



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIA E INGENIERÍA  
DE LA COMPUTACIÓN

**“SOBRE EL COMPORTAMIENTO DE ALGUNAS  
ESTRUCTURAS GEOMÉTRICAS BAJO ROTACIÓN EN EL  
PLANO, Y SU RELACIÓN CON SUCESIONES  
PERMISIBLES”**

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

**DOCTOR EN CIENCIAS  
(COMPUTACIÓN)**

P R E S E N T A:

**CANEK PELÁEZ VALDÉS**

DIRECTOR DE TESIS: JORGE URRUTIA GALICIA  
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
CODIRECTORA: SILVIA FERNÁNDEZ MERCHANT  
POSGRADO EN CIENCIA E INGENIERÍA DE LA COMPUTACIÓN

MÉXICO, DF

MARZO 2014



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Sucesiones permisibles</b>	<b>3</b>
2.1. El caso geométrico	3
2.2. Sucesiones permisibles	6
2.3. El caso generalizado	7
2.4. Líneas medianas y $(k - 1)$ -aristas	9
2.5. Algunos resultados utilizando sucesiones permisibles	12
2.5.1. La propiedad alternante local	12
2.5.2. $2n$ puntos, $2n$ direcciones	14
<b>3. Bloqueo de convexos bajo distintas orientaciones</b>	<b>19</b>
3.1. Órdenes parciales y bloqueo	20
3.2. Las direcciones críticas	22
3.3. Triangulaciones- $\alpha$	25
3.4. Un algoritmo para encontrar $\alpha_0$	31
3.5. Algunos comentarios sobre el ordenamiento de $\mathcal{D}$	32
3.6. Sucesiones circulares para convexos	35
<b>4. Capas rectilíneas en conjuntos de puntos</b>	<b>37</b>
4.1. Capas convexas rectilíneas	38
4.2. Escaleras de nivel $k$	39
4.3. El árbol de dominación	41
4.4. Construyendo las capas convexas rectilíneas	44
4.5. La rotación de $S$ con el mínimo número de capas	46
4.6. Sucesiones circulares en dominación vectorial	50
<b>5. Cota inferior para 3, 4 y 5-conjuntos en el plano</b>	<b>51</b>
5.1. $k$ -conjuntos y $\mathcal{N}_k(n)$	51
5.2. La construcción de Tóth	52
5.3. Cota inferior para $(k - 1)$ -pseudoaristas	54
5.4. Construcción geométrica	60
5.5. Las cotas superiores	66
5.5.1. Resultados conocidos	66
5.5.2. Capas de sucesiones permisibles	67
5.5.3. Cota superior para $\mathcal{N}_2(n)$	71
5.5.4. Cota superior para $\mathcal{N}_3(n)$	72
5.6. Las cotas inferiores	74

5.6.1. Cota inferior para $\mathcal{N}_3(n)$ . . . . .	74
5.6.2. Cota inferior para $\mathcal{N}_4(n)$ . . . . .	76
5.6.3. Cota inferior para $\mathcal{N}_5(n)$ . . . . .	77
5.7. Mirando hacia adelante . . . . .	79
<b>6. Conclusiones</b>	<b>81</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>83</b>

# Índice de figuras

2.1. Conjunto de ocho puntos proyectados sobre $\ell$ . . . . .	3
2.2. Círculo envolviendo a $S$ con $\ell$ tangente. . . . .	4
2.3. Dos puntos de $S$ proyectándose sobre $\ell$ en el mismo punto. . . . .	4
2.4. Los puntos 2 y 3 se intercambian en el orden $\prec$ . . . . .	5
2.5. Los puntos se invierten completamente respecto al orden original. . . . .	5
2.6. Permutaciones de los elementos $i$ y $j$ en $S$ . . . . .	6
2.7. Cuatro puntos con pseudolíneas. . . . .	7
2.8. El semiperiodo $\pi$ visto como matriz o como diagrama de cables. Cada cable representa la trayectoria de un elemento de $\pi$ . . . . .	8
2.9. Configuración generalizada y sucesión permisible correspondiente. . . . .	8
2.10. Conjunto de ocho puntos proyectados sobre $\ell$ , de nuevo. . . . .	9
2.11. Primeros renglones de la sucesión circular del conjunto de puntos de la Figura 2.10. . . . .	10
2.12. El intercambio en el centro de 4 y 6 define una línea mediana. . . . .	10
2.13. El punto $s$ queda a la izquierda de $\ell_{ij}$ orientada de $j$ a $i$ . . . . .	11
2.14. Las aristas $a$ y $b$ , que bien podrían ser pseudoaristas. . . . .	12
2.15. $2n + 1$ puntos pueden generar pocas direcciones: $2n$ en este caso. Las direcciones determinadas por las líneas punteadas son todas repetidas. . . . .	14
3.1. Dos distintas direcciones para poder llegar a $c_1$ . . . . .	19
3.2. Cuando $C$ contiene elementos no convexos, a veces no podemos desplazarlos evitando colisiones. . . . .	20
3.3. El elemento $c_{\sigma(r+1)}$ es una $\alpha$ -cubierta de $c_{\sigma(r)}$ , $r = 1, 2, 3$ , y $c_{\sigma(r)} \prec_{\alpha} c_{\sigma(s)}$ , $r < s$ . En particular, $c_i \prec_{\alpha} c_j$ , pero $c_j$ no es $\alpha$ -cubierta de $c_i$ . . . . .	21
3.4. Diagrama de $P(\prec_{\alpha}, C)$ para $\alpha = \frac{\pi}{2}$ . . . . .	22
3.5. Tangentes externas e internas de $c_i$ y $c_j$ . . . . .	23
3.6. $c_j$ a la izquierda de $\ell_1$ y $\ell_2$ . . . . .	24
3.7. Una sucesión de $\theta_1$ -cubiertas de $c_j$ a $c_i$ , y la curva que pasa a través de sus elementos. . . . .	25
3.8. La malla $P'(\prec_{\alpha}, C)$ para $\alpha = \frac{\pi}{2}$ . . . . .	26
3.9. $c_j$ es $\frac{\pi}{2}$ -visible desde $c_i$ ; $c_a$ no lo es desde $c_b$ (ni viceversa). . . . .	26
3.10. Zona de $\alpha$ -visibilidad de $c_j$ desde $c_i$ en gris. . . . .	26
3.11. Zona de visibilidad y multiarista orientada correspondiente. Las multiaristas las dibujaremos punteadas. . . . .	28
3.12. La triangulación $\mathcal{T}_{\alpha}$ para $\alpha = \frac{\pi}{2}$ . . . . .	28
3.13. Las triangulaciones $\mathcal{T}_{\gamma_r}$ a $\mathcal{T}_{\gamma_{r+3}}$ son la misma, ya que el orden parcial no cambia, y los vértices involucrados preservan su $\gamma$ -visibilidad. . . . .	29
3.14. El caso cuando $\gamma_{k+1}$ es una tangente izquierda externa. . . . .	30
3.15. El caso cuando $\gamma_{k+1}$ es una tangente izquierda interna. . . . .	30

3.16. Giro de arco cuando vamos de $\mathcal{T}_{\gamma_k}$ a $\mathcal{T}_{\gamma_{k+1}}$ . Las tangentes que definen $\mathcal{T}_{\gamma_k}$ y $\mathcal{T}_{\gamma_{k+1}}$ están determinadas por $c_i$ y $c_j$ . . . . .	31
3.17. Un elemento $c_i$ de $C$ y su mapeo en el espacio dual. . . . .	33
3.18. Intersecciones de una tangente $\ell$ con las cadenas inferiores y superiores de dos convexos en $C$ . . . . .	34
3.19. Arriba: cada par de curvas se intersecta a lo más una vez en el espacio dual. Abajo: cada par de curvas se intersecta a lo más dos veces en el espacio dual. . . . .	35
4.1. Un conjunto de puntos $S$ y su cierre convexo rectilíneo $\mathcal{RH}(S)$ . . . . .	37
4.2. Cierres con distintas rotaciones para un mismo conjunto de puntos. . . . .	38
4.3. Conforme rotamos $S$ , el número de capas convexas rectilíneas cambia de $\frac{n}{4}$ a 1. . . . .	39
4.4. Cierre convexo rectilíneo de $S$ y una de sus escaleras. . . . .	40
4.5. Escaleras de nivel $k$ de $P(\preceq_1, S)$ y $P(\preceq_2, S)$ . . . . .	41
4.6. El árbol $T_1$ resultante de correr el algoritmo en un conjunto de puntos. . . . .	42
4.7. Con la dirección $\alpha = 0$ , $q \preceq_1 p$ , y $p$ y $r$ no son comparables. Con la dirección $\alpha = \frac{\pi}{24}$ , $q$ y $p$ no son comparables, y $r \preceq_1 p$ . . . . .	46
4.8. El punto $q_1$ brinca, porque $r$ no lo domina; en cambio el punto $q_2$ no brinca, porque $q_2 \preceq_1 r$ . . . . .	47
4.9. Dado que $q_2 \preceq_1 r$ en $\gamma_i$ , brinca; $q_3$ brinca porque $q_3 \preceq_1 q_2$ . Como $q_1 \not\preceq_1 r$ , no brinca. . . . .	48
4.10. La poligonal de ancestros $A_p$ para el punto $p$ en el árbol $T_1$ . . . . .	49
5.1. Dos 4-conjuntos para un mismo conjunto de puntos $S$ . . . . .	52
5.2. Construcción de Tóth: las líneas punteadas son las líneas medianas de cada $H_k^i$ . . . . .	53
5.3. Las $(k - 1)$ -aristas entre dos copias adyacentes de $H_k$ , que suman $k$ . . . . .	53
5.4. El bloque $p_1, \dots, p_t$ se intercambia con el bloque $q_1, \dots, q_t$ en $\pi'$ , imitando el intercambio de $p$ con $q$ en $\pi$ . . . . .	54
5.5. El intercambio de los bloques $p_1, \dots, p_n$ y $q_1, \dots, q_n$ representado con dos líneas. . . . .	55
5.6. El primer reglón de $\pi'$ correspondiente al intercambio $qp$ de $\pi$ . . . . .	55
5.7. El reglón de $\pi'$ al intercambiar los elementos $p_i$ entre ellos. . . . .	55
5.8. Las posiciones $1, \dots, 4k$ en el último renglón construido de $\pi'$ . . . . .	55
5.9. Moviendo el bloque $p_k, \dots, p_1$ a las posiciones $3k + 1, \dots, 4k$ . . . . .	56
5.10. Intercambiando $q_1$ con $q_2, \dots, q_{k+1}$ y $p_{k+1}, \dots, p_{2k}$ en la columna $k$ . . . . .	56
5.11. Pivotes geométrico y generalizado. . . . .	59
5.12. Cotas alcanzadas usando el Teorema 5.1. . . . .	60
5.13. Los puntos $a_1, \dots, a_k$ y $b_1, \dots, b_k$ y el triángulo isósceles $T$ . . . . .	61
5.14. El triángulo rectángulo $R_i$ . . . . .	62
5.15. El triángulo $R'_i$ es similar a $R_i$ . . . . .	62
5.16. El triángulo rectángulo $S_i$ . . . . .	64
5.17. El triángulo $S'_i$ es similar a $S_i$ . . . . .	64
5.18. Construcción de Edelsbrunner y Stöckl para maximizar 2-conjuntos. Cada línea punteada es una 1-arista, y por lo tanto determina un 2-conjunto. . . . .	67
5.19. 6 puntos con 6 líneas medianas. . . . .	74
5.20. $S_3^3$ con 18 puntos y $\mathcal{N}_3(S_3^3) = 33$ . . . . .	75
5.21. $S_3^2$ con 12 puntos y $\mathcal{N}_3(S_3^2) = 22$ . . . . .	76
5.22. $S_4$ con 15 puntos y $\mathcal{N}_4(S_4) = 29$ . . . . .	77
5.23. $S_4^3$ con 48 puntos y $\mathcal{N}_4(S_4^3) = 99$ . . . . .	78
5.24. $S_5$ con 7 puntos y 10 "5-conjuntos" (2-conjuntos, técnicamente). . . . .	78
5.25. $S_5^3$ con 24 puntos y $\mathcal{N}_5(S_5^3) = 54$ . . . . .	79

*A Mina*

*Gracias por llegar a mi vida, cuando más te necesitaba*





# Agradecimientos

Primero que nada quiero agradecer a la Universidad Nacional Autónoma de México, en donde he estado más de la mitad de mi vida desde que entré al CCH Sur cuando tenía 16 años. Decir que es mi casa se queda corto, y fuera de mi familia ha sido la principal constante que ha marcado mi vida.

Quiero darle las gracias a mi familia, por apoyarme y aconsejarme durante todos mis años del posgrado. Aunque la mayor parte de las veces, por supuesto, debí haber seguido sus consejos, probablemente no lo hice; se agradece la intención de cualquier forma.

También quiero agradecer a mis amigos; al par que veo más o menos seguido por su aliento, y al resto por su paciencia cuando (siguiendo mi costumbre de toda la vida) tengo a bien abandonarlos por largos periodos de tiempo, especialmente al estar “escribiendo la tesis”.

Por supuesto un lugar muy importante en estos agradecimientos merecen mis coautores y colegas, la gente junto con la que obtuve los resultados que se presentan en este trabajo. Mención especial merecen Marco y Adriana (o mejor dicho ahora, el doctor Heredia y la doctora Ramírez); mis compañeros, cómplices, y a veces víctimas, por todo el trabajo que hicimos, las incontables botellas de vino, y por todas las veces que nos encontramos en México y España preguntándonos qué demonios estábamos haciendo con nuestras vidas. De la misma manera, quiero agradecer a José Miguel Díaz y a Carlos Seara, por su guía, su ayuda, y la camaradería del trabajo que resultó en cerca de la mitad del contenido de esta tesis.

Para mis asesores, Jorge, Silvia y Bernardo, no existen palabras para poder expresarles lo agradecido que estoy con ustedes. Literalemente sería imposible que hubiera terminado esta tesis si no fuera por su participación, su dirección y sus correcciones, y lo único que lamento es que mi capacidad intelectual y mi disciplina de trabajo haya sido un pálido reflejo de las que ustedes siempre me han mostrado. Ha sido un honor trabajar con ustedes, y de verdad de las pocas cosas que deseo en esta vida es que me permitan continuar haciéndolo.

Por último, quiero darle las gracias a Mina. Llegaste (o, técnicamente, regresaste) a mi vida en un momento en que básicamente se me había olvidado que tenía una tesis doctoral por terminar, y en gran medida por ti emprendí lo que resultó ser la última etapa de esta tortuosa tarea que resultó ser el escribirla. Gracias por todo, mi vida.

Y a todos los demás, gracias de nuevo.

---

# Capítulo 1

## Introducción

*Eppur si muove*<sup>1</sup>.

– Galileo Galilei

Si tomamos dos puntos  $p$  y  $q$  en el plano, o bien  $p$  está arriba de  $q$  (la coordenada  $y$  de  $p$  es mayor a la coordenada  $y$  de  $q$ ), o bien  $p$  está abajo de  $q$ , o bien están a la misma altura. De la misma manera, o bien  $p$  domina vectorialmente a  $q$  (la coordenada  $x$  de  $p$  es mayor a la coordenada  $x$  de  $q$ , y lo mismo con las coordenadas  $y$ ), o  $q$  domina vectorialmente a  $p$ , o ninguno de los dos domina al otro. Si ahora tomamos dos convexos  $a$  y  $b$  en el plano, podemos hacer una clasificación similar: o bien el convexo  $a$  cubre a  $b$  (donde por cubrir entendemos que no podemos mover a  $a$  hacia arriba sin que intersecte a  $b$ ), o bien  $b$  cubre a  $a$ , o bien ninguno de los dos cubre al otro.

En todos estos casos estamos suponiendo que nuestros objetos geométricos (sean puntos o conjuntos convexos) yacen estáticos en el plano. Pero si comenzamos a rotarlos a todos sobre el origen, las relaciones entre los objetos comenzarán a cambiar, hasta que los hayamos rotado ciento ochenta grados. Cuando esto ocurra, las relaciones entre cualquier par de objetos se invertirá: si  $p$  dominaba a  $q$  originalmente (por ejemplo), ahora  $q$  dominará a  $p$  (y viceversa). Si continuamos rotando nuestro conjunto alrededor del origen, cuando lleguemos a los trescientos sesenta grados habremos regresado a nuestro estado inicial.

Cada vez que ocurre un cambio en la relación entre dos o más objetos, las propiedades combinatorias del conjunto cambian, y de hecho *sólo* pueden cambiar en esas ocasiones. En otras palabras, si rotamos nuestros objetos muy poco, de tal forma que no ocurra ninguno de estos cambios, entonces *combinatoriamente* el conjunto en su totalidad permanece inalterado, en el sentido de que se preservan las relaciones entre cada par de objetos.

Siempre podremos anotar todos estos cambios en las relaciones combinatorias entre los elementos del conjuntos de alguna manera, y entonces nos podemos olvidar de rotar el conjunto alrededor del origen: las anotaciones de los cambios en las relaciones combinatorias codificarán, en general, *toda* la información combinatoria (referente a la relación que nos interesa) del conjunto. O en otras palabras; tendremos toda la información combinatoria del conjunto, y por tanto de *todos* los conjuntos combinatoriamente iguales a él.

La importancia de este último hecho no puede dejar de enfatizarse; cuando lidiamos con problemas geométricos en los cuales las propiedades estrictamente geométricas de nuestros objetos (como son las coordenadas por ejemplo) no son lo más importante, sino que realmente sólo nos interesan las propiedades combinatorias de los mismos, lo que explicamos arriba

---

<sup>1</sup>Y sin embargo, se mueve.

nos permite, si somos capaces de codificar eficientemente el estado combinatorio de nuestro conjunto y los cambios que ocurren cuando dos o más de sus elementos ven modificadas sus relaciones entre ellos, el diseñar algoritmos eficientes que nos resuelvan dichos problemas, o al menos nos ayuden a resolverlos.

El caso cuando nos fijamos en la relación entre las coordenadas  $y$  de cada punto ha sido estudiado a profundidad en los últimos treinta años, desde que Jacob Goodman y Richard Pollack presentaron las sucesiones permisibles en 1980 [19]. Ellos mismos generalizaron esta idea a convexos disjuntos en 2008 [20], y ha habido trabajos similares en ese sentido como el realizado por Luc Habert y Michel Pocchiola en 2011 [22].

Este trabajo de tesis consistió en resolver tres problemas abiertos de Geometría Computacional, utilizando técnicas que tratan de generalizar sucesiones permisibles en dos de ellos, y usándolas directamente en el tercero.

Siguiendo esta introducción, el segundo capítulo de este trabajo presenta a las sucesiones permisibles, su relación con  $k$ -conjuntos y líneas medianas, y algunos resultados conocidos utilizando las mismas.

El tercer capítulo lidia con un problema de bloqueo de convexos y separabilidad, que fue presentado por el Doctor José Miguel Díaz Báñez, de la Universidad de Sevilla, en un taller de Geometría Computacional, organizado por el Doctor Jorge Urrutia Galicia en la ciudad de Guanajuato, México, en diciembre de 2006. Durante seis años trabajamos intermitentemente en el problema en ambos lados del Atlántico, presentándolo en la Canadian Conference on Computational Geometry de 2011, y enviándolo para publicación en mayo del 2012. El artículo fue aceptado en mayo de 2013 por la revista Computational Geometry: Theory and Applications, con el título, *Convex blocking and partial orders on the plane*, y será publicado próximamente.

El tercer capítulo trata un problema de capas convexas rectilíneas, y se comenzó a trabajar en una estancia de investigación que tuve con el Doctor Carlos Seara Ojea, de la Universitat Politècnica de Catalunya, realizada en mayo y julio de 2010. Una versión preliminar se presentó en el European Workshop on Computational Geometry de 2012, y esperamos poder terminarlo en los próximos meses.

El cuarto capítulo es acerca de la cota inferior para el máximo número de  $k$ -conjuntos, cuando  $k = 3, 4, 5$ , y comencé a trabajar en él junto con la Doctora Silvia Fernández Merchant y el Doctor Bernardo Ábrego Lerma, de la California State University, Northridge, durante una estancia de investigación que tuve con ellos durante julio de 2009.

Para terminar, el último capítulo presenta las conclusiones, y el posible trabajo futuro que se puede realizar utilizando las técnicas presentadas en este trabajo.

## Capítulo 2

# Sucesiones permisibles

Como se explicó en la introducción, las sucesiones permisibles y las técnicas que generalmente se usan para trabajar con ellas son el factor en común que tienen los tres problemas tratados en este trabajo de tesis. En este capítulo explicaremos lo que son las sucesiones circulares y permisibles, algunas de sus propiedades, y presentaremos dos problemas clásicos de Geometría Computacional cuya solución o bien utiliza sucesiones permisibles, o bien se beneficia de hacerlo.

### 2.1. El caso geométrico

Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos en posición general con las siguientes restricciones:  $S$  no tiene cuatro puntos tales que la pendiente entre dos de ellos sea igual a la pendiente de los otros dos, y no hay dos puntos con la misma coordenada  $y$ . Dado  $S$  siempre podemos proyectar los puntos sobre una línea  $\ell$  paralela al eje  $Y$ , y si consideramos que  $\ell$  está orientada de abajo hacia arriba, podemos definir un orden  $\prec$  sobre  $S$  de acuerdo a las proyecciones de sus puntos sobre  $\ell$  (Figura 2.1).

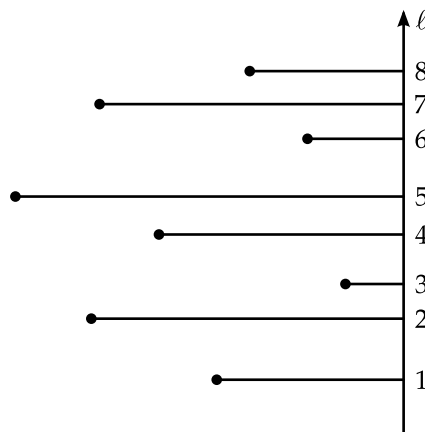


Figura 2.1: Conjunto de ocho puntos proyectados sobre  $\ell$ .

Nombraremos a nuestros puntos  $1, \dots, n$  de acuerdo al orden en que se proyectan cuando  $\ell$  es vertical y está orientada de abajo hacia arriba. Así, en esta configuración inicial, se da que

## 2. Sucesiones permisibles

$1 \prec 2 \prec \dots \prec n$ . Como  $S$  es finito podemos dibujar un círculo  $C$  que contenga a todos sus elementos, y podemos hacer que  $\ell$  sea tangente vertical a  $C$  por la derecha (Figura 2.2).

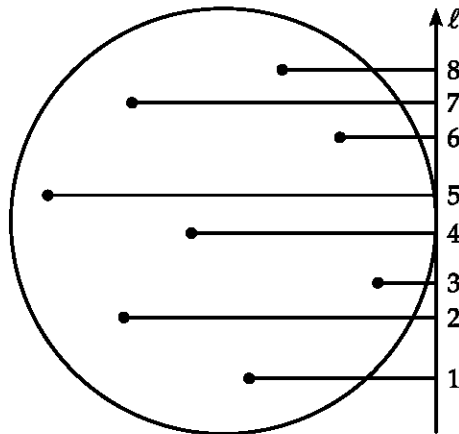


Figura 2.2: Círculo envolviendo a  $S$  con  $\ell$  tangente.

Si comenzamos a rotar  $\ell$  en contra de las manecillas del reloj de tal forma que permanezca tangente a  $C$ , muy al inicio los puntos proyectados sobre  $\ell$  conservarán el mismo orden  $\prec$ , pero en algún momento dos de ellos (digamos  $i$  y  $j$ ) se proyectarán sobre un mismo punto en  $\ell$  (Figura 2.3). Es fácil ver que  $i$  y  $j$  serán puntos consecutivos en  $\ell$ ; que nunca se proyectarán tres puntos sobre un mismo punto de  $\ell$  dado que los elementos de  $S$  están en posición general; y que nunca se proyectarán cuatro puntos de  $S$  en dos puntos distintos de  $\ell$  por nuestra restricción de que tengan simultáneamente pendientes distintas par a par.

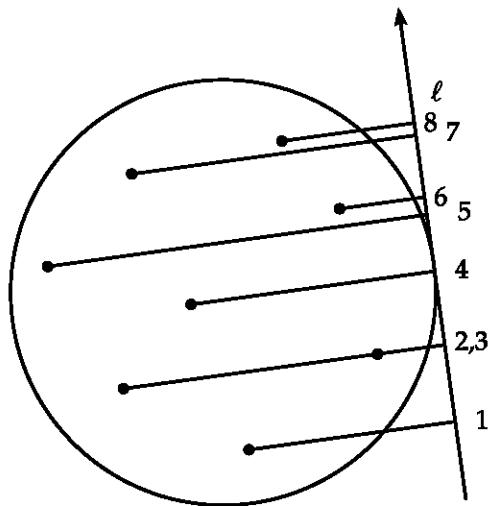


Figura 2.3: Dos puntos de  $S$  proyectándose sobre  $\ell$  en el mismo punto.

Si seguimos rotando  $\ell$ , inmediatamente después de que  $i$  y  $j$  se proyectan sobre un mismo punto ocurre que intercambian de posición en el orden  $\prec$ ; esto es, si antes de proyectarse sobre un mismo punto se daba que  $i \prec j$ , entonces al seguir rotando  $\ell$  va a ocurrir que  $j \prec i$  (Figura 2.4).

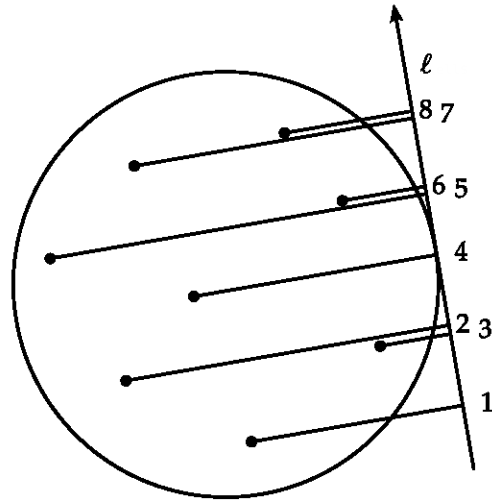


Figura 2.4: Los puntos 2 y 3 se intercambian en el orden  $\prec$ .

Si seguimos girando  $\ell$  hasta que haya recorrido ciento ochenta grados, entonces tendremos que el orden de los puntos de  $S$  se invierte totalmente: se dará ahora que  $n \prec n - 1 \prec \dots \prec 1$ . Esto ocurre porque las coordenadas  $y$  de las proyecciones de los puntos son iguales que al inicio; pero ahora  $\ell$  está orientada de arriba hacia abajo (Figura 2.5).

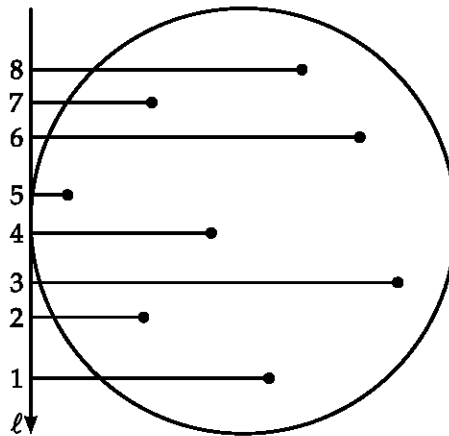


Figura 2.5: Los puntos se invierten completamente respecto al orden original.

En estos primeros ciento ochenta grados, cada pareja de puntos de  $S$  se intercambia exactamente una vez en el orden  $\prec$ ; esto es porque  $\ell$  al dar la mitad de una vuelta completa cubre todas las posibles pendientes que puede haber entre dos puntos.

Dados dos elementos  $i$  y  $j$  en  $S$ , tales que  $i \prec j$  al inicio (cuando  $\ell$  es vertical y orientada de abajo hacia arriba), sabemos que se proyectan al mismo punto en  $\ell$  cuando es perpendicular a la línea que pasa por ellos, y que se intercambian inmediatamente después de que  $\ell$  siga girando. Conforme  $\ell$  siga girando, ocurrirá de nuevo que sea perpendicular a la línea que pasa por  $i$  y  $j$  (pero orientada en sentido contrario), e inmediatamente volverán a cambiar de orden para quedar como estaban al inicio. Por lo tanto, dados dos elementos  $i$  y  $j$  en  $S$ , ocurre que se inter-

cambian exactamente dos veces si hacemos que  $\ell$  gire los trescientos sesenta grados completos; y ciertamente no tiene mucho sentido seguir girándola porque sólo estaríamos repitiendo lo que ya hicimos.

Una *sucesión circular*  $\Pi$  es la sucesión de permutaciones de  $S$  doblemente infinita que obtenemos al girar  $\ell$  y proyectar los puntos de  $S$  sobre ella. La sucesión es periódica porque cada vez que  $\ell$  gira trescientos sesenta grados comienza a repetirse, y esto ocurre en ambas direcciones. Si vamos anotando las permutaciones resultantes de girar  $\ell$ , obtenemos algo del estilo de la Figura 2.6; por eso se le dice sucesión circular, porque obtenemos las permutaciones rotando la línea tangente circularmente.

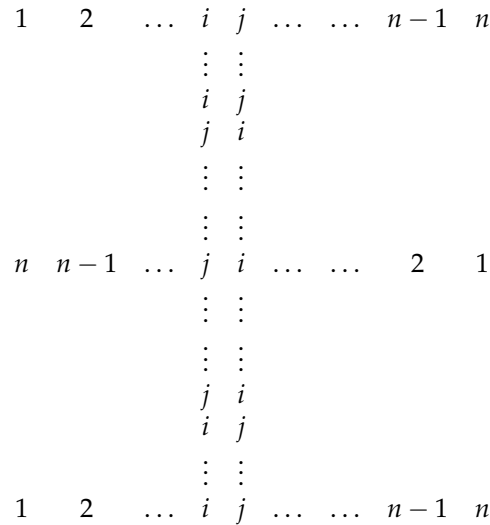


Figura 2.6: Permutaciones de los elementos  $i$  y  $j$  en  $S$ .

Podemos entonces calcular el número de permutaciones consecutivas distintas de la sucesión circular: como tenemos un renglón por cada intercambio, y todos los elementos de  $S$  se intercambian exactamente dos veces, entonces tenemos  $2\binom{n}{2}$  renglones distintos.

La mitad de estos renglones son redundantes (son iguales a la otra mitad, sólo reflejados de derecha a izquierda); así que construiremos una matriz  $\pi$  (llamada así porque representa un giro de ciento ochenta grados de  $\ell$ ) con la mitad de los renglones consecutivos distintos de la sucesión circular, y le llamaremos un *semiperiodo*. Va a resultar que el semiperiodo  $\pi$  contiene la información combinatoria más importante de  $S$ .

## 2.2. Sucesiones permisibles

Una *sucesión permisible*  $\Pi$  es una sucesión de permutaciones doblemente infinita de elementos de algún conjunto finito. Si una sucesión permisible la obtenemos a partir de un conjunto de puntos geométricos, diremos que es una *sucesión circular*; veremos más adelante cuáles son las diferencias entre una sucesión circular y una sucesión permisible que no obtengamos de un conjunto de puntos geométricos.

Un *semiperiodo*  $\pi$  de una sucesión permisible es una matriz de  $\binom{n}{2} \times n$ , tal que sus renglones son  $\binom{n}{2}$  renglones consecutivos de una sucesión permisible. Similarmente, un *periodo completo* de una sucesión permisible es una matriz de  $2\binom{n}{2} \times n$  donde sus primeros  $\binom{n}{2}$  renglones son



un semiperiodo de la sucesión permisible, y donde el  $j$ -ésimo renglón (con  $j > \binom{n}{2}$ ) es igual al renglón  $j - \binom{n}{2}$  invertido de derecha a izquierda.

Sin perder generalidad podemos suponer que los  $n$  elementos de la sucesión son los  $n$  primeros números naturales. Y dada su periodicidad, cualquiera de sus renglones puede ser el "primero", así que para construir  $\pi$  siempre podemos suponer que el primer renglón es el que tiene la forma

$$1 \quad 2 \quad \dots \quad n-1 \quad n.$$

Si ese renglón en particular no ocurre en la sucesión permisible, tomamos alguno de sus renglones al azar, y renombramos sus elementos para que sea como lo queremos, renombrando igual todas las repeticiones de los  $n$  elementos en la sucesión.

Dado el semiperiodo  $\pi$  de una sucesión permisible con  $n$  elementos (o de tamaño  $n$  de aquí en adelante), definimos sus siguientes propiedades:

- Las columnas de  $\pi$  estarán numeradas de 1 a  $n$  de izquierda a derecha, y a las columnas  $\frac{n}{2}$  y  $\frac{n}{2} + 1$  les llamaremos *el centro* de  $\pi$  si  $n$  es par. Si  $n$  es impar, el centro serán las columnas  $\frac{n-1}{2}$ ,  $\frac{n-1}{2} + 1$  y  $\frac{n-1}{2} + 2$ .
- Si dos elementos  $i$  y  $j$  del semiperiodo se intercambian en algún renglón (con  $i$  a la izquierda de  $j$  antes del intercambio, sin perder generalidad), y antes del intercambio  $i$  estaba en la columna  $k$  y  $j$  en la columna  $k + 1$ , diremos que  $i$  y  $j$  se intercambiaron en la columna  $k$ . Si  $n$  es par y  $k = \frac{n}{2}$ , diremos que  $i$  y  $j$  se intercambiaron en el centro; si  $n$  es impar un intercambio será en el centro cuando  $k = \frac{n-1}{2}$ , o cuando  $k = \frac{n-1}{2} + 1$ .

Para cualquier conjunto de puntos  $S$  en el plano en posición general existe una sucesión permisible correspondiente (que por definición es circular); sólo seguimos el mismo procedimiento del círculo y la línea  $\ell$  tangente a él para generarla. Llamaremos a este procedimiento *secuencialización*. Lamentablemente lo contrario no es cierto: dada una sucesión permisible no siempre existe un conjunto de puntos  $S$  tales que al secuencializarlo la obtengamos de nuevo.

Sin embargo, si en lugar de utilizar rectas utilizamos pseudolíneas sí podemos conseguirlo.

### 2.3. El caso generalizado

Una pseudolínea es una curva simple que divide al plano en exactamente dos regiones distintas, y una familia de pseudolíneas es un conjunto de pseudolíneas donde cada par se intersecta exactamente una vez. Un conjunto de puntos con una familia de pseudolíneas asociadas se puede ver en la Figura 2.7.

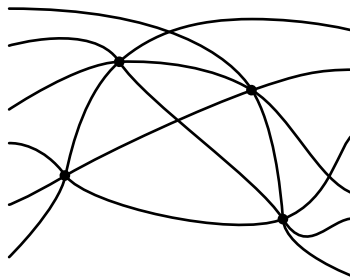
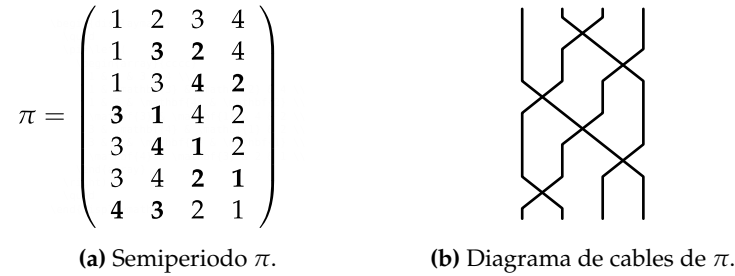


Figura 2.7: Cuatro puntos con pseudolíneas.

## 2. Sucesiones permisibles

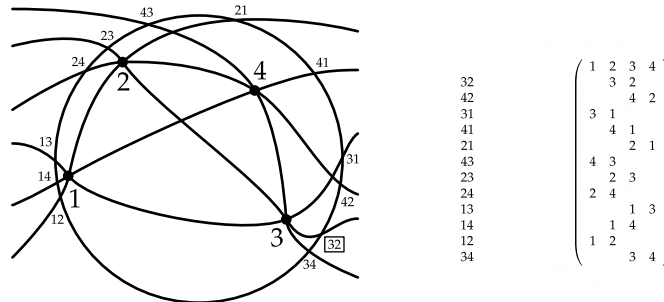
Dado un conjunto  $S$  de  $n$  puntos (no necesariamente en posición general), siempre podemos utilizar pseudolíneas para construir una sucesión permisible de forma similar a la secuencialización en el caso geométrico; en [33] se presenta un algoritmo para hacerlo, pero en resumen tomamos un círculo  $C$  que envuelva a todas las intersecciones de la familia de pseudolíneas, y donde no ocurra que dos pseudolíneas intersecten  $C$  en el mismo punto. Ordenamos las intersecciones de pseudolíneas con  $C$  en sentido contrario a las manecillas del reloj (no importa qué intercambio sea el primero), y recorriéndolas en ese orden, para cada pseudolínea  $\ell$  apuntamos en  $\pi$  como intercambio los dos puntos  $p, q$  de  $S$  por los que  $\ell$  pasa. Si recorriendo  $\ell$  desde su intersección con  $C$ ,  $p$  ocurre antes que  $q$ , el intercambio será  $pq$ ; si ocurre lo contrario, el intercambio será  $qp$ . El renglón completo inicial se puede inferir fácilmente: dado el primer intercambio  $pq$ , sabemos que  $q$  y  $p$  son adyacentes y en ese orden antes del intercambio, etc.

Lo interesante del caso generalizado es que siempre podemos ir de regreso: dada una sucesión permisible *siempre* podemos encontrar un conjunto de puntos  $S$  y un arreglo de pseudolíneas equivalentes. Esto viene del hecho de que el semiperiodo  $\pi$  de una sucesión permisible lo podemos pensar como matriz (Figura 2.8(a)) o bien como un diagrama de cables (Figura 2.8(b)).



**Figura 2.8:** El semiperiodo  $\pi$  visto como matriz o como diagrama de cables. Cada cable representa la trayectoria de un elemento de  $\pi$ .

Por un resultado de Goodman y Pollack [19], sabemos que todo arreglo de pseudolíneas es isomorfo a un diagrama de cables. No es difícil ver que dicho arreglo de pseudolíneas es justamente el dual del conjunto de puntos que necesitamos: en particular en la Figura 2.8(b), los cuatro cables corresponden a cuatro puntos en el dual, y las seis intersecciones entre ellos corresponden a las seis pseudolíneas de una familia de pseudolíneas tal que cada una pasa por dos de los puntos; justo como en la Figura 2.7, que de hecho es la configuración generalizada a partir de la cuál obtuvimos el semiperiodo  $\pi$  de la Figura 2.8(a) (Figura 2.9).



**Figura 2.9:** Configuración generalizada y sucesión permisible correspondiente..

A veces ocurrirá que una sucesión permisible también sea circular; a estas sucesiones permisibles les llamaremos *geometrizable* o *rectificables*. Con líneas rectas en general esto no es cierto,

porque se sabe (usando como ejemplo la construcción del Teorema del Hexágono de Pappus) que si  $S$  tiene 9 puntos o más, podemos construir una familia de pseudolíneas asociada a  $S$  que no sea posible rectificar sin cambiar sus propiedades combinatorias.

En la siguiente sección veremos cómo algunas propiedades de conjuntos de puntos en el plano pueden estudiarse de forma más sencilla utilizando sucesiones permisibles.

### 2.4. Líneas medianas y $(k - 1)$ -aristas

Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos; la *gráfica geométrica* de  $S$  es la gráfica  $G = (V, E)$ , donde  $V = S$ , y los elementos de  $E$  son segmentos de recta con puntos extremos en  $S$ . La *gráfica geométrica dirigida* de  $S$  es la gráfica geométrica de  $S$  donde los segmentos de recta entre elementos de  $S$  tienen una orientación.

Una *línea mediana* de  $S$  es una línea que pasa por dos de sus elementos, y que deja exactamente a  $\frac{n}{2} - 1$  puntos de  $S$  de un lado, y  $\frac{n}{2} - 1$  puntos del otro, si  $n$  es par; si  $n$  es impar, una línea mediana de  $S$  deja  $\frac{n-1}{2}$  puntos de un lado y  $\frac{n-1}{2} - 1$  del otro. Similarmente, una  $(k - 1)$ -arista ( $k \leq \frac{n}{2}$  si  $n$  es par,  $k \leq \frac{n-1}{2}$  si  $n$  es impar) es una arista dirigida de la gráfica geométrica dirigida de  $S$ , tal que deja  $k - 1$  puntos a su izquierda. Se denota  $(k - 1)$ -arista, porque una  $(k - 1)$ -arista en el plano define un  $k$ -conjunto de  $S$ : un subconjunto que puede separarse del resto de  $S$  con una línea recta.

Regresemos al ejemplo geométrico que utilizamos para construir  $\pi$  al inicio del capítulo. Recordemos que nuestro conjunto de puntos  $S$  se veía como en la Figura 2.10.

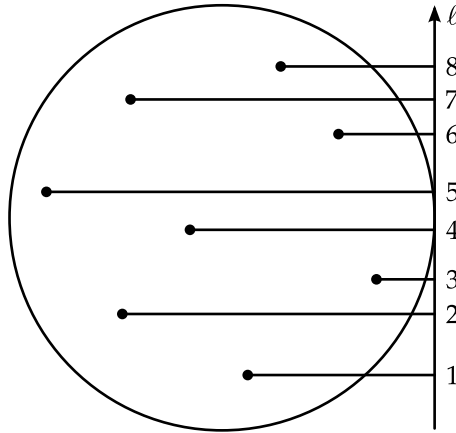


Figura 2.10: Conjunto de ocho puntos proyectados sobre  $\ell$ , de nuevo.

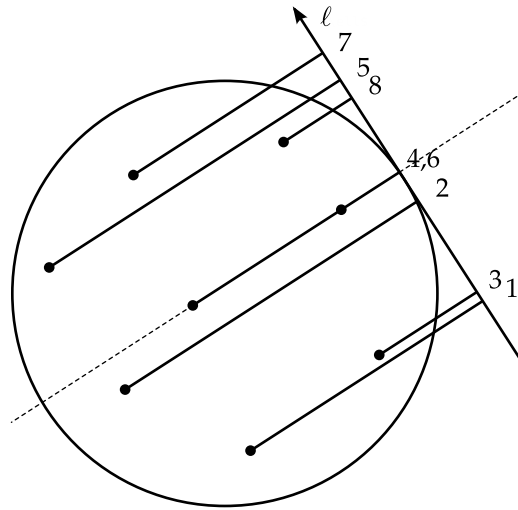
Los primeros renglones de su semiperiodo  $\pi$  se ven como en la Figura 2.11; como cada renglón es idéntico al anterior excepto por dos elementos que se intercambian, sólo escribiremos el renglón inicial completo, y en renglones subsecuentes únicamente los elementos que se intercambiaron.

En el sexto renglón se intercambian los elementos 4 y 6; pero lo interesante es que lo hacen *precisamente* en el centro de la sucesión permisible. Lo que ocurre en el dibujo de  $S$  es que justo antes de que 4 y 6 se intercambien, ambos se proyectan sobre el mismo punto en  $\ell$  (Figura 2.12).

