{V.5}) \\ &+ \mu \left[\sum_{r=1}^s (w_r d\bar{w}_r + \bar{w}_r dw_r) + \sum_{j=1}^n (z_j d\bar{z}_j + \bar{z}_j dz_j) \right]. \end{aligned}$$

Observación V.2. De aquí en adelante, consideraremos al vector v anclado en el punto $X \in \mathbf{M}_1^{(\mathbf{A},1,n+s)}$.

Comparando coeficientes en la ecuación (V.5) tenemos:

$$idw_r(v) = 2\bar{T}\bar{w}_r + \mu w_r, \quad r \in \{1, \dots, s\};$$

$$idz_j(v) = (2\Re(T\lambda_j) + \mu)z_j, \quad j \in \{1, \dots, n\}.$$

Entonces, los vectores $v \in \mathbf{T}_X \left(\mathbf{M}_1^{(\mathbf{A},1,n+s)} \right)$ que pertenecen al núcleo de $d\alpha$ en el punto $X = (w_1, \dots, w_s, z_1, \dots, z_n)$ son de la forma:

$$v(T, \mu; X) = -i \left(2\bar{T}\bar{w}_1 + \mu w_1, \dots, 2\bar{T}\bar{w}_s + \mu w_s, (2\Re(T\lambda_1) + \mu)z_1, \dots, (2\Re(T\lambda_n) + \mu)z_n \right),$$

donde $T \in \mathbb{C}$ y $\mu \in \mathbb{R}$.

El vector $v(T, \mu; X)$ debe ser tangente a la esfera $\mathbb{S}^{2n+2s-1}$ y por tanto debe satisfacer la siguiente condición:

$$\Re \left(-i \sum_{r=1}^s \left(2\bar{T}\bar{w}_r^2 + \mu |w_r|^2 \right) - i \sum_{j=1}^n \left(2\Re(T\lambda_j) + \mu \right) |z_j|^2 \right) = 0.$$

Observemos que en realidad solo necesitamos que se satisfaga la siguiente ecuación:

$$\Re \left(i \sum_{r=1}^s \bar{T}\bar{w}_r^2 \right) = 0.$$

Si asumimos que $w_1^2 + \dots + w_s^2 \neq 0$, se sigue entonces que T depende solo de un parámetro real pues debe ser de la forma

$$T = t \sum_{r=1}^s \bar{w}_r^2, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Si $w_1^2 + \dots + w_s^2 = 0$, entonces T puede ser cualquier número complejo.

La condición $dF_s(v) = 0$ y $v(T, \mu; X)$ sea tangente a $\mathbb{S}^{2n+2s-1}$ implica:

$$2\bar{T} \sum_{r=1}^s |w_r|^2 + \mu \sum_{r=1}^s w_r^2 = 0.$$

Si $w_1^2 + \cdots + w_s^2 \neq 0$, tenemos que μ depende de t como sigue:

$$\mu = -2t \sum_{r=1}^s |w_r|^2.$$

Por lo tanto, en un punto X donde $w_1^2 + \cdots + w_s^2 \neq 0$, los vectores en el núcleo de $d\alpha$ solo dependen de un parámetro real t . Se sigue que $\mathcal{K}_{d\alpha}(X)$ tiene dimensión real uno.

En un punto donde $w_1^2 + \cdots + w_s^2 = 0$, los vectores en $\mathcal{K}_{d\alpha}(X)$ dependen de un número complejo T y un número real μ . Se sigue entonces que $\mathcal{K}_{d\alpha}(X)$ tiene dimensión real tres, en otras palabras, $\mathcal{K}_{d\alpha}(X)$ consiste de todos los vectores de la forma:

$$v(T, \mu; X) = -i \left(2\bar{T}\bar{w}_1 + \mu w_1, \dots, 2\bar{T}\bar{w}_s + \mu w_s, (2\Re(T\lambda_1) + \mu)z_1, \dots, (2\Re(T\lambda_n) + \mu)z_n \right).$$

■

Sea W_s el conjunto de puntos $X = (w_1, \dots, w_s, z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{M}_1^{(\Lambda, 1, n+s)}$ tales que $w_1^2 + \cdots + w_s^2 = 0$. Entonces, W_s es una subvariedad analítica real de $\mathbf{M}_1^{(\Lambda, 1, n+s)}$ de codimensión real $2s$. La variedad W_s es singular si $s > 1$ y cuando $s = 1$ es una variedad ángulo-momento¹ de dimensión $2n - 3$.

Sea $v(T, \mu; X)$ un vector en el núcleo de $d\alpha_X$. Nos interesa saber bajo que condiciones $v(T, \mu; X)$ pertenece a $\mathcal{K}_\alpha(X)$, en otras palabras, cuando $v(T, \mu; X)$ satisface la siguiente ecuación:

$$i \left[\sum_{r=1}^s \left(w_r d\bar{w}_r(v) - \bar{w}_r dw_r(v) \right) + \sum_{j=1}^n \left(z_j d\bar{z}_j(v) - \bar{z}_j dz_j(v) \right) \right] = 0.$$

Entonces,

$$2 \sum_{r=1}^s \Re(Tw_r^2) + 2 \sum_{j=1}^n \Re(T\lambda_j) |z_j|^2 + \mu = 0,$$

de donde se sigue que $\mu = 0$.

¹ver sección § 1 del capítulo III

Por tanto, si asumimos que $w_1^2 + \cdots + w_s^2 \neq 0$, tenemos que

$$\mu = -2t \sum_{r=1}^s |w_r|^2 = 0,$$

se sigue entonces que t debe ser cero.

Entonces, en el conjunto de puntos $X = (w_1, \dots, w_s, z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{M}_1^{(\Lambda, 1, n+s)}$ tales que $w_1^2 + \cdots + w_s^2 \neq 0$, la dimensión del subespacio $\mathcal{K}_\alpha(X) \cap \mathcal{K}_{d\alpha}(X)$ es cero. Se sigue que la 1-forma α es una forma de contacto en $\mathbf{M}_1^{(\Lambda, 1, n+s)} - W_s$. En otras palabras,

$$\text{Rank}(d\alpha_X|_{\mathcal{K}_\alpha(X)}) = 2(n + s - 2),$$

cuando $w_1^2 + \cdots + w_s^2 \neq 0$.

Por otro lado, para el conjunto de puntos $X = (w_1, \dots, w_s, z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{M}_1^{(\Lambda, 1, n+s)}$ tales que $w_1^2 + \cdots + w_s^2 = 0$ y asumiendo que $\mu = 0$, los vectores de la forma

$$v(T, 0; X) = -i \left(2\bar{T}\bar{w}_1, \dots, 2\bar{T}\bar{w}_s, \Re(T\lambda_1)z_1, \dots, 2\Re(T\lambda_n)z_n \right), \quad T \in \mathbb{C}$$

pertenecen tanto a $\mathcal{K}_\alpha(X)$ como a $\mathcal{K}_{d\alpha}(X)$.

Entonces, $\mathcal{K}_\alpha(X) \cap \mathcal{K}_{d\alpha}(X)$ es un espacio de dimensión dos parametrizado por $T \in \mathbb{C}$.

Definición V.1. Denotaremos al espacio vectorial $\mathcal{K}_\alpha(X) \cap \mathcal{K}_{d\alpha}(X)$ de dimensión dos en el punto $X = (w_1, \dots, w_s, z_1, \dots, z_n) \in W_s$ por $\Pi_s(X)$.

En este caso, $d\alpha$ tiene rango constante $2n + 2s - 6$. Además :

$$\alpha \wedge d\alpha^{n+s-3} \neq 0,$$

esto porque $\dim(\mathcal{K}_\alpha(X) \cap \mathcal{K}_{d\alpha}(X)) = 2$.

Del inciso 2 de la versión general del teorema de Darboux (ver teorema IV.3) tenemos que para cada $X \in \mathbf{M}_1^{(\Lambda, 1, n+s)}$ existen coordenadas locales

$$(x_1, y_1, z, u_1, v_1, \dots, u_{n+s-3}, v_{n+s-3}) \in \mathbb{R}^{(2n+2s-3)},$$

en una vecindad abierta \mathcal{U} de X tal que la 1-forma α se puede escribir como

$$\alpha = dz + u_1 dv_1 + \cdots + u_{n+s-3} dv_{n+s-3}.$$

Observación V.3. Cuando $w_k = 0$ para todo $k \in \{1, \dots, s\}$ y $\mu = 0$, el corolario IV.2 de la sección § 4 del capítulo IV se satisface para la variedad $\mathbf{M}_1^{(\Lambda, 1, n+s)}$.

Corolario V.1. Sea $s \geq 1$ y $w_k \neq 0$ para al menos un $k \in \{1, \dots, s\}$. Las órbitas de la acción localmente libre de $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ sobre $\mathbf{M}_1^{(\Lambda, 1, n+s)}$ dada por

$$\begin{aligned} & \psi_T(w_1, \dots, w_s, z_1, \dots, z_n) \\ &= \left(2\bar{T}\bar{w}_1, \dots, 2\bar{T}\bar{w}_s, e^{-2i\Re(T\lambda_1)} z_1, \dots, e^{-2i\Re(T\lambda_n)} z_n \right), \quad T \in \mathbb{C}. \end{aligned} \quad (\text{V.6})$$

son tangentes a los vectores de la forma

$$-i \left(2\bar{T}\bar{w}_1, \dots, 2\bar{T}\bar{w}_s, 2\Re(T\lambda_1) z_1, \dots, 2\Re(T\lambda_n) z_n \right).$$

Demostración. Consideremos $T = t \in \mathbb{R}$. Entonces tenemos una curva real parametrizada por t

$$\begin{aligned} & \psi_t(w_1, \dots, w_s, z_1, \dots, z_n) \\ &= \left(-2it\bar{w}_1, \dots, -2it\bar{w}_s, e^{-2it\Re(\lambda_1)} z_1, \dots, e^{-2it\Re(\lambda_n)} z_n \right). \end{aligned}$$

La derivada de ψ_t con respecto a t , evaluada en $t = 0$ corresponde al vector tangente

$$-i \left(2\bar{w}_1, \dots, 2\bar{w}_s, 2\Re(\lambda_1) z_1, \dots, 2\Re(\lambda_n) z_n \right).$$

Para $T = 1$, este vector tangente es de la forma

$$B_1 = -i \left(2\bar{T}\bar{w}_1, \dots, 2\bar{T}\bar{w}_s, 2\Re(T\lambda_1) z_1, \dots, 2\Re(T\lambda_n) z_n \right).$$

Ahora, si consideramos $T = it$ con $t \in \mathbb{R}$, tenemos la siguiente curva parametrizada por un imaginario puro

$$\begin{aligned} & \psi_{it}(w_1, \dots, w_s, z_1, \dots, z_n) \\ &= \left(-2i(-it)\bar{w}_1, \dots, -2i(-it)\bar{w}_s, e^{-2i\Re(it\lambda_1)} z_1, \dots, e^{-2i\Re(it\lambda_n)} z_n \right). \end{aligned}$$

La derivada de ψ_{it} con respecto a t , evaluada en $t = 0$ corresponde al vector tangente

$$-i \left(2(-i)\bar{w}_1, \dots, 2(-i)\bar{w}_s, 2\Re(i\lambda_1) z_1, \dots, 2\Re(i\lambda_n) z_n \right).$$

Para $T = i$, este vector tangente es un vector de la forma

$$B'_1 = -i \left(2\bar{T}\bar{w}_1, \dots, 2\bar{T}\bar{w}_s, 2\Re(T\lambda_1)z_1, \dots, 2\Re(T\lambda_n)z_n \right).$$

Como ya se mencionó, los vectores de la forma

$$-i \left(2\bar{T}\bar{w}_1, \dots, 2\bar{T}\bar{w}_s, 2\Re(T\lambda_1)z_1, \dots, 2\Re(T\lambda_n)z_n \right) \quad (\text{V.7})$$

forman el subespacio vectorial real $\mathcal{K}_\alpha \cap \mathcal{K}_{d\alpha}$ de $\mathbf{T}_X \left(\mathbf{M}_1^{(\Lambda, 1, n+s)} \right)$ y por tanto toda base para este espacio consta de 2 vectores linealmente independientes de la forma (V.7).

