UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

MAESTRÍA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

FACULTAD DE CIENCIAS

"*APRENDIZAJE POR ETAPAS PARA COMPRENDER Y APLICAR LA MATEMÁTICA DEL BACHILLERATO*"

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR (MATEMÁTICAS)

PRESENTA:

ADA CINTIA ROSAS TAVERA

DIRECTORA DE TESIS: M. EN ENS. SUP. MARTHA ROSA DEL MORAL NIETO, FACULTAD DE CIENCIAS.

MIEMBRO DEL COMITÉ TUTOR: M. EN GOB. Y ASUNTOS PUB. MAURO SERGIO SOLANO OLMEDO, FACULTAD DE FILOSOFÍA Y LETRAS.

MÉXICO, D. F. ABRIL DE 2014.

Agradecimientos

Gracias al Programa de Formación de Profesores para el Bachillerato Universitario perteneciente a la Dirección General de Personal Académico, UNAM. Sin su apoyo me hubiera sido imposible estudiar la Maestría en Docencia para la Educación Media Superior y sobre todo ampliar mis conocimientos como docente.

Gracias a mis tutores que a pesar de no aparecer todos formalmente en la lista, fueron parte primordial del trabajo de tesis. Gracias al doctor Carlos Hernández Garciadiego por apoyarme al inicio del proyecto, por marcar mis errores acertada y sinceramente, con ello crecí como persona y fortalecí mi deseo por ser mejor cada día. Gracias a la maestra Martha Rosa del Moral Nieto por su paciencia, su comprensión y sobre todo que nunca dejó de creer en mí, sigo aprendiendo de todas sus virtudes y experiencia docente, es un gran ejemplo a seguir. Gracias al maestro Mauro Sergio Solano Olmedo por su gran énfasis en el enfoque de MADEMS, gracias a usted los alumnos no olvidaremos nuestra formación en la maestría.

Gracias a mis profesores porque más que facilitar mi aprendizaje en la labor docente son para mi como compañeros en mi proceso de madurez en todos los aspectos de mi vida. Con la maestría desperté al verdadero sentido de aprendizaje y con ello he ampliado mis conocimientos en todos los ámbitos así como mis habilidades de pensamiento. En el orden cronológico conforme los conocí: Gracias a la maestra Marcela González Fuentes por enseñarme que la educación debe ser estratégica y de acuerdo a la edad, además de tomar en cuenta la parte social, emocional y pedagógica. Gracias al maestro Agustín Ontiveros Pineda porque reafirmó mis conocimientos matemáticos pero vistos desde la perspectiva docente. Gracias al doctor Humberto Ruiz Ocampo por demostrar que el ambiente en el aula puede ser distinto y que la historia puede aprenderse de forma divertida, por enseñarme una vida sin estrés. Gracias al doctor Octavio Páez Osuna por enfrentarme a mis deficiencias como docente y mostrarme que la enseñanza no debe tener complicaciones. Gracias a la maestra Martha Rosa del Moral Nieto porque es el mejor ejemplo de profesionalismo, seriedad, entrega, pasión por la docencia que he conocido y por lo cual le admiro. Gracias a la doctora Benilde García Cabrera por recordarme que las metas siempre se consiguen con esfuerzo y si se tornan difíciles no hay que rendirse. Gracias al doctor Michael Barot Schlatter

por fomentar siempre el desarrollo de las habilidades cognitivas del alumno, así como recordarme las responsabilidades y valores que en México se han ido perdiendo con el tiempo. Gracias al maestro Mauro Sergio Solano Olmedo por mostrarme los principios de la educación en México, las carencias y las infinitas posibilidades para mejorar. Gracias a la maestra Sara Alejandra Pando Figueroa por recordarme que todos somos imperfectos y debemos mejorar constantemente. Gracias al doctor Juan Fidel Zorrilla Alcalá por fomentar el aprendizaje integral del alumno a través de estrategias claras y asertivas. Gracias al doctor Alejandro Cornejo Oviedo por impulsar la calidad del aprendizaje en el alumno además de reforzar los valores humanos. Gracias a la maestra Flor de María Aceff Sánchez por su apoyo, entrega e interés por el alumno de forma incondicional. Aprendí mucho de todos ustedes como personas y como docentes.

Gracias a mis compañeros de clase: Roberto, Onatta, Miguel, Agustín, Fidel, Ángel. Por acompañarme en mi crecimiento e impulsarme a superarme cada día.

Gracias a mis familiares y amigos: en especial al profesor Jorge Aretia, mi hermana Nancy y mi hermano Cristofer por animarme a concluir este ciclo a pesar de todos los obstáculos. Gracias a mis padres Guillermo Rosas Rivera y Martha Tavera Frausto por estar conmigo siempre, son mi mayor inspiración y mi fuerza para seguir adelante. Gracias a José Antonio Maca Aivar por ser ejemplo de que todo es posible a pesar de las distracciones y responsabilidades ajenas a las profesionales. Gracias a los profesores Juan Miguel Bautista Granados y Roberto Pedro Robledo Arana por apoyarme sin conocerme, darme consejos constructivos y compartir su experiencia docente. Gracias a mi suegra María Laura Enoé Ponce de León Ojeda por darme ánimos sobre todo al final del ciclo.

Gracias a Abelardo Vela Ponce de León por toda tu comprensión y paciencia durante todos esos días difíciles, pero sobre todo gracias por ayudarme a lograr el objetivo porque siempre estuviste cuando te necesité. Gracias Erick porque a pesar de llegar a mi vida justo al final de este ciclo, aunque seas tan pequeño me has enseñado muchas cosas y también pude ver lo que soy capaz de lograr en mi nueva faceta de mamá. ¡Los amo!

Porque siempre dejé lo mejor al final... gracias mil a ti mi Dios porque me pusiste los obstáculos más grandes en estos últimos cinco años de vida. Aprendí más que nunca.

Índice

Resumen

El presente trabajo pretende promover el aprendizaje reflexivo, constructivo, analítico y deductivo, concretamente en los alumnos del Colegio de Ciencias y Humanidades, plantel sur; en particular los que estudian la asignatura de Álgebra y Geometría Analítica I, pues también se presentan evidencias de que los alumnos no adquieren los aprendizajes esperados en el plan de estudios del colegio a pesar de que el 60% de ellos aprueba la asignatura.

Lo anterior promueve el rezago escolar debido a la seriación de los conceptos matemáticos en el plan de estudios vigente. Aún más, el hecho de que los alumnos no desarrollen sus capacidades de razonamiento impide que comprendan y asimilen la información reunida en los cursos posteriores. Entre las causas principales de la situación planteada se destaca que los alumnos no emplean las técnicas de estudio apropiadas para comprender y asimilar el conocimiento, a su vez, el profesor no promueve el desarrollo de habilidades en el alumno como son: la reflexión, deducción, análisis, cuestionamiento, además del gusto por aprender.

Para desarrollar las habilidades arriba expuestas, se propone una metodología didáctica que consta de seis etapas aplicadas al tema “La parábola y su ecuación cartesiana”. La primera etapa representa la introducción al tema con base a una aplicación visual y tangible como ocurre en los faros automovilísticos y su propiedad de reflexión. La segunda etapa corresponde a la traducción de la información escrita en lenguaje matemático al lenguaje coloquial para ayudar al alumno a comprender el lenguaje matemático. Como tercera etapa se visualiza y estructura el tema como conjunto de conceptos relacionados entre sí a través de un mapa conceptual. Las etapas restantes ocurren simultáneamente al momento de asimilar, reconstruir y aplicar el conocimiento adquirido durante las etapas anteriores.

INTRODUCCIÓN

Los resultados de las evaluaciones PISA (PISA, 2003), ENLACE (Reyes y Zúñiga, 2014) y estadísticas de México sobre el desarrollo de habilidades de razonamiento matemático en los alumnos de nivel medio superior motivaron la búsqueda de indicadores y causas de dicho fenómeno nacional; así como la construcción de una propuesta didáctica que respondiera a tal situación. El problema central está ligado a los altos índices de reprobación y deserción estudiantil en las asignaturas del área matemática del nivel educativo medio superior, pero sobre todo, el problema surge ante los esfuerzos promovidos por las instituciones educativas para elevar los porcentajes de egreso estudiantil en el nivel medio superior, puesto que han descuidado el objetivo primordial de promover la eficiencia terminal en el alumno.

En el presente trabajo se observó el caso concreto de los alumnos del Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH), en la asignatura Álgebra y Geometría Analítica I, del turno vespertino. Se trata de alumnos que aprobaron la asignatura pero no desarrollaron las habilidades de razonamiento matemático que establece el perfil de egreso del plan de estudios correspondiente.

Las causas principales encontradas en el fenómeno expuesto son: Falta de técnicas de estudio por parte del alumno y desarrollo casi nulo de habilidades de razonamiento matemático.

Monsalvo, profesora del colegio en el área de matemáticas, destaca el contraste entre el enfoque educativo basado en la memorización que el alumno ejercita durante la educación básica, contra el enfoque deductivo, reflexivo y analítico que pretende aplicar el colegio.

“En realidad, la mayoría de los alumnos que ingresan al colegio no están preparados para asumir la nueva metodología de estudio a la cual se enfrentan” (Monsalvo, 2003).

Ante tal situación, los profesores han buscado la manera de disminuir los índices de reprobación y deserción, la solución común fue continuar con el enfoque memorístico al cual los alumnos habían sido condicionados.

Como resultado, los alumnos no han desarrollado sus habilidades de razonamiento matemático según los perfiles de egreso escolarizados, prueba de ello lo han mostrado las estadísticas de diversos medios de evaluación, ya sea nacional e internacional.

Es por lo anterior que surgió la necesidad de proponer estrategias que introdujeran adecuadamente al alumno en la metodología educativa del colegio, es decir, fomentar la aplicación de técnicas de estudio en el alumno donde se le guiara hacia el enfoque deductivo, reflexivo y analítico, por ello se diseñó una propuesta didáctica que propusiera al alumno algunas técnicas de estudio que podía practicar para construir el conocimiento al mismo tiempo que ejercitara sus habilidades de razonamiento matemático, como ejemplo particular se enfoca la propuesta en la quinta unidad temática, de la asignatura Álgebra y Geometría Analítica I, titulada *“La parábola y su ecuación cartesiana”*.

Es importante desarrollar habilidades de razonamiento matemático en el alumno como lo establece el plan de estudios del CCH (Arana, et al., 2010) sobre todo para lograr el aprendizaje de las asignaturas del área matemática a nivel medio superior debido a su progresivo grado de abstracción, además del potencial cognitivo que adquiere el alumno para resolver problemas no solo de índole matemático.

Las habilidades de razonamiento matemático que propone desarrollar el plan de estudios del CCH engloban la observación, reflexión, análisis, comparación, solución de problemas, deducción, entre otras. Todas las anteriores son evaluadas en las pruebas PISA (PISA, 2003) en el área de matemáticas.

El desarrollo de habilidades de razonamiento matemático es un tema común en la psicología educativa actual donde generalmente se centra el enfoque constructivista, por ello, se diseñó bajo dicha influencia la propuesta didáctica del presente trabajo, no obstante, también se incluyeron otras propuestas alternas que al combinarse facilitan el procesamiento de la información durante el proceso enseñanza-aprendizaje.

La propuesta didáctica se diseñó para la quinta unidad temática “La parábola y su ecuación cartesiana” de la asignatura Álgebra y Geometría Analítica I. El objetivo fue que el alumno comprendiera y aplicara dicho tema al mismo tiempo que desarrollara las habilidades de observación, análisis, deducción y reflexión. Para fomentar la observación en el alumno se retomó la etapa de percepción de Pozo (Pozo, 2006), en ella se conectó al alumno con el nuevo concepto a través de una aplicación concreta y tangible. Para ejercitar en el alumno el pensamiento analítico, deductivo y reflexivo se aplicó la metodología socrática basada en la mayéutica que se retoma en *"Lecturas para maestros"* (Guevara, 2005) además del enfoque PISA (PISA, 2003), ambas en esencia proponen cuestionar estratégicamente al alumno para que éste deduzca y construya su conocimiento a la vez que aplica lo asimilado previamente de tal forma que sus habilidades se ejercitan y el conocimiento se fortalece. Por supuesto se procesó la información que proponía el plan de estudios del colegio por lo que se combinó lo anterior con las teorías de Piaget (Rice, 2000), (Papalia, 2004), Ausubel (Rodríguez, 2003) y Estévez (Estévez, 2004) para que el alumno encontrara significativa la información recibida y la asimilara de acuerdo a su propia interpretación. Posteriormente se utilizó un mapa conceptual como lo propuso Novak para esquematizar las ideas clave del tema estudiado y lograr que el alumno relacionara los conceptos entre sí como parte de la definición principal (Novak, 1977). Finalmente se aplicó el enfoque didáctico del informe PISA para guiar al alumno a descubrir lo que era capaz de formar con el conocimiento adquirido a partir de todas las herramientas anteriores acompañadas de preguntas guía -previamente diseñadas- para conducir el razonamiento deductivo del alumno (PISA, 2003). El aprendizaje mediante preguntas guía provino del filósofo Sócrates y se le llama mayéutica, cuya práctica ha prevalecido hasta ahora, como se menciona en "Lecturas para maestros" (Guevara, 2005), aunque también lo manejó Bruner como andamiaje educativo (Bruner, 1960).

Como resultado de aplicar la propuesta anterior, se espera que el alumno reconstruya el tema estudiado para que reflexione las herramientas que adquirió y las aplique en la solución de ejercicios concretos donde demostrará lo que ha aprendido.

Se espera que en otras áreas temáticas del colegio se considere y adapte la propuesta didáctica para que en un futuro no muy lejano el alumno practique el desarrollo de habilidades como su método de formación profesional y personal según lo propone PISA (PISA, 2003) en vez de sólo acreditar la asignatura de Álgebra y Geometría Analítica I.

El presente trabajo se estructura en 3 capítulos como explico a continuación:
En el capítulo 1 se contextualiza el problema principal de este trabajo mediante una visión a nivel nacional dentro de la educación media superior en el área de matemáticas, posteriormente se describe a profundidad el planteamiento del problema y las causas

principales, así como la necesidad de reforzar el proceso enseñanza-aprendizaje en cuanto a las técnicas de estudio del alumno y la guía estratégica del profesor.

El capítulo 2 muestra las bases psicopedagógicas de la propuesta planteada para resolver el problema expuesto. Después se describen las estrategias que conforman la propuesta didáctica para finalmente formalizarla en seis etapas de aprendizaje aplicadas concretamente al tema “La parábola y su ecuación cartesiana” de la asignatura Álgebra y Geometría Analítica I. Para construir la propuesta se tomaron los siguientes puntos:

- Respetar los contenidos que establece el plan de estudios vigente del colegio en la asignatura y unidad temática en cuestión.
- Promover los aprendizajes esperados como lo establece el plan de estudios del colegio.
- Ejercitar la observación, deducción, reflexión y análisis en el alumno durante todas las actividades de la propuesta.

El capítulo 3 corresponde a la validación de la propuesta didáctica aplicada en un grupo arbitrario del Colegio de Ciencias y Humanidades del plantel sur en el turno vespertino. En el mismo capítulo se analizaron los resultados obtenidos que dieron pie a las conclusiones.

En la parte de los anexos se aprecian los videos tomados durante la validación de la propuesta.

Capítulo 1

En el presente capítulo se contextualiza la situación sobre el desarrollo de habilidades de razonamiento matemático en la educación media superior de México. A partir de tal planteamiento se concreta la necesidad de guiar al alumno para desarrollar su pensamiento reflexivo, analítico y deductivo como lo pide el perfil de egreso en los bachilleratos del país y en particular en el enfoque educativo del Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH) donde se centra este trabajo de tesis.

1.1 Contexto de la educación media superior en México, concretamente en el área matemática.

Se sabe que los países más desarrollados del mundo se ocupan constantemente por impulsar un buen nivel educativo en sus futuros profesionistas debido a que representan el progreso de su nación. El nivel educativo en el área matemática se caracteriza por desarrollar habilidades de razonamiento como son: observación, análisis, deducción, reflexión, entre otras, mediante las cuales el ser humano adquiere capacidad de resolver problemas que le permitan adaptarse a las diversas etapas de la vida, en especial la profesional.

Con base en lo anterior se creó la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE), es una organización de cooperación internacional, compuesta por 30 países cuya producción conjunta representa dos terceras partes de los bienes y servicios a nivel mundial. La OCDE coordina los bienes y servicios de carácter político, económico y social de los países miembros. Fue fundada en 1960 y su sede central se encuentra en la ciudad de París, Francia. La OCDE se ha constituido como uno de los foros mundiales más influyentes, que analiza y establece orientaciones sobre temas de relevancia internacional como la educación (OCDE, 2011).

Para lograr un análisis detallado de los avances en la educación a nivel internacional, la OCDE creó el Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos (PISA, por sus siglas en inglés), este programa revisa los conocimientos, aptitudes y competencias relevantes para el bienestar personal, social y económico de cada miembro de la OCDE. Para ello mide la capacidad de los estudiantes de poder razonar, analizar y comunicarse a través de la formulación, solución e interpretación de problemas auténticos. Los problemas planteados en los exámenes corresponden a áreas temáticas específicas, por ejemplo, en el año 2000 el enfoque estaba basado en comprensión de lectura, en el 2003 la evaluación PISA fue dedicado a la solución de problemas en matemáticas, la siguiente evaluación (2006) incluyó situaciones relacionadas con las ciencias experimentales y finalmente se repiten los enfoques puesto que en el 2009 se examinaron habilidades de lectura en esencia además de dedicar una pequeña parte al área matemática; la más reciente evaluación fue en el 2012 en matemáticas y en 2015 se espera para ciencias experimentales nuevamente.

PISA estudia una gama amplia de resultados educativos, entre los que se encuentran: la motivación de los alumnos por aprender, la concepción que éstos tienen sobre sí mismos y sus estrategias de aprendizaje.

El informe PISA maneja seis niveles de competencias matemáticas. El más bajo es el nivel 1, donde se sitúan los estudiantes con poco conocimiento y casi nula la capacidad de habilidades matemáticas. En cambio, el nivel 6 representa el mayor grado de habilidades desarrolladas así como la mejor capacidad para emplearlas al construir nuevo conocimiento.

A continuación se presenta una copia de su escala tal como aparece en el informe PISA (OCDE, 2003).

NIVELES DE COMPETENCIAS QUE ESTABLECE PISA EN CADA EVALUACIÓN

Nivel	Competencias matemáticas
6	Los alumnos saben formar conceptos, generalizar y utilizar información diversificada, basada en investigaciones y modelos de problemas complejos. Poseen un pensamiento y razonamiento matemático avanzado, aplican su entendimiento y comprensión a nuevos enfoques y estrategias para abordar situaciones nuevas, pueden formular y comunicar claramente sus acciones y reflexiones de sus descubrimientos, argumentos y adecuación a las situaciones originales.
5	Los alumnos saben desarrollar modelos y trabajar con ellos en situaciones complejas, identificando los condicionantes y supuestos. Pueden seleccionar, comparar y evaluar

	estrategias adecuadas de solución de problemas complejos específicos, utilizan habilidades de pensamiento y razonamiento para representar, intuir, caracterizar simbólica y formalmente, reflexionar, formular y comunicar sus acciones, interpretaciones y razonamientos.
4	Los alumnos pueden manejar modelos explícitos en situaciones complejas, conllevar condicionantes o exigir la formulación de supuestos, seleccionar e integrar diferentes representaciones, incluyendo las simbólicas, asociarlas al mundo real, utilizar habilidades de razonamiento flexible y perspicaz en estos contextos, explicar por escrito sus interpretaciones, argumentos y acciones.
3	Los alumnos ejecutan procedimientos claros, incluyendo aquellos con decisiones secuenciales, seleccionar y aplicar estrategias de solución de problemas sencillos, interpretar y utilizar representaciones basadas en diferentes fuentes de información y razonar a partir de ellas, elaborar breves escritos de sus interpretaciones, resultados y razonamientos.
2	Los alumnos saben interpretar y reconocer situaciones en contextos particulares, extraer información pertinente de una sola fuente y modelo representativo, utilizar algoritmos, fórmulas, procedimientos elementales, efectuar razonamientos directos e interpretaciones literales de los resultados.
1	Los alumnos responden preguntas claras relacionadas con contextos conocidos y de información concreta o explícita, realizan procedimientos rutinarios siguiendo instrucciones directas en situaciones explícitas, reaccionan a estímulos obvios inmediatos.

Fuente: Informe PISA (OCDE, 2003).

Observe que PISA investiga y analiza lo que el aprendizaje puede generar en el alumno como las habilidades de razonamiento matemático: observación, análisis, deducción y reflexión.

En el año de 1994, México se unió a la OCDE con el fin de adquirir recursos que le permitieran impulsar el desarrollo del país, uno de los aspectos a superar fue respecto a la educación debido a los resultados obtenidos en las pruebas PISA donde fue evaluado muy por debajo de Alemania, Australia, Austria, Bélgica, Canadá, Chile, Dinamarca, Eslovenia, España, Estados Unidos, Estonia, Finlandia, Francia, Grecia, Hungría, Irlanda, Islandia, Israel, Italia, Japón, Korea, Luxemburgo, Noruega, Nueva Zelanda, Países Bajos, Polonia, Portugal, Reino Unido, República Checa, República Eslovaca, Suecia, Suiza y Turquía.

A pesar de que PISA evalúa las habilidades que el alumno desarrolla en diversas áreas de estudio, este trabajo se centrará sólo en el área matemática. El examen PISA (OCDE, 2003), evaluó principalmente el rendimiento matemático. El examen PISA (OCDE, 2006) fue enfocado al rendimiento en ciencias experimentales. También en el 2009 dedicó un apartado para evaluar el manejo del lenguaje matemático. La evaluación más reciente sobre matemáticas ocurrió en el año 2012.

Respecto a los resultados formales que se han publicado sobre México y la educación a nivel medio superior en el área matemática destacamos lo siguiente:

- Aproximadamente el 60% de los mexicanos examinados en PISA (OCDE, 2003), sólo responden lo que se remite a su contexto particular, pueden identificar información y repetir procesos con instrucciones precisas o patrones explícitos (esto los sitúa en el nivel 1 de competencias según PISA).
- México se situó principalmente en el nivel 2 del examen PISA (OCDE, 2006), lo que nos indica que los alumnos sólo pueden explicar contextos familiares, hacer conclusiones simples, razonar o interpretar resultados literales de investigación científica o tecnológica sin inferencias.
- En PISA (OCDE, 2009), el 5% de los mexicanos examinados ocuparon los niveles altos, el 44% estuvo en los niveles 2 y 3, mientras que el resto se situó en el nivel 1 o por debajo del mismo. De 65 países participantes, 47 obtuvieron mayor puntuación en matemáticas comparados con México, el objetivo era casi de 600 puntos, México obtuvo 419 mientras que el promedio fue 500.
- Respecto a la evaluación de 2012 no se presentarán los datos formales hasta diciembre de 2013. Sin embargo, la OCDE reportó los siguientes datos sobre México en el 2012, derivados de su artículo “Education at a Glance” (OCDE, 2012).

  I. Desde 2009, México ha aumentado las tasas de matrícula en los jardines de niños, obteniendo la más alta matrícula en niños de cuatro años de edad, sin embargo, representa un gran desafío para el país ya que la demanda de profesores respecto a la de alumnos es mucho menor.

II. Las tasas de egreso en los alumnos de secundaria aumentó 14% entre 2000 y 2010 comparado con el promedio de 8% en todos los países de la OCDE, sin embargo se predice que sólo el 47% se graduará.

III. El tercer porcentaje más alto en la OCDE de jóvenes entre 15 y 29 años que no estudia ni trabaja lo obtuvo México y las mujeres representan el triple de los casos masculinos debido tal vez a que es la edad promedio en donde la mujer abandona sus estudios y no trabaja para dedicarse exclusivamente al cuidado de sus hijos.

IV. El gasto en educación aumentó entre 2008 y 2009 a pesar de que el PIB disminuyó. No obstante, la mayor parte de la inversión no llega a las escuelas ni a los docentes sino a personal que no tiene relación ni gestión directamente con el ámbito educativo.

Fue entonces que, junto con la OCDE, las comunidades nacionales dedicadas a mejorar la calidad de la educación se mostraron atentas acerca de los resultados desfavorables que hasta la fecha ha arrojado la población estudiantil del nivel bachillerato en México; por supuesto ponderaron la necesidad de realizar un cambio en el proceso educativo, no obstante el mayor problema era identificar los puntos claves donde era necesario el cambio y, aún más, hallar las estrategias eficaces para que los cambios aplicados dieran mejores resultados en las estadísticas.

Se debe dar importancia a los resultados internacionales puesto que el informe PISA revela el rezago evidente de la educación en México respecto a los logros de los demás países inscritos en dicha organización.

Otra organización que pretende aportar datos del nivel educativo en México es la Evaluación Nacional de Logro Académico en Centros Escolares (ENLACE), una prueba del Sistema Educativo Nacional que se aplica a planteles públicos y privados del País. Además de aplicarse en los niveles de primaria y secundaria, la prueba ENLACE recientemente incluye también jóvenes que cursan el último grado de bachillerato para evaluar conocimientos y habilidades básicas adquiridas a lo largo de la trayectoria escolar para hacer un uso apropiado de la lengua -habilidad lectora- y las matemáticas -habilidad matemática- (Reyes y Zúñiga, 2014).

El propósito de ENLACE es generar una sola escala de carácter nacional que proporcione información comparable de los conocimientos y habilidades que tienen los estudiantes en los temas evaluados. Dicha escala pretende:

- Estimular la participación de los padres de familia así como de los jóvenes, en la tarea educativa.
- Proporcionar elementos para facilitar la planeación de la enseñanza en el aula.
- Atender requerimientos específicos de capacitación a docentes y directivos.
- Sustentar procesos efectivos y pertinentes de planeación educativa y políticas públicas.
- Atender criterios de transparencia y rendición de cuentas.

Los criterios de evaluación que maneja ENLACE se basan en las competencias que establece la Reforma Integral de la Educación Media Superior (RIEMS) – proceso de carácter internacional cuyo objetivo es propiciar la creatividad y pensamiento lógico-crítico del alumno- (Reyes y Zúñiga, 2014). Las competencias de la RIEMS determinan los indicadores suficientes que el alumno debe dominar según su nivel académico. Los indicadores en habilidad matemática que utiliza la prueba, involucran los contenidos aritméticos, geométricos y algebraicos que establecen los planes de estudio de las instituciones educativas participantes, así como los procesos cognitivos que el evaluado debe emplear para resolver los reactivos de la prueba; a saber: reproducción, conexión y reflexión de información, considerando 3 niveles de complejidad.

La forma de interpretar y clasificar los resultados de la prueba ENLACE se realiza bajo cuatro niveles de dominio que determinan una lista de tareas y procesos cognitivos que debe desempeñar el evaluado para poder resolver cada reactivo.

Los niveles de dominio de la prueba ENLACE se enlistan a continuación:

Insuficiente. Resuelve problemas simples y directos. Efectúa operaciones básicas con números enteros y signos de agrupación. Localiza equivalencias en fracciones simples. Resuelve problemas relacionados con figuras planas y tridimensionales. Localiza puntos en el plano y/o determina sus coordenadas. Encuentra relaciones gráficas o algebraicas sencillas entre dos variables.

Elemental. Resuelve problemas de porcentajes. Resuelve operaciones básicas con fracciones. Utiliza fórmulas para conversión de unidades. Ordena series de números. Identifica sucesiones de números y sus relaciones. Interpreta expresiones algebraicas. Resuelve problemas geométricos simples de dos y tres dimensiones. Construye figuras tridimensionales a partir de otras. Resuelve sistemas de ecuaciones lineales.

Bueno. Combina operaciones y procesos para resolver problemas. Interpreta relaciones entre expresiones algebraicas y gráficas. Resuelve problemas con unidades físicas. Resuelve cálculos de razones y proporciones. Aplica el mínimo común múltiplo y máximo común divisor en situaciones reales. Calcula áreas y perímetros simples. Infiere relaciones entre variables dependientes e independientes. Resuelve problemas reales de ecuaciones cuadráticas con una incógnita.

Excelente. Aplica conversiones, teorema de Pitágoras, propiedades geométricas de dos y tres dimensiones, estimaciones, ecuaciones, gráficas y tablas, entre otros, de forma estratégica para resolver problemas reales. Identifica la gráfica de la recta a partir de sus características elementales. Realiza cálculos entre funciones a través de su gráfica y regla de correspondencia.

De manera que cada reactivo es diseñado para cubrir la aplicación de determinados conocimientos matemáticos así como el desarrollo de procesos cognitivos en diversos grados de complejidad.

A diferencia de PISA, las pruebas ENLACE son anuales, de tal forma que a continuación se muestra un resumen de las estadísticas obtenidas entre los años 2008-2012 mediante las siguientes tablas.

Primero veremos los resultados de habilidades matemáticas por nivel de dominio:

RESULTADOS ANUALES POR NIVEL DE DOMINIO OBTENIDOS DE LA PRUEBA ENLACE EN EL PERIODO 2008-2012

NIVEL DE DOMINIO	NÚMERO DE ALUMNOS EVALUADOS				
	2008 *	2009 @	2010 ^	2011&	2012Ω
INSUFICIENTE	361.275	370.752	347.090	316.346	277.220
ELEMENTAL	293.704	282.571	334.518	362.664	360.390
BUENO	94.678	112.198	129.050	150.467	177.420
EXCELENTE	26.627	38.834	45.060	71.989	106.548
TOTAL	776.284	804.355	855.718	901.466	921.578

* NO SE INCLUYEN 32,062 ALUMNOS POR HABER RESPONDIDO A MENOS DEL 50% DE LAS PREGUNTAS DE MATEMÁTICAS

@ NO SE INCLUYEN 31,386 ALUMNOS POR HABER RESPONDIDO A MENOS DEL 50% DE LAS PREGUNTAS DE MATEMÁTICAS

^ NO SE INCLUYEN 28,945 ALUMNOS POR HABER RESPONDIDO A MENOS DEL 50% DE LAS PREGUNTAS DE MATEMÁTICAS

& NO SE INCLUYEN 11,412 ALUMNOS POR HABER RESPONDIDO A MENOS DEL 50% DE LAS PREGUNTAS DE MATEMÁTICAS

Ω NO SE INCLUYEN 43,566 ALUMNOS POR HABER RESPONDIDO A MENOS DEL 50% DE LAS PREGUNTAS DE MATEMÁTICAS

Fuente: Resultados prueba ENLACE 2011 (ENLACE, 2011).

En la tabla anterior se puede ver que en el año 2008 más del 80% de alumnos evaluados alcanzaron a lo más el nivel de dominio elemental, el porcentaje va disminuyendo suavemente en los siguientes años puesto que en el 2012 queda por debajo de 70%, aún así representa un gran número de alumnos que no han adquirido adecuadamente los conocimientos del nivel educativo en cuestión pero sobre todo no han desarrollado las habilidades correspondientes del área evaluada, recuérdese que ENLACE evalúa los conocimientos y habilidades de lectura y matemáticas.

Ahora, véase los resultados por modalidad escolar respecto a los alumnos de último grado de nivel bachillerato. En este caso sólo se expresan los porcentajes estudiantiles obtenidos por año.

RESULTADOS ANUALES DE LA PRUEBA ENLACE POR MODALIDAD ESCOLAR

	NIVEL DE DOMINIO																			
MODALIDAD	INSUFICIENTE					ELEMENTAL					BUENO					EXCELENTE				
	2008	2009	2010	2011	2012	2008	2009	2010	2011	2012	2008	2009	2010	2011	2012	2008	2009	2010	2011	2012
BACHILLERATO GENERAL (Preparatoria)	44,7	46,7	41,4	35,7	31,2	38,1	34,3	38,9	39,7	38,6	13,2	13,9	14,5	16,4	18,7	4,0	5,1	5,2	8,2	11,4
BACHILLERATO TECNOLÓGICO	47,5	43,9	37,4	32,8	26,6	38,0	36,2	39,5	40,8	39,3	11,7	15,0	17,1	18,0	21,1	2,8	4,9	5,9	8,3	13,0
TÉCNICO	57,6	50,0	48,6	41,3	36,1	35,2	37,1	38,9	42,2	42,8	6,4	10,5	9,9	12,4	15,3	0,8	2,4	2,6	4,1	5,8

Fuente: Resultados prueba ENLACE 2011 (ENLACE, 2011).

