



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

**POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS**

**(INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES)**

***DOS CARGAS EN EL PLANO EN CAMPO MAGNÉTICO***

**T E S I S**

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

DOCTOR EN CIENCIAS (FÍSICA)

P R E S E N T A :

**ADRIÁN MAURICIO ESCOBAR RUIZ**

**DIRECTOR DE TESIS**

**DR. ALEXANDER TURBINER ROSENBAUM  
(ICN)**

**MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR**

**DR. JUAN CARLOS LÓPEZ VIEYRA  
(ICN)**

**DR. DANY PAGE ROLLINET  
(IA)**

**MÉXICO, D. F. MARZO 2014**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Agradecimientos

Deseo expresar mi más sincero y profundo agradecimiento al Director de Tesis el Dr. Alexander Turbiner Rosenbaum. Su indiscutible talento, su perenne profesionalismo y el entusiasmo que mostró en sus seminarios y en las discusiones de trabajo que mantuvimos a lo largo de estos 6 años fueron el mejor referente y un apoyo invaluable en mi educación académica y personal. También le doy gracias por los consejos personales, los conciertos de música clásica, la obra de Nabokov. Estas líneas son solo una muestra insuficiente de respeto y admiración. Zdravstvuite.

Al Dr. Eugenio Ley Koo y a los miembros del comité de sinodales; por sus comentarios y sugerencias que mejoraron la calidad de la Tesis:

- Dr. Alexander Turbiner Rosenbaum
- Dr. Dany Page Rollinet
- Dr. Rocío Júregui Renaud
- Dr. David José Fernández Cabrera
- Dr. Antonmaría Minzoni Alessio

Un especial agradecimiento al Dr. Juan Carlos López Vieyra. Su excepcional apoyo e interés en todas mis actividades académicas fueron una constante motivación.

Un agradecimiento al Dr. Horacio Olivares Pilon por su valiosa ayuda en la elaboración de los programas computacionales empleados en el desarrollo de la Tesis.

A la Universidad Nacional Autónoma de México y al Instituto de Ciencias Nucleares por la hospitalidad brindada durante los años en los cuales realice mis estudios tanto de licenciatura como los de posgrado.

Agradezco el apoyo económico brindado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología -CONACyT- durante los estudios de posgrado. Al apoyo brindado mediante la asignación de la beca mixta -CONACyT- para la realización de las estancias en el Departamento de Física de la Universidad de Kentucky.

A mi padre Abundio Escobar Zavala por la educación y el amor que siempre me brindó. Todo se lo debo a él.

A mi madre Rosa Ruiz Salazar y a mi hermano Carlos Andrés Escobar Ruiz. El objetivo alcanzado también es de ustedes y la fuerza que me ayudó a conseguirlos fue su gran apoyo.

A mi tía Dora Elia Ruiz Salazar por toda su ayuda y cariño.

A Marisol Rodríguez Arcos.

# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>6</b>
<b>Introducción</b>	<b>8</b>
Escalas Naturales de los Campos Magnéticos . . . . .	10
Una carga en un campo magnético . . . . .	11
El átomo hidrogenoide en el plano . . . . .	15

## Parte I

<b>1. Caso Clásico: trayectorias especiales</b>	<b>19</b>
1.1. Consideración general. Integrabilidad global y particular . . .	19
1.2. Trayectorias especiales . . . . .	22
1.2.1. Configuración I . . . . .	24
1.2.2. Configuración II . . . . .	29
1.2.3. Configuración III . . . . .	37
1.2.4. Configuración IV . . . . .	39
1.2.5. Configuración V . . . . .	40

## Parte II

<b>2. Caso cuántico</b>	<b>42</b>
2.1. Soluciones cuasi-exactamente solubles: Álgebra escondida . . .	45
2.1.1. Sistema con $e_c = 0$ . . . . .	45
2.1.1.1. Relaciones de escalamiento . . . . .	49
2.1.1.2. Integral particular . . . . .	49
2.1.2. Sistema con $q = 0$ . . . . .	50
2.1.2.1. Relaciones de Escalamiento . . . . .	54
2.1.2.2. Integral Particular . . . . .	54

2.2.	Soluciones aproximadas . . . . .	56
2.2.1.	Sistema con $e_c = 0$ . . . . .	56
2.2.1.1.	Aproximaciones: funciones variacionales . . .	57
2.2.1.2.	Resultados . . . . .	58
2.2.2.	Sistema con $q = 0$ : átomo en reposo ( $\mathbf{K} = \mathbf{0}$ ) . . . . .	71
2.2.2.1.	Caso $\mathbf{K} = \mathbf{0}$ : Sistema en reposo . . . . .	71
2.2.2.2.	Aproximaciones: funciones variacionales . . .	72
2.2.2.3.	Resultados . . . . .	72
2.2.3.	Sistema con $q = 0$ : átomo en movimiento ( $\mathbf{K} \neq 0$ ) . . .	85
2.2.3.1.	Teoría perturbativa: Efecto Zeeman . . . . .	85
2.2.3.2.	Aproximaciones: funciones variacionales . . .	93
2.2.3.3.	Resultados . . . . .	94
<b>Conclusiones</b>		<b>105</b>
<b>Apéndices</b>		<b>109</b>
<b>A. Soluciones polinomiales de la ec. (2.22)</b>		<b>110</b>
<b>B. Teoría Perturbativa de no-linealización</b>		<b>116</b>
<b>C. Soluciones cuasi-exactamente solubles</b>		<b>119</b>
<b>D. El Método Variacional</b>		<b>120</b>
<b>E. Integrabilidad particular</b>		<b>123</b>
<b>F. Parámetros variacionales</b>		<b>125</b>
<b>Referencias</b>		<b>151</b>

# Resumen

En la Tesis se realizó un estudio clásico y cuántico de un sistema no-relativista formado de dos cargas puntuales  $(e_1, e_2)$ , con masas arbitrarias  $(m_1, m_2)$ , confinadas a moverse en el plano bajo la influencia de un campo magnético  $B$  constante, uniforme y perpendicular al plano. La Tesis consta de dos partes principales:

## Parte I

Comprende el caso clásico. Se describen y clasifican trayectorias especiales (superintegrables), así como las condiciones iniciales que dan lugar a ellas, en las cuales la distancia entre las cargas permanece constante y el número de constantes de movimiento es mayor al de las trayectorias genéricas. Se pone énfasis en tres sistemas particulares: (i) dos partículas idénticas, (ii) el sistema neutral y (iii) el sistema electrón-partícula  $\alpha$  ( $e_1 = -1, e_2 = 2$ ).

## Parte II

Trata la contraparte cuántica del caso anterior. Se presentan en total, para ciertos valores del campo  $B = \{B_{qes}\}$ , nueve familias de eigenfunciones exactas del Hamiltoniano en dos casos físicamente relevantes, a saber, partículas con igual frecuencia de Larmor  $e_c \propto \frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} = 0$  (dos electrones) y el sistema neutral (par electrón-positrón, átomo de Hidrógeno) en reposo. Se demuestra que el Hamiltoniano de ambos sistemas yace en el álgebra de Lie envolvente  $sl_2(\mathbb{R})$ . En los casos del par electrón-positrón y del átomo de Hidrógeno en movimiento se presentan resultados perturbativos. También se construyen de forma complementaria, para  $B \neq \{B_{qes}\}$ , soluciones aproximadas mediante el método variacional con funciones de prueba físicamente adecuadas que dan lugar a una teoría perturbativa convergente. Las funciones variacionales manifiestan la solución del problema de dos cargas en el plano en un campo magnético perpendicular.

A nivel de las propiedades de integrabilidad se muestra una conexión entre el caso clásico (trayectorias superintegrables) y el cuántico (soluciones cuasi-exactamente solubles).



# Summary

We considered a system of two non-relativistic charged particles  $(e_1, m_1; e_2, m_2)$  on the plane in a constant and homogeneous magnetic field  $\mathbf{B}$  perpendicular to the plane. The study is organized in two parts:

## Part I

It is devoted to the classical case. Special superintegrable trajectories (circular and linear) for which the distance between charges remains unchanged are indicated and their constants of motion are presented. A classification of pairs of charges for which special trajectories occur is given. The special trajectories are analyzed for three particular cases, namely that of (i) two electrons, (ii) an electron-positron pair, and (iii) an electron- $\alpha$ -particle pair.

## Part II

It is devoted to the quantum case. Nine families of eigenfunctions, for a discrete set of magnetic fields  $B = \{B_{qes}\}$ , are presented for two physically important particular cases, namely that of two particles of equal Larmor frequencies  $e_c \propto \frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} = 0$  (e.g. two electrons) and one of a neutral system (e.g. the electron-positron pair, hydrogen atom) at rest (the center-of-mass momentum is zero). It is shown that for both systems the Hamiltonian lies in the enveloping algebra  $sl_2(\mathfrak{R})$ . For  $B \neq \{B_{qes}\}$ , the variational method is employed. Trial functions are based on combining for the phase of a wavefunction (a) the WKB expansion at large distances, (b) the perturbation theory at small distances (c) with a form of the known analytically (quasi-exactly-solvable) eigenfunctions. Such a form of trial function appears as a compact uniform approximation for lowest eigenfunctions.

At the level of properties of integrability the classical case (superintegrable trajectories) and the quantum case (quasi-exactly-solvable eigenfunctions) are related.

# Introducción

Es indudable el interés que despiertan los fenómenos electromagnéticos. Se sabe que los antiguos griegos ya veían con gran curiosidad y sorpresa que ciertas piedras con magnetita atraían el hierro. Hoy en día no es una exageración afirmar que vivimos en un mundo de origen electromagnético: cada una de las fuerzas que experimentamos cotidianamente, con excepción de la gravitacional, tienen este origen.

A escala atómica, el problema de un sistema compuesto de dos cargas puntuales en presencia de un campo magnético es fundamental ya que la interacción de Coulomb constituye la base de la física atómica y molecular. Si, en adición a la interacción de Coulomb, se impone un campo magnético externo cada partícula estará sujeta a la Fuerza de Lorentz, lo cual da lugar a nuevos fenómenos en la física atómica-molecular estándar.

El comportamiento de una partícula cargada en un campo magnético constante es un problema básico que ha sido ampliamente estudiado, clásico (problema de Larmor) y cuántico (problema de Landau). Es un problema integrable tanto en clásica, con todas trayectorias circulares en forma analítica, como en cuántica en donde es además exactamente soluble. Desempeña un papel fundamental en Física.

Por un lado, cuando los electrones son confinados en materiales bidimensionales (2D), la existencia de estados ligados de dos y más electrones [1] así como el efecto Hall cuántico fraccionario descrito por R. Laughlin (1981) [2] y descubierto experimentalmente por Daniel C. Tsui y Horst Störmer (1982), son un claro ejemplo de estos nuevos fenómenos que surgen debido a la presencia de un campo magnético.

Por otro lado, el problema del átomo de Hidrógeno en un campo magnético es fascinante porque representa un paradigma en el estudio de Hamiltonianos no integrables, clásicos y cuánticos, y sistemas caóticos en el caso tridimensional [3]-[5]. Lo mismo continúa siendo válido en 2D. De igual manera vale la pena mencionar que en sistemas neutrales formados por un electrón y un hueco se han predicho propiedades inusuales debido a la presencia de un campo magnético [6], específicamente magnetoexcitones en un campo perpendicular. Desde los trabajos pioneros de R. J. Elliot, R. Loudon [7], H. Hasegawa, R.

E. Howard [8] y de L. P. Gorkov, I. E. Dzyaloshinskii [9] una gran cantidad de investigaciones teóricas y experimentales se han realizado en esta dirección, en particular sobre los efectos de masa finita que desempeñan un papel crucial en las propiedades de estos sistemas [10]-[15].

Al estudiar el comportamiento de la materia en campos magnéticos resulta conveniente definir una unidad adimensional  $b = \frac{B}{B_0}$  de campo magnético en términos de un campo característico  $B_0$  que se obtiene al igualar el radio ciclotrónico del electrón al radio de Bohr,  $B_0 = \frac{m_e^2 e^3 c}{\hbar^3} \approx 2.3505 \times 10^9 G$ .

El caso de campos magnéticos débiles  $b \ll 1$  corresponde al régimen de Coulomb. En su mayoría los efectos magnéticos son estudiados mediante teoría de perturbaciones, por ejemplo el desdoblamiento de los niveles atómicos de energía (efecto Zeeman y efecto Paschen-Back).

El caso de campos magnéticos fuertes  $b \gg 1$  corresponde al régimen de Landau. La energía ciclotrónica  $\frac{eB\hbar}{m_e c}$  es mucho mas grande que la energía Coulombiana típica del sistema en cuestión, en cuyo caso un tratamiento perturbativo de los efectos magnéticos no es válido y en consecuencia se recurre a otros métodos aproximados, de entre los cuales podemos mencionar que el método variacional con funciones de prueba físicamente adecuadas [16] ha demostrado ser una herramienta con una precisión garantizada [17]-[18]. Campos magnéticos fuertes  $b \gg 1$  existen en la superficie de las estrellas de neutrones [19]-[20]. Típicamente, la intensidad del campo magnético en una estrella de este tipo varía entre  $10^{12} - 10^{13}$  Gauss ( $\sim 10^3 - 10^4 B_0$ ). Dentro de este régimen, uno de los hechos más fascinantes de la física es la posible formación de nuevos sistemas moleculares exóticos [21]-[22] que no existirían en ausencia de campo magnético, por ejemplo la molécula  $H_3^{2+}$  [23]. No obstante que la máxima intensidad de campo magnético alcanzada experimentalmente corresponde al régimen de Coulomb, las condiciones del régimen  $b \gg 1$  pueden ser simuladas en algunos semiconductores gracias a que la pequeña masa efectiva del electrón junto con una constante dieléctrica grande reducen la interacción de Coulomb en favor de la interacción magnética.

En conclusión, a pesar de que el estudio de un sistema en el plano de dos cargas en un campo magnético perpendicular es una tarea complicada para ser resuelta analíticamente, el problema es de interés fundamental y no únicamente del lado de la teoría sino debido a sus numerosas aplicaciones en diferentes ramas de la física como astrofísica y física de plasmas, entre otras. En la física de estado sólido tenemos, como mencionamos, el caso de magne-

toexcitones. Encontramos otra aplicación en los puntos cuánticos (quantum dots) [24]-[27] debido a que recientes desarrollos en la tecnología de micro-fabricación han permitido su creación en estructuras semiconductoras [28].

### Escalas Naturales de los Campos Magnéticos

El sistema físico que se toma como referencia en la definición de una escala natural con la cual medir campos magnéticos es el átomo de Hidrógeno. Se encuentra que el valor del campo magnético  $B$  para el cual el radio ciclotrónico  $\rho_0 = \sqrt{\frac{\hbar c}{e B_0}}$  y el radio  $a_0 = \frac{\epsilon \hbar^2}{m_e e^2}$  de Bohr son iguales viene dado por

$$B_0 = \frac{\hbar c}{e a_0^2} \cong 2.3505 \times 10^9 \text{ G} = 2.3505 \times 10^5 \text{ T}.$$

Esta unidad atómica de campo magnético es tres órdenes de magnitud mayor comparada con la máxima intensidad de campo magnético que se ha logrado alcanzar experimentalmente ( $B_{max} \sim 100 \text{ T}$ ), esta es la razón por la cual al trabajar con campos magnéticos del orden de unidades atómicas (a.u.) se habla de campos magnéticos intensos.

Sin embargo, para excitones en semiconductores, la unidad natural de campo magnético es  $\tilde{B}_0 = \frac{\hbar c}{e \tilde{a}_0^2} = \tilde{m}^2 e^3 c / (\epsilon^2 \hbar^3)$ . Por ejemplo, en GaAs, la constante dieléctrica  $\epsilon = 12.56$  y la masa efectiva del electrón  $\tilde{m} = 0.00665 m_e$  dan la unidad de campo  $\tilde{B}_0 = 6.57 \text{ T}$ . En este sentido, campos magnéticos intensos pueden ser alcanzados experimentalmente.

Para ilustrar la magnitud de algunos campos magnéticos en la siguiente tabla se muestran valores de la intensidad del campo magnético producido por diferentes cuerpos.

Fuente	Intensidad
Superficie de la Tierra	0.3 G - 0.6 G
Superficie del Sol	$10^2 \text{ G}$
Imán de refrigerador	$3 \times 10^3 \text{ G}$
Laboratorio (continuo)	$3.3 \times 10^5 \text{ G}$
Laboratorio (pulsos)	$6 \times 10^5 \text{ G}$
Laboratorio (explosión)	$8.5 \times 10^6 \text{ G}$
Enanas Blancas	$10^6 \text{ G} - 10^9 \text{ G}$
Estrellas de Neutrones	$10^{12} \text{ G} - 10^{13} \text{ G}$
Magnetares	$10^{13} \text{ G} - 10^{16} \text{ G}$

## Una carga en un campo magnético

El Hamiltoniano en  $\mathfrak{R}^2$  de una partícula cuántica no relativista de carga  $e$  y masa  $m_e$  en un campo magnético constante y uniforme  $\mathbf{B} = B \hat{\mathbf{z}}$  tiene la forma<sup>1</sup>

$$\hat{H} = \frac{(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}))^2}{2m_e}, \quad (1)$$

donde  $\mathbf{r}$  y  $\hat{\mathbf{p}}$  son las variables canónicas conjugadas de posición y momento, respectivamente,

$$[r_l, \hat{p}_k] = i \hbar \delta_{lk} \quad l, k = x, y, \quad (2)$$

y  $\mathbf{A}$  es el potencial vectorial magnético,  $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ . Una de las propiedades fundamentales de éste problema es la invariancia de norma. Como consecuencia de esta propiedad es posible indicar un Hamiltoniano, conectado con (1) mediante una transformación unitaria, para el cual todas sus eigenfunciones son reales [23].

La solución a este problema se encuentra en diversos textos [29]. Presentamos un breve resumen.

La energía está cuantizada en niveles de Landau

$$\begin{aligned} E_{n_L} &= \hbar \omega_c \left( n_L + \frac{1}{2} + |s| - s \right) \\ n_L &= 0, 1, 2, 3 \dots \\ s &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad (3)$$

donde  $\omega_c = \frac{eB}{m_e c}$  es la frecuencia ciclotrónica,  $n_L$  es el número cuántico de Landau y  $s$  el número cuántico magnético. El espectro, de oscilador armónico, es equi-espaciado e infinitamente degenerado: todos los estados con  $n_L$  fijo y diferente  $s \geq 0$  son degenerados.

El espaciamiento entre los niveles de energía es  $\hbar \omega_c = 11.5768 B_{12}$  keV y el radio ciclotrónico (el tamaño característico del paquete de onda) viene dado por  $\rho_0 = \left( \frac{\hbar c}{eB} \right)^{1/2} = 2.5656 \times 10^{-10} B_{12}^{-1/2}$  cm, donde  $B_{12} = B/(10^{12}\text{G})$ .

---

<sup>1</sup>El término del espín no es relevante en la presente consideración y por lo tanto no se incluye.

## Integrales de movimiento

El problema bidimensional, tanto clásico como cuántico, de una carga en un campo magnético constante y uniforme es superintegrable, y exactamente soluble cuánticamente [30], el pseudomomento<sup>2</sup>  $\hat{\mathbf{k}}$  [9]

$$\hat{\mathbf{k}} = m_e \hat{\mathbf{v}} + e \mathbf{B} \times \mathbf{r} = \hat{\mathbf{p}} - e \mathbf{A}(\mathbf{r}) + e \mathbf{B} \times \mathbf{r} , \quad (4)$$

$\hat{\mathbf{v}} \equiv \frac{1}{i}[\mathbf{r}, \hat{H}]$ , es una integral de movimiento invariante de norma

$$[\hat{H}, \hat{\mathbf{k}}] = 0 . \quad (5)$$

En mecánica clásica (ecuaciones de Newton) la cuestión sobre la invariancia de norma no se presenta. Uno trabaja con las ecuaciones de movimiento en las cuales aparece el campo magnético  $\mathbf{B}$  que es el que posee realidad física y no con el potencial vectorial magnético  $\mathbf{A}$ .

