UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Teoria de Hodge en variedades reales y complejas

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemáticas

P R E S E N T A:

Alejandro Bravo Doddoli

DIRECTOR DE TESIS:
Oscar Alfredo Palmas Velasco
2014

Este trabajo fue hecho en la memoria de
Victor Mantilla Caballero
Mi amigo vititor
Daniel Jiemenz Hernadez
Mi amigo dani
Guido Doddoli Murgia
Con especial cariño a mi papa Guido.

Agradecimientos

Este trabajo no hubiera sido posible sin el apollo de:
Mis padres por haberme dado la oportunidad de asistir a la universidad, confiando en mi, apollarme durante todos mis estudios y en la vida.
A todos mis profesores desde la primaria hasta la universidad por la luz que me dieron durante toda mi vida, con cariños a mis profesores del CCH Sur, pero con un cariño muy especial a los de la facultad de ciencias donde conocí a los mejores profesores.
Manzoni, por trasmitir con tanta pasión el amor a las matemáticas, por todos los dibujos que se convertioron en una ecuación y mostrarme que la geometría esta en todos lados.
Laura por tu forma de pensar tan sencilla y mas que enseñarme matemáticas me mostraste una forma de leer el mundo.
Oscar por la paciencia, por que sin ti la tesis no sería posible y sobre todo por tramistir el amor a la goemetría.
Jack Baron por su enorme amor a la vida, por contagiar su amor al mar y ayudarme a romper mis miedos.
Max por mostrarme la humilda, la vida sencilla y su amor a la naturaleza.
Mis hermanos por habernos acompañado toda la vida.
Mi tio Carlos Guido por ser como es, nadie lo dice mejor .ªsi naci, asi mori, nuca cambiare".
Xein, Neto, Andrei y Gonzo por sentir junto a la pasion de la música, por las noches y el sonidero cuba 601.
Mi Buen, Coral, Piña, Zara, Raciel, Elias, Rafita, Rafa, Ale, Fernando, por la noches, canciones, lugares, terrenos, vieajes, sueños y en especial por su amor
Mis primos Vinicio, Paulina, Flor, Toño, Ana, Valeria, Guido, Regina, Hugo, Barbara, Roxana por todo lo que me ayudaron a crecer.
Peyoteros por las alegrias, las trsitesas, los nervios, la gloria, la derrotas, los sueños, las frustraciones y en especial por vivir con pasion.
A la UNAM por ser mi segundo hogar, el CCH Sur por ser donde creci y la Facultade de Ciencias por ser donde comparto mi amor por las matematicas.
Las matematicas por ser el amor de mi vida.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Es bien sabido que en la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias está el teorema de existencia y unicidad, el cual es fácil de generalizar para las ecuaciones diferenciales sobre variedades, lo cual hace que el estudio moderno de las ecuaciones ordinarias se reduzca a la clasificación de los posibles flujos y sus aplicaciones. En contraparte la teoría de ecuaciones diferenciales parciales no tiene un teorema general de existencia de soluciones y menos uno de unicidad, esto hace que, en muchas ocasiones, demostrar que una ecuación tenga solución sea bastante difícil, con casos donde no tenga solución única y que los métodos utilizados en una ecuación no sirvan para otra. Al principio del siglo XX la teoría de ecuaciones diferenciales parciales era considerada la cumbre de las matemáticas, por la dificultad y el asombro de ver cómo era fundamental utilizar otras áreas emergentes de las matemáticas, grandes matemáticos como Cartan, Courant, Frobenius, Sobolev, Poincaré y Hilbert, entre muchos otros, dieron grandes aportes para la teoría moderna.

Dentro de las ecuaciones parciales uno de los operadores más importantes es el operador de Laplace que en $\mathbb{R}^n$ está dado por la suma de las n segundas derivadas parciales de una función de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$; con este operador se definen algunas de las ecuaciones de segundo orden más importantes para el desarrollo de las matemáticas y más antiguas; la ecuación de Laplace asociada al núcleo del operador de Laplace y la ecuación de Poisson, que es el operador de Laplace igualada a una función cualquiera, que tuvo su origen en la teoría del potencial, la ecuación de onda que se originó en el problema de la cuerda vibrante homogénea, el cual fue un problema importante para los matemáticos del siglo XVIII, la ecuación de calor, que tuvo su origen en el siglo XIX, que posteriomente da pie al análisis de Fourier, más adelante en ese mismo siglo vería la luz la ecuación de Navier-Stokes que, a diferencia de las demás, tiene un carácter vectorial (tiene un operador de Laplace vectorial), no es lineal y hoy en día existe un problema abierto de los llamados Problemas del Siglo por Clay Mathematics Institute. En el siglo XX con la física cuántica nace la ecuación de Schrödinger la cual se caracteriza por ser compleja. Rápidamente el operador de Laplace fue asociado a distintas áreas de las matemáticas como las funciones holomorfas, el estudio de superficies mínimas y la teoría de ecuaciones estocásticas.

La teoría de Hodge para variedades reales es la respuesta a la existencia de la solución a la ecuación de Poisson y cuántas soluciones linealmente independientes tiene la ecuación de Laplace en el lenguaje de formas diferenciales sobre variedades reales. En lo personal me asombró mucho la teoría de Hodge la primera vez que me involucré con ella por dos cosas:

la primera es el ver cómo la topología algebraica puede contar el número de soluciones de la ecuación; la segunda es el hecho de que la ecuación de Laplace está asociada a muchas áreas de las matemáticas lo cual hace muy rica la teoría. Más adelante en mi trabajo al involucrarme en el estudio de las variedades complejas me encontré con la cohomología de Dolbeault, lo cual me llevó a descubrir que la geometría algebraica y la teoría de Hodge estaban íntimamente ligados en otro de los Problemas del Siglo: la Conjetura de Hodge, la cual lamentablemente no se expone por motivos de espacio. Esto muestra lo amplia y viva que es la teoría y, espero, una motivación por estudiarla.

Para la lectura de este trabajo es necesario el conocimiento previo del lenguaje de formas diferenciales reales y el teorema de Stokes, la noción de que es una variedad riemanniana, los resultados básicos de la cohomología de De Rham y la teoría de espacios de Hilbert.

El primer capítulo consta de la construcción de un producto interior en el álgebra exterior para poder dar una estructura de espacio de Hilbert a ésta, gracias a esto podremos cons truir el operador adjunto a la derivada exterior y con ellos el operador de Laplace. Como es común ya que el espacio es completo podremos estudiar la ecuación de Laplace asociada a una forma de grado p y calcular la dimensión del p-ésimo grupo de cohomología de De Rham. Con esto podremos hacer unas aplicaciones para concluir.

En el segundo capítulo pasaremos a los espacios vectoriales complejos: definiremos la llamada estructura cuasi compleja en un espacio vectorial de dimensión par y la relación con un espacio vectorial complejo. Construiremos las formas diferenciales complejas con sus propiedades más importantes. Gracias a la estructura cuasi compleja podremos hacer una descomposición en funciones holomorfas y antiholomorfas, así mismo se definirán las derivadas exteriores holomorfa y atiholomorfa. Demostraremos que estos operadores cumplen propiedades análogas a la derivada exterior; así definiremos la cohomología de Dolbeault y la compararemos con la de De Rham compleja, hasta llegar a la conclusión de que no coinciden en lo general. En analogía con el capítulo uno daremos la estructura de espacio de Hilbert y la construcción de los operadores de Laplace asociados a cada derivada exterior.

En el tercer capítulo daremos la demostración del teorema de Hodge en variedades complejas, las consecuencias más importantes y algunas aplicaciones.

Por último en el cuarto capítulo veremos cuándo las dos cohomologías coinciden; como ejemplo importante calcularemos la cohomología de Dolbeault del plano proyectivo.

De antemano gracias al lector.

Capítulo 2

Teorema de Hodge para variedades reales

2.1. Construcción del operador de Laplace

Consideremos V un espacio vectorial de dimensión n sobre un campo K, dotado de un producto escalar $<,>$. Recordemos que en este caso, V se puede identificar con su espacio dual V^* asociando a cada $v \in V$ la transformación $w \mapsto \langle v, w \rangle$.

Definición 2.1.1. *Llamamos p-*tensor alternante *en V a una función p-lineal $\omega : V^p \to K$ que cumple*

$$\omega(v_1, \ldots, v_j, v_{j+1}, \ldots, v_p) = -\omega(v_1, \ldots, v_{j+1}, v_j, \ldots, v_p)$$

para todo $j \in \{1, \ldots, p-1\}$.

El conjunto de los p-tensores alternantes sobre V, con la suma y el producto por un escalar definidos de manera natural, es un espacio vectorial sobre K que denotaremos por $\Lambda^p(V)$. Una vez definida la operación cuña entre tensores, se puede mostrar que dada una base $e_1, \ldots, e_n$ de V^* una base de $\Lambda^p(V)$ está dada por

$$e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} \text{ con } 1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n.$$

Usando el producto escalar de V dotamos al espacio dual V^* de un producto escalar, como sigue: Si $e_1, \ldots, e_n$ es una base de V^* dual a una base ortonormal de V, entonces imponemos la condición de que $e_1, \ldots, e_n$ sea ortonormal y extendemos el producto por linealidad. Esto nos permite dar al álgebra exterior un producto escalar.

Definición 2.1.2. *Dados $v_1, \ldots, v_p, w_1, \ldots, w_p \in V^*$, definimos*

$$< v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_p, w_1 \wedge w_2 \wedge \cdots \wedge w_p >= \det(< v_i, w_j >).$$

Este producto se extiende por linealidad a todo $\Lambda^p(V)$.

Consideremos una base ortonormal $e_1, \ldots, e_n$ de V^* y la base de $\Lambda^p(V)$ dada por

$$e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} \text{ con } 1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n.$$

Un tensor de este tipo tiene norma uno, pues

$$< e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}, e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} >= \det(< e_{i_j}, e_{i_k} >) = \det(\delta_{jk}) = 1.$$

Por otro lado, los tensores distintos $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}$ y $e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_p}$ son ortonormales. En este caso, por lo menos existe un e_m en el primer producto que no está en el segundo; entonces la matriz $(< e_{i_k}, e_{j_l} >)$ tiene un vector renglón cero y por tanto

$$< e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}, e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_p} >= \det(< e_{i_k}, e_{j_l} >) = 0,$$

dado que $< e_m, e_{j_l} >= 0$ para toda j_l.

Ahora veremos que el producto es positivo definido. Sea $\alpha \in \Lambda^p(V)$ dada por

$$\alpha = \sum_{i_1 < \cdots < \imath_p} \alpha_{i_1,\ldots,i_p} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p};$$

entonces

$$\begin{aligned}
< \alpha, \alpha > &= < \sum_{i_1 < \cdots < i_p} \alpha_{i_1,\ldots,i_p} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}, \sum_{j_1 < \cdots < j_p} \alpha_{j_1,\ldots,j_p} e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_p} > \\
&= \sum_{i_1 < \cdots < i_p} \sum_{j_1 < \cdots < j_p} \alpha_{i_1,\ldots,i_p} \alpha_{j_1,\ldots,j_p} < e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}, e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_p} > \\
&= \sum_{i_1 < \cdots < i_p} \alpha^2_{i_1,\ldots,i_p} \geq 0.
\end{aligned}$$

Podemos extender el producto $< \, , \, >$ sobre el álgebra exterior $\Lambda(V)$ imponiendo que $\Lambda^p(V)$ y $\Lambda^q(V)$ sean ortogonales para toda $p \neq q$.

Definición 2.1.3. *Si V es orientable, definimos el operador estrella u operador de Hodge*[1]

$$* : \Lambda^p(V) \to \Lambda^{n-p}(V) \quad \text{donde} \quad 0 \leq p \leq n,$$

como sigue: Sea $e_1, \ldots, e_n$ una base ortonormal de V^*. Entonces

$$\begin{aligned}
*(1) &= \pm e_1 \wedge \cdots \wedge e_n, \\
*(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) &= \pm 1, \\
*(e_1 \wedge \cdots \wedge e_p) &= \pm e_{p+1} \wedge \cdots \wedge e_n,
\end{aligned}$$

donde tomamos el signo $+$ si $e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n$ es una base positiva de V^* y el signo $-$ en caso contrario. Extendemos $*$ por linealidad.

Una propiedad importante del producto cuña es que si $A : V^* \to V^*$ es una transformación lineal y $v_1, \ldots, v_p \in V^*$, se tiene que

$$Av_1 \wedge \cdots \wedge Av_p = (\det A) v_1 \wedge \cdots \wedge v_p;$$

[1] William Vallance Douglas Hodge (17 junio de 1903- 7 julio de 1975) matemático escocés.

de aquí se sigue que

$$*(Av_1 \wedge \cdots \wedge Av_p) = *((\det A)v_1 \wedge \cdots \wedge v_p) = (\det A) * (v_1 \wedge \cdots \wedge v_p)$$

Esto nos dice que el operador estrella no depende de la elección de la base ortonormal, pues cualesquiera dos bases ortonormales están relacionadas por una transformación con determinante uno.

Lema 2.1.4. $** =: \Lambda^p(V) \to \Lambda^p(V)$, *dado por* $** = (-1)^{p(n-p)} id$

Demostración. Sea $e_1, \ldots, e_n$ una base ortonormal positiva de V^*; entonces

$$*(e_1 \wedge \cdots \wedge e_p) = e_{p+1} \wedge \cdots \wedge e_n;$$

por lo tanto,

$$* * (e_1 \wedge \cdots \wedge e_p) = \pm e_1 \wedge \cdots \wedge e_p.$$

Para determinar el signo basta ver si $e_{p+1}, \ldots e_n, e_1, \ldots, e_p$ es una base negativa o positiva; pero

$$e_1 \wedge \cdots \wedge e_p \wedge e_{p+1} \wedge \cdots \wedge e_n = (-1)^p e_{p+1} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_p \wedge e_{p+2} \wedge \cdots \wedge e_n;$$

repitiendo el procedimiento, en total $(n-p)$ veces,

$$e_1 \wedge \cdots \wedge e_p \wedge e_{p+1} \wedge \cdots \wedge e_n = (-1)^{p(n-p)} e_{p+1} \wedge \cdots \wedge e_n \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_p.$$

El resultado se extiende por linealidad. □

Lema 2.1.5. *Para todo* $v, w \in \Lambda^p(V)$,

$$< v, w >= *(w \wedge *v) = *(v \wedge *w).$$

Demostración. Mostraremos que se cumple la igualdad $< v, w >= *(v \wedge *w)$. La otra igualdad se demuestra de manera análoga. Por linealidad, basta suponer que

$$v = e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} \quad \text{y} \quad w = e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_p}.$$

Tenemos que

$$*(v \wedge *w) = *(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} \wedge *(e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_p})) = *(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} \wedge (\pm e_{j_{p+1}}) \wedge \cdots \wedge e_{j_n}),$$

donde el signo $\pm$ depende si $e_{j_1}, \ldots, e_{j_p}, \ldots, e_{j_n}$ es una base positiva o negativa. Si $\{i_1, \ldots, i_p\} = \{j_1, \ldots, j_p\}$ tenemos que

$$*(v \wedge *w) = *(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} \wedge (\pm e_{j_{p+1}}) \wedge \cdots \wedge e_{j_n}) = 1 =< v, w > .$$

En caso de que $\{i_1, \ldots, i_p\}$ sea distinto de $\{j_1, \ldots, j_p\}$, los conjuntos $\{i_1, \ldots, i_p\}$ y $\{j_{p+1}, \ldots, j_n\}$ tienen por lo menos un término en común y

$$*(v \wedge *w) = *(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} \wedge (\pm e_{j_{p+1}}) \wedge \cdots \wedge e_{j_n}) = 0 =< v, w > .$$ □

Lema 2.1.6. *Dada una base positiva arbitraria de V^* se tiene*

$$*(1) = \frac{1}{\sqrt{\det(< v_i, v_j >)}} v_1 \wedge \cdots \wedge v_n.$$

Demostración. Sea $e_1,\ldots,e_n$ una base ortonormal positiva de V^* y A una transformación lineal que lleva la base $e_1, \ldots, e_n$ en $v_1, \ldots, v_n$. Por un lado,

$$< v_1 \wedge \cdots \wedge v_n, v_1 \wedge \cdots \wedge v_n >= \det(< v_i, v_j >);$$

por otro,

$$< v_1 \wedge \cdots \wedge v_n, v_1 \wedge \cdots \wedge v_n >=< (\det A)e_1 \wedge \cdots \wedge e_n, (\det A)e_1 \wedge \cdots \wedge e_n >= (\det A)^2.$$

Por lo tanto

$$\det(< v_i, v_j >)^{\frac{1}{2}} = (\det A)$$

y

$$*(1) = e_1 \wedge \cdots \wedge e_n = \frac{1}{\sqrt{\det(< v_i, v_j >)}} \ v_1 \wedge \cdots \wedge v_n. \qquad \square$$

Ahora pensemos en una variedad riemanniana M orientable de dimensión n.

Definición 2.1.7. *Sea $p \in M$. Denotamos por T_pM al espacio tangente a M en el punto p, por TM al conjunto de todos los espacios tangentes a M y lo llamamos el haz tangente a M. Además, denotaremos por T_p^*M al espacio dual o cotangente a M en el punto p, de modo que los elementos de T_p^*M son funcionales lineales sobre el espacio tangente a p. T^*M es el conjunto de todos los espacios cotangentes a M y lo llamamos el haz cotangente de M. Análogamente, definimos $\Lambda^p(M)$ de M como la unión de los p-tensores alternantes $\Lambda^p(T_pM)$ de cada espacio tangente y $\Lambda(M)$ será la unión de las $\Lambda^p(M)$.*

Se puede mostrar que TM, T^*M y $\Lambda^p(M)$ admiten estructuras de variedades diferenciables de manera natural. Usamos esto para definir varias transformaciones suaves importantes.

Definición 2.1.8. *Decimos que una transformación $X : M \to TM$ es un campo vectorial en M, si X asocia a cada punto $x \in M$ un vector en T_xM. En caso de que la transformación sea infinitamente diferenciable diremos que X es un campo vectorial suave.*

Una transformación suave $\omega : M \to T^*M$ es una 1-forma diferencial en M si ω asigna a cada punto $x \in M$ una funcional lineal $\omega_p \in T_x^*M$.

Una p-forma diferencial en M es una transformación suave $\omega : M \to \Lambda^p(M)$ que a cada punto $x \in M$ le asigna un p-tensor alternante en T_xM.

El conjunto $\Lambda^p(M)$ de las p-formas en M es un módulo sobre el anillo $C^\infty(M)$ de funciones infinitamente diferenciables de M en $\mathbb{R}$.

Puesto que hemos supuesto que la variedad M es orientable, podemos dar una orientación positiva a T_pM en cada punto. Esto induce una orientación positiva sobre los espacios cotangentes de manera consistente, pues como la variedad es orientable la transición de una carta a otra respeta la orientación y no depende de la elección de la carta.

Por otro lado, gracias a la estructura riemanniana tenemos un producto interior en cada plano tangente y podemos definir el operador estrella

$$* : \Lambda^p(T_x^*M) \to \Lambda^{n-p}(T_x^*M)$$

que denotamos por

$$* : \Lambda^p(M) \to \Lambda^{n-p}(M).$$

Recordando que la métrica en T_x^*M está dada por $g^{ij} = (g_{ij})^{-1}$ y suponiendo que la base $dx_1, \ldots, dx_n$ es positiva, por el Lema 2.1.6 tenemos

$$*(1) = \frac{1}{\sqrt{\det(< dx_i, dx_j >)}}\ dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})^{-1}}}\ dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Por lo tanto

$$*(1) = \sqrt{\det(g_{ij})}\ dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n,$$

de modo que la expresión para la forma de volumen es

$$Vol(M) := \int_M *(1).$$

Ahora podemos definir un producto escalar para las p-formas sobre M.

Definición 2.1.9. *Sean α, $\beta \in \Lambda^p(M)$ con soporte compacto, definimos*

$$(\alpha, \beta) := \int_M < \alpha, \beta > *(1).$$

Es fácil dotar a la variedad M de una σ-álgebra y de una medida, gracias a las cartas tenemos abiertos de $\mathbb{R}^n$ que son homeomorfos a un abierto en M. Tomando la intersección de los borelianos de $\mathbb{R}^n$ con cada uno de los abiertos obtenemos una σ-álgebra sobre cada abierto, dado que las operaciones de conjuntos se preservan bajo la imagen inversa, la familia de conjuntos que son imagen de algún elemento en la σ-álgebra de $\mathbb{R}^n$ bajo alguno de estos homeomorfismos constituye una σ-álgebra en M, de la misma forma la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ induce una medida de M y se conoce como la medida de Lebesgue inducida.

Una consideración importante es que para obtener una norma en el espacio de p-formas y no una seminorma, a partir de ahora pensaremos a las p-formas como representantes de clases de equivalencia donde decimos que dos p-formas son equivalentes si y sólo si coinciden casi donde quiera con respecto a la medida de Lebesgue inducida por las cartas. De esta manera una p-forma tiene norma cero si y sólo si es la clase del cero.

Sean α y $\beta \in \Lambda^p(M)$. Gracias al Lema 2.1.5 y dado que $*(\alpha \wedge *\beta)$ es una 0-forma,

$$\int_M < \alpha, \beta > *(1) = \int_M *(\alpha \wedge *\beta) * (1) = \int_M * * (1)(\alpha \wedge *\beta).$$

La última igualdad es gracias a que el operador estrella saca escalares (0-formas). Por el Lema 2.1.4

$$(\alpha, \beta) = \int_M \alpha \wedge *\beta.$$

Por la definición, el producto es simétrico, bilineal y definido positivo. Llamaremos norma $\mathcal{L}^2$ a aquella inducida por este producto escalar.

Ahora ya podemos trabajar con la norma $\mathcal{L}^2$ sobre $\Lambda^p(M)$. Como sabemos el espacio de las funciones $C^\infty(M)$ no es un espacio completo bajo la norma $\mathcal{L}^2$. Análogamente se puede ver que $\Lambda^p(M)$ con la norma $\mathcal{L}^2$ no es un espacio completo.

Definición 2.1.10. *Denotamos por $\mathcal{L}^2(\Lambda^p(M))$ a la compleción de $\Lambda^p(M)$ con respecto a la norma $\mathcal{L}^2$.*

Ahora tenemos un espacio de Hilbert y la teoría del análisis funcional. En particular, gracias a que el espacio $\Lambda(M)$ ya está dotado de un producto interior tiene sentido hablar del adjunto d^* del operador derivada exterior con respecto a la norma $\mathcal{L}^2$.

Ya sabemos que si $\alpha \in \Lambda^{p-1}(M)$, se tiene que $d\alpha \in \Lambda^p(M)$, por otro lado si $\beta \in \Lambda^p(M)$ pensemos de qué espacio a qué espacio lleva el operador d^*. Como el adjunto debe satisfacer

$$(d\alpha, \beta) = (\alpha, d^*\beta)$$

por lo tanto d^* manda $\Lambda^p(M)$ en $\Lambda^{p-1}(M)$.

Una pregunta interesante es ver si podemos poner d^* en términos de d y del operador de Hodge.

Corolario 2.1.11. *Podemos expresar a d^* como*

$$d^* = (-1)^{n(p+1)+1} * d * .$$

Demostración. Supongamos que $\alpha \in \Lambda^{p-1}(M)$ y $\beta \in \Lambda^p(M)$. Entonces

$$d(\alpha \wedge *\beta) = d\alpha \wedge *\beta + (-1)^{p-1}\alpha \wedge d * \beta$$

por las propiedades de la derivada del producto exterior. Además,

$$\begin{aligned} d\alpha \wedge *\beta &+ (-1)^{p-1}(-1)^{(p-1)(n-p+1)}\alpha \wedge * * d * \beta \\ &= d\alpha \wedge *\beta + (-1)^{n(p+1)+2}\alpha \wedge * * d * \beta \\ &= d\alpha \wedge *\beta - (-1)^{n(p+1)+1}\alpha \wedge * * d * \beta \end{aligned}$$

por el Lema 2.1.4 ya que $d * \beta$ es una $(n-p+1)$-forma, por el Lema 2.1.6

$$(d\alpha \wedge *\beta) = * * (d\alpha \wedge *\beta) = * < d\alpha, \beta >;$$

de la misma forma

$$\begin{aligned} -(-1)^{n(p+1)+1}(\alpha \wedge * * d * \beta) &= -(-1)^{n(p+1)+1} * *(\alpha \wedge *d * \beta) \\ &= -(-1)^{n(p+1)+1} * < \alpha, *d * \beta > \end{aligned}$$

por lo tanto

$$d(\alpha \wedge *\beta) = *(< d\alpha, \beta > -(-1)^{n(p+1)+1} < \alpha, *d * \beta >)$$

integrando

$$\int_M d(\alpha \wedge *\beta) = \int_M *(< d\alpha, \beta > -(-1)^{n(p+1)+1} < \alpha, *d * \beta >)$$

por el teorema de Stokes

$$\begin{aligned} 0 &= \int_M *(< d\alpha, \beta > -(-1)^{n(p+1)+1} < \alpha, *d*\beta >) \\ &= \int_M (< d\alpha, \beta > -(-1)^{n(p+1)+1} < \alpha, *d*\beta >) * (1) \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} (d\alpha, \beta) &= \int_M < d\alpha, \beta > *(1) = \int_M < \alpha, (-1)^{n(p+1)+1} * d * \beta > *(1) \\ &= (\alpha, (-1)^{n(p+1)+1} * d * \beta) \end{aligned}$$

para toda $\alpha \in \Lambda^{p-1}(M)$ y $\beta \in \Lambda^p(M)$. $\square$

Definición 2.1.12. *El operador de Laplace-Beltrami sobre $\Lambda^p(M)$ está dado por*

$$\Delta : \Lambda^p(M) \to \Lambda^p(M), \quad \Delta := dd^* + d^*d.$$

Veamos si esta definición coincide con la que teníamos del laplaciano aplicado a una 0-forma $f \in \Lambda^0(M)$ con M un subconjunto compacto en $\mathbb{R}^n$:

$$\Delta f = (dd^* + d^*d)f = (d(-1)^{n+1} * d * +(-1)^{2n+1} * d * d)f$$

El exponente $2n$ viene de que d^* está aplicado a una 1-forma y en el otro sumando a una 0-forma.

Pero $*f$ es una n-forma, por lo tanto $d * f = 0$, de modo que

$$(-1)^{2n+1} * d * df = (-1)^{2n+1} * d * \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

Si llamamos $\hat{dx_i}$ a la $(p-1)$-forma que tenga todas las dx_j menos la i-ésima

$$(-1)^{2n+1} * d(\sum_{i \text{ impar}} \frac{\partial f}{\partial x_i} \hat{dx_i}) + (-1)^{2n+2} * d(\sum_{i \text{ par}} \frac{\partial f}{\partial x_i} \hat{dx_i})$$

$$= (-1)^{2n+1} * (\sum_{i \text{ impar}} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} dx_i \wedge \hat{dx_i}) + (-1)^{2n+2} * (\sum_{i \text{ par}} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} dx_i \wedge \hat{dx_i})$$

$$= (-1)^{2n+1} * (\sum_{i \text{ impar}} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n) + (-1)^{2n+3} * (\sum_{i \text{ par}} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n)$$

$$= (-1)^{2n+1} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = -div(gradf). \tag{2.1}$$

También concluimos que d^* aplicada a una 1-forma es la divergencia.

Veamos ahora si la definición del operador laplaciano también coincide con la que teníamos para una función $f : M \to \mathbb{R}$. Con g el determinante de la métrica y $\alpha \in C^\infty(M)$,

$$\begin{aligned}(\Delta f, \alpha) &= (d^* df, \alpha) = (df, d\alpha) = \int\limits_M < df, d\alpha > *(1) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_M g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial \alpha}{\partial x_j} \sqrt{g}\ dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n\end{aligned}$$

Integrando por partes en un n-cubo que contenga al soporte compacto de α

$$\sum_{i,j=1}^{n} \sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \alpha|_{[-a,a]^n} - \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_M \Big(\frac{\partial}{\partial x_i} \sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big) \alpha dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

$$= -\sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_M \frac{1}{\sqrt{g}} \Big(\frac{\partial}{\partial x_i} \sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big) \alpha \sqrt{g} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

Llegamos a

$$(\Delta f, \alpha) = \Big(\sum_{i,j=1}^{n} -\frac{1}{\sqrt{g}} \Big(\frac{\partial}{\partial x_i} \sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big), \alpha \Big)$$

para toda $\alpha \in C^\infty(M)$, por lo tanto

$$\Delta f = \sum_{i=1,j=1}^{n} -\frac{1}{\sqrt{g}} \Big(\frac{\partial}{\partial x_i} \sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big) = -div(gradf). \tag{2.2}$$

Hemos obtenido el operador de Laplace-Beltrami para funciones de variedades riemannianas a los reales.
Por último calculemos el operador de Laplace aplicado a una p-forma en $\mathbb{R}^n$. Primero hagámoslo para la 1-forma $\omega = f dy$ en $\mathbb{R}^3$ para darnos una idea de qué es lo que está pasando; calculemos por partes:

$$d(fdy) = \frac{\partial f}{\partial x} dx \wedge dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \wedge dy = \frac{\partial f}{\partial x} dx \wedge dy - \frac{\partial f}{\partial z} dy \wedge dz$$

$$*d(fdy) = \frac{\partial f}{\partial x} dz - \frac{\partial f}{\partial z} dx$$

$$d * d(fdy) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx \wedge dz + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dy \wedge dz - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} dy \wedge dx - \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} dz \wedge dx$$

$$d * d(fdy) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx \wedge dz + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dy \wedge dz + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} dx \wedge dy + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} dx \wedge dz$$

$$(-1)^{3(2+1)+1} * d * d(fdy) = -\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} dz - \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} dy$$

$$d^*d(fdy) = -\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}dz - \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}dy.$$

Por otro lado

$$*(fdy) = -fdx \wedge dz$$

$$d*(fdy) = -\frac{\partial f}{\partial y}dy \wedge dx \wedge dz = \frac{\partial f}{\partial y}dx \wedge dy \wedge dz$$

$$d^*(fdy) = (-1)^{3(1+1)+1} * d * (fdy) = (-1)^{3(1+1)+1}\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$dd^*(fdy) = -\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dx - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}dz.$$

Por lo tanto

$$(dd^* + d^*d)f = -\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dy - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy - \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}dy.$$

Ya estamos listos para calcular el operador sobre una p-forma.