La acción (V.6) es localmente libre ya que los dos campos vectoriales determinados por los subgrupos a un parámetro que corresponden a la base canónica de \mathbb{R}^2 (base del álgebra de Lie de \mathbb{R}^2), es decir los dos vectores de la forma B_1 y B'_1 son linealmente independientes.

Además, estos dos campos vectoriales conmutan puesto que vienen de una acción del grupo abeliano \mathbb{R}^2 . Estos campos nos dan una trivialización del espacio tangente a la foliación cuyas hojas están dadas por las órbitas de la acción. ■

Las órbitas de la acción (V.6) generan una foliación \mathcal{F} de $\mathbf{M}_1^{(\Lambda, 1, n+s)}$.

Corolario V.2. *Las órbitas de la acción (V.6) corresponden a subvariedades integrables de la 2-distribución $\mathcal{K}_\alpha \cap \mathcal{K}_{d\alpha}$.*

Demostración. Se sigue del teorema de Frobenius que las hojas de \mathcal{F} son involutivas y por lo tanto son subvariedades integrables de $\mathcal{K}_\alpha \cap \mathcal{K}_{d\alpha}$. ■

Proposición V.2. *La foliación \mathcal{F} admite una estructura simpléctica.*

Demostración. La demostración es análoga a la demostración de la proposición IV.3 del capítulo IV, sección § 4. ■

Sea ahora $m > 1$, $n > 3$ tal que $n > 2m$.

Consideremos sobre \mathbb{C}^{n+m} la siguiente 1-forma real

$$\alpha := i \left[\sum_{r=1}^m \left(w_r d\bar{w}_r - \bar{w}_r dw_r \right) + \sum_{j=1}^n \left(z_j d\bar{z}_j - \bar{z}_j dz_j \right) \right],$$

en este caso $d\alpha$ corresponde a

$$d\alpha = i \left[\sum_{r=1}^m \left(dw_r d\bar{w}_r - d\bar{w}_r dw_r \right) + \sum_{j=1}^n \left(dz_j d\bar{z}_j - d\bar{z}_j dz_j \right) \right].$$

Observación V.4. En general se puede considerar la 1-forma

$$\alpha := i \left[\sum_{r=1}^m a_r (w_r d\bar{w}_r - \bar{w}_r dw_r) + \sum_{j=1}^n b_j (z_j d\bar{z}_j - \bar{z}_j dz_j) \right],$$

con $\{a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n\}$ un conjunto de $n + m$ reales positivos.

Lema V.2. Para toda $X = (w_1, \dots, w_m, z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{M}_1^{(\Lambda, m, n)}$ la 1-forma α restringida al espacio tangente $\mathbf{T}_X \left(\mathbf{M}_1^{(\Lambda, m, n)} \right)$ es una forma no trivial.

Demostración. Para $X = (w_1, \dots, w_m, z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{M}_1^{(\Lambda, m, n)}$, la función lineal

$$\alpha_X : \mathbf{T}_X \left(\mathbf{M}_1^{(\Lambda, m, n)} \right) \rightarrow \mathbb{R}$$

es trivial si y solo si existen $T_k \in \mathbb{C}$, $k \in \{1, \dots, m\}$ y $\mu \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\begin{aligned} i \left[\sum_{r=1}^m (w_r d\bar{w}_r - \bar{w}_r dw_r) + \sum_{j=1}^n (z_j d\bar{z}_j - \bar{z}_j dz_j) \right] = \\ \sum_{k=1}^m \left[T_k \left(2w_k dw_k + \sum_{j=1}^n \lambda_j^k (\bar{z}_j dz_j + z_j d\bar{z}_j) \right) \right] \\ + \sum_{k=1}^m \left[\bar{T}_k \left(2\bar{w}_k d\bar{w}_k + \sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_j^k (z_j d\bar{z}_j + \bar{z}_j dz_j) \right) \right] \\ + \mu \left[\sum_{r=1}^m (w_r d\bar{w}_r + \bar{w}_r dw_r) + \sum_{j=1}^n (z_j d\bar{z}_j + \bar{z}_j dz_j) \right]. \quad (\text{V.8}) \end{aligned}$$

Esto es cierto porque la dimensión de la variedad $\mathbf{M}_1^{(\Lambda, m, n)}$ es $2n - 1$ y para $X \in \mathbf{M}_1^{(\Lambda, m, n)}$, el conjunto de todas las 1-formas reales en $\mathbf{T}_X (\mathbb{C}^{n+m})$ que se anulan sobre $\mathbf{T}_X \left(\mathbf{M}_1^{(\Lambda, m, n)} \right)$ es de dimensión $2m + 1$.

Sean

$$\omega_1^k(X) = d\Re(\mathbf{F}_k(X)); \quad \omega_2^k(X) = d\Im(\mathbf{F}_k(X)), \quad \omega_3(X) = d\rho(X),$$

con $k = 1, \dots, m$.

Como el conjunto de 1-formas

$$\mathcal{B} = \left\{ \omega_1^1(X), \dots, \omega_1^m(X), \omega_2^1(X), \dots, \omega_2^m(X), \omega_3(X) \right\}$$

es linealmente independiente, el espacio de 1-formas de tipo

$$\sum_{k=1}^m (a_k + ib_k) d\mathbf{F}_k + \sum_{k=1}^m (a_k - ib_k) d\overline{\mathbf{F}}_k + \mu d\rho$$

es de dimensión $2m+1$, parametrizado por $T_k \in \mathbb{C}$ con $k = 1, \dots, m$ y $\mu \in \mathbb{R}$.

Comparando coeficientes en la ecuación (V.8) tenemos:

$$iw_k = 2\overline{T}_k \bar{w}_k + \mu w_k, \quad k \in \{1, \dots, m\}, \quad (\text{V.9})$$

$$iz_j = \left(2\Re \left(\sum_{k=1}^m T_k \lambda_j^k \right) + \mu \right) z_j, \quad j \in \{1, \dots, n\}. \quad (\text{V.10})$$

De la ecuación (V.10) concluimos que $z_j = 0$ para toda $j \in \{1, \dots, n\}$. Entonces, tenemos que puntos de la forma $X = (w_1, \dots, w_m, 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^{n+m}$ serían soluciones de las ecuaciones (V.9) y (V.10), pero en este caso el sistema (III.5) y la ecuación ρ son de la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1(X) &:= w_1^2 = 0, \\ &\vdots \\ \mathbf{F}_m(X) &:= w_m^2 = 0, \\ \rho(X) &:= \sum_{k=1}^m |w_k|^2 = 1. \end{aligned}$$

Se sigue que $w_k = 0$ para toda $k \in \{1, \dots, m\}$. Entonces el único punto que satisface las ecuaciones (V.9) y (V.10) es el origen $(0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^{n+m}$, pero el origen no pertenece a $\mathbf{M}_1^{(\Lambda, m, n)}$.

Concluimos que α es no trivial sobre la variedad ángulo-momento mixta $\mathbf{M}_1^{(\Lambda, m, n)}$. ■

Sean

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_\alpha(X) &= \left\{ v \in \mathbf{T}_X \left(\mathbf{M}_1^{(\Lambda, m, n)} \right) \mid \alpha(v) = 0 \right\} \quad \text{y} \\ \mathcal{K}_{d\alpha}(X) &= \left\{ v \in \mathbf{T}_X \left(\mathbf{M}_1^{(\Lambda, m, n)} \right) \mid d\alpha(v, v') = 0 \forall v' \in \mathbf{T}_X \left(\mathbf{M}_1^{(\Lambda, m, n)} \right) \right\}\end{aligned}$$

el núcleo de α y el núcleo de $d\alpha$ en el punto $X \in \mathbf{M}_1^{(\Lambda, m, n)}$, respectivamente. Observemos que $\mathcal{K}_{d\alpha}(X) = \iota_v d\alpha = 0$, para todo $v \in \mathbf{T}_X \left(\mathbf{M}_1^{(\Lambda, m, n)} \right)$.

Proposición V.3. *Sea $m > 1$, $n > 3$ tal que $n > 2m$. Entonces:*

1. *Si $X = (w_1, \dots, w_m, z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{M}_1^{(\Lambda, m, n)}$ es tal que $w_r \neq 0$ para toda $r \in \{1, \dots, m\}$, el núcleo de $d\alpha$ en el punto X es un subespacio real de $\mathbf{T} \left(\mathbf{M}_1^{(\Lambda, m, n)} \right)$ de dimensión 1.*
2. *Si $X \in \mathbf{M}_1^{(\Lambda, m, n)}$ es tal que ℓ coordenadas w_r son iguales a 0 para $\ell, r \in \{1, \dots, m\}$, el núcleo de $d\alpha$ en el punto X es un subespacio real de $\mathbf{T} \left(\mathbf{M}_1^{(\Lambda, m, n)} \right)$ de dimensión $2\ell + 1$.*

Demostración. Un punto $v \in \mathbb{C}^{n+m}$ que pertenece al núcleo de $d\alpha$ restringido a $\mathbf{T} \left(\mathbf{M}_1^{(\Lambda, m, n)} \right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} d\mathbf{F}_1(v) = 0, \\ \vdots \\ d\mathbf{F}_m(v) = 0, \\ d\rho(v) = 0, \\ \iota_v d\alpha = \sum_{k=1}^m T_k d\mathbf{F}_k + \sum_{k=1}^m \bar{T}_k d\bar{\mathbf{F}}_k + \mu d\rho, \end{cases} \quad (\text{V.11})$$

donde $d\mathbf{F}_k(v) = 2w_k dw_k(v) + \sum_{j=1}^n \lambda_j^k \left(z_j d\bar{z}_j(v) + \bar{z}_j dz_j(v) \right)$ y como

$$\begin{aligned}\iota_v d\alpha &= d\alpha(v, \cdot) \\ &= i \left[\sum_{r=1}^m \left(dw_r(v) d\bar{w}_r - d\bar{w}_r(v) dw_r \right) + \sum_{j=1}^n \left(dz_j(v) d\bar{z}_j - d\bar{z}_j(v) dz_j \right) \right]\end{aligned}$$

es una 1-forma restringida a $\mathbf{T}_X \left(\mathbf{M}_1^{(\Lambda, m, n)} \right)$ y queremos saber donde es idénticamente cero, la escribimos como una combinación lineal de

$$\omega_1^k(X) = d\Re(\mathbf{F}_k(X)); \quad \omega_2^k(X) = d\Im(\mathbf{F}_k(X)), \quad \omega_3(X) = d\rho(X).$$

