UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

MAESTRÍA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ACATLÁN

Secuencia didáctica para el aprendizaje del concepto de infinitamente pequeño al inicio del curso de Cálculo diferencial e integral I de acuerdo a la propuesta Newtoniana

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN DOCENCIA PARA LA
EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR (MATEMÁTICAS)

P R E S E N T A

OCTAVIO FONSECA RAMOS

TUTOR PRINCIPAL:
M. EN C. A. RAUL REYES ESPARZA, CCH AZCAPOTZALCO

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:
DR. IGNACIO PINEDA PINEDA, FES ACATLÁN
M. EN C. JUAN B. RECIO ZUBIETA, FES ACATLÁN

Naucalpan de J. Edo. Mex., abril de 2014.

Para mi Monina

AGRADECIMIENTOS

¡Den gracias al Señor, su nombre invoquen, entre los pueblos anuncien sus hazañas! Salmo 105:1.

Gracias Azucena por tu amor, amistad, comprensión y paciencia.
Te amo.

También agradezco de todo corazón a Itzen y Yaxal por su compresión y paciencia. Las amo mis niñas.

Gracias Delfis, Rafa y Rocko por siempre estar allí.

A los profesores: M. en C. Alejandro Raúl Reyes Esparza, M. en C. Juan B. Recio Zubieta y Dr. Ignacio Pineda Pineda por todas sus recomendaciones durante la elaboración de este trabajo.

Se retribuye mal a un maestro si se permanece siempre discípulo.
Pues esta es la verdad: he salido de la casa de los sabios; y además, he dado un portazo a mis espaldas.
Durante mucho tiempo mi alma hambrienta estuvo sentada a su mesa; yo no estoy adiestrado como ellos…

F. Nietzsche

Resumen

El trabajo que se describe en este documento está dirigido al aprendizaje del concepto de infinitamente pequeño al inicio del curso de Cálculo Diferencial e Integral I en el bachillerato de la EN-CCH. Para lo cual, se diseñó una secuencia didáctica que tomó como base dos ideas: la propuesta de Descartes acerca del empleo de dos ejes de referencia para poder representar una curva mediante una expresión algebraica, y del trabajo albegraico desarrollado por Newton para trazar la recta tangente a una curva. De manera general, se puede afirmar que después del trabajo con la secuencia, los alumnos iniciaron y desarrollaron en buena medida el aprendizaje de dicho concepto y los demás involucrados.

Abstract

The work described in this document is intended for the learning of the concept of infinitely small, at the begining of the first Calculus course at the Secondary School EN-CCH. For which, it was designed a didactic sequence based in two different ideas: the use of two reference axis, proposed by Descartes, to represent a curve with an algebraic expression, and the algebraic work developed by Newton in order to trace a curve’s tangent line. Broadly, it can be told that after working with the sequence, students initiate and developed the learning of this concept and the others involved in a good level.

Contenido

INTRODUCCIÓN

Los resultados de las evaluaciones llevadas a cabo para medir los aprendizajes de los estudiantes en matemáticas, en todos los niveles educativos a lo largo de los años han sido, reiteradamente y por desgracia, muy malos. Ya sea en las pruebas internacionales, como PISA, o las nacionales como ENLACE, el grueso de los evaluados está ubicado en los primeros niveles de la escala, clasificándolos como insuficientes. También las evaluaciones diagnósticas realizadas a los estudiantes de nuevo ingreso a las licenciaturas en Ciencias Físico-Matemáticas o de las Ingenierías en la UNAM por su Dirección General de Evaluación Educativa, muestran que son los alumnos egresados de los bachilleratos de la Universidad quienes obtienen el menor número de aciertos tanto en el resultado general de la prueba como en los reactivos específicos de matemáticas. Además, en la Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades la asignatura de Cálculo Diferencial e Integral es una de las que presenta el mayor índice de reprobación en el curso ordinario.

En un intento de colaboración para mejorar los aprendizajes de los alumnos del tercer año del bachillerato de la Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades, no sólo de conocimientos en matemáticas, sino también de habilidades y actitudes, se desarrolló el presente trabajo enfocado al aprendizaje de un concepto primordial al inico del curso de Cálculo Diferencial e Integral I: el de infinitamente pequeño. Concepto que a lo largo del curso servirá como fundamento de los otros igualmente relevantes: el límite y la derivada de una función. Porque, de acuerdo a las investigaciones de la Psicología Educativa, el aprendizaje significativo de conceptos se lleva a cabo, entre otras cosas, a partir de otros previos ya existentes en la estructura cognitiva del que aprende.

Para el logro del aprendizaje mencionado se diseñó una secuencia didáctica que tomó como base el desarrollo histórico de las matemáticas, en específico las ideas de Descartes acerca de la representación de una curva a través de una expresión algebraica y del trabajo de Newton acerca de lo que él llamó fluxiones y fluyentes que se considera el inicio del Cálculo Infinitesimal. De esta manera, los alumnos trabajaron de cerca las ideas y problemas que desarrollaron estos autores en la búsqueda del aprendizaje indicado.

Planteamiento del problema

En la Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades de la Universidad Nacional Autónoma de México, la asignatura de Calculo Diferencial e Integral I presenta uno de los índices de reprobación más altos de todas las asignaturas del currículo y, por otro lado, una vez que los alumnos egresan e inician sus estudios profesionales en licenciaturas de las Ciencias Físico-Matemáticas y de las Ingenierías, la misma Universidad por medio de la Dirección de Evaluación Educativa les aplica una evaluación diagnóstica, en la cual, a lo largo de los últimos años, los alumnos egresados de este Colegio han obtenido reiteradamente los promedios de aciertos más bajos tanto en la prueba considerada como un todo como en los reactivos específicos de matemáticas.

De acuerdo a lo anterior, es posible plantear el problema de estudio de la siguiente manera:

> **Los alumnos de la Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades no están logrando los aprendizajes esperados para el curso de Cálculo Diferencial e Integral I de una manera adecuada, por lo que es necesaria la implementación de nuevas metodologías didácticas que favorezcan y mejoren el logro de dichos aprendizajes.**

Justificación

En este trabajo se ofrece una propuesta enfocada a la mejora del aprendizaje del concepto de infinitamente pequeño al inicio del curso de Cálculo Diferencial e Integral I basada en algunas recomendaciones surgidas de investigaciones pedagógicas científicamente comprobadas, conocidas en general como *Escuela nueva*. En las cuales se prioriza el aprendizaje por sobre la enseñanza, de forma que se busca que sea el alumno el actor principal de su propio proceso educativo descrito en pocas palabras como *aprendizaje activo*.

Replantear la tarea educativa para dicho curso de esta manera no significa algo novedoso si pensamos que en el Modelo Educativo de la Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades se determina ésta bajo los términos descritos en el párrafo anterior. Pero después del análisis mostrado a lo largo del Planteamiento del Problema y además aceptando que, por desgracia, la mayoría de los cursos de matemáticas en la Institución son implementados de manera tradicional y conductista, lo que sí significa es una gran oportunidad para retomar el camino planteado desde hace más de 40 años al crearse el Colegio y para que los principales beneficiados sean los alumnos al fomentar realmente el *aprender a aprender*, el *aprender a hacer* y el *aprender a ser*.

Objetivos de la propuesta

Como una estrategia en la búsqueda de resolver el problema antes descrito, sus objetivos se pueden sintetizar de la siguiente manera:

a) Diseñar una propuesta didáctica para el aprendizaje del concepto de infinitamente pequeño en el curso de Cálculo Diferencial e Integral I basada en las orientaciones del quehacer educativo de la Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades: *aprender a aprender*, *aprender a hacer* y *aprender a ser*.

b) Implementar la propuesta didáctica para el aprendizaje del concepto de infinitamente pequeño en el curso de Cálculo Diferencial e Integral I en un grupo de quinto semestre de la Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades.

c) Evaluar la propuesta, en el proceso y sus resultados, para precisarla en su diseño y pertinencia.

d) Construir la propuesta didáctica con sus estrategias de enseñanza para el aprendizaje del concepto de infinitamente pequeño colocando al alumno en el rol principal del proceso educativo y a través de un ambiente basado en actividades llevadas a cabo en pequeños grupos de trabajo que fomenten el aprendizaje activo.

Estructura del trabajo

El trabajo que se presenta está estructurado de la siguiente forma:

En el capítulo 1 se presenta una descripción general de la educación y del modelo educativo de la Escuela Nacional colegio de Ciencias y Humanidades, dónde se llevó a cabo el estudio descrito. También, se abordan los antiguos modelos de enseñanza que dieron paso lo que se conoce actualmente como Escuela Nueva. Posteriormente, se da una contextualización de la institución, del papel de las matemáticas en la educación y de la población en dónde se realizó el estudio.

En el Capítulo 2 se expresan las ideas teóricas que dan sustento al trabajo. Iniciando con la descripción del concepto de constructivismo y los aportes de los principales investigadores que le dieron lugar. Además, se describe el papel que tiene el docente, el ambiente, en pequeños grupos de trabajo, y la evaluación que se deben considerar cuando el proceso enseñanza-aprendizaje se lleva a cabo bajo este paradigma. Finalmente, también se incluye una descripción de los trabajos, que pueden considerarse como previos, en los cuales se han estudiado las estrategias que pretenden el aprendizaje de conceptos matemáticos basado en el desarrollo histórico de la matemática misma.

En el capítulo 3 se describe la estructura de la secuencia. Iniciando con la primera sesión, que también es la primera del curso, dónde se llevó a cabo la presentación del mismo, una evaluación diagnóstica y una contextualización del estado de las ciencias en el siglo XVII, época en la cual se desarrollaron los trabajos de Descartes, quien es el primero en describir una curva mediante una expresión algebraica, y Newton, quien inventa una nueva herramienta matemática que es el inicio de lo que actualmente se conoce como Cálculo Infinitesimal. Ideas que fueron empleadas para diseñar los materiales con los cuales se trabajó a lo largo de la segunda a la sexta sesiones de la secuencia con la intención de motivar en los alumnos el aprendizaje del concepto de infinitamente pequeño. Finalmente se describe la séptima y última sesión en la cual se realizó la evaluación sumativa de la secuencia.

En el capítulo 4 se muestran los resultados del trabajo y su análisis. Dichos resultados y análisis son descritos para cada actividad que se llevó a cabo a lo largo de cada sesión, posteriormente también se muestra un análisis global de los resultados de cada sesión, y finalmente hay un análisis de éstos como resultado del trabajo de toda la secuencia.

También se incluye un apartado final en el cual se muestran las conclusiones a las que fue posible llegar después de llevar a cabo el trabajo.

Capítulo 1

Educación y Marco de referencia

para la propuesta didáctica

1.1 Educación

Tal y como lo comenta Durkheim (1984) “la educación es una cosa social”, porque en cada uno de nosotros puede decirse que existen dos seres. El uno está hecho de todos los estados mentales que se refieren únicamente a nosotros mismos y a los sucesos de nuestra vida personal: es lo que podría llamarse el ser individual. El otro es un sistema de ideas, de sentimientos y hábitos que expresan en nosotros, no en nuestra personalidad, sino en el grupo, o los diferentes grupos, de los cuales formamos parte: su conjunto forma el ser social. El fin de la educación es constituir en cada uno de nosotros a ese ser.

De acuerdo con lo anterior, la escuela debe ser una institución donde se pueda desarrollar una vida comunitaria, el intercambio de experiencias, la comunicación entre individuos y la cooperación social; todo lo anterior con miras a formar la autodisciplina del individuo y su socialización.

1.2 Enseñanza tradicional y conductista

Al parecer, en la segunda década del siglo XXI, se está abordando la educación matemática con recursos que aparentemente no tienen punto de comparación con aquellos que se han utilizado en el pasado. Pero, de cualquier forma, no es seguro que nuestros conocimientos y prácticas actuales nos garanticen una mejor regulación y una mejor eficacia en este dominio que las que se tuvieron a principios del siglo XX

(Brusseau, 2000). Las prácticas educativas de principios del siglo pasado a las que se refiere Brusseau tienen que ver con las formas de enseñanza tradicional y conductista, las cuales siguen siendo las formas más empleadas para la educación matemática a pesar de que tienen limitantes que actualmente las posicionan como formas de enseñanza antiguas y obsoletas. A continuación se describen brevemente las características de cada una de estas formas de enseñanza.

1.2.1 Enseñanza tradicional

Es la forma habitual de enseñar en los centros educativos, informa pero no forma, es una educación vertical, autoritaria y paternalista. Bajo este enfoque, la enseñanza se identifica como un proceso promotor de la transmisión de los conocimientos existentes sobre un determinado tema, es decir, enseñar consiste básicamente en explicar de manera oral a los estudiantes los contenidos esenciales de una determinada asignatura, entonces, la actividad del curso se organiza en torno a una secuencia de temas seleccionados por el docente. A lo largo de las clases el profesor explica los temas, proporcionando constantemente datos e información esperando que con su repetición el alumno aprenda sobre el tema. Por su parte, los alumnos anotan y luego son evaluados o controlados mediante exámenes para medir su aprendizaje.

En este modelo el docente es el que sabe y es el sujeto del proceso; mientras que los roles del estudiante son escuchar, obedecer, recibir contenidos en forma de depósito y ser el objeto del proceso. Los ejes del método son el profesor y el texto, se le da poca importancia al diálogo y a la participación, se valora mucho el dato y poco el concepto, se premia la retención de contenidos, se reprime la elaboración personal porque existe solo la verdad del profesor. En éste modelo se niega la existencia del individuo que aprende (Flores, 1994).

Este tipo de enseñanza representa en gran medida lo que la sociedad piensa sobre la tarea de enseñar, además de que el contexto institucional en el que nos desenvolvemos lo favorece.

1.2.2 Enseñanza conductista

Se fundamenta en planear, administrar y evaluar. Es instruccional y deja de lado la educación formativa porque no le interesa el individuo, los valores, el sentir. Su interés es técnico, el proceso educativo es mínimo y el sistema es la operación.

Este modelo se desarrolló para condicionar al educando para que adoptara las conductas y las ideas que el planificador determina previamente. El maestro es el que determina lo que el educando tiene que hacer, cómo debe actuar, incluso qué debe pensar y todos los pasos de la enseñanza vienen programados de antemano.

A este modelo se le califica de educación manipuladora, se trata de convencer y condicionar al individuo para que adopte la nueva conducta propuesta (Porlán, 1995).

Según este modelo educar no es razonar, sino generar hábitos, es decir, inculcar las nuevas actitudes sin pasar por la reflexión, el análisis, la conciencia y sin someterlo a una libre elección. En este caso lo que se espera de individuo se reduce a dar respuestas correctas e incorrectas y el estudiante solo participa ejecutando acciones.

1.3 ¿Por qué buscar disminuir el empleo de estos dos estilos de enseñanza?

Una de las razones de ser de este trabajo es contribuir al desarrollo de alternativas que buscan la disminución del empleo de estos tipos de enseñanza, porque como lo menciona Adorno, "la educación sólo podría tener sentido como educación para la autorreflexión crítica" (1998, pág. 81).

Es perverso utilizar la educación para controlar y manipular a los individuos, y peor aún, si se llega al extremo en el cual las obligaciones se conviertan en heteronomía, en un hacerse dependiente de órdenes, de normas que no se justifican ante la propia razón del individuo. Esto significa, buscar que "el super-yo [sea] reemplazado en nombre de la obligación por autoridades exteriores" (Adorno, 1998, pág. 83). El mismo Adorno (1998, pág. 83) propone como contraparte de esta educación generadora de heteronomía otra que busque "la autonomía, [del individuo, es decir] la fuerza de reflexionar". Sumado a esto y haciendo alusión a Freire (2009), es imperativo que la educación que reciben los niños y jóvenes dentro de las aulas escolares tenga, entonces, como fin principal humanizar, es decir, generar individuos capaces de tomar decisiones propias después de haber llevado a cabo un proceso reflexivo.

1.4 Escuela nueva

En contraposición a estas formas de enseñanza, y a partir de que se comienzan a denunciar sus desventajas, desde principios del siglo XX surgieron varias corrientes pedagógicas, identificadas con el nombre de *Escuela nueva*, como: a) el *Romanticismo pedagógico* de Rousseau e Illich; b) el *Desarrollismo pedagógico* de Dewey y Piaget; o c) la *Pedagogía socialista* de Makarenko y Freire. En ellas se gesta la idea de que todo aprendizaje efectivo debe partir de alguna necesidad o interés del alumno, y ese interés debe ser considerado como el punto de partida para la educación. Esto significa que en estas nuevas propuestas "lo que prima es la autoactividad del alumno que se autotransforma mediante el descubrimiento y la experiencia autoadaptativa de manera individual o colectiva" (Flores, 1994, pág. 166).

En este movimiento de la Escuela nueva subyacen diversas teorías pedagógicas contra autoritarias, autogestionarias y libertarias. Su característica definitoria es el deseo de educar en libertad y para la libertad, por lo que la relación maestro-alumno sufre una transformación, la antigua relación de poder-sumisión propia de la enseñanza tradicional se sustituye por una relación de afecto y camaradería. El maestro, para quien ahora es más importante la forma de conducirse que la palabra, se convierte en un auxiliar del libre y espontáneo desarrollo del alumno. Esta nueva relación tiene la intención de generar en los alumnos la autodisciplina, ya que el maestro cede el poder a sus alumnos para colocarlos en una posición funcional de autogobierno que los lleve a comprender la necesidad de elaborar y observar reglas, las que no son impuestas desde el exterior, sino que han salido del grupo como expresión de la voluntad general.

Se dejan de lado los condicionamientos, que son reforzados constantemente en la enseñanza conductista, y se hace énfasis en el desarrollo intelectual del individuo que busca el aprendizaje "a partir de su actividad vital como protagonista de su propio autodesarrollo, con base en sus intereses, necesidades sentidas [y] actividades creativas" (Flores, 1994, pág. 165). También se le devuelve al individuo su expresión al recuperar la voz y la palabra.

Se busca el desarrollo integral del futuro ciudadano para convertirlo en un ser humano consciente de la dignidad de cualquier otro ser humano. En suma, se trata de preparar al individuo para la vida por lo que las experiencias del aula deben ser lo más parecidas al ambiente en el que desenvuelve y del cual también aprende.

Como consecuencia de las propuestas de dicha *Escuela nueva* y de la investigación en educación actuales, el desarrollo de la capacidad de *aprender a aprender* se sitúa en el centro de todo proyecto educativo, es decir, se busca la formación de individuos que puedan gestionar sus propios aprendizajes, adopten una autonomía creciente y dispongan de herramientas intelectuales que les permitan un aprendizaje continuo a lo largo de su vida. Esto significa que "para afrontar los retos del siglo XXI, la educación debe estar dirigida a promover las capacidades y competencias, y no sólo conocimientos cerrados o técnicas programadas" (Pozo y Monero, en Díaz Barriga y Hernández, 2010).

1.5 Educación en la EN-CCH

La Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades [EN-CCH], en donde se llevó a cabo el estudio que se describe a lo largo del trabajo, desde su creación, hace poco más de 40 años, se constituyó como una institución de educación media superior de vanguardia porque su Modelo Educativo, ya en ese momento, implicaba la puesta en práctica de los principios fundamentales de la Escuela nueva.

El Modelo Educativo de la EN-CCH (UNAM. EN-CCH, 2012) "representa un proyecto de formación específico de bachillerato universitario, general y propedéutico, y por ello de cultura básica, que coloca al alumno y sus aprendizajes como eje de organización de todas las actividades escolares. Además, al considerar al alumno como sujeto de su aprendizaje, de su formación y de su cultura, promueve por consiguiente la utilización de procedimientos pedagógicos participativos."

Dicho modelo también plantea que los estudiantes deben ser sujetos, entendido como seres humanos plenos, actores de su propia formación, de la cultura de su medio, capaces de obtener, jerarquizar y validar información, utilizando instrumentos clásicos y tecnológicos para resolver con ello problemas nuevos. Aprendices autónomos, sujetos poseedores de conocimientos sistemáticos en las principales áreas del saber, de una conciencia creciente de cómo aprender, de relaciones interdisciplinarias en el abordaje de sus estudios, de una capacitación general para aplicar sus conocimientos, formas de pensar y de proceder, en la solución de problemas prácticos. Con todo ello, tendrán las bases para cursar con éxito sus estudios superiores y ejercer una actitud permanente de formación autónoma.

Las orientaciones del quehacer educativo de la EN-CCH se sintetizan en:

Aprender a aprender

El alumno será capaz de adquirir nuevos conocimientos por propia cuenta, es decir, se apropiará de una autonomía congruente a su edad.

Aprender a hacer

Desarrollará habilidades que le permitirán poner en práctica lo aprendido en el aula y en el laboratorio. Supone conocimientos, elementos de métodos diversos, enfoques de enseñanza y procedimientos de trabajo en clase.

Aprender a ser

Desarrollará, además de los conocimientos científicos e intelectuales, valores humanos, cívicos y particularmente éticos.

Los párrafos anteriores describen los fines de la EN-CCH, en primer lugar se indica el papel que debieran tener los alumnos a lo largo del proceso enseñanza-aprendizaje al interior de la institución, y posteriormente, plantea las características ideales que debieran presentar éstos como consecuencia de todos los aprendizajes pretendidos. Pero estos sólo son los fines de la institución, y como lo marca Rugarcía (1989, pág. 4) "son la 'utopía', misión o ideal que se pretende lograr […] pero la cotidianidad y la rutina van haciendo que pierdan significado o se interpreten de diversas maneras".

Lo que realmente sucede es que hay una gran distancia entre lo que se pretende en el papel y lo que se logra al interior de las aulas. Somos nosotros, los profesores al frente del grupo, quienes tenemos la obligación de participar activamente en la obtención de dichos fines en beneficio de nuestros alumnos. Pero, como ya se comentó al inicio de este capítulo, por motivos como falta de materiales que contribuyan al desarrollo de todos los aprendizajes descritos; falta de motivación; falta de tiempo a consecuencia de laborar en varias instituciones; o, simplemente desinterés, la mayoría de las clases de matemáticas se llevan a cabo mediante las variantes de enseñanza tradicional o conductista, dejando completamente de lado las intenciones del Modelo Educativo.

1.5.1 Descripción de la Institución en la que se realizó la investigación

En la EN-CCH, las asignaturas se agrupan en cuatro áreas del conocimiento: Matemáticas, Ciencias Experimentales, Histórico-Social, y los Talleres de Lenguaje y Comunicación.

La intención para el Área de Matemáticas es que los alumnos logren percibir esta disciplina como ciencia en constante desarrollo, la cual les permitirá la resolución de problemas. Se origina en las necesidades de conocer y descubrir el entorno físico y social, así como desarrollar el rigor, la exactitud y la formalización para manejarlo.

En cada uno de los primeros cuatro semestres se incluye una asignatura obligatoria de Matemáticas. En estas cuatro asignaturas se pretenden los aprendizajes de los temas considerados como básicos los cuales son: Aritmética, Álgebra, Geometría Euclidiana, Geometría Analítica y Funciones. En los dos últimos semestres se incluyen las dos asignaturas de Cálculo Diferencial e Integral, pero sólo para aquellos alumnos que tienen la intención de continuar sus estudios en licenciaturas de Ciencias Exactas y de las Ingenierías.

En la actualidad, los primeros cuatro cursos de matemáticas se imparten en salones de 25 alumnos cada uno y con condiciones convenientes para el trabajo en pequeños grupos, porque las sillas con paletas fueron sustituidas por mesas pequeñas que fácilmente pueden acomodarse para formar pequeños grupos de cuatro integrantes que pueden sentarse de forma que los alumnos se ven de frente. También existen dos pizarrones, en paredes opuestas del salón, para facilitar la labor del profesor de quien se espera que se encuentre recorriendo todos los pequeños grupos a lo largo de las sesiones.

Estas condiciones se mantienen para los cursos de los dos últimos semestres, pero con el inconveniente de que los grupos aumentan a 50 alumnos, lo que podría significar mayores inconvenientes para la labor docente y el aprendizaje porque, baste sólo con decir entre otras cosas que, la atención que se pudiera prestar a cada alumno o pequeño grupo disminuye en comparación con un grupo de 25 alumnos.

En la EN-CCH los cursos se imparten bajo el concepto conocido como libertad de cátedra, lo que se interpreta como la libertad que tiene el profesor para escoger las metodologías didácticas y los materiales que a su respetable juicio considere adecuados para cumplir con los temas marcados en cada Programa de Estudio respectivo. Esto, en algunas situaciones significa un inconveniente, porque los materiales impresos o electrónicos y las propuestas didácticas innovadoras generados todos al interior de la institución con la intención que los alumnos logren los aprendizajes de acuerdo a lo planteado en su Modelo Educativo, sólo se consideran meras recomendaciones menores cuyo empleo o puesta en práctica por los docentes en su labor cotidiana, generalmente y por desgracia, no se lleva a cabo, lo que redunda en lo mencionado en el inciso anterior: que los cursos de matemáticas siguen impartiéndose mayormente bajo los enfoques de la educación tradicional o conductista.