De la tabla anterior se pueden sumar los porcentajes de alumnos que alcanzan el nivel insuficiente o elemental dependiendo el tipo de bachillerato y el año, para determinar la diferencia entre el año 2008 respecto del año 2012. Los datos son: el bachillerato general obtuvo 44.7% + 38.1% = 82.8% en el 2008 y disminuyó hasta 31.2% + 38.6% = 69.8% en 2012; el bachillerato tecnológico obtuvo 47.5% + 38% = 85.5% en el 2008 y disminuyó hasta 26.6% + 39.3% = 65.9% en 2012; por su parte, el bachillerato técnico obtuvo 57.6% + 35.2% = 92.8% en 2008 y disminuyó a 36.1% + 42.8% = 78.9% en 2012. A pesar de la disminución de alumnos con bajo nivel de conocimientos y habilidades, las cifras siguen siendo altas.
Ante tal situación, las diferentes instituciones educativas de México dedicadas al nivel medio superior, pretenden actualmente mejorar la calidad del aprendizaje en los adolescentes de manera que puedan adquirir adecuadamente los conocimientos y desarrollar las habilidades correspondientes.

Finalmente y en relación al gobierno federal de la República Mexicana, en el Plan Nacional de Desarrollo 2007-2012 el presidente de México en aquel entonces, Felipe Calderón Hinojosa, hizo especial hincapié en la problemática educativa nacional (Calderón, 2007). Algunas características que destacó en su informe son el rezago en educación básica por más de 30 millones de personas, las cuales no concluyeron sus estudios, o que nunca cursaron, la primaria o la secundaria. De ellos, la mitad son jóvenes de entre 15 y 35 años. Actualmente los años de escolaridad promedio de las personas entre 15 y 24 años es de 9.7.
El nivel nacional de analfabetismo es de 7.7%, aunque con notables variaciones entre los

estados de la República.

Actualmente, la educación media superior atiende a cerca de tres quintas partes de la población de 16 a 18 años, es decir, 58.6%; si bien la matrícula en este nivel educativo ha crecido notablemente, su eficiencia terminal en 2006 fue de 60.1%.

Por su parte, la educación superior sólo capta a uno de cada cuatro jóvenes de entre 18 y 22 años de edad. De éstos, la gran mayoría, cerca del 94%, estudia licenciatura o sus equivalentes, y aproximadamente el 6% cursa estudios de posgrado.

El Presidente mencionó la disparidad de calidad entre escuelas estatales y rurales así como recursos y enfoques educativos, también establece que la pobreza es la mayor causa de deserción a pesar de los programas de apoyo económicos existentes.

Datos bastante parecidos mostró el gobierno del D.F. En el Cuarto Informe de Gobierno 2009-2012 (Ebrard, 2009).

Con respecto a la máxima casa de estudios del país, es decir, la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), el rector José Narro Robles, en el Plan de Desarrollo 2008-2011 introdujo la problemática educativa nacional desde varias perspectivas: casi la tercera parte de la población se encontraba en atraso educativo, aproximadamente 6 millones de habitantes son analfabetas, más de 10 millones no concluyeron la primaria, 17 millones no terminaron la secundaria, finalmente poco menos de 3.4 millones tienen acceso a la educación media superior (Narro, 2008).

En la Universidad Nacional Autónoma de México existen tres planes de estudio de bachillerato: Escuela Nacional Preparatoria, el Colegio de Ciencias y Humanidades y Bachillerato a Distancia cuyo origen es muy reciente.

Precisamente se sitúa la problemática de este trabajo de tesis en el Colegio de Ciencias y Humanidades, misma que se tratará por separado en la siguiente sección.

El Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH) reportó en su Plan General 2008-2011 una matrícula de 57000 alumnos repartida en sus 5 planteles (Muñoz, 2010). En relación al aprovechamiento escolar, se puede destacar los resultados de exámenes diagnósticos que se aplicaron a los alumnos de nuevo ingreso; los resultados se expresan en promedios y se comparan con el promedio de egreso en educación secundaria. Observe la siguiente tabla.

COMPARACIÓN DE PROMEDIOS GENERALES EN ALUMNOS QUE INGRESARON AL CCH

Generaciones	Promedio de examen diagnóstico	Promedio general de educación secundaria
2009	6.84	8.53
2010	6.52	8.54
2011	6.76	8.57

Fuente: Plan General del CCH 2008-2011 (Muñoz, 2010).

En la tabla anterior se puede observar la disparidad entre los estándares de evaluación que utiliza la educación básica respecto a la media superior, en este caso concreto, la UNAM. Es decir, la UNAM acepta alumnos que obtuvieron los mejores niveles de aprovechamiento escolar según la educación básica, pero al ser evaluados bajo los estándares de la UNAM no satisfacen de la misma forma los resultados.

Ahora bien, con relación a los índices de reprobación y deserción en las asignaturas de matemáticas se puede observar la información proporcionada por la DGCCH a través del Portal de Transparencia y Acceso a la Información de la UNAM (SEPLAN, 2011); observe la tabla siguiente donde se mencionan los porcentajes de reprobación y deserción en las asignaturas de matemáticas del CCH de los años 2009-2011:

ÍNDICES DE REPROBACIÓN Y DESERCIÓN A NIVEL CCH (MATEMÁTICAS), 2009-2011

	Álgebra y Geometría I	Álgebra y Geometría II	Álgebra y Geometría Analítica I	Álgebra y Geometría Analítica II	Cálculo Integral y Diferencial I	Cálculo Integral y Diferencial II
Semestre 2009-1	Desertó: 7.5%	Desertó: 14.5%	Desertó: 17.5%	Desertó: 22.3%	Desertó: 19.8%	Desertó: 25.6% Reprobó:

	Reprobó: 19.1%	Reprobó: 17%	Reprobó: 16.9%	Reprobó: 13.3%	Reprobó: 24.3%	17.3%
Semestre 2010-1	Desertó: 7.4% Reprobó: 19.9%	Desertó: 14.1% Reprobó: 15.7%	Desertó: 17.5% Reprobó: 17.9%	Desertó: 23.9% Reprobó: 13.1%	Desertó: 25.7% Reprobó: 19.1%	Desertó: 24.1% Reprobó: 15.7%
Semestre 2011-1	Desertó: 7.4% Reprobó: 19.2%		Desertó: 19% Reprobó: 17.5%		Desertó: 22% Reprobó: 20.1%	

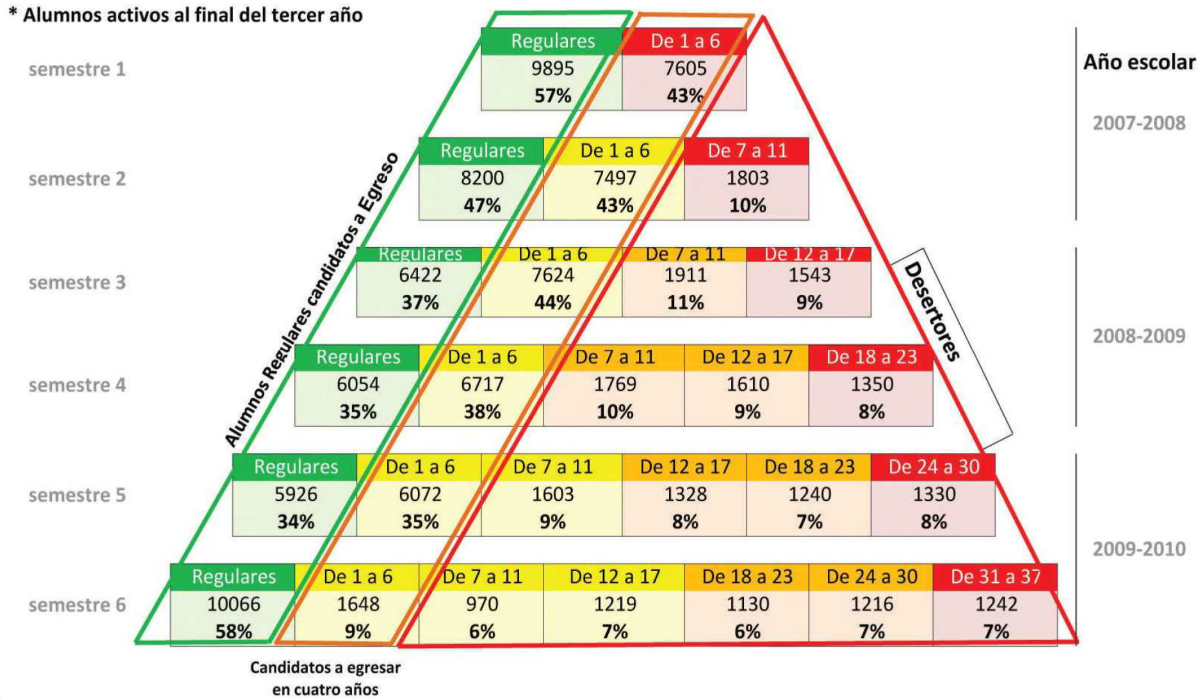
Fuente: Portal de Transparencia y Acceso a la Información de la UNAM (SEPLAN, 2011).

De la tabla anterior, faltan los valores de los semestres pares en el año 2011 ya que se recibió la información al inicio de dicho semestre. Observe que en Álgebra y Geometría I aproximadamente el 26% de los alumnos inscritos no aprueba. En Álgebra y Geometría II, son casi 30% los que no aprueban, por otro lado, en Álgebra y Geometría Analítica son 35%. Finalmente en Cálculo Integral y Diferencial asciende casi a 45%.

Así mismo, la Secretaría de Planeación del CCH realizó un estudio desde hace varios años para conocer las tendencias de aprobación, reprobación y deserción estudiantil, desde el ingreso hasta el egreso en 3 años, los resultados fueron publicados en el Plan General de Desarrollo del CCH 2010-2014 (Muñoz, 2010), para ello construyó un modelo piramidal que informa semestre a semestre el número de alumnos regulares e irregulares según el número de materias reprobadas por semestre.

El estudio actual corresponde a la trayectoria de la generación de ingreso en 2008 y egreso en 2011.

MUESTRA DEL REZAGO ESTUDIANTIL DEL CCH EN ASIGNATURAS DE MATEMÁTICAS DURANTE 2008-2011



Fuente: Plan General 2008-2011 (Muñoz, 2010).

La pirámide anterior muestra, en rectángulos verdes, el número y porcentaje de alumnos regulares en cada semestre del período analizado. Los rectángulos amarillos mencionan los alumnos que deben de 1 a 6 materias en los semestres 2 a 4, así como los alumnos que deben entre 7 y 17 materias al final de los 6 semestres. Finalmente, los rectángulos rojos muestran los alumnos que deben casi la totalidad de materias que inscriben.

Es fácilmente observable que el porcentaje de alumnos regulares en el primer semestre es semejante al porcentaje de los egresados en 6 semestres. Lo anterior ocurre ya que en la etapa final del último semestre, los alumnos responden a la presión de acreditar sus materias dentro del tiempo regular, o sea, en los primeros 3 años.

Por otro lado, si se suman los porcentajes de alumnos que deben más de 7 materias al final del sexto semestre (el último renglón del triángulo de desertores), se observa que en el año 2010 fueron 33% de alumnos en situación de deserción.

Por tanto, en la generación del 2007, de 17500 alumnos que ingresaron, casi 6000 desertó o no concluyó su bachillerato ni siquiera en 4 años. Estamos hablando de que la tercera parte de jóvenes que ingresan al bachillerato cada generación, no consiguen egresar en los primeros 4 años, por lo que posiblemente abandonen su educación sin acreditar el bachillerato.

Así mismo, la otra parte de mexicanos que sigue estudiando no logra desarrollar el nivel educativo respecto a los estándares internacionales donde se evalúa el desarrollo de habilidades matemáticas; incluso en las evaluaciones nacionales, donde los aspectos a evaluar corresponden solamente al dominio de conocimiento, los resultados rebelan bajo aprovechamiento estudiantil. Precisamente en la siguiente sección se presenta un ejemplo concreto de dicho fenómeno nacional de la educación a nivel medio superior, es el caso del plantel sur del Colegio de Ciencias y Humanidades.

1.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

El enfoque didáctico del Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH), correspondiente a las asignaturas del área matemática de los primeros cuatro semestres, concreta las funciones que debe desempeñar tanto el profesor como el alumno para que el proceso enseñanza-aprendizaje se lleve a cabo en cada asignatura, en particular para Álgebra y Geometría Analítica I.

Respecto al profesor:

[...se plantea que en la puesta en práctica de estos programas la enseñanza considere:

- *Introducir el estudio de contenidos mediante el planteamiento de situaciones o problemas que no contemplen de inicio fuertes dificultades operatorias, de modo que la atención pueda centrarse en el concepto, el procedimiento o las características y propiedades que se van a estudiar.*
- *Analizar los enunciados de los diferentes problemas planteados, de manera conjunta estudiante-profesor, con la finalidad de que el alumno adquiera paulatinamente esta habilidad y con el tiempo sea capaz de realizarla de manera independiente.*
- *Proporcionar diversos ejemplos, con la intención de presentar numerosas oportunidades para que el alumno atienda el desarrollo conceptual, practique los procedimientos básicos y entienda la mecánica de los mismos a partir de ideas o estrategias unificadoras.*
- *Promover la formación de significados de los conceptos y procedimientos, cuidando que éstos surjan como necesidades del análisis de situaciones o de la resolución de problemas, y se sistematicen y complementen finalmente con una actividad práctica de aplicación en diversos contextos. Las precisiones teóricas se establecerán cuando los alumnos dispongan de la experiencia y los ejemplos suficientes para garantizar su comprensión.*
- *Propiciar sistemáticamente el tránsito tanto entre distintas formas de representación matemática, como entre éstas y la expresión verbal.*
- *Enfatizar las conexiones entre diversos conceptos, procedimientos, métodos y ramas de la matemática.*

- *Fomentar el trabajo en equipos para la exploración de características, relaciones y propiedades tanto de conceptos como de procedimientos; la discusión razonada, y la comunicación oral y escrita de las observaciones o resultados encontrados...] (Arana, et al., 2010)*

Todo lo anterior, con el fin de que el alumno a su vez
[...sea el principal actor en el proceso de su aprendizaje, adquiera un desempeño satisfactorio en la comprensión y manejo de los contenidos de los cinco ejes temáticos (Álgebra, Geometría, Trigonometría, Geometría Analítica y Funciones), y desarrolle:

- *El empleo de diversas formas de pensamiento reflexivo (sistemático, especulativo y riguroso), particularmente de tipo analógico, inductivo y deductivo.*
- *La adquisición de aprendizajes de manera independiente.*
- *La comprensión del significado de los conceptos, símbolos y procedimientos matemáticos correspondientes al nivel bachillerato.*
- *La capacidad para realizar análisis y establecer relaciones mediante la identificación de semejanzas y el uso de analogías.*
- *La capacidad para formular conjeturas, construir argumentos válidos y aceptar o refutar los de otros.*
- *La capacidad de aprender tanto de los aciertos como de los errores.*
- *La capacidad para efectuar generalizaciones a partir del establecimiento y análisis de similitudes y el uso de razonamientos inductivos o deductivos.*
- *La habilidad en el manejo de estrategias de resolución de problemas.*
- *La incorporación a su lenguaje y modos de argumentación habituales, de diversas formas de expresión matemática (numéricas, tabulares, gráficas, geométricas y algebraicas).*
- *La aplicación de conocimientos en distintos ámbitos de su actividad, con actitudes de seguridad en sí mismo y de autoestima.*
- *El interés por la lectura y comprensión de textos científicos, tanto escolares como de divulgación.*
- *La valoración del conocimiento científico en todos los campos del saber...] (Arana, et*

al., 2010)

La cuestión es que realmente no se logran desempeñar los puntos expuestos arriba durante el proceso enseñanza-aprendizaje de Álgebra y Geometría Analítica I, como evidencia están las evaluaciones PISA, ENLACE y en particular se verá el caso concreto de dos grupos del turno vespertino que cursaron dicha asignatura y no desarrollaron las habilidades como se describe en el perfil de egreso del colegio.

En el período escolar comprendido entre agosto y diciembre del año 2012, es decir, en el semestre 2013-1 de acuerdo al calendario de la Universidad Nacional Autónoma de México, se obtuvo una muestra con índices de reprobación y deserción estudiantil en la asignatura Álgebra y Geometría Analítica I; se trata de la tercera parte de 72 grupos de cursos ordinarios que se imparten en el plantel sur del CCH del turno vespertino, los datos fueron extraídos directamente de los profesores que impartieron la asignatura, la elección de profesores fue arbitraria. Los datos obtenidos en cada grupo fueron: número total de alumnos en el grupo, número de alumnos que jamás asistieron a clase, número de alumnos aprobados.

Al juntar y analizar los datos obtenidos se pudo determinar que de 838 alumnos inscritos en la asignatura Álgebra y Geometría Analítica I, 191 de ellos desertaron; entonces, de 647 alumnos que cursaron la materia sólo 476 logró aprobar la asignatura, es decir, aproximadamente el 56.8% de los alumnos inscritos aprobó la asignatura.

Lo que importa aún más en el presente trabajo es que los 476 alumnos que aprobaron la materia no adquirieron adecuadamente el conocimiento ni las habilidades expuestas en el perfil del egresado del plan de estudios del colegio, pues los mismos profesores lo afirman. Respecto a los 476 alumnos que se mencionan no se obtuvieron evidencias, en cambio, gracias a las prácticas semestrales que realiza cada alumno de la Maestría en Docencia para la Educación Media Superior (MADEMS) fue posible analizar el comportamiento de tres grupos distintos de alumnos en asignaturas del área matemática del Colegio de Ciencias y Humanidades, plantel sur. El objetivo de dichas prácticas es que el maestrante aplique y reafirme los conocimientos adquiridos durante su formación, sobre todo en las asignaturas de nombre Práctica Docente que pertenecen al plan de estudios vigente de la Maestría en Docencia para la Educación Media Superior (MADEMS) de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM). De manera que el maestrante diseña un curso con duración de 20 horas aproximadamente donde se estudie un tema de acuerdo al área de estudio del maestrante, dicha planeación se aplica frente a un grupo de nivel medio superior que sea compatible con el perfil del curso diseñado, para finalmente analizar los resultados obtenidos y compararlos con los objetivos del curso diseñado, aún más, se califica el desempeño del maestrante al aplicar su propuesta didáctica.

Todo maestrante regular cursa cuatro semestres para acreditar el total de las asignaturas que establece la MADEMS, durante esta trayectoria escolar se realizan tres prácticas docentes en total. En el presente caso, las tres prácticas docentes se aplicaron en abril del año 2009, octubre del 2009 y abril del 2010 respectivamente; por ejemplo: en octubre de 2009, la práctica docente se realizó con el grupo 372 del turno vespertino, en este caso los alumnos cursaban la asignatura Álgebra y Geometría Analítica I, justo estaban por estudiar la quinta unidad temática de la asignatura mencionada, la cual se titula “La parábola y su ecuación cartesiana”, algunos de los conceptos de las unidades anteriores del curso son necesarios para poder comprender la quinta unidad, a saber, distancias entre puntos y entre punto y recta, ecuación de una recta, lugar geométrico, localización de puntos y rectas en el plano cartesiano, etc. No obstante, a pesar de haber estudiado todos los conceptos anteriores en los dos meses inmediatos anteriores, argumentaron que no los recordaban con precisión. Incluso se les aplicó un examen diagnóstico donde se les pidió resolver ejercicios concretos para calcular distancias entre puntos y punto y recta, entre otras actividades pero la mayoría de los alumnos contestó menos de la tercera parte del examen.

Por otro lado, en marzo del año 2010, en el mismo colegio, se realizó la segunda práctica docente con el grupo 438 del turno vespertino donde los alumnos cursaban la asignatura Álgebra y Geometría Analítica II, es decir, habían estudiado el tema de parábola justo cuatro meses antes. El objetivo era investigar lo que habían aprendido sobre el tema de “La parábola y su ecuación cartesiana” Primero se les preguntó concretamente lo siguiente:

a) ¿Qué es una parábola según la geometría analítica?

b) ¿Cuál es su representación geométrica?

c) ¿Cuál es su representación algebraica?

d) ¿Cuáles son las partes o elementos que conforman una parábola?

e) ¿Qué relación hay entre ellas?

Los alumnos no fueron capaces de definir la parábola de manera escrita, mencionaron algunos de los elementos que la conforman, tenían una idea vaga de la representación geométrica y respecto a la representación algebraica construyeron una expresión parecida pero con errores de notación. Posteriormente se les presentaron ejercicios a los alumnos de acuerdo al perfil del egresado del CCH y los Conocimientos fundamentales para la enseñanza media superior que establece la UNAM (Oteyza, et al., 2010); la mayoría de los alumnos recordaban haber resuelto ejercicios semejantes pero no tenían claro el procedimiento a seguir.

Cabe señalar que si los alumnos tuvieran las habilidades expuestas en el perfil del egresado del CCH, hubieran tratado de reconstruir el tema nuevamente a partir de sus vagos recuerdos puesto que los elementos de la parábola satisfacen ciertas relaciones que establece la definición matemática. Ahora bien, el hecho de que los alumnos hayan olvidado la mayor parte del tema estudiado resulta hasta cierto punto natural por cuestiones de memorización, ya que se trata de información que no ha sido utilizada durante un tiempo considerable; sin embargo, el perfil del egresado según sus especificaciones garantiza que el alumno sea capaz de deducir, analizar, reflexionar y reconstruir el conocimiento de manera independiente, aún más si fue estudiado con antelación.

Los dos casos arriba expuestos no son casualidad ya que los mismos profesores del colegio reafirman ser testigos del gran desinterés estudiantil dentro del colegio en particular en las asignaturas del área matemática donde se entrevistó a 15 de 37 profesores que imparten la asignatura referida en el turno vespertino. Precisamente cuando se les pidieron los datos de aprobación y deserción a los profesores que impartieron la asignatura de Álgebra y Geometría Analítica I en diciembre de 2012, también se les pidió que comentaran su opinión sobre la principal causa de reprobación en la asignatura, las respuestas fueron contundentes en cuanto al desinterés del alumno, pero también hubo casos donde los profesores argumentaron rezago en conocimiento matemático el cual aumenta con el tiempo dada la seriación de los contenidos en el plan de estudios; también mencionaron las diversas distracciones que existen incluso dentro del plantel, mismas que fomentan vicios y ocio además de ocasionar inasistencias constantes en los alumnos, ello impide un seguimiento adecuado en el estudio de la asignatura. En respuesta al comportamiento estudiantil expuesto, los profesores admiten bajar el nivel de su práctica docente y formas de evaluación con el fin de impulsar el egreso y a pesar de ello la actitud del alumno sigue siendo desinteresada.

En la información proporcionada por el departamento de planeación escolar del colegio (ver tabla “Índices de reprobación y deserción”, pág. 21) se puede apreciar que en los últimos años, del total de alumnos del colegio que cursaron la asignatura, poco más del 60% fue aprobado ya sea de forma regular o extraordinaria. Estamos hablando de cinco opciones para aprobar la asignatura según el Plan General de Desarrollo 2008-2011 (Muñoz, 2010), a saber:

1. Cursos ordinarios. Se refiere precisamente al proceso enseñanza-aprendizaje expuesto por el plan de estudios del colegio.
2. Recursamiento. Es la repetición del curso ordinario para los alumnos no aprobados la primera vez.
3. Cursos sabáticos. Es algo parecido a un curso ordinario pero se reduce considerablemente el tiempo dentro del aula y las sesiones son en día sábado. Generalmente se otorgan a los alumnos que han reprobado la asignatura aún en el recursamiento.
4. Cursos especiales. Son semejantes a los sabáticos pero exclusivos para los alumnos que están próximos a concluir el 100% de créditos.
5. Exámenes extraordinarios. Se aprueba el curso mediante un solo examen.

Como se puede observar, los alumnos que recursan la asignatura significa que la han reprobado una vez, en cambio, los alumnos que ingresan al sabático ya han reprobado al menos dos veces dicha asignatura al igual que en los cursos especiales. Cabe destacar que las opciones de aprobación 2 y 3 forman parte de las estrategias que ha diseñado el colegio para contrarrestar el rezago estudiantil en los últimos años. No obstante, es importante ponderar que sería deseable que ningún alumno tuviera que recursar la asignatura más de dos veces para poder aprobarla. Sin embargo, el alumno puede devaluar los cursos ordinarios dadas las demás oportunidades para aprobar la materia, lo cual podría encausar el desinterés dentro del aula. Aún más, el hecho de que los alumnos recursen varias veces la misma materia implica que no se han adquirido los conocimientos correspondientes y por ende no se desarrollaron las habilidades de razonamiento esperadas.

Por tal motivo, es necesario analizar las causas por las cuales los alumnos a pesar de haber cursado e incluso aprobado la asignatura Álgebra y Geometría Analítica no satisfacen el perfil del egresado que establece el colegio.

Los factores que influyen directamente en la situación planteada son múltiples pero en este trabajo se pretende analizar únicamente los que surgen dentro del aula donde se realiza el proceso enseñanza-aprendizaje, donde los únicos participantes son el profesor y los alumnos.

1.2.1 Causas principales sobre el bajo desarrollo de habilidades de razonamiento matemático en los alumnos que cursan la asignatura Álgebra y Geometría Analítica I del CCH.

- Como causa original podemos destacar los resultados de exámenes diagnósticos que se aplicaron a los alumnos de nuevo ingreso; los resultados se expresan en promedios y se comparan con el promedio de egreso en educación secundaria, observe la siguiente tabla.

COMPARACIÓN DE PROMEDIOS ESCOLARES EN ALUMNOS DE NUEVO INGRESO AL CCH RESPECTO A SU EXAMEN DIAGNÓSTICO Y EL PROMEDIO DE SECUNDARIA

Generaciones	Promedio de examen diagnóstico en el CCH	Promedio de egreso en la secundaria
2009	6.84	8.53
2010	6.52	8.54
2011	6.76	8.57

*Datos extraídos del Plan de Desarrollo 2008-2011 (Muñoz, 2010).

Los datos de la tabla anterior pudieran indicar que las carencias en desarrollo de habilidades tienen origen en el alumno desde antes de ingresar al colegio ya que los alumnos ingresan al CCH sin contar con el conocimiento previo esperado.

- La investigación realizada por la licenciada Monsalvo Carmona se basa en un análisis detallado de porqué reprueban los alumnos en matemáticas en el Colegio de Ciencias y Humanidades, Naucalpan (Monsalvo, 2003). Monsalvo destaca que el enfoque del Colegio de Ciencias y Humanidades está basado en principios pedagógicos derivados de grandes pensadores como Aristóteles, Platón, Dewey, entre otros, cuya ideología establece que más que adquirir conocimiento se debe educar el pensamiento; de manera que el colegio pretende formar al ser humano para que aprenda a aprender, hacer y ser una persona crítica, práctica, creadora, social, histórica, consciente y libre.

Por otro lado, los alumnos que ingresan al colegio, generalmente están acostumbrados a un enfoque totalmente opuesto, donde el profesor informa y dirige en vez de formar; el alumno aprende a permanecer sentado, contestar adecuadamente a lo que pida el profesor, no tiene hábitos de estudio, organización, ni siquiera tiene idea de lo que es un proyecto de vida.

Como consecuencia, su adaptación al enfoque del Colegio se vuelve una tarea ampliamente complicada para los alumnos; por tanto, los alumnos no observan, no cuestionan, no preguntan, no leen ni escriben por iniciativa propia, en pocas palabras no han desarrollado las capacidades para ejercitar el razonamiento científico, por tanto no están listos para enfrentarse a sus problemas, entonces se remiten a escuchar al profesor y tratar de memorizar sin participar activamente en el proceso de aprendizaje.

Monsalvo expresa también: “Los alumnos no entienden lo que saben, lo que escriben o lo que dicen; han tenido que aprenderse tantas cosas en su vida escolar que no se les ha dejado tiempo para entender lo que conocen. Saben sólo de memoria”

Los docentes del colegio que descubren el conflicto del estudiante ante la dificultad de deducir, analizar, reflexionar y observar, deciden abandonar el enfoque del colegio para continuar con el proceso de enseñanza al que están acostumbrados los alumnos, entonces pierden la iniciativa de mejorar e impulsar el aprendizaje, carecen de didáctica en sus prácticas o tienden a dar demasiada libertad a los alumnos y pierden el control del proceso que deberían seguir.

Como resultado a lo anterior expuesto y aunado al desinterés, los alumnos no asimilan los conocimientos sino sólo los memorizan, por lo mismo no desarrollan sus habilidades de razonamiento matemático, entonces hay bajo rendimiento académico, reprobación y deserción estudiantil, las materias de matemáticas son comunes en este fenómeno. Más aún, es causa de aversión a la materia y la mayoría de los alumnos se ven inclinados a evitar por todos los medios el contacto con las matemáticas; incluso este comportamiento influye directamente en la elección de su carrera profesional.

Los profesores entrevistados que imparten la asignatura en cuestión dentro del colegio concuerdan con los siguientes puntos:

- A pesar de ser obligatoria en los planes de estudio como generalmente ocurre con las demás asignaturas del área en cuestión, es de mayor rechazo entre los estudiantes y obtiene el menor nivel de aprovechamiento académico en el colegio junto con la materia de Historia, según datos del Informe General del CCH (Flores, 2011).
- A menudo se suele confundir la comprensión con memorización, es decir, la mayoría de los alumnos piensan que comprenden la información si son capaces de repetirla de memoria; incluso muchos profesores y padres de familia inculcan dicha confusión en sus pupilos. Este fenómeno se manifiesta desde la educación básica, de hecho es la forma como aprendemos a leer, escribir y operar con números.

  En cambio, la comprensión de la información es el fenómeno de asimilar su significado y la relación que guardan las ideas implicadas, de tal forma que teniéndolas por separado se puedan conjugar para recrear la información original (Azeredo, 2003).
- Dado que los temas de matemáticas son seriados, entonces se necesita comprender cada tema para poder comprender los posteriores. Los alumnos que acreditan alguna materia sin haber comprendido su contenido, no podrán comprender el siguiente curso por lo que quedarán rezagados.
- Los alumnos consideran que las matemáticas son un montón de conceptos fuera de la realidad y sólo los profesores las comprenden o en su caso, los alumnos extremadamente brillantes. El nivel de abstracción aumenta en el bachillerato sobre todo en el cálculo diferencial e integral, de hecho es una de las materias de mayor deserción en el nivel superior.

1. 2. 2. Diagnóstico a partir del planteamiento del problema.

En esta subsección se exponen los supuestos que establecen el punto de partida de nuestro trabajo de investigación para luego proponer una posible solución al diagnóstico planteado. De manera que del contexto y el planteamiento del problema se desglosan los siguientes puntos:

La falta de técnicas de estudio y la práctica inexistente de razonamiento científico por parte de los alumnos, genera aburrimiento, desinterés y repulsión en el área temática.

La falta de interés en los alumnos del CCH sobre las asignaturas de matemáticas obstaculiza la comprensión en dicha área.

Los constantes niveles de reprobación y deserción en las asignaturas de matemáticas generan en los docentes desinterés y falta de creatividad para impulsar el aprendizaje del alumno. En su lugar, bajan la calidad de la enseñanza y el nivel de exigencia hacia el alumno.

Las estrategias docentes basadas en la memorización de conceptos matemáticos como sinónimo de aprendizaje impiden la comprensión del alumno en dicha área.

La falta de comprensión por parte de los alumnos del CCH en las asignaturas de matemáticas descarta su aprendizaje.

El bajo rendimiento estudiantil por falta de interés y comprensión deficiente genera carencias de habilidades referentes al razonamiento como lo reflejan las evaluaciones PISA y ENLACE.

El alumno avanza de nivel académico pero no es competente en cuanto a habilidades de pensamiento y no sabe procesar información ni cuestiona las fuentes.

1. 3 HIPÓTESIS.

Para buscar una posible solución a los puntos anteriores se propone lo siguiente:

- Se debe buscar la forma de entrenar las capacidades mentales del alumno para que vislumbre el estudio de las matemáticas como cadena de razonamientos en vez de enunciados y símbolos sin sentido a fin de cambiar su perspectiva de las matemáticas y por ende su actitud ante ellas.
- Para construir los conceptos matemáticos que generarán el conocimiento se debe motivar la participación activa del alumno, en cuanto a razonamiento se refiere.
- Además de lo anterior, es necesario ejercitar la observación, deducción, análisis y reflexión en el alumno, a fin de fomentar la comprensión del tema.

1. 4 OBJETIVO GENERAL DE LA TESIS.

