



***UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO***

*FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES
ARAGÓN*

MODELADO Y SIMULACIÓN POR COMPUTADORA
DE UNA MÁQUINA DE INDUCCIÓN TRIFÁSICA
USANDO CIRCUITOS EQUIVALENTES Y
DIFERENTES MARCOS DE REFERENCIA.

T E S I S

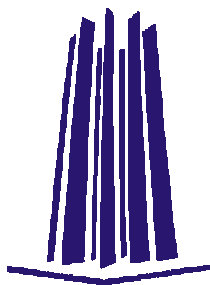
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
INGENIERO MECÁNICO ELECTRICISTA

P R E S E N T A:
ERNESTO LÓPEZ ARELLANO

ASESOR:

Dr. ALEJANDRO ANTONIO VEGA RAMÍREZ

MÉXICO 2014





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

ÍNDICE

OBJETIVOS, DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA, JUSTIFICACIÓN, APLICACIONES Y CONTRIBUCIONES ESPERADAS	4
---------------------------------------------------------------------------------------------	---

INTRODUCCIÓN	5
--------------	---

Capítulo 1 PRINCIPIOS BÁSICOS PARA EL ANÁLISIS DE MÁQUINAS DE INDUCCIÓN

1.1 Introducción	7
1.2 Circuitos Acoplados Magnéticamente	8
1.3 Conversión de Energía Electromecánica	16
1.4 Devanados de Máquina y FMM en el Entrehierro	25
1.5 Inductancias de Devanados y Ecuaciones de Voltaje	31

Capítulo 2 TEORÍA DE MARCOS DE REFERENCIA

2.1 Antecedentes	36
2.2 Ecuaciones de Transformación: Cambio de Variables	37
2.3 Variables de Circuito Estacionario Transformadas al Marco de Referencia Arbitrario	39
2.4 Transformación de un Arreglo Trifásico Balanceado	42
2.5 Relaciones de Fasores en Estado Estable Balanceado	43
2.6 Marcos de Referencia Comúnmente Usados	44

Capítulo 3 MÁQUINA DE INDUCCIÓN SIMÉTRICA

3.1 Antecedentes	46
3.2 Ecuaciones de Voltaje en Variables de Máquina	46
3.3 Ecuación de Torque en Variables de Máquina	50
3.4 Ecuaciones de Transformación para los Circuitos del Rotor	51
3.5 Ecuaciones de Voltaje en Variables de Marco de Referencia Arbitrario	53
3.6 Ecuación de Torque en Variables de Marco de Referencia Arbitrario	56
3.7 Sistema Por Unidad	56
3.8 Análisis de Operación en Estado Estable	58
3.9 Simulación por Computadora en el Marco de Referencia Arbitrario	60
3.10 Simulación y Resultados	62
CONCLUSIONES	75
ANEXO	77
BIBLIOGRAFÍA	84

OBJETIVO GENERAL:

Modelar y simular una máquina eléctrica de inducción trifásica simétrica en estado dinámico.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

1. Describir de manera rigurosa los modelos matemáticos usando los circuitos equivalentes de la máquina de inducción trifásica simétrica y la teoría de marcos de referencia
2. Establecer el marco de referencia más apropiado para diferentes condiciones de operación.
3. Desarrollar el programa para la simulación por computadora.
4. Simular dichos circuitos en diferentes condiciones de operación dinámica para obtener la respuesta transitoria y en estado estable.

DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

Los modelos matemáticos que caracterizan el comportamiento de una máquina de inducción son un sistema de ecuaciones diferenciales de voltaje no lineales con coeficientes (inductancias de la máquina) que son funciones de la posición del rotor, cuya resolución es muy complicada con los métodos analíticos convencionales.

JUSTIFICACIÓN, APLICACIONES Y CONTRIBUCIONES ESPERADAS

La importancia del presente trabajo se debe a que la máquina de inducción tiene una gran variedad de aplicaciones en la industria, por lo que es considerada como “caballo de batalla”. Por consiguiente, es necesario conocer las características y su comportamiento en condiciones reales de operación.

La simulación proporciona una técnica “simple” para obtener información en forma rápida y a bajo costo, lo que permite tomar decisiones para la optimización de las máquinas de inducción, dado que se trata de una herramienta valiosa para el análisis.

La aplicación potencial del presente trabajo es en el análisis y diseño de máquinas eléctricas y simulación de sistemas eléctricos de potencia. Por lo tanto, será de utilidad para ingenieros y estudiantes de ingeniería eléctrica interesados en profundizar sus conocimientos en este tipo de máquinas porque:

- Presenta un método de análisis que no se enseña a nivel de licenciatura y que facilita la resolución de los modelos matemáticos que caracterizan a una máquina de inducción.
- Con un programa de computadora se pueden resolver dichos modelos.

INTRODUCCIÓN

Las máquinas de corriente alterna (c.a.) son generadores que convierten energía mecánica en energía eléctrica de c.a. y motores que convierten energía eléctrica de c.a. en energía mecánica. Hay dos clases principales de máquinas: las máquinas síncronas y las máquinas de inducción. Las primeras son motores y generadores cuya corriente de campo magnético la suministra una fuente de potencia de c.a. externa, mientras que las últimas la corriente de campo magnético se suministra a sus devanados de campo por medio de inducción magnética (acción transformadora).

El objeto de estudio del presente tema de tesis es la máquina eléctrica de inducción trifásica simétrica. Casi todas las máquinas de un taller o fábrica son movidas por motores de inducción, usados en una amplia variedad de aplicaciones como un medio de conversión de potencia

eléctrica a potencia mecánica; se eligen por su sencillez, confiabilidad y bajo costo. Estas características se combinan con una buena eficiencia, aceptable capacidad de sobrecarga y un requerimiento mínimo o nulo de mantenimiento.

En el capítulo 1 se presenta el análisis teórico necesario basado en varios principios para modelar una máquina de inducción, tales como: el principio de conservación de la energía electromecánica, la obtención de circuitos equivalentes representativos, el concepto de fuerza magnetomotriz rotatoria en el entrehierro y la obtención de las inductancias de devanados. Los conceptos anteriores permiten establecer el sistema de ecuaciones diferenciales de voltaje que describen su comportamiento. Sin embargo, dicho sistema es no lineal y sus coeficientes son variables en el tiempo, además, la velocidad del rotor es una función del torque electromagnético, que es a su vez lo es del producto de las corrientes de la máquina. La resolución de dichas ecuaciones es muy complicada; una computadora es necesaria para resolverlas con objeto de encontrar la respuesta transitoria.

En el capítulo 2 se trata la teoría de marcos de referencia que formula una transformación general de variables; un *cambio de variables nos permite eliminar las inductancias variables en el tiempo* y por tanto reducir marcadamente la complejidad de las ecuaciones de voltaje. Esta transformación general refiere las variables de máquina a un marco de referencia que rota a una velocidad angular arbitraria.

En el capítulo 3 se aplica la teoría de marcos de referencia a la máquina de inducción trifásica simétrica. Una vez establecidas en forma conveniente las ecuaciones que caracterizan su comportamiento, se elabora un programa de computadora para simular diferentes condiciones de funcionamiento dinámico, tales como un cambio en el torque de carga y una falla trifásica simétrica.

Capítulo 1

PRINCIPIOS BÁSICOS PARA EL ANÁLISIS DE MÁQUINAS DE INDUCCIÓN

1.1 INTRODUCCIÓN

Hay varios conceptos básicos que se deben establecer para iniciar el análisis de las máquinas eléctricas:

1. El principio de conversión de energía electromecánica permite establecer una expresión para el torque electromagnético en términos de corrientes y del desplazamiento del sistema mecánico.
2. Obtención de los circuitos equivalentes que representan circuitos acoplados magnéticamente.
3. El concepto de devanado distribuido senoidalmente.
4. El concepto de fuerza magnetomotriz rotando en el entrehierro.
5. Obtención de las inductancias de los devanados.

Los principios anteriores se exponen en este capítulo para el análisis de máquinas de inducción simétricas.

1.2 CIRCUITOS ACOPLADOS MAGNÉTICAMENTE

Los circuitos eléctricos acoplados magnéticamente juegan un importante papel en la transmisión y conversión de potencia. En el caso de las máquinas eléctricas existen circuitos en movimiento relativo acoplados magnéticamente, para el propósito de transferir energía entre los sistemas eléctricos y mecánicos.

Para establecer las ecuaciones que describen el comportamiento de circuitos acoplados magnéticamente, se inicia el análisis considerando dos circuitos eléctricos estacionarios acoplados magnéticamente, como se muestra en la figura 1.2.1.

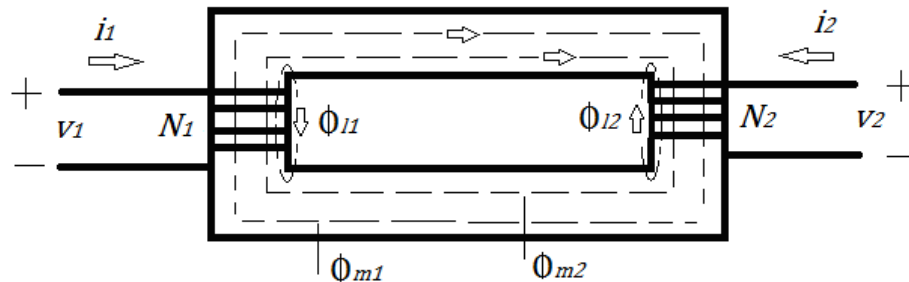


Figura 1.2.1 Circuitos acoplados magnéticamente.

Las dos bobinas consisten de N_1 vueltas y N_2 vueltas respectivamente, están enrolladas en un núcleo común que es generalmente de material ferromagnético con una permeabilidad relativa “grande” respecto a la del espacio libre $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m. La permeabilidad magnética de los materiales se expresa como $\mu = \mu_r \mu_0$, donde μ_r es la permeabilidad relativa.

Los enlaces de flujo de cada bobina se expresan como:

$$\Phi_1 = \Phi_{l1} + \Phi_{m1} + \Phi_{m2} \quad (1.2-1)$$

$$\Phi_2 = \Phi_{l2} + \Phi_{m2} + \Phi_{m1} \quad (1.2-2)$$

Donde:

Φ_{l1} – Flujo de dispersión producido por la corriente i_1 y que enlaza solamente las vueltas de la bobina 1.

Φ_{l2} – Flujo de dispersión producido por la corriente i_2 y que enlaza solamente las vueltas de la bobina 2.

Φ_{m1} – Flujo de magnetización producido por la corriente i_1 y que enlaza todas las vueltas de las bobinas 1 y 2.

Φ_{m2} – Flujo de magnetización producido por la corriente i_2 y que enlaza todas las vueltas de las bobinas 2 y 1.

La dirección de referencia positiva de las corrientes se muestra en la figura 1.2.1. Si las corrientes fluyen como se indica el flujo de magnetización total será la suma de los flujos de magnetización individuales, si una de las corrientes fluye en dirección opuesta a la que se muestra, los flujos de magnetización individuales se restan, es decir, una bobina magnetiza el núcleo y la otra lo desmagnetiza.

El sistema magnético actual es una idealización porque todo el flujo de dispersión puede no enlazar todas las vueltas de la bobina que lo produce. De igual manera, todo el flujo de magnetización de una bobina puede no enlazar todas las vueltas de la otra bobina. Para considerar este aspecto práctico del sistema magnético, el número de vueltas se considera igual a un número equivalente en lugar del número actual.

Las ecuaciones de voltaje expresadas en forma matricial son:

$$\mathbf{v} = \mathbf{r}\mathbf{i} + \frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt} \quad (1.2-3)$$

Donde $\mathbf{r} = \text{diag. } [r_1 \ r_2]$ es una matriz diagonal. Las resistencias r_1, r_2 y los enlaces de flujo λ_1, λ_2 están relacionados con las bobinas 1 y 2,

respectivamente. Se asume que Φ_1 enlaza las vueltas equivalentes de la bobina 1 y Φ_2 enlaza las vueltas equivalentes de la bobina 2, los enlaces de flujo pueden ser escritos como:

$$\lambda_1 = N_1 \Phi_1 \quad (1.2-4)$$

$$\lambda_2 = N_2 \Phi_2 \quad (1.2-5)$$

Donde Φ_1 y Φ_2 son dadas por (1.2-1) y (1.2-2), respectivamente.

1.2.1 Sistema magnético lineal

Si se desprecia la saturación magnética del núcleo, el sistema es lineal y los flujos se pueden expresar como:

$$\Phi_{l1} = \frac{N_1 i_1}{R_{l1}} \quad (1.2-6)$$

$$\Phi_{m1} = \frac{N_1 i_1}{R_m} \quad (1.2-7)$$

$$\Phi_{l2} = \frac{N_2 i_2}{R_{l2}} \quad (1.2-8)$$

$$\Phi_{m2} = \frac{N_2 i_2}{R_m} \quad (1.2-9)$$

Donde:

R_{l1}, R_{l2} = Reluctancia de la trayectoria de dispersión.

R_m = Reluctancia de la trayectoria de los flujos de magnetización.

Ni = Fuerza magnetomotriz (FMM) determinada por la ley de Ampere.

La reluctancia de la trayectoria de magnetización del núcleo se calcula con:

$$R_m = \frac{l}{\mu A} \quad (1.2-10)$$

Donde l es la longitud media de la trayectoria magnética, A es el área de la sección transversal y μ es la permeabilidad magnética.

Sustituyendo de (1.2-6) a (1.2-9) en (1.2-1) y (1.2-2) se obtienen:

$$\Phi_1 = \frac{N_1 i_1}{R_{l1}} + \frac{N_1 i_1}{R_m} + \frac{N_2 i_2}{R_m} \quad (1.2-11)$$

$$\Phi_2 = \frac{N_2 i_2}{R_{l2}} + \frac{N_2 i_2}{R_m} + \frac{N_1 i_1}{R_m} \quad (1.2-12)$$

Sustituyendo (1.2-11) y (1.2-12) en (1.2-4) y (1.2-5) se obtienen:

$$\lambda_1 = \frac{N_1^2 i_1}{R_{l1}} + \frac{N_1^2 i_1}{R_m} + \frac{N_1 N_2 i_2}{R_m} \quad (1.2-13)$$

$$\lambda_2 = \frac{N_2^2 i_2}{R_{l2}} + \frac{N_2^2 i_2}{R_m} + \frac{N_1 N_2 i_1}{R_m} \quad (1.2-14)$$

En un sistema magnético lineal, los enlaces de flujo se expresan en términos de inductancias y corrientes. Las inductancias propias se definen como:

$$L_{11} = L_{l1} + L_{m1} = \frac{N_1^2}{R_{l1}} + \frac{N_1^2}{R_m} \quad (1.2-15)$$

$$L_{22} = L_{l2} + L_{m2} = \frac{N_2^2}{R_{l2}} + \frac{N_2^2}{R_m} \quad (1.2-16)$$

Donde L_{l1} y L_{l2} son las Inductancias de dispersión. L_{m1} y L_{m2} son las Inductancias de magnetización de las bobinas 1 y 2, respectivamente.

De (1.2-15) y (1.2-16) se obtiene:

$$\frac{N_1^2}{N_2^2} = \frac{L_{m1}}{L_{m2}} \quad (1.2-17)$$

De (1.2-13) y (1.2-14), las inductancias mutuas se definen como:

$$L_{12} = L_{21} = \frac{N_1 N_2}{R_m} \quad (1.2-18)$$

La relación entre las inductancias mutuas y las de magnetización es:

$$L_{12} = \frac{N_2}{N_1} L_{m1} = \frac{N_1}{N_2} L_{m2} \quad (1.2-19)$$

Los enlaces de flujo se pueden expresar como:

$$\lambda_1 = (L_{l1} + L_{m1})i_1 + L_{m1} \left(\frac{N_2}{N_1} \right) i_2 \quad (1.2-20)$$

$$\lambda_2 = L_{m2} \left(\frac{N_1}{N_2} \right) i_1 + (L_{l2} + L_{m2})i_2 \quad (1.2-21)$$

Haciendo un cambio de variable para $\left(\frac{N_2}{N_1}\right) i_2$ se obtiene:

$$N_1 i'_2 = N_2 i_2 \quad (1.2-22)$$

Esta variable sustituta es la corriente i'_2 que pasa a través de la bobina 1 y que produce la misma FMM que la actual i_2 a través de la bobina 2. Se dice entonces que se está refiriendo la corriente en el secundario al primario. De igual manera, si se hace un cambio de variable para $\left(\frac{N_1}{N_2}\right) i_1$ se obtiene:

$$N_2 i'_1 = N_1 i_1 \quad (1.2-23)$$

Aquí, la corriente i'_1 pasa a través de la bobina 2, produce la misma FMM que la actual i_1 a través de la bobina 1. Se dice entonces que se está refiriendo la corriente en el primario al secundario. Para obtener el circuito equivalente T se refiere la corriente de la bobina 2 a la bobina 1, o viceversa. Considerando la primera opción y que la potencia permanece constante, por el cambio de variables se tiene que:

$$i'_2 = \left(\frac{N_2}{N_1}\right) i_2 \quad (1.2-24)$$

$$v_2 i_2 = v'_2 i'_2 \quad (1.2-25)$$

De donde:

$$v'_2 = \left(\frac{N_1}{N_2}\right) v_2 \quad (1.2-26)$$

Los enlaces de flujo tienen unidades de Volt x segundo y se relacionan en la misma forma que los voltajes. En particular:

$$\lambda'_2 = \frac{N_1}{N_2} \lambda_2 \quad (1.2-27)$$

Sustituyendo (1.2-24) en (1.2-20) y (1.2-21), y multiplicando (1.2-21) por $\left(\frac{N_1}{N_2}\right)$ para obtener λ'_2 , se tiene:

$$\lambda_1 = L_{11} i_1 + L_{m1} (i_1 + i'_2) \quad (1.2-28)$$

$$\lambda'_2 = L'_{12} i'_2 + L_{m1} (i_1 + i'_2) \quad (1.2-29)$$

Donde:

$$L'_{12} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 L_{12} \quad (1.2-30)$$

Las ecuaciones de voltaje serán:

$$v_1 = r_1 i_1 + \frac{d\lambda_1}{dt} \quad (1.2-31)$$

$$v'_2 = r'_2 i'_2 + \frac{d\lambda'_2}{dt} \quad (1.2-32)$$

Donde:

$$r'_2 = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 r_2 \quad (1.2-33)$$

Las ecuaciones de voltaje anteriores sugieren el circuito equivalente mostrado en la figura 1.2.2.

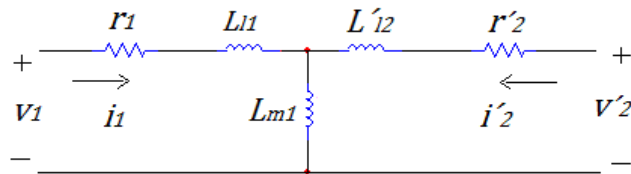


Figura 1.2.2 Circuito equivalente referido a la bobina 1.

1.2.2 Simulación por computadora de circuitos acoplados

La siguiente técnica se utiliza para simular por computadora los circuitos estacionarios acoplados magnéticamente y las máquinas de c.a. Escribiendo (1.2-28) y (1.2-29) como:

$$\lambda_1 = L_{l1}i_1 + \lambda_m \quad (1.2-34)$$

$$\lambda'_2 = L'_{l2}i'_2 + \lambda_m \quad (1.2-35)$$

Donde:

$$\lambda_m = L_{m1}(i_1 + i'_2) \quad (1.2-36)$$

Resolviendo (1.2-34) y (1.2-35) para las corrientes se obtiene:

$$i_1 = \left(\frac{1}{L_{l1}}\right)(\lambda_1 - \lambda_m) \quad (1.2-37)$$

$$i'_2 = \left(\frac{1}{L'_{l2}}\right)(\lambda'_2 - \lambda_m) \quad (1.2-38)$$

Si (1.2-37) y (1.2-38) son sustituidas en las ecuaciones de voltaje (1.2-31) y (1.2-32), se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = v_1 + \left(\frac{r_1}{L_{l1}}\right)(\lambda_m - \lambda_1) \quad (1.2-39)$$

$$\frac{d\lambda'_2}{dt} = v'_2 + \left(\frac{r'_2}{L'_{l2}}\right)(\lambda_m - \lambda'_2) \quad (1.2-40)$$

Sustituyendo (1.2-37) y (1.2-38) en (1.2-36) se produce:

$$\lambda_m = L_a \left(\frac{\lambda_1}{L_{l1}} + \frac{\lambda'_2}{L'_{l2}}\right) \quad (1.2-41)$$

Donde:

$$L_a = \left(\frac{1}{L_{m1}} + \frac{1}{L_{l1}} + \frac{1}{L'_{l2}}\right)^{-1} \quad (1.2-42)$$

De (1.2-39) a (1.2-41) se resuelven para λ_1 , λ'_2 y λ_m . Las corrientes se obtienen de (1.2-37) y (1.2-38). La ecuación (1.2-41) es importante si se necesita incluir los efectos de saturación. Los efectos de saturación de la trayectoria del flujo mutuo se pueden incorporar en la simulación por computadora, si la curva de magnetización se conoce.

En la figura 1.2-3 se muestra una curva de magnetización típica usada en transformadores. Si se asume que el flujo magnético es uniforme en el núcleo, entonces B es proporcional a Φ y H es proporcional a la FMM. Por lo tanto, la gráfica de flujo-corriente tiene la misma forma que la curva B-H, como se muestra en la figura 1.2-4.

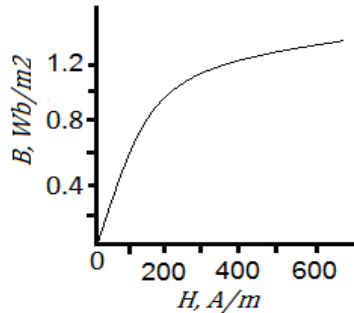


Figura 1.2-3 Curva B-H típica de acero-silicio usada en transformadores.

