



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

---

---

FACULTAD DE INGENIERÍA

ESTUDIO DE UN ROBOT PARA REALIZAR  
MUESTREOS CON TÉCNICAS  
ESPECTROSCÓPICAS

TESIS

*Que para obtener el Título de*

**INGENIERO MECÁNICO**

P R E S E N T A

**VIREN ULISES SIBAJA AGUILERA**

DIRECTOR DE TESIS: M.I. PATRICIO MARTÍNEZ ZAMUDIO



MÉXICO, D. F.

Abril, 2014



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*“La total diferencia entre construcción y creación es exactamente ésta: que una cosa construida sólo puede ser amada después de ser construida; pero, una cosa creada es amada antes de que exista”.*

Gilbert Keith Chesterton

*“El diseño no es solo lo que se ve o se siente. Diseño es cómo funciona”.*

Steve Jobs

*“Ningún modelo es exacto, pero muchos modelos son útiles”.*

Anónimo

*”Lo último que uno sabe, es por donde empezar”.*

Blaise Pascal L.

# AGRADECIMIENTOS

*A la Fortuna por permitirme disfrutar de esta aventura tan bella.*

*A mis padres: Laura y Rolando que han luchado tanto para que esto sea una realidad. Por su alegría, consejos y amor incondicional.*

*A mi querida hermana Kathy con la que he compartido millones de risas, charlas, tristezas y un idealismo quijotesco.*

*A mi tía Dalila por su amor y compañía.*

*A Angelina y Clemencia por sus cálidos cuidados en mi niñez.*

*A mis amigos; los de toda la vida (Noé, Héctor, Rodrigo, Azucena y Julio), a los que me han fortalecido (Carlos, Hugo, Irvin, Yahir y Maricela), con los que luche codo a codo en la facultad (Sacnite, Ivonne, Gerardo, Andrés, Ever y Rene). A todos ellos por haber tocado mi corazón; ingrediente que materializó este trabajo para que de vosotros sea un aliciente.*

*A la Universidad Nacional Autónoma de México por la educación, disciplina y amor que me han infundado por la ingeniería.*

*A los profesores de la Facultad de Ingeniería que me guiaron a la playa dónde mis ojos han dado cuenta de un mar de conocimientos.*

*A mi asesor M.I. Patricio Martínez por creer en mí, sus observaciones y consejos para llevar a buen término esta tesis.*

*A M.I. Gerardo Daniel Rayo y Dr. José Luis Ruvalcaba del Instituto de Física de la UNAM, por la confianza y otorgarle sentido a esta tesis.*

*Al proyecto IC y TDF PICCO 10-57, Nuevas tecnologías para Estudios no Destructivos In Situ del Patrimonio Cultural.*



# ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS .....	V
ÍNDICE DE TABLAS.....	VII
RESUMEN .....	VIII
INTRODUCCIÓN.....	X
OBJETIVOS.....	XI
1. ANTECEDENTES .....	1
1.1. Proyecto ANDREAH.....	1
1.1.1. Importancia del Análisis de Materiales para el Arte y la Historia.....	1
1.1.2. Objetivo del proyecto ANDREAH.....	2
1.1.3. ¿Por qué es útil un análisis in situ?.....	2
1.1.4. Principales proyectos de investigación.....	2
1.1.5. Técnicas analíticas .....	2
1.1.6. Fases de las técnicas no destructivas .....	3
1.2. Espectroscopia Raman .....	3
1.3. Robots .....	4
1.3.1. Clasificación de los robots.....	5
1.3.2. Subsistemas de los robots.....	10
1.3.3. Características principales de un robot.....	12
2. DISEÑO CONCEPTUAL DEL ROBOT.....	13
2.1. Necesidades a cubrir con el diseño .....	13
2.1.1. Condiciones de trabajo .....	13
2.1.2. Formas de muestreo.....	16
2.2. Necesidades y especificaciones técnicas .....	19
2.3. Generación de alternativas de solución .....	23
2.3.1. Evaluación de las configuraciones de robots.....	24
2.3.2. Configuración propuesta.....	26
3. MODELADO CINEMÁTICO Y DINÁMICO DEL ROBOT .....	29
3.1. Introducción .....	29
3.2. Posiciones articulares del robot PRRR .....	30

3.3.	Cinemática directa .....	31
3.3.1.	Transformador de coordenadas .....	32
3.3.2.	Método de Denavit y Hartenberg (D-H).....	34
3.3.3.	Obtención de los parámetros de D-H para el robot PRRR propuesto .....	37
3.4.	Posición del Efector final del robot PRRR .....	41
3.5.	Cinemática Inversa .....	43
3.5.1.	División del problema de posición del Efector final del robot PRRR .....	44
3.6.	Análisis de Velocidades y Aceleraciones .....	50
3.6.1.	Velocidades y Aceleraciones del Efector Final a lo largo de una ruta .....	50
3.6.2.	El Jacobiano y las Velocidades Articulares.....	54
3.6.3.	El Hessiano y las Aceleraciones Articulares .....	60
3.7.	Análisis dinámico .....	63
3.7.1.	Formulación dinámica por Lagrange.....	63
4.	SIMULACIÓN Y RESULTADOS .....	75
4.1.	Simulación .....	75
4.2.	Procedimiento para seleccionar un sistema de transmisión.....	77
4.3.	Interfaz de simulación del robot PRRR .....	93
	CONCLUSIONES Y TRABAJO A FUTURO .....	102
	Conclusiones.....	102
	Trabajo a futuro.....	103
	BIBLIOGRAFÍA .....	104
	ANEXO A Grados de libertad y tipos de articulaciones .....	105
	ANEXO B Matriz de rotación y operaciones con Transformaciones .....	108
	ANEXO C Parámetros de D-H para el robot PRRR .....	112
	ANEXO D Calculo del Jacobiano para un robot de n eslabones .....	115
	ANEXO E Obtención de las expresiones del modelo dinámico Lagrangiano .....	118
	ANEXO F Cotización del Robot Motoman MH6.....	122
	ANEXO G Gráficas de Par contra tiempo del robot .....	125
	ANEXO H Programas realizados en el software ©Mathematica.....	130
	ANEXO I Hoja técnica del Espectrómetro Raman .....	136
	ANEXO J Planos del Robot PRRR-CAD2 .....	139

# ÍNDICE DE FIGURAS

<i>Figura 1</i> Metodología empleada en el proyecto <i>ANDREAH</i> .....	3
<i>Figura 2</i> Diagrama funcional de la espectroscopia Raman.....	4
<i>Figura 3</i> Clasificación general de robots.....	5
<i>Figura 4</i> Vehículo <i>AGV</i> comercial.....	5
<i>Figura 5</i> Aplicaciones de los robots paralelos.....	6
<i>Figura 6</i> Robot <i>ASIMO</i> .....	6
<i>Figura 7</i> Manipulador robótico y sus partes equivalentes en el cuerpo humano.....	7
<i>Figura 8</i> Un brazo de robot cartesiano y su espacio de trabajo.....	8
<i>Figura 9</i> Brazo de robot cilíndrico dentro de su volumen de trabajo.....	8
<i>Figura 10</i> Robot esférico con su volumen de trabajo.....	9
<i>Figura 11</i> Un brazo de robot articulado con su espacio de trabajo.....	9
<i>Figura 12</i> Subsistemas de robots y sus interacciones.....	11
<i>Figura 13</i> Diagrama de bloques de los componentes de un manipulador robótico.....	12
<i>Figura 14</i> Soporte usado actualmente para el espectrómetro.....	13
<i>Figura 15</i> Posicionamiento manual del espectrómetro.....	14
<i>Figura 16</i> Distancia entre el espécimen y el espectrómetro.....	14
<i>Figura 17</i> Las dos áreas máximas de trabajo del espectrómetro (en azul).....	15
<i>Figura 18</i> Área de muestreo (en verde).....	15
<i>Figura 19</i> La zona de muestreo está representada por un recuadro mallado.....	16
<i>Figura 20</i> Formas de muestreo en el plano. Con rojo los puntos a muestrear.....	17
<i>Figura 21</i> Ejemplos de muestreos sobre el plano.....	17
<i>Figura 22</i> Muestreo del perfil de una escultura.....	18
<i>Figura 23</i> Robot esférico descartando su junta rotacional y en morado la junta a agregar.....	24
<i>Figura 24</i> Robot <i>RRR</i> y sus limitaciones.....	25
<i>Figura 25</i> Robot con 3 juntas rotacionales evadiendo un obstáculo.....	25
<i>Figura 26</i> Robot <i>PRRR</i> propuesto.....	27
<i>Figura 27</i> Dimensiones de instalación del robot <i>PRRR</i> .....	27
<i>Figura 28</i> Dimensiones del robot <i>PRRR</i> .....	28
<i>Figura 29</i> Volumen de trabajo del robot <i>PRRR</i> .....	28
<i>Figura 30</i> Variables articulares y sus correspondientes ejes de rotación y traslación para el robot.....	30
<i>Figura 31</i> Cinemática directa del robot <i>PRRR</i> propuesto.....	32



<i>Figura 32</i> Posición del centro de masa de un eslabón .....	33
<i>Figura 33</i> Sistemas de coordenadas que se definieron de acuerdo a la convención de D-H .....	35
<i>Figura 34</i> Asignación de marcos de referencia empleados en el método D-H.....	36
<i>Figura 35</i> Posición y orientación del Efector final.....	42
<i>Figura 36</i> Cinemática directa del robot PRRR propuesto .....	43
<i>Figura 37</i> División del problema de la cinemática inversa .....	45
<i>Figura 38</i> Configuraciones del robot RRR para su análisis cinemático.....	46
<i>Figura 39</i> El concepto de $\mathbf{P} = f(s(t))$ al moverse el efector final por los puntos azules.....	51
<i>Figura 40</i> Efectos de la forma de la función de coordenada de ruta unitaria,.....	52
<i>Figura 41</i> Velocidades y aceleraciones del efector final y articulares .....	56
<i>Figura 42</i> Imagen del ensamble del CAD1 en ©Solidworks.....	79
<i>Figura 43</i> Diagrama de la solución de la Cinemática Inversa .....	81
<i>Figura 44</i> Posición inicial y final del robot PRRR(CAD1) a lo largo de una ruta .....	82
<i>Figura 45</i> Motor y Reductor armónico de la empresa Harmonic Drive .....	87
<i>Figura 46</i> CAD en ©Solidworks del motor propuesto para el hombro y codo .....	87
<i>Figura 47</i> CAD en ©Solidworks del motor propuesto para la muñeca .....	87
<i>Figura 48</i> CAD2 en Solidworks considerando motores y pesos que simulan el sistema de reducción .....	88
<i>Figura 49</i> Coordenadas de puntos clave dentro del volumen de trabajo del robot .....	89
<i>Figura 50</i> Imagen del robot PRRR siguiendo la Ruta1 (fig. izq) y la Ruta 2 (fig. derecha).....	90
<i>Figura 51</i> Organigrama del menú de la Interfaz del simulador del robot PRRR.....	93
<i>Figura 52</i> Despliegue del Menú 1 y el Menú 2.....	94
<i>Figura 53</i> Interfaz para ingresar dimensiones del robot y visualizar la cinemática inversa.....	95
<i>Figura 54</i> Ingreso de coordenadas x-y-z para los puntos que definen las trayectorias .....	96
<i>Figura 55</i> Animación del robot siguiendo trayectorias rectas.....	97
<i>Figura 56</i> Resultados de la simulación, siguiendo trayectorias rectas .....	98
<i>Figura 57</i> Interfaz para definir el área rectangular que seguirá el robot.....	99
<i>Figura 58</i> Animación del robot barriendo en zigzag un área rectangular.....	100
<i>Figura 59</i> Resultados de Fuerza y Par del robot al recorrer el área rectangular.....	101

# ÍNDICE DE TABLAS

<i>Tabla 1</i> Necesidades a cubrir con el diseño.....	19
<i>Tabla 2</i> Especificaciones técnicas y su importancia relativa.....	20
<i>Tabla 3</i> Correlación entre las especificaciones técnicas y las necesidades.....	21
<i>Tabla 4</i> Especificaciones con su menor mínimo esperado.....	22
<i>Tabla 5</i> Comparación de brazos de robots fundamentales.....	23
<i>Tabla 6</i> Parámetros de Denavit y Hartenberg (D-H).....	37
<i>Tabla 7</i> Parámetros de Denavit- Hartenberg para el robot PRRR propuesto.....	38
<i>Tabla 8</i> Descripción de los parámetros de D - H para el robot PRRR propuesto.....	38
<i>Tabla 9</i> Parámetros D-H del centro de masa de los eslabones.....	65
<i>Tabla 10</i> Distribución de masa de los eslabones del CAD1.....	78
<i>Tabla 11</i> Condiciones de la ruta del CAD1.....	82
<i>Tabla 12</i> Posiciones, velocidades y aceleraciones del Efector final del CAD1.....	84
<i>Tabla 13</i> Velocidades y aceleraciones articulares del CAD1.....	85
<i>Tabla 14</i> Gráfica del Par en el Hombro [N m] Vs t[s].....	86
<i>Tabla 15</i> Especificaciones técnicas de los motores HarmonicDrive seleccionados.....	87
<i>Tabla 16</i> Distribución de masa de los eslabones del CAD2.....	88
<i>Tabla 17</i> Pares y velocidades angulares de la Ruta 1 del CAD2.....	90
<i>Tabla 18</i> Pares y velocidades angulares de la Ruta 2 del CAD2.....	90
<i>Tabla 19</i> Gráfica de fuerza aplicada a la base móvil [N] Vs tiempo [s].....	92

# RESUMEN

Esta tesis versa sobre el modelado y simulación de un robot manipulador, empleado para posicionar, de manera automática, un aparato de instrumentación llamado espectrómetro Raman que sirve para el análisis no destructivo en estudios de arte, arqueología e historia. El aparato debe posicionarse en diferentes puntos a lo largo de un objeto, para analizar su composición. Se realiza el diseño conceptual y una primera propuesta de un robot que cumpla con las especificaciones que el Instituto de Física solicita.

A continuación se describe brevemente cada uno de los capítulos que componen esta tesis.

El capítulo uno, Antecedentes se divide en dos partes: en la primera se describe qué es el proyecto ANDREAH (Análisis No Destructivo para Estudios de Arte, Arqueología e Historia) que se lleva a cabo en el Instituto de Física de la UNAM; su importancia, forma de trabajo y las técnicas que utilizan. La segunda parte del capítulo habla sobre los robots; su definición, clasificación, los subsistemas que lo componen y las principales características que se necesitan tomar en cuenta para seleccionar un robot comercial.

En el capítulo dos, se realizó el diseño conceptual del robot. En este apartado se recolectó información para saber cuáles son las necesidades que tiene que cubrir el robot a diseñar. Se describen las condiciones actuales en que se toman las muestras, empleando el aparato de instrumentación llamado espectrómetro Raman (o bien otro tipo de espectrómetro), así como el tipo de objetos que se analizan. Se plantearon las especificaciones técnicas con las necesidades encontradas y se generaron algunas alternativas de solución. Finalmente se seleccionó una alternativa de la configuración del robot.

En el capítulo tres, Modelado del robot, se realiza el modelado cinemático y dinámico del robot propuesto en el capítulo dos. Se resolvió la cinemática directa (dado el valor de las articulaciones se halla la posición del espectrómetro). La cinemática inversa (basta con conocer la posición del espectrómetro para encontrar el valor de las variables articulares). En la solución de la posición para la cinemática directa se emplearon las matrices de transformación y en la cinemática inversa un método geométrico. Luego se realizó el análisis cinemático en cuestión de las velocidades y aceleraciones de las articulaciones, utilizando la matriz Jacobiana para las velocidades y la Hessiana para las aceleraciones. El Jacobiano y la Hessiana relacionan, respectivamente, la velocidad y la aceleración, del espectrómetro con las de los actuadores. Finalmente se obtuvo el modelo dinámico del robot, a través del método de Lagrange, el cual básicamente es un balance de energía cinemática y potencial. Este modelo proporciona el resultado más importante; la fuerza y par que proporcionan las articulaciones para que el espectrómetro se mueva con cierta aceleración.

El cuarto y último capítulo, Simulación y resultados, emplea el modelo analítico obtenido en el capítulo anterior, se sustituyeron dimensiones y distribución de masa de los eslabones, determinados a través de “dibujar” en © Solidworks 2012 una propuesta del robot. Esta primera propuesta considero únicamente eslabones conformados de perfiles comerciales, acanalados hechos de aluminio. También se propuso una ruta recta a seguir por el espectrómetro; así como las aceleraciones a lo largo de ella.

Con la distribución de masa, velocidades, aceleraciones en las articulaciones y el modelo analítico del capítulo tres, se calculó, con una serie de subprogramas realizados en ©Mathematica 8, las gráficas de fuerza y pares en las articulaciones del robot. Con esto se hizo una selección de motores comerciales y se volvió a realizar el cálculo, pero esta vez incluyendo en el CAD los motores.

Finalmente en este capítulo se describe una interfaz realizada en ©Mathematica 8 en la cual es posible visualizar el movimiento del robot y calcular la fuerza y pares en las articulaciones, para determinadas rutas rectas definidas por el usuario.

# INTRODUCCIÓN

Estudiar la composición de piezas arqueológicas y artísticas que conforman el acervo de nuestro país es de suma importancia con el fin de aplicar técnicas adecuadas para su estudio y preservación. También al estudiar la composición de las piezas es posible reescribir la historia de su manufactura y así revelar su origen, entre otras cosas.

El Instituto de física de la UNAM a través del proyecto ANDREAH han hecho propia la responsabilidad de analizar la composición de colecciones y piezas únicas de museos y acervos nacionales mediante equipos y técnicas de análisis no invasivas (Fluorescencia de Rayos X, Espectroscopia Raman e Infrarroja). La propuesta innovadora de este proyecto es el uso de aparatos portátiles que son capaces de realizar el análisis en el sitio en que se resguarda el objeto.

La caracterización de los materiales que conforman al objeto en estudio requiere entre otros de un instrumento de medición llamado Espectrómetro Raman. Este aparato realiza un muestreo puntual, por lo que analizar un área de interés de la pieza requiere posicionarlo en diferentes lugares a lo largo del objeto. Actualmente el espectrómetro se encuentra montado sobre un tripié, el cual se va ajustando manualmente para que una vez analizado un punto sea movido al siguiente, y así sucesivamente. En un objeto se pueden llegar a muestrear hasta 200 puntos, convirtiéndose en una tarea incómoda para el operador.

Debido a esta situación, se pensó en primera estancia en adquirir un robot comercial que desempeñara la tarea de mover el instrumento de medición. Esto es incosteable pues el costo de un robot comercial que cumpla con la capacidad de carga que se requiere es de \$434,939 (Anexo F), además después de haber consultado varios robots comerciales, se halló que debido a sus dimensiones y peso no cumplen con una característica importante e indispensable para esta aplicación; la portabilidad.

El robot tiene que ser portable, debido a que se trasportara al lugar de resguardo del objeto: museo o zona arqueológica, ahorrándose de este modo una serie de permisos que se tendrían que realizar si la pieza se llevara al laboratorio. También al no trasladar el objeto se minimiza el riesgo de daño del mismo.

El costo y especificaciones especiales, como lo es la portabilidad, ha motivado al Instituto de Física al desarrollo de un robot “hecho a la medida” para el análisis de estas piezas invaluable. Piezas que requieren ser revaloradas como lo que son; una oportunidad para aprender del pasado y apreciar todo lo que hay detrás de lo que tenemos.

Además con un sistema de este tipo se abren otras aplicaciones, como lo es los estudios ambientales y geológicos y análisis in situ en general.

## **OBJETIVOS**

- Generar las especificaciones del diseño del robot que funjan como plataforma sobre la que partirán diseños futuros.
- Plantear una configuración del robot y determinar las fuerzas y pares necesarios para que el robot realice el muestreo de los objetos.
- Diseñar una interfaz de usuario para simular el movimiento del robot.

---

# 1. ANTECEDENTES

---

## 1.1. Proyecto ANDREAH

En nuestro país, se ha revolucionado en los últimos años, el estudio de las colecciones y piezas únicas de los museos y de los acervos nacionales mediante el uso y la optimización de los equipos y las técnicas de análisis no destructivas y no invasivas in situ. Las investigaciones llevadas a cabo por el Instituto de física de la UNAM representa la punta de lanza de esta revolución.

El Instituto de física de la UNAM con el apoyo del proyecto CONACYT U49839-R Móvil: *Metodologías No Destructivas para el estudio In Situ del Patrimonio Cultural*, propició a partir de 2005, el desarrollo de equipos propios y la adquisición de este tipo de aparatos ad hoc. Los equipos son trasladados al acervo – *el laboratorio va al museo* – para llevar a cabo los análisis directamente sin la toma de muestra del objeto de estudio, de manera no destructiva.

En el marco de esta investigación interdisciplinaria, se han aplicado de manera exitosa, un conjunto de metodologías específicas para el estudio de colecciones del patrimonio cultural de acervos mexicanos, y se han formado recursos humanos especializados en este tipo de investigaciones. Esta labor continúa desde el 2010 con el proyecto PAPIIT-UNAM IN403210 Red de Análisis No Destructivo para Estudios en Arte, Arqueología e Historia (ANDREAH), dirigidos por Dr. José Luis Ruvalcaba Sil y con el proyecto IC y TDF PICCO 10-57.

### *1.1.1. Importancia del Análisis de Materiales para el Arte y la Historia*

Los resultados de la investigación proporcionan información sobre los materiales empleados en las diversas épocas, las técnicas de manufactura y tecnologías antiguas, la procedencia de los objetos y materiales, cronologías relativas y absolutas de los objetos, y aspectos de estado de deterioro, métodos de restauración y estrategias de conservación preventiva de colecciones y piezas únicas. De esta manera se revalora el patrimonio cultural e histórico nacional con un impacto positivo en la sociedad.

### ***1.1.2. Objetivo del proyecto ANDREAH***

El proyecto no propone un estudio exhaustivo de las colecciones del patrimonio cultural mexicano, demasiado vasto y complejo. Por el contrario se ha orientado mediante el estudio de colecciones específicas a:

- Desarrollar metodologías e infraestructuras experimentales para la caracterización no destructiva de los materiales de acervos nacionales que integran el patrimonio cultural e histórico de México.
- Integrar grupos de investigación interdisciplinarios y formar recursos humanos especializados para el estudio no destructivo de los materiales del patrimonio cultural e histórico del país.
- Integrar bases de información de los materiales y objetos, así como de las colecciones más relevantes del patrimonio cultural e histórico nacional.

### ***1.1.3. Relevancia del análisis in situ***

Con un análisis in situ se evitan permisos, seguros y traslados. Este estudio se lleva a cabo de manera no destructiva y no invasiva, es decir sin toma alguna de muestra del objeto. Este análisis se puede aplicar a un objeto o a una colección para determinar cuáles son las piezas representativas de la colección para estudios más detallados.

### ***1.1.4. Principales proyectos de investigación***

Dentro del proyecto se han determinado una serie de tópicos principales que actúan como ejes directores para su desarrollo. No obstante, se han abordado además otras colecciones de diversa naturaleza.

Los ejes directores se mencionan a continuación:

- Análisis de documentos y manuscritos, incluyendo códices y libros antiguos.
- Caracterización de artefactos metálicos prehispánicos (tecnologías y aleaciones).
- Estudios de pigmentos y técnicas pictóricas de pintura de caballete colonial, siglo XIX y moderna.
- Estudios de procedencia de lítica (obsidiana, piedras verdes, turquesas).

### ***1.1.5. Técnicas analíticas***

Las técnicas analíticas involucradas en el proyecto ANDREAH para el análisis de obras de arte, arqueología e historia, son las siguientes:

- Técnicas de imágenes con luz ultravioleta (UV) e infrarroja (IR).
- Espectroscopia UV-VIS-IR. Colorimetría.
- Fluorescencia de Rayos X portátil XRF (sistema SANDRA).
- Espectroscopía Raman.



- Espectrometría Infrarroja con Transformada de Fourier (FTIR) transportable.
- Técnicas con Haces de iones (PIXE, RBS, PIGE, IOL) en el Laboratorio del Acelerador Pelletrón.

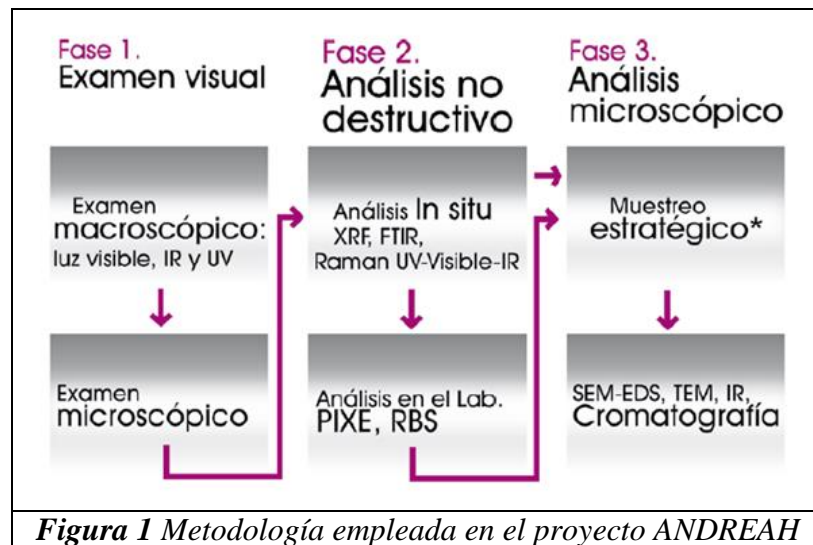
### 1.1.6. Fases de las técnicas no destructivas

Un estudio con técnicas no destructivas generalmente involucra dos fases:

- La primera fase consiste en la realización de exámenes con técnicas de imágenes para la realización de una prospección general del objeto en sus distintas regiones.
- La segunda etapa de análisis consiste en el uso de técnicas instrumentales en áreas representativas; en este momento se establecen las técnicas más adecuadas y su secuencia de aplicación; se obtienen cientos de mediciones complementarias utilizando distintas técnicas lo que permite verificar la validez de los resultados obtenidos y se obtiene un conocimiento general del objeto.

Tras esta fase es factible determinar si la información obtenida es suficiente para resolver la interrogante o si se requiere un estudio no destructivo y no invasivo en el laboratorio (con el consecuente traslado de la pieza).

El siguiente esquema muestra las fases que involucran en el análisis de algún objeto.



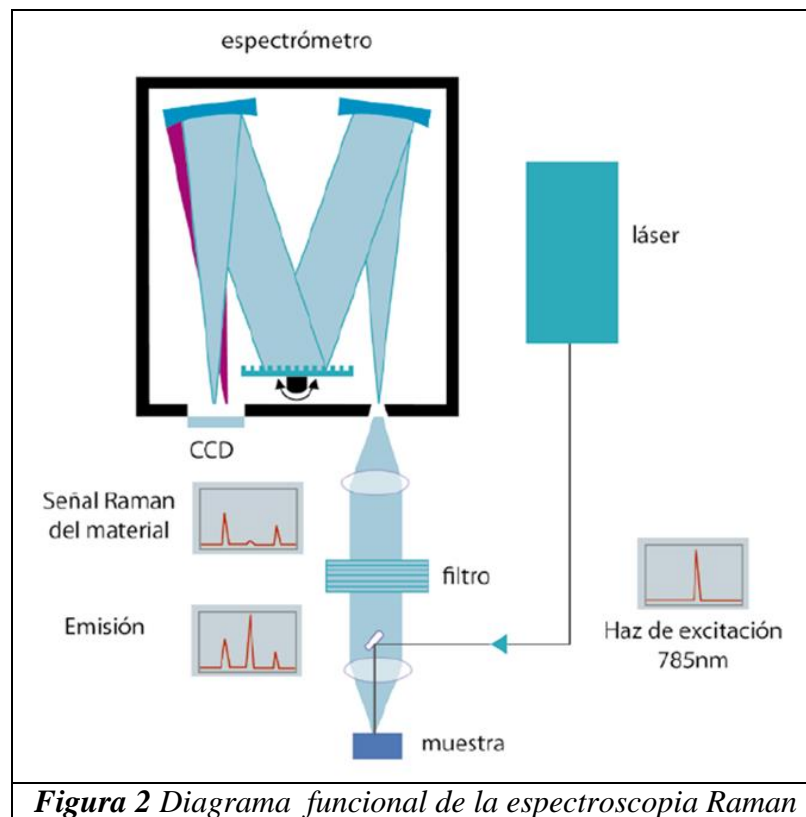
## 1.2. Espectroscopia Raman

A continuación se hablara en particular de la espectroscopia Raman debido a que el aparato (del mismo nombre) que se emplea para analizar alguna pieza, es el más factible de automatizar dadas sus dimensiones y peso.

Con la espectroscopia Raman se determina la presencia de un mineral o un compuesto en el material, a partir de la dispersión tras la interacción energética de un haz laser, dando lugar a vibraciones de los enlaces moleculares. Es útil para materiales orgánicos e inorgánicos.

En el laboratorio del Instituto de Física se cuenta con un sistema portátil Raman Inspector, Delta Nu, laser 785 nm potencia máxima 120mW resolución de 8  $\text{cm}^{-1}$ , en el intervalo espectral 200-2000 longitudes de onda. Pueden analizarse sólidos, líquidos y regiones pequeñas con un microscopio. La hoja técnica del espectrómetro Raman se incluye en el Anexo B.

A continuación se muestra un diagrama funcional de este espectrómetro:



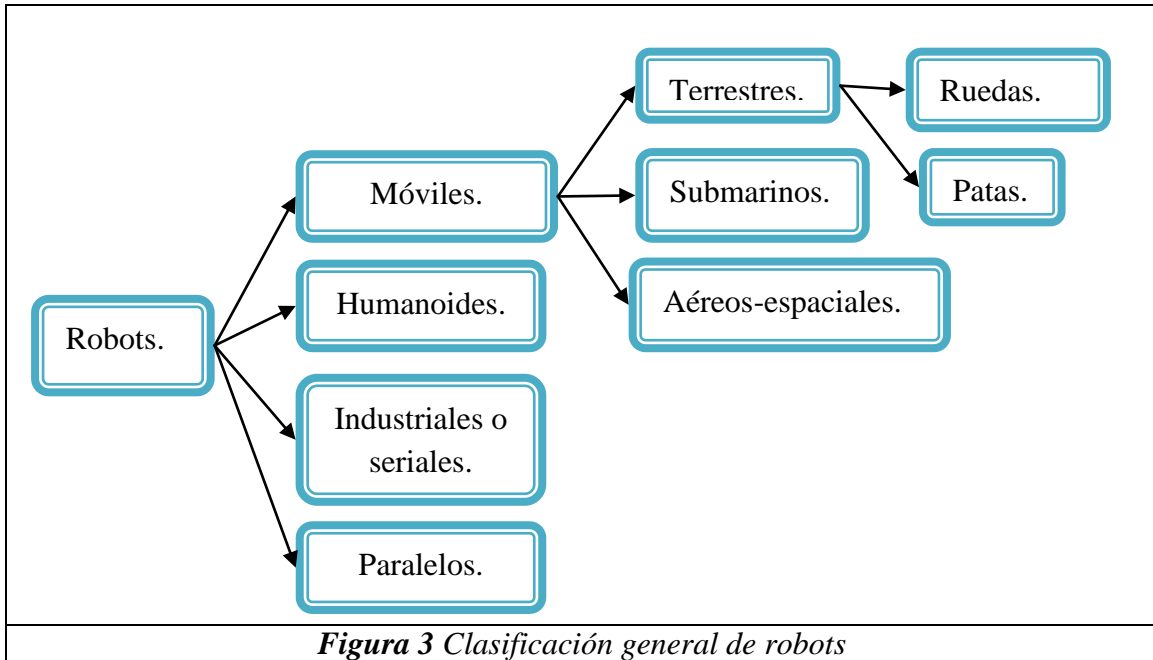
*Figura 2 Diagrama funcional de la espectroscopia Raman*

### 1.3. Robots

El robot se define de manera formal en la Organización Internacional para la Estandarización (ISO), como un manipulador reprogramable, capaz de mover material, piezas, herramientas o dispositivos especiales, a través de movimientos variables programados, para el desempeño de tareas diversas.

### 1.3.1. Clasificación de los robots

Actualmente existen una gran variedad de robots con diversas estructuras geométricas y mecánicas que definen su funcionalidad y aplicación. Sin embargo, de manera general pueden ser clasificados como se muestra en el siguiente diagrama.



#### 1.3.1.1. Vehículos guiados automáticamente (AGV)


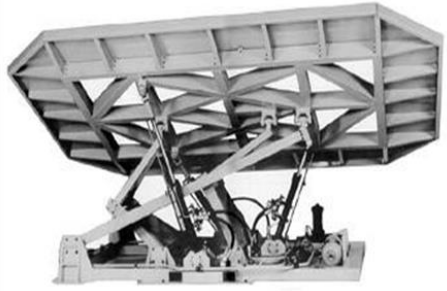
“Son sistemas robóticos móviles con ruedas que se usan comúnmente para el manejo de materiales en fábricas. Por lo general estos AGV siguen una trayectoria que está señalada en el piso de la nave.” [1]



#### 1.3.1.2. Robots paralelos

“Estos robots tienen una configuración paralela. Un robot caminante con todas sus patas en contacto con el suelo es un robot paralelo.

Estos robots también se usan como máquinas herramienta, como muestra la **Figura 5.**”[1]

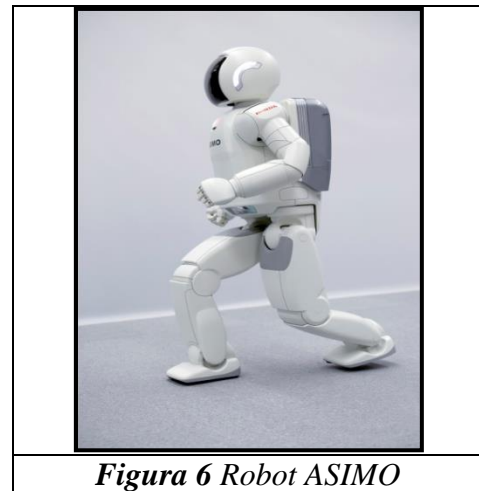
	
<p>A) Robot paralelo que funciona como fresadora</p>	<p>B) Robot paralelo que funciona como un simulador de vuelo</p>
<p><b>Figura 5</b> Aplicaciones de los robots paralelos</p>	

### 1.3.1.3. Robots humanoides

“Son máquinas antropomórficas capaces de imitar las funciones básicas del ser humano, tales como caminar, hablar, ver, recolectar, limpiar y trasladar objetos.

Los androides actuales poseen la capacidad de realizar actividades complicadas, por ejemplo, ejecutar actividades de danza o hasta correr y alcanzar velocidades de 6 km/hr, como es el caso del robot ASIMO (*AdvancedStep in InnovateMobility*).

El principal potencial del androide ASIMO es que puede ser empleado en auxiliar a personas en zonas de desastre.”[2]



**Figura 6** Robot ASIMO

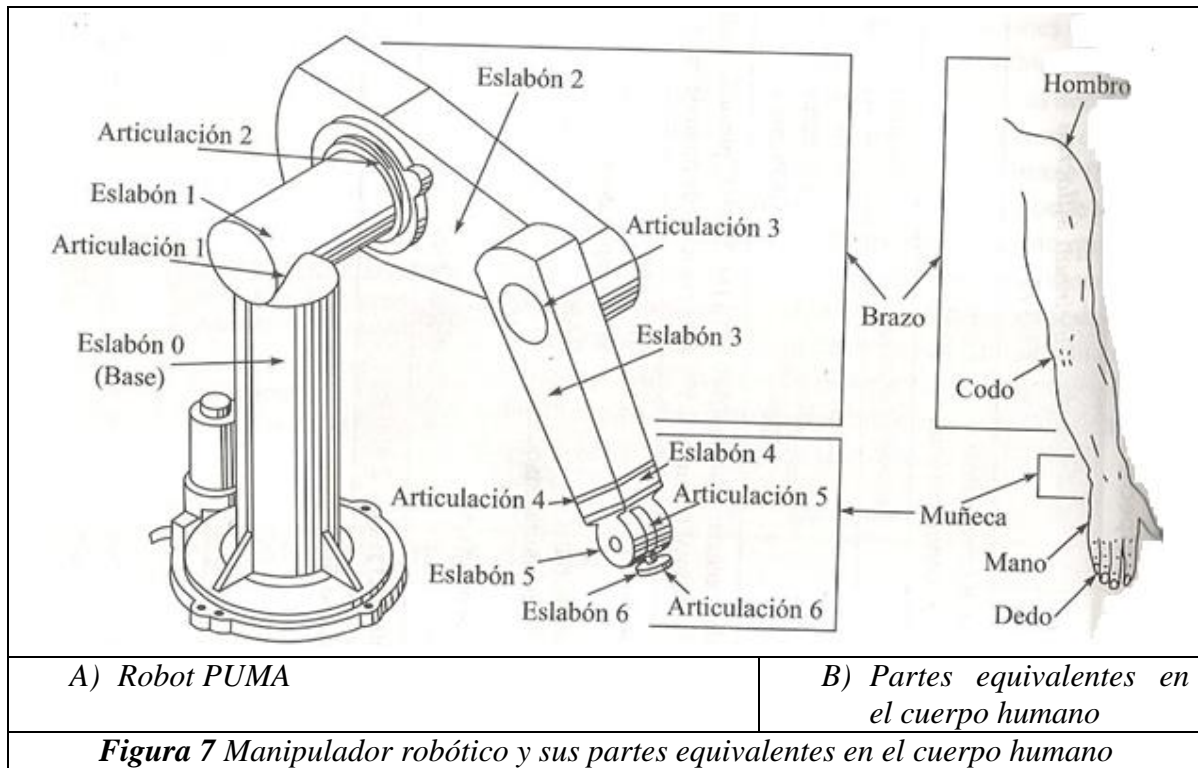
### 1.3.1.4. Robots industriales o seriales

“Un robot serial se compone de varios eslabones que se conectan en forma serial mediante articulaciones. Los grados de libertad del robot (G.D.L.) dependen del número y tipos de eslabones y articulaciones, así como de la cadena cinemática del robot.”[1]

“Los robots industriales también son conocidos como brazos robots o brazos mecánicos, por analogía con el brazo humano, se componen de la base la cual puede rotar 360° alrededor de su eje de giro, además de que poseen articulaciones para el hombro y codo. En

el extremo final del codo tienen una parte mecánica denominada muñeca que le permite orientar la herramienta final.”[2]

La siguiente imagen muestra un robot PUMA y sus partes equivalentes con el cuerpo humano, referencia [5].



Entre las compañías más importantes que diseñan y construyen robots industriales se encuentran FANUC, ABB, KUKA, MOTOMAN, EPSON.

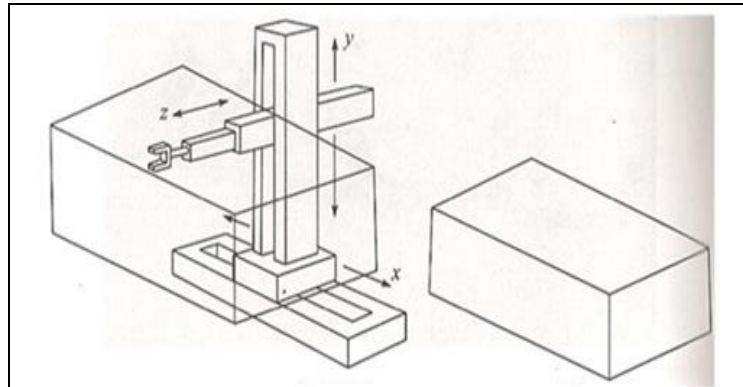
Otra clasificación que se emplea para los robots, considera el **sistema de coordenadas** que emplea el robot para mover su “mano”. A continuación se muestra esta clasificación y una prevé descripción de cada una de ellas.

### 1.3.1.5. Cartesiano (PPP)

Las tres juntas que tiene son prismáticas.

Este tipo de robot se mueve de modo rectilíneo en las direcciones de coordenada x-y-z del sistema de coordenadas cartesianas rectangulares diestra.

Su espacio de trabajo tiene la forma de una caja o prisma rectangular, como indica la **Figura 8**.



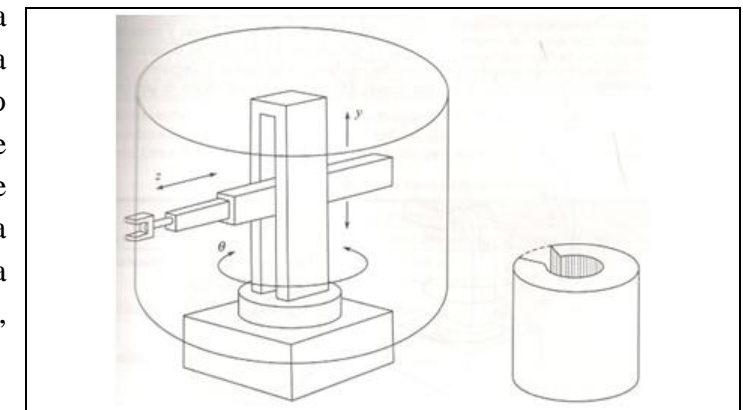
A) Configuración del brazo	B) Caja rectangular
----------------------------	---------------------

**Figura 8** Un brazo de robot cartesiano y su espacio de trabajo

### 1.3.1.6. Cilíndrico (RPP)

El brazo de este robot tiene una articulación revoluta en la base, la cual le permite girar en una plano paralelo al suelo, y montado sobre esté una junta prismática que le permite elevación, mientras que la extensión la ejecuta una junta prismática que es paralela al suelo, tal y como indica la **Figura 9**.

Su espacio de trabajo es un cilindro hueco.



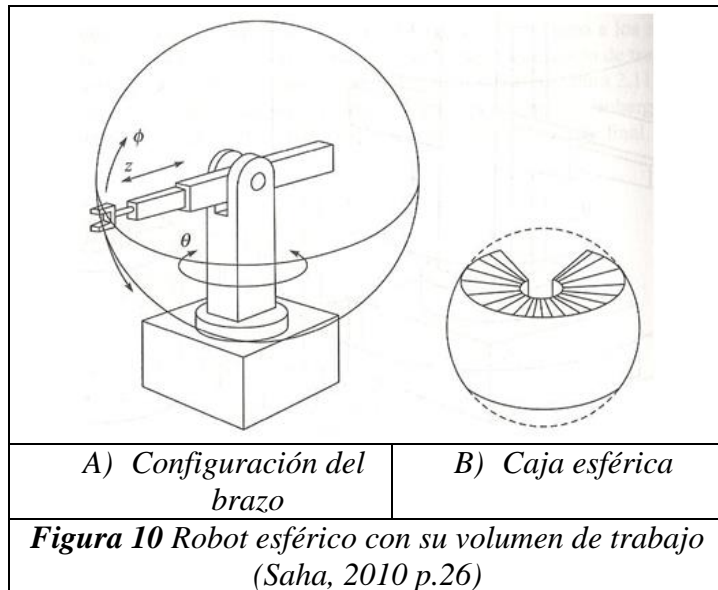
A) Configuración del brazo	B) Forma cilíndrica
----------------------------	---------------------

**Figura 9** Brazo de robot cilíndrico dentro de su volumen de trabajo

1.3.1.7. *Esférico polar (RRP)*

Este cuenta con una articulación revoluta que le permite girar sobre un plano paralelo al suelo, luego una junta revoluta que le permite inclinarse, tal y como nos permite el hombro levantar el brazo. Finalmente conectado a este una junta prismática, para así extender su alcance.

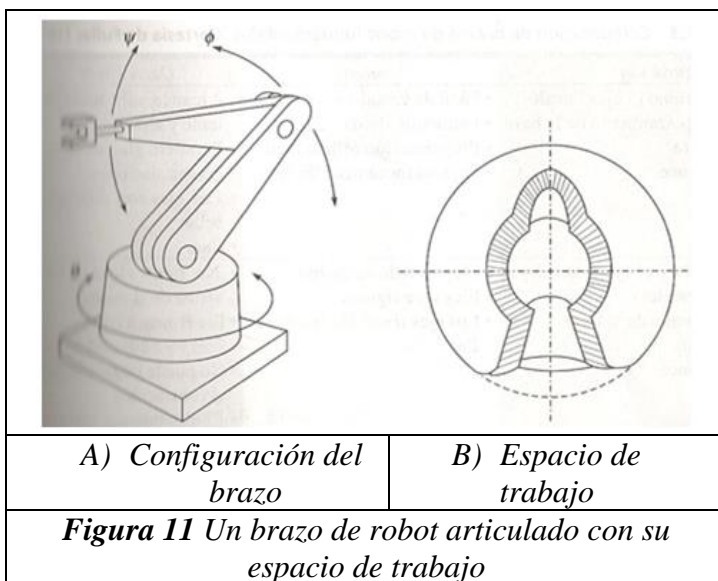
Su espacio de trabajo se aproxima a una esfera hueca tal y como se muestra en la **Figura 10**.



1.3.1.8. *Articulado o serial (RRR)*

Este robot también cuenta con una base giratoria y sus tras dos articulaciones revolutas permiten el giro de sus eslabones en un plano perpendicular al suelo.

Su espacio de trabajo se observa en la **Figura 11**.



### ***1.3.2. Subsistemas de los robots***

Los subsistemas principales de un manipulador robótico son los siguientes

#### **1. Subsistema de movimiento.**

Es el mecanismo para transmitir movimiento del actuador a la herramienta.

Los elementos de este subsistema son:

- i. Manipulador: Se trata de la estructura física o mecanismo que se está moviendo, la cual incluye eslabones y articulaciones.
  - Eslabones: Son los cuerpos individuales que conforman un robot y que poseen por lo menos dos nodos, que son los puntos de unión con otros eslabones. Los eslabones están hechos generalmente de material rígido como el aluminio o acero.
  - Articulaciones: De manera genérica, en la cinemática, se denominan juntas o pares cinemáticas. Su función es acoplar dos eslabones y proporcionar las restricciones físicas para el movimiento relativo entre eslabones.  
Para profundizar sobre los eslabones y tipos de articulaciones ver el Anexo A.
- ii. Efector final: Es la parte instalada en el extremo del manipulador. La mayoría de las veces es una mano mecánica que manipula un objeto o que lo sostiene antes de que sea movido por el brazo del robot. También podría tratarse de un instrumento de medición, un electrodo para soldar, o un dispensador de pintura.
- iii. Actuador: Los actuadores de un robot proporcionan el movimiento para el manipulador y efector final.
- iv. Transmisión: Son elementos que transmiten el movimiento de motores y actuadores a los eslabones del manipulador. Los elementos de transmisión típicos son los siguientes:
  - Transmisión por bandas y poleas.
  - Engranajes.
  - Mecanismos de eslabones.

#### **2. Subsistema de reconocimiento.**

Se compone de sensores para medir las variables que intervienen en el movimiento del robot. A fin de procesar la señal detectada, en su mayoría analógica, por medio de un controlador digital, se requiere un convertidor analógico digital (Analog-to-Digital Convert, ADC). De esta manera, un subsistema de reconocimiento consiste normalmente en los siguientes elementos:

- i. Sensores.

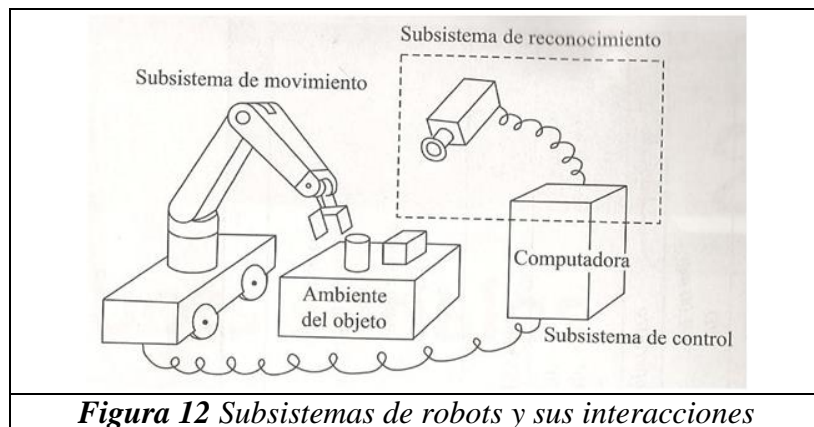


- ii. Convertidor análogo digital (ADC): Comunica los sensores con el controlador del robot.

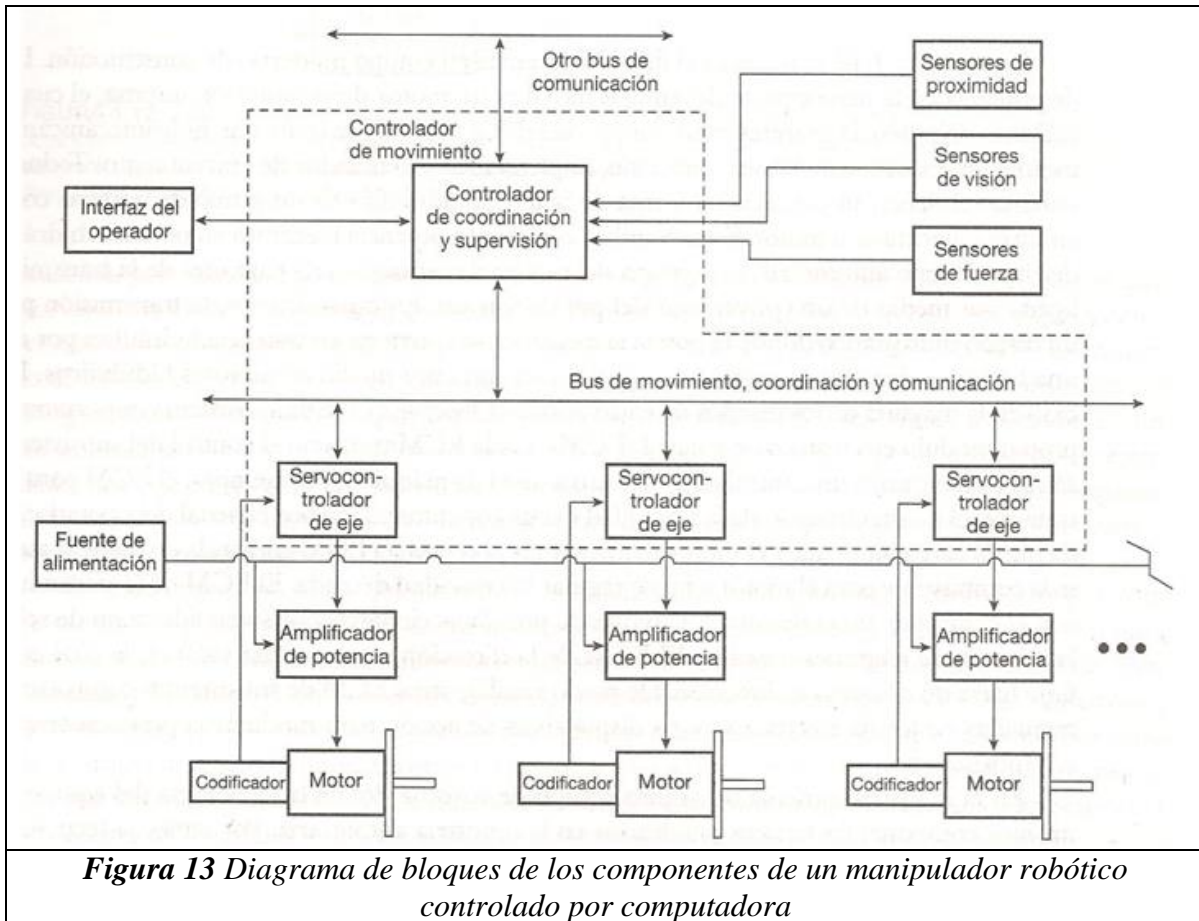
### 3. Sistema de control.

El subsistema de control regula el movimiento del robot con el fin de lograr una determinada tarea, usando la información proporcionada por el subsistema de reconocimiento. Los elementos que componen al subsistema de control son los siguientes:

- i. Interfaz de usuario: Es un ambiente amigable para el usuario desplegado generalmente en la pantalla de un ordenador, y que cuenta con las herramientas necesarias para que el usuario programe el movimiento del robot.
- ii. Controlador digital: Es un dispositivo electrónico especial que tiene un CPU, memoria y, a veces un disco duro para almacenar los datos. Un controlador procesa los comandos programados en la interfaz de usuario y transmite señales apropiadas a los actuadores a través de los convertidores digitales análogos (DAC).
- iii. Interfaces de comunicación con otros dispositivos. Esta comunicación se lleva a cabo por medio de uno o varios bus de campo común, como pueden ser: DeviceNET, CAN, ProfiBus, Ethernet, etc.
- iv. Convertidor digital análogo (DAC): Convierte la señal digital de salida del controlador en una señal análoga para accionar los actuadores.
- v. Amplificador: Puesto que los comandos de control del controlador digital convertidos en señales análogas por ADC son muy débiles, requieren de amplificación para realmente accionar los actuadores del manipulador.



**Figura 12** Subsistemas de robots y sus interacciones



### 1.3.3. Características principales de un robot.

Las capacidades de un manipulador robótico se cuantifican por lo siguiente:

- Espacio de trabajo: volumen o envoltente que el manipulador y el efector pueden alcanzar.
- Número de grados de libertad que determinan las capacidades de posicionamiento y orientación del manipulador.
- Capacidad máxima de carga determinada por el actuador, componentes de la transmisión y dimensionamiento estructural del componente.
- Velocidad máxima (velocidad límite) y ancho de banda de movimiento pequeño.
- Repetitividad y exactitud del movimiento del efector final.
- Tamaño físico del manipulador (peso y volumen que tiene).