Se propone diseñar una estrategia educativa con base en diversas técnicas de estudio que el alumno debe seguir a fin de promover la comprensión de los conceptos matemáticos contemplados en la unidad temática cuyo nombre es “La parábola y su ecuación cartesiana”, mediante los cuales el alumno podrá desarrollar las habilidades de razonamiento deductivo, reflexivo y analítico.

1. 5 OBJETIVOS ESPECÍFICOS DE LA TESIS.

En vista de que el propósito anterior se limita solamente a la asignatura Álgebra y Geometría Analítica I en la unidad temática “La parábola y su ecuación cartesiana”; se establecen los siguientes objetivos específicos.

1. Interesar al alumno sobre el estudio de la parábola a través de una aplicación de carácter tecnológico, como son los faros automovilísticos, para mostrarle la utilidad del conocimiento matemático.
2. Que comprenda el alumno el tema de parábola con mayor fluidez si se le traducen los términos matemáticos al lenguaje coloquial.
3. Que el alumno asimile el concepto geométrico de la parábola con mayor facilidad construyendo un ejemplo concreto sobre papel a partir de una recta y un punto (que harán la función de directriz y foco respectivamente).
4. Que el alumno descubra el concepto algebraico de la parábola a través de su definición -en términos de distancias- que a su vez sea representada en una ecuación.
5. Que el alumno vislumbre la unidad temática de parábola como conceptos relacionados si se le muestran a manera de mapa conceptual.
6. Que el alumno sea capaz de reconstruir una parábola en términos algebraicos y geométricos a partir del foco y la directriz si se le guía con preguntas o pistas que le ayuden a aplicar lo que ha aprendido.

1. 6 JUSTIFICACIÓN, TANTO DEL TRABAJO DE TESIS COMO DE LOS OBJETIVOS ARRIBA DESCRITOS.

Hay varias razones por las cuales debe apoyarse esta propuesta.

- El tema de parábola corresponde a una unidad temática completa dentro del plan de estudios vigente del CCH, de manera que si el alumno no comprende el concepto de parábola, difícilmente asimilará los contenidos implicados dentro de dicha unidad.
- Es importante que el alumno comprenda el tema de parábola ya que también tiene relación con el tema de ecuaciones cuadráticas y funciones entre otros conceptos, por consiguiente representa un reforzamiento de conceptos previos e introducción al cálculo.
- El rezago escolar de los estudiantes les impide continuar su trayectoria profesional, aún más, continúan ocupando un lugar que otros alumnos de niveles escolares más bajos necesitan para continuar también sus estudios.
- La dificultad para comprender y aplicar el conocimiento matemático por parte de los estudiantes, concretamente en “La parábola y su ecuación cartesiana”, amerita implementar estrategias didácticas que promuevan el aprendizaje.
- El país necesita gente con habilidades de razonamiento matemático, reflexivo, escéptico, analítico, que se interese por la lectura y la investigación para que en el futuro proponga nuevas soluciones a los diversos problemas que nos aquejan hoy en día en México.
- Todo lo anterior genera un gasto económico y social tanto para las instituciones educativas como para el país, mismo que no se recuperará si los futuros profesionistas no corresponden en la misma proporción del problema.
- Nosotros como docentes, sobre todo en el área de matemáticas, debemos promover y guiar constantemente el desarrollo de habilidades de razonamiento en los alumnos para lograr un aprendizaje de calidad. Así que cualquier propuesta con ese objetivo debe ser apoyada para su realización.
- El desarrollo de habilidades de razonamiento matemático es primordial en el proceso de madurez mental del ser humano, de esta forma puede afrontar y resolver problemas de cualquier índole en su vida.

Capítulo 2.

En el presente capítulo se construye una propuesta didáctica con el fin de mejorar las técnicas de estudio de los alumnos que cursan Álgebra y Geometría Analítica I, concretamente en la quinta unidad temática titulada “La parábola y su ecuación cartesiana”.
La forma como se pretende mejorar las técnicas de estudio de los alumnos involucrados se basa en fomentar y ejercitar algunas de las habilidades establecidas en el perfil del egresado del plan de estudios del Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH). Para ser más explícitos en cuanto a los puntos a mejorar, a continuación se compararán los aprendizajes esperados que establece el plan de estudios y las habilidades con las que en realidad terminan el curso los alumnos en cuestión.

Aprendizajes esperados en el alumno después del curso	**Aprendizajes obtenidos en el alumno después del curso**
El alumno es el principal actor en el proceso de su aprendizaje.	El alumno muestra gran desinterés sobre su aprendizaje por lo que sólo sigue las instrucciones del profesor.
Emplea diversas formas de pensamiento reflexivo, analógico, inductivo y deductivo.	Sólo memoriza la información que el profesor le presenta sin cuestionar la fuente ni deducir información nueva a partir de ella.
Comprende el significado de los conceptos, símbolos y procedimientos matemáticos correspondientes al nivel bachillerato.	Sólo se limita a memorizar la teoría y procedimientos de solución a ejercicios matemáticos específicos vistos en clase.
Formula conjeturas, construye argumentos válidos y acepta o refuta los de otros.	No hay discusión entre alumnos, sólo se comentan los procedimientos a seguir y se comparan resultados a la hora de resolver los ejercicios
Maneja estrategias de resolución de	Se ha acostumbrado a seguir las

problemas.	instrucciones del profesor para resolver los ejercicios matemáticos que se le presentan en clase.
Incorpora a su lenguaje y modos de argumentación habituales, de diversas formas de expresión matemática.	Memoriza la información tal cual se le proporciona sin el interés de averiguar su significado.
Aplica conocimientos en distintos ámbitos de su actividad, con actitudes de seguridad en sí mismo y de autoestima.	Considera las matemáticas como algo totalmente aislado del mundo en que vive. Se muestra inseguro e incapaz para intentar aplicar conocimientos matemáticos.

Se puede ver con mayor claridad que los objetivos específicos expresados en el capítulo anterior, sección 1.5 (pág. 36), pretenden solventar algunas de las carencias expuestas en la comparación anterior. A saber:

Mediante los objetivos específicos: 2, 3, 5 y 6 se pretende fomentar y ejercitar en el alumno el pensamiento reflexivo, analógico, inductivo y deductivo.

El objetivo 4 pretende guiar al alumno a descubrir el significado del conocimiento matemático cuando se traduce la información al lenguaje común para poder comprender y asimilar los conceptos de manera natural y directa.

Finalmente, el objetivo 6 pretende introducir al alumno en la construcción de argumentos que ayuden a aplicar y relacionar los conceptos matemáticos como parte de un tema de estudio completo que a su vez genera herramientas para la solución de problemas relacionados con el tema estudiado.

2.1 METODOLOGÍA DE LA PROPUESTA DIDÁCTICA

Para expresar la metodología didáctica mediante la cual se planea conseguir los objetivos arriba expuestos será necesario recurrir a la influencia de diversas estrategias didácticas ya existentes.

El tema central de los enfoques aplicados está fundamentado en la Psicología Educativa; esta rama de la Psicología se encarga de estudiar los métodos de aprendizaje y enseñanza, los factores que intervienen en dicho fenómeno formativo y las estrategias que generan mejores resultados en los alumnos, entre otros aspectos.

Las aportaciones de la Psicología Educativa son amplias en cuanto a teorías del aprendizaje, pero sólo se retomarán las que convengan a nuestros objetivos ya mencionados, es el caso del cognitivismo y constructivismo ya que ambos enfoques involucran totalmente la participación del alumno para realizar un adecuado y eficaz procesamiento de la información como medios para promover el aprendizaje en el alumno.

A continuación se explica brevemente cada enfoque:

Cognitivismo. Estudia los procesos mentales y los mecanismos básicos y profundos implicados en el conocimiento, desde la percepción, memoria, aprendizaje hasta la formación de conceptos y razonamiento lógico. El acto del conocimiento incluye las acciones de almacenar, recuperar, reconocer, comprender, organizar y usar la información recibida a través de los sentidos.

El principal precursor de esta teoría del aprendizaje es Jerome Bruner (1915-). Psicólogo estadounidense quien en 1976 introdujo el “andamiaje educativo” como una metodología de enseñanza mediante la cual se le proporcionan apoyos estratégicos al alumno, es decir, es una forma de aprendizaje guiado, tal que se disminuye de manera gradual la ayuda durante el proceso a medida de que el alumno madura hasta obtener su independencia cognitiva (Trianes y Gallardo, 1998).

Otro famoso seguidor de dicha teoría fue Jean William Fritz Piaget (1896-1980). Psicólogo y filósofo suizo quien se interesó en el aprendizaje y las habilidades cognitivas entre otros aspectos; de ahí surge su teoría del desarrollo cognitivo donde destaca que el ser humano puede procesar la información de acuerdo a su entorno y las capacidades cognitivas correspondientes a su edad. Por ello estableció cuatro estados cognitivos por los que pasa el ser humano. El primero es el estado *sensorio-motor* y se manifiesta en los bebés de 0 a 2 años aproximadamente donde el bebé aprende a través de sus sentidos y movimientos. El segundo estado es el *preoperatorio* y caracteriza el comportamiento de los niños entre 2 y 7 años de edad donde el alumno tiende a interiorizar las reacciones de cada acción aunque no siempre de manera asertiva. El tercer estado se llama de *operaciones concretas* y se manifiesta generalmente en niños de 7 a 11 años, en dicho estado los niños son capaces de usar y conservar símbolos de modo lógico para luego generalizar operaciones en busca de solucionar problemas de tamaños o medidas. Finalmente, el cuarto estado se desarrolla alrededor de los 12 años donde el ser humano entra en el estado de *operaciones formales*, precisamente en dicho estado se centrará la propuesta didáctica pues, según Piaget, los alumnos de nivel medio superior tienen la capacidad cerebral de formular pensamientos abstractos, hipotéticos y deductivos.

Constructivismo. Surgió en la década de los años sesentas del siglo pasado; esta corriente desarrolla en el individuo tanto los aspectos cognitivos, sociales como los afectivos del comportamiento. Según esta posición, el conocimiento no es una copia de la realidad, sino una construcción del ser humano, esta construcción se realiza con los esquemas que la persona ya posee (conocimientos previos), o sea con lo que ya construyó en su relación con el medio que lo rodea. Esta construcción que se realiza todos los días y en todos los contextos de la vida, depende sobre todo de dos aspectos: la representación inicial que se tiene de la nueva información y la actividad externa o interna que se desarrolla al respecto.

En definitiva, todo aprendizaje constructivo supone una construcción que se realiza a través de un proceso mental que conlleva a la adquisición de un conocimiento nuevo. Pero en este proceso no es solo el nuevo conocimiento que se ha adquirido, sino, sobre todo la posibilidad de construirlo y adquirir una nueva habilidad que le permitirá generalizar, es decir, aplicar lo ya conocido a una situación nueva. En este Modelo educativo el rol del docente cambia: es moderador, coordinador, facilitador, mediador y también un participante más. El constructivismo supone también un clima afectivo, armónico, de mutua confianza, ayudando a que el alumno se vinculen positivamente con el conocimiento y por sobre todo con su proceso de adquisición. Además de ello, esta corriente promueve un aprendizaje más complejo al relacionar conocimiento previo con uno nuevo en vez de enunciar conceptos aislados.

Entre los teóricos constructivistas más destacados se encuentran:

Por supuesto Jean Piaget, quien a pesar de haberlo mencionado antes en el cognitivismo inspiró este nuevo enfoque con sus teorías posteriores.

También colaboró Lev Semionovich Vygotsky (1896-1934). Psicólogo bieloruso, entre otros estudios, al igual que Piaget analizó los factores que intervienen en el desarrollo mental, sólo que éste le dio mayor realce a los de ámbito social y cultural, es decir, Vygotsky pensaba en la influencia de las relaciones sociales respecto del aprendizaje del ser humano en sí, mientras que Piaget otorgaba mayor importancia al trabajo cognitivo individual donde se reformula el conocimiento propio a partir de experiencias previas y nuevas. También participó David Paul Ausubel (1918-). Psicólogo estadounidense que ha contribuido al constructivismo con su teoría del aprendizaje significativo, la cual ocurre cuando una nueva información "se conecta" con un concepto relevante preexistente en la estructura cognitiva, esto implica que, las nuevas ideas, conceptos y proposiciones pueden ser aprendidos significativamente en la medida en que otras ideas, conceptos o proposiciones relevantes estén adecuadamente claras y disponibles en la estructura cognitiva del individuo y que funcionen como un punto de "anclaje" a las primeras.

La teoría de Ausubel establece las pautas para mejorar el aprendizaje mediante la mezcla de ciertos puntos de los enfoques mencionados; dicho de otra forma, Ausubel no es puramente constructivista, sin embargo sus aportes son enriquecedores en el ámbito educativo al exponer estrategias de enseñanza según la situación y los objetivos que se pretendan alcanzar.

Por lo anterior, se pretende involucrar al alumno en el proceso enseñanza-aprendizaje, convirtiéndolo en el constructor de su propio aprendizaje; es decir, el profesor debe dejar de decirle qué y cómo hacer sino más bien encaminarlo estratégicamente hacia un objetivo específico, pero el ritmo y modo dependerán de la respuesta del alumno y su conocimiento previo además de las circunstancias en las que se desarrolle el proceso. De hecho el trabajo de Juan Ignacio Pozo propone una cultura del aprendizaje basada en las teorías arriba expuestas sobre aprendizaje guiado, donde el profesor sólo sirve de guía al alumno en su proceso formativo, de manera que éste último pueda involucrarse en mayor proporción, al manipular la información, analizarla, clasificarla, aplicarla por sí mismo, favoreciendo su desarrollo cognitivo por ser partícipe activo durante el proceso (Pozo, 2006).

Hasta este momento se ha colocado la base de la propuesta que corresponde al modo de trabajo entre el profesor y el alumno durante el proceso enseñanza-aprendizaje. Ahora se aplicarán las técnicas de estudio adecuadas a los objetivos buscados con relación a la labor del alumno, así como las estrategias didácticas que el profesor debe seguir para guiar el procedimiento. Lo anterior tiene base en los objetivos específicos expuestos en el capítulo 1 (pág. 36).

Por motivos ajenos a este proyecto y en términos del tiempo establecido para la elaboración del mismo, la propuesta está pensada únicamente para la quinta unidad de la asignatura Álgebra y Geometría Analítica I, es decir, "*La parábola y su ecuación cartesiana*".

A continuación se proporcionan los temas de la unidad V de la asignatura Álgebra y Geometría Analítica I:

La parábola como lugar geométrico.

a) Trazo de la parábola y sus propiedades.

b) Definición geométrica de la parábola.

c) Elementos que definen a la parábola: foco, directriz, eje de simetría, lado recto. Relación entre ellos.

d) Definición de parábola como lugar geométrico.

Ecuación de la parábola con eje paralelo a alguno de los ejes de coordenadas:

a) Ecuación ordinaria con vértice en el origen.

b) Ecuación ordinaria con vértice fuera del origen.

c) Ecuación general.

Aplicaciones:

a) Problemas de corte geométrico.

b) Problemas diversos que surgen de las características de esta curva.

Ahora se presentan los aprendizajes esperados respecto a "La parábola y su ecuación cartesiana":

El alumno:

A) Realiza al menos una construcción de la parábola, y en función de ello:
B) Identifica los elementos que la definen.
C) Reconoce la simetría de esta curva.
D) Enuncia la definición de parábola como lugar geométrico.
E) Expresa, como paso intermedio, la característica que define a los puntos de la parábola, por medio de la expresión: $d(\mathcal{P}, \mathcal{F}) = d(\mathcal{P}, \mathcal{L})$
F) Deduce la expresión con radicales que expresa la propiedad de los puntos de dicho lugar geométrico.

G) A partir de la expresión anterior, deduce la ecuación ordinaria (con vértice fuera del origen) de la parábola.

H) Distingue, de acuerdo a las condiciones dadas (coordenadas del foco, ecuación de la directriz u otros) cuándo es parábola horizontal o vertical, y hacia dónde se abre.

I) Relaciona lo que estudió para funciones cuadráticas respecto al papel de los parámetros dentro del comportamiento de la gráfica de la parábola vertical.

J) Utiliza esto último para analizar la relación entre los parámetros y la gráfica de las parábolas horizontales.

K) Infiere que para transitar de la ecuación general de la parábola a la ecuación ordinaria, requiere, como en el caso de la elipse y la circunferencia, aplicar el método de completar cuadrados que ya conoce. Se ejercitará al respecto.

L) Valora ventajas y desventajas de cada una de las formas, ordinaria o general, en la graficación y análisis de esta curva.

M) Determina los elementos esenciales de una parábola a partir de su ecuación dada en la forma ordinaria o general, y los utiliza para bosquejar su gráfica.

N) Concatena sus argumentos y deducciones en el proceso de obtener la definición, la ecuación y la gráfica de una parábola.

O) Aplica los conocimientos adquiridos sobre esta curva, en la resolución de algunos problemas.

Para diseñar la propuesta didáctica se partirá de cada objetivo específico (vistos en pág. 36) para elegir las estrategias didácticas adecuadas en cada caso, aunado a los aprendizajes esperados arriba expuestos.

Antes cabe destacar el trabajo de Estévez el cual sirvió de inspiración para desarrollar cada uno de los objetivos específicos (Estévez, 2004). En dicha investigación recopila la ideología de Piaget y Ausubel para proponer cuatro etapas de aprendizaje como procedimiento para lograr una buena comprensión y asimilación de la información, éstas son:

- *Percepción Analítica*. El alumno observa un fenómeno o situación real y la analiza con el fin de descubrir en ella una aplicación del conocimiento. Representa el primer contacto del alumno con la información nueva.
- *Síntesis Integradora*. Es la reunión de datos de la etapa anterior para organizar y estructurar el conocimiento obtenido. El alumno distingue lo que conoce en la nueva información y lo que desconoce.

- *Consolidación o Fijación*. El alumno utiliza el conocimiento previo en general y la información nueva (obtenida en las etapas anteriores) para aplicarlo a la construcción de un nuevo concepto. Es la etapa que implica mayor habilidad cognitiva para procesar la información mediante la investigación profunda para desarrollar el nuevo concepto y la asimilación de una nueva estructuración mental donde se mezcla el conocimiento previo y nuevo en base a la experiencia cognitiva desarrollada hasta ese momento.
- *Reflexión Metacognitiva*. El alumno identifica el nuevo concepto aplicado en otras situaciones, a pesar de la complejidad que presente y puede aplicar el producto final para crear de forma independiente, nuevos conceptos en diversos ámbitos.

Ahora sí, se elegirán las estrategias que conformarán la propuesta didáctica con base en los objetivos específicos que se reescribirán a manera de recordatorio según sean necesarios.

El objetivo específico 1 es: Interesar al alumno sobre el estudio de la parábola a través de una aplicación de carácter tecnológico, como son los faros automovilísticos, para mostrarle la utilidad del conocimiento matemático.

Dada la repulsión que le producen las matemáticas al alumno, es importante disminuir la descarga directa de los conceptos matemáticos en las clases para revestirlos de situaciones que se puedan vislumbrar en un entorno diferente del aula. Esta idea proviene de Denyer quien aconseja llevar al alumno al mundo real desde donde surge una aplicación y estudio de un tema matemático antes de adentrarse al nuevo conocimiento (Denyer, 2004).

Las estrategias elegidas para atraer la atención y el interés del alumno sin mencionar de entrada el tema de parábola son:

- Presentar al alumno los cambios de luz producidos por el movimiento de un foco a través de la pantalla de un faro automovilístico común.

  El alumno desconoce que la forma paraboloidal de los faros se debe a la propiedad de reflexión que presenta la parábola, precisamente ese es el tema pero se introducirá hasta que el alumno haya observado la aplicación de la matemática en los faros. Esta estrategia también se relaciona con fomentar la habilidad de observación; como lo menciona Pozo quien establece que el tema a estudiar debe surgir desde un entorno real para que el alumno lo perciba como algo creíble desde donde es posible aprender algo; además que el alumno sepa que la nueva información tiene cierta utilidad dentro del mundo en que vive y una razón de ser (Pozo, 2000).

- Cuando el alumno sabe que el tema a estudiar es la parábola, el alumno debe conectar el tema, cuya presentación es plana, con los paraboloides que son tridimensionales, para ello, se buscó la manera de relacionar el faro automovilístico tridimensional con un concepto plano, entonces es oportunidad de reforzar la atención del alumno con un pequeño y sencillo experimento a base de pilas alcalinas que generan movimiento (dicha técnica fue mostrada como estrategia didáctica en un taller de estrategias didácticas impulsado por el Centro de Docencia de la UNAM en julio de 2010), es decir, se le muestra visualmente el giro de una curva plana en forma de parábola que al dar vueltas de 360 grados sobre su eje genera un paraboloide. (Ver Figura 1).

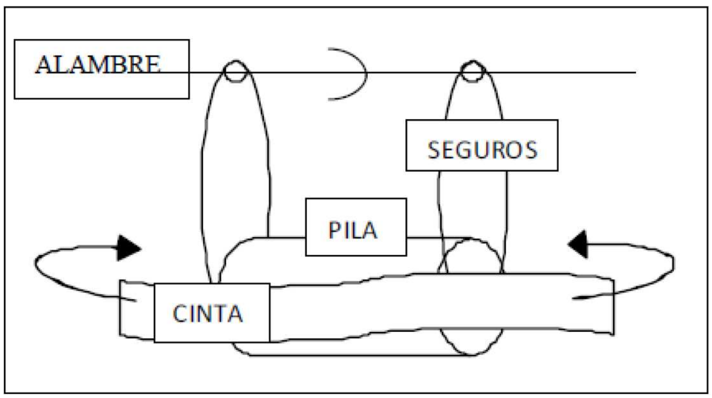


Figura 1. Se sujetan los seguros en los polos de la pila con cinta de aislar y se forma una parábola con el alambre de cobre barnizado como se muestra en la figura, de tal forma que al impulsar ligeramente el alambre se producirá un giro de 360 grados del alambre sobre su eje gracias a la energía de la pila, entonces se podrá observar una ilusión óptica con forma de paraboloide.

Ahora bien, puesto que el alumno mexicano está acostumbrado a buscar y recopilar información concreta (como lo ha destacado la evaluación de PISA 2003), es el momento de aprovechar dicha habilidad como estrategia de siguiente objetivo específico.
Objetivo específico 2: Que comprenda el alumno el tema de parábola con mayor fluidez si se le traducen los términos matemáticos al lenguaje coloquial.
La estrategia referente al objetivo específico 2, debe combatir la dificultad de asimilar la información con respecto a los conceptos matemáticos. Se sabe que los alumnos afirman no comprender las matemáticas por la terminología y notación matemática empleada. Entonces

se propone convertir los conceptos al lenguaje coloquial ya que el lenguaje matemático es el primer obstáculo en el alumno para conseguir la comprensión como se vio en el capítulo 1. Este procedimiento consta de 4 pasos:

1. El alumno busca y reúne información pertinente para resolver el siguiente cuestionario guía que el profesor proporcionará al alumno con el fin de identificar el tema principal, sus características y conceptos relacionados.

CUESTIONARIO GUÍA
• ¿Qué es una parábola?
• ¿Qué tipos de parábola hay y cuáles son las formas de representarlos?
• ¿Cuáles son las partes que conforman una parábola?
• ¿Qué relación hay entre las partes que conforman una parábola?

Con la información reunida en esta actividad, se desarrollará toda la unidad temática.

2. Para fomentar el trabajo en equipo se le pide a cada alumno que consulte una fuente (proporcionará la fuente bibliográfica en su trabajo terminado) y luego en equipos de 3 alumnos se resolverá el cuestionario usando toda la información reunida.
3. Cada equipo localizará en su información reunida las palabras cuyo significado no conoce, entonces lo buscará en el diccionario (incluirá dicho glosario en su trabajo terminado).
4. Dentro de clase, el profesor y los alumnos discutirán el significado de todas las palabras “desconocidas” para relacionarlas con lo que ellos ya conocen; una forma de hacerlo es intercambiando la palabra desconocida por un sinónimo cuyo significado sea conocido, esto se puede aplicar a palabras de vocabulario general; con respecto a los conceptos matemáticos que el alumno no conoce o no recuerda la definición, el profesor debe hacer alusión a los temas y conceptos previos con los que el alumno ya está familiarizado para que el nuevo concepto se traduzca en conceptos previamente asimilados por el alumno.

El objetivo específico 3 es: Que el alumno asimile el concepto geométrico de la parábola con mayor facilidad construyendo un ejemplo concreto sobre papel a partir de una recta y un punto (que harán la función de directriz y foco respectivamente).

Este objetivo va encaminado a fomentar los aprendizajes esperados que se enumeran en los incisos A-E de la página 43.

Dado que es elevado el nivel de abstracción de los conceptos matemáticos implicados en el tema “La parábola y su ecuación cartesiana”; se recurrirá a realizar actividades tangibles donde el alumno sea testigo del significado gráfico y visual del concepto geométrico de parábola.

Dicha actividad consiste en la construcción gráfica de una parábola mediante el doblado de papel albanene donde se exprese concretamente el concepto de parábola a partir de un punto y una recta.

El procedimiento anterior lo propone el portal académico del Colegio de Ciencias y Humanidades (PEA, 2011).

Se menciona ahora el objetivo 4: Que el alumno descubra el concepto algebraico de la parábola a través de su definición -en términos de distancias- que a su vez será representada en una ecuación.

La estrategia es exponer al alumno el origen de la ecuación ordinaria de la parábola a través de operaciones algebraicas sencillas, todo esto sin pedir al alumno que profundice en dicha construcción sino solamente buscar que el alumno vislumbre la parábola como la interpretación algebraica de un concepto gráfico en vez de una simple fórmula que aparece repentinamente y sin razón u origen aparente.

Esta estrategia pretende fomentar los aprendizajes F y G de la página 43.

Como el alumno no debe ser abrumado con tanto contenido matemático y en vista de que el objetivo de esta estrategia no es profundizar la matemática pura del tema, se explicará al alumno que solo se pretende explicar el sustento matemático de la ecuación, para que no asuma la ecuación como imposición sin origen aparente. Así que el profesor sólo leerá el procedimiento y se le proporcionará al alumno una copia para dar pie a que en otro momento lo pueda leer detenidamente si así lo desea.

Una vez que el alumno ha comprendido el concepto principal, está listo para adentrarse al tema y para ello se recurrirá a la información restante que recopiló el alumno con anterioridad.

Para que la información adquiera sentido y significado en el alumno se propone aplicar tres estrategias ya que se pretende abordar el procesamiento de la información de diversas formas:

La primera estrategia se refiere precisamente al objetivo específico 5: que el alumno vislumbre la unidad temática de parábola como conceptos relacionados si se le muestran esquematizados en un mapa conceptual.

Los mapas conceptuales fueron creación de Novak quien establece la necesidad de estructurar la información para favorecer su asimilación aunada a la relación entre los conceptos implicados (Novak, 1977).

En este caso se impulsarán los aprendizajes esperados H-N de la página 43.

Lo que pretende esta estrategia es evitar que el alumno construya el aprendizaje como conceptos aislados e invitarlo a visualizar el tema completo en forma de resumen.

El mapa conceptual que se propone como primera estrategia del objetivo específico 5 no es más que la organización de la información reunida en el cuestionario guía, de tal forma que el alumno pueda descubrir la relación de los conceptos implicados.

La imagen y estructura del mapa conceptual que se propone a continuación (Figura 2) es original y pretende que se complemente con dibujos en la parte geométrica, ecuaciones en la parte algebraica y demás notación que encierra el concepto de parábola.

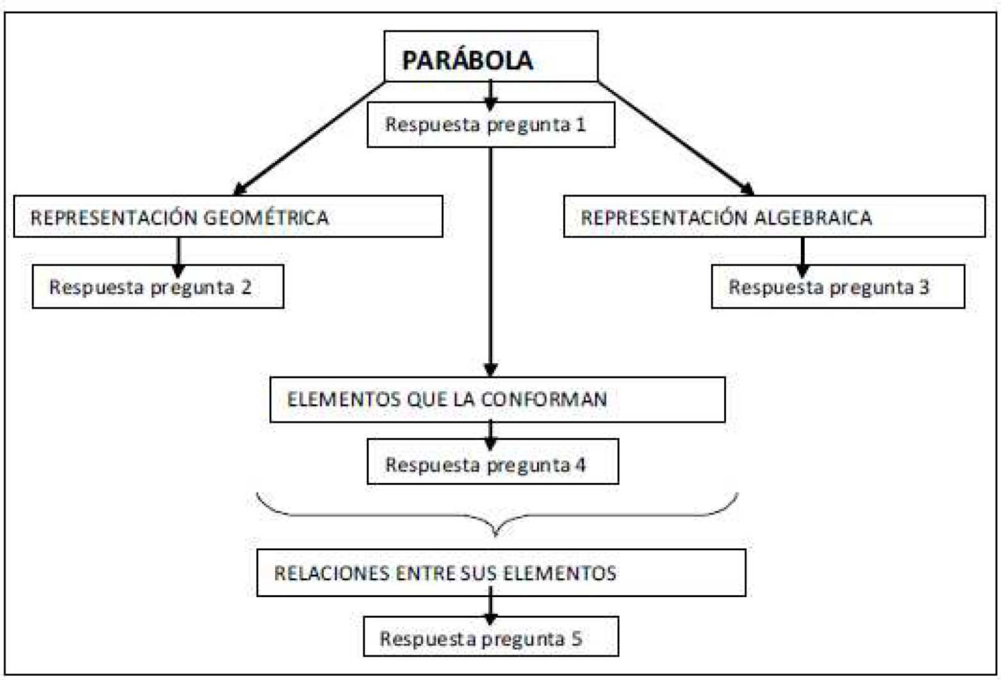


Figura 2. Esbozo del mapa conceptual con el que se esquematizará el tema de parábola. El contenido del mapa será de tipo geométrico, algebraico y de notación común también.

El alumno verá primero el mapa conceptual sin saber la colocación de las respuestas al cuestionario guía, entonces observará cómo se completa el mapa conceptual a lo largo de las estrategias referentes a los objetivos 4 a 6.

La segunda estrategia del objetivo 5 va ligada al desarrollo de habilidades matemáticas a través del procesamiento de la información implicada en el contenido del mapa conceptual. Cabe señalar que las habilidades de observación, reflexión, deducción y análisis de datos aparecen constantemente en las estrategias didácticas de matemáticas además de otras asignaturas experimentales, incluso aparecen como habilidades a desarrollar en los planes de estudio de los bachilleratos en México, además del CCH (Arana, et al., 2010), como son: Colegio de Bachilleres, CECYT, CET, CETIS, DGETI, ENEP, bachilleratos de gobierno e incorporados a la SEP (DGENEP, 2010). Por ello, se pretende impulsar concretamente el desarrollo de las habilidades arriba mencionadas.

Por tanto, la segunda estrategia tiene sustento en la Teoría del aprendizaje significativo. Este es el momento esencial del proceso de aprendizaje, ya que se desglosa cada concepto y se estudia como parte del todo, además el profesor complementará la información que considere necesaria para completar el tema general en caso de que no haya sido proporcionada por los alumnos.

Como tercera estrategia del objetivo 5, misma que está ligada a las dos anteriores, se utiliza el método socrático conocido como mayéutica, donde el profesor guía al alumno con preguntas concretas que dependen totalmente de la respuesta del alumno para encaminarlo hacia un objetivo previamente determinado. Esta práctica ha sido retomada y aplicada actualmente por varios autores como es el caso del libro "*Lecturas para maestros*" (Guevara, 2005).

La clave de las preguntas que realiza el profesor es tener en claro los elementos gráficos de la parábola para remarcar las relaciones existentes entre ellos.

Las relaciones que el profesor debe lograr que el alumno asimile son:

- La distancia entre el vértice y el foco se connota como parámetro especial dentro de la ecuación de una parábola.
- El vértice es punto medio entre el foco y la directriz.
- El lado recto mide el cuádruple de la distancia entre el vértice y el foco.
- El eje focal es perpendicular a la directriz.

- Por supuesto no debe olvidar que cualquier punto de la parábola se encuentra a la misma distancia de la directriz y del foco.

Para favorecer la asimilación de las relaciones anteriores, el profesor usará casos particulares y numéricos donde sean evidentes dichas relaciones. Los anteriores puntos están diseñados para deducir los aprendizajes esperados H-N de la página 43. En este momento el mapa conceptual queda completamente terminado con las respuestas concretas al cuestionario guía del trabajo de investigación que el alumno realizó desde el inicio y la participación complementaria del profesor.

Resta mencionar un objetivo específico, es decir, el 6, que precisamente está relacionado con el último aprendizaje esperado de la página 43: el alumno debe ser capaz de reconstruir una parábola en términos algebraicos y geométricos a partir del foco y la directriz. La estrategia es guiar al alumno con preguntas o pistas que le ayuden a aplicar lo que ha aprendido.

