



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
MECÁNICA –MECÁNICA APLICADA**

**ANÁLISIS ESTÁTICO DE UN MECANISMO ESPACIAL  
CON POSIBLES USOS EN CIRUGÍA.**

**TESIS PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN INGENIERÍA**

**PRESENTA:  
IVÁN CASTÁN RICAÑO**

**TUTOR PRINCIPAL:  
FRANCISCO CUENCA JIMÉNEZ.  
Facultad de Ingeniería**

**MÉXICO, D. F. ABRIL 2014**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**JURADO ASIGNADO:**

**Presidente:** Dr. González González Leopoldo Adrián.

**Secretario:** Dr. Carrera Bolaños Jorge.

**Vocal:** Dr. Cuenca Jiménez Francisco.

**1er. Suplente:** M. I. Diaz Hernández Octavio.

**2do. Suplente:** M.I. Martínez Zamudio Patricio.

MÉXICO, D.F.

**TUTOR DE TESIS:**  
DR. FRANCISCO CUENCA JIMÉNEZ.

---

FIRMA

*Dedicado a  
mi Mamá*



# AGRADECIMIENTOS.

Primeramente agradecerle a la UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO y a su Facultad de ingeniería; por ofrecer libre y abiertamente a cualquier persona con deseos de superación como profesional y persona, la oportunidad para cursar un posgrado de un gran nivel académico.

A Diana y Paco, por el ejemplo de vida, motivación constante y apoyo moral, además, de hacer mejor mi tiempo. Agradecer especialmente a mi mamá, que ha sido la base de mi carácter con el que he podido superar cualquier adversidad por difícil que parezca y que de ella he aprendido a no rendirme por lograr lo que deseo, pero sin faltar a la gente que me rodea.

También un agradecimiento especial a mi tutor Francisco Cuenca Jiménez, por la extrema paciencia y comprensión que me ha tenido en este proceso, además, de su vocación a la enseñanza y generosidad para compartir su conocimiento.

A mi esposa Jenny, por aventurarse a vivir la vida junto a mí y enseñarme lo fácil y bello que es vivir.

Agradezco a mis hijos Seidy e Iván, por llenar mi vida y darme la motivación extra que necesitaba.

Y finalmente a toda la gente que se ha cruzado en mi camino hasta ahora, que para bien o para mal han ayudado a forjar la persona que soy y a distinguir los caminos que quiero seguir.

*"Procure no ser una persona con éxito, sino una persona con valores"*  
Albert Einstein.

# Índice general

<b>1. Generalidades.</b>	<b>1</b>
1.1. JUSTIFICACIÓN. . . . .	1
1.2. OBJETIVO GENERAL. . . . .	1
1.3. METODOLOGÍA. . . . .	2
1.4. INTRODUCCIÓN. . . . .	2
1.5. PERSPECTIVA HISTÓRICA Y ESTADO ACTUAL. . . . .	3
1.6. ARQUITECTURA DEL MECANISMO PARALELO PROPUESTO. . . . .	5
<b>2. Análisis Cinemático.</b>	<b>6</b>
2.1. INTRODUCCIÓN. . . . .	6
2.2. ANÁLISIS DE LA POSICIÓN. . . . .	6
2.3. ANÁLISIS DE VELOCIDAD. . . . .	15
2.4. ANÁLISIS DE LA ACELERACIÓN. . . . .	18
2.5. GENERACIÓN DE LA TRAYECTORIA. . . . .	24
2.6. SOLUCIÓN DE LA CINEMÁTICA INVERSA. . . . .	25
2.6.1. Solución de la Posición. . . . .	26
2.6.2. Solución de la Velocidad. . . . .	29
2.6.3. Solución de la Aceleración. . . . .	33
<b>3. Análisis Estático Mediante La Formulación de Newton-Euler.</b>	<b>37</b>
3.1. INTRODUCCIÓN. . . . .	37
3.1.1. FORMULACIÓN MATRICIAL. . . . .	38
3.2. Análisis Estático del Mecanismo. . . . .	42
3.2.1. ANÁLISIS DEL CUERPO 1i. . . . .	42
3.2.2. ANÁLISIS DEL CUERPO 2i. . . . .	44
3.2.3. ANÁLISIS DEL CUERPO 3i. . . . .	45
3.2.4. ANÁLISIS DEL CUERPO 4i. . . . .	46
3.2.5. ANÁLISIS DEL CUERPO 5. . . . .	48
3.2.6. SOLUCIÓN DE LA ESTÁTICA. . . . .	50
<b>A. Términos de la matrices cinemáticas.</b>	<b>56</b>
A.1. TÉRMINOS DE LA MATRIZ $T_{017i}$ . . . . .	56
A.2. TÉRMINOS DE LA MATRIZ $V_{017i}$ . . . . .	58
A.3. TÉRMINOS DE LA MATRIZ $A_{017i}$ . . . . .	63
<b>B. Generación de la trayectoria.</b>	<b>105</b>



# RESUMEN.

En el presente trabajo de tesis, se realizó el estudio de un mecanismo paralelo, que consta de tres cadenas cinemáticas que unen la tierra con el efector final. La arquitectura del mecanismo permite que su efector final genere un espacio de trabajo con 6 grados de libertad, permitiendo mayor flexibilidad al mecanismo sin sacrificar una mayor transmisión de trabajo en comparación con un mecanismo en serie. Pudiendo ser utilizado como el elemento de sujeción de trocares, en manipuladores diseñados para realizar cirugías *laparoscópicas*, en donde es necesario que la herramienta guía tenga la suficiente versatilidad y fuerza para sostener las herramientas.

El estudio se basó en conocer el comportamiento cinemático y estático del mecanismo.

Se generaron ecuaciones de posición, velocidad y aceleración, para conocer el comportamiento del mecanismo en cualquier posición y orientación deseada en su espacio de trabajo.

También, se modeló la estática del mecanismo, para observar los requerimientos o especificaciones que deben de cumplir los actuadores para alcanzar todas las posiciones y orientaciones deseadas, además de poder conocer todas las fuerzas aplicadas y de reacción que intervienen en los cuerpos, y en base a el comportamiento de las mismas, se use como herramienta para modificar la geometría del diseño en caso de ser necesario.

# ABSTRACT.

In the presented thesis, the study was conducted on a parallel mechanism, which consists of three kinematic chains connecting the ground with the end effector. The architecture of the mechanism allows the end effector to generate a workspace with 6 degrees of freedom, allowing increased flexibility without sacrificing the mechanisms ability to transmit more work as compared to a mechanism in series. And may be used as the fastener trocars manipulators designed to perform laparoscopic procedures, where it is necessary that the tool guide has sufficient versatility and strength to hold the tools.

The study was based on knowing the kinematic and static behavior of the mechanism

Equations of position velocity and acceleration were generated to understand the behavior of the mechanism in any desired position and orientation in its workspace.

Also modeled is the static of the mechanism to observe the requirements or specifications that must meet the actuators to achieve all the desired positions and orientations, in addition to be able to know all applied forces and reaction involved in the body, and based on the behavior of the same is used as a tool to modify the geometry of the design if necessary.

# NOMENCLATURA.

$h_{ij}$	Distancia de $i$ medida desde $j$ .
$\theta_{ij}$	Ángulo variable $i$ , de la cadena cinemática $j$ .
$\beta_{ij}$	Ángulo constante $i$ , de la cadena cinemática $j$ .
$T_{zi}$	Matriz de transformación homogénea 4x4.
$D_{zi}$	Operador diferencial matricial.
$R_{zi}$	Matriz de rotación 3x3.
$(i_0, j_0, k_0)$	Marco de referencia inercial ,
$(i_{ij}, l_{ij}, k_{ij})$	Base local $i$ de la cadena cinemática $j$
$s$	Seno.
$c$	Coseno.
$t$	Tangente.
$R_j^i$	Matriz de transformación de la base $j$ a la base $i$ .
$r_{Gij}^k$	Vector de posición del centro de gravedad del cuerpo $i$ de la cadena cinemática $j$ respecto a la base $k$ .
$\omega_{ij}^k$	Velocidad angular de la base $i$ de la cadena cinemática $j$ respecto a la base $k$ .
$\alpha_{ij}^k$	Aceleración angular de la base $i$ de la cadena cinemática $j$ respecto a la base $k$ .
$T_{ijn}^k$	Vector de fuerzas aplicadas del cuerpo $i$ sobre $j$ de la cadena cinemática $n$ , respecto a la base $k$ .
$F_{ijn}^k$	Vector de fuerzas de reacción del cuerpo $i$ sobre $j$ de la cadena cinemática $n$ , respecto a la base $k$ .
$W_{ij}^k$	Vector peso del cuerpo $i$ de la cadena cinemática $j$ , respecto a la base $k$ .
$Q_i^j$	Matriz de transformación de torsesores de la base $i$ a la base $j$ .

# Capítulo 1

## Generalidades.

En este capítulo se expone las motivaciones que condujeron a desarrollar el presente trabajo, a forma de justificación y objetivo general; también se muestra a grandes rasgos la metodología empleada para el modelado y solución de la cinemática y estática de mecanismos paralelos, terminando con una introducción y breve reseña histórica sobre los mecanismos empleados en cirugías médicas; sus ventajas, desventajas y estado actual.

### 1.1. JUSTIFICACIÓN.

Los aportes de la ingeniería en sus diferentes ramas a la medicina, a la fecha, son innumerables, de hecho, no se podría imaginar la medicina moderna y su continuo desarrollo sin apoyarse en dispositivos electromecánicos, tales como: ultrasonido, herramientas manuales de corte, suturado, tomógrafo, refrigeración, etc.

La implementación de mecanismos para extender las habilidades del cirujano, es otra de las aportaciones de la ingeniería a la medicina, en particular, la aplicación de robots como auxiliares en los procesos quirúrgicos; desde los utilizados para seleccionar y clasificar el instrumental quirúrgico hasta los que intervienen en los cortes y suturas propias de la cirugía.

En la *cirugía laparoscópica* es donde la robótica ha tenido un verdadero impulso, este es un tipo de cirugía donde se busca la mínima invasión del organismo, para lo cual, la precisión y repetibilidad de los robots, acoplan a la perfección a estas necesidades.

Aún con estas visibles ventajas, al parecer, el desarrollo de robots cirujanos se ha estancado. Por un lado los altos costos de los equipos y los relativamente pocos padecimientos donde se puede justificar la implementación de estas tecnologías, hacen que muchos hospitales lo consideren un lujo sobre la cirugía convencional y muchos seguros médicos no estén dispuestos a pagar dichos costos. Como muestra se encuentra el robot llamado *Da Vinci* desarrollado por *Intuitive Surgical* que su costo ronda el millón de dólares y aunque su abanico de aplicaciones es amplio, su uso real se centra en padecimientos abdominales y de la pelvis seleccionados, ya que en muchos casos los límites geométricos del robot podrían ser comprometidos, volviendo la intervención innecesariamente lenta y complicada.

En esta tesis se describe la geometría y cinemática de un mecanismo paralelo, que le pudiera dar mayor versatilidad a robots utilizados o diseñados para realizar *cirugías laparoscópicas*. Específicamente se busca que las cadenas cinemáticas de este tipo de robots alcancen posiciones más complejas, reduciendo algunas de las limitantes actuales.

### 1.2. OBJETIVO GENERAL.

Realizar el modelado cinemático de un manipulador paralelo de 6GDL, para comprobar si es versátil en posición y orientación para manipular trocares propios de la cirugía laparoscópica (de

la cuál se hablará posteriormente). Así como también realizar el análisis estático del mecanismo, para conocer los torques y las reacciones necesarios entre cada posición final, por ciertos instantes de tiempo, que es el objetivo de cada trocar.

### 1.3. METODOLOGÍA.

1. Análisis Cinemático.
  - a) Análisis de Posición.
  - b) Análisis de Velocidad.
  - c) Análisis de Aceleración.
2. Análisis Estático.
  - a) Formulación de Newton-Euler.
  - b) Resolución Estática.

### 1.4. INTRODUCCIÓN.

La cirugía *laparoscópica* es un tipo de técnica quirúrgica mediante la cual se insertan tubos (trócares o trocares) en el abdomen, utilizando pequeñas incisiones. A través de estos trócares se insertan instrumentos largos y angostos, que el cirujano utiliza para manipular, cortar y coser tejidos [5]. También en uno de los trocares, se inserta una cámara de vídeo, con la que se tiene imagen en tiempo real de lo que el cirujano está haciendo.

Las zonas en donde se localizan los trocares, son estratégicas según el tipo de padecimiento, y en general, son tres incisiones (a veces cuatro según la complejidad de la operación). En dos de ellas se introducen los instrumentos del cirujano, que no son mas que los típicos instrumentos de cirugía pero minimizados, y con extensiones en forma de varilla, para alcanzar los órganos internos a trabajar; en el tercer trocar se inserta una cámara de iguales características que los instrumentos. Con esto se busca invadir mínimamente (*cirugía de mínima invasión*) el organismo del paciente. Las ventajas principales son: menor pérdida de sangre, disminución de los cortes y suturas, mucho menor tiempo de recuperación, reducción de infecciones y de complicaciones in y post operatoria. Para realizar estas cirugías con todas las ventajas esperadas, es necesario que el cirujano se halla entrenado para tales tareas, con una lenta curva de aprendizaje y siempre con el riesgo al error humano que supone una actividad manual; como las incisiones, cortes y manipulación de los tejidos se realiza a escalas menores que en una cirugía convencional, se necesita que el cirujano se encuentre en condiciones óptimas físicas y mentales, y estas condiciones se van perdiendo con la edad, desperdiciando la experiencia acumulada de los médicos.

En este tipo de cirugías es donde la robótica ha incursionado fuertemente. Se han implementado robots que orientan y posicionan los trocares, permitiendo, el fácil intercambio de las herramientas que de igual forma están automatizadas; su construcción se basa en cadenas cinemáticas seriales y como efector final se coloca un soporte para el trocar. Como ejemplo tomaremos el único robot comercial para propósitos de *laparoscopia*, es el ya nombrado *Da Vinci*<sup>1</sup>, que consta de cuatro brazos seriales, cada uno de cinco grados de libertad que son los encargados de posicionar y orientar los trocares en las incisiones del organismo, ya en posición durante el desarrollo de la operación se podría necesitar re-orientar los trocares, para lo cual, la geometría del mecanismo debe permitir esos movimientos.

La cirugía laparoscópica robótica podría ser introducida a mayor número de hospitales o ser más accesible, a medida que halla mas opciones de equipos, esto se logrará experimentando con

---

<sup>1</sup>Sistema Quirúrgico Da Vinci desarrollado por Intuitive Surgical <http://www.intuitivesurgical.com/>.



Figura 1.4.1: Robot Cirujano Da Vinci(izq.) y un trocar típico(der.)[1].

otro tipos de mecanismos que superen la barreras de los actuales en cuestión de versatilidad de movimiento, y claro, eventualmente los costos de producción.

El mecanismo que se trata en esta tesis es una propuesta para funcionar como el soporte de un trocar, permitiendo mayor versatilidad en sus movimientos, logrando *ángulos caprichosos* con lo que posiblemente se alcancen lugares restringidos hasta el momento, o al menos, alcanzarlos de mejor manera.

## 1.5. PERSPECTIVA HISTÓRICA Y ESTADO ACTUAL.

El desarrollo de los actuales robots cirujanos, se podría decir que comenzó, desde la invención del primer brazo robótico o manipulador, que fue el momento en que de manera más precisa se empezó a estudiar el movimiento de dispositivos que imitaban a brazos humano. Aunque el ser humano durante siglos a intentando imitar mediante dispositivos mecánicos, partes o el total del cuerpo humano, se tiene por ejemplo que los egipcios unían brazos articulados en sus estatuas o los griegos que hacían mover partes de las estatuas de sus dioses con dispositivos hidráulicos. Ya mas entrada la era moderna se puede mencionar a la industria textil del siglo XVIII, donde en 1801, *Joseph Jacquard* inventa una maquina textil programable mediante tarjeta perforadas, también la construcción de varios músicos de tamaño humano que realizo *Jacques de Vauncansos* y la muñeca que hacia dibujos de *Henri Maillardert* en 1805.

Pero si empezamos a contar desde que apareció el primer brazo robótico en la era moderna, sería a partir de la patente del inventor *George Devol*<sup>2</sup> que en 1954 patento un brazo mecánico que podría ser programado para repetir tareas precisas, como agarrar y levantar, después, en 1956 junto a *Joseph Engelberger*<sup>3</sup> funda lo que se conocería como UNIMATION, la primera empresa de robótica de la historia y junto con su creación el primer robot industrial, que se conocía con el mismo nombre. En 1968, UNIMATION introduce sus robot en Japón, de alguna manera globalizando esta industria, y fue en este país donde tomo un auge gigante que llevó a la creación de la primera asociación robótica del mundo: la Asociación Robótica Industrial de Japón (JIRA) en 1972. y a partir de esta década empezó la ciencia de la robótica a aparecer por todo el mundo. Por esa misma época en 1972 (algunas fuentes citan 1969), mientras estaba en la Universidad Stanford, *Victor Scheinman* inventó el Stanford arm, un brazo robot articulado

<sup>2</sup>*George Charles Devol* (Louisville Kentucky, E.U., 20 de febrero de 1912 - 11 de agosto de 2011), inventor y empresario estadounidense.

<sup>3</sup>*Joseph F. Engelberger* (Nueva York, E.U., 26 Julio 1925- ) físico, ingeniero y emprendedor conocido como el "Padre de la Robótica Industrial".

Fecha	Investigador/Lugar de desarrollo	Hito
1954	<i>George Devol</i>	Patente de brazo mecánico programable.
1956	<i>George Devol y Joseph Engelberger</i>	Fundación de UNIMATION y primer robot industrial.
1968		Llega a Japón la Robótica.
1972	Japon	Se funda la Asociación Robótica Industrial de Japón (JIRA).
1972 (1969)	<i>Victor Scheinman</i>	Desarrollo del Stanford Arm.
1977	UNIMATION/GENERAL MOTORS	Desarrollo del Robot PUMA.
1983	CANADA	Primer robot cirujano.
1985	E.E.U.U.	Robot PUMA 560 utilizado como auxiliar en cirugía.
1988	Imperial College London.	Desarrollo de PROBOT.
1992	Integral Surgical	Desarrollo de ROBODOC.
1998	Computer Motion	Desarrollo de ZEUS.
2000	Integral Surgical	Desarrollo del Sistema Quirúrgico Da Vinci

Tabla 1.5.1: Hitos en el desarrollo de robots cirujanos.

de 6-ejes totalmente eléctrico, que era capaz de alcanzar cualquier posición en el espacio bajo el control de una computadora, ampliando el uso de los robots a aplicaciones más complejas, en 1977, Scheinman vendió su diseño a Unimation, donde se revisó y se convirtió en el robot PUMA (Programmable Universal Machine for Assembly, o Programmable Universal Manipulation Arm) que vendría a ser el precursor del brazo industrial moderno.

Y hasta 1983 se conoce del primer robot cirujano desarrollado y usado en Vancouver, Canadá, en 1985, el robot PUMA 560 se habilitó como apoyo en una biopsia cerebral. Y de esta época en adelante se produjeron en 1988, el PROBOT, desarrollado en el Imperial College London, ROBODOC de Integral Surgical Systems en 1992, ZEUS de Computer Motion en 1998 y el Sistema Quirúrgico Da Vinci por Intuitive Surgical en 2000; estos dos últimos son los diseños más especializados en la cirugía robótica, en 2003 Intuitive Surgical compró a Computer Motion y ZEUS ya no se produce más.

En la Tabla 1.5.1 se resume la historia del desarrollo de los robots cirujanos. El estado actual de estas tecnologías aparentan estar un poco estancada, siendo el *Da Vinci de Integral Surgical*, la referencia cuando de robots quirúrgicos se refiere.

## 1.6. ARQUITECTURA DEL MECANISMO PARALELO PROPUESTO.

En la Figura 1.6.1 se muestra la geometría del mecanismo paralelo propuesto para analizar. Consta de tres cadenas cinemáticas dispuestas en paralelo, orientadas alrededor de un eje común y repartidas a cada  $120^\circ$ . Las tres cadenas tienen la misma configuración, que es: rotacional-rotacional-rotacional-universal-rotacional, la tierra del mecanismo está conectada al eslabón  $1i$  por una extensión fija en dirección del eje  $z$ , los eslabones  $1i$  y  $2i$  están unidos por una junta rotacional dispuesta a  $90^\circ$  con respecto a la junta anterior, los eslabones  $2i$  y  $3i$  están unidos por otra junta rotacional cuyo eje es paralelo a la junta anterior, los eslabones  $3i$  y  $4i$  están unidos por una junta universal que les confiere dos grados de libertad entre ellos y finalmente se une al efecto final triangular con una junta rotacional orientadas hacia su centro repartidas a cada  $120^\circ$ .

La configuración de mecanismo se seleccionó a partir de la experimentación con software CAD, tomando como base una plataforma paralela con tres cadenas cinemáticas de configuración rotacional-rotacional-rotacional, a partir de esta se fueron agregando, eliminando y cambiando la disposición de los cuerpos y juntas, con el objetivo que el efector final consiguiera seis grados de libertad, tratando de mantener la geometría de las cadenas lo más simple posible.

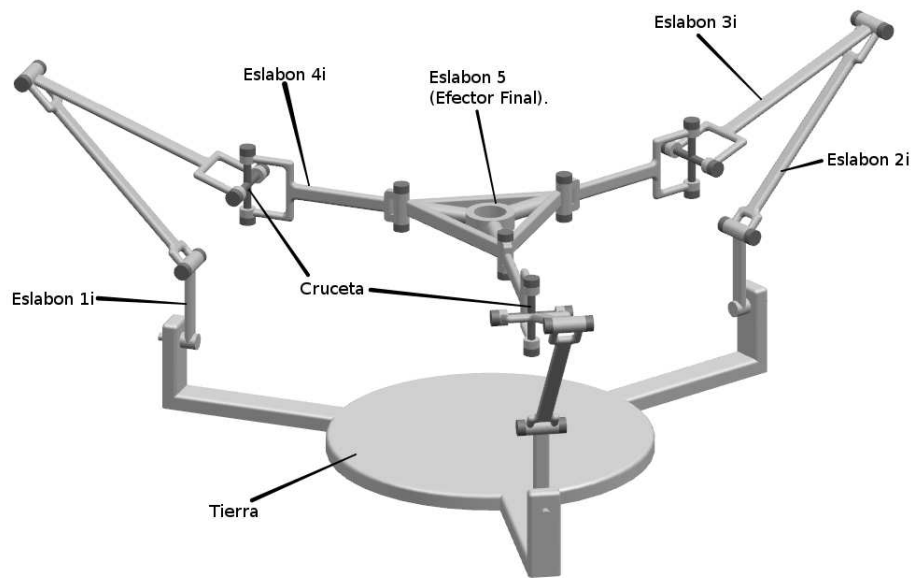


Figura 1.6.1: Mecanismo Paralelo.



## Capítulo 2

# Análisis Cinemático.

### 2.1. INTRODUCCIÓN.

La cinemática analiza los cambios de posición de los cuerpos sin tomar en cuenta las causas que lo producen (fuerzas). Esencialmente estudia las trayectoria de los cuerpos en función del tiempo, siendo las variables de interés; la posición, velocidad y aceleración. En los robots manipuladores se busca relacionar la posición y orientación de los eslabones con la posición y orientación del efector final, tomando en cuenta las restricciones impuestas por la misma geometría. En otras palabras, cuando se realiza el análisis cinemático de un mecanismo se busca la localización en el espacio de cada uno de los cuerpos de la cadena cinemática en cada instante de su movimiento.

Para llevar a cabo este tipo de análisis se emplean sistemas de referencia para identificar la localización de cada cuerpo móvil (base local) en el espacio y relacionarlos con un elemento de referencia fijo (tierra) y entre ellos mismos. En el presente capítulo se emplean dos bases de referencia cartesianas; el sistemas de referencia fijo o marco inercial y los sistemas de referencia relativos o marcos locales, con lo que se obtendrá la posición, velocidad y aceleración de las juntas, para alguna posición deseada del *eslabón* 5.

### 2.2. ANÁLISIS DE LA POSICIÓN.

Antes de comenzar el modelado se selecciona el lugar y orientación de la base inercial ( $i_0, j_0, k_0$ ) y la base local asociada al efector final ( $i_P, j_P, k_P$ ), como se muestra en la figura 2.2.1, además, se identifican los eslabones, el tipo y número de juntas, ya teniendo estos datos se procede con el modelado.

Para alcanzar este primer objetivo se emplea el análisis de la *cinemática inversa*, que es la obtención de la posición, velocidad y aceleración de los eslabones de las cadenas, teniendo como dato las variables del efector final. Esto se logra pegando bases en las juntas de los eslabones donde exista movimiento relativo. Para modelar estos cambios de base que llevan de una junta a otra por toda la cadena cinemática, se usarán *matrices de transformación homogéneas*.

Las matrices homogéneas proporcionan el modelado del desplazamiento y rotación en los tres ejes cartesianos, con lo que se puede posicionar y orientar totalmente cualquier cuerpo del mecanismo. Dichas matrices tiene la siguiente definición:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{d} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2.1)$$

donde:

$\mathbf{R}$  = Matriz de rotación.

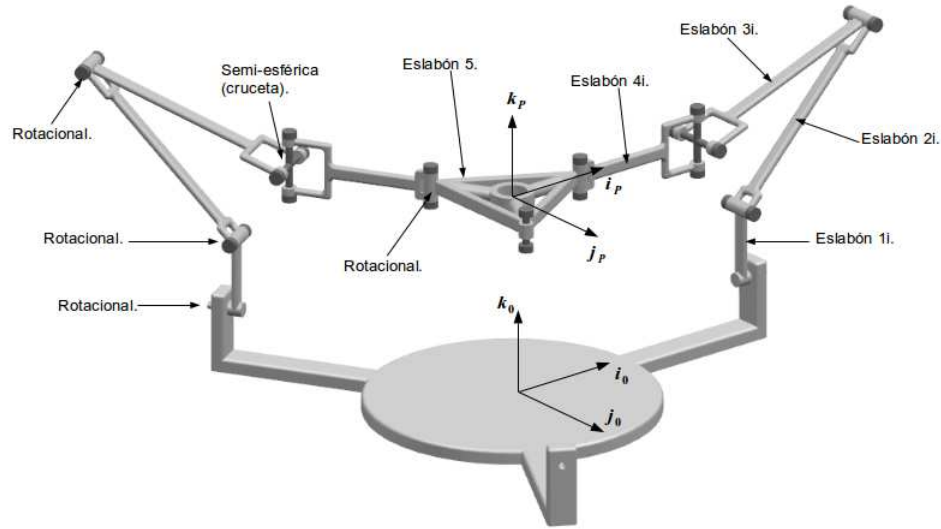


Figura 2.2.1: Partes del mecanismo (se ha eliminado una de las cadenas para mejor visualización).

$\mathbf{d}$  = vector de desplazamiento.

Las matrices de transformación de traslación básicas en los ejes  $x, y, z$  respectivamente son [4]:

$$\mathbf{T}_{z1}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}_{z2}(y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}_{z3}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Y las matrices de transformación de rotación básicas en los ejes  $x, y, z$  respectivamente son [4]:

$$\mathbf{T}_{z4}(\theta_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta_x & -s\theta_x & 0 \\ 0 & s\theta_x & c\theta_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}_{z5}(\theta_y) = \begin{bmatrix} c\theta_y & 0 & s\theta_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s\theta_y & 0 & c\theta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{z6}(\theta_z) = \begin{bmatrix} c\theta_z & -s\theta_z & 0 & 0 \\ s\theta_z & c\theta_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Teniendo todos los elementos necesarios se procede a realizar el análisis. En la figura 2.2.1 se puede apreciar que las tres cadenas tienen la misma configuración, se trabajará con una sola cadena para el modelado y a cada variable y constante se le agregará el indicador  $i$ , así en las ecuaciones resultantes solo hará falta cambiar su valor por 1, 2 o 3, según la cadena con que se quiera trabajar.

Procediendo a aplicar las transformaciones 2.2.1, se tiene:

En la figura 2.2.2, se aprecia las transformaciones homogéneas necesarias que llevan desde la base inercial ( $i_0, j_0, k_0$ ) a la base local del eslabón 1i ( $i_5, j_5, k_5$ ), y consta de un giro  $\beta_{10i}$  en  $k_0$ , traslación  $h_{21i}$  en  $j_1$ , giro  $\beta_{32i}$  en  $i_3$ , traslación  $h_{43i}$  en  $j_3$  y una rotación  $\theta_{54i}$  en  $k_4$ .

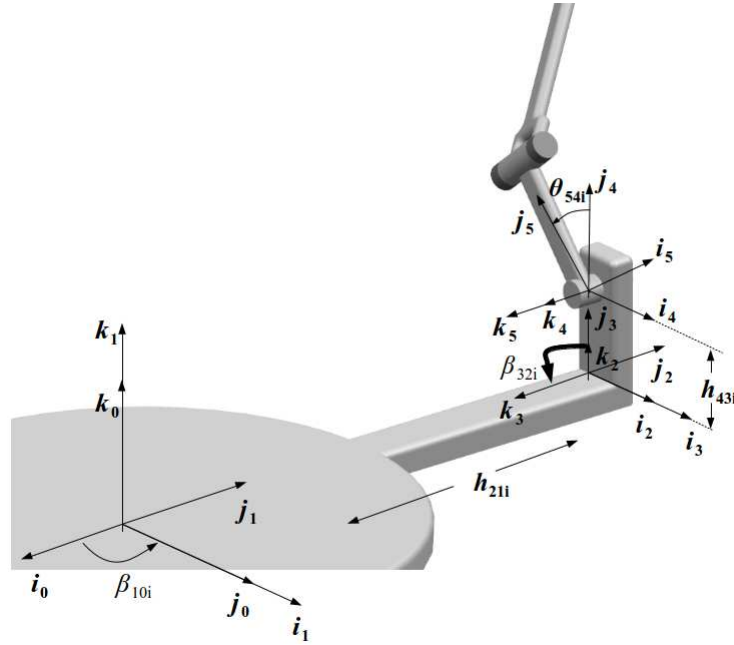


Figura 2.2.2: Transformaciones de base desde \$(i\_0, j\_0, k\_0)\$ a \$(i\_5, j\_5, k\_5)\$.

Quedando el lazo:

$$\mathbf{T}_{05i} = \mathbf{T}_{z6}(\beta_{10i})\mathbf{T}_{z2}(h_{21i})\mathbf{T}_{z4}(\beta_{32i})\mathbf{T}_{z2}(h_{43i})\mathbf{T}_{z6}(\theta_{54i}) \quad (2.2.2)$$

Ahora, como se muestra en la figura 2.2.3, se construye el lazo que va de la base \$(i\_5, j\_5, k\_5)\$ a la base \$(i\_8, j\_8, k\_8)\$, y consta de traslación \$h\_{65i}\$ en \$j\_5\$, rotación \$\theta\_{76i}\$ en \$i\_6\$ y una traslación \$h\_{87i}\$ en \$j\_7\$. Quedando el lazo:

$$\mathbf{T}_{58i} = \mathbf{T}_{z2}(h_{65i})\mathbf{T}_{z4}(\theta_{76i})\mathbf{T}_{z2}(h_{87i}) \quad (2.2.3)$$

Continuando con la misma metodología, se obtiene el lazo que va de la base \$(i\_8, j\_8, k\_8)\$ a la \$(i\_{10}, j\_{10}, k\_{10})\$, en donde interviene, rotación \$\theta\_{98i}\$ de \$i\_8\$ y traslación \$h\_{109i}\$ sobre \$j\_9\$ como se observa en la figura 2.2.4. Quedando:

$$\mathbf{T}_{810i} = \mathbf{T}_{z4}(\theta_{98i})\mathbf{T}_{z2}(h_{109i}) \quad (2.2.4)$$

En la Figura 2.2.5, se muestran las transformaciones necesaria para ir de de la base \$(i\_{10}, j\_{10}, k\_{10})\$ a la base \$(i\_{12}, j\_{12}, k\_{12})\$, consta de un giro \$\theta\_{1110i}\$ en \$i\_{10}\$ y giro \$\theta\_{1211i}\$ en \$k\_{11}\$, y queda:

$$\mathbf{T}_{1012i} = \mathbf{T}_{z4}(\theta_{1110i})\mathbf{T}_{z6}(\theta_{1211i}) \quad (2.2.5)$$

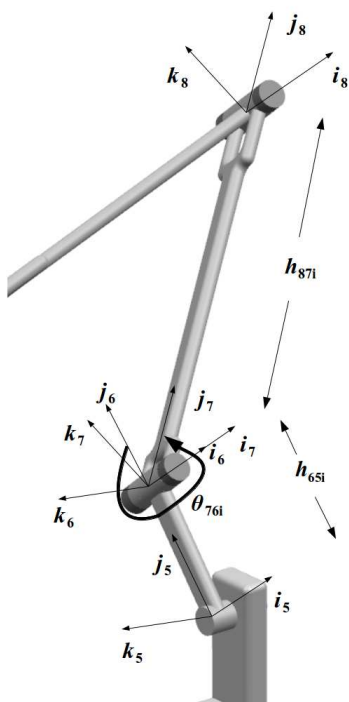


Figura 2.2.3: Transformaciones de base desde  $(i_5, j_5, k_5)$  a  $(i_8, j_8, k_8)$ .

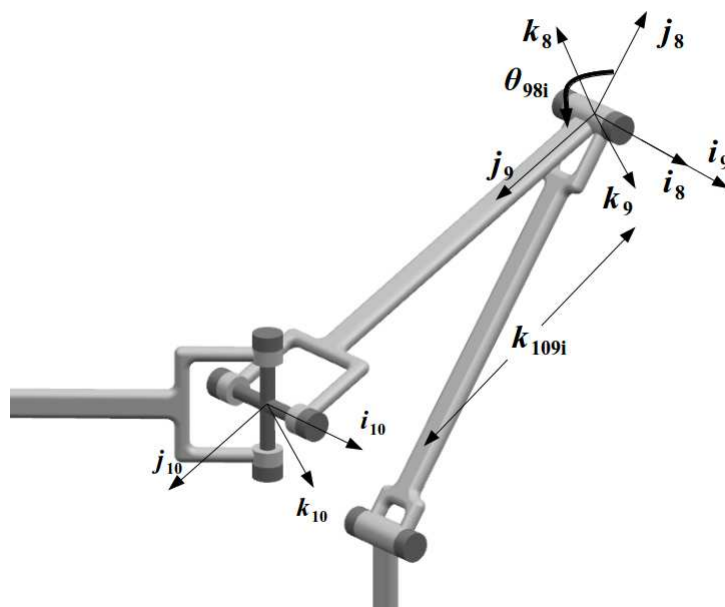


Figura 2.2.4: Transformaciones de base desde  $(i_8, j_8, k_8)$  a  $(i_{10}, j_{10}, k_{10})$ .

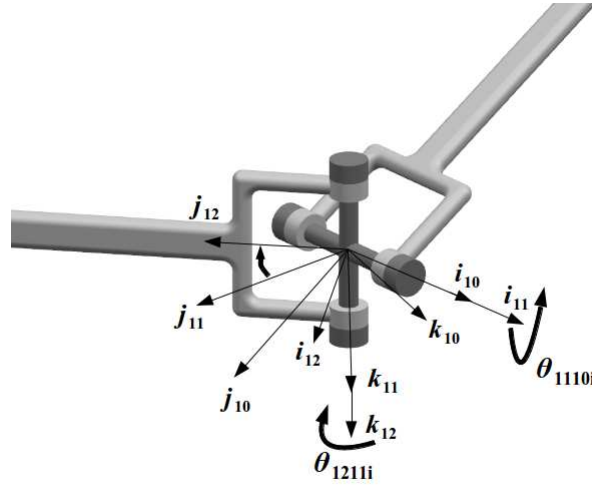


Figura 2.2.5: Transformaciones de base desde  $(i_{10}, j_{10}, k_{10})$  a  $(i_{12}, j_{12}, k_{12})$ .

Continuando de la base  $(i_{12}, j_{12}, k_{12})$  a la  $(i_{15}, j_{15}, k_{15})$  que se muestra en la figura 2.2.6, donde interviene; traslación  $h_{1312i}$  en  $j_{12}$ , rotación  $\theta_{1413i}$  en  $k_{13}$  y una traslación  $h_{1514i}$  en  $j_{14}$ , quedando:

$$\mathbf{T}_{1215i} = \mathbf{T}_{z2}(h_{1312i})\mathbf{T}_{z6}(\theta_{1413i})\mathbf{T}_{z2}(h_{1514i}) \quad (2.2.6)$$

Con esta ultima transformación se llega al centro del efector final, coincidiendo con la posición de la base  $(i_P, j_P, k_P)$  como se muestra en la figura 2.2.1, ahora es necesario orientar la base y así cerrar el lazo.

En la figura 2.2.7, se muestran las transformaciones necesarias para orientar con  $(i_P, j_P, k_P)$ , son dos giros,  $\beta_{1615i}$  en  $j_{15}$  y  $\beta_{1716i}$  en  $k_{16}$ , quedando:

$$\mathbf{T}_{1517i} = \mathbf{T}_{z6}(\beta_{1615i})\mathbf{T}_{z5}(\beta_{1716i}) \quad (2.2.7)$$

Hasta aquí, se tiene modeladas las cadenas cinemáticas del mecanismo tomando en cuenta todos los cuerpos de las mismas. Ahora es necesario definir las transformaciones que posicionan y orientan la base asociada al efector final desde la base inercial. Como se muestra en la figura 2.2.8, la posición del efector final está definida totalmente con tres distancias  $(x, y, z)$  y para definir completamente la orientación se usará una combinación de *Ángulos de Euler* [6], el orden sera; giro  $\phi$ , en  $k$ , giro  $\theta$  en  $j$  y giro  $\psi$  en  $i$ . Y queda:

$$\mathbf{T}_{0P} = \mathbf{T}_{z1}(x)\mathbf{T}_{z2}(y)\mathbf{T}_{z3}(z)\mathbf{T}_{z6}(\phi)\mathbf{T}_{z5}(\theta)\mathbf{T}_{z6}(\psi) \quad (2.2.8)$$

En forma matricial:

$$\mathbf{T}_{0P} = \begin{bmatrix} t_{P11} & t_{P12} & t_{P13} & t_{P14} \\ t_{P21} & t_{P22} & t_{P23} & t_{P24} \\ t_{P31} & t_{P32} & t_{P33} & t_{P34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2.9)$$

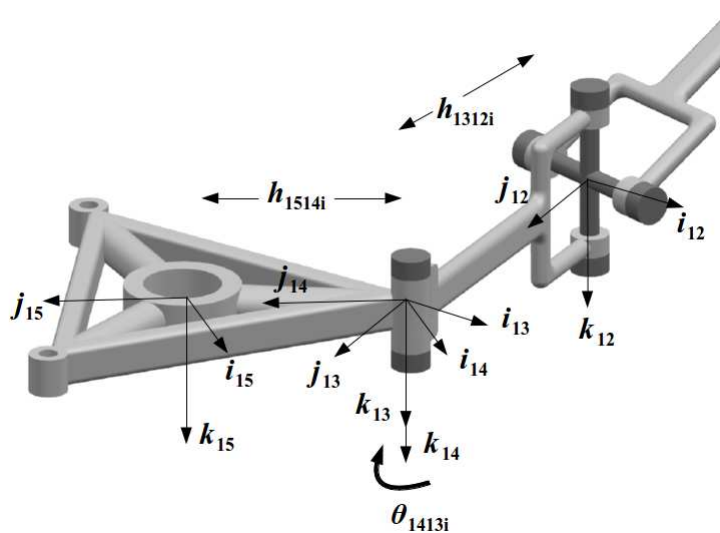


Figura 2.2.6: Transformaciones de base desde  $(i_{12}, j_{12}, k_{12})$  a  $(i_{15}, j_{15}, k_{15})$ .