Sea $X = (w_1, \dots, w_m, z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{M}_1^{(\Lambda, m, n)}$ y $v = (u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n) \in \mathbf{T}_X \left(\mathbf{M}_1^{(\Lambda, m, n)} \right)$. El sistema (V.11) corresponde a:

$$\begin{aligned} 2w_1 dw_1(v) + \sum_{j=1}^n \lambda_j^1 \left(z_j d\bar{z}_j(v) + \bar{z}_j dz_j(v) \right) &= 0, \\ &\vdots \\ 2w_m dw_m(v) + \sum_{j=1}^n \lambda_j^m \left(z_j d\bar{z}_j(v) + \bar{z}_j dz_j(v) \right) &= 0, \end{aligned}$$

$$\sum_{r=1}^m \left(\bar{w}_r dw_r(v) + w_r d\bar{w}_r(v) \right) + \sum_{j=1}^n \left(\bar{z}_j dz_j(v) + z_j d\bar{z}_j(v) \right) = 0,$$

$$\begin{aligned} i \left[\sum_{r=1}^m \left(dw_r(v) d\bar{w}_r - d\bar{w}_r(v) dw_r \right) + \sum_{j=1}^n \left(dz_j(v) d\bar{z}_j - d\bar{z}_j(v) dz_j \right) \right] = \\ \sum_{k=1}^m \left[T_k \left(2w_k dw_k + \sum_{j=1}^n \lambda_j^k (z_j d\bar{z}_j + \bar{z}_j dz_j) \right) \right] \\ + \sum_{k=1}^m \left[\bar{T}_k \left(2\bar{w}_k d\bar{w}_k + \sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_j^k (\bar{z}_j dz_j + z_j d\bar{z}_j) \right) \right] \\ + \mu \left[\sum_{r=1}^m (w_r d\bar{w}_r + \bar{w}_r dw_r) + \sum_{j=1}^n (z_j d\bar{z}_j + \bar{z}_j dz_j) \right]. \quad (\text{V.12}) \end{aligned}$$

Observación V.5. De aquí en adelante, consideraremos al vector v anclado en el punto $X \in \mathbf{M}_1^{(\Lambda, m, n)}$.

Comparando coeficientes en la ecuación (V.12) tenemos:

$$\begin{aligned} idw_r(v) &= 2\bar{w}_r \bar{T}_r + \mu w_r, \quad r \in \{1, \dots, m\}. \\ idz_j(v) &= \left(2\Re \left(\sum_{k=1}^m T_k \lambda_j^k \right) + \mu \right) z_j, \quad j \in \{1, \dots, n\}, \end{aligned}$$

Entonces, los vectores $v \in \mathbf{T}_X \left(\mathbf{M}_1^{(\Lambda, m, n)} \right)$ que pertenecen a $\mathcal{K}_{d\alpha}$ en el punto $X = (w_1, \dots, w_m, z_1, \dots, z_n)$ son de la forma:

$$v(T_1, \dots, T_m, \mu; X) = -i \left(2\bar{w}_1 \bar{T}_1 + \mu w_1, \dots, 2\bar{w}_m \bar{T}_m + \mu w_m, \left(2\Re \left(\sum_{k=1}^m T_k \lambda_1^k \right) + \mu \right) z_1, \dots, \left(2\Re \left(\sum_{k=1}^m T_k \lambda_n^k \right) + \mu \right) z_n \right),$$

donde $T_k \in \mathbb{C}$ para toda $k \in \{1, \dots, m\}$ y $\mu \in \mathbb{R}$.

Consideremos la condición $d\mathbf{F}_k(v) = 0$, cuando $v = v(T_1, \dots, T_m, \mu; X)$, donde $T_k \in \mathbb{C}$ para toda $k \in \{1, \dots, m\}$ y $\mu \in \mathbb{R}$:

$$-2iw_k(2\bar{w}_k \bar{T}_k + \mu w_k) + \sum_{j=1}^n \lambda_j^k \left[i \left(2\Re \left(\sum_{k=1}^m T_k \lambda_j^k \right) + \mu \right) |z_j|^2 - i \left(2\Re \left(\sum_{k=1}^m T_k \lambda_j^k \right) + \mu \right) |z_j|^2 \right] = 0.$$

Entonces,

$$-4|w_k|^2 \bar{T}_k - 2\mu w_k^2 = 0.$$

Si $w_k \neq 0$ para $k \in \{1, \dots, m\}$ se sigue que T_k depende solo de μ :

$$T_k = -\frac{1}{2}\mu \frac{\bar{w}_k}{w_k}.$$

El vector $v(T_1, \dots, T_m, \mu; X)$ tiene que ser tangente a la esfera \mathbb{S}^{2n+1} y por tanto debe satisfacer la siguiente condición:

$$\Re \left(i \sum_{r=1}^m (2\bar{w}_r^2 \bar{T}_r + \mu |w_r|^2) - i \sum_{j=1}^n \left(2\Re \left(\sum_{k=1}^m T_k \lambda_j^k \right) + \mu \right) |z_j|^2 \right) = 0.$$

En otras palabras:

$$\Re \left(-2i \sum_{r=1}^m \left(\bar{w}_r^2 \bar{T}_r \right) \right) = 0.$$

Si consideramos el vector $v(T_1, \dots, T_m, \mu; X)$, con $T_k = -\frac{1}{2}\mu \frac{\bar{w}_k}{w_k}$ cuando $w_k \neq 0$ para toda $k \in \{1, \dots, m\}$, se tiene que v es ortogonal a la esfera \mathbb{S}^{2n+1} pues μ es real:

$$\Re \left(-2i \sum_{k=1}^m \left(-\frac{1}{2} \bar{w}_k^2 \mu \frac{w_k}{\bar{w}_k} \right) \right) = \Re \left(i \sum_{k=1}^m \mu |w_k|^2 \right) = 0.$$

Sin pérdida de generalidad, supongamos que las primeras ℓ coordenadas w_k son 0, entonces tenemos:

$$\Re \left(i \left(0\bar{T}_1 + \cdots + 0\bar{T}_\ell + \sum_{k=\ell+1}^m \mu |w_k|^2 \right) \right) = 0,$$

pues μ es real.

Aún cuando $w_k = 0$ para toda $k \in \{1, \dots, m\}$, el vector $v(T_1, \dots, T_m, \mu; X)$ es ortogonal a la esfera \mathbb{S}^{2n+1} .

Por tanto, en un punto donde $w_k \neq 0$ para toda $k \in \{1, \dots, m\}$, los vectores en el núcleo de $d\alpha$ depende de un parámetro real μ . Entonces, el núcleo de $d\alpha$ tiene dimensión uno.

Sin pérdida de generalidad supongamos que las primeras ℓ coordenadas w_k son cero. Así como en la demostración del lema IV.3, se muestra que el mapeo \mathbb{R} -lineal $\phi_X : \mathbb{C}^\ell \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^{2\ell+1} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1} \cong \mathbb{R}^{2n+2}$ definido por

$$\phi_X(T_1, \dots, T_\ell, \mu; X) = v \left(T_1, \dots, T_\ell, T_{\ell+1}(\mu), \dots, T_m(\mu), \mu; X \right),$$

es inyectivo.

Por lo tanto, en un punto donde ℓ coordenadas w_k son iguales a cero con $\ell, k \in \{1, \dots, m\}$, los vectores en el núcleo de $d\alpha$ dependen de ℓ números complejos y un número real μ . Entonces, el núcleo de $d\alpha$ tiene dimensión $2\ell + 1$. ■

Sea W_ℓ el conjunto de puntos $(w_1, \dots, w_m, z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{M}_1^{(\mathbf{A}, m, n)}$ tales que ℓ coordenadas w_k son iguales a cero, con $\ell, k \in \{1, \dots, m\}$. Entonces, W_ℓ es una subvariedad real analítica de $\mathbf{M}_1^{(\mathbf{A}, m, n)}$ de codimensión real 2ℓ .

Sea $v(T_1, \dots, T_m, \mu; X)$ un vector en $\mathcal{K}_{d\alpha}(X)$. Queremos saber cuando pertenece al núcleo de α_X ; i.e., cuando $v(T_1, \dots, T_m, \mu; X)$ satisface la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^m \left((2w_k^2 T_k + \mu |w_k|^2) + (2\bar{w}_k^2 \bar{T}_k + \mu |w_k|^2) \right) \\ & + \sum_{j=1}^n \left(\left(2\Re \left(\sum_{k=1}^m T_k \lambda_j^k \right) + \mu \right) |z_j|^2 + \left(2\Re \left(\sum_{k=1}^m T_k \lambda_j^k \right) + \mu \right) |z_j|^2 \right) = 0. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\mu + 2 \sum_{k=1}^m \Re(w_k^2 T_k) + 2 \sum_{j=1}^n \Re \left(\sum_{k=1}^m T_k \lambda_j^k \right) |z_j|^2 = 0.$$

Ya que $T_k w_k^2 + \sum_{j=1}^n T_k \lambda_j^k |z_j|^2 = 0$, se sigue que $\mu = 0$.

Si $\mu = 0$ y $w_k \neq 0$ para toda $k \in \{1, \dots, m\}$, tenemos que $T_k = 0$ para toda $k \in \{1, \dots, m\}$. Por tanto, en el conjunto de puntos $X \in \mathbf{M}_1^{(\Lambda, m, n)}$ tal que todas las coordenadas w_k son distintas de cero, la 1-forma α es una forma de contacto. En otras palabras,

$$\text{Rank}(d\alpha_X|_{\mathcal{K}_\alpha(X)}) = 2(n-1),$$

cuando $w_k \neq 0$ para toda $k \in \{1, \dots, m\}$.

Si $\mu = 0$ y ℓ coordenadas w_k son iguales a cero con $\ell, k \in \{1, \dots, m\}$, tenemos que $\mathcal{K}_\alpha(X) \cap \mathcal{K}_{d\alpha}(X)$ es un subespacio real de dimensión 2ℓ parametrizado por ℓ números complejos.

Definición V.2. Denotaremos este espacio vectorial real de dimensión 2ℓ en el punto $X \in \mathcal{W}_\ell$, con ℓ coordenadas w_k iguales a cero, por $\Pi_\ell(X)$.

En este caso, $d\alpha$ tiene rango constante $2n - 2\ell - 2$. Además :

$$\alpha \wedge d\alpha^{n-\ell-1} \neq 0,$$

esto porque $\dim(\mathcal{K}_\alpha(Z) \cap \mathcal{K}_{d\alpha}(Z)) = 2\ell$.

Del inciso 2 de la versión general del teorema de Darboux (ver teorema IV.3) tenemos que para cada $X \in \mathbf{M}_1^{(\Lambda, m, n)}$ existen coordenadas locales

$$(x_1, y_1, \dots, x_\ell, y_\ell, z, u_1, v_1, \dots, u_{n-\ell-1}, v_{n-\ell-1}) \in \mathbb{R}^{(2n-1)},$$

en una vecindad abierta \mathcal{U} de X tal que la 1-forma α se puede escribir como

$$\alpha = dz + u_1 dv_1 + \dots + u_{n-\ell-1} dv_{n-\ell-1}.$$

Observación V.6. Cuando $w_k = 0$ para todo $k \in \{1, \dots, m\}$, esto es, si las primeras m coordenadas de un punto $X \in \mathbf{M}_1^{(\Lambda, m, n)}$ son iguales a cero, se satisface el corolario IV.2 de la sección §4 del capítulo IV.