Para alcanzar el aprendizaje esperado la inspiración fue el enfoque PISA (OCDE, 2003), el cual fue dedicado especialmente a la solución de problemas matemáticos. Esto requiere diferentes destrezas, entre ellas:

- Razonamiento y pensamiento.
- Argumentación.
- Comunicación.
- Construcción de modelos.
- Planteamiento y solución del problema.
- Representación y utilización de operaciones.
- Lenguaje técnico, simbólico y formal.

El enfoque PISA (OCDE, 2003) mide el conocimiento y habilidades matemáticas en tres dimensiones:

1. *Contenido.* Se refiere a los conceptos que involucra el problema planteado, éstos pueden ser de tipo geométrico, algebraico, aritmético o relativo a fenómenos estadísticos y probabilísticos. En este caso se trata de conceptos geométricos, algebraicos y aritméticos.
2. *Procesos.* Es la serie de pasos o acciones que conducen a la solución del problema. Primero los alumnos deben situar el problema dentro del contexto real, desde éste

deben plantearlo en términos matemáticos y para ello puede ser necesario realizar un proceso de investigación sobre los conceptos matemáticos involucrados en el problema, después de ello resolverán el problema como una especie de ejercicio matemático, el cual tendrán que traspasarlo nuevamente al contexto real del que fue extraído. Dentro de esta dimensión tiene lugar el desarrollo de varias habilidades matemáticas que son: razonamiento y pensamiento, argumentación, comunicación, construcción de modelos, planteamiento y solución del problema, representación, utilización de operaciones, lenguaje técnico, simbólico y formal. En este caso y con base en los aprendizajes esperados del plan de estudios del colegio, el alumno debe graficar la parábola a partir de su ecuación canónica, convertir la ecuación parabólica de forma general a canónica y construir la ecuación parabólica a partir de algunos de sus elementos que la conforman.

3. *Situaciones y contextos involucrados.* Representa la conexión entre el conocimiento matemático y una situación real donde tiene aplicación dichos conceptos. La conexión puede relacionarse con la vida cotidiana del alumno, su entorno escolar, laboral, público o también puede ser de tipo científico o tecnológico.

Entonces, según el enfoque PISA, lo importante de la educación no es adquirir conocimientos sino ayudarle al alumno a averiguar lo que es capaz de construir con el conocimiento adquirido y la experiencia que ya posee.

Una forma de reafirmar el conocimiento adquirido, es reconstruir el tema independientemente del punto de partida que se elija; es común en estos casos mostrar al alumno la solución de ejercicios específicos del tema para que ejercite los procesos de solución, lo cual disminuye la creatividad en el alumno así como la capacidad de reflexionar y deducir.

En cambio, en este trabajo se propone pedir al alumno que resuelva un ejercicio sin mostrarle el proceso de solución a seguir para que el alumno emplee su razonamiento lógico y deductivo además de la aplicación de toda la información procesada hasta el momento; por supuesto será necesaria la asesoría del profesor. El ejercicio solicita obtener la ecuación general de la parábola a partir de dos elementos que la conforman.

La estrategia es utilizar el método mayéutico y el andamiaje educativo de Bruner en una lista de consejos para que el alumno identifique los recursos que facilitarán la solución del ejercicio. Los consejos son:

CONSEJOS

- Obtenga la ecuación parabólica en forma ordinaria.
- Identifique la posición de la parábola para descubrir si se usará la ecuación de una parábola horizontal o vertical.
- ¿Qué datos aparecen en la ecuación parabólica en forma ordinaria?
- Para encontrar los datos de la ecuación que no están proporcionados en el ejercicio, debe usar los datos que sí se muestran así como las relaciones entre ellos.
- Identifique el signo del parámetro p, para conocer la abertura de la gráfica y reflejarlo en la ecuación buscada.
- Después de determinar la ecuación parabólica en forma ordinaria, conviértala a la forma general.

Por supuesto el profesor contará con el apoyo de los consejos anteriores para encaminar el trabajo mental del alumno pero debe complementarlo dependiendo de las respuestas que obtenga a fin de que los alumnos sigan el proceso de solución deseado. El objetivo de seguir los consejos y agregar otros en caso necesario es fomentar el razonamiento lógico del alumno con base en las relaciones que se establecieron anteriormente entre los conceptos que conforman la definición de parábola.

Primero se propone construir un repaso de todo el tema. Recuérdese que el alumno es el ejecutor principal, el profesor sólo le apoyará con preguntas que le ayuden a reconstruir el tema estudiado para poder aplicarlo en el ejercicio planteado; luego, el profesor le dará pistas para que el alumno descubra las herramientas que necesita (o bien, los conceptos que debe aplicar en el ejercicio) para resolver el ejercicio.

Entonces se recomiendan los siguientes pasos en el orden indicado:

<u>Paso 1:</u> Leer el ejercicio para averiguar qué datos se proporcionan y qué datos hay que descubrir. Desglosar la información que implica cada dato proporcionado así como las relaciones entre ellos de tal forma que se vayan descubriendo los datos faltantes de la parábola. Puede facilitar la obtención de los datos si se van trazando en el plano para visualizar la estructura gráfica de la parábola y por ende sus elementos.

<u>Paso 2:</u> Después de plantear lo que implica cada dato del ejercicio planteado así como las relaciones entre ellos, hay que vislumbrar la relación de lo expuesto con lo que se debe descubrir para que se puedan conectar ambas partes del problema (lo conocido con lo desconocido) esta última acción le dará al alumno la pauta final para resolver el ejercicio si

aplica todo el conocimiento reunido en los datos específicos, ya sea expresar la ecuación ordinaria o general de la parábola.

Esta actividad pretende ampliar el panorama del tema y reafirmar los conocimientos adquiridos en el alumno.

Para complementar y reforzar el conocimiento adquirido, se propone retomar el experimento inicial relacionado con los faros automovilísticos para que el alumno conecte lo aprendido con la realidad. Cabe recordar que el alumno percibió cambios de luz por medio de la pantalla de un faro automovilístico y el movimiento del foco dentro de ésta. La propuesta es mencionar al alumno la propiedad de reflexión como conocimiento extra en el tema; la profundidad de ésta sección dependerá de la curiosidad del alumno.

Se han utilizado todos los objetivos específicos que ayudaron a construir la propuesta didáctica, ahora bien, para formalizarla se expone a continuación el procedimiento a manera de secuencia didáctica donde se realicen las actividades arriba descritas.

La propuesta didáctica consiste en 6 etapas de aprendizaje donde toman forma cada uno de los seis objetivos específicos de la página 36, en los cuales el alumno adquiere el conocimiento, estudia su significado para poder asimilarlo, lo analiza y comprende para luego aplicarlo, finalmente el alumno reflexiona sobre el procedimiento realizado para poder reafirmar el aprendizaje. Veamos con mayor detalle el contenido de las etapas.

2.2 MUESTRA DE LA PROPUESTA DIDÁCTICA APLICADA AL TEMA “LA PARÁBOLA Y SU ECUACIÓN CARTESIANA”.

En esta sección se desarrollan explícitamente las estrategias didácticas a modo de actividades planeadas para el estudio de la quinta unidad temática del tercer semestre del plan de estudios del CCH (Arana, et al., 2010), cuyo nombre es “La parábola y su ecuación cartesiana”.

En el siguiente párrafo se exponen las razones por las cuales se eligió “la parábola y su ecuación cartesiana” para aplicar la propuesta didáctica.

El programa de asesorías del Colegio de Ciencias y Humanidades, Plantel Sur, está a cargo de estudiantes de licenciatura próximos a egresar y que realizan su servicio social. Durante un semestre, el prestador del servicio imparte asesorías a todos los alumnos que lo soliciten de acuerdo al área donde se desenvuelve. En el período comprendido entre septiembre de 2006 a mayo de 2007, se otorgaron asesorías a los alumnos del turno vespertino en todas las asignaturas del área matemática. En ese período asistieron en su mayoría alumnos de tercer semestre, donde se pudo identificar cierta dificultad para comprender el tema "secciones cónicas" que pertenece a la asignatura Álgebra y Geometría Analítica I del plan de estudios del CCH, esto surgió debido a que los alumnos sólo memorizaron las ecuaciones y los algoritmos para trazar las secciones cónicas en el plano o presentar su ecuación con diferentes aspectos, todo lo anterior, sin comprender el tema. Esta fue la razón principal por la que fue elegido el tema de secciones cónicas para poder ejemplificar el problema planteado y aplicar en el mismo la propuesta de tesis; así mismo, dado que el tema de secciones cónicas abarca dos unidades temáticas en el plan de estudios del CCH y considerando el tiempo estipulado para la elaboración del presente trabajo fue necesario escoger sólo una sección cónica; como el estudio de la parábola representa precisamente la quinta unidad temática en el plan de estudios del colegio, entonces fue elegida para aplicar esta propuesta de tesis.

Ahora bien, en el ámbito teórico, si se habla de parábola, es necesario mencionar las Secciones Cónicas pues la parábola es producto de ellas. Se presenta a continuación un resumen de cómo evolucionó el concepto de sección cónica hasta llegar a la definición que conocen los alumnos actualmente.

Las ***Secciones Cónicas*** son producto del trabajo de geómetras griegos que existieron en la antigüedad.

Los primeros en trabajar con dichas curvas sin estar tan conscientes de ello sino meramente como recursos matemáticos fueron Menecmo (alrededor del 350 a. C.) y Arquímedes (aproximadamente en 240 a. C.).

Menecmo descubrió las secciones cónicas (sin conocerlas por el nombre que ahora conocemos, en cambio, fueron conocidas durante algún tiempo como las curvas de Menecmo) porque a través de dichas curvas pudo resolver el problema de *"La duplicación del cubo*", uno de los problemas más famosos en la antigüedad por ser irresoluble con regla y compás. -que en ese entonces eran las únicas herramientas válidas para resolver problemas de Geometría- (Boyer, 1968).

Una de las versiones que cuentan sobre el origen del problema de la duplicación del cubo, surgió en Grecia alrededor del siglo 433 a. C. cuando una gran peste azotó a la población, entonces un oráculo de Delfos indicó que debían aumentar la ofrenda a Apolo para terminar con su desventura, para ello mandó duplicar el tamaño de su altar, el cual era cúbico (Mora, 2000).

El problema concreto fue, construir un cubo cuyo volumen fuera el doble de otro cubo dado. La dificultad se centró en que la solución correspondía a encontrar la raíz cúbica del número 2, lo cual no fue posible determinar con regla y compás ya que dicho número es inconmensurable.

Lo que hizo Menecmo fue utilizar medias proporcionales para 2 y 1, siendo "x" la medida del lado del cubo a construir, y "y" la medida del lado del cubo original, entonces se debían cumplir las siguientes igualdades:

$$2/x = x/y = y/1$$

Como producto de su estudio, surgió en Menecmo la idea de generalizar su propuesta y consideró encontrar las medias proporcionales de dos medidas cualesquiera "a" y "b" tales que satisficieran las siguientes igualdades:

$$a/x = x/y = y/b$$

Con las igualdades anteriores, Menecmo descubrió que $x/a=y/x$ y $x/y=y/b$ representaban dos parábolas, a saber, $ya=x^2$ y $xb=y^2$ respectivamente (que más tarde él reconoció como secciones de un cono rectángulo), descubrió también que $a/x=y/b$ representaba la hipérbola $y=ab/x$ (que después él reconoció como sección de cono obtusángulo).

Así pues, Menecmo produjo dos soluciones para duplicar el tamaño de un cubo: una fue mediante la intersección de una parábola con una hipérbola (nombres que se manejan actualmente), y la otra solución fue entre dos parábolas como muestran respectivamente las figuras siguientes.

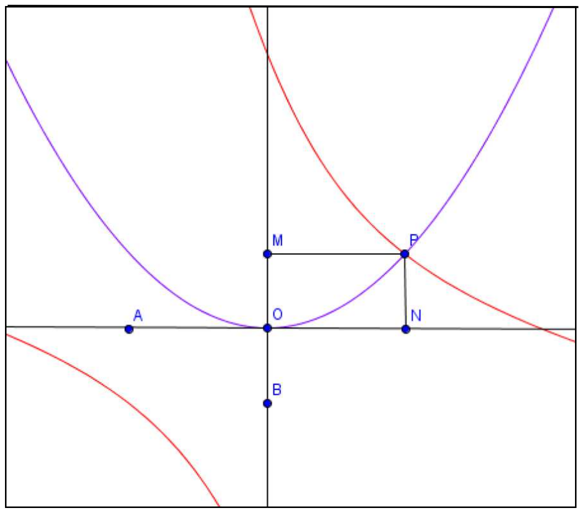


Figura 3. Intersección de parábola con hipérbola.

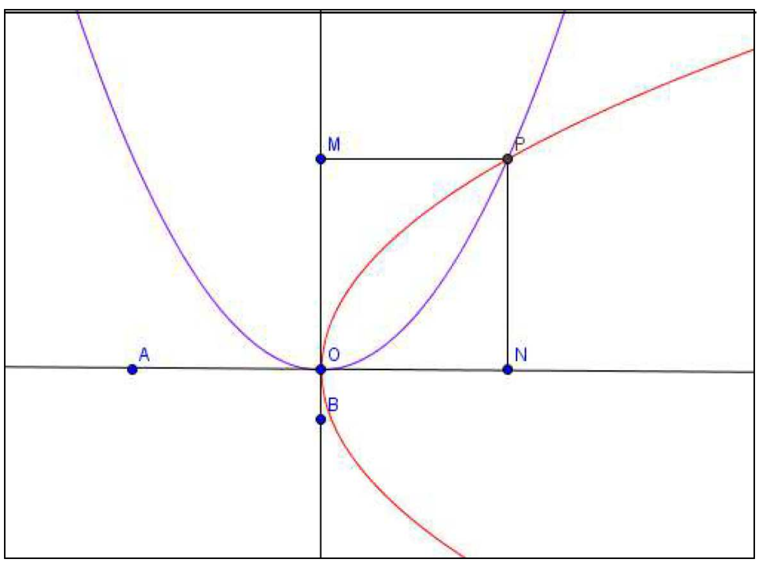


Figura 4. Intersección de parábolas.

En el primer caso (Figura 3) concluye que el punto $\mathcal{P}$ satisface la proporción:

$$\mathcal{AO}/\mathcal{PN}=\mathcal{PN}/\mathcal{PM}=\mathcal{PM}/\mathcal{OB}$$

Mientras que en la intersección de dos parábolas (Figura 4) expresó que $\mathcal{P}$ cumplía:

$$\mathcal{AO}/\mathcal{OM}=\mathcal{OM}/\mathcal{ON}=\mathcal{ON}/\mathcal{OB}.$$

Sus resultados anteriores lo indujeron a estudiar de fondo las curvas encontradas, por ello dedujo que al cortar un cono recto circular con un plano perpendicular a la generatriz del cono se obtenían las secciones cónicas que resolvían el problema anterior.

Fue como Menecmo llamó a la parábola *"sección de cono rectángulo"*, a la elipse *"sección de cono acutángulo"* y a la hipérbola *"sección de cono obtusángulo"* (González, 2003).

Lo mismo dedujo Arquímedes (287-212 a. C.) cuando tuvo contacto con las secciones cónicas, incluso resolvió el problema denominado actualmente como *"La cuadratura de la parábola"*. En dicho resultado estableció que la curva entre tres puntos $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$, (cuya cuerda está formada por el segmento $\mathcal{AC}$) mide $4/3$ de lo que mide el área del triángulo $\mathcal{ABC}$. De hecho, la curva en cuestión se trata de una parábola cortada por la cuerda $\mathcal{AC}$. (Ver Figura 5).

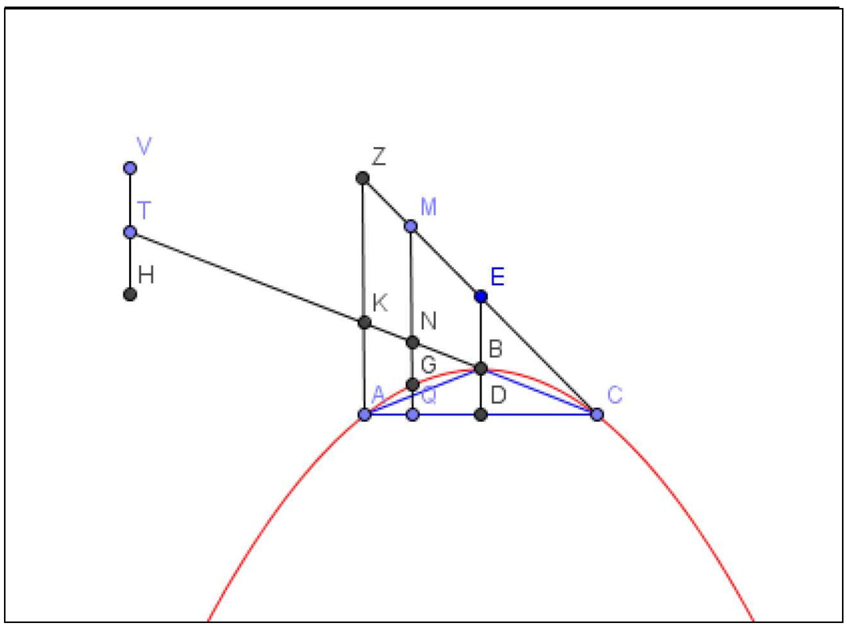


Figura 5. Cuadratura de la parábola.

Lo que hizo Arquímedes fue construir algo semejante a la ilustración anterior de tal forma que construyó segmentos de longitudes iguales como son:

$$\mathcal{VT}=\mathcal{TH},\ \mathcal{ZK}=\mathcal{KA},\ \mathcal{MN}=\mathcal{NQ},\ \mathcal{EB}=\mathcal{BD},$$

Lo anterior genera triángulos semejantes, los que utiliza para establecer equilibrios en cuanto a centros de gravedad mediante los cuales se puede deducir:

$\mathcal{TK}/\mathcal{KN}=\mathcal{MQ}/\mathcal{QO}$, y como $\mathcal{VH}=\mathcal{QO}$, implica $\mathcal{TK}/\mathcal{KN}=\mathcal{MQ}/\mathcal{VH}$.

Además estableció: triángulo $(AZC)*KG$ = curva $(ABC)*TK$ donde G es el centro de gravedad del triángulo (ABC), entonces $TK=KC=3KG$.

De lo anterior, obtiene que la medida del triángulo (AZC) equivale al triple de la medida de la curva (ABC).

Como $ZK=KA=2BD$, entonces la medida del triángulo (AZC) equivale al cuádruple de la medida del área del triángulo (ABC).

Por lo tanto, la medida de la curva (ABC) equivale a $4/3$ de la medida del área del triángulo (ABC) (Heiberg, 1993).

De igual forma que Menecmo, Arquímedes se vio impulsado a estudiar más de cerca las curvas como la que había utilizado en el planteamiento anterior.

De las secciones cónicas obtuvieron algo semejante a lo que conocemos hoy como ecuaciones ordinarias, por ejemplo: en el caso de la parábola -que es el tema donde se centra la muestra de la propuesta didáctica del presente trabajo de tesis- utilizaron triángulos semejantes y propiedades de la circunferencia además de triángulos rectos para deducir lo siguiente:

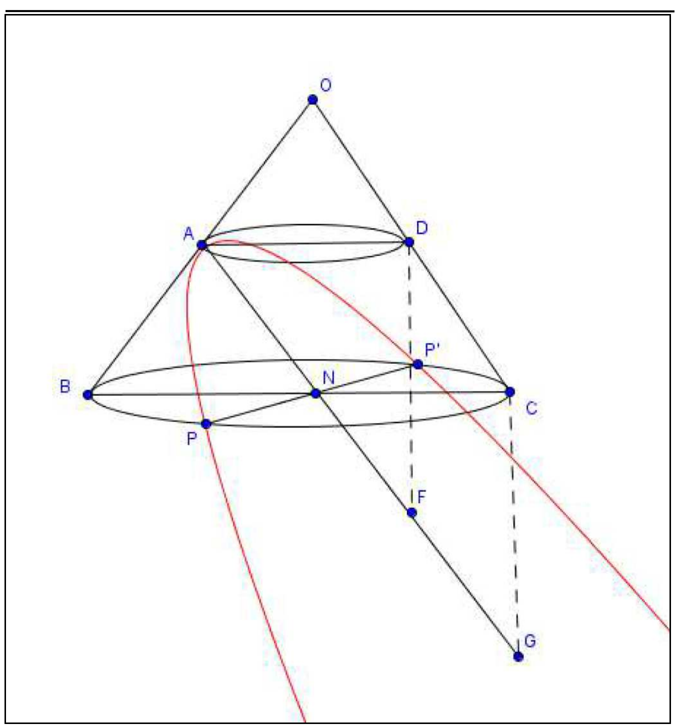


Figura 6. Sección de cono rectángulo.

En la Figura 6 se pueden encontrar varios pares de triángulos semejantes, de los cuales se puede deducir:

$PN/BN=NC/PB$ y $NB/NG=AN/NC$.

Ahora bien, como $NG=AF=2Ap$ (donde p es el parámetro que determina el lado recto de la parábola), entonces $PN^2=NA*NG=NA*AF=NA*2Ap$, de lo cual se deduce:

$PN^2=NA*2Ap$

Lo anterior se parece a la ecuación ordinaria de la parábola que conocemos, o sea, $y^2=2Apx$ (Toomer, 1990).

A pesar de las aportaciones de los anteriores griegos sobre las secciones cónicas, éstas quedaron opacadas por la formalización de Apolonio de Perga (262-190 a. C.) ya que dedujo que las tres secciones cónicas podían surgir de cualquier cono, sin ser recto, obtusángulo o acutángulo. También introdujo los nombres de elipse, hipérbola y parábola. Además de deducir la misma ecuación para la parábola (de ahí el nombre de parábola –exactitud, o equilibrio- ya que PN^2 logra el equilibrio o igualdad con $NA*2Ap$) como lo hicieron Menecmo y Arquímedes, a diferencia de que lo hizo con un cono doble y oblicuo. Dedujo también que la elipse se obtenía cuando PN^2 era menor que $NA*2Ap$, de ahí su nombre pues significa disminución o faltante, mientras que la hipérbola significa excedente porque ocurre cuando PN^2 es mayor que $NA*2Ap$.

Incluso Apolonio mostró lo anterior en plano y con ayuda de la técnica de *“Aplicación de áreas de Pitágoras”*, por ejemplo, en la parábola de la Figura 7:

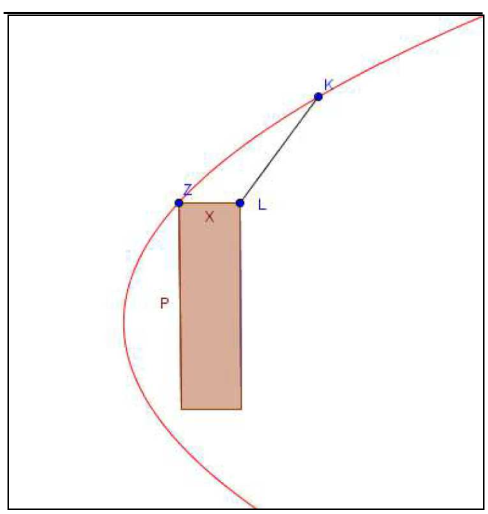


Figura 7. Construcción de la ecuación parabólica mediante “Aplicación de áreas de Pitágoras”.

Donde se cumple la siguiente igualdad, para cualquier punto $\mathcal{K}$ que pertenece a la parábola: $\mathcal{KL}^2=px$, con "p" y "x" constantes.

Finalmente Pappus fue quien introdujo (cerca del año 89 a. C.) el nombre de foco y directriz a las secciones cónicas ya que Apolonio solo señaló en algunas partes los focos de la elipse sin reconocerlos como tales.

También fue Pappus quien le dio mayor importancia a determinar las secciones cónicas sin necesidad de recurrir al cono donde provenían, lo que pretendía es que se estudiaran las curvas meramente como elementos del plano, de manera que solo se utilizara el cono cuando se quisiera tratar sobre propiedades de elementos tridimensionales. Por ello construyó a las secciones cónicas como conjuntos de puntos que satisfacían relaciones y proporciones específicas con relación a uno o dos puntos fijos (focos) y una o dos rectas fijas (directriz o asíntotas) (González, 2004).

Fue René Descartes (1596-1650) quien introdujo el sistema de coordenadas y con ello se establecieron las secciones cónicas como lugares geométricos que satisfacían una ecuación algebraica con base en las construcciones planas de Pappus y la "aplicación de áreas" que utilizó Apolonio sobre las secciones cónicas dentro de un plano.

Es momento de volver a la muestra de la propuesta didáctica. Como ya se mencionó, la presente muestra se aplicará únicamente a la parábola. Gracias al descubrimiento de esta curva y sus propiedades, ha sido posible predecir la trayectoria de diversos objetos en movimiento, contribuir a la evolución de la comunicación mediante las antenas parabólicas, optimización de luz y ahorro de energía en lámparas y celdas solares, entre otros usos.

El tema de la parábola está incluido en el tercer semestre de bachillerato de tipo tecnológico CETIS. CET, CBTIS. CCH, CONALEP, CECYT, DGETTI, Bachilleres, cualquier institución incorporada a la SEP, además del segundo año del bachillerato de tipo general.

Para poder asimilar el concepto de parábola se requiere haber estudiado con antelación los siguientes temas:

- Raíz cuadrada.
- Desarrollo de binomios con potencia dos.
- Factorización.
- Funciones.
- Ecuaciones cuadráticas con una variable.

- Fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas.
- Teorema de Pitágoras.
- Plano Cartesiano.
- Distancia entre dos puntos.
- Longitud de Segmentos.
- Distancia de un punto a una recta.
- Ecuación de la Recta.

2.2.1 SECUENCIA DIDÁCTICA

En esta sección se presenta la propuesta didáctica aplicada al tema "*La parábola y su ecuación cartesiana*" con base al plan de estudios del CCH en cuanto a contenidos se refiere, mientras que la metodología didáctica es justamente como se planteó en el capítulo anterior.

La muestra está dividida en seis etapas que corresponden a los 6 objetivos específicos de la propuesta didáctica. Las 6 etapas están programadas para 9 horas de la siguiente forma:

ETAPA	**DURACIÓN**
1	1 hora.
2	1 hora.
3	2 horas.
4	2 horas.
5	2 horas.
6	1 hora.

Cada etapa se desarrolla en una serie de actividades; así mismo, en cada actividad se describe su objetivo particular, el material necesario, la duración y el producto que se pretende lograr con base a la propuesta didáctica desarrollada en el capítulo anterior.

ETAPA 1

El profesor comenzará la clase platicando al grupo una situación cotidiana sobre un faro de coche, de donde surge una necesidad, la cual ayudará a introducir el tema de parábola.

ACTIVIDAD 1. Planteamiento de un problema específico de aplicación matemática.

Duración: 10 minutos.

Objetivo: Introducir y generar el estudio referente al tema de la parábola.

Problema: Juan y sus amigos están preparando una pastorela. Como la van a presentar en la noche necesitan alumbrar el lugar. Juan busca en su casa algo que funcione como reflector. En la bodega de su casa encuentra un faro automovilístico y decide utilizarlo para su objetivo inicial, antes descubre que el foco está roto por lo que se dispone a cambiarlo. Mientras coloca el nuevo foco descubre variaciones en la intensidad de la luz si cambia su posición respecto al faro. Una vez que localiza la posición del foco donde se genera la mejor iluminación está listo el reflector para utilizarlo en la pastorela.

Una vez planteada la situación, el profesor propondrá al grupo realizar el mismo procedimiento que hizo Juan con el objetivo de encontrar la posición donde el foco alumbre lo más claro y fuerte posible, es decir, calcularán la posición del foco donde emita la mejor nitidez y potencia posible.

ACTIVIDAD 2. Solución al objetivo planteado.

Práctica tipo laboratorio. "Fijando el foco"

Duración: 10 minutos.

Objetivo: El alumno aprenderá matemáticas relacionadas con la parábola para conseguir un objetivo específico relacionado con una de sus aplicaciones, en este caso los faros automovilísticos.

Material: Estructura semejante a un faro automovilístico de forma convencional, foco de 60watts o menos con conexión a la corriente eléctrica (mediante un soquett, un metro de cable eléctrico forrado y una clavija), lienzo negro (aproximadamente un metro cuadrado), regla de 20 cm mínimo, papel y lápiz.

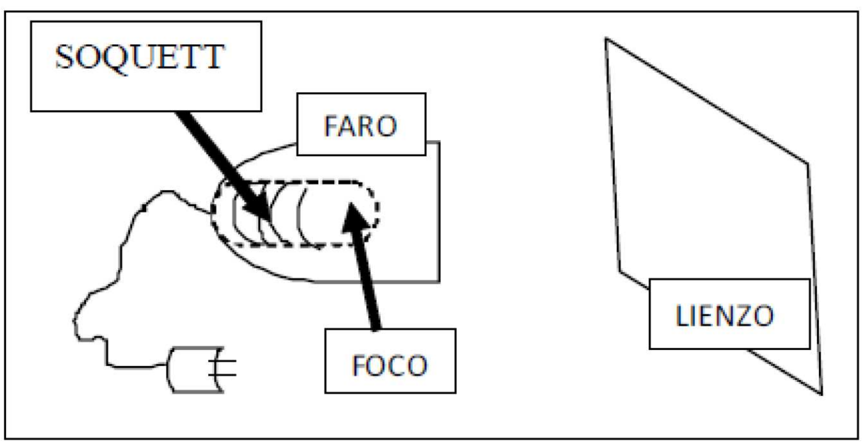


Figura 8. Faro automovilístico.

Producto a realizar: Encontrar la distancia entre el foco y la pantalla del faro (denominada como: “el valor de x”) donde la luz del faro se proyecta en el lienzo con mayor fuerza y nitidez.

Procedimiento:

- Coloque los materiales como se muestra en la Figura 8 tal que ni el lienzo ni el faro se muevan de lugar durante la práctica, es decir, sólo cambiará la posición del foco respecto al faro.
- Conecte el foco a la corriente eléctrica.
- Observe la figura proyectada en el lienzo y acerque o aleje el foco respecto del faro de tal forma que en el lienzo se pueda observar con mayor precisión el área iluminada semejante a un círculo bien delimitado.
- Fije la posición del foco una vez encontrada la mejor proyección luminosa en el lienzo.
- Mida la distancia entre el fondo del faro y el lugar del foco donde se origina la luz, a esta medida le llamaremos “x”.

Ya que se encontró la posición, la situación se resolverá, sin embargo el profesor preguntará al grupo: ¿Se obtendrá la misma medida si se cambia el tipo del faro?, después de que contesten los alumnos, el profesor repetirá la practica con un faro distinto.

Después de comparar las medidas obtenidas, el profesor realizará el siguiente cuestionario al grupo, para dirigir la clase hacia el estudio de un tema matemático.

ACTIVIDAD 3. Cuestionario grupal.

Duración: 10 minutos.

Objetivo. Establecer como punto de partida las experiencias obtenidas en la actividad anterior para introducir el tema matemático a estudiar.

- ¿Cómo se explican las variaciones en intensidad y nitidez de luz en la práctica realizada con faros automovilísticos?
- ¿Tendrá relación con los faros automovilísticos la explicación anterior?

La pregunta 2 será contestada por el profesor y la respuesta es afirmativa puesto que la relación que se busca introducir tiene que ver con la respuesta a la primera pregunta y el tema que se pretende estudiar.

Para tratar de resolver la primera pregunta, el profesor pedirá a los alumnos que busquen las características semejantes en los faros, por ejemplo: que ambos tienen foco, que funcionan con luz, que alumbran, etc. La característica principal es, la forma curva, mediante la cual se originan las variaciones de luz generadas en las actividades pasadas, entonces, el profesor mostrará al grupo que la forma de los faros es semejante entre ellos y está basada en un concepto matemático para crear precisamente el fenómeno luminoso que se observó antes. Por esta razón, destacará que la forma de los faros es conocida matemáticamente con el nombre de “paraboloide” el cual surge de girar sobre su eje una “parábola”. Una forma divertida de mostrar dicho fenómeno es a través de la siguiente actividad.

ACTIVIDAD 4. Introducción al enfoque matemático de la situación planteada.

Demostración de un fenómeno físico.

Duración: 10 minutos.

Objetivo: Conectar el concepto de paraboloide en tercera dimensión con el concepto de parábola en dos dimensiones. Además de reforzar la atención del alumno respecto al tema de parábola.

