



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

NÚMERO SEMIDOMINANTE COLOREABLE EN
DIGRÁFICAS.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MATEMÁTICO

PRESENTA:

GERMÁN BENÍTEZ BOBADILLA

DIRECTOR DE TESIS:

MAT. LAURA PASTRANA RAMÍREZ



CIUDAD DE MÉXICO

ABRIL, 2014



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Número Semidominante Coloreable en Digráficas.

por

Germán Benítez Bobadilla

Tesis presentada para obtener el grado de

Matemático

en el

FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Ciudad de México. Abril, 2014

Hoja de datos del jurado

1. Datos del alumno

Benítez
Bobadilla
Germán
62 80 85 26
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
306511617

2. Datos del tutor

Mat.
Pastrana
Ramírez
Laura

3. Datos del sinodal 1

Dra.
Galeana
Sánchez
Hortensia

4. Datos del sinodal 2

Dra.
Sánchez
López
María del Rocío

5. Datos del sinodal 3

Dr.
Montellano
Ballesteros
Juan José

6. Datos del sinodal 4

M. en C.
López
Chávez
Gloria

7. Datos del trabajo escrito

Número Semidominante Coloreable
en Digráficas
106. p
2014

Índice general

1. Definiciones	6
1.1. Gráficas	6
1.2. Digráficas	10
1.3. Conjuntos absorbentes	16
2. Historia y Resultados Previos	21
2.1. Número Domático	21
3. Número Semidominante Coloreable	26
3.1. Definiciones	26
3.2. Número Semidominante Coloreable Interior en las Digráficas Completas, Bipartitas y Ciclos Dirigidos	27
3.3. Propiedades Básicas y Digráficas Transitivas	32
3.4. Digráficas Semidominantes Interiores Críticas	41
4. Número Semidominante Coloreable en el Producto de Dos Digráficas.	48
4.1. Definición y Propiedades Básicas	48
4.2. Número Semidominante Coloreable Interior en el Producto de Dos Digráficas . .	50
4.3. Número Semidominante Coloreable Interior en el Producto de Dos Ciclos Dirigidos	53
5. Número Semidominante Coloreable de $L(D)$, $S(D)$, $R(D)$, $Q(D)$ y $T(D)$	62
5.1. Definiciones y propiedades	63
5.2. Número Semidominante Coloreable de $L(D)$	69
5.3. Número Semidominante Coloreable de $S(D)$, $R(S)$, $Q(D)$ y $T(D)$	75
6. Coloraciones Cuasiabsorbentes, Coloraciones k-absorbentes y Cuasinúcleos Ajenos de $L(D)$, $S(D)$, $R(D)$, $Q(D)$, $T(D)$	79
6.1. Coloraciones Cuasiabsorbentes	80
6.1.1. Coloraciones Cuasiabsorbentes en $L(D)$	80
6.1.2. Coloraciones Cuasiabsorbentes de $S(D)$, $R(S)$, $Q(D)$ y $T(D)$	82
6.2. Cuasinúcleos ajenos	84
6.2.1. Cuasinúcleos Ajenos en $L(D)$	86
6.2.2. Cuasinúcleos Ajenos en $S(D)$, $R(D)$, $Q(D)$ y $T(D)$	88
6.3. Coloraciones k -absorbentes	94
6.3.1. Coloraciones 3-absorbentes en $S(D)$	96
6.3.2. Coloraciones $(k - 1)$ -absorbentes	98

6.3.3. Coloraciones k -absorbentes en $S^k(D)$, $R^k(D)$, $Q^k(D)$ y $T^k(D)$	100
7. Conclusiones	104
Bibliografía	105

Introducción

La ciudad de Kaliningrado, que en el siglo XVIII se llamaba ciudad de Königsberg, es atravesada por el río Pregel, este río tiene dos islas, la más pequeña se llama la isla Kneiphof. En el siglo XVIII había siete puentes que comunicaban a las islas y el resto de la ciudad. En aquel tiempo los habitantes de la ciudad se preguntaban si una persona podía recorrer los siete puentes pasando una sola vez por cada uno, con la condición de regresar al punto de salida. Fue el matemático Leonhard Euler [1] quien le dio solución al dilema. Modeló el problema con una representación gráfica de puntos y líneas, cada punto representaba un pedazo de tierra y una línea unía dos puntos si existía un puente entre ellas. Así fue como surgió la Teoría de Gráficas. A los puntos se le llamó vértices y a las líneas que unen a los vértices, aristas. Con la idea anterior definimos a una gráfica G , como una pareja ordenada $G = (V(G), A(G))$, donde $V(G)$ es un conjunto finito de objetos, no vacío y $A(G) \subseteq \{A \subseteq V(G) \mid |A| = 2\}$. Su representación gráfica, guarda la misma idea dada por Euler. Estos objetos matemáticos, desde su inicio han tenido un gran vínculo con cosas cotidianas, como problemas de vigilancia; en una colonia se piensa poner cámaras en las esquinas para disminuir la delincuencia, en qué esquinas se deben de poner dichas cámaras tal que todas las cuadras queden bajo vigilancia. Si cada esquina de la colonia es un vértice y una línea une dos vértices si comparten una cuadra. Nuestro problema consiste en encontrar un conjunto de esquinas tal que todo esquina que no este en el conjunto, comparta la cuadra con una esquina dentro del conjunto, es decir, encontrar un conjunto de vértices tal que todo vértice fuera del conjunto comparta una arista con uno dentro. En gráficas a estos conjuntos se les llama dominantes.

Por otro lado, a mediados del siglo XIX, el inglés Francis Guthrie alumno del matemático Augustus De Morgan, se entretenía coloreando el mapa de Inglaterra utilizando la menor cantidad de colores posibles e intentó hacerlo con sólo cuatro colores sin conseguirlo, pero tenía la intuición de que se podía hacer. Así se formuló la siguiente pregunta: *Dado cualquier mapa geográfico con regiones continuas, éste puede ser coloreado con cuatro colores diferentes, de forma que no queden regiones adyacentes con el mismo color.* Siguiendo la idea de Euler, un mapa como el de la pregunta se puede modelar con una gráfica G donde cada vértice representa una región continua y una línea une dos vértices si tienen una frontera común. Nuestro problema se convierte en asignarle un color a cada vértice tal que los vértices que están unidos por una línea tengan color distinto, usando a lo más cuatro colores. Este problema fue abordado por muchos matemáticos, entre ellos A. B. Kempe, A. De Morgan, Hamilton y Cayley. En Teoría de Gráficas asignarle un color a cada vértice de G , usando a lo más m colores se le conoce como una m -coloración de los vértices de G . A una coloración le llamamos propia si es una m -coloración tal que dos vértices, que comparten una arista, no tienen asignado el mismo color. Al conjunto de vértices que tenga asignado el mismo color le llamaremos clase cromática, notemos que una m -coloración nos induce una partición de los vértices en m clases cromáticas. De la misma

manera, si tenemos $\{P_1, \dots, P_m\}$ una partición de los vértices de la gráfica en m conjuntos, y a los vértices del conjunto P_i les asignamos el color i , obtenemos una m -coloración de los vértices.

Uniendo los conceptos de conjuntos dominantes y coloración, podemos preguntarnos si existe una coloración tal que cada clase cromática sea un conjunto dominante. La idea de encontrar una coloración con la mayor cantidad de clases cromáticas, tal que cada clase sea un conjunto dominante, fue introducida por E. J. Cockayne y por S. T. Hedetniemi en [6] y en [5] como el *domatic number*. *Domatic* es una palabra inventada en inglés, que mezcla las palabras *dominating* y *chromatic*, es decir, combina los conceptos de dominación con el de coloración en gráficas.

La mayoría de los resultados en gráficas se encuentran en la tesis doctoral de Bohdan Zelinka [26], también fueron dados a conocer en su lectura en el Simposio de Teoría de Gráficas de 1990, realizado en la ciudad de Prachatice, República Checa. Dentro de estos resultados se encuentran cotas a dicho número, así como acercamientos en familias específicas de gráficas. De manera análoga, Zelinka combinó la idea de dichas coloraciones con el concepto de k -dominación en gráficas.

En 1984, Zelinka [30] definió un concepto análogo al número domático, para un tipo especial de gráficas: las gráficas dirigidas o digráficas. Una digráfica D es una pareja ordenada $D = (V(D), F(D))$, donde $V(D)$ es un conjunto finito de objetos, no vacío, y $F(D) \subseteq (V(D) \times V(D)) - W$, donde $W = \{(x, x) \mid x \in V(D)\}$. Para definir este concepto primero diremos que un conjunto $A \subseteq V(D)$ es semidominante interior si para todo $x \in V(D) - A$ existe $y \in A$ tal que $(x, y) \in F(D)$. Por otro lado, una m -coloración de los vértices de D es asignarle a cada vértice un color, usando a lo más m colores, llamaremos clase cromática a los conjuntos de vértices tal que sus elementos tienen asignados el mismo color. De esta manera, el concepto para digráficas, definido por Zelinka en [30], es el *número semidominante coloreable interior (exterior)*, que es el máximo número de clases que puede tener una partición tal que cada clase sea un conjunto semidominante interior (exterior), dando resultados básicos.

El objetivo de esta tesis es dar cotas al número semidominante coloreable de una digráfica, trasladar a digráficas resultados obtenidos con el número domático, calcular el número semidominante coloreable número para digráficas específicas y observar el comportamiento de las coloraciones semidominantes de D bajo operaciones a ésta.

El primer capítulo está centrado en definir los conceptos básicos de gráficas y digráficas. También se presenta el concepto de conjuntos absorbentes, los cuales forman parte central de este trabajo, así como se dan propiedades sobre estos conjuntos.

En el segundo capítulo se da una reseña histórica del número domático de una gráfica, lo que presenta una idea de como se ha abordado este tema en gráficas.

En el tercer capítulo se definen a las coloraciones semidominantes, junto con ellas las particiones semidominantes y por ende al número semidominante coloreable de una digráfica, estos conceptos fueron introducidos por Zelinka en 1984 [30]. Se comienza calculando dicho número para digráficas específicas, como las digráficas completas, ciclos dirigidos, digráficas transitivas y digráficas bipartitas. También se presentan resultados ya trabajados por Zelinka en [30],

como la construcción de un torneo que tenga número semidominante coloreable interior y exterior ya dados. Por otro lado, se introducen conceptos nuevos, análogos a los vistos en gráficas, como el de una *digráfica semidominante interior crítica*, de las cuales se da una caracterización.

En matemáticas, una forma de atacar los problemas es a través de operaciones o transformaciones. En el cuarto capítulo se habla del producto cartesiano de dos digráficas, que fue trabajado por María Kwasnik en 1982 [14] usando conjuntos absorbentes, donde demostró cual es la distancia entre dos vértices de esta nueva digráfica, y dio una condición para que dicho producto tuviera un (k, l) -núcleo, donde un (k, l) -núcleo es un conjunto k -independiente y l -absorbente. En este capítulo se demuestran propiedades básicas de este producto, así como se calcula el número semidominante coloreable interior, para el producto de dos trayectorias dirigidas y de dos ciclos dirigidos. También se da una cota inferior para dicho número a partir de los números semidominantes coloreables de las digráficas raíz.

En el quinto capítulo hablamos del número semidominante coloreable interior de digráficas muy específicas, así como de su relación con el número semidominante colorable interior de la digráfica raíz, lo que nos lleva a hablar de las coloraciones semidominantes.

La segunda sección está centrada en la digráfica de líneas, digráfica que ha sido estudiada por muchas personas, Matus Harminc demostró que: *Una digráfica D tiene núcleo si y sólo si $L(D)$ tiene núcleo* [12], donde un núcleo es un conjunto absorbente e independiente. Otras personas que han trabajado con esta digráfica, son Hortensia Galeana y Xueliang Li, en [8] que relacionan los seminúcleos de la digráfica raíz con los seminúcleos de la digráfica de líneas, dan una relación entre el número de (k, l) -núcleos de la digráfica original que es menor o igual que el número de $(2, l)$ -núcleos en su digráfica de líneas. También demuestran que si $L(D)$ tiene un (k, l) -núcleo, entonces D tiene un (k', l') -núcleo con $k' + l \leq k, l \leq l'$. En este capítulo se prueba que la digráfica de líneas tiene un número semidominante coloreable interior mayor o igual al número semidominante coloreable interior de la original, también se trabajan ejemplos de digráficas cuya desigualdad es estricta y una familia de digráficas donde se da la igualdad.

Dada una digráfica D , se puede definir a las digráficas subdivisión $S(D)$, $R(D)$, media $Q(D)$ y total $T(D)$, las cuales fueron trabajadas por Jerzy Topp en 1982 [20] donde encontró condiciones para que dichas digráficas tengan núcleos. La siguiente sección se centra en acotar el número semidominante colorable de las digráficas, anteriormente enunciadas, a partir de coloraciones semidominantes de la digráfica raíz.

Como veremos en el quinto capítulo, no siempre es posible encontrar una coloración semidominante interior con más de dos clases en las digráficas $S(D)$ y $R(D)$. Por lo que la primera parte de este capítulo se centrará en observar el comportamiento de las coloraciones semidominantes interiores de la digráfica raíz, no sólo en estas digráficas, también en $L(D)$, $Q(D)$ y $T(D)$.

De una coloración semidominante interior de una digráfica D , podemos obtener una coloración de los vértices de las digráficas, que hemos estado trabajando, en conjuntos cuasiabsorbentes. De donde, pudimos observar que si dichos conjuntos de la digráfica raíz son independientes, los inducidos en las digráficas también lo son, es decir, obtenemos conjuntos llamados cuasinúcleos. Lo que nos llevó a relacionar estas coloraciones con el trabajo del 2001 de Gutin,

Meng, Koh, Tay y Yeo [11]. Donde dan una caracterización de las digráficas, sin pozos, que tienen exactamente dos cuasinúcleos. En dicho trabajo concluyen con la siguiente conjetura: *Toda digráfica sin pozos, tiene dos cuasinúcleos ajenos.* Por lo que en la segunda sección se trabaja en esta conjetura. Mencionamos algunos de los resultados que forman parte de la historia de como se ha abordado esta conjetura. Y en la segunda sección daremos acercamientos a esta conjetura, en las digráficas ya trabajadas: $L(D)$, $S(D)$, $R(D)$, $Q(D)$ y $T(D)$.

En la última sección se presenta una generalización al número semidominante coloreable, la cual busca coloraciones de los vértices en clases k -absorbentes. Se trasladan resultados obtenidos en gráficas a digráficas, también se demuestra el resultado dado por María Kwasnik en 1981 [15], donde da una generalización del teorema de Richardson para digráficas fuertemente conexas, cuya demostración da implícitamente una partición de los vértices en k clases $(k - 1)$ -absorbentes. También se definen las digráficas $S^k(D)$, $R^k(D)$, $Q^k(D)$ y $T^k(D)$, trabajadas por Hortensia Galeana y Laura Pastrana en [9] donde demostraron que, para cualquier k , $S^k(D)$ tiene k -núcleo. Con ayuda de este resultado se da una partición en k conjuntos $(k - 1)$ -absorbentes de los vértices de $S^k(D)$, $R^k(D)$, $Q^k(D)$ y $T^k(D)$.

Capítulo 1

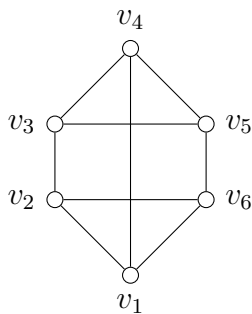
Definiciones

En este capítulo definiremos los conceptos con los que trabajaremos a lo largo de la tesis. En primer lugar diremos lo que es una gráfica, junto con otras definiciones que nos ayudarán a entender mejor la historia de los resultados que se encontraron. De manera análoga diremos lo que es una digráfica. Vamos a presentar varios tipos de conjuntos de vértices dentro de una digráfica, como son los conjuntos absorbentes, conjuntos independientes y los núcleos, así como resultados básicos de éstos.

1.1. Gráficas

Una gráfica G es una pareja ordenada $G = (V(G), A(G))$ donde $V(G)$ es un conjunto finito de objetos, no vacío y $A(G) \subseteq \{A \subseteq V(G) \mid |A| = 2\}$. Al conjunto $V(G)$ le llamamos el conjunto de vértices de G y sus elementos reciben el nombre de vértices o puntos de G . El conjunto $A(G)$ es el conjunto de aristas de G y sus elementos son llamados aristas, arcos o líneas de G . Si $a = \{u, v\}$ es una arista de G , la denotaremos por uv , llamaremos a u y v los extremos de a . Además diremos que la arista a incide en los vértices u y v , o bien que u, v son adyacentes. Análogamente si dos aristas inciden en un vértice diremos que son adyacentes.

La siguiente figura es una representación gráfica de $G = (V(G), A(G))$ donde $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ y $A(G) = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_5\}, \{v_5, v_6\}, \{v_1, v_6\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_6\}, \{v_3, v_5\}\}$.



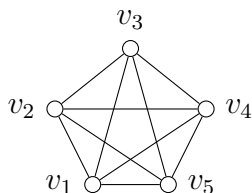
El orden de una gráfica G es el cardinal del conjunto $V(G)$, denotado por p . El tamaño de G es el cardinal del conjunto $A(G)$, denotado por q .

Definimos el grado de un vértice v , como el número de aristas que inciden en él, denotado por $\delta(v)$. Si un vértice tiene grado cero le llamaremos vértice aislado. Y el grado mínimo de G lo definimos como $\min\{\delta(v) \mid v \in V(G)\}$, denotado por $\delta(G)$.

La vecindad de un vértice v es el conjunto $N(v) = \{u \in V(G) \mid vu \in A(G)\}$. Observemos que $\delta(v) = |N(v)|$ para todo $v \in V(G)$. La vecindad cerrada de v es el conjunto $N[v] = N(v) \cup \{v\}$.

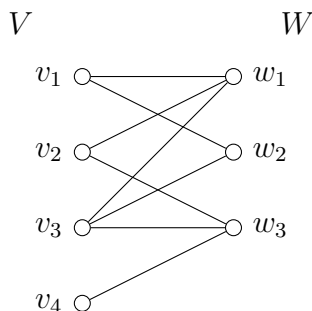
Diremos que una gráfica G es r -regular si $\delta(v) = r$ para todo $v \in V(G)$. Si G es una gráfica de orden p y es $(p - 1)$ -regular la llamamos completa y la denotamos por K_p .

La siguiente gráfica es K_5 , la gráfica completa de orden cinco.



Existen muchos tipos de gráficas, una de las más usadas y de las cuales se tienen muchos resultados importantes son las gráficas bipartitas. Una gráfica G es bipartita si existe una partición de sus vértices en dos conjuntos $\{X, Y\}$ tal que todas las aristas de G tienen un extremo en X y otro en Y . Cuando cada uno de los vértices de un conjunto de la partición es adyacente a cada uno de los vértices de la otra partición diremos que la gráfica es una gráfica bipartita completa, además si las cardinalidades de los conjuntos de la partición son n y m respectivamente, entonces la denotaremos como $K_{n,m}$.

La siguiente gráfica es bipartita, con bipartición $\{V, W\}$.



Un camino $C = (x_0, a_1, x_1, a_2, \dots, x_{n-1}, a_n, x_n)$ es una sucesión alternada de vértices y aristas tal que $a_i = x_{i-1}x_i \in A(G)$ con $1 \leq i \leq n$. También denotaremos a C como (x_0, x_1, \dots, x_n) , lo llamaremos un x_0x_n -camino y en este caso se dice que la longitud de C , denotada por $l(C)$, es $l(C) = n$. Un camino cerrado es un camino que empieza y termina en el mismo vértice. Una trayectoria de u a v es un uv -camino que no repite vértices, también llamado una uv -trayectoria. Un ciclo γ es un camino cerrado tal que sólo repite el primero y el último vértice y $l(\gamma) \geq 3$.

Otro concepto que nos es muy útil es el de conexidad, diremos que una gráfica es conexa si para todo par de vértices existe un camino entre ellos. Con la definición anterior podemos decir que $S \subseteq V(G)$ es un conjunto de corte por vértices de G , si $G - S$ no es conexa, análogamente

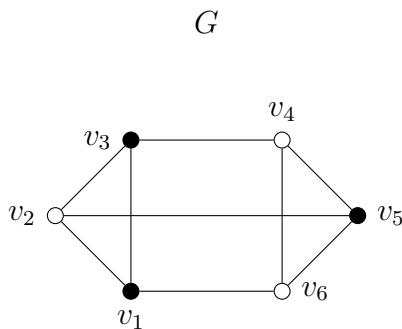
podemos decir que $W \subseteq A(G)$ es un conjunto de corte por aristas si $G - W$ no es conexa. A partir de lo anterior podemos definir la conexidad puntual de G , que denotaremos por $\kappa(G)$, como $\min\{|S| \mid S \text{ es un conjunto de corte por v\u00e9rtices de } G \text{ o } G - S \text{ es la gr\u00e1fica trivial}\}$. An\u00e1logamente definimos la conexidad lineal de G , denotada por $\lambda(G)$, como $\min\{|W| \mid W \text{ es un conjunto de corte por aristas de } G \text{ o } G - W \text{ es la gr\u00e1fica trivial}\}$.

Diremos que dos gr\u00e1ficas G y H son isomorfas, denotado por $G \cong H$, si existe una funci\u00f3n $\varphi : V(G) \rightarrow V(H)$ tal que φ es biyectiva y u es adyacente a v en G si y s\u00f3lo si $\varphi(u)$ es adyacente a $\varphi(v)$ en H .

Dadas G y H decimos que H es subgr\u00e1fica de G , denotado por $H \subseteq G$, si $V(H) \subseteq V(G)$ y $A(H) \subseteq A(G)$. Cuando se da la igualdad en los conjuntos de v\u00e9rtices decimos que H es una subgr\u00e1fica generadora de G . Dado B subconjunto de $V(G)$, la subgr\u00e1fica inducida por B , denotada por $G[B]$, es la subgr\u00e1fica de G tal que $B = V(G[B])$ y si $u, v \in B$, entonces $uv \in A(G[B])$ si y s\u00f3lo si $uv \in A(G)$.

Diremos que $A \subseteq V(G)$ es un conjunto dominante si para cada v\u00e9rtice $v \in V(G) - A$ existe $w \in A$ tal que $vw \in A(G)$. Un conjunto $B \subseteq V(G)$ es dominante total si para todo v\u00e9rtice $v \in V(G)$ existe $w \in B$ tal que $vw \in A(G)$.

Consideremos la siguiente gr\u00e1fica:



Observemos que $A = \{v_1, v_3, v_5\}$ es un conjunto dominante de G , pues todo v\u00e9rtice fuera de A es adyacente a alg\u00fan v\u00e9rtice de A . Tambi\u00e9n notemos que A no es un conjunto dominante total, pues v_5 no es adyacente a ning\u00fan otro v\u00e9rtice de A .

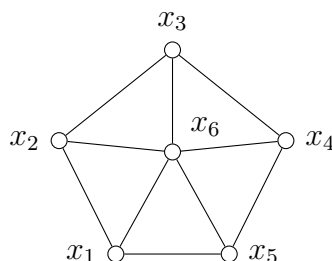
Diremos que $I \subseteq V(G)$ es un conjunto independiente si para cada par de v\u00e9rtices $u, v \in I$, entonces $uv \notin A(G)$.

Por otro lado, a mediados del siglo XIX, el ingl\u00e9s Francis Guthrie alumno del matem\u00e1tico Augustus De Morgan, se entreten\u00eda intentando colorear el mapa de Inglaterra utilizando la menor cantidad de colores posibles e intent\u00f3 hacerlo con s\u00f3lo cuatro colores sin conseguirlo, pero ten\u00eda la intuici\u00f3n de que se pod\u00eda hacer. As\u00ed se formul\u00f3 la siguiente pregunta: *Dado cualquier mapa geogr\u00e1fico con regiones continuas, \u00e9ste puede ser coloreado con cuatro colores diferentes, de forma que no queden regiones adyacentes con el mismo color.* Siguiendo la idea de Euler, un mapa como el de la pregunta se puede modelar con una gr\u00e1fica G donde cada v\u00e9rtice representa

una región y una línea une dos vértices si tienen una frontera común. Nuestro problema se convierte en asignarle un color a cada vértice tal que los vértices adyacentes tengan color distinto, usando a lo más cuatro colores. Este problema fue abordado por muchos matemáticos, entre ellos A. B. Kempe, A. De Morgan, Hamilton y Cayley. En Teoría de Gráficas asignarle un color a cada vértice de G , usando a lo más m colores se le conoce como una m -coloración de los vértices de G . Una coloración propia es una m -coloración tal que dos vértices, que comparten una arista, no tienen asignado el mismo color. Al conjunto de vértices que tenga asignado el mismo color le llamaremos clase cromática, notemos que una m -coloración nos induce una partición de los vértices en m clases cromáticas. De la misma manera, si tenemos $\{P_1, \dots, P_m\}$ una partición de los vértices de la gráfica en m conjuntos, y a los vértices del conjunto P_i les asignamos el color i , obtenemos una m -coloración de los vértices de la gráfica. Podemos observar, que en una m -coloración propia, la subgráfica inducida por cada clase cromática nos induce una subgráfica de vértices aislados, es decir, los vértices que pertenecen a la misma clase de color no son adyacentes entre sí, como ya vimos, a estos conjuntos se les conoce como conjuntos independientes.

A una gráfica W_n , tal que $V(W_n) = \{x_1, \dots, x_n, x_{n+1}\}$ con $n \geq 3$ y $A(W_n) = \{x_1x_2, x_2x_3, \dots, x_{n-1}x_n, x_nx_1\} \cup \{x_1x_{n+1}, x_2x_{n+1}, \dots, x_nx_{n+1}\}$ la llamaremos una rueda. En otras palabras, está conformada por un ciclo y un vértice, que no está en el ciclo, adyacente a todos los demás vértices.

Un ejemplo de W_5 es:

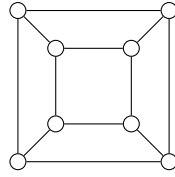


También existen operaciones entre gráficas que dejan invariante algunas de sus propiedades estructurales. Sean G y H dos gráficas, tal que $V(G) \cap V(H) = \emptyset$. Si $V(G) = \{x_1, \dots, x_n\}$ y $V(H) = \{y_1, \dots, y_m\}$, el producto cartesiano de G con H , denotado por $G \times H$, cumple que $V(G \times H) = V(G) \times V(H)$ y (x_1, y_1) es adyacente a (x_2, y_2) si y sólo si $y_1 = y_2$ y $x_1x_2 \in A(G)$ o si $x_1 = x_2$ y $y_1y_2 \in A(H)$.

Dada esta operación se definieron los n -cubos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= K_2 \\
 Q_2 &= Q_1 \times K_2 \\
 &\vdots \\
 Q_n &= Q_{n-1} \times K_2
 \end{aligned}$$

Una representación gráfica de Q_3 es la siguiente:



1.2. Digráficas

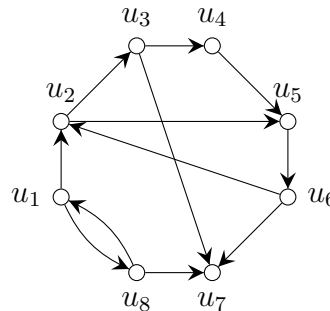
Una digráfica es una pareja ordenada $D = (V(D), F(D))$ donde $V(D)$ es un conjunto finito de objetos, no vacío, y $F(D) \subseteq (V(D) \times V(D)) - W$, donde $W = \{(x, x) \mid x \in V(D)\}$. Al conjunto $V(D)$ lo llamaremos el conjunto de vértices de D y sus elementos recibirán el nombre de vértices o puntos de D . El conjunto $F(D)$ es el conjunto de flechas de D y sus elementos son las flechas de D . Para este trabajo, supondremos que $V(D) \cap F(D) = \emptyset$.

Si $a = (u, v)$ es una flecha de D llamaremos a u y v los extremos de a . Además diremos que u llega o alcanza a v , análogamente diremos que v es alcanzado por u . Nos referiremos a u como inicio y a v como final de a . También diremos que u y v son adyacentes. Dos flechas son adyacentes si comparten alguno de sus extremos.

Una representación gráfica de $D = (V(D), F(D))$ con:

$$V(D) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8\} \text{ y}$$

$$F(D) = \{(u_1, u_2), (u_1, u_8), (u_2, u_3), (u_2, u_5), (u_3, u_4), (u_3, u_7), (u_4, u_5), (u_5, u_6), (u_6, u_2), (u_6, u_7), (u_8, u_1), (u_8, u_7)\}.$$



La *invecindad* de un vértice v es el conjunto $\{u \in V(D) \mid (u, v) \in F(D)\}$, que denotaremos por $\Gamma^-(v)$. La *exvecindad* de v es el conjunto $\{u \in V(D) \mid (v, u) \in F(D)\}$, que denotaremos por $\Gamma^+(v)$. La *vecindad* de v es el conjunto $\Gamma(v) = \Gamma^-(v) \cup \Gamma^+(v)$. El *ingrado* de v es $|\Gamma^-(v)|$, denotado por $\delta^-(v)$, el *exgrado* de v es $|\Gamma^+(v)|$, denotado por $\delta^+(v)$, y el *grado* de v es $|\Gamma^-(v)| + |\Gamma^+(v)|$, denotado por $\delta(v)$.

Llamaremos a $\delta^+(D) = \min\{\delta^+(x) \mid x \in V(D)\}$ y a $\delta^-(D) = \min\{\delta^-(x) \mid x \in V(D)\}$, el exgrado mínimo de D y el ingrado mínimo de D , respectivamente. También definimos $\Delta^+(D) = \max\{\delta^+(x) \mid x \in V(D)\}$ y $\Delta^-(D) = \max\{\delta^-(x) \mid x \in V(D)\}$, como el exgrado máximo de D y y el ingrado máximo de D , respectivamente.

Diremos que un vértice $x \in V(D)$ es un pozo si $\delta^+(x) = 0$, o bien x es fuente si $\delta^-(x) = 0$, y en el caso que x sea pozo y fuente le llamaremos vértice aislado.

Dados $A \subseteq V(D)$ y $B \subseteq V(D)$, diremos que hay una AB -flecha si existe $x \in A$ y $w \in B$ tal que $(x, w) \in F(D)$.

Un *camino dirigido* $C = (v_0, a_1, v_1, a_2, \dots, v_{n-1}, a_n, v_n)$ es una sucesión alternada de vértices y flechas tal que $a_i = (v_{i-1}, v_i)$ para toda $i \in \{1, \dots, n\}$. También nos referiremos a C como $(v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n)$ y lo llamaremos un v_0v_n -*camino dirigido*. La longitud del camino es $l(C) = n$. Diremos que el camino es cerrado si $v_0 = v_n$. Una *trayectoria dirigida* es un camino dirigido que no repite vértices, a la que llamaremos una v_0v_n -*trayectoria dirigida*. Un ciclo dirigido C es un camino dirigido, de longitud al menos 2, cerrado que repite únicamente el primero y el último vértice.

Como podemos ver, por definición, toda trayectoria dirigida es un camino dirigido pero al revés no sucede. Sin embargo, al igual que en gráficas no dirigidas, todo camino dirigido contiene una trayectoria dirigida, como lo podemos observar en la siguiente proposición.

Proposición 1.2.1. *Todo uv -camino dirigido contiene una uv -trayectoria dirigida, con $u \neq v$.*

Demostración. Sean D una digráfica, $u, v \in V(D)$ y $C = (u = x_0, x_1, \dots, x_n = v)$ un uv -camino dirigido. La demostración se hará por inducción sobre $l(C) = n$.

Si $n = 1$, entonces $C = (u = x_0, x_1 = v)$, por lo que C es una uv -trayectoria dirigida.

Supongamos que todo uv -camino dirigido de longitud menor a n contiene una uv -trayectoria dirigida.

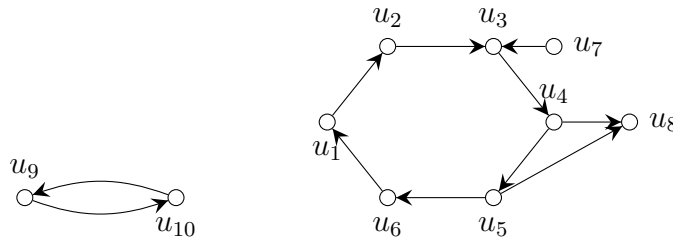
Sea $C = (u = x_0, x_1, \dots, x_n = v)$, un uv -camino dirigido. Tenemos dos casos.

- Si no existen $i, j \in \{0, 1, \dots, n\}$ tal que $x_i = x_j$, entonces C es una uv -trayectoria dirigida.
- Si existen $i, j \in \{0, 1, \dots, n\}$, con $i \neq j$, tal que $x_i = x_j$, entonces consideremos $C' = (u = x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_i = x_j, x_{j+1}, \dots, x_n = v)$, el cual es un uv -camino dirigido de longitud menor a n . Por hipótesis de inducción C' contiene una uv -trayectoria dirigida T . Como T está contenida en C' y éste en C , entonces T está contenida en C .

□

Dada una digráfica D , para cualquier par de vértices $u, v \in V(D)$, la distancia de u a v está definida por $d(u, v) = \min\{l(T) \mid T \text{ es una } uv\text{-trayectoria dirigida}\}$, si no existe ninguna uv -trayectoria dirigida entonces definimos $d(u, v) = \infty$. Una observación importante es que no siempre $d(u, v) = d(v, u)$.

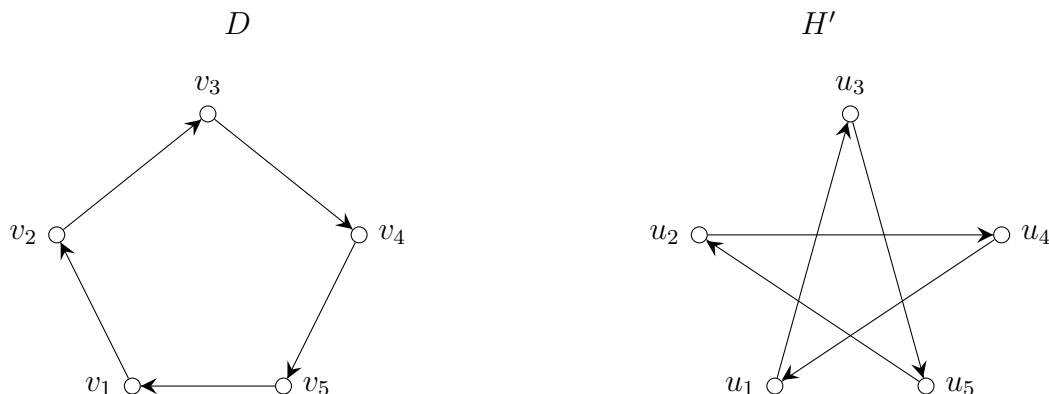
Consideremos la siguiente digráfica H .



Observemos que (u_9, u_{10}, u_9) es el ciclo más pequeño de H , u_7 es fuente y u_8 es un pozo. Así como $d(u_1, u_5) = 4$ y $d(u_1, u_7) = d(u_1, u_9) = \infty$.

Siguiendo con las definiciones, diremos que dos digráficas D y H , son isomorfas, denotado por $D \cong H$, si existe una función $\phi: V(D) \rightarrow V(H)$ biyectiva tal que u alcanza a v en D si y sólo si $\phi(u)$ alcanza a $\phi(v)$ en H .

Condiremos las siguientes digráficas:

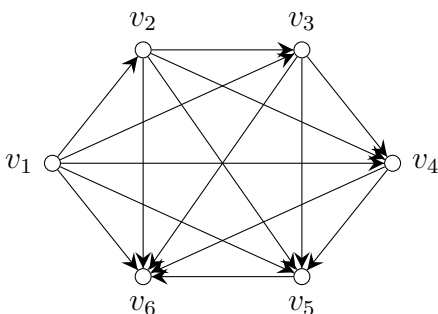


Observemos que D y H' son isomorfas.

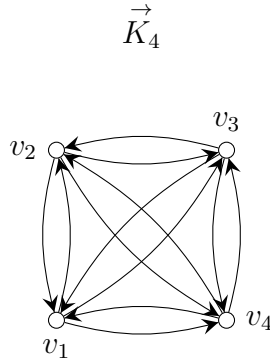
Dada una digráfica D , una m -coloración de los vértices de D es asignarle a cada vértice sólo un color, usando a lo más m colores. Al conjunto de vértices que tienen asignado el mismo color le llamaremos *clase cromática*. Una observación importante es que una m -coloración nos induce una partición de los vértices en m clases cromáticas. De manera análoga, si $\{P_1, \dots, P_m\}$ es una partición de los vértices en m clases y a los vértices del conjunto P_i le asignamos el color i , con $i \in \{1, \dots, m\}$, obtenemos una coloración de los vértices de D . Por lo que para demostrar que existe una coloración en m clases cromáticas, demostraremos que hay una partición de los vértices de D en m clases.

Hay muchos tipos de digráficas, los torneos son una familia de digráficas que por su estructura cumplen con muchas propiedades. Un torneo de orden p es una digráfica tal que cualquier par de vértices comparten exactamente una flecha entre ellos. La idea intuitiva del torneo de orden p es darle una orientación a la gráfica completa K_p , en una sola dirección.

Torneo de seis vértices:



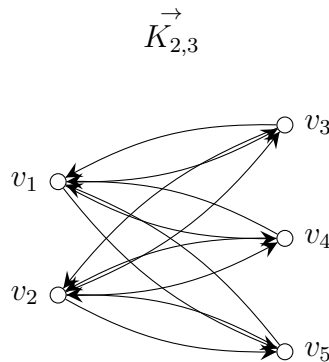
Otro tipo de digráficas son las digráficas completas. Diremos que una digráfica D es completa si para todo par de vértices $x, y \in V(D)$, se tiene que $(x, y) \in F(D)$ y $(y, x) \in F(D)$. Si el orden de D es n , la denotaremos por \vec{K}_n .



Una digráfica D es bipartita si existen dos conjuntos, distintos del vacío, V_1 y V_2 , que llamaremos clases, tal que:

1. $V_1 \cup V_2 = V(D)$.
2. $V_2 \cap V_2 = \emptyset$.
3. Si $(x, y) \in F(D)$, entonces se tiene que $x \in V_1$ y $y \in V_2$ o bien $y \in V_1$ y $x \in V_2$.

Si además para todo par de vértices $x, y \in V(D)$ en diferentes clases, tenemos que $(x, y) \in F(D)$ y $(y, x) \in F(D)$, la llamaremos bipartita completa, que denotaremos por $\vec{K}_{r,s}$, donde $r = |V_1|$ y $s = |V_2|$.



De la misma manera, decimos que una digráfica es s -partita, con $s \in \mathbb{N}$, $3 \leq s$, si existen s conjuntos $\{V_1, \dots, V_s\}$ distintos del vacío, tales que:

1. $\bigcup_{i=1}^s V_i = V(D)$.
2. $V_i \cap V_j = \emptyset$ para toda $i \neq j$, $i, j \in \{1, \dots, s\}$.
3. Si $(x, y) \in F(D)$, entonces se tiene que $x \in V_i$ y $y \in V_j$ o se tiene que $y \in V_i$ y $x \in V_j$ con $i \neq j$, $i, j \in \{1, \dots, s\}$.

Dada D una digráfica, definimos a la digráfica dual de D , denotada por \tilde{D} , como la digráfica resultante de cambiarle la dirección a todas las flechas de D .

Si una digráfica D es tal que todo par $u, v \in V(D)$ existe un uv -camino dirigido y un vu -camino dirigido, entonces llamaremos a D fuertemente conexa.

Como ya hemos observado, toda trayectoria dirigida es un camino dirigido y por la Proposición 1.2.1 todo camino dirigido contiene una trayectoria dirigida, por lo que la definición anterior es análoga a pedir que haya una uv -trayectoria dirigida y una vu -trayectoria dirigida.

Hay digráficas que no son fuertemente conexas, y con base en la definición anterior, tenemos que una componente fuerte de una digráfica D , es una subdigráfica inducida de D tal que es fuertemente conexa y máxima por contención con esta propiedad. De esta manera, podemos inducir una partición de los vértices de D en componentes fuertes.

A partir de lo anterior, dada una digráfica D con $\{D_1, \dots, D_k\}$ sus componentes fuertes, podemos definir a la digráfica de condensación, que denotaremos con D^* , como la digráfica tal que $V(D^*) = \{v_1, \dots, v_k\}$ y $(v_i, v_j) \in F(D^*)$ si y sólo si existe la $D_i D_j$ -flecha en D . Observemos que si D es fuertemente conexa, entonces D^* es un solo vértice.

Diremos que D_i es una componente fuerte terminal si $\delta_{D^*}^+(v_i) = 0$, análogamente si $\delta_{D^*}^-(v_i) = 0$ la llamaremos componente fuerte inicial.

Proposición 1.2.2. *Si D es una digráfica, entonces su digráfica de condensación es acíclica.*

Demostración. Supongamos que D^* tiene un ciclo dirigido $\gamma^* = (v_0, \dots, v_l, v_0)$, entonces para cada $i \pmod l$ con $i \in \{0, 1, \dots, l\}$, existe un vértice $x_i \in V(D_i)$ y otro $y_{i+1} \in V(D_{i+1})$ tal que $(x_i, y_{i+1}) \in F(D)$. Por otro lado, como $x_i, y_i \in V(D_i)$ y D_i es una subdigráfica D fuertemente conexa, existe $(x_i, w_{i,1}, \dots, w_{i,r_i}, y_i)$ una $y_i x_i$ -trayectoria dirigida en D .

Consideremos al siguiente ciclo dirigido de D :

$$\gamma = (y_0, w_{0,1}, \dots, w_{0,r_0}, x_0, y_1, w_{1,1}, \dots, w_{1,r_1}, x_1, y_2, \dots, y_l, w_{l,1}, \dots, w_{l,r_l}, x_l, y_0).$$

En particular, si $i = 1$ tenemos que existe la $y_2 x_1$ -trayectoria dirigida y la $x_1 y_2$ -trayectoria dirigida por lo que x_1 y y_2 están en la misma componente fuerte lo que es una contradicción pues por definición $x_1 \in V(D_1)$ y $y_2 \in V(D_2)$. Por lo tanto no existe γ^* , es decir, D^* es acíclica. \square

Corolario 1.2.1. *Toda digráfica tiene una componente fuerte terminal y una inicial.*

Demostración. Sea D una digráfica y D^* su digráfica de condensación. Consideremos $T = (v_1, \dots, v_l)$ una trayectoria dirigida de longitud máxima en D^* . Afirmamos que $\delta_{D^*}^+(v_l) = 0$. Supongamos que no, es decir, existe un $x \in V(D^*)$ tal que $(v_l, x) \in F(D^*)$. Como T es de longitud máxima $x = v_i$, es decir, $x \in V(T)$, pues si no (v_1, \dots, v_l, x) sería una trayectoria dirigida de longitud mayor, pero $(x = v_i, v_{i+1}, \dots, v_l, x)$ es un ciclo dirigido en D^* , lo que es una contradicción. Por lo tanto, $\delta_{D^*}^+(v_l) = 0$, por lo que D_l es una componente fuerte terminal.

La demostración de que D_1 es una componente fuerte inicial, es completamente análoga, usando la digráfica dual. \square

Observación 1.2.1. *Si un vértice x está en una componente fuerte terminal, entonces su vecindad queda contenida en dicha componente, es decir, si $x \in V(D_i)$ tal que D_i es una componente fuerte terminal, entonces $\Gamma_D^+(x) \subseteq V(D_i)$.*

Diremos que una digráfica D es transitiva si para todos los vértices $x, y, z \in V(D)$ tales que $(x, y), (y, z) \in F(D)$, entonces $(x, z) \in F(D)$.

Proposición 1.2.3. *Si D es una digráfica transitiva y fuertemente conexa, entonces D es completa.*

Demostración. Si D es un único vértice, entonces D es completa. Si tiene dos vértices, como D es fuertemente conexa, entonces $D \cong \vec{K}_2$. Supongamos que $|V(D)| \geq 3$. Sean $x, y \in V(D)$, demostraremos que $(x, y) \in F(D)$ y $(y, x) \in F(D)$. Consideremos (x, v_1, \dots, v_r, y) una xy -trayectoria dirigida, que existe pues D es fuertemente conexa. Notemos que $(x, v_1), (v_1, v_2) \in F(D)$, como D es transitiva $(x, v_2) \in F(D)$, junto con el hecho de que $(v_2, v_3) \in F(D)$, tenemos que $(x, v_3) \in F(D)$. Con el mismo razonamiento llegamos a que $(x, v_r) \in F(D)$, entonces como $(v_r, y) \in F(D)$ tenemos que $(x, y) \in F(D)$. Por otro lado, por ser D fuertemente conexa sabemos que existe una yx -trayectoria dirigida. Procediendo de la misma manera obtenemos que $(y, x) \in F(D)$. Por lo tanto, D es una digráfica completa. \square

Corolario 1.2.2. *Sean D una digráfica transitiva y D_1, \dots, D_k sus componentes fuertes. Si $y \in V(D_j)$ y $x \in V(D_i)$ tal que $(x, y) \in F(D)$, entonces $(z, w) \in F(D)$ para todo $z \in V(D_i)$ y todo $w \in V(D_j)$.*

Demostración. Sean $x, z \in V(D_i)$ y $w, y \in V(D_j)$. Primero observemos que como D_i es transitiva y fuertemente conexa, entonces por la proposición 1.2.3 $(z, x) \in F(D)$, análogamente como D_j es fuertemente conexa y transitiva, $(y, w) \in F(D)$.

Del hecho de que D es transitiva se sigue que:

- Como $(x, y), (y, w) \in F(D)$, entonces $(x, w) \in F(D)$ para todo $w \in V(D_j)$.
- Como $(z, x), (x, w) \in F(D)$, entonces $(z, w) \in F(D)$ para todo $w \in V(D_j)$ y todo $z \in V(D_i)$.

\square

El corolario anterior nos dice que si hay flecha de un vértice a otro que está en otra componente, entonces todo vértice en la misma componente manda flecha a todos los vértices de la otra componente, así podemos llegar al siguiente corolario.