La línea que pasa por 4 y 6 es una línea mediana de  $S$ , y lo mismo ocurre para cualesquiera dos elementos de  $S$  que se intercambien estando en el centro de  $\pi$ . Más aún, ocurre para cualquier conjunto de puntos unidos por pseudolíneas tales que  $\pi$  sea el semiperiodo de su

$$\pi = \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ & 3 & 2 & & & & & \\ & & & & 6 & 5 & & \\ & & & & & & 8 & 7 \\ & & & 6 & 4 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \right)$$

**Figura 2.11:** Primeros renglones de la sucesión circular del conjunto de puntos de la Figura 2.10.



**Figura 2.12:** El intercambio en el centro de 4 y 6 define una línea mediana.

sucesión permisible correspondiente. Podemos entonces extender el concepto de líneas medianas y  $(k - 1)$ -aristas a arreglos de pseudolíneas utilizando pseudolíneas medianas y  $(k - 1)$ -pseudoaristas. Lo único que hay que tomar en cuenta es que son curvas y no necesariamente rectas las que nos separan nuestros conjuntos de puntos. A partir de ahora utilizaremos "líneas medianas" y " $(k - 1)$ -aristas" para referirnos a las generadas con líneas rectas y a las generadas por pseudolíneas por igual, a menos que queramos hacer la distinción explícitamente.

Lo que ocurre con los intercambios es todavía más fuerte: si dos elementos  $i$  y  $j$  de  $\pi$  intercambian en la columna  $k$  ( $k \leq \frac{n}{2}$  cuando  $n$  es par;  $k \leq \frac{n-1}{2}$  cuando  $n$  es impar), entonces la arista  $j \rightarrow i$  es una  $(k - 1)$ -arista (ya que comenzamos con los elementos en orden, siempre ocurre que  $i < j$  antes de que se intercambien). Además, los elementos que aparecen a la izquierda de  $j$  e  $i$  en el renglón son los elementos a la izquierda de la arista  $j \rightarrow i$ .

Entonces, en particular, cuando  $n$  es par y  $k = \frac{n}{2}$ ,  $j \rightarrow i$  es una  $(\frac{n}{2} - 1)$ -arista, y por lo tanto una arista mediana. Si  $n$  es impar y  $k \in \{\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2} + 1\}$ ,  $j \rightarrow i$  es una  $(\frac{n-1}{2})$ - o  $(\frac{n-1}{2} + 1)$ -arista, y por lo tanto una arista mediana.

Si  $n$  es par y  $k > \frac{n}{2}$ , o  $n$  es impar y  $k > \frac{n-1}{2} + 1$ , entonces la arista  $i \rightarrow j$  es una  $(n - k - 1)$ -arista.

**Teorema 2.1.** Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos,  $\Pi$  su sucesión permisible correspondiente, y  $\pi$  un se-

miperiodo de  $\Pi$ . Si en el renglón  $r$  de  $\pi$  dos de sus elementos  $i$  y  $j$  se intercambian en la columna  $k$  ( $k \leq \frac{n}{2}$  si  $n$  es par,  $k \leq \frac{n-1}{2}$  si es impar), entonces la pseudoarista  $j \rightarrow i$  es una  $(k - 1)$ -pseudoarista de  $S$ , y los elementos a la izquierda de  $j$  en el renglón  $r$  son los elementos que quedan a la izquierda de la pseudoarista  $j \rightarrow i$ .

*Demostración.* Sea  $ji$  el intercambio que ocurre en la columna  $k$  de  $\pi$ , y por lo tanto  $i$  estaba en la posición  $k$  antes del intercambio, y  $j$  en la posición  $k + 1$ .

Para demostrar que  $j \rightarrow i$  es una  $(k - 1)$ -pseudoarista, y que los elementos a la izquierda de  $j$  en el renglón  $r$  son los elementos a la izquierda de ella, basta con demostrar que cualquier elemento a la izquierda de  $j$  en el renglón  $r$  está a la izquierda de la pseudolínea que pasa por  $i$  y  $j$ , si la orientamos de  $j$  a  $i$ .

Sea  $s$  un elemento de  $\pi$  a la izquierda de  $j$  en el renglón  $r$ ; sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $r$  es el segundo renglón de  $\pi$ , y por lo tanto que  $s < i$ , y  $j = i + 1$ . Sea  $\ell_{ij}$  la pseudolínea que pasa por  $i$  y  $j$ , y  $\ell_{sj}$  la pseudolínea que pasa por  $s$  y  $j$ .

Sea  $C$  un círculo que envuelve completamente a todas las intersecciones de las pseudolíneas entre los puntos de  $S$ . La pseudolínea  $\ell_{ij}$  interseca  $C$  en dos puntos, uno asociado con el intercambio  $ji$ , y otro asociado con el intercambio  $ij$ ; lo mismo ocurre con  $\ell_{sj}$  y los intercambios  $sj$  y  $js$ . Si el punto  $s$  está a la izquierda de  $\ell_{ij}$  orientada de  $j$  a  $i$ , entonces la pseudolínea  $\ell_{sj}$  interseca  $C$ , luego a  $s$ , luego a  $j$ , y por último de nuevo a  $C$ , donde se marca el intercambio  $js$  (Figura 2.13). Si  $s$  estuviera a la derecha de  $j \rightarrow i$ ,  $\ell_{sj}$  intersectaría  $C$ , luego a  $j$ , luego a  $s$ , y por último de nuevo a  $C$ , marcando el intercambio  $sj$ .

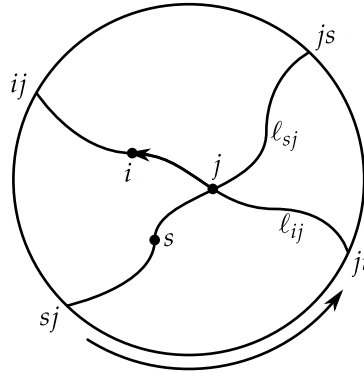


Figura 2.13: El punto  $s$  queda a la izquierda de  $\ell_{ij}$  orientada de  $j$  a  $i$ .

En otras palabras, el intercambio  $js$  tiene que ocurrir después del intercambio  $ji$ , no el intercambio  $sj$ . Y esto es lo único que puede ocurrir, puesto que  $s$  está a la izquierda de  $j$  después del intercambio  $ji$ ; no importa cómo se muevan  $j$  y  $s$ , la primera vez que se intercambien en  $\pi$  será de la forma  $js$ .

Por lo tanto, el punto  $s$  está a la izquierda de la pseudolínea  $\ell_{ij}$ , y a la izquierda de la pseudoarista  $j \rightarrow i$ . Como  $s$  es cualquier punto a la izquierda de  $j$  en el renglón  $r$ , y  $j$  estaba en la posición  $k$  en ese renglón, los  $k - 1$  elementos a la izquierda de  $j$  en  $r$  se encuentran a la izquierda de la pseudolínea  $\ell_{ij}$ , y por lo tanto  $j \rightarrow i$  es una  $(k - 1)$ -pseudoarista.  $\square$

**Corolario 2.1.** Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos,  $n$  par, y  $\Pi$  su sucesión permisible correspondiente. Si en el renglón  $r$  de  $\pi$  dos de sus elementos  $i$  y  $j$  se intercambian en la columna  $k$  ( $k > \frac{n}{2}$  si  $n$  es par,  $k > \frac{n-1}{2} + 2$  si  $n$  es impar), entonces la arista  $i \rightarrow j$  es una  $(n - k)$ -arista de  $S$ , y los elementos a la derecha de  $i$  en  $r$  son los elementos a la derecha de  $i \rightarrow j$ .

*Demostración.* El resultado es inmediato si invertimos de izquierda a derecha las columnas de la sucesión.  $\square$

Encontrar líneas medianas teniendo la sucesión permisible entonces es muy sencillo: sólo tenemos que buscar cuándo dos elementos de  $\pi$  se intercambian en su centro. Y para buscar  $(k - 1)$ -aristas es igual: sólo necesitamos buscar elementos que se intercambien en la  $k$ -ésima o  $(n - k)$ -ésima columna de  $\pi$ .

En la siguiente sección revisaremos dos resultados clásicos de Geometría Computacional utilizando a las sucesiones permisibles como herramienta para demostrarlos.

## 2.5. Algunos resultados utilizando sucesiones permisibles

Vamos a revisar un par de resultados que se demuestran de forma particularmente sencilla utilizando sucesiones permisibles: la propiedad alternante local, de Lóvasz, y el que es tal vez el resultado más importante en Geometría Computacional que se haya demostrado utilizando sucesiones permisibles: que un conjunto de  $2n$  puntos generan al menos  $2n$  pendientes distintas.

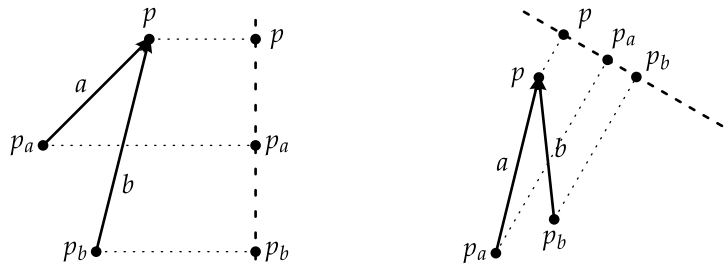
### 2.5.1. La propiedad alternante local

La propiedad alternante local dice:

**Lema 2.1** (Propiedad alternante local). *Sea  $S$  un conjunto de puntos en posición general en  $\mathbb{R}^2$ , y sea  $G_k = (S, E_k)$  la gráfica definida de la siguiente manera:  $p \rightarrow q \in E_k$  si y sólo si  $p \rightarrow q$  es una  $(k - 1)$ -arista de  $S$ . Para toda arista  $e \in E_k$  definimos  $l(e)$  al punto más a la izquierda de  $e$ ,  $r(e)$  al punto más a la derecha, y  $s(e)$  como la pendiente de  $e$  (con una rotación adecuada siempre podemos evitar que haya dos puntos con la misma coordenada  $x$ , y por lo tanto que no haya aristas verticales).*

*Sean  $a$  y  $b$  dos aristas de  $E_k$  tales que inciden al mismo punto  $p$  y donde  $s(b) > s(a)$ . Entonces existe una arista  $c$  saliente de  $p$  tal que  $s(b) > s(c) > s(a)$ . Análogamente, sean  $c$  y  $d$  dos aristas salientes de  $p$  tales que  $s(d) > s(c)$ . Entonces existe una arista  $b$  entrante a  $p$  tal que  $s(d) > s(b) > s(c)$ .*

*Demostración.* Sea  $p_a$  el punto a la izquierda de la arista  $a$ , y  $p_b$  el punto a la izquierda de la arista  $b$ . Vamos a girar los puntos de  $S$  de tal forma que al proyectarlos sobre una línea vertical se cumpla que  $p_b$  esté abajo de  $p_a$  y  $p_a$  abajo de  $p$  (siempre podemos hacer esto; ver Figura 2.14).



**Figura 2.14:** Las aristas  $a$  y  $b$ , que bien podrían ser pseudoaristas.

Sea  $\pi$  el semiperiodo de la sucesión permisible que obtenemos al secuencializar  $S$ . El primer renglón de  $\pi$  se ve de la siguiente manera:

$$\dots p_b \dots p_a \dots p \dots$$

A lo mejor  $p_a$  y  $p_b$  están juntos, o tal vez ocurra que  $p_a$  está junto a  $p$ : no sabemos. Lo que sí sabemos es que primero está  $p_b$ , después  $p_a$  y por último  $p$  (porque giramos así los puntos).

Dado que  $a$  es una  $(k - 1)$ -arista, existe un renglón  $i$  de  $\pi$  donde  $p_a$  y  $p$  se intercambian en la  $k$ -ésima o  $(n - k)$ -ésima columna; por ahora supongamos que es lo primero. Los renglones  $i - 1$  e  $i$  se ven de la siguiente manera

	$k$		$k + 1$			
...	$p_b$	...	$p_a$	$p$	...	$i - 1$
...	$p_b$	...	$p$	$p_a$	...	$i$

Como  $p_a$  y  $p$  se intercambian en el renglón  $i$ , en el renglón anterior tienen que estar juntos. Pero  $p_b$  también es  $(k - 1)$ -arista; entonces existe un renglón  $j$  (con  $j > i$ , porque  $s(b) > s(a)$ ) donde  $p_b$  y  $p$  se intercambian, y lo hacen en la  $k$ -ésima o la  $(n - k)$ -ésima columna de  $\pi$ . Supongamos por ahora que es en el primer caso. Entonces los renglones  $j - i$  y  $j$  se ven de la siguiente manera:

	$k$		$k + 1$			
...	$p_b$	...	$p$	...	$p_a$	$j - 1$
...	$p$	...	$p_b$	...	$p_a$	$j$

En el renglón  $i$  el punto  $p$  se encuentra en la columna  $k$ , y en el renglón  $j - 1 > i$  está en la columna  $k + 1$ ; por lo tanto existe un renglón  $m$  (con  $i < m - 1 < m < j - 1$ ) donde  $p$  y un elemento  $q$  (que tiene que ser distinto a  $a$  y  $b$ , porque  $p$  se intercambia con ellos en otros renglones) se intercambian:

	$k$		$k + 1$			
...	$p_b$	...	$p$	$p_q$	...	$p_a$
...	$p_b$	...	$p_q$	$p$	...	$p_a$

Si  $p_b$  y  $p$  se intercambian en la  $(n - k)$ -ésima columna, es exactamente lo mismo: en el renglón  $i$  el punto  $p$  está a la izquierda de la columna  $(n - k)$ , y en el renglón  $j - 1 > i$  se encuentra a la derecha; lo cual quiere decir que entre ambos renglones existe otro en el que  $p$  se intercambia con un elemento  $q$  (distinto a  $p_a$  y  $p_b$ ). Como  $p$  y  $q$  se intercambian en la  $k$ -ésima (o  $(n - k)$ -ésima) columna,  $p \rightarrow q$  es una  $(k - 1)$ -arista de  $S$ .

Además, como  $q$  está a la derecha de  $p$  en el  $(m - 1)$ -ésimo renglón, y se intercambian en el siguiente, esto quiere decir que al inicio también estaba a la derecha de  $p$ , lo que significa que el punto  $q$  está arriba del punto  $p$  en  $S$ . Y como  $i < m - 1 < m < j - 1$ , entonces  $s(a) < s(p \rightarrow q) < s(b)$ ; por lo tanto,  $p \rightarrow q$  es la  $(k - 1)$ -arista que buscábamos.

Si el intercambio entre  $p_a$  y  $p$  ocurre en la  $(n - k)$ -ésima columna, lo único extra que tenemos que hacer es fijarnos en los renglones entre el  $(j - 1)$ -ésimo y el  $i$ -ésimo, tomando en cuenta el periodo completo de la sucesión permisible: el mismo argumento se aplica.  $\square$

Hemos tratado de ser muy detallados con la demostración, pero realmente podría resumirse a que en un renglón el elemento  $p$  está a la izquierda de la columna  $k$ , más adelante está a la derecha, y que por lo tanto hay un renglón intermedio donde  $p$  cruza dicha columna utilizando un elemento distinto a  $p_a$  y  $p_b$ . Lo importante además es que (para motivos prácticos) nos podemos olvidar de las posiciones geométricas de los puntos, y trabajar únicamente con la información combinatoria que nos dan las sucesiones permisibles.

Por lo mismo, podemos extender el resultado a configuraciones generalizadas de puntos:

**Lema 2.2** (Propiedad alternante local para configuraciones generalizadas de puntos). *Se  $S$  una configuración generalizada de puntos, y sea  $G_k = (S, E_k)$  la gráfica definida de la siguiente manera:  $p \rightarrow q \in E_k$  si y sólo si  $p \rightarrow q$  es una  $(k - 1)$ -pseudoarista de  $S$ .*

## 2. Sucesiones permisibles

Sean  $a$  y  $b$  dos pseudoaristas en  $E_k$  tales que inciden al mismo punto  $p$ , y sea  $\ell_a$  la pseudolínea de la configuración generalizada sobre la que yace  $a$ , y  $\ell_b$  la pseudolínea sobre la que yace  $b$ . Entonces existe una arista  $c$  saliente de  $p$  tal que la pseudolínea  $\ell_c$  donde yace se encuentra siempre entre las pseudolíneas  $\ell_a$  y  $\ell_b$ , y las tres se intersectan en  $p$ .

*Demostración.* El resultado es inmediato por lo discutido arriba; sea  $\pi$  el semiperíodo de la sucesión permisible correspondiente a  $S$ . Que  $a$  y  $b$  sean  $(k-1)$ -pseudoaristas que inciden en  $p$ , significa que en dos renglones distintos  $i$  y  $j$  de  $\pi$ , el punto  $p$  participa en dos transposiciones en la columna  $k$ , y en ambas  $p$  pasa de estar en la posición  $k+1$  a estar en la posición  $k$ .

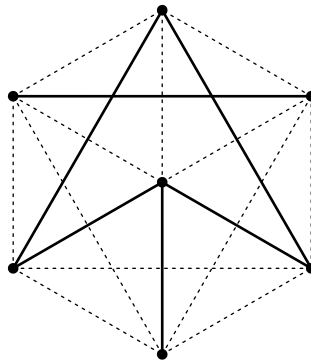
Entonces existe un renglón  $l$  ( $i < l < j$ ), en el que  $p$  tiene que participar en una transposición en la columna  $k$ , y en donde pasa de estar en la posición  $k$  a estar en la posición  $k+1$ ; para poder volver a cruzar de derecha a izquierda la columna  $k$ , tiene primero que cruzarla de izquierda a derecha para regresar a la posición  $k+1$ .

Este cambio de posición de  $k$  a  $k+1$  implica que hay una arista  $c$  en  $E_k$  que sale de  $p$ , y por tanto esta arista es una  $(k-1)$ -pseudoarista. Las tres pseudolíneas  $\ell_a$ ,  $\ell_b$  y  $\ell_c$  sobre las que yacen  $a$ ,  $b$  y  $c$  obviamente se intersectan en el punto  $p$ , y como el intercambio correspondiente a  $c$  ocurre entre los intercambios correspondientes a  $a$  y  $b$ , la pseudolínea  $\ell_c$  se encuentra siempre entre las pseudolíneas  $\ell_a$  y  $\ell_b$ .  $\square$

Como las líneas rectas en particular siempre son pseudolíneas, el resultado aplica a configuraciones generalizadas y conjuntos de puntos en el plano; y como puede verse la demostración es mucho más concisa.

### 2.5.2. $2n$ puntos, $2n$ direcciones

Dados  $n$  puntos, no todos colineales, ¿cuántas direcciones determinan? En  $\mathbb{R}^2$  esto es equivalente a preguntar cuántas pendientes distintas nos generan  $n$  puntos en el plano. Paul Scott [38] parece ser el primero en haberse planteado la pregunta, cuando notó que  $2n+1$  puntos pueden determinar tan pocas direcciones como  $2n$  (por ejemplo, en un  $2n$ -ágono y su centro; ver Figura 2.15).



**Figura 2.15:**  $2n+1$  puntos pueden generar pocas direcciones:  $2n$  en este caso. Las direcciones determinadas por las líneas punteadas son todas repetidas.

La mejor cota (antes de la que presentaremos) era  $\frac{n}{2}$ , de Geoffrey Burton y George Purdy [6] y la publicaron en 1979. La mejor cota actual (que es la que vamos a ver) es de Peter Ungar [41], apareció en 1982 y es justamente  $2n$  cuando el número de puntos es  $2n$ .



Lo que nos interesa de la demostración es que utiliza sucesiones permisibles; sin embargo, no son *exactamente* las que hemos estado viendo. El planteamiento del problema únicamente dice que no todos los puntos pueden ser colineales; pero no dice que deban estar en posición general, y mucho menos que no haya cuatro con las mismas pendientes par a par.

Pero realmente no es tan grave; sencillamente ahora tendremos transposiciones de más de dos elementos. Cuando  $k$  puntos sean colineales, ocurrirá que tendremos renglones donde  $k$  elementos se invierten en un solo paso:

$$\begin{array}{cccccc} \dots & a_1 & a_2 & \dots & a_{k-1} & a_k & \dots \\ \dots & a_k & a_{k-1} & \dots & a_2 & a_1 & \dots \end{array}$$

Y si tenemos cuatro o más puntos cuyas pendientes generadas sean iguales, entonces en un mismo renglón tendremos dos o más transposiciones:

$$\begin{array}{cccccc} \dots & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & b_1 & b_2 & \dots \\ \dots & a_3 & a_2 & a_1 & \dots & b_2 & b_1 & \dots \end{array}$$

Una consecuencia de esto es que el semiperiodo de nuestras sucesiones no necesariamente tendrá  $\binom{n}{2}$  renglones; a veces ocurrirá que serán menos.

Para demostrar el resultado, Ungar demuestra dos conjeturas de Goodman y Pollack, respecto a cuando queremos transformar una cadena que es permutación de  $1, 2, \dots, n-1, n$  a  $n, n-1, \dots, 2, 1$  utilizando una secuencia de transposiciones. Demostraremos cada conjetura como un lema.

**Lema 2.3.** *Si cada transposición consiste en invertir una subcadena creciente maximal, entonces alcanzamos  $n, n-1, \dots, 2, 1$  en a lo más  $n-1$  movimientos.*

*Demostración.* Vamos a demostrar que para cualquier  $k$ , los números menores o iguales a  $k$  se encuentran a la derecha de los números  $k+1, k+2, \dots, n$  después de a lo más  $n-1$  movimientos. Sea  $S$  el conjunto de los elementos menores o iguales a  $k$ , y  $L$  los demás.

Dadas una permutación de  $1, 2, \dots, n-1, n$  y  $1 \leq k \leq n$ , un patrón  $sl$  es el patrón que consiste en reemplazar cada elemento de la cadena por  $s$  si el elemento está en  $S$ , o por  $l$  si está en  $L$ . Por ejemplo, si  $n = 10$  y  $k = 4$ , el patrón  $sl$  de  $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$  es  $s, s, s, s, l, l, l, l, l, l$ .

Definimos  $W_0$  como el patrón  $sl$  con la permutación inicial (que no está necesariamente en orden), y  $W_i$  como el patrón  $sl$  de la permutación después de la  $i$ -ésima transposición. También definimos a  $V_0$  como el patrón  $sl$  de la permutación  $1, 2, \dots, n-1, n$ , y  $V_i$  igual a  $V_{i-1}$  reemplazando cada  $sl$  por  $ls$  (al mismo tiempo).

Las cadenas  $V_i$  cumplen con la siguiente propiedad: si hay  $ss$  o  $ls$  consecutivas entonces están en los extremos, y en medio se intercalan  $ss$  y  $ls$ .

En las cadenas  $V_i$  la  $s$  más a la derecha en  $V_0$  alcanza la  $n$ -ésima posición en exactamente  $n-k$  movimientos, porque esa  $s$  siempre está a la izquierda de una  $l$ , y en cada movimiento se intercambia con ella moviéndose un lugar a la derecha. Como comienza en la posición  $k$ , llega a la  $n$ -ésima en  $n-k$  movimientos; en el último de los cuales la  $l$  más a la derecha también se mueve una posición a la izquierda. Y después de otros  $k-1$  movimientos, la  $l$  más a la derecha llega a la  $(n-k)$ -ésima posición, siguiendo la misma argumentación. Entonces, después de  $n-k+k-1 = n-1$  movimientos, tenemos que  $V_{n-1} = l, l, \dots, l, s, \dots, s, s$ .

Y ahora hacemos la siguiente afirmación: la  $j$ -ésima  $l$  en  $W_i$  no está más a la derecha que la  $j$ -ésima  $l$  en  $V_i$ . O en otras palabras: las  $ls$  en las  $W_i$  se mueven hacia la izquierda al menos tan rápido como las  $ls$  en  $V_i$ .

Lo probamos por inducción sobre  $i$ ; para  $i = 0$  es trivial por definición de  $W_0$  y  $V_0$ , así que supongamos que es cierto para  $i-1$ . Para  $i$ , en las  $W$  la primera  $l$  se mueve a la izquierda  $al$

## 2. Sucesiones permisibles

menos de uno en uno. Para las  $V$ , la primera  $l$  se mueve a la izquierda *exactamente* de uno en uno. Por lo tanto, se cumple para  $j = 1$ .

Sea  $j$  la primera tal que la afirmación no se cumple; entonces la  $j$ -ésima  $l$  en  $W_{i-1}$  no se movió en el  $i$ -ésimo movimiento, mientras que la  $j$ -ésima  $l$  en  $V_{i-1}$  sí lo hizo (y exactamente un lugar, porque así se comportan las  $V$ ).

Además, por hipótesis de inducción la  $j$ -ésima  $l$  en  $W_{i-1}$  está en el mismo lugar que la  $j$ -ésima  $l$  en  $V_{i-1}$ ; no puede estar más a la izquierda porque entonces el  $j$ -ésimo movimiento no podría fallar.

Pero acabamos de decir que la  $j$ -ésima  $l$  en  $W_{i-1}$  no se movió en el  $i$ -ésimo movimiento; por lo tanto *tiene que* estar precedida de una  $l$ , mientras que en  $V_{i-1}$  está precedida de una  $s$ .

Pero esto es una contradicción; querría decir que la  $(j-1)$ -ésima  $l$  en  $W_{i-1}$  está a la derecha de la  $(j-1)$ -ésima  $l$  en  $V_{i-1}$  (encerramos en una caja a la  $(j-1)$ -ésima  $l$  en cada permutación):

$$\begin{array}{rccccccc} W_{i-1} & = & \dots & \dots & \boxed{l} & l & \dots \\ V_{i-1} & = & \dots & \boxed{l} & s & l & \dots \end{array}$$

Y por lo tanto, en las  $W$  alcanzamos  $n, n-1, \dots, 2, 1$  en a lo más  $n-1$  movimientos, porque lo hacen al menos tan rápido como las  $V$ .  $\square$

**Lema 2.4.** *Si  $n$  es par y comenzamos con  $1, 2, \dots, n$ , y no invertimos toda la permutación en un solo paso, entonces el número de movimientos para alcanzar  $n, \dots, 2, 1$  es al menos  $n$ .*

*Demostración.* Para que alcancemos  $n, n-1, \dots, 2, 1$ , necesitamos que cada número atraviese el centro en algún momento; por lo tanto debemos tener al menos  $n$  cruces en el centro (el centro es  $\frac{n}{2}$  y  $\frac{n}{2} + 1$ ; recordemos que  $n$  es par).

Una cadena que atraviese el centro (no necesariamente de forma simétrica) es invertida en un cruce en el centro. Si  $d$  es la distancia más corta de uno de los extremos de la cadena al centro, entonces hay exactamente  $2d$  números que cruzan el centro en ese movimiento:

$$\begin{array}{cccc|ccc} \dots & a & b & & c & d & e & \dots \\ \dots & e & d & & c & b & a & \dots \end{array}$$

Sean  $d_1, \dots, d_t$  las  $d$ s correspondientes a cada movimiento de cruce en el centro. Por lo dicho arriba, se cumple que

$$2d_1 + \dots + 2d_t \geq n. \quad (2.1)$$

Antes del  $i$ -ésimo cruce en el centro teníamos una cadena creciente que se extiende una distancia mayor a  $d_i$  en algún lado del centro, y después del cruce en el centro, tenemos una cadena decreciente que se extiende una distancia mayor a  $d_i$  al otro lado del centro. Y como una cadena decreciente se acorta a lo más por un elemento en cada extremo por movimiento (porque en este caso sólo los extremos se pueden mover, si pertenecen a una cadena creciente), y una cadena creciente se alarga a lo más por un elemento en cada extremo por movimiento (porque el número que se mueva será parte de una cadena decreciente), entonces tenemos al menos  $d_i + d_{i+1} - 1$  movimientos que no cruzan el centro entre el  $i$ -ésimo y el  $(i+1)$ -ésimo cruces por el centro.

Tenemos

$$(d_1 + d_2 - 1) + \dots + (d_{t-1} + d_t - 1)$$

movimientos que no cruzan el centro. Entonces se cumple que

$$\begin{aligned}
 & (d_1 + d_2 - 1) + \dots + (d_{t-1} + d_t - 1) = \\
 d_1 + (d_2 + d_2) + \dots + (d_{t-1} + d_{t-1}) + d_t \underbrace{- 1 - 1 \dots - 1}_{t-1} & = \\
 & d_1 + 2d_2 + \dots + 2d_{t-1} + d_t - (t - 1).
 \end{aligned}$$

Por la Ecuación 2.1, el número total de movimientos es mayor o igual a

$$n + 1 - d_1 - d_t.$$

También estamos contamos los  $t$  movimientos que ocurren en el centro. Para completar la prueba sólo hay que demostrar que el número de movimientos antes del primer centro y el número de movimientos después del último centro son más que  $d_1 + d_t - 1$ .

Pero estamos haciendo todo esto en una sucesión permisible; por lo tanto nuestro primer renglón puede ser el que queramos, así que sencillamente elegimos uno que ocurra exactamente después de una transposición que atraviesa en el centro. Entonces  $d_t$  es igual a cero (porque la sucesión permisible termina justamente con un centro), y evidentemente

$$d_1 > d_1 - 1.$$

Por lo tanto el número de movimientos para alcanzar  $n, \dots, 2, 1$  es al menos  $n$ .  $\square$

Con estos dos lemas, es trivial demostrar el resultado de Ungar.

**Teorema 2.2** (Ungar 1982). *Sea  $S$  un conjunto de  $2n$  puntos en  $\mathbb{R}^2$ , no todos colineales. El número de direcciones distintas generada por los puntos en  $S$  es al menos  $2n$ .*

*Demostración.* Por el último lema, hay al menos  $2n$  movimientos en la sucesión permisible que resulta de secuencializar  $S$ , y cada movimiento cuenta por una pendiente o dirección distinta determinada por dos o más puntos de  $S$ . Por lo tanto, el número de direcciones distintas generada por los puntos en  $S$  es al menos  $2n$ .  $\square$

A las sucesiones permisibles que vimos hasta antes de la demostración de Ungar (las que sólo intercambian dos elementos por renglón) les vamos a llamar *simples*. Dado que a partir de este momento todas las sucesiones permisibles que veremos serán simples, vamos a decirles sencillamente *sucesiones permisibles*; se dará por sentado que son simples, a menos que se especifique lo contrario.

## 2. Sucesiones permisibles

---

## Capítulo 3

# Bloqueo de convexos bajo distintas orientaciones

Sea  $C = \{c_1, \dots, c_n\}$  un conjunto de convexos tales que, para cada uno de ellos, todos sus puntos frontera son parte del convexo, y donde  $c_i \cap c_j = \emptyset$  para todo  $c_i$  y  $c_j$  en  $C$ .

Vamos a suponer que  $c_1$  es de alguna manera importante para nosotros, y que quisiéramos separarlo del resto de los elementos de  $C$ , con las siguientes restricciones: los elementos de  $C$  no pueden intersectarse entre sí, y sólo los podemos mover en una única dirección. Esto quiere decir que para poder mover a  $c_1$ , vamos a tener que primero mover a los elementos de  $C$  que se interpongan en la dirección en la que queremos moverlo.

Este problema puede pensarse como si tuviéramos distintas monedas sobre una mesa (una de ellas de oro), a las cuales sólo podemos mover hacia adelante sin levantarlas, y donde además no podemos permitir que choquen entre sí. Entonces debemos ir desplazando cada moneda que tape a la de oro en un cierto orden para que no haya ningún choque.

Este problema es conocido en Geometría Computacional como *bloqueo de convexos*, y se sabe que el orden en que hay que mover los convexos es de hecho un orden parcial. Es utilizado para decidir cómo acomodar objetos de tal forma que una máquina sea capaz de irlos quitando uno por uno (desmontarlos) sin que el resto del conjunto sea perturbado: por eso es que en general la dirección está fija y suele ser la dirección vertical hacia arriba (que es como en general una máquina desmontaría un conjunto de objetos).

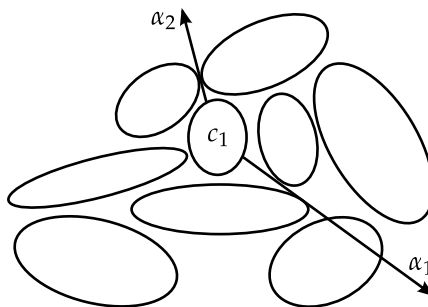
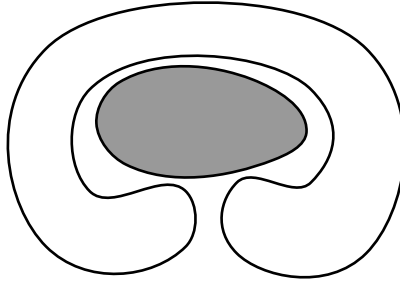


Figura 3.1: Dos distintas direcciones para poder llegar a  $c_1$ .

Vamos a pensar entonces en la siguiente variante del problema: supongamos ahora que podemos elegir la dirección en que podemos desplazar nuestros convexos, y entonces queremos

encontrar la dirección que nos minimice el número de elementos de  $C$  que hay que mover antes de poder llegar a  $c_1$ . Por ejemplo, en la Figura 3.1 se puede ver claramente que en la dirección  $\alpha_2$  es necesario mover únicamente dos convexos antes de llegar a  $c_1$ , mientras que en la dirección  $\alpha_1$  hay que desplazar cuatro.

La versión de nuestro problema donde la dirección en que se desplazarán los objetos es fija ha sido estudiada a profundidad en varios artículos [21, 8, 10, 39], y se sabe que un conjunto de convexos ajenos con una dirección de desmantelamiento fija genera un orden parcial de dimensión dos [37]. Es importante señalar que la condición de convexidad es necesaria: de otra forma es posible que en ninguna dirección se puedan desplazar los objetos (Figura 3.2).



**Figura 3.2:** Cuando  $C$  contiene elementos no convexos, a veces no podemos desplazarlos evitando colisiones.

Dado que nuestro problema está muy relacionado con órdenes parciales (porque la versión donde la dirección está fija de hecho se reduce a un problema de órdenes parciales), en la siguiente sección revisaremos la definición de orden parcial, y cómo se relaciona con este problema.

### 3.1. Órdenes parciales y bloqueo

Sea  $X$  un conjunto finito, y  $<$  una relación sobre los elementos de  $X$  que satisface las siguientes propiedades:

1. Si  $x < y$ , y  $y < z$ , entonces  $x < z$  (transitividad), y
2.  $x \not< x$  (anti-reflexividad).

Al conjunto  $X$  junto con la relación  $<$  se le llama un *orden parcial*, y generalmente se le denota con  $P(<, X)$ .

Dados  $x, y \in X$ , diremos que  $y$  es una *cubierta* de  $x$  si  $x < y$ , y no hay otro elemento  $w \in X$  tal que  $x < w < y$ . El *diagrama* de  $P(<, X)$  es la gráfica dirigida cuyos vértices son los elementos de  $X$  y hay una arista orientada de  $x$  a  $y$  si  $y$  es una cubierta de  $x$ .

Al diagrama de  $P(<, X)$  lo llamaremos plano si podemos dibujarlo en  $\mathbb{R}^2$  de tal forma que se cumplan las siguientes condiciones:

1. los elementos de  $X$  están representados por puntos en el plano,
2. si  $y$  es una cubierta de  $x$ , la arista que los une es una curva monótonicamente creciente (con respecto al eje  $Y$ ) que comienza en  $x$  y termina en  $y$ , y
3. ningún par de aristas de  $P(<, X)$  se intersectan, excepto tal vez en un punto extremo en común.

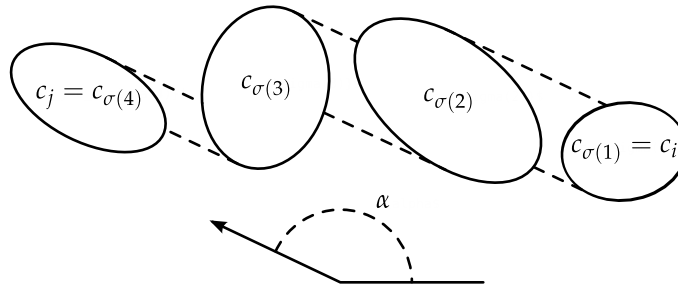
Dados dos elementos  $x, y \in X$ , un *supremo* de ellos es un elemento  $w \in X$  tal que  $x < w$ ,  $y < w$ , y para cualquier otro elemento  $z \in X$  tal que  $x < z$  y  $y < z$ , tenemos que  $w < z$ . Un *ínfimo* es definido similarmente, sólo que pediremos para  $w$  que  $w < x$  y  $w < y$ . A un orden parcial se le llama una *mallá* si cualesquiera dos elementos tienen un supremo y un ínfimo. Diremos que una mallá es *plana* si su diagrama es a su vez plano, y finalmente, a un orden parcial  $P(<, X)$  lo llamaremos *mallá plana truncada* si, al agregar a  $P(<, X)$  un elemento máximo y un elemento mínimo, el orden resultante es una mallá plana.

Sean  $c_i$  y  $c_j$  dos elementos de  $C$ , y sea  $\alpha$  una dirección entre  $0$  y  $2\pi$ . Diremos que  $c_j$  es una *cubierta superior* de  $c_i$  en la dirección  $\alpha$  (o de forma abreviada, una  $\alpha$ -cubierta) si se cumple lo siguiente:

1. Existe al menos un segmento de recta dirigido paralelo a la dirección  $\alpha$  que comienza en un punto de  $c_i$  y termina en un punto de  $c_j$ .
2. Cualquier segmento de recta dirigido paralelo a la dirección  $\alpha$  que comienza en un punto de  $c_i$  y termina en un punto de  $c_j$  no interseca a ningún otro elemento de  $C$ .

Debe ser fácil ver que si  $c_j$  es una  $\alpha$ -cubierta de  $c_i$ , entonces para poder mover  $c_i$  en la dirección  $\alpha$  debemos primero mover  $c_j$ . También hacemos notar que si el elemento  $c_j$  es una  $\alpha$ -cubierta de  $c_i$ , entonces  $c_i$  es una  $(\alpha + \pi)$ -cubierta de  $c_j$ . Diremos que  $c_j$  *bloquea* a  $c_i$  en la dirección  $\alpha$ , denotado por  $c_i \prec_\alpha c_j$ , si existe una sucesión  $c_i = c_{\gamma(1)}, c_{\gamma(2)}, \dots, c_{\gamma(k)} = c_j$  de elementos de  $C$  tal que  $c_{\gamma(r+1)}$  es una  $\alpha$ -cubierta de  $c_{\gamma(r)}$ , para  $r = 1, \dots, k - 1$  (Figura 3.3). La siguiente observación la utilizaremos más adelante:

**Observación 3.1.** Si  $c_i \prec_\alpha c_j$ , entonces  $c_j \prec_{\alpha+\pi} c_i$ .



**Figura 3.3:** El elemento  $c_{\sigma(r+1)}$  es una  $\alpha$ -cubierta de  $c_{\sigma(r)}$ ,  $r = 1, 2, 3$ , y  $c_{\sigma(r)} \prec_\alpha c_{\sigma(s)}$ ,  $r < s$ . En particular,  $c_i \prec_\alpha c_j$ , pero  $c_j$  no es  $\alpha$ -cubierta de  $c_i$ .

De la discusión de arriba se desprende que si  $c_i \prec_\alpha c_j$  y  $c_j \prec_\alpha c_k$ , entonces  $c_i \prec_\alpha c_k$ . Además,  $c_i \not\prec_\alpha c_i$ , y por lo tanto  $C$  junto con la relación de bloqueo  $\prec_\alpha$  es un orden parcial  $P(\prec_\alpha, C)$ . Es sabido que  $P(\prec_\alpha, C)$  es en general una mallá plana truncada [37].

Se puede observar que el diagrama de  $P(\prec_\alpha, C)$  tiene a los elementos de  $C$  como vértices, y que hay una arista orientada de  $c_i$  a  $c_j$  si  $c_j$  es una  $\alpha$ -cubierta de  $c_i$  (Figura 3.4). Los elementos de  $C$  que necesitamos mover en la dirección  $\alpha$  antes de llegar a un elemento  $c_i$  de  $C$ , son aquellos convexos  $c_j$  tales que  $c_i \prec_\alpha c_j$ . El conjunto que contiene a estos elementos le llamaremos el conjunto superior de  $c_i$  en la dirección  $\alpha$ , o de forma abreviada, el *superior- $\alpha$*  de  $c_i$ . Este problema por lo tanto se reduce a encontrar la dirección  $\alpha_0$  tal que la cardinalidad del superior- $\alpha_0$  de  $c_1$  sea mínima.

Hacemos notar que conforme  $\alpha$  cambie, también lo hace  $P(\prec_\alpha, C)$ . Es de hecho sencillo encontrar familias de convexos tales que  $P(\prec_\alpha, C)$  cambia  $\Theta(n^2)$  veces, cuando  $\alpha$  va de  $0$  a  $2\pi$ .

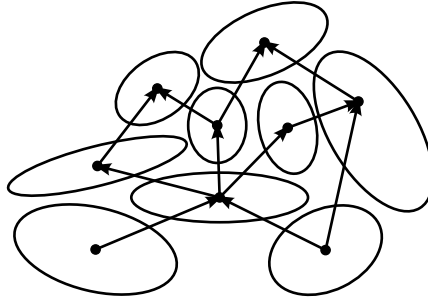


Figura 3.4: Diagrama de  $P(\prec_{\alpha}, C)$  para  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ .

En la siguiente sección probaremos varias propiedades de  $P(\prec_{\alpha}, C)$  que nos ayudarán a simplificar el espacio de búsqueda para  $\alpha_0$ .

### 3.2. Las direcciones críticas

Dado un convexo  $c$ , una línea recta  $\ell$  será llamada *línea de soporte* de  $c$  si interseca a  $c$ , y  $c$  está completamente contenido en uno de los dos semiplanos cerrados determinados por  $\ell$ . Para simplificar, vamos a suponer que no existe una línea tal que sea de soporte de tres o más elementos de  $C$ , y que no hay dos líneas diferentes paralelas, cada una de las cuales soporte a dos elementos de  $C$ .

Sean  $c_i$  y  $c_j$  dos convexos de  $C$ . A una línea recta  $\ell$  le llamaremos *tangente interna* de  $c_i$  y  $c_j$ , si  $\ell$  es línea de soporte de ambos, y  $c_i$  está contenido en uno de los semiplanos cerrados determinados por  $\ell$ , y  $c_j$  está contenido en el otro. Similarmente, una línea recta  $\ell$  será llamada *tangente externa* de  $c_i$  y  $c_j$  si  $\ell$  los soporta a ambos, y  $c_i$  y  $c_j$  están contenidos en uno de los semiplanos cerrados determinados por  $\ell$  (Figura 3.5).

Dados  $c_i, c_j \in C$ , si orientamos sus líneas de soporte comunes de  $c_i$  a  $c_j$ , podemos clasificarlas como *izquierda interna*, *derecha interna*, *izquierda externa* y *derecha externa*, como se puede ver en la Figura 3.5. Por su definición, no es difícil ver que las tangentes internas definen direcciones críticas donde dos convexos pueden cambiar su relación de bloqueo.

Hacemos notar que si  $\alpha$  es la dirección definida por una tangente de  $c_i$  y  $c_j$ , de  $c_i$  a  $c_j$ , entonces  $\alpha + \pi$  es la dirección de la misma tangente de  $c_i$  y  $c_j$ , pero orientada de  $c_j$  a  $c_i$ .

**Observación 3.2.** Hay a lo más  $4\binom{n}{2}$  valores distintos de  $\alpha$  donde  $P(\prec_{\alpha}, C)$  puede cambiar; estos cambios ocurren en las pendientes definidas por las tangentes internas entre pares de elementos de  $C$  (en ambas direcciones).

Dados  $\alpha, \beta \in [0, 2\pi)$ , y  $\beta = \alpha + \theta$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$ , el intervalo  $I = [\alpha, \beta]$  denotará el conjunto de direcciones  $\gamma$  tales que  $\gamma = \alpha + \delta$ ,  $0 \leq \delta \leq \theta$ , suma bajo módulo  $2\pi$ . Consideraremos que las direcciones crecen en el sentido contrario a las manecillas del reloj.