En el Anexo F se muestran las especificaciones técnicas de un robot comercial.

---

## 2. DISEÑO CONCEPTUAL DEL ROBOT

---

### 2.1. Necesidades a cubrir con el diseño

Con el fin de encontrar la configuración del robot adecuada para resolver el problema planteado anteriormente, es necesario conocer a profundidad las condiciones de trabajo actuales del científico; los objetos a analizar, el tiempo requerido, etc. En las siguientes líneas se describen sus condiciones de trabajo y luego las formas de muestreo.

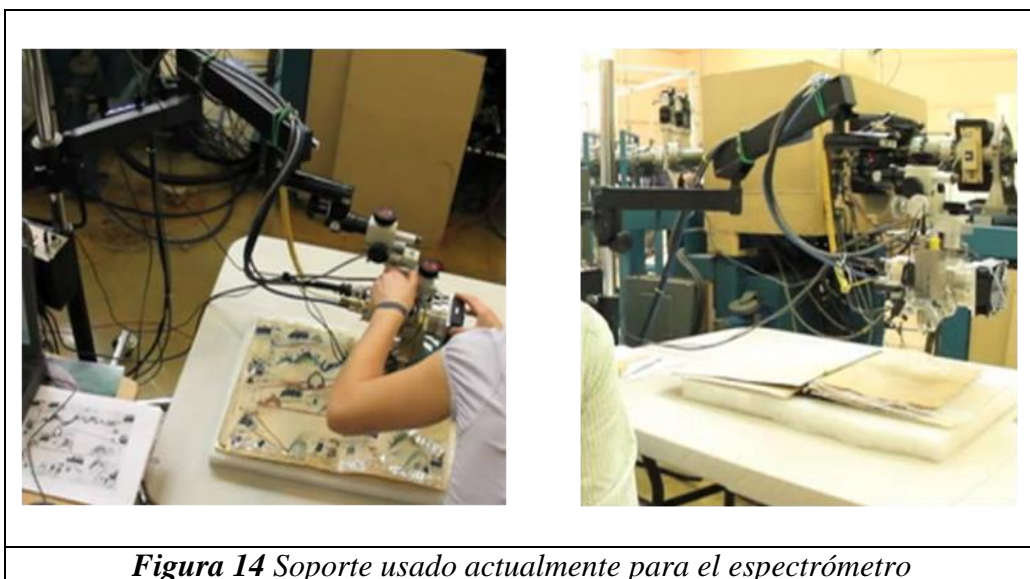
#### 2.1.1. Condiciones de trabajo

Los objetos a muestrear pueden ser pinturas, máscaras, esculturas y manuscritos antiguos.

Los análisis de las piezas pueden ser in situ o en el laboratorio. Cuando se llevan a cabo in situ, el aparato junto con su soporte son transportados en una camioneta.

Los lugares fuera del laboratorio, en que se hacen los análisis, son diversos; algunas veces en museos de alto valor arquitectónico y otras en lugares recónditos con condiciones del suelo desfavorables.

Al llegar al lugar se arma el conjunto soporte y espectrómetro para luego realizar el análisis. Las siguientes imagen muestra el conjunto soporte y espectrómetro.



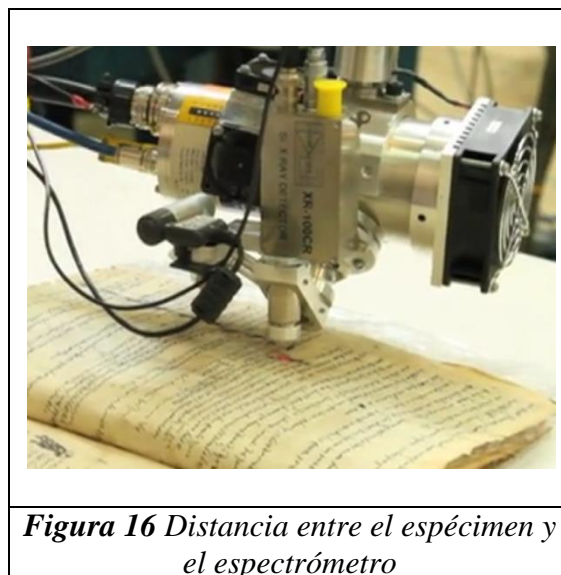
*Figura 14 Soporte usado actualmente para el espectrómetro*

Al trabajar con el soporte y espectrómetro el científico cuenta generalmente con un reducido espacio de maniobrabilidad.

En una sesión típica de análisis sobre una pieza, el usuario mueve el soporte manualmente para posicionar el espectrómetro en el punto de interés, luego se dirige a una computadora que recibe los datos del análisis para hacer un registro del mismo. Esto sucede una y otra vez para cada punto de interés. La siguiente imagen muestra cómo posicionan el espectrómetro sobre un manuscrito.



La distancia que entre el espécimen y el espectrómetro es de algunos centímetros, como se muestra en la siguiente imagen.

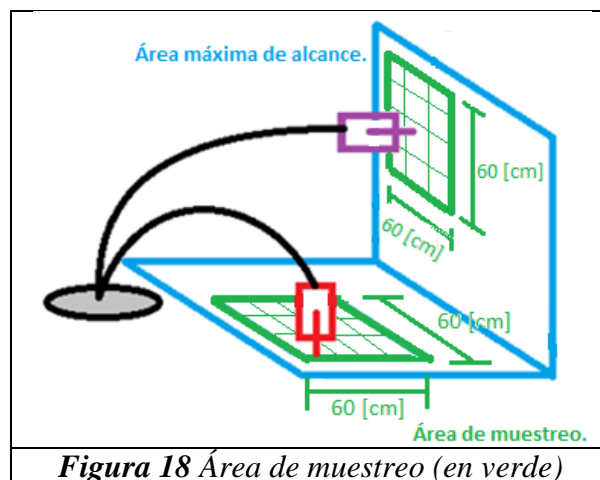
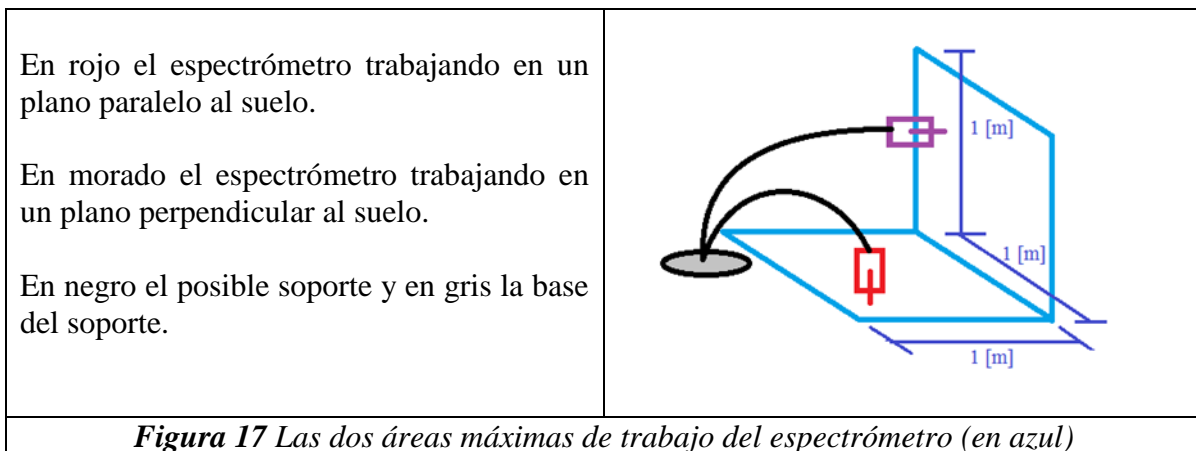


El tiempo por día que se mantiene el espectrómetro sobre la pieza a analizar es de aproximadamente 7-9 hrs/día.

El peso del espectrómetro es de alrededor 5 lb (2.5 kg aprox.), en el Anexo I se hallan las especificaciones técnicas del espectrómetro RAMAN, uno de los que es empleado en el laboratorio.

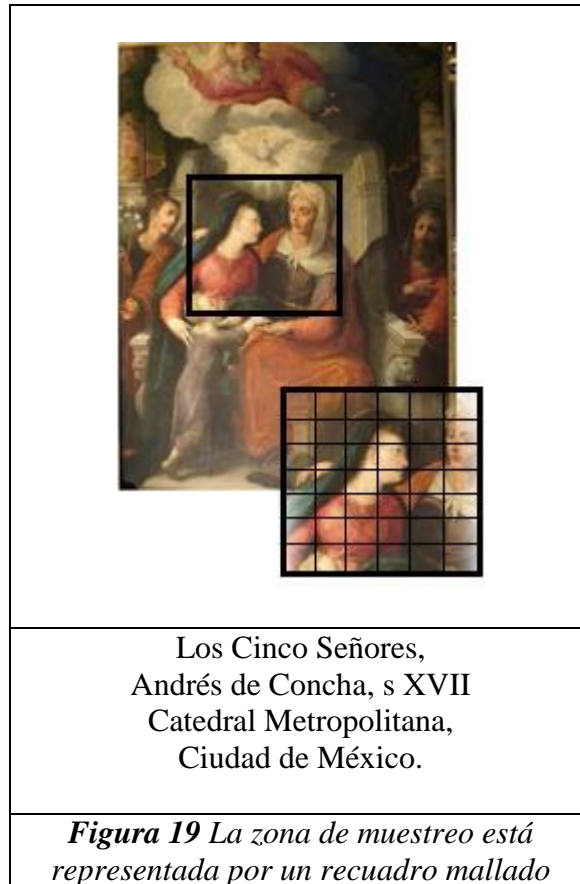
Todas las imágenes anteriores son del análisis de un manuscrito, sin embargo también se llevan a cabo para murales, pinturas y esculturas. De acuerdo a la experiencia que ha adquirido el científico al analizar diversidad de especímenes, ha determinado, como se muestra en la siguiente figura, que las áreas máximas en las que se posiciona el espectrómetro, tanto en un plano paralelo al suelo como en uno perpendicular a él, es de  $1\text{m}^2$  aprox.

Por otro lado las zonas de muestreo, es decir las zonas que son susceptibles de análisis, son aproximadamente de  $60\text{ cm}^2$ , tanto en un plano paralelo al suelo, como en uno perpendicular a él. Tal y como muestra la **Figura 17**.



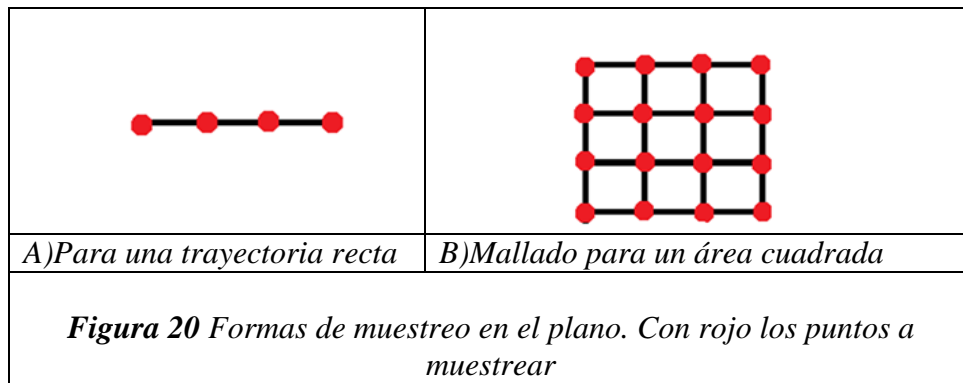
### 2.1.2. Formas de muestreo

Al analizar cualquier objeto, primero se coloca el espectrómetro en una zona particular del objeto en cuestión, no se hace un escaneo general. Este proceso es rápido y determina donde es más conveniente colocar el soporte para que la longitud de este no sea un impedimento. La siguiente imagen muestra una zona de muestreo sobre una pintura.

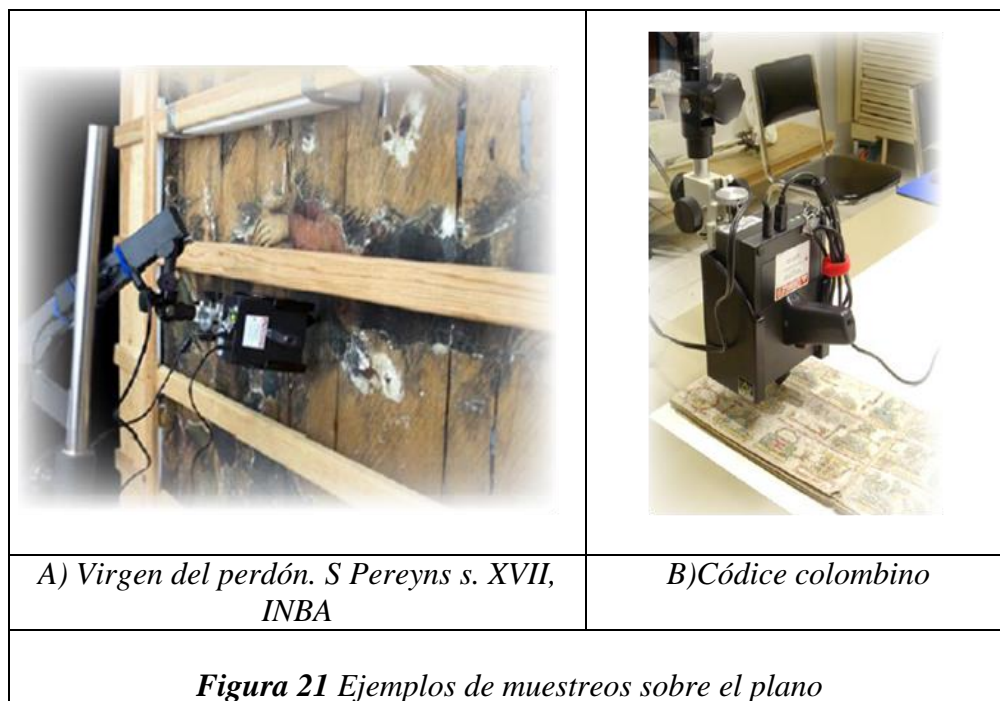


#### 2.1.2.1. Muestreo plano

La zona en cuestión, cuando se halla sobre un plano, se muestrea generalmente de dos formas: el espectrómetro sigue una trayectoria recta parándose cada cierto punto, y la otra es barriendo un área cuadrada o rectangular, a través de un mallado cuadrangular. La trayectoria recta puede tener una longitud máxima de 10 cm y un área aproximada de 1x1". La siguiente figura aclara lo anterior.



Un ejemplo del muestreo sobre un plano, podría ser el de una pintura montada en una pared o algún manuscrito antiguo sobre una mesa.



Nótese que existen dos opciones para tomar muestreos planos, como se muestra en la **Figura 21** para lo cual varía la orientación del espectrómetro.

### 2.1.2.2. Muestreo de un perfil

Otro tipo de muestreo consiste en seguir el perfil de alguna máscara o escultura pequeña. La siguiente figura lo ilustra.



Jaguar teotihuacano.  
Museo Nacional de  
Antropología, INAH.

*Figura 22 Muestreo del  
perfil de una escultura*

#### *Especificaciones que tienen que ver con el tiempo de muestreo*

El distanciamiento entre cada punto muestreado a lo largo de la trayectoria recta o barriendo un área, es muy pequeño, casi milimétrico.

El número de puntos muestreados pueden llegar a ser hasta 400, a lo largo de la trayectoria recta o del área.

No debe tardar más de un minuto el alcanzar el siguiente punto de muestreo.



## 2.2. Necesidades y especificaciones técnicas

De acuerdo con las observaciones de las condiciones de trabajo actuales y la experiencia del científico, se plantean las siguientes **necesidades** a cubrir con el robot propuesto, enumerándolas y asignándoles un valor de importancia (1 es menor y 5 es mayor).

**Tabla 1** Necesidades a cubrir con el diseño

<i>Núm. de necesidad</i>	<i>Necesidad</i>	<i>Importancia</i>
1	El robot tiene que cargar el espectrómetro por bastante tiempo.	5
2	El robot tiene que ser ligero.	5
3	Su espacio de instalación tiene que ser el menor posible.	3
4	Su espacio de transportación tiene que ser el menor posible.	4
5	Tiene que alimentarse directamente de la línea eléctrica o de baterías.	5
6	Exacto y preciso para posicionar el espectrómetro.	4
7	Tiene que adaptarse a las condiciones del suelo.	3
8	Fácilmente operable.	3
9	Tiene que muestrear en el plano y a lo largo de un perfil (como se describe en la sección 2.1.2 <i>Forma de muestreo</i> ).	5
10	El soporte tiene que posicionar al espectrómetro dentro de las áreas mostradas en la Figura 18.	4
11	El robot puede realizar muestreos a murales y manuscritos.	3
12	El robot tiene que ser confiable.	5
13	El robot tiene que tardar poco tiempo para llegar al siguiente punto de muestreo.	2
14	Su instalación en el sitio tiene que ser rápida.	3
15	Fácil su manufactura.	3

Algunas de las necesidades anteriores son de carácter subjetivo por lo que se deben traducir, las que se puedan, en un conjunto de **especificaciones** o características ingenieriles que expliquen con detalles precisos y medrables lo que el robot tiene que hacer.

Las especificaciones representan una base sobre lo que se hará para satisfacer las necesidades del científico. Estas se representan por una métrica y su valor numérico correspondiente.

A continuación se enlistan las especificaciones más relevantes, tomando en cuenta algunas especificaciones técnicas de robots comerciales, su correlación con las necesidades del científico y asignándoles un valor de importancia (1 es menor y 5 es mayor).

*Tabla 2 Especificaciones técnicas y su importancia relativa*

<i>Núm. de Métrica</i>	<i>Núm. de necesidad</i>	<i>Métrica</i>	<i>Importancia</i>
1	1,5,10	El tiempo en que mantiene la carga.	5
2	1,12,5	La masa de la carga (espectrómetro).	5
3	1,5,14	Voltaje de alimentación	4
4	10,11,9	Su volumen de trabajo.	4
5	6,9,15	Posicionar con exactitud.	3
6	9	Tiempo para alcanzar el siguiente punto de muestreo	2
7	8	Tiempo para alcanzar el siguiente punto de muestreo	1
8	3,4	El espacio para su transportación.	4
9	2,14	Masa total.	5
10	9,14,7,3,4	Área de la base.	4
11	9,6	Distancia del espectrómetro a la muestra.	5

**Tabla 3** Correlación entre las especificaciones técnicas y las necesidades

Necesidades	Especificaciones										
	1. El tiempo en que mantiene la	2. La masa de la carga	3. Voltaje de alimentación	4. Su volumen de trabajo.	5. Posicionar con exactitud.	6. Tiempo para alcanzar el	7. Tiempo para llegar a la zona de	8. El espacio para su	9. Masa total	10. Área de la base.	11. Distancia del espectrómetro a la
1. El robot tiene que cargar el espectrómetro por bastante tiempo.	▲	▲	▲								
2. El robot tiene que ser ligero.								▲			
3. Su espacio de instalación tiene que ser el menor posible.							▲		▲		
4. Su espacio de transportación tiene que ser el menor posible.							▲		▲		
5. Tiene que alimentarse directamente de la línea eléctrica o de baterías.	▲	▲	▲								
6. Exacto y preciso para posicionar el espectrómetro.					▲					▲	
7. Tiene que adaptarse a las condiciones del suelo.									▲		
8. Fácilmente operable.							▲				
9. Tiene que muestrear en el plano y a lo largo de un perfil (como se describe en la sección 2.1.2 <i>Formas de muestreo</i> ).				▲	▲	▲				▲	▲
10. El soporte tiene que posicionar al espectrómetro dentro de las áreas mostradas en la <b>Figura 18</b> .	▲			▲							
11. El robot puede realizar otras tareas.				▲							
12. El robot tiene que ser confiable.		▲									
13. El robot tiene que tardar poco tiempo para llegar al siguiente punto de muestreo.											
14. Su instalación en el lugar tiene que ser rápida.			▲					▲	▲		
15. Fácil su manufactura.					▲						

La siguiente tabla muestra las especificaciones técnicas del robot con su respectivo **valor mínimo esperado**.

*Tabla 4 Especificaciones con su menor mínimo esperado*

<i>Núm. de Métrica.</i>	<i>Métrica.</i>	<i>Valor mínimo esperado.</i>
1	El tiempo en que soporta al espectrómetro es de...	9 [Hr/día]
2	La masa del espectrómetro es de...	5 [lb] (2.5 [kg] )
3	Voltaje de alimentación de...	120 [Vca]
4	Su volumen de trabajo debe ser un cubo de...	1 [m <sup>3</sup> ]
5	Posicionar el espectrómetro con una exactitud de...	¼ [mm]
6	El tiempo para alcanzar el siguiente punto de muestreo es de...	1 [min]
7	Tiempo para llegar a la zona de interés de...	5 [min]
8	El espacio que se cuenta para su transportación es de un paralelogramo de...	1.6x0.3x0.4 [m <sup>3</sup> ]
9	Masa total...	50 [kg]
10	Área de instalación del robot de...	0.5x1.5 [m <sup>2</sup> ]

### 2.3. Generación de alternativas de solución

A través de las necesidades del científico se han identificado las funciones que este desempeñará y con las especificaciones técnicas se precisan detalles más específicos, como son: su volumen de trabajo, la masa que cargará, entre otras. Con toda esta información se procederán a evaluar las diferentes configuraciones de robots que podrían resolver el problema. Las configuraciones de robots que se evaluarán serán las vistas en el capítulo 1, en concreto el robot cartesiano, cilíndrico, esférico polar y el serial. Se criticará cada una de ellas para finalmente seleccionar la más adecuada para la aplicación, o se generará una idea a partir de ellas.

La siguiente tabla muestra las ventajas y desventajas, comparando las configuraciones de los robots fundamentales (cartesiano, cilíndrico, esférico polar y el serial), referencia [1].

*Tabla 5 Comparación de brazos de robots fundamentales*

<i>Configuración</i>	<i>Ventajas</i>	<i>Desventajas</i>
<i>Cartesiano (3 ejes lineales)</i> X: desplazamiento de la base Y: altura Z: alcance	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Fácil de visualizar</li> <li>• Estructura rígida</li> <li>• Programación offline fácil</li> <li>• Parada mecánica fácil</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Requiere gran espacio en las instalaciones</li> <li>• Los ejes son difíciles de sellar</li> <li>• Caro</li> </ul>
<i>Cilíndrico (1 eje giratorio y 2 ejes lineales)</i> $\theta$ : rotación de la base Y: altura Z: alcance	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Llega a todo su alrededor</li> <li>• Ejes Y y Z rígidos</li> <li>• Los ejes <math>\theta</math> son fáciles de sellar</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• No tiene alcance hacia arriba de sí mismo, debido a que su espacio de trabajo es cilíndrico</li> <li>• Eje <math>\theta</math> menos rígido</li> <li>• Ejes Y y Z difíciles de sellar</li> <li>• No puede rodear obstáculos que se encuentran entre el efector final y el objeto de interés</li> </ul>
<i>Esférico (2 ejes giratorios y 1 lineal)</i> $\theta$ : rotación de la base $\varphi$ : ángulo de elevación Z: alcance	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Llega todo su rededor</li> <li>• Llega arriba y debajo de obstáculos</li> <li>• Gran volumen de trabajo</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• No tiene alcance hacia arriba de sí mismo</li> <li>• Corto avance vertical</li> </ul>
<i>Articulado (3 ejes giratorios)</i> $\theta$ : rotación de la base $\varphi$ : ángulo de elevación $\psi$ : ángulo de alcance	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Llega arriba y debajo de obstáculos</li> <li>• Área de trabajo más grande para el espacio de instalación más</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Difícil de programar, debido al uso de juntas rotacionales que implica un cambio de sistema de coordenadas</li> </ul>

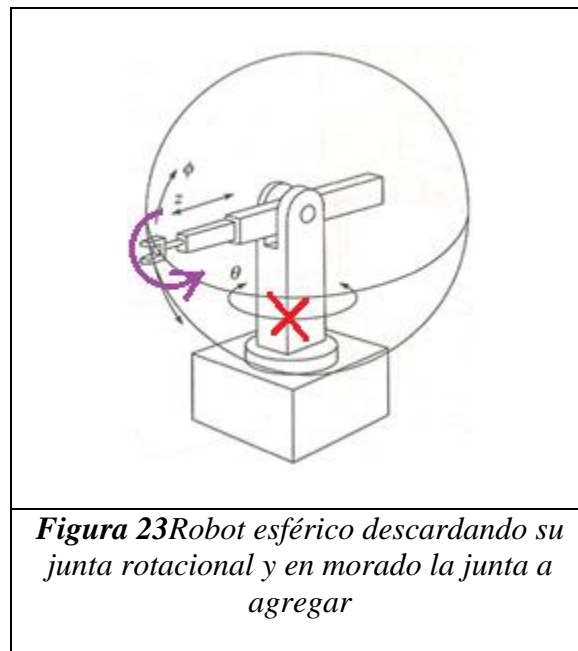
	adecuado	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Dos o más configuraciones articulares para alcanzar un punto</li> </ul>
--	----------	--

### 2.3.1. Evaluación de las configuraciones de robots

El robot cartesiano, aunque la forma de su espacio de trabajo cumple con los requerimientos se descarta, ya que es robusto y requiere un espacio de instalación amplio.

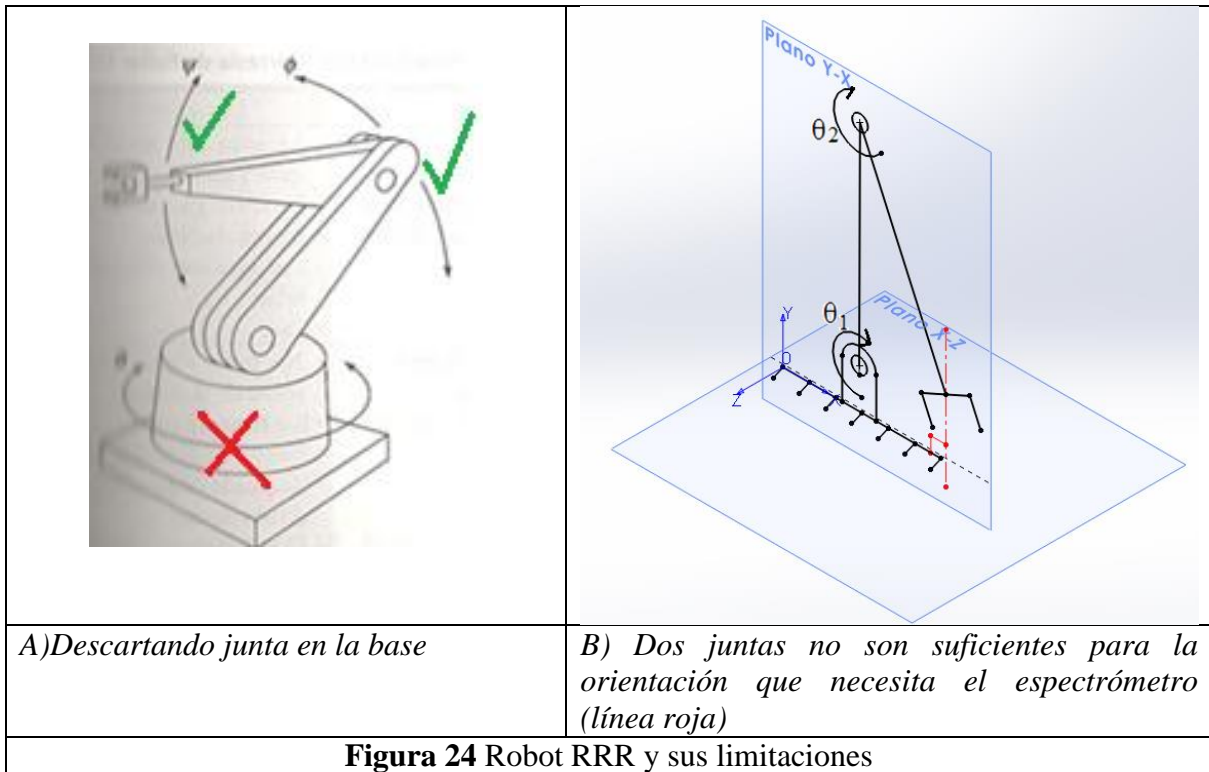
El robot cilíndrico se usa en aplicaciones en las que se requiere alcanzar posiciones a su alrededor y no arriba y debajo de sí mismo, en nuestra aplicación no es necesario posiciones a todo su alrededor solo nos basta delante de sí, además no podría muestrear en un plano paralelo al suelo. De esta configuración también podemos concluir que no requerimos una junta rotacional en la base que lo haga girar sobre su propio eje.

En el caso de un robot esférico, sino consideramos la junta rotacional en la base, su alcance hacia delante de sí está limitado por la junta prismática, además para orientar el espectrómetro hace falta una junta rotacional más, por lo que se descarta esta alternativa. La **Figura 23** Robot esférico descartando su junta rotacional y en morado la junta a agregar lo anterior.

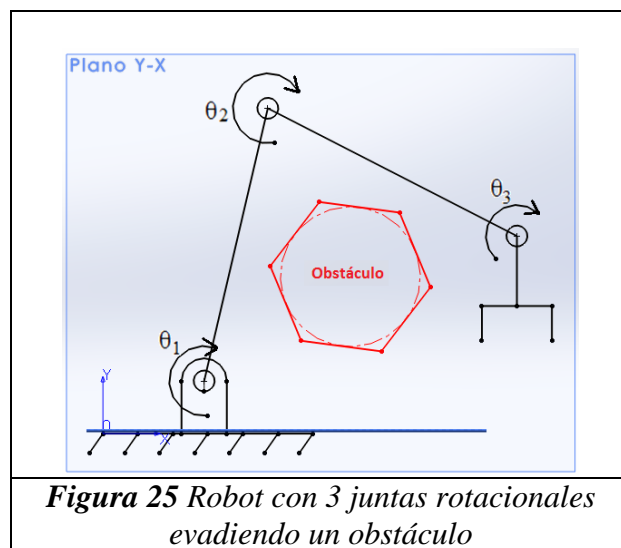


En el caso del robot articulado RRR que se muestra en la **Figura 24** A), descartamos la base giratoria, y observamos que las dos juntas rotacionales restantes, no son suficientes

para orientar el espectrómetro a  $90^\circ$  con respecto al Plano X-Z, por lo que es necesario agregar una junta rotacional más, ver **Figura 25**.



El hecho de que el robot articulado pueda evitar obstáculos es deseable para nuestra aplicación, por ejemplo cuándo se efectúa el muestreo en una escultura. La siguiente figura muestra esto:



Ahora bien, el robot de la **Figura 25** no cumple con el espacio de trabajo requerido, pues únicamente puede moverse en el plano Y-X (ver **Figura 24 B**). Entonces para proporcionar al robot un movimiento en el eje Z, se propone agregar al robot de la **Figura 25** una junta prismática en la base del robot.

Del análisis anterior tenemos lo siguiente:

- Considerar el uso de una junta prismática.
- Descartamos una junta rotacional en la base del robot.
- El robot articulado de la **Figura 25** es una buena opción.

### **2.3.2. Configuración propuesta**

La configuración del robot que se propone se compone de una junta prismática, y adjunto a la plataforma móvil una junta rotacional.

Haciendo una analogía con el brazo humano; la junta que une a la plataforma móvil con el antebrazo, se nombrará como la “junta del hombro” (H). La junta del hombro proporciona el movimiento del antebrazo.

El antebrazo se conecta con el brazo a través de otra junta rotacional, llamada “junta del codo” (C).

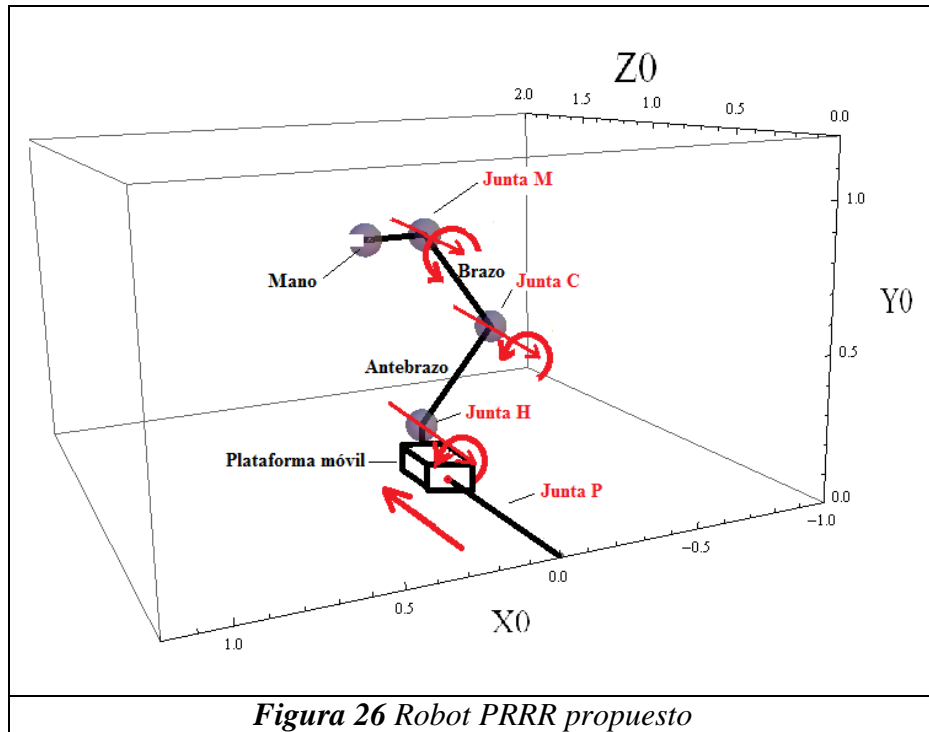
Finalmente el brazo se conecta al eslabón de la mano por medio de la junta rotacional, llamada “junta de la muñeca” (M).

El Espectrómetro Raman se moverá y orientará con el eslabón de la mano.

Entonces el robot cuenta con cuatro juntas cinemáticas que proporcionan cada una un grado de libertad: Una junta prismática y tres rotacionales. De acuerdo a las juntas que tiene el robot es del tipo: PRRR.

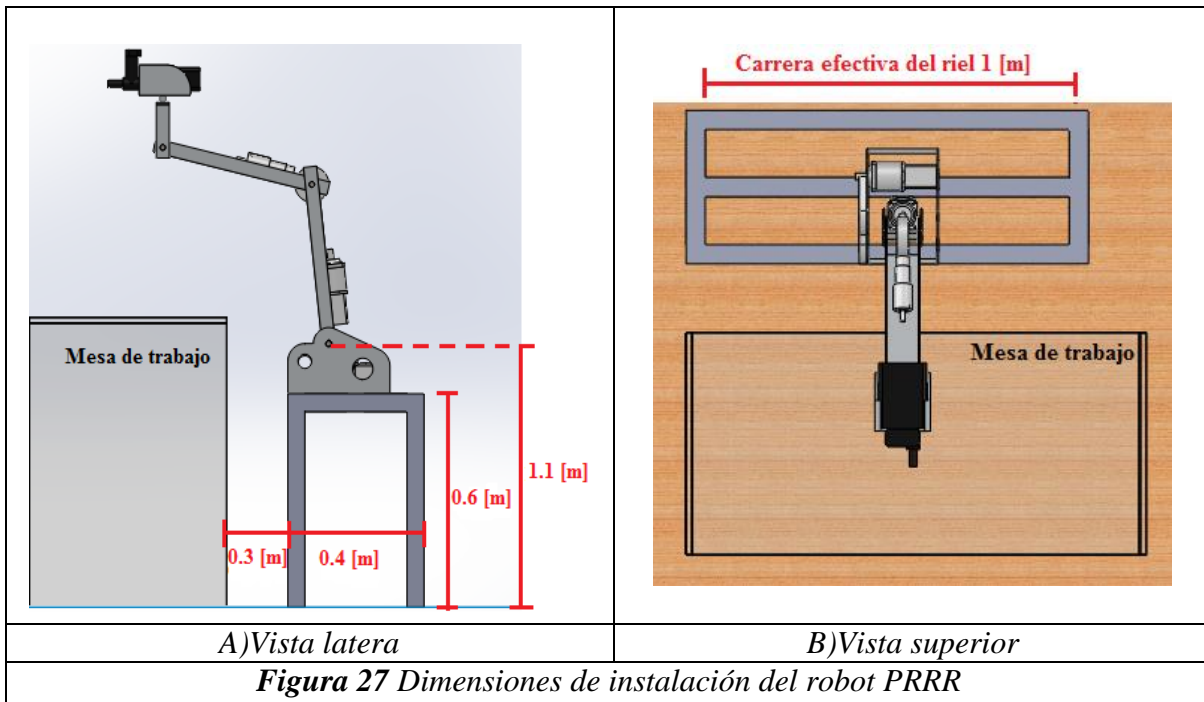
La **Figura 26** muestra la configuración propuesta:





Nótese que en la **Figura 26**, las Juntas H, C y M se encuentran contenidas en un mismo plano, el cual es paralelo al plano formado por los ejes X0 y Y0.

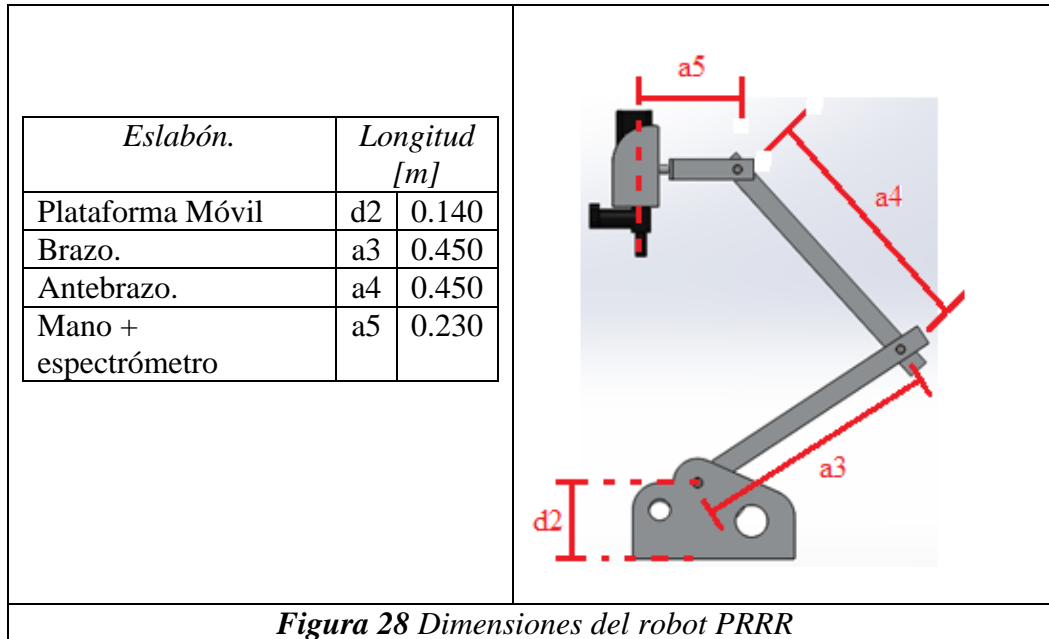
Al proponer esta solución se generaron otras especificaciones, en relación al área de instalación del robot PRRR.



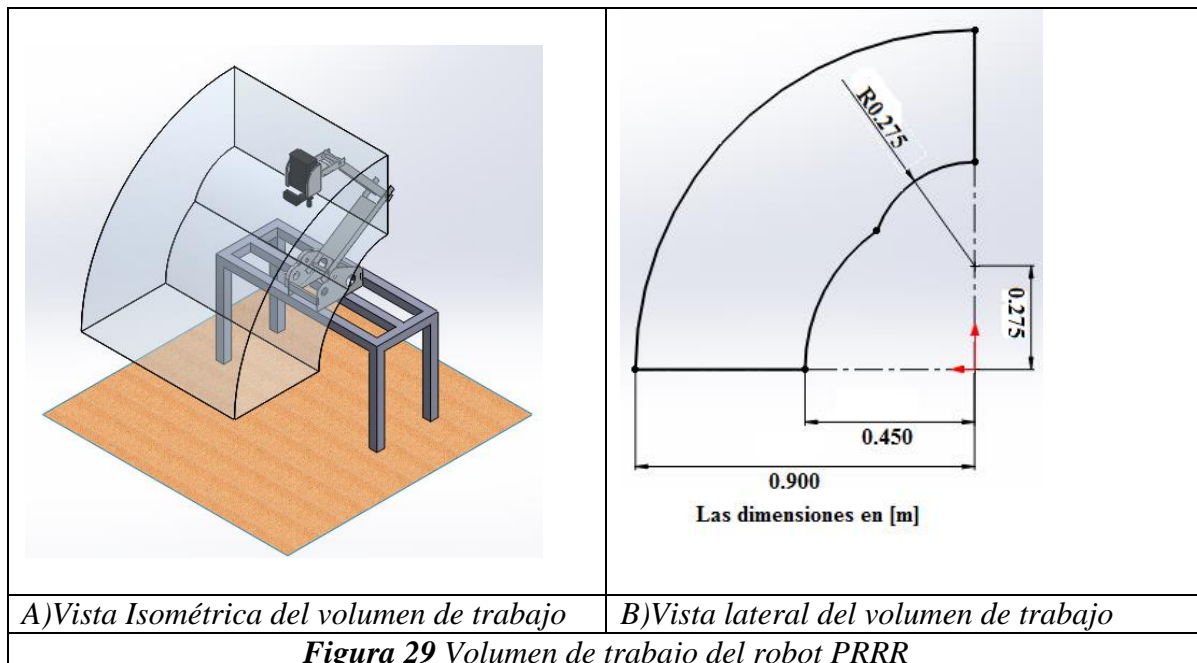
En el caso de las dimensiones de la Vista lateral de la **Figura 27**, son dimensiones **máximas** a considerar en el diseño.

En el caso de la longitud de la carrera efectiva del riel, esta puede ir de un mínimo de 1 [m] hasta un máximo de 1.5 [m].

Longitud de los eslabones que componen al robot PRRR



De acuerdo con estas longitudes tenemos el siguiente volumen de trabajo del robot:



---

# 3. MODELADO CINEMÁTICO Y DINÁMICO DEL ROBOT

---

## 3.1. Introducción

El modelado del robot permite hacer un análisis de la manera en que posiblemente se comporte el robot en la realidad. Además el modelo es crítico para realizar el control de posición del efector final y conocer los pares y fuerzas necesarias para seguir alguna trayectoria.

En el modelado del robot se resolvieron los siguientes problemas:

- 1 Posición y orientación del robot. El cual abarca dos subproblemas: Cinemática Directa e Inversa.
- 2 Análisis de Velocidades y Aceleraciones.
- 3 Análisis Dinámico.

A continuación describo brevemente en qué consiste cada punto:

- La Cinemática Directa consiste en determinar la posición del efector final, respecto a un sistema de coordenadas absoluto, dados los valores de las variables articulares (ángulos y/o desplazamientos). Para ello se emplean una serie de transformaciones de coordenadas, siguiendo un método desarrollado por Denavit y Hartenberg.
- En la Cinemática Inversa se resuelve el problema inverso, es decir, se calculan los valores de las variables articulares, conocida la posición y orientación del efector final. Este problema se resolvió a través de un método geométrico.
- En el Análisis de Velocidades y Aceleraciones se halla la relación que existe entre la velocidad del efector final con las velocidades articulares. El ente matemático que hace esta relación se llama Jacobiano, el cual se calcula en este apartado. Luego el Jacobiano es derivado con respecto al tiempo para hallar la relación entre las aceleraciones del efector final y las aceleraciones articulares.

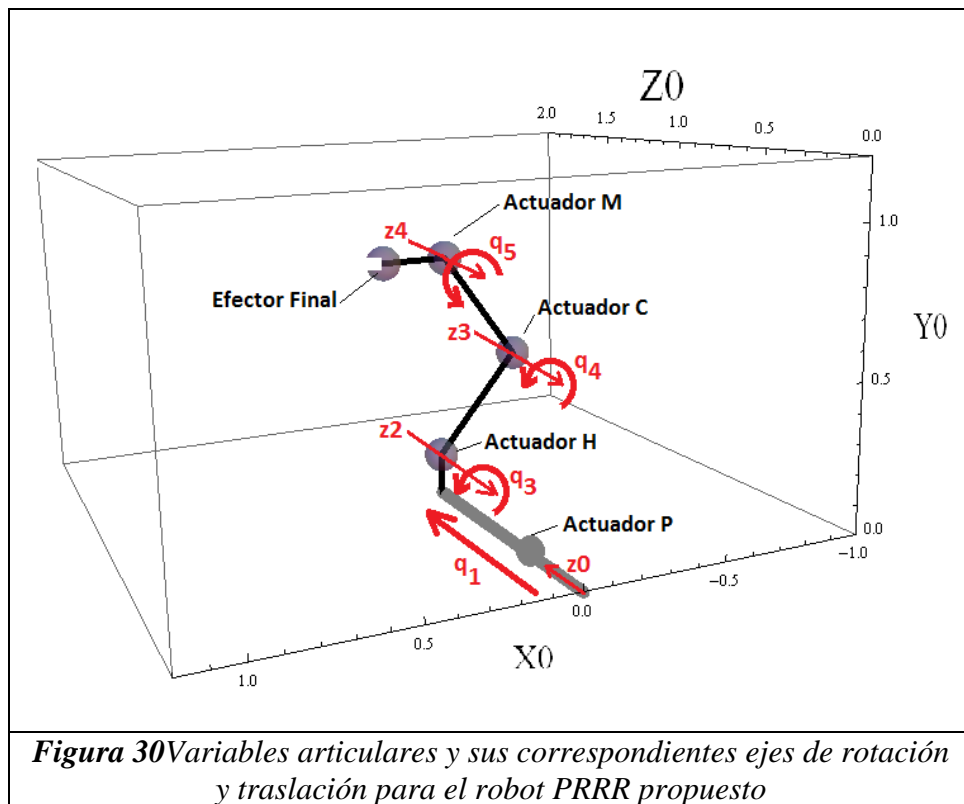
- Finalmente conocidas las velocidades y aceleraciones en cada articulación, así como las propiedades mecánicas de cada eslabón, masa y momento de inercia, se calcula la dinámica del robot. El propósito es conocer los pares y fuerzas necesarias para el movimiento del robot. Para realizar el análisis dinámico se utilizó un método basado en el balanceo de energías cinemáticas, debidas a las velocidades lineales y angulares, y las energías potenciales. A este método se le denomina Formulación Dinámica Lagrangiana.

### 3.2. Posiciones articulares del robot PRRR

En un robot las articulaciones, o puntos de unión entre dos eslabones, se controlan independientemente a través de un actuador, que se coloca generalmente en dicha unión, el movimiento de las uniones produce el movimiento relativo de los eslabones. Aquí se denotará por  $z_{i-1}$  al eje de movimiento del *eslabón*  $i$ .

La posición articular, o también llamada variable articular la denotaremos aquí por  $q_i$ . Esta representa el desplazamiento angular alrededor del eje  $z_{i-1}$  del *eslabón*  $i$ , si la unión es una articulación rotacional, o el desplazamiento lineal sobre  $z_{i-1}$ , si la unión  $i$  es una articulación prismática (revisar Anexo A).

La **Figura 30** muestra las variables articulares  $q_1, q_3, q_4$  y  $q_5$  del robot PRRR.



Las posiciones articulares correspondientes a cada articulación del robot, que se miden por medio de sensores colocados en los actuadores localizados generalmente justo en las articulaciones, se agrupan para propósitos de análisis en el vector de posiciones articulares  $\mathbf{q}$ . En consecuencia, para el robot PRRR mostrado en la **Figura 30** el vector de posiciones articulares es:

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q1 \\ q3 \\ q4 \\ q5 \end{pmatrix}$$

Nótese que para el eslabón 2 no existe una variable articular  $q2$ , debido a que este eslabón no rota ni se traslada respecto al eslabón anterior a él (eslabón 1).

Renombraremos las componentes del vector de variables articulares  $\mathbf{q}$  del robot PRRR como se muestra a continuación:

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} d1 \\ \theta3 \\ \theta4 \\ \theta5 \end{pmatrix} \quad \text{_____ ( 1 )}$$

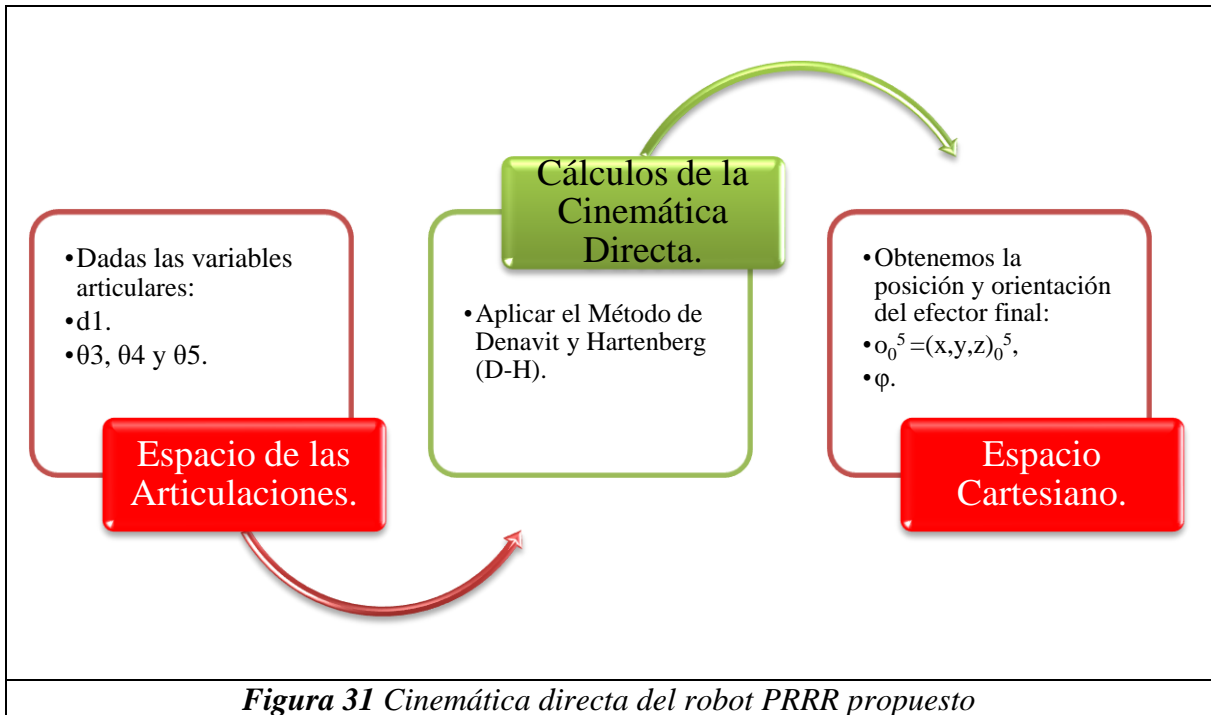
### 3.3. Cinemática directa

En la robótica es esencial describir la posición y orientación de los eslabones que componen al robot respecto a un sistema de coordenadas fijo, debido a que el efector final tiene que realizar diversos movimientos para el cumplimiento de alguna tarea que le sea asignada.

Para describir la posición y orientación, se adjuntan a cada eslabón un sistema de coordenadas, luego se realizan una serie de operaciones o transformaciones de coordenadas, con las cuales es posible conocer su posición y orientación respecto a un sistema absoluto, el cual generalmente se ubica en la base fija del robot.

La cinemática directa consiste en determinar la posición del efector final, respecto a un sistema de coordenadas absoluto, dados los valores de las variables articulares o también llamadas *posiciones articulares* (ángulos y/o desplazamientos).

El diagrama siguiente menciona al robot propuesto como del tipo PRRR, es decir con una junta prismática y tres juntas rotacionales.



**Figura 31** Cinemática directa del robot PRRR propuesto

### 3.3.1. Transformador de coordenadas

El transformador de coordenadas o también llamado trama, es una matriz formada por cuatro vectores que proporciona información sobre la posición y orientación de un objeto en el espacio respecto a algún otro sistema.

