



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

DECAIMIENTO DE FIDELIDAD PARA SISTEMAS DE BOSONES
INTERACTUANTES EN DOS NIVELES

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:
Diego Leonardo Espitia Cabrejo

DIRECTOR DE TESIS: Dr. Luis Benet Fernández
Instituto de Ciencias Físicas, UNAM

MIEMBRO DEL COMITÉ TUTORAL: Dr. Christof Jung
Instituto de Ciencias Físicas, UNAM

MIEMBRO DEL COMITÉ TUTORAL: Dr. Pablo Barberis
Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y Sistemas, UNAM

MÉXICO, D.F. (Abril) 2014



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Truth, oh the truth is never clear, perhaps again next year...

Arc of space by B. D

Gracias

Deseo agradecer al consejo nacional de ciencia y tecnología (CONACyT) por la beca de maestría, y al programa de apoyo a proyectos de investigación e innovación tecnológica (PAPIIT) por las becas recibidas gracias a los proyectos de investigación *Procesos lejos del equilibrio en sistemas fuertemente interactuantes* (IN113311), *Dispersión caótica en mecánica clásica y cuántica* (IN110110) y (IG101113)

Agradezco también a mi tutor Dr. Luis Benet por aceptarme como su alumno, por su amabilidad y paciencia. A los miembros del comité tutor, los jurados: Dra. Rocío Jáuregui, Dr. Markus Muller, Dr. Carlos Pineda, Dr. José Ignacio Jiménez Mier y Terán, y al Dr. Emerson Sadurní, por el tiempo dedicado a la lectura y corrección de éste trabajo.

De igual forma agradezco al Dr. Thomas Seligman por su hospitalidad y apoyo durante mis estudios de maestría. Al Dr. Rafael Baquero Parra y al Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (Cinvestav) por su apoyo durante mi estancia en dicha institución.

Gracias a la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) y al Instituto de Ciencias Físicas (ICF) por proporcionar el ambiente apropiado para realizar mis estudios de maestría. Gracias a los profesores que compartieron su conocimiento durante las clases recibidas en el ICF.

Gracias a mi familia, a mis amigos de aquí y de allá. Muchas gracias a Yenni Ortiz por todo su amor, comprensión y paciencia.

Resumen

En este trabajo estudiamos el decaimiento de la fidelidad en dos modelos, el modelo de ensembles anidados de k cuerpos para bosones distribuidos en dos niveles (BEE(k) por sus siglas en inglés) y el modelo de Bose-Hubbard para dos pozos.

Para el primero de ellos se obtuvo una expresión para el tiempo de duración del congelamiento de la fidelidad o *ending time* (t_e). En este cálculo se usó la teoría de perturbaciones dependiente del tiempo a cuarto orden. Una vez obtenida, dicha expresión para t_e fue comparada con simulaciones numéricas, lográndose muy buen acuerdo entre las dos.

Para el modelo de Bose-Hubbard se usó el mismo método de teoría de perturbaciones y se encontró que a pesar de que en algunos casos funciona, éste no es en general el adecuado para tratar dicho problema.

Se realizaron simulaciones numéricas para estados iniciales coherentes, obteniéndose diferentes relaciones entre los parámetros del modelo de Bose-Hubbard, como son el número de bosones, el parámetro de tunelamiento, la interacción *in situ* de los bosones, con la fidelidad y el *ending time*.

Abstract

In this work it was studied the fidelity decay in two different models, the k body embedded ensemble BEE(k) for bosons distributed in two levels, and the Bose-Hubbard model for two wells.

For the first one an expression for the ending time (t_e) of the fidelity was obtained. For this calculation a fourth order time-dependent perturbation theory was required. Once obtained, t_e was compared with numerical simulations, with a very good agreement between them.

For the Bose-Hubbard model the same perturbation method was applied. Although in some cases it works, there are situations where perturbation theory is not appropriate.

We thus employed numerical simulations that make it possible to establish different relationships between the parameters of the Bose-Hubbard model, fidelity and the ending time, for coherent states.

ÍNDICE GENERAL

1. Introducción	1
1.1. Ensemble anidado de k cuerpos en dos niveles	3
1.2. El modelo de Bose-Hubbard	5
1.3. Breve nota sobre aspectos experimentales de los BEC	7
2. Interacciones Aleatorias	11
2.1. Fidelidad a segundo orden para el modelo de los ensembles anidados	11
2.2. Fidelidad a cuarto orden para el modelo de los ensembles anidados	18
2.3. Comparación del cálculo perturbativo con simulaciones numéricas	22
3. Fidelidad en el modelo de Bose-Hubbard	27
3.1. Fidelidad a segundo orden para el modelo de Bose-Hubbard .	27
3.2. Fidelidad a cuarto orden para el modelo de Bose-Hubbard . .	33
3.3. Comparación del modelo de Bose-Hubbard con simulaciones numéricas	35
3.3.1. Espectro no degenerado	36
3.3.2. Espectro degenerado	38
3.3.3. Cuando la teoría de perturbaciones falla...	40
4. Estados Coherentes	43
4.1. Decaimiento de la fidelidad y estados coherentes	45
4.1.1. Espectro no degenerado. (Caso 1)	47

4.1.2. Espectro degenerado. (Caso 2)	52
4.1.3. Espectro degenerado (Caso 3)	58
5. Conclusiones	63
A. Expresiones para la amplitud de la fidelidad	65
A.1. Amplitud de la fidelidad para BEE(k)	65
A.2. Amplitud de la fidelidad para Bose-Hubbard	66

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

La teoría de perturbaciones es uno de los esquemas más usados para estudiar sistemas físicos tanto en mecánica clásica como en mecánica cuántica. Cuando dicha teoría es usada, puede preguntarse qué tanto cambia el sistema al ser perturbado. En particular, en mecánica cuántica existe una forma de responder a ésta cuestión. Si hacemos el traslape del estado obtenido después de la evolución temporal del sistema sin perturbar, con el estado obtenido después de la evolución temporal del sistema bajo perturbación, podemos cuantificar qué tan sensible es el sistema frente a la perturbación aplicada.

A éste traslape de estados, tras su respectivas evoluciones temporales, se le conoce con el nombre de amplitud de fidelidad. El módulo al cuadrado de dicha cantidad se le denomina fidelidad. [1]. Es claro que cuando el traslape de los estado, tras las evoluciones temporales del sistema perturbado y sin perturbar, es el mismo, la amplitud de fidelidad es igual a uno. Por otro lado, cuando el traslape de los estados del sistema perturbado y sin perturbar es diferente, luego de sendas evoluciones temporales, la amplitud de fidelidad generalmente decrece con el tiempo.

La fidelidad tiene gran utilidad para estudiar sistemas de interés en diversos campos de la física, como son: la teoría de la información, el caos cuántico, la física de muchos cuerpos, etc. Es precisamente en esta última área, que la fidelidad se ha usado para estudiar sistemas bosónicos [2] y fermiónicos [3] fuertemente interactuantes.

Al estudiar el comportamiento dinámico de la fidelidad, podemos ver que ésta es muy útil para medir la estabilidad de un sistema cuántico frente a una perturbación. Una de las cosas que se puede observar es que para tiempos muy cortos, el llamado régimen de Zenón [1], la fidelidad decae siempre cuadráticamente en el tiempo. Para tiempos mayores al tiempo de Zenón, el decaimiento depende fundamentalmente de si el sistema cuántico que estamos estudiando tiene como contraparte clásica un sistema caótico; en este caso el decaimiento de la fidelidad es proporcional a t ; mientras que para sistemas cuya contraparte clásica es integrable, el decaimiento de la fidelidad es una función cuadrática del tiempo, esto es, $1 - F(t) \propto t^2$ [1].

Por otra parte, existe un interesante fenómeno que se presenta para cierta clase de perturbaciones. Si el hamiltoniano del sistema lo escribimos como una parte de referencia y otra de perturbación, esto es

$$H = H_0 + \lambda V, \quad (1.1)$$

y si la parte diagonal de V es idénticamente cero en la eigenbase de H_0 , entonces la fidelidad toma un valor constante durante un intervalo de tiempo. A esto se le conoce como el congelamiento de la fidelidad [5], [6]. Mientras la fidelidad permanece congelada, ésta puede presentar resurgimientos [2].

En este trabajo estudiaremos el decaimiento de la fidelidad de un gas de bosones en un pozo doble, considerando dos modelos: el modelo de los ensembles anidados de k cuerpos (*k body embedded ensemble*) BEE(k) y el modelo de Bose-Hubbard. Veremos que para estos sistemas, la fidelidad decaerá cuadráticamente con el tiempo a tiempos muy cortos, o a tiempos muy largos (después del congelamiento).

Tanto en el modelo de los ensembles anidados como en el modelo de Bose-Hubbard, existe una base en la cual la parte diagonal de la perturbación es cero, luego el congelamiento de la fidelidad se puede observar. Esto nos lleva a preguntarnos por cuánto tiempo la fidelidad permanece congelada. Existe entonces una cantidad llamada *ending time* (t_e) que mide dicho tiempo [3]. La evidencia numérica [2] muestra que en el modelo de los ensembles anidados, t_e escala con la perturbación de acuerdo con la expresión

$$t_e \propto \lambda^{-1}. \quad (1.2)$$

Por lo tanto uno de los principales objetivos de este trabajo es encontrar una expresión analítica para t_e en el modelo de los BEE(k).

En cuanto al decaimiento de la fidelidad en el modelo de Bose-Hubbard, existen trabajos en los cuales ésta ha sido usada para estudiar transiciones de fase [7] y también para explorar el comportamiento de bosones interactuantes [8].

Dado que el modelo de los ensembles anidados y el modelo de Bose-Hubbard están relacionados entre sí, ya que el primero puede entenderse como una generalización del segundo, estudiar los aspectos en común entre estos dos modelos es interesante, y será otro de los objetivos del presente trabajo.

La estructura de la presente tesis es como sigue. Luego de un pequeño resumen de las ideas básicas del $BEE(k)$ y el modelo de Bose-Hubbard, pasaremos al segundo capítulo donde mostraremos los cálculos analíticos y numéricos del decaimiento de la fidelidad para el modelo de $BEE(k)$; para culminar con una expresión para el *ending time*.

En el tercer capítulo nos concentraremos en el modelo de Bose Hubbard, y mostraremos como la teoría de perturbaciones a cuarto orden (serie de Dyson) no reproduce los resultados numéricos en algunos casos.

En el cuarto capítulo, mostraremos algunos cálculos numéricos para el modelo de Bose-Hubbard usando estados coherentes como estados iniciales, donde se podrá apreciar como escalan diferentes parámetros del modelo entre sí.

Terminaremos con algunas conclusiones para este trabajo y cuál es el camino propuesto para avanzar en este tema.

1.1. Ensemble anidado de k cuerpos en dos niveles

A pesar del éxito de la teoría de matrices aleatorias (RMT), para describir sistemas de muchos cuerpos, pronto se hizo claro que ésta no era completamente realista para modelar a dichos sistemas, ya que algunos de ellos son gobernados efectivamente por interacciones de uno y dos cuerpos. Esto motivó la introducción de los modelos de ensembles aleatorios de dos cuerpos (TBRE por sus siglas en inglés) [12], cuyas complicaciones inherentes, debidas al álgebra asociada al momento angular, le hacían poco práctico desde el punto de vista analítico.

Por esta razón Mon y French [10] introdujeron los ensembles anidados de

k cuerpos ($BEE(k)$) para modelar de forma más sencilla, y por lo tanto analíticamente más útil, a los sistemas anteriormente mencionados. La historia de los $BEE(k)$ es amplia, y basta decir que existen modelos de los $BEE(k)$ para fermiones y bosones. En particular para estos últimos, podemos definir al $BEE(k)$ como el modelo que describe a n bosones sin espín distribuidos sobre l estados degenerados de una partícula y que considera todas las posibles interacciones aleatorias de k -cuerpos [12]. Para el presente trabajo nos concentraremos en el caso más sencillo, éste es $l = 2$, que queda descrito por el hamiltoniano para k -cuerpos de dos niveles

$$\hat{H}_k(\beta) = \sum_{r,s=0}^k v_{r,s}^{(\beta)} \frac{(\hat{a}_1^\dagger)^r (\hat{a}_2^\dagger)^{k-r} (\hat{a}_1)^s (\hat{a}_2)^{k-s}}{[r!(k-r)!]^{1/2} [s!(k-s)!]^{1/2}}, \quad (1.3)$$

donde k es el rango de la interacción, que toma valores $1 \leq k \leq n$; $v_{r,s}^{(\beta)}$ son los elementos de matriz de la interacción de k cuerpos, que tomaremos como números aleatorios Gaussianamente distribuidos con promedio cero y varianza fija ($v_0^2 = 1$); y β es el parámetro de Dyson que permite distinguir entre los ensembles Gaussianos ortogonales ($\beta = 1 \rightarrow GOE$), o los ensembles Gaussianos unitarios ($\beta = 2 \rightarrow GUE$).

Para calcular el decaimiento de la fidelidad primero debemos definir los hamiltonianos de referencia y de perturbación. Para el hamiltoniano de referencia usaremos la parte diagonal de (1.3), esto es

$$\hat{\mathcal{H}}_0(\beta, \lambda) = \frac{1}{W_1} \hat{H}_{k=1} + \frac{\lambda}{W_k} \hat{H}_k^{diag}. \quad (1.4)$$

Es importante mencionar que los elementos de $\hat{H}_{k=1}$ no son aleatorios, es decir, son valores fijos, relacionados con la energía del estado base de cada uno de los pozos. Además, dado que cada término tiene un rango espectral diferente, es necesario normalizar a cada uno de ellos con su correspondiente ancho espectral W_k [2]

$$W_k = \frac{1}{N} \overline{tr[H_k^{(\beta)}]^2} = \Lambda^{(0)}(k) + \frac{\delta_{\beta,1}}{N} \sum_{s=0}^k \Lambda^{(s)}(n-k),$$

donde

$$\Lambda^{(s)}(k) = \binom{n-s}{k} \binom{n+s+1}{k}.$$

La barra superior indica que se hace un promedio sobre el ensemble.

Para la perturbación, usaremos los términos restantes de la interacción de k -cuerpos que se encuentran fuera de la diagonal

$$\hat{V}_k(\beta) = \sum_{r,s=0}^k v_{r,s}^{(\beta)} \frac{(\hat{a}_1^\dagger)^r (\hat{a}_2^\dagger)^{k-r} (\hat{a}_1)^s (\hat{a}_2)^{k-s}}{[r!(k-r)!]^{1/2} [s!(k-s)!]^{1/2}} (1 - \delta_{r,s}). \quad (1.5)$$

1.2. El modelo de Bose-Hubbard

El estudio de los condensados de Bose-Einstein (BEC) involucra diferentes campos de la física, y desde su concepción en 1924-25 se han usado diversos modelos teóricos para comprenderlos. En particular el comportamiento de un BEC que se encuentra en un pozo doble, ver figura (1.1), ha despertado gran interés, ya que las aplicaciones a campos como el de la óptica [17], la interferometría [18], y la física de muchos cuerpos [15] son diversos. Por otro lado, la relativa facilidad con la que ahora se pueden hacer experimentos con gases ultrafríos ha hecho posible que dichos modelos puedan ser estudiados experimentalmente de forma sistemática.

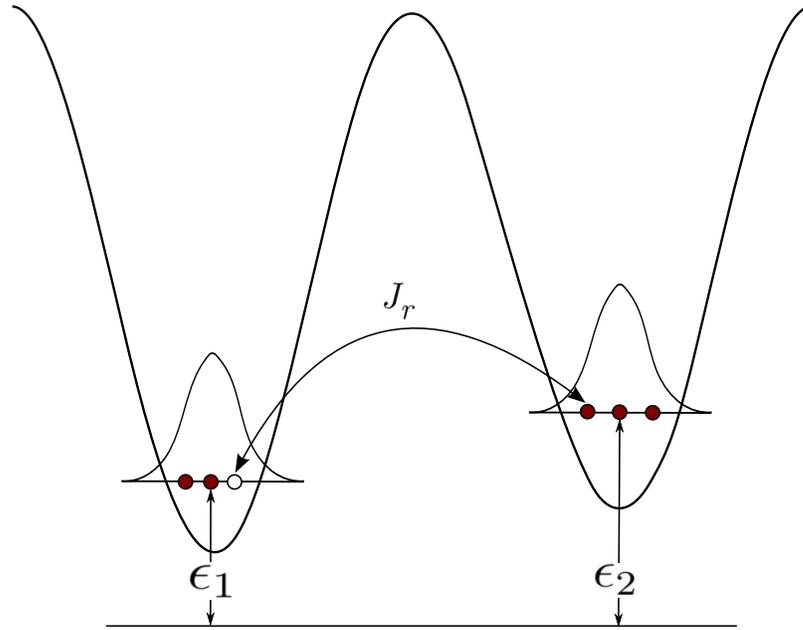


Figura 1.1: Representación esquemática de un condensado de Bose-Einstein en un pozo doble

Uno de los modelos que describe a los condensados de Bose-Einstein en un pozo doble es el modelo de Bose-Hubbard, dado por el Hamiltoniano (ver por ejemplo [13])

$$H_{BH} = \epsilon_1 \hat{n}_1 + \epsilon_2 \hat{n}_2 + \frac{U}{2} [\hat{n}_1(\hat{n}_1 - 1) + \hat{n}_2(\hat{n}_2 - 1)] - J_1 [\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1], \quad (1.6)$$

donde \hat{a}_i^\dagger , \hat{a}_i y $\hat{n}_i = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i$ son los operadores que crean, destruyen y cuentan bosones en cada uno de los pozos, ϵ_i hace referencia al estado base de cada uno de los pozos, U es un parámetro que representa la interacción entre bosones que se encuentran en un mismo pozo, y J_1 es el parámetro de tunelamiento de una partícula.

Si deseamos introducir en este modelo interacciones de más cuerpos, es necesario incluir los términos relativos a la interacción que involucra el movimiento de dos cuerpos a través de los pozos. Si definimos a J_2 como el parámetro de tunelamiento de dos partículas, podemos entonces escribir una versión extendida del modelo de Bose-Hubbard

$$H_{BH} = \epsilon_1 \hat{n}_1 + \epsilon_2 \hat{n}_2 + \frac{U}{2} [\hat{n}_1(\hat{n}_1 - 1) + \hat{n}_2(\hat{n}_2 - 1)] - J_1 [\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1] - \frac{J_2}{2} [(\hat{a}_2^\dagger)^2 (\hat{a}_1)^2 + (\hat{a}_1^\dagger)^2 (\hat{a}_2)^2], \quad (1.7)$$

donde $J_1 > J_2$. Usaremos esta versión extendida del modelo de Bose-Hubbard para buscar en el congelamiento de la fidelidad cómo se manifiestan las interacciones de uno y dos cuerpos.

Vale la pena mencionar que dependiendo de la razón entre los parámetros U y J se pueden definir tres regímenes [16]. El régimen de Rabi, donde se considera a los bosones como partículas no interactuantes, el régimen de Josephson, en el cual la interacción entre los bosones es débil y el régimen de Fock en donde la interacción de los bosones es fuerte. El presente trabajo estará enmarcado en este último régimen, ya que la se considerará $U \gg J$.

1.3. Breve nota sobre aspectos experimentales de los BEC

Existen diferentes técnicas para confinar bosones en un potencial de pozo doble. Ver por ejemplo el apéndice A de [16] y las referencias allí mencionadas. En particular, para la realización de sus experimentos, en dicho trabajo usaron dos trampas dipolares ópticas ortogonales, y dos rayos láser contrapropagantes, que generan un potencial de confinamiento de la forma

$$V_{dw} = \frac{1}{2}m(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2) + \frac{V_0}{2} \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi}{d_{sw}} x + \delta \right) \right]. \quad (1.8)$$

Este potencial puede entenderse como una trampa armónica caracterizada por las frecuencias ω_x^2 , ω_y^2 y ω_z^2 . Los láseres contrapropagantes crean un potencial periódico 1D, que actúa como barrera. Adicionalmente se introduce un desfase entre estos últimos, para controlar la asimetría de la onda estacionaria respecto al mínimo del potencial armónico, dando como resultado la diferencia de altura de los pozos. La combinación de estos elementos genera un potencial neto, que se puede ver en figura (1.2). De esta figura podemos reconocer la línea roja como el potencial de pozo doble esquematizado en la figura (1.1).

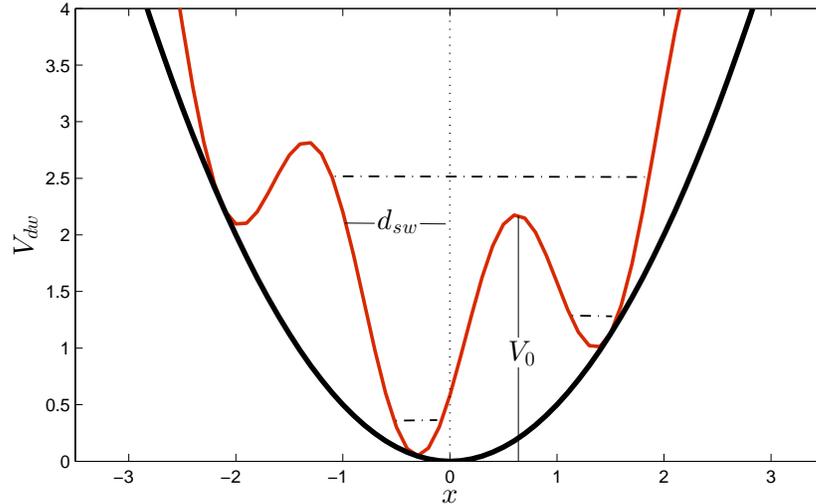


Figura 1.2: Representación del potencial experimental de la ecuación (1.8). El potencial tiene una altura V_0 , una periodicidad d_{sw} y una fase δ .

La trampa armónica (línea negra) es el potencial de confinamiento del condensado. Ésta se relaciona con los términos diagonales correspondientes a $k = 1$ (es decir aquellos de interacción de un cuerpo) en la ecuación (1.3) del modelo de los ensembles anidados; o bien con aquellos términos que cuentan el número de bosones del sistema, en la ecuación (1.6), para el modelo de Bose-Hubbard.

También puede notarse que el término δ en la ecuación (1.8) se encuentra directamente relacionado con el estado base de cada uno de los pozos, es decir con aquellos elementos de matriz diagonales de $v_{r,s}^{(\beta)}$ cuando $k = 1$ para el BEE(k); o bien con los valores de ϵ_i para el modelo de Bose-Hubbard.

Es importante mencionar que tanto el modelo de los ensembles anidados como el modelo de Bose-Hubbard, son modelos apropiados para describir a un condensado de Bose-Einstein en un pozo doble, si se supone que el espectro de energía del sistema es tal que el primer nivel excitado no interfiere en la dinámica del sistema, es decir, dicho estado excitado se supone alejado de los estados base de cada uno de los pozos (líneas punteadas en la figura (1.2)), y por lo tanto la única manera por la cual puede pasar un bosón de un pozo a otro, es a través del tunelamiento. Esta suposición conocida como la aproximación de dos modos [16], reduce la dimensión del espacio de Hilbert; y por lo tanto sólo los estados base de cada uno de los pozo jugarán un papel importante en la dinámica del sistema. Con ésto la dimensión del espacio de Hilbert es $n + 1$, donde n es el número de bosones del sistema.