En este momento es oportuno mencionar que la transcripción a la mecánica clásica de los resultados que vamos presentando se consigue reemplazando los paréntesis de Lie por los paréntesis de Poisson ( $\frac{1}{i}[\ , \ ] \rightarrow \{ \ , \ }$ ) y sustituyendo los operadores por sus correspondientes cantidades clásicas. En el caso clásico la partícula gira, en el plano perpendicular  $xy$ , en una órbita circular de radio  $R_c = \frac{m_e v}{e B}$  con frecuencia ciclotrónica  $\omega_c = \frac{e B}{m_e}$ , ver Fig. 1. En este plano, se le denomina *centro guía* [31] al punto fijo alrededor del cual gira la partícula. El centro guía en términos del pseudomomento toma la forma

$$\mathbf{r}_0 = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{B}}{e B^2} . \quad (6)$$

Físicamente es claro que la energía de la partícula no depende de la posición del centro guía y por ende tampoco los eigenvalores de (1) dependen de los valores del pseudomomento  $\hat{\mathbf{k}}$ , es esta la razón de la degeneración en (3).

---

<sup>2</sup>Seguimos el sistema de unidades donde  $\hbar = c = 1$ .

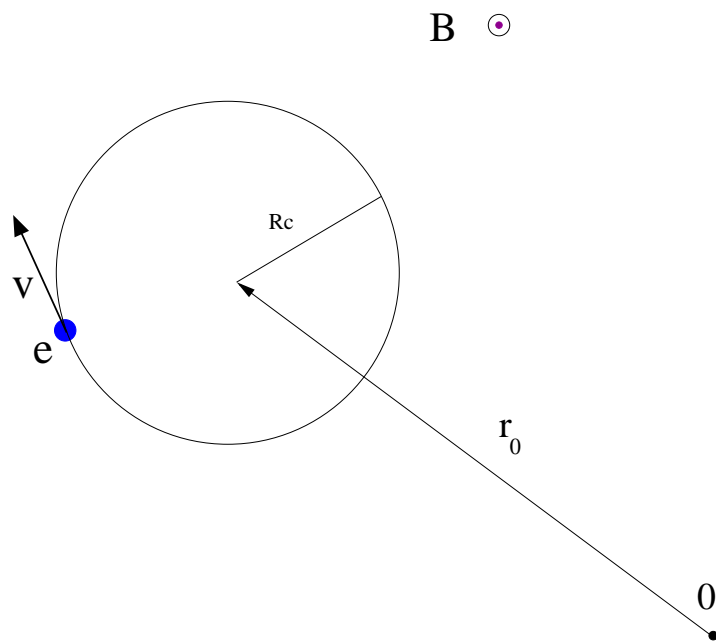


Figura 1: Trayectoria circular que describe una carga  $e$  en presencia de un campo magnético  $\mathbf{B}$ . La partícula gira, en el plano perpendicular  $xy$ , en una órbita circular de radio  $R_c = \frac{m_e v}{e B}$  con frecuencia ciclotrónica  $\omega_c = \frac{e B}{m_e}$ .

La cantidad

$$\hat{\omega} = \hat{l}_z^{cin} + \frac{eB}{2}(x^2 + y^2), \quad (7)$$

también es una integral invariante de norma donde  $\hat{l}_z^{cin} = m_e (\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{v}})_z$  es la proyección del momento angular *cinético* a lo largo del campo magnético. Esta cantidad conservada (7) no es una integral de movimiento independiente, se tiene que

$$\hat{\omega} = \frac{1}{2eB}(\hat{\mathbf{k}}^2 - 2m_e \hat{H}). \quad (8)$$

En la norma simétrica,  $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{B} \times \mathbf{r}$ , (8) degenera en la proyección del momento angular *canónico*  $\hat{l}_z = (\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{p}})_z$  a lo largo del campo magnético.

Los dos conjuntos  $\{(\hat{H}, \hat{\omega}), (\hat{H}, \hat{k}_y)\}$  forma un álgebra conmutativa, el primer conjunto esta asociado con la elección de la norma simétrica mientras que el último conjunto se asocia con la norma de Landau.

Los operadores  $\hat{\mathbf{k}} \equiv (\hat{k}_x, \hat{k}_y)$  y  $\hat{\omega}$  obedecen las relaciones de conmutación

$$\begin{aligned} [\hat{k}_x, \hat{k}_y] &= -ieB \\ [\hat{\omega}, \hat{k}_x] &= i\hat{k}_y \\ [\hat{\omega}, \hat{k}_y] &= -i\hat{k}_x \end{aligned} \quad (9)$$

Las contrapartes clásicas de  $\hat{\omega}$ ,  $\hat{\mathbf{k}}$  son funciones del espacio fase y claro están íntimamente relacionadas con las simetrías de (1), estas funciones (integrales de movimiento) no están en involución pero satisfacen un álgebra Euclidiana.

Asociadas con la conservación de  $\mathbf{k}$  tenemos las siguientes transformaciones invariantes infinitesimales<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} \delta x &\equiv \{x, \mathbf{k}\} = \tau_x \hat{\mathbf{x}} \\ \delta y &\equiv \{y, \mathbf{k}\} = \tau_y \hat{\mathbf{y}} \\ \delta p_x &\equiv \{p_x, \mathbf{k}\} = e(\tau_x \partial_x A_x \hat{\mathbf{x}} + \tau_y (\partial_x A_y - B) \hat{\mathbf{y}}) \\ \delta p_y &\equiv \{p_y, \mathbf{k}\} = e(\tau_y \partial_y A_y \hat{\mathbf{y}} + \tau_x (\partial_y A_x - B) \hat{\mathbf{x}}), \end{aligned} \quad (10)$$

donde  $\tau_x, \tau_y$ , son parámetros infinitesimales.

---

<sup>3</sup>Las ecuaciones canónicas son invariantes bajo tales transformaciones.



## El átomo hidrogenoide (no-relativista) en el plano

El movimiento relativo de un electrón ( $-e, m_e$ ) y un núcleo ( $Ze, m_p$ ) se reduce al de una partícula con masa  $m_r = m_e m_p / (m_e + m_p)$  sujeta al potencial central  $V = -Z e^2 / r$  [32]. El movimiento del centro de masa es el de partícula libre. Las energías de los estados ligados son

$$E_n = -\frac{Z^2}{2(n-1/2)^2} \frac{m_r e^4}{\hbar^2}, \quad (11)$$

donde  $n = 1, 2, 3, \dots$  se denomina número cuántico principal. Vemos que la energía del estado base del átomo de hidrógeno  $E_0 = 54.3931$  eV resulta cuatro veces mayor que su contraparte tridimensional. La función de onda normalizada del estado base toma la forma

$$\psi_0 = \sqrt{\frac{8 m_r^2}{\pi}} e^{-2 m_r r}$$

## Integrales de movimiento

El Hamiltoniano clásico y cuántico del átomo de hidrógeno

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2 m_r} - \frac{e^2}{r}, \quad (12)$$

es superintegrable y exactamente soluble [33], clásicamente las trayectorias son elipses ( $E < 0$ ). El momento angular canónico

$$\hat{\ell} = \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{p}}, \quad (13)$$

es una integral de movimiento. El vector de Laplace-Runge-Lenz

$$\hat{\mathcal{A}} = \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{p}} \times \hat{\ell} - \hat{\ell} \times \hat{\mathbf{p}}) - \frac{e^2}{r}. \quad (14)$$

también se conserva. Se cumplen las relaciones  $\hat{\mathcal{A}} \cdot \ell = 0$  y  $\hat{\mathcal{A}}^2 = 2 \hat{H} \hat{\ell}^2 + e^4$ . Las integrales obedecen el álgebra

$$\begin{aligned} [\hat{\ell}_z, \hat{\mathcal{A}}_x] &= i \hbar \hat{\mathcal{A}}_y \\ [\hat{\ell}_z, \hat{\mathcal{A}}_y] &= -i \hbar \hat{\mathcal{A}}_x \\ [\hat{\mathcal{A}}_x, \hat{\mathcal{A}}_y] &= -4 i \hbar \hat{\ell}_z \hat{H}. \end{aligned} \quad (15)$$

La no-conmutatividad de los operadores  $\hat{\mathcal{A}}_x$  y  $\hat{\mathcal{A}}_y$  está relacionada con la degeneración accidental de los niveles de energía. Es bien conocido el hecho de que esta degeneración accidental es consecuencia de una simetría escondida, en general el grupo  $SO(n+1)$  es el álgebra envolvente de la simetría dinámica del átomo de Hidrógeno  $n$ -dimensional.

El problema en el plano de dos cargas puntuales  $(e_1, e_2)$ , con masas arbitrarias  $(m_1, m_2)$ , bajo la acción de un campo magnético perpendicular  $B$  es una mezcla de los dos problemas descritos anteriormente. Clásicamente, en contraste con esos problemas este presenta una complejidad mucho mayor ya que hay una gran riqueza en el comportamiento dinámico. En general, las trayectorias dejan de ser círculos o elipses y pueden ser extremadamente complicadas. Queremos mencionar algunos de los resultados ( $B \neq 0$ ) que se conocen [34],[35]:

- La suma de los Pseudomomentos individuales

$$\mathbf{K} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = (m_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + e_1 \mathbf{B} \times \mathbf{r}_1) + (m_2 \dot{\mathbf{r}}_2 + e_2 \mathbf{B} \times \mathbf{r}_2)$$

es una integral de movimiento.

- La distancia entre las partículas siempre está acotada.
- Para el sistema cargado  $e_1 + e_2 \neq 0$ , todas las trayectorias individuales  $\mathbf{r}_{1(2)}(t)$  de las partículas son acotadas.
- Para el sistema neutro  $e_1 + e_2 = 0$ , con  $\mathbf{K} = 0$ , también todas las trayectorias  $\mathbf{r}_{1(2)}(t)$  son acotadas.
- Para el sistema neutro  $e_1 + e_2 = 0$ , con  $\mathbf{K} \neq 0$ , no obstante que la distancia entre las partículas siempre está acotada, típicamente sus trayectorias no lo están. Inclusive, un dipolo eléctrico constante puede viajar libremente.
- Para el sistema neutral  $e_1 + e_2 = 0$ , con  $\frac{e_1}{m_1} + \frac{e_2}{m_2} \neq 0$ , el sistema exhibe un comportamiento caótico.
- En el caso  $\frac{e_1}{m_1} = \frac{e_2}{m_2}$  que describe a dos partículas con el mismo signo y con la misma frecuencia de Larmor, el sistema es completamente integrable. El movimiento del centro de masa corresponde al de una partícula compuesta de carga  $q = e_1 + e_2$  y masa  $M = m_1 + m_2$  en presencia de un campo magnético constante. Por lo tanto, se mueve sobre un círculo con frecuencia angular igual a la frecuencia de las partículas constituyentes.

En base a esto, es natural esperar que el problema cuántico presenta casos especiales [1],[36].

De una manera general, el contenido de la Tesis está dividida en una introducción, dos partes principales, conclusiones y una sección final de seis apéndices. En la Parte I se considera el caso clásico. Esta parte consta de dos secciones. En la primera se abordan las generalidades y los conceptos que se utilizarán a lo largo del trabajo. En la segunda sección se muestran y clasifican una serie de trayectorias especiales (circulares y lineales) cuya característica principal es que la distancia entre las partículas permanece constante durante el proceso de evolución, lo que corresponde a la aparición de lo que llamamos una integral *particular*. Los principales resultados están publicados en el artículo **I** [37].

La Parte II es la continuación natural del caso clásico al cuántico y también consta de dos secciones. En la primera sección, para algunos sistemas físicamente importantes (por ejemplo dos electrones, átomo de hidrógeno), se muestra que el Hamiltoniano posee un álgebra escondida. Se presentan soluciones analíticas (algebraicas) exactas que aparecen sólo para ciertos valores del campo magnético. Los resultados de la primera sección están publicados en el artículo **II** [38]. La segunda sección presenta de forma complementaria un estudio variacional. Los resultados están publicados en el artículo **III** [39].

- **I.-** M. A. Escobar-Ruiz and A. V. Turbiner, *Two charges on a plane in a magnetic field: special trajectories*, Journal of Math. Physics **54** (2013) 022901
- **II.-** A. V. Turbiner and M. A. Escobar-Ruiz, *Two charges on a plane in a magnetic field: hidden algebra, (particular) integrability, polynomial eigenfunctions*, J. Phys. A: Math. Theor. **46** (2013) 295204
- **III.-** M. A. Escobar-Ruiz and A. V. Turbiner, *Two charges on a plane in a magnetic field I: "Quasi-equal" charges and neutral quantum system at rest cases*, Annals of Physics **340** (2014) 37-59

# Capítulo 1

## Caso Clásico: trayectorias especiales

### 1.1. Consideración general. Integrabilidad global y particular

En esta sección se describe, poniendo énfasis en sus propiedades de integrabilidad, el Hamiltoniano clásico que se va a estudiar.

El Hamiltoniano de dos partículas no-relativistas  $(e_1, m_1)$  y  $(e_2, m_2)$ , en el plano, en presencia de un campo magnético  $\mathbf{B} = B \hat{\mathbf{z}}$  constante, uniforme y perpendicular al plano tiene la forma <sup>1</sup>

$$\mathcal{H} = \frac{(\mathbf{p}_1 - e_1 \mathbf{A}_1)^2}{2 m_1} + \frac{(\mathbf{p}_2 - e_2 \mathbf{A}_2)^2}{2 m_2} + \frac{e_1 e_2}{|\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2|}, \quad (1.1)$$

donde  $\boldsymbol{\rho}_{1,2}$  es el vector de posición de la primera(segunda) partícula y  $\mathbf{p}_{1,2}$  su correspondiente momento canónico conjugado. El potencial vectorial magnético

$$\mathbf{A}_{1,2} = \frac{1}{2} (\mathbf{B} \times \boldsymbol{\rho}_{1,2})$$

se elige de aquí en adelante en la norma simétrica.

---

<sup>1</sup>Se adopta  $c = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 1$ .

Es muy conocido el hecho de que el Pseudomomento total

$$\mathbf{K} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = (\mathbf{p}_1 + e_1 \mathbf{A}_1) + (\mathbf{p}_2 + e_2 \mathbf{A}_2) , \quad (1.2)$$

es una constante de movimiento, su paréntesis de Poisson con el Hamiltoniano se anula,  $\{\mathbf{K}, \mathcal{H}\} = 0$ . En (1.2),  $\mathbf{k}_{1(2)}$  es el pseudomomento de la primera(segunda) partícula. El momento *canónico* angular total  $\mathbf{L}_z^T$

$$\mathbf{L}_z^T = \boldsymbol{\rho}_1 \times \mathbf{p}_1 + \boldsymbol{\rho}_2 \times \mathbf{p}_2 , \quad (1.3)$$

es también una integral,  $\{\mathbf{L}_z^T, \mathcal{H}\} = 0$ . El problema está caracterizado por tres cantidades conservadas (integrales)  $K_{x,y}$ ,  $L_z^{total}$ , donde hemos introducido un sistema coordenado  $(x, y)$  en el plano,  $\mathbf{K} = (K_x, K_y)$ . Entonces, en general, el problema (1.1) es integrable, el número de integrales (incluyendo el Hamiltoniano) es igual a la dimensión del espacio de configuración. Debido a que, en general, las cantidades  $K_{x,y}$ ,  $L_z^T$  no están en involución, el problema no es completamente-integrable. Estas tres integrales son de una naturaleza global: son cantidades que se conservan para cualquier trayectoria independientemente de las condiciones iniciales que se consideren.

Se introducen las variables relativas y del centro de masa

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mu_1 \boldsymbol{\rho}_1 + \mu_2 \boldsymbol{\rho}_2 , & \boldsymbol{\rho} &= \boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2 , \\ \mathbf{P} &= \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 , & \mathbf{p} &= \mu_2 \mathbf{p}_1 - \mu_1 \mathbf{p}_2 , \end{aligned} \quad (1.4)$$

donde  $M = m_1 + m_2$  es la masa total del sistema y  $\mu_i = \frac{m_i}{M}$ . En estas coordenadas

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \mathbf{P} + q \mathbf{A}_R + e_c \mathbf{A}_\rho , \\ \mathbf{L}_z^T &= (\mathbf{R} \times \mathbf{P}) + (\boldsymbol{\rho} \times \mathbf{p}) \equiv \mathbf{L}_z + \boldsymbol{\ell}_z , \end{aligned} \quad (1.5)$$

con

$$q = e_1 + e_2$$

la carga total,

$$e_c = (e_1 \mu_2 - e_2 \mu_1) ,$$

una carga de *acoplamiento*,

$$\mathbf{A}_R = \frac{1}{2}(\mathbf{B} \times \mathbf{R}) , \quad \mathbf{A}_\rho = \frac{1}{2}(\mathbf{B} \times \boldsymbol{\rho}) ,$$

y  $\mathbf{L}_z, \boldsymbol{\ell}_z$  denotan los momentos angulares del centro de masa y relativo, respectivamente.

Las integrales  $\mathbf{K}, \mathbf{L}_z^T$  obedecen el álgebra

$$\begin{aligned}\{K_x, K_y\} &= -qB, \\ \{L_z^T, K_x\} &= K_y, \\ \{L_z^T, K_y\} &= -K_x,\end{aligned}\tag{1.6}$$

el operador de Casimir  $\mathcal{C}$  de segundo orden está dado por

$$\mathcal{C} = K_x^2 + K_y^2 - 2qB L_z^T.\tag{1.7}$$

Evidentemente,  $\mathcal{C}$  es una integral global. En el caso de una partícula cargada  $\mathcal{C}$  es, de hecho, el Hamiltoniano. Es conveniente realizar la transformación canónica,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}' &= \mathbf{P} + e_c \mathbf{A}_\rho, & \mathbf{p}' &= \mathbf{p} - e_c \mathbf{A}_\mathbf{R}, \\ \mathbf{R}' &= \mathbf{R}, & \boldsymbol{\rho}' &= \boldsymbol{\rho}.\end{aligned}\tag{1.8}$$

En estas nuevas coordenadas el Hamiltoniano (1.1) toma la forma

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \left[ \frac{(\mathbf{P}' - q \mathbf{A}_{\mathbf{R}'} - 2e_c \mathbf{A}_{\boldsymbol{\rho}'})^2}{2M} \right] + \left[ \frac{(\mathbf{p}' - q_w \mathbf{A}_{\boldsymbol{\rho}'})^2}{2m_r} + \frac{e_1 e_2}{\rho'} \right] \\ &\equiv \mathcal{H}_R(\mathbf{P}', \mathbf{R}', \boldsymbol{\rho}') + \mathcal{H}_\rho(\mathbf{p}', \boldsymbol{\rho}'),\end{aligned}\tag{1.9}$$

donde

$$q_w \equiv e_1 \mu_2^2 + e_2 \mu_1^2,$$

es una carga efectiva (una especie de carga *pesada*) y  $m_r = \frac{m_1 m_2}{M}$  es la masa reducida.

El caso  $e_c = 0$  corresponde a la separación de las variables del centro de masa de las variables relativas en (1.9) y la transformación (1.8) se vuelve la identidad. El Pseudomomento total,

$$\frac{\mathbf{K}^2}{2M} = B \frac{e_1}{m_1} L_z + \mathcal{H}_R,\tag{1.10}$$

que es una integral, coincide con el Pseudomomento del centro de masa, ver (2.5).

En el caso  $q = 0$  (sistema neutro) se cumple  $\{\mathbf{P}', \mathcal{H}\} = 0$ , reflejando el hecho de que el movimiento del centro de masa corresponde al movimiento libre de una partícula (compuesta) nuestra.

## 1.2. Trayectorias especiales

Clásicamente el problema de 2 cargas no-relativistas, en un plano, en presencia de un campo magnético uniforme y constante perpendicular al plano admite trayectorias especiales en las cuales la distancia entre las dos partículas permanece constante. En esta sección se describen y caracterizan estas trayectorias. Ellas ocurren en el espacio de configuración, y son soluciones a las ecuaciones de Newton asociadas con (1.1),

$$m_1 \ddot{\boldsymbol{\rho}}_1 = e_1 \dot{\boldsymbol{\rho}}_1 \times \mathbf{B} + \frac{e_1 e_2}{\rho^3} (\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2), \quad m_2 \ddot{\boldsymbol{\rho}}_2 = e_2 \dot{\boldsymbol{\rho}}_2 \times \mathbf{B} - \frac{e_1 e_2}{\rho^3} (\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2). \quad (1.11)$$

En las variables del centro de masa (1.4) las ecuaciones de movimiento toman la forma

$$M \ddot{\mathbf{R}} = q \dot{\mathbf{R}} \times \mathbf{B} + e_c \dot{\boldsymbol{\rho}} \times \mathbf{B}, \quad (1.12)$$

$$m_r \ddot{\boldsymbol{\rho}} = q_w \dot{\boldsymbol{\rho}} \times \mathbf{B} - \frac{e_c^2 B^2}{M} \boldsymbol{\rho} - \frac{q e_c B^2}{M} \mathbf{R} + \frac{e_c}{M} (\mathbf{K} \times \mathbf{B}) + \frac{e_1 e_2}{\rho^3} \boldsymbol{\rho}.$$

Debemos enfatizar la existencia de 2 casos particulares importantes:

(i)  $q = 0$  (sistema neutro), donde las componentes de  $\mathbf{K}$  están en involución,  $\{K_x, K_y\} = 0$ ,  $\mathcal{H}_R$  en (1.9) no depende de  $\mathbf{R}$ ,

(ii)  $e_c = 0$  para el cual la separación de variables ocurre en las ecuaciones (1.12), dos integrales extra aparecen:  $\mathcal{H}_\rho(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho})$  y  $\ell_z$ . El número total de integrales funcionalmente independientes es igual a cuatro,  $(K_{x,y}, \mathcal{H}_\rho, \ell_z)$ . Las cantidades  $(\mathcal{H}_R, \mathcal{H}_\rho, L_z, \ell_z)$  están en involución y el problema es completamente integrable.