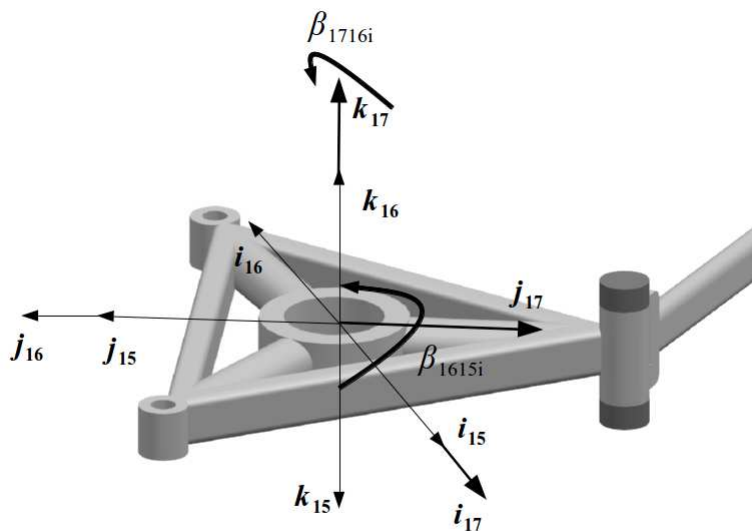


Figura 2.2.7: Transformaciones de base desde  $(i_{15}, j_{15}, k_{15})$  a  $(i_{17}, j_{17}, k_{17})$ .

Donde:

$$\begin{aligned}
t_{P11} &= \cos(\theta) \cos(\psi) \cos(\phi) - \text{sen}(\psi) \text{sen}(\phi) \\
t_{P12} &= -\cos(\theta) \text{sen}(\psi) \cos(\phi) - \cos(\psi) \text{sen}(\phi) \\
t_{P13} &= \text{sen}(\theta) \cos(\phi) \\
t_{P14} &= x \\
t_{P21} &= \cos(\theta) \cos(\psi) \text{sen}(\phi) + \text{sen}(\psi) \cos(\phi) \\
t_{P22} &= \cos(\psi) \cos(\phi) - \cos(\theta) \text{sen}(\psi) \text{sen}(\phi) \\
t_{P23} &= \text{sen}(\theta) \text{sen}(\phi) \\
t_{P24} &= y \\
t_{P31} &= \text{sen}(\theta)(-\cos(\psi)) \\
t_{P32} &= \text{sen}(\theta) \text{sen}(\psi) \\
t_{P33} &= \cos(\theta) \\
t_{P34} &= z
\end{aligned}$$

Se concluye el modelo del mecanismo con matrices homogéneas resumiendo:

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{05i} &= \mathbf{T}_{z6}(\beta_{10i}) \mathbf{T}_{z2}(h_{21i}) \mathbf{T}_{z4}(\beta_{32i}) \mathbf{T}_{z2}(h_{43i}) \mathbf{T}_{z6}(\theta_{54i}) \\
\mathbf{T}_{58i} &= \mathbf{T}_{z2}(h_{65i}) \mathbf{T}_{z4}(\theta_{76i}) \mathbf{T}_{z2}(h_{87i}) \\
\mathbf{T}_{810i} &= \mathbf{T}_{z4}(\theta_{98i}) \mathbf{T}_{z2}(h_{109i}) \\
\mathbf{T}_{1012i} &= \mathbf{T}_{z4}(\theta_{1110i}) \mathbf{T}_{z6}(\theta_{1211i}) \\
\mathbf{T}_{1517i} &= \mathbf{T}_{z6}(\beta_{1615i}) \mathbf{T}_{z5}(\beta_{1716i}) \\
\mathbf{T}_{0P} &= \mathbf{T}_{z1}(x) \mathbf{T}_{z2}(y) \mathbf{T}_{z3}(z) \mathbf{T}_{z6}(\phi) \mathbf{T}_{z5}(\theta) \mathbf{T}_{z6}(\psi)
\end{aligned} \tag{2.2.10}$$

Por conveniencia se reordenan:

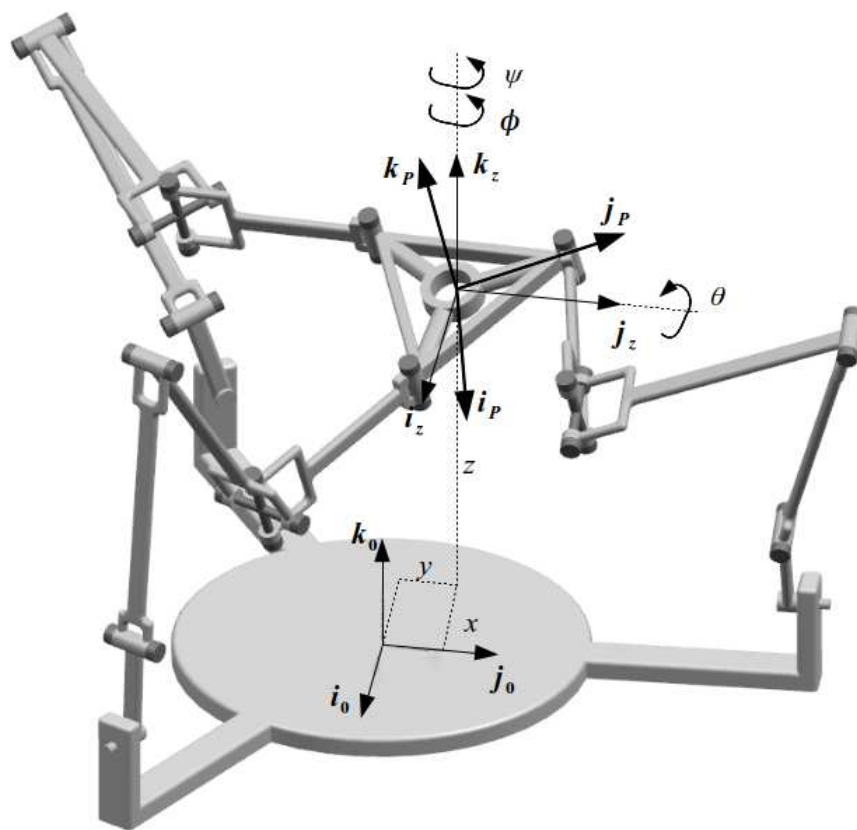
$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{02i} &= \mathbf{T}_{z6}(\beta_{10i}) \mathbf{T}_{z2}(h_{21i}) \\
\mathbf{T}_{24i} &= \mathbf{T}_{z4}(\beta_{32i}) \mathbf{T}_{z2}(h_{43i}) \\
\mathbf{T}_{46i} &= \mathbf{T}_{z6}(\theta_{54i}) \mathbf{T}_{z2}(h_{65i}) \\
\mathbf{T}_{68i} &= \mathbf{T}_{z4}(\theta_{76i}) \mathbf{T}_{z2}(h_{87i}) \\
\mathbf{T}_{810i} &= \mathbf{T}_{z4}(\theta_{98i}) \mathbf{T}_{z2}(h_{109i}) \\
\mathbf{T}_{1012i} &= \mathbf{T}_{z4}(\theta_{1110i}) \mathbf{T}_{z6}(\theta_{1211i}) \\
\mathbf{T}_{1215i} &= \mathbf{T}_{z2}(h_{1312i}) \mathbf{T}_{z6}(\theta_{1413i}) \mathbf{T}_{z2}(h_{1514i}) \\
\mathbf{T}_{1517i} &= \mathbf{T}_{z6}(\beta_{1615i}) \mathbf{T}_{z5}(\beta_{1716i}) \\
\mathbf{T}_{0P} &= \mathbf{T}_{z1}(x) \mathbf{T}_{z2}(y) \mathbf{T}_{z3}(z) \mathbf{T}_{z6}(\phi) \mathbf{T}_{z5}(\theta) \mathbf{T}_{z6}(\psi)
\end{aligned} \tag{2.2.11}$$

Para este caso;  $\beta_{10i}, \beta_{32i}, \beta_{1615i}, \beta_{1716i}, \phi, \theta, \psi$  y  $h_{21i}, h_{43i}, h_{65i}, h_{87i}, h_{109i}, h_{1312i}, h_{1514i}, x, y, z$  son datos conocidos, quedando:  $\theta_{54i}, \theta_{76i}, \theta_{98i}, \theta_{110i}, \theta_{1211i}, \theta_{1413i}$  como las variables incógnitas de interés. Teniendo finalmente la ecuación de lazo de la base 0 a la base 17 de las:

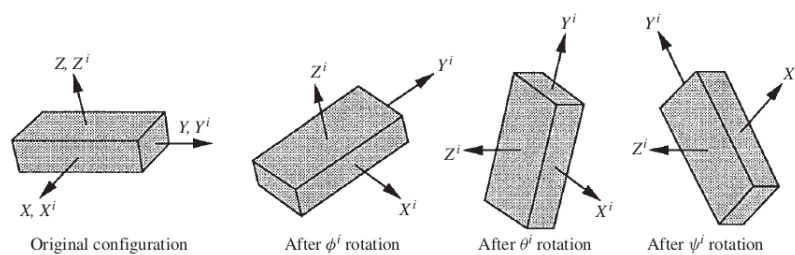
$$\mathbf{T}_{017i} = \mathbf{T}_{02i} \mathbf{T}_{24i} \mathbf{T}_{46i} \mathbf{T}_{68i} \mathbf{T}_{810i} \mathbf{T}_{1012i} \mathbf{T}_{1215i} \mathbf{T}_{1517i} \tag{2.2.12}$$

En forma matricial:

$$\mathbf{T}_{017i} = \begin{bmatrix} t_{11i} & t_{12i} & t_{13i} & t_{14i} \\ t_{21i} & t_{22i} & t_{23i} & t_{24i} \\ t_{31i} & t_{32i} & t_{33i} & t_{34i} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.2.13}$$



(a) Ángulos y distancias para localizar la base  $P$ .



(b) Configuración seleccionada de los ángulos de Euler.

Figura 2.2.8: Transformaciones de base desde  $(i_0, j_0, k_0)$  a  $(i_P, j_P, k_P)$ .



Donde los valores de cada término de  $\mathbf{T}_{017i}$  se muestran en el apéndice A.1  
 Las bases 17 y  $P$  coinciden en posición y orientación, entonces se puede escribir:

$$\mathbf{T}_{017i} = \mathbf{T}_{0P} \quad (2.2.14)$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} t_{11i} & t_{12i} & t_{13i} & t_{14i} \\ t_{21i} & t_{22i} & t_{23i} & t_{24i} \\ t_{31i} & t_{32i} & t_{33i} & t_{34i} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{P11} & t_{P12} & t_{P13} & t_{P14} \\ t_{P21} & t_{P22} & t_{P23} & t_{P24} \\ t_{P31} & t_{P32} & t_{P33} & t_{P34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Con la relación 2.2.14 se procederá a solucionar la posición inversa del mecanismo como se mostrará en la sección 2.6.1.

### 2.3. ANÁLISIS DE VELOCIDAD.

En el análisis de velocidad, se asume que la posición y la orientación de los cuerpos son conocidas y que son resultado del análisis de posición. La velocidad de un punto o un cuerpo rígido que experimenta movimiento, puede ser obtenida por la derivada respecto al tiempo. Con base en las ecuaciones obtenida en el análisis de posición, se obtendrá la velocidad al derivar la dicha ecuación con respecto al tiempo.

Antes de derivar la ecuación de posición, se introducirán algunas definiciones:

$$\dot{\mathbf{T}}_{zj}(q) = \mathbf{T}_{zj}(q)\mathbf{D}_{zj}(\dot{q}) \quad \text{para } j = 1\dots 6 \quad (2.3.1)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{z1}(\dot{x}) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dot{x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \mathbf{D}_{z2}(\dot{y}) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dot{y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \mathbf{D}_{z3}(\dot{z}) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dot{z} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{D}_{z4}(\dot{\theta}_x) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{\theta}_x & 0 \\ 0 & \dot{\theta}_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \mathbf{D}_{z5}(\dot{\theta}_y) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta}_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\dot{\theta}_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \mathbf{D}_{z6}(\dot{\theta}_z) &= \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta}_z & 0 & 0 \\ \dot{\theta}_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Primero se toma la ecuación 2.2.8 y se deriva respecto al tiempo:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{OP} &= \dot{\mathbf{T}}_{z1}(x)\mathbf{T}_{z2}(y)\mathbf{T}_{z3}(z)\mathbf{T}_{z6}(\phi)\mathbf{T}_{z5}(\theta)\mathbf{T}_{z6}(\psi) \\ &+ \mathbf{T}_{z1}(x)\dot{\mathbf{T}}_{z2}(y)\mathbf{T}_{z3}(z)\mathbf{T}_{z6}(\phi)\mathbf{T}_{z5}(\theta)\mathbf{T}_{z6}(\psi) \\ &+ \mathbf{T}_{z1}(x)\mathbf{T}_{z2}(y)\dot{\mathbf{T}}_{z3}(z)\mathbf{T}_{z6}(\phi)\mathbf{T}_{z5}(\theta)\mathbf{T}_{z6}(\psi) \\ &+ \mathbf{T}_{z1}(x)\mathbf{T}_{z2}(y)\mathbf{T}_{z3}(z)\dot{\mathbf{T}}_{z6}(\phi)\mathbf{T}_{z5}(\theta)\mathbf{T}_{z6}(\psi) \\ &+ \mathbf{T}_{z1}(x)\mathbf{T}_{z2}(y)\mathbf{T}_{z3}(z)\mathbf{T}_{z6}(\phi)\dot{\mathbf{T}}_{z5}(\theta)\mathbf{T}_{z6}(\psi) \\ &+ \mathbf{T}_{z1}(x)\mathbf{T}_{z2}(y)\mathbf{T}_{z3}(z)\mathbf{T}_{z6}(\phi)\mathbf{T}_{z5}(\theta)\dot{\mathbf{T}}_{z6}(\psi) \end{aligned}$$

Y utilizando la definición 2.3.1:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{OP} &= \mathbf{T}_{z1}(x)\mathbf{D}_{z1}(\dot{x})\mathbf{T}_{z2}(y)\mathbf{T}_{z3}(z)\mathbf{T}_{z6}(\phi)\mathbf{T}_{z5}(\theta)\mathbf{T}_{z6}(\psi) \\ &+ \mathbf{T}_{z1}(x)\mathbf{T}_{z2}(y)\mathbf{D}_{z2}(\dot{y})\mathbf{T}_{z3}(z)\mathbf{T}_{z6}(\phi)\mathbf{T}_{z5}(\theta)\mathbf{T}_{z6}(\psi) \\ &+ \mathbf{T}_{z1}(x)\mathbf{T}_{z2}(y)\mathbf{T}_{z3}(z)\mathbf{D}_{z3}(\dot{z})\mathbf{T}_{z6}(\phi)\mathbf{T}_{z5}(\theta)\mathbf{T}_{z6}(\psi) \\ &+ \mathbf{T}_{z1}(x)\mathbf{T}_{z2}(y)\mathbf{T}_{z3}(z)\mathbf{T}_{z6}(\phi)\mathbf{D}_{z6}(\dot{\phi})\mathbf{T}_{z5}(\theta)\mathbf{T}_{z6}(\psi) \\ &+ \mathbf{T}_{z1}(x)\mathbf{T}_{z2}(y)\mathbf{T}_{z3}(z)\mathbf{T}_{z6}(\phi)\mathbf{T}_{z5}(\theta)\mathbf{D}_{z5}(\dot{\theta})\mathbf{T}_{z6}(\psi) \\ &+ \mathbf{T}_{z1}(x)\mathbf{T}_{z2}(y)\mathbf{T}_{z3}(z)\mathbf{T}_{z6}(\phi)\mathbf{T}_{z5}(\theta)\mathbf{T}_{z6}(\psi)\mathbf{D}_{z6}(\dot{\psi}) \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

De forma matricial:

$$\mathbf{V}_{OP} = \begin{bmatrix} v_{P11} & v_{P12} & v_{P13} & v_{P14} \\ v_{P21} & v_{P22} & v_{P23} & v_{P24} \\ v_{P31} & v_{P32} & v_{P33} & v_{P34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.3.3)$$

Donde:

$$\begin{aligned}
v_{P11} &= \cos(\psi) \operatorname{sen}(\phi) (-\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos(\theta)) - \cos(\phi) (\dot{\theta} \operatorname{sen}(\theta) \cos(\psi) + \operatorname{sen}(\psi) (\dot{\psi} \cos(\theta) + \dot{\phi})) \\
v_{P12} &= \operatorname{sen}(\psi) \operatorname{sen}(\phi) (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos(\theta)) - \cos(\phi) (\cos(\psi) (\dot{\psi} \cos(\theta) + \dot{\phi}) - \dot{\theta} \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\psi)) \\
v_{P13} &= \dot{\theta} \cos(\theta) \cos(\phi) - \dot{\phi} \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\phi) \\
v_{P14} &= \dot{x} \\
v_{P21} &= \cos(\psi) \cos(\phi) (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos(\theta)) - \operatorname{sen}(\phi) (\dot{\theta} \operatorname{sen}(\theta) \cos(\psi) + \operatorname{sen}(\psi) (\dot{\psi} \cos(\theta) + \dot{\phi})) \\
v_{P22} &= \cos(\psi) \operatorname{sen}(\phi) (-\dot{\psi} \cos(\theta) + \dot{\phi}) - \operatorname{sen}(\psi) (\cos(\phi) (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos(\theta)) - \dot{\theta} \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\phi)) \\
v_{P23} &= \dot{\theta} \cos(\theta) \operatorname{sen}(\phi) + \dot{\phi} \operatorname{sen}(\theta) \cos(\phi) \\
v_{P24} &= \dot{y} \\
v_{P31} &= \dot{\psi} \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\psi) - \dot{\theta} \cos(\theta) \cos(\psi) \\
v_{P32} &= \dot{\theta} \cos(\theta) \operatorname{sen}(\psi) + \dot{\psi} \operatorname{sen}(\theta) \cos(\psi) \\
v_{P33} &= -\dot{\theta} \operatorname{sen}(\theta) \\
v_{P34} &= \dot{z}
\end{aligned}$$

Ahora se toma la ecuación 2.2.12, y de la misma manera se deriva respecto al tiempo:

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_{017i} &= \dot{\mathbf{T}}_{02i} \mathbf{T}_{24i} \mathbf{T}_{46i} \mathbf{T}_{68i} \mathbf{T}_{810i} \mathbf{T}_{1012i} \mathbf{T}_{1215i} \mathbf{T}_{1517i} \\
&+ \mathbf{T}_{02i} \dot{\mathbf{T}}_{24i} \mathbf{T}_{46i} \mathbf{T}_{68i} \mathbf{T}_{810i} \mathbf{T}_{1012i} \mathbf{T}_{1215i} \mathbf{T}_{1517i} \\
&+ \mathbf{T}_{02i} \mathbf{T}_{24i} \dot{\mathbf{T}}_{46i} \mathbf{T}_{68i} \mathbf{T}_{810i} \mathbf{T}_{1012i} \mathbf{T}_{1215i} \mathbf{T}_{1517i} \\
&+ \mathbf{T}_{02i} \mathbf{T}_{24i} \mathbf{T}_{46i} \dot{\mathbf{T}}_{68i} \mathbf{T}_{810i} \mathbf{T}_{1012i} \mathbf{T}_{1215i} \mathbf{T}_{1517i} \\
&+ \mathbf{T}_{02i} \mathbf{T}_{24i} \mathbf{T}_{46i} \mathbf{T}_{68i} \dot{\mathbf{T}}_{810i} \mathbf{T}_{1012i} \mathbf{T}_{1215i} \mathbf{T}_{1517i} \\
&+ \mathbf{T}_{02i} \mathbf{T}_{24i} \mathbf{T}_{46i} \mathbf{T}_{68i} \mathbf{T}_{810i} \dot{\mathbf{T}}_{1012i} \mathbf{T}_{1215i} \mathbf{T}_{1517i} \\
&+ \mathbf{T}_{02i} \mathbf{T}_{24i} \mathbf{T}_{46i} \mathbf{T}_{68i} \mathbf{T}_{810i} \mathbf{T}_{1012i} \dot{\mathbf{T}}_{1215i} \mathbf{T}_{1517i} \\
&+ \mathbf{T}_{02i} \mathbf{T}_{24i} \mathbf{T}_{46i} \mathbf{T}_{68i} \mathbf{T}_{810i} \mathbf{T}_{1012i} \mathbf{T}_{1215i} \dot{\mathbf{T}}_{1517i}
\end{aligned} \tag{2.3.4}$$

Como se aprecia en las ecuaciones 2.2.11 los elementos  $\mathbf{T}_{02i}$ ,  $\mathbf{T}_{24i}$  y  $\mathbf{T}_{1517i}$ , solo tiene elementos constantes, por lo tanto es igual a  $\mathbf{0}_{4 \times 4}$ , quedando:

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_{017i} &= \mathbf{T}_{02i} \mathbf{T}_{24i} \dot{\mathbf{T}}_{46i} \mathbf{T}_{68i} \mathbf{T}_{810i} \mathbf{T}_{1012i} \mathbf{T}_{1215i} \mathbf{T}_{1517i} \\
&+ \mathbf{T}_{02i} \mathbf{T}_{24i} \mathbf{T}_{46i} \dot{\mathbf{T}}_{68i} \mathbf{T}_{810i} \mathbf{T}_{1012i} \mathbf{T}_{1215i} \mathbf{T}_{1517i} \\
&+ \mathbf{T}_{02i} \mathbf{T}_{24i} \mathbf{T}_{46i} \mathbf{T}_{68i} \dot{\mathbf{T}}_{810i} \mathbf{T}_{1012i} \mathbf{T}_{1215i} \mathbf{T}_{1517i} \\
&+ \mathbf{T}_{02i} \mathbf{T}_{24i} \mathbf{T}_{46i} \mathbf{T}_{68i} \mathbf{T}_{810i} \dot{\mathbf{T}}_{1012i} \mathbf{T}_{1215i} \mathbf{T}_{1517i} \\
&+ \mathbf{T}_{02i} \mathbf{T}_{24i} \mathbf{T}_{46i} \mathbf{T}_{68i} \mathbf{T}_{810i} \mathbf{T}_{1012i} \dot{\mathbf{T}}_{1215i} \mathbf{T}_{1517i}
\end{aligned} \tag{2.3.5}$$

Donde de las definiciones 2.2.11:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{T}}_{46i} &= \mathbf{T}_{z6}(\theta_{54i}) \mathbf{D}_{z6}(\dot{\theta}_{54i}) \mathbf{T}_{z2}(h_{65i}) \\
\dot{\mathbf{T}}_{68i} &= \mathbf{T}_{z4}(\theta_{76i}) \mathbf{D}_{z4}(\dot{\theta}_{76i}) \mathbf{T}_{z2}(h_{87i}) \\
\dot{\mathbf{T}}_{810i} &= \mathbf{T}_{z4}(\theta_{98i}) \mathbf{D}_{z4}(\dot{\theta}_{98i}) \mathbf{T}_{z2}(h_{109i}) \\
\dot{\mathbf{T}}_{1012i} &= \mathbf{T}_{z4}(\theta_{1110i}) \mathbf{D}_{z4}(\dot{\theta}_{1110i}) \mathbf{T}_{z6}(\theta_{1211i}) \\
\dot{\mathbf{T}}_{1215i} &= \mathbf{T}_{z2}(h_{1312i}) \mathbf{T}_{z6}(\theta_{1413i}) \mathbf{D}_{z6}(\dot{\theta}_{1413i}) \mathbf{T}_{z2}(h_{1514i})
\end{aligned} \tag{2.3.6}$$

Sustituyendo las ecuaciones 2.2.11 y 2.3.6 en 2.3.5, tenemos una matriz homogénea cuyas incógnitas son la velocidades lineales y angulares que intervienen en el sistema, como se muestra:

$$\mathbf{V}_{017i} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & v_{14} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & v_{24} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & v_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.3.7)$$

Donde los valores de cada termino de  $\mathbf{V}_{017i}$  se muestran en el apéndice A.2.

También se tiene que:

$$\mathbf{V}_{017i} = \mathbf{V}_{0P} \quad (2.3.8)$$

De forma matricial:

$$\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & v_{14} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & v_{24} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & v_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{P11} & v_{P12} & v_{P13} & v_{P14} \\ v_{P21} & v_{P22} & v_{P23} & v_{P24} \\ v_{P31} & v_{P32} & v_{P33} & v_{P34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Al igual que la posición, la velocidad inversa del mecanismo se resolverá a partir de la relación 2.3.8 en la sección 2.6.2.

## 2.4. ANÁLISIS DE LA ACELERACIÓN.

La aceleración se define como la segunda derivada respecto al tiempo de la posición o primera derivada respecto al tiempo de la velocidad. En el análisis de la aceleración, se asume que la posición, orientación y velocidad de los cuerpos son conocidas y que son resultado del análisis de posición y velocidad. Con base en las ecuaciones obtenidas en el análisis de velocidad, se obtendrán las de aceleración al derivarlas con respecto al tiempo.

Antes de derivar la ecuación de velocidad, se introducirán algunas definiciones:

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{T}}_{zj}(q) &= \mathbf{T}_{zj}(q)(\mathbf{D}_{zj}(\ddot{q}) + \mathbf{D}_{zj}^2(\dot{q})) \\ \text{para } j &= 1\dots 6\end{aligned}\tag{2.4.1}$$

Donde:

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_{z1}(\ddot{x}) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \ddot{x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \mathbf{D}_{z2}(\ddot{y}) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \ddot{y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \mathbf{D}_{z3}(\ddot{z}) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \ddot{z} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{D}_{z4}(\ddot{\theta}_x) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\ddot{\theta}_x & 0 \\ 0 & \ddot{\theta}_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \mathbf{D}_{z5}(\ddot{\theta}_y) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ddot{\theta}_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\ddot{\theta}_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \mathbf{D}_{z6}(\ddot{\theta}_z) &= \begin{bmatrix} 0 & -\ddot{\theta}_z & 0 & 0 \\ \ddot{\theta}_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Primero se toma la ecuación 2.3.2 y se deriva respecto al tiempo utilizando la definición 2.4.1 y se tiene:

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{OP} &= \ddot{\mathbf{T}}_{z1}(x)\mathbf{T}_{z2}(y)\mathbf{T}_{z3}(z)\mathbf{T}_{z6}(\phi)\mathbf{T}_{z5}(\theta)\mathbf{T}_{z6}(\psi) \\ &+ \dot{\mathbf{T}}_{z1}(x)\dot{\mathbf{T}}_{z2}(y)\mathbf{T}_{z3}(z)\mathbf{T}_{z6}(\phi)\mathbf{T}_{z5}(\theta)\mathbf{T}_{z6}(\psi) \\ &+ \dot{\mathbf{T}}_{z1}(x)\mathbf{T}_{z2}(y)\dot{\mathbf{T}}_{z3}(z)\mathbf{T}_{z6}(\phi)\mathbf{T}_{z5}(\theta)\mathbf{T}_{z6}(\psi) \\ &+ \dot{\mathbf{T}}_{z1}(x)\mathbf{T}_{z2}(y)\mathbf{T}_{z3}(z)\dot{\mathbf{T}}_{z6}(\phi)\mathbf{T}_{z5}(\theta)\mathbf{T}_{z6}(\psi) \\ &+ \dot{\mathbf{T}}_{z1}(x)\mathbf{T}_{z2}(y)\mathbf{T}_{z3}(z)\mathbf{T}_{z6}(\phi)\dot{\mathbf{T}}_{z5}(\theta)\mathbf{T}_{z6}(\psi) \\ &+ \dot{\mathbf{T}}_{z1}(x)\mathbf{T}_{z2}(y)\mathbf{T}_{z3}(z)\mathbf{T}_{z6}(\phi)\mathbf{T}_{z5}(\theta)\dot{\mathbf{T}}_{z6}(\psi) \\ &+ \dot{\mathbf{T}}_{z1}(x)\dot{\mathbf{T}}_{z2}(y)\mathbf{T}_{z3}(z)\mathbf{T}_{z6}(\phi)\mathbf{T}_{z5}(\theta)\mathbf{T}_{z6}(\psi) \\ &+ \mathbf{T}_{z1}(x)\ddot{\mathbf{T}}_{z2}(y)\mathbf{T}_{z3}(z)\mathbf{T}_{z6}(\phi)\mathbf{T}_{z5}(\theta)\mathbf{T}_{z6}(\psi) \\ &+ \mathbf{T}_{z1}(x)\dot{\mathbf{T}}_{z2}(y)\dot{\mathbf{T}}_{z3}(z)\mathbf{T}_{z6}(\phi)\mathbf{T}_{z5}(\theta)\mathbf{T}_{z6}(\psi) \\ &+ \mathbf{T}_{z1}(x)\dot{\mathbf{T}}_{z2}(y)\mathbf{T}_{z3}(z)\dot{\mathbf{T}}_{z6}(\phi)\mathbf{T}_{z5}(\theta)\mathbf{T}_{z6}(\psi) \\ &+ \mathbf{T}_{z1}(x)\dot{\mathbf{T}}_{z2}(y)\mathbf{T}_{z3}(z)\mathbf{T}_{z6}(\phi)\dot{\mathbf{T}}_{z5}(\theta)\mathbf{T}_{z6}(\psi) \\ &+ \mathbf{T}_{z1}(x)\dot{\mathbf{T}}_{z2}(y)\mathbf{T}_{z3}(z)\mathbf{T}_{z6}(\phi)\mathbf{T}_{z5}(\theta)\dot{\mathbf{T}}_{z6}(\psi)\end{aligned}$$





$$\begin{aligned}
a_{P11} &= \cos(\psi) \cos(\phi) (-\ddot{\theta} \operatorname{sen}(\theta) - \dot{\theta}^2 \cos(\theta)) + \cos(\theta) \cos(\phi) (-\ddot{\psi} \operatorname{sen}(\psi) - \dot{\psi}^2 \cos(\psi)) \\
&\quad - \operatorname{sen}(\phi) (\ddot{\psi} \cos(\psi) - \dot{\psi}^2 \operatorname{sen}(\psi)) + \cos(\theta) \cos(\psi) (-\ddot{\phi} \operatorname{sen}(\phi) \\
&\quad - \dot{\phi}^2 \cos(\phi)) + \operatorname{sen}(\psi) (\dot{\phi}^2 \operatorname{sen}(\phi) - \ddot{\phi} \cos(\phi)) + 2\dot{\theta} \dot{\psi} \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\psi) \cos(\phi) \\
&\quad + 2\dot{\theta} \dot{\phi} \operatorname{sen}(\theta) \cos(\psi) \operatorname{sen}(\phi) + 2\dot{\psi} \dot{\phi} \cos(\theta) \operatorname{sen}(\psi) \operatorname{sen}(\phi) - 2\dot{\psi} \dot{\phi} \cos(\psi) \cos(\phi) \\
a_{P12} &= -\operatorname{sen}(\psi) \cos(\phi) (-\ddot{\theta} \operatorname{sen}(\theta) - \dot{\theta}^2 \cos(\theta)) + \cos(\theta) \cos(\phi) (\dot{\psi}^2 \operatorname{sen}(\psi) - \ddot{\psi} \cos(\psi)) \\
&\quad - \operatorname{sen}(\phi) (-\ddot{\psi} \operatorname{sen}(\psi) - \dot{\psi}^2 \cos(\psi)) - \cos(\theta) \operatorname{sen}(\psi) (-\ddot{\phi} \operatorname{sen}(\phi) - \dot{\phi}^2 \cos(\phi)) \\
&\quad + \cos(\psi) (\dot{\phi}^2 \operatorname{sen}(\phi) - \ddot{\phi} \cos(\phi)) + 2\dot{\theta} \dot{\psi} \operatorname{sen}(\theta) \cos(\psi) \cos(\phi) \\
&\quad - 2\dot{\theta} \dot{\phi} \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\psi) \operatorname{sen}(\phi) + 2\dot{\psi} \dot{\phi} \cos(\theta) \cos(\psi) \operatorname{sen}(\phi) + 2\dot{\psi} \dot{\phi} \operatorname{sen}(\psi) \cos(\phi) \\
a_{P13} &= \cos(\phi) (\ddot{\theta} \cos(\theta) - \dot{\theta}^2 \operatorname{sen}(\theta)) + \operatorname{sen}(\theta) (-\ddot{\phi} \operatorname{sen}(\phi) - \dot{\phi}^2 \cos(\phi)) - 2\dot{\theta} \dot{\phi} \cos(\theta) \operatorname{sen}(\phi) \\
a_{P14} &= \ddot{x} \\
a_{P21} &= \cos(\psi) \operatorname{sen}(\phi) (-\ddot{\theta} \operatorname{sen}(\theta) - \dot{\theta}^2 \cos(\theta)) + \cos(\theta) \operatorname{sen}(\phi) (-\ddot{\psi} \operatorname{sen}(\psi) - \dot{\psi}^2 \cos(\psi)) \\
&\quad + \cos(\phi) (\ddot{\psi} \cos(\psi) - \dot{\psi}^2 \operatorname{sen}(\psi)) + \cos(\theta) \cos(\psi) (\ddot{\phi} \cos(\phi) - \dot{\phi}^2 \operatorname{sen}(\phi)) \\
&\quad + \operatorname{sen}(\psi) (-\ddot{\phi} \operatorname{sen}(\phi) - \dot{\phi}^2 \cos(\phi)) + 2\dot{\theta} \dot{\psi} \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\psi) \operatorname{sen}(\phi) \\
&\quad - 2\dot{\theta} \dot{\phi} \operatorname{sen}(\theta) \cos(\psi) \cos(\phi) - 2\dot{\psi} \dot{\phi} \cos(\theta) \operatorname{sen}(\psi) \cos(\phi) - 2\dot{\psi} \dot{\phi} \cos(\psi) \operatorname{sen}(\phi) \\
a_{P22} &= -\operatorname{sen}(\psi) \operatorname{sen}(\phi) (-\ddot{\theta} \operatorname{sen}(\theta) - \dot{\theta}^2 \cos(\theta)) + \cos(\theta) \operatorname{sen}(\phi) (\dot{\psi}^2 \operatorname{sen}(\psi) - \ddot{\psi} \cos(\psi)) \\
&\quad + \cos(\phi) (-\ddot{\psi} \operatorname{sen}(\psi) - \dot{\psi}^2 \cos(\psi)) - \cos(\theta) \operatorname{sen}(\psi) (\ddot{\phi} \cos(\phi) - \dot{\phi}^2 \operatorname{sen}(\phi)) \\
&\quad + \cos(\psi) (-\ddot{\phi} \operatorname{sen}(\phi) - \dot{\phi}^2 \cos(\phi)) + 2\dot{\theta} \dot{\psi} \operatorname{sen}(\theta) \cos(\psi) \operatorname{sen}(\phi) \\
&\quad + 2\dot{\theta} \dot{\phi} \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\psi) \cos(\phi) - 2\dot{\psi} \dot{\phi} \cos(\theta) \cos(\psi) \cos(\phi) + 2\dot{\psi} \dot{\phi} \operatorname{sen}(\psi) \operatorname{sen}(\phi) \\
a_{P23} &= \operatorname{sen}(\phi) (\ddot{\theta} \cos(\theta) - \dot{\theta}^2 \operatorname{sen}(\theta)) + \operatorname{sen}(\theta) (\ddot{\phi} \cos(\phi) - \dot{\phi}^2 \operatorname{sen}(\phi)) + 2\dot{\theta} \dot{\phi} \cos(\theta) \cos(\phi) \\
a_{P24} &= \ddot{y} \\
a_{P31} &= \cos(\psi) (\dot{\theta}^2 \operatorname{sen}(\theta) - \ddot{\theta} \cos(\theta)) - \operatorname{sen}(\theta) (-\ddot{\psi} \operatorname{sen}(\psi) - \dot{\psi}^2 \cos(\psi)) + 2\dot{\theta} \dot{\psi} \cos(\theta) \operatorname{sen}(\psi) \\
a_{P32} &= -\operatorname{sen}(\psi) (\dot{\theta}^2 \operatorname{sen}(\theta) - \ddot{\theta} \cos(\theta)) - \operatorname{sen}(\theta) (\dot{\psi}^2 \operatorname{sen}(\psi) - \ddot{\psi} \cos(\psi)) + 2\dot{\theta} \dot{\psi} \cos(\theta) \cos(\psi) \\
a_{P33} &= -\ddot{\theta} \operatorname{sen}(\theta) - \dot{\theta}^2 \cos(\theta) \\
a_{P34} &= \ddot{z}
\end{aligned}$$





Identificando los elemento que solo contiene constantes ( $0^{4x4}$ ) y agrupando términos, se reduce a:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{017i} = & \mathbf{T}_{02i} \mathbf{T}_{24i} \ddot{\mathbf{T}}_{46i} \mathbf{T}_{68i} \mathbf{T}_{810i} \mathbf{T}_{1012i} \mathbf{T}_{1215i} \mathbf{T}_{1517i} \\
& + 2 \cdot \mathbf{T}_{02i} \mathbf{T}_{24i} \dot{\mathbf{T}}_{46i} \dot{\mathbf{T}}_{68i} \mathbf{T}_{810i} \mathbf{T}_{1012i} \mathbf{T}_{1215i} \mathbf{T}_{1517i} \\
& + 2 \cdot \mathbf{T}_{02i} \mathbf{T}_{24i} \dot{\mathbf{T}}_{46i} \mathbf{T}_{68i} \dot{\mathbf{T}}_{810i} \mathbf{T}_{1012i} \mathbf{T}_{1215i} \mathbf{T}_{1517i} \\
& + 2 \cdot \mathbf{T}_{02i} \mathbf{T}_{24i} \dot{\mathbf{T}}_{46i} \mathbf{T}_{68i} \mathbf{T}_{810i} \dot{\mathbf{T}}_{1012i} \mathbf{T}_{1215i} \mathbf{T}_{1517i} \\
& + 2 \cdot \mathbf{T}_{02i} \mathbf{T}_{24i} \dot{\mathbf{T}}_{46i} \mathbf{T}_{68i} \mathbf{T}_{810i} \mathbf{T}_{1012i} \dot{\mathbf{T}}_{1215i} \mathbf{T}_{1517i} \\
& + \mathbf{T}_{02i} \mathbf{T}_{24i} \mathbf{T}_{46i} \ddot{\mathbf{T}}_{68i} \mathbf{T}_{810i} \mathbf{T}_{1012i} \mathbf{T}_{1215i} \mathbf{T}_{1517i} \\
& + 2 \cdot \mathbf{T}_{02i} \mathbf{T}_{24i} \mathbf{T}_{46i} \dot{\mathbf{T}}_{68i} \dot{\mathbf{T}}_{810i} \mathbf{T}_{1012i} \mathbf{T}_{1215i} \mathbf{T}_{1517i} \\
& + 2 \cdot \mathbf{T}_{02i} \mathbf{T}_{24i} \mathbf{T}_{46i} \dot{\mathbf{T}}_{68i} \mathbf{T}_{810i} \dot{\mathbf{T}}_{1012i} \mathbf{T}_{1215i} \mathbf{T}_{1517i} \\
& + 2 \cdot \mathbf{T}_{02i} \mathbf{T}_{24i} \mathbf{T}_{46i} \dot{\mathbf{T}}_{68i} \mathbf{T}_{810i} \mathbf{T}_{1012i} \dot{\mathbf{T}}_{1215i} \mathbf{T}_{1517i} \\
& + \mathbf{T}_{02i} \mathbf{T}_{24i} \mathbf{T}_{46i} \mathbf{T}_{68i} \ddot{\mathbf{T}}_{810i} \mathbf{T}_{1012i} \mathbf{T}_{1215i} \mathbf{T}_{1517i} \\
& + 2 \cdot \mathbf{T}_{02i} \mathbf{T}_{24i} \mathbf{T}_{46i} \mathbf{T}_{68i} \dot{\mathbf{T}}_{810i} \dot{\mathbf{T}}_{1012i} \mathbf{T}_{1215i} \mathbf{T}_{1517i} \\
& + 2 \cdot \mathbf{T}_{02i} \mathbf{T}_{24i} \mathbf{T}_{46i} \mathbf{T}_{68i} \dot{\mathbf{T}}_{810i} \mathbf{T}_{1012i} \dot{\mathbf{T}}_{1215i} \mathbf{T}_{1517i} \\
& + \mathbf{T}_{02i} \mathbf{T}_{24i} \mathbf{T}_{46i} \mathbf{T}_{68i} \mathbf{T}_{810i} \ddot{\mathbf{T}}_{1012i} \mathbf{T}_{1215i} \mathbf{T}_{1517i} \\
& + 2 \cdot \mathbf{T}_{02i} \mathbf{T}_{24i} \mathbf{T}_{46i} \mathbf{T}_{68i} \mathbf{T}_{810i} \dot{\mathbf{T}}_{1012i} \dot{\mathbf{T}}_{1215i} \mathbf{T}_{1517i} \\
& + \mathbf{T}_{02i} \mathbf{T}_{24i} \mathbf{T}_{46i} \mathbf{T}_{68i} \mathbf{T}_{810i} \mathbf{T}_{1012i} \ddot{\mathbf{T}}_{1215i} \mathbf{T}_{1517i}
\end{aligned} \tag{2.4.3}$$

Donde desarrollando la definición de 2.4.1:

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{T}}_{46i} &= \mathbf{T}_{z6}(\theta_{54i})(\mathbf{D}_{z6}(\ddot{\theta}_{54i}) + \mathbf{D}_{z6}^2(\dot{\theta}_{54i}))\mathbf{T}_{z2}(h_{65i}) \\
\ddot{\mathbf{T}}_{68i} &= \mathbf{T}_{z4}(\theta_{54i})(\mathbf{D}_{z4}(\ddot{\theta}_{54i}) + \mathbf{D}_{z4}^2(\dot{\theta}_{54i}))\mathbf{T}_{z2}(h_{65i}) \\
\ddot{\mathbf{T}}_{810i} &= \mathbf{T}_{z4}(\theta_{98i})(\mathbf{D}_{z4}(\ddot{\theta}_{98i}) + \mathbf{D}_{z4}^2(\dot{\theta}_{98i}))\mathbf{T}_{z2}(h_{109i}) \\
\ddot{\mathbf{T}}_{1012i} &= \mathbf{T}_{z4}(\theta_{1110i})(\mathbf{D}_{z4}(\ddot{\theta}_{1110i}) + \mathbf{D}_{z4}^2(\dot{\theta}_{1110i}))\mathbf{T}_{z6}(\theta_{1211i}) \\
&\quad + 2 \cdot \mathbf{T}_{z4}(\theta_{1110i})\mathbf{D}_{z4}(\dot{\theta}_{1110i})\mathbf{T}_{z4}(\theta_{1211i})\mathbf{D}_{z4}(\dot{\theta}_{1211i}) \\
&\quad + \mathbf{T}_{z4}(\theta_{1110i})\mathbf{T}_{z4}(\theta_{1211i})(\mathbf{D}_{z4}(\ddot{\theta}_{1211i}) + \mathbf{D}_{z4}^2(\dot{\theta}_{1211i})) \\
\ddot{\mathbf{T}}_{1215i} &= \mathbf{T}_{z2}(h_{1312i})\mathbf{T}_{z6}(\theta_{1413i})(\mathbf{D}_{z6}(\ddot{\theta}_{1413i}) + \mathbf{D}_{z6}^2(\dot{\theta}_{1413i}))\mathbf{T}_{z2}(h_{1514i})
\end{aligned} \tag{2.4.4}$$

Sustituyendo las definiciones de 2.2.11, 2.3.6 y 2.4.4 en 2.4.3, se tiene en forma matricial:

$$\mathbf{A}_{017i} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.4.5}$$

Donde los valores de cada término de  $\mathbf{A}_{017i}$  se muestran en el apéndice A.3. Se tiene también:

$$\mathbf{A}_{017i} = \mathbf{A}_{0P} \tag{2.4.6}$$

De forma matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{P11} & a_{P12} & a_{P13} & a_{P14} \\ a_{P21} & a_{P22} & a_{P23} & a_{P24} \\ a_{P31} & a_{P32} & a_{P33} & a_{P34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Al igual que la posición y la velocidad, la aceleración inversa del mecanismo se resolverá a partir de la relación 2.4.6 en la sección 2.6.3.