Sea $\omega = \omega_{i_1,\ldots,i_p}\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$ y sea $\{dx_{i_1}, \ldots, dx_{i_p}, dx_{j_1}, \ldots, dx_{j_{n-p}}\}$ una base positiva. Entonces

$$d\omega = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \omega_{i_1,\ldots,i_p}}{\partial x_{j_k}} dx_{j_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}.$$

Si llamamos $d\hat{x}_{j_k}$ a la $(n-(p+1))$-forma que tenga todas las dx_{j_k} menos la k-ésima y que tampoco tenga a $dx_{1_p}, \ldots, dx_{i_p}$, entonces

$$*d\omega = \sum_{k=1}^{n-p} (-1)^{p+k-1} \frac{\partial \omega_{i_1,\ldots,i_p}}{\partial x_{j_k}} d\hat{x}_{j_k}.$$

Dado que movimos $p+k-1$ veces el elemento dx_{j_k},

$$d*d\omega = \sum_{k=1}^{n-p} (-1)^{p+k-1} \frac{\partial^2 \omega_{i_1,\ldots,i_p}}{\partial x_{j_k}^2} dx_{j_k} \wedge d\hat{x}_{j_k} + \sum_{l=1}^{p}\sum_{k=1}^{n-p} (-1)^{p+k-1} \frac{\partial^2 \omega_{i_1,\ldots,i_p}}{\partial x_{i_l} \partial x_{j_k}} dx_{i_l} \wedge d\hat{x}_{j_k}$$

Si llamamos $d\hat{x}_{i_l}$ a la $(n-(p+1))$-forma que tenga todas las dx_{j_k} menos la k-ésima y que tampoco tenga a $dx_{1_p}, \ldots, dx_{i_p}$,

$$*d*d\omega = \sum_{k=1}^{n-p} (-1)^{p+k-1+k-1+p(n-p)} \frac{\partial^2 \omega_{i_1,\ldots,i_p}}{\partial x_{j_k}^2} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} + \sum_{l=1}^{p}\sum_{k=1}^{n-p} (-1)^{pn+l} \frac{\partial^2 \omega_{i_1,\ldots,i_p}}{\partial x_{i_l} \partial x_{j_k}} dx_{j_k} \wedge d\hat{x}_{i_l}$$

Ya que movemos $k-1$ veces para ordenar las j_i de forma creciente y luego movemos $n-p$ veces cada elemento para llevarlo al primer término, tenemos que

$$*d*d\omega = \sum_{k=1}^{n-p} (-1)^{p+p(n-p)} \frac{\partial^2 \omega_{i_1,\ldots,i_p}}{\partial x_{j_k}^2} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} + \sum_{l=1}^{p}\sum_{k=1}^{n-p} (-1)^{pn+l} \frac{\partial^2 \omega_{i_1,\ldots,i_p}}{\partial x_{i_l} \partial x_{j_k}} dx_{i_l} \wedge d\hat{x}_{j_k},$$

de modo que

$$d^*d\omega = (-1)^{n(p+2)+1} * d * d\omega = (-1)^{-p^2+p+1} \sum_{k=1}^{n-p} \frac{\partial^2 \omega_{i_1,\ldots,i_p}}{\partial x_{j_k}^2} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$$

$$+ \sum_{l=1}^{p} \sum_{k=1}^{n-p} (-1)^{l+1} \frac{\partial^2 \omega_{i_1,\ldots,i_p}}{\partial x_{i_l} \partial x_{j_k}} dx_{i_l} \wedge d\hat{x}_{j_k}$$

Dado que para cualquier p tenemos que $-p^2+p$ es par,

$$d^*d\omega = -\sum_{k=1}^{n-p} \frac{\partial^2 \omega_{i_1,\ldots,i_p}}{\partial x_{j_k}^2} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} + \sum_{l=1}^{p} \sum_{k=1}^{n-p} (-1)^{l+1} \frac{\partial^2 \omega_{i_1,\ldots,i_p}}{\partial x_{i_l} \partial x_{j_k}} dx_{i_l} \wedge d\hat{x}_{j_k}$$

Análogamente,

$$*\omega = \omega_{i_1,\ldots,i_p} dx_{j_i} \wedge \cdots \wedge dx_{j_{n-p}}$$

$$d * \omega = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \omega_{i_1,\ldots,i_p}}{\partial x_{i_l}} dx_{i_l} \wedge dx_{j_i} \wedge \cdots \wedge dx_{j_{n-p}}$$

$$* d * \omega = \sum_{l=1}^{p} (-1)^{p(d-p)+d-p+l+1} \frac{\partial \omega_{i_1,\ldots \imath_p}}{\partial x_{i_l}} d\hat{x}_{i_l}$$

$$d \; * \; d * \omega = \sum_{l=1}^{p} (-1)^{p(n-p)+n-p+l+1} \frac{\partial^2 \omega_{i_1,\ldots,i_p}}{\partial x_{i_l}^2} dx_{i_l} \wedge d\hat{x}_{i_l}$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-p} \sum_{l=1}^{p} (-1)^{p(n-p)+n-p+l+1} \frac{\partial^2 \omega_{i_1,\ldots,i_p}}{\partial x_{j_k} \partial x_{i_l}} dx_{j_k} \wedge d\hat{x}_{i_l}$$

$$d \; * \; d * \omega = \sum_{l=1}^{p} (-1)^{p(n-p)+n-p+1} \frac{\partial^2 \omega_{i_1,\ldots,i_p}}{\partial x_{i_l}^2} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-p} \sum_{l=1}^{p} (-1)^{p(n-p)+n-p+l+1} \frac{\partial^2 \omega_{i_1,\ldots,i_p}}{\partial x_{j_k} \partial x_{i_l}} dx_{j_k} \wedge d\hat{x}_{i_l}$$

$$dd^*\omega = (-1)^{n(p+1)+1} \; * \; d * \omega = (-1)^{-p^2-p+1} \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 \omega_{i_1,\ldots,i_p}}{\partial x_{i_l}^2} dx_{i_l} \wedge d\hat{x}_{i_l}$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-p} \sum_{l=1}^{p} (-1)^{-p^2-p+l+2} \frac{\partial^2 \omega_{i_1,\ldots,i_p}}{\partial x_{j_k} \partial x_{i_l}} dx_{j_k} \wedge d\hat{x}_{i_l}$$

Pero como p^2+p es par para todo entero p,

$$dd^*\omega = -\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 \omega_{i_1,\ldots,i_p} dx_{j_i}}{\partial x_{i_l}^2} dx_{i_l} \wedge d\hat{x}_{i_l} + \sum_{k=1}^{n-p} \sum_{l=1}^{p} (-1)^{l} \frac{\partial^2 \omega_{i_1,\ldots,i_p} dx_{j_i}}{\partial x_{j_k} \partial x_{i_l}} dx_{j_k} \wedge d\hat{x}_{i_l}$$

por lo tanto

$$\Delta\omega = -\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 \omega_{i_1,\ldots,i_p}}{\partial x_{i_l}^2} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}.$$

Un resultado inmediato pero muy importante es el siguiente.

Lema 2.1.13. *El operador Δ es autoadjunto.*

Demostración.

$$\begin{aligned}(\Delta\alpha, \beta) &= ((dd^* + d^*d)\alpha, \beta) = ((d^* + d)\alpha, (d^* + d)\beta) \\ &= (\alpha, (d^*d + dd^*)\beta) = (\alpha, \Delta\beta). \quad \square\end{aligned}$$

Otro resultado inmediato pero más importante para nuestros objetivos es

Corolario 2.1.14. *Para toda $\alpha \in \Lambda^p(M)$ se tiene que $(\Delta\alpha, \alpha) \geq 0$.*

Demostración.

$$(\Delta\alpha, \alpha) = (dd^*\alpha, \alpha) + (d^*d\alpha, \alpha) = (d^*\alpha, d^*\alpha) + (d\alpha, d\alpha) \geq 0.$$

□

Definición 2.1.15. *Decimos que $\omega \in \Lambda^p(M)$ es una p-forma armónica si $\Delta\omega = 0$.*

Una caracterización de las p-formas armónicas es la siguiente.

Lema 2.1.16. *α es p-forma armónica si y sólo si $d\alpha = 0$ y $d^*\alpha = 0$.*

Demostración. Supongamos α armónica basta observar que

$$0 = (\Delta\alpha, \alpha) = (d^*\alpha, d^*\alpha) + (d\alpha, d\alpha)$$

por lo tanto $d\alpha = 0$ y $d^*\alpha = 0$. □

En particular, si α es armónica entonces es cerrada. Pronto veremos que no toda forma cerrada es armónica. De esta forma pasamos de una ecuación de segundo orden a 2 de primer orden, es decir

$$d\alpha = 0 \quad y \quad d^*\alpha = 0.$$

Corolario 2.1.17. *Sobre una variedad riemanniana toda función armónica es constante.*

Demostración. Sea α una 0-forma cerrada y $x_1, \ldots, x_n$ unas coordenadas locales de M. Entonces

$$d\alpha = \frac{\partial\alpha}{\partial x_i} dx_i = 0$$

por lo tanto

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x_i} = 0$$

para toda $i = 1, \ldots, n$, lo que implica que α es constante. □

Lema 2.1.18. *El operador Δ conmuta con $*$ y d.*

Demostración. Veamos primero que el Laplaciano conmuta con $*$:

$$\begin{aligned}
*\Delta &= *(dd^* + d^*d) = *d[(-1)^{n(p+1)+1} * d*] + *[(-1)^{n(p+2)+1} * d*]d \\
&= (-1)^{n(p+1)+1} * d*d * + [(-1)^{n(p+2)+1}(-1)^{(n-p)(n-(n-p))}d*]d \\
&= (-1)^{n(p+1)+1} * d*d * + [(-1)^{n(p+2)+1}(-1)^{(n-p)p}d*]d[(-1)^{p(n-p)} * *] \\
&= ((-1)^{n(p+1)+1} * d*d + [(-1)^{n(p+2)+1+2p(n-p)}d*]d*)*;
\end{aligned}$$

multiplicando por $(-1)^{n^2+n} = 1$ y recordando que $(-1)^{np} = (-1)^{-np}$, para el segundo factor notemos que

$$n(p+2) + 1 + 2p(n-p) + n^2 + n = n((n-p)+1) + 1 + 2(n + pn - p^2),$$

por lo tanto

$$*\Delta = ((-1)^{n((n-p)+2)+1} * d*d + [(-1)^{n((n-p)+1)+1}d*]d*)* = (d^*d + dd^*)* = \Delta * .$$

Ahora veamos que el Laplaciano conmuta con d:

$$d\Delta = d(dd^* + d^*d) = d(d[(-1)^{n(p+1)+1} * d*] + [(-1)^{n(p+2)+1} * d*]d)$$

$$d\Delta = d[(-1)^{n(p+2)+1} * d*]d$$

$$\Delta d = (dd^* + d^*d)d = (d[(-1)^{n(p+2)+1} * d*] + [(-1)^{n(p+3)+1} * d*]d)d$$

$$\Delta d = d[(-1)^{n(p+2)+1} * d*]d$$

por lo tanto $\Delta d = d\Delta$. $\square$

2.2. Teorema de Hodge

Consideremos una variedad riemanniana M compacta, orientable, sin frontera y de dimensión n.

Definición 2.2.1. *Denotamos por $H^p(M)$ el conjunto de las p-formas armónicas en M, es decir, $H^p(M) = \{\omega \in \Lambda^p(M) : \Delta\omega = 0\}$. Cuando no haya confusión escribiremos sólo H^p. Denotaremos por H a la proyección que a cada p-forma le asocia su parte armónica, $H\colon \Lambda^p(M) \to H^p(M)$.*

Recordemos que cada funcional lineal en un espacio con producto interior está representada de manera única mediante el producto con un elemento del espacio. Así, una funcional ℓ en $\Lambda^p(M)$ se representa como $\ell(\eta) = (\omega, \eta)$ para toda $\alpha \in \Lambda^p(M)$, con ω única. Estos resultados inspiran la siguiente definición:

Definición 2.2.2. *Se dice que la funcional ℓ es una solución débil de la ecuación $\Delta\omega = \alpha$ si $\ell(\Delta\psi) = (\alpha, \psi)$ para toda $\psi \in \Lambda^p(M)$.*

Para nuestros fines usaremos los siguientes resultados, que no demostraremos aquí.

Teorema 2.2.3 ([12], página 223). *Si α_n es una sucesión de p-formas suaves en M, que cumplen $\|\alpha_n\| < c$ y $\|\Delta\alpha_n\| < c$ para toda n, entonces existe una subsucesión de α_n que es de Cauchy en $\Lambda^p(M)$.*

Teorema 2.2.4 (de regularidad; [12], página 223). *Dadas $\alpha \in \Lambda^p(M)$ y ℓ una solución débil de $\Delta\omega = \alpha$, entonces existe $\omega \in \Lambda^p(M)$ tal que $\ell(\beta) = (\omega, \beta)$ para toda $\beta \in \Lambda^p$; en otras palabras,*

$$\Delta\omega = \alpha.$$

Lema 2.2.5. *Existe una constante c que depende unicamente de la métrica rimanniana de M tal que para toda $\omega \in (H^p(M))^\perp$ se tiene que*

$$\|\omega\| < c\|\Delta\omega\|.$$

Demostración. Procederemos por contradicción. Sea ω_i una subsucesión en $(H^p(M))^\perp$ tal que $\|\omega_i\| = 1$ y $\|\Delta\omega_i\| \to 0$ si $i \to \infty$. Por el teorema 2.2.3 existe una subsucesión de Cauchy, que denotamos nuevamente por ω_i. Si definimos

$$\ell(\psi) = \lim_{i\to\infty} (\omega_i, \psi), \quad \psi \in \Lambda^p(M),$$

sabemos que este límite siempre existe para toda $\psi \in \Lambda^p(M)$, pues toda sucesión que converge en la norma converge débilmente. Afirmamos que ℓ es un operador acotado. De hecho,

$$|\ell(\psi)| \leq \|\omega_i\|\|\psi\| = \|\psi\| < \infty$$

y

$$\ell(\Delta\psi) = \lim_{i\to\infty} (\omega_i, \Delta\psi) = \lim_{i\to\infty} (\Delta\omega_i, \psi) = 0.$$

Como $(0, \psi) = 0$ para toda $\psi \in \Lambda^p(M)$, por la definición 2.2.2 ℓ es una solución débil de $\Delta\beta = 0$. Por el teorema de regularidad existe $\omega \in \Lambda^p(M)$ tal que $\ell(\psi) = (\omega, \psi)$. En consecuencia

$$\ell(\psi) = (\omega, \psi) = \lim_{i\to\infty} (\omega_i, \psi)$$

Por lo tanto ω es el límite débil de ω_i, lo que implica que $\omega_i \to \omega$ en la norma (si una sucesión converge en la norma y débilmente el límite es el mismo), con $\|\omega_i\| = 1$ y $\omega_i \in (H^p(M))^\perp$, se sigue que $\|\omega\| = 1$ y $\omega \in (H^p(M))^\perp$, pero por el teorema de regularidad 2.2.4 se tiene que $\Delta\omega = 0$ por lo tanto $\omega \in H^p(M)$, lo cual es una contradicción. □

Teorema 2.2.6 (Descomposición de Hodge). *Para todo entero p con $0 \leq p \leq n$ se tiene que la dimensión de $H^p(M)$ es finita y $\Lambda^p(M)$ se puede ver como la siguiente suma directa:*

$$\Lambda^p = \Delta(\Lambda^p(M)) \oplus H^p = dd^*(\Lambda^p(M)) \oplus d^*d(\Lambda^p(M)) \oplus H^p = d(\Lambda^{p-1}) \oplus d^*(\Lambda^{p+1}) \oplus H^p. \quad (2.3)$$

Demostración. Primero se demostrará que $H^p(M)$ es de dimensión finita; se procederá por contradicción.

Consideremos una sucesión α_n de vectores ortonormales en $H^p(M)$ y sea $c > 1$; ésta cumple que $\|\alpha_n\| < c$ y $\|\Delta\alpha_n\| < c$; luego, por el teorema 2.2.3 existe una subsucesión de Cauchy de α_n, lo que es una contradicción, ya que la distancia entre cualesquiera dos vectores ortonormales distintos es $\sqrt{2}$. Por lo tanto $H^p(M)$ es de dimensión finita.

Para la primer suma directa, nótese que si $\{\omega_i\}$ con $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ es un conjunto de vectores ortonormales de $H^p(M)$ y $\alpha \in \Lambda^p(M)$, podemos escribir a α en su serie de Fourier

$$\alpha = \beta + \sum_{i=1}^{m} (\omega_i, \alpha)\omega_i. \quad \textit{con } \beta \in \Delta(\Lambda^p(M))$$

Basta demostrar que $(H^p(M))^\perp = \Delta(\Lambda^p(M))$. Veamos primero que $\Delta(\Lambda^p(M)) \subset (H^p(M))^\perp$. Sean $\omega \in \Lambda^p(M)$ y $\alpha \in H^p(M)$; entonces

$$(\Delta\omega, \alpha) = (\omega, \Delta\alpha) = 0;$$

para la otra contención se usará la desigualdad del Lema 2.2.5.
Ahora queremos ver que $(H^p(M))^\perp \subset \Delta(\Lambda^p(M))$. Sea $\alpha \in (H^p(M))^\perp$. Definimos la funcional lineal ℓ sobre $\Delta(\Lambda^p(M))$ dada por

$$\ell(\Delta\psi) = (\alpha, \psi), \quad \psi \in \Lambda^p(M).$$

Veamos que está bien definida: Si $\Delta\psi_1 = \Delta\psi_2$, entonces $\psi_1 - \psi_2 \in H^p(M)$; de aquí se sigue que $(\alpha, \psi_1 - \psi_2) = 0$, por lo tanto $(\alpha, \psi_1) = (\alpha, \psi_2)$.
Pero ℓ está definida sobre $\Delta(\Lambda^p(M))$, tenemos que extender ℓ a todo $\Lambda^p(M)$ para poder usar el teorema de regularización. Esto llama a usar el teorema de Hahh-Banach. Veamos que ℓ es acotada: si $\varphi \in \Lambda^p(M)$, tenemos que ψ satisface $\psi = \varphi - H(\varphi)$:

$$|\ell(\Delta\varphi)| = |\ell(\Delta\psi)| = |(\alpha, \psi)| \leq \|\alpha\| \, \|\psi\| \leq c\|\alpha\| \, \|\Delta\psi\| = c\|\alpha\| \cdot \|\Delta\varphi\|.$$

Ahora podemos usar el teorema de Hahn-Banach y por tanto ℓ se puede extender a $\Lambda^p(M)$; más aún, ℓ es una solución débil a $\Delta\omega = \alpha$. Por el teorema de regularidad se tiene que existe $\omega \in \Lambda^p(M)$ tal que $\Delta\omega = \alpha$; por lo tanto $\alpha \in \Delta(\Lambda^p(M))$, lo que implica que $(H^p(M))^\perp = \Delta(\Lambda^p(M))$. □

Veamos que cada clase de cohomología tiene un único representante armónico, para esto definiremos el operador de Green y veremos algunas propiedades.

Definición 2.2.7. *El operador de Green $G : \Lambda^p(M) \to (H^p(M))^\perp$ está dado por $G(\alpha) = \omega$ donde ω es la única solución a la ecuación $\Delta\omega = \alpha - H(\alpha)$. En otras palabras $G = (\Delta|(H^p(M))^\perp)^{-1} \circ \Pi$, donde Π es la proyección de $\Lambda^p(M)$ sobre $(H^p(M))^\perp$.*

Veamos que ω es única: Sean ω_1 y $\omega_2 \in (H^p(M))^\perp$ tales que $\Delta\omega_1 = \alpha - H(\alpha)$ y $\Delta\omega_2 = \alpha - H(\alpha)$; restando las ecuaciones tenemos que $\Delta\omega_1 - \Delta\omega_2 = 0 = \Delta(\omega_1 - \omega_2)$; por lo tanto $\omega_1 - \omega_2 \in H^p(M)$; dado que $\omega_1 - \omega_2 \in (H^p(M))^\perp$ y $\omega_1 - \omega_2 \in H^p(M)$ tenemos que $\omega_1 - \omega_2 = 0$.

Afirmamos que $G|_{\Delta(\Lambda^p(M))}$ es inyectiva. Sea $\alpha \in \Delta(\Lambda^p(M))$ tal que $G(\alpha) = 0$; entonces $0 = \alpha - H(\alpha)$, lo que implica que $\alpha = 0$ por la descomposición de Hodge.

Como $(H^p(M))^\perp = \Delta(\Lambda^p)$ para cualquier $\alpha \in (H^p(M))^\perp$ existe $\omega \in \Lambda^p(M)$ tal que $\Delta\omega = \alpha$; por lo tanto, tiene sentido hablar de $(\Delta|(H^p(M))^\perp)^{-1}$.

Lema 2.2.8. *G conmuta con cualquier operador lineal que conmute con el Laplaciano Δ.*

Demostración. Sea $T : \Lambda^p(M) \to \Lambda^p(M)$ un operador tal que $T \circ \Delta = \Delta \circ T$. Nótese que $T(H^p(M)) \subset H^p(M)$ y $T((H^p(M))^\perp) \subset (H^p(M))^\perp$: Si $\alpha \in H^p(M)$, $\Delta \circ T(\alpha) = T \circ \Delta(\alpha) = 0$, por lo tanto $T(\alpha) \in H^p(M)$. Por otro lado, sea $\alpha \in (H^p(M))^\perp$, entoces $\Delta\omega = \alpha$ para alguna $\omega \in \Lambda^p(M)$; esto implica que $\Delta \circ T(\omega) = T \circ \Delta(\omega) = T(\alpha)$ y tenemos que $T(\alpha) \in (H^p(M))^\perp$.

Notemos que la proyección $\Pi : \Lambda^p(M) \to (H^p(M))^\perp$ conmuta con T: Si $\alpha \in H^p(M)$, $T \circ \Pi(\alpha) = T(0) = 0$; por otro lado, $\Pi \circ T(\alpha) = 0$ ya que $T(\alpha) \in H^p(M)$. Si $\alpha \in (H^p(M))^\perp$,

$T \circ \Pi(\alpha) = T(\alpha)$ pero $\Pi \circ T(\alpha) = T(\alpha)$ ya que $T(\alpha) \in (H^p(M))^{\perp}$. Así se tiene que $T \circ \Pi = \Pi \circ T$.

Si se restringe el Laplaciano a $(H^p(M))^{\perp}$, dado que $(\Delta|(H^p(M))^{\perp}) \circ T = T \circ (\Delta|(H^p(M))^{\perp})$ podemos hacer lo siguiente:

$$(\Delta|(H^p(M))^{\perp})^{-1} \circ (\Delta|(H^p(M))^{\perp}) \circ T = T = (\Delta|(H^p(M))^{\perp})^{-1} \circ T \circ (\Delta|(H^p(M))^{\perp})$$

de donde

$$\begin{aligned} T \circ (\Delta|(H^p(M))^{\perp})^{-1} &= (\Delta|(H^p(M))^{\perp})^{-1} \circ T \circ (\Delta|(H^p(M)))^{\perp} \circ (\Delta|(H^p(M))^{\perp})^{-1} \\ &= (\Delta|(H^p(M))^{\perp})^{-1} \circ T. \end{aligned}$$

Esto implica que

$$(\Delta|(H^p(M))^{\perp})^{-1} \circ T = T \circ (\Delta|(H^p(M))^{\perp})^{-1};$$

es decir, T conmuta con G. □

Por el Lema 2.1.18 concluimos que d y d^* conmutan con G.

Definición 2.2.9. *Denotamos al conjunto de las p-formas cerradas en M por*

$$Z^p_{deR}(M) := \{\alpha \in \Lambda^p(M) : d\alpha = 0\}$$

y al de las p-formas exactas en M por

$$B^p_{deR}(M) := \{\alpha \in \Lambda^p(M) : \exists \beta \in \Lambda^{p-1}(M) \ tal \ \ que \ \ d\beta = \alpha\}.$$

El p-ésimo grupo de cohomología de De Rham de M está dado por

$$H^p_{deR}(M) = \frac{Z^p_{deR}(M)}{B^p_{deR}(M)}.$$

El resultado siguiente es uno de los más importantes de la teoría de Hodge.

Teorema 2.2.10. *Cada clase de cohomología de De Rham sobre una variedad riemanniana M compacta y orientable contiene una única forma armónica.*

Demostración. Sea α una p-forma en M; se tiene la siguiente identidad:

$$\alpha = (\Delta \circ G + H)(\alpha) = (d \circ d^* \circ G + d^* \circ d \circ G + H)(\alpha)$$

pues si $G(\alpha) = \omega$, entonces $\Delta\omega = \alpha - H(\alpha)$; por lo tanto

$$\alpha = (\Delta \circ G + H)(\alpha) = (\alpha - H(\alpha)) + H(\alpha)$$

y es cierta la identidad.

Para la existencia, si α es una p-forma cerrada,

$$\alpha = (d \circ d^* \circ G + d^* \circ G \circ d + H)(\alpha) = d \circ d^* \circ G(\alpha) + H(\alpha),$$

Entonces $H(\alpha)$ es una p-forma armónica de la misma clase de cohomología de De Rham que α.

Para la unicidad, sean α_1 y α_2 dos formas armónicas cohomólogas, de modo que $\alpha_1 - \alpha_2 = d\beta$ y sea $\omega \in H^p(M)$.

$$(\omega, \alpha_1 - \alpha_2) = (\omega, d\beta) = (d^*\omega, \beta) = (0, \beta) = 0;$$

por lo tanto $d\beta$ es ortogonal a $H^p(M)$; por la descomposición de Hodge se tiene que $d\beta = 0$, lo que implica que $\alpha_1 = \alpha_2$. □

Teorema 2.2.11 (Isomorfismo de Hodge)**.** *En una variedad M compacta, riemanniana y sin frontera se cumple que $H^p_{deR}(M) \simeq H^p(M)$.* [2]

Demostración. De acuerdo a la descomposición de Hodge (2.3),

$$B^p_{deR}(M) = d(\Lambda^{p-1}(M))$$

y

$$Z^p_{deR}(M) = \ker d(\Lambda^p(M)) = H^p(M) \oplus d(\Lambda^{p-1}(M)),$$

de modo que

$$H^p_{deR}(M) = \frac{Z^p_{deR}(M)}{B^p_{deR}(M)} = \frac{H^p(M) \oplus d(\Lambda^{p-1}(M))}{d(\Lambda^{p-1}(M))} = H^p(M).$$ □

Corolario 2.2.12. *Todos los grupos de cohomología de De Rham sobre una variedad riemanniana M compacta son de dimensión finita.*

Demostración. El teorema de Hodge (2.2.6) nos asegura que $H^p(M)$ tiene dimensión finita y por el teorema de isomorfismo de Hodge (2.2.11) concluimos que $H^p_{deR}(M)$ es de dimensión finita. □

Sabemos entonces que cada grupo de cohomología de De Rham tiene una única forma armónica y por otro lado que el espacio de las p-formas armónicas es de dimensión finita.

2.3. Teorema de dualidad de Poincaré

Definición 2.3.1. *Definimos la función bilineal*

$$H^p_{deR}(M) \times H^{n-p}_{deR}(M) \to \mathbb{R}$$

dada por

$$([\phi], [\psi]) = \int_M \phi \wedge \psi,$$

donde $\phi \in H^p_{deR}(M)$ y $\psi \in H^{n-p}_{deR}(M)$.

[2]Los resultados de este capítulo fueron descubiertos en la década de 1940 por Hodge y De Rham, entre otros.

Veamos que esta transformación está bien definida. Si $\phi_1 = \phi + d\xi$, entonces

$$\int_M \phi_1 \wedge \psi = \int_M \phi \wedge \psi + \int_M d\xi \wedge \psi = \int_M \phi \wedge \psi + \int_M d(\xi \wedge \psi);$$

por el teorema de Stokes,

$$\int_M \phi_1 \wedge \psi = \int_M \phi \wedge \psi,$$

de modo que la transformación está bien definida.

Teorema 2.3.2 (Dualidad de Poincaré)**.** *Sea M una variedad riemanniana, compacta y orientable. La transformación antes definida es no singular y determina un isomorfismo de $H^{n-p}_{deR}(M)$ con el espacio $(H^p_{deR}(M))^*$.*

Demostración. A cada $\psi \in H^{n-p}_{deR}(M)$ le asociamos una funcional lineal L_ψ de la siguiente forma:

$$L_\psi(\phi) = (\phi, \psi) = \int_M \phi \wedge \psi.$$

Para ver que es no singular consideremos una clase de cohomología $[\phi] \in H^p_{deR}(M)$ que sea distinta de la clase del cero, con ϕ el representante armónico. Notemos que $*\phi$ es una $(n-p)$-forma armónica, gracias a la conmutatividad de Δ con $*$. Por lo tanto,

$$L_{*\,\phi}(\phi) = ([\phi], [*\phi]) = \int_M \phi \wedge *\phi = \|\phi\|^2 \geq 0.$$

El resultado muestra que $L \equiv 0$ si y sólo si $*\phi \in H^{n-p}_{deR}(M)$ es la clase del cero, lo que a su vez ocurre si y sólo si $\phi = 0$.