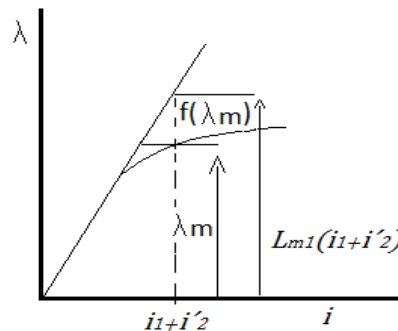


Figura 1.2-4 Curva de magnetización.

La pendiente de la porción lineal de la curva es L_{m1} . En la región de saturación magnética se tiene:

$$\lambda_m = L_{m1}(i_1 + i'_2) - f(\lambda_m) \quad (1.2-43)$$

Donde $f(\lambda_m)$ puede ser determinada de la curva de magnetización para cada valor de λ_m . Sustituyendo (1.2-37) y (1.2-38) en (1.2-43) se obtiene la ecuación para λ_m :

$$\lambda_m = L_a \left(\frac{\lambda_1}{L_{l1}} + \frac{\lambda'_2}{L'_{l2}} \right) - \left(\frac{L_a}{L_{m1}} \right) f(\lambda_m) \quad (1.2-44)$$

1.3 CONVERSIÓN DE ENERGÍA ELECTROMECAÁNICA

Los sistemas electromecánicos se componen de un sistema eléctrico y uno mecánico. La interacción entre ellos puede tomar lugar a través de los campos electromagnéticos comunes a ambos sistemas, dando lugar a transferencia de energía entre uno y otro. Un sistema electromecánico elemental se describe en la figura 1.3-1.

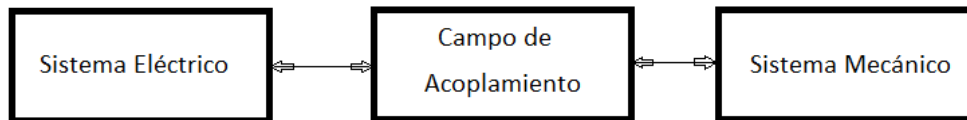


Figura 1.3-1 Diagrama de bloques de un sistema electromecánico elemental.

La distribución de energía puede ser expresada como:

$$W_E = W_e + W_{el} + W_{es} \quad (1.3-1)$$

$$W_M = W_m + W_{ml} + W_{ms} \quad (1.3-2)$$

Donde:

W_E = La energía total suministrada por la fuente eléctrica.

W_M = La energía total suministrada por la fuente mecánica.

W_{es} = La energía almacenada en el campo magnético y que no se acopla con el sistema mecánico.

W_{el} = Perdidas de energía en forma de calor del sistema eléctrico debido a la resistencia de los conductores, las corrientes Eddy y la histéresis.

W_e = La energía transferida al campo de acoplamiento por el sistema eléctrico.

W_{ms} = La energía almacenada en los miembros en movimiento del sistema mecánico.

W_{ml} = Perdidas de energía en forma de calor del sistema mecánico debido a la fricción.

W_m = La energía transferida al campo de acoplamiento por el sistema mecánico.

Aplicando la ley de conservación de la energía al sistema electromecánico, se tiene:

$$W_f + W_{fl} = (W_E - W_{el} - W_{es}) + (W_M - W_{ml} - W_{ms}) \quad (1.3-3)$$

$$W_f + W_{fl} = W_e + W_m$$

Donde:

W_f = La energía almacenada en el campo de acoplamiento.

W_{fl} = La energía disipada en forma de calor debido a las pérdidas dentro del campo de acoplamiento, por histéresis y corrientes de Eddy.

Si las pérdidas del campo de acoplamiento son despreciables, entonces el campo es conservativo. Así:

$$W_f = W_e + W_m \quad (1.3-4)$$

Considerando el sistema electromecánico elemental mostrado en la figura 1.3-2.

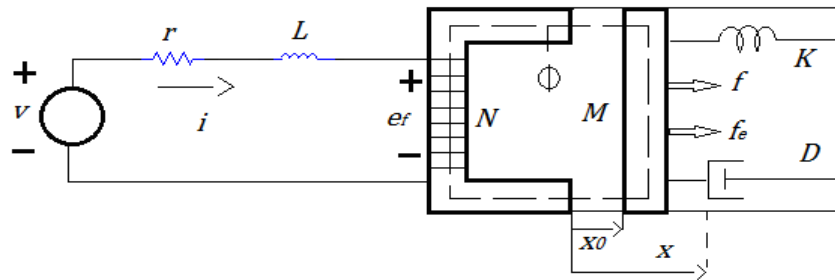


Figura 1.3-2 Sistema electromecánico con un campo magnético.

Donde:

v = Voltaje de la fuente eléctrica.

e_f = Es la caída de voltaje a través del campo de acoplamiento.

f = Fuerza mecánica externa aplicada al sistema mecánico.

f_e = Fuerza electromagnética.

r = Resistencia de los conductores.

L = Inductancia del sistema electromagnético lineal (conservativo) que no se acopla con el sistema mecánico.

M = Masa del miembro movable.

K = Constante del resorte.

D = Coeficiente de amortiguamiento.

La ecuación de voltaje que describe al sistema eléctrico es:

$$v = ri + L \frac{di}{dt} + e_f \quad (1.3-5)$$

El comportamiento dinámico del sistema mecánico traslacional está descrito por:

$$f = M \frac{d^2x}{dt^2} + D \frac{dx}{dt} + K(x - x_0) - f_e \quad (1.3-6)$$

La energía total suministrada por la fuente eléctrica es:

$$W_e = \int vi \, dt \quad (1.3-7)$$

La energía total suministrada por la fuente mecánica es:

$$W_m = \int f \, dx \quad (1.3-8)$$

Sustituyendo (1.3-5) en (1.3-7) produce:

$$W_e = r \int i^2 \, dt + L \int i \, di + \int e_f i \, dt \quad (1.3-9)$$

El primer término de lado derecho en (1.3-9) representa las pérdidas de energía debido a la resistencia de los conductores (W_{el}). El segundo término representa la energía almacenada en el campo electromagnético externo al campo de acoplamiento (W_{es}). Por lo tanto, la energía total transferida al campo de acoplamiento desde el sistema eléctrico es:

$$W_e = \int e_f i \, dt \quad (1.3-10)$$

Similarmente, para el sistema mecánico:

$$W_m = M \int \frac{d^2x}{dt^2} dx + D \int \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt + K \int (x - x_0) dx - \int f_e dx \quad (1.3-11)$$

El primer y tercer término representa la energía almacenada en la masa y en el resorte, respectivamente (W_{ms}). El segundo término son las pérdidas en forma de calor debido a la fricción (W_{ml}). La energía total transferida al campo de acoplamiento desde el sistema mecánico es:

$$W_m = - \int f_e dx \quad (1.3-12)$$

Sustituyendo (1.3-10) y (1.3-12) en la ecuación de balance de energía (1.3-4), se produce:

$$W_f = \int e_f i dt - \int f_e dx \quad (1.3-13)$$

Generalizando, para sistemas electromecánicos con cualquier número de entradas eléctricas y mecánicas como se muestra en la figura 1.3-3, la energía suministrada a los campos de acoplamiento se expresa como:

$$W_f = \sum_{j=1}^J W_{ej} + \sum_{k=1}^K W_{mk} \quad (1.3-14)$$

$$W_f = \int \sum_{j=1}^J e_{fj} i_j dt - \int \sum_{k=1}^K f_{ek} dx_k \quad (1.3-15)$$



Figura 1.3-3 Sistema electromecánico con múltiples entradas eléctricas y mecánicas.

1.3.1 Energía en el campo de acoplamiento

El material empleado en la construcción de las máquinas eléctricas es ferromagnético y arreglado en láminas para minimizar las pérdidas por histéresis y por corrientes de Eddy. Además, casi toda la energía en los campos de acoplamiento está almacenada en el entrehierro de la máquina. Debido a que el aire es un medio conservativo, toda la energía almacenada puede ser regresada al sistema eléctrico o mecánico.

Si se desprecian todas las pérdidas asociadas con los campos magnéticos o eléctricos, se puede obtener una expresión para la energía en el campo de acoplamiento.

La energía almacenada en un campo conservativo es una función del estado que tienen las variables del sistema y no de la manera en que estas lo alcanzan. En particular, si se fija la posición de los sistemas mecánicos asociados con el campo, se tiene que $W_{mk} = 0$ y la energía suministrada desde el sistema eléctrico está dada por (1.3-15) como:

$$W_f = \int \sum_{j=1}^J e_{fj} i_j dt \quad (1.3-16)$$

Considerando el sistema electromecánico con excitación única mostrado en la figura 1.3-2, $e_f = \frac{d\lambda}{dt}$ y (1.3-16) será:

$$W_f = \int i d\lambda \quad (1.3-17)$$

En la figura 1.3-4 se muestra la relación λ - i para un sistema electromagnético con excitación única. El área a la izquierda está descrita por la ecuación (1.3-17) y representa la energía almacenada en el campo en el instante en que $\lambda = \lambda_a$ e $i = i_a$. El área a la derecha en esta curva es llamada coenergía y es expresada como:

$$W_c = \int \lambda di \quad (1.3-18)$$

$$W_c = \lambda i - W_f \quad (1.3-19)$$

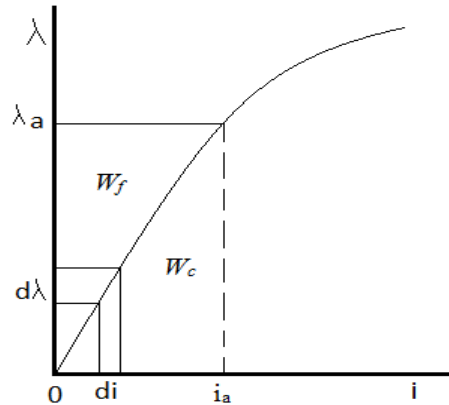


Figura 1.3-4 Energía almacenada y coenergía en un campo magnético.

La coenergía es una cantidad utilizada para obtener la expresión de la fuerza electromagnética. *En un sistema magnético lineal la relación λ - i es una línea recta, y entonces $W_f = W_c$.*

El desplazamiento x define completamente la influencia del sistema mecánico sobre el campo. Sin embargo, puesto que λ e i están relacionadas, solamente una se necesita junto con x para describir el estado del sistema electromecánico. Si x e i son seleccionadas como variables independientes, la energía del campo y los enlaces de flujo se expresan como:

$$W_f = W_f(i, x) \quad (1.3-20)$$

$$\lambda = \lambda(i, x) \quad (1.3-21)$$

Donde:

$$d\lambda = \frac{\partial \lambda(i, x)}{\partial i} di + \frac{\partial \lambda(i, x)}{\partial x} dx \quad (1.3-22)$$

Si $dx = 0$:

$$d\lambda = \frac{\partial \lambda(i, x)}{\partial i} di \quad (1.3-23)$$

Sustituyendo (1.3-23) en (1.3-17), se obtiene la energía almacenada en el campo:

$$W_f(i, x) = \int i \frac{\partial \lambda(i, x)}{\partial i} di = \int_0^i \xi \frac{\partial \lambda(\xi, x)}{\partial \xi} d\xi \quad (1.3-24)$$

La coenergía en términos de i y x puede ser evaluada de (1.3-18). Así:

$$W_c(i, x) = \int \lambda(i, x) di = \int_0^i \lambda(\xi, x) d\xi \quad (1.3-25)$$

Con λ y x como variables independientes se tiene:

$$W_f = W_f(\lambda, x) \quad (1.3-26)$$

$$i = i(\lambda, x) \quad (1.3-27)$$

La energía del campo evaluada de (1.3-17) queda:

$$W_f(\lambda, x) = \int i(\lambda, x) d\lambda = \int_0^\lambda i(\xi, x) d\xi \quad (1.3-28)$$

Para obtener la coenergía con λ y x como variables independientes, se necesita expresar di en términos de $d\lambda$. De (1.3-27) se tiene:

$$di(\lambda, x) = \frac{\partial i(\lambda, x)}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial i(\lambda, x)}{\partial x} dx \quad (1.3-29)$$

Con $dx = 0$, (1.3-18) será:

$$W_c(\lambda, x) = \int \lambda \frac{\partial i(\lambda, x)}{\partial \lambda} d\lambda = \int_0^\lambda \xi \frac{\partial i(\xi, x)}{\partial \xi} d\xi \quad (1.3-30)$$

En un sistema electromagnético lineal con excitación única y $dx = 0$, se tiene:

$$\lambda(i, x) = L(x)i \quad (1.3-31)$$

$$L(x) = \frac{\partial \lambda(i, x)}{\partial i} \quad (1.3-32)$$

Sustituyendo en (1.3-24) se obtiene:

$$W_f(i, x) = \left(\frac{1}{2}\right) L(x)i^2 \quad (1.3-33)$$

En el caso de un sistema electromagnético multiexcitado, la energía del campo se obtiene evaluando la siguiente relación con $dx_k = 0$:

$$W_f = \int \sum_{j=1}^J i_j d\lambda_j \quad (1.3-34)$$

Debido a que los campos de acoplamiento son considerados conservativos, (1.3-34) puede evaluarse independientemente del orden en que los enlaces de flujo o corrientes son traídos a sus valores finales.

1.3.2 Fuerza electromagnética

En un sistema electromagnético la ecuación de balance de energía puede ser escrita como:

$$\sum_{k=1}^K f_{ek} dx_k = \sum_{j=1}^J i_j d\lambda_j - dW_f \quad (1.3-35)$$

Con i_j y x_k seleccionadas como variables independientes se tiene:

$$W_f = W_f(i_1, \dots, i_j; x_1, \dots, x_k) \quad (1.3-36)$$

$$\lambda_j = \lambda_j(i_1, \dots, i_j; x_1, \dots, x_k) \quad (1.3-37)$$

Donde:

$$dW_f = \sum_{j=1}^J \frac{\partial W_f}{\partial i_j} di_j + \sum_{k=1}^K \frac{\partial W_f}{\partial x_k} dx_k \quad (1.3-38)$$

$$d\lambda_j = \sum_{n=1}^j \frac{\partial \lambda_j}{\partial i_n} di_n + \sum_{k=1}^K \frac{\partial \lambda_j}{\partial x_k} dx_k \quad (1.3-39)$$

Sustituyendo (1.3-38) y (1.3-39) en (1.3-35) se obtiene:

$$f_{ek}(i_j, x_k) = \sum_{j=1}^J i_j \frac{\partial \lambda_j(i_j; x_k)}{\partial x_k} - \frac{\partial W_f(i_j; x_k)}{\partial x_k} \quad (1.3-40)$$

La notación funcional $(i_1, \dots, i_j; x_1, \dots, x_k)$ se abrevia como (i_j, x_k) . La ecuación (1.3-40) puede ser usada para evaluar la fuerza en la k -ésima terminal mecánica de un sistema electromecánico con campos magnéticos acoplados con i_j y x_k como variables independientes. Una segunda ecuación para la fuerza electromagnética se obtiene de la expresión para la coenergía en un sistema multiexcitado como:

$$W_c = \sum_{j=1}^J i_j \lambda_j - W_f \quad (1.3-41)$$

Con i_j y x_k como variables independientes, la derivada parcial con respecto a x_k es:

$$\frac{\partial W_c}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^J i_j \frac{\partial \lambda_j(i_j; x_k)}{\partial x_k} - \frac{\partial W_f(i_j; x_k)}{\partial x_k} \quad (1.3-42)$$

Igualando las ecuaciones (1.3-42) y (1.3-40) se obtiene:

$$f_{ek}(i_j, x_k) = \frac{\partial W_c(i_j; x_k)}{\partial x_k} \quad (1.3-43)$$

Si el sistema magnético es lineal entonces $W_c = W_f$. En un sistema rotacional, f_{ek} y x_k son remplazadas con el torque electromagnético T_{ek} y con el desplazamiento angular θ_k , respectivamente. Así, el torque electromagnético queda como:

$$T_{ek}(i_j, \theta_k) = \sum_{j=1}^J i_j \frac{\partial \lambda_j(i_j; \theta_k)}{\partial \theta_k} - \frac{\partial W_f(i_j; \theta_k)}{\partial \theta_k} \quad (1.3-44)$$

$$T_{ek}(i_j; \theta_k) = \frac{\partial W_c(i_j; \theta_k)}{\partial \theta_k} \quad (1.3-45)$$

1.4 DEVANADOS DE MÁQUINA Y FMM EN EL ENTREHIERRO

Para obtener una expresión para la FMM en el entrehierro de una máquina de inducción se considerará una máquina síncrona elemental trifásica, de rotor cilíndrico, de 2 polos, y conexión en Y, como se muestra en la figura 1.4-1. Una vez determinada la FMM en el entrehierro para este tipo de máquina, puede ser modificada para adecuarla en máquinas de inducción. El análisis se apoya en los siguientes conceptos:

- Devanados de estator trifásicos y simétricos.
- Ley de Ampere.
- Devanados distribuidos senoidalmente.
- Grupo de corrientes de estator trifásicas balanceadas en estado estable.

En la máquina síncrona trifásica los devanados se encuentran empotrados en ranuras alrededor de la circunferencia interior del miembro estacionario, cada devanado de fase está desplazado 120°

con respecto a cada uno de los otros. El devanado de campo está en el miembro rotatorio. Cada devanado de fase es idéntico a cada uno de los otros: igual resistencia, igual número de vueltas. En la figura 1.4-1 se asumió que cada bobina del estator se extiende π radianes para una máquina de 2 polos. El lado de la bobina representado con círculo y una x indica que la dirección positiva de la corriente es entrando al papel. El lado de la bobina representado con círculo y un punto indica que la corriente está saliendo del papel. Cada bobina del estator contiene n_c conductores. En el caso del devanado f_d , cada bobina consiste de n_f conductores. El número total de vueltas de cada devanado está dado por el producto de n_c y el número de lados de bobina que llevan corriente en la misma dirección.

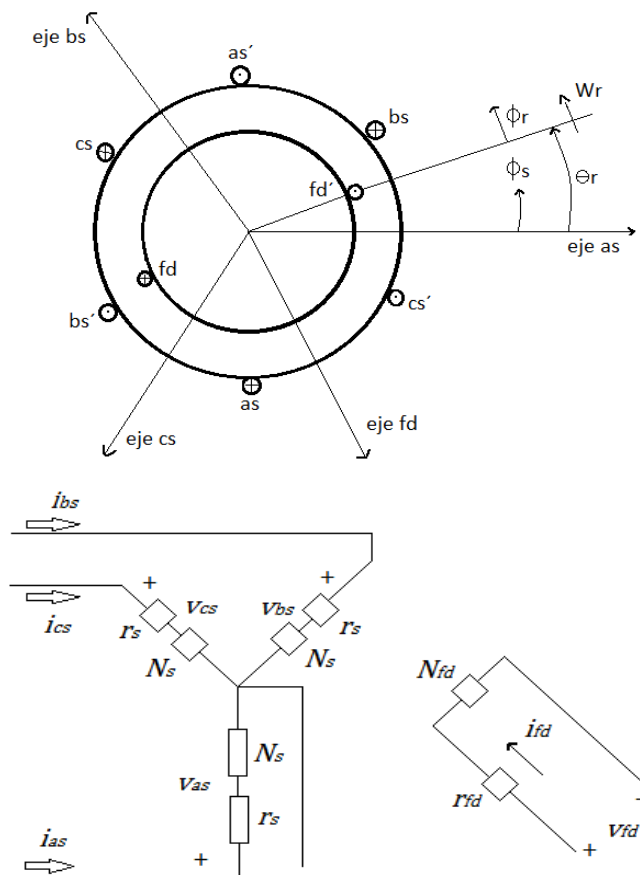


Figura 1.4-1 Máquina síncrona elemental: trifásica, 2 polos y conexión Y.

Donde Φ_s y Φ_r denotan un desplazamiento angular a lo largo de la superficie del estator y del rotor, respectivamente. La velocidad y el desplazamiento angular del rotor son ω_r y θ_r , respectivamente. Los desplazamientos angulares se relacionan como:

$$\Phi_s = \Phi_r + \theta_r \quad (1.4-1)$$

Para simplificar el análisis se considera solamente uno de los devanados del estator a la vez, como se muestra en la figura 1.4-2.

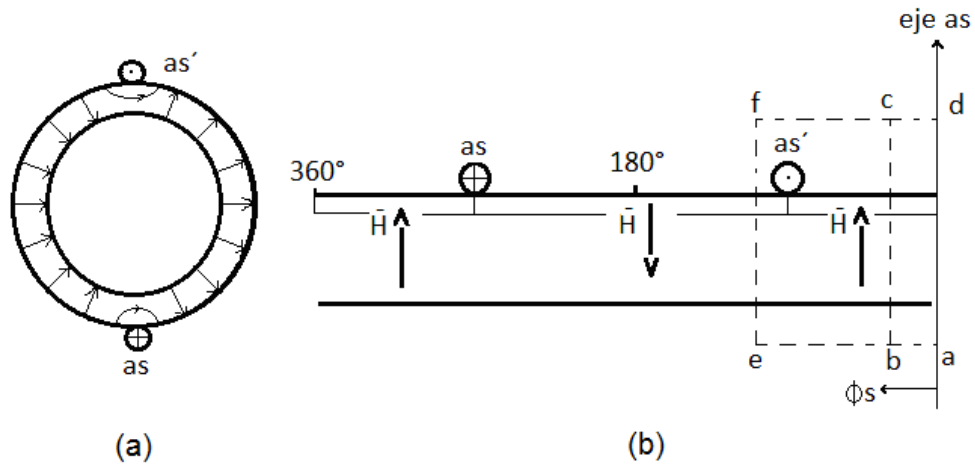


Figura 1.4-2 El devanado a_s . (a) Dirección de \bar{H} ; (b) diagrama desarrollado.