Corolario V.3. Sin pérdida de generalidad asumimos que las primeras ℓ coordenadas w_k del punto $X = (w_1, \dots, w_m, z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{M}_1^{(\Lambda, m, n)}$ son cero, con $\ell, k \in \{1, \dots, m\}$. Las órbitas de la acción localmente libre de $\mathbb{C}^{\ell+(m-\ell)} = \mathbb{R}^{2\ell+2(m-\ell)}$ sobre $\mathbf{M}_1^{(\Lambda, m, n)}$ con $1 \leq \ell \leq m$, dada por

$$\begin{aligned} & \psi_{(T_1, \dots, T_\ell, 0, \dots, 0)}(0, \dots, 0, w_{\ell+1}, \dots, w_m, z_1, \dots, z_n) \\ &= \left(0, \dots, 0, e^{-2i\Re(\sum_{k=1}^{\ell} T_k \lambda_1^k)} z_1, \dots, e^{-2i\Re(\sum_{k=1}^{\ell} T_k \lambda_n^k)} z_n \right), \quad T_1, \dots, T_\ell \in \mathbb{C}, \end{aligned} \quad (\text{V.13})$$

son tangentes a los vectores de la forma

$$-i \left(0, \dots, 0, 2\Re \left(\sum_{k=1}^{\ell} T_k \lambda_1^k \right) z_1, \dots, 2\Re \left(\sum_{k=1}^{\ell} T_k \lambda_n^k \right) z_n \right).$$

Demostración. Consideremos $T_2 = \dots = T_\ell = 0$ y $T_1 = t \in \mathbb{R}$. Entonces tenemos una curva real parametrizada por t

$$\begin{aligned} & \psi_{(t, 0, \dots, 0)}(0, \dots, 0, w_{\ell+1}, \dots, w_m, z_1, \dots, z_n) \\ &= \left(0, \dots, 0, e^{-2it\Re(\lambda_1^1)} z_1, \dots, e^{-2it\Re(\lambda_n^1)} z_n \right). \end{aligned}$$

La derivada de $\psi_{(t, 0, \dots, 0)}$ con respecto a t , evaluada en $t = 0$ corresponde al vector tangente

$$-i \left(0, \dots, 0, 2\Re(\lambda_1^1) z_1, \dots, 2\Re(\lambda_n^1) z_n \right).$$

Para $T_2 = \dots = T_\ell = 0$ y $T_1 = 1$, este vector tangente es de la forma

$$B_1 = -i \left(0, \dots, 0, 2\Re \left(\sum_{k=1}^{\ell} T_k \lambda_1^k \right) z_1, \dots, 2\Re \left(\sum_{k=1}^{\ell} T_k \lambda_n^k \right) z_n \right).$$

Ahora, si consideramos $T_2 = \dots = T_\ell = 0$ y $T_1 = it$ con $t \in \mathbb{R}$, tenemos la siguiente curva parametrizada por un imaginario puro

$$\begin{aligned} & \psi_{(it, 0, \dots, 0)}(0, \dots, 0, w_{\ell+1}, \dots, w_m, z_1, \dots, z_n) \\ &= \left(0, \dots, 0, e^{-2i\Re(it\lambda_1^1)} z_1, \dots, e^{-2i\Re(it\lambda_n^1)} z_n \right). \end{aligned}$$

La derivada de $\psi_{(it,0,\dots,0)}$ con respecto a t , evaluada en $t = 0$ corresponde al vector tangente

$$B'_1 = -i\left(0, \dots, 0, 2\Re(i\lambda_1^1) z_1, \dots, 2\Re(i\lambda_n^1) z_n\right).$$

Para $T_2 = \dots = T_\ell = 0$ y $T_1 = i$, este vector tangente es un vector de la forma

$$-i\left(0, \dots, 0, 2\Re\left(\sum_{k=1}^m T_k \lambda_1^k\right) z_1, \dots, 2\Re\left(\sum_{k=1}^m T_k \lambda_n^k\right) z_n\right).$$

De manera análoga se demuestra que los vectores tangentes

$$\begin{aligned} B_k &= -i\left(0, \dots, 0, 2\Re(\lambda_1^k) z_1, \dots, 2\Re(\lambda_n^k) z_n\right), \\ B'_k &= -i\left(0, \dots, 0, 2\Re(i\lambda_1^k) z_1, \dots, 2\Re(i\lambda_n^k) z_n\right), \end{aligned}$$

son de la forma

$$-i\left(0, \dots, 0, 2\Re\left(\sum_{k=1}^\ell T_k \lambda_1^k\right) z_1, \dots, 2\Re\left(\sum_{k=1}^\ell T_k \lambda_n^k\right) z_n\right),$$

donde $T_k = 1$ y $T_s = 0$, respectivamente y $T_s = 0$ para toda $s \neq k$ con $k \in \{1, \dots, \ell\}$ y $\ell \in \{1, \dots, m\}$.

Como ya se mencionó, los vectores

$$-i\left(0, \dots, 0, 2\Re\left(\sum_{k=1}^\ell T_k \lambda_1^k\right) z_1, \dots, 2\Re\left(\sum_{k=1}^\ell T_k \lambda_n^k\right) z_n\right) \quad (\text{V.14})$$

forman el subespacio vectorial real $\mathcal{K}_\alpha \cap \mathcal{K}_{d\alpha}$ de $\mathbf{T}_X\left(\mathbf{M}_1^{(\Lambda, m, n)}\right)$ de dimensión 2ℓ y por tanto toda base para este espacio consta de 2ℓ vectores de la forma (V.14).

La acción (V.13) es localmente libre ya que los 2ℓ campos vectoriales determinados por los subgrupos a un parámetro que corresponden a la base canónica de $\mathbb{R}^{2\ell}$ (base del álgebra de Lie de $R^{2\ell}$), es decir los 2ℓ vectores de la forma B_ℓ y B'_ℓ con $\ell \in \{1, \dots, m\}$ son linealmente independientes.

Además, estos dos campos vectoriales conmutan puesto que vienen de una acción del grupo abeliano $\mathbb{R}^{2\ell}$. Estos campos nos dan una trivialización del espacio tangente a la foliación cuyas hojas están dadas por las órbitas de la acción. ■

Las órbitas de la acción (V.13) generan una foliación \mathcal{F} de $\mathbf{M}_1^{(\Lambda,m,n)}$.

Corolario V.4. *Las órbitas de la acción (V.13) corresponden a subvariedades integrables de la 2ℓ -distribución $\mathcal{K}_\alpha \cap \mathcal{K}_{d\alpha}$.*

Demostración. Se sigue del teorema de Frobenius que las hojas de \mathcal{F} son involutivas y por lo tanto son subvariedades integrales de $\mathcal{K}_\alpha \cap \mathcal{K}_{d\alpha}$. ■

Proposición V.4. *La foliación \mathcal{F} admite una estructura simpléctica.*

Demostración. La demostración es análoga a la demostración de la proposición IV.3 del capítulo IV, sección §4. ■

§1. Confoliaciones Conductivas sobre $\mathbf{M}_1^{(\Lambda,1,n+1)}$ y $\mathbf{M}_1^{(\Lambda,m,n)}$.

Ya que $W_s \subset \mathbf{M}_1^{(\Lambda,1,n+s)}$ para $s = 1$ es de codimensión real dos, se sigue que W_1 no separa $\mathbf{M}_1^{(\Lambda,1,n+1)}$ y por los resultados introducidos en la sección §7 del capítulo I tenemos la siguiente proposición:

Proposición V.5. *Sean $m = 1$, $n > 3$ y $s = 1$. Sea $*$ el operador de Hodge para una métrica riemanniana dada sobre una variedad ángulo-momento mixta $\mathbf{M}_1^{(\Lambda,1,n+1)}$. Entonces, para una orientación apropiada de $\mathbf{M}_1^{(\Lambda,1,n+1)}$, se tiene que α es una confoliación positiva sobre $\mathbf{M}_1^{(\Lambda,1,n+1)}$:*

1. Para $X = (w_1, z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{M}_1^{(\Lambda,1,n+1)} - W_1$,

$$*\left(\alpha \wedge (d\alpha)^{n-1}\right)(X) > 0.$$

2. Para $X \in W_1$,

$$*\left(\alpha \wedge (d\alpha)^{n-1}\right)(X) = 0.$$

Denotamos por τ a la 2-forma $*\left(\alpha \wedge (d\alpha)^{n-2}\right)$.

Lema V.3. *Sea $X \in W_1$. Entonces, existe una curva suave parametrizada $\gamma : [-1, 1] \rightarrow \mathbf{M}_1^{(\Lambda,1,n+1)}$ tal que*

1. $|\gamma'(x)| \neq 0$ para toda $x \in [-1, 1]$.

2. $\gamma(0) = X$ y $\gamma'(0) \in [\ker(\tau)]^\perp(X) = \Pi_1(X)$.
3. Si $x \in [-1, 1]$ con $x \neq 0$, $\gamma(x) \notin \mathbf{W}_1$ y $\gamma'(x)$ es un vector en $[\ker(\tau)]^\perp(\gamma(x)) = \mathcal{K}_\alpha(\gamma(x))$.

Demostración. Sea g una métrica riemanniana dada sobre $\mathbf{M}_1^{(\Lambda, 1, n+1)}$. Para $P \in \mathbf{W}_1$ sea $[\mathbf{T}_P(\mathbf{W}_1)]^\perp$ un subespacio de $\mathbf{T}(\mathbf{M}_1^{(\Lambda, 1, n+1)})$ de dimensión dos, el cual es ortogonal a $\mathbf{T}_P(\mathbf{W}_1)$ en P .

Primero mostraremos que existe una vecindad abierta $\mathcal{U} \subset \mathbf{W}_1$ de $X \in \mathbf{W}_1$ y un campo vectorial diferenciable y no singular $\mathcal{X} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbf{T}(\mathbf{M}_1^{(\Lambda, 1, n+1)})$ definido sobre \mathcal{U} tal que $\mathcal{X}(P) \in \mathcal{K}_\alpha(P) \cap [\mathbf{T}_P(\mathbf{W}_1)]^\perp$, para toda $P \in \mathcal{U}$.

Más aún, sea $\mathcal{L}(P) = \mathcal{K}_\alpha(P) \cap [\mathbf{T}_P(\mathbf{W}_1)]^\perp$. Entonces $\mathcal{L}(P)$ tiene dimensión dos si $[\mathbf{T}_P(\mathbf{W}_1)]^\perp \subset \mathcal{K}_\alpha(P)$ ó $\mathcal{L}(P)$ tiene dimensión uno si $[\mathbf{T}_P(\mathbf{W}_1)]^\perp$ es transversal a $\mathcal{K}_\alpha(P)$.

Sea $v_X \in \mathcal{L}(X)$ un vector no cero. Extendemos este vector anclado en X a un campo vectorial diferenciable $\tilde{\mathcal{X}} : K \rightarrow \mathbf{T}(\mathbf{M}_1^{(\Lambda, 1, n+1)})$ definido en una vecindad $K \subset \mathbf{W}_1$ de X en \mathbf{W}_1 . Sea $\pi_P : \mathbf{T}_P(\mathbf{M}_1^{(\Lambda, 1, n+1)}) \rightarrow \mathcal{K}_\alpha(P)$ la proyección ortogonal para $P \in K$. Consideremos el campo vectorial definido sobre K por $\mathcal{X}_1(P) = \pi_P(\tilde{\mathcal{X}}(P))$. Entonces, \mathcal{X}_1 es un campo vectorial diferenciable y por continuidad \mathcal{X}_1 satisface todas las propiedades requeridas en una vecindad \mathcal{U} , posiblemente más pequeña.

