



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Conjetura de Caccetta y Häggwvist

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO

PRESENTA:
ROBERTO MÉNDEZ ROSAS

DIRECTOR DE TESIS:
JUAN JOSÉ MONTELLANO BALLESTEROS



2014



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas

Tesis Digitales

Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©

PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Méndez

Rosas

Roberto

2491302998

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

409008342

2. Datos del Tutor

Dr

Juan José

Montellano

Ballesteros

3. Sinodal 1

Dr

Eduardo

Rivera

Campo

4. Sinodal 2

Dra

Mucuy Kak del Carmen

Guevara

Aguirre

5. Sinodal 3

Dr

Diego Antonio

González
Moreno

6. Sinodal 4

Dr
Ricardo
Gómez
Aíza

7. Datos del trabajo escrito

Conjetura de Caccetta y Häggwvist
98pp.
2014

Agradecimientos

- **A mi padres**

Por todo su amor y cariño. Por haber confiado en mí y haberme brindado su apoyo incondicional. Por todos los sacrificios que hicieron para que yo pudiera estudiar. Gracias a mi padre, no solo por formarme como persona, si no también como su alumno y haberme enseñado Matemáticas, y gracias a el descubrir mi gusto por esta gran ciencia . A mi madre por todos sus desvelos y sus preocupaciones al saber que estaba lejos de ella.

Mil gracias, los amo.

- **A mis hermanos**

Por estar conmigo en las buenas y en las malas, y recuerden todo esfuerzo en algún momento dará alguna recompensa. Los quiero.

- **A mis abuelitas** Que aunque ya no están conmigo se que estarían orgullosas de mí.

- **A mi asesor**

Muchas gracias por su paciencia, su arduo trabajo y sus enseñanzas.

- **A mis profesores**

Por haberme transmitido sus conocimientos y ser parte de mi formación profesional.

- **A la UNAM**

Por haberme abierto sus puertas y darme la oportunidad de pertenecer a la mejor universidad de México.

Índice general

Introducción	5
1. Preliminares	7
1.1. Definiciones	7
1.2. Resultados básicos	9
2. Resultados parciales	11
2.1. ¿Cómo sería un contraejemplo?	11
2.2. $r = 1, 2, 3, 4, 5$	17
2.3. Una cota más	23
3. Casos particulares	41
3.1. Digráficas con triángulos dirigidos	41
3.1.1. Contando subdigráficas	47
3.2. Digráficas vértice-transitivas	52
4. Otras cotas para el caso general	60
5. Conjeturas equivalentes	79
5.1. La traza de una potencia de una matriz	79
5.2. Conjetura de la Segunda Vecindad de Seymour	81
5.3. La conjetura de Seymour y Sullivan	81
5.4. Dominación y programación lineal	83
6. Apéndice	86

Introducción

En el año 1978 Louis Caccetta y Roland Häggwist plantearon la siguiente conjetura: **Toda digráfica simple con n vértices y exgrado mínimo al menos r tiene un ciclo dirigido de longitud a lo más el techo de $\frac{n}{r}$.**

Muchos esfuerzos se han realizado desde aquel entonces, tratando de dar una respuesta positiva o negativa a dicha conjetura y hasta el momento sólo existen resultados parciales al respecto.

En este trabajo se presentan varios de los resultados que se han obtenido a través de los años tratando de dar respuesta a la conjetura. Adicionalmente se verán algunas conjeturas que implican algunos casos particulares o que son equivalentes.

Esta conjetura resulta muy peculiar, pues se puede ver desde diferentes enfoques tales como Teoría de Gráficas, Teoría de Grupos, Álgebra Lineal y Programación Lineal.

En el Capítulo 1 se presentan las definiciones y conceptos básicos que son utilizados en esta tesis.

En el Capítulo 2 se muestra la validez de la conjetura para los casos particulares donde $r = 1, 2, 3, 4$ y se da un esbozo de la prueba cuando $r = 5$. Además se muestran propiedades que tendría un contraejemplo a la conjetura.

El Capítulo 3 se enfoca en el caso particular de la conjetura, cuando el techo de $\frac{n}{r}$ es 3. Además se verifica la validez de la conjetura para todas las digráficas vértice transitivas. Esta prueba se hace desde el enfoque de Teoría de Grupos.

En el Capítulo 4 se presenta un resultado relativo a la conjetura en general, haciendo uso de resultados presentados en el capítulo anterior. Finalmente, en el Capítulo 5 se muestran algunas conjeturas que son equivalentes a la conjetura de Caccetta y Häggwist. Adicionalmente se anexa un Apéndice donde se encuentran

las pruebas o esbozos de pruebas de afirmaciones usadas en el trabajo que resultan demasiado técnicas y que distraén de la presentación y del fluir de las ideas centrales.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Definiciones

Aquí se presentan definiciones de varios conceptos que son utilizados en el presente trabajo.

Definición 1.1 Una **gráfica dirigida** D es un par ordenado $D = (V(D), F(D))$, tal que $V(D)$ es un conjunto finito no vacío y $F(D) \subseteq V(D) \times V(D)$, es decir, los elementos de $F(D)$ son pares ordenados los cuales son llamados **arcos** o **flechas**, mientras que a los elementos de $V(D)$ son llamados **vértices**.

Es muy común utilizar el término **digráfica** para referirse a una gráfica dirigida. La forma usual de representar pictóricamente una gráfica dirigida, es colocar un punto por cada vértice, y por cada elemento de $F(D)$ una flecha cuya dirección depende del orden, es decir, si $(u, v) \in F(D)$ al par (u, v) , le corresponde la flecha que va de u a v .

El **orden** de una digráfica dirigida D , es su número de vértices y es denotado como $n(D)$, mientras que el **tamaño** es el número de flechas de D . Decimos que dos vértices son **adyacentes** si existe una flecha entre ellos. Si una flecha empieza y termina en el mismo vértice, se dice que es un lazo. Si dos o más flechas unen al mismo par de vértices en la misma dirección, son llamadas **multiflechas**.

Definición 1.2 Una **digráfica simple** es aquella que no tiene lazos ni multiflechas.

Definición 1.3 D' es una **subdigráfica inducida** de D si $V(D') \subseteq V(D)$ y $F(D') = F(D) \cap (V(D') \times V(D'))$.

Definición 1.4 El **grado exterior** o **exgrado** de un vértice v es el número de flechas que lo tienen como vértice inicial y es denotado por $\delta^+(v)$, mientras que al número de flechas cuyo vértice final es v , se le denomina **grado interior** o **ingrado** y se denota como $\delta^-(v)$.

Sea $\delta^+(D) = \min \{\delta^+(v) : v \in V(D)\}$ y $\delta^-(D) = \min \{\delta^-(v) : v \in V(D)\}$.

Definición 1.5 Una digráfica D es **r-regular**, si para todo $v \in V(D)$ se satisface que $\delta^+(v) = r$. Si además $\delta^-(v) = r$, se dice que D es **r-dirregular**.

Definición 1.6 Un **camino dirigido** es una sucesión de vértices

$$\mathcal{W} = (u_0, u_1, \dots, u_n),$$

tal que $(u_i, u_{i+1}) \in F(D)$ para cada $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Un $u_0 u_n$ -camino dirigido es un camino dirigido de u_0 hacia u_n . Si $u_0 = u_n$, se dice que el **camino dirigido es cerrado**. La longitud de $\mathcal{W}$, es el número de flechas que contiene. El hecho de que exista un camino de longitud n de u a v , se denota $u \xrightarrow{n} v$.

Definición 1.7 Una **trayectoria dirigida** $\mathcal{T} = (u_0, u_1, \dots, u_n)$ es un camino que no repite vértices. Si la trayectoria es cerrada, entonces se le llama **ciclo**.

Se denotará como $F(\mathcal{W})$ a las flechas que forman parte de un camino $\mathcal{W}$ y $l(\mathcal{W})$ a la longitud del mismo. Se usa una notación análoga para trayectorias y ciclos.

Definición 1.8 Una digráfica D es **conexa**, si para cualquier par de vértices $u, v \in V(D)$ existe una uv -trayectoria en D . Cuando existe una uv -trayectoria y una vu -trayectoria para cada par de vértices $u, v \in V(D)$, entonces se dice que D es **fuertemente conexa**.

La **distancia** entre dos vértices u, v , es la longitud de la uv -trayectoria más corta y se denota por $dist(u, v)$. Por otro lado, a $d(D) = \max \{dist(u, v) : u, v \in V(D)\}$ se le llama **diámetro** de la digráfica D . El **cuello** de D , es la longitud del ciclo más corto en D , el cual se denota como $g(D)$.

A continuación se definen una serie de conjuntos que son utilizados en la mayor parte de este trabajo.

Dada una digáfica D , para cada $v \in V(D)$ y para cada entero $i \geq 1$ sean

$$S_i^+(v) : = \{u : \text{dist}(v, u) = i\}$$

$$S_i^-(v) : = \{u : \text{dist}(u, v) = i\}$$

$$N_i^+(v) : = \{u : \text{dist}(v, u) \leq i\}$$

$$N_i^-(v) : = \{u : \text{dist}(u, v) \leq i\}$$

$$R_i^+(v) : = \left\{u : v \xrightarrow{i} u\right\}$$

$$R_i^-(v) : = \left\{u : u \xrightarrow{i} v\right\}$$

$$\widehat{N}_i^+(x) : = \bigcup_{j=0}^i R_j^+(x)$$

$$\widehat{N}_i^-(x) : = \bigcup_{j=0}^i R_j^-(x)$$

En el caso en que $i = 1$ en todos los conjuntos se omitirá el subíndice. Los conjuntos $N^+(v)$ y $N^-(v)$ son llamados **exvecindad** e **invecindad** de v respectivamente. Note que si D es simple, $|N^+(v)| = \delta^+(v)$ y $|N^-(v)| = \delta^-(v)$.

Ya se cuenta con los elementos formales para presentar la conjetura de Caccetta y Häggqvist propuesta en 1978.

Conjetura 1 *Toda digráfica simple D con n vértices y $\delta^+(D) \geq r$ contiene un ciclo dirigido de longitud a lo más $\lceil \frac{n}{r} \rceil$.*

1.2. Resultados básicos

Proposición 1.0.1 *Para toda digráfica D , $\sum_{v \in V(D)} \delta^+(v) = \sum_{v \in V(D)} \delta^-(v) = |F(D)|$.*

Demostración.

Es claro que $\delta^+(v)$ es el número de flechas que inician en v , y una flecha no puede empezar en distintos vértices por lo que $\sum_{v \in V(D)} \delta^+(v) = |F(D)|$. De igual manera,

como $\delta^-(v)$ es el número de flechas que terminan en v , se tiene que $\sum_{v \in V(D)} \delta^-(v) = |F(D)|$. ■

Proposición 1.0.2 *Sea D una digráfica y sean $u, v \in V(D)$ con $u \neq v$. Si existe un $\mathcal{W}$ camino de u a v , entonces existe una uv -trayectoria.*

Demostración.

Sea

$$X = \{l(\overline{\mathcal{W}}) : \overline{\mathcal{W}} \text{ es un } uv\text{-camino y } F(\overline{\mathcal{W}}) \subset F(\mathcal{W})\}.$$

Como D es finita, se sigue que el conjunto X es finito. Sea $\overline{\mathcal{W}} = \{u = u_0, \dots, u_k = v\}$ un camino donde el conjunto X alcanza su mínimo. Si $u_i = u_j$ con $1 \leq i < j < k$, entonces la longitud de la unión del uu_i -camino y el u_jv -camino, es más corta que $l(\overline{\mathcal{W}})$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\overline{\mathcal{W}}$ es una trayectoria. ■

Corolario 1.1 *Dada una digráfica D sin lazos; si contiene un uu -camino cerrado con longitud $k > 0$, entonces D tiene un ciclo que contiene a u .*

Proposición 1.1.1 $g(D) - 1 \leq d(D)$.

Demostración.

Sea $C = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = x_0)$ un ciclo de longitud $g(D)$. Para cada par $x_i, x_j \in V(C)$, con $i < j$, la longitud de cualquier $x_i x_j$ -trayectoria es al menos $j - i$, pues si hubiera una $x_i x_j$ -trayectoria $x_i, y_1, \dots, y_s, x_j$ de menor longitud, entonces $x_0, x_1, \dots, x_i, y_1, \dots, y_s, x_j$ sería un camino cerrado que contendría un ciclo de longitud menor que $g(D)$, lo cual no puede ser.

Así $d(D) \geq d(x_0, x_{n-1}) = g(D) - 1$. ■

Proposición 1.1.2 *Dada una digráfica simple D , si $\delta^+(D) \geq 1$, entonces D tiene un ciclo dirigido.*

Demostración.

Sea $\mathcal{T} = (u_0, u_1, \dots, u_n)$, una trayectoria de longitud máxima en D . Como $\delta^+(u_n) \geq 1$, se tiene que existe $v \in N^+(u_n)$. Si $v \notin V(\mathcal{T})$, entonces $\mathcal{T}' = (u_0, u_1, \dots, u_n, v)$ es una trayectoria más larga lo cual sería una contradicción a la elección de $\mathcal{T}$, por lo que $v = u_i$ para algún $i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, entonces $\mathcal{C} = (u_i, u_{i+1}, \dots, u_n, v = u_i)$ es un ciclo dirigido de D . ■

Capítulo 2

Resultados parciales

En este capítulo se presentan algunos resultados referentes a la conjetura de Caccetta y Häggqvist, a la cual de aquí en adelante se nombrará como la Conjetura.

2.1. ¿Cómo sería un contraejemplo?

Antes de pasar a los resultados, considere lo siguiente. Sea D una digráfica con n vértices, tal que $\delta^+(D) \geq r$, donde r es el exgrado más pequeño para el cual la Conjetura no es válida.

Observe que $r \geq 2$ pues para $r = 1$ la Conjetura es cierta por la Proposición 1.1.2, dado que si $\delta^+(D) \geq 1$, existe un ciclo el cual tiene longitud a lo más $n = \frac{n}{r}$.

Sea $t = \left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil$ y $g(D) > t$. Removiendo flechas de ser necesario, puede suponer que $\delta^+(v) = r$ para todo $v \in V(D)$.

Afirmación 2.0.1

$$\begin{aligned} \text{Existe un vértice } x_0 \in V(D), \text{ tal que } |N_i^+(x_0)| < ir \\ \text{para algún } i \leq \left\lceil \frac{1}{2}t \right\rceil. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Demostración.

Suponga lo contrario, es decir, que para todo vértice $x \in V(D)$ se satisface que $|N_i^+(x)| \geq ir$ para cualquier $i \leq \left\lceil \frac{1}{2}t \right\rceil$. En particular, $|N_{\lceil \frac{1}{2}t \rceil}^+(x)| \geq \left\lceil \frac{1}{2}t \right\rceil r$ y

$$|N_{\lfloor \frac{1}{2}t \rfloor}^+(x)| \geq \left\lfloor \frac{1}{2}t \right\rfloor r, \text{ para cualquier v\u00e9rtice.}$$

Se define la digr\u00e1fica $D' = (V(D'), F(D'))$, tal que

$$V(D') = V(D) \text{ y } (x, y) \in F(D') \text{ si y solo si } y \in N_{\lfloor \frac{1}{2}t \rfloor}^+(x).$$

Por construcci\u00f3n de D' , para cualquier $x \in V(D')$ se tiene que

$$\delta_{D'}^+(x) = |N_{\lfloor \frac{1}{2}t \rfloor}^+(x)| \geq \left\lfloor \frac{1}{2}t \right\rfloor r.$$

Por la Proposici\u00f3n 1.0.1 se sabe que

$$|F(D')| = \sum_{x \in V(D')} \delta_{D'}^-(x) = \sum_{x \in V(D')} \delta_{D'}^+(x) \geq \sum_{x \in V(D')} \left\lfloor \frac{1}{2}t \right\rfloor r = n \left\lfloor \frac{1}{2}t \right\rfloor r.$$

Un argumento de promedio asegura la existencia de $y \in V(D')$, tal que $\delta_{D'}^-(y) \geq \left\lfloor \frac{1}{2}t \right\rfloor r$. De la definici\u00f3n $w \in N_{D'}^-(y)$ si y solo si $y \in N_{\lfloor \frac{1}{2}t \rfloor}^+(w)$ en D , es decir,

$$w \in N_{\lfloor \frac{1}{2}t \rfloor}^-(y). \text{ Por lo tanto, } |N_{\lfloor \frac{1}{2}t \rfloor}^-(y)| \geq \left\lfloor \frac{1}{2}t \right\rfloor r \text{ en } D.$$

Se sigue de la observaci\u00f3n anterior e hip\u00f3tesis que

$$|N_{\lfloor \frac{1}{2}t \rfloor}^-(y)| + |N_{\lfloor \frac{1}{2}t \rfloor}^+(y)| \geq \left\lfloor \frac{1}{2}t \right\rfloor r + \left\lfloor \frac{1}{2}t \right\rfloor r = tr \geq n.$$

Como $y \notin N_{\lfloor \frac{1}{2}t \rfloor}^-(y) \cap N_{\lfloor \frac{1}{2}t \rfloor}^+(y)$, existe un v\u00e9rtice $w \in V(D)$, tal que $w \in N_{\lfloor \frac{1}{2}t \rfloor}^+(y) \cap N_{\lfloor \frac{1}{2}t \rfloor}^-(y)$ y $w \neq y$. En otras palabras,

$$\text{dist}(y, w) + \text{dist}(w, y) \leq \left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor = t,$$

es decir, hay un ciclo de longitud menor o igual a t , lo cual es una contradicci\u00f3n pues D es un contraejemplo de la Conjetura. ■

En lo siguiente, sea i el entero m\u00e1s peque\u00f1o para el cual la Afirmaci\u00f3n 2.0.1 es v\u00e1lida para alg\u00fan v\u00e9rtice $x_0 \in V(D)$.

Afirmaci\u00f3n 2.0.2 $\frac{1}{2}r < |S_i^+(x_0)| < r$.

Demostración.

Por definición $|N_{i-1}^+(x_0)| + |S_i^+(x_0)| = |N_i^+(x_0)| < ir$. Si $|S_i^+(x_0)| \geq r$, entonces $|N_{i-1}^+(x_0)| < (i-1)r$, lo cual es una contradicción a la minimalidad de i . Por lo tanto $|S_i^+(x_0)| < r$.

Para probar la otra desigualdad, sean $k = |S_i^+(x_0)|$ y F la subdigráfica de D inducida por $N_{i-1}^+(x_0)$. Note que cada vértice en $V(F)$ tiene exgrado al menos $r - k$, como r es el exgrado más chico para el cual la Conjetura no se cumple, entonces en F hay un ciclo de longitud a lo más $t' = \frac{|V(F)|}{r - k}$ y además $t' > t$. Por definición de F , se tiene que

$$|V(F)| = |N_i^+(x_0)| - k < \left\lceil \frac{1}{2}t \right\rceil r - k$$

y como $t' > t$ entonces

$$\frac{\left\lceil \frac{1}{2}t \right\rceil r - k}{r - k} > t.$$

Por otro lado, es fácil ver que

$$t \geq 2 \left\lceil \frac{1}{2}t \right\rceil - 1,$$

así

$$\frac{\left\lceil \frac{1}{2}t \right\rceil r - k}{r - k} > 2 \left\lceil \frac{1}{2}t \right\rceil - 1,$$

entonces

$$\left\lceil \frac{1}{2}t \right\rceil r - k > 2 \left\lceil \frac{1}{2}t \right\rceil r - r + k - 2 \left\lceil \frac{1}{2}t \right\rceil k,$$

por lo cual

$$2 \left\lceil \frac{1}{2}t \right\rceil k - 2k + r - \left\lceil \frac{1}{2}t \right\rceil r > 0.$$

Sea $a = k - \frac{1}{2}r$, como

$$2 \left\lceil \frac{1}{2}t \right\rceil k - 2k + r - \left\lceil \frac{1}{2}t \right\rceil r = 2 \left(\left\lceil \frac{1}{2}t \right\rceil - 1 \right) a,$$

entonces

$$2\left(\left\lceil \frac{1}{2}t \right\rceil - 1\right)a > 0.$$

Note que $\left\lceil \frac{1}{2}t \right\rceil - 1 \geq 0$, así $a > 0$, es decir, $k > \frac{1}{2}r$. ■

Afirmación 2.0.3 $|S_{i-1}^+(x_0)| + |S_i^+(x_0)| < 2r$ y $|S_{i-1}^+(x_0)| < \left\lfloor \frac{3}{2}r \right\rfloor$.

Demostración.

Suponga que $|S_{i-1}^+(x_0)| + |S_i^+(x_0)| \geq 2r$. Por definición

$$|N_i^+(x_0)| = |N_{i-2}^+(x_0)| + |S_{i-1}^+(x_0)| + |S_i^+(x_0)| < ir,$$

entonces

$$|N_{i-2}^+(x_0)| < (i-2)r,$$

lo cual es una contradicción a la minimalidad de i . Así

$$|S_{i-1}^+(x_0)| + |S_i^+(x_0)| < 2r.$$

De lo anterior y la Afirmación 2.0.2 se tiene que

$$|S_{i-1}^+(x_0)| < 2r - |S_i^+(x_0)| < 2r - \frac{1}{2}r = \frac{3}{2}r.$$

Como $2r - |S_i^+(x_0)|$ es un número natural, entonces

$$|S_{i-1}^+(x_0)| < \left\lfloor \frac{3}{2}r \right\rfloor.$$

■

Afirmación 2.0.4 D contiene un ciclo de longitud a lo más

$$\left\lceil \frac{|N_{i-1}^+(x_0)|}{r} \right\rceil + |S_{i-1}^+(x_0)|$$

Demostración.

Si en $S_{i-1}^+(x_0)$ hay un ciclo, entonces la longitud del mismo es a lo más $|S_{i-1}^+(x_0)|$, satisfaciendo trivialmente la Afirmación 2.0.4. Por tanto se puede suponer que $S_{i-1}(x_0)$ es acíclica, lo cual implica que para cada vértice y en $S_{i-1}^+(x_0)$, existe una trayectoria en $S_{i-1}^+(x_0)$ a un vértice $y' \in S_{i-1}^+(x_0)$, tal que el exgrado de y' en $S_{i-1}^+(x_0)$ es cero, a saber una trayectoria maximal. Como $\delta^+(y') = r$ y $|S_i^+(x_0)| < r$, entonces existe al menos un vértice $y'' \in N_{i-2}^+(x_0)$, tal que $y'y'' \in F(D)$.

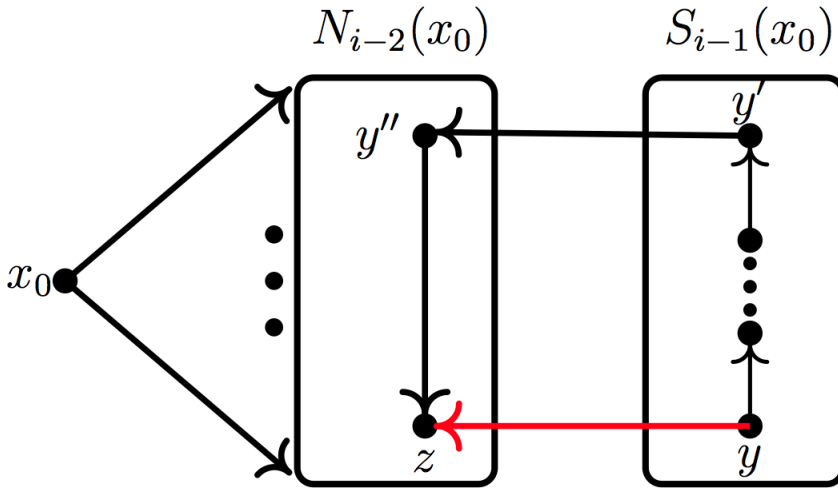


Figura 2.1: H

Sea H la digráfica cuyo conjunto de vértices es $N_{i-1}^+(x_0)$ y sus flechas se obtienen de la siguiente manera (Ver Figura 2.1) :

1. Se conservan todas las flechas uv de D con $u, v \in N_{i-1}^+(x_0)$.
2. Para cada vértice y en $S_{i-1}^+(x_0)$ se encuentra el vértice y'' y se agrega una nueva flecha yz siempre y cuando $y''z$ sea una flecha de D .

Note que si $y \in N_{i-2}^+(x_0)$, entonces $N^+(y) \subset N_{i-1}^+(x_0)$, por lo que $\delta_H^+(y) = r$. Por construcción de H , si $y \in S_{i-1}^+(x_0)$, entonces $\delta_H^+(y) \geq r$, pues para cada y'' existen exactamente r vértices, tales que $y''z \in F(D)$, a saber los vértices que están en $N^+(y'') \subset N_{i-2}^+(x_0)$, es decir, se agregan r flechas para cada $y \in S_{i-1}^+(x_0)$, así $\delta^+(H) \geq r$.

Por la minimalidad de D , H satisface la Conjetura, es decir, contiene un ciclo C de longitud a lo más $\left\lceil \frac{|V(H)|}{r} \right\rceil = \left\lceil \frac{|N_{i-1}^+(x_0)|}{r} \right\rceil$. Se reemplaza cada flecha yz en C con $y \in S_{i-1}(x_0)$ por una trayectoria T de y a z en D , que pasa por y' e y'' , a saber la trayectoria que existe de y a y' , unión la flecha $y'y''$ y la flecha $y'z$. Esto asegura la existencia de un camino cerrado C' en $N_{i-1}^+(x_0)$ y por tanto la existencia de un ciclo en $N_{i-1}^+(x_0)$.