## 2.5. GENERACIÓN DE LA TRAYECTORIA.

Hasta el momento se tiene el modelo matemático que describe el comportamiento del mecanismo según una posición dada, ahora es necesario especificar el movimiento de la base local asociada al efector final. Básicamente, existen dos formas para especificar este movimiento:

1. Suministrando puntos consecutivos, ignorando la trayectoria que describe en el espacio el mecanismo entre los dos puntos.
2. Ó suministrando los puntos iniciales y finales donde se posicionara el efector final, especificando el camino que debe describir en el espacio .

La primera opción se denomina tradicionalmente *control punto a punto*, y solo tiene interés práctico cuando los puntos iniciales y finales están razonablemente cercanos y no existe interés en controlar las velocidades o aceleraciones iniciales y finales.

La segunda opción se denomina *control de la trayectoria continua*, y en este caso, se busca que el efector final dibuje cierta trayectoria entre los puntos iniciales y finales deseados, además de ser posible definir perfiles de velocidad, aceleración y restricciones temporales.

Como el interés es posicionar y orientar el efector final en diferentes puntos del espacio de trabajo, con la finalidad de mostrar la versatilidad del mecanismo, se empleará la segunda opción para generar un conjunto de puntos que tracen una trayectoria recta en función del tiempo entre los puntos iniciales y finales deseados.

Las siguientes ecuaciones permitirán generar los puntos que seguira el efector final para la posición, velocidad y aceleración. El desarrollo de estas ecuaciones se muestran en el Apéndice B:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}(t) &= p_i + \left[ 10 \left( \frac{t}{t_f} \right)^3 - 15 \left( \frac{t}{t_f} \right)^4 + 6 \left( \frac{t}{t_f} \right)^5 \right] (p_f - p_i) \\
 \mathbf{V}(t) &= \left[ 30 \frac{t^2}{t_f^3} - 60 \frac{t^3}{t_f^4} + 30 \frac{t^4}{t_f^5} \right] (p_f - p_i) \\
 \mathbf{A}(t) &= \left[ 60 \frac{t}{t_f^3} - 180 \frac{t^2}{t_f^4} + 120 \frac{t^3}{t_f^5} \right] (p_f - p_i)
 \end{aligned} \tag{2.5.1}$$

Y para la orientación:

$$\begin{aligned}
 \beta(t) &= \beta_i + \left[ 10 \left( \frac{t}{t_f} \right)^3 - 15 \left( \frac{t}{t_f} \right)^4 + 6 \left( \frac{t}{t_f} \right)^5 \right] (\beta_f - \beta_i) \\
 \dot{\beta}(t) &= \left[ 30 \frac{t^2}{t_f^3} - 60 \frac{t^3}{t_f^4} + 30 \frac{t^4}{t_f^5} \right] (\beta_f - \beta_i) \\
 \ddot{\beta}(t) &= \left[ 60 \frac{t}{t_f^3} - 180 \frac{t^2}{t_f^4} + 120 \frac{t^3}{t_f^5} \right] (\beta_f - \beta_i)
 \end{aligned} \tag{2.5.2}$$

Con estas relaciones se tendrán conjuntos de puntos y orientaciones que servirán como dato en la solución de la cinemática inversa del mecanismos. Con esto se tiene totalmente definido el modelo de cinemática inversa y se puede continuar con su solución.

## 2.6. SOLUCIÓN DE LA CINEMÁTICA INVERSA.

Como se mencionó en la sección anterior, se cuenta con lo necesario para solucionar el modelo de la cinemática inversa del mecanismo. Antes de proceder a su solución, en la tabla 2.6.1, se muestra las dimensiones de la geometría del mecanismo, que son datos en el proceso de solución:

<b>Cadena 1</b>	<b>Cadena 2</b>	<b>Cadena 3</b>	<b>Cuerpo 5</b>
$\beta_{101} = 0^\circ$	$\beta_{102} = 120^\circ$	$\beta_{103} = 240^\circ$	$m_5 = 0.0402 \text{ kg}$
$h_{211} = 195 \text{ mm}$	$h_{212} = 195 \text{ mm}$	$h_{213} = 195 \text{ mm}$	$x_{G5} = 0 \text{ mm}$
$\beta_{321} = 90^\circ$	$\beta_{322} = 90^\circ$	$\beta_{323} = 90^\circ$	$y_{G5} = 28 \text{ mm}$
$h_{431} = 37.5 \text{ mm}$	$h_{432} = 37.5 \text{ mm}$	$h_{433} = 37.5 \text{ mm}$	$z_{G5} = 9.1 \text{ mm}$
$h_{651} = 50 \text{ mm}$	$h_{652} = 50 \text{ mm}$	$h_{653} = 50 \text{ mm}$	
$h_{871} = 150 \text{ mm}$	$h_{872} = 150 \text{ mm}$	$h_{873} = 150 \text{ mm}$	
$h_{1091} = 150 \text{ mm}$	$h_{1092} = 150 \text{ mm}$	$h_{1093} = 150 \text{ mm}$	
$h_{13121} = 100 \text{ mm}$	$h_{13122} = 100 \text{ mm}$	$h_{13123} = 100 \text{ mm}$	
$h_{15141} = 57.735 \text{ mm}$	$h_{15142} = 57.735 \text{ mm}$	$h_{15143} = 57.735 \text{ mm}$	
$\beta_{16151} = 180^\circ$	$\beta_{16152} = 300^\circ$	$\beta_{16153} = 60^\circ$	
$\beta_{17161} = 180^\circ$	$\beta_{17162} = 180^\circ$	$\beta_{17163} = 180^\circ$	
$m_{11} = 0.0402 \text{ kg}$	$m_{12} = 0.0402 \text{ kg}$	$m_{13} = 0.0402 \text{ kg}$	
$m_{21} = 0.0781 \text{ kg}$	$m_{22} = 0.0781 \text{ kg}$	$m_{23} = 0.0781 \text{ kg}$	
$m_{31} = 0.0943 \text{ kg}$	$m_{32} = 0.0943 \text{ kg}$	$m_{33} = 0.0943 \text{ kg}$	
$m_{41} = 0.0622 \text{ kg}$	$m_{42} = 0.0622 \text{ kg}$	$m_{43} = 0.0622 \text{ kg}$	
$x_{571} = 0 \text{ mm}$	$x_{572} = 0 \text{ mm}$	$x_{573} = 0 \text{ mm}$	
$y_{571} = 50 \text{ mm}$	$y_{572} = 50 \text{ mm}$	$y_{573} = 50 \text{ mm}$	
$z_{571} = 10 \text{ mm}$	$z_{572} = 10 \text{ mm}$	$z_{573} = 10 \text{ mm}$	
$x_{G11} = 0 \text{ mm}$	$x_{G12} = 0 \text{ mm}$	$x_{G13} = 0 \text{ mm}$	
$y_{G11} = 28 \text{ mm}$	$y_{G12} = 28 \text{ mm}$	$y_{G13} = 28 \text{ mm}$	
$z_{G11} = 9.1 \text{ mm}$	$z_{G12} = 9.1 \text{ mm}$	$z_{G13} = 9.1 \text{ mm}$	
$x_{G21} = 0 \text{ mm}$	$x_{G22} = 0 \text{ mm}$	$x_{G23} = 0 \text{ mm}$	
$y_{G21} = 83.2 \text{ mm}$	$y_{G22} = 83.2 \text{ mm}$	$y_{G23} = 83.2 \text{ mm}$	
$z_{G21} = 0 \text{ mm}$	$z_{G22} = 0 \text{ mm}$	$z_{G23} = 0 \text{ mm}$	
$x_{G31} = 0 \text{ mm}$	$x_{G32} = 0 \text{ mm}$	$x_{G33} = 0 \text{ mm}$	
$y_{G31} = 96.2 \text{ mm}$	$y_{G32} = 96.2 \text{ mm}$	$y_{G33} = 96.2 \text{ mm}$	
$z_{G31} = 0 \text{ mm}$	$z_{G32} = 0 \text{ mm}$	$z_{G33} = 0 \text{ mm}$	
$x_{G41} = 0 \text{ mm}$	$x_{G42} = 0 \text{ mm}$	$x_{G43} = 0 \text{ mm}$	
$y_{G41} = 57.6 \text{ mm}$	$y_{G42} = 57.6 \text{ mm}$	$y_{G43} = 57.6 \text{ mm}$	
$z_{G41} = 0 \text{ mm}$	$z_{G42} = 0 \text{ mm}$	$z_{G43} = 0 \text{ mm}$	

Tabla 2.6.1: Características geométricas del mecanismo.

Los datos de la tabla 2.6.1 y los resultados de las ecuaciones 2.5.1 y ??, se sustituyen en las igualdades 2.2.14, 2.3.8 y 2.4.6, con lo que todos los términos de las matrices quedan en función de  $\theta_{54i}, \theta_{76i}, \theta_{98i}, \theta_{110i}, \theta_{1211i}, \theta_{1413i}, \omega_{54i}, \omega_{76i}, \omega_{98i}, \omega_{110i}, \omega_{1211i}, \omega_{1413i}$  y  $\alpha_{54i}, \alpha_{76i}, \alpha_{98i}, \alpha_{110i}, \alpha_{1211i}, \alpha_{1413i}$ , según sea matriz de posición, velocidad ó aceleración. Teniendo esto, se seleccionan elementos de la matriz del lado izquierdo que contengan las variable buscadas y se iguala con la misma posición del elemento de la matriz del lado derecho. Esto con la finalidad de formar un sistema de ecuaciones compatible determinado.

### 2.6.1. Solución de la Posición.

Se tiene la ecuación 2.2.14 en su forma matricial:

$$\begin{bmatrix} t_{11i} & t_{12i} & t_{13i} & t_{14i} \\ t_{21i} & t_{22i} & t_{23i} & t_{24i} \\ t_{31i} & t_{32i} & t_{33i} & t_{34i} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{P11} & t_{P12} & t_{P13} & t_{P14} \\ t_{P21} & t_{P22} & t_{P23} & t_{P24} \\ t_{P31} & t_{P32} & t_{P33} & t_{P34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.6.1)$$

Y seis incógnitas ( $\theta_{54i}, \theta_{76i}, \theta_{98i}, \theta_{110i}, \theta_{1211i}, \theta_{1413i}$ ), para las cuales se seleccionaran seis ecuaciones de 2.6.1. Quedando:

$$\begin{aligned} t_{14i} &= t_{P14} \\ t_{24i} &= t_{P24} \\ t_{34i} &= t_{P34} \\ t_{13i} &= t_{P13} \\ t_{21i} &= t_{P21} \\ t_{32i} &= t_{P14} \end{aligned} \quad (2.6.2)$$

Para esta solución, los datos para las ecuaciones 2.5.1 y 2.5.2 son:  $p_i = (70, 70, 140)$  (mm),  $p_f = (-70, -70, 250)$  (mm), orientaciones  $anguloI = (15, 25, 0)$  (grados) y  $anguloF = (25, -15, 0)$  (grados) y tiempo  $t_f = 5$  s. Se observa que el sistema de ecuaciones es no lineal y para resolverlo se utiliza el método numérico de Newton(Newton-Raphson) con ayuda del software *Mathematica*. La solución de las incógnitas se hará para cada instante del conjunto de posiciones y orientaciones que se obtienen de las ecuaciones 2.5.1 y 2.5.2. Programando todos estos datos en *Mathematica* se obtienen gráficas que muestran el comportamiento de los ángulos productos de la solución de la cinemática inversa.

A continuación se muestran las curvas que generan cada junta en función del tiempo, ordenando las tres variables similares de cada cadena en una gráfica, con la finalidad de comparar sus comportamientos.

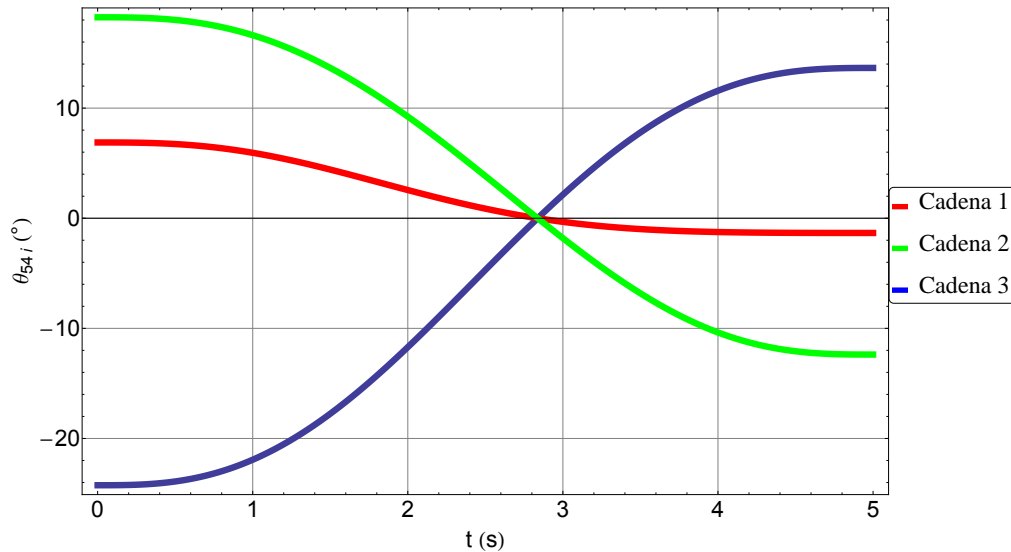


Figura 2.6.1: Ángulos  $\theta_{54i}$ .

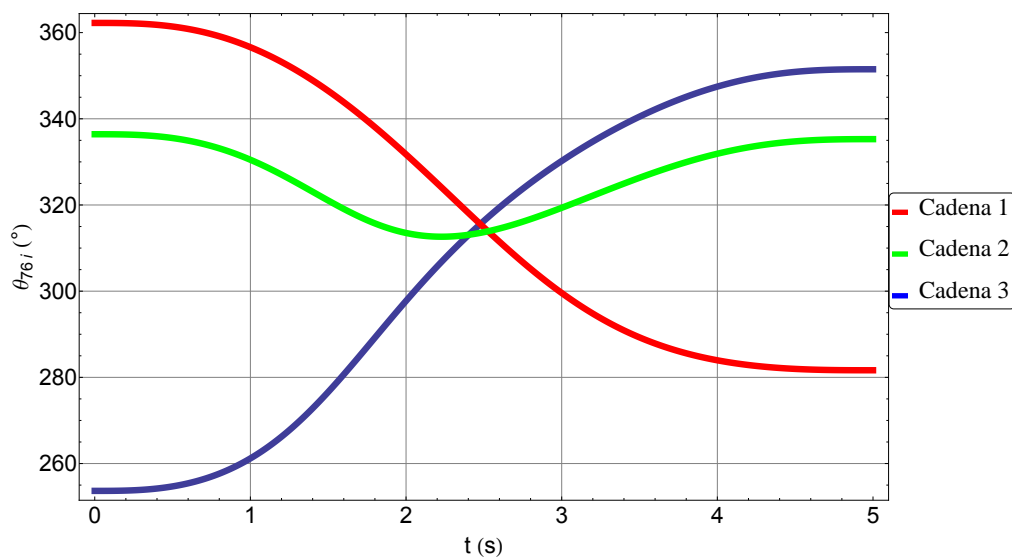


Figura 2.6.2: Ángulos  $\theta_{76i}$ .

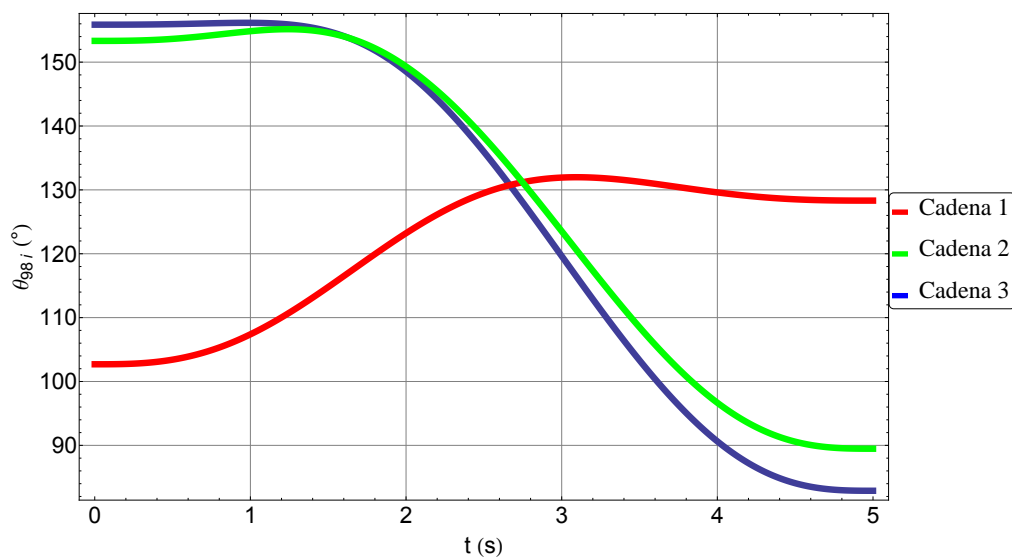


Figura 2.6.3: Ángulos  $\theta_{98i}$ .

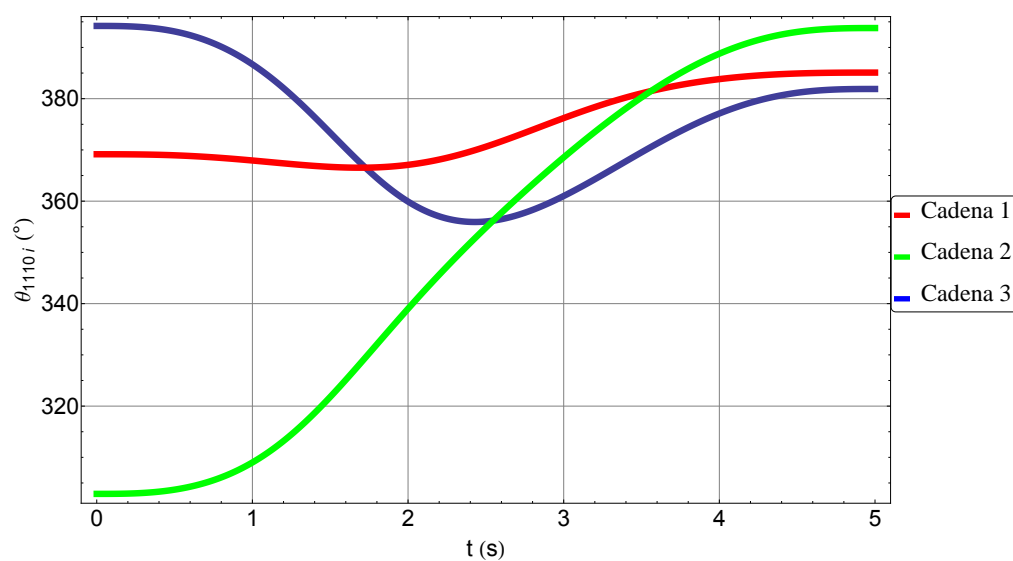


Figura 2.6.4: Ángulos  $\theta_{1110i}$ .

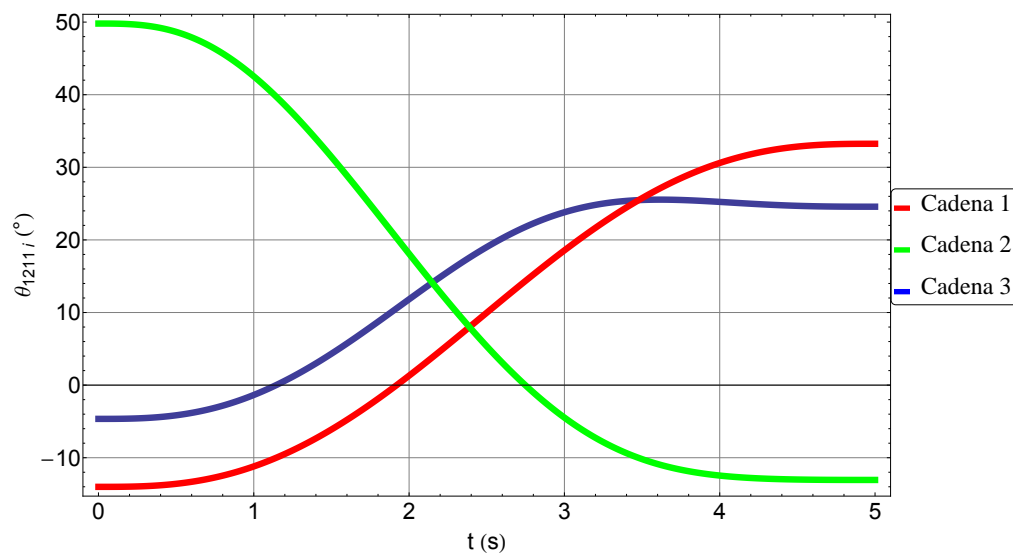


Figura 2.6.5: Ángulos  $\theta_{1211i}$ .

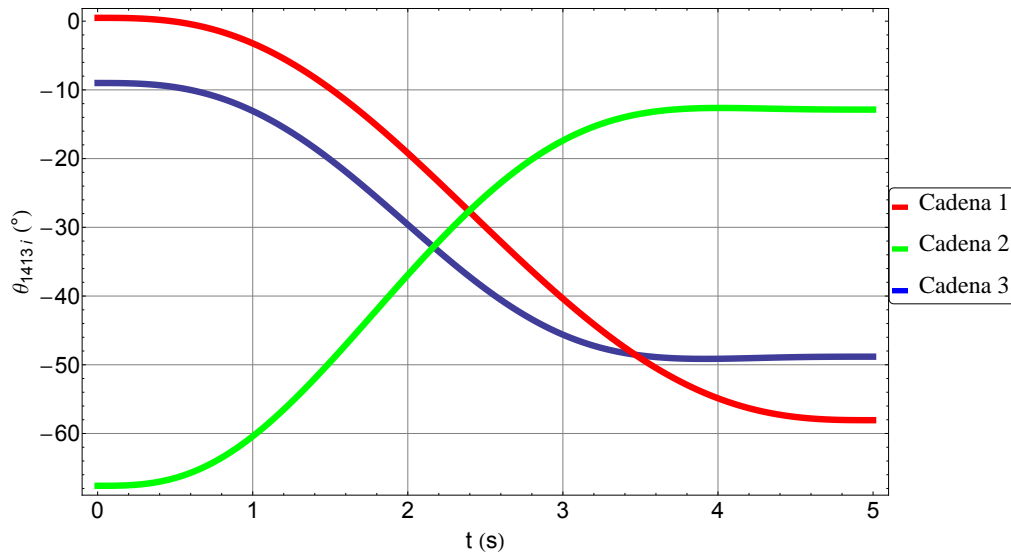


Figura 2.6.6: Ángulos  $\theta_{1413i}$ .

Se puede observar que las curvas tienen una transición suave durante el periodo del movimiento, que fue el motivo por lo que se generó la trayectoria en la sección 2.5. A continuación se muestra la posición inicial y final del mecanismo para este caso.

### 2.6.2. Solución de la Velocidad.

Ahora que se tienen los valores de los ángulos de las juntas para cada instante de tiempo, se puede calcular la velocidad angular de cada junta siguiendo una dinámica similar a la que se utilizó para resolver la posición.

Teniendo la ecuación 2.3.8 en su forma matricial:

$$\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & v_{14} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & v_{24} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & v_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{P11} & v_{P12} & v_{P13} & v_{P14} \\ v_{P21} & v_{P22} & v_{P23} & v_{P24} \\ v_{P31} & v_{P32} & v_{P33} & v_{P34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.6.3)$$

Las seis incógnitas a resolver son;  $\omega_{54i}, \omega_{76i}, \omega_{98i}, \omega_{110i}, \omega_{1211i}$  y  $\omega_{1413i}$  por lo tanto se forma el siguiente sistema de ecuaciones a partir de 2.6.3:

$$\begin{aligned} v_{14i} &= v_{P14} \\ v_{24i} &= v_{P24} \\ v_{34i} &= v_{P34} \\ v_{13i} &= v_{P13} \\ v_{21i} &= v_{P21} \\ v_{32i} &= v_{P14} \end{aligned} \quad (2.6.4)$$

Programando el problema en *Mathematica*, y generando las curvas de los valores de solución para cada instante de tiempo, se tiene:

En las figuras se muestran las velocidades angulares de las juntas similares en las tres cadenas cinemáticas. Además se observan cambios de velocidad suaves y moderados.



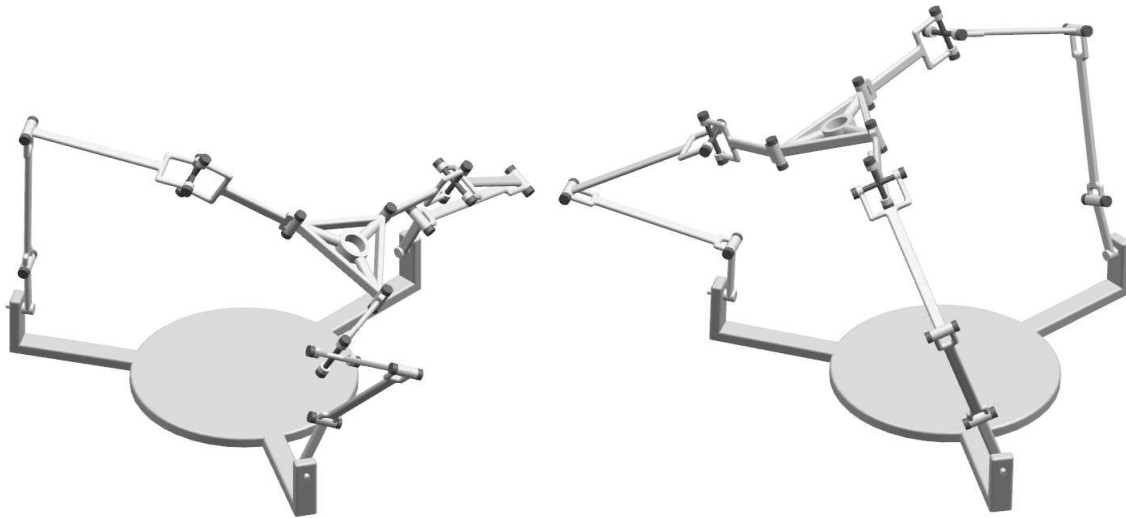


Figura 2.6.7: Posición Inicial (izquierda) y final (derecha) del mecanismo.

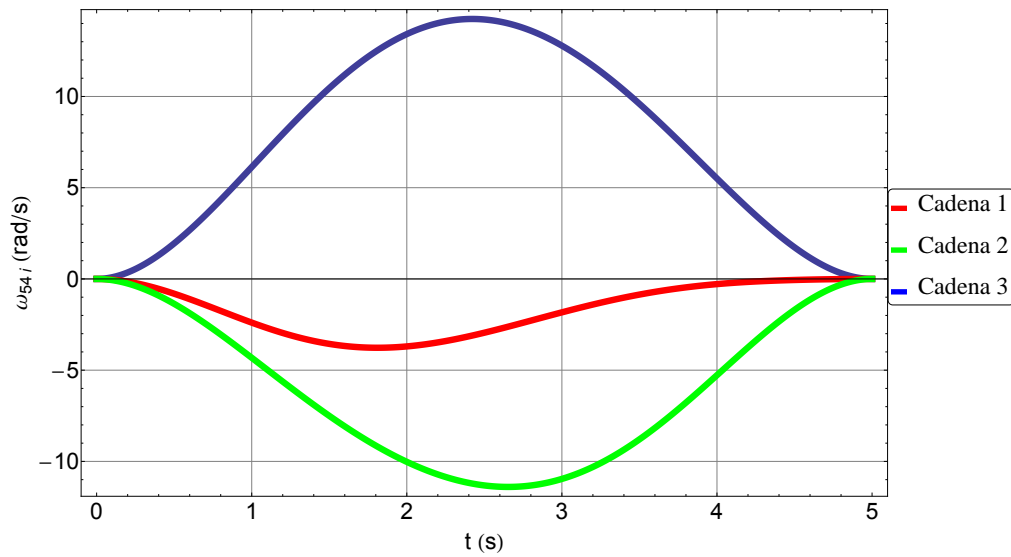


Figura 2.6.8: Velocidades  $\omega_{54i}$ .

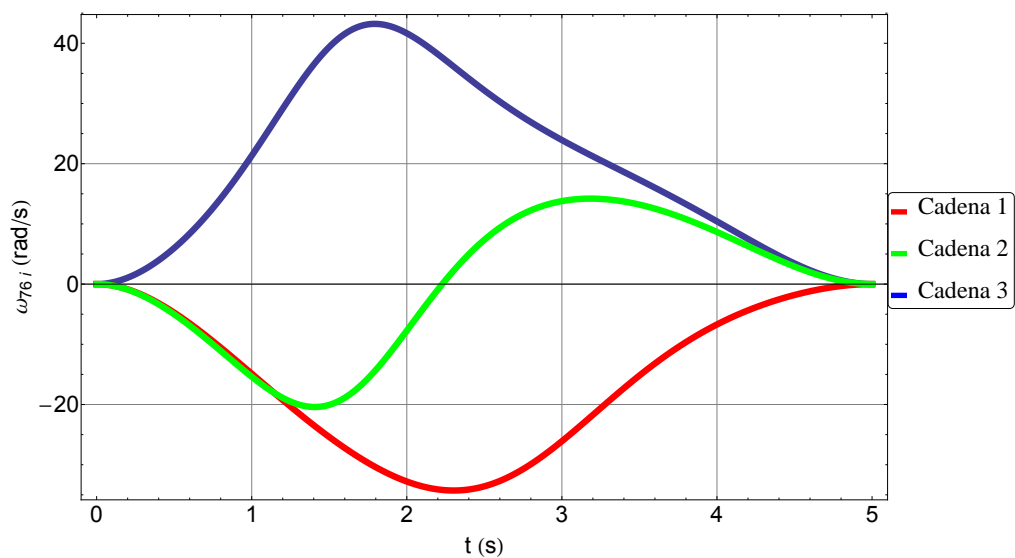


Figura 2.6.9: Velocidades  $\omega_{76i}$ .

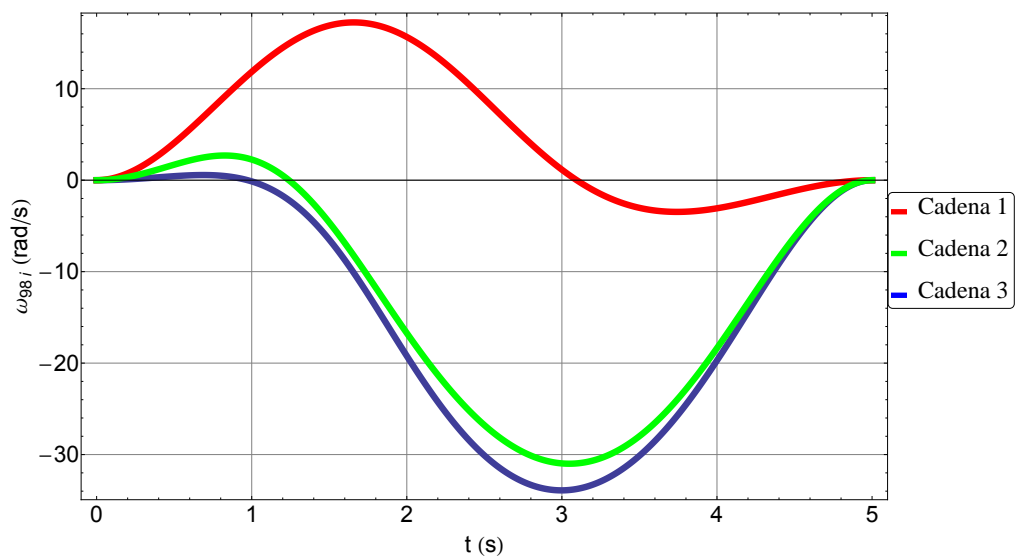


Figura 2.6.10: Velocidades  $\omega_{98i}$ .

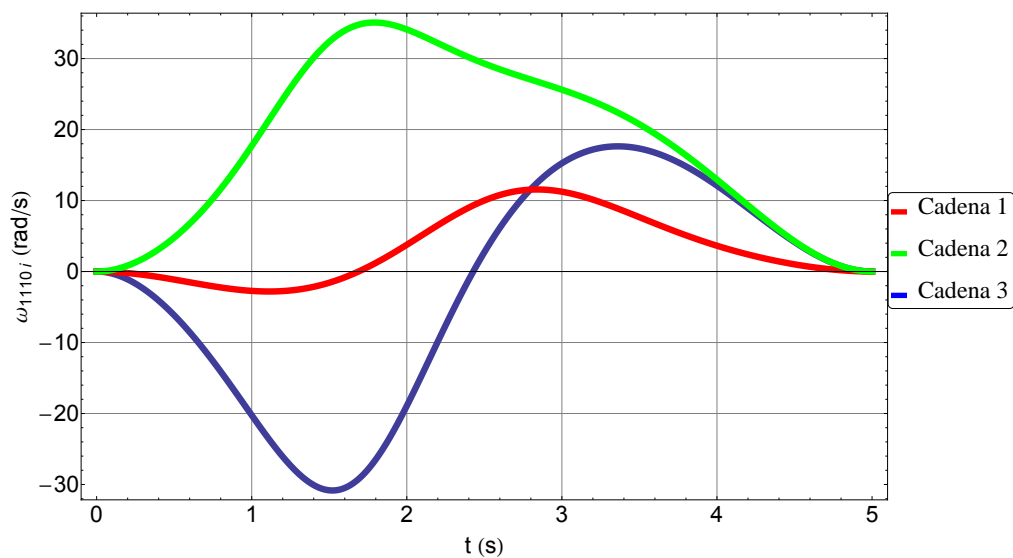


Figura 2.6.11: Velocidades  $\omega_{1110i}$ .

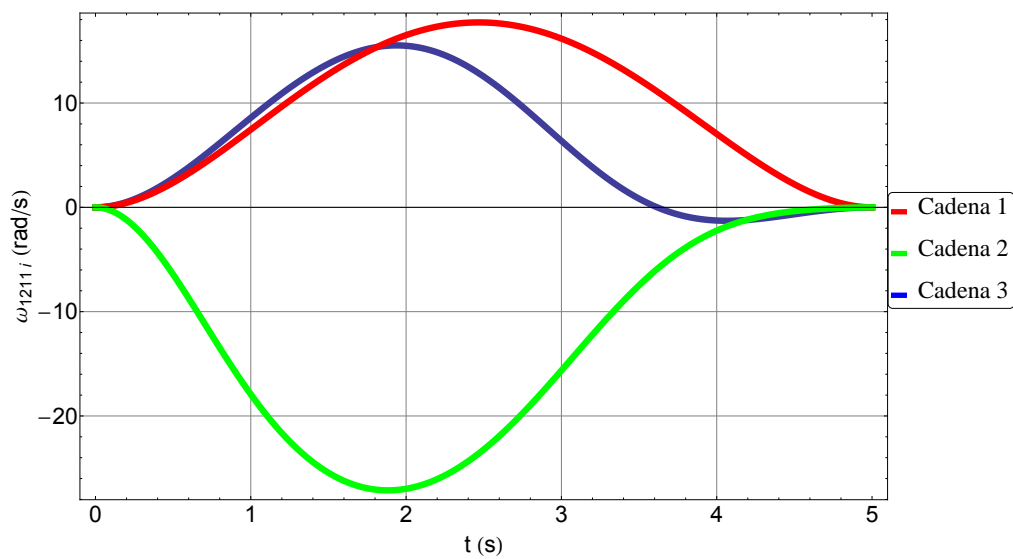


Figura 2.6.12: Velocidades  $\omega_{1211i}$ .