Aunque los cambios en  $P(\prec_{\alpha}, C)$  sólo pueden ocurrir en direcciones definidas por tangentes internas, también consideramos direcciones definidas por tangentes externas ya que serán utilizadas en la Sección 3.3.

Sea  $\mathcal{D} = \{\gamma_1, \dots, \gamma_{8\binom{n}{2}}\}$  el conjunto de direcciones determinadas por las tangentes internas y externas de pares de elementos de  $C$ , y supongamos que están etiquetadas de tal forma que para  $r < s$ ,  $\gamma_r < \gamma_s$ . Observemos que si cambiamos el valor de  $\alpha$  continuamente de 0 a  $2\pi$ ,



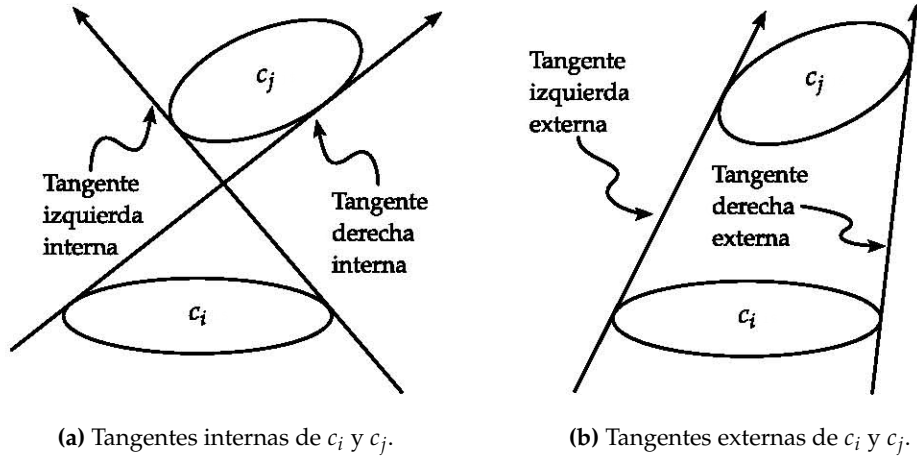


Figura 3.5: Tangentes externas e internas de  $c_i$  y  $c_j$ .

$P(\prec_\alpha, C)$  puede cambiar sólo cuando  $\alpha$  cruza un elemento de  $\mathcal{D}$ . Por lo tanto para cualquier  $\alpha$  y  $\beta$  en el intervalo abierto  $(\gamma_k, \gamma_{k+1})$ ,  $P(\prec_\alpha, C) = P(\prec_\beta, C)$ ,  $\gamma_k, \gamma_{k+1} \in \mathcal{D}$ . Por ello, para cualquier  $\alpha \in (\gamma_k, \gamma_{k+1})$ ,  $P(\prec_\alpha, C)$  será denotada con  $P(\prec_{\gamma_k}, C)$ .

**Lema 3.1.** Si  $c_i \prec_\alpha c_j$ , entonces existe una dirección  $\beta \in (\alpha, \alpha + \pi)$  tal que  $c_i$  y  $c_j$  no son comparables en  $P(\prec_\beta, C)$ .

*Demostración.* Por la Observación 3.1,  $c_j \prec_{\alpha+\pi} c_i$ . Supongamos que el lema es falso; entonces existe una dirección crítica  $\gamma_i \in \mathcal{D}$ , con  $\alpha < \gamma_i < \alpha + \pi$ , tal que  $c_i \prec_{\gamma_i} c_j$  y  $c_j \prec_{\gamma_{i+1}} c_i$ . En cada dirección crítica en  $\mathcal{D}$  en la que el orden parcial cambia, o bien dos elementos de  $C$  dejan de ser comparables, o bien se vuelven comparables. Por lo tanto si  $c_i \prec_{\gamma_i} c_j$ , entonces en  $\gamma_{i+1}$  tenemos que  $c_i \prec_{\gamma_{i+1}} c_j$ , o  $c_i$  y  $c_j$  son no comparables. En cualquiera de los dos casos no puede ocurrir que  $c_j \prec_{\gamma_{i+1}} c_i$ .  $\square$

Con esto podemos probar lo siguiente:

**Lema 3.2.** Sean  $c_i$  y  $c_j$  dos convexos en  $C$ . El conjunto de direcciones en las cuales  $c_j$  bloquea  $c_i$  es un intervalo único no vacío  $\mathcal{I}_{i,j}$ .

*Demostración.* Si  $c_i \prec_\alpha c_j$  para alguna  $\alpha$ , por definición hay una sucesión  $S = c_{\sigma(1)}, c_{\sigma(2)}, \dots, c_{\sigma(k)}$  de elementos de  $C$  tales que  $c_{\sigma(r+1)}$  es una  $\alpha$ -cubierta de  $c_{\sigma(r)}$ , con  $c_i = c_{\sigma(1)}$ ,  $c_j = c_{\sigma(k)}$ , y  $r = 1, \dots, k-1$ . Sea  $I_{\sigma(r), \sigma(r+1)}$  el intervalo de direcciones  $\gamma$  donde  $c_{\sigma(r+1)}$  es una  $\gamma$ -cubierta de  $c_{\sigma(r)}$  en el conjunto que contiene únicamente a  $\{c_{\sigma(r)} \text{ y } c_{\sigma(r+1)}\}$ .

La sucesión  $S$  determina un conjunto de direcciones  $\mathcal{I}(S)$  en las cuales  $c_i$  es bloqueado por  $c_j$ , donde  $\mathcal{I}(S) = \bigcap_{r=1}^{k-1} I_{\sigma(r), \sigma(r+1)}$ . Dado que  $\alpha \in \mathcal{I}(S)$  y la intersección de intervalos es un intervalo,  $\mathcal{I}(S)$  es un intervalo no vacío.

Cuando  $c_j$  bloquea  $c_i$  en la dirección  $\alpha$ , puede haber más de una sucesión que determina dicho bloqueo. Cualesquiera dos sucesiones distintas que bloquean,  $S$  y  $S'$ , tienen que diferir en al menos un elemento y, en general,  $\mathcal{I}(S) \neq \mathcal{I}(S')$ .

Si consideramos todas las direcciones  $\delta \in [0, 2\pi)$  donde  $c_i \prec_\delta c_j$ , entonces hay un número finito  $m \geq 1$  de sucesiones distintas que bloquean  $S_1, \dots, S_m$  dadas por esas direcciones; y cada  $S_t$  determina un intervalo no vacío  $\mathcal{I}(S_t)$  de direcciones. Sea  $\mathbf{S} = \{S_1, \dots, S_m\}$ . El conjunto  $\mathcal{I}_{i,j}$  de direcciones en las que  $c_j$  bloquea  $c_i$ , determinado por todas las sucesiones en  $\mathbf{S}$ , es entonces

### 3. Bloqueo de convexos bajo distintas orientaciones

el conjunto no vacío  $\mathcal{I}_{i,j} = \bigcup_{t=1}^m \mathcal{I}(S_t)$ . Si  $\mathcal{I}_{i,j}$  es de hecho un intervalo, nuestro resultado es correcto.

Por el Lema 3.1 existe una dirección  $\beta$  donde  $c_i \not\prec_{\beta} c_j$ . Sin pérdida de generalidad supongamos que  $\beta = 0$ , por lo tanto  $0 \notin \mathcal{I}(S_t)$  para cada  $S_t \in \mathbf{S}$ . Sea  $\mathcal{I}(S_t) = [l_t, r_t]$  para cada  $S_t \in \mathbf{S}$ , y sea  $I = [\theta_1, \theta_2]$  donde  $\theta_1 = \min\{l_1, \dots, l_m\}$  y  $\theta_2 = \max\{r_1, \dots, r_m\}$ . Vamos a demostrar que  $\mathcal{I}_{i,j} = I$ .

Claramente  $\mathcal{I}_{i,j} \subseteq I$ , por lo que hay que demostrar que  $I \subseteq \mathcal{I}_{i,j}$ . Sea  $\gamma \in [\theta_1, \theta_2] = I$ ; vamos a demostrar que  $c_i \prec_{\gamma} c_j$ , y por lo tanto  $I \subseteq \mathcal{I}_{i,j}$ . Sea  $\mathcal{B}_i$  la banda que se encuentra entre las dos líneas de soporte de  $c_i$  en la dirección  $\gamma$ . Tenemos tres casos:

1. El convexo  $c_j$  intersecta  $\mathcal{B}_i$ . En este caso obviamente  $c_i \prec_{\gamma} c_j$ .
2. El convexo  $c_j$  está a la izquierda de  $\mathcal{B}_i$  (Figura 3.6).

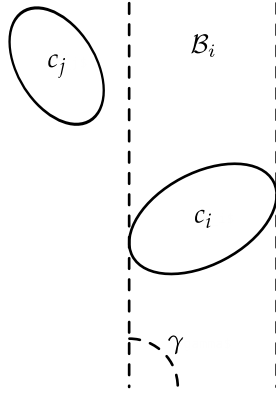


Figura 3.6:  $c_j$  a la izquierda de  $\ell_1$  y  $\ell_2$ .

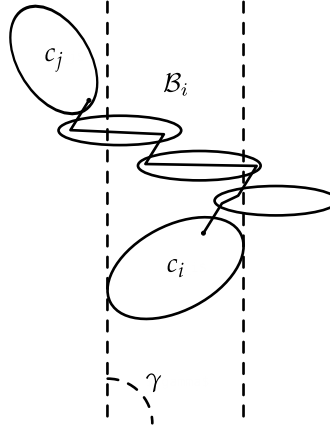
Ya que  $c_i \prec_{\theta_1} c_j$ , sabemos que hay una sucesión  $c_i = c_{\sigma(1)}, c_{\sigma(2)}, \dots, c_{\sigma(k_1)} = c_j$  tal que  $c_{\sigma(r+1)}$  es una  $\theta_1$ -cubierta de  $c_{\sigma(r)}$  para  $r = 1, \dots, k_1 - 1$ .

Como  $c_{\sigma(2)}$  es una  $\theta_1$ -cubierta de  $c_{\sigma(1)}$ , existe un segmento de recta paralelo a la dirección  $\theta_1$  con puntos extremos en  $c_i = c_{\sigma(1)}$  y  $c_{\sigma(2)}$  tal que no intersecta ningún otro convexo de  $C$ . De manera similar, para  $c_{\sigma(r)}$  y  $c_{\sigma(r+1)}$  hay un segmento de recta paralelo a la dirección  $\theta_1$  con puntos extremos en  $c_{\sigma(r)}$  y  $c_{\sigma(r+1)}$ ,  $2 \leq r \leq k_1 - 1$  tal que no intersecta ningún otro convexo de  $C$ . Cada  $c_{\sigma(r)}$ ,  $2 \leq r \leq k_1 - 1$ , contiene dos puntos extremos de dos de estos segmentos de recta, y estos puntos extremos pueden unirse con un segmento de recta completamente contenido dentro de  $c_{\sigma(r)}$ .

Esto forma una curva conexa que empieza en  $c_i$  y termina en  $c_j$ , pasando por todos los elementos en la sucesión. Esta curva consiste de dos tipos de segmentos de recta: aquellos paralelos a la dirección  $\theta_1$ , y aquellos contenidos en  $c_{\sigma(r)}$ ,  $2 \leq r \leq k_1 - 1$ . Pero  $\theta_1 < \gamma$ , así que los segmentos de recta del primer tipo siempre van arriba y a la derecha de la dirección  $\gamma$ . Los segmentos de recta del segundo tipo pueden ir a la derecha o a la izquierda (Figura 3.7).

Por construcción esta curva intersecta  $\mathcal{B}_i$ , y por lo tanto al menos un elemento de  $\{c_{\sigma(2)}, \dots, c_{\sigma(k_1-1)}\}$  también intersecta  $\mathcal{B}_i$ , digamos  $c_{\sigma(s)}$ , y entonces  $c_i \prec_{\gamma} c_{\sigma(s)}$ .

Sea  $\mathcal{B}_{\sigma(s)}$  la banda acotada por las líneas de soporte de  $c_{\sigma(s)}$  en la dirección  $\gamma$ . Si  $c_j$  intersecta  $\mathcal{B}_{\sigma(s)}$  entonces  $c_{\sigma(s)} \prec_{\gamma} c_j$ , y por transitividad  $c_i \prec_{\gamma} c_j$ .



**Figura 3.7:** Una sucesión de  $\theta_1$ -cubiertas de  $c_j$  a  $c_i$ , y la curva que pasa a través de sus elementos.

Supongamos que  $c_j$  no interseca  $\mathcal{B}_{\sigma(s)}$ . Es fácil ver que  $c_j$  tiene que estar a la izquierda de  $\mathcal{B}_{\sigma(s)}$ . Al sustituir  $c_{\sigma(s)}$  por  $c_i$  y repetir nuestra argumentación previa varias veces, obtenemos una subsucesión  $\{c_i = c_{\sigma(i_1)}, c_{\sigma(i_2)}, \dots, c_{\sigma(i_w)} = c_j\}$  de  $\{c_{\sigma(1)}, c_{\sigma(2)}, \dots, c_{\sigma(k_1)}\}$ , con  $i_1, \dots, i_w$ , tal que  $c_{\sigma(i_1)} \prec_\gamma c_{\sigma(i_2)} \prec_\gamma \dots \prec_\gamma c_{\sigma(i_{w-1})} \prec_\gamma c_{\sigma(i_w)}$ , y por lo tanto  $c_i \prec_\gamma c_j$ .

3. El convexo  $c_j$  está a la derecha de la banda  $\mathcal{B}_i$ . La prueba es análoga a la del caso anterior, pero ahora usando la dirección  $\theta_2$  en lugar de  $\theta_1$ .

Como en los tres casos tenemos que  $c_i \prec_\gamma c_j$ , entonces  $I \subseteq \mathcal{I}_{i,j}$ , y por lo tanto  $I = \mathcal{I}_{i,j}$ , que es un intervalo no vacío único donde  $c_j$  bloquea a  $c_i$ .  $\square$

En la sección que sigue mostraremos cómo mantener  $P(\prec_\alpha, C)$  mientras  $\alpha$  cambia de 0 a  $2\pi$ , de tal forma que podremos obtener  $P(\prec_{\gamma_i}, C)$  a partir de  $P(\prec_{\gamma_{i-1}}, C)$ , o de forma más precisa, una triangulación  $\mathcal{T}_i$  a partir de  $\mathcal{T}_{i-1}$  en tiempo constante; definiremos  $\mathcal{T}_i$  más adelante. Esto nos permitirá el obtener  $\alpha_0$  en  $O(n^2)$ .

### 3.3. Triangulaciones- $\alpha$

El problema puede resolverse calculando las mallas truncadas  $P(\prec_{\gamma_i}, C)$  para cada dirección  $\gamma_i \in \mathcal{D}$ , obteniendo el superior- $\gamma_i$  de  $c_1$  en cada uno de ellos, y finalmente seleccionando la  $\gamma_i \in \mathcal{D}$  que tenga el superior- $\gamma_i$  más pequeño. Como calcular la malla truncada tiene un costo de  $O(n \log n)$  en tiempo para cada una de las  $8 \binom{n}{2}$  direcciones en  $\mathcal{D}$  (ver [37]), esto resulta en un algoritmo con complejidad en tiempo de  $O(n^3 \log n)$ .

Para mejorar esta complejidad, vamos a calcular inicialmente la malla truncada  $P(\prec_{\gamma_1}, C)$ . Entonces mostraremos cómo obtener  $P(\prec_{\gamma_{i+1}}, C)$  a partir  $P(\prec_{\gamma_i}, C)$  (o mejor dicho, la triangulación- $\gamma_i$ , que definiremos más adelante) en tiempo constante.

Para cada dirección  $\alpha \in [0, 2\pi)$ , vamos a extender  $P(\prec_\alpha, C)$  a una malla plana  $P'(\prec_\alpha, C)$  agregando dos vértices especiales, una fuente  $s$  y un sumidero  $t$ , tales que para cada  $c_i \in C$ ,  $s \prec_\alpha c_i \prec_\alpha t$ . Para una dirección fija, podemos visualizar a  $t$  como un convexo muy grande encima de nuestro conjunto  $C$ , y a  $s$  como un convexo muy grande debajo de todos los elementos de  $C$  (Figura 3.8).

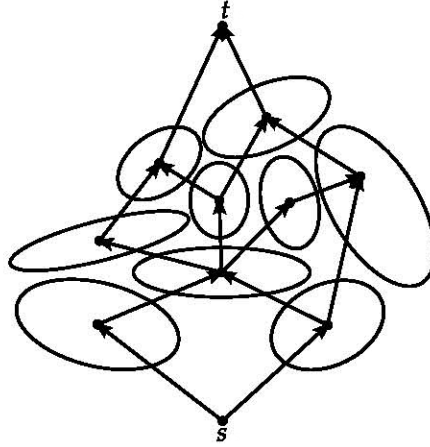


Figura 3.8: La malla  $P'(\prec_{\alpha}, C)$  para  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ .

Para cada  $\alpha$ , ahora aumentamos  $P'(\prec_{\alpha}, C)$  a una triangulación  $\mathcal{T}_{\alpha}$ ; esto es, una multigráfica plana donde cada cara interna es un triángulo: la cara externa de  $\mathcal{T}_{\alpha}$  no lo será. Llamaremos a  $\mathcal{T}_{\alpha}$  la *triangulación- $\alpha$* , y para construirla usaremos lo que vamos a llamar  $\alpha$ -visibilidad.

Dados dos convexos  $c_i, c_j \in C$ , diremos que  $c_j$  es  $\alpha$ -visible desde  $c_i$  si existe un segmento de recta orientado paralelo a la dirección  $\alpha$  que comience en un punto de la frontera de  $c_i$  y termine en un punto en la frontera de  $c_j$ , tal que no intersekte ningún otro elemento de  $C$  (Figura 3.9). Estos segmentos de recta serán llamados *segmentos de recta de  $\alpha$ -visibilidad*  $(c_i, c_j)$ .

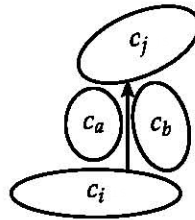


Figura 3.9:  $c_j$  es  $\frac{\pi}{2}$ -visible desde  $c_i$ ;  $c_a$  no lo es desde  $c_b$  (ni viceversa).

Si  $c_j$  es  $\alpha$ -visible desde  $c_i$ , la *zona de  $\alpha$ -visibilidad* de  $c_j$  desde  $c_i$  es la unión de todos los segmentos de recta de  $\alpha$ -visibilidad  $(c_i, c_j)$  (Figura 3.10). Hacemos notar que la zona de  $\alpha$ -visibilidad de  $c_i$  y  $c_j$  no es necesariamente conexa, como se ve en la Figura 3.11(a).

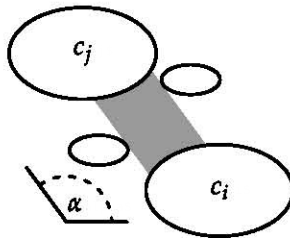


Figura 3.10: Zona de  $\alpha$ -visibilidad de  $c_j$  desde  $c_i$  en gris.

Es importante resaltar que si  $c_j$  es  $\alpha$ -visible desde  $c_i$ , entonces  $c_i \prec_{\alpha} c_j$ ; sin embargo, esto no

necesariamente implica que  $c_j$  sea una  $\alpha$ -cubierta de  $c_i$ . Por otro lado, si  $c_j$  es una  $\alpha$ -cubierta de  $c_i$ , entonces  $c_j$  es  $\alpha$ -visible desde  $c_i$ , y su zona de  $\alpha$ -visibilidad es conexa y no vacía.

Para obtener  $\mathcal{T}_\alpha$  hacemos lo siguiente: si  $c_j$  es  $\alpha$ -visible desde  $c_i$ , y  $c_j$  no es una  $\alpha$ -cubierta de  $c_i$ , entonces agregamos un arco orientado de  $c_i$  a  $c_j$  por cada componente conexa de la zona de  $\alpha$ -visibilidad de  $c_i$  y  $c_j$ . Cada uno de estos arcos se pueden dibujar de tal forma que pasen a través de su componente conexa correspondiente de la zona de  $\alpha$ -visibilidad de  $c_j$  y  $c_i$ .  $\mathcal{T}_\alpha$  es planar dado que nunca se agrega una arista que cruce otra, y el procedimiento de arriba resulta en un encajamiento de  $\mathcal{T}_\alpha$  en el plano de tal forma que todas sus caras, excepto la externa, son triangulares; que es el siguiente resultado:

**Lema 3.3.** *La multigráfica  $\mathcal{T}_\alpha$  es una triangulación, exceptuando por la cara externa, para toda  $\alpha \notin \mathcal{D}$ .*

*Demostración.* Como  $\alpha \notin \mathcal{D}$ , toda línea  $\ell$  paralela a  $\alpha$  es tangente a lo más de un elemento de  $C$ .

Que la cara externa de  $\mathcal{T}_\alpha$  no es un triángulo se sigue de que  $s$  y  $t$  están, respectivamente, “debajo” y “arriba” de todos los elementos de  $C$  en la dirección  $\alpha$ ; por lo tanto  $t$  siempre bloquea a  $s$ , y como  $C$  no es vacío, la zona de  $\alpha$ -visibilidad de  $s$  y  $t$  nunca es conexa. Por lo tanto siempre hay al menos un arco de  $s$  a  $t$  de un lado de los elementos de  $C$ , y otro del otro lado. Esto hace que la cara externa de  $\mathcal{T}_\alpha$  tenga dos arcos, no tres.

Sin pérdida de generalidad supongamos que  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ; sea  $\ell$  una línea paralela a  $\alpha$ , y vamos a barrer con ella un elemento  $c$  de  $C$  de izquierda a derecha, comenzando cuando sea tangente por la izquierda de  $c$ , y por ello no tangente a ningún otro elemento de  $C$ .

Si recorremos la línea  $\ell$  hacia arriba a partir de su punto de intersección más alto con  $c$ , o bien intersecciona a un elemento de  $C$ , o bien intersecciona a  $t$ . Si la recorremos análogamente hacia abajo, o bien intersecciona a  $s$ , o bien a un elemento de  $C$ . Como sea,  $\ell$  intersecciona a un elemento  $a \in C \cup \{t\}$  arriba de  $c$ , y a un elemento  $b \in C \cup \{s\}$  abajo. Por lo tanto,  $a$  es  $\alpha$ -visible de  $c$  y  $c$  es  $\alpha$ -visible de  $b$ ; es posible que de hecho sean  $\alpha$ -cubiertas, pero el punto es que hay una arista en  $\mathcal{T}_\alpha$  de  $c$  a  $a$ , y otra de  $b$  a  $c$ .

Si ahora movemos  $\ell$  infinitesimalmente a la izquierda,  $\ell$  deja de interseccionar a  $c$  (deja de ser su tangente), y conecta a  $a$  y  $b$ ; de esto se sigue que  $a$  es  $\alpha$ -visible desde  $b$ , y por lo tanto hay una arista en  $\mathcal{T}_\alpha$  de  $b$  a  $a$ . Entonces  $c$  pertenece a una cara triangular (formada por  $a$ ,  $b$  y  $c$ ) a su izquierda. Un análisis análogo muestra que  $c$  pertenece a una cara triangular a su derecha.

Regresemos a  $\ell$  tangente por la izquierda a  $c$  con  $a$  siendo  $\alpha$ -visible arriba de él. Si al barrer  $c$  no aparece ningún otro convexo que se interponga entre  $a$  y  $c$ , dos casos ocurren: o bien  $\ell$  termina de barrer a  $c$  antes que  $a$ , o viceversa. No puede terminar de barrerlos al mismo tiempo porque entonces habría una línea paralela a  $\alpha$  tangente a  $a$  y  $c$ .

Si  $\ell$  termina de barrer  $c$  antes que  $a$ , entonces estamos en el caso análogo al primero, donde  $c$  tiene un triángulo por la derecha. Si  $\ell$  termina de barrer  $a$  primero, entonces al recorrer  $\ell$  hacia arriba, comenzando en su punto de intersección con  $c$  más alto, vamos a interseccionar a otro elemento de  $C$ , o a  $t$ . Sea  $d \in C \cup \{t\}$  este elemento; claramente  $d$  es  $\alpha$ -visible desde  $c$ , y como  $\ell$  no puede ser tangente a  $a$  y  $d$  (porque no se encuentra en  $\mathcal{D}$ ), entonces  $d$  es  $\alpha$ -visible desde  $a$  también.

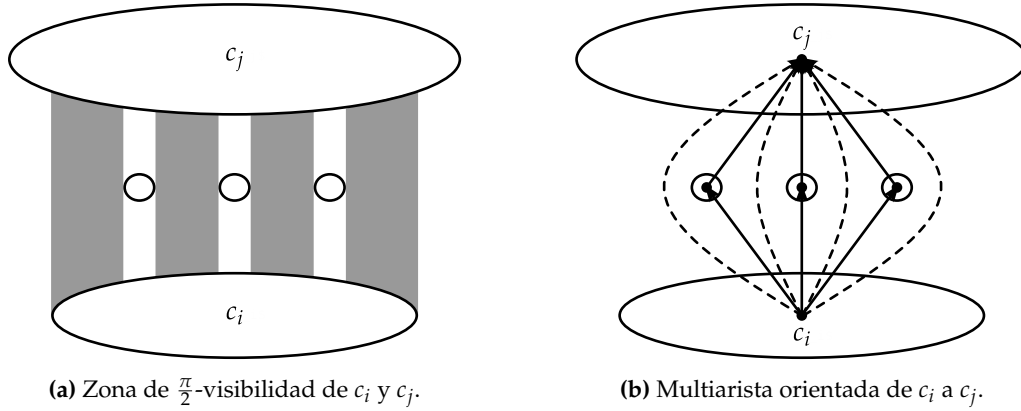
Por tanto, en  $\mathcal{T}_\alpha$  hay una arista de  $c$  a  $a$ , otra arista de  $a$  a  $d$ , y otra arista de  $c$  a  $d$ , lo que hace que  $c$  pertenezca al menos a una cara triangular por arriba. Si seguimos barriendo  $c$  con  $\ell$ , entonces de nuevo o bien ocurre que  $\ell$  deja de barrer  $c$  antes que  $d$ , en cuyo caso de nuevo  $c$  pertenece a una cara triangular por la izquierda; o  $\ell$  deja de barrer a  $d$ , en cuyo caso habrá otro elemento  $e \in C \cup \{t\}$ , que forma otra cara triangular (formada por  $c$ ,  $d$  y  $e$ ) arriba de  $c$ . El proceso no termina hasta que  $\ell$  deje de barrer a  $c$ . Un análisis análogo muestra que  $c$  también pertenece al menos a una cara triangular por debajo.

Habiendo acabado de barrer  $c$ , vemos que ya no puede pertenecer a ninguna otra cara, y de esto se sigue que  $c$  pertenece únicamente a caras triangulares. Como esto ocurre para cualquier

### 3. Bloqueo de convexos bajo distintas orientaciones

elemento de  $C$ , todos los elementos de  $C$  pertenecen a caras triangulares, y por lo tanto  $\mathcal{T}_\alpha$  es una triangulación, excepto por su cara externa (que está formada por aristas entre  $s, t \notin C$ ).  $\square$

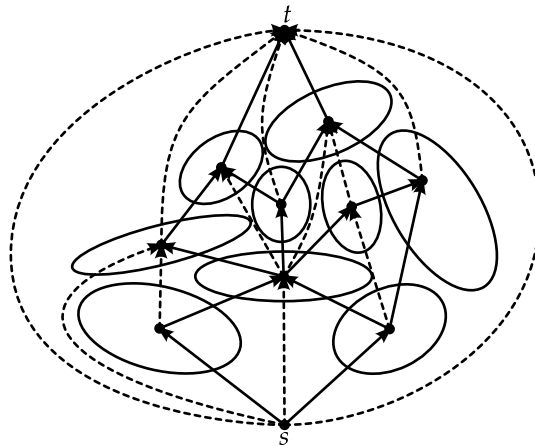
Un ejemplo de cómo se forman las caras triangulares de  $\mathcal{T}_\alpha$  se puede ver en la Figura 3.11(a) y la Figura 3.11(b)).



**Figura 3.11:** Zona de visibilidad y multiarista orientada correspondiente. Las multiaristas las dibujaremos punteadas.

Los arcos nuevos que agregamos serán llamados *arcos de  $\alpha$ -visibilidad*, para distinguirlos de los arcos normales de  $P^l(\prec_\alpha, C)$ . Por el Lema 3.3, para cada dirección  $\alpha$ , la fuente  $s$  y el sumidero  $t$  siempre estarán unidos por una multiarista compuesta de al menos dos arcos, que acotarán la cara externa de  $\mathcal{T}_\alpha$ . En todas las figuras de este capítulo, los arcos de  $\alpha$ -visibilidad serán dibujados con curvas punteadas, y los arcos de  $P^l(\prec_\alpha, C)$  serán dibujados con segmentos de recta sólidos.

La triangulación  $\mathcal{T}_\alpha$  resultante de la malla mostrada en la Figura 3.8 se muestra en la Figura 3.12.

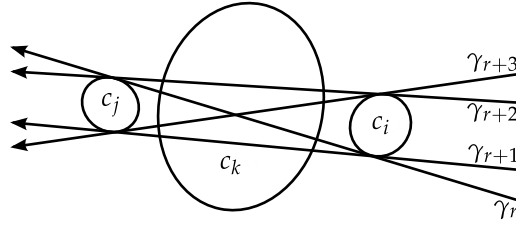


**Figura 3.12:** La triangulación  $\mathcal{T}_\alpha$  para  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ .

Todos los arcos en  $\mathcal{T}_\alpha$  pertenecen a dos triángulos, excepto por los arcos a la extrema izquierda y derecha que conectan  $s$  y  $t$ . Sea  $e$  un arco de  $\mathcal{T}_\alpha$  que pertenece a dos caras triangulares

$f$  y  $f'$  de  $\mathcal{T}_\alpha$ . Cada una de estas caras contiene un vértice (un elemento de  $C$ ) que no es un punto extremo de  $e$ . A estos elementos los vamos a llamar los elementos *opuestos* a  $e$ .

Como  $\mathcal{D}$  tiene  $8\binom{n}{2}$  elementos, existen a lo más  $8\binom{n}{2}$  triangulaciones  $\mathcal{T}_\alpha$ ,  $\alpha \in \mathcal{D}$ , y queremos estudiar cómo obtener  $\mathcal{T}_{\gamma_{k+1}}$  a partir de  $\mathcal{T}_{\gamma_k}$ . Hacemos notar que hay casos en donde las triangulaciones  $\mathcal{T}_{\gamma_k}$  y  $\mathcal{T}_{\gamma_{k+1}}$  son la misma (Figura 3.13). También es posible que  $\mathcal{T}_{\gamma_k}$  difiera de  $\mathcal{T}_{\gamma_{k+1}}$ , pero que  $P'(\prec_{\gamma_k}, C) = P'(\prec_{\gamma_{k+1}}, C)$ , si las triangulaciones cambian únicamente en arcos de  $\gamma_{k+1}$ -visibilidad.



**Figura 3.13:** Las triangulaciones  $\mathcal{T}_{\gamma_r}$  a  $\mathcal{T}_{\gamma_{r+3}}$  son la misma, ya que el orden parcial no cambia, y los vértices involucrados preservan su  $\gamma$ -visibilidad.

Sean  $c_i$  y  $c_j$  los elementos de  $C$  que determinan  $\gamma_{k+1}$ , lo que por definición quiere decir que  $\gamma_{k+1}$  es paralela a una de las cuatro tangentes determinadas por  $c_i$  y  $c_j$ . Si  $\mathcal{T}_{\gamma_k}$  difiere de  $\mathcal{T}_{\gamma_{k+1}}$ , entonces o bien  $\gamma_{k+1}$  está definida por una tangente externa, y esto causó un cambio en visibilidad, o  $\gamma_{k+1}$  está definida por una tangente interna, y esto causó un cambio en el orden parcial.

Vamos a demostrar que la diferencia entre las triangulaciones  $\mathcal{T}_{\gamma_k}$  y  $\mathcal{T}_{\gamma_{k+1}}$  (si acaso existe alguna), será un giro de arco, como se define en [25]; esto es, quitaremos un arco  $e$  de  $\mathcal{T}_{\gamma_k}$ , y lo reemplazaremos con otro arco que conecte dos elementos de  $C$  que sean opuestos a  $e$ .

**Lema 3.4.** Sean  $\gamma_k, \gamma_{k+1} \in \mathcal{D}$ , y  $c_i$  y  $c_j$  los convexos que determinan  $\gamma_{k+1}$ . Si  $\mathcal{T}_{\gamma_k} \neq \mathcal{T}_{\gamma_{k+1}}$ , entonces  $\mathcal{T}_{\gamma_{k+1}}$  se puede obtener a partir de  $\mathcal{T}_{\gamma_k}$  girando un arco en  $\mathcal{T}_{\gamma_k}$ . Dicho giro de arco involucra arcos que son incidentes a  $c_i$ , a  $c_j$ , o a ambos.

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad supongamos que  $\gamma_{k+1} = \frac{\pi}{2}$  y que la tangente que define  $\gamma_{k+1}$  está orientada de  $c_i$  a  $c_j$ . Esta tangente puede ser izquierda externa, derecha externa, izquierda interna o derecha interna; sin embargo, el análisis para el caso cuando  $\gamma_{k+1}$  está definida por una tangente externa derecha es equivalente al caso de una tangente externa izquierda, y lo mismo ocurre para los casos de tangente interna izquierda o derecha.

- $\gamma_{k+1}$  está definida por una tangente izquierda externa  $\ell$ . Dado que  $\mathcal{T}_{\gamma_k} \neq \mathcal{T}_{\gamma_{k+1}}$ , no hay ningún elemento de  $C$  que intersecte  $\ell$  entre  $c_i$  y  $c_j$  (Figura 3.14(a)). Entonces existe un arco de  $\gamma_{k+1}$ -visibilidad entre  $c_i$  y  $c_j$ , y hay un arco de  $\gamma_k$ -visibilidad entre  $c_i$  y  $c_j$ .

Sea  $c_a$  el primer elemento debajo de  $c_i$  que intersecta  $\ell$ , y  $c_b$  el primer elemento arriba de  $c_j$  que intersecta  $\ell$ . Si ningún elemento de  $C$  intersecta  $\ell$  debajo de  $c_i$ , entonces  $c_a = s$ ; de la misma manera, si ningún elemento de  $C$  intersecta  $\ell$  arriba de  $c_j$ , entonces  $c_b = t$ .

No es difícil ver que  $c_j$  es  $\gamma_k$ -visible desde  $c_a$ , pero no  $\gamma_{k+1}$ -visible (a la izquierda de  $c_i$ ) porque  $c_i$  bloquea cualquier segmento de recta paralelo a  $\ell$  entre ellos. De igual forma  $c_b$  es  $\gamma_{k+1}$ -visible desde  $c_i$  y no  $\gamma_k$ -visible (a la izquierda de  $c_j$ ) porque  $c_j$  se interpone entre ellos. Finalmente,  $c_b$  es  $\gamma_k^-$  y  $\gamma_{k+1}$ -visible desde  $c_j$ ,  $c_i$  es  $\gamma_k^-$  y  $\gamma_{k+1}$ -visible desde  $c_a$ , y  $c_a$  es  $\gamma_k^-$  y  $\gamma_{k+1}$ -visible desde  $c_b$  (Figura 3.14(b)).

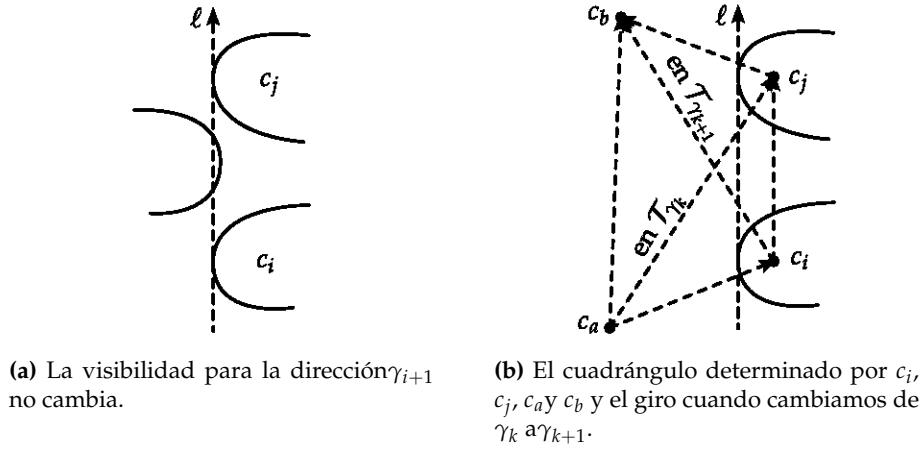


Figura 3.14: El caso cuando  $\gamma_{k+1}$  es una tangente izquierda externa.

En otras palabras, los elementos  $c_i, c_j, c_a$  y  $c_b$  forman un cuadrángulo en  $\mathcal{T}_{\gamma_k}$  y  $\mathcal{T}_{\gamma_{k+1}}$ , con el arco de  $\gamma_k$ -visibilidad  $c_a \rightarrow c_j$  siendo una diagonal en  $\gamma_k$  de dicho cuadrángulo, y esta diagonal gira al arco de  $\gamma_{k+1}$ -visibilidad  $c_i \rightarrow c_b$  en  $\mathcal{T}_{\gamma_{k+1}}$ .

- La dirección  $\gamma_{k+1}$  está dada por una tangente izquierda interna  $l$ . Como  $\mathcal{T}_{\gamma_k} \neq \mathcal{T}_{\gamma_{k+1}}$ , ningún otro elemento de  $C$  intersecta  $l$  entre  $c_i$  y  $c_j$  (Figura 3.15(a)). Por lo tanto hay un arco normal, definido en  $P^l(\prec_{\gamma_k}, C)$ , de  $c_i$  a  $c_j$ .

Sea  $c_a$  el primer elemento debajo de  $c_i$  que intersecta  $l$ , y  $c_b$  el primer elemento arriba de  $c_j$  que intersecta  $l$ . Si ningún elemento de  $C$  intersecta  $l$  debajo de  $c_i$ , entonces  $c_a = s$ ; de igual forma, si ningún elemento de  $C$  intersecta  $l$  arriba de  $c_j$ , entonces  $c_b = t$ .

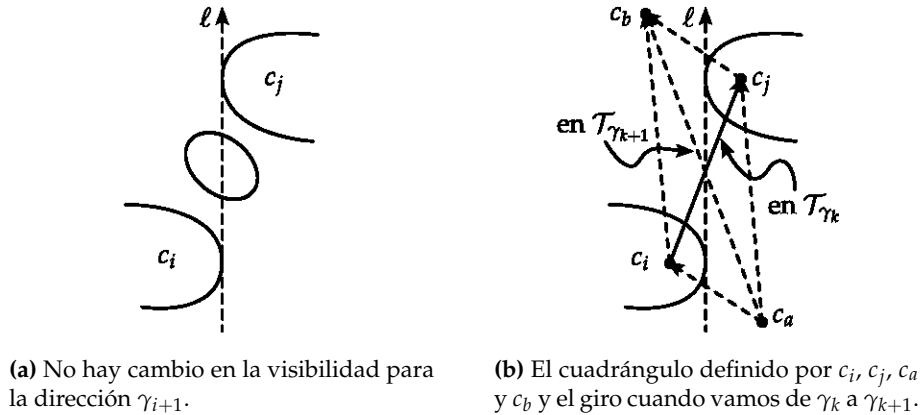


Figura 3.15: El caso cuando  $\gamma_{k+1}$  is una tangente izquierda interna.

No es difícil ver que  $c_j$  es una cubierta- $\gamma_k$  de  $c_i$ , pero no una cubierta- $\gamma_{k+1}$ , y que el arco de  $c_i$  a  $c_j$  en  $\mathcal{T}_{\gamma_k}$  es reemplazado por el arco de  $\gamma_{k+1}$ -visibilidad de  $c_a$  a  $c_b$  en  $\mathcal{T}_{\gamma_{k+1}}$ . Por último,  $c_b$  es  $\gamma_k$ - y  $\gamma_{k+1}$ -visible desde  $c_i$  y  $c_j$ , y  $c_i$  y  $c_j$  son  $\gamma_k$ - y  $\gamma_{k+1}$ -visibles desde  $c_a$  (Figura 3.15(b)).



En otras palabras, los elementos  $c_i, c_j, c_a$  y  $c_b$  forman un cuadrángulo en  $\mathcal{T}_{\gamma_k}$  y  $\mathcal{T}_{\gamma_{k+1}}$ , con el arco de  $c_i$  a  $c_j$  en  $\mathcal{T}_{\gamma_k}$  siendo una diagonal de dicho cuadrángulo, y esta diagonal gira al arco de  $\gamma_{k+1}$ -visibilidad de  $c_a$  a  $c_b$  en  $\mathcal{T}_{\gamma_{k+1}}$ .

Por lo tanto  $\mathcal{T}_{k+1}$  puede obtenerse de  $\mathcal{T}_k$  girando un arco, lo que prueba nuestro resultado. Más aún, en cada caso sabemos si el arco a girar es un arco de  $\alpha$ -visibilidad o un arco normal, y si gira a un arco normal o a un arco de  $\alpha$ -visibilidad.  $\square$

La Figura 3.16 muestra un ejemplo del giro de arco que ocurre cuando transformamos  $\mathcal{T}_{\gamma_k}$  en  $\mathcal{T}_{\gamma_{k+1}}$ , desde una perspectiva global.

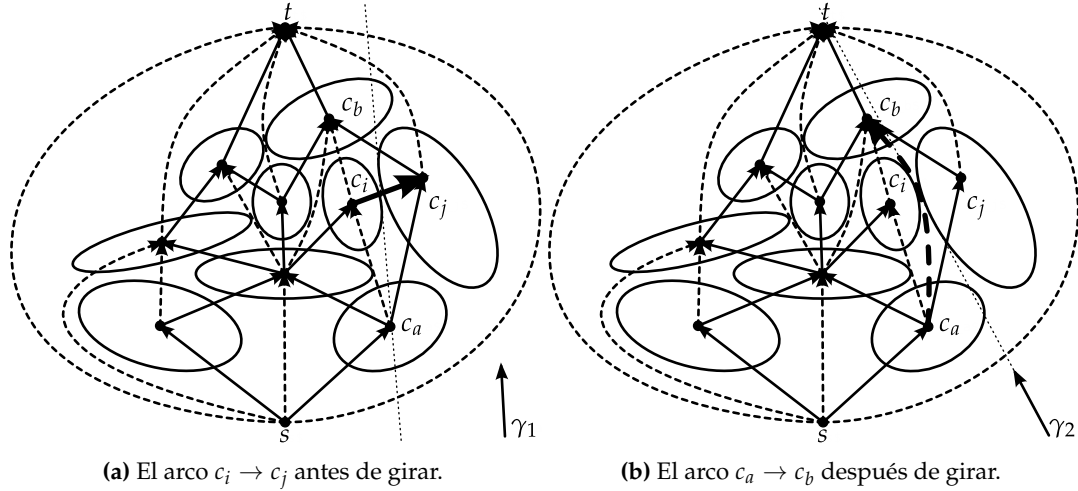


Figura 3.16: Giro de arco cuando vamos de  $\mathcal{T}_{\gamma_k}$  a  $\mathcal{T}_{\gamma_{k+1}}$ . Las tangentes que definen  $\mathcal{T}_{\gamma_k}$  y  $\mathcal{T}_{\gamma_{k+1}}$  están determinadas por  $c_i$  y  $c_j$

Supondremos que para cada dirección  $\gamma \in \mathcal{D}$ , también tenemos asociada a ella los dos convexos en  $C$  que la definen. El siguiente resultado se sigue:

**Corolario 3.1.** Dado  $\mathcal{T}_{\gamma_k}$ , podemos obtener  $\mathcal{T}_{\gamma_{k+1}}$  en tiempo  $O(1)$ .

### 3.4. Un algoritmo para encontrar $\alpha_0$

En esta sección demostraremos que si tenemos los elementos de  $\mathcal{D}$  ordenados entonces podemos encontrar la dirección  $\alpha_0$ , para la cual el superior de  $c_1$  es mínimo, en tiempo  $O(n^2)$ .