Corolario 1.2.3. *Si D es una digráfica transitiva y $x \in V(D_i)$ donde D_i es una componente fuerte, no terminal, entonces existe $w \in \Gamma^+(x)$ tal que $w \in V(D_j)$ con D_j una componente fuerte terminal.*

Demostración. Sea D una digráfica transitiva y $x \in V(D_i)$ donde D_i es una componente fuerte, no terminal. Sea $T = (x, x_1, \dots, x_n)$ una trayectoria dirigida de longitud máxima desde x . Procediendo como en la prueba de la proposición 1.2.3 $(x, x_i) \in F(D)$ para toda $i \in \{1, \dots, x_n\}$, en particular para x_n .

Afirmamos que x_n está en una componente fuerte final de D . Sabemos que $x_n \in D_j$ con D_j componente fuerte de D . Observemos que al ser T máxima $\Gamma^+(x_n) \subseteq V(T)$. Sea x_i el primer vértice que aparece en T tal que $(x_n, x_i) \in F(D)$, por lo que el ciclo dirigido $(x_i, x_{i+1}, \dots, x_n, x_i)$ nos dice que $x_s \in V(D_j)$ para todo $s \in \{i, i+1, \dots, n\}$. Supongamos que D_j no es terminal,

entonces $\delta_{D^*}^+(v_j) \geq 1$, por lo que existe $v_k \in V(D^*)$, $v_j \neq v_k$, tal que $(v_j, v_k) \in F(D^*)$. Entonces por la definición de D^* y por el Corolario 1.2.2 existe $y \in V(D_k)$ tal que $(x_n, y) \in F(D)$, y como $\Gamma^+(x_n) \subseteq V(T)$, entonces $y = x_s$ con $s \in \{i, i+1, \dots, n-1\}$, es decir, $y \in V(D_j)$, lo que es una contradicción pues $y \in D_k \neq D_j$. Por lo tanto, D_j es una componente fuerte terminal y $x_n \in \Gamma^+(x)$. \square

Juntando ambos corolarios, obtenemos que todo vértice manda flecha a todos los vértices de al menos una componente fuerte terminal.

1.3. Conjuntos absorbentes

En esta sección hablaremos de los conjuntos de vértices en los cuales está centrado este trabajo. Los conjuntos absorbentes.

Definición 1.3.1. Sea D una digráfica, $A \subseteq V(D)$ es conjunto absorbente si todo vértice fuera del conjunto A alcanza al menos a un vértice de A , es decir, para todo $v \in V(D) - A$ existe $u \in A$ tal que $(v, u) \in F(D)$.

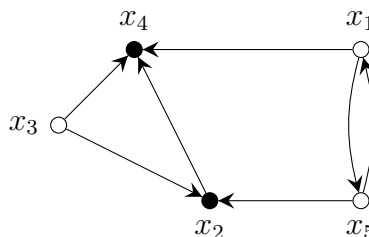
Sea \mathcal{A} el conjunto cuyos elementos son los conjuntos absorbentes de D . La primera observación es que $V(D) \in \mathcal{A}$. Además si $A \in \mathcal{A}$ y $A \subset A'$, entonces $A' \in \mathcal{A}$.

Definición 1.3.2. El número de absorbencia de D es el mínimo de las cardinalidades de los conjuntos absorbentes, es decir:

$$\beta(D) = \min\{|A| \mid A \in \mathcal{A}\}$$

Observemos el siguiente ejemplo:

Estaciones de radar. Se tiene una serie de puntos estratégicos x_1, x_2, x_3, x_4 y x_5 , llamados células, en las cuales se puede poner un radar, el cual puede mantener bajo vigilancia a las otras células.



El radar en la célula x_4 puede estudiar a las células x_1, x_2 y x_3 , como se muestra en la digráfica. Del mismo modo, el radar en la célula x_2 puede examinar a las células x_3 y x_5 . ¿Cuál es el mínimo número de estaciones de radar necesarios para examinar todas las células?

El problema se puede resolver estudiando a la digráfica anterior, que modela el problema, y encontrando su número de absorbencia. Notemos que no hay ningún vértice que absorba a todos los demás. Por otro lado, $\{x_2, x_4\}$ es un conjunto absorbente. Por lo tanto $\beta(D) = 2$, es decir, se necesitan dos estaciones de radar para poder estudiar a todas las células.

Definición 1.3.3. Sea D una digráfica, $B \subseteq V(D)$ es un conjunto absorbente total si todo vértice de D alcanza al menos a un vértice de B , es decir, para todo $v \in V(D)$ existe $u \in B$ tal que $(v, u) \in F(D)$.

Ahora demostraremos algunos resultados básicos del número de absorbencia en una digráfica.

Proposición 1.3.1. Sea D una digráfica, de orden p y tamaño q , entonces

$$p - q \leq \beta(D).$$

Demostración. Sea A un conjunto absorbente tal que $|A| = \beta(D)$. Notemos que cada vértice que está fuera de A manda al menos una flecha a A . Por lo tanto:

$$|V(D) - A| = p - |A| \leq q$$

Se tiene que

$$\beta(D) = |A| \geq p - q$$

□

Un acercamiento hacia el número de absorbencia sería el siguiente.

Proposición 1.3.2. Sea D una digráfica de orden p , entonces

$$\beta(D) \leq p - \Delta^-(D)$$

Demostración. Sea $x_0 \in V(D)$ tal que $\delta^-(x_0) = \Delta^-(D)$, y tomemos al conjunto

$$A = V(D) - \Gamma^-(x_0)$$

Por construcción sabemos que es un conjunto absorbente, entonces por definición de $\beta(D)$

$$\beta(D) \leq |A| = p - |\Gamma^-(x_0)| = p - \Delta^-(D).$$

□

Definición 1.3.4. Un conjunto $I \subseteq V(D)$ es independiente si todo par de vértices de I no son adyacentes, es decir, para todo $x, y \in I$ se tiene que $(x, y) \notin F(D)$ y $(y, x) \notin F(D)$.

Notemos que todas las digráficas tienen al menos un conjunto independiente, pues como $V(D) \neq \emptyset$ existe al menos un vértice y el conjunto formado por un solo vértice es un conjunto independiente.

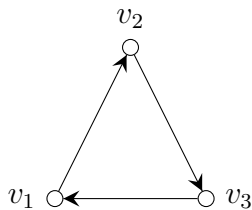
Con la definición de conjuntos independientes y de conjuntos absorbentes podemos combinarlos para dar paso al siguiente tipo de conjuntos.

Definición 1.3.5. Un conjunto $N \subseteq V(D)$ es núcleo de D si y sólo si N es un conjunto absorbente e independiente.

El concepto de núcleo, fue introducido por *Von Neumann* y *Morgenstern* [21] en 1994, bajo el nombre de solución, para resolver problemas en Teoría de Juegos.

A partir de este concepto, una pregunta natural sería: ¿Todas las digráficas tienen núcleo?, la respuesta es: no.

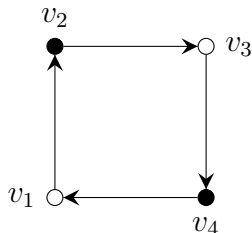
Consideremos a C_3 , el ciclo dirigido de tres vértices.



Observemos que C_3 no tiene núcleo pues cualquier par de vértices son adyacentes, entonces si tuviera núcleo sería un vértice, pero si v_i fuera núcleo, notemos que v_{i+1} no es absorbido, tomando a $i \in \mathbb{Z}_3$

Por lo tanto la siguiente pregunta sería, ¿si D tiene núcleo, entonces tendrá más de uno?, la respuesta, en algunos casos, es sí.

Consideremos a C_4 , el ciclo dirigido de cuatro vértices.



Es fácil ver que los conjuntos $\{v_1, v_3\}$ y $\{v_2, v_4\}$ son núcleos de C_4 , y que evidentemente son distintos.

A continuación demostraremos algunos resultados sobre propiedades de los núcleos, otros simplemente los mencionaremos, así como condiciones para la existencia de éstos.

Proposición 1.3.3. *Si N es un núcleo de D , entonces N es un conjunto independiente máximo y absorbente mínimo, por contención.*

Demostración. Sea N un núcleo de D . Notemos que si $v \notin N$, entonces existe la vN – flecha, por lo que $N \cup \{v\}$ no puede ser independiente. Por lo tanto N es independiente máximo.

Sea $u \in N$, tomemos $T = N - u$, como N es independiente, entonces no existe ninguna uT – flecha, por lo tanto T no es absorbente, es decir, N es un conjunto absorbente mínimo. \square

Teorema 1.3.1. [3] *Si D es una digráfica sin ciclos, entonces D tiene un único núcleo.*

Teorema 1.3.2 (Richardson). [18] *Si D es una digráfica sin ciclos impares, entonces D tiene al menos un núcleo.*

Como se puede ver en los resultados dados, no siempre es posible encontrar un núcleo en una digráfica y las condiciones que se piden suelen ser muy fuertes. Por otro lado, un concepto que se ha trabajado y que vincula el concepto de independencia y un tipo de absorbencia es el concepto de cuasinúcleo.

Definición 1.3.6. Decimos que $A \subseteq V(D)$ es un cuasinúcleo si y sólo si A cumple las siguientes propiedades:

1. A es independiente.
2. Para todo $x \in V(D) - A$ existe una trayectoria dirigida de longitud menor o igual a dos de x a A .

Cuando un conjunto A cumpla la segunda condición diremos que *cuasiabsorbe* a $D - A$.

Proposición 1.3.4. Toda digráfica tiene cuasinúcleo.

Demostración. Sea D una digráfica. La demostración se hará por inducción sobre el orden de D . Si $|V(D)| = 1$, entonces su único vértice es cuasinúcleo.

Supongamos que toda digráfica D' de orden $p' < n$ tiene un cuasinúcleo. Supongamos que $|V(D)| = n$, sea $x \in V(D)$ tal que $\Gamma^-(x) \cup \{x\} \neq V(D)$, si no existe, $\{x\}$ es cuasinúcleo de D . Consideremos $D' = D - (\Gamma^-(x) \cup \{x\})$, notemos que $|V(D')| \leq n - 1$, entonces por hipótesis de inducción D' tiene un cuasinúcleo Q . Observemos que $Q \subseteq V(D') \subset V(D)$. Ahora nos fijamos en D , teniendo los siguientes dos casos:

Caso 1: x no es adyacente a ningún vértice de Q . Tomemos $Q' = Q \cup \{x\}$, afirmamos que Q' es cuasinúcleo de D . Notemos que al ser Q independiente y no existir la xQ - flecha ni la Qx - flecha, entonces Q' es independiente. Sea $y \in V(D) - Q'$, si $y \in V(D')$, entonces Q cuasiabsorbe a y , si $y \in V(D) - (V(D') \cup \{x\})$, es decir, $y \in \Gamma^-(x)$, entonces $x \in Q'$ cuasiabsorbe a y . Por lo tanto Q' es cuasiabsorbente e independiente, por ende cuasinúcleo de D .

Caso 2: Si existe la xQ - flecha, afirmamos que Q es cuasinúcleo de D , pues al ser cuasinúcleo de D' es independiente y cuasiabsorbe a $V(D') - Q$, además, en D , absorbe a x y por ende cuasiabsorbe a $\Gamma^-(x)$.

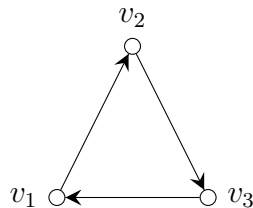
Por lo tanto D tiene cuasinúcleo. □

Observemos que este tipo de conjuntos guardan una relación con los núcleos.

Proposición 1.3.5. Todo núcleo es un cuasinúcleo.

Demostración. Sea N un núcleo de D , notemos que por definición N es independiente. Además como es absorbente, se tiene que para todo $v \in V(D) - N$ existe la vN - flecha, es decir, existe una trayectoria dirigida de longitud menor o igual a dos de v a N . Por lo tanto, N es cuasinúcleo de D . □

Notemos que el regreso no es cierto, recordemos a C_3 :



Como ya habíamos visto no tiene núcleo, sin embargo, es fácil de verificar que cada vértice es un cuasinúcleo de C_3 .

Por último, podemos definir los siguientes tipos de conjuntos de una digráfica. Sean k y l dos números naturales, tal que $k \geq 2$ y $l \geq 1$.

Definición 1.3.7. *Un conjunto $A \subseteq V(D)$ es k -independiente en D si para todo par de vértices $x, y \in A$, $d(x, y) \geq k$ y $d(y, x) \geq k$.*

Definición 1.3.8. *Un conjunto $A \subseteq V(D)$ es l -absorbente en D si para todo vértice $x \in V(D) - A$ existe $y \in A$ tal que $d(x, y) \leq l$.*

Con base en estas nuevas definiciones, se puede definir un concepto que generaliza a los núcleos, los (k, l) -núcleos.

Definición 1.3.9. *Un conjunto $N \subseteq V(D)$ es un (k, l) -núcleo de D si y sólo si N es un conjunto k -independiente y l -absorbente.*

Notemos que un $(2, 1)$ -núcleo es un núcleo de D , pues es un conjunto en el cual sus vértices están a distancia al menos dos y los vértices fuera del conjunto están a distancia uno.

Capítulo 2

Historia y Resultados Previos

En el capítulo anterior definimos lo que es un conjunto dominante en una gráfica y que es una m -coloración. Como ya observamos una m -coloración de una gráfica G , nos induce una partición de sus vértices en clases cromáticas.

Uniendo los conceptos de conjuntos dominantes y coloración, podemos preguntarnos si existe una coloración tal que cada clase cromática sea un conjunto dominante. La idea de encontrar una coloración con la mayor cantidad de clases cromáticas, tal que cada clase sea un conjunto dominante, fue introducida por E. J. Cockayne y por S. T. Hedetniemi en [6] y en [5] como el *domatic number*. *Domatic* es una palabra inventada en inglés, que mezcla las palabras *dominating* y *chromatic*, es decir, combina los conceptos de dominación con el de coloración en gráficas.

En este capítulo se da una reseña histórica del número domático de una gráfica, del cual mencionaremos algunos de los resultados trabajados principalmente por Bohdan Zelinka en [26], que van desde cotas hasta ejemplos particulares de familias de gráficas, dando una idea de como se ha abordado este tema en gráficas.

2.1. Número Domático

La mayoría de los resultados de este capítulo se encuentran en la tesis doctoral de Bohdan Zelinka [26], también fueron dados a conocer en su lectura en el Simposio de Teoría de Gráficas de 1990, realizado en la ciudad de Prachatice, República Checa.

Definimos una *coloración domática* como una coloración de los vértices de una gráfica G tal que cada clase cromática es un conjunto dominante. Como ya hemos dicho, las clases estas coloraciones inducen una partición en conjuntos dominantes y viceversa. Entonces el número domático de G se define como:

$$\mathbf{d}(G) = \max\{|P| \mid P \text{ es una partición domática de } G\}.$$

Por otro lado, el concepto de *número domático total* fue introducido por E. J. Cockayne, S. T. Hedetniemi y R. M. Dawes en [7] basándose en el concepto de conjunto dominante total, es decir, cada clase de la partición debe de ser un conjunto dominante total, denotado por $\mathbf{d}_t(G)$. Observemos que ambos conceptos son muy parecidos, por lo que muchas propiedades son análogas y por si fuera poco se tiene la siguiente desigualdad $\mathbf{d}_t(G) \leq \mathbf{d}(G)$, pues si un

conjunto es dominante total, entonces también es un conjunto dominante.

Los primeros acercamientos que se tuvieron están relacionados con las cardinalidades mínimas de los conjuntos de corte por vértices y de aristas de una gráfica G , denotados por $\kappa(G)$ y $\lambda(G)$, respectivamente. Se observó que una gráfica que consiste en dos gráficas completas de s vértices cada una y que además comparten r vértices, claramente con $r < s$, se tiene que $\kappa(G) = r$ y $\mathbf{d}(G) = s$.

Teorema 2.1.1. [31] *Si r y s son dos enteros positivos con $r < s$, entonces existe una gráfica G tal que $\kappa(G) = r$ y $\mathbf{d}(G) = s$.*

Como en el ejemplo anterior, también se observó que una gráfica que consta de dos gráficas completas de s vértices cada una, ajenas, que son unidas por r aristas cumple que $\lambda(G) = r$ y $\mathbf{d}(G) = s$. Encontrando su justificación con el siguiente teorema.

Teorema 2.1.2. [31] *Si r y s dos enteros positivos con $r < s$, entonces existe una gráfica G tal que $\lambda(G) = r$ y $\mathbf{d}(G) = s$.*

Teorema 2.1.3. [31] *Sea h un entero positivo, entonces existe una gráfica G tal que $\kappa(G) - \mathbf{d}(G) = \lambda(G) - \mathbf{d}(G) = h$.*

Los siguientes resultados empiezan a dar cotas al número domático, relacionándolos con el orden y con el grado mínimo de la gráfica.

El siguiente teorema se trabajará en digráficas en el siguiente capítulo, donde se usarán conceptos análogos, como es el exgrado mínimo.

Teorema 2.1.4. [22] *Para toda gráfica G de orden p , se tiene que*

$$\mathbf{d}(G) \geq \lfloor p/(p - \delta(G)) \rfloor.$$

Teorema 2.1.5. [28] *Para toda gráfica G de orden p , se tiene que*

$$\mathbf{d}_t(G) \geq \lfloor p/(p - \delta(G)) \rfloor.$$

Años después, en 1994 Zelika [29] comenzó a trabajar con el número domático total, y obtuvo los siguientes resultados, todos ellos en gráficas.

Teorema 2.1.6. *Si G es una gráfica sin vértices aislados, entonces*

$$\mathbf{d}_t(G) \leq \lfloor p/2 \rfloor$$

Donde el mínimo número de aristas de G para los cuales se puede cumplir la igualdad es $\frac{1}{4}p^2$ para p par y $\frac{1}{4}(p^2 - 1)$ para p impar.

Una nueva cota que compara al número domático y al número domático total de una gráfica, siempre que no haya vértices aislados, es la siguiente:

Teorema 2.1.7. *Si G es una gráfica sin vértices aislados, entonces*

$$\lfloor \mathbf{d}(G)/2 \rfloor \leq \mathbf{d}_t(G) \leq \mathbf{d}(G).$$

La prueba del teorema anterior esta basada en el hecho de que cada conjunto dominante total es un conjunto dominante, y del hecho que la unión de dos conjuntos dominantes ajenos es un conjunto dominante total. Además es una cota justa pues $\mathbf{d}_t(K_n) = \lfloor \mathbf{d}(K_n)/2 \rfloor$ y, por otro lado, $\mathbf{d}_t(K_{n,n}) = \mathbf{d}(K_{n,n})$.

El siguiente resultado relaciona el número domático de una gráfica con el producto cartesiano de dos gráficas específicas.

Teorema 2.1.8. *Si G es una gráfica sin vértices aislados, entonces*

$$\mathbf{d}_t(G \times K_2) \leq \mathbf{d}(G).$$

A partir de aquí empiezan a aparecer resultados para tipos de gráficas muy particulares como son las llamadas ruedas.

Teorema 2.1.9. *Para cada rueda W_n , se tiene que $\mathbf{d}_t(W_n) = 2$.*

Otro tipo particular de gráficas con las que se han trabajado son los n – cubos, denotados por Q_n , se trabajaron en [26] y [23], donde se produjeron los siguientes teoremas.

Teorema 2.1.10. *Si k es un entero positivo, entonces tanto Q_{2^k-1} como Q_{2^k} tienen número domático igual a 2^k .*

Una gráfica es llamada *totalmente domática completa*, si su número domático total es exactamente igual al grado mínimo. Análogamente es *domática completa*, si su número domático es exactamente igual al grado mínimo.

Teorema 2.1.11. *Si k es un entero positivo, entonces la gráfica de Q_{2^k} tiene número domático total igual a 2^k y es totalmente domática completa.*

Como nos podemos dar cuenta, en este punto comienzan a surgir nuevos conceptos y nuevas generalizaciones, cuyos resultados empiezan a ser mucho más específicos.

Es fácil ver, que si a una gráfica G le borramos una arista, tanto el número domático como el número domático total disminuyen en uno o se queda igual. Por lo que diremos que G es una gráfica *domática crítica* si la gráfica resultante de borrar cualquier arista de G , tiene número domático más chico que el de G . De la misma manera si el número domático total baja, la llamaremos *domática crítica total*.

A continuación se describirá la estructura de una gráfica domática crítica, a partir de su número domático.

Teorema 2.1.12. [24] Sea G una gráfica domática crítica con $\mathbf{d}(G) = t$, entonces $V(G)$ es la unión de V_1, V_2, \dots, V_t , donde los V_i son conjuntos ajenos dos a dos con $i \in \{1, \dots, t\}$, con la propiedad de que cualquier par de distintos números $i, j \in \{1, \dots, t\}$ la subgráfica $G_{i,j}$ de G , inducida por el conjunto $V_i \cup V_j$, es una gráfica bipartita, donde todas las componentes son estrellas, es decir, todas las componentes son de la forma $K_{1,k}$ donde $k + 1$ es el orden de la componente.

A una gráfica G la llamaremos *domáticamente completa* si cumple que $\mathbf{d}(G) = \delta(G) + 1$.

Teorema 2.1.13. [26] G es una gráfica domáticamente completa, regular de grado t , con $\mathbf{d}(G) = t$ si y sólo si su orden p , es un entero múltiplo de t , G es domática crítica y su conjunto de vértices $V(G)$ es la unión de V_1, V_2, \dots, V_t , donde los V_i son conjuntos ajenos dos a dos con $i \in \{1, \dots, t\}$, de cardinalidades p/t , con la propiedad de que para cada par de distintos números $i, j \in \{1, \dots, t\}$ la subgráfica G_{ij} de G , inducida por $V_i \cup V_j$ es regular de grado uno.

En el siguiente capítulo definiremos conceptos que son análogos a los trabajados en los dos teoremas anteriores. Con estos conceptos podremos obtener un resultado que vincula la estructura de las digráficas que poseen dichas propiedades.

A partir de aquí surgen nuevas generalizaciones de este número, donde se cambia la distancia a la que absorben, a los demás vértices.

El concepto de *k-dominación* fue introducido por M. Borowiecki y por M. Kuzak [4]. Sea G una gráfica y k un entero positivo, S es un conjunto *k-dominante*, si para cada $v \in V(D) - S$ existe un $y \in S$ tal que $d(x, y) \leq k$. Bajo este concepto se definió la siguiente generalización del número domático. Una *coloración k-domática* de los vértices de G , es una coloración de $V(G)$ donde las clases cromáticas son conjuntos *k-dominantes*. Análogamente a las coloraciones domáticas, las clases cromáticas de una coloración *k-domáticas* inducen partición en conjuntos *k-dominantes*, a dichas particiones las llamaremos *k-domática*. Al $\max\{|P| \mid P \text{ es una partición } k\text{-domática de } G\}$ lo llamaremos *número k-domático*, denotado por $\mathbf{d}^k(G)$. Notemos que si $k = 1$ tenemos que $\mathbf{d}^k(G) = \mathbf{d}(G)$.

Resultados básicos acerca de estas nuevas coloraciones son:

Teorema 2.1.14. [27] Sean k y l dos enteros positivos, $k < l$. Si G una gráfica, entonces $\mathbf{d}^k(G) \leq \mathbf{d}^l(G)$.

Teorema 2.1.15. [27] Si G es una gráfica de orden p y $\text{diam}(G)$, entonces $\mathbf{d}^k(G) = p$ para $k \geq \text{diam}(G)$.

Teorema 2.1.16. [27] Si G es una gráfica y G' una subgráfica generadora de G , entonces $\mathbf{d}^k(G) \geq \mathbf{d}^k(G')$.

Teorema 2.1.17. [27] Si G es una gráfica conexa de orden p y k un entero positivo, entonces $\mathbf{d}^k(G) \geq \min\{n, k + 1\}$.

La cota del teorema anterior es una cota justa pues si tomamos a G como una trayectoria de longitud n , entonces $\mathbf{d}^k(D) = \min\{n, k + 1\}$.

Otra de las preguntas que salta a la vista es si existe una familia de gráficas tal que cumplan con tener todos los valores intermedios de $\mathbf{d}^k(G)$. La respuesta es sí y la podemos ver plasmada en el siguiente teorema.

Teorema 2.1.18. [27] Sean k y p dos enteros positivos tal que $2 \geq k \geq p$, entonces para cada entero h tal que $k + 1 \geq h \geq n$, existe una gráfica G_h con p vértices tal que $\mathbf{d}^k(G_h) = h$.

Otro concepto análogo al número domático, que tiene su raíz en la dominación por aristas, estudiado en [16] es el de *número domático por aristas* de una gráfica. Un conjunto $A \subseteq A(G)$ es *dominante por aristas* si para todo $v \in V(G) - A$ existe una arista $a \in A$, tal que v es un extremo de a . Una *coloración dominante por aristas* de G , es una coloración de $A(G)$, donde cada clase cromática es un conjunto dominante por aristas en G . Al $\max\{|P| \mid P \text{ es una partición que induce una coloración dominante por aristas de } G\}$ lo llamaremos *número domático por aristas* denotado por $\mathbf{d}'(G)$.

La mayor parte de los resultados sobre el número domático por aristas están dados para gráficas muy particulares, como se puede ver a continuación.

Teorema 2.1.19. [25] Si K_p , con $n > 2$, es la gráfica completa de orden p , entonces $\mathbf{d}'(K_p) = p - 1$ si p es par y $\mathbf{d}'(K_p) = p$ si p es impar.

Teorema 2.1.20. [25] Si $K_{r,s}$ es una gráfica bipartita completa, entonces

$$\mathbf{d}'(K_{r,s}) = \max\{r, s\}.$$

Capítulo 3

Número Semidominante Coloreable

En el capítulo anterior hablamos de coloraciones de una gráfica, donde cada clase cromática es un conjunto dominante. Nos preguntamos si se puede encontrar una coloración para una digráfica, donde cada clase de color cumpla con alguna propiedad que sea análoga a un conjunto dominante, y la respuesta es sí, podemos dar una coloración donde cada clase es un conjunto absorbente o semidominante interior, por lo que en este capítulo hablaremos de coloraciones donde cada clase cromática es un conjunto semidominante interior. Aunado a esto, podremos definir al número semidominante coloreable de una digráfica, concepto introducido por Zelinka en 1984 [30]. En las demostraciones, se usan las técnicas que se han trabajado en núcleos, por lo que dentro de éstas nos referiremos a ellos como conjuntos absorbentes. Sin embargo, para mantener la idea, derivada de gráficas, de las coloraciones domáticas, en los resultados los llamaremos semidominantes interiores.

En este capítulo se calcula el número semidominante coloreable para digráficas específicas, como las digráficas completas, ciclos dirigidos, digráficas transitivas y digráficas bipartitas. También se presentan resultados dados por Zelinka en [30], como la construcción de un torneo que tenga número semidominante coloreable interior y exterior ya dados. Además se demuestran teoremas análogos a los vistos en el segundo capítulo, ahora en digráficas. En la última sección se introducen conceptos nuevos, análogos a los vistos en gráficas, como el de una *digráfica semidominante interior crítica*, de la cual se da una caracterización.

3.1. Definiciones

Sea D una digráfica, un subconjunto A de $V(D)$ es un conjunto *semidominante interior* o *absorbente* de D , si para cada vértice $x \in V(D) - A$ existe un vértice $y \in A$ tal que la flecha (x, y) está en $F(D)$. Análogamente un subconjunto B de $V(D)$ es un conjunto *semidominante exterior* de D , si para cada vértice $x \in V(D) - B$ existe un vértice $y \in B$ tal que la flecha (y, x) está en $F(D)$. Si un conjunto es semidominante interior y semidominante exterior diremos que es dominante.

Una *coloración semidominante interior* de D , como su nombre lo dice, es una coloración de $V(D)$, tal que cada clase cromática es un conjunto semidominante interior de D . De la misma manera, una *coloración semidominante coloreable exterior* de D , es una coloración de $V(D)$, tal que cada clase cromática es un conjunto semidominante exterior de D .

A partir de lo anterior, definimos al número semidominante coloreable interior de D como

el máximo de clases cromáticas de una coloración semidominante coloreable interior de D , denotada por $\mathbf{d}^-(D)$.

Análogamente, definimos al número semidominante coloreable exterior de D como el máximo de clases de una coloración semidominante exterior de D , denotada por $\mathbf{d}^+(D)$.

Notemos que tanto $\mathbf{d}^-(D)$ como $\mathbf{d}^+(D)$ están bien definidos, pues para toda digráfica $\mathbf{d}^-(D) \geq 1$ y $\mathbf{d}^+(D) \geq 1$, ya que asignarle el mismo color a todos los vértices es una 1-coloración domática de los vértices de D . Donde la única clase cromática es $V(D)$ y cumple con ser un conjunto semidominante interior y semidominante exterior, a esta coloración la llamaremos trivial.

Por definición, las clases cromáticas de una coloración semidominante coloreable interior (exterior) inducen una partición de los vértices en conjuntos semidominantes interiores (exteriores), y viceversa. A estas particiones las llamaremos semidominantes interiores. Notemos que una partición de los vértices induce una coloración semidominante coloreable interior (exterior) si y sólo si cada clase de la partición es un conjunto semidominante interior (exterior) de D . Por lo que podemos volver a definir al número semidominante coloreable interior de D como:

$$\mathbf{d}^-(D) = \text{máx}\{|P| \mid P \text{ es una partición semidominante interior de } D\}.$$

Análogamente, el número semidominante coloreable exterior de D es:

$$\mathbf{d}^+(D) = \text{máx}\{|P| \mid P \text{ es una partición semidominante exterior de } D\}.$$

Recordemos que dada una digráfica D , la digráfica dual de D , denotada por \tilde{D} , es la digráfica resultante de cambiarle la dirección a todas las flechas de D . De lo que se sigue que si $v \in V(D)$ y $S \subseteq V(D)$ tal que existe la vS -flecha, entonces en \tilde{D} existe la Sv -flecha. Por lo que si un conjunto es semidominante interior en D , entonces dicho conjunto es semidominante exterior en \tilde{D} .

De lo anterior, tenemos que si $\mathbf{d}^-(D) = n$ y $\mathbf{d}^+(D) = m$, entonces $\mathbf{d}^+(\tilde{D}) = n$ y $\mathbf{d}^-(\tilde{D}) = m$.

3.2. Número Semidominante Coloreable Interior en las Digráficas Completas, Bipartitas y Ciclos Dirigidos

En la primera parte de esta sección nos enfocamos en calcular este número semidominante coloreable interior para algunas familias de digráficas específicas, y una pregunta natural es si existen digráficas que tengan una coloración semidominante interior distinta de la trivial. La respuesta es sí. Consideremos a las digráficas completas.

Proposición 3.2.1. *Si \vec{K}_p es una digráfica completa de orden p , entonces $\mathbf{d}^-(\vec{K}_p) = p$.*

Demostración. Sea \vec{K}_p una digráfica completa de orden p , con $V(\vec{K}_p) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$.

Observemos que por definición de \vec{K}_p , $\delta^-(v_i) = p - 1$ para todo $v_i \in V(\vec{K}_p)$. Por lo que $(v_j, v_i) \in F(\vec{K}_p)$, para todo $v_j \in V(\vec{K}_p)$ y $v_j \neq v_i$. Es decir, $\{v_i\}$ es un conjunto semidominante interior de \vec{K}_p , para todo $v_i \in \vec{K}_p$, con $i \in \{1, \dots, p\}$.

Por lo tanto $\{\{v_1\}, \dots, \{v_p\}\}$ es una coloración semidominante de \vec{K}_p , además de ser la coloración con más clases, es decir, $\mathbf{d}^-(\vec{K}_p) = p$. \square

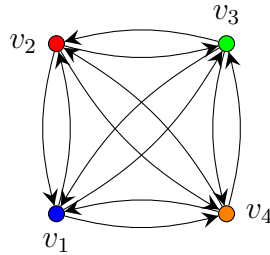
De lo anterior es fácil obtener el siguiente lema.

Lema 3.2.1. *Si D es una digráfica de orden p tal que $D \not\cong \vec{K}_p$, entonces $1 \leq \mathbf{d}^-(D) < p$.*

Demostración. Por definición, toda digráfica D' de orden p , cumple que $\mathbf{d}^-(D') = p$ si y sólo si cada vértice es un conjunto semidominante interior de D' .

Como $D \not\cong \vec{K}_p$, entonces existen $x, y \in V(D)$ tal que $(x, y) \notin F(D)$, lo que implica que $\{y\}$ no es un conjunto semidominante interior de D , es decir, $\mathbf{d}^-(D) < p$. \square

Consideremos \vec{K}_4 , donde se puede observar que cada vértice es un conjunto semidominante interior.



Otras digráficas que tienen una coloración semidominante interior distinta a la trivial son los ciclos dirigidos de longitud par.

Proposición 3.2.2. *Si \mathcal{C} es un ciclo dirigido de longitud par, entonces $\mathbf{d}^-(\mathcal{C}) = 2$.*

Demostración. Sea $\mathcal{C} = (v_0, v_1, \dots, v_{2n-1}, v_{2n} = v_0)$ un ciclo dirigido de longitud par.

Consideremos $P_1 = \{v_i \in V(\mathcal{C}) \mid i = 2k \text{ con } 0 \leq k \leq n\}$ y $P_2 = \{v_i \in V(\mathcal{C}) \mid i = 2k - 1 \text{ con } 1 \leq k \leq n\}$. Como $n \geq 1$, es claro que $P_1 \neq \emptyset$, $P_2 \neq \emptyset$, $P_1 \cap P_2 = \emptyset$ y $P_1 \cup P_2 = V(\mathcal{C})$, es decir, $\{P_1, P_2\}$ es una partición de $V(\mathcal{C})$. Demostraremos que cada uno de los conjuntos es un conjunto semidominante interior de \mathcal{C} .

Sea $v_i \in P_2$, es decir, $v_i = v_{2k-1}$, para alguna $1 \leq k \leq n$. Por definición de ciclo dirigido $(v_{2k-1}, v_{2k}) \in F(\mathcal{C})$ con $1 \leq k \leq n$ y $v_{2k} \in P_1$, por lo que P_1 es un conjunto semidominante interior de \mathcal{C} .

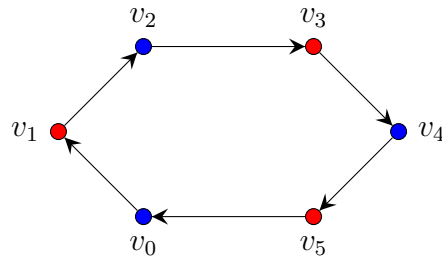
Sea $v_i \in P_1$, es decir, $v_i = v_{2k}$ para alguna $0 \leq k \leq n$, por definición de ciclo dirigido $(v_{2k}, v_{2(k+1)-1}) \in F(\mathcal{C})$ con $0 \leq k \leq n - 1$ y $v_{2(k+1)-1} \in P_2$, por lo que P_2 es un conjunto semidominante interior de \mathcal{C} .

Por lo tanto, $\{P_1, P_2\}$ induce es una coloración semidominante interior de \mathcal{C} , es decir, $\mathbf{d}^-(\mathcal{C}) \geq 2$.

Notemos que para todo vértice de \mathcal{C} su exvecindad consta de un solo vértice, por lo que no puede haber una coloración con más de dos clases, tal que cada clase sea semidominante interior. Lo que implica que $\mathbf{d}^-(\mathcal{C}) = 2$. \square

En la demostración de la proposición anterior podemos observar que por definición de P_1 y P_2 , cada uno es un núcleo de \mathcal{C} , de hecho la prueba es análoga a buscar núcleos en un ciclo

dirigido de longitud par, pues en dicha prueba es fácil notar que hay dos núcleos que además inducen una coloración de los vértices de \mathcal{C} . Lo anterior se puede ilustrar en el siguiente ciclo de longitud seis:



Donde $P_1 = \{v_0, v_2, v_4\}$ y $P_2 = \{v_1, v_3, v_5\}$.

Observemos que de manera natural, si una digráfica tiene una coloración semidominante interior distinta de la trivial, podemos encontrar una bicoloración semidominante interior, al colorear del mismo color a todos los vértices de todas las clases, excepto a los vértices de una, como lo podemos observar en el siguiente lema que nos ayudará a garantizar la existencia de coloraciones semidominantes interiores.

Lema 3.2.2. *Si D es una digráfica con $\mathbf{d}^-(D) = n$ con $n \geq 2$, entonces existe una bicoloración semidominante interior de $V(D)$.*

Demostración. Como $\mathbf{d}^-(D) = n \geq 2$, existe $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ una partición que induce una coloración semidominante interior de los vértices de D en n clases. Consideremos $B = \bigcup_{i=2}^n P_i$. Se propone a $\{B, P_1\}$ como una bipartición semidominante interior de $V(D)$. Por definición, $P_i \neq \emptyset$ para toda $1 \leq i \leq n$, lo que implica que $P_1 \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$. Como $\bigcup_{i=1}^n P_i = V(D)$ tenemos que por la definición de B , $P_1 \cup B = V(D)$.

Veamos que $P_1 \cap B = \emptyset$. Supongamos que no es cierto, es decir, existe $x \in P_1 \cap B$, entonces $x \in P_1$ y $x \in B$. Por definición de B tenemos que $x \in \bigcup_{i=2}^n P_i$, es decir, $x \in P_j$ para alguna $j \in \{2, \dots, n\}$, pero eso es una contradicción pues $P_1 \cap P_j = \emptyset$ para toda $j \in \{2, \dots, n\}$. Por lo tanto $P_1 \cap B = \emptyset$.

Falta ver que cada una de las clases es un conjunto semidominante interior. Sea $x \in B$ entonces $x \in P_j$ para alguna $j \in \{2, \dots, n\}$. Como P_1 es un conjunto semidominante interior de D existe $y \in P_1$ tal que $(x, y) \in F(D)$, por lo tanto P_1 absorbe a B .

Recordemos que $P_2 \subseteq B$ es un conjunto semidominante interior de D , entonces si $w \in P_1$, existe $v \in P_2$ tal que $(w, v) \in F(D)$, por lo tanto B absorbe a P_1 .

En conclusión, P_1 con B forma una bipartición semidominante interior de D . \square

Lema 3.2.3. *Si D es una digráfica con $\mathbf{d}^+(D) = n$, con $n \geq 2$, entonces existe una bicoloración semidominante exterior de $V(D)$.*

La prueba del lema anterior es análoga a la del Lema 3.2.2, considerando a \tilde{D} .

Corolario 3.2.1. *Si D es una digráfica con un pozo, entonces $\mathbf{d}^-(D) = 1$.*

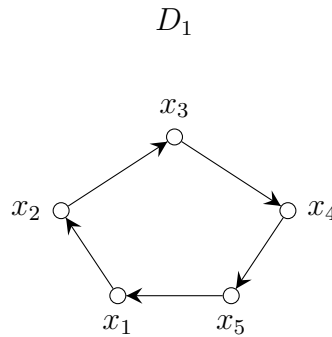
Demostración. Supongamos que $\mathbf{d}^-(D) > 1$ y D tiene un pozo v , es decir, $\delta^+(v) = 0$. Por el Lema 3.2.2 tenemos que existen P_1 y P_2 , clases cromáticas de una bicoloración semidominante interior de $V(D)$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $v \in P_1$, y que P_2 es un conjunto semidominante interior de D por lo que debe de existir un vértice $u \in P_2$ tal que $(v, u) \in F(D)$, lo que es una contradicción pues v era pozo. Por lo tanto, no existe ningún P_2 , de aquí tenemos que $\mathbf{d}^-(D) = 1$. \square

Corolario 3.2.2. *Si D es una digráfica con una fuente, entonces $\mathbf{d}^+(D) = 1$.*

La demostración es análoga al corolario anterior usando la digráfica dual.

Estos corolarios, nos dicen que todas las digráficas que tienen pozos (fuentes) no pueden tener una coloración semidominante interior (exterior) distinta de la trivial, por lo que nos preguntamos si todas las digráficas sin pozos tienen una coloración semidominante interior distinta de la trivial. La respuesta a dicha pregunta es no, para verificarlo consideremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.2.1.



Verifiquemos que D_1 no tiene una coloración semidominante interior distinta a la trivial. Supongamos lo contrario, por lo que por el lema 3.2.2 si existiera dicha coloración, al menos tenemos una bicoloración en conjuntos semidominantes interiores. Sea $\{P_1, P_2\}$ las clases cromáticas de dicha coloración, y supongamos sin pérdida de generalidad que $x_1 \in P_1$; el caso en el que $x_1 \in P_2$ es completamente análogo. Como P_2 tiene que absorber a x_1 , entonces $x_2 \in P_2$, análogamente P_1 debe de absorber a x_2 , entonces $x_3 \in P_1$. Por las mismas razones $x_4 \in P_2$ y $x_5 \in P_1$, pero la exvecindad de x_5 es $\{x_1\}$ y $x_1 \in P_1$, por lo que P_2 no es un conjunto semidominante interior de D_1 . Por lo tanto, D_1 no tiene una coloración semidominante interior distinta a la trivial.

Del ejemplo anterior, podemos inferir que ningún ciclo dirigido de longitud impar la tiene.

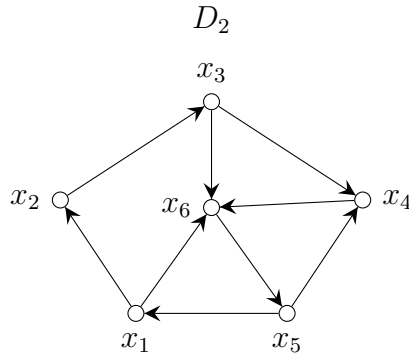
Proposición 3.2.3. *Todo ciclo dirigido de longitud impar no tiene una coloración distinta a la trivial.*

Demostración. Sea $\mathcal{C} = (x_0, x_1, \dots, x_{2n}, x_{2n+1} = x_0)$ un ciclo dirigido de longitud impar. Supongamos que tiene una coloración semidominante interior distinta a la trivial. Por el Lema 3.2.2, al menos existe una bicoloración en clases semidominantes interiores. Sean P_1 y P_2 las clases de dicha coloración. Supongamos sin pérdida de generalidad que $x_0 \in P_1$, el caso en que $x_0 \in P_2$

es análogo. Como P_2 tiene que absorber a x_0 , entonces $x_1 \in P_2$, de la misma manera, P_1 debe absorber a x_1 , por lo que $x_2 \in P_1$, y así sucesivamente, entonces $x_{2n} \in P_1$, pero el único vértice en la exvecindad de x_{2n} es $x_{2n+1} = x_0 \in P_1$, entonces P_2 no es un conjunto semidominante interior de \mathcal{C} . Por lo tanto, \mathcal{C} no tiene una coloración semidominante interior distinta de la trivial, es decir, $\mathbf{d}^-(\mathcal{C}) = 1$. \square

Observemos que la demostración anterior es completamente igual a buscar núcleo en el ciclo, por lo que una pregunta válida es si una digráfica no tiene núcleo, entonces su número semidominante coloreable es uno, es decir, no tiene una coloración semidominante distinta a la trivial. La respuesta es no, como podemos observar en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.2.2.



Afirmamos que D_2 no tiene núcleo. Supongamos que existe $N \subseteq V(D_2)$ tal que N es núcleo. Notemos que como no hay ningún vértice que absorbe a todos los demás, entonces $|N| \geq 2$. Si $x_6 \in N$, por la independencia de N , $x_i \notin N$ con $i \in \{1, 3, 4, 5\}$, pero $\Gamma^+(x_5) = \{x_1, x_4\}$ por lo que N no es absorbente. Por lo tanto $x_6 \notin N$. Como $\Gamma^+(x_6) = \{x_5\}$, entonces $x_5 \in N$, lo que implica que $x_4 \notin N$ y $x_1 \notin N$. Pero $\Gamma^+(x_4) = \{x_6\}$ que no está en N , por lo que N no es absorbente, lo que es una contradicción. Por lo tanto D_2 no tiene núcleo.

Por otro lado, consideremos $P_1 = \{x_1, x_3, x_6\}$ y $P_2 = \{x_2, x_4, x_5\}$. Claramente $\{P_1, P_2\}$ es una partición de los vértices de D_2 . Como $\{(x_1, x_2), (x_3, x_4), (x_6, x_5)\} \subseteq F(D_2)$ tenemos que P_2 es un conjunto semidominante interior de D_2 . De la misma manera, como $\{(x_2, x_3), (x_4, x_6), (x_5, x_1)\} \subseteq F(D_2)$ tenemos que P_1 es un conjunto semidominante interior de D_2 . Por lo tanto D_2 tiene una coloración semidominante interior distinta a la trivial.

Como ya mostramos, hay digráficas que tienen coloraciones semidominantes interiores con más de una clase, es decir, con una coloración distinta de la trivial. Por lo que nos enfocaremos en encontrar cotas para este número. Para algunas digráficas no es tan difícil encontrarlas, por ejemplo, las digráficas bipartitas.

Notemos que si una digráfica D es bipartita, sin pozos, entonces cada uno de los conjuntos, de la bipartición, son semidominantes interiores de D , más aún son núcleos de D . Lo que nos da una coloración semidominante interior distinta de la trivial en dos clases, es decir, $\mathbf{d}^-(D) \geq 2$. Por otra parte, si la bipartición de D es $\{V_1, V_2\}$ y $A \subset V(D)$ es un conjunto semidominante interior de D , tiene dos posibilidades, o ser V_i con $i \in \{1, 2\}$, o tener al menos un vértice de cada partición. De aquí la siguiente proposición.

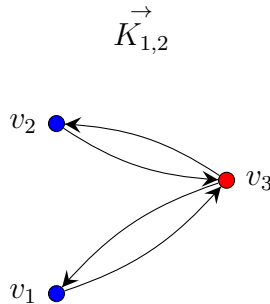
Proposición 3.2.4. Si D es una digráfica bipartita, con bipartición V_1 y V_2 , tal que $|V_1| = r$, $|V_2| = s$ y $\mathbf{d}^-(D) > 2$, entonces $\mathbf{d}^-(D) \leq \text{mín}\{r, s\}$.

Demostración. Sea D una digráfica bipartita, con bipartición V_1 y V_2 , tal que $|V_1| = r$ y $|V_2| = s$. Si $\mathbf{d}^- = n > 2$, entonces existe $\{P_1, \dots, P_n\}$ una partición semidominante interior de D .