Para terminar esta sección, se mencionará brevemente la propuesta hecha en [17], en donde se plantea que los sistemas de muchos cuerpos fuertemente interactuantes, tales como electrones en sólidos cristalinos, super redes semiconductoras o BEC en redes ópticas, podrían estudiarse, aprovechando las analogías existentes entre la óptica ondulatoria y la mecánica cuántica, usando redes fotónicas; es decir, arreglos periódicos de guías de onda ópticas acopladas evanescentemente.¹

Usando dichas redes, se ha propuesto construir un análogo óptico para el hamiltoniano de Bose-Hubbard, pues en dichas redes se podría visualizar la dinámica de un sistema cuántico, al mapear la evolución temporal de dicho

¹El acoplamiento de onda evanescente es un proceso por el cual ondas electromagnéticas se transmiten desde un medio a otro, a través de ondas evanescentes; que son aquellas ondas cuya intensidad decae exponencialmente con la distancia y son las que se “transmiten” cuando hay reflexión total interna.

sistema, en la propoagación espacial de ondas de luz (láseres), en un arreglo compuesto de $n + 1$ guías de onda especialmente configuradas.

En la propuesta se simula numéricamente un arreglo de 10 guías de onda, en el cual la distribución de la distancia entre éstas, modela el tunelamiento; mientras que el perfil del índice de refracción, modela la interacción de los bosones en un mismo pozo.

Dicha propuesta es interesante, pues de construirse dichas redes, podría medirse la fidelidad haciendo interferir dos rayos láser, uno que previamente ha pasado por el arreglo de guías de onda, y otro que no lo ha hecho.

CAPÍTULO 2

INTERACCIONES ALEATORIAS

En este capítulo vamos a calcular la fidelidad hasta cuarto orden en teoría de perturbaciones (serie de Dyson), estimaremos el *ending time* y haremos la comparación entre los cálculos numéricos y la predicción analítica. De forma similar veremos las relaciones que existen entre el rango de la interacción y el *ending time*.

2.1. Fidelidad a segundo orden para el modelo de los ensembles anidados

Para calcular el decaimiento de la fidelidad a segundo orden, recordamos que el Hamiltoniano para el BEE(k) lo escribimos como,

$$\hat{\mathcal{H}}_k(\beta) = \hat{\mathcal{H}}_0 + \lambda \hat{V}_k(\beta), \quad (2.1)$$

donde ¹

$$\hat{\mathcal{H}}_0 = \sum_{r,s=0}^k v_{r,s}^{(\beta)} \frac{(\hat{a}_1^\dagger)^r (\hat{a}_2^\dagger)^{k-r} (\hat{a}_1)^s (\hat{a}_2)^{k-s}}{[r!(k-r)!]^{1/2} [s!(k-s)!]^{1/2}} \delta_{r,s}, \quad (2.2)$$

$$\hat{V}_k(\beta) = \sum_{r,s=0}^k v_{r,s}^{(\beta)} \frac{(\hat{a}_1^\dagger)^r (\hat{a}_2^\dagger)^{k-r} (\hat{a}_1)^s (\hat{a}_2)^{k-s}}{[r!(k-r)!]^{1/2} [s!(k-s)!]^{1/2}} (1 - \delta_{r,s}). \quad (2.3)$$

¹Recordemos que $\hat{\mathcal{H}}_0 = \frac{1}{W_1} \hat{H}_{k=1} + \frac{\lambda}{W_k} \hat{H}_k^{diag}$, donde los elementos de $\hat{H}_{k=1}$ son valores fijos.

Usando la base de número de ocupación, donde $|\mu\rangle \equiv |\mu, n - \mu\rangle$ y n es el número de bosones del sistema, la ecuación de Schrödinger del Hamiltoniano de referencia la escribimos como

$$\hat{H}_0(\beta, \lambda)|\mu, n - \mu\rangle = E_\mu^0(\beta, \lambda)|\mu, n - \mu\rangle,$$

y con las relaciones usuales para los operadores de creación y aniquilación podemos calcular el espectro de energía del hamiltoniano de referencia

$$E_\mu^{(0)}(\beta, \lambda) = \frac{\epsilon_2 n + (\epsilon_1 - \epsilon_2)\mu}{W_1} + \frac{\lambda}{W_k} \sum_{r=0}^k v_{r,r}^{(\beta)} G_{\mu,r}^{(k)}, \quad (2.4)$$

donde ϵ_1 y ϵ_2 son parámetros fijos del modelo (relacionados con la altura de los pozos, ver figura (1.1)) y donde

$$G_{\mu,r}^{(k)} = \binom{\mu}{r} \binom{n - \mu}{k - r}. \quad (2.5)$$

Con las ecuaciones anteriores tenemos todo listo para calcular la fidelidad. Para empezar, conviene expresar el tiempo físico t' en términos del tiempo de Heisenberg $t_H = 2\pi\hbar/\bar{d}$, donde $\bar{d} = (\epsilon_1 - \epsilon_2)/W_1$; entonces $t = t'/t_H$. De esta manera el operador de evolución temporal lo podemos escribir como

$$U_0^{(\beta)}(t) = \exp\left(-\frac{2\pi i}{\bar{d}} \hat{H}_0(\beta, \lambda)t\right).$$

Usando la ecuación anterior podemos definir la amplitud de fidelidad como [1]

$$f_{\beta,\lambda}(t) = \langle \Psi_0 | M_{\beta,\lambda}(t) | \Psi_0 \rangle, \quad (2.6)$$

donde $M_{\beta,\lambda}(t) = U_0^{(\beta)}(-t)U_\lambda^{(\beta)}(t)$ es el operador de eco [1] y $|\Psi_0\rangle$ es el estado inicial del sistema. El módulo al cuadrado de (2.6) es conocido como la fidelidad

$$F_{\beta,\lambda}(t) = |f_{\beta,\lambda}(t)|^2. \quad (2.7)$$

Tomando a λ como un parámetro de perturbación, podemos calcular el desarrollo en serie de Dyson a segundo orden del operador de eco, también conocida como la respuesta lineal del sistema [1]

$$f_{\beta,\lambda}^{(2)}(t) = \langle \Psi_0 | [1 - i\omega_k \lambda \int_0^t dt_1 V_I^\beta(t_1) - (\omega_k \lambda)^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 V_I^\beta(t_1) V_I^\beta(t_2)] | \Psi_0 \rangle, \quad (2.8)$$

donde hemos usado el Hamiltoniano dependiente del tiempo $V_I(t)$ en la representación de la interacción [2]

$$V_I^\beta(t) = U_0^{(\beta)}(-t)\hat{V}_k(\beta)U_0^{(\beta)}(t),$$

$$\omega_k = 2\pi/(\bar{d}W_k).$$

Dado que el Hamiltoniano (2.1) se ha construido como un ensemble de hamiltonianos, estamos interesados en estudiar las propiedades estadísticas de dicho ensemble. En particular queremos calcular el promedio sobre el ensemble de la amplitud de fidelidad

$$\begin{aligned} \overline{f_{\beta,\lambda}^{(2)}(t)} &= 1 - iw_k\lambda \sum_{\mu,\nu} A_\mu^* A_\nu \int_0^t dt_1 \overline{\langle \mu | V_I^\beta(t_1) | \nu \rangle} \\ &\quad - (\omega_k\lambda)^2 \sum_{\mu,\nu} A_\mu^* A_\nu \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \overline{\langle \mu | V_I^\beta(t_1) V_I^\beta(t_2) | \nu \rangle}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

donde el estado inicial $|\Psi_0\rangle$ se ha escrito como una combinación de estados de la base de ocupación de número, en la cual $\hat{\mathcal{H}}_0$ es diagonal,

$$|\Psi_0\rangle = \sum_{\mu=0}^n A_\mu |\mu\rangle, \quad (2.10)$$

con n el número de bosones del sistema.

Ahora queremos calcular los promedios que aparecen en las integrales. Para la primer integral y usando la definición de $V_I^\beta(t)$

$$\overline{\langle \mu | V_I^\beta(t_1) | \nu \rangle} = \overline{\langle \mu | U_0^{(\beta)}(-t_1)\hat{V}_k(\beta)U_0^{(\beta)}(t_1) | \nu \rangle} = \overline{\langle \mu | (e^{i\alpha\hat{H}_0 t_1})\hat{V}_k(\beta)(e^{-i\alpha\hat{H}_0 t_1}) | \nu \rangle},$$

donde $\alpha = 2\pi/\bar{d}$. Aplicando $\hat{\mathcal{H}}_0(\beta, \lambda)$ a los estados de número de ocupación y usando la ecuación (2.4) tenemos

$$\overline{\langle \mu | V_I^\beta(t_1) | \nu \rangle} = \overline{(e^{i\alpha(E_\mu^{(0)} - E_\nu^{(0)})t_1}) \langle \mu | \hat{V}_k(\beta) | \nu \rangle}.$$

Si hacemos $\varepsilon_{\mu,\nu}^\lambda(t_1) = \exp[i\alpha(E_\mu^{(0)} - E_\nu^{(0)})t_1]$, entonces

$$\overline{\langle \mu | V_I^\beta(t_1) | \nu \rangle} = \overline{\varepsilon_{\mu,\nu}^\lambda(t_1) \langle \mu | \hat{V}_k(\beta) | \nu \rangle}. \quad (2.11)$$

Para calcular los elementos de matriz $\langle \mu | \hat{V}_k(\beta) | \nu \rangle$ de la ecuación (2.11), usamos la ecuación (2.3)

$$\overline{\langle \mu | \hat{V}_k(\beta) | \nu \rangle} = \sum_{r \neq s}^k \overline{v_{r,s}^{(\beta)}} [G_{\mu,r}^{(k)} G_{\nu,s}^{(k)}]^{1/2} \langle \mu - r | \nu - s \rangle, \quad (2.12)$$

donde

$$[G_{\mu,r}^{(k)} G_{\nu,s}^{(k)}]^{1/2} \equiv \frac{\langle \mu | (\hat{a}_1^\dagger)^r (\hat{a}_2^\dagger)^{k-r} (\hat{a}_1)^s (\hat{a}_2)^{k-s} | \nu \rangle}{[r!(k-r)!]^{1/2} [s!(k-s)!]^{1/2}}.$$

Como hemos partido del hecho que los elementos de matriz $v_{r,s}^{(\beta)}$ tienen promedio cero y varianza fija, entonces $\overline{v_{r,s}^{(\beta)}} = 0$. Esto implica que la ecuación (2.11) es idénticamente cero.

Para la segunda integral en (2.9), introducimos la relación de completitud de la base, lo cual nos permite escribir

$$\overline{\langle \mu | V_I^\beta(t_1) V_I^\beta(t_2) | \nu \rangle} = \sum_{\rho} \overline{\varepsilon_{\mu,\rho}^\lambda(t_1) \varepsilon_{\rho,\nu}^\lambda(t_2) \langle \mu | \hat{V}_k(\beta) | \rho \rangle \langle \rho | \hat{V}_k(\beta) | \nu \rangle}. \quad (2.13)$$

Esta integral la podemos trabajar en dos partes gracias a que los elementos de matriz de la parte diagonal son independientes estadísticamente de los elementos de la parte no diagonal. La primera parte de la integral es el promedio sobre los coeficientes que son funciones del tiempo

$$\varepsilon_{\mu,\rho}^\lambda(t_1) \varepsilon_{\rho,\nu}^\lambda(t_2) = \exp \left[\frac{2\pi i}{\bar{d}} (E_\mu^{(0)} - E_\rho^{(0)}) t_1 + \frac{2\pi i}{\bar{d}} (E_\rho^{(0)} - E_\nu^{(0)}) t_2 \right].$$

Usando la ecuación (2.4), cancelando los términos proporcionales a n y factorizando tenemos

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\mu,\rho}^\lambda(t_1) \varepsilon_{\rho,\nu}^\lambda(t_2) = \exp \left[2\pi i [(\mu - \rho)t_1 + (\rho - \mu)t_2] + \right. \\ \left. i\omega_k \lambda \sum_{r=0}^k v_{r,r}^{(\beta)} [(G_{\mu,r}^{(k)} - G_{\rho,r}^{(k)})t_1 + (G_{\rho,r}^{(k)} - G_{\nu,r}^{(k)})t_2] \right], \end{aligned} \quad (2.14)$$

donde hemos usado las definiciones para \bar{d} y ω_k .

Si en esta ecuación hacemos

$$A_{\mu,\rho} = \exp[2\pi i [(\mu - \rho)t_1 + (\rho - \mu)t_2]],$$

$$G_r(t) = [(G_{\mu,r}^{(k)} - G_{\rho,r}^{(k)})t_1 + (G_{\rho,r}^{(k)} - G_{\nu,r}^{(k)})t_2],$$

podemos escribir el promedio de (2.14), como

$$\overline{\varepsilon_{\mu,\rho}^\lambda(t_1)\varepsilon_{\rho,\nu}^\lambda(t_2)} = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{r=0}^N \frac{A_{\mu,\rho}}{\sigma_\beta \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_\beta^2} \left((v_{rr}^{(\beta)})^2 + 2i\omega_k \lambda \sigma_\beta^2 \sum_{r=0}^k v_{r,r}^{(\beta)} G_r(t) \right) \right] dv_{rr},$$

donde

$$\sigma_\beta^2 = \begin{cases} 1 & \text{si } \beta = 2 \\ 2 & \text{si } \beta = 1 \end{cases}. \quad (2.15)$$

Completando cuadrados en el exponente para $(v_{rr}^{(\beta)})^2$

$$\begin{aligned} \overline{\varepsilon_{\mu,\rho}^\lambda(t_1)\varepsilon_{\rho,\nu}^\lambda(t_2)} &= \left(A_{\mu,\rho} \exp \left[\frac{1}{2} (\omega_k \lambda \sigma_\beta)^2 \sum_{r=0}^k [G_k(t)]^2 \right] \right) \\ &\quad \left(\frac{1}{(\sigma_\beta \sqrt{2\pi})^N} \prod_{r=0}^N \int_{-\infty}^{\infty} dv_{rr} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(v_{rr}^{(\beta)} + i\omega_k \lambda \sigma_\beta \sum_{r=0}^k v_{r,r}^{(\beta)} G_r(t) \right)^2 \right] \right). \end{aligned}$$

Si hacemos el cambio de variable

$$x_{rr} = v_{rr}^{(\beta)} + i\omega_k \lambda \sigma_\beta \sum_{r=0}^k v_{r,r}^{(\beta)} G_r(t),$$

la integral en el segundo paréntesis es la integral Gaussiana, cuyo resultado es 1. Luego

$$\overline{\varepsilon_{\mu,\rho}^\lambda(t_1)\varepsilon_{\rho,\nu}^\lambda(t_2)} = \left(e^{2\pi i[(\mu-\rho)(t_1-t_2)]} \right) \left(e^{-\frac{1}{2}(\omega_k \lambda \sigma_\beta)^2 \sum_{r=0}^k [(G_{\mu,r}^{(k)} - G_{\rho,r}^{(k)})t_1 + (G_{\rho,r}^{(k)} - G_{\nu,r}^{(k)})t_2]^2} \right).$$

Haciendo un desarrollo en serie respecto a λ , el promedio sobre los coeficientes que son funciones de t finalmente nos queda

$$\begin{aligned} \overline{\varepsilon_{\mu,\rho}^\lambda(t_1)\varepsilon_{\rho,\nu}^\lambda(t_2)} &= \left(e^{2\pi i[(\mu-\rho)(t_1-t_2)]} \right) \\ &\quad \left(1 - \frac{1}{2}(\omega_k \lambda \sigma_\beta)^2 \sum_{r=0}^k [(G_{\mu,r}^{(k)} - G_{\rho,r}^{(k)})t_1 + (G_{\rho,r}^{(k)} - G_{\nu,r}^{(k)})t_2]^2 + \mathcal{O}(\lambda^4) \right). \end{aligned} \quad (2.16)$$

La segunda expresión en (2.13) toma la forma

$$\overline{\langle \mu | \hat{V}_k(\beta) | \rho \rangle \langle \rho | \hat{V}_k(\beta) | \nu \rangle} = \sum_{r_1 \neq s_1}^k \sum_{r_2 \neq t_2}^k \overline{v_{r_1, s_1}^{(\beta)} v_{r_2, s_2}^{(\beta)}} \langle \mu | \hat{V}_k | \rho \rangle \langle \rho | \hat{V}_k | \nu \rangle$$

Usando la contracción de Wick (ver Apéndice E de [1]) el promedio sobre los elementos del ensemble se puede escribir como

$$\overline{v_{r_1, s_1}^{(\beta)} v_{r_2, s_2}^{(\beta)}} = \sigma_\beta^2 (\delta_{r_1, s_2} \delta_{s_1, r_2} + \delta_{\beta, 1} \delta_{r_1, r_2} \delta_{s_1, s_2}). \quad (2.17)$$

De aquí en adelante por simplicidad, nos restringiremos al caso en que $\beta = 2$. Para el caso de $\beta = 1$ se obtienen resultados cualitativamente similares a los aquí descritos [2]. Usando (2.12) y la definición para $G_{\mu, \nu}^{(k)}$ tenemos

$$\begin{aligned} \overline{\langle \mu | \hat{V}_k(2) | \rho \rangle \langle \rho | \hat{V}_k(2) | \nu \rangle} = \\ \sum_{r_1 \neq s_1}^k \sum_{r_2 \neq s_2}^k [G_{\mu, r_1}^{(k)} G_{\rho, s_1}^{(k)} G_{\rho, r_2}^{(k)} G_{\nu, s_2}^{(k)}]^{1/2} \langle \mu - r_1 | \rho - s_1 \rangle \langle \rho - r_2 | \nu - s_2 \rangle \delta_{r_1, s_2} \delta_{s_1, r_2}, \end{aligned}$$

usando (2.17)

$$\begin{aligned} \overline{\langle \mu | \hat{V}_k(2) | \rho \rangle \langle \rho | \hat{V}_k(2) | \nu \rangle} = \\ \sum_{r_1 \neq s_1}^k [G_{\mu, r_1}^{(k)} G_{\rho, s_1}^{(k)} G_{\rho, s_1}^{(k)} G_{\nu, r_1}^{(k)}]^{1/2} \langle \mu - r_1 | \rho - s_1 \rangle \langle \rho - s_1 | \nu - r_1 \rangle. \end{aligned}$$

Esta última expresión se hace cero a menos que $\mu - r_1 = \rho - s_1$, entonces podemos reemplazar $\mu - r_1$ en el segundo bracket y así obtener

$$\overline{\langle \mu | \hat{V}_k(2) | \rho \rangle \langle \rho | \hat{V}_k(2) | \nu \rangle} = \mathcal{G}_{\mu, \rho}^{(k)} \delta_{\mu, \nu}, \quad (2.18)$$

donde

$$G_{\mu, r_1}^{(k)} G_{\rho, s_1}^{(k)} \langle \mu - r_1 | \rho - s_1 \rangle \equiv \mathcal{G}_{\mu, \rho}^{(k)}.$$

Usando (2.16) y (2.18) en la ecuación para la amplitud de fidelidad (2.9), tenemos

$$\overline{f_\lambda^{(2)}(t)} = 1 - \frac{\omega_k^2 \lambda^2}{N} \sum_{\mu} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \sum_{\rho} (e^{2\pi i[(\mu - \rho)(t_1 - t_2)])} \mathcal{G}_{\mu, \rho}^{(k)} \delta_{\mu, \nu}.$$

La expresión anterior es diferente de cero sólo si $\mu = \nu$; donde se ha usado $|A_\mu|^2 \sim 1/N$, siendo $N = n + 1$ la dimensión del espacio de Hilbert; y donde hemos despreciado los términos proporcionales a λ^2 en la ecuación (2.16). Si resolvemos las integrales obtenemos una expresión para la amplitud de la fidelidad

$$\overline{f_\lambda^{(2)}(t)} = 1 - \frac{\omega_k^2 \lambda^2}{N} \sum_{\mu \neq \rho} \mathcal{G}_{\mu, \rho}^{(k)} \frac{1}{[2\pi(\mu - \rho)]^2} \left[1 + 2\pi i(\mu - \rho)t - e^{2\pi i(\mu - \rho)t} \right]. \quad (2.19)$$

La fidelidad se calcula como el módulo al cuadrado de (2.19)

$$\overline{F_\lambda^{(2)}(t)} = 1 - \frac{2\omega_k^2 \lambda^2}{N} \sum_{\mu \neq \rho} \mathcal{G}_{\mu,\rho}^{(k)} \frac{1 - \cos[2\pi(\mu - \rho)t]}{[2\pi(\mu - \rho)]^2} + \mathcal{O}(\lambda^4). \quad (2.20)$$

La ecuación anterior da una aproximación de la fidelidad a segundo orden en λ . Nótese que esta expresión es el modulo al cuadrado del promedio de la amplitud de fidelidad. En la figura (2.1) podemos apreciar el comportamiento de la fidelidad, ecuación (2.20), para el modelo de ensembles anidados de matrices aleatorias de k -cuerpos.

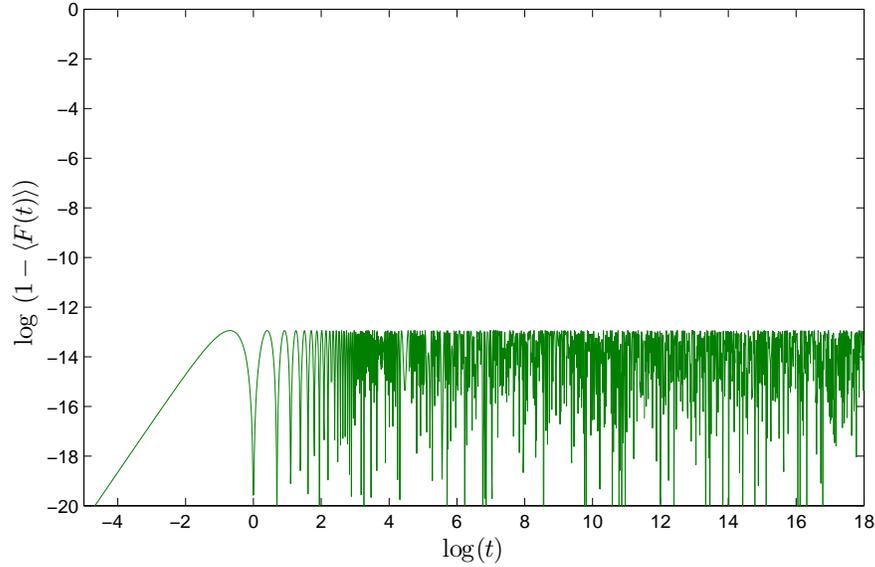


Figura 2.1: Fidelidad para $\beta = 1$, $n = 512$ bosones, $\lambda = 1 \times 10^{-6}$ y $k = 2$

Una de las características más interesantes que podemos apreciar en la figura, es lo que se conoce como el congelamiento de la fidelidad, es decir cuando la fidelidad toma un valor constante por un periodo de tiempo suficientemente largo [2]. Si tomamos el mínimo valor de la fidelidad mientras hay congelamiento, entonces podemos escribir una estimación para el congelamiento de la fidelidad

$$F_p = 1 - \frac{\omega_k^2 \lambda^2 \sigma_\beta^2}{\pi^2 (n+1)} \sum_{\mu \neq \rho} \frac{\mathcal{G}_{\mu,\rho}^{(k)}}{[(\mu - \rho)]^2}, \quad (2.21)$$

donde hemos incluido nuevamente la varianza σ_β . Como se dijo en la introducción, este fenómeno ocurre cuando, entre otros, la parte diagonal de la

perturbación es idénticamente cero [5, 6]. Un rápido vistazo a las ecuaciones (2.1) y (2.3) nos muestran que este sistema cumple con dicha condición; luego el congelamiento de la fidelidad aparece.