Suponga que hay m vértices en $C \cap S_{i-1}(x_0)$ y sean $\{y_1, \dots, y_m\}$ dichos vértices, entonces

$$|C \cap N_{i-2}^+(x_0)| \leq \left\lceil \frac{N_{i-1}^+(x_0)}{r} \right\rceil - m.$$

Para cada y_j con $1 \leq j \leq m$, hay un vértice $y_j'' \in N_{i-2}^+(x_0)$. Note que al cambiar la flecha $y_j z$ por la trayectoria T , todos los vertices de dicha trayectoria están en $S_{i-1}^+(x_0)$ a excepción de los y_j'' , es decir, en C' se están agregando a lo más m vértices, en otras palabras

$$|C' \cap N_{i-2}^+(x_0)| \leq \left\lceil \frac{N_{i-1}^+(x_0)}{r} \right\rceil.$$

Por lo tanto, C' contiene un ciclo de longitud a lo más

$$\left\lceil \frac{|N_{i-1}^+(x_0)|}{r} \right\rceil + |S_{i-1}^+(x_0)|,$$

lo cual prueba la Afirmación 2.0.4. ■

Como $N_{i-1}^+(x_0) \leq N_i^+(x_0) < r \left\lceil \frac{1}{2}r \right\rceil$, se tiene que $\left\lceil \frac{|N_{i-1}^+(x_0)|}{r} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{1}{2}r \right\rceil$. Así de la Afirmación 2.0.3 y 2.0.4, se concluye que D contiene un ciclo de longitud a lo más

$$\left\lceil \frac{1}{2}t \right\rceil + \left\lceil \frac{3}{2}r \right\rceil, \quad (2.2)$$

y como D es contraejemplo a la Conjetura, entonces

$$t = \left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil < \left\lceil \frac{1}{2}t \right\rceil + |S_{i-1}(x_0)| \leq \left\lceil \frac{1}{2}t \right\rceil + \left\lceil \frac{3}{2}r \right\rceil \quad (2.3)$$

El siguiente teorema muestra que si la Conjetura es falsa, el conjunto de contra-

ejemplos para la r más chica es un conjunto finito.

Teorema 2.1 [4] *Sea D una digráfica simple, tal que $|V(D)| = n$ y $\delta^+(D) \geq r$. Si D no satisface la Conjetura y r es el mínimo exgrado para el cual la Conjetura no es válida, se satisface que $n \leq 3r^2$.*

Demostración. Sea D una digráfica, tal que $\delta^+(D) = r$ y donde la Conjetura no se cumple, siendo r el exgrado más pequeño para el cual la Conjetura no es válida. Por (2.2), D contiene un ciclo de longitud a lo más $\left\lceil \frac{1}{2}t \right\rceil + \left\lfloor \frac{3}{2}r \right\rfloor$, y como D es contraejemplo a la Conjetura, de (2.3), se sigue que

$$t = \left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil < \left\lceil \frac{1}{2}t \right\rceil + |S_{i-1}(x)| \leq \left\lceil \frac{1}{2}t \right\rceil + \left\lfloor \frac{3}{2}r \right\rfloor$$

o bien

$$t = \left\lceil \frac{1}{2}t \right\rceil + \left\lfloor \frac{1}{2}t \right\rfloor < \left\lceil \frac{1}{2}t \right\rceil + \left\lfloor \frac{3}{2}r \right\rfloor,$$

por lo que

$$\left\lfloor \frac{1}{2}t \right\rfloor < \left\lfloor \frac{3}{2}r \right\rfloor \leq \frac{3}{2}r.$$

1. Si t es par, entonces $\left\lceil \frac{1}{2}t \right\rceil = \frac{1}{2}t = \frac{1}{2} \left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil \geq \frac{1}{2} \frac{n}{r}$, por lo que $\frac{n}{2r} < \frac{3}{2}r$, es decir, $n < 3r^2$.
2. Si t es impar, entonces $\left\lceil \frac{1}{2}t \right\rceil = \frac{1}{2}t - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil - \frac{1}{2}$, por lo que $\frac{1}{2} \left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil - \frac{1}{2} < \frac{3}{2}r$, con lo cual $\left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil - 1 < 3r$, entonces $\left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil \leq 3r$. Por lo tanto $n \leq 3r^2$.

Por 1 y 2 se concluye que $n \leq 3r^2$. ■

2.2. $r = 1, 2, 3, 4, 5$

Se demostrará que la Conjetura es cierta para $r \leq 4$, y se dará un esbozo de la prueba para el caso $r = 5$.

Teorema 2.2 [4] *Sea D una digráfica simple, tal que $|V(D)| = n$ y $\delta^+(D) \geq r$. Si $1 \leq r \leq 5$, entonces D cumple la Conjetura.*

Demostración.**Caso 2.2.1** $r = 1$.

La Proposición 1.1.2 implica que D tiene un ciclo de longitud a lo más $n = \left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil$.

Caso 2.2.2 $r = 2$.

Sea D una digráfica, tal que $\delta^+(D) = 2$ y donde la Conjetura no se cumple, como dos sería la r más pequeña para la cual la Conjetura no es cierta, es válida la Afirmación 2.0.2, entonces existe un vértice $x_0 \in V(D)$ y un entero i , tal que $\frac{1}{2}r < |S_i(x_0)| < r$, es decir, $1 < |S_i(x_0)| < 2$, lo cual es una contradicción ya que $|S_i(x_0)|$ es entero. Por lo tanto, la Conjetura es válida para $r = 2$.

Caso 2.2.3 $r = 3$.

Sea D un contraejemplo de la Conjetura para $r = 3$. Sea $|V(D)| = n$ y $t = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$.

Las Afirmaciones 2.0.2 y 2.0.3 implican que existe un vértice $x_0 \in V(D)$ y un entero i , tal que $|S_i^+(x_0)| = 2$ y $|S_{i-1}^+(x_0)| \leq 3$.

Como $r = 3$, es el exgrado más chico para el cual la Conjetura no se cumple, $|V(D)| \leq 3r^2 = 27$. Si $n = 16, 17, \dots, 27$, entonces $t = 6, 7, 8, 9$, pero $|S_{i-1}^+(x_0)| \leq 3$. Se puede ver que de lo anterior se contradice a la desigualdad (2.3). Basta probar así para $n \leq 15$ y $t = 1, 2, 3, 4, 5$.

Removiendo flechas se puede suponer que D es 3-regular, es decir, $|N^+(x)| = 3$ para todo $x \in V(D)$. Un argumento de promedio asegura la existencia de $x_1 \in V(D)$, tal que $|N^-(x_1)| \geq 3$. Como la digráfica inducida por $N^+(x_1)$ es acíclica, $N^+(y) \cap N^+(x_1) = \emptyset$ para algún $y \in N^+(x_1)$, por otro lado $N^+(y) \cap N^-(x_0) = \emptyset$, pues D es un contraejemplo a la Conjetura. Por lo tanto D tiene al menos 10 vértices y a lo más 15.

Por la observación anterior, resta probar los casos $t = 4, 5$. Sea x_0 el vértice que satisface la Afirmación 2.0.1. Note que $i \leq 3$.

- Si $n = 10, 11, 12$,

entonces $i \leq 2$ y $t \leq 4$. Como $|S_i^+(x_0)| = 2$ y $|S_1^+(x_0)| = 3$, entonces $i = 2$. La Afirmación 2.0.4 implica que D tiene un ciclo de longitud a lo más $\left\lceil \frac{|N^+(x_0)|}{3} \right\rceil + |S^+(x_0)^+| = 4$. Por lo tanto, la Conjetura es válida.

■ Si $n = 13, 14, 15$.

Si $i = 2$, por la Afirmación 2.0.4, D tiene un ciclo de longitud a lo más $\left\lceil \frac{|N_1^+(x_0)|}{r} \right\rceil + |S_1^+(x_0)| = \left\lceil \frac{r}{r} \right\rceil + |r| = 4 < \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil = 5$, por lo cual la Conjetura es válida.

Suponga que $i = 3$.

Por la Afirmación 2.0.3, se tiene que $|S_2(x_0)| = |S_{i-1}(x_0)| \leq 3$ y como D no tiene triángulos dirigidos, entonces existe $v \in S_1^+(x_0)$, tal que $\delta_{D([S_1(x)])}^+(v) = 0$ y así $|S_2(x)| = 3$.

Por otro lado, de la Afirmación 2.0.2 se tiene que $|S_3^+(x_0)| = 2$ y así $|N_3^+(x_0)| \leq 8$, de donde $|N_2^+(x)| = 6$. Así, la Afirmación 2.0.4 implica que hay un ciclo de longitud a lo más 5, con lo cual se cumple la Conjetura.

Caso 2.2.4 $r = 4$.

Suponga que la Conjetura no se cumple para $r = 4$.

Sea D la digráfica más pequeña con exgrado 4 para la cual la Conjetura es falsa. Sea $|V(D)| = n$ y $t = \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil$. Es fácil ver que para que la digráfica sea simple y $\delta^+(x) \geq 4$, para todo $x \in V(D)$, la digráfica debe tener al menos 9 vértices, entonces $n \geq 9$ y $t \geq 3$.

Sea $x \in V(D)$ e $i \leq \left\lceil \frac{1}{2}t \right\rceil$ el más pequeño entero que satisface la Afirmación 2.0.1, es decir, $|N_i^+(x)| < 4i$. Por la Afirmación 2.0.2, $\frac{4}{2} < |S_i^+(x)| < 4$, de donde $|S_i^+(x)| = 3$. Como $|N_{i-1}^+(x)| = |N_i^+(x)| - |S_i^+(x)|$, entonces $|N_{i-1}^+(x)| < 4i - 3$ y así

$$|N_{i-1}^+(x)| \leq 4(i-1) \leq 4\left(\left\lceil \frac{1}{2}t \right\rceil - 1\right).$$

De la Afirmación 2.0.4, se tiene que D tiene un ciclo de longitud a lo más

$$\begin{aligned} \lceil \frac{|N_{i-1}^+(x)|}{4} \rceil + |S_{i-1}(x)| &\leq \left\lceil \frac{4(\lceil \frac{1}{2}t \rceil - 1)}{4} \right\rceil + |S_{i-1}(x)| \\ &= \left\lceil \frac{1}{2}t \right\rceil - 1 + |S_{i-1}(x)|. \end{aligned}$$

De la Afirmación 2.0.3, $|S_i(x)| + |S_{i-1}(x)| < 2r = 8$, pero $|S_i(x)| = 3$, entonces $|S_{i-1}(x)| \leq 4$ lo cual implica que

$$\left\lceil \frac{|N_{i-1}^+(x)|}{4} \right\rceil + |S_{i-1}(x)| \leq \left\lceil \frac{1}{2}t \right\rceil + 3,$$

y así D tiene un ciclo de longitud a lo más $\lceil \frac{1}{2}t \rceil + 3$. Sea $t' = \lceil \frac{1}{2}t \rceil + 3$. Por hipótesis se cumple que $t < t'$.

■ $t > 5$.

Si t es impar, entonces $\lceil \frac{1}{2}t \rceil = \frac{1}{2}(t+1)$ y así $t' = \frac{1}{2}(t+1) + 3$, pero $t < \frac{1}{2}(t+1) + 3$ lo cual implica que $t < 7$; mientras que si t es par $\lceil \frac{1}{2}t \rceil = \frac{1}{2}t$, o bien $t' = \frac{1}{2}t + 3$ y $t < \frac{1}{2}t + 3$ de donde $t < 6$. Ambos casos contradicen el hecho que $t > 5$.

Resta ver los casos para $t = 3, 4, 5$.

■ Si $t = 3$.

Suponga que la Conjetura es falsa para $t = 3$, lo cual quiere decir que existe una digráfica D de orden entre 9 y 12, tal que $\delta^+(D) \geq 4$ y no contiene triángulos dirigidos. Removiendo flechas se puede suponer que $\delta^+(v) = 4$ para cada $v \in V(D)$. El no tener triángulos dirigidos equivale a decir que $S_2^+(x) \cap N^-(x) = \emptyset$ para todo $x \in V(D)$. Si $y \in N^+(x)$, entonces y no puede ser invecino a ningún vértice en $N^-(x)$, además y no es invecino a x porque D es simple. Como $\delta^+(y) = 4$ para cada $y \in N^+(x)$, se sigue que y debe ser invecino a vértices en $N^+(x)$ ó en $S_2^+(x)$.

Por la Proposición 1.0.1 se sabe que $\sum_{v \in V(D)} \delta^+(v) = \sum_{v \in V(D)} \delta^-(v)$. Un argumento de promedio asegura la existencia de un vértice v , tal que $\delta^-(v) \geq 4$. Sea x dicho vértice, como el orden de D es a lo más 12, $|S_2^+(x)| \leq 3$.

El hecho que D sea 4-regular implica que si $y \in N^+(x)$, entonces y es invecino a vértices en $N^+(x)$.

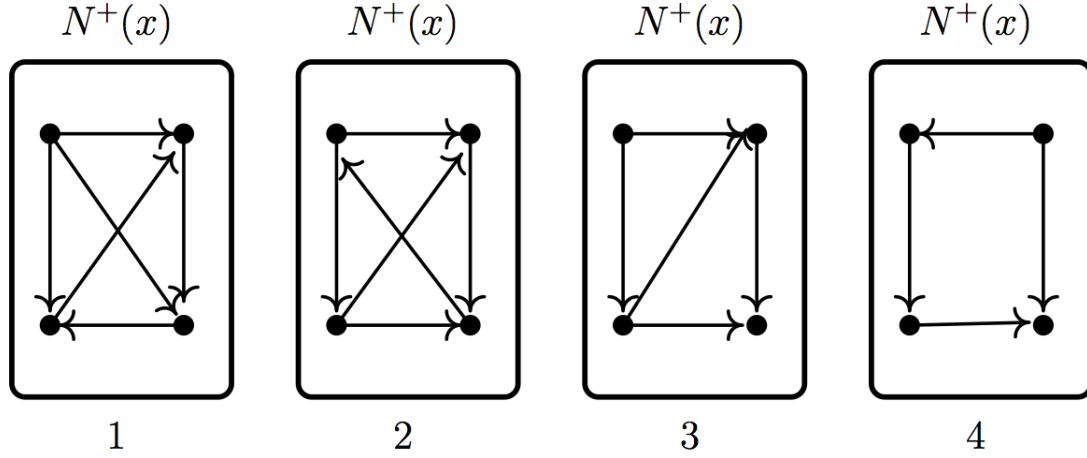


Figura 2.2: Casos

Se tienen los siguientes casos: (ver figura 2.2) hay 1 vértice $y \in N^+(x)$, tal que $\delta^+(y) = 3$ en $N^+(x)$ y los otros tres con exgrado uno; dos vértices en $N^+(x)$ con exgrado dos y el resto con exgrado 1, un vértice en $N^+(x)$ con exgrado 2 y el resto con exgrado 1. Por último los cuatro vértices con exgrado uno en $N^+(x)$.

Como muestra la Figura 2.2, si no hay triángulos dirigidos, el único caso posible es el último, por lo que en $N^+(x)$ hay un ciclo de longitud 4 y $|S_2^+(x)| = 3$, más aún

$$\text{si } u \in N^+(x) \text{ y } v \in S_2^+(x) \text{ ,siempre existe la flecha } (u, v). \quad (2.4)$$

Como $|S_2^+(x)| = 3$, $S_2^+(x)$ es acíclica, es decir, existe $\hat{x} \in S_2^+(x)$ con $\delta_{D(S_2^+(x))}^+(\hat{x}) = 0$, y dado que $\hat{x}$ es exvecino de cada vértice en $N^+(x)$, $\hat{x}$ solo puede ser invecino de los vértices que están en $N^-(x)$, como $|N^-(x)| = 4$ y $\delta^+(\hat{x}) = 4$, entonces

$$\text{si } y \in N^-(x) \text{ ,entonces } (\hat{x}, y) \in F(D). \quad (2.5)$$

(2.4) y (2.5) implican que si $u \in N^-(x)$ no puede ser invecino de algún vértice $v \in N^+(x)$ pues se formaría el triángulo dirigido $\{u, v, \hat{x}, u\}$, lo cual implica que la subdigráfica inducida por $S_2^+(x) \cup N^-(x)$, tiene exgrado mínimo al menos 3 y tiene 7 vértices. Del caso anterior se sigue que en la subdigráfica inducida por $S_2^+(x) \cup N^-(x)$

hay un ciclo de longitud 3, lo cual es una contradicción.

- Si $t = 4$.

Sea D un contraejemplo para $t = 4$ y sean x e i como en la Afirmación 2.0.1. Como $t = 4$, se sigue $i = 2$, así $|N_2^+(x)| < 8$. De la Afirmación 2.0.2, $|S_2^+(x)| = 3$, así cada vértice de la subdigráfica inducida por $N_1^+(x)$ tiene exgrado mínimo al menos uno, entonces existe un ciclo de longitud a lo más 4, lo cual es una contradicción.

- Si $t = 5$.

Sea D un contraejemplo de la Conjetura para $t = 5$, es decir, todos los ciclos en D son de longitud mayor a 5. Sea i y x como en la Afirmación 2.0.1, entonces $i \leq 3$.

Si $i = 2$, se tiene que $|N_2^+(x)| \leq 7$ y como $|N_1^+(x)| = 4$, entonces $|S_2^+(x)| = 3$, así la subdigráfica inducida por $N_1^+(x)$ tiene exgrado al menos 1. Por lo tanto, hay un ciclo de longitud a lo más 4 en la subdigráfica inducida por $N_1^+(x)$, lo cual es una contradicción.

Si $i = 3$, entonces $|N_3^+(x)| \leq 11$. En la subdigráfica inducida por $N_1^+(x)$ no hay ciclos, lo cual implica la existencia de $v \in N_1^+(x)$, tal que $\delta_{D[N_1^+(x)]}(v) = 0$. Por tanto, $|S_2^+(x)| \geq 4$, y como $|S_3^+(x)| = 3$ se tiene que $|N_1^+(x)| = |S_2^+(x)| = 4$.

Sea D' la subdigráfica inducida por $N_2^+(x)$, note que como $|S_3^+(x)| = 3$ y $\delta(D') \geq 1$, existe un ciclo en D' . El ciclo más chico en D' tiene longitud mayor que 5, como $|S_2^+(x)| = 4$, existe $u \in N_1^+(x)$ en el ciclo y como $\delta_{D'}^+(u) = 4$ y u no puede ser invecino a más de un vértice en el ciclo, pues se formaría uno más pequeño, u debe ser invecino a 3 vértices que no están en el ciclo, pero a lo más hay 2 vértices que no están en el ciclo, lo cual es una contradicción.

Caso 2.2.5 $r = 5$

Sea D un contraejemplo de la Conjetura, donde $\delta^+(D) = 5$. Las Afirmaciones 2.0.2 y 2.0.3 implican que existe un vértice $x \in V(D)$ y un entero i , tal que $3 \leq |S_i(x)| \leq 4$ y $|S_{i-1}(x)| \leq 6$. De la Afirmación 2.0.4, $t < \lceil \frac{1}{2}t \rceil + |S_{i-1}(x)|$. Por lo tanto, $t < \lceil \frac{1}{2}t \rceil + 6$ de donde se sigue que $t \leq 11$, lo cual ocurre si $n \leq 55$, es decir, basta ver que la Conjetura vale para todas las digráficas con menos de 55 vértices.

La prueba es muy similar a los casos anteriores, pero mucho mas larga y tediosa.

■

2.3. Una cota más

A continuación se presentan teoremas donde se muestran algunas de las relaciones que existen entre el diámetro y el cuello de una digráfica. Un corolario de estos teoremas es la validez de la Conjetura cuando $r \leq \sqrt{\frac{n}{2}}$.

Teorema 2.3 [6] *Sea D una digráfica fuertemente conexa, tal que $|V(D)| = n$, con cuello g y diámetro d . Sea $t = |\{x \in V(D) : \delta^+(x) = 1\}|$, entonces $d \leq n - g + t$.*

Demostración.

Para cada $x \in V(D)$, sea $D_0(x) = \{x\}$ y $D_i^+(x) = \widehat{N}_i^+(x) \setminus \widehat{N}_{i-1}^+(x)$ para toda $i \geq 1$. Cualquier digráfica D claramente satisface

$$g - 1 \leq d \leq n - 1. \quad (2.6)$$

Si $t > g - 2$, entonces $t - g \geq -1$, por lo que $n + t - g \geq n - 1 \geq d$, es decir, se satisface el Teorema 2.3.

Suponga que $t \leq g - 2$. Sea D un contraejemplo para el Teorema 2.3 con el mínimo número de vértices. Se define $T(D) = \{x \in V(D) : \delta^+(x) = 1\}$ y $t = |T(D)|$.

Afirmación 2.3.1 *Sea $x \in V(D)$. Si $|\widehat{N}_i^+(x)| \leq 2g - t - 3$ y $D_{i+1}^+(x) = \{y\}$ para algún i , tal que $0 \leq i \leq g - 2$, entonces $|D_i^+(x)| \geq 3$ ó $R_1^-(y) \cap D_i^+(x) \cap T(D) \neq \emptyset$.*

Demostración.

Suponga lo contrario, es decir, existe $x \in V(D)$, tal que $|\widehat{N}_i^+(x)| \leq 2g - t - 3$, $D_{i+1}^+(x) = \{y\}$ para algún $0 \leq i \leq g - 2$ y

$$|D_i^+(x)| \leq 2 \text{ y } R_1^-(y) \cap D_i^+(x) \cap T(D) = \emptyset.$$

Sea $u \in R_1^-(y)$. Si $u \in R_1^-(y) \cap D_i^+(x)$, entonces $u \notin T(D)$, como $u \in R_1^-(y)$ y $u \notin T(D)$, $\delta^+(u) \geq 2$, y en particular

$$u \in D_i^+(x) = \widehat{N}_i^+(x) \setminus \widehat{N}_{i-1}^+(x),$$

es decir, existe al menos un arco a un vértice de $\widehat{N}_i^+(x)$.

Sea

$$X = \bigcup_{j=1}^i R_j^+(x).$$

Se puede suponer que no existen flechas de $w \in X$ a x , pues en caso contrario D tendría un camino cerrado, el cual contiene un ciclo de longitud menor o igual a $i + 1 \leq g - 1$, esto es una contradicción.

Sea $D[X]$ la subdigráfica de D inducida por X . De lo anterior $\delta^+(D[X]) \geq 1$. Sea C una componente fuertemente conexa de $D[X]$, tal que no existen arcos de C a $D[X] \setminus C$.

Por definición se satisface

$$\begin{aligned} \delta^+(C) &\geq 1; \\ n(C) &\leq |X| = |\hat{N}_i^+(x)| - 1 \leq 2g - t - 4; \\ g(C) &\geq g; \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$|T(C)| \leq |T[D(X)]| \leq t \leq t + |D_i^+(x)| \leq t + 2. \tag{2.8}$$

De (2.6), $g(C) - 1 \leq d(C)$ y por la minimalidad de D , C no es un contraejemplo para el Teorema 2.3. Así (2.7) y (2.8) implican que

$$\begin{aligned} d(C) &\leq n(C) - g(C) + t(C) \\ &\leq (2g - t - 4) - g(C) + (t + 2) \\ &= 2g - 2 - g(C). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$d(C) \leq 2g - 2 - g(C).$$

Por otro lado

$$g(C) - 1 \leq d(C) \leq 2g - 2 - g(C),$$

así

$$g(C) \leq g - \frac{1}{2} < g,$$

lo cual es una contradicción. ■

Afirmación 2.3.2 Sea $x \in V(D)$. Si $|\widehat{N}_i^+(x)| \leq 2g - t - 3$, $D_{i+1}^+(x) = \{y_1\}$ y $D_{j+1}^+(x) = \{y_2\}$ para algún i y algún j , donde $j < i \leq g - 2$, entonces $R_1^-(y_1) \cap R_1^-(y_2) \cap T(D) = \emptyset$.

Demostración.

Suponga lo contrario. Sea $u \in R_1^-(y_1) \cap R_1^-(y_2) \cap T(D)$, entonces $uy_1, uy_2 \in F(D)$. Como $u \in T(D)$, se tiene que $\delta^+(u) = 1$, lo cual implica que $y_1 = y_2$. Como $D_{i+1}^+(x) = \{y_2\}$, entonces $y_2 \in \widehat{N}_{i+1}^+(x)$ y $y_2 \notin \widehat{N}_i^+(x)$. Por hipótesis $j < i$, es decir, $j + 1 \leq i$ y por tanto $y_1 = y_2 \in \widehat{N}_{j+1}^+(x) \subseteq \widehat{N}_i^+(x)$, lo cual es una contradicción. ■

Afirmación 2.3.3 Para cada $x \in V(D)$, $|\widehat{N}_{g-1}^+(x)| \geq 2g - t - 1$.

Demostración.

Suponga lo contrario, es decir, existe $x \in V(D)$, tal que $|\widehat{N}_{g-1}^+(x)| \leq 2g - t - 2$. Si $D_{g-1}^+(x) = \emptyset$, entonces $\widehat{N}_{g-1}^+(x) \subseteq \widehat{N}_{g-2}^+(x)$, esto implica que D contiene un ciclo de longitud a lo más $g - 1$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $D_{g-1}^+(x) \neq \emptyset$.