En el entrehierro, la intensidad de campo \bar{H} y la densidad de flujo \bar{B} tienen dirección radial, y la magnitud es una función del ángulo Φ_s , entonces:

$$\bar{H}(r, \Phi_s, z) = H_r(\Phi_s)\vec{a} \quad (1.4-2)$$

$$B_r(\Phi_s) = \mu_0 H_r(\Phi_s) \quad (1.4-3)$$

Usando la ley de Ampere se determina la forma de la FMM en el entrehierro debido al devanado a_s . Esta, plantea que:

$$\oint \bar{H} \circ d\vec{l} = i \quad (1.4-4)$$

Donde i es la corriente total encerrada por la trayectoria de integración, como se muestra en la figura 1.4-2b.

La onda de FMM en el entrehierro para el devanado a_s , denotada como FMM_{a_s} se muestra en la figura 1.4-3.

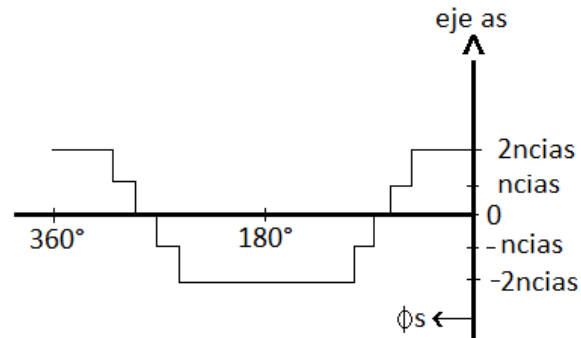


Figura 1.4-3 FMM en el entrehierro debido al devanado a_s .

Las ondas de FMM debido a los devanados b_s , y c_s , son idénticas a la FMM_{a_s} pero desplazadas a la izquierda 120° y 240° , respectivamente. Los ejes a_s , b_s y c_s están posicionados en el centro del máximo positivo de la onda de FMM producida por las corrientes que entran a los devanados. La FMM producida por los devanados de fase del estator es una aproximación de una función senoidal de Φ_s . Las máquinas eléctricas son diseñadas para que los devanados de estator produzcan una buena aproximación senoidal de una FMM en el entrehierro con respecto a Φ_s , para minimizar los armónicos de voltaje y corriente. Para obtener dicha aproximación, los devanados son distribuidos senoidalmente. El devanado a_s distribuido senoidalmente y la FMM_{a_s} senoidal se muestran en la figura 1.4-4.

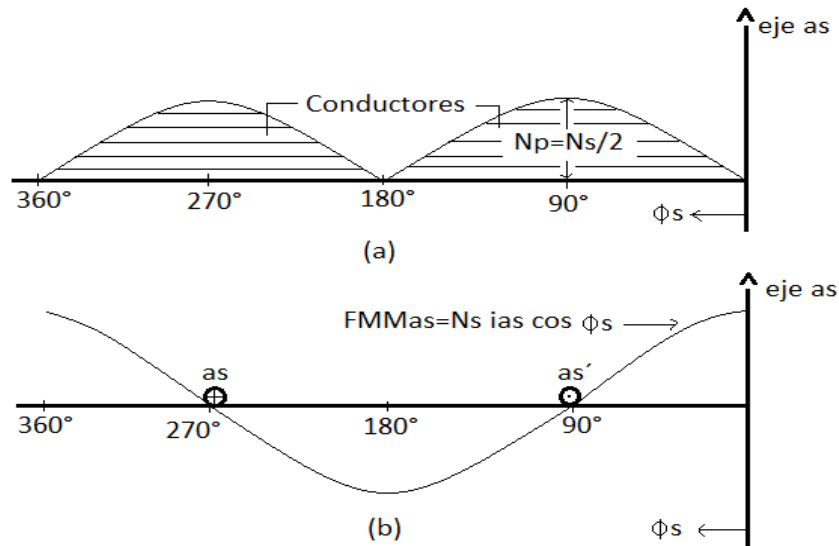


Figura 1.4-4 Distribución senoidal. (a) Distribución equivalente del devanado as, (b) FMM debido al devanado as equivalente.

La distribución del devanado as puede ser escrita como:

$$N_{as} = N_p \sin \Phi_s ; \quad 0 \leq \Phi_s \leq \pi \quad (1.4-5)$$

$$N_{as} = -N_p \sin \Phi_s ; \quad \pi \leq \Phi_s \leq 2\pi \quad (1.4-6)$$

Donde N_p es la densidad de conductores en vueltas/radian.

Si N_s representa el número de vueltas equivalente del devanado distribuido senoidalmente, entonces:

$$N_s = \int_0^\pi N_p \sin \Phi_s d\Phi_s = 2N_p \quad (1.4-7)$$

Aplicando ley de Ampere a la forma de onda de la figura 1.4-4b se obtiene:

$$FMM_{as} = \left(\frac{1}{2}\right) N_s i_{as} \cos \Phi_s \quad (1.4-8)$$

Por lo tanto:

$$FMM_{bs} = \left(\frac{1}{2}\right) N_s i_{bs} \cos\left(\Phi_s - \frac{2\pi}{3}\right) \quad (1.4-9)$$

$$FMM_{cs} = \left(\frac{1}{2}\right) N_s i_{cs} \cos\left(\Phi_s + \frac{2\pi}{3}\right) \quad (1.4-10)$$

La FMM en el entrehierro total producida por las corrientes de estator es la suma de las FMM individuales, dadas por (1.4-8)-(1.4-10):

$$FMM_s = \left(\frac{N_s}{2}\right) [i_{as} \cos \Phi_s + i_{bs} \cos(\Phi_s - \frac{2\pi}{3}) + i_{cs} \cos(\Phi_s + \frac{2\pi}{3})] \quad (1.4-11)$$

En condiciones balanceadas y en estado estable, las corrientes del estator se expresan como:

$$I_{as} = \sqrt{2} I_s \cos(\omega_e t + \theta_{ei}(0)) \quad (1.4-12)$$

$$I_{bs} = \sqrt{2} I_s \cos(\omega_e t - \frac{2\pi}{3} + \theta_{ei}(0)) \quad (1.4-13)$$

$$I_{cs} = \sqrt{2} I_s \cos(\omega_e t + \frac{2\pi}{3} + \theta_{ei}(0)) \quad (1.4-14)$$

Donde $\theta_{ei}(0)$ es el ángulo de fase en $t=0$ s. Sustituyendo las corrientes en (1.4-11), se obtiene:

$$FMM_s = \left(\frac{N_s}{2}\right) \sqrt{2} I_s \left(\frac{3}{2}\right) \cos(\omega_e t + \theta_{ei}(0) - \Phi_s) \quad (1.4-15)$$

La expresión anterior describe una onda senoidal de FMM en el entrehierro con respecto a Φ_s , que rota alrededor del estator con una velocidad angular ω_e en dirección contraria al movimiento de las manecillas del reloj, similar a un par de polos magnéticos rotando. Para una máquina de P -polos se tiene que:

$$FMM_{as} = \left(\frac{N_s}{P}\right) i_{as} \cos \frac{P}{2} \Phi_s \quad (1.4-16)$$

$$FMM_{bs} = \left(\frac{N_s}{P}\right) i_{bs} \cos\left(\frac{P}{2} \Phi_s - \frac{2\pi}{3}\right) \quad (1.4-17)$$

$$FMM_{cs} = \left(\frac{N_s}{P}\right) i_{cs} \cos\left(\frac{P}{2} \Phi_s + \frac{2\pi}{3}\right) \quad (1.4-18)$$

Con corrientes balanceadas y estado estable, la FMM total será:

$$FMM_s = \left(\frac{2N_s}{P}\right) \sqrt{2} I_s \left(\frac{3}{2}\right) \cos(\omega_e t + \theta_{ei}(0) - \frac{P}{2} \Phi_s) \quad (1.4-19)$$

1.5 INDUCTANCIAS DE DEVANADOS Y ECUACIONES DE VOLTAJE

El arreglo de devanados de una máquina de inducción trifásica, simétrica, 2 polos y conexión en Y se muestra en la figura 1.5-1. Los devanados de estator idénticos tienen número de vueltas equivalentes N_s y resistencia r_s . El rotor puede ser de tipo devanado o jaula de ardilla, es aproximado con un número de vueltas equivalentes N_r y resistencia r_r . El entrehierro g de la máquina de inducción es uniforme. En el análisis siguiente se asume que los devanados de estator y rotor se pueden aproximar como devanados distribuidos senoidalmente. Se usa la máquina síncrona elemental trifásica, 2 polos para obtener las inductancias de los devanados. Estas relaciones de inductancias pueden ser fácilmente alteradas para describir los devanados de la máquina de inducción.

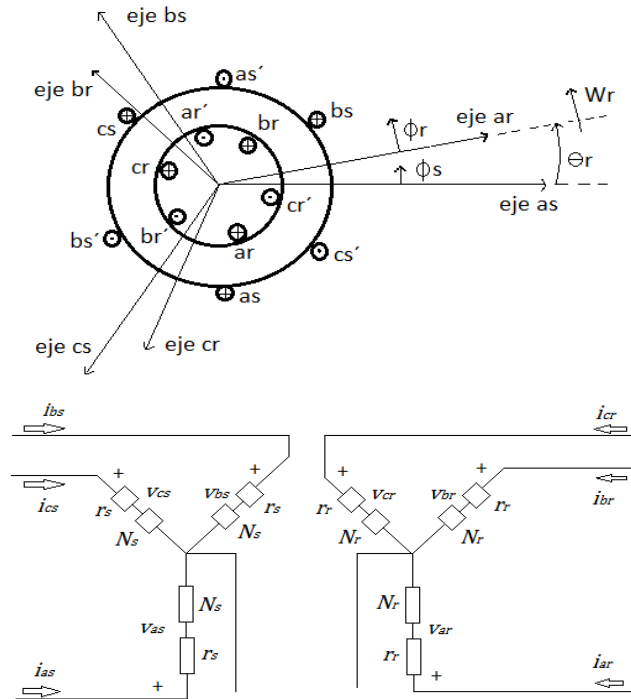


Figura 1.5-1 Máquina de inducción trifásica, simétrica, 2 polos y conexión en Y.

De (1.4-3):

$$B_r(\Phi_s, \theta_r) = \mu_0 \frac{FMM(\Phi_s)}{g} \quad (1.5-1)$$

Donde g es la longitud uniforme del entrehierro. La densidad de flujo debido a la corriente i_{as} en el devanado as, con las otras corrientes igual a cero, se obtiene sustituyendo (1.4-8) en (1.5-1).

$$B_r(\Phi_s, \theta_r) = \mu_0 \frac{FMM_{as}(\Phi_s)}{g} = \left(\frac{\mu_0 N_s i_{as} \cos \Phi_s}{2g} \right) \quad (1.5-2)$$

Similarmente, la densidad de flujo debido a la corriente i_{bs} en el devanado bs, con las otras corrientes igual a cero, es:

$$B_r(\Phi_s, \theta_r) = \mu_0 \frac{FMM_{bs}(\Phi_s)}{g} = \left(\frac{\mu_0 N_s i_{bs} \cos(\Phi_s - \frac{2\pi}{3})}{2g} \right) \quad (1.5-3)$$

Por lo tanto, con todas las corrientes igual a cero, excepto i_{cs} , se tiene:

$$B_r(\Phi_s, \theta_r) = \mu_0 \frac{FMM_{cs}(\Phi_s)}{g} = \left(\frac{\mu_0 N_s i_{cs} \cos(\Phi_s + \frac{2\pi}{3})}{2g} \right) \quad (1.5-4)$$

La FMM en el entrehierro debido a la corriente i_{fd} fluyendo en el devanado de campo f_d es:

$$FMM_{fd} = \frac{-N_f i_{fd} \sin \theta_r}{2} \quad (1.5-5)$$

La densidad de flujo debido a i_{fd} , con las otras corrientes igual a cero, es:

$$B_r(\theta_r) = \mu_0 \frac{FMM_{fd}}{g} = \frac{-\mu_0 N_f i_{fd} \sin \theta_r}{2g} \quad (1.5-6)$$

El flujo ligado por una espira simple de un devanado del estator que se extiende π radianes y que se localiza a un ángulo Φ_s desde el eje as es:

$$\Phi(\theta_s, \theta_r) = \int_{\theta_s}^{\theta_s + \pi} B_r(\xi, \theta_r) r l d\xi \quad (1.5-7)$$

Donde l es la longitud axial del entrehierro de la máquina, r es el radio de la circunferencia interior del estator y ξ es una variable muda de integración. Los enlaces de flujo de un devanado completo se obtienen sumando los flujos ligados por cada espira, por lo tanto, se integra sobre todos los lados del devanado que llevan corriente en la misma dirección.

Los enlaces de flujo totales en el devanado as debido a la corriente i_{as} son:

$$\lambda_{as} = L_{ls}i_{as} + \int N_{as}(\vartheta_s) \varnothing(\vartheta_s, \theta_r) d\vartheta_s$$

$$\lambda_{as} = L_{ls}i_{as} + \int N_{as}(\vartheta_s) \int_{\vartheta_s}^{\vartheta_s+\pi} B_r(\xi, \theta_r) r l d\xi d\vartheta_s \quad (1.5-8)$$

Donde L_{ls} es la inductancia de dispersión debida al flujo disperso en los extremos de los devanados. Sustituyendo (1.5-2) y (1.4-6) con N_p remplazado por $\frac{N_s}{2}$ en (1.5-8) produce:

$$\lambda_{as} = L_{ls}i_{as} - \int_{\pi}^{2\pi} \frac{N_s}{2} \sin\vartheta_s \int_{\vartheta_s}^{\vartheta_s+\pi} \left(\frac{\mu_0 N_s i_{as} \cos\xi}{2g} \right) r l d\xi d\vartheta_s$$

$$\lambda_{as} = L_{ls}i_{as} + \left(\frac{N_s}{2} \right)^2 \frac{\pi \mu_0 r l i_{as}}{g} \quad (1.5-9)$$

La inductancia propia del devanado as se obtiene dividiendo (1.5-9) entre i_{as} Así:

$$L_{asas} = \frac{\lambda_{as}}{i_{as}} = L_{ls} + \left(\frac{N_s}{2} \right)^2 \frac{\pi \mu_0 r l}{g} \quad (1.5-10)$$

La inductancia mutua entre los devanados a_s y b_s se determina primero calculando el flujo ligado por el devanado as debido a la corriente i_{bs} . En este caso se desprecia el acoplamiento magnético que pudiera ocurrir en los extremos de los devanados. Entonces:

$$\lambda_{as} = \int N_{as}(\vartheta_s) \int_{\vartheta_s}^{\vartheta_s+\pi} B_r(\xi, \theta_r) r l d\xi d\vartheta_s \quad (1.5-11)$$

Sustituyendo (1.4-14) y (1.5-3) en (1.5-11) produce:

$$\lambda_{as} = - \int_{\pi}^{2\pi} \frac{N_s}{2} \sin\vartheta_s \int_{\vartheta_s}^{\vartheta_s+\pi} \left(\frac{\mu_0 N_s i_{bs} \cos(\xi - \frac{2\pi}{3})}{2g} \right) r l d\xi d\vartheta_s \quad (1.5-12)$$

Por lo tanto, La inductancia mutua entre los devanados a_s y b_s se obtiene evaluando (1.5-12) y dividiendo el resultado entre i_{bs} . Esto da:

$$L_{asbs} = \frac{\lambda_{as}}{i_{bs}} = - \left(\frac{N_s}{2} \right)^2 \frac{\pi \mu_0 r l}{2g} \quad (1.5-13)$$

La inductancia mutua entre los devanados a_s y f_d se determina sustituyendo (1.5-6), expresada en términos de $(\Phi_s - \theta_r)$ en (1.5-11).

Entonces:

$$\lambda_{as} = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{N_s}{2} \sin \Phi_s \int_{\Phi_s}^{\Phi_s + \pi} \frac{\mu_0 N_f i_{fd} \sin(\xi - \theta_r)}{2g} r l d\xi d\Phi_s \quad (1.5-14)$$

Evaluando y dividiendo entre i_{fd} se obtiene:

$$L_{asfd} = \frac{\lambda_{as}}{i_{fd}} = \left(\frac{N_s}{2}\right)\left(\frac{N_f}{2}\right) \frac{\pi \mu_0 r l \sin \theta_r}{g} \quad (1.5-15)$$

La inductancia propia del devanado de campo se obtiene primero evaluando el flujo ligado por el devanado f_d con todas las corrientes igual a cero excepto i_{fd} . Entonces, considerando el devanado distribuido senoidalmente y la densidad de flujo expresada por (1.5-6), se tiene:

$$\lambda_{fd} = L_{lfd} i_{fd} + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{N_f}{2} \cos \Phi_r \int_{\Phi_r}^{\Phi_r + \pi} \frac{\mu_0 N_f i_{fd} \sin \xi}{2g} r l d\xi d\Phi_r \quad (1.5-16)$$

Evaluando (1.5-16) y dividiendo entre i_{fd} se obtiene:

$$L_{fdfd} = \frac{\lambda_{fd}}{i_{fd}} = L_{lfd} + \left(\frac{N_f}{2}\right)^2 \frac{\pi \mu_0 r l}{g} \quad (1.5-17)$$

Donde L_{lfd} es la inductancia de dispersión del devanado de campo.

Las inductancias propias del estator L_{asas} , L_{bsbs} y L_{cscs} son iguales:

$$L_{asas} = L_{ls} + L_{ms} \quad (1.5-18)$$

Donde L_{ms} es la inductancia de magnetización del estator. Se expresa:

$$L_{ms} = \left(\frac{N_s}{2}\right)^2 \frac{\pi \mu_0 r l}{g} \quad (1.5-19)$$

Las inductancias mutuas de estator a estator L_{asbs} , L_{ascs} y L_{bscs} son iguales:

$$L_{asbs} = -\left(\frac{1}{2}\right)L_{ms} \quad (1.5-20)$$

Las inductancias propias del rotor L_{arar} , L_{brbr} y L_{crrr} son iguales:

$$L_{arar} = L_{lr} + L_{mr} \quad (1.5-21)$$

Donde L_{mr} es la inductancia de magnetización del rotor. Se expresa como:

$$L_{mr} = \left(\frac{N_r}{2}\right)^2 \frac{\pi\mu_0 r l}{g} \quad (1.5-22)$$

Las inductancias mutuas de rotor a rotor L_{arbr} , L_{arcr} y L_{brcr} son iguales:

$$L_{arbr} = -\left(\frac{1}{2}\right)L_{mr} \quad (1.5-23)$$

Las inductancias mutuas entre los devanados del estator y el rotor L_{asar} , L_{bsbr} y L_{cscr} son iguales con:

$$L_{asar} = L_{sr} \cos \theta_r \quad (1.5-24)$$

También L_{asbr} , L_{bscr} y L_{csar} son iguales con:

$$L_{asbr} = L_{sr} \cos\left(\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) \quad (1.5-25)$$

Finalmente L_{ascr} , L_{bsar} y L_{csbr} son iguales con:

$$L_{ascr} = L_{sr} \cos\left(\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) \quad (1.5-26)$$

Donde:

$$L_{sr} = \left(\frac{N_s}{2}\right)\left(\frac{N_r}{2}\right) \frac{\pi\mu_0 r l}{g} \quad (1.5-27)$$

Las ecuaciones de voltaje para la máquina de inducción son:

$$v_{as} = r_s i_{as} + \frac{d\lambda_{as}}{dt} \quad (1.5-28)$$

$$v_{bs} = r_s i_{bs} + \frac{d\lambda_{bs}}{dt} \quad (1.5-29)$$

$$v_{cs} = r_s i_{cs} + \frac{d\lambda_{cs}}{dt} \quad (1.5-30)$$

$$v_{ar} = r_r i_{ar} + \frac{d\lambda_{ar}}{dt} \quad (1.5-31)$$

$$v_{br} = r_r i_{br} + \frac{d\lambda_{br}}{dt} \quad (1.5-32)$$

$$v_{cr} = r_r i_{cr} + \frac{d\lambda_{cr}}{dt} \quad (1.5-33)$$

Donde r_s es la resistencia de cada devanado de fase del estator y r_r es para los del rotor. Así, los enlaces de flujo λ_{as} pueden ser escritos como:

$$\lambda_{as} = L_{asas} i_{as} + L_{asbs} i_{bs} + L_{ascs} i_{cs} + L_{asar} i_{ar} + L_{asbr} i_{br} + L_{ascr} i_{cr}$$

Aquí se observa la complejidad de las ecuaciones de voltaje debido a la variación en el tiempo de las inductancias mutuas entre los circuitos de estator y del rotor (circuitos en movimiento relativo).

Capítulo 2

TEORÍA DE MARCOS DE REFERENCIA

2.1 ANTECEDENTES

En el capítulo 1 se obtuvieron las ecuaciones diferenciales de voltaje que describen el funcionamiento de una máquina de inducción, y se observó que las inductancias son funciones de la velocidad del rotor, entonces los coeficientes son variables en el tiempo excepto cuando el rotor está detenido. Un cambio de variables es usado para reducir la complejidad de estas ecuaciones diferenciales.

A finales de los 20, R. H. Park introdujo una nueva aproximación para analizar máquinas eléctricas. *Formuló un cambio de variables que reemplaza voltajes, corrientes y enlaces de flujo asociados con los devanados de estator de una máquina síncrona, con variables de devanados ficticios en el rotor. Es decir, transformó o refirió las variables de estator a un marco de referencia fijado en el rotor.* La transformación de Park revolucionó el análisis de máquinas eléctricas; tiene la única propiedad de eliminar todas las inductancias variables en el tiempo de las ecuaciones de voltaje de la máquina síncrona, que ocurren por:

1. Circuitos eléctricos en movimiento relativo.
2. Circuitos magnéticos con reluctancia variable.

A finales de los 30, H. C. Stanley empleó un cambio de variables en el análisis de máquinas de inducción. Mostró que *las inductancias variables en el tiempo en las ecuaciones de voltaje de una máquina de inducción podían ser eliminadas transformando las variables asociadas con los devanados del rotor, a variables de devanados estacionarios*

ficticios. En este caso, las variables del rotor son transformadas a un marco de referencia fijado en el estator.