Supongamos que $n > \text{mín}\{r, s\}$, es decir, existe al menos un P_i tal que $P_i \subset V_1$ ó $P_i \subset V_2$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $P_i \subseteq V_1$. Sea $x \in V_1 - P_i$, que existe pues $\mathbf{d}^-(D) > 2$. Como D es bipartita no existe flecha entre dos vértices de V_1 , lo que implica que no existe la xP_i -flecha en D , lo que es una contradicción pues P_i es un conjunto absorbente.

Por lo tanto, $\mathbf{d}^-(D) \leq \text{mín}\{r, s\}$. □

Observemos que la proposición anterior no se cumple si $\mathbf{d}^-(D) = 2$. Podemos considerar a la siguiente figura de $\vec{K}_{1,2}$, donde se puede observar que $\mathbf{d}^-(\vec{K}_{1,2}) = 2 \geq \text{mín}\{1, 2\} = 1$.



3.3. Propiedades Básicas y Digráficas Transitivas

En esta sección hablaremos de propiedades básicas basadas en el número semidominante coloreable interior de una digráfica. Algunos de los resultados los dio Zelinka [30] y otros fueron trasladados de los teoremas mencionados en el capítulo dos. También diremos cual es el número semidominante coloreable interior para las digráficas transitivas. Por último se construirán familias de digráficas con número semidominante coloreable dado y conexidad puntual (lineal) también dada.

Una observación natural es que si en una digráfica tenemos una coloración semidominante interior (exterior) de n clases, entonces cada vértice tiene que mandar una flecha, al menos, a todas las clases excepto a la que pertenece, es decir, su exgrado es al menos $n - 1$. Con esta idea demostraremos el siguiente lema, dado anteriormente por Zelinka [30], el cual nos da una relación entre el exgrado y el número de clases que podemos obtener.

Lema 3.3.1. [30] Si D es una digráfica tal que $\mathbf{d}^-(D) = n$, entonces $\mathbf{d}^-(D) \leq \delta^+(D) + 1$.

Demostración. Si $n = 1$, entonces se puede observar claramente que el resultado es válido. Sea D una digráfica con $\mathbf{d}^-(D) = n > 1$. Tomemos $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ una partición semidominante interior de los vértices de D en n clases.

Sea $x \in V(D)$ un vértice cualquiera, entonces tenemos que $x \in P_j$ para alguna $j \in \{1, \dots, n\}$, como todos los P_i son conjuntos semidominantes interiores cada uno debe de absorber a x , es decir, debe de existir una flecha desde x a cada uno de los P_i con $i \neq j$,

$i \in \{1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, n\}$ y como $P_i \cap P_j = \emptyset$, entonces $\delta^+(x) \geq n-1$, y sumando uno de ambos lados se tiene que $\delta^+(x) + 1 \geq n$. Esto pasa para todos los vértices de D , en particular para el de exgrado mínimo, por lo que $\delta^+(D) + 1 \geq n$. \square

Lema 3.3.2. [30] Si D es una digráfica tal que $\mathbf{d}^+(D) = n$, entonces $\mathbf{d}^+(D) \leq \delta^-(D) + 1$.

La demostración es análoga al Lema 3.3.1 usando la digráfica dual.

De los lemas anteriores, se deduce que si una digráfica tiene una coloración distinta a la trivial, el exgrado mínimo tiene que ser mayor o igual a uno, en otras palabras no puede tener pozos, como ya habíamos demostrado anteriormente.

Como pasa con las gráficas, para obtener mejores resultados se empiezan a dar restricciones a las digráficas para poder acotar el número semidominante coloreable interior y exterior. Como lo podemos observar en el siguiente lema que dio Zelinka.

Lema 3.3.3. [30] Si D es una digráfica de orden $p \geq 2$ tal que para todo par de vértices existe a lo más una flecha entre ellos, entonces:

$$\mathbf{d}^-(D) \leq \lfloor p/2 \rfloor$$

$$\mathbf{d}^+(D) \leq \lfloor p/2 \rfloor.$$

Demostración. Por contradicción. Supongamos que $\mathbf{d}^-(D) > \lfloor p/2 \rfloor$. Como $p \geq 2$ tenemos que $\mathbf{d}^-(D) > 1$. Ya que $\mathbf{d}^-(D) > \lfloor p/2 \rfloor$ tenemos que para cualquier coloración semidominante interior Π de $V(D)$ con $\mathbf{d}^-(D)$ clases cromáticas, al menos una clase consiste en un sólo vértice. Sea x dicho vértice, entonces por ser un conjunto semidominante interior de D , para toda $y \in V(D) - \{x\}$ existe la (y, x) -flecha. Ahora al tener $\mathbf{d}^-(D) > 1$, entonces existe una clase cromática P tal que $x \notin P$, y como es un conjunto semidominante interior de D existe un vértice $v \in P$ tal que $(x, v) \in F(D)$, pero eso quiere decir que $(v, x), (x, v) \in F(D)$ con lo que x y v tienen más de una flecha que los une, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $\mathbf{d}^-(D) \leq \lfloor p/2 \rfloor$.

La demostración de $\mathbf{d}^+(D) \leq \lfloor p/2 \rfloor$ es análoga a la anterior, usando la digráfica dual. \square

Dada una digráfica D , definimos a la digráfica complemento, denotada por D^c , como la digráfica tal que $V(D^c) = V(D)$ y $(x, y) \in F(D^c)$ si y sólo si $(x, y) \notin F(D)$.

Con ayuda de esta nueva digráfica podremos demostrar el siguiente lema que es análogo al Teorema 2.1.4 visto en el capítulo anterior.

Lema 3.3.4. Si D es una digráfica de orden $p \geq 2$, entonces

$$\lfloor p/(p - \delta^+(D)) \rfloor \leq \mathbf{d}^-(D).$$

Demostración. Sea D una digráfica de orden $p \geq 2$. Demostraremos que todo conjunto de cardinalidad $p - \delta^+(D)$ es un conjunto semidominante interior de D y para eso consideremos a D^c . Observemos que, por definición de la digráfica complemento, tenemos que $\Delta^+(D^c) = p - \delta^+(D) - 1$. Sean $A \subseteq V(D^c)$ tal que $|A| = p - \delta^+(D)$ y $x \in V(D^c) - A$. Por la observación anterior sabemos que $\delta^+(x) \leq \Delta^+(D^c) = p - \delta^+(D) - 1 < |A|$, lo que implica que existe

$y \in A$ tal que $(x, y) \notin F(D^c)$, entonces por definición de D^c tenemos que $(x, y) \in F(D)$, de donde se deduce que para todo $x \in V(D) - A$ existe la xA -flecha, es decir, A es un conjunto semidominante interior de D .

Si $V(D) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ consideremos a los conjuntos:

$$P_i = \{x_j \mid p - (i - 1)\delta^+(D) \leq j \leq p - i\delta^+(D)\} \text{ con } i \in \{1, \dots, \lfloor p - \delta^+(D) \rfloor\}.$$

Notemos que $|P_i| = p - \delta^+(D)$ si $i \in \{1, \dots, (\lfloor p - \delta^+(D) \rfloor - 1)\}$ y $|P_{\lfloor p - \delta^+(D) \rfloor}| \geq p - \delta^+(D)$, por lo que todo P_i es distinto del vacío y es un conjunto semidominante interior de D . De donde se deduce que $\{P_1, P_2, \dots, P_{\lfloor p - \delta^+(D) \rfloor}\}$ es una partición semidominante interior de D .

Por lo tanto, $\lfloor p/(p - \delta^+(D)) \rfloor \leq \mathbf{d}^-(D)$. \square

Después de los resultados anteriores, una de las preguntas lógicas sería: ¿dados d_1 y d_2 siempre puedo encontrar una digráfica D de orden p , que cumpla que $\mathbf{d}^-(D) = d_1$ y $\mathbf{d}^+(D) = d_2$?. La respuesta es sí, con lo que llegamos al siguiente teorema:

Teorema 3.3.1. [30] Sean d_1, d_2 , dos enteros positivos, entonces existe un torneo T tal que $\mathbf{d}^-(T) = d_1$ y $\mathbf{d}^+(T) = d_2$.

Demostración. Para la demostración nos enfocaremos en tres casos:

Caso 1: Si $d_1 < d_2$.

Sean $U = \{u_i \mid i = 1, \dots, d_2\}$, $V = \{v_i \mid i = 1, \dots, d_2\}$ y $Z = \{z\}$. Sea $V(T) = U \cup V \cup Z$. El conjunto de flechas $F(T)$ contiene a las flechas: (u_i, u_j) si $i < j$, (v_i, v_j) si $i < j$, (u_i, v_j) si $i \geq j$, (v_i, u_j) si $i > j$, (z, v_i) si $i \leq d_1 - 1$, (v_i, z) si $i \geq d_1$, y (u_i, z) para toda i .

Ahora vamos a probar que $\mathbf{d}^+(T) = d_2$. Para eso definiremos unos nuevos conjuntos: sean $D_i^+ = \{u_i, v_i\}$ para $i = 1, \dots, d_2 - 1$ y $D_{d_2}^+ = \{u_{d_2}, v_{d_2}\} \cup Z$.

Hay que demostrar que cada uno de los D_i^+ es un conjunto semidominante exterior de T para toda i , es decir, que para toda $x \in V(T) - D_i^+$ algún elemento de D_i^+ le manda flecha a x .

Tomamos un $D_i^+ = \{u_i, v_i\}$ fijo, con $i \leq d_2 - 1$. Sea $x \in V(T) - D_i^+$, entonces $x \in D_j^+$ para alguna $j \in \{1, 2, \dots, i - 1, i + 1, \dots, d_2\}$.

Si $j < i$, entonces tenemos dos casos:

- Si $x = u_j$, entonces tenemos que existe la flecha $(v_i, u_j) = (v_i, x)$ con $v_i \in D_i^+$.
- Si $x = v_j$, entonces existe la flecha $(u_i, v_j) = (u_i, x)$, con $u_i \in D_i^+$.

Si $j > i$, entonces tenemos tres casos:

- Si $x = u_j$, entonces existe la flecha $(u_i, u_j) = (u_i, x)$, con $u_i \in D_i^+$.
- Si $x = v_j$, entonces existe la flecha $(v_i, v_j) = (v_i, x)$, con $v_i \in D_i^+$.
- Si $x = z$, entonces existe la flecha $(u_i, x = z)$, con $u_i \in D_i^+$.

Uniendo todos los casos tenemos que D_i^+ es un conjunto semidominante exterior de T con $i \in \{1, \dots, d_2 - 1\}$.

Consideremos $D_{d_2}^+$. Sea $x \in V(T) - D_{d_2}^+$, entonces $x \in D_j^+$ con $j \leq d_2 - 1$, lo que nos vuelve a dar dos casos:

- Si $x = u_j$, entonces existe la flecha $(v_{d_2}, u_j) = (v_{d_2}, x)$, con $v_{d_2} \in D_{d_2}^+$.

- Si $x = v_j$, entonces existe la flecha $(u_{d_2}, v_j) = (u_{d_2}, x)$, con $u_{d_2} \in D_{d_2}^+$.

Por lo tanto, $D_{d_2}^+$ es un conjunto semidominante exterior de T .

Por otro lado, por definición de cada $D_i^+ \neq \emptyset$, $\bigcup_{i=1}^{d_2} D_i^+ = V(T)$ y $D_i^+ \cap D_j^+ = \emptyset$. Lo que nos da que $\{D_1^+, \dots, D_{d_2}^+\}$ es una partición semidominante exterior de T , por lo que, $\mathbf{d}^+(T) \geq d_2$. Además, tenemos que $\delta^-(u_{d_2}) = d_2 - 1$ y por el Lema 3.3.1 tenemos que $\mathbf{d}^+(T) \leq \delta^-(T) + 1 \leq d_2$. Por lo tanto $\mathbf{d}^+(T) = d_2$.

Ahora hay que demostrar que $\mathbf{d}^-(T) = d_1$. Para eso consideremos a los siguientes conjuntos: sean $D_i^- = D_i^+$ para $i = 1, \dots, d_1 - 1$ y $D_{d_1}^- = \bigcup_{j=d_1}^{d_2} D_j^+$.

Hay que demostrar que cada D_i^- es un conjunto semidominante interior de T para toda i , es decir, que para toda $x \in V(T) - D_i^-$ x manda flecha a algún elemento de D_i^- , es decir, existe la $x D_i^-$ - flecha.

Tomemos un D_i^- fijo, con $i \leq d_1 - 1$. Sea $x \in V(T) - D_i^-$, entonces $x \in D_j^-$ para alguna $j \neq i$.

Si $j < i$, entonces tenemos dos casos:

- Si $x = u_j$, entonces existe la flecha $(u_j, u_i) = (x, u_i)$, con $u_i \in D_i^-$.
- Si $x = v_j$, entonces existe la flecha $(v_j, v_i) = (x, v_i)$, con $v_i \in D_i^-$.

Si $j > i$ tenemos tres casos:

- Si $x = u_j$, entonces existe la flecha $(u_j, v_i) = (x, v_i)$, con $v_i \in D_i^-$.
- Si $x = v_j$, entonces existe la flecha $(v_j, u_i) = (x, u_i)$, con $u_i \in D_i^-$.
- Si $x = z$, entonces existe la flecha $(z = x, v_i)$, con $v_i \in D_i^-$.

Uniendo todos los casos tenemos que D_i^- es un conjunto semidominante interior de T con $i \in \{1, \dots, d_1 - 1\}$.

Consideremos $D_{d_1}^-$ y sea $x \in V(T) - D_{d_1}^-$, entonces $x \in D_j^-$, con $j \leq d_1 - 1$, lo que nos vuelve a dar dos casos:

- Si $x = u_j$, entonces existe la flecha $(u_j, u_{d_1}) = (x, u_{d_1})$, con $u_{d_1} \in D_{d_1}^-$.
- Si $x = v_j$, entonces existe la flecha $(v_j, v_{d_1}) = (x, v_{d_1})$, con $v_{d_1} \in D_{d_1}^-$.

Por lo tanto $D_{d_1}^-$ es un conjunto semidominante interior de T .

Por otro lado, por definición cada $D_i^- \neq \emptyset$, $\bigcup_{i=1}^{d_1} D_i^- = V(T)$, con $D_i^- \cap D_j^- = \emptyset$, es decir, $\{D_1^-, \dots, D_{d_1}^-\}$ es una partición semidominante interior de T , por lo que $\mathbf{d}^-(T) \geq d_1$. Por otro lado tenemos que $\delta^+(z) = d_1 - 1$ y por el Lema 3.3.1 tenemos que $\mathbf{d}^-(T) \leq d_1$. Por lo tanto $\mathbf{d}^-(T) = d_1$.

Caso 2: Si $d_1 > d_2$.

Consideramos al torneo dual \tilde{T} , y por el caso anterior tenemos que $\mathbf{d}^-(\tilde{T}) = d_2$ y $\mathbf{d}^+(\tilde{T}) = d_1$.

Caso 3: Si $d_1 = d_2$

Tomamos $Z = \emptyset$, entonces tomamos $D_i^+ = D_i^- = \{u_i, v_i\}$ con $i = 1, \dots, p/2$ y cada clase de esta partición es un conjunto semidominante interior y semidominante exterior. Como $\mathbf{d}^-(T) \geq p/2$ y $\mathbf{d}^+(T) \geq p/2$, entonces por el Lema 3.3.3 obtenemos la igualdad. \square

Ejemplos del teorema anterior son:

Si $d_1 = d_2 = 3 = p/2$, entonces $p = 6$. Tomemos T_1 , con conjuntos $U = \{u_1, u_2, u_3\}$, $V = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $Z = \emptyset$, junto con sus clases cromáticas $D_i^+ = D_i^- = \{u_i, v_i\}$ con $i \in \{1, 2, 3\}$.

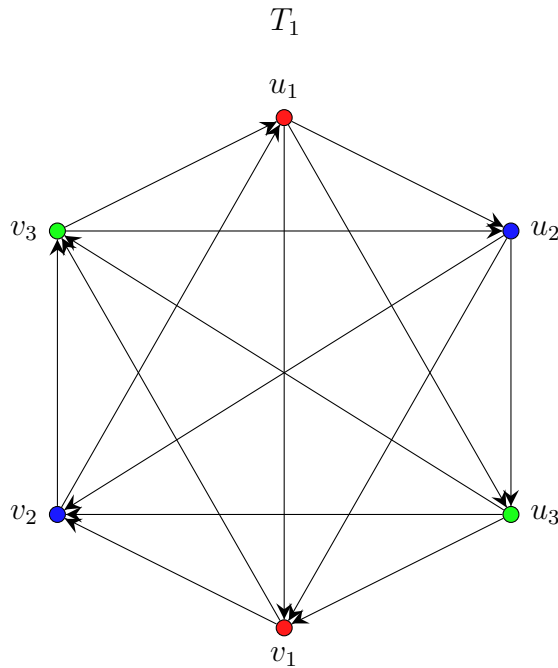
Veamos que cada $D_i^+ = D_i^-$ es un conjunto semidominante interior y un subconjunto semidominante exterior.

Tomemos $D_1^+ = D_1^-$, a u_2 lo absorbe v_1 y u_1 le manda flecha, a u_3 lo absorbe v_1 y u_1 le manda flecha, a v_2 lo absorbe u_1 y v_1 le manda flecha, finalmente a v_3 lo absorbe u_1 y v_1 le manda flecha. Por lo tanto es un conjunto semidominante interior y exterior.

Tomemos $D_2^+ = D_2^-$, a u_1 lo absorbe u_2 y u_2 le manda flecha, a u_3 lo absorbe v_2 y u_2 le manda flecha, a v_1 lo absorbe v_2 y u_2 le manda flecha, finalmente a v_3 lo absorbe u_2 y v_2 le manda flecha. Por lo tanto es un conjunto semidominante interior y exterior.

Tomemos $D_3^+ = D_3^-$, a u_1 lo absorbe u_3 y v_3 le manda flecha, a u_2 lo absorbe u_3 y v_3 le manda flecha, a v_1 lo absorbe v_3 y u_3 le manda flecha, finalmente a v_2 lo absorbe v_3 y u_3 le manda flecha. Por lo tanto es un conjunto semidominante interior y exterior.

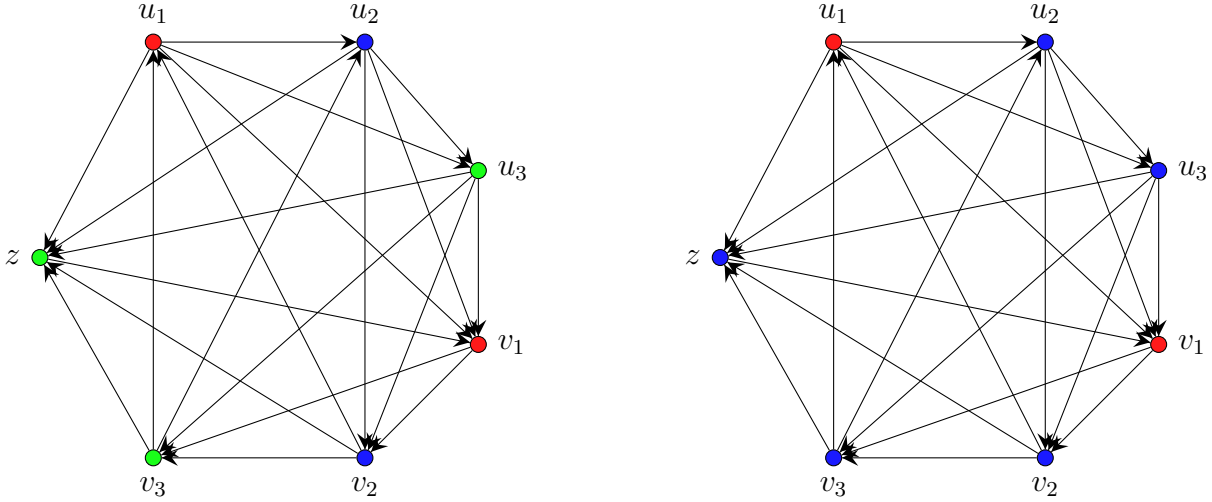
Usando el teorema anterior obtenemos que $\mathbf{d}^+(T_1) = \mathbf{d}^-(T_1) = 3$.



Otro ejemplo sería:

Si $d_1 = 2$ y $d_2 = 3$, entonces $p = 7$. Tomemos T_2 con los conjuntos $U = \{u_1, u_2, u_3\}$, $V = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $Z = \{z\}$, junto con sus subconjuntos semidominantes exteriores: $D_1^+ = \{u_1, v_1\}$, $D_2^+ = \{u_2, v_2\}$ y $D_3^+ = \{u_3, v_3\} \cup \{z\}$, y sus subconjuntos semidominantes interiores: $D_1^- = \{u_1, v_1\}$ y $D_2^- = \{u_2, u_3, v_2, v_3, z\}$.

T_2



Veamos que $D_1^+ = \{u_1, v_1\}$ es un conjunto semidominante exterior de T_2 . Observamos que $N^+(u_1) - D_1^+ = \{u_2, u_3, z\}$ y $N^+(v_1) - D_1^+ = \{v_2, v_3\}$, por lo tanto $N^+(u_1) \cup N^+(v_1) - D_1^+ = V(T_2) - D_1^+$. Por lo tanto D_1^+ es un conjunto semidominante exterior de T_2 .

Tomando a $D_2^+ = \{u_2, v_2\}$ vemos que es un conjunto semidominante exterior de T_2 . Observamos que $N^+(u_2) - D_2^+ = \{u_3, v_1, z\}$ y $N^+(v_2) - D_2^+ = \{v_3, z, u_1\}$, por lo tanto $N^+(u_2) \cup N^+(v_2) - D_2^+ = V(T_2) - D_2^+$. Por lo tanto D_2^+ es un conjunto semidominante exterior de T_2 .

Tomando a $D_3^+ = \{u_3, v_3, z\}$ vemos que es un conjunto semidominante exterior de T_2 . Observemos que $N^+(u_3) - D_3^+ = \{v_1, v_2\}$, $N^+(v_3) - D_3^+ = \{u_1, u_2\}$, $N^+(w_1) - D_3^+ = \{v_1, v_2\}$ y $N^+(z) - D_3^+ = \{v_1\}$, por lo tanto $N^+(u_3) \cup N^+(v_3) \cup N^+(w_1) \cup N^+(z) - D_3^+ = V(T_2) - D_3^+$. Por lo tanto D_3^+ es un conjunto semidominante exterior de T_2 .

Ahora hay que ver que $D_1^- = \{u_1, v_1\}$ es un conjunto semidominante interior de T_2 . Observemos que $N^-(u_1) - D_1^- = \{v_2, v_3\}$ y $N^-(v_1) - D_1^- = \{u_2, u_3, z\}$, lo que nos dice que $N^-(u_1) \cup N^-(v_1) - D_1^- = V(T_2) - D_1^-$. Por lo tanto D_1^- es un conjunto semidominante interior de T_2 .

Tomando a D_2^- podemos ver que u_1 le manda flecha a u_2 y v_1 le manda flecha a v_2 , por lo que D_2^- es un conjunto semidominante interior.

Usando el teorema anterior obtenemos que $\mathbf{d}^+(T_1) = 3$ y $\mathbf{d}^-(T_1) = 2$.

Como vimos, ya podemos construir torneos que cumplan tener el número semidominante coloreable interior y exterior tan grande como se quiera, sin embargo, una pregunta que surge es: ¿cuándo una digráfica tiene una partición distinta a la trivial?, a lo que Zelinka [30] dio la siguiente caracterización.

Teorema 3.3.2. [30] Sea D una digráfica. Las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

1. D contiene una subdigráfica generadora D_0 tal que es bipartita y no tiene pozos.
2. $\mathbf{d}^-(D) \geq 2$.

Demostración. 1. implica 2.

Supongamos que D tiene una subdigráfica generadora D_0 , sin pozos, tal que tiene una bipartición $\{V_1, V_2\}$ de sus vértices, de forma que cada flecha de D_0 une a dos vértices de diferentes clases de dicha partición. Como D_0 no tiene pozos cada vértice de $V_2 = V(D) - V_1$ es vértice inicial de una flecha de D_0 , que por hipótesis tiene su vértice final en V_1 , por lo tanto, V_1 es un conjunto semidominante interior en D_0 . Análogamente, V_2 es un conjunto semidominante interior de D_0 . Como D_0 era subdigráfica generadora entonces $V(D) = V(D_0)$ lo que nos implica que $\{V_1, V_2\}$ es una bipartición semidominante interior de $V(D_0)$ y por lo tanto de $V(D)$. Por lo tanto $\mathbf{d}^-(D) \geq 2$.

2. implica 1.

Supongamos que $\mathbf{d}^-(D) \geq 2$. Entonces por el Lema 3.2.2 existe una coloración con dos clases cromáticas D_1 y D_2 de $V(D)$, tal que cada una es un conjunto semidominante interior. Definimos D_0 como la subdigráfica dada por $V(D_0) = V(D)$ y su conjunto de flechas son todas las flechas de D que unen a dos vértices de diferentes clases cromáticas, lo que nos dice que D_0 es una subdigráfica bipartita generadora de D . Supongamos que D_0 tiene un pozo u , sin pérdida de generalidad supongamos que $u \in D_2$, entonces no existe ninguna flecha que salga hacia D_1 , es decir, no es absorbido por nadie de D_1 , y por lo tanto tampoco es absorbido por nadie en D , lo que es una contradicción pues D_1 era un conjunto semidominante interior de D . Por lo tanto D_0 no tiene pozos. \square

Teorema 3.3.3. [30] Sea D una digráfica. Las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

1. D contiene una subdigráfica generadora D_0 tal que es bipartita y no tiene fuentes.
2. $\mathbf{d}^+(D) \geq 2$.

Como en los otros casos la demostración es completamente análoga al teorema 3.3.2 usando a la digráfica dual.

La caracterización anterior, la podemos generalizar, para digráficas tales que $\mathbf{d}^-(D) = n > 2$, de la siguiente manera.

Teorema 3.3.4. Sea D una digráfica. Las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

1. $\mathbf{d}^-(D) = n > 2$.
2. D contiene una subdigráfica generadora máxima D_0 bajo la propiedad de ser n -partita, tal que la subdigráfica de D_0 inducida por cualquier par de conjuntos de dicha partición no tiene pozos.

Demostración. 1. implica 2.

Supongamos que $\mathbf{d}^-(D) = n > 2$, entonces existe una coloración semidominante interior, con clases cromáticas $\{P_1, \dots, P_n\}$. Definimos D_0 como la subdigráfica dada por $V(D_0) = V(D)$ y su conjunto de flechas son todas las flechas de D que unen a dos vértices de diferentes clases, lo que nos dice que D_0 es una subdigráfica n -partita generadora de D . Si P_i y P_j son dos clases diferentes, consideramos a $D_0[P_i \cup P_j]$ y supongamos que tiene un pozo u , sin pérdida de generalidad supongamos que $u \in P_i$, entonces no existe ninguna flecha que salga hacia P_j , es decir, no es absorbido por nadie de P_j , ni en D , lo que es una contradicción pues P_j era un conjunto semidominante interior de D . Por lo tanto $D_0[P_i \cup P_j]$ no tiene pozos. Eso pasa para todo par de clases diferentes de la coloración.

Notemos que si existe D_1 , un subdigráfica generadora de D que sea $(n + 1)$ -partita, con la propiedad anterior, tendríamos que D tiene una coloración en $n + 1$ clases semidominantes interiores, lo que es una contradicción a $\mathbf{d}^-(D) = n$. Por lo tanto D_0 no es máxima.

2. implica 1.

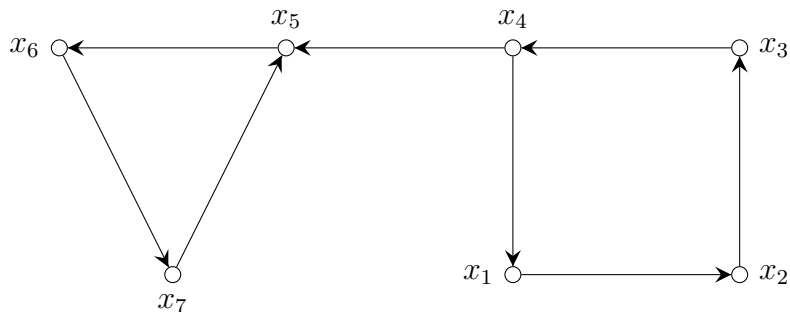
Supongamos que D tiene una subdigráfica generadora D_0 , tal que tiene una n -partición $\{P_1, \dots, P_n\}$ de sus vértices, de manera que cada flecha de D_0 une a dos vértices de diferentes clases de dicha partición, así como cada subdigráfica de D_0 , inducida por cualquier par de clases no tiene pozos. Por ser partición de los vértices, induce es una coloración de $V(D)$. Demostraremos que cada clase de la partición es un conjunto semidominante interior de D . Sea P_i fijo y consideremos a $x \in V(D) - P_i$. Como D_0 es una subdigráfica generadora de D , $x \in P_j$, con $j \in \{1, \dots, n\}$, $j \neq i$. Nos fijamos en $D_0[P_i \cup P_j]$, por hipótesis no tienen pozos, por lo que existe la xP_i -flecha, es decir, P_i absorbe a x . Por lo tanto, P_i es un conjunto semidominante interior de D_0 y por ende de D . Como D_0 era subdigráfica generadora, entonces $V(D) = V(D_0)$ lo que implica que $\{P_1, \dots, P_n\}$ es una partición semidominante interior de $V(D_0)$ en n clases y por lo tanto de $V(D)$. Así $\mathbf{d}^-(D) \geq n$.

Por otro lado, como D_0 es máxima tenemos que $\mathbf{d}^-(D) = n$. □

Notemos que aunque el teorema anterior nos da una caracterización para las digráficas que tienen una coloración distinta a la trivial, en la práctica no es tan fácil de verificar.

Una pregunta que también es natural es si dada una digráfica con $\mathbf{d}^-(D) = n$, entonces toda subdigráfica inducida D' cumple que $\mathbf{d}^-(D') \leq \mathbf{d}^-(D)$. La respuesta es no, basta ver el siguiente ejemplo:

Sea D



Notemos que la digráfica anterior no tiene una coloración semidominante interior distinta a la trivial, pues si nos fijamos en el ciclo dirigido de longitud impar dado por (x_5, x_6, x_7, x_5) , no tiene ninguna flecha que salga de él.

Por otro lado, si nos fijamos en la subdigráfica inducida por $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ vemos que es un ciclo dirigido de longitud par y por lo tanto su número semidominante coloreable interior es dos.

Sin embargo, es claro que si D' es una sudigráfica generadora de D , si tenemos que $\mathbf{d}^-(D') \leq \mathbf{d}^-(D)$.

También podemos preguntarnos que pasa con el número semidominante coloreable interior en las digráficas transitivas. Sabemos, por la Proposición 1.2.3, que si D es transitiva y fuertemente conexa de orden p , entonces D es completa, lo que nos diría que $\mathbf{d}^-(D) = p$. Por lo que, vale la pena preguntarse que pasa cuando D es transitiva pero no es fuertemente conexa.

Proposición 3.3.1. *Si D es una digráfica transitiva que no es fuertemente conexa, entonces*

$$\mathbf{d}^-(D) = \min\{|V(D_j)| \mid D_j \text{ es una componente fuerte terminal de } D\}.$$

Demostración. Sea D_i una componente fuerte terminal de D tal que:

$$|V(D_i)| = \min\{|V(D_j)| \mid D_j \text{ es una componente fuerte terminal de } D\}.$$

Como D_i es una componente fuerte de D , entonces por la Proposición 1.2.3 sabemos que D_i es completa. Por otro lado, al ser D_i una componente fuerte terminal de D , por la Observación 1.2.1 sabemos que si $x \in V(D_i)$, entonces $\Gamma^+(x) \subseteq V(D_i)$. Así por el Lema 3.3.1 se tiene que $\mathbf{d}^-(D) \leq (|V(D_i)| - 1) + 1 = |V(D_i)|$, es decir:

$$\mathbf{d}^-(D) \leq \min\{|V(D_j)| \mid D_j \text{ es una componente fuerte terminal de } D\}.$$

Si D_1, \dots, D_n son las componentes fuertes terminales de D , podemos suponer sin pérdida de generalidad que $D_i = D_1$. Sean $V(D_1) = \{x_1, x_2, \dots, x_{|V(D_1)|}\}$, y $V(D_j) = \{y_{j,1}, \dots, y_{j,r_j}\}$, con $2 \leq j \leq n$.

Sean $P_1 = \{x_1, y_{2,1}, y_{3,1}, \dots, y_{n,1}\} \cup (V(D) - \bigcup_{k=2}^{|V(D_1)|} P_k)$, donde $P_k = \{x_k, y_{2,k}, y_{3,k}, \dots, y_{n,k}\}$ con

$2 \leq k \leq |V(D_1)|$. Como toda digráfica tiene una componente fuerte terminal $V(D_1) \neq \emptyset$ y como D no es fuertemente conexa, entonces $P_k \cap V(D_1) \neq \emptyset$, es decir, $P_k \neq \emptyset$. Además por definición $\{P_1, \dots, P_{|V(D_1)|}\}$ es una partición de los vértices de D . Falta demostrar que cada uno es un conjunto semidominante interior de D .

Sea $w \in P_s$, con $2 \leq s \leq |V(D_1)|$. Observemos que $w \in V(D_j)$, con D_j componente fuerte terminal. Por la Proposición 1.2.3 sabemos que D_j es una digráfica completa, por lo que $(w, x_1) \in F(D)$ si $D_j = D_1$, ó $(w, y_{j,1})$ si $D_j \neq D_1$. En ambos casos, existe la wP_1 -flecha, es decir, P_1 es un conjunto semidominante interior de D .

Sea $w \in V(D) - P_s$, con s fija y $2 \leq s \leq |V(D_1)|$. Obtenemos dos casos:

- Si $w \in D_k$, con D_k una componente fuerte terminal de D . Por la Proposición 1.2.3 sabemos que D_k es una digráfica completa, por lo que $(w, x_s) \in F(D)$ si $D_k = D_1$,

ó $(w, y_{k,s}) \in F(D)$ si $D_k \neq D_1$. En ambos casos, existe la wP_s -flecha.

- Si w no pertenece a ninguna componente fuerte terminal de D . Por el Corolario 1.2.3 sabemos que existe un vértice $z \in D_k$ con D_k una componente fuerte terminal de D , tal que $(w, z) \in F(D)$. Por otro lado, por el Corolario 1.2.2 sabemos que w alcanza a todo vértice de D_k , en particular a $x_s \in P_s$ si $D_k = D_1$, ó a $y_{k,s} \in P_s$, es decir, existe la wP_s -flecha.

Juntando ambos casos, tenemos que P_s es un conjunto semidominante interior de D . Por lo tanto $\{P_1, \dots, P_{|D_1|}\}$ es una partición semidominante interior de D , lo que implica que $\mathbf{d}^-(D) \geq \min\{|V(D_j)| \mid D_j \text{ es una componente fuerte terminal de } D\}$. Es decir:

$$\mathbf{d}^-(D) = \min\{|V(D_j)| \mid D_j \text{ es una componente fuerte terminal de } D\}.$$

□

Notemos que si D es fuertemente conexa y transitiva, entonces por la Proposición 1.2.3 D es una digráfica completa, lo que implica que $\mathbf{d}^-(D) = |V(D)| = p$. Por otro lado, podemos observar que al ser D una digráfica fuertemente conexa:

$$|V(D)| = \min\{|V(D_j)| \mid D_j \text{ es una componente fuerte terminal de } D\}.$$

Es decir, el resultado anterior sigue siendo válido.

3.4. Digráficas Semidominantes Interiores Críticas

Es fácil ver, que si a una digráfica D se le quita una flecha, el número semidominante coloreable interior disminuye en uno o se queda igual, muy parecido a lo que sucede en gráficas. En esta sección definiremos a las digráficas semidominantes interiores críticas, a las que se les dará una caracterización.

Lema 3.4.1. *Sea D una digráfica y $e \in F(D)$. Si $\mathbf{d}^-(D) = n$, entonces $\mathbf{d}^-(D - e) = n - 1$ ó $\mathbf{d}^-(D - e) = n$.*

Demostración. Observemos que $D - e$ es una subdigráfica generadora de D , por lo que $\mathbf{d}^-(D - e) \leq \mathbf{d}^-(D)$. Si $\mathbf{d}^-(D) = 1$, por la observación anterior tenemos que $1 \leq \mathbf{d}^-(D - e) \leq \mathbf{d}^-(D) = 1$, por lo tanto $\mathbf{d}^-(D - e) = 1$.

Supongamos que $\mathbf{d}^-(D) = n \geq 2$, es decir, existe $\{P_1, \dots, P_n\}$ una partición semidominante interior de D . Si consideremos $e = (u, v) \in F(D)$, obtenemos dos casos.

- Si $u, v \in P_i$ con $i \in \{1, \dots, n\}$. Observemos que P_j sigue siendo un conjunto semidominante interior de D , para toda $j \in \{1, \dots, n\}$. Por lo tanto, $\{P_1, \dots, P_n\}$ es una partición semidominante interior de $D - e$, junto con la observación tenemos que $\mathbf{d}^-(D - e) = n$.
- Si $u \in P_i$ y $v \in P_j$ con $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$. Supongamos que $i < j$. Consideremos $P' = P_i \cup P_j$. Notemos que como P_k no fue modificado en $D - e$, sigue siendo un conjunto semidominante interior de $D - e$. Por otro lado, sea $x \in V(D - e) - P'$, como P_i es un conjunto semidominante interior en D y e no tiene extremo en x , entonces existe

la xP_i -flecha en $D - e$, por lo tanto P' es un conjunto semidominante coloreable en $D - e$. También notemos que por definición $P_k \neq \emptyset$, $P' \neq \emptyset$, $\bigcup_{k \neq i, k \neq j}^n P_k \cup P' = V(D - e)$, $P_k \cap P' = \emptyset$ y $P_k \cap P_l = \emptyset$, con $k, l \in \{1, \dots, i - 1, i + 1, \dots, j - 1, j + 1, \dots, n\}$. Es decir, $\{P_1, \dots, P_{i-1}, P_{i+1}, \dots, P_{j-1}, P_{j+1}, \dots, P_n\}$ es una partición semidominante interior de $D - e$. Este hecho, junto con la observación nos dice que: $n - 1 \leq \mathbf{d}^-(D - e) \leq n$.

□

El lema anterior, nos refleja que en ese sentido, las digráficas se comportan como las gráficas. El Teoremas 2.1.12 y el Teorema 2.1.13 nos dan una caracterización de las gráficas domáticas críticas y domáticamente completas. Por lo que nosotros, de manera análoga al concepto de gráfica domática crítica, diremos que D es una digráfica *semidominante interior crítica* si la digráfica resultante de borrar cualquier arista de D , tiene número semidominante coloreable interior más chico que el de D . También sabemos por el Lema 3.3.1 que $\mathbf{d}^-(D) \leq \delta^+(D) + 1$. Análogamente, al concepto de gráfica domáticamente completa, si una digráfica cumple con la igualdad la llamaremos *semidominantemente coloreable interior completa*.

A continuación describiremos la estructura de una digráfica semidominante interior crítica, así como daremos condiciones para que dicho concepto sea equivalente al de una digráfica semidominantemente interior completa.

Teorema 3.4.1. *Si D es una digráfica con $\mathbf{d}^-(D) = s \geq 2$, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. D es una digráfica semidominante interior crítica.
2. $V(D)$ es la unión de V_1, V_2, \dots, V_s , donde los V_i son conjuntos ajenos dos a dos con $i \in \{1, \dots, s\}$, con la propiedad de que para cualquier par de distintos números $j, i \in \{1, \dots, s\}$ la sudigráfica D_{ij} de D , inducida por el conjunto $V_i \cup V_j$, es una digráfica bipartita donde todos sus vértices tienen exgrado uno, más aún, D es una digráfica $S -$ partita.
3. D es una digráfica semidominantemente coloreable interior completa donde todos los de vértices tienen el mismo exgrado.

Demostración. 1 implica 2.

Sea D una digráfica semidominante interior crítica con $\mathbf{d}^-(D) = s$, entonces existe una coloración de $V(D)$ en s clases, tal que cada una es un conjunto semidominante interior de D , sean V_1, \dots, V_{s-1} y V_s dichas clases. Por lo tanto:

$$\bigcup_{i \in \{1, \dots, s\}} V_i = V(D) \text{ y } V_i \cap V_j = \emptyset, \text{ con } i \neq j, i, j \in \{V_1, \dots, V_s\}.$$

Observemos que al ser D una digráfica semidominante interior crítica, entonces $s \geq 2$.

Supongamos que existen dos vértices de la misma clase tal que están unidos por una flecha e . Consideremos D' la digráfica que resulta de borrar e de D . Observemos que cada V_i sigue siendo un conjunto semidominante interior de D' , pues no borramos ninguna flecha entre diferentes

clases de la coloración. Por lo tanto, $\mathbf{d}^-(D') \geq s$, lo que es una contradicción a que D es una digráfica semidominante interior crítica. Por lo tanto, cada V_i es independiente en D , más aún, probamos que D_{ij} es bipartita, con bipartición $\{V_i, V_j\}$.

Sean $i, j \in \{1, \dots, s\}$, con $i \neq j$. Como V_i es un conjunto semidominante interior de D y $V_i \cap V_j = \emptyset$, cada vértice de V_i le manda flecha a algún vértice de V_j , análogamente, los vértices de V_j le mandan flecha a algún vértice de V_i . Entonces en D_{ij} cada vértice tiene exgrado mayor o igual a uno.

Observemos que como V_i y V_j son conjuntos independientes, si un vértice $x \in V_i$ tiene exgrado mayor que uno en D_{ij} podemos borrar todas las xV_j – flechas, excepto una, lo que implica que V_j seguirá siendo un conjunto semidominante interior de D , por lo que no bajaría el número semidominante coloreable interior de D , lo que sería una contradicción. Por las mismas razones, todo $x \in V_j$ tiene exgrado uno en D_{ij} .

Por lo tanto, todo vértice de D tiene exgrado exactamente uno en D_{ij} . Más aún, al ser cada clase independiente, D es S – *partita*.

2. implica 3.

Sea D como en 2, demostraremos que D es una digráfica semidominante coloreable interior completa, es decir, $\mathbf{d}^-(D) = \delta^+(D) + 1$. Más aún, que para todo $x \in V(D)$, $\delta^+(x) = s - 1$.

Sea $x \in V(D)$, por hipótesis $\{V_1, \dots, V_s\}$ es una partición de $V(D)$, entonces $x \in V_i$ para alguna $i \in \{1, \dots, s\}$. Como $\delta_{D_{ij}}^+(x) = 1$, con $j \in \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, s\}$ y V_i es independiente tenemos que:

$$\delta_D^+(x) = \sum_{j=1}^s \delta_{D_{ij}}^+(x) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^s \delta_{D_{ij}}^+(x) = s - 1.$$

Por lo tanto, todo vértice tiene exgrado $\mathbf{d}^-(D) - 1$ y D es semidominantemente coloreable interior completa.

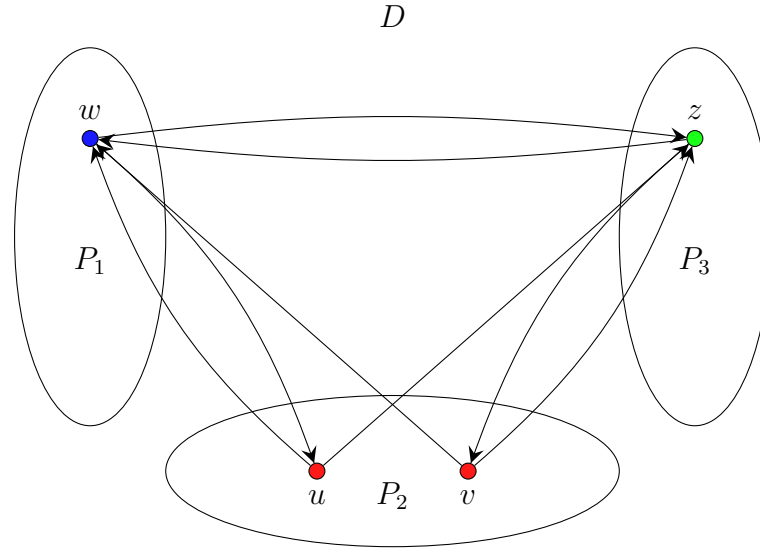
3. implica 1.

Sea D una digráfica semidominantemente coloreable interior completa con $\mathbf{d}^-(D) = s$, donde todos sus vértices tienen el mismo exgrado. Por lo anterior, tenemos que para todo vértice x , $\delta^-(x) = s - 1$. Si D' es la digráfica resultante de borrar una flecha, entonces tenemos que existe $v \in V(D') = V(D)$ tal que $\delta_{D'}^+(v) = s - 2$. Por el Lema 3.3.1 obtenemos que $\mathbf{d}^-(D') \leq s - 2 + 1 = s - 1 = \mathbf{d}^-(D) - 1$, entonces $\mathbf{d}^-(D') < \mathbf{d}^-(D)$. Por lo tanto, D es una digráfica semidominante coloreable interior crítica.

Por lo tanto los tres enunciados son equivalentes. □

Observemos que si una digráfica es semidominante interior crítica, con $\mathbf{d}^-(D) = s \geq 2$, cada conjunto de la coloración semidominante interior es un núcleo de D .