2.2. Fidelidad a cuarto orden para el modelo de los ensembles anidados

Tal y como se vió en la sección anterior, el $BEE(k)$ satisface las condiciones para que la fidelidad se congele. Para estimar el tiempo que ésta dura congelada, que llamaremos *ending time* t_e , es necesario calcular la fidelidad a cuarto orden en la perturbación [3]. Esto se hace tomando los siguientes términos en la serie de Dyson. Si hacemos esto, la ecuación (2.9) se modifica de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\overline{f_{\beta,\lambda}^{(4)}}(t) &= 1 - i\omega_k\lambda \sum_{\mu,\nu} A_\mu^* A_\nu \int_0^t dt_1 \overline{\langle \mu | V_I^\beta(t_1) | \nu \rangle} \\
&- (\omega_k\lambda)^2 \sum_{\mu,\nu} A_\mu^* A_\nu \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \overline{\langle \mu | V_I^\beta(t_1) V_I^\beta(t_2) | \nu \rangle} \\
&+ (i\omega_k\lambda)^3 \sum_{\mu,\nu} A_\mu^* A_\nu \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 \overline{\langle \mu | V_I^\beta(t_1) V_I^\beta(t_2) V_I^\beta(t_3) | \nu \rangle} \\
&+ (\omega_k\lambda)^4 \sum_{\mu,\nu} A_\mu^* A_\nu \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 \int_0^{t_3} dt_4 \overline{\langle \mu | V_I^\beta(t_1) V_I^\beta(t_2) V_I^\beta(t_3) V_I^\beta(t_4) | \nu \rangle}.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Nuevamente el término de primer orden y todos los términos con potencias impares en λ son idénticamente cero, ya que la distribución es Gaussiana y por lo tanto su primer momento es cero. Esto significa que solamente el segundo y el cuarto orden en λ sobreviven. Tal y como hicimos en la sección 2.1, introducimos las relaciones de completez y el integrando del último término de (2.22) lo escribimos como

$$\begin{aligned}
\overline{\langle \mu | V_I^\beta(t_1) V_I^\beta(t_2) V_I^\beta(t_3) V_I^\beta(t_4) | \nu \rangle} &= \sum_{\rho,\sigma,\tau} \overline{\varepsilon_{\mu,\rho}^\lambda(t_1) \varepsilon_{\rho,\sigma}^\lambda(t_2) \varepsilon_{\sigma,\tau}^\lambda(t_3) \varepsilon_{\tau,\nu}^\lambda(t_4)} \\
&\times \overline{\langle \mu | \hat{V}_k(\beta) | \rho \rangle \langle \rho | \hat{V}_k(\beta) | \sigma \rangle \langle \sigma | \hat{V}_k(\beta) | \tau \rangle \langle \tau | \hat{V}_k(\beta) | \nu \rangle}.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

El primer factor lo obtenemos haciendo un cálculo similar al que hicimos para obtener (2.16)

$$\begin{aligned} \overline{\varepsilon_{\mu,\rho}^\lambda(t_1)\varepsilon_{\rho,\sigma}^\lambda(t_2)\varepsilon_{\sigma,\tau}^\lambda(t_3)\varepsilon_{\tau,\nu}^\lambda(t_4)} = & \left[e^{2\pi i[(\mu-\rho)t_1+(\rho-\sigma)t_2+(\sigma-\tau)t_3+(\tau-\nu)t_4]} \right] \times \\ & \left[1 - \frac{1}{2}(\omega_k\lambda\sigma_\beta)^2 \sum_{r=0}^k \left[(G_{\mu,r}^{(k)} - G_{\rho,r}^{(k)})t_1 + (G_{\rho,r}^{(k)} - G_{\sigma,r}^{(k)})t_2 + \right. \right. \\ & \left. \left. (G_{\sigma,r}^{(k)} - G_{\tau,r}^{(k)})t_3 + (G_{\tau,r}^{(k)} - G_{\nu,r}^{(k)})t_4 \right]^2 + \mathcal{O}(\lambda^4) \right]. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Para la segunda parte de (2.23) tenemos

$$\begin{aligned} \overline{\langle \mu | \hat{V}_k(\beta) | \rho \rangle \langle \rho | \hat{V}_k(\beta) | \sigma \rangle \langle \sigma | \hat{V}_k(\beta) | \tau \rangle \langle \tau | \hat{V}_k(\beta) | \nu \rangle} = & \\ \sum_{r_1 \neq s_1}^k \sum_{r_2 \neq s_2}^k \sum_{r_3 \neq s_3}^k \sum_{r_4 \neq s_4}^k [G_{\mu,r_1}^{(k)} G_{\rho,s_1}^{(k)} G_{\rho,r_2}^{(k)} G_{\sigma,s_2}^{(k)} G_{\sigma,r_3}^{(k)} G_{\tau,s_3}^{(k)} G_{\tau,r_4}^{(k)} G_{\nu,s_4}^{(k)}]^{1/2} & \\ \langle \mu - r_1 | \rho - s_1 \rangle \langle \rho - r_2 | \sigma - s_2 \rangle \langle \sigma - r_3 | \tau - s_3 \rangle \langle \tau - r_4 | \nu - s_4 \rangle, & \end{aligned} \quad (2.25)$$

nuevamente para $\beta = 2$ tenemos para los elementos de matriz

$$\begin{aligned} \overline{v_{r_1,s_1}^{(2)} v_{r_2,s_2}^{(2)} v_{r_3,s_3}^{(2)} v_{r_4,s_4}^{(2)}} = & (\delta_{r_1,s_2} \delta_{s_1,r_2} \delta_{r_3,s_4} \delta_{s_3,r_4} + \delta_{r_1,s_3} \delta_{s_1,r_3} \delta_{r_2,s_4} \delta_{s_2,r_4} \\ & + \delta_{r_1,s_4} \delta_{s_4,r_2} \delta_{r_2,s_3} \delta_{s_2,r_3}). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Siguiendo un proceso similar al descrito para el segundo orden, obtenemos para el segundo factor de la ecuación (2.23)

$$\begin{aligned} \overline{\langle \mu | \dots | \nu \rangle} = & \sum_{\rho,\tau} \left(e^{2\pi i[(\mu-\rho)(t_1-t_2)+(\nu-\tau)(t_3-t_4)]} \right) \mathcal{G}_{\mu,\rho}^{(k)} \mathcal{G}_{\mu,\tau}^{(k)} + \\ & \sum_{\rho,\sigma} \left(e^{2\pi i[(\mu-\rho)(t_1-t_4)+(\rho-\sigma)(t_2-t_3)]} \right) \mathcal{G}_{\mu,\rho}^{(k)} \mathcal{G}_{\rho,\sigma}^{(k)} + \\ & \sum_{\rho,\sigma,\tau} \left(e^{2\pi i[(\mu-\rho)t_1+(\rho-\sigma)t_2+(\sigma-\tau)t_3+(\tau-\nu)t_4]} \right) \mathcal{D}_{\rho,\sigma\tau}^{(k)} \delta_{\mu,\nu}, \end{aligned} \quad (2.27)$$

donde

$$\mathcal{D}_{\rho,\sigma\tau}^{(k)} \equiv \sum_{r_1 \neq r_3}^k \sum_{r_2 \neq r_r}^k [G_{\mu,r_1}^{(k)} G_{\rho,r_3}^{(k)} G_{\rho,r_2}^{(k)} G_{\sigma,r_4}^{(k)} G_{\sigma,r_3}^{(k)} G_{\tau,r_1}^{(k)} G_{\tau,r_4}^{(k)} G_{\nu,r_2}^{(k)}]^{1/2} \quad (2.28)$$

$$\langle \mu - r_1 | \rho - r_3 \rangle \langle \sigma - r_3 | \tau - r_4 \rangle \langle \tau - r_4 | \nu - r_2 \rangle.$$

Reemplazando (2.24) y (2.27) en (2.22) la amplitud de fidelidad para cuarto orden nos queda:

$$\begin{aligned} \overline{f_\lambda^{(4)}}(t) &= 1 - \frac{(\omega_k \lambda)^2}{N} \sum_{\mu,\rho} \mathcal{G}_{\mu,\rho}^{(k)} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 (e^{2\pi i[(\mu-\rho)(t_1-t_2)]}) \\ &- \frac{(\omega_k \lambda \sigma_\beta)^4}{2N} \sum_{\mu,\rho} \mathcal{G}_{\mu,\rho}^{(k)} \mathcal{B}_{\mu,\rho}^{(k)} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 (e^{2\pi i[(\mu-\rho)(t_1-t_2)]}) (t_1 - t_2)^2 \\ &+ \frac{(\omega_k \lambda \sigma_\beta)^4}{N} \sum_{\mu,\rho,\tau} \mathcal{G}_{\mu,\rho}^{(k)} \mathcal{G}_{\mu,\tau}^{(k)} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 \int_0^{t_3} dt_4 (e^{2\pi i[(\mu-\rho)(t_1-t_2)+(\nu-\tau)(t_3-t_4)]}) \\ &+ \frac{(\omega_k \lambda \sigma_\beta)^4}{N} \sum_{\mu,\rho,\sigma} \mathcal{G}_{\mu,\rho}^{(k)} \mathcal{G}_{\rho,\sigma}^{(k)} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 \int_0^{t_3} dt_4 (e^{2\pi i[(\mu-\rho)(t_1-t_4)+(\rho-\sigma)(t_3-t_4)]}) \\ &+ \frac{(\omega_k \lambda \sigma_\beta)^4}{N} \sum_{\mu,\rho,\sigma,\tau} \mathcal{D}_{\rho,\sigma,\tau}^{(k)} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 \int_0^{t_3} dt_4 (e^{2\pi i[(\mu-\rho)t_1+(\rho-\sigma)t_2+(\sigma-\tau)t_3+(\tau-\mu)t_4]}), \end{aligned} \quad (2.29)$$

donde hemos usado $|A_\mu|^2 \sim 1/N$ y se han considerado los términos proporcionales a λ^2 en (2.24). Además hemos definido

$$\mathcal{B}_{\mu,\rho}^{(k)} \equiv \sum_{r=0}^k (\mathcal{G}_{\mu,r}^{(k)} - \mathcal{G}_{\rho,r}^{(k)})^2. \quad (2.30)$$

Haciendo las integrales en (2.22), se obtiene la amplitud de la fidelidad a cuarto orden. Esta expresión se puede consultar en el apéndice A. Dado que nuestro interés principal es estimar el *ending time*, para ello tendremos en cuenta únicamente a aquellos términos que son los dominantes a tiempos largos, que para este caso resultan ser proporcionales a t^2 . Por lo tanto, una expresión aproximada para el cuarto orden de la amplitud de la fidelidad puede escribirse como

$$\begin{aligned} \overline{f_\lambda^{(4)}}(t) &\approx 1 - \frac{(\omega_k \lambda)^2}{N} \sum_{\mu,\rho=0}^n \mathcal{G}_{\mu,\rho}^{(k)} \frac{[1 + 2\pi i(\mu - \rho)t - e^{2\pi i[(\mu-\rho)t]}]}{[2\pi(\mu - \rho)]^2} \\ &- \frac{(\omega_k \lambda)^4}{N} \sum_{\mu,\rho,\tau=0}^n \mathcal{G}_{\mu,\rho}^{(k)} \mathcal{G}_{\mu,\tau}^{(k)} \frac{t^2}{2(2\pi)^2(\mu - \rho)(\mu - \tau)}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

La fidelidad se obtiene calculando el módulo al cuadrado de la amplitud de la fidelidad, es decir $F_\lambda^{(4)}(t) = \left| f_\lambda^{(4)}(t) \right|^2$, luego

$$\begin{aligned} \overline{F_\lambda^{(4)}(t)} &\approx 1 - \frac{2(\omega_k \lambda)^2}{N} \sum_{\mu, \rho=0}^n \mathcal{G}_{\mu, \rho}^{(k)} \frac{[1 - \cos[2\pi(\mu - \rho)t]]}{[2\pi(\mu - \rho)]^2} \\ &\quad - \frac{(\omega_k \lambda)^4}{N} \sum_{\mu, \rho, \tau=0}^n \mathcal{G}_{\mu, \rho}^{(k)} \mathcal{G}_{\mu, \tau}^{(k)} \frac{t^2}{(2\pi)^2(\mu - \rho)(\mu - \tau)}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

El *ending time* t_e puede ser estimado si comparamos los coeficientes dominantes, a tiempos largos, para el segundo y cuarto orden [3]; ignorando los términos que van como N^{-2} , y donde por generalidad hemos introducido nuevamente la varianza σ_β .

$$\begin{aligned} -\frac{2(\omega_k \lambda \sigma_\beta)^2}{N(2\pi)^2} \sum_{\mu, \rho=0}^n \frac{\mathcal{G}_{\mu, \rho}^{(k)}}{[(\mu - \rho)]^2} &\rightarrow \text{Segundo orden} \\ -\frac{(\omega_k \lambda \sigma_\beta)^4}{N(2\pi)^2} \sum_{\mu, \rho, \tau=0}^n \frac{\mathcal{G}_{\mu, \rho}^{(k)} \mathcal{G}_{\mu, \tau}^{(k)} t^2}{(\mu - \rho)(\mu - \tau)} &\rightarrow \text{Cuarto orden} \end{aligned}$$

Definimos el *ending time* como la razón entre los coeficientes anteriores, si estos se aproximan a la unidad

$$\frac{1}{t_e^2} \equiv \frac{-\frac{(\omega_k \lambda \sigma_\beta)^4}{N(2\pi)^2} \sum_{\mu, \rho, \tau} \frac{\mathcal{G}_{\mu, \rho}^{(k)} \mathcal{G}_{\mu, \tau}^{(k)}}{(\mu - \rho)(\mu - \tau)}}{-\frac{2(\omega_k \lambda \sigma_\beta)^2}{N(2\pi)^2} \sum_{\mu, \rho} \frac{\mathcal{G}_{\mu, \rho}^{(k)}}{[(\mu - \rho)]^2}}.$$

Si escribimos explícitamente la suma del término de orden cuarto,

$$\sum_{\mu, \rho, \tau=0}^n \frac{\mathcal{G}_{\mu, \rho}^{(k)} \mathcal{G}_{\mu, \tau}^{(k)}}{(\mu - \rho)(\mu - \tau)} = \sum_{\mu=0}^n \sum_{\rho=0}^n \frac{\mathcal{G}_{\mu, \rho}^{(k)}}{(\mu - \rho)} \sum_{\tau=0}^n \frac{\mathcal{G}_{\mu, \tau}^{(k)}}{(\mu - \tau)},$$

es posible notar que la suma sobre ρ es igual a la suma sobre τ . Despejando para t_e tenemos

$$t_e = \frac{\sqrt{2}}{\omega_k \lambda \sigma_\beta} \left[\frac{\sum_{\mu=0}^n \sum_{\rho=0}^n \frac{\mathcal{G}_{\mu, \rho}^{(k)}}{(\mu - \rho)^2}}{\sum_{\mu=0}^n \left(\sum_{\rho=0}^n \frac{\mathcal{G}_{\mu, \rho}^{(k)}}{(\mu - \rho)} \right)^2} \right]^{1/2} \quad \text{donde } \mu \neq \rho \quad (2.33)$$

Esta ecuación es uno de los resultados importantes de este trabajo. En [2] se observó numéricamente que $t_e \sim \lambda^{-1}$. Podemos ver entonces que (2.33) está en total acuerdo con lo obtenido en dicha referencia, ya que predice el escalamiento observado.

2.3. Comparación del cálculo perturbativo con simulaciones numéricas

El procedimiento seguido para hacer las simulaciones numéricas del modelo fue el siguiente [9]: fijando los parámetros n y λ , se calculó el Hamiltoniano de referencia \mathcal{H}_0 ; después se hicieron 1000 realizaciones independientes del Hamiltoniano \hat{V}_k en donde los elementos del ensemble $v_{rs}^{(\beta)}$ fueron escogidos como miembros del GOE . Para cada realización se calculó la evolución temporal de un estado inicial aleatorio, lo cual permite obtener la amplitud de la fidelidad para dicha realización. Luego se calculó el promedio de $f_\lambda(t)$. Finalmente calculamos la fidelidad usando $F_\lambda(t) = \overline{|f_\lambda(t)|^2}$.

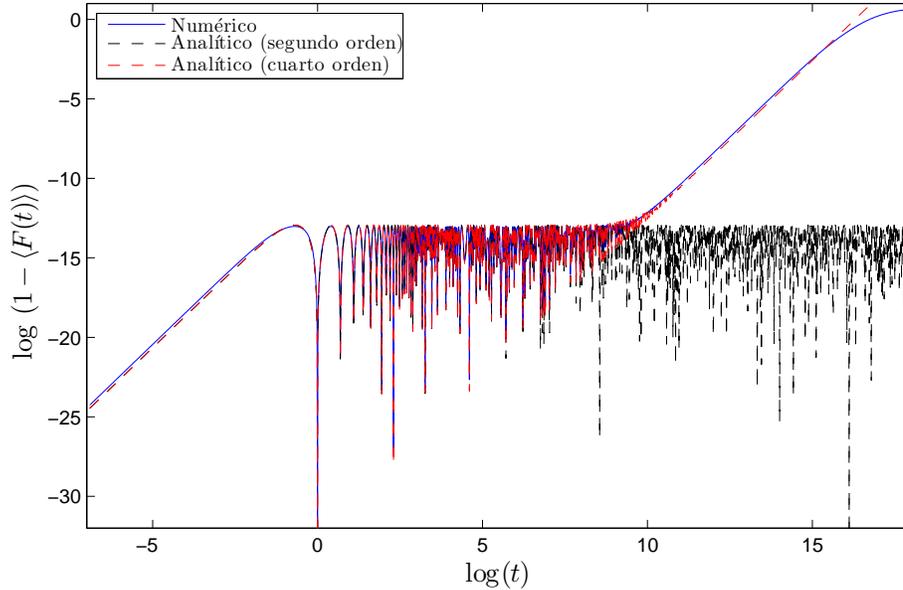


Figura 2.2: Comparación entre la predicción analítica y el cálculo numérico para $\beta = 1$, $n = 128$, $\lambda = 1 \times 10^{-6}$ y $k = 3$

En la figura (2.2) podemos apreciar el comportamiento típico de la fidelidad, usando el procedimiento numérico descrito anteriormente. Ahora podemos usar la ecuación (2.20) y (2.32) para hacer comparaciones entre el cálculo numérico y la predicción analítica.

En la figura (2.2) podemos apreciar que tanto el cálculo numérico como el analítico presentan esencialmente las mismas características importantes, dependiendo del valor que toma la fidelidad a distintos tiempos.

Para tiempos menores que el tiempo de Heisenberg ($t < t_H$), la fidelidad decae cuadráticamente [6].

Para tiempos iguales al tiempo de Heisenberg ($t = t_H = 1$), la fidelidad se aproxima a la unidad, este comportamiento es conocido como *resurgimiento de la fidelidad* [2].

Para tiempos mayores que el tiempo de Heisenberg ($t_e > t > t_H$) observamos que la fidelidad oscila y toma su valor mínimo, de acuerdo con la ecuación (2.21); es decir el decaimiento de la fidelidad se congela.

Numéricamente podemos hacer una estimación para el *ending time* y compararla con la ecuación (2.33). Este *ending time* numérico $t_e^{(n)}$, se puede estimar de la siguiente manera (ver figura (2.3)): del resultado numérico vamos a elegir los primeros 40 mínimos (puntos verdes), que también nos dan una estimación para F_p numérico; y de forma similar elegiremos 40 puntos de la parte en la que la fidelidad decae cuadráticamente (puntos azul claro). Luego hacemos un ajuste lineal para estos conjuntos de puntos (líneas roja y magenta). Luego el $t_e^{(n)}$ estará dado como la intersección de las dos rectas

$$t_e^{(n)} = \frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2}, \quad (2.34)$$

donde b_1 , b_2 son los puntos de corte y a_1 , a_2 las pendientes para las líneas roja y magenta respectivamente.

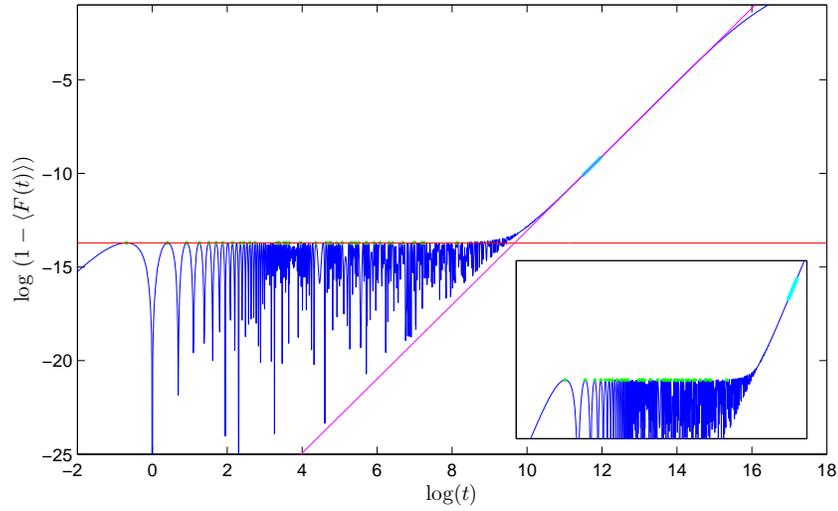


Figura 2.3: *Estimación numérica del ending time*

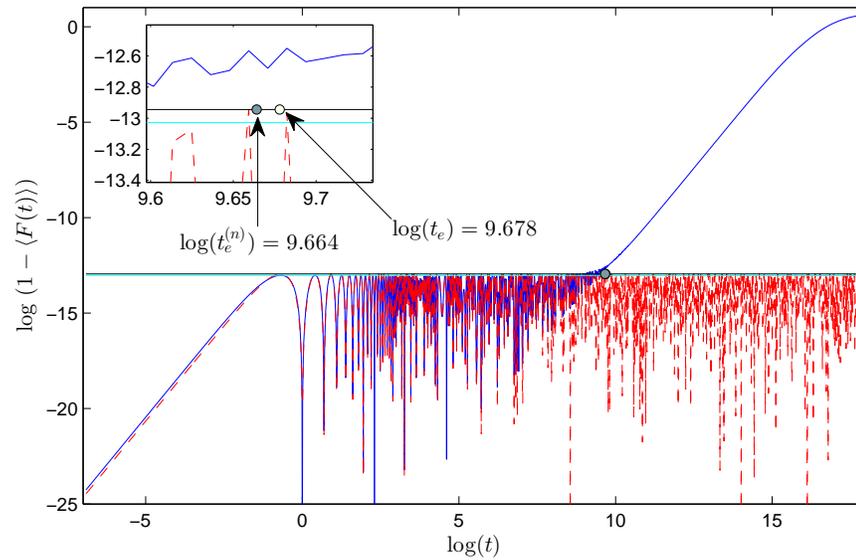


Figura 2.4: *Comparación numérica y analítica para el ending time. En esta figura hemos usado $\beta = 1$, $n = 128$, $\lambda = 1 \times 10^{-6}$, $k = 3$*

Dado nuestro interés en comparar (2.33) y (2.34), graficamos estos valores para el caso particular descrito en la figura (2.4). En dicha gráfica podemos apreciar que existe un muy buen acuerdo entre el *ending time* numérico y analítico; así como en el F_p numérico (línea cian) y el F_p teórico (línea negra) dado por (2.21).