1.5.2 Descripción del papel de las matemáticas en el currículo

El aprendizaje de las matemáticas tiene un papel relevante en el proceso educativo escolarizado, esto se evidencia porque los temas de esta disciplina se incluyen en los programas de estudio desde la Educación Básica [EB], Media Básica [EMB] y hasta la Media Superior [EMS] a nivel nacional, en donde, en general, tienen un carácter de obligatorios a lo largo de los tres currículos.

La intención de estos aprendizajes se justifica, en primer lugar por sí mismo, como parte del bagaje cultural del egresado de la EMS, lo que puede observarse, por un lado, en los Programas de Estudio de la EN-CCH, en donde se busca que el egresado desarrolle:

> "La comprensión del significado de los conceptos, símbolos y procedimientos matemáticos correspondientes al nivel bachillerato[; y,] la incorporación a su lenguaje y modos de argumentación habituales, de distintas formas de expresión matemática (numérica, tabular,

gráfica, geométrica, algebraica).” (UNAM. EN-CCH, 2002, pág 8)

Como puede apreciarse, este objetivo concuerda con la definición de competencia matemática para la EMS propuesta por la Secretaría de Educación Pública [SEP] (SEP, 2012), la que se describe como:

> “[L]a capacidad de un individuo para analizar, razonar y comunicar de forma eficaz; a la vez de plantear, resolver, e interpretar problemas matemáticos en una variedad de situaciones que incluyen conceptos matemáticos cuantitativos, espaciales, de probabilidad, o de otro tipo.”

En segundo lugar y con un carácter de mayor relevancia, la intención de estos aprendizajes es la contribución al desarrollo del alumno como un sujeto útil en la sociedad. Esto también puede observarse en ambos Programas de Estudio, ya que en la EN-CCH también se busca que el egresado desarrolle, entre otras habilidades y actitudes:

> “El empleo de diversas formas de pensamiento reflexivo (sistemático, especulativo y riguroso), particularmente de tipo analógico, inductivo y deductivo[;] la capacidad para formular conjeturas, construir argumentos válidos y aceptar o refutar los de otros[; y,] la aplicación de conocimientos en distintos ámbitos de su actividad, con actitudes de seguridad en sí mismo y de autoestima.” (UNAM. EN-CCH, 2002, pág 7)

Por su parte, en la misma definición de competencia matemática para la EMS propuesta por la SEP, además se plantea que:

> “[El desarrollo de] esta competencia tiene que ver con la capacidad para identificar y entender la función que desempeñan las matemáticas en el mundo, emitir juicios fundados y, utilizar y relacionarse con las matemáticas de forma que pueda satisfacer las necesidades de la vida diaria de un ciudadano [...] comprometido y reflexivo.” (SEP, 2012)

Todo lo anterior, significa que el papel de las matemáticas en la formación de individuos es de gran relevancia, porque no sólo se refiere a la adquisición de conocimientos conceptuales, que desgraciadamente, en muchas ocasiones se consideran vacíos y sin relación ni utilidad, sino que contribuye al desarrollo de habilidades y actitudes que les permiten a los individuos tomar decisiones y emitir juicios en base al análisis de datos numéricos en cualquier ámbito de la vida, además de poder resolver problemas cotidianos cuya solución surja de una comprensión y adecuación de los aprendizajes provenientes de la matemática misma.

1.5.3 Resultados globales de la educación matemática

Desgraciadamente, no se está logrando el desarrollo óptimo de los aprendizajes, habilidades ni actitudes antes descritas, lo cual se puede afirmar con base en los datos que se muestran a continuación:

a) De acuerdo con los resultados obtenidos en el año 2012 en la Evaluación Nacional del Logro Académico en Centros Escolares [ENLACE] para la EMS, la cual aporta información sobre la capacidad que han desarrollado los alumnos para responder a exigencias de la vida cotidiana al egresar de la EMS (CENEVAL, 2012), en lo que respecta a Habilidad Matemática, a nivel nacional casi el 70% de los evaluados se ubicó en los niveles de insuficiente y elemental; mientras que a nivel entidad, en el Distrito Federal, casi el 50% de la población evaluada se ubicó en esos mismos niveles. (SEP, 2012)
b) Los últimos resultados de la evaluación PISA, cuya prueba busca conocer en qué medida los estudiantes de 15 años han adquirido los conocimientos y habilidades

relevantes para participar activa y plenamente en la sociedad moderna, indican que casi el 80% de la población evaluada en México se encuentra dentro de los primeros 2 niveles (que también podríamos mencionarlos como insuficiente y elemental) de un total de seis (Díaz & Flores, 2010).

c) De todo el currículo de la EN-CCH, las siete asignaturas con mayor índice de reprobación pertenecen al Área de Matemáticas (UNAM. EN-CCH, 2011) y de acuerdo con Ávila (2011), Cálculo Diferencial e Integral I que es la materia en donde se incluyen los temas de la secuencia, se encuentra ubicada como la cuarta con el mayor índice de reprobación con un promedio del 40% para los últimos cinco años reportados, que corresponden a los años de 2006 a 2010.

d) De acuerdo a los dos últimos informes de la Institución (Muñoz, 2012), en las evaluaciones diagnósticas llevadas a cabo por la Dirección General de Evaluación Educativa de la UNAM a los alumnos de recién ingreso a las licenciaturas de las Ciencias Físico-Matemáticas y de las Ingenierías, los alumnos egresados de la EN-CCH han obtenido, desde la fecha reportada de 2006, la última posición de entre todos los egresados de los diferentes sistemas de la EMS con un promedio de aciertos del 35%. Además para el caso de los aciertos de matemáticas, el promedio es todavía más bajo del 27%. Lo que hace ver una situación educativa realmente crítica en la EN-CCH, porque de acuerdo con los resultados de las evaluaciones de PISA y ENLACE, el grueso de la población de estudio de los otros sistemas fue clasificada en los niveles de insuficiente y elemental, por lo que sería válido plantear la siguiente cuestión: Si a los alumnos de la EN-CCH se les realizaran dichas evaluaciones, que no se llevan a cabo por decisión de la UNAM, ¿en qué nivel quedarían ubicados si, de acuerdo a la misma UNAM, se encuentran por debajo de todos?

1.6 Ubicación de la asignatura

Cálculo Diferencial e Integral es considerada como una asignatura de gran relevancia porque los aprendizajes que se pretenden en ella son el punto de partida para el logro de los demás aprendizajes, tanto de matemáticas como de física, que los alumnos llevarán a cabo en los cursos básicos del inicio de la licenciatura.

De acuerdo al Programa de la asignatura (UNAM. EN-CCH, 2012, pág 13) los principales aprendizajes del curso se describen como a continuación se muestra.

“Al finalizar el [...] curso de cálculo, a través de las diversas actividades encaminadas al desarrollo de habilidades y a la comprensión de conceptos y procedimientos, el alumno:

- Incrementa su capacidad de resolver problemas al adquirir nuevas técnicas para representar e interpretar situaciones y fenómenos que involucran variación.
- Adquiere una visión del concepto de límite, a través del análisis de procesos infinitos.
- Relaciona a la derivada como una función con un proceso infinito que permite estudiar las características de la variación y de la rapidez de cambio.
- Aplica la derivada de una función para resolver problemas de razón de cambio y variación.”

De acuerdo al plan de estudios, dichos aprendizajes deben ser llevados a cabo por los alumnos mediante actividades que no se centren en la memorización ni en la repetición, más bien, de manera que se ponga énfasis en el significado de conceptos y procedimientos, en el manejo de estrategias, en la integración de conocimientos, en el tránsito de un registro a otro y en el desarrollo de habilidades matemáticas. En consecuencia, resulta importante que los alumnos interactúen de forma activa con la temática que van a conocer, de modo que además de favorecer una mejor comprensión de la misma, se les dote de herramientas intelectuales.

Como ya se comentó con anterioridad, en el currículo la asignatura se imparte en el quinto semestre, inicio del tercer año del bachillerato, a quienes pretenden continuar sus estudios en las áreas de Ciencias Exactas y de las Ingenierías, con una frecuencia de dos sesiones a la semana, de dos horas cada una.

El tema que se escogió es, de acuerdo al Plan de Estudios de la asignatura, el primero de la Unidad I, Procesos Infinitos y la Noción de Límite, para el cual se recomienda una duración de 12 horas en total. En este tema se ubican aquellos aprendizajes anteriores al del concepto de límite, el cual no es pretendido abordar con técnicas que den relevancia al enfoque algebraico sino más bien, como se comenta en dicho Plan de Estudios, "se ha optado por centrar la atención en *la esencia* del difícil concepto de límite, por lo cual, [la Unidad] se inicia con el estudio de procesos infinitos, su tendencia, estabilización y las posibilidades de predicción de valores y comportamientos, para enfrentar después, en esta perspectiva, el estudio de la derivada y la integral" (UNAM. EN-CCH, 2002, pág 4).

Como parte de las estrategias recomendadas en el Plan de Estudios para desarrollar los aprendizajes previos al del límite (UNAM. EN-CCH, 2002), se recomiendan actividades como:

a) Problema del saltamontes (mitad del segmento, después la mitad de esa mitad, y así subsecuentemente).
b) Representar 1 entre 3 en su forma decimal: 0.3 0.33 0.333 ...
c) Dividir un cuadrado de área uno a la mitad, tomar una mitad y nuevamente dividirla a la mitad, y así sucesivamente.

Las cuales tienen la intención de que el alumno genere el concepto de infinitamente pequeño de manera informal, y utilizar esta idea como un concepto previo necesario para el aprendizaje del concepto de límite.

En los materiales empleados para la parte experimental de este estudio no se incluyó ninguna de las tres actividades anteriores recomendadas, pero en ellos sí se mantiene la idea de abordar los temas con poco énfasis algebraico. Contienen actividades derivadas de los siguientes dos eventos de la historia de las matemáticas:

a) La representación de una curva mediante una expresión algebraica que hace Descartes (1981). En este caso, se hace uso del fragmento de su texto en donde indica que el procedimiento empleado para obtener la expresión algebraica debe comenzar con el trazo de dos ejes de referencia, que actualmente conocemos como Plano Cartesiano. Las razones para utilizar este material son dos: la primera, porque contribuye a completar la contextualización histórica buscada al inicio de la secuencia didáctica, ya que Descartes es el primero en resolver el problema del trazo de la recta tangente a una curva, pero mediante métodos geométricos; y la segunda, para que los alumnos se den cuenta que actualmente no se emplean los ejes de referencia como los nombra Descartes, sino con los nombres intercambiados.

b) El problema del trazo de la recta tangente a una curva de la forma como Newton lo resuelve (2004), planteando una proporción entre dos triángulos semejantes construidos con tres puntos de la curva y los dos ejes de referencia propuestos por Descartes, y haciendo que los lados de uno de los triángulos disminuyan tanto que se puedan considerar como infinitamente pequeños, para emplear su nueva herramienta matemática y poder resolver la proporción resultante, lo cual, en la actualidad, es considerado como el inicio del Cálculo. La intención de esto es facilitar el desarrollo de un concepto inicial de infinitamente pequeño que sirva como base para el aprendizaje posterior del concepto de límite bajo el mismo enfoque.

1.7 Descripción de la población de estudio

De acuerdo al Diagnóstico Institucional para la Revisión Curricular, de la EN-CCH (2011), desde el 2006 hasta la fecha, aproximadamente el 90% de los alumnos que inician el tercer año del bachillerato en la institución tienen entre 16 y 18 años, y son jóvenes que han cursado sin interrupciones todos sus estudios. Además, prácticamente no hay predominancia de género, con aproximadamente la mitad de la población para cada uno.

De acuerdo con el mismo documento, al inicio del quinto semestre sólo el 34% de la población estudiantil es regular, es decir que no adeudan ninguna asignatura; el 39% adeuda entre 1 a 6 asignaturas; y el resto de la población adeuda más de 6 asignaturas. De las cuales, se puede afirmar que la mayoría ellas pertenecen al Área de Matemáticas, porque éstas tienen el mayor índice de reprobación de todas las asignaturas impartidas durante los dos primeros años del bachillerato. Además, como se mencionó antes, de acuerdo a los resultados de los últimos años, se espera que el 40% de la población de quinto semestre no acredite la asignatura. Lo anterior se debe, en parte, a que a pesar de que en el Modelo Educativo del Colegio se privilegia el aprendizaje por sobre la enseñanza y el trabajo en pequeños grupos, los cursos de matemáticas siguen siendo en su mayoría expositivos, en donde el profesor enseña para un alumno pasivo y no logra una enseñanza activa.

Las sesiones experimentales en donde se aplicó la secuencia didáctica se llevaron a cabo en un sólo grupo del turno matutino en el horario de 7-9 horas, los martes y jueves de cada semana, en el plantel Vallejo del Colegio. En este lugar, las aulas tienen un buen espacio y distribución, porque a pesar del elevado número de alumnos por grupo, presentan la iluminación (natural en ese horario) y ventilación adecuadas, además de que, como ya se mencionó, sus mesas se acomodan fácilmente para disponerlas para el trabajo en pequeños grupos.

1.8 Balance del capítulo

Como se pudo observar, en la primera parte del capítulo se hizo énfasis en el tipo de educación, indicado en su Modelo Educativo y que es nombrado de forma general como Escuela nueva, que debe impartirse en la EN-CCH.

Para llegar a esto, se definió inicialmente el concepto de educación, comentando posteriormente acerca de los dos tipos de educación que siguen imperando hasta la fecha al interior de las aulas: la educación tradicional y la educación conductista. Después de hacer ver los inconvenientes que se generan por estos tipos de educación, se describió a la Escuela nueva como el resultado de los esfuerzos para mejorar la educación y a la EN-CCH como la propuesta de la UNAM para la búsqueda de dicha mejoría educativa.

A partir de lo cual, en la segunda parte del capítulo, se hace la contextualización de la institución. Se comenta acerca de las intenciones de incluir a las matemáticas a lo largo de casi todo el currículo del bachillerato, para posteriormente describir la organización de la institución, su currículo, y los planes de estudios de las asignaturas previas y de la asignatura en la cual se realizó el trabajo. Como parte final de la contextualización, se describió la población de estudio y sus características.

Capítulo 2

Fundamentación teórica y metodológica de la propuesta didáctica

Como comentan Díaz Barriga y Hernández (2010), la fuerte presencia del constructivismo en la educación ha conducido a postular, en el plano de las reformas y proyectos educativos, un currículo y una enseñanza centrados en el aprendizaje del alumno, concebido como un agente activo de su propio aprendizaje y con un gran potencial como constructor del conocimiento. Desde la perspectiva del constructivismo, se ha replanteado también el sentido mismo de la enseñanza, el papel del docente y de su actuación en el aula.

2.1 Constructivismo

Carretero (1997), al comentar acerca de la *fuente psicológica del currículo*, es decir, los elementos que deben considerarse en la elaboración y concreción de una serie de actividades y los que conciernen a capacidades y disposiciones del individuo que aprende, hace referencia a las siguientes cuestiones:

a) Partir del nivel de desarrollo del alumno.
b) Asegurar la construcción de aprendizajes significativos y que éstos sean logrados por los mismos alumnos.
c) Procurar que los alumnos modifiquen sus esquemas de conocimiento.
d) Establecer relaciones entre el nuevo conocimiento y los esquemas de conocimiento ya existentes.

Las cuales implican un tipo de enseñanza bastante distinta de lo que se entiende como enseñanza tradicional. Pero que su aplicación supone la puesta en marcha de un compendio de actividades y decisiones educativas que propondrían no sólo la adquisición de conocimientos por parte de los alumnos, sino también la formación de ciudadanos con mejor capacidad crítica para la solución de problemas.

Dichas cuestiones se consideran constructivistas, por lo que es necesario definirlo:

> "Básicamente es la idea de que el individuo, tanto en los aspectos cognitivos y sociales del comportamiento como en los afectivos, no es un simple producto del ambiente ni resultado de sus disposiciones internas, sino una construcción propia, que se produce día a día como resultado de la interacción entre esos factores. [Por lo que] el conocimiento no es una copia de la realidad, sino una construcción del ser humano [realizado] fundamentalmente con los *esquemas* propios, es decir, con lo construido en su relación con el medio (Carretero, 1997, pág. 24)."

Hay que comentar que no es un término unívoco, de hecho, es una posición compartida por diferentes tendencias de la investigación psicológica y educativa. Entre las que se encuentran las teorías de Piaget, Vygotsky y Ausubel (Carretero, 1997; Díaz Barriga y Hernández, 2010).

2.1.1 Piaget

El enfoque psicológico constructivista de Piaget se interesa por la forma en que los individuos construyen significados. Piaget propuso una secuencia de etapas cognoscitivas por las que atraviesan todos los seres humanos, el pensamiento en cada etapa construye e incorpora etapas previas, conforme se vuelve más organizado y adaptativo, y se vincula menos con eventos concretos (Woolfolk, 2006).

Piaget señala (en Trilla, 2001) que la adaptación como síntesis entre la asimilación y la acomodación, es el mecanismo central que permite, en términos generales, la mejora paulatina de los esquemas. Sin embargo, la creación de nuevos productos cognitivos por restructuración ocurre cuando se produce un desequilibrio o desajuste entre los esquemas del sujeto y el objeto al cual se aplican, o entre dos esquemas que aparecen contradictorios entre sí. Ante este desequilibrio, el sujeto experimenta una *perturbación cognitiva* que pone en marcha mecanismos reguladores y compensatorios tendientes a restablecer el equilibrio. De esta manera, el sujeto va alcanzando nuevos estadios de equilibrio de sus estructuras cognitivas, cada vez más estables.

Piaget creía que el ambiente social es un factor importante en el desarrollo, pero no consideraba que la acción social fuese el principal mecanismo para modificar el pensamiento, el constructivismo piagetiano, pone gran énfasis en la creación individual de significados.

2.1.2 Vygotsky

Una de las contribuciones esenciales de Vygotsky ha sido concebir al sujeto como ser eminentemente social y al conocimiento como un producto social. Agrega además, que todos los procesos psicológicos superiores se adquieren primero en un contexto social y luego se *interiorizan* (Carretero, 1997). Esto significa que Vygotsky creía que la interacción social, y las herramientas y la actividad culturales modelan el desarrollo y el aprendizaje individual. Al participar en actividades con los demás los aprendices se apropian (interiorizan u obtienen) de los resultados generados por el trabajo en conjunto; adquieren estrategias y conocimientos nuevos del mundo y la cultura (Woolfolk, 2006).

Una ventaja de su teoría del aprendizaje es que nos brinda una forma de tomar en cuenta lo psicológico y lo social, es decir, tiende un puente entre ambos campos. En este sentido, Vygotsky plantea el concepto de la *zona de desarrollo próximo* que es el área dónde el individuo es capaz de resolver un problema con la ayuda de un adulto o de un compañero más hábil. Esta zona se considera el lugar en que la cultura y la cognición se crean mutuamente. La cultura crea la cognición cuando el adulto utiliza herramientas y prácticas de la cultura para dirigir al aprendiz hacia metas que la misma cultura considera valiosas. La cognición crea cultura cuando el adulto y el aprendiz en conjunto generan nuevas prácticas y soluciones de problemas que aportan al repertorio cultural del grupo.

El aprendizaje colocado en un contexto social y cultural constituye el constructivismo de Vygotsky.

2.1.3 Ausubel

La aportación fundamental de Ausubel ha consistido en conceptualizar el aprendizaje como una actividad significativa para la persona que aprende. Ésta se encuentra directamente en contacto con la existencia de relaciones entre el conocimiento nuevo y el poseído por el alumno (Carretero, 1997).

Ausubel critica la enseñanza tradicional porque él defiende la idea de que el aprendizaje resulta poco eficaz si consiste simplemente en la repetición mecánica de elementos que el alumno no estructure formando un todo relacionado. Esto significa que para Ausubel, el aprendizaje sólo será posible si el aprendiz utiliza los conocimientos adquiridos, aunque no sean totalmente correctos.

Para Ausubel, aprender es sinónimo de comprender. Por ello, lo que se comprenda será aquello que se aprenda y se recordará mejor porque quedará integrado en nuestra estructura de conocimientos. Por tanto, resulta fundamental para el profesor conocer no sólo las representaciones que poseen los estudiantes sobre el conocimiento a enseñar, sino también analizar el proceso de interacción entre el conocimiento nuevo y el alcanzado. De esta manera, no es tan importante el producto final emitido por el alumno como el proceso que lleva a dar una determinada respuesta.

Ausubel también introduce el concepto de *organizador previo*, los cuales define como actividades llevadas a cabo con el fin de ayudar al alumno a establecer relaciones adecuadas entre el conocimiento nuevo y el alcanzado. Se trata de *puentes cognitivos* para pasar de un conocimiento simple o incorrecto a uno más elaborado.

2.2 El papel del docente

En la EN-CCH (UNAM. EN-CCH, 2012) se promueve un modelo de docencia que busca desarrollar formas de trabajo participativas y productivas con los alumnos, privilegiando habilidades para saber informarse, estudiar y aprender, incorporando así necesariamente las estrategias del aprender a aprender, que conducen al crecimiento autónomo de su condición de estudiante y sujeto social.

Para alcanzar las metas del Modelo Educativo se requiere de un profesor que comprenda lo decisivos que son la participación, el trabajo grupal y la actividad productiva de los alumnos en la apropiación de los contenidos de la materia, porque el establecimiento de un ambiente de aprendizaje que fomente una motivación favorable para el estudio depende mayoritariamente de él. El profesor debe tener como una de sus metas docentes principales que los estudiantes se conviertan en aprendices exitosos, así como en pensadores críticos y planificadores activos de su propio aprendizaje, la realidad es que esto sólo será posible si el tipo de experiencia interpersonal, tanto de los alumnos entre sí como de los alumnos con el profesor, que se desarrolle en el aula en lo fomenta. Esto exige desarrollar una docencia que muestre el dominio del contenido disciplinario, así como la capacidad de identificar y generar los conocimientos y estrategias que conduzcan a los alumnos a construir aprendizajes para con ello desarrollar nuevos conocimientos, núcleo del aprender a aprender.

Finalmente, desde una perspectiva sociocultural de los procesos de enseñanza y aprendizaje, el profesor debe actuar en base a la metáfora del andamiaje propuesta por Bruner (en Díaz Barriga y Hernández, 2010), en la que el docente se desarrolla desde una perspectiva tutorial, es decir que sus intervenciones deben mantener una relación inversa con el nivel de competencia en la tarea de aprendizaje manifestado por el aprendiz, de tal manera que mientras más dificultades tenga el aprendiz en lograr el objetivo planteado, más directivas deben ser las intervenciones del enseñante, y viceversa.

2.3 Pequeños grupos de trabajo

El aprendizaje cooperativo se refiere al empleo didáctico de grupos pequeños, en los que los alumnos trabajan juntos para maximizar su aprendizaje y el de los demás; en donde se considera que la interacción entre los estudiantes es la vía idónea para la adquisición del conocimiento (Mendoza, en Díaz Barriga y Hernández, 2010). En este tipo de trabajo por pequeños grupos, las actividades o tareas son estructuradas por el docente.

Para asegurar que los pequeños grupos de trabajo logren llevar a cabo un aprendizaje del tipo cooperativo Johnson, Jonhson y Holubec (1999, en Díaz Barriga y Hernández, 2010) exponen sus componentes esenciales:

a) *Interdependencia positiva*. Sucede cuando los estudiantes perciben un vínculo con sus compañeros de grupo de forma tal que no pueden lograr el éxito sin ellos (y viceversa), y que deben coordinar sus esfuerzos con los de sus compañeros para poder completar una tarea o actividad. De esta manera, los alumnos comparten sus recursos, se proporcionan apoyo muto y celebran juntos su éxito.
b) *Interacción promocional cara a cara*. Los efectos de la interacción social y el intercambio verbal entre los compañeros no pueden conseguirse mediante sustitutos no verbales (instrucciones o materiales). La interacción cara a cara es

muy importante, porque existe un conjunto de actividades cognitivas y dinámicas interpersonales que sólo ocurren cuando los estudiantes interactúan entre sí en relación con los materiales y actividades de estudio, cuyo fin debe ser en primera instancia, el promover un aprendizaje significativo.

c) *Responsabilidad y valoración personal*. El propósito de los pequeños grupos de aprendizaje es fortalecer académica y afectivamente a sus integrantes. Se requiere de la existencia de una evaluación del avance personal, la cual va hacia el individuo y su grupo. De esta manera, el grupo puede conocer quién necesita más apoyo para completar las actividades, y evitar que unos descansen con el trabajo de los demás y se aprovechen de éstos.

d) *Habilidades interpersonales y de manejo de grupos pequeños*. Debe enseñarse a los alumnos las habilidades sociales requeridas que permita lograr una colaboración de alto nivel y estar motivados a emplearlas.

e) *Procesamiento en grupo*. La participación en grupos cooperativos requiere ser consciente, reflexiva y crítica respecto al propio proceso de participación al interior del mismo. Los miembros del grupo necesitan reflexionar respecto al mantenimiento de relaciones de trabajo efectivas y apropiadas. La reflexión grupal debe ocurrir en diferentes momentos a lo largo del trabajo, no sólo cuando se ha completado la actividad o se ha generado el producto terminado. Entre otros beneficios, el conducir sesiones de procesamiento en grupo permite que los estudiantes pasen al plano de la reflexión metacognoscitiva sobre sus procesos y productos de trabajo (pág 92).