Para esto, necesitaremos los dos siguientes lemas:

**Lema 3.5.** Para cada elemento  $c_i \in C$ , mientras vamos de  $\gamma_1$  a  $\gamma_{8\binom{n}{2}}$ , el superior de  $c_i$  cambia  $O(n)$  veces.

*Demostración.* Sean  $c_i, c_j \in C, c_i \neq c_j$ . El Lema 3.2 nos dice que el conjunto de direcciones en las cuales  $c_j$  bloquea a  $c_i$  es un intervalo  $\mathcal{I}_{i,j}$ . Esto significa que, mientras vamos de  $\gamma_1$  a  $\gamma_{8\binom{n}{2}}$ ,  $c_j$  entra y sale del superior de  $c_i$  exactamente una vez. Por lo tanto, el superior de  $c_i$  cambia un número lineal de veces.  $\square$

Supongamos ahora que para una dirección  $\gamma_k \in \mathcal{D}$  tenemos  $\mathcal{T}_k$ , que  $c_1$  y todos los elementos de  $C$  que pertenecen al superior de  $c_1$  están coloreados de rojo, y que los demás elementos de

C están coloreados de azul. Vamos a mostrar ahora que podemos detectar en tiempo constante si el superior de  $c_1$  cambia.

**Lema 3.6.** *Dada  $\mathcal{T}_k$  con sus vértices coloreados como se explica arriba, podemos detectar si el superior de  $c_1$  cambia en  $\mathcal{T}_{k+1}$  en tiempo constante.*

*Demostración.* Si  $\gamma_{k+1}$  está definida por una tangente externa de dos elementos  $c_i, c_j \in C$ , entonces  $P'(\prec_{\gamma_k}, C) = P'(\prec_{\gamma_{k+1}}, C)$ , y por lo tanto el superior de  $c_1$  no cambia y la coloración de C para  $\gamma_{k+1}$  es la misma que la de  $\gamma_k$ .

Supongamos entonces que  $\gamma_{k+1}$  está definida por una tangente interna de dos elementos  $c_i$  y  $c_j$  de C. Dos casos ocurren dependiendo de si  $\gamma_{k+1}$  es tangente interna izquierda o derecha de  $c_i$  y  $c_j$ .

Si  $\gamma_{k+1}$  es una tangente interna derecha,  $c_i$  y  $c_j$  son comparables en  $\mathcal{T}_{\gamma_{k+1}}$ . Supongamos sin pérdida de generalidad que  $c_i \prec_{\gamma_{k+1}} c_j$ . Si  $c_i$  y  $c_j$  eran comparables en  $\mathcal{T}_{\gamma_k}$ , entonces  $P'(\prec_{\gamma_k}, C) = P'(\prec_{\gamma_{k+1}}, C)$ , y el superior de  $c_1$  no cambia.

Consideremos entonces el caso cuando  $c_i$  y  $c_j$  no eran comparables en  $\mathcal{T}_{\gamma_k}$ . Notemos primero que si  $c_i$  es rojo y  $c_j$  es azul, entonces  $c_j$  se vuelve comparable con  $c_1$ , y el superior de  $c_1$  cambia. En todos los otros casos cuando  $\gamma_{k+1}$  es una tangente interna derecha, el superior de  $c_1$  permanece igual.

Supongamos ahora que  $\gamma_{k+1}$  es una tangente interna izquierda de  $c_i$  y  $c_j$ . En este caso, debe ocurrir que  $c_i$  y  $c_j$  sean comparables en  $\mathcal{T}_{\gamma_k}$ ; sin pérdida de generalidad, sea  $c_i \prec_{\gamma_k} c_j$ . Si  $c_i$  y  $c_j$  son rojos, entonces  $c_j$  podría dejar el superior de  $c_1$ , pero únicamente si era una  $\gamma_k$ -cubierta de  $c_i$ . El caso en que  $c_i$  es rojo y  $c_j$  es azul en  $\mathcal{T}_{\gamma_k}$  no puede ocurrir, ya que  $c_i \prec_{\gamma_k} c_j$ . En todos los otros casos cuando  $\gamma_{k+1}$  es una tangente interna izquierda, el superior de  $c_1$  no cambia.

Por lo tanto, el superior de  $c_1$  puede cambiar únicamente cuando  $\gamma_{k+1}$  es una tangente interna derecha, y  $c_i$  es rojo y  $c_j$  azul, o cuando  $\gamma_{k+1}$  es una tangente interna izquierda y  $c_i$  y  $c_j$  son rojos, y  $c_j$  es una  $\gamma_k$ -cubierta de  $c_i$ . Podemos probar cualquiera de estos dos casos en tiempo constante. Para el segundo caso, podemos verificar si  $c_j$  es una  $\gamma_k$ -cubierta de  $c_i$ , y por el Lema 3.4 sabemos antes de cada giro si ese es el caso.  $\square$

Hacemos notar que si el superior de  $c_1$  no cambia, entonces la coloración de elementos de  $\mathcal{T}_{\gamma_k}$  se mantiene en  $\mathcal{T}_{\gamma_{k+1}}$  en el sentido de que los elementos rojos en  $\mathcal{T}_{\gamma_k}$  son los elementos en el superior de  $c_i$  en  $\mathcal{T}_{\gamma_{k+1}}$ .

**Teorema 3.1.** *Supongamos que tenemos el conjunto ordenado de direcciones  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_{8\binom{n}{2}}\}$ , y que por cada  $\gamma_k$ , también contamos con el par de elementos  $c_i$  y  $c_j$  que la generaron. Entonces podemos encontrar  $\alpha_0$  en  $O(n^2)$ .*

*Demostración.* Construimos  $P'(\prec_{\gamma_1}, C)$  y  $\mathcal{T}_{\gamma_1}$  en tiempo  $O(n \log n)$ . Acto seguido calculamos el superior- $\gamma_1$  de  $c_1$  en tiempo  $O(n)$  usando BFS en  $P'(\prec_{\gamma_1}, C)$ .

Por el Corolario 3.1 podemos encontrar, una por una, las triangulaciones  $\mathcal{T}_{\gamma_1}, \dots, \mathcal{T}_{\gamma_{\binom{n}{2}}}$  en un tiempo total cuadrático. Por el Lema 3.6, el superior de  $c_1$  cambia un número lineal de veces. Cada vez que esto ocurre, recoloreamos los elementos de nuestro orden parcial actual en tiempo lineal. Entonces podemos mantener la coloración de los vértices de  $\mathcal{T}_{\gamma_1}, \dots, \mathcal{T}_{\gamma_{\binom{n}{2}}}$  en un tiempo cuadrático.

Por lo tanto, podemos encontrar  $\alpha_0$  en tiempo  $O(n^2)$ .  $\square$

### 3.5. Algunos comentarios sobre el ordenamiento de $\mathcal{D}$

Si suponemos que para cada par de elementos de C podemos calcular sus líneas tangentes en tiempo constante, entonces podemos ordenar los elementos de  $\mathcal{D}$  en tiempo  $O(n^2 \log n)$ .

Un problema similar al de ordenar los elementos de  $\mathcal{D}$  surge del problema de ordenar las intersecciones generadas por un arreglo de curvas en el plano.

Una familia de curvas de Jordan  $x$ -monótonas es llamada *bien portada* si cada vez que dos curvas se intersectan se cruzan la una a la otra, y cualesquiera dos curvas se intersectan a lo más  $s$  veces, donde  $s$  es constante ([23], páginas 399 y 404). En este contexto, también se supone que las intersecciones de cualesquiera dos curvas se puede calcular en tiempo constante; a esto se le suele mencionar como estar *bajo un modelo propio de cómputo*[4, 35].

Se sabe que para arreglos de curvas bien portadas con  $n$  elementos en las que cualesquiera dos se intersectan a lo más dos veces, el arreglo generado por ellas, incluyendo el conjunto de todas sus intersecciones, puede construirse en  $O(n^2(2^{\alpha n}))$ , donde  $\alpha n$  es la inversa de la función de Ackermann [13]. Sin embargo no se sabe cómo ordenar estas intersecciones de acuerdo a su coordenada  $x$  en tiempo  $o(n^2 \log n)$ , incluso si consideramos arreglos de líneas rectas.

El bien conocido problema abierto de ordenar  $X + Y$  (Problema 41 en [11]) dice: dados dos conjuntos  $X$  y  $Y$  de números, cada uno de tamaño  $n$ , ¿qué tan rápido se puede ordenar el conjunto  $X + Y$  de todas las sumas par a par? En [24] se prueba que el problema de ordenar  $X + Y$  es un caso particular del problema de ordenar las intersecciones de un arreglo de líneas rectas de acuerdo a su coordenada  $x$ . La primera referencia al problema de ordenar  $X + Y$  se hizo en 1976, y permanece abierto: por el resultado probado en [24], ordenar las intersecciones de un arreglo de líneas rectas de acuerdo a su coordenada  $x$  es de hecho un resultado más fuerte.

En lo que sigue, y para facilitar la explicación, supondremos que las fronteras de los elementos de  $C$  son suaves. Esto nos evita un análisis por casos que no proporciona ningún conocimiento especial, y que deja nuestro resultado sin cambio. Para ver que nuestro problema se puede reducir al de ordenar las intersecciones de un arreglo de curvas bien portadas en las que cualesquiera dos se intersectan a lo más dos veces, procedemos como sigue.

Sea  $c_i \in C$ , y sean  $U_i$  y  $L_i$  las cadenas superiores e inferiores de su frontera. Bajo la transformación dual que mapea una línea recta no vertical  $\ell$  definida por la ecuación  $y = mx - n$  al punto  $\ell^* = (m, n)$ , y un punto  $p = (a, b)$  a la línea  $p^* : y = ax - b$ , los puntos en  $U_i$  serán mapeados a líneas cuya curva inferior será cóncava y monótona en el eje  $X$ , a la cual llamaremos  $U_i^*$ ; y los puntos en  $L_i$  serán mapeados a líneas cuya curva superior será convexa y monótona en el eje de las  $X$ , a la cual llamaremos  $L_i^*$ .

En el espacio dual, cada línea que intersecta a  $c_i$  se mapea a un punto acotado por arriba por  $L_i^*$ , y por abajo por  $U_i^*$ ; cada punto dentro de  $c_i$  es mapeado a una línea encerrada entre  $U_i^*$  y  $L_i^*$ ; y cada punto en la frontera de  $c_i$  se mapea a una línea tangente a  $U_i^*$  o  $L_i^*$ , dependiendo de si el punto estaba en  $U_i$  o  $L_i$  respectivamente [1, Sección 7.4] (Figura 3.17).

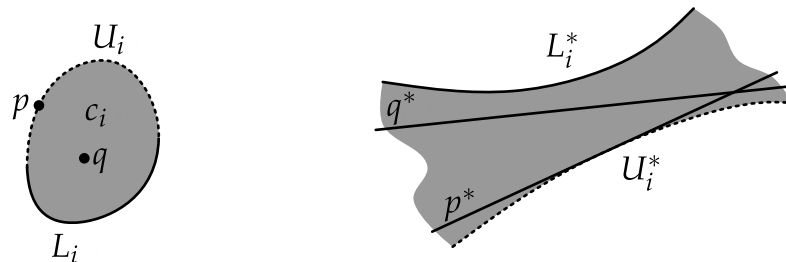


Figura 3.17: Un elemento  $c_i$  de  $C$  y su mapeo en el espacio dual.

Sean  $c_i, c_j \in C$ ; si una línea  $\ell$  es tangente a  $c_i$  y  $c_j$ , entonces intersecta a ambos convexos: sin pérdida de generalidad, supongamos que lo hace en  $U_i$  y  $L_j$ . En el espacio dual esto resulta

### 3. Bloqueo de convexos bajo distintas orientaciones

en que  $\ell^*$  es el punto de intersección de  $U_i^*$  y  $L_j^*$ . Por simplicidad, supondremos que no hay líneas tangentes verticales entre pares de elementos de  $C$ ; siempre podemos rotar ligeramente el conjunto de ser necesario.

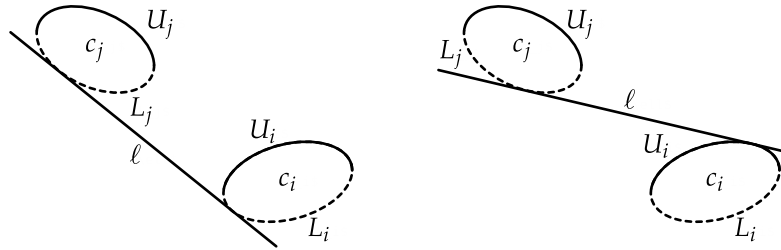
Sea  $\Gamma = \{U_i^*, L_i^* | i = 1, \dots, n\}$  un arreglo de curvas. El siguiente lema se sigue:

**Lema 3.7.** *Cualesquiera dos curvas en  $\Gamma$  se intersectan a lo más dos veces.*

*Demostración.* Sea  $c_i \in C$  y sea  $\ell$  una tangente a  $c_i$  no vertical. Si  $\ell$  intersecta  $c_i$  en un punto en  $U_i$ , entonces  $c_i$  yace debajo de  $\ell$ ; si  $\ell$  intersecta la frontera de  $c_i$  en un punto de  $L_i$ ,  $c_i$  está arriba de  $\ell$ .

Sea  $c_i, c_j \in C$ , y sea  $\ell$  la tangente a ambos convexos. Si  $\ell$  es una tangente externa, entonces  $c_i$  y  $c_j$  están los dos contenidos en el mismo semiplano cerrado determinado por  $\ell$ . Por lo tanto  $\ell$  intersecta  $c_i$  en  $L_i$  (respectivamente  $U_i$ ), y  $\ell$  intersecta  $c_j$  en  $L_j$  (respectivamente  $U_j$ ) (Figura 3.18).

Si  $\ell$  es una tangente interna a  $c_j$  y  $c_i$ , entonces uno de ellos yace arriba de  $\ell$  y el otro debajo. Por lo tanto si  $\ell$  intersecta  $c_i$  en  $U_i$  (respectivamente  $L_i$ ), también intersecta  $c_j$  en  $L_j$  (respectivamente  $U_j$ ).



**Figura 3.18:** Intersecciones de una tangente  $\ell$  con las cadenas inferiores y superiores de dos convexos en  $C$ .

Vamos a probar que dos  $\tau_i^*, \tau_j^* \in \Gamma$  se intersectan a lo más dos veces; supongamos entonces que se intersectan al menos tres veces. Supongamos también  $\tau_i^*, \tau_j^*$  fueron generadas por cadenas superiores o inferiores de dos elementos  $c_{i'}, c_{j'}$  de  $C$ . Como los puntos de intersección de  $\tau_i^*, \tau_j^*$  corresponden a tangentes en común de  $c_{i'}, c_{j'}$ , una de estas tangentes es una tangente interna, y la otra es una tangente externa de  $c_{i'}, c_{j'}$ . Pero una tangente interna toca una cadena inferior y una cadena superior de  $c_{i'}, c_{j'}$ , y una tangente externa intersecta o bien dos cadenas inferiores o bien dos cadenas superiores de  $c_{i'}, c_{j'}$ . Por lo tanto  $\tau_i^*, \tau_j^*$  se intersectan a lo más dos veces.  $\square$

Existen dos maneras en las que las curvas  $U_i^*, L_i^*, U_j^*$  y  $L_j^*$  se pueden intersectar: si  $c_i$  no está contenido en la banda vertical definida por las tangentes verticales a  $c_j$  (o viceversa: Figura 3.19(a)), entonces cada par de curvas se intersectará a lo más una vez (Figura 3.19(b)). Si  $c_i$  está contenido dentro de la banda vertical definida por las tangentes verticales a  $c_j$  (o viceversa: Figura 3.19(c)), entonces cada par de curvas se intersectará a lo más dos veces (Figura 3.19(d)).

Por lo tanto el problema de calcular y ordenar  $\mathcal{D}$  es equivalente a calcular y ordenar las intersecciones de un arreglo de curvas que se intersectan entre ellas a lo más dos veces cada par.

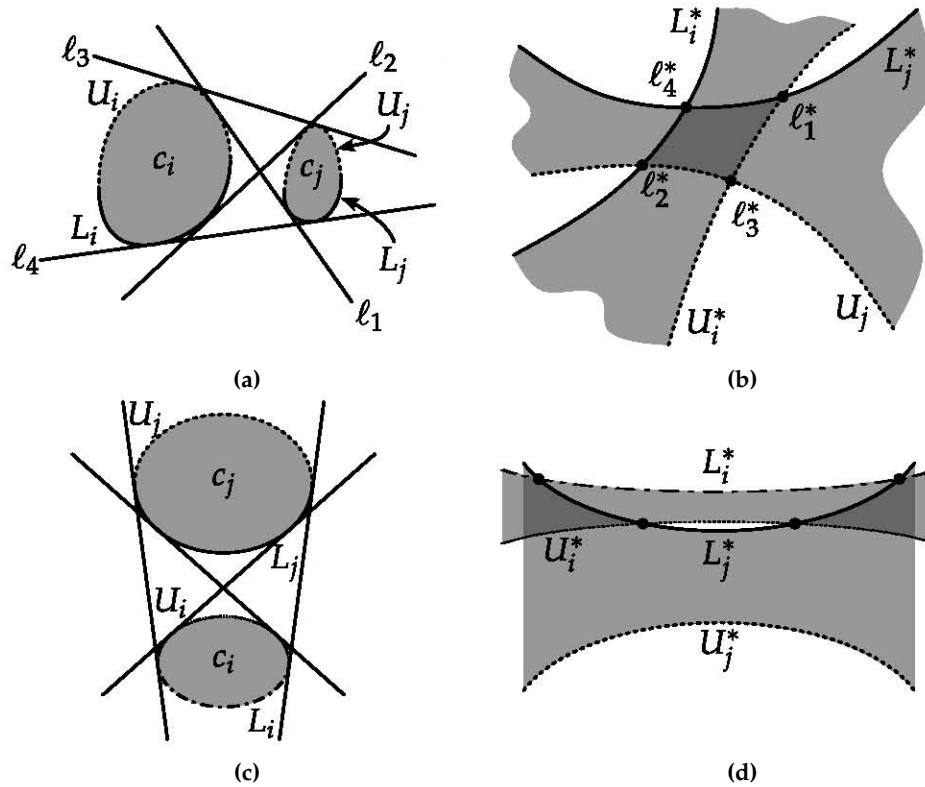


Figura 3.19: Arriba: cada par de curvas se intersecta a lo más una vez en el espacio dual. Abajo: cada par de curvas se intersecta a lo más dos veces en el espacio dual.

### 3.6. Sucesiones circulares para convexos

Aunque a primera vista no lo parezca, este problema está altamente relacionado con las sucesiones circulares que vimos en el Capítulo 2.

En [20] Goodman y Pollack presentaron una generalización de las sucesiones circulares para convexos disjuntos en el plano. Es fácil ver que todo el análisis realizado en la Sección 3.5, cómo se ven los convexos en el espacio dual, y cómo sus tangentes se mapean a los puntos de intersección entre las curvas dadas por sus fronteras en el dual, es de hecho muy similar a la dualización implícita dada por una sucesión permisible rectificable. En ese caso, las curvas están dadas por las trayectorias de los puntos en la sucesión permisible, y las intersecciones son justamente las transposiciones en nuestra matriz.

La diferencia principal radica en que cada convexo se codifica con dos trayectorias en lugar de una, que podemos visualizar como proyectar los puntos extremo izquierdo y derecho en una dirección. Obviamente, las trayectorias mapeadas de dos puntos asociados a un convexo nunca se intersectan entre ellas; que es también lo que ocurre con nuestros arreglos de curvas en la Sección 3.5. Es por ello que estos arreglos no son técnicamente arreglos de pseudolíneas.

Siguiendo esta línea de investigación, un análisis similar, si bien no idéntico, del comportamiento de convexos en el espacio dual fue dado por Luc Habert y Michel Pocchiola en [22], donde estudian el comportamiento de estas familias de curvas, que ellos llaman arreglos de pseudolíneas dobles.

### 3. Bloqueo de convexos bajo distintas orientaciones

---

La codificación usada por Goodman y Pollack no era suficiente para resolver nuestro problema, porque no mantiene la información de si un convexo es cubierta de otro; es por ello que recurrimos a las triangulaciones- $\alpha$ . Sin embargo, podemos ver a las mismas triangulaciones- $\alpha$  como generalizaciones de los renglones en una sucesión permisible, y a nuestros giros de aristas como nuestras transposiciones.

De hecho incluso podríamos codificar cada triangulación- $\alpha$ , que no es otra cosa sino un orden parcial con un poco más de información, como un renglón, porque un orden parcial siempre puede codificarse como una permutación [42]. Sólo que en este caso las transposiciones no son tan agradables a la vista, porque cuando hay un giro de arista de una triangulación- $\alpha$  a una triangulación- $\beta$ , la permutación asociada al orden parcial subyacente puede cambiar hasta en un número lineal de elementos. Por eso nos decidimos por la representación usando triangulaciones.

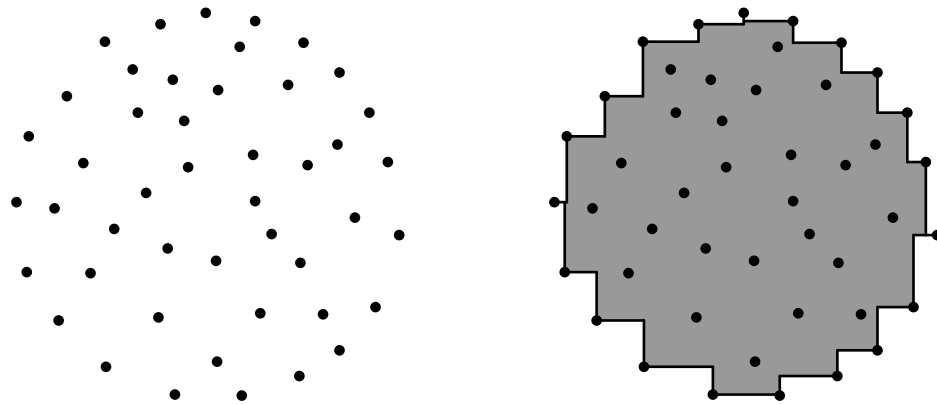
## Capítulo 4

# Capas rectilíneas en conjuntos de puntos

Sea  $S$  un conjunto de puntos en  $\mathbb{R}^2$  de tal forma que no haya tres puntos del conjunto sobre una misma línea recta. Un *cuadrante*  $Q$  en el plano es la intersección de dos semiplanos cuyas líneas de soporte son paralelas a los ejes  $X$  y  $Y$ , y diremos que  $Q$  es *libre de  $S$*  si no contiene ningún punto de  $S$  dentro de él. El *cierre convexo rectilíneo* de  $S$  (denotado por sus siglas en inglés como  $\mathcal{RH}(S)$ ) se define como

$$\mathcal{RH}(S) = \mathbb{R}^2 - \bigcup_{Q \text{ es libre de } S} Q.$$

En la Figura 4.1 podemos ver un ejemplo del cierre convexo rectilíneo de un conjunto de puntos  $S$ .



(a) Conjunto de puntos  $S$ .

(b) Cierre convexo rectilíneo  $\mathcal{RH}(S)$  de  $S$ .

**Figura 4.1:** Un conjunto de puntos  $S$  y su cierre convexo rectilíneo  $\mathcal{RH}(S)$ .

Si comenzamos a rotar el conjunto de puntos  $S$  alrededor del origen, el cierre convexo rectilíneo de  $S$  no rota junto con sus puntos (Figura 4.2), lo que resultará en que la región que ocupa cambiará de acuerdo a qué tanto rotemos los puntos; y de hecho dicha región se puede volver

disconexa (Figura 4.2(b)). Este comportamiento es radicalmente distinto al del cierre convexo normal, donde la región que ocupa siempre es la misma respecto a los puntos, no importa si los rotamos o no. Se sabe que encontrar una rotación que minimice el área del cierre convexo rectilíneo puede realizarse en tiempo  $\Theta(n \log n)$  [2].

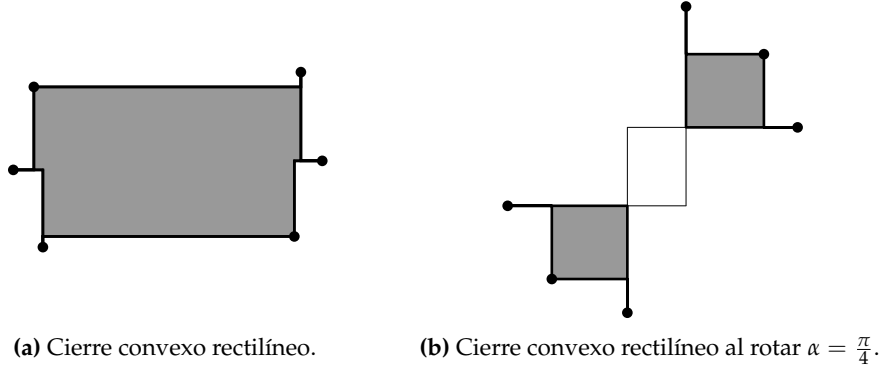


Figura 4.2: Cierres con distintas rotaciones para un mismo conjunto de puntos.

En 1984 Thomas Ottmann, Eljas Soisalon-Soininen y Derick Wood definieron y presentaron un algoritmo para construir el cierre convexo rectilíneo de un conjunto de puntos [30]. La motivación para definir el cierre convexo rectilíneo nace de que nos proporciona un polígono con todas sus aristas siendo paralelas al eje  $X$  o al eje  $Y$  (y por tanto, fácil para una máquina de trazar), que contiene a todos los puntos del conjunto, y que además está contenido y tiene menor área que el cierre convexo del conjunto de puntos.

En 2009 Sang Won Bae, Chunseok Lee, Hee Kap Ahn, Sunghee Choi y Kyung Yong Chwa presentaron un algoritmo de tiempo  $O(n^2)$  que calcula la rotación para un conjunto de puntos tal que minimiza el área del cierre convexo rectilíneo [3]. La motivación para buscar el cierre convexo rectilíneo de área mínima viene de cirugía láser para remover tumores: el láser que corta generalmente sólo puede moverse en las direcciones vertical y horizontal, lo que hace que el cierre convexo rectilíneo sea sencillo de trazar para el mismo. Como la idea es remover lo menos posible para preservar la mayor parte del tejido sano, de inmediato se ocurre el buscar la rotación que minimice el área del cierre convexo rectilíneo. Por último, el algoritmo en [3] fue mejorado en 2011 a un tiempo de  $\Theta(n \log n)$  en [2] por Carlos Alegría Galicia, Tzolkin Garduño, Areli Rosas Navarrete, Carlos Seara y Jorge Urrutia.

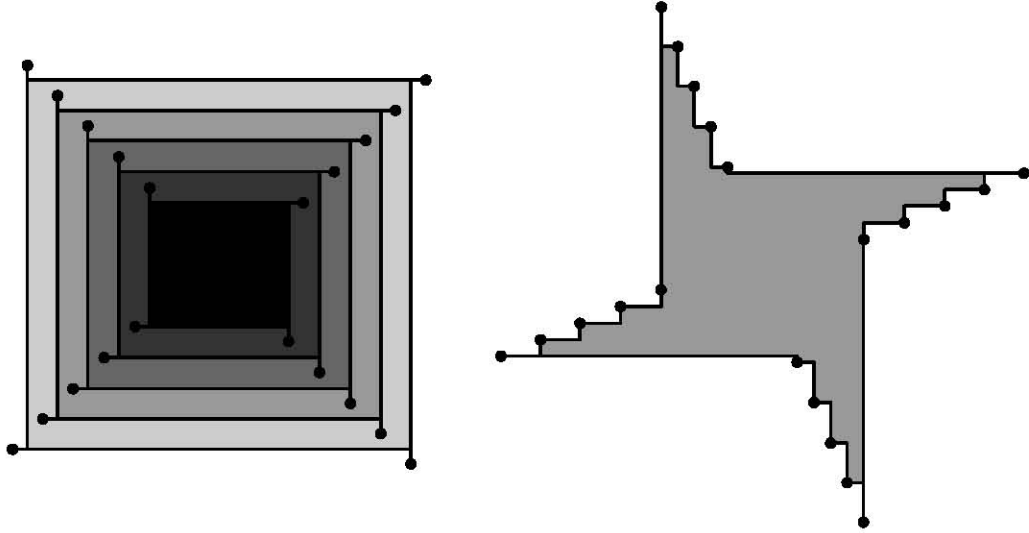
## 4.1. Capas convexas rectilíneas

Vamos a definir recursivamente las capas convexas rectilíneas de un conjunto de puntos  $S$  como sigue:

1. La primera capa convexa rectilínea de  $S$ , que denotaremos con  $\mathcal{L}_1$ , es  $\mathcal{RH}(S)$ . Sea  $S_1$  el conjunto de elementos de  $S$  tales que están incluidos en la frontera de  $\mathcal{RH}(S)$ .
2. La  $i$ -ésima capa convexa rectilínea  $\mathcal{L}_i$  de  $S$  es el cierre convexo rectilíneo  $\mathcal{RH}(S_i)$ , donde  $S_i = S \setminus \{S_1 \cup \dots \cup S_{i-1}\}$ , y  $S_j$  es el conjunto de elementos de  $S$  en la frontera de  $\mathcal{L}_j$ ,  $j < i$ . Nos detendremos cuando  $S \setminus \{S_1 \cup \dots \cup S_i\} = \emptyset$ ; la primera  $i$  para la cual  $S \setminus \{S_1 \cup \dots \cup S_i\} = \emptyset$  es el número de capas convexas rectilíneas de  $S$ .



La Figura 4.3(a) muestra un ejemplo de un conjunto de puntos y sus capas convexas rectilíneas. De la misma manera que el área del cierre convexo rectilíneo cambia cuando rotamos al conjunto de puntos  $S$ , también su número de capas puede llegar a cambiar (Figura 4.3(b)).



(a) Un conjunto  $S$  con  $O(n)$  capas convexas rectilíneas. (b) Una sola capa convexa rectilínea de  $S$  al rotar  $\alpha = \frac{\pi}{8}$ .

**Figura 4.3:** Conforme rotamos  $S$ , el número de capas convexas rectilíneas cambia de  $\frac{n}{4}$  a 1.

Las capas convexas rectilíneas están relacionadas con el estudio de las capas convexas de un conjunto de puntos, primero estudiadas en [31] por Mark H. Overmars y Jan van Leeuwen; y para las cuales un algoritmo óptimo fue presentado en [7] por Bernard Chazelle.

En este capítulo presentaremos un algoritmo óptimo con complejidad  $\Theta(n \log n)$  en tiempo y  $O(n)$  en espacio que calcula las capas convexas rectilíneas de  $S$ . También daremos un algoritmo con complejidad  $O(n^2 \log n)$  en tiempo y  $O(n^2)$  en espacio que calcula la rotación de  $S$  que produce el menor número de capas convexas rectilíneas. Para todo esto utilizaremos el concepto de *escaleras de nivel  $k$* , que es lo que veremos en la siguiente sección.

## 4.2. Escaleras de nivel $k$

El problema de encontrar el cierre convexo rectilíneo de un conjunto de puntos  $S$  está fuertemente relacionado al de encontrar elementos de  $S$  que sean maximales bajo dominación vectorial. Algoritmos óptimos con complejidad  $\Theta(n \log n)$  en tiempo para encontrar dichos elementos maximales en dos y tres dimensiones fueron obtenidos por Hsiang Tsung Kung, Fabrizio Luccio y Franco P. Preparata en [26]. En [28], Jiří Matoušek presentó un algoritmo con complejidad  $O(n^{2.688})$  en tiempo para  $d = n$ . Un algoritmo  $O(n \log n)$  en tiempo para calcular las capas de máximos en conjuntos de puntos en tres dimensiones fue publicado en [5] por Adam L. Buchsbaum y Michael T. Goodrich.

Para un conjunto de puntos  $S$ , definiremos cuatro órdenes parciales en  $S$ ,  $P(\preceq_i, S)$ , usando las siguientes relaciones binarias entre pares de elementos  $p_i = (x_i, y_i)$  y  $p_j = (x_j, y_j)$  en  $S$ :

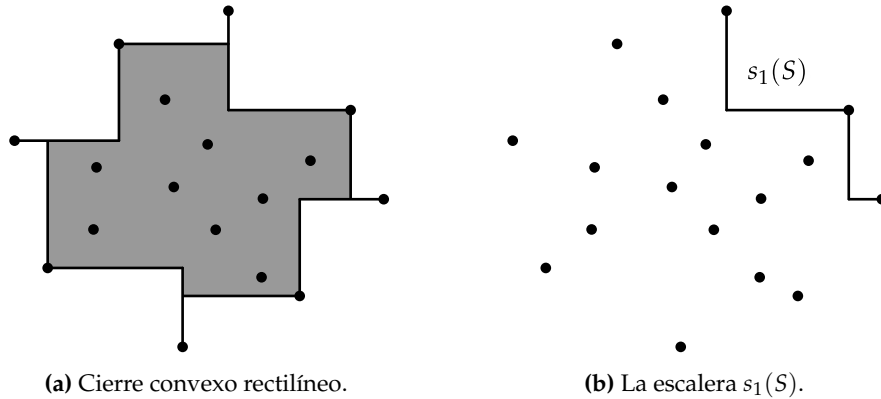
- $p_i \preceq_1 p_j$  si y sólo si  $x_i \leq x_j$  y  $y_i \leq y_j$ .

#### 4. Capas rectilíneas en conjuntos de puntos

- $p_i \preceq_2 p_j$  si y sólo si  $x_i \geq x_j$  y  $y_i \leq y_j$ .
- $p_i \preceq_3 p_j$  si y sólo si  $x_i \geq x_j$  y  $y_i \geq y_j$ .
- $p_i \preceq_4 p_j$  si y sólo si  $x_i \leq x_j$  y  $y_i \geq y_j$ .

Sea  $C = \{q_i = (x_i, y_i) : i = 1, \dots, r\}$  una anticadena de  $P(\preceq_1, S)$  (esto es, un conjunto de elementos no relacionados en  $P(\preceq_1, S)$ ), tal que sus elementos estén ordenados de acuerdo a su coordenada  $x$ .  $C$  determina una *escalera* formada por la unión de un conjunto de *codos* obtenidos como sigue: uniremos  $q_i$  a  $q_{i+1}$  con un *codo* que pase por el punto  $(x_i, y_{i+1})$ ,  $i = 1, \dots, r - 1$  (Figura 4.5(a)). Similarmente, las anticadenas de  $P(\preceq_2, S)$ ,  $P(\preceq_3, S)$ , y  $P(\preceq_4, S)$  determinarán escaleras (Figura 4.5(b)).

Denotaremos las escaleras determinadas por los elementos maximales de  $P(\preceq_i, S)$  con  $s_i(S)$  (Figura 4.4). Hacemos notar que  $s_4(S)$  y  $s_1(S)$ , así como  $s_i(S)$  y  $s_{i+1}(S)$ , comparten un elemento de  $S$ ,  $i = 1, 2, 3$ . La frontera del cierre convexo rectilíneo de  $S$  es justamente  $s_1(S) \cup s_2(S) \cup s_3(S) \cup s_4(S)$ , y el conjunto de elementos de  $S$  que pertenecen a la frontera del cierre convexo rectilíneo, es la unión de los conjuntos de elementos maximales de  $P(\preceq_1, S)$ ,  $P(\preceq_2, S)$ ,  $P(\preceq_3, S)$ , y  $P(\preceq_4, S)$ .



**Figura 4.4:** Cierre convexo rectilíneo de  $S$  y una de sus escaleras.

Como cada escalera  $s_i(S)$  se puede obtener en tiempo  $O(n \log n)$ , el cierre convexo rectilíneo de  $S$  se puede también obtener con complejidad  $O(n \log n)$  en tiempo. Presentaremos un algoritmo que calcula todas las capas convexas rectilíneas en un tiempo óptimo de  $\Theta(n \log n)$ ; para ello, utilizaremos a las *escaleras de nivel  $k$*  (equivalentes a las capas de puntos máximos definidos por Buchsbaum y Goodrich en [5]), que definiremos de la siguiente manera:

1. La escalera de nivel 1 de  $P(\preceq_1, S)$ , denotada por  $L_1^1$ , es  $s_1(S)$ .
2. La escalera de nivel  $i$  de  $P(\preceq_1, S)$ , denotada  $L_i^1$ , es:

$$L_i^1 = s_1 \left( S \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} (L_j^1 \cap S) \right).$$

Definiremos a las escaleras de nivel  $k$  de  $P(\preceq_2, S)$ ,  $P(\preceq_3, S)$  y  $P(\preceq_4, S)$  de forma análoga (Figura 4.5). Abusando un poco de la notación, denotaremos con  $p \in L_i^1$  a  $p \in (L_i^1 \cap S)$ , dado que en general sólo nos interesaran los puntos de  $L_i^1$  que pertenecen a  $S$ .

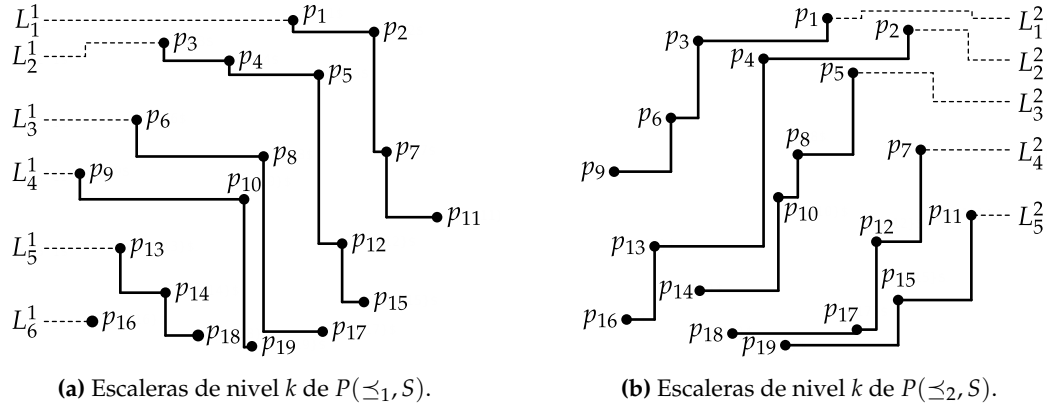


Figura 4.5: Escaleras de nivel  $k$  de  $P(\leq_1, S)$  y  $P(\leq_2, S)$ .

Vamos a mostrar ahora cómo calcular todas las escaleras de nivel  $k$  de  $P(\leq_1, S)$  en tiempo  $O(n \log n)$ . Buchsbaum y Goodrich presentaron en [5] un algoritmo distinto con la misma complejidad; nosotros presentamos una solución diferente usando lo que llamamos un *árbol de dominación*. Este árbol nos permitirá resolver el problema de encontrar la rotación de  $S$  que minimice el número de capas convexas rectilíneas.

### 4.3. El árbol de dominación

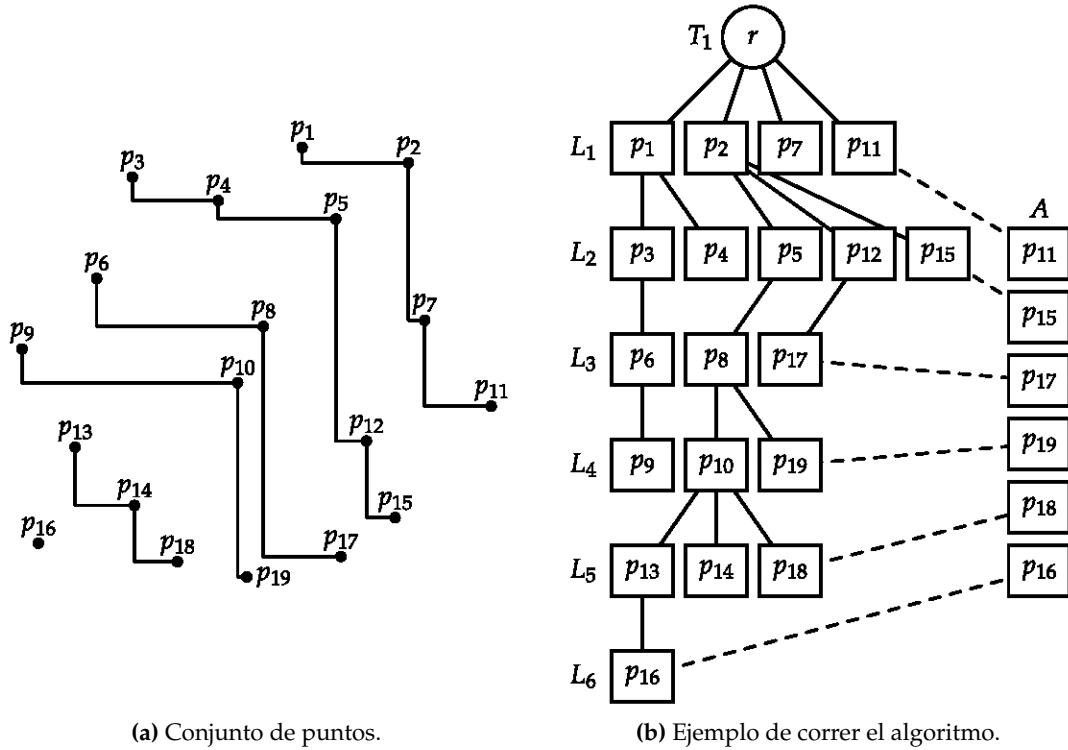
El árbol de dominación de  $P(\leq_1, S)$  es un árbol  $T_1$  con raíz que satisface las siguientes propiedades:

1. Los elementos del árbol a profundidad  $i$  son los elementos en  $L_i^1$ , ordenados por la coordenada  $x$ .
2. El padre en  $T_1$  de un punto  $q \in L_{i+1}^1$  es el punto  $p \in L_i^1$  con la coordenada  $x$  más pequeña tal que la coordenada  $x$  de  $p$  es mayor que la coordenada  $x$  de  $q$ .

Para construir el árbol de dominación vamos a utilizar árboles rojo-negros como arreglos para cada una de las profundidades del árbol; esto es, todos los elementos a profundidad 1 estarán en un arreglo, todos los elementos a profundidad 2 estarán en otro, etc. Llamaremos a cada uno de estos arreglos  $L_1, \dots, L_k$ . El nivel cero tendrá únicamente a la raíz, obviamente. Un ejemplo de la salida del algoritmo para construir  $T_1$  se muestra en la Figura 4.6.

El algoritmo funcionará de la siguiente manera: primero ordenaremos los elementos de  $S = \{p_1, \dots, p_n\}$  de tal forma que si  $i < j$ , entonces la coordenada  $y$  de  $p_i$  es mayor que la coordenada  $y$  de  $p_j$ . Nuestro árbol de dominación  $T_1$  comenzará con una raíz, que será padre del elemento  $p_1$ ; el arreglo  $L_1$ , que también tendrá únicamente a  $p_1$ ; y por último un arreglo auxiliar  $A$ , que vamos a inicializar también con únicamente  $p_1$ . Procesaremos los elementos de  $S$  de arriba hacia abajo.