G. Kron introdujo un cambio de variables que elimina las inductancias mutuas que varían con el tiempo de una máquina de inducción simétrica, transformando las variables de estator y las del rotor a un marco de referencia que rota en sincronismo con el campo magnético.

D. S. Brereton empleó una transformación de las variables de estator a un marco de referencia fijado en el rotor (Transformación de Park aplicada a la máquina de inducción), esta elimina las inductancias que varían con el tiempo de una máquina de inducción simétrica.

En 1965 se notó que todas las transformaciones antes mencionadas, usadas en el análisis de máquinas de inducción, están contenidas en una transformación general que elimina todas las inductancias variables en el tiempo, refiriendo las variables de estator y rotor a un marco de referencia que rota a alguna velocidad angular o permanece estacionario. A este marco de referencia se le llamó marco de referencia arbitrario.

2.2 ECUACIONES DE TRANSFORMACIÓN: CAMBIO DE VARIABLES

La transformación al marco de referencia arbitrario es un cambio de variables. Aplicada, a variables trifásicas de elementos de circuitos estacionarios se expresa como:

$$f_{qd0s} = K_s f_{abc} \quad (2.2-1)$$

Donde:

$$(f_{qd0s})^T = [f_{qs} \ f_{ds} \ f_{0s}] \quad (2.2-2)$$

$$(f_{abc})^T = [f_{as} \ f_{bs} \ f_{cs}] \quad (2.2-3)$$

$$\mathbf{K}_s = \begin{pmatrix} \cos \theta & \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ \sin \theta & \sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (2.2-4)$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (2.2-5)$$

La transformación inversa es:

$$(\mathbf{K}_s)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 1 \\ \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) & 1 \\ \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) & \sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) & 1 \end{pmatrix} \quad (2.2-6)$$

En las ecuaciones anteriores, f puede representar: voltaje, corriente, enlaces de flujo o carga eléctrica. El superíndice T denota la transpuesta de una matriz. El subíndice indica variables, parámetros y la transformación asociada con circuitos estacionarios.

El marco de referencia puede rotar a una velocidad constante, variable o puede permanecer estacionario (velocidad cero). Esta, se selecciona arbitrariamente para una rápida resolución del sistema de ecuaciones o para satisfacer los requerimientos del sistema. La transformación puede ser aplicada a variables con cualquier forma de onda y secuencia de tiempo. En particular, es apropiada para una secuencia abc .

La transformación de ecuaciones se puede visualizar como relaciones trigonométricas entre variables, como se muestra en la figura 2.2-1. En particular, las ecuaciones de transformación pueden ser imaginadas como si las variables f_{qs} y f_{ds} están dirigidas a lo largo de trayectorias ortogonales entre sí y rotando a una velocidad angular ω , en donde f_{as} , f_{bs} y f_{cs} son las variables con trayectorias estacionarias desplazadas 120° entre sí. Si f_{as} , f_{bs} , y f_{cs} se resuelven en el eje f_{qs} , la primera fila de (2.2-1) se obtiene, y si f_{as} , f_{bs} , y f_{cs} se resuelven en el eje f_{ds} , la segunda fila se obtiene. Las variables f_{0s} se relacionan aritméticamente con las variables abc , independientemente de θ .

f_{as} , f_{bs} y f_{cs} no son fasores, son cantidades instantáneas y pueden ser cualquier función del tiempo. En la figura 2.2-1, se muestra la transformación cuando se aplica a máquinas de c.a., la dirección de f_{as} , f_{bs} y f_{cs} representan la dirección de los ejes magnéticos de los devanados de estator. La dirección de f_{qs} y f_{ds} representan la dirección de los ejes magnéticos de los “nuevos” devanados, creados por el cambio de variables.

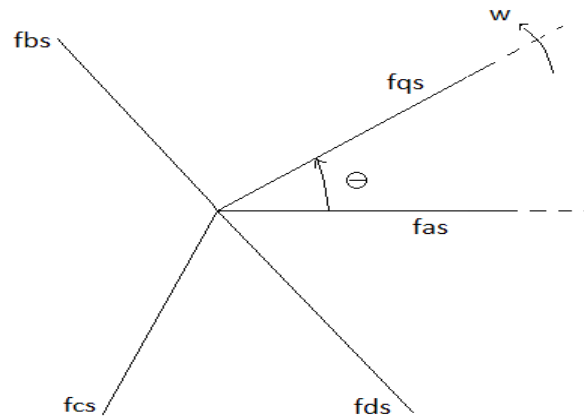


Figura 2.2-1 Transformación de circuitos estacionarios representada por relaciones trigonométricas.

2.3 VARIABLES DE CIRCUITO ESTACIONARIO TRANSFORMADAS AL MARCO DE REFERENCIA ARBITRARIO

Se considerarán únicamente elementos de circuito inductivo y resistivo.

Elementos Resistivos

Para un circuito trifásico resistivo se tiene:

$$v_{abcs} = r_s i_{abcs} \tag{2.3-1}$$

De (2.2-1) se obtiene:

$$v_{qd0s} = K_s r_s (K_s)^{-1} i_{qd0s} \tag{2.3-2}$$

Todos los devanados de fase de una máquina de inducción simétrica están diseñados para tener la misma resistencia. Si los elementos de la matriz diagonal r_s son iguales, entonces:

$$\mathbf{K}_s \mathbf{r}_s (\mathbf{K}_s)^{-1} = r_s \quad (2.3-3)$$

Así, la matriz de resistencias asociada con las variables en el marco de referencia arbitrario es igual a la de las variables actuales, si cada fase del circuito actual tiene la misma resistencia. Si las resistencias de fase son diferentes (desbalanceo o asimétricas), la matriz contiene funciones senoidales de θ , excepto cuando $\omega=0$.

Elementos inductivos

Para un circuito trifásico inductivo se tiene:

$$\mathbf{v}_{abc s} = \frac{d(\lambda_{abc s})}{dt} \quad (2.3-4)$$

De (2.2-1) se obtiene:

$$\mathbf{v}_{qd0s} = \mathbf{K}_s \frac{d[(\mathbf{K}_s)^{-1} \lambda_{qd0s}]}{dt} \quad (2.3-5)$$

Que puede escribirse como:

$$\mathbf{v}_{qd0s} = \mathbf{K}_s \left(\frac{d(\mathbf{K}_s)^{-1}}{dt} \right) \lambda_{qd0s} + \mathbf{K}_s (\mathbf{K}_s)^{-1} \frac{d\lambda_{qd0s}}{dt} \quad (2.3-6)$$

Desarrollando la ecuación (2.3-6) se obtiene:

$$\mathbf{v}_{qd0s} = \omega \lambda_{dq s} + \frac{d\lambda_{qd0s}}{dt} \quad (2.3-7)$$

Donde:

$$(\lambda_{dq s})^T = [\lambda_{ds} \quad -\lambda_{qs} \quad 0] \quad (2.3-8)$$

Escribiendo (2.3-7) en forma expandida se obtiene:

$$v_{qs} = \omega \lambda_{ds} + \frac{d\lambda_{qs}}{dt} \quad (2.3-9)$$

$$v_{ds} = -\omega \lambda_{qs} + \frac{d\lambda_{ds}}{dt} \quad (2.3-10)$$

$$v_{0s} = \frac{d\lambda_{0s}}{dt} \quad (2.3-11)$$

El primer término de lado derecho en (2.3-9) y (2.3-10) es referido como “voltaje velocidad”, siendo ω la velocidad angular del marco de referencia arbitrario. Dado que (2.3-4) es válida en general, de (2.3-9) a (2.3-11) son válidas sin importar si el sistema es magnéticamente lineal o no lineal. Para un sistema magnético lineal, los enlaces de flujo pueden expresarse como:

$$\lambda_{abcs} = L_s \mathbf{i}_{abcs} \quad (2.3-12)$$

Entonces, los enlaces de flujo en el marco de referencia arbitrario pueden escribirse como:

$$\lambda_{qd0s} = \mathbf{K}_s L_s (\mathbf{K}_s)^{-1} \mathbf{i}_{qd0s} \quad (2.3-13)$$

Para expresar un circuito trifásico inductivo en el marco de referencia arbitrario se debe: especificar la matriz de inductancias, evaluar (2.3-13) y sustituir los enlaces de flujo resultantes λ_{qs} , λ_{ds} y λ_{0s} en las ecuaciones de voltaje de (2.3-9) a (2.3-11).

Una matriz de inductancias común en máquinas de inducción tiene la forma:

$$\mathbf{L}_s = \begin{bmatrix} L_{ls} + L_{ms} & \frac{-L_{ms}}{2} & \frac{-L_{ms}}{2} \\ \frac{-L_{ms}}{2} & L_{ls} + L_{ms} & \frac{-L_{ms}}{2} \\ \frac{-L_{ms}}{2} & \frac{-L_{ms}}{2} & L_{ls} + L_{ms} \end{bmatrix} \quad (2.3-14)$$

Donde L_{ls} es la inductancia de dispersión y L_{ms} es la de magnetización.

Para L_s dada por (2.3-14) se tiene:

$$\mathbf{K}_s \mathbf{L}_s (\mathbf{K}_s)^{-1} = \begin{bmatrix} L_{ls} + \frac{3}{2} L_{ms} & 0 & 0 \\ 0 & L_{ls} + \frac{3}{2} L_{ms} & 0 \\ 0 & 0 & L_{ls} \end{bmatrix} \quad (2.3-15)$$

Por lo tanto, en un sistema simétrico, $\mathbf{K}_s \mathbf{L}_s (\mathbf{K}_s)^{-1}$ produce una matriz diagonal desacoplada magnéticamente en todos los marcos de referencia.

2.4 TRANSFORMACIÓN DE UN ARREGLO TRIFÁSICO BALANCEADO

Un arreglo trifásico balanceado de secuencia abc se define como un arreglo de cantidades senoidales de amplitud igual, que están desplazadas 120° entre sí.

$$f_{as} = \sqrt{2}f_s \cos \theta_{ef} \quad (2.4-1)$$

$$f_{bs} = \sqrt{2}f_s \cos(\theta_{ef} - \frac{2\pi}{3}) \quad (2.4-2)$$

$$f_{cs} = \sqrt{2}f_s \cos(\theta_{ef} + \frac{2\pi}{3}) \quad (2.4-3)$$

Donde f_s puede ser una función de tiempo y:

$$\omega_e = \frac{d\theta_{ef}}{dt} \quad (2.4-4)$$

Sustituyendo de (2.4-1) a (2.4-3) en la transformación al marco de referencia arbitrario (2.2-1) produce:

$$f_{qs} = \sqrt{2}f_s \cos(\theta_{ef} - \theta) \quad (2.4-5)$$

$$f_{ds} = -\sqrt{2}f_s \sin(\theta_{ef} - \theta) \quad (2.4-6)$$

$$f_{0s} = 0 \quad (2.4-7)$$

La suma del arreglo trifásico balanceado es igual a cero, las variables f_{0s} son cero. Las variables qs y ds forman un arreglo bifásico balanceado en todos los marcos de referencia, excepto cuando $\omega = \omega_e$. En este último caso se dice que el marco de referencia rota sincrónicamente, las cantidades qs y ds serán:

$$f_{qs}^e = \sqrt{2}f_s \cos(\theta_{ef} - \theta_e) \quad (2.4-8)$$

$$f_{ds}^e = -\sqrt{2}f_s \sin(\theta_{ef} - \theta_e) \quad (2.4-9)$$

Donde θ_e y θ_{ef} tienen la misma velocidad angular ω_e . Entonces, $(\theta_{ef} - \theta_e)$ es una constante que depende del valor inicial de las variables que están siendo transformadas y de la posición inicial del marco de referencia.

Por lo tanto, las ecuaciones (2.4-8) y (2.4-9) indican que *un arreglo trifásico balanceado, aparecerá como constantes en dicho marco de referencia.*

2.5 RELACIONES DE FASORES EN ESTADO ESTABLE BALANCEADO

En condiciones de estado estable balanceado, ω_e es constante y (2.4-1) a (2.4-3) pueden expresarse como:

$$F_{as} = \sqrt{2}F_s \cos[\omega_e t + \theta_{ef}(0)] = \text{Re}[\sqrt{2}F_s e^{j\theta_{ef}(0)} e^{j\omega_e t}] \quad (2.5-1)$$

$$F_{bs} = \sqrt{2}F_s \cos[\omega_e t + \theta_{ef}(0) - \frac{2\pi}{3}] = \text{Re}[\sqrt{2}F_s e^{j(\theta_{ef}(0) - \frac{2\pi}{3})} e^{j\omega_e t}] \quad (2.5-2)$$

$$F_{cs} = \sqrt{2}F_s \cos[\omega_e t + \theta_{ef}(0) + \frac{2\pi}{3}] = \text{Re}[\sqrt{2}F_s e^{j(\theta_{ef}(0) + \frac{2\pi}{3})} e^{j\omega_e t}] \quad (2.5-3)$$

Donde $\theta_{ef}(0)$ es la posición angular inicial de las variables trifásicas. Si la velocidad del marco de referencia arbitrario es una constante no especificada, entonces para condiciones de estado estable balanceadas (2.4-5) y (2.4-6) pueden expresarse como:

$$F_{qs} = \sqrt{2}F_s \cos[(\omega_e - \omega) t + \theta_{ef}(0) - \theta(0)]$$

$$F_{qs} = \text{Re}[\sqrt{2}F_s e^{j(\theta_{ef}(0) - \theta(0))} e^{j(\omega_e - \omega)t}] \quad (2.5-4)$$

$$F_{ds} = -\sqrt{2}F_s \sin[(\omega_e - \omega) t + \theta_{ef}(0) - \theta(0)]$$

$$F_{ds} = \text{Re}[j\sqrt{2}F_s e^{j(\theta_{ef}(0) - \theta(0))} e^{j(\omega_e - \omega)t}] \quad (2.5-5)$$

De (2.5-1), el fasor que representa las variables as es:

$$\overline{F_{as}} = F_s e^{j\theta_{ef}(0)} \quad (2.5-6)$$

De (2.5-4) y (2.5-5) se obtiene:

$$\overline{F_{qs}} = F_s e^{j[\theta_{ef}(0) - \theta(0)]} \quad (2.5-7)$$

$$\overline{F_{ds}} = j\overline{F_{qs}} \quad (2.5-8)$$

Si la posición del marco de referencia en el tiempo cero es $\theta(0) = 0$, entonces de (2.5-6) y (2.5-7) se obtiene:

$$\overline{F_{as}} = \overline{F_{qs}} \quad (2.5-9)$$

Así, en todos los marcos de referencia rotando asincrónicamente $\omega \neq \omega_e$ con $\theta(0) = 0$, los fasores que representan a las variables as y qs son iguales. Por lo tanto, en condiciones de estado estable balanceado, el fasor que representa las variables de una fase necesita solamente ser cambiado con objeto de representar las variables en las otras fases. En el marco de referencia rotando sincrónicamente $\omega = \omega_e$ y si $\theta(0) = \theta_e(0)$, entonces de (2.5-4) y (2.5-5) se obtiene:

$$F_{qs}^e = \text{Re}[\sqrt{2}F_s e^{j[\theta_{ef}(0) - \theta_e(0)]}] \quad (2.5-10)$$

$$F_{ds}^e = \text{Re}[j\sqrt{2}F_s e^{j[\theta_{ef}(0) - \theta_e(0)]}] \quad (2.5-11)$$

Si la posición del marco de referencia en el tiempo inicial es cero:

$$F_{qs}^e = \sqrt{2}F_s \cos \theta_{ef}(0) \quad (2.5-12)$$

$$F_{ds}^e = -\sqrt{2}F_s \sin \theta_{ef}(0) \quad (2.5-13)$$

Comparando (2.5-6) con (2.5-12) y (2.5-13) se obtiene:

$$\sqrt{2} \overline{F_{as}} = F_{qs}^e - jF_{ds}^e \quad (2.5-14)$$

Puesto que $\overline{F_{as}} = \overline{F_{qs}}$, (2.5-14) relaciona las variables del marco de referencia rotando sincrónicamente con el fasor en todos los marcos de referencia.

2.6 MARCOS DE REFERENCIA COMÚNMENTE USADOS

Aunque el comportamiento de una máquina de inducción simétrica puede ser descrito en cualquier marco de referencia, hay tres que son comúnmente empleados: *el marco de referencia estacionario, el marco de referencia en el rotor y el marco de referencia rotando en sincronismo con el campo magnético.*

Las ecuaciones de voltaje para todos los marcos de referencia pueden ser obtenidas de aquellas en el marco de referencia arbitrario asignando la apropiada velocidad a ω . Esta es $\omega = 0$ para el marco de referencia estacionario, $\omega = \omega_r$ para el marco de referencia en el rotor y $\omega = \omega_e$ para el marco de referencia rotando sincrónicamente. Generalmente, las condiciones de operación determinan el marco de referencia más conveniente para propósitos de análisis y/o simulación. Si los voltajes de estator están desbalanceados y los del rotor están balanceados o son cero, el marco de referencia estacionario sería usado para simular el funcionamiento de la máquina de inducción. Si los circuitos externos del rotor están desbalanceados pero los voltajes aplicados al estator están balanceados, entonces el marco de referencia fijado en el rotor es el más conveniente. Cualquiera de los marcos de referencia, estacionario o rotando sincrónicamente, es usado para analizar condiciones simétricas o balanceadas. El marco de referencia rotando sincrónicamente es particularmente conveniente para la simulación de operación balanceada en las máquinas de inducción simétricas, porque las variables son constantes durante la operación en estado estable y varían solamente cuando un disturbio en el sistema ocurre, por ejemplo, un cambio en el torque de carga, un cambio simétrico en el voltaje o una falla trifásica simétrica. El marco de referencia rotando sincrónicamente es también conveniente cuando se incorporan las características dinámicas de una máquina de inducción dentro de un programa de computadora, usado para estudiar la respuesta transitoria y la estabilidad dinámica de sistemas de potencia grandes.

Capítulo 3

MÁQUINA DE INDUCCIÓN SIMÉTRICA

3.1 ANTECEDENTES

La máquina de inducción es usada en una amplia variedad de aplicaciones como un medio de convertir potencia eléctrica a trabajo mecánico. Bombas, fabricas, grúas son unas pocas aplicaciones de grandes motores de inducción. Por otra parte, servomotores bifásicos se usan en sistemas de control, motores de inducción monofásicos se usan en aplicaciones domesticas así como en herramientas de mano y de taller. La máquina de inducción es “el caballo de batalla” de la industria de potencia eléctrica. El material presentado en este capítulo es fundamental para el análisis de máquinas de inducción en la mayoría de los sistemas de potencia y en aplicaciones de control de frecuencia variable.

3.2 ECUACIONES DE VOLTAJE EN VARIABLES DE MÁQUINA

Observando la máquina de inducción trifásica simétrica, 2 polos y conectada en Y, que se muestra en la figura 3.2-1, los devanados de estator son idénticos, distribuidos senoidalmente, desplazados 120° , con N_s vueltas equivalentes y resistencia r_s . Los devanados del rotor también son considerados idénticos, distribuidos senoidalmente, desplazados 120° , con N_r vueltas equivalentes y resistencia r_r . La dirección positiva de los ejes magnéticos de los devanados de estator

coincide con la dirección de f_{as} , f_{bs} y f_{cs} , como se especificó en la ecuación de transformación mostrada en la figura 2.2-1.

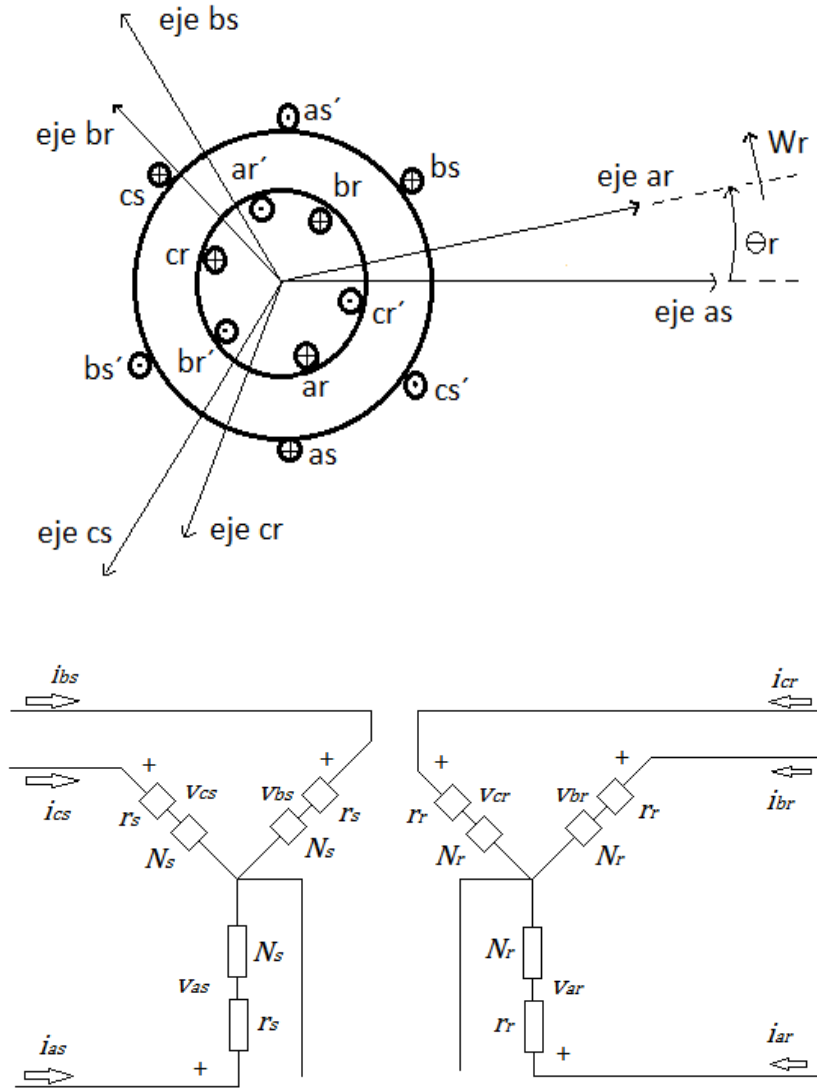


Figura 3.2-1 Máquina de inducción trifásica, simétrica, 2 polos y conexión en Y.