La transformación del sistema móvil {1} referido al sistema fijo {0}, se representa por la siguiente transformación:

$$A_0^1 = \begin{pmatrix} R_0^1 & o_0^1 \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{_____ ( 2)}$$

Donde:

$$R_0^1 = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}, o_0^1 = \begin{pmatrix} o_{0x}^1 \\ o_{0y}^1 \\ o_{0z}^1 \end{pmatrix}, \mathbf{0} = (0 \ 0 \ 0) \text{ y } 1 \text{ es un escalar.}$$

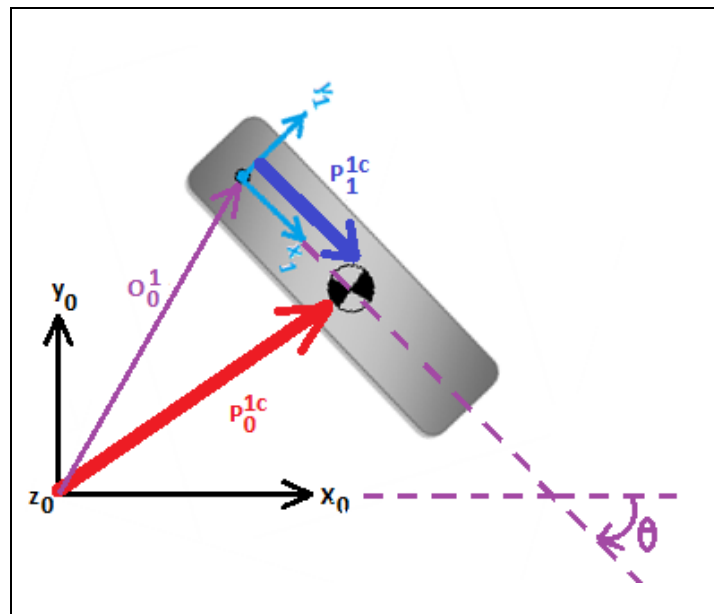
Entonces la transformación queda como:

$$A_0^1 = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & o_{0x}^1 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & o_{0y}^1 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & o_{0z}^1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{4 \times 4} \quad \text{_____ ( 3)}$$

Como se puede observar más fácilmente en (2) que en (3),  $A_0^1$  cuenta con cuatro componentes bien diferenciados:

- Un vector de ceros de 1x3, que indican la perspectiva.
- Un escalar, el cual representa un factor de escalamiento, que para nuestro propósito es uno, es decir no hay escalamiento.
- $o_0^1$  es un vector 3x1 que describe la posición del origen del sistema {1} debido a una traslación respecto al sistema {0}.
- $R_0^1$  es una matriz de 3x3 que describe la orientación del sistema {1} debido a una rotación respecto al sistema {0}.

Por ejemplo, si se conoce la posición  $\overline{P_1^{1c}}$  del centro de masa de un eslabón, respecto a un sistema {1} adjunto al eslabón, y la transformación del sistema móvil al sistema fijo  $A_0^1$ . Como muestra la siguiente figura.



**Figura 32** Posición del centro de masa de un eslabón. El problema es obtener  $\overline{P_1^{1c}}$  dados  $\overline{P_0^{1c}}$  y  $A_0^1$

Es posible conocer las coordenadas del centro de masa respecto al sistema {0}, es decir el punto  $\overline{P_0^{1c}}$  aplicando la fórmula:

$$\overline{P_0^{1c}} = A_0^1 \cdot \overline{P_1^{1c}} \quad \text{_____} (4)$$

Donde los elementos de la matriz de transformación  $A_0^1$ , se ilustran en color violeta en la Figura 32.

Expresando en la ec. (4) a los vectores de posición P como matrices de 3 x 1, y sustituyendo en  $R_0^1$  y  $\mathbf{o}_0^1$  con los términos apropiados seno, coseno, cero o uno como demanda el tipo de rotación, resulta:

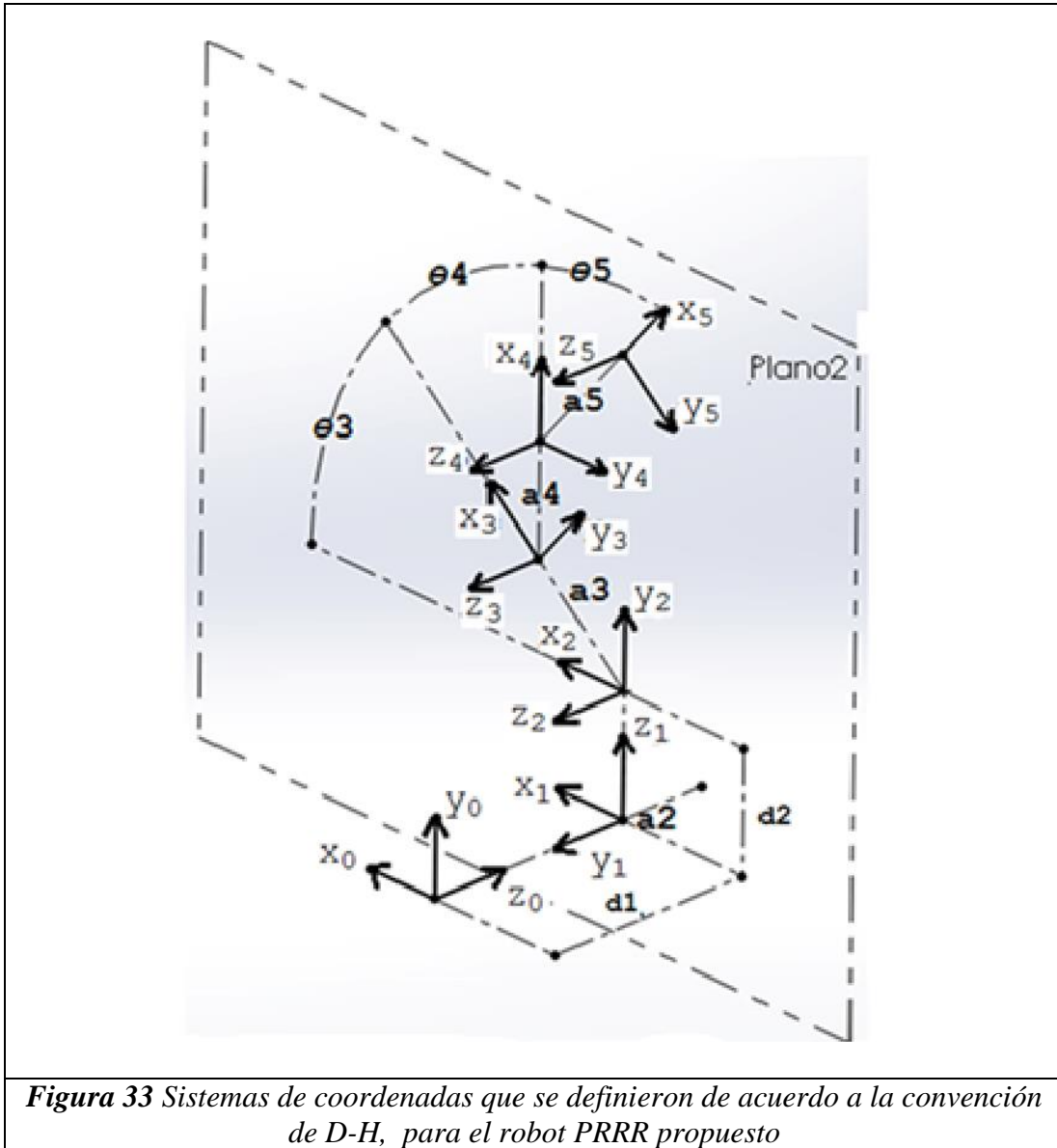
$$\begin{pmatrix} P_0^{1c} \\ P_0^{1c} \\ P_0^{1c} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Cos}[\theta] & -\text{Sin}[\theta] & 0 & o_{0x}^1 \\ \text{Sin}[\theta] & \text{Cos}[\theta] & 0 & o_{0y}^1 \\ 0 & 0 & 1 & o_{0z}^1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_1^{1c} \\ P_1^{1c} \\ P_1^{1c} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{-----} (5)$$

Para conocer más sobre la descripción de la orientación consultar el Anexo B.

### 3.3.2. Método de Denavit y Hartenberg (D-H)

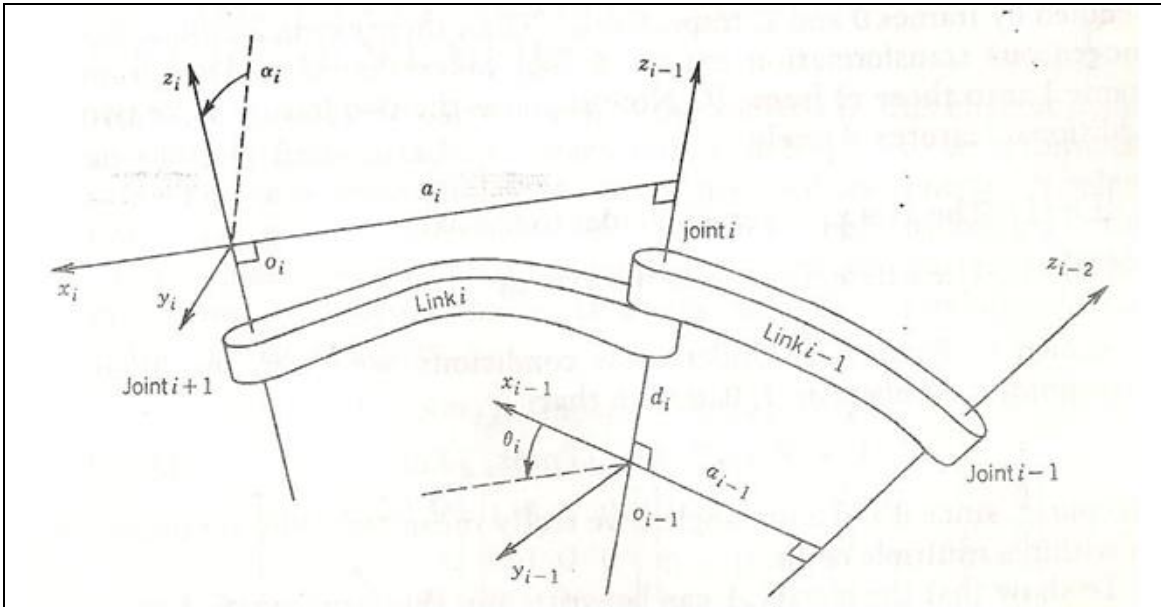
Este es un método sistemático para definir la posición y orientación relativa de los eslabones consecutivos, que aplicado al robot propuesto, se obtiene la **Figura 33**. El método tiene su propia convención para definir los dos sistemas adjuntos a los dos eslabones sucesivos y el cálculo de la transformación de coordenadas entre ellos. Sobre la asignación de los sistemas de coordenadas de cada eslabón revisar la referencia [3] p. 71.





**Figura 33** Sistemas de coordenadas que se definieron de acuerdo a la convención de D-H, para el robot PRRR propuesto

La **Figura 34** nos auxilia para hallar en un enfoque general, aplicando el método de D-H, a la transformación  $A_{i-1}^i$ , la cual permite conocer la posición de la junta  $i+1$  del eslabón  $i$ , en relación a la junta  $i$  del mismo eslabón.



**Figura 34** Asignación de marcos de referencia empleados en el método D-H

En la convención de D-H, cada transformación  $A_{i-1}^i$  es representada como un producto de cuatro transformaciones básicas, de rotación y traslación, del sistema  $\{i\}$  adjunto al eslabón, relativo al sistema  $\{i-1\}$ . Revisar referencia [3].

$$A_{i-1}^i = \text{Rot}_{z,\theta_i} \cdot \text{Trans}_{z,d_i} \cdot \text{Trans}_{x,a_i} \cdot \text{Rot}_{x,\alpha_i} \quad \text{-----} (6)$$

Donde:

$$\text{Rot}_{z,\theta_i} = \begin{pmatrix} \cos[\theta_i] & -\sin[\theta_i] & 0 & 0 \\ \sin[\theta_i] & \cos[\theta_i] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{Trans}_{z,d_i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{Trans}_{x,a_i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{Rot}_{x,\alpha_i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \sin[\theta_i] & \cos[\alpha_i] & \sin[\alpha_i] & 0 \\ 0 & \sin[\alpha_i] & \cos[\alpha_i] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Realizando las operaciones necesarias, (6) queda como:

$$A_{i-1}^i = \begin{pmatrix} \cos[\theta_i] & -\cos[\alpha_i]\sin[\theta_i] & \sin[\alpha_i]\sin[\theta_i] & a_i\cos[\theta_i] \\ \sin[\theta_i] & \cos[\alpha_i]\cos[\theta_i] & -\cos[\theta_i]\sin[\alpha_i] & a_i\sin[\theta_i] \\ 0 & \sin[\alpha_i] & \cos[\alpha_i] & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{-----} (7)$$

Donde  $d_i$ ,  $\theta_i$ ,  $a_i$  y  $\alpha_i$  son llamados los parámetros de Denavit- Hartenberg.

**Tabla 6** Parámetros de Denavit y Hartenberg (D-H)

<i>Parámetros</i>	<i>Nombre común</i>	<i>Definición</i>
$d_i$	Desplazamiento de la articulación.	Es la distancia a lo largo de $z_{i-1}$ , de $o_{i-1}$ a la intersección de los ejes $x_i$ y $z_{i-1}$ . Esta es variable si la junta $i$ es prismática.
$\theta_i$	Ángulo de articulación.	Es el ángulo entre $x_{i-1}$ y $x_i$ medido alrededor de $z_{i-1}$ , de acuerdo al criterio de la mano derecha. Este es variable si la junta $i$ es revoluta.
$a_i$	Longitud del eslabón.	Es la distancia a lo largo de $x_i$ , de $o_i$ a la intersección de los ejes $x_i$ y $z_{i-1}$ .
$\alpha_i$	Ángulo de torsión.	Es el ángulo entre $z_{i-1}$ y $z_i$ medido alrededor de $x_i$ , de acuerdo al criterio de la mano derecha.

En la convención de D-H cuando  $\theta$  es variable simplificaremos la notación, entonces para  $\text{Cos}\theta_i$  lo representaremos como  $C_i$  mientras que en la suma de ángulos  $\theta_1 + \theta_2$  y  $\text{Cos}(\theta_1 + \theta_2)$  será equivalente a  $C_{12}$ .

Lo mismo sucederá con  $\text{Sen}\theta_i$ , únicamente se antepondrá la letra S en lugar de la letra C.

### 3.3.3. Obtención de los parámetros de D-H para el robot PRRR propuesto

Considerando la **Figura 33** es importante resaltar que las juntas 1, 2, 3, 4 y 5 son coincidentes con el Plano 2, y el Plano 2 se traslada sobre el plano horizontal a medida que varía  $d_1$ .

Las tablas del Anexo C detallan, en la medida de lo posible, para cada junta, la obtención de los parámetros de D-H, aplicando la definición de la **Tabla 6** sobre la configuración del robot PRRR de la **Figura 33**.

Condensando los valores obtenidos en las Tablas del Anexo C (C.1 a C.5), en una sola tabla resumimos que:

**Tabla 7** Parámetros de Denavit- Hartenberg para el robot PRRR propuesto

Eslabón $i$	$\theta_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	0	$d1^*$	0	-90
2	0	$d2$	$a2$	90
3	$\theta3^*$	0	$a3$	0
4	$\theta4^*$	0	$a4$	0
5	$\theta5^*$	0	$a5$	0

Donde cada parámetro representa lo siguiente:

**Tabla 8** Descripción de los parámetros de D - H para el robot PRRR propuesto

Parámetro	Representación en el robot PRRR
$d1^*$	Recorrido de la junta prismática.
$d2$	Altura de la Plataforma móvil respecto a la corredera a lo largo $Y0$ .
$a2$	Alejamiento de la Plataforma móvil respecto a la corredera a lo largo de $X0$ .
$a3$	Longitud del Brazo.
$a4$	Longitud del Antebrazo
$a5$	Longitud del Efecto final o Mano.
$\theta3^*$	Ángulo de la junta rotacional del Hombro.
$\theta4^*$	Ángulo de la junta rotacional del Codo.
$\theta5^*$	Ángulo de la junta rotacional de la Muñeca.

El símbolo asterisco \* indica que se trata de una variable articular que cambia con respecto al tiempo, y las que no tienen \* son constantes en todo el movimiento del robot.

Ahora se sustituyen los valores de los parámetros dados en la **Tabla 6**, en la matriz de transformación  $A_{i-1}^i$  definida por (7), para obtener las matrices parciales de transformación, que servirán para obtener las coordenadas de cada junta o extremo de cada eslabón, comenzando desde el extremo unido a la base del robot, trama {0}, hasta considerar el extremo unido al efecto final, trama {5}.

Las matrices parciales de transformación son:

$$A_0^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_2^3 = \begin{pmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & a3C_3 \\ S_3 & C_3 & 0 & a3S_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3^4 = \begin{pmatrix} C_4 & -S_4 & 0 & a4C_4 \\ S_4 & C_4 & 0 & a4S_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_4^5 = \begin{pmatrix} C_5 & -S_5 & 0 & a5C_5 \\ S_5 & C_5 & 0 & a5S_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donde  $C_5$  y  $S_5$  representan el coseno y seno del ángulo  $\theta_5$  respectivamente.

Para obtener las coordenadas de cada junta o extremo del eslabón, con respecto al sistema  $\{0\}$ , se realizan las multiplicaciones necesarias de las transformaciones anteriores, de acuerdo a lo visto en *Multiplicación entre transformaciones*, incluido en el Anexo B.

Para la junta 1 tipo prismática, no es requerida ninguna multiplicación:

$$A_0^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{_____} ( 8 )$$

Para la junta 2 que únicamente se traslada en  $d1$ :

$$A_0^2 = A_0^1 \cdot A_1^2$$

$$A_0^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a2 \\ 0 & 1 & 0 & d2 \\ 0 & 0 & 1 & d1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{_____} ( 9 )$$

Para la junta 3 tipo rotacional:

$$A_0^3 = A_0^1 \cdot A_1^2 \cdot A_2^3$$

$$A_0^3 = \begin{pmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & a2 + a3C_3 \\ S_3 & C_3 & 0 & d2 + a3S_3 \\ 0 & 0 & 1 & d1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{_____} ( 10 )$$

Para la junta 4 tipo rotacional:

$$A_0^4 = A_0^1 \cdot A_1^2 \cdot A_2^3 \cdot A_3^4 \quad \text{_____ ( 11 )}$$

$$A_0^4 = \begin{pmatrix} C_{34} & -S_{34} & 0 & a2 + a3C_3 + a4C_{34} \\ S_{34} & C_{34} & 0 & d2 + a3S_3 + a4S_{34} \\ 0 & 0 & 1 & d1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para la junta 5 tipo rotacional:

$$A_0^5 = A_0^1 \cdot A_1^2 \cdot A_2^3 \cdot A_3^4 \cdot A_4^5 \quad \text{_____ ( 12 )}$$

$$A_0^5 = \begin{pmatrix} C_{345} & -S_{345} & 0 & a2 + a3C_3 + a4C_{34} + a5C_{345} \\ S_{345} & C_{345} & 0 & d2 + a3S_3 + a4S_{34} + a5S_{345} \\ 0 & 0 & 1 & d1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tomando la componente del vector de posición  $\mathbf{o}_0^i$  de cada transformación dada por las ecuaciones de (8) a (12) tal como se definió en (2) y (3), obtenemos:

De  $A_0^1$  y  $A_0^2$  leemos:

$$\mathbf{o}_0^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d1 \end{pmatrix} \quad \text{_____ ( 13 )} \quad \text{y} \quad \mathbf{o}_0^2 = \begin{pmatrix} a2 \\ d2 \\ d1 \end{pmatrix} \quad \text{_____ ( 14 )}$$

De  $A_0^3$  y  $A_0^4$  leemos:

$$\mathbf{o}_0^3 = \begin{pmatrix} a2 + a3C_3 \\ d2 + a3S_3 \\ d1 \end{pmatrix} \quad \text{_____ ( 15 )} \quad \text{y} \quad \mathbf{o}_0^4 = \begin{pmatrix} a2 + a3C_3 + a4C_{34} \\ d2 + a3S_3 + a4S_{34} \\ d1 \end{pmatrix} \quad \text{_____ ( 16 )}$$

De  $A_0^5$  leemos:

$$\mathbf{o}_0^5 = \begin{pmatrix} a2 + a3C_3 + a4C_{34} + a5C_{345} \\ d2 + a3S_3 + a4S_{34} + a5S_{345} \\ d1 \end{pmatrix} \quad \text{_____ ( 17 )}$$

Como se puede observar la posición del origen de cada sistema de coordenadas, con respecto al sistema  $\{0\}$ , especificados por las ecuaciones (13) a (17), se hallan en función de las dimensiones del robot PRRR ( $a1$ ,  $a2$ ,  $d2$  y  $a3$ ) y de las variables articulares ( $d1$ ,  $\theta3$ ,  $\theta4$  y  $\theta5$ ), tal y como se deseaba.

### 3.4. Posición del Efector final del robot PRRR

Para definir las variables de Posición del Efector final del robot PRRR  $\mathbf{q}_e$ , considere la matriz de transformación de sistema absoluto {0} al marco del Efector final {5} de ec. (12), tenemos:

$$A_0^5 = \begin{pmatrix} \cos[\theta_3 + \theta_4 + \theta_5] & -\sin[\theta_3 + \theta_4 + \theta_5] & 0 & a_2 + a_3\cos[\theta_3] + a_4\cos[\theta_3 + \theta_4] + a_5\cos[\theta_3 + \theta_4 + \theta_5] \\ \sin[\theta_3 + \theta_4 + \theta_5] & \cos[\theta_3 + \theta_4 + \theta_5] & 0 & d_2 + a_3\sin[\theta_3] + a_4\sin[\theta_3 + \theta_4] + a_5\sin[\theta_3 + \theta_4 + \theta_5] \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y también considere un ángulo  $\phi$  que indica la orientación del efector final medido respecto al eje  $z_0$ , de acuerdo con la convención de la mano derecha. Este ángulo es un dato dado por el usuario, de acuerdo a las *Forma de muestreo* (Capítulo 2, sección 2.1.2)

Debido a que los ángulos  $\theta_3, \theta_4$  y  $\theta_5$  están contenidos en el Plano 2 (ver **Figura 33**) se cumple lo siguiente para el ángulo  $\phi$ :

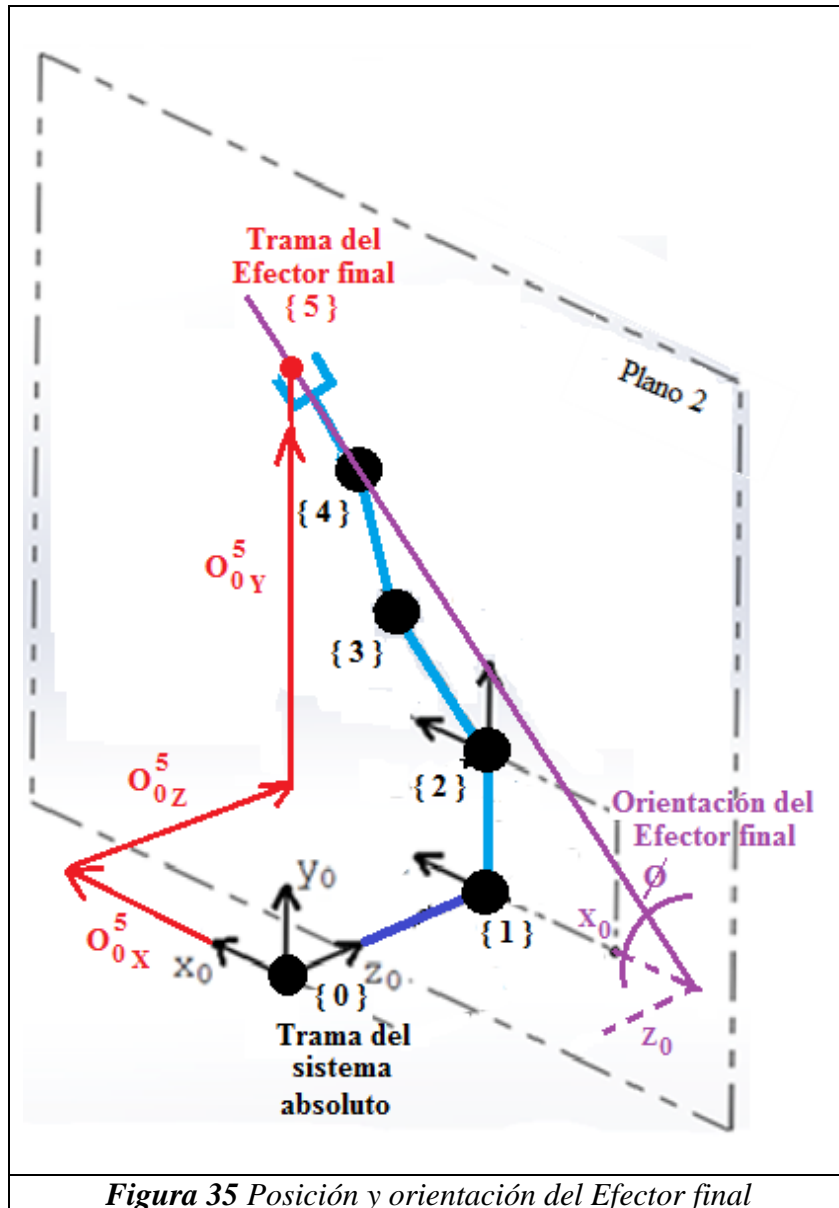
$$\phi = \theta_3 + \theta_4 + \theta_5$$

Entonces al sustituir la  $\phi$  en la ecuación (12), tenemos:

$$A_0^5 = \begin{pmatrix} \cos[\phi] & -\sin[\phi] & 0 & a_2 + a_3\cos[\theta_3] + a_4\cos[\theta_3 + \theta_4] + a_5\cos[\phi] \\ \sin[\phi] & \cos[\phi] & 0 & d_2 + a_3\sin[\theta_3] + a_4\sin[\theta_3 + \theta_4] + a_5\sin[\phi] \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (18)$$

Donde la componente de orientación  $R_0^5$  y de posición del efector final  $\mathbf{o}_0^5$  son funciones del tiempo, por lo que los elementos de  $\mathbf{q}_e$  son cuatro, uno correspondientes a la descomposición de las tres coordenadas de posición  $\mathbf{o}_0^5$ , es decir  $o_{0_x}^5, o_{0_y}^5$  y  $o_{0_z}^5$ , y una cuarta variable  $\phi$ , correspondiente a la orientación. Entonces el vector  $\mathbf{q}_e$  de las variables que definen la posición y orientación del Efector final del robot PRRR, se compone de la siguiente manera:

$$\mathbf{q}_e = \begin{pmatrix} a_2 + a_3\cos[\theta_3] + a_4\cos[\theta_3 + \theta_4] + a_5\cos[\phi] \\ d_2 + a_3\sin[\theta_3] + a_4\sin[\theta_3 + \theta_4] + a_5\sin[\phi] \\ d_1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (19)$$

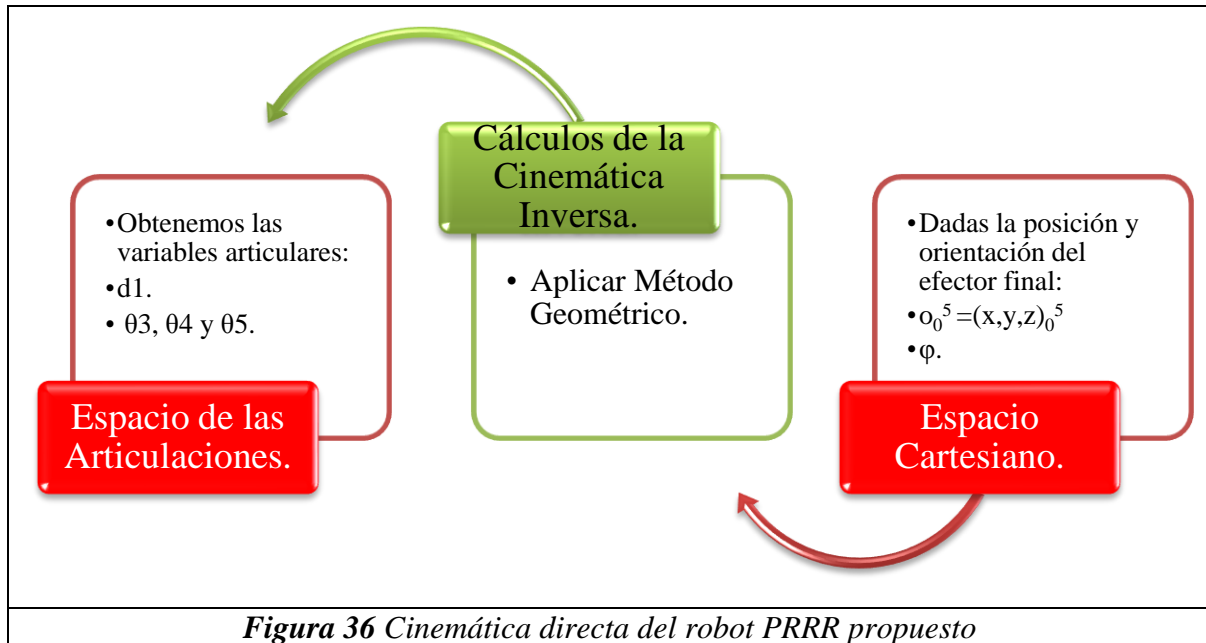


*Figura 35 Posición y orientación del Efecto final*



### 3.5. Cinemática Inversa

El problema de la cinemática inversa consiste en la determinación de las variables articulares correspondientes a una orientación y posición específicas del efector final. La solución de este problema es de fundamental importancia, pues transforma las especificaciones del movimiento asignadas al Efector final en el espacio operacional en sus correspondientes movimientos en el espacio articular.



En la definición de la matriz de transformación (2) que por comodidad aquí se repite:

$$A_0^1 = \begin{pmatrix} R_0^1 & \mathbf{o}_0^1 \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$$

La sección del vector de posición que la compone, viene dado por sus componentes escalares, como sigue:

$$\mathbf{o}_0^1 = \begin{pmatrix} o_{0x}^1 \\ o_{0y}^1 \\ o_{0z}^1 \end{pmatrix}$$

Sin embargo, para el desarrollo de la cinemática inversa, es más útil un nuevo enfoque para dicho vector,  $\mathbf{o}_i^j$  es un vector de posición relativo, que va del marco de referencia  $i$  a otro marco de referencia  $j$ .

$$\mathbf{o}_i^j = \begin{pmatrix} x_{ij} \\ y_{ij} \\ z_{ij} \end{pmatrix} \quad \text{_____ ( 20 )}$$

Donde cada componente escalar es la magnitud de un vector, que se extiende desde el marco de referencia  $i$  hasta el  $j$ .

### 3.5.1. División del problema de posición del Efector final del robot PRRR

Para resolver la cinemática inversa se dividió el problema en dos partes, ver la **Figura 37**, por un lado un robot de tres grados de libertad (robot RRR) que abarca del sistema {2} al {5}, ver la **Figura 37A**). Y una segunda sección que incluya la junta prismática ( $d1$ ) y la altura de la plataforma móvil ( $d2$ ), correspondiente a una transformación del sistema {0} al {2}, ver la **Figura 37C**).

#### *Solución geométrica del Robot PRRR*

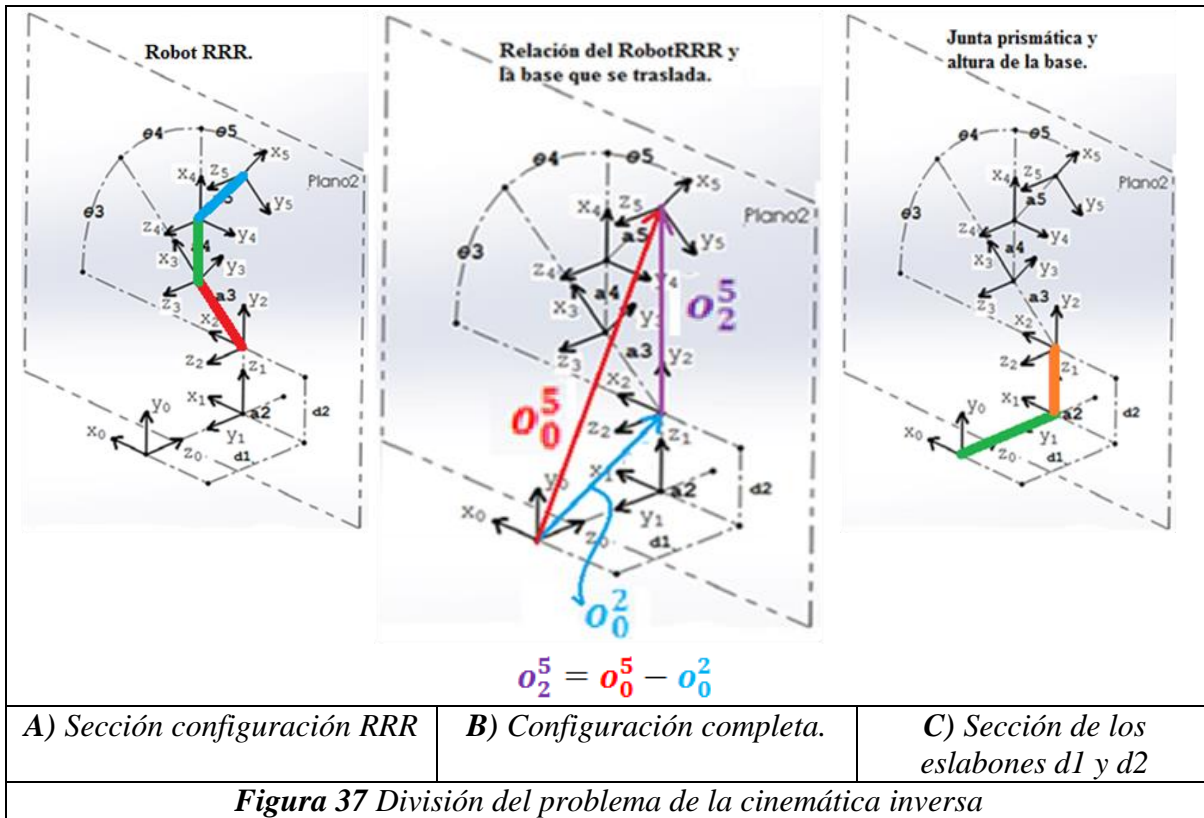
Se resolvió geoméricamente al robot de tres eslabones en el plano (robot RRR), de donde obtenemos ecuaciones que resuelven los ángulos  $\theta_3$ ,  $\theta_4$  y  $\theta_5$  dada la posición del efector final en relación al sistema {2}, es decir  $\mathbf{o}_2^5$ . Sin considerar la junta prismática ni la altura de la plataforma móvil.

En segundo lugar, para considerar la junta prismática y la altura de la plataforma móvil se realiza la siguiente resta de vectores:

$$\begin{aligned} \mathbf{o}_2^5 &= \mathbf{o}_0^5 - \mathbf{o}_0^2 \\ \begin{pmatrix} x_{25} \\ y_{25} \\ d1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_{05} \\ y_{05} \\ d1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a2 \\ d2 \\ d1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_{25} \\ y_{25} \\ d1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_{05} - a2 \\ y_{05} - d2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{_____ ( 21 )} \end{aligned}$$

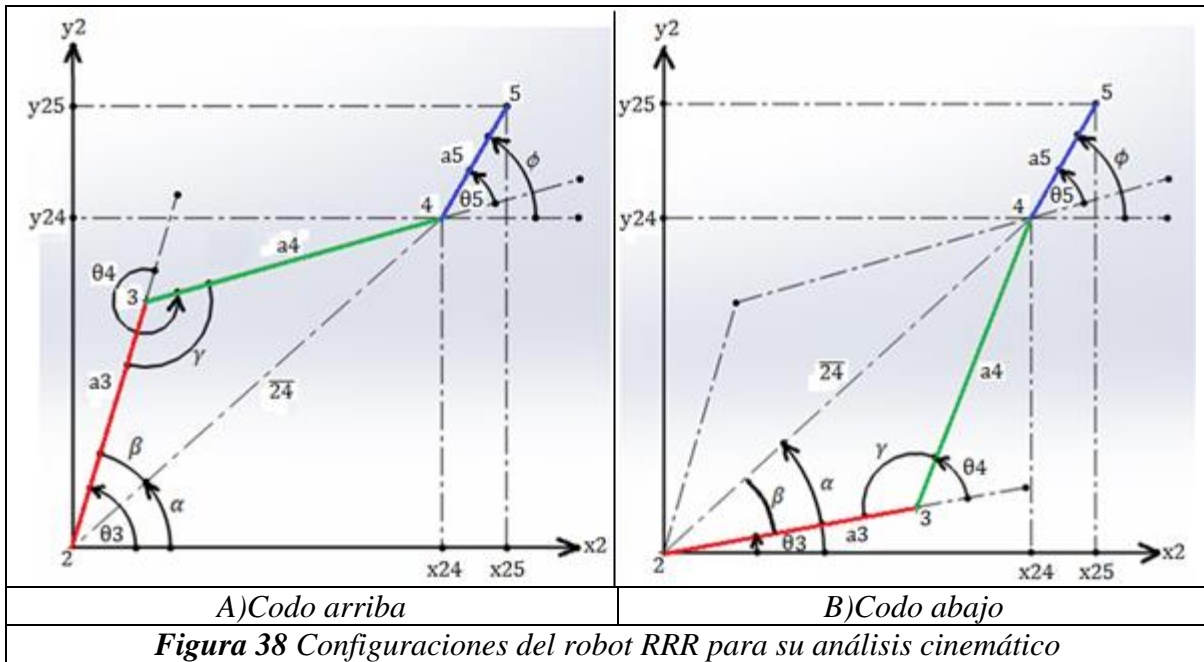
Donde  $x_{05}$ ,  $y_{05}$  y  $d1$  son datos introducidos por el usuario del robot, mientras que  $a2$  y  $d2$  son dimensiones del robot. Por lo que  $x_{25}$  y  $y_{25}$  son conocidas. La **Figura 37B**), aclara dicho cálculo.

Ahora bien conocidas las coordenadas  $(x_{25}, y_{25})$ , dadas por la ec. (21), son empleadas para determinar  $\theta_3$ ,  $\theta_4$  y  $\theta_5$  realizando el siguiente análisis geométrico del robot, como si se tratase de un robot RRR planar.



*Solución geométrica de la sección del Robot RRR en el plano*

Considerando el robot RRR de la **Figura 38** observamos que existen dos configuraciones para una orientación y posición dadas del efector final; la de codo arriba y la de codo abajo. Lo que se busca para los dos casos es encontrar los ángulos de las articulaciones  $\theta_3$ ,  $\theta_4$  y  $\theta_5$ , correspondientes a la posición y orientación determinadas para el efector final. Para un movimiento planar, la posición y orientación del efector final pueden especificarse por el origen del sistema coordenado  $\{2\}$ , es decir  $(x_2, y_2)$ , y por la orientación del sistema adjunto al efector final respecto al eje  $x_2$ , el cual es paralelo a  $x_0$ , es decir, el ángulo  $\phi$  como se muestra en la **Figura 38**.



Resumiendo, tenemos lo siguiente:

Entradas:  $(x_{25}, y_{25}, \phi)$  del efector final, dadas por el usuario del robot, y  $(a_3, a_4, a_5)$  de las longitudes de los eslabones.

Salidas:  $(\theta_3, \theta_4, \theta_5)$  los ángulos de los eslabones, son las respuestas del robot.

Cálculos:

Se calculan las coordenadas  $(x_{24}, y_{24})$

$$x_{24} = x_{25} - a_5 \cos[\phi] \quad \text{_____} (22)$$

$$y_{24} = y_{25} - a_5 \sin[\phi] \quad \text{_____} (23)$$

Primero comprobamos si el punto y orientación dados por el usuario se encuentran dentro del área de trabajo del robot, para esto se debe cumplir lo siguiente:

$$\sqrt{x_{24}^2 + y_{24}^2} \leq (a_3 + a_4) \quad \text{_____} (24)$$

Ya que el estiramiento de 2 a 4, no puede ser mayor que la suma de las longitudes de los eslabones.

Si se cumple la desigualdad (24) continuamos con los cálculos.

Resolvemos el triángulo formado por las juntas 2,3 y 4. El lado  $\overline{24}$  del triángulo se obtiene con el Teorema de Pitágoras:

$$\overline{24}^2 = x_{24}^2 + y_{24}^2 \quad \text{_____ ( 25 )}$$

Aplicamos la Ley de Cosenos:

$$\overline{24}^2 = a_3^2 + a_4^2 - 2a_3 a_4 \cos[\gamma] \quad \text{_____ ( 26 )}$$

Sustituyendo la ecuación (25) en la (26) queda:

$$x_{24}^2 + y_{24}^2 = a_3^2 + a_4^2 - 2a_3 a_4 \cos[\gamma] \quad \text{_____ ( 27 )}$$

Despejando  $\gamma$  de (27) tenemos:

$$\gamma = \text{ArcCos}\left[\frac{x_{24}^2 + y_{24}^2 - a_3^2 - a_4^2}{-2 a_3 a_4}\right] \quad \text{_____ ( 28 )}$$

Luego calculamos  $\alpha$  con la función arco tangente,  $\text{ATan2}$ , la cual dada las coordenadas del punto  $(x_{24}, y_{24})$ , calcula el ángulo respecto al eje  $x_2$  sin importar en cual cuadrante se encuentre.

$$\alpha = \text{ATan2}[x_{24}, y_{24}] \quad \text{_____ ( 29 )}$$

Calculamos  $\beta$  aplicando la Ley de Senos:

$$\frac{\sin[\beta]}{a_4} = \frac{\sin[\gamma]}{\overline{24}} \quad \text{_____ ( 30 )}$$

Sustituyendo  $\overline{24}$  de la ec. (25) en la ec. (30) y despejando  $\beta$ , tenemos:

$$\beta = \text{ArcSin}\left[\frac{a_4 \sin[\gamma]}{\sqrt{x_{24}^2 + y_{24}^2}}\right] \quad \text{_____ ( 31 )}$$

Ahora bien como se sabe los ángulos en el plano se suman, entonces tenemos la siguiente ecuación:

$$\phi = \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 \quad \text{_____ ( 32 )}$$

Nótese que las ecs. (28) para  $\gamma$ , (29) para  $\alpha$ , (31) para  $\beta$ , y (32) para  $\phi$ , se cumplen para ambas configuraciones.

Obtenemos  $\theta_3, \theta_4$  y  $\theta_5$ , de acuerdo a los ángulos  $\gamma, \alpha, \beta$  y  $\phi$  calculados anteriormente. Finalmente se suman o restan grados dependiendo de la configuración del robot; ya sea codo arriba o codo abajo.

Para el codo arriba tenemos:

$$\theta_3 = \alpha + \beta \quad \text{_____} (33)$$

$$\theta_4 = \pi + \gamma \quad \text{_____} (34)$$

Para el codo abajo tenemos:

$$\theta_3 = \alpha - \beta \quad \text{_____} (35)$$

$$\theta_4 = \pi - \gamma \quad \text{_____} (36)$$

En ambos casos:

$$\theta_5 = \phi - \theta_3 - \theta_4 \quad \text{_____} (37)$$

La cuarta variable articular es  $d_1$ , la cual es dada por el usuario.

En conclusión, tenemos que el análisis de la cinemática inversa para el robot PRRR propuesto, queda resuelto así:

Dada la posición y orientación del efector final  $(x_{05}, y_{05}, d_1)^T$  y  $\phi$ , así como las dimensiones del robot PRRR ( $a_1, d_2, a_2, a_3, a_4, a_5$ ).

Calcular:

$$x_{25} = x_{05} - a_2 \text{ de (21)}$$

$$y_{25} = y_{05} - d_2 \text{ de (21)}$$

$$x_{24} = x_{25} - a_5 \cos[\phi] \quad \text{_____} (22)$$

$$y_{24} = y_{25} - a_5 \sin[\phi] \quad \text{_____} (23)$$

$$\text{Comprobar que se cumpla: } \sqrt{x_{24}^2 + y_{24}^2} \leq (a_3 + a_4) \quad \text{_____} (24)$$

Si se cumple (24), calcular los ángulos auxiliares:

$$\gamma = \text{ArcCos}\left[\frac{x^2y^2 + y^2z^2 - a^3 - a^4}{-2a^3a^4}\right] \text{ _____ (28)}$$

$$\alpha = \text{ATan2}[x^2y^2, y^2z^2] \text{ _____ (29)}$$

$$\beta = \text{ArcSin}\left[\frac{a^4 \text{Sin}[\gamma]}{\sqrt{x^2y^2 + y^2z^2}}\right] \text{ _____ (31)}$$

Y finalmente para cada configuración calcular:

Para el codo arriba:

$$\theta_3 = \alpha + \beta \text{ _____ (33)}$$

$$\theta_4 = \pi + \gamma \text{ _____ (34)}$$

Para el codo abajo:

$$\theta_3 = \alpha - \beta \text{ _____ (35)}$$

$$\theta_4 = \pi - \gamma \text{ _____ (36)}$$

En ambos casos:

$$\theta_5 = \phi - \theta_3 - \theta_4 \text{ _____ (37)}$$

La cuarta variable articular es  $d_1$ , la cual es dada por el usuario.

### 3.6. Análisis de Velocidades y Aceleraciones

#### 3.6.1. Velocidades y Aceleraciones del Efector Final a lo largo de una ruta

##### Definición de algunos parámetros

La ruta que sigue un efector final es una secuencia de puntos en el espacio cartesiano que varían conforme lo hace un parámetro “s”, dentro de una función vectorial  $f(s)$ . La función  $f(s)$  puede representar la ecuación paramétrica de una recta, elipse, parábola, etc.

Los puntos a lo largo de una ruta son definidos por un vector de posición  $\mathbf{P}$ . Este vector tridimensional es una representación paramétrica de la ruta como función de la coordenada de ruta “s” y se representa como:

$$\mathbf{P} = f(s) \quad \text{_____} ( 38 )$$

Que es equivalente a:

$$\begin{pmatrix} P_{x_e} \\ P_{y_e} \\ P_{z_e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x(s) \\ f_y(s) \\ f_z(s) \end{pmatrix}$$

Donde  $P_{x_e}$  es la componente x del vector de posición que tiene como origen el sistema {0} y destino el origen del sistema {n} adjunto al Efector final del robot de n eslabones.

Para incluir una ley del tiempo a lo largo de la ruta, se plantea que la coordenada de ruta “s” sea a su vez función del tiempo, es decir:

$$\mathbf{P} = f(s(t)) \quad \text{_____} ( 39 )$$

Una expresión analítica frecuentemente utilizada para  $s(t)$  es un polinomio de quinto grado, la cual es una función continua. Se elige un polinomio de quinto grado porque al derivar el polinomio, para describir la velocidad y la aceleración a lo largo de la ruta, producen un desplazamiento “s” suave del punto inicial ( $\mathbf{P}_{ini}$ ) al final ( $\mathbf{P}_{fin}$ ), lo cual reduce los esfuerzos en la estructura del robot al moverse.

Para la velocidad se deriva una vez  $\mathbf{P}$  de (39) con respecto al tiempo:

$$\dot{\mathbf{P}} = \frac{d [f(s(t))]}{dt} \quad \text{_____} ( 40 )$$

Para la aceleración se deriva una vez más  $\mathbf{P}$  con respecto al tiempo:



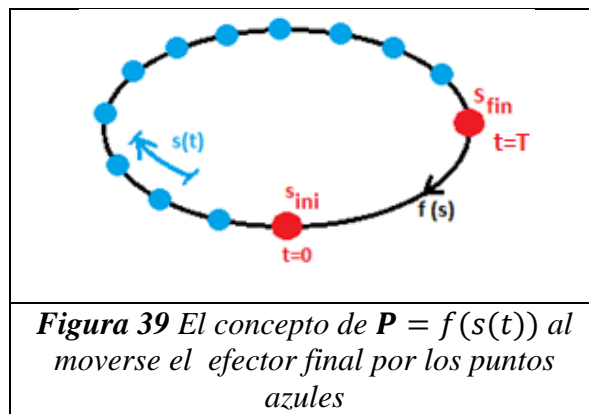
$$\ddot{\mathbf{P}} = \frac{d^2[f(s(t))]}{dt^2} \quad \text{_____ ( 41 )}$$

Al definir las funciones  $f(s)$  y  $s(t)$ , debe considerarse que la posición  $\mathbf{P}$  del origen del sistema de coordenadas del efector final, se mueve de  $\mathbf{P}_{ini}$  a  $\mathbf{P}_{fin}$  en un tiempo llamado periodo, denotado por “T”. En consecuencia, la coordenada de ruta “s” corre desde el valor  $s=0$  en  $t=0$  hasta el valor  $s=s_{fin}$  (longitud total de la ruta) en  $t=T$ . Entonces evaluando en (39), tenemos:

$$\mathbf{P}_{ini} = f(s(t = 0) = 0)$$

$$\mathbf{P}_{fin} = f(s(t = T) = s_{fin})$$

La siguiente figura ilustra una ruta  $f(s)$  con su parámetro “s” y el tiempo a lo largo de la ruta “T”.



Al realizar el análisis de velocidades y aceleraciones a lo largo de una ruta es necesario introducir otros parámetros de los descritos anteriormente.

- El primero es un entero que describe en cuantas partes se dividirá la ruta a seguir por el efector final desde  $s_{ini}$  hasta  $s_{fin}$ . Lo llamaremos simplemente: *Particiones*.
- El segundo término es un tiempo unitario  $t_u$  que varía de 0 a 1, y lo hace conforme a la j-énesima partición en la que se halle el punto  $\mathbf{P}$  a lo largo de la ruta. Se define como:

$$t_u = \frac{j}{Particiones} \quad \text{_____ ( 42 )}$$

Entonces si queremos obtener el tiempo real al recorrer j *Particiones*, tan solo multiplicamos  $t_u$  por el periodo “T” (tiempo que tardará en llegar al punto final).

$$t_j = t_u * T \quad \text{_____ ( 43 )}$$

- El tercer término es una coordenada de ruta unitaria  $s_u$  que varía de 0 a 1 en función de  $t_u$ . Esta es definida por el siguiente polinomio de quinto grado:

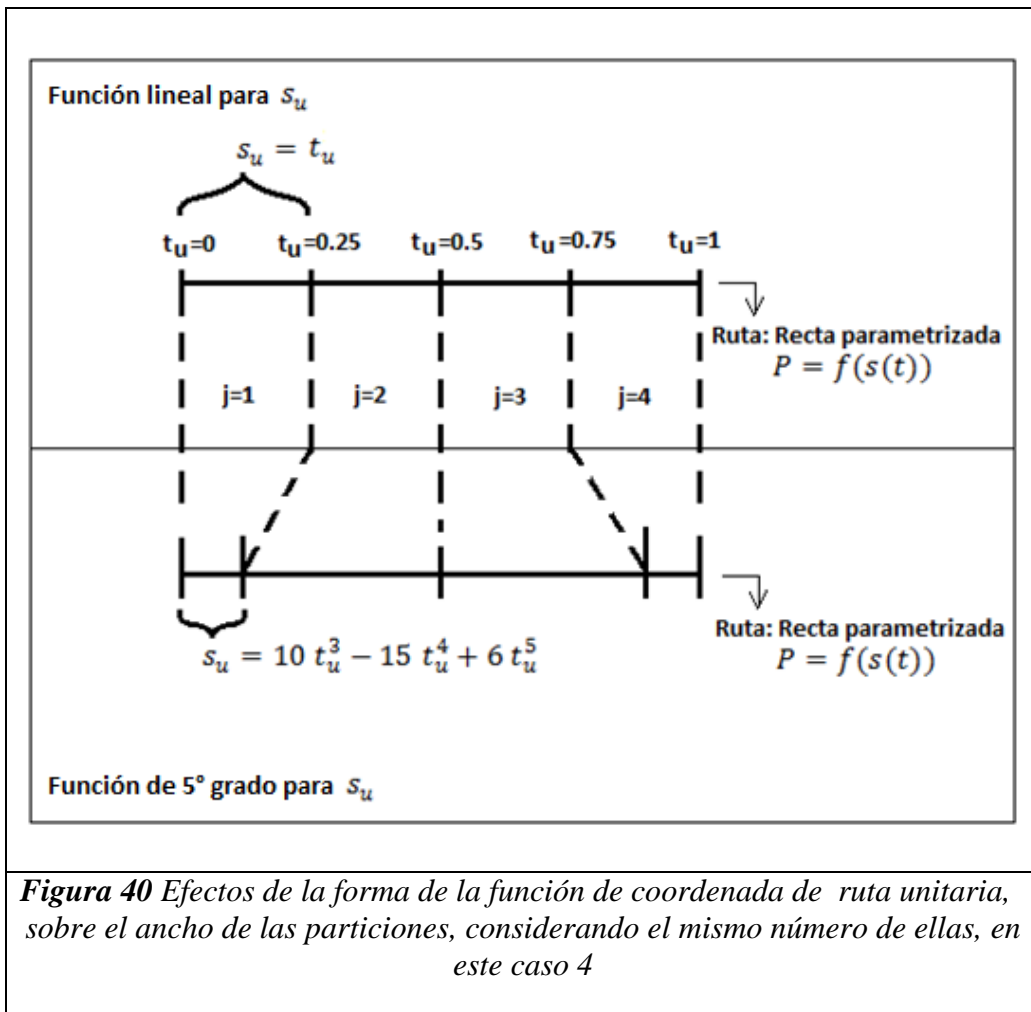
$$s_u = 10 t_u^3 - 15 t_u^4 + 6 t_u^5 \quad \text{_____} (44)$$

La expresión anterior es derivada una vez para obtener la velocidad de la coordenada de ruta  $s_u$ , y derivada una vez más para obtener la aceleración.

$$\dot{s}_u = 30 t_u^2 - 60 t_u^3 + 30 t_u^4 \quad \text{_____} (45)$$

$$\ddot{s}_u = 60 t_u - 180 t_u^2 + 120 t_u^3 \quad \text{_____} (46)$$

En la **Figura 40** se muestran dos rutas rectas  $f(s)$  divididas en cuatro particiones ( $Particiones=4$ ), con sus tiempos unitarios para la  $j$ -ésima partición. Estas dos rutas rectas se diferencian una de otra en que la de arriba es una función  $s_u$  lineal, mientras que la de abajo es una función  $s_u$  de quinto grado.