Supongamos que ya hemos procesado  $p_1, \dots, p_{i-1}$ , y que hasta este momento hemos detectado  $s$  capas de  $S_{i-1} = \{p_1, \dots, p_{i-1}\}$ ; sea  $k$  el número de elementos en  $A$  hasta este punto. Para cada punto  $p_i$ , buscamos el primer elemento  $A[r]$  en  $A$  tal que su coordenada  $x$  sea menor que la coordenada  $x$  de  $p_i$ . Si  $A[r]$  existe, agregamos  $p_i$  a  $L_r$ , reemplazamos a  $A[r]$  con  $p_i$ , y si  $r > 1$ , definimos al padre de  $p_i$  en  $T_1$  como el primer elemento en  $L_{r-1}$  tal que su coordenada  $x$  es mayor que la de  $p_i$ . Si  $r = 1$ , el padre de  $p_i$  será la raíz de  $T_1$ .



(a) Conjunto de puntos. (b) Ejemplo de correr el algoritmo.  
**Figura 4.6:** El árbol  $T_1$  resultante de correr el algoritmo en un conjunto de puntos.

Si  $A[r]$  no existe, o en otras palabras, todos los elementos de  $A$  tienen coordenadas  $x$  mayores que la coordenada  $x$  de  $p_i$ , creamos el arreglo  $L_{k+1}$  y le agregamos  $p_i$  como primer elemento, y además definimos a  $A[k+1]$  como  $p_i$ . Por último, definimos al padre de  $p_i$  en  $T_1$  como el primer elemento en el nivel  $k$  tal que su coordenada  $x$  es mayor que la de  $p_i$ .

Para demostrar que el algoritmo encuentra todas las escaleras de nivel  $k$  de  $P(\leq_1, S)$ , necesitamos primero demostrar los siguientes resultados. El primero nos dice que el arreglo de  $A$  siempre está ordenado:

**Lema 4.1.** *El arreglo  $A$  permanece ordenado por las coordenadas  $x$  de sus elementos de mayor a menor.*

*Demostración.* Por inducción sobre el número de elementos de  $A$ ; cuando  $A$  tiene un único elemento el resultado es claramente cierto. Supongamos que cuando  $A$  tiene  $k$  elementos, está ordenado como queremos.

Para que  $A$  tenga  $k+1$  elementos, es necesario que se cree el arreglo  $L_{k+1}$  con algún elemento  $p_i$ . Pero esto únicamente ocurre si  $p_i$  tiene coordenada  $x$  menor que la de todos los demás elementos de  $A$ , y como por hipótesis de inducción los elementos  $A[1], \dots, A[k]$  ya estaban ordenados de mayor a menor en su coordenada  $x$ , nuestro resultado se mantiene.  $\square$

El segundo resultado nos dice que los elementos  $A[1], \dots, A[k]$  contienen los elementos con coordenadas  $x$  más grandes de  $L_1, \dots, L_k$ , respectivamente.

**Lema 4.2.** *Al inicio de la  $i$ -ésima iteración del algoritmo, los elementos de  $A$  son de tal forma que para cada  $1 \leq j \leq k$ , donde  $k$  es el último elemento agregado a  $A$ ,  $A[j]$  contiene el elemento más a la derecha de  $L_j$ .*

*Demostración.* El resultado es cierto para  $i = 1$ , ya que en ese momento el único elemento de  $A$  es  $p_1$ , y  $L_1$  tiene únicamente a  $p_1$  como elemento. Suponiendo que es cierto para  $i = r$ , vamos a demostrar que es cierto para  $i = r + 1$ .

A inicio del paso  $r$  el resultado era cierto, y entonces para cada  $1 \leq j \leq k$ , donde  $k$  es el número de elementos agregados a  $A$  hasta ese punto,  $A[j]$  contiene el elemento más a la derecha de la  $j$ -ésima capa de  $S_{r-1}$ . Durante el paso  $r$ , se da uno de los siguientes casos:

1. Existe un elemento  $A[r]$  tal que tiene una coordenada  $x$  menor a la de  $p_r$ . En este caso, el algoritmo agrega  $p_r$  a  $L_k$ , y reemplaza a  $A[k]$  con  $p_r$ . Como el elemento que estaba antes en  $A[k]$  es el elemento más a la derecha de  $L_k$  (por hipótesis de inducción), y es reemplazado por  $p_r$  que estaba aún más a la derecha y agregamos a  $L_k$ , se sigue manteniendo que  $A[k]$  contiene al elemento más a la derecha de  $L_k$ . Por hipótesis de inducción, los elementos  $A[1], \dots, A[k-1]$  ya contenían los elementos más a la derecha de los niveles  $1, \dots, k-1$ , respectivamente.
2. La coordenada  $x$  de  $p_r$  es menor que la coordenada  $x$  de todos los elementos en  $A$ . En este caso el algoritmo crea el arreglo  $L_{k+1}$  con  $p_r$  como elemento, y define  $A[k+1]$  como  $p_r$ ; entonces, trivialmente  $A[k+1]$  contiene al elemento más a la derecha de  $L_{k+1}$ . Por hipótesis de inducción, los elementos  $A[1], \dots, A[k]$  ya contenían los elementos más a la derecha de los niveles  $1, \dots, k$ , respectivamente.

En ambos casos ocurre que todos los elementos  $A[i]$  contienen los elementos extremos derechos de los arreglos  $L_i$  correspondientes.  $\square$

Este último lema nos implica el siguiente corolario:

**Corolario 4.1.** *El arreglo  $L_i$  está siempre ordenado de menor a mayor por coordenada  $x$ , para  $1 \leq i \leq k$ .*

El corolario es cierto porque sólo agregamos elementos a un arreglo  $L_i$  cuando el nuevo punto tiene coordenada mayor que el anterior, o cuando creamos el arreglo. El último lema nos dice cómo está estructurado el árbol  $T_1$  de acuerdo a los arreglos  $L_1, \dots, L_k$ .

**Lema 4.3.** *Al final de la  $i$ -ésima iteración del algoritmo, si  $p_i$  está en  $L_r$  y  $r > 1$  entonces  $A[r-1]$  domina a  $p_i$ . Además, para cualquier valor de  $r$ ,  $A[r]$  es  $p_i$ .*

*Demostración.* Para  $i = 1$  el resultado se sigue de inmediato. Supongamos que es verdad para  $i = s$ , y vamos a demostrarlo para  $i = s + 1$ .

Al final de la  $s$ -ésima iteración del algoritmo, uno de los siguientes casos se dio:

1. La coordenada  $x$  de  $p_s$  era menor que la coordenada  $x$  de todos los elementos de  $A$ . En este caso, obviamente  $A[1], \dots, A[k]$  dominan a  $p_s$ , porque todos están arriba que él (fueron procesados antes), y acabamos de decir que sus coordenadas  $x$  eran mayores. En particular  $A[k]$  domina a  $p_s$ , y además  $A[k+1]$  es  $p_s$ , porque así lo definimos cuando la coordenada  $x$  de  $p_s$  es menor que la coordenada  $x$  de todos los elementos de  $A$ .
2.  $A[r]$  es el primer elemento de  $A$  con coordenada  $x$  menor que la de  $p_s$ . En este caso el algoritmo agrega  $p_s$  a  $L_r$ , y reemplaza  $A[r]$  con  $p_s$ . Pero entonces  $A[r-1]$  tiene coordenada  $x$  mayor a  $p_s$  (porque  $A[r]$  es el primero con coordenada menor), y además tiene coordenada  $y$  mayor (porque fue procesado primero). Por lo tanto,  $A[r-1]$  domina a  $p_s$ , y además  $A[r]$  es  $p_s$ .

Por lo tanto, el resultado es cierto.  $\square$

#### 4. Capas rectilíneas en conjuntos de puntos

---

Con estos lemas, podemos ya demostrar que nuestro algoritmo es de tiempo  $O(n \log n)$ , y que nos da todos los niveles  $k$  de  $P(\preceq_1, S)$ .

**Teorema 4.1.** *La complejidad en tiempo del algoritmo es  $O(n \log n)$ .*

*Demostración.* Ordenar los puntos por su coordenada  $y$  toma  $O(n \log n)$  en tiempo. El cuerpo principal del algoritmo tiene  $n$  pasos, en cada uno de los cuales ocurre que  $p_i$  (el punto siendo procesado) está a la izquierda de todos los puntos en el arreglo  $A$ , o no. Buscar si hay un elemento en  $A$  con coordenada  $x$  menor a la  $p_i$  nos toma tiempo  $O(\log n)$ , por estar utilizando árboles rojo-negros para los arreglos  $L_1, \dots, L_k$ . Insertar  $p_i$  en  $L_r$  nos toma tiempo  $O(\log n)$  por lo mismo, e insertar  $p_i$  en  $A$  nos toma tiempo  $O(1)$ .

Por lo tanto, como en el peor de los casos esto ocurre para los  $n$  puntos, la complejidad en tiempo del algoritmo es  $O(n \log n)$ .  $\square$

**Teorema 4.2.** *El arreglo  $L_j$  contiene los elementos de  $L_j^1$ , la escalera de nivel  $j$  de  $P(\preceq_1, S)$  ordenados por coordenada  $x$ .*

*Demostración.* Vamos a demostrar que después del  $i$ -ésimo paso, los arreglos  $L_1, \dots, L_k$  contienen los elementos de  $L_1^1, \dots, L_k^1$  respectivamente. Cuando  $i = 1$  es trivialmente cierto; suponemos que es verdad para  $i = s$ , y lo demostraremos para  $i = s + 1$ .

Al inicio del paso  $i = s + 1$ , tenemos que los arreglos  $L_1, \dots, L_k$  contienen los elementos de  $L_1^1, \dots, L_k^1$  para  $S_s = \{p_1, \dots, p_s\}$ . Cuando procesamos  $p_{s+1}$ , o bien ocurre que su coordenada  $x$  es menor que la de todos los elementos en  $A$ , o bien que alguno de ellos tiene una coordenada menor.

En el primer caso, se crea el arreglo  $L_{k+1}$ , y definimos como padre de  $p_{s+1}$  al primer elemento de  $L_k$  con coordenada  $x$  mayor que la de  $p_{s+1}$ ; sea  $q$  este elemento en  $L_k$ . Como  $q$  tiene coordenada  $x$  mayor que la de  $p_{s+1}$ , y coordenada  $y$  mayor que la de  $p_{s+1}$  (porque  $q$  fue procesado antes), entonces  $q$  domina a  $p_{s+1}$ . Como  $q$  está en  $L_k$ , por hipótesis de inducción está en la escalera  $L_k^1$  de nivel  $k$ , y por lo tanto  $p_{s+1}$  tiene que estar en la escalera de nivel  $k + 1$ , porque no puede estar en una más profunda (la de nivel  $k + 1$  la acabamos de crear; por hipótesis de inducción sólo había  $k$  al inicio del paso  $s + 1$ ). Hacemos notar que una vez que un punto se agrega a un arreglo  $L_i$ , nunca se mueve a ningún otro.

En el segundo caso,  $A[r]$  es el primer elemento de  $A$  con coordenada  $x$  menor a  $p_{s+1}$ , y el algoritmo agrega  $p_{s+1}$  a  $L_r$ , definiendo como su padre al primer elemento de  $L_{r-1}$  con coordenada  $x$  mayor que  $p_{s+1}$ , o a la raíz de  $T_1$  si  $r = 1$ .

Si  $r = 1$ , entonces no hay ningún elemento que domine a  $p_{s+1}$ ; si existiera uno, habría sido asignado como su padre y  $p_{s+1}$  habría sido agregado a  $L_j$ , con  $j > 1$ . Por lo tanto,  $p_{s+1}$  es un elemento maximal, y pertenece a  $L_1^1$ . Si  $r > 1$ , sea  $q$  el primer elemento de  $L_{r-1}$  con coordenada  $x$  mayor a la de  $p_{s+1}$ . Por hipótesis de inducción,  $q$  está en  $L_{r-1}^1$ , y por lo tanto  $p_{s+1}$  está al menos en la escalera de nivel  $r$ . Pero  $p_{s+1}$  no puede estar en ningún otro nivel, porque  $A[r]$  (el elemento más a la derecha de  $L_r$ ) tiene coordenada  $x$  menor que  $p_{s+1}$ ; por tanto todos los elementos de  $L_r$  tienen coordenadas  $x$  menores que la de  $p_{s+1}$ , y entonces ninguno puede dominarlo. De esto se sigue que  $p_{s+1}$  está en la escalera de nivel  $r$ ,  $L_r^1$ .

En ambos casos al final del paso  $i$ , si un elemento  $p$  de  $S_i = \{s_1, \dots, p_i\}$  está en  $L_j$ , se cumple que  $p$  está en la escalera de nivel  $j$ ,  $L_j^1$ , de  $P(\preceq_1, S)$ .  $\square$

#### 4.4. Construyendo las capas convexas rectilíneas

Es fácil ver que el mismo algoritmo puede ser utilizado para construir todas las escaleras de nivel  $k$  de  $P(\preceq_2, S)$ ,  $P(\preceq_3, S)$  y  $P(\preceq_4, S)$ , bien usando las relaciones  $\preceq_i$  para definir domina-

ción, o bien rotando antes los puntos noventa, ciento ochenta y doscientos setenta grados en el sentido de las manecillas del reloj, respectivamente. Esto resultará en los árboles de dominación  $T_2$ ,  $T_3$  y  $T_4$ ; vamos a mostrar ahora cómo usar estos cuatro árboles para construir las capas convexas rectilíneas de  $S$ . Para hacerlo, necesitaremos los siguientes resultados:

**Lema 4.4.** *Sea  $S_i = S \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} \{q \mid q \text{ está en la frontera de } \mathcal{L}_k\}$ . Si  $p \in S$  está en  $s_j(S_i)$  para alguna  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ , entonces  $p$  está en  $L_i^j$ .*

*Demostración.* El resultado es claro para  $i = 1$ ; supongamos que  $p \in S$  está en  $s_j(S_i)$  para  $i > 1$ . En particular,  $p$  estará en la frontera de  $\mathcal{L}_j$  por la definición de  $s_j$ , y por la definición de las capas convexas rectilíneas existe un punto  $q \in S$  en  $s_j(S_{i-1})$  tal que  $p \preceq_j q$ , porque  $q$  es maximal en  $P(\preceq_j, S_{i-1})$ .

Por la hipótesis de inducción,  $q \in L_{i-1}^j$ , y como  $p$  es maximal en  $P(\preceq_j, S_i)$  dado que  $p \in s_j(S_i)$ , no existe ningún punto  $r \in S_{i-1}$  tal que  $p \preceq_j r \preceq_j q$ . Por lo tanto,  $p$  está en  $L_i^j$ .  $\square$

El siguiente corolario se sigue inmediatamente del lema anterior:

**Corolario 4.2.** *Si  $p$  está en la frontera de  $\mathcal{L}_i$ , entonces ocurre que  $p \in L_i^1$ , o  $p \in L_i^2$ , o  $p \in L_i^3$ , o  $p \in L_i^4$ .*

Por último, el siguiente lema nos dice cómo encontrar la capa tal que un punto  $p \in S$  pertenece a su frontera.

**Lema 4.5.** *Sea  $p \in S$  tal que  $p \in L_{j_i}^i$  para  $i = 1, 2, 3, 4$ . Si  $j = \min\{j_1, j_2, j_3, j_4\}$ , entonces  $p$  está en la frontera de la  $j$ -ésima capa convexa rectilínea  $\mathcal{L}_j$  de  $S$ .*

*Demostración.* Sea  $p \in S$  tal que pertenece a  $L_{j_i}^i$ . Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $j_1 = \min\{j_1, j_2, j_3, j_4\}$ ; entonces,  $p$  no es maximal en  $P(\preceq_{j_1}, S_{i-1})$ , pero sí en  $P(\preceq_{j_1}, S_i)$  y por lo tanto  $p \in s_{j_1}(S_i)$ . En particular entonces,  $p$  está en la frontera de  $\mathcal{L}_{j_1}$ .  $\square$

Con estos resultados ya podemos entonces calcular las capas convexas rectilíneas en tiempo  $O(n \log n)$  si ya tenemos los árboles  $T_1, \dots, T_4$ .

**Teorema 4.3.** *Sea  $S$  un conjunto de puntos en el plano en posición general. Calcular las capas convexas rectilíneas de  $S$  se puede hacer en un tiempo óptimo de  $\Theta(n \log n)$ , y  $O(n)$  en espacio.*

*Demostración.* En tiempo  $O(n \log n)$  calculamos sus árboles  $T_1, \dots, T_4$ . Vamos a crear un arreglo  $L$  de tamaño igual al máximo del número de niveles entre  $T_1, T_2, T_3$  y  $T_4$ , y copiamos ahí los niveles  $L_1 \dots, L_k$  de  $T_1$  en tiempo  $O(n)$ . Después recorreremos dichos niveles, anotando en un arreglo auxiliar el nivel a que cada punto pertenece, para poder acceder a esta información en tiempo constante. Después recorreremos  $T_2$  por sus niveles; cuando el nivel de un punto en  $T_2$  sea menor que en  $L$ , movemos en tiempo  $O(\log n)$  el punto en  $L$  a este nuevo nivel, acomodándolo ordenado por su coordenada  $x$ , y actualizando la información de nuestro arreglo auxiliar. Hacemos lo mismo para  $T_3$  y  $T_4$ .

Al final, los niveles de  $L$  serán los puntos de  $S$  que están en las fronteras de cada una de las capas convexas rectilíneas de  $S$ . El número de capas será el número de elementos en  $L$  (pueden desaparecer los niveles más profundos al mover puntos de un nivel a otro).

Este algoritmo toma tiempo  $O(n \log n)$ , porque por cada punto procesado se toma un tiempo de  $O(\log n)$  en el peor de los casos, cuando hay que moverlo de nivel en  $L$ . Es tiempo óptimo porque en particular obtiene el cierre convexo rectilíneo (los puntos en la frontera de la primera capa), y esto se sabe que toma tiempo  $\Omega(n \log n)$  [2].

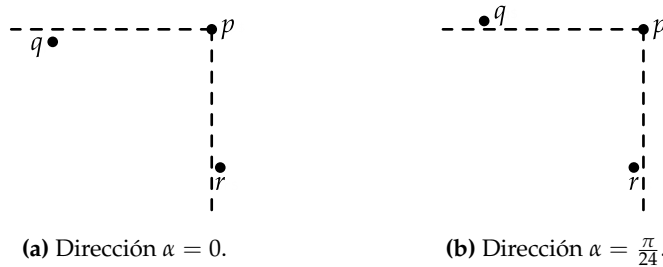
Por último, todas nuestras estructuras de datos utilizan espacio lineal, y usamos un número constante de ellas: cuatro árboles de dominación; cuatro arreglos auxiliares para construirlos; un arreglo  $L$  de niveles (que en el peor de los casos utiliza espacio lineal), y un arreglo auxiliar más para ayudarnos a construirlo. Por lo tanto, el algoritmo utiliza  $O(n)$  en espacio.  $\square$

### 4.5. La rotación de $S$ con el mínimo número de capas

Como mencionábamos al inicio del capítulo, el cierre convexo y las capas convexas son invariantes bajo rotaciones del conjunto de puntos. Este no es el caso para el cierre convexo rectilíneo y las capas convexas rectilíneas. Esto nos permite estudiar el siguiente problema: dado un conjunto  $S$  de puntos en el plano, ¿cuál es la rotación de  $S$  alrededor del origen que minimiza (o maximiza) el número de capas convexas rectilíneas de  $S$ ?

Usando los cuatro árboles de dominación que vimos en la Sección 4.3 para calcular las capas convexas rectilíneas de  $S$ , podemos encontrar este mínimo (o máximo) en tiempo  $O(n^2 \log n)$  y espacio  $O(n^2)$ ; sólo necesitamos encontrar las direcciones críticas donde las escaleras de nivel  $k$  en nuestro árbol de dominación, y por lo tanto las capas convexas rectilíneas de  $S$ , pueden cambiar.

Estas direcciones críticas se definen cuando la línea que pasa por dos puntos en  $S$  se vuelve vertical u horizontal. Cuando esto ocurre, el orden parcial  $P(\preceq_i, S)$  puede cambiar, y esto puede causar que las capas convexas rectilíneas y el cierre convexo rectilíneo cambien a su vez (Figura 4.7).



**Figura 4.7:** Con la dirección  $\alpha = 0$ ,  $q \not\preceq_1 p$ , y  $p$  y  $r$  no son comparables. Con la dirección  $\alpha = \frac{\pi}{24}$ ,  $q$  y  $p$  no son comparables, y  $r \preceq_1 p$ .

Para calcular la rotación de  $S$  con el mínimo número de capas, primero calculamos los árboles  $T_1, \dots, T_4$ , y las capas convexas rectilíneas de  $S$ . Después generamos el conjunto  $\mathcal{D}$  de direcciones críticas en tiempo y espacio  $O(n^2)$ , y las ordenamos en  $O(n^2 \log n)$  usando técnicas estándares. Hacemos el ordenamiento de tal forma que cuando pasemos por una dirección crítica  $\gamma_i \in \mathcal{D}$ , sepamos si los puntos  $p$  y  $q$  que la definen se volvieron verticales u horizontales de acuerdo a la orientación actual de los ejes. Vamos a describir el algoritmo para  $T_1$ , pero es análogo para los otros tres árboles.

Supongamos que la dirección  $\gamma_i \in \mathcal{D}$  es horizontal, y que  $p$  y  $q$  son los puntos que la definen. Si  $p$  no es el padre de  $q$  y  $q$  no es el padre de  $p$  en  $T_1$ , continuamos a la siguiente dirección crítica. De otra forma, y suponiendo sin pérdida de generalidad que  $p$  es padre de  $q$ ,  $q$  salta de la escalera de nivel  $j$  a la escalera de nivel  $j - 1$  (esto es, la escalera de  $p$ ), por lo que quitamos a  $q$  de la escalera donde está, y lo agregamos a la escalera un nivel arriba justo a la izquierda de  $p$ , y buscamos al nuevo padre de  $q$  entre los puntos en el nivel  $j - 2$  si existe, o la raíz de  $T_1$ .

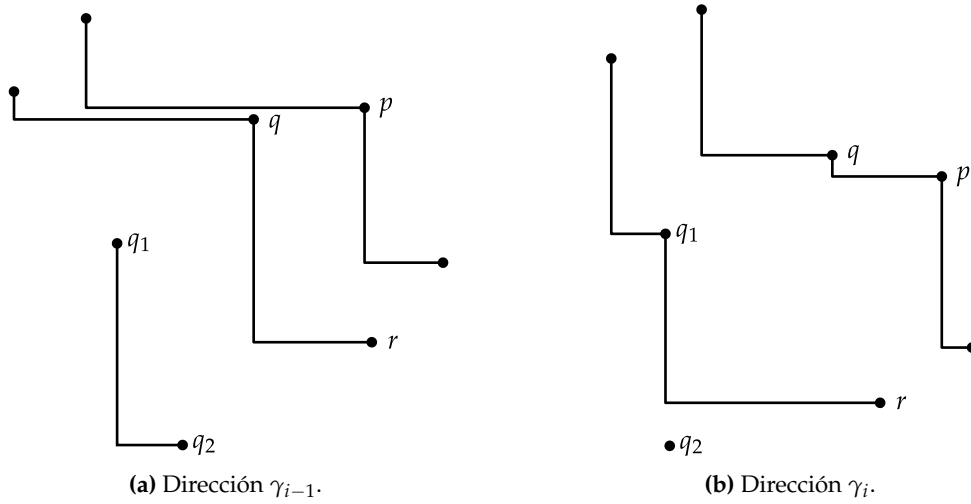
Como  $q$  brincó un nivel hacia arriba, puede ocurrir que sus descendientes brinquen también; para determinar cuáles descendientes brincan, hacemos lo siguiente: sea  $r$  el punto a la derecha de  $q$  en la escalera de nivel  $j$  antes de que  $q$  saltara al nivel  $j - 1$ . Sea  $Q$  una cola donde agregamos a los hijos de  $q$  en el nivel  $j + 1$ , ordenados de izquierda a derecha: para cada punto  $q_s \in Q$ , lo sacamos de la cola y revisamos si ocurre uno de los siguientes casos:

1. si  $q_s \preceq_1 r$ , entonces  $r$  se convierte en padre de  $q_s$ , y  $q_s$  no salta de nivel;



2. si  $q_s$  no es comparable a  $r$ ,  $q_s$  salta al nivel  $j$ , su padre sigue siendo  $q$ , y agregamos a todos los hijos de  $q_s$  a  $Q$  (los agregamos en orden de izquierda a derecha).

Cuando terminemos los puntos del nivel  $j + 1$  en  $Q$  (que detectaremos al encontrar el primer punto en el nivel  $j + 2$ ), redefinimos  $r$  como el punto a la derecha del último punto en  $Q$ . Repetimos el proceso hasta que  $Q$  esté vacía, redefiniendo  $r$  siempre que acabemos con un nivel. En caso de que  $r$  no exista en cualquier momento, lo definimos como NULL, y NULL nunca será comparable a ningún punto (Figura 4.8).



**Figura 4.8:** El punto  $q_1$  brinca, porque  $r$  no lo domina; en cambio el punto  $q_2$  no brinca, porque  $q_2 \preceq_1 r$ .

Supongamos ahora que la dirección  $\gamma_i \in \mathcal{D}$  es vertical, y que  $p$  y  $r$  son los puntos que la definen. Si  $p$  y  $r$  no están en la misma escalera de nivel, y sus niveles difieren por más de uno, continuamos a la siguiente dirección crítica. Si  $p$  está en la escalera de nivel  $j$ , y  $r$  en la de nivel  $j + 1$ , entonces cambiamos el padre de  $r$  a  $p$ . De otra forma,  $p$  y  $r$  tienen que ser consecutivos en la escalera de nivel  $j$ , y suponiendo sin pérdida de generalidad que  $p$  ocurre antes que  $r$ , hacemos que  $r$  baje un nivel a la escalera de nivel  $j + 1$ , que creamos en caso de que no exista. Debe ser fácil ver que en este caso, antes de que  $r$  salte hacia abajo,  $r$  no puede tener hijos en  $T_1$ , porque pasan a ser hijos de  $p$  antes de llegar a esta nueva dirección.

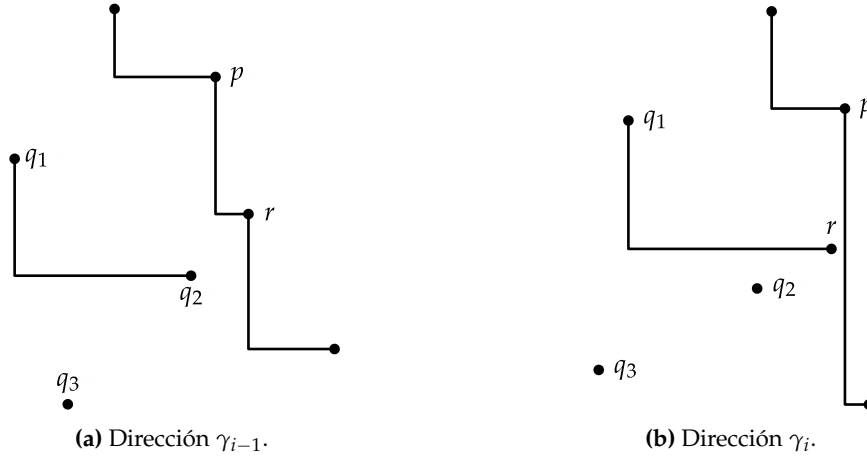
Como  $r$  no tiene hijos, no hay que preocuparse de si deben saltar o no. Sin embargo,  $r$  le puede robar hijos a  $p$  (y solamente a  $p$ ) si comienza a dominarlos. Para ver qué hijos de  $p$  saltan un nivel hacia abajo, vamos a hacer lo siguiente: a todos los hijos de  $p$  que  $r$  domine los haremos bajar al nivel  $j + 2$ , definiremos a su padre como  $r$ , y haremos lo correspondiente con todos sus descendientes recursivamente (Figura 4.9).

Para probar que el algoritmo funciona, necesitaremos los siguientes resultados:

**Lema 4.6.** Cuando pasamos de  $\gamma_i$  a  $\gamma_{i+1}$ , un punto  $p \in S$  o bien se queda en su nivel, o bien salta arriba o abajo exactamente por 1 nivel.

*Demostración.* Si  $p$  en la escalera de nivel  $j$  puede saltar a la escalera de nivel  $j - 2$ , esto significa que las escaleras de los niveles  $j - 1$  y  $j - 2$  existen, y por lo tanto existen dos puntos  $q_1, q_2 \in S$  tales que  $p \preceq_1 q_1 \preceq_1 q_2$  en la dirección  $\gamma_i$ .

Pero esto implicaría que hay dos direcciones críticas entre  $\gamma_i$  y  $\gamma_{i+1}$ : una cuando  $p$  y  $q_1$  cambian su relación, y otra cuando  $p$  y  $q_2$  lo hacen.



**Figura 4.9:** Dado que  $q_2 \preceq_1 r$  en  $\gamma_i$ , brinca;  $q_3$  brinca porque  $q_3 \preceq_1 q_2$ . Como  $q_1 \not\preceq_1 r$ , no brinca.

Esto no es posible, porque tenemos al conjunto de direcciones críticas  $\mathcal{D}$  ordenado. La demostración de que  $p$  no puede saltar al nivel  $j + 2$  es análoga.  $\square$

**Lema 4.7.** Si un punto  $q$  salta de la escalera de nivel  $j$  a la escalera de nivel  $j - 1$ , sus hijos también saltarán a la escalera de nivel  $j$  a menos que el punto  $r$  a la derecha de  $q$  en la escalera de nivel  $j$ : 1) exista; 2) no brinque también al nivel  $j-1$ ; y 3) lo domine.

*Demostración.* El resultado es inmediato; si el punto  $r$  existe, permanece en la escalera de nivel  $j$ , y domina a un punto que era hijo de  $q$ , entonces se convierte en su padre porque está en un nivel más profundo que  $q$ .

Si alguna de las tres condiciones no ocurre ( $r$  no existe, o brinca también al nivel  $j - 1$ , o no domina al hijo), el hijo tiene que saltar porque no existe otro punto que cumpla la función de padre de  $q$ .  $\square$

**Lema 4.8.** Si un punto  $r$  salta de la escalera de nivel  $j$  a la escalera de nivel  $j + 1$ , y  $p$  es el punto a la izquierda de  $r$  en la escalera de nivel  $j$  antes de que  $p$  saltara, entonces todos los descendientes de  $p$  dominados por  $r$  también saltan un nivel hacia abajo, y los que eran hijos de  $p$  pasan a ser hijos de  $r$ .

*Demostración.* El resultado es inmediato también: el punto  $r$  pasa de estar a la derecha de  $p$  a estar a su izquierda, y en un nivel más abajo; por lo tanto, todos los descendientes que  $p$  dominados por  $r$  pasan a ser descendientes de  $r$ .  $\square$

Con esto, ya podemos demostrar que el algoritmo funciona:

**Teorema 4.4.** Al final de la  $i$ -ésima iteración del ciclo, el arreglo  $L_j$  tendrá la escalera de nivel  $j$ ,  $L_j^1$ , en la dirección  $\gamma_i$ .

*Demostración.* Supongamos que al inicio de la  $i$ -ésima iteración, el arreglo  $L_j$  tiene las escaleras de nivel  $j$ ,  $L_j^1$ , de  $S$  en la dirección  $\gamma_{i-1}$ .

Supongamos que la dirección que determina  $\gamma_i$  es horizontal, y sean  $p$  y  $q$  los puntos que la determinan. Si  $p$  no es padre de  $q$  o viceversa, entonces no ocurre ningún cambio en el orden parcial: esto es fácil de ver, pues pertenecen a escaleras lejanas una de otra. Supongamos entonces sin pérdida de generalidad que  $p$  es padre de  $q$ : por el Lema 4.6 y el Lema 4.7, el algoritmo

mantiene las escaleras de nivel de forma correcta, y por lo tanto el resultado es correcto en este caso.

Ahora vamos a suponer que la dirección  $\gamma_i$  es vertical, y que la determinan los puntos  $p$  y  $r$ . Por el Lema 4.8, el algoritmo mantiene las escaleras de nivel de forma correcta, y entonces el resultado es correcto en este caso también.

Por lo tanto, el resultado es correcto en ambos casos. □

Para demostrar la complejidad en tiempo del algoritmo, es necesario que demostremos el siguiente lema:

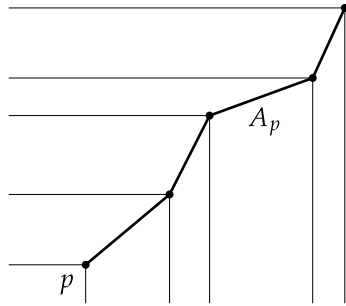
**Lema 4.9.** *El número de veces que  $p \in S$  cambia su profundidad rectilínea (esto es, el número de veces que salta entre escaleras de nivel) mientras  $S$  rota es a lo más  $O(n)$ .*

*Demostración.* Vamos solamente a considerar el caso para el árbol de dominación  $T_1$ : el resultado es análogo para los otros tres.

Hay dos casos cuando un punto  $p$  cambia su profundidad rectilínea. Una es cuando se vuelve comparable o cuando deja de ser comparable a otro punto en  $S$ . Obviamente esto ocurre únicamente un número lineal de veces.

El otro caso es cuando un ancestro de  $p$  en el árbol de dominación cambia su profundidad, jalando a algunos de sus descendientes, incluyendo a  $p$ .

Para una orientación fija en  $\mathcal{D}$ , consideremos la poligonal de ancestros  $A_p$  de  $p$ ; esto es, la poligonal que comienza en  $p$ , y une a todos sus ancestros en el árbol de dominación siguiendo el orden de dominación (Figura 4.10).



**Figura 4.10:** La poligonal de ancestros  $A_p$  para el punto  $p$  en el árbol  $T_1$ .

Conforme cambiamos orientaciones, el punto  $p$  cambiará su profundidad únicamente cuando  $A_p$  cambie de tal forma que se vuelva más corta o más larga por un punto de  $S$ .

Pero  $A_p$  siempre es  $x$  monotónica y  $y$  monotónica, dado que está definida por la relación de dominación entre puntos de  $S$ . Por lo tanto, al ir cambiando orientaciones, es como hacer un barrido radial de  $S$  con una media línea anclada en  $p$ :  $A_p$  nunca barre más de un punto de  $S$  (y a veces no barre ninguno) para cada orientación en  $\mathcal{D}$ .

Se sigue entonces que  $A_p$  cambia a lo más un número lineal de veces, cuando barre cada punto de  $S \setminus \{p\}$ , y por lo tanto  $p$  cambia su profundidad a lo más  $n - 1$  veces. □

**Teorema 4.5.** *Sea  $S$  un conjunto de puntos en el plano en posición general. Calcular la rotación de  $S$  que minimice el número de capas puede hacerse en tiempo  $O(n^2 \log n)$  y espacio  $O(n^2)$ .*

*Demostración.* El algoritmo toma tiempo  $O(n \log n)$  al hacer brincar puntos, porque cada uno requiere  $O(\log n)$  tiempo acomodarlo en su nivel correspondiente, y en el peor de los casos

tenemos que reacomodar  $O(n)$  puntos. Como tenemos  $O(n^2)$  direcciones, la complejidad total del algoritmo es  $O(n^2 \log n)$ . Esta es también la complejidad en tiempo de ordenar el conjunto  $\mathcal{D}$ .

La complejidad en espacio está determinada por el conjunto de direcciones  $\mathcal{D}$ , que es de tamaño  $O(n^2)$ .  $\square$

### 4.6. Sucesiones circulares en dominación vectorial

Una vez más, este problema está relacionado a sucesiones permisibles aunque a primera vista no lo parezca. Los intercambios determinados por las direcciones en el conjunto  $\mathcal{D}$  son de nuevo equivalentes a las transposiciones en las sucesiones circulares, y podemos considerar al árbol  $T_1$  como un “renglón” de nuestra sucesión circular.

De la misma manera que necesitábamos a las triangulaciones- $\alpha$  para poder resolver el problema planteado durante el Capítulo 3, los árboles  $T_1, \dots, T_4$  nos proporcionan suficiente información para poder calcular rápidamente (en términos computacionales) los cambios necesarios para actualizar los árboles cuando ocurre un cambio en el orden parcial  $P(\preceq_1, S)$ . Como en el problema anterior, ordenar el conjunto de orientaciones críticas  $\mathcal{D}$  nos toma  $O(n^2 \log n)$ ; pero en este caso, la información necesaria para actualizar en cada orientación es más compleja que en el problema de bloqueo de convexos, por lo que esta actualización nos lleva un tiempo  $O(n \log n)$  hacerla (contrario a  $O(n)$  en el problema anterior).

## Capítulo 5

# Cota inferior para 3, 4 y 5-conjuntos en el plano

Las técnicas utilizadas para resolver los dos primeros problemas que estudiamos en este trabajo de tesis pueden verse como generalizaciones de sucesiones permisibles, o como técnicas basadas en sucesiones permisibles. En ambos casos utilizamos el concepto de direcciones u orientaciones críticas, que son hasta cierto punto muy similares a las transposiciones en las sucesiones permisibles.

El tercer problema que estudiaremos difiere entonces de los primeros dos, en que utilizamos directamente una herramienta de sucesiones permisibles para resolverlo. El problema consiste en encontrar una cota inferior para el máximo número de  $k$ -conjuntos que  $n$  puntos en el plano pueden tener cuando  $k = 3, 4, 5$ . En particular para  $k = 3$ , la cota que encontramos es igual a la cota superior correspondiente, que también analizamos, con lo que determinamos de forma exacta, dados  $n$  puntos, el máximo número de 3-conjuntos que pueden tener.

Lo primero que haremos en esta sección es definir formalmente lo que es un  $k$ -conjunto, expandiendo lo visto en la Sección 2.4, y explicaremos el trabajo existente respecto al estudio de sus cotas inferiores.

### 5.1. $k$ -conjuntos y $\mathcal{N}_k(n)$

Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos en el plano real  $\mathbb{R}^2$  tales que no hay tres de ellos sobre una misma línea recta. Si existe un semiplano  $H$  tal que  $S \cap H$  tiene  $k$  elementos, diremos que  $S \cap H$  es un  $k$ -conjunto de  $S$  (Figura 5.1).

En  $\mathbb{R}^2$ , un  $k$ -conjunto es equivalente a una  $(k - 1)$ -arista, esto es, una arista que deja  $k - 1$  puntos a su izquierda. Los  $k$ -conjuntos son una generalización de las líneas medianas, o en particular las líneas medianas son equivalentes a  $k$ -conjuntos para  $k = \frac{n}{2}$ . Las líneas medianas son relevantes para la teoría de complejidad en algoritmos dado que muchas soluciones se plantean en términos de la metodología “divide y vencerás”. Si en particular podemos dividir nuestro problema principal en dos problemas de tamaño igual, eso en general nos dará un componente logarítmico en la solución total del problema.

Los  $k$ -conjuntos son también relevantes por lo mismo: por ejemplo, la demostración de [9] para probar que el algoritmo QuickSort con una partición “balanceada” (en el peor de los casos en dos conjuntos de  $\frac{1}{10}$  y  $\frac{9}{10}$  elementos) en cada paso recursivo también tiene una complejidad en tiempo de  $O(n \log n)$ . La misma demostración de hecho funciona para problemas con con-

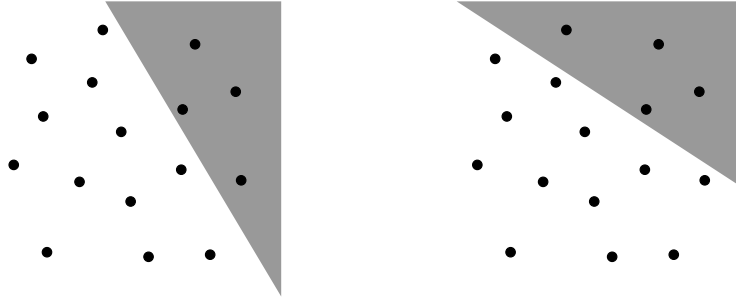


Figura 5.1: Dos 4-conjuntos para un mismo conjunto de puntos  $S$ .

juntos de puntos en el plano si podemos dividirlos en dos subproblemas, uno con  $k$  elementos ( $k$  fija) y otro con  $n - k$ .

Dado  $n$ , un problema interesante es acotar, dentro de todos los posibles conjuntos de  $n$  puntos en el plano en posición general, el máximo número de  $k$ -conjuntos que dichos conjuntos pueden tener. Mucha investigación se ha hecho al respecto, pero sólo cuando  $k$  es arbitraria (nada más requiriéndose que  $k$  sea menor a  $\frac{n}{2}$  o  $\frac{n-1}{2}$  dependiendo de si  $n$  es par o no). Se puede entonces esperar que sea posible mejorar dichas cotas cuando  $k$  es fija.

Sea  $\mathcal{N}_k(S)$  el número de  $k$ -conjuntos que tenga un conjunto de puntos  $S$ , y sea  $h(S)$  su número de líneas medianas. Más general, sean  $\mathcal{N}_k(n)$  y  $h(n)$  el número máximo de  $k$ -conjuntos y líneas medianas respectivamente que un conjunto de  $n$  puntos puede tener.

En 1971 László Lovász y otros describieron una construcción que permite demostrar que  $h(n) \geq \Omega(n \log n)$  [27], dando así una primera cota inferior. En 1973 Paul Erdős, Paul Lovász, Gustavus Simmons y Ernst Strauss generalizaron este resultado para probar  $\mathcal{N}_k(n) \geq \Omega(n \log k)$  [16], y en 1985 Herbert Edelsbrunner y Emo Welzl demostraron que  $h(n) \geq \Omega(nf(n))$  implica que  $\mathcal{N}_k(n) \geq \Omega(nf(k))$  [15].

Esa cota inferior no fue mejorada hasta 1999 por Géza Tóth, quien descubrió una construcción relativamente sencilla de conjuntos de  $n$  puntos con  $\mathcal{N}_k(n) \geq \Omega(n2^{\sqrt{\log k}})$  para cualquier  $n$  y  $k < \frac{n}{2}$  [40]. Diez años después Gabriel Nivasch mejoró esta cota por una constante utilizando una construcción similar pero que utiliza el espacio dual [29].

En el otro extremo las cotas superiores conocidas son mucho más grandes. Lovász probó que  $h(n) \leq O(n^{\frac{3}{2}})$  [27], y de nuevo Erdős, Lovász, Simmons y Strauss lo generalizaron a que para un conjunto de  $n$  puntos en el plano,  $\mathcal{N}_k(n) \leq O(n\sqrt{k})$  [16]. János Pach, William Steiger y Endre Szemerédi mejoraron ligeramente esta cota en 1989 a  $\mathcal{N}_k(n) \leq O(\frac{n\sqrt{k}}{\log^{\frac{1}{2}} n})$  [32].

Finalmente en 1997 Tamal Dey consiguió demostrar que  $\mathcal{N}_k(n) \leq O(n^{\frac{3}{2}\sqrt{k}+1})$  [12], utilizando el número de cruce y un argumento probabilístico.

Nosotros nos enfocaremos en particular a encontrar  $\mathcal{N}_3(n)$ ,  $\mathcal{N}_4(n)$  y  $\mathcal{N}_5(n)$ , de la forma más justa precisa, utilizando sucesiones permisibles y la relación que tienen con  $(k-1)$ -pseudoaristas como vimos en el Capítulo 2. Para esto necesitamos primero estudiar la construcción de Tóth, que es lo que veremos en la siguiente sección.