Un ejemplo de una digráfica semidominante interior crítica, es el siguiente:



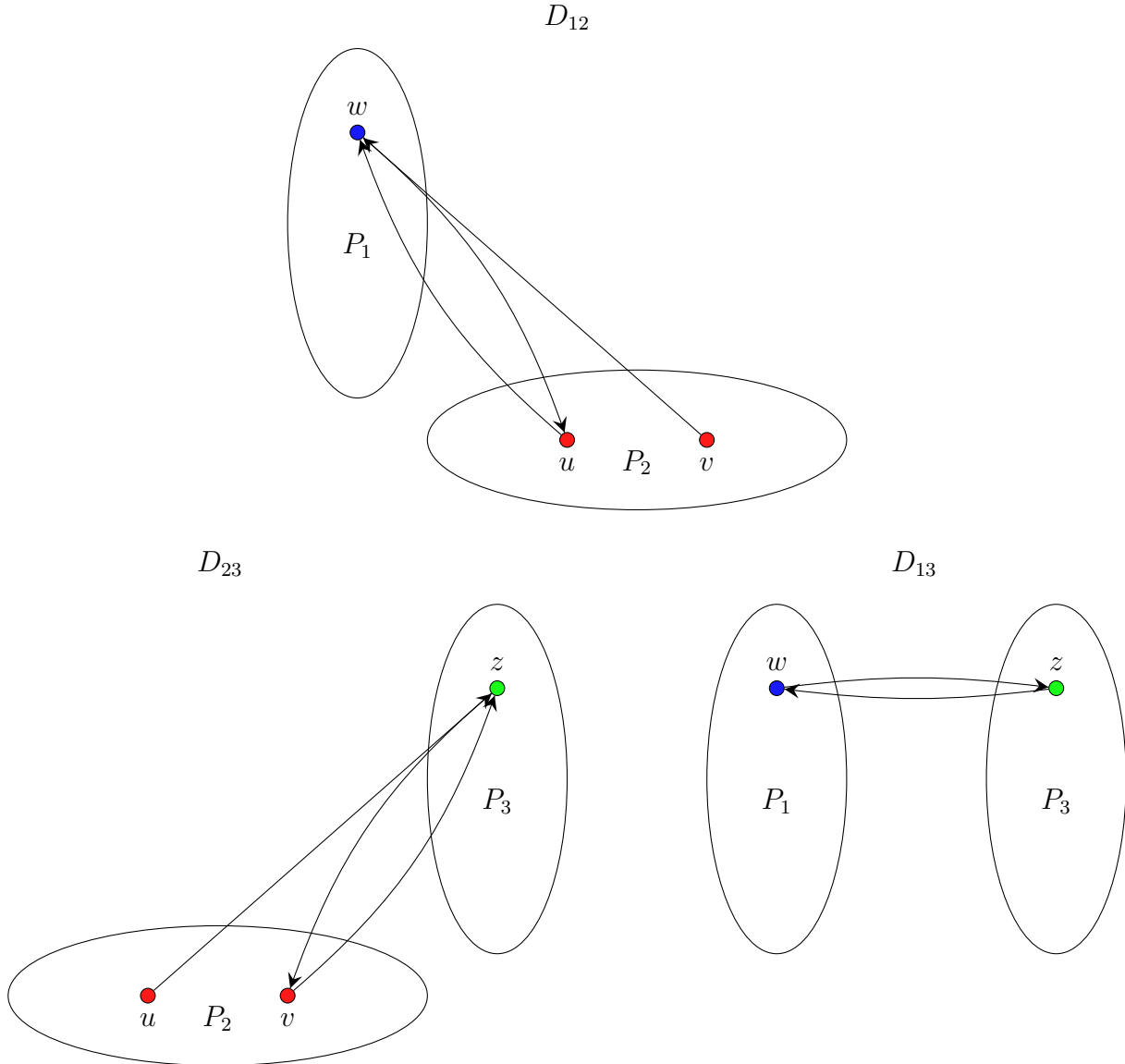
Como podemos ver, P_1, P_2, P_3 son las clases de una coloración semidominante interior de D , es decir, $\mathbf{d}^-(D) \geq 3$. Por otro lado, $\delta^+(u) = \delta^+(v) = \delta^+(w) = \delta^+(z) = 2$, por lo que $\delta^+(D) + 1 = 2 + 1 = 3 \geq \mathbf{d}^-(D)$.

Por lo tanto, $\mathbf{d}^-(D) = 3$ y D es una digráfica semidominantemente coloreable interior completa.

Para demostrar que dicha digráfica es semidominante interior crítica y dada la simetría de la digráfica tomaremos tres casos:

- Si $D - (w, z)$, entonces $\delta^+(w) = 1$. Por el Lema 3.3.1 tenemos que $\mathbf{d}^-(D - (w, z)) \leq 2$. Ahora $V_1 = P_1 \cup P_2 = \{w, z\}$ y $V_2 = P_2 = \{u, v\}$, son conjuntos semidominantes interiores de $D - (w, z)$, es decir, $\mathbf{d}^-(D - (w, z)) \geq 2$. Por lo tanto, $\mathbf{d}^-(D - (w, z)) = 2$.
- Si $D - (u, z)$, entonces $\delta^+(u) = 1$. Por el Lema 3.3.1 tenemos que $\mathbf{d}^-(D - (u, z)) \leq 2$. Ahora $V_1 = P_1 = \{w\}$ y $V_2 = P_2 \cup P_3 = \{u, v, z\}$, son conjuntos semidominantes interiores de $D - (u, z)$, es decir, $\mathbf{d}^-(D - (u, z)) \geq 2$. Por lo tanto, $\mathbf{d}^-(D - (u, z)) = 2$.
- Si $D - (z, u)$, entonces $\delta^+(z) = 1$. Por el Lema 3.3.1 tenemos que $\mathbf{d}^-(D - (z, u)) \leq 2$. Ahora $V_1 = P_1 \cup \{w\}$ y $V_2 = P_2 \cup P_3 = \{u, v, z\}$, son conjuntos semidominantes interiores de $D - (z, u)$, es decir, $\mathbf{d}^-(D - (z, u)) \geq 2$. Por lo tanto, $\mathbf{d}^-(D - (z, u)) = 2$.

Por lo tanto D es semidominante interior crítica.



Con el teorema anterior, basándonos en la idea de coloración por flechas¹, nos preguntamos si dada una digráfica siempre podremos encontrar una subdigráfica generadora que sea semidominante interior crítica. La respuesta es sí.

Sea D una digráfica con $\mathbf{d}^-(D) = s \geq 2$, y $\{V_1, \dots, V_s\}$ una coloración semidominante interior de D .

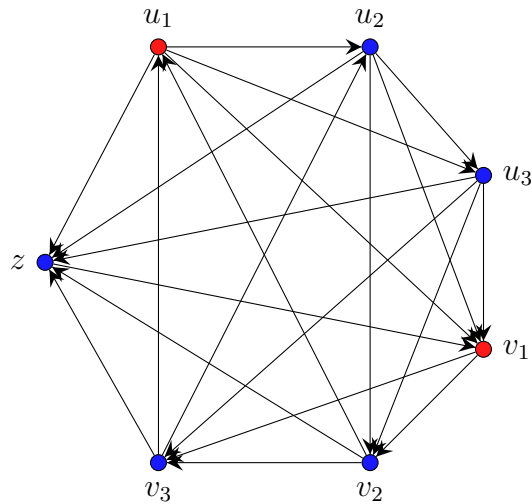
1. Considerar $D - A$, donde $A = \{(u, v) \in F(D) \mid u \in V_i \text{ y } v \in V_i \text{ para alguna } i\}$.
2. Considerar $D[V_i \cup V_j]$ para todo $i, j \in \{1, \dots, s\}$. A todo vértice en $V_i \cup V_j$, se le borran todas las flechas que empiezan en él, exceptuando una.

¹Una m -coloración por flechas en una digráfica D , es cuando a cada flecha de D se le asigna un color, usando a lo más m colores.

Por el Teorema 3.4.1 la digráfica, que resulta de seguir los pasos anteriores, es una subdigráfica generadora de D que es semidominante interior crítica.

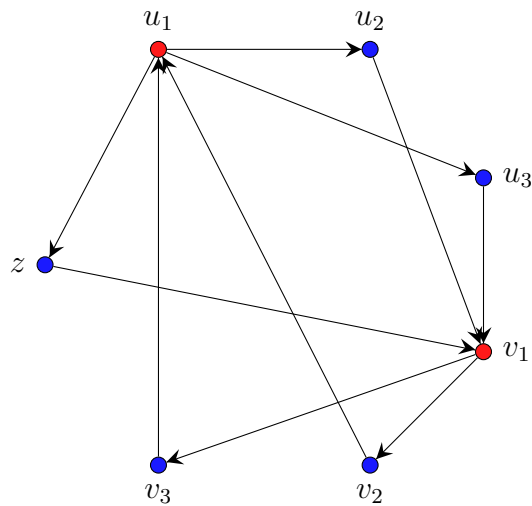
Con el siguiente ejemplo ilustraremos el algoritmo anterior.

Consideremos T_2 :

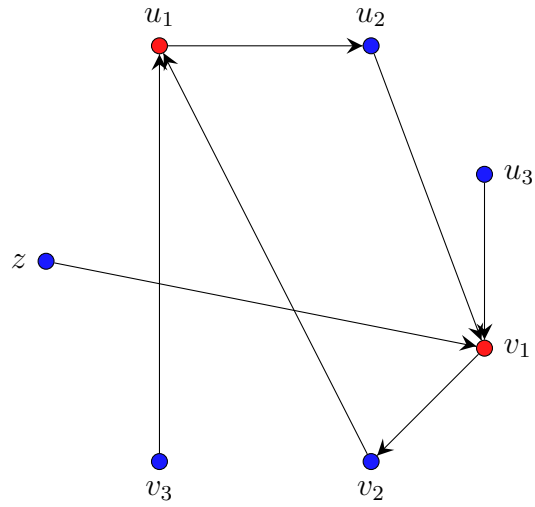


Ahora veamos que $A = \{(u_1, v_1), (u_2, u_3), (u_2, v_2), (u_2, z), (u_3, v_2), (u_3, v_3), (u_3, z), (v_2, v_3), (v_2, z), (v_3, u_2), (v_3, z)\}$.

Por lo tanto $T_2 - A$ es:



Ahora, quitando las flechas tal que todo vértice tenga exgrado uno en $D[V_1 \cup V_2]$, obtenemos:



Esta digráfica es una subdigráfica generadora de T_2 y por el Teorema 3.4.1 es semidominante interior crítica.

Capítulo 4

Número Semidominante Coloreable en el Producto de Dos Digráficas.

En este capítulo, siguiendo con la idea de obtener resultados parecidos a los encontrados en gráficas se definirá el producto cartesiano de dos digráficas. Para hablar sobre la relación que tienen el número semidominante coloreable de cada digráfica con el número semidominante coloreable del producto cartesiano de dichas digráficas.

En cuanto a conjuntos absorbentes, este producto de digráficas ha sido trabajado, por muchas personas, una de ellas es María Kwasnik quien en [14] (1982) donde demostró cual es la distancia entre dos vértices del producto de dos digráficas, así como una condición suficiente para que dicho producto tenga un (k, l) -núcleo.

También se ha trabajado con otro tipo de producto entre digráficas. Por ejemplo, en 1997 Andrzej Wloch e Iwona Wloch definieron el producto generalizado entre digráficas y dieron condiciones para que dicho producto tenga (k, l) -núcleo. Después en 2008, ellos junto con Waldemar Szumny trabajaron con el producto lexicográfico de dos digráficas donde también dieron condiciones para la existencia de un (k, l) -núcleo en dicho producto.

4.1. Definición y Propiedades Básicas

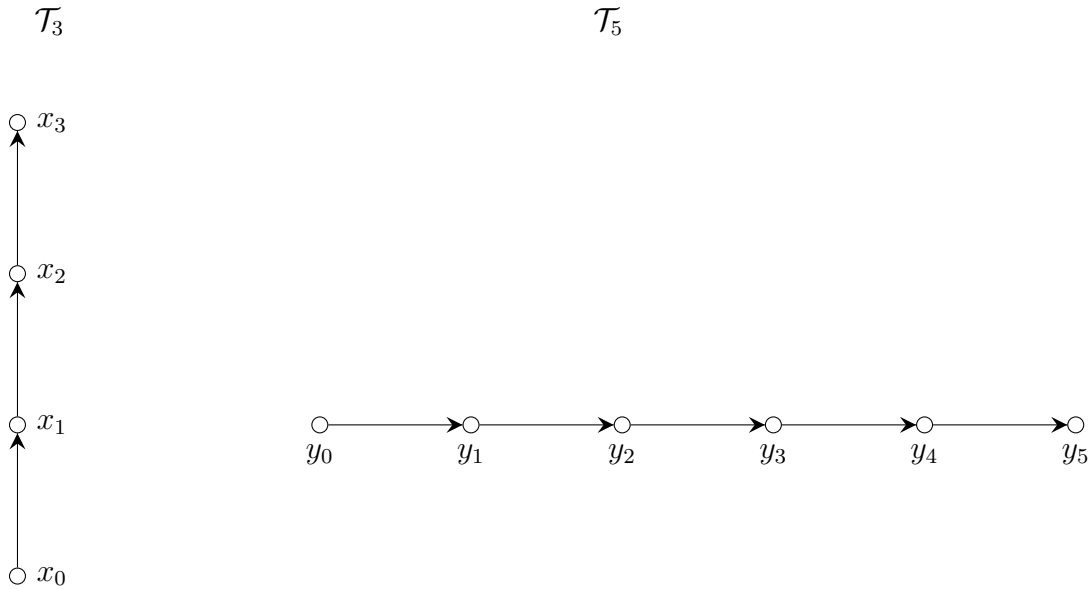
En esta sección definimos el producto cartesiano de dos digráficas, así como, demostramos propiedades básicas de éste.

Definición 4.1.1. Sean D y H dos digráficas, con $V(D) \cap V(H) = \emptyset$, donde $V(D) = \{x_1, \dots, x_p\}$ y $V(H) = \{y_1, \dots, y_n\}$. Definimos $D \times H$ como la digráfica tal que $V(D \times H) = V(D) \times V(H)$, y su conjunto de flechas está dado por:

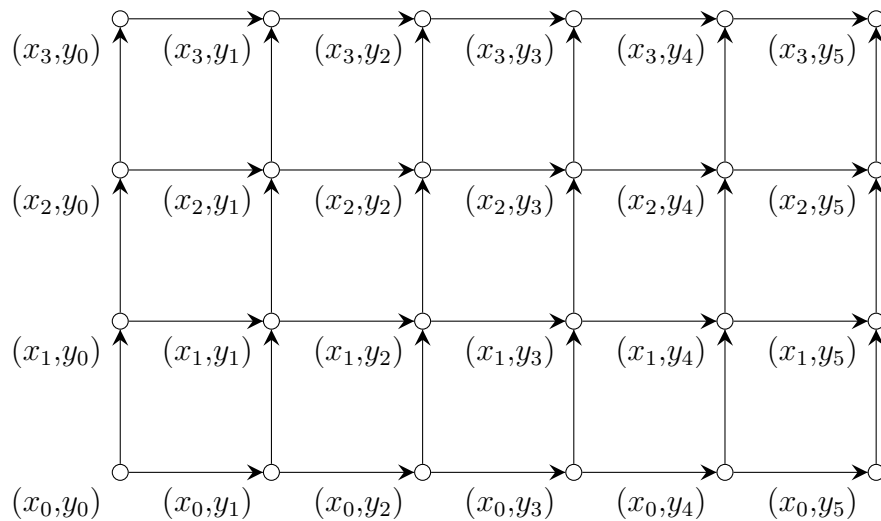
$$F(D \times H) = \{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mid x_1 = x_2 \text{ y } (y_1, y_2) \in F(H), \text{ ó bien } y_1 = y_2 \text{ y } (x_1, x_2) \in F(D)\}$$

La idea intuitiva de esta operación de dos digráficas se puede visualizar si pensamos que por cada vértice de la primera digráfica tendremos una copia de la segunda digráfica y viceversa, como podemos observar en el siguiente ejemplo.

Tomemos \mathcal{T}_3 y \mathcal{T}_5 las trayectorias dirigidas de longitud 3 y 5, respectivamente.



Ahora consideremos $\mathcal{T}_3 \times \mathcal{T}_5$



De la definición de $D \times H$, se tiene que $\delta_{D \times H}^+((x, y)) = \delta_D^+(x) + \delta_H^+(y)$, así como $\delta_{D \times H}^-((x, y)) = \delta_D^-(x) + \delta_H^-(y)$, por lo que $\delta_{D \times H}((x, y)) = \delta_D(x) + \delta_H(y)$.

Una observación que es de gran utilidad, es que el producto cartesiano de dos digráficas es conmutativo, como veremos en el siguiente lema.

Lema 4.1.1. Si D y H son dos digráficas, con $V(D) \cap V(H) = \emptyset$, entonces $D \times H$ es isomorfa a $H \times D$.

Demostración. Sean D y H dos digráficas con $V(D) \cap V(H) = \emptyset$ donde $V(D) = \{x_1, \dots, x_p\}$ y $V(H) = \{y_1, \dots, y_n\}$. Consideremos a la función $\xi : V(D \times H) \rightarrow V(H \times D)$ tal que $\xi((x_i, y_j)) = (y_j, x_i)$.

Sean $\xi(x_i, y_j), \xi(x_r, y_s) \in V(H \times D)$, tal que $\xi(x_i, y_j) = \xi(x_r, y_s)$. Por definición de ξ tenemos $(y_j, x_i) = (y_s, x_r)$, de donde $y_j = y_s$ y $x_i = x_r$, lo que implica que $(x_i, y_j) = (x_r, y_s)$, es decir, ξ

es inyectiva.

Sea $(u, v) \in V(H \times D)$, con $u \in V(H)$ y $v \in V(D)$. Por definición del producto cartesiano, $(v, u) \in V(D \times H)$ y $\xi(v, u) = (u, v)$, es decir, ξ es suprayectiva.

Por lo tanto, ξ es biyectiva. Falta demostrar que preserva adyacencias.

Sea $(x_i, y_j) \in V(D \times H)$ fijo. Supongamos que $(x_r, y_s) \in \Gamma_{D \times H}^+((x_i, y_j))$, y consideremos $\xi((x_i, y_j))$ y $\xi((x_r, y_s))$. Hay que demostrar que $\xi((x_r, y_s)) \in \Gamma_{H \times D}^+(\xi(x_i, y_j))$. Por definición del producto cartesiano tenemos dos casos:

- Si $x_i = x_r$ y $(y_j, y_s) \in F(H)$, entonces por definición de ξ tenemos que $\xi(x_i, y_j) = (y_j, x_i)$ y $\xi(x_r, y_s) = (y_s, x_r)$. En este caso y por la definición de producto cartesiano se tiene que $((y_j, x_i), (y_s, x_r)) \in F(H \times D)$, es decir, $(y_s, x_r) \in \Gamma_{H \times D}^+((y_j, x_i))$.
- Si $y_j = y_s$ y $(x_i, x_j) \in F(D)$, entonces por definición de ξ tenemos que $\xi(x_i, y_j) = (y_j, x_i)$ y $\xi(x_r, y_s) = (y_s, x_r)$. En este caso y por la definición de producto cartesiano se tiene que $((y_j, x_i), (y_s, x_r)) \in F(H \times D)$, es decir, $(y_s, x_r) \in \Gamma_{H \times D}^+((y_j, x_i))$.

Sea $(y_j, x_i) \in V(H \times D)$ fijo. Supongamos que $(y_s, x_r) \in \Gamma_{H \times D}^+((y_j, x_i))$, y consideremos $\xi^{-1}((y_j, x_i))$ y $\xi^{-1}((y_s, x_r))$. Hay que demostrar que $\xi^{-1}((y_s, x_r)) \in \Gamma_{D \times H}^+(\xi^{-1}(y_j, x_i))$. Por definición del producto cartesiano tenemos dos casos:

- Si $x_i = x_r$ y $(y_j, y_s) \in F(H)$, entonces por definición de ξ tenemos que $\xi^{-1}(y_j, x_i) = (x_i, y_j)$ y $\xi^{-1}(y_s, x_r) = (x_r, y_s)$. En este caso y por la definición de producto cartesiano se tiene que $((x_i, y_j), (x_r, y_s)) \in F(D \times H)$, es decir, $(x_r, y_s) \in \Gamma_{D \times H}^+((x_i, y_j))$.
- Si $y_j = y_s$ y $(x_i, x_j) \in F(D)$, entonces por definición de ξ tenemos que $\xi^{-1}(y_j, x_i) = (x_i, y_j)$ y $\xi^{-1}(y_s, x_r) = (x_r, y_s)$. En este caso y por la definición de producto cartesiano se tiene que $((x_i, y_j), (x_r, y_s)) \in F(D \times H)$, es decir, $(x_r, y_s) \in \Gamma_{D \times H}^+((x_i, y_j))$.

Por lo tanto, ξ preserva adyacencias. Por lo que $D \times H$ es isomorfa a $H \times D$. □

4.2. Número Semidominante Coloreable Interior en el Producto de Dos Digráficas

En esta sección daremos cotas sobre el número semidominante coloreable interior en el producto de dos digráficas a partir de los números semidominantes coloreables de las digráficas originales. También calcularemos dicho número para el producto de dos trayectorias dirigidas.

Una observación, fácil de notar, es que, si $D = \vec{K}_1$ ó $H = \vec{K}_1$, entonces $D \times H \cong H$ ó $D \times H \cong D$, pues como hemos dicho antes, obtendremos una copia de la digráfica que no es isomorfa a \vec{K}_1 . Por lo que si una digráfica es \vec{K}_1 y la otra \vec{K}_p , entonces:

$$\mathfrak{d}^-(K_1 \times K_p) = p = |V(\vec{K}_1 \times \vec{K}_p)|.$$

Con esta observación podemos obtener el siguiente resultado.

Proposición 4.2.1. Sean D y H dos digráficas con $V(D) \cap V(H) = \emptyset$, de ordenes p_1 y p_2 respectivamente. Si D tiene dos vértices u y v tal que $u \neq v$, $(u, v) \notin F(D)$ o $(v, u) \notin F(D)$, entonces $\mathbf{d}^-(D \times H) < p_1 \cdot p_2$.

Demostración. Observemos $p_1 \cdot p_2 = |V(D \times H)|$, entonces si $\mathbf{d}^-(D \times H) = p_1 \cdot p_2$, cada vértice sería un conjunto semidominante interior de $D \times H$. Por lo que basta mostrar que existen dos vértices $x, z \in V(D \times H)$ tal que $(x, z) \notin F(D \times H)$ o $(z, x) \notin F(D \times H)$.

Sean $v, u \in V(D)$ tal que $(v, u) \notin F(D)$ o $(u, v) \notin F(D)$. Como $V(H) \neq \emptyset$, existe $w \in V(H)$. Por definición del producto cartesiano $(v, w), (u, w) \in V(D \times H)$.

Supongamos que $(v, u) \notin F(D)$, y dado que $u \neq v$, tenemos que $((v, w), (u, w)) \notin F(D \times H)$. Por otro lado, si $(u, v) \notin F(D)$, y como $u \neq v$, entonces $((u, w), (v, w)) \notin F(D \times H)$. En cada caso llegamos a que existe un vértice que no es un conjunto semidominante interior de $D \times H$. Por lo tanto, $\mathbf{d}^-(D \times H) < p_1 \cdot p_2$. \square

Proposición 4.2.2. Sean D y H son dos digráficas con $V(D) \cap V(H) = \emptyset$, de ordenes p_1 y p_2 respectivamente. Si H tiene dos vértices u y v tal que $u \neq v$, $(u, v) \notin F(H)$ o $(v, u) \notin F(H)$, entonces $\mathbf{d}^-(D \times H) < p_1 \cdot p_2$.

La prueba de la proposición anterior es completamente análoga a la demostración de la Proposición 4.2.1.

El siguiente teorema nos da una cota sobre el número semidominante coloreable interior en el producto de dos digráficas, basado en el número semidominante coloreable interior de las digráficas originales.

Teorema 4.2.1. Si D y H son dos digráficas tal que $\mathbf{d}^-(D) = r$ y $\mathbf{d}^-(H) = s$, entonces $\mathbf{d}^-(D \times H) \geq \max\{r, s\}$.

Demostración. Consideremos $D \times H$. Supongamos que $r \geq s$.

Sea $\{P_1, P_2, \dots, P_r\}$ clases una coloración semidominante interior de D . Consideremos los conjuntos $P'_i = \{(x, y) \in V(D \times H) \mid x \in P_i\}$, con $1 \leq i \leq r$. Notemos que $P'_i \neq \emptyset$ pues $P_i \neq \emptyset$ y $V(H) \neq \emptyset$. Demostraremos que $\{P'_1, \dots, P'_r\}$ es una partición semidominante interior de $D \times H$.

Como $P'_i \subseteq V(D \times H)$, implica que $\bigcup_{i=1}^r P'_i \subseteq V(D \times H)$. Sea $(x, y) \in V(D \times H)$. Como $\{P_1, P_2, \dots, P_r\}$ es una partición de $V(D)$ tenemos que $x \in P_i$, para alguna $i \in \{1, \dots, r\}$, por lo que $(x, y) \in P'_i$. Por lo tanto, $\bigcup_{i=1}^r P'_i = V(D \times H)$.

Sean P'_i y P'_j , con $i, j \in \{1, \dots, r\}$. Supongamos $P'_i \cap P'_j \neq \emptyset$, entonces existe $(x, y) \in P'_i$ y $(x, y) \in P'_j$, es decir, $x \in P_i$ y $x \in P_j$, lo que es una contradicción, por lo tanto, $P'_i \cap P'_j = \emptyset$. Con lo anterior, obtenemos que $\{P'_1, \dots, P'_r\}$ es una partición de los vértices de $D \times H$.

Demostraremos que cada clase P'_i es un conjunto semidominante interior de $D \times H$. Sea P'_i fijo.

Sea $(x, y_0) \in V(D \times H) - P'_i$. Por definición de P'_i tenemos que $x \notin P_i$ y $y_0 \in V(H)$, pero P_i es un conjunto semidominante interior en D , por lo que existe $w \in P_i$ tal que $(x, w) \in F(D)$. Consideremos $(w, y_0) \in V(D \times H)$, y notemos que es elemento de P'_i . Como $(x, w) \in F(D)$ y $y_0 \in V(H)$, se deduce que $((x, y_0), (w, y_0)) \in F(D \times H)$, es decir, existe la $(x, y_0)P'_i$ -flecha. Por lo tanto, P'_i es un conjunto semidominante interior de $D \times H$.

Por lo tanto, $\{P'_1, \dots, P'_r\}$ es una partición semidominante interior de $D \times H$, es decir, $\mathbf{d}^-(D \times H) \geq r = \max\{r, s\}$.

Si $s > r$, entonces tomamos $\{R_1, \dots, R_s\}$ una coloración semidominante coloreable interior de H . Consideramos $R'_i = \{(x, y) \in V(D \times H) \mid y \in R_i\}$, con $1 \leq i \leq s$. A partir de aquí, la demostración es análoga al caso en el que $r \geq s$.

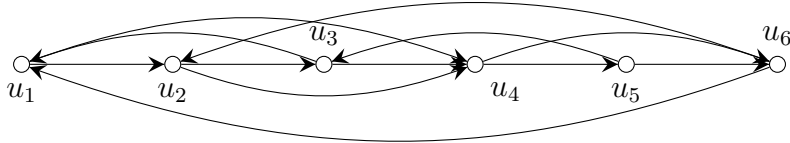
En ambos casos, $\mathbf{d}^-(D \times H) \geq \max\{r, s\}$. □

La cota anterior es justa, pues hay digráficas en la que se da la igualdad, y un ejemplo son las trayectorias dirigidas, como veremos en la siguiente proposición.

Proposición 4.2.3. *Si \mathcal{T}_r y \mathcal{T}_s son las trayectorias dirigidas de longitud r y s , respectivamente, entonces $\mathbf{d}^-(\mathcal{T}_r \times \mathcal{T}_s) = 1$.*

Demostración. Sean $\mathcal{T}_r = (x_1, \dots, x_r)$ y $\mathcal{T}_s = (y_1, \dots, y_s)$ las trayectorias dirigidas de longitud r y s respectivamente. Como ya habíamos observado, $\delta_{\mathcal{T}_r \times \mathcal{T}_s}^+((x_r, y_s)) = \delta_{\mathcal{T}_r}^+(x_r) + \delta_{\mathcal{T}_s}^+(y_s) = 0 + 0$. Entonces por el Lema 3.3.1 tenemos que $1 \leq \mathbf{d}^-(\mathcal{T}_r \times \mathcal{T}_s) \leq 0 + 1 = 1$. Por lo tanto, $\mathbf{d}^-(\mathcal{T}_r \times \mathcal{T}_s) = 1$. □

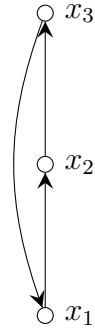
A pesar de lo anterior, hay digráficas que tienen un número semidominante coloreable interior mayor, como mostraremos a continuación. Consideremos la siguiente digráfica D .



Mostraremos que $\mathbf{d}^-(D) = 2$. Observemos que $P_1 = \{u_1, u_3, u_5\}$ es un conjunto semidominante interior de D , pues u_2 es absorbido por u_3 , u_4 por u_5 y u_6 por u_1 . Por otro lado, $P_2 = \{u_2, u_4, u_6\}$ también lo es pues u_1 es absorbido por u_2 , u_3 por u_4 y u_5 por u_6 , es decir, $\{P_1, P_2\}$ es una partición semidominante interior de D , en dos clases. Como $\delta^+(D) = 2$ por el Lema 3.3.1 tenemos que $2 \leq \mathbf{d}^-(D) \leq 3$.

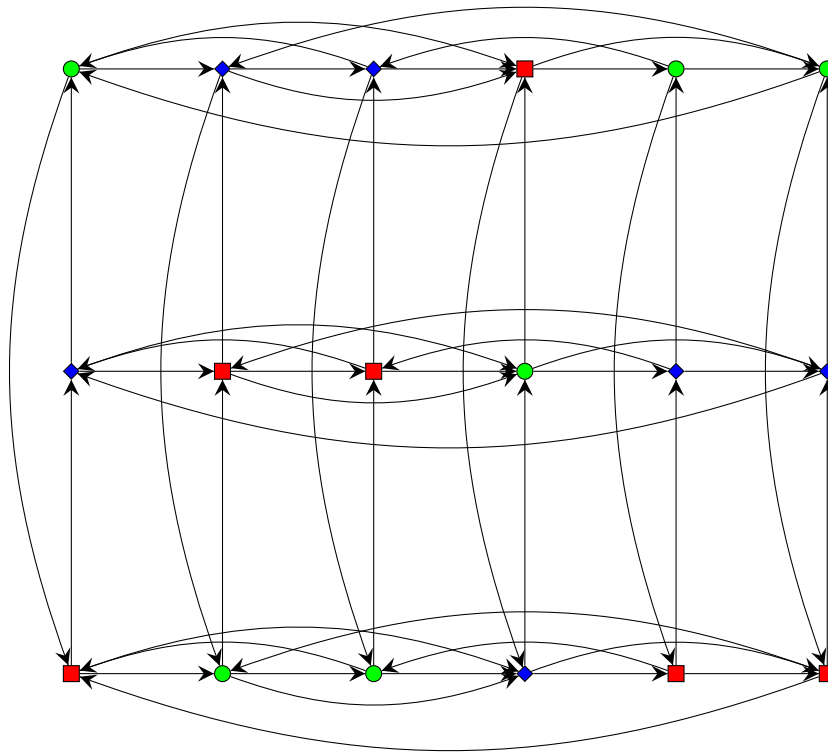
Por otro lado, supongamos que existe una coloración semidominante interior de D en 3 conjuntos, P_1 , P_2 y P_3 . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $u_1 \in P_1$, como $\Gamma^+(u_1) = \{u_2, u_4\}$, cada uno tiene que pertenecer a clases distintas, digamos que $u_2 \in P_2$ y $u_4 \in P_3$. Como $\Gamma^+(u_2) = \{u_3, u_4\}$, observemos que como $u_4 \in P_3$ y $u_2 \in P_2$ se deduce que $u_3 \in P_1$, entonces junto con el hecho de que $\Gamma^+(u_3) = \{u_1, u_4\}$ y $u_4 \in P_3$, entonces $u_1 \in P_2$, lo que es una contradicción pues $u_1 \in P_1$. Por lo tanto, no existe dicha partición, es decir, $\mathbf{d}^-(D) = 2$.

Ahora tomemos C_3 , el ciclo dirigido de longitud tres. Sabemos que $\mathbf{d}^-(C_3) = 1$.



Consideremos $C_3 \times D$. Por el Teorema 4.2.1 sabemos que $\mathbf{d}^-(C_3 \times D) \geq 2$. La siguiente figura muestra $C_3 \times D$ tiene una coloración semidominante interior en tres conjuntos.

$C_3 \times D$



4.3. Número Semidominante Coloreable Interior en el Producto de Dos Ciclos Dirigidos

Esta sección está centrada en calcular el número semidominante coloreable interior del producto de dos ciclos dirigidos. Para eso, necesitaremos dos observaciones.

Sean $C_n = (x_0, \dots, x_{n-1}, x_0)$ y $C_m = (y_0, \dots, y_{m-1}, y_0)$ dos ciclos dirigidos.

Observación 4.3.1. De la definición de $C_n \times C_m$, tenemos que:

$$\Gamma_{C_n \times C_m}^+((x_k, y_t)) = \{(x_k, y_{t+1}), (x_{k+1}, y_t)\}, \text{ para todo } (x_k, y_t) \in V(C_n \times C_m).$$

Observación 4.3.2. Por el Teorema 4.2.1 si alguno de los ciclos dirigidos son de longitud par, entonces $2 \leq \mathbf{d}^-(C_n \times C_m)$. Demostraremos que si ambos son de longitud impar la desigualdad sigue siendo válida.

Supongamos que $n = 2h + 1$ y $m = 2s + 1$. Consideremos $C_n \times C_m$. Sean:

$$\begin{aligned} P_1 = & \{(x_{2h}, y_0), (x_{2h}, y_2), \dots, (x_{2h}, y_{2s-2}), \\ & (x_{2h-1}, y_1), (x_{2h-1}, y_3), \dots, (x_{2h-1}, y_{2s-1}), \\ & (x_{2(h-1)}, y_0), (x_{2(h-1)}, y_2), \dots, (x_{2(h-1)}, y_{2s-2}), \\ & \vdots \\ & (x_1, y_1), (x_1, y_3), \dots, (x_1, y_{2s-1}), \\ & (x_0, y_0), (x_0, y_2), \dots, (x_0, y_{2s-2})\} \\ & \cup \{(x_{2h-1}, y_{2s}), (x_{2h-3}, y_{2s}), \dots, (x_1, y_{2s})\} \cup \{(x_0, y_{2s-1})\}. \end{aligned}$$

$$P_2 = V(C_n \times C_m) - P_1.$$

Por definición, $\{P_1, P_2\}$ es una partición de los vértices de $C_n \times C_m$, en dos clases. Demostraremos que ambas clases son conjuntos semidominantes interiores.

Sea $(x_i, y_j) \in P_2$.

Si $0 \leq i \leq 2h$ y $0 \leq j \leq 2j - 2$, notemos que $((x_i, y_j), (x_i, y_{j+1})) \in F(C_n \times C_m)$ y que $(x_i, y_{j+1}) \in P_1$.

Si $0 \leq i \leq 2h - 1$ y $2s - 1 \leq j \leq 2h - 1$, notemos que $((x_i, y_j), (x_{i+1}, y_j)) \in F(C_n \times C_m)$ y que $(x_{i+1}, y_j) \in P_1$.

Si $(x_i, y_j) = (x_{2h}, y_{2s-1})$, observemos que $((x_{2h}, y_{2s-1}), (x_0, y_{2s-1})) \in F(C_n \times C_m)$ y $(x_0, y_{2s-1}) \in P_1$.

Si $(x_i, y_j) = (x_{2h}, y_{2s})$, observemos que $((x_{2h}, y_{2s}), (x_{2h}, y_0)) \in F(C_n \times C_m)$ y $(x_{2h}, y_0) \in P_1$.

En todos los casos existe la $(x_i, y_j)P_1$ -flecha. Por lo tanto, P_1 es un conjunto semidominante interior de $C_n \times C_m$.

Sea $(x_i, y_j) \in P_1$.

Si $1 \leq i \leq 2h$ y $0 \leq j \leq 2s$, notemos que $((x_i, y_j), (x_i, y_{j+1})) \in F(C_n \times C_m)$ y que $(x_i, y_{j+1}) \in P_2$.

Si $1 \leq i \leq 2h$ y $2s - 1 \leq j \leq 2s$, notemos que $((x_i, y_j), (x_{i+1}, y_j)) \in F(C_n \times C_m)$ y que $(x_{i+1}, y_j) \in P_2$.

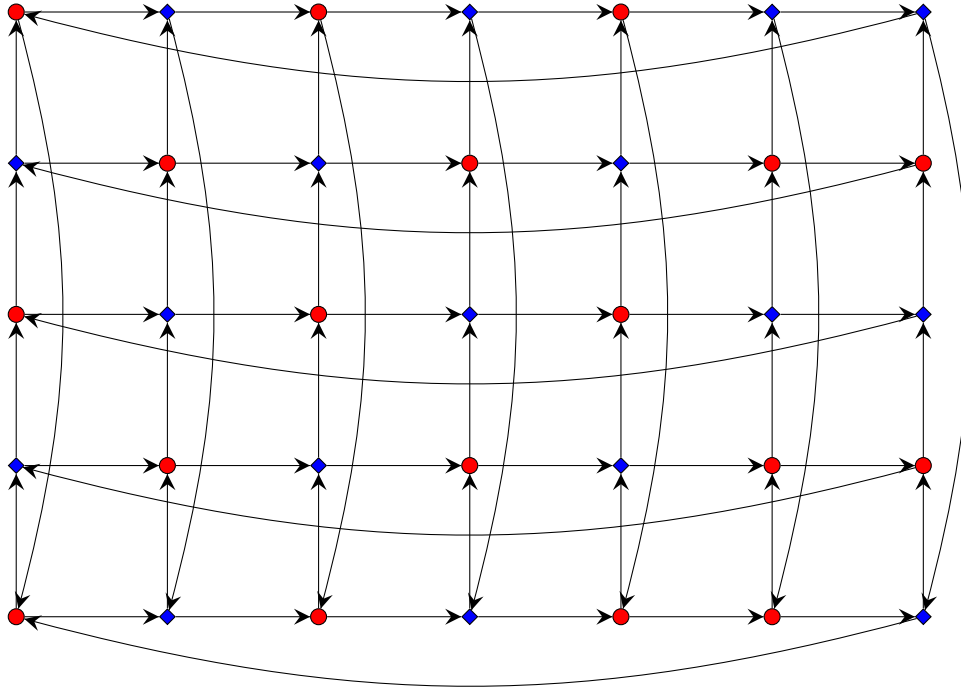
Si $i = 1$ y $0 \leq j \leq 2s - 2$, notemos que $((x_i, y_j), (x_{i+1}, y_j)) \in F(C_n \times C_m)$ y que $(x_{i+1}, y_j) \in P_2$.

Si $(x_i, y_j) = (x_0, y_{2s-1})$, observemos que $((x_0, y_{2s-1}), (x_0, y_{2s})) \in F(C_n \times C_m)$ y que $(x_0, y_{2s}) \in P_2$.

En todos los casos existe la $(x_i, y_j)P_2$ -flecha. Por lo tanto, P_2 es un conjunto semidominante interior de $C_n \times C_m$.

Por lo tanto, $\{P_1, P_2\}$ es una partición semidominante interior de $C_n \times C_m$. Lo que implica que $\mathbf{d}^-(C_n \times C_m) \geq 2$, para toda n y para toda m .

Consideremos $C_5 \times C_7$.



En el ejemplo anterior, los vértices representados con un círculo forman un conjunto semidominante interior, al igual que los vértices representados con un diamante. Por lo que tenemos una bicoloración semidominante interior de los vértices de $C_5 \times C_7$, es decir, que $\mathbf{d}^-(C_5 \times C_7) \geq 2$.

Teorema 4.3.1. Sean C_n y C_m los ciclos dirigidos de longitud n y m respectivamente.

A) Si $n \cong 0$ y $m \cong 0 \pmod{3}$, entonces $\mathbf{d}^-(C_n \times C_m) = 3$.

B) Si $n \not\cong 0$ ó $m \not\cong 0 \pmod{3}$, entonces $\mathbf{d}^-(C_n \times C_m) = 2$.

Demostración. Sean $C_n = (x_0, \dots, x_{n-1}, x_0)$ y $C_m = (y_0, \dots, y_{m-1}, y_0)$. Consideremos $C_n \times C_m$. Por el Lema 3.3.1 sabemos que $\mathbf{d}^-(C_n \times C_m) \leq 2 + 1 = 3$.

Demostraremos **(A)**. Supongamos que $n \cong 0$ y $m \cong 0 \pmod{3}$, es decir, $n = 3h$ y $m = 3s$, con $h, s \in \mathbb{N}$. Consideremos a los conjuntos:

$$P_0 = \{(x_i, y_j) \in V(C_n \times C_m) \mid i \cong 0 \pmod{3} \text{ y } j \cong 0 \pmod{3} \text{ ó } \\ i \cong 1 \pmod{3} \text{ y } j \cong 1 \pmod{3} \text{ ó } \\ i \cong 2 \pmod{3} \text{ y } j \cong 2 \pmod{3}\}$$

$$P_1 = \{(x_i, y_j) \in V(C_n \times C_m) \mid i \cong 0 \pmod{3} \text{ y } j \cong 1 \pmod{3} \text{ ó } \\ i \cong 1 \pmod{3} \text{ y } j \cong 2 \pmod{3} \text{ ó } \\ i \cong 2 \pmod{3} \text{ y } j \cong 0 \pmod{3}\}$$

$$P_2 = \{(x_i, y_j) \in V(C_n \times C_m) \mid i \cong 0 \pmod{3} \text{ y } j \cong 2 \pmod{3} \text{ ó } \\ i \cong 1 \pmod{3} \text{ y } j \cong 0 \pmod{3} \text{ ó } \\ i \cong 2 \pmod{3} \text{ y } j \cong 1 \pmod{3}\}.$$

Demostremos que $\{P_0, P_1, P_2\}$ es una partición semidominante interior de $C_n \times C_m$. Como $n = 3h$ y $m = 3s$, donde $h, s \geq 1$, entonces $(x_0, y_0) \in P_0$, $(x_0, y_1) \in P_1$ y $(x_0, y_2) \in P_2$, es decir, son distintos del vacío.

Como $P_k \subseteq V(C_n \times C_m)$, con $k \in \{0, 1, 2\}$, entonces $P_0 \cup P_1 \cup P_2 \subseteq V(C_n \times C_m)$. Sea $(x_i, y_j) \in V(C_n \times C_m)$. Observemos que $i \cong r_1 \pmod{3}$ y $j \cong r_2 \pmod{3}$, con $r_1, r_2 \in \{0, 1, 2\}$, se tienen varios casos:

- Si $r_1 = 0$, tenemos tres casos:
 1. Si $r_2 = 0$, entonces por definición de P_0 , tenemos que $(x_i, y_j) \in P_0$.
 2. Si $r_2 = 1$, entonces por definición de P_1 , tenemos que $(x_i, y_j) \in P_1$.
 3. Si $r_2 = 2$, entonces por definición de P_2 , tenemos que $(x_i, y_j) \in P_2$.
- Si $r_1 = 1$, tenemos tres casos:
 1. Si $r_2 = 0$, entonces por definición de P_2 , tenemos que $(x_i, y_j) \in P_2$.
 2. Si $r_2 = 1$, entonces por definición de P_0 , tenemos que $(x_i, y_j) \in P_0$.
 3. Si $r_2 = 2$, entonces por definición de P_1 , tenemos que $(x_i, y_j) \in P_1$.
- Si $r_1 = 2$, tenemos tres casos:
 1. Si $r_2 = 0$, entonces por definición de P_1 , tenemos que $(x_i, y_j) \in P_1$.
 2. Si $r_2 = 1$, entonces por definición de P_2 , tenemos que $(x_i, y_j) \in P_2$.
 3. Si $r_2 = 2$, entonces por definición de P_0 , tenemos que $(x_i, y_j) \in P_0$.

Juntando todos los casos tenemos que $V(C_n \times C_m) \subseteq P_0 \cup P_1 \cup P_2$. Por lo tanto, $V(C_n \times C_m) = P_0 \cup P_1 \cup P_2$.

Supongamos que $P_k \cap P_t \neq \emptyset$, con $k, t \in \{0, 1, 2\}$ y $k \not\cong t \pmod{3}$. Entonces existe $(x_i, y_j) \in P_k$ y $(x_i, y_j) \in P_t$ con $k, t \in \{0, 1, 2\}$ y $k \not\cong t \pmod{3}$. Observemos que $i \cong r_1 \pmod{3}$ y $j \cong r_2 \pmod{3}$, con $r_1, r_2 \in \{0, 1, 2\}$. Tenemos tres casos:

- Si $k = 0$ y $t = 1$, tenemos varios casos:
 1. Si $r_1 = 0$, entonces como $(x_i, y_j) \in P_0$, tenemos que $r_2 = 0$, pero $(x_i, y_j) \in P_1$ implica que $r_2 = 1$, lo que es una contradicción.
 2. Si $r_1 = 1$, entonces como $(x_i, y_j) \in P_0$, tenemos que $r_2 = 1$, pero $(x_i, y_j) \in P_1$ implica que $r_2 = 2$, lo que es una contradicción.
 3. Si $r_1 = 2$, entonces como $(x_i, y_j) \in P_0$, tenemos que $r_2 = 2$, pero $(x_i, y_j) \in P_1$ implica que $r_2 = 0$, lo que es una contradicción.

- Si $k = 0$ y $t = 2$, tenemos varios casos:
 1. Si $r_1 = 0$, entonces como $(x_i, y_j) \in P_0$, tenemos que $r_2 = 0$, pero $(x_i, y_j) \in P_2$ implica que $r_2 = 2$, lo que es una contradicción.
 2. Si $r_1 = 1$, entonces como $(x_i, y_j) \in P_0$, tenemos que $r_2 = 1$, pero $(x_i, y_j) \in P_2$ implica que $r_2 = 0$, lo que es una contradicción.
 3. Si $r_1 = 2$, entonces como $(x_i, y_j) \in P_0$, tenemos que $r_2 = 2$, pero $(x_i, y_j) \in P_2$ implica que $r_2 = 1$, lo que es una contradicción.
- Si $k = 1$ y $t = 2$, tenemos varios casos:
 1. Si $r_1 = 0$, entonces como $(x_i, y_j) \in P_1$, tenemos que $r_2 = 1$, pero $(x_i, y_j) \in P_2$ implica que $r_2 = 2$, lo que es una contradicción.
 2. Si $r_1 = 1$, entonces como $(x_i, y_j) \in P_1$, tenemos que $r_2 = 2$, pero $(x_i, y_j) \in P_2$ implica que $r_2 = 0$, lo que es una contradicción.
 3. Si $r_1 = 2$, entonces como $(x_i, y_j) \in P_1$, tenemos que $r_2 = 0$, pero $(x_i, y_j) \in P_2$ implica que $r_2 = 1$, lo que es una contradicción.