*Velocidades y aceleraciones del Efector final del robot PRRR a lo largo de una ruta recta*

Los siguientes son elementos necesarios para simular el seguimiento del efector final de una ruta recta, con cierta velocidad y aceleración:

- Coordenadas cartesianas de los puntos inicial y final a lo largo de la ruta ( $\mathbf{P}_{ini}$ ,  $\mathbf{P}_{fin}$ )

$$\begin{pmatrix} P_{xini} \\ P_{yini} \\ P_{zini} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x05_{ini} \\ y05_{ini} \\ d1_{ini} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} P_{xfin} \\ P_{yfin} \\ P_{zfin} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x05_{fin} \\ y05_{fin} \\ d1_{fin} \end{pmatrix}$$

- Número de *Particiones* en que se dividirá la ruta, para definir  $t_u$ :

$$t_u = \frac{j}{Particiones} \quad \text{_____ ( 42 )}$$

- Tiempo T en que el efector final ira del punto inicial al final, con lo que se conoce el tiempo  $t_j$  en que recorrerá la  $j$ -enésima *Partición*:

$$t_j = t_u * T$$

- Ley de tiempo de  $s_u$  (polinomio quintico), junto con su primera y segunda derivadas.

$$s_u = 10 t_u^3 - 15 t_u^4 + 6 t_u^5 \quad \text{_____ ( 44 )}$$

$$\dot{s}_u = 30 t_u^2 - 60 t_u^3 + 30 t_u^4 \quad \text{_____ ( 45 )}$$

$$\ddot{s}_u = 60 t_u - 180 t_u^2 + 120 t_u^3 \quad \text{_____ ( 46 )}$$

- Ecuación paramétrica de una ruta recta:

$$\begin{pmatrix} P_{xe} \\ P_{ye} \\ P_{ze} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{xini} + (P_{xfin} - P_{xini}) * S_u \\ P_{yini} + (P_{yfin} - P_{yini}) * S_u \\ P_{zini} + (P_{zfin} - P_{zini}) * S_u \end{pmatrix} \quad \text{_____ ( 47 )}$$

- Velocidades y aceleraciones a lo largo de la ruta recta:  
Aplicando la ec. (40) a la ec. (47):

$$\begin{pmatrix} \dot{P}_{x_e} \\ \dot{P}_{y_e} \\ \dot{P}_{z_e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d[P_{x_{ini}} + (P_{x_{fin}} - P_{x_{ini}}) * s_u]}{d t_u} \\ \frac{d[P_{y_{ini}} + (P_{y_{fin}} - P_{y_{ini}}) * s_u]}{d t_u} \\ \frac{d[P_{z_{ini}} + (P_{z_{fin}} - P_{z_{ini}}) * s_u]}{d t_u} \end{pmatrix}$$

Entonces la velocidad del efector final a lo largo de la trayectoria recta es:

$$\begin{pmatrix} v_{x_e} \\ v_{y_e} \\ v_{z_e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (P_{x_{fin}} - P_{x_{ini}}) * \dot{s}_u \\ (P_{y_{fin}} - P_{y_{ini}}) * \dot{s}_u \\ (P_{z_{fin}} - P_{z_{ini}}) * \dot{s}_u \end{pmatrix} \quad \text{_____ ( 48 )}$$

Derivando de nuevo la ec. (48) respectos a  $t_u$ , obtenemos la aceleración del efector final a lo largo de la trayectoria recta:

$$\begin{pmatrix} a_{x_e} \\ a_{y_e} \\ a_{z_e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (P_{x_{fin}} - P_{x_{ini}}) * \ddot{s}_u \\ (P_{y_{fin}} - P_{y_{ini}}) * \ddot{s}_u \\ (P_{z_{fin}} - P_{z_{ini}}) * \ddot{s}_u \end{pmatrix} \quad \text{_____ ( 49 )}$$

### 3.6.2. El Jacobiano y las Velocidades Articulares

#### Jacobiano [4]

Las ecuaciones de la cinemática directa definen una función entre el espacio cartesiano (posiciones y orientaciones) y el espacio de las posiciones de las articulaciones, como se vio en la sección 3.2. Las relaciones de velocidad están dadas por el Jacobiano de la ec. (12), por lo que es únicamente función de las variables de Denavit-Hatenberg.

El Jacobiano es una matriz que denotaremos con la letra “J”, y representa la relación que existe entre la velocidad linear y angular del efector final  $\dot{\mathbf{q}}_e$ , con la velocidad de las articulaciones  $\dot{\mathbf{q}}$ .

El Jacobiano no se limita únicamente a relacionar las velocidades del efector final con las articulares, también se puede obtener de manera que relacione las velocidades del centro de

masa de cierto eslabón con las velocidades articulares, lo cual será de gran utilidad en el desarrollo del modelado dinámico del robot (ver Anexo D).

Además de lo anterior el Jacobiano es una de las herramientas más importantes para la caracterización de manipuladores. De hecho, es útil para:

- Encontrar configuraciones singulares.
- Analizar redundancias.
- Determinar algoritmos de cinemática inversa para el análisis de velocidad.
- Describir la relación entre fuerzas aplicadas al efector final y los pares de torsión resultantes en las articulaciones.
- Derivar los algoritmos de la dinámica.

### *Jacobiano del Efector final*

A continuación desarrollaremos el Jacobiano que relaciona las velocidades articulares  $\dot{\mathbf{q}}$  con las velocidades del efector final  $\dot{\mathbf{q}}_e$ . La relación se representa de la siguiente manera:

$$\dot{\mathbf{q}}_e = \mathbf{J} \dot{\mathbf{q}} \quad \text{_____ ( 50 )}$$

Ahora describiremos los parámetros que componen a  $\dot{\mathbf{q}}$  y  $\dot{\mathbf{q}}_e$

Para el robot PRRR al derivar una vez  $\mathbf{q}$ , de la sección 3.2 ec (1), obtenemos el vector de velocidades articulares  $\dot{\mathbf{q}}$ :

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \dot{d}_1 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \\ \dot{\theta}_5 \end{pmatrix}$$

Que es equivalente a:

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \\ \omega_5 \end{pmatrix} \quad \text{_____ ( 51 )}$$

Para definir las velocidades del Efector final del robot PRRR  $\dot{\mathbf{q}}_e$ , considere la matriz de transformación de sistema absoluto {0} al marco del Efector final {5} de ec. (18), tenemos:

$$A_0^5 = \begin{pmatrix} \cos[\phi] & -\sin[\phi] & 0 & a_2 + a_3\cos[\theta_3] + a_4\cos[\theta_3 + \theta_4] + a_5\cos[\phi] \\ \sin[\phi] & \cos[\phi] & 0 & d_2 + a_3\sin[\theta_3] + a_4\sin[\theta_3 + \theta_4] + a_5\sin[\phi] \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{_(18)}$$

Donde la componente de orientación  $R_0^5$  y de posición del efector final  $\mathbf{o}_0^5$  son funciones del tiempo, por lo que los elementos de  $\dot{\mathbf{q}}_e$  son cuatro, uno correspondientes a la descomposición de las tres velocidades lineales del  $\dot{o}_{0_x}^5, \dot{o}_{0_y}^5, \dot{o}_{0_z}^5$ , y otra velocidad rotacional  $\dot{\phi}$  correspondiente a la orientación.

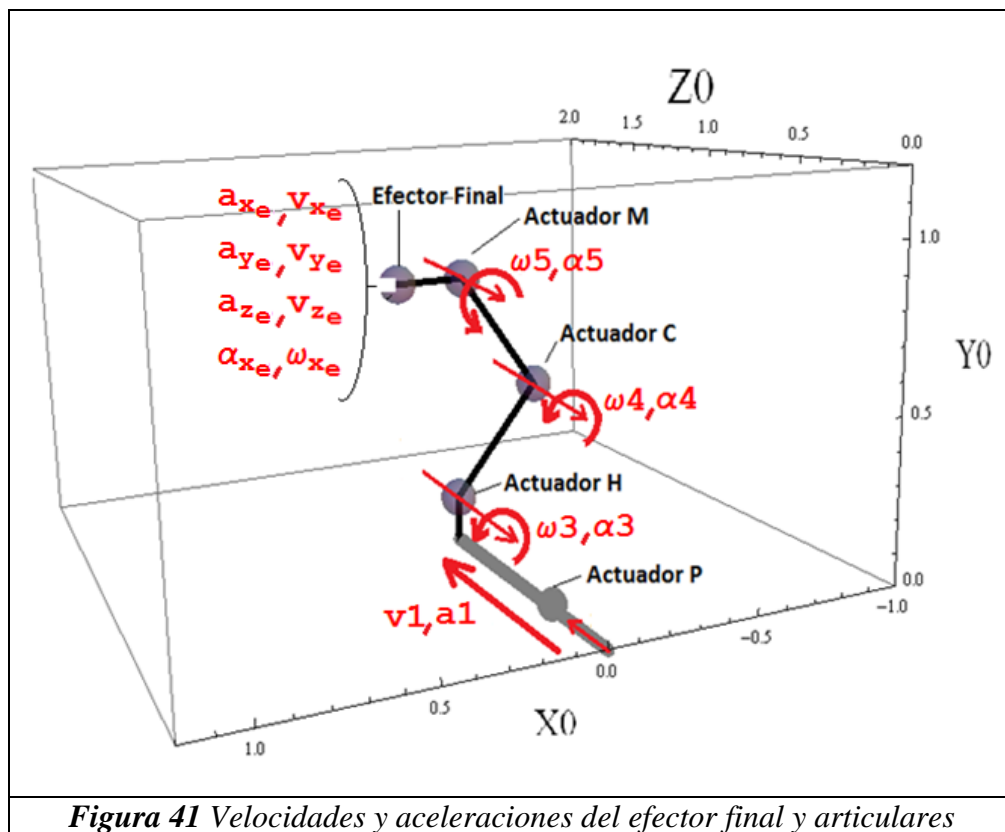
Las componentes  $\dot{o}_{0_x}^5, \dot{o}_{0_y}^5$  y  $\dot{o}_{0_z}^5$  las renombraremos como  $v_{x_e}, v_{y_e}$  y  $v_{z_e}$  respectivamente.

Como se puede apreciar en la **Figura 41**,  $\dot{\phi}$  tiene como dirección de giro el eje  $z_0$  por lo que podríamos renombrarla como  $\omega_{z_e}$ . Finalmente  $\dot{\mathbf{q}}_e$  es:

$$\dot{\mathbf{q}}_e = \begin{pmatrix} v_{x_e} \\ v_{y_e} \\ v_{z_e} \\ \omega_{z_e} \end{pmatrix} \quad \text{_____} ( 52 )$$

Note que en la anterior ecuación no aparecen los componentes  $\omega_{x_e}$  y  $\omega_{y_e}$ , esto se debe a que el efector final no tiene la capacidad de girar en dirección de los ejes  $x_0$  y  $y_0$  respectivamente.

La siguiente imagen ilustra lo anterior:



Ahora que se han definido los vectores  $\dot{\mathbf{q}}$  y  $\dot{\mathbf{q}}_e$  solo nos resta calcular el Jacobiano (J), para lo cual utilizamos las ecuaciones, que aparecen en el Anexo D.

Aplicando las ecuaciones del Anexo D (de la D.1 a la D.4) al robot PRRR tenemos:

$$J = (J_1 \quad J_3 \quad J_4 \quad J_5)$$

$$J = \begin{pmatrix} \mathbf{z}_0 & \mathbf{z}_2 \times (\mathbf{o}_0^5 - \mathbf{o}_0^2) & \mathbf{z}_3 \times (\mathbf{o}_0^5 - \mathbf{o}_0^3) & \mathbf{z}_4 \times (\mathbf{o}_0^5 - \mathbf{o}_0^4) \\ 0 & \mathbf{z}_2 & \mathbf{z}_3 & \mathbf{z}_4 \end{pmatrix} \quad \text{_____ ( 53 )}$$

Donde

$$\mathbf{z}_0 = (0 \quad 0 \quad 1)^T \quad \text{_____ ( 54 )}$$

$$\mathbf{z}_2 = \mathbf{z}_3 = \mathbf{z}_4 = (0 \quad 0 \quad 1)^T \quad \text{_____ ( 55 )}$$

Dado que los ejes z2, z3 y z4 tiene la misma dirección y orientación que z0.

Al sustituir los vectores de posición  $\mathbf{o}_0^i$  ecs. de la (13) a la (17), y  $\mathbf{z}_{i-1}$  ecs. (54) y (55); en (53), y realizando las operaciones obtenemos:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -a3S_3 - a4S_{34} - a5S_{345} & -a4S_{34} - a5S_{345} & -a5S_{345} \\ 0 & a3C_3 + a4C_{34} + a5C_{345} & a4C_{34} + a5C_{345} & a5C_{345} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Donde  $S_3 = \text{Sin}[\theta_3]$ ,  $S_{34} = \text{Sin}[\theta_3 + \theta_4]$ ,  $S_{345} = \text{Sin}[\theta_3 + \theta_4 + \theta_5]$

$C_3 = \text{Cos}[\theta_3]$ ,  $C_{34} = \text{Cos}[\theta_3 + \theta_4]$ ,  $C_{345} = \text{Cos}[\theta_3 + \theta_4 + \theta_5]$

Observamos que J es una matriz de 6x4, pero podemos descartar los términos de los renglones 4 y 5 debido a que no existe rotación angular del Efecto final del robot en las direcciones x0 y z0.

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -a3S_3 - a4S_{34} - a5S_{345} & -a4S_{34} - a5S_{345} & -a5S_{345} \\ 0 & a3C_3 + a4C_{34} + a5C_{345} & a4C_{34} + a5C_{345} & a5C_{345} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{_____ ( 56 )}$$

Sustituyendo las ecs. (51), (52) y (56) en la ec. (50), obtenemos las relaciones entre las velocidades del Efecto final y las Velocidades articulares:

$$\begin{pmatrix} v_{x_e} \\ v_{y_e} \\ v_{z_e} \\ \omega_{z_e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a3S_3 - a4S_{34} - a5S_{345} & -a4S_{34} - a5S_{345} & -a5S_{345} \\ 0 & a3C_3 + a4C_{34} + a5C_{345} & a4C_{34} + a5C_{345} & a5C_{345} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v1 \\ \omega3 \\ \omega4 \\ \omega5 \end{pmatrix} \quad \text{_____ ( 57 )}$$

*Velocidades Articulares dada la velocidad del Efector final a lo largo de una trayectoria recta*

Con el fin de conocer las velocidades articulares que son necesarias para que el Efector final siga una trayectoria recta de longitud finita en un tiempo “T”, de la ec. (58) calculamos la inversa del Jacobiano:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{-1} \dot{\mathbf{q}}_e \quad \text{_____} ( 58 )$$

Dado que las velocidades lineales  $v_{x_e}$ ,  $v_{y_e}$  y  $v_{z_e}$  que componen al vector  $\dot{\mathbf{q}}_e$  están dadas por el análisis efectuado en el apartado 3.6.1ec. (48), mientras que la velocidad angular  $\omega_{z_e}$  es cero, ya que el efector final no rotará respecto al eje  $z_0$  del sistema  $\{0\}$ . El eslabón 5 mantendrá una posición ya sea en  $90^\circ$  o  $270^\circ$  respecto a  $z_0$ , según el objeto que analice el espectrómetro, tal y como se mencionó en las especificaciones.

La inversa del Jacobiano de la ec. (56) es:

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{0}{a4C_{34}} & \frac{0}{a4S_{34}} & 0 & \frac{-a4a5C_{345}S_{34} + a4a5C_{34}S_{345}}{-a3a4C_{34}S_3 + a3a4C_3S_{34}} \\ \frac{-a3a4C_{34}S_3 + a3a4C_3S_{34}}{-a3C_3 - a4C_{34}} & \frac{-a3a4C_{34}S_3 + a3a4C_3S_{34}}{-a3S_3 - a4S_{34}} & 0 & \frac{a3a5C_{345}S_3 + a4a5C_{345}S_{34} - a3a5C_3S_{345} - a4a5C_{34}S_{345}}{-a3a4C_{34}S_3 + a3a4C_3S_{34}} \\ \frac{-a3a4C_{34}S_3 + a3a4C_3S_{34}}{a3C_3} & \frac{-a3a4C_{34}S_3 + a3a4C_3S_{34}}{a3S_3} & 0 & \frac{-a3a4C_{34}S_3 - a3a5C_{345}S_3 + a3a4C_3S_{34} + a4a5C_3S_{345}}{-a3a4C_{34}S_3 + a3a4C_3S_{34}} \\ \frac{-a3a4C_{34}S_3 + a3a4C_3S_{34}}{-a3a4C_{34}S_3 + a3a4C_3S_{34}} & \frac{-a3a4C_{34}S_3 + a3a4C_3S_{34}}{-a3a4C_{34}S_3 + a3a4C_3S_{34}} & 0 & \frac{-a3a4C_{34}S_3 + a3a4C_3S_{34}}{-a3a4C_{34}S_3 + a3a4C_3S_{34}} \end{pmatrix} \quad \text{_____} ( 59 )$$

Sustituyendo (52) y (59) en (58), realizando operaciones, tenemos:

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \frac{v_{z_e}}{a3} \\ \frac{\text{Csc}_4(v_{x_e}C_{34} + v_{y_e}S_{34} + a5\omega_{z_e}S_5)}{a3a4} \\ \frac{\text{Csc}_4(a3v_{x_e}C_3 + a4v_{x_e}C_{34} + a3v_{y_e}S_3 + a4v_{y_e}S_{34} + a4a5\omega_{z_e}S_5 + a3a5\omega_{z_e}S_{45})}{a4} \end{pmatrix} \quad \text{_____} ( 60 )$$

Donde  $\text{Csc}_4 = \text{Cosecante}[\theta_4]$

Con la ec. (60) es posible conocer las velocidades articulares del robot PRRR conocida la velocidad del sistema adjunto al efector final  $\mathbf{o}_0^5$ , tal y como se buscaba.



## Singularidades [5]

La mayoría de los robots tienen valores de  $\theta$  en donde el Jacobiano se convierte en singular, lo que implica que en la transformación lineal:  $\dot{q}_e = J \dot{q}$  no existiría una solución para las velocidades de las articulaciones  $\dot{q}$ . Dichas ubicaciones se llaman singularidades y se clasifican en dos categorías principalmente:

1. Singularidades en la frontera del espacio de trabajo: ocurre cuando el manipulador está completamente extendido o doblado sobre sí mismo, en tal forma que el efector final está muy cerca de los límites del espacio de trabajo.
2. Singularidades dentro del espacio de trabajo: ocurre lejos de los límites del espacio de trabajo; generalmente se producen por el alineamiento de dos o más ejes de articulación.

Cuando un manipulador se encuentra en una posición singular, ha perdido una o más grados de libertad, visto desde el espacio cartesiano. Esto significa que hay alguna dirección en el espacio cartesiano a lo largo de la cual es imposible mover el efector final del robot, sin importar qué incrementos en las articulaciones se seleccionen. Es obvio que estas situaciones ocurren en los límites del espacio de trabajo. Alternativamente, los incrementos en las articulaciones se acercan al infinito conforme se llega a la posición singular. En situaciones prácticas, el controlador exigiría potencia en los actuadores para cumplir con el requerimiento infinito del incremento en la articulación. Como resultado, el actuador será desactivado para prevenir un daño de consideración.

### *Singularidades del robot PRRR.*

Una matriz es singular cuando su determinante es igual a cero, entonces para el Jacobiano ecuación (56) obtenido en la sección anterior calculamos su determinante:

$$\text{Det}[J] = -a_3 a_4 \cos[\theta_3 + \theta_4] \sin[\theta_3] + a_3 a_4 \cos[\theta_3] \sin[\theta_3 + \theta_4] \quad \text{_____} (61)$$

Entonces deducimos que el valor de  $\theta_4$  que produce un determinante igual a cero es:

$$\theta_4 = 0$$

, es decir cuando el eslabón 3 y el 4 son colineales, por lo que se tiene que evitar esta posición singular en el movimiento del robot.

### 3.6.3. El Hessiano y las Aceleraciones Articulares

Para obtener la relación entre las Aceleraciones articulares y la Aceleración del Efector Final, derivamos la ec. (50) respecto al tiempo como sigue:

$$\ddot{\mathbf{q}}_e = \frac{d(J \dot{\mathbf{q}})}{dt}$$

$$\ddot{\mathbf{q}}_e = \dot{J} \dot{\mathbf{q}} + J \ddot{\mathbf{q}}$$

Sin embargo  $\dot{J} = H \dot{\mathbf{q}}$ , con lo que tenemos:

$$\ddot{\mathbf{q}}_e = H \dot{\mathbf{q}}^2 + J \ddot{\mathbf{q}} \quad \text{_____ ( 62 )}$$

Donde:  $\ddot{\mathbf{q}} \triangleq$  son las Aceleraciones articulares del robot  
 $\ddot{\mathbf{q}}_e \triangleq$  son las Aceleraciones del Efector final del robot  
 $H \triangleq$  Hessiano

El Hessiano H para un robot con  $n$  eslabones se calcula como:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 q_{e1}}{(\partial q_1)^2} & \frac{\partial^2 q_{e1}}{\partial q_1 \partial q_2} & \dots & \frac{\partial^2 q_{e1}}{\partial q_1 \partial q_n} \\ \frac{\partial^2 q_{e2}}{\partial q_2 \partial q_1} & \frac{\partial^2 q_{e2}}{(\partial q_2)^2} & \dots & \frac{\partial^2 q_{e2}}{\partial q_2 \partial q_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 q_{en}}{\partial q_3 \partial q_1} & \frac{\partial^2 q_{en}}{\partial q_3 \partial q_2} & \dots & \frac{\partial^2 q_{en}}{(\partial q_n)^2} \end{pmatrix} \quad \text{_____ ( 63 )}$$

Donde:  $q_{e1} \triangleq$  es el elemento uno del vector  $\mathbf{q}_e$   
 $q_1 \triangleq$  es el elemento uno del vector  $\mathbf{q}$

Dado que conocemos las Aceleraciones del Efector Final  $\ddot{\mathbf{q}}_e$  a lo largo de una ruta (ver ec. 49), de la ec. (62) despejamos el vector de Aceleraciones articulares:

$$\ddot{\mathbf{q}} = J^{-1}(\ddot{\mathbf{q}}_e - H \dot{\mathbf{q}}^2) \quad \text{_____ ( 64 )}$$

Finalmente sustituimos  $\dot{\mathbf{q}}$  de la de la ec. (58) en la ec. (64), con lo que obtenemos:

$$\ddot{\mathbf{q}} = J^{-1}(\ddot{\mathbf{q}}_e - H(J^{-1} \dot{\mathbf{q}}_e)^2) \quad \text{_____ ( 65 )}$$

A continuación aplicamos las expresiones anteriores al caso del robot PRRR.

*Cálculo de la relación de Aceleraciones del robot PRRR*

Primero definiremos los parámetros que componen a  $\ddot{\mathbf{q}}$  y  $\ddot{\mathbf{q}}_e$  para el robot PRRR.

Para el robot PRRR al derivar dos veces  $\mathbf{q}$ , obtenemos el vector de aceleraciones articulares  $\ddot{\mathbf{q}}$ :

$$\ddot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \ddot{d}_1 \\ \ddot{\theta}_3 \\ \ddot{\theta}_4 \\ \ddot{\theta}_5 \end{pmatrix}, \text{ que es equivalente a: } \ddot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{pmatrix} \text{ (66)}$$

Para  $\ddot{\mathbf{q}}_e$  derivamos una vez más la ec. (52) de la sección 3.6.2, obteniendo:

$$\ddot{\mathbf{q}}_e = \begin{pmatrix} a_{x_e} \\ a_{y_e} \\ a_{z_e} \\ \alpha_{z_e} \end{pmatrix} \text{ (67)}$$

Para determinar el Hessiano H recordemos los vectores  $\mathbf{q}$  y  $\mathbf{q}_e$  de las ecs. (1) y (19), respectivamente:

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{q}_e = \begin{pmatrix} a_2 + a_3 \cos[\theta_3] + a_4 \cos[\theta_3 + \theta_4] + a_5 \cos[\theta_3 + \theta_4 + \theta_5] \\ d_2 + a_3 \sin[\theta_3] + a_4 \sin[\theta_3 + \theta_4] + a_5 \sin[\theta_3 + \theta_4 + \theta_5] \\ d_1 \\ \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 \end{pmatrix}$$

Entonces procedemos a calcular cada elemento de la matriz Hessiana (H<sub>ij</sub>), la cual será de dimensión 4x4, con los elementos que se muestran a continuación:

$$H = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_{14} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & H_{24} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} & H_{34} \\ H_{41} & H_{42} & H_{43} & H_{44} \end{pmatrix} \text{ (68)}$$

Cálculo de cada elemento de la matriz Hessiana:

$$H_{11} = \frac{\partial^2 q_{e1}}{(\partial q_1)^2} = \frac{\partial^2 (a_2 + a_3 C_3 + a_4 C_{34} + a_5 C_{345})}{(\partial d_1)^2} = 0$$

$$H12 = \frac{\partial^2 q_{e1}}{\partial q_1 \partial q_2} = \frac{\partial^2 (a2 + a3C_3 + a4C_{34} + a5C_{345})}{\partial d1 \partial \theta3} = 0$$

$$H13 = \frac{\partial^2 q_{e1}}{\partial q_1 \partial q_3} = \frac{\partial^2 (a2 + a3C_3 + a4C_{34} + a5C_{345})}{\partial d1 \partial \theta4} = 0$$

$$H14 = \frac{\partial^2 q_{e1}}{\partial q_1 \partial q_4} = \frac{\partial^2 (a2 + a3C_3 + a4C_{34} + a5C_{345})}{\partial d1 \partial \theta5} = 0$$

$$H21 = \frac{\partial^2 q_{e2}}{\partial q_2 \partial q_1} = \frac{\partial^2 (d2 + a3S_3 + a4S_{34} + a5S_{345})}{\partial \theta3 \partial d1} = 0$$

$$H22 = \frac{\partial^2 q_{e2}}{(\partial q_2)^2} = \frac{\partial^2 (d2 + a3S_3 + a4S_{34} + a5S_{345})}{(\partial \theta3)^2} = -a3S_3 - a4S_{34} - a5S_{345}$$

$$H23 = \frac{\partial^2 q_{e2}}{\partial q_2 \partial q_3} = \frac{\partial^2 (d2 + a3S_3 + a4S_{34} + a5S_{345})}{\partial \theta3 \partial \theta4} = -a4S_{34} - a5S_{345}$$

$$H24 = \frac{\partial^2 q_{e2}}{\partial q_2 \partial q_4} = \frac{\partial^2 (d2 + a3S_3 + a4S_{34} + a5S_{345})}{\partial \theta3 \partial \theta5} = -a5S_{345}$$

Para todos los demás valores de H se puede comprobar, siguiendo el procedimiento anterior, que:

$$H31 = H32 = H33 = H34 = H41 = H42 = H43 = H44 = 0$$

Sustituyendo el resultado de los cálculos en la ec. (68), tenemos:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a3S_3 - a4S_{34} - a5S_{345} & -a4S_{34} - a5S_{345} & -a5S_{345} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{-----} (69)$$

Finalmente el vector de Aceleraciones de las articulaciones  $\ddot{\mathbf{q}}$ , se obtiene sustituyendo en la ec.(65) la  $J^{-1}$  de la ec. (59),  $\dot{\mathbf{q}}_e$  de la ec. (67),  $\dot{\mathbf{q}}_e$  de la ec. (52), y realizando los cálculos obtenemos:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} a1 \\ \alpha3 \\ \alpha4 \\ \alpha5 \end{pmatrix}$$

Donde sus componentes, al realizar los cálculos en el software ©Mathematica 8, se obtuvieron:

$$a1 = a_{z_e}$$

$$\alpha3 = \frac{Csc_4(a_{x_e}C_{34} + a_{y_e}S_{34} + v_{x_e}S_{34} + a5\alpha_{z_e}S_5)}{a3}$$

$$\alpha4 = -\frac{Csc_4(a3a_{x_e}C_3 + a4a_{x_e}C_{34} + a3a_{y_e}S_3 + a3v_{x_e}S_3 + a4a_{y_e}S_{34} + a4v_{x_e}S_{34} + a4a5\alpha_{z_e}S_5 + a3a5\alpha_{z_e}S_{45})}{a3a4}$$

$$\alpha5 = \frac{Csc_4(a_{x_e}C_3 + a_{y_e}S_3] + v_{x_e}S_3 + a4\alpha_{z_e}S_4 + a5\alpha_{z_e}S_{45})}{a4}$$

Donde  $Csc_4 = Csc[\theta4]$

### 3.7. Análisis dinámico

Aparte de la importancia incuestionable de los modelos dinámicos de los manipuladores en el diseño de controladores, los modelos dinámicos pueden utilizarse también para simular, mediante equipo de cómputo, el comportamiento del robot antes de que éste sea construido físicamente. Esta etapa de simulación es importante, ya que permite mejorar el diseño del robot, de manera que pueda realizar una tarea dada de forma adecuada.

#### 3.7.1. Formulación dinámica por Lagrange

Uno de los procedimientos más empleados para la obtención de los modelos dinámicos de los robots manipuladores es el basado en las ecuaciones de movimiento de Lagrange. Reciben el nombre de Lagrange, debido a que fue el primero que las dió a conocer en 1788.

La formulación Lagrangiana es un método que se basa en un **balanceo de energías** provocadas por el movimiento del robot.

Aquí nos limitaremos a encontrar las ecuaciones analíticas del modelado dinámico sin importarnos de donde provienen, mientras que en el Anexo E se describe brevemente de donde se obtienen las expresiones que aquí se usarán.

El siguiente desarrollo considera que los eslabones son rígidos y no se consideraron fuerzas no conservativas. Recuerde que las fuerzas no conservativas incluyen las de fricción, las de resistencia al movimiento de un objeto dentro de un fluido, y en general a las que dependen del tiempo o de la velocidad.

Los DATOS de entrada para encontrar las expresiones analíticas del modelo por Lagrange son los siguientes:

1. Masa de cada eslabón,  $m_i$ .
2. Posición del centro de masa de cada eslabón respecto al marco base  $\{0\}$ , que se calcula con:  
 $\mathbf{d}_0^{jc} = d[A_0^{i-1} \cdot A_{i-1}^{jc}]$ , para ver más detalles revisar la sección Anexo D.
3. Expresar cada eje  $z_i$  adjunto a cada eslabón respecto al marco base  $\{0\}$ , que se calcula con:  
 $\mathbf{z}_{i-1} = R_0^{i-1} \mathbf{z}_0$ , para ver más detalles revisar Anexo D.
4. Los tensores de inercia de aquellos eslabones que giran. Los tensores de inercia deben estar referidos al sistema adjunto al centro de masa de sendos eslabones,  $I_{iz}$ .
5. Las velocidades y aceleraciones de las articulaciones, que proporcionan cierto movimiento del robot,  $\dot{\mathbf{q}}$  y  $\ddot{\mathbf{q}}$ .

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} v1 \\ \omega3 \\ \omega4 \\ \omega5 \end{pmatrix} \text{ y } \ddot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} a1 \\ \alpha3 \\ \alpha4 \\ \alpha5 \end{pmatrix}$$

Los CÁLCULOS son los siguientes:

1. Cálculo de la Velocidad lineal y angular del centro de masa de cada eslabón:  $J_{vci}$  y  $J_{\omega i}$ .
2. Cálculo de la Energía cinética, obtención de la *matriz de inercia* (D).
3. Derivando respecto al tiempo la Energía cinética, obteniendo la *matriz centrífuga y de Coriolis* (C).
4. Cálculo de la Energía potencial.
5. Derivando respecto al tiempo la Energía potencial, obteniendo el *vector de fuerzas o pares gravitacionales* ( $\phi$ ).
6. Finalmente acomodar D, C,  $\phi$ ,  $\dot{\mathbf{q}}$  y  $\ddot{\mathbf{q}}$  en la expresión general del modelo de Lagrange:

$$D(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \phi(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}$$

*Formulación dinámica por Lagrange para el robot PRRR*

DATOS:

1. Masa de cada eslabón:

Masa del eslabón 2: m2.

Masa del eslabón 3: m3.

Masa del eslabón 4: m4.

Masa del eslabón 5: m5 (considerando la masa del espectrómetro).

2. Posición del centro de masa respecto al sistema base {0}.

$\mathbf{d}_0^{jc} = d[A_0^{j-1} \cdot A_{j-1}^{jc}]$ , para j= 2, 3, 4, 5 , definimos:

Las transformaciones  $A_{j-1}^{jc}$  con sus cuatro parámetros de D-H se definen como:

**Tabla 9** Parámetros D-H del centro de masa de los eslabones

Eslabón <i>i</i>	$\theta_i$ [°]	$d_i$ [m]	$a_i$ [m]	$\alpha_i$ [°]
2	0	c12	a2	90°
3	$\theta_3^*$	0	c23	0
4	$\theta_4^*$	0	c34	0
5	$\theta_5^*$	0	c45	0

Donde:

$c_{ij} \triangleq$  es la *distancia del centro de masa del eslabón j respecto al marco i*.

Para j=2,3,4,5 las transformaciones  $A_{j-1}^{jc}$  que dan como resultado al aplicar las transformaciones que se enuncian en el apartado 3.3.2, dan como resultado:

$$A_1^{c2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & c12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2^{c3} = \begin{pmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & c23C_3 \\ S_3 & C_3 & 0 & c23S_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_3^{c4} = \begin{pmatrix} C_4 & -S_4 & 0 & c34C_4 \\ S_4 & C_4 & 0 & c34S_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_4^{c5} = \begin{pmatrix} C_5 & -S_5 & 0 & c45C_5 \\ S_5 & C_5 & 0 & c45S_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{d}_0^{2c} = d[A_0^2 \cdot A_2^{c3}] = \begin{pmatrix} a2 \\ c12 \\ d1 \end{pmatrix} \quad \text{_____ ( 70 )}$$

$$\mathbf{d}_0^{3c} = d[A_0^3 \cdot A_3^{c3}] = \begin{pmatrix} a2 + c23C_3 \\ d2 + c23S_3 \\ d1 \end{pmatrix} \quad \text{_____ ( 71 )}$$

$$\mathbf{d}_0^{4c} = d[A_0^4 \cdot A_4^{c4}] = \begin{pmatrix} a2 + a3C_3 + c34C_{34} \\ d2 + a3S_3 + c34S_{34} \\ d1 \end{pmatrix} \quad \text{_____ ( 72 )}$$

$$\mathbf{d}_0^{5c} = d[A_0^5 \cdot A_5^{c5}] = \begin{pmatrix} a2 + a3C_3 + a4C_{34} + c45C_{345} \\ d2 + a3S_3 + a4S_{34} + c45S_{345} \\ d1 \end{pmatrix} \quad \text{_____ ( 73 )}$$

3. Expresar cada eje  $z_i$  adjunto a cada eslabón respecto al marco base  $\{0\}$ . Esta solución ya se realizó en la sección 3.6.2 que resultó en las ecs. (54) y (55), las cuales repetimos a continuación:

$$\mathbf{z}_0 = (0 \ 0 \ 1)^T \quad \text{_____ ( 54 )}$$

$$\mathbf{z}_2 = \mathbf{z}_3 = \mathbf{z}_4 = (0 \ 0 \ 1)^T \quad \text{_____ ( 55 )}$$

4. Los tensores de inercia de los eslabones 3, 4 y 5:

$$I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{3z} \end{pmatrix} \quad \text{_____ ( 74 )}$$

$$I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{4z} \end{pmatrix} \quad \text{_____ ( 75 )}$$

$$I_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{5z} \end{pmatrix} \quad \text{_____ ( 76 )}$$

5. Las velocidades y aceleraciones de las articulaciones  $\dot{\mathbf{q}}$  y  $\ddot{\mathbf{q}}$ , calculadas en las secciones

CÁLCULOS:



1. Cálculo de la velocidad lineal y angular del centro de masa de cada eslabón.  
Las ecuaciones que aquí se utilizan son las mencionadas en el Anexo D.

Velocidad lineal.

$$J_{cj} = [J_{vc2} \quad J_{vc3} \quad J_{vc4} \quad J_{vc5}],$$

para  $j$  - énesimo eslabón = 2,3,4,5

Para el eslabón 2:

$$J_{c2} = [J_{vc2} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0}]$$

$$J_{vc2} = \mathbf{z}_2 = (0 \quad 0 \quad 1)^T$$

$$J_{c2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{-----} (77)$$

Para el eslabón 3:

$$J_{c3} = [J_{vc2} \quad J_{vc3} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0}]$$

$$J_{vc2} = \mathbf{z}_2 = (0 \quad 0 \quad 1)^T$$

$$J_{vc3} = \mathbf{z}_2 \times (\mathbf{d}_0^{3c} - \mathbf{o}_0^2)$$

$$J_{c3} = \begin{pmatrix} 0 & -c23S_3 & 0 & 0 \\ 0 & c23C_3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{-----} (78)$$

Para el eslabón 4:

$$J_{c4} = [J_{vc2} \quad J_{vc3} \quad J_{vc4} \quad \mathbf{0}]$$

$$J_{vc2} = \mathbf{z}_2 = (0 \quad 0 \quad 1)^T$$

$$J_{vc3} = \mathbf{z}_2 \times (\mathbf{d}_0^{4c} - \mathbf{o}_0^2)$$

$$J_{vc4} = \mathbf{z}_3 \times (\mathbf{d}_0^{4c} - \mathbf{o}_0^3)$$

$$J_{c4} = \begin{pmatrix} 0 & -a3S_3 - c34S_{34} & -c34S_{34} & 0 \\ 0 & a3C_3 + c34C_{34} & c34C_{34} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{-----} (79)$$

Para el eslabón 5:

$$J_{c5} = [J_{vc2} \quad J_{vc3} \quad J_{vc4} \quad J_{vc5}]$$

$$J_{vc2} = \mathbf{z}_2 = (0 \quad 0 \quad 1)^T$$

$$J_{vc3} = \mathbf{z}_2 \times (\mathbf{d}_0^{5c} - \mathbf{o}_0^2)$$

$$J_{vc4} = \mathbf{z}_3 \times (\mathbf{d}_0^{5c} - \mathbf{o}_0^3)$$

$$J_{vc5} = \mathbf{z}_4 \times (\mathbf{d}_0^{5c} - \mathbf{o}_0^4)$$

$$J_{c5} = \begin{pmatrix} 0 & -a3S_3 - a4S_{34} - c45S_{345} & -a4S_{34} - c45S_{345} & -c45S_{345} \\ 0 & a3C_3 + a4C + c45C_{345} & -a4C_{34} - c45C_{345} & c45C_{345} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{-----} (80)$$

Velocidad angular.

$$J_{\omega j} = [ (R_0^2)^T J_{\omega 2} \quad (R_0^3)^T J_{\omega 3} \quad (R_0^4)^T J_{\omega 4} \quad (R_0^5)^T J_{\omega 5} ]$$

, para  $j$  - énesimo eslabón = 2,3,4,5

Para el eslabón 2:

$$J_{\omega 2} = [\mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0}]$$

$$J_{\omega 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{-----} (81)$$

Para el eslabón 3:

$$J_{\omega 3} = [\mathbf{0} \quad (R_0^3)^T J_{\omega 3} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0}]$$

$$J_{\omega 3} = \mathbf{z}_3$$

$$J_{\omega 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{-----} (82)$$

Para el eslabón 4:

$$J_{\omega 4} = [\mathbf{0} \quad (R_0^3)^T J_{\omega 3} \quad (R_0^4)^T J_{\omega 4} \quad \mathbf{0}]$$

$$J_{\omega 3} = \mathbf{z}_3$$

$$J_{\omega 4} = \mathbf{z}_4$$

$$J_{\omega 4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{_____ ( 83 )}$$

Para el eslabón 5:

$$J_{\omega 5} = [\mathbf{0} \quad (R_0^3)^T J_{\omega 3} \quad (R_0^4)^T J_{\omega 4} \quad (R_0^5)^T J_{\omega 5}]$$

$$J_{\omega 3} = \mathbf{z}_3$$

$$J_{\omega 4} = \mathbf{z}_4$$

$$J_{\omega 5} = \mathbf{z}_5$$

$$J_{\omega 5} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{_____ ( 84 )}$$

## 2. Cálculo de la Energía cinética, obtención de *la matriz de inercia* (D).

La energía cinética se calcula según la ec.(E.4):

$$K = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \sum_{j=1}^n [m_j * J_{vcj}^T \cdot J_{vcj} + J_{\omega j}^T \cdot R_0^j \cdot I_j \cdot R_0^{jT} \cdot J_{\omega j}] \dot{\mathbf{q}}$$

$$K = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T [(m_2 * J_{vc2}^T \cdot J_{vc2} + m_3 * J_{vc3}^T \cdot J_{vc3} + m_4 * J_{vc4}^T \cdot J_{vc4} + m_5 * J_{vc5}^T \cdot J_{vc5})$$

$$+ (J_{\omega 3}^T \cdot R_0^{3T} \cdot I_3 \cdot R_0^{3T} \cdot J_{\omega 3} + J_{\omega 4}^T \cdot R_0^{4T} \cdot I_4 \cdot R_0^{4T} \cdot J_{\omega 4}$$

$$+ J_{\omega 5}^T \cdot R_0^{5T} \cdot I_5 \cdot R_0^{5T} \cdot J_{\omega 5})] \dot{\mathbf{q}}^T$$

$$D = (m_2 * J_{vc2}^T \cdot J_{vc2} + m_3 * J_{vc3}^T \cdot J_{vc3} + m_4 * J_{vc4}^T \cdot J_{vc4} + m_5 * J_{vc5}^T \cdot J_{vc5})$$

$$+ (J_{\omega 3}^T \cdot R_0^{3T} \cdot I_3 \cdot R_0^{3T} \cdot J_{\omega 3} + J_{\omega 4}^T \cdot R_0^{4T} \cdot I_4 \cdot R_0^{4T} \cdot J_{\omega 4}$$

$$+ J_{\omega 5}^T \cdot R_0^{5T} \cdot I_5 \cdot R_0^{5T} \cdot J_{\omega 5})$$

Finalmente obtenemos D sumando cada término, con lo que obtenemos las siguientes componentes de la matriz D:

$$D = \begin{pmatrix} D11 & D12 & D13 & D14 \\ D21 & D22 & D23 & D24 \\ D31 & D32 & D33 & D34 \\ D41 & D42 & D43 & D44 \end{pmatrix}$$

$$D11 = m2 + m3 + m4 + m5$$

$$D12 = D13 = D14 = 0$$

-

$$D21 = 0$$

$$D22 = I3z + I4z + I5z + c23^2m3 + a3^2m4 + c34^2m4 + a3^2m5 + a4^2m5 \\ + c45^2m5 + 2a3(c34m4 + a4m5)C_4 + 2a4c45m5C_5 \\ + 2a3c45m5C_{45}$$

$$D23 = I4z + I5z + c34^2m4 + a4^2m5 + c45^2m5 + a3(c34m4 + a4m5)C_4 \\ + 2a4c45m5C_5 + a3c45m5C_{45}$$

$$D24 = I5z + c45^2m5 + a4c45m5C_5 + a3c45m5C_{45}$$

-

$$D31 = 0$$

$$D32 = I4z + I5z + c34^2m4 + a4^2m5 + c45^2m5 + a3(c34m4 + a4m5)C_4 \\ + 2a4c45m5C_5 + a3c45m5C_{45}$$

$$D33 = I4z + I5z + c34^2m4 + a4^2m5 + c45^2m5 + 2a4c45m5C_5$$

$$D34 = I5z + c45^2m5 + a4c45m5C_5$$

-

$$D41 = 0$$

$$D42 = I5z + c45^2m5 + a4c45m5C_5 + a3c45m5C_{45}$$

$$D43 = I5z + c45^2m5 + a4c45m5C_5$$

$$D44 = I5z + c45^2m5$$

3. Derivando respecto al tiempo la Energía cinética, obteniendo la *matriz centrífuga y de Coriolis* (C).

$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  se obtendrá a través de los coeficientes o símbolos de Christoffel  $c_{ijk}$  definidos como:

$$c_{ijk} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial D_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial D_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial D_{ij}}{\partial q_k} \right]$$

Donde  $D_{ij}(q)$  denota el  $ij$ -ésimo elemento de la matriz de inercia  $D(\mathbf{q})$ .

Ahora bien para simplificar los cálculos, al emplear la ecuación anterior, mantenemos constante  $k$  y formamos una matriz  $c$  con  $i$  y  $j$  variables.

Por ejemplo para  $k=1$ , tenemos:  $c_{ij1} = \begin{pmatrix} c_{111} & c_{121} & c_{131} & c_{141} \\ c_{211} & c_{221} & c_{231} & c_{241} \\ c_{311} & c_{321} & c_{331} & c_{341} \\ c_{411} & c_{421} & c_{431} & c_{441} \end{pmatrix}$

Los resultados de los cálculos de las matrices  $c_{ijk}$ , para  $k=1\dots 4$ , no se incluyen en esta tesis, sin embargo el resultado de cada uno de los elementos  $c_{ijk}$  se acomodan y se multiplican con las velocidades articulares, para formar la *matriz centrífuga y de Coriolis*,  $C$ . Los componentes de  $C$  son:

$$C = \begin{pmatrix} C11 & C12 & C13 & C14 \\ C21 & C22 & C23 & C24 \\ C31 & C32 & C33 & C34 \\ C41 & C42 & C43 & C44 \end{pmatrix}$$

$$C11 = v1c_{111} + \omega3(c_{121} + c_{211}) + \omega4(c_{131} + c_{311}) + \omega5(c_{141} + c_{411})$$

$$C12 = \omega3c_{221} + \omega4(c_{231} + c_{321}) + \omega5(c_{241} + c_{421})$$

$$C13 = \omega4c_{331} + \omega5(c_{341} + c_{431})$$

$$C14 = \omega5c_{441}$$

-

$$C21 = v1c_{112} + \omega3(c_{122} + c_{212}) + \omega4(c_{132} + c_{312}) + \omega5(c_{142} + c_{412})$$

$$C22 = \omega3c_{222} + \omega4(c_{232} + c_{322}) + \omega5(c_{242} + c_{422})$$

$$C23 = \omega4c_{332} + \omega5(c_{342} + c_{432})$$

$$C24 = \omega5c_{442}$$

-

$$C31 = v1c_{113} + \omega3(c_{123} + c_{213}) + \omega4(c_{133} + c_{313}) + \omega5(c_{143} + c_{413})$$

$$C32 = \omega3c_{223} + \omega4(c_{233} + c_{323}) + \omega5(c_{243} + c_{423})$$

$$C33 = \omega4c_{333} + \omega5(c_{343} + c_{433})$$

$$C34 = \omega 5 c_{443}$$

-

$$C41 = v1 c_{114} + \omega 3 (c_{124} + c_{214}) + \omega 4 (c_{134} + c_{314}) + \omega 5 (c_{144} + c_{414})$$

$$C42 = \omega 3 c_{224} + \omega 4 (c_{234} + c_{324}) + \omega 5 (c_{244} + c_{424})$$

$$C43 = \omega 4 c_{334} + \omega 5 (c_{344} + c_{434})$$

$$C44 = \omega 5 c_{444}$$

#### 4. Cálculo de la Energía potencial.

La energía potencial se calcula como:

$$V(\mathbf{q}) = \sum_{j=1}^n [\mathbf{g}^T [(\mathbf{d}_0^{jc}) \text{dirección en que actua } g] * m_j]$$

Donde:

$\mathbf{d}_0^{jc} \triangleq$  es el vector de posición del centro de masa del eslabón j respecto al sistema absoluto {0}

$(\mathbf{d}_0^{jc}) \text{dirección en que actua } g$ , quiere decir que solo se toma del vector  $\mathbf{d}_0^{jc}$  la componente que va en dirección del vector de gravedad  $\mathbf{g}$ .

Para nuestro caso tenemos:  $\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ g \\ 0 \end{pmatrix}, j=2,3,4,5$

$$V_2 = \mathbf{g}^T [(\mathbf{d}_0^{2c})_y] * m_2 \quad , \quad V_3 = \mathbf{g}^T [(\mathbf{d}_0^{3c})_y] * m_3$$

$$V_4 = \mathbf{g}^T [(\mathbf{d}_0^{4c})_y] * m_4 \quad , \quad V_5 = \mathbf{g}^T [(\mathbf{d}_0^{5c})_y] * m_5$$

$$V = V_2 + V_3 + V_4 + V_5$$

Derivando la energía potencial para obtener el un vector de *fuerzas* o *pares gravitacionales* ( $\boldsymbol{\phi}$ ).

La siguiente ecuación obtiene el j-enésimo elemento del vector  $\boldsymbol{\phi}$

$$\phi_j = \frac{\partial V}{\partial q_k}, \text{ para } k = 2,3,4,5$$

$$\phi_2 = \frac{\partial V}{\partial d1} \quad , \quad \phi_3 = \frac{\partial V}{\partial \theta3}$$

$$\phi_4 = \frac{\partial V}{\partial \theta4} \quad , \quad \phi_5 = \frac{\partial V}{\partial \theta5}$$

5. Finalmente acomodando  $D$ ,  $C$ ,  $\phi$ ,  $\dot{q}$  y  $\ddot{q}$  en la expresión general del modelo de Lagrange, obtenemos la fuerza y pares necesarios para mover el robot PRRR en una trayectoria dada:

$$D(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \phi(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}$$

Donde cada vector tiene los siguientes componentes:

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} v1 \\ \omega3 \\ \omega4 \\ \omega5 \end{pmatrix}, \quad \ddot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} a1 \\ \alpha3 \\ \alpha4 \\ \alpha5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\phi} = \begin{pmatrix} \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} T3 \\ T4 \\ T5 \end{pmatrix}$$

Donde las matrices  $D$  y  $C$  tienen los siguientes componentes, que se calcularon en el punto 2 y 5:

$$D = \begin{pmatrix} D11 & D12 & D13 & D14 \\ D21 & D22 & D23 & D24 \\ D31 & D32 & D33 & D34 \\ D41 & D42 & D43 & D44 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} C11 & C12 & C13 & C14 \\ C21 & C22 & C23 & C24 \\ C31 & C32 & C33 & C34 \\ C41 & C42 & C43 & C44 \end{pmatrix}$$

Por otro lado cada componente de los vectores  $\dot{\mathbf{q}}$ ,  $\ddot{\mathbf{q}}$ ,  $\boldsymbol{\phi}$  y  $\boldsymbol{\tau}$ , en particular para el robot PRRR se definen como:

$v1 \triangleq$  velocidad de la plataforma móvil (junta prismática).

$\omega3 \triangleq$  velocidad angular producida por el motor ubicado en el **hombro**.

$\omega4 \triangleq$  velocidad angular producida por el motor ubicado en el **codo**.

$\omega5 \triangleq$  velocidad angular producida por el motor ubicado en la **muñeca**.

$a1 \triangleq$  aceleración de la plataforma que se traslada (junta prismática).

$\alpha3 \triangleq$  aceleración angular producida por el motor ubicado en el **hombro**.

$\alpha4 \triangleq$  aceleración angular producida por el motor ubicado en el **codo**.

$\alpha5 \triangleq$  aceleración angular producida por el motor ubicado en la **muñeca**.

$\phi_2 \triangleq$  cambio de la energía potencial debido al movimiento del eslabón 2.

$\phi_3 \triangleq$  cambio de la energía potencial debido al movimiento del eslabón 3.

$\phi_4 \triangleq$  cambio de la energía potencial debido al movimiento del eslabón 4.  
 $\phi_5 \triangleq$  cambio de la energía potencial debido al movimiento del eslabón 5.

$f_1 \triangleq$  fuerza del actuador lineal necesaria para mover la plataforma.

$T_3 \triangleq$  par del motor ubicado en el **hombro**.

$T_4 \triangleq$  par del motor ubicado en el **codo**.

$T_5 \triangleq$  par del motor ubicado en la **m muñeca**.



---

## 4. SIMULACIÓN Y RESULTADOS

---

### 4.1. Simulación

En el capítulo anterior se desarrolló el modelado dinámico del robot, utilizando un método desarrollado por Lagrange. Las operaciones para hallar el modelo se realizaron con el software ©Mathematica 8. Se utilizó Mathematica pues opera de manera simbólica, es decir, opera el nombre de las variables, sin la necesidad de asignarles un valor numérico.

En este capítulo se empleará el modelo obtenido en el capítulo 4 y se le asignarán valor a las variables con el fin de conocer las fuerzas y los pares necesarios para mover al robot.

El primer grupo de variables a las que se asignaron valores numéricos, son aquellas que tienen que ver con las dimensiones y distribución de masa de los eslabones. Estas fueron determinadas a partir de un primer CAD (por sus siglas en inglés *Computer-Aided Design*), propuesto para el robot y realizado en el software ©Solidworks 2012. El “dibujo” de cada uno de los eslabones que componen al robot PRRR, proporciona un valor numérico a las siguientes variables: longitud de los eslabones, ubicación de sendos centros de masa, masas y momentos de inercia.

Con la distribución de masa del robot, el modelo dinámico se vuelve función únicamente de las variables articulares  $\mathbf{q}$ ,  $\dot{\mathbf{q}}$  y  $\ddot{\mathbf{q}}$ , entonces para obtener el vector de fuerzas  $\boldsymbol{\tau}$  es necesario encontrar las posiciones, velocidades y aceleraciones articulares. Las variables articulares  $\mathbf{q}$ ,  $\dot{\mathbf{q}}$  y  $\ddot{\mathbf{q}}$  son el segundo grupo al que se les asignarán valores numéricos.