Las ecuaciones de voltaje en variables de máquina pueden ser expresadas como:

$$v_{abcs} = r_s i_{abcs} + \frac{d\lambda_{abcs}}{dt} \quad (3.2-1)$$

$$v_{abcr} = r_r i_{abcr} + \frac{d\lambda_{abcr}}{dt} \quad (3.2-2)$$

Donde los subíndices s y r denotan variables y parámetros asociados con los circuitos del estator y del rotor, respectivamente. r_s y r_r son matrices diagonales, cada una con los elementos iguales. Para un sistema lineal magnéticamente, los enlaces de flujo pueden ser expresados como:

$$\begin{matrix} \lambda_{abcs} \\ \lambda_{abcr} \end{matrix} = \begin{matrix} L_s & L_{sr} \\ (L_{sr})^T & L_r \end{matrix} \begin{matrix} i_{abcs} \\ i_{abcr} \end{matrix} \quad (3.2-3)$$

Donde:

$$L_s = \begin{matrix} L_{ls} + L_{ms} & \frac{-L_{ms}}{2} & \frac{-L_{ms}}{2} \\ \frac{-L_{ms}}{2} & L_{ls} + L_{ms} & \frac{-L_{ms}}{2} \\ \frac{-L_{ms}}{2} & \frac{-L_{ms}}{2} & L_{ls} + L_{ms} \end{matrix} \quad (3.2-4)$$

$$L_r = \begin{matrix} L_{lr} + L_{mr} & \frac{-L_{mr}}{2} & \frac{-L_{mr}}{2} \\ \frac{-L_{mr}}{2} & L_{lr} + L_{mr} & \frac{-L_{mr}}{2} \\ \frac{-L_{mr}}{2} & \frac{-L_{mr}}{2} & L_{lr} + L_{mr} \end{matrix} \quad (3.2-5)$$

$$L_{sr} = L_{sr} \begin{matrix} \cos \theta_r & \cos(\theta_r + \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta_r - \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\theta_r - \frac{2\pi}{3}) & \cos \theta_r & \cos(\theta_r + \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\theta_r + \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta_r - \frac{2\pi}{3}) & \cos \theta_r \end{matrix} \quad (3.2-6)$$

Donde L_{ls} y L_{ms} son, respectivamente, la inductancia de dispersión y la de magnetización de los devanados del estator; L_{lr} y L_{mr} son para los devanados del rotor, L_{sr} es la amplitud de la inductancia mutua entre los devanados de estator y de rotor.

La mayoría de las máquinas de inducción son de rotor tipo jaula de ardilla en lugar de bobinas devanadas. En las aplicaciones su comportamiento puede ser descrito adecuadamente, con un devanado

trifásico equivalente. Para expresar las ecuaciones de voltaje en variables de máquina, se refieren todas las variables del rotor a los devanados del estator con la apropiada relación de vueltas.

$$\mathbf{i}'_{abcr} = \left(\frac{N_r}{N_s}\right)\mathbf{i}_{abcr} \quad (3.2-7)$$

$$\mathbf{v}'_{abcr} = \left(\frac{N_s}{N_r}\right)\mathbf{v}_{abcr} \quad (3.2-8)$$

$$\boldsymbol{\lambda}'_{abcr} = \left(\frac{N_s}{N_r}\right)\boldsymbol{\lambda}_{abcr} \quad (3.2-9)$$

De (1.5-19) y (1.5-27) se obtiene la relación entre L_{ms} y L_{sr} :

$$L_{ms} = \left(\frac{N_s}{N_r}\right)L_{sr} \quad (3.2-10)$$

Definiendo $L'_{sr} = \left(\frac{N_s}{N_r}\right)L_{sr}$

$$\mathbf{L}'_{sr} = L_{ms} \begin{bmatrix} \cos \theta_r & \cos(\theta_r + \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta_r - \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\theta_r - \frac{2\pi}{3}) & \cos \theta_r & \cos(\theta_r + \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\theta_r + \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta_r - \frac{2\pi}{3}) & \cos \theta_r \end{bmatrix} \quad (3.2-11)$$

De (1.5-19) y (1.5-22) se obtiene la relación entre L_{ms} y L_{mr} :

$$L_{ms} = \left(\frac{N_s}{N_r}\right)^2 L_{mr} \quad (3.2-12)$$

Definiendo $L'_r = \left(\frac{N_s}{N_r}\right)^2 L_r$, entonces de (3.2-5) se obtiene:

$$\mathbf{L}'_r = \begin{bmatrix} L'_{lr} + L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} \\ -\frac{1}{2}L_{ms} & L'_{lr} + L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} \\ -\frac{1}{2}L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} & L'_{lr} + L_{ms} \end{bmatrix} \quad (3.2-13)$$

Donde $L'_{lr} = \left(\frac{N_s}{N_r}\right)^2 L_{lr}$. Los enlaces de flujo quedan expresados como:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_{abcs} \\ \boldsymbol{\lambda}'_{abcr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_s & \mathbf{L}'_{sr} \\ (\mathbf{L}'_{sr})^T & \mathbf{L}'_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{abcs} \\ \mathbf{i}'_{abcr} \end{bmatrix} \quad (3.2-14)$$

Las ecuaciones de voltaje expresadas en términos de variables de máquina referidas a los devanados del estator son:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{abcS} &= \mathbf{r}_s + \frac{dL_s}{dt} \frac{d\mathbf{i}'_{abcS}}{dt} \\ \mathbf{v}'_{abcR} &= \frac{d(L'_{sr})^T}{dt} \mathbf{r}'_r + \frac{dL'_r}{dt} \mathbf{i}'_{abcR} \end{aligned} \quad (3.2-15)$$

Donde:

$$\mathbf{r}'_r = \left(\frac{N_s}{N_r}\right)^2 \mathbf{r}_r \quad (3.2-16)$$

3.3 ECUACIÓN DE TORQUE EN VARIABLES DE MÁQUINA

La energía en las inductancias de dispersión no es parte de la almacenada en el campo acoplado. Así, la energía en el campo se escribe como:

$$W_f = \frac{1}{2}(\mathbf{i}_{abcS})^T (\mathbf{L}_s - \mathbf{L}_{ls}\mathbf{I}) \mathbf{i}_{abcS} + (\mathbf{i}_{abcS})^T \mathbf{L}'_{sr} \mathbf{i}'_{abcR} + \frac{1}{2}(\mathbf{i}'_{abcR})^T (\mathbf{L}'_r - \mathbf{L}'_{lr}\mathbf{I}) \mathbf{i}'_{abcR} \quad (3.3-1)$$

Donde \mathbf{I} es la matriz identidad. Asumiendo que la máquina es magnéticamente lineal, la energía del campo W_f es igual a la coenergía W_c . El cambio de energía mecánica en un sistema rotacional con una entrada mecánica puede ser expresada como:

$$d\omega_m = -T_e d\theta_{rm} \quad (3.3-2)$$

Donde T_e es el torque electromagnético (positivo para acción motor) y θ_{rm} es el desplazamiento angular del rotor. Los enlaces de flujo, corrientes, W_f y W_c están expresados como funciones del desplazamiento angular eléctrico θ_r :

$$\theta_r = \left(\frac{P}{2}\right)\theta_{rm} \quad (3.3-3)$$

Donde P es el número de polos en la máquina.

Para una máquina de P -polos:

$$d\omega_m = -T_e \left(\frac{2}{P}\right) d\theta_r \quad (3.3-4)$$

$$T_e(i_j, \theta_r) = \left(\frac{P}{2}\right) \frac{\partial \omega_c(i_j, \theta_r)}{\partial \theta_r} \quad (3.3-5)$$

L_s y L_r no son funciones de θ_r , sustituyendo (3.3-1) en (3.3-5) se obtiene el torque electromagnético en Newton x metro (N·m):

$$T_e = \left(\frac{P}{2}\right) (i_{abcs})^T \frac{\partial [L_{sr}]}{\partial \theta_r} i'_{abcr} \quad (3.3-6)$$

El torque y la velocidad del rotor están relacionadas por:

$$T_e = J \left(\frac{2}{P}\right) \frac{d\omega_r}{dt} + T_L \quad (3.3-7)$$

Donde J es la inercia del rotor ($\text{kg}\cdot\text{m}^2$), T_L es el torque de la carga y es positivo para una carga en la flecha de la máquina de inducción.

3.4 ECUACIONES DE TRANSFORMACIÓN PARA LOS CIRCUITOS DEL ROTOR

En el análisis de las máquinas de inducción se requiere transformar las variables asociadas con los devanados simétricos del rotor al marco de referencia arbitrario. La transformación de las variables trifásicas de los circuitos del rotor es:

$$f'_{qdor} = K_r f'_{abcr} \quad (3.4-1)$$

Donde:

$$(f'_{qdor})^T = [f'_{qr} \ f'_{dr} \ f'_{0r}] \quad (3.4-2)$$

$$(f'_{abcr})^T = [f'_{ar} \ f'_{br} \ f'_{cr}] \quad (3.4-3)$$

$$K_r = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \cos \beta & \cos(\beta - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\beta + \frac{2\pi}{3}) \\ \frac{1}{2} & \sin \beta & \sin(\beta - \frac{2\pi}{3}) & \sin(\beta + \frac{2\pi}{3}) \\ & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (3.4-4)$$

$$\beta = \theta - \theta_r \quad (3.4-5)$$

El desplazamiento angular θ está definido por (2.2-5) y θ_r por:

$$\omega_r = \frac{d\theta_r}{dt} \quad (3.4-6)$$

La transformación inversa es:

$$(K_r)^{-1} = \begin{matrix} \cos \beta & \sin \beta & 1 \\ \cos(\beta - \frac{2\pi}{3}) & \sin(\beta - \frac{2\pi}{3}) & 1 \\ \cos(\beta + \frac{2\pi}{3}) & \sin(\beta + \frac{2\pi}{3}) & 1 \end{matrix} \quad (3.4-7)$$

El subíndice r indica las variables, parámetros y transformaciones asociadas con circuitos rotando. Estas ecuaciones de transformación se pueden visualizar como relaciones trigonométricas entre cantidades vectoriales, como se muestra en la figura 3.4-1.

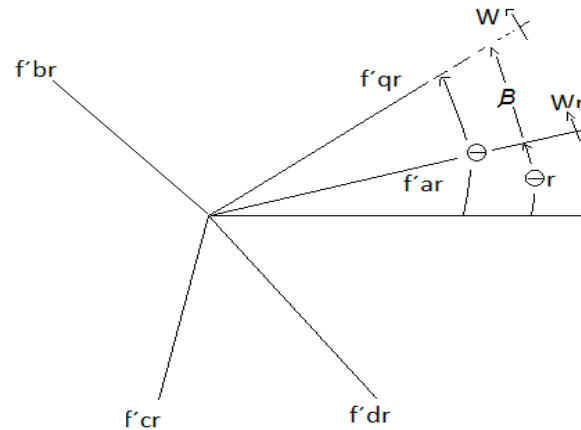


Figura 3.4-1 Transformación para circuitos rotando representada por relaciones trigonométricas.

Las ecuaciones de transformación para los circuitos del estator y del rotor son casos especiales de una transformación general para todos los circuitos. Si en β , θ_r es remplazado por θ_c , donde:

$$\omega_c = \frac{d\theta_c}{dt} \quad (3.4-8)$$

Entonces, la velocidad angular de los circuitos ω_c puede ser seleccionada para que corresponda con la de los que están siendo transformados, es decir, $\omega_c = 0$ para el estator y $\omega_c = \omega_r$ para el rotor.

3.5 ECUACIONES DE VOLTAJE EN VARIABLES DE MARCO DE REFERENCIA ARBITRARIO

Usando la información del capítulo anterior y la sección anterior, se conoce la forma de las ecuaciones de voltaje en el marco de referencia arbitrario. En particular:

$$v_{qd0s} = r_s i_{qd0s} + \omega \lambda_{qds} + \frac{d\lambda_{qd0s}}{dt} \quad (3.5-1)$$

$$v'_{qd0r} = r'_r i'_{qd0r} + (\omega - \omega_r) \lambda'_{dqr} + \frac{d\lambda'_{qd0r}}{dt} \quad (3.5-2)$$

Donde:

$$(\lambda_{dqs})^T = [\lambda_{ds} \quad -\lambda_{qs} \quad 0] \quad (3.5-3)$$

$$(\lambda'_{dqr})^T = [\lambda'_{dr} \quad -\lambda'_{qr} \quad 0] \quad (3.5-4)$$

El arreglo de ecuaciones está completo una vez que las expresiones para los enlaces de flujo sean determinadas. Sustituyendo las ecuaciones de transformación (2.2-1) y (3.4-1) en la ecuación (3.2-14), se obtienen las ecuaciones de enlaces de flujo expresadas en variables $qd0$ para un sistema magnético lineal:

$$\begin{aligned} \lambda_{qd0s} &= \mathbf{K}_s \mathbf{L}_s (\mathbf{K}_s)^{-1} \quad \mathbf{K}_s \mathbf{L}'_{sr} (\mathbf{K}_r)^{-1} \quad i_{qd0s} \\ \lambda'_{qd0r} &= \mathbf{K}_r (\mathbf{L}'_{sr})^T (\mathbf{K}_s)^{-1} \quad \mathbf{K}_r \mathbf{L}'_r (\mathbf{K}_r)^{-1} \quad i'_{qd0r} \end{aligned} \quad (3.5-5)$$

Dado que L_s es de la forma (2.3-14), entonces de (2.3-15) se tiene:

$$\mathbf{K}_s \mathbf{L}_s (\mathbf{K}_s)^{-1} = \begin{bmatrix} L_{ls} + L_M & 0 & 0 \\ 0 & L_{ls} + L_M & 0 \\ 0 & 0 & L_{ls} \end{bmatrix} \quad (3.5-6)$$

Donde:

$$L_M = \frac{3}{2} L_{ms} \quad (3.5-7)$$

Dado que L'_r es similar en forma a L_s , entonces:

$$\mathbf{K}_r \mathbf{L}'_r (\mathbf{K}_r)^{-1} = \begin{bmatrix} L'_{lr} + L_M & 0 & 0 \\ 0 & L'_{lr} + L_M & 0 \\ 0 & 0 & L'_{lr} \end{bmatrix} \quad (3.5-8)$$

Puede demostrarse que:

$$\mathbf{K}_s \mathbf{L}'_{sr} (\mathbf{K}_r)^{-1} = \mathbf{K}_r (\mathbf{L}'_{sr})^T (\mathbf{K}_s)^{-1} = \begin{matrix} L_M & 0 & 0 \\ 0 & L_M & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \quad (3.5-9)$$

Sustituyendo (3.5-6), (3.5-8) y (3.5-9) en (3.5-5) se obtienen las expresiones para los enlaces de flujo. En forma expandida se tiene:

$$\lambda_{qs} = L_{ls} i_{qs} + L_M (i_{qs} + i'_{qr}) \quad (3.5-10)$$

$$\lambda_{ds} = L_{ls} i_{ds} + L_M (i_{ds} + i'_{dr}) \quad (3.5-11)$$

$$\lambda_{0s} = L_{ls} i_{0s} \quad (3.5-12)$$

$$\lambda'_{qr} = L'_{lr} i'_{qr} + L_M (i_{qs} + i'_{qr}) \quad (3.5-13)$$

$$\lambda'_{dr} = L'_{lr} i'_{dr} + L_M (i_{ds} + i'_{dr}) \quad (3.5-14)$$

$$\lambda'_{0r} = L'_{lr} i'_{0r} \quad (3.5-15)$$

Los parámetros de las máquinas a menudo están dados en Ohm o en por ciento de una impedancia base. Expresando las ecuaciones de enlaces de flujo en términos de reactancia en lugar de inductancias, entonces de (3.5-10) a (3.5-15) se escriben como:

$$\varphi_{qs} = \omega_b \lambda_{qs} = X_{ls} i_{qs} + X_M (i_{qs} + i'_{qr}) \quad (3.5-16)$$

$$\varphi_{ds} = \omega_b \lambda_{ds} = X_{ls} i_{ds} + X_M (i_{ds} + i'_{dr}) \quad (3.5-17)$$

$$\varphi_{0s} = \omega_b \lambda_{0s} = X_{ls} i_{0s} \quad (3.5-18)$$

$$\varphi'_{qr} = \omega_b \lambda'_{qr} = X'_{lr} i'_{qr} + X_M (i_{qs} + i'_{qr}) \quad (3.5-19)$$

$$\varphi'_{dr} = \omega_b \lambda'_{dr} = X'_{lr} i'_{dr} + X_M (i_{ds} + i'_{dr}) \quad (3.5-20)$$

$$\varphi'_{0r} = \omega_b \lambda'_{0r} = X'_{lr} i'_{0r} \quad (3.5-21)$$

Donde ω_b es la velocidad angular eléctrica base usada para calcular las reactancias inductivas.

Las ecuaciones de (3.5-16) a (3.5-21) son enlaces de flujo entre segundo con unidades de Volt. De (3.5-1) y (3.5-2) se obtienen las ecuaciones de voltaje en forma expandida:

$$v_{qs} = r_s i_{qs} + \frac{\omega}{\omega_b} \varphi_{ds} + \frac{1}{\omega_b} \frac{d\varphi_{qs}}{dt} \quad (3.5-22)$$

$$v_{ds} = r_s i_{ds} - \frac{\omega}{\omega_b} \varphi_{qs} + \frac{1}{\omega_b} \frac{d\varphi_{ds}}{dt} \quad (3.5-23)$$

$$v_{0s} = r_s i_{0s} + \frac{1}{\omega_b} \frac{d\varphi_{0s}}{dt} \quad (3.5-24)$$

$$v'_{qr} = r'_r i'_{qr} + \left(\frac{\omega - \omega_r}{\omega_b}\right) \varphi'_{dr} + \frac{1}{\omega_b} \frac{d\varphi'_{qr}}{dt} \quad (3.5-25)$$

$$v'_{dr} = r'_r i'_{dr} - \left(\frac{\omega - \omega_r}{\omega_b}\right) \varphi'_{qr} + \frac{1}{\omega_b} \frac{d\varphi'_{dr}}{dt} \quad (3.5-26)$$

$$v'_{0r} = r'_r i'_{0r} + \frac{1}{\omega_b} \frac{d\varphi'_{0r}}{dt} \quad (3.5-27)$$

Las ecuaciones de voltaje y enlaces de flujo por segundo sugieren los circuitos equivalentes mostrados en la figura 3.5-1.

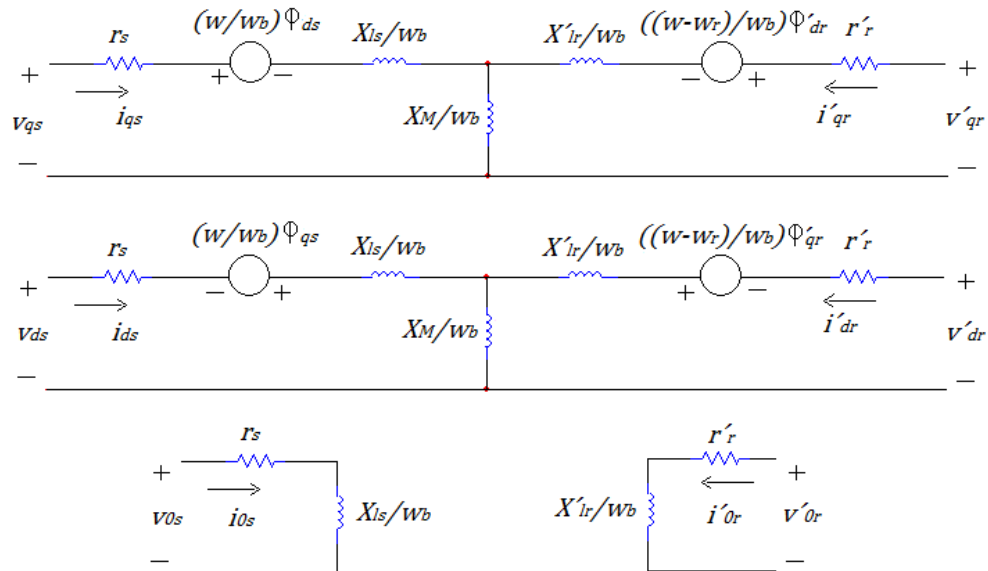


Figura 3.5-1 Circuitos equivalentes en el marco de referencia arbitrario para una máquina de inducción trifásica simétrica.