En este caso, a lo largo del trabajo experimental con los materiales impresos para el trabajo en el aula, que se comentan posteriormente, se empleó una variante particular de la propuesta STAD [Student Team Achievement Division] (Slavin y colaboradores, en Díaz Barriga y Hernández, 2010), donde los estudiantes se asignaron a pequeños grupos de cuatro integrantes, buscando su conformación heterogénea. En este tipo de pequeños grupos de trabajo, al final de cada sesión y una vez que los estudiantes habían trabajado con los materiales impresos correspondientes hasta asegurarse de que todos los miembros los dominaban, el docente examinó a uno o dos integrantes de cada pequeño grupo de forma individual sin recibir ayuda de sus compañeros al ser evaluados, y el resultado de esta evaluación fue asignado a todos los miembros del equipo.

2.4 Estrategias para el aprendizaje de conceptos matemáticos basadas en su desarrollo histórico

Como ya se comentó, la propuesta que se describe a lo largo de este trabajo continúa con la misma intención de las tres actividades del apartado 1.5, pero sustituyéndolas con otra actividad basada en el desarrollo histórico del cálculo.

La razón de esta modificación se basa, en primer lugar, en las recomendaciones de Ruiz y Barrantes (1997) al hacer, en su momento, la propuesta de un nuevo "paradigma que recurra a la intuición sensorial, un paradigma que integre en su seno las influencias sociales y culturales, que recurra a la historia de las matemáticas y de las ciencias como inspiración no solo para las anécdotas sino para establecer la lógica intelectual que sustente la práctica educativa de una forma más acertada" (pág 152), y en segundo lugar, en las de Del Río (1997, pág 33), quien menciona que:

> "EL CONOCIMIENTO de la Historia de la Matemática proporciona una comprensión más profunda de los conceptos y de los métodos matemáticos al desvelar sus orígenes, su evolución y sus relaciones; al mismo tiempo, ofrece una visión *encamada* de los mismos, ya que pone de manifiesto los rostros y las vidas de quienes fueron sus constructores. La Matemática aparece así como una ciencia viva, ligada a las circunstancias históricas, a los problemas de la humanidad y no como una fría sucesión de definiciones, teoremas y métodos notando en la abstracción más deslumbrante y desvinculados de toda *miseria* humana. Además, el análisis de la evolución histórica de la Matemática proporciona algunos principios sobre cómo ha de enseñarse y aprenderse esta ciencia, principios que, naturalmente, son completados y matizados desde otras fuentes como la psicología del aprendizaje o la reflexión sobre la práctica docente."

En este sentido, Kleiner (2001) afirma que la contribución más importante de la contextualización histórica de las matemáticas durante su aprendizaje, es la motivación, tanto para los alumnos como para los profesores, ya que "la historia [...] considera el contexto en el cual el originador de la idea estaba trabajando, con el sentido de traer al frente el '*problema caliente*' que él o ella estaba esforzándose por resolver" (pág 137).

Entonces, la intención de hacer que los alumnos trabajen directamente con la propuesta original de Newton, además de la búsqueda de una mayor motivación para el aprendizaje, también intenta, como lo menciona Camacho-Ríos (2011), su resignificación, la cual es descrita como:

> "[S]e entiende como la acción de dar un nuevo sentido a los conceptos complicados de la matemática escolar, a través de una enseñanza dinámica más organizada en la que se involucren

> las coyunturas procedimentales que dieron origen y definición a los propios conceptos. [...] [Porque] los significados que se asocian al conocimiento escolar debieran hacerlo más *dinámico* y comprensible en su utilidad en el aula. Para ello, estos últimos deben estar lo más cercanos posible de los segundos. [...] Sin embargo, si bien la cercanía de los conceptos es una condición fundamental, la importancia no se centra tanto en la búsqueda de resignificar los conceptos, sino más bien en dotar de significado o hacer más *real* y experimental a la actividad práctica que se desarrolla con éstos, toda vez que la práctica los dinamiza, haciéndolos más comprensibles" (pág 159).

Existen pocos materiales que sirvan como antecedente, en la línea descrita, para este trabajo. Cirillo (2007) plantea enriquecer el curso de Cálculo con notas históricas, pero su diseño del curso no tiene ninguna diferencia, es decir, los temas se abordan exactamente de la misma forma que en un curso tradicional, sólo se van incorporando citas, notas históricas y de las biografías de los matemáticos que generaron los conceptos por aprender. Aunque útil porque logra cierta contextualización, probablemente agrega al problema del aprendizaje de las matemáticas, el problema del aprendizaje de la historia como una serie de efemérides, porque como lo menciona Ruiz, citado arriba, no se aprovecha esto para establecer una nueva lógica intelectual para la práctica educativa. Empero, también se debe mencionar que al mostrar Cirillo algunas conclusiones erróneas previas de los grandes matemáticos para que los alumnos identifiquen dichos errores y propongan los cambios pertinentes que harían correcto el concepto, se está favoreciendo la presentación de la matemática como la *ciencia viva* que menciona Del Río, y así se favorece que los alumnos vean a esos grandes matemáticos como seres humanos con aciertos y errores, con el fin de aumentar su confianza.

El antecedente más cercano a este trabajo podría ser el de Kantz (1993), quien al presentar un curso de Cálculo de acuerdo a su desarrollo histórico afirma que no sólo ayuda en el aspecto motivacional del estudiante sino que “da a los estudiantes un mejor entendimiento de la materia, [...] también les ayuda a introducirlos en las relaciones que existen entre las matemáticas y el resto de la cultura [...], entre sus estudios y el mundo que le rodea” (pág 243).

En general, durante la elaboración de la secuencia didáctica, se puso especial atención de no trivializar ni distorsionar la historia, porque de acuerdo con Fried (2001), al tratar de combinar la educación matemática con su historia, se corre el riesgo de hacer, ya sea una "'separación radical' [,que es] incluir la historia de las matemáticas de forma separada al curso, [o] una 'acomodación radical', [que es] volcar el estudio de las matemáticas al estudio de los textos matemáticos [originales]". Por lo tanto, la secuencia trata de lograr un punto medio entre ambos conceptos, buscando presentar la historia sin alteraciones subjetivas; incluyendo fragmentos de los textos adaptándolos al mínimo sólo para asegurar su comprensión por parte de los alumnos; tratando también de incluir lo más fielmente posible los ejercicios sobre los que trabajaron Descartes y Newton; así como las soluciones alcanzadas y las derivaciones de éstas.

2.5 Evaluación

La evaluación es entendida como una etapa del proceso educacional que tiene por fin comprobar de modo sistemático en qué medida se han logrado los resultados previstos en los objetivos que se hubieran especificado con antelación (Lafourcade, 1972). Evaluar es descubrir la coherencia entre objetivos y resultados (Rugarcía, 1989). Es decir, al evaluar es necesario determinar (cualitativa y cuantitativamente) la forma en la cual fueron alcanzados los objetivos de aprendizaje planteados.

En el caso de los grupos cooperativos, la evaluación debe hacerse tanto para el desempeño individual como el del grupo (Díaz Barriga y Hernández, 2010). Debe evaluarse el trabajo académico mismo, el proceso de cooperación y las habilidades desplegadas por los alumnos.

2.5.1 Evaluación diagnóstica

La evaluación diagnóstica es aquella que se realiza previamente al desarrollo de un proceso educativo. Su importancia parte de la idea clásica de Ausubel (2002) referida a la importancia de valorar los esquemas cognitivos de los alumnos o conocimientos previos en beneficio del logro de aprendizajes significativos.

Para este caso, se utilizó una evaluación diagnóstica puntual, con fines de regulación continua, la cual se entiende como la que se realiza en momentos como antes de iniciar una secuencia o segmento de enseñanza perteneciente a un determinado curso (Díaz Barriga y Hernández, 2010). Al docente le sirve para estimar el punto de partida de los alumnos, o el grupo en general con el que se trabaja, y así poder realizar los ajustes pertinentes, o bien determinar un pronóstico sobre las posibilidades de aprendizaje que éstos tienen (Díaz Barriga y Hernández, 2010).

2.5.2 Evaluación formativa

Esta forma de evaluación es la que se realiza concomitantemente con el proceso de enseñanza y aprendizaje por lo que debe considerarse, más que las otras, como una parte reguladora y consustancial del proceso. La finalidad de este tipo de evaluación es estrictamente pedagógica: regular el proceso de enseñanza y aprendizaje para adaptar o ajustar las condiciones pedagógicas [estrategias, actividades, etc.] en servicio del aprendizaje de los alumnos (Allal, 1979; y otros, en Díaz Barriga y Hernández, 2010). Este tipo de evaluación parte de la idea de que hay que supervisar el proceso de aprendizaje considerando que éste es una actividad continua de reestructuraciones producto de las acciones del alumno y de la propuesta pedagógica. Así, no importa tanto valorar los resultados sino comprender el proceso, supervisarlo e identificar los posibles obstáculos o fallos que pudiera haber en el mismo y en qué medida es posible remediarlos con nuevas adaptaciones didácticas *in situ.*

En la evaluación formativa interesa cómo está ocurriendo el progreso de la construcción de las representaciones logradas por los alumnos. Importa conocer la naturaleza y características de las representaciones, en el sentido de la significatividad de los aprendizajes, la profundidad y complejidad de las mismas. Esto es, la riqueza cualitativa de las relaciones logradas entre la información nueva por aprender y los conocimientos previos (conexiones internas y externas), así como la medida en que se logra compartir significados a través del discurso o de la situación pedagógica.

También importan los *errores* que cometen los alumnos, los cuales lejos de ser meramente sancionados son valorados, porque ponen al descubierto la calidad de las representaciones y estrategias construidas por ellos, así como lo que a éstas les falta por refinarse o completarse en el sentido pedagógico propuesto (Díaz Barriga y Hernández, 2010).

2.5.3 Evaluación sumativa

La evaluación sumativa ha sido considerada la evaluación por antonomasia, al punto que cuando se habla de evaluación en las comunidades escolares inmediatamente se le asocia con ella.

La evaluación sumativa también denominada evaluación final es la que se realiza al término de un proceso o ciclo educativo cualquiera, su fin principal consiste en verificar el grado en que las intenciones educativas han sido alcanzadas. A través de ésta, el docente puede conocer si los aprendizajes estipulados en las intenciones se cumplieron según los criterios y las condiciones expresadas en ellas. Pero especialmente, la evaluación sumativa provee información, que permite derivar conclusiones importantes sobre el grado de éxito y eficacia de la experiencia educativa global emprendida.

A través de la evaluación sumativa se establece un balance general de los resultados conseguidos, y en ella existe un marcado énfasis en la recogida de datos y en el diseño y empleo de instrumentos de evaluación confiables (Jorba y Sanmartí, 1993, en Díaz Barriga y Hernández, 2010). En esta modalidad de evaluación la función social generalmente prevalece. Por su propia naturaleza, la evaluación sumativa atiende principalmente los productos del aprendizaje como consecuencia del proceso de enseñanza global. Por ello, la mayoría de los instrumentos de tipo formal (instrumentos y situaciones altamente estructuradas y formalizadas) constituirán los recursos más utilizados, para valorar la calidad de la enseñanza y de los aprendizajes logrados al término del ciclo.

Capítulo 3

Secuencia didáctica para el aprendizaje del concepto de infinitamente pequeño

3.1 Generalidades

En el Programa de Estudios de la asignatura se indica que para el inicio del curso se aborde el tema de Procesos Infinitos el cual debe servir como preámbulo al de Límite de una función. La recomendación que ahí se hace es que ambos temas sean tratados con poca formalidad matemática, es decir, sin centrar su enfoque en una descripción algebraica rigurosa con el fin de facilitar sus aprendizajes. La intención de esto es que los aprendizajes esperado del primer tema sirvan como basamento para los aprendizajes del segundo, siendo esto consecuente con la idea ausubeliana de que para lograr aprendizajes significativos es necesario, entre otras cosas, ir formando relaciones entre el conocimiento previo y el nuevo por aprender. Lo cual, desgraciadamente, no es seguido por la mayoría de los profesores, entre quienes también debo incluirme hasta antes de haber llevado a cabo este trabajo, porque generalmente no abordan el primer tema e inician el curso directamente con el tema de Límite de una función, el cual además, bajo un enfoque totalmente algebraico sin atender en absoluto la indicación mencionada del Programa. A lo anterior debe ser agregado el inconveniente de que el curso sea generalmente impartido de forma tradicional y conductista. Esta manera de implementar el curso debe ser considerada como incorrecta porque, de acuerdo a lo que se acaba de exponer, se podría afirmar que no se están favoreciendo los aprendizajes pretendidos en ambos temas.

La secuencia didáctica utilizada en la parte experimental de este estudio, como ya se mencionó, toma como base la propuesta de Descartes (1981) quien al describir una curva mediante una ecuación propone el empleo de dos ejes de referencia, y el problema del trazo de la recta tangente a una curva que Newton (2004) resuelve con un método novedoso para su tiempo y que se convertirá en el inicio del Cálculo Infinitesimal. Con esto se emplea una opción diferente a las planteadas en el Programa de Estudios para abordar el primer tema del curso, pero manteniendo la misma intencionalidad.

Para lograr la disminución de sesiones tradicionales y conductistas, y buscar implementar algunas nuevas estrategias que privilegian el aprendizaje, a excepción de las sesiones para la Evaluación Diagnóstica y la Sumativa, primera y última sesiones de la secuencia, la secuencia didáctica se diseñó para desarrollarse en pequeños equipos y en grupo, en donde, como ya se mencionó, los primeros estuvieron enfocados al aprendizaje cooperativo. Éstos quedaron incluidos en la categoría de *grupos formales*, que de acuerdo a Johnson, Jonhson y Holubec (1999, en Díaz Barriga y Hernández, 2010) se definen como aquellos que funcionan durante un periodo, que va de una hora o sesión a varias semanas de clase, en este caso el periodo fue de 5 sesiones de 2 horas cada una. Son pequeños equipos donde los estudiantes trabajan juntos para conseguir objetivos comunes en torno a una tarea de aprendizaje dada, relacionada con el currículo escolar.

Desafortunadamente, en los cursos de matemáticas la mayor parte del tiempo se lleva a cabo un trabajo que no debería llamarse grupal por el sólo hecho de que el profesor dicta una cátedra a un grupo de alumnos quienes *reciben* el conocimiento sin hacerlo suyo. Cuando aquí se habla de trabajo grupal, significa que en las actividades llevadas a cabo el profesor las dirige a todo el grupo, pero con la intención de crear un diálogo con los alumnos, invitándolos a responder, proponer y a hacerlos partícipes de todas las actividades. Bajo estas condiciones, las sesiones comenzaron con un trabajo grupal siendo el profesor el encargado de iniciar, conducir y fomentar la socialización para recuperar las ideas que se fueran obteniendo, respectivamente en cada sesión anterior, y también para que los alumnos tuvieran la oportunidad de hacer comentarios acerca del trabajo extraclase, esta etapa se considera como la *apertura* o el primer momento didáctico (Sosa y Toledano, 2010). Posteriormente, en el segundo momento didáctico o de *desarrollo*, se continuó el trabajo en pequeños grupos cooperativos con los materiales impresos. Finalmente, para completar cada sesión, en el tercer momento didáctico o de *cierre*, se volvió a trabajar en grupo con la dirección del profesor para socializar y homogenizar los resultados obtenidos en el *desarrollo*.

3.2 Primera sesión de la secuencia didáctica

La sesión inicial de la secuencia didáctica, que también fue la primera del curso, comenzó con la presentación del mismo por parte del profesor. Aquí, la indicación que más interesa para los fines de este trabajo, fue que se comentó a los alumnos que cuando las actividades se desarrollaran en pequeños grupos era indispensable que al interior de cada uno, todos sus integrantes debían de asegurarse de que los demás estuvieran trabajando en lo mismo, con la misma intensidad y compartiendo los resultados obtenidos, porque en cualquier momento el profesor podía preguntarle a cualquiera y dicha respuesta sería tomada como base para asignarles la misma evaluación a todos los integrantes. Posteriormente se llevó a cabo la implementación de la evaluación diagnóstica [Anexo I], que se enfocó en los conocimientos previos de los alumnos considerados como necesarios para el desarrollo posterior de la Secuencia.

Para un primer curso tradicional de Cálculo, la evaluación diagnóstica se centra en los conocimientos previos de álgebra, funciones y geometría analítica que tienen los alumnos, a quienes se les hacen preguntas en las cuáles deben demostrar los conocimientos que poseen para poder resolver los ejercicios clásicos de estos temas. Dichos ejercicio clásicos son aquellos como: a) Determinar el valor de la incógnita en una cierta ecuación; b) Trazar la gráfica de una cierta función lineal o cuadrática; o, c) Determina los puntos de intersección de cierta curva con otra o con los ejes cartesianos. En realidad, con este tipo de preguntas sólo se detectan sus habilidades memorísticas relacionadas con los algoritmos que conducen a responder dichas preguntas que, para este momento de su trayectoria escolar y bajo un enfoque tradicional, debieran tener siempre en mente y a la mano. Para el caso de la secuencia se identificaron los siguientes tres conocimientos previos:

a) El empleo de las proporciones para determinar cantidades desconocidas.
b) Una idea inicial de una magnitud infinitamente pequeña.
c) Los conceptos de recta secante y tangente a una curva.

En esta evaluación diagnóstica sólo se buscaron indicios de los dos primeros pero tratando de que los alumnos lograran responder después de un proceso reflexivo. La prueba estuvo estructurada de la siguiente manera:

a) El primer reactivo evalúa conocimientos de tipo conceptual acerca de las razones y proporciones.

b) El segundo y tercer reactivos evalúan conocimientos de la aplicación de estos conceptos.
c) El cuarto reactivo es una pregunta acerca de los conocimientos conceptuales de infinito e infinitamente pequeño.
d) Los reactivos quinto y sexto son preguntas acerca de los conocimientos que pudieran tener sobre la aplicación de éstos últimos conceptos.

Las ideas de los conceptos de recta secante y tangente a una curva se consideraron como existentes en los alumnos y su recuperación se dejó hasta el trabajo con los activadores previos de la segunda sesión, lo cual se comentará más adelante.

Posteriormente a la presentación del curso y la Evaluación diagnóstica, se intentó comenzar una contextualización del estado, tanto social como de la ciencia en el siglo XVII, porque los libros de Descartes y de Newton fueron elaborados en ese periodo. Mediante una forma de trabajo grupal y bajo la dirección del docente se intentó que los alumnos ubicaran ese momento histórico. La manera en la cual se decidió iniciar esta contextualización fue a través de una relación con la época de la conquista de América, por lo que se les hicieron preguntas del tipo:

a) ¿En qué año culminó la conquista española?
b) ¿Qué periodo histórico ocurre en Europa, principalmente en Italia, en esos años?
c) ¿Cómo vivía la gente en esa época?
d) ¿Qué personajes conoces de ese periodo?
e) ¿Había ciencia antes? Si había, ¿cómo era ésta antes de ese periodo?
f) ¿Qué sabes de la ciencia durante ese periodo?

El proceso de la evaluación formativa de la secuencia inició en esta tercera etapa de la primera sesión, de forma tal que a todos los alumnos que hicieran contribuciones se les puso una marca [*palomita*] para indicar su participación. En este caso, no se hizo ninguna distinción referente a la calidad de la contribución, siempre y cuando ésta respondiera de alguna manera [a criterio del docente] a la pregunta lanzada por el profesor en ese momento o sirviera para enriquecer la contextualización buscada, ésta se consideraba suficiente para asignar dicha *palomita*.

3.3 Materiales para el trabajo en el aula

Desde la segunda hasta la sexta sesiones, el momento de *desarrollo* se llevó a cabo con los materiales elaborados e impresos para tal fin [Anexo II]. La evaluación formativa en estas cinco sesiones se llevó a cabo principalmente en el momento de *desarrollo* de la sesión como se describe a continuación:

a) Una vez que se inició el trabajo en pequeños equipos el profesor hacía un recorrido inicial general por todos ellos para asegurarse de que todos se encontraran dedicados a la tarea. En este caso, su labor sólo consistió en ser observador para permitir que los alumnos fueran obteniendo sus resultados y conclusiones propias. Cuando los alumnos tenían alguna duda y solicitaban ayuda del profesor, éste debía buscar la manera de replantear la situación problemática para que fueran los mismos alumnos quienes obtuvieran la respuesta a su pregunta. Esta etapa tenía una duración de 15-20 minutos.

b) En una segunda etapa, el profesor se acercaba aleatoriamente a uno de los pequeños grupos y después de escuchar los comentarios de los alumnos, hacía preguntas de la siguiente forma: Primero, unas 3-5 preguntas iniciales relativas a lo que estaban resolviendo, las que cualquiera podía contestar o las que podían responder ayudándose entre todos los integrantes del equipo. Después, unas 2-4 preguntas dirigidas a uno de los alumnos. Aquí el profesor señalaba a quién, en ese momento, estaban dirigidas las preguntas y no les estaba permitido a ninguno de los otros tres participantes ayudarle de ninguna manera. Si alguno de los otros tres alumnos a quienes no se les preguntaba en ese momento intervenía, la pregunta se anulaba y se consideraba no contestada. Por razones de tiempo, por sesión y para cada pequeño grupo, sólo se les preguntaba a 2 ó 3 alumnos de esta manera, pero a lo largo de la secuencia el profesor tuvo cuidado de asegurarse que todos los alumnos integrantes de los equipos hubieran contestado de esta forma, aproximadamente la misma cantidades de veces. Se intentaba que en esta etapa todos los pequeños grupos fueran interrogados como se acaba de describir, pero en ocasiones, el tiempo no lo permitió. Cuando esto sucedía, los pequeños grupos faltantes fueron interrogados al final de la sesión.

La evaluación formativa surgía de este interrogatorio y a todos los integrantes del pequeño grupo se les asignó la misma. Ésta se asignaba, de acuerdo a las respuestas y a criterio del profesor, en tres valores posibles: Bien [2 *palomitas*], Regular [1 *palomita*] o Mal [Sin *palomita*].

Como se acaba de señalar, la mayor parte de la evaluación formativa se originó de las actividades recién descritas, pero los alumnos también podían obtener *palomitas* en los momentos de la apertura o del cierre de las sesiones.

3.3.1 Segunda sesión de la secuencia didáctica

En esta sesión se planificó la realización de tres tareas diseñadas como activadores previos, los cuales, tal y como lo mencionan Díaz Barriga y Hernández (2010) son estrategias que están dirigidas a activar o generar los conocimientos previos en los aprendices. Como se comentó con anterioridad, Ausubel también afirma que la actividad constructiva del conocimiento no sería posible sin conocimientos previos que permitan entender, asimilar e interpretar la información nueva para luego, por medio de ella, reestructurarse y transformarse hacia nuevos posibles. Cada tarea, indicada en los materiales como *Actividad*, tiene relación con cada uno de los tres conocimientos previos descritos. En las actividades propuestas, se busca evitar las preguntas tradicionales en donde el alumno debe contestar la definición de algún concepto como una oración aprendida de memoria o la solución de algún problema como la reproducción perfecta y aprendida también de memoria, por lo tanto sin un sentido de utilidad para él, de todos los pasos del correspondiente algoritmo que conduce a su solución. Por lo que se incluyen varias preguntas o indicaciones con las que se pretende que los alumnos, en primer lugar, sepan qué hacer, y en segundo lugar, sigan una dirección deseada hasta alcanzar el objetivo, marcado en la tabla correspondiente como propósito.

Para la primera actividad, se muestra una recta que corta a una curva en dos puntos dentro una serie de figuras que representan el movimiento de la recta sobre la curva inmóvil, hasta que en la última figura, la recta ya sólo la toca en un punto. En esta actividad se le pide al alumno que identifique en qué figuras la recta es tangente y en cuáles es secante a la curva, para comenzar el trabajo de recuperación de dichos conceptos.

Para la segunda actividad se le pide al alumno que determine una altura desconocida empleando un procedimiento guiado en donde debe trazar una figura auxiliar formada por dos triángulos rectángulos semejantes y con ella plantear una proporción geométrica con la que obtiene la altura.