Ahora bien, queremos saber cual es la dependencia de t_e respecto a n y k . Por ejemplo si hacemos que el rango de la interacción k , sea igual al número de bosones, vemos que t_e disminuye a medida que n aumenta; mientras que para $k = 3$ y $k = 4$ el *ending time* no depende esencialmente en del número de bosones. Ver figuras (2.5) y (2.6).

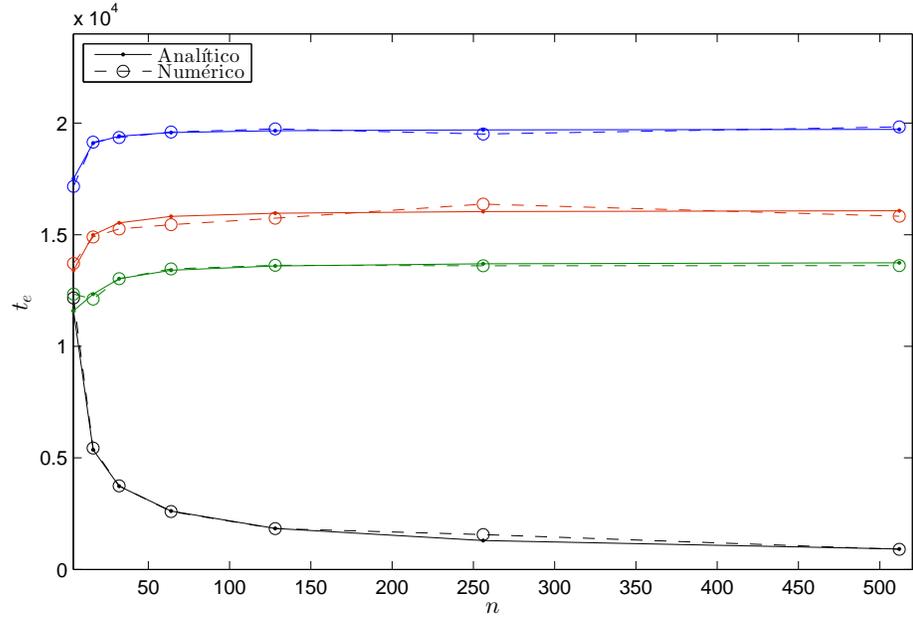


Figura 2.5: *Ending time* analítico (línea sólida) y numérico (línea punteada) como función del número de bosones para $\beta = 1$, $k = 2$ (azul), $k = 3$ (rojo), $k = 4$ (verde), $k = n$ (negro)

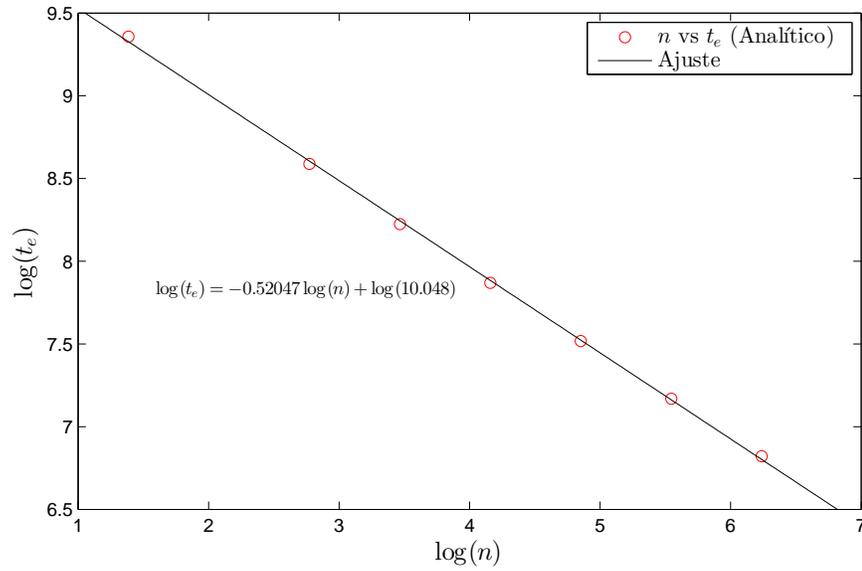


Figura 2.6: *Ajuste para el caso $k = n$*

Esto último se puede apreciar mejor en la figura (2.6), de donde es posible apreciar que

$$t_e \propto n^{-1/2} \quad (2.35)$$

cuando $k = n$.

CAPÍTULO 3

DECAIMIENTO DE LA FIDELIDAD EN EL MODELO DE BOSE-HUBBARD

En este capítulo estamos interesados en aplicar las mismas técnicas que fueron usadas en el capítulo de las interacciones aleatorias, al modelo de Bose-Hubbard.

3.1. Fidelidad a segundo orden para el modelo de Bose-Hubbard

Como se vio en la introducción, el modelo de Bose-Hubbard está descrito por el Hamiltoniano (1.7). Ahora calcularemos el decaimiento de la fidelidad para el modelo de Bose-Hubbard, usando la serie de Dyson, de manera análoga a como lo hicimos en el capítulo anterior. Para ello escribimos (1.7) de la forma $\hat{H}_{BH} = \hat{H}_0 + \lambda \hat{V}$ donde:

$$\hat{H}_0 = \epsilon_1 \hat{n}_1 + \epsilon_2 \hat{n}_2 + \frac{U}{2} [\hat{n}_1(\hat{n}_1 - 1) + \hat{n}_2(\hat{n}_2 - 1)], \quad (3.1)$$

$$\hat{V} = -J_1 [\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1] - \frac{J_2}{2} [(\hat{a}_2^\dagger)^2 (\hat{a}_1)^2 + (\hat{a}_1^\dagger)^2 (\hat{a}_2)^2]. \quad (3.2)$$

De aquí en adelante, haremos $\lambda = 1$ y dado que consideraremos a J_r muy pequeño lo tomaremos como el parámetro de la perturbación.

De la misma forma como se hizo en el capítulo anterior, escribimos la amplitud de fidelidad a segundo orden como [1]

$$\begin{aligned} f_{J_r}^{(2)}(t') &= 1 - \left(\frac{i}{\hbar}\right) \int_0^{t'} dt'_1 \langle \psi_0 | V_I(t'_1) | \psi_0 \rangle \\ &+ \left(\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_0^{t'} dt'_1 \int_0^{t'_1} dt'_2 \langle \psi_0 | V_I(t'_1) V_I(t'_2) | \psi_0 \rangle, \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde

$$V_I(t) = \hat{U}_{H_0}(-t) \hat{V} \hat{U}_{H_0}(t) \rightarrow \hat{U}_{H_0}(t) = \exp\left[-\frac{2\pi i}{d} \hat{H}_0 t\right]$$

siendo $U_{H_0}(t)$ el operador de evolución temporal en la representación de la interacción, \hat{H}_0 es el Hamiltoniano de referencia dado por (3.1) y $|\psi_0\rangle$ un estado inicial del sistema.

A diferencia del modelo de los ensembles anidados, H_0 no es un ensemble de Hamiltonianos. Más aún, este Hamiltoniano puede considerarse como una realización específica del ensemble de Hamiltonianos dados por (2.2), relacionándose de esta manera el modelo de los BEE(k) y el modelo de Bose-Hubbard.

Usamos la misma base de ocupación de número que en el modelo de los BEE(k), satisfaciéndose las mismas condiciones que en el caso anterior (\hat{H}_0 diagonal y parte diagonal de \hat{V} idénticamente cero). El estado inicial del sistema puede escribirse como

$$|\Psi_0\rangle = \sum_{\mu=0}^n A_\mu |\mu\rangle, \quad \rightarrow \quad |\mu\rangle \equiv |\mu, n - \mu\rangle. \quad (3.4)$$

Haciendo uso del operador de evolución temporal, la amplitud de fidelidad a segundo orden para el modelo de Bose-Hubbard se escribe como

$$\begin{aligned} f_{J_r}^{(2)}(t') &= 1 - \left(\frac{i}{\hbar}\right) \sum_{\mu,\nu} A_\mu^* A_\nu g_{\mu,\nu} \int_0^{t'} dt'_1 e^{\left(\frac{2\pi i}{d}(E_\mu^{(0)} - E_\nu^{(0)})t'_1\right)} \\ &+ \left(\frac{i}{\hbar}\right)^2 \sum_{\mu\nu} A_\mu^* A_\nu, \sum_{\rho} g_{\mu\rho} g_{\rho\nu} \int_0^{t'} dt'_1 \int_0^{t'_1} dt'_2 e^{\left(\frac{2\pi i}{d}(E_\mu^{(0)} - E_\rho^{(0)})t'_1\right)} e^{\left(\frac{2\pi i}{d}(E_\rho^{(0)} - E_\nu^{(0)})t'_2\right)}, \end{aligned}$$

donde hemos aplicado el operador $\hat{U}_{H_0}(-t)$ al bra $\langle \mu |$ y $\hat{U}_{H_0}(t)$ al ket $|\nu\rangle$, obteniendo

$$\langle \mu | V_I(t) | \nu \rangle = \left[e^{\left(\frac{2\pi i}{d}(E_\mu^{(0)} - E_\nu^{(0)})t\right)} \right] g_{\mu\nu},$$

siendo $E_\mu^{(0)}$ son los eigenvalores de \hat{H}_0 , y donde hemos definido

$$g_{\mu\nu} \equiv \langle \mu | J_1 [\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1] - \frac{J_2}{2} [(\hat{a}_2^\dagger)^2 (\hat{a}_1)^2 + (\hat{a}_1^\dagger)^2 (\hat{a}_2)^2] | \nu \rangle. \quad (3.5)$$

Si medimos el tiempo en unidades del tiempo de Heisenberg $t_H = \frac{2\pi\hbar}{d}$, siendo \bar{d} el espaciado promedio de niveles de H_0 , entonces $t t_H = t'$, y hacemos el cambio de variable, tenemos

$$t = a\hbar t' \quad a = \frac{2\pi}{\bar{d}}.$$

Por otro lado, si definimos

$$\Omega_{\mu,\nu} \equiv \frac{(E_\mu^{(0)} - E_\nu^{(0)})}{\hbar} \quad (3.6)$$

$$I^{(1)}[t, \Omega_{\mu,\nu}] \equiv (ia) \int_0^t dt_1 e^{(ia\Omega_{\mu,\nu}t_1)}, \quad (3.7)$$

$$I^{(2)}[t, \Omega_{\mu,\rho}, \Omega_{\rho,\nu}] \equiv (ia)^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 e^{(ia\Omega_{\mu,\rho}t_1)} e^{(ia\Omega_{\rho,\nu}t_2)}, \quad (3.8)$$

podemos obtener una expresión que nos permite calcular la amplitud de la fidelidad a segundo orden para el modelo de Bose-Hubbard

$$\begin{aligned} f_{J_r}^{(2)}(t) &= 1 - \sum_{\mu,\nu} A_\mu^* A_\nu g_{\mu\nu} I^{(1)}[t, \Omega_{\mu,\nu}] \\ &\quad + \sum_{\mu,\nu} A_\mu^* A_\nu \sum_{\rho} g_{\mu\rho} g_{\rho\nu} I^{(2)}[t, \Omega_{\mu,\rho}, \Omega_{\rho,\nu}]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Para simplificar esta ecuación debemos calcular los eigenvalores de \hat{H}_0 . Esto lo hacemos usando la ecuación de Schrödinger para el sistema de referencia y la base de ocupación de número

$$\begin{aligned} \hat{H}_0 |\mu, n - \mu\rangle &= \epsilon_1 \hat{n}_1 |\mu, n - \mu\rangle + \epsilon_2 \hat{n}_2 |\mu, n - \mu\rangle \\ &\quad + \frac{U}{2} [\hat{n}_1(\hat{n}_1 - 1) + \hat{n}_2(\hat{n}_2 - 1)] |\mu, n - \mu\rangle \end{aligned}$$

Usando las definiciones usuales para los operadores de creación y aniquilación, y observando que la expresión para la energía es cuadrática en μ escribimos los eigenvalores \hat{H}_0 como

$$\begin{aligned} E_\mu^{(0)} &= A\mu^2 + B\mu + E_0 \\ A &= U \\ B &= \epsilon_1 - \epsilon_2 - Un \\ E_0 &= \epsilon_2 n + \frac{Un}{2}(n-1), \end{aligned} \quad (3.10)$$

Ahora podemos darle un vistazo al espectro del Hamiltoniano no perturbado. Para ello conviene mostrar como funciona la base de número de ocupación. Supongamos que tenemos un sistema de 4 bosones confinados en un doble pozo. (Ver figura 1.1). Existen 5 formas diferentes en las cuales los bosones del sistema se puede distribuir

$$\begin{aligned} |\mu\rangle &= |\mu, n - \mu\rangle \\ |0\rangle &= |0, 4\rangle \\ |1\rangle &= |1, 3\rangle \\ |2\rangle &= |2, 2\rangle \\ |3\rangle &= |3, 1\rangle \\ |4\rangle &= |4, 0\rangle \end{aligned}$$

Esto es 0 bosones en el primer pozo, 4 en el segundo; 1 bosón en el primer pozo, 3 en el segundo; ... etc. Luego μ es el número de bosones (estado de ocupación) que se encuentran en el primer pozo. Como el número de bosones se conserva, una vez dado n , es trivial conocer cuantos bosones hay en el segundo pozo

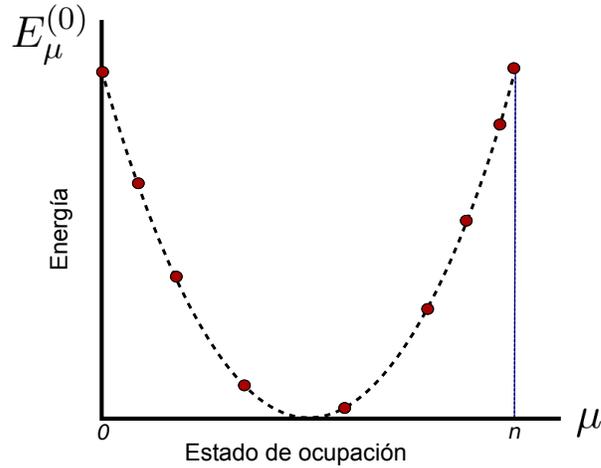


Figura 3.1: *Espectro de energías no degenerado de \hat{H}_0 . n es el número total de bosones del sistema*

En la figura (3.1) se puede apreciar de forma esquemática cómo se distribuyen los estados de ocupación con respecto a la energía. La forma de parábola del espectro es debida a la forma cuadrática de la ecuación para $E_\mu^{(0)}$, ecuación (3.10).

Es importante notar que el espectro de \hat{H}_0 puede estar o no degenerado, y que esta situación dependerá fundamentalmente de los valores que tome n , U , ϵ_1 y ϵ_2 . A menos que se indique lo contrario, de acá en adelante haremos que $n = 101$, $U = 1$ y cambiaremos según sea necesario ϵ_1 y ϵ_2 , para romper o no la degeneración del espectro.

Una vez calculados los eigenvalores (3.10), podemos obtener las frecuencias (3.6) en términos de A y B

$$\Omega_{\mu,\nu} = [A(\mu + \nu) + B](\mu - \nu), \quad (3.11)$$

y el espaciamento promedio entre niveles

$$\bar{d} = \frac{1}{n} \left(E_{\mu_{max}}^{(0)} - E_{\mu_{min}}^{(0)} \right), \quad (3.12)$$

donde $E_{\mu_{max}}^{(0)}$ y $E_{\mu_{min}}^{(0)}$ son el valor más grande y más pequeño de la energía respectivamente.

Tomaremos ahora como estados iniciales a los eigenestados de \hat{H}_0 . Adicionalmente de aquí en adelante haremos $J_2 = 0$ por simplicidad, ya que incluir términos de este tipo introduce complicaciones en las expresiones a obtener. Dicho esto vemos entonces que las únicas contribuciones de (3.9) que no se anulan son aquéllas en las que $\nu = \mu \pm 1$ y $\nu = \mu \pm 2$.

$$\begin{aligned} f_{J_1}^{(2)}(t) = & 1 - \sum_{\mu} g_{\mu,\mu+1} A_{\mu}^* A_{\mu+1} I^{(1)}[t; \Omega_{\mu,\mu-1}] + g_{\mu,\mu-1} A_{\mu}^* A_{\mu-1} I^{(1)}[t; \Omega_{\mu,\mu-1}] \\ & + \sum_{\mu} \left[g_{\mu,\mu+1} g_{\mu+1,\mu+2} A_{\mu}^* A_{\mu+2} I^{(2)}[t; \Omega_{\mu,\mu+1}, \Omega_{\mu+1,\mu+2}] \right. \\ & \quad + g_{\mu,\mu+1} g_{\mu+1,\mu} A_{\mu}^* A_{\mu} I^{(2)}[t; \Omega_{\mu,\mu+1}, \Omega_{\mu+1,\mu}] \\ & \quad + g_{\mu,\mu-1} g_{\mu-1,\mu} A_{\mu}^* A_{\mu} I^{(2)}[t; \Omega_{\mu,\mu-1}, \Omega_{\mu-1,\mu}] \\ & \quad \left. + g_{\mu,\mu-1} g_{\mu-1,\mu-2} A_{\mu}^* A_{\mu-2} I^{(2)}[t; \Omega_{\mu,\mu-1}, \Omega_{\mu-1,\mu-2}] \right] \end{aligned}$$

Si elegimos el eigenestado $|\psi_0\rangle = e^{i\phi}|m\rangle$, donde ahora m es un estado de ocupación dado y ϕ es una fase arbitraria; entonces $A_{\mu} = e^{i\phi}\delta_{\mu,m}$.

Recordando la definición para $g_{\mu,\nu}$, ecuación (3.5), vemos que esta expresión puede considerarse como el operador que mueve uno o dos bosones entre

los pozos, cambiando el estado de ocupación del sistema de $|\mu\rangle$ al estado $|\nu\rangle$. Dicho esto, solo aquellos términos en los que el sistema va del estado $|m\rangle$ al estado $|m \pm 1\rangle$ (y viceversa) son diferentes de cero, lo cual reduce la amplitud de la fidelidad a una expresión mucho más sencilla

$$f_{J_1}^{(2)}(t) = 1 + [|g_{m,m+1}|^2 I^{(2)}[t; \Omega_{m,m+1}, \Omega_{m+1,m}] + |g_{m,m-1}|^2 I^{(2)}[t; \Omega_{m,m-1}, \Omega_{m-1,m}]]. \quad (3.13)$$

De la ecuación (3.11) podemos ver que $\Omega_{m,m\pm 1} = -\Omega_{m\pm 1,m}$. Además, usando la definición (3.8) tenemos que

$$f_{J_1}^{(2)}(t) = 1 - a^2 \left[|g_{m,m+1}|^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 e^{ia\Omega_{m,m+1}(t_1-t_2)} + |g_{m,m-1}|^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 e^{ia\Omega_{m,m-1}(t_1-t_2)} \right].$$

Si suponemos que el espectro de \hat{H}_0 no es degenerado, es decir $\Omega_{m,m\pm 1} \neq 0$, e integrando la ecuación anterior, tenemos como resultado

$$f_{J_1}^{(2)}(t) = 1 - a^2 \left[|g_{m,m+1}|^2 \frac{1 - e^{ia\Omega_{m,m+1}(t_1-t_2)} + ia\Omega_{m,m+1}t}{a^2\Omega_{m,m+1}^2} + |g_{m,m-1}|^2 \frac{1 - e^{ia\Omega_{m,m-1}(t_1-t_2)} + ia\Omega_{m,m-1}t}{a^2\Omega_{m,m-1}^2} \right]. \quad (3.14)$$

Para encontrar la fidelidad usamos (2.7), es decir, calculamos el módulo cuadrado de $f_{J_1}^{(2)}(t)$ como

$$F_{J_1}^{(2)}(t) = 1 - 2 \operatorname{Re}[f_{J_1}^{(2)}(t)].$$

Esto nos da como resultado

$$F_{J_1}^{(2)}(t) = 1 - 2 \left[|g_{m,m+1}|^2 \frac{1 - \cos(a\Omega_{m,m+1}t)}{\Omega_{m,m+1}^2} + |g_{m,m-1}|^2 \frac{1 - \cos(a\Omega_{m,m-1}t)}{a^2\Omega_{m,m-1}^2} \right],$$

usando

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2} \quad \operatorname{sinc}(x) \equiv \frac{\sin(x)}{x},$$

podemos escribir finalmente la fidelidad a segundo orden para el modelo de Bose-Hubbard

$$F_{J_1}^{(2)}(t) = 1 - (at)^2 \left[\left(g_{m,m+1} \operatorname{sinc} \left(\frac{a\Omega_{m,m+1}t}{2} \right) \right)^2 + \left(g_{m,m-1} \operatorname{sinc} \left(\frac{a\Omega_{m,m-1}t}{2} \right) \right)^2 \right]. \quad (3.15)$$

3.2. Fidelidad a cuarto orden para el modelo de Bose-Hubbard

De forma similar a como se hizo en la sección anterior, podemos calcular la fidelidad para el cuarto orden en la perturbación. Para ello es necesario incluir términos adicionales en la serie de Dyson

$$\begin{aligned}
f_{J_1}^{(4)}(t) &= 1 - \frac{i}{\hbar} \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} A_\mu^* A_\nu I^{(1)}[t; \Omega_{\mu\nu}] \\
&\quad - \frac{1}{\hbar^2} \sum_{\mu\nu} A_\mu^* A_\nu \sum_{\rho} g_{\mu\rho} g_{\rho\nu} I^{(2)}[t; \Omega_{\mu\rho}, \Omega_{\rho\nu}] \\
&\quad - \frac{i^3}{\hbar^3} \sum_{\mu\nu} A_\mu^* A_\nu \sum_{\rho\sigma} g_{\mu\rho} g_{\rho\sigma} g_{\sigma\nu} I^{(3)}[t; \Omega_{\mu\rho}, \Omega_{\rho\sigma}, \Omega_{\sigma\nu}] \\
&\quad + \frac{1}{\hbar^4} \sum_{\mu\nu} A_\mu^* A_\nu \sum_{\rho\sigma\tau} g_{\mu\rho} g_{\rho\sigma} g_{\sigma\tau} g_{\tau\nu} I^{(4)}[t; \Omega_{\mu\rho}, \Omega_{\rho\sigma}, \Omega_{\sigma\tau}, \Omega_{\tau\nu}].
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Nuevamente, tomamos un eigenestado de \hat{H}_0 como estado inicial, de la misma forma que en el caso anterior, son diferentes de cero solo aquellos términos relacionados con el cambio de estado de sistema de m a $m \pm 2$, a través de $m \pm 1$, que resultan ser en este caso términos del cuarto orden

$$\begin{aligned}
f_4 &= \left[|g_{m,m-1}|^2 |g_{m,m+1}|^2 I^{(4)}[t; \Omega_{m,m-1}, \Omega_{m-1,m}, \Omega_{m,m+1}, \Omega_{m+1,m}] \right. \\
&\quad + |g_{m,m+1}|^2 |g_{m+1,m+2}|^2 I^{(4)}[t; \Omega_{m,m+1}, \Omega_{m+1,m+2}, \Omega_{m+2,m+1}, \Omega_{m+1,m}] \\
&\quad + |g_{m,m-1}|^2 |g_{m,m-1}|^2 I^{(4)}[t; \Omega_{m,m-1}, \Omega_{m-1,m}, \Omega_{m,m-1}, \Omega_{m-1,m}] \\
&\quad + |g_{m,m+1}|^2 |g_{m,m+1}|^2 I^{(4)}[t; \Omega_{m,m+1}, \Omega_{m+1,m}, \Omega_{m,m+1}, \Omega_{m+1,m}] \\
&\quad + |g_{m,m-1}|^2 |g_{m-1,m-2}|^2 I^{(4)}[t; \Omega_{m,m-1}, \Omega_{m-1,m-2}, \Omega_{m-2,m-1}, \Omega_{m-1,m}] \\
&\quad \left. + |g_{m,m+1}|^2 |g_{m,m-1}|^2 I^{(4)}[t; \Omega_{m,m+1}, \Omega_{m+1,m}, \Omega_{m,m-1}, \Omega_{m-1,m}] \right],
\end{aligned} \tag{3.17}$$

donde

$$\begin{aligned}
I^{(4)}[t; \Omega_{\mu\rho}, \Omega_{\rho\sigma}, \Omega_{\sigma\tau}, \Omega_{\tau\nu}] &= \\
& (ia)^4 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 \int_0^{t_3} dt_4 e^{i\Omega_{\mu\rho}t_1} e^{i\Omega_{\rho\sigma}t_2} e^{i\Omega_{\sigma\tau}t_3} e^{i\Omega_{\tau\nu}t_4}.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

La expresión para la amplitud de fidelidad dependerá fundamentalmente de la degeneración del espectro de \hat{H}_0 . Esto es, la integral $I^{(4)}[\dots]$ tendrá diferentes resultados dependiendo si las frecuencias Ω son o no diferentes de cero.