Equilibrando las fuerzas de Coulomb y de Lorentz que actúan sobre la primera (segunda) partícula a una fuerza centrípeta, se puede mostrar que si las condiciones iniciales en (1.11) se toman de tal manera que las velocidades iniciales  $\mathbf{v}_{1,2}$  son colineales,  $v_1 > v_2$  y el vector  $\boldsymbol{\rho}$  es perpendicular a las velocidades,

$$\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2 = \frac{(v_1 - v_2)}{\omega} \hat{\mathbf{x}}, \quad \dot{\boldsymbol{\rho}}_1 = -v_1 \hat{\mathbf{y}}, \quad \dot{\boldsymbol{\rho}}_2 = -v_2 \hat{\mathbf{y}}, \quad (1.13)$$

constreñidas a

$$M (v_1 - v_2)^2 (m_1 v_1 + m_2 v_2) v_1 v_2 e_c - e_1 e_2 B (e_1 v_1 + e_2 v_2)^2 = 0, \quad (1.14)$$

donde

$$\omega = \frac{B (e_1 v_1 + e_2 v_2)}{m_1 v_1 + m_2 v_2} > 0, \quad B v_1 v_2 e_1 e_2 e_c \neq 0,$$

entonces ciertas trayectorias circulares concéntricas ocurren

$$\boldsymbol{\rho}_{1,2} = \frac{v_{1,2}}{\omega} (\cos \omega t, -\sin \omega t), \quad (1.15)$$

donde  $\omega$  juega el papel de frecuencia angular y  $\boldsymbol{\rho}_{1,2}$  son medidas con respecto al centro común de las trayectorias. En tales trayectorias la distancia entre las cargas  $|\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2|$  permanece constante.

Vale la pena señalar que las ecuaciones (1.11)-(1.12) y las condiciones iniciales (1.13)-(1.14) son invariantes bajo las siguientes transformaciones:

- Para un campo magnético  $B$  dado

$$(e_{1,2} \rightarrow -e_{1,2}, \quad v_{1,2} \rightarrow -v_{1,2})$$

- Para cargas dadas

$$(B \rightarrow -B, \quad v_{1,2} \rightarrow -v_{1,2})$$

- Para condiciones iniciales dadas

$$(B \rightarrow -B, \quad e_{1,2} \rightarrow -e_{1,2})$$

Las correspondientes trayectorias no cambian bajo estas transformaciones.

### 1.2.1. Configuración I

En las trayectorias especiales llamadas de primer tipo (Configuración I) las dos cargas se mueven sobre el mismo círculo, con un desfase de  $\pi$ , rotando en la dirección de las manecillas del reloj, ver Fig. 1.1. Estas trayectorias emergen ya sea para partículas distintas

$$e_1 \neq e_2, m_1 \neq m_2, \quad (1.16)$$

o idénticas

$$e_1 = e_2, m_1 = m_2. \quad (1.17)$$

Es claro que en estas trayectorias las velocidades iniciales deben ser colineales, antiparalelas y de la misma magnitud.

$$v_1 = -v_2 \equiv v. \quad (1.18)$$

(i) *Partículas diferentes*

En el caso de dos partículas distintas (1.16), las constricciones (1.13) - (1.14) toman la forma

$$\begin{aligned} v &= \frac{B(e_1 - e_2)}{2(m_1 - m_2)} \rho, \\ \rho^3 &= \frac{2(m_1 - m_2)^2 e_1 e_2}{B^2(e_2 - e_1) M e_c}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

La frecuencia angular está definida por el campo magnético  $B$ . Dado el campo magnético  $B$ , existe una única velocidad inicial  $v$  para la cual esta trayectoria ocurre, con  $\rho$  dado por (1.19). Vemos que esta trayectoria no sucede para el par electrón-positrón.

Cualquier trayectoria es descrita por uno de los cuatro casos particulares que corresponden a un movimiento dextrógiro (levógiro)<sup>2</sup>

**(a)**  $q \neq 0$  ,  $e_c \neq 0$  y  $v > 0$  (dextrógiro) ,  $e_1 > 0$  ,  $e_2 > 0$  ,

$$\frac{m_1}{m_2} > \frac{e_1}{e_2} > 1 , \quad (1.20)$$

ó

$$\frac{m_1}{m_2} < \frac{e_1}{e_2} < 1 . \quad (1.21)$$

**(b)**  $v < 0$  (levógiro),  $e_1 < 0$  ,  $e_2 < 0$  ,

$$\frac{m_1}{m_2} > \frac{e_1}{e_2} > 1 , \quad (1.22)$$

ó

$$\frac{m_1}{m_2} < \frac{e_1}{e_2} < 1 . \quad (1.23)$$

**(c)**  $e_c \neq 0$  o  $v > 0$  (dextrógiro)

$$e_1 > 0, \quad e_2 < 0, \quad m_1 > m_2 . \quad (1.24)$$

**(d)**  $v < 0$  (levógiro)

$$e_1 < 0, \quad e_2 > 0, \quad m_2 > m_1 . \quad (1.25)$$

Si ninguna de las condiciones (1.20)-(1.25) se satisface, la trayectoria circular de la Fig. 1.1 no ocurre. Los incisos (c)-(d) contienen al sistema neutral  $q = 0$  (dipolo rotante) como un caso particular.

En general, para esta trayectoria (Fig. 1.1) el Pseudomomento total (definido respecto al centro de la trayectoria <sup>3</sup>) se anula

$$K = 0 . \quad (1.26)$$

---

<sup>2</sup>La misma trayectoria circular ocurre si  $(e_1 \rightarrow -e_1, e_2 \rightarrow -e_2, m_1 \leftrightarrow m_2)$  .

<sup>3</sup>Para  $q = 0$  , se tiene  $K = 0$  independientemente del punto de referencia.

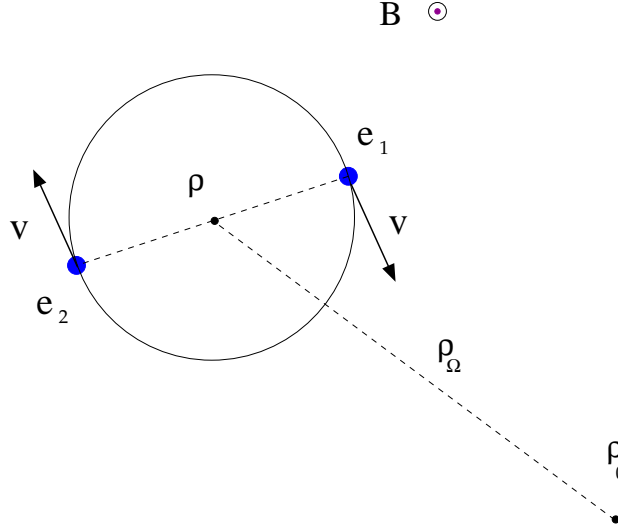


Figura 1.1: Configuración I: Ambas partículas rotan simétricamente en el mismo círculo de diámetro  $\rho$  con frecuencia angular  $\omega$ . Si  $e_c \neq 0$ , la frecuencia es  $\omega = \frac{(e_1 - e_2)}{m_1 - m_2} B$  y el centro de la órbita permanece fijo. Para partículas idénticas ( $e > 0, m$ ) con  $\rho$  dado la frecuencia puede tomar dos posibles valores  $\omega = \frac{eB}{2m} (1 \pm \sqrt{1 - \frac{8m}{B^2 \rho^3}})$  que corresponden a diferentes  $v$ ; el centro de la órbita rota alrededor del *centro guía* con frecuencia  $\Omega = \frac{eB}{m}$ , ver texto.

El momento angular *canónico* total  $L_z^T = L_z + \ell_z$  se conserva. A pesar de que, en general, ninguno de los dos términos  $L_z, \ell_z$  se conserva separadamente, para la Configuración I ambas cantidades  $L_z$  y  $\ell_z$  son constantes de movimiento (el centro de la trayectoria se toma como el origen) no obstante la ausencia de separación de variables en (1.12): el paréntesis de Poisson de  $L_z$  ( $\ell_z$ ) con el Hamiltoniano se anula sobre la trayectoria circular (1.15), ver Fig. 1.1. Más aún, las cantidades  $(\mathcal{H}, \mathbf{K}^2, L_z^T, \ell_z)$  son integrales en involución que generan un álgebra conmutativa sobre las trayectorias circulares.

Por lo tanto en estas trayectorias circulares el sistema es completamente integrable. Tomando en cuenta que  $K_x$  e  $I = (\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{p})$ , donde  $\mathbf{p}$  es el momento canónico relativo (1.4), también se conservan en estas trayectorias, vemos que el sistema se vuelve superintegrable.

(ii) *Dipolo rotante*

Consideramos un dipolo  $e_1 = -e_2 \equiv e > 0$  ( $q = 0$ ) con  $m_1 > m_2$ , ver inciso (c). De (1.19) se sigue que

$$v = e \left[ \frac{B}{M(m_1 - m_2)} \right]^{\frac{1}{3}}, \quad \rho = \left[ \frac{(m_1 - m_2)^2}{B^2 M} \right]^{\frac{1}{3}}. \quad (1.27)$$

En este caso el Pseudomomento total  $K$  se anula, ver (1.26). La energía y el momento angular total del sistema toman los valores

$$\mathcal{H} = \frac{e^2 M}{2} \left( \frac{B}{|m_1^2 - m_2^2|} \right)^{\frac{2}{3}} - \frac{e^2}{\rho},$$

$$L_z^T = \frac{e (|m_2^2 - m_1^2|)^{\frac{1}{3}}}{2 B^{\frac{1}{3}} M},$$

respectivamente. Para esta trayectoria (Fig. 1.1), el momento angular relativo  $\ell_z$  es igual a

$$\ell_z = \frac{e (m_1 - m_2)^{\frac{1}{3}} (m_1^2 + 6 m_1 m_2 + m_2^2)}{4 B^{\frac{1}{3}} M^{\frac{5}{3}}}. \quad (1.28)$$

(iii) *Partículas idénticas*

En el caso de dos partículas idénticas,  $m_1 = m_2 \equiv m$ ,  $e_1 = e_2 \equiv e > 0$  (1.17) la carga de acoplamiento es cero,  $e_c = 0$ . Las constricciones (1.13)-(1.14) no emergen en este caso: las ecuaciones de Newton (1.11) de la partícula 1 y 2 simplemente coinciden. La trayectoria circular de diámetro  $\rho$  aparece [35] siendo caracterizada por

$$v = \frac{e B \rho}{4 m} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{8 m}{B^2 \rho^3}} \right). \quad (1.29)$$

Es decir, dado  $\rho$  existen dos velocidades iniciales  $v$  que dan lugar a una trayectoria circular del mismo diámetro. Sin embargo, dada  $v$  sólo existe una única trayectoria circular con cierto  $\rho$ . Esta corresponde a una rotación dextrógira con frecuencia angular  $\frac{2v}{\rho}$ . Es interesante notar que para un campo magnético dado, existe una trayectoria circular mínima con  $\rho_{min} = \left( \frac{8m}{B^2} \right)^{\frac{1}{3}}$  (para este valor, la raíz en (1.29) se anula).

En general, para  $e_c = 0$  (cargas con la misma razón carga-masa) la separación de variables ocurre

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \mathcal{H}_R(\mathbf{P}, \mathbf{R}) + \mathcal{H}_\rho(\mathbf{p}, \rho) \\ &\equiv \left[ \frac{(\mathbf{P} - \frac{eM}{m_1} \mathbf{A}_R)^2}{2M} \right] + \left[ \frac{(\mathbf{p} - \frac{em_2}{M} \mathbf{A}_\rho)^2}{2m_r} + \frac{m_2}{m_1} \frac{e^2}{\rho} \right],\end{aligned}\quad (1.30)$$

y la transformación canónica (1.8) se convierte en la identidad. El Hamiltoniano  $\mathcal{H}_R$  describe a la partícula compuesta de carga  $q = e_1 + e_2$  y masa  $M = m_1 + m_2$  en presencia de un campo magnético constante.

La trayectoria circular se encuentra fácilmente

$$\boldsymbol{\rho}_1 = \boldsymbol{\rho}_\omega + \boldsymbol{\rho}_\Omega + \boldsymbol{\rho}_0, \quad \boldsymbol{\rho}_2 = -\boldsymbol{\rho}_\omega + \boldsymbol{\rho}_\Omega + \boldsymbol{\rho}_0, \quad (1.31)$$

con

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\rho}_\omega &= \frac{v}{\omega} (\cos \omega t, -\sin \omega t), & \omega &= \frac{eB}{2m} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{8m}{B^2 \rho^3}} \right), \\ \boldsymbol{\rho}_\Omega &= \frac{V_R}{\Omega} (\cos \Omega t, -\sin \Omega t), & \Omega &= \frac{eB}{m},\end{aligned}\quad (1.32)$$

(cf.(1.15)), donde  $\boldsymbol{\rho}_0$  es un vector constante arbitrario y  $V_R$  es un parámetro. La interpretación física es la siguiente. El centro de la trayectoria circular del movimiento relativo (ver Fig. 1.1) se mueve con rapidez  $V_R$  rotando con frecuencia angular  $\Omega = \frac{eB}{m}$  alrededor del punto fijo  $\boldsymbol{\rho}_0$ , el cual juega el papel de *centro guía* del sistema. Si  $V_R$  tiende a cero, entonces el centro de la trayectoria circular (del movimiento relativo) tiende a  $\boldsymbol{\rho}_0$ .

En general, para  $e_c = 0$  el Pseudomomento no se anula,  $\mathbf{K} \neq 0$ . Sin embargo, en el caso especial de partículas idénticas la relación (1.10) se cumple, la cual conecta  $\mathbf{K}^2$  con  $L_z$  y  $\mathcal{H}_R$ ; además  $L_z$  y  $\ell_z$  se conservan separadamente. Si el *centro guía*

$$\boldsymbol{\rho}_0 = \frac{\mathbf{K} \times \mathbf{B}}{2eB^2}, \quad (1.33)$$

se elige como punto de referencia el Pseudomomento se anula,  $K = 0$ .

Es simple verificar que las cuatro integrales (globales) de movimiento  $(\mathcal{H}_R, \mathcal{H}_\rho, L_z, \ell_z)$ , eligiendo el *centro guía*  $\boldsymbol{\rho}_0$  como punto de referencia, toman los valores

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_R &= m V_R^2, \\
L_z &= -\frac{m^2 V_R^2}{e B} \hat{\mathbf{z}}, \\
\mathcal{H}_\rho &= \frac{e^2 B^2 \rho^2}{16 m} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{8 m}{B^2 \rho^3}} \right)^2 + \frac{e^2}{\rho}, \\
\ell_z &= \mp \frac{e B \rho^2}{4} \sqrt{1 - \frac{8 m}{B^2 \rho^3}} \hat{\mathbf{z}}.
\end{aligned} \tag{1.34}$$

mientras que  $\mathbf{K}^2$  esta dado por (1.10). Las cantidades  $\mathcal{H}_R, \mathcal{H}_\rho, L_z, \ell_z$  generan un álgebra conmutativa. Sobre las trayectorias circulares  $I = (\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{p})$  es una integral particular. Para  $e_c = 0$  el sistema es completamente-integrable (globalmente).

### 1.2.2. Configuración II

Denominamos trayectoria especial del segundo tipo (Configuración II) cuando ambas cargas se mueven sobre dos círculos concéntricos con una fase relativa de  $\pi$ , ver Fig. 1.2.

En tales trayectorias las velocidades de las partículas deben ser antiparalelas,

$$v_1 \neq -v_2, \quad v_1 v_2 < 0, \tag{1.35}$$

con la suposición

$$|v_1| > |v_2|,$$

que implica que la primera partícula se mueve sobre el círculo externo.

Si  $v_1 > 0$  la rotación es dextrógira con  $v_2 < 0$ , mientras que  $v_1 < 0$  corresponde a una rotación levógira con  $v_2 > 0$ . Analizando las constricciones (1.13) - (1.14) uno puede enlistar los pares de cargas para los cuales tiene lugar la Configuración 2.

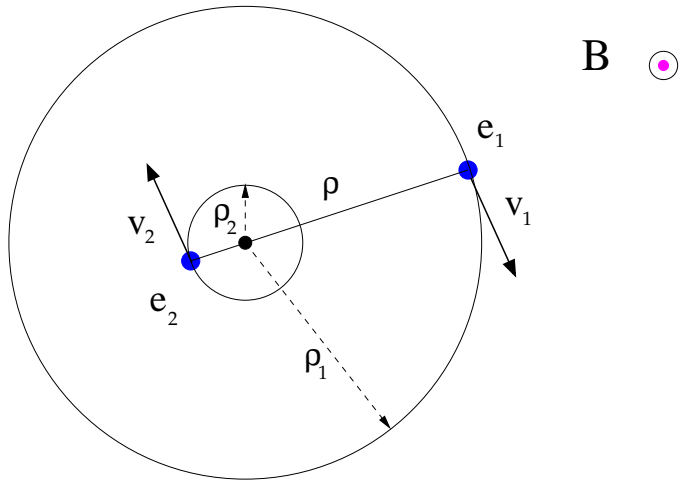


Figura 1.2: Ambas partículas rotan sobre círculos concéntricos con una fase relativa de  $\pi$  y frecuencia angular  $\omega$ . Si  $e_c = 0$  entonces la frecuencia es  $\omega = \frac{e_1 B}{2m_1} (1 \pm \sqrt{1 - \frac{4m_2}{B^2 \rho_1 \rho^2}})$ ; para  $e_c \neq 0$  se tiene  $\omega = \frac{B(e_1 v_1 + e_2 v_2)}{m_1 v_1 + m_2 v_2}$ .



1. *rotación dextrógira*,  $v_1 > 0$  .

Si

$$v_1 > \frac{m_2}{m_1} |v_2| ,$$

tenemos los siguientes casos:

**(1a)** cargas de signo opuesto

$$e_1 > 0 , e_2 < 0 ,$$

**(1b)** cargas del mismo signo

$$e_{1,2} > 0 , \frac{e_1}{m_1} < \frac{e_2}{m_2} , v_1 > \frac{e_2}{e_1} |v_2| ,$$

ó

$$e_{1,2} < 0 , \frac{e_1}{m_1} < \frac{e_2}{m_2} , v_1 < \frac{e_2}{e_1} |v_2| .$$

Si

$$v_1 < \frac{m_2}{m_1} |v_2| ,$$

se tienen los casos :

**(1c)** cargas del signo opuesto

$$e_1 < 0 , e_2 > 0 ,$$

**(1d)** cargas del mismo signo

$$e_{1,2} > 0 , \frac{e_1}{m_1} > \frac{e_2}{m_2} , v_1 < \frac{e_2}{e_1} |v_2| ,$$

ó

$$e_{1,2} < 0 , \frac{e_1}{m_1} > \frac{e_2}{m_2} , v_1 > \frac{e_2}{e_1} |v_2| .$$

Si

$$v_1 = \frac{m_2}{m_1} |v_2| ,$$

aparece el caso  $e_c = 0$ .

2. rotación levógira,  $v_1 < 0$  .