Como $\widehat{N}_i^+(x) = \widehat{N}_{i-1}^+(x) \cup D_i^+(x)$ y $\widehat{N}_{i-1}^+(x) \cap D_i^+(x) = \emptyset$, entonces

$$|\widehat{N}_{g-2}^+(x)| = |\widehat{N}_{g-1}^+(x)| - |D_{g-1}^+(x)| \leq 2g - t - 3,$$

pues por hipótesis $|\widehat{N}_{g-1}^+(x)| \leq 2g - t - 2$ y como $D_{g-1}^+(x) \neq \emptyset$, entonces $|D_{g-1}^+(x)| \geq 1$.

Se definen los siguientes conjuntos

$$I_1 = \{1 \leq i \leq g - 1 : |D_i^+(x)| = 1 \text{ y } |D_{i-1}^+(x)| \geq 3\},$$

$$I_2 = \{i : i + 1 \in I_1\},$$

$$I_3 = \{1 \leq i \leq g - 1 : |D_i^+(x)| = 1 \text{ y } |D_{i-1}^+(x)| \leq 2\},$$

$$I_4 = \{1, 2, 3, \dots, g - 1\} \setminus (I_1 \cup I_2 \cup I_3),$$

$$I_5 = \{1 \leq i \leq g - 1 : |D_i^+(x)| = 1 \text{ y } R_1^-(D_i^+(x)) \cap D_{i-1}^+(x) \cap T(D) \neq \emptyset\}.$$

Si $|D_i^+(x)| = 2$, entonces es claro que $i \notin I_1, I_2, I_3$. Por lo tanto, $i \in I_4$.

Si $|D_i^+(x)| \geq 3$, entonces $i \in I_2$, y observe que $|I_1| = |I_2|$. Por definición I_1, I_2, I_3 e I_4 son ajenos entre si y satisfacen que $\bigcup_{1 \leq i \leq 4} I_i = \{1, 2, 3, \dots, g - 1\}$.

Sea $f : I_5 \rightarrow \{A : A \subset T(D)\}$, definida como

$$f(i) = R_1^-(D_i^+(x)) \cap D_{i-1}^+(x) \cap T(D).$$

Note que $f(i) \cap f(j) = \emptyset$ si $i \neq j$ pues

$$\begin{aligned} f(i) \cap f(j) &= (R_1^-(D_i^+(x)) \cap D_{i-1}^+(x) \cap T(D)) \cap (R_1^-(D_j^+(x)) \cap D_{j-1}^+(x) \cap T(D)) \\ &= (R_1^-(y_1) \cap D_{i-1}^+(x) \cap T(D)) \cap (R_1^-(y_2) \cap D_{j-1}^+(x) \cap T(D)) \\ &= (R_1^-(y_1) \cap R_1^-(y_2) \cap T(D)) \cap (D_{i-1}^+(x) \cap D_{j-1}^+(x)), \end{aligned}$$

donde $y_1 = D_i^+(x)$ y $y_2 = D_j^+(x)$. Por la Afirmación 2.3.2

$$R_1^-(y_1) \cap R_1^-(y_2) \cap T(D) = \emptyset, \text{ si } i \neq j.$$

Por lo tanto,

$$f(i) \cap f(j) = \emptyset \cap (D_{i-1}^+(x) \cap D_{j-1}^+(x)) = \emptyset, \text{ si } i \neq j.$$

Note que por la Afirmación 2.3.1, si $|\widehat{N}_{i-1}^+(x)| \leq 2g - t - 3$ y $D_i^+(x) = \{y\}$ para algún $i, 0 \leq i \leq g - 1$, entonces $|D_{i-1}^+(x)| \geq 3$ ó $R_1^-(y) \cap D_{i-1}^+(x) \cap T(D) \neq \emptyset$.

Sea $i \in I_3$, entonces $D_i^+(x) = 1$, por lo que $|\widehat{N}_{i-1}^+(x)| + 1 = |\widehat{N}_i^+(x)|$. Es claro que $|\widehat{N}_i^+(x)| \leq |\widehat{N}_{g-1}^+(x)|$ y por hipótesis $|\widehat{N}_{g-1}^+(x)| \leq 2g - t - 2$, de donde

$$|\widehat{N}_{i-1}^+(x)| + 1 = |\widehat{N}_i^+(x)| \leq |\widehat{N}_{g-1}^+(x)| \leq 2g - t - 2,$$

lo cual implica que $|\widehat{N}_{i-1}^+(x)| \leq 2g - t - 3$. Como las hipótesis de la Afirmación 2.3.1 se satisfacen, se tiene que

$$|D_{i-1}^+(x)| \geq 3 \text{ ó } R_1^-(y) \cap D_{i-1}^+(x) \cap T(D) \neq \emptyset,$$

donde $D_i^+(x) = \{y\}$; pero $|D_{i-1}^+(x)| \leq 2$, entonces

$$R_1^-(y) \cap D_{i-1}^+(x) \cap T(D) = R_1^-(D_i^+(x)) \cap D_{i-1}^+(x) \cap T(D) \neq \emptyset,$$

es decir, $i \in I_5$. Por lo tanto $I_3 \subseteq I_5$. De lo anterior

$$|I_3| \leq |I_5| \leq \sum_{i \in I_5} |f(i)| = \left| \bigcup_{i \in I_5} f(i) \right| \leq |T(D)| = t.$$

Recuerde que $\widehat{N}_i^+(x) = \widehat{N}_{i-1}^+(x) \cup D_i^+(x)$ con $\widehat{N}_{i-1}^+(x) \cap D_i^+(x) = \emptyset$ y por tanto $\widehat{N}_i^+(x) = \widehat{N}_0^+(x) \cup \bigcup_{1 \leq j \leq i} D_j^+(x)$, además $\widehat{N}_0^+(x) = R_0^+(x) = \{x\}$,

entonces

$$\begin{aligned}
|\widehat{N}_{g-1}^+(x)| &= 1 + \sum_{1 \leq i \leq g-1} |D_i^+(x)| \\
&= 1 + \sum_{i \in I_1} |D_i^+(x)| + \sum_{i \in I_2} |D_i^+(x)| + \sum_{i \in I_3} |D_i^+(x)| + \sum_{i \in I_4} |D_i^+(x)| \\
&= 1 + \sum_{i \in I_1} (|D_i^+(x)| + |D_{i-1}^+(x)|) + \sum_{i \in I_3} |D_i^+(x)| + \sum_{i \in I_4} |D_i^+(x)| \\
&\geq 1 + \sum_{i \in I_1} 4 + \sum_{i \in I_3} 1 + \sum_{i \in I_4} 2 \\
&= 1 + 4|I_1| + |I_3| + 2|I_4| \\
&= 1 + 2(|I_1| + |I_2| + |I_3| + |I_4|) - |I_3| \\
&= 1 + 2(g-1) - |I_3| \geq 1 + 2(g-1) - t \\
&= 2g - t - 1.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $|\widehat{N}_{g-1}^+(x)| \geq 2g - t - 1$, lo cual es una contradicción, así la afirmación es válida. ■

Se sabe que para cada $x \in V(D)$, $n \geq |\widehat{N}_{g-1}^+(x)|$ y de la afirmación anterior $n \geq |\widehat{N}_{g-1}^+(x)| \geq 2g - t - 1$, entonces $n - g + t \geq g - 1$, como D es fuertemente conexa, se tiene que para cualquier par de vértices existe un camino entre ellos.

Sea $x \in V(D)$, tal que $R_D^+(x) \neq \emptyset$, como $d > n - g + t$, entonces

$$|\widehat{N}_d^+(x)| > |\widehat{N}_{g-1}^+(x)| + (n - g + t) - (g - 1) \geq 2g - t - 1 + n - g + t - (g - 1) = n,$$

lo cual es una contradicción, por lo que $d \leq n - g + t$. ■

Corolario 2.4 *Si D es fuertemente conexa con $\delta^+(D) = 2$, entonces $d \leq n - g$.*

Demostración.

Como $\delta^+(D) = 2$, entonces $\delta^+(x) \geq 2$ para todo $x \in V(D)$. Por lo tanto, $t = 0$ y del teorema anterior $d \leq n - g + t = n - g$. ■

Dada una digráfica D , sea $t(D) = \{x \in V(D) : \delta^+(x) = 1\}$.

Teorema 2.5 [6] *Sea D una digráfica de orden n y cuello g con $\delta^+(D) \geq 1$, entonces*

$$g \leq \begin{cases} \lceil \frac{n}{2} \rceil & \text{si } |t(D)| = 0; \\ \lceil \frac{n + |t(D)| - 1}{2} \rceil & \text{si } |t(D)| \geq 1; \\ n & \text{si } |t(D)| = n. \end{cases}$$

Demostración.

Sea $|t(D)| = t$. Si $t = n$ el resultado se sigue de la Proposición 1.1.2. Sin pérdida de generalidad suponga que D es fuertemente conexa y $t \leq n - 1$.

Si $t = 0$, se sigue del Teorema 2.3 que $d \leq n - g$, como g es la longitud del ciclo dirigido más corto de D , entonces en D hay una trayectoria dirigida de longitud g . Por otro lado, D es el máximo de todas las longitudes $g \leq d$, es decir, $g \leq n - g$, o bien, $2g \leq n$. Por lo tanto $g \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Ya que D es fuertemente conexa, si $t \geq 1$, entonces existen vértices $v, w \in V(D)$, tales que $\delta^+(v) = 1$ y $\delta^+(w) \geq 2$, donde w es el único exvecino de v . Sea D' la digráfica obtenida de D al agregar una copia w' de w , donde por una copia de w se entiende que $w'x \in F(D')$, si y solo si $wx \in F(D)$ y $xw' \in F(D')$, si y solo si $xw \in F(D)$. Claramente $n(D') = |V(D')| = n + 1$, $T(D') \leq t - 1$ y $g(D') = g$.

Por lo anterior y aplicando el Teorema 2.3 a D' se tiene que

$$d(D') \leq n(D') - g(D') + t(D') \leq n - g + t.$$

Por tanto, la longitud de la trayectoria más corta de w a w' es a lo más $n - g + t$.

Suponga que $w \rightarrow w_1 \rightarrow w_2 \rightarrow \dots \rightarrow w_l \rightarrow w'$ es dicha trayectoria. En particular $w_l w' \in F(D')$ pero de la construcción de D' , $w_l w \in F(D')$. Por tanto, en D' hay un

ciclo de longitud $l + 1$, a saber $w \rightarrow w_1 \rightarrow w_2 \rightarrow \dots \rightarrow w_l \rightarrow w$. Como $g = g(D') \leq l + 1 \leq n - g + t$, se tiene que $g \leq \frac{n+t}{2}$.

Si $n + t$ es par, $\frac{n+t}{2}$ es entero, es decir, $\frac{n+t}{2} = \lceil \frac{n+t-1}{2} \rceil$. Si $n + t$ es impar, $\lceil \frac{n+t-1}{2} \rceil + \frac{1}{2} = \frac{n+t}{2}$.

De lo anterior $g \leq \frac{n+t}{2}$ y como g es un entero, entonces $g \leq \lceil \frac{n+t-1}{2} \rceil$, con lo cual queda demostrado el teorema. ■

Para cualquier digráfica fuertemente conexa siempre se satisface que $d \leq n - 1$, por el Teorema 2.3 se tiene que $d \leq n - g - t$, entonces

$$d \leq n - 1 - \max\{0, g - t - 1\} \quad (2.9)$$

Definición 2.1 Decimos que una digráfica D es ***r-ligada***, si para cada vértice u , con $\delta^+(u) < r$, existe un vértice v con $\delta^+(v) \geq r$, tal que hay una trayectoria de u a v .

Note que si D es *r-ligada*, entonces $\Delta^+(D) \geq r$. Si $\delta^+(D) \geq r$, es claro que D es *r-ligada* por vacuidad.

Dado r un entero positivo, se define

$$t(D, r) = \sum_{u \in V(D): \delta^+(u) < r} (r - \delta^+(u)).$$

Teorema 2.6 [6] Sea D una digráfica con cuello g y $\delta^+(D) \geq 1$. Si para algún $r \geq 1$, $g \geq 2r - 1$, entonces $n \geq r(g - 1) + 1 - t(D, r)$.

Demostración.

La prueba se hará por inducción fuerte sobre r .

Sea $r = 1$ y suponga que $g \geq 1$. Por definición $t(D, 1) = \sum_{u \in V(D): \delta^+(u) < 1} (1 - \delta^+(u))$.

Como $\delta^+(u) \geq 1$ para todo $u \in V(D)$, se tiene que $\{u \in V(D) : \delta^+(u) < 1\} = \emptyset$, es decir, $t(D, 1) = 0$. Por tanto, $n \geq g = 1(g - 1) + 1 - t(D, 1) = g$. Esto muestra la validez del teorema para $r = 1$.

Sea $r = 2$ y suponga $g \geq 3$. Se debe probar que $n \geq 2g - 1 - t(D, 2)$. De la definición

$$t(D, 2) = \sum_{u \in V(D): \delta^+(u) < 2} (2 - \delta^+(u)) = \sum_{u \in V(D): \delta^+(u) = 1} (2 - \delta^+(u)) = T_1(D),$$

basta ver que

$$\frac{n + 1 + T_1(D)}{2} \geq g.$$

Del Teorema 2.5 se tiene que el resultado es cierto para $r = 2$.

Suponga el teorema válido para toda i con $1 \leq i \leq r - 1$ y que para $i = r$ existe un contraejemplo D .

Afirmación 2.6.1 D es r -ligada

Demostración.

Suponga lo contrario. Sea

$$S = \{u \in V(D) : \delta^+(u) < r \text{ y no existe trayectoria de } u \text{ a } v \in V(D) \text{ con } \delta^+(v) \geq r\}.$$

La definición de S implica que si $x \in S$ y $y \notin S$, entonces $xy \notin E(D)$. Sea C la subdigráfica de D inducida por S . Es claro que

$$1 \leq \delta^+(C) \leq \Delta^+(C) \leq r - 1. \quad (2.10)$$

De igual forma

$$\begin{aligned} t(C, r) &= \sum_{u \in C: \delta^+(u) < r} (r - \delta^+(u)) \\ &= \sum_{u \in C: \delta^+(u) < \Delta^+(C)} (r - \delta^+(u)) \\ &= \sum_{u \in C: \delta^+(u) < \Delta^+(C)} ((r - \Delta^+(C)) + (\Delta^+(C) - \delta^+(u))) \\ &= t(C, \Delta^+(C)) + n(C)(r - \Delta^+(C)). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$t(C, \Delta^+(C)) = t(C, r) - n(C)(r - \Delta^+(C)).$$

Como $S = V(C) \subset V(D)$, entonces $g(C) \geq g \geq 2r - 1 \geq 2\Delta^+(C) - 1$. Por (2.10) e hipótesis de inducción, se tiene que el teorema se satisface para $i = \Delta^+(C)$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} n(C) &\geq \Delta^+(C)(g(C) - 1) + 1 - t(C, \Delta^+(C)) \\ &= \Delta^+(C)(g(C) - 1) + 1 - t(C, r) + n(C)(r - \Delta^+(C)) \\ &\geq \Delta^+(C)(g(C) - 1) + 1 - t(C, r) + g(C)(r - \Delta^+(C)) \\ &= 1 - \Delta^+(C) - t(C, r) + rg(C) \\ &\geq 1 - (r - 1) - t(C, r) + rg(C) \\ &= 2 + r(g(C) - 1) - t(C, r) \\ &\geq 2 + r(g(C) - 1) - t(D, r) \\ &\geq 2 + r(g - 1) - t(D, r) \end{aligned}$$

Como $n \geq n(C)$, entonces $n \geq 2 + r(g - 1) - t(D, r)$, así se contradice que D es contraejemplo para $i = r$. Por lo tanto, D es r -ligada. ■

Sea X el conjunto de contraejemplos del Teorema 2.6 con $i = r$ y $t(D, r)$ mínimo.

Afirmación 2.6.2 Existe $D \in X$, tal que $t(D, r) = 0$.

Demostración.

Sea $D \in X$, donde $t(D, r)$ es mínimo. y suponga que $t(D, r) \geq 1$.

Por la Afirmación 2.6.1, D es r -ligada, entonces existe una flecha $uv \in F(D)$, tal que $\delta^-(u) < r$ y $\delta^+(v) \geq r$.

Sea $D_1 = (V_1, F_1)$, tal que

$$V_1 = V(D) \cup \{v'\}$$

y

$$F_1 = F(D) \cup \{(u, v')\} \cup \{(v', w) : (v, w) \in F(D)\}.$$

Por construcción de D_1 , se tiene que $g(D_1) = g$ y $\delta^+(v') = \delta^+(v) \geq r$, entonces $\delta^+(v') \geq r$. Se sabe además que $\delta^+(u) = m < r$ en D , pero $\delta^+(u)$ en D_1 es igual a $m + 1$. Por lo tanto, $t(D_1, r) = t(D, r) - 1$, de donde $n(D_1) + t(D_1, r) = (n + 1) + t(D, r) - 1 = n + t(D, r)$. Como D es contraejemplo al Teorema 2.6 se satisface que $n < r(g - 1) + 1 - t(D, r)$, que es equivalente a

$$n(D_1) = n + 1 < r(g - 1) + 1 - (t(D, r) - 1) = r(g(D_1) - 1) + 1 - t(D_1, r),$$

es decir, D_1 es un contraejemplo al Teorema 2.6, más aún, $D_1 \in X$, lo cual es una contradicción a la minimalidad de $t(D, r)$. Por lo tanto existe una digráfica $D \in X$, tal que $t(D, r) = 0$. ■

En el resto de la prueba suponga que $D \in X$ y $t(D, r) = 0$. Note que si $t(D, r) = \sum_{u \in V(D): \delta^+(u) < r} (r - \delta^+(u)) = 0$, entonces $\delta^+(u) \geq r$ para toda $u \in V(D)$. Es claro también que $t(D, r - 1) = 0$.

Por hipótesis de inducción, para $i = r - 1$, se satisface

$$n \geq (r - 1)(g - 1) + 1.$$

Si $g = 2r - 1$, se tiene que $n \geq 2r^2 - 4r + 3$. Por otro lado si $g \geq 2r$, entonces

$$n \geq (r - 1)(g - 1) + 1 \geq (r - 1)(2r - 1) + 1 = 2r^2 - 3r + 2,$$

es decir,

$$n \geq \begin{cases} 2r^2 - 3r + 2 & \text{si } g \geq 2r; \\ 2r^2 - 4r + 3 & \text{si } g = 2r - 1. \end{cases} \quad (2.11)$$

Sea

$$f(r) = \begin{cases} \lceil \frac{(n + r + 1)}{2} \rceil & \text{si } g \geq 2r, \\ \lceil \frac{(n + 2)}{2} \rceil & \text{si } g = 2r - 1. \end{cases}$$

Si $g = 2r - 1$, entonces

$$n - f(r) \geq n - \frac{(n + 3)}{2} = \frac{n - 3}{2}.$$

Por (2.11) se tiene que

$$\frac{n-3}{2} \geq \frac{2r^2-4r}{2} = r^2-2r.$$

Si $g \geq 2r$, entonces

$$n-f(r) \geq n - \frac{(n+r+2)}{2} = \frac{n-r-2}{2}.$$

Núevamente por (2.11),

$$\frac{n-r-2}{2} \geq \frac{2r^2-3r+2-r-2}{2} = r^2-2r.$$

De lo anterior

$$n \geq f(r) + r^2 - 2r. \quad (2.12)$$

Afirmación 2.6.3 Para cada $u \in V(D)$ y cada $1 \leq i \leq g-1$ se satisface que

$$|\widehat{N}_i^+(u)| \geq \min \{1+ri, f(r)\}.$$

Demostración.

Se probará por inducción sobre i algo más fuerte.

Afirmación 2.6.4 Para cada $u \in V(D)$ y cada $1 \leq i \leq g-1$ se satisface $|\widehat{N}_i^+(u)| \geq 1+ir + \max \{0, |D_i^+(u)| - r\}$ ó $|\widehat{N}_i^+(u)| \geq f(r)$.

Demostración.

Por inducción sobre i .

Sea $i = 1$. Por definición $|\widehat{N}_1^+(u)| = 1 + \delta^+(u)$. Como D es r -ligada, entonces $\delta^+(u) \geq r$, por lo cual

$$\max \{0, |D_1^+(u)| - r\} = \max \{0, \delta^+(u) - r\} = \delta^+(u) - r.$$

Por lo tanto $|\widehat{N}_1^+(u)| = 1 + r + \max \{0, \delta^+(u) - r\}$, lo cual muestra la validez de la afirmación para $i = 1$.

Suponga válida la Afirmación 2.6.4, para $1 \leq i \leq g-2$. Se verificará la validez de la afirmación para $i+1$.

Si $|\widehat{N}_{i+1}^+(u)| \geq f(r)$, entonces la afirmación es válida, por lo cual suponga que

$$|\widehat{N}_{i+1}^+(u)| \leq f(r) - 1. \quad (2.13)$$

Como $|\widehat{N}_i^+(u)| \leq |\widehat{N}_{i+1}^+(u)|$, entonces $|\widehat{N}_i^+(u)| \leq f(r) - 1$. Por lo tanto, la hipótesis de inducción implica que $|\widehat{N}_i^+(u)| \geq 1 + ir + \max\{0, |D_i^+(u)| - r\}$.

Si $|D_{i+1}^+(u)| \geq r$, entonces $\max\{0, |D_{i+1}^+(u)| - r\} = |D_{i+1}^+(u)| - r$. Se sabe que

$$\begin{aligned} |\widehat{N}_{i+1}^+(u)| &= |\widehat{N}_i^+(u)| + |D_{i+1}^+(u)| \\ &\geq 1 + ir + \max\{0, |D_i^+(u)| - r\} + |D_{i+1}^+(u)| \\ &\geq 1 + ir + |D_{i+1}^+(u)| \\ &= 1 + (i+1)r + (|D_{i+1}^+(u)| - r) \\ &= 1 + (i+1)r + \max\{0, |D_{i+1}^+(u)| - r\}, \end{aligned}$$

con lo cual la afirmación quedaría demostrada.

Suponga que

$$|D_{i+1}^+(u)| \leq r - 1. \quad (2.14)$$

A continuación se probará que $|D_{i+1}^+(u)| \geq r - \max\{0, |D_i^+(u)| - r\}$. Suponga lo contrario, es decir,

$$|D_{i+1}^+(u)| \leq r - 1 - \max\{0, |D_i^+(u)| - r\}, \quad (2.15)$$

entonces

$$|D_{i+1}^+(u)| + 1 \leq r - \max\{0, |D_i^+(u)| - r\} \leq r.$$

Por lo tanto, para cada $v \in D_i^+(u)$ se satisface

$$|D_{i+1}^+(u)| + 1 \leq r \leq \delta^+(v). \quad (2.16)$$

Así $|D_{i+1}^+(u)| < \delta^+(v)$, es decir, para cada vértice $v \in D_i^+(u)$ existe un arco de v a un vértice de $\widehat{N}_i^+(u)$. Por otro lado, no existen vértices de $\widehat{X} = \widehat{N}_i^+(u) \setminus \{u\}$ a u , pues habría un ciclo de longitud a lo más $i+1 \leq g-1$, lo cual es una contradicción.

Sea $D[\widehat{X}]$ la subdigráfica de D inducida por $\widehat{X}$. Por lo anterior se tiene que $\delta^+ \left(D[\widehat{X}] \right) \geq 1$. Recuerde que $t(D, r) = 0$.

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
 n(D[\widehat{X}]) + t(D[\widehat{X}], r) &= (|\widehat{N}_i^+(u)| - 1) + t(D[\widehat{X}], r) \\
 &\leq (|\widehat{N}_i^+(u)| - 1) + t(D, r) + (|D_i^+(u)| \times |D_{i+1}^+(u)|) \\
 &= |\widehat{N}_i^+(u)| - 1 + (|D_i^+(u)| \times |D_{i+1}^+(u)|) \\
 &= |\widehat{N}_{i+1}^+(u)| - |D_{i+1}^+(u)| + (|D_i^+(u)| \times |D_{i+1}^+(u)|) - 1 \\
 &= |\widehat{N}_{i+1}^+(u)| + (|D_i^+(u)| - 1) \times |D_{i+1}^+(u)| - 1.
 \end{aligned}$$

De (2.15) y (2.13) se tiene que

$$\begin{aligned}
 &|\widehat{N}_{i+1}^+(u)| + (|D_i^+(u)| - 1) \times |D_{i+1}^+(u)| - 1. \\
 &\leq |\widehat{N}_{i+1}^+(u)| + (|D_i^+(u)| - 1) (r - 1 - \max(0, |D_i^+(u)| - r)) - 1 \\
 &\leq f(r) - 1 + (|D_i^+(u)| - 1) (r - 1 - \max(0, |D_i^+(u)| - r)) - 1 \\
 &\leq f(r) + (|D_i^+(u)| - 1) (r - 1) - 2
 \end{aligned}$$

y de (2.12)

$$\begin{aligned}
 &f(r) + (|D_i^+(u)| - 1) (r - 1) - 2 \\
 &= (f(r) + r^2 - 2r) - 1 \leq n - 1 \\
 &= n - t(D, r) - 1.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$n(D[\widehat{X}]) + t(D[\widehat{X}], r) < n. \quad (2.17)$$

Es claro que $g(D[\widehat{X}]) \geq g \geq 2r - 1$, como D es un contraejemplo para $i = r$ con el mínimo número de vértices, entonces $D[\widehat{X}]$ no es contraejemplo, por tanto se satisface el Teorema 2.6, es decir,

$$n(D[\widehat{X}]) \geq r(g(D[\widehat{X}]) - 1) + 1 - t(D[\widehat{X}], r).$$

Por (2.17) se tiene que

$$n > n(D[\widehat{X}]) + t(D[\widehat{X}], r) \geq r(D[\widehat{X}] - 1) + 1 \geq r(g - 1) + 1.$$

Así, $n = n + t(D, r) \geq r(g - 1) + 1$, lo cual es una contradicción a que D es contraejemplo del Teorema 2.6.