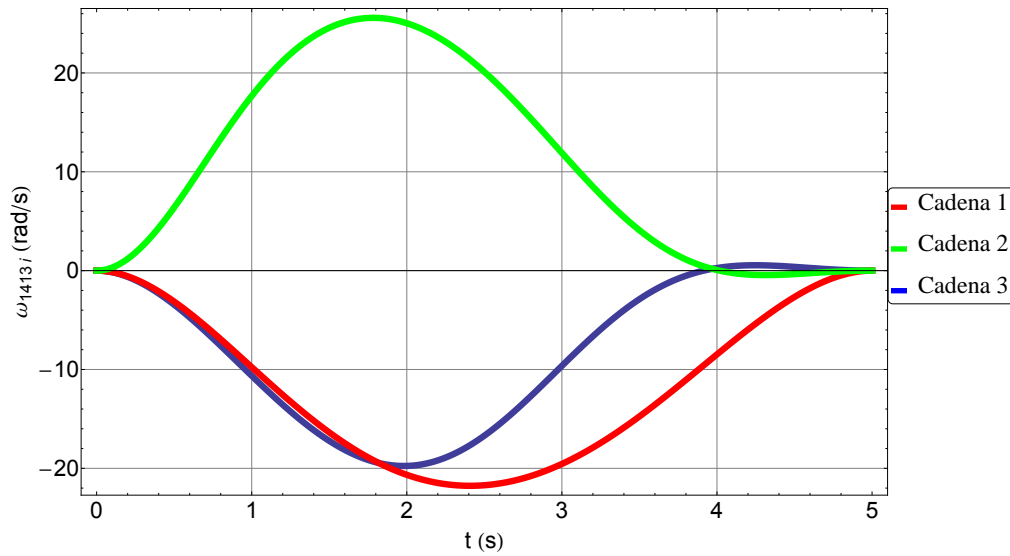


Figura 2.6.13: Velocidades  $\omega_{1413i}$ .

### 2.6.3. Solución de la Aceleración.

Tomando la ecuación 2.4.6 en su forma matricial se tiene:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{P11} & a_{P12} & a_{P13} & a_{P14} \\ a_{P21} & a_{P22} & a_{P23} & a_{P24} \\ a_{P31} & a_{P32} & a_{P33} & a_{P34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.6.5)$$

Teniendo las incógnitas  $\alpha_{54i}, \alpha_{76i}, \alpha_{98i}, \alpha_{110i}, \alpha_{1211i}$  y  $\alpha_{1413i}$ , para resolver se arma el siguiente sistemas de ecuaciones a partir de 2.6.5, quedando:

$$\begin{aligned} a_{14i} &= a_{P14} \\ a_{24i} &= a_{P24} \\ a_{34i} &= a_{P34} \\ a_{13i} &= a_{P13} \\ a_{21i} &= a_{P21} \\ a_{32i} &= a_{P14} \end{aligned} \quad (2.6.6)$$

Como se puede apreciar en las definiciones de los términos de la ecuación 2.4.6, se necesita sustituir los resultados de los sistemas de ecuaciones 2.6.2 y 2.6.4, para proceder a resolver el sistema 2.6.6. Programando en el software *Mathematica*, se resuelve el sistema de ecuaciones de aceleraciones y se generan las gráficas de resultados.

Las coordenadas  $p_i = (70, 70, 140)$  y  $p_f = (-70, -70, 250)$  que se usaron para la solución de la cinemática en este capítulo, son de las más difíciles de alcanzar por el mecanismo, ya que son dos puntos extremos de su espacio de trabajo.

Aun siendo estos puntos de difícil acceso, el mecanismo mostró un comportamiento estable, como se puede apreciar en las gráficas de la posición, velocidad y aceleración,

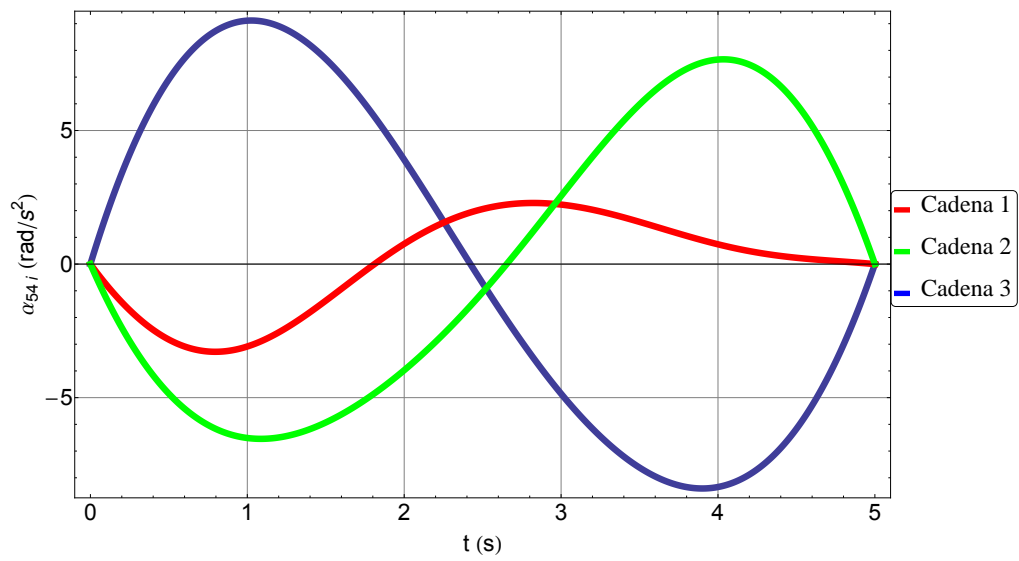


Figura 2.6.14: Aceleraciones  $\alpha_{54i}$ .

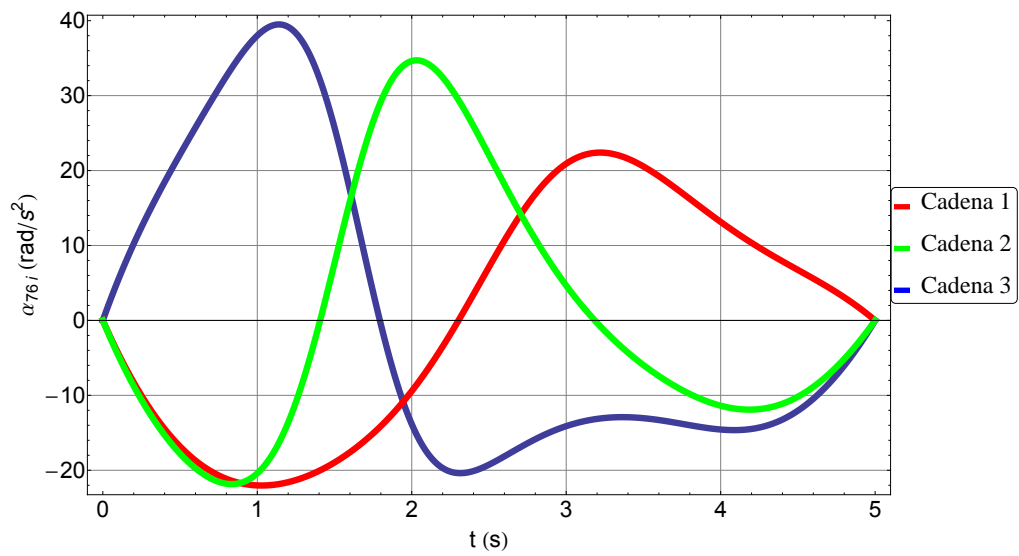


Figura 2.6.15: Aceleraciones  $\alpha_{76i}$ .

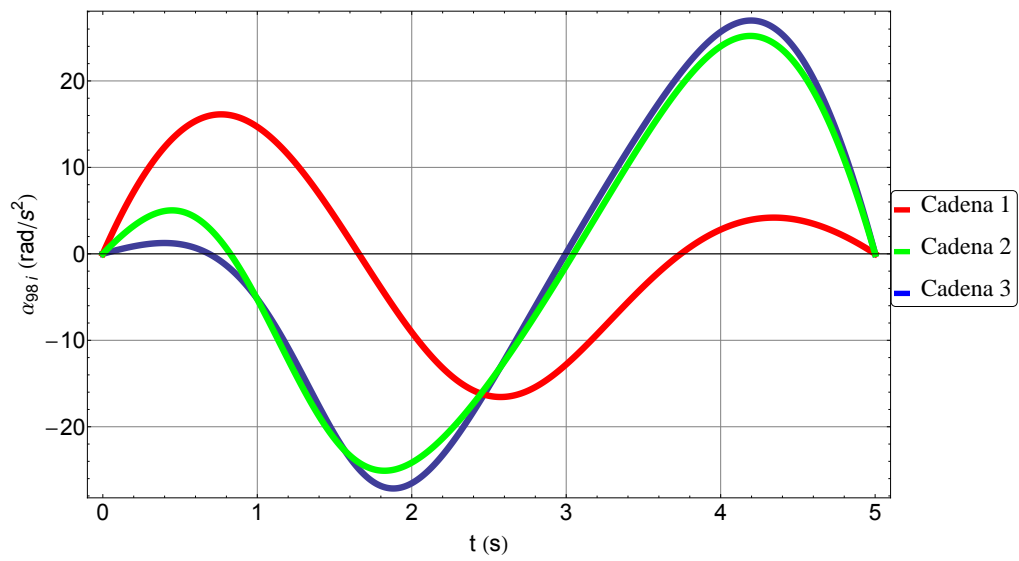


Figura 2.6.16: Aceleraciones  $\alpha_{98i}$ .

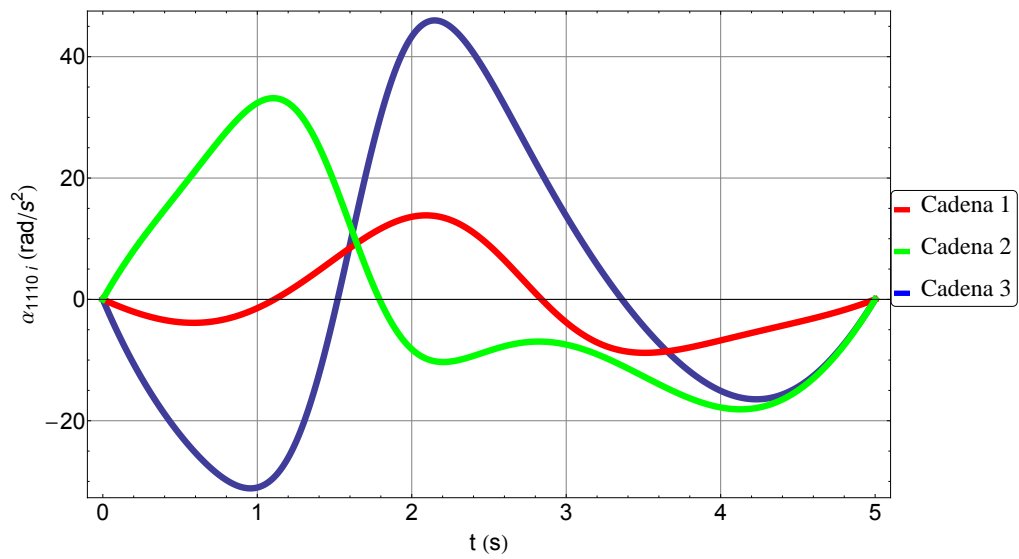


Figura 2.6.17: Aceleraciones  $\alpha_{1110i}$ .

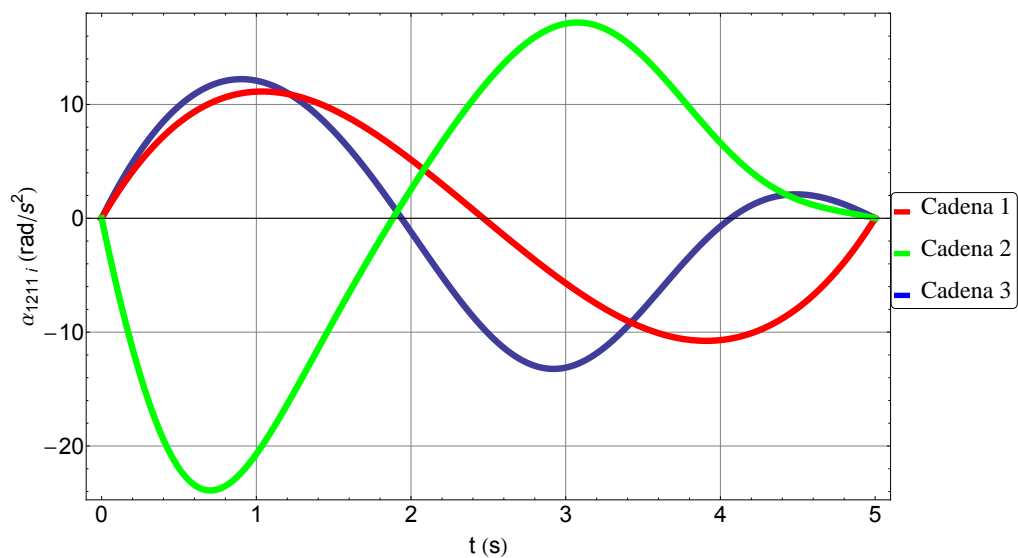


Figura 2.6.18: Aceleraciones  $\alpha_{1211i}$ .

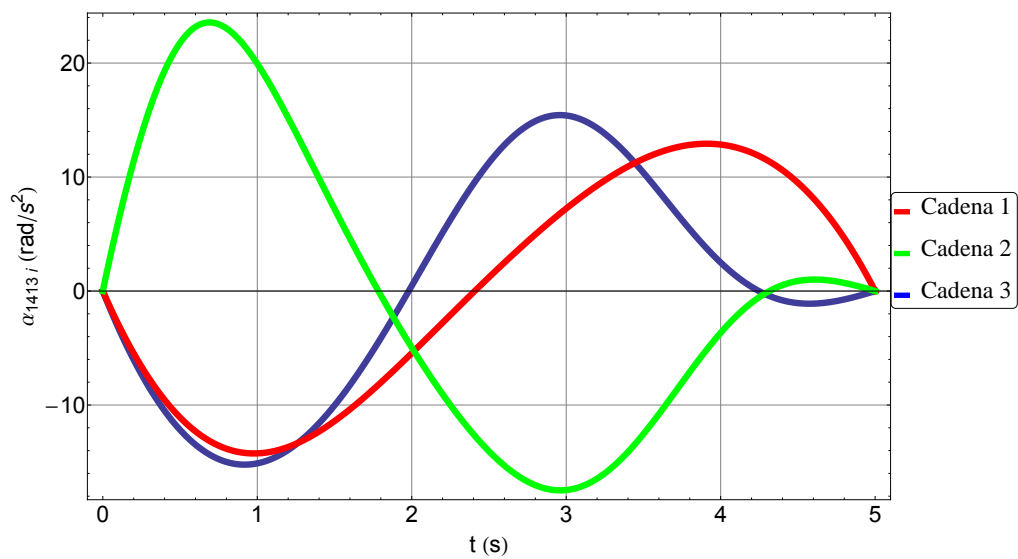


Figura 2.6.19: Aceleraciones  $\alpha_{1413i}$ .

## Capítulo 3

# Análisis Estático Mediante La Formulación de Newton-Euler.

### 3.1. INTRODUCCIÓN.

En este capítulo se presenta la formulación Newton-Euler para el análisis estático del mecanismo presentado. La formulación de Newton-Euler incorpora todas las fuerzas que actúan sobre los eslabones. Por lo tanto las ecuaciones estáticas resultantes incluyen todas las fuerzas de restricción entre dos eslabones adyacentes. Estas fuerzas de restricción son útiles para el dimensionamiento de eslabones y rodamientos durante la etapa de diseño.

El método consiste en el cálculo adelantado de las velocidades y aceleraciones de cada eslabón, seguido por el cálculo reiterativo de las fuerzas y momentos de cada junta. Para el desarrollo de este análisis se emplean matrices de rotación básicas que permiten representar la rotación de un cuerpo en el espacio. Ya que la rotación es el giro de un cuerpo en el espacio de tres grados de libertad, un conjunto de tres parámetros independientes son suficientes para describir la orientación de un cuerpo en el espacio [7].

Las siguientes matrices representan las rotaciones alrededor de los ejes  $x, y, z$  respectivamente:

$$\mathbf{R}_{z4}(\theta_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta_x & -s\theta_x \\ 0 & s\theta_x & c\theta_x \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_{z5}(\theta_y) = \begin{bmatrix} c\theta_y & 0 & s\theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_y & 0 & c\theta_y \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_{z6}(\theta_z) = \begin{bmatrix} c\theta_z & -s\theta_z & 0 \\ s\theta_z & c\theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Y las siguientes matrices representan las traslaciones en de los ejes  $x, y, z$  respectivamente:

$$\mathbf{S}_{z1}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x \\ 0 & x & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{S}_{z2}(y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \\ -y & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{S}_{z3}(z) = \begin{bmatrix} 0 & -z & 0 \\ z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El problema general en el análisis dinámico, es determinar los efectos de las fuerzas externas, que aseguran el movimiento requerido para ciertos cuerpos, la determinación del movimiento de los cuerpos restantes y finalmente el cálculo de las reacciones en todos los pares cinemáticos.

Una fuerza actuando sobre un cuerpo rígido tiene la misma característica que un vector sujeto a una línea. Este es un vector de línea cuyos efectos pueden ser expresados en cualquier punto, sustituyéndolo por un vector fuerza  $\mathbf{F}$ , y un vector acoplado  $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ , donde  $\mathbf{r}$  es el vector radio y determina la posición del punto actual  $A$  de la fuerza sobre la línea de acción con respecto



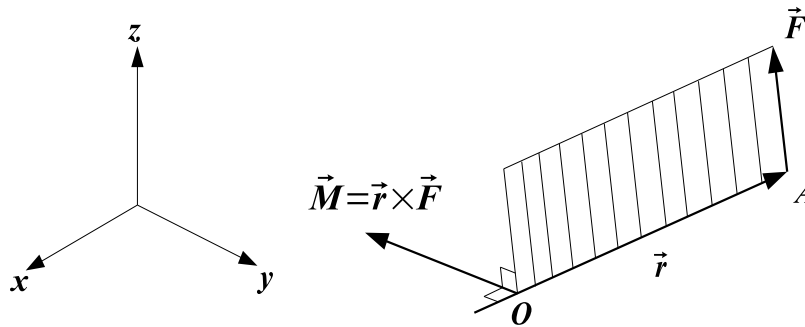


Figura 3.1.1: Momento de una Fuerza.

al punto escogido O (fig. 3.1.1). Se expresarán los efectos de esta sustitución de acuerdo a la siguiente definición [4]:

$$F_0 = [F, M] = [F_x, F_y, F_z, M_x, M_y, M_z] \quad (3.1.1)$$

Existen fuerzas de tres tipos actuando en el cuerpo libre j: fuerzas activas (aplicadas), reacción e inercia. Se denotarán estas fuerzas con el símbolo F con un superíndice A, R, I respectivamente. Los efectos de todas estas fuerzas deben estar en balance, de acuerdo al principio de d’Alambert. Para poder comparar estas fuerzas, deben estar expresadas en el mismo sistema de referencia de coordenadas. Esto puede ser en un marco de referencia fijo. Sin embargo las ecuaciones también pueden ser definidas en un sistema de referencia local. Tomemos el siguiente sistema de cuerpos para ejemplificar estas definiciones, fig. (3.1.2).

### 3.1.1. FORMULACIÓN MATRICIAL.

Tomemos los siguientes cuerpos:

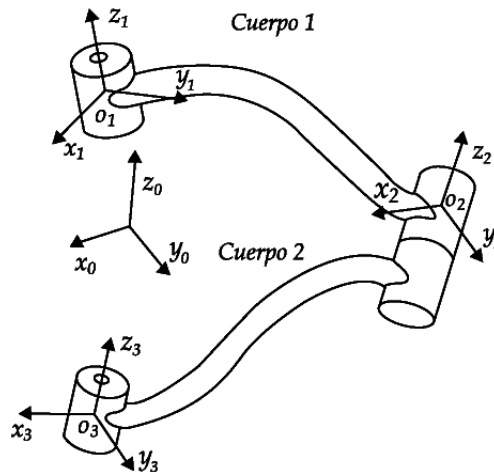


Figura 3.1.2: Sistemas de un par cinemático.

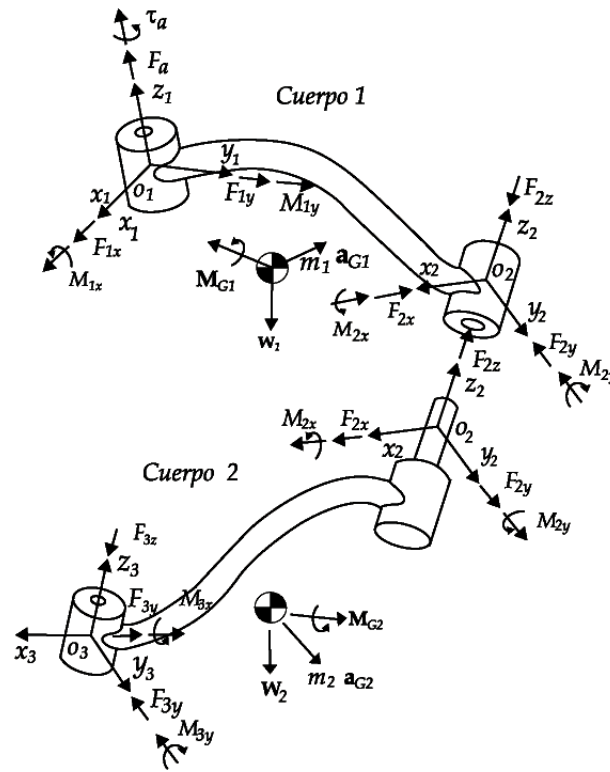


Figura 3.1.3: Fuerzas y momentos ejercidos en los eslabones.

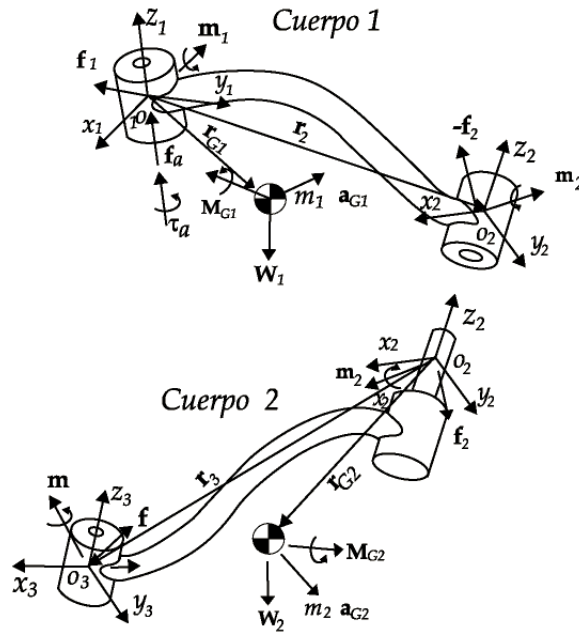
Es posible separar los cuerpos y hacer el diagrama de cuerpo libre, montando sistemas de referencia en los ejes de revolución como se muestra en la figura 3.1.3.

Las ecuaciones de equilibrio dinámico se definen como:

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{F} &= m\mathbf{a}_G \\ \sum \mathbf{M} &= \mathbf{M}_G + \mathbf{r} \times m\mathbf{a}_G \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

Donde  $m\mathbf{a}_G$  y  $\mathbf{M}_G$  son las fuerzas y momentos inerciales respectivamente definidos en la base inercial  $(x_0, y_0, z_0)$ . Aplicando las ecuaciones de equilibrio dinámico 3.1.2 al cuerpo 1 y definiéndolas en la base local  $(x_1, y_1, z_1)$ , se tiene (fig. 3.1.4):

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_a + \mathbf{f}_1 + \mathbf{R}_2^1(-\mathbf{f}_2) + \mathbf{R}_0^1\mathbf{w}_1 &= \mathbf{R}_0^1(m_1\mathbf{a}_{G1}) \\ \mathbf{t}_a + \mathbf{m}_1 + \mathbf{R}_2^1(-\mathbf{m}_2) + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{R}_2^1(-\mathbf{f}_2) + \mathbf{r}_{G1} \times \mathbf{R}_0^1\mathbf{w}_1 &= \mathbf{R}_0^1\mathbf{M}_{G1} + \mathbf{r}_{G1} \times \mathbf{R}_0^1(m_1\mathbf{a}_{G1}) \end{aligned}$$


 Figura 3.1.4: Fuerzas y momentos definidos en la base local  $(x_1, y_1, z_1)$ .

Donde:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}_a &= [ 0, 0, f_a ]^T \\
 \mathbf{f}_1 &= [ f_{1x}, f_{1y}, 0 ]^T \\
 \mathbf{f}_2 &= [ f_{2x}, f_{2y}, f_{2z} ]^T \\
 \mathbf{w}_1 &= [ 0, 0, -m_1 g ]^T \\
 \mathbf{a}_{G1} &= [ a_{G1x}, a_{G1y}, a_{G1z} ]^T \\
 \mathbf{t}_a &= [ 0, 0, t_a ]^T \\
 \mathbf{m}_1 &= [ M_{1x}, M_{1y}, 0 ]^T \\
 \mathbf{m}_2 &= [ M_{2x}, M_{2y}, 0 ]^T \\
 \mathbf{M}_{G1} &= [ M_{G1x}, M_{G1y}, M_{G1z} ]
 \end{aligned}$$

$\mathbf{f}_a, \mathbf{t}_a$  — Fuerzas y torques externos aplicados.

$\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$  — Fuerzas de reacción de las juntas 1 y 2.

$\mathbf{w}_1$  — Peso del cuerpo 1.

$\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2$  — Momentos de reacción de las juntas 1 y 2.

$\mathbf{a}_{G1}$  — Aceleración del centro de gravedad del cuerpo 1.

$\mathbf{M}_{G1}$  — Momento inercial del cuerpo 1.

Los vectores  $\mathbf{f}_a, \mathbf{f}_1, \mathbf{t}_a, \mathbf{m}_1$  están definidos en la base  $(x_1, y_1, z_1)$ . Los vectores  $\mathbf{f}_2, \mathbf{m}_2$  están definidos en la base  $(x_2, y_2, z_2)$ . Los vectores  $\mathbf{w}_1, \mathbf{a}_{G1}, \mathbf{M}_{G1}$  están definidos en la base  $(x_0, y_0, z_0)$ . Por otro lado tenemos que  $\mathbf{R}_0^1$  y  $\mathbf{R}_2^1$  son matrices de transformación, que convierten vectores de la base

$(x_0, y_0, z_0)$  a la base  $(x_1, y_1, z_1)$  y de la base  $(x_2, y_2, z_2)$  a la base  $(x_1, y_1, z_1)$  respectivamente. Los vectores que no son transformados, ya están definidos en la base  $(x_1, y_1, z_1)$ . Empleando matrices antisimétricas para definir el producto cruz, esto es  $\mathbf{S} = \mathbf{r} \times$ , las ecuaciones anteriores se reescriben como:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_a + \mathbf{f}_1 + \mathbf{R}_2^1(-\mathbf{f}_2) + \mathbf{R}_0^1\mathbf{w}_1 &= \mathbf{R}_0^1(m_1\mathbf{a}_{G1}) \\ \mathbf{t}_a + \mathbf{m}_1 + \mathbf{R}_2^1(-\mathbf{m}_2) + \mathbf{S}_2\mathbf{R}_2^1(-\mathbf{f}_2) + \mathbf{S}_{G1}\mathbf{R}_0^1\mathbf{w}_1 &= \mathbf{R}_0^1\mathbf{M}_{G1} + \mathbf{S}_{G1}\mathbf{R}_0^1(m_1\mathbf{a}_{G1}) \end{aligned}$$

Para tener una representación más compacta de estas operaciones se reacomodan de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_a \\ \mathbf{t}_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{m}_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{R}_2^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_2\mathbf{R}_2^1 & \mathbf{R}_2^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{m}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{G1}\mathbf{R}_0^1 & \mathbf{R}_0^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{G1}\mathbf{R}_0^1 & \mathbf{R}_0^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1\mathbf{a}_{G1} \\ \mathbf{M}_{G1} \end{bmatrix}$$

Renombrado:

$$\mathbf{F}_a + \mathbf{F}_1 - \mathbf{Q}_2^1\mathbf{F}_2 + \mathbf{Q}_0^1\mathbf{W}_1 = \mathbf{Q}_0^1\mathbf{F}_{G1}$$

Donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_a &= [\mathbf{f}_a, \mathbf{t}_a]^T = [0, 0, F_a, 0, 0, t_a]^T \\ \mathbf{F}_1 &= [\mathbf{f}_1, \mathbf{m}_1]^T = [F_{1x}, F_{1y}, 0, M_{1x}, M_{1y}, 0]^T \\ \mathbf{F}_2 &= [\mathbf{f}_2, \mathbf{m}_2]^T = [F_{2x}, F_{2y}, F_{2z}, M_{2x}, M_{2y}, 0]^T \\ \mathbf{W}_1 &= [\mathbf{w}_1, 0]^T = [0, 0, -m_{G1}g, 0, 0, 0]^T \\ \mathbf{F}_{G1} &= [m_1\mathbf{a}_{G1}, \mathbf{M}_{G1}]^T = [ma_{G1x}, ma_{G1y}, ma_{G1z}, M_{G1x}, M_{G1y}, M_{G1z}]^T \\ \mathbf{Q}_0^1 &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{G1}\mathbf{R}_0^1 & \mathbf{R}_0^1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{Q}_2^1 &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_2^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_2\mathbf{R}_2^1 & \mathbf{R}_2^1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Agrupando en fuerzas aplicadas, restrictivas e inerciales, se tiene:

$$\mathbf{F}^A + \mathbf{F}^R + \mathbf{F}^I = \mathbf{0} \quad (3.1.3)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^A &= \mathbf{F}_a + \mathbf{Q}_0^1\mathbf{W}_1 \\ \mathbf{F}^R &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{Q}_2^1\mathbf{F}_2 \\ \mathbf{F}^I &= \mathbf{Q}_0^1\mathbf{F}_{G1} \end{aligned}$$

Estas ecuaciones se definen como:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^A &= \text{Torsor de fuerzas y momentos aplicados al cuerpo.} \\ \mathbf{F}^R &= \text{Torsor de fuerzas y momentos de reacción del cuerpo.} \\ \mathbf{F}^I &= \text{Torsor de fuerzas y momentos inerciales.} \\ \mathbf{Q}_j^i &= \text{Matriz de transformación de los torsos de la base } j \text{ a la } i. \end{aligned}$$

Para el análisis estático se tiene que:

$$\mathbf{F}^I = \mathbf{0}$$

La ec. 3.1.3 representa las ecuaciones de equilibrio dinámico mediante el uso de torsores de fuerzas. Un torsor de fuerza es un vector de 6 componentes, los primeros tres componentes son fuerzas asociadas a la traslación del cuerpo y los segundos tres componentes son torques o momentos asociados al giro del cuerpo. Una expresión similar puede ser obtenida para el cuerpo 2.

### 3.2. Análisis Estático del Mecanismo.

Para para el modelo estático, se toman los cuerpos móviles como que se muestran en la figura:

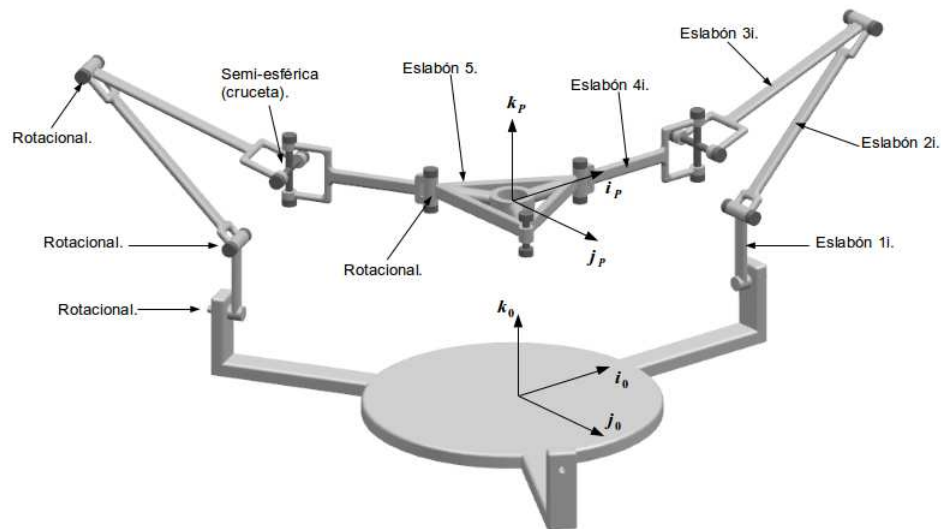


Figura 3.2.1: Cuerpos que conforman el mecanismo (figura 1.6.1, repetida).

La posición de los seis actuadores que le darán movimiento al mecanismo, se selecciono de manera indistinta en las juntas que unen los eslabones 1i y 2i e 2i y 3i.

#### 3.2.1. ANÁLISIS DEL CUERPO 1i.

En la figura (3.2.2) se muestra el diagrama de cuerpo libre, con las fuerzas que actúan en el cuerpo 1i.

Haciendo la sumatoria de fuerzas y sustituyéndolas en las ecuaciones de equilibrio dinámico, se tienen las siguientes expresiones definidas en la base local  $(i_5, j_5, k_5)$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{1i}^A + \mathbf{F}_{1i}^R + \mathbf{F}_{1i}^I &= \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_{1i}^A &= \mathbf{Q}_7^5(-\mathbf{T}_{12i}^7) + \mathbf{Q}_0^5\mathbf{W}_{1i}^0 \\ \mathbf{F}_{1i}^R &= \mathbf{F}_{01i}^5 + \mathbf{Q}_7^5(-\mathbf{F}_{12i}^7) \\ \mathbf{F}_{1i}^I &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

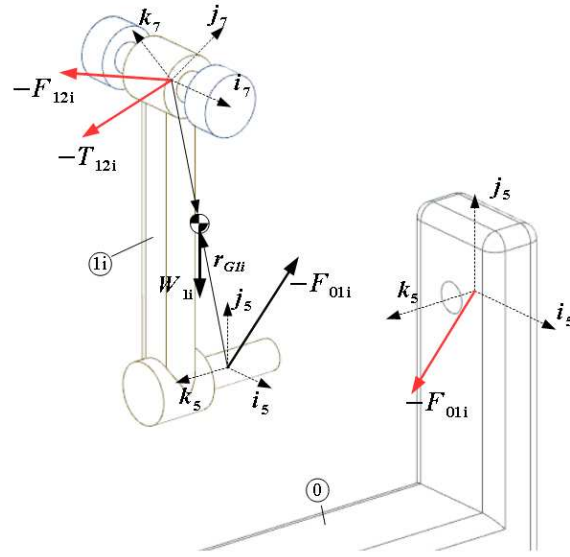


Figura 3.2.2: Diagrama de cuerpo libre del cuerpo 1i.

Donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{12i}^7 &= [0, 0, 0, T_{12i}, 0, 0]^T \\ \mathbf{W}_{1i}^0 &= [0, 0, -m_{1i}g, 0, 0, 0]^T \\ \mathbf{F}_{01i}^5 &= [F_{01xi}, F_{01yi}, F_{01zi}, M_{01xi}, M_{01yi}, 0]^T \\ \mathbf{F}_{12i}^7 &= [F_{12xi}, F_{12yi}, F_{12zi}, 0, M_{12yi}, M_{12zi}]^T \end{aligned}$$

Además:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_7^5 &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_7^5 & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_7^5 \mathbf{R}_7^5 & \mathbf{R}_7^5 \end{bmatrix} \\ \mathbf{S}_7^5 &= \begin{bmatrix} 0 & -z_{57i} & y_{57i} \\ z_{57i} & 0 & -x_{57i} \\ -y_{57i} & x_{57i} & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{Q}_0^5 &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0^5 & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_0^5 \mathbf{R}_0^5 & \mathbf{R}_0^5 \end{bmatrix} \\ \mathbf{S}_0^5 &= \begin{bmatrix} 0 & -z_{G1i} & y_{G1i} \\ z_{G1i} & 0 & -x_{G1i} \\ -y_{G1i} & x_{G1i} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Definiendo las matrices de rotación que definen las base  $j$  en  $i$ , se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_7^5 &= \mathbf{R}_{z4}(\theta_{76i}) \\ \mathbf{R}_0^5 &= \mathbf{R}_{z6}(-\theta_{54i}) \mathbf{R}_{z4}(-\beta_{32i}) \mathbf{R}_{z6}(-\beta_{10i}) \end{aligned}$$

De esta manera las ecuaciones 3.2.1 definen el comportamiento estático del cuerpo 1i.

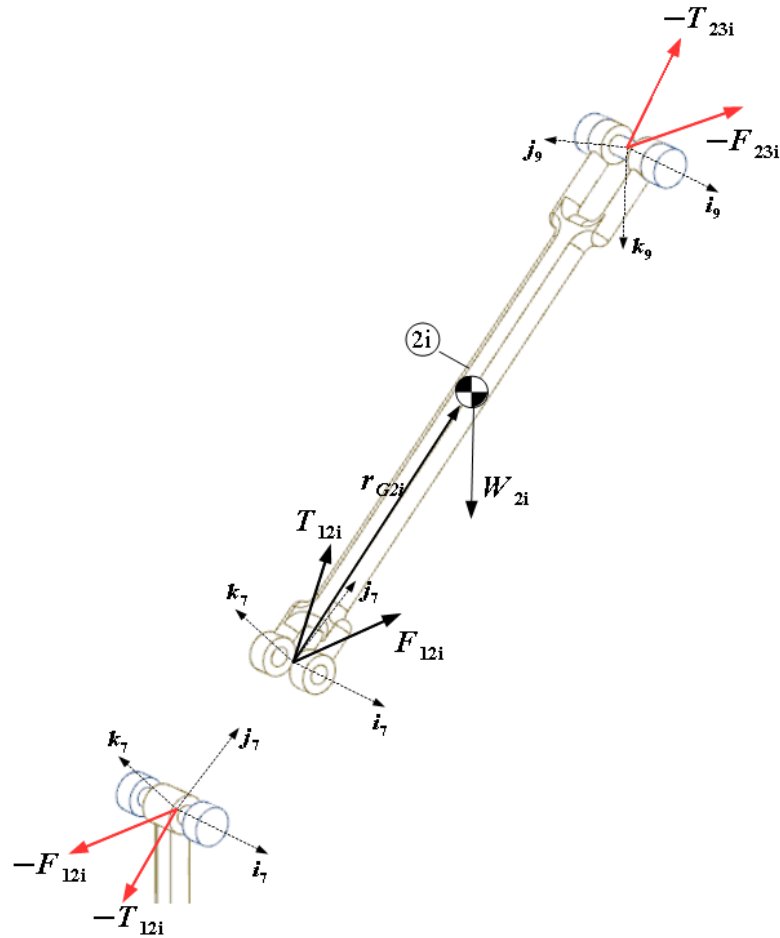


Figura 3.2.3: Diagrama de cuerpo libre del cuerpo 2i.

### 3.2.2. ANÁLISIS DEL CUERPO 2i.

En la figura (3.2.3) se muestra el diagrama de cuerpo libre, con las fuerzas que actúan en el cuerpo 2i.