Para obtener las variables articulares se propuso una ruta recta a seguir por el efector final y empleando la cinemática inversa, resuelta en el Capítulo 4, se hallaron las siguientes variables articulares: las posiciones  $\mathbf{q}$ ; por medio de un método geométrico (sección 3.5.1), velocidades  $\dot{\mathbf{q}}$ ; empleando el Jacobiano (sección 3.6.2), y las aceleraciones  $\ddot{\mathbf{q}}$  empleando el Hessiano (sección 3.6.2).

A continuación se muestra el *algoritmo para la simulación* del modelo dinámico:

1. Hallar el modelo analítico de la dinámica del robot.
2. Asignarles valor número a las variables que intervienen en la distribución de masa de los eslabones: longitudes, localización de sendos centros de masa, masas y momentos de inercia.

3. Plantear una ruta o trayectoria que seguirá el efector final. Acotando la ruta de un punto inicial a un punto final, y atribuirle a lo largo de la ruta velocidades y aceleraciones.
4. Calcular las velocidades y aceleraciones en las articulaciones, necesarias para que el efector final sea capaz de recorrer con cierta velocidad y aceleración indicada en el paso 3, empleando la solución de la cinemática inversa.
5. Finalmente con la información de los pasos 1 y 4 calcular las fuerzas y pares necesarios en las articulaciones empleando el modelo obtenido en el paso 1.

Los resultados obtenidos por la simulación del modelo dinámico son un historial a lo largo del tiempo de las fuerzas articulares  $\tau$  necesarias para que el efector final siga una ruta recta en cierto periodo de tiempo, tal y como ilustra la siguiente expresión:

$$\tau(t) = D(\mathbf{q}(t))\ddot{\mathbf{q}}(t) + C(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))\dot{\mathbf{q}}(t) + \boldsymbol{\phi}(\mathbf{q}(t))$$

Como se recordará en la sección 3.6.1, se dividió la trayectoria en cierto número de particiones, las cuales haciendo una analogía con una animación, representan una fotografía en un instante de tiempo en que hay cierta posición, velocidad y aceleración del robot. Las aceleraciones son ocasionadas por fuerzas que son calculadas por el modelo dinámico para ese instante en el tiempo. La cantidad de fotografías o instantes son definidos por el número de particiones en que se divide la trayectoria. Las particiones a su vez son propuestas por el usuario, dependiendo de qué tan fino se desee el análisis.

Ahora bien para visualizar la animación es necesario pasar las fotografías de continuo; resolviendo la cinemática inversa y la dinámica para cada instante de tiempo y juntar sucesivamente las soluciones. Este es el propósito de la simulación dinámica del robot; por un lado observar el movimiento del robot y por el otro, y aún más importante, obtener las gráficas que representen el historial a lo largo del tiempo de las fuerzas que necesita el robot cuando este sigue una trayectoria.

## 4.2. Procedimiento para seleccionar un sistema de transmisión

La explicación y descripción de la sección anterior se aplica para una sola configuración del robot, que puede ser propuesta a través de un CAD en © Solidworks. Sin embargo, para seleccionar el sistema de transmisión a implementar en el robot es necesario proponer varias configuraciones. Esto se debe a que en un proceso de diseño se van agregando, modificando o ajustando elementos. A continuación se ejemplifica, con dos iteraciones, la selección de motores y la relación del sistema de reducción en las articulaciones.

El primer CAD (*CAD1*), o primera iteración, tiene como propósito arrojar el par necesario en las articulaciones, y así contar con la capacidad de seleccionar los motores comerciales a implementar en las articulaciones del robot.

El segundo CAD (*CAD2*), o segunda iteración, considera el peso de los motores comerciales que se seleccionaron y “pesos extras” en las articulaciones. Los pesos extras, representan los sistemas de reducción que se implementarían para alcanzar el par calculado, y que el motor por sí solo no puede proporcionar.

A continuación se emplea el **algoritmo para la simulación** del *CAD1* y *CAD2*, descrito en la sección *Simulación*.

### Simulación del *CAD1*

1. Modelo analítico del robot PRRR.

$$D(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\phi}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}$$

Donde los vectores de 4x1 son los siguientes:

Posiciones articulares	Velocidades articulares	Aceleraciones articulares	Fuerzas externas	Fuerzas y pares gravitacionales
$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} d1 \\ \theta3 \\ \theta4 \\ \theta5 \end{pmatrix},$	$\dot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} v1 \\ \omega3 \\ \omega4 \\ \omega5 \end{pmatrix},$	$\ddot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} a1 \\ \alpha3 \\ \alpha4 \\ \alpha5 \end{pmatrix},$	$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} f1 \\ T3 \\ T4 \\ T5 \end{pmatrix},$	$\boldsymbol{\phi} = \begin{pmatrix} \phi2 \\ \phi3 \\ \phi4 \\ \phi5 \end{pmatrix}$

Matriz de inercias de 4 x 4:  $D(\mathbf{q})$

Matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis 4x4:  $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$

2. Atribuirles momentos de inercia y masa a cada eslabón que componen al robot, a partir de un CAD propuesto.


Con el fin de tener una primera aproximación de los pares necesarios, se planteó un primer CAD llamado *CAD1* en el que se dibujaron los eslabones sin considerar motores o un sistema de reducción. Se tomaron las dimensiones necesarias de acuerdo a las especificaciones del volumen de trabajo del robot, y se midieron las dimensiones del espectrómetro Raman para ser dibujado en ©SolidWorks.

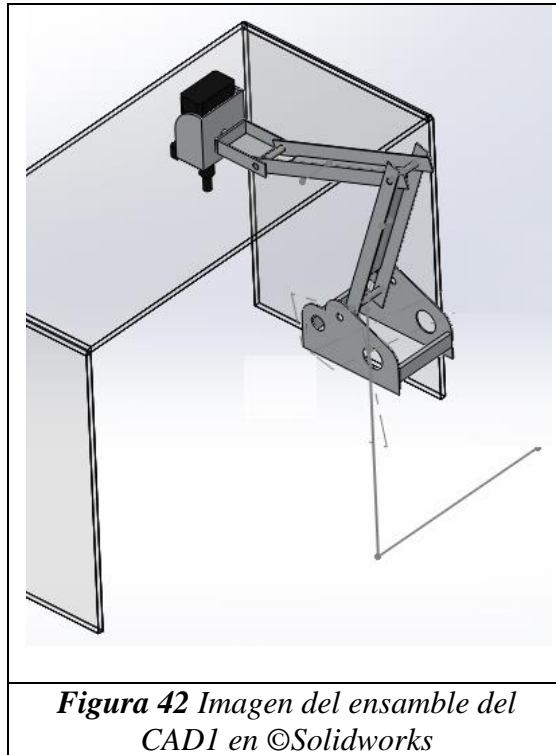
En ©Solidworks se atribuyeron material y forma a los eslabones de acuerdo a un catálogo de perfiles de aluminio perteneciente a la empresa Distribuidora Metálica S.A. de C.V. Se seleccionaron perfiles acanalados de Aluminio 6063-T5 de 1/8” de espesor.

Para atribuirle un material al espectrómetro Raman, primero se dibujó la pieza, obteniendo su volumen en ©Solidworks, luego como es conocida la masa del aparato (de acuerdo a su hoja técnica que se encuentra en el Anexo I), se le atribuyó un material “nuevo” con densidad igual a su masa entre el su volumen.

A continuación se muestran las propiedades mecánicas obtenidas en el ©Solidworks, para cada uno de los eslabones que componen al robot:

**Tabla 10** Distribución de masa de los eslabones del *CAD1*

<i>Propiedades mecánicas según el CAD en Solidworks.</i>								
<i>Nombre del CAD: CAD1</i>								
<i>Comentarios:</i>								
Se consideraron para la Brazo, Antebrazo y Mano, una canaleta de Aluminio de 1/8” de espesor.								
Dimensiones de la canaleta:								
								
Para el Brazo y Mano las dimensiones de la canaleta son de: A=4” y B=3/2”								
Para el Antebrazo las dimensiones de la canaleta son de: A=7/2” y B=3/2”								
Los ejes son de acero inoxidable de 5/8” de diámetro.								
No se consideraron pesos debido al sistema de reducción-transmisión.								
No se consideraron las dimensiones y masas de motores.								
<i>Eslabón</i>	<i>Longitud [m]</i>		<i>Masa [kg]</i>		<i>Ubicación de centro de masa [m]</i>		<i>Momento de Inercia [kg m<sup>2</sup>]</i>	
Plataforma Móvil	d2	0.140	m2	1.3741	c12	0.0764	-	-
Brazo	a3	0.450	m3	0.7828	c23	0.2762	I3z	0.0178
Antebrazo	a4	0.450	m4	0.7518	c34	0.2524	I4z	0.0174
Mano + espectrómetro	a5	0.230	m5	3.3961	c45	0.1823	I5z	0.0160
		Masa total =		6.3048				



Sustituyendo estos valores numéricos en la expresión analítica del modelo dinámico en ©Mathematica, se obtuvo lo siguiente:

Los componentes de la matriz D son:

$$D_{11} = 6.3$$

$$D_{12} = D_{13} = D_{14} = 0$$

-

$$D_{21} = 0$$

$$D_{22} = 1.78 + 1.54C_4 + 0.557C_5 + 0.557C_{45}$$

$$D_{23} = 0.873 + 0.773C_4 + 0.557C_5 + 0.278C_{45}$$

$$D_{24} = 0.128 + 0.278C_5 + 0.278C_{45}$$

-

$$D_{31} = 0$$

$$D_{32} = 0.873 + 0.773C_4 + 0.557C_5 + 0.278C_{45}$$

$$D33 = 0.872 + 0.557C_5$$

$$D34 = 0.128 + 0.278C_5$$

-

$$D41 = 0$$

$$D42 = 0.128 + 0.278C_5 + 0.278C_{45}$$

$$D43 = 0.128 + 0.278C_5$$

$$D44 = 0.1289$$

Los componentes de la matriz C son:

$$C11 = C12 = C13 = C14 = 0$$

-

$$C21 = 0$$

$$C22 = -1.54\omega 4S_4 - 0.557\omega 5S_5 + (-0.557\omega 4 - 0.557\omega 5)S_{45}$$

$$C23 = -0.773\omega 4S_4 - 0.557\omega 5S_5 + (-0.278\omega 4 - 0.557\omega 5)S_{45}$$

$$C24 = \omega 5(-0.278S_5 - 0.278S_{45})$$

-

$$C31 = C34 = 0$$

$$C32 = 0.773\omega 3S_4 - 0.557\omega 5S_5 + 0.278\omega 3S_{45}$$

$$C33 = -0.557\omega 5S_5$$

-

$$C41 = C44 = 0$$

$$C42 = (0.278\omega 3 + 0.557\omega 4)S_5 + 0.278\omega 3S_{45}$$

$$C43 = 0.278\omega 4S_5$$

El vector  $\phi$  es:

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ 20.4C_3 + 16.8C_{34} + 6.07C_{345} \\ 16.8C_3 + 6.07C_{345} \\ 6.07C_{345} \end{pmatrix}$$

Como se puede observar D, C y  $\phi$  son función únicamente de las velocidades y variables articulares, que son obtenidas en el siguiente paso.

3. Posiciones, velocidades y aceleraciones articulares.

La siguiente figura ilustra las relaciones entre las posiciones, velocidades y aceleraciones articulares que se calcularon en el Capítulo 4:

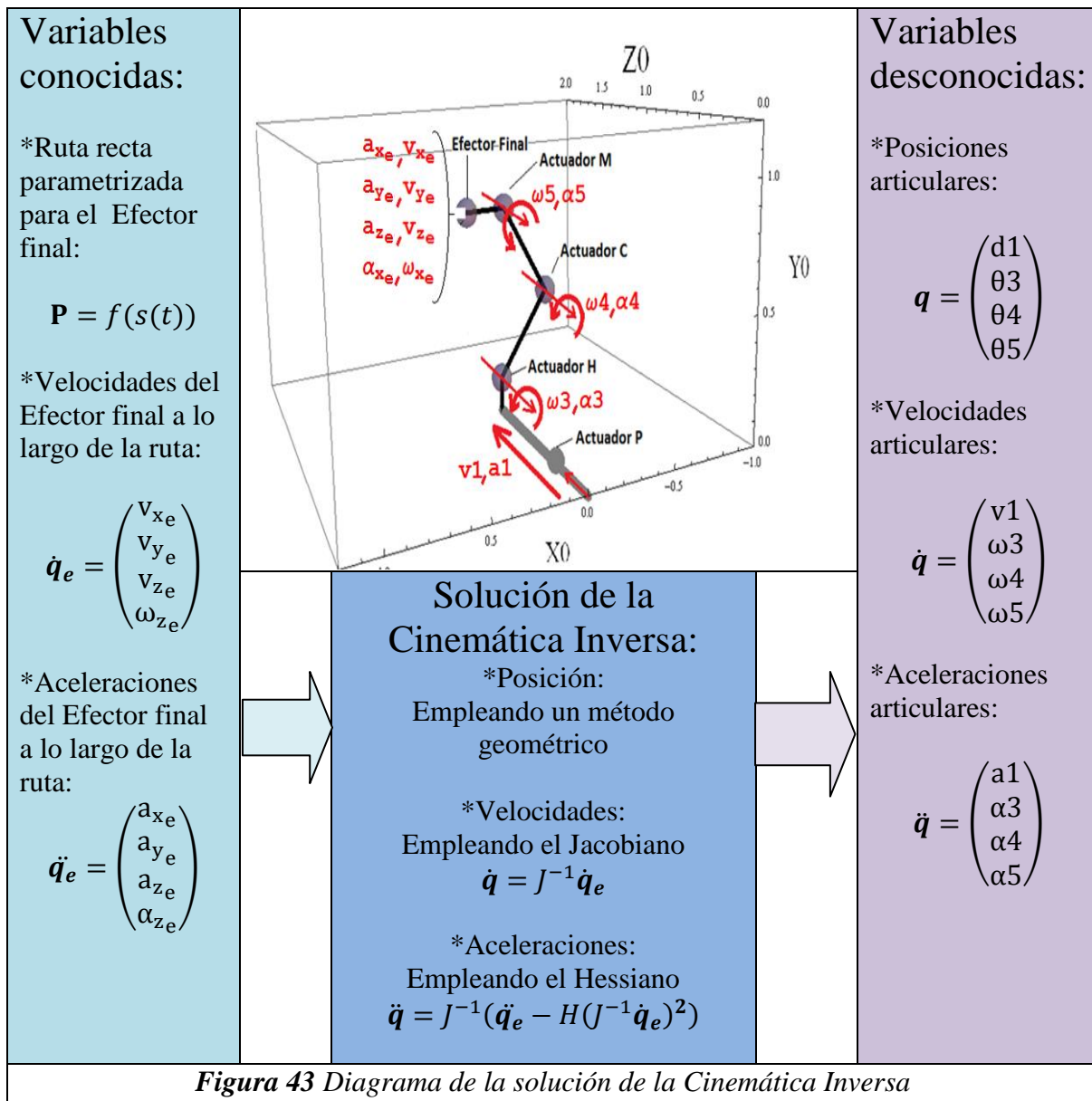


Figura 43 Diagrama de la solución de la Cinemática Inversa

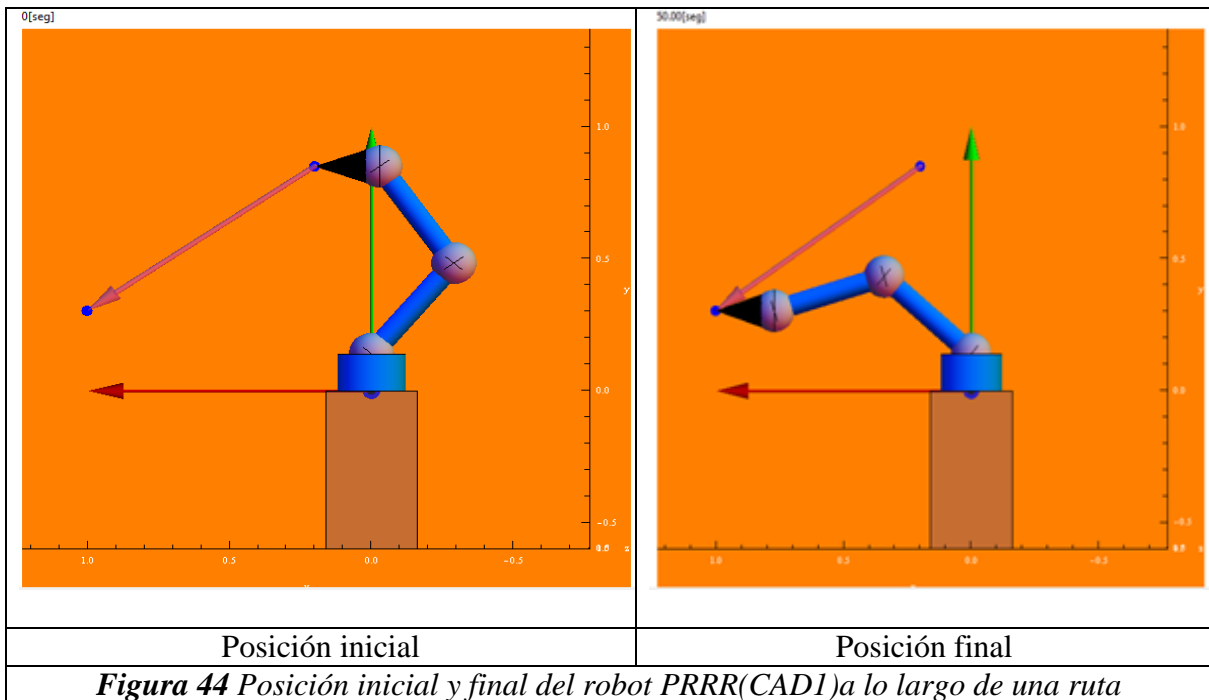
De acuerdo a la imagen anterior es necesario plantear una ruta, así como la velocidad y aceleración del Efecto final a lo largo de ella.

Las condiciones de la trayectoria recta que se propuso se muestran en la siguiente tabla:

**Tabla 11** Condiciones de la ruta del CAD1

Condiciones de la ruta			
Nombre del CAD relacionado con la ruta:		CAD1	
Tipo de ruta:		Recta	Longitud de la ruta:
			0.971[m]
Manera en que se describe la posición final e inicial:	Coordenadas cartesianas: (x05,y05,z05)	Tiempo en que llega del punto inicial al punto final:	T=50 [s]
Punto inicial:	(0.20, 0.85, 0) [m]	Velocidad inicial y final:	$\dot{\mathbf{q}}_e = (0,0,0,0)^T$
Punto final:	(1.00, 0.30, 0) [m]	Aceleración inicial y final:	$\ddot{\mathbf{q}}_e = (0,0,0,0)^T$

Las siguientes son imágenes de la simulación en ©Mathematica del robot PRRR siguiendo la ruta recta definida en la tabla anterior.





En las columnas de la siguiente tabla, obtenida por la simulación en ©Mathematica, se muestra: el tiempo transcurrido ( $t$ ), las coordenadas cartesianas del efector final ( $x, y, z$ ), las posiciones articulares del robot ( $\theta_3, \theta_4, \theta_5$ ), la velocidad del efector final ( $v_x, v_y, v_z$ ) y las aceleraciones del efector final ( $a_x, a_y, a_z$ ).

**Tabla 12 Posiciones, velocidades y aceleraciones del Efector final del CAD1**

t[s]	x[m]	y[m]	z[m]	θ3[°]	θ4[°]	θ5[°]	vx[m/s]	vy[m/s]	vz[m/s]	ax[m <sup>2</sup> /s]	ay[m <sup>2</sup> /s]	az[m <sup>2</sup> /s]
0	0.2010	0.8500	0	130.2	284.3	305.5	0	0	0	0	0	0
1.000	0.2011	0.8500	0	130.2	284.3	305.5	0.009243	-0.006304	0	0.9054	-0.6175	0
2.000	0.2015	0.8497	0	130.2	284.2	305.6	0.03548	-0.02420	0	1.700	-1.159	0
3.000	0.2026	0.8489	0	130.2	284.1	305.8	0.07653	-0.05220	0	2.388	-1.629	0
4.000	0.2046	0.8475	0	130.2	283.7	306.1	0.1303	-0.08889	0	2.975	-2.029	0
5.000	0.2079	0.8453	0	130.2	283.3	306.6	0.1949	-0.1329	0	3.465	-2.363	0
6.000	0.2125	0.8422	0	130.1	282.6	307.3	0.2683	-0.1830	0	3.862	-2.634	0
7.000	0.2186	0.8380	0	130.1	281.7	308.2	0.3488	-0.2379	0	4.171	-2.845	0
8.000	0.2265	0.8326	0	130.0	280.6	309.4	0.4346	-0.2964	0	4.398	-2.999	0
9.000	0.2361	0.8261	0	129.8	279.3	310.8	0.5242	-0.3575	0	4.546	-3.100	0
10.00	0.2475	0.8183	0	129.6	277.9	312.5	0.6159	-0.4201	0	4.620	-3.151	0
11.00	0.2607	0.8093	0	129.3	276.2	314.5	0.7085	-0.4832	0	4.624	-3.154	0
12.00	0.2758	0.7990	0	128.8	274.4	316.8	0.8005	-0.5460	0	4.564	-3.113	0
13.00	0.2927	0.7875	0	128.2	272.6	319.2	0.8906	-0.6075	0	4.444	-3.031	0
14.00	0.3114	0.7747	0	127.4	270.6	322.0	0.9779	-0.6669	0	4.268	-2.911	0
15.00	0.3318	0.7608	0	126.3	268.7	325.0	1.061	-0.7237	0	4.042	-2.757	0
16.00	0.3538	0.7458	0	125.1	266.8	328.2	1.139	-0.7770	0	3.770	-2.571	0
17.00	0.3773	0.7297	0	123.5	265.0	331.5	1.212	-0.8263	0	3.455	-2.357	0
18.00	0.4022	0.7128	0	121.6	263.3	335.1	1.277	-0.8711	0	3.104	-2.117	0
19.00	0.4284	0.6949	0	119.4	261.8	338.8	1.336	-0.9109	0	2.721	-1.856	0
20.00	0.4556	0.6764	0	116.9	260.6	342.5	1.386	-0.9452	0	2.310	-1.575	0
21.00	0.4837	0.6572	0	114.1	259.6	346.3	1.428	-0.9738	0	1.876	-1.279	0
22.00	0.5126	0.6374	0	110.9	258.9	350.1	1.461	-0.9963	0	1.423	-0.9704	0
23.00	0.5421	0.6174	0	107.5	258.6	353.9	1.485	-1.013	0	0.9562	-0.6522	0
24.00	0.5720	0.5970	0	103.8	258.7	357.4	1.499	-1.022	0	0.4804	-0.3277	0
25.00	0.6020	0.5765	0	99.98	259.2	0.8527	1.504	-1.026	0	0	0	0
26.00	0.6320	0.5560	0	95.98	260.0	4.020	1.499	-1.022	0	-0.4804	0.3277	0
27.00	0.6619	0.5356	0	91.89	261.2	6.906	1.485	-1.013	0	-0.9562	0.6522	0
28.00	0.6914	0.5156	0	87.77	262.8	9.479	1.461	-0.9963	0	-1.423	0.9704	0
29.00	0.7203	0.4958	0	83.67	264.6	11.72	1.428	-0.9738	0	-1.876	1.279	0
30.00	0.7484	0.4766	0	79.62	266.8	13.62	1.386	-0.9452	0	-2.310	1.575	0
31.00	0.7756	0.4581	0	75.67	269.1	15.19	1.336	-0.9109	0	-2.721	1.856	0
32.00	0.8018	0.4402	0	71.85	271.7	16.44	1.277	-0.8711	0	-3.104	2.117	0
33.00	0.8267	0.4233	0	68.18	274.4	17.39	1.212	-0.8263	0	-3.455	2.357	0
34.00	0.8502	0.4072	0	64.69	277.2	18.07	1.139	-0.7770	0	-3.770	2.571	0
35.00	0.8722	0.3922	0	61.39	280.1	18.51	1.061	-0.7237	0	-4.042	2.757	0
36.00	0.8926	0.3783	0	58.30	283.0	18.74	0.9779	-0.6669	0	-4.268	2.911	0
37.00	0.9113	0.3655	0	55.43	285.8	18.80	0.8906	-0.6075	0	-4.444	3.031	0
38.00	0.9282	0.3540	0	52.81	288.5	18.72	0.8005	-0.5460	0	-4.564	3.113	0
39.00	0.9433	0.3437	0	50.43	291.0	18.55	0.7085	-0.4832	0	-4.624	3.154	0
40.00	0.9565	0.3347	0	48.31	293.4	18.31	0.6159	-0.4201	0	-4.620	3.151	0
41.00	0.9679	0.3269	0	46.45	295.5	18.03	0.5242	-0.3575	0	-4.546	3.100	0
42.00	0.9775	0.3204	0	44.87	297.4	17.74	0.4346	-0.2964	0	-4.398	2.999	0
43.00	0.9854	0.3150	0	43.56	299.0	17.47	0.3488	-0.2379	0	-4.171	2.845	0
44.00	0.9915	0.3108	0	42.51	300.3	17.23	0.2683	-0.1830	0	-3.862	2.634	0
45.00	0.9961	0.3077	0	41.72	301.2	17.03	0.1949	-0.1329	0	-3.465	2.363	0
46.00	0.9994	0.3055	0	41.16	301.9	16.89	0.1303	-0.08889	0	-2.975	2.029	0
47.00	1.001	0.3041	0	40.81	302.4	16.79	0.07653	-0.05220	0	-2.388	1.629	0
48.00	1.003	0.3033	0	40.62	302.6	16.74	0.03548	-0.02420	0	-1.700	1.159	0
49.00	1.003	0.3030	0	40.54	302.7	16.72	0.009243	-0.006304	0	-0.9054	0.6175	0
50.00	1.003	0.3030	0	40.53	302.8	16.72	0	0	0	0	0	0

4. Velocidades y aceleraciones articulares del robot PRRR.

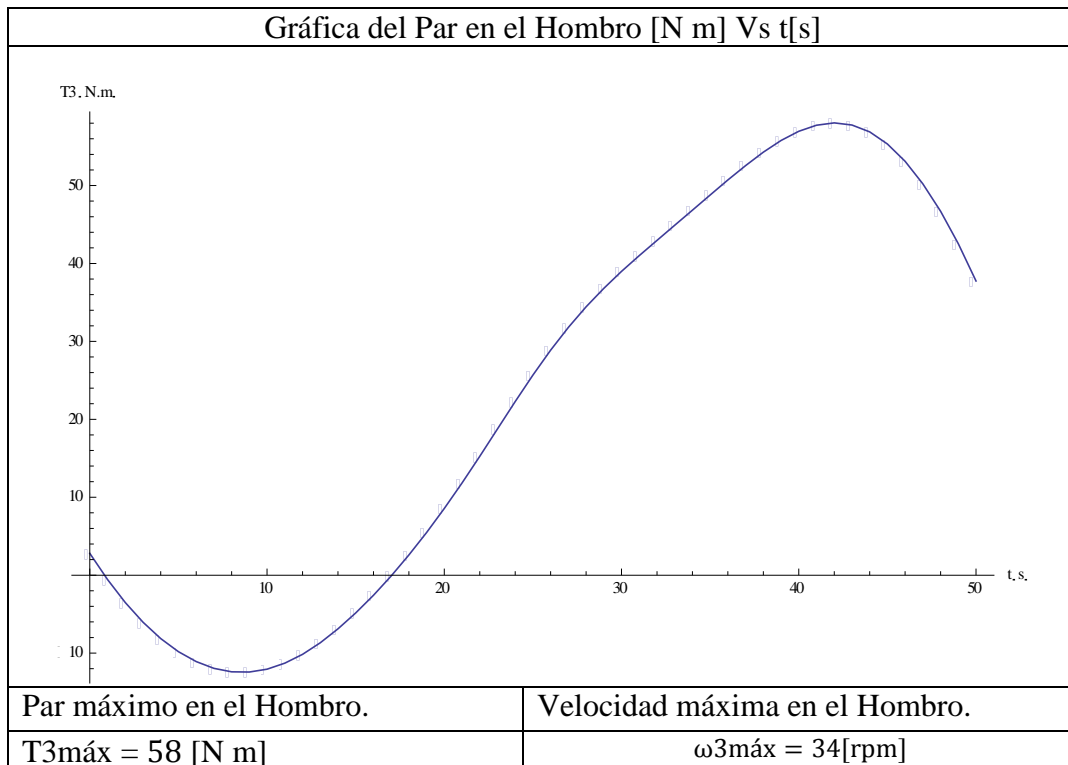
La siguiente tabla muestra la solución de la cinemática inversa; las velocidades y aceleraciones articulares a lo largo de la ruta recta.

**Tabla 13** Velocidades y aceleraciones articulares del CAD1

t[s]	v1[m/s]	$\omega_3$ [rad/s]	$\omega_4$ [rad/s]	$\omega_5$ [rad/s]	a1[m <sup>2</sup> /s]	$\alpha_3$ [rad <sup>2</sup> /s]	$\alpha_4$ [rad <sup>2</sup> /s]	$\alpha_5$ [rad <sup>2</sup> /s]
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.000	0	-0.0005515	-0.02417	0.02472	0	-0.05442	-2.367	2.421
2.000	0	-0.002227	-0.09263	0.09486	0	-0.1126	-4.427	4.540
3.000	0	-0.005422	-0.1991	0.2045	0	-0.1961	-6.160	6.356
4.000	0	-0.01120	-0.3366	0.3477	0	-0.3319	-7.534	7.866
5.000	0	-0.02135	-0.4976	0.5189	0	-0.5442	-8.524	9.068
6.000	0	-0.03839	-0.6740	0.7124	0	-0.8491	-9.119	9.969
7.000	0	-0.06535	-0.8574	0.9227	0	-1.250	-9.329	10.58
8.000	0	-0.1056	-1.039	1.145	0	-1.739	-9.182	10.92
9.000	0	-0.1627	-1.212	1.374	0	-2.294	-8.729	11.02
10.00	0	-0.2399	-1.367	1.607	0	-2.888	-8.025	10.91
11.00	0	-0.3401	-1.499	1.839	0	-3.492	-7.128	10.62
12.00	0	-0.4659	-1.601	2.066	0	-4.081	-6.081	10.16
13.00	0	-0.6188	-1.668	2.287	0	-4.634	-4.914	9.548
14.00	0	-0.7995	-1.697	2.497	0	-5.138	-3.635	8.773
15.00	0	-1.008	-1.686	2.693	0	-5.580	-2.237	7.818
16.00	0	-1.242	-1.631	2.872	0	-5.946	-0.7059	6.652
17.00	0	-1.498	-1.531	3.029	0	-6.212	0.9703	5.242
18.00	0	-1.771	-1.387	3.158	0	-6.341	2.782	3.558
19.00	0	-2.054	-1.200	3.254	0	-6.280	4.687	1.592
20.00	0	-2.339	-0.9729	3.312	0	-5.968	6.599	-0.6309
21.00	0	-2.615	-0.7096	3.325	0	-5.351	8.389	-3.038
22.00	0	-2.872	-0.4163	3.288	0	-4.395	9.898	-5.503
23.00	0	-3.100	-0.1007	3.201	0	-3.110	10.96	-7.855
24.00	0	-3.290	0.2285	3.062	0	-1.554	11.46	-9.905
25.00	0	-3.436	0.5617	2.875	0	0.1735	11.31	-11.48
26.00	0	-3.536	0.8892	2.646	0	1.952	10.51	-12.46
27.00	0	-3.588	1.202	2.386	0	3.667	9.140	-12.81
28.00	0	-3.595	1.492	2.103	0	5.232	7.313	-12.54
29.00	0	-3.562	1.753	1.809	0	6.599	5.169	-11.77
30.00	0	-3.493	1.980	1.514	0	7.758	2.849	-10.61
31.00	0	-3.395	2.168	1.227	0	8.729	0.4708	-9.200
32.00	0	-3.272	2.316	0.9558	0	9.544	-1.875	-7.669
33.00	0	-3.127	2.421	0.7062	0	10.24	-4.125	-6.115
34.00	0	-2.966	2.484	0.4824	0	10.85	-6.236	-4.613
35.00	0	-2.790	2.502	0.2872	0	11.39	-8.182	-3.211
36.00	0	-2.600	2.478	0.1222	0	11.88	-9.943	-1.937
37.00	0	-2.399	2.411	-0.01171	0	12.31	-11.50	-0.8072
38.00	0	-2.187	2.302	-0.1148	0	12.66	-12.84	0.1726
39.00	0	-1.965	2.153	-0.1878	0	12.92	-13.92	0.9997
40.00	0	-1.735	1.968	-0.2324	0	13.04	-14.72	1.673
41.00	0	-1.500	1.751	-0.2512	0	13.00	-15.19	2.190
42.00	0	-1.262	1.510	-0.2475	0	12.75	-15.30	2.549
43.00	0	-1.026	1.252	-0.2256	0	12.26	-15.00	2.746
44.00	0	-0.7987	0.9894	-0.1907	0	11.48	-14.26	2.782
45.00	0	-0.5855	0.7337	-0.1481	0	10.40	-13.06	2.657
46.00	0	-0.3942	0.4980	-0.1037	0	8.994	-11.37	2.379
47.00	0	-0.2325	0.2952	-0.06268	0	7.255	-9.215	1.960
48.00	0	-0.1081	0.1376	-0.02950	0	5.177	-6.592	1.415
49.00	0	-0.02818	0.03591	-0.007730	0	2.760	-3.518	0.7573
50.00	0	0	0	0	0	0	0	0

5. Finalmente sustituyendo los valores obtenidos de la tabla anterior en el modelo obtenido en el paso1 obtenemos la siguiente gráfica de Par contra el tiempo para la articulación del hombro. Las gráficas para el codo y muñeca se encuentran en el Anexo G.

**Tabla 14** Gráfica del Par en el Hombro [N m] Vs t[s]



Con esta información procedemos a seleccionar los motores comerciales para luego dibujarlos en Solidworks. La ventaja de dibujar los motores en Solidworks es que se pueden obtener las propiedades mecánicas del ensamble para elCAD2.

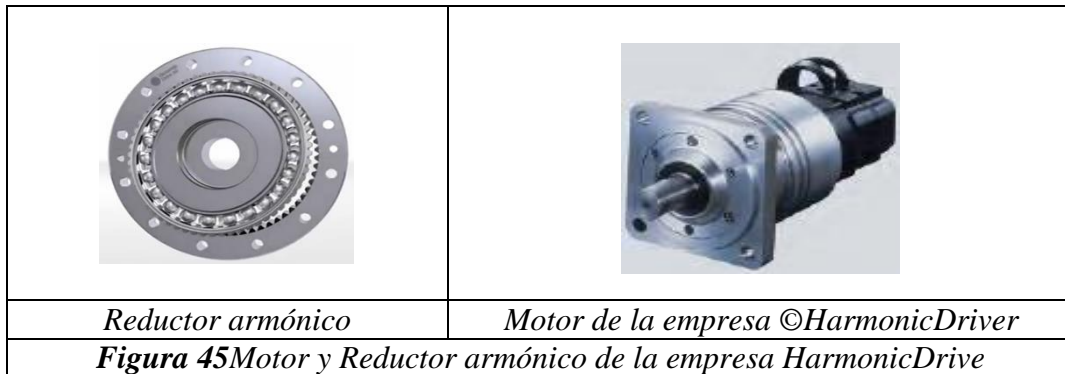
#### *Selección de los motores para las articulaciones*

Los motores se seleccionaron de un catálogo de la empresa ©HarmonocDrive (revisar referencia [6]). Son **servomotores** que tienen una buena relación masa-Par, deseable para la aplicación. Aunque los motores seleccionados no cumplen con el par, se pretende alcanzarlo con diseños posteriores, empleando algún tipo de reducción de velocidad (corona-sinfín, reductor con engranes cónicos o rectos, etc):

Los motores cuentan con un sistema completo para su implementación, el cual incluye:

- Retroalimentación de posicionamiento (encoder).
- Reductor de tipo armónico (genera gran relación de reducción de velocidad en un paquete compacto).

- Driver, para la etapa de potencia del motor.
- Interface para la comunicación con una computadora externa.

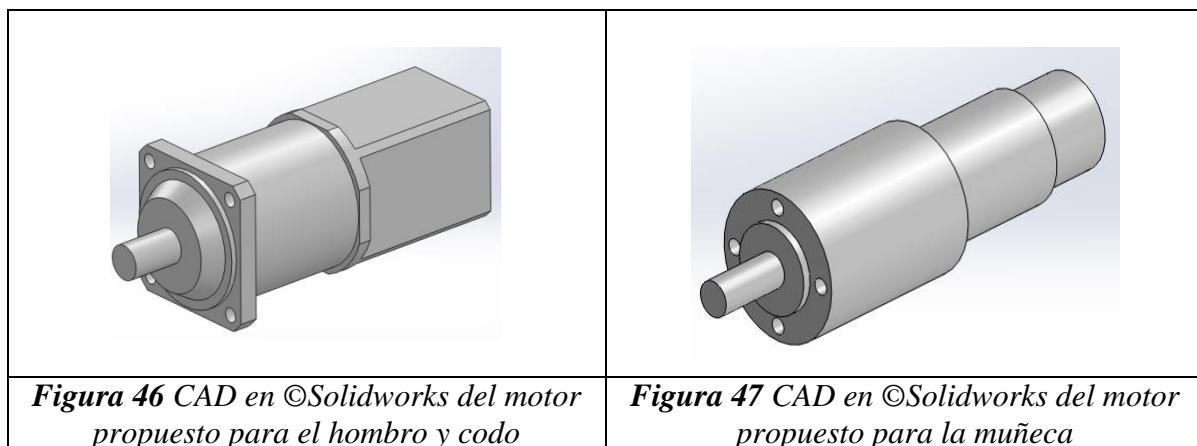


Las especificaciones técnicas de los motores seleccionados, se muestran a continuación:

**Tabla 15** Especificaciones técnicas de los motores HarmonicDrive seleccionados

Motor a implementar en el hombro y codo		Motor a implementar en la muñeca	
Modelo del motor	<b>RSF-17A-100-E200</b>	Modelo del motor	<b>RSF-14B-100F100-24B</b>
Rated Output Power[W]	62	Allowable Continuous Torque [N m]	6
Rated Torque[N m]	20	Rated speed[rpm]	30
Rated speed[rpm]	30	Rated Voltage[V]	DC24
Rated Voltage[V]	AC200	Allowable Continuous Current [A]	4.7
Weight[kg]	2.1	Weight[kg]	0.8

Con las dimensiones del motor que vienen en las hojas técnicas del fabricante (revisar fuente [6]), se realizó el dibujo en ©Solidworks. Para asignarle un material se utilizó la masa que proporciona la hoja técnica y con el volumen calculado por el software, se le asignó un nuevo material con una densidad igual a la masa entre el volumen.




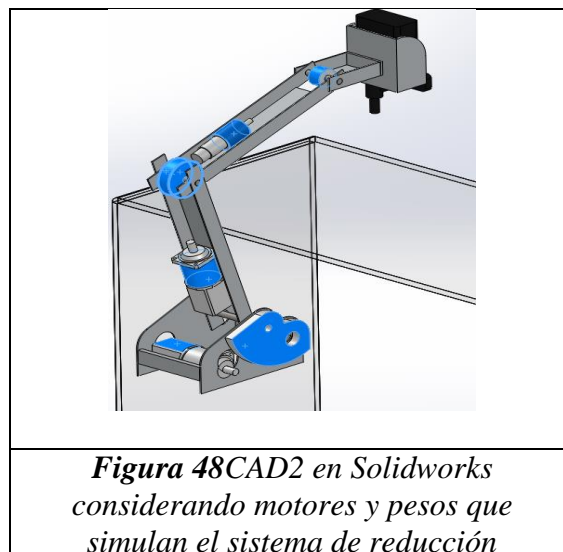
*Simulación del CAD2*

A continuación se muestran los detalles más relevantes para la simulación del CAD2.

En el Anexo J se muestran los planos del robot PRRR del CAD2.

**Tabla 16** Distribución de masa de los eslabones del CAD2

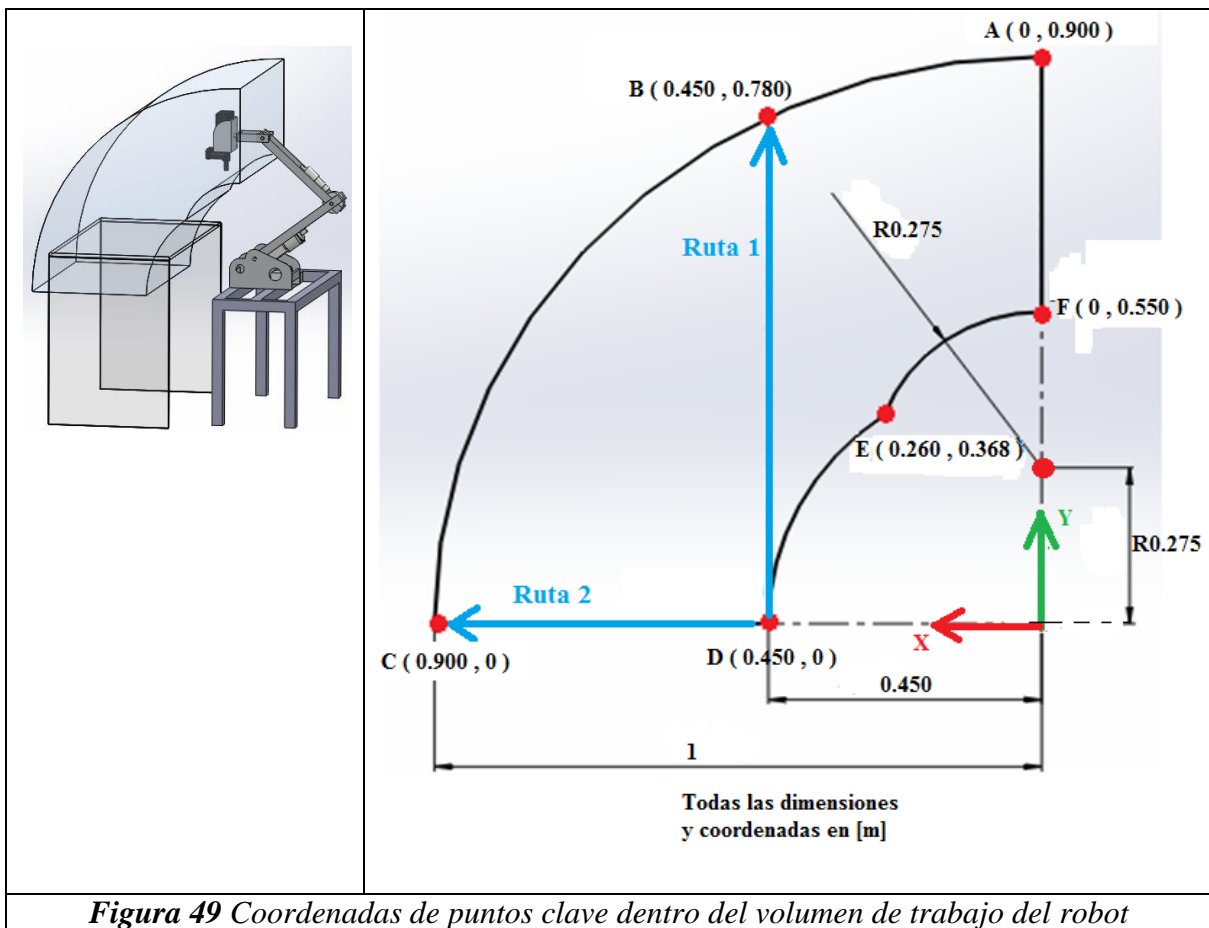
<i>Propiedades mecánicas según el CAD en Solidworks</i>								
<i>Nombre del CAD: CAD2</i>								
<i>Comentarios:</i>								
Se consideraron para la Brazo, Antebrazo y Mano, una canaleta de Aluminio (6063-T5) de 1/8" de espesor.								
Dimensiones de la canaleta:								
								
Para el Brazo y Mano las dimensiones de la canaleta son de: A=4" y B=3/2"								
Para el Antebrazo las dimensiones de la canaleta son de: A=7/2" y B=3/2"								
Los ejes son de acero inoxidable ANSI 316 de 5/8" de diámetro.								
Se consideraron pesos debido al sistema de reducción-transmisión: pesos de 0.8 kg en las articulaciones del codo y muñeca, mientras que en el hombro 2 kg.								
Se consideraron las dimensiones y masas de motores comerciales.								
<i>Eslabón.</i>	<i>Longitud [m]</i>		<i>Masa [kg]</i>		<i>Centro de masa [m]</i>		<i>Momento de Inercia [kg m<sup>2</sup>]</i>	
Plataforma Móvil	d2	0.140	m2	5.4843	C12	0.0764	-	-
Brazo.	a3	0.450	m3	3.6784	C23	0.2384	I3z	0.0821
Antebrazo.	a4	0.450	m4	2.4000	C34	0.2907	I4z	0.0584
Mano + espectrómetro	a5	0.230	m5	3.3961	C45	0.1823	I5z	0.0160
Masa total =				14.9588				



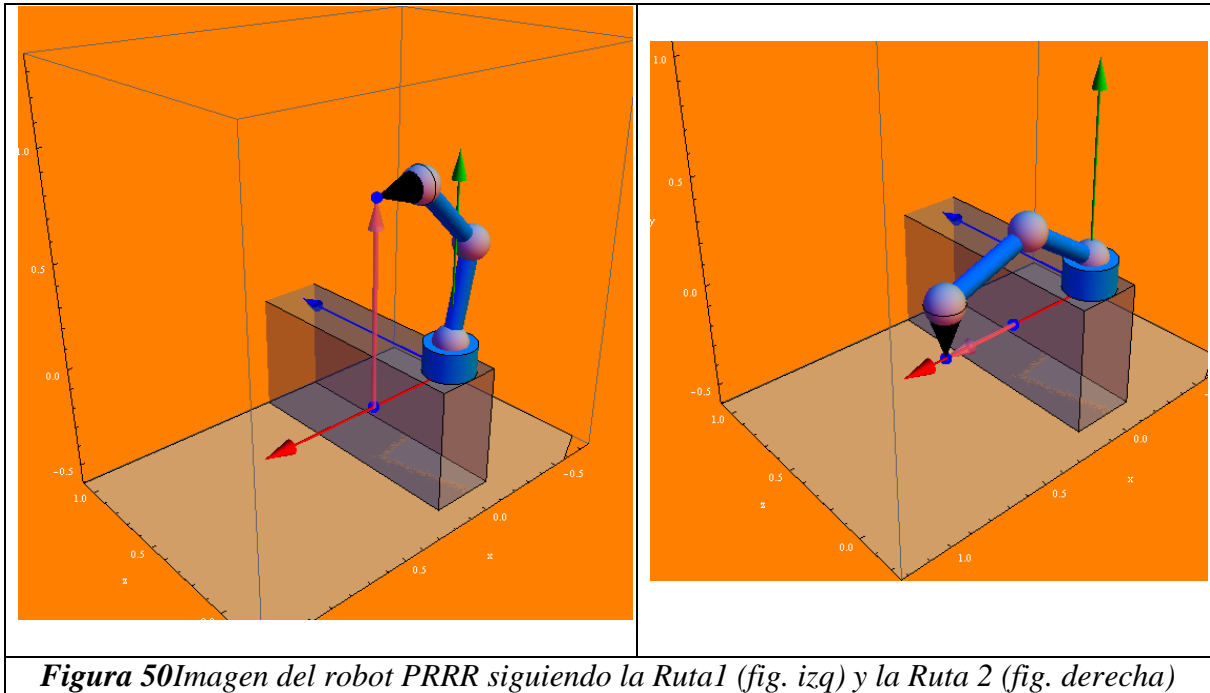
El modelo analítico, al sustituir las propiedades mecánicas del CAD2, no lo escribiremos aquí, sin embargo también se obtuvo con ayuda de ©Mathematica, tal y como se hizo en el CAD1.

*Definición de las trayectorias*

A continuación se planean dos rutas que seguirá el robot conforme a la tarea que realizaría. Una ruta implica que el espectrómetro siga una trayectoria recta paralela al suelo, la otra ruta es una recta vertical. La siguiente figura muestra una vista lateral del área de trabajo del robot y en azul las dos trayectorias planteadas.



**Figura 49** Coordenadas de puntos clave dentro del volumen de trabajo del robot



**Figura 50** Imagen del robot PRRR siguiendo la Ruta 1 (fig. izq) y la Ruta 2 (fig. derecha)

Las siguientes tablas muestran los resultados de los pares máximos y velocidades angulares en las articulaciones del robot PRRR para la Ruta 1 y Ruta 2. Las gráficas Par vs tiempo aparecen en el Anexo G.

**Tabla 17** Pares y velocidades angulares de la Ruta 1 del CAD2

Articulación	Símbolo	Par máximo [N m]	Velocidad angular [rpm]
Par en el hombro	T3	37	52
Par en el codo	T4	29	29
Par en la muñeca	T5	11	60

**Tabla 18** Pares y velocidades angulares de la Ruta 2 del CAD2

Articulación	Símbolo	Par máximo [N m]	Velocidad angular [rpm]
Par en el hombro	T3	62	11
Par en el codo	T4	31	20
Par en la muñeca	T5	3	9

Finalmente empleando los motores de la empresa ©HarmonicDrive y los Pares máximos de las tablas anteriores, se calcula a continuación las relaciones de los reductores  $N$ , sin considerar ningún factor de diseño o eficiencia, se empleó la siguiente fórmula (revisar referencia [7] p.85):



$$N = \frac{\text{Par de salida}}{\text{Par de entrada}} = \frac{\text{Velocidad angular de entrada}}{\text{Velocidad angular de salida}}$$

Aplicando las relaciones anteriores a nuestro caso:

$$N = \frac{\text{Par de la simulación máx.}}{\text{Par que entrega el motor}} = \frac{T_{sim}}{T_M}, \quad N = \frac{\text{Velocidad angular del motor}}{\text{Velocidad angular de salida}} = \frac{n_M}{n_s}$$

Para conocer la velocidad en la articulación (a la salida del reductor) que cumpla con el par calculado, tenemos:

$$n_s = \frac{n_M}{N}$$

Cálculos:

Para el Hombro

$$N = \frac{62 [N m]}{20 [N m]} = 3.1$$

$$n_s = \frac{30 [rpm]}{3.1} = 9.7 [rpm]$$

Para el Codo

$$N = \frac{37 [N m]}{20 [N m]} = 1.85$$

$$n_s = \frac{30 [rpm]}{1.85} = 16.3 [rpm]$$

Para la muñeca

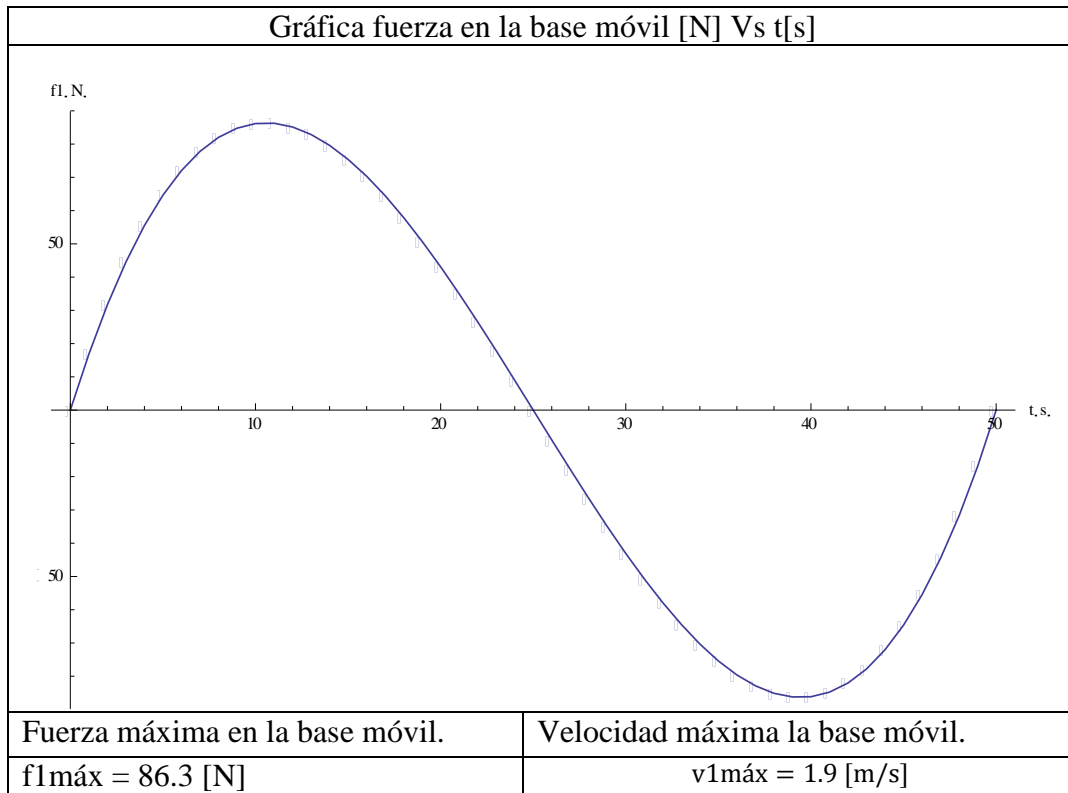
$$N = \frac{11 [N m]}{6 [N m]} = 1.8$$

$$n_s = \frac{30 [rpm]}{1.8} = 16.7 [rpm]$$

Como se puede observar las velocidades en las articulaciones  $n_s$  son muy lentas por lo que es necesario seleccionar otro motor. El “nuevo” motor seleccionado debe contar con mayor par o mayor velocidad angular. Claro que también debe considerarse que al aumentar el par o las revoluciones por minuto de los motores, estos generalmente aumentan sus dimensiones y su peso. Entonces para diseños posteriores tienen que realizarse concesiones entre el peso-par-velocidad.