Por lo tanto, $P_k \cap P_t = \emptyset$, con $k, t \in \{0, 1, 2\}$ y $k \not\equiv t \pmod{3}$.

Demostraremos que P_0 es un conjunto semidominante interior de $C_n \times C_m$.

Sea $(x_i, y_j) \in V(C_n \times C_m) - P_0$. Tenemos dos casos.

- Si $(x_i, y_j) \in P_1$, entonces tenemos tres casos:
 1. Si $i \cong 0 \pmod{3}$ y $j \cong 1 \pmod{3}$, entonces $i + 1 \cong 1 \pmod{3}$, por lo que $(x_{i+1}, y_j) \in P_0$. Junto con la Observación 4.3.1 tenemos que existe la $(x_i, y_j)P_0$ -flecha.
 2. Si $i \cong 1 \pmod{3}$ y $j \cong 2 \pmod{3}$, entonces $i + 1 \cong 2 \pmod{3}$, por lo que $(x_{i+1}, y_j) \in P_0$. Junto con la Observación 4.3.1 tenemos que existe la $(x_i, y_j)P_0$ -flecha.
 3. Si $i \cong 2 \pmod{3}$ y $j \cong 0 \pmod{3}$, entonces $i + 1 \cong 0 \pmod{3}$, por lo que $(x_{i+1}, y_j) \in P_0$. Junto con la Observación 4.3.1 tenemos que existe la $(x_i, y_j)P_0$ -flecha.
- Si $(x_i, y_j) \in P_2$, entonces tenemos tres casos:
 1. Si $i \cong 0 \pmod{3}$ y $j \cong 2 \pmod{3}$, entonces $j + 1 \cong 0 \pmod{3}$, por lo que $(x_i, y_{j+1}) \in P_0$. Junto con la Observación 4.3.1 tenemos que existe la $(x_i, y_j)P_0$ -flecha.
 2. Si $i \cong 1 \pmod{3}$ y $j \cong 0 \pmod{3}$, entonces $j + 1 \cong 1 \pmod{3}$, por lo que $(x_i, y_{j+1}) \in P_0$. Junto con la Observación 4.3.1 tenemos que existe la $(x_i, y_j)P_0$ -flecha.
 3. Si $i \cong 2 \pmod{3}$ y $j \cong 1 \pmod{3}$, entonces $j + 1 \cong 2 \pmod{3}$, por lo que $(x_i, y_{j+1}) \in P_0$. Junto con la Observación 4.3.1 tenemos que existe la $(x_i, y_j)P_0$ -flecha.

Por lo tanto P_0 es un conjunto semidominante interior de $C_n \times C_m$.

Demostraremos que P_1 es un conjunto semidominante interior de $C_n \times C_m$.

Sea $(x_i, y_j) \in V(C_n \times C_m) - P_1$. Tenemos dos casos:

- Si $(x_i, y_j) \in P_0$, entonces tenemos tres casos:

1. Si $i \cong 0 \pmod{3}$ y $j \cong 0 \pmod{3}$, entonces $j + 1 \cong 1 \pmod{3}$, por lo que $(x_i, y_{j+1}) \in P_1$. Junto con la Observación 4.3.1 tenemos que existe la $(x_i, y_j)P_1$ -flecha.
 2. Si $i \cong 1 \pmod{3}$ y $j \cong 1 \pmod{3}$, entonces $j + 1 \cong 2 \pmod{3}$, por lo que $(x_i, y_{j+1}) \in P_1$. Junto con la Observación 4.3.1 tenemos que existe la $(x_i, y_j)P_1$ -flecha.
 3. Si $i \cong 2 \pmod{3}$ y $j \cong 2 \pmod{3}$, entonces $j + 1 \cong 0 \pmod{3}$, por lo que $(x_i, y_{j+1}) \in P_1$. Junto con la Observación 4.3.1 tenemos que existe la $(x_i, y_j)P_1$ -flecha.
- Si $(x_i, y_j) \in P_2$, entonces tenemos tres casos:
 1. Si $i \cong 0 \pmod{3}$ y $j \cong 2 \pmod{3}$, entonces $i + 1 \cong 0 \pmod{3}$, por lo que $(x_{i+1}, y_j) \in P_1$. Junto con la Observación 4.3.1 tenemos que existe la $(x_i, y_j)P_1$ -flecha.
 2. Si $i \cong 1 \pmod{3}$ y $j \cong 0 \pmod{3}$, entonces $i + 1 \cong 1 \pmod{3}$, por lo que $(x_{i+1}, y_j) \in P_1$. Junto con la Observación 4.3.1 tenemos que existe la $(x_i, y_j)P_1$ -flecha.
 3. Si $i \cong 2 \pmod{3}$ y $j \cong 1 \pmod{3}$, entonces $i + 1 \cong 2 \pmod{3}$, por lo que $(x_{i+1}, y_j) \in P_1$. Junto con la Observación 4.3.1 tenemos que existe la $(x_i, y_j)P_1$ -flecha.

Por lo tanto P_1 es un conjunto semidominante interior de $C_n \times C_m$.

Demostraremos que P_2 es un conjunto semidominante interior de $C_n \times C_m$.

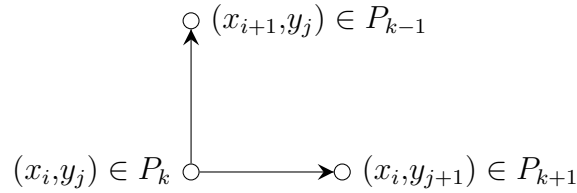
Sea $(x_i, y_j) \in V(C_n \times C_m) - P_2$. Tenemos dos casos:

- Si $(x_i, y_j) \in P_0$, entonces tenemos tres casos:
 1. Si $i \cong 0 \pmod{3}$ y $j \cong 0 \pmod{3}$, entonces $i + 1 \cong 1 \pmod{3}$, por lo que $(x_{i+1}, y_j) \in P_2$. Junto con la Observación 4.3.1 tenemos que existe la $(x_i, y_j)P_2$ -flecha.
 2. Si $i \cong 1 \pmod{3}$ y $j \cong 1 \pmod{3}$, entonces $i + 1 \cong 2 \pmod{3}$, por lo que $(x_{i+1}, y_j) \in P_2$. Junto con la Observación 4.3.1 tenemos que existe la $(x_i, y_j)P_2$ -flecha.
 3. Si $i \cong 2 \pmod{3}$ y $j \cong 2 \pmod{3}$, entonces $i + 1 \cong 0 \pmod{3}$, por lo que $(x_{i+1}, y_j) \in P_1$. Junto con la Observación 4.3.1 tenemos que existe la $(x_i, y_j)P_2$ -flecha.
- Si $(x_i, y_j) \in P_1$, entonces tenemos tres casos:
 1. Si $i \cong 0 \pmod{3}$ y $j \cong 1 \pmod{3}$, entonces $j + 1 \cong 2 \pmod{3}$, por lo que $(x_i, y_{j+1}) \in P_2$. Junto con la Observación 4.3.1 tenemos que existe la $(x_i, y_j)P_2$ -flecha.
 2. Si $i \cong 1 \pmod{3}$ y $j \cong 2 \pmod{3}$, entonces $j + 1 \cong 0 \pmod{3}$, por lo que $(x_i, y_{j+1}) \in P_2$. Junto con la Observación 4.3.1 tenemos que existe la $(x_i, y_j)P_2$ -flecha.
 3. Si $i \cong 2 \pmod{3}$ y $j \cong 0 \pmod{3}$, entonces $j + 1 \cong 1 \pmod{3}$, por lo que $(x_i, y_{j+1}) \in P_2$. Junto con la Observación 4.3.1 tenemos que existe la $(x_i, y_j)P_2$ -flecha.

Por lo tanto P_2 es un conjunto semidominante interior de $C_n \times C_m$.

Por lo tanto, $\{P_0, P_1, P_2\}$ es una partición semidominante interior de $C_n \times C_m$, es decir, $3 \leq \mathbf{d}^-(C_n \times C_m) \leq 3$. Por lo tanto, $\mathbf{d}^-(C_n \times C_m) = 3$.

La idea intuitiva de la demostración anterior se puede ejemplificar con la siguiente imagen, tomando $k \pmod{3}$.



Ahora demostraremos **(B)**. Por el Lema 4.1.1 basta demostrar que uno de los dos ciclos no es congruente con cero $\pmod{3}$. Por lo tanto, lo dividiremos en tres casos.

- Si $n = 2$, es decir, $C_2 \times C_m$. Notemos que $\mathbf{d}^-(C_2) = 2$, entonces por el Teorema 4.2.1 y el Lema 3.3.1 sabemos que $\mathbf{d}^-(C_n) = 2 \leq \mathbf{d}^-(C_2 \times C_m) \leq 3$. Supongamos que existe una coloración semidominante interior de $C_2 \times C_m$ en tres clases cromáticas P_1, P_2 y P_3 .

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $(x_0, y_0) \in P_1$.

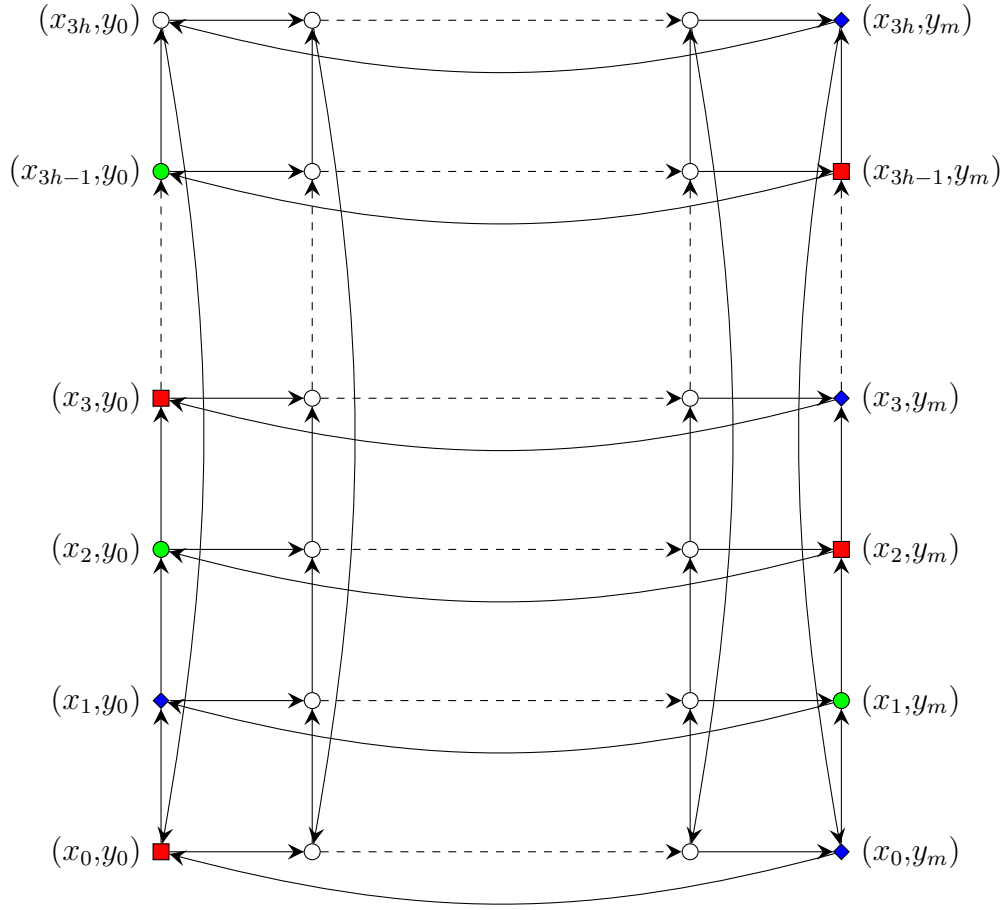
Como $\Gamma^+((x_0, y_0)) = \{(x_0, y_1), (x_1, y_0)\}$ implica que (x_0, y_1) debe de estar en un conjunto diferente a (x_0, y_0) y a (x_1, y_0) . Supongamos $(x_0, y_1) \in P_2$, entonces $(x_1, y_0) \in P_3$. Por otro lado, $\Gamma^+((x_1, y_0)) = \{(x_0, y_0), (x_1, y_1)\}$. Como $(x_0, y_0) \in P_1$ implica que $(x_1, y_1) \in P_2$ se tiene una contradicción pues $(x_1, y_1) \in \Gamma^+((x_0, y_1))$ y $(x_0, y_1) \in P_2$, esto no puede pasar pues el otro elemento de su exvecindad es $(x_0, y_0) \in P_1$, lo que implicaría que no hay posibilidad de que P_3 absorba a (x_0, y_1) . Por lo tanto, no existe dicha coloración. Es decir, $\mathbf{d}^-(C_2 \times C_m) = 2$.

Por la Observación 4.3.2 sabemos que $2 \leq \mathbf{d}^-(C_n \times C_m)$. Por lo que en los siguientes casos demostramos que $\mathbf{d}^-(C_n \times C_m) < 3$.

- Si $n \cong 1 \pmod{3}$, es decir, $n = 3h + 1$. Supongamos que existe una coloración semidominante interior de $C_n \times C_m$ en tres clases P_1, P_2 y P_3 .

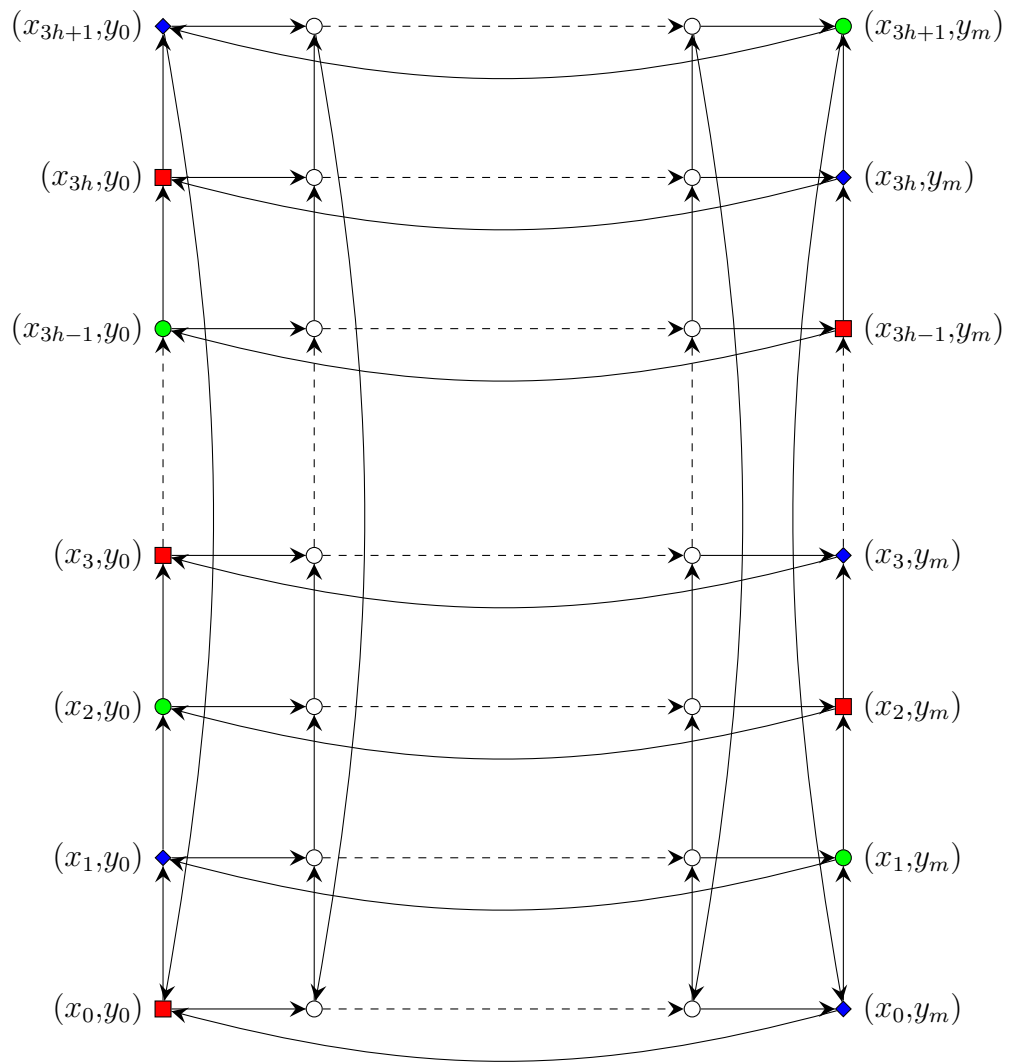
Además como todo vértice de $C_n \times C_m$ tiene dos vértices en su exvecindad, entonces dichos vértices tienen que estar en distintas clases de la coloración.

Supongamos sin pérdida de generalidad que $(x_0, y_m) \in P_1$, como sus exvecinos deben de estar en otras clases de color, podemos suponer que $(x_1, y_m) \in P_2$ y $(x_0, y_0) \in P_3$. Como $(x_1, y_0) \in \Gamma^+((x_1, y_m)) \cap \Gamma^+((x_0, y_0))$, implica que $(x_1, y_0) \in P_1$, por lo que $(x_2, y_m) \in P_3$, y este último $(x_2, y_0) \in P_2$, con lo que llegamos a $(x_3, y_m) \in P_1$. Siguiendo esta lógica, llegamos a que $(x_{3h-1}, y_m) \in P_3$, $(x_{3h-1}, y_0) \in P_2$, estos dos últimos nos dicen que $(x_{3h}, y_m) \in P_1$, lo que es una contradicción pues $(x_0, y_m) \in P_1$ y está en la exvecindad de (x_{3h}, y_m) . Por lo tanto no existe dicha coloración, es decir, $2 \leq \mathbf{d}^-(C_n \times C_m) < 3$. Por lo que $\mathbf{d}^-(C_n \times C_m) = 2$.



- Si $n \cong 2 \pmod{3}$, con $n > 2$, es decir, $n = 3h + 2$, para alguna $h \in \mathbb{N}$. Supongamos que existe una coloración semidominante interior de $C_n \times C_m$ en tres clases P_1 , P_2 y P_3 .

Supongamos sin pérdida de generalidad que $(x_0, y_m) \in P_1$. Procediendo de la misma manera que en el caso $n \cong 1$ y por las mismas razones, tenemos que $(x_1, y_m) \in P_2$, $(x_0, y_0) \in P_3$, y así sucesivamente llegamos a que $(x_{3h-1}, y_0) \in P_2$ y $(x_{3h}, y_m) \in P_1$, lo que nos dice que $(x_{3h}, y_0) \in P_3$, de donde se deduce que $(x_{3h+1}, y_m) \in P_2$. De ahí como $(x_{3h+1}, y_0) \in \Gamma^+((x_{3h}, y_0)) \cap \Gamma^+((x_{3h+1}, y_m))$ nos implica que $(x_{3h+1}, y_0) \in P_1$, lo que es una contradicción pues $\Gamma^+((x_{3h+1}, y_m)) \subseteq P_1$, lo que nos dice que P_2 no es un conjunto semidominante interior de $C_n \times C_m$. Por lo que dicha coloración no existe, es decir, $2 \leq \mathbf{d}^-(C_n \times C_m) < 3$. Por lo que $\mathbf{d}^-(C_n \times C_m) = 2$.



Con lo que queda demostrado **(B)**.

□

Capítulo 5

Número Semidominante Coloreable de $L(D)$, $S(D)$, $R(D)$, $Q(D)$ y $T(D)$

Dada una digráfica D se pueden definir otras digráficas. En este capítulo hablaremos del número semidominante coloreable interior de la digráfica de líneas $L(D)$, la digráfica subdivisión $S(D)$, la digráfica $R(D)$, la digráfica media $Q(D)$ y la total $T(D)$, así como de su relación con el número semidominante coloreable interior de la digráfica raíz.

En la primera sección definimos a las digráficas mencionadas, de las cuales demostraremos propiedades básicas.

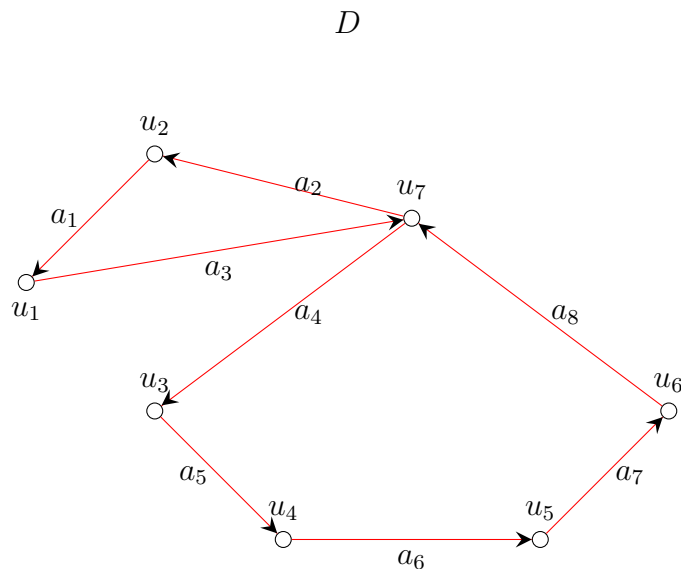
En la segunda sección nos centraremos en la digráfica de líneas. Sobre esta digráfica se han obtenido varios resultados en núcleos, k -núcleos, etcétera. Un resultado, cuyas técnicas serán de gran ayuda, fue dado por Matus Harminc [12], que demostró que: *Una digráfica D tiene núcleo si y sólo si $L(D)$ tiene núcleo.* Más aún, demostró que si \mathcal{R} es el conjunto de los núcleos de D y \mathcal{L} es el conjunto de los núcleos de $L(D)$, entonces $|\mathcal{R}| = |\mathcal{L}|$. Después Hortensia Galeana, Laura Pastrana y Hugo Rincón [10], probaron que *el número de seminúcleos de una digráfica es menor o igual que el número de seminúcleos de su digráfica de líneas.* Los trabajos mencionados, vinculan los conceptos de absorbencia e independencia. Por otro lado, en esta sección, como en este capítulo, dejaremos de lado el concepto de independencia, pero hablaremos de coloraciones tal que cada clase de color sea un conjunto absorbente.

En la última parte de este capítulo, en las digráficas $S(D)$, $R(D)$, $Q(D)$ y $T(D)$, las cuales en su construcción relacionan a los vértices y a las flechas de la digráfica raíz, en particular $L(D)$ es subdigráfica de $Q(D)$ y $T(D)$, nos preguntamos si podemos encontrar resultados como los encontrados en $L(D)$. Dichas digráficas ya han sido trabajadas por Jerzy Topp en [20], donde demostró que si D no tiene pozos, entonces $V(D)$ y $F(D)$ son núcleos de $S(D)$, por lo que implícitamente dio una bicoloración semidominante interior de $S(D)$, de donde es fácil ver que no existe una coloración en más clases, tal que cada clase sea un conjunto semidominante, es decir, $\mathbf{d}^-(S(D)) = 2$. Uno pensaría que al ser $S(D)$ una subdigráfica generadora de $Q(D)$ y $T(D)$ su número semidominante coloreable interior también es dos, sin embargo, en este capítulo mostraremos que esto no sucede. También observaremos que los conjuntos semidominantes interiores de D nos inducen una coloración de otro tipo en $S(D)$, la cual veremos en el siguiente capítulo.

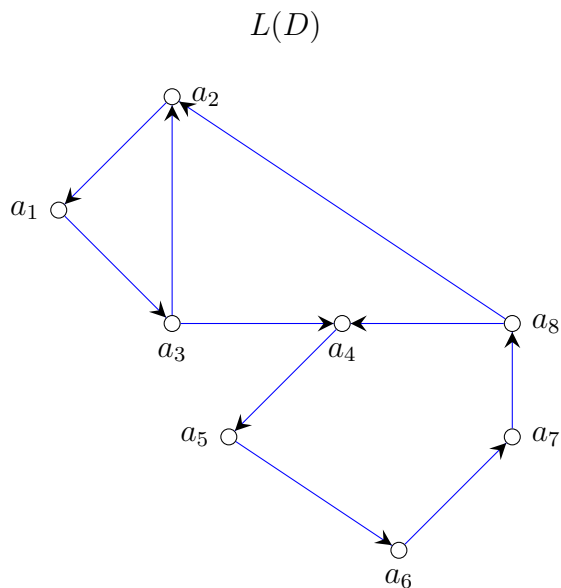
5.1. Definiciones y propiedades

En esta sección definiremos a las digráficas con las que trabajaremos y probaremos algunas propiedades de éstas.

Para ir ejemplificando las operaciones, partiremos de la siguiente digráfica:



Dada una digráfica D definimos la digráfica de líneas de D , denotada por $L(D)$, como la digráfica tal que sus vértices son las flechas de D , y si $a, b \in V(L(D))$ diremos que a alcanza a b si y sólo si el vértice final de a es el vértice inicial de b en D .



Por la definición, observemos que si $x = (u, v) \in V(L(D)) = F(D)$, entonces $\delta_{L(D)}^+(x) = \delta_D^+(v)$ y $\delta_{L(D)}^-(x) = \delta_D^-(u)$.

Dada una digráfica D definimos la digráfica *subdivisión* de D , denotada por $S(D)$, tal que

su conjunto de vértices está dado por: $V(S(D)) = V(D) \cup F(D)$ y su conjunto de flechas por las exvecindades de cada uno de sus vértices:

$$\Gamma_{S(D)}^+(x) = \begin{cases} \{x\} \times \Gamma_D^+(x), & \text{si } x \in V(D) \\ \{v\}, & \text{si } x = (u, v) \in F(D) \end{cases}$$

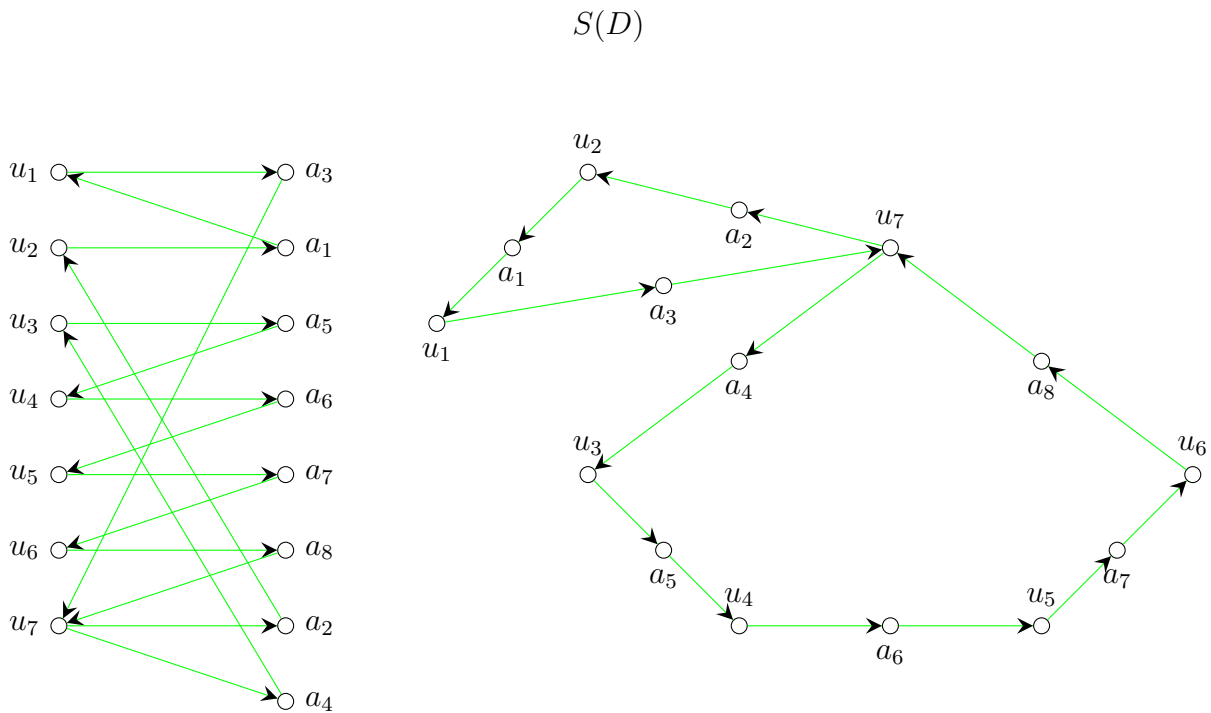
Observemos que en nuestro ejemplo las exvecindades de $u_7 \in V(D)$ y de $a_1 \in F(D)$ son:

$$\Gamma_{S(D)}^+(u_7) = \{(u_7, u_3) = a_4, (u_7, u_2) = a_2\} = \{a_4, a_2\}$$

$$\Gamma_{S(D)}^+(a_1) = \Gamma_{S(D)}^+((u_2, u_1)) = \{u_1\}.$$

Notemos que $S(D)$ es una digráfica bipartita, con bipartición dada por $V(D)$ y $F(D)$.

Por otro lado, la idea intuitiva de esta digráfica es preservar los vértices de la original, y por cada flecha que hay en la original, sustituirla por una trayectoria dirigida de longitud dos, en la misma dirección a la flecha. El vértice intermedio en dichas trayectorias representa a la flecha original. Ambas ideas pueden observarse en las siguientes digráficas isomorfas.



$R(D)$ es la digráfica tal que su conjunto de vértices es $V(R(D)) = V(D) \cup F(D)$ y su conjunto de flechas está dado por las exvecindades de cada vértice:

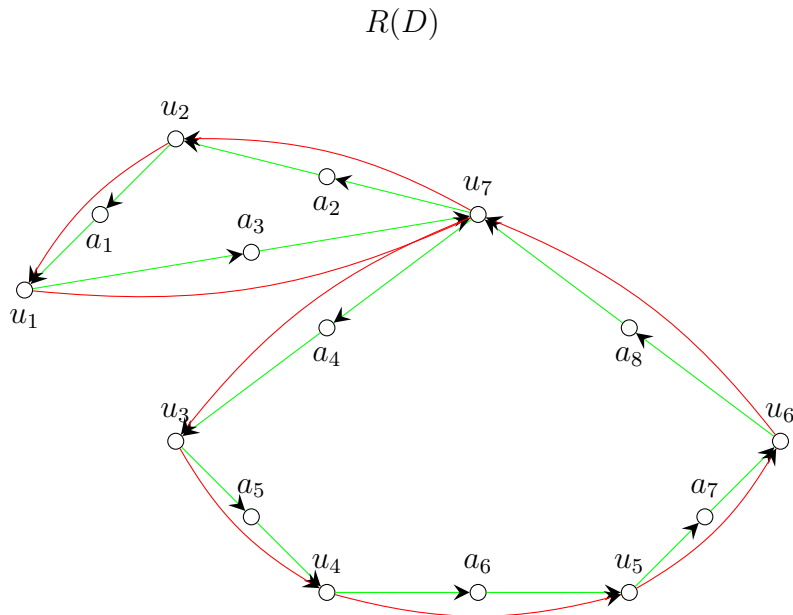
$$\Gamma_{R(D)}^+(x) = \begin{cases} \Gamma_D^+(x) \cup (\{x\} \times \Gamma_D^+(x)), & \text{si } x \in V(D) \\ \{v\}, & \text{si } x = (u, v) \in F(D) \end{cases}$$

Observemos que en nuestro ejemplo las exvecindades de $u_7 \in V(D)$ y de $a_1 \in F(D)$ son:

$$\Gamma_{R(D)}^+(u_7) = \Gamma_D^+(u_7) \cup (\{u_7\} \times \Gamma_D^+(u_7)) = \{u_3, u_2\} \cup \{(u_7, u_3) = a_4, (u_7, u_2) = a_2\} = \{u_2, u_3, a_4, a_2\}$$

$$\Gamma_{R(D)}^+(a_1) = \Gamma_{R(D)}^+((u_2, u_1)) = \{u_1\}.$$

La idea intuitiva de esta digráfica se tiene de agregar a la digráfica subdivisión flechas de tal manera que D sea una subdigráfica inducida, como se puede observar en la siguiente figura:



Definimos a la digráfica *media* de D , denotada por $Q(D)$, como la digráfica con conjunto de vértices $V(Q(D)) = V(D) \cup F(D)$ y conjunto de flechas dado por las exvecindades de cada vértice:

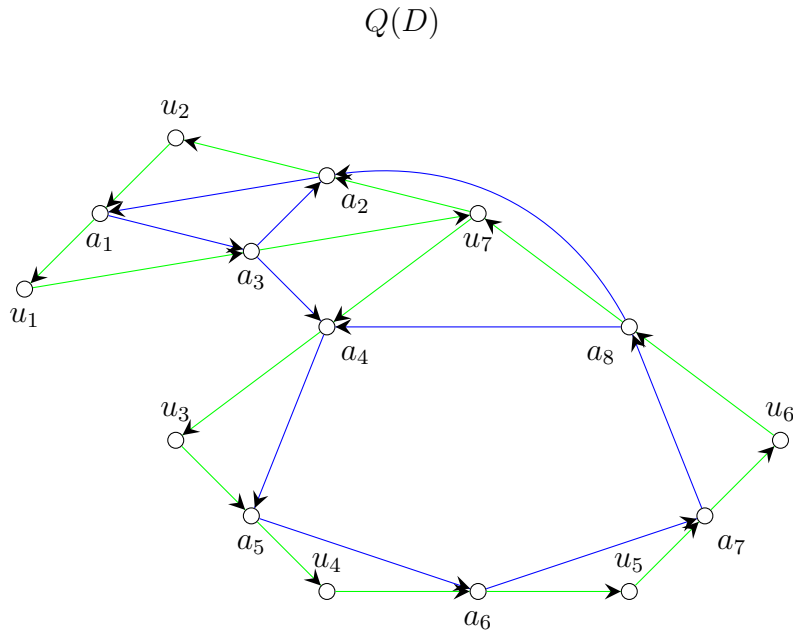
$$\Gamma_{Q(D)}^+(x) = \begin{cases} \{x\} \times \Gamma_D^+(x), & \text{si } x \in V(D) \\ \{v\} \cup (\{v\} \times \Gamma_D^+(v)), & \text{si } x = (u, v) \in F(D) \end{cases}$$

Observemos que en nuestro ejemplo las exvecindades de $u_7 \in V(D)$ y de $a_3 \in F(D)$ son:

$$\Gamma_{Q(D)}^+(u_7) = \{(u_7, u_3) = a_4, (u_7, u_2) = a_2\} = \{a_4, a_2\}$$

$$\Gamma_{Q(D)}^+(a_3) = \Gamma_{Q(D)}^+((u_1, u_7)) = \{u_7\} \cup (\{u_7\} \times \Gamma_D^+(u_7)) = \{u_7\} \cup \{a_4, a_2\} = \{u_7, a_4, a_2\}.$$

La idea intuitiva de esta digráfica es construir la digráfica subdivisión y además agregarle las flechas necesarias para que $L(D)$ sea una subdigráfica inducida. Esta idea se puede ver claramente en la siguiente figura:



La digráfica *total* de D , denotada por $T(D)$, es la digráfica con conjunto de vértices $V(T(D)) = V(D) \cup F(D)$ y conjunto de flechas dado por las exvecindades de cada vértice:

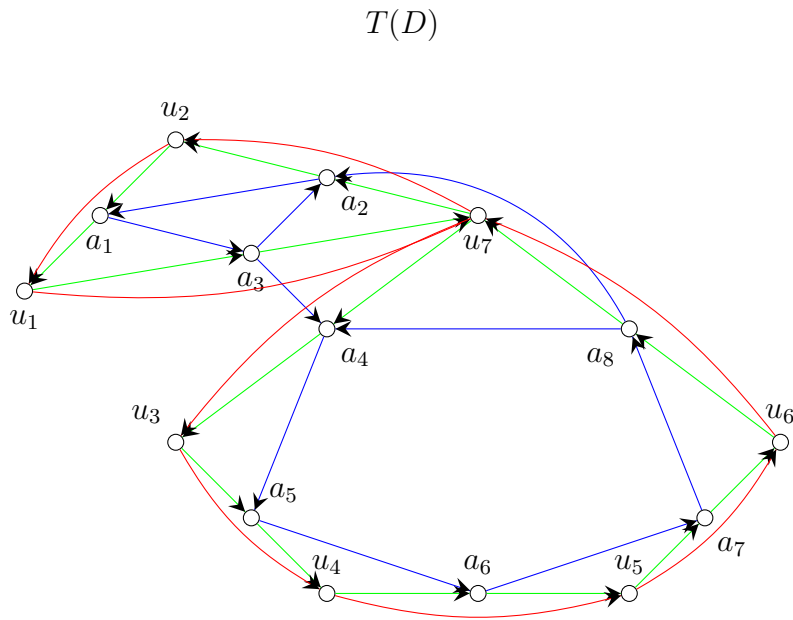
$$\Gamma_{T(D)}^+(x) = \begin{cases} \Gamma_D^+(x) \cup (\{x\} \times \Gamma_D^+(x)), & \text{si } x \in V(D) \\ \{v\} \cup (\{v\} \times \Gamma_D^+(v)), & \text{si } x = (u, v) \in F(D) \end{cases}$$

Observemos que en nuestro ejemplo las exvecindades de $u_7 \in V(D)$ y de $a_3 \in F(D)$ son:

$$\Gamma_{T(D)}^+(u_7) = \Gamma_D^+(u_7) \cup (\{u_7\} \times \Gamma_D^+(u_7)) = \{u_2, u_3\} \cup \{(u_7, u_3) = a_4, (u_7, u_2) = a_2\} = \{u_2, u_3, a_4, a_2\}$$

$$\Gamma_{T(D)}^+(a_3) = \Gamma_{T(D)}^+((u_1, u_7)) = \{u_7\} \cup (\{u_7\} \times \Gamma_D^+(u_7)) = \{u_7\} \cup \{a_4, a_2\} = \{u_7, a_4, a_2\}.$$

La idea intuitiva de esta digráfica es integrar en una sola digráfica a las digráficas antes definidas, como se puede ver en la siguiente figura:



Observemos que, por como están definidas, las cuatro digráficas anteriores mantienen una relación muy estrecha. Lo primero, y más evidente, es que el conjunto de vértices es el mismo para todas, $V(D) \cup F(D)$. Igualmente por su definición obtenemos el siguiente lema que nos habla de las exvecindades y por consecuencia de los conjuntos de flechas.

Lema 5.1.1. *Para todo vértice x en $V(D) \cup F(D)$ se tiene que:*

1. $\Gamma_{S(D)}^+(x) \subset \Gamma_{R(D)}^+(x)$.
2. $\Gamma_{S(D)}^+(x) \subset \Gamma_{Q(D)}^+(x)$.
3. $\Gamma_{R(D)}^+(x) \subset \Gamma_{T(D)}^+(x)$.
4. $\Gamma_{Q(D)}^+(x) \subset \Gamma_{T(D)}^+(x)$.

Demostración. 1. Sea $x \in V(D) \cup F(D)$, entonces tenemos dos casos:

Caso 1.1) $x \in V(D)$. Sea $a \in \Gamma_{S(D)}^+(x)$, por definición $a = (x, w)$, con $w \in \Gamma_D^+(x)$, por lo tanto, $a \in \Gamma_D^+(x) \cup (\{x\} \times \Gamma_D^+(x)) = \Gamma_{R(D)}^+(x)$.

Caso 1.2) $x = (u, v) \in F(D)$. Por definición, $\Gamma_{S(D)}^+(x) = \{v\} = \Gamma_{R(D)}^+(x)$.

En ambos casos tenemos que $\Gamma_{S(D)}^+(x) \subset \Gamma_{R(D)}^+(x)$.

2. Sea $x \in V(D) \cup F(D)$, entonces tenemos dos casos:

Caso 2.1) $x \in V(D)$, por definición $\Gamma_{S(D)}^+(x) = \{x\} \times \Gamma_D^+(x) = \Gamma_{Q(D)}^+(x)$.

Caso 2.2) $x = (u, v) \in F(D)$, por definición de ambas digráficas tenemos que, $\Gamma_{S(D)}^+(x) = \{v\} \subset \{v\} \cup (\{v\} \times \Gamma_D^+(v)) = \Gamma_{Q(D)}^+(x)$.

En ambos casos tenemos que $\Gamma_{S(D)}^+(x) \subset \Gamma_{Q(D)}^+(x)$.

3. Sea $x \in V(D) \cup F(D)$, entonces tenemos dos casos:

Caso 3.1) $x \in V(D)$, por definición $\Gamma_{R(D)}^+(x) = \Gamma_D^+(x) \cup (\{x\} \times \Gamma_D^+(x)) = \Gamma_{T(D)}^+(x)$.

Caso 3.2) $x = (u, v) \in F(D)$, por definición, $\Gamma_{R(D)}^+(x) = \{v\} \subset \{v\} \cup (\{v\} \times \Gamma_D^+(v))$.

En ambos casos, tenemos que $\Gamma_{R(D)}^+(x) \subset \Gamma_{T(D)}^+(x)$.

4. Sea $x \in V(D) \cup F(D)$, entonces tenemos dos casos:

Caso 4.1) $x \in V(D)$, por definición de ambas digráficas tenemos que, $\Gamma_{Q(D)}^+(x) = \{x\} \times \Gamma_D^+(x) \subset \Gamma_D^+(x) \cup (\{x\} \times \Gamma_D^+(x)) = \Gamma_{T(D)}^+(x)$.

Caso 4.2) $x = (u, v) \in F(D)$, por definición, $\Gamma_{Q(D)}^+(x) = \{v\} \cup (\{v\} \times \Gamma_D^+(v)) = \Gamma_{T(D)}^+(x)$.

En ambos casos, tenemos que $\Gamma_{R(D)}^+(x) \subset \Gamma_{T(D)}^+(x)$.

□

Teorema 5.1.1. *Sea D una digráfica, entonces $S(D)$ es subdigráfica generadora de $R(D)$, $Q(D)$ y de $T(D)$. Así como $R(D)$ y $Q(D)$ son subdigráficas generadoras de $T(D)$.*

Demostración. Del lema anterior se tiene que:

$$F(S(D)) = \bigcup_{x \in V(S(D))} \Gamma_{S(D)}^+(x) \subset \bigcup_{x \in V(R(D))} \Gamma_{R(D)}^+(x) = F(R(D)),$$

y como los conjuntos de vértices son iguales, entonces $S(D)$ es subdigráfica generadora de $R(D)$, análogamente como:

$$F(S(D)) = \bigcup_{x \in V(S(D))} \Gamma_{S(D)}^+(x) \subset \bigcup_{x \in V(Q(D))} \Gamma_{Q(D)}^+(x) = F(Q(D)),$$

tenemos que $S(D)$ es subdigráfica generadora de $Q(D)$.

Por otro lado, de:

$$F(R(D)) = \bigcup_{x \in V(R(D))} \Gamma_{R(D)}^+(x) \subset \bigcup_{x \in V(T(D))} \Gamma_{T(D)}^+(x) = F(T(D)),$$

se tiene que $R(D)$ es subdigráfica generadora de $T(D)$; de la misma manera se desprende de:

$$F(Q(D)) = \bigcup_{x \in V(Q(D))} \Gamma_{Q(D)}^+(x) \subset \bigcup_{x \in V(T(D))} \Gamma_{T(D)}^+(x) = F(T(D)),$$

que $Q(D)$ es subdigráfica generadora de $T(D)$. Para ver que $S(D)$ es subdigráfica generadora de $T(D)$, es suficiente ver que $V(S(D)) = V(T(D))$ y $F(S(D)) \subset F(R(D)) \subset F(T(D))$. \square

Con base al teorema anterior nos resultará práctico poder probar algunas propiedades en una subdigráfica generadora de una digráfica.

5.2. Número Semidominante Coloreable de $L(D)$

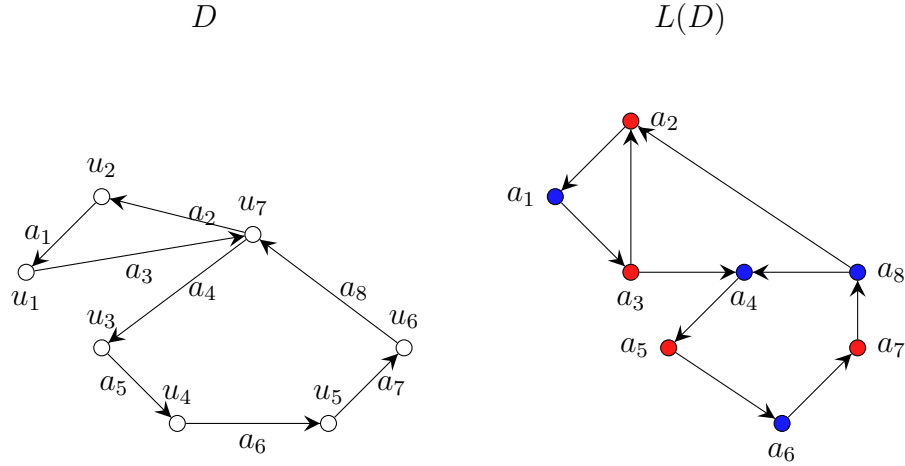
En esta sección vincularemos las coloraciones semidominantes interiores de la digráfica raíz con las coloraciones semidominantes interiores de su digráfica de líneas. Por ende, dicha relación también nos hablará de la relación entre los números semidominantes coloreables de D y $L(D)$. Dando respuesta a las siguientes preguntas:

La pregunta principal es ¿si $\mathbf{d}^-(D) = n$, entonces cuál es el valor de $\mathbf{d}^-(L(D))$?, la cual nos dará pauta a contestar preguntas como: ¿Cómo se relacionan las coloraciones semidominantes de una digráfica con las coloraciones semidominantes en la digráfica de líneas?. A partir de ésta podremos contestar preguntas como: ¿Toda digráfica de líneas tiene una coloración semidominante distinta a la trivial?. Siempre que la digráfica original tenga una coloración distinta a la trivial, ¿la digráfica de líneas tiene una distinta a la trivial?. ¿Habrá digráficas tales que su digráfica de líneas tenga exactamente el mismo número semidominante coloreable?.

La primera pregunta que atacaremos es: si todas las digráficas de líneas¹ tienen una coloración semidominante interior distinta a la trivial, pues no, basta ver al ciclo dirigido de longitud cinco, que en el Ejemplo 3.2.1, denotado por D_1 , para el cual demostramos que no tiene dicha coloración y donde $D_1 \cong L(D_1)$.