Sólo falta ver que L es suprayectiva; para esto procederemos con una técnica muy común en estos casos. Consideremos $L \in (H^p_{deR}(M))^*$ y $\phi_1, \ldots, \phi_n$ una base ortonormal de $H^p_{deR}(M)$, por lo tanto cualquier $\phi \in H^p_{deR}(M)$ es una combinación lineal de la base. Entonces

$$L(\phi) = L\Big(\sum_{i=1}^n a_i \phi_i\Big) = \sum_{i=1}^n a_i L(\phi_i)$$

Aseguramos que $\psi = \sum_{i=1}^n L(\phi_i) * \phi_i$ es el elemento de $H^{n-p}_{deR}(M)$ que define la funcional L dada, pues tenemos que

$$\begin{aligned} L_\psi(\phi) &= \Big(\phi, \sum_{i=1}^n L(\phi_i) * \phi_i\Big) = \int_M \phi \wedge \sum_{i=1}^n L(\phi_i) * \phi_i = \sum_{i=1}^n L(\phi_i) \int_M \phi \wedge *\phi_i \\ &= \sum_{i=1}^n L(\phi_i) \int_M \sum_{j=1}^n a_j \phi_j \wedge *\phi_i = \sum_{i=1}^n a_i L(\phi_i) \int_M \phi_i \wedge *\phi_i = \sum_{i=1}^n a_i L(\phi_i) = L(\phi). \quad \square \end{aligned}$$

Definición 2.3.3. *Denotamos por $H_p(M)$ al p-ésimo grupo de homología de M y por $b_p(M)$ al número de Betti*[3] *de $H_p(M)$.*

Teorema 2.3.4 (De Rham; [9], página 428)**.** *Para toda variedad suave M de dimensión n y todo entero no negativo p se tiene que*

$$H^p_{deR}(M) \simeq H_p(M).$$

Gracias al teorema de dualidad obtenemos una relación entre la homología y la cohomología. Más precisamente,

$$H_{n-p}(M) \simeq H^p_{deR}(M)$$

y tenemos una bonita relación entre los números de Betti, gracias al teorema de De Rham

$$b_p(M) = b_{n-p}(M).$$

Corolario 2.3.5. *Si M es una variedad riemanniana compacta, conexa y orientable, entonces $H^n_{deR}(M) \simeq \mathbb{R}$.*

Demostración. El resultado es consecuencia de que $H^0_{deR}(M) \simeq \mathbb{R}$: es decir, de que las únicas 0-formas cerradas son las constantes. $\square$

2.4. Descomposición de Hodge y descomposición de Helmholtz

En cálculo vectorial en 3 dimensiones uno de sus resultados más importantes es la descomposición de campos vectoriales bajo con algunas condiciones de integrabilidad en términos de los operadores gradiente y rotacional. En lo personal a mí siempre me llamó la atención este resultado pero más aún que sólo fuera válido en dimensión 3, esto por el hecho de que en el cálculo vectorial el operador rotacional no está definido en dimensiones mas altas, esto nos lleva a pensar que tal vez exista una generalización para cualquier dimensión pero en el lenguaje de formas diferenciales donde afortunadamente ya tenemos una generalización de los operadores mencionados.

Consideremos X un campo vectorial en una variedad riemanniana M de dimensión 3 compacta. Si X es un campo vectorial sobre M, gracias a la métrica riemanniana podemos identificar a X con una $1-forma$ diferencial α. Por el teorema de descomposición de Hodge sabemos que podemos ver a α como una combinación única,

$$\alpha = \omega + d\phi + d^*A$$

donde

$$\omega \in H(M) \quad \phi \in \Lambda^0(M) \quad A \in \Lambda^2(M).$$

[3]Enrico Betti (21 octubre 1823 - 11 agosto 1892) fue un matemático italiano, ahora recordado principalmente por su artículo de 1871 sobre topología que llevó a nombrar los números de Betti. Trabajó también en la teoría de ecuaciones, dando los primeros planteamientos de la teoría de Galois. También descubrió el teorema de Betti, un resultado en la teoría de la elasticidad.

Veamos quiénes son $d\phi$ y d^*A en coordenadas locales, como ϕ es una 0-forma

$$d\varphi = \frac{\partial \phi}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial \phi}{\partial x_3}dx_3.$$

Podemos identificar a $d\phi$ con el vector gradiente de la función ϕ y si A tiene la siguiente forma

$$A = A_3 dx_1 \wedge dx_2 - A_2 dx_1 \wedge dx_3 + dx_2 \wedge dx_3$$

aplicando d^*

$$d^*A = - * d * A = - * d(A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + A_3 dx_3)$$

$$= -*(\frac{\partial A_1}{\partial x_2}dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial A_1}{\partial x_2}dx_3 \wedge dx_1 + \frac{\partial A_2}{\partial x_1}dx_1 \wedge dx_2 + \frac{\partial A_2}{\partial x_3}dx_3 \wedge dx_2 + \frac{\partial A_3}{\partial x_1}dx_1 \wedge dx_3 + \frac{\partial A_3}{\partial x_2}dx_2 \wedge dx_3)$$

$$= - * ((\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2})dx_1 \wedge dx_2 + (\frac{\partial A_3}{\partial x_1} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1})dx_1 \wedge dx_3 + (\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3})dx_2 \wedge dx_3)$$

$$= (\frac{\partial A_1}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_1})dx_3 + (\frac{\partial A_3}{\partial x_1} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1})dx_2 + (\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3})dx_1$$

Como en variedades de dimensión 3 existe un isomorfismo entre las $2-formas$ y los campos vectoriales por lo tanto identificamos a A con un campo vectorial A' y de la misma forma si asociamos a d^*A el campo vectorial rotacional de A' (para ver con más detalle cómo se identificar los campos con las $formas$, ver [3], pág. 195). De la misma forma identificamos ω con un campo w y V es de la forma

$$X = w + \nabla \phi + \nabla \times A'$$

Gracias a que estamos en una variedad M de dimensión 3, la dimensión de $\Lambda^1(M)$ es la misma que $\Lambda^2(M)$ por lo tanto podemos identificar a los 2 conjuntos con los campos vectoriales de M. En la literatura se le conoce a este resultado sobre $\mathbb{R}^3$ como la descomposición de Helmholtz([4] Apéndice B), el cual asegura que todo campo vectorial podemos verlo como el gradiente de una función más el rotacional de un campo vectorial. Identificando las $1-formas$ y las $2-formas$ con campos vectoriales vemos que la descomposición de Hodge es una generalización de la descomposición de Helmholtz y en el caso en que $H^1_{deR}(M)$ no sea trivial hay que agregar las formas armónicas.
Ahora veremos cómo la compacidad sin fronteras es un ingrediente importante de la teoría de Hodge, ya que si M es una variedad orientable siempre podemos construir el operador d^* aunque éste no sea adjunto de d.

Ejemplo 2.4.1. *Consideremos una variedad compacta con frontera, rescatemos las cuentas del Corolario 2.1.11*

$$d(\alpha \wedge *\beta) = *(< d\alpha, \beta > -(-1)^{n(p+1)+1} < \alpha, *d * \beta >)$$

integrando

$$\int_M d(\alpha \wedge *\beta) = \int_M *(< d\alpha, \beta > -(-1)^{n(p+1)+1} < \alpha, *d * \beta >)$$

por el teorema de Stokes

$$\int_{\partial M} \alpha \wedge *\beta = \int_M (< d\alpha, \beta > -(-1)^{n(p+1)+1} < \alpha, *d * \beta >) * (1)$$

por lo que

$$(d\alpha, \beta) = \int_{\partial M} \alpha \wedge *\beta + (\alpha, d^*\beta)$$

para toda $\alpha \in \Lambda^{p-1}(M)$ *y* $\beta \in \Lambda^p(M)$. *Por lo tanto* d^* *no es adjunto de* d. *Notemos que si* M *no es compacta no podemos aplicar el teorema de Stokes y concluir que* d^* *es adjunto de* d.

Ejemplo 2.4.2. *Veamos que si* M *no es compacta entonces pueden existir formas que sean* $d-$ *cerradas y* $d^* -$ *cerradas pero no armónicas.*
Consideremos $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ *con la métrica euclidiana. Sea* X *el campo vectorial sobre* $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ *dado por*

$$X = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(x, y, z)$$

que salvo unas constantes es la fuerza de gravedad de Newton (o fuerza de Coulomb), como sabemos al ser el gradiente de la función $V = -\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$ *el rotacional del campo se tiene que anular, más interesante es el hecho de que este campo también tenga divergencia cero.*

$$\nabla \cdot X = \frac{3}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} = 0.$$

Ahora definimos la siguiente $2-forma$

$$\omega = *dV = \frac{(zdx \wedge dy - ydx \wedge dz + xdy \wedge dz)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Por construcción $d^*\omega = 0$, *ahora veamos que* ω *es* $d-$ *cerrada.*

$$d\omega = \frac{(dz \wedge dx \wedge dy - dy \wedge dx \wedge dz + dx \wedge dy \wedge dz)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3(x^2+y^2+z^2)dx \wedge dy \wedge dz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} = 0$$

ω *es una* $2-forma$ $d-$ *cerrada y* $d^* -$ *cerrada pero* $\Delta\omega \neq 0$. *En efecto, por la ecuación 2.1 el operador de Laplace está dado por*

$$\Delta\omega = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\omega = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left(\frac{(zdx \wedge dy - ydx \wedge dz + xdy \wedge dz)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

por lo tanto basta ver que un de los coeficientes de la base es distintos de cero

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-6}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

usando la fórmula del cálculo vectorial $\Delta(fg) = f\Delta g + 2\nabla g \cdot \nabla f + g\Delta f$
Afirmamos que $\omega \in H^2_{deR}(\mathbb{R}^3 - \{0\})$. *Esto está íntimamente ligado con la física del problema, integremos* $q\omega$ *sobre una esfera de radio* r *donde* q *es la carga o la masa. Para esto definimos el cambio de coordenadas esféricas* $F(\phi,\psi) = r(cos\psi sen\phi, sen\psi cos\phi, cos\phi)$.

$$\int_{S^2(r)} q\omega = q\int_{[0,\pi]\times[0,2\pi]} F^*\omega = q\int_{[0,\pi]\times[0,2\pi]} \omega(DF(\frac{\partial}{\partial\phi}), DF(\frac{\partial}{\partial\psi}))$$

$$= q\int_{[0,\pi]\times[0,2\pi]} \frac{(xdx\wedge dy - ydx\wedge dz + zdy\wedge dz)}{r^3}(DF(\frac{\partial}{\partial\phi}), DF(\frac{\partial}{\partial\psi}))$$

Usando el hecho de que $\frac{1}{r}(zdx\wedge dy - ydx\wedge dz + zdy\wedge dz)$ *es la forma de área de la esfera ([7] pág. 266)*

$$= q\int_{[0,\pi]\times[0,2\pi]} \frac{r^2 sen\phi\ d\phi\wedge d\psi}{r^2}(\frac{\partial}{\partial\phi}, \frac{\partial}{\partial\psi}) = q\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} sen\phi d\phi d\psi = 4\pi q$$

Podremos notar que $\omega \in H^2_{deR}(\mathbb{R}^3 - \{0\})$ *tiene como consecuencia inmediata la ley de Gauss para el campo eléctrico en este caso particular.*
Para ver que $[\omega]$ *es la única clase de cohomología, veamos el caso más general de* $\mathbb{R}^n - \{0\}$ *con* $3 \leq n$ *(el caso* $n = 2$ *se discutirá en el siguiente capítulo), definiendo*

$$\omega = *d\frac{-1}{n-2}\frac{1}{(\sum_{i=1}^n x_i^2)^{\frac{n-2}{2}}} = \frac{\sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} x_j d\widehat{x}_j}{(\sum_{i=1}^n x_i^2)^{\frac{n}{2}}} \tag{2.4}$$

donde $d\widehat{x}_j$ *es la* $(n-1)-forma$ *que tiene entre sus productos todas las* dx_i *menos la* j*-ésima. Otra vez* ω *es* d^* *cerrada por construcción. Veamos que es* $d-cerrada$

$$d\omega = \frac{\sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} dx_j \wedge d\widehat{x}_j}{(\sum_{i=1}^n x_i^2)^{\frac{n}{2}}} - \frac{n(\sum_{i=1}^n x_i^2) dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n}{(\sum_{i=1}^n x_i^2)^{\frac{n+2}{2}}} = 0$$

Pero no es exacta dado que si integramos sobre la esfera de radio r *con centro en el origen tenemos y usamos el hecho de que la suma* $\sum_{j=1}^n (-1)^{j-1}\frac{x_j}{r}d\widehat{x}_j$ *es la diferencial de área de una esfera ([7] pág 266),*

$$\int_{S^{n-1}(r)} \omega = vol(S^{n-1})$$

La integral no depende de r *y concluimos que* $\omega \in H^{n-1}_{deR}(\mathbb{R}^n - \{0\})$.
Definimos $F(x,t) : (\mathbb{R}^n - \{0\}) \times [0,1] \to (\mathbb{R}^n - \{0\})$ *como*

$$F(x,t) = tx + (1-t)\frac{x}{\|x\|}$$

Por lo tanto $(\mathbb{R}^n - \{0\})$ *es homotópico a* S^{n-1} *y podemos concluir que* $[\omega]$ *es la única clase de cohomología en* $H^{n-1}_{deR}(\mathbb{R}^n - \{0\})$. *Por lo tanto encontramos un representante de* $\mathbb{R}^n - \{0\}$ *que es* $d^* -$ *cerrado y no es armónico.*

Ejemplo 2.4.3. *Veamos cómo puede existir una forma armónica que no sea d cerrada. Consideremos la* $0-forma$ *dada por* $V = -\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$ *por lo tanto*

$$dV = \frac{xdx + ydy + zdz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$*dV = \frac{zdx \wedge dy - ydx \wedge dz + xdy \wedge dz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$d * dV = \frac{(dz \wedge dx \wedge dy - dy \wedge dx \wedge dz + dx \wedge dy \wedge dz)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3(x^2+y^2+z^2)dx \wedge dy \wedge dz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} = 0$$

Por un lado concluimos que la $0-forma$ $V = -\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$ *es armónica.*

$$\Delta V = d^*dV = * \, d\omega = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} = 0$$

Claramente $V \notin H^1_{deR}(\mathbb{R}^3 - \{0\})$ *dado que* $dV \neq 0$, V *es armónica pero no es representante de ningún grupo de cohomología.*

Con esto vemos la importancia de la compacidad sin frontera.

2.5. Aplicaciones del teorema de Hodge

Ejemplo 2.5.1. *Consideremos* T^n *el toro de dimensión* n *equipado con la métrica euclidiana inducida por la proyección canónica* $\pi : \mathbb{R}^n \to T^n$. *Por la ecuación 2.1 tenemos que el laplaciano está dado por*

$$\Delta(\omega_{i_1,\ldots,i_p} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}) = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \omega_{i_1,\ldots,i_p}}{\partial x_j^2} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$$

Por lo tanto una $1-forma$ *sobre* T^n *es armónica* $\Longleftrightarrow$ *todos los coeficientes de la base* $dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$ *son armónicos y por el Corolario 2.1.17 sabemos que la única función armónica en una variedad compacta es la constante, por lo tanto*

$$b_p(T^n) = dim\ H^p(T^n) = dim\ \Lambda^p(T^n) = \binom{n}{p}$$

Ahora veremos una relación entre la curvatura de Ricci[4] de una variedad compacta sin frontera y las $1-formas$ armónicas de ésta. Haremos uso del concepto de conexión y el tensor de Riemann.

[4]Gregorio Ricci-Curbastro (1853-1925) matemático italiano. Es famoso como el inventor del cálculo tensorial pero publicó trabajos importantes en muchos campos. Su publicación más famosa es "el cálculo diferencial absoluto", fue publicada bajo el nombre de Ricci y como co-autor su ex estudiante Tullio Levi-Civita. Parece ser la única vez que Ricci-Curbastro utilizó la forma acortada de su nombre en una publicación, lo cual ha causado confusión hasta hoy.

Teorema 2.5.2. *Si M es una variedad compacta y $f\ : M \to \mathbb{R}$ una función suave entonces*

$$\int_M \Delta f * (1) = 0.$$

Demostración. Dada la ecuación 2.2 tenemos que

$$\int_M \Delta f * (1) = -\int_M d\, d^* f * (1) = -\int_{\partial M} d^* f * (1) = 0.$$

$\square$

Nota 2.5.3. *Denotamos por $R(,)$ al tensor de Riemann. Denotaremos el tensor Ricci por $Ric(\ ,\ )$.*

Teorema 2.5.4. *[8](pág 171) (Fórmula de Weitzenböck[5]) Dada una variedad M con un marco ortonormal local $e_1, \ldots, e_n$ donde n es la dimensión de M y $\phi_1, \ldots, \phi_n$ es un marco ortonormal dual entonces el operador de Laplace opera sobre las $p - formas$ como*

$$\Delta = -\sum_{i=1}^{n} \nabla_{e_i} \nabla_{e_i} - \sum_{i,j=1}^{n} \phi_i \wedge \mathfrak{i}(e_j) R(e_i, e_j).$$

Lema 2.5.5. *Sea una variedad M donde $e_1, \ldots, e_n$ es un marco local ortonormal sobre M y $\phi_1, \ldots, \phi_n$ el marco dual. Para una $1 - forma$ η tenemos que*

$$-\Delta < \eta, \eta >= 2(- < \Delta\eta, \eta > + \sum_{i=1}^{n} < \nabla_{e_i}\eta, \nabla_{e_i}\eta > - \sum_{i,j=1}^{n} < \eta, \phi_i \wedge i(e_j) R(e_i, e_j)\eta >$$

Demostración. Recordando que el laplaciano de una función puede escribirse en términos de la conexión, tenemos

$$-\Delta < \eta, \eta >= \sum_{i=1}^{n} \nabla_{e_i} \nabla_{e_i} < \eta, \eta >= 2 \sum_{i=1}^{n} < \nabla_{e_i}\eta, \nabla_{e_i}\eta > + < \eta, \nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\eta >$$

sustituyendo la fórmula de Weitzenböck tenemos que

$$-\Delta < \eta, \eta >= -2 < \Delta\eta, \eta > +2 < \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\eta, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\eta > -2 < \eta, \eta^i \wedge i(e_j) R(e_i, e_i)\eta >$$

$\square$

Lema 2.5.6. *Si η es una $1 - forma$ entonces*

$$-\Delta < \eta, \eta >= -2 < \Delta\eta, \eta > +2|\nabla\eta|^2 + 2Ric(\eta, \eta)$$

[5]Roland Weitzenböck (26 mayo 1885 - 24 julio 1955) matemático austriaco, trabajó en geometría dife rencial. Fue nombrado profesor de matemáticas en la Universidad de Amsterdam en 1921 por iniciativa de Brouwer.

Demostración. Sea $\eta = \sum_{k=1}^{n} \eta_k \phi_k$, tratemos el término del tensor de Riemann de Lema 2.5.5

$$\sum_{i,j=1}^{n} < \eta, \phi_i \wedge i(e_j) R(e_i, e_j)\eta >= \sum_{i,j=1}^{n} < \sum_{\ell=1}^{n} \eta_\ell \phi_\ell, \phi_i \wedge i(e_j) R(e_i, e_j) \sum_{k=1}^{n} \eta_k \phi_k >$$

$$= \sum_{i,j,k,\ell=1}^{n} \eta_\ell \eta_k < \phi_\ell, \phi_i \wedge i(e_j) R(e_i, e_j) \phi_k >$$

$$= - \sum_{i,j,k,\ell,m=1}^{n} \eta_\ell \eta_k < \phi_\ell, \phi_i \wedge i(e_j) R_{kmij} \phi_m >= - \sum_{i,j,k,\ell,=1}^{n} \eta_\ell \eta_k < \eta_\ell, R_{kjij} \eta_j >$$

$$= \sum_{\ell,k,j} \eta_\ell \eta_k R_{kj\ell j} = -Ric(\eta, \eta).$$

por otro lado

$$\sum_{i+1}^{n} < \nabla_{e_i} \eta, \nabla_{e_i} \eta >= |\nabla \eta|^2$$

□

Corolario 2.5.7. *Si ω es una $1-forma$ armónica sobre M tenemos que*

$$-\Delta < \omega, \omega >= 2 < \nabla_{e_i} \omega, \nabla_{e_i} \omega > +2Ric(\omega, \omega).$$

Demostración. Usando el Lema 2.5.6 y el hecho de que η es armónica se sigue que

$$< \Delta \eta, \eta >= 0$$

□

Teorema 2.5.8. *(Böchner)*

1. *Sea M una variedad riemanniana compacta de dimensión n con curvatura de Ricci no negativa entonces toda $1-forma$ armónica es paralela ($\nabla \omega = 0$) y tenemos que*

$$b_1(M) \leq n.$$

La igualdad se da $\iff$ M es un toro plano.

2. *Si M es una variedad riemanniana compacta de dimensión n con curvatura de Ricci positiva entonces M no tiene $1-formas$ armónicas no triviales.*

Demostración. 1. Integrando la fórmula del Corolario 2.5.7 y usando el Corolario 2.5.2

$$0 = - \int_M \Delta < \omega, \omega > *(1) = 2 \int_M [|\nabla \omega|^2 + Ric(\omega, \omega)] * (1) \tag{2.5}$$

pero el lado derecho es no negativo por hipótesis con lo que concluimos que

$$\nabla \omega = 0$$

y

$$Ric(\omega, \omega) = 0$$

por lo que ω es paralela.
Sabemos que la dimensión del espacio vectorial de las $1-formas$ paralelas es a lo más la dimensión del espacio cotangente, con lo que obtenemos que $b_1(M) \leq n$.
Por el Ejemplo 2.5.1 sabemos que $b_1(T^n) = n$. El regreso usa resultados de la topología algebráica que el lector puede ver en ([10] pág 289).

2. Si M tiene curvatura de Ricci posítiva y suponemos que ω es armónica, tenemos que $Ric(\omega, \omega) > 0$, por otra parte usando la ecuación 2.5

$$\int_M |\nabla\omega|^2 = -\int_M Ric(\omega, \omega)] * (1)$$

el lado derecho de la ecuación es negativo, lo cual es una contradicción, por lo que la única opción es que $\omega = 0$.

$\square$

Capítulo 3

Variedades complejas y formas diferenciales complejas

3.1. La estructura cuasi compleja

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y par.

Definición 3.1.1. *Un endomorfismo $J : V \to V$ tal que $J^2 = -id$ es llamado una estructura cuasi compleja sobre V.*

A partir de aquí abreviaremos estructura cuasi compleja como e.c.c.

Ejemplo 3.1.2. *Sea $V = \mathbb{R}^2$ y consideremos $J(x, y) = (-y, x)$. Esta transformación es biyectiva y cumple que $J^2(x, y) = -(x, y)$. Analicemos la matriz asociada a la transformación con respecto a la base canónica:*

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in O(2).$$

Notemos que ésta es la rotación por $\frac{\pi}{2}$; recordemos que multiplicar por i es la rotación por el mismo ángulo en el plano complejo. Si asociamos al número complejo $z = x + iy$ la pareja (x, y) se cumple que

$$i(x + iy) = ix - y \to (-y, x);$$

así podemos pensar la multiplicación por i de un número complejo como la aplicación de J a la pareja correspondiente; de aquí el nombre de estructura cuasi compleja.

Esto es fácilmente generalizable en $\mathbb{R}^{2n}$ usando la matriz

$$J = \begin{pmatrix} 0_{n\times n} & -id_{n\times n} \\ id_{n\times n} & 0_{n\times n} \end{pmatrix}$$

Notemos que la base de $\mathbb{R}^{2n}$ dada por $e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}, \ldots, e_{2n}$ cumple que

$$J(e_{n+i}) = -e_i \quad y \quad J(e_i) = e_{n+i} \ \ con \ \ i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Sabemos que el espacio vectorial $\mathbb{C}^n$ sobre el campo $\mathbb{R}$ tiene dimensión $2n$ ya que, por ejemplo, los vectores $(1,0,\ldots,0)$ y $(i,0,\ldots,0)$ son linealmente independientes . Por otro lado, el espacio $\mathbb{C}^n$ sobre el campo $\mathbb{C}$ es de dimensión n; en este caso y por ejemplo, $(1,0,\ldots,0)$ y $(i,0,\ldots,0)$ son linealmente dependientes.

Lema 3.1.3. *Si J es una e.c.c. sobre un espacio vectorial real V entonces (V,J) admite la estructura de espacio vectorial complejo.*

Demostración. Dado $v \in V$, definimos $(a+ib)v = av + bJ(v)$ donde $a,b \in \mathbb{R}$. Verificaremos la asociatividad de esta estructura. Sean $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. Si hacemos las operaciones complejas comunes tenemos que

$$(a+ib)(c+id)v = ((ac-bd)+i(ad+bc))v = (ac-bd)v + (ad+bc)J(v).$$

Si operamos usando la estructura cuasi compleja,

$$\begin{aligned}(a+ib)(c+id)v &= (a+ib)(cv+dJ(v)) \\ &= acv + adJ(v) + bJ(cv) + bJ(dJ(v)) \\ &= (ac-bd)v + (ad+bc)J(v),\end{aligned}$$

donde hemos usado $J^2 = -id$. Además, esta definición respeta la operación $i^2v = -v$:

$$i(iv) = iJ(v) = J(J(v)) = -v. \qquad \square$$

Definición 3.1.4. *Denotaremos por $S : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}$ a la siguiente transformación lineal*

$$S(z_1,\ldots,z_n) = (x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n),$$

donde $z_j = x_j + iy_j$ con $j = 1,\ldots,n$.

Al existir una transformación lineal y biyectiva podemos reducir el estudio del espacio vectorial real V de dimensión $2n$ al de un espacio vectorial $\mathbb{C}^n$ con el campo $\mathbb{R}$. Gracias a la e.c.c. podemos darle a un espacio vectorial real V la estructura de espacio vectorial complejo.

Ejemplo 3.1.5. *Sea $(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n) \in V$ y $a,b \in \mathbb{R}$.*

$$(a+ib)S^{-1}(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n) = (a+ib)(x_1+iy_1,\ldots,x_n+iy_n)$$

$$= a(x_1+iy_1,\ldots,x_n+iy_n) + b(-y_1+ix_1,\ldots,-y_n+ix_n)$$

por el otro lado

$$(a+bJ)(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n) = a(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n) + b(-y_1,\ldots,-y_n,x_1,\ldots,x_n)$$

$$S^{-1}((a+bJ)(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n))$$
$$= a(x_1+iy_1,\ldots,x_n+iy_n) + b(-y_1+ix_1,\ldots,-y_n+ix_n).$$

La suma se respeta dado que S es lineal. Ésta es llamada la estructura compleja estándar.

La estructura compleja y estructura cuasi compleja son nociones equivalentes en un espacio vectorial.

Corolario 3.1.6. *Cualquier e.c.c. induce una orientación sobre V.*

Gracias al lema 3.1.3 podemos heredar la orientación que tendría el espacio vectorial pensándolo como un espacio real donde la orientación está dada por la base estándar $\{1, i\} = \{e_1, ie_1\}$ (para el caso de $n = 1$), la orientación está bien definida bajo el automorfismo y la nueva base orientada es $\{e_1, J(e_1)\}$.

Definición 3.1.7. *Para un espacio vectorial real V con una e.c.c. podemos definir su complejificación a partir del producto tensorial con $\mathbb{C}$, actuando como $V \otimes \mathbb{C}$ y lo denotamos por $V_{\mathbb{C}}$.*

El espacio vectorial V está naturalmente contenido en $V_{\mathbb{C}}$ vía el mapeo $v \to v \otimes 1$; por lo tanto $V \subset V_{\mathbb{C}}$ y tenemos que la parte izquierda del producto tensorial queda invariante bajo la conjugación, sobre $V_{\mathbb{C}}$ es decir $\overline{v \otimes \lambda} = v \otimes \overline{\lambda}$ para toda $v \in V$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, dado que v es un vector en un espacio real.

Definición 3.1.8.

$$J(v \otimes \lambda) = J(v) \otimes \lambda$$

Ahora podemos ver a J como un endomorfismo $V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$. Calculemos sus valores propios: Sea v un vector propio con valor propio λ, entonces

$$-v = J^2(v) = \lambda^2 v,$$

de donde concluimos que los valores propios en $V_{\mathbb{C}}$ son $\pm i$. Esto da pie a la siguiente

Definición 3.1.9. *Dada una e.c.c. J sobre un espacio vectorial real V y dado $J : V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$ la extensión $\mathbb{C}$-lineal, denotamos a los espacios propios de los valores propios $i, -i$ por $V^{1,0}$ y $V^{0,1}$ respectivamente; en otras palabras*

$$V^{1,0} = \{v \in V_{\mathbb{C}} \mid J(v) = iv\}$$

$$V^{0,1} = \{v \in V_{\mathbb{C}} \mid J(v) = -iv\}.$$

Lema 3.1.10. *Dado un espacio vectorial real V equipado con e.c.c. entonces*

$$V_{\mathbb{C}} = V^{1,0} \oplus V^{0,1}$$

y la conjugación compleja sobre $V_{\mathbb{C}}$ es un isomorfismo de $V^{1,0}$ a $V^{0,1}$.

Demostración. Sabemos que espacios propios con valores propios distintos forman una suma directa de algún subespacio de V, de modo que basta ver que la suma es todo V. Sea $v \in V$; notemos que podemos escribirlo como

$$v = \frac{1}{2}(v - iJ(v)) + \frac{1}{2}(v + iJ(v));$$

veamos que cada uno de los sumandos pertenece a $V^{1,0}$ y $V^{0,1}$, respectivamente:

$$J\frac{1}{2}(v - iJ(v)) = \frac{1}{2}(Jv - iJJ(v)) = \frac{1}{2}(Jv + iv) = \frac{1}{2}(-i(i)Jv + iv) = i\frac{1}{2}(v - iJv);$$

análogamente,

$$J\frac{1}{2}(v + iJ(v)) = \frac{1}{2}(Jv + iJJ(v)) = \frac{1}{2}(Jv - iv) = \frac{1}{2}(-i(i)Jv - iv) = -i\frac{1}{2}(v + iJv).$$

Así, todo elemento de $V_{\mathbb{C}}$ es expresado como la suma de elementos en $V^{1,0}$ y $V^{0,1}$, y la suma es directa.