En la tercera actividad se recupera su conocimiento relativo al redondeo de números. Primero se le pide que vaya redondeando ciertas calificaciones cada vez más cercanas a 10, como 9.6, 9.7, 9.9, 9.99, 9.999 y así, después se le pide que indique el que sería el número más grande de esta serie (o cercano a 10) pero sin ser 10, para finalmente preguntarle cuál sería la diferencia entre este último número propuesto y 10, con el fin de comenzar a formar en él una primera idea del concepto de infinitamente pequeño.

En la siguiente página, en la Tabla 3.1 se enlistan las tareas realizadas en la sesión y su finalidad.

En la tarea extra clase, los alumnos debieron enlistar los tres conceptos que trabajaron en la sesión, uno por cada Actividad.

Tabla 3.1. Tareas de la segunda sesión.

Tarea	Propósito
Actividad 1.	Recuperar conocimientos de los conceptos de rectas secantes y tangentes, y del movimiento de una recta que pivotea en un punto fijo sobre la curva.
Actividad 2.	Recuperar conocimientos de aplicación de proporciones.
Actividad 3.	Identificar las ideas previas relacionadas al concepto de infinitamente pequeño.

3.3.2 Tercera sesión de la secuencia didáctica

En la primera parte de esta sesión se continuó con la contextualización histórica de la primera sesión, por lo que se comentó de nuevo acerca de la recta tangente y se analizó un fragmento de un texto de Descartes donde propone el empleo de dos ejes de referencia para describir algebraicamente una curva, lo que, como ya se mencionó, tiene también la intención de que el alumno analice que Descartes los nombra de manera inversa a la forma en que los utilizamos actualmente. En la segunda parte, se inició la resolución del problema del trazo de la recta tangente a una curva tal y como lo propone Newton. Estas tareas se diseñaron como organizadores previos, las cuales son aquellas destinadas a ayudar a crear enlaces adecuados entre los conocimientos previos y la información nueva por aprender, asegurando con ello una mayor significatividad de los aprendizajes logrados y un mejor despliegue de la enseñanza, entendida ésta desde la óptica de la ayuda ajustada del andamiaje. Mayer (en Díaz Barriga y Hernández, 2010) designa a este proceso de integración entre lo previo y lo nuevo como “construcción de conexiones externas”.

Para dar inicio a la resolución que hace Newton del problema de la tangente, en la primera curva del Anexo II de los materiales impresos, el alumno tuvo que trazar una recta secante que pasa por los puntos *C*, ubicado en la parte superior de la curva, y *D*, mostrado en la figura, seguido de esto, se trazaban unas rectas auxiliares para formar dos triángulos semejantes, para finalmente, obtener su relación mediante el empleo de una proporción. Este procedimiento se repitió con la segunda curva pero considerando que el punto *C* se había movido cierta distancia sobre la curva en dirección de *D*. En este caso, la recta todavía es secante a la curva. En este momento, puede apreciarse con claridad la intención de incluir las dos primeras tareas de la sesión anterior. En primer lugar, porque se trabaja con una recta secante a una curva, y en segundo lugar, porque se continúa el trabajo con dos triángulos semejantes y su proporción. También, se involucra la idea del movimiento que tiene uno de los puntos de la recta secante sobre la curva inmóvil, movimiento que se continúa en la tarea extraclase que se menciona a continuación.

En la tarea extraclase, los alumnos debieron repetir el procedimiento por tercera vez, continuando con la consideración de que el punto *C* se seguía moviendo en dirección del punto *D.* Para este tercer ejercicio, se indica en los materiales que los puntos ya están muy cercanos entre sí, como a medio centímetro de distancia uno del otro, por lo que la recta aún es secante. Para el final de esta tarea se le pidió al alumno que siguiera considerando el movimiento del punto *C* y que indicara la posición que debía tener éste para que la recta dejara de ser secante y convertirse en tangente. A continuación, en la Tabla 3.2 se enlistan las tareas realizadas en la sesión y su finalidad.

Tabla 3.2. Tareas de la tercera sesión.

Tarea	Propósito
Análisis de un fragmento del texto de Descartes.	• Contextualización histórica. • Identificar que Descartes propone el uso de dos ejes de referencia para analizar las curvas. • Identificar que los ejes propuestos se nombran de forma inversa a la actual: "*y*" para el horizontal y "*x*" para el vertical.
Trazo de la recta tangente a una curva bajo la propuesta Newtoniana.	Iniciar el método propuesto por Newton para el trazo de la recta tangente a una curva. En esta primera etapa se busca: a) Trazar los ejes de referencia y una recta secante a la curva dada. b) Trazar dos triángulos semejantes auxiliares. c) Obtener la proporción que emplea Newton para relacionar los segmentos de los triángulos. d) Identificar que la recta tiene cierto movimiento, el cual conducirá a que en un momento dado se convierta en tangente.

3.3.3 Cuarta sesión de la secuencia didáctica

El trabajo de esta sesión giró en torno al momento en el cual el punto *C*, al seguir moviéndose sobre la curva hacía que la recta se considerara tangente, como se plantea en la pregunta 3 de la tarea extraclase de la sesión anterior. Después de esperar unos 5-10 minutos para permitir la discusión de esta interrogante al interior de los pequeños grupos, se esperaba que la conclusión general hubiera sido que los puntos se ubicaban exactamente uno sobre el otro. Posteriormente, el profesor hizo los siguientes comentarios para volver a generar la discusión en los pequeños grupos:

a) Entonces, ustedes concluyen que para que la recta se considere tangente el punto *C* debe situarse exactamente sobre el punto *D*.
b) Pero, si esto sucede, ¿cuantos triángulos habrían?

c) ¿Hay un sólo triángulo o dos triángulos?

d) Recuerden que lo buscamos es trazar la recta tangente a una curva, y la única herramienta matemática que tenemos, y Newton también tenía, es la proporción.

e) Si hay un sólo triángulo, ¿se puede plantear una proporción como en los tres casos anteriores?

Este es el momento más importante de toda la secuencia porque lo que se buscó fue generar una *perturbación cognitiva* con intenciones de promover el aprendizaje.

En este punto, el profesor debía ayudar con la última pregunta: ¿Dónde se debe ubicar el punto *C* para que la recta se considere tangente, pero que también se considere la existencia de dos triángulos? Pasado un tiempo suficiente de discusión en los pequeños grupos, para que los alumnos afirmaran convencidos de que el punto *C* debería estar muy cerca de *D*, el profesor indicó que continuaran el trabajo con los materiales impresos, donde se darían cuenta que Newton emplea el término *infinitamente pequeña* para indicar la distancia entre los puntos. Para ayudar a la visualización de esta idea, los alumnos ya habían comenzado a elaborar dicho término como resultado de la tercera tarea de la segunda sesión que lo incluye aunque dentro de una situación aritmética. Entonces, como acaba de mencionarse, en este momento de la secuencia didáctica se esperaba que los alumnos lograran imaginar que la recta es tangente pero al mismo tiempo es secante a la curva porque existen todavía dos triángulos semejantes aunque uno de ellos sea muy pequeño como para poder siquiera dibujarlo. La aceptación de una idea así es difícil para ellos porque tradicionalmente en la matemática que han aprendido desde su educación básica clasifican los objetos de forma excluyente, es decir, están acostumbrados a describir cierto objeto matemático como parte de un sólo grupo. Por ejemplo, de acuerdo a la definición real de los rectángulos, éstos son cuadriláteros con cuatro ángulos rectos, pero a lo largo de la primaria los alumnos elaboran un concepto en el cual dichas figuras deben forzosamente tener dos lados iguales de una medida mayor a los otros dos lados iguales menores, por lo que los cuadrados no tendrían nada que ver con los rectángulos, lo que significa que para ellos una de estas figuras es sólo cuadrado pero no rectángulo, o viceversa. Cuando en realidad, por la definición dada, también los cuadrados deben ser incluidos en el grupo de los rectángulos. Lo mismo ocurre con los triángulos equiláteros los que todos, a su vez, también son isósceles. Estos mismos ejemplos se les fueron mencionados a los alumnos para tratar de que les fuera más fácil la apreciación de esta dualidad geométrica.

Finalmente, como se pide en el material impreso, los alumnos debieron elaborar un informe de lo realizado en la sesión. En esta sesión no hay tarea extraclase. A continuación, en la Tabla 3.3 se enlistan las tareas realizadas en la sesión y su finalidad.

3.3.4 Quinta y sexta sesiones de la secuencia didáctica

En estas sesiones se llevó a cabo el procedimiento Newtoniano para determinar la longitud del lado horizontal del triángulo de mayor tamaño, cuyo conocimiento permite el trazo de la recta tangente buscada.

Para llevar a cabo dicho procedimiento, se debe estar convencido de los siguientes puntos:

a) Que la recta es tangente porque el problema por solucionar es ese: el trazo de la recta tangente a una curva
b) Que al mismo tiempo la recta es secante a la curva para aceptar que se puede trazar la figura auxiliar que incluye los dos triángulos semejantes.
c) Que existe una proporción que relaciona dichos triángulos semejantes.

La resolución de esta proporción es lo que permite conocer la longitud del lado horizontal del único triángulo que puede apreciarse porque el otro es infinitamente pequeño. Aquí se planteó la siguiente pregunta a los alumnos: ¿Cómo puedo resolver una proporción aritmética si estoy seguro de que existen dos de las cantidades involucradas pero no las conozco con exactitud porque su magnitud es infinitamente pequeña?

Para responder la pregunta, se pidió a los alumnos que llevaran a cabo el procedimiento newtoniano, en donde, en primer lugar se nombra dichas cantidades infinitamente pequeñas como fluxiones y algebraicamente como $\dot{x}$ y $\dot{y}$, respectivamente. Posteriormente se describe el procedimiento que permite para trabajar con estas cantidades algebraicas dentro de la proporción mencionada, cuya resolución numérica da como resultado la distancia horizontal sobre el eje de referencia donde el lado inclinado del triángulo mayor intersecta dicho eje, el mismo que es la recta tangente a la curva buscada.

En total, considerando las tareas extraclase, el alumno tuvo la oportunidad de practicar el procedimiento cuatro veces. A continuación, en la Tabla 3.4 se enlistan las tareas realizadas en la sesión y su finalidad.

Tabla 3.3. Tareas de la cuarta sesión.

Tarea	**Propósito**
Trazo de la recta tangente a una curva bajo la propuesta Newtoniana.	Continuar el método propuesto por Newton para el trazo de la recta tangente a una curva. En esta etapa se busca: d) Proponer la ubicación del punto *C* para que la recta secante se convierta en tangente. e) Crear un conflicto cognitivo dado que si el punto *C* se coloca exactamente sobre el punto *D* no se podrán trazar los triángulos semejantes auxiliares ni la proporción que los relaciona. f) Conocer la propuesta Newtoniana de la ubicación de *C* a una distancia infinitamente pequeña de *D* para que sigan existiendo ambos triángulos y su relación proporcional. g) Conocer la nueva herramienta que propone Newton para seguir empleando la proporción y resolverla.

Tabla 3.4. Tareas de la quinta y sexta sesiones.

Tarea	**Propósito**
Ubicación del punto por el cual la recta tangente intersecta el eje horizontal para realizar su trazo.	Concluir el método propuesto por Newton para el trazo de la recta tangente a una curva. En esta etapa se busca: a) Identificar que existe una proporción que nos permite conocer la longitud del lado horizontal del triángulo de mayor tamaño. b) Apreciar que no se puede resolver numéricamente esta proporción si no se conoce el valor de la relación $\dot{x}/\dot{y}$. c) Conocer la propuesta Newtoniana para obtener el valor numérico de la relación $\dot{x}/\dot{y}$. d) Resolver problemas acerca del trazo de la tangente a una curva empleando este método.

3.4 Séptima sesión de la secuencia didáctica

La evaluación sumativa de la secuencia didáctica [Anexo III] se aplicó en la séptima sesión como un cuestionario con preguntas abiertas y algunos problemas matemáticos similares a los que se desarrollaron durante el trabajo en el aula. La evaluación se estructuró de la siguiente manera:

a) El primer reactivo es una pregunta abierta acerca del concepto de infinitamente pequeño, en donde además se pide un ejemplo que sirva como parte de la explicación.

b) El segundo reactivo, también es una pregunta abierta, en dónde se le pide al alumno que explique la forma en la cual Descartes designa los ejes de referencia.

c) En el tercer y cuarto reactivos se verifica el aprendizaje de los conceptos matemáticos que involucra Newton para proponer su método para el trazo de la recta tangente a una curva, en el tercero se pide enlistarlos y en el cuarto completar un párrafo con ellos.

d) En la quinto reactivo se verifica si el alumno identifica la idea de infinitamente pequeño con los símbolos que emplea Newton.

e) Los reactivos sexto y séptimo son problemas matemáticos del tipo trabajado al final de la secuencia, en donde se verifica la aplicación de los conocimientos para la determinación de la recta tangente a una curva por el método Newtoniano. En este caso, se solicitó a los alumnos que resolvieran sólo uno de los dos.

3.5 Descripción de tiempos durante la aplicación la secuencia didáctica

A continuación, en las tablas que se muestran, se indican los tiempos asignados para cada una de las tareas en las sesiones.

Tabla 3.5. Tiempos asignados para las tareas de la Sesión 1

Tarea	**Forma de Trabajo**	**Tiempo asignado**
Presentación del Curso	Grupal	30 min.
Evaluación Diagnóstica	Individual	40 min.
Contextualización Histórica	Grupal	30 min.

Tabla 3.6. Tiempos asignados para las tareas de las Sesiones 2, 3, 4, 5 y 6

Tarea	**Forma de Trabajo**	**Tiempo asignado**
Momento de *apertura*	Grupal	25 min.
Momento de *desarrollo*	Pequeños grupos	50 min.
Momento de *cierre*	Grupal	25 min.

Tabla 3.7. Tiempos asignados para las tareas de la Sesión 7

Tarea	**Forma de Trabajo**	**Tiempo asignado**
Evaluación Sumativa	Individual	100 min

3.6 Balance del capítulo

A lo largo del capítulo se describieron los materiales empleados a lo largo de la secuencia didáctica de la cual se desprende este estudio.

La secuencia inicia con la presentación del curso y una evaluación diagnóstica, dirigida a determinar los conocimientos que tenían los alumnos acerca de los conceptos y procedimientos que fueron considerados como necesarios para poder llevar a cabo el resto de la secuencia. Posterior a esto, se llevó a cabo una contextualización histórica de la situación de la ciencia en el siglo XVII, porque en ese siglo se desarrollaron los dos trabajos, de Descartes y Newton, a partir de los cuales se basó todo el trabajo.

En la siguiente sesión se llevaron a cabo las siguientes tres actividades señaladas como activadores previos:

1. ¿Secante o tangente? En donde se analiza el momento en el cual un segmento de recta que se mueve sobre una circunferencia deja de ser secante para convertirse en tangente.
2. La distancia desconocida. Actividad que busca recuperar los conocimientos relativos al concepto de proporcionalidad y su aplicación al medir distancias inaccesibles.
3. ¿La misma calificación o no? Donde se emplea el concepto de redondeo, con la intención de identificar la idea de que la diferencia de un número con el otro al cual se redondea es muy pequeña, y que esto sirva para introducir posteriormente el concepto de infinitamente pequeño.

Estas actividades tuvieron como objetivo que los alumnos recuperaran los conocimientos y procedimientos determinados como previos, con los cuales se llevaría a cabo la construcción de los conocimientos producto de las siguientes actividades de la secuencia, en este caso. Los conocimientos involucrados en las actividades de esta sesión fueron los mismos involucrados en la evaluación diagnóstica.

En las sesiones tres a la seis, se llevaron a cabo las actividades derivadas directamente de dos trabajos: la recomendación que hace Descartes cuando resuelve geométricamente el problema del trazo de una tangente a una curva, donde introduce dos ejes de referencia para obtener la expresión algebraica que representa la curva en el plano; y, el trabajo de Newton donde resuelve algebraicamente el problema del trazo de la recta tangente a una curva. Es en estas actividades que se pretende llevar cabo el aprendizaje del concepto de infinitamente pequeño, como una consecuencia de hacer que los dos puntos con los que una recta es secante a una curva, se fueran acercando hasta llegar a un momento en el cual estuvieran tan cerca, es decir, la distancia entre ellos fuera infinitamente pequeña, que sin dejar de ser secante, dicha recta también pudiera ser considerada tangente a la curva. Aprovechando esta consideración para poder resolver la proporción que relaciona los triángulos semejantes que fueron trazados como figura auxiliar en el procedimiento, empleando una herramienta matemática desarrollada por Newton para, finalmente, trazar la recta tangente a la curva.

En la última sesión de la secuencia se llevó a cabo la evaluación sumativa, empleando la prueba mostrada en el Anexo 6, cuyo objetivo principal fue el de identificar los aprendizajes logrados por los alumnos como resultado de todas las actividades realizadas.

En general, el ejercicio didáctico que se aplicó posibilitó que los alumnos pudieran iniciar el aprendizaje del concepto de infinitamente pequeño de acuerdo a la propuesta newtoniana. En un principio, llevando a cabo actividades con las que recuperaron sus conocimientos previos para posteriormente realizar actividades dirigidas específicamente al aprendizaje de dicho concepto. La mayor parte de estas actividades se adaptaron directamente del desarrollo con el que se obtiene la recta tangente a una curva descrito por Newton. Cabe señalar que para mejorar la enseñanza y asegurar los aprendizajes habrá que ampliar la información brindada al alumno apoyándose de elementos audiovisuales, como videos y lecciones interactivas multimedia.

Capítulo 4

Análisis de los Resultados

4.1 Escenario de aplicación de la secuencia didáctica

La fase de desarrollo de la secuencia didáctica objeto de este estudio se llevó a cabo al inicio del periodo lectivo 2012-1, en el grupo 502 de quinto semestre de la Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades, Plantel Vallejo. Fueron 7 sesiones en el horario asignado para la asignatura de Calculo Diferencial e Integral I, en este grupo, fue los martes y jueves de 7:00 a 9:00 horas.

El total de alumnos por sesión fue de 48 en promedio, de los cuales, sólo 16 eran regulares y 20 adeudaban entre 1 a 6 materias al inicio del quinto semestre, los doce restantes adeudaban más de 6 materias. Todos los alumnos irregulares tenían al menos una materia de matemáticas reprobada. Desafortunadamente, en la EN-CCH, estas son las características de regularidad *normales* de los alumnos al inicio del quinto semestre del turno matutino, de dónde se puede apreciar que únicamente la tercera parte de ellos no tienen ningún adeudo de materias, un 40% adeuda entre 1 a 6 materias y el resto adeuda más de 6 materias. A este respecto y como ya fue comentado, la Secuencia se diseñó de acuerdo a la recomendación del Programa de Estudios vigente en dónde se indica no hacer mucho énfasis en el aspecto algebraico de estos primeros temas del curso. Debido a esto, fue considerado que independientemente de su condición académica, cualquier alumno del grupo tendría los conocimientos mínimos indispensables para llevar a cabo la Secuencia y lograr los aprendizajes esperados.

4.2 Primera Sesión de la Secuencia Didáctica

4.2.1 Evaluación diagnóstica

La evaluación diagnóstica se aplicó de forma individual, ésta se aplicó al total de 48 alumnos presentes en dicha sesión. Sus resultados se muestran en la Tabla 4.1, mismos que son descritos a continuación.

4.2.1.1 Conceptos de Razón y Proporción

Con la razón matemática se describe la relación que existe entre dos objetos, la cual se puede expresar matemáticamente como una fracción o como *a*:*b*, que se lee *a dado b*. Este concepto se va elaborando por el individuo desde la primaria y su construcción culmina en la secundaria. Una evidencia de su manejo elemental es cuando se tiene una clara idea de los significados al relacionar objetos por su tamaño empleando las frases doble, triple, cuádruplo, mitad, tercera parte, cuarta parte, etc. Conforme el individuo va desarrollando el concepto debiera ser capaz de mencionar estas mismas relaciones primero con frases como “dos a uno”, “tres a uno”, “cuatro a uno”, “uno a dos”, “uno a tres”, y “uno a cuatro”, respectivamente, y posteriormente con símbolos matemáticos, es decir, para indicar una relación de doble emplearía 2:1 ó $\frac{2}{1}$; mientras que para una de mitad emplearía 1:2 ó $\frac{1}{2}$; y así de manera similar con las otras relaciones. La evidencia de una construcción más elaborada del concepto se observa en la secundaria al trabajar escalas complejas como 79:51, $\frac{17}{67}$, ó 0.001:7 entre dos dibujos semejantes.

Tabla 4.1. Resultados de la evaluación diagnóstica.

Número de Reactivo	Conocimiento Explorado	Respuestas Correctas	Respuestas Incorrectas	Sin contestar
1	Concepto de razón	7	18	23
1	Concepto de proporción	1	27	20
2	Regla de tres y ejemplo	47	1	0
3	Aplicación de la proporción. Cálculo de distancias inaccesibles	31	14	3
4	Concepto de infinito	33	9	6
4	Concepto de infinitamente pequeño	12	23	13
5	Circunferencia como un polígono	7	30	11
6	Redondear un número	2	45	1

Por otro lado, el concepto de proporción se define como una igualdad de dos razones. Matemáticamente hablando se indica como $a:b::c:d$ ó una igualdad entre fracciones equivalentes como $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Aunque la definición de proporción parece ser compleja, los alumnos la emplean, al parecer con facilidad, cuando hacen uso de la herramienta matemática denominada como *Regla de Tres Simple*.

Para el caso de la evaluación diagnóstica, se consideró que las dos definiciones sin un contexto pudieran ser difíciles de explicar porque significaría probablemente recitar únicamente la frase de memoria, debido a esto, también se consideraron correctas aquellas respuestas en donde el alumno involucrara alguna situación que le diera contextualización a su respuesta. Las respuestas proporcionadas se clasificaron de la siguiente manera:

a) Concepto de razón. Se consideró correcta una respuesta del tipo: “es un número dado con respecto a otro”; y aquellas que hicieran ver que el alumno relacionaba este concepto con el de fracción o con el de escala.
b) Concepto de proporción. Sólo se consideró correcta la respuesta que mencionaba que “es aumentar o disminuir dos cantidades por igual”.

Como se muestra, el 15% de los evaluados expresó correctamente el concepto de razón y sólo el 1% lo hizo para el concepto de proporción, por lo que se puede indicar que, en general, los alumnos no han logrado construir adecuadamente ambos conceptos para lograr definirlos o que no tienen las habilidades suficientes para expresarlos.

4.2.1.2 Concepto de Regla de tres y la propuesta de un ejemplo

Después de haber concluido la enseñanza básica, los alumnos deben poder hacer uso de las proporciones en situaciones cotidianas como la obtención de porcentajes o la obtención del precio de cierto número de unidades a partir de conocer, como referencia, la relación del precio de una o más unidades. Generalmente identifican el proceso que llevan a cabo como *Regla de Tres*, pero no lo relacionan con el concepto de proporción, a partir del cual éste se deriva. En consecuencia, la inclusión de este reactivo se fundamenta en darle al alumno la posibilidad de demostrar que, aunque no pudiera definir el concepto de proporción, tendría los conocimientos que le permiten hacer uso de una de sus aplicaciones. En este reactivo se tomó la decisión de considerar al concepto y su ejemplo como una sola respuesta, porque a pesar de que las descripciones del concepto de Regla de tres planteadas por los alumnos en ocasiones no eran muy precisas, inmediatamente mostraban un ejemplo con el que lo explicaban correctamente, con lo cual, el reactivo fue considerado como correcto.

Las respuestas identificadas como correctas fueron las del tipo: “es un una forma de determinar el valor de una cantidad a partir de otras tres”; y aquellas que mostraran su relación con la obtención de un porcentaje, una calificación o un precio.

A diferencia de los dos conceptos anteriores, en este caso se puede apreciar que el 98% de los alumnos sí pudieron hacer una descripción correcta del concepto pedido, que, como se acaba de mencionar, es una aplicación de una proporción, esto significa que sí existe evidencia del aprendizaje del concepto mismo.

4.2.1.3 Conocimiento de la aplicación del concepto de proporción

En este reactivo se solicitó al alumno que calculara una distancia inaccesible. En el enunciado se involucran tres datos: la altura de una persona, la longitud de su sombra y la longitud de la sombra de un árbol. Con los cuales, se pretende calcular la altura del árbol llevando a cabo tres pasos generales: a) trazo del diagrama que representa la situación; b) planteamiento de la proporción que relaciona los datos; y c) solución numérica llevando a cabo la *Regla de Tres*.

Casi todos los alumnos dibujaron correctamente el diagrama, y en general, sólo aquellos que plantearon correctamente la proporción resolvieron correctamente el reactivo, obteniendo la altura del árbol. En este caso, dos terceras partes de los evaluados contestaron correctamente el reactivo.