Sea $\mathcal{Y} : K' \rightarrow \mathbf{T}(\mathbf{W}_1) \subset \mathbf{T}(\mathbf{M}_1^{(\Lambda, 1, n+1)})$ un campo vectorial no nulo, definido posiblemente en una vecindad más pequeña K' contenida en K , tangente a la foliación \mathcal{F} (en otras palabras, $\mathcal{Y}(P) \in \Pi_1(P)$ para toda $P \in K'$). Sea $\varphi : K' \rightarrow \mathbb{R}$ una función que se anula solo en X (de nuevo, posiblemente en una vecindad más pequeña).

Sea $\mathcal{X}_2 = \mathcal{Y} + \varphi\mathcal{X}_1$. Este es un campo vectorial definido en una vecindad de X en \mathbf{W}_1 con la siguiente propiedad: $\mathcal{X}_2(X) = \mathcal{Y}(X)$ y $\mathcal{X}_2(P) \in \mathcal{K}_\alpha(P)$ pero $\mathcal{X}_2(P) \notin \mathbf{T}(\mathbf{W}_1)$, para todo $P \neq X$.

Para terminar la demostración del lema, por teoremas de extensión (particiones de unidad) existe una extensión de \mathcal{X}_2 a un campo vectorial no singular

$\mathcal{X}_3 : \mathcal{V} \rightarrow \mathbf{T}(\mathbf{M}_1^{(\mathbf{A},1,n+1)})$ definido en una vecindad abierta $\mathcal{V} \subset \mathbf{M}_1^{(\mathbf{A},1,n+1)}$ de X en W_1 . El campo vectorial definido por $\mathcal{X}(P) = \pi_P(\mathcal{X}_3(P))$ tiene la propiedad que $\mathcal{X}(P) \in \mathcal{K}_\alpha(P)$ para toda $P \in \mathcal{V}$ y $\mathcal{X}(P) = \mathcal{X}_3(P)$ si $P \in K'$.

Multiplicando el campo vectorial \mathcal{X} por una constante positiva $c > 0$, si es necesario, podemos asumir que todas las soluciones de la ecuación diferencial definida por el campo vectorial $c\mathcal{X}$ sobre \mathcal{V} están definidas en el intervalo $(-2, 2)$.

Si $\gamma : [-1, 1] \rightarrow \mathcal{U}$ es la solución de la ecuación diferencial determinada por $c\mathcal{X}$ y satisfaciendo la condición inicial $\gamma(0) = X$, entonces esta curva parametrizada, si c es lo suficientemente pequeño, satisface todas las propiedades requeridas. ■

La proposición V.5 y el lema V.3 implican que en una variedad ángulo-momento mixta $\mathbf{M}_1^{(\mathbf{A},1,n+1)}$, la 1-forma α define una *confoliación conductiva* en el sentido de J. S. Altschuler y L. F. Wu². Por lo tanto, α puede ser aproximada, en la topología C^∞ , por una forma de contacto. Tenemos el siguiente teorema:

Teorema V.1. Sean $m = 1$, $n > 3$, $s = 1$. Sea $\mathbf{A} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, con $\lambda_j \in \mathbb{C}$, una configuración admisible. Las variedades ángulo-momento mixtas

$$\mathbf{M}_1^{(\mathbf{A},1,n+1)} = \prod_{j=1}^{2\ell+1} (\mathbb{S}^{2d_j} \times \mathbb{S}^{2n-2d_j-1}), \quad d_j = n_j + \dots + n_{j+\ell-1},$$

admiten estructuras de contacto.

Consideremos ahora $m = 1$, $n > 3$ y $s > 1$.

Proposición V.6. Sean $m = 1$, $n > 3$ y $s > 1$. Denotamos por $*$ el operador de Hodge para una métrica riemanniana dada sobre una variedad ángulo-momento mixta $\mathbf{M}_1^{(\mathbf{A},1,n+s)}$. Entonces, para una orientación apropiada de $\mathbf{M}_1^{(\mathbf{A},1,n+s)}$, α es una *confoliación positiva*:

1. Para $X = (w_1, \dots, w_s, z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{M}_1^{(\mathbf{A},1,n+s)}$ tal que $w_1^2 + \dots + w_s^2 \neq 0$,

$$*\left(\alpha \wedge (d\alpha)^{n+s-2}\right)(X) > 0.$$

²Ver sección §7 del capítulo I.

2. Para $X \in W_s$ tal que $w_1^2 + \cdots + w_s^2 = 0$,

$$*(\alpha \wedge (d\alpha)^{n+s-2})(X) = 0.$$

3. El conjunto de puntos $X \in \mathbf{M}_1^{(\mathbf{A},1,n+s)}$ tal que $*(\alpha \wedge (d\alpha)^{n+s-2})(X) = 0$ es el conjunto real analítico de codimensión dos en $\mathbf{M}_1^{(\mathbf{A},1,n+s)}$ dado por

$$W = \left\{ X \in \mathbf{M}_1^{(\mathbf{A},1,n+s)} \mid w_1^2 + \cdots + w_s^2 = 0 \right\}.$$

Lema V.4. Sea $m = 1$, $n > 3$ y $s > 1$. Sea \mathbf{A} una configuración admisible y $*$ el operador de Hodge para una métrica riemanniana dada sobre una variedad ángulo-momento mixta $\mathbf{M}_1^{(\mathbf{A},1,n+s)}$. Sea

$$W = \left\{ X = (w_1, \dots, w_s, z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{M}_1^{(\mathbf{A},1,n+s)} \mid *(\alpha \wedge (d\alpha)^{n+s-2})(X) = 0 \right\},$$

donde α es una confoliación positiva sobre $\mathbf{M}_1^{(\mathbf{A},1,n+s)}$. Entonces, α es una confoliación conductiva.

La demostración de este lema es análoga a la demostración del lema V.3, usando el hecho que W tiene una estratificación de Whitney (ver [Mat], [Tro05]).

Demostración. De la proposición anterior tenemos que W es un conjunto real analítico de codimensión real dos en $\mathbf{M}_1^{(\mathbf{A},1,n+s)}$.

Sea \mathbb{W} una estratificación de W dada por las subvariedades W_s con $s > 1$:

$$W_2 \subseteq W_3 \subseteq \cdots \subseteq W_s.$$

Tenemos que \mathbb{W} satisface la condición frontera y la condición B de Whitney.³ Por lo tanto, \mathbb{W} es una estratificación de Whitney de W .

La intersección de \mathcal{K}_α con cualquier límite de espacios tangentes del estrato de dimensión máxima W_s es una unión U de subespacios lineales de dimensión a lo más $2n + 2s - 4$.

³Condición B de Whitney: La pareja (X, Y) satisface la condición B si para todas las sucesiones $\{x_i\}$ de puntos en X y $\{y_j\}$ de puntos en Y convergiendo al mismo punto $y \in Y$ tal que, en una carta local de y , $\{\mathbf{T}_{x_i}(X)\}$ converge a \mathbf{T} y las líneas $\overline{x_i y_i}$ convergen a \mathcal{L} , se tiene entonces que $\mathcal{L} \in \mathbf{T}$. Una estratificación $Z = \bigcup X_\alpha$ satisface la *condición frontera* si para toda $(\alpha, \beta) \in A \times A$ tal que $X_\alpha \cap \overline{X_\beta} \neq \emptyset$, se tiene que $X_\alpha \subseteq \overline{X_\beta}$.

Existe un vector $v_X \in \mathbf{T}_X \left(\mathbf{M}_1^{(\Lambda,1,n+s)} \right)$ tal que $v_X \notin \mathcal{U}$. Extendemos v_X anclado en X a un campo vectorial diferenciable $\tilde{\mathcal{X}} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbf{T} \left(\mathbf{M}_1^{(\Lambda,1,n+s)} \right)$ definido en una vecindad \mathcal{U} de $X \in W$ tal que $\tilde{\mathcal{X}}(X) = v_X$.

Sea $\pi_P : \mathbf{T}_P \left(\mathbf{M}_1^{(\Lambda,1,n+s)} \right) \rightarrow \mathcal{K}_\alpha(P)$ la proyección ortogonal para $P \in \mathcal{U}$. Consideremos el campo vectorial diferenciable definido sobre \mathcal{U} por $\mathcal{X}_1(P) = \pi_P \left(\tilde{\mathcal{X}}(P) \right)$.

Sea $\mathcal{Y} : \mathcal{U}' \rightarrow \mathcal{U} \subset \mathbf{T} \left(\mathbf{M}_1^{(\Lambda,1,n+s)} \right)$ un campo vectorial no nulo, $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ tal que $\mathcal{Y}(P) \in \Pi_s(P) = \mathcal{K}_\alpha(P) \cap \mathcal{K}_{d\alpha}(P)$ para toda $P \in \mathcal{U}'$. Sea $\phi : \mathcal{U}' \rightarrow \mathbb{R}$ una función que sólo se anula en X .

Sea $\mathcal{X}_2 = \mathcal{Y} + \phi\mathcal{X}_1$ un campo vectorial tal que $\mathcal{X}_2(X) = \mathcal{Y}(X)$ y $\mathcal{X}_2(P) \in \mathcal{K}_\alpha(P)$ pero $\mathcal{X}_2(P) \notin \mathcal{U}$ para toda $P \neq X$.

Por teoremas de extensión (particiones de unidad) existe una extensión de \mathcal{X}_2 a un campo vectorial no singular $\mathcal{X}_3 : \mathcal{V} \rightarrow \mathbf{T} \left(\mathbf{M}_1^{(\Lambda,1,n+s)} \right)$ definido en una vecindad abierta $\mathcal{V} \subset \mathbf{M}_1^{(\Lambda,1,n+s)}$ de $X \in W$. El campo vectorial definido por $\mathcal{X}(P) = \pi_P(\mathcal{X}_3(P))$ tiene la propiedad que $\mathcal{X}(P) \in \mathcal{K}_\alpha(P)$ para toda $P \in \mathcal{V}$ y $\mathcal{X}(P) = \mathcal{X}_3(P)$ si $P \in \mathcal{U}'$.

Multiplicando el campo vectorial \mathcal{X} por una constante positiva $c > 0$, si es necesario, podemos asumir que todas las soluciones de la ecuación diferencial definida por el campo vectorial $c\mathcal{X}$ sobre \mathcal{V} están definidas en el intervalo $(-2, 2)$.

Si $\gamma : [-1, 1] \rightarrow \mathcal{U}$ es la solución de la ecuación diferencial determinada por $c\mathcal{X}$ y satisfaciendo la condición inicial $\gamma(0) = X$, entonces esta curva parametrizada, si c es lo suficientemente pequeño, satisface

1. $\gamma(0) = X$,
2. Si $x \in [-1, 1]$ con $x \neq 0$, $\gamma(x) \notin W$ y $\gamma'(x) \in [\ker(\tau)]^\perp(\gamma(x)) = \mathcal{K}_\alpha(\gamma(x))$, donde $\tau = *(\alpha \wedge (d\alpha)^{n+s-3})$.