Sin embargo, que una digráfica no tenga una coloración semidominante interior distinta a la trivial no implica que su digráfica de líneas tampoco la tenga. Consideremos las siguientes digráficas D y $L(D)$.

¹Una digráfica D es de líneas si existe otra digráfica H tal que $L(H) \cong D$.



Verificaremos que D no tiene una coloración semidominante interior diferente a la trivial. Supongamos que sí. Por el Lema 3.2.2 tenemos que si existe una coloración semidominante interior en más de dos clases de D , entonces podemos construir una bicoloración semidominante interior de $V(D)$. Supongamos que D tiene una bicoloración semidominante interior cuyas clases son P_1 y P_2 . Supongamos sin pérdida de generalidad que u_2 está en P_1 , el caso en el que u_2 está en P_2 es completamente análogo. Como P_2 es un conjunto semidominante interior, entonces existe un vértice en P_2 que absorbe a u_2 , y como el único vértice que está en la exvecindad de u_2 es u_1 , entonces $u_1 \in P_2$. Tomando a u_1 tenemos que, por las mismas razones, $u_7 \in P_1$. Dado que la exvecindad de u_7 es $\{u_2, u_3\}$ y $u_2 \in P_1$, entonces $u_3 \in P_2$; ésto nos lleva a que $u_4 \in P_1$, $u_5 \in P_2$ y $u_6 \in P_1$, lo que es una contradicción puesto que u_6 debe de ser absorbido por alguien de P_2 , pero $u_7 \in P_1$, que es el único vértice en su exvecindad. Por lo tanto, D no tiene una coloración en dos clases semidominantes interiores, es decir, $\mathbf{d}^-(D) = 1$.

Calcularemos $\mathbf{d}^-(L(D))$. Consideremos $P_1 = \{a_1, a_4, a_6, a_8\}$ y $P_2 = \{a_2, a_3, a_5, a_7\}$. Es claro que $P_1 \neq \emptyset$, $P_2 \neq \emptyset$, $P_1 \cap P_2 = \emptyset$ y que $P_1 \cup P_2 = V(L(D))$. Nos falta ver que ambos conjuntos son semidominantes interiores. Observemos que a_1 es absorbido por a_3 , a_4 por a_5 , a_6 por a_7 y a_8 por a_2 , esto quiere decir que P_2 es un conjunto semidominante interior de $L(D)$. Por otro lado, a_2 es absorbido por a_1 , a_3 por a_4 , a_5 por a_6 y a_7 por a_8 , por lo tanto, P_1 es un conjunto semidominante interior de $L(D)$. Por lo anterior, $\mathbf{d}^-(L(D)) \geq 2$. Observemos que $\delta^+(a_1) = 1$, y por el Lema 3.3.1 sabemos que $\mathbf{d}^-(L(D)) \leq \delta^+(a_1) + 1 = 1 + 1 = 2$. Juntando ambas desigualdades tenemos que $\mathbf{d}^-(L(D)) = 2$.

El ejemplo nos dice que es falsa la proposición: si $\mathbf{d}^-(L(D)) \geq 2$, entonces $\mathbf{d}^-(D) \geq 2$, por lo que una pregunta natural es si la proposición: si $\mathbf{d}^-(D) \geq 2$, entonces $\mathbf{d}^-(L(D)) \geq 2$, es verdadera o es falsa. Con lo que obtenemos el siguiente teorema. Para demostrarlo hay que observar que por definición de $L(D)$, si $S \subseteq F(D)$, entonces $S \subseteq V(L(D))$, por lo que para diferenciarlos cuando hablemos de vértices en $L(D)$, lo denotaremos por S_L .

Teorema 5.2.1. *Sea D una digráfica y $L(D)$ su digráfica de líneas. Si $\mathbf{d}^-(D) \geq 2$, entonces $\mathbf{d}^-(L(D)) \geq 2$.*

Demostración. Como $\mathbf{d}^-(D) \geq 2$, entonces existe una coloración semidominante interior de los vértices de D con dos clases P_1 y P_2 , tal que ambas son conjuntos semidominantes interiores de D .

Consideremos al conjunto $g(V(D)) = g(P_1) \cup g(P_2)$, donde:

$g(P_1) = \{(u, v) \in F(D) \mid (u \in P_1 \text{ y } v \in P_2) \text{ ó } (u \in P_2 \text{ y } v \in P_2)\}$ y
 $g(P_2) = \{(u, v) \in F(D) \mid (u \in P_2 \text{ y } v \in P_1) \text{ ó } (u \in P_1 \text{ y } v \in P_1)\}$.

Observemos que al ser P_1 y P_2 conjuntos semidominantes interiores de D , $P_1 \neq \emptyset$, por lo que existe al menos una P_1P_2 -flecha, que por definición pertenece a $g(P_1)$, es decir, $g(P_1) \neq \emptyset$. Análogamente, como $P_2 \neq \emptyset$, entonces existe al menos una P_2P_1 -flecha, que por definición pertenece a $g(P_2)$, es decir, $g(P_2) \neq \emptyset$.

Por demostrar que $g_L(P_1) \cap g_L(P_2) = \emptyset$. Supongamos lo contrario, es decir, existe $(u, v) \in g_L(P_1) \cap g_L(P_2)$. Entonces, $(u, v) \in g_L(P_1)$ y $(u, v) \in g_L(P_2)$. Notemos que como $(u, v) \in g_L(P_1)$, entonces $v \in P_2$, y como $(u, v) \in g_L(P_2)$, tenemos que $v \in P_1$, pero eso implica que $P_1 \cap P_2 \neq \emptyset$ lo que es una contradicción. Por lo tanto, $g_L(P_1) \cap g_L(P_2) = \emptyset$.

Hay que demostrar que $g_L(P_1) \cup g_L(P_2) = V(L(D)) = F(D)$.

Como $g_L(P_1) \subseteq V(L(D))$ y $g_L(P_2) \subseteq V(L(D))$, entonces $g_L(P_1) \cup g_L(P_2) \subseteq V(L(D))$.

Sea $x \in V(L(D)) = F(D)$ entonces $x = (u, v)$ con $u, v \in V(D)$, al ser $\{P_1, P_2\}$ una partición de $V(D)$ tenemos cuatro casos:

Caso 1. $u \in P_1$ y $v \in P_1$, entonces por definición $x \in g_L(P_2)$.

Caso 2. $u \in P_1$ y $v \in P_2$, entonces por definición $x \in g_L(P_1)$.

Caso 3. $u \in P_2$ y $v \in P_1$, entonces por definición $x \in g_L(P_2)$.

Caso 4. $u \in P_2$ y $v \in P_2$, entonces por definición $x \in g_L(P_1)$.

En los cuatro casos obtenemos que $x \in g_L(P_1) \cup g_L(P_2)$, por lo tanto, $V(L(D)) \subseteq g_L(P_1) \cup g_L(P_2)$. Entonces $g_L(P_1) \cup g_L(P_2) = V(L(D))$. Por lo tanto, $\{g_L(P_1), g_L(P_2)\}$ es una partición de $L(D)$.

Falta demostrar que ambas clases de la partición son conjuntos semidominantes interiores de $L(D)$.

Si $(u, v) \in g_L(P_2)$, entonces por definición de $g_L(P_2)$ tenemos que $v \in P_1$. Al ser P_2 un conjunto semidominante interior en D , existe $y \in P_2$ tal que $(v, y) \in F(D)$. Por definición de $L(D)$ y de g , sabemos que $((u, v), (v, y)) \in F(L(D))$ y $(v, y) \in g_L(P_1)$. Por lo tanto, $g_L(P_1)$ es semidominante interior en $L(D)$.

Si $(u, v) \in g_L(P_1)$, entonces por definición de $g_L(P_1)$ tenemos que $v \in P_2$. Al ser P_1 un conjunto semidominante interior en D , existe $y \in P_1$ tal que $(v, y) \in F(D)$. Por definición de $L(D)$ y de g , sabemos que $((u, v), (v, y)) \in F(L(D))$ y $(v, y) \in g_L(P_2)$. Por lo que $g_L(P_2)$ es semidominante interior en $L(D)$.

Por lo tanto, $\{g_L(P_1), g_L(P_2)\}$ es una partición semidominante interior de $L(D)$ con dos clases, entonces $\mathbf{d}^-(L(D)) \geq 2$. \square

Teorema 5.2.2. *Sea D una digráfica y $L(D)$ su digráfica de líneas. Si $\mathbf{d}^+(D) \geq 2$, entonces $\mathbf{d}^+(L(D)) \geq 2$.*

La demostración de este teorema es análoga a la del teorema anterior usando la digráfica dual.

Después de los teoremas anteriores, otra pregunta que surge es: ¿existen digráficas con $\mathbf{d}^-(D) = n > 2$ tal que su digráfica de líneas cumpla que $\mathbf{d}^-(L(D)) = n$?, y la respuesta es: Sí.

Tomemos T_n el torneo obtenido por el algoritmo dado en la prueba del Teorema 3.3.1, con $d_1 = d_2 = n$. Sabemos que $\mathbf{d}^-(T) = n$. Recordemos que $V(T_n) = U \cup V$ donde $U = \{u_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ y $V = \{v_i \mid 1 \leq i \leq n\}$, el conjunto de flechas está dado por:

(u_i, u_j) si $i < j$, (v_i, v_j) si $i < j$, (u_i, v_j) si $i \geq j$ y (v_i, u_j) si $i > j$.

Consideremos su digráfica de líneas $L(T_n)$. Daremos una partición semidominante interior, con n clases, de sus vértices y además probaremos que $\mathbf{d}^-(L(T_n)) = n$.

Sea $x \in V(D)$, consideremos a los conjuntos: $A_x = \{(y, x) \in F(D) \mid y \in V(D)\}$. De esta manera, definimos:

$$C_1 = A_{u_1} \cup A_{v_1}$$

$$C_2 = A_{u_2} \cup A_{v_2}$$

\vdots

$$C_i = A_{u_i} \cup A_{v_i}$$

\vdots

$$C_n = A_{u_n} \cup A_{v_n}$$

Consideremos C_i con $i \in \{1, \dots, n\}$, y notemos que $(u_i, v_i) \in F(T_n) = V(L(T_n))$, por lo que $(u_i, v_i) \in A_{v_i} \subseteq C_i$, es decir, $C_i \neq \emptyset$, con $i \in \{1, \dots, n\}$. Observemos que por definición $A_x \cap A_y = \emptyset$, con $x, y \in V(D)$, lo que implica que $C_i \cap C_j = \emptyset$, con $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$.

Recordemos que T_n está dado por dos tipos de vértices, u_i y v_j con $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Por lo tanto,

$$F(D) = \bigcup_{x \in V(D)} A_x = \bigcup_{i=1}^n (A_{u_i} \cup A_{v_i}) = \bigcup_{i=1}^n C_i.$$

Por lo tanto, $\{C_1, \dots, C_n\}$ es una partición de los vértices de $L(T_n)$.

Falta demostrar que cada C_i es un conjunto semidominante interior, es decir, para todo $x \in V(L(T_n)) - C_i$ existe un vértice $y \in C_i$ tal que $(x, y) \in F(L(T_n))$.

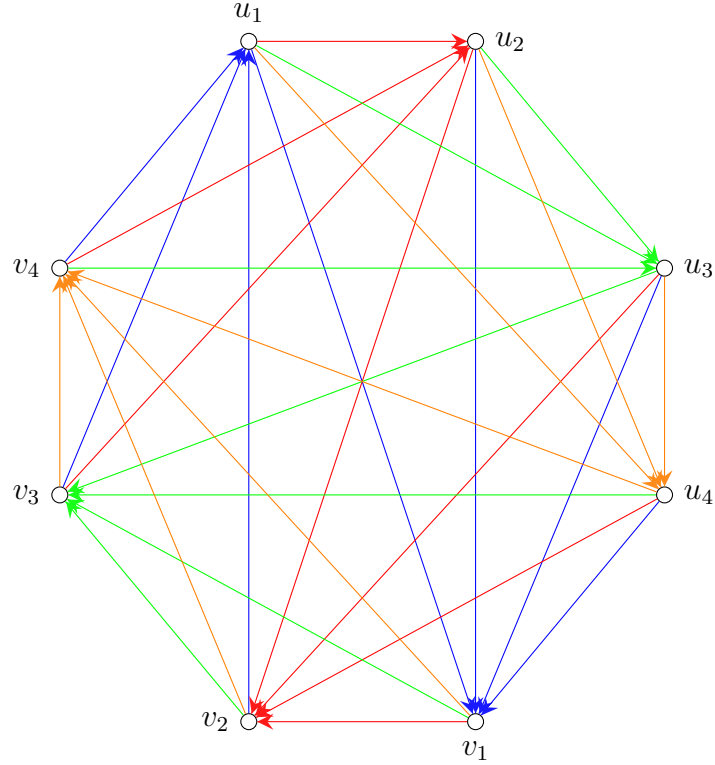
Sea C_i fijo y sea $x \in V(L(T_n)) - C_i$. Como $\{C_1, \dots, C_n\}$ es una coloración de $V(L(T_n))$, entonces $x \in C_j$ para alguna $j \neq i$, con $1 \leq j \leq n$. Lo que nos da cuatro casos:

- Si $x = (u_k, u_j)$, con $k < j$, $j < i$, tenemos que (u_j, u_i) absorbe a x .
- Si $x = (u_k, u_j)$, con $k < j$, $i < j$, tenemos que (u_j, v_i) absorbe a x .
- Si $x = (u_k, v_j)$, con $k \geq j$, $j < i$, tenemos que (v_j, v_i) absorbe a x .
- Si $x = (u_k, v_j)$, con $k \geq j$, $i < j$, tenemos que (v_j, u_i) absorbe a x .
- Si $x = (v_k, v_j)$, con $k < j$, $j < i$, tenemos que (v_j, v_i) absorbe a x .
- Si $x = (v_k, v_j)$, con $k < j$, $i < j$, tenemos que (v_j, u_i) absorbe a x .
- Si $x = (v_k, u_j)$, con $k > j$, $j < i$, tenemos que (u_j, u_i) absorbe a x .
- Si $x = (v_k, u_j)$, con $k > j$, $i < j$, tenemos que (u_j, v_i) absorbe a x .

Por lo tanto, C_i es un conjunto semidominante interior de $L(T_n)$. Con esto obtenemos que $n \leq \mathbf{d}^-(L(T_n))$.

Hay que notar que $\delta^+(u_1, v_1) = n - 1$, entonces por el Lema 3.3.1 tenemos que $\mathbf{d}^-(L(T_n)) \leq n - 1 + 1 = n$. Por lo tanto, $\mathbf{d}^-(L(T_n)) = n$.

Para ilustrar el ejemplo anterior consideremos al torneo T_4 .



Considerando su digráfica de líneas, sabemos que $V(L(D)) = F(D)$, tomemos la partición:

$$C_1 = \{(v_2, u_1), (v_3, u_1), (v_4, u_1)\} \cup \{(u_1, v_1), (u_2, v_1), (u_3, v_1), (u_4, v_1)\}$$

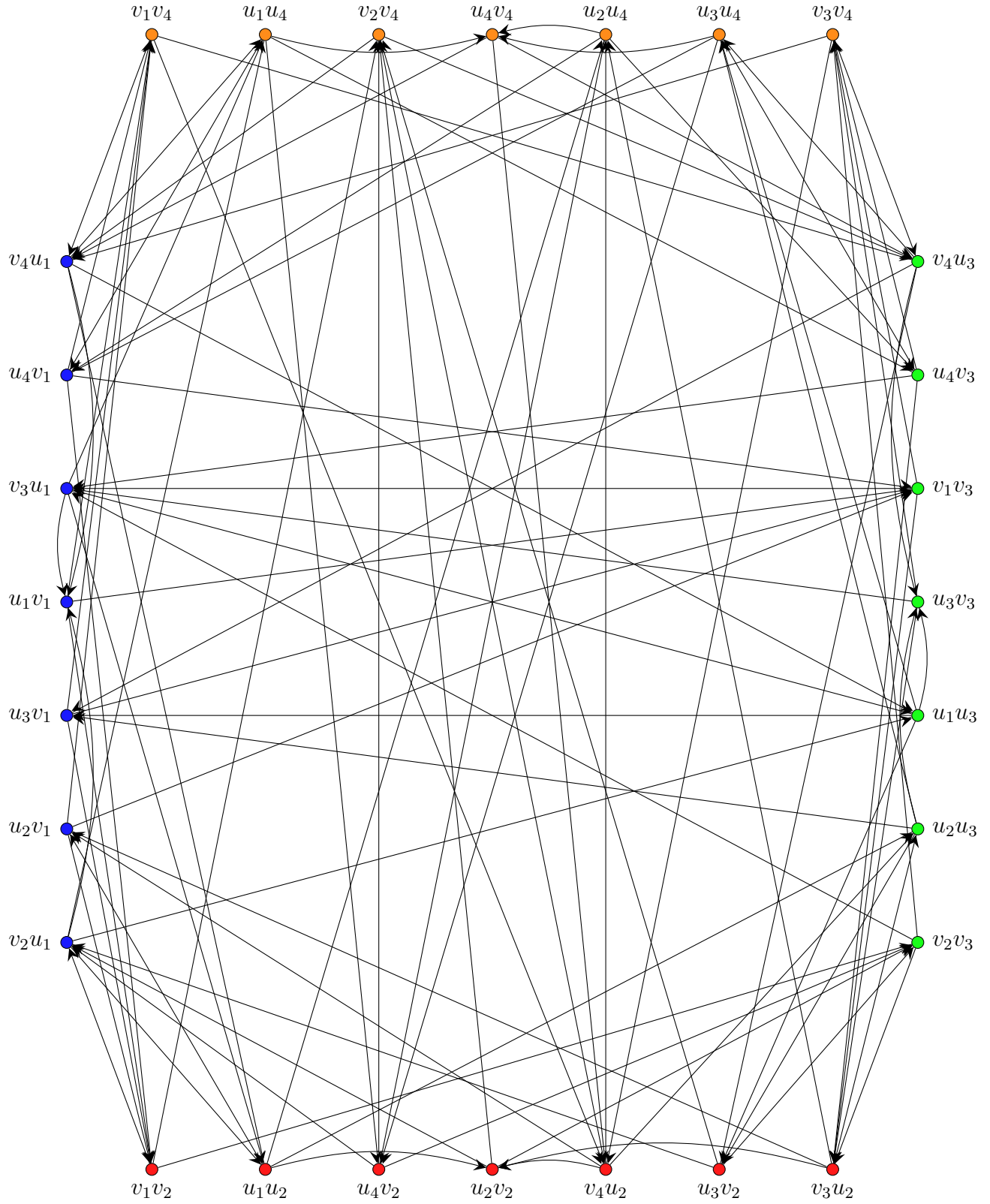
$$C_2 = \{(u_1, u_2), (v_3, u_2), (v_4, u_2)\} \cup \{(u_2, v_2), (u_3, v_2), (u_4, v_2), (v_1, v_2)\}$$

$$C_3 = \{(u_1, u_3), (u_2, u_3), (v_4, u_3)\} \cup \{(u_3, v_3), (u_4, v_3), (v_1, v_3), (v_2, v_3)\}$$

$$C_4 = \{(u_1, u_4), (u_2, u_4), (u_3, u_4)\} \cup \{(u_4, v_4), (v_1, v_4), (v_2, v_4), (v_3, v_4)\}.$$

Podemos observar que cada clase de la coloración es un conjunto semidominante interior de $L(T_4)$. Y por el teorema anterior, tenemos que $\mathbf{d}^-(L(T_4)) = 4$.

$L(T_4)$



Observando el ejemplo de la familia anterior, podemos deducir el siguiente resultado:

Teorema 5.2.3. *Si D es una digráfica tal que $\mathbf{d}^-(D) = n \geq 2$, entonces $\mathbf{d}^-(L(D)) \geq n$.*

Demostración. Sea $\mathcal{P}(V(D))$ el conjunto potencia de los vértices de D , es decir, el conjunto de todos los subconjuntos de $V(D)$ y sea $\varphi : \mathcal{P}(V(D)) \rightarrow \mathcal{P}(F(D))$ una función que a cada $Z \subseteq V(D)$, $\varphi(Z) = \{(x, y) \in F(D) \mid y \in Z\}$. Observemos que estos subconjuntos de flechas de D son subconjuntos de vértices de la gráfica de líneas.

Sea $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ una partición semidominante interior de los vértices de D . Sea $L(D)$ la digráfica de líneas de D . Como cada flecha de D es un vértice de $L(D)$ y como toda flecha tiene sólo un vértice final, entonces $\bigcup_{i \in \{1, \dots, n\}} \varphi(P_i)$ es una partición de las flechas de D y por lo tanto de los vértices de $L(D)$.

Hay que demostrar que cada clase es un conjunto semidominante interior de $L(D)$. Tomemos un conjunto $\varphi_L(P_i)$, con $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, demostraremos que absorbe a todo vértice de $\varphi_L(P_k)$, con $k \in \{1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}$. Sea $(u, v) \in \varphi_L(P_k)$, con $v \in P_k$ y $u \in P_j$ para alguna $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Observemos que por la definición de digráfica de líneas, (u, v) alcanza a todos los vértices que son de la forma (v, w) .

Como $v \in P_k$ y P_i es un conjunto semidominante interior de D , existe $w \in P_i$, con $i \neq k$ tal que $(v, w) \in F(D)$. Notemos que por definición de φ tenemos que $(v, w) \in \varphi(P_i)$, además por la observación anterior tenemos que (v, w) absorbe a (u, v) en $L(D)$. Por lo tanto $\varphi(P_i)$ para toda $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ es un conjunto semidominante interior en $L(D)$.

Por lo tanto $\{\varphi(P_1) \dots \varphi(P_n)\}$ es una partición semidominante interior de $L(D)$, es decir, $\mathbf{d}^-(D) \geq n$. \square

Recordemos que una digráfica D es semidominante coloreable interior completa si $\mathbf{d}^-(D) = \delta^+(D) + 1$.

Corolario 5.2.1. *Si D es una digráfica semidominante coloreable interior completa, entonces $L(D)$ también lo es, más aún, $\mathbf{d}^-(D) = \mathbf{d}^-(L(D))$.*

Demostración. Notemos que por definición de $L(D)$ tenemos que $\delta^+(D) = \delta^+(L(D))$. Como D es una digráfica semidominante coloreable interior completa, tenemos que $\mathbf{d}^-(D) = \delta^+(D) + 1$. Por el teorema anterior: $\delta^+(D) + 1 = \mathbf{d}^-(D) \leq \mathbf{d}^-(L(D)) \leq \delta^+(L(D)) + 1 = \delta^+(D) + 1$. Por lo tanto, $\mathbf{d}^-(L(D)) = \mathbf{d}^-(D)$ y $L(D)$ es una digráfica semidominante coloreable interior completa. \square

5.3. Número Semidominante Coloreable de $S(D)$, $R(S)$, $Q(D)$ y $T(D)$

En esta sección se darán algunos resultados sobre las condiciones de la digráfica raíz para que existan coloraciones semidominantes interiores en las digráficas $S(D)$, $R(S)$, $Q(D)$ y $T(D)$.

Teorema 5.3.1. *Si una digráfica D no tiene pozos, entonces $\mathbf{d}^-(S(D)) \geq 2$.*

Demostración. Sea D una digráfica sin pozos y $S(D)$ su digráfica subdivisión. Demostraremos que $\{V(D), F(D)\}$ forman una partición semidominante interior de los vértices de $S(D)$.

Por definición $V(S(D)) = V(D) \cup F(D)$ y $V(D) \cap F(D) = \emptyset$, además $V(D) \neq \emptyset$ y como D no tiene pozos, existe al menos una flecha, es decir, $F(D) \neq \emptyset$. Falta ver que cada uno es un conjunto semidominante interior de $S(D)$.

Sea $x \in V(D)$, como D no tiene pozos, entonces $\delta_D^+(x) \geq 1$, por lo tanto existe $y \in V(D)$ tal que $(x, y) \in F(D)$. Por definición de la exvecindad de x en $S(D)$ tenemos que $(x, (x, y)) \in F(S(D))$, es decir, (x, y) absorbe a x en $S(D)$. Por lo tanto $F(D)$ es un conjunto semidominante interior de $S(D)$.

Sea $x = (u, v) \in F(D)$. Observemos que por definición de $S(D)$ tenemos que $\Gamma_{S(D)}^+((u, v)) = \{v\}$, es decir, $(x, v) \in F(S(D))$. Por lo tanto $V(D)$ es un conjunto semidominante interior de $S(D)$.

Con lo anterior tenemos que $S(D)$ tiene una bipartición semidominante interior, por lo tanto, $\mathbf{d}^-(S(D)) \geq 2$. \square

Teorema 5.3.2. *Si una digráfica D no tiene fuentes, entonces $\mathbf{d}^+(S(D)) \geq 2$.*

La prueba del teorema es análoga a la del teorema anterior usando la digráfica dual.

Con los teoremas anteriores y con ayuda de las propiedades vistas en la sección anterior podemos obtener resultados acerca de $R(D)$, $Q(D)$ y $T(D)$.

Corolario 5.3.1. *Si D es una digráfica sin pozos, entonces $\mathbf{d}^-(R(D)) \geq 2$, $\mathbf{d}^-(Q(D)) \geq 2$ y $\mathbf{d}^-(T(D)) \geq 2$.*

Demostración. Sabemos que $S(D)$ es una subdigráfica generadora de $R(D)$, $Q(D)$ y $T(D)$, por el teorema anterior tenemos que $\{V(D), F(D)\}$ es una bipartición semidominante interior de $S(D)$ y por lo tanto de $R(D)$, $Q(D)$ y $T(D)$. Por lo tanto $\mathbf{d}^-(R(D)) \geq 2$, $\mathbf{d}^-(Q(D)) \geq 2$ y $\mathbf{d}^-(T(D)) \geq 2$. \square

Corolario 5.3.2. *Si D es una digráfica sin fuentes, entonces $\mathbf{d}^+(R(D)) \geq 2$, $\mathbf{d}^+(Q(D)) \geq 2$ y $\mathbf{d}^+(T(D)) \geq 2$.*

La prueba de este corolario es análoga a la anterior, considerando a la digráfica dual.

El Teorema 5.3.1 es equivalente al resultado de Jerzy Topp en [20], ya que él demostró que $V(D)$ es un núcleo de $S(D)$ y si D no tiene pozos, entonces $F(D)$ es núcleo de $S(D)$. Con lo que implícitamente dio una bipartición, donde cada clase es un núcleo de $S(D)$ y por lo tanto un conjunto semidominante coloreable interior de $S(D)$.

Con lo anterior una pregunta natural es: si hay una digráfica D tal que $\mathbf{d}^-(D) > 2$, entonces $\mathbf{d}^-(S(D)) > 2$. La respuesta es no, como nos dice el siguiente lema.

Lema 5.3.1. *Si D es una digráfica tal que $\mathbf{d}^-(D) = n > 2$, entonces $\mathbf{d}^-(S(D)) = 2$.*

Demostración. Observemos que por definición de subdivisión para toda $y = (u, v) \in F(D) \subseteq V(S(D))$ tenemos que $\delta^+(y) = 1$, por lo que por el Lema 3.3.1 sabemos que $\mathbf{d}^-(S(D)) \leq \delta^+(y) + 1 = 2$, y como D no tiene pozos pues $n > 2$, usando el Teorema 5.3.1 tenemos que $\mathbf{d}^-(S(D)) = 2$. \square

Con el lema anterior, podemos observar que si D tiene pozos, entonces $\mathbf{d}^-(S(D)) = 1$, pues $S(D)$ también tendría pozos.

Corolario 5.3.3. *Si D es una digráfica tal que $\mathbf{d}^-(D) = n > 2$, entonces $\mathbf{d}^-(R(D)) = 2$.*

Demostración. Basta notar que para toda $y \in F(D)$, tenemos que, en $R(D)$, $\delta^+(y) = 1$. Por lo que por el Lema 3.3.1 sabemos que $\mathbf{d}^-(R(D)) \leq \delta^+(y) + 1 = 2$, como D no tiene pozos pues $n > 2$, usando el Teorema 5.3.1 tenemos que $\mathbf{d}^-(R(D)) = 2$. \square

Por los resultados anteriores, nos podemos dar cuenta que no podemos encontrar coloraciones semidominantes interiores con más de dos clases. Sin embargo, podemos preguntarnos que tipo de conjuntos nos inducen las clases de las coloraciones semidominantes interiores de la digráfica raíz. Eso dará pauta al siguiente capítulo. Sin embargo, nos preguntamos si es posible encontrar coloraciones semidominantes interiores con más clases en las digráficas $Q(D)$ y $T(D)$.

Lema 5.3.2. *Si $\{P_1, \dots, P_n\}$ es una partición de los vértices de D , entonces $\{P'_1, \dots, P'_n\}$ es una partición de los vértices de $S(D)$, donde $P'_i = P_i \cup \{(u, v) \in F(D) \mid v \in P_i\}$, con $1 \leq i \leq n$.*

Demostración. Como $V(D), F(D) \subseteq V(S(D))$, entonces se sigue que $P'_i \subseteq V(S(D))$, con $1 \leq i \leq n$, por lo que $\bigcup_{i=1}^n P'_i \subseteq V(S(D))$. Sea $x \in V(S(D))$, si $x \in V(D)$, entonces $x \in P_i$ para alguna $i \in \{1, \dots, n\}$, y por definición $x \in P'_i$. Si $x = (u, v) \in F(D)$, entonces como $\{P_1, \dots, P_n\}$ es una partición de $V(D)$ tenemos que $v \in P_j$, para alguna $j \in \{1, \dots, n\}$. Así, por definición tenemos que $x \in P'_j$. De esta forma, $V(S(D)) \subseteq \bigcup_{i=1}^n P'_i$, por lo tanto $V(S(D)) = \bigcup_{i=1}^n P'_i$.

Por otro lado, como $P_i \neq \emptyset$, se tiene que $P'_i \neq \emptyset$, con $1 \leq i \leq n$.

Ahora veamos que $P'_i \cap P'_j = \emptyset$, con $i \neq j$. Supongamos que no, es decir, existe $x \in P'_i \cap P'_j$, con $i \neq j$, tenemos casos:

Caso 1. Si $x \in V(D)$, entonces como $x \in P'_i$ tenemos que $x \in P_i$ y al estar también en P'_j se sigue que $x \in P_j$, es decir, $x \in P_i \cap P_j$ lo que es una contradicción pues $P_i \cap P_j = \emptyset$.

Caso 2. Si $x = (u, v) \in F(D)$, como $x \in P'_i$ tenemos que $v \in P_i$, análogamente como $x \in P'_j$ se sigue que $v \in P_j$, es decir, $v \in P_i \cap P_j$ lo que es una contradicción pues $P_i \cap P_j = \emptyset$.

Por lo tanto $P'_i \cap P'_j = \emptyset$.

Con lo anterior, tenemos que $\{P'_1, \dots, P'_n\}$ es una partición de $V(S(D))$. \square

Teorema 5.3.3. *Sea D una digráfica, si $\mathbf{d}^-(D) = n$, entonces $\mathbf{d}^-(Q(D)) \geq n$.*

Demostración. Sea $\{P_1, \dots, P_n\}$ una partición semidominante interior de los vértices de D . Sea $P'_i = P_i \cup \{(u, v) \in F(D) \mid v \in P_i\}$, con $1 \leq i \leq n$.

Demostraremos que $\{P'_1, \dots, P'_n\}$ es una partición semidominante interior de los vértices de $Q(D)$.

Sabemos por el Lema 5.3.2 que $\{P'_1, \dots, P'_n\}$ es una partición de los vértices de $S(D)$ y por consecuencia de $Q(D)$.

Falta demostrar que P'_i es un conjunto semidominante interior de $Q(D)$, para toda $i \in \{1, \dots, n\}$. Sea P'_i fijo, y sea $x \in V(Q(D)) - P'_i$.

Caso 1. Si $x \in V(D) - P'_i$, entonces $x \in P_j$, para alguna $j \neq i$ y $j \in \{1, \dots, n\}$. Como P_i es un conjunto semidominante interior de D , entonces existe $y \in P_i$ tal que $(x, y) \in F(D)$, que por definición de $Q(D)$ tenemos que $(x, (x, y)) \in F(Q(D))$. Además observemos que $(x, y) \in P'_i$ por lo que x es absorbido por (x, y) .

Caso 2. Si $x = (u, v) \in F(D) - P'_i$, como $\{P'_1, \dots, P'_n\}$ es una partición de los vértices de $Q(D)$, entonces $x \in P'_j$, para alguna $j \neq i$ y $j \in \{1, \dots, n\}$. Por lo que por definición $v \in P_j$. Por el caso 1, tenemos que v es absorbido por una flecha de la forma (v, w) , con $w \in P'_i$, pero por definición (v, w) está en la exvecindad de $x = (u, v)$, por lo tanto P'_i absorbe a x .

Por lo tanto, P'_i es un conjunto semidominante interior de $Q(D)$, lo que implica que $\{P'_1, \dots, P'_n\}$ es una partición semidominante interior de $Q(D)$, por lo que $\mathbf{d}^-(Q(D)) \geq n$. \square

Corolario 5.3.4. *Sea D una digráfica y $T(D)$ su digráfica total. Si $\mathbf{d}^-(D) = n$, entonces $\mathbf{d}^-(T(D)) \geq n$.*

Demostración. Recordemos que por el Teorema 5.1.1 $Q(D)$ es una subdigráfica generadora de $T(D)$ por lo que la coloración dada en la prueba del Teorema 5.3.3 sigue siendo una coloración semidominante interior de $T(D)$. Por lo tanto, $\mathbf{d}^-(T(D)) \geq n$. \square

Capítulo 6

Coloraciones Cuasiabsorbentes, Coloraciones k –absorbentes y Cuasinúcleos Ajenos de $L(D)$, $S(D)$, $R(D)$, $Q(D)$, $T(D)$

Como vimos en el capítulo anterior, no es posible encontrar una coloración semidominante interior con más de dos clases en $S(D)$ y $R(D)$. Pero si se puede observar el comportamiento de las coloraciones semidominantes interiores de la digráfica raíz, no sólo en estas digráficas, también en $L(D)$, $Q(D)$ y $T(D)$. De esto tratará este capítulo.

En la primera sección del capítulo, demostramos que una coloración semidominante interior de una digráfica D , nos induce una coloración de los vértices de las digráficas en conjuntos cuasiabsorbentes. De donde, pudimos observar que si dichos conjuntos de la digráfica raíz son independientes, los inducidos en las digráficas también lo son, es decir, nos inducen conjuntos llamados cuasinúcleos. Lo que nos llevó a relacionar estas coloraciones con el trabajo del 2001 de Gutin, Meng, Koh, Tay y Yeo [11], donde dan una caracterización de las digráficas, sin pozos, que tienen exactamente dos cuasinúcleos. En dicho trabajo concluyen con la siguiente conjetura: *Toda digráfica sin pozos, tiene dos cuasinúcleos ajenos*. Por lo que en la segunda sección nos centraremos en esta conjetura, mencionaremos algunos de los resultados que forman parte de la historia. Por otro lado, Hortensia Galeana, Laura Pastrana y Hugo Rincón en [10], demostraron que *el número de cusinúcleos de D es menor o igual al número de cuasinúcleos de $L(D)$* , lo que nos da pauta a la segunda parte de la sección, donde daremos acercamientos a la conjetura, en las digráficas: $L(D)$, $S(D)$, $R(D)$, $Q(D)$ y $T(D)$.

En la última sección, basándonos en conjuntos k –absorbentes, definiremos conceptos análogos a los dados en gráficas, con la idea de obtener resultados parecidos a éstos. También daremos un resultado de María Kwasnik [15] que nos dice que toda digráfica fuertemente conexa, sin ciclos dirigidos de longitud no congruente con $0 \pmod{k}$, tiene k –núcleo. De este resultado podremos obtener una coloración de sus vértices en k clases $(k-1)$ –absorbentes. Por otro lado, Hortensia Galeana y Xueliang Li [8], demuestran que el número de (k, l) –núcleos de la digráfica raíz es menor o igual que el número de $(2, l)$ –núcleos de su digráfica de líneas. También demuestran que si $L(D)$ tiene un (k, l) –núcleo, entonces D tiene un (k', l') –núcleo con $k' + l \leq k, l \leq l'$. Después Hortensia Galeana y Laura Pastrana [9] trabajaron con las digráficas

$S^k(D)$, $R^k(D)$, $Q^k(D)$ y $T^k(D)$, que son una generalización de las digráficas que hemos venido trabajando, donde encontraron k -núcleos. Daremos una coloración $(k-1)$ -absorbente de $S^k(D)$ en k clases.

6.1. Coloraciones Cuasiabsorbentes

Sea D una digráfica, recordemos que un conjunto $B \subseteq V(D)$ es *cuasiabsorbente* si para todo $x \in V(D) - B$ existen $w \in V(D) - B$ y $y \in B$ tal que $(x, y) \in F(D)$ ó $(x, w), (w, y) \in F(D)$, es decir, que de cualquier vértice fuera del conjunto existe una trayectoria dirigida de longitud uno o dos que termina en B .

De esta manera diremos que una coloración de los vértices de D es una coloración *cuasiabsorbente* de D si cada una de sus clases cromáticas es un conjunto cuasiabsorbente de D . Por lo que, al igual que las coloraciones semidominantes, estas coloraciones inducen particiones de los vértices, donde cada clase es un conjunto cuasiabsorbente y éstas inducen coloraciones cuasiabsorbentes. A dichas particiones las llamaremos *cuasiabsorbentes*. Así podemos definir:

Definición 6.1.1. *Sea $\mathbf{d}_c^-(D) = \{|P| \mid P \text{ es una partición cuasiabsorbente de } D\}$, al que llamaremos número cuasiabsorbente coloreable de D .*

Primero notemos que a diferencia de los cuasinúcleos no se pide que el conjunto sea independiente. Además observemos que $\mathbf{d}_c^-(D)$ está bien definido pues $V(D)$ es un conjunto cuasiabsorbente de D .

Otra observación pertinente es $\mathbf{d}^-(D) \leq \mathbf{d}_c^-(D)$, esto viene directo de la definición puesto que si P' es una partición semidominante interior de D , entonces también es una partición cuasiabsorbente de D , pues para cada vértice que no esta en la clase, existe una trayectoria dirigida de longitud uno que termina en ella. Por lo tanto, tenemos que la cardinalidad de la partición P' es menor o igual a $\max\{|P| \mid P \text{ es una partición cuasiabsorbente de } D\}$.

6.1.1. Coloraciones Cuasiabsorbentes en $L(D)$

En esta sección hablaremos de la relación que hay entre las coloraciones semidominantes interiores de la digráfica raíz y las coloraciones cuasiabsorbentes de su digráfica de líneas.

Sea D una digráfica y $\mathcal{P}(V(D))$ el conjunto potencia de los vértices de D , es decir, el conjunto de todos los subconjuntos de $V(D)$. Definimos $f : \mathcal{P}(V(D)) \rightarrow \mathcal{P}(F(D))$ una función que a cada $Z \subseteq V(D)$, $f(Z) = \{(x, y) \in F(D) \mid x \in Z\}$. Observemos que estos subconjuntos de flechas de D son subconjuntos de vértices de la digráfica de líneas. Para poder diferenciarlos, cuando hablemos de ellos como vértices de la digráfica de líneas, denotaremos al conjunto como $f_L(Z)$.

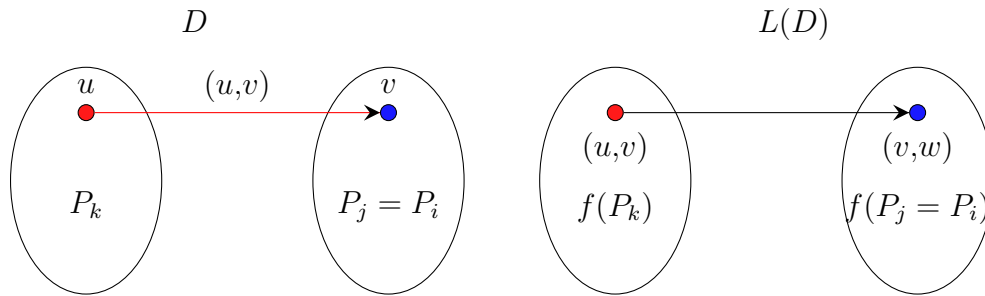
Teorema 6.1.1. *Si D es una digráfica tal que $\mathbf{d}^-(D) = n$, entonces $L(D)$ tiene una partición de sus vértices en n conjuntos cuasiabsorbentes.*

Demostración. Notemos que si $\mathbf{d}^-(D) = 1$, entonces el resultado es válido. Supongamos que $n \geq 2$, entonces por el Lema 3.3.1 tenemos que $\delta^+(D) \geq 1$.

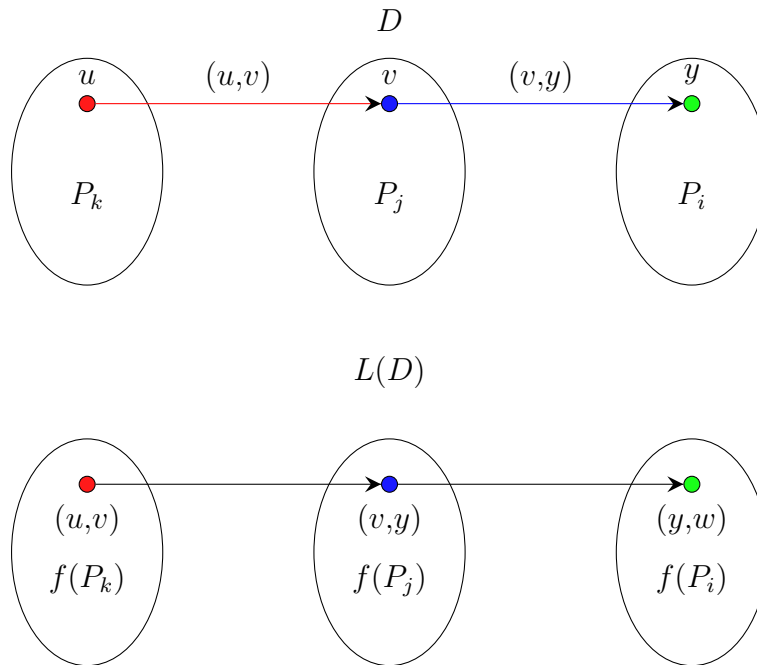
Sean $\{P_1, \dots, P_n\}$ una partición semidominante interior de los vértices de D y $L(D)$ la digráfica de líneas de D . Como cada flecha de D es un vértice de $L(D)$ y toda flecha tiene sólo un inicio, entonces $\bigcup_{i \in \{1, \dots, n\}} f(P_i)$ es una partición de las flechas de D y por ende induce una coloración de los vértices de $L(D)$.

Demostremos que cada clase de color es un conjunto cuasiabsorbente de $L(D)$. Tomemos $f_L(P_i)$ fijo, con $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Mostraremos que cuasiabsorbe a los vértices de $f_L(P_k)$, con $k \in \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}$. Sea $(u, v) \in f_L(P_k)$, con $u \in P_k$ y $v \in P_j$, con $k, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $k \neq i$. Tenemos tres casos:

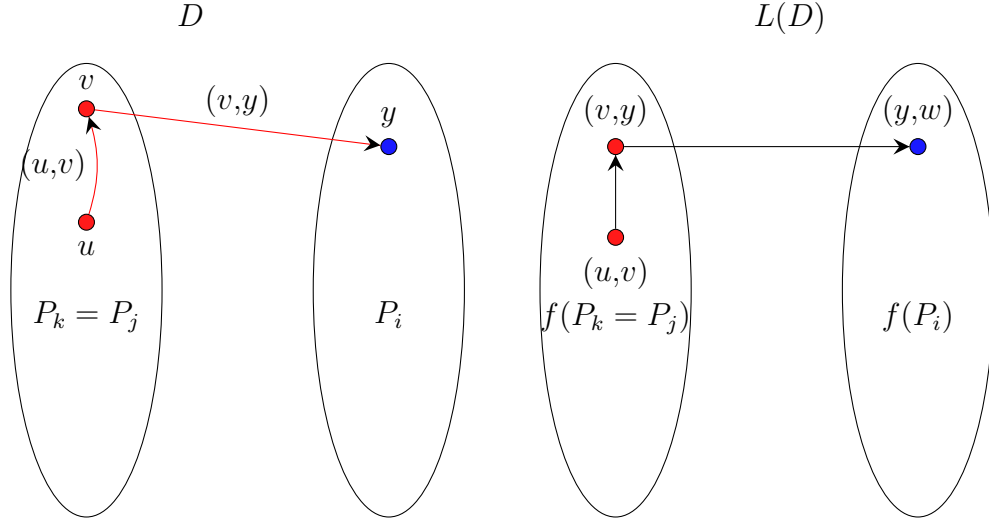
Caso 1. Si $j = i$, entonces $v \in P_i$, y como $\delta^+(v) \geq 1$, existe $(v, w) \in F(D)$, con $w \in V(D)$. Por definición de $L(D)$, $((u, v), (v, w)) \in F(L(D))$, con $(v, w) \in f_L(P_i)$, es decir, existe la $(u, v)f_L(P_i)$ -flecha.



Caso 2. Si $j \neq i$, entonces $v \in V(D) - P_i$, y como P_i es un conjunto semidominante interior existe $y \in P_i$ tal que $(v, y) \in F(D)$. Por definición de $L(D)$, entonces $((u, v), (v, y)) \in F(L(D))$. Como $\delta^+(y) \geq 1$, existe $(y, w) \in F(D)$, con $w \in V(D)$ y $(y, w) \in f_L(P_i)$. Por lo tanto, la trayectoria dirigida $((u, v), (v, y), (y, w))$ es una $(u, v)f_L(P_i)$ -trayectoria dirigida de longitud dos.



Caso 3. Si $k = j$, entonces $v \in P_k$. Como P_i es un conjunto semidominante interior de D y $k \neq i$, entonces existe $y \in P_i$ tal que $(v, y) \in F(D)$. Como $\delta^+(y) \geq 1$, entonces existe $(y, w) \in F(D)$, con $w \in V(D)$. Por definición de $L(D)$, $((v, y), (y, w)) \in F(L(D))$, con $(y, w) \in f_L(P_i)$. Por lo tanto, $((u, v), (v, y), (y, w))$ es una $(u, v)f_L(P_i)$ -trayectoria dirigida de longitud dos.