Material: Pila alcalina tipo “D”, dos seguros de metal cuya medida sea 4cm. de largo, 50cm. de alambre de cobre barnizado, 20cm de cinta de aislar.

Procedimiento: Previamente el profesor armará el modelo mostrado en la Figura 1 (pág. 46) es decir, sujetará con la cinta de aislar los seguros en los polos de la pila y modelará el alambre de cobre barnizado de tal forma que parezca una parábola con su eje de simetría y colocará los extremos del alambre dentro de los ojillos de los seguros. Posteriormente en clase, mostrará al grupo que al girar una parábola sobre su eje (en este caso representado por el alambre con forma parabólica) se genera un paraboloide, el cual es semejante a la forma convencional de los faros automovilísticos.

Dado que sólo se ha enunciado el concepto de parábola y paraboloide, el profesor asignará de tarea un trabajo de investigación sobre parábola, este es el tema que estudiarán durante la secuencia didáctica. Entonces formará equipos de tres personas y asignará roles a cada uno, finalmente describirá los elementos que constituyen el trabajo por entregar y con ello terminará la sesión para que los alumnos puedan resolver la actividad fuera del aula.

ACTIVIDAD 5. Tarea de investigación sobre la parábola.

Objetivo: Que el alumno localice información específica acerca de la parábola.

Producto a realizar: Cada alumno consultará un libro de Geometría Analítica para contestar el cuestionario de abajo, posteriormente por equipos de tres alumnos (que hayan consultado fuentes distintas entre sí), analizarán la similitud de la información que encontraron individualmente, para luego redactar las respuestas al mismo cuestionario pero esta vez eligiendo entre los alumnos las respuestas que sean más claras y concretas, las respuestas elegidas pueden ser de distintos libros.

CUESTIONARIO GUÍA

•	¿Qué es una parábola?
•	¿Qué tipos de parábola hay y cuáles son las formas de representarlos?
•	¿Cuáles son las partes que conforman una parábola?
•	¿Qué relación hay entre las partes que conforman una parábola?

Una vez que el equipo responda las preguntas, debe leerlas y subrayar las palabras cuyo significado desconozca. Por cada palabra desconocida, el equipo investigará y contestará: ¿Qué significa? ¿Qué función desarrolla en la definición de parábola?, las respuestas pueden generar nuevas palabras desconocidas, por lo que el equipo debe buscar sinónimos cuyo significado conozca, de lo contrario, deberá buscar su significado nuevamente.

El trabajo a entregar consiste en:

- Copia del texto de donde se extrajo la información individual junto con la bibliografía.
- Cuestionario resuelto por el alumno.
- Cuestionario resuelto en equipo (Indicar los nombres de los integrantes).
- Glosario (lista de palabras de significado desconocido, donde se explique su significado o algún sinónimo cuyo significado sea conocido).

ETAPA 2

El profesor escuchará las respuestas de la primera pregunta del cuestionario (que entregarán los alumnos por equipos como tarea) para discutir con el grupo sobre una respuesta general, la cual formará la primera parte del mapa conceptual que llenarán conforme avancen las clases, de tal forma que cada respuesta general a las preguntas del cuestionario formará parte del mapa conceptual como se indica en la Figura 2 (pág. 49).

Esto servirá para estructurar la definición de parábola al final del curso.

Para comenzar a llenar el mapa conceptual, el profesor presentará al grupo la lámina de una recta horizontal D y un punto F (no contenido en la recta anterior), para pedirle al alumno que localice algunos puntos con la propiedad de la parábola expresada en términos de distancias.

ACTIVIDAD 1. Representación geométrica de la parábola.

Duración: 15 minutos.

Objetivo: Asimilar la definición de parábola en términos de su representación geométrica.

Material: Lámina donde esté trazada una recta horizontal $\mathcal{D}$ (directriz) y un punto $\mathcal{F}$ ajeno a ella (foco). Copias de la misma lámina (una por alumno) pero en hojas de papel albanene.

Producto a realizar: Construir la gráfica de una parábola, dado el foco y la directriz.

Desarrollo: El profesor pide a los alumnos que localicen algunos de los puntos que equidistan del foco y la directriz (al menos seis para que se pueda vislumbrar la forma de la gráfica parabólica), es decir, cada punto $\mathcal{P} = (x,\ y)$ que sea identificado debe cumplir la siguiente igualdad para poder pertenecer a la parábola que se desea trazar.

$$d(\mathcal{F}, \mathcal{P}) = d(\mathcal{P}, \mathcal{D}) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(\mathcal{E}1)$$

Para localizar cada punto, el profesor pide a los alumnos que realicen el siguiente procedimiento:

PASO 1: Doblar la hoja de albanene de tal forma que el doblez indique una recta perpendicular a la recta $\mathcal{D}$.

PASO 2: Nombrar $\mathcal{P}'$ al punto de intersección de la recta $\mathcal{D}$ y la perpendicular anterior.

PASO 3: Doblar la hoja de manera que el punto $\mathcal{F}$ y el punto $\mathcal{P}'$ queden encimados.

PASO 4: Nombrar $\mathcal{P}$ al punto de intersección de las rectas marcadas por los dobleces. Dicho punto pertenece a la parábola buscada. Observe la Figura 9.

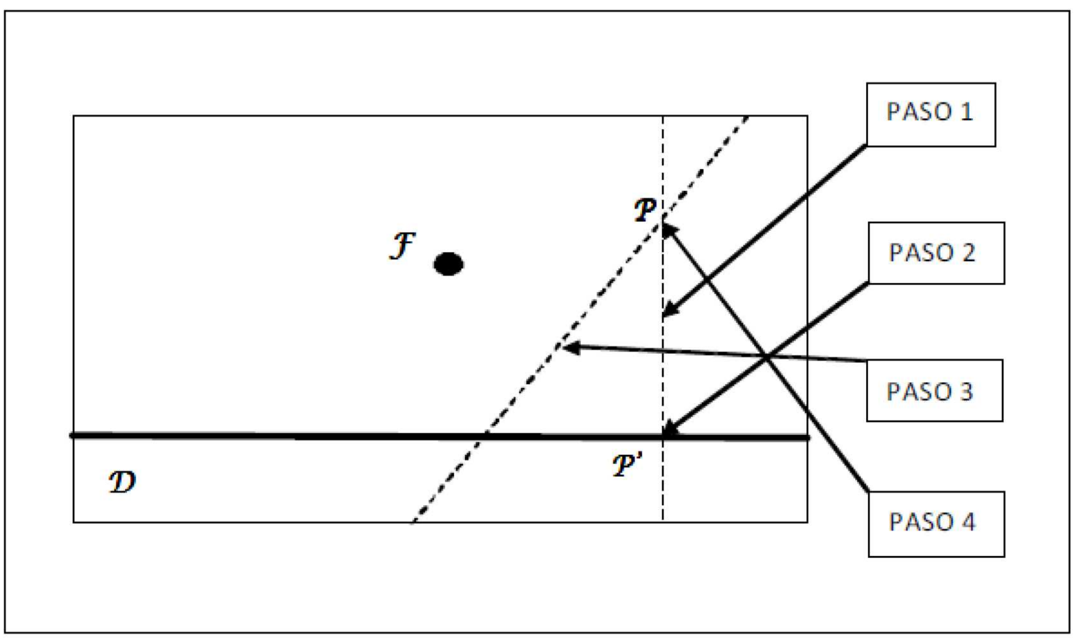


Figura 9. Descripción del procedimiento para localizar puntos de una parábola cuando se tiene un punto (el foco) y una recta (la directriz).

Para sustentar la validez de la construcción anterior, el profesor recordará los conceptos geométricos de distancias entre puntos y punto con recta, de tal forma que el doblez del paso 3, garantiza que la longitud del segmento $\mathcal{FP}$ es igual a la longitud del segmento $\mathcal{PP}'$, aún más, la longitud del segmento $\mathcal{FP}$ es igual a la distancia entre el punto $\mathcal{F}$ y el punto $\mathcal{P}$, por definición de distancia entre puntos; mientras que la longitud del segmento $\mathcal{PP}'$ es igual a la distancia entre el punto $\mathcal{P}$ y la recta $\mathcal{D}$, debido a que el segmento $\mathcal{PP}'$ está localizado sobre la perpendicular a la recta $\mathcal{D}$, es decir, también cumple la definición de distancia entre punto y recta.

Como actividad adicional, el profesor ayudará a que el alumno descubra la simetría de la parábola cuando le pida al alumno doblar la hoja formando una perpendicular a la recta $\mathcal{D}$ de tal forma que el doblez quede sobre el punto $\mathcal{F}$, con ello queda dividida la hoja en dos partes; entonces el alumno debe marcar el punto de la parábola que haya encontrado sobre la otra parte de la hoja, de tal forma que al desdoblarla se vislumbrará el último doblez como el eje de simetría de la parábola y el nuevo punto marcado será el simétrico del punto P localizado anteriormente.

Se repetirá el procedimiento varias veces para localizar al menos seis puntos de la parábola con sus respectivos puntos simétricos para que el alumno vislumbre mejor la representación gráfica del concepto. Mientras más puntos sean encontrados, mejor claridad tendrá el esbozo de la parábola. El último punto que se localice será el vértice de la parábola, es decir, el único que no tiene simétrico ya que se encuentra justo sobre el eje de simetría, para ello, el profesor pedirá a los alumnos que repitan el procedimiento para localizar un punto de la parábola pero en el paso 1 el doblez quedará sobre el punto $\mathcal{F}$.

El esbozo de parábola obtenido ayudará al alumno a asimilar la representación geométrica de parábola que será la respuesta a la segunda pregunta del cuestionario guía y por supuesto formará parte del mapa conceptual.

Pasarán entonces al momento donde el profesor deducirá la representación algebraica de la parábola mediante la siguiente actividad.

ACTIVIDAD 2. Representación algebraica de la parábola.

Duración: 25 minutos.

Objetivo: Que el alumno asimile el concepto parabólico a través de su representación algebraica.

Material: Lámina de conceptos previos como apoyo opcional para el alumno (distancia entre puntos, productos notables). Lámina en papel cuadriculado de una parábola donde se observen sus elementos: foco, vértice y directriz (Observe Figura 10). Copias (una por alumno) de la construcción algebraica de la ecuación parabólica en forma ordinaria. Lámina de parábola vertical y horizontal.

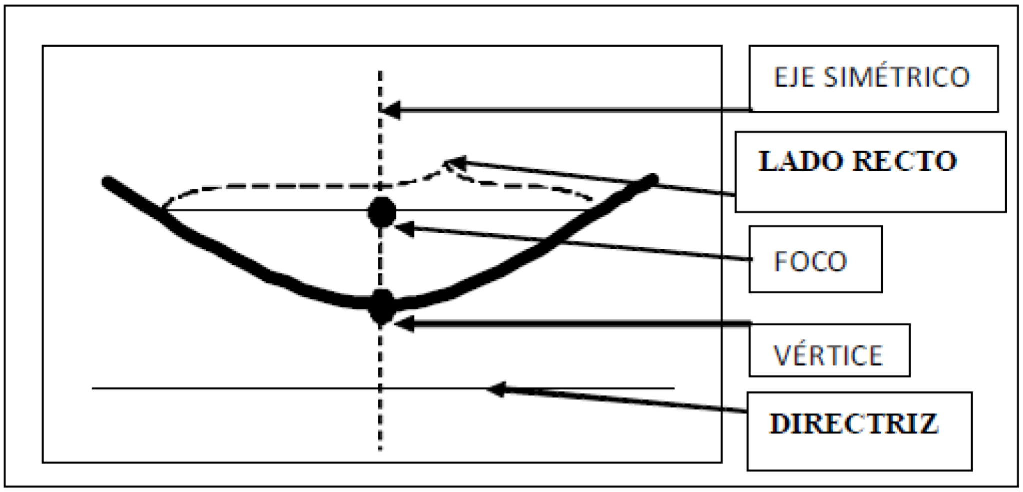


Figura 10. Elementos que conforman la parábola.

Producto a realizar: Obtener la ecuación de la parábola en forma ordinaria, es decir,

$$(x-h)^2 = 4p(y-k) \text{...} \quad \text{(E2)}$$

a partir de la definición de parábola y el concepto de distancia.

Desarrollo: Sea $\mathcal{F}$ el foco de la parábola y $\mathcal{D}$ la directriz como se observa en la Figura 10, entonces cualquier punto $\mathcal{P}$ que pertenece a la parábola cumple lo siguiente:

$$d(\mathcal{F},\mathcal{P}) = d(\mathcal{D},\mathcal{P}) \text{...} \quad \text{(E3)}$$

Aplicando la definición de distancia entre punto y recta, se puede afirmar que $d(\mathcal{D},\mathcal{P})=d(\mathcal{P}',\mathcal{P})$ por ser $\mathcal{P}'$ el punto de intersección entre $\mathcal{D}$ y la perpendicular que contiene a $\mathcal{P}$, entonces se tiene:

$$d(\mathcal{F},\mathcal{P}) = d(\mathcal{P}',\mathcal{P}) \text{..} \quad \text{(E4)}$$

Si se aplica ahora la definición de distancia entre puntos en ambos lados de la igualdad, se debe considerar que $\mathcal{F} = (h, k+p)$, $\mathcal{P}= (x,y)$, $\mathcal{P}'= (x,k-p)$, entonces al sustituir las coordenadas en la igualdad (E4) se obtiene:

$$d((h,k+p),(x,y)) = d((x,k-p),(x,y)) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(E5)$$

Se usará ahora la fórmula de distancia entre puntos:

$$\sqrt{(x-h)^2+(y-(k+p))^2} = \sqrt{(x-x)^2+(y-(k-p))^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(E6)$$

Se operará con la igualdad anterior hasta obtener la ecuación parabólica como lo indica el siguiente procedimiento.

PASO 1: Elevar al cuadrado ambos lados de la ecuación.

$$\left(\sqrt{(x-h)^2+(y-(k+p))^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(x-x)^2+(y-(k-p))^2}\right)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(E7)$$

Se debe recordar que cuando los radicandos (lo que está dentro de la raíz) son positivos (es decir, mayores que cero), entonces el exponente cuadrado neutraliza la raíz cuadrada cuando se aplican a la misma cosa, por ser operaciones inversas entre sí. Entonces la igualdad anterior se convierte a:

$$(x-h)^2 +(y-(k+p))^2 = (x-x)^2 +(y-(k-p))^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(E8)$$

PASO 2: Observar que como $(x-h)^2$ aparece en la ecuación parabólica (E2), razón por la cual la dejaremos intacta hasta el final. Entonces recuérdese la fórmula de binomio elevado al cuadrado para desarrollar $(y-(k+p))^2$. Y se obtiene:

$$(x-h)^2 +y^2 -2y(k+p)+(k+p)^2 = (x-x)^2 +(y-(k-p))^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(E9)$$

PASO 3: Distribuir el producto indicado en $-2y(k+p)$.

$$(x-h)^2 +y^2 -2yk-2yp+(k+p)^2 = (x-x)^2 +(y-(k-p))^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(E10)$$

PASO 4: Desarrollar $(k+p)^2$.

$$(x-h)^2 +y^2 -2yk-2yp+k^2 +2kp+p^2 = (x-x)^2 +(y-(k-p))^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(E11)$$

PASO 5: Resolver $(x-x)^2$. En este caso se anulará ya que $x-x=0$ además $(0)^2=0$, entonces se puede borrar de la ecuación ya que no le aporta nada.

$$(x-h)^2 +y^2 -2yk-2yp+k^2 +2kp+p^2 = (0)^2 +(y-(k-p))^2$$

$$(x-h)^2 +y^2 -2yk-2yp+k^2 +2kp+p^2 = 0+(y-(k-p))^2$$

$$(x-h)^2 +y^2 -2yk-2yp+k^2 +2kp+p^2 = (y-(k-p))^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(E12)$$

PASO 6: Desarrollar $(y-(k-p))^2$.

$$(x-h)^2 +y^2 -2yk-2yp+k^2 +2kp+p^2 = y^2 -2y(k-p)+(k-p)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(E13)$$

PASO 7: Distribuir el producto indicado en $-2y(k-p)$.

$$(x-h)^2 +y^2 -2yk-2yp+k^2 +2kp+p^2 = y^2 -2yk+2yp+(k-p)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(E14)$$

PASO 8: Desarrollar $(k\text{-}p)^2$.

$$(x-h)^2 + y^2 - 2yk - 2yp + k^2 + 2kp + p^2 = y^2 - 2yk + 2yp + k^2 - 2kp + p^2 \text{………….}(E15)$$

PASO 9: Pasar $+y^2-2yk-2yp+k^2+2kp+p^2$ al lado derecho de la ecuación. Ello implica cambiarle el signo a cada término movido de lugar.

$$(x-h)^2 = y^2 - 2yk + 2yp + k^2 - 2kp + p^2 - y^2 + 2yk + 2yp - k^2 - 2kp - p^2 \text{…………..}(E16)$$

PASO 10: Cancelar los términos iguales con signos contrarios. Se pueden anular de la ecuación porque son iguales a cero y no aportan nada.

$$(x-h)^2 = +2yp - 2kp + 2yp - 2kp \text{………………………………}(E17)$$

PASO 11: Reducir términos semejantes.

$$(x-h)^2 = +4yp - 4kp \text{……………………………………}(E18)$$

PASO 12: Factorizar $4p$ del lado derecho.

$$(x-h)^2 = 4p(y-k) \text{...}(E2)$$

Hemos llegado a la ecuación buscada. Ésta es la representación algebraica de la parábola, por lo que se agregará al mapa conceptual como parte de la respuesta a la tercera pregunta del cuestionario guía y por lo mismo, también se incluirá en el mapa conceptual.

El profesor ayudará al alumno a observar que la ecuación (E2) representa una PARÁBOLA VERTICAL, con vértice en el punto $\mathcal{V} = (h,k)$, foco en el punto $\mathcal{F} = (h,k+p)$ y directriz en la recta cuya ecuación es $y = k-p$, donde $d(\mathcal{F},\mathcal{V}) = p = d(\mathcal{V},\mathcal{D})$, por definición del parámetro p, la estrategia para que el alumno lo pueda ver es mediante un ejercicio concreto donde se aprecien las coordenadas del vértice, foco y ecuación de la directriz de forma explícita para que el alumno deduzca la forma general como se expresa cada elemento de la parábola. Precisamente se recomienda que la lámina de la parábola vertical sea en papel cuadriculado para que se puedan extraer los datos precisos del vértice, foco y directriz.

Con lo anterior se contestará la cuarta pregunta del cuestionario guía y se incluirá en el mapa conceptual. El profesor destacará ante el grupo que el dibujo muestra una parábola vertical ya que su eje de simetría es vertical, o bien, es paralelo al eje $\mathcal{Y}$.

El eje de simetría (también llamado eje focal por contener al foco) es la recta que contiene al foco y al vértice, además es perpendicular a la directriz.

El profesor agregará al mapa conceptual (como parte de la representación gráfica de la parábola) la siguiente tabla al destacar que las gráficas de las parábolas verticales son de dos tipos, los cuales dependen del parámetro p:

POSICIÓN Y ABERTURA DE LA PARÁBOLA VERTICAL

PARÁMETRO	POSICIÓN	ABERTURA GRÁFICA
$p>0$	$\mathcal{V}$ está abajo de $\mathcal{F}$	Hacia arriba (Figura 11)
$p<0$	$\mathcal{V}$ está arriba de $\mathcal{F}$	Hacia abajo (Figura 12)

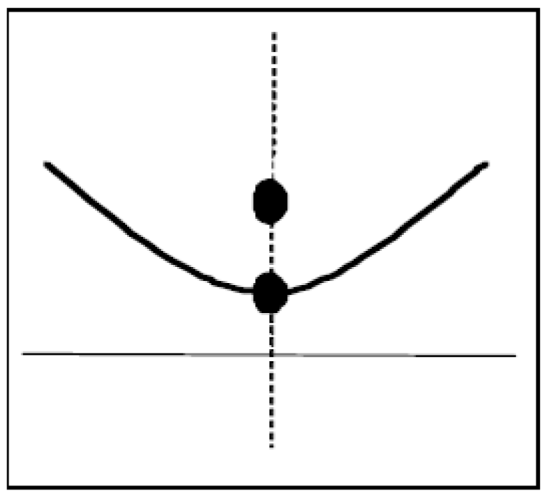


Figura 11. Parábola vertical y abertura hacia arriba.

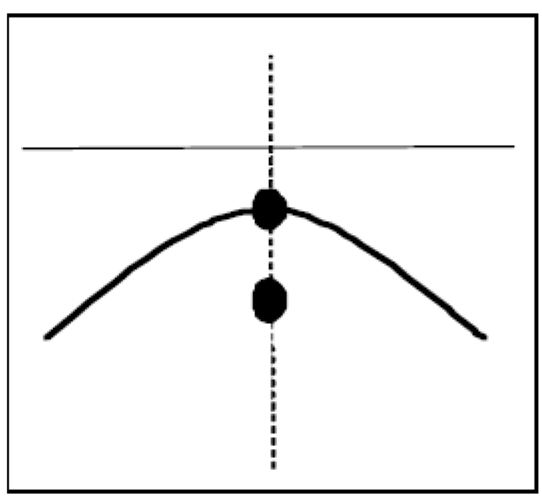


Figura 12. Parábola vertical y abertura hacia abajo.

Ahora bien, el profesor agregará la ecuación de la parábola horizontal en el mapa conceptual para completar la representación algebraica de la parábola. De la misma forma que con la ecuación (E2), se puede construir la ecuación de la parábola horizontal cuya forma general es:

$$(y-k)^2 = 4p(x-h) \quad \text{(E19)}$$

El profesor destacará que la ecuación (E19) representa una PARÁBOLA HORIZONTAL, con vértice en el punto $\mathcal{V} = (h,k)$, foco en el punto $\mathcal{F} = (h+p,k)$ y directriz en la recta cuya ecuación es $x = h-p$, donde $d(\mathcal{F},\mathcal{V}) = p = d(\mathcal{V},\mathcal{D})$, por definición del parámetro p. Se recomienda que se utilice un ejemplo numérico y concreto para deducir la forma general de la parábola en posición horizontal.

Para que el alumno identifique el nuevo concepto se debe ayudar a que vislumbre las diferencias entre parábola vertical y horizontal, por ello, el profesor agregará:

"Se le llama parábola horizontal ya que su eje de simetría es horizontal, o bien, es paralelo al eje x.

El eje de simetría (también llamado eje focal por contener al foco) es la recta que contiene al foco y al vértice, además es perpendicular a la directriz".

Así mismo, el profesor completará la representación geométrica de la parábola en el mapa conceptual con la siguiente tabla.

"Las gráficas de las parábolas horizontales son de dos tipos, los cuales dependen del parámetro p":

POSICIÓN Y ABERTURA DE LA PARÁBOLA HORIZONTAL

PARÁMETRO	POSICIÓN	ABERTURA
$p>0$	$\mathcal{V}$ está a la izquierda de $\mathcal{F}$	Hacia la derecha (Figura 13)
$p<0$	$\mathcal{V}$ está a la derecha de $\mathcal{F}$	Hacia la izquierda (Figura 14)

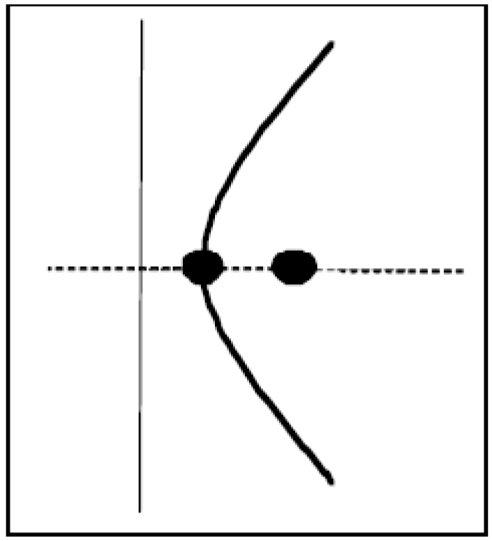


Figura 13. Parábola horizontal y abertura hacia la derecha.

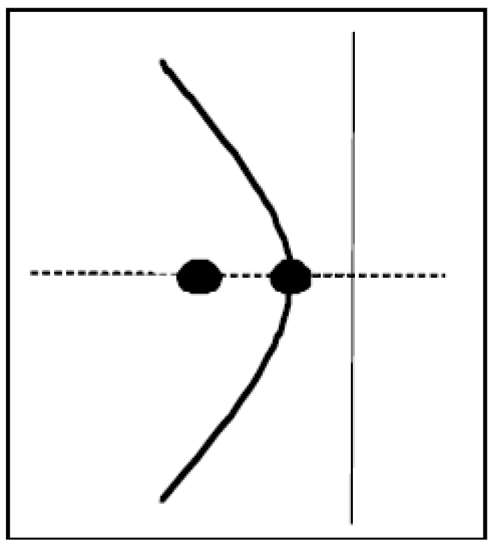


Figura 14. Parábola horizontal y abertura hacia la izquierda.

Para verificar que el alumno haya comprendido las posiciones de la gráfica parabólica al interpretar la ecuación ordinaria, el profesor pedirá al alumno que identifique las ecuaciones parabólicas (entre varias opciones) e interprete sus datos para determinar la posición de la gráfica correspondiente.

ACTIVIDAD 3. Ejercicios de repaso.

Duración: 10 minutos.

Los alumnos identificarán cuáles de los ejemplos de ecuaciones son del tipo parabólica, además de describir la posición y concavidad o abertura de la gráfica.

Objetivo: Que el alumno distinga las ecuaciones parabólicas ordinarias, además de descubrir la ecuación parabólica expresada en forma general.

Material: Diapositiva de 4 ecuaciones parecidas a la de la parábola en forma ordinaria y general.

Ejercicio: Indique cuáles de las siguientes ecuaciones son parabólicas, en caso de serlo, diga si se trata de una parábola vertical u horizontal y describa la abertura de la gráfica.

1) $(x+5)^2=16(y-2)$
2) $x^2+6x-4y+36=0$
3) $(y+3)^2=-8(x-7)$
4) $y^2-4y+12x-16=0$

Respuestas: Todas son ecuaciones parabólicas; 1) y 3) son del tipo ordinaria, 2) y 4) son del tipo general; 1) y 2) son ecuaciones de parábolas verticales, 3) y 4) son ecuaciones de parábolas horizontales; 1) su gráfica abre hacia arriba, 2) su gráfica abre hacia abajo, 3) su gráfica abre hacia la izquierda, 4) su gráfica abre hacia la derecha.

Después de que los alumnos identifiquen las ecuaciones parabólicas ordinarias y si son horizontales o verticales, el profesor expresará que todas las ecuaciones del ejercicio son parabólicas, sólo que las otras están expresadas en forma general. Este será el tema de la siguiente clase y así quedará introducido.

ETAPA 3

Retomando la actividad de la clase anterior, el profesor recordará al grupo que todas las ecuaciones del último ejercicio visto en la clase anterior son parabólicas. Para mostrarlo va a guiar al alumno para deducir el proceso que debe seguir para convertir su forma, primero partirá de una ecuación parabólica particular en forma ordinaria, para convertirla en forma general, usará precisamente el primer inciso de la actividad en cuestión. La idea de la siguiente actividad es cuestionar al alumno de tal forma que éste deduzca los pasos a seguir en vez de imponerlos, por ejemplo, para deducir cada paso se puede preguntar ¿qué operaciones se pueden realizar en la ecuación? ¿A qué expresión se pretende llegar? ¿Cómo puedes manipular la expresión para que se parezca a la ecuación en forma general? Por supuesto, el alumno no conoce aún la ecuación en forma general pero sabe que en la actividad anterior hay dos ecuaciones de ese tipo, entonces se puede partir de esa estructura para ayudarlo a convertir la ecuación que se le presenta.

ACTIVIDAD 1. Conversión de la ecuación parabólica en forma ordinaria a la forma general.

Duración: 25 minutos.

Objetivo: Mostrar al alumno la ecuación parabólica en forma general.

Desarrollo: Convertir la siguiente ecuación parabólica expresada en forma ordinaria, a la forma general.

$$(x+5)^2 = 16(y-2) \quad \text{(E20)}$$

El alumno debe notar que las ecuaciones en forma general no tienen paréntesis ni exponentes, entonces se deben quitar de alguna forma, por ello, el paso 1 y 2 se pueden realizar en el orden inverso sin problema pues son independientes.

PASO 1: Desarrollar $(x+5)^2$ con la fórmula de binomio elevado al cuadrado:

$$x^2 + 2(5)(x) + (5)^2 = 16(y-2) \quad \text{(E21)}$$

Resolviendo los productos indicados en $+2(5)(x)+(5)^2$ queda:

$$x^2 + 10x + 25 = 16(y-2) \quad \text{(E22)}$$

PASO 2: Distribuir el producto indicado en $16(y-2)$:

$$x^2 + 10x + 25 = 16(y) + 16(-2) \quad \text{(E23)}$$

Resolviendo los productos indicados en $16(y)+16(-2)$ queda:

$$x^2 + 10x + 25 = 16y - 32 \quad \text{(E24)}$$

El siguiente paso se puede deducir si se le recuerda al alumno que las ecuaciones en forma general están igualadas a cero, entonces, uno de los extremos de la ecuación debe ser cero, lo cual se puede obtener si se trasladan todos los términos de un extremo al otro, por supuesto cambiándoles el signo.

PASO 3: Pasar $16y-32$ al otro lado de la igualdad con signos contrarios:

$$x^2 + 10x + 25 - 16y + 32 = 0 \quad \text{(E25)}$$

El alumno será testigo de la semejanza entre la ecuación anterior y las de forma general que conoce, entonces, sólo tendrá que identificar que se deben operar los términos constantes para terminar la conversión.

Resolviendo la operación (suma o resta según corresponda) entre los términos constantes o numéricos $+25+32$ queda:

$$x^2 + 10x - 16y + 57 = 0 \text{..(E26)}$$

ÉSTA ES LA ECUACIÓN PARABÓLICA EN FORMA GENERAL QUE SE BUSCABA.

Con ayuda del profesor, los alumnos convertirán mediante un procedimiento análogo al anterior, la ecuación $(y+3)^2 = -8(x-7)$ a la forma general (que resulta ser: $y^2+6y+8x-47 = 0$) para reforzar la comprensión del procedimiento anterior. Se debe verificar que el alumno sea capaz de realizar cada paso por sí sólo, el profesor indica el siguiente ejercicio, el primer inciso lo resolverán los alumnos en clase, los demás los resolverán en casa.

ACTIVIDAD 2. Ejercicio de repaso.

Duración: 25 minutos.

Objetivo: Verificar el nivel de comprensión del alumno en el procedimiento de la actividad 1. Recordar lo visto en la clase 2 sobre las posiciones de la parábola.

Desarrollo: Indicar si es vertical u horizontal cada parábola así como el tipo de abertura o concavidad. Convertir a la forma general las siguientes ecuaciones parabólicas ordinarias.

a) $(y-4)^2 = -28(x-6)$

b) $(x+9)^2 = -16(y-1)$

c) $(x-8)^2 = 4(y+5)$

d) $(y+2)^2 = 12(x+7)$

Respuestas: a) es horizontal y abre hacia la izquierda, su conversión es: $y^2-8y+28x-152 = 0$; b) es vertical y abre hacia abajo, su conversión es: $x^2+18x+16y+65 = 0$; c) es vertical y abre hacia arriba, su conversión es: $x^2-16x-4y+44 = 0$; finalmente d) es horizontal y abre hacia la derecha, su conversión es: $y^2+4y-12x-80 = 0$.

Ya que el alumno conozca cómo convertir una ecuación parabólica de la forma ordinaria a la forma general, el profesor deducirá el procedimiento inverso, es decir, partirá de una ecuación parabólica particular en forma general, para convertirla en forma ordinaria. Dicho ejemplo de parábola será el inciso b) de la actividad 3, etapa 2 (pág. 76).

ACTIVIDAD 3. Conversión de una ecuación parabólica general a la forma ordinaria.

Duración: 25 minutos.

Objetivo: Que el alumno conozca el procedimiento necesario para poder extraer más datos de la ecuación parabólica en forma general, al convertirla en forma ordinaria.

Desarrollo: Convertir la ecuación parabólica expresada en forma general, a la forma ordinaria.

$$x^2 + 6x - 4y + 36 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(E27)}$$

Primero el profesor destacará que la ecuación parabólica en forma general indica si es vertical u horizontal la parábola que representa, para ello hará notar al alumno que la ecuación ordinaria de una parábola vertical lleva un exponente solamente en la parte donde aparece la variable x, lo mismo ocurre con la ecuación actual, por tanto, se puede deducir que la ecuación actual tomará la forma de una ecuación ordinaria de una parábola vertical. Entonces el paso 1 a realizar será:

PASO 1. Identificar si se trata de una parábola vertical u horizontal.