Como veremos más adelante, la expresión que se obtiene para $f(t)$ con la teoría de perturbaciones tendrá consecuencias importantes cuando el espectro sea degenerado.

Por el momento, supongamos que todas las frecuencias son distintas de cero. Calculando las integrales en (3.17) y usando (2.7), podemos escribir la fidelidad a cuarto orden como

$$F_{J_1}^{(4)}(t) = 2 \operatorname{Re}(f_{J_1}^{(2)}) + 2 \operatorname{Re}(f_4) + |f_{J_1}^{(2)} f_{J_1}^{(2)*}|, \quad (3.19)$$

donde $2 \operatorname{Re}(f_{J_1}^{(2)})$ es la ecuación que obtuvimos en (3.15). Para los otros dos términos de la anterior ecuación existen expresiones que por simplicidad no escribiremos aquí (ver el apéndice para la ecuación completa de $F(t)$). De (3.15) tomaremos únicamente aquellos términos que son proporcionales a t^2 en f_4 . Esto lo hacemos por dos razones: la primera, estamos interesados en el comportamiento de $F(t)$ a tiempos largos. La segunda, el decaimiento de la fidelidad es proporcional a t^2 . Por lo tanto, una expresión aproximada para la fidelidad está dada por

$$\begin{aligned} F_{J_1}^{(4)}(t) \approx 1 - (at)^2 & \left[\left(|g_{m,m+1}| \operatorname{sinc} \left(\frac{a\Omega_{m,m+1}t}{2} \right) \right)^2 \right. \\ & \left. + \left(|g_{m,m-1}| \operatorname{sinc} \left(\frac{a\Omega_{m,m-1}t}{2} \right) \right)^2 \right] \\ & - 2 (at)^2 \left[\frac{|g_{m,m+1}|^2}{\Omega_{m,m+1}} + \frac{|g_{m,m-1}|^2}{\Omega_{m,m-1}} \right]^2 \end{aligned} \quad (3.20)$$

En la figura (3.2) hacemos una comparación entre la expresión completa para la fidelidad a cuarto orden (3.19) (ver apéndice), y la aproximación dada por la ecuación (3.20). De ella concluimos que aquellos términos que no son proporcionales a t^2 pueden suponerse bastante pequeños en comparación con los términos de orden 2 y con los que son proporcionales a t^2 , y por lo tanto pueden ignorarse. Esto nos asegura que (3.20) es una buena aproximación de $F_{J_1}^{(4)}(t)$.

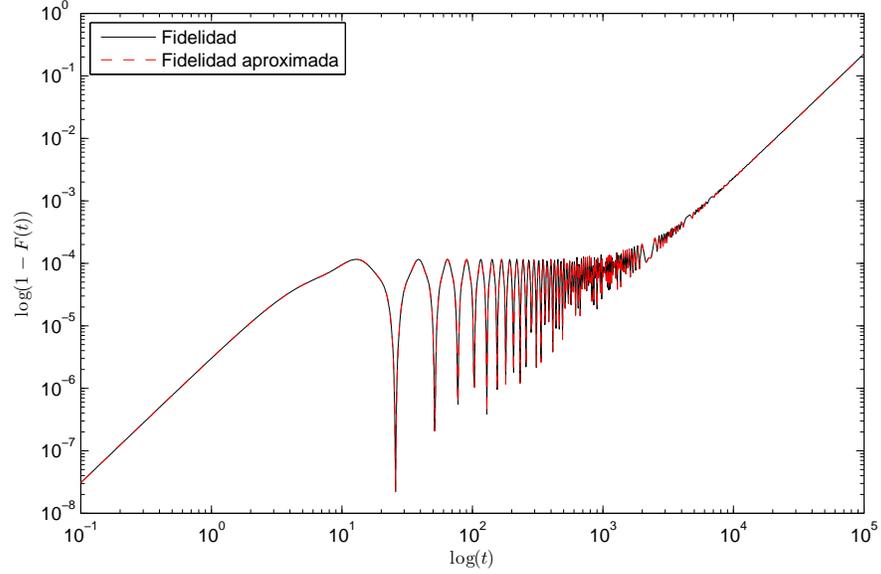


Figura 3.2: Comparación entre la fidelidad (negra) y aproximación para la misma (roja)

3.3. Comparación del modelo de Bose-Hubbard con simulaciones numéricas

Dado que podemos considerar al modelo de Bose-Hubbard como una realización del BEE(k), es sencillo adaptar el programa que calculaba numéricamente la fidelidad en el modelo de los ensembles anidados para ahora calcular numéricamente la fidelidad en el modelo de Bose-Hubbard. Es entonces natural querer comparar ecuación (3.19) con las simulaciones numéricas.

El problema ahora radica en que las ecuaciones (3.19) y (3.20) no son expresiones generales, por el contrario son válidas únicamente cuando el espectro de \hat{H}_0 no es degenerado.

Ya que la forma funcional de la fidelidad cambia con los parámetros del modelo, una expresión para $F_{J_1}(t)$ va a depender de la elección de la altura de los pozos (ϵ_1 y ϵ_2), U y n , ya que estos parámetros definen si el espectro es o no degenerado.

Por ejemplo, en la expresión (3.8)

$$I^{(2)}[t, \Omega_{\mu,\rho}, \Omega_{\rho,\nu}] \equiv (ia)^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 e^{(ia\Omega_{\mu,\rho}t_1)} e^{(ia\Omega_{\rho,\nu}t_2)},$$

vemos que si hay degeneración en el espectro, es decir si alguna de las frecuencias $\Omega_{\mu,\nu} = 0$; entonces en la amplitud de la fidelidad aparecen términos proporcionales a it . De forma análoga, cuando las dos frecuencias son cero, aparecen entonces términos que son proporcionales a t^2 . Cosas similares suceden para las integrales de la forma $I^{(4)}[\dots]$.

Debemos entonces encontrar expresiones para la fidelidad, análogas a (3.20), para los casos en los que el espectro es degenerado. Para ello es conveniente hallar una expresión que relacione ϵ_1 con ϵ_2 . La más sencilla es cuando $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$, que nos genera un espectro como el de la figura (3.5).

Una expresión más general se obtiene si igualamos a cero (3.11) y usando (3.10) obtenemos

$$\epsilon_1 - \epsilon_2 = U[n - (\mu + \nu)], \quad (3.21)$$

Una vez dado el valor de ϵ_1 podemos encontrar un ϵ_2 que hace que el espectro tenga degeneraciones. Cualquier otra combinación diferente a las expresadas anteriormente producirán un espectro de energías no degenerado, para el cual la ecuación (3.20) es correcta.

Dicho lo anterior sobre el espectro, vamos a analizar tres casos que son de interés.

3.3.1. Espectro no degenerado

El primer caso que analizaremos es cuando elegimos ϵ_1 y ϵ_2 de tal forma que el espectro de \hat{H}_0 no esté degenerado. Ver figura (3.1).

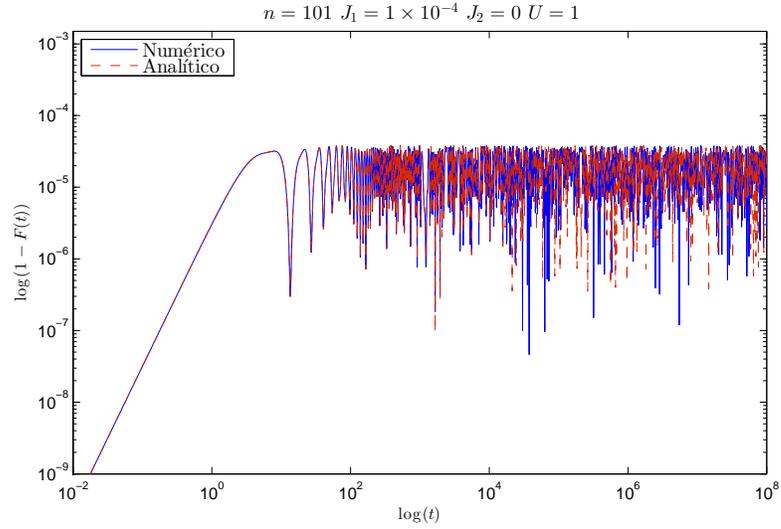


Figura 3.3: Comparación entre la expresión analítica de la fidelidad y la simulación numérica. Hemos usado $\epsilon_1 = 0.7618036$, $\epsilon_2 = 0.9299698$ y $m = 52$ como estado inicial.

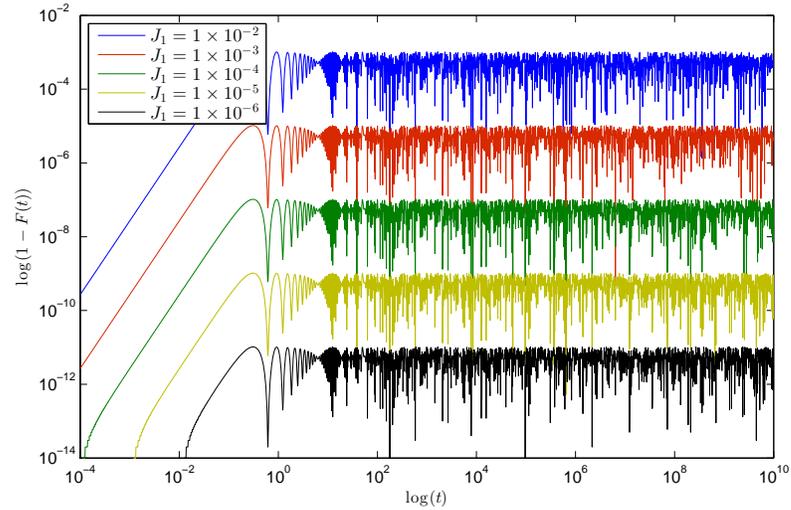


Figura 3.4: Fidelidad para distintos valores de J_1 . Hemos usado para este caso $\epsilon_1 = 0.1618036$, $\epsilon_2 = 0.3299698$ y $m = 30$.

En la figura (3.3) podemos observar la comparación entre la expresión analítica para la fidelidad, ecuación (3.15) y su contraparte numérica. Puede verse que el acuerdo entre las dos expresiones es muy bueno. Nótese que en este caso la fidelidad permanece congelada por un lapso muy largo, y para valores de $t \sim 10^{10}$ no se observa decaimiento.

Lo anterior lo podemos apreciar en la figura (3.4), donde hemos graficado la fidelidad para distintos valores de la perturbación. Resultados similares se obtienen para diferentes elecciones de los parámetros del modelo de Bose-Hubbard.

3.3.2. Espectro degenerado

El segundo caso de interés se presenta cuando el espectro es degenerado tal y como se muestra en la figura (3.5)

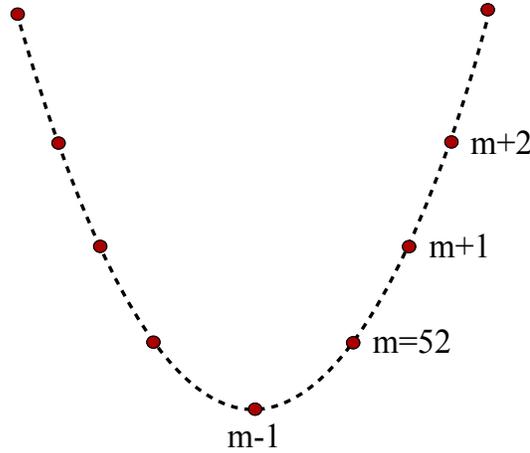


Figura 3.5: *Espectro de \hat{H}_0 . $m = 52$, $n = 101$, $\epsilon_1 = 0$ y $\epsilon_2 = 1$*

En este caso en particular, elegimos un estado inicial (m) que se encuentra contiguo al mínimo de energía del sistema ($m - 1$). De esta figura podemos observar que las frecuencias $\Omega_{m,m+1} \neq \Omega_{m,m-1} \neq \Omega_{m+1,m+2} \neq \Omega_{m-1,m-2} \neq 0$. Luego la ecuación (3.19) nos permite calcular la fidelidad.

En la figura (3.6) hacemos la comparación entre la simulación numérica y la expresión analítica para distintos valores de la perturbación. En ella podemos ver que el acuerdo entre las dos es excelente.

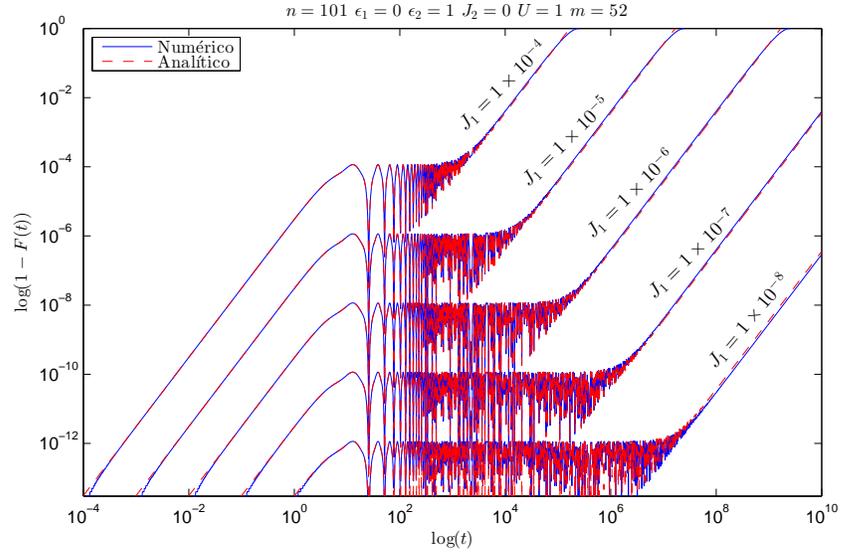


Figura 3.6: Comparación entre la simulación numérica y la expresión analítica para distintos valores de J_1 . Hemos usado como estado inicial el eigenestado 52

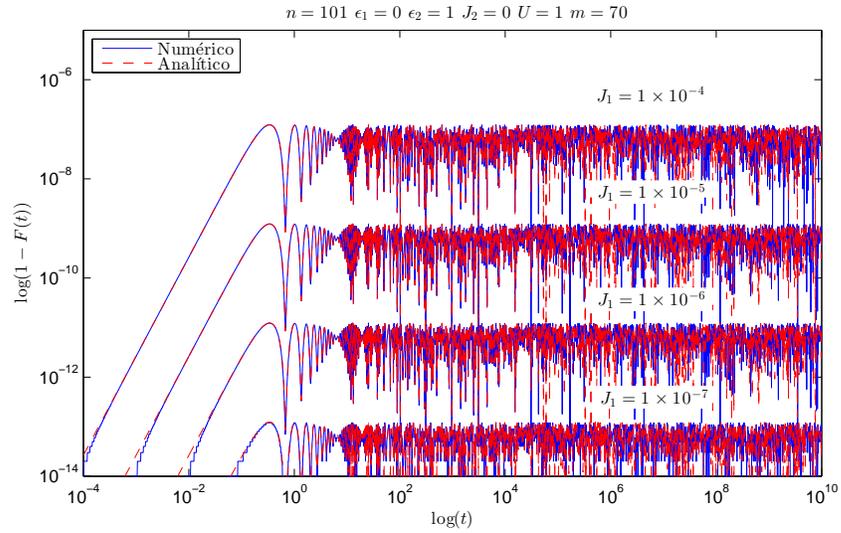


Figura 3.7: Comparación entre la simulación numérica y la expresión analítica para distintos valores de J_1 . Hemos usado como estado inicial el eigenestado 70

Nótese que para este caso, la fidelidad se congela durante un periodo de tiempo, luego de éste, el sistema decae.

Si en lugar de elegir como estado inicial al estado $m = 52$ elegimos a cualquier otro eigenestado, entonces el decaimiento de la fidelidad se congela por un tiempo muy largo, siempre y cuando la perturbación sea lo suficientemente pequeña, esto es para valores $J_1 \sim 10^{-4}$.

3.3.3. Cuando la teoría de perturbaciones falla...

Ahora veremos que existe al menos un caso para el cual la teoría de perturbaciones tal y como la hemos usado, es insuficiente para reproducir los cálculos numéricos. Veamos que sucede cuando, el espectro es degenerado como en la figura (3.8).

Esta situación corresponde a $\Omega_{m-1, m-2} = 0$. De la ecuación (3.17) vemos que la quinta integral es de la forma

$$I^{(4)}[t; \Omega_{m, m-1}, 0, 0, -\Omega_{m, m-1}] \sim t^2 e^{i\Omega_{m, m-1}t}.$$

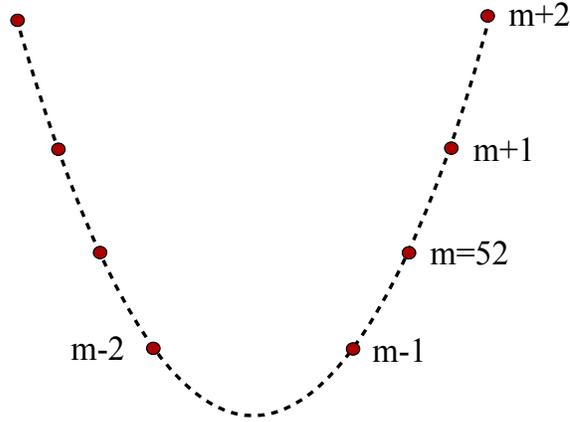


Figura 3.8: *Espectro de \hat{H}_0 . $m = 52$, $n = 101$, $\epsilon_1 = 0$ y $\epsilon_2 = 0$*

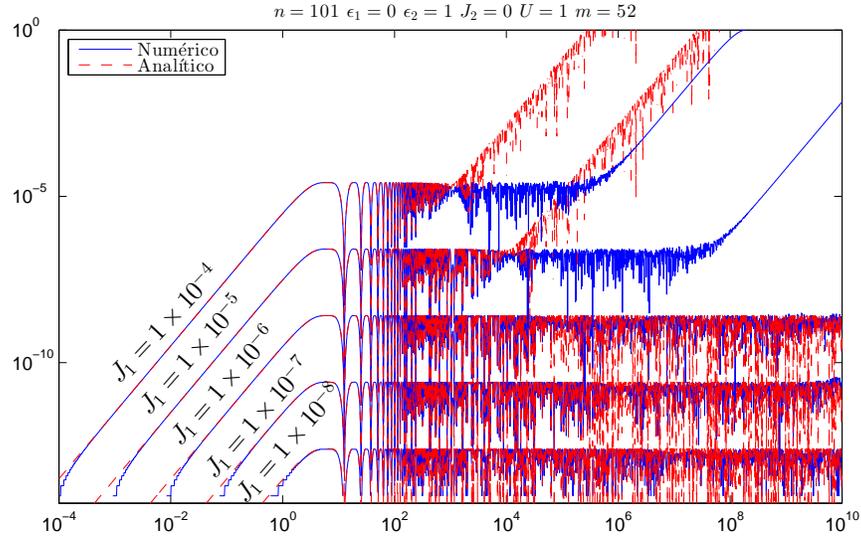


Figura 3.9: Comparación entre la fidelidad numérica, y la expresión dada por (3.22) para diferentes valores de J_1 .

Para este caso una expresión aproximada para la fidelidad puede escribirse como

$$\begin{aligned}
 F_{J_1}^{(4)}(t) \approx & 1 - (at)^2 \left[\left(g_{m,m+1} \operatorname{sinc} \left(\frac{a\Omega_{m,m+1}t}{2} \right) \right)^2 + \left(g_{m,m-1} \operatorname{sinc} \left(\frac{a\Omega_{m,m-1}t}{2} \right) \right)^2 \right] \\
 & - (at)^2 \left[2 \left(\frac{|g_{m,m+1}|^2}{(\Omega_{m,m+1})} + \frac{|g_{m,m-1}|^2}{(\Omega_{m,m-1})} \right) + \frac{|g_{m,m-1}|^2 |g_{m-1,m-2}|^2}{\Omega_{m,m-1}^2} \cos(a\Omega_{m,m-1}t) \right],
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

De la figura (3.9) se puede observar que la serie de Dyson no reproduce las características del modelo de Bose-Hubbard cuando la perturbación es del orden de 10^{-5} .

A partir de este valor la expresión (3.22) solo es válida para tiempos menores que $t \sim 10^4$ para $J_1 = 1 \times 10^{-5}$ y $t \sim 10^3$ para $J_1 = 1 \times 10^{-4}$. Esto indica que la teoría de perturbaciones que hemos usado hasta el momento no incorpora apropiadamente las características del espectro, y por lo tanto debemos buscar un método más apropiado para este tipo de sistemas.

CAPÍTULO 4

ESTADOS COHERENTES

En este capítulo vamos a calcular numéricamente el decaimiento de la fidelidad en el modelo de Bose-Hubbard usando estados coherentes como estados iniciales. Esto lo hacemos motivados por los trabajos de Gross et. al [16] y Gati et.al [18] en los cuales se usan estados coherentes para estudiar experimentalmente uniones de Josephson con gases ultrafríos e interferómetros respectivamente. Tanto en uno como en otro experimento, se utilizan condensados de Bose-Einstein en un doble pozo, que como vimos puede ser estudiado con el modelo de Bose Hubbard. Encontrar entonces cómo se relacionan los diferentes parámetros de este modelo entre si es de interés en estos campos de investigación.