Ahora bien para calcular la fuerza en el actuador lineal, usado en la base móvil, se planteó una ruta en la que únicamente se desplazó a lo largo del riel, con un desplazamiento de 1[m] en un tiempo de 50 [s]. La siguiente gráfica muestra el historial a lo largo del tiempo de la fuerza necesaria en el actuador.

**Tabla 19** Gráfica de fuerza aplicada a la base móvil [N] Vs tiempo [s]



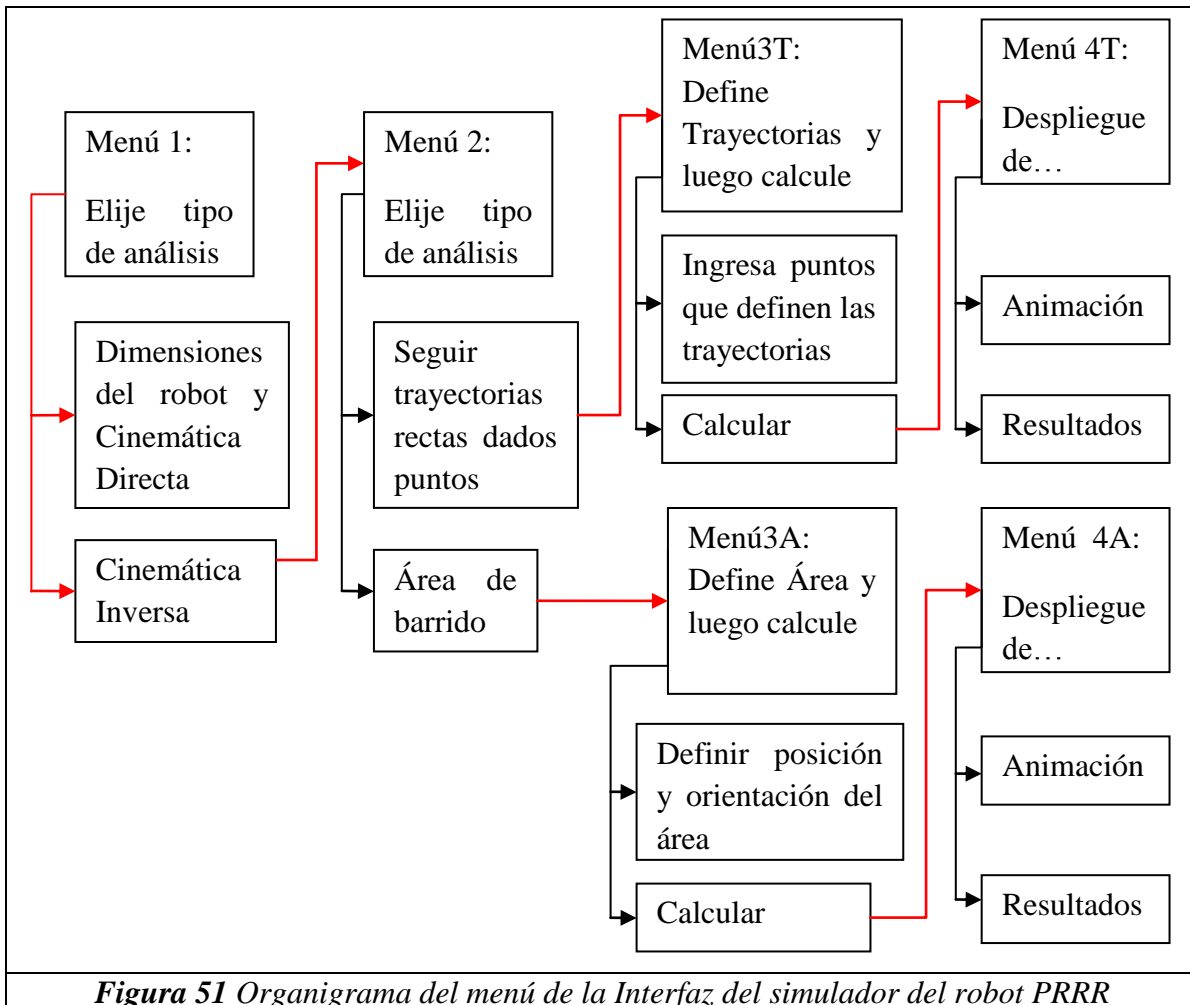
De la gráfica anterior se concluye que se necesita un actuador que proporcione 86.3 [N] de fuerza para desplazar el brazo robótico.

Esta es solo una primera propuesta para la selección de los motores y el sistema de reducción y que requiere de más iteraciones. Sin embargo es útil pues ilustra un algoritmo. El algoritmo propuesto emplea el modelo dinámico del robot, ©Solidworks y una simulación en ©Mathematica.

### 4.3. Interfaz de simulación del robot PRRR

En el diseño de una interfaz para la simulación del movimiento del robot y la solución de la cinemática y dinámica, se programaron una serie de subprogramas en ©Mathematica 8 que resuelven la cinemática directa y cinemática inversa. Los subprogramas más relevantes se muestran en el Anexo H.

Estos subprogramas se ordenaron para su despliegue en una serie de menús, con el fin de que fuese amigable su uso. A continuación se muestra un organigrama que ilustra los menús de la interfaz del simulador.



**Figura 51** Organigrama del menú de la Interfaz del simulador del robot PRRR

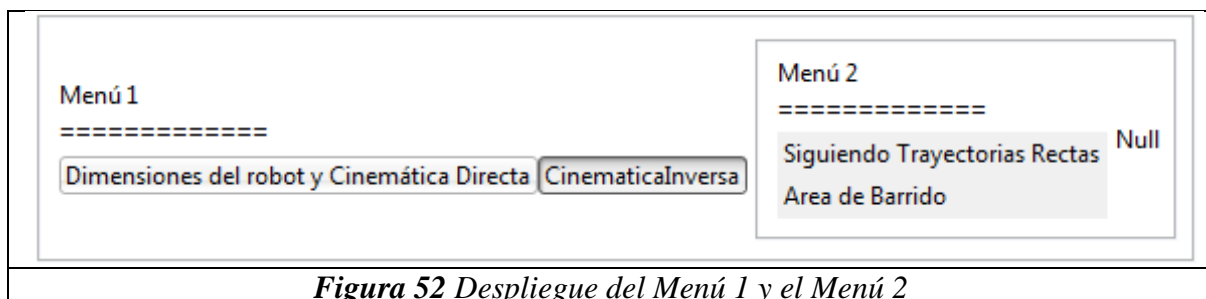
La interfaz funciona de la siguiente manera: en el Menú 1 podemos elegir entre dos opciones: cambiar las dimensiones del robot y visualizar el movimiento de sus articulaciones (cinemática directa) por medio de los sliders que ahí aparecen, se visualiza la solución de la Cinemática Inversa del robot.

Si elegimos la segunda opción del Menú 1 (Cinemática Inversa) nos despliega el Menú 2, en el cual podemos elegir entre dos opciones: Que el robot “siga varias trayectorias rectas” dados dos puntos para sendas trayectorias o definir un “área rectangular de barrido” como la definida en la sección 2.1.2 Formas de muestreo (Muestreo plano).

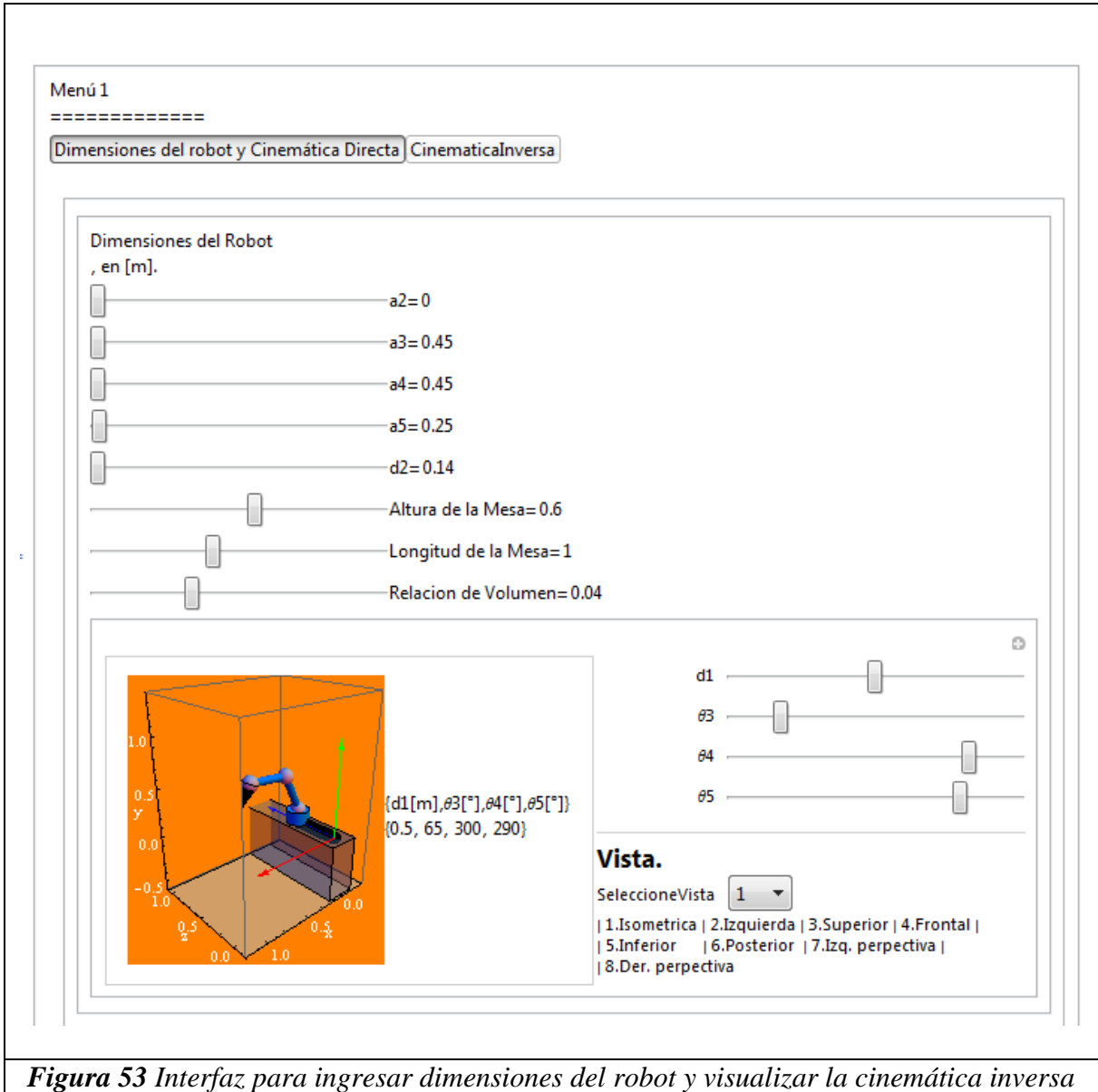
En el Menú 2 al elegir la opción de “Seguir trayectorias rectas dados puntos” se despliega el Menú 3T, en el cual se abre una ventana (“Ingresar puntos que definen las trayectorias”) en la que tenemos la libertad de ingresar tantos puntos como queramos y dar sus coordenadas x-y a través de un panel. La coordenada z la proporcionamos con sliders. El programa une cada punto con una línea para que estas sean seguidas por el robot. Al terminar de definir los puntos, presionamos la opción Calcula (del Menú 3T). Al presionar el botón calcula, el programa internamente resuelve la cinemática y dinámica del robot. Al presionar Calcula se desligan el Menú 4T en el cual podemos elegir dos opciones, una es visualizar en una “Animación” el movimiento del robot, siguiendo las trayectorias rectas predefinidas y la otra opción despliega los “Resultados” de la cinemática y dinámica del robot, en tablas y gráficas.

En el Menú 2 al elegir la opción de “Área de barrido” se despliega el Menú 3A, en el cual se abre una ventana (“Definir posición y orientación del área”) en la que ingresamos las coordenadas de una de las esquinas del área rectangular sobre la que se moverá el robot, así como el largo, ancho y orientación. El robot se moverá en líneas rectas con un patrón de zigzag hasta completar el área rectangular definida. También se puede ajustar el número de líneas del patrón en zigzag, haciendo más fino el mallado del área rectangular. Al terminar de especificar el área de barrido, se procede a “Calcular” la cinemática y dinámica del robot, con lo que se despliega el Menú 4A. El Menú 4A proporciona dos opciones; por un lado visualizar una “Animación” del robot, en la que se muestra el movimiento del robot siguiendo las líneas en patrón de zigzag hasta completar el área rectangular predefinida, y la segunda opción nos permite desplegar los “Resultados” de la cinemática y dinámica en forma tabular y gráfica.

En las siguientes páginas se muestran imágenes del simulador del robot PRRR realizado en ©Mathematica.



*Figura 52 Despliegue del Menú 1 y el Menú 2*



**Figura 53** Interfaz para ingresar dimensiones del robot y visualizar la cinemática inversa

Menú 3T

=====

Define Trayectoria y luego Calcula

Ingresa puntos que definen las trayectorias

Calcular

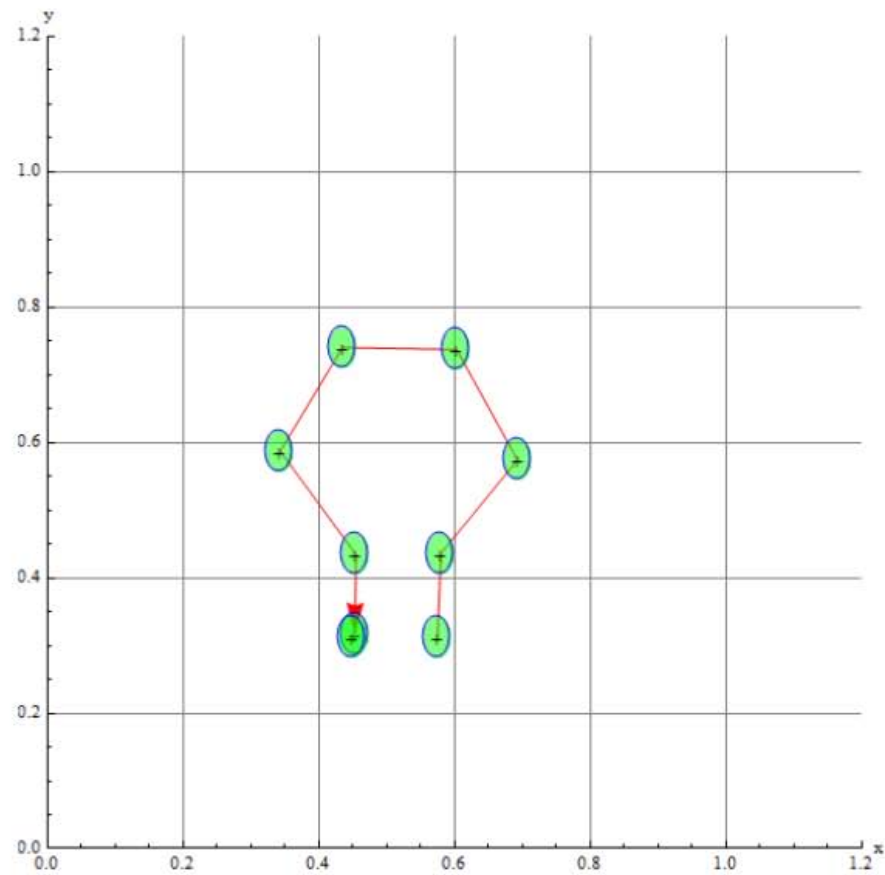
Definiendo los Pts de las Trayectorias Rectas

NumPuntos= 9

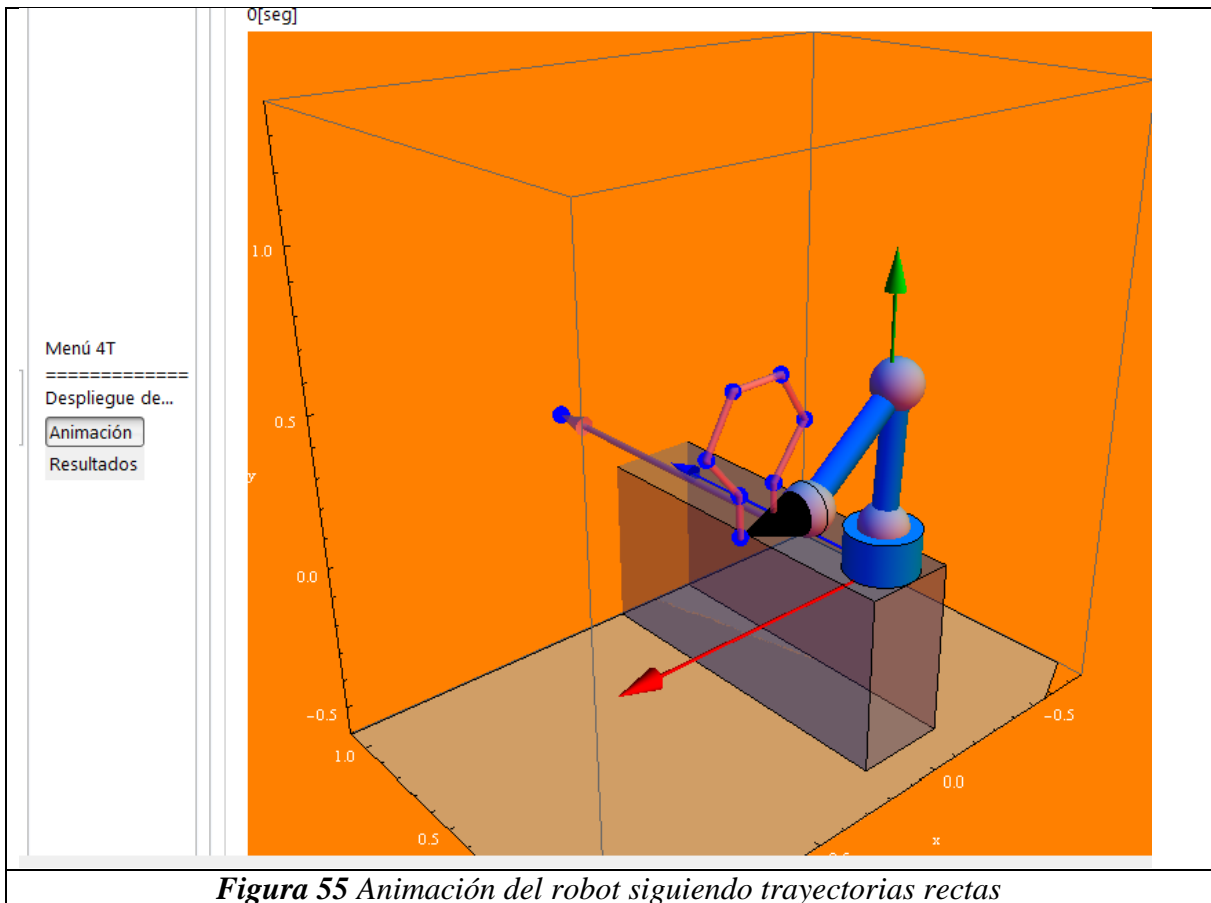
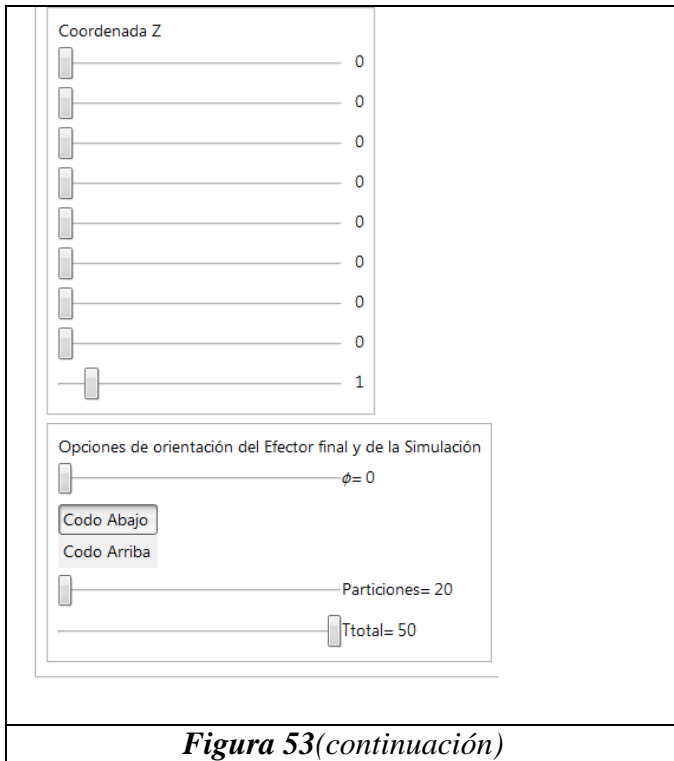
{{0.575, 0.311}, {0.58, 0.436}, {0.693, 0.574},  
{0.603, 0.737}, {0.435, 0.74}, {0.343, 0.587},  
{0.455, 0.434}, {0.453, 0.316}, {0.45, 0.311}}

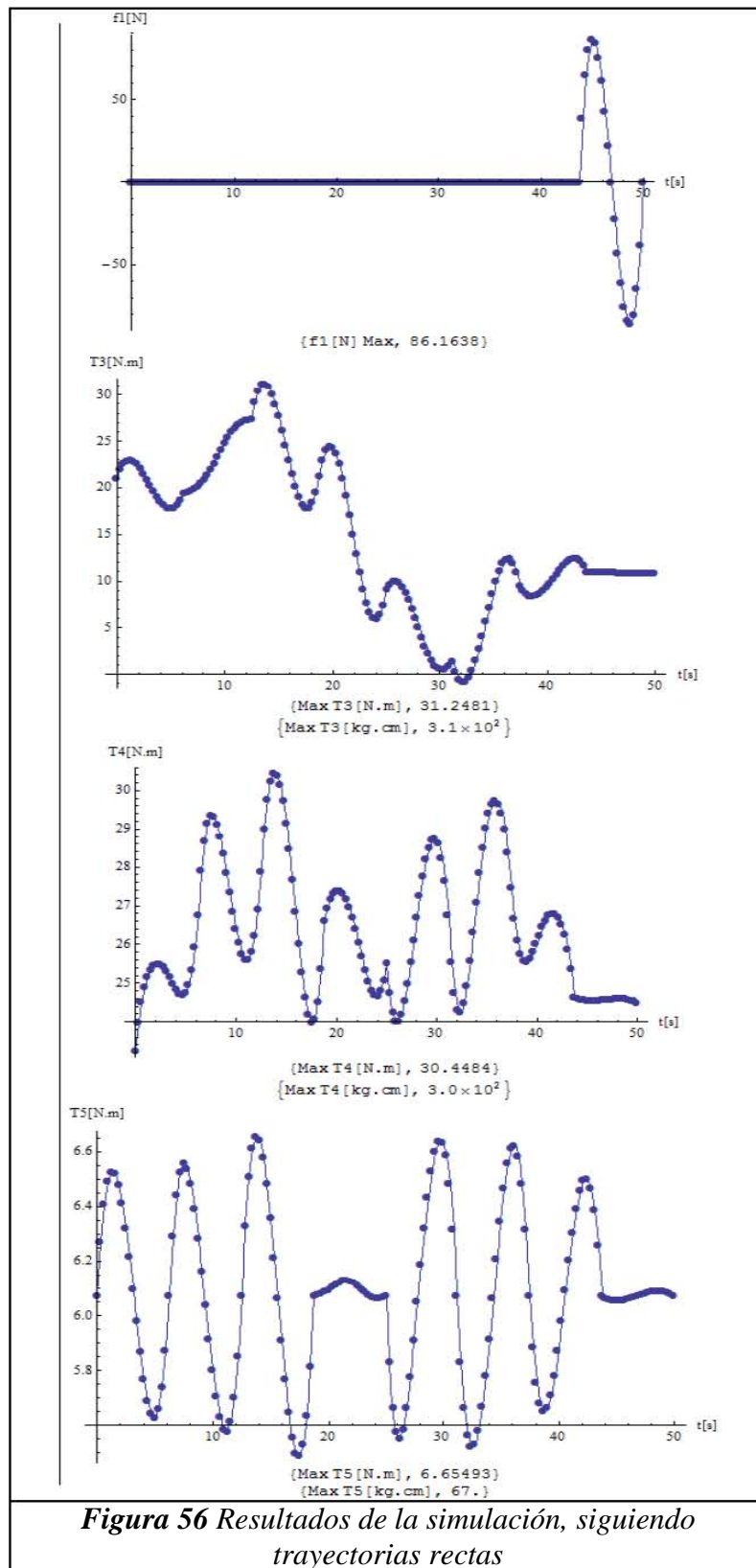
PtsXY= {{0.575, 0.311}, {0.58, 0.436}, {0.693, 0.574}, {0.603, 0.737}, {0.435, 0.74}, {0.343, 0.587}, {0.455, 0.434}, {0.453, 0.316}, {0.45, 0.311}}  
PtsZ= {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1}

Coordenada X-Y



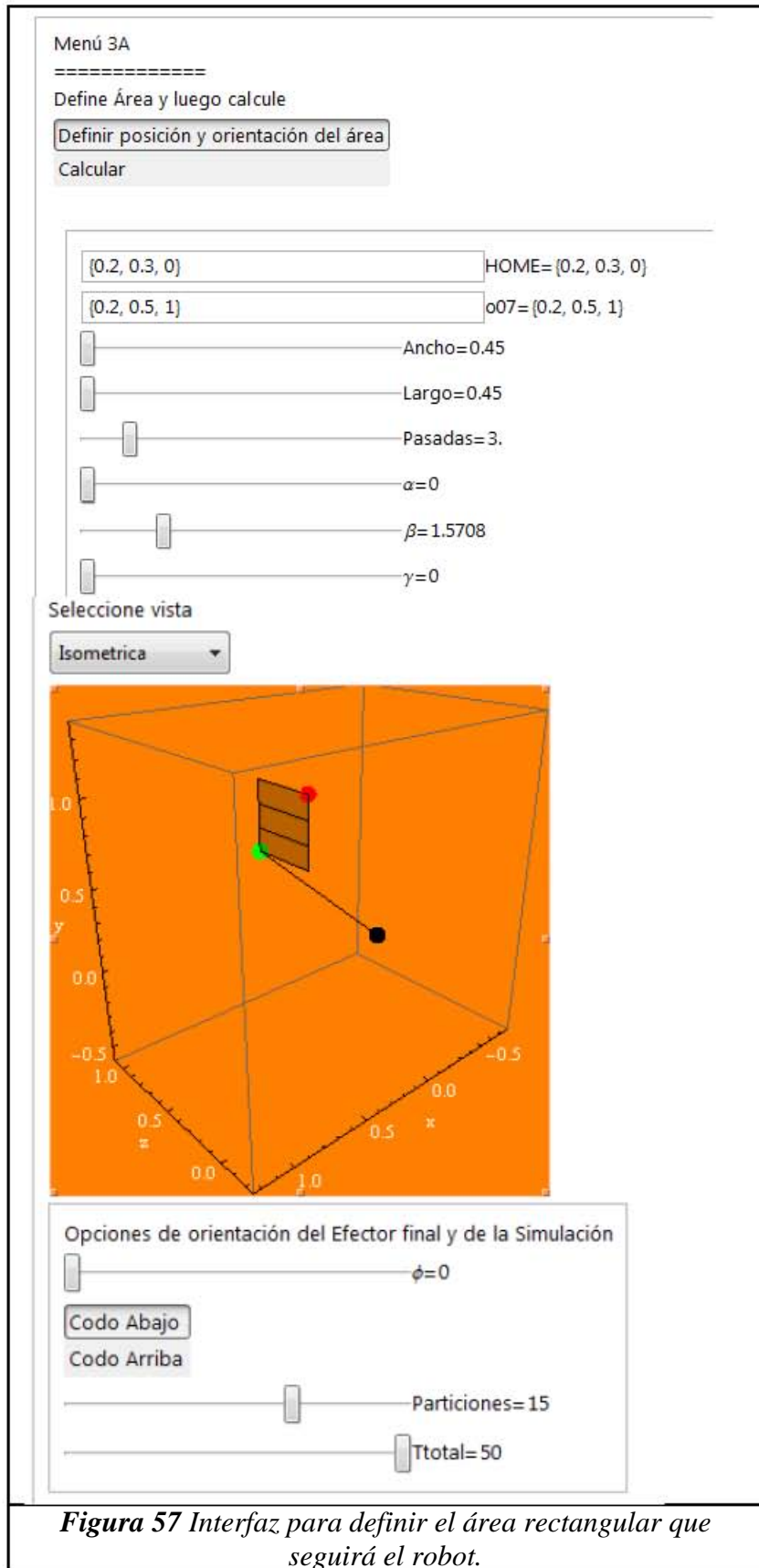
**Figura 54** Ingreso de coordenadas x-y-z para los puntos que definen las trayectorias

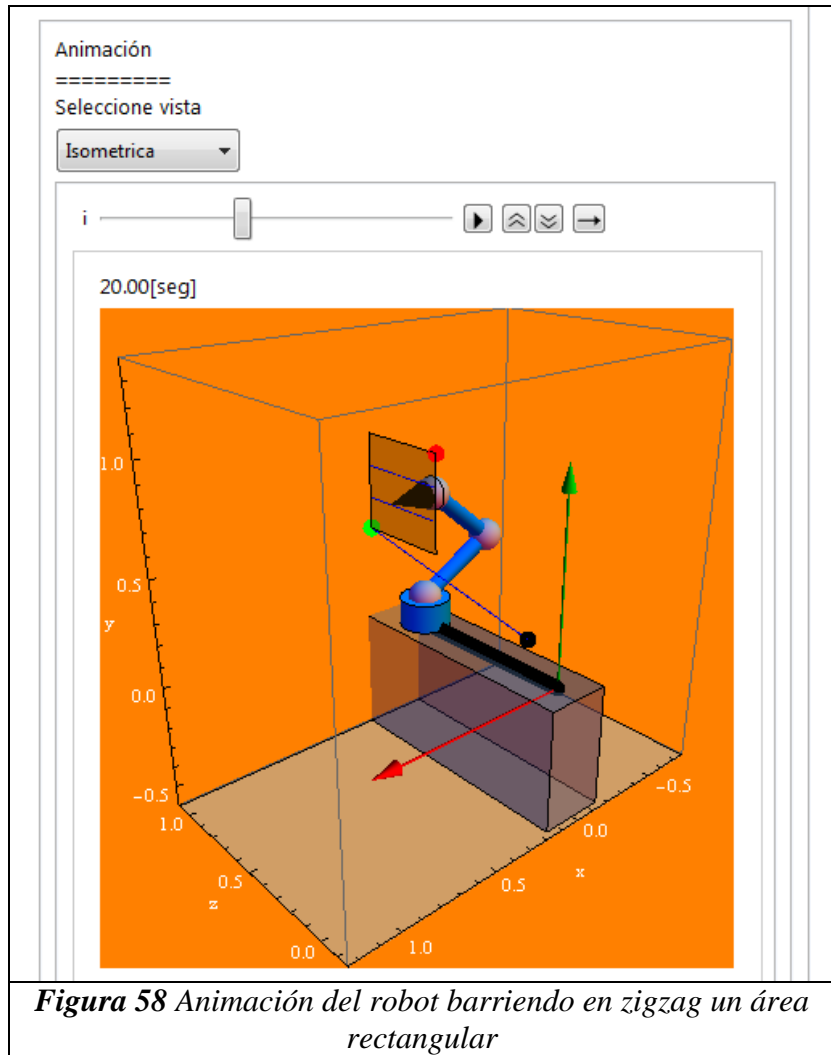


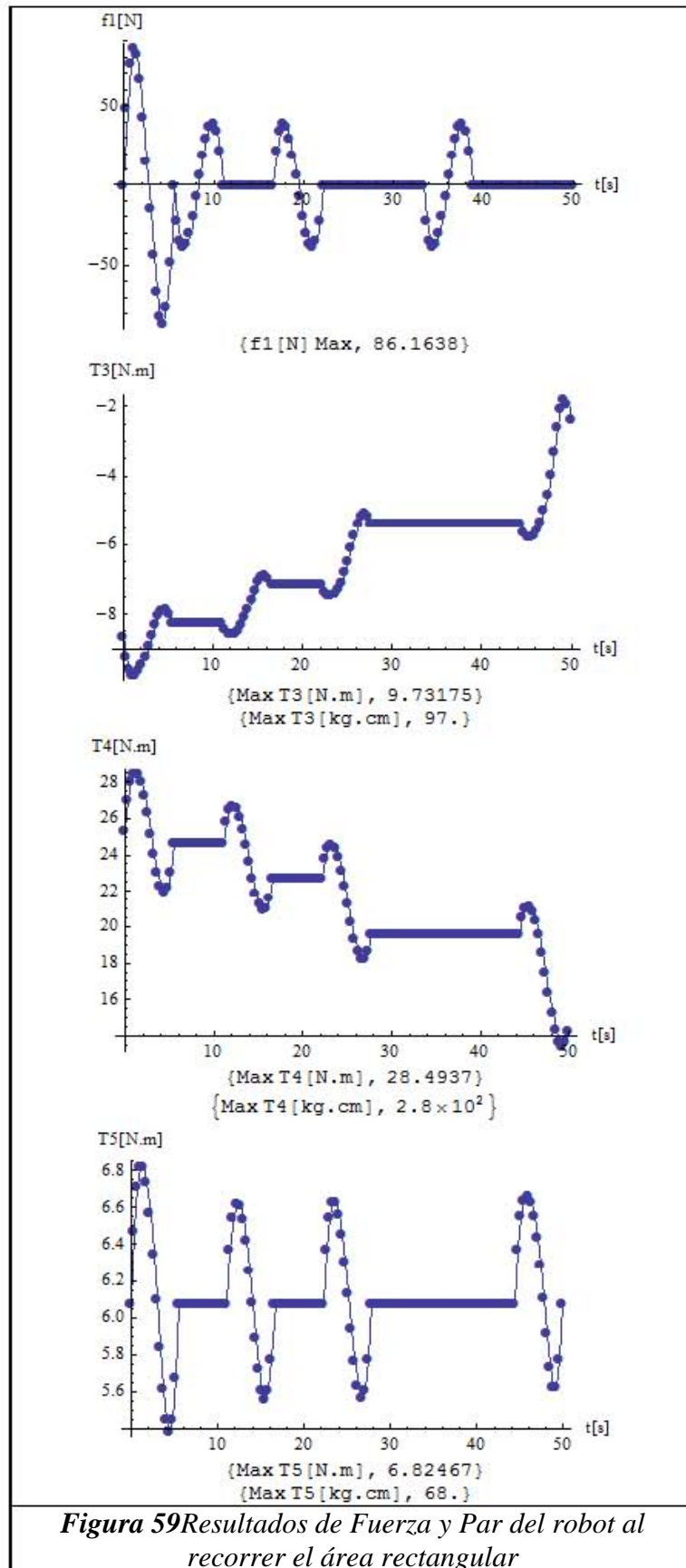


**Figura 56** Resultados de la simulación, siguiendo trayectorias rectas









**Figura 59** Resultados de Fuerza y Par del robot al recorrer el área rectangular

# CONCLUSIONES Y TRABAJO A FUTURO

## Conclusiones

La simulación del robot proporciona sólo una aproximación de cómo se comportará este en el mundo real, sin embargo es de gran utilidad contar con una aproximación de la potencia que exigirían las articulaciones.

En la tesis para hallar el modelo dinámico del robot se usó el método de Lagrange, que es un balance de energías potenciales y cinéticas. Las expresiones analíticas del robot son complejas por ser altamente no lineales. Esto hizo imposible agregar en un solo programa la solución de la cinemática inversa y la dinámica. Se tuvieron que copiar las expresiones analíticas del modelo, que arrojaba uno de los programas, y luego trasladarlas al programa que resolvía la cinemática inversa. Las velocidades y aceleraciones articulares calculadas se sustituían en el modelo dinámico, para finalmente proporcionar la fuerza necesaria en el riel y los pares en las juntas rotacionales. Con esto se ha concluido que en la simulación de un robot, es preferible, separar el análisis en dos partes o programas; en uno se calcula el modelo dinámico analítico (que considere la distribución de masa de los eslabones) y en otro programa se calcula la cinemática del robot y fuerzas. Las fuerzas en el segundo programa se han obtenido sustituyendo las velocidades y aceleraciones en el modelo obtenido en el primer programa.

El análisis dinámico del robot concluyó que el par necesario en las articulaciones del hombro, codo y muñeca (para una primera estructura propuesta del robot, *CAD2*) son de 62 [N\*m], 37 [N\*m] y 11 [N\*m] respectivamente. Y la fuerza aplicada a la base móvil para que se traslade el robot fue de 86.3 [N].

Los resultados muestran que el par o fuerza máxima no se alcanzan en las posiciones finales de sendas articulaciones, sino en un instante antes de llegar a ella. Este fenómeno se da porque el robot en un instante antes de alcanzar su punto final (en velocidad cero) tiene que desacelerar.

Con esta tesis se ha conseguido dilucidar un algoritmo para calcular la potencia en las articulaciones partiendo de cualquier propuesta estructural de un robot del tipo PRRR (una junta prismática y tres juntas rotacionales). La propuesta estructural puede ser obtenida en cualquier software CAD que sea capaz de calcular la distribución de masa de las piezas que en él se dibujen.

La ventaja del algoritmo radica en que las propuestas estructurales pueden ir evolucionando a medida que se afina el diseño del robot, y con el modelo obtenido, y la interfaz que hace amigable su simulación, es posible calcular la potencia necesaria para mover la estructura que se proponga, con la condición de que el robot sea del tipo PRRR.

Con este trabajo se comprobó que existe una relación muy estrecha entre el volumen de trabajo del robot y su peso. La relación entre ellas es proporcional; ya que al aumentar el volumen de trabajo del robot, aumenta el brazo de palanca en las juntas rotacionales, por lo que los motores y/o sistema de reducción generalmente incrementan sus dimensiones y peso.

Por otro lado analizando el modelo dinámico del robot, observamos que al disminuir las velocidades y aceleraciones en las articulaciones, los efectos dinámicos podrían despreciarse (Matriz de inercias y la Matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis) y por lo tanto las sollicitaciones en las articulaciones disminuirán.

También se concluyó que la primera propuesta de motores de la empresa © HarmonicDrive no proporciona la potencia suficiente para que las articulaciones del hombro y codo se muevan con una velocidad de 30 [rpm] y al mismo tiempo cumplan con el par calculado, aun considerando un posible sistema de reducción, tal y como se demostró en la página 89. Por lo que es necesario realizar más iteraciones.

Finalmente con el *CAD2* es posible estimar que las siguientes propuestas de motores y sistemas de reducción probablemente aumenten en un 20% más el peso total del *CAD 2*, el cual fue de 14.9588 [kg], ver página 86. Y considerando un 30% más de peso por el uso de baleros, carcasas, entre otros elementos, podemos estimar que el robot *PRRR* definitivo pesará alrededor de 22.5 [kg]. Este peso es aceptable para su portabilidad, cubriendo una necesidad primordial, y uno de los propósitos más importantes del diseño del robot.

### **Trabajo a futuro**

Los siguientes pasos para continuar con la labor iniciada con esta tesis son: el desarrollar un modelo de control, el diseño mecánico a detalle y el diseño electrónico.

En el diseño mecánico a detalle, me refiero a la selección de actuadores, sistema de reducción y/o transmisión, selección e implementación de rodamientos, verificar que los elementos estructurales del robot soporten la carga, etc.

El diseño electrónico debe contemplar la comunicación entre la computadora y los actuadores, así como la etapa de potencia de los actuadores, si es que no está incluida en la compra de ellos.

Una vez construido el robot, se probarán los modelos de control para saber cuál es el que mejor se ajusta. Finalmente se podría implementar un sistema de visión para mejorar el control, y por consiguiente la precisión del robot.

## **BIBLIOGRAFÍA**

- [1] **Saha Kumar, Subir.** Introducción a la robótica. s.l. : Mc Graw Hill, 2010.
- [2] **Reyes Cortés, Fernando.** Robótica. s.l. : Alfaomega, 2011.
- [3] **Spong, Mark W. y Vidyasagar, M.** Robot dynamics and control. New York : Jhon Wiley & Sons, 1989.
- [4] **Arteaga, Marco A.** Control de robots manipuladores. s.l. : UNAM.
- [5] **Craig, John J.** Robótica. s.l. : Pearson, 2006.
- [6] **Drive, Harmonic.** Harmonic Drive. [En línea] [Citado el: 5 de Marzo de 2013.] [www.harmonicdrive.net](http://www.harmonicdrive.net).
- [7] **Sabri, Centikut.** Mecatrónica. México : Patria, 2007.
- [8] **Kelly, R y Santibáñez, V.** Control de movimiento de manipuladores. s.l. : Pearson , 2003.

---

### Grados de libertad y tipos de articulaciones

---

#### *Grados de libertad*

“El grado de libertad g.d.l. de un sistema mecánico se define como el número de coordenadas independientes o coordenadas mínimas necesarias para describir perfectamente su posición o configuración. Así, un cuerpo rígido que se mueve en el espacio cartesiano tridimensional tiene seis g.d.l., tres para la posición y tres para la orientación. Existen varias metodologías para determinar el g.d.l. Uno de estos métodos, presentado por Grubler en 1917 para mecanismos planares, fue posteriormente generalizado por Kutzbach en 1929, para mecanismos espaciales. En forma conjunta, se conocen como el criterio de Grubler-Kutzbach y se describen a continuación.”[1] p 80.

Suponga lo siguiente:

s: dimensión del espacio de trabajo (para mecanismos planares, s=3; para espaciales, s=6).

r: número de cuerpos rígidos o eslabones en el sistema.

p: número de pares cinemática o articulaciones en el sistema.

$n_i$ : grado de libertad relativo a cada articulación.

n: grado de libertad de todo el sistema.

El criterio de Grubler-Kutzbach para determinar los grados de libertad de un sistema es el siguiente:

$$n = s(r - p - 1) + \sum_i^p n_i$$

#### *Eslabones*

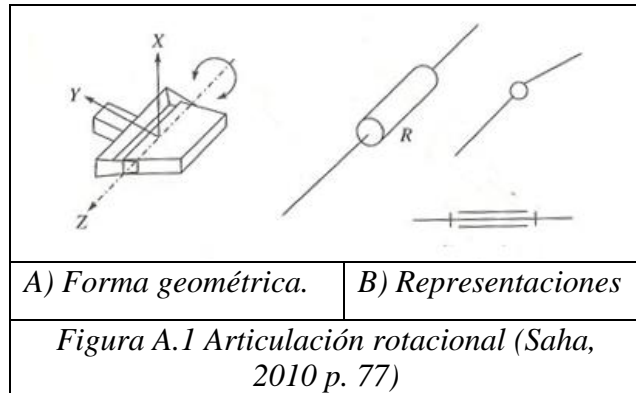
“Los cuerpos individuales que forman a un robot se llaman eslabones, y se supondrán en esta tesis como cuerpos rígidos, es decir que la distancia entre dos puntos dentro del cuerpo no cambia mientras este se mueva. A continuación se describen los tipos de articulaciones que existen.”[1] p. 77.

### *Tipos de articulaciones*

Los eslabones de un robot se acoplan mediante pares o articulaciones cinemáticas. Una articulación acopla dos eslabones y proporciona las restricciones físicas para el movimiento relativo entre los eslabones.

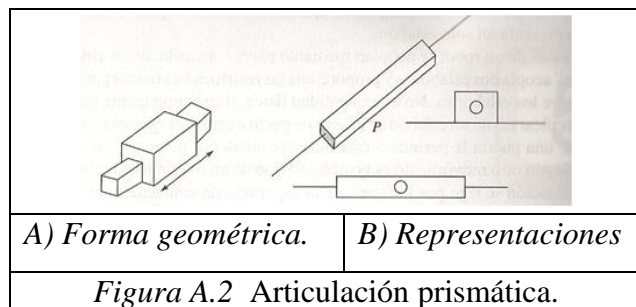
-Articulación resolva o rotacional, R.

Esta únicamente permite que dos eslabones pareados giren, uno respecto al otro, alrededor del eje de la articulación, por lo que tiene un grado de libertad (g.d.l.).



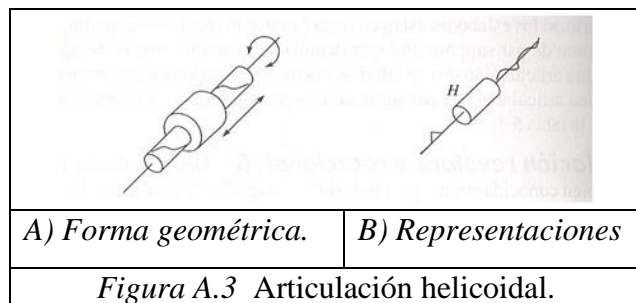
-Articulación prismática, P.

Esta impone cinco restricciones de movimiento, permitiendo solamente que los eslabones acoplados se deslicen uno respecto al otro, por lo tanto solo tiene un grado de libertad (g.d.l.).



-Articulación helicoidal, H.

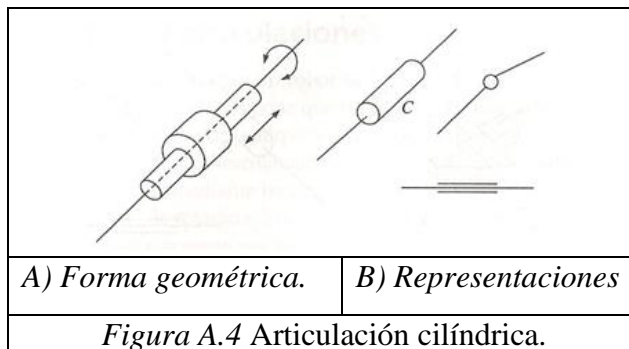
Permite que dos eslabones unidos giren alrededor del eje de la articulación y se trasladen al mismo tiempo, a lo largo de él. Sin embargo, el traslado no es independiente, sino que se relaciona por la rotación por el paso del tornillo. Por lo que tiene un grado de libertad.





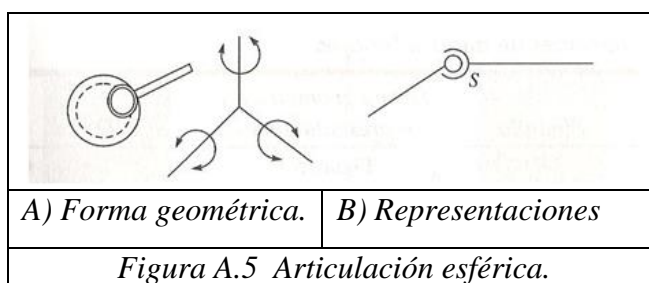
-Articulación cilíndrica, C.

Esta articulación permite la rotación alrededor del eje de la articulación y el traslado independiente a lo largo de ella. Tiene dos grados de libertad.



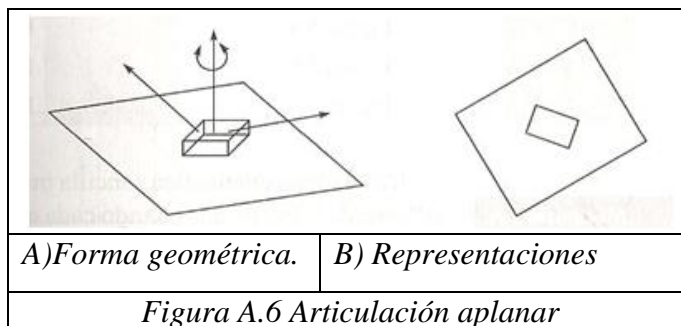
-Articulación esférica, S.

Este tipo de articulación permite que uno de los eslabones pareados gire libremente en todas las orientaciones posibles respecto al otro alrededor del centro de una esfera. Tiene tres grados de libertad.



-Articulación aplanar, L.

Esta articulación de tres grados de libertad permite dos traslados a lo largo de los ejes independientes del plano de contacto y una rotación alrededor del eje perpendicular al plano.



# Matriz de rotación y operaciones con Transformaciones

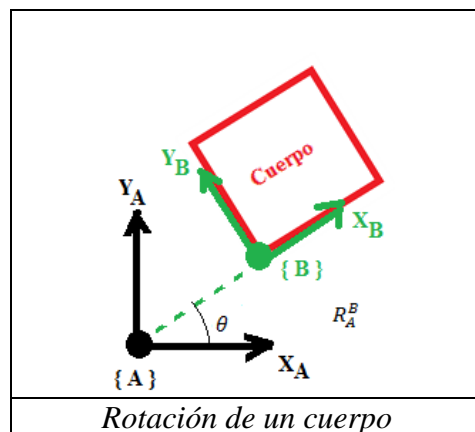
---

### *Matriz de Rotación*

Matemáticamente la orientación de un cuerpo respecto a un sistema fijo se especifica mediante una matriz de 3x3 llamada matriz de rotación.

Para describir la orientación de un cuerpo, se adjunta un sistema de coordenadas al cuerpo y luego se da una descripción de este sistema de coordenadas relativo a un sistema de referencia.

En la siguiente figurase ha adjuntado el sistema de coordenadas {B} al cuerpo de una manera **conocida**. Ahora basta con una descripción de {B} relativa a {A} para dar la orientación del cuerpo.



Para denotar los vectores unitarios proporcionamos las direcciones principales del sistema de coordenadas {B} como  $x_B$ ,  $y_B$  y  $z_B$ . Al describir en términos del sistema de coordenadas {A}, se llama  $x_A^B$ ,  $y_A^B$ ,  $z_A^B$ .

Es conveniente si aplicamos estos tres vectores unitarios como columnas de una matriz de 3x3. Esta matriz es llamada matriz de Rotación.

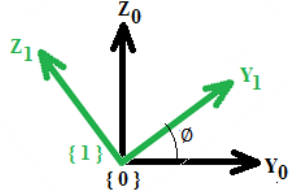
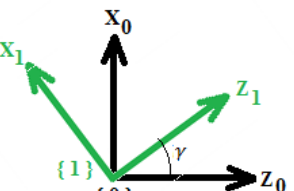
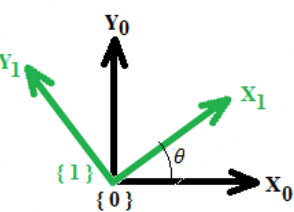
La matriz de Rotación que describe a {B} en forma relativa a {A} se denota por:

$$R_A^B = (x_A^B \ y_A^B \ z_A^B)$$

$$R_A^B = \begin{pmatrix} x_B \cdot x_A & y_B \cdot x_A & z_B \cdot x_A \\ x_B \cdot y_A & y_B \cdot y_A & z_B \cdot y_A \\ x_B \cdot z_A & y_B \cdot z_A & z_B \cdot z_A \end{pmatrix}$$

Donde los componentes de la matriz de rotación se llaman cósenos directores ya que describen el ángulo entre los vectores unitarios de los dos sistemas.

Por ejemplo, si consideramos las siguientes tres rotaciones básicas respecto a los tres ejes  $x_0$ ,  $y_0$  y  $z_0$  del sistema de referencia {0}, en el que coincide el origen del sistema móvil {1}, tenemos que las matrices de rotación se definen como:

$R_0^1 \text{ ángulo } \phi \text{ respecto a } x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$	
$R_0^1 \text{ ángulo } \gamma \text{ respecto a } y = \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & 0 & -\sin(\gamma) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\gamma) & 0 & \cos(\gamma) \end{pmatrix}$	
$R_0^1 \text{ ángulo } \theta \text{ respecto a } z = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	
<p><i>Matrices de rotación respecto a los 3 ejes de un sistema ortogonal</i></p>	

En el caso de no haber rotación la matriz  $R_0^1$  toma la forma de una matriz identidad:

$$R_0^1 \text{ sin rotación} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### *Invertir una transformada*

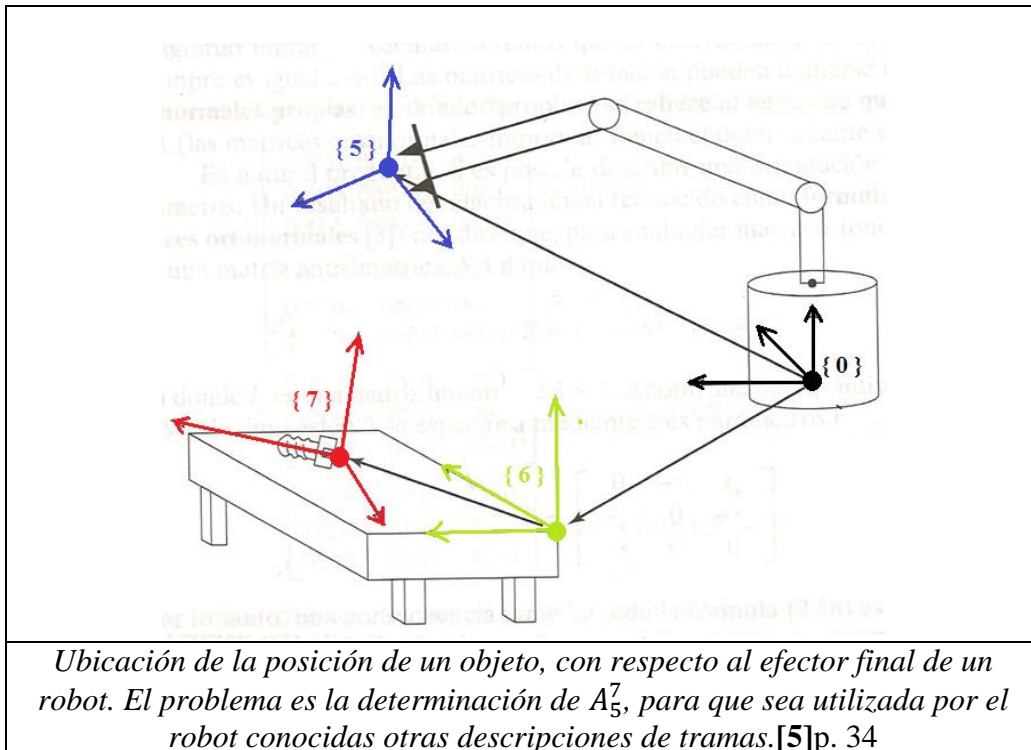
Considerando una trama {1} que se conoce respecto a la trama {0}; es decir se conoce  $A_0^1$ , la inversa de esa matriz es igual a la misma transformación pero transpuesta.

$$(A_0^1)^{-1} = A_1^0$$

El desarrollo llevado a cabo para determinar la ecuación anterior se halla en el libro Craig (2006) p. 36.