Haciendo la sumatoria de fuerzas y sustituyéndolas en las ecuaciones de equilibrio dinámico, se tienen las siguientes expresiones definidas en la base local  $(i_7, j_7, k_7)$ :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_{2i}^A + \mathbf{F}_{2i}^R + \mathbf{F}_{2i}^I &= \mathbf{0} \\
 \mathbf{F}_{2i}^A &= \mathbf{T}_{12i}^7 + \mathbf{Q}_9^7(\mathbf{T}_{23i}^9) + \mathbf{Q}_0^7 \mathbf{W}_{2i}^0 \\
 \mathbf{F}_{2i}^R &= \mathbf{F}_{12i}^7 + \mathbf{Q}_9^7(-\mathbf{F}_{23i}^9) \\
 \mathbf{F}_{2i}^I &= \mathbf{0}
 \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}_{12i}^7 &= [0, 0, 0, T_{12i}, 0, 0]^T \\
 \mathbf{T}_{23i}^9 &= [0, 0, 0, T_{23i}, 0, 0]^T \\
 \mathbf{W}_{2i}^0 &= [0, 0, -m_{2i}g, 0, 0, 0]^T \\
 \mathbf{F}_{12i}^7 &= [F_{12xi}, F_{12yi}, F_{12zi}, 0, M_{12yi}, M_{12zi}]^T \\
 \mathbf{F}_{23i}^9 &= [F_{23xi}, F_{23yi}, F_{23zi}, 0, M_{23yi}, M_{23zi}]^T
 \end{aligned}$$

Además:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Q}_9^7 &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_9^7 & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_9^7 \mathbf{R}_9^7 & \mathbf{R}_9^7 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{S}_9^7 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & h_{87i} \\ 0 & 0 & 0 \\ -h_{87i} & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{Q}_0^7 &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0^7 & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_0^7 \mathbf{R}_0^7 & \mathbf{R}_0^7 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{S}_0^7 &= \begin{bmatrix} 0 & -z_{G2i} & y_{G2i} \\ z_{G2i} & 0 & -x_{G2i} \\ -y_{G2i} & x_{G2i} & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Definiendo las matrices de rotación que definen las base  $j$  en  $i$ , se tiene:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_9^7 &= \mathbf{R}_{z4}(\theta_{98i}) \\
 \mathbf{R}_0^7 &= \mathbf{R}_{z4}(-\theta_{76i})\mathbf{R}_{z6}(-\theta_{54i})\mathbf{R}_{z4}(-\beta_{32i})\mathbf{R}_{z6}(-\beta_{10i})
 \end{aligned}$$

De esta manera las ecuaciones 3.2.2 definen el comportamiento estático del cuerpo 2i.

### 3.2.3. ANÁLISIS DEL CUERPO 3i.

En la figura (3.2.4) se muestra el diagrama de cuerpo libre, con las fuerzas que actúan en el cuerpo 3i.

Haciendo la sumatoria de fuerzas y sustituyéndolas en las ecuaciones de equilibrio dinámico, se tienen las siguientes expresiones definidas en la base local  $(i_9, j_9, k_9)$ :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_{3i}^A + \mathbf{F}_{3i}^R + \mathbf{F}_{3i}^I &= \mathbf{0} \\
 \mathbf{F}_{3i}^A &= -\mathbf{T}_{23i}^9 + \mathbf{Q}_0^9 \mathbf{W}_{3i}^0 \\
 \mathbf{F}_{3i}^R &= \mathbf{F}_{23i}^9 + \mathbf{Q}_{11}^9 (-\mathbf{F}_{34i}^{11}) \\
 \mathbf{F}_{3i}^I &= \mathbf{0}
 \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}_{23i}^9 &= [0, 0, 0, T_{23i}, 0, 0]^T \\
 \mathbf{W}_{3i}^0 &= [0, 0, -m_{3i}g, 0, 0, 0]^T \\
 \mathbf{F}_{23i}^9 &= [F_{23xi}, F_{23yi}, F_{23zi}, 0, M_{23yi}, M_{23zi}]^T \\
 \mathbf{F}_{34i}^{11} &= [F_{34xi}, F_{34yi}, F_{34zi}, 0, M_{34yi}, 0]^T
 \end{aligned}$$



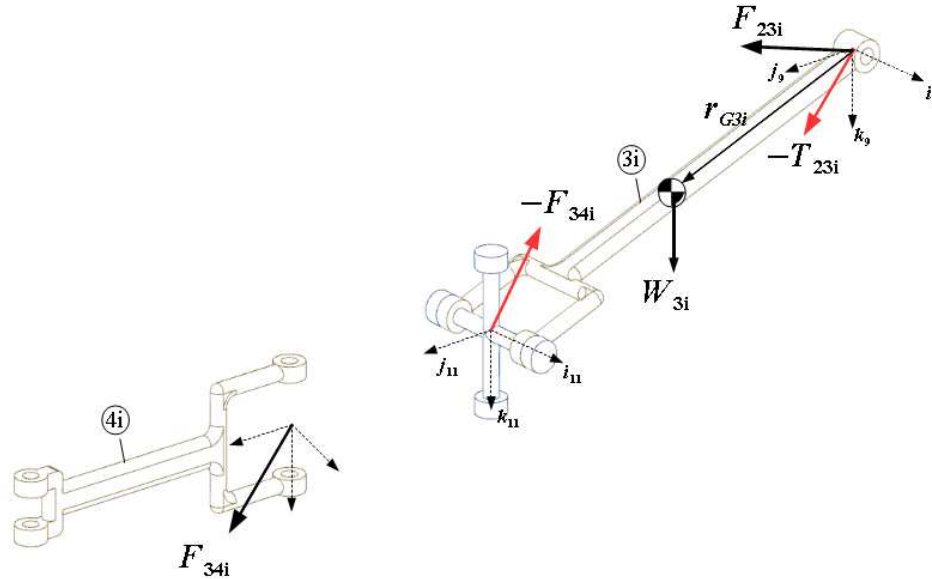


Figura 3.2.4: Diagrama de cuerpo libre del cuerpo 3i.

Además:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Q}_{11}^9 &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11}^9 & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{11}^9 \mathbf{R}_{11}^9 & \mathbf{R}_{11}^9 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{S}_0^9 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & h_{109i} \\ 0 & 0 & 0 \\ -h_{109i} & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{Q}_0^9 &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0^9 & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_0^9 \mathbf{R}_0^9 & \mathbf{R}_0^9 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{S}_0^9 &= \begin{bmatrix} 0 & -z_{G3i} & y_{G3i} \\ z_{G3i} & 0 & -x_{G3i} \\ -y_{G3i} & x_{G3i} & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Definiendo las matrices de rotación que definen las base  $j$  en  $i$ , se tiene:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_{11}^9 &= \mathbf{R}_{z4}(\theta_{1110i}) \\
 \mathbf{R}_0^9 &= \mathbf{R}_{z4}(-\theta_{98i})\mathbf{R}_{z4}(-\theta_{76i})\mathbf{R}_{z6}(-\theta_{54i})\mathbf{R}_{z4}(-\beta_{32i})\mathbf{R}_{z6}(-\beta_{10i})
 \end{aligned}$$

De esta manera las ecuaciones 3.2.3 definen el comportamiento estático del cuerpo 3i.

### 3.2.4. ANÁLISIS DEL CUERPO 4i.

En la figura (3.2.5) se muestra el diagrama de cuerpo libre, con las fuerzas que actúan en el cuerpo 4i:

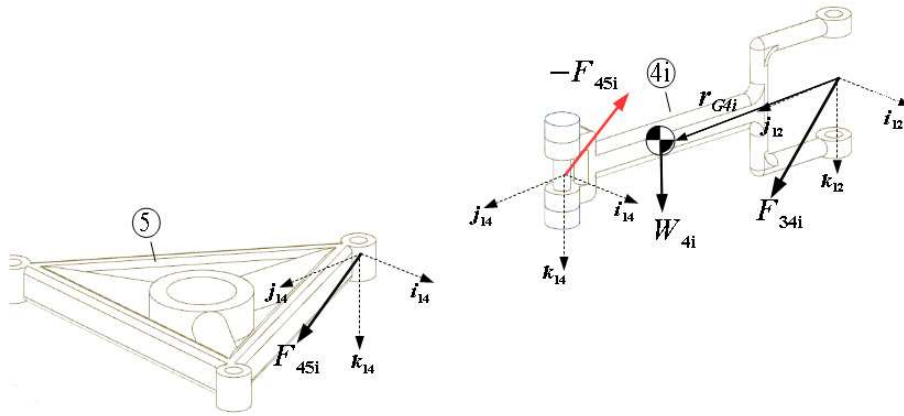


Figura 3.2.5: Diagrama de cuerpo libre del cuerpo 4i.

Haciendo la sumatoria de fuerzas y sustituyéndolas en las ecuaciones de equilibrio dinámico, se tienen las siguientes expresiones definidas en la base local  $(i_{11}, j_{11}, k_{11})$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{4i}^A + \mathbf{F}_{4i}^R + \mathbf{F}_{4i}^I &= \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_{4i}^A &= \mathbf{Q}_0^{12} \mathbf{W}_{4i}^0 \\ \mathbf{F}_{4i}^R &= \mathbf{Q}_{11}^{12} \mathbf{F}_{34i}^{11} + \mathbf{Q}_{14}^{12} (-\mathbf{F}_{45i}^{14}) \\ \mathbf{F}_{4i}^I &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{4i}^0 &= [0, 0, -m_{4i}g, 0, 0, 0]^T \\ \mathbf{F}_{34i}^{11} &= [F_{34xi}, F_{34yi}, F_{34zi}, 0, M_{34yi}, 0]^T \\ \mathbf{F}_{45i}^{14} &= [F_{45xi}, F_{45yi}, F_{45zi}, M_{45xi}, M_{45yi}, 0]^T \end{aligned}$$

Además:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{11}^{12} &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11}^{12} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{11}^{12} \mathbf{R}_{11}^{12} & \mathbf{R}_{11}^{12} \end{bmatrix} \\ \mathbf{S}_{11}^{12} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{Q}_{14}^{12} &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{14}^{12} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{14}^{12} \mathbf{R}_{14}^{12} & \mathbf{R}_{14}^{12} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\mathbf{S}_{14}^{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & h_{109i} \\ 0 & 0 & 0 \\ -h_{109i} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_0^{12} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0^9 & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_0^9 \mathbf{R}_0^9 & \mathbf{R}_0^9 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S}_0^{12} = \begin{bmatrix} 0 & -z_{G3i} & y_{G3i} \\ z_{G3i} & 0 & -x_{G3i} \\ -y_{G3i} & x_{G3i} & 0 \end{bmatrix}$$

Definiendo las matrices de rotación que definen las base  $j$  en  $i$ , se tiene:

$$\mathbf{R}_{11}^{12} = \mathbf{R}_{z6}(-\theta_{1211i})$$

$$\mathbf{R}_{14}^{12} = \mathbf{R}_{z6}(-\theta_{1413i})$$

$$\mathbf{R}_0^9 = \mathbf{R}_{z6}(-\theta_{1211i})\mathbf{R}_{z6}(-\theta_{1110i})\mathbf{R}_{z4}(-\theta_{98i})\mathbf{R}_{z4}(-\theta_{76i})\mathbf{R}_{z6}(-\theta_{54i})\mathbf{R}_{z4}(-\beta_{32i})\mathbf{R}_{z6}(-\beta_{10i})$$

De esta manera las ecuaciones 3.2.4 definen el comportamiento estático del cuerpo 4i.

### 3.2.5. ANÁLISIS DEL CUERPO 5.

En la figura (3.2.5) se muestra el diagrama de cuerpo libre, con las fuerzas que actúan en el cuerpo 5 :

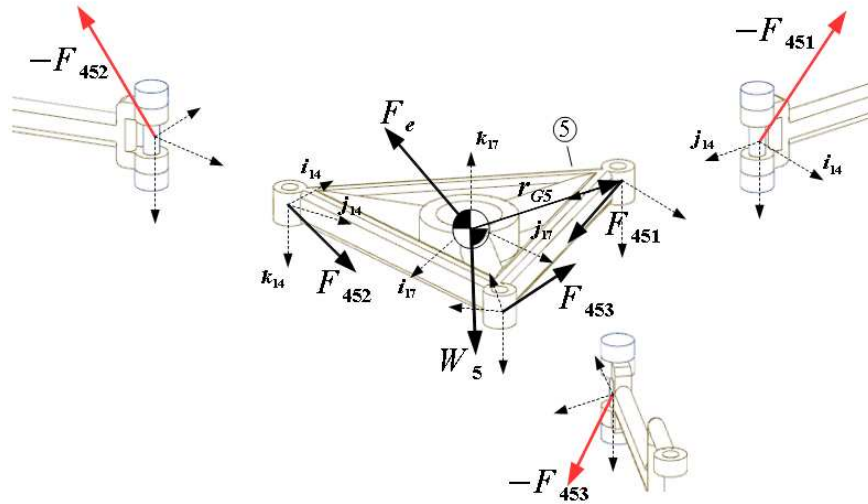


Figura 3.2.6: Diagrama de cuerpo libre del cuerpo 5.

Haciendo la sumatoria de fuerzas y sustituyéndolas en las ecuaciones de equilibrio dinámico, se tienen las siguientes expresiones definidas en la base local  $(i_{17}, j_{17}, k_{17})$ :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_5^A + \mathbf{F}_5^R + \mathbf{F}_5^I &= \mathbf{0} \\
 \mathbf{F}_5^A &= \mathbf{Q}_0^{17} \mathbf{W}_5^0 \\
 \mathbf{F}_5^R &= \sum_{i=1}^3 \mathbf{Q}_{14i}^{17} \mathbf{F}_{45i}^{14} + \mathbf{F}_e^{17} \\
 \mathbf{F}_5^I &= \mathbf{0}
 \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{W}_5^0 &= [0, 0, -m_5g, 0, 0, 0]^T \\
 \mathbf{F}_{45i}^{14} &= [F_{45xi}, F_{45yi}, F_{45zi}, M_{45xi}, M_{45yi}, 0]^T \\
 \mathbf{F}_e^{17} &= [F_{ex}, F_{ey}, F_{ez}, M_{ex}, M_{ey}, M_{ez}]^T
 \end{aligned}$$

Además:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Q}_{14i}^{17} &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{14i}^{17} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{14i}^{17} \mathbf{R}_{14i}^{17} & \mathbf{R}_{14i}^{17} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{S}_{141}^{17} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & h_{15141} \\ 0 & 0 & 0 \\ -h_{15141} & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{S}_{142}^{17} &= \begin{bmatrix} 0 & 50 & -50(\text{sen } 30) \\ 0 & 0 & 0 \\ 50(\text{sen } 30) & -50 & 0 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{S}_{143}^{17} &= \begin{bmatrix} 0 & -50 & -50(\text{sen } 30) \\ 0 & 0 & 0 \\ 50(\text{sen } 30) & 50 & 0 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{Q}_0^{17} &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0^{17} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_0^{17} \mathbf{R}_0^{17} & \mathbf{R}_0^{17} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{S}_0^{17} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Definiendo las matrices de rotación que definen las base  $j$  en  $i$ , se tiene:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_{14}^{17} &= \mathbf{R}_{z5}(-\beta_{1716i}) \mathbf{R}_{z6}(-\theta_{1615i}) \\
 \mathbf{R}_0^{17} &= \mathbf{R}_{z5}(-\beta_{1716i}) \mathbf{R}_{z6}(-\theta_{1615i}) \mathbf{R}_{z6}(-\theta_{1211i}) \mathbf{R}_{z6}(-\theta_{1110i}) \mathbf{R}_{z4}(-\theta_{98i}) \\
 &\quad \mathbf{R}_{z4}(-\theta_{76i}) \mathbf{R}_{z6}(-\theta_{54i}) \mathbf{R}_{z4}(-\beta_{32i}) \mathbf{R}_{z6}(-\beta_{10i})
 \end{aligned}$$

De esta manera las ecuaciones 3.2.5 definen el comportamiento estático del cuerpo 5.

### 3.2.6. SOLUCIÓN DE LA ESTÁTICA.

Las ecuaciones 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3, 3.2.4 y 3.2.5, son vectores de  $6 \times 1$ , que al sustituir la solución de la posición (subsec. 2.6.1), deja los vectores en función de las incógnitas de las fuerzas y torques del mecanismo; a continuación se forma un sistema de ecuaciones algebraico con los elementos de estos vectores.

En total se tienen seis ecuaciones algebraicas por cada cuerpo por lo tanto son 72 ecuaciones por las tres cadenas cinemática mas 6 ecuaciones del cuerpo 5, con lo que se tiene un total de 78 ecuaciones.

Las incógnitas del sistema son:

$$T_{121}, T_{122}, T_{123}, T_{231}, T_{232}, T_{233}$$

$$\begin{aligned} & F_{01x1}, F_{01y1}, F_{01z1}, M_{01x1}, M_{01y1}, & F_{01x2}, F_{01y2}, F_{01z2}, M_{01x2}, M_{01y2}, & F_{01x3}, F_{01y3}, F_{01z3}, M_{01x3}, M_{01y3} \\ & F_{12x1}, F_{12y1}, F_{12z1}, M_{12y1}, M_{12z1}, & F_{12x2}, F_{12y2}, F_{12z2}, M_{12y2}, M_{12z2}, & F_{12x3}, F_{12y3}, F_{12z3}, M_{12y3}, M_{12z3} \\ & F_{23x1}, F_{23y1}, F_{23z1}, M_{23y1}, M_{23z1}, & F_{23x2}, F_{23y2}, F_{23z2}, M_{23y2}, M_{23z2}, & F_{23x3}, F_{23y3}, F_{23z3}, M_{23y3}, M_{23z3} \\ & & F_{34x1}, F_{34y1}, F_{34z1}, M_{34y1}, & F_{34x2}, F_{34y2}, F_{34z2}, M_{34y2}, & F_{34x3}, F_{34y3}, F_{34z3}, M_{34y3} \\ & F_{45x1}, F_{45y1}, F_{45z1}, M_{45y1}, M_{45z1}, & F_{45x2}, F_{45y2}, F_{45z2}, M_{45y2}, M_{45z2}, & F_{45x3}, F_{45y3}, F_{45z3}, M_{45y3}, M_{45z3} \end{aligned}$$

Un total de 78 incógnitas y con las 78 ecuaciones ya contadas, se tiene un sistema de ecuaciones lineal determinado:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{11}^A + \mathbf{F}_{11}^R + \mathbf{F}_{11}^I &= \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_{12}^A + \mathbf{F}_{12}^R + \mathbf{F}_{12}^I &= \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_{13}^A + \mathbf{F}_{13}^R + \mathbf{F}_{13}^I &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{21}^A + \mathbf{F}_{21}^R + \mathbf{F}_{21}^I &= \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_{22}^A + \mathbf{F}_{22}^R + \mathbf{F}_{22}^I &= \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_{23}^A + \mathbf{F}_{23}^R + \mathbf{F}_{23}^I &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{31}^A + \mathbf{F}_{31}^R + \mathbf{F}_{31}^I &= \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_{32}^A + \mathbf{F}_{32}^R + \mathbf{F}_{32}^I &= \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_{33}^A + \mathbf{F}_{33}^R + \mathbf{F}_{33}^I &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{41}^A + \mathbf{F}_{41}^R + \mathbf{F}_{41}^I &= \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_{42}^A + \mathbf{F}_{42}^R + \mathbf{F}_{42}^I &= \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_{43}^A + \mathbf{F}_{43}^R + \mathbf{F}_{43}^I &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\mathbf{F}_5^A + \mathbf{F}_5^R + \mathbf{F}_5^I = \mathbf{0} \quad (3.2.6)$$

Como parte del sistema aparece el torsor  $\mathbf{F}_e^{17}$ , que son las fuerzas y momentos de reacción a los que va a estar sometida la herramienta o, en este caso, el trocar que se colocará en el mecanismo, y que es de valor conocido en la solución del problema; en este caso se seleccionó el valor de  $\mathbf{F}_e^{17} = [0, 0, 2, 0, 0, 0.5]^T (N, N.m)$ .

Con la ayuda del software *Mathematica*, se programa y resuelve el sistema de ecuaciones 3.2.6. Se muestran las gráficas de los torques de las juntas actuadas del mecanismo.

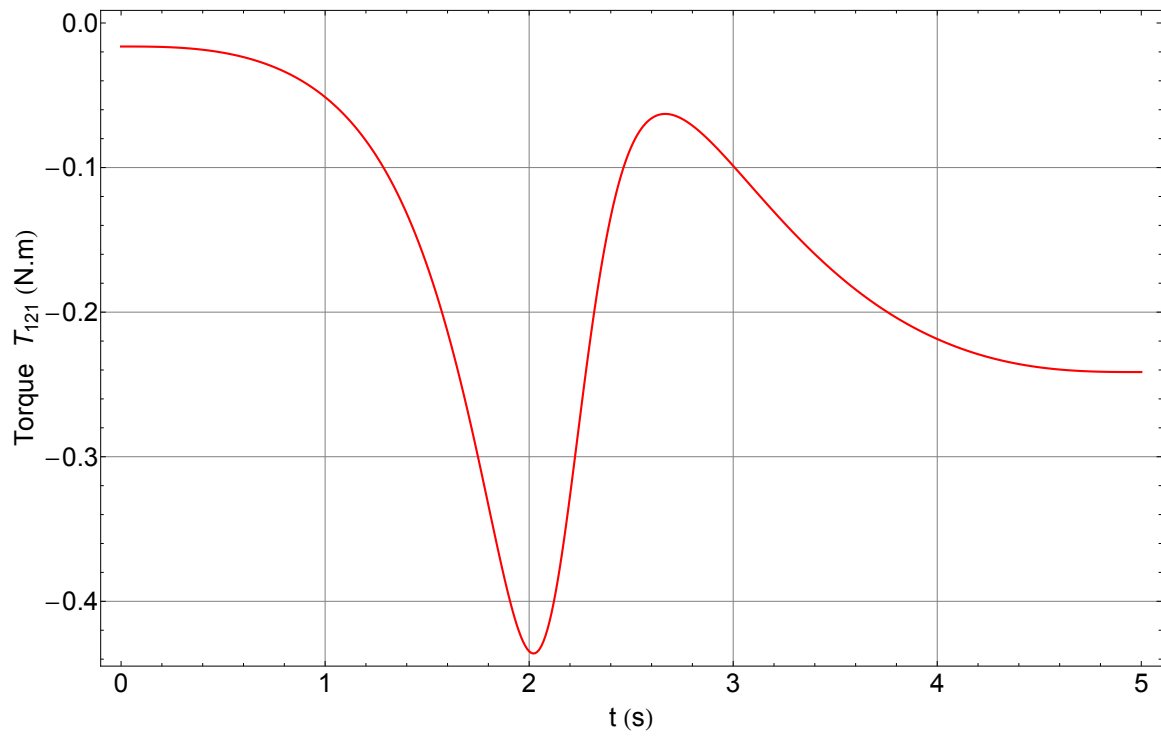


Figura 3.2.7: Torque  $T_{121}$ .

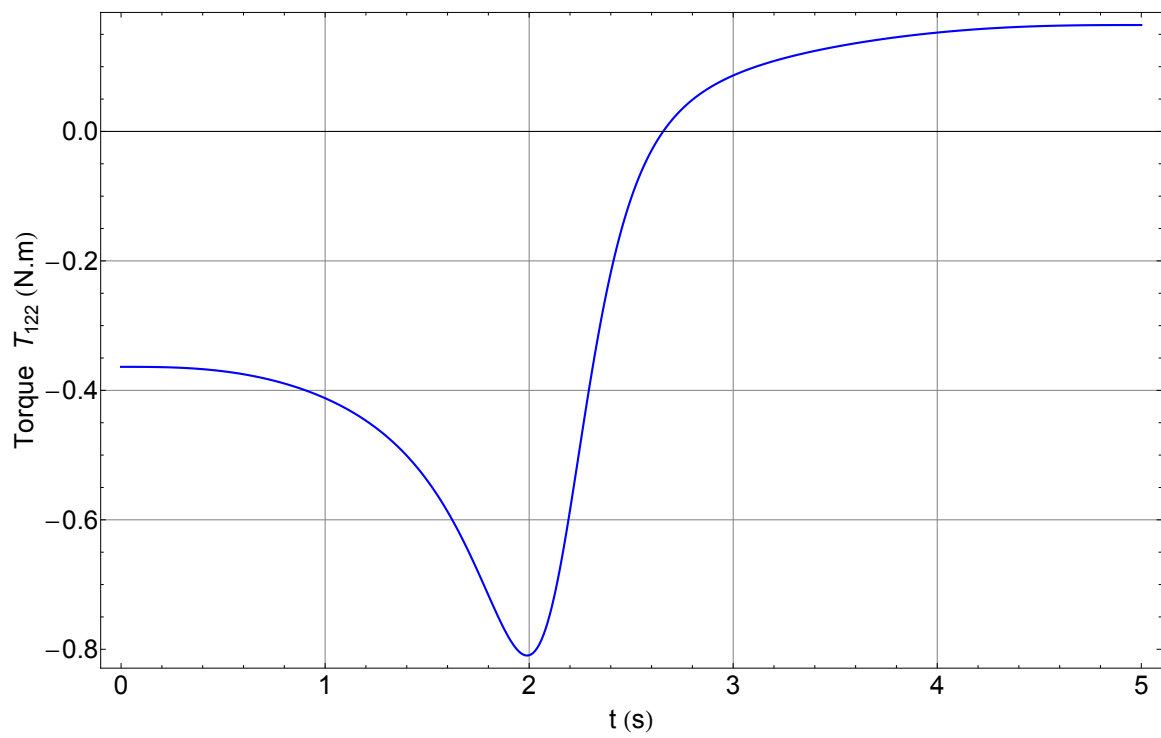


Figura 3.2.8: Torque  $T_{122}$ .

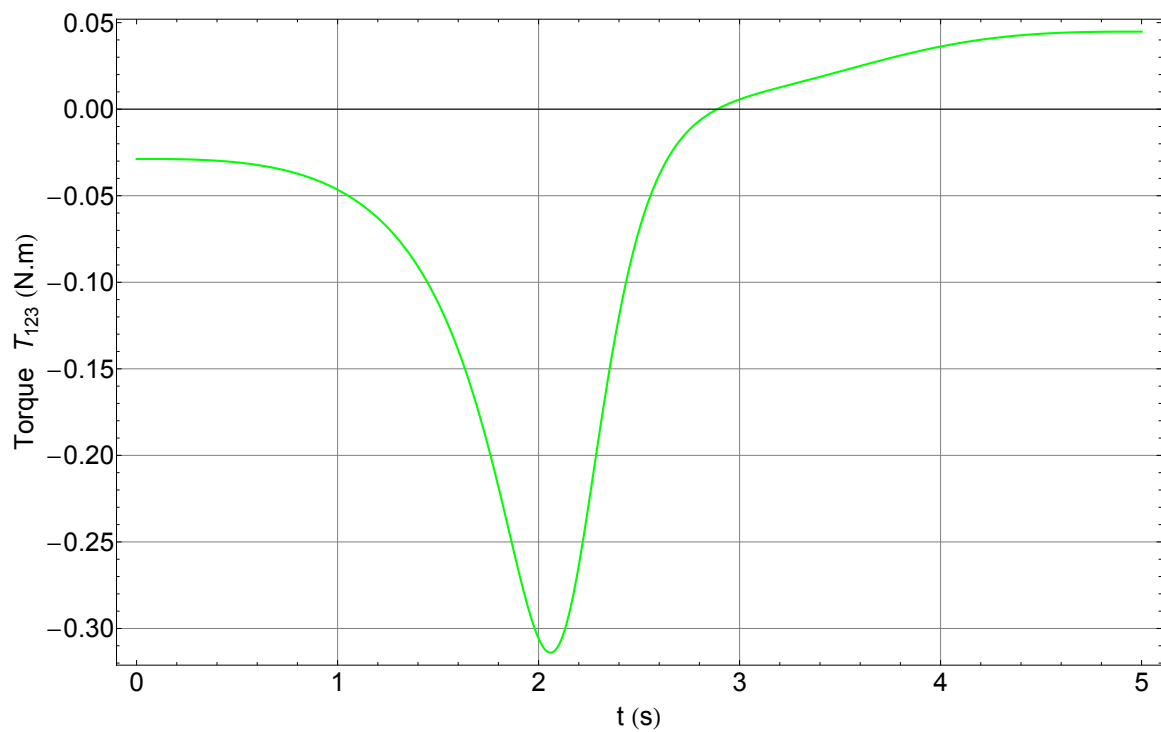


Figura 3.2.9: Torque  $T_{123}$ .

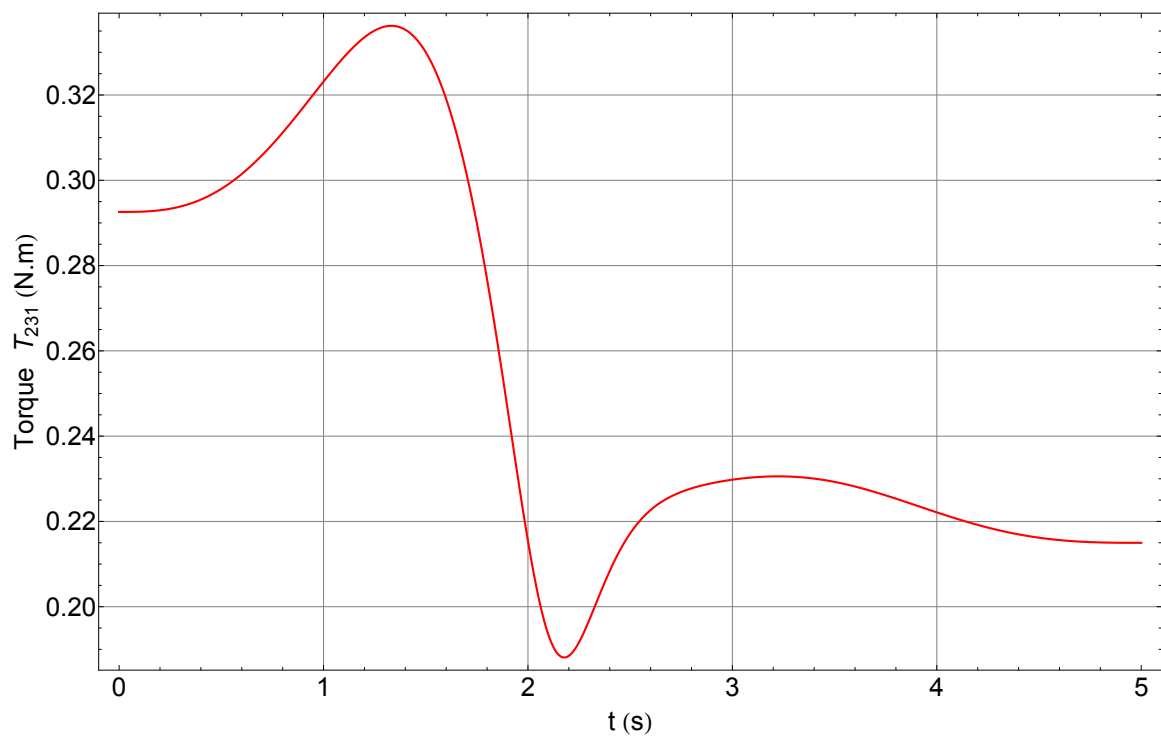


Figura 3.2.10: Torque  $T_{231}$ .

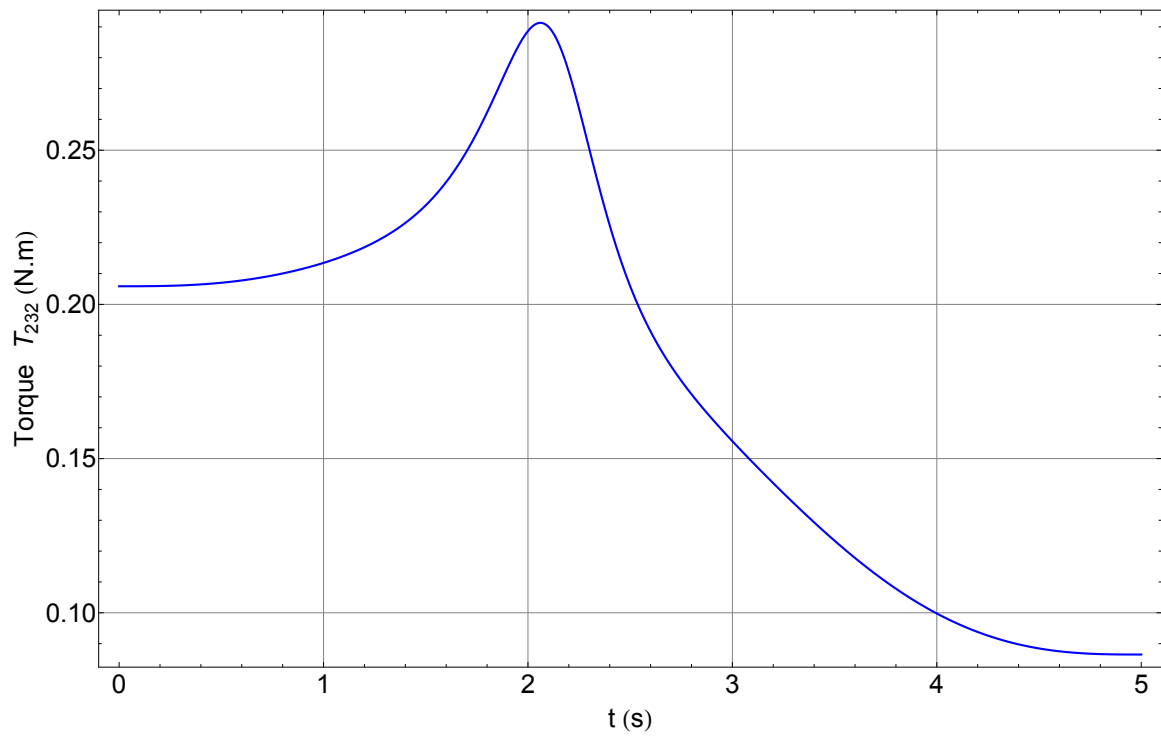


Figura 3.2.11: Torque  $T_{232}$ .

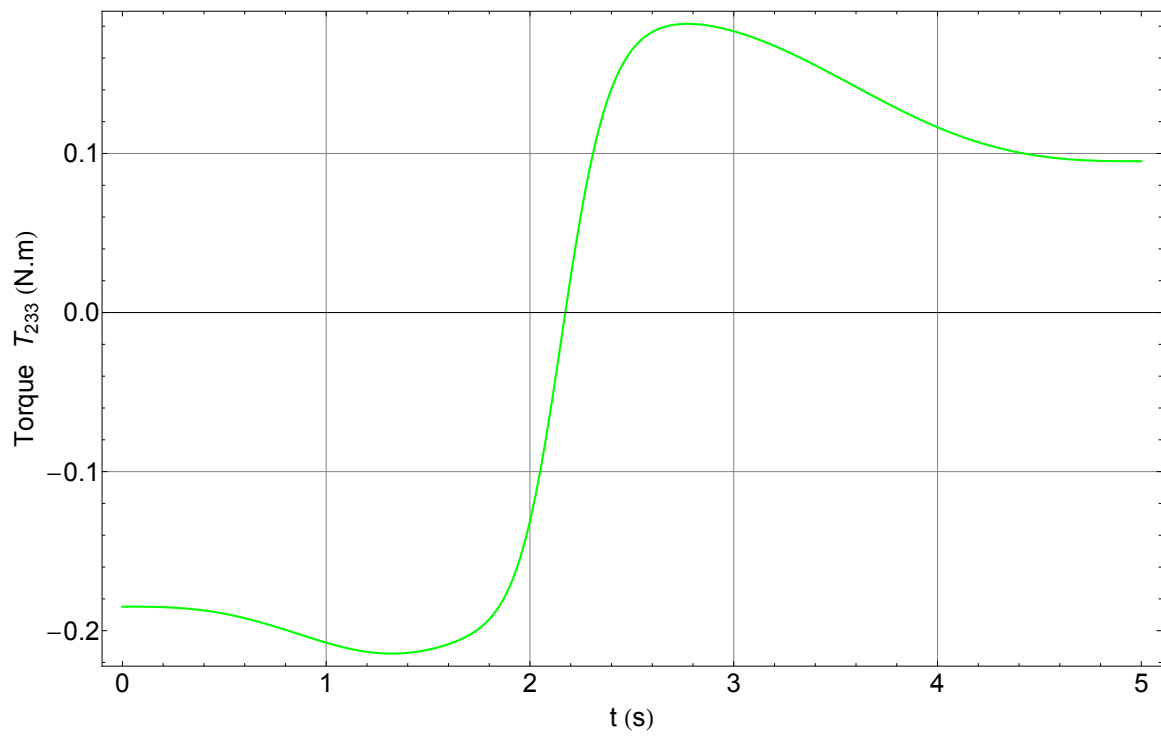


Figura 3.2.12: Torque  $T_{233}$ .



# Conclusiones.

## Análisis Cinemático.

Cuando se realiza un análisis cinemático, se estudian las leyes del movimiento de los cuerpos sin considerar las causas que lo originan; al realizar este estudio a un mecanismo, se encuentran las limitantes o restricciones geométricas de su movimiento. En el mecanismo que se presentó en esta tesis, se construyó el modelo cinemático, para contar con una herramienta con la que se pueda verificar que en su espacio de trabajo, se logran orientaciones de  $\pm 20$  grados o más con respecto a cada eje, que son orientaciones suficientes para mejorar la versatilidad de posicionamiento de los soportes de trocares de los robots cirujanos actuales.

Para lograr construir este modelo matemático, se partió desde observar variadas posiciones del mecanismo en el modelo creado en un software CAD y tomando como referencia dos de estas posiciones extremas de difícil acceso para el mecanismo a simple vista. Con la intención de conocer el comportamiento cinemático en el paso de estas dos posiciones y saber si satisface las condiciones de operación de un trocar que se plantean en los capítulos iniciales de esta tesis, se desarrollaron sistemas de ecuaciones de posición, velocidad y aceleración, en función del seguimiento de una trayectoria del efector final (cuerpo 5) del mecanismo entre estos puntos extremos.

Teniendo el modelo completo, se solucionó mediante métodos numéricos y se pudo comprobar que para los puntos seleccionados, los sistemas de ecuaciones resultantes son determinados. Además, las curvas de velocidades y aceleraciones presentan evoluciones continuas y suaves, que es una muestra de que el movimiento del mecanismo es estable.

Con lo mencionado anteriormente se logra tener las herramientas básicas necesarias para, en un trabajo posterior, realizar un análisis exhaustivo de todas las posiciones del mecanismo en su espacio de trabajo y localizar posibles singularidades. También será motivo de un trabajo posterior conocer el dimensionamiento adecuado de la geometría de este mecanismo, que optimiza el espacio de trabajo en función de las dimensiones del robot donde será acoplado.

## Análisis Estático.

Con el análisis estático se buscó conocer las fuerzas de reacción que intervienen en las juntas no actuadas y los torques en las juntas actuadas; esto se logró formando un sistema de ecuaciones lineales de 78 ecuaciones con 78 incógnitas y resolviéndolo por métodos numéricos con ayuda del software *Mathematica*.

Las curvas de los torques necesarios para mantener la posición del mecanismo en cada instante, se muestran en la sección 3.2.6, donde se puede observar que las diferencias de torque necesarios entre cada posición son pequeñas, y se deduce que los actuadores no tendrán que cumplir requerimientos exigentes, manteniendo la arquitectura del mecanismo simple.

Las fuerzas de reacción en las juntas que también son motivos de este análisis, permitirá en un trabajo posterior de mecánica de materiales, el conocimiento de las secciones transversales mínimas de los eslabones, para soportar las fuerzas máximas a las que se someterá el mecanismo.