Si

$$v_2 > \frac{m_1}{m_2} |v_1| ,$$

se tiene que :

(2e) cargas del signo opuesto

$$e_1 > 0 , e_2 < 0 ,$$

(2f) cargas del mismo signo

$$e_{1,2} > 0 , \frac{e_1}{m_1} < \frac{e_2}{m_2} , v_2 < \frac{e_1}{e_2} |v_1| ,$$

ó

$$e_{1,2} < 0 , \frac{e_1}{m_1} < \frac{e_2}{m_2} , v_2 > \frac{e_1}{e_2} |v_1| .$$

Si

$$v_2 < \frac{m_1}{m_2} |v_1| ,$$

tenemos los casos

(2g) cargas del signo opuesto

$$e_1 < 0 , e_2 > 0 ,$$

(2h) cargas del mismo signo

$$e_{1,2} > 0 , \frac{e_1}{m_1} > \frac{e_2}{m_2} , v_2 > \frac{e_1}{e_2} |v_1| ,$$

ó

$$e_{1,2} < 0 , \frac{e_1}{m_1} > \frac{e_2}{m_2} , v_2 < \frac{e_1}{e_2} |v_1| .$$

Si

$$v_1 = \frac{m_2}{m_1} |v_2| ,$$

aparece el caso  $e_c = 0$ .

Para cargas arbitrarias  $(e_1, e_2)$ , en donde las masas  $(m_1, m_2)$  y las velocidades iniciales  $v_1 > 0$ ,  $v_2 < 0$  obedecen

$$\frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2) e_c}{e_1 e_2} < 0 ,$$

uno siempre puede indicar un campo magnético

$$B = \frac{(v_1 - v_2)^2 (m_1 v_1 + m_2 v_2) M e_c v_1 v_2}{e_1 e_2 (e_1 v_1 + e_2 v_2)^2}$$

para el cual aparece la trayectoria circular de la Configuración II (ver Fig. 1.2) de diámetro

$$\rho = \frac{e_1 e_2 (e_1 v_1 + e_2 v_2)}{(v_1 - v_2) M e_c v_1 v_2} > 0 . \quad (1.36)$$

Se puede mostrar que en esta Configuración las cantidades

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_R &= \frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{2 M} , \\ \mathbf{L}_z &= -\frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)^3}{2 B M (e_1 v_1 + e_2 v_2)} \hat{\mathbf{z}} , \\ \mathcal{H}_\rho &= \frac{m_r (v_1 - v_2)^2}{2} + \frac{e_1 e_2}{\rho} , \\ \boldsymbol{\ell}_z &= \frac{(v_2 - v_1)(m_1 v_1 + m_2 v_2)}{2 B M (e_1 v_1 + e_2 v_2)^2} \left[ e_2 m_1 v_2 (m_1 v_1 + 2 m_2 v_1 - m_2 v_2) \right. \\ &\quad \left. + e_1 m_2 v_1 (m_1 v_1 - 2 m_1 v_2 - m_2 v_2) \right] \hat{\mathbf{z}} . \end{aligned} \quad (1.37)$$

son constantes de movimiento. Las funciones  $\mathcal{H}_\rho, \boldsymbol{\ell}_z$  son integrales particulares independientes. Sobre estas trayectorias el Pseudomomento  $K = 0$  (ver (1.26)) al igual que  $I = (\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{p}) = 0$ . La trayectoria es superintegrable. Nos enfocaremos en dos casos concretos,  $q = 0$  (dipolo rotante) y  $e_c = 0$  (cargas del mismo signo y con la misma razón carga-masa).

- **Caso con  $q = 0$  (dipolo rotante)**

Sean  $e_1 = -e_2 = e$ . Para un campo  $B > 0$  arbitrario y en adición a las constricciones (1.13)-(1.14), se asume que

$$\rho = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{e_1 B} > 0 , \quad (1.38)$$

mientras que la condición de soluciones físicas demanda

$$v_1 = -\frac{m_2 v_2}{2 m_1} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4 e^3 B m_1}{M m_2^2 v_2^3}} \right) \equiv v_1^{(\pm)} , \quad (1.39)$$

donde la expresión bajo la raíz cuadrada no debe ser negativa, i.e.

$$\frac{4 e^3 B m_1}{M m_2^2 v_2^3} < 1 . \quad (1.40)$$

Un simple analisis arroja cuatro situaciones particulares:

$$\begin{aligned} v_2 > 0, e > 0 &\Rightarrow v_1^{(\pm)} < 0 \text{ (rotación levógira, dos soluciones) ,} \\ v_2 > 0, e < 0 &\Rightarrow v_1^+ < 0 \text{ (rotación levógira, una solución) ,} \\ v_2 < 0, e > 0 &\Rightarrow v_1^+ > 0 \text{ (rotación dextrógira, una solución) ,} \\ v_2 < 0, e < 0 &\Rightarrow v_1^{(\pm)} > 0 \text{ (rotación dextrógira, dos soluciones) .} \end{aligned} \quad (1.41)$$

Si los parámetros del sistema y los datos iniciales satisfacen las constricciones (1.38)-(1.40), la trayectoria circular mostrada en la Fig. 1.2 aparece. Poniendo  $v_1 = -v_2$  recuperamos (1.27).

Para la Configuración II, en el caso  $q = 0$ , el momento angular del centro de masa  $L_z$  y el momento relativo  $\ell_z$  se conservan no obstante la ausencia de separación de variables(!): Sus respectivos paréntesis de Poisson con el Hamiltoniano se anulan al elegir el centro de la órbita como el origen.

Se deduce fácilmente que

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{2M} + \frac{m_r (v_1 - v_2)^2}{2} - \frac{e^2}{\rho}, \\
K &= 0, \\
\mathbf{L}_z &= \frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)^3}{2eBM(v_2 - v_1)} \hat{\mathbf{z}}, \\
\ell_z &= \frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)[(m_1^2 + m_2^2)v_1 v_2 - m_1 m_2(v_1^2 + v_2^2 - 4v_1 v_2)]}{2eBM(v_1 - v_2)} \hat{\mathbf{z}},
\end{aligned} \tag{1.42}$$

(cf. (1.37)) con  $v_1$ ,  $\rho$  tomados de (1.38)-(1.39). Entonces, las cantidades  $(\mathcal{H}, \mathbf{K}^2, L_z, \ell_z)$  son constantes de movimiento, todas en involución. Sobre estas trayectorias (Configuración II) el sistema es completamente-integrable.  $\mathcal{H}_\rho$ ,  $I = (\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{p})$  son dos integrales particulares extra. La trayectoria es superintegrable. Por lo tanto, uno podría decir que, para  $q = 0$  el sistema es particularmente integrable [46].

- **Caso con  $e_c = 0$**

En este caso las ecuaciones de Newton (1.11) coinciden. A partir de ellas se deducen las constricciones

$$\begin{aligned}
\frac{v_1}{v_2} &= -\frac{m_2}{m_1}, \\
v_1 &= \frac{e_1 B \rho_1}{2m_1} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4m_2}{B^2 \rho_1 \rho^2}} \right), \\
\omega &= \frac{v_1}{\rho_1} = -\frac{v_2}{\rho_2}.
\end{aligned} \tag{1.43}$$

Si las condiciones iniciales obedecen (1.43), las trayectorias circulares del segundo tipo ocurren, ver Fig. 1.2. Vale la pena notar que dados  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  existen dos velocidades  $v_1$  que dan lugar a la misma trayectoria circular.

En este caso las trayectorias de las partículas son

$$\boldsymbol{\rho}_1 = \boldsymbol{\rho}_{\omega,1} + \boldsymbol{\rho}_\Omega + \boldsymbol{\rho}_0, \quad \boldsymbol{\rho}_2 = \boldsymbol{\rho}_{\omega,2} + \boldsymbol{\rho}_\Omega + \boldsymbol{\rho}_0, \quad (1.44)$$

con

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\rho}_{\omega,1(2)} &= \frac{v_{1(2)}}{\omega} (\cos \omega t, -\sin \omega t), \\ \boldsymbol{\rho}_\Omega &= \frac{V_R}{\Omega} (\cos \Omega t, -\sin \Omega t), \\ \Omega &= \frac{e_1 B}{m_1}, \end{aligned} \quad (1.45)$$

donde  $\boldsymbol{\rho}_0$  es un vector constante,  $V_R$  es un parámetro y  $\omega$  es definida en (1.43). Si  $m_1 = m_2 = m$  entonces  $v_1 = -v_2 = v > 0$  y obtenemos la trayectoria del primer tipo (Configuración I) para partículas idénticas; haciendo  $\rho_1 = \frac{\rho}{2}$  recuperamos (1.29).

Eligiendo al *centro guía* como punto de referencia, las cuatro cantidades

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_R &= \frac{M V_R^2}{2}, \\ \mathbf{L}_z &= -\frac{m_1 M V_R^2}{2e_1 B} \hat{\mathbf{z}}, \\ \mathcal{H}_\rho &= \frac{m_r (v_1 - v_2)^2}{2} + \frac{m_2 e_1^2}{m_1 \rho}, \\ \ell_z &= \mp \frac{M e_1 B \rho_1^2}{2 m_2} \sqrt{1 - \frac{4 m_2}{B^2 \rho_1 \rho^2}} \hat{\mathbf{z}}, \end{aligned} \quad (1.46)$$

son constantes (globales) de movimiento en involución formando un álgebra conmutativa.

Entonces, para  $e_c = 0$  el sistema es completamente-integrable. La cantidad

$$I = (\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{p}) \quad (1.47)$$

es una integral particular extra. Esta se anula,  $I = 0$ , sólo sobre las trayectorias circulares.

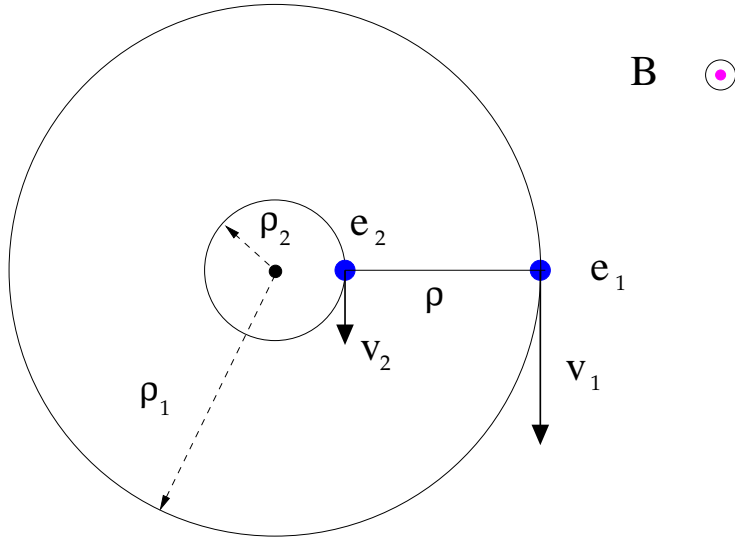


Figura 1.3: Ambas partículas rotan sin desfaseamiento sobre círculos concéntricos con frecuencia angular  $\omega = \frac{B(e_1 v_1 + e_2 v_2)}{m_1 v_1 + m_2 v_2}$ .

### 1.2.3. Configuración III

Denominamos trayectoria circular del tercer tipo (Configuración III) cuando las dos cargas se mueven sobre círculos concéntricos sin desfaseamiento, ver Fig. 1.3 (cf. Fig. 1.2). Es evidente que para tales trayectorias las velocidades iniciales deben ser paralelas, y deben satisfacer las constricciones

$$v_1 > v_2 > 0 \quad , \quad \frac{m_2}{e_2} > \frac{m_1}{e_1} \quad , \quad (1.48)$$

para una rotación levógira y

$$v_1 < v_2 < 0 \quad , \quad \frac{m_2}{e_2} < \frac{m_1}{e_1} \quad , \quad (1.49)$$

para una rotación dextrógira. En ambos casos, la condición

$$e_1 v_1 > -e_2 v_2 \quad , \quad (1.50)$$

debe satisfacerse. Por construcción, la primera partícula siempre se mueve sobre el círculo externo.

Tal trayectoria circular (ver Fig. 1.3) ocurre para un campo magnético dado por

$$B = \frac{(v_1 - v_2)^2 (m_1 v_1 + m_2 v_2) M e_c v_1 v_2}{e_1 e_2 (e_1 v_1 + e_2 v_2)^2} > 0 ,$$

y es caracterizada por una distancia relativa entre las partículas igual a

$$\rho = \frac{e_1 e_2 (e_1 v_1 + e_2 v_2)}{(v_1 - v_2) M e_c v_1 v_2} > 0 .$$

En principio, las condiciones (1.48) - (1.50) no son muy restrictivas, ya que para casi cualesquiera cargas  $e_1$  y  $e_2$  uno puede indicar las masas  $m_1$  y  $m_2$  que las satisfacen. Sin embargo, en los casos físicamente importantes  $q = 0$  y  $e_c = 0$  esta trayectoria (Configuración III) no se presenta.

Cuatro integrales (particulares) de movimiento vienen dadas por (1.37). El Pseudomomento total se anula,  $K = 0$ , en estas trayectorias e  $I = (\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{p}) = 0$  es una integral particular adicional.

- **Caso con**  $e_1 = -1, e_2 = 2$

Si  $e_1 = -1, e_2 = 2$ , entonces ocurren trayectorias circulares del tercer tipo (ver Fig. 1.3) para

$$v_1 > v_2 > \frac{v_1}{2} > 0 ,$$

(cf.(1.48)) y masas arbitrarias. Dadas las velocidades iniciales  $v_1$  y  $v_2$ , estas trayectorias aparecen para un campo magnético

$$B = \frac{(v_1 - v_2)^2 (m_1 v_1 + m_2 v_2) (2 m_1 + m_2) v_1 v_2}{2(2 v_2 - v_1)^2} ,$$

con una distancia relativa

$$\rho = \frac{2(2 v_1 - v_2)}{(v_1 - v_2) (2 m_1 + m_2) v_1 v_2} .$$

Enfatizemos que la Configuración III es más restrictiva que la Configuración II, la cual aparece para cargas arbitrarias  $e_1, e_2$ . En particular, la Configuración III no ocurre para ambos sistemas  $q = 0$  y  $e_c = 0$ .



### 1.2.4. Configuración IV

Consideremos un sistema neutro ( $e_1 = -e_2 = e > 0$ ) donde las velocidades iniciales son iguales y las condiciones

$$(\mathbf{v}, \boldsymbol{\rho}) = 0 \quad \text{y} \quad \rho = \sqrt{\frac{e}{Bv}}, \quad (1.51)$$

se satisfacen. En este caso la fuerza de Lorentz que actúa sobre la carga 1(2) es opuesta y de la misma magnitud que la fuerza de Coulomb (ver ec. (1.11) y (1.12)). Entonces, las constricciones (1.51) dan lugar al movimiento *libre* del sistema neutro con un momento dipolar fijo, ver Fig. 1.4. Denominamos a este tipo de trayectoria como trayectoria del cuarto tipo (Configuración IV). Este movimiento paralelo libre de dos cargas en un campo magnético fue encontrado por vez primera en Curilef-Claro [35]. En este caso, el Pseudomomento

$$\mathbf{K} = \left( M \mathbf{v} + \sqrt{\frac{e^3 B}{v}} \right) \hat{\mathbf{v}}, \quad (1.52)$$

nunca se anula.

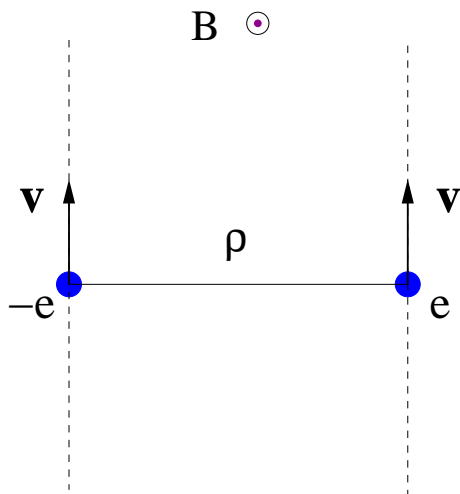


Figura 1.4: Dipolo eléctrico con momento dipolar fijo moviéndose con velocidad constante.

En la Configuración IV las cantidades  $L_z$  y  $\ell_z$  se conservan separadamente. Tomando el punto de referencia tal que  $(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}) = 0$ , tenemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \frac{M v^2}{2} - \sqrt{e^3 v B}, \\ \mathbf{K} &= \left( M v + \sqrt{\frac{e^3 B}{v}} \right) \hat{\mathbf{v}}, \\ L_z &= 0, \\ \ell_z &= \frac{e^2 (m_2 - m_1)}{2 M v} \hat{\mathbf{z}},\end{aligned}\tag{1.53}$$

Por lo tanto, las cantidades  $(\mathcal{H}, \mathbf{K}^2, L_z^T, \ell_z)$  son constantes (particulares) de movimiento, todas ellas en involución. Aquí,  $I = (\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{p}) = 0$  al igual que  $\ell_z$  es una integral particular. Para esta trayectoria el sistema es completamente-integrable siendo también superintegrable realizando un tipo de integrabilidad particular [46].

### 1.2.5. Configuración V

La trayectoria del quinto tipo (Configuración V, ver Fig. 1.5) aparece cuando en (1.13)-(1.14) se toman los límites  $v_2 \rightarrow 0$  y  $m_2 \rightarrow \infty$ , simultáneamente. Es decir, la segunda partícula permanece en reposo. Es la denominada aproximación de Born-Oppenheimer. Dado el campo magnético  $B$ , esta trayectoria de radio  $\rho > \rho_{min}$  aparece para dos valores diferentes de la velocidad inicial

$$\begin{aligned}v_1 &= \frac{e_1 B \rho_1}{2 m_1} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4 m_1 e_2}{e_1 B^2 \rho_1^3}} \right), \\ \omega &= \frac{v_1}{\rho_1}, \quad \rho_1 = \rho.\end{aligned}\tag{1.54}$$

donde  $\rho_{min} = \left( \frac{4 m_1 e_2}{e_1 B^2} \right)^{\frac{1}{3}}$  si  $e_1 e_2 > 0$  y  $\rho_{min} = 0$  si  $e_1 e_2 < 0$ . Para todo  $v_1$  existe esta trayectoria circular de cierto  $\rho$ .

Las dos constantes de movimiento toman los valores

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \frac{e_1^2 B^2 \rho_1^2}{8 m_1} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4 m_1 e_2}{e_1 B^2 \rho_1^3}} \right)^2 + \frac{e_1 e_2}{\rho_1}, \\ \ell_{1,z} \equiv \boldsymbol{\rho}_1 \times \mathbf{p}_1 &= \pm \frac{e_1 B \rho_1^2}{2} \sqrt{1 - \frac{4 m_1 e_2}{e_1 B^2 \rho_1^3}} \hat{\mathbf{z}}.\end{aligned}\tag{1.55}$$

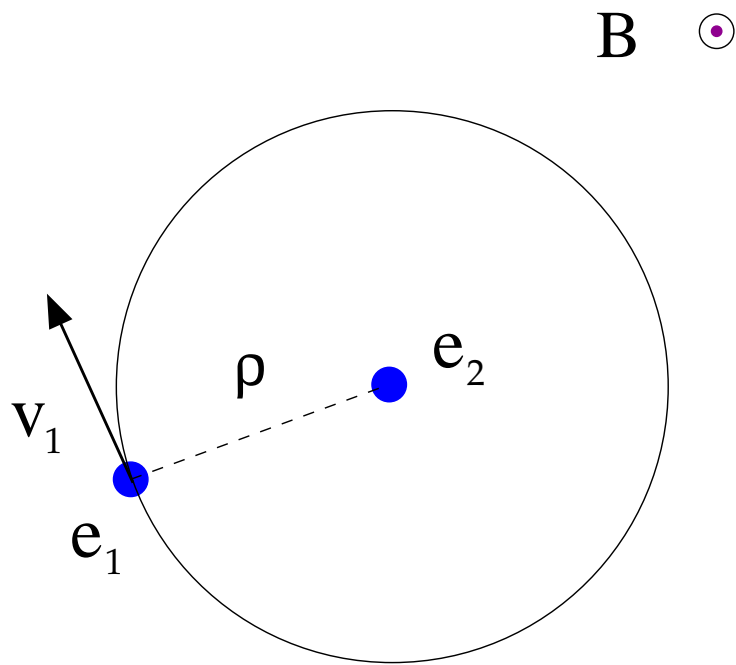


Figura 1.5: Movimiento circular en la aproximación de Born-Oppenheimer ( $m_2 \rightarrow \infty$ ).

# Capítulo 2

## Caso cuántico

En esta sección se aborda el sistema cuántico, no-relativista, de dos partículas confinadas a moverse en un plano en presencia de un campo magnético uniforme perpendicular al plano.