### *Multiplicación entre transformaciones*

El siguiente ejemplo nos será útil para ubicar el material a manipular respecto a la mano del robot, y describir de qué manera tienen que premultiplicarse e invertir las transformaciones para obtener una descripción de alguna de ellas respecto a alguna conocida. Generalmente la trama que es conocida es asignada a la base del robot, considerado este punto como fijo.



De la figura anterior, suponga que se conoce la transformada  $A_0^5$ , que describe la trama {5} en la punta de los dedos del manipulador, relativa a su base, donde está la trama {0}; también sabemos dónde se ubica la parte superior de la mesa en el espacio, relativa a la

base del manipulador, esto es cierto porque tenemos una descripción de la trama {6} que está unida a la mesa  $A_0^6$ . Conocemos la ubicación de la trama unida al perno que está sobre la mesa, en forma relativa a la trama de la mesa; es decir  $A_6^7$ . Ahora se necesita describir la posición y orientación del perno, de manera relativa a la mano del manipulador  $A_5^7$ , para que el robot lo tome o trabaje sobre él.[5]

Esto se hace realizando las siguientes operaciones:

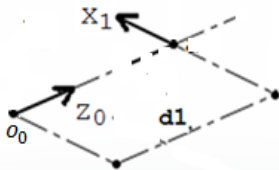
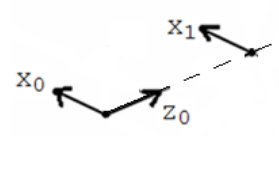
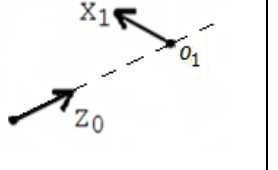
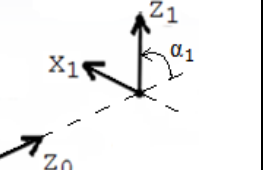
$$A_5^7 = (A_0^5)^{-1} \cdot A_0^6 \cdot A_6^7$$

$$A_5^7 = A_5^0 \cdot A_0^6 \cdot A_6^7$$

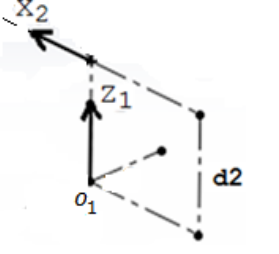
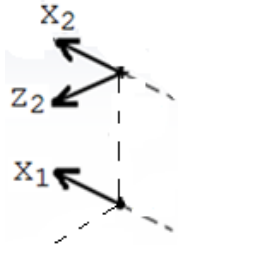
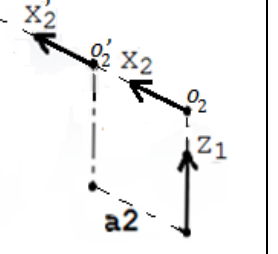
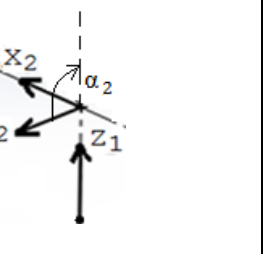
Esto será de utilidad cuando el robot sea colocado en su estación de trabajo.

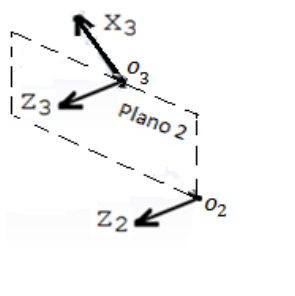
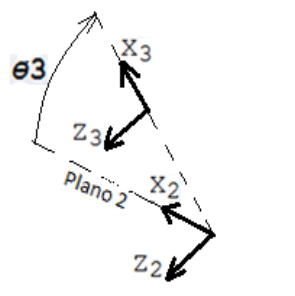
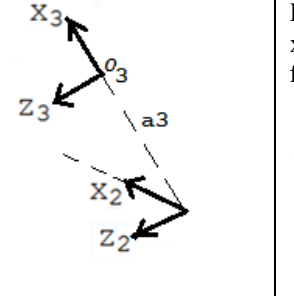
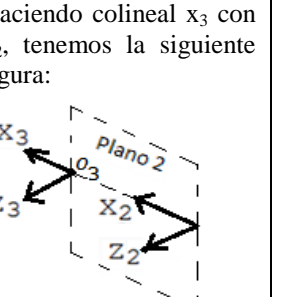
## Tablas que detallan la obtención de los parámetros de D-H para el robot PRRR

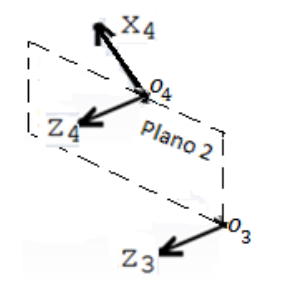
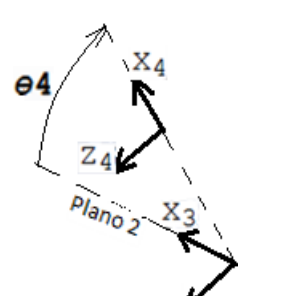
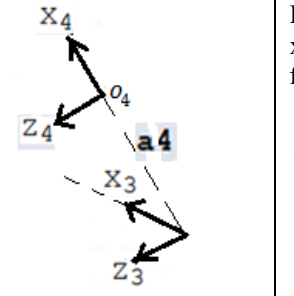
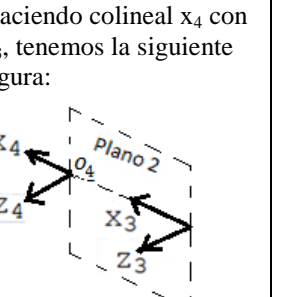
Para  $i=1$  (Junta prismática, eslabón corredera).

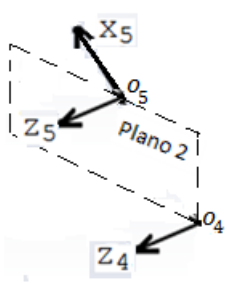
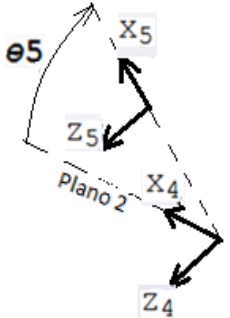
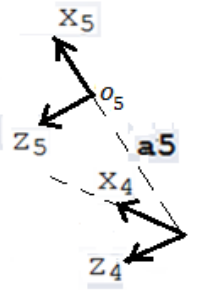
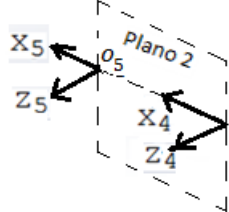
$d1^*$	$\theta1=0$	$a1=0$	$\alpha1=-90^\circ$
 <p>Es la distancia a lo largo de <math>z_0</math>, de <math>o_0</math> a la intersección de los ejes <math>x_1</math> y <math>z_0</math>. <math>d1</math> es variable.</p>	 <p>Es el ángulo entre <math>x_0</math> y <math>x_1</math> medido alrededor de <math>z_0</math>, de acuerdo al criterio de la mano derecha. Como <math>x_0</math> y <math>x_1</math> están en el mismo plano <math>\theta1=0</math>.</p>	 <p>Es la distancia a lo largo de <math>x_1</math>, de <math>o_1</math> a la intersección de los ejes <math>x_1</math> y <math>z_0</math>. Debido a que el origen <math>o_1</math> está sobre el eje <math>z_0</math>, entonces <math>a1=0</math>.</p>	 <p>Es el ángulo entre <math>z_0</math> y <math>z_1</math> medido alrededor de <math>x_1</math>, de acuerdo al criterio de la mano derecha.</p>

Para  $i=2$  (Junta fija, eslabón de la plataforma móvil).

$d2$	$\theta2=0$	$a2$	$\alpha2=90^\circ$
 <p>Es la distancia a lo largo de <math>z_1</math>, de <math>o_1</math> a la intersección de los ejes <math>x_2</math> y <math>z_1</math>. <math>d2</math> es fija y representa la longitud del eslabón 2.</p>	 <p>Es el ángulo entre <math>x_1</math> y <math>x_2</math> medido alrededor de <math>z_1</math>, de acuerdo al criterio de la mano derecha. Como <math>x_1</math> y <math>x_2</math> son paralelos, tenemos que <math>\theta2=0</math>.</p>	 <p>Si consideramos que el origen <math>o_2</math> se desplaza hasta <math>o_2'</math>, entonces <math>a2 \neq 0</math>. En la fig. 3.3 la distancia de <math>a2</math> es como si fuera cero. Es la distancia a lo largo de <math>x_2</math>, de <math>o_2'</math> a la intersección de los ejes <math>x_2</math> y <math>z_1</math>.</p>	 <p>Es el ángulo entre <math>z_1</math> y <math>z_2</math> medido alrededor de <math>x_2</math>, de acuerdo al criterio de la mano derecha.</p>

Para $i=3$ (Junta rotacional, eslabón del brazo).			
$d3=0$	$\theta3^*$	$a3$	$\alpha3=0$
 <p>Es la distancia a lo largo de <math>z_2</math>, de <math>o_2</math> a la intersección de los ejes <math>x_3</math> y <math>z_3</math>. Observamos que los orígenes <math>o_2</math> y <math>o_3</math> son coincidentes al Plano 2, por lo que <math>d3=0</math>.</p>	 <p>Es el ángulo entre <math>x_2</math> y <math>x_3</math> medido alrededor de <math>z_2</math>, de acuerdo al criterio de la mano derecha. <math>\theta3</math> es variable.</p>	 <p>Es la distancia a lo largo de <math>x_3</math>, de <math>o_3</math> a la intersección de los ejes <math>x_3</math> y <math>z_3</math>. <math>a3</math> es la longitud del eslabón 3.</p>	 <p>Haciendo colineal <math>x_3</math> con <math>z_3</math>, tenemos la siguiente figura: Es el ángulo entre <math>z_2</math> y <math>z_3</math> medido alrededor de <math>x_3</math>, de acuerdo al criterio de la mano derecha. Observamos que los ejes <math>z_2</math> y <math>z_3</math> son perpendiculares al Plano 2 y <math>x_3</math> pertenece al Plano 2, por lo que <math>\alpha3=0</math>.</p>

Para $i=4$ (Junta rotacional, eslabón del antebrazo).			
$d4=0$	$\theta4^*$	$a4$	$\alpha4=0$
 <p>Es la distancia a lo largo de <math>z_3</math>, de <math>o_3</math> a la intersección de los ejes <math>x_4</math> y <math>z_4</math>. Observamos que los orígenes <math>o_3</math> y <math>o_4</math> son coincidentes al Plano 2, por lo que <math>d4=0</math>.</p>	 <p>Es el ángulo entre <math>x_3</math> y <math>x_4</math> medido alrededor de <math>z_3</math>, de acuerdo al criterio de la mano derecha. <math>\theta4</math> es variable.</p>	 <p>Es la distancia a lo largo de <math>x_4</math>, de <math>o_4</math> a la intersección de los ejes <math>x_4</math> y <math>z_4</math>. <math>a4</math> es la longitud del eslabón 4.</p>	 <p>Haciendo colineal <math>x_4</math> con <math>z_4</math>, tenemos la siguiente figura: Es el ángulo entre <math>z_3</math> y <math>z_4</math> medido alrededor de <math>x_4</math>, de acuerdo al criterio de la mano derecha. Observamos que los ejes <math>z_3</math> y <math>z_4</math> son perpendiculares al Plano 2 y <math>x_4</math> pertenece al Plano 2, por lo que <math>\alpha4=0</math>.</p>

Para $i=5$ (Junta rotacional, eslabón del efector final).			
$d_5=0$	$\theta_5^*$	$a_5$	$\alpha_5=0$
 <p>Es la distancia a lo largo de <math>z_4</math>, de <math>o_4</math> a la intersección de los ejes <math>x_5</math> y <math>z_4</math>. Observamos que los orígenes <math>o_4</math> y <math>o_5</math> son coincidentes al Plano 2, por lo que <math>d_5=0</math>.</p>	 <p>Es el ángulo entre <math>x_4</math> y <math>x_5</math> medido alrededor de <math>z_4</math>, de acuerdo al criterio de la mano derecha. <math>\theta_5</math> es variable.</p>	 <p>Es la distancia a lo largo de <math>x_5</math>, de <math>o_5</math> a la intersección de los ejes <math>x_5</math> y <math>z_4</math>. <math>a_5</math> es la longitud del eslabón 5.</p>	 <p>Haciendo colineal <math>x_4</math> con <math>x_5</math>, tenemos la siguiente figura:</p> <p>Es el ángulo entre <math>z_4</math> y <math>z_5</math> medido alrededor de <math>x_5</math>, de acuerdo al criterio de la mano derecha. Observamos que los ejes <math>z_4</math> y <math>z_5</math> son perpendiculares al Plano 2 y <math>x_5</math> pertenece al Plano 2, por lo que <math>\alpha_3=0</math>.</p>



## Cálculo del Jacobiano para un robot de $n$ eslabones

Este anexo tiene como propósito mostrar las expresiones que se utilizarán en el Capítulo 3, en la sección *Jacobiano del Efector final*. Las siguientes son expresiones generales para un robot de  $n$  eslabones, pero en el Capítulo 3 se particularizo su uso para el robot PRRR propuesto. Las expresiones e imágenes se obtuvieron de la referencia [3]

### *Cálculo del Jacobiano*

El Jacobiano para un manipulador con  $n$  eslabones es de la forma:

$$J = [J_1 \quad J_2 \quad \dots \quad J_i \quad \dots \quad J_n] \quad \text{_____ ( D.1 )}$$

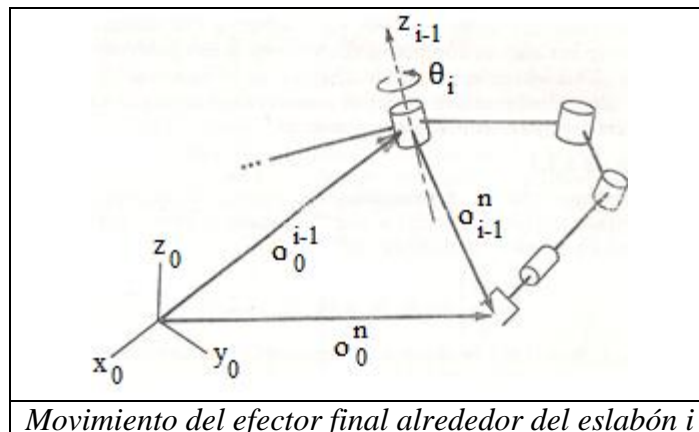
Donde la  $i$ -enésima columna está dada por:

$$J_i = \begin{pmatrix} \mathbf{z}_{i-1} \times (\mathbf{o}_0^n - \mathbf{o}_0^{i-1}) \\ \mathbf{z}_{i-1} \end{pmatrix}, \text{ para una articulación rotacional} \quad \text{_____ ( D.2 )}$$

$$J_i = \begin{pmatrix} \mathbf{z}_{i-1} \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ para una articulación prismática} \quad \text{_____ ( D.3 )}$$

Donde  $\mathbf{z}_{i-1}$  es la proyección del vector unitario  $\mathbf{k}$  del sistema  $i-1$ , sobre el vector unitario  $\mathbf{k}_0$  del sistema absoluto  $\{0\}$ . En el caso en que  $i=1$ ,  $\mathbf{z}_{i-1}$  siempre es el vector unitario  $\mathbf{k}$ , es decir  $\mathbf{z}_0 = (0 \quad 0 \quad 1)^T$  y para  $i > 1$   $\mathbf{z}_{i-1}$  se calcula como:

$$\mathbf{z}_{i-1} = R_0^{i-1} \mathbf{z}_0 \quad \text{_____ ( D.4 )}$$



*Jacobiano de los centros de masa de los eslabones de un robot*

Con las siguientes expresiones es posible calcular la velocidad lineal y angular de los centros de masa de un eslabón. Lo cual es de utilidad para resolver la dinámica por Lagrange de cualquier robot. En la formulación Lagrangiana se calcula la energía cinética del robot, por lo que es necesario encontrar las velocidades de los centros de masa de cada eslabón que conforma al robot.

- *Velocidad lineal del centro de masa de un eslabón j*

El cálculo de las contribuciones de la velocidad lineal debido a  $n$  articulaciones del robot ( $J_{vc1} \ J_{vc2} \ \dots \ J_n$ ) sobre la velocidad lineal del centro de masa del eslabón  $j$  ( $\mathbf{v}_{cj}$ ), es el siguiente:

$$\mathbf{v}_{cj} = [J_{vc1} \ J_{vc2} \ \dots \ J_{vci} \ \dots \ J_{vcn}] \dot{\mathbf{q}} \quad \text{_____} (D.5)$$

$$J_{vcj} = [J_{vc1} \ J_{vc2} \ \dots \ J_{vci} \ \dots \ J_{vcn}]_{n \times n} \quad \text{_____} (D.6)$$

Donde los  $i$ -enésimos elementos son las contribuciones de velocidad de cada articulación:

$$J_{vci} = \mathbf{z}_i, \text{ para una articulación prismática} \quad \text{_____} (D.7)$$

$$J_{vci} = \mathbf{z}_{i-1} \times (\mathbf{d}_0^{ic} - \mathbf{o}_0^{i-1}), \text{ para una articulación rotacional} \quad \text{_____} (D.8)$$

$$J_{vci} = \mathbf{0}, \text{ si la articulación } i\text{-enésima no contribuye en el movimiento del centro de masa del eslabón } j. \quad \text{_____} (D.9)$$

Además:

$$\mathbf{d}_0^{ic} = d[A_0^{i-1} \cdot A_{i-1}^{ic}]$$

$\mathbf{d}_0^{ic} \triangleq$  es la posición de centro de masa del eslabón  $i$  respecto al sistema base  $\{0\}$ , donde  $d[ \dots ]$  quiere decir que toma la componente de posición  $\mathbf{o}$  del producto  $A_0^{i-1} \cdot A_{i-1}^{ic}$

$A_{i-1}^{ic} \triangleq$  es la transformación del sistema  $i - 1$  al sistema adjunto al centro de masa del eslabón  $i$

- *Velocidad angular del centro de masa del eslabón j*

El cálculo de las contribuciones de la velocidad angular debido a  $n$  articulaciones del robot

( $(R_0^1)^T \cdot J_{\omega 1}$   $(R_0^2)^T \cdot J_{\omega 2}$  ...  $(R_0^n)^T \cdot J_n$ ) sobre la velocidad angular del centro de masa del eslabón  $j$  ( $\omega_{cj}$ ), es la siguiente:

$$\omega_{cj} = [ (R_0^1)^T \cdot J_{\omega 1} \quad (R_0^2)^T \cdot J_{\omega 2} \quad \dots \quad (R_0^i)^T \cdot J_{\omega i} \quad \dots \quad (R_0^n)^T \cdot J_{\omega n} ] \dot{q} \quad \text{---(D.10)}$$

$$J_{\omega j} = [ (R_0^1)^T \cdot J_{\omega 1} \quad (R_0^2)^T \cdot J_{\omega 2} \quad \dots \quad (R_0^i)^T \cdot J_{\omega i} \quad \dots \quad (R_0^n)^T \cdot J_{\omega n} ]_{n \times n} \quad \text{---( D.11)}$$

Donde los  $i$ -enésimos elementos son las contribuciones de velocidad de cada articulación:

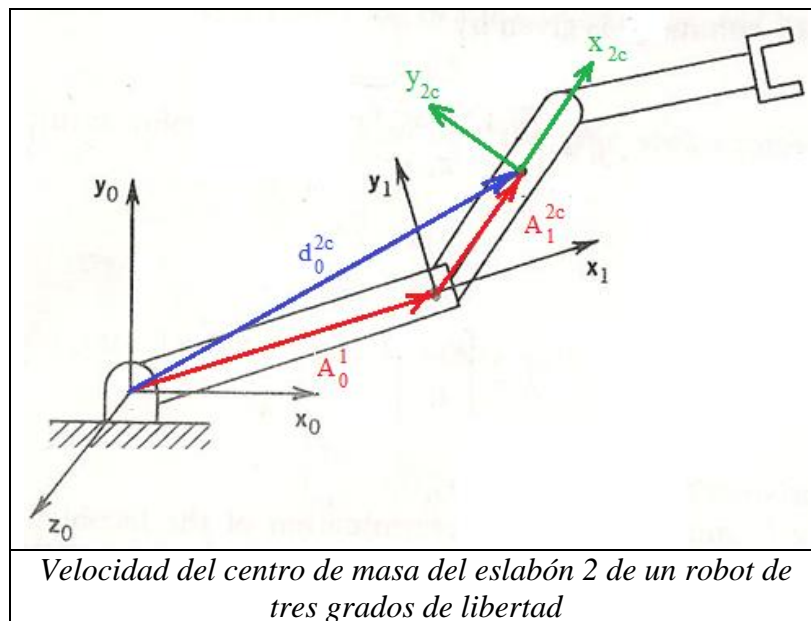
$$J_{\omega i} = \mathbf{0}, \text{ para una junta prismática} \quad \text{---(D.12)}$$

$$J_{\omega i} = \mathbf{z}_i, \text{ para una junta rotacional} \quad \text{---(D.13)}$$

$$J_{\omega i} = \mathbf{0}, \text{ si la articulación } i\text{- enésima no contribuye en el movimiento del centro de masa del eslabón } j \quad \text{---(D.14)}$$

Además:

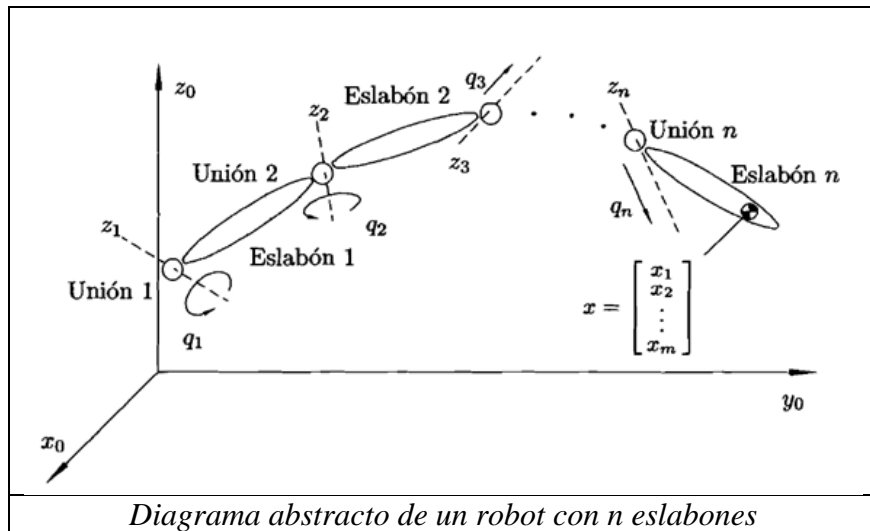
$R_0^i$  es la matriz de rotación de  $3 \times 3$  de la transformación  $A_0^i$ .



## Obtención de las expresiones del modelo dinámico Lagrangiano

Las siguientes expresiones y figuras se obtuvieron de la referencia [8].

Considérese el robot manipulador que se compone de  $n$  eslabones mostrado en la siguiente figura:



La energía total  $E$  de un robot manipulador de  $n$  grados de libertad es la suma de sus energías cinética  $K$  y potencial  $V$ :

$$E(q(t), \dot{q}(t)) = K(q(t), \dot{q}(t)) + V(q(t)) \quad \text{_____ ( E.1 )}$$

Aquí se considera que la energía potencial  $V$  se debe a fuerzas conservativas como la fuerza de gravedad y a fuerzas de resortes.

Donde  $q(t) = [q(t)_1 \quad \dots \quad q(t)_n]^T$

$q(t)$  es el vector de variables articulares.

El *Lagrangiano*  $L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))$  de un robot manipulador de  $n$  g.d.l. es la diferencia entre su energía cinética  $K$  y su energía potencial  $V$ :

$$L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) = K(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) - V(\mathbf{q}(t)) \quad \text{_____ ( E.2 )}$$

Las ecuaciones de movimiento de Lagrange para un manipulador de  $n$  g.d.l., vienen dadas por el cambio a lo largo del tiempo del Lagrangiano, tal como se indica a continuación:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] - \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau}$$

O de forma equivalente:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} \right] - \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}_j} = \boldsymbol{\tau}_j, \quad j = 1, \dots, n) \quad \text{_____ ( E.3 )}$$

Donde  $\boldsymbol{\tau}_i$  son las fuerzas y pares ejercidos externamente (por actuadores) en cada articulación así como fuerzas no conservativas. Como fuerzas no conservativas se incluyen las de fricción, las de resistencia al movimiento de un objeto dentro de un fluido, y en general las que dependen del tiempo o de la velocidad. Nótese que se tendrán tantas ecuaciones escalares dinámicas como grados de libertad tenga el robot manipulador.

Ahora que se ha presentado de manera general el modelo de Lagrange, a continuación se desarrolla a detalle los elementos necesarios para calcular de manera genérica el modelado dinámico de un robot con  $n$  grados de libertad.

Considérese un robot manipulador de  $n$  grados de libertad formado por  $j$  eslabones rígidos, conectados por uniones libres de fricción y elasticidad. La energía cinética  $K(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))$  asociada a tal dispositivo mecánico articulado puede expresarse como:

$$K(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) = \frac{1}{2} m * \mathbf{v}_{cj}^T \cdot \mathbf{v}_{cj} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_{cj}^T \cdot I \cdot \boldsymbol{\omega}_{cj}$$

Sustituyendo las ecuaciones (D.5) y (D.10):

$$K = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \sum_{j=1}^n [m_j * \mathbf{J}_{vcj}^T \cdot \mathbf{J}_{vcj} + \mathbf{J}_{\omega j}^T \cdot R_j \cdot I_j \cdot R_j^T \cdot \mathbf{J}_{\omega j}] \dot{\mathbf{q}} \quad \text{_____ ( E.4 )}$$

De manera simplificada queda como:

$$K = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T D(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$$

Donde

$$D(\mathbf{q}) = \sum_{j=1}^n [m_j * \mathbf{J}_{vcj}^T \cdot \mathbf{J}_{vcj} + \mathbf{J}_{\omega j}^T \cdot R_j \cdot I_j \cdot R_j^T \cdot \mathbf{J}_{\omega j}] \quad \text{_____ ( E.5 )}$$

$D(\mathbf{q})$  es una matriz simétrica definida positiva de  $n \times n$  denominada *matriz de inercia*.

La energía potencia debido a la aportación de cada eslabón se calcula como:

$$V(\mathbf{q}) = \sum_{j=1}^n [\mathbf{g}^T [(\mathbf{d}_0^{jc})_y] * m_j] \quad \text{_____ ( E.6 )}$$

El Lagrangiano  $L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))$ , dado por la ecuación (E.2), es en este caso:

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T D(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - V(\mathbf{q})$$

Con esta forma para el Lagrangiano, la ecuación de movimiento de Lagrange puede expresarse como:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \left[ \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T D(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right] \right] - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left[ \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T D(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right] + \frac{\partial V(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau}$$

Por otro lado, puede verificarse que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \left[ \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T D(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right] &= D(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \\ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \left[ \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T D(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right] \right] &= D(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \dot{D}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \end{aligned}$$

Considerando las expresiones anteriores, la ecuación de movimiento toma la forma:

$$D(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \dot{D}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left[ \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T D(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right] + \frac{\partial V(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau},$$

O de modo compacto:

$$D(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\phi}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad \text{_____ ( E.7 )}$$

Donde:  $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} = \dot{D}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left[ \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T D(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right]$

$$\boldsymbol{\phi}(\mathbf{q}) = \frac{\partial V(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \quad \text{_____ ( E.8 )}$$

La ecuación (E.7) es la ecuación dinámica para robots de  $n$  g.d.l, Nótese que (E.7) es una ecuación diferencial vectorial no lineal en el estado  $[\mathbf{q}^T \dot{\mathbf{q}}^T]$ .  $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$  es un vector de  $n \times 1$  llamado *vector de fuerzas centrífugas y de Coriolis*,  $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{q})$  es un vector de  $n \times 1$  de *fuerzas o pares gravitacionales* y  $\boldsymbol{\tau}$  es un vector de  $n \times 1$  llamado el *vector de fuerzas externas*, siendo generalmente los pares y fuerzas aplicadas por los actuadores que se encuentran en las articulaciones.


La matriz  $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  llamada *matriz centrífuga y de Coriolis* puede no ser única, pero el vector  $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$  sí lo es. Una manera de obtener  $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  es a través de los coeficientes o símbolos de Christoffel  $c_{ijk}$  definidos como:

$$c_{ijk} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial D_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial D_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial D_{ij}}{\partial q_k} \right] \quad \text{_____ ( E.9 )}$$

Donde  $D_{ij}(q)$  denota el  $ij$ -ésimo elemento de la matriz de inercia  $D(\mathbf{q})$

## Cotización del Robot Motoman MH6

A continuación se muestran las características del Robot Motoman MH6:



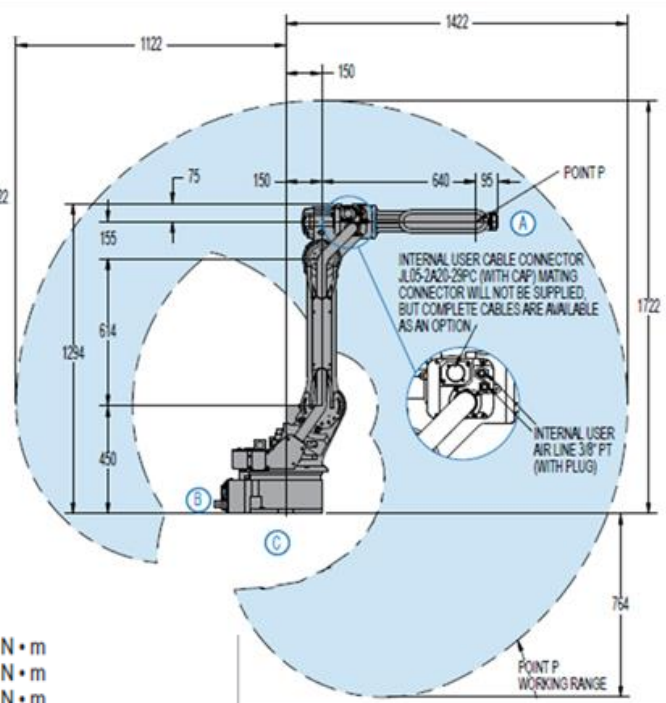
# MH6-SERIES

## MH6 MH6S MH6-10

ASSEMBLY • DISPENSING • MACHINE TENDING  
MATERIAL HANDLING • PACKAGING • WELDING

Payload:  
6 kg (MH6 and MH6S)

		<b>MH6</b>
<b>Structure</b>	Articulated	
<b>Controlled Axes</b>	6	
<b>Payload</b>	6 kg (13.2 lbs)	
<b>Vertical Reach</b>	2,486 mm (97.9")	
<b>Horizontal Reach</b>	1,422 mm (56")	
<b>Repeatability</b>	±0.08 mm (±0.003")	
<b>Maximum Motion Range</b>	S-Axis (Turning)	±170°
	L-Axis (Lower Arm)	+155°/-90°
	U-Axis (Upper Arm)	+250°/-175°
	R-Axis (Upper Arm Twist)	±180°
	B-Axis (Pitch/Yaw)	+225°/-45°
<b>Maximum Speed</b>	S-Axis	220°/s
	L-Axis	200°/s
	U-Axis	220°/s
	R-Axis	410°/s
	B-Axis	410°/s
	T-Axis	610°/s
<b>Approximate Mass</b>	130 kg (286.7 lbs)	
<b>Power Consumption</b>	1.5 kVA	
<b>Allowable Moment</b>	R-Axis	5.39 N • m
	B-Axis	5.39 N • m
	T-Axis	2.94 N • m





**CALCULO DE MATERIAL Y CONSUMIBLES PARA COTIZACION**



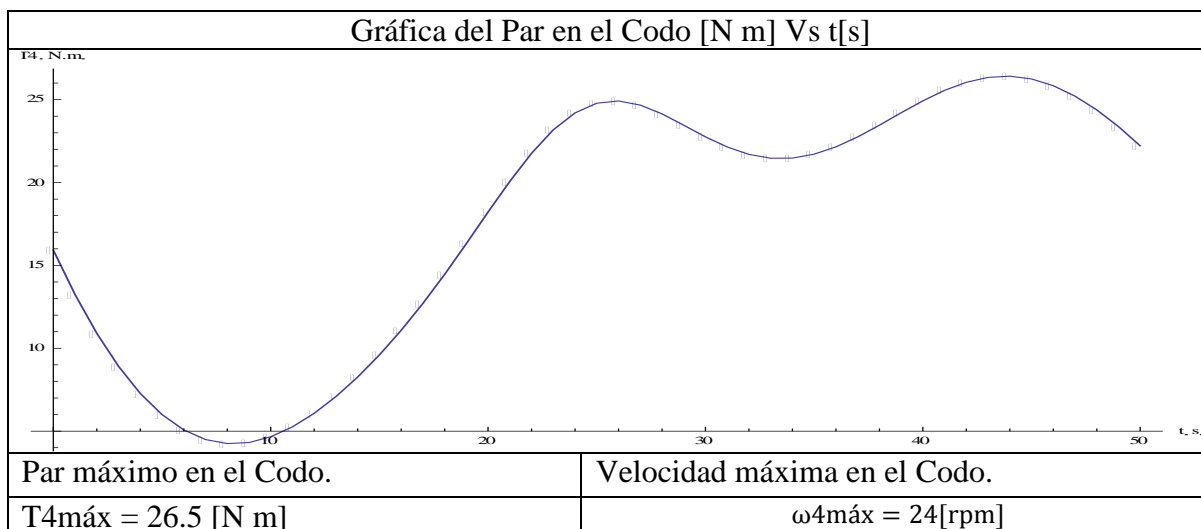
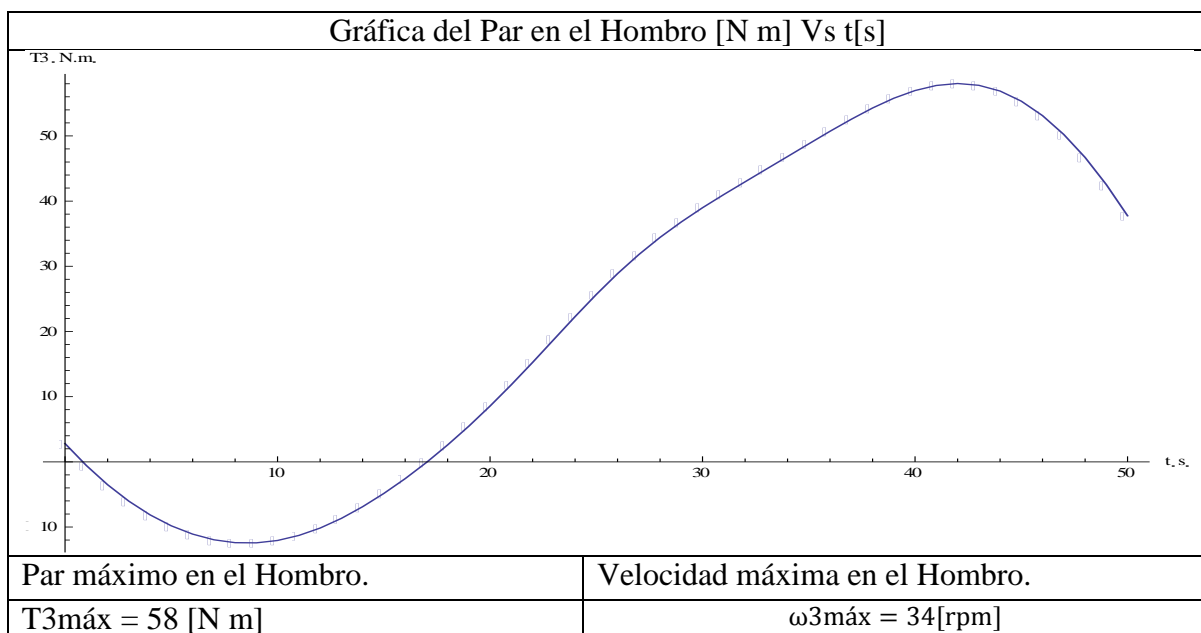
NOMBRE DEL PROYECTO:	ROBOTS PICK&PLAC DIDACTIC
CLIENTE:	UNAM
FECHA:	4/04/2013
INVOLUGRADOS:	SACHEM TEAM

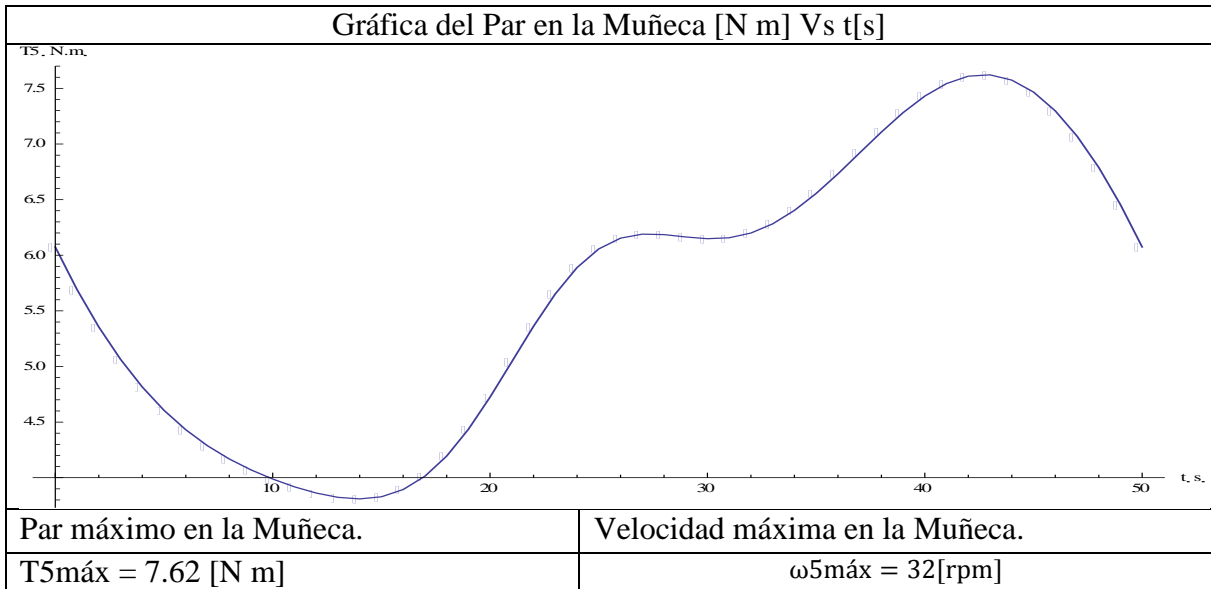
	SISTEMA	PART .	EQUIPO O COMPONENTE	COSTO USD	CANTIDAD	TOTAL USD	COSTO USD POR SISTEMA	COSTO EN M.N Y PESOS MEXICANOS
1	Robots Motoman	1	ROBOT Motoman MH6	\$23,500.0	1	\$23,500.00		\$381,640.00
		2	Gabinete Para Conexiones Montaje en Robot	\$120.00	2	\$240.00		\$3,897.60
		3	Miscelaneos Robot	\$750.00	1	\$750.00		\$12,180.00
							\$24,490.00	\$0.00
	Sistema de Ctrl-CommExclusivo Robot	1	SWICHT ETHERNET	\$202.00	1	\$202.00		\$3,280.48
								\$0.00
								\$0.00
								\$0.00

	<b>SISTEMA MECANICO</b>	1	BASE ROBOT	\$2,000.00	1	\$2,000.00		\$32,480.00
		2	BALANCER DB -DXX PARA SOPORTE MOBIL DE CABLES DE CONTROL EN ROBOT	\$90.00	1	\$90.00		\$1,461.60
		3						\$0.00
							\$2,090.00	\$0.00
	<b>MANO DE OBRA E INGENIERIA</b>							\$0.00
							\$0.00	\$0.00
						<b>TOTAL</b>	<b>\$26,580.00</b>	<b>\$434,939.68</b>

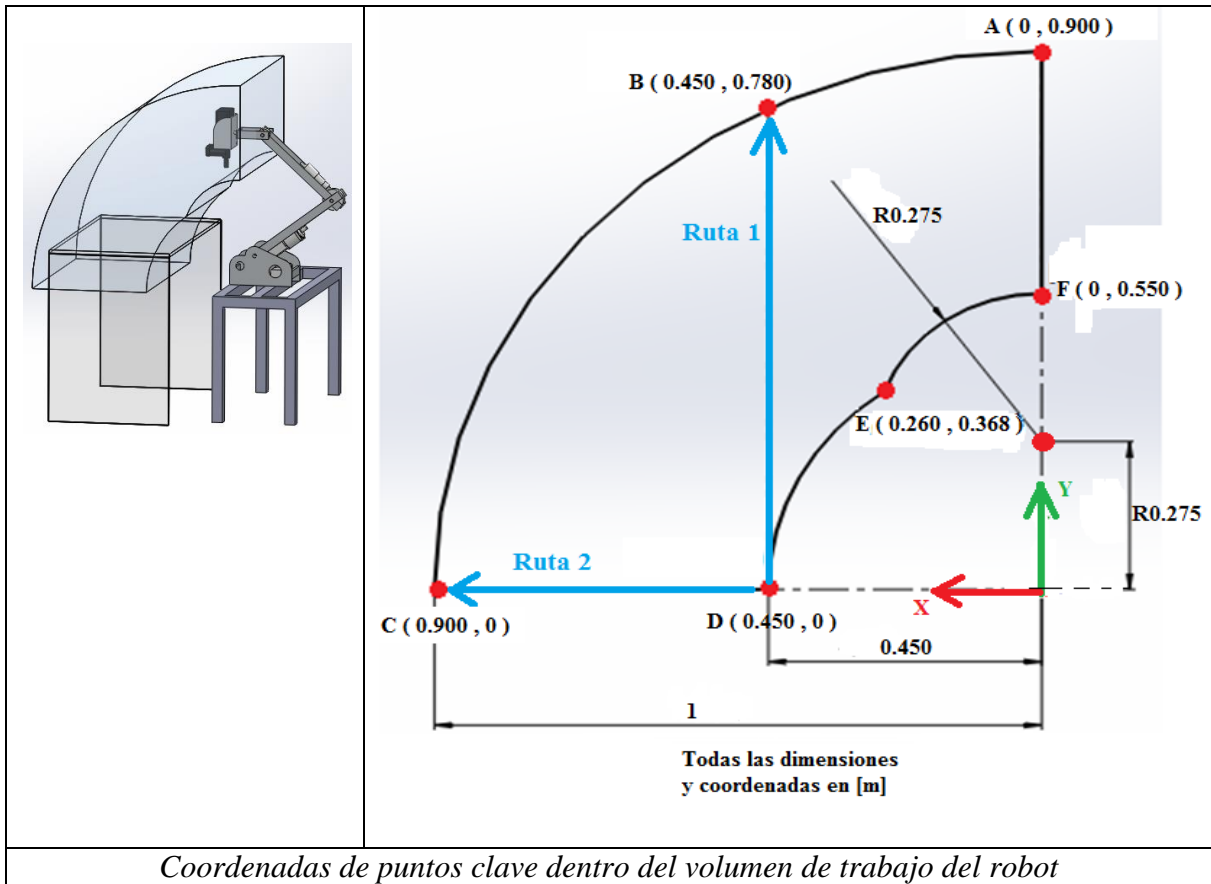
## Gráficas de Par contra tiempo del robot

Gráficas para del CAD1

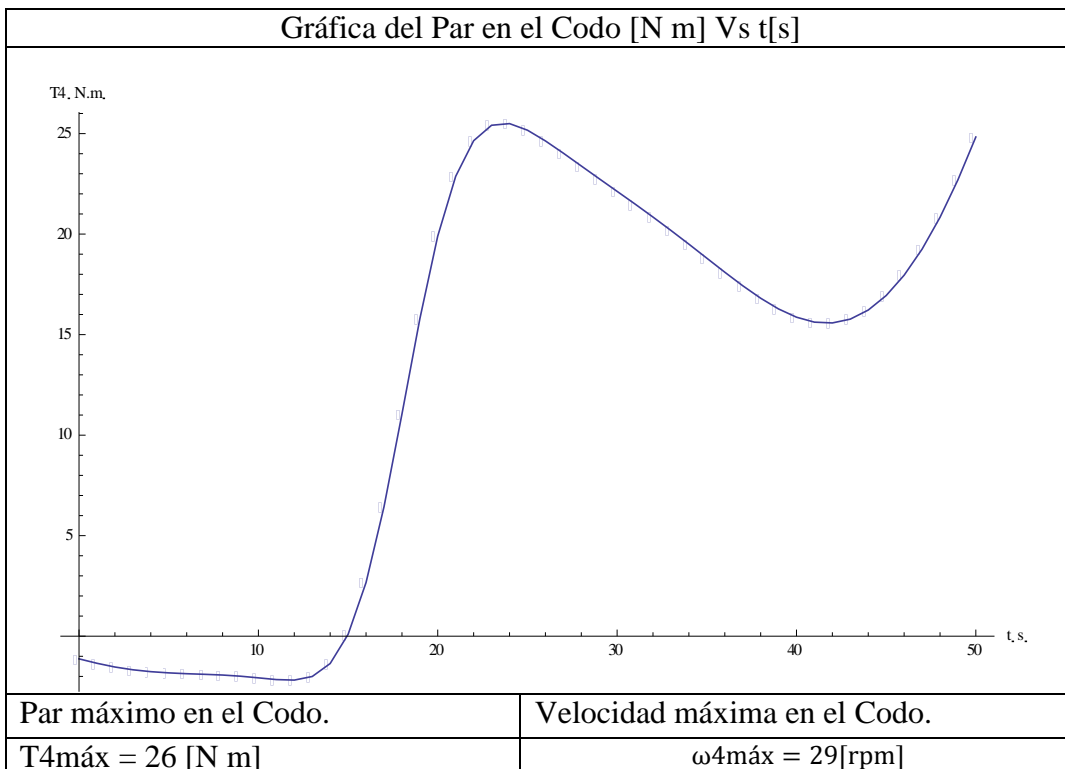
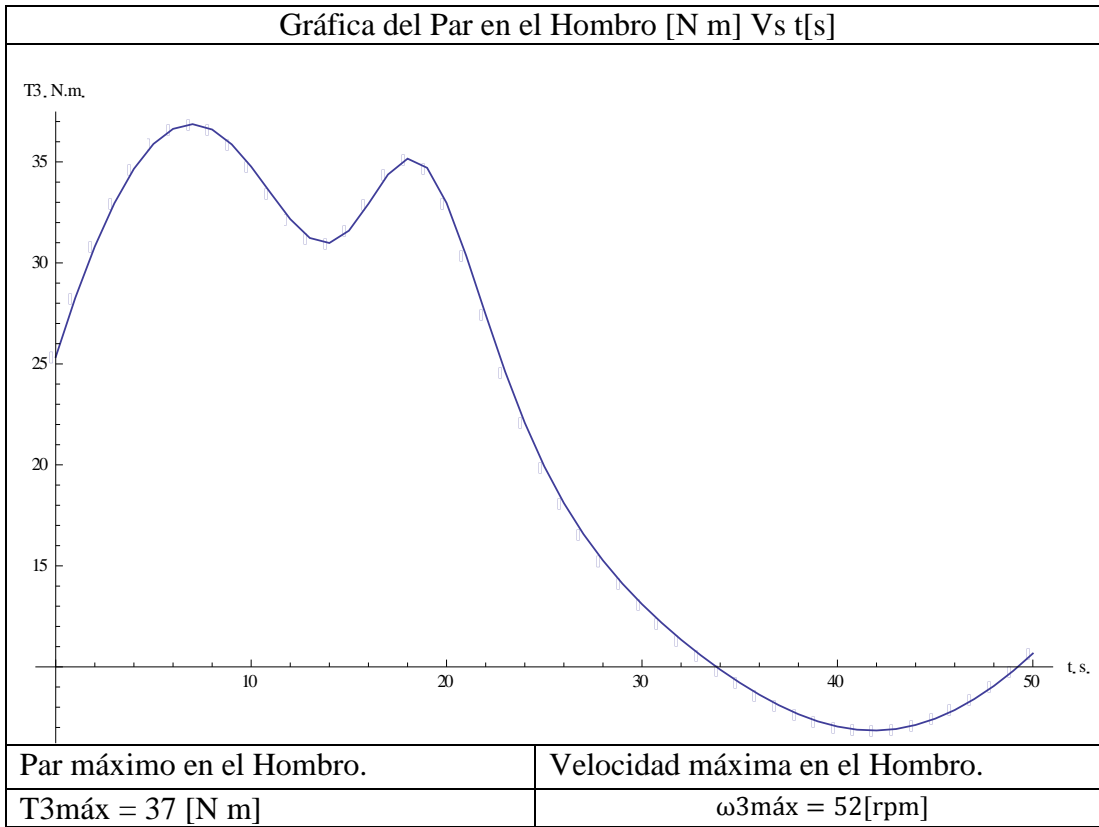