En general el comportamiento estático del mecanismo fue el deseado y esperado después de analizar la cinemática del mismo. Aunque en los resultados aquí mostrados solo se describe una trayectoria entre dos puntos, tiene la certeza de que estos dos puntos y orientaciones escogidas, están en las fronteras de su espacio de trabajo y dan buena cuenta del comportamiento general del mecanismo.

El presente trabajo es una base para un diseño final del mecanismo, dejando para un trabajo consecutivo el análisis dinámico y posiblemente según los resultados arrojados, realizar un balanceo dinámico.

## Apéndice A

# Términos de la matrices cinemáticas.

### A.1. TÉRMINOS DE LA MATRIZ $T_{017i}$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_{11i} &= \cos(\beta_{1716i})(-0.25 \cos(\beta_{1615i} - \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} - \theta_{54i} - \theta_{76i} - \theta_{98i}) \\ &\quad + 0.25 \cos(\beta_{1615i} - \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{54i} - \theta_{76i} - \theta_{98i}) \\ &\quad - 0.25 \cos(\beta_{1615i} + \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\ &\quad + 0.25 \cos(\beta_{1615i} + \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\ &\quad + 0.5 \cos(\beta_{1615i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} - \theta_{54i}) + 0.5 \cos(\beta_{1615i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{54i})) \\ &\quad + \sin(\beta_{1716i})(0.5 \cos(\theta_{1110i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) - 0.5 \cos(\theta_{1110i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})) \\ \mathbf{t}_{12i} &= 0.25 \sin(\beta_{1615i} - \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} - \theta_{54i} - \theta_{76i} - \theta_{98i}) \\ &\quad - 0.25 \sin(\beta_{1615i} - \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{54i} - \theta_{76i} - \theta_{98i}) \\ &\quad + 0.25 \sin(\beta_{1615i} + \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\ &\quad - 0.25 \sin(\beta_{1615i} + \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\ &\quad - 0.5 \sin(\beta_{1615i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} - \theta_{54i}) - 0.5 \sin(\beta_{1615i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{54i}) \\ \mathbf{t}_{13i} &= \sin(\beta_{1716i})(-0.25 \cos(\beta_{1615i} - \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} - \theta_{54i} - \theta_{76i} - \theta_{98i}) \\ &\quad + 0.25 \cos(\beta_{1615i} - \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{54i} - \theta_{76i} - \theta_{98i}) \\ &\quad - 0.25 \cos(\beta_{1615i} + \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\ &\quad + 0.25 \cos(\beta_{1615i} + \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\ &\quad + 0.5 \cos(\beta_{1615i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} - \theta_{54i}) + 0.5 \cos(\beta_{1615i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{54i})) \\ &\quad + \cos(\beta_{1716i})(0.5 \cos(\theta_{1110i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) - 0.5 \cos(\theta_{1110i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})) \\ \mathbf{t}_{14i} &= \sin(\theta_{54i})((-57.75 \cos(\theta_{1211i} + \theta_{1413i}) - 100 \cdot \cos(\theta_{1211i})) \cos(\theta_{1110i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\ &\quad - 150 \cos(\theta_{76i} + \theta_{98i}) - 150 \cos(\theta_{76i}) - 50) + \cos(\theta_{54i})(-57.75 \sin(\theta_{1211i} + \theta_{1413i}) \\ &\quad - 100 \sin(\theta_{1211i})) \end{aligned}$$



**A.2. TÉRMINOS DE LA MATRIZ  $V_{017i}$ .**

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_{11} = & \text{sen}(\beta_{1716i})((0.5\omega_{1110i} - 0.5\omega_{54i} + 0.5\omega_{76i} + 0.5\omega_{98i}) \text{sen}(\theta_{1110i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
& + (-0.5\omega_{1110i} - 0.5\omega_{54i} - 0.5\omega_{76i} - 0.5\omega_{98i}) \text{sen}(\theta_{1110i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})) \\
& + \text{cos}(\beta_{1716i})((- \omega_{1211i} - \omega_{1413i}) \text{cos}(\theta_{54i}) \text{sen}(\beta_{1615i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i}) \\
& - \omega_{54i} \text{sen}(\theta_{54i}) \text{cos}(\beta_{1615i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i})) + (-0.25\omega_{1110i} + 0.25\omega_{1211i} \\
& + 0.25\omega_{1413i} - 0.25\omega_{54i} - 0.25\omega_{76i} - 0.25\omega_{98i}) \\
& \text{sen}(\beta_{1615i} - \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} - \theta_{54i} - \theta_{76i} - \theta_{98i}) \\
& + (0.25\omega_{1110i} - 0.25\omega_{1211i} - 0.25\omega_{1413i} - 0.25\omega_{54i} + 0.25\omega_{76i} + 0.25\omega_{98i}) \\
& \text{sen}(\beta_{1615i} - \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{54i} - \theta_{76i} - \theta_{98i}) \\
& + (0.25\omega_{1110i} + 0.25\omega_{1211i} + 0.25\omega_{1413i} - 0.25\omega_{54i} + 0.25\omega_{76i} + 0.25\omega_{98i}) \\
& \text{sen}(\beta_{1615i} + \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
& + (-0.25\omega_{1110i} - 0.25\omega_{1211i} - 0.25\omega_{1413i} - 0.25\omega_{54i} - 0.25\omega_{76i} - 0.25\omega_{98i}) \\
& \text{sen}(\beta_{1615i} + \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_{12} = & (-\omega_{1211i} - \omega_{1413i}) \text{cos}(\beta_{1615i} + -\omega_{1211i} + -\omega_{1413i}) \text{cos}(\theta_{54i}) \\
& + (-0.25\omega_{1110i} + 0.25\omega_{1211i} + 0.25\omega_{1413i} - 0.25\omega_{54i} - 0.25\omega_{76i} - 0.25\omega_{98i}) \\
& \text{cos}(\beta_{1615i} - \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} - \theta_{54i} - \theta_{76i} - \theta_{98i}) \\
& + (0.25\omega_{1110i} - 0.25\omega_{1211i} - 0.25\omega_{1413i} - 0.25\omega_{54i} + 0.25\omega_{76i} + 0.25\omega_{98i}) \\
& \text{cos}(\beta_{1615i} - \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{54i} - \theta_{76i} - \theta_{98i}) \\
& + (0.25\omega_{1110i} + 0.25\omega_{1211i} + 0.25\omega_{1413i} - 0.25\omega_{54i} + 0.25\omega_{76i} + 0.25\omega_{98i}) \\
& \text{cos}(\beta_{1615i} + \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
& + (-0.25\omega_{1110i} - 0.25\omega_{1211i} - 0.25\omega_{1413i} - 0.25\omega_{54i} - 0.25\omega_{76i} - 0.25\omega_{98i}) \\
& \text{cos}(\beta_{1615i} + \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
& + \omega_{54i} \text{sen}(\theta_{54i}) \text{sen}(\beta_{1615i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_{13} = & \text{cos}(\beta_{1716i})((-0.5\omega_{1110i} + 0.5\omega_{54i} - 0.5\omega_{76i} - 0.5\omega_{98i}) \\
& \text{sen}(\theta_{1110i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
& + (0.5\omega_{1110i} + 0.5\omega_{54i} + 0.5\omega_{76i} + 0.5\omega_{98i}) \text{sen}(\theta_{1110i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
& + \text{sen}(\beta_{1716i})((- \omega_{1211i} - \omega_{1413i}) \text{cos}(\theta_{54i}) \text{sen}(\beta_{1615i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i}) \\
& - \theta_{54i} \text{cos}(\beta_{1615i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i}) \text{sen}(\theta_{54i})) \\
& + (-0.25\omega_{1110i} + 0.25\omega_{1211i} + 0.25\omega_{1413i} - 0.25\omega_{54i} - 0.25\omega_{76i} - 0.25\omega_{98i}) \\
& \text{sen}(\beta_{1615i} - \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} - \theta_{54i} - \theta_{76i} - \theta_{98i}) \\
& + (0.25\omega_{1110i} - 0.25\omega_{1211i} - 0.25\omega_{1413i} - 0.25\omega_{54i} + 0.25\omega_{76i} + 0.25\omega_{98i})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_{14} = & \cos(\theta_{54i})(-100\omega_{1211i} \cos(\theta_{1211i}) + (-57.75\omega_{1211i} - 57.75\omega_{1413i}) \cos(\theta_{1211i} + \theta_{1413i})) \\
& + \omega_{54i}(-50 - 150 \cos(\theta_{76i}) - 150 \cos(\theta_{76i} + \theta_{98i}) - 50 \cos(\theta_{1110i} - \theta_{1211i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
& - 50 \cos(\theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) - 28.875 \cos(\theta_{1110i} - \theta_{1211i} - \theta_{1413i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
& - 28.875 \cos(\theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})) - 28.875\omega_{76i} \operatorname{sen}(\theta_{1211i}) \operatorname{sen}(\theta_{1413i}) \\
& \cos(\theta_{1110i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
& - 28.875\omega_{98i} \cos(\theta_{1110i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \operatorname{sen}(\theta_{1211i}) \operatorname{sen}(\theta_{1413i}) \\
& + 28.875\omega_{76i} \operatorname{sen}(\theta_{1211i}) \operatorname{sen}(\theta_{1413i}) \cos(\theta_{1110i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
& + 28.875\omega_{98i} \operatorname{sen}(\theta_{1211i}) \operatorname{sen}(\theta_{1413i}) \cos(\theta_{1110i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
& + 100\omega_{54i} \operatorname{sen}(\theta_{1211i}) \operatorname{sen}(\theta_{54i}) + 57.75\omega_{54i} \operatorname{sen}(\theta_{1211i}) \cos(\theta_{1413i}) \\
& \operatorname{sen}(\theta_{54i}) + 100\omega_{1211i} \operatorname{sen}(\theta_{1211i}) \operatorname{sen}(\theta_{54i}) \cos(\theta_{1110i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
& + 57.75\omega_{1211i} \operatorname{sen}(\theta_{1211i}) \cos(\theta_{1413i}) \operatorname{sen}(\theta_{54i}) \cos(\theta_{1110i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
& + 57.75\omega_{1413i} \operatorname{sen}(\theta_{1211i}) \cos(\theta_{1413i}) \operatorname{sen}(\theta_{54i}) \cos(\theta_{1110i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
& + 28.875\omega_{1110i} \operatorname{sen}(\theta_{1413i}) \operatorname{sen}(\theta_{54i}) \cos(\theta_{1110i} - \theta_{1211i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
& + 28.875\omega_{1211i} \operatorname{sen}(\theta_{1413i}) \operatorname{sen}(\theta_{54i}) \cos(\theta_{1110i} - \theta_{1211i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
& + 28.875\omega_{1110i} \operatorname{sen}(\theta_{1413i}) \operatorname{sen}(\theta_{54i}) \cos(\theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
& + 28.875\omega_{1211i} \operatorname{sen}(\theta_{1413i}) \operatorname{sen}(\theta_{54i}) \cos(\theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
& + \cos(\theta_{1211i})((\cos(\theta_{1413i}))(28.875\omega_{1110i} + 28.875\omega_{76i} + 28.875\omega_{98i}) \\
& + 50\omega_{1110i} + 50\omega_{76i} + 50\omega_{98i}) \cos(\theta_{1110i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
& + \operatorname{sen}(\theta_{1413i}) \operatorname{sen}(\theta_{54i})(57.75\omega_{1413i} \cos(\theta_{1110i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) + 57.75\omega_{54i})) \\
& + 150\omega_{76i} \operatorname{sen}(\theta_{54i}) \operatorname{sen}(\theta_{76i}) + 150\omega_{76i} \operatorname{sen}(\theta_{54i}) \operatorname{sen}(\theta_{76i}) \cos(\theta_{98i}) \\
& + 150\omega_{98i} \operatorname{sen}(\theta_{54i}) \operatorname{sen}(\theta_{76i}) \cos(\theta_{98i}) \\
& + 150\omega_{76i} \operatorname{sen}(\theta_{54i}) \cos(\theta_{76i}) \operatorname{sen}(\theta_{98i}) + 150\omega_{98i} \operatorname{sen}(\theta_{54i}) \cos(\theta_{76i}) \operatorname{sen}(\theta_{98i})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_{21} = & (-0.5\omega_{1110i} - 0.5\omega_{76i} - 0.5\omega_{98i}) \cos(\beta_{1716i} - \theta_{1110i} - \theta_{76i} - \theta_{98i}) \\
& + (-0.5\omega_{1110i} + 0.5\omega_{76i} + 0.5\omega_{98i}) \cos(\beta_{1716i} + \theta_1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_{24} = & (-150\omega_{76i} - 150\omega_{98i}) \cos(\theta_{76i} + \theta_{98i}) - 150\omega_{76i} \cos(\theta_{76i}) \\
& + \cos(\theta_{1211i})(-100\omega_{1110i} - 100\omega_{76i} - 100\omega_{98i}) \cos(\theta_{1110i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
& + (-28.875\omega_{1110i} + 28.875\omega_{1211i} + 28.875\omega_{1413i} - 28.875\omega_{76i} - 28.875\omega_{98i}) \\
& \cos(\theta_{1110i} - \theta_{1211i} - \theta_{1413i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
& + (-28.875\omega_{1110i} - 28.875\omega_{1211i} - 28.875\omega_{1413i} - 28.875\omega_{76i} - 28.875\omega_{98i}) \\
& \cos(\theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
& + 100\omega_{1211i} \operatorname{sen}(\theta_{1211i}) \operatorname{sen}(\theta_{1110i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &+0.25\omega_{1413i} \cos(\beta_{1716i}) \operatorname{sen}(\beta_{1615i}) \operatorname{sen}(\theta_{1110i} - \theta_{1211i} - \theta_{1413i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 &-0.25\omega_{54i} \cos(\beta_{1716i}) \operatorname{sen}(\beta_{1615i}) \operatorname{sen}(\theta_{1110i} - \theta_{1211i} - \theta_{1413i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 &-0.25\omega_{76i} \cos(\beta_{1716i}) \operatorname{sen}(\beta_{1615i}) \operatorname{sen}(\theta_{1110i} - \theta_{1211i} - \theta_{1413i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 &-0.25\omega_{98i} \cos(\beta_{1716i}) \operatorname{sen}(\beta_{1615i}) \operatorname{sen}(\theta_{1110i} - \theta_{1211i} - \theta_{1413i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 &+(-0.25\omega_{1413i} - 0.25\omega_{54i} - 0.25\omega_{76i} - 0.25\omega_{98i}) \cos(\beta_{1716i}) \operatorname{sen}(\beta_{1615i}) \\
 &\operatorname{sen}(\theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_{32} = &(0.25\omega_{1110i} - 0.25\omega_{1211i} - 0.25\omega_{1413i} + 0.25\omega_{54i} + 0.25\omega_{76i} + 0.25\omega_{98i}) \\
 &\operatorname{sen}(\beta_{1615i} - \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} - \theta_{54i} - \theta_{76i} - \theta_{98i}) \\
 &(0.25\omega_{1110i} - 0.25\omega_{1211i} - 0.25\omega_{1413i} - 0.25\omega_{54i} + 0.25\omega_{76i} + 0.25\omega_{98i}) \\
 &\operatorname{sen}(\beta_{1615i} - \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{54i} - \theta_{76i} - \theta_{98i}) \\
 &(-0.25\omega_{1110i} - 0.25\omega_{1211i} - 0.25\omega_{1413i} + 0.25\omega_{54i} - 0.25\omega_{76i} - 0.25\omega_{98i}) \\
 &\operatorname{sen}(\beta_{1615i} + \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 &+(-0.25\omega_{1110i} - 0.25\omega_{1211i} - 0.25\omega_{1413i} - 0.25\omega_{54i} - 0.25\omega_{76i} - 0.25\omega_{98i}) \\
 &\operatorname{sen}(\beta_{1615i} + \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 &(-\omega_{1211i} - \omega_{1413i}) \operatorname{sen}(\theta_{54i}) \cos(\beta_{1615i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i}) \\
 &-\omega_{54i} \cos(\theta_{54i}) \operatorname{sen}(\beta_{1615i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_{33} = &\operatorname{sen}(\beta_{1716i})((-0.25\omega_{1110i} + 0.25\omega_{1211i} + 0.25\omega_{1413i} - 0.25\omega_{54i} - 0.25\omega_{76i} - 0.25\omega_{98i}) \\
 &\cos(\beta_{1615i} - \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} - \theta_{54i} - \theta_{76i} - \theta_{98i}) \\
 &+(-0.25\omega_{1110i} + 0.25\omega_{1211i} + 0.25\omega_{1413i} + 0.25\omega_{54i} - 0.25\omega_{76i} - 0.25\omega_{98i}) \\
 &\cos(\beta_{1615i} - \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{54i} - \theta_{76i} - \theta_{98i}) + (0.25\omega_{1110i} + 0.25\omega_{1211i} + 0.25\omega_{1413i} \\
 &-0.25\omega_{54i} + 0.25\omega_{76i} + 0.25\omega_{98i}) \cos(\beta_{1615i} + \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 &+(0.25\omega_{1110i} + 0.25\omega_{1211i} + 0.25\omega_{1413i} + 0.25\omega_{54i} + 0.25\omega_{76i} + 0.25\omega_{98i}) \\
 &\cos(\beta_{1615i} + \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) + (-1.\omega_{1211i} - 1.\omega_{1413i}) \\
 &\operatorname{sen}(\theta_{54i}) \operatorname{sen}(\beta_{1615i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i}) + 1.\omega_{54i} \cos(\theta_{54i}) \cos(\beta_{1615i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i}) \\
 &+\cos(\beta_{1716i})((-0.5\omega_{1110i} + 0.5\omega_{54i} - 0.5\omega_{76i} - 0.5\omega_{98i}) \cos(\theta_{1110i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 &+(-0.5\omega_{1110i} - 0.5\omega_{54i} - 0.5\omega_{76i} - 0.5\omega_{98i}) \cos(\theta_{1110i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}))
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_{34} = & \cos(\theta_{54i})((-14.4375\omega_{1110i} - 28.875\omega_{1211i} - 28.875\omega_{1413i}) \\
 & \text{sen}(\theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 & + \omega_{1110i}(-14.4375 \text{sen}(\theta_{1110i} - \theta_{1211i} - \theta_{1413i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 & + 14.4375 \text{sen}(\theta_{1110i} + \theta_{1211i} - \theta_{1413i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 & + 14.4375 \text{sen}(\theta_{1110i} - \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})) \\
 & + (28.875\omega_{1211i} + 28.875\omega_{1413i}) \text{sen}(\theta_{1110i} - \theta_{1211i} - \theta_{1413i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 & + 50.\omega_{1211i} \text{sen}(\theta_{1110i} - \theta_{1211i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) - 50.\omega_{1211i} \text{sen}(\theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 & - 57.75\omega_{54i} \text{sen}(\theta_{1211i} + \theta_{1413i}) - 100.\omega_{54i} \text{sen}(\theta_{1211i}) + (-150.\omega_{76i} - 150.\omega_{98i}) \\
 & \text{sen}(\theta_{76i} + \theta_{98i}) - 150.\omega_{76i} \text{sen}(\theta_{76i}) + \cos(\theta_{54i}) \text{sen}(\theta_{1110i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 & ((-28.875\omega_{1110i} - 57.75\omega_{76i} - 57.75\omega_{98i}) \cos(\theta_{1211i} + \theta_{1413i}) \\
 & + \cos(\theta_{1211i})(-100.\omega_{1110i} - 100.\omega_{76i} - 100.\omega_{98i}) - 28.875\omega_{1110i} \cos(\theta_{1211i} - \theta_{1413i})) \\
 & + \text{sen}(\theta_{54i})((-57.75\omega_{1211i} - 57.75\omega_{1413i}) \cos(\theta_{1211i} + \theta_{1413i}) - 100.\omega_{1211i} \cos(\theta_{1211i}) \\
 & + \omega_{54i}(-28.875 \cos(\theta_{1110i} - \theta_{1211i} - \theta_{1413i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 & - 28.875 \cos(\theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) - 50. \cos(\theta_{1110i} - \theta_{1211i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 & - 50. \cos(\theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) - 150. \cos(\theta_{76i} + \theta_{98i}) - 150. \cos(\theta_{76i}) - 50.)
 \end{aligned}$$









$$\begin{aligned}
&+0.25\alpha_{1413i} \operatorname{sen}(\beta_{1615i} + \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
&-0.25\alpha_{54i} \operatorname{sen}(\beta_{1615i} + \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
&+0.25\alpha_{76i} \operatorname{sen}(\beta_{1615i} + \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
&+0.25\alpha_{98i} \operatorname{sen}(\beta_{1615i} + \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
&-0.25\alpha_{1110i} \operatorname{sen}(\beta_{1615i} + \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
&-0.25\alpha_{1211i} \operatorname{sen}(\beta_{1615i} + \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
&-0.25\alpha_{1413i} \operatorname{sen}(\beta_{1615i} + \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
&-0.25\alpha_{54i} \operatorname{sen}(\beta_{1615i} + \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
&-0.25\alpha_{76i} \operatorname{sen}(\beta_{1615i} + \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
&-0.25\alpha_{98i} \operatorname{sen}(\beta_{1615i} + \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})
\end{aligned}$$









$$\begin{aligned}
&+0.5\omega_{1413i}\omega_{54i} \operatorname{sen}(\beta_{1615i} + \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
&+0.5\omega_{1211i}\omega_{76i} \operatorname{sen}(\beta_{1615i} + \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
&+0.5\omega_{1413i}\omega_{76i} \operatorname{sen}(\beta_{1615i} + \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
&+0.5\omega_{54i}\omega_{76i} \operatorname{sen}(\beta_{1615i} + \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
&+0.5\omega_{1211i}\omega_{98i} \operatorname{sen}(\beta_{1615i} + \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
&+0.5\omega_{1413i}\omega_{98i} \operatorname{sen}(\beta_{1615i} + \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
&+0.5\omega_{54i}\omega_{98i} \operatorname{sen}(\beta_{1615i} + \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
&+0.5\omega_{76i}\omega_{98i} \operatorname{sen}(\beta_{1615i} + \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}_{13} = & 2\omega_{1413i}\omega_{54i}(0.5 \cos(\beta_{1615i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} - \theta_{54i}) \\
 & - 0.5 \cos(\beta_{1615i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{54i}) \\
 & - 0.25 \cos(\beta_{1615i} - \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} - \theta_{54i} - \theta_{76i} - \theta_{98i}) \\
 & - 0.25 \cos(\beta_{1615i} - \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{54i} - \theta_{76i} - \theta_{98i}) \\
 & - 0.25 \cos(\beta_{1615i} + \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 & - 0.25 \cos(\beta_{1615i} + \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})) \\
 & \text{sen}(\beta_{1716i}) + 2\omega_{1413i}(-0.5\omega_{1211i} \cos(\beta_{1615i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} - \theta_{54i}) \\
 & - 0.5\omega_{1211i} \cos(\beta_{1615i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{54i}) \\
 & - 0.25\omega_{1110i} \cos(\beta_{1615i} - \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} - \theta_{54i} - \theta_{76i} - \theta_{98i}) \\
 & + 0.25\omega_{1211i} \cos(\beta_{1615i} - \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} - \theta_{54i} - \theta_{76i} - \theta_{98i}) \\
 & + 0.25\omega_{1110i} \cos(\beta_{1615i} - \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{54i} - \theta_{76i} - \theta_{98i}) \\
 & - 0.25\omega_{1211i} \cos(\beta_{1615i} - \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{54i} - \theta_{76i} - \theta_{98i}) \\
 & + 0.25\omega_{1110i} \cos(\beta_{1615i} + \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 & + 0.25\omega_{1211i} \cos(\beta_{1615i} + \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 & - 0.25\omega_{1110i} \cos(\beta_{1615i} + \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 & - 0.25\omega_{1211i} \cos(\beta_{1615i} + \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})) \\
 & \text{sen}(\beta_{1716i}) + \text{sen}(\beta_{1615i})(\cos(\theta_{1413i})\omega_{1413i}^2 \\
 & + \alpha_{1413i} \text{sen}(\theta_{1413i}))(1. \cos(\theta_{54i}) \text{sen}(\theta_{1211i}) \\
 & + \cos(\theta_{1211i}) \cos(\theta_{1110i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \text{sen}(\theta_{54i})) \\
 & + (\omega_{1413i}^2 \text{sen}(\theta_{1413i}) - \alpha_{1413i} \cos(\theta_{1413i}))(\cos(\theta_{1211i}) \cos(\theta_{54i}) \\
 & - \cos(\theta_{1110i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \text{sen}(\theta_{1211i}) \text{sen}(\theta_{54i})) \text{sen}(\beta_{1716i}) \\
 & + \cos(\beta_{1615i})(\alpha_{1413i} \cos(\theta_{1413i}) - \omega_{1413i}^2 \text{sen}(\theta_{1413i}))(-\cos(\theta_{54i}) \text{sen}(\theta_{1211i}) \\
 & - \cos(\theta_{1211i}) \cos(\theta_{1110i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \text{sen}(\theta_{54i})) - (\cos(\theta_{1413i})\omega_{1413i}^2 \\
 & + \alpha_{1413i} \text{sen}(\theta_{1413i}))(\cos(\theta_{1211i}) \cos(\theta_{54i}) - \cos(\theta_{1110i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 & \text{sen}(\theta_{1211i}) \text{sen}(\theta_{54i})) \text{sen}(\beta_{1716i}) + \cos(\beta_{1615i})(\cos(\theta_{1413i}) \\
 & (-\cos(\theta_{54i})(\cos(\theta_{1211i})\omega_{1211i}^2 + \alpha_{1211i} \text{sen}(\theta_{1211i})) \\
 & + (\cos(\theta_{1110i})(2\omega_{1110i}\omega_{1211i} \cos(\theta_{1211i}) + \alpha_{1110i} \text{sen}(\theta_{1211i})) \\
 & + \text{sen}(\theta_{1110i})(\alpha_{1211i} \cos(\theta_{1211i}) - (\omega_{1110i}^2 + \omega_{1211i}^2) \text{sen}(\theta_{1211i}))) \\
 & \text{sen}(\theta_{54i})(\cos(\theta_{98i}) \text{sen}(\theta_{76i}) + \cos(\theta_{76i}) \text{sen}(\theta_{98i})) \\
 & + (\text{sen}(\theta_{1110i})(2.\omega_{1110i}\omega_{1211i} \cos(\theta_{1211i}) + \alpha_{1110i} \text{sen}(\theta_{1211i})) \\
 & + \cos(\theta_{1110i})(\omega_{1110i}^2 + \omega_{1211i}^2) \text{sen}(\theta_{1211i}) - \alpha_{1211i} \cos(\theta_{1211i}))) \\
 & \text{sen}(\theta_{54i})(\cos(\theta_{76i}) \cos(\theta_{98i}) - \text{sen}(\theta_{76i}) \text{sen}(\theta_{98i}))) \\
 & + \text{sen}(\theta_{1413i})(-\cos(\theta_{54i})(\alpha_{1211i} \cos(\theta_{1211i}) - \omega_{1211i}^2 \text{sen}(\theta_{1211i})) \\
 & + (\cos(\theta_{1110i})(\alpha_{1110i} \cos(\theta_{1211i}) - 2\omega_{1110i}\omega_{1211i} \text{sen}(\theta_{1211i})) \\
 & - \text{sen}(\theta_{1110i})(\omega_{1110i}^2 + \omega_{1211i}^2) \cos(\theta_{1211i}) + \alpha_{1211i} \text{sen}(\theta_{1211i}))) \\
 & \text{sen}(\theta_{54i})(\cos(\theta_{98i}) \text{sen}(\theta_{76i}) + \cos(\theta_{76i}) \text{sen}(\theta_{98i})) \\
 & + (\cos(\theta_{1110i})(\omega_{1110i}^2 + \omega_{1211i}^2) \cos(\theta_{1211i}) + \alpha_{1211i} \text{sen}(\theta_{1211i})) \\
 & + \text{sen}(\theta_{1110i})(\alpha_{1110i} \cos(\theta_{1211i}) - 2.\omega_{1110i}\omega_{1211i} \text{sen}(\theta_{1211i}))) \\
 & \text{sen}(\theta_{54i})(\cos(\theta_{76i}) \cos(\theta_{98i}) - \text{sen}(\theta_{76i}) \text{sen}(\theta_{98i}))) \text{sen}(\beta_{1716i})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \text{sen}(\beta_{1615i})(\cos(\theta_{1413i})(-\cos(\theta_{54i})(\alpha_{1211i} \cos(\theta_{1211i})) \\
 & - \omega_{1211i}^2 \text{sen}(\theta_{1211i})) + (\cos(\theta_{1110i})(\alpha_{1110i} \cos(\theta_{1211i})) \\
 & - 2\omega_{1110i}\omega_{1211i} \text{sen}(\theta_{1211i})) - \text{sen}(\theta_{1110i})((\omega_{1110i}^2 + \omega_{1211i}^2) \cos(\theta_{1211i})) \\
 & + \alpha_{1211i} \text{sen}(\theta_{1211i}))) \text{sen}(\theta_{54i})(\cos(\theta_{98i}) \text{sen}(\theta_{76i}) \\
 & + \cos(\theta_{76i}) \text{sen}(\theta_{98i})) + (\cos(\theta_{1110i})((\omega_{1110i}^2 + \omega_{1211i}^2) \cos(\theta_{1211i})) \\
 & + \alpha_{1211i} \text{sen}(\theta_{1211i})) + \text{sen}(\theta_{1110i})(\alpha_{1110i} \cos(\theta_{1211i})) \\
 & - 2\omega_{1110i}\omega_{1211i} \text{sen}(\theta_{1211i}))) \text{sen}(\theta_{54i})(\cos(\theta_{76i}) \cos(\theta_{98i}) \\
 & - \text{sen}(\theta_{76i}) \text{sen}(\theta_{98i}))) - \text{sen}(\theta_{1413i})(-\cos(\theta_{54i})(\cos(\theta_{1211i})\omega_{1211i}^2 \\
 & + \alpha_{1211i} \text{sen}(\theta_{1211i})) + (\cos(\theta_{1110i})(2\omega_{1110i}\omega_{1211i} \cos(\theta_{1211i})) \\
 & + \alpha_{1110i} \text{sen}(\theta_{1211i})) + \text{sen}(\theta_{1110i})(\alpha_{1211i} \cos(\theta_{1211i}) - (\omega_{1110i}^2 + \omega_{1211i}^2) \\
 & \text{sen}(\theta_{1211i}))) \text{sen}(\theta_{54i})(\cos(\theta_{98i}) \text{sen}(\theta_{76i}) + \cos(\theta_{76i}) \text{sen}(\theta_{98i})) \\
 & + (\text{sen}(\theta_{1110i})(2\omega_{1110i}\omega_{1211i} \cos(\theta_{1211i}) + \alpha_{1110i} \text{sen}(\theta_{1211i})) \\
 & + \cos(\theta_{1110i})((\omega_{1110i}^2 + \omega_{1211i}^2) \text{sen}(\theta_{1211i}) - \alpha_{1211i} \cos(\theta_{1211i}))) \\
 & \text{sen}(\theta_{54i})(\cos(\theta_{76i}) \cos(\theta_{98i}) - \text{sen}(\theta_{76i}) \text{sen}(\theta_{98i}))) \text{sen}(\beta_{1716i}) \\
 & + \cos(\beta_{1615i})(\text{sen}(\theta_{1211i})(\text{sen}(\theta_{1413i})(\cos(\theta_{54i})\omega_{54i}^2 + \alpha_{54i} \text{sen}(\theta_{54i})) \\
 & + \cos(\theta_{1413i})((0.5 \text{sen}(\theta_{1110i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})) \\
 & - 0.5 \text{sen}(\theta_{1110i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}))\omega_{54i}^2 \\
 & - 0.5\alpha_{54i} \cos(\theta_{1110i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 & - 0.5\alpha_{54i} \cos(\theta_{1110i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}))) \\
 & + \cos(\theta_{1211i})(\cos(\theta_{1413i})(-\cos(\theta_{54i})\omega_{54i}^2 - \alpha_{54i} \text{sen}(\theta_{54i})) \\
 & + \text{sen}(\theta_{1413i})((0.5 \text{sen}(\theta_{1110i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})) \\
 & - 0.5 \text{sen}(\theta_{1110i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}))\omega_{54i}^2 \\
 & - 0.5\alpha_{54i} \cos(\theta_{1110i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 & - 0.5\alpha_{54i} \cos(\theta_{1110i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})))) \text{sen}(\beta_{1716i}) \\
 & + \text{sen}(\beta_{1615i})(0.5 \text{sen}(\theta_{1211i} + \theta_{1413i} - \theta_{54i})\omega_{54i}^2 \\
 & + 0.5 \text{sen}(\theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{54i})\omega_{54i}^2 \\
 & - 0.25 \text{sen}(\theta_{1110i} - \theta_{1211i} - \theta_{1413i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})\omega_{54i}^2 \\
 & - 0.25 \text{sen}(\theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})\omega_{54i}^2 \\
 & + 0.25 \text{sen}(\theta_{1110i} - \theta_{1211i} - \theta_{1413i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})\omega_{54i}^2 \\
 & + 0.25 \text{sen}(\theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})\omega_{54i}^2 \\
 & + 0.5\alpha_{54i} \cos(\theta_{1211i} + \theta_{1413i} - \theta_{54i}) - 0.5\alpha_{54i} \cos(\theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{54i}) \\
 & - 0.25\alpha_{54i} \cos(\theta_{1110i} - \theta_{1211i} - \theta_{1413i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 & - 0.25\alpha_{54i} \cos(\theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 & - 0.25\alpha_{54i} \cos(\theta_{1110i} - \theta_{1211i} - \theta_{1413i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 & - 0.25\alpha_{54i} \cos(\theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})) \\
 & \text{sen}(\beta_{1716i}) + \text{sen}(\beta_{1615i})(-0.25 \text{sen}(\theta_{1110i} - \theta_{1211i} - \theta_{1413i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})\omega_{76i}^2 \\
 & - 0.25 \text{sen}(\theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})\omega_{76i}^2 \\
 & + 0.25 \text{sen}(\theta_{1110i} - \theta_{1211i} - \theta_{1413i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})\omega_{76i}^2 \\
 & + 0.25 \text{sen}(\theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})\omega_{76i}^2
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & -0.25\omega_{1110i} \cos(\beta_{1615i} + \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 & -0.25\omega_{1211i} \cos(\beta_{1615i} + \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \text{sen}(\beta_{1716i}) \\
 & + \cos(\beta_{1716i}) \text{sen}(\theta_{54i})(\alpha_{1110i} \cos(\theta_{1110i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})) \\
 & -\omega_{1110i}^2 \text{sen}(\theta_{1110i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) + 2\omega_{76i} \text{sen}(\theta_{54i})((0.5\omega_{1110i} - 0.5\omega_{1211i}) \\
 & \cos(\theta_{1110i} - \theta_{1211i} - \theta_{1413i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) + (0.5\omega_{1110i} + 0.5\omega_{1211i}) \\
 & \cos(\theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})) \text{sen}(\beta_{1615i}) \text{sen}(\beta_{1716i}) \\
 & + \cos(\beta_{1615i})((0.5\omega_{1211i} - 0.5\omega_{1110i}) \text{sen}(\theta_{1110i} - \theta_{1211i} - \theta_{1413i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 & + (0.5\omega_{1110i} + 0.5\omega_{1211i}) \text{sen}(\theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})) \text{sen}(\beta_{1716i}) \\
 & -\omega_{1110i} \cos(\beta_{1716i}) \text{sen}(\theta_{1110i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) + 2\omega_{98i} \text{sen}(\theta_{54i}) \\
 & (((0.5\omega_{1110i} - 0.5\omega_{1211i}) \cos(\theta_{1110i} - \theta_{1211i} - \theta_{1413i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 & + (0.5\omega_{1110i} + 0.5\omega_{1211i}) \cos(\theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})) \\
 & \text{sen}(\beta_{1615i}) \text{sen}(\beta_{1716i}) + \cos(\beta_{1615i})((0.5\omega_{1211i} - 0.5\omega_{1110i}) \\
 & \text{sen}(\theta_{1110i} - \theta_{1211i} - \theta_{1413i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) + (0.5\omega_{1110i} + 0.5\omega_{1211i}) \\
 & \text{sen}(\theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})) \text{sen}(\beta_{1716i}) \\
 & -\omega_{1110i} \cos(\beta_{1716i}) \text{sen}(\theta_{1110i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})) \\
 & + \cos(\beta_{1716i})(-0.5 \cos(\theta_{1110i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})\omega_{54i}^2 \\
 & + 0.5 \cos(\theta_{1110i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})\omega_{54i}^2 + 0.5\alpha_{54i} \text{sen}(\theta_{1110i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 & + 0.5\alpha_{54i} \text{sen}(\theta_{1110i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})) \\
 & + \cos(\beta_{1716i})(-0.5 \cos(\theta_{1110i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})\omega_{76i}^2 \\
 & + 0.5 \cos(\theta_{1110i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})\omega_{76i}^2 - 0.5\alpha_{76i} \text{sen}(\theta_{1110i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 & + 0.5\alpha_{76i} \text{sen}(\theta_{1110i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})) \\
 & + \cos(\beta_{1716i})(-0.5 \cos(\theta_{1110i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})\omega_{98i}^2 \\
 & + 0.5 \cos(\theta_{1110i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})\omega_{98i}^2 - 0.5\alpha_{98i} \text{sen}(\theta_{1110i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 & + 0.5\alpha_{98i} \text{sen}(\theta_{1110i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})) \\
 & + \omega_{54i}\omega_{76i}(0.5 \cos(\beta_{1716i} - \theta_{1110i} - \theta_{54i} - \theta_{76i} - \theta_{98i}) \\
 & + 0.5 \cos(\beta_{1716i} - \theta_{1110i} + \theta_{54i} - \theta_{76i} - \theta_{98i}) \\
 & + 0.5 \cos(\beta_{1716i} + \theta_{1110i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 & + 0.5 \cos(\beta_{1716i} + \theta_{1110i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})) \\
 & -0.25 \text{sen}(\beta_{1615i} - \beta_{1716i} - \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} - \theta_{54i} - \theta_{76i} - \theta_{98i}) \\
 & + 0.25 \text{sen}(\beta_{1615i} + \beta_{1716i} - \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} - \theta_{54i} - \theta_{76i} - \theta_{98i}) \\
 & -0.25 \text{sen}(\beta_{1615i} - \beta_{1716i} - \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{54i} - \theta_{76i} - \theta_{98i}) \\
 & + 0.25 \text{sen}(\beta_{1615i} + \beta_{1716i} - \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{54i} - \theta_{76i} - \theta_{98i}) \\
 & + 0.25 \text{sen}(\beta_{1615i} - \beta_{1716i} + \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 & -0.25 \text{sen}(\beta_{1615i} + \beta_{1716i} + \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 & + 0.25 \text{sen}(\beta_{1615i} - \beta_{1716i} + \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 & -0.25 \text{sen}(\beta_{1615i} + \beta_{1716i} + \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})) \\
 & + \omega_{54i}\omega_{98i}(0.5 \cos(\beta_{1716i} - \theta_{1110i} - \theta_{54i} - \theta_{76i} - \theta_{98i}) \\
 & + 0.5 \cos(\beta_{1716i} - \theta_{1110i} + \theta_{54i} - \theta_{76i} - \theta_{98i}))
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}_{14} = & \text{sen}(\theta_{54i})(\cos(\theta_{76i})(150. \cos(\theta_{98i}) + 150) \\
 & - 150. \text{sen}(\theta_{76i}) \text{sen}(\theta_{98i}) + 50)\omega_{54i}^2 + 2(\cos(\theta_{54i})(\omega_{1211i}(57.75 \cos(\theta_{1413i}) \\
 & + 100.) \cos(\theta_{1110i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \text{sen}(\theta_{1211i}) + ((28.875\omega_{1211i} - 28.875\omega_{1110i}) \\
 & \cos(\theta_{1110i} - \theta_{1211i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) + (28.875\omega_{1110i} + 28.875\omega_{1211i}) \\
 & \cos(\theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})) \text{sen}(\theta_{1413i})) \\
 & - 57.75\omega_{1211i} \text{sen}(\theta_{1211i}) \text{sen}(\theta_{1413i}) \text{sen}(\theta_{54i}) \\
 & + \cos(\theta_{1211i})(57.75 \cos(\theta_{1413i}) + 100.) (\omega_{1211i} \text{sen}(\theta_{54i}) \\
 & + \omega_{1110i} \cos(\theta_{54i}) \text{sen}(\theta_{1110i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})) \omega_{54i} \\
 & + 2\omega_{98i}(\cos(\theta_{54i})(150 \cos(\theta_{98i}) \text{sen}(\theta_{76i}) \\
 & + 150 \cos(\theta_{76i}) \text{sen}(\theta_{98i})) + \cos(\theta_{1211i})(57.75 \cos(\theta_{1413i}) + 100) \\
 & \cos(\theta_{54i}) \text{sen}(\theta_{1110i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 & + \text{sen}(\theta_{1211i}) \text{sen}(\theta_{1413i})(-28.875 \text{sen}(\theta_{1110i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 & - 28.875 \text{sen}(\theta_{1110i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})) \omega_{54i} + 2\omega_{76i}(\cos(\theta_{54i}) \\
 & ((150. \cos(\theta_{98i}) + 150.) \text{sen}(\theta_{76i}) + 150 \cos(\theta_{76i}) \text{sen}(\theta_{98i})) \\
 & + \cos(\theta_{1211i})(57.75 \cos(\theta_{1413i}) + 100.) \cos(\theta_{54i}) \text{sen}(\theta_{1110i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 & + \text{sen}(\theta_{1211i}) \text{sen}(\theta_{1413i})(-28.875 \text{sen}(\theta_{1110i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 & - 28.875 \text{sen}(\theta_{1110i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})) \omega_{54i} \\
 & + \omega_{1413i}(-57.75 \text{sen}(\theta_{1211i} + \theta_{1413i} - \theta_{54i}) \\
 & + 57.75 \text{sen}(\theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{54i}) \\
 & - 28.875 \text{sen}(\theta_{1110i} - \theta_{1211i} - \theta_{1413i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 & + 28.875 \text{sen}(\theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 & - 28.875 \text{sen}(\theta_{1110i} - \theta_{1211i} - \theta_{1413i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 & + 28.875 \text{sen}(\theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})) \omega_{54i} \\
 & + 57.75(\cos(\theta_{1413i})\omega_{1413i}^2 + \alpha_{1413i} \text{sen}(\theta_{1413i}))(\cos(\theta_{54i}) \text{sen}(\theta_{1211i}) \\
 & + \cos(\theta_{1211i}) \cos(\theta_{1110i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \text{sen}(\theta_{54i})) - 57.75(\alpha_{1413i} \cos(\theta_{1413i}) \\
 & - \omega_{1413i}^2 \text{sen}(\theta_{1413i}))(1. \cos(\theta_{1211i}) \cos(\theta_{54i}) \\
 & - \cos(\theta_{1110i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \text{sen}(\theta_{1211i}) \text{sen}(\theta_{54i})) \\
 & + 2(\omega_{1413i} \cos(\theta_{1413i})(57.75\omega_{1211i} \cos(\theta_{54i}) \text{sen}(\theta_{1211i}) \\
 & + ((28.875\omega_{1211i} - 28.875\omega_{1110i}) \cos(\theta_{1110i} - \theta_{1211i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 & + (28.875\omega_{1110i} + 28.875\omega_{1211i}) \cos(\theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})) \\
 & \text{sen}(\theta_{54i})) + \omega_{1413i} \text{sen}(\theta_{1413i})(\cos(\theta_{1211i})(57.75\omega_{1211i} \cos(\theta_{54i}) \\
 & - 28.875\omega_{1110i} \cos(\theta_{1110i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 & + 28.875\omega_{1110i} \cos(\theta_{1110i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})) \\
 & - 57.75\omega_{1211i} \cos(\theta_{1110i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \text{sen}(\theta_{1211i}) \text{sen}(\theta_{54i}))) \\
 & + \alpha_{54i} \cos(\theta_{54i})(\cos(\theta_{76i})(-150. \cos(\theta_{98i}) - 150) \\
 & + 150 \text{sen}(\theta_{76i}) \text{sen}(\theta_{98i}) - 50.) + \text{sen}(\theta_{54i})(\cos(\theta_{76i})(150. \cos(\theta_{98i})\omega_{76i}^2 \\
 & + 150.\omega_{76i}^2 + 150.\alpha_{76i} \text{sen}(\theta_{98i})) + \text{sen}(\theta_{76i})(-150. \text{sen}(\theta_{98i})\omega_{76i}^2 \\
 & + 150.\alpha_{76i} + 150.\alpha_{76i} \cos(\theta_{98i}))) - 57.75 \text{sen}(\theta_{1413i})(- \cos(\theta_{54i})
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& (\cos(\theta_{1211i})\omega_{1211i}^2 + \alpha_{1211i} \text{sen}(\theta_{1211i})) \\
& + (\cos(\theta_{1110i})(2\omega_{1110i}\omega_{1211i} \cos(\theta_{1211i}) + \alpha_{1110i} \text{sen}(\theta_{1211i})) \\
& + \text{sen}(\theta_{1110i})(\alpha_{1211i} \cos(\theta_{1211i}) - (\omega_{1110i}^2 + \omega_{1211i}^2) \text{sen}(\theta_{1211i}))) \\
& \text{sen}(\theta_{54i})(\cos(\theta_{98i}) \text{sen}(\theta_{76i}) + \cos(\theta_{76i}) \text{sen}(\theta_{98i})) \\
& + (\text{sen}(\theta_{1110i})(2.\omega_{1110i}\omega_{1211i} \cos(\theta_{1211i}) + \alpha_{1110i} \text{sen}(\theta_{1211i})) \\
& + \cos(\theta_{1110i})((\omega_{1110i}^2 + \omega_{1211i}^2) \text{sen}(\theta_{1211i}) \\
& - \alpha_{1211i} \cos(\theta_{1211i}))) \text{sen}(\theta_{54i})(\cos(\theta_{76i}) \cos(\theta_{98i}) \\
& - \text{sen}(\theta_{76i}) \text{sen}(\theta_{98i}))) + (57.75 \cos(\theta_{1413i}) + 100)(-\cos(\theta_{54i}) \\
& (\alpha_{1211i} \cos(\theta_{1211i}) - 1.\omega_{1211i}^2 \text{sen}(\theta_{1211i})) \\
& + (\cos(\theta_{1110i})(\alpha_{1110i} \cos(\theta_{1211i}) - 2\omega_{1110i}\omega_{1211i} \text{sen}(\theta_{1211i})) \\
& - \text{sen}(\theta_{1110i})((\omega_{1110i}^2 + \omega_{1211i}^2) \cos(\theta_{1211i}) + \alpha_{1211i} \text{sen}(\theta_{1211i}))) \\
& \text{sen}(\theta_{54i})(\cos(\theta_{98i}) \text{sen}(\theta_{76i}) + \cos(\theta_{76i}) \text{sen}(\theta_{98i})) \\
& + (\cos(\theta_{1110i})((\omega_{1110i}^2 + \omega_{1211i}^2) \cos(\theta_{1211i}) \\
& + \alpha_{1211i} \text{sen}(\theta_{1211i})) + \text{sen}(\theta_{1110i})(\alpha_{1110i} \cos(\theta_{1211i}) \\
& - 2.\omega_{1110i}\omega_{1211i} \text{sen}(\theta_{1211i}))) \text{sen}(\theta_{54i})(\cos(\theta_{76i}) \cos(\theta_{98i}) \\
& - \text{sen}(\theta_{76i}) \text{sen}(\theta_{98i}))) + (57.75 \cos(\theta_{1413i}) + 100)(\text{sen}(\theta_{1211i}) \\
& (\cos(\theta_{54i})\omega_{54i}^2 + \alpha_{54i} \text{sen}(\theta_{54i})) + \cos(\theta_{1211i}) \text{sen}(\theta_{1110i})(\omega_{54i}^2 \text{sen}(\theta_{54i}) \\
& - \alpha_{54i} \cos(\theta_{54i}))(-\cos(\theta_{98i}) \text{sen}(\theta_{76i}) - \cos(\theta_{76i}) \text{sen}(\theta_{98i})) \\
& + \cos(\theta_{1110i}) \cos(\theta_{1211i})(\omega_{54i}^2 \text{sen}(\theta_{54i}) \\
& - \alpha_{54i} \cos(\theta_{54i}))(\cos(\theta_{76i}) \cos(\theta_{98i}) - \text{sen}(\theta_{76i}) \text{sen}(\theta_{98i}))) \\
& + \text{sen}(\theta_{54i})(150. \cos(\theta_{76i} + \theta_{98i})\omega_{98i}^2 + 150\alpha_{98i} \text{sen}(\theta_{76i} + \theta_{98i})) \\
& + 2\omega_{76i} \text{sen}(\theta_{54i})((57.75 \cos(\theta_{1413i}) \\
& + 100)((\omega_{1110i} \cos(\theta_{1110i}) \cos(\theta_{1211i}) - \omega_{1211i} \text{sen}(\theta_{1110i}) \text{sen}(\theta_{1211i})) \\
& (\cos(\theta_{76i}) \cos(\theta_{98i}) - \text{sen}(\theta_{76i}) \text{sen}(\theta_{98i}))) \\
& - (\omega_{1110i} \cos(\theta_{1211i}) \text{sen}(\theta_{1110i}) + \omega_{1211i} \cos(\theta_{1110i}) \text{sen}(\theta_{1211i})) \\
& (\cos(\theta_{98i}) \text{sen}(\theta_{76i}) + \cos(\theta_{76i}) \text{sen}(\theta_{98i}))) - 57.75 \text{sen}(\theta_{1413i}) \\
& ((0.5\omega_{1211i} - 0.5\omega_{1110i}) \text{sen}(\theta_{1110i} - \theta_{1211i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
& + (0.5\omega_{1110i} + 0.5\omega_{1211i}) \text{sen}(\theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}))) \\
& + 2\omega_{98i} \text{sen}(\theta_{54i})((57.75 \cos(\theta_{1413i}) + 100)((\omega_{1110i} \cos(\theta_{1110i}) \\
& \cos(\theta_{1211i}) - \omega_{1211i} \text{sen}(\theta_{1110i}) \text{sen}(\theta_{1211i}))(\cos(\theta_{76i}) \cos(\theta_{98i}) \\
& - \text{sen}(\theta_{76i}) \text{sen}(\theta_{98i})) - (\omega_{1110i} \cos(\theta_{1211i}) \text{sen}(\theta_{1110i}) \\
& + \omega_{1211i} \cos(\theta_{1110i}) \text{sen}(\theta_{1211i}))(1. \cos(\theta_{98i}) \text{sen}(\theta_{76i}) \\
& + \cos(\theta_{76i}) \text{sen}(\theta_{98i}))) - 57.75 \text{sen}(\theta_{1413i})((0.5\omega_{1211i} - 0.5\omega_{1110i}) \\
& \text{sen}(\theta_{1110i} - \theta_{1211i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) + (0.5\omega_{1110i} + 0.5\omega_{1211i}) \\
& \text{sen}(\theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}))) \\
& - 57.75 \text{sen}(\theta_{1413i})(\cos(\theta_{1211i})(-\cos(\theta_{54i})\omega_{54i}^2 - \alpha_{54i} \text{sen}(\theta_{54i})) \\
& + \text{sen}(\theta_{1211i})((0.5 \text{sen}(\theta_{1110i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
& - 0.5 \text{sen}(\theta_{1110i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}))\omega_{54i}^2 \\
& - 0.5\alpha_{54i} \cos(\theta_{1110i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
& - 0.5\alpha_{54i} \cos(\theta_{1110i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \cos(\theta_{1211i})(57.75 \cos(\theta_{1413i}) + 100) \\
 & ((0.5 \operatorname{sen}(\theta_{1110i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) - 0.5 \operatorname{sen}(\theta_{1110i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}))\omega_{76i}^2 \\
 & + 0.5\alpha_{76i} \cos(\theta_{1110i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 & - 0.5\alpha_{76i} \cos(\theta_{1110i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})) - 57.75 \operatorname{sen}(\theta_{1211i}) \operatorname{sen}(\theta_{1413i}) \\
 & ((0.5 \operatorname{sen}(\theta_{1110i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) - 0.5 \operatorname{sen}(\theta_{1110i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}))\omega_{76i}^2 \\
 & + 0.5\alpha_{76i} \cos(\theta_{1110i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 & - 0.5\alpha_{76i} \cos(\theta_{1110i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})) + \cos(\theta_{1211i})(57.75 \cos(\theta_{1413i}) \\
 & + 100)((0.5 \operatorname{sen}(\theta_{1110i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 & - 0.5 \operatorname{sen}(\theta_{1110i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}))\omega_{98i}^2 \\
 & + 0.5\alpha_{98i} \cos(\theta_{1110i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 & - 0.5\alpha_{98i} \cos(\theta_{1110i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})) \\
 & - 57.75 \operatorname{sen}(\theta_{1211i}) \operatorname{sen}(\theta_{1413i})((0.5 \operatorname{sen}(\theta_{1110i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 & - 0.5 \operatorname{sen}(\theta_{1110i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}))\omega_{98i}^2 + 0.5\alpha_{98i} \cos(\theta_{1110i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 & - 0.5\alpha_{98i} \cos(\theta_{1110i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})) \\
 & + 2\omega_{76i}\omega_{98i}(\operatorname{sen}(\theta_{54i})(150. \cos(\theta_{76i}) \cos(\theta_{98i}) - 150. \operatorname{sen}(\theta_{76i}) \operatorname{sen}(\theta_{98i})) \\
 & + \cos(\theta_{1211i})(57.75 \cos(\theta_{1413i}) + 100)(0.5 \operatorname{sen}(\theta_{1110i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 & - 0.5 \operatorname{sen}(\theta_{1110i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})) + 28.875 \operatorname{sen}(\theta_{1211i}) \operatorname{sen}(\theta_{1413i}) \\
 & (\operatorname{sen}(\theta_{1110i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) - \operatorname{sen}(\theta_{1110i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}))) \\
 & + \omega_{1413i}\omega_{76i}(28.875 \operatorname{sen}(\theta_{1110i} - \theta_{1211i} - \theta_{1413i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 & - 28.875 \operatorname{sen}(\theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 & - 28.875 \operatorname{sen}(\theta_{1110i} - \theta_{1211i} - \theta_{1413i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 & + 28.875 \operatorname{sen}(\theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})) \\
 & + \omega_{1413i}\omega_{98i}(28.875 \operatorname{sen}(\theta_{1110i} - \theta_{1211i} - \theta_{1413i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 & - 28.875 \operatorname{sen}(\theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 & - 28.875 \operatorname{sen}(\theta_{1110i} - \theta_{1211i} - \theta_{1413i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 & + 28.875 \operatorname{sen}(\theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}))
 \end{aligned}$$