Por lo tanto

$$r - 1 \geq |D_{i+1}^+(u)| \geq r - \max\{0, |D_i^+(u) - r|\}. \quad (2.18)$$

Como $|\widehat{N}_{i+1}^+(u)| = |\widehat{N}_i^+(u)| + |D_{i+1}^+(u)|$, entonces

$$\begin{aligned} |\widehat{N}_{i+1}^+(u)| &= |\widehat{N}_i^+(u)| + |D_{i+1}^+(u)| \\ &\geq 1 + ir + \max\{0, |D_i(u)| - r\} + |D_{i+1}^+(u)| \\ &\geq 1 + ir + \max\{0, |D_i^+(u)| - r\} + r - 1 - \max\{0, |D_i^+(u) - r|\} \\ &\geq 1 + (i + 1)r \\ &= 1 + (i + 1)r + \max\{0, |D_{i+1}^+(u)| - r\}. \end{aligned}$$

Así, la Afirmación 2.6.4 queda demostrada por inducción. ■

Como

$$\min\{1 + ir + \max\{0, |D_i^+(u)| - r\}, f(r)\} \geq \min\{1 + ir, f(r)\},$$

por la afirmación anterior se sigue la Afirmación 2.6.3. ■

Sea

$$T_1 = \min\left\{1 + \lfloor \frac{g}{2} \rfloor r, f(r)\right\}$$

y

$$T_2 = \min \left\{ 1 + \left(\lceil \frac{g}{2} \rceil - 1 \right) r, f(r) \right\}.$$

Es claro que $T_1 \geq T_2$.

Afirmación 2.6.5 Existe $u_0 \in V(D)$, tal que $|\widehat{N}_{\lfloor \frac{g}{2} \rfloor}(u_0)| + |\widehat{N}_{\lfloor \frac{g}{2} \rfloor - 1}^-(u_0)| \geq T_1 + T_2$.

Demostración.

No es difícil ver que para cada i fijo se satisface que

$$\sum_{u \in V(D)} |\widehat{N}_i(u)| = \sum_{u \in V(D)} |\widehat{N}_i^-(u)|,$$

entonces por la Afirmación 2.6.3

$$\sum_{u \in V(D)} |\widehat{N}_{\lfloor \frac{g}{2} \rfloor}(u)| + |\widehat{N}_{\lfloor \frac{g}{2} \rfloor - 1}^-(u)| = \sum_{u \in V(D)} |\widehat{N}_{\lfloor \frac{g}{2} \rfloor}(u)| + |\widehat{N}_{\lfloor \frac{g}{2} \rfloor - 1}^-(u)| \geq \sum_{u \in V(D)} (T_1 + T_2).$$

Por un argumento de promedio existe $u_0 \in V(D)$, tal que

$$|\widehat{N}_{\lfloor \frac{g}{2} \rfloor}(u_0)| + |\widehat{N}_{\lfloor \frac{g}{2} \rfloor - 1}^-(u_0)| \geq T_1 + T_2.$$

■

A continuación se demuestra el Teorema 2.6.

Sea $u_0 \in V(D)$, el vértice que satisface la afirmación anterior. Como g es el cuello de D , $|\widehat{N}_{\lfloor \frac{g}{2} \rfloor}(u_0)| \cap |\widehat{N}_{\lfloor \frac{g}{2} \rfloor - 1}^-(u_0)| = \{u_0\}$, entonces $|\widehat{N}_{\lfloor \frac{g}{2} \rfloor}(u_0)| + |\widehat{N}_{\lfloor \frac{g}{2} \rfloor - 1}^-(u_0)| \leq n + 1$. De la Afirmación 2.6.4 se tiene que $|\widehat{N}_{\lfloor \frac{g}{2} \rfloor}(u_0)| + |\widehat{N}_{\lfloor \frac{g}{2} \rfloor - 1}^-(u_0)| \geq T_1 + T_2$. Así

$$n + 1 \geq T_1 + T_2. \quad (2.19)$$

Si $f(r) \leq 1 + \left(\lceil \frac{g}{2} \rceil - 1 \right) r \leq 1 + \lfloor \frac{g}{2} \rfloor r$, entonces es claro que

$$T_2 = \min \left\{ 1 + \left(\lceil \frac{g}{2} \rceil - 1 \right) r, f(r) \right\} = f(r)$$

y

$$T_1 = \min \left\{ 1 + \lfloor \frac{g}{2} \rfloor r, f(r) \right\} = f(r).$$

Por lo tanto $T_1 + T_2 = 2f(r)$.

Recuerde que

$$f(r) = \begin{cases} \lceil \frac{n+r+1}{2} \rceil & \text{si } g \geq 2r, \\ \lceil \frac{n+2}{2} \rceil & \text{si } g = 2r-1. \end{cases}$$

Es claro que $n+2 \leq 2\lceil \frac{n+2}{2} \rceil \leq 2\lceil \frac{n+r+1}{2} \rceil$. Por lo tanto $2f(r) \geq n+2$, lo cual es una contradicción a (2.19).

Así $f(r) \geq (\lceil \frac{g}{2} \rceil - 1)r + 2$.

Caso 2.6.1 $f(r) \geq \lceil \frac{g}{2} \rceil r + 1$.

Entonces

$$T_1 = 1 + \lfloor \frac{g}{2} \rfloor r \text{ y } T_2 = 1 + (\lceil \frac{g}{2} \rceil - 1)r,$$

así

$$T_1 + T_2 = 2 + r(\lfloor \frac{g}{2} \rfloor + \lceil \frac{g}{2} \rceil) - r = 2 + rg - r = 2 + r(g-1).$$

De (2.19) $n+1 \geq 2 + r(g-1)$.

Por lo tanto

$$n \geq r(g-1) + 1.$$

Caso 2.6.2 $\lfloor \frac{g}{2} \rfloor r \geq f(r) \geq (\lceil \frac{g}{2} \rceil - 1)r + 2$.

Si $g = 2k+1$ para alguna $k \in \mathbb{N}$, entonces $\lfloor \frac{g}{2} \rfloor = k$ y $\lceil \frac{g}{2} \rceil = k+1$, de donde $kr \geq f(r) \geq kr+2$, lo cual es una contradicción, así g es par. De la hipótesis, $g \geq 2r-1$ y como g es par, entonces $g \geq 2r$. Note que $T_1 = f(r)$ y que $T_2 = 1 + (\lceil \frac{g}{2} \rceil - 1)r$. Por lo tanto

$$n \geq T_1 + T_2 - 1 = f(r) + (\lceil \frac{g}{2} \rceil - 1)r = \lceil \frac{n+r+1}{2} \rceil + (\lceil \frac{g}{2} \rceil - 1)r.$$

Como g es par, entonces $\lceil \frac{g}{2} \rceil = \frac{g}{2}$. Si $n+r+1$ es par, se tiene que

$$\lceil \frac{n+r+1}{2} \rceil = \frac{n+r+1}{2}.$$

En este caso $n \geq \frac{n+r+1}{2} + (\frac{g}{2} - 1)r$, de donde $2n \geq n+r+1+r(g-2)$. Por lo tanto

$$n \geq r(g-1) + 1.$$

Si $n+r+1$ es impar, entonces $\lceil \frac{n+r+1}{2} \rceil = \frac{n+r+1}{2} + \frac{1}{2}$ y así

$$n \geq r(g-1) + 2 \geq r(g-1) + 1.$$

De los casos anteriores se concluye que D satisface el Teorema 2.6 para $i = r$. ■

Corolario 2.7 *Sea D una digráfica de orden n , con cuello g y $\delta^+(D) \geq r$, entonces $g \leq \max \left\{ \lceil \frac{n}{r} \rceil, 2r-2 \right\}$.*

Demostración.

Suponga que $r \geq 1$. Si $g \geq 2r-1$, del Teorema 2.6,

$$n \geq r(g-1) + 1 - t(D, r) = r(g-1) + 1,$$

así

$$\lceil \frac{n}{r} \rceil \geq \frac{n}{r} \geq g-1 + \frac{1}{r} > g-1.$$

Por lo tanto $\lceil \frac{n}{r} \rceil \geq g$, así se concluye que $g \leq \max \left\{ \lceil \frac{n}{r} \rceil, 2r-2 \right\}$. ■

Corolario 2.8 *Sea D una digráfica de orden n , con cuello g y $\delta^+(D) \geq r$. Si $n \geq 2r^2 - 3r + 1$, entonces $g \leq \lceil \frac{n}{r} \rceil$.*

Demostración.

De la hipótesis $n \geq 2r^2 - 3r + 1$, así

$$\frac{n}{r} \geq 2r-3 + \frac{1}{r} > 2r-3.$$

Por lo tanto $\lceil \frac{n}{r} \rceil \geq 2r-2$. Del corolario anterior es claro que

$$g \leq \max \left\{ \lceil \frac{n}{r} \rceil, 2r-2 \right\} = \lceil \frac{n}{r} \rceil.$$

■

Teorema 2.9 [9] Sea D una digráfica simple, tal que $\delta^+(D) \geq r$. Si $r \leq \sqrt{\frac{n}{2}}$ entonces la Conjetura es válida .

Demostración.

Como $r \leq \sqrt{\frac{n}{2}}$, entonces $n \geq 2r^2 \geq 2r^2 - 3r + 1$. Por el colorario anterior se sigue que D tiene un ciclo de longitud a lo más $\lceil \frac{n}{r} \rceil$ ■

Capítulo 3

Casos particulares

En este capítulo se presentan algunos resultados referentes a la Conjetura para el caso particular de la existencia de triángulos dirigidos y cuando la digráfica es vértice-transitiva.

3.1. Digráficas con triángulos dirigidos

El caso especial $r = \frac{n}{3}$ ha sido de gran interés. Entre otras cosas se ha tratado de encontrar una constante c , para una digráfica simple D con n vértices, tal que si $\delta^+(D) \geq cn$, entonces hay un ciclo de longitud tres.

La Conjetura para este caso particular es que $c = \frac{1}{3}$. Hasta la fecha se ha demostrado para los siguientes valores de c .

- $c = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \approx 0.382$
- $c = \frac{2\sqrt{6} - 3}{5} \approx 0.3797$
- $c = 3 - \sqrt{7} \approx 0.3542$

Las referencias de las pruebas se encuentran en [9].

A continuación se presenta la prueba para el caso $c \leq 3 - \sqrt{7}$

Teorema 3.1 [5] Sea D una digráfica simple. Si $|V(D)| = n$ y $\delta^+(D) \geq \alpha n$, con $\alpha = 3 - \sqrt{7}$, entonces D contiene un triángulo dirigido.

Demostración.

Por inducción sobre n .

Sea D como las hipótesis del Teorema 3.1 con $n = 3$, es decir, $|V(D)| = 3$ y $\delta^+(D) \geq 3\alpha$. Note que $3\alpha \geq 1$ y como D es simple debe ser un triángulo dirigido, con lo cual el Teorema 3.1 es válido para $n = 3$.

Suponga válido el Teorema 3.1 para toda digráfica con menos de n vértices y sea D un contraejemplo con n vértices. Removiendo flechas de ser necesario que $\delta^+(u) = r = \lceil \alpha n \rceil$ para toda $u \in V(D)$.

Para todo arco $uv \in F(D)$ se define:

$$p(u, v) := |N^+(v) \setminus N^+(u)|,$$

$$q(u, v) := |N^-(u) \setminus N^-(v)|$$

y

$$t(u, v) := |N^+(u) \cap N^+(v)|.$$

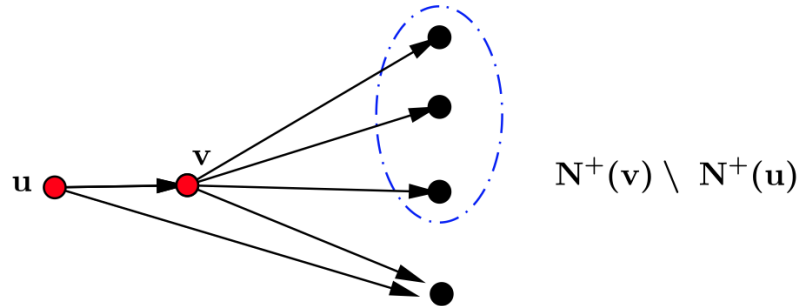
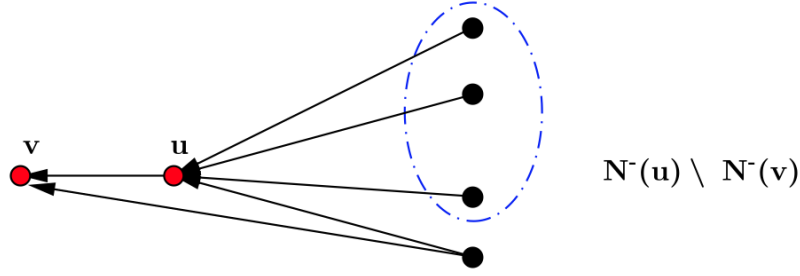
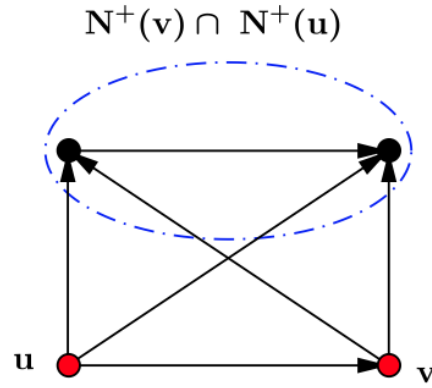


Figura 3.1: $p(u, v)$

Por definición $p(u, v)$ es el número trayectorias inducidas de longitud dos cuyo primer arco es uv ; $q(u, v)$ es el número de trayectorias inducidas de longitud dos cuyo arco final es uv y $t(u, v)$ es el número de triángulos transitivos que contienen a uv como base.

Figura 3.2: $q(u, v)$ Figura 3.3: $t(u, v)$

Afirmación 3.1.1 $n > r + \delta^-(v) + q(u, v) + (1 - \alpha)t(u, v)$.

Demostración.

Si $t(u, v) = 0$, entonces $N^+(u) \cap N^+(v) = \emptyset$ y como D es simple $N^+(v) \cap N^-(v) = \emptyset$. Además por hipótesis de inducción D no contiene triángulos dirigidos, de donde $N^+(v) \cap (N^-(u) \setminus N^-(v)) = \emptyset$.

Por otro lado, es claro que $N^-(v) \cap (N^-(u) \setminus N^-(v)) = \emptyset$, entonces $N^+(v), N^-(v)$ y $N^-(u) \setminus N^-(v)$ son conjuntos ajenos de cardinalidades $\delta^+(v) = r, \delta^-(v)$ y $q(u, v)$ respectivamente. Además u no pertenece a ninguno de estos conjuntos.

Por lo tanto,

$$n > r + \delta^-(v) + q(u, v) = r + \delta^-(v) + q(u, v) + (1 - \alpha)t(u, v)$$

y la afirmación se sigue.

Si $t(u, v) > 0$, entonces $N^+(u) \cap N^+(v) \neq \emptyset$. Sea D' la subdigráfica inducida por $N^+(u) \cap N^+(v)$. D' no tiene triángulos dirigidos, pues de lo contrario D tendría. Por hipótesis de inducción D' satisface el Teorema 3.1, es decir, existe $w \in N^+(u) \cap N^+(v)$, tal que $\delta_{D'}^+(w) < \alpha|D'| = \alpha t(u, v)$.

Se sabe que w es adyacente a $\delta^+(w) = r$ vértices. Como

$$(N^+(v) \setminus N^+(u)) \cap (N^+(u) \cap N^+(v)) = \emptyset$$

y ambos conjuntos están contenidos en $N^+(v)$, entonces el número de vértices adyacentes a w que no están en $N^+(v)$ es al menos $\delta^+(w) - p(u, v) - \alpha t(u, v)$, pues w está unido a lo más $\alpha t(u, v)$ vértices en $N^+(u) \cap N^+(v)$ y $|N^+(v) \setminus N^+(u)| = p(u, v)$.

Como D es regular $\delta^+(w) = \delta^+(v)$ por lo que $\delta^+(w) - p(u, v) = \delta^+(v) - p(u, v)$. Por definición $\delta^+(v) = |N^+(v)|$ y $p(u, v) = |N^+(v) \setminus N^+(u)|$, entonces $\delta^+(v) - p(u, v)$ es el número de vértices que están en $N^+(v) \cap N^+(u)$, es decir, $\delta^+(v) - p(u, v) = t(u, v)$.

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \delta^+(w) - p(u, v) - \alpha t(u, v) &= (\delta^+(v) - p(u, v)) - \alpha t(u, v) \\ &= t(u, v) - \alpha t(u, v) \\ &= (1 - \alpha)t(u, v). \end{aligned}$$

Sea $z \in N^+(w) \setminus N^+(v)$. Si $z \in N^-(v)$ se forma el triángulo dirigido $\{vw, wz, zv\}$ y si $z \in N^-(u) \setminus N^-(v)$ se forma el triángulo dirigido $\{uw, wz, zu\}$. Por otro lado es claro que $(N^-(u) \setminus N^-(v)) \cap N^-(v) = \emptyset$ y como D es simple $N^-(v) \cap N^+(v) = \emptyset$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} |V(D) \setminus v| &= n - 1 \geq |N^+(v)| + |N^-(v)| + |N^-(u) \setminus N^-(v)| + (1 - \alpha)t(u, v) \\ &= r + (1 - \alpha)t(u, v) + \delta^-(v) + q(u, v). \end{aligned}$$

Esta última desigualdad prueba la afirmación. ■

Como $\delta^+(v) - p(u, v) = r - p(u, v) = t(u, v)$, entonces por la afirmación anterior

$$n > r + \delta^-(v) + q(u, v) + (r - p(u, v)) - \alpha t(u, v)$$

y por lo tanto

$$\alpha t(u, v) > 2r - n + \delta^-(v) + q(u, v) - p(u, v),$$

entonces

$$\begin{aligned} \sum_{uv \in F(D)} \alpha t(u, v) &> \sum_{uv \in F(D)} (2r - n + \delta^-(v) + q(u, v) - p(u, v)) \\ &= \sum_{uv \in F(D)} ((2r - n) + \delta^-(v)) + \sum_{uv \in F(D)} (q(u, v) - p(u, v)) \\ &= \sum_{uv \in F(D)} ((2r - n)) + \sum_{uv \in F(D)} \delta^-(v) + \sum_{uv \in F(D)} (q(u, v) - p(u, v)). \end{aligned}$$

Se sabe que $|F(D)| = rn$, por lo que

$$\sum_{uv \in F(D)} (2r - n) = rn(2r - n).$$

Por otro lado, para cada vértice v hay $|N^-(v)| = \delta^-(v)$ flechas, entonces

$$\sum_{uv \in F(D)} \delta^-(v) = \sum_{v \in V(D)} (\delta^-(v))^2.$$

Note que $\sum_{uv \in F(D)} q(u, v)$ al igual que $\sum_{uv \in F(D)} p(u, v)$ cuentan el número de trayectorias inducidas de longitud dos que hay en D , por lo que

$$\sum_{uv \in F(D)} (q(u, v) - p(u, v)) = 0.$$

Así

$$\sum_{uv \in F(D)} \alpha t(u, v) > \sum_{uv \in F(D)} ((2r - n)) + \sum_{v \in V(D)} (\delta^-(v))^2.$$

Sea T el número de triángulos transitivos en D , es claro que $T = \sum_{uv \in F(D)} t(u, v)$.

Por tanto,

$$\alpha T > rn(2r - n) + \sum_{v \in V(D)} (\delta^-(v))^2.$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz (ver Apéndice Proposición 6.0.1 a los valores $\delta^-(v_1), \delta^-(v_2), \dots, \delta^-(v_n)$, se tiene que

$$\frac{\sum_{v \in V(D)} (\delta^-(v))}{n} \leq \sqrt{\frac{\sum_{v \in V(D)} (\delta^-(v))^2}{n}},$$

de donde

$$\sum_{v \in V(D)} (\delta^-(v))^2 \geq \frac{1}{n} \left(\sum_{v \in V(D)} \delta^-(v) \right)^2 = \frac{1}{n} (|F(D)|)^2 = nr^2.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \alpha T &> rn(2r - n) + \sum_{v \in V(D)} (\delta^-(v))^2 \\ &> rn(2r - n) + nr^2 \\ &= nr(3r - n). \end{aligned}$$

Se define una garra como la estructura formada por dos flechas uv, wz con $u = w$ y $v \neq z$. Cada triángulo transitivo contiene una garra, pero no toda garra determina un triángulo transitivo, por lo que T es menor igual al número de garras. Cada vértice tiene exgrado r por lo que por cada dos de estas flechas existe una garra, es decir, hay $n \binom{r}{2}$ garras, y así

$$\frac{nr^2}{2} \alpha > \frac{nr(r-1)}{2} \alpha = n \binom{r}{2} \alpha \geq \alpha T > nr(3r - n).$$

Por lo tanto $\frac{nr^2}{2} \alpha > nr(3r - n)$, es decir, $\alpha > 6 - 2\frac{n}{r}$.

Recuerde que $r = \lceil \alpha n \rceil \geq \alpha n$ por lo que $\frac{1}{r} \leq \frac{1}{\alpha n}$, entonces $\alpha > 6 - 2\frac{1}{\alpha}$ si y solo si $\alpha^2 - 6\alpha + 2 > 0$, pero como $\alpha = 3 - \sqrt{7}$, α es una raíz del polinomio, es decir,

$\alpha^2 - 6\alpha + 2 = 0$ lo cual es una contradicción.

La contradicción surgió de suponer que D no tenía triángulos dirigidos, así el Teorema 3.1 es válido. ■

3.1.1. Contando subdigráficas

A continuación se presenta un resultado que utiliza el número de subdigráficas distintas de cierto orden que puede haber en una digráfica sin triángulos dirigidos.

Considere una digráfica r -regular D , con n vértices que no contiene triángulos dirigidos. Contando el número de subdigráficas inducidas con tres vértices, salvo isomorfismo, se tienen 6 tipos como lo muestra la Figura 3.4. Sea x_i el número de subdigráficas inducidas del tipo i que hay en D , con $1 \leq i \leq 6$.