En todos los casos obtenemos que $f_L(P_i)$, con $1 \leq i \leq n$ es un conjunto cuasiabsorbente de $L(D)$. Es decir, $\mathbf{d}_c^-(L(D)) \geq n$. \square

6.1.2. Coloraciones Cuasiabsorbentes de $S(D)$, $R(S)$, $Q(D)$ y $T(D)$

Como vimos en el capítulo anterior, no es posible encontrar una coloración semidominante interior con más de dos clases en $S(D)$ y $R(D)$. Entonces una pregunta que surgió es si a partir de las clases de color de las coloraciones semidominantes interiores de la digráfica raíz podemos obtener otro tipo de coloraciones, en particular coloraciones cuasiabsorbentes no sólo en $S(D)$ y $R(D)$, sino también en $Q(D)$ y $T(D)$.

Con la idea anterior, podemos encontrar una coloración cuasiabsorbente en $S(D)$.

Teorema 6.1.2. *Sea D es una digráfica y $S(D)$ su digráfica subdivisión. Si $\mathbf{d}^-(D) = n \geq 2$, entonces $S(D)$ tiene una coloración cuasiabsorbente en n clases.*

Demostración. Sea $\{P_1, \dots, P_n\}$ una partición semidominante interior de los vértices de D . Sea $P'_i = P_i \cup \{(u, v) \in F(D) \mid v \in P_i\}$, con $1 \leq i \leq n$.

Por el Lema 5.3.2 tenemos que $\{P'_1, \dots, P'_n\}$ es una partición de los vértices de $S(D)$.

Falta demostrar que P'_i es un conjunto cuasiabsorbente para toda $i \in \{1, \dots, n\}$. Sea P'_i fijo, y sea $x \in V(S(D)) - P'_i$.

Caso 1. Si $x \in V(D) - P_i$, entonces $x \in P_j$ con $j \in \{1, \dots, n\}$ y $j \neq i$. Como P_i es un conjunto semidominante interior de D , entonces existe $y \in P_i$ tal que $(x, y) \in F(D)$, que por definición de $S(D)$, $(x, (x, y)) \in F(S(D))$, además $(x, y) \in P'_i$ por lo que x es absorbido por (x, y) en $S(D)$.

Caso 2. Si $x = (u, v) \in F(D) - P'_i$, entonces $x \in P'_j$ con $j \in \{1, \dots, n\}$ y $j \neq i$, lo que implica que $v \in P_j$. Por el caso 1, tenemos que v es absorbido a distancia uno por una flecha de la

forma (v, w) , con $w \in P'_i$, con lo que la trayectoria $(x = (u, v), v, (v, w))$ es una xP'_i -trayectoria dirigida de longitud dos en $S(D)$.

Por lo tanto, P'_i es un conjunto cuasiabsorbente de $S(D)$, lo que implica que $\{P'_1, \dots, P'_n\}$ es una partición cuasiabsorbente en n clases, es decir, $\mathbf{d}_c^-(S(D)) \geq n$. \square

De la misma manera podemos encontrar una coloración cuasiabsorbente de $R(D)$.

Lema 6.1.1. *Si $\{P_1, \dots, P_n\}$ es una partición de los vértices de una digráfica D sin pozos, entonces $\{P_1, \dots, P_n, F(D)\}$ es una partición de los vértices de $S(D)$.*

Demostración. Veamos que cada conjunto es distinto del vacío. Notemos que como D no tiene pozos, entonces $F(D) \neq \emptyset$. Por otro lado, el Lema 5.3.1 nos dice que $\{V(D), F(D)\}$ es una partición semidominante interior de $S(D)$. Por último, como $\bigcup_{i=1}^n P_i = V(D)$, tenemos que $(\bigcup_{i=1}^n P_i) \cup F(D) = V(S(D))$. Además como P_i es una clase de una partición se tiene que $P_i \neq \emptyset$.

Observemos que por definición tenemos que $P_i \cap P_j = \emptyset$ con $i \neq j$ donde $j, i \in \{1, \dots, n\}$, así como $P_i \cap F(D) = \emptyset$ con $1 \leq i \leq n$.

Por lo tanto, $\{P_1, \dots, P_n\}$ es una partición de $V(S(D))$. \square

Teorema 6.1.3. *Sea D una digráfica, si $\mathbf{d}^-(D) = n \geq 2$, entonces $R(D)$ tiene una coloración cuasiabsorbente en $n + 1$ clases.*

Demostración. Sea $\{P_1, \dots, P_n\}$ una partición semidominante interior de D . Demostraremos que $\{P_1, P_2, \dots, P_n, F(D)\}$ es una partición cuasiabsorbente de $R(D)$ en $n + 1$ clases.

Por el Lema 6.1.1 tenemos que $\{P_1, \dots, P_n, F(D)\}$ es una partición de los vértices de $R(D)$.

Falta demostrar que cada clase es un conjunto cuasiabsorbente en $R(D)$.

Consideremos $F(D)$, y sea $x \in V(R(D)) - F(D)$. Entonces por definición $x \in V(D) = \bigcup_{i=1}^n P_i$, es decir, $x \in P_i$ para alguna $i \in \{1, \dots, n\}$. Sea $P_j \neq P_i$, existe pues $n \geq 2$, como P_j es un conjunto semidominante interior en D , entonces existe $y \in P_j$ tal que $(x, y) \in F(D)$. Sabemos que por la definición de $R(D)$, la exvecindad de x son todas las flechas que tienen como vértice inicial a x , unión su exvecindad en D , eso implica que $(x, (x, y)) \in F(R(D))$, con $(x, y) \in F(D) \subseteq V(R(D))$, es decir, (x, y) absorbe a x , por lo tanto $F(D)$ es un conjunto cuasiabsorbente de $R(D)$.

Ahora consideremos un P_i fijo, y sea $x \in V(R(D)) - P_i$. Tenemos dos casos:

Caso 1. Si $x \in F(D)$, entonces $x = (u, v)$, con $u, v \in V(D)$. Observemos que en $R(D)$ la exvecindad de x sólo consta de v . Si $v \in P_i$, entonces tenemos que P_i absorbe a x a distancia uno. Si $v \in P_j$, con $j \neq i$, entonces como P_i es un conjunto semidominante interior de D , existe $y \in P_i$ tal que $(v, y) \in F(D)$, es decir, está en la exvecindad de v , por lo tanto en $R(D)$, la trayectoria dirigida $(x = (u, v), v, y)$ es una xP_i -trayectoria dirigida de longitud dos en $R(D)$.

Caso 2. Si $x \in P_j$, con $j \neq i$, entonces como P_i es un conjunto semidominante interior de D , existe $y \in P_i$ tal que $(x, y) \in F(D)$, es decir, y está en la exvecindad de v , así $(x, y) \in F(R(D))$. Por lo tanto, P_i absorbe a x en $R(D)$.

En ambos casos P_i es un conjunto cuasiabsorbente de $R(D)$.

Por lo tanto $\{P_1, P_2, \dots, P_n, F(D)\}$ es una partición cuasiabsorbente de $R(D)$ en $n + 1$ clases, es decir, $\mathbf{d}_c^-(R(D)) \geq n + 1$. \square

Nos podemos preguntar si las podemos encontrar para $Q(D)$ y $T(D)$.

Teorema 6.1.4. *Sea D una digráfica y $Q(D)$ su digráfica media. Si $\mathbf{d}^-(D) = n \geq 2$, entonces $Q(D)$ tiene una coloración cuasiabsorbente en $n + 1$ clases.*

Demostración. Sea $\{P_1, \dots, P_n\}$ una partición semidominante interior de D . Demostraremos que $\{P_1, P_2, \dots, P_n, F(D)\}$ es una partición cuasiabsorbente de $Q(D)$ en $n + 1$ clases.

Por el Lema 6.1.1 tenemos que $\{P_1, \dots, P_n, F(D)\}$ es una partición de los vértices de $Q(D)$ en $n + 1$ clases.

Falta demostrar que cada clase es un conjunto cuasiabsorbente en $Q(D)$.

Consideremos $F(D)$, y sea $x \in V(Q(D)) - F(D)$. Entonces por definición $x \in V(D) = \bigcup_{i=1}^n P_i$, es decir, $x \in P_i$ para alguna $i \in \{1, \dots, n\}$. Sea $P_j \neq P_i$, que existe pues $n \geq 2$. Como P_j es un conjunto semidominante interior en D , entonces existe $y \in P_j$ tal que $(x, y) \in F(D)$. Sabemos que por la definición de $Q(D)$, la exvecindad de x son todas las flechas que tienen como vértice inicial a x , eso implica que $(x, (x, y)) \in F(Q(D))$, es decir, (x, y) absorbe a x en $Q(D)$, por lo tanto $F(D)$ es un conjunto cuasiabsorbente de $Q(D)$.

Ahora consideremos un P_i fijo, y sea $x \in V(Q(D)) - P_i$, tenemos dos casos:

Caso 1. Si $x \in F(D)$, entonces $x = (u, v)$, con $u, v \in V(D)$. Observemos que la exvecindad de x , consta de v así como de todas las flechas de D que tienen a v como vértice inicial. Si $v \in P_i$, entonces tenemos que P_i absorbe a x a distancia uno en $Q(D)$. Si $v \in P_j$, con $j \neq i$, entonces como P_i es un conjunto semidominante interior de D , existe $y \in P_i$ tal que $(v, y) \in F(D)$, por lo tanto en $Q(D)$, la trayectoria dirigida $(x = (u, v), (v, y), y)$ es una xP_i -trayectoria dirigida de longitud dos, por lo que P_i cuasiabsorbe a x en $Q(D)$.

Caso 2. Si $x \in P_j$, con $j \neq i$, entonces como P_i es un conjunto semidominante interior de D , existe $y \in P_i$ tal que $(x, y) \in F(D)$, por lo que la trayectoria dirigida $(x, (x, y), y)$ es una xP_i -trayectoria dirigida de longitud dos en $Q(D)$. Por lo tanto, P_i cuasiabsorbe a x de $Q(D)$.

En ambos casos P_i es un conjunto cuasiabsorbente de $Q(D)$.

Por lo tanto $\{P_1, P_2, \dots, P_n, F(D)\}$ es una coloración cuasiabsorbente de $Q(D)$ en $n + 1$ clases, es decir, $\mathbf{d}_c^-(Q(D)) \geq n + 1$. \square

Corolario 6.1.1. *Sea D una digráfica y $T(D)$ su digráfica total. Si $\mathbf{d}^-(D) = n \geq 2$, entonces $T(D)$ tiene una coloración cuasiabsorbente en $n + 1$ clases.*

Demostración. Por el Teorema 5.1.1 $Q(D)$ es una subdigráfica generadora de $T(D)$ por lo que la coloración de la demostración anterior sigue siendo una partición cuasiabsorbente de $T(D)$. Por lo tanto $\mathbf{d}_c^-(T(D)) \geq n + 1$. \square

6.2. Cuasinúcleos ajenos

En las secciones anteriores, demostramos que una coloración semidominante interior de una digráfica D , nos induce una coloración de los vértices de las digráficas estudiadas en conjuntos cuasiabsorbentes. De donde, pudimos observar que si dichos conjuntos de la digráfica raíz son independientes, los inducidos en las digráficas también lo son, es decir, nos inducen conjuntos llamados cuasinúcleos. Lo que nos llevó a relacionar estas coloraciones con el trabajo del 2001 de Gutin, Meng, Koh, Tay y Yeo [11], donde dan una caracterización de las digráficas, sin

pozos, que tienen exactamente dos cuasinúcleos. En dicho trabajo concluyen con la siguiente conjetura:

Conjetura 6.2.1. [11] *Toda digráfica sin pozos tiene dos cuasinúcleos ajenos.*

Por lo que esta sección se centra en esta conjetura. En la primera parte mencionaremos algunos de los resultados que ya se han trabajado, y la segunda sección tiene como objetivo dar acercamientos a esta conjetura en las digráficas ya trabajadas: $L(D)$, $S(D)$, $R(D)$, $Q(D)$ y $T(D)$.

Gutin, Koh, Tay Y Yeo, demostraron que si una digráfica es *núcleo-perfecta* (que toda subdigráfica inducida tiene núcleo, incluida ella misma), tiene dos cuasinúcleos ajenos.

Lema 6.2.1. [11] *Si D es una digráfica y Y es un conjunto de vértices en D tal que $D[Y]$ es núcleo-perfecta, entonces existe un cuasinúcleo Q en D tal que $Q \subseteq V(D) - (\Gamma^-[Y] - Y)$.*

Demostración. Sean $H = D - \Gamma^-[Y]$ y Q_1 un cuasinúcleo en H , que existe por el Teorema 1.3.4 (si $H = \emptyset$, entonces $Q_1 = \emptyset$). Sea Y' el subconjunto de todos los vértices de Y tal que no tienen flecha en Q_1 . Como $D[Y]$ es núcleo perfecta, entonces existe K' núcleo de $D[Y']$.

Afirmamos que $Q = Q_1 \cup K'$ es el cuasinúcleo buscado.

Notemos que Q es independiente pues K' y Q_1 son conjuntos independientes, así como por definición de Y' no existe la $K'Q_1$ -flecha y por definición de H no existe la Q_1K' -flecha.

Por definición de Q_1 , todo vértice en H es cuasiabsorbido por Q . Observemos que cada $y \in Y$ manda flecha a Q_1 o es vértice de Y' y manda flecha a K' o está en K' , es decir, todo vértice en $Y' - K'$ es cuasiabsorbido por Q . Con lo anterior tenemos que todo vértice en $\Gamma^-(Y)$ es cuasiabsorbido por Q .

Por lo tanto Q es cuasinúcleo de D y por definición $Q \subseteq V(D) - (\Gamma^-[Y] - Y)$. □

Así con el lema anterior obtenemos el siguiente corolario:

Corolario 6.2.1. [11] *Toda digráfica núcleo-perfecta sin pozos tiene dos cuasinúcleos ajenos.*

Demostración. Sean D una digráfica núcleo-perfecta sin pozos y N un núcleo de D , tomemos $Y = (\Gamma^+[N] - N)$. Observemos que $N \subseteq (\Gamma^-[Y] - Y)$, entonces por el lema anterior D tiene un cuasinúcleo Q , tal que $Q \cap N = \emptyset$. Por lo tanto D tiene dos cuasinúcleos ajenos. □

Notemos que el resultado anterior, implícitamente da familias de digráficas que cumplen con la Conjetura 6.2.1.

Corolario 6.2.2. *Si D es una digráfica transitiva sin pozos, entonces D tiene dos cuasinúcleos ajenos.*

Demostración. Sea D una digráfica transitiva sin pozos. Probaremos que es núcleo perfecta.

Sea Q un cuasinúcleo de D , que existe por la Proposición 1.3.4.

Afirmamos que Q es núcleo de D . Por definición Q es independiente. Sea $x \in V(D) - Q$, y supongamos que Q no absorbe a x , es decir, no existe xQ -flecha en D . Como Q es cuasinúcleo existen $y \in V(D) - Q$ y $z \in Q$ tal que $(x, y), (y, z) \in F(D)$, pero al ser D transitiva $(x, z) \in F(D)$, es decir, existe la xQ -flecha, lo que es una contradicción. Por lo tanto, Q es absorbente.

Por lo tanto, Q es núcleo de D .

Notemos que toda subdigráfica inducida de D es transitiva y por lo tanto tiene núcleo, en otras palabras, D es núcleo perfecta sin pozos. Entonces por el Corolario 6.2.1 D tiene dos cuasinúcleos ajenos. \square

Diremos que una digráfica es simétrica si $(x, y) \in F(D)$, entonces $(y, x) \in F(D)$, con $x, y \in V(D)$.

Corolario 6.2.3. *Si D es una digráfica simétrica sin pozos, entonces D tiene dos cuasinúcleos ajenos.*

Demostración. Sea D una digráfica simétrica sin pozos. Demostraremos que D es núcleo perfecta.

Sea $I \subseteq V(D)$ un subconjunto independiente, máximo por contención. Probaremos que I es absorbente.

Sea $x \in V(D) - I$, como I es máximo por contención $I \cup \{x\}$ no es un conjunto independiente, entonces existe $w \in I$ tal que $(x, w) \in F(D)$ o $(w, x) \in F(D)$, pero como D es simétrica ambas flechas están en D , es decir, $w \in I$ absorbe a x . Por lo tanto, I es núcleo de D .

Observemos que cualquier subdigráfica inducida es simétrica, con lo anterior tenemos que D es núcleo perfecta y sin pozos. Por el Corolario 6.2.1 D tiene dos cuasinúcleos ajenos. \square

Los corolarios anteriores son ejemplos de familias de digráficas que cumplen con ser núcleo-perfectas, por lo que todas las familias que lo sean, darán soporte a la conjetura, como también es el caso de las digráficas sin ciclos dirigidos de longitud impar [3].

6.2.1. Cuasinúcleos Ajenos en $L(D)$

En 1991 Hortensia Galeana, Laura Pastrana y Hugo Rincón [10], demostraron que *el número de cusinúcleos de D es menor o igual al número de cuasinúcleos de $L(D)$* , lo que nos da pauta a trabajar la conjetura en la digráfica de líneas. Recordemos a la función $\varphi : \mathcal{P}(V(D)) \rightarrow \mathcal{P}(F(D))$ que a cada $Z \subseteq V(D)$, $\varphi(Z) = \{(x, y) \in F(D) \mid y \in Z\}$.

Teorema 6.2.1. *Si D tiene dos cuasinúcleos ajenos, entonces $L(D)$ tiene dos cuasinúcleos ajenos.*

Demostración. Sea P un cuasinúcleo de D . Demostraremos que $\varphi_L(P)$ es un cuasinúcleo de $L(D)$.

Veamos que es independiente, sean $(x, y), (u, v) \in \varphi_L(P)$, por definición tenemos que $y, v \in P$. Supongamos que $((x, y), (u, v)) \in F(D)$ o $((u, v), (x, y)) \in F(D)$, entonces tenemos que $y = u$ o $v = x$. Si $y = u$, entonces $u \in P$ y $v \in P$, es decir, P no es independiente, lo que es una contradicción. Análogamente, si $v = x$. Por lo tanto, $\varphi_L(P)$ es independiente en $L(D)$.

Sea $(u, v) \in V(L(D)) - \varphi_L(P)$. Notemos que por definición $v \notin P$, por lo que v es cuasiabsorbido por P en D , obteniendo dos casos:

- Existe la vP -flecha, es decir, existe $w \in P$ tal que $(v, w) \in F(D)$, y notemos que $(v, w) \in \varphi_L(P)$, por lo que (v, w) absorbe a (u, v) en $L(D)$.
- Existe vP -trayectoria dirigida de longitud dos, es decir, existe $y \in V(D)$ y $w \in P$ tal que (v, y, w) es una trayectoria dirigida. Observemos que $(y, w) \in \varphi_L(P)$, con lo que $((u, v), (v, y), (y, w))$ es una $(u, v)\varphi_L(P)$ -trayectoria dirigida en $L(D)$.

Por lo tanto, $\varphi_L(P)$ es un cuasinúcleo de $L(D)$.

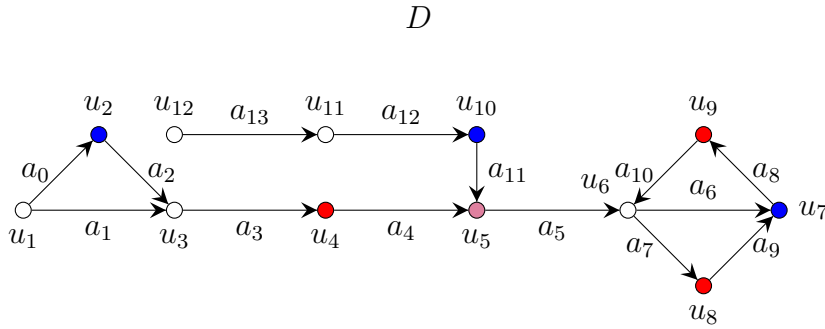
Sean P y Q dos cuasinúcleos ajenos de D , por lo anterior tenemos que $\varphi_L(P)$ y $\varphi_L(Q)$ son cuasinúcleos de $L(D)$. Falta ver que son ajenos.

Supongamos que $\varphi_L(P) \cap \varphi_L(Q) \neq \emptyset$, entonces existe $(u, v) \in \varphi_L(P) \cap \varphi_L(Q)$, pero por definición $v \in P$ y $v \in Q$, es decir, $v \in P \cap Q$, lo que es una contradicción, pues $P \cap Q = \emptyset$.

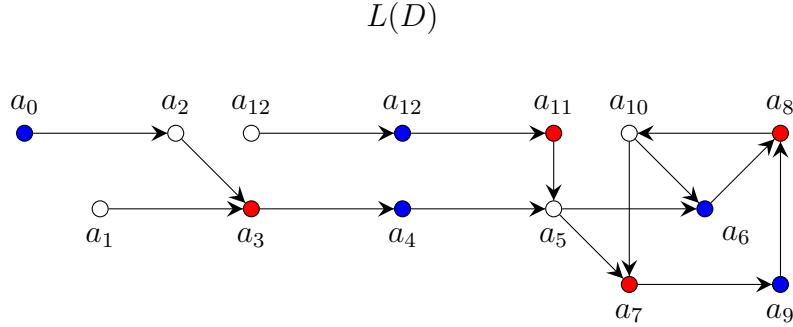
Por lo tanto, $L(D)$ tiene dos cuasinúcleos ajenos. □

Observemos que el resultado nos dice que los cuasinúcleos ajenos en D nos inducen cuasinúcleos ajenos en $L(D)$. Recordemos que los vértices de $L(D)$ son flechas en D . Por lo que siguiendo con la idea del teorema anterior podemos preguntarnos si los vértices finales de las flechas que conforman a un cuasinúcleo en $L(D)$ nos induce un cuasinúcleo en D . Si la respuesta fuera afirmativa, entonces ¿dos cuasinúcleos ajenos en la digráficas de líneas inducen dos cuasinúcleos ajenos en la original?. Fijémonos en el siguiente ejemplo:

Consideremos a la digráfica:



Y su digráfica de líneas:



Observemos que $\{a_0, a_4, a_6, a_9, a_{12}\}$ y $\{a_3, a_7, a_8, a_{11}\}$ son dos cuasinúcleos ajenos de $L(D)$. Los conjuntos que inducen sus vértices finales en D son: $\{u_2, u_5, u_7, u_{10}\}$ y $\{u_4, u_5, u_8, u_9\}$, respectivamente. Notemos que no son ajenos, por lo que dos conjuntos ajenos en $L(D)$ no nos inducen, usando la idea del teorema anterior, dos conjuntos ajenos en D . Por otro lado, el conjunto $\{u_4, u_5, u_8, u_9\}$ no es independiente pues $(u_4, u_5) \in F(D)$ y tampoco es cuasiabsorbente ya que u_{13} no es cuasiabsorbido.

Del ejemplo anterior, podemos concluir que la idea de obtener cuasinúcleos ajenos para D a partir de dos cuasinúcleos ajenos de $L(D)$, fijándonos únicamente en sus vértices finales no es suficiente. Sin embargo, si nos fijamos en los conjuntos $\{u_3, u_6, u_9, u_{10}\}$ y $\{u_2, u_5, u_7, u_{11}\}$, observemos que son dos cuasinúcleos ajenos de D formados a partir de los vértices extremos de las flechas que forman a los dos cuasinúcleos ajenos de $L(D)$.

6.2.2. Cuasinúcleos Ajenos en $S(D)$, $R(D)$, $Q(D)$ y $T(D)$

Si nos fijamos en $S(D)$ podemos obtener el siguiente teorema.

Teorema 6.2.2. *Si D es una digráfica tal que $\delta^+(D) \geq 1$, entonces $S(D)$ tiene dos cuasinúcleos ajenos.*

Demostración. Sea D una digráfica tal que $\delta^+(D) \geq 1$, es decir, sin pozos. Demostraremos que tanto $V(D)$ como $F(D)$ son cuasinúcleos ajenos de $S(D)$.

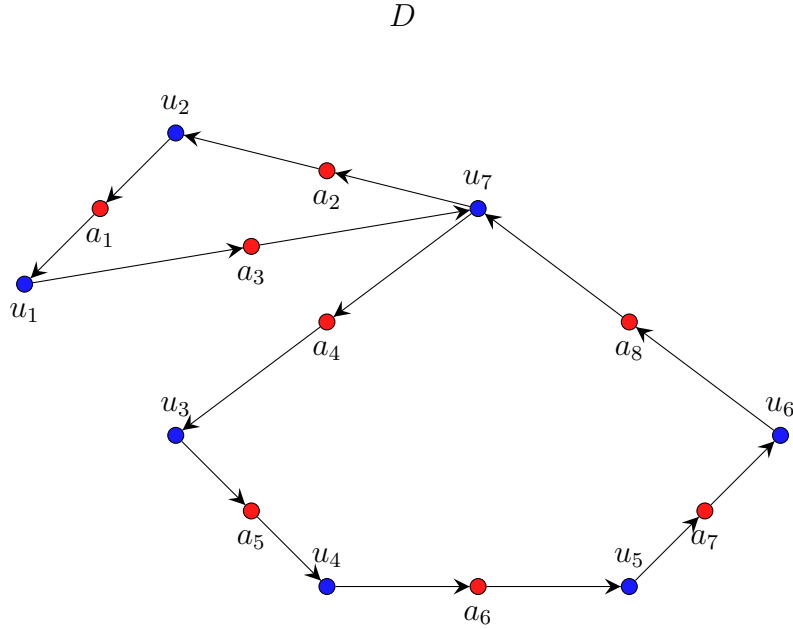
Notemos que por definición $V(D) \cap F(D) = \emptyset$. Además por el Teorema 5.3.1 tenemos que $F(D)$ y $V(D)$ son conjuntos absorbentes en $S(D)$, en consecuencia también son conjuntos cuasiabsorbentes. Falta demostrar que son conjuntos independientes, pero por definición tenemos

que:

$$\Gamma_{S(D)}^+(x) = \begin{cases} \{x\} \times \Gamma_D^+(x), & \text{si } x \in V(D) \\ \{v\}, & \text{si } x = (u, v) \in F(D) \end{cases}$$

Podemos observar que los v3rtices de D s3lo alcanzan a las flechas de D y las flechas solo alcanzan a los v3rtices de D . Por lo tanto, $V(D)$ y $F(D)$ son independientes. \square

El teorema anterior lo podemos ilustrar con la digr3fica D ya antes trabajada.



Notemos que por definici3n, a diferencia de las coloraciones semidominantes, estos cuasin3cleos de $S(D)$ no son cuasin3cleos para $R(D)$, $Q(D)$ y $T(D)$. Sin embargo, se puede encontrar condiciones para que dichas digr3ficas tengan dos cuasin3cleos ajenos.

M3s a3n, si usamos el teorema 1.3.4, que nos dice que toda digr3fica tiene un cuasin3cleo, podemos formular los siguientes teoremas.

Teorema 6.2.3. *Si D es una digr3fica tal que $\delta^+(D) \geq 1$, entonces $R(D)$ tiene dos cuasin3cleos ajenos.*

Demostraci3n. Sea D una digr3fica tal que $\delta^+(D) \geq 1$. Por el Teorema 1.3.4 sabemos que existe $Q \subseteq V(D)$ tal que Q es cuasin3cleo de D . Demostraremos que $Q_1 = Q \cup A$ es cuasin3cleo de $R(D)$, donde $A = \{(u, v) \in F(D) \mid v, u \notin Q \text{ y } d_D(v, Q) = 2\}$.

Veamos que Q_1 es independiente. Observemos que:

$$\Gamma_{R(D)}^+(x) = \begin{cases} \Gamma_D^+(x) \cup (\{x\} \times \Gamma_D^+(x)), & \text{si } x \in V(D) \\ \{v\}, & \text{si } x = (u, v) \in F(D) \end{cases}$$

Es decir, los v3rtices de D s3lo alcanzan a las flechas de D , que los tienen como v3rtices iniciales y a los v3rtices que alcanzan en D , y las flechas de D son adyacentes 3nicamente a sus v3rtices extremos. Sean $x, y \in Q \cup A$. Si $x, y \in Q \subseteq V(D)$, entonces no son adyacentes en $R(D)$, pues Q es independiente en D . Si $x, y \in A \subseteq F(D)$, entonces no son adyacentes en $R(D)$, pues las

flechas de D son adyacentes únicamente a sus vértices extremos. Si $x = (u, v) \in A$ y $y \in Q$, entonces por definición de A tenemos que $v \notin Q$, por lo que $v \neq y$, por lo que no existe la xy -flecha en $R(D)$. De la misma manera, $u \notin Q$, por lo que $u \neq y$, lo que implica que no existe la yx -flecha en $R(D)$. Por lo tanto Q_1 es independiente.

Falta ver que Q_1 es cuasiabsorbente. Sea $x \in V(R(D)) - Q_1$, tenemos dos casos.

Caso 1. Si $x \in V(D) - Q$, entonces como Q es cuasinúcleo de D existe $y \in Q$ tal que $(x, y) \in F(D)$, lo que por definición de $R(D)$ tenemos que $(x, y) \in F(R(D))$ o existen $y \in Q$ y $w \in V(D)$ tal que (x, w, y) es una trayectoria dirigida en D , pero por definición de $R(D)$, dicha trayectoria dirigida también está en $R(D)$.

Caso 2. Si $x = (w, z) \in F(D) - A$, entonces $d_D(z, Q) = 1$ ó $d_D(z, Q) = 0$, por lo que tenemos dos casos.

Caso 2.1 Si $d(z, Q) = 0$, entonces $z \in Q$, por lo que $(x = (w, z), z) \in F(R(D))$, es decir, z absorbe a x en $R(D)$.

Caso 2.2 Si $d(z, Q) = 1$, entonces existe $h \in Q$ tal que $(z, h) \in F(D)$, por lo que $(x = (w, z), z, h)$ es una xQ_1 -trayectoria dirigida de longitud dos, es decir, h cuasiabsorbe a x en $R(D)$.

Por lo tanto, Q_1 es cuasinúcleo de $R(D)$.

Ahora demostraremos que $Q_2 = F(D) - A$ es cuasinúcleo de $R(D)$. Primero veamos que $Q_2 \subseteq F(D)$ es independiente. Por definición de $R(D)$, una flecha de D únicamente es adyacente a sus vértices extremos en D , por lo que Q_2 es independiente.

Falta ver que Q_2 es cuasiabsorbente, sea $x \in V(R(D)) - Q_2$, tenemos tres casos.

Caso 1. Si $x \notin Q$, este caso lo volveremos a dividir.

Caso 1.1 Si $d(x, Q) = 1$, entonces existe $w \in Q$ tal que $(x, w) \in F(D)$, además, por definición de A , $(x, w) \in F(D) - A$, es decir, (x, w) absorbe a x en $R(D)$.

Caso 1.2 Si $d(x, Q) = 2$, es decir, existen $w \in Q$ y $y \in \Gamma_D^-(w)$ tal que (x, y, w) es una xQ -trayectoria dirigida de longitud dos en D , notemos que $(x, y) \in F(D) - A$ y por definición de $R(D)$ tenemos que $(x, (x, y)) \in F(R(D))$, es decir, (x, y) absorbe a x en $R(D)$.

Caso 2. Si $x \in Q$, entonces como Q es cuasinúcleo y D no tiene pozos, existe $y \in V(D) - Q$ tal que $(x, y) \in F(D)$. Notemos que por definición de $R(D)$ y A , $(x, (x, y)) \in F(R(D)) - A$, es decir, (x, y) absorbe a x en $R(D)$.

Caso 3. Si $x = (u, v) \in A$, es decir, $d(v, Q) = 2$, por el Caso 1.2 tenemos que existe un $y \in D$ tal que $(v, y) \in F(D) - A$ y absorbe a v . Además como $(x = (u, v), v) \in F(R(D))$ se tiene que $(x = (u, v), v, (v, y))$ es una xQ_2 -trayectoria dirigida de longitud dos en $R(D)$, es decir, (v, y) cuasiabsorbe a x en $R(D)$.

Por lo tanto Q_2 es cuasinúcleo de $R(D)$.

Además $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$ se deduce de los hechos: $A^c = Q_2$, $Q \subseteq V(D)$, $Q \subseteq Q_1$ y $V(D) \cap F(D) = \emptyset$.

Por lo tanto $R(D)$ tiene dos cuasinúcleos ajenos. □

Teorema 6.2.4. *Si D es una digráfica tal que $\delta^+(D) \geq 1$, entonces $Q(D)$ tiene dos cuasinúcleos ajenos.*

Demostración. Sea D una digráfica tal que $\delta^+(D) \geq 1$. Por el Teorema 1.3.4 sabemos que existe $Q \subseteq V(D)$ tal que Q es cuasinúcleo de D . Demostraremos que $Q_1 = Q \cup B$ es cuasinúcleo de $Q(D)$, donde $B = \{(u, v) \in F(D) \mid d(u, Q) = 2 \text{ y } d(v, Q) = 1\}$.

Veamos que Q_1 es independiente. Por definición de $Q(D)$ tenemos que Q es independiente, pues los vértices de D sólo son adyacentes a las flechas de D que lo tienen como vértice inicial y $Q \subseteq V(D)$. Por otro lado, B es independiente pues ningún vértice puede estar a distancia uno y al mismo tiempo a distancia dos de Q . Por último, por definición de B no existe ninguna QB -flecha ni BQ -flecha.

Falta ver que Q_1 es cuasiabsorbente. Si $x \in V(Q(D))$, tenemos dos casos.

Caso 1. Si $x \in V(D) - Q$, existen dos casos.

Caso 1.1 Si $d(x, Q) = 1$, entonces existe $w \in Q$ tal que $(x, w) \in F(D)$, por lo que $(x, (x, w), w)$ es una xQ -trayectoria dirigida de longitud dos, es decir, w cuasiabsorbe a x en $Q(D)$.

Caso 1.2 Si $d(x, Q) = 2$, entonces existen $w \in Q$ y $y \in \Gamma_D^+(w)$ tal que (x, y, w) es una xQ_1 -trayectoria de longitud dos. Notemos que $(x, y) \in B$, por lo que por definición de $Q(D)$ tenemos que $(x, (x, y)) \in F(Q(D))$, es decir, (x, y) absorbe a x en $Q(D)$.

Caso 2. Si $x = (u, v) \in F(D) - B$, existen seis casos.

Caso 2.1 Si $d(u, Q) = 2$ y $d(v, Q) = 2$. Como $d(v, Q) = 2$, por el Caso 1.2, tenemos que existe $y \in V(D)$ tal que $(v, y) \in B$, por lo que $(x = (u, v), (v, y)) \in F(Q(D))$, es decir, (v, y) absorbe a x en $Q(D)$.

Caso 2.2 Si $d(u, Q) = 1$ y $d(v, Q) = 2$. Como $d(v, Q) = 2$, por el Caso 1.2, tenemos que existe $y \in V(D)$ tal que $(v, y) \in B$, por lo que $(x = (u, v), (v, y)) \in F(Q(D))$, es decir, (v, y) absorbe a x en $Q(D)$.

Caso 2.3 Si $d(u, Q) = 0$ y $d(v, Q) = 2$. Como $d(v, Q) = 2$, por el Caso 1.2, tenemos que existe $y \in V(D)$ tal que $(v, y) \in B$, por lo que $(x = (u, v), (v, y)) \in F(Q(D))$, es decir, (v, y) absorbe a x en $Q(D)$.

Caso 2.4 Si $d(u, Q) = 1$ y $d(v, Q) = 0$, es decir, $v \in Q \subseteq Q_1$, entonces por definición de $Q(D)$ tenemos que $(x = (u, v), v) \in F(Q(D))$, es decir, v absorbe a x en $Q(D)$.

Caso 2.5 Si $d(u, Q) = 1$ y $d(v, Q) = 1$. Como $d(v, Q) = 1$ existe un $w \in Q \subseteq Q_1$, tal que $(v, w) \in F(D)$, entonces por el Caso 2.4 w absorbe a v , por lo que $(x = (u, v), (v, w), w)$ es una xQ_1 -trayectoria dirigida de longitud dos, es decir, w cuasiabsorbe a x en $Q(D)$.

Caso 2.6 Si $d(u, Q) = 0$ y $d(v, Q) = 1$. Notemos que como $d(v, Q) = 1$ existe un $w \in Q \subseteq Q_1$, tal que $(v, w) \in F(D)$, entonces por el Caso 2.4 w absorbe a v , por lo que $(x = (u, v), (v, w), w)$ es una xQ_1 -trayectoria dirigida de longitud dos, es decir, w cuasiabsorbe a x en $Q(D)$.

Juntando todos los casos, tenemos que Q_1 es un cuasinúcleo de $Q(D)$.

Ahora demostraremos que $Q_2 = \varphi(Q) \cup M$ es un cuasinúcleo de $Q(D)$, donde $\varphi(Q) = \{(u, v) \in F(D) \mid v \in Q\}$ y $M = \{v \in V(D) \mid d(v, Q) = 2\}$.

Veamos que Q_2 es independiente. Notemos que como en $Q(D)$ los vértices de D sólo son adyacentes a las flechas de D que lo tienen como vértice inicial, entonces M es independiente. Por otro lado, $\varphi_L(Q)$ es independiente por el Teorema 6.2.1. Y por definición de M no existe la $\varphi(Q)M$ -flecha ni la $M\varphi(Q)$ -flecha. Por lo tanto, Q_2 es independiente.

Falta ver que Q_2 es cuasiabsorbente. Si $x \in V(Q(D)) - Q_2$, tenemos dos casos.

Caso 1. Si $x \in V(D) - M$, existen más casos.

Caso 1.1 Si $d(x, Q) = 1$, entonces existe $w \in Q$ tal que $(x, w) \in F(D)$. Notemos que $(x, w) \in \varphi(Q) \subseteq Q_2$ y $(x, (x, w)) \in F(Q(D))$, es decir, (x, w) absorbe a x en $Q(D)$.

Caso 1.2 Si $d(x, Q) = 0$, como $\delta^+(D) \geq 1$, entonces existe $z \in V(D) - Q$ tal que $(x, z) \in F(D)$. Volveremos a dividir este caso en dos.

Caso 1.2.1 Si $d(z, Q) = 1$, entonces por el Caso 1.1, tenemos que existe $w \in Q$ tal que

$(z, w) \in \varphi(Q) \subseteq Q_2$ y (z, w) absorbe a z . Por definición de $Q(D)$ tenemos que $(x, (x, z), (z, w))$ es una xQ_2 -trayectoria dirigida de longitud dos, es decir, (z, w) cuasiabsorbe a x en $Q(D)$.

Caso 1.2.2 Si $d(z, Q) = 2$, entonces tenemos que $z \in M \subseteq Q_2$, es decir, z absorbe a x .

Caso 2 Si $x = (u, v) \in F(D) - \varphi(Q)$, notemos que por el Teorema 6.2.1 tenemos que $\varphi(Q) \subseteq Q_2$ cuasiabsorbe al conjunto $F(D) - \varphi(Q)$.

Por lo tanto Q_2 es cuasinúcleo de $Q(D)$.

Observemos que $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$ se deduce de los hechos: $V(D) \cap F(D) = \emptyset$, $B \cap \varphi(Q) = \emptyset$ y $Q \cap M = \emptyset$.

Por lo tanto $Q(D)$ tiene dos cuasinúcleos ajenos. \square

Notemos que los teoremas anteriores nos dicen que si D no tiene pozos, entonces $S(D)$, $R(D)$ y $Q(D)$ tienen dos cuasinúcleos ajenos. Pero en $T(D)$ no encontramos dichos conjuntos, sin embargo, si pedimos que D no tenga pozos pero tenga núcleo, entonces $T(D)$ tiene dos cuasinúcleos ajenos.

Teorema 6.2.5. *Si D es una digráfica tal que N es núcleo de D y $\delta^+(D) \geq 1$, entonces $T(D)$ tiene dos cuasinúcleos ajenos.*

Demostración. Sea D una digráfica con $\delta^+(D) \geq 1$ y N un núcleo de D . Consideremos $T(D)$. Recordemos que la idea intuitiva de esta digráfica es agregarle a la digráfica de subdivisión las adyacencias de la digráfica raíz y de su digráfica de líneas.

Con base en lo anterior, demostraremos que N y $\varphi(N)$ son cuasinúcleos ajenos de $T(D)$.

Primero demostraremos que N es cuasinúcleo de $T(D)$. Notemos que como N es independiente en D también lo es en $R(D)$ y en $Q(D)$, por lo tanto en $T(D)$. Demostraremos que N es cuasiabsorbente.

Sea $x \in V(R(D)) - N$, tenemos dos casos.

Caso 1. $x \in V(D) - N$.

Como N es núcleo de D , entonces existe $y \in N$ tal que $(x, y) \in F(D)$. Por definición de $T(D)$ tenemos que $\Gamma_{T(D)}^+(x) = \{\Gamma_D^+(x) \cup (\{x\} \times \Gamma_D^+(x))\}$ por lo tanto $(x, y) \in F(T(D))$, es decir, y absorbe a x en $T(D)$.

Caso 2. $x = (u, v) \in F(D)$.

Este caso lo dividiremos en otros dos.

Caso 2.1 $v \in N$.

Veamos que por definición de $T(D)$ tenemos que $(x = (u, v), v) \in F(T(D))$ por lo que v absorbe a x .

Caso 2.2 $v \notin N$.

Observemos que por el caso 1, tenemos que existe un $y \in N$ tal que y absorbe a v , por lo que $T = (x = (u, v), v, y)$ es una trayectoria dirigida de longitud dos en $T(D)$, es decir, y cuasiabsorbe a v en $T(D)$.

Juntando todos los casos obtenemos que N es cuasinúcleo de $T(D)$.

Ahora demostraremos que $\varphi(N) \subset F(D)$ es cuasinúcleo de $T(D)$. Primero veamos que es un conjunto independiente. Por definición de $T(D)$ tenemos que $\Gamma_{T(D)}^+((x, y)) = \{y\} \cup (\{y\} \times \Gamma_D^+(y))$, para toda $(x, y) \in \varphi(N)$, notemos que $\Gamma_{T(D)}^+((x, y)) \supseteq \Gamma_{L(D)}^+((x, y)) = \{y\} \times \Gamma_D^+(y)$, pero como $\varphi(N) \subset F(D)$ basta con ver que

es independiente en $L(D)$, lo que es inmediato por el Teorema 6.2.1. Por lo tanto, $\varphi(N)$ es independiente en $T(D)$.

Demostremos que $\varphi(N)$ es un conjunto cuasiabsorbente de $T(D)$.

Sea $x \in V(T(D)) - \varphi(N)$, con lo que tenemos dos casos.

Caso 1. $x \in V(D)$.

Este caso lo dividiremos en otros dos casos.

Casos 1.1 $x \notin N$.

Como N es núcleo de D , existe $w \in N$ tal que $(x, w) \in F(D)$. Notemos que $(x, w) \in \varphi(N)$, además que por definición de $T(D)$ se tiene que $(x, (x, w)) \in F(T(D))$, es decir, (x, w) absorbe a x en $T(D)$.

Caso 1.2 $x \in N$.

Como $\delta^+(D) \geq 1$, entonces $\delta^+(x) \geq 1$, por lo que existe $w \notin N$ tal que $(x, w) \in F(D)$. Usando el Caso 1.1 tenemos que existe $v \in N$ que absorbe a w en D , entonces $(x, (x, w), (w, v))$ es una trayectoria dirigida de longitud dos, es decir, (w, v) cuasiabsorbe a x en $T(D)$.

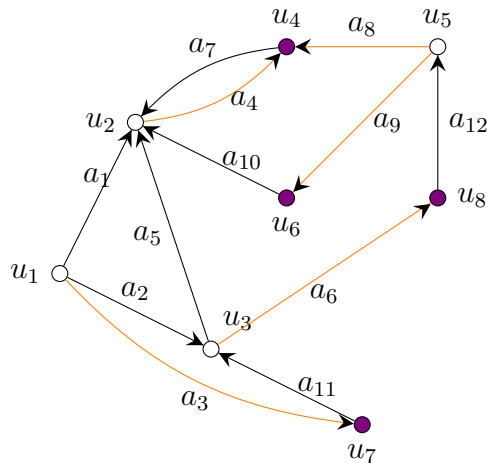
Caso 2. $x = (u, v) \in F(D) - \varphi(N)$

Usando el Teorema 6.2.1 sabemos que $\varphi(N)$ es un conjunto absorbente de $L(D)$, es decir, $\varphi(N) \cap \Gamma_{L(D)}^+(x) \neq \emptyset$, y como $\Gamma_{L(D)}^+(x) \subset \Gamma_{T(D)}^+(x)$ tenemos que $\varphi(N) \cap \Gamma_{T(D)}^+(x) \neq \emptyset$. En otras palabras existe un elemento en $\varphi(N)$ que absorbe a x .

Juntando los casos tenemos que $\varphi(N)$ es cuasinúcleo de $T(D)$.