$$\begin{aligned}
& +\theta_{76i} + \theta_{98i}) + 0.5\omega_{1211i}\omega_{76i} \text{sen}(\beta_{1615i} - \beta_{1716i} + \theta_{1110i} + \theta_{1211i} \\
& +\theta_{1413i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) + 0.5\omega_{1413i}\omega_{76i} \text{sen}(\beta_{1615i} - \beta_{1716i} + \theta_{1110i} \\
& +\theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) + 0.5\omega_{1211i}\omega_{98i} \text{sen}(\beta_{1615i} - \beta_{1716i} \\
& +\theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) + 0.5\omega_{1413i}\omega_{98i} \text{sen}(\beta_{1615i} \\
& -\beta_{1716i} + \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
& +0.5\omega_{76i}\omega_{98i} \text{sen}(\beta_{1615i} - \beta_{1716i} + \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
& -0.25\omega_{1211i}^2 \text{sen}(\beta_{1615i} + \beta_{1716i} + \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
& -0.25\omega_{1413i}^2 \text{sen}(\beta_{1615i} + \beta_{1716i} + \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
& -0.25\omega_{76i}^2 \text{sen}(\beta_{1615i} + \beta_{1716i} + \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
& -0.25\omega_{98i}^2 \text{sen}(\beta_{1615i} + \beta_{1716i} + \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
& -0.5\omega_{1211i}\omega_{1413i} \text{sen}(\beta_{1615i} + \beta_{1716i} + \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
& -0.5\omega_{1211i}\omega_{76i} \text{sen}(\beta_{1615i} + \beta_{1716i} + \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
& -0.5\omega_{1413i}\omega_{76i} \text{sen}(\beta_{1615i} + \beta_{1716i} + \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
& -0.5\omega_{1211i}\omega_{98i} \text{sen}(\beta_{1615i} + \beta_{1716i} + \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
& -0.5\omega_{1413i}\omega_{98i} \text{sen}(\beta_{1615i} + \beta_{1716i} + \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
& -0.5\omega_{76i}\omega_{98i} \text{sen}(\beta_{1615i} + \beta_{1716i} + \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}_{24} = & 50 \operatorname{sen}(\theta_{1110i} - \theta_{1211i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})\omega_{1110i}^2 \\
 & + 50 \operatorname{sen}(\theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})\omega_{1110i}^2 \\
 & + 28.875 \operatorname{sen}(\theta_{1110i} - \theta_{1211i} - \theta_{1413i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})\omega_{1110i}^2 \\
 & + 28.875 \operatorname{sen}(\theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})\omega_{1110i}^2 \\
 & - 100\omega_{1211i} \operatorname{sen}(\theta_{1110i} - \theta_{1211i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})\omega_{1110i} \\
 & + 100\omega_{76i} \operatorname{sen}(\theta_{1110i} - \theta_{1211i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})\omega_{1110i} \\
 & + 100.\omega_{98i} \operatorname{sen}(\theta_{1110i} - \theta_{1211i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})\omega_{1110i} \\
 & + 100.\omega_{1211i} \operatorname{sen}(\theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})\omega_{1110i} \\
 & + 100.\omega_{76i} \operatorname{sen}(\theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})\omega_{1110i} \\
 & + 100.\omega_{98i} \operatorname{sen}(\theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})\omega_{1110i} \\
 & - 57.75\omega_{1211i} \operatorname{sen}(\theta_{1110i} - \theta_{1211i} - \theta_{1413i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})\omega_{1110i} \\
 & - 57.75\omega_{1413i} \operatorname{sen}(\theta_{1110i} - \theta_{1211i} - \theta_{1413i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})\omega_{1110i} \\
 & + 57.75\omega_{76i} \operatorname{sen}(\theta_{1110i} - \theta_{1211i} - \theta_{1413i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})\omega_{1110i} \\
 & + 57.75\omega_{98i} \operatorname{sen}(\theta_{1110i} - \theta_{1211i} - \theta_{1413i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})\omega_{1110i} \\
 & + 57.75\omega_{1211i} \operatorname{sen}(\theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})\omega_{1110i} \\
 & + 57.75\omega_{1413i} \operatorname{sen}(\theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})\omega_{1110i} \\
 & + 57.75\omega_{76i} \operatorname{sen}(\theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})\omega_{1110i} \\
 & + 57.75\omega_{98i} \operatorname{sen}(\theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})\omega_{1110i} \\
 & - 150\alpha_{76i} \cos(\theta_{76i}) + (-150.\alpha_{76i} - 150.\alpha_{98i}) \cos(\theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 & - 50\alpha_{1110i} \cos(\theta_{1110i} - \theta_{1211i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 & + 50\alpha_{1211i} \cos(\theta_{1110i} - \theta_{1211i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 & - 50\alpha_{76i} \cos(\theta_{1110i} - \theta_{1211i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 & - 50\alpha_{98i} \cos(\theta_{1110i} - \theta_{1211i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 & - 50\alpha_{1110i} \cos(\theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 & - 50\alpha_{1211i} \cos(\theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 & - 50\alpha_{76i} \cos(\theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 & - 50\alpha_{98i} \cos(\theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 & - 28.875\alpha_{1110i} \cos(\theta_{1110i} - \theta_{1211i} - \theta_{1413i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 & + 28.875\alpha_{1211i} \cos(\theta_{1110i} - \theta_{1211i} - \theta_{1413i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 & + 28.875\alpha_{1413i} \cos(\theta_{1110i} - \theta_{1211i} - \theta_{1413i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 & - 28.875\alpha_{76i} \cos(\theta_{1110i} - \theta_{1211i} - \theta_{1413i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 & - 28.875\alpha_{98i} \cos(\theta_{1110i} - \theta_{1211i} - \theta_{1413i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 & - 28.875\alpha_{1110i} \cos(\theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 & - 28.875\alpha_{1211i} \cos(\theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 & - 28.875\alpha_{1413i} \cos(\theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 & - 28.875\alpha_{76i} \cos(\theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 & - 28.875\alpha_{98i} \cos(\theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 & + 150\omega_{76i}^2 \operatorname{sen}(\theta_{76i}) + 150\omega_{76i}^2 \operatorname{sen}(\theta_{76i} + \theta_{98i}) + 150\omega_{98i}^2 \operatorname{sen}(\theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 & + 300\omega_{76i}\omega_{98i} \operatorname{sen}(\theta_{76i} + \theta_{98i}) + 50\omega_{1211i}^2 \operatorname{sen}(\theta_{1110i} - \theta_{1211i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}_{31} = & \cos(\beta_{1716i}) \operatorname{sen}(\beta_{1615i}) ((-\omega_{1413i}^2 \cos(\theta_{1413i}) \\
 & - \alpha_{1413i} \operatorname{sen}(\theta_{1413i})) (-\operatorname{sen}(\theta_{1211i}) \operatorname{sen}(\theta_{54i}) \\
 & + \cos(\theta_{1211i}) \cos(\theta_{54i}) \operatorname{sen}(\theta_{1110i}) (-\cos(\theta_{98i}) \operatorname{sen}(\theta_{76i}) \\
 & - \cos(\theta_{76i}) \operatorname{sen}(\theta_{98i})) + \cos(\theta_{1110i}) \cos(\theta_{1211i}) \cos(\theta_{54i}) \\
 & (1. \cos(\theta_{76i}) \cos(\theta_{98i}) - 1. \operatorname{sen}(\theta_{76i}) \operatorname{sen}(\theta_{98i}))) \\
 & + (\omega_{1413i}^2 \operatorname{sen}(\theta_{1413i}) - \alpha_{1413i} \cos(\theta_{1413i})) (1. \cos(\theta_{1211i}) \operatorname{sen}(\theta_{54i}) \\
 & + \cos(\theta_{54i}) \operatorname{sen}(\theta_{1110i}) \operatorname{sen}(\theta_{1211i}) (-1. \cos(\theta_{98i}) \operatorname{sen}(\theta_{76i}) \\
 & - 1. \cos(\theta_{76i}) \operatorname{sen}(\theta_{98i})) + \cos(\theta_{1110i}) \cos(\theta_{54i}) \operatorname{sen}(\theta_{1211i}) \\
 & (1. \cos(\theta_{76i}) \cos(\theta_{98i}) - 1. \operatorname{sen}(\theta_{76i}) \operatorname{sen}(\theta_{98i}))) \\
 & + \cos(\beta_{1615i}) \cos(\beta_{1716i}) ((\alpha_{1413i} \cos(\theta_{1413i}) - \omega_{1413i}^2 \operatorname{sen}(\theta_{1413i})) \\
 & (-1. \operatorname{sen}(\theta_{1211i}) \operatorname{sen}(\theta_{54i}) + \cos(\theta_{1211i}) \cos(\theta_{54i}) \operatorname{sen}(\theta_{1110i}) \\
 & (-1. \cos(\theta_{98i}) \operatorname{sen}(\theta_{76i}) - 1. \cos(\theta_{76i}) \operatorname{sen}(\theta_{98i})) + \cos(\theta_{1110i}) \\
 & \cos(\theta_{1211i}) \cos(\theta_{54i}) (1. \cos(\theta_{76i}) \cos(\theta_{98i}) - 1. \operatorname{sen}(\theta_{76i}) \operatorname{sen}(\theta_{98i}))) \\
 & + (-\omega_{1413i}^2 \cos(\theta_{1413i}) - \alpha_{1413i} \operatorname{sen}(\theta_{1413i})) (1. \cos(\theta_{1211i}) \operatorname{sen}(\theta_{54i}) \\
 & + \cos(\theta_{54i}) \operatorname{sen}(\theta_{1110i}) \operatorname{sen}(\theta_{1211i}) (-1. \cos(\theta_{98i}) \operatorname{sen}(\theta_{76i}) \\
 & - 1. \cos(\theta_{76i}) \operatorname{sen}(\theta_{98i})) + \cos(\theta_{1110i}) \cos(\theta_{54i}) \operatorname{sen}(\theta_{1211i}) (1. \cos(\theta_{76i}) \cos(\theta_{98i}) \\
 & - 1. \operatorname{sen}(\theta_{76i}) \operatorname{sen}(\theta_{98i}))) + \cos(\beta_{1615i}) \cos(\beta_{1716i}) (\cos(\theta_{1413i}) \\
 & (-1. (\cos(\theta_{1211i}) \omega_{1211i}^2 + \alpha_{1211i} \operatorname{sen}(\theta_{1211i})) \operatorname{sen}(\theta_{54i}) \\
 & + \cos(\theta_{54i}) (\cos(\theta_{1110i}) (2\omega_{1110i} \omega_{1211i} \cos(\theta_{1211i}) \\
 & + \alpha_{1110i} \operatorname{sen}(\theta_{1211i})) + \operatorname{sen}(\theta_{1110i}) (\alpha_{1211i} \cos(\theta_{1211i}) - (\omega_{1110i}^2 + \omega_{1211i}^2) \\
 & \operatorname{sen}(\theta_{1211i}))) (-1. \cos(\theta_{98i}) \operatorname{sen}(\theta_{76i}) - 1. \cos(\theta_{76i}) \operatorname{sen}(\theta_{98i})) \\
 & - 1. \cos(\theta_{54i}) (\operatorname{sen}(\theta_{1110i}) (2. \omega_{1110i} \omega_{1211i} \cos(\theta_{1211i}) + \alpha_{1110i} \operatorname{sen}(\theta_{1211i})) \\
 & + \cos(\theta_{1110i}) ((\omega_{1110i}^2 + \omega_{1211i}^2) \operatorname{sen}(\theta_{1211i}) - 1. \alpha_{1211i} \cos(\theta_{1211i}))) \\
 & (1. \cos(\theta_{76i}) \cos(\theta_{98i}) - 1. \operatorname{sen}(\theta_{76i}) \operatorname{sen}(\theta_{98i}))) + \operatorname{sen}(\theta_{1413i}) \\
 & (-1. (\alpha_{1211i} \cos(\theta_{1211i}) - 1. \omega_{1211i}^2 \operatorname{sen}(\theta_{1211i})) \operatorname{sen}(\theta_{54i}) \\
 & + \cos(\theta_{54i}) (\cos(\theta_{1110i}) (\alpha_{1110i} \cos(\theta_{1211i}) - 2\omega_{1110i} \omega_{1211i} \operatorname{sen}(\theta_{1211i})) \\
 & - \operatorname{sen}(\theta_{1110i}) ((\omega_{1110i}^2 + \omega_{1211i}^2) \cos(\theta_{1211i}) \\
 & + \alpha_{1211i} \operatorname{sen}(\theta_{1211i}))) (-1. \cos(\theta_{98i}) \operatorname{sen}(\theta_{76i}) - 1. \cos(\theta_{76i}) \operatorname{sen}(\theta_{98i})) \\
 & - 1. \cos(\theta_{54i}) (\cos(\theta_{1110i}) ((\omega_{1110i}^2 + \omega_{1211i}^2) \cos(\theta_{1211i}) \\
 & + \alpha_{1211i} \operatorname{sen}(\theta_{1211i})) + \operatorname{sen}(\theta_{1110i}) (\alpha_{1110i} \cos(\theta_{1211i}) \\
 & - 2. \omega_{1110i} \omega_{1211i} \operatorname{sen}(\theta_{1211i}))) (1. \cos(\theta_{76i}) \cos(\theta_{98i}) \\
 & - 1. \operatorname{sen}(\theta_{76i}) \operatorname{sen}(\theta_{98i}))) + \cos(\beta_{1716i}) \operatorname{sen}(\beta_{1615i}) (\cos(\theta_{1413i}) \\
 & (-1. (\alpha_{1211i} \cos(\theta_{1211i}) - 1. \omega_{1211i}^2 \operatorname{sen}(\theta_{1211i})) \operatorname{sen}(\theta_{54i}) \\
 & + \cos(\theta_{54i}) (\cos(\theta_{1110i}) (\alpha_{1110i} \cos(\theta_{1211i}) - 2\omega_{1110i} \omega_{1211i} \operatorname{sen}(\theta_{1211i})) \\
 & - \operatorname{sen}(\theta_{1110i}) ((\omega_{1110i}^2 + \omega_{1211i}^2) \cos(\theta_{1211i}) \\
 & + \alpha_{1211i} \operatorname{sen}(\theta_{1211i}))) (-1. \cos(\theta_{98i}) \operatorname{sen}(\theta_{76i}) - 1. \cos(\theta_{76i}) \operatorname{sen}(\theta_{98i})) \\
 & - 1. \cos(\theta_{54i}) (\cos(\theta_{1110i}) ((\omega_{1110i}^2 + \omega_{1211i}^2) \cos(\theta_{1211i}) \\
 & + \alpha_{1211i} \operatorname{sen}(\theta_{1211i})) + \operatorname{sen}(\theta_{1110i}) (\alpha_{1110i} \cos(\theta_{1211i})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2.\omega_{1110i}\omega_{1211i} \text{sen}(\theta_{1211i})))(1. \cos(\theta_{76i}) \cos(\theta_{98i}) \\
& -1. \text{sen}(\theta_{76i}) \text{sen}(\theta_{98i}))) - \text{sen}(\theta_{1413i})(-1.(\cos(\theta_{1211i})\omega_{1211i}^2 + \alpha_{1211i} \text{sen}(\theta_{1211i})) \\
& \text{sen}(\theta_{54i}) + \cos(\theta_{54i})(\cos(\theta_{1110i})(2\omega_{1110i}\omega_{1211i} \cos(\theta_{1211i}) + \alpha_{1110i} \text{sen}(\theta_{1211i})) \\
& + \text{sen}(\theta_{1110i})(\alpha_{1211i} \cos(\theta_{1211i}) - (\omega_{1110i}^2 + \omega_{1211i}^2) \text{sen}(\theta_{1211i}))) \\
& (-1. \cos(\theta_{98i}) \text{sen}(\theta_{76i}) - 1. \cos(\theta_{76i}) \text{sen}(\theta_{98i})) - 1. \cos(\theta_{54i})(\text{sen}(\theta_{1110i}) \\
& (2.\omega_{1110i}\omega_{1211i} \cos(\theta_{1211i}) + \alpha_{1110i} \text{sen}(\theta_{1211i})) \\
& + \cos(\theta_{1110i})((\omega_{1110i}^2 + \omega_{1211i}^2) \text{sen}(\theta_{1211i}) - 1.\alpha_{1211i} \cos(\theta_{1211i}))) \\
& (1. \cos(\theta_{76i}) \cos(\theta_{98i}) - 1. \text{sen}(\theta_{76i}) \text{sen}(\theta_{98i}))) \\
& +1. \cos(\theta_{54i}) \text{sen}(\beta_{1716i})(1.\alpha_{1110i} \cos(\theta_{1110i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
& -1.\omega_{1110i}^2 \text{sen}(\theta_{1110i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})) + 2\omega_{76i} \cos(\theta_{54i})(\cos(\beta_{1716i}) \\
& ((0.5\omega_{1211i} - 0.5\omega_{1110i}) \text{sen}(\beta_{1615i} - \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} - \theta_{76i} - \theta_{98i}) \\
& + (-0.5\omega_{1110i} - 0.5\omega_{1211i}) \text{sen}(\beta_{1615i} + \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})) \\
& -1.\omega_{1110i} \text{sen}(\beta_{1716i}) \text{sen}(\theta_{1110i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})) \\
& +2\omega_{98i} \cos(\theta_{54i})(\cos(\beta_{1716i}))((0.5\omega_{1211i} - 0.5\omega_{1110i}) \\
& \text{sen}(\beta_{1615i} - \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} - \theta_{76i} - \theta_{98i}) + (-0.5\omega_{1110i} - 0.5\omega_{1211i}) \\
& \text{sen}(\beta_{1615i} + \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})) - 1.\omega_{1110i} \text{sen}(\beta_{1716i}) \\
& \text{sen}(\theta_{1110i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})) - \text{sen}(\beta_{1716i})((0.5 \text{sen}(\theta_{1110i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
& +0.5 \text{sen}(\theta_{1110i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}))\omega_{54i}^2 + 0.5\alpha_{54i} \cos(\theta_{1110i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
& -0.5\alpha_{54i} \cos(\theta_{1110i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})) \\
& - \text{sen}(\beta_{1716i})((0.5 \text{sen}(\theta_{1110i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
& +0.5 \text{sen}(\theta_{1110i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}))\omega_{76i}^2 \\
& -0.5\alpha_{76i} \cos(\theta_{1110i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
& -0.5\alpha_{76i} \cos(\theta_{1110i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})) \\
& - \text{sen}(\beta_{1716i})((0.5 \text{sen}(\theta_{1110i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
& +0.5 \text{sen}(\theta_{1110i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}))\omega_{98i}^2 \\
& -0.5\alpha_{98i} \cos(\theta_{1110i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) - 0.5\alpha_{98i} \cos(\theta_{1110i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})) \\
& + \cos(\beta_{1716i}) \text{sen}(\beta_{1615i})(0.5 \cos(\theta_{1211i} + \theta_{1413i} - \theta_{54i})\omega_{54i}^2 \\
& -0.5 \cos(\theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{54i})\omega_{54i}^2 \\
& -0.25 \cos(\theta_{1110i} - \theta_{1211i} - \theta_{1413i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})\omega_{54i}^2 \\
& -0.25 \cos(\theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})\omega_{54i}^2 \\
& -0.25 \cos(\theta_{1110i} - \theta_{1211i} - \theta_{1413i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})\omega_{54i}^2 \\
& -0.25 \cos(\theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})\omega_{54i}^2 \\
& -0.5\alpha_{54i} \text{sen}(\theta_{1211i} + \theta_{1413i} - \theta_{54i}) - 0.5\alpha_{54i} \text{sen}(\theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{54i}) \\
& +0.25\alpha_{54i} \text{sen}(\theta_{1110i} - \theta_{1211i} - \theta_{1413i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
& +0.25\alpha_{54i} \text{sen}(\theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
& -0.25\alpha_{54i} \text{sen}(\theta_{1110i} - \theta_{1211i} - \theta_{1413i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})
\end{aligned}$$







$$\begin{aligned}
& -0.25 \operatorname{sen}(\beta_{1615i} - \beta_{1716i} - \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} - \theta_{54i} - \theta_{76i} - \theta_{98i}) \\
& -0.25 \operatorname{sen}(\beta_{1615i} + \beta_{1716i} - \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} - \theta_{54i} - \theta_{76i} - \theta_{98i}) \\
& +0.25 \operatorname{sen}(\beta_{1615i} - \beta_{1716i} - \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{54i} - \theta_{76i} - \theta_{98i}) \\
& +0.25 \operatorname{sen}(\beta_{1615i} + \beta_{1716i} - \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{54i} - \theta_{76i} - \theta_{98i}) \\
& +0.25 \operatorname{sen}(\beta_{1615i} - \beta_{1716i} + \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
& +0.25 \operatorname{sen}(\beta_{1615i} + \beta_{1716i} + \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
& -0.25 \operatorname{sen}(\beta_{1615i} - \beta_{1716i} + \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
& -0.25 \operatorname{sen}(\beta_{1615i} + \beta_{1716i} + \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})
\end{aligned}$$