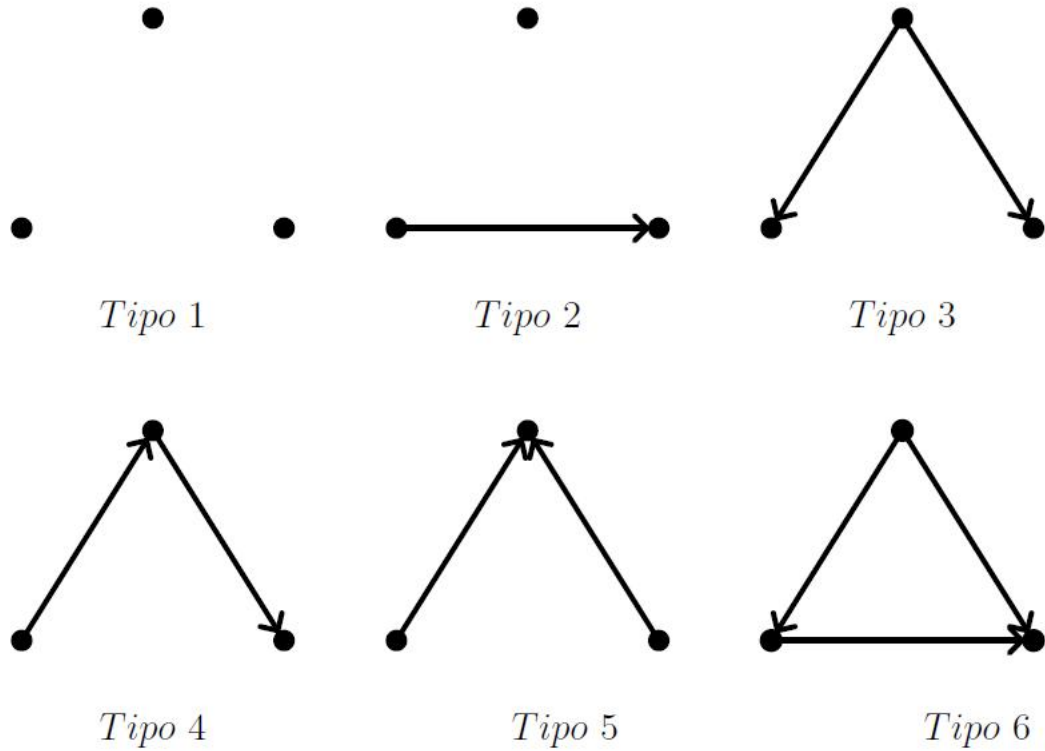


Figura 3.4: Subdigráficas inducidas con 3 vértices

$0x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 3x_6$ cuenta el total de flechas que hay en todas las

subdigráficas del tipo x_i con $1 \leq i \leq 6$. Cada flecha aparece en $n - 2$ subdigráficas y hay un total de nr flechas por lo que

$$0x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 3x_6 = (n - 2)nr,$$

y así

$$x_2 = (n - 2)nr - 2x_3 - 2x_4 - 2x_5 - 3x_6. \quad (3.1)$$

Cada subdigráfica del tipo 3 y 6 tienen un vértice con exvalencia 2. Si para cada vértice se escoge dos flechas de su invencindad, éstas determinan una y sólo una subdigráfica de alguno de estos tipos. Como $\delta^+(v) = r$ para cada $v \in V(D)$ y las formas de elegir dos flechas de un conjunto con r flechas es $\binom{r}{2}$, entonces

$$x_3 + x_6 = n \binom{r}{2},$$

por lo que

$$x_3 = n \binom{r}{2} - x_6. \quad (3.2)$$

Cada subdigráfica del tipo 5 y 6 tiene un vértice con invalencia 2. Por un razonamiento análogo al que se obtuvo la ecuación anterior se tiene que

$$x_5 + x_6 = \sum_{v_i \in V(D)} \binom{\delta^-(v_i)}{2},$$

y entonces

$$x_5 = \sum_{v_i \in V(D)} \binom{\delta^-(v_i)}{2} - x_6. \quad (3.3)$$

En las subdigráficas de tipo 4 y 6 hay una trayectoria de longitud 2 y eligiendo una 2-trayectoria, ésta nos determina una subdigráfica de estos tipos. Para cada vértice v basta tomar una flecha vu con $v \in N^+(v)$ y luego otra flecha uz con $z \in N^+(v)$ y así se obtienen las trayectorias de longitud 2 que inician en v . La primera flecha se toma de un conjunto de r vértices y la segunda también. Esto se hace para cada vértice por lo que

$$x_4 + x_6 = nr^2,$$

y entonces

$$x_4 = nr^2 - x_6. \quad (3.4)$$

Es claro que $x_i \geq 0$ para $1 \leq i \leq 5$, por lo que

$$0 \leq x_2 + 3x_3$$

y así de (3.1) se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &\leq (n-2)nr - 2x_3 - 2x_4 - 2x_5 - 3x_6 + 3x_3 \\ &= (n-2)nr + x_3 - 2x_4 - 2x_5 - 3x_6 \end{aligned}$$

(3.2), (3.4) y (3.3) implican que

$$\begin{aligned} 0 &\leq (n-2)nr + n\binom{r}{2} - x_6 - 2nr^2 + 2x_6 - 2 \sum_{v_i \in V(D)} \binom{\delta^-(v_i)}{2} + 2x_6 - 3x_6 \\ &= (n-2)nr + n\binom{r}{2} - 2nr^2 - 2 \sum_{v_i \in V(D)} \binom{\delta^-(v_i)}{2}. \end{aligned}$$

Como $\binom{\delta^-(v_i)}{2} \geq n\binom{r}{2}$, entonces

$$\begin{aligned}
0 &\leq (n-2)nr + n\binom{r}{2} - 2nr^2 - 2n\binom{r}{2} \\
&= (n-2)nr - 2nr^2 - n\binom{r}{2} \\
&= nr\left(n-2-2r-\frac{r-1}{2}\right) \\
&= nr\left(\frac{2n-3-5r}{2}\right)
\end{aligned}$$

Así $nr\left(\frac{2n-3-5r}{2}\right) \geq 0$ por lo que $2n-3-5r \geq 0$ y por lo tanto

$$\frac{2n-3}{5} \geq r.$$

De esta manera se ha demostrado lo siguiente

Teorema 3.2 [1] Si D es una digráfica con n vértices r -regular sin triángulos dirigidos, entonces $r \leq \frac{2n-3}{5}$.

De manera análoga se pueden ver cuántas digráficas con 4 vértices hay que no tienen triángulos dirigidos. En este caso el número de subdigráficas es 32 como muestra la Figura 3.5, por lo que se tendría un sistema lineal de 32 ecuaciones. Con un análisis parecido al anterior se llega al siguiente resultado también presentado en [1]

Teorema 3.3 Sea D una digráfica, tal que $\delta(v)^+ \geq cn$ para cada $v \in V(D)$. Si D no contiene triángulos dirigidos, entonces $c \leq \frac{2\sqrt{6}-3}{5} \approx 0.379$.

Es claro que el resultado se puede mejorar si se considera el total de subdigráficas inducidas con cinco vértices pero el problema se complicaría demasiado.

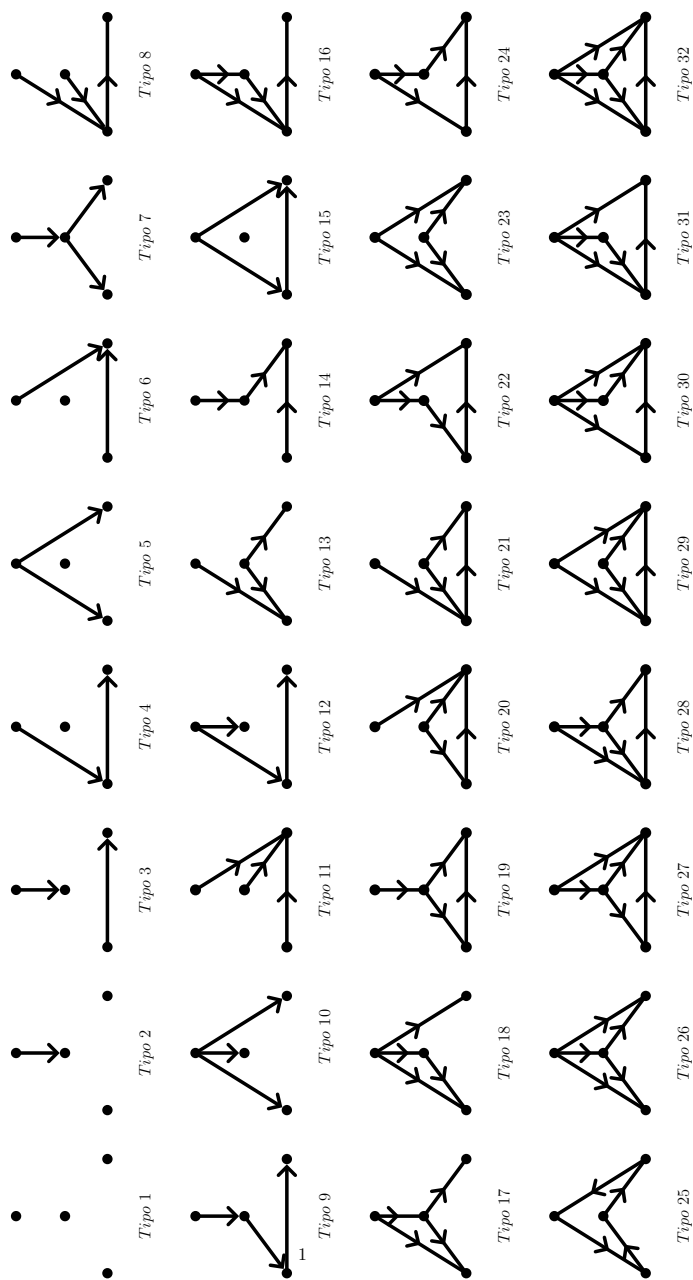


Figura 3.5: Subdigráficas con 4 vértices sin triángulos dirigidos

3.2. Digráficas vértice-transitivas

A continuación se prueba la validez de la Conjetura para digráficas vértice-transitivas. Esto se hará probando diversas propiedades de estructuras más generales, lo cual permitirá concluir un resultado de Teoría de Grupos.

Para ello se necesita introducir algunas definiciones.

Definición 3.1 Sea V un conjunto finito. Al conjunto $\Delta_v := \{(v, v) : v \in V\}$ se le denomina la **diagonal** de $V \times V$.

Definición 3.2 Sea $F \subseteq V \times V$. A la pareja ordenada $\Gamma := \{V, F\}$ se le denomina **relación**. Si además $\Delta_v \subseteq F$ a Γ , se le llama **relación reflexiva**.

Definición 3.3 Dada una relación $\Gamma := \{V, F\}$, se define la **relación inversa** como $\Gamma^- = \{V, F^-\}$, donde $F^- = \{(u, v) : (v, u) \in F\}$.

Definición 3.4 Sea $\Gamma = \{V, F\}$ una relación y sea $v \in V$. Se define la **imagen de v bajo Γ** como $\Gamma(v) := \{u : (v, u) \in F\}$. Si $A \subseteq V$, se define la imagen de A bajo Γ como $\Gamma(A) := \bigcup_{v \in A} \Gamma(v)$.

Definición 3.5 Sea $\Gamma = \{V, F\}$ y $\Phi = (W, E)$ relaciones. La **composición** de Φ y Γ es la relación

$$\Gamma \circ \Phi = \{(u, v) : \text{existe } w, \text{ tal que } (u, w) \in \Phi \text{ y } (w, v) \in \Gamma\}$$

Si $\Phi = \Gamma$, a ésta relación se denota como Γ^2 . De manera recursiva se define $\Gamma^k = \Gamma \circ \Gamma^{k-1}$. Análogamente se define $(\Gamma^{-1})^k = \Gamma^{-k}$, adicionalmente considere $\Gamma^0 = (V, \Delta_v)$.

Si $W \subset V$ y restringimos F a $W \times W$, entonces se obtiene una nueva relación llamada la restricción de Γ a W y es denotada por $\Gamma[W] = (W, F \cap W \times W)$.

Note que si V es finito, entonces Γ es una digráfica. Por definición se satisface que $\Gamma(v) = N^+(v)$ y $\Gamma^-(v) = N^-(v)$. Por lo tanto $\delta^+(v) = |\Gamma(v)|$ y $\delta^-(v) = |\Gamma^-(v)|$. El cuello de Γ se puede ver como

$$g(\Gamma) = \min \{k : \text{existe } v \text{ con } v \in \Gamma^k(v)\}.$$

Por último $\Gamma[W]$ coincide con la subdigráfica inducida por W . Al igual que en digráficas, se dice que Γ es **r-regular** si $|\Gamma(v)| = r$ para todo $v \in V$.

La conectividad en una digráfica se puede traducir en una relación como lo siguiente:

Definición 3.6 Dada una relación Γ se define la **conectividad** de Γ como $\kappa(\Gamma) = \min \{|\Gamma(X) \setminus X| : X \subset V, X \neq \emptyset \text{ y } X \cup \Gamma(X) \neq V\}$ si $F \neq V \times V$. Cuando $F = V \times V$, entonces $\kappa(\Gamma) = |V| - 1$.

Al subconjunto $X \subset V$ para el cual se alcanza el mínimo en la definición anterior se le llama **fragmento**. Un fragmento con cardinalidad mínima se llama **átomo**. A la cardinalidad de un átomo se denota como $a(\Gamma)$.

Definición 3.7 Sea $\Gamma = (V, F)$ una relación. Una función biyectiva $f : V \rightarrow V$ se llama **automorfismo** si para toda $u, v \in V$ se cumple que $(u, v) \in F$ si y solo si $(f(u), f(v)) \in F$.

Al grupo de automorfismos de Γ se le denota como $\mathcal{A}(\Gamma)$.

Definición 3.8 Decimos que $\mathcal{A}(\Gamma)$ **actúa transitivamente** sobre V si para todo $u, v \in V$ existe un automorfismo $f \in \mathcal{A}(\Gamma)$, tal que $u = f(v)$. Si $\mathcal{A}(\Gamma)$ actúa transitivamente sobre V decimos que Γ es una relación **vértice-transitiva**.

Es claro que si Γ es vértice-transitiva, entonces tanto Γ como Γ^- son r-regulares.

La prueba de la siguiente proposición se encuentra en [2].

Proposición 3.3.1 Sea $\Gamma = (V, F)$ una relación vértice-transitiva con V finita, $F \neq V \times V$, tal que $a(\Gamma) \leq a(\Gamma^-)$. Si A es un átomo, entonces la subrelación $\Gamma[A]$ inducida por A es vértice-transitiva y $|A| \leq \kappa(\Gamma)$.

Lema 3.3.1 Dada $\Gamma = (V, F)$ una relación vértice-transitiva, entonces Γ^i y Γ^{-i} son vértice-transitiva para todo $i \in \mathbb{N}$

Demostración.

Para probar este lema basta mostrar que $\mathcal{A}(\Gamma) \subseteq \mathcal{A}(\Gamma^i)$ y $\mathcal{A}(\Gamma) \subseteq \mathcal{A}(\Gamma^{-i})$ para $i \geq 2$. lo cual lo se hará por inducción sobre i .

Sea $g \in \mathcal{A}(\Gamma)$, $i \geq 2$ y sea $(u, v) \in F(\Gamma^i)$. Como $\Gamma^i = \Gamma \circ \Gamma^{i-1}$, existe $w \in V$, tal que $(u, w) \in F(\Gamma^{i-1})$ y $(w, v) \in F(\Gamma)$. Por hipótesis de inducción $g \in \mathcal{A}(\Gamma^{i-1})$, por lo que $(g(u), g(w)) \in \Gamma^{i-1}$ y $(g(w), g(v)) \in F(\Gamma)$, por lo que $(g(u), g(v)) \in F(\Gamma^i)$.

Por otro lado, si $(g(u), g(v)) \in F(\Gamma^i)$ existe $g(w) \in V$, tal que $(g(u), g(w)) \in \Gamma^{i-1}$ y $(g(w), g(v)) \in \Gamma$, lo cual implica que $(u, w) \in F(\Gamma^{i-1})$ y $(w, v) \in F(\Gamma)$ por lo que $(u, v) \in F(\Gamma^i)$.

Así $g \in \mathcal{A}(\Gamma^i)$ y $\mathcal{A}(\Gamma) \subset \mathcal{A}(\Gamma^i)$.

De manera análoga se puede ver que $\mathcal{A}(\Gamma^-) \subseteq \mathcal{A}(\Gamma^{-i})$ para cada $i \geq 2$ y como $\mathcal{A}(\Gamma) = \mathcal{A}(\Gamma^-)$ entonces $\mathcal{A}(\Gamma) \subset \mathcal{A}(\Gamma^{-i})$.

Así Γ^i y Γ^{-i} son vértice-transitiva para todo $i \geq 1$

■

Teorema 3.4 [3] *Dada $\Gamma = (V, F)$ una relación reflexiva y vértice-transitiva. Sea $r = |\Gamma(v)|$ con $v \in V$. Si $\Gamma^j(v) \cap \Gamma^-(v) = \{v\}$, entonces $|\Gamma^j(v) \setminus \Gamma^{j-1}(v)| \geq r - 1$.*

Demostración.

Como Γ es reflexiva implica que $v \in \Gamma(v)$. Si $j = 1$, entonces $\Gamma(v) \cap \Gamma^0(v) = \{v\}$, y claramente $|\Gamma^1(v) \setminus \Gamma^0(v)| = r - 1$.

Suponga que $j > 1$. Se demostrará el Teorema por inducción sobre r .

Si $r = 1$, es claro que $\Gamma(v) = \Gamma^-(v) = v$ para cualquier $v \in V$ y $\Gamma^j(v) = v$ para cualquier $j \in \mathbb{N}$. Así el resultado se satisface trivialmente.

Suponga que $r \geq 2$, y sin pérdida de generalidad asuma que Γ es conexa, es decir, $\kappa(\Gamma) \geq 1$.

Observe que $\Gamma^j(v) \setminus \Gamma^{j-1}(v) = \Gamma(\Gamma^{j-1}(v)) \setminus \Gamma^{j-1}(v)$ es un conjunto de corte pues si

$$\Gamma(\Gamma^{j-1}(v)) \cup \Gamma^{j-1}(v) = V,$$

como por hipótesis $\Gamma^j(v) \cap \Gamma^-(v) = \{v\}$, entonces $\Gamma^-(v) \subset \Gamma^{j-1}(v)$ y como la relación es reflexiva $\Gamma^{j-1}(v) \subset \Gamma^j(v)$. Por lo tanto, $\Gamma^-(v) \subset \Gamma^j(v)$ lo cual es una contradicción, pues $|\Gamma^-(v)| = r \geq 2$.

Así por la definición de $\kappa(\Gamma)$ se tiene que

$$\kappa(\Gamma) \leq |\Gamma^j(v) \setminus \Gamma^{j-1}(v)|. \quad (3.5)$$

Por lo tanto, si $\kappa(\Gamma) = r - 1$ el Teorema es válido .

Suponga que $\kappa(\Gamma) \leq r - 2$. Como $\kappa(\Gamma) \geq 1$, entonces $r \geq 3$. Se define $\delta_\Gamma(X) := \Gamma(X) \setminus X$ para cualquier $X \subset V$.

Sea A un átomo que contiene a v , el cual existe pues Γ es vértice-transitiva. Por definición del mismo se satisface que $|\delta_\Gamma(A)| = \kappa(\Gamma) \leq r - 2$. Además $|A| \geq 2$ pues si $|A| = 1$, entonces $\kappa(\Gamma) = |\Gamma(A) \setminus A| = r - 1$.

Caso 3.4.1 Si $a(\Gamma) \leq a(\Gamma^-)$.

Sea $K = \Gamma(A) \setminus (A \cup \Gamma(v))$, $r^* = |\Gamma(v) \setminus A|$ y $r_* = |\Gamma(v) \cap A|$. Note que $r^* + r_* = |\Gamma(v)| = r$ y $K = \delta_\Gamma(A) \cap (\Gamma(A) \setminus \Gamma(v))$.

Por la Proposición 3.3.1 $\Gamma[A]$ es una relación vértice-transitiva donde, como $v \in A$, $\Gamma^j(v) \cap \Gamma^-(v) \cap A = \{v\}$, y además $|A| \leq \kappa(\Gamma) \leq r - 2$ de donde se sigue que $r_* = |\Gamma(v) \cap A| < r$.

Por hipótesis de inducción se satisface

$$|(\Gamma^j(v) \setminus \Gamma^{j-1}(v)) \cap A| \geq r_* - 1.$$

Sea $X = \Gamma^{j-1}(v)$ y $Y = X \cup A$. Observe que

$$|\delta_\Gamma(X) \cap A| \geq r_* - 1. \quad (3.6)$$

Es claro que

$$\Gamma(Y) = \Gamma(X) \cup \Gamma(A \setminus X) \subset \Gamma(X) \cup \Gamma(A \setminus \Gamma(v)) \subset \Gamma(X) \cup K.$$

Por lo tanto, $\Gamma(Y) \subset \Gamma(X) \cup K$ y entonces

$$\Gamma(Y) \setminus Y \subset (\Gamma(X) \setminus X) \cup K.$$

Así $(\Gamma(Y) \setminus Y) \setminus (\Gamma(X) \setminus X) \subset K$, es decir, $\delta_\Gamma(Y) \setminus \delta_\Gamma(X) \subset K$. Por tanto,

$$|\delta_\Gamma(Y) \setminus \delta_\Gamma(X)| \leq |K|.$$

Note que $|\delta_\Gamma(Y)| = |\delta_\Gamma(Y) \cap \delta_\Gamma(X)| + |\delta_\Gamma(Y) \setminus \delta_\Gamma(X)|$, por lo que

$$|\delta_\Gamma(Y) \cap \delta_\Gamma(X)| \geq |\delta_\Gamma(Y)| - |K|. \quad (3.7)$$

Por (3.5) se tiene que

$$\kappa(\Gamma) + |\Gamma^{j-1}(v)| \leq |\Gamma^j(v)|,$$

y de la hipótesis, $|\Gamma^j(v) \cap \Gamma^-(v)| = |\{v\}| = 1$ y como Γ es vértice-transitiva $|\Gamma^-(v)| = r$, así

$$|\Gamma^j(v)| \leq |V| - r + 1,$$

por lo cual

$$|\Gamma^{j-1}(v)| \leq |V| - r + 1 - \kappa(\Gamma).$$

De la Proposición 3.3.1 se tiene que $|A| \leq \kappa(\Gamma)$ por lo que de estas dos últimas desigualdades se obtiene que

$$|Y| = |\Gamma^{j-1}(v) \cup A| \leq |\Gamma^{j-1}(v)| + |A| \leq |V| - r + 1 - \kappa(\Gamma) + \kappa(\Gamma) = |V| - r + 1,$$

y así

$$|Y| \leq |V| - r + 1.$$

Observe que si $\Gamma(Y) \cup Y \neq V$, por definición $\delta_{\Gamma(Y)} \geq \kappa(\Gamma)$ y si $\Gamma(Y) \cup Y = V$, como $|Y| \leq |V| - r + 1$, entonces $|\Gamma(Y) \setminus Y| = \delta_{\Gamma(Y)} \geq r - 1 \geq \kappa(\Gamma)$. En cualquier caso

$$\delta_{\Gamma(Y)} \geq \kappa(\Gamma). \quad (3.8)$$

Por definición, como $Y = X \cup A$, $|\delta_{\Gamma}(X)| \geq |\delta_{\Gamma}(X) \cap A| + |\delta_{\Gamma}(Y) \cap \delta_{\Gamma}(X)|$, y por (3.6), (3.7), (3.8) se tiene que

$$\begin{aligned} |\delta_{\Gamma}(X)| &\geq |\delta_{\Gamma}(X) \cap A| + |\delta_{\Gamma}(Y) \cap \delta_{\Gamma}(X)| \\ &\geq |\delta_{\Gamma}(Y)| - |K| + r_* - 1 \\ &\geq \kappa(\Gamma) - |K| + r_* - 1 \\ &= \kappa(\Gamma) - |\delta_{\Gamma}(A) \cap \Gamma(v)| + r_* - 1. \end{aligned}$$

Como $v \in A$, entonces $|\delta_{\Gamma}(A) \cap \Gamma(v)| = |\delta_{\Gamma}(A)| - |\Gamma(v) \setminus A| = \kappa(\Gamma) - r^*$

por lo que

$$|\delta_\Gamma(X)| \geq \kappa(\Gamma) - |\delta_\Gamma(A) \cap \Gamma(v)| + r_* - 1 = \kappa(\Gamma) - \kappa(\Gamma) + r^* + r_* - 1 = r - 1,$$

es decir,

$$|\delta_\Gamma(X)| = |\Gamma^j(v) \setminus \Gamma^{j-1}(v)| \geq r - 1.$$

Caso 3.4.2 Si $a(\Gamma) > a(\Gamma^-)$

Considere a la relación inversa Γ^- , de manera análoga que en el caso anterior se deduce que

$$|\Gamma^{-j}(v) \setminus \Gamma^{-(j-1)}(v)| \geq r - 1.$$

Por el Lema (3.3.1), se tiene que Γ^{-j} es vértice-transitiva y entonces

$$|\Gamma^{-j}(v)| = |\Gamma^j(v)|,$$

por lo que

$$\begin{aligned} |\Gamma^{-j}(v) \setminus \Gamma^{-(j-1)}(v)| &= |\Gamma^{-j}(v)| - |\Gamma^{-(j-1)}(v)| \\ &= |\Gamma^j(v)| - |\Gamma^{(j-1)}(v)| \\ &= |\Gamma^j(v) \setminus \Gamma^{(j-1)}(v)| \\ &\geq r - 1. \end{aligned}$$

Ambos casos prueban la validez del Teorema 3.4. ■

Corolario 3.5 Dada $\Gamma = (V, F)$ una relación reflexiva y vértice-transitiva, si $r = |\Gamma(v)|$ con $v \in V$ y $\Gamma^j(v) \cap \Gamma^-(v) = \{v\}$, entonces $|\Gamma^j(v)| \geq 1 + (r - 1)j$.

Demostración.

Por inducción sobre j .

Si $j = 1$ es trivial. Suponga válido el resultado para $j - 1$, es decir, $|\Gamma^{j-1}(v)| \geq 1 + (r - 1)(j - 1)$. El Teorema anterior implica que

$$|\Gamma^j(v)| - |\Gamma^{(j-1)}(v)| = |\Gamma^j(v) \setminus \Gamma^{(j-1)}(v)| \geq r - 1,$$

por lo que

$$|\Gamma^j(v)| \geq |\Gamma^{(j-1)}(v)| + r - 1 \geq 1 + (r - 1)j.$$

■

A continuación se presenta una prueba de la validez de la Conjetura para digráficas vértice-transitivas.

Corolario 3.6 *Sea $D = (V(D), F(D))$ una digráfica vértice-transitiva r -regular simple. Si g denota el cuello de D , entonces $|V(D)| \geq 1 + r(g - 1)$.*

Demostración.

Dado que D es simple, entonces $F(D) \cap \Delta_v = \emptyset$. Sea $\Gamma = (V, F \cup \Delta_v)$. Observe que la condición $\Gamma^j(v) \cap \Gamma^-(v) = \{v\}$ en digráficas es equivalente a que no haya un ciclo de longitud j , por lo que $\Gamma^{g-2}(v) \cap \Gamma^-(v) = \{v\}$. Como $|\Gamma(v)| = r + 1$, del corolario anterior se tiene que $|V| - r \geq |\Gamma^{g-2}(v)| \geq 1 + (r)(g - 2)$, por lo que $|V(D)| \geq 1 + r(g - 1)$.

■

El haber usado la notación de relación en vez de usar la notación de digráficas tuvo una razón, la cual es probar un resultado de Teoría de Grupos. Antes de pasar al resultado, se necesita de la siguiente definición:

Definición 3.9 *Sea G un grupo multiplicativo finito y $S \subseteq G$. La digráfica de Cayley $C_G(S)$ asociada a (G, S) es aquella, tal que $V(C_G(S)) = G$ y $F(C_G(S)) = \{(g, h) \in G \times G | g^{-1}h \in S\}$.*

Note que $C_G(S)$ es $|S|$ -regular.

Corolario 3.7 *Dado un grupo G de orden n y $S \subset G \setminus \{1\}$, tal que $|S| = r$, existen elementos $\hat{s}_1, \hat{s}_2, \dots, \hat{s}_k \in S$ con $k \leq \left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil$, tal que $\prod_{1 \leq i \leq k} \hat{s}_i = 1$.*

Demostración.