En este caso se trata de una parábola vertical, entonces es de la forma $ax^2+bx+cy+d = 0$. y se convertirá a la forma (E2), es decir: $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

Para ayudar al alumno a deducir los siguientes pasos se recomienda preguntar al alumno ¿Cómo se construye un binomio al cuadrado a partir de un trinomio cuadrado perfecto? La idea es que el alumno recuerde cómo se completa un trinomio cuadrado perfecto, para ello se recomienda nombrar los coeficientes de cada término como se especifica en el paso 2.

PASO 2. Encontrar los valores de a, b y c. Notar que a es distinta de cero en todas las ecuaciones parabólicas.

$$a = 1,\ b = 6,\ c = -4$$

Los siguientes pasos son para completar el trinomio cuadrado perfecto.

PASO 3. Dividir cada término de la ecuación entre a. Si $a = 1$, no tiene caso realizar la división ya que dividir entre 1 da el mismo número inicial como resultado.

En este caso no se divide la ecuación, ya que $a = 1$.

PASO 4. Calcular $e = (b/2)$.

$$e = (6/2) = 3$$

PASO 5. Sumar y restar e^2 después de x^2+6x. Recuerde que $+e^2-e^2$ no afecta el resultado de la ecuación pues $+e^2-e^2 = 0$.

$$x^2 + 6x + (3)^2 - (3)^2 - 4y + 36 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(E28)}$$

Con lo anterior ya habrán completado el trinomio cuadrado perfecto, por lo que se puede factorizar en un binomio con exponente cuadrado como lo indica el paso 6.

PASO 6. Factorizar $x^2+6x+(3)^2$ como trinomio cuadrado perfecto.

$$(x+3)^2 - (3)^2 - 4y + 36 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(E29)}$$

Ya se habrá construido la primera parte de la ecuación buscada, es decir, el binomio con exponente cuadrado, mismo que aparece solo en el extremo derecho de la ecuación:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k) \quad \text{(E2)}$$

Deberán entonces trasladar los demás términos del extremo izquierdo al otro lado, como lo expresa el paso 7.

PASO 7. Pasar $-(3)^2-4y+36$ al otro lado de la igualdad. Recordar que para ello se deben cambiar los signos de los términos trasladados.

$$(x+3)^2 = (3)^2 +4y-36+0 \quad \text{(E30)}$$

PASO 8. Resolver $(3)^2$.

$$(x+3)^2 = 9+4y-36+0 \quad \text{(E31)}$$

PASO 9. Sumar o restar (según corresponda) los términos numéricos $9-36+0$.

$$(x+3)^2 = 4y-27 \quad \text{(E32)}$$

El profesor deberá invitar al alumno a factorizar el extremo derecho para que consiga la estructura de la ecuación ordinaria.

PASO 10. Factorizar $4y-27$ usando $4 = -c$ como factor común.

$$(x+3)^2 = 4(y-((27)/4)) \quad \text{(E33)}$$

ÉSTA ES LA ECUACIÓN PARABÓLICA EN FORMA ORDINARIA QUE SE ESTÁBA BUSCANDO.

Con ayuda del profesor y tomando como base el procedimiento anterior, convertirán a la forma ordinaria la ecuación:

$$y^2-4y+12x-16 = 0 \quad \text{(E34)}$$

(que resulta ser: $(y-2)^2 = -12(x-((20)/(12))))$. Ello reforzará la comprensión del procedimiento anterior. Para verificar que el alumno sea capaz de realizar cada paso por sí sólo, el profesor indicará el siguiente ejercicio, el primer inciso lo resolverán los alumnos en clase, los demás los resolverán en casa.

ACTIVIDAD 4. Ejercicio de repaso.

Duración: 25 minutos.

Objetivo: Verificar el nivel de comprensión del alumno en el procedimiento de la actividad 3. Recordar la posición de la parábola y si es horizontal o vertical.

Desarrollo: Indicar si es vertical u horizontal cada parábola así como su concavidad o abertura. Convertir a la forma ordinaria las siguientes ecuaciones parabólicas expresadas en forma general.

a) $3x^2-12x-24y+60=0$

b) $2y^2-32y-18x+38=0$

c) $x^2-18x-11y+158=0$

d) $y^2+8y-15x+106=0$

Respuestas: a) es vertical y abre hacia abajo, su conversión es: $(x-2)^2 = 8(y-2)$, b) es horizontal y abre hacia la izquierda, su conversión es: $(y-8)^2 = 9(x+5)$, c) es vertical y abre hacia abajo, su conversión es: $(x-9)^2 = 11(y-7)$, d) es horizontal y abre hacia la izquierda, su conversión es: $(y+4)^2 = 15(x-6)$.

Finalmente, el profesor agregará las propiedades de la ecuación parabólica en forma general al mapa conceptual para completar la representación algebraica de la parábola. La información agregada será mediante las siguientes dos tablas.

ECUACIÓN PARABÓLICA EN FORMA GENERAL

Es de segundo grado, con dos variables (x, y) y está igualada a cero.

Se puede representar de dos formas, según la posición de la parábola.

Si la parábola es VERTICAL, entonces su ecuación es de la forma $x^2+ax+by+c = 0$

ABERTURA DE LA PARÁBOLA VERTICAL

PARÁMETRO	ABERTURA	GRÁFICA
$b>0$	Hacia abajo	Figura 12
$b<0$	Hacia arriba	Figura 11

Si la parábola es HORIZONTAL, entonces su ecuación es de la forma $y^2+ay+bx+c = 0$

ABERTURA DE LA PARÁBOLA HORIZONTAL

PARÁMETRO	ABERTURA	GRÁFICA
$b>0$	Hacia la izquierda	Figura 14
$b<0$	Hacia la derecha	Figura 13

ETAPA 4

El profesor ayudará al grupo a deducir la información geométrica que proporciona la ecuación parabólica en forma ordinaria, para ello se propone un procedimiento a seguir para que el profesor pueda guiar el proceso a fin de que el alumno extraiga todos los datos de la parábola en cuestión.

ACTIVIDAD 1. Interpretación de datos en una ecuación parabólica ordinaria.

Duración: 50 minutos.

Objetivo: que el alumno relacione el álgebra con la geometría al interpretar geométricamente la ecuación de la parábola.

Material: Lámina de parábola vertical y horizontal. Lámina de posiciones de la parábola. Lámina de mapa conceptual. Lámina del plano cartesiano donde se pueda graficar una parábola en particular.

Producto a realizar: Dada la ecuación parabólica ordinaria, se obtendrá de ella las coordenadas del vértice, foco, valor del parámetro, ecuación de la directriz, longitud del lado recto, además de graficar dicha parábola en el plano cartesiano.

Desarrollo: El profesor mostrará un ejemplo particular de la ecuación parabólica ordinaria para realizar la actividad sobre éste, a continuación se describe el procedimiento a seguir.

Ejercicio: Obtenga de la siguiente ecuación parabólica las coordenadas del vértice y el foco, el valor del parámetro, la ecuación de la directriz, la longitud del lado recto, además de graficar dicha parábola en el plano cartesiano.

$$(x-4)^2 = 3(y+5) \qquad \text{(E35)}$$

La idea es utilizar toda la información del mapa conceptual para identificar el tipo de parábola, su posición y la descripción de sus elementos tal como se han descrito en las actividades anteriores.

Se recomienda que el alumno grafique cada dato obtenido en un dibujo para reforzar el aprendizaje significativo de forma visual.

PASO 1: Identificar si la parábola es horizontal o vertical.

Como x está dentro del binomio elevado al cuadrado, la parábola es vertical, es decir, el eje focal o eje simétrico es paralelo al eje y.

PASO 2: Calcular el valor del parámetro p. Como la ecuación es de la forma:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k) \qquad \text{(E2)}$$

Entonces el número que multiplica al segundo binomio equivale al cuádruple del valor del parámetro p.

En este caso $3 = 4p$, por lo que p se calcula despejándola en la ecuación anterior, o bien, dividiendo 3 entre 4.

$$p = (3/4) = 0.75 \qquad \text{(E36)}$$

PASO 3: Encontrar las coordenadas del vértice. Recordar al alumno que la ecuación es de la forma $(x-h)^2 = 4p(y-k)$. Como las coordenadas del vértice son precisamente $V = (h,k)$, deberán igualar $-h = -4$ y $-k = +5$. Para encontrar los valores positivos de ambas coordenadas, deberán multiplicar ambas ecuaciones por (-1).

$$(-1)(-h) = (-1)(-4)$$

$$h = 4 \qquad \text{(E37)}$$

$$(-1)(-k) = (-1)(+5)$$

$$k = -5 \qquad \text{(E38)}$$

Por lo tanto $V = (4,-5)$

Se recomienda hacer notar al alumno que los valores de h y k cambian de signo en la ecuación.

PASO 4: Identificar la posición de la gráfica de la parábola. El alumno tendrá como apoyo el mapa conceptual donde indica las posiciones de la parábola según el signo del parámetro. En este caso, por ser vertical la parábola, tendrán dos posibles posiciones, si p es positiva, entonces la gráfica abre hacia arriba; si p es negativa, entonces la gráfica abre hacia abajo.

Como $p = 0.75$, entonces es positiva, lo cual indica que la gráfica de la parábola abre hacia arriba, o bien, el foco está arriba del vértice.

PASO 5: Obtener las coordenadas del foco. Se debe recordar al alumno que la distancia entre el vértice y el foco es exactamente el valor de p. Como en el caso actual, el foco está arriba del vértice, entonces el foco tiene la misma primer coordenada que el vértice, en cambio, la segunda coordenada aumenta p unidades, es decir, $\mathcal{F} = (h,k+p)$. Entonces deberán sustituir los valores de h, k y p en la forma general del foco y resolverán también las operaciones correspondientes.

$$k+p = (-5)+(0.75)$$

$$= -5+0.75$$

$$= -4.25 \qquad \text{(E39)}$$

Por lo tanto $\mathcal{F} = (4,-4.25)$.

PASO 6: Encontrar la ecuación de la directriz. Destacar al alumno que por ser vertical la parábola, la forma general de la ecuación de la directriz es $y = k-p$, entonces deberán sustituir los valores de k y p y resolverán también las operaciones correspondientes.

$$y = (-5)-(0.75)$$

$$= -5-0.75$$

$$= -5.75 \qquad \text{(E40)}$$

Entonces la ecuación de la directriz es: $y = -5.75$

PASO 7: Obtener la longitud del lado recto. Éste se obtiene al extraer el valor absoluto de $4p$. Cabrá recordar que el valor absoluto de un número es igual a su parte positiva.

Como en el ejemplo actual $4p = 3$, entonces la longitud del lado recto es igual al valor absoluto de 3, es decir, $|3| = 3$, como 3 ya es positivo no cambia nada.

PASO 8: Obtener un punto de la parábola. Para realizar este paso se recomienda recordar al alumno que la ecuación parabólica expresa un lugar geométrico, es decir, es un conjunto de puntos de la forma (x,y) que al sustituirlos en la ecuación parabólica satisfacen la igualdad, entonces, para encontrar un punto de la parábola será necesario darle valores numéricos a x en la ecuación y en seguida resolver lo que queda hasta despejar y y obtener su valor. Por ejemplo, si $x = 0$, sustituirán dicho valor en la ecuación parabólica y resolverán dicha ecuación hasta despejar y.

$$((0)-4)^2 = 3(y+5)$$

$$(0\text{-}4)^2 = 3(y+5)$$

$$(-4)^2 = 3(y+5)$$

$$(-4)(-4) = 3(y+5)$$

$$16 = 3(y+5)$$

$$((16)/3) = y+5$$

$$((16)/3)-5 = y$$

$$5.33-5 = y$$

$$0.33 = y \quad \text{(E41)}$$

Por lo tanto, un punto de la parábola es: $\mathcal{P} = (0,0.33)$

PASO 9: Graficar el foco, el vértice, la directriz, el lado recto y el punto de la parábola encontrado en el paso 8.

Una vez resuelto el ejercicio anterior, el alumno deberá resolver la siguiente actividad para verificar que ha comprendido el procedimiento. Como seguramente el tiempo de la clase no será suficiente para realizar toda la actividad, se tomará en cuenta que el alumno resuelva en clase sólo el primer inciso y los restantes pueden resolverse como actividad extraclase.

ACTIVIDAD 2. Verificación del aprendizaje en la actividad 1.

Duración: 50 minutos.

Objetivo: Verificar que el alumno aprenda a graficar la parábola a través de su ecuación.

Material: Lámina del procedimiento a realizar, explicado por pasos. Lámina de parábola vertical y horizontal. Lámina de posiciones de la parábola. Lámina de mapa conceptual.

Ejercicio: Obtenga las coordenadas del vértice y foco, el valor del parámetro, la ecuación de la directriz, la longitud del lado recto y grafique en el plano cartesiano las siguientes ecuaciones parabólicas.

a) $(y-1)^2=12(x+6)$
b) $(x+4)^2=-16(y-9)$
c) $(y+8)^2=-4(y+3)$
d) $(x-5)^2=8(y-2)$

ETAPA 5

El profesor propondrá los siguientes ejercicios ante el grupo para que usen el conocimiento asimilado y lo apliquen al resolverlos. Se trata de encontrar la ecuación parabólica en forma general a partir de dos datos conocidos sobre ella. La actividad la desarrollarán los alumnos por medio de preguntas guía que les proporcionará el profesor de acuerdo a los conocimientos que deben aplicar.

El proceso de solución es semejante en todos los ejercicios, primero el alumno deberá recordar que la ecuación en forma general se puede obtener a partir de la forma ordinaria por lo visto en la clase 4 (donde estudiaron las conversiones de la ecuación parabólica, ya sea de la forma general a la ordinaria o viceversa) por lo tanto primero deberán obtener la ecuación ordinaria para luego convertirla a la forma general. Lo anterior será posible si encuentran las coordenadas del vértice V, el valor del parámetro p y la posición de la parábola puesto que éstos son los datos que se incluyen en la ecuación ordinaria, ya sea $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ ó $(y-k)^2 = 4p(x-h)$.

ACTIVIDAD 1: Construcción de la ecuación parabólica.

Duración: 20 minutos por cada ejercicio.

Objetivo: Que el alumno aplique los conocimientos asimilados en las clases anteriores. Que el profesor identifique las habilidades del alumno para aplicar el conocimiento en problemas matemáticos específicos.

Material: Lámina del mapa conceptual. Apuntes de las clases pasadas.

Producto a realizar: Construir la ecuación parabólica en forma general, a partir de algunos de sus datos y la siguiente guía.

GUÍA
1. Obtener la ecuación parabólica en forma ordinaria con base en los siguientes puntos. 2. Identificar la posición de la parábola para descubrir si se usará la ecuación de una parábola horizontal o vertical. 3. Determinar los datos que aparecen en la ecuación parabólica en forma ordinaria. 4. Para encontrar los datos de la ecuación que no están proporcionados en el ejercicio, deberán usar los datos proporcionados para deducir las relaciones

entre ellos. Precisamente, las relaciones que se deduzcan entre el foco, el vértice, el parámetro, la directriz y el lado recto, se completará el mapa conceptual.

5. Identificar el signo del parámetro p, para conocer la abertura de la gráfica y reflejarlo en la ecuación buscada.
6. Después de determinar la ecuación parabólica en forma ordinaria, convertirla a la forma general.

Se recomienda que la actividad sea a nivel grupal para que todos los alumnos discutan y aporten lo que saben, el profesor irá mencionando los puntos guía según sea necesario, aunque puede requerir plantear preguntas adicionales dependiendo de las respuestas del grupo así como las dudas que puedan surgir durante el proceso.

Para ayudar al alumno a resolver los ejercicios, se presentan las soluciones detalladas de cada ejercicio como cadenas de proposiciones lógicas basadas en las relaciones que guardan los elementos de la parábola, de manera que el profesor podrá exponer los antecedentes de cada proposición a fin de que el alumno formule los consecuentes.

EJERCICIO 1: Encontrar la ecuación en forma general de la parábola cuyo vértice es el punto $V = (5,-4)$ y foco es el punto $F = (-9,-4)$.

Solución: Como el vértice ya está dado, sabemos que $h = 5$ y $k = -4$. Falta encontrar la posición de la parábola y el valor de p. Basta con observar la posición en la que se encuentran los puntos dados (el vértice V y el foco F) al graficarlos en el plano, para saber si la parábola es horizontal o vertical, de manera que se identifique la forma de la ecuación buscada (usar las tablas de parábolas horizontales y verticales del mapa conceptual tal como se muestran en las páginas 73 y 75).

En este caso, V está a la derecha de F, es decir, la parábola es horizontal y p es negativa o menor que cero. Entonces la ecuación buscada es de la forma (E19): $(y-k)^2 = 4p(x-h)$.

Se sabe que el signo de p, falta encontrar su valor, es necesario encontrar alguna relación entre V y F, donde intervenga p.

La relación útil es: $d(V,F) = |p|$, entonces se debe calcular $d(V,F)$, ya que por definición da el valor absoluto del parámetro p.

$$|p| = d(\mathcal{V},\mathcal{F}) = d((5,-4),(-9,-4)) = \sqrt{((-9)-(5))^2+((-4)-(-4))^2}$$
$$= \sqrt{(-9-5)^2+(-4+4)^2}$$
$$= \sqrt{(-14)^2+(0)^2}$$
$$= \sqrt{196+0}$$
$$= \sqrt{196}$$
$$= 14 \quad \text{.......................................(E42)}$$

Como p es negativa, entonces $p = -14$.

Sustituyendo los valores de h, k y p en la ecuación se obtiene:

$(y-(-4))^2 = 4(-14)(x-(5))$, es decir, $(y+4)^2 = -56(x-5)$........................(E43)

Ahora se obtendrá la ecuación en forma general a partir de (E43), según lo visto en etapa 4 (pág. 82).

PASO 1: Desarrollar $(y+4)^2$.

$$y^2 +8y+16 = -56(x-5) \quad \text{..................................(E44)}$$

PASO 2: Distribuir el producto indicado en $-56(x-5)$.

$$y^2 +8y+16 = -56x+280 \quad \text{................................(E45)}$$

PASO 3: Cambiar $-56x+280$ al otro lado de la igualdad.

$$y^2 +8y+16+56x-280 = 0 \quad \text{................................(E46)}$$

PASO 4: Sumar o restar (según corresponda) $+16-280$.

$$y^2 +8y+56x-264 = 0 \quad \text{...................................(E47)}$$

Ésta es la ecuación buscada.

EJERCICIO 2: Encontrar la ecuación en forma general de la parábola cuyo vértice es el punto $\mathcal{V} = (2,8)$ y la directriz tiene como ecuación $x = 3$.

Solución: Para saber el tipo de ecuación que se necesita, cabe observar la posición del vértice y la directriz trazados en el plano.

En este caso la directriz es una recta vertical y el vértice se encuentra a la izquierda de ella, entonces se trata de una parábola horizontal y p es negativa o menor que cero. Entonces la ecuación es de la forma $(y-k)^2 = 4p(x-h)$. Donde h y k son las coordenadas del vértice $\mathcal{V}$, estas ya están dadas, falta encontrar el valor del parámetro p. Para encontrarlo, hay que buscar una relación entre $\mathcal{V}$ y $\mathcal{D}$ donde esté incluido el valor del parámetro p, es el caso de

$d(\mathcal{V},\mathcal{D}) = |p|$, por tanto se debe calcular $d(\mathcal{V},\mathcal{D})$, ya que por definición da el valor absoluto del parámetro p. Esta vez se necesita calcular la distancia de un punto a una recta vertical, por lo cual se debe encontrar el punto donde se intersecta la directriz con su perpendicular que además contiene a $\mathcal{V}$, en este caso es $(3,8)$.

$$|p| = d(\mathcal{V},\mathcal{D}) = d((2,8),(3,8)) = \sqrt{((3)-(2))^2+((8)-(8))^2}$$
$$= \sqrt{(3-2)^2+(8-8)^2}$$
$$= \sqrt{(1)^2+(0)^2}$$
$$= \sqrt{1+0}$$
$$= \sqrt{1}$$
$$= 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(E48)}$$

Como p es negativa, $p = -1$.

Sustituyendo los valores de h, k y p en la ecuación se obtiene:

$(y-(8))^2 = 4(-1)(x-(2))$, es decir, $(y-8)^2 = -4(x-2)$............................(E49)

Ahora se obtendrá la ecuación en forma general a partir de (E49), según lo visto en clase 4 (pág. 82).

PASO 1: Desarrollar $(y-8)^2$.

$$y^2 -16y+64 = -4(x-2) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(E50)}$$

PASO 2: Distribuir el producto indicado en $-4(x-2)$.

$$y^2 -16y+64 = -4x+8 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(E51)}$$

PASO 3: Cambiar $-4x+8$ al otro lado de la igualdad.

$$y^2 -16y+64+4x-8 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(E52)}$$

PASO 4: Sumar o restar (según corresponda) $+64-8$.

$$y^2 -16y+4x+56 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(E53)}$$

Ésta es la ecuación buscada.

EJERCICIO 3: Encontrar la ecuación en forma general de la parábola cuyo vértice es el punto $\mathcal{V}=(-3,6)$, su gráfica es cóncava hacia arriba y el lado recto mide 23.

Solución: Esta vez se proporciona la abertura o concavidad de la parábola y las coordenadas del vértice, falta encontrar el valor del parámetro y la posición de la parábola para definir el tipo de ecuación ordinaria útil: si la parábola abre hacia arriba, entonces es vertical, por lo tanto su ecuación es de la forma (E2), es decir: $(x-h)^2 = 4p(y-k)$.

Para encontrar el valor de p, cabe recordar la relación que tiene dicho parámetro con respecto a la longitud del lado recto, como es: el lado recto mide $|4p| = 23$, pero no indica el valor de p ni su signo por definición del valor absoluto, sin embargo, como la parábola abre hacia arriba, entonces p debe ser positiva (o mayor que cero), eso implica que $4p$ también es positivo aún sin aplicar el valor absoluto. Como la ecuación expresa el valor de $4p$ directamente, no es necesario encontrar el valor del parámetro.

Sustituyendo los valores de h, k y $4p$ (recuerde que p debe ser positiva por la concavidad de la parábola) en la ecuación se obtiene:

$(x-(-3))^2 = (23)(y-(6))$, es decir, $(x+3)^2 = 23(y-6)$........................(E54)

Ahora se obtendrá la ecuación en forma general a partir de (E54), según lo visto en clase 4 (pág. 82).

PASO 1: Desarrollar $(x+3)^2$.

$x^2 +6x+9 = 23(y-6)$…………………………………(E55)

PASO 2: Distribuir el producto indicado en $23(y-6)$.

$x^2 +6x+9 = 23y-138$………………………………….(E56)

PASO 3: Cambiar $23y-138$ al otro lado de la igualdad.

$x^2 +6x+9-23y+138 = 0$…………………………………(E57)

PASO 4: Sumar o restar (según corresponda) $+9+138$.

$x^2 +6x-23y+147 = 0$………………………………….(E58)

Ésta es la ecuación buscada.

EJERCICIO 4: Encontrar la ecuación en forma general de la parábola cuyo foco es el punto $\mathcal{F} = (7,-1)$ y la directriz tiene como ecuación $y = -5$.

Solución: Esta vez no se cuenta con ningún dato directo que pertenezca a la ecuación buscada. Recuérdese que el vértice siempre está en medio del foco y la directriz, por tanto, la posición de la directriz respecto del foco, es la misma que del vértice respecto del foco.

En este caso la directriz es una recta horizontal que está por debajo del foco, esto implica que el vértice también está abajo del foco, entonces se trata de una parábola vertical, donde

p es positiva o mayor que cero. La ecuación ordinaria es de la forma (E2), es decir: $(x-h)^2 = 4p(y-k)$.

Para encontrar el valor del parámetro, es preciso encontrar una relación entre el foco y la directriz que incluya el valor de p. Por ejemplo: $d(\mathcal{F}.\mathcal{D})=|2p|$, de hecho, como la ecuación necesita el valor de $4p$, se puede duplicar la distancia del foco a la directriz para encontrar $|4p|$.

Se calcula entonces la distancia del foco a la directriz, es distancia entre punto y recta, para luego identificar el punto de intersección entre la directriz y su perpendicular que contenga al foco, es el caso de $(7,-5)$.

$$
\begin{aligned}
|2p| = d(\mathcal{F},\mathcal{D}) = d((7,-1),(7,-5) &= \sqrt{(((7)-(7))^2+((-5)-(-1))^2)} \\
&= \sqrt{((7-7)^2+(-5+1)^2)} \\
&= \sqrt{((0)^2+(-4)^2)} \\
&= \sqrt{(0+16)} \\
&= \sqrt{(16)} \\
&= 4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(E59)}
\end{aligned}
$$

Entonces $2|2p| = 2(4) = 8 = |4p|$, como p es positiva o mayor que cero, entonces $4p$ también lo es, aún sin el valor absoluto.

Resta encontrar las coordenadas del vértice. Se debe encontrar alguna relación entre los datos donde intervengan las coordenadas del vértice. Por ser una parábola vertical, $\mathcal{F} = (h,k+p) = (7,-1)$, es decir, $h = 7$ y $k+p = -1$. Por otro lado, como $4p = 8$, entonces $p = (8/4) = 2$, se sustituye este valor en la última ecuación y luego se despeja k:

$$
\begin{aligned}
k+p &= -1 \\
k+(2) &= -1 \\
k+2 &= -1 \\
k &= -1-2 \\
k &= -3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(E60)}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $\mathcal{V} = (h,k) = (7,-3)$

Sustituyendo los valores de h, k y $4p$ en la ecuación se obtiene:

$(x-(7))^2 = (8)(y-(-3))$, es decir, $(x-7)^2 = 8(y+3)$............................(E61)

Ahora se obtendrá la ecuación en forma general a partir de (E61), según lo visto en clase 4 (pág. 82).

PASO 1: Desarrollar $(x-7)^2$.

$x^2 -14x+49 = 8(y+3)$…………………………….….(E62)

PASO 2: Distribuir el producto indicado en $8(y+3)$.

$x^2 -14x+49 = 8y+24$……………………………….(E63)

PASO 3: Cambiar $8y+24$ al otro lado de la igualdad.

$x^2 -14x+49-8y-24 = 0$……………………………….(E64)

PASO 4: Sumar o restar (según corresponda) $+49-24$.

$x^2 -14x-8y+25 = 0$……………………..………..(E65)

Ésta es la ecuación buscada.

EJERCICIO 5: Encontrar la ecuación en forma general de la parábola cuyo foco es el punto $\mathcal{F}=(-2,1)$, la gráfica de la parábola abre hacia la izquierda y el lado recto mide 6.

Solución: Identificar la posición de la parábola en el plano a partir de la concavidad, como la parábola abre hacia la izquierda debe ser horizontal, entonces la ecuación buscada es de la forma $(y-k)^2=4p(x-h)$, además p es negativa o menor que cero.

Como el lado recto mide 6, entonces $|4p| = 6$, pero por ser p negativa, $4p = -6$, esto implica que $p = ((-6)/4) = -1.5$.

Falta encontrar las coordenadas del vértice.

Úsese la misma estrategia del ejercicio 4, como es una parábola horizontal, $\mathcal{F} = (h+p,k) = (-2,1)$, lo cual es cierto si $h+p = -2$ y $k = 1$. Se sustituye el valor del parámetro en la penúltima ecuación y se despeja h.

$$h+p = -2$$

$$h+(-1.5) = -2$$

$$h-1.5 = -2$$

$$h = -2+1.5$$

$h = -0.5$…………………………………………(E66)

Por lo tanto, $\mathcal{V} = (h,k) = (-0.5,1)$

Sustituyendo los valores de h, k y $4p$ en la ecuación se obtiene:

$(y-(1))^2 = (-6)(x-(-0.5))$, es decir, $(y-1)^2 = -6(x+0.5)$........................(E67)

Ahora se obtendrá la ecuación en forma general a partir de (E67), según lo visto en clase 4 (pág. 82).

PASO 1: Desarrollar $(y-1)^2$.

$y^2 -2y+1 = -6(x+0.5)$....................................(E68)

PASO 2: Distribuir el producto indicado en $-6(x+0.5)$.

$y^2 -2y+1 = -6x-3$...(E69)

PASO 3: Cambiar $-6x-3$ al otro lado de la igualdad.

$y^2 -2y+1+6x+3 = 0$......................................(E70)

PASO 4: Sumar o restar (según corresponda) $+1+3$.

$y^2 -2y+6x+4 = 0$...(E71)

Ésta es la ecuación buscada.

EJERCICIO 6: Encontrar la ecuación en forma general de la parábola cuyo vértice es el punto $\mathcal{V} = (2,-4)$, su gráfica es cóncava hacia abajo y contiene también al punto $\mathcal{P} = (5,6)$.

Solución: Identificar el tipo de ecuación a utilizar; como su gráfica abre hacia abajo, se trata de una parábola vertical, es decir, la ecuación es de la forma (E2), es decir: $(x-h)^2 = 4p(y-k)$, donde p es negativa o menor que cero.

Para calcular el valor del parámetro, se necesita encontrar la forma de involucrar los datos de $\mathcal{V}$ y $\mathcal{P}$ donde se obtenga el valor de p; para ello se debe recordar que todo punto $\mathcal{P} = (x,y)$ de la parábola satisface su ecuación al igual que el vértice, de manera que al sustituir las coordenadas de ambos puntos en la ecuación correspondiente se obtiene una ecuación donde la única variable es precisamente el parámetro, por consiguiente, su solución dará el valor buscado.

$$((5)-(2))^2 = 4p((6)-(-4))$$

$$(5-2)^2 = 4p(6+4)$$

$$(3)^2 = 4p(10)$$

$$9 = 40p$$

$$p = (9/(40))$$

$$p = 0.225 \text{..} (E72)$$

Entonces $4p = 4(0.225) = 0.9$

Sustituyendo los valores de $\mathcal{V}$ y $4p$ en la ecuación se obtiene:

$(x-(2))^2 = (0.9)(y-(-4))$, es decir, $(x-2)^2 = 0.9(y+4)$............................(E73)

Ahora se obtendrá la ecuación en forma general a partir de (E73), según lo visto en clase 4 (pág. 82).

PASO 1: Desarrollar $(x-2)^2$.

$$x^2 - 4x + 4 = 0.9(y+4) \text{..} (E74)$$

PASO 2: Distribuir el producto indicado en $0.9(y+4)$.

$$x^2 - 4x + 4 = 0.9y + 3.6 \text{..} (E75)$$

PASO 3: Cambiar $0.9y+3.6$ al otro lado de la igualdad.

$$x^2 - 4x + 4 - 0.9y - 3.6 = 0 \text{..} (E76)$$

PASO 4: Sumar o restar (según corresponda) $+4-3.6$.

$$x^2 - 4x - 0.9y + 0.4 = 0 \text{..} (E77)$$

Ésta es la ecuación buscada.

<u>ETAPA 6</u>

Esto solo es un extra para resolver las preguntas de la actividad 3 de la etapa 1 (pág. 65). Forma parte de la reflexión del tema pero en realidad las estrategias referentes al objetivo específico 6 se desarrollan simultáneamente con la etapa 5.

Esta reflexión está calculada para 30 minutos o hasta una hora dependiendo del interés que muestre el alumno. Una vez asimilado el tema de parábola. Los alumnos deberán aplicar dicho conocimiento para resolver las preguntas de la etapa 1, actividad 3; referente a las variaciones de luz observadas en la práctica de la actividad 2.

Primero los alumnos le podrán otorgar la razón al profesor sobre la relación que hay entre los faros automovilísticos y las variaciones de luz observadas dentro de ellos al cambiar el foco de posición. Posteriormente, deberán usar lo referente al tema estudiado para explicar la otra pregunta, es decir, ¿Cómo se explican las variaciones en intensidad y nitidez de luz en la práctica realizada con faros automovilísticos?

La respuesta tiene que ver con el foco de la parábola y una propiedad que esta curva posee. Es el momento de dar la respuesta al grupo sabiendo que tienen el conocimiento necesario para entender la nueva información.

El profesor explicará al grupo que la parábola cumple la propiedad de reflexión, es decir, cualquier señal que parte desde el foco hacia cualquier punto de la parábola, se reflejará hacia afuera de ella con el mismo ángulo, observe la Figura 15.