Como se puede apreciar en la tabla, el número de respuestas correctas para este reactivo disminuyó en comparación con el número de respuestas correctas del anterior. A pesar de esto, se cree conveniente afirmar que la mayoría de los alumnos tiene un manejo correcto de esta aplicación del concepto de proporción.

4.2.1.4 Conceptos de infinito e infinitamente pequeño

Las respuestas de éste y los siguientes dos reactivos, fueron consideradas como las más importantes de la evaluación diagnóstica, porque los conceptos que involucran son los que dan lugar a este trabajo.

El infinito no es un número (De Oteyza, 2006, pág 205) sino la representación que cada individuo logra elaborar del número más grande que se pueda imaginar. Para este concepto se esperaban dos tipos de respuestas: una parecida a *el número más grande que existe*; u, otra relacionada con la descripción de la extensión de una función debido a que en el semestre anterior los alumnos estuvieron manejando los conceptos de

Dominio y Rango de una función, en donde, para algunas funciones los valores de sus variables crecen sin cota, es decir, crecen indefinidamente (De Oteyza, 2006, pág 205) lo que significa que la gráfica continúa su trazo hacia la derecha o hacia arriba, sin parar, hasta llegar al infinito.

Para el concepto de infinitamente pequeño, se esperaba que su descripción fuera parecida a la que proporciona Newton (2004, pág 82) como *algo apenas perceptible*.

A continuación, se muestran los criterios que hicieron que las respuestas proporcionadas se clasificaran como correctas.

a) Concepto de Infinito. Las respuestas proporcionadas se clasificaron como correctas de dos maneras distintas:
    i. Correctas de forma general: Cuando se apreció que los alumnos relacionaron este concepto con *algo* [un objeto] ilimitado, como: “algo que no tiene fin”; “sin fin”; o “que no tiene límite”.
    ii. Correctas de forma matemática: Cuando al tratar de describir el concepto hubo un intento de contextualizarlo de manera matemática, como: “cuando con números [...] no se llega a un fin”; “no tiene un número límite, es ilimitado”; “que no se puede medir, [...] porque sigue aumentando o avanzando y no se detiene”; o “es cuando la función sigue sin parar”.

En este caso, el 69% de las respuestas fueron correctas, lo que significa que la mayoría sí tiene una buena idea formada, ya sea de manera general o, mejor aún, contextualizada dentro de las matemáticas, del concepto de infinito.

b) Concepto de infinitamente pequeño. Se consideraron correctas las respuestas del tipo: “lo más pequeño posible”; “es un valor muy pequeño”; “un valor que es demasiado pequeño”; o “algo microscópico”.

Como se aprecia, sólo el 25% de los alumnos aportaron respuestas que pudieron ser consideradas correctas, lo que significa que la mayoría no ha logrado desarrollar una idea adecuada de este concepto.

Es importante mencionar que dentro de las respuestas incorrectas, hubieron algunas que mostraron que los alumnos relacionan algo infinitamente pequeño con aquel número que se podría ubicar en el extremo izquierdo de la recta numérica, que matemáticamente se describe como menos infinito [-∞]. Esto podría deberse a que desde la educación básica se aprende que, en la recta numérica, el número que está a la izquierda de otro es menor, entonces al parecer están relacionando menor con pequeño, por eso refieren que el número que está más a la izquierda es el *más menor* o infinitamente pequeño, lo cual es incorrecto.

.

4.2.1.5 Consideración de la circunferencia como un polígono

Como se comenta en el Capítulo anterior, este reactivo se incluyó para explorar los conocimientos que los alumnos tienen acerca de la aplicación de los dos conceptos anteriores. Aquí se pretendió que los alumnos relacionaran la idea de que al ir aumentando el número de lados de un polígono regular, la longitud de sus lados va disminuyendo, continuando así hasta llegar al momento en el cual dicho polígono se podría considerar una circunferencia porque el número de lados es infinito y sus longitudes son infinitamente pequeñas. De acuerdo a esto, se esperaba alguna respuesta parecida a: *La circunferencia es un polígono con un número infinito de lados.*

Las respuestas consideradas correctas para este reactivo son: “a pesar de que no se ve que no tiene lados, éstos tienen un tamaño tan pequeño que no son vistos a simple vista”; “porque sus lados son infinitos”; “porque los lados del polígono son muchos y parece una circunferencia”; “porque está compuesto de minúsculos fragmentos de líneas”; “porque puede tener 1000 lados pero como no se ven bien [...] toma la forma de una circunferencia”; o “tiene muchos lados, son infinitos”.

En este reactivo, sólo el 15% de los alumnos tuvieron una respuesta correcta. Esta proporción tan baja de respuestas correctas debe estar relacionado con la exploración del concepto de infinitamente pequeño del reactivo anterior, debido a que se esperaba que las explicaciones dadas por los alumnos incluyeran alguna referencia al concepto de infinitamente pequeño como parte de la respuesta. En general, las evaluaciones en las que fue considerada como correcta la respuesta para el concepto de infinitamente pequeño también incluyeron una respuesta correcta para este reactivo, aunque no todos, como puede apreciarse, porque sólo 7 alumnos contestaron correctamente este reactivo de los 12 que contestaron adecuadamente el concepto de infinitamente pequeño.

4.2.1.6 Redondear el número 9.89 explicando la razón de poder hacerlo

Con este reactivo se intentó continuar explorando el conocimiento de la aplicación del concepto de infinitamente pequeño, en él se pidió a los alumnos que redondearan el número 9.89. Aquí se buscaba que los alumnos dieran una respuesta en la cual indicaran que se debía redondear a 9.9 ó 10, porque la diferencia entre el 9.89 y cualquiera de los dos números era muy pequeña [relacionándolo con el concepto de infinitamente pequeño]. En este caso, la segunda parte de la respuesta fue la más importante y de acuerdo a esta se clasificó el reactivo como correcto o no.

Las respuestas consideradas correctas fueron: “Al 9.9 porque [sólo le falta] una centésima de valor”; o “al 10 porque sólo está a una décima”.

Como se ve en la tabla anterior, sólo el 4% de los alumnos expresó una respuesta que pudo considerarse correcta, aunque todos redondearon el número a 9.9 ó 10, la mayoría de las respuestas dieron como razón que cuando la parte decimal de un número es igual o mayor a 5 décimas, se redondea al entero próximo, mientras que si es menor, se redondea escribiendo sólo la parte entera del número inicial. Es decir, la razón dada estuvo contextualizada con la manera de obtener sus promedios de calificación.

Los resultados obtenidos en los tres últimos reactivos son una evidencia de que los alumnos no son poseedores de un conocimiento adecuado del concepto de infinitamente pequeño, necesario para iniciar el aprendizaje del concepto de límite.

4.2.2 Contextualización histórica

Como se plantea en el capítulo anterior, esta parte de la sesión se llevó a cabo de manera grupal con el profesor conduciéndola a través de las preguntas descritas. A grandes rasgos, los resultados no fueron los esperados porque hubo poca participación por parte de los alumnos, entonces en lugar de una serie de preguntas y respuestas que hubieran llevado a una reflexión colectiva, más bien se tornó en un discurso por parte del profesor.

La razón de la escasa participación comentada, probablemente pudo deberse a que los alumnos recién habían terminado la evaluación diagnóstica y probablemente ya estaban fatigados mentalmente porque, como se comentó anteriormente, previo a ésta se les fue presentado el curso. Por esto, es probable que si se les hubiera concedido a los alumnos un breve receso después de la evaluación diagnóstica, se habría favorecido una mejor participación grupal en esta actividad.

Como resultado de esta experiencia se puede recomendar el uso de alguna otra dinámica que sustituya la serie de preguntas y respuestas, pero que mantenga la intención de ayudar a que el alumno logre la contextualización histórica deseada, como la proyección de un fragmento de película o documental de la época.

4.2.3 Trabajo extraclase. ¿Estado de la Ciencia en el siglo XVII?

Por los motivos recién descritos arriba, no se consideró efectiva la contextualización histórica que tuvo lugar en el aula, por lo que como tarea extraclase, se les pidió a los alumnos que elaboraran un informe escrito acerca del estado de la Ciencia en el siglo XVII.

Haciendo una descripción general de los trabajos recibidos, se puede comentar que en casi todos los alumnos comentaron que:

- A este periodo de la historia se le conoció como Renacimiento.
- Fue una *Revolución* que dio nacimiento a la ciencia moderna.
- Inicia con el trabajo de personajes como Galileo Galilei, Nicolás Copérnico y Johannes Kepler, quienes tuvieron grandes aportes en la física, astronomía y matemáticas.
- Culmina con los trabajos de René Descartes e Isaac Newton en estas mismas disciplinas.

Después de estas dos actividades se consideró como adecuadamente iniciada la contextualización histórica y se continuó con las actividades programadas inicialmente.

4.3 Segunda sesión de la secuencia didáctica

Los resultados que se muestran a continuación corresponden al trabajo llevado a cabo de la segunda a la sexta sesiones, para lo cual, al final de la última sesión se recuperó un material impreso contestado por cada pequeño grupo de trabajo, totalizando 12. La razón de esto fue que se consideró que el trabajo al interior de los pequeños grupos se llevó a cabo de forma homogénea por parte de los alumnos, por lo que un sólo impreso reflejaba adecuadamente el trabajo de los cuatro integrantes.

4.3.1 Actividad 1

Como se muestra en el Anexo II [en los materiales impresos sería la actividad 1 de la sesión 1], en esta primera actividad se analizó cómo se da la intersección entre una recta que va moviéndose sobre una curva fija, en cuatro momentos diferentes de ese movimiento. En los tres primeros momentos hay dos intersecciones, puntos *B* y *C*, pero el punto *C* se observa cada vez más cerca de *B*, que está fijo, mientras que en el cuarto momento sólo se observa una sóla intersección en el punto *B*.

Los resultados observados fueron:

a) Sólo un equipo no indicó que el punto *B* estuviera fijo.
b) En los doce equipos afirmaron que había dos intersecciones en los primeros tres casos y sólo una en el cuarto caso.
c) En once equipos las definiciones propuestas para secante y tangente incluyeron el número de puntos de intersección, dos para secante y uno para tangente. Sólo hubo un equipo que propuso las siguientes definiciones: “secante es aquella que divide a la circunferencia” y “tangente pasa por el límite del círculo”, las cuales, como no mencionaron nada acerca de los puntos de intersección, no se consideraron adecuadas.

A partir de estos resultados se puede mencionar que el 92%, es decir casi todos los alumnos, tienen elaboraciones adecuadas de los conceptos de rectas secante y tangente a una curva.

4.3.2 Actividad 2

En este caso se propuso una situación para que los alumnos demostraran nuevamente sus conocimientos y habilidades en el cálculo de distancias inaccesibles. Tenían que calcular la altura de una pirámide empleando tres datos: la sombra de la pirámide y, la altura y sombra de una persona. Se debían trazar primero las figuras auxiliares, triángulos rectángulos; posteriormente plantear la proporción que relacionaba las cantidades; y, finalmente obtener la altura buscada.

Los resultados obtenidos fueron:

a) Cinco equipos no lograron trazar en un principio las figuras auxiliares de forma correcta, fue hasta después de la intervención del profesor que lo hicieron adecuadamente.
b) Una vez trazados dichos triángulos auxiliares, los doce equipos plantearon adecuadamente la proporción y obtuvieron correctamente la altura.

Esto significa que el 42% de los alumnos no lograron llevar a cabo de forma correcta la parte inicial de la Actividad. Después de la intervención del profesor en esta primera parte de la actividad, todos los alumnos lograron completarla correctamente obteniendo la altura de la pirámide.

4.3.3 Actividad 3

En esta Actividad se le mostró al alumno una tabla con calificaciones, todas por encima de 9.5 pero menores de 10, para que, en principio las redondeara a 10. Seguido de esto, se le pidió que hiciera un análisis de la diferencia entre cada calificación y 10 para que identificara que ésta era pequeña. Posteriormente, el alumno debía proponer otras tres calificaciones cada vez más altas a la mayor sin redondear y menores que 10 para continuar con el mismo análisis. Por ejemplo, en el material la calificación más alta correspondía a Alma con 9.999 por lo que una calificación mayor sin llegar a 10 podía ser 9.99999, y la diferencia entre ésta con 10 sería 0.00001. La intención de esto fue preguntarle finalmente ¿cuál sería la calificación más alta que un alumno podría tener sin ser 10? y analizar su diferencia con el 10, la cual debían relacionar con algo *infinitamente pequeño*.

Los resultados de esta Actividad se muestran a continuación:

a) En general, la actividad se consideró contestada correctamente por todos los equipos.
b) Todas las respuestas de la pregunta comentada arriba también fueron consideradas correctas porque hicieron ver que la calificación más alta sin ser 10 es $9.\overline{9}$. Aunque sólo seis equipos escribieron correctamente la cantidad pedida, los demás trataron de describir el valor de las siguientes maneras, que se consideran matemáticamente incorrectas: “$9.999\overline{9}$”, “9.∞”, “9.999...∞”, “9.99999(∞)”, “9.999...”. Analizando lo descrito, se consideró que las respuestas propuestas por los alumnos, aunque incorrectas, fueron descripciones

aceptables mediante las cuales intentaron hacer mención de esa “calificación más alta que existiría sin ser 10”.

c) Cuando trataron de describir la magnitud de la diferencia de esta última cantidad con 10, sólo dos equipos emplearon las palabras “infinitamente pequeña”; otros tres equipos emplearon las palabras “es mínima”, “muy mínima” y “super mínima”; y los demás, a quienes también se les consideró que respuestas fueron correctas, propusieron descripciones matemáticamente incorrectas como: “$0.\overline{0}1$”, “$0.00\overline{00}1$”, “$0.0\infty1$”, y “0.00...1”.

De acuerdo con este último inciso, sólo el 17% de los alumnos emplearon la respuesta “infinitamente pequeño” que se esperaba. Las respuestas de los demás hacen ver que intentaron describir algo similar a lo esperado, pero como no emplean el término podemos afirmar que no manejan dicho concepto adecuadamente como para utilizarlo, lo cual coincide con los resultados de la evaluación diagnóstica.

4.3.4 Trabajo extraclase

Como se comenta en el Capítulo anterior, la tarea extraclase consistió en que los alumnos enlistaran los tres conceptos alrededor de los cuales se trabajó con las tres actividades anteriores. Los resultados se muestran abajo.

a) Once equipos los enlistaron correctamente como:
   1. Rectas secantes y Tangentes.
   2. Proporción.
   3. Infinitamente pequeño.

b) Un equipo sólo nombró correctamente el segundo, en los otros dos no nombró los conceptos, sino los procedimientos llevados a cabo:

   1. Recta sobre curva.
   2. Proporción.
   3. Diferencia.

De estos resultados, se afirma que el 92% de los alumnos identificó adecuadamente los conceptos sobre los que se trabajó en las tres actividades de la segunda sesión de la secuencia didáctica.

4.4 Tercera sesión de la secuencia didáctica

4.4.1 Primera parte

En esta parte de la sesión, se pidió a los alumnos que leyeran el texto correspondiente del material impreso en dónde se comenta que en el siglo XVII el trazo de una recta tangente a una curva era un problema sin resolver, y que en esa época la curva se trazaba sin ninguna referencia aparente. Seguido de esto, se les hizo el siguiente planteamiento: Si se tiene una curva como la del Anexo I del material impreso, ¿cómo trazo su recta tangente en el punto *D*? Posteriormente se les preguntó ¿qué necesitarías para comenzar, una referencia o una ecuación que describa la curva?

A continuación, y como una forma de continuación para la contextualización histórica, se comentó que para resolver éste problema Descartes propuso que el primer paso debía ser el trazo de dos ejes perpendiculares de referencia, pero que al vertical lo llamó "*x*" y al horizontal "*y*". Finalmente, se le preguntó al alumno ¿qué diferencia hay entre los ejes que él propone y los cartesianos actuales?

Los resultados de esta parte se muestran a continuación:

a) En la primera cuestión, a pesar de que en la pregunta sólo se les mostraron dos opciones como respuesta [una referencia o una ecuación], la mitad de los equipos propusieron respuestas como: "Incógnitas"; "La pendiente de la línea tangente"; "definir un plano"; o "variables, valores y símbolos". La otra mitad sí dio como respuesta "una referencia".

A partir de esta situación, se decidió volver a proponer a todo el grupo esta primera parte del material impreso. Después de la intervención, 7 equipos [sólo uno más] dieron como respuesta "una referencia".

b) Para la segunda cuestión, 11 equipos respondieron correctamente que "los ejes están invertidos". El doceavo equipo propuso como respuesta "que no tienen las flechas, números, símbolos no hay escalas", por lo que se consideró su respuesta como incorrecta.

De acuerdo a los resultados, la primera cuestión resultó difícil para los alumnos, porque aún después de que se les volvió a contextualizar y exponer la pregunta de forma grupal, poco menos de la mitad del grupo no contestó de forma correcta. Por otro lado, el 92% de los alumnos contestó correctamente la segunda cuestión.

4.4.2 Trabajo de Newton

En esta sección, se trabajó con la primera curva del Anexo II de los materiales impresos. De acuerdo a las indicaciones de los materiales, inicialmente los alumnos identificaron el punto más alto de la curva y lo nombraron como *C*, posteriormente trazaron un segmento que iniciara en dicho punto *C*, pasara por el punto impreso *D* y se extendiera hasta intersectar el eje horizontal impreso en un punto que nombraron como *F*. A continuación, a partir del punto *C* trazaron un segmento vertical hacia abajo y lo extendieron hasta hacerlo coincidir con otro segmento horizontal proveniente del punto *D*, la intersección de estos dos segmentos se llamó punto *M*. Aquí se les pidió a los alumnos que identificaran la figura que se había formado, un triángulo rectángulo. Posteriormente, trazaron un último segmento vertical del punto *D* hacia abajo hasta que intersectó el segmento horizontal impreso. Aquí se formó un segundo triángulo semejante al anterior. Después se les indicó a los alumnos que remarcaran ambos triángulos para enfocar el trabajo en ellos.

Hasta este momento los alumnos debían llegar a una figura que incluyera la curva y el eje horizontal impresos en el material de trabajo, además de dos triángulos rectángulos semejantes con vértices, uno en los puntos *C* y *D*, y otro en los puntos *D* y *F*, como puede observarse en la Figura A del Anexo 3.

Seguido de esto, se les preguntó por el nombre de éstas dos figuras similares, también se les pidió que escribieran la proporción que las relacionaba y, por último, se les pregunto si la recta *CDF* era tangente a la curva.

Para completar las actividades de esta sección, se les pidió a los alumnos que hicieran todo lo anterior en la segunda curva del Anexo en su material impreso, pero imaginando que el punto *C* se estuviera moviendo hacia la izquierda, sobre la curva dada, hasta ubicarlo a un centímetro aproximadamente del punto *D*, como puede observarse en la Figura B del Anexo 3.

Para esta sección los resultados fueron los que se presentan:

a) Diez equipos lograron trazar los dos triángulos correctamente en la primera curva del material. Los otros dos equipos lo llevaron a cabo hasta después de que el profesor intervino para aclarar el procedimiento.
b) Todos los equipos mencionaron que ambas figuras formadas eran triángulos, pero sólo 2 de ellos, el 17% de los alumnos, los identificaron como rectángulos y semejantes.
c) La mitad de los equipos indicó correctamente la proporción que relacionaba los lados no inclinados de ambos triángulos. Debido a esto, hubo una breve intervención grupal posterior para asegurar que la mayoría identificara correctamente la proporción.
d) El 100% de los equipos contestó correctamente que el segmento *CDF* no era tangente a la curva.

4.4.3 Trabajo extraclase

Para este trabajo, se les pidió a los alumnos que hicieran el mismo procedimiento anteriormente descrito, pero en la tercera curva de su Anexo, y ahora colocando el punto *C* sobre la curva a medio centímetro aproximadamente del punto *D*, como puede verificarse en la Figura C del Anexo 3. Después de esto, los alumnos tenían que contestar si en alguno de los casos el segmento *CDF* ya era tangente a la curva, también ¿qué le ocurría al punto *F* al ir acercando el punto *C* a *D*? y finalmente, ¿dónde tendría que estar el punto *C* para que el segmento *CDF* fuera tangente a la curva?

Los resultados fueron:

a) El 100% de los equipos contestaron correctamente las dos primeras preguntas: que ninguna recta era tangente aún y que el punto *F* iba recorriéndose a la derecha, acercándose a la curva.
b) En lo que respecta a la respuesta de la tercera pregunta, ocho equipos contestaron correctamente que para que el segmento *CDF* fuera tangente a la curva, el punto *C* tendría que ubicarse “sobre” o “en el mismo lugar que” el punto *D*. Los otros cuatro aportaron las respuestas: “no tendría que existir *C* o tendría que estar fuera de la curva”; “no tendría que haber punto *C* o tendría que estar fuera de la curva”; y “sobre *D*, pero no puede estar sobre *D*”. Las dos primeras respuestas se consideraron incorrectas porque la frase final de “tendría que estar fuera de la curva” no indica una ubicación específica, y la tercera porque precisamente sí está sobre *D*.

Con estos resultados se puede afirmar que todos los alumnos tienen claro hasta este momento que el segmento de recta sigue siendo secante a la curva, y no tangente. Pero sólo dos terceras partes de los alumnos planteó que para que el segmento se convierta en tangente el punto *C* debe estar sobre el punto *D*, es decir consideran la existencia de dos puntos, diferentes pero encimados o colocados en el mismo lugar. Esta consideración es muy importante para el trabajo de la siguiente sesión, porque es en base a ésta que se pretende generar la perturbación cognitiva mencionada en el capítulo anterior.

4.5 Cuarta sesión de la secuencia didáctica

4.5.1 Actividades en el aula

Al inicio de la sesión se pidió a los alumnos que repitieran los trazos anteriores nuevamente en la cuarta curva del anexo respectivo de sus materiales impresos, pero ubicando el punto *C* en el lugar indicado previamente para que el segmento fuera tangente a la curva, Figura D del Anexo 3. A continuación, se les hizo la pregunta: ¿Siguen habiendo dos triángulos? Posteriormente se le pidió que, en caso de haber dos triángulos, escribieran la proporción que relacionaba sus lados no inclinados.

Después, los alumnos debieron leer unos párrafos relacionados a la propuesta que hace Newton respecto a esto, donde afirma que: a) sí existen dos triángulos; b) introduce los conceptos de *cantidades fluyentes* y *fluxiones*; y c) confirma que sí existe dicho segundo triángulo y que sus lados son *infinitamente pequeños*.

Luego, los alumnos debieron volver a escribir la proporción que relacionaba los lados de dichos triángulos, pero nombrando los lados respectivos con la notación que introdujo Newton para describir a las fluxiones: $\dot{x}$ y $\dot{y}$.

Finalmente y como un reforzamiento de lo leído, tuvieron que completar unas frases para identificar las ideas principales del trabajo de Newton.

Los resultados son:

a) Después de haber realizado los trazos pedidos, en donde el segmento de recta finalmente era tangente y sólo se aprecia un triángulo, las respuestas de todos los alumnos acerca de que si continuaban siendo dos triángulos fueron negativas y del tipo: “No porque la curva solo tiene un punto”; “No, porque C está sobre D”; “No porque solo hay un punto sobre la curva”; y “No porque solo toca un punto en la curva”. Posteriormente, se formularon al grupo las preguntas que se muestran en el apartado 3.3.3 con la finalidad de que los alumnos visualizaran que el punto *C* no tendría que encontrarse exactamente sobre *D*, sino *casi* sobre él, es decir a una distancia tan pequeña como para que el segmento continuara siendo tangente y, al mismo tiempo, seguir considerando la existencia de los dos triángulos semejantes.
b) A continuación, como consecuencia de considerar que sí había dos triángulos, se les pidió a los alumnos que volvieran a plantear la proporción que relacionaba sus lados no inclinados. En este caso, ocho de los equipos escribieron correctamente dicha proporción, dos lo hicieron de forma incorrecta y otros dos no escribieron nada.
c) Posteriormente, después de leer los textos que hacen mención al trabajo de Newton, nuevamente los ocho equipos mencionados en el inciso anterior volvieron a escribir correctamente la nueva proporción con la notación newtoniana, los demás lo hicieron de forma incorrecta. Por esto, antes de

continuar con la parte final del material para la sesión, hubo una segunda intervención grupal por parte del profesor que buscó que aquellos a quienes no les había quedado claro este paso lograran hacerlo suyo.

d) Finalmente, para la parte en donde había que completar las dos frases los resultados son los siguientes:

   i. La primera debía leerse de esta forma: “Esta novedosa idea involucra la existencia de cantidades *infinitamente pequeñas* que llamó *fluyentes*”. En este caso, los doce equipos completaron correctamente en *infinitamente pequeñas* y once lo hicieron en *fluyentes*. El equipo que completó incorrectamente escribió “apenas perceptibles” en lugar de fluyentes.

   ii. La segunda frase completa debió leerse así: “Con éstas representa el movimiento, que se puede representar con una cantidad llamada *fluxión* y que se simboliza como $\dot{x}$ y $\dot{y}$”. En este caso, diez equipos completaron correctamente ambas frases y los otros dos que contestaron de forma incorrecta escribieron respectivamente “infinitamente pequeña” y “Derivada” en lugar de fluxión.