Considere la digráfica de Cayley $C_G(S)$ asociada a (G, S) . Como $C_G(S)$ es r -regular y es vértice-transitiva, entonces por el Corolario 3.6 $C_G(S)$ tiene un ciclo de longitud a lo más $\left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil$. Suponga que $C = \{s_1, s_2, \dots, s_k, s_{k+1} = s_1\}$ es dicho ciclo,

entonces $(s_i, s_{i+1}) \in F(C_G(S))$ para todo $1 \leq i \leq n$, es decir, $s_i^{-1}s_{i+1} \in S$ para todo $1 \leq i \leq n$. Sea $\hat{s}_i = s_i^{-1}s_{i+1}$, entonces

$$\prod_{1 \leq i \leq k} \hat{s}_i = \prod_{1 \leq i \leq k} s_i^{-1}s_{i+1} = s_1^{-1}s_1 = 1.$$

■

Capítulo 4

Otras cotas para el caso general

En este capítulo se presentan algunos resultados más para el caso general de la Conjetura, cuyas pruebas dependen de resultados obtenidos en el capítulo anterior.

Una forma alternativa para resolver la conjetura es tratando de ver que dada una digráfica simple D con $\delta^+(D) \geq r$, tiene un ciclo de longitud a lo más $\lceil \frac{n}{r} \rceil + c$, donde c es una constante positiva.

A la fecha se ha demostrado para algunos valores de c :

- $c = 2500$ por Chvátal y Szemerédi
- $c = 304$ por Nishimura
- $c = 73$ por Shen.

Las referencias de las pruebas se encuentran en [9].

Vale la pena notar que la cota $\lceil \frac{n}{r} \rceil + c$ solo es buena para valores de r cercanos a n . En particular si $r \geq \lceil \frac{n}{3} \rceil$, la Conjetura implica la existencia de un triángulo dirigido, la mejor cota implica hay un ciclo de longitud a lo más 76.

Aquí se presenta la prueba para $c = 73$ y para ello se requiere de los siguientes teoremas.

Teorema 4.1 [7] Sea G una digráfica simple de orden n y $\delta^+(G) \geq r$, entonces $g \leq 3 \lceil \ln(\frac{2+\sqrt{7}}{3}) \frac{n}{r} \rceil$.

Demostración.

Suponga que el Teorema 4.1 no es válido y sea G un contraejemplo con el mínimo número de vértices.

Caso 4.1.1 $r \geq (3 - \sqrt{7})n$.

En el caso $\delta^+(G) \geq (3 - \sqrt{7})n$ y por el Teorema 3.1 G contiene un triángulo dirigido. Por otro lado

$$3 \lceil \ln(\frac{2+\sqrt{7}}{3}) \frac{n}{r} \rceil \leq 3 \lceil (\ln(\frac{2+\sqrt{7}}{3}) \frac{n}{(3-\sqrt{7})n}) \rceil = 6.$$

Como $g = 3$, entonces el Teorema 4.1 es válido.

Caso 4.1.2 $r < (3 - \sqrt{7})n$.

Afirmación 4.1.1 $|\hat{N}_i^+(u)| \geq n \left(1 - (1 - \frac{r}{n})^i\right) + 1$ para todo $u \in V(G)$ y $1 \leq i \leq g - 1$.

Demostración.

Por inducción sobre i .

Para cada $u \in V(G)$ se tiene $|\hat{N}_1(u)| \geq r + 1 = n \left(1 - (1 - \frac{r}{n})\right) + 1$. Por tanto la Afirmación 4.1.1 se vale para $i = 1$.

Suponga la Afirmación (4.1.1) válida para $i - 1$ y que para i falla, es decir, para cada $u \in V(G)$, $|\hat{N}_{i-1}(u)| \geq n \left(1 - (1 - \frac{r}{n})^{i-1}\right) + 1$ y existe $v_0 \in V(G)$, tal que $|\hat{N}_i(v_0)| < n \left(1 - (1 - \frac{r}{n})^i\right) + 1$.

Como $i \leq g - 1$, entonces no existen flechas de $N_{i-1}(v_0)$ a v_0 pues habría un ciclo de longitud menor que g . Sea G_1 la subgráfica inducida por $N_{i-1}(v_0)$. Por la observación anterior se tiene que

$$\delta^+(G_1) \geq r - |\hat{N}_i(v_0) \setminus \hat{N}_{i-1}(v_0)|.$$

Dado que

$$N_i(v_0) < n \left(1 - (1 - \frac{r}{n})^i\right) + 1$$

y

$$N_{i-1}(v_0) \geq n \left(1 - \left(1 - \frac{r}{n} \right)^{i-1} \right) + 1,$$

entonces

$$\begin{aligned} & \left| \widehat{N}_i(v_0) \setminus \widehat{N}_{i-1}(v_0) \right| \\ & < n \left(1 - \left(1 - \frac{r}{n} \right)^i \right) + 1 - \left(n \left(1 - \left(1 - \frac{r}{n} \right)^{i-1} \right) + 1 \right) \\ & = n \left(\left(1 - \frac{r}{n} \right)^{i-1} - \frac{r}{n} \right)^i = n \left(\left(1 - \frac{r}{n} \right)^{i-1} \frac{r}{n} \right) \\ & = r \left(1 - \left(1 - \frac{r}{n} \right)^{i-1} \right), \end{aligned}$$

por lo que

$$\delta^+(G_1) > r - r \left(1 - \frac{r}{n} \right)^{i-1} \geq 0.$$

Como G_1 no es contraejemplo del Teorema 4.1, entonces

$$\begin{aligned} g & \leq g(G_1) \\ & \leq 3 \lceil \ln \left(\frac{2+\sqrt{7}}{3} \right) \frac{|N_{i-1}(v_0)|}{r - |\widehat{N}_i(v_0) \setminus \widehat{N}_{i-1}(v_0)|} \rceil. \end{aligned}$$

Si

$$\frac{|N_{i-1}(v_0)|}{r - |\widehat{N}_i(v_0) \setminus \widehat{N}_{i-1}(v_0)|} \leq \frac{n}{r},$$

entonces

$$g \leq g(G_1) \leq 3 \lceil \ln \left(\frac{2+\sqrt{7}}{3} \right) \frac{n}{r} \rceil$$

lo cual es una contradicción.

Por lo tanto,

$$\frac{|N_{i-1}(v_0)|}{r - |\widehat{N}_i(v_0) \setminus \widehat{N}_{i-1}(v_0)|} > \frac{n}{r} \geq 1$$

y así

$$\begin{aligned}
& \frac{|N_{i-1}(v_0)|}{r - |\widehat{N}_i(v_0) \setminus \widehat{N}_{i-1}(v_0)|} \\
& \leq \frac{|N_{i-1}(v_0)| - (|N_{i-1}(v_0)| - n(1 - (1 - \frac{r}{n})^{i-1}))}{r - |\widehat{N}_i(v_0) \setminus \widehat{N}_{i-1}(v_0)| - (|N_{i-1}(v_0)| - n(1 - (1 - \frac{r}{n})^{i-1}))} \\
& = \frac{n(1 - (1 - \frac{r}{n})^{i-1})}{r - |\widehat{N}_i(v_0) \setminus \widehat{N}_{i-1}(v_0)| - |N_{i-1}(v_0)| + n(1 - (1 - \frac{r}{n})^{i-1})} \\
& = \frac{n(1 - (1 - \frac{r}{n})^{i-1})}{r - |N_i(v_0)| + n(1 - (1 - \frac{r}{n})^{i-1})} \\
& = \frac{n(1 - (1 - \frac{r}{n})^{i-1})}{r - (|\widehat{N}_i(v_0)| - 1) + n(1 - (1 - \frac{r}{n})^{i-1})} \\
& \leq \frac{n(1 - (1 - \frac{r}{n})^{i-1})}{r - n(1 - (1 - \frac{r}{n})^i) + n(1 - (1 - \frac{r}{n})^{i-1})} \\
& = \frac{n(1 - (1 - \frac{r}{n})^{i-1})}{r - n((1 - \frac{r}{n})^i - (1 - \frac{r}{n})^{i-1})} \\
& = \frac{n(1 - (1 - \frac{r}{n})^{i-1})}{r - n((1 - \frac{r}{n})^{i-1}(1 - (1 - \frac{r}{n})))} \\
& = \frac{n(1 - (1 - \frac{r}{n})^{i-1})}{r(1 - (1 - \frac{r}{n})^{i-1})} \\
& = \frac{n}{r},
\end{aligned}$$

lo cual es una contradicción, por lo que la Afimación 4.1.1 es válida. ■

Sea $t = \lceil (\ln(\frac{2 + \sqrt{7}}{3})) \frac{n}{r} \rceil$. Si $g \leq t$ el teorema queda demostrado.

Suponga ahora que $t \leq g - 1$. Por la Afimación 4.1.1 se tiene que para cada $v \in V(G)$,

$$|\widehat{N}_t(v)| \geq n \left(1 - \left(1 - \frac{r}{n}\right)^t\right) + 1.$$

Dado que $r < (3 - \sqrt{7})n$, entonces $(1 - \frac{r}{n}) > 1 - (3 - \sqrt{7})$ y como $n \geq r$ se sigue que $0 < (1 - \frac{r}{n}) \leq 1$ y así $(1 - \frac{r}{n})^t \leq (1 - \frac{r}{n})$. Por tanto

$$1 - \left(1 - \frac{r}{n}\right)^t \geq 1 - \left(1 - \frac{r}{n}\right) \geq 1 - \left(1 - (3 - \sqrt{7})\right) = (3 - \sqrt{7}),$$

es decir,

$$n \left(1 - \left(1 - \frac{r}{n} \right)^t \right) + 1 \geq n \left(3 - \sqrt{7} \right) + 1.$$

Por lo tanto para cada $v \in V(G)$ $|\hat{N}_t(v)| \geq n(3 - \sqrt{7}) + 1$.

Sea G_2 la digráfica tal que $V(G_2) = V(G)$ y $(u, v) \in F(G_2)$ si y solo si $v \in N_t(u)$ en G . Es claro que para todo $u \in V(G_2)$, $\delta^+(u) = |\hat{N}_t(u)| - 1 \geq n(3 - \sqrt{7})$ y entonces G_2 satisface las hipótesis del Teorema 3.1. Por lo tanto, $g(G_2) \leq 3$.

Por construcción de G_2 , cada $(u, v) \in F(G_2)$ puede ser reemplazado por un camino de longitud a lo más t de u a v en G , por lo tanto $g \leq 3t = 3 \lceil (\ln(\frac{2 + \sqrt{7}}{3})) \frac{n}{r} \rceil$. Esto muestra la validez del Teorema 4.1. ■

Teorema 4.2 [7] *Sea G una digráfica simple de orden n y tal que $\delta^+(G) \geq r$, entonces $g \leq \frac{n}{r} + 73$.*

Demostración.

Suponga que el Teorema 4.2 no es válido. Sea G un contraejemplo con el mínimo número de vértices (se puede suponer que G es fuertemente conexa). Así $g > \frac{n}{r} + 73$.

Sea $t = \frac{n}{r}$. Del Teorema 4.1 se satisface que $g \leq 3 \left\lceil \ln\left(\frac{2 + \sqrt{7}}{3}\right)t \right\rceil$, por lo que

$$g \leq 3 \left\lceil \ln\left(\frac{2 + \sqrt{7}}{3}\right)t \right\rceil < 3 \ln\left(\frac{2 + \sqrt{7}}{3}\right)t + 1 < 1.3181t + 1,$$

pero $1.3181t + 1 < t + 73$ si y solo si $t < 226.3$.

Suponga ahora que $t \geq 226.3$ y $r \geq 6$, pues del Teorema 2.2 se sabe la validez de la Conjetura para $r \leq 5$.

Afirmación 4.2.1 $|\hat{N}_1^+(X) \setminus X| > r - |X| \frac{r}{n}$ para cualquier $X \subsetneq V(G)$.

Demostración.

Suponga lo contrario, es decir, existe $X \subsetneq V(G)$, tal que

$$|\hat{N}_1^+(X) \setminus X| \leq r - |X| \frac{r}{n}.$$

Sea G_1 la subgráfica inducida por X , entonces

$$\delta^+(G_1) \geq r - |\widehat{N}_1^+(X) \setminus X| \geq |X| \frac{r}{n}.$$

Como G es un contraejemplo con el mínimo número de vértices, entonces G_1 satisface el Teorema 4.2, es decir,

$$g \leq g(G_1) \leq \frac{|X|}{\delta^+(G_1)} + 73 \leq \frac{|X|}{|X| \frac{r}{n}} + 73 = \frac{n}{r} + 73,$$

lo cual es una contradicción. ■

Afirmación 4.2.2 *Existe algún vértice $u \in V(G)$, tal que*

$$\begin{cases} |\widehat{N}_{\lfloor \frac{t+73}{2} \rfloor}^+(u)| \leq \frac{n+1}{2} & \text{si } \frac{t+73}{2} - \lfloor \frac{t+73}{2} \rfloor \leq 0.5; \\ |\widehat{N}_{\lfloor \frac{t+72}{2} \rfloor}^+(u)| \leq \frac{2n-r+1}{4} & \text{si } \frac{t+73}{2} - \lfloor \frac{t+73}{2} \rfloor > 0.5. \end{cases}$$

Demostración.

Suponga lo contrario, es decir, para todo vértice $u \in V(G)$ se satisface que

$$\begin{cases} |\widehat{N}_{\lfloor \frac{t+73}{2} \rfloor}^+(u)| \geq \frac{n+2}{2} & \text{si } \frac{t+73}{2} - \lfloor \frac{t+73}{2} \rfloor \leq 0.5; \\ |\widehat{N}_{\lfloor \frac{t+72}{2} \rfloor}^+(u)| \geq \frac{2n-r+2}{4} & \text{si } \frac{t+73}{2} - \lfloor \frac{t+73}{2} \rfloor > 0.5. \end{cases} \quad (4.1)$$

Si $\frac{t+73}{2} - \lfloor \frac{t+73}{2} \rfloor \leq 0.5$, sea $G' = (V(G'), F(G'))$ la digráfica, tal que $V(G') = V(G)$ y $(u, v) \in F(G')$ si y solo si $v \in \widehat{N}_{\lfloor \frac{t+73}{2} \rfloor}^+(u)$. Por construcción de G' se tiene que $\delta_{G'}^+(u) = |\widehat{N}_{\lfloor \frac{t+73}{2} \rfloor}^+(u)|$ y $\delta_{G'}^-(u) = |\widehat{N}_{\lfloor \frac{t+73}{2} \rfloor}^-(u)|$.

Se sabe que

$$\sum_{u \in V(G')} \delta^-(u) = \sum_{u \in V(G')} \delta^+(u) \geq \sum_{u \in V(G')} \frac{n+2}{2} = n \left(\frac{n+2}{2} \right).$$

Por lo tanto existe un vértice u , tal que

$$|\widehat{N}_{\lfloor \frac{t+73}{2} \rfloor}^-(u)| \geq \frac{n+2}{2}$$

si

$$\frac{t+73}{2} - \lfloor \frac{t+73}{2} \rfloor \leq 0.5.$$

De manera análoga para el caso $\frac{t+73}{2} - \lfloor \frac{t+73}{2} \rfloor > 0.5$ se puede probar que existe $u \in V(G)$, tal que

$$|\hat{N}_{\lfloor \frac{t+72}{2} \rfloor}^-(u)| \geq \frac{2n-r+2}{4}.$$

Uniendo ambos resultados se tiene la existencia de $u \in V(G)$ tal que

$$\begin{cases} |\hat{N}_{\lfloor \frac{t+73}{2} \rfloor}^-(u)| \geq \frac{n+2}{2} & \text{si } \frac{t+73}{2} - \lfloor \frac{t+73}{2} \rfloor \leq 0.5, \\ |\hat{N}_{\lfloor \frac{t+72}{2} \rfloor}^-(u)| \geq \frac{2n-r+2}{4} & \text{si } \frac{t+73}{2} - \lfloor \frac{t+73}{2} \rfloor > 0.5. \end{cases} \quad (4.2)$$

Sea $u \in V(G)$, tal que satisface (4.2). Si $\frac{t+73}{2} - \lfloor \frac{t+73}{2} \rfloor \leq 0.5$, de (4.1) y (4.2) se tiene que $|\hat{N}_{\lfloor \frac{t+73}{2} \rfloor}^+(u)| + |\hat{N}_{\lfloor \frac{t+73}{2} \rfloor}^-(u)| \geq n+2$, entonces existe $v \in V(G)$, tal que $v \neq u$ y $v \in \hat{N}_{\lfloor \frac{t+73}{2} \rfloor}^+(u) \cap \hat{N}_{\lfloor \frac{t+73}{2} \rfloor}^-(u)$. Por lo tanto, hay una uv -trayectoria y una vu -trayectoria que se quedan contenidas en un camino cerrado de longitud a lo más $2\lfloor \frac{t+73}{2} \rfloor \leq t+73$, es decir, hay un ciclo contenido en este camino cerrado de longitud a lo más $t+73$, así $g \leq t+73$, lo cual es una contradicción a la elección de G .

Suponga que $\frac{t+73}{2} - \lfloor \frac{t+73}{2} \rfloor > 0.5$.

Es claro que

$$|\hat{N}_{\lfloor \frac{t+74}{2} \rfloor}^+(u)| = |\hat{N}_{\lfloor \frac{t+72}{2} \rfloor}^+(u)| + |\hat{N}_1^+ \left(\hat{N}_{\lfloor \frac{t+72}{2} \rfloor}^+(u) \right) \setminus \hat{N}_{\lfloor \frac{t+72}{2} \rfloor}^+(u)|,$$

de la Afirmación 4.2.1, se tiene que

$$|\hat{N}_1^+ \left(\hat{N}_{\lfloor \frac{t+72}{2} \rfloor}^+(u) \right) \setminus \hat{N}_{\lfloor \frac{t+72}{2} \rfloor}^+(u)| > r - |\hat{N}_{\lfloor \frac{t+72}{2} \rfloor}^+(u)| \frac{r}{n},$$

entonces

$$\begin{aligned}
|\widehat{N}_{\lfloor \frac{t+72}{2} \rfloor}^+(u)| &+ |\widehat{N}_1^+ \left(\widehat{N}_{\lfloor \frac{t+72}{2} \rfloor}^+(u) \right) \setminus \widehat{N}_{\lfloor \frac{t+72}{2} \rfloor}^+(u)| \\
&\geq |\widehat{N}_{\lfloor \frac{t+72}{2} \rfloor}^+(u)| + r - |\widehat{N}_{\lfloor \frac{t+72}{2} \rfloor}^+(u)| \frac{r}{n} \\
&= r + |\widehat{N}_{\lfloor \frac{t+72}{2} \rfloor}^+(u)| \frac{n-r}{n}
\end{aligned}$$

y como $|\widehat{N}_{\lfloor \frac{t+72}{2} \rfloor}^+(u)| \geq (\frac{2n-r+2}{4})$, entonces

$$\begin{aligned}
|\widehat{N}_{\lfloor \frac{t+72}{2} \rfloor}^+(u)| &+ |\widehat{N}_1^+ \left(\widehat{N}_{\lfloor \frac{t+72}{2} \rfloor}^+(u) \right) \setminus \widehat{N}_{\lfloor \frac{t+72}{2} \rfloor}^+(u)| \\
&\geq r + \frac{2n-r+2}{4} \left(\frac{n-r}{n} \right) \\
&= \frac{n(2n+r+2) + r^2 - 2r}{4n} > \frac{2n+r+2}{4}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$|\widehat{N}_{\lfloor \frac{t+74}{2} \rfloor}^+(u)| + |\widehat{N}_{\lfloor \frac{t+72}{2} \rfloor}^-(u)| > \frac{2n+r+2}{4} + \frac{2n-r+2}{4} = n+1,$$

y así existe $w \in \widehat{N}_{\lfloor \frac{t+74}{2} \rfloor}^+(u) \cap \widehat{N}_{\lfloor \frac{t+72}{2} \rfloor}^-(u)$, tal que $u \neq w$. Por tanto existe una uw -trayectoria y una wu trayectoria que se quedan contenidas en un camino cerrado de longitud a lo más $\lfloor \frac{t+74}{2} \rfloor + \lfloor \frac{t+72}{2} \rfloor \leq \frac{t+74}{2} + \frac{t+72}{2} = t+73$, lo cual implica que $g \leq t+73$, y esto es una contradicción, por lo que se sigue la Afirmación 4.2.2.

■

Sea c tal que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \lfloor \frac{t+73}{2} \rfloor (r-c) = \frac{n+1}{2} & \text{si } \frac{t+73}{2} - \lfloor \frac{t+73}{2} \rfloor \leq 0.5, \\ \lfloor \frac{t+72}{2} \rfloor (r-c) = \frac{2n-r+1}{4} & \text{si } \frac{t+73}{2} - \lfloor \frac{t+73}{2} \rfloor > 0.5. \end{array} \right.$$

Del Lema 6.0.3 del Apéndice se sigue que

$$\frac{73}{t+73} > \frac{c}{r} \geq \frac{71.4}{t+71.4}, \quad (4.3)$$

y también por tanto

$$r - c \leq \frac{tr}{t+71.4} \quad (4.4)$$

Sea d el mínimo entero positivo con la propiedad de que

$$|\widehat{N}_d^+(s)| \leq d(r-c) \text{ para algún vértice } s \in V(G). \quad (4.5)$$

Es claro que por la Afirmación 4.2.2,

$$d \leq \lfloor \frac{t+73}{2} \rfloor$$

y

$$|\widehat{N}_d^+(s)| \leq \frac{n+1}{2}.$$

Afirmación 4.2.3 Dado s como en (4.5), hay a lo más $(i+1)(r-c)$ vértices $v \in V(G)$ con $d-i \leq \text{dist}(s, v) \leq d$ para todo $0 \leq i \leq d-1$.

Demostración.

Como $i \leq d-1$, entonces $0 \leq d-i-1 \leq d$. Por la minimalidad de d , $|\widehat{N}_{d-i-1}^+(s)| > (d-i-1)(r-c)$. Hay $|\widehat{N}_d^+(s) \setminus \widehat{N}_{d-i-1}^+(s)|$ vértices que cumplen que $d-i \leq \text{dist}(s, v) \leq d$. De (4.5) y la minimalidad de d se tiene que

$$|\widehat{N}_d^+(s) \setminus \widehat{N}_{d-i-1}^+(s)| \leq d(r-c) - (d-i-1)(r-c) = (i+1)(r-c),$$

es decir, hay a lo más $(i+1)(r-c)$ vértices v con $d-i \leq \text{dist}(s, v) \leq d$. Por tanto la Afirmación 4.2.3 queda demostrada. ■

Sea $U := \{w : \text{dist}(s, w) = d\}$ y $|U| = \epsilon_1(r-c)$. Note que por la Afirmación 4.2.3 si $i = 0$, entonces $|U| = \epsilon_1(r-c) \leq (r-c)$, de donde $\epsilon_1 \leq 1$.

Es claro que $U = \widehat{N}_d^+(s) \setminus \widehat{N}_{d-1}^+(s) = \widehat{N}_1^+(\widehat{N}_{d-1}^+(s)) \setminus \widehat{N}_{d-1}^+(s)$. La Afirmación 4.2.1 implica que $|U| > r - |\widehat{N}_{d-1}^+(s)| \frac{r}{n}$ y como

$$|\widehat{N}_{d-1}^+(s)| \leq |\widehat{N}_d^+(s)| \leq \frac{n+1}{2},$$

entonces

$$|U| > r - \left(\frac{n+1}{2}\right)\frac{r}{n} = \frac{r}{2} - \frac{r}{2n} \geq \frac{r-1}{2}.$$

Dado que $|U|$ es entero, $|U| = \epsilon_1(r - c) \geq \frac{r}{2}$, de donde $\epsilon_1 \geq \epsilon_1(1 - \frac{c}{r}) \geq \frac{1}{2}$, así $1 \geq \epsilon_1 \geq \frac{1}{2}$.

Recuerde que $t \geq 226.3$. Por el Lema 6.0.1 del Apéndice, existe un entero $m = m(\epsilon_1) \geq 8$, tal que

$$m(t + 71.4) - 2mt(2 - \epsilon_1) + 2t(m - 1)(2 - \epsilon_1) \sqrt[m-1]{\frac{2 - \epsilon_1}{m}} > 0 \quad (4.6)$$

y

$$\frac{73(3 - \epsilon_1)(a + 1)(t + 71.4)}{71.4a(t + 73 - t\epsilon_1)} - \frac{73(3 - \epsilon_1)}{t + 73 - t\epsilon_1} < \frac{t}{a} - 2 \quad (4.7)$$

donde

$$a = m + \frac{m^2(t + 71.4)}{m(t + 71.4) - 2mt(2 - \epsilon_1) + 2t(m - 1)(2 - \epsilon_1) \sqrt[m-1]{\frac{2 - \epsilon_1}{m}}}. \quad (4.8)$$

Sea

$$b = \frac{1}{(2 - \epsilon_1) \left(1 - \sqrt[m-1]{\frac{2 - \epsilon_1}{m}}\right)}. \quad (4.9)$$

Es claro que $b > 0$ y $2 - \epsilon_1 - \frac{1}{b} = (2 - \epsilon_1) \sqrt[m-1]{\frac{2 - \epsilon_1}{m}} > 0$.

Para terminar con la prueba del teorema observe los dos siguientes casos.