3.6 ECUACIÓN DE TORQUE EN VARIABLES DE MARCO DE REFERENCIA ARBITRARIO

La expresión para el torque electromagnético en términos de variables de marco de referencia arbitrario puede ser obtenida sustituyendo la ecuación de transformación dentro de (3.3-6). Así:

$$T_e = \left(\frac{P}{2}\right) [(\mathbf{K}_s)^{-1} \mathbf{i}_{qd0s}]^T \frac{\partial [L_{sr}]}{\partial \theta_r} (\mathbf{K}_r)^{-1} \mathbf{i}'_{qd0r} \quad (3.6-1)$$

Esta expresión produce el torque en términos de corrientes como:

$$T_e = \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{P}{2}\right) L_M (i_{qs} i'_{dr} - i_{ds} i'_{qr}) \quad (3.6-2)$$

Donde T_e es positivo para acción motor. Otra expresión equivalente para el torque electromagnético en términos de corrientes y flujos para una máquina de inducción es:

$$T_e = \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{P}{2}\right) \left(\frac{1}{\omega_b}\right) (\varphi_{ds} i_{qs} - \varphi_{qs} i_{ds}) \quad (3.6-3)$$

3.7 SISTEMA POR UNIDAD

A menudo los parámetros y variables de las máquinas se expresan en cantidades por unidad. *La potencia base y el voltaje base son seleccionadas, y todos los parámetros y variables se normalizan usando estas cantidades base.* El valor *rms* del voltaje de fase nominal es generalmente seleccionado como voltaje base para las variables *abc* $V_{B(abc)}$, mientras que el valor pico lo es para las variables *qd0* $V_{B(qd0)} = \sqrt{2} V_{B(abc)}$ La potencia base puede ser expresada como:

$$P_B = 3V_{B(abc)} I_{B(abc)} \quad (3.7-1)$$

$$P_B = \left(\frac{3}{2}\right) V_{B(qd0)} I_{B(qd0)} \quad (3.7-2)$$

Seleccionada la potencia y el voltaje base, la corriente puede ser calculada de cualquiera, (3.7-1) o (3.7-2) y la impedancia base con:

$$Z_B = \frac{V_{B(abc)}}{I_{B(abc)}} = \frac{3(V_{B(abc)})^2}{P_B} \quad (3.7-3)$$

$$Z_B = \frac{V_{B(qd0)}}{I_{B(qd0)}} = \left(\frac{3}{2}\right) \frac{(V_{B(qd0)})^2}{P_B} \quad (3.7-4)$$

Las ecuaciones $qd0$ escritas en términos de reactancias, de (3.5-16) a (3.5-27), pueden ser fácilmente convertidas a por unidad dividiendo los voltajes entre $V_{B(qd0)}$, las corrientes entre $I_{B(qd0)}$, las resistencias y las reactancias entre Z_B . Los enlaces de flujo entre segundo tienen unidades de Volt, son convertidos a por unidad dividiéndolos entre el voltaje base. El torque base puede ser expresado como:

$$T_B = \left(\frac{P}{2}\right) \frac{P_B}{\omega_b} \quad (3.7-5)$$

Donde ω_b corresponde a la frecuencia base de la máquina. Si la expresión del torque dada por (3.6-3) es dividida entre (3.7-5), con (3.7-2) sustituida por P_B , el torque por unidad será:

$$T_e = \varphi_{ds} i_{qs} - \varphi_{qs} i_{ds} \quad (3.7-6)$$

De (3.3-7), el torque inercial T_{IT} para una máquina de P -polos se expresa como:

$$T_{IT} = J \left(\frac{2}{P}\right) \frac{d\omega_r}{dt} \quad (3.7-7)$$

Donde ω_r es la *velocidad angular eléctrica del rotor* y J es la inercia del rotor en $\text{kg}\cdot\text{m}^2$. Para expresar (3.7-7) en por unidad se divide entre el torque base y la velocidad del rotor se normaliza a la velocidad base.

Así:

$$T_{IT} = \left(\frac{2}{P}\right) \frac{J\omega_b}{T_B} \frac{d}{dt} \left(\frac{\omega_r}{\omega_b}\right) \quad (3.7-8)$$

Por definición, la constante de inercia expresada en segundos es:

$$H = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{2}{P}\right) \frac{J\omega_b}{T_B} = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{2}{P}\right)^2 \frac{J\omega_b^2}{P_B} \quad (3.7-9)$$

Entonces, en por unidad (3.3-7) será:

$$T_e = 2H \frac{d}{dt} \left(\frac{\omega_r}{\omega_b}\right) + T_L \quad (3.7-10)$$

3.8 ANÁLISIS DE OPERACIÓN EN ESTADO ESTABLE

En condiciones balanceadas las cantidades cero del estator y del rotor son cero, las variables q y d son senoidales en todos los marcos de referencia excepto el que rota sincrónicamente en donde son constantes. Entonces, un método para obtener las ecuaciones de voltaje en estado estable para condiciones balanceadas es primero recordar que en un marco de referencia rotando asincrónicamente los fasores están relacionados por:

$$\bar{F}_{ds} = j\bar{F}_{qs} \quad (3.8-1)$$

Y con $\theta(0) = 0$, entonces:

$$\bar{F}_{qs} = \bar{F}_{as} \quad (3.8-2)$$

En una máquina de inducción simétrica, (3.8-1) y (3.8-2) se aplican también a las corrientes de estator y a los enlaces de flujo. De igual modo, las variables del rotor en estado estable están relacionadas por:

$$\bar{F}'_{dr} = j\bar{F}'_{qr} \quad (3.8-3)$$

Con $\theta(0)$ y $\theta_r(0)$ igual a cero se obtiene:

$$\bar{F}'_{qr} = \bar{F}'_{ar} \quad (3.8-4)$$

Si (3.5-22) y (3.5-25) se escriben en forma fasorial:

$$\bar{V}_{qs} = r_s \bar{I}_{qs} + \frac{\omega}{\omega_b} \bar{\psi}_{ds} + j \left(\frac{\omega_g - \omega}{\omega_b} \right) \bar{\psi}_{qs} \quad (3.8-5)$$

$$\bar{V}'_{qr} = r'_r \bar{I}'_{qr} + \left(\frac{\omega - \omega_r}{\omega_b} \right) \bar{\psi}'_{dr} + j \left(\frac{\omega_g - \omega}{\omega_b} \right) \bar{\psi}'_{qr} \quad (3.8-6)$$

Sustituyendo (3.8-1) y (3.8-3) en las ecuaciones anteriores produce:

$$\bar{V}_{qs} = r_s \bar{I}_{qs} + j \left(\frac{\omega_e}{\omega_b} \right) \bar{\psi}_{qs} \quad (3.8-7)$$

$$\bar{V}'_{qr} = r'_r \bar{I}'_{qr} + j \left(\frac{\omega_e - \omega_r}{\omega_b} \right) \bar{\psi}'_{qr} \quad (3.8-8)$$

Sustituyendo la forma fasorial de (3.5-16) y (3.5-19) en (3.8-7) y (3.8-8), respectivamente, y empleando (3.8-2) y (3.8-4) para reemplazar las variables qs y qr con variables as y ar :

$$\bar{V}_{as} = \left(r_s + j \left(\frac{\omega_e}{\omega_b} \right) X_{ls} \right) \bar{I}_{as} + j \left(\frac{\omega_e}{\omega_b} \right) X_M (\bar{I}_{as} + \bar{I}'_{ar}) \quad (3.8-9)$$

$$\frac{\bar{V}'_{ar}}{s} = \left(\frac{r'_r}{s} + j \left(\frac{\omega_e}{\omega_b} \right) X'_{lr} \right) \bar{I}'_{ar} + j \left(\frac{\omega_e}{\omega_b} \right) X_M (\bar{I}_{as} + \bar{I}'_{ar}) \quad (3.8-10)$$

Donde el deslizamiento se define como:

$$s = \frac{\omega_e - \omega_r}{\omega_e} \quad (3.8-11)$$

Las ecuaciones (3.8-9) y (3.8-10) sugieren el circuito equivalente mostrado en la figura 3.8-1. Las características típicas de torque-velocidad en estado estable de una máquina de inducción con excitación única se muestran en la figura 3.8-2.

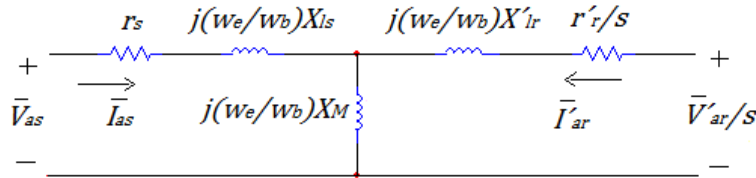


Figura 3.8-1 Circuito equivalente para operación en estado estable de una máquina de inducción simétrica.

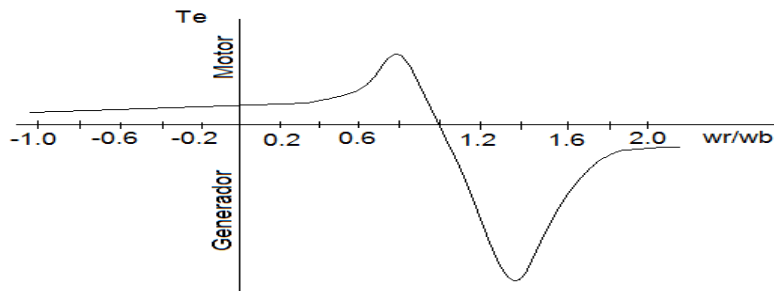


Figura 3.8-2 Características de torque-velocidad en estado estable de una máquina de inducción con excitación única.

3.9 SIMULACIÓN POR COMPUTADORA EN EL MARCO DE REFERENCIA ARBITRARIO

Las ecuaciones para simular la máquina de inducción simétrica en el marco de referencia arbitrario se obtienen resolviendo las ecuaciones de enlaces de flujo por segundo para las corrientes.

De (3.5-16) a (3.5-21) se puede escribir:

$$i_{qs} = \frac{1}{X_{ls}} (\psi_{qs} - \psi_{mq}) \quad (3.9-1)$$

$$i_{ds} = \frac{1}{X_{ls}} (\psi_{ds} - \psi_{md}) \quad (3.9-2)$$

$$i_{0s} = \frac{1}{X_{ls}} \psi_{0s} \quad (3.9-3)$$

$$i'_{qr} = \frac{1}{X_{lr}} (\psi'_{qr} - \psi_{mq}) \quad (3.9-4)$$

$$i'_{dr} = \frac{1}{X_{lr}} (\psi'_{dr} - \psi_{md}) \quad (3.9-5)$$

$$i'_{0r} = \frac{1}{X_{lr}} \psi'_{0r} \quad (3.9-6)$$

Donde:

$$\psi_{mq} = X_M (i_{qs} + i'_{qr}) \quad (3.9-7)$$

$$\psi_{md} = X_M (i_{ds} + i'_{dr}) \quad (3.9-8)$$

De (3.9-1) a (3.9-6) se utilizan para eliminar las corrientes en (3.9-7) y (3.9-8), así como también de las ecuaciones de voltaje en el marco de referencia arbitrario dadas por (3.5-22) hasta (3.5-27). Si las ecuaciones de voltaje resultantes son resueltas para los enlaces de flujo por segundo, se obtienen las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\frac{d}{dt}\psi_{qs} = \omega_b[v_{qs} - \frac{\omega}{\omega_b}\psi_{ds} + \frac{r_s}{X_{ls}}(\psi_{mq} - \psi_{qs})] \quad (3.9-9)$$

$$\frac{d}{dt}\psi_{ds} = \omega_b[v_{ds} + \frac{\omega}{\omega_b}\psi_{qs} + \frac{r_s}{X_{ls}}(\psi_{md} - \psi_{ds})] \quad (3.9-10)$$

$$\frac{d}{dt}\psi_{0s} = \omega_b[v_{0s} - \frac{r_s}{X_{ls}}\psi_{0s}] \quad (3.9-11)$$

$$\frac{d}{dt}\psi'_{qr} = \omega_b[v'_{qr} - \frac{(\omega - \omega_r)}{\omega_b}\psi'_{dr} + \frac{r_r}{X_{lr}}(\psi_{mq} - \psi'_{qr})] \quad (3.9-12)$$

$$\frac{d}{dt}\psi'_{dr} = \omega_b[v'_{dr} + \frac{(\omega - \omega_r)}{\omega_b}\psi'_{qr} + \frac{r_r}{X_{lr}}(\psi_{md} - \psi'_{dr})] \quad (3.9-13)$$

$$\frac{d}{dt}\psi'_{0r} = \omega_b[v'_{0r} - \frac{r_r}{X_{lr}}\psi'_{0r}] \quad (3.9-14)$$

Las ecuaciones (3.9-7) y (3.9-8) quedan como:

$$\psi_{mq} = X_{aq}\left(\frac{\psi_{qs}}{X_{ls}} + \frac{\psi'_{qr}}{X_{lr}}\right) \quad (3.9-15)$$

$$\psi_{md} = X_{ad}\left(\frac{\psi_{ds}}{X_{ls}} + \frac{\psi'_{dr}}{X_{lr}}\right) \quad (3.9-16)$$

Donde:

$$X_{aq} = X_{ad} = \left(\frac{1}{X_M} + \frac{1}{X_{ls}} + \frac{1}{X_{lr}}\right)^{-1} \quad (3.9-17)$$

En la simulación por computadora, de (3.9-9) a (3.9-16) se obtienen los enlaces de flujo por segundo, y de (3.9-1) a (3.9-6) las corrientes. El torque electromagnético en por unidad se obtiene con:

$$T_e = \psi_{ds}i_{qs} - \psi_{qs}i_{ds} \quad (3.9-18)$$

Para obtener la velocidad del rotor se usa la expresión (3.7-10):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\omega_r}{\omega_b}\right) = \frac{(T_e - T_L)}{2H} \quad (3.9-19)$$

Para condiciones balanceadas la figura 3.9-1 muestra el diagrama de bloques que ilustra la representación por computadora de una máquina de inducción trifásica simétrica en el marco de referencia arbitrario. Las ecuaciones de máquina que se usan en la simulación por computadora están indicadas por número en el diagrama de bloques. Para simular condiciones desbalanceadas hay que modificar el diagrama de bloques, en esta tesis no se tratan.

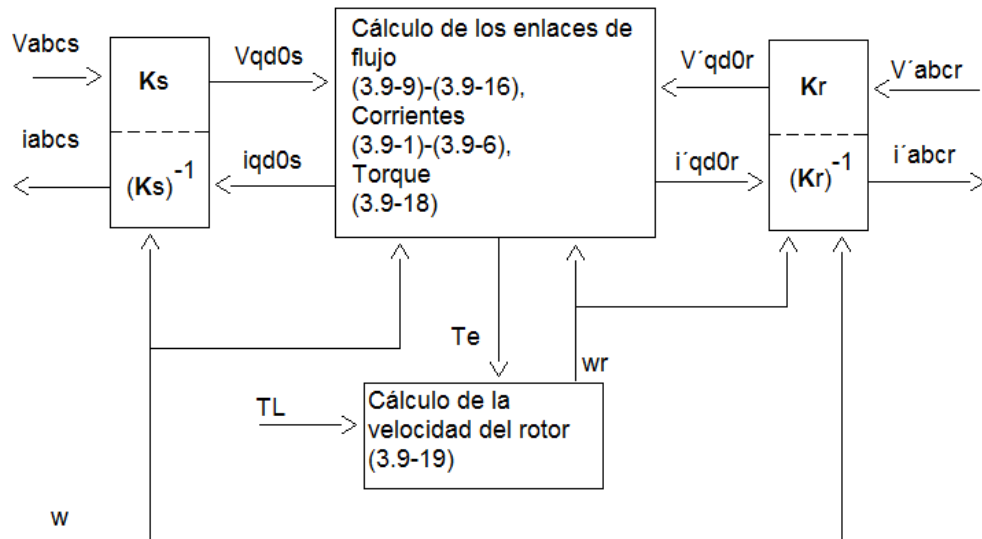


Figura 3.9-1 Diagrama de bloques de la simulación de una máquina de inducción trifásica simétrica en el marco de referencia arbitrario.

3.10 SIMULACIÓN Y RESULTADOS

La mayoría de las máquinas eléctricas de inducción en uso hoy son motores de inducción con excitación única, en donde la potencia eléctrica es transferida vía los circuitos de estator con los devanados del rotor en cortocircuito. Además, una gran mayoría de estos son del tipo rotor jaula de ardilla. Por lo tanto, la máquina simulada es un motor de inducción trifásico simétrico con excitación única, 60 Hz y condiciones balanceadas. Para la simulación se utilizó un marco de referencia rotando sincrónicamente. Los parámetros del motor están dados en la tabla 3.10-1.

Tabla 3.10-1 Parámetros del motor de inducción simulado

Número de polos	4
Potencia (hp)	3
Voltaje rms Línea a Línea (Volt)	220.0
Resistencia del estator (Ohm)	0.435
Reactancia de dispersión del estator (Ohm)	0.754
Reactancia de magnetización (Ohm)	26.13
Reactancia de dispersión del rotor (Ohm)	0.754
Resistencia del rotor (Ohm)	0.816
Inercia _(rotor+carga) (kg·m ²)	0.089
Velocidad nominal (rpm)	1710
Torque base (N·m)	11.9

Las ecuaciones diferenciales no lineales que describen a la máquina de inducción simétrica fueron simuladas en una computadora. El Pseudocódigo del algoritmo que resuelve dichas ecuaciones y simula diferentes condiciones de operación se muestra en el anexo a. Se desarrolló el programa de computadora utilizando el lenguaje de programación C. Antes de correr el programa el usuario debe crear un archivo de datos con extensión txt en el mismo directorio donde se encuentra el archivo ejecutable del programa. Los datos en dicho archivo deben tener el formato que se muestra en la tabla 3.10-2.

Tabla 3.10-2 Formato de los datos en el archivo de entrada.

P	Número de polos.
hp	Potencia (hp).
vs	Voltaje nominal rms de línea (V).
rs	Resistencia de los devanados del estator (Ohm).
xls	Reactancia de dispersión del estator (Ohm).
xm	Reactancia de magnetización (Ohm).
xlr	Reactancia de dispersión del rotor (Ohm).
rr	Resistencia de los devanados del rotor (Ohm).
J	Inercia _{rotor+carga} (Kg m ²).
Wr[0]	Velocidad inicial (rpm).
ts[1]	1er Intervalo de tiempo de simulación (s): ts[1] > 0s.
ts[2]	2do Intervalo de tiempo de simulación (s): ts[2] > ts[1].
ts[3]	3er Intervalo de tiempo de simulación (s): ts[3] > ts[2].
vqs[0]	Voltaje rms de línea (V) en el 1er. Intervalo de tiempo.
vqs[1]	Voltaje rms de línea (V) en el 2do. Intervalo de tiempo.
vqs[2]	Voltaje rms de línea (V) en el 3er. Intervalo de tiempo.
TI[0]	Torque de carga (N m) en el 1er. Intervalo de tiempo.
TI[1]	Torque de carga (N m) en el 2do. Intervalo de tiempo.
TI[2]	Torque de carga (N m) en el 3er. Intervalo de tiempo.

Al correr el programa, este solicita el nombre del archivo de entrada. Si el nombre es ingresado correctamente, el programa abre un archivo con extensión txt para cada variable de salida. Estos archivos contienen los valores numéricos calculados de: torque electromagnético, velocidad, corrientes de los devanados de estator y rotor. Por último, se utilizó el programa Excel para generar gráficas con los resultados obtenidos en dichos archivos. En la tabla 3.10-3 se muestran los datos de entrada para las condiciones de operación simuladas en esta tesis.

Tabla 3.10-3 Datos de entrada para las simulaciones.

Aceleración libre	Cambios torque de carga	Falla trifásica
4	4	4
3.0	3.0	3.0
220.0	220.0	220.0
0.435	0.435	0.435
0.754	0.754	0.754
26.13	26.13	26.13
0.754	0.754	0.754
0.816	0.816	0.816
0.089	0.089	0.089
0.0	1710	1710
0.20	0.25	0.30
0.40	0.70	0.70
0.60	1.00	1.00
220.0	220.0	220.0
220.0	220.0	0.0
220.0	220.0	220.0
0.0	0.0	11.9
0.0	11.9	11.9
0.0	0.0	11.9

3.10.1 Simulación de aceleración libre (sin carga)

Para esta condición de operación, el motor está inicialmente en reposo cuando el voltaje balanceado es aplicado con $v_{as} = \sqrt{2} v_s \cos \omega_e t$. Los datos de entrada para el programa se muestran en la tabla 3.10-3. Los resultados obtenidos de torque, velocidad y corrientes se muestran en la figura 3.10-1, en donde se observa:

- Las pérdidas por fricción y en los devanados no están representadas, el motor acelera a la velocidad síncrona.

- En reposo, la impedancia de entrada del motor es esencialmente la resistencia y la reactancia de dispersión del estator en serie con las del rotor. Consecuentemente, con el voltaje aplicado, las corrientes iniciales son grandes (aproximadamente 10 veces la corriente nominal).
- El motor tiene deslizamiento alto, es decir, el torque nominal es desarrollado a una velocidad considerablemente menor que la velocidad síncrona.
- La envolvente de las corrientes del motor varía durante el transitorio.

Figura 3.10-1 Variables de máquina durante aceleración libre.

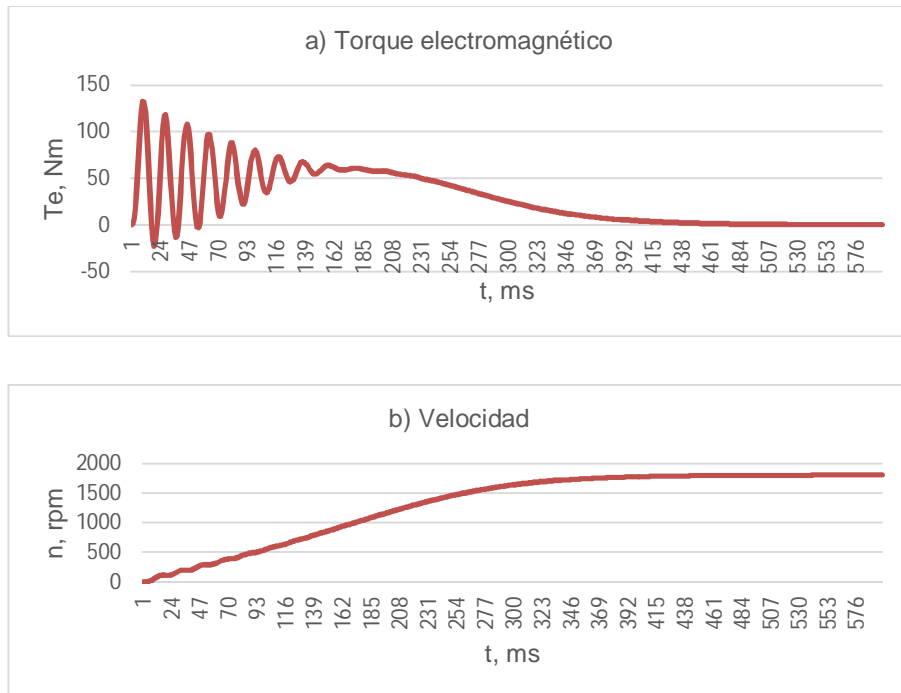


Figura 3.10-1 Continuación. Variables de máquina durante aceleración libre.