Veamos que la conjugación es un isomorfismo de $V^{1,0}$ a $V^{0,1}$:

$$\overline{\frac{1}{2}(v - iJ(v))} = \frac{1}{2}(\overline{v} + i\overline{J(v)}) = \frac{1}{2}(\overline{v} + iJ(\overline{v})).$$

Con esto vemos que la función está bien definida. Para la inyectividad, sea $z = x + iy \in V^{1,0}$ tal que $\overline{z} = 0$ por lo tanto $x = 0$ y $y = 0$, concluimos que $z = 0$.
Por último demostremos que es suprayectiva, sea $w \in V^{0,1}$. Veamos que $\overline{w} \in V^{1,0}$, como J es un endomorfismo real tenemos que $J\overline{w} = \overline{Jw} = \overline{iw} = -i\overline{w}$ y sabemos que $\overline{\overline{w}} = w$. $\square$

Corolario 3.1.11. *Dado V un espacio vectorial real equipado con una e.c.c. J, el espacio dual a V tiene una e.c.c. dada por $J(f)(v) = f(J(v))$ que induce una descomposición sobre $(V^*)_{\mathbb{C}} = Hom_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{C}) = (V_{\mathbb{C}})^*$ dada por*

$$(V^*)^{1,0} = \{f \in Hom_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{C}) \mid f(Jv) = if(v)\} = (V^{1,0})^*,$$

$$(V^*)^{0,1} = \{f \in Hom_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{C}) \mid f(Jv) = -if(v)\} = (V^{0,1})^*.$$

Definición 3.1.12. *Si V es un espacio real de dimensión $2n$, el álgebra exterior de V es*

$$\Lambda(V) = \bigoplus_{k=0}^{2n} \Lambda^k(V);$$

análogamente tenemos

$$\Lambda(V_{\mathbb{C}}) = \bigoplus_{k=0}^{2n} \Lambda^k(V_{\mathbb{C}}).$$

Más aún, $\Lambda(V_{\mathbb{C}}) = \Lambda V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ y $\Lambda(V)$ es un subespacio real de $V_{\mathbb{C}}$, invariante bajo la conjugación compleja.

Si V es un espacio vectorial real de dimensión $2n$ y está equipado con una e.c.c., entonces podemos descomponer $\Lambda^{p,q}(V)$ de la siguiente manera:

$$\Lambda^{p,q}(V) := \Lambda^p(V^{1,0}) \wedge_{\mathbb{C}} \Lambda^q(V^{0,1})$$

donde $V^{1,0}$ y $V^{0,1}$ son espacios de dimensión n. Si $\alpha \in \Lambda^{p,q}(V)$ decimos que tiene un bigrado (p, q). Aquí usamos que toda suma directa sobre el espacio vectorial induce una suma directa sobre el álgebra exterior.

Lema 3.1.13. *Dado V un espacio vectorial real equipado con e.c.c. tenemos que*

1. *$\Lambda^{p,q}(V)$ es un subespacio de $\Lambda^{p+q}(V_{\mathbb{C}})$.*

2. *$\Lambda^k(V_{\mathbb{C}}) = \bigoplus_{p+q=k} \Lambda^{p,q}(V)$.*

3. *La conjugación sobre $\Lambda^k V_{\mathbb{C}}$ define un isomorfismo entre $\Lambda^{p,q}V$ y $\Lambda^{q,p}V$.*

4. *El producto cuña de dos tensores define un mapeo $\Lambda^{p,q}V \times \Lambda^{r,s}V \to \Lambda^{p+r,q+s}V$.*

Demostración. Primero obtendremos una base para $\Lambda^{p,q}(V)$. Como ya vimos, V está contenido en $V_{\mathbb{C}}$. Si tomamos bases $v_1, \dots, v_n$ de $\Lambda^{1,0}V$ y $w_1, \dots, w_n$ de $\Lambda^{0,1}V$, considerando los productos cuña $v_{k_1} \wedge \cdots \wedge v_{k_p} = v_K$ y $w_{j_1} \wedge \cdots \wedge w_{j_q} = w_J$ donde cada $1 \leq k_1 < \cdots < k_p \leq n$ y $1 \leq j_1 < \cdots < j_q \leq n$ es una colección creciente de índices, afirmamos que los productos $v_K \wedge w_J$ forman una base de $\Lambda^{p,q}(V)$.

Veamos que son linealmente independientes. Sean $\lambda_{K,J} \in \mathbb{R}$ tales que

$$\sum_{K,J} \lambda_{K,J} v_K \wedge w_J = 0;$$

evaluando en $e_{K'}, e_{J'}$, donde $e_{K'} = \{e_{k'_1}, \dots, e_{k'_p}\}$, $e_{J'} = \{e_{j'_1}, \dots, e_{j'_q}\}$ y $v_k(e_{k'}) = \delta_{kk'}$, $w_j(e_{j'}) = \delta_{jj'}$, entonces

$$\sum_{K,J} \lambda_{K,J} v_K \wedge w_J(e_{K'}, e_{J'}) = \lambda_{K',J'} = 0.$$

Concluimos que $\lambda_{K',J'} = 0$ para todo par de conjuntos de índices.

Para ver que los productos cuña generan a $\Lambda^{p,q}(V)$, consideremos $\alpha \in \Lambda^{p,q}(V)$ arbitrario; sabemos que α es una combinación lineal de todos los productos cuña sin importar el orden, lo que reescribimos como sigue:

$$\begin{aligned} &\sum_{k_1,\dots,k_p,j_1,\dots,j_q} \lambda_{k_1,\dots,k_p,j_1,\dots,j_q} v_{k_1} \wedge \cdots \wedge v_{k_p} \wedge w_{j_1} \wedge \cdots \wedge w_{j_q} \\ &= \sum_{1 \leq k_1 < \cdots < k_p \leq p, 1 \leq j_1 < \cdots < j_q \leq q} (\sum (-1)^s \lambda_{k_1,\dots,k_p,j_1,\dots,j_q}) v_{k_1} \wedge \cdots \wedge v_{k_p} \wedge w_{j_1} \wedge \cdots \wedge w_{j_q}, \end{aligned}$$

donde s es el número de permutaciones necesario para obtener un conjunto creciente de índices para cada $\{k_1, \dots, k_p, j_1 \dots, j_q\}$. Logramos hacer una combinación lineal, por lo tanto el conjunto $v_K \wedge w_J$ genera y es una base.

1. Ahora mostraremos cada inciso del lema. Sabemos que

$$v_K \wedge w_J = v_{k_1} \otimes 1 \wedge \cdots \wedge v_{k_p} \otimes 1 \wedge w_{j_1} \otimes 1 \wedge \cdots \wedge w_{j_q} \otimes 1 \in \Lambda^{p+q} V_{\mathbb{C}};$$

   por lo tanto, $v_K \wedge w_J \in \Lambda^{p+q} V_{\mathbb{C}}$.

2. Cualquier suma directa sobre un espacio vectorial induce una suma directa en las (p,q)-formas del espacio. Como $V_{\mathbb{C}} = V^{1,0} \oplus V^{0,1}$ y tenemos que $\Lambda^p V^{1,0} \wedge \Lambda^q V^{0,1} \subset \Lambda^k V_{\mathbb{C}}$ para toda $p+q=k$ llegamos a que $\bigoplus_{p+q=k} \Lambda^{p,q} V \subset \Lambda^k V_{\mathbb{C}}$.

3. Dado que la conjugación abre la suma y la multiplicación se sigue que

$$\overline{\omega_1 \wedge \omega_2} = \overline{\omega_1 \otimes \omega_2 - \omega_2 \otimes \omega_1} = \overline{\omega_1 \otimes \omega_2} - \overline{\omega_2 \otimes \omega_1} = \overline{\omega_1} \otimes \overline{\omega_2} - \overline{\omega_2} \otimes \overline{\omega_1} = \overline{\omega_1} \wedge \overline{\omega_2}$$

   y dado que $\overline{V^{1,0}} = V^{0,1} \Rightarrow \overline{(V^*)^{1,0}} = (V^*)^{0,1}$. $\square$

Asumamos que $z = \frac{1}{2}(x - iy) \in V^{1,0}$ y veamos qué implica esto:

$$J(z) = \frac{1}{2}(J(x) - iJ(y)) = iz = \frac{1}{2}(y + ix)$$

y encontramos que $y = J(x)$ y $x = -J(y)$ que como ya vimos en el ejemplo 3.1.2 esto lo que cumple la base de V al aplicarle J, de modo que si consideramos $\{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n\}$ base de V llegamos a que $\{z_j = \frac{1}{2}(x_j - iy_j),\ j = 1, \ldots, n\}$ es una base natural para $V^{1,0}$. Por el lema 3.1.10 sabemos que $\overline{z} \in V^{0,1}$, pues

$$J(\overline{z}) = \frac{1}{2}(J(x) + iJ(y)) = \frac{1}{2}(y - ix) = -iz;$$

así que análogamente $\{\overline{z}_j = \frac{1}{2}(x_j + iy_j),\ j = 1, \ldots, n\}$ es una base natural de $V^{0,1}$. Esto da pie a la siguiente identidad:

Lema 3.1.14. *Para toda $m \leq dim_{\mathbb{C}} V^{1,0}$ tenemos*

$$\left(-\frac{i}{2}\right)^m (z_1 \wedge \overline{z_1}) \wedge \cdots \wedge (z_m \wedge \overline{z_m}) = (x_1 \wedge y_1) \wedge \cdots \wedge (x_m \wedge y_m).$$

Esto define la forma de volumen para el caso $m = n$.

Demostración. Basta calcular $\frac{i}{2}(z_1 \wedge \overline{z_1})$:

$$\begin{aligned} -\frac{i}{2}(z_1 \wedge \overline{z_1}) &= -\frac{i}{2}((x_1 - iy_1) \wedge (x_1 + iy_1)) = -\frac{i}{2}(x_1 \wedge iy_1 - iy_1 \wedge x_1) \\ &= -\frac{i}{2}(i(x_1 \wedge y_1) - i(y_1 \wedge x_1)) = -\frac{i}{2}(2i(x_1 \wedge y_1)) = x_1 \wedge y_1. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\left(\frac{i}{2}\right)^m (z_1 \wedge \overline{z_1}) \wedge \cdots \wedge (z_m \wedge \overline{z_m}) = \frac{i}{2}(z_1 \wedge \overline{z_1}) \wedge \cdots \wedge \frac{i}{2}(z_m \wedge \overline{z_m}) = (x_1 \wedge y_1) \wedge \cdots \wedge (x_m \wedge y_m)$$

y para el caso $m = n$ tenemos que

$$\left(\frac{i}{2}\right)^n (z_1 \wedge \overline{z_1}) \wedge \cdots \wedge (z_n \wedge \overline{z_n}) = (x_1 \wedge y_1) \wedge \cdots \wedge (x_n \wedge y_n).$$ □

Este operador nos servirá para definir la extensión compleja de la derivada exterior.

Definición 3.1.15. *Sea $(V, <,>)$ un espacio vectorial real de dimensión $2n$ equipado con un producto escalar. Decimos que una e.c.c. J sobre V es compatible con el producto escalar $<,>$ si $< J(v), J(w) >=< v, w >$ para todo $v, w \in V$.*

Podemos extender el producto interior a $V_{\mathbb{C}}$ para obtener un producto hermitiano de la siguiente forma.

Definición 3.1.16. $< v \otimes \lambda, w \otimes \mu >_{\mathbb{C}} := (\lambda\overline{\mu}) < v, w >$, *donde $v, w \in V$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.*

Corolario 3.1.17. *Si $(V, <,>)$ es un espacio vectorial euclidiano equipado con una e.c.c. tal que sea compatible con $<,>$, entonces los espacios $V^{1,0}$ y $V^{0,1}$ son ortogonales con respecto a $<,>_{\mathbb{C}}$.*

Demostración. Dado que cualquier elemento de $V^{1,0}$ es de la forma $v - iJ(v)$ y cualquier elemento en $V^{0,1}$ es de la forma $w + iJ(w)$, al hacer los cálculos tenemos

$$\begin{aligned} < v - iJ(v), w + iJ(w) >_{\mathbb{C}} &= < v, w >_{\mathbb{C}} + < v, iJ(w) >_{\mathbb{C}} \\ &\quad + < -J(v), w >_{\mathbb{C}} + < -iJ(v), iJ(w) >_{\mathbb{C}} \\ &= < v, w > +(-i) < v, J(w) > \\ &\quad +(-i) < J(v), w > +(i^2) < J(v), J(w) > \\ &= < v, w > - < J(v), J(w) > \\ &\quad +(-i)(< v, J(w) > + < J(v), w >) \\ &= (-i)(< v, J(w) > + < JJ(v), Jw >) \\ &= (-i)(< v, J(w) > - < v, Jw >) = 0. \quad \square \end{aligned}$$

3.2. Formas diferenciales

Empecemos con un abierto $U \subset \mathbb{C}^n$, visto como un abierto de un espacio vectorial real de dimensión $2n$. Para cada x tenemos un espacio tangente T_xU de dimensión $2n$, con una base dada por los vectores

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_n}$$

donde $z_j = x_j + iz_j$ son las coordenadas estándar para $\mathbb{C}^n$; más aún los vectores $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_n}$ son una trivialización local de TU.

Cada espacio tangente T_xU admite una e.c.c. $J : T_xU \to T_xU$ definida por

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \to \frac{\partial}{\partial y_i}, \quad \frac{\partial}{\partial y_i} \to -\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Análogamente, la base dual a T_xU es denotada por $dx_1, \ldots, dx_n, dy_n, \ldots, dy_n$ y podemos inducir una e.c.c. en T_xM^* dada por

$$J(dx_i) = -idy_i \quad J(dy_i) = dx_i.$$

Proposición 3.2.1. *La complejificación del haz tangente $T_{\mathbb{C}}U := TU \otimes \mathbb{C}$ tiene una descomposición en una suma directa*

$$T_{\mathbb{C}}U = T^{1,0}U \oplus T^{0,1}U,$$

donde se satisface que

$$J|_{T^{1,0}} = i \cdot id \quad y \quad J|_{T^{0,1}} = -i \cdot id.$$

Cada haz vectorial $T^{1,0}U$ y $T^{0,1}U$ es trivializado por

$$\frac{\partial}{\partial z_i} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_i} - i\frac{\partial}{\partial y_i}) \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}_i} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_i} + i\frac{\partial}{\partial y_i}),$$

con $i = 1, \ldots, n$. De la misma forma, la complejificación del haz cotangente $T_{\mathbb{C}}U^* := TU^* \otimes \mathbb{C}$ admite una descomposición

$$T_{\mathbb{C}}U^* = T^{1,0}U^* \oplus T^{0,1}U^*,$$

donde $T^{1,0}U^*$ y $T^{0,1}U^*$ son trivializados por $dz_j = dx_j + idy_j$ y $d\overline{z}_j = dx_j - idy_j$.

Definición 3.2.2. *Dado un abierto $U \subset \mathbb{C}^n$, definimos el haz vectorial complejo sobre U*

$$\Lambda^{p,q}U := \Lambda^p((TU^*)^{1,0}) \otimes \Lambda^q((TU^*)^{0,1})$$

Denotamos por $\mathcal{A}^k_{\mathbb{C}}(U)$ y $\mathcal{A}^{p,q}_{\mathbb{C}}(U)$ al espacio de las secciones de $\Lambda^k_{\mathbb{C}}U := \Lambda^k T_{\mathbb{C}}U^*$ y $\Lambda^{p,q}(U)$, respectivamente.

Gracias al lema 3.1.13 tenemos las descomposiciones naturales

$$\Lambda_{\mathbb{C}}(U) = \bigoplus_{p+q=k} \Lambda^{p,q}(U) \quad \text{y} \quad \mathcal{A}^k_{\mathbb{C}}(U) = \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{A}^{p,q}_{\mathbb{C}}. \tag{3.1}$$

Definición 3.2.3. *Definimos la derivada exterior compleja $d : \mathcal{A}^k_{\mathbb{C}}(U) \to \mathcal{A}^{k+1}_{\mathbb{C}}(U)$ como sigue: Si $\alpha \in \mathcal{A}^k_{\mathbb{C}}(U)$, entonces*

$$d\alpha = d\Big(\sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n} \alpha_{j_1,\ldots,j_k} dz_{j_1} \wedge \cdots \wedge dz_{j_k} \Big) := \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n} \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial \alpha_{j_1,\ldots,j_k}}{\partial z_m} dz_m \wedge dz_{j_1} \wedge \cdots \wedge dz_{j_k}.$$

Adicionalmente, si $\Pi^{p,q} : \Lambda V_{\mathbb{C}} \to \Lambda^{p,q}V$ denota la proyección natural con respecto a la suma directa de las k-formas, definimos

$$\partial : \mathcal{A}^{p,q}_{\mathbb{C}}(U) \to \mathcal{A}^{p+1,q}_{\mathbb{C}}(U)$$

como

$$\partial := \Pi^{p+1,q} \circ d$$

y

$$\overline{\partial} : \mathcal{A}^{p,q}_{\mathbb{C}}(U) \to \mathcal{A}^{p,q+1}_{\mathbb{C}}(U)$$

como

$$\overline{\partial} := \Pi^{p,q+1} \circ d.$$

Observemos que

$$d = \partial + \overline{\partial}. \tag{3.2}$$

En coordenadas locales tenemos que

$$\partial(f dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p} \wedge d\overline{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\overline{z}_{j_q}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_k} dz_k \wedge dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p} \wedge d\overline{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\overline{z}_{j_q}$$

y

$$\overline{\partial}(f dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p} \wedge d\overline{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\overline{z}_{j_q}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_k} d\overline{z}_k \wedge dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p} \wedge d\overline{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\overline{z}_{j_q}.$$

Recordemos que
$$\frac{\partial}{\partial z_i} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_i} - i\frac{\partial}{\partial y_i}) \quad y \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}_i} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_i} + i\frac{\partial}{\partial y_i})$$
y que si f es una 0-forma,
$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i + \sum_i \frac{\partial f}{\partial y_i}dy_i;$$
por otro lado
$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial z_i}dz_i + \sum_i \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_i}d\overline{z}_i = \sum_i \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x_i} - i\frac{\partial f}{\partial y_i})(dx_i + idy_i) + \sum_i \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x_i} + i\frac{\partial f}{\partial y_i})(dx_i - idy_i)$$
$$= \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i + \sum_i \frac{\partial f}{\partial y_i}dy_i.$$

Corolario 3.2.4. *Una 0-forma f en $\mathbb{C}$ es holomorfa si y sólo si $\overline{\partial} f = 0$.*

Demostración. Supongamos que $f = u(x,y) + iv(x,y)$; entonces,
$$\overline{\partial} f = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x}(u+iv) + i\frac{\partial}{\partial y}(u+iv))(dx - idy) = \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + i(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}))(dx - idy)$$
$$= \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}) + i(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}))(dx - idy).$$
Usando el hecho de que $f = u + iv$ es holomorfa si y sólo si u, v son de clase C^1 y cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann obtenemos el resultado. □

A partir de aquí llamaremos a $V^{1,0}(U)$ el haz vectorial antiholomorfo y a $V^{0,1}(U)$ el haz vectorial holomorfo (definición 3.1.9).

Observación 3.2.5. *El operador $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$ tiene un comportamiento atípico, dado lo siguiente:*
$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\overline{z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})(x+iy) = \frac{1}{2}(1-1) = 0$$
y
$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}}z = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})(x-iy) = \frac{1}{2}(1+1) = 1.$$
Uno esperaría que $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\overline{z} = 1$ en analogía a $\frac{\partial}{\partial x}x = 1$.
Veamos qué pasa para funciones $F(\overline{z})$ y $F(z)$ donde F es una función diferenciable en el sentido real
$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}}F(\overline{z}) = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})F(\overline{z}) = \frac{1}{2}(F'(\overline{z})\frac{\partial \overline{z}}{\partial x} + iF'(\overline{z})\frac{\partial z}{\partial y}) = \frac{1}{2}(F'(\overline{z}) + i^2F'(\overline{z})) = 0$$
y
$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}}F(z) = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})F(z) = \frac{1}{2}(F'(z)\frac{\partial \overline{z}}{\partial x} + iF'(z)\frac{\partial z}{\partial y}) = \frac{1}{2}(F'(z) - i^2F'(z)) = F'(z)$$

Lema 3.2.6. *Los operadores ∂ y $\overline{\partial}$ cumplen las siguientes propiedades:*

1. $d = \partial + \overline{\partial}$.
2. $\partial^2 = \overline{\partial}^2 = 0$ *y* $\partial\overline{\partial} = -\overline{\partial}\partial$.
3. *Como toda buena derivada, se cumple la regla de Leibniz:*

$$\begin{aligned} \partial(\alpha \wedge \beta) &= \partial(\alpha) \wedge \beta + (-1)^{p+q}\alpha \wedge \partial(\beta), \\ \overline{\partial}(\alpha \wedge \beta) &= \overline{\partial}(\alpha) \wedge \beta + (-1)^{p+q}\alpha \wedge \overline{\partial}(\beta). \end{aligned}$$

Demostración. 1. Ésta es la ecuación 3.2.

2. Para este caso se puede hacer un cálculo directo de ∂^2 y $\overline{\partial}^2$ (análogo a demostrar que $d^2 = 0$) o podemos usar el primer inciso de este Lema y el hecho de que $d^2 = 0$: Sea α una (p, q)-forma donde $p + q = k$; entonces

$$d^2\alpha = (\partial + \overline{\partial})^2\alpha = (\partial^2 + \partial\overline{\partial} + \overline{\partial}\partial + \overline{\partial}^2)\alpha = 0.$$

Ahora $\partial^2\alpha$ es una $(p + 2, q)$-forma, $\partial\overline{\partial}\alpha$ y $\overline{\partial}\partial\alpha$ son $(p + 1, q + 1)$-formas y por último $\overline{\partial}^2\alpha$ es una $(p, q + 2)$-forma. Dado que $d^2\alpha \in \mathcal{A}^{k+2}_{\mathbb{C}}(U) = \bigoplus_{p'+q'=K+2} \Lambda^{p,q}(U)$, al tener una combinación lineal igualada a cero donde los sumandos pertenecen a subespacios distintos de la suma directa, obtenemos que $\partial^2\alpha = 0$, $\overline{\partial}^2\alpha = 0$ y $(\partial\overline{\partial} + \overline{\partial}\partial)\alpha = 0$.

3. Estas igualdades se demuestran como su análoga en el caso del operador d. Por linealidad basta demostrarlas para el caso en que $\alpha = \alpha(z)dz_I \wedge d\overline{z}_J$ sea una p, q-forma y $\beta = \beta(z)dz_N \wedge d\overline{z}_M$ una p', q'-forma, entonces

$$\alpha \wedge \beta = \alpha(z)\beta(z)dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge z_{i_p} \wedge \overline{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge \overline{z}_{j_q} \wedge dz_{n_1} \wedge \cdots \wedge z_{n_{p'}} \wedge \overline{z}_{m_1} \wedge \cdots \wedge \overline{z}_{m_{q'}};$$

aplicando la definición de ∂ y la regla de Leibniz para funciónes,

$$= \sum_k \left(\frac{\partial\alpha}{\partial z_k}\beta + \alpha\frac{\partial\beta}{\partial z_k}\right) dz_k \wedge dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge z_{i_p} \wedge \overline{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge \overline{z}_{j_q} \wedge dz_{n_1} \wedge \cdots \wedge z_{n_{p'}} \wedge \overline{z}_{m_1} \wedge \cdots \wedge \overline{z}_{m_{q'}}$$

$$= \sum_k \frac{\partial\alpha}{\partial z_k} dz_k \wedge dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge z_{i_p} \wedge \overline{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge \overline{z}_{j_q} \wedge \beta dz_{n_1} \wedge \cdots \wedge z_{n_{p'}} \wedge \overline{z}_{m_1} \wedge \cdots \wedge \overline{z}_{m_{q'}}$$

$$+\alpha dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge z_{i_p} \wedge \overline{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge \overline{z}_{j_q} \wedge (-1)^{p+q} \sum_k \frac{\partial\beta}{\partial z_k} dz_k \wedge dz_{n_1} \wedge \cdots \wedge z_{n_{p'}} \wedge \overline{z}_{m_1} \wedge \cdots \wedge \overline{z}_{m_{q'}};$$

esto último dado que intercalamos dz_k $(p + q)$ veces; así,

$$\partial(\alpha \wedge \beta) = \partial(\alpha) \wedge \beta + (-1)^{p+q}\alpha \wedge \partial(\beta). \qquad \square$$

El lema nos dice que podemos estar seguros que las derivadas definidas son razonables en el sentido que cumplen lo análogo a la derivada exterior. Ahora nace una pregunta natural: ¿Existirán resultados equivalentes al lema de Poincaré, la cohomología de De Rham, al teorema de De Rham y el teorema de dualidad de Poincaré? Más adelante veremos que la respuesta es sí aunque en algunos casos sólo daremos una idea de las demostraciones.

3.3. Variedades complejas

Antes de sumergirnos en la teoría de Hodge para variedades complejas introduciremos las nociones básicas de éstas.

Definición 3.3.1. *Sea M un espacio topológico. La pareja (U_i, ϕ_i) tal que U_i es un abierto de M y $\phi_i: U_i \to V_i$ es un homeomorfismo sobre un abierto V_i de $\mathbb{R}^{2n}$ le llamamos una carta de M, decimos que dos cartas son compatibles si siempre que $U_i \cap U_j \neq \varnothing$ entonces la función $\phi_{ij} = \phi_i \circ \phi_j^{-1}: U_j \to U_i$ es una función diferenciable. Un conjunto de cartas $(U_i, \phi_i)_{i \in I}$ tal que $\cup_{i \in I} U_i = M$ y todas las cartas son compatibles es llamado atlas de M. Si logramos dotar a M de un atlas decimos que M es una variedad de dimensión $2n$. Si identificamos $\mathbb{R}^{2n}$ con $\mathbb{C}^n$ decimos que el atlas es holomorfo si para cada $i, j \in I$ tal que $U_i \cap U_j \neq \varnothing$ la función de transición dada por $\phi_{ij} = \phi_i \circ \phi_j^{-1}$ es holomorfa. El par (U_i, ϕ_i) es llamado una carta holomorfa. Naturalmente decimos que dos atlas holomorfos (U_i, ϕ_i) y (U'_j, ϕ'_j) son equivalentes si para cada $U_i \cap U'_j \neq \varnothing$ la función $\phi_i \circ (\phi'_j)^{-1}$ es holomorfa.*

Definición 3.3.2. *Decimos que una función $f: M \to N$ entre dos variedades complejas es holomorfa si para cualesquiera cartas (U, ϕ) y (V, ψ) de M y N respectivamente, la composición $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ es holomorfa. Dos variedades M, N son biholomorfas si existe un homeomorfismo holomorfo $f: M \to N$ con inversa holomorfa.*

En particular, nos interesarán las funciones holomorfas $f: M \to \mathbb{C}$. Recordemos el siguiente importante resultado.

Teorema 3.3.3 (Teorema de Liouville)**.** *Una función $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa y acotada es constante.*

Observación 3.3.4. *La diferencia esencial entre las variedades diferenciales reales y las complejas es que siempre podemos cubrir una variedad real con subconjuntos abiertos difeomorfos a $\mathbb{R}^n$, pero en constraste, en general no podemos cubrir una variedad compleja por subconjuntos abiertos biholomorfos a $\mathbb{C}^n$, pues $\mathbb{C}$ no es biholomorfo al disco abierto por el teorema de Liouville.*

Como sabemos el conjunto de las funciones holomorfas de $\mathbb{C}^n$ en $\mathbb{C}^n$ es un subconjunto de las funciones suaves de $\mathbb{C}^n$ en $\mathbb{C}^n$; el conjunto de funciones holomorfas tiene una estructura más fuerte que se refleja en el teorema 3.3.3. Otra consecuencia de este teorema es que no existe una partición de la unidad holomorfa.

Ejemplo 3.3.5. *El plano proyectivo $\mathbb{CP}^n$ es el ejemplo más importante de una variedad compacta compleja, por definición $\mathbb{CP}^n$ es el conjunto de líneas en $\mathbb{C}^{n+1}$que pasan por el origen; es decir,*

$$\mathbb{CP}^n = (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})/\mathbb{C})).$$

Denotaremos a cada clase de equivalencia de $\mathbb{CP}^n$ por $(z_1 : \cdots : z_n)$ y entenderemos que si $\lambda \in \mathbb{C}$ los puntos $(z_1 : \cdots : z_n)$ y $(\lambda z_1 : \cdots : \lambda z_n)$ pertenecen a la misma clase de equivalencia. Sólo el origen $(0 : \cdots : 0)$ no define un punto en $\mathbb{CP}^n$.

La forma más convencional de cubrir $\mathbb{P}^n$ por abiertos utiliza los siguientes conjuntos :

$$U_i := \{(z_1 : \cdots : z_n) | z_i \neq 0\} \subset \mathbb{P}^n$$

y definimos el mapeo $\phi_i : U_i \to \mathbb{C}^n$ como

$$\phi_i(z_1 : \cdots : z_n) = (\frac{z_1}{z_i}, \ldots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \ldots, \frac{z_n}{z_i})$$

y el mapeo de transición $\phi_{ij} : \phi_i \circ \phi_j^{-1}$ queda dado por

$$\phi_{ij}(z_1, \ldots, z_n) = (\frac{z_1}{z_i}, \ldots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \ldots, \frac{z_{j-1}}{z_i}, \frac{1}{z_i}, \frac{z_j}{z_i}, \ldots, \frac{z_n}{z_i})$$

donde $z_i \neq 0$; por lo tanto ϕ_{ij} es biholomorfo.