Caso 4.2.1 Para cada vértice v con $\text{dist}(s, v) = d - 1$, existe un vértice w , tal que $\text{dist}(v, w) < \frac{t}{a} - 1$ y $\text{dist}(s, w) \leq d - 3$.

Se define

$$Q := \{v : \text{dist}(s, v) = d - 1\}.$$

$$P := \{u : \text{dist}(s, u) = d - 2 \text{ y hay al menos } \frac{r-c}{b} \text{ flechas } (u, v) \text{ con } v \in Q\}.$$

Sea ϵ_2 , tal que $|Q| = \epsilon_2 (r - c)$.

Por la Afirmación 4.2.3 se tiene que hay a lo más $2(r - c)$ vértices tales que $d - 1 \leq \text{dist}(s, v) \leq d$, como $\epsilon_1 (r - c) = |U|$ y $U := \{w : \text{dist}(s, w) = d\}$, entonces

$$|Q| = \epsilon_2 (r - c) \leq 2(r - c) - \epsilon_1 (r - c) = (2 - \epsilon_1)(r - c)$$

de lo cual se sigue que $\epsilon_2 \leq 2 - \epsilon_1$.

De manera análoga por la Afirmación 4.2.3, existen a lo más $3(r - c)$ vértices tales que $d - 2 \leq \text{dist}(s, v) \leq d$. Por lo tanto,

$$|P| \leq 3(r - c) - |Q| - |U| = 3(r - c) - \epsilon_2 (r - c) - \epsilon_1 (r - c),$$

entonces

$$|P| \leq (3 - \epsilon_1 - \epsilon_2)(r - c).$$

Afirmación 4.2.4 Existe $R \subseteq P$ y $S \subseteq Q$, tal que $|R| \leq (2 - \epsilon_1 - \frac{1}{b})\frac{r - c}{m}$, $|S| \leq m$ y para todo vértice $u \in P \setminus R$ existe una flecha (u, v) con $v \in S$.

Demostración.

Observe que si $|Q| \leq m$, se puede considerar $R = \emptyset$ y $S = Q$, por lo que se satisface $|R| = 0 \leq (2 - \epsilon_1 - \frac{1}{b})\frac{r - c}{m}$ y $|S| = |Q| \leq m$. Así se puede suponer que $|Q| > m$. Si $P = \emptyset$, sea $R = S = \emptyset$. Es claro que se satisface la Afirmación 4.2.4, por lo que también considere $P \neq \emptyset$.

Ahora se construyen las sucesiones $R_0, R_1, \dots, R_m$ y $S_0, S_1, \dots, S_m$ de manera recursiva, donde $R_0, R_1, \dots, R_m$ son subconjuntos de P tales que

$$|R_i| \leq (3 - \epsilon_1 - \epsilon_2)(r - c)(1 - \frac{1}{b\epsilon_2})^i$$

y R_i consiste de aquellos vértices $u \in P$ para los cuales no existe la flecha (u, v) con $v \in S_i$; y por otro lado $S_0, S_1, \dots, S_m$ son subconjuntos de Q tales que $|S_i| = i$.

Sea $S_0 = \emptyset$. Se sabe que

$$|P| \leq (3 - \epsilon_1 - \epsilon_2)(r - c),$$

entonces si se toma $R_0 = P$, se tiene que R_0 satisface

$$|R_0| = |P| \leq (3 - \epsilon_1 - \epsilon_2)(r - c)(1 - \frac{1}{b\epsilon_2})^0.$$

Suponga que R_i y S_i ya están contruidos, entonces el número de flechas (u, v) con $u \in R_i$ y $v \in Q \setminus S_i$ es al menos $|R_i|(\frac{r-c}{b|Q \setminus S_i|})$. Sea $v' \in Q \setminus S_i$ el conjunto tal que

$$R' = \{u \in R_i : (u, v') \in F(G)\}$$

sea de mayor cardinal posible. Por construcción de R' se tiene que

$$|R'| \geq |R_i|(\frac{r-c}{b|Q \setminus S_i|}) \geq |R_i|(\frac{1}{b\epsilon_2}).$$

Sea

$$R_{i+1} = R_i \setminus R'$$

y

$$S_{i+1} = S_i \cup \{v'\}.$$

Así se tiene que

$$|R_{i+1}| = |R_i| - |R'| \leq |R_i|(1 - \frac{1}{b\epsilon_2})$$

y

$$|S_{i+1}| = |S_i| + 1.$$

Por inducción,

$$|R_m| \leq (3 - \epsilon_1 - \epsilon_2)(r - c)(1 - \frac{1}{b\epsilon_2})^m$$

y

$$|S_m| = m$$

donde $\frac{1}{b} \leq \epsilon_2 \leq 2 - \epsilon_1$.

Sea $f(x) = (3 - \epsilon_1 - x)(1 - \frac{1}{bx})^m$ donde $\frac{1}{b} \leq x \leq 2 - \epsilon_1 \leq 1.5$.

Por el Lema 6.0.2 del Apéndice, se sigue que $f(x)$ es creciente en ese intervalo, entonces

$$\begin{aligned}
 |R_m| &\leq (r - c)f(\epsilon_2) \\
 &\leq (r - c)f(2 - \epsilon_1) \\
 &= (1 - \frac{1}{b(2 - \epsilon_1)})^m (r - c) \\
 &= (r - c) \left(\sqrt[m-1]{\frac{2 - \epsilon_1}{m}} \right)^m \\
 &= \frac{r - c}{m} (2 - \epsilon_1)^{\frac{m-1}{m}} \sqrt[m]{\frac{2 - \epsilon_1}{m}} \\
 &= (2 - \epsilon_1 - \frac{1}{b}) \frac{(r - c)}{m}.
 \end{aligned}$$

Así, si $R = R_m$ y $S = S_m$, la afirmación queda demostrada. ■

Sea H la digráfica obtenida al agregar a la subdigráfica inducida por $\hat{N}_{d-2}^+(s) \setminus R$ las flechas (u, z) donde $u \in P \setminus R$ y z cumple que hay una flecha (u, v) , tal que $v \in S$ y $\text{dist}(v, z) < \frac{t}{a}$. Recuerde que $|\hat{N}_d^+(s)| \leq \frac{(n+1)}{2}$, por lo que

$$|V(H)| \leq |\hat{N}_d^+(s)| \leq |\hat{N}_{d-2}^+(s)| < \frac{n}{2},$$

es decir,

$$|V(H)| < \frac{n}{2} \tag{4.10}$$

Afirmación 4.2.5 $\delta^+(H) \geq r - \frac{(r - c)}{b} - |R|$.

Demostración.

Sea $u \in V(H)$.

Si $\text{dist}(s, u) \leq d-3$, como $\delta^+(G) \geq r$, y $V(H) = \hat{N}_{d-2}^+(s) \setminus R$, entonces cada vértice a lo más disminuye su exgrado en $|R|$, por lo que $\delta_H^+(u) \geq r - |R| \geq r - \frac{(r - c)}{b} - |R|$.

Si $\text{dist}(s, u) = d-2$ y $u \notin P$, de la definición de P hay a lo más $\frac{(r - c)}{b}$ arcos de

u a Q , por lo que $\delta_H^+(u) \geq r - \frac{(r-c)}{b} \geq r - \frac{(r-c)}{b} - |R|$.

Si $\text{dist}(s, u) = d - 2$ y $u \in P$, se tiene que $u \notin P \setminus R$, y por la Afirmación 4.2.4 existe una flecha (u, v) con $v \in S$. De la construcción de H existe un vértice w , tal que $\text{dist}(v, w) < \frac{t}{a}$ y $\text{dist}(s, w) \leq d - 3$; como hay al menos r vértices z con $(w, z) \in E(G)$, de los cuales a lo más $|R|$ de estos vértices z están en R , los restantes están en H , así

$$\delta_H^+(u) \geq r - |R| \geq r - \frac{(r-c)}{b} - |R|.$$

Esto muestra la validez de la Afirmación. ■

Como G es el contraejemplo más chico al Teorema 4.2, entonces H contiene un ciclo dirigido C de longitud a lo más

$$\frac{|H|}{\delta^+(H)} + 73.$$

Afirmación 4.2.6 $g \leq \frac{|H|}{\delta^+(H)} + \frac{tm}{a} + 73.$

Demostración.

Si todas las flechas de C están contenidas en $E(G)$, entonces

$$g \leq \frac{|H|}{\delta^+(H)} + 73 \leq \frac{|H|}{\delta^+(H)} + \frac{tm}{a} + 73.$$

De lo anterior se puede suponer que hay un número positivo l de las nuevas flechas (u, z) que pertenecen a C pero no están en G . La construcción de H implica que cada uno de estos arcos (u, z) pueden ser remplazados por una trayectoria T_{uz} en G de longitud a lo más $\frac{t}{a} + 1$, pues $(u, v) \in E(G)$ y $\text{dist}(v, z) < \frac{t}{a}$, por lo que existe una trayectoria T de longitud a lo más $\frac{t}{a}$ de v a z y entonces

$$T_{uz} = \{(u, v)\} \cup T$$

es una trayectoria de u a z de longitud a lo más $\frac{t}{a} + 1$, por lo que a partir de C se

encuentra un camino dirigido cerrado C' de longitud a lo más

$$\frac{|H|}{\delta^+(H)} + \frac{lt}{a} + 73$$

en G . Como cada una de las T_{uz} trayectorias pasan por vértices en S , un ciclo en C' tendrá a lo más $|S| \leq m$ de esas trayectorias, por lo que el ciclo tendrá longitud a lo más

$$\frac{H}{\delta^+(H)} + \frac{tm}{a} + 73$$

y se prueba la afirmación. ■

A continuación se demostrará que

$$\frac{H}{\delta^+(H)} + \frac{tm}{a} + 73 \leq t + 73$$

Por la Afirmación 4.2.5

$$g \leq \frac{|H|}{\delta^+(H)} + \frac{tm}{a} + 73 \leq \frac{|H|}{r - \frac{(r-c)}{b} - |R|} + \frac{tm}{a} + 73.$$

De (4.10) y la definición de R

$$\begin{aligned} \frac{|H|}{r - \frac{r-c}{b} - |R|} + \frac{tm}{a} + 73 &\leq \frac{n/2}{r - \frac{r-c}{b} - |R|} + \frac{tm}{a} + 73 \\ &\leq \frac{n/2}{r - \frac{r-c}{b} - (2 - \epsilon_1 - \frac{1}{b})\frac{r-c}{m}} + \frac{tm}{a} + 73. \end{aligned}$$

Por (4.4) se tiene que

$$\begin{aligned}
& \frac{n/2}{r - \frac{r-c}{b} - (2 - \epsilon_1 - \frac{1}{b})\frac{r-c}{m}} + \frac{tm}{a} + 73 \\
& \leq \frac{n/2}{r - \frac{tr}{(t+71.4)b} - (2 - \epsilon_1 - \frac{1}{b})\frac{tr}{m(t+71.4)}} + \frac{tm}{a} + 73 \\
& = \frac{n(t+71.4)/2}{r(t+71.4) - \frac{tr}{b} - (2 - \epsilon_1 - \frac{1}{b})\frac{tr}{m}} + \frac{tm}{a} + 73 \\
& = \left(\frac{n}{r}\right) \frac{(t+71.4)/2}{(t+71.4) - \frac{t}{b} - (2 - \epsilon_1 - \frac{1}{b})\frac{t}{m}} + \frac{tm}{a} + 73 \\
& = \frac{t(t+71.4)/2}{(t+71.4) - \frac{t}{b} - (2 - \epsilon_1 - \frac{1}{b})\frac{t}{m}} + \frac{tm}{a} + 73 \\
& = \frac{tm(t+71.4)}{2m(t+71.4) - \frac{2tm}{b} - 2t(2 - \epsilon_1 - \frac{1}{b})} + \frac{tm}{a} + 73.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$g \leq \frac{tm(t+71.4)}{2m(t+71.4) - \frac{2tm}{b} - 2t(2 - \epsilon_1 - \frac{1}{b})} + \frac{tm}{a} + 73.$$

Recuerde que

$$\begin{aligned}
a &= m + \frac{m^2(t+71.4)}{m(t+71.4) - 2mt(2 - \epsilon_1) + 2t(m-1)(2 - \epsilon_1) \sqrt[m-1]{\frac{2 - \epsilon_1}{m}}} \\
&= m + \frac{m^2(t+71.4)}{m(t+71.4) - 2mt(2 - \epsilon_1) \left(1 - \sqrt[m-1]{\frac{2 - \epsilon_1}{m}}\right) - 2t(2 - \epsilon_1) \sqrt[m-1]{\frac{2 - \epsilon_1}{m}}},
\end{aligned}$$

y como

$$b = \frac{1}{(2 - \epsilon_1) \left(1 - \sqrt[m]{\frac{2 - \epsilon_1}{m}} \right)},$$

entonces

$$2 - \epsilon_1 - \frac{1}{b} = (2 - \epsilon_1) \sqrt[m]{\frac{2 - \epsilon_1}{m}},$$

por lo que

$$a = m + \frac{m^2(t + 71.4)}{m(t + 71.4) - \frac{2mt}{b} - 2t(2 - \epsilon_1 - \frac{1}{b})}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{a}{m} &= 1 + \frac{m(t + 71.4)}{m(t + 71.4) - \frac{2mt}{b} - 2t(2 - \epsilon_1 - \frac{1}{b})} \\ &= \frac{2m(t + 71.4) - \frac{2mt}{b} - 2t(2 - \epsilon_1 - \frac{1}{b})}{m(t + 71.4) - \frac{2mt}{b} - 2t(2 - \epsilon_1 - \frac{1}{b})}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{tm}{a} &= \frac{t(m(t + 71.4) - \frac{2mt}{b} - 2t(2 - \epsilon_1 - \frac{1}{b}))}{2m(t + 71.4) - \frac{2mt}{b} - 2t(2 - \epsilon_1 - \frac{1}{b})} \\ &= t - \frac{t(m(t + 71.4))}{2m(t + 71.4) - \frac{2mt}{b} - 2t(2 - \epsilon_1 - \frac{1}{b})}. \end{aligned}$$

Se sigue entonces que

$$g \leq \frac{tm(t + 71.4)}{2m(t + 71.4) - \frac{2tm}{b} - 2t(2 - \epsilon_1 - \frac{1}{b})} + \frac{tm}{a} + 73 = t + 73.$$

Caso 4.2.2 Existe un vértice v , tal que $\text{dist}(s, v) = d - 1$ y no existe w , tal que $\text{dist}(v, w) < \frac{t}{a} - 1$ y $\text{dist}(s, w) \geq d - 3$.

Sea $T_i := \{y \in N_i^+(v) : d - 2 \leq \text{dist}(s, y) \leq d - 1\}$.

Por la Afirmación 4.2.3 hay a lo más $3(r - c)$ vértices tales que $d - 2 \leq \text{dist}(s, y) \leq d$. Recuerde que $U := \{w : \text{dist}(s, w) = d\}$ y $|U| = \epsilon_1(r - c)$, entonces $|T_i| \leq 3(r - c) - |U| = (3 - \epsilon_1)(r - c)$ para toda i .

Sea $j \geq 0$ el entero más grande, tal que

$$|T_j| \geq \frac{acj(t + 73 - t\epsilon_1)}{73(a + 1)}. \quad (4.11)$$

Afirmación 4.2.7 $j < \frac{t}{a} - 2$

Demostración.

Por la elección de j se tiene que

$$\frac{acj(t + 73 - t\epsilon_1)}{73(a + 1)} \leq |T_j| \leq (3 - \epsilon_1)(r - c).$$

Despejando j de la desigualdad anterior se tiene que,

$$j \leq \frac{73r(3 - \epsilon_1)(a + 1)}{ac(t + 73 - t\epsilon_1)} - \frac{73(3 - \epsilon_1)c(a + 1)}{ac(t + 73 - t\epsilon_1)}.$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} & \frac{73r(3 - \epsilon_1)(a + 1)}{ac(t + 73 - t\epsilon_1)} - \frac{73(3 - \epsilon_1)c(a + 1)}{ac(t + 73 - t\epsilon_1)} \\ &= \frac{73r(3 - \epsilon_1)(a + 1)}{ac(t + 73 - t\epsilon_1)} - \frac{73(3 - \epsilon_1)ca}{ac(t + 73 - t\epsilon_1)} - \frac{73(3 - \epsilon_1)c}{ac(t + 73 - t\epsilon_1)} \\ &< \frac{73r(3 - \epsilon_1)(a + 1)}{ac(t + 73 - t\epsilon_1)} - \frac{73(3 - \epsilon_1)ca}{ac(t + 73 - t\epsilon_1)} \\ &= \frac{73r(3 - \epsilon_1)(a + 1)}{ac(t + 73 - t\epsilon_1)} - \frac{73(3 - \epsilon_1)}{(t + 73 - t\epsilon_1)} \end{aligned}$$

Así,

$$j \leq \frac{73(3 - \epsilon_1)(a + 1)(t + 71.4)}{71.4a(t + 73 - t\epsilon_1)} - \frac{73(3 - \epsilon_1)}{(t + 73 - t\epsilon_1)}.$$

Por (4.7)

$$\frac{73(3 - \epsilon_1)(a + 1)(t + 71.4)}{71.4a(t + 73 - t\epsilon_1)} - \frac{73(3 - \epsilon_1)}{(t + 73 - t\epsilon_1)} < \frac{t}{a} - 2.$$

Esto muestra la validez de la afirmación. ■

Sea F la subdigráfica de D inducida por T_j . De la afirmación anterior, para cada flecha (y, w) con $y \in T_j$ se tiene que $\text{dist}(s, w) \geq d - 2$ lo cual implica que $w \in T_{j+1}$ ó $\text{dist}(s, w) = d$. Observe que por la maximalidad de j se satisface que

$$|T_{j+1} \setminus T_j| \leq ac \frac{(t + 73 - t\epsilon_1)}{73(a + 1)}.$$

Por la desigualdad anterior se tiene que

$$\begin{aligned} \delta^+(F) &\geq r - |U| - |T_{j+1} \setminus T_j| = r - \epsilon_1(r - c) - |T_{j+1} \setminus T_j| \\ &\geq r - \epsilon_1(r - c) - ac \frac{(t + 73 - t\epsilon_1)}{73(a + 1)} \\ &\geq \frac{c(t + 73 - t\epsilon_1)}{73(a + 1)}. \end{aligned}$$

Como F no es un contraejemplo para el Teorema 4.2 se sigue por la Afirmación 4.2.7 que

$$\begin{aligned} g &\leq g(F) \leq \frac{|T_j|}{\delta^+(F)} + 73 \\ &\leq \frac{ac(t + 73 - t\epsilon_1)(j + 1)}{73(a + 1)\delta^+(F)} + 73 \\ &\leq a(j + 1) + 73 \\ &< t + 73, \end{aligned}$$

y así queda demostrado el teorema. ■

Capítulo 5

Conjeturas equivalentes

En este capítulo se presentan algunas conjeturas que son equivalentes o que implican la conjetura de Caccetta y Häggwist.

5.1. La traza de una potencia de una matriz

Dada una matriz A de $m \times n$ y una matriz B de $n \times p$, se define el producto de A por B , como la matriz de $m \times p$ dada por

$$(ab)_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} \quad \text{para } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq p,$$

y se denota, AB . Por otro lado A^k representa el producto de la matriz A consigo misma k veces.

Se verá que la conjetura de Caccetta y Häggwist es equivalente a la siguiente conjetura:

Conjetura 2 *Sea A una matriz antisimétrica de ceros y unos, de orden $n \times n$, tal que $a_{i,i} = 0$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ y la suma de cada renglón es al menos r , entonces la traza de $A^{\lceil \frac{n}{r} \rceil}$ es al menos 1.*

Dada una digráfica simple D , con conjunto de vértices $V(D) = \{1, 2, \dots, n\}$, su **matriz de adyacencia** es la matriz de $n \times n$, cuya entrada a_{ij} es igual a 1 si la flecha $(i, j) \in F(D)$ y a_{ij} es igual a 0 si $(i, j) \notin F(D)$. Dicha matriz se denotará $M(D)$.

Note que dada una digráfica D , ésta determina una única matriz de adyacencia y viceversa, salvo permutación de los vértices.

Lema 5.0.1 *Sea D una digráfica simple donde $V(D) = \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Para cada $k \geq 1$, el valor de la entrada a_{ij} de la matriz $M(D)^k$ es el número de caminos de i a j de longitud k en D .*

Demostración.

Se demostrará por inducción sobre k .

Para $k = 1$ es claro. Suponga cierto el lema para $1 \leq r < k$.

Sea $(a^k)_{ij}$ la entrada que se encuentra en el renglón i y la columna j de la matriz $M(D)^k$. Por definición $(a^k)_{ij} = \sum_{r=1}^n a_{ir}(a^{k-1})_{rj}$.

Note que, por hipótesis de inducción $a_{ir}(a^{k-1})_{rj}$ es el número de caminos de longitud 1 del vértice i al vértice r , multiplicado por el número de caminos de longitud $k-1$ del vértice r al vértice j . Así $a_{ir}(a^{k-1})_{rj}$ es el número de caminos de longitud k de i a j , donde r es el segundo vértice del camino.

Por lo tanto $(a^k)_{ij} = \sum_{r=1}^n a_{ir}(a^{k-1})_{rj}$ son todos los posibles caminos del vértice i al vértice j de longitud k .

■

Teorema 5.1 *La Conjetura 2 es equivalente a la Conjetura Caccetta y Häggqvist .*

Demostración.

Suponga cierta la Conjetura 2. Sea D una digráfica simple, tal que $\delta^+(v) \geq r$ para todo $v \in V(D)$. Considere $M(D)$ y note que como $\delta^+(v) \geq r$ para todo $v \in V(D)$, la suma de cada renglón es al menos r . Por la Conjetura 2 se tiene que la suma de la traza de $M(D)^{\lceil \frac{n}{r} \rceil}$ es al menos 1, por lo que existe i , tal que $a_{ii}^{\lceil \frac{n}{r} \rceil} = 1$. El lema anterior implica la existencia de un camino cerrado de longitud $\lceil \frac{n}{r} \rceil$ en D , es decir, hay un ciclo de longitud a lo más $\lceil \frac{n}{r} \rceil$ en D .

Suponga que la Conjetura de Caccetta y Häggqvist es verdadera. Sea A una matriz, tal que la suma de cada renglón es al menos r y sea D_A la digráfica inducida por A . Como la suma de cada renglón es al menos r , entonces $\delta^+(v) \geq r$ para todo

$v \in V(D)$. Por lo tanto, existe un ciclo de longitud $\lceil \frac{n}{r} \rceil$, es decir, existe i , tal que $a_{ii}^{\lceil \frac{n}{r} \rceil} = 1$, lo cual implica que la suma de la traza de $A^{\lceil \frac{n}{r} \rceil}$ es al menos 1.

■

5.2. Conjetura de la Segunda Vecindad de Seymour

A la siguiente conjetura se le conoce como la Conjetura de la Segunda Vecindad de Seymour.

Conjetura 3 *Para cualquier digráfica simple D existe $v \in V(D)$, tal que $|N^+(v)| \leq |S_2^+(v)|$.*

Se sabe que esta conjetura es válida si:

1. D es un torneo.
2. $\delta^+(D) \leq 6$.

Teorema 5.2 *La Conjetura de la Segunda Vecindad de Seymour implica la Conjetura de Caccetta y Häggqvist en el caso particular en que D es una digráfica dirregular y $\delta(D) \geq \frac{n}{3}$.*

Demostración.

Sea D una digráfica simple dirregular de orden n , tal que $\delta^+(D) \geq \frac{n}{3}$. Si se cumple la Conjetura de la Vecindad de Seymour, entonces existe $v \in V(D)$, tal que $|N^+(v)| \leq |S_2^+(v)|$.

Se demostrará que D tiene un triángulo dirigido. Para esto suponga lo contrario, es decir, $N^-(v)$ y $S_2^+(v)$ son ajenos, entonces $n \geq |N^+(v)| + |N^-(v)| + |S_2^+(v)| + |\{v\}| \geq \frac{n}{3} + \frac{n}{3} + \frac{n}{3} + 1 = n + 1$, lo cual es una contradicción.

■

5.3. La conjetura de Seymour y Sullivan

Sea D una digráfica y para cada flecha $e \in F(D)$ sea $S_e \subseteq \{1, 2, \dots, k_D\}$. Una subdigráfica H de D decimos que es **heterocromática** si existe una forma de

asignar a cada flecha e de H una etiqueta $l(e) \in S_e$ de tal forma que $l(e) \neq l(f)$ si $e \neq f$ para cualesquiera par de flechas $e, f \in F(H)$.

Conjetura 4 Sea D una digráfica simple y $F_1, F_2, F_3, \dots, F_k \subseteq F(D)$, tal que a cada flecha $e \in F(D)$ se le asocia el conjunto de etiquetas $S_e = \{i : e \in F_i\}$ y sea $F_i(D) = (V(F), F_i)$ la subdigráfica inducida por F_i , entonces existe un ciclo heterocromático ó existe un vértice $v \in V(D)$, tal que

$$|\{w \mid \text{existe una trayectoria heterocromática de } v \text{ a } w\}| \geq \sum_{i=1}^k \delta_{F_i(D)}^+(v).$$

La conjetura anterior se le conoce como la Conjetura de Seymour y Sullivan. A la fecha se sabe que la conjetura es válida cuando:

1. $F_1, F_2, F_3, \dots, F_k$ son gráficas de Cayley sobre un grupo común Γ .
2. $\delta_{F_i}^+(v) \leq 1$ para todo $v \in V(D)$ y para todo i , excepto para $i = 1$.