Reparametrizando, consideremos $\hat{\gamma} : [-1, 1] \rightarrow \mathbf{M}_1^{(\Lambda,1,n+s)}$ dada por $\hat{\gamma}(t) = \gamma(t^2)$ de modo que $\hat{\gamma}'(0) = 0$. Entonces, $\hat{\gamma}$ tiene la propiedad que $\hat{\gamma}'(t)$ está en $[\ker(\tau)]^\perp(\gamma(t^2))$ para toda $t \in [-1, 1]$ pues $[\ker(\tau)]^\perp(\gamma(0)) = 0$.

■

El conjunto abierto $V_W = \mathbf{M}_1^{(\Lambda, 1, n+s)} - W$ es conexo pues W es de codimensión dos. Este conjunto es el conjunto donde la forma α es de contacto.

De la proposición V.6 y el lema V.4 se sigue que sobre las variedades ángulo-momento mixtas $\mathbf{M}_1^{(\Lambda, 1, n+s)}$ la 1-forma α define una *confoliación conductiva* en el sentido de J. S. Altschuler y L. F. Wu, Por tanto, α puede ser aproximada, en la topología C^∞ , por una forma de contacto. Tenemos el siguiente teorema:

Teorema V.2. Sean $m = 1$, $n > 3$, $s > 1$ y sea $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ una configuración admisible, con $\lambda_j \in \mathbb{C}$. Las variedades

$$\mathbf{M}_1^{(\Lambda, 1, n+s)} = \prod_{j=1}^{2\ell+1} \left(\mathbb{S}^{2d_j+s-1} \times \mathbb{S}^{2n-2d_j+s-2} \right),$$

donde $d_j = n_j + \dots + n_{j+\ell-1}$, admiten estructuras de contacto.

Proposición V.7. Sean $m > 1$, $n > 2m$ y Λ una configuración admisible. Sea $*$ el operador de Hodge para una métrica riemanniana dada sobre una variedad ángulo-momento mixta $\mathbf{M}_1^{(\Lambda, m, n)}$. Entonces, para la orientación apropiada de $\mathbf{M}_1^{(\Lambda, m, n)}$, α es una confoliación positiva:

1. Si $X = (w_1, \dots, w_m, z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{M}_1^{(\Lambda, m, n)}$ tal que $w_k \neq 0$ para toda $k \in \{1, \dots, m\}$, se tiene

$$* \left(\alpha \wedge (d\alpha)^{n-1} \right) (X) > 0.$$

2. Si $X \in W_\ell$, para $\ell \in \{1, \dots, m\}$, se tiene

$$* \left(\alpha \wedge (d\alpha)^{n-1} \right) (X) = 0.$$

3. El conjunto de puntos $X = (w_1, \dots, w_m, z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{M}_1^{(\Lambda, m, n)}$ tal que

$$* \left(\alpha \wedge (d\alpha)^{n-1} \right) (X) = 0,$$

es un conjunto real analítico de codimensión real dos en $\mathbf{M}_1^{(\Lambda, m, n)}$, dado por:

$$\Sigma = \left\{ (w_1, \dots, w_m, z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{M}_1^{(\Lambda, m, n)} \mid w_1 \dots w_m = 0 \right\}.$$

Para poder demostrar que α es una confoliación conductiva cuando $m > 1$ y $n > 2m$, necesitamos del siguiente lema:

Lema V.5. *Sea $m > 1$, $n > 2m$ y Λ una configuración admisible. Sea $*$ el operador de Hodge para una métrica riemanniana dada sobre una variedad ángulo-momento mixta $\mathbf{M}_1^{(\Lambda,m,n)}$. Sea*

$$\Sigma = \left\{ X = (w_1, \dots, w_m, z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{M}_1^{(\Lambda,m,n)} \mid *(\alpha \wedge (d\alpha)^{n-1})(X) = 0 \right\},$$

donde α es una confoliación positiva sobre $\mathbf{M}_1^{(\Lambda,m,n)}$. Entonces, α es una confoliación conductiva.

Demostración. La demostración de este lema es análoga a la demostración del lema V.3 y del lema V.4, usando el hecho que Σ tiene una estratificación de Whitney. ■

El conjunto abierto $V_\Sigma = \mathbf{M}_1^{(\Lambda,m,n)} - \Sigma$ es conexo, pues Σ es de codimensión dos. En este conjunto la forma α es de contacto.

De la proposición V.7 y el lema V.5 se sigue que sobre una variedad ángulo-momento mixta $\mathbf{M}_1^{(\Lambda,m,n)}$, la 1-forma α define una *confoliación conductiva* en el sentido de J. S. Altschuler y L. F. Wu.⁴ Por tanto, α puede ser aproximada, en la topología C^∞ , por una forma de contacto.

Resumimos en el siguiente resultado:

Teorema V.3. *Sean $m > 1$ y $n > 2m$. Sea $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ una configuración admisible en \mathbb{C}^m . Las variedades ángulo-momento mixtas $\mathbf{M}_1^{(\Lambda,m,n)}$ asociadas a Λ , son variedades de contacto. La distribución \mathcal{K}_α puede ser perturbada, por una pequeña perturbación en la topología C^∞ , a una distribución $\mathcal{K}_{\alpha'}$ que define una estructura de contacto sobre $\mathbf{M}_1^{(\Lambda,m,n)}$.*

⁴Ver sección §5 del capítulo I.

Epílogo.

No importa cuán pequeño pueda parecer el comienzo:
lo que se hace bien,
bien hecho queda para siempre.

Henry David Thoreau.

Desobediencia civil (ensayo).

- Un problema interesante es determinar la topología de las variedades ángulo-momento mixtas $\mathbf{M}_1^{(\Lambda, m, n)}$. Tomando como base los resultados ya conocidos sobre variedades ángulo-momento, los cuales son descritos en [BM06], conjeturamos lo siguiente:

Conjetura .1. *Sea G_1, \dots, G_k una sucesión de grupos abelianos finitamente generados. Existen enteros m, n y una configuración admisible Λ tales que para $j = 1, \dots, k$ y algún entero ℓ , G_k es un sumando directo de $H^{j+\ell+1}(\mathbf{M}_1^{(\Lambda, m, n)}, \mathbb{Z})$, donde $\mathbf{M}_1^{(\Lambda, m, n)}$ es la variedad ángulo-momento mixta de dimensión $N > k$, asociada a m, n y Λ .*

Esta conjetura en conjunto con los resultados presentados en esta tesis implicarían lo siguiente: dado cualquier complejo simplicial finito K existe una variedad de contacto compacta \mathbf{M} tal que $H^*(\mathbf{M}, \mathbb{Z})$ contiene a $H^*(K, \mathbb{Z})$ como sumando directo. En particular existirían variedades de contacto con torsión arbitraria en dimensiones prescritas.

- Las variedades ángulo-momento mixtas $\mathbf{M}_1^{(\Lambda, m, n)}$ admiten una acción del toro \mathbb{T}^n (ver (III.7) en la sección §3 del capítulo III). El tipo de órbita correspondiente a esta acción está codificado por la combinatoria de los convexos estrellados descritos en la página 57 de la sección §3 del capítulo III. El estudio de dichos convexos es un buen proyecto a futuro.
- El estudio de la estructura de las órbitas de la acción de $\mathbb{C}^m = \mathbb{R}^{2m}$ sobre la variedad ángulo-momento $\mathcal{M}_1^{(\Lambda, m, n)}$ descrita por (IV.7) en la

pagina 75 de la sección §4 del capítulo IV también es un futuro proyecto.

En conclusión: las variedades ángulo-momento mixtas son nuevos ejemplos de variedades de contacto con una topología muy rica y en dimensiones arbitrariamente grandes.

Apéndice I

So many things become beautiful
when you really look.

Lauren Oliver.

Before I Fall.

A. Variedades Stein.

Sea (\mathcal{M}, J) una variedad compleja, donde J es la estructura compleja.¹ Una función suave $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ es llamada *exhaustiva* si es propia² y acotada por abajo.

Sea f una función. Podemos asociarle a f una 1-forma como sigue: $d^{\mathbb{C}}f := df \circ J$ y una 2-forma $\omega_f := -d(d^{\mathbb{C}}f)$.

Decimos que la función f es *J-convexa* o *plurisubarmónica* si $\omega_f(v, Jv) > 0$ para todo vector tangente $v \neq 0$. Esto es, ω_f es una forma simpléctica³ compatible con J .

Existen varias definiciones para una variedad Stein, aquí presentamos la definición clásica y una definición que se sigue de un teorema de H. Grauert (ver [Gra58]).

Definición. A.1 [Definición Clásica] Una variedad compleja (\mathcal{M}, J) es una *variedad Stein* si satisface las siguientes propiedades:

1. \mathcal{M} es *holomorfa convexa*; esto es, para todo subconjunto compacto $\mathcal{K} \subset \mathcal{M}$, la envolvente convexa holomorfa

$$\bar{\mathcal{K}} = \left\{ z \in \mathcal{M} \mid |f(z)| \leq \max_{x \in \mathcal{K}} |f(x)| \quad \forall f \in \mathcal{O}(\mathcal{M}) \right\} \subset \mathcal{M}$$

¹Ver sección §5.2 del capítulo I.

²Preimagen de conjuntos compactos es compacta.

³Ver definición I.17 de la sección §5 del capítulo I.

es un subconjunto compacto de \mathcal{M} , donde $\mathcal{O}(\mathcal{M})$ es el anillo de funciones holomorfas sobre \mathcal{M} .

2. \mathcal{M} es *holomorfa mente separable*; es decir, para todo par de puntos distintos x, y en \mathcal{M} , existe una función holomorfa $f \in \mathcal{O}(\mathcal{M})$ tal que $f(x) \neq f(y)$.

Teorema. A.1 [H. Grauert [Gra58]] *Una variedad compleja que admite una función J -convexa exhaustiva es una variedad Stein en el sentido clásico.*

El teorema de H. Grauert nos permite escribir la siguiente definición.

Definición. A.2 Una variedad compleja (\mathcal{M}, J) es una *variedad Stein* si admite una función exhaustiva J -convexa $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$.

La siguiente proposición nos muestra que toda variedad Stein es un ejemplo de una variedad Weinstein.⁴

Proposición. A.1 *Sea (\mathcal{M}, J) una variedad Stein y $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse exhaustiva, completa y J -convexa. Entonces, $(\omega_f, \mathcal{X}_f, f)$, donde $\omega_f = -d(d^{\mathbb{C}}f)$ y $\mathcal{X}_f := \nabla_f f$, es una estructura Weinstein sobre \mathcal{M} .*

Demostración. Ya que f es J -convexa, tenemos que ω_f es una forma simpléctica, esto es, es una 2-forma no degenerada.

Sea $\mathcal{X}_f = \nabla_f$ el gradiente de f con respecto a la métrica $\langle X, Y \rangle := \omega_f(X, JY)$. Entonces, \mathcal{X}_f es un campo vectorial de Liouville. Más aún, para toda $Y \in \mathbf{T}\mathcal{M}$ tenemos

$$d(d^{\mathbb{C}}f)(Y) = \langle \nabla_f, JY \rangle = -\omega_f(\nabla_f, Y) = -\iota_{\mathcal{X}_f}\omega_f(Y).$$

Entonces,

$$\iota_{\mathcal{X}_f}\omega_f = -d(d^{\mathbb{C}}f), \quad \iota_{\mathcal{X}_f}\omega_f = \omega_f.$$

■

B. Las variedades $\mathbf{M}_1^{(\mathbf{A},1,n+1)}$ admiten una estructura de contacto.

Sean $m = 1$, $n > 3$ y $s = 1$. Se sigue de trabajos de C. Meckert, Y. Eliashberg y A. Weinstein que las variedades ángulo-momento mixtas $\mathbf{M}_1^{(\mathbf{A},1,n+1)}$

⁴Ver definición II.3 del capítulo II.