4.5.2 Trabajo extraclase. Comunica el trabajo realizado

Para este trabajo, los alumnos debieron elaborar un informe que incluyera: 1) La idea principal; 2) Los conocimientos previos necesarios; 3) Los conocimientos nuevos desarrollados; y 4) Una opinión acerca de lo que les hubiera agradado de la sesión.

El objetivo de esta actividad se describe en la parte del componente *Procesamiento en grupo* de los pequeños grupos cooperativos de trabajo, comentado en el apartado 2.3, donde se indica que la ventaja de una tarea de este tipo radica en permitir que los estudiantes pasen al plano de la reflexión metacognoscitiva sobre sus procesos y productos de trabajo.

En síntesis, algunas respuestas mostradas en los informes se muestran a continuación:

1. Para la idea principal del trabajo que fue llevado a cabo, diez equipos indicaron que se trataba del concepto de recta tangente, con respuestas como: “el estudio de una tangente”; “la tangente de una curva”; “cómo llegar a una tangente [...] mediante una secante”; o “el trazado de una tangente en una curva”. Los otros dos equipos mencionaron que la idea principal se basó en el concepto de las cantidades infinitamente pequeñas.
2. En el caso de las respuestas de los conocimientos previos necesarios, los comentarios que hicieron los alumnos se describen a continuación:
    i. Los doce equipos mencionaron a las definiciones de recta tangente y secante a una curva, con enunciados como: “pues sería saber qué es una tangente y lo que es infinitamente pequeño”; “eran saber que era una tangente y una secante”; “identificar entre una tangente y una secante”; y “trabajamos con la secante”.
    ii. Seis equipos se refirieron al empleo de las proporciones, con enunciados del tipo: “saber lo que era una proporción”, “la regla de tres o de proporción”; “semejanza y proporción de 2 figuras”; y “establecer las relaciones de proporción adecuadas”.

iii. Tres equipos también comentaron como conocimientos previos necesarios a los conceptos de infinito e infinitamente pequeño, con respuestas así; “un breve concepto de infinito”; ”una idea no muy específica de lo infinitamente pequeño”; y “una breve introducción al concepto de infinito y a su vez infinitamente pequeño”.

En este caso, en su informe solamente un equipo continuó comentando que la recta era tangente porque “sólo toca un punto” y volvió a plantear la pregunta de que si era posible que hubiera dos puntos, para finalizar con una segunda pregunta de que “¿[...] no debería haber triángulo *CDM*?”.

3. En el tercer punto, de los conocimientos nuevos que desarrollaron, las respuestas se clasificaron de la siguiente forma:
   i. Cinco equipos hicieron referencia al concepto de infinitamente pequeño con frases como: “la posible existencia del triángulo *CDM* con cantidades poco perceptibles”; “lo infinitamente pequeño [para decir que] es una tangente y no secante”; “que hay figuras [...] demasiado pequeñas [que] se aproxima su valor a 0”; “a pesar de que 2 puntos se ubican en el mismo lugar [...] siguen existiendo dos triángulos, [donde] uno no se ve, y sigue existiendo [...] los lados del triángulo son infinitamente pequeños”; y “la definición exacta de infinitamente pequeño”.
   ii. Cuatro equipos también refirieron como conocimientos nuevos a la nomenclatura que propone Newton y sus dos conceptos de fluyente y fluxión, con enunciados del tipo: “Aprendí a diferenciar las fluxiones al

igual que las fluyentes”; “El de las cantidades fluyentes y las fluxiones”; “la nomenclatura de Newton y los conceptos de fluyentes y fluxiones”; y “El término fluyente”.

4. Para el cuarto punto y con el fin de mantener este trabajo lo más objetivo que se pueda, sólo se mencionará que las opiniones de los alumnos acerca de las actividades llevadas a cabo fueron positivas.

4.6 Quinta sesión de la secuencia didáctica

4.6.1 Actividad inicial

Una vez que los alumnos estuvieron en contacto con todas las consideraciones geométricas, en esta sesión se desarrolló el trabajo algebraico propuesto por Newton para encontrar la solución al trazo de la tangente a la curva. En un principio se les pidió a los alumnos que volvieran a escribir la proporción que relacionaba a los dos triángulos para preguntarles si era posible resolverla numéricamente y pedirles que dieran una explicación para su respuesta. Aquí, se les indicó que revisaran nuevamente la última figura trabajada, Figura D del Anexo 3, para observar que el lado *DB* del triángulo visible es el único que puede ser conocido, porque éste es el segmento vertical de referencia, y también que el segmento *FB*, distancia buscada para completar el trazo de la recta tangente, es parte del segmento horizontal de referencia. Además de todo lo anterior, el objetivo principal de esta pregunta era que hicieran alusión a que los lados del triángulo infinitamente pequeño, representados por la razón $\dot{x}$ sobre $\dot{y}$, no tenían un valor numérico por lo que la proporción no podía resolverse.

Posteriormente, se les indicó que leyeran y comentaran en equipo un párrafo en donde Newton explica la manera de determinar dicha razón pero con la ecuación que representa a la curva, para continuar con un procedimiento algebraico de cuatro pasos. Luego de este procedimiento, se hizo una aclaración en la que se agregó un último paso para concluir el método con el que se obtiene una segunda proporción que contiene a la razón de $\dot{x}$ sobre $\dot{y}$. Para finalizar igualando ambas proporciones y sustituir el único valor conocido, segmento *DB*, lo que permite obtener la distancia buscada para trazar la tangente. En el Anexo 4 se muestra un material elaborado por los alumnos en donde puede verse la numeración de los pasos del procedimiento antes descrito y el último paso, que en el ejercicio 1, permite conocer la distancia del segmento *FB*.

Los resultados obtenidos fueron:

a) En los doce equipos escribieron correctamente la proporción solicitada, pero en nueve de ellos la razón descrita fue $\dot{y}$ sobre $\dot{x}$ y sólo en tres fue $\dot{x}$ sobre $\dot{y}$. Matemáticamente hablando, esto no tiene importancia mientras la otra razón esté escrita de una manera correspondiente a la primera, pero para los fines de este trabajo y como Newton indica la razón como $\dot{x}$ sobre $\dot{y}$, fue necesaria la intervención del profesor para generalizar el uso de la proporción en el orden conveniente.

b) Por otro lado, en ocho equipos contestaron que no era posible resolverla numéricamente dando explicaciones como: “no tiene valores”; “porque son infinitamente pequeños, casi imposible de ver”; “porque no tiene valores numéricos”; “nunca van a existir los valores exactos”; y, “se necesitan valores numéricos”. Es decir sólo una respuesta hace referencia a que algunos valores numéricos que son representados por la proporción son infinitamente pequeños. Dos equipos contestaron afirmativamente, y en ambas respuestas se mencionó que "era necesario conocer los valores de $\dot{x}$ y $\dot{y}$". Finalmente, otros dos equipos no contestaron ni dieron explicación alguna.

c) La lectura de la última parte de esta actividad se consideró compleja para su comprensión por el procedimiento descrito y porque incluía nomenclatura matemática novedosa para los alumnos. Considerando esta situación, se permitió su trabajo durante 20 minutos para que los alumnos la completaran y comentaran, sin intervención del profesor. A pesar del tiempo otorgado, que fue considerado como suficiente, los alumnos comentaron que tuvieron dificultades desde el inicio del procedimiento, por lo que hubo una breve intervención del profesor para buscar aumentar la comprensión inicial del material mencionado.

De estos resultados se puede indicar que el 100% de los alumnos escribieron correctamente la proporción, sin importar su orden. También el 66% de ellos respondieron que no era posible resolverla numéricamente porque no se conocían sus valores, y sólo el 8% agregó que no era posible porque las medidas involucradas eran infinitamente pequeñas.

4.6.2 Ejercicio 1

Con este ejercicio, los alumnos practicaron por primera vez el método propuesto por Newton para el trazo de la tangente a una curva. Como en el procedimiento recién leído se mencionaba que la ecuación debía estar igualada a cero, desde un principio se les presentó en el texto la ecuación de una parábola horizontal con vértice en el origen que abre hacia la derecha escrita de esta manera, y se les solicitó trazar la recta tangente que pasara por el punto *D*(1,1). Además, para que la curva se pareciera lo más posible a la que habían estado utilizando a lo largo de la secuencia, se les indicó que sólo trazaran la parte superior de la misma en un plano cartesiano.

Una vez que llevaron a cabo la primera parte del procedimiento, los cuatro pasos numerados y el último paso que se explica después, los alumnos llegaron a una ecuación que contenía $\dot{x}$ y $\dot{y}$. Posteriormente, debían despejar la ecuación obtenida de forma que obtuvieran la razón $\dot{x}$ sobre $\dot{y}$. Después, debían igualar ésta última con la proporción que habían escrito al inicio del apartado anterior, ya que en ambas estaba despejada la razón mencionada. Finalmente, despejaban *FB* que es la incógnita buscada y sustituían el único valor conocido *DB*, que es el lado vertical del triángulo visible y para este problema tenía un valor de uno porque es la ordenada del punto que se da como dato, ver Anexo 4.

Como resultado obtuvieron que *DB*, el lado horizontal del triángulo visible, equivale a 2. Esto significa que dicho triángulo tenía los siguientes vértices: dos conocidos desde un inicio del problema en los puntos *D*(1,1) y *B*(1,0), y el tercero buscado *F*, el cual de acuerdo al resultado obtenido, ubicado a dos unidades hacia la izquierda de *B*, en la posición *F*(-1,0). Para concluir que, una vez dibujado este triángulo en el plano que contiene la curva, su lado inclinado pertenece a la recta tangente buscada.
Para este caso, resultados son los siguientes:

1. En ninguno de los equipos se identificó de inmediato que la curva era una

parábola horizontal con vértice en el origen por lo que no hubo una idea inicial de la forma aproximada de la curva, como consecuencia de ello, en todos los equipos se realizó el trazo de la gráfica a partir de una tabla que construyeron los alumnos para tal fin. Después, todos marcaron el punto $D(1,1)$ indicado para trazar la tangente. Posteriormente debían realizar el procedimiento para la determinación de la razón $\dot{x}$ sobre $\dot{y}$, pero en ninguno de los equipos lograron llevarlo a cabo de forma adecuada sin ayuda. Debido a lo cual, fue necesaria una intervención grupal por parte del profesor, con la que se les fue indicando y explicando en el pizarrón lo que se debía realizar en cada paso. De acuerdo a los resultados obtenidos, sólo ocho equipos anotaron correctamente el procedimiento para la determinación de la razón $\dot{x}$ sobre $\dot{y}$ a partir de la ecuación igualada a cero.

2. Posterior a la intervención del profesor para despejar la razón mencionada, se volvió a permitir que los alumnos prosiguieran con el procedimiento de igualación trabajando en pequeños grupos. A continuación de la igualación debían sustituir los datos conocidos y y DB, que como ya se mencionó, ambas son la ordenada del punto en el cual se desea trazar la tangente, para este ejercicio con un valor de 1. En esta parte, los mismos ocho equipos obtuvieron al final del procedimiento que la distancia horizontal buscada FB valía 2, y finalizaron trazando la tangente solicitada.

De lo anterior se puede comentar que el 100% de los alumnos graficaron la curva completando una tabla para ese fin. Después de la intervención del profesor para llevar a cabo el procedimiento de la determinación de la razón $\dot{x}$ sobre $\dot{y}$, el 66% de los alumnos la anotaron correctamente. Para la igualación, sustitución y obtención de la medida del segmento *FB* buscado, nuevamente el 66% de los alumnos lo obtuvo de forma correcta.

4.6.3 Trabajo extraclase

El trabajo extraclase consistió nuevamente en llevar a cabo el procedimiento para el trazo de la tangente a la misma curva pero en el punto *D*(4,2). Es decir, la intención era resolver un problema similar al resuelto durante la sesión con el fin de ayudar a mejorar la comprensión del procedimiento.

En base al trabajo de la sesión y después de haber hecho un breve análisis *in situ*, se concluyó que el procedimiento propuesto había sido complicado para los alumnos, por lo que previo a esta actividad hubo una segunda intervención del profesor con el objetivo de seguir ayudando en su comprensión y dejar resuelta la primera parte. Por lo tanto, antes de terminar la sesión se completó en el pizarrón el procedimiento para determinar la razón $\dot{x}$ sobre $\dot{y}$, y para el trabajo extraclase los alumnos tenían que continuar con el proceso de igualación y sustitución del dato conocido, para obtener la longitud del segmento *FB* buscado, y finalmente trazar la recta tangente pedida, como puede verse en la Ejercicio 2 del Anexo 4.

Para esta actividad sólo seis equipos obtuvieron correctamente la longitud del segmento *DB*, que en este caso fue de 8 unidades, y trazaron la gráfica de la curva con su recta tangente en el punto indicado, la cual intersectó los puntos *D*(4,2) que se daba como dato y *F*(-4,0) que fue el obtenido con el procedimiento. Los demás equipos no llevaron a cabo la actividad.

Lo anterior significa que sólo el 50% de los alumnos realizó el trabajo extraclase de forma correcta y el otro 50% no lo entregó.

4.7 Sexta sesión de la secuencia didáctica

En los dos ejercicios de esta sesión los alumnos debían volver a llevar a cabo el procedimiento para el trazo de la recta tangente a la curva, que en este caso era una circunferencia con radio de dos unidades y centro en el origen. Otra diferencia más en los ejercicios fue que la ecuación se presentó en su forma ordinaria, con lo cual se agregaba un paso inicial en el cual debían despejarla para que quedara igualada con cero. Por otro lado, para que la curva continuara siendo similar a las trabajadas con anterioridad, también se les pidió que sólo trazaran la mitad superior de la curva. Además se agregó otra instrucción, ya que una vez trazada la recta tangente, los alumnos debían comprobar que su resultado era correcto, para lo cual se les proporcionó una *ayuda* en la que se les indicó que la medida del ángulo más pequeño que formaba el radio, cuyo extremo era el punto dado, y el eje de las abscisas medía 45° en el primer ejercicio y 30° en el segundo, como puede verse en el Anexo 5.

Finalmente, a pesar de que el segundo ejercicio estuvo considerado inicialmente para resolverse como trabajo extraclase, se les indicó a los alumnos que debían trabajar dentro de los pequeños grupos con ambos problemas a lo largo de la sesión.

4.7.1 Ejercicio 1

El resultado final para el procedimiento era que el segmento *FB* también valía $\sqrt{2}$ es decir, los dos puntos por los cuales pasaba la tangente fueron *D*($-\sqrt{2}$,$\sqrt{2}$) y *F*($-2\sqrt{2}$,0). De acuerdo con esto, se obtuvo que nueve equipos completaran correctamente el procedimiento, hasta el trazo de la recta tangente, sin intervención alguna del profesor. Los otros tres equipos, tuvieron dificultades en el procedimiento inicial, obtención de la razón a partir de la ecuación igualada a cero, previo a la igualación. Debido a esto último, hubo una intervención grupal para ayudar a completarla, en la cual el profesor preguntaba en general a todo el grupo acerca de cada uno de los pasos para realizar la primera parte del procedimiento, y después de que algunos alumnos ofrecían una respuesta correcta, o una respuesta que condujera a ella, se pedía la ayuda de un voluntario, diferente en cada ocasión, que fuera escribiendo la parte correspondiente del procedimiento en el pizarrón.

En resumen, para este primer ejercicio de la sesión se puede afirmar que el 75% de los alumnos lograron llevar a cabo todo el procedimiento hasta lograr el trazo de la tangente de forma correcta, únicamente trabajando al interior del equipo, es decir sin necesidad de intervención alguna por parte del profesor. Para todos, y en especial los otros tres equipos que no lo hicieron, se llevó a cabo una resolución grupal para seguir ayudando en su comprensión.

4.7.2 Ejercicio 2

Para este ejercicio el resultado final del procedimiento era que el segmento *FB* valía 0.57 unidades, por lo que los dos puntos por los cuales pasaba la tangente fueron *D*(-1.732,1) y *F*(-2.302,0). En este caso, ocho de los nueve equipos que resolvieron correctamente el ejercicio anterior completaron éste también de manera correcta y sin intervención del profesor. El noveno equipo informó que sí tenían la idea para resolverlo pero que no les había sido suficiente el tiempo asignado.

La intervención grupal que se comentó en el apartado anterior también incluyo la resolución del este segundo ejercicio, por cual ya no se comenta nada más al respecto.

Después de la intervención grupal hubo una última intervención del profesor para mostrar el procedimiento con el cual se comprobaba que la recta trazada sí era tangente a la curva. Esta intervención se manejó de forma expositiva al grupo y en el pizarrón. Posteriormente, y para no seguir aumentando la cantidad de información que debían procesar los alumnos, se les indicó que la comprobación del segundo ejercicio ya no se iba a llevar a cabo.

Para este segundo ejercicio, el 67% de los alumnos logró llevar a cabo todo el procedimiento hasta lograr el trazo de la tangente de forma correcta sin necesidad de intervención del profesor, todos estos alumnos también resolvieron el primer ejercicio correctamente. El 8% restante de alumnos que sí resolvió el primer ejercicio pero éste segundo no, argumentó que no lo realizó por falta de tiempo, aunque sí tenían idea de cómo hacerlo. El otro 25% de los alumnos no lo resolvió y no comentó nada.

4.8 Séptima Sesión de la Secuencia Didáctica

4.8.1 Evaluación Sumativa

Esta fue la última sesión de la secuencia y en ella únicamente se aplicó la evaluación sumativa, la cual se aplicó de forma individual a los 48 alumnos presentes. De la misma manera que se hizo en la evaluación diagnóstica, en la siguiente página se muestra la Tabla 4.2 que concentra los resultados de la evaluación sumativa, los cuales se describen posteriormente con detalle.

4.8.1.1 Significado de una cantidad infinitamente pequeña y un ejemplo para explicarlo

Se obtuvieron un total de 41 respuestas clasificadas como correctas. Algunos de los enunciados mencionados por los alumnos, junto con su ejemplo correspondiente, son: “Una cantidad que es tan pequeña que no puede ser observada, como en el ejemplo de las calificaciones [el] 9.99 el cual nunca llega a ser 10 y su diferencia será infinitamente pequeña”, “una cantidad demasiado pequeña por ejemplo [en] 9.999999999 la cantidad que falta para llegar al 10 es muy pequeña”, “aquella que va disminuyendo y se acerca más al # 0 [como] 0.00008”, “que es una cantidad demasiado pequeña que no es menor a 0, como 9.9999 que aunque se le agreguen números después del punto el número no va a cambiar a 10”, y “Un número con dimensiones pequeñas que aunque no se vea

Tabla 4.2. Resultados de la evaluación sumativa.

Número de Reactivo	Conocimiento Explorado	Respuestas Correctas	Respuestas Incorrectas	Sin contestar
1	Concepto de infinitamente pequeño y un ejemplo	41	7	0
2	Ejes de referencia propuestos por Descartes	48	0	0
3	Los 4 conceptos empleados por Newton en su propuesta	26	16	6
4	Los 4 conceptos empleados para completar un párrafo	26	22	0
5	Significado de la razón $\dot{x}$ sobre $\dot{y}$	30	15	3
6	Trazo de la recta tangente a una curva por el método Newtoniano	29	12	7

está presente como en el triángulo [de las actividades]”.

Por otro lado, se obtuvieron 7 respuestas incorrectas, algunos de cuyos enunciados y ejemplos son: “un número pequeño que nunca llega a ser un número entero”, “es una cantidad que se acerca más al cero sin pasarse [como] 0.9999999”, “que nunca va a llegar a ser un número entero a menos que se redondea. Ejemplo: 0.999”, y “que no importa la cantidad de decimales que tenga nunca será un número entero”.

De acuerdo, con las respuestas obtenidas, se puede indicar que el 85% de los alumnos lograron un buen aprendizaje inicial del concepto de infinitamente pequeño dadas las respuestas y los ejemplos proporcionados. Sólo el 15% de ellos, respondieron de forma incorrecta este reactivo.

4.8.1.2 Diferencia de los ejes de referencia propuestos por Descartes y los usados actualmente.

Para este segundo reactivo todas las respuestas de los alumnos fueron consideradas correctas, algunos de los enunciados escritos fueron: "Que están al revés, pone al eje de *x* en *y* y los ejes de *y* en *x*", "que los ejes estaban intercambiados en relación con los de ahora Descartes decía que el eje horizontal era "*y*" y el eje vertical era x", "Están invertidos, es decir, el eje actual de las *x* para Descartes era el eje *y* y el eje *y* actual para él era el eje *x*", "Que el utilizaba el eje vertical como *x* y el eje horizontal como *y*. Inverso a lo que actualmente utilizamos", y "Que antes estaban invertidos; *y* era el eje horizontal y *x* era el eje vertical, y en la actualidad son inversos".

Lo anterior significa que el 100% de los alumnos respondieron correctamente este reactivo.

4.8.1.3 Los 4 conceptos matemáticos que utiliza Newton en el procedimiento que propone

En este reactivo se esperaba que los alumnos enumeraran los cuatro conceptos siguientes: a) Recta tangente a una curva; b) La proporción en triángulos semejantes; c) Infinitamente pequeño; y d) El movimiento.

A este respecto, cabe mencionar que como se ya mencionó con anterioridad, en la segunda sesión de trabajo, para el trabajo extraclase se les pidió que mencionaran los tres primeros conceptos. Posteriormente, a lo largo del trabajo en las sesiones posteriores, se les comentó en varias ocasiones que uno de los puntos de intersección de la recta secante se iba *moviendo* hasta convertirse en tangente, y finalmente, también leyeron que Newton utiliza la idea de *movimiento* con el nombre de *fluxión* en su propuesta.

Catorce alumnos los mencionaron todos, 6 de los cuales no utilizaron la palabra *movimiento* sino *fluxión* lo cual también se consideró como adecuado, y 12 alumnos sólo enumeraron los tres primeros. Este total de 26 alumnos se consideró que contestaron de forma correcta. Por otro lado, 8 alumnos únicamente hicieron mención de dos de los conceptos, la recta tangente a una curva y el de infinitamente pequeño. De los catorce alumnos restantes, 8 indicaron como los conceptos requeridos a los pasos del método y los demás 6 no contestaron nada. A estos últimos 24 alumnos se les consideró como incorrecta la respuesta requerida.

De acuerdo con lo anterior, el 54% de los alumnos contestó correctamente este reactivo y el resto lo hizo de manera incorrecta.

4.8.1.4 Los 4 conceptos anteriores utilizados para completar un párrafo con la idea general del método

Para este reactivo el párrafo correctamente completado debió leerse de esta manera: “El procedimiento propone el trazo de dos triángulos semejantes, que se relacionan por medio de una <u>proporción</u> para determinar la base del triángulo mayor, y poder trazar la <u>recta tangente</u> buscada. Pero uno de los triángulos no se aprecia porque sus lados son <u>infinitamente pequeños</u>, a este tipo de cantidades Newton las llamó fluxiones, las cuáles se obtienen del <u>movimiento</u> generado en un instante de tiempo.

Como era de suponerse, en este reactivo se obtuvieron los mismos resultados que en el anterior, es decir, los 14 alumnos que mencionaron correctamente los 4 conceptos, también los emplearon correctamente para completar el párrafo anterior; y los otros 12 que sólo mencionaron 3 de ellos, también utilizaron solamente éstos 3 para completar el párrafo. Por lo anterior, se puede concluir, de la misma manera que en el tercer reactivo, que el 54% de los alumnos contestó correctamente este reactivo y el resto lo hizo de manera incorrecta.

4.8.1.5 Significado de la razón $\frac{\dot{x}}{\dot{y}}$

Esta simbología, utilizada por Newton a lo largo de su propuesta, representa los lados del triángulo cuyos lados se reducen a distancias infinitamente pequeñas y así siguen formando parte de la proporción inicial que relaciona los dos triángulos trazados desde el inicio.

En este reactivo 30 alumnos respondieron correctamente con enunciados como: “las medidas del triángulo infinitamente pequeño”; “las cantidades que se obtienen del triángulo con distancias entre sus puntos que son infinitamente pequeñas”; “porque son las medidas de los lados del triángulo infinitamente pequeño”; “las mediadas del triángulo infinitamente pequeño”; “que las cantidades [en] la proporción son infinitamente pequeñas”; “es la proporción [con] el triángulo infinitamente pequeño”; y “representa cantidades infinitamente pequeñas”.