Teorema 5.3 [9] La Conjetura 4 implica la Conjetura 3.

Demostración.

Sea D una digráfica simple y que la Conjetura 4 es cierta. Considere $k = 2$ y $F_1 = F_2 = F(D)$. Como $k = 2$ no puede haber un ciclo heterocromático, pues solo se están usando 2 etiquetas. Por tanto existe un vértice $v \in V(D)$, tal que $|\{w \mid \text{existe una trayectoria heterocromática de } v \text{ a } w\}| \geq \sum_{i=1}^2 \delta_{F_i(D)}^+(v) = 2\delta^+(v) = 2|N^+(v)|$.

Sea $A = \{w \mid \text{existe una trayectoria heterocromática de } v \text{ a } w\}$. Es claro que las únicas trayectorias heterocromáticas pueden ser de longitud a lo más 2. Por lo tanto, $A \subseteq N_2^+(v)$, entonces $2|N^+(v)| \leq |N_2^+(v)| = |N^+(v)| + |S_2^+(v)|$ y así $|N^+(v)| \leq |S_2^+(v)|$. ■

De este teorema y del anterior se tiene que la Conjetura 3 implica la conjetura de Caccetta y Häggwist cuando D es dirregular y $\delta^+(D) \geq \frac{n}{3}$. Sin embargo hay un resultado más fuerte.

Teorema 5.4 [9] La Conjetura 4 implica la Conjetura de Caccetta y Häggwist

Demostración.

Sea D una digráfica, tal que $|V(D)| = n$ y $\delta^+(v) \geq r$ para todo $v \in V(D)$. Removiendo flechas se puede suponer que D es r -regular.

Considere $k = \left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil$ y $F_1 = F_2 = \dots = F_k = F(D)$. La Conjetura 4 nos dice que existe un ciclo heterocromático ó existe un vértice $v \in V(D)$, tal que

$$|\{w \mid \text{existe una trayectoria heterocromática de } v \text{ a } w\}| \geq \sum_{i=1}^k \delta_{F_i(D)}^+(v).$$

Si existe un ciclo heterocromático, como solo hay k etiquetas la longitud de dicho ciclo es a lo más $k = \left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil$. Si no existe tal ciclo, observe que como $\sum_{i=1}^k \delta_{F_i(D)}^+(v) = \sum_{i=1}^k \delta^+(v) = kr \geq n$, entonces

$$|\{w \mid \text{existe una trayectoria heterocromática de } v \text{ a } w\}| \geq n$$

y por tanto $v \in \{w \mid \text{existe una trayectoria heterocromática de } v \text{ a } w\}$ lo cual implica que D tiene un ciclo heterocromático, y como solo hay k etiquetas la longitud de dicho ciclo es a lo más $k = \left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil$. ■

5.4. Dominación y programación lineal

Definición 5.1 Sea D una digráfica. Un conjunto $W \subseteq V(D)$ **domina totalmente** a D si $N^+(v) \cap W \neq \emptyset$ para todo $v \in V(D)$.

Definición 5.2 El **número de dominación total** de una digráfica D es la cardinalidad del conjunto más pequeño que domina totalmente a D . Dicho número se denota como $TD(D)$.

Dada una digráfica D y $W \subset V(D)$, se asigna a cada vértice $v \in V(D)$ el peso $w_v \in \{0, 1\}$ y para cada $w \in W$ el peso 1.

Si sucede que para todo $v \in V(D)$ $\sum_{u \in N^+(v)} w_u \geq 1$ se tiene que W domina totalmente a D . Por otro lado, claramente si W domina totalmente a D $\sum_{u \in N^+(v)} w_u \geq 1$ para todo $v \in V(D)$.

Así se tiene que una forma alternativa para encontrar $TD(D)$ es minimizando la función $\sum_{v \in V(D)} w_v$ restringida a que $\sum_{u \in N^+(v)} w_u \geq 1$ para todo $v \in V(D)$.

Proposición 5.4.1 *Sea D una digráfica con $\delta^+(D) \geq 1$, entonces $g(D) \leq TD(D)$.*

Demostración.

Sea W un conjunto dominante y sea $w_1 \in W$. Como $W \cap N^+(w_1) \neq \emptyset$, entonces existe $w_2 \neq w_1$, tal que $(w_1, w_2) \in F(D)$. Como $W \cap N^+(w_2) \neq \emptyset$ existe w_3 , tal que $(w_2, w_3) \in F(D)$. Dado que $V(D)$ es finito, W es finito, por lo que siguiendo este proceso se asegura la existencia un ciclo en W y claramente su longitud es a lo más $|W| \geq TD(D)$. ■

Tristemente no es cierto que $TD(D) < \lceil \frac{n}{r} \rceil + 1$, como se verifica en la Figura 5.1 que muestra una digráfica con $n = 10$, $r = 2$ y $TD(D) = \lceil \frac{n}{r} \rceil + 1 = 6$.

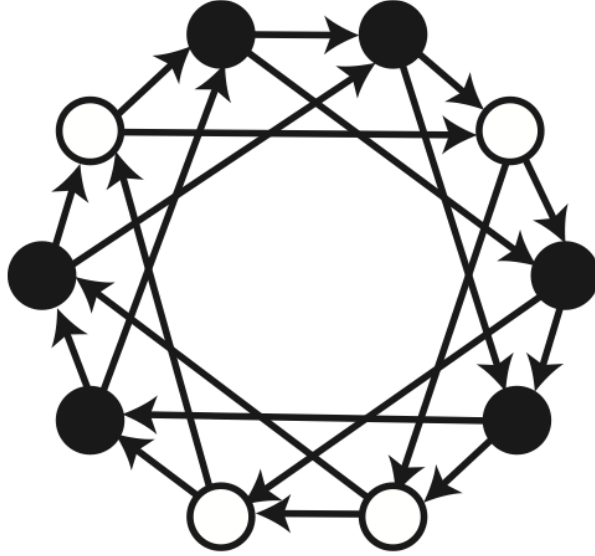


Figura 5.1: Ejemplo

Sin embargo aún se puede decir algo.

Dada una digráfica D y $W \subset D$ se asigna a cada vértice $v \in V(D)$ el peso $w'_v \in [0, 1]$ y para todo $x \in W$ el peso $w'_x = 1$. Sea $TD F(D)$ el mínimo de la función

$\sum_{v \in V(D)} w'_v$ restringida a que $\sum_{u \in N^+(v)} w'_u \geq 1$ para todo $v \in V(D)$.

La siguiente es una conjetura planteada en [8]

Conjetura 5 *Para toda digráfica D simple, tal que $\delta^+(D) > 0$ se cumple que $g(D) - 1 < TDF(D)$.*

Sorprendentemente, esta conjetura está estrechamente relacionada con la Conjetura de Caccetta y Häggwist, como lo muestra el siguiente teorema que nada más se enuncia y con lo cual se termina el trabajo.

Teorema 5.5 *[8] La Conjetura de Caccetta y Häggwist y la Conjetura 5 son equivalentes.*

Capítulo 6

Apéndice

En este capítulo se presentan las pruebas y esbozos de pruebas de afirmaciones usadas en el trabajo que resultan demasiado técnicas y distraen de la presentación y del fluir de las ideas centrales.

Proposición 6.0.1 *Para cuales quiera $a_1, \dots, a_n$ reales positivos se satisface*

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n}}.$$

Demostración.

Probaremos el resultado por inducción sobre el número de reales positivos. Sean a_1, a_2 dos reales positivos, entonces

$$0 \leq (a_1 - a_2)^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2,$$

o bien

$$a_1^2 + a_2^2 \geq 2a_1a_2$$

y así

$$2a_1^2 + 2a_2^2 \geq a_1^2 + 2a_1a_2 + a_2^2 = (a_1 + a_2)^2$$

por lo que

$$\frac{a_1^2 + a_2^2}{2} \geq \frac{(a_1^2 + a_2^2)^2}{4} = \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2,$$

entonces

$$\sqrt{\frac{(a_1^2 + a_2)^2}{2}} \geq \frac{a_1 + a_2}{2}.$$

Suponga ahora que la proposición es cierta para cualesquiera k reales positivos.

Sean $a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}$ reales positivos.

$$\left(\sum_{i=1}^{k+1} a_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^k a_i + a_{k+1}\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^k a_i\right)^2 + 2a_{k+1} \left(\sum_{i=1}^k a_i\right) + a_{k+1}^2$$

Por hipótesis de inducción $\frac{\sum_{i=1}^k a_i}{k} \leq \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k a_i^2}{k}}$, por lo que $\left(\frac{\sum_{i=1}^k a_i}{k}\right)^2 \leq \frac{\sum_{i=1}^k a_i^2}{k}$,

lo cual implica que

$$\left(\sum_{i=1}^k a_i\right)^2 \leq k \sum_{i=1}^k a_i^2,$$

entonces

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{k+1} a_i\right)^2 &\leq k \sum_{i=1}^k a_i^2 + 2a_{k+1} \left(\sum_{i=1}^k a_i\right) + a_{k+1}^2 \\ &= (k+1) \sum_{i=1}^{k+1} a_i^2 - \left(\sum_{i=1}^k a_i^2\right) - ka_{k+1}^2 + 2a_{k+1} \left(\sum_{i=1}^k a_i\right) \\ &= (k+1) \sum_{i=1}^{k+1} a_i^2 - \sum_{i=1}^k (a_i^2 + a_{k+1}^2 - 2a_{k+1}a_i) \\ &= (k+1) \sum_{i=1}^{k+1} a_i^2 - \sum_{i=1}^k (a_i - a_{k+1})^2 \\ &\leq (k+1) \sum_{i=1}^{k+1} a_i^2. \end{aligned}$$

de donde se sigue dividiendo entre $(k+1)^2$ que

$$\left(\sum_{i=1}^{k+1} \frac{a_i}{k+1} \right)^2 \leq \sum_{i=1}^{k+1} \frac{a_i^2}{k+1}$$

y así

$$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{a_i}{k+1} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{k+1} \frac{a_i^2}{k+1}}.$$

■

Lema 6.0.1 *Para cualesquiera números reales ϵ y t tal que $0.5 \leq \epsilon \leq 1$ y $t \geq 226.3$ existe un entero $m = m(\epsilon) \geq 8$ tal que*

$$m(t + 71.4) - 2mt(2 - \epsilon) + 2t(m - 1)(2 - \epsilon)^{\frac{1}{m-1} \sqrt{\frac{2-\epsilon}{m}}} > 0$$

y

$$\frac{73(3 - \epsilon)(a + 1)(t + 71.4)}{71.4a(t + 73 - t\epsilon)} - \frac{73(3 - \epsilon)}{t + 73 - t\epsilon} < \frac{t}{a} - 2$$

donde

$$a = m + \frac{m^2(t + 71.4)}{m(t + 71.4) - 2mt(2 - \epsilon) + 2t(m - 1)(2 - \epsilon)^{\frac{1}{m-1} \sqrt{\frac{2-\epsilon}{m}}}.$$

Demostración.

Sea m tal que

$$m = \begin{cases} \lfloor 28 - 20\epsilon \rfloor & \text{si } 0.85 < \epsilon \leq 1; \\ \lfloor 19.5 - 10\epsilon \rfloor & \text{si } 0.5 \leq \epsilon \leq 0.85. \end{cases}$$

Note que si $0.5 \leq \epsilon \leq 0.85$, se tiene que $11 \leq 19.5 - 10\epsilon \leq 14.5$, entonces $11 \leq m \leq 14$ y si $0.85 < \epsilon \leq 1$, se tiene que $8 \leq 28 - 20\epsilon < 11$, entonces $8 \leq m \leq 10$.

Observe también que

$$\begin{aligned}
 & m(t + 71.4) - 2mt(2 - \epsilon) + 2t(m - 1)(2 - \epsilon) \sqrt[m-1]{\frac{2 - \epsilon}{m}} \\
 &= m(t + 71.4) - 2mt(2 - \epsilon) \left(1 - \frac{m - 1}{m} \sqrt[m-1]{\frac{2 - \epsilon}{m}} \right) \\
 &= 71.4m + mt \left(1 - 2(2 - \epsilon) \left(1 - \frac{m - 1}{m} \sqrt[m-1]{\frac{2 - \epsilon}{m}} \right) \right),
 \end{aligned}$$

por lo que para probar la primera parte del lema es suficiente ver que

$$1 \geq 2(2 - \epsilon) \left(1 - \frac{m - 1}{m} \sqrt[m-1]{\frac{2 - \epsilon}{m}} \right).$$

Si $0.5 \leq \epsilon \leq 0.85$, entonces $1.15 \leq 2 - \epsilon \leq 1.5$ y como $11 \leq m \leq 14$ se tiene que

$$\frac{m - 1}{m} \sqrt[m-1]{\frac{2 - \epsilon}{m}} \geq \frac{10}{11} \sqrt[10]{\frac{1.15}{14}} \geq 0.7$$

de donde se sigue que

$$2(2 - \epsilon) \left(1 - \frac{m - 1}{m} \sqrt[m-1]{\frac{2 - \epsilon}{m}} \right) \leq 3(1 - 0.7) = 0.9 < 1.$$

Si $0.85 \leq \epsilon \leq 1$, entonces $1 \leq 2 - \epsilon < 1.15$ y como $8 \leq m \leq 10$ se tiene que

$$\frac{m - 1}{m} \sqrt[m-1]{\frac{2 - \epsilon}{m}} \geq \frac{7}{8} \sqrt[7]{\frac{1}{10}} \geq 0.63$$

y así

$$2(2 - \epsilon) \left(1 - \frac{m - 1}{m} \sqrt[m-1]{\frac{2 - \epsilon}{m}} \right) \leq 2.3(1 - 0.63) < 1.$$

Para demostrar la segunda desigualdad, una manera de proceder es analizar cada uno de los casos de los valores de $m \in \{8, 9, \dots, 13, 14\}$. Dado que la prueba es muy larga y técnica la omitimos del presente trabajo. ■

Lema 6.0.2 *Sea*

$$f(x) = (3 - \epsilon_1 - x)\left(1 - \frac{1}{bx}\right)^m$$

con

$$\frac{1}{b} \leq x \leq 2 - \epsilon_1 \leq 1,5$$

donde

$$b = \frac{1}{(2 - \epsilon_1) \left(1 - \sqrt[m-1]{\frac{2 - \epsilon_1}{m}}\right)}$$

y

$$m \geq 8,$$

entonces $f(x)$ es creciente en este intervalo.

Demostración.

Para probar este lema veremos que $f'(x) \geq 0$ en el intervalo $[\frac{1}{b}, 1.5]$.

Note que

$$f'(x) = \left(1 - \frac{1}{bx}\right)^{m-1} \frac{m(3 - \epsilon_1 - x) + x - bx^2}{(bx^2)}.$$

Dado que $\frac{1}{b} \leq x$, entonces $\left(1 - \frac{1}{bx}\right)^{m-1} \geq 0$, por lo que basta ver

$$m(3 - \epsilon_1 - x) + x - bx^2 > 0.$$

Como $x \leq 2 - \epsilon_1$ se sigue que $1 \leq 3 - \epsilon_1 - x$ por lo que

$$m(3 - \epsilon_1 - x) + x - bx^2 \geq m + x - bx^2.$$

Por la definición de b y el hecho que $x \leq 2 - \epsilon_1$, entonces

$$bx \leq \frac{1}{\left(1 - \sqrt[m-1]{(2 - \epsilon_1)/m}\right)},$$

por lo que

$$1 - bx \geq 1 - \frac{1}{\left(1 - \sqrt[m-1]{(2 - \epsilon_1)/m}\right)}. \quad (6.1)$$

Por (6.1) y como $x \leq 2 - \epsilon_1 \leq 1,5$ se sigue que

$$\begin{aligned}
 & m + x - bx^2 \\
 &= m + x(1 - bx) \\
 &\geq m + x \left(1 - \frac{1}{\left(1 - \sqrt[m-1]{(2 - \epsilon_1)/m}\right)} \right) \\
 &= m - \frac{x \sqrt[m-1]{(2 - \epsilon_1)/m}}{1 - \sqrt[m-1]{(2 - \epsilon_1)/m}} \\
 &\geq m - \frac{(1.5 \sqrt[m-1]{1.5/m})}{\left(1 - \sqrt[m-1]{1.5/m}\right)}.
 \end{aligned}$$

Así basta probar que

$$m - \frac{1.5 \sqrt[m-1]{1.5/m}}{1 - \sqrt[m-1]{1.5/m}} \geq 0$$

o equivalentemente

$$m \geq \frac{1.5 \sqrt[m-1]{1.5/m}}{1 - \sqrt[m-1]{1.5/m}}.$$

Multiplicando por $1 - \sqrt[m-1]{1.5/m}$, sumando $m \sqrt[m-1]{1.5/m}$, elevando a la potencia $m - 1$ y multiplicando por m vemos que esto es equivalente a

$$m^m \geq 1.5 (m + 1.5)^{m-1}$$

lo cual dividiendo entre m^m es equivalente a

$$1 \geq \frac{1.5}{m^m} (m + 1.5)^{m-1} = \frac{1.5}{m^m} \frac{(m + 1.5)^m}{m + 1.5} = \frac{1.5}{m + 1.5} \left(1 + \frac{1.5}{m}\right)^m.$$

Consideremos la sucesión $a_n = \left(1 + \frac{1.5}{n}\right)^n$. Es un hecho conocido que la sucesión es creciente, acotada y converge a $e^{1.5}$.

Como a_n es creciente, entonces $e^{1.5} > \left(1 + \frac{1.5}{m}\right)^m$, por lo que para todo $m \geq 8$ se satisface

$$\frac{1.5}{m + 1.5} e^{1.5} > \frac{1.5}{m + 1.5} \left(1 + \frac{1.5}{m}\right)^m.$$

Para probar este lema basta ver, entonces que $1 > e^{1.5} \frac{1.5}{m + 1.5}$.

Como $m \geq 8$, entonces $\frac{1.5}{8+1.5} \geq \frac{1.5}{m+1.5}$, por lo que $e^{1.5} \frac{1.5}{8+1.5} \geq e^{1.5} \frac{1.5}{m+1.5}$, pero $1 > e^{1.5} \frac{1.5}{8+1.5} \approx 0.707$ por lo que $1 > e^{1.5} \frac{1.5}{m+1.5}$.

De esta manera queda probado que $f(x)$ es creciente.

■

Lema 6.0.3 Sea c tal que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \lfloor \frac{t+73}{2} \rfloor (r-c) = \frac{n+1}{2} & \text{si } \frac{t+73}{2} - \lfloor \frac{t+73}{2} \rfloor \leq 0.5, \\ \lfloor \frac{t+72}{2} \rfloor (r-c) = \frac{2n-r+1}{4} & \text{si } \frac{t+73}{2} - \lfloor \frac{t+73}{2} \rfloor > 0.5. \end{array} \right.$$

con $r \geq 6$ y $\frac{n}{r} = t \geq 226.6$, entonces

$$\frac{73}{t+73} > \frac{c}{r} \geq \frac{71.4}{t+71.4}.$$

Demostración.

Primero observe que

$$\begin{aligned}
 \frac{73}{t+73} &> \frac{c}{r} \geq \frac{71.4}{t+71.4} && \text{si y solo si} \\
 1 - \frac{73}{t+73} &< 1 - \frac{c}{r} \leq 1 - \frac{71.4}{t+71.4} && \text{si y solo si} \\
 \frac{t}{t+73} &< \frac{r-c}{r} \leq \frac{t}{t+71.4} && \text{si y solo si} \\
 \frac{n}{t+73} &< r-c \leq \frac{n}{t+71.4}.
 \end{aligned}$$

Caso 6.0.1 $\frac{t+73}{2} - \lfloor \frac{t+73}{2} \rfloor \leq 0.5$

Por definición

$$r - c = \frac{n+1}{2\lfloor \frac{t+73}{2} \rfloor}.$$

Como $t+73 \geq 2\lfloor \frac{t+73}{2} \rfloor$ y $n+1 > n$ se sigue que

$$\frac{n}{t+73} < \frac{n+1}{2\lfloor \frac{t+73}{2} \rfloor} = r - c.$$

Por otro lado como $\frac{t+73}{2} - \lfloor \frac{t+73}{2} \rfloor \leq 0.5$, entonces

$$\begin{aligned}
 2n\lfloor \frac{t+73}{2} \rfloor &\geq 2n(\frac{t+73}{2} - 0.5) \\
 &= n(t+72) = n(t+71.4) + 0.6n \\
 &= (n+1)(t+71.4) + 0.6n - (t+71.4) \\
 &= (n+1)(t+71.4) + 0.6rt - t - 71.4
 \end{aligned}$$

Como $r \geq 6$ y $t \geq 226.6$, entonces $0.6rt - t - 71.4 \geq 0$, por lo que

$$2n\lfloor \frac{t+73}{2} \rfloor \geq (n+1)(t+71.4),$$

y así

$$\frac{n}{t+71.4} \geq \frac{n+1}{2\lfloor \frac{t+73}{2} \rfloor} = r - c.$$

De aquí se concluye que $\frac{n}{t+73} < r - c \leq \frac{n}{t+71.4}$ y por lo tanto $\frac{73}{t+73} > \frac{c}{r} \geq \frac{71.4}{t+71.4}$.

Caso 6.0.2 $\frac{t+73}{2} - \lfloor \frac{t+73}{2} \rfloor > 0.5$

Por definición,

$$r - c = \frac{2n - r + 1}{4\lfloor \frac{t+72}{2} \rfloor}.$$

Como $\frac{t+73}{2} - \lfloor \frac{t+73}{2} \rfloor > 0.5$ vemos que

$$\frac{t+72}{2} > \lfloor \frac{t+73}{2} \rfloor$$

y entonces

$$\lfloor \frac{t+73}{2} \rfloor = \lfloor \frac{t+72}{2} \rfloor.$$

Además

$$\lfloor \frac{t+73}{2} \rfloor = \lfloor \frac{t+72}{2} \rfloor > \frac{t+73}{2} - 1 = \frac{t+71}{2}.$$

Dado que $t \geq 226.6$, entonces $2n = 2tr > (2\lfloor \frac{t+72}{2} \rfloor + 1)(r - 1)$ y así

$$\begin{aligned} 2n - (r - 1) &> (2\lfloor \frac{t+72}{2} \rfloor)(r - 1) \\ &= 4n\lfloor \frac{t+72}{2} \rfloor - 2\lfloor \frac{t+72}{2} \rfloor(2n - r + 1) \\ &= 4n\lfloor \frac{t+72}{2} \rfloor - 2\lfloor \frac{t+73}{2} \rfloor(2n - r + 1), \end{aligned}$$

por lo que

$$(2n - (r - 1))(2\lfloor \frac{t+73}{2} \rfloor + 1) > 4n\lfloor \frac{t+72}{2} \rfloor$$

y como $\frac{t+73}{2} > \lfloor \frac{t+73}{2} \rfloor + \frac{1}{2}$, $t+73 > 2\lfloor \frac{t+73}{2} \rfloor + 1$ y entonces

$$(2n - (r-1))(t+73) > 4n\lfloor \frac{t+72}{2} \rfloor$$

por lo que

$$r - c = \frac{2n - (r-1)}{4\lfloor \frac{t+72}{2} \rfloor} > \frac{n}{t+73}.$$

Por otro lado, como $r \geq 6$,

$$(r-1)(t+71.4) \geq \frac{4}{5}rt = \frac{4}{5}n$$

y dado que

$$\lceil \frac{t+72}{2} \rceil > \frac{t+71}{2},$$

de donde

$$\frac{4}{5}n \geq 4n \left(\frac{t+71.4}{2} - \lceil \frac{t+72}{2} \rceil \right),$$

por lo que

$$(r-1)(t+71.4) \geq 4n \left(\frac{t+71.4}{2} - \lceil \frac{t+72}{2} \rceil \right) = 2n(t+71.4) - 4n\lceil \frac{t+72}{2} \rceil$$

y entonces

$$4n\lceil \frac{t+72}{2} \rceil \geq (2n - r + 1)(t+71.4)$$

y así

$$(r - c) = \frac{2n - r + 1}{\lfloor \frac{t+72}{2} \rfloor} \leq \frac{n}{t+71.4}.$$

De esta manera se prueba el lema. ■

Bibliografía

- [1] J. Bondy. Counting subgraphs: A new approach to the Caccetta-Häggkvist conjecture. *Discrete Math*, pages 165/166:71–80, 1997.
- [2] Y.O. Hamidoune. Sur les atomes d'un graphe orientés. *C.R. Acad. Sc. Paris, A* 284:1253–1256, 1997.
- [3] Y.O. Hamidoune. Quelques problèmes de connexité dans les graphes orientés. *J. Comb. Theory B*, pages 108–112, 2(1981).
- [4] C. Hong and B. Reed. A note on short cycles in digraphs. *Discrete Math*, 66(1-2):103–107, 1987.
- [5] J. Shen. Directed triangles in digraphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 74(2):405–407, 1998.
- [6] J. Shen. On the girth of digraphs. *Discrete Mathematics*, 211:167–181, 2000.
- [7] J. Shen. On the Caccetta-Häggkvist Conjecture. *Graphs and Combinatorics*, 18:645–654, 2002.
- [8] P. St-Louis, B. Gendron, and A. Hertz. Total Domination and the Caccetta-Häggkvist Conjecture. *Discrete Optim.*, 9:236–240, 2012.
- [9] B. Sullivan. A Summary of Results and Problems Related to the Caccetta-Häggkvist Conjecture. *arXiv:math/0605646f*, Febrero 2002.