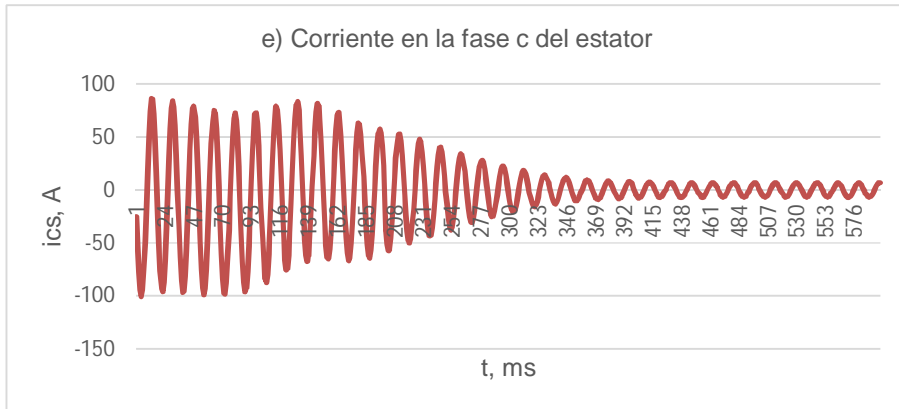
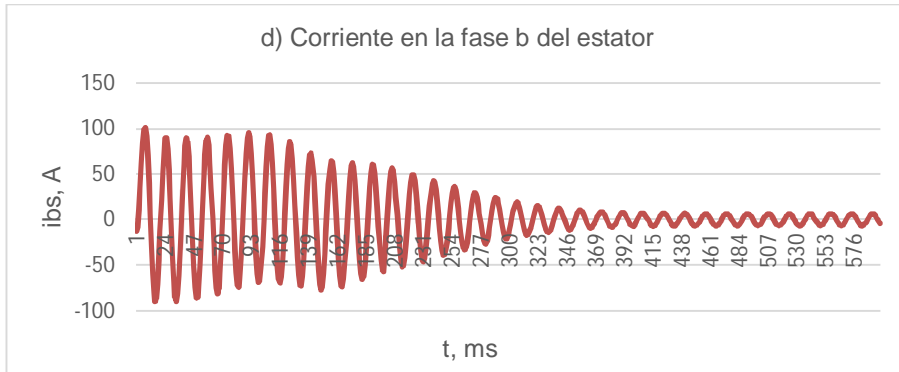
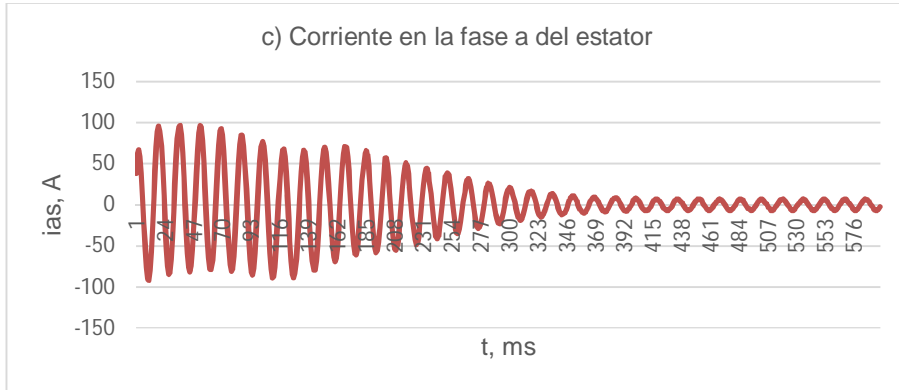
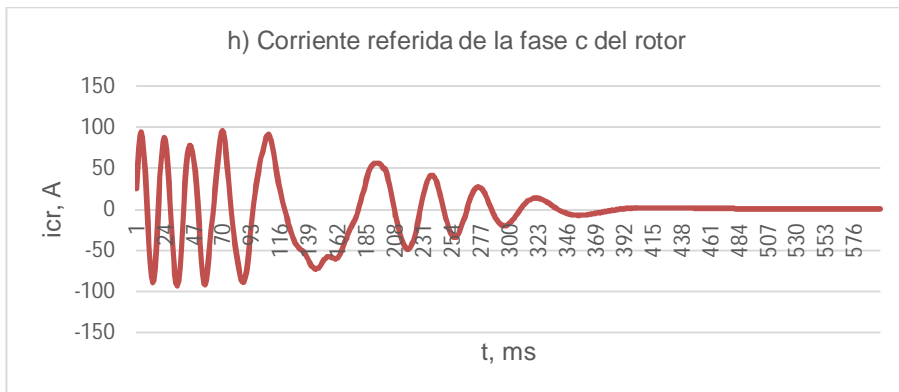
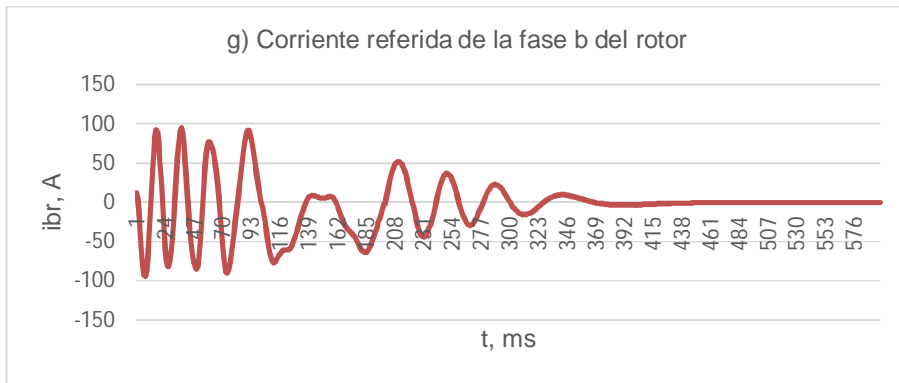
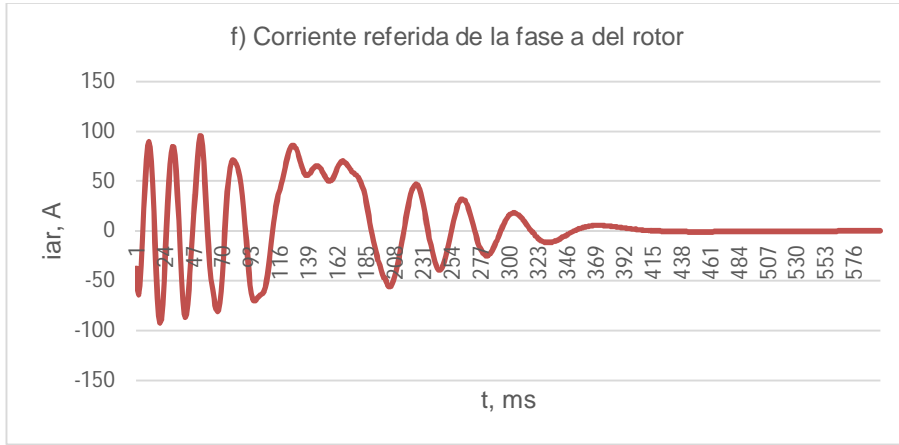


Figura 3.10-1 Continuación. Variables de máquina durante aceleración libre.



3.10.2 Simulación del funcionamiento dinámico durante un cambio súbito en el torque de carga

Los datos de entrada para el programa se muestran en la tabla 3.10-3. El comportamiento dinámico del motor de inducción durante un cambio súbito en el torque de carga se muestra en la figura 3.10-2. Inicialmente el motor está operando a velocidad nominal. Al final del primer intervalo de tiempo, el torque de carga es pasado de cero al torque base (11.9 N·m) ligeramente menor que el nominal y así se establece una nueva condición de operación para el motor. Al final del segundo intervalo de tiempo, el torque de carga es cambiado del torque base a cero y así el motor regresa a su condición de operación inicial.

Figura 3.10-2 Funcionamiento dinámico durante un cambio súbito en el torque de carga.

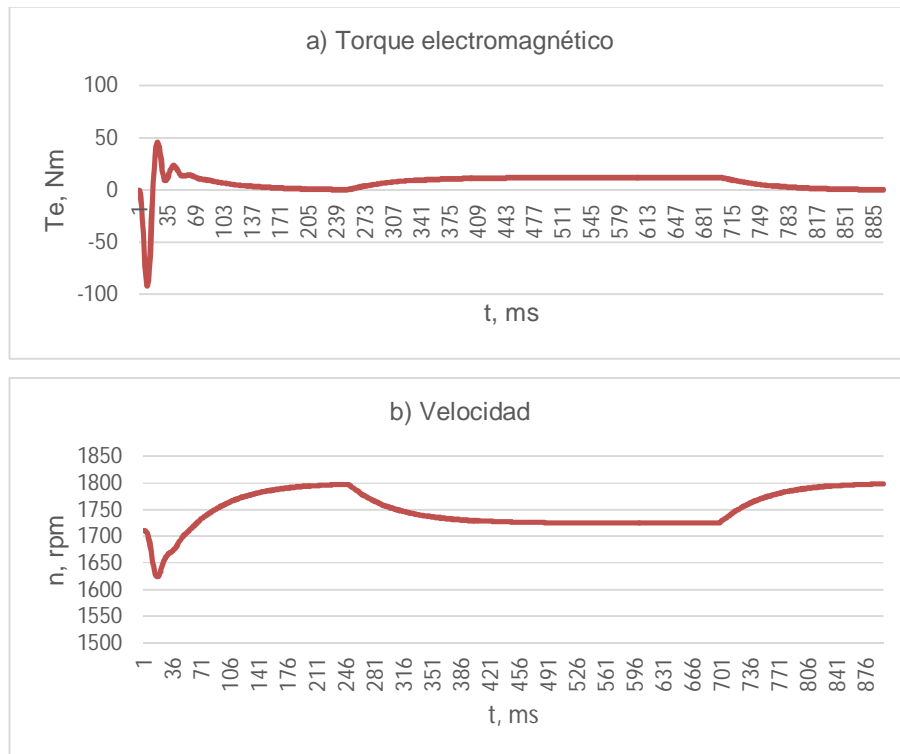


Figura 3.10-2 Continuación. Funcionamiento dinámico durante un cambio súbito en el torque de carga.

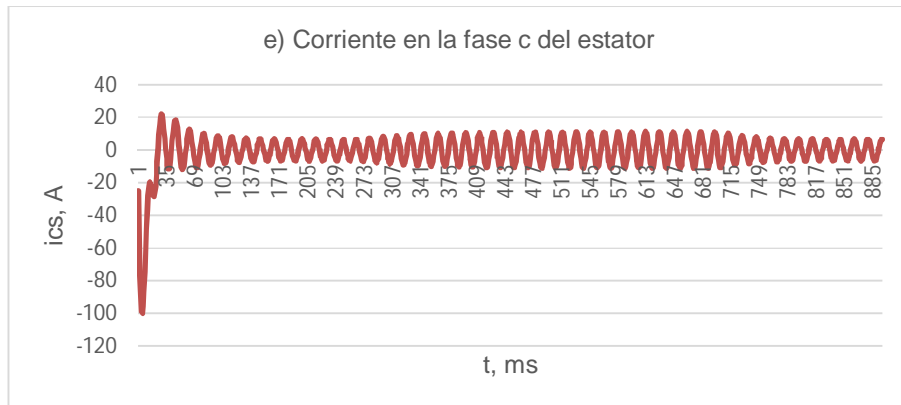
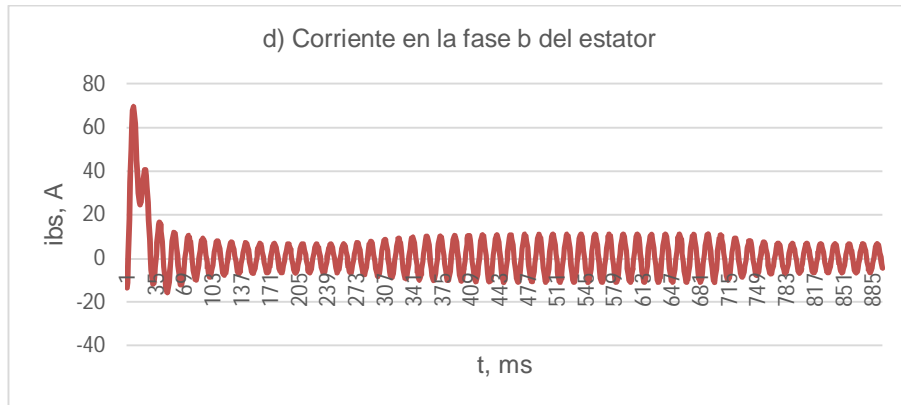
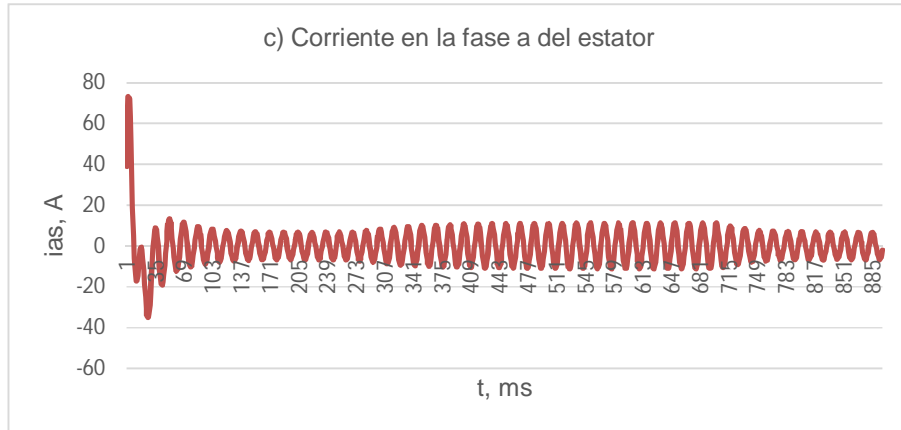
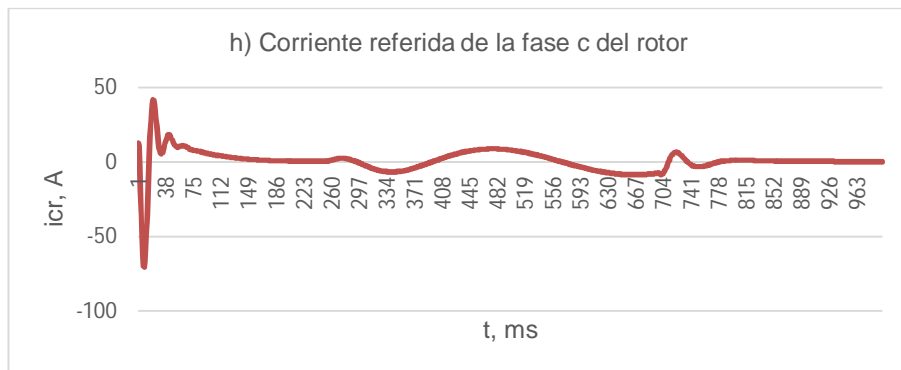
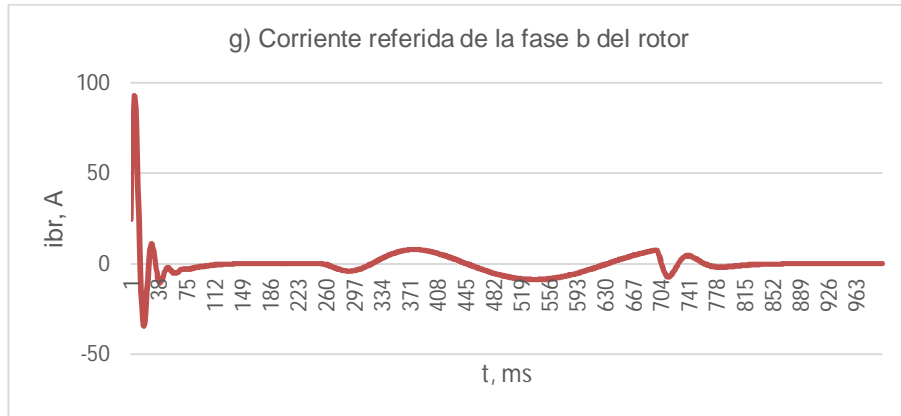
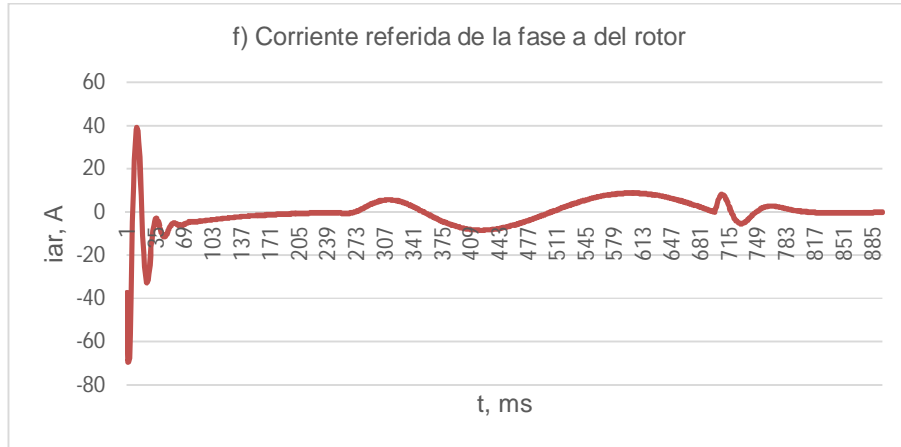


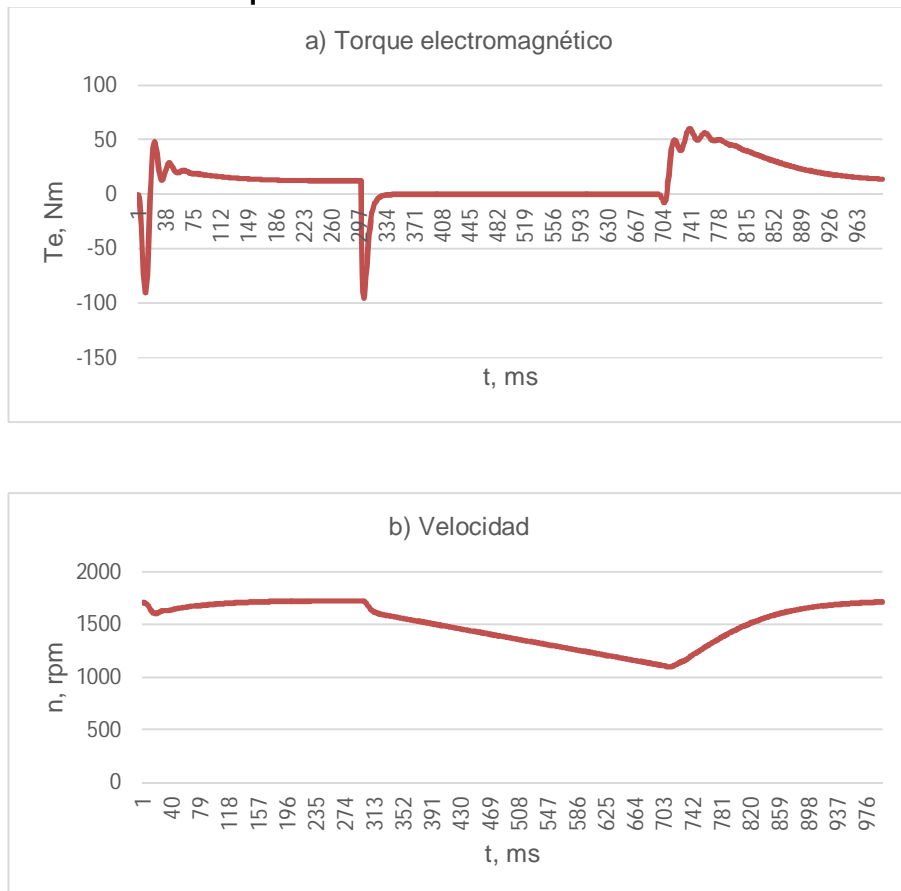
Figura 3.10-2 Continuación. Funcionamiento dinámico durante un cambio súbito en el torque de carga.