De acuerdo con Glauber [19], los estados coherentes se pueden definir de tres maneras. Sean $|\alpha\rangle$ estados de un sistema cuántico, decimos entonces que son estados coherentes si cumplen cualquiera de las siguientes definiciones

- Son eigenestados del operador de aniquilación del oscilador armónico.

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$$

- Pueden obtenerse al aplicar el operador de desplazamiento $D(\alpha)$ sobre el estado del vacío del oscilador armónico.

$$|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle, \quad \text{donde} \quad D(\alpha) \equiv \exp[\alpha\hat{a} - \alpha^*\hat{a}^\dagger].$$

- Son los estados cuánticos de mínima incertidumbre

$$(\Delta p)^2(\Delta q)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Dichos estados tienen especial importancia en óptica cuántica y en la física de láseres, así como también en la descripción de la superfluidez y la física de los condensados de Bose-Einstein. Es justamente en este último tema donde los estados coherentes se han usado para medir experimentalmente el número de bosones condensados.

Por ejemplo, para los condensados de Bose-Einstein en un pozo doble, el valor esperado de la perturbación está directamente relacionado con la diferencia de población relativa [16]. Esto significa que para el modelo de Bose-Hubbard los eigenestados de \hat{H}_0 resultan ser estados coherentes de la forma

$$|\psi\rangle = A(\hat{a}_1^\dagger + \hat{a}_2^\dagger)^n |0, 0\rangle,$$

donde n es el número de bosones del sistema y A una constante de normalización. De acuerdo con [18], al aplicar el operador de evolución temporal $\hat{U}(t)$ al estado $|\psi\rangle$, éste adquiere una fase relativa ϕ .

$$|\psi\rangle = A(\hat{a}_1^\dagger + e^{i\phi}\hat{a}_2^\dagger)^n |0, 0\rangle.$$

Ahora, usando el binomio de Newton, tenemos que

$$|\psi\rangle = A \sum_{s=0}^n e^{i(n-s)\phi} \binom{n}{s} (\hat{a}_1^\dagger)^s (\hat{a}_2^\dagger)^{n-s} |0, 0\rangle.$$

De la definición del operador de creación es posible ver que

$$(\hat{a}^\dagger)^p |n\rangle = \left(\frac{(n+p)!}{n!} \right)^{1/2} |n+p\rangle,$$

luego

$$|\psi\rangle = A \sum_{s=0}^n e^{i(n-s)\phi} \binom{n}{s} [s!(n-s)!]^{1/2} |s, n-s\rangle.$$

Si usamos la definición del coeficiente binomial $\binom{n}{s} = \frac{n!}{s!(n-s)!}$, es fácil ver que la anterior expresión se escribe como

$$|\psi\rangle = (n!)^{1/2} A \sum_{s=0}^n e^{i(n-s)\phi} \binom{n}{s}^{1/2} |s, n-s\rangle.$$

Con esta expresión podemos calcular $\langle\psi|\psi\rangle$ y obtener la constante de normalización A

$$A = \frac{1}{[n!2^n]^{1/2}},$$

donde hemos usado $\sum \binom{n}{s} = 2^n$. Entonces un estado coherente para un condensado de Bose-Einstein en un doble pozo lo escribimos

$$|\psi\rangle = \frac{1}{[2^n]^{1/2}} \sum_{s=0}^n e^{i(n-s)\phi} \binom{n}{s}^{1/2} |s, n-s\rangle \quad (4.1)$$

4.1. Decaimiento de la fidelidad y estados coherentes

Usaremos ahora los estados coherentes (4.1) como estados iniciales de \hat{H}_0 para calcular numéricamente el decaimiento de la fidelidad en el modelo de Bose-Hubbard.

La primera diferencia con respecto al caso estudiado en el capítulo anterior (eigenestados como estados iniciales) es que ahora tenemos un nuevo parámetro: la fase relativa ϕ . Queremos ver como se comporta $F(t)$ para diferentes valores de ϕ , ϵ_1 y ϵ_2 .

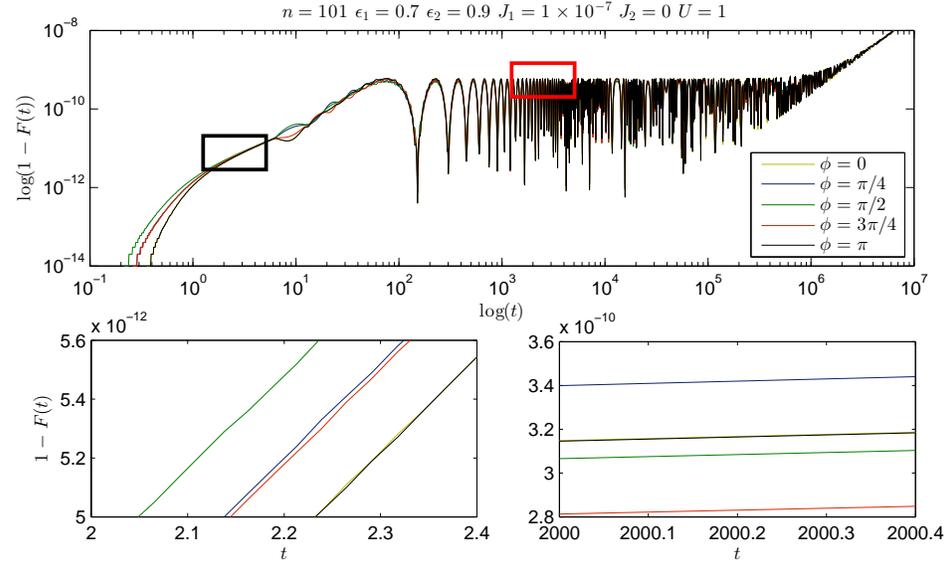


Figura 4.1: Decaimiento de la fidelidad para distintos valores de ϕ . Las figuras inferiores izquierda y derecha son ampliaciones de los recuadros negro y rojo respectivamente, pero en escala lineal.

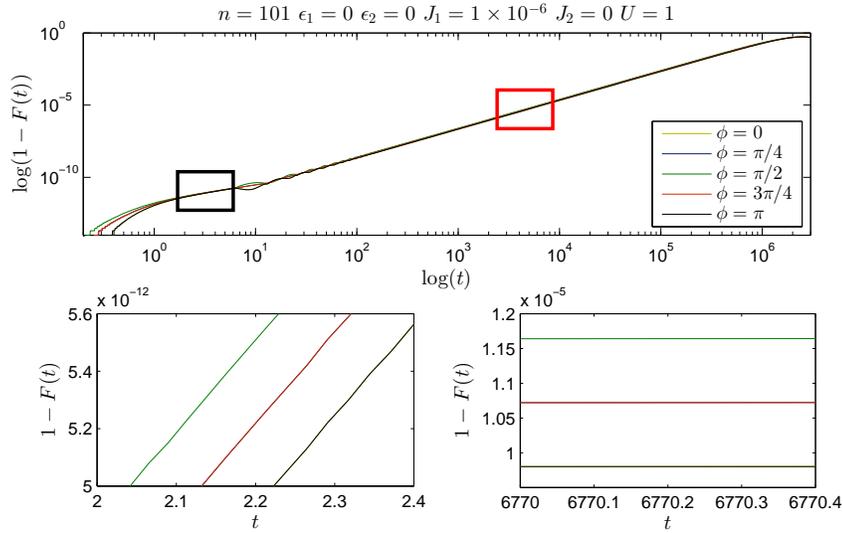


Figura 4.2: Decaimiento de la fidelidad para distintos valores de ϕ . Las figuras inferiores izquierda y derecha son ampliaciones de los recuadros negro y rojo respectivamente, pero en escala lineal.

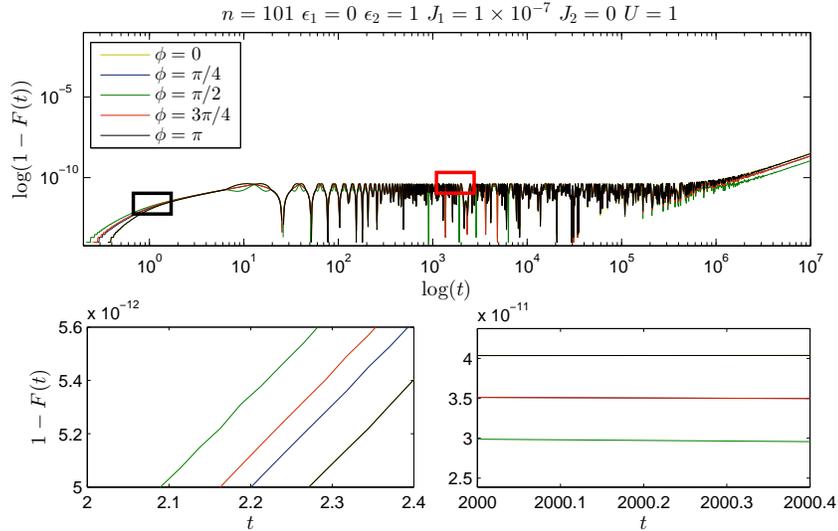


Figura 4.3: Decaimiento de la fidelidad para distintos valores de ϕ . Las figuras inferiores izquierda y derecha son ampliaciones de los recuadros negro y rojo respectivamente, pero en escala lineal.

De las figuras (4.1) a (4.3), podemos observar que el comportamiento de la fidelidad es globalmente el mismo para cada una de las fases, es decir, los valores de el congelamiento y el *ending time* no presentan cambios significativos. Una inspección a distintos tiempos y en escala lineal, muestra que la fidelidad se comporta de forma muy similar para cada una de las fases.

Como se muestra en [18], la fase relativa ϕ está estrechamente relacionada con la diferencia del número de bosones en cada uno de los pozos. Esta diferencia se conoce como el desbalance poblacional. Dado que para tiempos cortos la fidelidad es diferente para distintos valores de ϕ , entonces podría usarse $F(t)$ para medir dicho desbalance.

Nos concentraremos ahora en analizar por separado cada una de las configuraciones del espectro que definimos en el capítulo 3. (Ver figura (4.4)). Estudiaremos entonces cómo se comporta la fidelidad para distintos parámetros del modelo de Bose-Hubbard, tales como el congelamiento de la fidelidad, F_{freeze} , el *ending time*, t_e , la perturbación J_r y el número de bosones n .

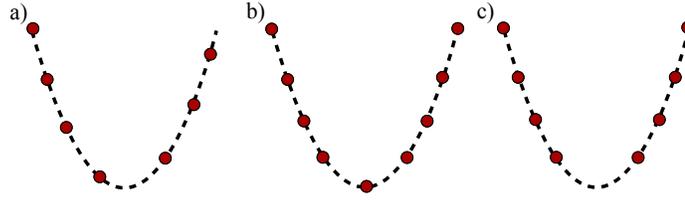


Figura 4.4: a) Caso 1 ($\epsilon_1 = 0.7$, $\epsilon_2 = 0.9$). b) Caso 2 ($\epsilon_1 = 0$, $\epsilon_2 = 1$). c) Caso 3 ($\epsilon_1 = 0$, $\epsilon_2 = 0$.)

4.1.1. Espectro no degenerado. (Caso 1)

Hasta el momento no habíamos tomado en cuenta al parámetro de perturbación que mueve dos cuerpos J_2 . Dado que los estados coherentes pueden ser más interesantes que los eigenestados, incluiremos de ahora en adelante en nuestro análisis el efecto que tiene sobre el sistema el hecho de que puedan tunelar dos partículas.

Para ello graficamos $1 - F(t)$ como función del tiempo de Heisenberg. En la figura (4.5) podemos ver que tanto el congelamiento de la fidelidad como el *ending time* no se ven afectados por el hecho de que exista o no J_2 . Sin embargo se observa un cambio en F_{freeze} y t_e cuando $J_1 = 0$ y $J_2 \neq 0$.

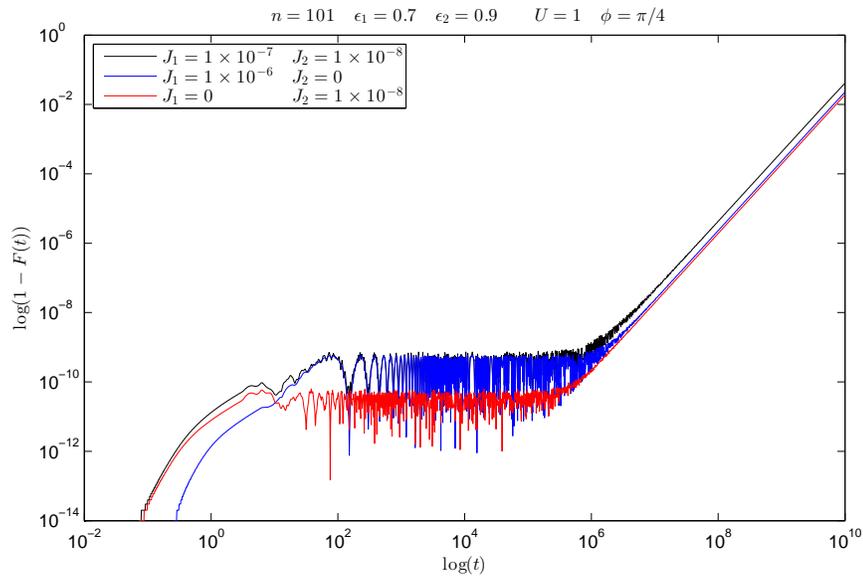


Figura 4.5: Decaimiento de la fidelidad para distintas perturbaciones.

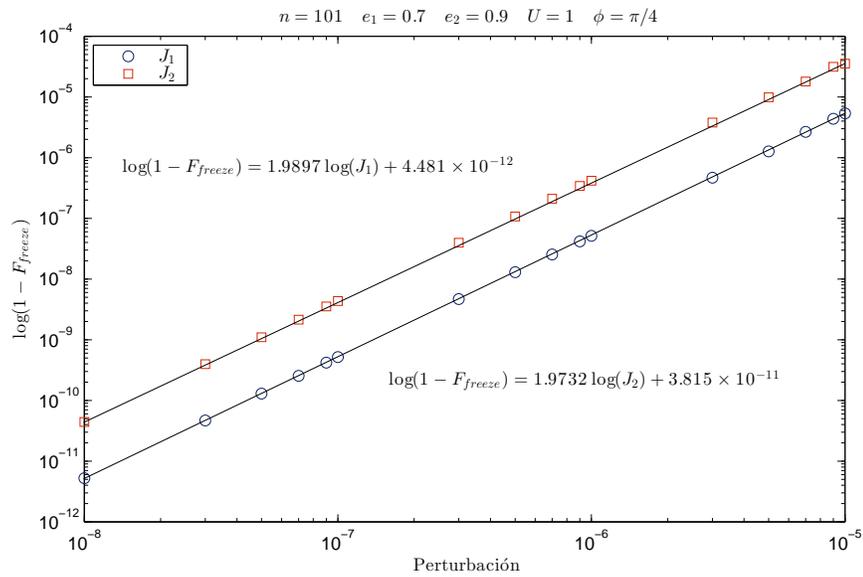


Figura 4.6: F_{freeze} como función de la perturbación.

De forma similar a como se hizo en el capítulo 2, podemos estimar numéricamente F_{freeze} . Esto nos permite estimar cómo escala este parámetro con distintos valores de la perturbación. De la figura (4.6) vemos como el ajuste de los datos obtenidos nos permite afirmar que

$$1 - F_{freeze} \propto J_r^2. \quad (4.2)$$

Ahora bien, si queremos encontrar la relación que existe entre el decaimiento de la fidelidad y el número de partículas, graficamos $1 - F(t)$ como función de t para distintos valores n .

En la figura (4.7), claramente se observa que el *fidelity freeze* depende del número de partículas del sistema. Si queremos saber como escala este comportamiento, graficamos el logaritmo de $(1 - F_{freeze})$ como función del número de bosones para diferentes valores de la perturbación, y hacemos los respectivos ajustes. Figura (4.8).

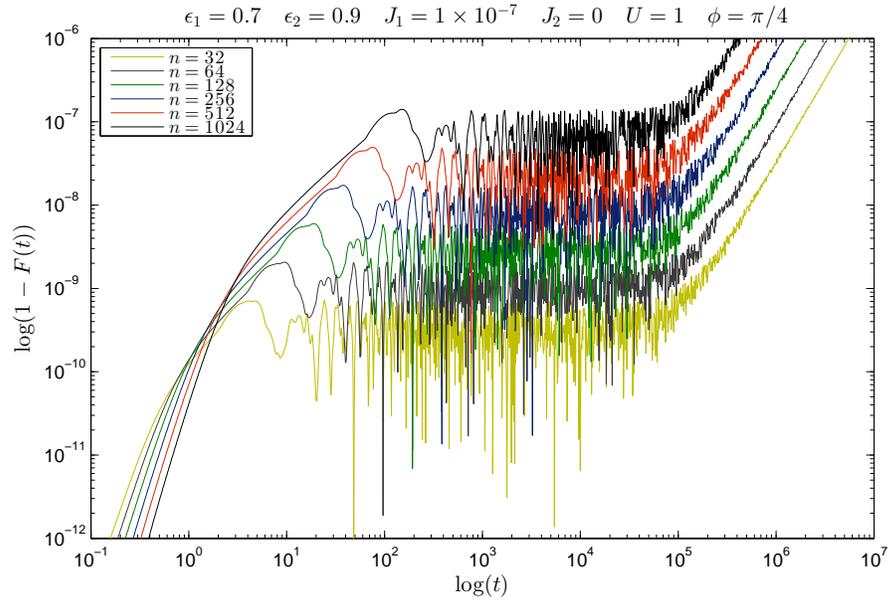


Figura 4.7: Decaimiento de la fidelidad para distintos valores del número de bosones del sistema.

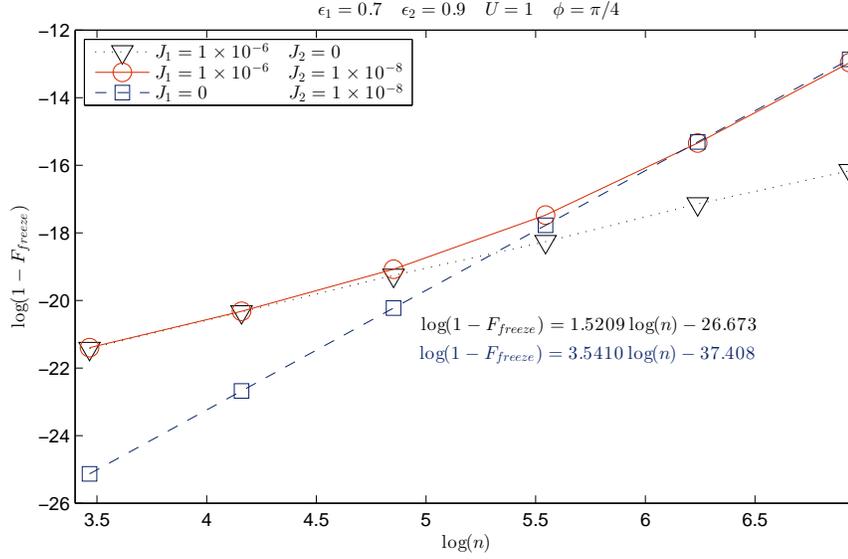


Figura 4.8: *Congelamiento de la fidelidad para distintos valores de n*

De la figura (4.8) vemos que el congelamiento de la fidelidad se ve afectado por la presencia de términos en el tunelaje de una o dos partículas. Esto puede resumirse de la siguiente manera

$$1 - F_{freeze} \propto n^{3/2} \quad \rightarrow \quad J_1 \neq 0 ; J_2 = 0 \quad (4.3a)$$

$$1 - F_{freeze} \propto n^{7/2} \quad \rightarrow \quad J_1 = 0 ; J_2 \neq 0 \quad (4.3b)$$

Es importante resaltar que el comportamiento de F_{freeze} en términos de n cambia de ser dominado por J_1 (n pequeña) a ser dominado por J_2 (n más grande). Este tipo de cambios podrían ser medidos experimentalmente.

Finalmente, en la figura (4.9) vemos cómo cambia el *ending time* como función de J_1 y J_2 . Esto nos permite ver cómo escala t_e como función de J_r , ver figura (4.10). Una vez hecho el ajuste, podemos apreciar que

$$t_e \propto J_r^{-1} \quad (4.4)$$

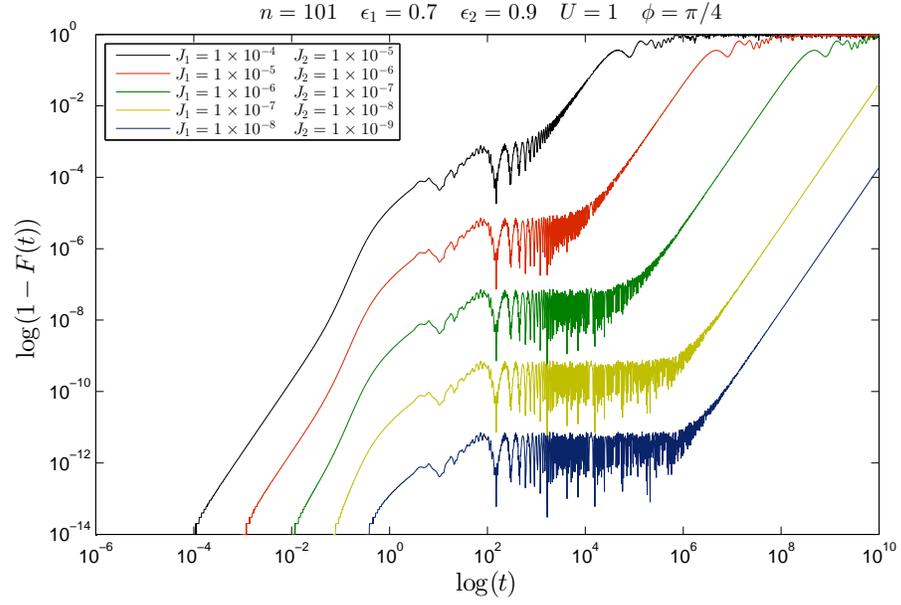


Figura 4.9: Decaimiento de la fidelidad para distintos valores de J_1 y J_2 .

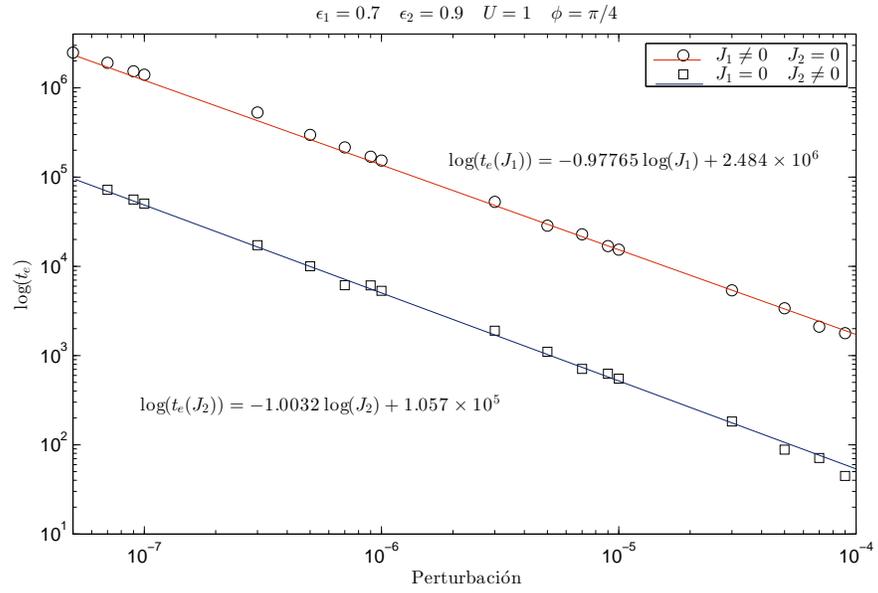


Figura 4.10: Ending time como función de J_r

4.1.2. Espectro degenerado. (Caso 2)

Siguiendo el mismo esquema de la sección anterior, veremos como se comporta F_{freeze} como función de la perturbación, el número de bosones y el *ending time*, como función de J_r .