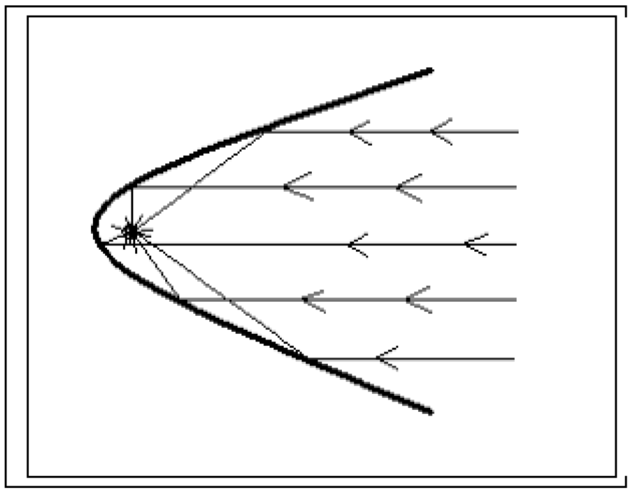


Figura 15. Propiedad de reflexión.

De tal forma que la luz del faro se concentra en una área delimitada (donde se genera la mayor potencia) mejorando la iluminación en vez de dispersarse (de manera que también se mejora la nitidez).

En el caso de los faros utilizados en la actividad 1 de la etapa 1 (pág. 63) no es posible delimitar el área iluminada con precisión puesto que el origen de la luz es generado por la resistencia del foco, en cuyo caso es un segmento en vez de un punto (como ocurre con el foco de una parábola), no obstante, mientras más exacta sea la medición, mejor aproximación tendrá la solución al problema.

La misma propiedad de reflexión en la parábola es aplicada en antenas, celdas solares, telescopios, además de los faros automovilísticos.

Con lo anterior se concluye la propuesta didáctica.

Capítulo 3

En el presente capítulo se relata lo ocurrido al aplicar la propuesta didáctica diseñada en el capítulo anterior frente al grupo 0438 correspondiente al semestre 2010-2 del plantel sur del Colegio de Ciencias y Humanidades, dicho grupo constó de once alumnos activos entre 16 y 17 años que estudiaban el cuarto semestre, la materia en la cual se aplicó se llama Álgebra y Geometría Analítica II, es decir, todos ellos ya habían cursado la materia Álgebra y Geometría Analítica I donde se estudia el tema de parábola (unidad temática V); por consiguiente ya conocían los conceptos previos, incluso ya conocían el tema de parábola aunque en términos meramente superficiales, es decir, lo habían estudiado cuatro meses antes pero no recordaban la definición del concepto ni sus propiedades, sólo partes de ella y recuerdos vagos de la representación algebraica y geométrica.

Fue fácilmente observable que los alumnos no tenían claros algunos de los conceptos previos que se mencionan en la descripción de la muestra (pág. 61) ya que no pudieron aplicarlos en los nuevos procedimientos durante la práctica, de manera que fue necesario apuntalar y reforzar la asimilación de los mismos; se trata de: desarrollo de binomios con potencia dos, factorización, distancia entre puntos, longitud de segmentos, distancia de un punto a una recta y ecuación de la recta.

La propuesta no pudo ser aplicada en alumnos de Álgebra y Geometría Analítica I debido a que dicha asignatura solo se imparte en los semestres impares.

El plantel sur del Colegio de Ciencias y Humanidades, autorizó la práctica durante dos semanas, en las cuales había 10 horas disponibles para trabajar con el grupo 0438. En vista de que los alumnos no tenían claros los conceptos previos de distancias entre puntos y punto y recta, entre otros, fue necesario utilizar dos horas de las disponibles para reafirmar dichos conceptos. La práctica de la muestra original duró ocho sesiones, todas ellas duraron una hora cada una, excepto la última que se prolongó una hora más. La primera y segunda sesión corresponden a la primera etapa de la propuesta didáctica, la tercera fue dedicada para completar la segunda etapa; desde la cuarta a la sexta sesión corresponden a la tercera etapa, la cuarta etapa ocurrió en la séptima sesión, mientras que la etapa cinco se desarrolló brevemente durante la última sesión. No obstante, la etapa 6 no se completó por falta de tiempo pues el desarrollo de las etapas se prolongó más de lo esperado. Las actividades realizadas fueron idénticas a la secuencia didáctica que se presenta en la muestra (pág. 63) excepto en la parte cinco y seis por motivos de tiempo, ya que al finalizar el plazo de tiempo autorizado por el plantel, terminó el ciclo escolar oficialmente.

A continuación se narra lo que ocurrió en cada sesión de la práctica para compararlo con la propuesta didáctica y analizar si se cumplieron los objetivos específicos así como los descritos en cada actividad de la secuencia didáctica. Durante el relato se mencionará al profesor como el maestrante que aplicó la propuesta didáctica ante el grupo 0438. El contenido desarrollado se puede apreciar en el disco de video proporcionado en el anexo con excepción de la primera y última sesión cuya grabación no fue posible conseguir por no contar con el material de grabación en dicho momento.

SESIÓN 1

El profesor comenzó la clase platicando al grupo una situación cotidiana sobre un faro de coche, de donde surgió una necesidad, desde la cual pretendía introducir el tema a estudiar tal y como lo establece la actividad 1 de la etapa 1 (pág. 63).

Los alumnos se mostraron un tanto incrédulos de la situación planteada, no obstante, el profesor mostró físicamente a los alumnos los cambios de luz generados al acercar o alejar el foco respecto de la pantalla del faro automovilístico. Entonces logró atraer la atención del grupo pues el experimento mostrado dio credibilidad a la situación, lo cual reafirma la posición de Pozo y Denyer como método para introducir un tema desde un entorno tangible antes de entrar a un tema abstracto (Pozo, 2006), (Denyer, 2004).

El profesor propuso al grupo encontrar la posición del foco de tal forma que la luz reflejada fuera lo más clara y fuerte posible. Debido a la falta de material para que todo el grupo realizara el experimento, la actividad se mostró al grupo por parte del profesor con ayuda de algunos alumnos tal como se plantea en la actividad 2, etapa 1 (pág. 64).

En el momento en que se debía medir la distancia entre la pantalla del faro y el foco no fue posible obtenerla con ayuda de la regla, debido al espacio estrecho entre el foco y la pantalla del faro además del tamaño de la regla, entonces fue necesario utilizar una tira de papel para obtener la distancia física y luego medirla con la regla.

Cuando al fin se obtuvo la medida buscada el profesor preguntó al grupo si sería la misma medida sin importar el tipo del faro utilizado, en este momento los alumnos estaban dispuestos a cooperar y contestaron al unísono en forma negativa, lo cual se confirmó cuando se repitió el proceso con otro faro y se obtuvo una medida distinta.

Después de comparar las medidas obtenidas, el profesor realizó la actividad 3 de la etapa 1 (pág. 65).

El profesor afirmó la segunda pregunta y dio pie a que los alumnos pensaran en la respuesta de la primera pregunta como introducción a un tema matemático por descubrir.

Para ayudar a los alumnos a resolver la primera pregunta, el profesor pidió a los alumnos que mencionaran las características semejantes entre los faros.

Las respuestas fueron automáticas y referentes al espejo de la pantalla que tiene el faro, la luz, la utilidad en los autos y hubo alguien que dio la respuesta esperada, es decir, la forma curva, entonces el profesor expresó que la forma de los faros no era casualidad, sino que se basaba en un concepto matemático. Entonces mencionó el nombre de “paraboloide” el cual surge de girar sobre su eje una “parábola”.

Para reforzar la atención del alumno y convertir la atención de un concepto tridimensional a uno bidimensional el profesor mostró físicamente al grupo el giro de una curva semejante a una parábola de tal forma que al girar sobre su eje simuló un paraboloide como lo establece la actividad 4 de la etapa 1 (pág. 66).

Los alumnos se mostraron bastante asombrados al ver la simulación del paraboloide y creyeron que en efecto era la forma de los faros automovilísticos. Por tanto lo elementos visuales reafirmaron la atención del alumno y ayudaron a que aceptara naturalmente el nuevo concepto a estudiar como lo propone Bruner (Denyer, 2004).

La sesión terminó (según el tiempo estimado en la etapa 1 de la propuesta) cuando el profesor explicó las instrucciones para realizar la actividad 5 de la etapa 1 (pág. 66), fue trabajo extra-clase sobre parábola con el fin de que el alumno tuviera el primer contacto con la información a procesar además de fomentar la investigación. Formó equipos de tres personas y describió los elementos que constituyeron el trabajo a entregar como sigue:

- Copia del texto de donde se extrajo la información individual junto con la bibliografía.
- Cuestionario resuelto por el alumno.
- Cuestionario resuelto en equipo (Indicar los nombres de los integrantes).
- Glosario (lista de palabras de significado desconocido, donde se explique su significado o algún sinónimo cuyo significado sea conocido).

SESIÓN 2

El profesor pidió el trabajo de investigación solicitado en la sesión anterior pero sólo las mujeres (4 de los 10 alumnos que asistieron a la clase) resolvieron las actividades individuales, es decir, les faltó la parte en equipo y el glosario. Por otro lado hubo alumnos que llevaban los apuntes de su curso pasado de donde fue posible extraer la información solicitada.

Los alumnos leyeron la respuesta de la primera pregunta para discutir con el grupo sobre una respuesta general, la cual formó parte del mapa conceptual que llenarían conforme avanzaran las clases. El profesor mostró al grupo el esquema del mapa conceptual que iban a construir tal como lo muestra la Figura 2 (pág. 49).

Volviendo a la respuesta 1 del cuestionario, se trataba de establecer la definición de parábola.

Lo inesperado apareció porque los alumnos no realizaron el glosario que se incluía en el trabajo de investigación; como la definición de parábola que enunciaron los alumnos incluía el concepto de lugar geométrico y los alumnos no conocían el significado entonces fue necesario explicarlo ante el grupo, esta actividad duró más tiempo del estimado aunque fue suficiente para que el grupo comprendiera el concepto mediante trazos simples en el plano cartesiano. La mayoría de los alumnos estuvieron atentos y participativos durante la clase, incluso dieron muestra de que comprendieron los conceptos vistos en clase por la calidad de las respuestas que dieron y el ritmo como se dedujo el significado del concepto de parábola.

Después de aclarar la definición de lugar geométrico, se definió la propiedad que satisfacen los puntos de la parábola, lo anterior requería definir el concepto de distancia entre puntos, por ello se contempló la definición en términos geométricos y luego algebraicos así como la construcción de la fórmula para calcularla. Para lograrlo el profesor utilizó láminas donde se explicaba gráficamente la obtención de la fórmula por medio del teorema de Pitágoras.

Para reforzar el nuevo conocimiento el profesor pidió a los alumnos que calcularan las distancias entre tres pares de puntos para verificar si podían realizarlo por sí solos. No hubo dudas importantes sino más bien errores de signos y exponentes pero se aclararon directamente en cada caso.

Con lo anterior se reafirma que los alumnos no cuentan con los conocimientos previos necesarios para construir nuevo conocimiento pues su aprendizaje es pobre con relación al bajo desarrollo de habilidades de pensamiento matemático. Incluso se podrá ver en las demás sesiones, cómo el problema de signos y exponentes predomina y por lo tanto obstaculiza el aprendizaje del nuevo concepto.

SESIÓN 3

Para ayudar al alumno a comprender la definición en términos geométricos mostró al grupo una lámina de una recta horizontal D y un punto F (no contenido en la recta anterior) y les proporcionó una copia de la lámina pero sobre papel albanene como lo indica la actividad 1 de la etapa 2 (pág. 67).

Esta actividad fue relajante para los alumnos porque la tomaron como práctica de destreza manual, incluso hubo alumnos que localizaron más de 20 puntos en el papel, entonces el profesor mostró ese ejemplo para que el grupo pudiera observar una mejor representación geométrica de la parábola como se esperaba.

Por otro lado, a la hora de conectar el dibujo con los conceptos matemáticos el grupo mostró cierto asombro, desconcierto y dificultad para enlazar los conceptos de distancia con la construcción del papel; la cuestión se centró en que aún despúes de repasar los temas de distancia el grupo olvidó lo visto en las clases anteriores, por lo tanto se realizó un repaso breve al respecto.

Con ello se reafirma que el conocimiento previo no era significativo para el alumno y por eso representó un obstáculo para construir el nuevo conocimiento como lo establecen Piaget (Rice, 2000) y Ausubel (Mergy, 2003).

No fue posible reafirmar el tema de distancias desde el punto de vista algebraico por cuestiones de tiempo, ya que los alumnos no recordaban el concepto del todo a pesar de haberlo estudiado medio año antes.

Para tratar de aclarar las dudas en los alumnos fue de gran ayuda la evidencia física de los trazos en papel donde se compararon las distancias involucradas en la definición de parábola al encimar físicamente los segmentos correspondientes.

Para finalizar la actividad 1 de la etapa 2, el profesor nombró los elementos de la parábola con ayuda de una lámina tal como se muestra en Figura 10 (pág. 70).

Hasta ese momento se pudo incluir en el mapa conceptual la definición de parábola general y su representación geométrica así como los elementos que la conforman. Era hora de discutir la representación algebraica correspondiente a la actividad 2 de la etapa 2 (pág. 69).

El profesor repartió copias a los alumnos del procedimiento a seguir tal como se detalló en la propuesta didáctica para deducir la ecuación ordinaria de una parábola vertical.

El profesor pidió que algunos alumnos leyeran en voz alta el procedimiento impreso en las copias mientras el profesor realizaba en el pizarrón las operaciones descritas, el objetivo de repetir las operaciones ante el grupo fue para reforzar visualmente los conceptos previos implicados en el proceso como son, productos notables, binomios con exponente cuadrado, factorización, leyes de signos en la multiplicación y suma, entre otras.

Durante el proceso los alumnos se mostraron abrumados por tantas operaciones como se esperaba, por ello el profesor hizo hincapié en que no era necesario que memorizaran todo el proceso ya que los alumnos están predispuestos a tratar de memorizar toda la información que el profesor presenta. En cambio, lo que se esperaba de ellos era que conocieran el origen de la ecuación en vez de tomarla como arte de magia o imposición arbitraria. Gracias a ello los alumnos se tranquilizaron y tomaron la descripción de forma más calmada, no obstante mostraron cierto aburrimiento sobre todo al final del procedimiento con lo cual se reafirma el desinterés de los alumnos hacia las matemáticas puras.

Cuando se obtuvo la ecuación ordinaria de la parábola el profesor introdujo las diversas posiciones de la gráfica dentro del mapa conceptual (en la representación gráfica de la parábola) así como las variaciones en la ecuación tal y como lo muestran las tablas y figuras de la página 73.

Agregó también el profesor que de la misma forma como se había deducido la ecuación en forma ordinaria de una parábola vertical, también se podía construir la ecuación de la parábola horizontal en forma ordinaria:

$$(y-k)^2 = 4p(x-h) \qquad \text{(E19)}$$

En la representación gráfica del mapa conceptual también se incluyeron las gráficas de las parábolas horizontales tal como se muestra en la página 74.

Para verificar la comprensión del alumno respecto a las posiciones de la gráfica parabólica al interpretar la ecuación ordinaria, el profesor pidió al alumno que identificara las ecuaciones parabólicas (entre varias opciones) e interpretara sus datos para determinar la posición de la gráfica correspondiente.

El ejercicio fue precisamente la actividad 3 de la etapa 2 (pág. 75).

Otro objetivo además de reafirmar lo referente a la ecuación ordinaria de la parábola fue introducir la ecuación parabólica en forma general, por ello, se esperaba que los alumnos reconocieran como ecuaciones parabólicas solamente los incisos impares, pero desde el inicio del ejercicio un alumno afirmó que todas las ecuaciones eran parabólicas, entonces el profesor aprovechó la respuesta para introducir la ecuación parabólica en forma general aunque sólo brevemente ya que la sesión se había terminado.

SESIÓN 4

El profesor recordó al grupo que todas las ecuaciones del último ejercicio visto en la clase anterior eran parabólicas. Para mostrarlo el profesor iba a guiar al alumno sobre el proceso que debía seguir para convertir la ecuación ordinaria a la forma general pero esta vez hubo alumnos que recordaban vagamente dicho procedimiento, ello agilizó la conversión pues el profesor solo sugirió que se desglosaran todas las operaciones compactas en la ecuación ordinaria para luego, con la ayuda de los alumnos que recordaban el procedimiento, fue más clara para el resto del grupo la forma de reducir la expresión y acomodarla del lado izquierdo de la ecuación.

Lo anterior se trata sobre la actividad 1 de la etapa 3 (pág. 77).

El proceso se dio más fluido de lo esperado gracias a la participación activa de los alumnos, entonces el ejercicio -que estaba planeado para que los alumnos lo desarrollaran solos (pág. 78)- confirmó que en efecto conocían el procedimiento a realizar cuando todos los alumnos convirtieron sin problemas la ecuación $(y+3)^2 = -8(x-7)$ a la forma general (que resulta ser: $y^2+6y+8x-47 = 0$).

De igual forma el profesor indicó la actividad 2 de la etapa 3 (pág. 78) para reafirmar la realización del procedimiento anterior pero se estableció a manera de trabajo extra-clase.

La mayoría del grupo realizó dicho procedimiento correctamente, sin embargo, la mitad de ellos mostraron dificultades al desarrollar un binomio con exponente cuadrado, despejar o multiplicar signos. Para resolver las dudas los alumnos se apoyaron en las fórmulas de productos notables que se plasmaron en láminas al frente del aula. A pesar de ello, hubo una alumna en especial que tuvo dificultades para aplicar el conocimiento previo referente a binomios con exponente cuadrado, propiedad distributiva en el producto y despeje, entonces el profesor consideró necesario darle asesoría personalizada al final de la clase para impedir que se obstaculizara su aprendizaje por los motivos expuestos.

Cuando el alumno comprendió la conversión de ecuaciones parabólicas de la forma ordinaria a la forma general, el profesor escribió en el pizarrón los pasos a seguir para revertir el proceso realizado de manera que se convirtiera la ecuación parabólica en forma general a la forma ordinaria. Se trata de la actividad 3 de la etapa 3 (pág. 78).

Con ayuda del profesor, se obtuvo el resultado del ejercicio en forma grupal para que luego los alumnos realizaran el procedimiento pero con otra ecuación, es decir, el primer inciso de la actividad 4 (etapa 3, pág. 81), sin embargo no dio tiempo de revisar los resultados obtenidos. Por ello el profesor dejó de trabajo extra-clase el resto de los ejercicios de dicha actividad.

SESIÓN 5

El profesor revisó el ejercicio resuelto como se había solicitado al final de la clase anterior pero la mayoría de los alumnos tenía dudas sobre el procedimiento, además los alumnos que faltaron a la sesión cuatro no conocían del todo el proceso. Se resolvieron dos ejercicios explicando paso a paso el procedimiento aunque persistieron las dudas porque al momento de hacer el ejercicio el objetivo era que los alumno resolvieran el ejercicio solos, sin embargo no pudieron evitar discutir entre ellos los pasos a realizar y de esa forma los alumnos trataron de cubrir la actividad como si solo les importara obtener una calificación en vez de comprender los conceptos implicados.

Finalmente, el profesor expuso las propiedades de la ecuación parabólica en forma general para que el alumno identificara la posición y abertura de la gráfica tal como se muestra en la página 81. Esta información también se incluyó en el mapa conceptual.

En este caso la nueva información no fue difícil de asimilar para el alumno ya que tenía clara la relación que guardaban los dos tipos de ecuaciones parabólicas, además de que las imágenes ayudaron a cristalizar la información.

SESIÓN 6

El profesor proporcionó un procedimiento a seguir para que el alumno extrajera todos los datos de la parábola a partir de su ecuación en forma ordinaria. El objetivo de esta actividad era utilizar y reafirmar la información reunida en el mapa conceptual, relacionar el álgebra y la geometría al concepto de parábola, además de aplicar el conocimiento adquirido.

El proceso a realizar fue precisamente la actividad 1 de la etapa 4 (pág. 82).

Una vez resuelto el ejercicio anterior, los alumnos debían resolver la actividad 2 de la misma etapa para verificar la comprensión del procedimiento realizado (pág. 85), pero por falta de tiempo no la terminaron, así que el resto de la actividad quedó a manera de trabajo extra-clase.

SESIÓN 7

En esta sesión fue completado el mapa conceptual donde se indicó la relación entre las partes de la parábola. Esta parte la dedujo el profesor con el grupo con base en toda la información reunida en todas las sesiones anteriores, el profesor indujo el proceso con preguntas guía que los alumnos fueron enlazando hasta llegar a los resultados esperados. Los puntos clave fueron:

- La distancia entre el vértice y el foco se connota como parámetro especial dentro de la ecuación de una parábola.
- El vértice es punto medio entre el foco y la directriz.
- El lado recto mide el cuádruple de la distancia entre el vértice y el foco.
- El eje focal es perpendicular a la directriz.
- Cualquier punto de la parábola se encuentra a la misma distancia de la directriz y del

foco.

Se dedujeron los elementos faltantes del mapa conceptual sin problemas gracias a las respuestas asertivas de algunos alumnos que desde el inicio de la práctica procesaron cada fase del proceso de enseñanza-aprendizaje y aportaron recursos e ideas claves para que se cumplieran los objetivos.

Al terminar el mapa conceptual el profesor pidió que los alumnos lo transcribieran a un pliego de papel bond, el cual debían presentar como requisito de examen dos días más tarde.

El mapa completo se asemeja a la Figura 16, sólo que en la parte gráfica también se incluyeron los datos como se muestran en la Figura 10 (pág. 70).

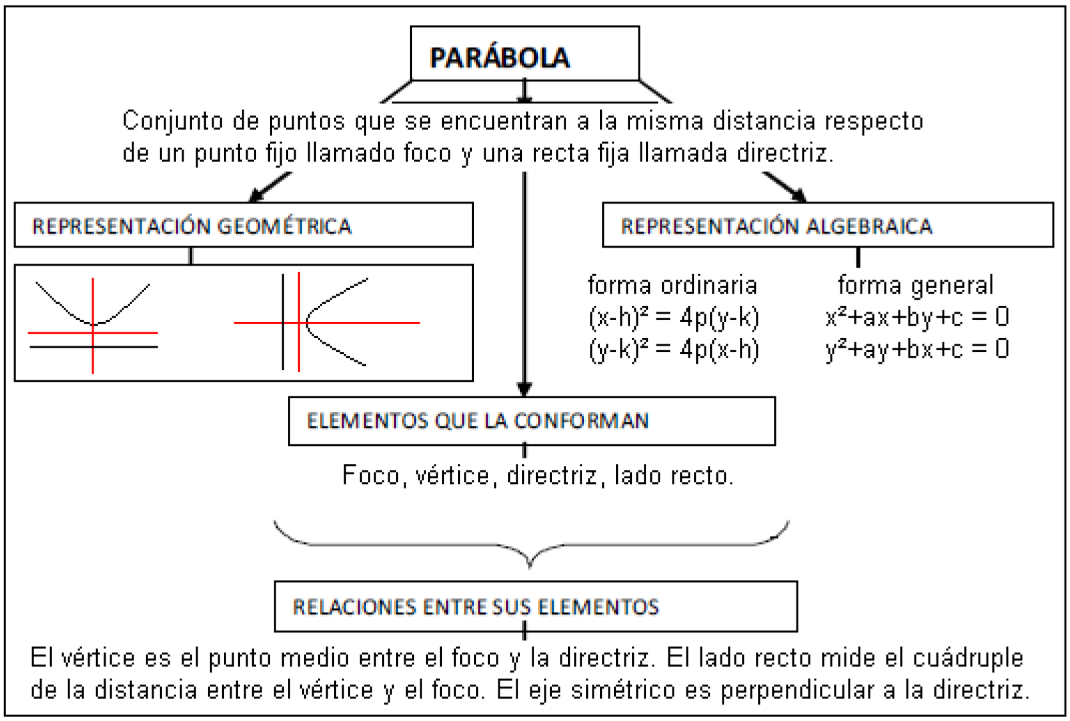


Figura 16. Esbozo del mapa conceptual completo.

Hasta ese momento se concluyó la etapa 4 pero sólo quedaba una sesión con el grupo según el tiempo autorizado por el colegio, no había forma de alargar la práctica ya que el ciclo escolar iba a terminar justo con el término de la práctica -así se acordó desde el inicio con el profesor titular del grupo en cuestión y bajo la autorización previa del colegio- de manera que fue necesario recortar la propuesta en las etapas restantes; es decir, en la etapa 5 se eligieron solamente 2 de los 6 ejercicios propuestos, a saber, el 1 y 3 (pág. 87 y 89) ya que su solución comprendía reunir la mayor parte de los conocimientos adquiridos durante la práctica. Respecto a la etapa 6 no se pudo aplicar pues era más importante reunir evidencias de aprendizaje para validar la aplicación de la práctica además de que los resultados obtenidos tendrían valor en la calificación de los alumnos respecto a la asignatura que cursaban en el ciclo escolar correspondiente.

SESIÓN 8

Esta sesión fue dedicada exclusivamente para reunir evidencias de aprendizaje de los alumnos que participaron en la aplicación de la propuesta didáctica debido a que era la última sesión permitida por el Colegio.

Por lo anteriormente expuesto, se replanteó el desarrollo de dicha sesión basado en el enfoque PISA (OCDE, 2003), es decir, el alumno debía mostrar sus capacidades para reconstruir y aplicar el conocimiento adquirido a través de la solución a problemas específicos. Para ello el profesor utilizó dos ejercicios incluidos en la etapa 5 de la propuesta didáctica (actividad 1, pág 86). Sabiendo que los alumnos no habían resuelto ningún ejercicio de ese tipo durante la práctica, estaba consciente de que los alumnos tendrían que reconstruir la información reunida en el mapa conceptual para luego aplicarla estratégicamente a fin de descubrir los datos implícitos en la redacción de los ejercicios, mismos que facilitarían la solución correspondiente. El profesor consideró el grado de dificultad que significaba dicha actividad dado que los alumnos están acostumbrados a seguir indicaciones precisas en vez de deducirlas por sí mismos, por tanto el profesor dirigió al grupo en la solución de los ejercicios mediante la guía de la página 86 como se muestra en la propuesta didáctica.

Para validar la evidencia de aprendizaje, las preguntas guía se discutieron de manera grupal pero los alumnos no tuvieron permitido hablar entre sí.

Antes de comenzar el examen, el profesor revisó que los alumnos acudieran con una copia del mapa conceptual como se solicitó en la sesión 7. Solamente uno de los asistentes no realizó el mapa y por ello no obtuvo oportunidad de ser evaluado ya que el objetivo de realizar el mapa era parte de las estrategias didácticas para reforzar el conocimiento adquirido.

Para comenzar el examen, el profesor escribió en el pizarrón dos ejercicios sin proporcionar al grupo alguna pista.

Los dos ejercicios corresponden al 1 y 3 de la actividad 1 (etapa 5, págs. 87 y 89 resp.):

Los alumnos copiaron el examen a desarrollar pero nadie empezaba a resolver, más bien mostraron expresión de duda y se veían unos a otros con incertidumbre. El profesor les pidió opinión sobre el examen, todos a coro dijeron que no sabían cómo resolverlo. El profesor expresó que ese era el objetivo de la actividad, es decir, vislumbrar lo que podían resolver a partir de los conocimientos adquiridos. Entonces el profesor dio la primera pista al sugerir que visualizaran la parábola de cada ejercicio a través de la localización de los datos proporcionados en el plano cartesiano. Después de ello, los alumnos no sabían cómo proseguir, fue como el profesor escribió la segunda pista: obtener la ecuación parabólica en forma ordinaria y luego convertirla a la forma general. El profesor indicó que éste era el procedimiento general de ambos ejercicios, por lo que debían primero obtener la ecuación ordinaria para luego convertirla. Un alumno pidió que mejor se les dieran los pasos a seguir para que resolvieran los ejercicios como se había hecho en las clases anteriores, otros pedían ver su mapa conceptual por un momento pero no se les autorizó ya que el objetivo del mapa era que estudiaran antes del examen, además se trataba de que los alumnos dedujeran el conocimiento sin ayuda de libros o información escrita.

Los alumnos seguían sin anotar y manifestaron que no se sentían preparados para ese tipo de examen, el profesor contestó que creía en su capacidad por lo que había visto en las clases anteriores, pero ellos argumentaron que era demasiada información y que cada clase sentían como si fuera un nuevo tema, de manera que en cada clase olvidaban lo anterior y sólo memorizaban lo de la nueva. Los alumnos pidieron otra pista, la cual fue: ¿Cuáles son los datos que proporciona la ecuación parabólica en forma ordinaria?, inmediatamente se escucharon algunas risas entre ellos y un murmullo que decía algo así como: “esa pista nos deja peor, o sea, más confundidos” entonces el profesor preguntó si sabían cuál era la ecuación ordinaria, pero estaban dudosos, el profesor les dijo que debían construirla entre todos, entonces anotó en el pizarrón todo lo que dijeron ellos, el resultado fue algo como:

$$(x^2 - h)^2 = (y^2 - k)^2,$$

Los alumnos discutían entre ellos porque unos estaban de acuerdo con ciertas partes y otros no, entonces el profesor les ayudó a visualizar cómo era en realidad la ecuación, esto fue posible cuando expuso las consecuencias de que cada elemento apareciera en dicha ecuación, por ejemplo, el segundo exponente de la expresión convierte la ecuación en una de grado cuatro, pero la parábola sólo tiene grado dos, por lo que dicho elemento no debe aparecer en la ecuación ordinaria. Una vez establecida la estructura correcta de la ecuación ordinaria, ellos solos debían identificar si era la ecuación adecuada para cada ejercicio, es decir, si el ejercicio representaba una parábola horizontal o vertical, en ese punto no hubo pistas puesto que dicha información era explícita en el mapa conceptual. Diez minutos después, los alumnos dijeron que no sabían qué más hacer, fue cuando manifestaron que dichos ejercicios no eran nada parecidos a los de toda la práctica, entonces argumentaron que por eso no podían hacerlo; el profesor argumentó que solo necesitaban utilizar lo que habían aprendido durante la práctica para aplicarlo en los ejercicios actuales, o sea la información vertida en el mapa conceptual y ellos expresaron que no lo habían estudiado suficiente. Retomó el profesor el desarrollo del examen cuando les pidió a los alumnos que expresaran los valores que proporcionaba la ecuación ordinaria, todos a coro contestaron: "La ecuación proporciona los valores de h, k y p", el profesor agregó que esos datos ya los sabían extraer, uno de los alumnos preguntó: "¿Pero cómo se saca p?", el profesor agregó que en el mapa conceptual aparecía expresada una relación entre el vértice y el foco donde intervenía p, entonces les recomendó a los alumnos que observaran la gráfica inicial para tratar de recordar dónde aparecía el valor. Trataron de recordar dicha relación pero a los 5 minutos nadie había obtenido correctamente el valor de p (ya faltaban 20 minutos para que terminara la sesión), el profesor dio la siguiente pista: fue un dibujo donde se veía el vértice y el foco de una parábola arbitraria, incluso era un ejemplo de parábola rotada, el objetivo era vislumbrar si ellos conocían la estructura de la gráfica de una parábola. Efectivamente lo sabían porque ellos le indicaron correctamente al profesor cómo y qué elementos debían aparecer. En el dibujo se observaba el vértice, la directriz y el foco, el profesor les dijo que entre el vértice y el foco había un valor muy importante en la parábola que les iba a ayudar a resolver el examen, además ese mismo valor aparecía entre el vértice y la directriz, entonces un alumno dijo, que se trataba de p, es decir, que la distancia entre el foco y el vértice era igual a p, al igual que la distancia entre el vértice y la directriz. Fue el momento donde todos comenzaron a comprender el ejercicio y se dispusieron a trabajar para buscar el valor de p. Después de unos minutos, una alumna preguntó que si debían usar la fórmula de distancia, pero el profesor expresó que había una forma más fácil de calcularla sin fórmula tan sólo observando la gráfica que ya habían trazado, ella dijo que mejor iba a usar la fórmula e intentó recitarla para verificar si se acordaba, entonces el profesor escribió en el pizarrón lo que ella dictó y estaba correcta. Después de que todos obtuvieron el valor de p, no hubo problemas para que continuaran el examen, es decir, no hubo necesidad de agregar otra pista excepto que la conversión final ya la habían realizado días antes en la práctica.

Minutos antes de que terminara la clase, un alumno entregó su examen, fue de los pocos que resolvieron ambos ejercicios, los demás lo entregaron hasta que así lo decidieron, ya que no se restringió el tiempo. El examen duró hora y media en realidad pero la mayoría solo resolvió un ejercicio.