Mientras que las respuestas de 15 alumnos fueron clasificadas como incorrectas porque proporcionaron enunciados como: “son las medidas de los lados del triángulo”; “los lados del triángulo que como resultado nos da la tangente de a curva”; “la proporcionalidad con respecto a la base y altura del otro triángulo”; y “es la proporción entre la base y la altura”. Dentro de las respuestas incorrectas existieron otras en las que los alumnos sólo escribieron la proporción del procedimiento sin agregar ninguna explicación. Finalmente, 3 alumnos no contestaron nada en este reactivo

Los resultados indican que el 63% de los alumnos contestó de manera correcta argumentando, de una u otra forma, que la razón tiene que ver con medidas infinitamente pequeñas de los lados del triángulo, un 31% contestó de forma incorrecta y otro 6% no contestó nada.

4.8.1.6 Determinación de la recta tangente a una curva por el método Newtoniano

La importancia del aprendizaje de este método radica en que:

a) En él se integran todos los conocimientos que fueron denominados como previos y además se lleva a cabo un trabajo algebraico con una nomenclatura nueva para los alumnos, razones por las cuales no se considera que su aprendizaje fuera sencillo para el alumno.
b) Históricamente hablando, es el proceso previo a lo que actualmente se denomina como Regla de los Cuatro Pasos, por lo que podría servir para su aprendizaje posterior.

Como se comentó con anterioridad, había dos ejercicios diferentes para la determinación de la recta tangente en un punto de una curva y se indicó a los alumnos que escogieran sólo uno de ellos para resolverlo. Como ambos ejercicios eran iguales a los trabajados respectivamente durante las sesiones finales de la secuencia se considera innecesario comentar algo más acerca de la posición de las rectas tangentes que se obtuvieron como resultado.

De las respuestas obtenidas, se puede comentar que 24 alumnos resolvieron y contestaron correctamente el primer ejercicio y otros 5 alumnos resolvieron y contestaron correctamente el segundo. De esto se puede indicar que hubo una marcada preferencia hacia la resolución del primer ejercicio, lo que pudo haber radicado en que en éste sólo había un término cuadrático que se debía desarrollar como un binomio al cuadrado a lo largo del procedimiento y el dato del punto *D* tenía coordenadas con números enteros.

Por otro lado, 12 alumnos intentaron llevar a cabo el procedimiento pero su respuesta fue considerada incorrecta porque no lograron finalizarlo para trazar la recta tangente solicitada. Ocho de ellos tuvieron problemas en la primera parte y los 4 restantes completaron ésta correctamente, pero tuvieron dificultades después de la igualación. Además, 7 alumnos no intentaron resolver ninguno de los dos reactivos.

Finalmente, se puede indicar que el 60% de los alumnos desarrollaron correctamente todo el procedimiento necesario para lograr trazar la recta tangente solicitada a la curva respectiva, mientras que el 25% de ellos no lo completaron correctamente y el otro 15% no contestó nada.

4.9 Evaluación formativa de la secuencia

El papel de los alumnos dirigido al logro de los aprendizajes planteados a lo largo de la secuencia fue bueno. Es decir, su trabajo era intenso y constante buscando siempre resolver lo que se planteaba para cada sesión, además de que sus respuestas, tanto escritas como orales, reflejaban cierta reflexión previa, lo cual mantenía un buen ritmo para la secuencia. También, la gran mayoría entregaba en tiempo y forma sus trabajos extraclase, los cuales cumplían con los requisitos indicados. Lo anterior se ve reflejado en los porcentajes presentados en los análisis de resultados de cada sesión, dónde pueden apreciarse porcentajes de respuestas correctas elevados, generalmente mayores al 60%.

Esto se traduce, hablando con cifras, en que la mayoría de los alumnos obtuvieron más del 80% del total de la evaluación formativa. Lo que significa que los resultados obtenidos en esta evaluación no representan el punto de decisión para llegar a una conclusión acerca del uso de la secuencia comentada a lo largo de este trabajo.

4.10 Análisis global de los resultados de la secuencia didáctica

Como se muestra en la Tabla 4.1, para los últimos tres reactivos que se enfocan a evaluar en los alumnos los conocimientos acerca del concepto de infinitamente pequeño, previos al empleo de la secuencia, se puede mencionar que en promedio se obtuvo un 15% de respuestas correctas. Razón por lo cual, en el análisis respectivo se indicó que los alumnos no poseen un buen conocimiento de este concepto.

Posteriormente, a partir de los resultados mostrados en la Tabla 4.2 para los reactivos 1 y 5, que se enfocan a evaluar los conocimientos del mismo concepto posteriores al empleo de la secuencia, se puede mencionar que en promedio se obtuvo un 75% de respuestas correctas. Comparando estos dos datos, se puede afirmar que hubo una mejora considerable en el conocimiento del concepto referido, gracias a los aprendizajes logrados con la implementación de la secuencia.

En general, haciendo un análisis similar al anterior, a partir de los resultados mostrados en la Tabla 4.2 se puede comentar que para toda la evaluación sumativa se obtuvo un 70% de respuestas correctas, lo que permite afirmar que se lograron en buena medida los aprendizajes planteados, incluyendo al del concepto de infinitamente pequeño.

Conclusiones

A lo largo del texto se muestran los resultados obtenidos del trabajo, llevado a cabo en su mayoría, en pequeños grupos empleando una secuencia didáctica que representa una alternativa para iniciar el curso de Cálculo Diferencial e Integral. Trabajo implementado en un grupo de quinto semestre de la EN-CCH y cuyo tema central es el aprendizaje del concepto de infinitamente pequeño de acuerdo a la propuesta que desarrolla Newton y que posteriormente fue considerada como el punto de partida para lo que actualmente se conoce como Cálculo Infinitesimal.

De acuerdo a los resultados previamente mostrados, las conclusiones a las que se puede llegar como producto de este trabajo son:

a) Conocimientos previos.

- La mayor parte de los alumnos no logró definir correctamente los conceptos de razón y proporción, pero la gran mayoría de ellos resolvió correctamente las actividades en dónde se debía hacer uso de los mismos en situaciones de aplicación. Desgraciadamente, esta es una situación generalizada para la mayoría de los conceptos empleados en matemáticas, esto podría ser debido a que, en la enseñanza tradicional o conductista, los profesores no le damos tanta importancia al aprendizaje de los conceptos como al aprendizaje de los procedimientos o algoritmos, porque existe una idea generalizada que en matemáticas sólo hay que aprender a resolver operaciones y problemas, aunque esto se realice a través de aprendizajes memorísticos.
- Para el concepto de infinito, más de la mitad de los alumnos lo definió

adecuadamente, aunque algunos lo hicieron fuera de un contexto matemático. Respecto al concepto de infinitamente pequeño, aproximadamente sólo la cuarta parte de los alumnos lo definieron correctamente, y en este caso, también fue una minoría la que lo empleó correctamente en actividades de aplicación. Este resultado es de suma importancia, no solo dentro de este trabajo, sino para iniciar cualquier curso de Cálculo Diferencial e Integral que inicia, porque el aprendizaje del concepto matemático de Límite requiere nociones de este concepto que permitan comenzar su elaboración por pare del alumno.

- Los demás conocimientos clasificados como previos, la mayoría de los alumnos pudo definirlos o utilizarlos de forma correcta.

b) Trabajo con los materiales impresos.

- Una de las actividades que resultaron más complicadas para los alumnos fue la parte final del procedimiento geométrico para el trazo de la recta tangente a la curva, en el momento en cual está a punto de dejar de ser secante para convertirse en tangente, por lo que todavía continúan habiendo dos triángulos semejantes uno de los cuales tiene lados infinitamente pequeños. Como fue comentado, la dificultad podría originarse porque los alumnos seguían clasificando de manera excluyente la recta, es decir, únicamente respondían que era secante o tangente, más no ambas al mismo tiempo. El currículo de la enseñanza media básica incluye actividades con las cuales los alumnos comienzan a identificar objetos como parte de dos conjuntos al mismo tiempo como: triángulos equiláteros e isósceles a la vez; cuadrados rectángulos a la vez, entre otros, las cuales no deben ser evitados por los profesores porque éstos aprendizajes son empleados a lo largo de los siguientes ciclos educativos como pudo observarse en este trabajo.

- La otra actividad en la cual los alumnos tuvieron dificultades fue el procedimiento planteado por Newton para determinar la longitud del lado horizontal del triángulo que permitía, posteriormente, trazar la recta tangente a la curva. En éste se integran todos los conocimientos que fueron denominados como previos y además se lleva a cabo un trabajo algebraico con una nomenclatura novedosa para los alumnos. La mayor dificultad de esta actividad debería haber sido el trabajo con la nueva nomenclatura newtoniana, pero no fue así, además de éste se detectaron otros dos problemas mayores: al obtener los resultados de elevar al cuadrado un binomio; y, al resolver por igualación el sistema de ecuaciones que se obtenía.

c) Evaluación sumativa.

- De manera específica, se obtuvo un 75% de respuestas correctas en los reactivos que se referían al concepto de infinitamente pequeño y su notación dentro del procedimiento antes mencionado.
- De manera general, se obtuvo un aproximado de 70% de respuestas correctas como promedio grupal. Esto permite afirmar que, después del trabajo con la Secuencia Didáctica, los alumnos iniciaron y desarrollaron en buena medida el aprendizaje del concepto de infinitamente pequeño y

los demás involucrados.

d) Trabajo en pequeños grupos cooperativos.

A pesar de que un gran número de profesores no considera adecuado el trabajo en pequeños grupos, y menos aún para una asignatura como matemáticas, se concluye que el trabajo desarrollado por los alumnos en los pequeños grupos cooperativos a lo largo de las sesiones fue bueno por las dos siguientes razones:

- Se logró la reducción de la aparición de roles al interior de los equipos, esto debido probablemente a la manera de evaluar, porque el profesor hacía preguntas específicas a cada uno de los integrantes del equipo sin permitir la ayuda de los otros lo que obligaba a cada individuo a involucrarse y comprometerse con su equipo.
- Se creó y mantuvo un buen ambiente de trabajo al interior de los pequeños grupos, buscando de esta manera una socialización efectiva del conocimiento, esto se concluye porque generalmente los alumnos hacían comentarios o respondían a las cuestiones planteadas después de llevar a cabo una reflexión al interior de los pequeños grupos.

Recomendaciones

1. Es importante que en matemáticas se deje de considerar los aprendizajes conceptuales menos importantes que los procedimentales. Además, como ya es ampliamente recomendado, también se debe evitar proporcionarles a los alumnos definiciones elaboradas para permitir que sean ellos mismos los que vayan construyendo sus propios enunciados y definiciones como uno de los resultados esperados de las actividades que llevan a cabo a lo largo de sus procesos de enseñanza-aprendizaje.
2. También es importante tratar de llevar a cabo, en la medida de lo posible, la mayor cantidad de las actividades propuestas en los Planes de Estudio, como es el caso de identificar un mismo objeto como parte de dos conjuntos inicialmente excluyentes. Específicamente hablando del CCH, se debe poner un poco más de énfasis en los aprendizajes esperados en el Tema de Aplicaciones de la Función Cuadrática, del curso de Matemáticas II, ya que como parte de éstos se debe fomentar el análisis dirigido hacia la consideración de los cuadrados como rectángulos.
3. Además, se plantea necesaria la inclusión de algunas actividades que sirvan como activadores previos para los dos temas de álgebra del procedimiento final: Solución de un Binomio al Cuadrado y Solución de un Sistema de Ecuaciones Lineales con dos Incógnitas por el método de Igualación.
4. De acuerdo al Plan de Estudios, después del trabajo con la secuencia se debe continuar con el tema de Noción de Límite, el cual tendría que ser abordado de forma tal que se evitaran los desarrollos algebraicos arduos para

buscar que los alumnos inicien el aprendizaje de la idea básica del concepto. Probablemente, aprovechando los aprendizajes obtenidos con la secuencia y continuando con una contextualización del desarrollo histórico de las matemáticas, se podría buscar un aprendizaje dirigido a identificar al límite como el paso previo necesario que se desarrolló muchos años después para formalizar matemáticamente la propuesta de Newton y que actualmente se conoce como derivada.

5. Siguiendo las recomendaciones de Azcárate y otros (1996), una segunda opción a la recomendación anterior sería que se podría continuar inmediatamente con el aprendizaje de las derivadas, aprovechando que el procedimiento de Newton para el desarrollo algebraico de su propuesta es similar al que actualmente es empleado para iniciar la derivación de funciones conocido como Regla de los Cuatro Pasos. Como en esta regla está involucrado el concepto de límite de una función, también aquí sólo se buscaría el aprendizaje de su idea básica. Posteriormente al aprendizaje de las derivadas se ahondaría un poco en el aprendizaje formal del concepto de límite, si el profesor lo considera conveniente.

La dimensión didáctica en la enseñanza de las matemáticas ayuda a situar las posiblidades de aprendizaje de los alumnos, así como permite establecer las fases y secuencias para una buena enseñanza. Si pensamos, representamos y organizamos los contenidos matemáticos, no sólo desde el contenido sino tomando en cuenta las posibilidades y condiciones de aprendizaje de los alumnos obtenemos mejores logros en el área y la materia.

Referencias

1. Adorno, T. (1998). Educación para la emancipación. Madrid. Ediciones Morata.
2. Ausubel, D. (2002). *Adquisición y Retención del Conocimiento. Una Perspectiva Cognitiva*. España. Paidós.
3. Ávila Ramos J. [Coordinador]. (2011). *Prontuario de Acreditación, Deserción y Reprobación.* México. Dirección General de la EN-CCH. UNAM.
4. Azcárate, C. Bosch, D. Casadevall, M. & Casellas, E. (1996). *Cálculo Diferencial e Integral*. España. Síntesis.
5. Brusseau, G. (2000). Educación y Didáctica de las Matemáticas. *Educación Matemática*. 12(1), 5-38.
6. Camacho-Ríos A. (2011), Socioepistemología y prácticas sociales. Hacia una enseñanza dinámica del cálculo diferencial. *Revista Iberoamericana de Educación Superior* (*RIES*). 2(3), 152-171.
7. Carretero, M. (1997). *Constructivismo y educación*. México. Progreso.
8. Centro Nacional de Evaluación para la Educación Superior. (2012). *Manual para Docentes y Directivos*. *ENLACE MS*. México. CENEVAL.
9. Cirillo M., (2007). Humanizing Calculus. *Mathematics Teacher*. 101(1), 23-27.
10. De Oteyza E. (Coordinadora) (2006). *Conocimientos Fundamentales de Matemáticas. Cálculo Diferencial e Integral*. México. Pearson Educación.
11. Del Río Sánchez J. (1997). Historia de la Matemática: Implicaciones Didácticas. *Suma*, 26, 33-38.
12. Descartes, R. (1981). *Discurso del Método: Dióptrica; Meteoros y La Geometría*. Madrid. Alfaguara.
13. Díaz, G. M. & Flores, V. G. (2010). *México en Pisa 2009*. México. INEE.

14. Díaz Barriga, A.F. & Hernández, R.G. (2010). *Estrategias Docentes para un Aprendizaje Significativo. Una Interpretación Constructivista.* México. McGraw Hill.
15. Durkheim, E. (1984). *Educación y Sociología*. México. Colofón.
16. Freire, P. (2009). La educación como práctica de la libertad. España. Siglo XXI.
17. Flores, O.R. (1994). *Hacia una pedagogía del conocimiento*. Colombia. McGraw Hill.
18. Fried, M.N. (2001). Can Mathematics Education and History of Mathematics Coexist?. *Science & Education*. 10, 391-408.
19. Kantz, V.J. (1993) Using the History of Calculus to Teach Calculus. *Science & Education*. 2, 243-249.
20. Kleiner, I. (2001) History of the Infinitely Small and the Infinitely Large in Calculus. *Educational Studies in Mathematics*. 48(2-3), 137-174. DOI: 10.1023/A:1016090528065
21. Lafourcade, P. D. (1972). *Evaluación de los aprendizajes*. Madrid. Cincel.
22. Muñoz, C.L. & Avila R.J. (Coordinadores). *Población estudiantil del CCH ingreso, tránsito y egreso. Trayectoria escolar: siete generaciones 2006-2012*. Dirección General de la EN-CCH. UNAM.
23. Muñoz, C.L. *Informe sobre la gestión directiva 2011-2012*. Dirección General de la EN-CCH. UNAM.
24. Newton, I. (2004), *El Método de las Fluxiones y las Series Infinitas. Colección Mathema.* México. Facultad de Ciencias, UNAM,
25. Porlán, R. (1995). Constructivismo y escuela. Sevilla. Díada Editora.
26. Pozo, J.I. (1989). Teorías cognitivas del aprendizaje. Madrid. Morata.
27. Ruiz Zuñiga, A. & Barrantes H. (1997). *La Historia del Comité Interamericano de*

Educación Matemática. Colombia. Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.

28. Rugarcía, A. (1989). El eslabón perdido en la educación universitaria. *Didac*. 15, 3-8.
29. Secretaría de Educación Pública. (2012). México. Recuperado de: http://www.pisa.sep.gob.mx/
30. Secretaría de Educación Pública. (2012). México. Recuperado de: http://www.enlace.sep.gob.mx/ms/estadisticas_de_resultados/
31. Sosa, P.E. y Toledano, H.E. (2010). *Formación Docente. Secuencias Didácticas*. México. SEP.
32. Trilla, J. (Cordinador) (2001). *El legado pedagógico del siglo xx para la escuela del siglo xxi*. México. Grao.
33. Universidad Nacional Autónoma de México. Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades. (2011). *Diagnóstico Institucional para la Revisión Curricular*. México. Dirección General de la EN-CCH.
34. Universidad Nacional Autónoma de México. Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades. (2012). *Modelo Educativo del Colegio de Ciencias y Humanidades UNAM. Material de Lectura para Comisiones Especiales para la Actualización de los Programas de Estudio de las Materias*. México. Dirección General de la EN-CCH.
35. Universidad Nacional Autónoma de México. Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades. (2002). *Programas de Estudio de Cálculo Diferencial e Integral I y II*. México. Dirección General de la EN-CCH.
36. Universidad Nacional Autónoma de México. Escuela Nacional Colegio de

Ciencias y Humanidades. (2002). *Programas de Estudio de Matemáticas, Semestres I al IV*. México. Dirección General de la EN-CCH.

37. Woolfolk, A. (2006). *Psicología Educativa*. México. Pearson.

Anexo 1

Evaluación Diagnóstica

Alumno: ____
Grupo: _______________ **Semestre** _______________ **Materia:** ___________
Profesor: ____

1. Explica los términos razón y proporción.

2. ¿Qué es una regla de tres? Propón un ejemplo de su uso.

3. Una persona de 1.67 m de altura proyecta una sombra de 2.09 m. A la misma hora, un árbol proyecta una sombra de 6.72 m ¿cuál es su altura? Traza el diagrama, la relación de los datos y resuélvelo.

4. Explica los términos infinito e infinitamente pequeño.

5. ¿Por qué se puede considerar a la circunferencia como un polígono?

6. ¿A qué número podemos redondear el 9.89? explica la razón.

Anexo 2

¿Cómo inició el cálculo?

Introducción

La herramienta matemática que actualmente conocemos como **Cálculo** fue el resultado del trabajo de varios hombres de ciencia del siglo XVII, en un intento por resolver algunos problemas matemáticos sin solución hasta ese momento.

En estas actividades de trabajo vamos a formarnos una idea del estado del campo de las matemáticas alrededor del año 1650, donde además se comentará un poco acerca de la propuesta de:

- **René Descartes** para representar algebraicamente una curva.

Para posteriormente enfocarnos en las propuestas de:

- **Isaac Newton** para "Trazar las tangentes de las curvas" y "Determinar máximos y mínimos".

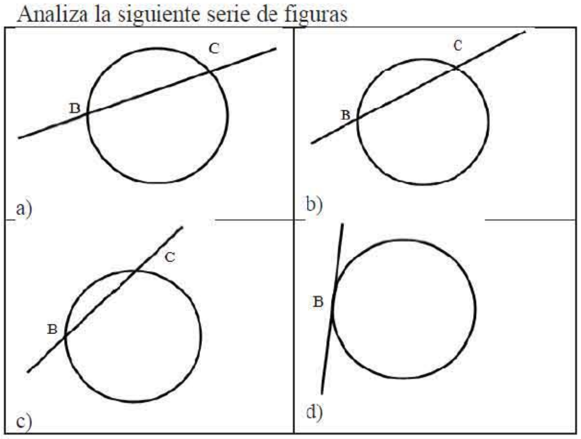
Con el fin de contextualizar históricamente el momento del nacimiento del **Cálculo** ideado por Isaac Newton.

Nota: Gottfried Wilhelm Leibniz comparte con Newton el título de inventor del **Cálculo**, pero de él comentaremos posteriormente.

Sesión 1

Actividad 1. ¿Secante o tangente?

Analiza la siguiente serie de figuras



Imagina que la curva está fija y que la recta tiene movimiento. Contesta:

1. ¿Hay algún punto fijo para la recta? ______________________________
2. En los cuatro incisos, ¿la recta intersecta a la curva en la misma cantidad de puntos? ______________________________
3. ¿En cuántos puntos se intersectan ambas en los incisos a, b y c? ____________________
4. ¿En cuántos puntos se intersectan ambas en el inciso d? ________________________
5. Debido al número de intersecciones, ¿la recta se llama igual en los 4 incisos? Explica ________ ______________________________ ______________________________
6. Completa: Una recta secante es aquella que _____ ______________________________ ______________________________ mientras que una tangente ________________ ______________________________ ______________________________

Actividad 2. La distancia desconocida

Se dice que Tales de Mileto midió la altura de una de las pirámides de Egipto, tomando como referencia su propia altura, y empleando su sombra y la de la pirámide.

Calcula, la altura de la pirámide que se muestra a continuación, considerando los datos presentados.

Contesta:

1. ¿Qué figuras geométricas nos ayudan en el cálculo? ______________________________
2. Trázalas arriba con color rojo sobre los dibujos.
3. De estas figuras geométricas se obtiene una relación que me auxilia en el cálculo, complétala:

   ________ = ________

4. Calcula la altura de la pirámide = ____________

Actividad 3. ¿La misma calificación o no?

A continuación, se muestran las calificaciones finales que tuvieron ocho alumnos en cierta materia. Anota su calificación final, redondeándola sin decimales, en la columna de la derecha y contesta:

Alumno	Promedio	Calif
Raul	9.73	
Rosa	9.99	
Mari	9.91	
Adán	9.68	
Tere	9.98	
Gina	9.85	
Alma	9.999	
Male	9.88	

1. Sin redondear, ¿quién tiene la calificación más baja? ______________________________
2. ¿Quién la más alta? ____________________
3. Anota a la derecha de la tabla la diferencia de cada promedio y la calificación final.
4. ¿Quiénes tres tienen la diferencia más pequeña? ____________, ____________ y ____________
5. Inventa el promedio de tres alumnos más que tienen una calificación mayor que Alma sin ser 10.
6. Escribe su calificación final y su diferencia.
7. Para estos tres alumnos, ¿cómo es la diferencia respecto a la de Alma? ________________
8. Sin considerar un límite de decimales, ¿cuál sería el promedio más alto que pudiera tener un alumno sin ser 10? ________________________
9. Para esta última, ¿cuál es su diferencia con la calificación final? ____________________

10. ¿Podrías decir que esta última calificación final ya es diez, o no? Explica ______________________
____
____

Trabajo extraclase

Resumiendo las ideas principales

Hasta este momento hemos recordado tres conceptos matemáticos, uno por cada actividad anterior, que formaban parte de las herramientas matemáticas más empleadas hasta mediados del siglo XVII.

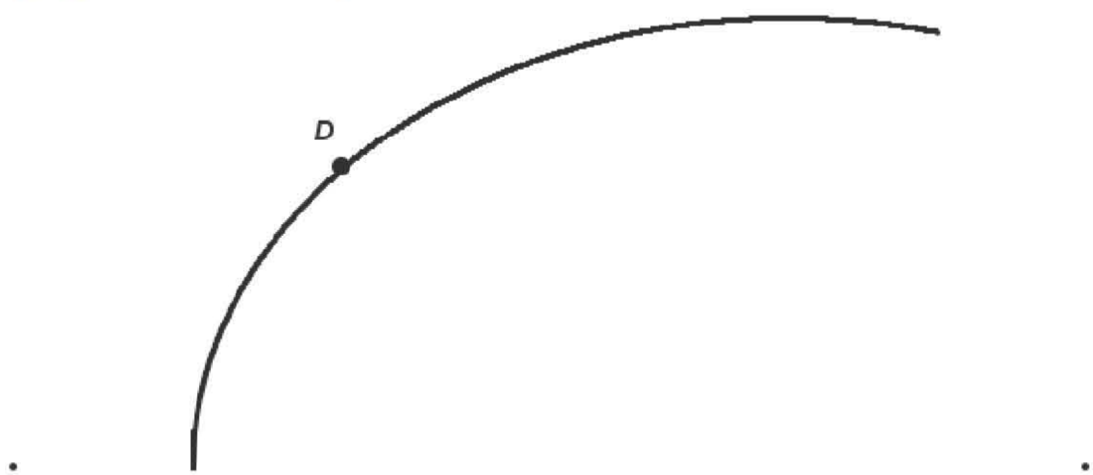
Incluye un título y escríbelas a continuación:

Título: ____

1. ____
2. ____
3. ____

Anexo I

Curva similar a la que usaron los matemáticas del siglo XVII para plantear las soluciones a sus problemas.