Lo primero que vemos es que cuando el espectro presenta la degeneración como la mostrada en la figura (4.4) b, el decaimiento de la fidelidad puede depender de si el número de bosones del sistema es par o impar. En la figura (4.11) vemos que el sistema se comporta cualitativamente igual, tanto para n par como para n impar, cuando hay términos de tunelaje de uno y dos bosones simultáneamente (líneas rojas)

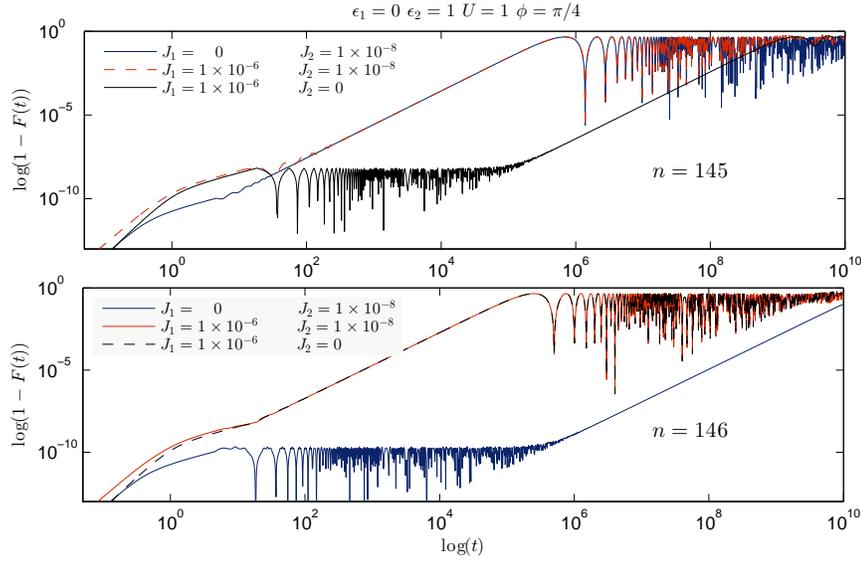
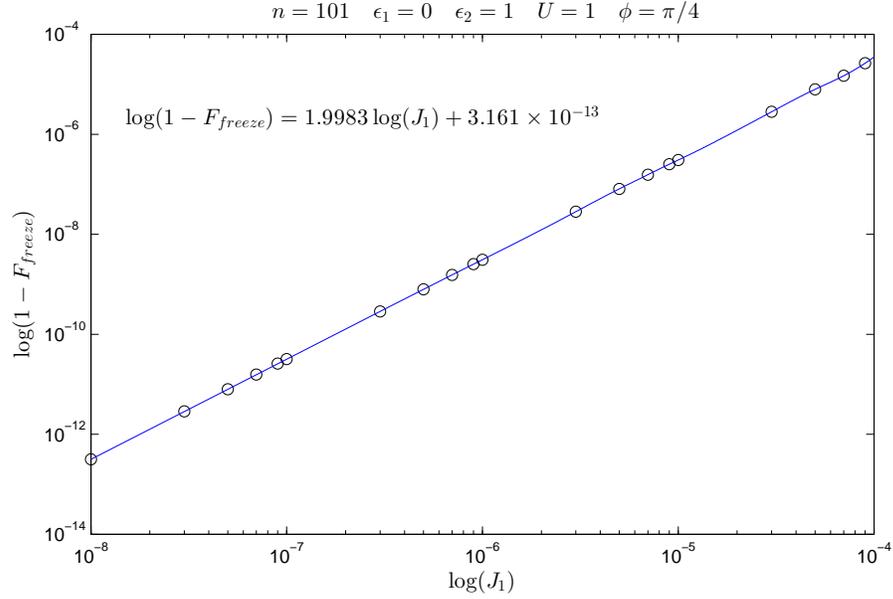


Figura 4.11: *Decaimiento de la fidelidad para distintos valores de J_r y n . Número de bosones impar (arriba). Número de bosones par (abajo)*

Por otro lado, cuando n es impar, el tunelamiento de dos partículas es más relevante que el tunelamiento de una sola. Esto se sigue tras observar que las líneas roja y azul son esencialmente la misma. Lo cual indica que el sistema se ve más influenciado por la interacción de dos cuerpos. Cuando n es par, la situación es justamente la opuesta, es decir es ahora la interacción de uno cuerpo la que es más relevante que la de dos cuerpos.

Figura 4.12: F_{freeze} como función de J_1

Si tomamos un número impar de bosones ($n = 101$), podemos estimar el congelamiento de la fidelidad y encontrar cómo escala con respecto a la perturbación (J_1 para este caso). En la figura (4.12) el ajuste nos permite afirmar

$$1 - F_{freeze} \propto J_1^2 \quad (4.5)$$

Resultados equivalentes a (4.5) se encuentran si tomamos n par.

En cuanto a la relación entre el número de partículas y el congelamiento de la fidelidad podemos ver que si hacemos J_1 , y J_2 diferentes de cero, el decaimiento de la fidelidad se ve cómo en la figura (4.13). En esta figura hemos tomado a n par. Es importante notar que encuentra un resultado similar al tomar n impar.

Ahora, podemos ver cómo escalan n (par) y F_{freeze} entre si, figura (4.14) (cuadrados negros). Como es de esperarse el comportamiento de n par, como función de F_{freeze} es similar si hacemos o no $J_2 = 0$. Esto lo podemos ver claramente en la figura (4.14) (círculos rojos).

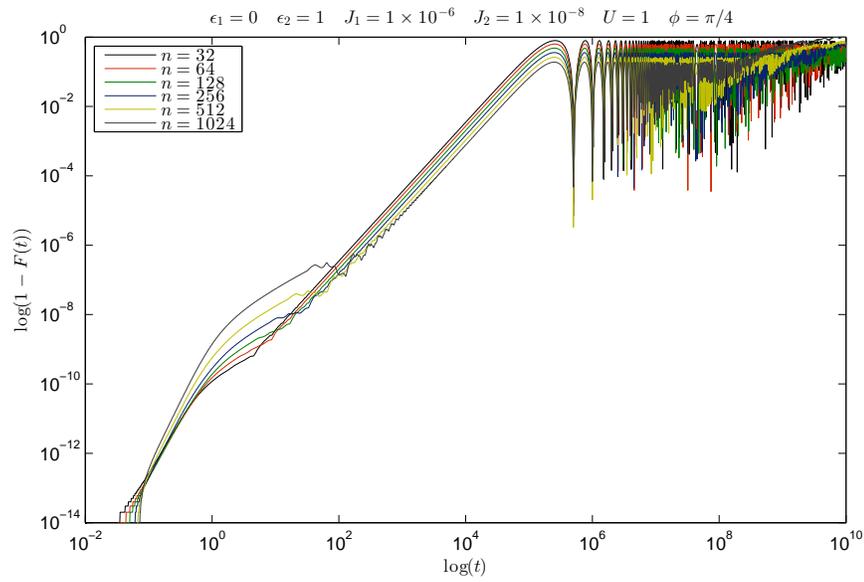


Figura 4.13: *Fidelidad para distinto número de partículas*

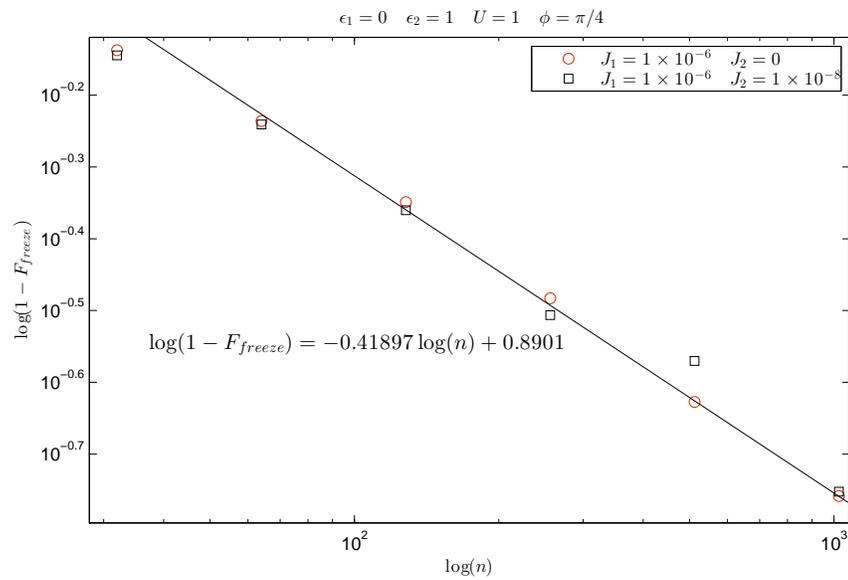


Figura 4.14: $1 - F_{freeze}$ como función del número de partículas

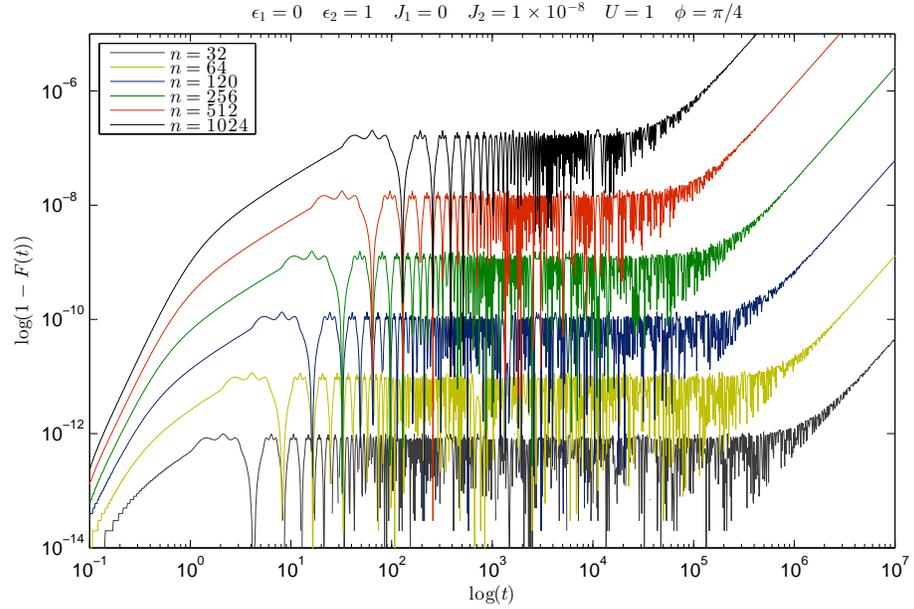


Figura 4.15: Decaimiento de la fidelidad como función del tiempo para $J_1 = 0$

Por otro lado, cuando $J_1 = 0$ y n es par, la fidelidad se congela para valores más pequeños en comparación con la figura (4.13).

Esto se puede apreciar en la figura (4.15) donde podemos ver a la fidelidad como función de t para $J_1 = 0$ y $J_2 = 1 \times 10^{-8}$. De esta figura podemos estimar F_{freeze} y hallar el escalamiento de esta cantidad como función de el número de bosones, ver figura (4.16).

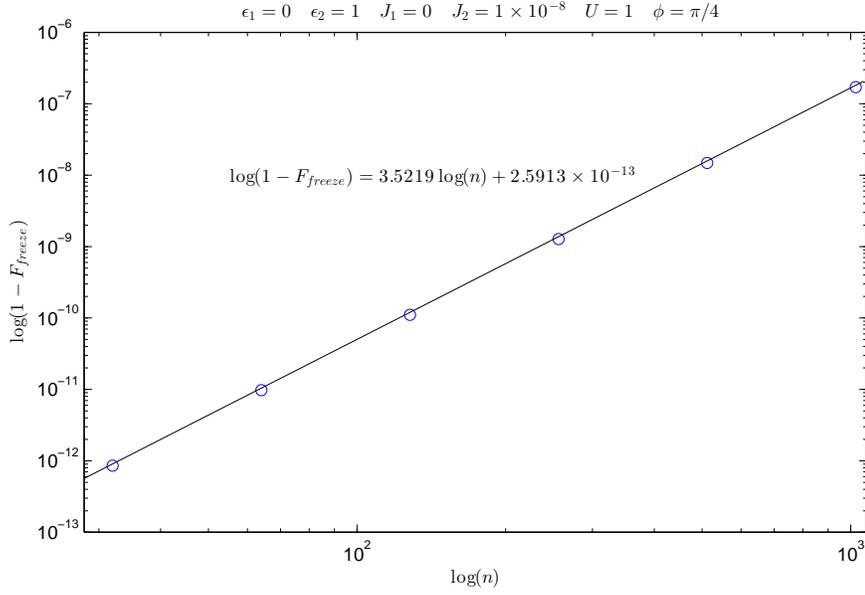


Figura 4.16: $1 - F_{freeze}$ como función de n

Una vez hechos los respectivos ajustes para las figuras (4.14) y (4.16), vemos que

$$1 - F_{freeze} \propto n^{-2/5} \quad \rightarrow \quad J_1 \neq 0 \quad ; \quad J_2 \neq 0 \quad (4.6a)$$

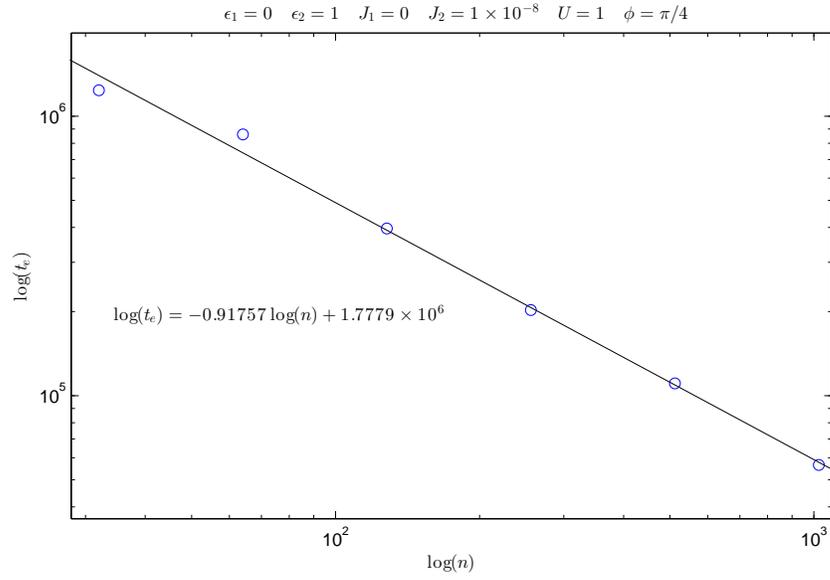
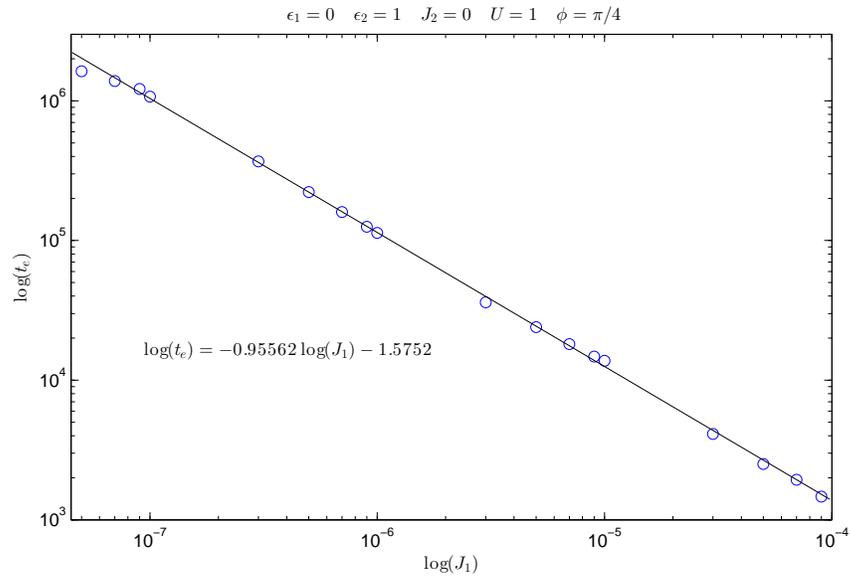
$$1 - F_{freeze} \propto n^{7/2} \quad \rightarrow \quad J_1 = 0 \quad ; \quad J_2 \neq 0 \quad (4.6b)$$

También de la figura (4.15), vemos que el *ending time* toma diferentes valores al cambiar al número de bosones; por lo tanto podemos indagar sobre como escala t_e y n . Esto se ilustra en la figura (4.17).

Finalmente, de la figura (4.18) podemos ver como cambia el *ending time* como función de J_1 . Estos resultados los podemos resumir como sigue

$$t_e \propto J_1^{-1} \quad (4.7)$$

$$t_e \propto n^{-1} \quad (4.8)$$

Figura 4.17: t_e como función de n Figura 4.18: t_e como función de J_1

4.1.3. Espectro degenerado (Caso 3)

Cuando el espectro es como el de la figura (4.4) c), tenemos el caso opuesto al descrito en la anterior sección. Ahora los papeles se invierten y para cuando n es impar, la interacción de dos cuerpos parece ser más importante que la de un cuerpo; mientras que para n par es la interacción de un cuerpo la más relevante, tal y como se aprecia en la figura (4.19).

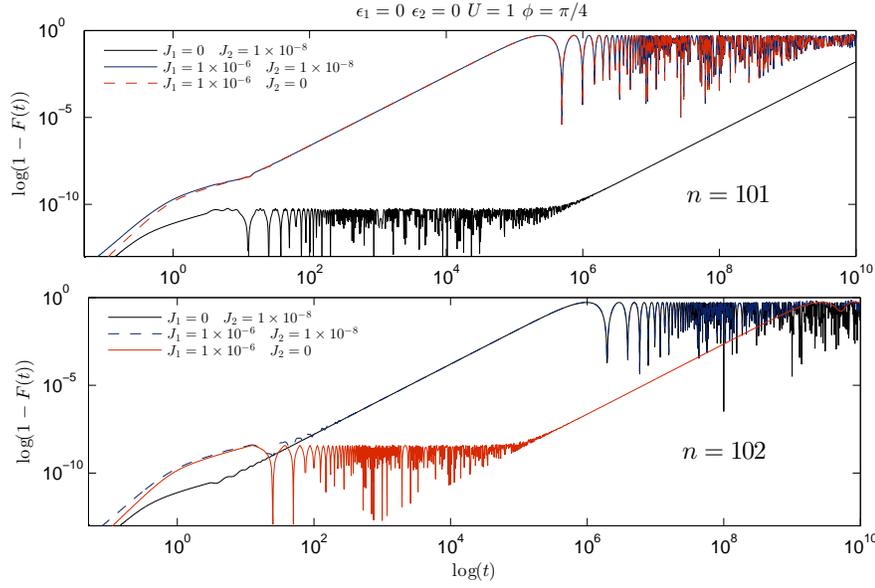


Figura 4.19: *Decaimiento de la fidelidad para distintos valores de J_r y n . Número de bosones impar (arriba). Número de bosones par (abajo)*

Si hacemos un análisis similar al de la sección anterior, es posible ver como escala F_{freeze} como función de J_2 . Figura (4.21). De esta gráfica es posible concluir que

$$1 - F_{freeze} \propto J_2^2 \quad (4.9)$$

Luego, podemos obtener el congelamiento de la fidelidad en función de n . Figura (4.22)

$$1 - F_{freeze} \propto n^{3/2} \quad (4.10)$$

Finalmente tenemos el *ending time* en función de la perturbación J_2 . Figura (4.23). De esta figura vemos