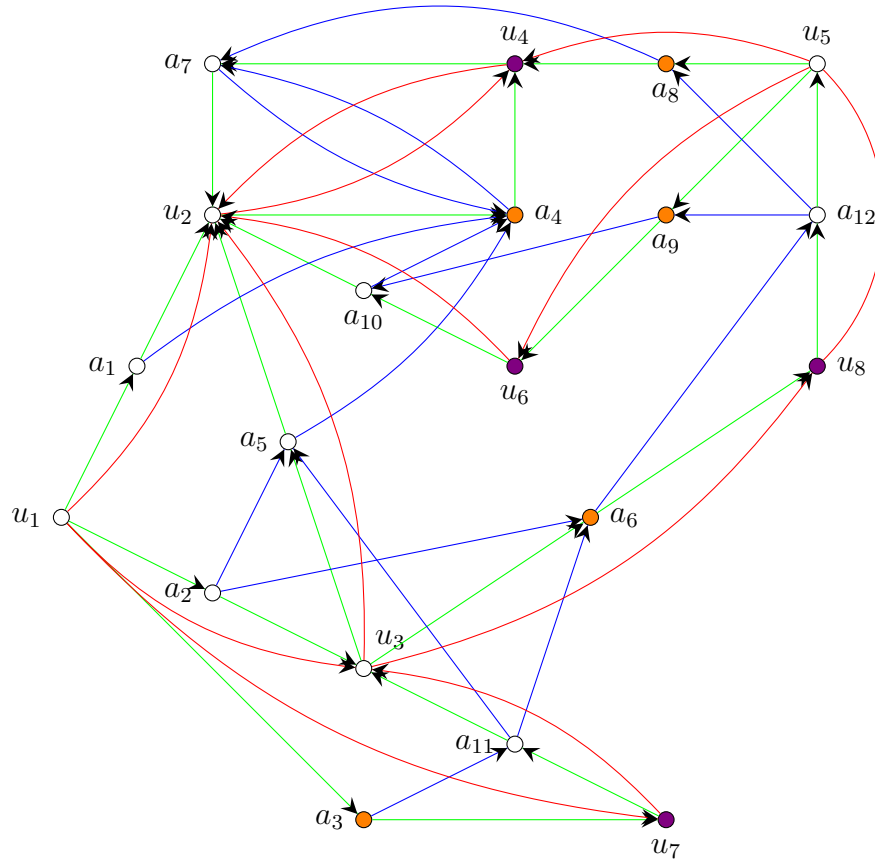
Además notemos que como $N \subset V(D)$ y $\varphi(N) \subset F(D)$, junto con el hecho de que $V(D) \cap F(D) = \emptyset$, tenemos que $N \cap \varphi(N) = \emptyset$. Por lo tanto, $T(D)$ tiene dos cuasinúcleos ajenos. \square

Para ilustrar el teorema anterior consideremos a la siguiente digráfica D :



Como se puede observar, el conjunto $N = \{u_4, u_6, u_7, u_8\}$ es núcleo de D , y $\varphi(N) = \{a_4, a_3, a_6, a_8, a_9\}$ son las flechas que tienen como vértice final un vértice en N .

Considerando a $T(D)$:



Podemos observar que los conjuntos N y el conjunto $\varphi(N)$ son cuasinúcleos de $R(D)$.

6.3. Coloraciones k -absorbentes

En esta sección definiremos conceptos, análogos a los dados en gráficas, con la idea de obtener resultados parecidos a éstos pero en digráficas. Daremos resultados sobre coloraciones tal que cada clase de color sea un conjunto k -absorbente.

También demostraremos un resultado de María Kwasnik [15] que nos dice que toda digráfica fuertemente conexa, sin ciclos dirigidos de longitud no congruente con 0 (mod k), tiene k -núcleo. De este resultado podremos obtener una coloración de sus vértices en k clases $(k - 1)$ -absorbentes.

Por otro lado, Hortensia Galeana y Laura Pastrana [9] trabajaron con las digráficas $S^k(D)$, $R^k(D)$, $Q^k(D)$ y $T^k(D)$, que son una generalización de las digráficas que hemos venido trabajando, donde encontraron k -núcleos. Daremos una coloración $(k - 1)$ -absorbente de $S^k(D)$ en k clases.

Recordemos la Definición 1.3.8. Un conjunto $A \subseteq V(D)$ es k -absorbente en D si todo vértice $x \in V(D) - A$ se tiene que existe $y \in A$ tal que $d(x, y) \leq k$, es decir, existe una xA -trayectoria dirigida de longitud menor o igual a k .

De esta manera podemos introducir el concepto análogo a una coloración domática. Sea $k \in \mathbb{N}$ y D una digráfica, diremos que una coloración de los vértices de D es k -absorbente si cada clase cromática es un conjunto k -absorbente. De la misma forma, observemos que las clases cromáticas de estas coloraciones inducen una partición de los vértices en conjuntos k -absorbentes, a éstas las llamaremos particiones k -absorbentes. Con lo anterior podemos definir la siguiente generalización al número semidominante coloreable.

Definición 6.3.1. Sea $\mathbf{d}_k^-(D) = \max\{|P| \mid P \text{ es una partición } k\text{-absorbente de } D\}$, al que llamaremos número k -absorbente coloreable.

La primera observación es que si $k = 1$, entonces $\mathbf{d}_k^-(D) = \mathbf{d}^-(D)$ y si $k = 2$, entonces $\mathbf{d}_k^-(D) = \mathbf{d}_c^-(D)$.

A continuación, daremos resultados análogos a los Teoremas 2.1.14, 2.1.15 y 2.1.16, donde se trabaja con gráficas.

Teorema 6.3.1. Sean k y l , $k < l$, dos enteros positivos. Si D es una digráfica, entonces $\mathbf{d}_k^-(D) \leq \mathbf{d}_l^-(D)$.

Demostración. Sea D una digráfica. Notemos que por definición, si $A \subseteq V(D)$ es k -absorbente, puesto que para todo vértice $v \in V(D) - A$, existe $x \in A$ tal que $d(v, x) \leq k < l$, entonces A es conjunto l -absorbente.

Por lo tanto, toda coloración de $V(D)$ en clases k -absorbentes, es una coloración de $V(D)$ en conjuntos l -absorbentes, en particular para una partición P' , tal que $|P'| = \mathbf{d}_k^-(D)$, por lo que $|P'| \leq \max\{|P| \mid P \text{ es una partición } l\text{-absorbente de } D\}$, es decir, $\mathbf{d}_k^-(D) \leq \mathbf{d}_l^-(D)$. \square

Observemos que el teorema anterior, es análogo al Teorema 2.1.14 ya visto en gráficas.

Por otro lado, podemos preguntarnos si, respecto a esta definición, las digráficas generadoras guardan alguna relación con la digráfica raíz, la respuesta es sí.

Teorema 6.3.2. Si D es una digráfica y D' es una subdigráfica generadora de D , entonces $\mathbf{d}_k^-(D) \geq \mathbf{d}_k^-(D')$.

Demostración. Sea D una digráfica y D' una subdigráfica generadora de D . Sea P una partición de $V(D')$ en conjuntos k -absorbentes de D' , tal que $|P| = \mathbf{d}_k^-(D')$. Como $F(D') \subset F(D)$ y $V(D') = V(D)$, entonces cada clase de P sigue siendo un conjunto k -absorbente en D , es decir, P es una partición de $V(D)$ en conjuntos k -absorbentes de D . Por lo tanto,

$$\mathbf{d}_k^-(D) = |P| \leq \max\{|P| \mid P \text{ es una partición de } V(D) \text{ en conjuntos } k\text{-absorbentes}\} = \mathbf{d}_k^-(D).$$

\square

Sea $v \in V(D)$, definimos la *excentricidad* de v como $exc(v) = \max\{d(v, w) \mid w \in V(D)\}$. Notemos que $exc(v)$ puede ser infinito. A partir de la excentricidad, diremos que el diámetro de una digráfica como $diam(D) = \max\{exc(v) \mid v \in V(D)\}$. Observemos que este número también puede ser infinito. Sin embargo, si la digráfica D es fuertemente conexa, ambos números son finitos. Así podemos obtener el siguiente resultado que es análogo al Teorema 2.1.15.

Teorema 6.3.3. *Si D es una digráfica fuertemente conexa de orden p y $\text{diam}(D)$, entonces $\mathbf{d}_k^-(D) = p$, para $k \geq \text{diam}(D)$.*

Demostración. Sea D una digráfica fuertemente conexa de orden p y $\text{diam}(D)$. Notemos que como D es fuertemente conexa, para todo vértice $v \in V(D)$, la $\text{exc}(v)$ es finita, por lo que $\text{diam}(D) = n$, para alguna $n \in \mathbb{N}$.

Demostraremos que cada vértice de D es un conjunto k -absorbente. Sea $v \in V(D)$ y sea $w \in V(D) - \{v\}$. Como D es fuertemente conexa, existe la wv -trayectoria dirigida. Si $\text{exc}(w) = m$, con $m \in \mathbb{N}$, entonces por definición de excentricidad tenemos que $d(w, v) \leq m \leq n = \text{diam}(D) \leq k$, es decir, $\{v\}$ es un conjunto k -absorbente en D .

Por lo tanto, $\mathbf{d}_k^-(D) \geq p$, pero por definición $p \geq \mathbf{d}_k^-(D)$. De esta manera, $\mathbf{d}_k^-(D) = p$. \square

Corolario 6.3.1. $\mathbf{d}_k^-(\vec{K}_p) = p$

Demostración. Por definición de \vec{K}_p , para todo $v, u \in V(\vec{K}_p)$ tenemos que $(v, u) \in F(\vec{K}_p)$ y $(u, v) \in F(\vec{K}_p)$, esto nos dice que \vec{K}_p es fuertemente conexa, además que $\text{exc}(w) = 1$, para todo $w \in V(\vec{K}_p)$, es decir, $\text{diam}(D) = 1 = k$.

Por el teorema anterior, tenemos que $\mathbf{d}_k^-(\vec{K}_p) = p$. \square

El corolario anterior ya lo habíamos demostrado en la Proposición 3.2.1, usando la definición de conjuntos semidominantes interiores.

6.3.1. Coloraciones 3-absorbentes en $S(D)$

En esta sección demostraremos que si consideramos a una digráfica D y su número semidominante coloreable interior, podemos encontrar una coloración 3-absorbente en más clases que las coloraciones semidominantes interiores y que las coloraciones cuasiabsorbentes, para su digráfica subdivisión $S(D)$.

Teorema 6.3.4. *Sea D una digráfica y $S(D)$ su digráfica subdivisión. Si $\mathbf{d}^-(D) = n \geq 2$, entonces $\mathbf{d}_3^-(S(D)) \geq 2n$.*

Demostración. Sea $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ una partición semidominante interior de D y sea $\{\varphi(P_1), \varphi(P_2), \dots, \varphi(P_n)\}$ una partición de $F(D)$. Recordando que $\varphi(P_i) = \{(u, v) \in F(D) \mid v \in P_i\}$. Notemos que como las flechas de D tienen un único vértice final, tenemos que $\{\varphi(P_1), \dots, \varphi(P_n)\}$ es una partición de $V(L(D)) = F(D)$, además junto con el hecho de que $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ es una partición de $V(D)$, tenemos que $\{P_1, P_2, \dots, P_n, \varphi(P_1), \varphi(P_2), \dots, \varphi(P_n)\}$ es una partición de $V(S(D))$, pues $V(S(D)) = V(D) \cup F(D)$.

Demostraremos que P_i y $\varphi(P_i)$ son conjuntos 3-absorbentes en $S(D)$.

Consideremos un P_i fijo. Sea $x \in V(S(D)) - P_i$, tenemos dos casos:

Caso 1. $x \in F(D)$, entonces $x = (u, v)$, con $u, v \in V(D)$. Observemos que la exvecindad de x sólo consta de v . Si $v \in P_i$, entonces tenemos que P_i absorbe a x a distancia uno en $S(D)$. Si $v \in P_j$, con $j \neq i$, entonces como P_i es un conjunto semidominante interior en D , existe $y \in P_i$

tal que $(v, y) \in F(D)$, por lo tanto, en $S(D)$, la trayectoria dirigida $(x = (u, v), v, (v, y), y)$ es una xP_i -trayectoria dirigida de longitud tres.

Caso 2. $x \in P_j$, con $j \neq i$. Como P_i es un conjunto semidominante interior en D , entonces existe $y \in P_i$ tal que $(x, y) \in F(D)$, por lo tanto, en $S(D)$, la trayectoria $(x, (x, y), y)$ es una xP_i -trayectoria dirigida de longitud dos.

Por lo tanto, P_i es un conjunto 3-absorbente en $S(D)$.

Consideremos un $\varphi(P_i)$ fijo. Si $x \in V(S(D)) - \varphi(P_i)$, tenemos dos casos:

Caso 1. $x \in P_j$, para alguna $j \in \{1, \dots, n\}$. Si $j \neq i$, entonces como P_i es un conjunto semidominante interior en D , entonces existe $y \in P_i$ tal que $(x, y) \in F(D)$. Observemos que $(x, y) \in \varphi(P_i)$, por lo tanto, $(x, (x, y))$ es una $x\varphi(P_i)$ -flecha en $S(D)$.

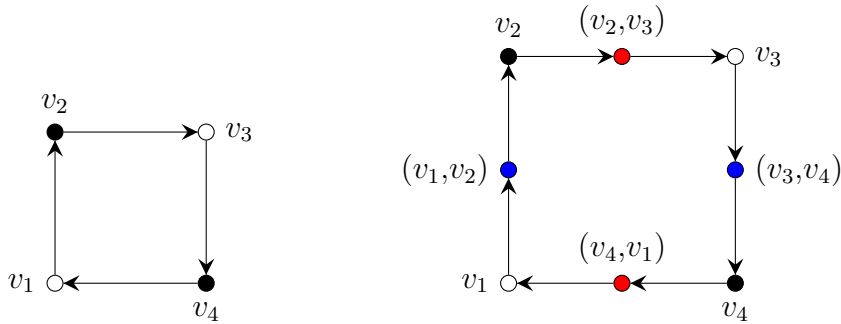
Si $i = j$, entonces como $n \geq 2$, existe P_k , con $i \neq k$ tal que P_k es un conjunto semidominante interior de D , entonces existe $y \in P_k$ tal que $(x, y) \in F(D)$. Análogamente como P_i es un conjunto semidominante interior de D , existe $w \in P_i$ tal que $(y, w) \in F(D)$. Notemos que $(y, w) \in \varphi(P_i)$. Por lo tanto $(x, (x, y), y, (y, w))$ es una $x\varphi(P_i)$ -trayectoria dirigida de longitud tres en $S(D)$.

Caso 2. Si $x = (u, v) \in \varphi(P_j)$, con $j \neq i$, entonces por definición $v \in P_j$. Como $P_i \neq P_j$ y P_i es un conjunto semidominante interior de D , existe $y \in P_i$ tal que $(v, y) \in F(D)$. Notemos que $(v, y) \in \varphi(P_i)$. Por lo tanto, $(x = (u, v), v, (v, y))$ es una $x\varphi(P_i)$ -trayectoria dirigida de longitud dos en $S(D)$.

Por lo tanto, $\varphi(P_i)$ es un conjunto 3-absorbente de $S(D)$.

Juntando todos los casos, tenemos que $\{P_1, \dots, P_n, \varphi(P_1), \dots, \varphi(P_n)\}$ es una partición de $V(S(D))$ en $2n$ clases 3-absorbentes. \square

La cota anterior es una cota justa ya que en C_4 , que ya hemos probado que $\mathbf{d}^-(C_4) = 2$. Tomamos $P_1 = \{v_1, v_3\}$ y $P_2 = \{v_2, v_4\}$ y consideremos a $S(C_4)$:



Por definición, $\varphi(P_1) = \{(v_4, v_1), (v_2, v_3)\}$ y $\varphi(P_2) = \{(v_1, v_2), (v_3, v_4)\}$.

Por el teorema tenemos que $\{P_1, P_2, \varphi(P_1), \varphi(P_2)\}$ es una coloración de $V(S(C_4))$ en conjuntos 3-absorbentes.

Observemos que si hubiera una coloración 3-absorbente en más clases, un vértice tendría que ser un conjunto 3-absorbente pero claramente ninguno lo es, por lo tanto, no existe una coloración de $V(S(C_4))$ en más clases 3-absorbentes.

6.3.2. Coloraciones $(k - 1)$ –absorbentes

En esta sección daremos un resultado de María Kwasnik [15] que dice que toda digráfica fuertemente conexa, sin ciclos dirigidos de longitud no congruente con $0 \pmod{k}$, tiene k –núcleo. De este resultado podremos obtener una coloración de sus vértices en k clases $(k - 1)$ –absorbentes.

Recordemos la definición 1.3.7: Para $k \geq 2$ y $l \geq 1$, un conjunto $A \subseteq V(D)$ es k –independiente en D si todo par de vértices $x, y \in A$, $d(x, y) \geq k$ y $d(y, x) \geq k$. Con base en la definición anterior y en la de conjunto l –absorbente, recordemos que un conjunto $N \subseteq V(D)$ es un (k, l) –núcleo de D si y sólo si N es un conjunto k –independiente y l –absorbente. Si $l = k - 1$ lo llamaremos k –núcleo.

Antes de probar el resultado de María Kwasnik, probaremos los siguientes resultados.

Proposición 6.3.1. *Todo camino dirigido cerrado de longitud impar tiene un ciclo dirigido de longitud impar.*

Demostración. La demostración la haremos por inducción sobre la longitud del camino cerrado.

Si la longitud del camino dirigido cerrado es tres, entonces el camino dirigido cerrado es el ciclo dirigido de longitud tres.

Supongamos que todo camino dirigido cerrado C de longitud menor a $2n + 1$, contiene un ciclo dirigido de longitud impar.

Sea $C = (x_0, x_1, \dots, x_{2n+1})$ un camino dirigido de longitud impar. Si C es un ciclo dirigido, termina la prueba.

Supongamos que existen $i, j \in \{0, 1, \dots, 2n + 1\}$, $i \neq j$ tal que $x_i = x_j$. Consideremos $C' = (x_0, x_1, \dots, x_i = x_j, x_{j+1}, \dots, x_{2n+1})$ y $C'' = (x_i, x_{i+1}, \dots, x_j = x_i)$ dos caminos dirigidos cerrados. Observemos que $l(C') + l(C'') = l(C) = 2n + 1$, $l(C') < 2n + 1$, $l(C'') < 2n + 1$ y $l(C')$ es impar o $l(C'')$ es impar, no ambos. Supongamos sin pérdida de generalidad que $l(C')$ es impar, entonces por hipótesis de inducción C' contiene un ciclo dirigido de longitud impar. Por lo tanto, como $C' \subseteq C$, entonces C contiene un ciclo dirigido de longitud impar. \square

Lema 6.3.1. *Sea $k \geq 2$ un entero. Todo camino dirigido cerrado de longitud diferente a un múltiplo de k , tiene un ciclo dirigido de longitud diferente a un múltiplo de k .*

Demostración. La demostración se hará por inducción sobre la longitud del camino dirigido cerrado de longitud diferente a un múltiplo de k .

Si $k = 2$, entonces el lema es el mismo que la Proposición 6.3.1. Supongamos $k \geq 3$. Si el camino dirigido cerrado es de longitud dos, entonces es el ciclo dirigido de longitud dos.

Supongamos válido el resultado para caminos dirigidos cerrados de longitud menor a n , diferentes de un múltiplo de k .

Sea $C = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ un camino dirigido cerrado de longitud diferente a un múltiplo de k . Si C es un ciclo dirigido, la prueba termina.

Supongamos que existen $i, j \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$, $i \neq j$ tal que $x_i = x_j$. Consideremos $C' = (x_0, x_1, \dots, x_i = x_j, x_{j+1}, \dots, x_n)$ y $C'' = (x_i, x_{i+1}, \dots, x_j = x_i)$ dos caminos dirigidos cerrados. Observemos que $l(C') + l(C'') = l(C) = n \not\equiv 0 \pmod{k}$, $l(C') < n$, $l(C'') < n$ y que $l(C') \not\equiv 0 \pmod{k}$ o $l(C'') \not\equiv 0 \pmod{k}$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $l(C') \not\equiv 0 \pmod{k}$, entonces por hipótesis de inducción C' contiene un ciclo dirigido de longitud no congruente con $0 \pmod{k}$. Por lo tanto, C contiene un ciclo dirigido de longitud diferente a un múltiplo de k . \square

Lema 6.3.2. *Si D es una digráfica fuertemente conexa, entonces existe un camino dirigido cerrado que pasa por todos los vértices de D .*

Demostración. Sea D fuertemente conexa, tal que $V(D) = \{x_1, \dots, x_p\}$.

Como D es fuertemente conexa, podemos tomar C_i una $x_i x_{i+1}$ -trayectoria dirigida, para $i \in \{1, \dots, p-1\}$ y C_p una $x_p x_1$ -trayectoria dirigida.

Consideremos $C = (x_1, C_1, x_2) \cup (x_2, C_2, x_3) \cup \dots \cup (x_{p-1}, C_{p-1}, x_p) \cup (x_p, C_p, x_1)$ un camino dirigido que pasa por todos los vértices. \square

Teorema 6.3.5. [15] *Sea $k \geq 2$. Si D es una digráfica fuertemente conexa, sin ciclos dirigidos de longitud no congruentes con $0 \pmod{k}$, entonces D tiene k -núcleo.*

Demostración. Sean $k \geq 2$ fija y D una digráfica fuertemente conexa, sin ciclos dirigidos de longitud no congruentes con $0 \pmod{k}$.

Como D es fuertemente conexa, entonces por el Lema 6.3.2 existe un camino dirigido cerrado $C = (x_0, x_1, \dots, x_m)$ que pasa por todos los vértices de D . Notemos que por el Lema 6.3.1 la longitud de C tiene que ser de la forma $m = nk$, para alguna $n \in \mathbb{Z}^+$, pues si no tendríamos un ciclo dirigido de longitud no congruente con $0 \pmod{k}$.

Sea $J(x) = \{i \in \{0, 1, \dots, m\} \mid x_i = x\}$ para cada $x \in V(D)$. Notemos que $J(x) \neq \emptyset$ pues C es un camino dirigido que pasa por todos los vértices.

Observemos que si $i, j \in J(x)$, entonces $i \cong j \pmod{k}$. Ya que si $i = n_1 k + r_1$ y $j = n_2 k + r_2$, con $r_1 \neq r_2$, supongamos sin pérdida de generalidad que $i < j$, tomando $\gamma = (x_i, x_{i+1}, \dots, x_j)$ un camino dirigido cerrado, donde su longitud es $n_1 k + r_1 - (n_2 k + r_2) = (n_1 - n_2)k + (r_1 - r_2) \not\equiv 0 \pmod{k}$, entonces por el Lema 6.3.1 tenemos que existe un ciclo dirigido de longitud no congruente con $0 \pmod{k}$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $i \cong j \pmod{k}$.

Consideremos los siguientes conjuntos:

$$S_0 = \{x \in V(D) \mid J(x) \subseteq \{0, k, 2k, \dots\}\}$$

$$S_1 = \{x \in V(D) \mid J(x) \subseteq \{1, k+1, 2k+1, \dots\}\}$$

\vdots

$$S_{k-1} = \{x \in V(D) \mid J(x) \subseteq \{k-1, 2k-1, \dots\}\}.$$

Notemos que por la elección de C y definición de S_i tenemos que $V(D) = \bigcup_{i=0}^{k-1} S_i$. Además, $S_i \cap S_j = \emptyset$, con $i \neq j$, pues ya probamos que si $x_i = x = x_l$, entonces $i \cong j \pmod{k}$.

Demostraremos que S_i es un k -núcleo de D , para toda $i \in \{1, \dots, k-1\}$.

Sean $x, y \in S_i$, con $x \neq y$, entonces $x = x_{n_1 k + i}$ y $y = x_{n_2 k + i}$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $n_1 < n_2$.

Supongamos que existe la xy -trayectoria dirigida T' , tal que $0 < l(T') = r \leq k-1$ y sea $T'' = (y, C, x)$. Por lo tanto, $T = (x, T', y) \cup (y, T'', x)$ es un camino dirigido cerrado, donde:

$$\begin{aligned} l(T) &= l(T') + l(T'') \\ &= r + (nk - (n_2 k + i) - (n_1 k + i)) \\ &= r + (nk - (n_2 - n_1)k) = (n - n_2 + n_1)k + r \not\equiv 0 \pmod{k}. \end{aligned}$$

Entonces por el Lema 6.3.1 D tiene un ciclo dirigido de longitud no congruente con $0 \pmod{k}$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, no existe la xy -trayectoria dirigida de

longitud menor o igual a $k - 1$. Análogamente, no existe la yx -trayectoria dirigida de longitud menor o igual a $k - 1$.

Por lo tanto, S_i es k -independiente en D .

Sea $x \in V(D) - S_i$, entonces $x \in S_j$, para alguna $j \neq i$, $j \in \{1, \dots, k - 1\}$, es decir, $x = x_{n_1k+j}$, lo que nos da dos casos:

- Si $j < i$, entonces $(x = x_{n_1k+j}, x_{n_1k+j+1}, \dots, x_{n_1k+i})$ es un camino dirigido de longitud $n_1k + i - (n_1k + j) = i - j \leq k - 1$, es decir, existe una xS_i -trayectoria dirigida de longitud menor o igual a $k - 1$.
- Si $i < j$, entonces $(x = x_{n_1k+j}, x_{n_1k+j+1}, \dots, x_{n_1k+k-1}, x_{(n_1+1)k}, \dots, x_{(n_1+1)k+i})$ es un camino dirigido de longitud $k - 1 - j + i + 1 = k + i - j \leq k - 1$, pues $i - j \leq -1$, es decir, existe una xS_i -trayectoria dirigida de longitud menor o igual a $k - 1$.

Juntando los casos, S_i es $(k - 1)$ -absorbente. Por lo tanto S_i es k -núcleo de D , para toda $i \in \{0, \dots, k - 1\}$. \square

La prueba del teorema anterior, implícitamente nos dio una partición, y por lo tanto una coloración, de los vértices de la digráfica en k clases $(k - 1)$ -absorbentes, como lo podemos ver en el siguiente corolario.

Corolario 6.3.2. *Sea $k \geq 2$. Si D es una digráfica fuertemente conexa, sin ciclos dirigidos de longitud no congruentes con $0 \pmod{k}$, entonces $\mathbf{d}_{k-1}^-(D) \geq k$.*

Demostración. Sea D una digráfica fuertemente conexa sin ciclos dirigidos de longitud no congruentes con $0 \pmod{k}$, con $k \geq 2$. Por la prueba del teorema anterior, podemos observar que cada S_i es un k -núcleo, en particular, es un conjunto $(k - 1)$ -absorbente, tal que $V(D) = \bigcup_{i=0}^{k-1} S_i$ y $S_i \cap S_j = \emptyset$, con $i \neq j$, en otras palabras, es una partición de $V(D)$ en k clases $(k - 1)$ -absorbentes. Por lo tanto, $\mathbf{d}_{k-1}^-(D) \geq k$. \square

6.3.3. Coloraciones k -absorbentes en $S^k(D)$, $R^k(D)$, $Q^k(D)$ y $T^k(D)$.

A partir de $S(D)$, $R(D)$, $Q(D)$ y $T(D)$, se han definido otras digráficas: $S^k(D)$, $R^k(D)$, $Q^k(D)$ y $T^k(D)$, las cuales ya han sido trabajadas por Hortensia Galeana y Laura Pastrana [9] donde demuestran que $S^k(D)$ tiene k -núcleo. Basándonos en este resultado daremos una coloración de los vértices de $S^k(D)$ en conjuntos $(k - 1)$ -absorbentes.

Definimos la k -subdivisión de D denotada por $S^k(D)$ como:

$$S^k(D) = (S(D) - \{(u, a) | a = (u, v) \in F(D)\}) \cup \left(\bigcup_{a \in F(D)} \beta_a \right).$$

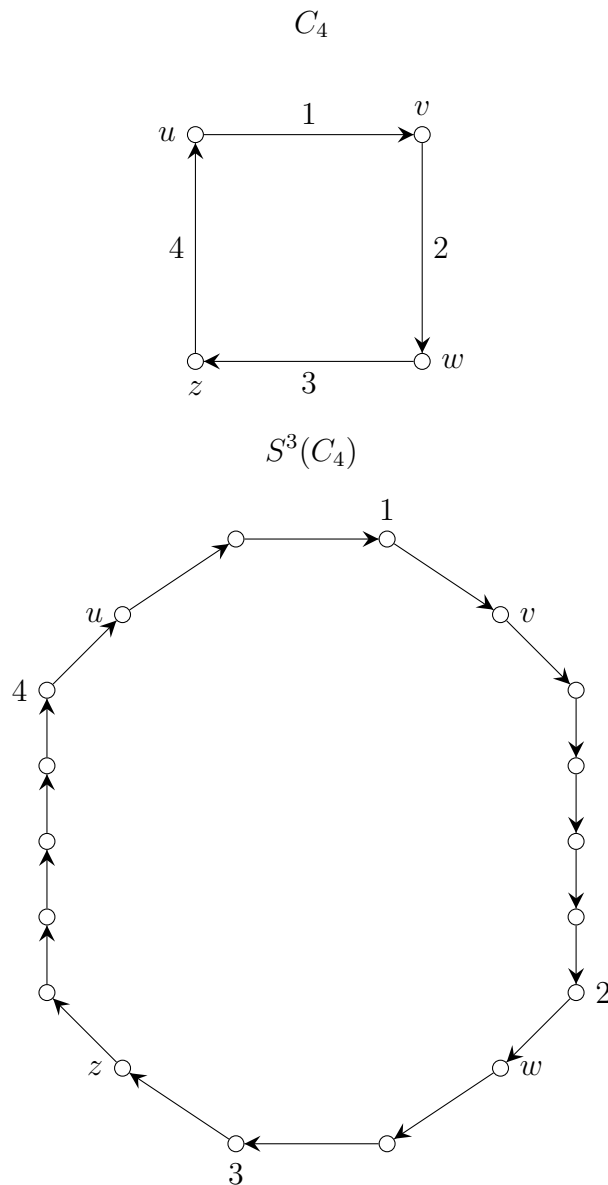
Donde $\beta_a = (a_0 = u, a_1, \dots, a_{n(a)k+k-1} = a = (u, v))$ es una trayectoria dirigida cuya longitud es congruente con $k - 1 \pmod{k}$ y $n(a) \in \mathbb{N}$ y que cumple con las siguientes propiedades:

1. $V(\beta_a \cap V(S(D))) = \{u, a\}$.

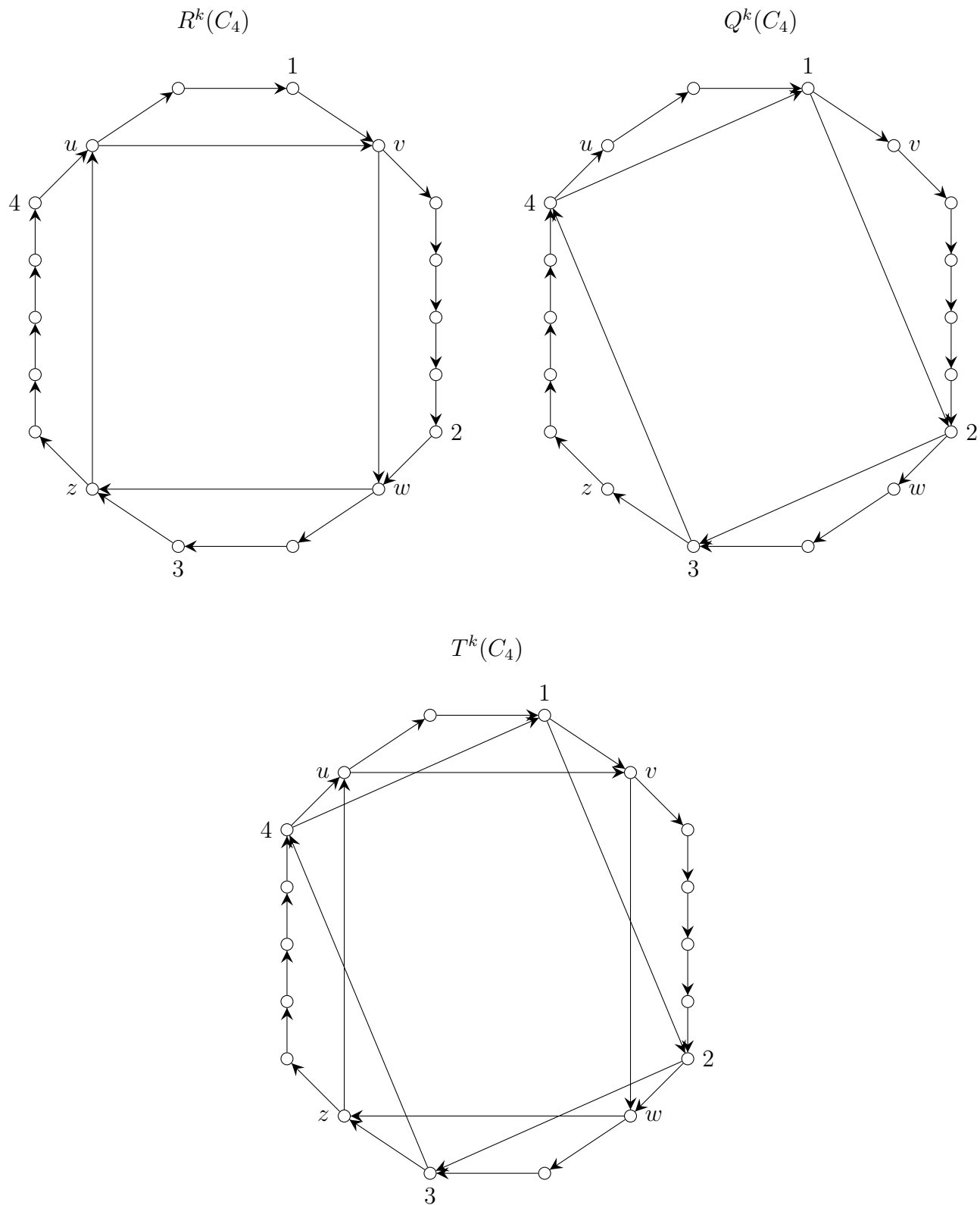
2. Para cualquier $a, b \in F(D)$, con $a \neq b$ se tiene que $(V(\beta_a) - \{u\}) \cap V(\beta_b) = \emptyset$.

Notemos que $S^k(D)$ es obtenida sustituyendo las flechas de D por una trayectoria dirigida cuya longitud es congruente con $0 \pmod k$.

La idea intuitiva se puede observar en el siguiente ejemplo:



Con lo anterior definimos a las digráficas $R^k(D)$, $Q^k(D)$ y $T^k(D)$ de la siguiente manera: $R^k(D) = S^k(D) \cup D$, $Q^k(D) = S^k(D) \cup L(D)$ y $T^k(D) = S^k(D) \cup D \cup L(D)$, continuando con el ejemplo anterior podemos ver cómo son estas digráficas.



Teorema 6.3.6. [9] Para cualquier digráfica D y para cualquier entero k ($k \geq 2$), la k -subdivisión de D , $S^k(D)$, tiene k -núcleo.

De la demostración del teorema anterior, pudimos obtener el siguiente resultado.

Teorema 6.3.7. *Sea D una digráfica sin pozos. Para cualquier entero positivo $k \geq 2$, $S^k(D)$ tiene una coloración en k clases $(k-1)$ -absorbentes.*

Demostración. Sea D una digráfica sin pozos y $S^k(D)$ su k -subdivisión. Definimos al conjunto $R_i = \{a_j \in V(\beta_a) \mid j \cong i \pmod{k}, \text{ para alguna } a \in F(D)\}$. Probaremos que $\{R_0, \dots, R_{k-1}\}$ es una partición de $V(S^k(D))$ en clases $(k-1)$ -absorbentes.

Notemos que por la definición tenemos que $R_i \subset V(S^k(D))$, con $i \in \{0, \dots, k-1\}$. Entonces $\bigcup_{i \in \{0, \dots, k-1\}} R_i \subseteq V(S^k(D))$. Sea $x \in V(S^k(D))$, observemos que si $x \in V(D)$, entonces $x \in R_0$. Si $x \in F(D)$, entonces por definición $x \in R_{k-1}$. Por otro lado si $x \in V(S^k(D)) - (V(D) \cup F(D))$, entonces $x = a_j \in V(\beta_a)$, con $i \cong h \pmod{k}$, es decir, $x \in R_i$. Por lo tanto, $\bigcup_{i \in \{0, \dots, k-1\}} R_i = V(S^k(D))$.

Observemos, que por definición, $R_i \cap R_j = \emptyset$, pues las trayectorias β_a son de longitud congruentes con $k-1 \pmod{k}$. Por lo tanto $\{R_0, \dots, R_{k-1}\}$ es una coloración de $V(S^k(D))$.

Demostremos que cada R_i es un conjunto $(k-1)$ -absorbente, con $i \in \{0, \dots, k-1\}$.

Sea R_i con $i \in \{0, \dots, k-1\}$ y sea $x \in V(S^k(D)) - R_i$. Tenemos que $x \in R_j$ con $j \in \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, k-1\}$, lo que nos da dos casos.

- Si $j < i$, entonces $x = a_j \in V(\beta_a)$, para alguna $a \in F(D)$. Notemos que por definición de $S^k(D)$, existe $a_i \in V(\beta_a)$, tal que $(a_j, a_{j+1}, \dots, a_i)$ es una xR_i -trayectoria dirigida de longitud $k-j+i$. Por hipótesis $j < i$, por lo que $0 < i-j$, es decir, la longitud es menor o igual a $k-1$.
- Si $i < j$, entonces $x = a_j \in \beta_a$, para alguna $a \in F(D)$. Si existe $a_{k-1+i} \in \beta_a$, entonces $(a_j, a_{j+1}, \dots, a_{k-1}, a_{k-1+1}, \dots, a_{k-1+j})$ es una xR_i -trayectoria dirigida de longitud $k-i+j$, pero como $i < j$ tenemos que $0 < j-i$, es decir, es de longitud menor o igual a $k-1$. Si no existe $a_{k-1+i} \in \beta_a$, como $a \in F(D)$, entonces $a = (u, v)$. Por hipótesis, $\delta^+(v) \geq 1$, entonces existe una $e = (v, w) \in F(D)$, por lo que $(a_j, a_{j+1}, \dots, a_{k-2} = a, a_{k-1} = v = e_0, e_1, \dots, e_i)$ es una xR_i -trayectoria dirigida de longitud $k-1-i+j+1 = k+j-i$. Por hipótesis sabemos que $i < j$, lo que nos dice que $0 < j-1$, es decir, la longitud es menor o igual a $k-1$. Por lo tanto R_i es un conjunto $(k-1)$ -absorbente.

Por lo que podemos concluir que $\{R_0, \dots, R_{k-1}\}$ es una partición de $V(S^k(D))$ en k clases $(k-1)$ -absorbentes, en otras palabras, $\mathbf{d}_{k-1}^-(S^k(D)) \geq k$. \square

Observemos que por definición, $S^k(D)$ es una subdigráfica generadora de $R^k(D)$, $Q^k(D)$ y $T^k(D)$. Con lo que podemos obtener el siguiente corolario.

Corolario 6.3.3. *Si D es una digráfica sin pozos, entonces $\mathbf{d}_{k-1}^-(R^k(D)) \geq k$, $\mathbf{d}_{k-1}^-(Q^k(D)) \geq k$ y $\mathbf{d}_{k-1}^-(T^k(D)) \geq k$.*

Demostración. Por la observación anterior, tenemos que $S^k(D)$ es una subdigráfica generadora de $R^k(D)$, $Q^k(D)$ y $T^k(D)$. Por el teorema anterior y el Teorema 6.3.2 sabemos que $k \leq \mathbf{d}_{k-1}^-(S^k(D)) \leq \mathbf{d}_k^-(R^k(D))$, $k \leq \mathbf{d}_{k-1}^-(S^k(D)) \leq \mathbf{d}_k^-(Q^k(D))$ y $k \leq \mathbf{d}_{k-1}^-(S^k(D)) \leq \mathbf{d}_k^-(T^k(D))$. Por lo tanto, $k \leq \mathbf{d}_k^-(R^k(D))$, $k \leq \mathbf{d}_k^-(Q^k(D))$ y $k \leq \mathbf{d}_k^-(T^k(D))$. \square

Capítulo 7

Conclusiones

En este trabajo, se calculó el número semidominante coloreable de digráficas específicas como las digráficas completas, bipartitas, transitivas, ciclos dirigidos, trayectorias dirigidas, etcétera. Conceptos definidos para gráficas fueron trasladados a digráficas, para los cuales se dieron resultados análogos. Dada una digráfica D , se dieron cotas para en el número semidominante coloreable de D , en digráficas particulares como la digráfica de líneas, el producto cartesiano de dos digráficas y en $S(D)$, $R(D)$, $Q(D)$ y $T(D)$.

Se generalizó el concepto de número semidominante coloreable con la idea de buscar coloraciones de los vértices en conjuntos k -absorbentes. Se encontraron cotas y coloraciones para este nuevo concepto, así como se dieron resultados análogos a los descritos en gráficas.

También se resolvió de manera afirmativa la Conjetura 6.2.1, para las digráficas $S(D)$, $R(D)$ y $Q(D)$. Se dieron, condiciones para que $L(D)$ y $T(D)$, la cumplieran.

Después de realizar este trabajo nos podemos dar cuenta que queda mucho camino por recorrer, en lo que respecta al número semidominante coloreable, pues no se ha trabajado en muchas familias de digráficas, así como en producto de éstas; como el producto lexicográfico, la corona de digráficas, etcétera. Así como encontrar coloraciones de los vértices en clases k -absorbentes para otras digráficas.

En otra línea de investigación, se podría aprovechar estructuras de gráficas específicas, como la gráfica de líneas, para poder dar una orientación y de esta manera encontrar coloraciones semidominantes interiores o coloraciones en conjuntos absorbentes.

La realización de este trabajo, me deja una enseñanza muy grande y placentera de como es la investigación dentro de las matemáticas, específicamente en teoría de gráficas, donde cada vez que se encuentra algo, lejos de acabar con las dudas, se crean más.

Bibliografía

- [1] Alexanderson, Gerald L., *Euler and Konigsberg's Bridges: A Historical View.*, Bulletin of the American Mathematical Society Volume 43, 4, October 2006, 567-573.
- [2] Bang-Jensen, Jorgen y Gutin, Gregory Z. *Digraphs: Theory, Algorithms and Applications.*, Springer, London, Second Edition, (2009), 39-42.
- [3] Berge Claude, *Graphs.*, North Holland, Amsterdam-London-New York-Tokyo, (1991), 303-312.
- [4] Borowiecki M. y Kuzak M., *On the k -stable and k -dominating sets of graphs. Graphs, Hypergraphs and Block Systems.* Proc. Symp. Zielona Gora 1976., Eds. M. Borowiecki, Z. Skupien y L. Szamkolowicz, Univ. Zielona Gora (1976).
- [5] Cockayne E.J., *Domination of undirected graphs- a survey.*, Theory and Application of Graphs, Proc., Michigan 1976 (Y. Alavi, D.R. Lick, eds.), Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1978.
- [6] Cockayne E.J. y Hedetniemi S.T., *Towards a theory of domination in graphs.*, Networks 7 (1977), 247-261.
- [7] Cockayne E.J., Dawes R.M., Hedetniemi S.T., *Total domination in graphs.*, Networks 10,(1980), 211-219.
- [8] Galeana-Sánchez Hortensia y Li Xueliang, *Semikernels and (k,l) -kernels in digraphs.*, SIAM J. Discrete Math. Vol. 11, No. 2, (1998), 340-346.
- [9] Galeana-Sánchez Hortensia y Pastrana Ramírez Laura, *k -kernels and some operations in digraphs.*, Discusiones Mathematicae, Graph Theory 29, (2009), 39-49.
- [10] Galeana-Sánchez Hortensia, Pastrana Ramírez Laura y Rincón Mejía Hugo Alberto, *Semikernels, Quasi Kernels, and Grundy Functions in the Line Digraph.*, SIAM J. Discrete Math. Vol. 4, No. 1, (1991), 80-83.
- [11] Gutin Gregory, Khee Meng Koh, Eng Guan Tay y Anders Yeo, *On the Number of Quasi-Kernels in Digraphs.*, BRICS Report Series (January 2001).
- [12] Harminc Matus, *Solutions and Kernels of a Directed Graph.*, Math Slovaca 32, (1982) No. 3, 263-267.

- [13] Haynes Teresa W., Hedetniemi Stephen T. y Slater Peter J.. *Domination in Graphs: Advanced Topics*. MARCEL DEKKER, INC., New York, New York, (1998), Chapter 13.
- [14] Kwasnik María, *On (k, l) -Kernels of Exclusive Disjunction, Cartesian Sum and Normal Product of Two Directed Graphs.*, *Discussiones Mathematicae*, T. V, (1982), 29-34.
- [15] Kwasnik María, *The Generalization of Richardson Theorem.*, *Discussiones Mathematicae*, T. IV, (1981), 11-14.
- [16] Mitchell S. y Hedetniemi S.T., *Edge domination in trees. In: Proceedings of Eighth Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing.*, (Utilitas Mathematica, Winnipeg, 1977), 489-511.
- [17] Muddebihal M.H. y Basavarajappa D., *Independent Domination in Line Graphs.*, *International Journal of Scientific and Engineering Research*, Volume 3, Issue 6,(June 2012).
- [18] Richardson M., *Extensions theorems for solutions of irreflexive relations.*, *Proc. Mat. Acad. Sci.* 39 (1953) 649-655.
- [19] Richardson M., *Solutions of irreflexive relations.*, *Ann. Math.* 58 (1953) 573-590.
- [20] Topp Jerzy, *Kernels of digraphs formed by some unary operations from other digraphs.*, *J. Rostock Math. Kolloq.* 21, (1982), 73-81.
- [21] Von Neumann J. y Morgenstern O., *Theory of games and economic behavior.*, Princeton University Press, Princeton, (1944).
- [22] Zelinka Bohdan, *Domestic number and degrees of vertices of a graph.*, *Math. Slovaca* 33, (1983), 145-147.
- [23] Zelinka Bohdan, *Domestic numbers of cube graphs.*, *Math. Slovaca* 32, (1982), 117-119.
- [24] Zelinka Bohdan, *Domatically critical graphs.*, *Czech. Math. J.* 30, (1980), 486-489.
- [25] Zelinka Bohdan, *Edge-domestic number of a graph.*, *Czech. Math. J.* 33,(1983), 107-110.
- [26] Zelinka Bohdan, *Některé číselné invarianty grafu. (Some numerical invariants of graphs, Czech).*, Ph.D. Dissertation, Prague, (1988).
- [27] Zelinka Bohdan, *On k -domestic numbers of graphs.*, *Czech. Math. J.* 33, (1983), 309-313.
- [28] Zelinka Bohdan, *Total domestic number and degrees of vertices of a graph.*, *Math. Slovaca* 39, (1989), 7-11.
- [29] Zelinka Bohdan, *Total domestic number of a graph.*, *Proc. Math. Liberec*, (1994).
- [30] Zelinka Bohdan, *Semidomestic numbers of directed graphs.*, *Math. Slovaca* 34, 4 (1984), 371-374.
- [31] Zelinka Bohdan, *Some remarks on domestic numbers of graphs.*, *Casop. pest. mat.* 106, (1981), 373-375.