Ejemplo 3.3.6. *Claramente $\mathbb{C}^n$ es una variedad que se puede cubrir con una sola carta y ϕ es la función identidad. Lo análogo ocurre con todo subespacio de $\mathbb{C}^n$.*

Ejemplo 3.3.7. *La esfera compleja de dimensión n es una variedad que podemos cubrir con dos cartas gracias a la proyección estereográfica, que sabemos es biholomorfa.*

Ejemplo 3.3.8. *El toro complejo está dado por el cociente $\mathbb{C}^n/\mathbb{Z}^{2n}$. Con la proyección canónica $\Pi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n/\mathbb{Z}^{2n}$ dada por $\Pi(x) = [x]$, $x \in \mathbb{C}^n$, podemos dar al toro la topología cociente donde los abiertos U son aquellos tales que $\Pi^{-1}(U) = V$ es un abierto de la topología estándar de $\mathbb{C}^n$. Por construcción Π es un operador abierto. Para construir el atlas holomorfo consideremos el abierto $(0,1)\times\cdots\times(0,1)$ y notemos que $\Pi\ : (0,1)\times\cdots\times(0,1) \to \mathbb{C}^n/\mathbb{Z}^{2n}$ es un homeomorfismo, dado que Π es suprayectivo por ser abierto y al restringir esta transformación al cubo obtenemos una transformación inyectiva, que por construcción es continua con inversa continua. Por lo tanto, $(\Pi((0,1) \times \cdots \times (0,1)), \Pi^{-1})$ es una carta del toro complejo. Para cubrir el resto del toro consideramos las n cartas generadas por las traslaciones por los vectores canónicos, es decir, $(\Pi(\frac{1}{2}e_i + (0,1) \times \cdots \times (0,1)), \Pi^{-1})$. Obtenemos un atlas holomorfo dado que la función de traslación es holomorfa.*

Definición 3.3.9. *Sea $x \in M$. Denotamos por T_xM al espacio tangente complejo a M en el punto x, por TM al conjunto de todos los espacios tangentes complejos a M y lo llamamos el haz tangente complejo a M. Además, denotaremos por T_p^*M al espacio dual o cotangente complejo a M en el punto x, de modo que los elementos de T_p^*M son funcionales lineales sobre el espacio tangente a x. T^*M es el conjunto de todos los espacios cotangentes complejos a M y lo llamamos el haz cotangente complejo de M. Análogamente, definimos el álgebra exterior $\Lambda^p(M)$ de M como la unión de $\Lambda^p(T_xM)$ de cada espacio tangente.*

Se puede mostrar que TM, T^*M y $\Lambda^p(M)$ admiten estructuras de variedades complejas diferenciables de manera natural. Usamos esto para definir varias transformaciones suaves importantes.

Definición 3.3.10. *Decimos que una transformación $X : M \to TM$ es un campo vectorial en M, si X asocia a cada punto $x \in M$ un vector en T_xM. En caso de que la transformación sea infinitamente diferenciable diremos que X es un campo vectorial suave.*

Una transformación suave $\omega : M \to T^*M$ es una 1-forma diferencial en M si ω asigna a cada punto $x \in M$ una funcional lineal $\omega_p \in T_x^*M$.

Una p-forma diferencial en M es una transformación suave $\omega : M \to \Lambda^p(M)$ que a cada punto $x \in M$ le asigna un p-tensor alternante en T_xM.

El conjunto $\mathcal{A}^p(M)$ de las p-formas en M es un módulo sobre el anillo $C^\infty(M)$ de funciones complejas infinitamente difenrenciables en el sentido real de M en $\mathbb{C}$.

Lema 3.3.11. *Dada una variedad M compleja y dado un punto $x \in M$, el espacio tangente $T_x(M)$, visto como espacio real, admite una e.c.c. y ésta no depende de las cartas.*

Demostración. Sea U un abierto de M donde $x \in U$ y h una función holomorfa tal que $h(U) = U' \subset \mathbb{C}^n$ con U' un abierto, gracias a que $T_{h(x)}\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^n$ ya tiene una e.c.c. podemos inducir una sobre $T_x(M)$. Llamemos J a la e.c.c. de $T_{h(x)}\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^n$ y sea D_h el jacobiano de la función, afirmamos que $\mathbb{J} = D_h \circ J \circ D_{h^{-1}}$ es una e.c.c. Por construcción $\mathbb{J} : T_x(M) \to T_x(M)$ y al ser composición de transformaciones biyectivas tenemos que $\mathbb{J}$ es un endomorfismo; por lo tanto basta ver que $\mathbb{J}^2 = -id_{T_x(M)}$

$$\mathbb{J}^2 = D_h \circ J \circ D_{h^{-1}} \circ D_h \circ J \circ D_{h^{-1}} = D_h \circ J \circ J \circ D_{h^{-1}} =$$

$$D_h \circ -id_{\mathbb{C}^n} \circ D_{h^{-1}} = -D_h \circ D_{h^{-1}} = -id_{T_x(M)}$$

Veamos que la e.c.c. $\mathbb{J}$ no depende de la carta: si (V, g) es otra carta holomorfa compatible con (U, h) de M, y si consideramos la función de transición $g \circ h^{-1}$, podemos expresar el cambio de una carta a la otra por funciones reales holomorfas

$$\xi = u(x, y) \quad \eta = v(x, y)$$

donde $\xi, \eta, x, y \in \mathbb{R}^n$, $\xi + i\eta = \zeta \ \in \ T_{g(x)}\mathbb{C}^n$ y $x + iy = z \ \in T_{h(x)}\mathbb{C}^n$. El Jacobiano de la transformación está dado por (la expresaremos en bloques de 2×2 para ver las propiedades que cumplen):

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} & \frac{\partial u_\alpha}{\partial y_\beta} \\ \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} & \frac{\partial v_\alpha}{\partial y_\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_\alpha}{\partial y_\beta} & \frac{\partial u_\alpha}{\partial y_\beta} \\ -\frac{\partial u_\alpha}{\partial y_\beta} & \frac{\partial v_\alpha}{\partial y_\beta} \end{pmatrix}$$

esto último por las condiciones de ser coordenadas holomorfas por lo tanto podemos pensarlo como bloques de la forma

$$\begin{pmatrix} a_{ij} & b_{ij} \\ -b_{ij} & a_{ij} \end{pmatrix} \ \ con \ \ j, i = 1, \ldots, n$$

podemos pensar a $D(g \circ h^{-1})$ como una matriz de $2n \times 2n$, formada por cuatro bloques de $n \times n$ donde consideraremos la base ordenada $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$

$$D(g \circ h^{-1}) = \begin{pmatrix} A_{n\times n} & B_{n\times n} \\ -B_{n\times n} & A_{n\times n} \end{pmatrix}$$

denotemos a la e.c.c. estándar de $T_{h(x)}\mathbb{C}^n$ por J, que es de la forma

$$J = \begin{pmatrix} 0_{n\times n} & -1_{n\times n} \\ 1_{n\times n} & 0_{n\times n} \end{pmatrix}$$

y por J' a la e.c.c. estándar de $T_{g(x)}\mathbb{C}^n$ representada por la misma matriz J.

Veremos que $D(g \circ h^{-1}) \circ J = J \circ D(g \circ h^{-1})$.

$$JD(g \circ h^{-1}) = \begin{pmatrix} 0_{n\times n} & -1_{n\times n} \\ 1_{n\times n} & 0_{n\times n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{n\times n} & B_{n\times n} \\ -B_{n\times n} & A_{n\times n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{n\times n} & -A_{n\times n} \\ A_{n\times n} & B_{n\times n} \end{pmatrix}$$

de la misma forma

$$D(g\circ h^{-1})J=\begin{pmatrix}A_{n\times n} & B_{n\times n}\\ -B_{n\times n} & A_{n\times n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0_{n\times n} & -1_{n\times n}\\ 1_{n\times n} & 0_{n\times n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_{n\times n} & -A_{n\times n}\\ A_{n\times n} & B_{n\times n}\end{pmatrix}.$$

Ahora veremos que las e.c.c. son equivalentes; en la nueva carta tenemos que la e.c.c. es

$$\mathbb{J}'=D_h\circ D_{g\circ h^{-1}}\circ J\circ D_{h\circ g^{-1}}\circ D_{h^{-1}}$$

por otro lado

$$\mathbb{J}=D_h\circ J\circ D_{h^{-1}}=D_h\circ J\circ D_{g\circ h^{-1}}\circ D_{h\circ g^{-1}}\circ D_{h^{-1}}=D_h\circ D_{g\circ h^{-1}}\circ J\circ D_{h\circ g^{-1}}\circ D_{h^{-1}}=\mathbb{J}'$$

□

Gracias a que tenemos una e.c.c. en T_xM podemos hacer una extensión de la Definición 3.1.9 y considerar los espacios propios de la e.c.c en T_xM. Los Lemas 3.1.10 y 3.1.13 se extienden de manera natural a T_xM.

Definición 3.3.12. *Denotemos por $\mathcal{A}^{p,q}(M)$ al conjuntos de las $(p,q)-formas$ en M. Éste es un módulo sobre el anillo $C^\infty(M)$ de funciones complejas infinitamente diferenciables en el sentido real.*

3.4. Cohomología compleja

En analogía al caso real definiremos la cohomología de De Rham en términos del operador d. Dado que el operador $\overline{\partial}$ cumple las propiedades de un operador frontera, definiremos la cohomología de Dolbeault, veremos qué información tiene cada cohomología y las compararemos.

Definición 3.4.1. *De manera análoga al caso real definimos las formas cerradas con respecto a d como*

$$Z^p_{deR}(M):=\{\alpha\in\mathcal{A}^p(M):d\alpha=0\}$$

y las formas exactas con respecto a d como

$$B^p_{deR}(M):=\{\alpha\in\mathcal{A}^p(M):\exists\beta\in\mathcal{A}^{p-1}(M)tal\ que\ d\beta=\alpha\}$$

Definición 3.4.2. *Definimos el p-ésimo grupo de cohomología compleja de De Rham como*

$$H^p_{deR}(M,\mathbb{C})=\frac{Z^p_{deR}(M)}{B^p_{deR}(M)}.$$

Definición 3.4.3. *Definimos los números de Betti como*

$$dimH^p_{deR}(M,\mathbb{C})=b^p(M)$$

Definición 3.4.4. *Dada una variedad M compleja, denotamos al grupo p-ésimo de homología compleja por $H_p(M)$ con $0\le p\le 2n$ y por $b^p(M)$ al número de Betti del p-ésimo grupo de homología de M.*

Teorema 3.4.5. *(De Rham)([5] pág. 43) Para toda variedad compleja M de dimensión $2n$ y para todo entero no negativo p tenemos que*

$$H^p_{deR}(M) \simeq (H_p(M))^*$$

Calculemos algunos grupos de cohomología compleja de De Rham.

Teorema 3.4.6. *Sea M una variedad compleja, compacta y simplemente conexa. Afirmamos que $H^0_{deR}(M, \mathbb{C}) = \mathbb{C}$.*

Demostración. Sea $\alpha \in \Lambda^0(M)$ una forma cerrada. Por lo tanto, $\frac{\partial \alpha}{\partial x_k} = 0$ y $\frac{\partial \alpha}{\partial y_k} = 0$ de aquí que $\alpha = c$ con $c \in \mathbb{C}$.
Concluimos que $H^0_{deR}(M, \mathbb{C}) = \mathbb{C}$ y $b_0(M) = 1$. □

En general $H^0_{deR}(M, \mathbb{C})$ cuenta el número de componentes conexas de M.

Teorema 3.4.7. *Consideremos $\mathbb{C}^n$; afirmamos que $H^0_{deR}(\mathbb{C}^n) = \mathbb{C}$ y $H^p_{deR}(\mathbb{C}^n) = 0$ para $1 \leq p$.*

Demostración. Sea $\alpha \in Z^0_{deR}(\mathbb{C}^n)$ por lo tanto,

$$d\alpha = \sum_{k=1}^{n} (\frac{\partial \alpha}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial \alpha}{\partial y_k} dy_k) = 0$$

por lo tanto $\alpha = c$ con $c \in \mathbb{C}$, dado que $B^0_{deR}(\mathbb{C}^n) = 0$ concluimos que $H^0_{deR}(\mathbb{C}^n) = \mathbb{C}$.
Gracias al teorema de De Rham 3.4.5 y que $\mathbb{C}^n$ tiene la clase de homotopía de un punto, tenemos que $H^p_{deR}(\mathbb{C}^n) = 0$ con $1 \leq p$. □

Ejemplo 3.4.8. *Calculemos los grupos de cohomología de De Rham de $\mathbb{C} - \{0\}$. Empecemos con $H^0_{deR}(\mathbb{C} - \{0\})$; sea α una 0-forma cerrada, por lo tanto*

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x_j} = 0 \quad y \quad \frac{\partial \alpha}{\partial y_j} = 0 \; con \; j \; en \{0, \ldots, n\}$$

por lo tanto α es constante y dado que no existen formas exactas concluimos que $H^0_{deR}(\mathbb{C} - \{0\}) = \mathbb{C}$.
Para $H^1_{deR}(\mathbb{C} - \{0\})$ consideremos la siguiente $1 - forma$ η, con a un número complejo,

$$\eta = \frac{a}{2\pi}(-\frac{ydx}{x^2 + y^2} + \frac{xdy}{x^2 + y^2})$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} d\eta &= \frac{a}{2\pi}(-\frac{(x^2 + y^2) - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \wedge dx + \frac{(x^2 + y^2) - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} dx \wedge dy) \\ &= \frac{a}{2\pi}(\frac{(x^2 + y^2) - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{(x^2 + y^2) - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2}) dx \wedge dy \\ &= \frac{a}{2\pi} \frac{2(x^2 + y^2) - 2x^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx \wedge dy = 0. \end{aligned}$$

Consideremos la siguiente curva $R(t) = r(cos(mt), sen(mt))$, y calculemos la integral de η sobre $R(t)$:

$$\int_0^{2\pi} \eta(R(t)) = \frac{am}{2\pi}\int_0^{2\pi} -\frac{sen(mt)dx(R'(t))}{cos^2(mt)+sen^2(mt)} + \frac{cos(mt)dy(R'(t))}{cos^2(mt)+sen^2(mt)} = am$$

por lo tanto η no es exacta. Por otro lado notemos que al integrar contamos el número de vueltas por un factor de a y la integral no depende del radio del círculo.
Notemos lo siguiente:

$$\frac{a}{4\pi}\frac{d\overline{z}}{z} = \frac{a}{4\pi}\frac{dx-idy}{\frac{1}{2}(x-iy)} = \frac{a}{2\pi}\frac{(x+iy)(dx-idy)}{x^2+y^2} = \frac{a}{2\pi}(\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2} - i\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2})$$

por lo tanto $-\eta$ es la parte imaginaria de $\frac{a}{2\pi}\frac{d\overline{z}}{z}$.
Para ver que $[\eta]$ es la única clase de cohomología de $H^1_{deR}(\mathbb{C}-\{0\}) = \mathbb{C}$ y calcular $H^2_{deR}(\mathbb{C}-\{0\})$, sea $F(t,z) : [0,1]\times(\mathbb{C}-\{0\}) \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ dada por

$$F(t,z) = tz + (1-t)\frac{z}{\|z\|};$$

como $F(0,z) = \frac{z}{\|z\|}$, F mapea $(\mathbb{C}-\{0\})$ en $S^1(\mathbb{C})$ y $F(1,z) = z$ que mapea $(\mathbb{C}-\{0\})$ en $(\mathbb{C}-\{0\})$. Concluimos que $\mathbb{C}-\{0\}$ es homotópico a $S^1(\mathbb{C})$. Gracias a que conocemos la homología de $S^1(\mathbb{C})$ y al teorema de De Rham tenemos que $H^2_{deR}(\mathbb{C}-\{0\}) = 0$.

El Lema 3.2.6 es fundamental para inspirar la siguiente definición, para cada $p \in \{0,\dots,n\}$ podemos construir una nueva cohomología compleja, gracias a que $\overline{\partial}$ forma una cadena exacta

$$0 \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{A}^{p,0}(M) \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{A}^{p,1}(M) \xrightarrow{\overline{\partial}} \cdots \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{A}^{p,n}(M) \xrightarrow{\overline{\partial}} 0$$

Definición 3.4.9. *Definimos las formas cerradas con respecto a $\overline{\partial}$ como*

$$Z^{p,q}_D(M) := \{\alpha \in \mathcal{A}^{p,q}(M) : \overline{\partial}\alpha = 0\}$$

y las formas exactas con respecto a $\overline{\partial}$ como

$$B^{p,q}_D(M) := \{\alpha \in \mathcal{A}^{p,q}(M) : \exists\beta \in \mathcal{A}^{p,q-1}(M), \overline{\partial}\beta = \alpha\}$$

Definición 3.4.10. *El grupo de cohomología de Dolbeault*[1] *de una variedad M es*

$$H^{p,q}_D(M) := \frac{Z^{p,q}_D(M)}{B^{p,q}_D(M)}$$

Nota 3.4.11. *Para el lector interesado existe una cohomología definida por el operador $\partial\overline{\partial}$ llamada cohomología de Bott-Chern, la cual es tratada en [6].*

[1] Pierre Dolbeault(1924-) es un matemático francés alumno de Henri Cartan graduado en 1944, estudiando en el École Normale Supérieure.

Definición 3.4.12. *Si $H_D^{p,q}(M)$ tiene dimensión finita entonces denotamos*

$$h^{p,q} := dim H_D^{p,q}(M)$$

y llamamos a $h^{p,q}$ los números de Hodge de M.

Los números de Hodge son análogos a los números de Betti. Ahora surgen preguntas naturales:¿ tendrá más información la cohomología de Dolbeault que la cohomología de De Rham?¿ habrá relación entre los números de Betti y los de Hodge? ¿bajo qué condiciones se da esto?

Definición 3.4.13. *Denotamos al conjunto de las p-formas holomorfas de M por* $\Gamma(\mathcal{A}^p(M))$.

Naturalmente tenemos que $\Gamma(\mathcal{A}^p(M)) \subset \mathcal{A}^p(M)$.
El primer resultado inmediato es que para toda $p \in \{0, \ldots, n\}$ tenemos que $B_D^{p,0}(M) = 0$ dado que no existen formas de tipo $(p, -1)$ por lo tanto tenemos que

$$H_D^{p,0}(M) = Z_D^{p,0}(M) = \{\alpha \in \mathcal{A}^{p,0}(M) | \overline{\partial}\alpha = 0\}$$

Sea $\alpha \in H_D^{p,0}(M)$ y $z_1, \ldots, z_n$ unas coordenadas holomorfas,

$$\alpha = \sum_{|J|=p} \alpha_J dz_J$$

donde α_J son funciones diferenciables

$$0 = \overline{\partial}\alpha = \sum_{|J|=p} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \alpha_J}{\partial \overline{z}_k} d\overline{z}_k \wedge dz_J$$

Dado que $d\overline{z}_k \wedge dz_J$ es una base de las $(p, 1) - formas$, concluimos que

$$\frac{\partial \alpha_J}{\partial \overline{z}_k} = 0$$

Por lo tanto α_J es holomorfa. Esto muestra que podemos identificar a $H_D^{p,0}(M)$ con las $p - formas$ holomorfas de M:

$$H_D^{p,0}(M) = \Gamma(\mathcal{A}^p(M))$$

De aquí podemos ver que $H_D^{0,0}(\mathbb{C}^n) = \Gamma(\mathcal{A}^p(\mathbb{C}^n))$ son todas las funciones holomorfas de $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ que como sabemos no forman un espacio de dimensión finita de donde concluimos que no existe el número de Hodge asociado a este grupo de Dolbeault.

Teorema 3.4.14. *(Principio del Máximo) Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ una región acotada y f una función holomorfa de $\Omega \to \mathbb{C}$ entonces $|f|$ alcanza su máximo sobre la frontera de Ω.*

Teorema 3.4.15. *Sea M una variedad compleja, simplemente conexa y compacta. Afirmamos que $H_D^{0,0}(M) = \mathbb{C}$.*

Demostración. Como M es compacta tenemos que $|f(z)|$ alcanza su máximo, sea $x \in M$ tal que $|f(z)|$ es el máximo. Consideremos la pareja (U, ϕ) una carta holomorfa de M donde $z \in U$, por lo tanto $f \circ \phi^{-1}$ es una función holomorfa de $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ tal que $|f \circ \phi^{-1}|$ alcanza su máximo en $\phi(z)$. Dado que esto contradice el principio del máximo tenemos que la función $f \circ \phi^{-1}$ es constante. $\square$

Un teorema auxiliar que nos ayudará a calcular grupos de cohomología es

Teorema 3.4.16. *([11] pág. 18) Dada $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ una función diferenciable compleja definida sobre el disco unitario, existe una función diferenciable g tal que*

$$\frac{\partial g}{\partial \overline{z}} = f.$$

Más aún si, f es holomorfa con respecto a $z_1, \ldots, z_n$ tenemos que g es holomorfa con respecto de $z_1, \ldots, z_n$. El resultado se generaliza al caso de transformaciones con valores en $\mathbb{C}^n$.

Teorema 3.4.17. *Calculemos la cohomología de Dolbeault de $\mathbb{C}^n$; afirmamos que*

$$H_D^{p,q}(\mathbb{C}^n) = 0 \quad \forall\, 0 \leq p, \;\; 1 \leq q$$

En otras palabras si u es una $(p, q) - forma$ sobre $\mathbb{C}^n$ tal que $\overline{\partial} u = 0$, entonces existe una $(p, q-1) - forma$ v tal que $\overline{\partial} v = u$.

Demostración. Consideremos una $(p, q) - forma$ u en su expresión más general

$$u(z) = \sum_{|J|=p,|K|=q} u_{J,K} dz_J \wedge d\overline{z}_K = \sum_{|J|=p} dz_J \wedge (\sum_{|K|=q} u_{J,K} d\overline{z}_K)$$

donde $\sum_{|K|=q} u_{J,K} d\overline{z}_K$ es una $(0, q) - forma$. Usando la proposición *iii* del Lema 3.2.6 y el hecho de que la función constante es holomorfa tenemos que

$$\begin{aligned} 0 = \overline{\partial} u &= \sum_{|J|=p} \overline{\partial} dz_J \wedge (\sum_{|K|=q} u_{J,K} d\overline{z}_K) + (-1)^p \sum_{|J|=p} dz_J \wedge \overline{\partial}(\sum_{|K|=q} u_{J,K} d\overline{z}_K) \\ &= (-1)^p \sum_{|J|=p} dz_J \wedge \overline{\partial}(\sum_{|K|=q} u_{J,K} d\overline{z}_K) \end{aligned}$$

concluimos que

$$\overline{\partial}(\sum_{|K|=q} u_{J,K} d\overline{z}_K) = 0 \quad \forall |J| = p.$$

Es suficiente probar que si $\overline{\partial} u = 0$ para toda J existe v_J tal que

$$\overline{\partial} v_J = (\sum_{|K|=q} u_{J,K} d\overline{z}_K)$$

Vamos a hacer una inducción sobre ℓ, el número de variables de las cuales u depende holomorfamente, con $0 \leq \ell \leq n$.
Paso base $\ell = 1$, sea u una $(0, q) - forma$ que sólo depende de z_1 de manera holomorfa, donde $\overline{\partial} u = 0$

$$u(z) = \sum_{|K|=q} u_{J,K} d\overline{z}_K = \sum_{|K'|=q-1, 1\notin K} u_{J,K'} d\overline{z}_1 \wedge d\overline{z}_{K'} + \sum_{|K|=q, 1\notin K} w_{J,K} d\overline{z}_K.$$

Usando el hecho de que $\overline{\partial} u = 0$

$$0 = \overline{\partial} u(z) = \sum_{|K'|=q-1} \sum_{a=1}^{n} \frac{\partial u_{J,K'}}{\partial \overline{z}_a} d\overline{z}_a \wedge d\overline{z}_1 \wedge d\overline{z}_{K'} + \sum_{|K|=q, 1\notin K} \sum_{a=1}^{n} \frac{\partial w_{J,K}}{\partial \overline{z}_a} d\overline{z}_a \wedge d\overline{z}_K$$

$$= \sum_{|K'|=q-1} \frac{\partial u_{J,K'}}{\partial \overline{z}_1} d\overline{z}_1 \wedge d\overline{z}_1 \wedge d\overline{z}_{K'} + \sum_{|K|=q, 1\notin K} \frac{\partial w_{J,K}}{\partial \overline{z}_1} d\overline{z}_1 \wedge d\overline{z}_K$$

por lo tanto

$$\frac{\partial w_{J,K}}{\partial \overline{z}_1} = 0 \quad \forall J \;\; y \;\; \forall K \;\; con \;\; 1 \notin K$$

de donde concluimos que $w_{J,K}$ depende holomorfamente de $\overline{z}_1$ para toda J. Naturalmente $u_{J,K}$ y $w_{J,K}$ dependen holomorfamente de $\overline{z}_2, \ldots, \overline{z}_n$ dado que las funciones son constantes con respecto a las otras variables. Denotaremos por $\widehat{d\overline{z}_{K}}_a$ a la $(0, q-1) - forma$ tal que tenga entre sus productos cuña a todos los índices de K menos el a. Sea

$$h_J = \sum_{|K'|=q-1}^{n} \frac{(-1)^a}{q} z_a u_{J,K} \widehat{d\overline{z}_{K}}_a$$

por lo tanto

$$\overline{\partial} h_J = \sum_{|K'|=q-1}^{n} \frac{(-1)^a}{q} \sum_{b=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \overline{z}_b} (z_a u_{J,K}) d\overline{z}_b \wedge \widehat{d\overline{z}_{K}}_a = \sum_{|K'|=q-1}^{n} \frac{(-1)^a}{q} (z_a \frac{\partial u_{J,K}}{\partial \overline{z}_b} d\overline{z}_1 \wedge \widehat{d\overline{z}_{K}}_a$$

$$+ u_{J,K} d\overline{z}_a \wedge \widehat{d\overline{z}_{K}}_a) = \sum_{|K'|=q-1}^{n} u_{J,K} d\overline{z}_K$$

Para todo multi-índice K con $|K| = q-1$ y $1 \notin K$; ahora llamamos

$$h := \sum_{|K|=q-1, 1\notin K} h_K d\overline{z}_K$$

y definimos

$$u' := u + (-1)\overline{\partial} h$$

$$= \sum_{|K'|=q-1} u_{J,K'} d\overline{z}_1 \wedge d\overline{z}_{K'} + \sum_{|K|=q, 1\notin K} w_{J,K} d\overline{z}_K - \sum_{|K|=q-1, 1\notin K} w_{J,K} d\overline{z}_K$$

$$= \sum_{|K'|=q-1} u_{J,K'} d\overline{z}_1 \wedge d\overline{z}_{K'}$$

como sabemos que $u_{J,K'}$ depende holomorfamente de z_1 usando el Teorema 3.4.16 tenemos que existen funciones $v_{J,K'}$ tales que

$$\frac{\partial v_{j,K'}}{\partial \overline{z}_1} = u_{J,K'}$$

y por lo tanto definimos v' como

$$v' = \sum_{|K'|=q-1} v_{J,K'} d\overline{z}_{K'}$$

que por construcción cumple que $\overline{\partial} v' = \sum_{|K'|=q-1} u_{J,K'} d\overline{z}_1 \wedge d\overline{z}_{K'}$. Por último afirmo que v es

$$v := v' + h$$

dado que

$$\overline{\partial} v = \overline{\partial} v' + \overline{\partial} h$$

$$\sum_{|K'|=q-1} u_{J,K'} d\overline{z}_1 \wedge d\overline{z}_{K'} + \sum_{|K|=q, 1 \notin K} w_{J,K} d\overline{z}_K$$

Supongamos que el resultado es cierto para $\ell - 1$, sea u una $(0,q)$-forma que depende de $z_1, \ldots, z_\ell$ pero sólo depende de las primeras $\ell - 1$ variables de forma holomorfa. Denotaremos por $d\overline{z}_K$ a productos con coeficientes distintos de cero que sólo contienen a $d\overline{z}_1, \ldots, d\overline{z}_\ell$ entre sus productos cuña, donde u depende de manera holomorfa de las primeras $\ell - 1$ variables holomorfas. Si $\ell < q$, la $(0,q)$-forma se anula dado que repite elementos en su producto cuña y el resultado es trivial por lo tanto consideremos el caso $\ell \geq q$ Separemos las $\ell - 1$ variables de las cuales depende holomorfamente.

$$u = \sum_{|K|=q, k<\ell} u_K d\overline{z}_K + \sum_{|K|=q-1, \ell \notin K} w_K d\overline{z}_K \wedge d\overline{z}_\ell.$$

Al derivar obtenemos que

$$0 = \overline{\partial} u = \sum_{|K|=q, k<\ell} \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial u_K}{\partial \overline{z}_m} d\overline{z}_m \wedge d\overline{z}_K + \sum_{|K|=q-1, \ell \notin K} \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial w_K}{\partial \overline{z}_m} d\overline{z}_m \wedge d\overline{z}_K \wedge d\overline{z}_\ell.$$

En el segundo término tenemos que la expresión $d\overline{z}_m \wedge d\overline{z}_K \wedge d\overline{z}_\ell$ con $m = \ell$ se cancela, por otro lado

$$\frac{\partial w_K}{\partial \overline{z}_m} = 0 \quad \forall m > \ell,$$

dado que es el coeficiente de una combinación lineal de la base igualada a cero. Esto nos dice que w_K es holomorfa con respecto a $z_{\ell+1}, \ldots, z_n$ para toda combinación de índices $\{i_1, \ldots, i_{q-1}\}$ tales que $1 \leq i_1 < \cdots < i_{q-1} < \ell$. Por el teorema 3.4.16 obtenemos

$$\frac{\partial h_K}{\partial \overline{z}_\ell} = w_K$$

y la solución h_K es holomorfa con respecto a $z_{\ell+1}, \ldots, z_n$ y llamamos

$$h := \sum_{|K|=q-1, \ell \notin K} h_K d\overline{z}_K$$

por lo tanto

$$\overline{\partial} h = \sum_{|K|=q-1, \ell \notin K} \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial h_K}{\partial \overline{z}_m} d\overline{z}_m \wedge d\overline{z}_K = \sum_{|K|=q-1, \ell \notin K} \sum_{m=1}^{\ell-1} \frac{\partial h_K}{\partial \overline{z}_m} d\overline{z}_m \wedge d\overline{z}_K + \sum_{|K|=q-1, \ell \notin K} w_K d\overline{z}_\ell \wedge d\overline{z}_K.$$

Ahora definimos una nueva $(0, q)$-forma como

$$u' = u + (-1)^q \overline{\partial} h = \sum_{|K|=q-1, k<\ell} u_K d\overline{z}_K + \sum_{|K|=q-1, \ell \notin K} w_K d\overline{z}_K \wedge d\overline{z}_\ell$$

$$+(-1)^q \Big(\sum_{|K|=q-1, \ell \notin K} \sum_{m=1}^{\ell-1} \frac{\partial h_K}{\partial \overline{z}_m} d\overline{z}_m \wedge d\overline{z}_K + \sum_{|K|=q-1, \ell \notin K} w_K d\overline{z}_\ell \wedge d\overline{z}_K \Big)$$

$$= \sum_{|K|=q-1, k<\ell} u_K d\overline{z}_K + (-1)^q \sum_{|K|=q-1, \ell \notin K} \sum_{m=1}^{\ell-1} \frac{\partial h_K}{\partial \overline{z}_m} d\overline{z}_m \wedge d\overline{z}_K.$$

Aquí sólo aparecen $d\overline{z}_1, \ldots, d\overline{z}_{\ell-1}$ y gracias a que $\overline{\partial} u = 0$, tenemos que u' es $\overline{\partial} - cerrada$. Sabemos que existe una $(0, q-1) - forma$ v' tal que $\overline{\partial} v' = u'$, si definimos

$$v := v' - (-1)^q h$$

esto satisface que

$$\overline{\partial} v = \overline{\partial} v' - (-1)^q \overline{\partial} h = u - (-1)^q \overline{\partial} h = u.$$

□

Por lo tanto los números de Hodge de $\mathbb{C}^n$ son $h^{p,q} = 0$ si $0 \leq p \leq n$ y $1 \leq q \leq n$ y no están definidos para el caso $q = 0$ dado que la dimensión del espacio de funciones holomorfas de $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ es infinita.