Sesión 2

Actividad 4. Trazo de la recta tangente a una curva

Completa
Una recta tangente a una curva es aquella que ___________
____

El concepto de recta tangente a una curva existe desde las primeras civilizaciones del hombre, llegando a formalizarse en el libro llamado *Elementos*, escrito por Euclides en la Grecia Antigua (aprox. 300 AC). Pero el problema de su trazo se resolvió hasta casi 2000 años después en Europa, después del Renacimiento.

En el siglo XVII, el trazo de una recta tangente a una curva era uno de los problemas que no podía resolverse. El enunciado era simplemente como:

Si se tiene una curva como la del Anexo I, ¿cómo trazo su recta tangente en el punto marcado D?

Analiza la figura y contesta:
¿Qué necesitarías para comenzar, una referencia o una ecuación que describa la curva? ____________________
____

En 1637, un matemático y filósofo llamado René Descartes publicó un ensayo titulado ***La Geometría***, donde plantea un procedimiento geométrico que sirve para trazar la tangente pedida.
Pero, para este caso, solo mencionaremos que en dicho ensayo él plantea que si se tiene una curva, primero se trazan dos segmentos perpendiculares de referencia y posteriormente, a partir de éstos, se obtiene la ecuación de la curva.

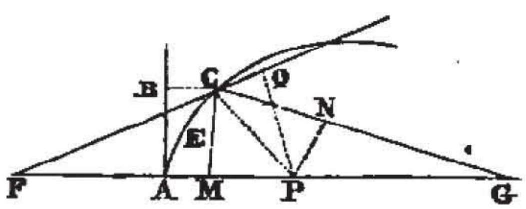


Figura 1. Figura que acompaña el texto de René Descartes donde propone el trazo de dos segmentos de referencia.

En su texto, Descartes comenta:

"Sea CE la línea curva, […] de modo que siendo $CB = y$ [un segmento horizontal], $BA = x$ [un segmento vertical], puedo establecer una ecuación que indica la relación entre x e y."[1]

Analiza el texto de Descartes y la Figura 1.
Responde, ¿qué diferencia hay entre los ejes que él propone y los cartesianos actuales? __________________
____
____

En la curva del Anexo I, traza unos ejes como los propone Descartes y nómbralos. Además coloca un título a la figura.

Trabajo de Newton

En la primer curva del anexo II traza una recta que pase por *D*, que intersecte la curva en su punto más alto *C* y extiéndela hasta que intersecte el eje horizontal (punto *F*). A partir de *C*, traza un segmento vertical hacia abajo y extiéndelo hasta coincidir con otro segmento horizontal que proceda desde *D*, la intersección nómbrala *M*.
¿Qué figura se forma? ___________________________

Forma una figura similar ahora con los puntos *D* y *F*, la intersección con el eje horizontal nómbrala *B*.
Marca con un color las dos figuras formadas para hacer que resalten y distinguirlas.

¿Cómo se llaman estas dos figuras similares? __________
____
Escribe la proporción que relaciona los lados no inclinados

________ = ________

¿La recta *CDF* es tangente a la curva? ________________

En la segunda curva del Anexo II, haz lo mismo, pero imagina que el punto *C* se está moviendo hacia la izquierda sobre la curva dada, ubícalo aproximadamente a un centímetro a la derecha de *D* y haz los trazos.

[1] Descartes R., La geometría, pp 40.

Trabajo extraclase

En la tercera curva, realiza lo mismo pero imagina que el punto *C* se sigue moviendo sobre la curva, ubícalo aproximadamente a medio centímetro a la derecha de *D* y haz los trazos.

Contesta

1. ¿Alguna de las dos rectas *CDF* trazadas es tangente a su curva? ________________________
2. ¿Qué le ocurre al punto *F* al acercarse el punto *C* a *D*? ________________________________
3. ¿Dónde tendría que estar el punto *C* para que la recta *CDF* sea tangente a la curva? ____________ ____

Sesión 3

4. En la cuarta curva, ubica el punto *C* donde comentaste arriba de forma que la recta sea tangente.
5. ¿Siguen habiendo dos triángulos? Explica ______ ____ ____

Si es así, escribe la proporción que relaciona los lados no inclinados

________ = ________

Newton comenta que sí existe el triángulo *CDM* en el siguiente párrafo:

"las cantidades que son apenas perceptibles […] en lo sucesivo se les llamará *fluyentes* y se les designará con las letras finales x, y y z. Y que son incrementadas por su movimiento generado (*fluxiones*), se les designará por las letras $\dot{x}$, $\dot{y}$ y $\dot{z}$."[2]

Posteriormente emplea la frase "infinitamente pequeño", al hablar de los lados del triángulo referido.[3]

[2] Newton I, El Método de las Fluxiones y las Series Infinitas, pp 82.

[3] Newton I, El Método de las Fluxiones y las Series Infinitas, pp 120.

Entonces, vuelve a escribir la proporción que relaciona los lados no inclinados del triángulo en la cuarta curva, pero nombra los lados respectivos como $\dot{x}$ y $\dot{y}$ (apenas perceptibles o infinitamente pequeños).

________ = ________

Es decir, para llegar a la solución, Newton ocupa las cuatro ideas antes mencionadas, y propone una nueva, que acaba de inventar. Esta novedosa idea involucra la existencia de cantidades ______________________________ ____________________que llamó __________________. Con éstas representa el movimiento, que se puede representar con una cantidad llamada __________________ y que simboliza como ______________.

Este ejercicio, que nosotros nombramos como actividad 4, Newton lo muestra en su libro, pero solo es la parte introductoria de su método. Posteriormente en el libro, menciona algo parecido a lo que en la actualidad conocemos como ***Derivada***, y finaliza el trazado de la tangente.

Comunica el trabajo realizado

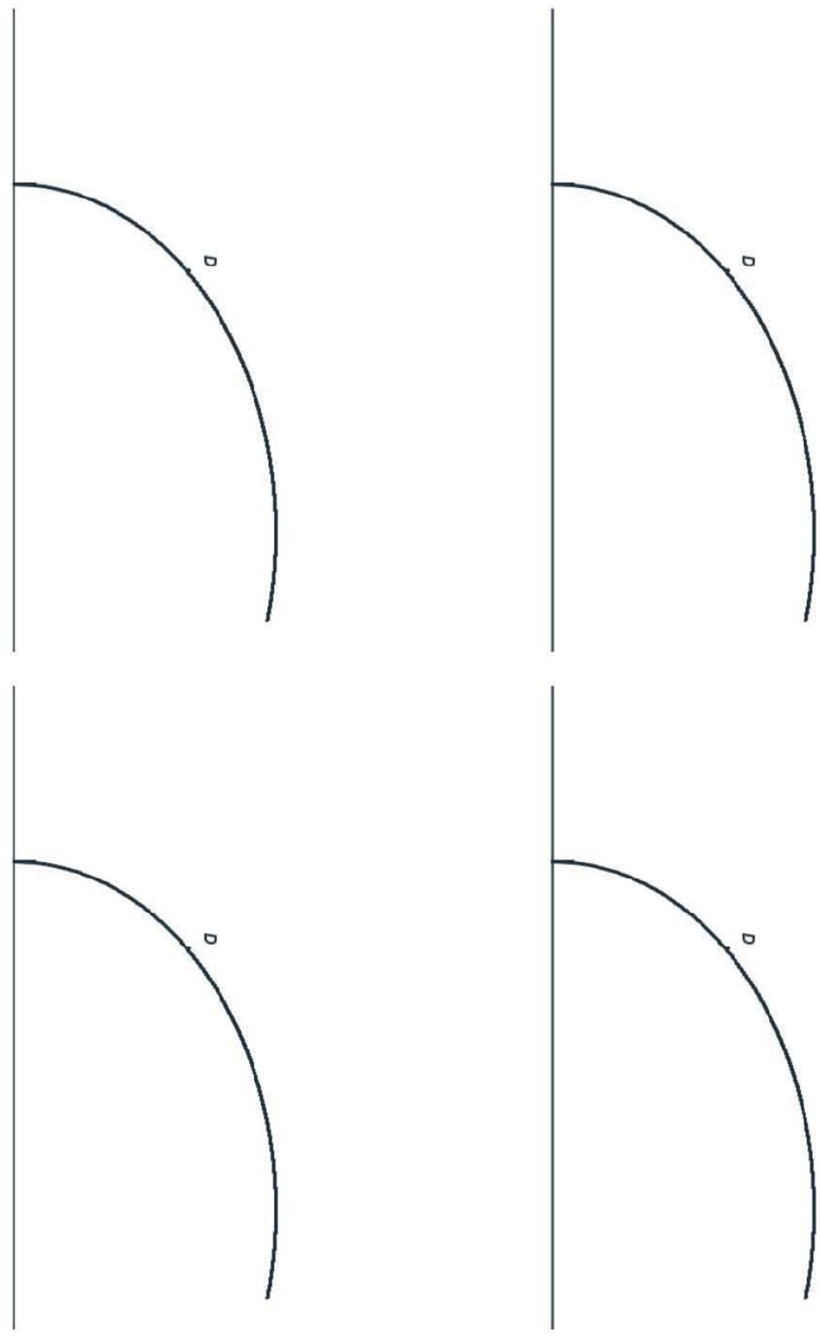
Comenta en tu equipo lo realizado a lo largo de la sesión y elabora un informe que incluya:

1. La idea principal.
2. Los conocimientos previos necesarios.
3. El (los) conocimiento(s) nuevos que desarrollaste.
4. Una opinión de la sesión, enfocándote en todo lo que no te gustó y lo que te resultó difícil.

Notas Bibliográficas

1. Newton Isaac, *El Método de las Fluxiones y las Series Infinitas*, Colección Mathema, Facultad de Ciencias, UNAM, México 2004.
2. Descartes René, *Discurso del Método: Dióptrica; Meteoros y La Geometría*. Alfaguara, Madrid, 490 pág.

Anexo II



Sesión 4

En equipo, comenten y contesten las preguntas que se generaron de los trazos de la cuarta curva de la sesión 3.

Vuelve a escribir la proporción que representa los dos triángulos de la cuarta figura, pero empleando la nomenclatura que introduce Newton.

______ = ______

¿Puedes resolverla numéricamente?
Explica ______________________________________
____

Para determinar la razón $\frac{\dot{x}}{\dot{y}}$ Newton da un método con poco sustento matemático, pero efectivo. Antes de lo cual, aclara que los símbolos $\dot{x}0$ ó $\dot{y}0$ "son las porciones infinitamente pequeñas con las cuales, al ser añadidas, las cantidades, x y y, se incrementan durante cada intervalo de tiempo infinitamente pequeño, […] se convierten en $x+\dot{x}0$ y $y+\dot{y}0$."[4]

Determinación de $\frac{\dot{x}}{\dot{y}}$ a partir de una ecuación igualada a cero.

1. Para cualquier ecuación, sustitúyase $x+\dot{x}0$ en lugar de x y $y+\dot{y}0$ en lugar de y.
2. Como todos los términos de la ecuación inicial son iguales a cero, elimínense.
3. Lo que reste de la ecuación divídase entre cero y simplifíquense los términos.
4. Como 0 se ha supuesto infinitamente pequeño, se eliminan los términos que lo contienen.[5]

En un último paso, que ya no lo menciona Newton, se concluye el método despejando la razón $\frac{\dot{x}}{\dot{y}}$ buscada.

[4] Newton I, El Método de las Fluxiones y las Series Infinitas, pp 87.
[5] Newton I, El Método de las Fluxiones y las Series Infinitas, pp 88.

Así, obtenemos dos proporciones que contienen la razón $\frac{\dot{x}}{\dot{y}}$. A continuación, las igualamos y sustituimos el único valor que conocemos, con lo que obtenemos la distancia buscada.

Ejercicio 1. Siguiendo el método que propone Newton, traza la recta tangente a la curva representada por la ecuación $y^2 - x = 0$ en el punto $D(1,1)$.
Nota: Sólo traza la parte superior de la curva.

Trabajo extraclase
Ejercicio 2. Siguiendo el método que propone Newton, traza la recta tangente a la misma curva pero ahora en el punto $D(4,2)$.

Nota Bibliográfica

1. Newton Isaac, *El Método de las Fluxiones y las Series Infinitas*, Colección Mathema, Facultad de Ciencias, UNAM, México 2004.

Sesión 5

Ejercicio 1. Siguiendo el método que propone Newton, traza la recta tangente a la curva representada por la ecuación $x^2 + y^2 - 4$ en el punto $D\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$.

Nota: Sólo traza la parte superior de la curva.

Una vez que hayas trazado la recta tangente en el punto indicado, comprueba que el resultado es correcto.

Ayuda: Para este punto el radio forma un ángulo de 45°.

Trabajo extraclase

Ejercicio 2. Siguiendo el método que propone Newton, traza la recta tangente a la misma curva pero ahora en el punto $D(-1.732{,}1)$.

De la misma manera que en el ejercicio anterior, comprueba que tu resultado es correcto.

Ayuda: Para este punto el radio forma un ángulo de 30°.

Anexo 3

Figuras obtenidas en las sesiones 3 y 4. Anexo II de los materiales impresos.

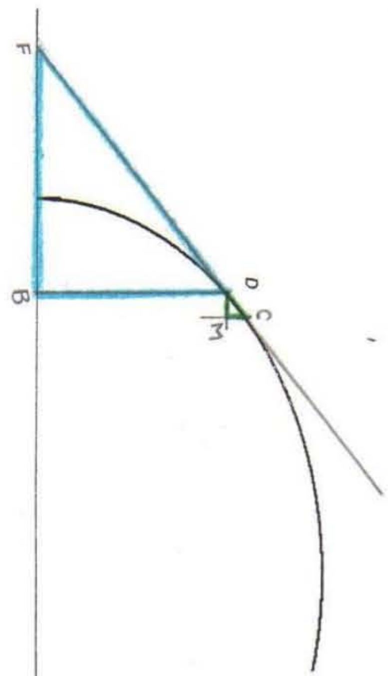


Figura C

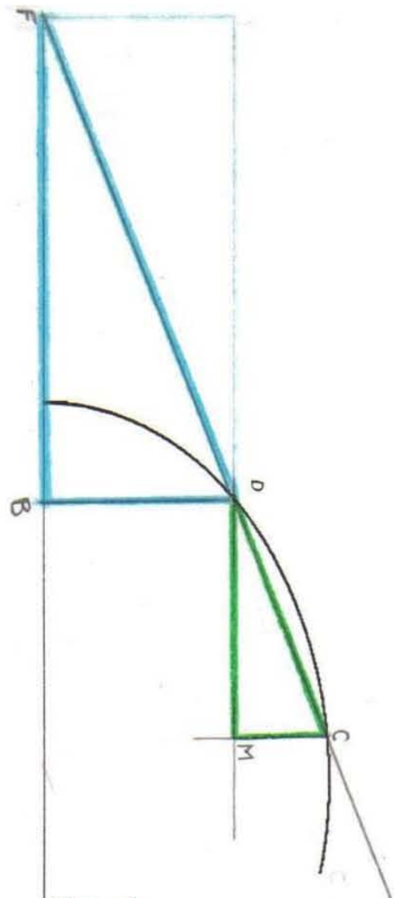


Figura A

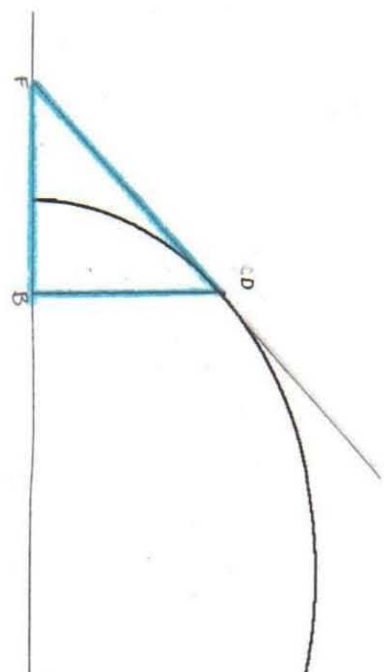


Figura D

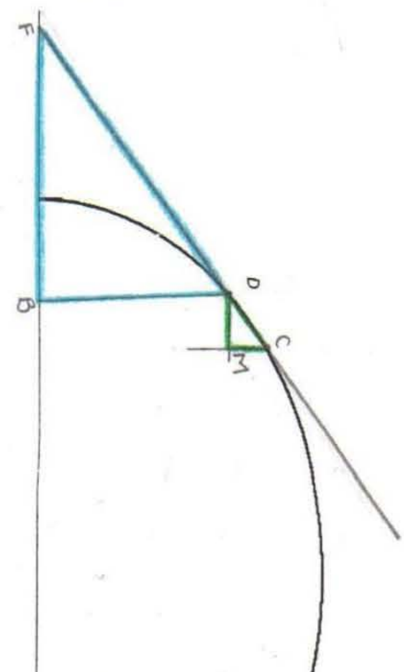


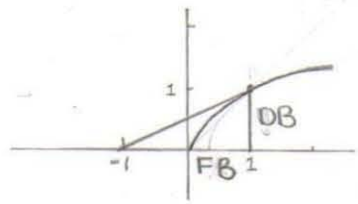
Figura B

Anexo 4

Trabajo algebraico de la sesión 5

Ejercicio 1. Siguiendo el método que propone Newton, traza la recta tangente a la curva representada por la ecuación $y^2 - x = 0$ en el punto $D(1,1)$.

Nota: Sólo traza la parte superior de la curva.



$y^2 - x = 0$

① $(y+\dot{y}0)^2 - (x+\dot{x}0) = 0$

② $\cancel{y^2} + 2y\dot{y}0 + \dot{y}0^2 - \cancel{x} - \dot{x}0 = 0$

③ $\dfrac{2y\dot{y}\cancel{0} + \dot{y}0^{2} - \dot{x}\cancel{0} = 0}{\cancel{0}}$

④ $2y\dot{y} + \cancel{\dot{y}0} - \dot{x} = 0$

$2y\dot{y} - \dot{x} = 0$

$2y\dot{y} = \dot{x}$

$2y = \dfrac{\dot{x}}{\dot{y}}$

El método para obtener la tangente nos da como resultado la base.

$\boxed{\dfrac{FB}{DB} = \dfrac{\dot{x}}{\dot{y}}}$

$\boxed{2y = \dfrac{\dot{x}}{\dot{y}}}$

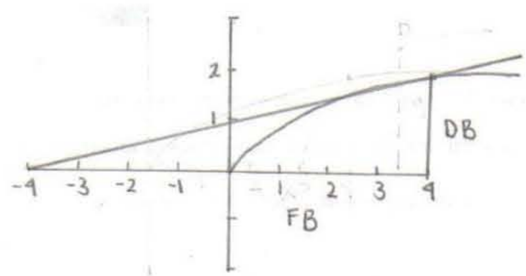
$\dfrac{FB}{DB} = 2y$

$\dfrac{FB}{1} = 2(1)$

$\boxed{FB = 2}$

Trabajo extraclase

Ejercicio 2. Siguiendo el método que propone Newton, traza la recta tangente a la misma curva pero ahora en el punto $D(4,2)$. ⟶



$\dfrac{FB}{DB} = \dfrac{\dot{x}}{\dot{y}}$

$2y = \dfrac{\dot{x}}{\dot{y}}$

$\dfrac{FB}{DB} = 2y$

$\dfrac{FB}{2} = 2(2)$

$\dfrac{FB}{2} = 4$

$FB = 4(2)$

$\boxed{FB = 8}$

Anexo 5

Trabajo algebraico de la sesión 6

Ejercicio 1. Siguiendo el método que propone Newton, traza la recta tangente a la curva representada por la ecuación $x^2 + y^2 = 4$ en el punto $D(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Nota: Sólo traza la parte superior de la curva.

tangentes a cualquier circunferencia es perpendicular al radio.

$x^2+y^2=4$

$x^2+y^2-4=0$

$(x+\dot{x}O)^2+(y+\dot{y}O)^2-4=0$

$\cancel{x^2}+2x\dot{x}O+\dot{x}O^2+\cancel{y^2}+2y\dot{y}O+\dot{y}O^2\cancel{-4}=0$

$\dfrac{2x\dot{x}O+\dot{x}O^2+2y\dot{y}O+\dot{y}O^2=O}{O}$

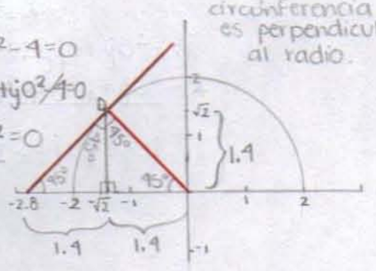
$2x\dot{x}+\dot{x}O+2y\dot{y}+\dot{y}O=0$

$2x\dot{x}+2y\dot{y}=0$

$2x\dot{x}=-2y\dot{y}$

$\dfrac{\dot{x}}{\dot{y}}=\dfrac{-2y}{2x}$

$\dfrac{\dot{x}}{\dot{y}}=\dfrac{-y}{x}$



$\dfrac{FB}{DB}=\dfrac{-y}{x}$

$\dfrac{base}{y}=\dfrac{-y}{x}$

$\dfrac{base}{1.4}=\dfrac{-1.4}{-1.4}$

$\dfrac{base}{1.4}=1$

$base=1(1.4)$

$\boxed{base=1.4}$

Una vez que hayas trazado la recta tangente en el punto indicado, comprueba que el resultado es correcto.

Ayuda: Para este punto el radio forma un ángulo de 45°.

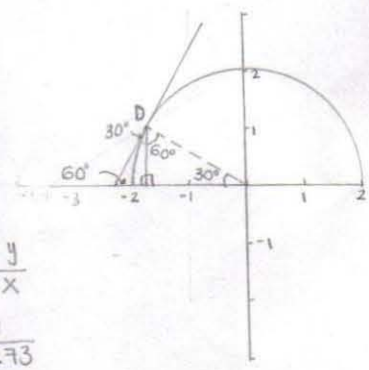
La tangente a cualquier circunferencia, es perpendicular al radio. En esta circunferencia los dos triángulos son congruentes, y como los dos tienen 45°, suman 90°, haciéndolo perpendicular.

Trabajo extraclase

Ejercicio 2. Siguiendo el método que propone Newton, traza la recta tangente a la misma curva pero ahora en el punto $D(-1.732, 1)$.

De la misma manera que en el ejercicio anterior, comprueba que tu resultado es correcto.

Ayuda: Para este punto el radio forma un ángulo de 30°.



$\dfrac{FB}{DB}=\dfrac{-y}{x}$

$\dfrac{x}{1}=\dfrac{-1}{-1.73}$

$\boxed{x=0.57}$

Si son perpendiculares

Estos triángulos son semejantes y aunque no son iguales la parte de arriba suman 90°, es decir, 60°+30° = 90°, por ello vuelven a ser perpendiculares. La recta tangente y el radio son perpendiculares sólo en la circunferencia

Anexo 6

Evaluación Sumativa

Universidad Nacional Autónoma de México
Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades
Plantel Vallejo
Cálculo Diferencial e Integral I — Primer Examen

Alumno: ____
Grupo: ____________ Semestre: _______________ Materia: ________________
Profesor: ____

1. ¿Qué significa que una cantidad sea infinitamente pequeña? Da un ejemplo para explicarlo.

2. En la primera mitad del siglo XVII, R. Descartes propone el uso de unos ejes de referencia ¿qué diferencia tienen con los actuales?

3. ¿Cuáles son los cuatro conceptos matemáticos que utiliza I. Newton en el procedimiento que propone?

a) b)
c) d)

4. Utiliza los conceptos mencionados arriba para completar el párrafo:

El procedimiento propone el trazo de dos triángulos semejantes, que se relacionan por medio de una ________ _________________________ para determinar la base del triángulo mayor, y poder trazar la ___________________________ buscada. Pero uno de los dos triángulos no se aprecia porque sus lados son _____________________________, a este tipo de cantidades Newton las llamó fluxiones, las cuales se obtienen del _____________________________ generado en un instante de tiempo.

5. En el método, ¿qué significa la razón $\frac{\dot{x}}{\dot{y}}$?

6. Siguiendo el método que propone Newton, traza la recta tangente a la curva representada por la ecuación $y^2 - x = 0$ en el punto $D(4,2)$.

7. Siguiendo el método que propone Newton, traza la recta tangente a la curva $x^2 + y^2 = 4$ en el punto $D(-1,1.73)$.