A continuación se determinará la forma de evaluación al examen con base a los resultados reunidos.

El objetivo de dicha actividad era descubrir la habilidad de los alumnos para reconstruir el conocimiento adquirido y aplicarlo de acuerdo a lo que habían comprendido durante la práctica.

En ambos ejercicios se debía realizar el siguiente procedimiento:

- Graficar los elementos proporcionados en el ejercicio para reconocer la parábola en cuestión.
- Determinar el tipo de ecuación parabólica (vertical u horizontal).
- Encontrar el valor de p. Para ello era necesario utilizar alguna relación entre los datos proporcionados y el parámetro en cuestión (en el primer ejercicio se debía considerar que la distancia entre el vértice y el foco siempre es igual a p; mientras que en el segundo ejercicio, la distancia entre el foco y la directriz siempre es igual a $2p$).
- Encontrar el valor de h y k (en el ejercicio 1 ya estaban dadas, por lo cual sólo era necesario identificarlas; en cambio, en el segundo ejercicio, se debía recordar que el vértice es el punto medio entre el foco y la directriz, de tal forma que sus coordenadas son precisamente h y k).

A continuación se organizarán las respuestas escritas de los alumnos.

Ocho alumnos presentaron el examen.

Para evaluar los resultados obtenidos se tomaron en cuenta 12 puntos a realizar en cada ejercicio como sigue:

1. Localización del vértice en el plano.
2. Localización del foco en el plano.
3. Trazo de la directriz en el plano.
4. Trazo del lado recto en el plano.
5. Trazo aproximado de la parábola de manera que sea visible la abertura y posición.
6. Especificación del tipo de ecuación parabólica (vertical u horizontal).
7. Valor de p.
8. Valor de h.
9. Valor de k.
10. Sustitución de valores en la ecuación parabólica.
11. Determinación de la ecuación parabólica en forma ordinaria.
12. Determinación de la ecuación parabólica en forma general.

De los ocho alumnos que presentaron el examen, tres de ellos solo graficaron y determinaron el valor de p; otros tres alumnos sólo resolvieron el primer ejercicio, mientras que los dos alumnos restantes completaron todas las actividades.

El desarrollo de cada punto se calificó de forma aislada para poder analizar las técnicas de obtención con base en lo aprendido a fin de poder determinar los aspectos que realmente había comprendido y aplicado el alumno.

De los ocho examinados podemos destacar los aciertos en común como se muestra en la siguiente tabla:

ACIERTOS EN COMÚN ENTRE LOS ALUMNOS EXAMINADOS

Actividades a realizar	EJERCICIO 1	EJERCICIO 2
Localización del vértice en el plano.	8 alumnos la desarrollaron correctamente.	1 alumno la desarrolló correctamente.
Localización del foco en el plano.	8 alumnos la desarrollaron correctamente.	2 alumnos la desarrollaron correctamente.
Trazo de la directriz	1 alumno la desarrolló	2 alumnos la desarrollaron

en el plano.	correctamente.	correctamente.
Trazo del lado recto en el plano.	1 alumno la desarrolló correctamente.	1 alumno la desarrolló correctamente.
Esbozo de la parábola donde se aprecie la posición y abertura.	8 alumnos la desarrollaron correctamente.	1 alumno la desarrolló correctamente.
Especificación del tipo de ecuación correspondiente.	Ningún alumno la desarrolló correctamente.	2 alumnos la desarrollaron correctamente.
Cálculo del valor de p.	8 alumnos la desarrollaron correctamente.	2 alumnos la desarrollaron correctamente.
Cálculo del valor de h.	1 alumno la desarrolló correctamente.	2 alumnos la desarrollaron correctamente.
Cálculo del valor de k.	3 alumnos la desarrollaron correctamente.	1 alumno la desarrolló correctamente.
Sustitución de los valores anteriores en la ecuación correspondiente.	4 alumnos la desarrollaron correctamente.	2 alumnos la desarrollaron correctamente.
Determinación de la ecuación parabólica en forma ordinaria.	4 alumnos la desarrollaron correctamente.	2 alumnos la desarrollaron correctamente.
Determinación de la ecuación parabólica en forma general.	2 alumnos la desarrollaron correctamente.	2 alumnos la desarrollaron correctamente.

Puesto que la mayoría sólo realizó al menos parte del primer ejercicio, podemos determinar lo siguiente:

Todos los examinados pudieron graficar puntos en el plano, pero sólo uno pudo trazar una recta teniendo su ecuación explícita; incluso ese mismo alumno determinó el lado recto.

Todos identificaron el trazo de la parábola en el plano, es decir, supieron la concavidad y posición de sus elementos dentro del plano, no obstante, ninguno diferenció el tipo de ecuación que correspondía con el dibujo.

Todos calcularon correctamente el valor de p.

Un alumno determinó el valor de h y sólo 3 el valor de k.

Cuatro alumnos supieron sustituir los valores de p, h y k en la ecuación para determinar la ecuación parabólica en forma ordinaria.

Únicamente dos alumnos realizaron correctamente la conversión de la ecuación parabólica en forma ordinaria a la forma general.

Ningún alumno obtuvo correctamente alguna de las ecuaciones parabólicas en forma general como lo solicitaban los dos ejercicios. Las razones se relacionan con errores de signos, valores intercambiados y reglas mal aplicadas de productos notables.

3.1 ANÁLISIS DE RESULTADOS DE LA PROPUESTA DIDÁCTICA APLICADA.

Llegó el momento de analizar los resultados obtenidos. Los instrumentos de análisis son la evidencia de lo ocurrido, principalmente se da mayor importancia a la última actividad de la aplicación ya que se aplicó a modo de examen con el fin de evaluar el desarrollo de habilidades de razonamiento matemático del alumno, para ello se analizará la realización de los objetivos específicos de la propuesta didáctica para concluir hasta qué punto se cumplieron. A continuación se presentan los objetivos específicos tal como se observaron en el capítulo 1 (pág. 36):

1. Interesar al alumno sobre el estudio de la parábola a través de una aplicación de carácter tecnológico, como son los faros automovilísticos, para mostrarle la utilidad del conocimiento matemático.
2. Que comprenda el alumno el tema de parábola con mayor fluidez si se le traducen los términos matemáticos al lenguaje coloquial.
3. Que el alumno asimile el concepto geométrico de la parábola con mayor facilidad construyendo un ejemplo concreto sobre papel a partir de una recta y un punto (que harán la función de directriz y foco respectivamente).
4. Que el alumno descubra el concepto algebraico de la parábola a través de su definición –en términos de distancias- que a su vez sea representada en una ecuación.
5. Que el alumno vislumbre la unidad temática de parábola como conceptos relacionados si se le muestran a manera de mapa conceptual.
6. Que el alumno sea capaz de reconstruir una parábola en términos algebraicos y geométricos a partir del foco y la directriz si se le guía con preguntas o pistas que le ayuden a aplicar lo que ha aprendido.

El objetivo 1 se logró, puesto que las prácticas con faros automovilísticos y la simulación de un paraboloide causaron gran interés en el alumno, fomentando así una mayor disposición para cooperar en las siguientes actividades.

El objetivo 2 se logró también puesto que la actividad con papel albanene facilitó la asimilación del concepto de parábola en el aspecto geométrico, además de que fomentó la confianza y la calidad de la comunicación entre los alumnos y el profesor.

Respecto al objetivo 3, no fue posible concretarse del todo debido a que los alumnos reafirmaron su desinterés por la matemática pura. En respuesta a lo ocurrido, tal vez sería más dinámica la realización de dicho procedimiento a través de medios electrónicos, es decir, seleccionar algún software que permita visualizar la construcción algebraica de manera más sintetizada y visual. Lo anterior dependerá de los recursos electrónicos de la escuela, por supuesto.

El objetivo 4 se cumplió en parte ya que los alumnos presentaron algunas dificultades para relacionar la notación matemática con el concepto de parábola. Entonces es necesario encontrar nuevas estrategias que ayuden al alumno a vincular la notación matemática con la geometría.

Respecto al objetivo 5, fue bastante productivo el mapa conceptual ya que el alumno fue testigo de las relaciones entre los elementos que conforman la parábola, no obstante, se debe destacar nuevamente la dificultad que presenta el alumno para relacionar lo algebraico con lo geométrico. Para reforzar la relación entre álgebra y geometría se recomienda el software que diseñaron los doctores: Carlos Hernández Garciadiego y José Luis Abreu León; donde el alumno puede apreciar los cambios que sufre la gráfica de cualquier sección cónica, en particular para la parábola si se realizan variaciones a su ecuación. Este medio no se utilizó en la propuesta didáctica a pesar de tenerlo a libre disposición (además de la autorización directamente de los creadores) debido a que las escuelas donde se aplican las prácticas docentes no otorgan el permiso correspondiente para utilizar los recursos electrónicos necesarios.

El objetivo 6 se logró en parte porque con base en las relaciones entre los elementos de la parábola fue posible deducir el valor del parámetro p, además de la abertura y posición de los elementos que la conforman.

Por todo lo anterior, el objetivo 6 se cumplió respecto a la parte geométrica; sin embargo, no se pudo completar lo relacionado a la parte algebraica debido a conocimientos previos mal asimilados.

3.2 DEDUCCIONES SOBRESALIENTES EN LA APLICACIÓN DE LA PROPUESTA DIDÁCTICA.

- Es importante convencer a los profesores del área matemática sobre la importancia que tiene la parte motivacional al inicio de cada proceso enseñanza-aprendizaje como lo establecen Pozo (Pozo, 2006), Denyer (Denyer, 2004) y en el mismo sentido Boekaerts (Boekaerts, 2002) para conseguir la atención y disposición del alumno. Es una forma de aterrizar los conceptos matemáticos y reducir el nivel de abstracción además de enriquecer los recursos didácticos. Aún más, el alumno encontrará sentido y significado al tema estudiado y sobre todo dará credibilidad al proceso.
- Los profesores del área matemática no deben olvidar que los alumnos no tienen el mismo nivel de comprensión que ellos, mucho menos se debe dar por sentada la asimilación correcta de los conocimientos previos. De manera que el profesor debe aprender a escuchar al alumno para conocer sus capacidades y de esa forma aprovecharlas para fomentar su aprendizaje en el ritmo y forma que éste lo necesite, es decir, considerando sus carencias y apuntalando los conceptos previos necesarios.
- Durante la aplicación de la propuesta los alumnos mostraron cierta iniciativa para cuestionar lo que observaban, con ello el profesor apuntaló el enfoque de la propuesta para construir cada etapa y por supuesto fomentar la comprensión del alumno en cada concepto implicado. Por lo anterior se recomienda establecer una buena comunicación profesor-alumno para que sea más fluida la construcción del conocimiento en el alumno, aún más, el alumno tendrá mayor confianza de expresar sus dudas y descubrimientos.
- Fue difícil para los alumnos deducir los conocimientos en el examen a no ser por las preguntas guía que sirvieron de reflexión, deducción y aprendizaje a la vez, aunado a las respuestas de los alumnos mediante las cuales se enriqueció el nivel de asimilación respecto al tema. Esto indica que los alumnos no están acostumbrados a deducir, analizar y relacionar ideas como lo mencionó Monsalvo (Monsalvo, 2003), no obstante, también se mostraron evidencias de que, bajo la guía estratégica del profesor como lo recomienda Bruner en el andamiaje educativo (Bruner, 1960), el

alumno puede desarrollar dichas habilidades para generar su aprendizaje.

- En general los alumnos se mostraron sorprendidos cuando descubrieron el significado de conceptos que ya manejaban sin saber su significado real como ocurrió con el concepto de lugar geométrico. Es así como el alumno puede realmente descubrir el mundo matemático, sólo es cuestión de que el profesor sitúe al alumno en el lugar y momento adecuado de tal forma que su interés por aprender surja como lo recomendaron Denyer (Denyer, 2004) y Pozo (Pozo, 2006).
- Dados los sucesos del examen final, se puede confirmar que los alumnos estaban condicionados a repetir las instrucciones del profesor a la hora de resolver ejercicios matemáticos. Por esta razón fue difícil inducirlos a reflexionar, deducir, proponer e intentar acciones nuevas por ellos mismos. No obstante, se considera que el alumno debería empaparse más con el nuevo enfoque hasta adoptarlo como técnicas de estudio, a fin de que pueda practicar las habilidades de razonamiento matemático hasta que se conviertan en hábitos propios para construir el aprendizaje.
- En otra instancia, como los conceptos previos al tema de parábola no tenían significado para los alumnos y no los habían asimilado del todo, se convirtieron en obstáculos para que pudieran completar el examen. Esta es otra razón por la cual se debe aplicar la propuesta en otros temas, incluso en otros cursos de forma consecutiva para que el alumno enriquezca el nivel de aprendizaje en diversas áreas de estudio, a fin de que en cada tema nuevo tenga buenos cimientos en los conceptos previos como lo establece Ausubel (Mergy, 2011). Los dos alumnos que resolvieron toda la actividad final dieron muestra de conocer el procedimiento de solución, sin embargo, ambos incurrieron en errores de conceptos previos, los cuales distorsionaron las ecuaciones resultantes respecto a las esperadas.
- Se deben buscar nuevas estrategias didácticas para agregarlas a la propuesta dada con relación a la parte algebraica del tema, a fin de reforzar la comprensión del concepto, el manejo básico de operaciones algebraicas y también encontrar la forma de relacionar dicha información con el aspecto geométrico una vez que haya sido construido. Las nuevas propuestas deben encaminarse a conseguir que el alumno encuentre significado y sentido a los procesos algebraicos en vez de mecanizarlos.
- Sería recomendable que el alumno realice nuevas actividades con la guía estratégica

del profesor para que el alumno continúe desarrollando sus habilidades de razonamiento matemático; así aumentará la credibilidad y seguridad en sí mismo respecto a las matemáticas. De esta forma el alumno comprenderá que las matemáticas no son automáticas sino que se deben descubrir y dentro de dicho proceso se logra el aprendizaje.

Conclusiones

Concretamente en un grupo del Colegio de Ciencias y Humanidades se pudo observar lo siguiente:

- Los alumnos se muestran más interesados y dispuestos al estudio de las matemáticas a través de situaciones que no dependen directamente de la asignatura y sus conceptos implicados.
- Los alumnos asimilan con mayor facilidad la información a través de actividades concretas donde el significado de los conceptos sean más tangibles y evidentes.
- Los alumnos se identifican mejor con los conceptos matemáticos si se les traducen al lenguaje coloquial.
- Los alumnos tienen la capacidad de razonamiento y la desarrollan si se les cuestiona de manera estratégica como propuso Sócrates con la mayéutica, de tal forma que esta habilidad se puede emplear para ayudarlos a comprender los conceptos matemáticos. Esto se reafirma en “Lecturas para maestros” (Guevara, 2005).

Por otro lado, existen características comunes en los alumnos que tienden a obstaculizar el proceso de aprendizaje. A continuación se enumeran varios factores que influyeron directamente con los resultados de la propuesta didáctica validada.

1. El alumno sigue condicionado a memorizar información y repetir procedimientos que el profesor indica, por tanto muestra resistencia a salir de ese hábito que le ha permitido acreditar las asignaturas del nivel bachillerato. Dicho comportamiento lo estudió Freire donde establecen que el ser humano nace con curiosidad e interés por aprender, pero conforme se empapa del sistema educativo tradicional va perdiendo toda huella mental que implique cuestionamiento, creatividad, razonamiento, reflexión, etc. (Freire, 1983). Lo anterior ocurre porque dejamos de ejercitar dichas habilidades hasta casi desaparecer, mientras más convivimos con el sistema educativo tradicional, más difícil y tardado será despertar el interés por aprender, cuestionar, reflexionar, etc. Aunque no es imposible lograr el cambio. En este punto, es importante también que el profesor crea en el progreso mental del alumno, de lo contrario perderá la creatividad para

contribuir al cambio pues la participación activa y estratégica del profesor es determinante durante el proceso de aprendizaje del alumno.

2. El alumno le da mayor importancia a la calificación que al aprendizaje obtenido. No debe extrañarnos tal preferencia pues el alumno piensa que las matemáticas no tienen utilidad fuera del aula, por ello cobra fuerza la necesidad de enriquecer la enseñanza de las matemáticas por medio de aplicaciones concretas del conocimiento como lo maneja PISA (OCDE, 2003) y el aprendizaje basado en problemas que propone Spence (Spence, 1996).
3. El alumno muestra resistencia a crear, buscar y pensar por sí mismo ya que está acostumbrado a recibir información y seguir instrucciones. Incluso confía más en sus amigos que en sí mismo, ello fomenta la baja autoestima y dependencia mental del alumno.
4. El alumno va acumulando conceptos mutilados a lo largo de su trayectoria escolar ya que no completa el proceso de asimilación, lo cual le dificulta asimilar nuevos temas.

Por lo tanto, a pesar de que el alumno se resiste a cambiar sus hábitos de estudio y actitudes dentro del aula no debemos declinar, como se apreció cómo el alumno se dispone a participar en el proceso enseñanza-aprendizaje cuando se logra atraer su atención. Entonces se debe buscar la manera de generar más oportunidades de aprendizaje a través de actividades más motivadoras para el alumno como lo dice Boekaerts (Boekaerts, 2002), sobre todo en las partes donde la propuesta didáctica no rindió los resultados esperados, en este caso fue en el aspecto algebraico.

Es preciso ejercitar en los alumnos las habilidades de razonamiento dentro de las clases en situaciones que ayuden a involucrar al alumno, es decir, ellos se resisten a manejar conceptos matemáticos porque están acostumbrados a no comprenderlos como lo establece Andere porque no se le incluye directamente en el proceso de aprendizaje, en cambio, cuando se les pide su opinión ellos se muestran dispuestos a participar porque les agrada ser escuchados (Andere, 2003). A los jóvenes les gusta analizar situaciones o cosas para tratar de comprenderlas, por tanto, primero hay que lograr que los alumnos traten de comprender las matemáticas.

Dado que las matemáticas en esencia solo requieren de trabajo mental para estudiarlas, comprenderlas y aplicarlas, se puede disminuir la cantidad de actividades extraclase, incluso las actividades a realizar dentro del aula de modo que el estudiante no se sienta abrumado con trabajos escritos sino que se le dé mayor importancia a las deducciones que realiza mentalmente.

Como lo dijo Ausubel (Mergy, 2011). Aunque el alumno logre asimilar un concepto nuevo, si no posee una buena comprensión de los conceptos previos que se necesitan para poder aplicar el nuevo concepto, entonces no podrá completar el procesamiento de la nueva información, por dicha razón sería recomendable aplicar la propuesta en los demás temas del curso y en las demás asignaturas para que el aprendizaje se robustezca cada vez más y se ejercite el desarrollo de habilidades de razonamiento en el alumno de forma indefinida.

El alumno dejó de interesarse por aprender desde que las clases se tornaron aburridas como lo expone Freire (Freire, 1983), entonces el profesor debe buscar constantemente la forma de amenizar sus clases con pizcas de temas relacionados con las matemáticas como lo recomienda Guzmán además de la nueva forma de atraer la atención del alumno mediante software interactivos (Guzmán, 1993). Un ejemplo de lo productivo que resulta ser el uso de técnicas didácticas e interactivas para reforzar la comprensión del conocimiento es el programa de bachillerato a distancia de la UNAM (B@UNAM, 2012) donde se utiliza la balística y una animación virtual sobre la trayectoria que describe una bala a causa de un disparo para profundizar los conceptos parabólicos.

Bibliografía

Ejemplares Impresos

1. Andere, M. E. 2003. *La educación en México: un Fracaso Monumental*. México: Temas de Hoy.
2. Azerêdo, T. 2003. *Compreender e Ensinar: Por Uma Docência da Melhor Qualidade.* Barcelona: Graô.
3. Boekaerts, M. 2002. *Motivation to Learn*. Brussels: International Academy of Education.
4. Boyer, C. 1968. *A History of Mathematics*. New York: John Wiley & Sons, Inc.
5. Bruner, J. 1960. *The process of education*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.
6. Calderón, F. 2007. *Plan Nacional de Desarrollo 2007-2012*. México: Presidencia de la República.
7. Canabal, S. G. 2007. *Un Estudio de las Cónicas a través de la Resolución de Problemas*. México: el autor.
8. Cassany, D. 2000. *Construir la Escritura*. Barcelona: Paidós Ibérica.
9. Chaitin, G. 2005. *Meta Maths.* London: Atlantic Books.
10. Congreso Universitario de la Universidad Nacional Autónoma de México, Seminarios de Diagnóstico del Colegio de Ciencias y Humanidades. 2003. *¿Qué pasa con la reprobación en matemáticas?* Monsalvo, M. Documento 1246, Ponencia.
11. Cornejo, A. 2009. *Definición de Secuencias Didácticas*. México: UNAM.
12. Cornejo, A. 2009. *Rasgos del Aprendizaje Cooperativo*. México: UNAM.
13. Davis, P.; Hersh, R. 1981. *The Mathematical Experience*. Boston: Birkháuser.
14. Denyer, M.; et al. 2004. *Les Compétences: Où en est-on ? L'application du Décret « Missions »* en Communauté Française de Belgique. Bruxelles: De Boeck.
15. Díaz, M. A.; et al. 2010. *México en Pisa 2009*. México: Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.

16. Downs, J. 1993. *Practical Conic Sections: The Geometric Properties of Ellipses, Parabolas and Hyperbolas*. New York: Dover Publications, Inc.
17. Ebrard, M. 2009. *Cuarto Informe de Gobierno 2009-2010*. México: Gobierno del Distrito Federal.
18. Estévez, E. H. 2004. *Enseñar a Aprender*. México: Paidós.
19. Flores, J. 2011. *Informe del Colegio de Ciencias y Humanidades: Plantel Sur 2011-2*. México: CCH Plantel Sur UNAM.
20. Freire, P. 1983. *Pedagogía del Oprimido*. México: Siglo XXI Editores.
21. Godino, J.; et al. 2003. *Fundamentos de la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas.* Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. ISBN: 84-932510-6-2.
22. González, P. 2003. *Los orígenes de la Geometría Analítica*. Tenerife: Canaria Orotava.
23. Guevara, G. 2005. *Lecturas para Maestros*. México: Cal y Arena.
24. Guzmán, M de. 1993. *Tendencias Innovadoras en Educación Matemática*. Bogotá: UNESCO.
25. Heiberg, J. 1993. *Archimedis Opera Omnia*. Editor.
26. Hernández, C.; De Oteyza, E. 2008. *Geometría Analítica*. UNAM: Pearson.
27. Hernández, E. 2006. *Cómo Escribir Una Tesis: Metodología de la Investigación*. Cuba: Escuela Nacional de Salud Pública.
28. Hernández, G. 2001. *Mecanismos de Enseñanza - Aprendizaje del Álgebra en el Nivel Medio Superior*. México: El autor.
29. Jurado, S. 2011. *Plan de desarrollo Escuela Nacional Preparatoria 2010-2014*. México: ENP UNAM.
30. Kandel, E. 2006. *In Search of Memory*. New York: W. W. Norton.
31. Mazón, A.; Fabelo, B. 2007. *Una Propuesta para la Asimilación de Conceptos Matemáticos a través del Aprendizaje Significativo*. Cuba: Universidad del Pinar del Rio.
32. Morales, E. S. 2005. *Estrategias de Enseñanza-Aprendizaje de las Matemáticas en el Nivel Medio Superior*. México: El autor.
33. Muñoz, L. 2010. *Plan General de Desarrollo para el Colegio de Ciencias y Humanidades 2010-2014*. México: DGCCH, UNAM.
34. Narro, J. 2008. *Plan de Desarrollo 2008-2011*. México: Dirección General de

Planeación UNAM.

35. Novak, J. 1977. *Learning how to learn*. Cambridge University Press, United Kingdom.
36. Oteyza, E. de; et al. 2010. *Conocimientos Fundamentales para la Enseñanza Media Superior*. UNAM: Consejo Académico del Bachillerato.
37. Pando, S. A. 2009. *El Extraño Mundo de las Teselaciones: Un Paseo por la Geometría para Estudiantes del Bachillerato*. México: UNAM.
38. Papalia, D; Olds, S; Feldman, R. 2004. *Desarrollo Humano*. México: McGraw Hill.
39. Pasos del sur, Revista semanal del Colegio de Ciencias y Humanidades, plantel sur. 2012. *Jornada de Planeación Académica 2013-1: Trabajar unidos para mejorar el aprovechamiento escolar.* Órgano informativo del CCH, sur. Número 573 – Agosto 2012.
40. Perry, C. 1998. *A Structured Approach for Presenting Theses*. A Head of Department of Marketing: University of Southern Queensland.
41. Pozo, J. I., et al. 2006. *Nuevas Formas de Pensar la Enseñanza y el Aprendizaje*. Barcelona: Graô.
42. Ramírez, M. del C. 1998. *Aplicación de un Procedimiento Cognoscitivo-Conductual para la Enseñanza en Solución de Problemas Aritméticos.* México: El autor.
43. Rice, F. 2000. *Adolescencia: Desarrollo, Relaciones y Cultura*. España: Prentice Hall.
44. Sánchez, R. 1993. *Didáctica de la Problematización en el Campo Científico de la Educación*. México: Universidad Pedagógica Nacional.
45. Savater, F.2003. *El Valor de Educar*. Barcelona: Ed. Ariel.
46. Savater, F. 1995. *Ética para Amador*. México: Ed. Ariel.
47. Sepúlveda, A.; Santos, L. M. 2006. *Desarrollo de Episodios de Comprensión Matemática: Estudiantes de Bachillerato en Procesos de Resolución de Problemas ,* Revista Mexicana de Investigación Educativa, V11 N31 oct-dic P1389-1422
48. Servera, M. 1992. *El Enseñar a Pensar y la Instrucción en Estrategias Cognitivas.* Universitat de les Illes Balears: AFUNTAP.
49. Silva, E. P. 1999. *Análisis de las Causas que Provocan la Reprobación de la Asignatura de Matemáticas en el Segundo Semestre del Nivel Medio Superior: caso del C.C.H. de Uruapan, CICLO ESCOLAR 1997-1998.* Uruapan, Mich. : El autor.
50. Spence, L. D. 1996. *Problem Based Learning: Lead to Learn, Learn to Lead.* Ppt. Pennsylvania State University: School of information sciences and technology.

51. Toomer, G. 1990. *Conics: Sources in the history of mathematics and physical sciencies*.... Michigan University: Springer-Verlag.
52. Trianes, M. V.; Gallardo, J. A. 1998. *Psicología de la educación y del desarrollo*. España: Ediciones Pirámide.
53. Vázquez, J. Z. 2000. *Nacionalismo y Educación en México*. México: Colegio de México.

Fuentes Electrónicas.

54. Agenda Estadística, UNAM. 2011. *Memoria UNAM* (en línea). Dirección General de Planeación, UNAM. Consultado may. 2011. Disponible en www.planeacion.unam.mx
55. Bachillerato a distancia. 2012. *B@UNAM*. México: UNAM. www.bunam.unam.mx
56. Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos, IPN. 2010. *Plan de Estudios* (en línea). CECYT, IPN. Consultado jun. 2010. Disponible en www.cecyt1.ipn.mx
57. Centro de Tesis, Documentos, Publicaciones y Recursos Educativos en Línea, CR. 2011. *Psicología Educativa* (en línea). Mergy, J. G., Monografías.com S. A. Consultado ago. 2010. Disponible en www.monografias.com
58. Centro Nacional de Evaluación para la Educación Superior, A. C. 2011. *Exámenes Generales para el Egreso de la Educación Básica y la Educación Media Superior* (en línea). CENEVAL, A. C. Consultado may. 2011. Disponible en www.ceneval.mx
59. Colegio de Bachilleres, SEP. 2010. *Plan de Estudios* (en línea). GDF, SEP. Consultado jun. 2010. Disponible en www.cbachilleres.edu.mx
60. Colegio de Ciencias y Humanidades, UNAM. 2010. *Plan de Estudios* (en línea). Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades, UNAM. Consultado jun. 2010. Disponible en http://www.cch.unam.mx/principal/plandeestudios
61. Colegio Nacional de Educación Profesional Técnica, SEP. s.f. *Plan de Estudios* (en línea). GDF, SEP. Consultado jun. 2010. Disponible en www.conalep.edu.mx
62. Community for Sharing Presentations, Slideshare. 2003. *Teoría del Aprendizaje Significativo* (en línea). Rodríguez, M. L., Slideshare Inc. Consultado may. 2011. Disponible en www.slideshare.net
63. Contexto Educativo, Revista Digital de Educación y Nuevas Tecnologías. 2006. *Resolución de Problemas: Una Alternativa Didáctica en el Aprendizaje de las*

Matemáticas (en línea). Riverón, O. Revista Digital de Educación y Nuevas Tecnologías. Número 13 - Noviembre 2000. Consultado may. 2011. Disponible en www.contexto-educativo.com.ar

64. Dirección General de Educación Tecnológica Industrial, SEP. 2010. *Plan de Estudios* (en línea). GDF, SEP. Consultado jun. 2010. Disponible en www.dgeti.sep.gob.mx
65. Escuela Nacional Preparatoria, UNAM. 2010. *Plan de Estudios* (en línea). DGENP, UNAM. Consultado jun. 2010. Disponible en http://dgenp.unam.mx/
66. Evaluación Nacional del Logro Académico en Centros Escolares, SEP. 2011. *Prueba Enlace 2009* (en línea). Instituto Latinoamericano de la Comunicación Educativa, SEP. Consultado mar. 2009. Disponible en www.enlace.sep.gob.mx
67. Facultad de Ciencias Forestales, Universidad Nacional Agraria La Molina. s.f. *Instructivo para la Redacción de Tesis FCF* (en línea). Programa Académico de Ciencias Forestales, CEDINFOR. Consultado jun. 2011. Disponible en http://cedinfor.lamolina.edu.pe/TesisFCF/instructivo_TesisFCF.pdf.CEDINFOR. UNALM
68. Fondo de las Naciones Unidas para la Infancia, CR.2010. *UNICEF en México: Educación* (en línea). UNICEF México, CR. Consultado may. 2011. Disponible en http://www.unicef.org/mexico/spanish/unicefenmexico.html
69. Observatorio Ciudadano de la Educación, CR. s.f. *La Calidad Educativa y sus Programas: necesaria redistribución* (en línea). Latapí, P; et al, OCE. Consultado ago. 2011. Disponible en www.observatorio.org
70. Orbe, UNAM. 1999. *La Redacción de una Tesis* (en línea). Arias, A. G., UNAM. Consultado jun. 2011. Disponible en http://cexpe.iztacala.unam.mx/historico/recomedu/orbe/fcya/garias.html
71. Organisation for Economic Co-operation and Development, CR. 2011. *About OECD* (online). OECD, CR. Viewed mar. 2009. Avalaible in www.oecd.org
72. Organisation for Economic Co-operation and Development, CR. 2011. *Programme for International Student Assessment 2003* (online). OECD, CR. Viewed mar. 2009. Avalaible in www.oecd.org/dataoecd/59/1/39732493.pdf
73. Organisation for Economic Co-operation and Development, CR. 2011. *Programme for International Student Assessment 2006* (online). OECD, CR. Viewed mar. 2009. Avalaible in www.oecd.org/dataoecd/58/54/39730555.pdf
74. Organisation for Economic Co-operation and Development, CR. 2012. *Education at a*

Glance 2012: OECD Indicators. OECD Publishing. Available on http://dx.doi.org/10.1787/eag-2012-en

75. Portal Académico del Colegio de Ciencias y Humanidades, plantel sur, UNAM. 2011. *Estrategias didácticas en el área de matemáticas* (en línea). PEA, CCH. Consultado ago. 2012. Disponible en http://portalacademico.cch.unam.mx/estrategias/matematicas
76. Portal de Estadística Universitaria, UNAM. 2011. *Series Estadísticas UNAM* (en línea). PEU, UNAM. Consultado may. 2011. Disponible en www.estadistica.unam.mx
77. Sistema de Información de Tendencias Educativas en América Latina, CR. 2010. *Resúmenes Estadísticos 2009* (en línea). Organización de las Naciones Unidas para la Educación y la cultura, CR. Consultado jun. 2010. Disponible en www.siteal.iipe-oei.org/
78. Transparencia y acceso a la información. UNAM. 2011. Unidad de enlace y acceso a la información, DGCCH, SEPLAN. 2011. (en línea). UNAM. Consultado feb. 2011. Disponible en www.transparencia.unam.mx
79. Zorrilla, J. F. 2008. *El bachillerato Mexicano.* UNAM: IISUE.