Teorema 3.4.18. *La cohomología de Dolbeault no es invariante homotópico.*

Demostración. Basta dar un contraejemplo: Podemos usar el Teorema 3.4.17 y dado que $\{0\}$ es una variedad simplemente conexa y compacta el Teorema 3.4.15 nos asegura que

$H_D^{0,0}(\{0\}) = \mathbb{C}$. $\mathbb{C}^n$ es homotópico a $\{0\}$ y los grupos de cohomología de Dolbeault no coinciden [2] $\square$

Hasta ahora hemos visto que la cohomología de Dolbeault y la de De Rham en lo general no coinciden. Podemos pensar que tal vez la compacidad sea una condición para que las cohomologías sean isomorfas dado que $dimH^{0,0}_{deD}(M) = 1 = dimH^0_{deR}(M)$.

3.5. Variedades con métrica hermitiana compatible con una e.c.c. J

Una métrica hermitiana h sobre un espacio complejo V es una transformación

$$h : V \times V \to \mathbb{C}$$

tal que es lineal en la primera entrada, antilineal en la segunda entrada y satisface

$$h(u,u) \geq 0$$

$$h(u,v) = \overline{h(v,u)}.$$

Veamos la siguiente consecuencia.

Lema 3.5.1. *La parte real de la métrica hermitiana es un producto interior real y la parte imaginaria de la métrica define una forma alternante real.*

Demostración. Usando

$$h(u,v) = \overline{h(v,u)}$$

podemos igualar la parte real y la parte imaginaria

$$Re(h(u,v)) + iIm(h(u,v)) = Re(h(v,u)) - iIm(h(v,u))$$

de donde vemos que

$$Re(h(u,v)) = Re(h(v,u)) \quad y \quad Im(h(u,v)) = -Im(h(v,v)).$$

heredando cada una la propiedad de linealidad de h. $\square$

Definición 3.5.2. *En analogía al caso real (definición 3.1.15) decimos que una métrica hermitiana es compatible con una e.c.c J, si $h(J(u), J(v)) = h(u,v)$ para toda $u, v \in V$.*

Si la métrica hermitiana h es compatible con la e.c.c. J podemos decir más de la forma alternante, $\omega = Im(h)$; tenemos que

$$h(Jv, J(u)) = h(v,u)$$

[2]En la literatura se conocen a las cohomologías que no son invariantes homotópicos como cohomologías no clásicas en contraste con la cohomología clasica de De Rham. La cohomología de Bott-Chern es una cohomología no clásica.

lo que implica que

$$\omega(Jv, Ju) = \omega(v, u).$$

Si $v \in V$ sabemos que $v - iJ(v) \in V^{1,0}$, entonces

$$\omega(v - iJ(v), u - iJ(u)) = \omega(v, u) - \omega(Jv, Ju) - i(\omega(v, J(u)) + \omega(Jv, u)) = 0$$

Por lo tanto ω no puede pertenecer a $\mathcal{A}^{2,0}(V)$, de la misma forma $v + iJ(v) \in V^{0,1}$ y

$$\omega(v + iJ(v), u + iJ(u)) = \omega(v, u) - \omega(Jv, Ju) + i(\omega(v, J(u)) + \omega(Jv, u)) = 0$$

De la misma forma ω no puede pertenecer a $\mathcal{A}^{0,2}(V)$ y sólo puede pertenecer a $\mathcal{A}^{1,1}(V)$. Esta idea podemos extenderla a una variedad compleja equipada con un producto hermitiano en cada espacio tangente.

Definición 3.5.3. *Una variedad compleja M con un producto hermitiano g en cada espacio tangente, donde el producto es compatible con una e.c.c. J, induce una (1,1)-forma dada por $\omega(u,v) := g(J(u),v)$ que es llamada la forma fundamental. Si $h_{k,j}$ es la matriz asociada al producto hermitiano entonces*

$$\omega = \frac{i}{2} \sum_{k,j} h_{k,j} dz_k \wedge d\overline{z}_j$$

Ejemplo 3.5.4. *Si $M = \mathbb{C}^n$ con la métrica hermitiana canónica y la e.c.c. J estándar,*

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} dx_j \wedge dy_j = \frac{i}{2} \sum_{j=1}^{n} dz_j \wedge d\overline{z}_j$$

entonces ω es una forma fundamental.

Definición 3.5.5. *Dado V un espacio vectorial real de dimensión par equipado con un producto interior, podemos extender la definición del operador de Hodge $*$*

$$* : \Lambda^k(V) \to \Lambda^{2n-k}(V).$$

Como $*$ es lineal queda determinado por los elementos de la base:

$$*(dz_{j_1} \wedge \cdots \wedge dz_{j_k}) = dz_{j_{k+1}} \wedge \cdots \wedge dz_{j_n}$$

de tal forma que

$$dz_{j_1} \wedge \cdots \wedge dz_{j_k}) \wedge dz_{j_{p+1}} \wedge \cdots \wedge dz_{j_n} = dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n$$

completando una base positiva como en el caso real.

Como se recordará el operador de Hodge en el caso real nos ayudó a definir un producto interior sobre $\Lambda^k(V)$.

Definición 3.5.6. *El producto interior sobre $\Lambda^k(V)$ es*

$$\alpha \wedge *\beta =< \alpha, \beta > *(1)$$

para toda α, $\beta \in \Lambda^k(V)$. Si $<,>_{\mathbb{C}}$ es la extensión hermitiana de $<,>$, podemos extender la definición anterior a $\Lambda^k(V_{\mathbb{C}})$, obteniendo un producto hermitiano

$$\alpha \wedge *\overline{\beta} =< \alpha, \beta >_{\mathbb{C}} *(1)$$

Veamos cómo actúa el operador estrella sobre la base de las (p,q)-formas

$$u = u_{K,J} dz_{k_1} \wedge \cdots \wedge dz_{k_p} \wedge d\overline{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\overline{z}_{j_q}$$

por definición de $*$

$$u \wedge *\overline{u} = u_{K,J}\overline{u_{K,J}} * (1)$$

$$= (u_{K,J} dz_{k_1} \wedge \cdots \wedge dz_{k_p} \wedge d\overline{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\overline{z}_{j_q}) \wedge (\overline{u_{K,J}} dz_{k_{p+1}} \wedge \cdots \wedge dz_{k_n} \wedge d\overline{z}_{j_{q+1}} \wedge \cdots \wedge d\overline{z}_n)$$

lo que implica

$$*\overline{u} = \overline{u_{K,J}} dz_{k_{p+1}} \wedge \cdots \wedge dz_{k_n} \wedge d\overline{z}_{j_{q+1}} \wedge \cdots \wedge d\overline{z}_n$$

por otro lado

$$\overline{u} = \overline{u_{K,J}} dz_{j_1} \wedge \cdots \wedge dz_{j_q} \wedge d\overline{z}_{k_1} \wedge \cdots \wedge d\overline{z}_{k_p}$$

con lo cual vemos que

$$*u = u_{K,J} dz_{j_{q+1}} \wedge \cdots \wedge dz_{j_n} \wedge d\overline{z}_{k_{p+1}} \wedge \cdots \wedge d\overline{z}_{k_n}$$

y concluimos que

$$* : \Lambda^{p,q}(V_{\mathbb{C}}) \to \Lambda^{n-q,n-p}(V_{\mathbb{C}}).$$

Corolario 3.5.7. $\Lambda^k(V_{\mathbb{C}}) = \bigoplus_{p+q=k} \Lambda^{p,q}(V)$ *es una descomposición ortogonal.*

Demostración. Sean u una $(p,q)-forma$ y w una $(p',q')-forma$ tales que $p+q = k = q'+p'$ y $p \neq p'$, por lo tanto existe dz_ℓ en los productos de u que no está en los productos de w, por lo tanto $*w$ tiene a dz_ℓ en sus productos y

$$< u, w >= u \wedge *w = 0$$

□

Análogo al caso real podemos darle a M la medida de Lebesgue inducida para definir una norma $\mathcal{L}^2$ sobre $\Lambda^k(M)$ y poder construir un espacio de Hilbert como sigue.

Definición 3.5.8. *Definimos la norma $\mathcal{L}^2$ sobre $\Lambda^k(M)$ por*

$$(\alpha, \beta) = \int_M < \alpha, \beta >_{\mathbb{C}} *(1)$$

Como en el caso real ahora tiene sentido preguntarnos quién es el operador adjunto de ∂ y $\overline{\partial}$.

Lema 3.5.9. *El operador*

$$\partial^* : \mathcal{A}^{p+1,q(M)} \to \mathcal{A}^{p,q}(M)$$

adjunto a ∂ está dado por

$$\partial^* := - * \overline{\partial} *$$

y el operador

$$\overline{\partial}^* : \mathcal{A}^{p,q+1}(M) \to \mathcal{A}^{p,q}(M)$$

adjunto a $\overline{\partial}$ está dado por

$$\overline{\partial}^* = - * \partial * .$$

Demostración. Sea $\alpha \in \mathcal{A}^{k-1}(M)$ y $\overline{\beta} \in \mathcal{A}^{k}(M)$. Entonces

$$d(\alpha \wedge *\overline{\beta}) = d\alpha \wedge *\overline{\beta} + (-1)^{k-1}\alpha \wedge d * \overline{\beta}$$

$$= d\alpha \wedge *\overline{\beta} + (-1)^{k-1}(-1)^{(p-1)(2n-p+1)}\alpha \wedge ** d * \overline{\beta} = d\alpha \wedge *\overline{\beta} + (-1)^{2n(p+1)+2}\alpha \wedge ** d * \overline{\beta}$$

$$= d\alpha \wedge *\beta + \alpha \wedge ** d * \beta$$

por la definición

$$d\alpha \wedge *\overline{\beta} =< d\alpha, \beta >_{\mathbb{C}} *(1)$$

de la misma forma

$$\alpha \wedge ** d * \overline{\beta} =< \alpha, *d * \beta > *(1)$$

y obtenemos que

$$d(\alpha \wedge *\overline{\beta}) =< d\alpha, \beta >_{\mathbb{C}} *(1)+ < \alpha, *d * \beta >_{\mathbb{C}} *(1)$$

integrando

$$\int_M d(\alpha \wedge *\overline{\beta}) = \int_M < d\alpha, \beta >_{\mathbb{C}} *(1) + \int_M < \alpha, *d * \beta >_{\mathbb{C}} *(1)$$

y usando Stokes

$$0 = \int_M < d\alpha, \beta >_{\mathbb{C}} *(1) + \int_M < \alpha, *d * \beta >_{\mathbb{C}} *(1) = (d\alpha, \beta) + (\alpha, *d * \beta),$$

para toda $\alpha \in \mathcal{A}^{k-1}(M)$ y $\overline{\beta} \in \mathcal{A}^{k}(M)$, por lo tanto $d^* = - * d*$ y $d \;: \mathcal{A}^{k+1}(M) \to \mathcal{A}^{k}(M)$. Usando que $d = \partial + \overline{\partial}$, obtenemos $d^* = - * \partial * - * \overline{\partial} *$. Veamos cuál es la imagen de $\mathcal{A}^{p,q+1}(M)$ bajo $- * \overline{\partial} *$. Si $\beta_1 \in \mathcal{A}^{p,q+1}(M)$ con $p + q = k$ implica que $*\beta_1 \in \mathcal{A}^{n-(q+1),n-p}(M)$, por lo cual $\partial * \beta_1 \in \mathcal{A}^{n-q,n-p}(M)$ por lo que concluimos que $*\partial * \beta_1 \in \mathcal{A}^{p,q}(M)$.
Análogamente si $\beta_2 \in \mathcal{A}^{p+1,q}(M)$ con $p + q = k$ implica que $*\beta_2 \in \mathcal{A}^{n-q,n-(p+1)}(M)$, por lo cual $\overline{\partial} * \beta_2 \in \mathcal{A}^{n-q,n-p}(M)$ por lo que concluimos que $*\overline{\partial} * \beta_2 \in \mathcal{A}^{p,q}(M)$. Por último si $\alpha \in \mathcal{A}^{p,q}(M)$ y $\beta \in \mathcal{A}^{p,q+1}(M)$,

$$\int_M < \partial\alpha + \overline{\partial}\alpha, \beta > *(1) = \int_M < \alpha, - * \overline{\partial} * \beta - *\partial * \beta > *(1)$$

por la descomposición ortogonal, de la misma forma obtenemos que

$$\int_M < \overline{\partial}\alpha, \beta > *(1) = \int_M < \alpha, - * \partial * \beta > *(1),$$

$$\int_M < \partial\alpha, \beta > *(1) = \int_M < \alpha, - * \overline{\partial} * \beta > *(1).$$

□

Ahora definimos el operador laplaciano correspondiente a cada operador.

Definición 3.5.10.

$$\Delta_d = dd^* + d^* d$$

$$\Delta_{\overline{\partial}} = \overline{\partial}\,\overline{\partial}^* + \overline{\partial}^*\,\overline{\partial}$$

$$\Delta_{\partial} = \partial\partial^* + \partial\partial$$

Lema 3.5.11. *Si M es compacta tenemos*

$$(\alpha, \Delta_d \alpha) = (d\alpha, d\alpha) + (d^*\alpha, d^*\alpha)$$

y

$$(\alpha, \Delta_{\overline{\partial}}\alpha) = (\partial\alpha, \partial\alpha) + (\overline{\partial}^*\alpha, \overline{\partial}^*\alpha).$$

Demostración. Análoga al caso real; se usa la propiedad del operador adjunto. □

Definición 3.5.12. *Dada M compacta decimos que α es armónica respecto a d (∂ y $\overline{\partial}$ respectivamente) si $\Delta_d\alpha = 0$ ($\Delta_\partial\alpha = 0$ y $\Delta_{\overline{\partial}}\alpha = 0$ respectivamente)*

Corolario 3.5.13. *Dada M compacta, α es d-armónica con respecto a $d \iff \alpha$ es d-cerrada y d^*-cerrada (análogo con ∂ y $\overline{\partial}$).*

Demostración. Gracias al lema 3.5.11 sabemos que si α cumple que $d\alpha = 0$ y $d^*\alpha = 0$ tenemos que $\Delta_d\alpha = 0$. Recíprocamente si $\Delta_d\alpha = 0$ se cumple que $d\alpha = 0$ y $d^*\alpha = 0$. □

Definición 3.5.14. *Dada M una variedad compleja compacta equipada con un producto hermitiano h, denotamos por $\mathcal{H}^k(M)$ al conjunto de las $k-formas$ Δ_d-armónicas y a $\mathcal{H}^{p,q}(M)$ el conjunto de las (p,q)-formas $\Delta_{\overline{\partial}}$-armónicas.*

Capítulo 4

Teoremas de descomposición de Hodge y Dolbeault

4.1. Demostración de los teoremas

Ahora veremos que existe una descomposición de $\mathcal{A}^{p,q}(M)$ en términos de los operadores $\overline{\partial}$, $\overline{\partial}^*$ y $\Delta_{\overline{\partial}}$ que en la literatura es conocida como la descomposición de Dolbeault-Hodge, en contraparte existe el teorema de descomposición de Hodge en términos de d, d^* y Δ_d. Dado que los teoremas y las demostraciones que se presentarán a continuación son análogas para los operadores d y $\overline{\partial}$, a partir de ahora sólo enunciaremos los resultados y las demostraciones para el operador $\overline{\partial}$.

Definición 4.1.1. *El producto interno que induce la $\overline{\partial}-$norma de Sobolev sobre las $\mathcal{A}^{p,q}(M)$ está dado por*

$$((\alpha,\eta)) := (\alpha,\eta) + (\overline{\partial}\alpha, \overline{\partial}\eta) + (\overline{\partial}^*\alpha, \overline{\partial}^*\eta)$$

$$\|\alpha\|_{W^{1,2}_{\overline{\partial}}} = ((\alpha,\alpha) + (\overline{\partial}\alpha, \overline{\partial}\alpha) + (\overline{\partial}^*\alpha, \overline{\partial}^*\alpha))^{\frac{1}{2}}$$

Definición 4.1.2. *La compleción de $\mathcal{A}^{p,q}(M)$ con respecto a $\|\alpha\|_{W^{1,2}_{\overline{\partial}}}$ la denotamos por $W^{1,2}_{\overline{\partial}}(\mathcal{A}^{p,q}(M))$*

Gracias a que la norma $\mathcal{L}^2$ es equivalente a las normas de la definición 4.1.1 y que el operador $\overline{\partial}$ es un operador elíptico podremos hacer uso de grandes teoremas los cuales se pueden ver en ([5] pág. 80-100) y ([13] capitulo III).

Lema 4.1.3. *([5] pág 83) Sea M una variedad compacta compleja. La inclusión de $W^{1,2}_{\overline{\partial}}(\mathcal{A}^{p,q}(M))$ en $\mathcal{L}^2(\mathcal{A}^{p,q}(M))$ es compacta.*

Corolario 4.1.4. *Existe una constante c con la propiedad de que para toda $(p,q)-forma$ β tal que es $\overline{\partial}$-cerrada y $\beta \in (Nuc\ \overline{\partial}^*)^\perp$ se cumple que*

$$(\beta,\beta) \leq c(\overline{\partial}^*\beta, \overline{\partial}^*\beta).$$

Demostración. Supongamos que no existe tal c, por lo tanto existe una sucesión β_n de (p,q)-formas $\overline{\partial}$-cerradas ortonormales a $(Nuc\ \overline{\partial}^*)^\perp$ tales que

$$1 = (\beta_n, \beta_n) \geq n(\overline{\partial}^*\beta_n, \overline{\partial}^*\beta_n)$$

y obtenemos que

$$\|\beta_n\|^2_{W^{1,2}_{\overline{\partial}}} \leq 1 + \frac{1}{n}$$

por el Lema 4.1.3 podemos extraer una subsucesión β_n convergente en la norma $\mathcal{L}^2$ que converja a β y como

$$\frac{1}{n} \geq (\overline{\partial}^*\beta_n, \overline{\partial}^*\beta_n)$$

se sigue que $\overline{\partial}^*\beta_n \to 0$, ahora

$$0 = \lim_{n\to\infty} (\overline{\partial}^*\beta_n, \phi) = \lim_{n\to\infty} (\beta_n, \overline{\partial}\phi) = (\beta, \overline{\partial}\phi) = (\overline{\partial}^*\beta, \phi) \quad \forall \phi \in \mathcal{A}^{p,q}(M);$$

análogamente

$$0 = \lim_{n\to\infty} (\overline{\partial}\beta_n, \phi) = \lim_{n\to\infty} (\beta_n, \overline{\partial}^*\phi) = (\beta, \overline{\partial}^*\phi) = (\overline{\partial}\beta, \phi) \quad \forall \phi \in \mathcal{A}^{p,q}(M)$$

de donde concluimos que $\overline{\partial}\beta = 0$ y $\overline{\partial}^*\beta = 0$, esto implica que $\beta \in Nuc\, \overline{\partial}^*$ por lo tanto

$$(\beta, \beta_n) = 0 \quad \forall n$$

por otro lado

$$(\beta_n, \beta_n) = 1 \quad \forall n$$

lo que es una contradicción. □

Teorema 4.1.5. *([8] pág 575) Una sucesión acotada $\{v_n\}$ en un espacio de Hilbert tiene una subsucesión débilmente convergente y su límite cumple que*

$$\|v\| \leq \lim_{n\to\infty} inf\, \|v_n\|$$

Teorema 4.1.6. *([5] pag. 94)(Regularización) Sean $\alpha \in \mathcal{A}^{p,q}(M)$ y $\beta \in \mathcal{L}^2(\mathcal{A}^{p,q}(M))$ tales que β es una solución débil a*

$$\Delta\beta = \alpha$$

En otras palabras si

$$(\beta, \Delta_{\overline{\partial}}\phi) = (\alpha, \phi) \quad \forall \phi \in \mathcal{A}^{p,q}(M)$$

entonces $\omega \in \mathcal{A}^{p,q}(M)$.

Definición 4.1.7. *Denotamos por Π' la proyección de $\mathcal{A}^{p,q}(M)$ sobre $Nuc\, \overline{\partial}^*$.*

Lema 4.1.8. *Sea $\phi \in Z^{p,q}_{\overline{\partial}}(M)$. ϕ es de norma mínima en el espacio afín $\phi + \overline{\partial}\mathcal{A}^{p,q-1}(M) \subset \mathcal{A}^{p,q}(M) \iff \overline{\partial}^*\phi = 0$.*

Demostración. Si $\overline{\partial}^*\phi = 0 \Rightarrow$ para cualquier $\eta \in \mathcal{A}^{p,q-1}(M)$ con $\overline{\partial}\eta = 0$ tenemos.

$$\|\phi + \overline{\partial}\eta\|^2 = (\phi + \overline{\partial}\eta, \phi + \overline{\partial}\eta) = \|\phi\|^2 + \|\overline{\partial}\eta\|^2 + 2Re(\phi, \overline{\partial}\eta) = \|\phi\|^2 + \|\overline{\partial}\eta\|^2 + 2Re(\overline{\partial}^*\phi, \eta)$$

$$= \|\phi\|^2 + \|\overline{\partial}\eta\|^2 \geq \|\phi\|^2$$

por lo tanto ϕ tiene norma mínima.
Inversamente si ϕ tiene norma mínima, para cualquier $\eta \in \mathcal{A}^{p,q-1}(M)$ se sigue que

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\|\phi + t\overline{\partial}\eta\|^2|_{t=0} = [(\phi, \overline{\partial}\eta) + (\overline{\partial}\eta, \phi) + 2t(\overline{\partial}\eta, \overline{\partial}\eta)]|_{t=0} = 2Re(\phi, \overline{\partial}\eta)$$

y

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\|\phi + t\overline{\partial}i\eta\|^2|_{t=0} = 2Im(\phi, \overline{\partial}\eta)$$

por lo tanto

$$(\overline{\partial}^*\phi, \eta) = (\phi, \overline{\partial}\eta) = 0$$

como esto es válido para toda $\eta \in \mathcal{A}^{p,q-1}(M)$, llegamos a que $\overline{\partial}^*\phi = 0$. Por el Corolario 3.5.13, $\overline{\partial}\phi = 0$ y $\overline{\partial}^*\phi = 0$ es una condición suficiente para que ϕ sea armónica. □

En la literatura se conoce como el principio de Dirichlet al hecho de que la solución a la ecuación de Laplace sea el mínimo de algún funcional.

Teorema 4.1.9. *Cada clase de cohomología de Dolbeault de una variedad compacta compleja tiene un único representante armónico.*

El Lema 4.1.8 anterior nos proporciona un candidato para encontrar la (p, q)-forma armónica. El problema es que el espacio de las (p, q)-formas diferenciales no es cerrado; una vez más tendremos que usar las técnicas del análisis.

Demostración. Para la unicidad, sean ϕ_1 y ϕ_2 dos (p, q)-formas cohomólogas y armónicas, por lo tanto existe $\eta \in \mathcal{A}^{p,q-1}(M)$ tal que $\phi_1 - \phi_2 = \overline{\partial}\eta$ (quitando el caso $q = 0$).

$$(\phi_1 - \phi_2, \phi_1 - \phi_2) = (\phi_1 - \phi_2, \overline{\partial}\eta) = (\overline{\partial}^*(\phi_1 - \phi_2), \eta) = 0$$

Dado que $\phi_1 - \phi_2$ es $\overline{\partial}^* - cerrada$, concluimos que $\phi_1 = \phi_2$ por lo tanto es único.
Para la existencia, sea ω_0 una (p, q)-forma representante de alguna clase de cohomología, consideremos

$$\omega = \text{ínf}\{(\omega, \omega) : \omega = \omega_0 + \overline{\partial}\alpha \;\; con\ \alpha \in \Lambda^{p,q}(M)\}$$

donde $\omega \in \mathcal{L}^2(\mathcal{A}^{p,q}(M))$ y

$$(\omega, \omega) = k.$$

Tomemos una sucesión minimizante $\omega_n = \omega_0 + d\alpha_n$ y para una n suficientemente grande se cumple que

$$(\omega_n, \omega_n) \leq k + 1.$$

Ahora veamos que ω y ω_0 son débilmente cohomólogas : Sea η una (p, q)-forma tal que $\overline{\partial}^*\eta = 0$; entonces

$$(\omega_n - \omega_0, \eta) = (\overline{\partial}\alpha_n, \eta) = (\alpha_n, \overline{\partial}^*\eta) = 0$$

Si llamamos $\xi = \omega$ - ω_0, definimos la funcional lineal ℓ sobre $\overline{\partial}^*(\mathcal{A}^{p,q}(M))$ por

$$\ell(\overline{\partial}^*\phi) := (\phi, \xi)$$

Comprobemos que está bien definida, sean $\overline{\partial}^* \phi_1 = \overline{\partial}^* \phi_2$, por lo tanto

$$0 = \ell(0) = \ell(\overline{\partial}^*(\phi_1 - \phi_2)) = (\xi, \phi_1 - \phi_2)$$

Si llamamos $\psi = \phi - \Pi'(\phi)$, se cumple que $\overline{\partial}^* \phi = \overline{\partial}^* \psi$ y usando el Corolario 4.1.4 llegamos a que

$$\|\psi\| \leq c\|\overline{\partial}^* \psi\| = c\|\overline{\partial}^* \phi\|$$

Usando la definición del funcional y la desigualdad de arriba

$$|\ell(\overline{\partial}^* \phi)| \leq \|\xi\|\|\phi\| \leq c\|\xi\|\|\overline{\partial}^* \phi\|$$

tenemos que el funcional ℓ es acotado sobre $\overline{\partial}^*(\mathcal{A}^{p,q}(M))$ y podemos extenderlo a todo $\mathcal{L}^2$ gracias al teorema de Hahn-Banach. Como el funcional ℓ ya está definido sobre un espacio de Hilbert podemos usar el teorema de representación de Riesz y tenemos que existe $\alpha \in \mathcal{L}^2$ tal que

$$\ell(\overline{\partial}^* \phi) = (\overline{\partial}^* \phi, \alpha)$$

$$(\phi, \xi) = (\overline{\partial}^* \phi, \alpha) = (\phi, \overline{\partial}\alpha)$$

por lo tanto tenemos la siguiente igualdad débil

$$\overline{\partial}\alpha = \xi = \omega - \omega_0$$

y concluimos que ω y ω_0 son débilmente cohomólogas. por lo tanto ω es límite débil de la sucesión minimizante y está contenido en la clase de cohomología de ω_0. Si llamamos

$$\ell_n(\overline{\partial}^* \phi) = (\overline{\partial}^* \phi, \alpha_n) = (\phi, \omega_n - \omega_0)$$

Gracias al Teorema 4.1.5 tenemos

$$k \leq (\omega, \omega) \leq \lim_{n \to \infty} inf\ (\omega_n, \omega_n) = k$$

y por el hecho de que ω es $\overline{\partial}^* - cerrada$

$$0 = (\omega, \overline{\partial}\beta) \quad \forall \beta \in \mathcal{A}^{p,q-1}(M)$$

obtenemos que ω es débilmente armónica. Con el Teorema 4.1.6 obtenemos que ω es suave. □

Estamos preparados para la generalización del teorema de descomposición de Hodge; los 2 teoremas que se prensentarán son los objetivos principales de este trabajo.