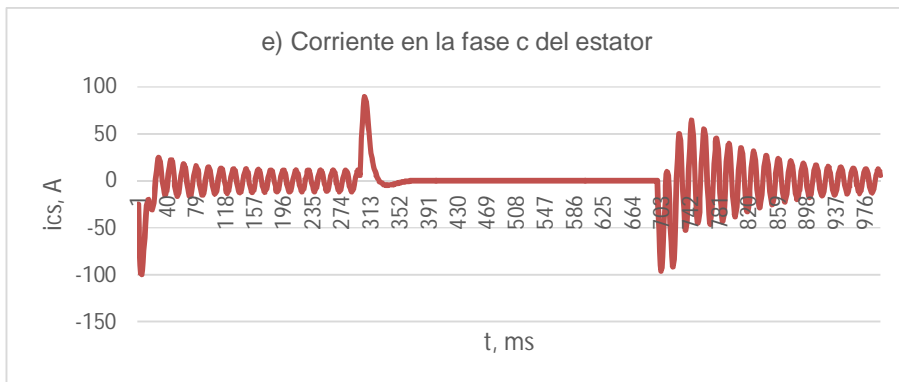
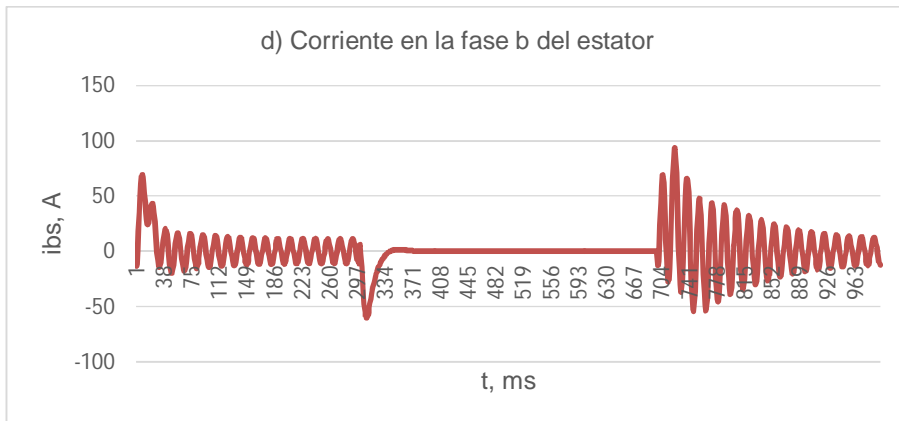
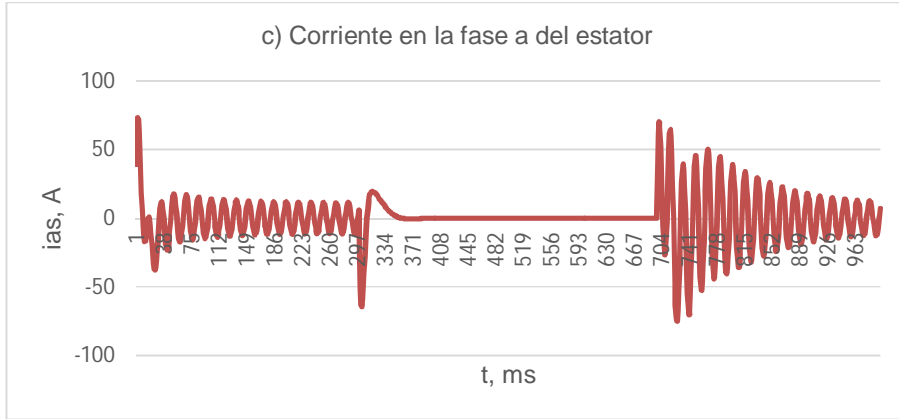
3.10.3 Funcionamiento dinámico durante una falla trifásica en las terminales de la máquina

Los datos de entrada para el programa se muestran en la tabla 3.10-3. El funcionamiento dinámico del motor durante una falla trifásica en las terminales se muestra en la figura 3.10-3. Inicialmente el motor está operando en condiciones nominales con un torque de carga igual al de base. La falla trifásica en las terminales se simuló colocando v_{as} , v_{bs} y v_{cs} igual a cero. Después de cierto número de ciclos, los voltajes de la fuente son reaplicados.

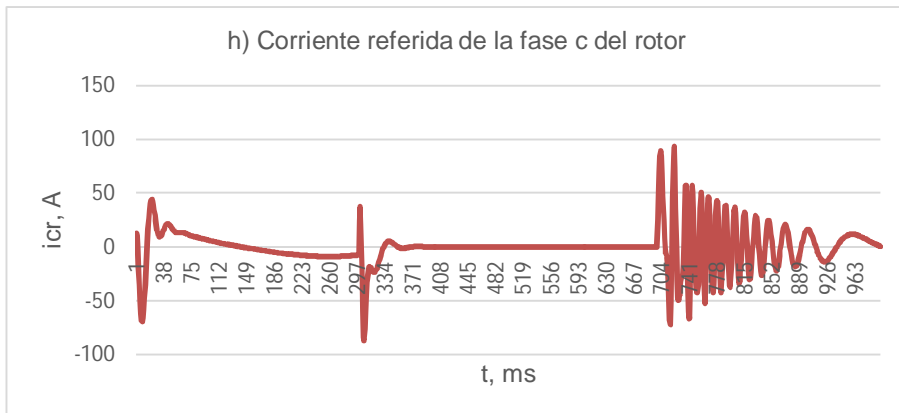
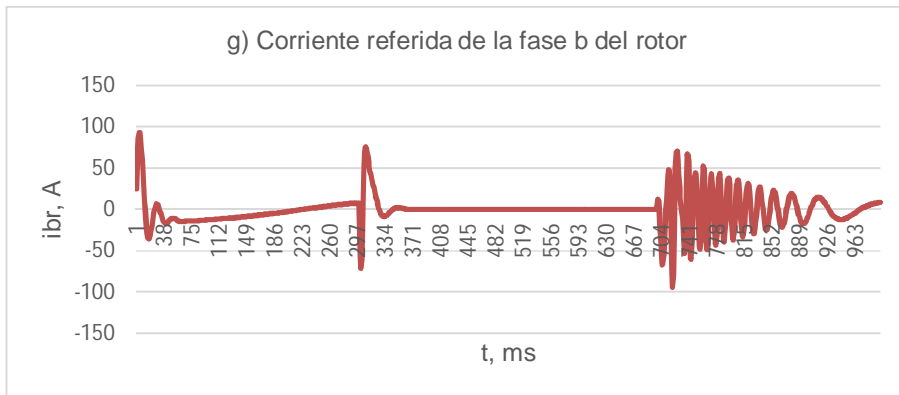
3.10-3 Funcionamiento dinámico durante una falla trifásica en las terminales de la máquina



3.10-3 Continuación. Funcionamiento dinámico durante una falla trifásica en las terminales de la máquina



3.10-3 Continuación. Funcionamiento dinámico durante una falla trifásica en las terminales de la máquina



CONCLUSIONES

En esta tesis se describieron las ecuaciones de la máquina eléctrica de inducción trifásica simétrica, se utilizó la teoría de marcos de referencia para transformar dichas ecuaciones a una forma más “simple” para su resolución con una computadora, se eligió el marco de referencia más adecuado para simular condiciones simétricas y balanceadas, se desarrolló el programa de computadora respectivo y se simularon diferentes condiciones de operación. De los resultados obtenidos se observó lo siguiente:

1. Las ecuaciones que describen el comportamiento de una máquina de inducción son ecuaciones diferenciales no lineales con coeficientes que son funciones de la posición del rotor.
2. La teoría de marcos de referencia proporciona un método para transformar las ecuaciones que describen el comportamiento de la máquina de inducción en ecuaciones diferenciales no lineales con coeficientes constantes.
3. Al utilizar la teoría de marcos de referencia para propósitos de análisis y/o simulación de máquinas de inducción se pueden aplicar métodos numéricos para resolver las ecuaciones resultantes mediante una computadora.
4. El marco de referencia rotando sincrónicamente es particularmente conveniente para la simulación de operación balanceada en las máquinas de inducción simétricas, porque las variables son constantes durante la operación en estado estable y varían solamente cuando un disturbio en el sistema ocurre

como: un cambio en el torque de carga, un cambio simétrico en el voltaje o una falla trifásica simétrica.

5. Con los resultados obtenidos en la simulación por computadora se hicieron graficas de las variables eléctricas y mecánicas que caracterizan a un motor de inducción. Así, se pudo conocer el comportamiento del motor en diferentes condiciones dinámicas de operación. Por ejemplo:
 - En la figura 3.10-1 se observan las características de aceleración libre (sin carga). Se aprecia la respuesta transitoria y en estado estable. La primera de estas provoca que las corrientes iniciales sean aproximadamente 10 veces la corriente nominal (característica que debe ser considerada en el diseño y protección de las instalaciones eléctricas en donde hay motores de este tipo), con el tiempo estas alcanzan su valor nominal (respuesta en estado estable). El torque electromagnético alcanza su máximo en el arranque, oscila en forma amortiguada y conforme el motor se acerca a velocidad síncrona este tiende a cero.
 - En la figura 3.10-2 se observan las características de un cambio súbito en el torque de carga. Cuando se aplica la carga nominal, las corrientes se incrementan, el torque electromagnético va de cero a su valor nominal y la velocidad del motor disminuye de la síncrona a la nominal.
 - En la figura 3.10-3 se observan las características de una falla trifásica en las terminales del motor. En el instante inmediato de la falla se presenta un pico de incremento en las corrientes y torque electromagnético seguido de una caída abrupta a cero, mientras que la velocidad comienza a disminuir.

Estos resultados obtenidos indican que en un motor de inducción, las corrientes en el arranque serán de aproximadamente 10 veces la nominal, y en una falla trifásica se producirá un pico de incremento en estas y en el torque electromagnético. También, se observó que la velocidad del motor nunca será mayor a la síncrona, sin importar las condiciones de operación y/o disturbios presentes.

ANEXO

A Pseudocódigo

```
Entero: P, i;  
Constante real: h=0.001, WB=377.0, fase=2.0944;  
Real: hp, vs, rs, xls, xm, xlr, rr, J, t, xlspu, xlrpu, xa, aux, PB, IB, ZB, TB, H,  
      ang, ias, ibs, ics, iar, ibr, icr, iqs, ids, iqr, idr, ts[4], vqs[3], TI[3], Te[2],  
      Wr[2], fqs[2], fds[2], fqr[2], fdr[2], fmq[2], fmd[2];  
Carácter: nombre[11], Archt[]="tiempo.txt", ArchTe[]="Torque.txt",  
          ArchWr[]="Velocidad.txt", ArchIas[]="Ias.txt", ArchIbs[]="Ibs.txt",  
          ArchIcs[]="Ics.txt", ArchIar[]="Iar.txt", ArchIbr[]="Ibr.txt",  
          ArchIcr[]="Icr.txt";  
Apuntador Archivo: ApunEnt, Apunt, ApunTe, ApunWr, ApunIas,  
                  ApunIbs, ApunIcs, ApunIar, ApunIbr, ApunIcr;
```

Inicio

```
Imprime ("SMEIT: SIMULADOR DE MOTOR ELECTRICO DE INDUCCION TRIFASICO");  
Imprime ("> Introduce Nombre del Archivo de Entrada:");  
Leer (nombre);  
// SE ABREN ARCHIVOS: ENTRADA, SALIDA  
ApunEnt = abrir archivo (nombre, modo lectura);  
Apunt = abrir archivo (Archt, modo escritura);  
ApunTe = abrir archivo (ArchTe, modo escritura);
```

```

ApunWr= abrir archivo (ArchWr, modo escritura);
Apunlas = abrir archivo (Archlas, modo escritura);
Apunlbs = abrir archivo (Archlbs, modo escritura);
Apunlcs = abrir archivo (Archlcs, modo escritura);
Apunlar = abrir archivo (Archlar, modo escritura);
Apunlbr = abrir archivo (Archlbr, modo escritura);
Apunlcr = abrir archivo (Archlcr, modo escritura);
// SE VERIFICAN APUNTADORES A ARCHIVOS
Si (ApunEnt==NULO ◯ Apun==NULO ◯ ApunTe==NULO ◯
ApunWr==NULO ◯ Apunlas==NULO ◯ Apunlbs==NULO ◯
Apunlcs==NULO ◯ Apunlar==NULO ◯ Apunlbr==NULO ◯
Apunlcr==NULO) entonces fin algoritmo;
// LECTURA DE DATOS DESDE EL ARCHIVO DE ENTRADA
leer del archivo (ApunEnt, P);
leer del archivo (ApunEnt, hp);
leer del archivo (ApunEnt, vs);
leer del archivo (ApunEnt, rs);
leer del archivo (ApunEnt, xls);
leer del archivo (ApunEnt, xm);
leer del archivo (ApunEnt, xlr);
leer del archivo (ApunEnt, rr);
leer del archivo (ApunEnt, J);
leer del archivo (ApunEnt, Wr[0]);
leer del archivo (ApunEnt, ts[1]);
leer del archivo (ApunEnt, ts[2]);
leer del archivo (ApunEnt, ts[3]);
leer del archivo (ApunEnt, vqs[0]);
leer del archivo (ApunEnt, vqs[1]);
leer del archivo (ApunEnt, vqs[2]);
leer del archivo (ApunEnt, TI[0]);
leer del archivo (ApunEnt, TI[1]);
leer del archivo (ApunEnt, TI[2]);
cierra archivo (ApunEnt);

```

```

// SE VERIFICAN DATOS
si ((P<=0) O (hp<=0) O (vs<=0) O (rs<=0) O (xls<=0) O (xm<=0) O (xlr<=0) O
(rr<=0) O (J<=0) O (ts[1]<=0) O (ts[2]<= ts[1]) O (ts[3]<= ts[2]) O(vqs[0]<0) O
(vqs[1]< 0) O (vqs[2]< 0) O (TI[0]< 0) O (TI[1]< 0) O (TI[2]< 0) O (vel<0))
entonces fin algoritmo;
// CANTIDADES BASE, CONSTANTES Y VARIABLES EN POR UNIDAD
PB = 746*hp;
IB = ( $\sqrt{2/3}$ )*(PB/vs);
ZB = vs2/PB;
TB = (P/2)*(PB/WB);
H = (J*WB)/(P*TB);
cs = rs/xls;
cr = rr/xlr;
xlspu = xls/ZB;
xlrpu = xlr/ZB;
vel = vel*(P/7200);
xa = 1/((1/xm)+(1/xls)+(1/xlr));
ts[0] = 0; // SE INICIALIZAN VARIABLES
Te[1] = 0;
Wr[1] = Wr[0]*(P/7200);
fqs[1] = 0;
fds[1] = 0;
fqr[1] = 0;
fdr[1] = 0;
fmq[1] = 0;
fmd[1] = 0;
desde i = 0; mientras i < 3; incrementa i (i = i + 1)
    vqs[i] = vqs[i]/vs; // VOLTAJE Y TORQUE DE CARGA EN P.U.
    TI[i] = TI[i]/TB; // INTERVALO DE SIMULACION
    desde t = ts[i] + h; mientras t <= ts[i+1]; incrementa t (t = t + h)
        Te[0] = Te[1]; // SE ACTUALIZAN VARIABLES
        Wr[0] = Wr[1];
        fqs[0] = fqs[1];
        fds[0] = fds[1];

```



```

fqr[0] = fqr[1];
fdr[0] = fdr[1];
fmq[0] = fmq[1];
fmd[0] = fmd[1];
// SE CALCULA UNA APROXIMACION
aux = vqs[i] - fds[0] + (cs*(fmq[0] - fqs[0]));
fqs[1] = fqs[0] + (h*WB*aux);
aux = fqs[0] + (cs*(fmd[0] - fds[0]));
fds[1] = fds[0] + (h*WB*aux);
aux = ((Wr[0]-1)*fdr[0]) + (cr*(fmq[0] - fqr[0]));
fqr[1] = fqr[0] + (h*WB*aux);
aux = ((1-Wr[0])*fqr[0]) + (cr*(fmd[0] - fdr[0]));
fdr[1] = fdr[0] + (h*WB*aux);
fmq[1] = xa*((fqs[1]/xls) + (fqr[1]/xlr));
fmd[1] = xa*((fds[1]/xls) + (fdr[1]/xlr));
Te[1] = ((fqs[1]*fmd[1]) - (fds[1]*fmq[1]))/xlspu;
aux = Te[0]-Tl[i];
aux = aux + Te[1]-Tl[i];
aux = aux/(2*H);
Wr[1] = Wr[0] + (h*aux/2);
// SE CORRIGE LA APROXIMACION
aux = vqs[i] - fds[0] + (cs*(fmq[0] - fqs[0]));
aux = aux + vqs[i] - fds[1] + (cs*(fmq[1] - fqs[1]));
fqs[1] = fqs[0] + (h*WB*aux/2);
aux = fqs[0] + (cs*(fmd[0] - fds[0]));
aux = aux + fqs[1] + (cs*(fmd[1] - fds[1]));
fds[1] = fds[0] + (h*WB*aux/2);
aux = ((Wr[0]-1)*fdr[0]) + (cr*(fmq[0] - fqr[0]));
aux = aux + ((Wr[1]-1)*fdr[1]) + (cr*(fmq[1] - fqr[1]));
fqr[1] = fqr[0] + (h*WB*aux/2);
aux = ((1-Wr[0])*fqr[0]) + (cr*(fmd[0] - fdr[0]));
aux = aux + ((1-Wr[1])*fqr[1]) + (cr*(fmd[1] - fdr[1]));
fdr[1] = fdr[0] + (h*WB*aux/2);

```

```

fmq[1] = xa*((fqs[1]/xls) + (fqr[1]/xlr));
fmd[1] = xa*((fds[1]/xls) + (fdr[1]/xlr));
Te[1] = ((fqs[1]*fmd[1]) - (fds[1]*fmq[1]))/xlspu;
aux = Te[0]-Tl[i];
aux = aux + Te[1]-Tl[i];
aux = aux/(2*H);
Wr[1] = Wr[0] + (h*aux/2);
// CORRIENTES EN EL MARCO DE REFERENCIA
iqs = (fqs[1]-fmq[1])/xlspu;
ids = (fds[1]-fmd[1])/xlspu;
iqr = (fqr[1]-fmq[1])/xlrupu;
idr = (fdr[1]-fmd[1])/xlrupu;
// CORRIENTES DEL ESTATOR
ang = WB*t;
ias= (cos(ang)*iqs) + (sin(ang)*ids);
ang = ang - fase;
ibs = (cos(ang)*iqs) + (sin(ang)*ids);
ang = ang + (2*fase);
ics = (cos(ang)*iqs) + (sin(ang)*ids);
// CORRIENTES DEL ROTOR
ang = (1-Wr[1])*WB*t;
iar= cos(ang)*iqr + sin(ang)*idr;
ang = ang - fase;
ibr = cos(ang)*iqr + sin(ang)*idr;
ang = ang + (2*fase);
icr = cos(ang)*iqr + sin(ang)*idr;
// SE IMPRIMEN RESULTADOS EN ARCHIVOS
Imprime en el archivo (Apunt, t);
imprime en el archivo (Apunlas, ias*IB);
imprime en el archivo (Apunlbs, ibs*IB);
imprime en el archivo (Apunlcs, ics*IB);
imprime en el archivo (Apunlar, iar*IB);
imprime en el archivo (Apunlbr, ibr*IB);

```

imprime en el archivo (ApunIcr, icr*IB);
imprime en el archivo (ApunTe, Te[1]*TB);
imprime en el archivo (ApunWr, Wr[1]*(7200/P));

fin desde

fin desde

cierra archivo (ApunI); // SE CIERRAN ARCHIVOS
cierra archivo (ApunTe);
cierra archivo (ApunWr);
cierra archivo (ApunIas);
cierra archivo (ApunIbs);
cierra archivo (ApunIcs);
cierra archivo (ApunIar);
cierra archivo (ApunIbr);
cierra archivo (ApunIcr);

fin;

B Relaciones Trigonométricas

$$\cos^2 x + \cos^2(x-2\pi/3) + \cos^2(x+2\pi/3) = 3/2$$

$$\sin^2 x + \sin^2(x-2\pi/3) + \sin^2(x+2\pi/3) = 3/2$$

$$\sin x \cos x + \sin(x-2\pi/3) \cos(x-2\pi/3) + \sin(x+2\pi/3) \cos(x+2\pi/3) = 0$$

$$\cos x + \cos(x-2\pi/3) + \cos(x+2\pi/3) = 0$$

$$\sin x + \sin(x-2\pi/3) + \sin(x+2\pi/3) = 0$$

$$\sin x \cos y + \sin(x-2\pi/3) \cos(y-2\pi/3) + \sin(x+2\pi/3) \cos(y+2\pi/3) = (3/2) \sin(x-y)$$

$$\sin x \sin y + \sin(x-2\pi/3) \sin(y-2\pi/3) + \sin(x+2\pi/3) \sin(y+2\pi/3) = (3/2) \cos(x-y)$$

$$\cos x \sin y + \cos(x-2\pi/3) \sin(y-2\pi/3) + \cos(x+2\pi/3) \sin(y+2\pi/3) = -(3/2) \sin(x-y)$$

$$\cos x \cos y + \cos(x-2\pi/3) \cos(y-2\pi/3) + \cos(x+2\pi/3) \cos(y+2\pi/3) = (3/2) \cos(x-y)$$

$$\sin x \cos y + \sin(x+2\pi/3) \cos(y-2\pi/3) + \sin(x-2\pi/3) \cos(y+2\pi/3) = (3/2) \sin(x+y)$$

$$\sin x \sin y + \sin(x+2\pi/3) \sin(y-2\pi/3) + \sin(x-2\pi/3) \sin(y+2\pi/3) = -(3/2) \cos(x+y)$$

$$\cos x \sin y + \cos(x+2\pi/3) \sin(y-2\pi/3) + \cos(x-2\pi/3) \sin(y+2\pi/3) = (3/2) \sin(x+y)$$

$$\cos x \cos y + \cos(x+2\pi/3) \cos(y-2\pi/3) + \cos(x-2\pi/3) \cos(y+2\pi/3) = (3/2) \cos(x+y)$$

BIBLIOGRAFÍA

1. Paul C. Krause, Oleg Wasynczuk, and Scott D. Sudhoff, Analysis of Electric Machinery and Drive Systems, 2nd ed., IEEE Press.
2. A. E. Fitzgerald, C. Kingsley, Jr., y S. D. Umans, Máquinas Eléctricas, 5th ed., McGraw-Hill.
3. Stephen J. Chapman, Máquinas Eléctricas, 4a ed., McGraw-Hill.
4. Rafael Iriarte V. Balderrama, Métodos Numéricos, Primera edición, Trillas, 1990.
5. Humberto Cárdenas, Emilio Lluís, Francisco Raggi, Francisco Tomás, Álgebra Superior, 2nd ed., Trillas.
6. George F. Simmons, y Steven G. Krantz, Ecuaciones diferenciales, 1a ed., McGraw-Hill.
7. Brian W. Kernighan, y Dennis M. Ritchie, El lenguaje de programación C, 2nd ed., Prentice Hall.
8. Luis Joyanes Aguilar, Ignacio Zahonero Martínez, Programación en C, C++, Java y UML, McGraw-Hill, 2010.