B Las variedades $\mathbf{M}_1^{(\mathbf{A},1,n+1)}$ admiten una estructura de contacto. 109

admiten una estructura de contacto (ver [Mec82], [Eli90] y [Wei91]).

Recordemos que las variedades ángulo-momento mixtas $\mathbf{M}_1^{(\mathbf{A},1,n+1)}$ de tipo $(\mathbf{A}, 1, n + 1)$ son sumas conexas de productos de esferas (Teorema III.7 de la sección §3 del capítulo III):

$$\#_{j=1}^{2\ell+1} \left(\mathbb{S}^{2d_j} \times \mathbb{S}^{2n-2d_j-1} \right),$$

donde $d_j = n_j + \dots + n_{j+\ell-1}$. En otras palabras, podemos decir que las variedades ángulo-momento mixtas $\mathbf{M}_1^{(\mathbf{A},1,n+1)}$ de tipo $(\mathbf{A}, 1, n + 1)$ son sumas conexas de productos de esferas de la forma $\mathbb{S}^r \times \mathbb{S}^t$, donde $r > 2$ es un número par y $t > 2$ es un número impar.

Sin pérdida de generalidad, vamos a suponer que $t > r$ (el caso $r > t$ es completamente análogo).

La t -esfera \mathbb{S}^t admite una descomposición de libro abierto (\mathcal{K}, f) ⁵. El lomo de este libro abierto es la $(t - 2)$ -esfera $\mathcal{K} = \mathbb{S}^{t-2}$, una página corresponde a $\mathcal{P}(\mathbf{A}) = \mathbb{R}^{t-1}$ y la monodromía es trivial.

Entonces, la variedad producto $\mathbb{S}^r \times \mathbb{S}^t$ también admite una descomposición de libro abierto (\mathcal{K}', f') . En este caso, el lomo de este libro abierto es la variedad producto $\mathcal{K} = \mathbb{S}^{t-2} \times \mathbb{S}^r$, una página corresponde a $\mathcal{P}(\mathbf{A}) = \mathbb{R}^{t-1} \times \mathbb{S}^r$ y con monodromía trivial.

La página $\mathcal{P}(\mathbf{A}) = \mathbb{R}^{t-1} \times \mathbb{S}^r$ del libro abierto (\mathcal{K}', f') es paralelizable, esto es, su haz tangente es un haz trivial (ver [Sta67]). Entonces existe una inmersión⁶ $f : \mathbb{R}^{t-1} \times \mathbb{S}^r \rightarrow \mathbb{R}^{t+r}$ (ver teorema 6.3 de [Hir59]).

Del corolario 1.4 de [Gon97], se sigue que la complejificación del haz tangente de $\mathcal{P}(\mathbf{A})$ es trivial. Por tanto, $\mathcal{P}(\mathbf{A})$ es inmersible en \mathbb{C}^N , para algún N y concluimos que la página $\mathcal{P}(\mathbf{A})$ del libro abierto (\mathcal{K}', f') admite una estructura compleja⁷ J .

Sea $\phi : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $\phi(Z) = \sum_{j=1}^N |z_j|^2$, con $Z =$

⁵Ver definición I.32 de la sección §8 del capítulo I.

⁶ f es una inmersión si tiene rango constante igual a la dimensión del dominio.

⁷Ver sección §5.2 del capítulo I.

(z_1, \dots, z_n) . Consideremos la restricción de ϕ a la página $\mathcal{P}(\mathbf{\Lambda}) = \mathbb{R}^{t-1} \times \mathbb{S}^r$:

$$\phi|_{\mathbb{R}^{t-1} \times \mathbb{S}^r} : \mathbb{R}^{t-1} \times \mathbb{S}^r \rightarrow \mathbb{R}.$$

Esta función satisface el ser exhaustiva, propia y acotada inferiormente. Por lo tanto, concluimos que la página $\mathcal{P}(\mathbf{\Lambda}) = \mathbb{R}^{t-1} \times \mathbb{S}^r$ es una variedad Stein. En particular es una variedad Weinstein y por tanto, $\mathcal{K} = \mathbb{S}^{t-2} \times \mathbb{S}^r$ es una variedad de contacto.

Se sigue entonces del teorema II.1 del capítulo II que la variedad producto $\mathbb{S}^r \times \mathbb{S}^t$ es una variedad de contacto. De los trabajos de C. Meckert, Y. Eliashberg y A. Weinstein concluimos que la suma conexa de variedades producto de la forma $\mathbb{S}^r \times \mathbb{S}^t$ admite una estructura de contacto (ver [Mec82], [Eli90] y [Wei91]).

Por lo tanto, las variedades ángulo-momento mixtas de tipo $(\mathbf{\Lambda}, 1, n+1)$ son variedades de contacto.

Índice de Notación.

$A^*(\mathbb{R}^n)$	Álgebra de todas las formas diferenciales sobre \mathbb{R}^n .
Λ_n^*	Álgebra exterior.
$\mathcal{O}(\mathcal{M})$	Anillo de funciones holomorfas sobre \mathcal{M} .
γ	Camino diferenciable.
\mathcal{F}	Cara de un politopo.
\mathcal{X}, \mathcal{Y}	Campos vectoriales.
\mathcal{R}	Campo vectorial de Reeb.
\overline{X}	Cerradura de X .
$[\ker(\tau)]^\perp$	Complemento ortogonal del núcleo de τ .
$\mathbf{\Lambda}, \mathbf{\Lambda}'$	Configuraciones admisibles.
$C^\infty(\mathcal{M})$	Conjunto de funciones diferenciables de \mathcal{M} .
$I(\mathcal{D})$	Conjunto de todas las formas diferenciales que se anulan en \mathcal{D} .
$A^k(\mathbb{R}^n)$	Conjunto de todas las k -formas sobre \mathbb{R}^n .
$\mathfrak{X}(\mathcal{M})$	Conjunto de todos los campos vectoriales diferenciables en \mathcal{M} .
$\iota_{\mathcal{X}}\alpha$	Contracción de α a lo largo del campo vectorial \mathcal{X} .
$[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$	Corchete de campos vectoriales.
\mathbb{C}^*	\mathbb{C} menos el origen.
\mathcal{L}	Derivada de Lie.
(\mathcal{K}, f)	Descomposición de libro abierto.
df	Diferencial del mapeo f .
$d\omega, d\alpha$	Diferencial de una forma.
\mathcal{D}	Distribución de r -planos.
$d\alpha _{\mathcal{D}}$	$d\alpha$ restringido a \mathcal{D} .
τ	2-forma obtenida de $*(\alpha \wedge (d\alpha)^{\ell-1})$.
$\mathbf{Aff}(S)$	Envolvente afín del conjunto S .
$\mathcal{H}(S)$	Envolvente convexa del conjunto S .
$\overline{\mathcal{K}}$	Envolvente convexa holomorfa.
\mathbb{S}^n	Esfera de dimensión n .
$\mathcal{C}_x(\alpha)$	Espacio característico de α en el punto x .
\mathbb{C}^n	Espacio complejo de dimensión n .
$\mathbf{Con}(\mathcal{M}^{2\ell+1})$	Espacio de confoliaciones conductivas.
\mathbb{R}^n	Espacio real de dimensión n .
$\mathbf{T}_p(\mathcal{M})$	Espacio tangente a \mathcal{M} en el punto $p \in \mathcal{M}$.
V	Espacio vectorial.
(V, J)	Espacio vectorial complejo.
(V, Ω)	Espacio vectorial simpléctico.
J_0	Estructura casi compleja natural sobre \mathbb{R}^{2n} .
\mathcal{F}	Foliación.
$\omega, \eta, \alpha, \theta$	Formas diferenciales.

$\partial\mathcal{M}$	Frontera de \mathcal{M} .
$\partial\mathbf{PS}(S)$	Frontera del plastikstufe.
$\mathbf{Gr}(n, r)$	Grassmanniano.
$\mathbf{GL}(n, \mathbb{R}), \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$	Grupo general lineal n -dimensional de entradas reales y complejas.
$\mathbf{U}(n)$	Grupo unitario.
$\mathbf{T}(\mathcal{M})$	Haz tangente de \mathcal{M} .
ξ	Hiperplano.
\mathbf{H}	Homología.
\mathbf{Id}	Identidad.
$[\mathcal{K}_\alpha(X) \cap \mathcal{K}_{d\alpha}(X)] = \Pi(X)$	Intersección del núcleo de α y núcleo de $d\alpha$ en el punto X .
\mathcal{K}	Lomo de un libro abierto.
Ω	Mapeo bilineal antisimétrico sobre V .
\mathcal{A}, \mathcal{B}	Matrices.
$\mathcal{K}_\alpha(P), \mathcal{K}_{d\alpha}(P)$	Núcleo de α y núcleo de $d\alpha$ en el punto P .
$\ker(\mathcal{A})$	Núcleo de la matriz \mathcal{A} .
\mathbb{Z}	Números enteros.
\mathbb{Q}	Números racionales.
$*$	Operador estrella de Hodge.
\mathcal{P}	Página de un libro abierto.
\Im	Parte imaginaria.
\Re	Parte real.
$\mathbf{PS}(S)$	Plastikstufe.
\mathcal{P}	Politopo.
\mathbf{K}	Politopo asociado de $\mathcal{M}_1^{(\mathbf{A}, 1, n)}$.
$\omega \wedge \eta$	Producto wedge de dos formas diferenciales.
$\text{Rank}(d\alpha _{\ker(\alpha)})$	Rango de $d\alpha$ restringida al núcleo de α .
$(\mathcal{U}, \phi), (\mathcal{U}; x_1, \dots, x_n)$	Sistemas de coordenadas locales.
\mathbf{W}	Subvariedad analítica real de $\mathbf{M}_1^{(\mathbf{A}, 1, n+s)}$.
$\{x_i\}$	Sucesión de puntos x_i .
\mathbb{T}^n	Toro de dimensión n .
$\varphi_{\alpha\beta}$	Transición de coordenadas.
\mathcal{S}	Unión de todas las hojas de Siegel.
$\mathcal{M}_1^{(\mathbf{A}, 1, n)}$	Variedad ángulo-momento de tipo $(\mathbf{A}, 1, n)$.
$\mathcal{M}_1^{(\mathbf{A}, m, n)}$	Variedad ángulo-momento de tipo (\mathbf{A}, m, n) .
(\mathcal{M}, J)	Variedad casi compleja.
$\mathbf{M}_1^{(\mathbf{A}, 1, n+s)}$	Variedad cuasi ángulo-momento de tipo $(\mathbf{A}, 1, n + s)$.
$\mathbf{M}_1^{(\mathbf{A}, m, n)}$	Variedad cuasi ángulo-momento de tipo (\mathbf{A}, m, n) .
$(\mathcal{M}, \mathcal{D}), (\mathcal{M}, \alpha)$	Variedades de contacto.
\mathcal{M}, \mathbf{M}	Variedades diferenciables.
$\mathcal{N}(\mathbf{A})$	Variedad \mathbf{LV} y variedad $\mathbf{LV-M}$.
(\mathcal{M}, ω)	Variedad simpléctica.
$\mathcal{U}, \mathcal{U}', \mathcal{V}$	Vecindades abiertas.
\mathbf{N}	Vecindad tubular.
λ_j	Vector en \mathbb{C}^m .
v_p	Vector tangente anclado en un punto p .