En el plano un sistema no-relativista de 2 cargas,  $(e_1, m_1)$  y  $(e_2, m_2)$ , sin espín en un campo magnético uniforme y perpendicular al plano  $\mathbf{B} = B \hat{\mathbf{z}}$  es descrito por el Hamiltoniano

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{(\hat{\mathbf{p}}_1 - e_1 \mathbf{A}_1)^2}{2m_1} + \frac{(\hat{\mathbf{p}}_2 - e_2 \mathbf{A}_2)^2}{2m_2} + \frac{e_1 e_2}{|\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2|}, \quad (2.1)$$

asumiendo  $\hbar = c = 1$ ,  $\boldsymbol{\rho}_{1,2}$  y  $\hat{\mathbf{p}}_{1,2} = -i \nabla_{1,2}$  son el vector de posición y de momento de la primera (segunda) partícula. Sin perder generalidad usaremos la norma simétrica  $\mathbf{A}_{1,2} = \frac{1}{2} \mathbf{B} \times \boldsymbol{\rho}_{1,2}$  de aquí en adelante. Se puede mostrar mediante cálculo directo que el Pseudomomento

$$\hat{\mathbf{K}} = \hat{\mathbf{p}}_1 + e_1 \mathbf{A}_1 + \hat{\mathbf{p}}_2 + e_2 \mathbf{A}_2, \quad (2.2)$$

es una integral de movimiento,  $[\hat{\mathbf{K}}, \hat{\mathcal{H}}] = 0$  así como el vector momento angular total

$$\hat{\mathbf{L}}^T = \boldsymbol{\rho}_1 \times \hat{\mathbf{p}}_1 + \boldsymbol{\rho}_2 \times \hat{\mathbf{p}}_2, \quad (2.3)$$

$$[\hat{\mathbf{L}}^T, \hat{\mathcal{H}}] = 0.$$

Introducimos las coordenadas relativas y del centro de masa

$$\mathbf{R} = \mu_1 \boldsymbol{\rho}_1 + \mu_2 \boldsymbol{\rho}_2, \quad \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2, \quad (2.4)$$

y sus respectivos momentos

$$\hat{\mathbf{P}} = \hat{\mathbf{p}}_1 + \hat{\mathbf{p}}_2, \quad \hat{\mathbf{p}} = \mu_2 \hat{\mathbf{p}}_1 - \mu_1 \hat{\mathbf{p}}_2,$$

donde  $\mu_i = \frac{m_i}{M}$  y  $M = m_1 + m_2$  es la masa total del sistema,  $\hat{\mathbf{P}} = -i \nabla_{\mathbf{R}}$ ,  $\hat{\mathbf{p}} = -i \nabla_{\boldsymbol{\rho}}$ . En estas coordenadas se tiene que

$$\hat{\mathbf{K}} = \hat{\mathbf{P}} + q \mathbf{A}_{\mathbf{R}} + e_c \mathbf{A}_{\boldsymbol{\rho}}, \quad (2.5)$$

y

$$\hat{\mathbf{L}}^T = (\mathbf{R} \times \hat{\mathbf{P}}) + (\boldsymbol{\rho} \times \hat{\mathbf{p}}) \equiv \hat{\mathbf{L}} + \hat{\boldsymbol{\ell}}, \quad (2.6)$$

(cf. (1.2) y (2.3)), donde  $\hat{\mathbf{L}}, \hat{\boldsymbol{\ell}}$  son el momento angular del centro de masa y relativo, respectivamente,

$$q = e_1 + e_2,$$

es la carga total del sistema,

$$e_c = (e_1 \mu_2 - e_2 \mu_1) = m_r \left( \frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right),$$

es una carga de *acoplamiento*,  $m_r = \frac{m_1 m_2}{M}$  denota la masa reducida del sistema,

Los operadores  $\hat{\mathbf{K}}, \hat{\mathbf{L}}^T$  obedecen las relaciones de conmutación

$$\begin{aligned} [\hat{K}_x, \hat{K}_y] &= -q B, \\ [\hat{L}^T, \hat{K}_x] &= \hat{K}_y, \\ [\hat{L}^T, \hat{K}_y] &= -\hat{K}_x, \end{aligned} \quad (2.7)$$

por lo tanto, generan un álgebra no-conmutativa. El operador de Casimir  $\hat{\mathcal{C}}$  de esta álgebra viene dado por

$$\hat{\mathcal{C}} = \hat{K}_x^2 + \hat{K}_y^2 - 2q B \hat{L}^T. \quad (2.8)$$

Es conveniente introducir el operador unitario

$$U = e^{-ie_c \mathbf{A}_\rho \cdot \mathbf{R}} , \quad (2.9)$$

que induce las siguientes transformaciones de las variables de momento:

$$\hat{\mathbf{Q}} = U^{-1} \hat{\mathbf{P}} U = \hat{\mathbf{P}} + e_c \mathbf{A}_\rho , \quad \hat{\mathbf{q}} = U^{-1} \hat{\mathbf{p}} U = \hat{\mathbf{p}} - e_c \mathbf{A}_\rho .$$

El Pseudomomento unitariamente transformado (2.5) es

$$\hat{\mathbf{K}}' = U^{-1} \hat{\mathbf{K}} U = \hat{\mathbf{P}} + q \mathbf{A}_\mathbf{R} , \quad (2.10)$$

que tiene la forma del Pseudomomento de una partícula de carga  $q$  y masa  $M$ , es decir, describe al sistema como un todo.

El Hamiltoniano (2.1) una vez transformado toma la forma

$$\hat{\mathcal{H}}' = U^{-1} \hat{\mathcal{H}} U = \frac{(\hat{\mathbf{P}} - q \mathbf{A}_\mathbf{R} - 2e_c \mathbf{A}_\rho)^2}{2M} + \frac{(\hat{\mathbf{p}} - q_w \mathbf{A}_\rho)^2}{2m_r} + \frac{e_1 e_2}{\rho} , \quad (2.11)$$

donde  $q_w \equiv e_1 \mu_2^2 + e_2 \mu_1^2$  es una carga efectiva (carga total pesada). Es evidente que  $[\hat{\mathbf{K}}', \hat{\mathcal{H}}'] = 0$ . Las eigenfunciones de  $\hat{\mathcal{H}}$  y  $\hat{\mathcal{H}}'$  están relacionadas a través del factor (2.9),

$$\Psi' = \Psi e^{ie_c \mathbf{A}_\rho \cdot \mathbf{R}} .$$

Al estudiar (2.11) nos encontramos con dos situaciones especiales en las que nos enfocaremos. A saber:

- (i)  $e_c = 0$ , donde ocurre la separación de variables en el Hamiltoniano (2.11),
- (ii)  $q = 0$ , para el cual las componentes del Pseudomomento  $\hat{\mathbf{K}}$  conmutan entre sí (ver (1.6)).

Para ambos casos el problema se vuelve completamente integrable (el número de integrales es igual a la dimensión del espacio fase menos uno), *particularmente* superintegrable (el número de integrales globales más integrales particulares es mayor a la dimensión del espacio fase) y cuasi-exactamente-soluble para algunos valores discretos del campo magnético. En ausencia del campo magnético la conexión entre superintegrabilidad y solubilidad ha sido estudiada en [32], [47].

## 2.1. Soluciones cuasi-exactamente solubles: Álgebra escondida

### 2.1.1. Sistema con $e_c = 0$

Este sistema corresponde a dos cargas del mismo signo y con la misma frecuencia ciclotrónica,  $\frac{e_1}{m_1} = \frac{e_2}{m_2}$ . El Hamiltoniano (2.11) toma la forma

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}' &= \hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_R(\hat{\mathbf{P}}, \mathbf{R}) + \hat{\mathcal{H}}_\rho(\hat{\mathbf{p}}, \boldsymbol{\rho}) \\ &\equiv \frac{(\hat{\mathbf{P}} - q \mathbf{A}_R)^2}{2M} + \frac{(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e m_2}{M} \mathbf{A}_\rho)^2}{2m_r} + \frac{m_2}{m_1} \frac{e^2}{\rho}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

donde ocurre la separación de variables (ver [48] en el caso de partículas idénticas) y  $e \equiv e_1 > 0$ . Aquí  $\hat{\mathcal{H}}_R(\hat{\mathbf{P}}, \mathbf{R})$  y  $\hat{\mathcal{H}}_\rho(\hat{\mathbf{p}}, \boldsymbol{\rho})$  describen el movimiento del centro de masa y movimiento relativo, respectivamente, tal y como sucede en ausencia del campo magnético.

Los cuatro operadores

$$\hat{\mathcal{H}}_R, \hat{\mathcal{H}}_\rho, \hat{L}_z, \hat{\ell}_z, \quad (2.13)$$

(ver (2.6)) generan una álgebra conmutativa. Por lo tanto, para  $e_c = 0$  el sistema es completamente integrable. Todo estado es caracterizado por cuatro números cuánticos.

Debido a la relación

$$\hat{\mathbf{K}}^2 = 2qB \hat{L}_z + 2M \hat{\mathcal{H}}_R, \quad (2.14)$$

únicamente una componente del Pseudomomento es algebraicamente independiente. Entonces, en adición a (2.13) existe una integral más. Por lo tanto, el sistema coulombiano de dos cargas con  $e_c = 0$  en un campo magnético es globalmente superintegrable. Estas cinco integrales (2.13), (2.14) son *globales*, permanecen constantes para cualquier estado del sistema.

Como consecuencia del desacoplamiento entre el movimiento del centro de masa y el movimiento relativo, las eigenfunciones de (2.12) son factorizables

$$\hat{\mathcal{H}} \Psi = (E_R + E_\rho) \Psi, \quad \Psi = \chi(\mathbf{R}) \psi(\boldsymbol{\rho}). \quad (2.15)$$

La función  $\chi(\mathbf{R})$  satisface la ecuación de Schrödinger

$$\left[ -\frac{\nabla_{\mathbf{R}}^2}{2M} - \frac{1}{2}\omega_c \hat{L}_z + \frac{M\omega_c^2 R^2}{8} \right] \chi(\mathbf{R}) = E_R \chi(\mathbf{R}), \quad (2.16)$$

donde  $\omega_c = \frac{eB}{m_1} = \frac{qB}{M}$  y  $\hat{L}_z = (\mathbf{R} \times \hat{\mathbf{P}})_z$  es el momento angular del centro de masa. Esta ecuación describe a una partícula de carga  $q$  y masa  $M$  en un campo magnético  $B$ . En coordenadas polares  $\mathbf{R} = (R, \phi)$  las eigenfunciones y eigenvalores son

$$\begin{aligned} \chi &= R^{|S|} e^{iS\phi} e^{-\frac{M\omega_c R^2}{4}} L_N^{(|S|)}(2M^{-1}\omega_c^{-1}R^2), \\ E_R &= \frac{\omega_c}{2}(2N+1+|S|-S), \end{aligned} \quad (2.17)$$

donde  $L_N^{(|S|)}$  es un polinomio asociado de Laguerre con índice  $|S|$ ,  $N = 0, 1, 2, \dots$  es el número cuántico principal y  $S = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  es el número cuántico magnético. Existe una degeneración infinita en  $E_R$ : todos los estados con  $N$  fijo y diferente  $S \geq 0$  son degenerados. El Pseudomomento viene dado por

$$K^2 = qB(2N+1+|S|+S).$$

Todos los estados con  $N$  fijo y diferente  $S \leq 0$  son degenerados respecto a  $K^2$ .

De (2.12) y (2.15) se deriva la ecuación de Schrödinger para el movimiento relativo

$$\left[ -\frac{\nabla_{\boldsymbol{\rho}}^2}{2m_r} - \frac{1}{2}\omega_c \hat{\ell}_z + \frac{m_r\omega_c^2 \rho^2}{8} + \frac{m_2 e^2}{m_1 \rho} - E_\rho \right] \psi(\boldsymbol{\rho}) = 0, \quad (2.18)$$

donde  $\hat{\ell}_z = (\boldsymbol{\rho} \times \hat{\mathbf{p}})_z$  es el momento angular relativo. La ecuación (2.18) no admite separación de variables. Sin embargo, debido a la conservación del momento angular relativo,  $[\hat{\mathcal{H}}_\rho, \hat{\ell}_z] = 0$ , las eigenfunciones  $\psi$  son factorizables en coordenadas polares  $\boldsymbol{\rho} = (\rho, \varphi)$

$$\begin{aligned} \psi(\boldsymbol{\rho}) &= \zeta(\rho) \Phi(\varphi), \\ \Phi(\varphi) &= e^{is\varphi}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

donde  $s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  es el número cuántico magnético asociado con el movimiento relativo del sistema,  $\Phi(\varphi)$  es eigenfunción de  $\hat{\ell}_z$ .



Estudiando el comportamiento a pequeñas y grandes distancias, se puede mostrar que la función  $\zeta(\rho)$  tiene la forma

$$\zeta(\rho) = e^{-\frac{m_r \omega_c \rho^2}{4}} \rho^{|s|} p(\rho) , \quad (2.20)$$

donde  $p_s$  obedece la siguiente ecuación

$$\left[ -\rho \partial_\rho^2 + (\omega_c m_r \rho^2 - 1 - 2|s|) \partial_\rho + (\omega_c \{1 + |s| - s\} - 2E_\rho) m_r \rho \right] p = -\epsilon p , \quad (2.21)$$

para la cual introducimos la notación

$$\epsilon \equiv 2 m_r e_1 e_2 = \frac{2 m_2 m_r e^2}{m_1} ,$$

y  $\partial_\rho \equiv \frac{\partial}{\partial \rho}$ . Esta ecuación define un problema espectral donde  $\epsilon$  aparece como nuevo parámetro espectral y la energía  $E_\rho$  permanece fija. El parámetro  $\epsilon$  está asociado a la intensidad de la interacción de Coulomb. Con el cambio de variable  $\rho \rightarrow \sqrt{\omega_c m_r} \rho$ , la ec. (2.21) se reduce a

$$T p \equiv \left[ -\rho \partial_\rho^2 + (\rho^2 - 1 - 2|s|) \partial_\rho + \left( 1 + |s| - s - \frac{2 E_\rho}{\omega_c} \right) \rho \right] p = -\frac{\epsilon}{\sqrt{\omega_c m_r}} p . \quad (2.22)$$

Esta es la ecuación básica que vamos a estudiar.

El operador  $T$  en el lado izquierdo de (2.22) es antisimétrico:  $\rho \rightarrow -\rho$  y  $T \rightarrow -T$ . Esto implica la invariancia de la ecuación (2.22) ante  $\rho \rightarrow -\rho$  y  $\epsilon \rightarrow -\epsilon$ . Por lo tanto, si existe una solución  $p(\rho)$  de (2.22) para  $\epsilon > 0$  entonces debe existir una solución  $p(-\rho)$  para  $\tilde{\epsilon} = -\epsilon$ . Es importante indicar las condiciones de frontera en (2.22): con el fin de garantizar la normalizabilidad de  $\zeta$  (2.20),  $p$  no debe ser muy singular cerca del origen y no crecer más rápido que una Gaussiana para  $\rho$  grande.

El operador  $T$  definido en (2.22) tiene una estructura Lie-algebraica- $sl_2$  y la ecuación puede ser reescrita como

$$\left[ -\hat{J}_n^0 \hat{J}^- + \hat{J}_n^+ - (1 + 2|s| + \frac{n}{2}) \hat{J}^- \right] p = -\frac{\epsilon}{\sqrt{\omega_c m_r}} p, \quad (2.23)$$

en términos de los generadores  $\hat{J}$ 's del álgebra  $sl_2$  y del parámetro

$$n \equiv \frac{2 E_\rho}{\omega_c} + s - |s| - 1,$$

el cual define el espín de la representación, ver (C.1). Para  $n$  fijo la energía del movimiento relativo del sistema es

$$E_\rho = \frac{\omega_c}{2} (n + 1 + |s| - s). \quad (2.24)$$

Existe una degeneración infinita en  $E_\rho$ : todos los estados con  $n$  fijo y diferente número cuántico magnético  $s \geq 0$  son degenerados.

Se puede mostrar que las soluciones  $p$  dependen de  $|s|$ ,  $p = p_{|s|}(\sqrt{\omega_c m_r} \rho)$ . Además de tener una estructura algebraica escondida (idea detrás de la cuasi-exacta-solubilidad del problema), para enteros no negativos  $n$  el álgebra  $sl_2$  aparece en una representación dimensional finita y el problema (2.23) posee  $(n + 1)$  eigenfunciones  $p_{n,i}$ ,  $i = 1, \dots, (n + 1)$  en forma de polinomios de grado  $n$ . Esto implica la cuantización explícita (algebraica) de  $\epsilon$  ya que las  $\epsilon$ 's resultan ser las raíces de una ecuación secular algebraica, y por ende la cuantización del parámetro adimensional

$$\lambda \equiv \frac{\epsilon^2}{\omega_c m_r} = \frac{B_0}{B} \equiv \frac{1}{b}, \quad B_0 = 4 m_r M \frac{e_1^2 e_2^2}{e_1 + e_2}, \quad (2.25)$$

el cual hemos introducido por conveniencia, y  $B_0$  tiene el significado de un campo magnético característico. Entonces, para un sistema dado tal que  $e_c = 0$ , existe un conjunto infinito de valores discretos del campo magnético  $B$  para los cuales existen soluciones exactas, analíticas de la ecuación de Schrödinger. El parámetro  $\epsilon$  toma  $[\frac{n+1}{2}]$  valores positivos,  $[\frac{n+1}{2}]$  valores simétricos negativos y valor cero para  $n$  par, para los cuales el problema (2.23) posee soluciones polinomiales<sup>1</sup>. Desde el punto de vista físico, solamente  $\epsilon > 0$  son admitidos. Vale la pena notar que para  $n$  par, siempre existe una solución con  $\lambda_n = 0$ , y por lo tanto  $\epsilon = 0$ . Esta solución corresponde ya sea a una eigenfunción no

---

<sup>1</sup> $[a]$  denota la parte entera de  $a$ .

normalizable o a la ausencia de la interacción de Coulomb. No consideraremos tales soluciones al estudiar el espectro del problema. Un hecho importante es que  $p_n$  tiene un número de nodos para  $\rho > 0$  que van de zero hasta  $[\frac{n-1}{2}]$ . Los resultados se muestran en el Apéndice A.

### 2.1.1.1. Relaciones de escalamiento

Consideremos dos sistemas con  $e_c = 0$ ,  $(e, m_1, m_2)$  y  $(\tilde{e}, \tilde{m}_1, \tilde{m}_2)$ . Haciendo la transformación de escala  $\rho \rightarrow a\rho$  en (2.21), se obtiene cierta relación entre los eigenestados. Si

$$a = \frac{\tilde{e}^2}{e^2} \frac{m_1}{\tilde{m}_1} \frac{\tilde{m}_2}{m_2} \frac{\tilde{m}_r}{m_r} ,$$

y

$$\tilde{B} = \frac{\tilde{e}^3}{e^3} \frac{m_1}{\tilde{m}_1} \frac{\tilde{m}_2^2}{m_2^2} \frac{\tilde{m}_r}{m_r} B ,$$

entonces tienen lugar las siguientes relaciones de escala

$$\psi(\tilde{e}, \tilde{m}_1, \tilde{m}_2, \tilde{B}, s; a\rho) = \psi(e, m_1, m_2, B, s; \rho) ,$$

$$\frac{\tilde{m}_1^2}{\tilde{e}^4 \tilde{m}_r \tilde{m}_2^2} \hat{E}_\rho(\tilde{e}, \tilde{m}_1, \tilde{m}_2, \tilde{B}, s) = \frac{m_1^2}{e^4 m_r m_2^2} \hat{E}_\rho(e, m_1, m_2, B, s) . \quad (2.26)$$

Vale la pena notar la forma de estas relaciones para el caso particular de cargas iguales pero diferentes masas,  $(e, m_1, m_2)$  y  $(e, a m_1, a m_2)$ ,

$$\psi(e, a m_1, a m_2, a^2 B, s; a\rho) = \psi(e, m_1, m_2, B, s; \rho) ,$$

$$\hat{E}_\rho(e, a m_1, a m_2, a^2 B, s) = a \hat{E}_\rho(e, m_1, m_2, B, s) . \quad (2.27)$$

### 2.1.1.2. Integral particular

Con el operador de Euler-Cartan

$$i_n^0 = \rho \partial_\rho - n ,$$

formamos el operador

$$i_n(\rho) = \prod_{j=0}^n (\rho \partial_\rho + j) . \quad (2.28)$$

Este operador tiene la propiedad de aniquilador

$$i_n(\rho) : \mathcal{P}_n \mapsto \{0\} ,$$

donde  $\mathcal{P}_n$  es el espacio vectorial de polinomios en  $\rho$  de grado no más grande que  $n$ , (ver C.2). Es evidente que para el operador  $T(n)$  con  $n$  entero (ver (2.22), (2.23))

$$[T(n), i_n(\rho)] : \mathcal{P}_n \mapsto \{0\} .$$

Por lo tanto,  $i_n(\rho)$  es una integral particular con  $\mathcal{P}_n$  como subespacio invariante. Las eigenfunciones  $p_{n,k}$ ,  $k = 1, \dots, (n+1)$  de (2.22), (2.23) son los modos cero de  $i_n(\rho)$ . Haciendo una rotación de norma de  $i_n(\rho)$  con el factor  $\zeta^{(0)} = e^{-\frac{m_r \omega_c \rho^2}{4}} \rho^{|s|}$  (ver (2.20)),

$$\zeta^{(0)} i_n(\rho) (\zeta^{(0)})^{-1} = \prod_{j=0}^n (\rho \mathcal{D}_\rho + j) \equiv \mathcal{I}_n(\rho) , \quad (2.29)$$

donde

$$\mathcal{D}_\rho = \partial_\rho + \frac{m_r \omega_c \rho}{2} - \frac{|s|}{\rho} ,$$

es la derivada covariante, obtenemos que

$$[\hat{\mathcal{H}}_\rho(\hat{\mathbf{p}}, \boldsymbol{\rho}) , \mathcal{I}_n(\rho)] : \mathcal{V}_n \mapsto \{0\} ,$$

para  $b = b_n$ , o equivalentemente  $\omega_c = (\omega_c)_n$ . Entonces,  $\mathcal{I}_n(\rho)$  es una integral particular con  $\mathcal{V}_n = \zeta^{(0)} \mathcal{P}_n$  como subespacio invariante.