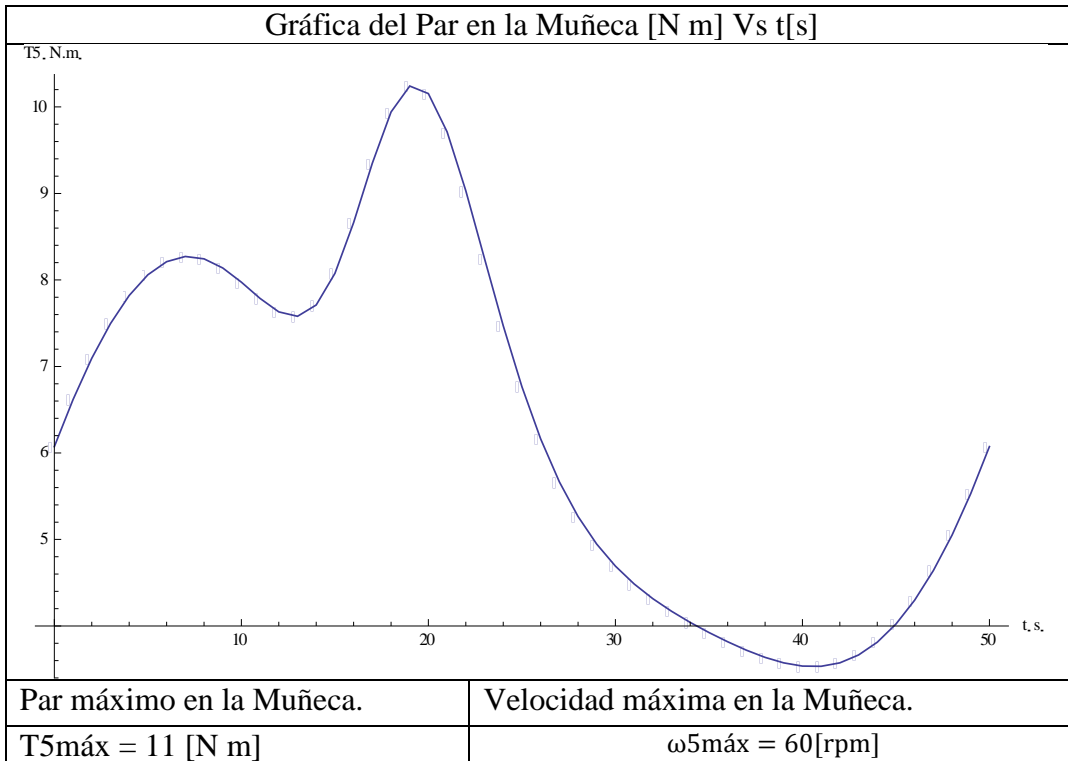


*Gráficas para del CAD2*

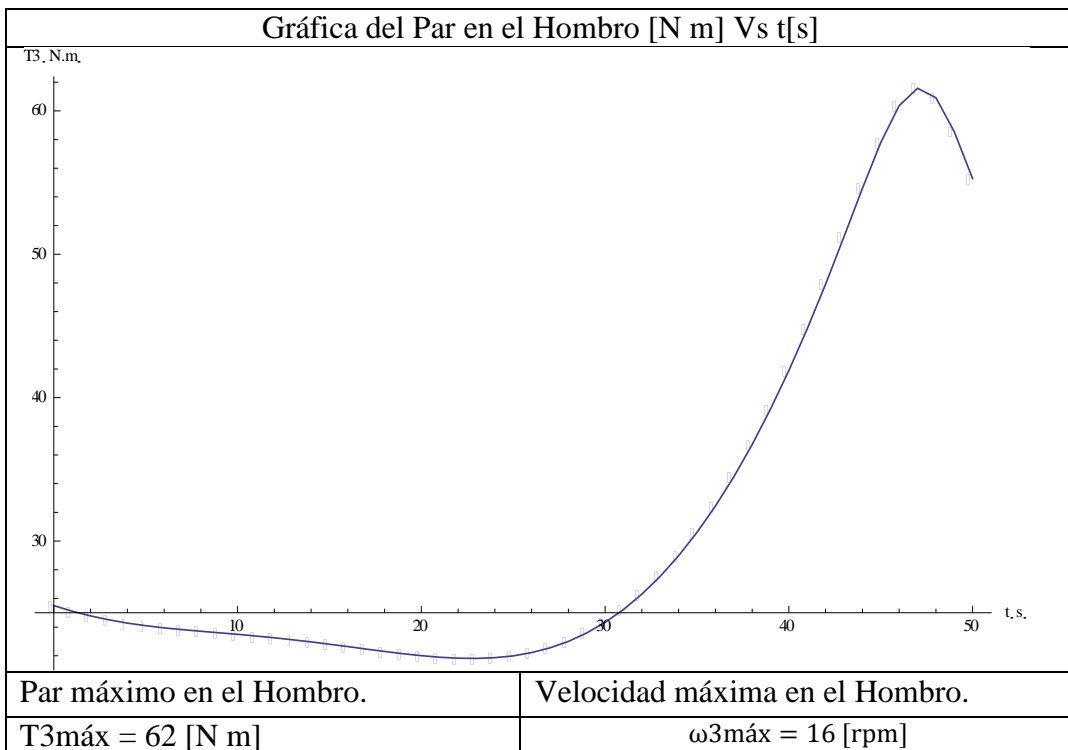


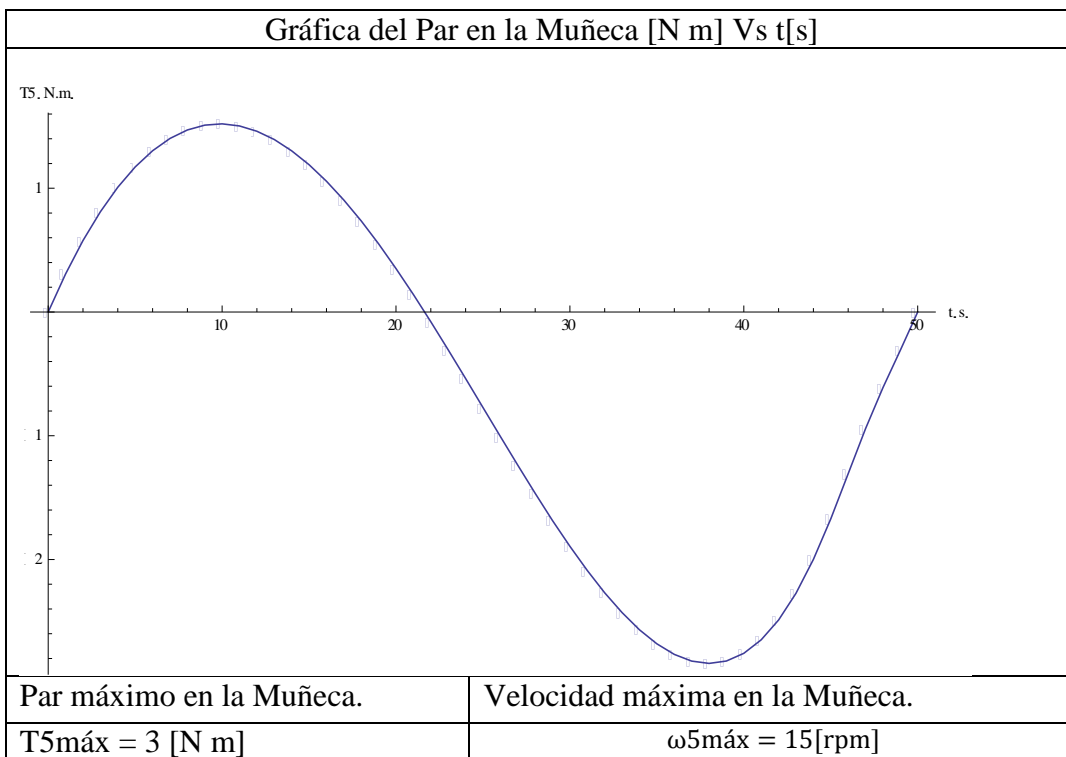
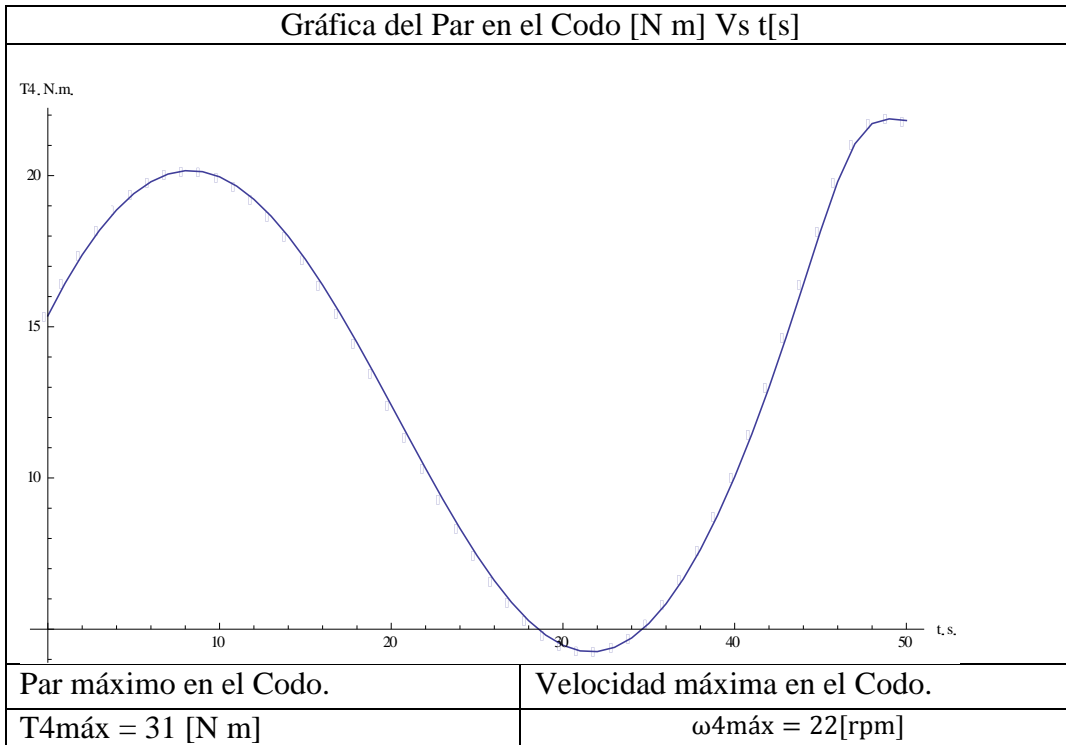
Del punto D al B (Ruta 1):





Del punto D al C (Ruta 2):




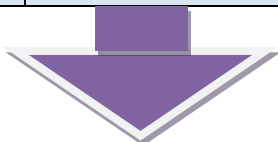



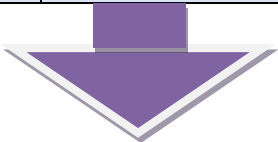
## ANEXO H

### Programas realizados en el software ©Mathematica 8


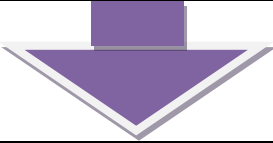
A continuación se muestran los programas que fueron realizados en el software ©Mathematica 8. Se muestran de manera general las funciones que se definieron, indicando únicamente las entradas y salidas de estas, sin atender a la serie de operaciones que conforman la estructura de la función.


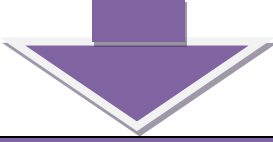
#### *Funciones en ©Mathematica para la Cinemática Directa*

ENTRADAS		
Dimensión	Nomenclatura	Procedencia
Escalar	d1	Usuario
		
FUNCIÓN 1		
Nombre de la función:	<b>XYZ01</b>	
Funciones incluidas:	Ninguna	
		
SALIDAS		
Vector de posición de 1x3: $\mathbf{o}_0^1$ (ver sección 3.3.3)		


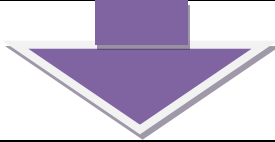
ENTRADAS		
Dimensión	Nomenclatura	Procedencia
Escalares	d1, d2, a3	Usuario
		
FUNCIÓN 2		
Nombre de la función:	<b>XYZ 2</b>	
Funciones incluidas:	Ninguna	
		
SALIDAS		
Vector de posición de 1x3: $\mathbf{o}_0^2$ (ver sección 3.3.3)		




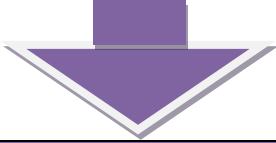
ENTRADAS		
<i>Dimensión</i>	<i>Nomenclatura</i>	<i>Procedencia</i>
Escalar	d1, d2, a2, a3, $\theta_3$	Usuario
		
FUNCIÓN 3		
<i>Nombre de la función:</i>	<b>XYZ03</b>	
<i>Funciones incluidas:</i>	Ninguna	
		
SALIDAS		
Vector de posición de 1x3: $\mathbf{o}_0^3$ (ver sección 3.3.3)		

ENTRADAS		
<i>Dimensión</i>	<i>Nomenclatura</i>	<i>Procedencia</i>
Escalares	d1, d2, a2, a3, $\theta_3, a_4, \theta_4$	Usuario
		
FUNCIÓN 4		
<i>Nombre de la función:</i>	<b>XYZ04</b>	
<i>Funciones incluidas:</i>	Ninguna	
		
SALIDAS		
Vector de posición de 1x3: $\mathbf{o}_0^4$ (ver sección 3.3.3)		


*Función en ©Mathematica para la Cinemática Directa (continuación)*

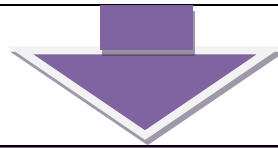
ENTRADAS		
<i>Dimensión</i>	<i>Nomenclatura</i>	<i>Procedencia</i>
Escalar	d1, d2, a2, a3, $\theta_3, a_4,$ $\theta_4, a_5, \theta_5$	Usuario
		
FUNCIÓN 5		
<i>Nombre de la función:</i>	<b>XYZ05</b>	
<i>Funciones incluidas:</i>	Ninguna	
		
SALIDAS		
Vector de posición de 1x3: $\mathbf{o}_0^5$ (ver sección 3.3.3)		

Función en ©Mathematica para resolver la Cinemática directa de un robot RRR

ENTRADAS		
<i>Dimensión</i>	<i>Nomenclatura</i>	<i>Procedencia</i>
Escalares	X05, Y05, $\phi$ , a3, a4, a5, Codo	Usuario
		
FUNCIÓN 6		
<i>Nombre de la función:</i>	<b>AngulosDadaLaPosicionDelRobotTresGDL</b>	
<i>Funciones incluidas:</i>	Función 2	
		
SALIDAS		
Vector de 1x3: <b>{03, 04, 05}</b>		

Función en ©Mathematica que resuelve la Cinemática Inversa del Robot PRRR siguiendo una trayectoria recta

ENTRADAS		
<i>Dimensión</i>	<i>Nomenclatura</i>	<i>Procedencia</i>
Escalares:	Zini, Zfin, ParticionTrayec, $\phi$ , T, a2, a3, a4, a5, d1, d2	Usuario
Vectores de 1x2:	XYini={Xini, Yini} XYfin={Xfin, Yfin}	Usuario
		
FUNCIÓN 7		
<i>Nombre de la función:</i>	<b>AngulosDadaLaTrayectoriaRecta</b>	
<i>Funciones incluidas:</i>	Función 6	



**SALIDAS**

Tabla:

$t$	$x$	$y$	$z$	$\theta_3$	$\theta_4$	$\theta_5$	$V_x$	$V_y$	$V_z$	$a_x$	$a_y$	$a_z$
0	Xini	Yini	Zini	-	-	-	0	0	0	0	0	0
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
T	Xfin	Yfin	Zfin	-	-	-	0	0	0	0	0	0

*Función en ©Mathematica que resuelve la Cinemática Inversa de un robot PRRR siguiendo varias trayectorias rectas*

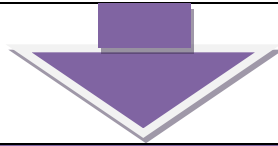
**ENTRADAS**

<i>Dimensión</i>	<i>Nomenclatura</i>	<i>Procedencia</i>
Escalares:	ParticionesTrayec, $\phi$ , Ttotal, a2, a3, a4, a5, d1, d2	Usuario
Vector de 1x (n-écimo coordenadas {X,Y} del n-écimo punto):	PuntosXY={ {X1,Y1}, {X2,Y2}, ..., {Xn,Yn} }	Usuario
Vector de 1x (n-écima coordenada Z del n-écimo punto):	PuntosZ={ Z1, Z2, ..., Zn }	Usuario



**FUNCIÓN 8**

<i>Nombre de la función:</i>	<b>VariasTrayectoriasRectas</b>
<i>Funciones incluidas:</i>	Función 7



### SALIDAS

Tabla:

$t$	$x$	$y$	$z$	$\theta_3$	$\theta_3$	$\theta_3$	$V_x$	$V_y$	$V_z$	$a_x$	$a_y$	$a_z$
0	X1	Y1	Z1	-	-	-	0	0	0	0	0	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
T	X2	X2	Z2	-	-	-	0	0	0	0	0	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
Ttotal	Xn	Yn	Zn	-	-	-	0	0	0	0	0	0

*Función en ©Mathematica que entrega las coordenadas cartesianas de cada junta, dada la solución de la Cinemática directa*

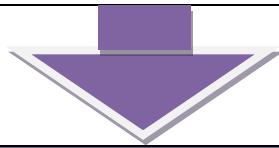
### ENTRADAS

Dimensión	Nomenclatura	Procedencia
Escalares:	X05, Y05, $\phi$ , a3, a4, a5, Codo	Usuario
Tablas:	- -	Tablas de salida de las funciones 8 y 7.



### FUNCIÓN 9

Nombre de la función:	<b>CinematicaDirectaDadaTrayectoria</b>
Funciones incluidas:	Función 1, 2, 3, 4 y 5



## SALIDAS

Tabla:

$i$ <i>Junta</i>	$0$	$1$	...	$Particiones + 1$
$1$	$\begin{pmatrix} x01 \\ y01 \\ z01 \end{pmatrix}_0$	$\begin{pmatrix} x01 \\ y01 \\ z01 \end{pmatrix}_1$	...	$\begin{pmatrix} x01 \\ y01 \\ z01 \end{pmatrix}_{Particiones+1}$
$2$	$\begin{pmatrix} x02 \\ y02 \\ z02 \end{pmatrix}_0$	$\begin{pmatrix} x02 \\ y02 \\ z02 \end{pmatrix}_1$	...	$\begin{pmatrix} x02 \\ y02 \\ z02 \end{pmatrix}_{Particiones+1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$5$	$\begin{pmatrix} x05 \\ y05 \\ z05 \end{pmatrix}_0$	$\begin{pmatrix} x05 \\ y05 \\ z05 \end{pmatrix}_1$	...	$\begin{pmatrix} x05 \\ y05 \\ z05 \end{pmatrix}_{Particiones+1}$

---

## ANEXO I

### Hoja técnica del espectrómetro Raman

---

# Intevac Photonics

INNOVATION AT THE SPEED OF LIGHT®



## Inspector Raman



## Handheld Raman Spectrometer

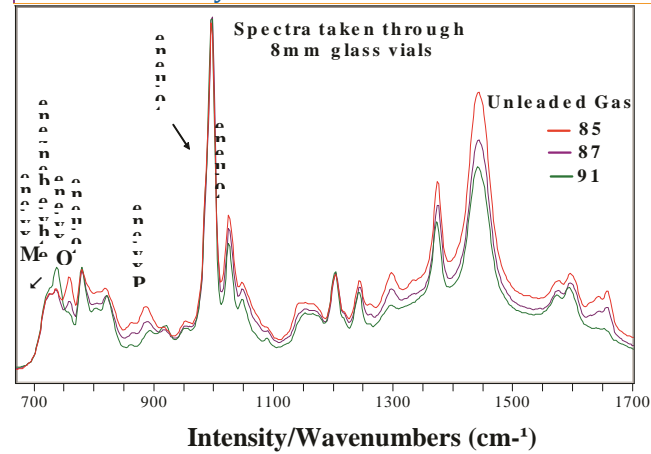
The Inspector Raman is a handheld Raman spectrometer that analyzes solids and liquids. This lightweight, dispersive spectrometer has no moving

parts allowing it to be used in challenging field applications and as a powerful laboratory tool. The Inspector's long focal length allows sampling through vials, flasks, plastic bags, or any container that transmits the 785 nm NIR laser.

For ultimate portability, data can be retrieved remotely using Bluetooth technology or USB and a laptop computer. Spectral libraries for identification of unknown substances are available or may be developed using DeltaNu's library development software.

### APPLICATIONS

- . Reaction monitoring
- . Authentication of historical works of art
- . Raw material identification
- . Analysis of organometallic compounds in a glove box
- . Botanical research
- . Octane number in fuels
- . Edible oil analysis



## Inspector Raman

FEATURES	
Liquid Sampling	Sample cell attachment for 8mm vials, NMR tubes, or MP tubes
Solid Sampling	Point and shoot attachment
Microscopy	Optional microscope attachment (NuScope™)
Portability	<b>Weights under 5 lbs, remote trigger, wireless Bluetooth connectivity (or USB)</b>
Laser	<b>120 mW 785 nm</b>
Resolution	<b>Less than 8 cm<sup>-1</sup></b>

<b>Spectral Range</b>	<b>100 - 2000 cm<sup>-1</sup></b>
<b>Computer</b>	Laptop PC
<b>Software</b>	<b>NuSpec™, GRAMS (data is stored in ASCII or Thermo-Galactic formats)</b>
<b>Warranty</b>	<b>One year parts and labor</b>

#### TEACHING LABS

**Observe Periodic Trends Using Raman Spectroscopy**

**Organic Functional Groups**

**Determination of a Langmuir Isotherm Using SERS**

**Introduction to Raman Spectroscopy**

**Percent Ethanol in Water Determination Using Raman Spectroscopy**

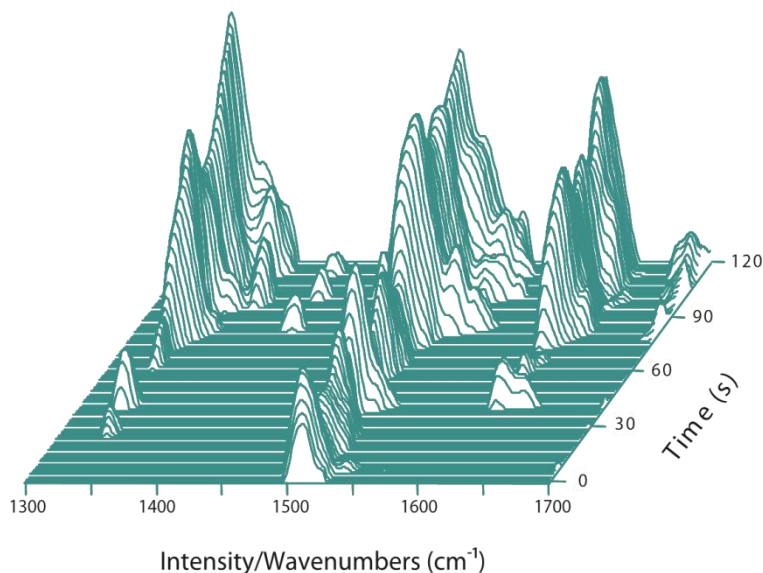
**Forensic Analysis of a Crime Scene**

**A Rapid and Effective Way to Identify Polymers Through Raman Spectroscopy**

**Vibrational Spectrum of CCl<sub>4</sub>**

Teachinglabsavailable online

Formation of imidazole followed by the Inspector Raman



Sales: 866.301.6328

FAX: 307.745.9152

Email: [sales@deltanu.com](mailto:sales@deltanu.com)

12/2011 [www.intevac.com/deltanu](http://www.intevac.com/deltanu)

© 2011 INTEVAC, INC. Intevac Photonics is a subsidiary of Intevac, Inc. Intevac, the Intevac logo, DeltaNu, Innovation at the Speed of Light, Inspector Raman, NuScope and NuSpec are trademarks or registered trademarks of Intevac, Inc. All other trademarks are the property of their respective owners.



**INTEVAC**



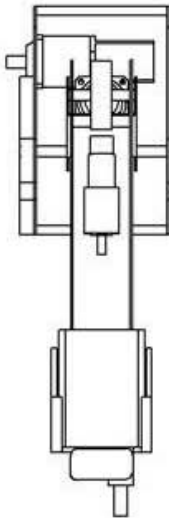
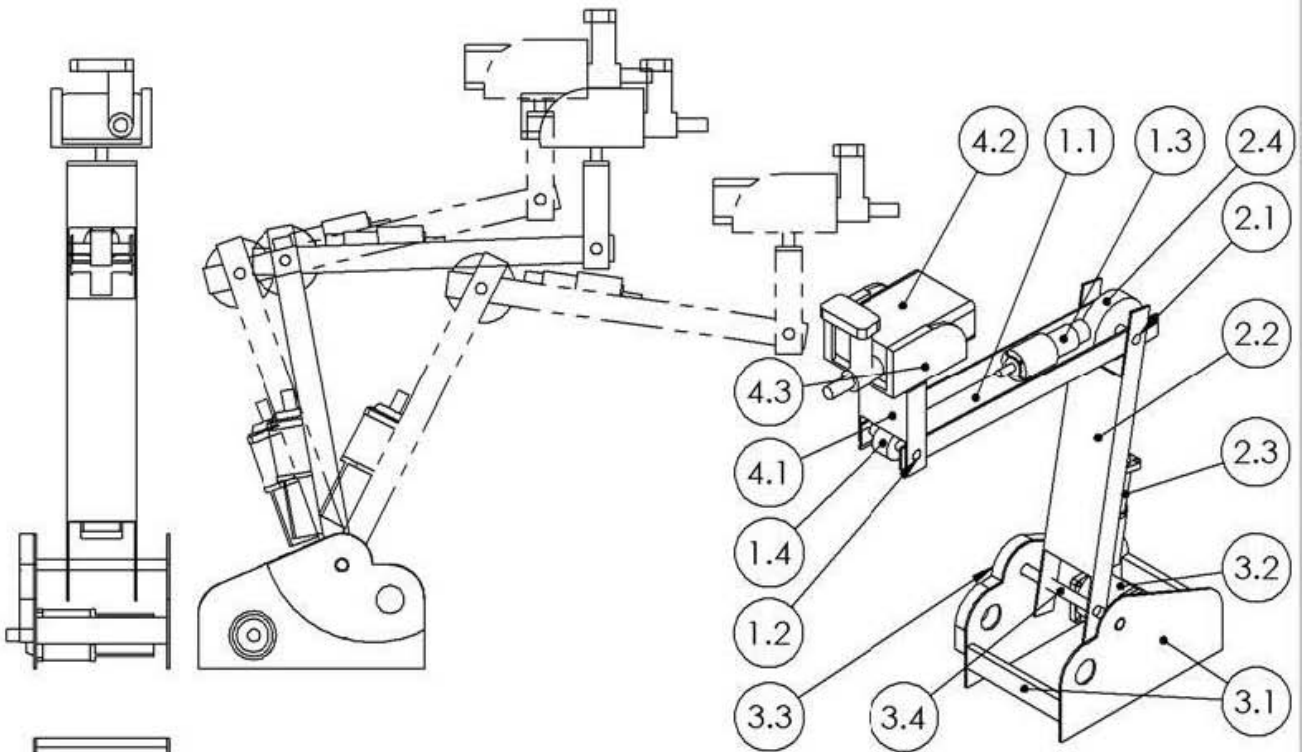
---

## **ANEXO J**

### **Planos del Robot PRRR-CAD2**

---

## Eslabones que componen al Robot PRRR



N.º DE ELEMENTO	N.º DE PIEZA	DESCRIPCIÓN	CANTIDAD
1	Antebrazo+Ejes	Eslabón Antebrazo	1
1.1	Antebrazo	Canaleta de aluminio(6063-T5) calibre 1/8".De 7/5"x3/2".	1
1.2	Eje	Barra de acero inox. ANSI 316 de 5/8".	1
1.3	Motor RSF-14B-100	Peso de 0.8 [kg]	1
1.4	Pesos engranes-Antebrazo	Peso de 0.8 [kg]	1
2	Brazo+Eje	Eslabón Brazo	1
2.1	Eje	Barra de acero inox. ANSI 316 de 5/8".	1
2.2	Brazo	Canaleta de aluminio(6063-T5) de calibre 1/8".De 4"x3/2".	1
2.3	Motor RSF-17A-100	Peso de 2.1 [kg]	1
2.4	Peso engranes Brazo	Peso de 0.8 [kg]	1
3	Base+Eje	Eslabón plataforma móvil	1
3.1	Base	Lamina de calibre 3.4 [mm] y soleras de 3/2"x1/2". Ambos de aluminio (6063-T5).	1 Lámina y 1 solera
3.2	Motor RSF-17A-100	Peso de 2.1 [kg]	1
3.3	Pesos engranes-Base	Peso de 2 [kg]	1
3.4	Eje de la base-hombro	Barra de acero inox. ANSI 316 de 5/8".	1
4	Muñeca+Espectroscopio	Eslabón Mano+Espectroscopio	1
4.1	Muñeca	Canaleta de aluminio(6063-T5) de calibre 1/8".De 4"x3/2".	1
4.2	ESPECTROSCOPIO	-	1
4.3	SOSTEN DEL ESPECTROSCOPIO	-	1

ACOT: mm

Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ingeniería

DIBUJÓ:

Viren U. Sibaja Aguilera

ESCALA: 1:10

TÍTULO:

# Robot PRRR-CAD2

NOMBRE DEL DIBUJO:

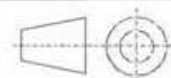
Eslabones que componen  
al Robot PRRR

A4

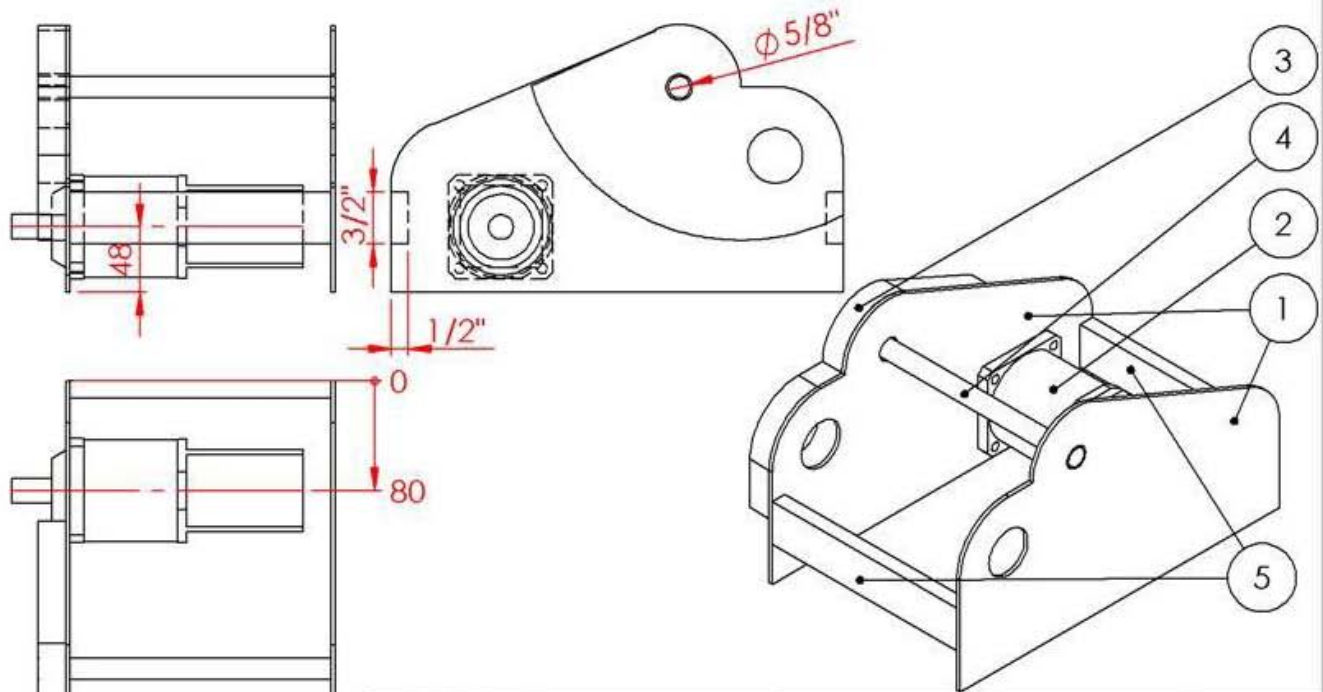
7/08/2013

HOJA 1 DE 6

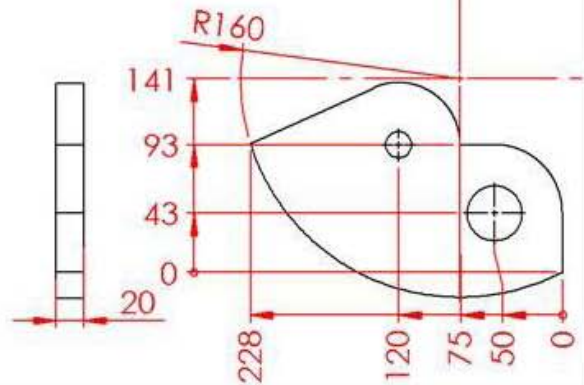
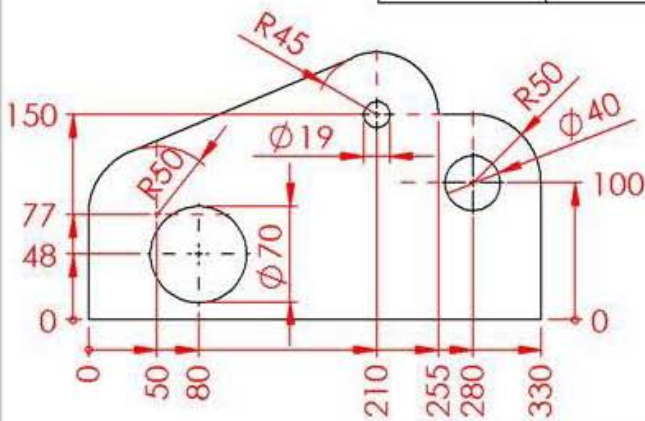
\*Para ver lo planos de los motores, revisar su hoja técnica de acuerdo al modelo. Revisar la página:  
<http://www.harmonicdrive.net/>



## Partes que conforman al Eslabón Base-Móvil.

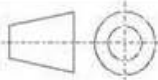


N.º DE ELEMENTO	N.º DE PIEZA	DESCRIPCIÓN	CANTIDAD
1	Base	Lamina de aluminio (Aleación 1200) de calibre 3.40 [mm]. De la empresa: Distribuidora Metálica S.A. de C.V.	1
2	Motor RSF-17A-100	Motor comercial de la empresa HarmonicDrive. Pesa 2.1 [kg]	1
3	Pesos engranes-Base	Peso de 2 [kg]	1
4	Eje de la base-hombro	Barra de acero inox. ANSI 316 de 5/8". De la empresa: Distribuidora Metálica S.A. de C.V.	1
5	Solera	Solera de aluminio (Aleación 6063-T5) de 1.5"x0.5". De la empresa: Distribuidora Metálica S.A. de C.V.	1



ACOT: mm

Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ingeniería



DIBUJÓ:

Viren U. Sibaja Aguilera

ESCALA: 1:5

TÍTULO:

Robot PRRR-CAD2

NOMBRE DEL

DIBUJO:

Eslabón Base-Móvil

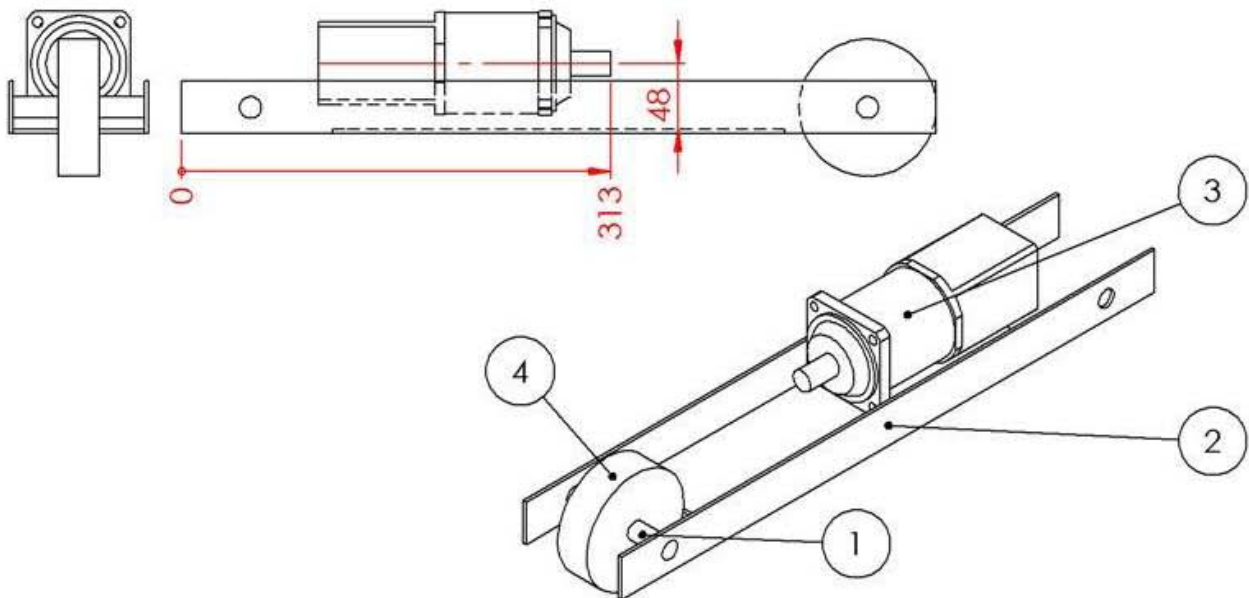
A4



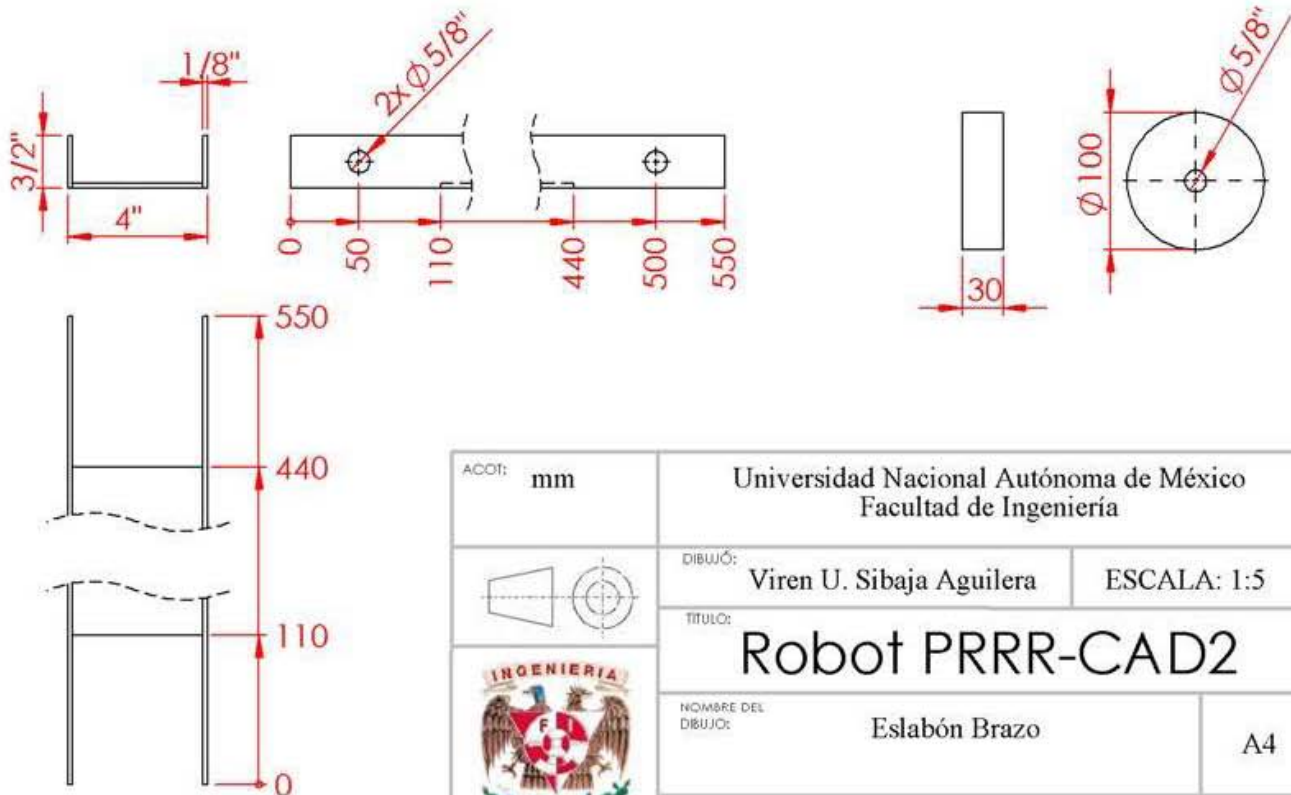
7/08/2013

HOJA 2 DE 6

### Partes que conforman al Eslabón Brazo.

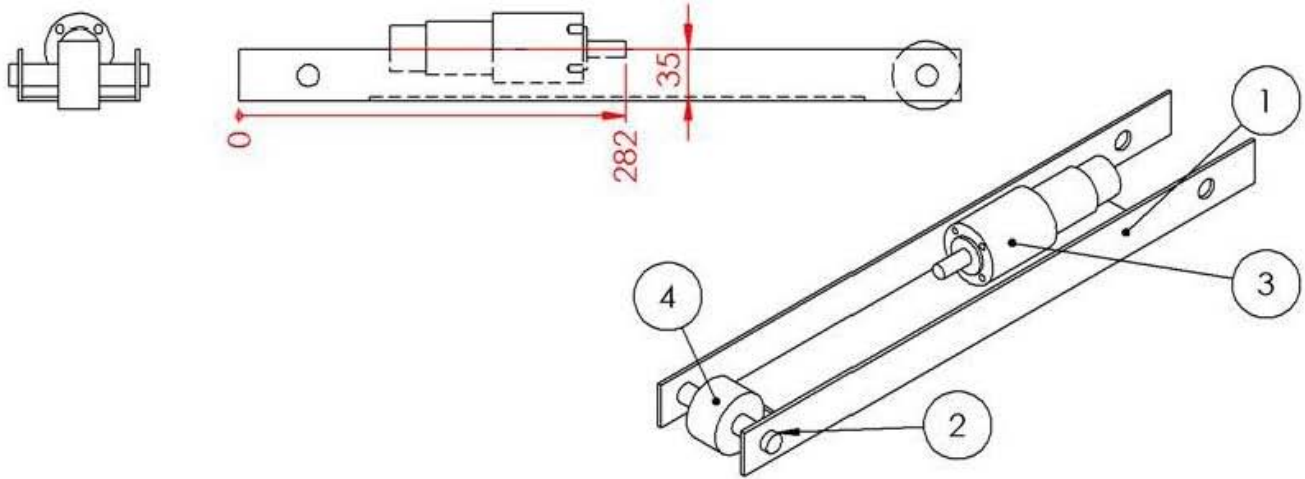


N.º DE ELEMENTO	N.º DE PIEZA	DESCRIPCIÓN	CANTIDAD
1	Eje	Barra de acero inox. ANSI 316 de 5/8".	1
2	Brazo	Canaleta de aluminio(6063-T5) de calibre 1/8".De 4"x3/2".	1
3	Motor RSF-17A-100	Peso de 2.1 [kg]	1
4	Peso engranes Brazo	Peso de 0.8 [kg]	1

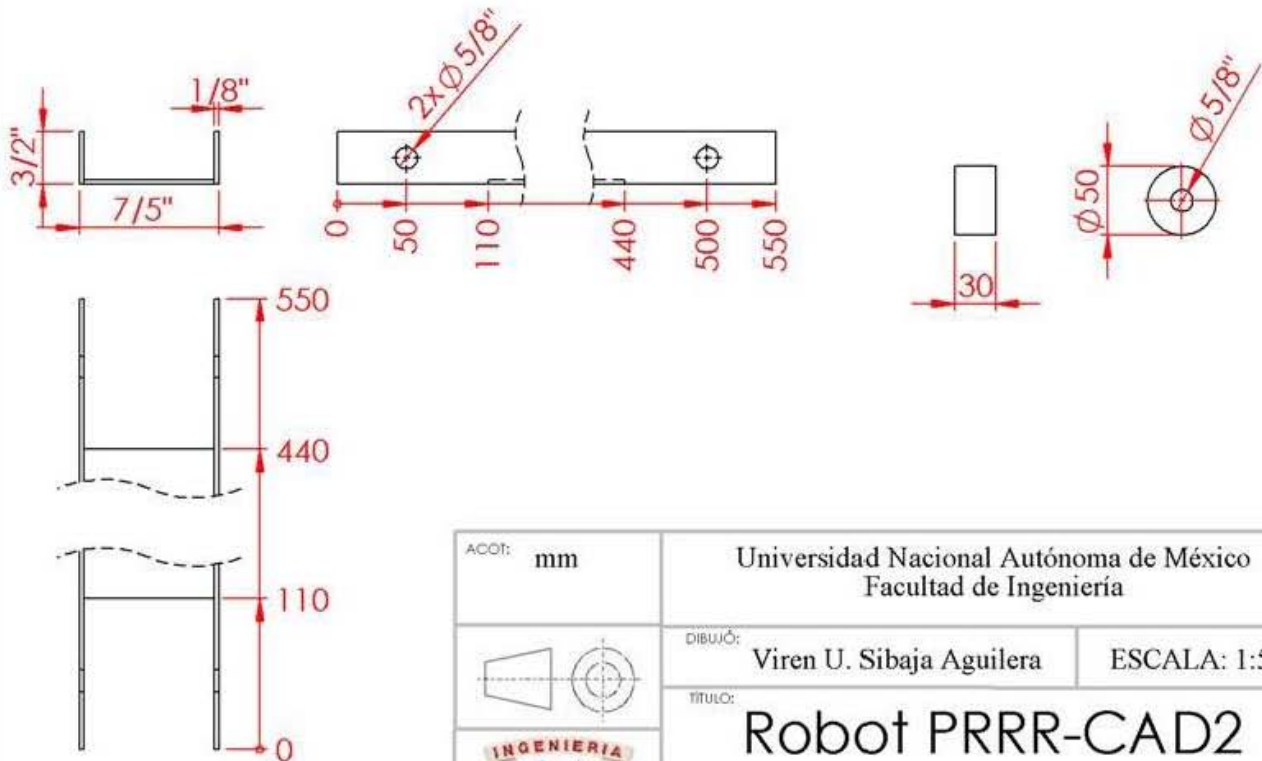


ACOT: mm	Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ingeniería	
	DIBUJÓ: Viren U. Sibaja Aguilera	ESCALA: 1:5
	TÍTULO: Robot PRRR-CAD2	
	NOMBRE DEL DIBUJO: Eslabón Brazo	A4
	7/08/2013	HOJA 3 DE 6

## Partes que conforman al Eslabón Antebrazo.

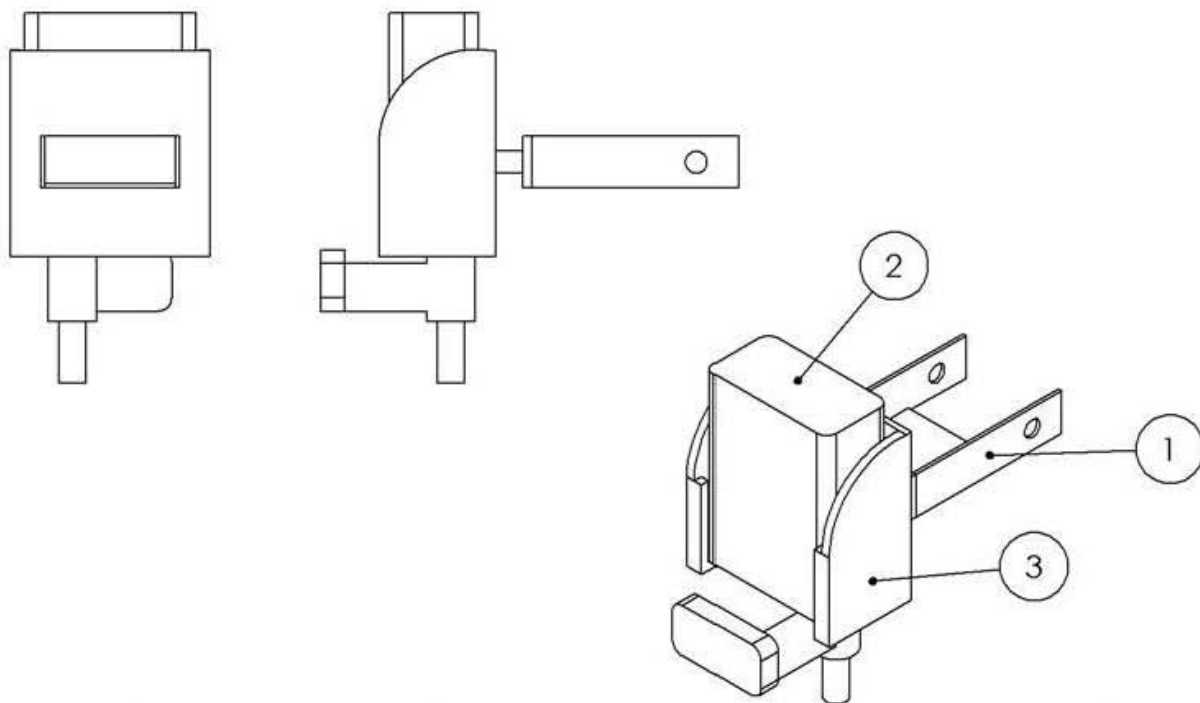


N.º DE ELEMENTO	N.º DE PIEZA	DESCRIPCIÓN	CANTIDAD
1	Antebrazo	Canaleta de aluminio(6063-T5) calibre 1/8". De 7/5"x3/2".	1
2	Eje	Barra de acero inox. ANSI 316 de 5/8".	1
3	Motor RSF-14B-100	Peso de 0.8 [kg]	1
4	Pesos engranes-Antebrazo	Peso de 0.8 [kg]	1

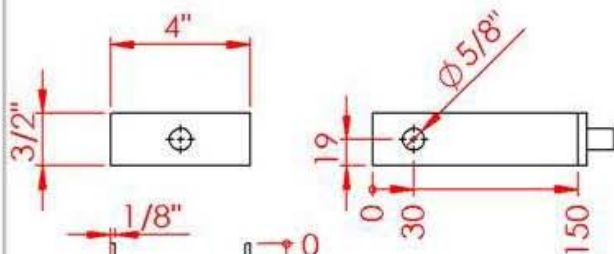


ACOT: mm	Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ingeniería	
	DIBUJÓ: Viren U. Sibaja Aguilera	ESCALA: 1:5
	TÍTULO: <b>Robot PRRR-CAD2</b>	
NOMBRE DEL DIBUJO:	Eslabón Antebrazo	A4
7/08/2013		HOJA 4 DE 6

## Partes que conforman al Eslabón Muñeca+Espectroscopio.



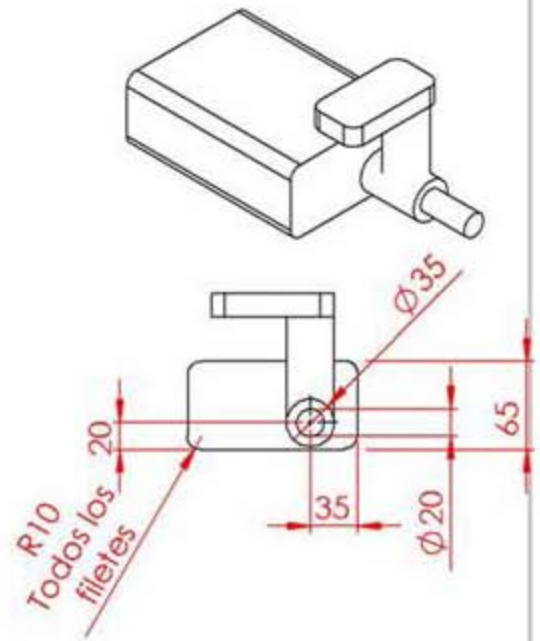
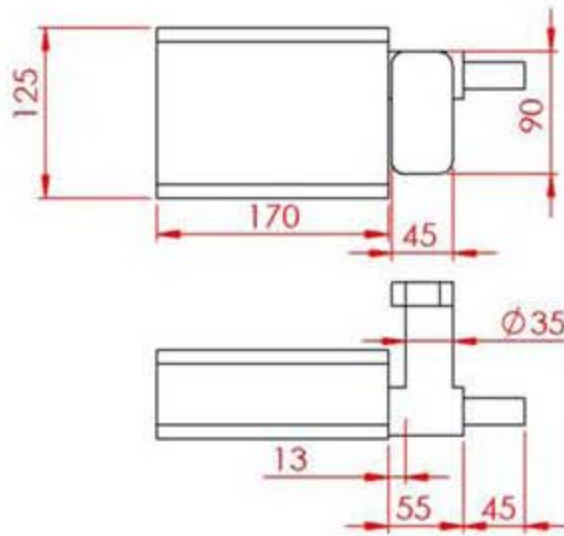
N.º DE ELEMENTO	N.º DE PIEZA	DESCRIPCIÓN	CANTIDAD
1	Muñeca	Canaleta de aluminio(6063-T5) de calibre 1/8". De 4"x3/2". Más algunos elemntos para sujetar la pieza que sostiene el espectroscopio.	1
2	ESPECTROSCOPIO		1
3	SOSTEN DEL ESPECTROSCOPIO		1



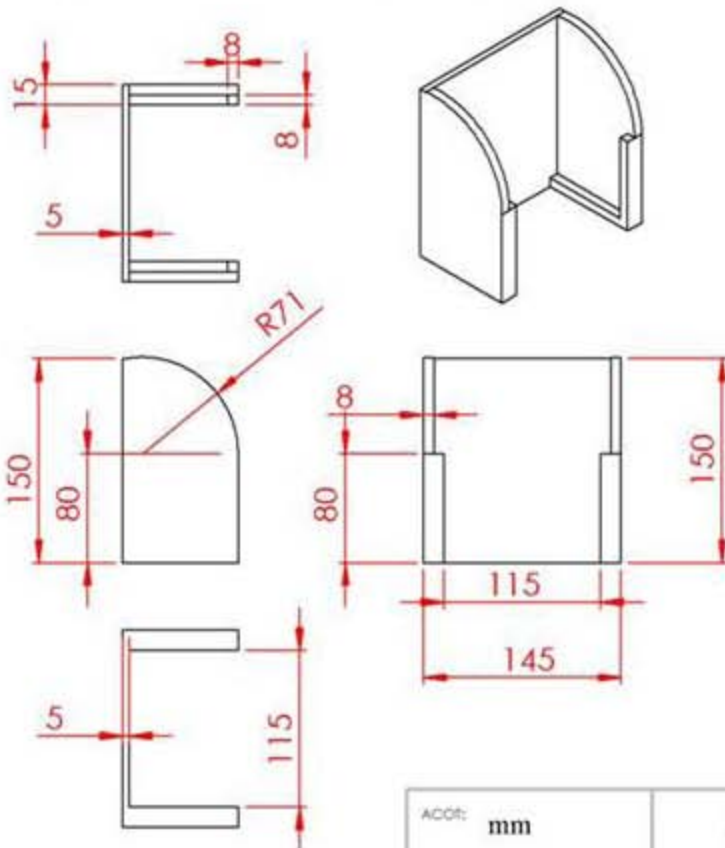
Elementos extras que proporcionan sujeción al soporte del espectroscopio.

ACOT: mm	Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ingeniería	
	DIBUJÓ: Viren U. Sibaja Aguilera	ESCALA: 1:5
	TÍTULO: Robot PRRR-CAD2	
NOMBRE DEL DIBUJO: Eslabón Muñeca+Espectroscopio	A4	
7/08/2013	HOJA 5 DE 6	

## Espectroscopio Raman



## Soporte del espectroscopio Raman



ACOR: mm	Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ingeniería	
	DIBUJO: Viren U. Sibaja Aguilera	ESCALA: 1:5
	TÍTULO: <b>Robot PRRR-CAD2</b>	
NOMBRE DEL DIBUJO:	Espectroscopio Ramman y soporte	A4
7/08/2013		HOJA 4 DE 8