Referencias

- [Ale23] J. W. Alexander. A lemma on systems of knotted curves. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 9:93–95, 1923.
- [Alt95] J. Steven Altschuler. A geometric heat flow for one-forms on three dimensional manifolds. *Illinois Journal of Mathematics*, 39(1):98–118, 1995.
- [AW00] Steven J Altschuler and Lani F. Wu. On deforming confoliations. *J. Differential Geometry*, 54:75–97, 2000.
- [BBCG10] A. Bahri, M. Bendersky, F. R. Cohen, and S. Gitler. The polyhedral product functor: a method of decomposition for moment-angle complexes, arrangements and related spaces. *Adv. Math.*, 225(3):1634–1668, 2010.
- [Ben83] D. Bennequin. Entrelacements et équations de pfaff. *Astérisque*, 1(107-108):87–161, 1983.
- [BJ82] TH. Brocker and K. Janich. *Introduction to differential topology*. Cambridge University Press, 1982.
- [BLdMV] Y. Barreto, S. López de Medrano, and A. Verjovsky. Open book structures on moment-angle manifolds $Z^{\mathbf{C}}(\mathbf{\Lambda})$ and higher dimensional contact manifolds. arXiv:1303.2671v1 [math.AT] 11 Mar 2013.
- [BM06] F Bosio and L. Meersseman. Real quadrics in \mathbb{C}^n , complex manifolds and convex polytopes. *Acta Math.*, 197:53–127, 2006.
- [Bou02] Frédéric Bourgeois. Odd dimensional tori are contact manifolds. *International Mathematics Research Notices*, 30:1571–1574, 2002.
- [BP02] V. M. Buchstaber and T. E. Panov. *Torus actions and their applications in Topology and Combinatorics*. University Lecture Series, AMS, 2002.

- [BW58] W. M. Boothby and H. C. Wang. On contact manifolds. *Ann. of Math.*, 68(2):721–734, 1958.
- [CE53] E. Calabi and B. Eckmann. A class of compact, complex manifolds which are not algebraic. *Ann. Math.*, 58:494–500, 1953.
- [CKP78] C. Camacho, N. Kuiper, and J. Palis. The topology of holomorphic flows with singularities. *Publ. Math. I.H.E.S.*, 48:5–38, 1978.
- [DJ91] M. W. Davis and T. Januszkiewicz. Convex polytopes, coxeter orbifolds and torus actions. *Duke Math. Journal.*, 62(2):417–451, 1991.
- [EG92] Y. M. Eliashberg and M. Gromov. Embeddings of stein manifolds of dimension n into de affine space of dimension $\frac{3n}{2} + 1$. *Annals of Mathematics*, 136(1):123–135, 1992.
- [EH01] J. Etnyre and K. Honda. On the non existence of tight contact structures. *Ann. of Math*, 153(3):749–766, 2001.
- [Eli89] Y. Eliashberg. Classification of over twisted contact structures on 3-manifolds. *Invent. math.*, 98:623–637, 1989.
- [Eli90] Y. Eliashberg. Topological characterization of stein manifolds of dimension > 2 . *International Journal of Mathematical*, 1(1), 1990.
- [Eli92] Y. Eliashberg. Contact 3-manifolds twenty years since J. Martinet’s work. *Ann. Inst. Fourier*, 42:165–192, 1992.
- [EM02] Y. M. Eliashberg and N. Mishachev. *Introduction to the h-Principle*, volume 48. AMS, Graduate Studies in Math., 2002.
- [ET98] Yakov M. Eliashberg and W. P. Thurston. *Confoliations*, volume 13. American Mathematical Society. Lectures Series, 1998.
- [Etn03] Jhon B. Etnyre. Introductory lectures on contact geometry. topology and geometry of manifolds. *Proc. Sympos. Pure Math.*, 71:81107, 2003.
- [Gei] H. Geiges. Contact geometry. *Handbook of Differential Geometry*, 2.

- [Gei01] H. Geiges. A brief history of contact geometry and topology. *Expo. Math.*, 19(1):25–53, 2001.
- [Gei08] H. Geiges. *An Introduction to Contact Topology*, volume 109 of *Cambridge studies in advanced mathematics*. Cambridge University Press, 2008.
- [GGLdM] V. Gómez Gutierrez and S. López de Medrano. Topology of intersections of quadrics II. En preparación.
- [Gir02] E. Giroux. Geometrie de contact: de la dimension trois vers les dimensions superieures. *ICM*, II:405–414, 2002.
- [GLdM13] Samuel Gitler and Santiago López de Medrano. Intersections of quadrics, moment-angle manifolds and connected sums. *Geometry and Topology*, 17:1497–1534, 2013.
- [GM] E. Giroux and J. P. Mohsen. Structures de contact et fibrations symplectiques sur le cercle. En preparación.
- [Gon97] Xianghong Gong. On totally real spheres in complex space. *Math. Ann.*, 309(4):611–623, 1997.
- [Gra58] H. Grauert. On Levi’s problem and the imbedding of real-analytic manifolds. *Annals of Mathematics*, 68(2):460–472, 1958.
- [Gra59] J. W. Gray. Some global properties of contact structures. *Annals of Mathematics*, 69(2):421–450, 1959.
- [Gru03] Branko Grünbaum. *Convex Polytopes*, volume 221 of *Graduate Text in Mathematics*. Springer-Verlag, 2003. Second edition.
- [Hae85] A. Haefliger. Deformations of transversely holomorphic flows on spheres and deformations of hopf manifolds. *Compositio Math*, 55:241–251, 1985.
- [Hir59] M. W. Hirsch. Immersions of manifolds. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 93:242–276, 1959.
- [Hon00a] K. Honda. On the classification of tight contact structures. I. *Geom. Topol.*, 4:309–368, 2000.
- [Hon00b] K. Honda. On the classification of tight contact structures. II. *J. Differential Geom.*, 55(1):83–143, 2000.

- [HW] Boguslaw Hajduk and Rafal Walczak. Presymplectic manifolds. e-print arXiv:0912.2297v2 [math.SG] 20 Feb 2010.
- [LdM] S. López de Medrano. Singularities of homogeneous quadratic mappings. to appear in: Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. (DOI: 10.1007/s13398-012-0102-6).
- [LdM89] S. López de Medrano. The topology of the intersection of quadrics in \mathbb{R}^n . *Springer-Verlag*, 1370:280–292, 1989.
- [LdMV97] Santiago López de Medrano and Alberto Verjovsky. A new family of complex, compact, non-symplectic manifolds. *Bol. Soc. Bras. Mat.*, 28(2):253–269, 1997.
- [LFM14] Rui Loja Fernandes and Ioan Mărcuț. Lectures on poisson geometry, 2014. available on <http://www.math.illinois.edu/~ruiloja/Math595/book.pdf>.
- [Lie72] S. Lie. Zur theorie partieller differentialgleichungen. *Gottinger Nachrichten*, 1872. pp. 480.
- [LJJ96] Nicolau M. Loeb J. J. Holomorphic flows and complex structures on products of odd dimensional spheres. *Mathematische Annalen*, 306:781–817, 1996.
- [LJJ99] Nicolau M. Loeb J. J. On the complex geometry of a class of non-Kähler manifolds. *Israel Journal of Mathematics - ISR J MATH*, 110(1):371–379, 1999.
- [LM76] Robert Lutz and Christiane Meckert. Structures de contact sur certaines sphères exotiques. *C. R. Acad. Sci. Paris Sr. A-B*, 282(11):A591–A593, 1976.
- [Lut79] Robert. Lutz. Sur la géométrie des structures de contact invariantes. *Annales de L'Institut Fourier*, 29(1):283–306, 1979.
- [Mar71] J. Martinet. Formes de contact sur les variétés de dimension 3. *Proceedings of Liverpool Singularities Symposium 2*, 209:142–163, 1971.
- [Mat] John Mather. Notes on topological stability. Available on his webpage at Princeton University, 1970.

- [McD87] Dusa McDuff. Applications of convex integration to symplectic and contact geometry. *Annales de l'institut Fourier*, 37:107–133, 1987.
- [Mec82] Christiane Meckert. Forme de contact sur la somme connexe de deux variétés de contact de dimension impaire. *Annales De L'Institut Fourier*, 32(2):251–260, 1982.
- [Mee00] Laurent Meersseman. A new geometric construction of compact complex manifolds in any dimension. *Mathematische Annalen*, 317:79–115, 2000.
- [MMP04] D. Martínez, V. Muñoz, and F. Presas. Open book decompositions for almost contact manifolds. *Proceedings of the XI Fall Workshop on Geometry and Physics, Publicaciones de la RSME*, 6:131–149, 2004.
- [Mor01] Shigeyuki Morita. *Geometry of Differential Forms*, volume 201 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, 2001.
- [MS95] Dusa McDuff and Dietmar Salamon. *Introduction to Symplectic Topology*. Oxford Mathematical Monographs. Oxford Science Publications, 1995.
- [MV04] Laurent Meersseman and Alberto Verjovsky. Holomorphic principal bundles over projective toric varieties. *J. reine angew. Math*, 572:57–96, 2004.
- [Nie06] K. Niederkruger. The plastikstufe - a generalization of the overtwisted disk to higher dimensions. *Algebraic and Geometric Topology*, 6:2473–2508, 2006.
- [NVK07] K. Niederkruger and O. Van Koert. Every contact manifold can be given a non-fillable contact structure. *IMRN*, 23, 2007.
- [Pre07] F. Presas. A class of non-fillable contact structures. *Geom. Topol.*, 11:2203–2225, 2007.
- [Sta67] E. B. Staples. A short and elementary proof that a product of spheres is parallelizable if one of them is odd. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 18:570–571, 1967.

- [Ste83] Shlomo. Sternberg. *Lectures on differential geometry*. Chelsea Publishing Co., 1983. Second edition. With an appendix by Sternberg and Victor W. Guillemin.
- [Tam72] I. Tamura. Spinnable structures on differentiable manifolds. *Proc. Japan Acad.*, 48:293–296, 1972.
- [TC03] José Luis Tábara Carbajo. *Geometría Simpléctica*. Libro Abierto/Serie Matemáticas. 2003. <http://alqua.org/libredoc/GS>.
- [Tho76] C. B. Thomas. Almost regular contact manifolds. *J. Differential Geometry*, 11:521–533, 1976.
- [Tro05] David Trotman. Lectures on real stratification theory, 2005. available on <http://www.cmi.univ-mrs.fr/trotman/cours121005.pdf>.
- [TW75] W. P. Thurston and H. E. Winkelnkemper. On the existence of contact forms. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 52(1):345–347, 1975.
- [Vai94] Izu Vaisman. *Lectures on the geometry of Poisson manifolds*. Birkhäuser Verlag, Germany. 1994.
- [Wei91] A. Weinstein. Contact surgery and symplectic handlebodies. *Hokkaido Mathematical Journal*, 20(2), 1991.
- [Win73] H. E. Winkelnkemper. Manifolds as open books. *Bull. Am. math. Soc.*, 79:45–51, 1973.