La integral  $\mathcal{I}_n(\rho)$  tiene su contraparte clásica  $I_n(i \rho p_\rho)$  (ver 1.47). Esta última es una constante de movimiento sólo a lo largo de las trayectorias circulares periódicas.

### 2.1.2. Sistema con $q = 0$

En esta sección consideramos un sistema neutro de dos cargas,  $e_1 = -e_2 \equiv e$ . El Hamiltoniano (2.11) toma la forma

$$\hat{\mathcal{H}}' = \frac{(\hat{\mathbf{P}} - e \mathbf{B} \times \boldsymbol{\rho})^2}{2M} + \frac{(\hat{\mathbf{p}} - e(\mu_2 - \mu_1) \mathbf{A}_\rho)^2}{2m_r} - \frac{e^2}{\rho} . \quad (2.30)$$

En este caso no hay separación de variables en (2.30).

Dado que  $[\hat{\mathcal{H}}', \hat{\mathbf{K}}'] = 0$  (2.10), estudiamos el problema biespectral definido por el Hamiltoniano (2.30) y el Pseudomomento

$$\hat{\mathcal{H}}' \Psi'_{\mathbf{K}} = E \Psi'_{\mathbf{K}}, \quad \hat{\mathbf{K}}' \Psi'_{\mathbf{K}} = \mathbf{K} \Psi'_{\mathbf{K}}, \quad (2.31)$$

notando que en el caso del sistema neutro el Pseudomomento  $\hat{\mathbf{K}}'$  coincide con el momento canónico del centro de masa,  $\hat{\mathbf{K}}' = \hat{\mathbf{P}}$ .

Las eigenfunciones de  $\hat{\mathbf{K}}'$  son

$$\Psi'_{\mathbf{K}}(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}) = e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}} \psi_{\mathbf{K}}(\boldsymbol{\rho}), \quad (2.32)$$

con eigenvalor  $\mathbf{K}$ . Substituyendo  $\Psi'_{\mathbf{K}}$  en (2.30) obtenemos una ecuación efectiva para la variable relativa

$$\left[ \frac{(\hat{\mathbf{P}} - e(\mu_2 - \mu_1)\mathbf{A}\boldsymbol{\rho})^2}{2m_r} + \frac{(\mathbf{K} - e\mathbf{B} \times \boldsymbol{\rho})^2}{2M} - \frac{e^2}{\rho} \right] \psi_{\mathbf{K}}(\boldsymbol{\rho}) = E \psi_{\mathbf{K}}(\boldsymbol{\rho}). \quad (2.33)$$

En el estudio clásico del sistema neutro se mostró que existen trayectorias cerradas superintegrables con Pseudomomento cero  $\mathbf{K} = \mathbf{0}$ . Estas órbitas fueron asociadas a la existencia de integrales particulares y fueron descritas analíticamente. Por lo tanto, en el caso cuántico es natural considerar los modos cero del Pseudomomento,  $\mathbf{K} = \mathbf{0}$ . Dado que  $\hat{\mathbf{K}}' = \hat{\mathbf{P}}$ , estos modos corresponden a una partícula compuesta estacionaria, el sistema como un todo está en reposo, no hay dinámica del centro de masa.

Entonces, buscamos soluciones de (2.31) sin dependencia en  $\mathbf{R}$ ,

$$\Psi'_0(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}) = \psi(\boldsymbol{\rho}). \quad (2.34)$$

En éste caso  $\psi(\boldsymbol{\rho})$  satisface la ecuación para el movimiento relativo

$$\left[ -\frac{\nabla_{\boldsymbol{\rho}}^2}{2m_r} - \frac{1}{2}\omega_q \hat{\ell}_z + \frac{m_r \Omega_q^2 \rho^2}{2} - \frac{e^2}{\rho} - E \right] \psi(\boldsymbol{\rho}) = 0, \quad (2.35)$$

donde

$$\Omega_q = \frac{eB}{2m_r}, \quad \omega_q = \frac{eB|\mu_2 - \mu_1|}{m_r},$$

(cf. (2.18)). Es fácil reescribir la ecuación (2.35) en coordenadas polares  $\boldsymbol{\rho} = (\rho, \varphi)$  y buscar eigenfunciones  $\psi$  en forma factorizada

$$\psi(\boldsymbol{\rho}) = \zeta(\rho) \Phi(\varphi). \quad (2.36)$$

Inmediatamente vemos que

$$\Phi(\varphi) = e^{is\varphi} ,$$

donde  $s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , es la eigenfunción del momento angular relativo,

$$\hat{\ell}_z = -i \partial_\varphi .$$

Para  $B \neq 0$  la solución  $\zeta(\rho)$  tiene la forma <sup>2</sup>

$$\zeta(\rho) = e^{-\frac{m_r \Omega_q}{2} \rho^2} \rho^{|s|} p(\rho) , \quad (2.37)$$

donde  $p$  satisface la ecuación

$$\left[ -\rho \partial_\rho^2 + (2\Omega_q m_r \rho^2 - 1 - 2|s|) \partial_\rho + (2\Omega_q (1 + |s|) - 2E - s\omega_q) m_r \rho \right] p = -\epsilon p , \quad (2.38)$$

donde introducimos

$$\epsilon \equiv 2 m_r e_1 e_2 = -2 m_r e^2 .$$

La ecuación (2.38) es estrictamente similar a (2.21) con la única diferencia de que  $\epsilon$  es de signo opuesto, ver (2.21). Entonces, los valores físicos relevantes deben ser negativos. La ecuación (2.38) puede ser considerada como un problema espectral donde  $\epsilon$  juega el papel de un nuevo parámetro espectral mientras que la energía permanece constante. El parámetro  $\epsilon$  mide la intensidad de la interacción de Coulomb. Haciendo el cambio de variable  $\rho \rightarrow \sqrt{2\Omega_q m_r} \rho$ , la ec.(2.38) se transforma en

$$T_q p \equiv \left[ -\rho \partial_\rho^2 + (\rho^2 - 1 - 2|s|) \partial_\rho + (1 + |s| - \frac{2E + s\omega_q}{2\Omega_q}) \rho \right] p = -\frac{\epsilon}{\sqrt{2\Omega_q m_r}} p . \quad (2.39)$$

---

<sup>2</sup>Para  $B = 0$  el problema original (2.30), (2.35) se reduce al problema de Coulomb en el plano; el límite  $B$  tendiendo a cero es singular.

La ec. (2.39) puede escribirse en términos de los generadores  $sl_2$  (C.1),

$$\left[ -\hat{J}_n^0 \hat{J}^- + \hat{J}_n^+ - \left(1 + 2|s| + \frac{n}{2}\right) \hat{J}^- \right] p = -\frac{\epsilon}{\sqrt{2\Omega_q m_r}} p, \quad (2.40)$$

(cf. (2.23)), donde

$$n \equiv \frac{2E + \omega_q s}{2\Omega_q} - 1 - |s|,$$

desempeña el papel del espín de la representación. Entonces, la energía es igual a

$$E = \Omega_q (n + 1 + |s|) - \frac{\omega_q s}{2}, \quad (2.41)$$

(cf. (2.24)).

Ocurre una estructura algebraica escondida (la idea detrás de la solubilidad cuasi-exacta). Para enteros  $n$  no negativos, el álgebra  $sl_2$  aparece en una representación de dimensión finita y el problema (2.40) posee  $(n + 1)$  eigenfunciones polinomiales  $p_n$  de grado  $n$ . Esto implica la cuantización de  $\epsilon$  y por ende la del parámetro adimensional

$$\lambda \equiv \frac{B_0}{B}, \quad B_0 = 4m_r^2 e^3, \quad (2.42)$$

que introducimos por conveniencia, donde  $B_0$  es un campo magnético característico (cf. (2.25)).

Los casos  $e_c = 0$  y  $q = 0$  son descritos por la misma ecuación (2.23) o (2.40) con los mismos valores discretos de  $\lambda_n$  (!). La diferencia radica al nivel del parámetro espectral  $\epsilon \propto \sqrt{\lambda}$ : deben tomarse los valores positivos para el caso  $e_c = 0$  y los valores negativos para  $q = 0$ . Las correspondientes eigenfunciones polinomiales de (2.40) se obtienen a partir de las soluciones de (2.23) reemplazando  $\omega_c \rightarrow 2\Omega_q$  y  $\rho \rightarrow -\rho$ , ver e.g. (A.1) - (A.15). Más aún, las soluciones polinomiales ocurren para los mismos valores discretos del campo magnético adimensional  $b_n = \frac{1}{\lambda_n}$ , pero para diferentes valores del campo magnético  $B$ .

### 2.1.2.1. Relaciones de Escalamiento

Consideramos 2 sistemas neutros ( $q = 0$ ),  $(e, m_1, m_2)$  y  $(\tilde{e}, \tilde{m}_1, \tilde{m}_2)$ . Haciendo la transformación de escala  $\rho \rightarrow a\rho$  en (2.33) aparecen ciertas relaciones entre las eigenfunciones. Es fácil verificar que si

$$a = \frac{\tilde{e}^2 \tilde{m}_r}{e^2 m_r},$$

y

$$\tilde{B} = \frac{\tilde{e}^3 \tilde{m}_r^2}{e^3 m_r^2} B,$$

entonces se cumple que

$$\begin{aligned} \psi_0(\tilde{e}, \tilde{m}_1, \tilde{m}_2, \tilde{B}, s; a\rho) &= \psi_0(e, m_1, m_2, B, s; \rho), \\ \frac{1}{e^4 m_r} \hat{E}(e, m_1, m_2, B, s) &= \frac{1}{\tilde{e}^4 \tilde{m}_r} \hat{E}(\tilde{e}, \tilde{m}_1, \tilde{m}_2, \tilde{B}, s). \end{aligned} \quad (2.43)$$

### 2.1.2.2. Integral Particular

Es claro que para el operador  $T_q(n)$  con  $n$  entero (ver (2.39), (2.40)),

$$[T_q(n), i_n(\rho)] : \mathcal{P}_n \mapsto 0,$$

donde  $i_n$  está dado por (2.28). Por lo tanto,  $i_n(\rho)$  es una integral particular con  $\mathcal{P}_n$  como subespacio invariante. Las eigenfunciones  $p_{n,k}$ ,  $k = 1, \dots, (n+1)$  de (2.39), (2.40) son los modos cero de  $i_n(\rho)$ .



Haciendo una rotación de norma de  $i_n(\rho)$  con el factor  $\zeta^{(0)} = e^{-\frac{m_r \Omega_q \rho^2}{2}} \rho^{|s|}$  (ver (2.37)),

$$\zeta^{(0)} i_n(\rho) (\zeta^{(0)})^{-1} = \prod_{j=0}^n (\rho \mathcal{D}_\rho + j) \equiv \mathcal{I}_n(\rho) , \quad (2.44)$$

donde

$$\mathcal{D}_\rho = \partial_\rho + m_r \Omega_q \rho - \frac{|s|}{\rho} ,$$

es la derivada covariante, obtenemos

$$[\hat{\mathcal{H}}' , \mathcal{I}_n(\rho)] : \mathcal{V}_n \mapsto 0 ,$$

para  $b = b_n$ , o equivalentemente  $\Omega_q = (\Omega_q)_n$ . Entonces,  $\mathcal{I}_n(\rho)$  es una integral particular con  $\mathcal{V}_n = \zeta^{(0)} \mathcal{P}_n$  como subespacio invariante.

La integral  $\mathcal{I}_n(\rho)$  tiene su contraparte clásica  $I_n(i \rho p_\rho)$  (ver 1.47). Esta última es una constante de movimiento sólo a lo largo de las trayectorias circulares periódicas.

Enfatizamos lo que se denomina integral *particular* (ver e.g. [46]),

$$\tilde{L}_z = U \hat{L}_z U^{-1} = [\mathbf{R} \times (\hat{\mathbf{P}} - e_c \mathbf{A}_\rho)]_z \quad , \quad \tilde{\ell}_z = U \hat{\ell}_z U^{-1} = [\boldsymbol{\rho} \times (\hat{\mathbf{p}} + e_c \mathbf{A}_\mathbf{R})]_z , \quad (2.45)$$

donde  $\hat{L}_z$  y  $\hat{\ell}_z$  son el momento angular del centro de masa y momento angular relativo, respectivamente. No obstante el hecho de que, en general, los conmutadores  $[\hat{\mathcal{H}} , \tilde{L}_z]$  y  $[\hat{\mathcal{H}} , \tilde{\ell}_z]$  no son iguales a cero, se tiene que las eigenfunciones

$$\Psi_{\{0\}} = e^{-i e_c \mathbf{A}_\rho \cdot \mathbf{R}} e^{i s \varphi} e^{-\frac{m_r \Omega_q}{2} \rho^2} \rho^{|s|} p_n(\rho) ,$$

(modos cero del operador  $\hat{\mathbf{K}}$ , (2.31)), satisfacen

$$[\hat{\mathcal{H}} , \tilde{L}_z] \Psi_{\{0\}} = [\hat{\mathcal{H}} , \tilde{\ell}_z] \Psi_{\{0\}} = 0 , \quad (2.46)$$

donde

$$\hat{\mathcal{H}} \Psi_{\{0\}} = \left( \Omega_q (n+1+|s|) - \frac{\omega_q s}{2} \right) \Psi_{\{0\}} , \quad \tilde{L}_z \Psi_{\{0\}} = 0 , \quad \tilde{\ell}_z \Psi_{\{0\}} = s \Psi_{\{0\}} . \quad (2.47)$$

Cabe mencionar que los modos cero del Pseudomomento,  $\Psi_{\{0\}}$ , están caracterizados por cero momento angular (modificado)  $\tilde{L}_z$ . Lo anterior es válido sólo para ciertos valores del campo magnético  $B$ .

## 2.2. Soluciones aproximadas

Debido a que las soluciones exactas que hemos presentado hasta ahora aparecen únicamente para ciertos valores del campo magnético uno tiene que recurrir a otros métodos en el caso de un campo arbitrario. En esta sección se presentan soluciones aproximadas, obtenidas usando el método variacional, al problema de dos partículas sin espín no relativistas en el plano en presencia de un campo magnético constante  $B$  perpendicular al plano.

### 2.2.1. Sistema con $e_c = 0$

Este caso aparece para cargas con el mismo signo y la misma frecuencia ciclotrónica,  $\frac{e_1}{m_1} = \frac{e_2}{m_2}$ .

#### Comportamiento asintótico

Haciendo un análisis de la ec. (2.21) obtenemos

$$p = 1 + c_1 \rho + c_2 \rho^2 + \dots, \quad \rho \rightarrow 0, \quad (2.48)$$

donde

$$c_1 = \frac{2 e_1^2 m_2 m_r}{m_1 (1 + 2 |s|)},$$

$$c_2 = \frac{1}{2 (4 s^2 + 6 |s| + 2)} \left[ \frac{4 e_1^4 m_2^2 m_r^2}{m_1^2} + (1 + 2 |s|) \left( \frac{e_1 B m_r (1 + |s| - s)}{c m_1} - 2 E_\rho m_r \right) \right],$$

la cual es, de hecho, la expansión perturbativa alrededor del mínimo del potencial (funnel-type potential).

Por otro lado, la expansión a largas distancias  $\rho \rightarrow \infty$  (expansión WKB) tiene la forma

$$p = \rho^\beta \left( 1 + \frac{C_1}{\rho} + \frac{C_2}{\rho^2} + \dots \right), \quad \beta = -1 + s - |s| + \frac{2 c E_\rho m_1}{B e_1}, \quad (2.49)$$

donde

$$C_1 = \frac{2 c e_1 m_2}{B},$$

$$C_2 = \frac{c}{2 B^3 e_1^3 m_r} \left[ -4 c^2 E_\rho^2 m_1^3 + 4 B c e_1 (e_1^4 m_2^2 m_r - E_\rho m_1^2 (s-1)) + B^2 e_1^2 m_1 (2 s - 1) \right].$$

### 2.2.1.1. Aproximaciones: funciones variacionales

Uno puede construir una función de interpolación, para la función  $p$  (el único factor que no se conoce de (2.20)), entre la teoría perturbativa (2.48) y la expansión WKB (2.49) tal que para ciertos valores del campo magnético se reproduzcan las soluciones exactas (soluciones cuasi-exactamente-solubles) de la ec. (2.21). Las interpolaciones más simples tienen la siguiente forma:

(i) Estado sin nodos (estado base)

$$p_0 = \left( \frac{1 + a_1 \rho + a_2 \rho^2 + a_3 \rho^3}{1 + a_4 \rho} \right)^{\alpha_0}, \quad (2.50)$$

(ii) Estado con un nodo

$$p_1 = (1 + b_1 \rho + b_2 \rho^2)^{\alpha_1} (1 - b_3 \rho), \quad (2.51)$$

(iii) Estado con dos nodos

$$p_2 = (1 + d_1 \rho + d_2 \rho^2)^{\alpha_2} (1 - d_3 \rho + d_4 \rho^2), \quad (2.52)$$

donde las  $a$ 's,  $b$ 's,  $d$ 's y  $\alpha$ 's son considerados como parámetros variacionales, los cuales se comportan suavemente como funciones del campo magnético. Los parámetros  $\alpha_0$ ,  $(2\alpha_1 + 1)$ ,  $(2\alpha_2 + 2)$  deben ser cercanos a  $\beta$  (ver (2.49)). Para ciertos valores discretos del campo magnético la función  $p(\rho)$  se reduce a una solución exacta. Toda la información referente a los nodos se codifica en los factores  $(1 - b_3 \rho)$  para el primer estado excitado (2.51) y  $(1 - d_3 \rho + d_4 \rho^2)$  para el segundo estado excitado (2.52), respectivamente. Como siempre se hace en los estudios variacionales, las condiciones de ortogonalidad entre las funciones son implementadas lo que reduce efectivamente el número de parámetros libres.

### 2.2.1.2. Resultados

Consideramos dos electrones,  $e_1 = e_2, m_1 = m_2$ , que es el caso más importante de los sistemas con  $e_c = 0$ . Los casos restantes se pueden estudiar usando las relaciones de escala (2.26) - (2.27). La consideración se limita a los estados de baja energía  $(N, S; n, s)$  con números cuánticos  $n = 0, 1, 2$  y  $s = 0, 1, 2$ , ver Tablas 2.1 - F.22 y números cuánticos  $N, S$  del centro de masa arbitrarios. La primera observación es simple: las funciones variacionales de pocos parámetros (2.50), (2.51), (2.52) proporcionan energías variacionales muy precisas, ver Tablas 2.1, 2.2, 2.4, así como las posiciones de los nodos, ver Tablas F.20, F.22. Los parámetros óptimos dependen suavemente del campo magnético  $B$ , y cambian lentamente con su variación. En la Figura 2.1 el comportamiento del parámetro  $\alpha_0$  en (2.50) se muestra. Para campos magnéticos  $B = \frac{1}{10+\sqrt{73}}, 1/6, 1$  que corresponden a soluciones exactas, como resultado de los cálculos variacionales  $\alpha_0$  toma los valores  $1/2, 1, 3/2$ , respectivamente. Para campos magnéticos tendiendo a cero el valor óptimo de  $\alpha_0$  tiende a infinito, reflejando la no existencia de estados ligados de dos electrones.