Teorema 4.1.10. *(Descomposición de Hodge) Sea M una variedad compleja y compacta. Entonces tenemos que la dimensión de $\mathcal{H}^k(M)$ es finita y se puede ver a $\mathcal{A}^k(M)$ como la siguiente suma directa:*

$$\mathcal{A}^k(M) = \mathcal{H}^k(M) + d\mathcal{A}^{K-1}(M) + d^*\mathcal{A}^{k+1}(M). \tag{4.1}$$

Teorema 4.1.11. *(Descomposición de Dolbeault) Sea M una variedad compleja y compacta. Entonces tenemos que la dimensión de $\mathcal{H}^{q,p}(M)$ es finita y se puede ver a $\mathcal{A}^{p,q(M)}$ como la siguiente suma directa:*

$$\mathcal{A}^{p,q}(M) = \mathcal{H}^{p,q}(M) + \overline{\partial}\mathcal{A}^{p,q-1}(M) + \overline{\partial}^*\mathcal{A}^{p,q+1}(M). \tag{4.2}$$

Demostración. Supongamos que la dimensión es infinita y consideremos una sucesión de $(p,q) - formas$ armónicas ortonormales; gracias al Lema 4.1.3 podemos hacer una demostración análoga a la del Teorema 2.3.
Afirmamos que $\mathcal{H}^{p,q}(M) = (\overline{\partial}\mathcal{A}^{p,q-1}(M))^{\perp} \cap (\overline{\partial}^*\mathcal{A}^{p,q+1}(M))^{\perp}$, sea $\alpha \in \mathcal{A}^{p,q-1}(M)$ y $\omega \in (\overline{\partial}\mathcal{A}^{p,q-1}(M))^{\perp} \cap (\overline{\partial}^*\mathcal{A}^{p,q+1}(M))^{\perp}$ tenemos que

$$(\omega, \overline{\partial}\alpha) = (\overline{\partial}^*\omega, \alpha) = 0 \quad \forall\, \alpha \in \mathcal{A}^{p,q-1}(M)$$

de la misma forma si $\alpha \in \mathcal{A}^{p,q+1}(M)$

$$(\omega, \overline{\partial}^*\alpha) = (\overline{\partial}\omega, \alpha) = 0 \quad \forall\, \alpha \in \mathcal{A}^{p,q+1}(M).$$

□

Teorema 4.1.12. *Sea M una variedad compacta compleja; entonces se tiene las siguientes identidades:*
Isomorfimo de Hodge

$$H^p_{deR}(M) \simeq \mathcal{H}_p(M)$$

Isomorfismo de Dolbeault

$$H^{p,q}_D(M) \simeq \mathcal{H}^{p,q}(M)$$

Demostración. Por las ecuaciones 4.1 y 4.2

$$B^{p,q}_D(M) = \overline{\partial}(\mathcal{H}^{p,q-1}(M))$$

$$Z^{p,q}_D(M) = Nuc\,\overline{\partial}(\mathcal{H}^{p,q}(M)) = \mathcal{H}^{p,q}(M) + \overline{\partial}(\mathcal{H}^{p,q-1}(M))$$

$$H^{p,q}_D(M) := \frac{Z^{p,q}_D(M)}{B^{p,q}_D(M)} = \frac{\mathcal{H}^{p,q}(M) + \overline{\partial}(\mathcal{H}^{p,q-1}(M))}{\overline{\partial}(\mathcal{H}^{p,q-1}(M))} = \mathcal{H}^{p,q}(M).$$

□

4.2. Dualidad de Poincaré y de Serre

En el caso real una de las consecuencias del Teorema de descomposición de Hodge fue el teorema de dualidad de Poincaré para variedades reales. En esta ocasión daremos la demostración análoga en el caso complejo para la cohomología de De Rham y la prometida en el capítulo anterior para la cohomología de Dolbeault.

Definición 4.2.1. *Definimos la funcional bilineal*

$$B : H^k_{deR}(M) \times H^{2n-k}_{deR} \to \mathbb{C}$$

dada por

$$B([\phi],[\psi]) = \int_M \phi \wedge \psi,$$

donde $\phi \in H^k_{deR}(M)$ *y* $\psi \in H^{2n-k}_{deR}(M)$.
Por otro lado definimos

$$B' : H^{p,q}_D(M) \times H^{n-p,n-q}_D(M) \to \mathbb{C}$$

$$B'([\phi],[\psi]) = \int_M \phi \wedge \psi,$$

Para $\phi \in H^{p,q}_D(M)$ *y* $\psi \in H^{n-p,n-q}_D(M)$.

Veamos que B no depende del representante de la clase de cohomología de De Rham. Si $\phi_1 \in H^k_{deR}(M)$, $\eta \in H^{k-1}_{deR}(M)$ y $\phi = \phi_1 + d\eta$,

$$\int_M \phi \wedge \psi = \int_M \phi_1 \wedge \psi + \int_M d\eta \wedge \psi = \int_M \phi_1 \wedge \psi + \int_M d(\eta \wedge \psi) = \int_M \phi_1 \wedge \psi$$

por el teorema de Stokes.
B' tampoco depende del representante de la clase de cohomología de Dolbeault: Si $\phi_1 \in H^{p,q}_D(M)$, $\eta \in H^{p,q-1}_D(M)$ y $\phi = \phi_1 + \overline{\partial}\eta$,

$$\int_M \phi \wedge \psi = \int_M \phi_1 \wedge \psi + \int_M \overline{\partial}\eta \wedge \psi = \int_M \phi_1 \wedge \psi + \int_M \overline{\partial}(\eta \wedge \psi)$$

pero $\eta \wedge \psi \in \mathcal{A}^{n,n-1}(M)$ dado que $\psi \in \mathcal{H}^{n-p,n-q}(M)$. Por lo tanto los operadores d y $\overline{\partial}$ coinciden,

$$\int_M \phi \wedge \psi = \int_M \phi_1 \wedge \psi + \int_M d(\eta \wedge \psi) = \int_M \phi_1 \wedge \psi$$

usando de nuevo el teorema de Stokes.

Teorema 4.2.2. *Dualidad de Poincaré: Sea M una variedad compacta compleja. La transformación de la definición 4.2.1 es no singular y determina un isomorfismo entre* $H^{2n-k}_{deR}(M)$ *y* $(H^k_{deR}(M))^*$.

Teorema 4.2.3. *Dualidad de Serre*[1]*: Sea M una variedad compacta compleja. La transformación de la definición 4.2.1 es no singular y determina un isomorfismo de* $H^{n-p,n-q}_D(M)$ *con* $(H^{p,q}_D(M))^*$.

[1] Jean Pierre Serre (nacido el 15 de septiembre de 1926) matemático francés. Por sus contribuciones a la geometría algebraica, la teoría de números y la topología ha sido considerado uno de los matemáticos más prominentes del siglo XX. Serre fue premiado con la medalla Fields a los 28 años de edad, siendo el premiado más joven hasta el día de hoy.

Demostración. Dado que la demostración de la dualidad de Poincaré es la misma del capítulo 1 la dejaremos de lado.
Veamos que B' es no singular. Si $[\phi] \in \mathcal{H}^{p,q}(M)$ distinta del clase del cero con ϕ su representante armónico, tenemos que $*\overline{\phi} \in \mathcal{H}^{n-p,n-q}(M)$ y

$$\int_M \phi \wedge *\overline{\phi} = \|\phi\|^2 > 0.$$

A cada $\psi \in H_D^{n-p,n-q}(M)$ le asociamos una funcional lineal

$$L_\psi : H_D^{n-p,n-q}(M) \to (H_D^{p,q}(M))^*$$

de la siguiente manera:

$$L_\psi(\phi) = \int_M \phi \wedge \psi.$$

Sabemos que $L_\psi(*\overline{\psi}) = 0 \iff \psi = 0$ por lo tanto la transformación es inyectiva. Para la suprayectividad, sea $L \in (H_D^{p,q}(M))^*$, consideremos $\phi_1, \ldots, \phi_n$ una base ortonormal de $H_D^{p,q}(M)$ por lo tanto podemos escribir a ϕ como combinación lineal de la base:

$$L(\phi) = L(\sum_{i=1}^{n} a_i \phi_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i L(\phi_i)$$

Aseguramos que $\psi = \sum_{i=1}^n L(\phi_i) * \overline{\phi}_i$ es el elemento de $H_D^{n-p,n-q}(M)$ tal que $L = L_\psi$:

$$L_\psi(\phi) = (\phi, \sum_{i=1}^{n} L(\phi_i) * \overline{\phi}_i) = \int_M \phi \wedge \sum_{i=1}^{n} L(\phi_i) * \overline{\phi}_i = \sum_{i=1}^{n} L(\phi_i) \int_M \phi \wedge *\overline{\phi}_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} L(\phi_i) \int_M \sum_{j=1}^{n} a_j \phi_j \wedge *\overline{\phi}_i = \sum_{i=1}^{n} a_i L(\phi_i).$$

□

En caso de que M sea compacta, gracias al teorema de dualidad y al teorema de De Rham obtenemos que

$$H_{2n-k}(M) \simeq H_{deR}^k(M)$$

y obtenemos la relación entre los números de Betti

$$b^k(M) = b^{2n-k}(M).$$

Nota 4.2.4. *Existe una relación análoga para los números de Hodge*

$$h^{p,q} = h^{n-p,n-q};$$

la demostración usa el análogo al teorema de De Rham para la cohomología de Dolbeault, el lector interesado puede ver [6] o [14].

Capítulo 5

Variedades de Kähler

Ahora veremos que existe una relación entre los números de Hodge y los de Betti. Las condiciones para esto son que la $(1,1)-forma$ fundamental (Definición 3.5.3) sea cerrada y M sea compacta. La idea a seguir es ver que estas condiciones serán suficientes para que los operadores $\Delta_d, \Delta_\partial$ y $\Delta_{\overline{\partial}}$ conmunten.

5.1. Forma de Kähler

Definición 5.1.1. *Decimos que una $(1,1)$-forma fundamental (Definición 3.5.3) es de Kähler*[1] *si ω es $d-cerrada$. Si una variedad M está equipada con una forma de Kähler la llamamos variedad de Kähler.*

Ejemplo 5.1.2. *Consideremos $\mathbb{CP}^n$. Definimos ω como*

$$\omega := \frac{1}{2}\partial\overline{\partial}\log\|z\|^2, \quad z \in \mathbb{CP}^n$$

Podemos representar a ω en coordenadas locales donde $U_0 = \{[z^0,\ldots,z^n] : z^0 \neq 0\}$

$$\omega = \frac{i}{2}\partial\overline{\partial}(1+\sum_{j=1}^{n} z^j\overline{z}^j) = \frac{i}{2}\partial(\frac{\sum_{k=1}^n z^k d\overline{z}^k}{1+\sum_{j=1}^n z^i\overline{z}^j}) = \frac{i}{2}(\frac{\sum_{k=1}^n dz^k\wedge d\overline{z}^k}{1+\sum_{j=1}^n z^i\overline{z}^j} - \frac{\sum_{m=1}^n \overline{z}^m dz^m \wedge \sum_{k=1}^n z^k d\overline{z}^k}{1+\sum_{j=1}^n z^i\overline{z}^j}$$

Recordando que el grupo $U(n+1)$ sobre $\mathbb{C}^n$ lleva líneas en líneas, en otras palabras lleva un punto de $\mathbb{CP}^n$ en cualquier otro de $\mathbb{CP}^n$, sea A tal que $A([z^0,\ldots,z^n]) = [1,0,\ldots,0]$. Entonces

$$A^*\omega = \frac{i}{2}\sum_{k=1}^{n} dz^k\wedge d\overline{z}^k$$

[1] Erich Kähler (Leipzig, 16 de enero de 1906 – Wedel, 31 de mayo de 2000) fue un matemático alemán. Se doctoró en 1928 en la Universidad de Leipzig. Fue profesor en las universidades de Königsberg, Leipzig, Berlín y Hamburgo. Entre sus contribuciones destacan el Teorema de Cartan–Kähler sobre soluciones singulares de sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales; el concepto de métrica de Kähler sobre una variedad compleja y una generalización de las formas diferenciales conocida como diferencial de Kähler.

ω es invariante bajo la acción de $U(n+1)$ sobre $\mathbb{CP}^n$. Por construcción ω es $d-$cerrada dado que

$$d\omega = (\partial + \overline{\partial})\frac{1}{2}\partial\overline{\partial}\log\|z\|^2 = \frac{1}{2}\overline{\partial}\partial\overline{\partial}\log\|z\|^2 = -\frac{1}{2}\partial\overline{\partial}\overline{\partial}\log\|z\|^2 = 0,$$

usando el Lema 3.2.6 para las últimas 2 igualdades.

Ejemplo 5.1.3. *Veamos que el toro complejo es una variedad de Kähler. En este caso, $\omega = i\sum_{j,k} h_{j,k}dz_j \wedge d\overline{z}_k$ con $h_{j,k}$ una matriz hermitiana de coeficientes constantes, se tiene que ω es una forma de Kähler (Véase Ejemplo 2.5.1).*

Ejemplo 5.1.4. *En el caso del disco unitario $\mathbb{D}^n \subset \mathbb{C}^n$, si definimos ω como*

$$\omega = \frac{i}{2}\partial\overline{\partial}\log(1-\|z\|^2) = \frac{i}{2}\partial\overline{\partial}\log(1-\sum_{k=1}^{n} z_k\overline{z}_k)$$

$$= \frac{i}{2}\partial\sum_{m=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\overline{z}_m}\log(1-\sum_{k=1}^{n} z_k\overline{z}_k) = \frac{i}{2}\sum_{j+1}^{n}\frac{\partial}{\partial z_j}\frac{\sum_{m=1}^{n}\overline{z}_m d\overline{z}_k}{1-\sum_{k=1}^{n} z_k\overline{z}_k}$$

$$= \frac{i}{2}\sum_{j,m=1}^{n}(\frac{\delta_{j,m}}{1-\sum_{k=1}^{n} z_k\overline{z}_k} + \frac{z_j\overline{z}_m}{(1-\sum_{k=1}^{n} z_k\overline{z}_k)^2})dz_m \wedge d\overline{z}_k$$

$$= \frac{i}{2}\sum_{j,m=1}^{n}\frac{(1-\sum_{k=1}^{n} z_k\overline{z}_k)\delta_{j,m} + z_j\overline{z}_m}{(1-\sum_{k=1}^{n} z_k\overline{z}_k)^2})dz_m \wedge d\overline{z}_k$$

ω es $d-$cerrada por construcción, por lo tanto $\mathbb{D}^n$ es una variedad de Kähler.

En este capítulo se entenderá que ω es la forma de Kähler.

Lema 5.1.5. *Todos los grupos de cohomología de De Rham par son distintos del trivial para una variedad M de Kähler compacta con dimensión n.*

Demostración. Si ω es la forma de Kähler, recordando el Lema 3.1.14 donde ω^n define la forma del volumen y dado que M es compacta

$$\frac{1}{n!}\int_M \omega^n = vol(M) < \infty$$

Afirmamos que para toda $k \in \{1,\ldots,n\}$, ω^k es cerrada. Procederemos por inducción donde el paso base es

$$d\omega = 0$$

suponemos que ω^i es cerrada; entonces

$$d\omega^{i+1} = d(\omega \wedge \omega^i) = d\omega \wedge \omega^i + (-1)^i\omega \wedge d\omega^i = 0$$

Ahora veamos que no es exacta: supongamos que existe η tal que d$\eta = \omega^k$, por la regla de Leibniz tenemos la siguiente propiedad

$$\omega^n = \omega^k \wedge \omega^{n-k} = d\eta \wedge \omega^{n-k} = d(\eta \wedge \omega^{n-k})\ ;$$

usando el teorema de Stokes

$$\int_M \omega^n = \int_M d(\eta \wedge \omega^{n-k}) = \int_{\partial M} \eta \wedge \omega^{n-k} = 0\ ;$$

una contradicción por lo tanto ω^k pertenece a $H^{2k}_{DeR}(M)$. □

5.2. Operador de Lefschetz e identidades de Kähler

Definición 5.2.1. *El operador de Lefschetz*[2] $\mathcal{L}\colon \Lambda(V_{\mathbb{C}}) \to \Lambda(V_{\mathbb{C}})$ *está dado por* $\mathcal{L}(\alpha) = \omega \wedge \alpha$ *donde* ω *es la forma fundamental y denotamos por* $\mathcal{L}^*$ *el dual del operador de Lefschetz.*

Lema 5.2.2. *El operador dual al operador de Lefschetz es* $\mathcal{L}^* = *\mathcal{L}*$.

Demostración.

$$< \mathcal{L}\beta, \alpha >_{\mathbb{C}} *(1) = \mathcal{L}\beta \wedge *\alpha = \omega \wedge \beta \wedge *\alpha = \beta \wedge (\omega \wedge *\alpha) =< \beta, *\mathcal{L} * (\alpha) >_{\mathbb{C}} *(1).$$

□

Definición 5.2.3. *Denotamos por* $H\colon\Lambda(V) \to \Lambda(V)$ *la transformación* $H = \sum_{i=0}^{2n}(k-n)\Pi^k$, *donde* $\Pi^k :\ \Lambda(V) :\to \Lambda^k(V)$ *es la proyección canónica del álgebra exterior sobre el subespacio* $\Lambda^k(V)$.
Definimos $\mathcal{I} = \sum_{p,q} i^{p-q}\Pi^{p,q}$, *con* $\Pi^{p,q} :\ \Lambda(V) \to \Lambda^{p,q}(V)$ *la proyección canónica del álgebra exterior sobre el subespacio* $\Lambda^{p,q}(V)$.

Veamos que $\mathcal{I}$ es inyectiva; sea $\alpha = \sum_{p,q=0}^{2} a_{p,q} dZ_{p,q} \in \Lambda(V)$ donde $dZ_{p,q}$ son $(p,q)-formas$ y tal que $\mathcal{I}\alpha = 0$; por lo tanto

$$0 = \mathcal{I}\alpha = \sum_{p,q=0}^{2} a_{p,q}\mathcal{I}dZ_{p,q} = \sum_{p,q=0}^{2} a_{p,q} i^{p-q} dZ_{p,q}$$

de donde vemos que $a_{p,q} = 0$ para toda p,q. Por lo tanto existe $\mathcal{I}^{-1}$.

Corolario 5.2.4. *Dado* $(V, <,>)$ *equipado con una e.c.c.* J *se tiene que*

1. $$[\mathcal{I}, \mathcal{L}] = 0 \quad , \quad [*, \mathcal{I}^{-1}] = 0$$

2. $$\mathcal{I}^2_{\Lambda^k} = (-1)^k$$

[2]Solomon Lefschetz (3 de septiembre de 1884 - 5 de octubre de 1972). Nació en Moscú y estudió en la Universidad Clark en Worcester, Massachusetts. Lefschetz empezó a trabajar como ingeniero en los Estados Unidos; después de perder las dos manos en un accidente, comenzó a interesarse por las matemáticas. Enseñó (1924-1953) en la UNAM y Princeton University. Fue premiado por su trabajo con diversas distinciones internacionales, pionero en el desarrollo de las técnicas algebraicas de topología, término que él creó en 1930.

3.

$$-i(\partial - \overline{\partial}) = \mathcal{I}^{-1}\ (\partial + \overline{\partial})\ \mathcal{I}$$

Demostración. 1. Sea α una $(p,q)-forma$

$$[\mathcal{I},\mathcal{L}]\alpha = (\mathcal{I}\mathcal{L} - \mathcal{L}\mathcal{I})\alpha = \mathcal{I}(\omega\wedge\alpha) - \omega\wedge i^{p-q}\alpha = i^{p+1-(q+1)}\omega\wedge\alpha - i^{p-q}\omega\wedge\alpha = 0.$$

Si α es una $(p,q)-forma$ entonces $*\alpha \in \Lambda^{n-q,n-p}(V)$, por lo tanto

$$[*,\mathcal{I}^{-1}]\alpha = (*\mathcal{I}^{-1} - \mathcal{I}^{-1}*)\alpha = i^{q-p} * \alpha - i^{n-p-(n-q)} * \alpha = 0.$$

2. Ahora sea α una $k-forma$, por lo tanto es de la forma $\alpha = \sum_{p+q=k} a_{p,q} dZ_{p,q}$

$$\mathcal{I}^2\alpha = \mathcal{I}(\sum_{p+q=k} a_{p,q}\mathcal{I}(dZ_{p,q})) = \mathcal{I}(\sum_{p+q=k} a_{p,q} i^{p-q} dZ_{p,q}) = i^{2(p-q)}\sum_{p+q=k} a_{p,q} dZ_{p,q})$$

$$i^{2(p-q)}\alpha = i^{2(k-2q)}\alpha = i^{2k}\alpha = (-1)^k\alpha$$

3. Para terminar, sea α una $(p,q)-forma$

$$\mathcal{I}^{-1}\ (\partial + \overline{\partial})\ \mathcal{I}\alpha = \mathcal{I}^{-1}\ (\partial + \overline{\partial})\ i^{p-q}\alpha = i^{p-q}\mathcal{I}^{-1}\ (\partial\alpha + \overline{\partial}\alpha)$$

$$= i^{p-q}\mathcal{I}^{-1}\partial\alpha + i^{p-q}\mathcal{I}^{-1}\overline{\partial}\alpha = i^{p-q}i^{q-(p+1)}\partial\alpha + i^{p-q}i^{q+1-p}\mathcal{I}^{-1}\overline{\partial}\alpha$$

$$i^{-1}\partial\alpha + i\mathcal{I}^{-1}\overline{\partial}\alpha = -i(\partial - \overline{\partial}).$$

$\square$

Lema 5.2.5. *Dado $(V,<,>)$ equipado con una e.c.c. J los operadores $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}^*$ y H tiene las siguientes relaciones de conmutatividad* [3].

$$[H,\mathcal{L}] = 2\mathcal{L} \quad [H,\mathcal{L}^*] = -2\mathcal{L}^*; \quad [\mathcal{L},\mathcal{L}^*] = H$$

Demostración. Sea $\alpha \in \Lambda^k(V)$,

$$[H,\mathcal{L}] = (k+2-n)(\omega\wedge\alpha) - \omega\wedge(k-n)\alpha = 2(\omega\wedge\alpha),$$

de la misma forma

$$[H,\mathcal{L}^*] = (k-2-n)\mathcal{L}^*(\alpha) - \mathcal{L}^*(k-n)\alpha = -2\mathcal{L}^*\alpha.$$

La última identidad es la más difícil y la probaremos por inducción sobre la dimensión de V.

Caso base $dim_{\mathbb{C}}\ (V) = 1$, con respecto a la base x, y lo que implica que $\omega = adx\wedge dy$, veamos algunas consecuencias

$$*(1) = \omega$$

por lo tanto

$$1 = **(1) = *\omega$$

[3] Esto nos dice que los operadores $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}^*$ y H son representaciones de $\mathfrak{sl}(2)$.

y podemos descomponer el álgebra exterior de V como

$$\Lambda(V) = \Lambda^0(V) \oplus \Lambda^1(V) \oplus \Lambda^2(V).$$

Evaluemos el conmutador por casos. Sea $\alpha \in \Lambda^0(V)$

$$[\mathcal{L}, \mathcal{L}^*]\alpha = (\mathcal{L}\mathcal{L}^* - \mathcal{L}^*\mathcal{L})\alpha = -\mathcal{L}^*\mathcal{L}\alpha = -\mathcal{L}^*(\alpha\omega) = -\alpha\mathcal{L}^*(\omega)$$

$$= -\alpha * \mathcal{L} * \omega = -\alpha * \mathcal{L}(1) = -\alpha * \omega = -\alpha,$$

$$H(\alpha) = \sum_{k=0}^{2}(k-1)\Pi^k(\alpha) = -\alpha$$

si $\alpha \in \Lambda^1(V)$

$$[\mathcal{L}, \mathcal{L}^*]\alpha = (\mathcal{L}\mathcal{L}^* - \mathcal{L}^*\mathcal{L})\alpha = 0$$

$$H(\alpha) = \sum_{k=0}^{2}(k-1)\Pi^k(\alpha) = 0$$

para terminar si $\alpha \in \Lambda^2(V)$

$$[\mathcal{L}, \mathcal{L}^*]\alpha = (\mathcal{L}\mathcal{L}^* - \mathcal{L}^*\mathcal{L})\alpha = \mathcal{L}\mathcal{L}^*\alpha = \alpha$$

$$H(\alpha) = \sum_{k=0}^{2}(k-1)\Pi^k(\alpha) = \alpha.$$

Supongamos que el lema es válido para $dim_{\mathbb{C}}\ (V) = n$. Podemos asumir que $V = W_1 \oplus W_2$ dado que $<,>$ es compatible con la e.c.c. J, tenemos que $(V,<,>,J) = (W_1,<,>_1,J_1) \oplus (W_2,<,>_2,J_2)$ por lo que $\Lambda(V) = \Lambda(W_1) \wedge \Lambda(W_2)$ en particular $\Lambda^2(V) = \Lambda^2(W_1) \oplus \Lambda^2(W_2) \oplus (\Lambda^1 W_1 \otimes \lambda^1 W_2)$ y concluimos que podemos descomponer a la forma fundamental ω de V como $\omega_1 \oplus \omega_2$ donde ω_i es la forma fundamental de W_i. Denotemos por $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ a los operadores de Lefschetz sobre ΛW_1 y ΛW_2; afirmamos que podemos expresar a $\mathcal{L}$ en términos de $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$.

Supongamos que α,$\beta \in \Lambda(V)$ que los podemos ver como $\alpha = \alpha_1 \wedge \alpha_2$ y $\beta = \beta_1 \wedge \beta_2$ entonces $< \alpha, \beta >=< \alpha_1, \beta_1 > \wedge < \alpha_2, \beta_2 >$, vemos;

Basta ver que la identidad se cumple para cualquier elemento de la base de $\Lambda^p(V)$; si $\alpha = dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_k}$ y $\beta = dx_{m_1} \wedge \cdots \wedge dx_{m_k}$, recordar que si α es distinto de β entonces $< \alpha, \beta >= 0$ y alguno de los términos del lado derecho es cero por el mismo hecho. Por lo tanto consideremos que α y β tienen entre sus productos cuña los mismos elementos, si suponemos que $\alpha_1 = dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_{k'}}$ y $\beta_1 = dx_{m_1} \wedge \cdots \wedge dx_{m_{k'}}$ con $k' < k$ donde $dx_{m_1} \ldots dx_{m_{k'}}, dx_{\ell_1} \ldots dx_{\ell_{2n_1-k'}}$ es una base positíva de V_1 y $dx_{m_{k'+1}} \ldots dx_{m_k}, dx_{\ell_{n-k'+1}} \ldots dx_{\ell_{2n_2}}$ es una base positíva de V_2, calculemos

$$< \alpha_1, \beta_1 >= \alpha_1 \wedge *|_{V_1}\beta_1 = dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_{k'}} \wedge dx_{\ell_1} \wedge \cdots \wedge dx_{\ell_{2n_1-k'}}$$

y

$$< \alpha_2, \beta_2 >= \alpha_2 \wedge *|_{V_2}\beta_2 = dx_{j_{k'+1}} \wedge \cdots \wedge dx_{j_k} \wedge dx_{\ell_{2n_2-k'+1}} \wedge \cdots \wedge dx_{\ell_{2n_2}}$$

por lo tanto

$$< \alpha_1, \beta_1 > \wedge < \alpha_2, \beta_2 >$$

$$= dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_{k'}} \wedge dx_{\ell_1} \wedge \cdots \wedge dx_{\ell_{2n_1-k'}} \wedge dx_{j_{k'+1}} \wedge \cdots \wedge dx_{j_k} \wedge dx_{\ell_{2n_2-k'+1}} \wedge \cdots \wedge dx_{\ell_{2n_2}}$$

permutando

$$= (-1)^{(k-k')(2n_1-k')} dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_k} \wedge dx_{\ell_1} \wedge \cdots \wedge dx_{\ell_{2n_1-k'}} \wedge dx_{\ell_{2n_2-k'+1}} \cdots \wedge dx_{\ell_{2n_2}}$$

por otro lado

$$< \alpha, \beta >:= \alpha \wedge * \beta = (-1)^{(k-k')(n-k')} dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_k} \wedge dx_{\ell_1} \wedge \cdots \wedge dx_{\ell_{2n_1-k'}} \wedge dx_{\ell_{2n_2-k'+1}} \ldots dx_{\ell_{2n_2}}$$

el conjunto $dx_{m_1} \ldots dx_{m_{k'}}, dx_{\ell_1} \ldots dx_{\ell_{2n_1-k'}}, dx_{m_{k'+1}} \ldots dx_k, dx_{\ell_{2n_2-k'+1}} \ldots dx_{\ell_{2n_2}}$ es una base positíva de V por construcción, si hacemos $(k-k')(2n_1-k')$ permutaciones la llevamos a $dx_{m_1} \ldots dx_{m_{k'}}, dx_{m_{k'+1}} \ldots dx_k, dx_{\ell_1} \ldots dx_{\ell_{2n_1-k'}}, dx_{\ell_{2n_2-k'+1}} \ldots dx_{\ell_{2n_2}}$. Continuemos;

$$\mathcal{L}\alpha = \omega \wedge \alpha = (\omega_1 + \omega_2) \wedge (\alpha_1 \wedge \alpha_2) = \omega_1 \wedge \alpha_1 \wedge \alpha_2 + \omega_2 \wedge \alpha_1 \wedge \alpha_2.$$

$$= \omega_1 \wedge \alpha_1 \wedge \alpha_2 + \alpha_1 \wedge \omega_2 \wedge \alpha_2 = \mathcal{L}(\alpha_1) \wedge \alpha_2 + \alpha_1 \wedge \mathcal{L}_2(\alpha_2)$$

Si α_1 es una $k_1 - forma$, $n_1 = dim_{\mathbb{C}} W_1$, α_2 es una $k_2 - forma$ y $n_2 = dim_{\mathbb{C}} W_2$ se sigue que:

$$*\beta = *(\beta_1 \wedge \beta_2) = (-1)^{(n_1-k_1)k_2} (*|_{W_1}\beta_1) \wedge (*|_{W_2}\beta_2)$$

entonces

$$< \alpha, \beta >= \alpha \wedge *\beta = (-1)^{(n_1-k_1)k_2} \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge (*|_{W_1}\beta_1) \wedge (*|_{W_2}\beta_2)$$

$$= (-1)^{2(n_1-k_1)k_2} \alpha_1 \wedge (*|_{W_1}\beta_1) \wedge \alpha_2 \wedge (*|_{W_2}\beta_2) =< \alpha_1, \beta_1 > \wedge < \alpha_2, \beta_2 > .$$

Calculemos el adjunto de $\mathcal{L}$:

$$< \alpha, \mathcal{L}\beta >=< \alpha, \mathcal{L}_1(\beta_1) \wedge \beta_2 > + < \alpha, \beta_1 \wedge \mathcal{L}_2(\beta_2) >$$

$$=< \alpha_1, \mathcal{L}_1\beta_1 > \wedge < \alpha_2, \beta_2 > + < \alpha_1, \beta_1 > \wedge < \alpha_2, \mathcal{L}_2\beta_2 >$$

$$=< \mathcal{L}_1^*\alpha_1, \beta_1 > \wedge < \alpha_2, \beta_2 > + < \alpha_1, \beta_1 > \wedge < \mathcal{L}_2^*\alpha_2, \beta_2 >$$

$$=< \mathcal{L}_1^*(\alpha_1) \wedge \alpha_2, \beta_1 \wedge \beta_2 > + < \alpha_1 \wedge \mathcal{L}_2^*(\alpha_2), \beta_1 \wedge \beta_2 >=< \mathcal{L}_1^*\alpha_1 \wedge \alpha_1 + \alpha \wedge \mathcal{L}_2^*\alpha_2, \beta >$$

Concluimos que $\mathcal{L}^*\alpha = \mathcal{L}_1^*\alpha_1 \wedge \alpha_1 + \alpha \wedge \mathcal{L}_2^*\alpha_2$. Por último

$$[\mathcal{L}, \mathcal{L}^*](\alpha_1 \wedge \alpha_2) = (\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2)(\mathcal{L}_1^*\alpha_1 \wedge \alpha_2 + \alpha_1 \wedge \mathcal{L}_2^*(\alpha_2)) - (\mathcal{L}_1^* + \mathcal{L}_2^*)(\mathcal{L}(\alpha_1) \wedge \alpha_2 + \alpha_1 \wedge \mathcal{L}_2^*(\alpha_2))$$

$$= [\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_1^*](\alpha_1) \wedge \alpha_2 + \alpha_1 \wedge [\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_2^*](\alpha_2)$$

Por hipótesis de inducción tenemos que $[\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_i^*] = H_i$, por lo tanto

$$[\mathcal{L}, \mathcal{L}^*](\alpha_1 \wedge \alpha_2) = H_1(\alpha_1) \wedge (\alpha_2) + \alpha_1 \wedge H_2(\alpha) = (k_1 - n_1)(\alpha_1 \wedge \alpha_2) + (k_2 - n_2)(\alpha_1 \wedge \alpha_2)$$

$$(k_1 + k_2 - n_1 - n_2)(\alpha_1 \wedge \alpha_2) = H(\alpha_1 \wedge \alpha_2).$$

□

Corolario 5.2.6. *La última identidad se puede generalizar como*

$$[\mathcal{L}^{m+1}, \mathcal{L}^*](\alpha) = (m+1)(k-n+m)\mathcal{L}^m(\alpha).$$

Demostración. Por inducción usando como base el lema 5.2.5. Si $\alpha \in \Lambda^k(V)$, entonces

$$[\mathcal{L}, \mathcal{L}^*]\alpha = (k-n)\alpha = H\alpha.$$

Supongamos que el resultado es válido para m. Sea α una $k-forma$

$$[\mathcal{L}^{m+1}, \mathcal{L}^*](\alpha) = \mathcal{L}^{m+1}\mathcal{L}^*\alpha - \mathcal{L}^*\mathcal{L}^{m+1}\alpha = \mathcal{L}^{m+1}\mathcal{L}^*\alpha - \mathcal{L}\mathcal{L}^*\mathcal{L}^m\alpha + \mathcal{L}\mathcal{L}^*\mathcal{L}^m\alpha - \mathcal{L}^*\mathcal{L}^{m+1}\alpha$$

$$= \mathcal{L}[\mathcal{L}^m, \mathcal{L}^*](\alpha) + [\mathcal{L}, \mathcal{L}^*](\mathcal{L}^m\alpha) = m(k-n+m-1)\mathcal{L}^m + (2(m+1)-2+k-n)\mathcal{L}^m(\alpha)$$

$$= (m(k-n+m-1) + (2m+k-n))\mathcal{L}^m(\alpha) = (m+1)(k-n+m)\mathcal{L}^m(\alpha).$$

Como el resultado es válido restringiendo los operadores a cada subespacio es válido para $\alpha \in \Lambda(V)$. □

Definición 5.2.7. *Dado $(V, <,>)$ y los operadores $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}^*$, un elemento $\alpha \in \Lambda^k(V)$ es llamado primitivo si $\mathcal{L}^*\alpha = 0$. Al subespacio de las $k-formas$ primitivas lo denotamos por $P^k \subset \Lambda^p(V)$.*

El siguiente teorema es una de las propiedades más importantes en un espacio vectorial de dimensión $2n$ equipado con una forma fundamental.