$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_{33} = & \omega_{1413i}\omega_{76i}(0.25 \cos(\beta_{1615i} - \beta_{1716i} - \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} - \theta_{54i} - \theta_{76i} - \theta_{98i}) \\
& -0.25 \cos(\beta_{1615i} + \beta_{1716i} - \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} - \theta_{54i} - \theta_{76i} - \theta_{98i}) \\
& +0.25 \cos(\beta_{1615i} - \beta_{1716i} - \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{54i} - \theta_{76i} - \theta_{98i}) \\
& -0.25 \cos(\beta_{1615i} + \beta_{1716i} - \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{54i} - \theta_{76i} - \theta_{98i}) \\
& -0.25 \cos(\beta_{1615i} - \beta_{1716i} + \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
& +0.25 \cos(\beta_{1615i} + \beta_{1716i} + \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
& -0.25 \cos(\beta_{1615i} - \beta_{1716i} + \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
& +0.25 \cos(\beta_{1615i} + \beta_{1716i} + \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})) \\
& +\omega_{1413i}\omega_{98i}(0.25 \cos(\beta_{1615i} - \beta_{1716i} - \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} - \theta_{54i} - \theta_{76i} - \theta_{98i}) \\
& -0.25 \cos(\beta_{1615i} + \beta_{1716i} - \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} - \theta_{54i} - \theta_{76i} - \theta_{98i}) \\
& +0.25 \cos(\beta_{1615i} - \beta_{1716i} - \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{54i} - \theta_{76i} - \theta_{98i}) \\
& -0.25 \cos(\beta_{1615i} + \beta_{1716i} - \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{54i} - \theta_{76i} - \theta_{98i}) \\
& -0.25 \cos(\beta_{1615i} - \beta_{1716i} + \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
& +0.25 \cos(\beta_{1615i} + \beta_{1716i} + \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
& -0.25 \cos(\beta_{1615i} - \beta_{1716i} + \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
& +0.25 \cos(\beta_{1615i} + \beta_{1716i} + \theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})) \\
& +2(\omega_{1110i}\omega_{54i} \cos(\beta_{1716i}) \cos(\theta_{1110i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \operatorname{sen}(\theta_{54i}) \\
& +\omega_{54i} \operatorname{sen}(\beta_{1615i}) \operatorname{sen}(\beta_{1716i})(\cos(\theta_{1211i}) \cos(\theta_{1413i}))(-1.\omega_{1211i} \cos(\theta_{54i}) \\
& +0.5\omega_{1110i} \cos(\theta_{1110i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
& -0.5\omega_{1110i} \cos(\theta_{1110i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})) \\
& +\omega_{1211i} \cos(\theta_{54i}) \operatorname{sen}(\theta_{1211i}) \operatorname{sen}(\theta_{1413i}) \\
& +(\omega_{1211i} \cos(\theta_{1413i}) \cos(\theta_{1110i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \operatorname{sen}(\theta_{1211i}) \\
& +((0.5\omega_{1211i} - 0.5\omega_{1110i}) \cos(\theta_{1110i} - \theta_{1211i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
& +(0.5\omega_{1110i} + 0.5\omega_{1211i}) \cos(\theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})) \\
& \operatorname{sen}(\theta_{1413i})) \operatorname{sen}(\theta_{54i})) + \cos(\beta_{1615i}) \operatorname{sen}(\beta_{1716i})(\omega_{54i} \cos(\theta_{1413i}) \\
& (((0.5\omega_{1110i} - 0.5\omega_{1211i}) \cos(\theta_{1110i} - \theta_{1211i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
& +(-0.5\omega_{1110i} - 0.5\omega_{1211i}) \cos(\theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})) \operatorname{sen}(\theta_{54i}) \\
& -\omega_{1211i} \cos(\theta_{54i}) \operatorname{sen}(\theta_{1211i})) + \omega_{54i} \operatorname{sen}(\theta_{1413i})(\cos(\theta_{1211i})(-\omega_{1211i} \cos(\theta_{54i}) \\
& +0.5\omega_{1110i} \cos(\theta_{1110i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) - 0.5\omega_{1110i} \cos(\theta_{1110i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})) \\
& +\omega_{1211i} \cos(\theta_{1110i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \operatorname{sen}(\theta_{1211i}) \operatorname{sen}(\theta_{54i})))) \\
& + \operatorname{sen}(\beta_{1615i}) \operatorname{sen}(\beta_{1716i})((- \omega_{1413i}^2 \cos(\theta_{1413i}) - \alpha_{1413i} \operatorname{sen}(\theta_{1413i}))(- \operatorname{sen}(\theta_{1211i}) \operatorname{sen}(\theta_{54i}) \\
& + \cos(\theta_{1211i}) \cos(\theta_{54i}) \operatorname{sen}(\theta_{1110i})(- \cos(\theta_{98i}) \operatorname{sen}(\theta_{76i}) - \cos(\theta_{76i}) \operatorname{sen}(\theta_{98i})) \\
& + \cos(\theta_{1110i}) \cos(\theta_{1211i}) \cos(\theta_{54i})(\cos(\theta_{76i}) \cos(\theta_{98i}) - \operatorname{sen}(\theta_{76i}) \operatorname{sen}(\theta_{98i}))) \\
& +(\omega_{1413i}^2 \operatorname{sen}(\theta_{1413i}) - \alpha_{1413i} \cos(\theta_{1413i}))(\cos(\theta_{1211i}) \operatorname{sen}(\theta_{54i}) \\
& + \cos(\theta_{54i}) \operatorname{sen}(\theta_{1110i}) \operatorname{sen}(\theta_{1211i})(- \cos(\theta_{98i}) \operatorname{sen}(\theta_{76i}) - \cos(\theta_{76i}) \operatorname{sen}(\theta_{98i})) \\
& + \cos(\theta_{1110i}) \cos(\theta_{54i}) \operatorname{sen}(\theta_{1211i})(\cos(\theta_{76i}) \cos(\theta_{98i}) - \operatorname{sen}(\theta_{76i}) \operatorname{sen}(\theta_{98i})))) \\
& + \cos(\beta_{1615i}) \operatorname{sen}(\beta_{1716i})((\alpha_{1413i} \cos(\theta_{1413i}) - \omega_{1413i}^2 \operatorname{sen}(\theta_{1413i}))(- \operatorname{sen}(\theta_{1211i}) \operatorname{sen}(\theta_{54i}) \\
& + \cos(\theta_{1211i}) \cos(\theta_{54i}) \operatorname{sen}(\theta_{1110i})(- \cos(\theta_{98i}) \operatorname{sen}(\theta_{76i}) - \cos(\theta_{76i}) \operatorname{sen}(\theta_{98i})))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \cos(\theta_{1110i}) \cos(\theta_{1211i}) \cos(\theta_{54i}) (\cos(\theta_{76i}) \cos(\theta_{98i}) - \text{sen}(\theta_{76i}) \text{sen}(\theta_{98i})) \\
 & + (-\omega_{1413i}^2 \cos(\theta_{1413i}) - \alpha_{1413i} \text{sen}(\theta_{1413i})) (1. \cos(\theta_{1211i}) \text{sen}(\theta_{54i}) \\
 & + \cos(\theta_{54i}) \text{sen}(\theta_{1110i}) \text{sen}(\theta_{1211i}) (-\cos(\theta_{98i}) \text{sen}(\theta_{76i}) - \cos(\theta_{76i}) \text{sen}(\theta_{98i})) \\
 & + \cos(\theta_{1110i}) \cos(\theta_{54i}) \text{sen}(\theta_{1211i}) (\cos(\theta_{76i}) \cos(\theta_{98i}) - \text{sen}(\theta_{76i}) \text{sen}(\theta_{98i}))) \\
 & + \cos(\beta_{1615i}) \text{sen}(\beta_{1716i}) (\cos(\theta_{1413i}) (-\cos(\theta_{1211i}) \omega_{1211i}^2 + \alpha_{1211i} \text{sen}(\theta_{1211i})) \text{sen}(\theta_{54i}) \\
 & + \cos(\theta_{54i}) (\cos(\theta_{1110i}) (2\omega_{1110i} \omega_{1211i} \cos(\theta_{1211i}) + \alpha_{1110i} \text{sen}(\theta_{1211i})) \\
 & + \text{sen}(\theta_{1110i}) (\alpha_{1211i} \cos(\theta_{1211i}) - (\omega_{1110i}^2 + \omega_{1211i}^2) \text{sen}(\theta_{1211i}))) (-\cos(\theta_{98i}) \text{sen}(\theta_{76i}) \\
 & - \cos(\theta_{76i}) \text{sen}(\theta_{98i})) - \cos(\theta_{54i}) (\text{sen}(\theta_{1110i}) (2.\omega_{1110i} \omega_{1211i} \cos(\theta_{1211i}) \\
 & + \alpha_{1110i} \text{sen}(\theta_{1211i})) + \cos(\theta_{1110i}) ((\omega_{1110i}^2 + \omega_{1211i}^2) \text{sen}(\theta_{1211i}) \\
 & - \alpha_{1211i} \cos(\theta_{1211i}))) (\cos(\theta_{76i}) \cos(\theta_{98i}) - \text{sen}(\theta_{76i}) \text{sen}(\theta_{98i}))) \\
 & + \text{sen}(\theta_{1413i}) (-\alpha_{1211i} \cos(\theta_{1211i}) - \omega_{1211i}^2 \text{sen}(\theta_{1211i})) \text{sen}(\theta_{54i}) \\
 & + \cos(\theta_{54i}) (\cos(\theta_{1110i}) (\alpha_{1110i} \cos(\theta_{1211i}) - 2\omega_{1110i} \omega_{1211i} \text{sen}(\theta_{1211i})) \\
 & - \text{sen}(\theta_{1110i}) ((\omega_{1110i}^2 + \omega_{1211i}^2) \cos(\theta_{1211i}) \\
 & + \alpha_{1211i} \text{sen}(\theta_{1211i}))) (-\cos(\theta_{98i}) \text{sen}(\theta_{76i}) - \cos(\theta_{76i}) \text{sen}(\theta_{98i})) \\
 & - \cos(\theta_{54i}) (\cos(\theta_{1110i}) ((\omega_{1110i}^2 + \omega_{1211i}^2) \cos(\theta_{1211i}) + \alpha_{1211i} \text{sen}(\theta_{1211i})) \\
 & + \text{sen}(\theta_{1110i}) (\alpha_{1110i} \cos(\theta_{1211i}) - 2.\omega_{1110i} \omega_{1211i} \text{sen}(\theta_{1211i}))) (\cos(\theta_{76i}) \cos(\theta_{98i}) \\
 & - \text{sen}(\theta_{76i}) \text{sen}(\theta_{98i}))) + \text{sen}(\beta_{1615i}) \text{sen}(\beta_{1716i}) (\cos(\theta_{1413i}) (-\alpha_{1211i} \cos(\theta_{1211i}) \\
 & - \omega_{1211i}^2 \text{sen}(\theta_{1211i})) \text{sen}(\theta_{54i}) + \cos(\theta_{54i}) (\cos(\theta_{1110i}) (\alpha_{1110i} \cos(\theta_{1211i}) \\
 & - 2\omega_{1110i} \omega_{1211i} \text{sen}(\theta_{1211i})) - \text{sen}(\theta_{1110i}) ((\omega_{1110i}^2 + \omega_{1211i}^2) \cos(\theta_{1211i}) \\
 & + \alpha_{1211i} \text{sen}(\theta_{1211i}))) (-\cos(\theta_{98i}) \text{sen}(\theta_{76i}) - \cos(\theta_{76i}) \text{sen}(\theta_{98i})) \\
 & - \cos(\theta_{54i}) (\cos(\theta_{1110i}) ((\omega_{1110i}^2 + \omega_{1211i}^2) \cos(\theta_{1211i}) + \alpha_{1211i} \text{sen}(\theta_{1211i})) \\
 & + \text{sen}(\theta_{1110i}) (\alpha_{1110i} \cos(\theta_{1211i}) - 2.\omega_{1110i} \omega_{1211i} \text{sen}(\theta_{1211i}))) (\cos(\theta_{76i}) \cos(\theta_{98i}) \\
 & - \text{sen}(\theta_{76i}) \text{sen}(\theta_{98i}))) - \text{sen}(\theta_{1413i}) (-\cos(\theta_{1211i}) \omega_{1211i}^2 \\
 & + \alpha_{1211i} \text{sen}(\theta_{1211i})) \text{sen}(\theta_{54i}) + \cos(\theta_{54i}) (\cos(\theta_{1110i}) (2\omega_{1110i} \omega_{1211i} \cos(\theta_{1211i}) \\
 & + \alpha_{1110i} \text{sen}(\theta_{1211i})) + \text{sen}(\theta_{1110i}) (\alpha_{1211i} \cos(\theta_{1211i}) \\
 & - (\omega_{1110i}^2 + \omega_{1211i}^2) \text{sen}(\theta_{1211i}))) (-\cos(\theta_{98i}) \text{sen}(\theta_{76i}) - \cos(\theta_{76i}) \text{sen}(\theta_{98i})) \\
 & - \cos(\theta_{54i}) (\text{sen}(\theta_{1110i}) (2.\omega_{1110i} \omega_{1211i} \cos(\theta_{1211i}) + \alpha_{1110i} \text{sen}(\theta_{1211i})) \\
 & + \cos(\theta_{1110i}) ((\omega_{1110i}^2 + \omega_{1211i}^2) \text{sen}(\theta_{1211i}) \\
 & - \alpha_{1211i} \cos(\theta_{1211i}))) (1. \cos(\theta_{76i}) \cos(\theta_{98i}) - \text{sen}(\theta_{76i}) \text{sen}(\theta_{98i}))) \\
 & + \cos(\beta_{1716i}) \cos(\theta_{54i}) (\omega_{1110i}^2 \text{sen}(\theta_{1110i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 & - \alpha_{1110i} \cos(\theta_{1110i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})) + 2\omega_{76i} \cos(\theta_{54i}) (((0.5\omega_{1211i} - 0.5\omega_{1110i}) \\
 & \cos(\theta_{1110i} - \theta_{1211i} - \theta_{1413i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) + (-0.5\omega_{1110i} - 0.5\omega_{1211i}) \\
 & \cos(\theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})) \text{sen}(\beta_{1615i}) \text{sen}(\beta_{1716i}) \\
 & + \cos(\beta_{1615i}) ((0.5\omega_{1110i} - 0.5\omega_{1211i}) \text{sen}(\theta_{1110i} - \theta_{1211i} - \theta_{1413i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 & + (-0.5\omega_{1110i} - 0.5\omega_{1211i}) \text{sen}(\theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})) \text{sen}(\beta_{1716i}) \\
 & + \omega_{1110i} \cos(\beta_{1716i}) \text{sen}(\theta_{1110i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})) \\
 & + 2\omega_{98i} \cos(\theta_{54i}) (((0.5\omega_{1211i} - 0.5\omega_{1110i}) \cos(\theta_{1110i} - \theta_{1211i} - \theta_{1413i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 & + (-0.5\omega_{1110i} - 0.5\omega_{1211i}) \cos(\theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}))
 \end{aligned}$$









$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_{34} = & \omega_{1413i}\omega_{54i}(-57.75 \cos(\theta_{1211i} + \theta_{1413i} - \theta_{54i}) \\
& -57.75 \cos(\theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{54i}) \\
& -28.875 \cos(\theta_{1110i} - \theta_{1211i} - \theta_{1413i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
& +28.875 \cos(\theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
& +28.875 \cos(\theta_{1110i} - \theta_{1211i} - \theta_{1413i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
& -28.875 \cos(\theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})) \\
& +\omega_{1413i}\omega_{76i}(28.875 \cos(\theta_{1110i} - \theta_{1211i} - \theta_{1413i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
& -28.875 \cos(\theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
& +28.875 \cos(\theta_{1110i} - \theta_{1211i} - \theta_{1413i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
& -28.875 \cos(\theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})) \\
& +\omega_{1413i}\omega_{98i}(28.875 \cos(\theta_{1110i} - \theta_{1211i} - \theta_{1413i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
& -28.875 \cos(\theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
& +28.875 \cos(\theta_{1110i} - \theta_{1211i} - \theta_{1413i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
& -28.875 \cos(\theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{1413i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})) \\
& +2(\omega_{54i}(57.75 \cos(\theta_{1413i}) + 100)(\cos(\theta_{1211i}))(-\omega_{1211i} \cos(\theta_{54i}) \\
& +0.5\omega_{1110i} \cos(\theta_{1110i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
& -0.5\omega_{1110i} \cos(\theta_{1110i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})) \\
& +\omega_{1211i} \cos(\theta_{1110i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \text{sen}(\theta_{1211i}) \text{sen}(\theta_{54i})) \\
& -57.75\omega_{54i} \text{sen}(\theta_{1413i})(((0.5\omega_{1110i} - 0.5\omega_{1211i}) \cos(\theta_{1110i} - \theta_{1211i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
& +(-0.5\omega_{1110i} - 0.5\omega_{1211i}) \cos(\theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})) \text{sen}(\theta_{54i}) \\
& -\omega_{1211i} \cos(\theta_{54i}) \text{sen}(\theta_{1211i}))) + \cos(\theta_{54i})\omega_{54i}^2 + \alpha_{54i} \text{sen}(\theta_{54i}) \\
& (\cos(\theta_{76i})(-150. \cos(\theta_{98i}) - 150.) + 150. \text{sen}(\theta_{76i}) \text{sen}(\theta_{98i}) - 50.) \\
& + \cos(\theta_{54i}) \text{sen}(\theta_{76i})(150. \text{sen}(\theta_{98i})\omega_{76i}^2 - 150.\alpha_{76i} - 150.\alpha_{76i} \cos(\theta_{98i})) \\
& + \cos(\theta_{76i})(-150. \cos(\theta_{98i})\omega_{76i}^2 - 150.\omega_{76i}^2 - 150.\alpha_{76i} \text{sen}(\theta_{98i})) \\
& +2\omega_{54i}\omega_{98i}(\cos(\theta_{1211i})(57.75 \cos(\theta_{1413i}) \\
& +100)(0.5 \cos(\theta_{1110i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) - 0.5 \cos(\theta_{1110i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})) \\
& -28.875(1. \cos(\theta_{1110i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
& - \cos(\theta_{1110i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})) \text{sen}(\theta_{1211i}) \text{sen}(\theta_{1413i}) \\
& + \text{sen}(\theta_{54i})(150. \cos(\theta_{98i}) \text{sen}(\theta_{76i}) + 150. \cos(\theta_{76i}) \text{sen}(\theta_{98i}))) \\
& +2\omega_{54i}\omega_{76i}(\cos(\theta_{1211i})(57.75 \cos(\theta_{1413i}) + 100)(0.5 \cos(\theta_{1110i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
& -0.5 \cos(\theta_{1110i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})) - 28.875(1. \cos(\theta_{1110i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
& - \cos(\theta_{1110i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})) \text{sen}(\theta_{1211i}) \text{sen}(\theta_{1413i}) + \text{sen}(\theta_{54i})((150. \cos(\theta_{98i}) \\
& +150.) \text{sen}(\theta_{76i}) + 150. \cos(\theta_{76i}) \text{sen}(\theta_{98i}))) \\
& +57.75 (\cos(\theta_{1413i})\omega_{1413i}^2 + \alpha_{1413i} \text{sen}(\theta_{1413i})) (1. \text{sen}(\theta_{1211i}) \text{sen}(\theta_{54i}) \\
& + \cos(\theta_{1211i}) \cos(\theta_{54i}) \text{sen}(\theta_{1110i})(1. \cos(\theta_{98i}) \text{sen}(\theta_{76i}) + \cos(\theta_{76i}) \text{sen}(\theta_{98i})) \\
& + \cos(\theta_{1110i}) \cos(\theta_{1211i}) \cos(\theta_{54i})(1. \text{sen}(\theta_{76i}) \text{sen}(\theta_{98i}) - \cos(\theta_{76i}) \cos(\theta_{98i}))) \\
& +2\omega_{76i}\omega_{98i}(\cos(\theta_{1211i})(-57.75 \cos(\theta_{1413i}) - 100.) \cos(\theta_{54i}) \cos(\theta_{1110i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
& +(28.875 \cos(\theta_{1110i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+28.875 \cos(\theta_{1110i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \operatorname{sen}(\theta_{1211i}) \operatorname{sen}(\theta_{1413i}) \\
 &+ \cos(\theta_{54i})(150. \operatorname{sen}(\theta_{76i}) \operatorname{sen}(\theta_{98i}) - 150. \cos(\theta_{76i}) \cos(\theta_{98i})) \\
 &+ 57.75 (\omega_{1413i}^2 \operatorname{sen}(\theta_{1413i}) - \alpha_{1413i} \cos(\theta_{1413i})) (\cos(\theta_{1211i}) \operatorname{sen}(\theta_{54i}) \\
 &+ \cos(\theta_{54i}) \operatorname{sen}(\theta_{1110i}) \operatorname{sen}(\theta_{1211i})) (-\cos(\theta_{98i}) \operatorname{sen}(\theta_{76i}) - \cos(\theta_{76i}) \operatorname{sen}(\theta_{98i})) \\
 &+ \cos(\theta_{1110i}) \cos(\theta_{54i}) \operatorname{sen}(\theta_{1211i}) (\cos(\theta_{76i}) \cos(\theta_{98i}) - \operatorname{sen}(\theta_{76i}) \operatorname{sen}(\theta_{98i})) \\
 &- 57.75 \operatorname{sen}(\theta_{1413i}) (-\cos(\theta_{1211i}) \omega_{1211i}^2 + \alpha_{1211i} \operatorname{sen}(\theta_{1211i})) \operatorname{sen}(\theta_{54i}) \\
 &+ \cos(\theta_{54i}) (\cos(\theta_{1110i}) (2\omega_{1110i} \omega_{1211i} \cos(\theta_{1211i}) + \alpha_{1110i} \operatorname{sen}(\theta_{1211i})) \\
 &+ \operatorname{sen}(\theta_{1110i}) (\alpha_{1211i} \cos(\theta_{1211i}) - (\omega_{1110i}^2 + \omega_{1211i}^2) \operatorname{sen}(\theta_{1211i}))) (-\cos(\theta_{98i}) \operatorname{sen}(\theta_{76i}) \\
 &- \cos(\theta_{76i}) \operatorname{sen}(\theta_{98i})) - \cos(\theta_{54i}) (\operatorname{sen}(\theta_{1110i}) (2\omega_{1110i} \omega_{1211i} \cos(\theta_{1211i}) \\
 &+ \alpha_{1110i} \operatorname{sen}(\theta_{1211i})) + \cos(\theta_{1110i}) ((\omega_{1110i}^2 + \omega_{1211i}^2) \operatorname{sen}(\theta_{1211i}) \\
 &- \alpha_{1211i} \cos(\theta_{1211i}))) (\cos(\theta_{76i}) \cos(\theta_{98i}) - 1. \operatorname{sen}(\theta_{76i}) \operatorname{sen}(\theta_{98i})) \\
 &+ (57.75 \cos(\theta_{1413i}) + 100) (-\alpha_{1211i} \cos(\theta_{1211i}) - \omega_{1211i}^2 \operatorname{sen}(\theta_{1211i})) \operatorname{sen}(\theta_{54i}) \\
 &+ \cos(\theta_{54i}) (\cos(\theta_{1110i}) (\alpha_{1110i} \cos(\theta_{1211i}) - 2\omega_{1110i} \omega_{1211i} \operatorname{sen}(\theta_{1211i})) \\
 &- \operatorname{sen}(\theta_{1110i}) ((\omega_{1110i}^2 + \omega_{1211i}^2) \cos(\theta_{1211i}) + \alpha_{1211i} \operatorname{sen}(\theta_{1211i}))) (-\cos(\theta_{98i}) \operatorname{sen}(\theta_{76i}) \\
 &- \cos(\theta_{76i}) \operatorname{sen}(\theta_{98i})) - \cos(\theta_{54i}) (\cos(\theta_{1110i}) ((\omega_{1110i}^2 + \omega_{1211i}^2) \cos(\theta_{1211i}) \\
 &+ \alpha_{1211i} \operatorname{sen}(\theta_{1211i})) + \operatorname{sen}(\theta_{1110i}) (\alpha_{1110i} \cos(\theta_{1211i}) \\
 &- 2\omega_{1110i} \omega_{1211i} \operatorname{sen}(\theta_{1211i}))) (\cos(\theta_{76i}) \cos(\theta_{98i}) - \operatorname{sen}(\theta_{76i}) \operatorname{sen}(\theta_{98i})) \\
 &+ (57.75 \cos(\theta_{1413i}) + 100) (-\operatorname{sen}(\theta_{1211i}) (\alpha_{54i} \cos(\theta_{54i}) - \omega_{54i}^2 \operatorname{sen}(\theta_{54i})) \\
 &+ \cos(\theta_{1211i}) \operatorname{sen}(\theta_{1110i}) (\cos(\theta_{54i}) \omega_{54i}^2 + \alpha_{54i} \operatorname{sen}(\theta_{54i})) (\cos(\theta_{98i}) \operatorname{sen}(\theta_{76i}) \\
 &+ \cos(\theta_{76i}) \operatorname{sen}(\theta_{98i})) - 1. \cos(\theta_{1110i}) \cos(\theta_{1211i}) (\cos(\theta_{54i}) \omega_{54i}^2 \\
 &+ \alpha_{54i} \operatorname{sen}(\theta_{54i})) (1. \cos(\theta_{76i}) \cos(\theta_{98i}) - 1. \operatorname{sen}(\theta_{76i}) \operatorname{sen}(\theta_{98i}))) \\
 &+ \cos(\theta_{54i}) (-150. \cos(\theta_{76i} + \theta_{98i}) \omega_{98i}^2 - 150. \alpha_{98i} \operatorname{sen}(\theta_{76i} + \theta_{98i})) \\
 &+ 2\omega_{76i} \cos(\theta_{54i}) ((57.75 \cos(\theta_{1413i}) + 100) (1. (\omega_{1110i} \cos(\theta_{1211i}) \operatorname{sen}(\theta_{1110i}) \\
 &+ \omega_{1211i} \cos(\theta_{1110i}) \operatorname{sen}(\theta_{1211i})) (1. \cos(\theta_{98i}) \operatorname{sen}(\theta_{76i}) + 1. \cos(\theta_{76i}) \operatorname{sen}(\theta_{98i})) \\
 &+ (\omega_{1110i} \cos(\theta_{1110i}) \cos(\theta_{1211i}) - \omega_{1211i} \operatorname{sen}(\theta_{1110i}) \operatorname{sen}(\theta_{1211i})) (1. \operatorname{sen}(\theta_{76i}) \operatorname{sen}(\theta_{98i}) \\
 &- \cos(\theta_{76i}) \cos(\theta_{98i}))) - 57.75 \operatorname{sen}(\theta_{1413i}) ((0.5\omega_{1110i} - 0.5\omega_{1211i}) \\
 &\operatorname{sen}(\theta_{1110i} - \theta_{1211i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) + (-0.5\omega_{1110i} - 0.5\omega_{1211i}) \\
 &\operatorname{sen}(\theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}))) + 2\omega_{98i} \cos(\theta_{54i}) ((57.75 \cos(\theta_{1413i}) + 100) \\
 &((\omega_{1110i} \cos(\theta_{1211i}) \operatorname{sen}(\theta_{1110i}) + \omega_{1211i} \cos(\theta_{1110i}) \operatorname{sen}(\theta_{1211i})) (\cos(\theta_{98i}) \operatorname{sen}(\theta_{76i}) \\
 &+ \cos(\theta_{76i}) \operatorname{sen}(\theta_{98i})) + (\omega_{1110i} \cos(\theta_{1110i}) \cos(\theta_{1211i}) \\
 &- \omega_{1211i} \operatorname{sen}(\theta_{1110i}) \operatorname{sen}(\theta_{1211i})) (\operatorname{sen}(\theta_{76i}) \operatorname{sen}(\theta_{98i}) - \cos(\theta_{76i}) \cos(\theta_{98i}))) \\
 &- 57.75 \operatorname{sen}(\theta_{1413i}) ((0.5\omega_{1110i} - 0.5\omega_{1211i}) \operatorname{sen}(\theta_{1110i} - \theta_{1211i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \\
 &+ (-0.5\omega_{1110i} - 0.5\omega_{1211i}) \operatorname{sen}(\theta_{1110i} + \theta_{1211i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}))) \\
 &+ 28.875 \operatorname{sen}(\theta_{1211i}) \operatorname{sen}(\theta_{1413i}) (\cos(\theta_{1110i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \omega_{76i}^2 \\
 &+ \cos(\theta_{1110i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \omega_{76i}^2 + \alpha_{76i} \operatorname{sen}(\theta_{1110i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +\alpha_{76i} \text{sen}(\theta_{1110i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) + 28.875 \text{sen}(\theta_{1211i}) \text{sen}(\theta_{1413i}) \\
 & (\cos(\theta_{1110i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})\omega_{98i}^2 + \cos(\theta_{1110i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})\omega_{98i}^2 \\
 & +\alpha_{98i} \text{sen}(\theta_{1110i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) + \alpha_{98i} \text{sen}(\theta_{1110i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})) \\
 & + \cos(\theta_{1211i})(57.75 \cos(\theta_{1413i}) + 100)(-0.5 \cos(\theta_{1110i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})\omega_{76i}^2 \\
 & -0.5 \cos(\theta_{1110i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})\omega_{76i}^2 - 0.5\alpha_{76i} \text{sen}(\theta_{1110i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})) \\
 & -0.5\alpha_{76i} \text{sen}(\theta_{1110i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})) + \cos(\theta_{1211i})(57.75 \cos(\theta_{1413i}) \\
 & +100)(-0.5 \cos(\theta_{1110i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})\omega_{98i}^2 \\
 & -0.5 \cos(\theta_{1110i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})\omega_{98i}^2 - 0.5\alpha_{98i} \text{sen}(\theta_{1110i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})) \\
 & -0.5\alpha_{98i} \text{sen}(\theta_{1110i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})) - 57.75 \text{sen}(\theta_{1413i})(\cos(\theta_{1211i})(\alpha_{54i} \cos(\theta_{54i}) \\
 & -\omega_{54i}^2 \text{sen}(\theta_{54i})) + \text{sen}(\theta_{1211i})(-0.5 \cos(\theta_{1110i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})\omega_{54i}^2 \\
 & -0.5 \cos(\theta_{1110i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})\omega_{54i}^2 + 0.5\alpha_{54i} \text{sen}(\theta_{1110i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})) \\
 & -0.5\alpha_{54i} \text{sen}(\theta_{1110i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}))) \\
 & +2(-57.75\omega_{1413i} \cos(\theta_{1413i})(-\omega_{1211i} \text{sen}(\theta_{1211i}) \text{sen}(\theta_{54i}) \\
 & + \cos(\theta_{54i})(\omega_{1211i} \cos(\theta_{1211i}) \text{sen}(\theta_{1110i}) \\
 & +\omega_{1110i} \cos(\theta_{1110i}) \text{sen}(\theta_{1211i}))(-\cos(\theta_{98i}) \text{sen}(\theta_{76i}) - \cos(\theta_{76i}) \text{sen}(\theta_{98i})) \\
 & + \cos(\theta_{54i})(\omega_{1211i} \cos(\theta_{1110i}) \cos(\theta_{1211i}) - \omega_{1110i} \text{sen}(\theta_{1110i}) \text{sen}(\theta_{1211i}))(\cos(\theta_{76i}) \cos(\theta_{98i}) \\
 & - \text{sen}(\theta_{76i}) \text{sen}(\theta_{98i}))) - 57.75\omega_{1413i} \text{sen}(\theta_{1413i})(\cos(\theta_{1211i})(-1.\omega_{1211i} \text{sen}(\theta_{54i}) \\
 & -0.5\omega_{1110i} \text{sen}(\theta_{1110i} - \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) - 0.5\omega_{1110i} \text{sen}(\theta_{1110i} + \theta_{54i} + \theta_{76i} + \theta_{98i})) \\
 & -\omega_{1211i} \cos(\theta_{54i}) \cos(\theta_{1110i} + \theta_{76i} + \theta_{98i}) \text{sen}(\theta_{1211i})))
 \end{aligned}$$

## Apéndice B

# Generación de la trayectoria.

El movimiento de un cuerpo en el espacio consiste de dos partes. Una trayectoria lineal o curva en el espacio que sigue un punto del cuerpo (el centro de gravedad o el órgano terminal de un manipulador) y la orientación angular del cuerpo. Ambas partes deben satisfacer condiciones de posición, velocidad y aceleración tanto lineal como angular y ser realizadas en un tiempo determinado. A continuación se desarrollan la trayectoria lineal y angular del cuerpo en función del tiempo.

### Trayectoria Lineal.

El propósito de generar una trayectoria es establecer los puntos de referencia, al sistema de control de movimiento del mecanismo [6]. Lo cual asegura que el mecanismo recorrerá el camino planeado.

Se define la curva en el espacio como una recta para el movimiento a seguir por un punto del cuerpo.

La ecuación vectorial de posición se define a partir de la figura B.0.1:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{Q} + \mathbf{S} \\ &= \mathbf{Q} + s\mathbf{u} \end{aligned}$$

Donde  $s$  es la magnitud del vector  $\mathbf{S}$  y  $\mathbf{u}$  es el vector unitario que define la orientación de  $\mathbf{S}$ . Para definir  $\mathbf{R}$  en función del tiempo, se requiere que la magnitud  $s$ , cambie con respecto al mismo, es decir:

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{Q} + s(t)\mathbf{u} \quad (\text{B.0.1})$$

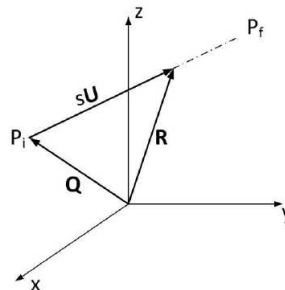


Figura B.0.1: Trayectoria Recta.

A partir de la ec. B.0.1, las ecs. vectoriales de velocidad y aceleración se definen como la primera y segunda derivada respecto al tiempo:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(t) &= \dot{s}(t)\mathbf{u} \\ \mathbf{A}(t) &= \ddot{s}(t)\mathbf{u} \end{aligned} \quad (\text{B.0.2})$$

Donde  $\mathbf{Q}$  y  $\mathbf{u}$  no varían respecto al tiempo, ya que están definidos por puntos fijos en el espacio. La magnitud  $s(t)$  debe satisfacer condiciones iniciales y finales de posición, velocidad y aceleración, es decir debe satisfacer seis condiciones, según se muestra en la siguiente figura:

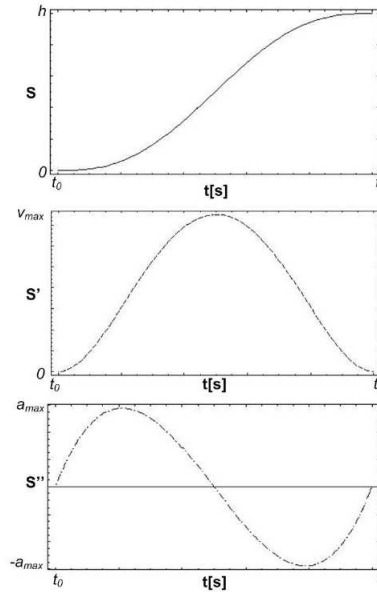


Figura B.0.2: Graficas del perfil quintico.

La primera gráfica indica el cambio de magnitud del vector  $\mathbf{S}$ , que irá variando de 0 para un tiempo inicial  $t_0$  a  $h$  para un tiempo final  $t_f$ ,  $t_0$  y  $t_f$  son definidos de manera arbitraria, donde  $h = \|\mathbf{S}\|$ .

La segunda gráfica es la rapidez con que la magnitud del vector  $\mathbf{S}$  cambia respecto al tiempo. Es decir, es la rapidez con que realiza el traslado del punto  $p_i$  a  $p_f$ , para un tiempo inicial  $t_0$  y un tiempo final  $t_f$ .

La tercera gráfica es el cambio de la rapidez (aceleración) con que la magnitud del vector  $\mathbf{S}$  cambia respecto al tiempo, para un tiempo inicial  $t_0$  y un tiempo final  $t_f$ .

Para satisfacer las seis condiciones, se empleará un polinomio de quinto grado, ya que este cuenta con 6 coeficientes a determinar. De esta manera, se tiene:

$$\begin{aligned} s(t) &= a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4 + a_5t^5 \\ \dot{s}(t) &= a_1 + 2a_2t + 3a_3t^2 + 4a_4t^3 + 5a_5t^4 \\ \ddot{s}(t) &= 2a_2 + 6a_3t + 12a_4t^2 + 20a_5t^3 \end{aligned} \quad (\text{B.0.3})$$

Debido a que existen condiciones iniciales y finales de velocidad y aceleración, se obtienen las derivadas respecto al tiempo del polinomio de  $s(t)$ . Para  $t_0 = t = 0$  (el valor de 0, es asignado

arbitrariamente) se tienen las 3 condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} s(t) &= 0 \\ \dot{s}(t) &= 0 \\ \ddot{s}(t) &= 0 \end{aligned} \tag{B.0.4}$$

al sustituirlos en las ecuaciones B.0.3 se tiene:

$$\begin{aligned} 0 &= a_0 \rightarrow a_0 = 0 \\ 0 &= a_1 \rightarrow a_1 = 0 \\ 0 &= 2a_2 \rightarrow a_2 = 0 \end{aligned} \tag{B.0.5}$$

para  $t = t_f$  se tienen los valores:

$$\begin{aligned} s(t) &= \|p_f - p_i\| \\ \dot{s}(t) &= 0 \\ \ddot{s}(t) &= 0 \end{aligned} \tag{B.0.6}$$

Donde  $p_i = (x_i, y_i, z_i)$  y  $p_f = (x_f, y_f, z_f)$  significan coordenadas de los puntos inicial y final de la trayectoria respectivamente, la magnitud de la diferencia entre ellos, representa la distancia  $h$  que necesitamos recorrer en la línea recta. Al sustituir ecs. B.0.5 y B.0.6 en B.0.3 se obtiene:

$$\begin{aligned} \|p_f - p_i\| &= a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5 \\ 0 &= 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3 + 5a_5 t^4 \\ 0 &= 6a_3 t + 12a_4 t^2 + 20a_5 t^3 \end{aligned}$$

el sistema de ecuaciones queda de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} t_f^3 & t_f^4 & t_f^5 \\ 3t_f^2 & 4t_f^3 & 5t_f^4 \\ 6t_f & 12t_f^2 & 20t_f^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|p_f - p_i\| \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{B.0.7}$$

al resolver el sistema de la ec. B.0.7 se obtienen los coeficientes restantes:

$$\begin{aligned} a_3 &= 10 \left( \frac{t}{t_f} \right)^3 \\ a_4 &= -15 \left( \frac{t}{t_f} \right)^4 \\ a_5 &= 6 \left( \frac{t}{t_f} \right)^5 \end{aligned} \tag{B.0.8}$$

Sustituyendo B.0.5 y B.0.8 en B.0.3 y factorizando:

$$\begin{aligned} s(t) &= \|p_f - p_i\| \left[ 10 \left( \frac{t}{t_f} \right)^3 - 15 \left( \frac{t}{t_f} \right)^4 + 6 \left( \frac{t}{t_f} \right)^5 \right] \\ \dot{s}(t) &= \|p_f - p_i\| \left[ 30 \frac{t^2}{t_f^3} - 60 \frac{t^3}{t_f^4} + 30 \frac{t^4}{t_f^5} \right] \\ \ddot{s}(t) &= \|p_f - p_i\| \left[ 60 \frac{t}{t_f^3} - 180 \frac{t^2}{t_f^4} + 120 \frac{t^3}{t_f^5} \right] \end{aligned} \tag{B.0.9}$$

Donde la trayectoria planeada consta de un punto inicial  $p_0$  y un punto final  $p_f$ , un tiempo  $t$  para realizar el movimiento y  $t_f$  tiempo final para terminar el movimiento.

Reescribiendo las ecs. B.0.1 y B.0.2 en función de los puntos de la recta:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}(t) &= \mathbf{Q} + s(t)\mathbf{u} = (p_i - 0) + s(t) \frac{(p_f - p_i)}{\|p_f - p_i\|} \\
 \mathbf{V}(t) &= \dot{s}(t)\mathbf{u} = \dot{s}(t) \frac{(p_f - p_i)}{\|p_f - p_i\|} \\
 \mathbf{A}(t) &= \ddot{s}(t)\mathbf{u} = \ddot{s}(t) \frac{(p_f - p_i)}{\|p_f - p_i\|}
 \end{aligned} \tag{B.0.10}$$

Sustituyendo ecs. B.0.9 en ecs. B.0.10, se obtienen finalmente las ecuaciones vectoriales de posición, velocidad y aceleración que debe seguir la plataforma móvil:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}(t) &= p_i + \left[ 10 \left( \frac{t}{t_f} \right)^3 - 15 \left( \frac{t}{t_f} \right)^4 + 6 \left( \frac{t}{t_f} \right)^5 \right] (p_f - p_i) \\
 \mathbf{V}(t) &= \left[ 30 \frac{t^2}{t_f^3} - 60 \frac{t^3}{t_f^4} + 30 \frac{t^4}{t_f^5} \right] (p_f - p_i) \\
 \mathbf{A}(t) &= \left[ 60 \frac{t}{t_f^3} - 180 \frac{t^2}{t_f^4} + 120 \frac{t^3}{t_f^5} \right] (p_f - p_i)
 \end{aligned} \tag{B.0.11}$$

## Orientacion Angular.

Para la orientación se sigue un procedimiento similar, aclarando que para este caso, solo se desea pasar de valores iniciales a finales, para la posición, velocidad y aceleración angular de la plataforma móvil, ya que no se requiere cumplir con una trayectoria particular en el espacio. Esto conducirá a las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 \beta(t) &= \beta_i + \left[ 10 \left( \frac{t}{t_f} \right)^3 - 15 \left( \frac{t}{t_f} \right)^4 + 6 \left( \frac{t}{t_f} \right)^5 \right] (\beta_f - \beta_i) \\
 \dot{\beta}(t) &= \left[ 30 \frac{t^2}{t_f^3} - 60 \frac{t^3}{t_f^4} + 30 \frac{t^4}{t_f^5} \right] (\beta_f - \beta_i) \\
 \ddot{\beta}(t) &= \left[ 60 \frac{t}{t_f^3} - 180 \frac{t^2}{t_f^4} + 120 \frac{t^3}{t_f^5} \right] (\beta_f - \beta_i)
 \end{aligned} \tag{B.0.12}$$

Donde el vector  $\beta = (\psi, \theta, \phi)$ . De la misma manera  $\beta = (\psi_i, \theta_i, \phi_i)$  y  $\beta = (\psi_f, \theta_f, \phi_f)$  se refieren a los valores iniciales y finales.

# Bibliografía

- [1] Jorge Angeles; "*Fundamentals of Robotic Mechanical Systems: Theory, Methods, and Algorithms*" (2006). Springer.
- [2] Lung-Wen Tsai; "*Robot Analysis*" *The mechanics of serial and parallel manipulators*"; (1999). John Wiley & Sons, Inc.
- [3] Ahmed A. Shabana; "*Computational Dynamics*" 3a. Edition, (2010). John Wiley & Sons, Ltd.
- [4] Stejskal Vladimir, Valasek, Michael; *Kinematics and Dynamics of Machinery*, (1996). Marcel Dekker Ltd.
- [5] Moises Jacobs, Michel Gagner, Jorge Cueto-Garcia; "*Laparoscopic Surgery*", (2003). McGraw Hill.
- [6] L. Cívico and B. Siciliana; *Modeling and Control of Robot Manipulators*; (2000). Springer Verlag.
- [7] McCarthy, J. Michael; *Geometric design of linkages*; (2000). Springer.