Ahora consideramos la pregunta de qué tan precisos son los resultados variacionales obtenidos, y en particular qué tanto se aproxima la función de prueba variacional a la exacta. Para este fin hacemos uso de una teoría perturbativa convergente, (ver Apéndice B) en la que la función de prueba se considera como aproximación de orden cero. De manera operacional, primero uno determina el potencial  $V$  para el cual la función de prueba es exacta, el término que faltaría para recuperar el potencial original es considerado como una perturbación. De esta manera la función de prueba se considera como aproximación de orden cero y la teoría perturbativa nos dará una estimación de qué tan cercana está de la eigenfunción exacta.

Las correcciones indican que las funciones variacionales (2.50), (2.51), (2.52) con parámetros óptimos son muy precisas y uniformes. Localmente, la aproximación brinda por lo menos 3-5 dígitos significativos (s.d.) para todos los valores del campo magnético considerado, ver Fig. 2.2.

Más aún, en el dominio en el cual la función variacional da la mayor contribución a la energía  $\langle \psi_{trial} \mathcal{H} \psi_{trial} \rangle$  el número de s.d. aumenta a 9-10.

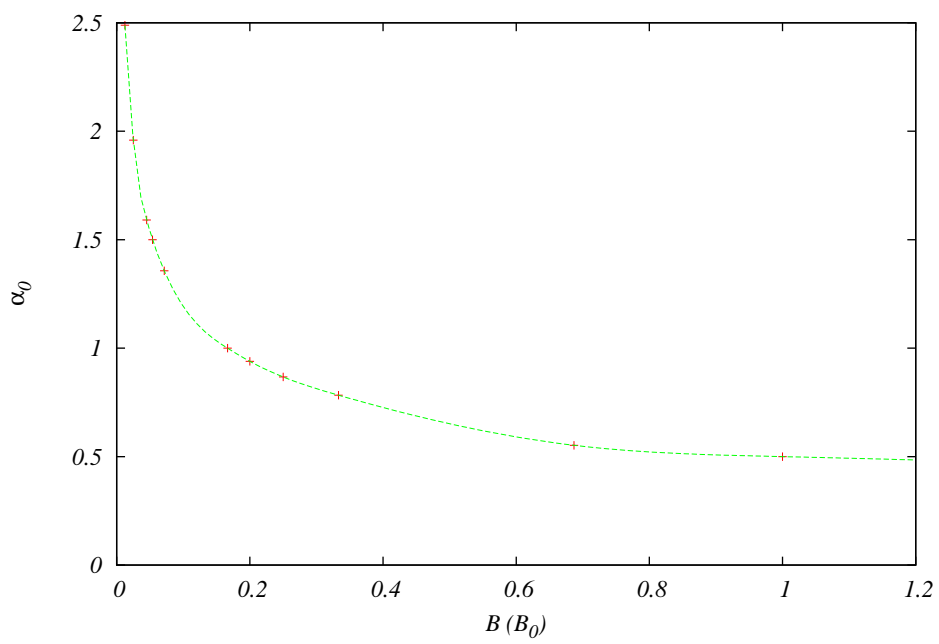


Figura 2.1: Dos electrones ( $e_1 = e_2, m_1 = m_2$ ) : valor óptimo de  $\alpha_0$  en (2.50) *vs* campo magnético  $B$  .

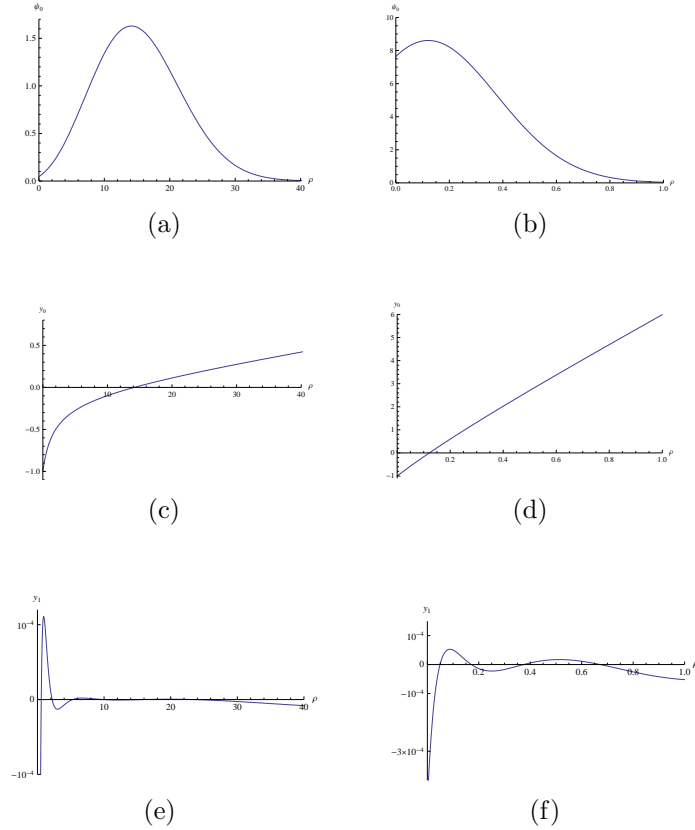


Figura 2.2: Estado base (función sin nodos) de dos electrones con  $s = 0$  y  $B = \frac{1}{5}B_0$  (izquierda) y  $B = 25 B_0$  (derecha) con  $B_0 = 4.701 \times 10^9 G$ : (a)-(b) eigenfunción (2.19), con prefactor (2.50), tomada como aproximación de orden cero  $\psi \equiv e^{-\phi_0}$ , (c)-(d)  $y_0(\rho) = (\phi_0)'$  y (e)-(f) la primera corrección  $y_1(\rho)$  (ver (B.5)) .

En Figs. 2.3 - 2.4 se muestran los valores de expectación  $I_{0,|s|}$  y  $I_{1,|s|}$  para  $s = 0, 1, 2$ , ver (2.29). Para  $B_s = \frac{1}{1+2|s|} B_0$ , el valor de expectación  $\langle I_{1,|s|} \rangle$  se anula. Esto corresponde a la aparición de soluciones analíticas en (2.21) con  $n = 1$ .

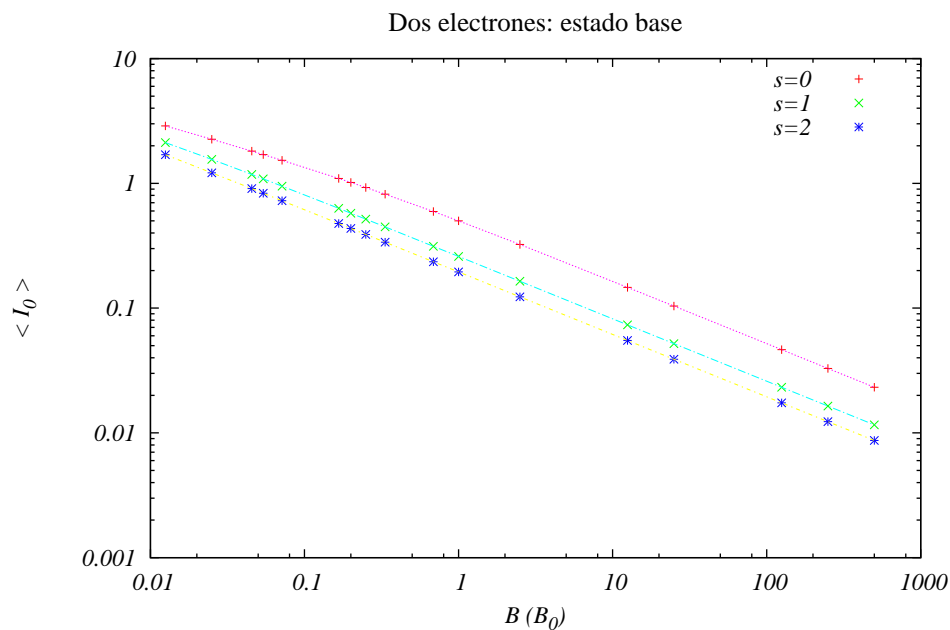


Figura 2.3: Valor de Expectación  $\langle I_{0,|s|} \rangle$ , ver (2.29) para  $s = 0, 1, 2$  vs campo magnético  $B$  con  $B_0 = 4.701 \times 10^9 G$ .

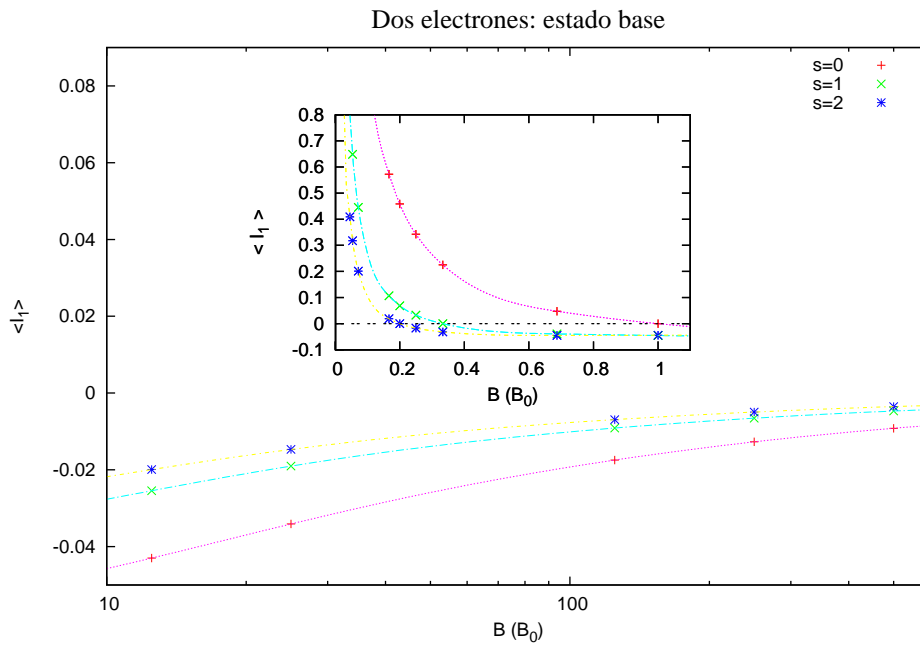


Figura 2.4: Valor de Expectación  $\langle I_{1,|s|} \rangle$ , ver (2.29) para  $s = 0, 1, 2$  vs campo magnético  $B$ . Para  $B = \frac{1}{1+2|s|} B_0$ ,  $B_0 = 4.701 \times 10^9 G$ , ocurren soluciones exactas en (2.21) con  $n = 1$  y por lo tanto  $\langle I_{1,|s|} \rangle$  se anula.



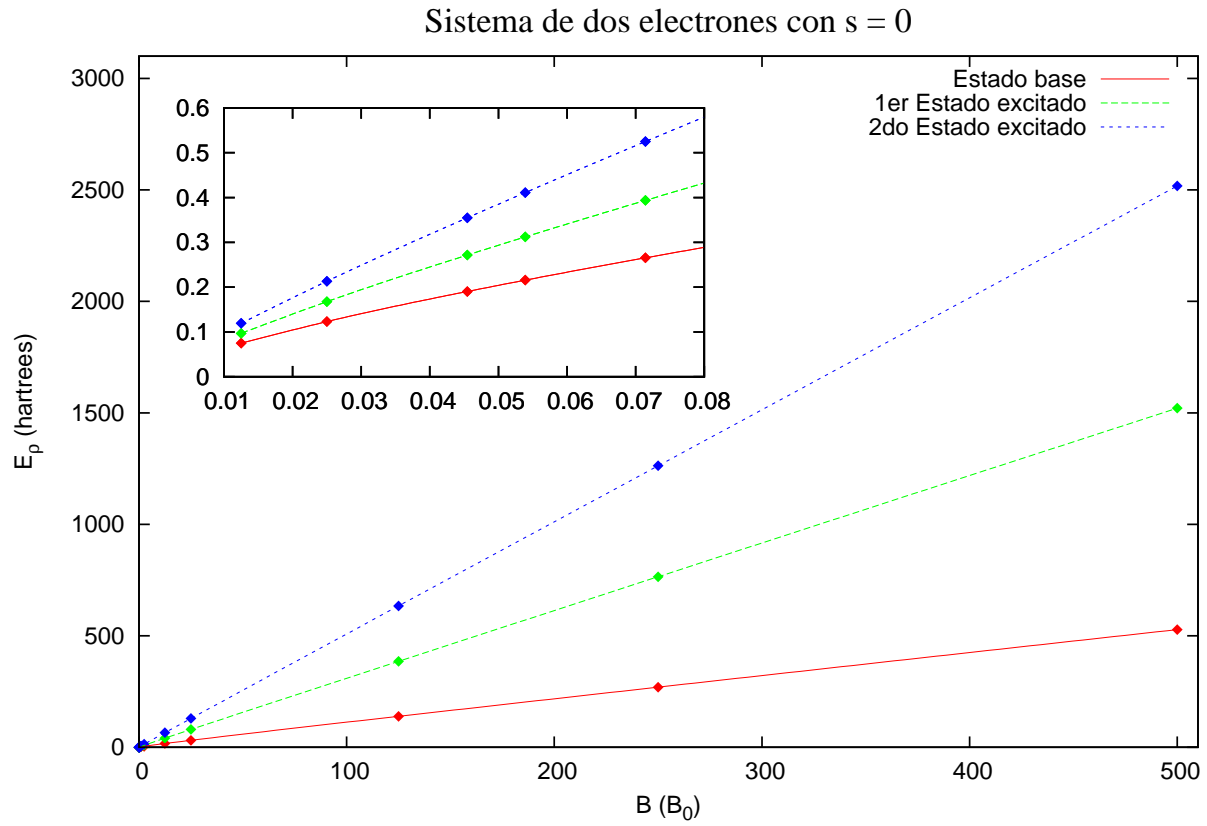


Figura 2.5: Sistema de dos electrones: los niveles más bajos de energía, con  $s = 0$ , como función del campo magnético  $B$  con  $B_0 = 4.701 \times 10^9 G$ .

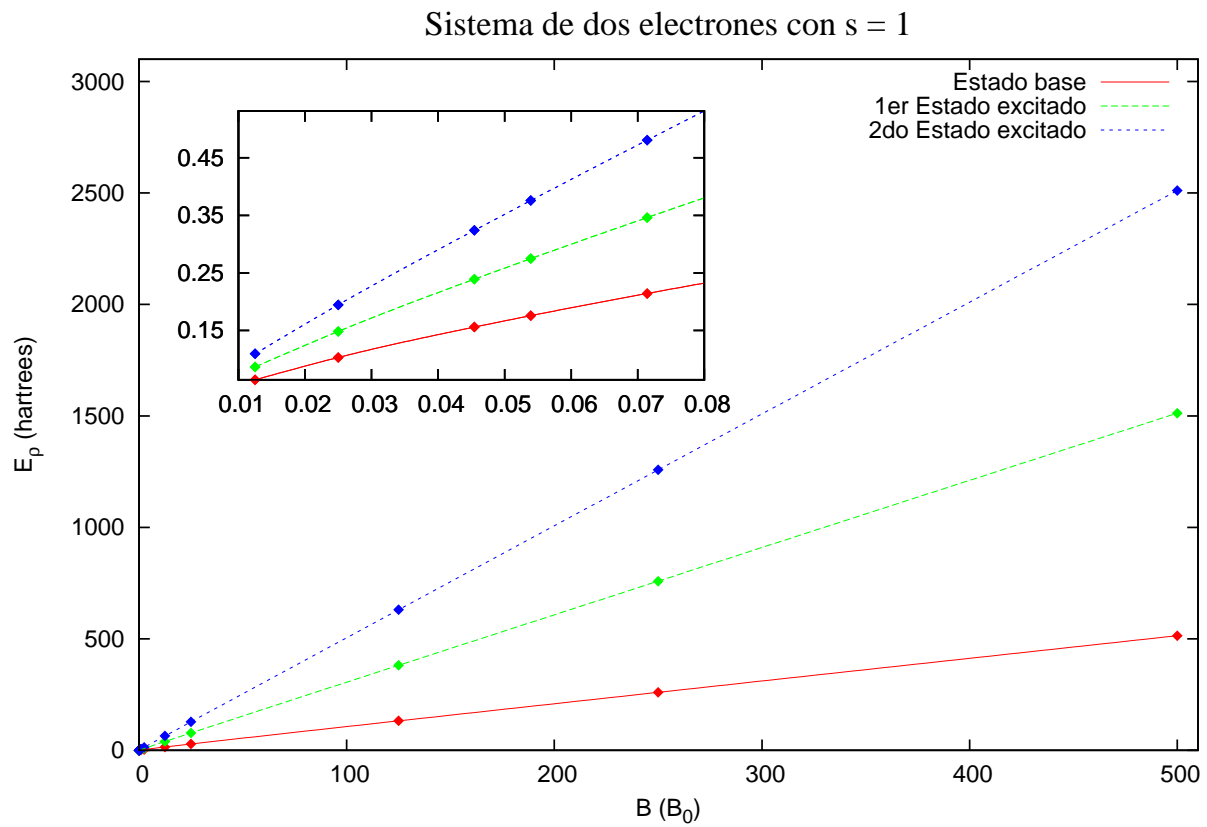


Figura 2.6: Sistema de dos electrones: los niveles más bajos de energía, con  $s = 1$ , como función del campo magnético  $B$  y  $B_0 = 4.701 \times 10^9 G$ .

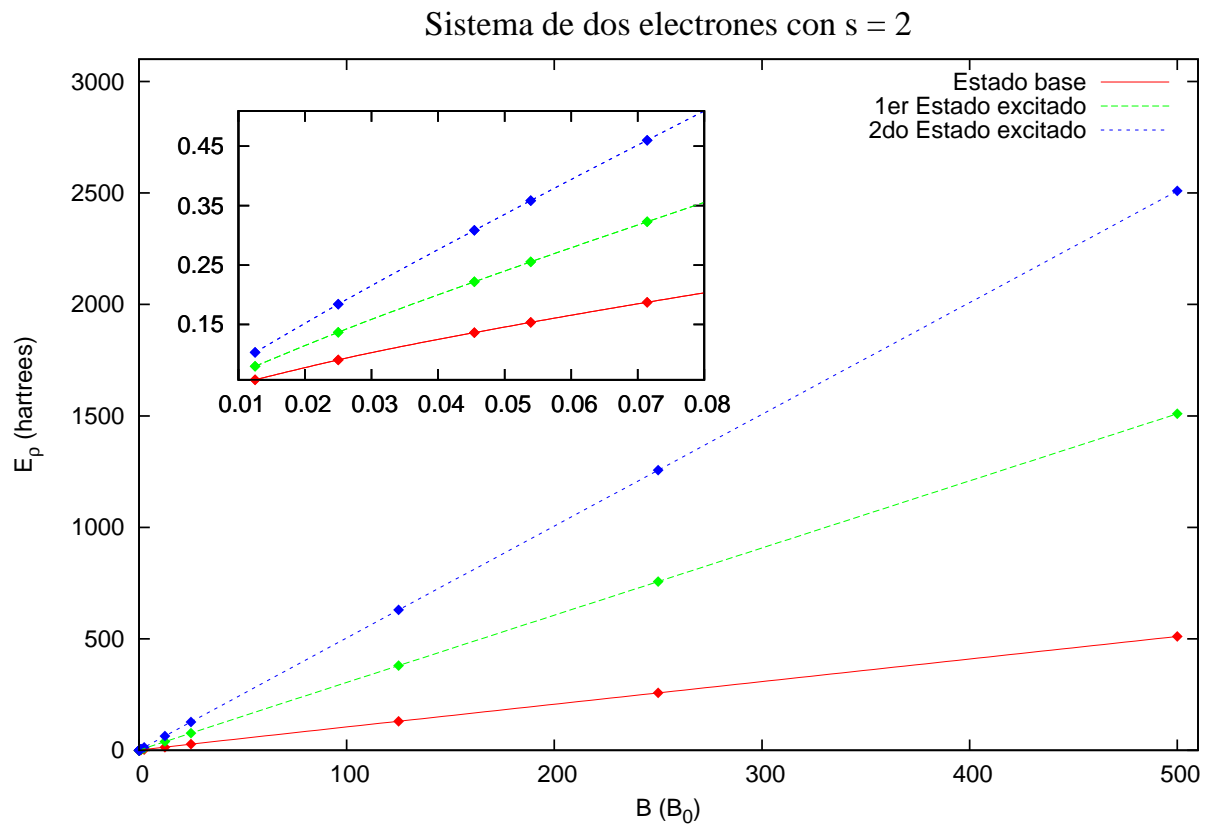


Figura 2.7: Sistema de dos electrones: los niveles más bajos de energía, con  $s = 2$ , como función del campo magnético  $B$  y  $B_0 = 4.701 \times 10^9 G$ .