## 5.2. La construcción de Tóth

Si fijamos  $k$ , en un conjunto con  $n = 2k$  puntos la línea mediana que pasa por los puntos  $p$  y  $q$  define dos aristas dirigidas  $p \rightarrow q$  y  $q \rightarrow p$ . Ambas son  $(k-1)$ -aristas, y por lo tanto cada

una de ellas determina un  $k$ -conjunto.

Sea  $H_k$  un conjunto de  $2k$  puntos en posición general con  $h(H_k) = h(2k)$ . En [40], Géza Tóth mostró una construcción que genera conjuntos de  $n = 2mk$  puntos con  $\mathcal{N}_k(2k) \geq m(h(2k) + k)$ ; para hacerlo, Tóth acomoda  $m$  copias aplanadas de  $H_k$ ,  $(H_k^1, \dots, H_k^m)$ , sobre los vértices de un  $m$ -ágono. Por sí mismo, cada  $H_k^i$  cumple que  $\mathcal{N}_k(H_k^i) = 2(h(2k))$ , pero cuando los colocamos sobre los vértices del  $m$ -ágono, la mitad de las  $(k - 1)$ -aristas de cada  $H_k^i$ , las que dejan al interior del  $m$ -ágono a su izquierda, dejan de serlo: la otra mitad, las que dejan al exterior del  $m$ -ágono a su izquierda, continúan siendo  $(k - 1)$ -aristas en las  $m$  copias de  $H_k$  (Figura 5.2).

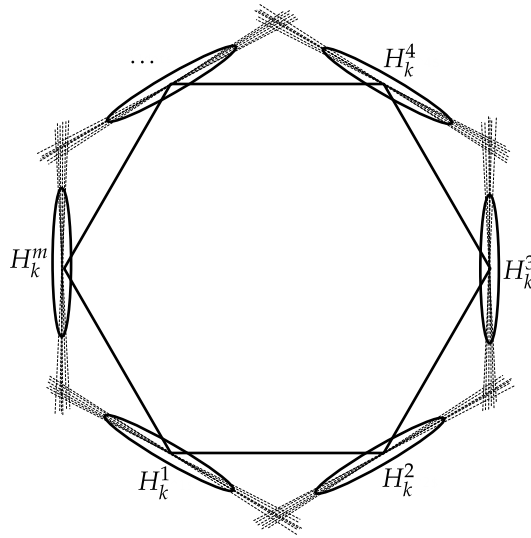


Figura 5.2: Construcción de Tóth: las líneas punteadas son las líneas medianas de cada  $H_k^i$ .

Esto resulta en que por cada  $H_k^i$  el número de  $(k - 1)$ -aristas sea  $h(2k)$ , cada una definida por dos puntos en la misma copia; y  $k$  adicionales  $(k - 1)$ -aristas entre copias adyacentes  $H_k^i$  y  $H_k^{i+1}$ , cada una definida por dos puntos en cada una de las copias. Sean  $H_k^1$  y  $H_k^2$  dos copias adyacentes de  $H_k$ , y sin pérdida de generalidad supongamos que  $H_k^1$  está a la izquierda de  $H_k^2$ , y que ambas copias están debajo de cualquier otra copia de  $H_k$ : siempre podemos rotar el  $m$ -ágono para que esto ocurra. Sean  $a_1, \dots, a_{2k}$  los puntos de  $H_k^1$  tales que  $a_i$  está arriba de  $a_j$  si  $i < j$ , y sean  $b_1, \dots, b_{2k}$  los puntos de  $H_k^2$  tales que  $b_i$  está debajo de  $b_j$  si  $i < j$ . Si  $H_k$  está suficientemente aplanado, o en otras palabras, sus elementos son casi colineales, entonces la arista  $(b_1, a_{k+1})$  es una  $(k - 1)$ -arista, ya que deja a los puntos  $a_{k+2}, \dots, a_{2k}$  a su izquierda, y lo mismo ocurre para las aristas  $(b_2, a_{k+2}), (b_3, a_{k+3}), \dots, (b_k, a_{2k})$  (Figura 5.3).

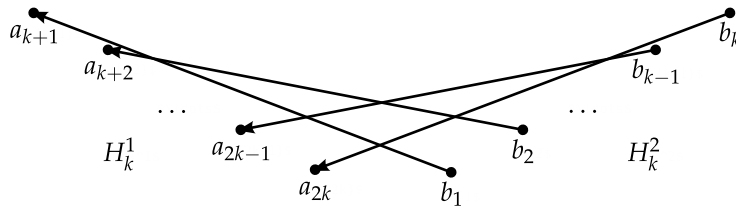


Figura 5.3: Las  $(k - 1)$ -aristas entre dos copias adyacentes de  $H_k$ , que suman  $k$ .

Esto resulta en que el número total de  $(k - 1)$ -aristas, y por lo tanto el número total de  $k$ -conjuntos, sea  $m(h(2k) + k)$ .

En su artículo, Tóth no toma en cuenta estas  $mk$  adicionales  $(k - 1)$ -aristas que resultan de la interacción entre copias adyacentes de  $H_k$ , dado que a él sólo le interesaba la cota asintótica de  $(k - 1)$ -aristas, y las  $mk$  extra sólo mejoran la constante. La cota que Tóth demuestra es  $\mathcal{N}_k(n) \geq O(ne^{\Omega(\sqrt{\log k})})$ , dado que consigue construir conjuntos de  $2k$  puntos con  $O(2ke^{\Omega(\sqrt{\log k})})$  líneas medianas en el mismo artículo.

Podemos mejorar ligeramente esta construcción utilizando sucesiones permisibles, que es lo que veremos en la siguiente sección.

### 5.3. Cota inferior para $(k - 1)$ -pseudoaristas

Vamos a extender la definición de las funciones  $\mathcal{N}_k()$  y  $h$  a sucesiones permisibles: dada  $\Pi$  una sucesión permisible, sea  $\tilde{\mathcal{N}}_k(\Pi)$  el máximo número de transposiciones que ocurren en las columnas  $k$  y  $n - k$  en un semiperiodo de  $\Pi$ , y sea  $\tilde{h}(\Pi)$  el máximo número de transposiciones que ocurren en el centro de un semiperiodo de  $\Pi$ .

**Teorema 5.1.** *Siempre podemos construir una sucesión permisible  $\Pi$  con  $2mk$  elementos,  $m \in \mathbb{Z}^+$ , de tal forma que  $\tilde{\mathcal{N}}_k(\Pi) \geq m(\tilde{h}(2k) + 2k - 1)$ .*

Dado el semiperiodo  $\pi$  de una sucesión permisible  $\Pi$  con  $n$  elementos, podemos construir el semiperiodo  $\pi'$  de una nueva sucesión permisible  $\Pi'$  con  $nt$  elementos, reemplazando cada elemento  $e$  en  $\pi$  con un *bloque* de  $t = 2k$  elementos en  $\pi'$ , que seguirán las transposiciones de  $\pi$  como bloques. Por ejemplo, si el  $i$ -ésimo renglón en  $\pi$  tiene la transposición  $qp$  en la columna  $j$ ,  $1 < j < n - 1$ , entonces en algún renglón de  $\pi'$  tendremos, desde la  $((j - 1)t + 1)$ -ésima posición hasta la  $(jt)$ -ésima posición, los elementos  $p_1, \dots, p_t, q_1, \dots, q_t$ . El siguiente renglón tendrá la transposición  $q_1p_t$ , y el que le siga  $q_1p_{t-1}$ , y así para los siguientes  $t - 2$  renglones, hasta que  $q_1$  alcance la  $((j - 1)t + 1)$ -ésima posición, empujando una posición a la derecha los elementos  $p_1, \dots, p_t$ . Los siguientes  $t$  renglones serán similares, moviendo  $q_2$  a la izquierda hasta que alcance la  $((j - 1)t + 2)$ -ésima posición, empujando de nuevo los elementos  $p_1, \dots, p_t$  una posición a la derecha. Continuaremos de esta manera moviendo  $t$  posiciones a la izquierda los elementos  $q_3, \dots, q_t$ , hasta que tengamos  $q_t$  a la izquierda de y junto a  $p_1$ :  $q_1, \dots, q_t, p_1, \dots, p_t$ , en las posiciones  $(j - 1)t + 1$  a  $jt$  (Figura 5.4).

$p_1$	$p_2$	$\dots$	$p_{t-1}$	$p_t$	$q_1$	$q_2$	$\dots$	$q_{t-1}$	$q_t$
$p_1$	$p_2$	$\dots$	$p_{t-1}$	$q_1$	$p_t$	$q_2$	$\dots$	$q_{t-1}$	$q_t$
$p_1$	$p_2$	$\dots$	$q_1$	$p_{t-1}$	$p_t$	$q_2$	$\dots$	$q_{t-1}$	$q_t$
		$\vdots$					$\vdots$		
$p_1$	$q_1$	$\dots$	$p_{t-2}$	$p_{t-1}$	$p_t$	$q_2$	$\dots$	$q_{t-1}$	$q_t$
$q_1$	$p_1$	$\dots$	$p_{t-2}$	$p_{t-1}$	$p_t$	$q_2$	$\dots$	$q_{t-1}$	$q_t$
$q_1$	$p_1$	$\dots$	$p_{t-2}$	$p_{t-1}$	$q_2$	$p_t$	$\dots$	$q_{t-1}$	$q_t$
$q_1$	$p_1$	$\dots$	$p_{t-2}$	$q_2$	$p_{t-1}$	$p_t$	$\dots$	$q_{t-1}$	$q_t$
		$\vdots$					$\vdots$		
$q_1$	$q_2$	$\dots$	$q_{t-1}$	$q_t$	$p_1$	$p_2$	$\dots$	$p_{t-1}$	$p_t$

**Figura 5.4:** El bloque  $p_1, \dots, p_t$  se intercambia con el bloque  $q_1, \dots, q_t$  en  $\pi'$ , imitando el intercambio de  $p$  con  $q$  en  $\pi$ .



En otras palabras, cuando el intercambio de  $p$  y  $q$  en  $\pi$  no ocurre ni en la primera ni en la última columna, intercambiaremos en  $\pi'$  los elementos  $p_i$  con los elementos de  $q_j$ ,  $1 \leq i, j \leq t$ , como bloques: los elementos  $p_i$  no se intercambian entre ellos, y tampoco lo hacen los elementos  $q_j$ .

Estos intercambios por bloques siempre son iguales, por lo que generalmente los representaremos con únicamente dos líneas en nuestras sucesiones permisibles (Figura 5.5).

$$\begin{array}{cccccccccccc} p_1 & p_2 & \cdots & p_{t-1} & p_t & q_1 & q_2 & \cdots & q_{t-1} & q_t \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_{t-1} & q_t & p_1 & p_2 & \cdots & p_{t-1} & p_t \end{array}$$

**Figura 5.5:** El intercambio de los bloques  $p_1, \dots, p_n$  y  $q_1, \dots, q_n$  representado con dos líneas.

Cuando la columna de la transposición en  $\pi$  sea 1 o  $n - 1$ , es hasta ese momento que los elementos de cada bloque intercambiarán posiciones entre ellos. Cómo lo harán es el resultado del siguiente lema:

**Lema 5.1.** *Sean  $p$  y  $q$  dos elementos del semiperiodo  $\pi$  de la sucesión permisible  $\mathbf{\Pi}$ , tales que tienen su transposición en la columna 1. En el semiperiodo  $\pi'$  de la sucesión permisible  $\mathbf{\Pi}'$  podemos intercambiar los elementos  $p_i$  y  $q_j$  correspondientes de tal forma que haya  $t = 2k$  intercambios en la columna  $k$  de  $\pi'$ .*

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad, supongamos que la transposición en la columna 1 es  $qp$ . En  $\pi'$  el renglón correspondiente antes de esta transposición tendrá a  $p_1, \dots, p_t, q_1, \dots, q_t$  en las posiciones 1 a  $2t$  (Figura 5.6).

$$p_1 \quad p_2 \quad \cdots \quad p_{t-1} \quad p_t \quad q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_{t-1} \quad q_t$$

**Figura 5.6:** El primer renglón de  $\pi'$  correspondiente al intercambio  $qp$  de  $\pi$ .

Lo primero que haremos será intercambiar los elementos  $p_i$  entre ellos, no importa cómo siempre y cuando  $\pi'$  siga siendo el semiperiodo de una sucesión permisible válida.

Cuando acabemos, el renglón correspondiente tendrá a  $p_t, \dots, p_1, q_1, \dots, q_t$  en las posiciones 1 a  $2t$  (Figura 5.7).

$$p_t \quad p_{t-1} \quad \cdots \quad p_2 \quad p_1 \quad q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_{t-1} \quad q_t$$

**Figura 5.7:** El renglón de  $\pi'$  al intercambiar los elementos  $p_i$  entre ellos.

Recordemos que  $t = 2k$ , por lo tanto este último renglón se ve de hecho como se muestra en la Figura 5.8.

$$p_{2k} \quad p_{2k-1} \quad \cdots \quad p_2 \quad p_1 \quad q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_{2k-1} \quad q_{2k}$$

**Figura 5.8:** Las posiciones  $1, \dots, 4k$  en el último renglón construido de  $\pi'$ .

Vamos a mover  $q_1, \dots, q_{2k}$  a la izquierda  $k$  posiciones, de tal forma que  $q_1, \dots, q_{2k}$  estén en las posiciones  $k + 1, \dots, 3k$  respectivamente. Esto moverá  $p_k, \dots, p_1$  a las posiciones  $3k + 1, \dots, 4k$  respectivamente, por lo que este renglón tendrá  $p_{2k}, \dots, p_{k+1}, q_1, \dots, q_{2k}, p_k, \dots, p_1$  en las posiciones  $1, \dots, 4k$  (Figura 5.9).

Vamos a crear  $k + 1$  extra  $k$ -conjuntos como sigue: ya que  $p_{2k}, \dots, p_{k+1}$  están en las posiciones 1 a  $k$ , y  $q_1, \dots, q_{2k}$  están en las posiciones  $k + 1$  a  $3k$ , haremos la transposición  $q_1 p_{k+1}$  en

## 5. Cota inferior para 3, 4 y 5-conjuntos en el plano

$$p_{2k} \ p_{2k-1} \ \cdots \ p_{k+2} \ p_{k+1} \mid q_1 \ q_2 \ \cdots \ q_{2k-1} \ q_{2k} \ p_k \ p_{k-1} \ \cdots \ p_2 \ p_1$$

**Figura 5.9:** Moviendo el bloque  $p_k, \dots, p_1$  a las posiciones  $3k+1, \dots, 4k$ .

la columna  $k$ , y luego moveremos  $q_1, \dots, q_{2k}$  como bloque una posición a la izquierda, empujando  $2k$  posiciones a la derecha a  $p_{k+1}$ , de tal forma que los elementos  $q_2, \dots, q_{2k}$  estén en las posiciones  $k$  a  $3k-1$ . Entonces haremos la transposición  $q_2 q_1$  en la columna  $k$ , y moveremos el bloque  $p_{2k}, \dots, p_{k+2}$  una posición a la derecha, de tal forma que los elementos  $p_{2k}, \dots, p_{k+2}$  estén en las posiciones  $2$  a  $k$ , y moviendo  $k-1$  posiciones a la izquierda a  $q_2$  hasta que llegue a la posición  $1$  (Figura 5.10).

$$\begin{array}{cccccc|cccccccc} p_{2k} & p_{2k-1} & \cdots & p_{k+2} & p_{k+1} & q_1 & q_2 & \cdots & q_{2k-1} & q_{2k} & p_k & p_{k-1} & \cdots & p_2 & p_1 \\ p_{2k} & p_{2k-1} & \cdots & p_{k+2} & q_1 & q_2 & q_3 & \cdots & q_{2k} & p_{k+1} & p_k & p_{k-1} & \cdots & p_2 & p_1 \\ p_{2k} & p_{2k-1} & \cdots & p_{k+2} & q_2 & q_1 & q_3 & \cdots & q_{2k} & p_{k+1} & p_k & p_{k-1} & \cdots & p_2 & p_1 \\ q_2 & p_{2k} & \cdots & p_{k+3} & p_{k+2} & q_1 & q_3 & \cdots & q_{2k} & p_{k+1} & p_k & p_{k-1} & \cdots & p_2 & p_1 \end{array}$$

**Figura 5.10:** Intercambiando  $q_1$  con  $q_2, \dots, q_{k+1}$  y  $p_{k+1}, \dots, p_{2k}$  en la columna  $k$ .

Repetiremos estos dos pasos otras  $k-1$  veces: vamos a mover a la derecha la  $p_i$ , ( $i = k+1, \dots, 2k$ ), que esté más a la derecha pero a la izquierda de  $q_1$ , hasta que alcance la  $(4k-i+1)$ -ésima posición, lo que resultará en una transposición en la columna  $k$  cuando  $p_i$  intercambie posiciones con  $q_1$ ; y después moveremos a la izquierda el elemento  $q_j$ , ( $j = 2, \dots, k-1$ ), que esté más a la izquierda pero a la derecha de  $q_1$ , hasta que alcance la  $(j-1)$ -ésima posición, lo que nos dará otra transposición en la columna  $k$  cuando  $q_j$  intercambie posiciones con  $q_1$ . Finalmente moveremos  $q_1$  a la derecha hasta que alcance la  $2k$ -ésima posición, cruzando una última vez la columna  $k$  en el proceso.

Esto causa que  $q_1$  se intercambie con  $k$  elementos del bloque correspondiente a  $p$  ( $p_{2k}, \dots, p_{k+1}$ ) en la columna  $k$ , y con  $k$  elementos del bloque correspondiente a  $q$  ( $q_2, \dots, q_{k+1}$ ) en la columna  $k$ , por lo que se generan  $t = 2k$  intercambios en dicha columna.  $\square$

Estamos usando  $q_1$  como “pivote”, haciendo que tenga una transposición en la columna  $k$  con un elemento del bloque correspondiente a  $p$ , y luego otra transposición en la misma columna con un elemento del bloque correspondiente a  $q$ , un total de  $2k$  veces. Al terminar, los elementos de ambos bloques habrán agotado todas las transposiciones que deben tener para ser una subsucesión permisible válida, y estarán en la posición que les corresponde:  $q_{2k}, \dots, q_1, p_{2k}, \dots, p_1$ .

**Corolario 5.1.** Si  $p$  y  $q$  se intercambian en la columna  $n-1$  en  $\pi$ , podemos obtener  $t = 2k$  transposiciones de elementos de  $p_i$  y  $q_j$  en la columna  $n(t-k)$  de  $\pi'$ .

El corolario es inmediato; sólo hay que reflejar verticalmente los elementos sobre el centro del semiperiodo.

Este lema nos servirá para demostrar el Teorema 5.1; sin embargo, necesitamos otros dos lemas auxiliares.

**Lema 5.2.** Sea  $\Pi$  una sucesión permisible de tamaño  $n$  par; todo elemento en el cierre convexo de  $\Pi$  participa exactamente en un cruce en el centro de  $\Pi$  en un semiperiodo.

*Demostración.* Un elemento en el cierre convexo de  $\Pi$  es un elemento que en algún renglón se encuentra en la columna  $1$ , y por lo tanto  $\binom{n}{2}$  renglones abajo se encuentra en la columna  $n$ .

Sea  $p$  un elemento en el cierre convexo de  $\Pi$ . Sin pérdida de generalidad, tomemos como primer renglón de un semiperiodo  $\pi$  de  $\Pi$  a aquel donde  $p$  llega a la primera columna. Con  $p$  en la columna 1, renombramos a todos los elementos de  $\Pi$  para que el primer renglón sea  $1, \dots, n$ .

Como 1 sólo puede intercambiarse con elementos mayores que él, entonces 1 se moverá en  $\pi$  siempre a la derecha, jamás a la izquierda; no puede “regresarse” en el semiperiodo. Esto ocurre hasta que llega a la columna  $n$ , y en el semiperiodo ya no vuelve a moverse.

Por lo tanto, 1 sólo puede cruzar una vez el centro de  $\pi$ .  $\square$

Lo que el Lema 5.2 nos dice es que los elementos en el cierre convexo de una sucesión permisible de tamaño par participan exactamente en una línea mediana; no pueden participar en más. Cuando el tamaño de la sucesión permisible es impar, el elemento del cierre convexo también se mueve siempre a la derecha; pero en este caso la sucesión tiene dos columnas como centro, y por lo tanto el elemento del cierre convexo participa en dos líneas medianas.

**Lema 5.3.** *Sea  $\Pi$  una sucesión permisible de tamaño  $n$ , y sea  $p$  un elemento en el cierre convexo de  $\Pi$ . Siempre existe  $\Pi'$  con los mismos elementos y el mismo número que  $\Pi$  de cambios en el centro por semiperiodo, tal que los intercambios de  $p$  ocurren todos en renglones consecutivos.*

*Demostración. Caso geométrico.* Si  $p$  es un punto del cierre convexo de un conjunto de puntos, podemos tomar la única línea mediana  $\ell$  que pasa por  $p$ , y desplazar  $p$  sobre  $\ell$  alejándolo del resto de los puntos. Como el resto del conjunto no se mueve, y estamos desplazando a  $p$  sobre  $\ell$ , ésta sigue siendo línea mediana.

El resto de los puntos del conjunto que tienen sus intercambios en el centro (y los cuales determinan líneas medianas) siguen intercambiándose en el centro, dado que  $p$  estaba de cierto lado de cada una de estas líneas medianas, y al alejarse del conjunto de puntos sólo se aleja de ellas, sin cruzarlas nunca, y sin alterar el número de puntos que deja de ambos lados cada una de ellas.

De esta manera podemos hacer que las pendientes del resto de los puntos con  $p$  sean tan cercanas entre ellas como queramos; en particular, más cercanas que a cualquier otra pendiente entre puntos del conjunto distintos a  $p$ .

La sucesión circular correspondiente al conjunto de puntos es tal que las transposiciones que involucran a  $p$  ocurren todas en renglones consecutivos.

*Caso generalizado.* Dada una sucesión permisible  $\Pi$ , sea  $p$  un elemento del cierre convexo de  $\Pi$ . Sea  $\pi$  un semiperiodo de  $\Pi$  tal que en su primer renglón  $p$  está en la columna 1, y que en el siguiente renglón se intercambia con el elemento en la columna 2. Sin pérdida de generalidad supongamos entonces que el primer renglón es  $1, \dots, n$ , y por lo tanto  $p = 1$ .

Si todos los intercambios que involucran a  $p$  ocurren consecutivamente entonces no hay nada que hacer, así que supongamos que este no es el caso. Sea  $r$  el primer renglón de  $\pi$  donde el intercambio que ocurre no involucra a  $p$ , y sea  $ba$  dicho intercambio.

Si quitamos  $r$  de  $\pi$ , reemplazamos simultáneamente cada ocurrencia de  $a$  por  $b$  y viceversa en los renglones  $r + 1, \dots, \binom{n}{2}$ , y agregamos un nuevo renglón final donde ocurra el intercambio  $a$  y  $b$  (no necesariamente en la misma columna que en el renglón  $r$  original), el semiperiodo resultante es el de una sucesión permisible válida. Es sencillamente como si  $a$  y  $b$  no se intercambiarán hasta el último renglón de  $\pi$ .

Como  $a$  y  $b$  se intercambian en el semiperiodo original en el renglón  $r$ , entonces no vuelven a intercambiarse en los subsecuentes renglones. Más aún, como en  $r$  estaba el primer intercambio que no involucraba a  $p$ , entonces  $b = a + 1$ , y entonces el último renglón de  $\pi$ , después de reemplazar  $a$  con  $b$  y viceversa, pero antes de agregar de nuevo el intercambio  $ba$ , tiene justamente a  $a$  a la izquierda de  $b$ , porque ya se dieron todos los demás posibles intercambios.

## 5. Cota inferior para 3, 4 y 5-conjuntos en el plano

Antes de que agreguemos de nuevo  $ba$ , todos los intercambios en el nuevo semiperiodo ocurren en las mismas columnas que en el original, el único cambio es que si el intercambio tenía a  $a$ , ahora tendrá a  $b$  y viceversa. En particular, los cambios en el centro de  $\pi$  se preservan.

El único problema que podría entonces ocurrir es cuando el intercambio  $ba$  ocurre en el centro en el semiperiodo original, porque podría ocurrir en otra columna, lo que ocasionaría que perdiéramos un intercambio en el centro.

Sin embargo, esto no ocurre; si  $n$  es par, y  $ba$  ocurría en el centro en el semiperiodo original, entonces  $a = \frac{n}{2}$ ,  $b = \frac{n}{2} + 1$ , y como se explicó arriba, al quitar  $ba$  y volverlo a agregar como último intercambio, todos los otros intercambios tuvieron que darse anteriormente. Por lo tanto, si  $n$  es par, el último renglón del semiperiodo antes de agregar el intercambio  $ba$  de nuevo es:

$$n \quad n-1 \quad \dots \quad \frac{n}{2} + 2 \quad \frac{n}{2} \mid \frac{n}{2} + 1 \quad \frac{n}{2} - 1 \quad \dots \quad 2 \quad 1$$

Lo que garantiza que el intercambio  $ba$  ocurrirá de nuevo en el centro cuando volvamos a agregarlo al semiperiodo.

Si  $n$  es impar, entonces o bien  $a = \frac{n-1}{2}$  y  $b = \frac{n-1}{2} + 1$ , o bien  $a = \frac{n-1}{2} + 1$  y  $a = \frac{n-1}{2} + 2$ . En el primer caso, y por la misma razón que arriba, el último renglón antes de agregar el intercambio  $ba$  de nuevo es:

$$n \quad n-1 \quad \dots \quad \frac{n-1}{2} + 3 \quad \frac{n-1}{2} + 1 \mid \frac{n-1}{2} + 2 \mid \frac{n-1}{2} \quad \frac{n-1}{2} - 1 \quad \dots \quad 2 \quad 1$$

En el segundo caso el último renglón antes de agregar el intercambio  $ba$  de nuevo es:

$$n \quad n-1 \quad \dots \quad \frac{n-1}{2} + 3 \quad \frac{n-1}{2} + 2 \mid \frac{n-1}{2} \mid \frac{n-1}{2} + 1 \quad \frac{n-1}{2} - 1 \quad \dots \quad 2 \quad 1$$

En ambos casos, al volver a agregar el intercambio  $ba$ , éste vuelve a ocurrir en el centro.  $\square$

Con estos dos lemas, ahora sí podemos demostrar el Teorema 5.1.

*Demostración (Teorema 5.1).* Sea  $\Pi_m$  la sucesión permisible correspondiente al conjunto de  $m$  puntos que sean los vértices de un  $m$ -ágono casi regular (para evitar pares de puntos con la misma pendiente).

Por el Lema 5.1, podemos construir una sucesión permisible  $\Pi$  con  $n = 2mk$  elementos tal que por cada transposición de elementos en  $\Pi_m$ , obtengamos  $2k$  transposiciones en la columna  $k$  cuando los bloques correspondientes se crucen; esto es, cuando en  $\Pi_m$  dos elementos  $p$  y  $q$  se intercambien en la columna 1 o  $n-1$ , en  $\Pi$  realizaremos los intercambios de  $p_1, \dots, p_{2k}$  y  $q_1, \dots, q_{2k}$  como se explica en el Lema 5.1, lo que nos da  $\tilde{\mathcal{N}}_k(n) \geq 2mk$ . Como en el lema,  $q_1$  funciona como pivote de los dos bloques que se cruzan.

Ahora tenemos que obtener aumentar  $\tilde{\mathcal{N}}_k(n)$  en  $\tilde{h}(2k) - 1$ , usando las transposiciones entre los elementos  $q_2, \dots, q_{2k}$ , ya que  $q_1$  ya tuvo sus transposiciones con ellos. Para estos  $\tilde{h}(2k) - 1$  extra  $k$ -conjuntos, vamos a tomar la sucesión permisible correspondiente a  $H_k$ : por definición tiene  $\tilde{h}(2k)$  líneas medianas, y por lo tanto si insertamos sus transposiciones en las posiciones 1 a  $2k$  de  $\Pi$  (renombrando sus elementos a  $q_1, \dots, q_{2k}$ ), obtendremos  $\tilde{h}(2k)$  más  $k$ -conjuntos.

Dado que  $q_1$  ya utilizó sus transposiciones con el resto de los elementos de  $q_2, \dots, q_{2k}$ , y que era el elemento más a la izquierda de todos ellos antes de comenzar a funcionar como pivote, entonces tenemos que asociarlo con un punto  $p_{q_1}$  en  $H_k$  que sea del cierre convexo.

Por el Lema 5.2 sabemos que un elemento en el cierre convexo participa exactamente en una línea mediana cuando el conjunto es de tamaño par. Entonces podemos tomar  $H_k$  de tal forma que  $p_{q_1}$  sea el primer elemento del primer renglón de la sucesión permisible correspondiente a  $H_k$ . De esta manera, el comportamiento de  $p_{q_1}$  en la sucesión permisible de  $H_k$  correspondiente es como sigue:  $p_{q_1}$  empieza en la primera posición, y se mueve siempre a la derecha, cruzando la columna  $k$  exactamente una vez. Este es el mismo comportamiento de  $q_1$  en  $\Pi$ , y por el

Lema 5.3 podemos reacomodar las otras transposiciones en la secuencia de tal forma que las primeras  $k - 1$  transposiciones de  $q_1$  sean con  $q_2, \dots, q_k$ , la siguiente con  $q_{k+1}$ , y las últimas  $k - 1$  con  $q_{k+2}, \dots, q_{2k}$ .

Por lo tanto, de las  $2k$  transposiciones en la columna  $k$  que  $q_1$  realiza, una corresponde a la única transposición en la columna  $k$  que ocurre en la sucesión permisible de  $H_k$ , y entonces el número total de transposiciones en la columna  $k$  que ocurren cuando los bloques correspondientes a  $p$  y  $q$  intercambian lugares es  $2k - 1$ . Esto, aunado a las  $\tilde{h}(2k)$  transposiciones en la columna  $k$  cuando todos los elementos  $q_1, \dots, q_{2k}$  están en las posiciones  $1, \dots, 2k$ , nos da nuestra cota deseada de  $m(\tilde{h}(2k) + 2k - 1)$  transposiciones en la columna  $k$  para  $\Pi$ , ya que podemos hacer exactamente lo mismo para cada bloque cuando entre a las posiciones  $1, \dots, 2k$ .

Por lo tanto,  $\tilde{\mathcal{N}}_k(\Pi) \geq m(\tilde{h}(2k) + 2k - 1)$ , y  $\tilde{\mathcal{N}}_k(n) \geq m(\tilde{h}(2k) + 2k - 1)$ . □

Geoméricamente podemos ver este resultado como una generalización de la construcción utilizada por Tóth para generar muchas líneas medianas: si tomamos  $k$  puntos colineales horizontales y equidistantes, y una copia de ellos trasladada hacia arriba, el número de  $(k - 1)$ -aristas entre ellos será  $k$ , y todas se intersectarán en el mismo punto  $q$ . Si agregamos un punto  $q'$  a la izquierda de  $q$  y tan cercano a él como queramos, entonces nuestro conjunto de puntos pasará de tener  $2k$  puntos con un número de  $k$ -conjuntos igual a  $k$ , a tener  $2k + 1$  puntos con un número de  $k$ -conjuntos igual a  $2k - 1$  (Figura 5.11(a)). En este caso, el punto  $q'$  es el que funciona como pivote para las dos copias de puntos colineales; es equivalente al punto  $q_1$  de nuestro Lema 5.1.

Para que esto funcione en posición general, Tóth perturba ligeramente los puntos; en el contexto de sucesiones permisibles es incluso más fácil, ya que podemos usar pseudolíneas, usar uno de los  $2k$  puntos originales como pivote, y ni siquiera preocuparnos de que las copias originales sean colineales (Figura 5.11(b)).

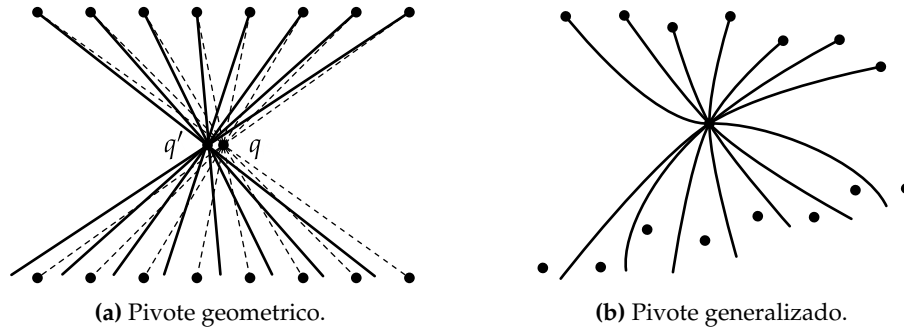


Figura 5.11: Pivotes geométrico y generalizado.

Sin embargo, como suele ocurrir al trabajar con familias de pseudolíneas, aplicar esto de regreso al caso geométrico puede ser de hecho imposible, ya que como vimos en el Capítulo 2, a partir de conjuntos de tamaño 9 existen casos de familias de pseudolíneas que no pueden ser rectificables. Por eso es que en este trabajo nada más analizaremos cotas inferiores para  $\mathcal{N}_3(n)$  en la Sección 5.6.1, para  $\mathcal{N}_4(n)$  en la Sección 5.6.2, y para  $\mathcal{N}_5(n)$  en la Sección 5.6.3.

Tóth no alcanza en su demostración este número de  $k$ -conjuntos porque en su construcción de la sucesión permisible análoga, simplemente seguiría moviendo los elementos  $q_1, \dots, q_{2k}$  a la izquierda, empujando  $p_{2k}, \dots, p_{k+1}$  a la derecha. Cada vez que  $p_i, i = 2k, \dots, k + 1$ , cruzara la columna  $k$ , obtendríamos un  $k$ -conjunto, y entonces al final de nuevo tendríamos solamente  $k$  extra  $k$ -conjuntos resultantes de la interacción de los dos bloques.

## 5. Cota inferior para 3, 4 y 5-conjuntos en el plano

---

Este resultado mejora ligeramente la cota inferior para  $\tilde{N}_k(n)$  en el caso de configuraciones generalizadas: si tomamos un conjunto de puntos  $S$  con muchas líneas medianas, automáticamente obtenemos un conjunto con muchas  $(k-1)$ -pseudoaristas. La tabla en la Figura 5.12 muestra las cotas alcanzadas con el Teorema 5.1 para conjuntos con hasta 26 puntos, que es la  $n$  par más grande de la que se conoce el número máximo exacto de líneas medianas.

$2k$	$h(2k)$	$\frac{h(2k)+2k-1}{2k}$
6	6	1.8333333
8	9	2.0000000
10	13	2.2000000
12	18	2.4166666
14	22	2.5000000
16	27	2.6250000
18	33	2.7777777
20	38	2.8500000
22	44	2.9545454
24	51	3.0833333
26	47	2.7692307

Figura 5.12: Cotas alcanzadas usando el Teorema 5.1.

Para hacerlo funcionar en conjuntos geométricos tenemos que hacer más de trabajo: en la siguiente sección explicaremos cómo encontrar geoméricamente la región del plano dónde poner un punto pivote entre copias de conjuntos de puntos, si estos satisfacen ciertas condiciones.

### 5.4. Construcción geométrica

Queremos tomar conjuntos de  $2k$  puntos con muchas líneas medianas, aplanarlos hasta que sean casi colineales sus puntos, y ponerlos alrededor de un  $m$ -ágono casi regular; justo como hizo Tóth en su construcción. Para poder aprovechar geoméricamente los resultados de la Sección 5.3, y a diferencia de Tóth, queremos tomar un punto de cada copia, y colocarlo de tal forma que nos sirva como pivote para poder obtener todavía más  $k$ -conjuntos. La zona donde podremos colocarlo, que demostraremos en un momento que siempre existe, la denominaremos *zona del pivote*.

Denotaremos con  $p(x)$  y  $p(y)$  las coordenadas  $x$  y  $y$  de un punto  $p$  en el plano. Sean  $a_1, \dots, a_k$  puntos en  $\mathbb{R}^2$  tales que sean colineales,  $|a_i - a_{i+1}| = 1$  para  $i = 1, \dots, k-1$ ,  $a_i(y) > a_j(y)$ ,  $0 < a_i(x) < a_j(x)$  si  $i < j$ , y  $a_k(y) = 0$ . Sean  $b_1, \dots, b_k$  tales que  $b_i(y) = a_i(y)$ , y  $b_i(x) = -a_i(x)$ , para  $i = 1, \dots, k$  (ver la Figura 5.13). Como se muestra en la figura, podemos visualizar a los puntos sobre los lados de un triángulo isósceles  $T$ ; si el ángulo opuesto a la base es  $2\alpha$ , y la longitud de los lados iguales es  $d$ , entonces la base de  $T$  será de longitud  $2d \sin \alpha$ . Obviamente,  $d \geq k-1$ .

Podemos pensar en los puntos  $a_1, \dots, a_k$  como los  $k$  puntos más a la izquierda de un conjunto de puntos con muchas líneas medianas, y  $b_1, \dots, b_k$  como los  $k$  puntos más a la derecha de otra copia del mismo conjunto de puntos. La zona del pivote es la región donde podemos poner un punto  $\mathbf{p}$  entre los puntos  $a_1, \dots, a_k$  y  $b_1, \dots, b_k$  de tal forma que  $\mathbf{p}$  funcione como pivote, similar al punto  $q'$  en la Figura 5.11(a). En otras palabras, queremos encontrar la región donde exista un punto  $\mathbf{p}$  tal que  $(a_i, \mathbf{p})$  y  $(b_i, \mathbf{p})$  sean  $(k-1)$ -aristas (y por lo tanto que definan  $k$ -conjuntos), para cada  $i = 1, \dots, k$ .

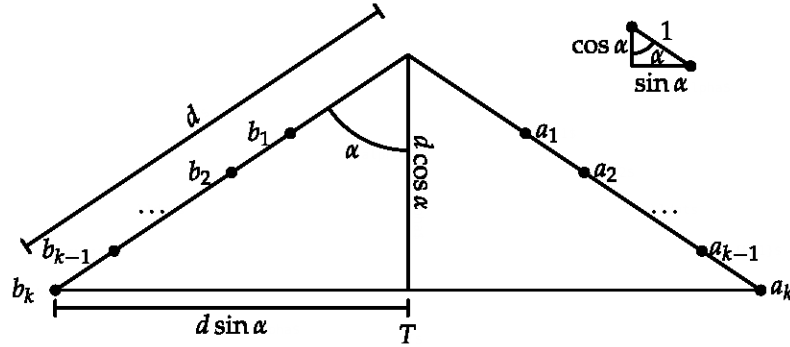


Figura 5.13: Los puntos  $a_1, \dots, a_k$  y  $b_1, \dots, b_k$  y el triángulo isósceles  $T$ .

**Teorema 5.2.** *La zona del pivote siempre existe si los lados iguales del triángulo  $T$  tienen una longitud suficientemente grande.*

Este resultado nos servirá para poder encontrar cotas inferiores para  $\mathcal{N}_3(n)$ ,  $\mathcal{N}_4(n)$  y  $\mathcal{N}_5(n)$ , porque en esos casos conseguimos encontrar un ejemplo geométrico con muchas líneas medianas, y reacomodar sus puntos de tal forma que al proyectarlos sobre el eje  $X$ , suficientes de sus puntos extremos fueran equidistantes en sus coordenadas  $x$ . Esto no es sencillo, pues partimos de conjuntos candidatos con muchos  $k$ -conjuntos ( $k = 3, 4, 5$ ), y los manipulamos de forma manual tratando de preservar el mayor número. Para  $k = 6$  ni siquiera tenemos aún un buen candidato.

Para poder demostrar el Teorema 5.2, vamos a demostrar primero dos lemas auxiliares, y para eso necesitaremos usar varias propiedades del triángulo  $T$  y los puntos  $a_1, \dots, a_k$  y  $b_1, \dots, b_k$ .

Ya que  $a_i(x) = -b_i(x)$ , entonces el eje  $Y$  es una línea de simetría del triángulo isósceles  $T$ . También es fácil ver que  $|a_i(x) - a_{i+1}(x)| = |b_i(x) - b_{i+1}(x)| = \sin \alpha$ , y que  $|a_i(y) - a_{i+1}(y)| = |b_i(y) - b_{i+1}(y)| = \cos \alpha$ ,  $i = 1, \dots, k - 1$ .

Denotaremos con  $\ell(p, q)$  a la línea que pasa por los puntos  $p$  y  $q$ ,  $p \neq q$ . El siguiente lema determina la cota inferior de la zona del pivote:

**Lema 5.4.** *Sea  $p'$  el punto de intersección de  $\ell(a_1, b_k)$  y  $\ell(a_k, b_1)$ , y  $p$  un punto tal que  $p(x) = p'(x) = 0$  (por simetría) y  $p(y) = p'(y) + \epsilon$ ,  $\epsilon > 0$ . El punto  $p$  siempre está arriba de las líneas  $\ell(a_1, b_k)$ ,  $\ell(a_2, b_{k-1})$ ,  $\dots$ ,  $\ell(a_k, b_1)$ .*

*Demostración.* Dado que las líneas  $\ell(a_1, b_k)$  y  $\ell(a_k, b_1)$  son simétricas, y el triángulo  $T$  tiene al eje  $Y$  como línea de simetría, entonces  $p'(x) = 0$ , y por lo tanto  $p(x) = 0$ .

Todas las líneas en las que estamos interesados pasan por un punto  $a_i$  y un punto  $b_{k-i+1}$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Dado que las líneas son simétricas ( $\ell(a_i, b_{k-i+1})$  es la reflexión vertical de  $\ell(a_{k-i+1}, b_i)$ ), sólo necesitamos verificar a las líneas  $\ell(a_i, b_{k-i+1})$  donde  $1 \leq i \leq \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor$ .

Para hacer esto, sea  $c_i$  un punto tal que  $c_i(x) = a_i(x)$  y  $c_i(y) = b_{k-i+1}(y)$ . Si  $k$  es impar, e  $i = \frac{k+1}{2}$ , el punto  $c_i$  será igual a  $a_i$ ; lidiaremos con este caso más adelante. En todos los otros casos, los puntos  $a_i, b_{k-i+1}, c_i$  forman un triángulo rectángulo  $R_i$  (Figura 5.14).

La base de  $R_i$  es siempre  $(2d - k + 1) \sin \alpha$  para toda  $i = 1, \dots, \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor$ : para  $i = 1$  esto es fácil de ver, ya que la base de  $R_1$  es la base de  $T$ , que es  $2d \sin \alpha$ , menos la distancia de  $c_1$  a  $a_k$ , que es  $(k - 1) \sin \alpha$ . Para  $i > 1$ , la base de  $R_i$  tiene la misma longitud, ya que sus dos puntos extremos se mueven a la derecha la misma distancia  $x; (i - 1) \sin \alpha$ .

5. Cota inferior para 3, 4 y 5-conjuntos en el plano

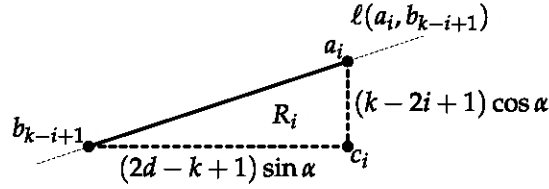


Figura 5.14: El triángulo rectángulo  $R_i$ .

De la misma manera, la altura del triángulo  $R_i$  es  $(k - 2i + 1) \cos \alpha$ : una vez más, es fácil ver para  $R_1$ , y para  $i > 1$ ,  $a_i$  se habrá movido  $(i - 1) \cos \alpha$  hacia abajo de  $a_1$ , y  $b_{k-i+1}$  la misma distancia en  $y$  hacia arriba de  $b_k$ .