$$t_e \propto J_2^{-1} \quad (4.11)$$

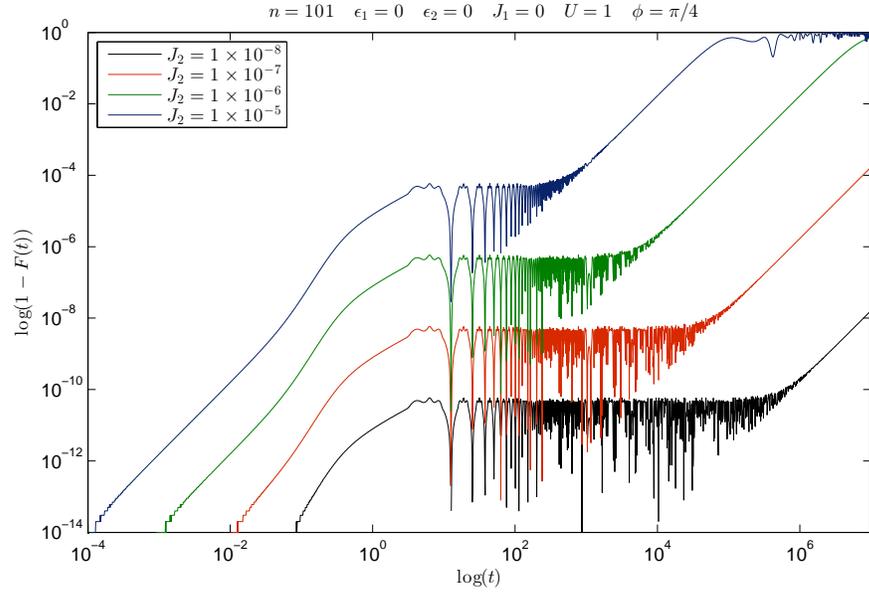


Figura 4.20: Decaimiento de la fidelidad para distintos valores de J_2

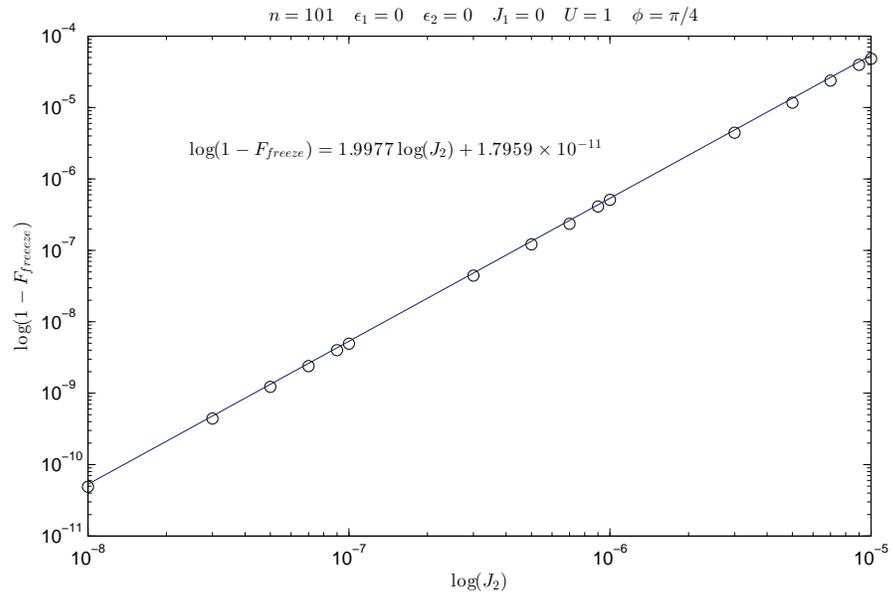


Figura 4.21: Congelamiento de la fidelidad para distintos valores de J_2

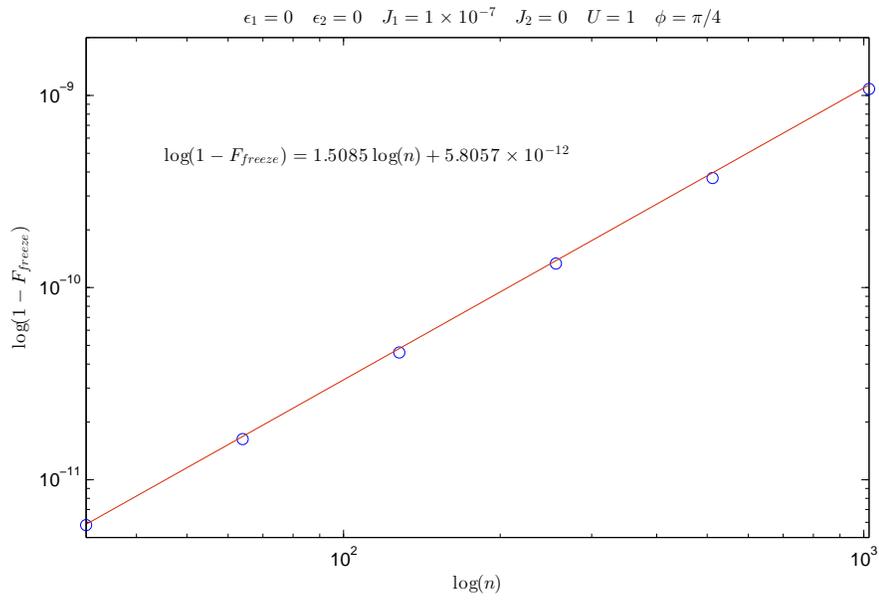


Figura 4.22: $1 - F_{freeze}$ como función de n

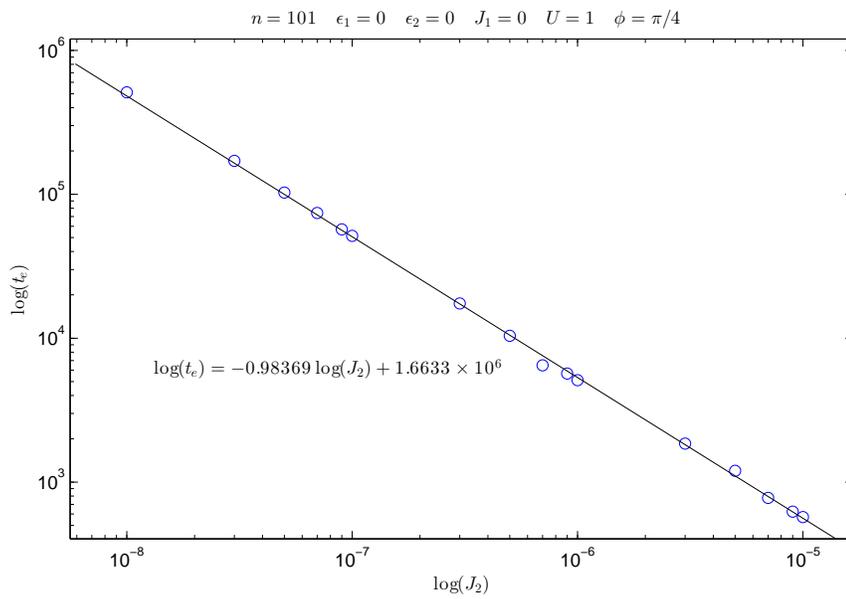


Figura 4.23: t_e como función de J_2

Estos resultados son similares a los obtenidos para el caso 2 como se puede ver al comparar las ecuación (4.5) con (4.9), y (4.7) con (4.11). Esto es debido a que existe una ambigüedad al distinguir el caso 2 del caso 3. Dicha ambigüedad es debida al hecho de que elegimos a los parametros ϵ_1 y ϵ_2 para cambiar la configuración del espectro (recordar ecuación (3.21) del capítulo 3). Bien podrían haberse dejado fija la altura de los pozos y distinguir las diferentes configuraciones del espectro mediante n par o impar, lo cual nos habría llevado a los mismos resultados.

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES

En este trabajo calculamos expresiones para la fidelidad, tanto para el modelo de los ensembles anidados de k cuerpos BEE(k), como para el modelo de Bose-Hubbard.

En el capítulo 2 obtuvimos la fidelidad en el modelo de los ensembles anidados de k cuerpos BEE(k), promediada sobre el ensemble a cuarto orden en la perturbación. De este cálculo fue posible obtener una expresión analítica para *ending time*, ecuación (2.33)

$$t_e = \frac{\sqrt{2}}{\omega_k \lambda \sigma_\beta} \left[\frac{\sum_{\mu=0}^n \sum_{\rho=0}^n \frac{\mathcal{G}_{\mu,\rho}^{(k)}}{(\mu-\rho)^2}}{\left(\sum_{\rho=0}^n \frac{\mathcal{G}_{\mu,\rho}^{(k)}}{(\mu-\rho)} \right)^2} \right]^{1/2} \quad \text{donde } \mu \neq \rho \quad (5.1)$$

Esta expresión fue contrastada con simulaciones numéricas, ver figura (2.5), en donde puede notarse que el acuerdo entre (5.1) y la simulación numérica es excelente. Dicho de otra manera, hemos encontrado la constante de proporcionalidad de la relación $t_e \propto \lambda^{-1}$, la cual había sido observada numéricamente en [2].

En el capítulo 3 se obtuvieron expresiones para la fidelidad en el modelo de Bose-Hubbard. Dichas expresiones fueron comparadas con simulaciones numéricas, siendo estas estimaciones buenas cuando ninguna de las frecuencias definidas en (3.11) se anula, casos 1 y 2.

En el capítulo 4 se usaron los estados coherentes para hacer simulaciones numéricas que nos permitieron obtener algunos resultados interesantes.

Primero se investigó como cambia la fidelidad para las distintas fases y para cada uno de los casos (no degenerado y degenerados); encontrándose que los valores para el congelamiento de la fidelidad y el *ending time* no presentan cambios de importancia a medida que variamos el valor de la fase realiva ϕ .

También observamos como numéricamente, figura (4.8), hay un cambio en la pendiente de la gráfica para el congelamiento de la fidelidad como función del número de partículas. Dicho cambio de la pendiente nos permite ver claramente como el comportamiento de el congelamiento de la fidelidad se ve influenciado por la presencia de interacciones que mueven simultáneamente dos cuerpos.

De igual forma encontramos distintos escalamientos entre los parámetros del modelo. Dichos escalamientos necesitan ser corroborados por una teoría de perturbaciones que incluya de forma efectiva degeneración del espectro .

De esta última conclusión podemos inferir que el paso a seguir es el de implementar dicha teoría de perturbaciones y así poder mejorar las expresiones para el decaimiento de la fidelidad para que sean correctas a tiempos más largos.

APÉNDICE A

EXPRESIONES PARA LA AMPLITUD DE LA FIDELIDAD

En el presente apéndice vamos a escribir las expresiones para la amplitud de la fidelidad, que por ser extensas, no incluimos en los respectivos capítulos.

A.1. Amplitud de la fidelidad para BEE(k)

La amplitud de la fidelidad para el modelo de los ensembles anidados puede escribirse en forma general como (2.29)

$$\begin{aligned}
 \overline{f_{\beta,\lambda}^{(4)}(t)} &= 1 - \frac{(\omega_k \lambda \sigma_\beta)^2}{N} \sum_{\mu,\rho} \mathcal{G}_{\mu,\rho}^{(k)} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 (e^{2\pi i[(\mu-\rho)(t_1-t_2)])}) \\
 &- \frac{(\omega_k \lambda \sigma_\beta)^4}{2N} \sum_{\mu,\rho} \mathcal{G}_{\mu,\rho}^{(k)} \mathcal{B}_{\mu,\rho}^{(k)} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 (e^{2\pi i[(\mu-\rho)(t_1-t_2)])}) (t_1 - t_2)^2 \\
 &+ \frac{(\omega_k \lambda \sigma_\beta)^4}{N} \sum_{\mu,\rho,\tau} \mathcal{G}_{\mu,\rho}^{(k)} \mathcal{G}_{\mu,\tau}^{(k)} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 \int_0^{t_3} dt_4 (e^{2\pi i[(\mu-\rho)(t_1-t_2)+(\nu-\tau)(t_3-t_4)])}) \\
 &+ \frac{(\omega_k \lambda \sigma_\beta)^4}{N} \sum_{\mu,\rho,\sigma} \mathcal{G}_{\mu,\rho}^{(k)} \mathcal{G}_{\rho,\sigma}^{(k)} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 \int_0^{t_3} dt_4 (e^{2\pi i[(\mu-\rho)(t_1-t_4)+(\rho-\sigma)(t_3-t_4)])}) \\
 &+ \frac{(\omega_k \lambda \sigma_\beta)^4}{N} \sum_{\mu,\rho,\sigma,\tau} \mathcal{D}_{\rho,\sigma,\tau}^{(k)} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 \int_0^{t_3} dt_4 (e^{2\pi i[(\mu-\rho)t_1+(\rho-\sigma)t_2+(\sigma-\tau)t_3+(\tau-\mu)t_4]}),
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

Haciendo las integrales en (A.1), y recordando las definiciones de $\mathcal{G}_{\mu,\rho}^{(k)}$ (2.18), $\mathcal{D}_{\rho,\sigma,\tau}^{(k)}$ (2.28) y $\mathcal{B}_{\mu,\rho}^{(k)}$ (2.30), podemos escribir la amplitud de la fidelidad a

cuarto orden como sigue:

$$\overline{f_{\beta,\lambda}^{(4)}}(t) = 1 - \frac{(\omega_k \lambda \sigma_\beta)^2}{N} \mathcal{A} + \frac{(\omega_k \lambda \sigma_\beta)^4}{N} \left[-\frac{\mathcal{B}}{2} + \mathcal{C} + \mathcal{D} + \mathcal{E} \right], \quad (\text{A.2})$$

donde

$$\mathcal{A} = \sum_{\mu,\rho=0}^n \frac{\mathcal{G}_{\mu,\rho}^{(k)}}{[2\pi(\mu-\rho)]^2} \left[1 + 2\pi i(\mu-\rho)t - e^{2\pi i[(\mu-\rho)t]} \right] \quad (\text{A.3})$$

$$\mathcal{B} = \sum_{\mu,\rho=0}^n \frac{\mathcal{G}_{\mu,\rho}^{(k)} \mathcal{B}_{\mu,\rho}^{(k)}}{[2\pi(\mu-\rho)]^2} \left[6(1 - e^{2\pi i[(\mu-\rho)t]}) \right. \\ \left. + 2i(2\pi)(\mu-\rho)t(1 + 2e^{2\pi i[(\mu-\rho)t]}) + [2\pi(\mu-\rho)t]^2 e^{2\pi i[(\mu-\rho)t]} \right] \quad (\text{A.4})$$

$$\mathcal{C} = \sum_{\mu,\rho,\tau=0}^n \mathcal{G}_{\mu,\rho}^{(k)} \mathcal{G}_{\mu,\tau}^{(k)} \left[\frac{1 - e^{2\pi i[(\mu-\rho)t]}}{(2\pi)^4(\mu-\rho)^3(\rho-\tau)} - \frac{1 - e^{2\pi i[(\mu-\rho)t]}}{(2\pi)^4(\mu-\tau)^3(\rho-\tau)} \right. \\ \left. + \frac{(2\mu-\rho-\tau)it}{(2\pi)^3(\mu-\rho)^2(\mu-\tau)^2} - \frac{t^2}{2(2\pi)^2(\mu-\rho)(\mu-\tau)} \right] \quad (\text{A.5})$$

$$\mathcal{D} = \sum_{\mu,\rho,\sigma=0}^n \mathcal{G}_{\mu,\rho}^{(k)} \mathcal{G}_{\rho,\sigma}^{(k)} \left[\frac{1 - e^{2\pi i[(\mu-\rho)t]}(\sigma-\rho)}{(2\pi)^4(\mu-\rho)^3(\mu-\sigma)^2} - \frac{1 - e^{2\pi i[(2\mu-\rho-\sigma)t]}}{(2\pi)^4(\mu-\rho)^2(\rho-2\mu+\sigma)^2} \right. \\ \left. - \frac{1 + e^{2\pi i[(\mu-\rho)t]}[i(2\pi)(\mu-\rho)t - 1]}{(2\pi)^4(\mu-\rho)^3(\mu-\sigma)} + \frac{it}{(2\pi)^3(\mu-\rho)^2(\rho-2\mu+\sigma)} \right] \quad (\text{A.6})$$

$$\mathcal{E} = \sum_{\mu,\rho,\sigma,\tau=0}^n \mathcal{D}_{\rho,\sigma,\tau}^{(k)} \left[\frac{1 - e^{2\pi i[(\mu-\sigma)t]}}{(2\pi)^4(\mu-\sigma)^2(\rho-\sigma)(\sigma-\tau)} - \frac{1 - e^{2\pi i[(\mu-\rho)t]}}{(2\pi)^4(\mu-\rho)^2(\rho-\sigma)(\sigma-\tau)} \right. \\ \left. - \frac{1 - e^{2\pi i[(\mu-\tau)t]}}{(2\pi)^4(\mu-\tau)^2(\rho-\tau)(\sigma-\tau)} - \frac{it}{(2\pi)^3(\mu-\tau)(\mu-\rho)(\mu-\sigma)} \right] \quad (\text{A.7})$$

A.2. Amplitud de la fidelidad para Bose-Hubbard

Para el modelo de Bose-Hubbard, primero escribimos la amplitud de la fidelidad a cuarto orden, tomando como estados iniciales a eigenestados de $\hat{\mathcal{H}}_0$

como

$$f_{J_r}^{(4)}(t) = 1 + f_2 + f_4, \quad (\text{A.8})$$

donde

$$f_2 = [|g_{m,m+1}^{(r)}|^2 I^{(2)}[t; \Omega_{m,m+1}, \Omega_{m+1,m}] + |g_{m,m-1}^{(r)}|^2 I^{(2)}[t; \Omega_{m,m-1}, \Omega_{m-1,m}]], \quad (\text{A.9})$$

$$f_4 = [|g_{m,m-1}|^2 |g_{m,m+1}|^2 I^{(4)}[t; \Omega_{m,m-1}, \Omega_{m-1,m}, \Omega_{m,m+1}, \Omega_{m+1,m}] + |g_{m,m+1}|^2 |g_{m+1,m+2}|^2 I^{(4)}[t; \Omega_{m,m+1}, \Omega_{m+1,m+2}, \Omega_{m+2,m+1}, \Omega_{m+1,m}] + |g_{m,m-1}|^2 |g_{m,m-1}|^2 I^{(4)}[t; \Omega_{m,m-1}, \Omega_{m-1,m}, \Omega_{m,m-1}, \Omega_{m-1,m}] + |g_{m,m+1}|^2 |g_{m,m+1}|^2 I^{(4)}[t; \Omega_{m,m+1}, \Omega_{m+1,m}, \Omega_{m,m+1}, \Omega_{m+1,m}] + |g_{m,m-1}|^2 |g_{m-1,m-2}|^2 I^{(4)}[t; \Omega_{m,m-1}, \Omega_{m-1,m-2}, \Omega_{m-2,m-1}, \Omega_{m-1,m}] + |g_{m,m+1}|^2 |g_{m,m-1}|^2 I^{(4)}[t; \Omega_{m,m+1}, \Omega_{m+1,m}, \Omega_{m,m-1}, \Omega_{m-1,m}]] \quad (\text{A.10})$$

Recordando las definiciones para $I^{(2)}[\dots]$, (3.8) y $I^{(4)}[\dots]$, (3.18), y usando la siguiente convención

$$\begin{aligned} \Omega_1 &\equiv \Omega_{m,m+1} \\ \Omega_2 &\equiv \Omega_{m,m-1} \\ \Omega_3 &\equiv \Omega_{m+1,m+2} \\ \Omega_4 &\equiv \Omega_{m-1,m-2} \end{aligned}$$

tenemos entonces que la amplitud de la fidelidad cuando todas las frecuencias son diferentes de cero es de la forma

$$f_{J_r}^{(4)}(t) = 1 - A + [B + C + D + E + G], \quad (\text{A.11})$$

donde

$$A = \frac{g_1^2}{\Omega_1^2} [1 + ia\Omega_1 t - e^{ia\Omega_1 t}] + \frac{g_2^2}{\Omega_2^2} [1 + ia\Omega_2 t - e^{ia\Omega_2 t}] \quad (\text{A.12})$$

$$B = 2 \frac{g_1^2 g_2^2}{\Omega_1^3 \Omega_2^3 (\Omega_1 - \Omega_2)} \left[\Omega_1^3 (1 - e^{ia\Omega_2 t}) - \Omega_2^3 (1 - e^{ia\Omega_1 t}) - iat(\Omega_1 \Omega_2^3 - \Omega_1^3 \Omega_2) - \frac{a^2 t^2}{2} (\Omega_1^2 \Omega_2^2 (\Omega_1 - \Omega_2)) \right] \quad (\text{A.13})$$

$$\begin{aligned}
C = \frac{g_1^2 g_3^2}{\Omega_1^3 \Omega_3^2 (\Omega_1 + \Omega_3)^2} & \left[\Omega_1^3 (e^{ia(\Omega_1 + \Omega_3)t} - e^{ia\Omega_1 t}) \right. \\
& - \Omega_3^3 (ia\Omega_1 t (1 + e^{ia\Omega_1 t}) + 2(1 - e^{ia\Omega_1 t})) \\
& \left. - \Omega_3^2 (3\Omega_1 (1 - e^{ia\Omega_1 t}) + ia^2 \Omega_1^2 t (1 + 2e^{ia\Omega_1 t})) - iat \Omega_1^3 \Omega_3 e^{ia\Omega_1 t} \right] \quad (\text{A.14})
\end{aligned}$$

$$D = \frac{g_1^4}{\Omega_1^4} \left[3(1 - e^{ia\Omega_1 t}) + ia\Omega_1 t (2 + e^{ia\Omega_1 t}) - \frac{1}{2} a^2 \Omega_1^2 t^2 \right] \quad (\text{A.15})$$

$$E = \frac{g_2^4}{\Omega_2^4} \left[3(1 - e^{ia\Omega_2 t}) + ia\Omega_2 t (2 + e^{ia\Omega_2 t}) - \frac{1}{2} a^2 \Omega_2^2 t^2 \right] \quad (\text{A.16})$$

$$\begin{aligned}
G = \frac{g_2^2 g_4^2}{\Omega_2^3 \Omega_4^2 (\Omega_2 + \Omega_4)^2} & \left[\Omega_2^3 (e^{ia(\Omega_2 + \Omega_4)t} - e^{ia\Omega_2 t}) \right. \\
& - \Omega_4^3 (ia\Omega_2 t (1 + e^{ia\Omega_2 t}) + 2(1 - e^{ia\Omega_2 t})) \\
& \left. - \Omega_4^2 (3\Omega_2 (1 - e^{ia\Omega_2 t}) + ia^2 \Omega_2^2 t (1 + 2e^{ia\Omega_2 t})) - iat \Omega_2^3 \Omega_4 e^{ia\Omega_2 t} \right] \quad (\text{A.17})
\end{aligned}$$

- [1] T. Gorin, T. Prosen, T. H. Seligman, M. Žnidarič, *Dynamics of Loschmidt echoes and fidelity decay*, Phys. Rep **435**, 33 (2006).
- [2] L. Benet, S. Hernández-Quiroz, and T. H. Seligman, *Fidelity decay in interacting two-level boson systems: Freezing and revivals*, Phys. Rev. E **83**, 056216 (2011).
- [3] I. Pizorn, T. Prosen, T. H. Seligman *Loschmidt echoes in two-body random matrix ensembles*, Phys. Rev. B **76**, 035122 (2007).
- [4] L. Benet, C. Jung, and F. Leyvraz, *Integrability of interacting two-level boson systems*, J. Phys. A: Math. Gen. **36**, L217 (2003).
- [5] T. Prosen, M. Žnidarič, *Quantum Freeze of Fidelity Decay for Chaotic Dynamics*, Phys. Rev. Lett. **94**, 044101 (2005).
- [6] T. Prosen, M. Žnidarič, *Quantum freeze of fidelity decay for a class of integrable dynamics*, New J. Phys. **5**, 109 (2003).
- [7] P. Buonsante and A. Vezzani, *Ground-State Fidelity and Bipartite Entanglement in the Bose-Hubbard Model*, PRL. **98**, 110601 (2007).
- [8] J. D. Bodyfelt, M. Hiller, and T. Kottos, *Engineering fidelity echoes in Bose-Hubbard Hamiltonians*, EPL, **78** 50003, (2007).
- [9] L. Benet, S. Hernández-Quiroz and T. H. Seligman, *Fidelity Decay of the two-level Bosonic Embedded Ensembles of Random Matrices* AIP. Conf. Proc. **1323**, 6 (2010).

- [10] K.K.Mon and J.B. French, *Statistical properties of many-particle spectra* Ann. Phys. (NY) **95**, 90 (1975)
- [11] L. Benet, and H.A. Weidenmüller, *Review of the k-body embedded ensembles of Gaussian random matrices*. Journal of Physics A: Mathematical and General, **36**, 3569–3593, (2003).
- [12] T. Asaga, L. Benet, T. Rupp, and H. A. Weidenmüller, *Spectral Properties of the k-Body Embedded Gaussian Ensembles of Random Matrices for Bosons*, Ann. Phys. (N.Y.) **298**, 229 (2002).
- [13] M. Greiner, O. Mandel, T. Esslinger, T. W. Hänsch & I. Bloch, *Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms*, Nature, **415**, 39-44, (2002).
- [14] S. Zöllner, H.D. Meyer, and P. Schmelcher *Few-Boson Dynamics in Double Wells: From Single-Atom to Correlated Pair Tunneling*. *Physical Review Letters*, **100**, 040401, (2008)
- [15] D. Jaksch, and P. Zoller, *The cold atom Hubbard toolbox*, Annals of Physics, **315**, 52, (2005).
- [16] R. Gati, M.K. Oberthaler, *A bosonic Josephson junction*, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys, **40**, R61, (2007).
- [17] S. Longhi, *Optical realization of the two-site Bose–Hubbard model in waveguide lattices*, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys, **44**, 051001, (2011).
- [18] C. Gross, T. Zibold, E. Nicklas, J. Esteve and M. K. Oberthaler, *Non-linear atom interferometer surpasses classical precision limit*, Nature **464**, 1165-1169, (2010).
- [19] Wei-Min Zhang, Da Hsuan Fengt and Robert Gilmore, *Coherent states: Theory and some applications*, Review of Modern Physics. **62**, 4 (1990).