Teorema 5.2.8. *([6] pág 36) Sea $(V, <,>)$ un espacio vectorial de dimensión $2n$ con una e.c.c. y los operadores $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}^*$.*

1. *Existe una suma directa de las $k-formas$*

$$\Lambda^k(V) = \bigoplus_{j \leq 0} \mathcal{L}^i(P^{k-2j}(V));$$

ésta es la decomposición de Lefschetz, que es ortogonal con respecto a $<,>$.

2. *Si $k > n$, entonces $P^k = 0$.*

3. *El mapeo $\mathcal{L}^{n-k} : P^k \to \Lambda^{2n-k}(V)$ es inyectivo para $k \leq n$.*

4. *El mapeo $\mathcal{L}^{n-k} : \Lambda^k(V) \to \Lambda^{2n-k}(V)$ es biyectivo para $k \leq n$.*

5. *Si $k \leq n$ entonces $P^k = \{\alpha \in \Lambda^k(V) |\ \mathcal{L}^{n-k+1}\alpha = 0\}$.*

Usaremos el hecho de que si T es un operador lineal de V en V y T^j es inyectivo entonces T^k es inyectivo para toda $k \leq j$.

Demostración. 1. Esta demostración usa resultados de teoría de representaciones por lo que no la incluímos aquí; ver la prueba en [6] pág 36.

2. Procedamos por contradicción: Sea $\alpha \in P^k$ y $k > n$, denotemos por $m > 0$ al natural más pequeño tal que $\mathcal{L}^m\alpha = 0$, por otro lado
$$[\mathcal{L}^m, \mathcal{L}^*]\alpha = (\mathcal{L}^m\mathcal{L}^* - \mathcal{L}^*\mathcal{L}^m)\alpha = 0.$$
Usando el Corolario 5.2.6
$$0 = [\mathcal{L}^m, \mathcal{L}^*]\alpha = m(k - n + m - 1)\mathcal{L}^{m-1}\alpha$$
lo que implica $k - n + m - 1 = 0$ de aquí que $m = n - k - 1 < 0$ y por lo tanto $\alpha = 0$.

3. Dado $0 \neq \alpha \in P^k, k \leq n$ y $0 < m$ el mínimo natural tal que $\mathcal{L}^m\alpha = 0$; usando otra vez el Corolario 5.2.6 tenemos que
$$0 = [\mathcal{L}^m, \mathcal{L}^*]\alpha = m(k - n + m - 1)\mathcal{L}^{m-1}\alpha$$
por lo que $k - n + m - 1 = 0$ de aquí que $m = n - k + 1$ con lo que concluimos que $\mathcal{L}^{n-k}\alpha \neq 0$, más aún concluimos que $\mathcal{L}^{n-k+1}\alpha = 0$; este hecho lo usaremos para demostrar 4 y 5.

4. Dado que $\Lambda(V)^k$ y $\Lambda(V)^{2n-k}$ tienen la misma dimensión y son espacios vectoriales de dimensión finita basta demostrar la inyectividad. Sea $\alpha \in \Lambda(V)^k$ tal que $\mathcal{L}^{n-k}\alpha = 0$, por la descomposición de Lefschetz podemos ver α como
$$\alpha = \alpha_0 + \mathcal{L}\alpha_1 + \mathcal{L}^2\alpha_2 + \ldots$$
donde $\alpha_j \in P^{k-2j}$, aplicando $\mathcal{L}^{n-k}$
$$0 = \mathcal{L}^{n-k}\alpha = \mathcal{L}^{n-k}\alpha_0 + \mathcal{L}^{n-k+1}\alpha_1 + \mathcal{L}^{n-k+2}\alpha_2 + \ldots$$
Por 3 sabemos que $\mathcal{L}^{n-k+j}$ es inyectivo sobre P^{k-2j}, por lo tanto $\mathcal{L}^{n-k+j}\alpha_j = 0$ para toda $0 \leq j$, con lo que concluimos que $\alpha = 0$.

5. Por lo visto en 3 tenemos que $P^k \subset Nuc(\mathcal{L}^{n-k+1})$; Veamos la otra contención, sea $\alpha \in Nuc(\mathcal{L}^{n-k+1})$ por lo tanto
$$[\mathcal{L}^{n-k+2}, \mathcal{L}^*]\alpha = 2(n - k + 2)\mathcal{L}^{n-k+1}\alpha = 0$$
por otro lado
$$\mathcal{L}^{n-k+2}\mathcal{L}^*\alpha - \mathcal{L}^*\mathcal{L}^{n-k+2}\alpha = \mathcal{L}^{n-k+2}\mathcal{L}^*\alpha = 0$$
como $\mathcal{L}^*\alpha \in \Lambda(V)^{k-2}$ y $\mathcal{L}^{n-k+2}$ es inyectivo concluimos que $\mathcal{L}^*\alpha = 0$.

□

Nosotros ya conocíamos un operador lineal y biyectivo que fuera de $\Lambda^k(V)$ a $\Lambda^{2n-k}(V)$, el operador de Hodge. Como consecuencia tenemos el siguiente Lema que no demostraremos por usar de nuevo resultados de la teoría de representaciones.

Lema 5.2.9. *([6] pág 37) Para toda $\alpha \in P^k$ tenemos que*
$$*\mathcal{L}^j\alpha = (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\frac{j!}{(n-k-j)!}\mathcal{L}^{n-k-j}\mathcal{I}(\alpha).$$

Corolario 5.2.10. *([6] pág 115) (Descomposición de Lefschetz) Sea M una variedad compleja equipada con una métrica hermitiana. Entonces existe la siguiente descomposición directa.*

$$\Lambda^p(M) = \bigoplus_{i\leq 0} \mathcal{L}^i(P^{k-2i}(M)),$$

donde $P^{k-2i}(M) := Nuc(\mathcal{L}^* : \Lambda^{k-2i}(M) \to \Lambda^{k-2i-2}(M))$.

Las siguientes identidades se conocen en la literatura como las identidades de Kähler; para estos resultados es esencial la descomposición de Lefschetz y que la forma fundamental sea cerrada.

Lema 5.2.11. *(Identidades de Kähler) Dada M una variedad compleja equipada con una forma de Kähler, tenemos las siguientes identidades*

1. $$[d, \mathcal{L}] = 0 = [d^*, \mathcal{L}]$$

   de donde se sigue

   $$[\overline{\partial}, \mathcal{L}] = [\partial, \mathcal{L}] = 0 \quad y \quad [\overline{\partial}^*, \mathcal{L}^*] = [\partial^*, \mathcal{L}^*] = 0.$$

2. $$[\mathcal{L}^*, d] = -i(\partial^* - \overline{\partial}^*) \quad y \quad [d^*, \mathcal{L}] = i(\partial - \overline{\partial})$$

   lo que implica que

   $$[\mathcal{L}^*, \overline{\partial}] = -i\overline{\partial},\ [\mathcal{L}^*, \partial] = i\overline{\partial}^* \quad y \quad [\overline{\partial}^*, \mathcal{L}] = i\partial,\ [\partial^*, \mathcal{L}] = -i\overline{\partial}.$$

3. $$\Delta_\partial = \Delta_{\overline{\partial}} = \frac{1}{2}\Delta_d.$$

Demostración. 1. Sea η una $(p,q) - forma$

$$[d, \mathcal{L}]\eta = (d\ \mathcal{L} - \mathcal{L}\ d)\eta = d\ (\omega \wedge \eta) - \omega \wedge\ d\eta = (-1)^2\omega \wedge\ d\eta - \omega \wedge\ d\eta = 0$$

usando el hecho de que $d = \overline{\partial} + \partial$,

$$[\overline{\partial} + \partial, \mathcal{L}]\eta = [\overline{\partial}, \mathcal{L}]\eta + [\partial, \mathcal{L}]\eta = 0$$

veamos de qué bigrado es cada conmutador:

$$[\overline{\partial}, \mathcal{L}]\eta = \overline{\partial}(\omega \wedge \eta) - \omega \wedge\ \overline{\partial}\eta$$

donde $\overline{\partial}(\omega \wedge \eta)$ y $\omega \wedge\ \overline{\partial}\eta$ son $(p+1, q+2) - formas$, por el contrario $[\partial, \mathcal{L}]\eta$ es de bigrado $(p+2, q+1)$; por pertenecer a subespacios distintos de una suma directa cada término es cero.

Para la segunda identidad, sea η una $k - forma$

$$[d^*, \mathcal{L}^*]\eta = (*d*\ *\mathcal{L}* - *\mathcal{L}*\ *d*)\eta$$

usando que $\mathcal{L} * \eta$ es una $(2n-k+2)-forma$, $d*\eta$ es una $(2n-k+1)-forma$ y $**|_{\Lambda^k} = (-1)^{k(2n-k)}$

$$= ((-1)^{(2n-k+2)(k-2)} * d\mathcal{L} * -(-1)^{(2n-k+1)(k-1)} * \mathcal{L}d*)\eta$$

$$= (*d\mathcal{L} * - * \mathcal{L}d*)\eta = *[d, \mathcal{L}] * \eta = 0$$

de la misma forma $[\overline{\partial}^*, \mathcal{L}^*]$ es una $(p-1, q-2)-forma$ y $[\partial^*, \mathcal{L}^*]$ es una $(p-1, q-2)-forma$ y los 2 términos son cero.

2. Podemos reducir el problema a calcular el conmutador $[\mathcal{L}^*, d]\mathcal{L}^k\alpha$ donde α es una $k-forma$ primitiva gracias a la descomposición de Lefschetz 5.2.10. Veamos cómo actúa d sobre α, usando la descomposición de Lefschetz sobre $d\alpha$

$$d\alpha = \alpha_0 + \mathcal{L}\alpha_1 + \mathcal{L}^2\alpha_2 + \dots$$

donde $\alpha_j \in P^{k+1-2j}$. Aplicando $\mathcal{L}^{n-k+1}$ para usar la afirmación 5 del Teorema 5.2.8 y $[\mathcal{L}, d] = 0$, tenemos que

$$0 = \mathcal{L}^{n-k+1}d\alpha = \mathcal{L}^{n-k+1}\alpha_0 + \mathcal{L}^{n-k+2}\alpha_1 + \mathcal{L}^{n-k+3}\alpha_2 + \dots$$

La descomposición de Lefschetz implica que $\mathcal{L}^{n-k+m+1}\alpha_m = 0$ para $m = 1, 2, \dots$. Por otro lado $\mathcal{L}^\ell$ es inyectiva sobre $\mathcal{A}^s(M)$ para $\ell \leq n - s$, veamos cuándo se cumple esta desigualdad usando que $\alpha_j \in P^{k+1-2j}$

$$n - k + 1 + j \leq n - (k + 1 - 2j) \iff 2 \leq j,$$

de donde concluimos que $\alpha_j = 0$ si $2 \leq j$ y $\alpha = \alpha_0 + \mathcal{L}\alpha_1$.
Calculemos $[\mathcal{L}^*, d]\mathcal{L}^j\alpha$. Gracias a que $[d, \mathcal{L}] = 0$, $\mathcal{L}^*\alpha = 0$ y por el Corolario 5.2.6,

$$\mathcal{L}^*d\mathcal{L}^j\alpha = \mathcal{L}^*\mathcal{L}^jd\alpha = \mathcal{L}^*\mathcal{L}^j\alpha_0 + \mathcal{L}^*\mathcal{L}^{j+1}\alpha_1$$

$$= -j(k+1-n+j-1)\mathcal{L}^{j-1}\alpha_0 - (j+1)(k-1-n+j)\mathcal{L}^j\alpha_1$$

para el otro término usamos de nuevo el Corolario 5.2.6,

$$d\mathcal{L}^*\mathcal{L}^j\alpha = -j(k-n+j-1)d\mathcal{L}^{j-1}\alpha = -j(k-n+j-1)\mathcal{L}^{j-1}d\alpha$$

$$= -j(k-n+j-1)(\mathcal{L}^{j-1}\alpha_0 + \mathcal{L}^j\alpha_1)$$

por lo tanto

$$[\mathcal{L}^*, d]\mathcal{L}^j\alpha = -j\mathcal{L}^{j-1}\alpha_0 - (k-n+j-1)\mathcal{L}^j\alpha_1.$$

Por otro lado, usando el Corolario 5.2.4 inciso 3

$$-i(\partial^* - \overline{\partial}^*)\mathcal{L}^j\alpha = - * i(\partial - \overline{\partial}) * \mathcal{L}^j\alpha = *\mathcal{I}^{-1}\,(\partial + \overline{\partial})\,\mathcal{I} * \mathcal{L}^j\alpha$$

gracias al Lema 5.2.9

$$= *\mathcal{I}^{-1}d\mathcal{I}\Big((-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\frac{j!}{(n-j-k)!}\mathcal{L}^{n-k-j}\mathcal{I}(\alpha)\Big)$$

aplicando los incisos 1 y 2 del Corolario 5.2.4

$$= (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}+k} \frac{j!}{(n-j-k)!}(\mathcal{I}^{-1} * \mathcal{L}^{n-k-j} d\alpha)$$

$$= (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}+k} \frac{j!}{(n-j-k)!}(\mathcal{I}^{-1} * (\mathcal{L}^{n-k-j}\alpha_0 + \mathcal{L}^{n-k-j+1}\alpha_1))$$

aplicando de nuevo el Lema 5.2.9 a cada sumando

$$*\mathcal{L}^{n-k-j}\alpha_0 = (-1)^{\frac{(k+1)(k+2)}{2}} \frac{(n-k-j)!}{(j-1)!}\mathcal{L}^j\mathcal{I}\alpha_0$$

dado que α_0 es una $(k+1)-forma$ primitiva, de la misma forma si α_1 es una $(k+3)-forma$ primitiva

$$*\mathcal{L}^{n-k-j+1}\alpha_1 = (-1)^{\frac{(k+3)(k+5)}{2}} \frac{(n-k-j+1)!}{(j)!}\mathcal{L}^{j+1}\mathcal{I}\alpha_1$$

sustituyendo tenemos que

$$(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}+k+\frac{(k+1)(k+2)}{2}} j\mathcal{I}^{-1}\mathcal{L}^{j-1}\mathcal{I}\alpha_0 + (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}+k+1+\frac{(k+3)(k+4)}{2}}(k-n+j-1)\mathcal{I}^{-1}\mathcal{L}^j\mathcal{I}\alpha_1$$

usando que

$$\frac{k(k+1)}{2} + k + \frac{(k+1)(k+2)}{2} = k + \frac{(k+1)(2k+2)}{2} = k + (k+1)^2$$

lo que implica que es impar; del mismo modo,

$$\frac{k(k+1)}{2}+k+1+\frac{(k+3)(k+4)}{2} = \frac{2k^2+10k+12}{2}+1 = k^2+5k+6+1 = (k+2)(k+3)+1$$

por lo tanto

$$(-1)^{2k+1}j\mathcal{L}^{j-1}\alpha_0 + (-1)^{2k+3}(n-k-j+1)\mathcal{L}^j\alpha_1)$$
$$-(j\mathcal{L}^{j-1}\alpha_0 + (n-k-j+1)\mathcal{L}^j\alpha_1)$$

Con lo que concluimos que $[\mathcal{L}^*, d] = -i(\partial^* - \overline{\partial}^*)$.
Para $[d^*, \mathcal{L}]$ no se dará la demostración dado que no usaremos ese hecho, la idea es igual a la segunda parte del inciso anterior y la demostración se puede ver en ([6] pág 122).

3.
$$\begin{aligned}\Delta_\partial = \partial^*\partial + \partial\partial^* &= i[\mathcal{L}^*, \overline{\partial}]\partial + i\partial[\mathcal{L}^*, \overline{\partial}] = i(\mathcal{L}^*\overline{\partial}\partial - \overline{\partial}\mathcal{L}^*\partial + \partial\mathcal{L}^*\overline{\partial} - \partial\overline{\partial}\mathcal{L}^*)\\
&= i(\mathcal{L}^*\overline{\partial}\partial - (\overline{\partial}[\mathcal{L}^*, \partial] + \overline{\partial}\partial\mathcal{L}^*) + ([\partial, \mathcal{L}^*]\overline{\partial} + \mathcal{L}^*\partial\overline{\partial}) - \partial\overline{\partial}\mathcal{L}^*)\\
&= i(\mathcal{L}^*\overline{\partial}\partial - i\overline{\partial}\,\overline{\partial}^* - \overline{\partial}\partial\mathcal{L}^* - i\overline{\partial}^*\overline{\partial} + \mathcal{L}^*\partial\overline{\partial} - \partial\overline{\partial}\mathcal{L}^*)\\
&= \overline{\partial}\,\overline{\partial}^* + \overline{\partial}^*\overline{\partial} + i(\mathcal{L}^*(\overline{\partial}\partial + \partial\overline{\partial}) - (\overline{\partial}\partial + \partial\overline{\partial})\mathcal{L}^*) = \Delta_{\overline{\partial}}.\end{aligned}$$

usando que $\overline{\partial}\partial = -\partial\overline{\partial}$. Por otro lado,

$$\begin{aligned}\Delta_d &= dd^* + d^*d = (\partial + \overline{\partial})(\partial^* + \overline{\partial}^*) + (\partial^* + \overline{\partial}^*)(\partial + \overline{\partial}) \\ &= \partial^*\partial + \partial\partial^* + \overline{\partial}\,\overline{\partial}^* + \overline{\partial}^*\overline{\partial} + (\partial\overline{\partial}^* + \overline{\partial}^*\partial) + (\overline{\partial}\partial^* + \partial^*\overline{\partial}) \\ &= \Delta_\partial + \Delta_{\overline{\partial}} + (\partial\overline{\partial}^* + \overline{\partial}^*\partial) + \overline{(\partial\overline{\partial}^* + \overline{\partial}^*\partial)} = \Delta_\partial + \Delta_{\overline{\partial}}.\end{aligned}$$

□

Ahora se entiende el por qué de las condiciones para poder obtener una relación entre los números de Betti y Hodge. Por un lado necesitamos que M sea de Kähler para la igualdad entre los Laplacianos asociados a cada operador y la compacidad para aplicar la teoría de Hodge e identificar las formas armónicas con las clases de cohomología.

5.3. Cohomología en las variedades de Kähler compactas

Hemos llegado al final, ahora presentaremos las relaciones que hay entre los números de Betti y los de Hodge. Veremos que el hecho de que una variedad compacta admita una métrica de Kähler tiene importantes consecuencias sobre su topología; muestra de esto es el Lema 5.1.5.

Teorema 5.3.1. *1. Si M es una variedad de Kähler compacta, entonces*

$$H^k(M) = \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{H}^{p,q}(M)$$

La descomposición no depende de la elección de la métrica.
Los números de Hodge y Betti cumplen

2.

$$b^k = \sum_{p+q=k} h^{p,q} \quad , \quad h^{p,q} = h^{q,p} \quad , \quad h^{p,p} \geq 1$$

3.

Los números de Betti b^{2k+1} son pares

Demostración. 1. Sea $\alpha \in H^k(M)$; gracias al lema 5.2.11 tenemos que $0 = \Delta_d\alpha = \Delta_{\overline{\partial}}\alpha$ de donde concluimos que $\alpha \in \mathcal{H}^{p,q}(M)$. La otra contención es análoga.

2.

$$b^k = dim\ H^k(M) = dim \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{H}^{p,q}(M)$$

y la dimensión de una suma directa es la suma de las dimensiones de cada subespacio que en este caso son los números de Hodge.

Para ver que la descomposición no depende de la métrica supongamos que M admite dos métricas g y g', denotaremos las formas armónicas asociadas a cada métrica por $\mathcal{H}^{p,q}(M,g)$ y $\mathcal{H}^{p,q}(M,g')$, usando el Teorema del isomorfismo de Hodge tenemos

$$\mathcal{H}^{p,q}(M,g) \simeq H_D^{p,q}(M) \simeq \mathcal{H}^{p,q}(M,g').$$

3. Sea $\alpha \in \mathcal{H}^{p,q}(M)$ por lo tanto $\overline{\alpha} \in \mathcal{A}^{q,p}(M)$. Aplicando el operador de Laplace y conjugando tenemos que
$$0 = \overline{\Delta_{\overline{\partial}}\alpha} = \Delta_{\partial}\overline{\alpha} = \Delta_{\overline{\partial}}\overline{\alpha}.$$
La primera igualdad se obtiene al conjugar el operador $\Delta_{\overline{\partial}}$ y la segunda al aplicar el Lema 5.2.11, con lo que concluimos que $\overline{\alpha} \in \mathcal{H}^{q,p}(M)$.

4. Ya sabemos que $\omega^i \in H^{2i}_{deR}(M)$ para toda $i \in \{1,\ldots,n\}$; por el lema 5.1.5 y por el lema 3.1.14 podemos llevar ω^i a una $(i,i)-forma$ de donde concluimos que $\omega^i \in \mathcal{H}^{i,i}(M)$ por lo tanto $h^{p,p} \geq 1$ para toda $i \in \{1,\ldots,n\}$.

5. Los números de Hodge tales que $p+q = 2k+1$ son un número par, usando 2
$$b^{2k+1} = \sum_{p+q=2k+1} h^{p,q} = 2\sum_{p=0}^{k+1} h^{p,2k+1-p},$$
que es un número par

□

El resultado anterior nos dice que una variedad de Kähler compacta tiene como invariantes homotópicos a $\sum_{p+q=k} h^{p,q}$.

Definición 5.3.2. *Denotamos por $\mathcal{X}(M)$ a la característica de Euler de una variedad compleja M:*
$$\mathcal{X}(M) = \sum_{k=1}^{2n}(-1)^k b^k.$$

Para finalizar obtenemos una relación entre los números de Hodge y la característica de Euler.

Corolario 5.3.3. *En una variedad de Kähler tenemos la siguiente igualdad:*

$$\mathcal{X}(M) = \sum_{k=1}^{2n}(-1)^k \sum_{p+q=k} h^{p,q}.$$

Demostración. Usando la relación que existe entre la característica de Euler y los números de Betti,
$$\mathcal{X}(M) = \sum_{k=1}^{2n}(-1)^k b^k = \sum_{k=1}^{2n}(-1)^k \sum_{p+q=k} h^{p,q}.$$

□

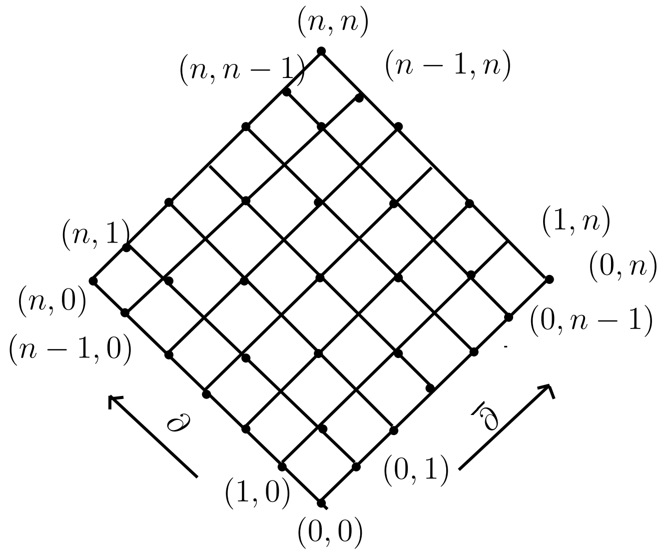

Figura 5.1: El diagrama se conoce como el diamante de Hodge, dónde k-ésimo grupo de De Rham es la suma de los grupos de la k-ésima fila. El operador de Hodge es simétrico con respecto al centro del diamante y la conjugación es simétrica con respecto a la línea vertical del céntro

Conviene recordar que las igualdades siempre podemos leerlas de los dos lados. Si M es una variedad de Kähler compacta conocer una forma d-armónica implica conocer una forma ∂-armónica y $\overline{\partial}$ armónica que a su vez nos da un representante de alguna clase de cohomología de De Rham y de Dolbeault, inversamente si conocemos una clase de cohomología el principio de Dirichlet nos dice cómo encontrar una forma armónica cohomóloga. La teoría de Hodge junto con las identidades de Kähler nos pueden ayudar a calcular grupos de cohomología, como el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.3.4. *Consideremos $\mathbb{CP}^n$ con la métrica $\frac{1}{2}\partial\overline{\partial}\log\|z\|^2$. Sabemos que los números de Betti son $b^{2i+1}=0$ y $b^{2i}=1$ ([8] pág. 271); usando el Teorema 5.3.1 obtenemos que $h^{1,1}(\mathbb{CP}^n)=1$ y $h^{p,q}(\mathbb{CP}^n)=0$ si $p\neq q$, por lo que la cohomología de Dolbeault para $\mathbb{CP}^n$ es*

$$H_D^{m,m}(\mathbb{CP}^n)=\mathbb{C} \quad y \quad H_D^{p,q}(\mathbb{CP}^n)=0 \text{ si } p\neq q$$

Un hecho importante a remarcar es que no toda variedad compacta es de Kähler mas los ejemplos son pocos y las demostraciones complicadas. Hasta ahora sólo conozco dos ejemplos: Las variedades de Hopf ([2] pág 58) y las variedades de Iwasawa ([2] pág 58) . Las variedades de Hopf tienen el número de Betti $b^1=1$ ([2] pág 58) lo cual contradice 5.3.1, las variedades de Iwasawa no cumplen un resultado no expuesto aquí ([2] pág 58).

Bibliografía

[1] Lars V. Ahlfors, *Complex analysis*, McGraw-Hill, 1979.

[2] Andrea De Cataldo, *The Hodge Theory of Projective Manifolds*, Imperial Colllege Press, 2007.

[3] Vladimir I. Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics*, Springer, 1989.

[4] David Griffiths, *Introduction to electrodynamics*, Prentice-Hall, 1989.

[5] Phillip Griffiths, Joseph Harris, *Principles of algebraic geometry*, Wiley, 1978.

[6] Daniel Huybrechts, *Complex geometry: an introduction*, Springer, 2005.

[7] Victor Guillemin, Alan Pollack, *Topología diferencial*, Sociedad Matemática de México

[8] Jürgen Jost, *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*, Springer, 2011.

[9] John M. Lee, *Introduction to smooth manifolds*, Springer, 2002.

[10] Peter Petersen, *Riemannian Geometry*, Springer, 2006.

[11] Claire Voisin, *Hodge theory and complex algebraic geometry*, I, II, Cambridge University Press, 2003.

[12] Frank W. Warner, *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, Springer, 1971.

[13] Raymond O. Wells, *Differential Analysis on Complex Manifolds*, Springer, 2008.

[14] Zachary Maddock, *Dolbeault cohomology*, http://www.math.columbia.edu/ maddockz/notes/dolbeault.pdf.