Para determinar si  $\ell(a_i, b_{k-i+1})$  está debajo de  $p$  sólo tenemos que revisar el punto de intersección de  $\ell(a_i, b_{k-i+1})$  con el eje  $Y$ , y ver si está debajo de  $p$ . Sea  $r_i$  el punto de intersección de  $\ell(a_i, b_{k-i+1})$  con el eje  $Y$ , y sea  $r'_i$  un punto tal que  $r'_i(x) = 0$ , y  $r'_i(y) = c_i(y)$ . El triángulo  $R'_i$  definido por  $b_{k-i+1}$ ,  $r_i$  y  $r'_i$  es similar a  $R_i$  (Figura 5.15).

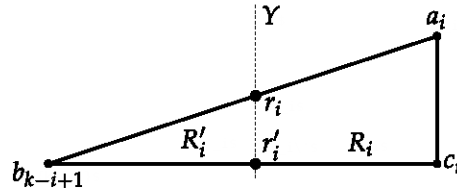


Figura 5.15: El triángulo  $R'_i$  es similar a  $R_i$ .

Como  $R_i$  y  $R'_i$  son similares, tenemos

$$\frac{|r_i - r'_i|}{|a_i - c_i|} = \frac{|r'_i - b_{k-i+1}|}{|c_i - b_{k-i+1}|}.$$

También sabemos que  $|a_i - c_i| = (k - 2i + 1) \cos \alpha$ , ya que esa es la altura de  $R_i$ , y que  $|c_i - b_{k-i+1}| = (2d - k + 1) \sin \alpha$ , porque es la longitud de la base de  $R_i$ , y que  $|r'_i - b_{k-i+1}| = a_{k-i+1}(x)$ , porque  $r'_i(x) = 0$ , y  $a_{k-i+1}(x) = -b_{k-i+1}(x)$ . Por último, es fácil ver que  $a_{k-i+1}(x) = (d - i + 1) \sin \alpha$ ; por lo tanto

$$|r_i - r'_i| = \frac{(k - 2i + 1) \cos \alpha (d - i + 1) \sin \alpha}{(2d - k + 1) \sin \alpha} = \frac{(k - 2i + 1)(d - i + 1)}{2d - k + 1} \cos \alpha.$$

Dado que  $c_i(y) = (i - 1) \cos \alpha$ , entonces tenemos

$$r_i(y) = \left( (i - 1) + \frac{(k - 2i + 1)(d - i + 1)}{2d - k + 1} \right) \cos \alpha.$$

Para obtener la coordenada  $y$  de  $p'$ , sólo tenemos que revisar la coordenada  $y$  de  $r_i$  cuando  $i = 1$ :

$$p'(y) = r_1(y) = \frac{(k - 1)d}{2d - k + 1} \cos \alpha.$$

Como  $d > k - 1$ , sabemos que  $2d - k + 1 > 0$ , y dado que  $0 \leq \cos \alpha \leq 1$  (ya que  $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ ), entonces sólo tenemos que verificar que



$$(i-1)(2d-k+1) + (k-2i+1)(d-i+1) \leq (k-1)d.$$

Esto es directo:

$$\begin{aligned} (i-1)(2d-k+1) + (k-2i+1)(d-i+1) &\leq (k-1)d &\Leftrightarrow \\ 2i^2 - 2ki + 2k - 2i + kd - d &\leq kd - d &\Leftrightarrow \\ i^2 - ki + k - i &\leq 0 &\Leftrightarrow \\ i^2 - i &\leq ki - k &\Leftrightarrow \\ i(i-1) &\leq k(i-1). \end{aligned}$$

Lo que siempre es cierto ya que  $i \leq \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor$  y la igualdad sólo se alcanza cuando  $i = 1$ , o en otras palabras cuando  $r = p'$ .

Si  $k$  es impar y  $i = \frac{k+1}{2}$ , el punto  $c_i$  será igual a  $a_i$ , y la intersección de  $\ell(a_i, b_{k-i+1})$  con el eje  $Y$  será el punto medio entre  $a_i$  y  $b_{k-i+1}$ . La coordenada  $y$  de este punto medio es  $(\frac{k+1}{2} - 1) \cos \alpha = \frac{k-1}{2} \cos \alpha$ , por lo que debemos comprobar

$$\frac{k-1}{2} \cos \alpha \leq \frac{(k-1)d}{2d-k+1} \cos \alpha,$$

lo que de nuevo es directo:

$$\begin{aligned} \frac{k-1}{2} &\leq \frac{(k-1)d}{2d-k+1} &\Leftrightarrow \\ \frac{1}{2} &\leq \frac{d}{2d-k+1} &\Leftrightarrow \\ 2d-k+1 &\leq 2d &\Leftrightarrow \\ -k+1 &\leq 0 &\Leftrightarrow \\ 1 &\leq k. \end{aligned}$$

Lo que también es siempre cierto. Por lo tanto el punto  $p$  siempre está arriba de las líneas  $\ell(a_i, b_{k-i+1})$ ,  $i = 1, \dots, k$ .  $\square$

El siguiente lema determina la cota superior de la zona del pivote:

**Lema 5.5.** *Sea  $q'$  el punto de intersección de  $\ell(a_{\frac{k-1}{2}}, b_{\frac{k+1}{2}})$  y  $\ell(a_{\frac{k+1}{2}}, b_{\frac{k-1}{2}})$  si  $k$  es impar, y el punto medio de  $\ell(a_{\frac{k}{2}}, b_{\frac{k}{2}})$  si  $k$  es par. En ambos casos, el punto  $q$  tal que  $q(x) = q'(x)$  y  $q(y) = q'(y) - \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ , siempre está debajo de las líneas  $\ell(a_1, b_{k-1})$ ,  $\ell(a_2, b_{k-2})$ ,  $\dots$ ,  $\ell(a_{k-1}, b_1)$ .*

*Demostración.* Dado que las líneas  $\ell(a_{\frac{k-1}{2}}, b_{\frac{k+1}{2}})$  y  $\ell(a_{\frac{k+1}{2}}, b_{\frac{k-1}{2}})$  son simétricas, y el triángulo  $T$  tiene al eje  $Y$  como línea de simetría, entonces  $q'(x) = 0$  cuando  $k$  es impar, y también cuando  $k$  es par ya que  $b_{\frac{k}{2}}(x) = -a_{\frac{k}{2}}(x)$ . Por lo tanto  $q(x) = 0$  en ambos casos.

Las líneas en las que estamos interesados son de la forma  $\ell(a_i, b_{k-i})$ ,  $i = 1, \dots, k-1$ , y simétricas, por lo que sólo necesitamos revisar las líneas  $\ell(a_i, b_{k-i})$ ,  $i = 1, \dots, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ .

Usando una técnica similar a la de la prueba anterior, sea  $d_i$  un punto tal que  $d_i(x) = a_i(x)$ , y  $d_i(y) = b_{k-i}$ . Si  $k$  es par, y  $i = \frac{k}{2}$ , entonces  $d_i = a_i$ : lidiaremos con este caso más adelante. En todos los otros casos, los puntos  $a_i, b_{k-i}, d_i$  forman un triángulo rectángulo  $S_i$  (Figura 5.16).

Haciendo un análisis similar al realizado en la prueba anterior, es fácil ver que la longitud de la base de  $S_i$  siempre es  $(2d-k) \sin \alpha$ , y que su altura es  $(k-2i) \cos \alpha$ .

Para saber si  $\ell(a_i, b_{k-i})$  está arriba de  $q$  sólo necesitamos revisar el punto de intersección de  $\ell(a_i, b_{k-i})$  con el eje  $Y$ . Sea  $s_i$  el punto de intersección de  $\ell(a_i, b_{k-i})$  con el eje  $Y$ , y sea  $s'_i$  un

5. Cota inferior para 3, 4 y 5-conjuntos en el plano

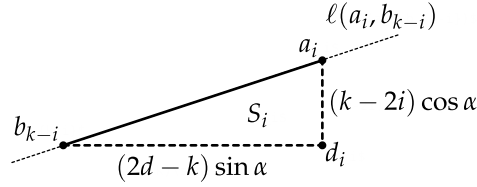


Figura 5.16: El triángulo rectángulo  $S_i$ .

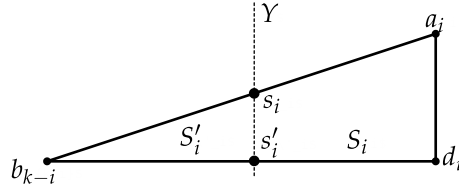


Figura 5.17: El triángulo  $S'_i$  es similar a  $S_i$ .

punto tal que  $s'_i(x) = 0$ , y  $s'_i(y) = d_i(y)$ . Es fácil ver que el triángulo  $S'_i$  definido por  $b_{k-i}$ ,  $s_i$  y  $s'_i$  es similar a  $S_i$  (Figura 5.17).

Como son similares, tenemos que

$$\frac{|s_i - s'_i|}{|a_i - d_i|} = \frac{|s'_i - b_{k-i}|}{|d_i - b_{k-i}|}.$$

También sabemos que  $|a_i - d_i| = (k - 2i) \cos \alpha$ ,  $|d_i - b_{k-i}| = (2d - k) \sin \alpha$ , y  $|s'_i - b_{k-i}| = a_{k-i}(x) = (d - i) \sin \alpha$ ; por lo tanto

$$|s_i - s'_i| = \frac{(k - 2i) \cos \alpha (d - i) \sin \alpha}{(2d - k) \sin \alpha} = \frac{(k - 2i)(d - i)}{(2d - k)} \cos \alpha.$$

Ya que  $d_i(y) = i \cos \alpha$ , entonces tenemos

$$s_i(y) = \left( i + \frac{(k - 2i)(d - i)}{2d - k} \right) \cos \alpha.$$

Tenemos entonces que verificar que

$$q'(y) \leq \left( i + \frac{(k - 2i)(d - i)}{2d - k} \right) \cos \alpha.$$

Si  $k$  es impar,  $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor = \frac{k-1}{2}$ , y entonces

$$q'(y) = \left( \frac{k-1}{2} + \frac{(k-2\frac{k-1}{2})(d-\frac{k-1}{2})}{2d-k} \right) \cos \alpha.$$

Por lo tanto tenemos que probar:

$$\begin{aligned} \left( \frac{k-1}{2} + \frac{(k-2\frac{k-1}{2})(d-\frac{k-1}{2})}{2d-k} \right) \cos \alpha &\leq \left( i + \frac{(k-2i)(d-i)}{2d-k} \right) \cos \alpha \Leftrightarrow \\ \frac{k-1}{2} + \frac{d-\frac{k-1}{2}}{2d-k} &\leq i + \frac{(k-2i)(d-i)}{2d-k} \Leftrightarrow \\ \frac{k^2-2kd-1}{2(k-2d)} &\leq \frac{2i(k-i)-kd}{k-2d}. \end{aligned}$$

Como  $k - 2d < 0$  siempre, podemos multiplicar por  $2(k - 2d)$  e invertir la desigualdad:

$$\begin{aligned} 4i(k - i) - 2kd &\leq k^2 - 2kd - 1 &\Leftrightarrow \\ 4ki - 4i^2 &\leq k^2 - 1 &\Leftrightarrow \\ 1 &\leq k^2 - 4ki + 4i^2 &\Leftrightarrow \\ 1 &\leq (k - 2i)^2. \end{aligned}$$

Esto es cierto siempre ya que  $i \leq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor = \frac{k-1}{2}$ , y la igualdad se alcanza solamente cuando  $i = \frac{k-1}{2}$ .

Si  $k$  es par,  $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor = \frac{k}{2}$ , y

$$q'(y) = \frac{k}{2} \cos \alpha.$$

Por lo tanto, si  $i < \frac{k}{2}$ , tenemos que probar

$$\begin{aligned} \frac{k}{2} \cos \alpha &< \left( i + \frac{(k-2i)(d-i)}{2d-k} \right) \cos \alpha &\Leftrightarrow \\ \frac{k}{2} &< i + \frac{(k-2i)(d-i)}{2d-k}. \end{aligned}$$

Como  $2d - k > 0$ , podemos multiplicar ambos lados por  $2(2d - k)$ :

$$\begin{aligned} (2d - k)k &< 2(2d - k)i + 2(k - 2i)(d - i) &\Leftrightarrow \\ 2kd - k^2 &< 4di - 2ki + 2kd - 2ki - 4di + 4i^2 &\Leftrightarrow \\ 0 &< k^2 - 4ki - 4i^2 &\Leftrightarrow \\ 0 &< (k - 2i)^2. \end{aligned}$$

Lo que es cierto ya que  $i < \frac{k}{2}$ . Si  $i = \frac{k}{2}$  es fácil ver que:

$$\frac{k}{2} \cos \alpha = \left( \frac{k}{2} + \frac{(k - 2(\frac{k}{2}))(d - \frac{k}{2})}{2d - k} \right) \cos \alpha$$

Por lo tanto el punto  $q$  (que depende en  $k$  siendo par o impar) siempre está abajo de las líneas  $\ell(a_i, b_{k-i})$ ,  $i = 1, \dots, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ .  $\square$

El Lema 5.4 nos permite poner un punto  $p$  sobre las líneas  $\ell(a_i, b_{k-i+1})$ ,  $i = 1, \dots, k$ , que determina  $k$ -conjuntos. El Lema 5.5 nos permite poner un punto  $q$  debajo de las líneas  $\ell(a_i, b_{k-i})$ ,  $i = 1, \dots, k - 1$ , que determina  $(k - 1)$ -conjuntos.

Si podemos poner un punto  $\mathbf{p}$  arriba de las líneas  $\ell(a_i, b_{k-i+1})$ ,  $i = 1, \dots, k$ , y debajo de las líneas  $\ell(a_i, b_{k-i})$ ,  $i = 1, \dots, k - 1$ , entonces el punto  $\mathbf{p}$  funcionará como punto pivote y las líneas  $\ell(a_i, \mathbf{p})$  y  $\ell(\mathbf{p}, b_i)$ ,  $i = 1, \dots, k$  determinarán  $k$ -conjuntos en el conjunto de puntos completo (que podría incluir puntos abajo de los puntos  $a_k$  y  $b_k$  en nuestra construcción). Ese es el resultado principal de esta sección:

*Demostración (Teorema 5.2).* Para que el punto pivote exista necesitamos que la cota inferior del Lema 5.4 esté debajo de la cota superior del Lema 5.5, o en otras palabras, la siguiente condición necesita cumplirse si  $k$  es par:

$$\frac{(k-1)d}{2d-k+1} < \frac{k}{2}.$$

Esto es fácil de verificar, ya que  $2d - k + 1 > 0$ :

## 5. Cota inferior para 3, 4 y 5-conjuntos en el plano

$$\begin{aligned} \frac{(k-1)d}{2d-k+1} &< \frac{k}{2} && \Leftrightarrow \\ 2kd - 2d &\leq 2kd - k^2 + k && \Leftrightarrow \\ \frac{k(k-1)}{2} &\leq d. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si  $k$  es par, sólo necesitamos hacer  $d$  mayor que  $\frac{k(k-1)}{2}$ . Si  $k$  es impar, la siguiente condición necesita cumplirse:

$$\begin{aligned} \frac{(k-1)d}{2d-k+1} &< \frac{k-1}{2} + \frac{d-k-1}{2d-k} && \Leftrightarrow \\ \frac{kd-d}{2d-k+1} &< \frac{2kd-k^2+1}{4d-2k}. \end{aligned}$$

Y como  $4d - 2k > 0$  y  $2d - k + 1 > 0$ :

$$\begin{aligned} (4d - 2k)(kd - d) &< (2d - k + 1)(2kd - k^2 + 1) && \Leftrightarrow \\ 0 &< 4d^2 + 2d - 2k^2d + k^3 - k^2 - k + 1 && \Leftrightarrow \\ 0 &< 4d^2 + (2 - 2k^2)d + (k^3 - k^2 - k + 1) && \Leftrightarrow \\ \frac{2k^2 - 2 + \sqrt{(2 - 2k^2)^2 - 16(k^3 - k^2 - k + 1)}}{8} &< d \end{aligned}$$

Lo que prueba nuestro resultado. Hacemos notar que  $\frac{2k^2 - 2 + \sqrt{(2 - 2k^2)^2 - 16(k^3 - k^2 - k + 1)}}{8} = O(k^2)$  y que  $\frac{k(k-1)}{2} = O(k^2)$  también.  $\square$

Usando el Teorema 5.2 podemos construir familias de ejemplos con muchos  $k$ -conjuntos: si tenemos un conjunto  $S_k$  de  $n'$  puntos en posición general tales que los  $k$  puntos más a la izquierda y los  $k$  puntos más a la derecha sean equidistantes en la coordenada  $x$ , y que tengan un número de  $k$ -conjuntos igual a  $f(n')$  de tal forma que dejen los otros  $n' - k$  puntos del conjunto abajo, entonces podemos construir un ejemplo  $S_k^m$  con  $m$  copias de  $S_k$  tal que tenga  $n = m(n' + 1)$  puntos, y  $\mathcal{N}_k(S_k^m) = m(f(n') + 2k)$ . Estamos conscientes de que todas estas suposiciones son muy fuertes.

Los puntos de  $S_k$  no pueden ser colineales, pero los podemos hacer tan cerca a colineales como queramos: la prueba del Teorema 5.2 nos dice que el ángulo entre las copias de  $S_k$  no importa, sólo la longitud de cada lado del polígono donde pongamos nuestros puntos.

## 5.5. Las cotas superiores

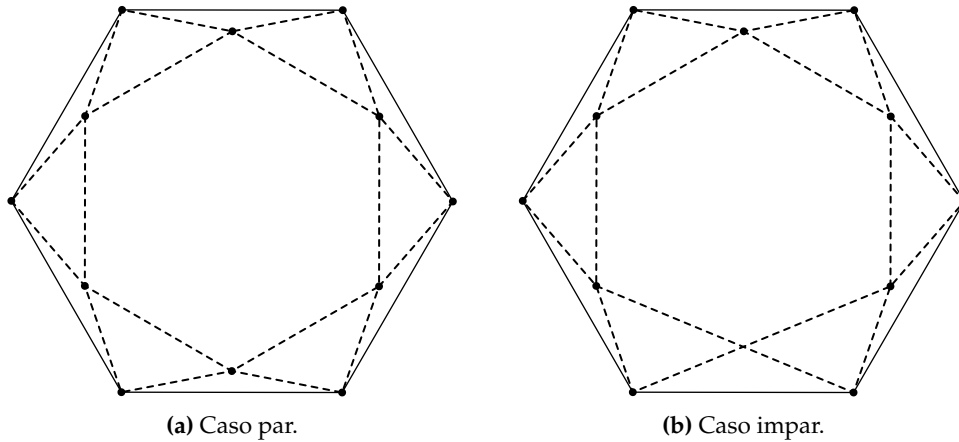
Antes de ver las construcciones geométricas que encontramos utilizando los resultados de la sección anterior, que nos darán cotas inferiores para  $\mathcal{N}_k(n)$ ,  $k = 2, 3, 4$ , en esta sección revisaremos las cotas superiores para  $\mathcal{N}_1(n)$ ,  $\mathcal{N}_2(n)$  y  $\mathcal{N}_3(n)$ , y comentaremos sobre el trabajo realizado para encontrar cotas superiores para  $\mathcal{N}_k(n)$ ,  $k > 3$ . La cota superior para  $\mathcal{N}_3(n)$  es de particular importancia, ya que será igual a la cota inferior que encontramos, lo que nos permitirá determinar el valor exacto de  $\mathcal{N}_3(n)$ .

### 5.5.1. Resultados conocidos

Los 1-conjuntos son 0-aristas, y de esto es inmediato que son siempre las aristas que forman el cierre convexo del conjunto de puntos. También debe ser fácil ver que  $\mathcal{N}_1(n) = n$  para toda  $n \geq 2$ .

Para  $\mathcal{N}_2(n)$ , Herbert Edelsbrunner y Gerd Stöckl probaron en [14] que  $\mathcal{N}_2(n) = \lfloor \frac{3n}{2} \rfloor$  para toda  $n \geq 4$ ; demostrando primero que en un conjunto  $S$  de puntos en posición general,  $|S| \geq 5$ ,

cada punto  $p$  al interior de  $S$  está contenido en al menos dos triángulos formado por elementos de  $S$ , y con esto concluyendo que  $p$  pertenece a lo más a dos 1-aristas de  $S$ . Después prueban que si  $p$  es un punto al interior de  $S$  que forma 1-aristas con  $p_1$  y  $p_2$  en el cierre convexo de  $S$ , entonces  $p_1$  y  $p_2$  forman una arista del mismo, y que no existe  $q \in S$  tal que forme 1-conjuntos con  $p_1$  y  $p_2$  al mismo tiempo. El primer resultado prueba que  $\mathcal{N}_2(S) \leq m + 2(n - m)$ , donde  $m$  es el número de puntos en el cierre convexo de  $S$ ; el segundo mejora la desigualdad a  $\mathcal{N}_2(S) \leq m + 2 \min(m, n - m) + \max(0, n - 2m)$ . Debe ser claro que el máximo de la parte derecha de la desigualdad se alcanza cuando  $m = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ , y por lo tanto  $\mathcal{N}_2(S) \leq \lfloor \frac{3n}{2} \rfloor$  y  $\mathcal{N}_2(n) \leq \lfloor \frac{3n}{2} \rfloor$ . Si acomodamos  $n$  puntos,  $n$  par, de tal forma que  $\frac{n}{2}$  puntos formen un  $\frac{n}{2}$ -ágono, y que cada uno del resto esté muy cerca del punto medio de cada arista del  $\frac{n}{2}$ -ágono, pero dentro del mismo (Figura 5.18(a)), entonces alcanzamos la cota; y podemos hacer lo mismo para  $n$  impar, si se utilizan  $\frac{n+1}{2}$  puntos para formar un  $\frac{n+1}{2}$ -ágono (Figura 5.18(b)), y dejando una arista del cierre convexo sin ningún punto al interior asociado. Por lo tanto  $\mathcal{N}_2(n) = \lfloor \frac{3n}{2} \rfloor$ .



**Figura 5.18:** Construcción de Edelsbrunner y Stöckl para maximizar 2-conjuntos. Cada línea punteada es una 1-arista, y por lo tanto determina un 2-conjunto.

Cabe señalar que Edelsbrunner y Stöckl además probaron en general que  $\mathcal{N}_3(n) = 3n - 6$ , si  $n \geq 6$ , y  $\mathcal{N}_d(n) = \binom{n}{d}$  para  $4 \leq d \leq n - 2$ . Más adelante nosotros probaremos el resultado para  $d = 2$ ,  $\mathcal{N}_2(n) \leq \lfloor \frac{3n}{2} \rfloor$ , usando sucesiones permisibles.

Para  $\mathcal{N}_3(n)$ , Edgar Ramos probó en [36] que  $\mathcal{N}_3(n) \leq \lfloor \frac{11n}{6} \rfloor + 1$  para  $n \geq 7$ , haciendo un meticuloso (y, usando el término utilizado por el mismo autor, algo tedioso) análisis de los posibles casos de arreglos de pseudolíneas cuando se forman 3-conjuntos. En ese mismo artículo, Ramos conjetura que el valor exacto de  $\mathcal{N}_3(n)$  es de hecho  $\lfloor \frac{11n}{6} \rfloor$ .

### 5.5.2. Capas de sucesiones permisibles

Los dos resultados mencionados en la sección anterior ( $\mathcal{N}_2(n) = \lfloor \frac{3n}{2} \rfloor$  si  $n \geq 4$ , y  $\mathcal{N}_3(n) \leq \lfloor \frac{11n}{6} \rfloor + 1$  si  $n \geq 7$ ) los podemos demostrar utilizando sucesiones permisibles; y en el caso de la cota superior para  $\mathcal{N}_3(n)$ , de hecho el resultado se mejora por uno, lo que lo iguala a la cota inferior que presentamos en la Sección 5.6.1, y que confirma la conjetura hecha por Ramos en [36]. Además es, a nuestro juicio, una demostración más sencilla de seguir.

Para facilitar las demostraciones, vamos a definir las *capas* de una sucesión permisible de la siguiente manera; dada una sucesión permisible  $\Pi$  de  $n$  elementos, la  $i$ -ésima *capa*,  $L_i$ , de  $\Pi$ , serán los elementos de  $\Pi$  cuya mínima posición en  $\Pi$  es  $i$ ,  $i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ .

## 5. Cota inferior para 3, 4 y 5-conjuntos en el plano

Hacemos notar que, aunque similares en naturaleza a las capas convexas de un conjunto de puntos como se ven en [7], las capas de una sucesión permisible no son iguales; y en particular en una sucesión circular obtenida de secuencializar un conjunto de puntos, las capas de la sucesión y las capas convexas del conjunto de puntos pueden ser diferentes.

Como las transposiciones de  $\Pi$  que ocurren en la columna  $k \leq \frac{n}{2}$  (y  $n - k$ , pero como estamos tomando toda la sucesión permisible es lo mismo) determinan  $k$ -conjuntos, las denotaremos como  $k$ -transposiciones. Y dado que en un semiperiodo fijo un elemento  $x$  de  $\Pi$  se mueve de la posición  $p$  a la posición  $n - p + 1$ ,  $1 \leq p \leq n$ , debe ser claro que entonces el número de  $k$ -transposiciones donde  $x$  participa es un número par (a menos que  $k$  sea exactamente  $\frac{n}{2}$ ), y que este número es el mismo independientemente de en qué semiperiodo nos fijemos. Si en una transposición  $x$  se mueve de derecha izquierda, diremos que esta es una *transposición inversa* de  $x$ .

Si  $x \in L_p$ , y  $1 \leq k < p$ , entonces  $x$  no participa en ninguna  $k$ -transposición porque se mueve siempre entre las posiciones  $p$  y  $n - p + 1$ ; si  $p \leq k < \frac{n}{2}$ , entonces  $x$  puede participar en a lo más  $2 + 2(p - 1) = 2p$  transposiciones: cruzando la columna  $p$  hacia la derecha, y luego cruzándola de nuevo hacia la izquierda al intercambiar posiciones con uno de los elementos que estaban a su izquierda. Esto puede repetirse a lo más  $p - 1$  veces (una con cada elemento a la izquierda de  $x$  en el renglón inicial), y al terminar  $x$  termina en la posición  $p - 1$ ; vuelve a cruzar la columna  $p$  al moverse a la derecha, y por último cruza la columna  $n - p$  para llegar por fin a la posición  $n - p + 1$ . El mínimo número de  $k$ -transposiciones en las que  $p$  puede participar son dos, si  $p < \frac{n}{2}$ , y sólo una si  $p = \frac{n}{2}$ .

Por tanto, para  $k \geq p$  y  $m \geq 0$ , podemos definir  $L_p^k(m)$  como los elementos de  $L_p$  tales que su número de  $k$ -transposiciones es  $2 + 2m$ , si  $k \leq \frac{n}{2}$ , y  $1 + 2m$  si  $k = \frac{n}{2}$ . Sea  $L_p^{>k} = \bigcap_{j=p}^k L_p^j(0)$ ; esto es, los elementos de  $L_p$  con exactamente dos  $j$ -transposiciones por cada  $p \leq j \leq k$ ; hacemos notar que  $L_p^{>p}(0) = L_p^p(0)$ .

Vamos a necesitar los siguientes resultados relacionados con capas de una sucesión permisible para poder demostrar las cotas superiores:

**Proposición 5.1.** *Sea  $\Pi$  una sucesión permisible de  $n$  elementos. Entonces*

1.  $|L_1| + |L_2| + \dots + |L_p| \leq n$ , para toda  $p$  tal que  $1 \leq p \leq \frac{n}{2}$ ,
2.  $|L_2| = |L_2^2(1)| + |L_2^3(1)| + \dots + |L_2^k(1)| + |L_2^{>k}|$ , para cualquier  $k$  tal que  $2 \leq k < \frac{n}{2}$ .
3.  $|L_p| = |L_p^k(0)| + |L_p^k(1)| + |L_p^k(2)| + \dots + |L_p^k(p - 1)|$ , para cualesquiera  $p$  y  $k$  tales que  $1 \leq p \leq k \leq \frac{n}{2}$ .

*Demostración.* Sea  $\Pi$  una sucesión permisible de  $n$  elementos, y  $p$  tal que  $1 \leq p \leq \frac{n}{2}$ .

1.  $L_1, L_2, \dots, L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$  es una partición de  $\Pi$ , y por lo tanto

$$|L_1| + |L_2| + \dots + |L_p| \leq |L_1| + |L_2| + \dots + |L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}| = n.$$

2. Para todo elemento  $x$  de  $L_2$  existe un semiperiodo  $\pi$  donde el primer renglón tiene a  $x$  en la posición 2. En  $\pi$  el elemento  $x$  tiene una única transposición inversa que ocurre en una columna mayor o igual a 2. Por lo tanto  $L_2^2(1), \dots, L_2^k(1), L_2^{>k}$  es una partición de  $L_2$ , y entonces

$$|L_2| = |L_2^2(1)| + |L_2^3(1)| + \dots + |L_2^k(1)| + |L_2^{>k}|,$$

para cualquier  $k$  tal que  $2 \leq k < \frac{n}{2}$ .

3. Para todo elemento  $x$  de  $L_p$ , existe un semiperiodo  $\pi$  donde el primer renglón tiene a  $x$  en la posición  $p$ . En  $\pi$ ,  $x$  tiene exactamente  $p - 1$  transposiciones inversas; cualquiera de ellas puede ocurrir en la posición  $k$  si  $p \leq k \leq \frac{n}{2}$ . Por lo tanto  $L_p^k(0), L_p^k(1), L_p^k(2), \dots, L_p^k(p - 1)$  es una partición de  $L_p$ , y entonces

$$|L_p| = |L_p^k(0)| + |L_p^k(1)| + |L_p^k(2)| + \dots + |L_p^k(p - 1)|.$$

Lo cual prueba los tres puntos.  $\square$

**Proposición 5.2.** Sea  $\Pi$  una sucesión permisible de  $n$  elementos. Para cualquier  $k < \frac{n}{2}$ ,

$$\mathcal{N}_k(\Pi) = \sum_{p=1}^k |L_p| + \sum_{p=2}^k \sum_{m=1}^{p-1} m |L_p^k(m)|.$$

*Demostración.* Sea  $k < \frac{n}{2}$ . Las únicas capas que participan en  $k$ -transposiciones son las capas  $L_1, \dots, L_k$ . Como en la prueba de la Proposición 5.1, hacemos notar que  $L_p = \bigcup_{m=0}^{p-1} L_p^k(m)$  es una unión disjunta para toda  $p$  tal que  $1 \leq p \leq k$ . Más aún, por definición cualquier elemento en  $L_p^k(m)$  participa en exactamente  $2 + 2m$  diferentes  $k$ -transposiciones. Al agregar el número de  $k$ -transposiciones de cada elemento sobre todos los conjuntos  $L_p^k(m)$ , con  $1 \leq p \leq k$  y  $0 \leq m \leq p - 1$ , esto cuenta cada  $k$ -transposición dos veces, una por cada elemento que participa en ella. Por tanto

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_k(\Pi) &= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^k \sum_{m=0}^{p-1} (2 + 2m) |L_p^k(m)| \\ &= \sum_{p=1}^k \sum_{m=0}^{p-1} |L_p^k(m)| + \sum_{p=1}^k \sum_{m=1}^{p-1} m |L_p^k(m)| \\ &= \sum_{p=1}^k |L_p| + \sum_{p=1}^k \sum_{m=1}^{p-1} m |L_p^k(m)|. \end{aligned}$$

La última igualdad se sigue de la Proposición 5.1.  $\square$

**Proposición 5.3.** Sea  $\Pi$  una sucesión permisible de  $n$  elementos. Sean  $m, p$  y  $k$  tales que  $1 \leq m < p \leq k \leq \frac{n}{2}$ .

1. Si  $x \in L_p^k(m)$ , entonces para toda  $j, 1 \leq j \leq m$ , el número de  $k$ -transposiciones de  $x$  con elementos de  $L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_{p-1-m+j}$  es al menos  $j$ .
2. Si  $p < \frac{n+2}{3}$  y  $x \in L_p^p(m)$ , entonces para toda  $j, 1 \leq j \leq m$ , el número de  $p$ -transposiciones de  $x$  con elementos de  $L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_{p-1-m+j}$  es al menos  $2j$ .

*Demostración.* Sea  $x$  un elemento de  $L_p^k(m)$ .

1. Sea  $\pi$  el semiperiodo cuyo primer renglón tiene a  $x$  en la posición  $p$ ; esto es, si el primer renglón es  $x_1, \dots, x_n$ , entonces  $x = x_p$ . Debe ser claro que  $x_i \in L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_i$ , para toda  $i$  tal que  $1 \leq i \leq p - 1$ .

En  $\pi$ , el elemento  $x$  tiene exactamente  $p - 1$  transposiciones inversas, una con cada  $x_i, 1 \leq i \leq p - 1$ , y por definición exactamente  $m$  de estas  $p - 1$  transposiciones son  $k$ -transposiciones. Supongamos que estas  $m$  transposiciones inversas en la columna  $k$  son

## 5. Cota inferior para 3, 4 y 5-conjuntos en el plano

contra los elementos  $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{m-1}}, x_{i_m}$ , con  $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_{m-1} \leq i_m \leq p-1$ , y  $j$  tal que  $1 \leq j \leq m$ . Como  $i_j < p-1-m+j$ , entonces  $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_j}\} \subseteq L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_{p-1-m+j}$ . Esto significa que al menos las  $j$  transposiciones inversas en la columna  $k$  de  $x$  contra  $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{j-1}}$  y  $x_{i_j}$  son contra elementos en  $L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_{p-1-m+j}$ .

2. Sean  $\tau$  y  $\tau'$  dos  $p$ -transposiciones de  $x$  en  $\Pi$ , la primera en la columna  $p$  y la segunda en la columna  $n-p$ . Sea  $\pi$  el semiperiodo cuyo primer renglón es el que precede a  $\tau$ , y sea  $\pi'$  el semiperiodo cuya última transposición es la que sigue inmediatamente a  $\tau'$ .

Cuando  $k = p < \frac{n+2}{3}$ ,  $\tau$  es la única  $p$ -transposición en la columna  $p$  en  $\pi$ , y  $\tau'$  es la única  $p$ -transposición en la columna  $n-p$  en  $\pi'$ ; esto debe ser claro del hecho de que  $\tau$  y  $\tau'$  son consecutivas. La transposición en  $\tau$  ocurre cuando  $x$  se mueve a la derecha para ya no volver a tener transposiciones inversas, y la transposición en  $\tau'$  ocurre cuando  $x$  pasa por la columna  $p$  para llegar a la posición inversa a la que tenía  $\binom{n}{2}-1$  renglones antes. Si  $p$  fuera mayor o igual a  $\frac{n+2}{3}$ , entonces habrían suficientes elementos en capas inferiores de  $\Pi$  como para que no pudiéramos garantizar esto.

Hacemos notar que al menos  $m$  de las  $m+2$  transposiciones en la columna  $p$  de  $x$  en  $\pi'$ , todas excepto tal vez  $\tau$  y  $\tau'$ , son  $p$ -transposiciones inversas de  $x$  en  $\pi$ . Por el punto anterior, estas  $m$  transposiciones de  $x$  en  $\pi'$ , junto con las  $m$  transposiciones inversas en la columna  $p$  de  $x$  en  $\pi$ , son todas contra elementos de  $L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_{p-1}$ . Más aún: si usamos el punto anterior una vez para  $\pi$ , y otra para  $\pi'$ , para toda  $j$ ,  $1 \leq j \leq m$ , hay al menos  $2j$  diferentes  $p$ -transposiciones de  $x$  contra elementos de  $L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_{p-1-m+j}$ , y exactamente  $j$  transposiciones inversas en la columna  $p$  para cada semiperiodo  $\pi$  y  $\pi'$ .

Lo que prueba la proposición. □

**Proposición 5.4.** *Al menos dos de las cuatro 3-transposiciones de cada elemento en  $L_2^3(1)$ , son contra elementos de  $L_1 \cup L_2$ .*

*Demostración.* Sea  $x \in L_2^3(1)$ , y  $\pi$  un semiperiodo donde el primer renglón tenga a  $x$  en la posición 2, y  $a$  en la posición 1, y tal que las primeras tres transposiciones de  $x$  en  $\pi$  sean una 2-transposición, digamos  $bx$ ; una 3-transposición, digamos  $cx$ , y una 3-transposición inversa, que debe ser  $xa$ . Nótese que todas las permutaciones que ocurren después de  $bx$  y antes de  $xa$ , tiene a los elementos  $a$ ,  $b$  y  $c$  en algún orden en las primeras tres posiciones.

Dentro de este conjunto de permutaciones,  $a$  se mueve de la posición 1 a la posición 3, y por tanto en algún momento  $c$  se mueve a la posición 2; y entonces  $c \in L_1 \cup L_2$ . Por lo tanto, las dos transposiciones de  $cx$  y  $xa$  son 3-transposiciones de  $x$  contra  $L_1 \cup L_2$ . □

**Proposición 5.5.** *Para  $k > 2$ , existe una configuración que alcanza el máximo número de  $k$ -transposiciones, tal que no tiene 2-transposiciones que involucren dos elementos de  $L_1$ . Geométricamente, esto es equivalente a una configuración donde el interior de cualquier triángulo, cuyos vértices sean tres puntos consecutivos del cierre convexo, contenga al menos otro punto del conjunto.*

*Demostración.* Supongamos que  $x \in L_1$  tiene una transposición contra otro elemento de  $L_1$ . Por simetría, podemos suponer que esta 2-transposición ocurre en la columna 2. Sea  $\pi$  el semiperiodo que tiene a  $x$  en la posición 1 en el primer renglón, y tal que las dos primeras transposiciones que involucren a  $x$  sean una 1-transposición, y una 2-transposición contra un elemento de  $L_1$ .

Podemos también suponer que  $\pi$  tiene a  $x$ ,  $a$  y  $b$  en las posiciones 1, 2 y 3 respectivamente, y que las dos primeras transposiciones de  $x$  son la 1-transposición  $ax$ , y la 2-transposición  $bx$ , con  $b \in L_1$  (si no es así, podemos posponer la transposición  $ax$  hasta que  $b$  llegue a la posición 3 sin afectar el número de  $k$ -conjuntos para cualquier  $k > 2$ ).



Como  $b \in L_1$ , la siguiente transposición de  $b$  ocurre en la columna 1, y por lo tanto debe ser  $ba$ . El forzar las transposiciones  $ax$ ,  $bx$  y  $ba$  para que ocurran de forma consecutiva en  $\pi$  no afecta el resto de  $\Pi$ , y por lo tanto no cambia el número de  $k$ -conjuntos para cualquier  $k > 2$ . Cambiar el orden en el que estas tres transposiciones ocurren de  $ax$ ,  $bx$  y  $ba$ , a  $ba$ ,  $bx$  y  $ax$ , resulta en que el conjunto  $L_1$  se decrementa en uno (porque ahora  $a$  no llega a la posición 1), así como el número de 1-conjuntos (porque en lugar de  $ax$  y  $ba$  ocurriendo en la columna 1, ahora sólo ocurre  $bx$ ); además incrementa el conjunto  $L_2$  en uno (porque ahora la posición mínima de  $a$  es 2), así como el número de 2-conjuntos (porque en lugar de que sólo  $bx$  ocurra en la columna 2, ahora ocurren  $ba$  y  $ax$ ). Nada de esto afecta el número de  $k$ -conjuntos para  $k > 2$ .  $\square$

**Corolario 5.2.** Para  $k \geq 2$ , existe una configuración que alcanza el máximo número de  $k$ -transposiciones, tal que satisface  $|L_1| \leq |L_2| + |L_2^2(1)|$ .

*Demostración.* Por el resultado anterior, existe una configuración que alcanza el máximo número de  $k$ -transposiciones donde todas las 2-transposiciones que involucran elementos de  $L_1$  (de las cuales hay exactamente  $2|L_1|$ ), involucran también un elemento de  $L_2$ . Pero el número total de 2-transposiciones que involucran a  $L_2$  es a lo más  $2|L_2| + 2|L_2^2(1)|$ .  $\square$

### 5.5.3. Cota superior para $\mathcal{N}_2(n)$

Para  $n < 4$  no hay 2-conjuntos, y para  $n = 4$  y  $n = 5$  las configuraciones de puntos con más 2-conjuntos son las que maximizan el número de líneas medianas, por lo que sabemos que  $\mathcal{N}_2(4) = 6$  y  $\mathcal{N}_2(5) = 7$ . Lo que sigue se encarga de  $n \geq 6$ .

**Teorema 5.3.**  $\mathcal{N}_2(n) \leq \lfloor \frac{3n}{2} \rfloor$ , para toda  $n \geq 6$ .  $\mathcal{N}_2(n) = \frac{3n}{2}$  si y sólo si  $|L_1| = |L_2^2(1)| = \frac{n}{2}$ .

*Demostración.* Sea  $\Pi$  una sucesión permisible con  $n$  elementos,  $n \geq 6$ . Por el tercer punto de la Proposición 5.1, para  $k = p = 2$ , sabemos que  $|L_2| = |L_2^2(0)| + |L_2^2(1)|$ , y por la Proposición 5.2, para  $k = 2$ , tenemos que  $\mathcal{N}_2(\Pi)$  es igual a  $|L_1| + |L_2| + |L_2^2(1)|$ . Reemplazando la primera fórmula en la segunda, tenemos que

$$\mathcal{N}_2(\Pi) = |L_1| + |L_2^2(0)| + 2|L_2^2(1)|. \quad (5.1)$$

Este es el valor que queremos maximizar para obtener una cota superior. Por el primer punto de la Proposición 5.1, con  $k = 2$ , y reemplazando de nuevo  $|L_2|$ , tenemos que

$$|L_1| + |L_2^2(0)| + |L_2^2(1)| \leq n. \quad (5.2)$$

Por el segundo punto de la Proposición 5.3, cada elemento de  $L_2^2(1)$  tiene al menos dos 2-transposiciones contra elementos de  $L_1$ . Ya que existen a lo más  $2|L_1|$  transposiciones diferentes en la columna 2 que involucren elementos de  $L_1$ , tenemos que

$$2|L_2^2(1)| \leq 2|L_1| \Rightarrow -|L_1| + |L_2^2(1)| \leq 0. \quad (5.3)$$

Y como  $|L_1|$ ,  $|L_2^2(0)|$  y  $|L_2^2(1)|$  son todos no negativos, tenemos que

## 5. Cota inferior para 3, 4 y 5-conjuntos en el plano

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_2(\mathbf{\Pi}) &= |L_1| + |L_2^2(0)| + 2|L_2^2(1)| && \text{(Igualdad 5.1)} \\
&\leq |L_1| + |L_2^2(0)| + 2|L_2^2(1)| + \frac{1}{2}|L_2^2(0)| \\
&= |L_1| + |L_2^2(0)| + \frac{1}{2}|L_2^2(0)| + 2|L_2^2(1)| \\
&= \left(\frac{3}{2}|L_1| - \frac{1}{2}|L_1|\right) + \frac{3}{2}|L_2^2(0)| + \left(\frac{3}{2}|L_2^2(1)| + \frac{1}{2}|L_2^2(1)|\right) \\
&= \frac{3}{2}|L_1| + \frac{3}{2}|L_2^2(0)| + \frac{3}{2}|L_2^2(1)| - \frac{1}{2}|L_1| + \frac{1}{2}|L_2^2(1)| \\
&= \frac{3}{2}|L_1| + \frac{3}{2}|L_2^2(0)| + \frac{3}{2}|L_2^2(1)| - \frac{1}{2}|L_1| + \frac{1}{2}|L_2^2(1)| \\
&= \frac{3}{2}(|L_1| + |L_2^2(0)| + |L_2^2(1)|) + \frac{1}{2}(-|L_1| + |L_2^2(1)|) \\
&\leq \frac{3}{2}(|L_1| + |L_2^2(0)| + |L_2^2(1)|) + \frac{1}{2} \cdot 0 && \text{(Desigualdad 5.3)} \\
&\leq \frac{3}{2} \cdot n. && \text{(Desigualdad 5.2)}
\end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\mathcal{N}_2(\mathbf{\Pi}) \leq \frac{3n}{2}$ ; la igualdad sólo se cumple cuando se cumplen las igualdades en 5.2 y 5.3, y esto ocurre únicamente cuando  $|L_1| = |L_2| = |L_2^2(1)| = \frac{n}{2}$ .

Como todo conjunto de puntos en el plano en posición general se puede secuencializar a una sucesión permisible  $\mathbf{\Pi}$ , la misma cota aplica para el caso geométrico, y  $\mathcal{N}_2(n) \leq \frac{3n}{2}$ .  $\square$

### 5.5.4. Cota superior para $\mathcal{N}_3(n)$

Para  $n < 6$  no hay 3-conjuntos, y para  $n = 6$  y  $n = 7$  las configuraciones de puntos con más 3-conjuntos son las que maximizan el número de líneas medianas, por lo que sabemos que  $\mathcal{N}_3(6) = \mathcal{N}_3(7) = 12$ . Lo que sigue se encarga de  $n \geq 8$ .

**Teorema 5.4.**  $\mathcal{N}_3(n) \leq \lfloor \frac{11n}{6} \rfloor$ , para toda  $n \geq 8$ .  $\mathcal{N}_3(n) = \frac{11n}{6}$  si y sólo si

$$|L_1| = |L_2| = |L_3| = \frac{n}{3}, |L_2^3(1)| = \frac{n}{3}, \text{ y } |L_3^3(1)| = |L_3^3(2)| = \frac{n}{6}.$$

*Demostración.* Sea  $\mathbf{\Pi}$  una sucesión permisible con  $n$  elementos,  $n \geq 8$ . Por el segundo punto de la Proposición 5.1 para  $k = 3$  sabemos que  $|L_2| = |L_2^2(1)| + |L_2^3(1)| + |L_2^{>3}|$ , y por el tercer punto de la misma para  $k = p = 3$  sabemos que  $|L_3| = |L_3^3(0)| + |L_3^3(1)| + |L_3^3(2)|$ . Además, por la Proposición 5.2 con  $k = 3$  tenemos que  $\mathcal{N}_3(\mathbf{\Pi})$  es igual a  $|L_1| + |L_2| + |L_3| + |L_2^2(1)| + |L_3^3(1)| + 2|L_3^3(2)|$ . Reemplazando las fórmulas primera y segunda en la tercera y simplificando, tenemos que

$$\mathcal{N}_3(\mathbf{\Pi}) = |L_1| + |L_2^2(1)| + 2|L_2^3(1)| + |L_2^{>3}| + |L_3^3(0)| + 2|L_3^3(1)| + 3|L_3^3(2)|. \quad (5.4)$$

Este es el valor que queremos maximizar para encontrar nuestra cota superior. Por el primer punto de la Proposición 5.1 para  $k = 3$ , y reemplazando de nuevo a  $|L_2|$  y  $|L_3|$  tenemos que

$$|L_1| + |L_2^2(1)| + |L_2^3(1)| + |L_2^{>3}| + |L_3^3(0)| + |L_3^3(1)| + |L_3^3(2)| \leq n. \quad (5.5)$$

Por el primer punto de la Proposición 5.3 cada elemento de  $L_2^3(1)$  tiene al menos una 3-transposición contra elementos de  $L_1$  y (como  $3 < \frac{n+2}{3}$ ) por el segundo punto de la Proposición 5.3, cada elemento de  $L_3^3(2)$  tiene al menos dos 3-transposiciones contra elementos de  $L_1$ . Dado que hay a lo más  $2|L_1|$  diferentes 3-transposiciones que involucran elementos de  $L_1$ , tenemos que

$$|L_2^3(1)| + 2|L_3^3(2)| \leq 2|L_1| \Rightarrow -2|L_1| + |L_2^3(1)| + 2|L_3^3(2)| \leq 0. \quad (5.6)$$

Como en el resultado anterior, cada elemento de  $|L_2^3(1)|$  tiene al menos una 3-transposición contra elementos de  $L_1$ . Por el segundo punto de la Proposición 5.3, cada elemento de  $L_3^3(1)$  tiene al menos dos 3-transposiciones contra elementos de  $L_1 \cup L_2$ . Como el número de 3-transposiciones que involucran elementos de  $L_1$  es a lo más  $2|L_1|$ , y por la Proposición 5.4 el número de 3-transposiciones que involucran un elemento de  $L_2$  y uno de  $L_3$  es a lo más  $2|L_2|$ , entonces el número de 3-transposiciones de la forma  $L_2L_1, L_3L_1$  o  $L_3L_2$ , es a lo más  $2|L_1| + 2|L_2|$ . Por lo tanto

$$|L_2^3(1)| + 2|L_3^3(1)| + 4|L_3^3(2)| \leq 2|L_1| + 2|L_2| = 2|L_1| + 2|L_2^2(1)| + 2|L_2^3(1)| + 2|L_2^{>3}|. \quad (5.7)$$

(La última igualdad es al reemplazar de nuevo  $|L_2|$  siguiendo el segundo punto de la Proposición 5.1 para  $k = 3$ ).

Por último, por el Corolario 5.2 y el segundo punto de la Proposición 5.1 podemos suponer que

$$|L_1| \leq |L_2| + |L_2^2(1)| = 2|L_2^2(1)| + |L_2^3(1)| + |L_2^{>3}|. \quad (5.8)$$

Como  $|L_1|, |L_2^2(1)|, |L_2^3(1)|, |L_2^{>3}|, |L_3^3(0)|, |L_3^3(1)|$  y  $|L_3^3(2)|$  son todos no negativos, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_3(\mathbf{\Pi}) &= |L_1| + |L_2^2(1)| + 2|L_2^3(1)| + |L_2^{>3}| + |L_3^3(0)| + 2|L_3^3(1)| + 3|L_3^3(2)|^{[1]} \\ &\leq |L_1| + |L_2^2(1)| + 2|L_2^3(1)| + |L_2^{>3}| + |L_3^3(0)| + 2|L_3^3(1)| + 3|L_3^3(2)| + \\ &\quad \frac{1}{6} (2|L_2^2(1)| + 3|L_2^{>3}| + 5|L_3^3(0)|) \\ &= \frac{11}{6} (|L_1| + |L_2^2(1)| + 2|L_2^3(1)| + |L_2^{>3}| + |L_3^3(0)| + 2|L_3^3(1)| + 3|L_3^3(2)|) + \\ &\quad \frac{5}{12} (-2|L_1| + |L_2(1)| + 2|L_3^3(2)|) + \\ &\quad \frac{1}{12} (-2|L_1| - 2|L_2^2(1)| - 1|L_2^3(1)| - 2|L_2^{>3}| + 2|L_3^3(1)| + 4|L_3^3(2)|) + \\ &\quad \frac{1}{6} (|L_1| - 2|L_2^2(1)| - 1|L_2^3(1)| - 1|L_2^{>3}|) \\ &\leq \frac{11}{6} (|L_1| + |L_2^2(1)| + 2|L_2^3(1)| + |L_2^{>3}| + |L_3^3(0)| + 2|L_3^3(1)| + 3|L_3^3(2)|) + \\ &\quad \frac{5}{12} (-2|L_1| + |L_2(1)| + 2|L_3^3(2)|) + \\ &\quad \frac{1}{12} (-2|L_1| - 2|L_2^2(1)| - 1|L_2^3(1)| - 2|L_2^{>3}| + 2|L_3^3(1)| + 4|L_3^3(2)|) + \frac{1}{6} \cdot 0^{[2]} \\ &\leq \frac{11}{6} (|L_1| + |L_2^2(1)| + 2|L_2^3(1)| + |L_2^{>3}| + |L_3^3(0)| + 2|L_3^3(1)| + 3|L_3^3(2)|) + \\ &\quad \frac{5}{12} (-2|L_1| + |L_2(1)| + 2|L_3^3(2)|) + \frac{1}{12} \cdot 0^{[3]} \\ &\leq \frac{11}{6} (|L_1| + |L_2^2(1)| + 2|L_2^3(1)| + |L_2^{>3}| + |L_3^3(0)| + 2|L_3^3(1)| + 3|L_3^3(2)|) + \\ &\quad \frac{5}{12} \cdot 0^{[4]} \\ &\leq \frac{11}{6} \cdot n^{[5]}. \end{aligned}$$

(Por la Igualdad 5.4 podemos hacer <sup>[1]</sup>; por la Desigualdad 5.8 podemos hacer <sup>[2]</sup>; por la Desigualdad 5.7 podemos hacer <sup>[3]</sup>; por la Desigualdad 5.6 podemos hacer <sup>[4]</sup>; y por último podemos hacer <sup>[5]</sup> por la Desigualdad 5.5).

Por lo tanto,  $\mathcal{N}_3(\mathbf{\Pi}) \leq \frac{11n}{6}$ ; la igualdad sólo se cumple cuando  $|L_2^2(1)| = |L_2^{>3}| = |L_3^3(0)| = 0$ , y las Desigualdades 5.5, 5.6, 5.8 y 5.7 alcanzan la igualdad, que esto sólo ocurre cuando

$$|L_1| = |L_2| = |L_3| = \frac{n}{3}, \quad |L_2^3(1)| = \frac{n}{3}, \quad \text{y} \quad |L_3^3(1)| = |L_3^3(2)| = \frac{n}{6}.$$

Como todo conjunto de puntos en el plano en posición general se puede secuencializar a una sucesión permisible  $\Pi$ , la misma cota aplica para el caso geométrico, y  $\mathcal{N}_3(n) \leq \frac{11n}{6}$ .  $\square$

Esta técnica que utilizamos, analizando el comportamiento de los elementos de  $\Pi$  dependiendo de en qué capa se encuentren, es posible extenderlo a  $\mathcal{N}_k(n)$ ,  $k > 3$ . Por supuesto el análisis se complica cada vez más conforme  $k$  crece, pero continuamos trabajando para poder encontrar cotas superiores para  $k$ -conjuntos con  $k$  mayor a 3.

## 5.6. Las cotas inferiores

En esta sección discutiremos nuestras construcciones  $S_3$ ,  $S_4$  y  $S_5$  para encontrar cotas inferiores para  $\mathcal{N}_3(n)$ ,  $\mathcal{N}_4(n)$  y  $\mathcal{N}_5(n)$ . Para  $\mathcal{N}_6(n)$  ni siquiera tenemos todavía un buen candidato, porque necesitamos tomar un conjunto de puntos con muchos 6-conjuntos, y *abrirlo* de tal forma que al aplanarlo deje la gran mayoría de 6-conjuntos de un lado, y muy pocos del otro; de otra forma deja de ser un buen candidato.

Por lo mismo, hacemos notar que no sabemos aún cómo hacerlo geoméricamente para encontrar cotas inferiores de  $\mathcal{N}_k(n)$  en general, dado que no sabemos cómo garantizar que nuestras copias de conjuntos de puntos satisfagan las condiciones explicadas en la Sección 5.4.

### 5.6.1. Cota inferior para $\mathcal{N}_3(n)$

**Teorema 5.5.**  $\mathcal{N}_3(n) \geq \lfloor \frac{11}{6}n \rfloor$ .

Como mencionábamos al inicio del capítulo, esta cota inferior para  $k = 3$  es importante dado que alcanza a la cota superior correspondiente vista en el Teorema 5.4. Por lo tanto, este resultado, junto con el correspondiente para la cota superior visto en la sección anterior, determinan de forma exacta el máximo número de 3-conjuntos que un conjunto con  $n$  puntos pueden tener.

Para  $k = 3$ , el mejor candidato para el conjunto  $S_3$  es  $H_3$ , el conjunto de 6 puntos con máximo número de líneas medianas (que también es 6), menos un punto; este conjunto tiene muy pocos puntos, por lo que fue relativamente sencillo abrirlo. El conjunto  $H_3$  se puede ver en la Figura 5.19.

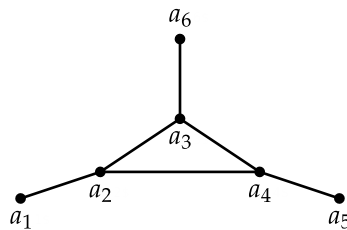


Figura 5.19: 6 puntos con 6 líneas medianas.

Las coordenadas de los puntos de  $H_3$  son:

- $a_1$ : 100, 120
- $a_1$ : 200, 150
- $a_3$ : 300, 200
- $a_4$ : 400, 150
- $a_5$ : 500, 120
- $a_6$ : 301, 280

Podemos aplanar  $H_3 \setminus \{a_6\}$  tanto como queramos, y siempre y cuando pongamos  $a_6$  arriba, el número de líneas medianas se preservará: el punto  $a_6$  es libre en ese sentido. Dado que los puntos  $a_1, \dots, a_5$  pueden ser equidistantes en sus coordenadas  $x$  (como de hecho lo son en la Figura 5.19), podemos usar el Teorema 5.2 para garantizar que la distancia que debe haber entre el punto  $a_3$  y el vértice del  $m$ -ángulo donde ponemos las copias de  $S_3$  sea de la longitud necesaria:

$$d > \frac{2(9) - 2 + \sqrt{(2 - 2(9))^2 - 16(27 - 9 - 3 + 1)}}{8} = \frac{16 + \sqrt{256 - 256}}{8} = 2.$$

El Lema 5.4 y el Lema 5.5 no sólo nos dicen que la zona del pivote existe: nos dicen *dónde* ponerlo. Podemos poner el pivote (en este caso, nuestro punto  $a_6$ ) en el punto medio de los puntos  $r_2$  y  $s_2$ . Por ejemplo, un conjunto  $S_3^3$  con 3 copias de  $H_3$  se ven como en la Figura 5.20.

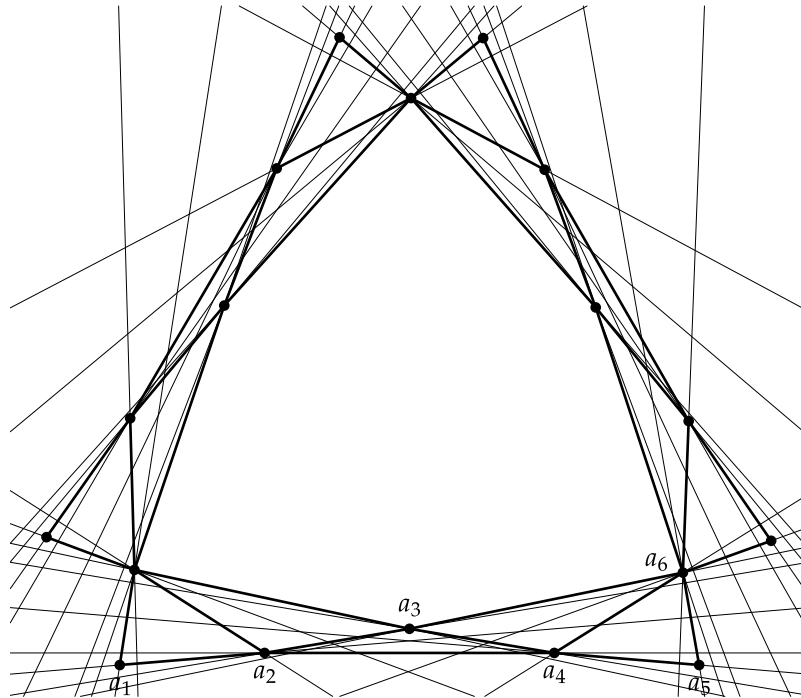


Figura 5.20:  $S_3^3$  con 18 puntos y  $\mathcal{N}_3(S_3^3) = 33$ .

También es posible extender nuestra construcción a sólo dos copias de  $H_3$ , una un reflejo vertical de la otra (Figura 5.21).

Dado que  $\mathcal{N}_3(H_3 \setminus \{a_6\}) = 5$ , y que podemos obtener  $2(3)$  extra 3-conjuntos entre cada copia suya poniendo a  $a_6$  como punto pivote, nuestros conjuntos tienen  $n = 6m$  puntos con un número de 3-conjuntos igual a  $11m$ , y por lo tanto su número de 3 conjuntos es  $\frac{11}{6}n$ .

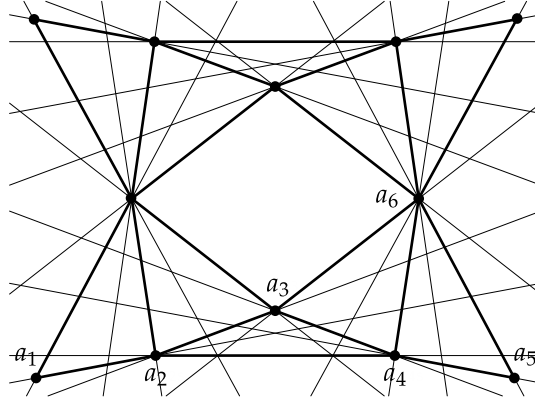


Figura 5.21:  $S_3^2$  con 12 puntos y  $\mathcal{N}_3(S_3^2) = 22$ .

También encontramos maneras de quitar puntos de nuestras construcciones para poder generar conjuntos con  $n$  puntos donde  $n$  no es múltiplo de 6, y tales que su número de 3-conjuntos sea  $\lfloor \frac{11}{6}n \rfloor$ , por lo que  $\mathcal{N}_3(n) \geq \lfloor \frac{11}{6}n \rfloor$  para toda  $n$ . Dado que ésta es también la cota superior para 3-conjuntos, entonces  $\mathcal{N}_3(n) = \lfloor \frac{11}{6}n \rfloor$  exactamente.

*Demostración (Teorema 5.5).* Se sigue del Teorema 5.2, y las propiedades de la Figura 5.19.  $\square$

**Teorema 5.6.**  $\mathcal{N}_3(n) = \lfloor \frac{11}{6}n \rfloor$ .

*Demostración.* Se sigue del Teorema 5.3 y del Teorema 5.5.  $\square$

### 5.6.2. Cota inferior para $\mathcal{N}_4(n)$

**Teorema 5.7.**  $\mathcal{N}_4(n) \geq \lfloor \frac{16}{33}n \rfloor$ , para toda  $n \equiv 0 \pmod{16}$ ,  $n \geq 48$ .

Para  $k = 4$  nuestro mejor ejemplo comienza a seguir el patrón de la construcción de Tóth; los puntos tienden a estar cerca del cierre convexo del conjunto. De ahí viene el término *abrir*; es como romper una círculo y tratar de convertirlo en una curva convexa. Sin embargo encontrar dónde y cómo separar los puntos es complicado, especialmente porque lo hicimos a mano; no sabemos cómo hacerlo de otra manera.

El conjunto inicial para  $k = 4$  tiene 9 puntos y un número de 4-conjuntos igual a 18; con dos copias conseguimos 18 puntos y un número de 4-conjuntos igual a 36. Abriendo estos 18 puntos logramos conseguir nuestro conjunto  $S_4$  de 15 puntos con un número de 4-conjuntos igual a 29; y de estos 4-conjuntos, 4 de ellos quedan del lado incorrecto y por lo tanto no podemos usarlos.

Por lo tanto, el mejor candidato para el conjunto  $S_4$  es tal que  $|S_4| = 15$ , y  $\mathcal{N}_4(S_4) = 29$  (Figura 5.22).

Las coordenadas de los puntos de  $S_4$  son:

$a_1$ :	50, 601	$a_2$ :	100, 508
$a_3$ :	150, 434	$a_4$ :	200, 303
$a_5$ :	263, 81	$a_6$ :	289, 83
$a_7$ :	392.246, 108.88	$a_8$ :	417.831, 77.325
$a_9$ :	656.392, 44.934	$a_{10}$ :	775, 226
$a_{11}$ :	845.063, 10.438	$a_{12}$ :	900, 272
$a_{13}$ :	950, 459	$a_{14}$ :	1000, 598
$a_{15}$ :	1050, 705		

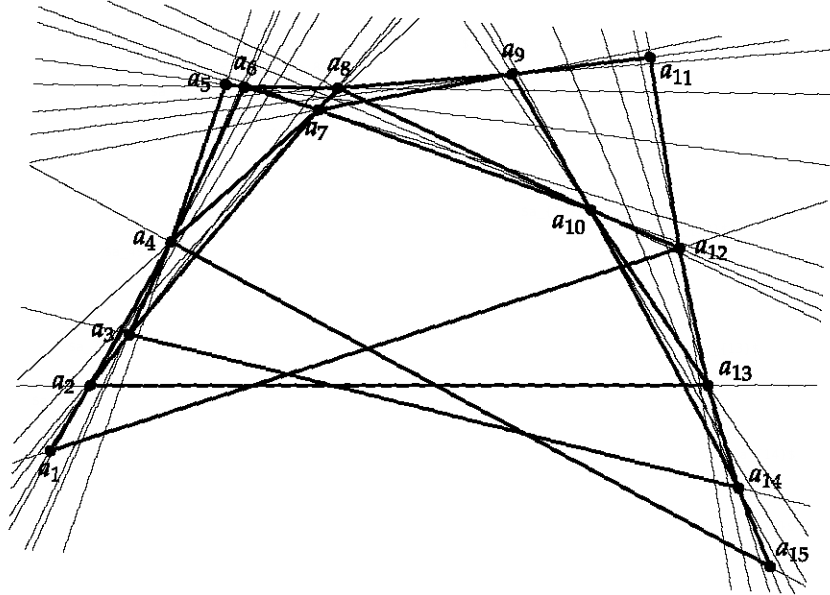


Figura 5.22:  $S_4$  con 15 puntos y  $\mathcal{N}_4(S_4) = 29$ .

De los 4-conjuntos en  $S_4$ , 4 de ellos no los podemos usar, ya que separan 4 puntos que quedan debajo del conjunto; esto nos deja con 25 usables. Los 4 puntos más a la izquierda de este conjunto son equidistantes en la coordenada  $x$ , como también lo son los 4 puntos más a la derecha, por lo que podemos utilizar el Lema 5.4 y el Lema 5.5, y obtener  $2\binom{4}{2}$  extra 4-conjuntos entre cada copia del conjunto usando un punto pivote si (usando el Teorema 5.2) la distancia entre  $a_4$  y  $a_{11}$  al vértice correspondiente en el  $m$ -ágono es de la longitud necesaria:

$$d > \frac{4\binom{3}{2}}{2} = 6.$$

El conjunto resultante tendrá  $n = 16m$  puntos y un número de 4-conjuntos igual a  $33m$ : podemos ver un ejemplo con  $m = 3$  en la Figura 5.23.

Dado que no hemos podido encontrar todos los ejemplos donde  $n$  no es un múltiplo de 16 de tal forma que tengan un número de 4-conjuntos igual a  $\lfloor \frac{33}{16}n \rfloor$ , la cota inferior en este caso es un poco menor que esto.

*Demostración (Teorema 5.7).* Se sigue del Teorema 5.2, y las propiedades de la Figura 5.22. □

### 5.6.3. Cota inferior para $\mathcal{N}_5(n)$

**Teorema 5.8.**  $\mathcal{N}_5(n) \geq \lfloor \frac{9}{4}n \rfloor$ , para toda  $n \equiv 0 \pmod{8}$ ,  $n \geq 24$ .

Para  $k = 5$ , el mejor candidato para el conjunto  $S_5$  tiene 7 puntos y 10 "5-conjuntos". Técnicamente no son 5-conjuntos, porque los  $k$ -conjuntos están definidos cuando  $k \leq \frac{n}{2}$ , y en este caso  $n = 7$ ; sin embargo, un 2-conjunto en un conjunto de 7 puntos determina un objeto equivalente a un 5-conjunto (Figura 5.24).

Las coordenadas de los puntos de  $S_5$  son:

5. Cota inferior para 3, 4 y 5-conjuntos en el plano

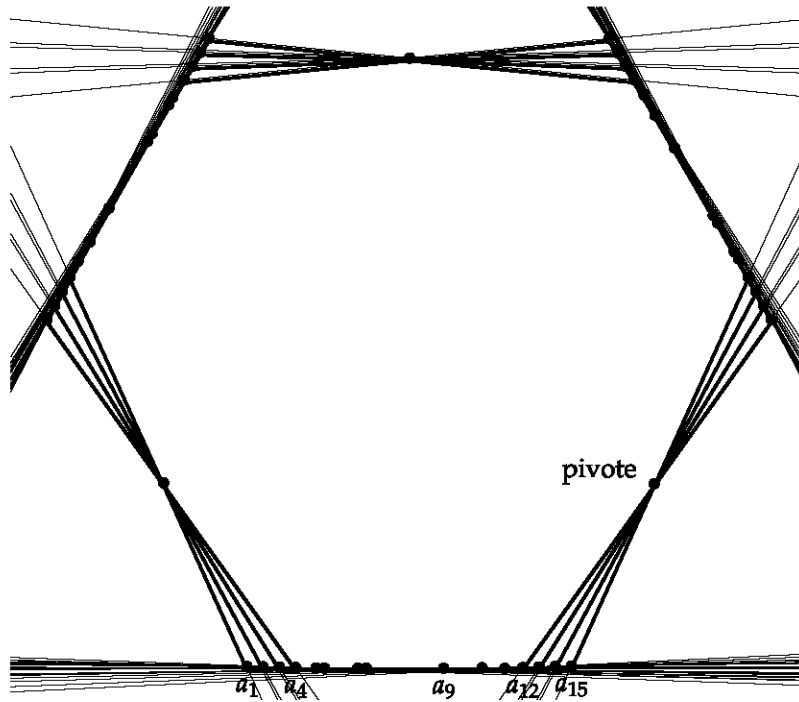


Figura 5.23:  $S_4^3$  con 48 puntos y  $\mathcal{N}_4(S_4^3) = 99$ .

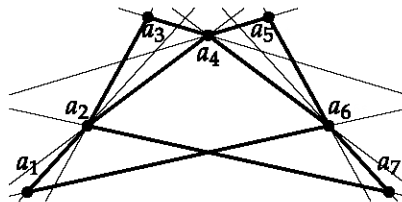


Figura 5.24:  $S_5$  con 7 puntos y 10 "5-conjuntos" (2-conjuntos, técnicamente).

- $a_1$ : 180, 10
- $a_2$ : 250, 85
- $a_3$ : 320, 210
- $a_4$ : 390, 195
- $a_5$ : 460, 210
- $a_6$ : 530, 85
- $a_7$ : 600, 10

Este conjunto tiene un número de 2-conjuntos igual a 10, de los cuales no podemos usar 2, ya que separan a 5 puntos hacia arriba del conjunto. Esto un total de 2-conjuntos usables igual a 8. Como todos los puntos del conjunto pueden colocarse equidistantes en la coordenada  $x$  (como lo están en la Figura 5.24), podemos de nuevo usar el Lema 5.4 y el Lema 5.5, y  $2(5)$  extra 5-conjuntos entre cada copia usando un punto pivote, si (usando el Teorema 5.2) la distancia entre  $a_5$  y  $a_7$  con su correspondiente vértice en el  $m$ -ágono tiene al menos longitud:



$$d > \frac{2(25) - 2 + \sqrt{(2 - 2(25))^2 - 16(125 - 25 - 5 + 1)}}{8} = 2(3 + \sqrt{3}).$$

El conjunto resultante tendrá  $n = 8m$  puntos, con un número de 5-conjuntos igual  $18m$ : podemos ver un ejemplo con  $m = 3$  en la Figura 5.25.

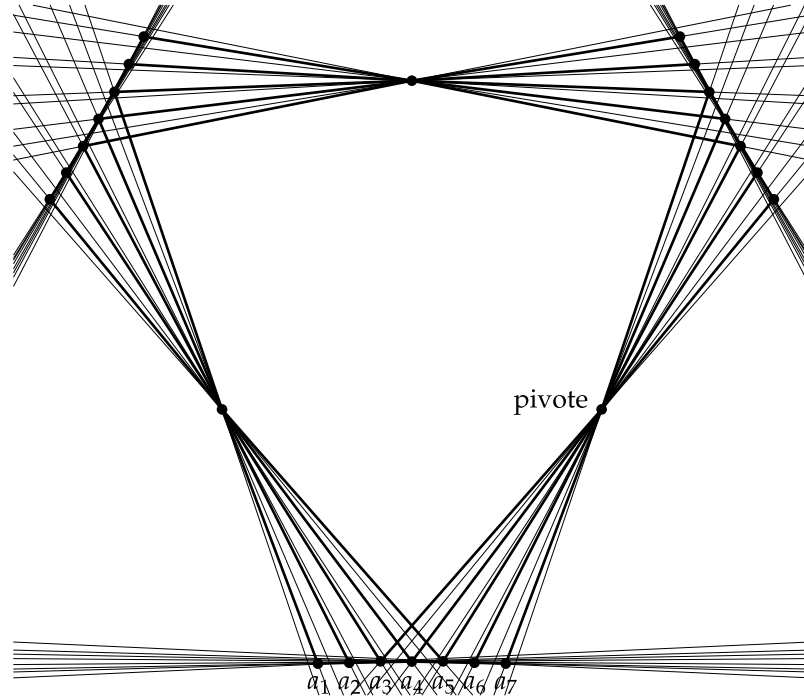


Figura 5.25:  $S_5^3$  con 24 puntos y  $\mathcal{N}_5(S_5^3) = 54$ .

En el caso de  $k = 5$  no hemos sido capaces de encontrar construcciones para  $n$  que no sea múltiplo de 8 y que cumplan con la cota de  $\lfloor \frac{9}{4} \rfloor$ , así que hasta ahora la cota inferior es un poco menor.

*Demostración (Teorema 5.7).* Se sigue del Teorema 5.2, y las propiedades de la Figura 5.24.  $\square$

## 5.7. Mirando hacia adelante

Si tenemos un buen candidato, o en otras palabras, un conjunto con muchos  $k$ -conjuntos, y somos capaces de encontrar una rotación donde perdamos pocos de esos  $k$ -conjuntos porque separen  $k$  puntos hacia abajo, y además podemos manipular los  $k$  puntos más a la izquierda y los  $k$  puntos más a la derecha para que sean equidistantes en la coordenada  $x$ , entonces podemos usar el Lema 5.4 y el Lema 5.5, junto con el Teorema 5.2, y generar familias de conjuntos con muchos  $k$ -conjuntos.

Además, necesitamos encontrar ejemplos para todos los casos cuando  $k = 4, 5$ , y  $n$  no sea múltiplo del candidato que estemos utilizando, para poder definir exactamente la cota inferior.

Del otro lado, usando las capas a los que pertenecen los elementos de una sucesión permisible, podemos también encontrar o mejorar las cotas superiores para  $k$ -conjuntos, y es de las cosas en las que seguimos trabajando.

## 5. Cota inferior para 3, 4 y 5-conjuntos en el plano

---

Todos los resultados de este capítulo son consecuencia directa de trabajar con sucesiones permisibles. Las construcciones de Tóth y Nivasch funcionaron como base para comprender el concepto de pivote, pero fueron las sucesiones permisibles las que nos permitieron mejorar sus cotas al poder manejar libremente los pivotes para poder extraer más  $k$ -conjuntos en cada instancia.

Lo que hicimos después fue regresar este concepto de pivote al caso geométrico, y calcular de forma exacta dónde debíamos colocarlo para que la argumentación de las sucesiones circulares se aplicara a nuestras construcciones. De cierta manera geometrizamos nuestras sucesiones permisibles, bajo ciertas condiciones, y de forma muy específica al problema presentado.

Para las cotas superiores, el uso de sucesiones permisibles es directo, y es el que nos permitió mejorar la cota de Ramos y confirmar la conjetura que hizo en 1996.

## Capítulo 6

# Conclusiones

Los tres problemas presentados en este trabajo de tesis, aunque completamente distintos a primera vista, tienen mucho en común en cómo fueron resueltos y las técnicas que se aplicaron para estudiarlos.

Este hilo en común son las sucesiones permisibles, que sigue siendo en este momento (a pesar de haber sido presentada hace más de treinta años) una herramienta muy poderosa para resolver problemas combinatorios y de Geometría Computacional, y gracias a la cual multitud de resultados han sido descubiertos o mejorados en lo que va de este siglo.

Es nuestro deseo el continuar explorando las técnicas que las sucesiones permisibles presentan en la resolución de otros problemas en el área, y justamente el explotar el hecho de que (como en los dos primeros problemas presentados), muchas veces el problema siendo atacado no parece tener ninguna relación con las sucesiones permisibles.

En particular con los problemas presentados aquí, seguimos trabajando en variantes de los mismos, o en problemas relacionados. Una pregunta básica que surge de estudiar el problema presentado en el Capítulo 3 es: ¿qué tan rápido podemos encontrar el conjunto superior mínimo de *todos* los convexos en el conjunto? De la misma manera, es interesante también preguntarnos qué se puede hacer en tres dimensiones, aunque necesitamos acotar más el problema, pues es sabido que existen conjuntos de cuerpos convexos en el espacio que no se pueden desmantelar en ninguna dirección.

El problema de las capas convexas rectilíneas presentado en el Capítulo 4 es todavía más explotable, dado que muy poco se ha estudiado al respecto. Estamos tratando de analizar el cierre convexo rectilíneo en  $\mathbb{R}^3$ , y por supuesto generalizar las capas a dimensiones superiores también.

Por último, del Capítulo 5 queremos seguir encontrando (o mejorando, de ser posible) las cotas inferiores y superiores para el máximo número de  $k$ -conjuntos en un conjunto de puntos en el plano cuando  $k$  está fija, y tratar de desarrollar un método que nos permita generalizar nuestro método geométrico para no necesitar encontrar primero una instancia concreta de un conjunto pequeño de puntos con muchos  $k$ -conjuntos para una  $k$  dada.

Y más allá de continuar con los problemas vistos aquí, lo más importante es que siempre está la herramienta de tratar de extraer la información combinatoria de un problema en el plano, ver qué ocurre cuando lo rotamos sobre el origen, y determinar si es posible o no actualizar dicha información de forma computacionalmente rápida.

Cabe también mencionar, además del aspecto teórico que se cubre aquí (que es sin duda lo más importante), que el uso de programas de cómputo, casi todos ellos escritos por el autor de este trabajo de tesis, fueron una pieza fundamental para la comprensión y en varios casos solución de los mismos. De los dos primeros problemas aquí presentados, los algoritmos descritos

son fácilmente implementables, y en el problema de las capas convexas rectilíneas, de hecho existe ya un programa completo que las calcula y despliega visualmente en la computadora. En el problema de los  $k$ -conjuntos, varios programas fueron escritos para buscar y verificar los candidatos necesarios para encontrar las cotas inferiores, y para generar ejemplos con varias copias cuando dichos candidatos ya estaban disponibles. Y de hecho, en el Capítulo 2, el Capítulo 4 y el Capítulo 5, la gran mayoría de las figuras presentadas fueron generadas utilizando dichos programas, con sólo algunas modificaciones posteriores para agregarles etiquetas.

Como siempre es con la ciencia, hay mucho trabajo que queda por hacer. Así que aunque esta tesis marca el final de mis estudios de doctorado, no es sino un principio (entre varios otros) de las cosas que tengo que estudiar y los problemas que tendré que resolver en el futuro.

# Bibliografía

- [1] Agarwal, Pankaj K. y Micha Sharir: *Davenport–Schinzel Sequences and Their Geometric Applications*. En Sack, Jorg Rudiger y Jorge Urrutia (editores): *Handbook of Computational Geometry*, capítulo 1, páginas 1–47. Nord Holland, 2000.
- [2] Alegría-Galicia, Carlos, Tzolkin Garduño, Areli Rosas-Navarrete, Carlos Seara y Jorge Urrutia: *Rectilinear convex hull with minimum area*. En *The XIV Spanish Meeting on Computational Geometry*, 2011.
- [3] Bae, Sang Won, Chunseok Lee, Hee Kap Ahn, Sunghee Choi y Kyung Yong Chwa: *Computing minimum-area rectilinear convex hull and L-shape*. *Computational Geometry: Theory and Applications*, 42(9):903–912, 2009.
- [4] Bentley, J.L. y T.A. Ottmann: *Algorithms for Reporting and Counting Geometric Intersections*. *Computers, IEEE Transactions on*, C-28(9):643–647, September 1979, ISSN 0018-9340.
- [5] Buchsbaum, Adam L. y Michael T. Goodrich: *Three-dimensional layers of maxima*. *Algorithmica*, 39(4):275–286, 2004.
- [6] Burton, Geoffrey y George Purdy: *The directions determined by  $n$  points in the plane*. *Journal of the London Mathematical Society*, 20(2):109–114, 1979.
- [7] Chazelle, Bernard: *On the convex layers of a planar set*. *IEEE Transactions on Information Theory*, 31(4):509–517, 1985.
- [8] Chazelle, Bernard, Thomas Ottmann, Eljas Soisalon-Soinen y Derick Wood: *The complexity and decidability of separation*. Informe técnico CS-82-84, University of Waterloo, 1983.
- [9] Cormen, Thomas H., Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest y Clifford Stein: *Introduction to Algorithms*. The MIT Press, second edición, 2001.
- [10] Dawson, Robert: *On removing a ball without disturbing the others*. *Mathematics Magazine*, 57(1):27–30, 1984.
- [11] Demaine, Erik D., Joseph S. B. Mitchell y Joseph O’Rourke: *The Open Problems Project*. <http://cs.smith.edu/~orourke/TOPP/Welcome.html>.
- [12] Dey, Tamal K.: *Improved bounds for planar  $k$ -sets and related problems*. *Discrete & Computational Geometry*, 19(3):373–382, 1998.
- [13] Edelsbrunner, Herbert, Leonidas Guibas, János Pach, Richard Pollack, Raimund Seidel y Micha Sharir: *Arrangements of curves in the plane-topology, combinatorics, and algorithms*. *Theoretical Computer Science*, 92(2):319–336, 1992, ISSN 0304-3975. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/030439759290319B>.

- [14] Edelsbrunner, Herbert y Gerd Stöckl: *The number of extreme pairs of finite point-sets in Euclidean spaces*. Journal of Combinatorial Theory, Series A, 43(2):344–349, 1986.
- [15] Edelsbrunner, Herbert y Emo Welzl: *On the number of line separations of a finite set in the plane*. Journal of Combinatorial Theory, Series A, 38(1):15–29, 1985.
- [16] Erdős, Paul, László Lovász, Gustavus J. Simmons y Ernst G. Straus: *Dissection graphs of planar point sets*. En Srivastava, J. N. y R. C. Bose (editores): *A survey of combinatorial theory*, páginas 139–149. North-Holland, Amsterdam, 1973.
- [17] Foldes, Stephan, Ivan Rival y Jorge Urrutia: *Light sources obstructions and spherical orders*. Discrete Mathematics, 102(1):13–23, 1992.
- [18] Goodman, Jacob E. y Joseph O'Rourke (editores): *Handbook of discrete and computational geometry*. CRC Press, Inc., Boca Raton, FL, USA, 1997, ISBN 0-8493-8524-5.
- [19] Goodman, Jacob E. y Richard Pollack: *On the Combinatorial Classification of Nondegenerate Configurations in the Plane*. Journal of Combinatorial Theory, Series A, 29(2):220–235, 1980.
- [20] Goodman, Jacob E. y Richard Pollack: *The combinatorial encoding of disjoint convex sets in the plane*. Combinatorica, 28:69–81, 2008, ISSN 0209-9683. <http://dx.doi.org/10.1007/s00493-008-2239-7>.
- [21] Guibas, Leonidas J. y F. Frances Yao: *On translating a set of rectangles*. En *Proceedings of the Twelfth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, páginas 154–160, 1980.
- [22] Habert, Luc y Michel Pocchiola: *Arrangements of double pseudolines*. arXiv:1101.1022, 2011.
- [23] Halperin, Dan: *Arrangements*. En Goodman, Jacob E. y Joseph O'Rourke (editores): *Handbook of discrete and computational geometry*, capítulo 21, páginas 389–412. CRC Press, Inc., Boca Raton, FL, USA, 1997, ISBN 0-8493-8524-5. <http://dl.acm.org/citation.cfm?id=285869.285892>.
- [24] Hernández Barrera, Antonio: *Finding an  $o(n^2 \log n)$  Algorithm Is Sometimes Hard*. En *Proceedings of the 8th Canadian Conference on Computational Geometry*, páginas 289–294. Carleton University Press, 1996, ISBN 0-88629-307-3. <http://dl.acm.org/citation.cfm?id=648249.751911>.
- [25] Hurtado, Ferran, Marc Noy y Jorge Urrutia: *Flipping Edges in Triangulations*. Discrete & Computational Geometry, 22(3):333–346, 1999.
- [26] Kung, Hsiang Tsung, Fabrizio Luccio y Franco P. Preparata: *On Finding the Maxima of a Set of Vectors*. J. ACM, 22(4):469–476, 1975. <http://doi.acm.org/10.1145/321906.321910>.
- [27] Lovász, László: *On the number of halving lines*. Annales Universitatis Scientiarum Budapest, Eötvös, Sectio Mathematica, 14:107–108, 1971.
- [28] Matoušek, Jiří: *Computing dominances in  $E^n$* . Information Processing Letters, 38(5):277–278, 1991.
- [29] Nivasch, Gabriel: *An improved, simple construction of many halving edges*. En Goodman, J. E., J. Pach y R. Pollack (editores): *Surveys on Discrete and Computational Geometry: Twenty Years Later*, volumen 453, páginas 299–305. American Mathematical Society, 2008.
- [30] Ottmann, Thomas, Eljas Soisalon-Soininen y Derick Wood: *On the definition and computation of rectilinear convex hulls*. Information Sciences, 33(3):157–171, 1984.

- 
- [31] Overmars, Mark H. y Jan van Leeuwen: *Maintenance of configurations in the plane*. Journal of Computer and System Sciences, 23(2):166–204, 1981.
- [32] Pach, János, William L. Steiger y Endre Szemerédi: *An upper bound on the number of planar  $k$ -sets*. Discrete and Computational Geometry, 7(1):109–123, 1992.
- [33] Peláez, Canek: *Sobre pseudolíneas medianas y configuraciones de puntos*. Tesis de Licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México, México, 2008.
- [34] Peláez, Canek, Adriana Ramírez-Vigueras, Carlos Seara y Jorge Urrutia: *Weak separators, vector dominance, and the dual space*. En *The XIV Spanish Meeting on Computational Geometry*, 2011.
- [35] Preparata, Franco P. y Michael Ian Shamos: *Computational Geometry: An Introduction*. Springer-Verlag New York, Inc., New York, NY, USA, 1985, ISBN 0-387-96131-3.
- [36] Ramos, Edgar Arturo: *The number of extreme triples of a planar point set*. Discrete & Computational Geometry, 16(1):1–19, 1996, ISSN 0179-5376. <http://dx.doi.org/10.1007/BF02711130>.
- [37] Rival, Ivan y Jorge Urrutia: *Representing orders on the plane by translating convex figures*. Order, 4(4):319–339, 1988.
- [38] Scott, Paul: *On the sets of directions determined by  $n$  points*. American Mathematical Monthly, 77:502–505, 1970.
- [39] Toussaint, Godfried: *Movable Separability of Sets*. En *Computational Geometry*, páginas 335–375. North-Holland, 1985.
- [40] Tóth, Géza: *Point sets with many  $k$ -sets*. Discrete & Computational Geometry, 26(2):187–194, 1999.
- [41] Ungar, Peter:  *$2n$  noncolinear points determine at least  $2n$  directions*. Journal of Combinatorial Theory, Series A, 33:343–347, 1982.
- [42] Urrutia, Jorge: *Partial Orders and Euclidean Geometry*. In *Algorithms and Order*, I. Rival, páginas 387–434, 1987.