**Sistema de dos electrones ( $e_c = 0$ ). Energía  $E_\rho$  del movimiento relativo**

$B (B_0)$	$E_\rho$		
	$s = 0$	$s = 1$	$s = 2$
$\frac{1}{80}$	0.0748326441(3)	0.0642857285(2)	0.05697827291(4)
$\frac{1}{40}$	0.12313258158(5)	0.1031020(7)	0.090532124234(3)
$\frac{1}{22}$	0.19027307879(3)	0.155914269(3)	0.13636363636363*
$\frac{1}{10+\sqrt{73}}$	0.2157031488418*	0.17572661(6)	0.1536438753898(7)
$\frac{1}{14}$	0.26541068608(4)	0.2142857142(7)	0.187419053899(5)
$\frac{1}{6}$	0.5*	0.395527795(8)	0.3484374354981(3)
$\frac{1}{5}$	0.573970670(3)	0.45284939(5)	0.4*
$\frac{1}{4}$	0.6801405(7)	0.53543795(4)	0.4747145722810(7)
$\frac{1}{3}$	0.84773000(8)	$\frac{2}{3}$ *	0.594292534436(5)
$\frac{1}{10-\sqrt{73}}$	1.48626025(8)	1.17648943(2)	1.065706008677(1)
1	2.0*	1.596498881(6)	1.45929137837(3)
$\frac{5}{2}$	4.19942226(0)	3.459757282(1)	3.23226037856(0)
$\frac{25}{2}$	16.616100476(1)	14.683577109(5)	14.150653782104(0)
25	30.942950650(3)	28.1010717338(2)	27.338904226984(3)
125	138.676904357(0)	131.97372337706(2)	130.2435683148197(5)
250	269.478147780(8)	259.8757303773(5)	257.4201155478(7)
500	527.6843872(2)	513.97983895(2)	510.49822676599(4)

Tabla 2.1: Energía  $E_\rho$  del estado base en Hartrees (ver (2.15)), la corrección  $E_2$  (B.6) se indica con un número en paréntesis; campo magnético en unidades atómicas efectivas con  $B_0 = 4.701 \times 10^9 G$ . Las eigenfunciones exactas están marcadas por \*.

**Sistema de dos electrones ( $e_c = 0$ ). Energía  $E_\rho$  del movimiento relativo**

$B (B_0)$	$E_\rho$		
	$s = 0$	$s = 1$	$s = 2$
$\frac{1}{80}$	0.09699(2)	0.08671439(5)	0.079897218(2)
$\frac{1}{40}$	0.16765(4)	0.14841894(0)	0.1370070010(2)
$\frac{1}{22}$	0.27156(1)	0.23916872(8)	0.2218773676(5)
$\frac{1}{10+\sqrt{73}}$	0.31225(8)	0.2748122(8)	0.2554304488(1)
$\frac{1}{14}$	0.39356(7)	0.346241372(2)	0.32295527422(2)
$\frac{1}{6}$	0.80103(3)	0.708595501(3)	0.66922392903535(3)
$\frac{1}{5}$	0.935800(5)	0.8298538863(2)	0.785980199872(5)
$\frac{1}{4}$	1.133400(7)	1.00868104442(1)	0.958687644351(5)
$\frac{1}{3}$	1.4539363(1)	1.3009640149(4)	1.24197319573(7)
$\frac{1}{10-\sqrt{73}}$	2.7472598141*	2.4990089725(0)	2.41064828188(4)
1	3.84698944(5)	3.532376896(3)	3.42395547396(2)
$\frac{5}{2}$	8.8931012(6)	8.350874458(0)	8.17427228881(6)
$\frac{25}{2}$	40.732242(5)	39.422380852(1)	39.0162273893(0)
25	79.6096972(1)	77.725353318(1)	77.1471465895(1)
125	385.4205625(3)	381.114147747(2)	379.80978632347(0)
250	764.774066(8)	758.653457765(8)	756.80496202143(4)
500	1520.9305898(5)	1512.244591054(3)	1509.62656921827(3)

Tabla 2.2: Energía  $E_\rho$  del primer estado excitado en Hartrees (ver (2.15)), la modificación debida a la corrección  $E_2$  (B.6) se indica con un número en paréntesis; campo magnético en unidades atómicas efectivas con  $B_0 = 4.701 \times 10^9 G$ . Las eigenfunciones exactas están marcadas por \*.

**Sistema de dos electrones ( $e_c = 0$ ). Nodo del primer estado excitado**

$B (B_0)$	$s = 0$	$s = 1$	$s = 2$
	$f_0 + f_1$	$f_0 + f_1$	$f_0 + f_1$
$\frac{1}{80}$	25.90(9)	26.58(2)	28.176(4)
$\frac{1}{40}$	16.70(7)	17.369(6)	18.777(4)
$\frac{1}{22}$	11.4(8)	12.127(6)	13.3516(6)
$\frac{1}{10+\sqrt{73}}$	10.3(2)	10.959(8)	12.129(4)
$\frac{1}{14}$	8.66(5)	9.292(1)	10.37153(8)
$\frac{1}{6}$	5.140(8)	5.71201(6)	6.529552(2)
$\frac{1}{5}$	4.59(9)	5.1550(4)	5.920251(6)
$\frac{1}{4}$	4.015(5)	4.551105(7)	5.254933(2)
$\frac{1}{3}$	3.374(3)	3.88152(0)	4.5109(0)
$\frac{1}{10-\sqrt{73}}$	2.19215*	2.61977(7)	3.08710(4)
1	1.7586(5)	2.14286(3)	2.540094(4)
$\frac{5}{2}$	1.0402(5)	1.32279(4)	1.585670(3)
$\frac{25}{2}$	0.4306(8)	0.577399(7)	0.7001600(2)
25	0.29835(8)	0.4058732(1)	0.4935730(1)
125	0.129638(2)	0.1800643(1)	0.21982542(2)
250	0.091021(2)	0.1270810(4)	0.15528769(7)
500	0.064036(5)	0.08973786(4)	0.109728751(2)

Tabla 2.3: Primer estado excitado: evolución del nodo  $f$  en a.u., la modificación debida a la primera corrección  $f_1$  (B.8) se indica con un número en paréntesis con  $B_0 = 4.701 \times 10^9 G$ .

**Sistema de dos electrones ( $e_c = 0$ ). Energía  $E_\rho$  del movimiento relativo**

$B (B_0)$	$E_\rho$		
	$s = 0$	$s = 1$	$s = 2$
$\frac{1}{80}$	0.11956(7)	0.109535(4)	0.10313548(6)
$\frac{1}{40}$	0.21312(5)	0.1945971(7)	0.184110892(4)
$\frac{1}{22}$	0.35476(4)	0.3240510(8)	0.308461(1)
$\frac{1}{10+\sqrt{73}}$	0.41115(2)	0.3758344(6)	0.358451838(0)
$\frac{1}{14}$	0.52496(2)	0.4807512(4)	0.460041855(2)
$\frac{1}{6}$	1.1106(5)	1.02716875(5)	0.99292908(0)
$\frac{1}{5}$	1.30820(5)	1.21327129(4)	1.175274255(2)
$\frac{1}{4}$	1.60027(4)	1.48960942(5)	1.446517136(8)
$\frac{1}{3}$	2.07891(0)	1.94488148(7)	1.89431649(7)
$\frac{1}{10-\sqrt{73}}$	4.04885(6)	3.83779886(5)	3.762927107(2)
1	5.753021(2)	5.48923820(0)	5.397803046(8)
$\frac{5}{2}$	13.721761(2)	13.279436628(1)	13.1317958068(2)
$\frac{25}{2}$	65.2941228(0)	64.255403826(2)	63.9187675993(7)
25	128.9708709(1)	127.486713200(1)	127.0084693311(5)
125	633.9344238(3)	630.572977759(0)	629.4971396326(2)
250	1262.6530447(5)	1257.885573370(5)	1256.3619510814(0)
500	2517.9117379(2)	2511.156076611(4)	2508.9991935583(2)

Tabla 2.4: Energía  $E_\rho$  del segundo estado excitado en Hartrees (ver (2.15)), la modificación debida a la corrección  $E_2$  (B.6) se indica con un número en paréntesis; campo magnético en unidades atómicas efectivas con  $B_0 = 4.701 \times 10^9 G$ .

**Sistema de dos electrones ( $e_c = 0$ ). Nodos  $f^{a(b)}$  (a.u.) del 2<sup>do</sup> estado excitado**

$B (B_0)$	$s = 0$			$s = 1$			$s = 2$		
	$f_0^a + f_1^a$	$f_0^b + f_1^b$	$f_0^a + f_1^a$	$f_0^b + f_1^b$	$f_0^a + f_1^a$	$f_0^b + f_1^b$	$f_0^a + f_1^a$	$f_0^b + f_1^b$	$f_0^a + f_1^a + f_0^b + f_1^b$
$\frac{1}{80}$	23.2(7)	34.5(3)	21.6(5)	35.(1)	23.(2)	36.(6)			
$\frac{1}{10+\sqrt{73}}$	8.106(4)	14.66(4)	8.7842(2)	15.27(2)	9.9443(6)	16.343(7)			
$\frac{1}{14}$	6.772(8)	12.4740(7)	7.433(5)	13.0649(7)	8.49582(3)	14.0483(2)			
$\frac{1}{4}$	3.080(2)	6.13614(8)	3.6239(6)	6.62061(8)	4.29523(3)	7.247648(1)			
$\frac{1}{10-\sqrt{73}}$	1.6672(2)	3.51393(1)	2.08400(4)	3.88641(7)	2.52167(5)	4.29770(9)			
1	1.3354(6)	2.86651(3)	1.70448(8)	3.196815(4)	2.07459(5)	3.54524(8)			
$\frac{5}{2}$	0.789170(8)	1.75798(5)	1.052268(9)	1.994351(6)	1.294858(6)	2.22353(7)			
25	0.22726581(9)	0.533587(3)	0.323033(7)	0.620201(9)	0.40300(7)	0.6961070(5)			
250	0.069543019(7)	0.16637(7)	0.10117071(2)	0.1950616(7)	0.126792(1)	0.219418(3)			
500	0.048949757(6)	0.1174175(6)	0.07144426(4)	0.1378271(5)	0.0895932(8)	0.15508(4)			

Tabla 2.5: Modificación al nodo de la eigenfunción debida a la primera corrección  $f_1$  (B.8) es indicada por el número en paréntesis; campo magnético en unidades atómicas efectivas con  $B_0 = 4.701 \times 10^9 G$ .



## 2.2.2. Sistema con $q = 0$ : átomo en reposo ( $\mathbf{K} = 0$ )

### 2.2.2.1. Caso $\mathbf{K} = 0$ : Sistema en reposo

#### Comportamiento asintótico

En el caso de un sistema neutro,  $(e, m_1, -e, m_2)$ , mediante un análisis de (2.39), obtenemos que

$$p = 1 + c_1 \rho + c_2 \rho^2 + \dots, \quad \rho \rightarrow 0, \quad (2.53)$$

donde

$$c_1 = -\frac{2e^2 m_r}{1 + 2|s|},$$

$$c_2 = \frac{1}{2(4s^2 + 6|s| + 2)} \left[ 4e^4 m_r^2 + (1 + 2|s|) \left( \frac{eB(1 + |s| - \frac{|m_2 - m_1|}{M}s)}{c} - 2Em_r \right) \right],$$

la cual es, en efecto, la expansión perturbativa alrededor del mínimo del potencial (funnel-type potential).

Por otro lado, a distancias grandes  $\rho \rightarrow \infty$  (expansión WKB)  $p$  tiene la forma

$$p = \rho^\beta \left( 1 + \frac{C_1}{\rho} + \frac{C_2}{\rho^2} + \dots \right), \quad \beta = \frac{2cEm_r}{Be} + \frac{|m_2 - m_1|}{M} s - |s| - 1, \quad (2.54)$$

donde

$$C_1 = -\frac{2cem_r}{B},$$

$$C_2 = -\frac{c}{2B^3 e^3 M^2} \left[ 4c^2 E^2 m_1^2 m_2^2 - 4Bce m_1 m_2 (e^4 m_1 m_2 + E\{M - |m_2 - m_1|s\}) \right. \\ \left. + B^2 e^2 (M^2 - 2M|m_2 - m_1|s - 4m_1 m_2 s^2) \right]. \quad (2.55)$$

#### Energía del estado base: comportamiento asintótico

Consideremos la energía  $E_0$  del estado base como función del campo magnético. Para campos magnéticos pequeños podemos desarrollar una teoría perturbativa en potencias de  $B$  en la ec. (2.30), tomando la función hidrogenoide como aproximación de orden cero, y obtener que su comportamiento está dado por

$$E_0 = -2m_r e^4 + \frac{3}{64c^2 e^2 m_r^3} B^2 + \dots,$$

y para campos grandes, considerando el potencial Coulombiano como una perturbación, tenemos que

$$E_0 = \frac{eB}{2cm_r} - \sqrt{\frac{e^5\pi}{2c}} B^{1/2} + \dots$$

### 2.2.2.2. Aproximaciones: funciones variacionales

Siguiendo la misma estrategia que en el caso con  $e_c = 0$ , hacemos una interpolación para  $p$ , entre la teoría perturbativa (2.53) y la expansión WKB (2.54) tal que para ciertos valores del campo magnético se reproduzcan las soluciones exactas (soluciones cuasi-exactamente-solubles) de la ec. (2.39). Las interpolaciones más simples para los estados de menor energía están dadas, como en el caso con  $e_c = 0$ , por (2.50)-(2.52).

### 2.2.2.3. Resultados

En esta sección se presentan los resultados para el átomo de Hidrógeno. Otros sistemas neutros se pueden analizar a través de las relaciones de escalamiento (2.43). Los resultados de los estados más bajos de energía ( $n, s$ ) con números cuánticos  $n = 0, 1, 2$  y  $s = 0, 1, 2$  son presentados en las Tablas F.23 - 2.10.

Una observación inmediata es que las energías de las funciones variacionales (2.50), (2.51), (2.52) son muy precisas, ver Tablas F.23, F.24, F.26. Se muestran los valores de los nodos en las Tablas F.25, 2.10. Los parámetros óptimos dependen suavemente de la variación del campo magnético. En la Fig. 2.8 se muestra el comportamiento del parámetro  $\alpha_0$  en (2.50).

Para el estado base, en la aproximación de Born-Oppenheimer,  $m_1 \rightarrow \infty$ , podemos comparar nuestros resultados con los realizados en el llamado Asymptotic Iteration Method [51], ver Tabla 2.11: nuestras energías variacionales son sistemáticamente más bajas.

Similarmente al caso con  $e_c = 0$ , podemos preguntarnos sobre qué tan exactos o precisos son los resultados variacionales. Nuevamente dentro del marco de una teoría perturbativa convergente respondemos a esta cuestión (ver Apéndice B).

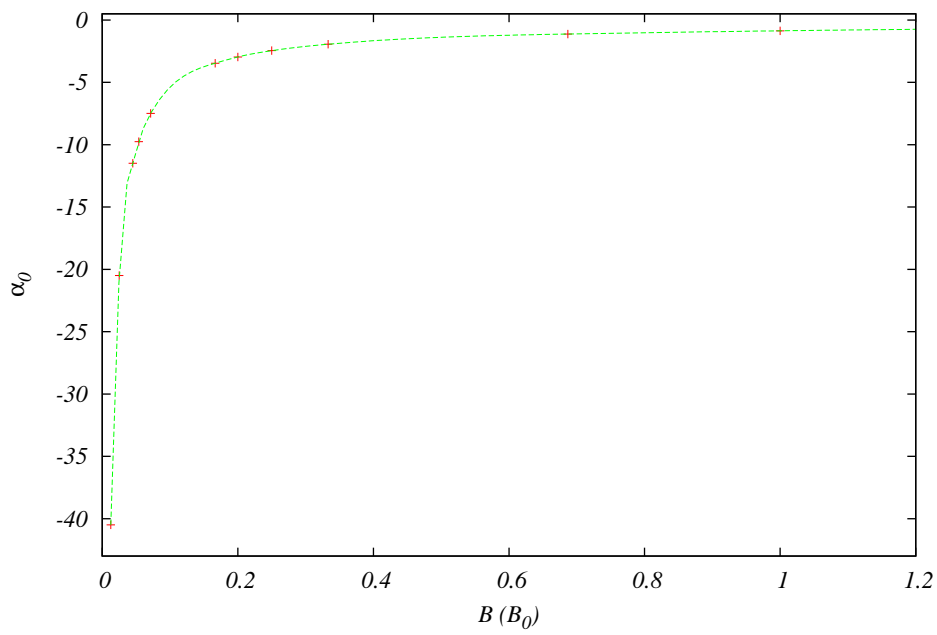


Figura 2.8: Estado base del átomo de Hidrógeno en  $2D$ : valor óptimo del parámetro  $\alpha_0$  en (2.50) vs campo magnético  $B$  .

Un análisis de la primera corrección a la eigenfunción nos hace concluir que las funciones de prueba (2.50), (2.51), (2.52) con los parámetros óptimos proporcionan una aproximación uniforme y con alta precisión. Localmente, brinda por lo menos 3-5 dígitos significativos en todo el rango de campos magnéticos considerado (ver Fig. 2.9). Es importante mencionar que en el dominio en el cual la contribución a la energía  $\langle \psi_{trial} \mathcal{H} \psi_{trial} \rangle$  es dominante, el número de cifras significativas se incrementa a 9-10.

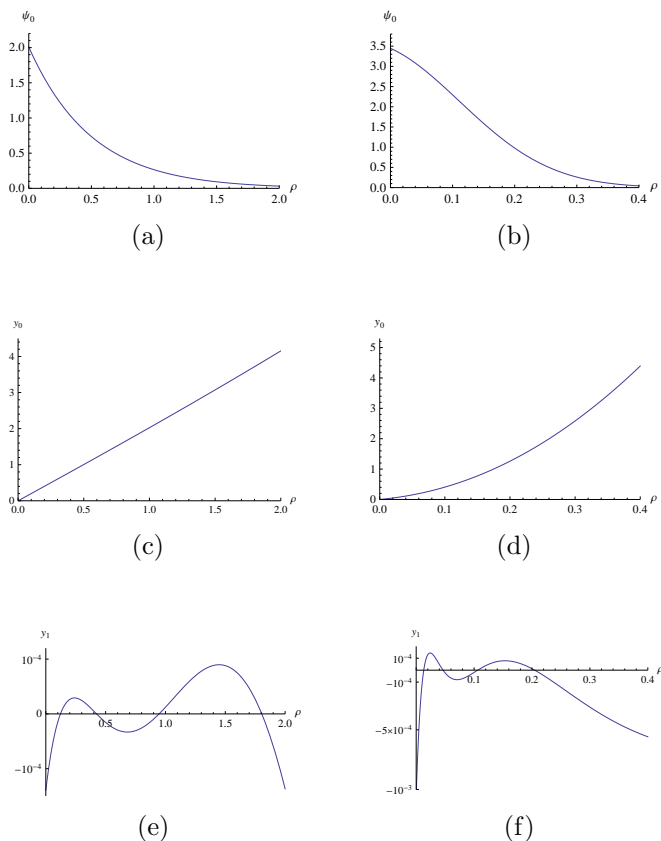


Figura 2.9: Estado base del átomo de Hidrógeno con  $s = 0$ ,  $B = \frac{1}{5} B_0$  (izquierda) y  $B = 25 B_0$  (derecha),  $B_0 = 9.391766 \times 10^9 G$ : (a)-(b) eigenfunción (2.36), con prefactor (2.50), tomada como aproximación de orden cero  $\psi \equiv e^{-\phi_0}$ , (c)-(d)  $y_0(\rho) = (\phi_0)'$  y (e)-(f) la primera corrección  $y_1(\rho)$  (ver (B.5)).

En el caso del Positronio, las Figs. 2.10 - 2.11 muestran el valor de expectación de las integrales  $I_{0,|s|}$  e  $I_{1,|s|}$  con  $s = 0, 1, 2$ , ver (2.44). Notar que para  $B_s = \frac{1}{1+2|s|} B_0$  el valor de expectación  $\langle I_{1,|s|} \rangle$  se anula, consecuencia de la aparición de soluciones analíticas en (2.39) para  $n = 1$ ,  $I_{1,|s|} \psi = 0$ .

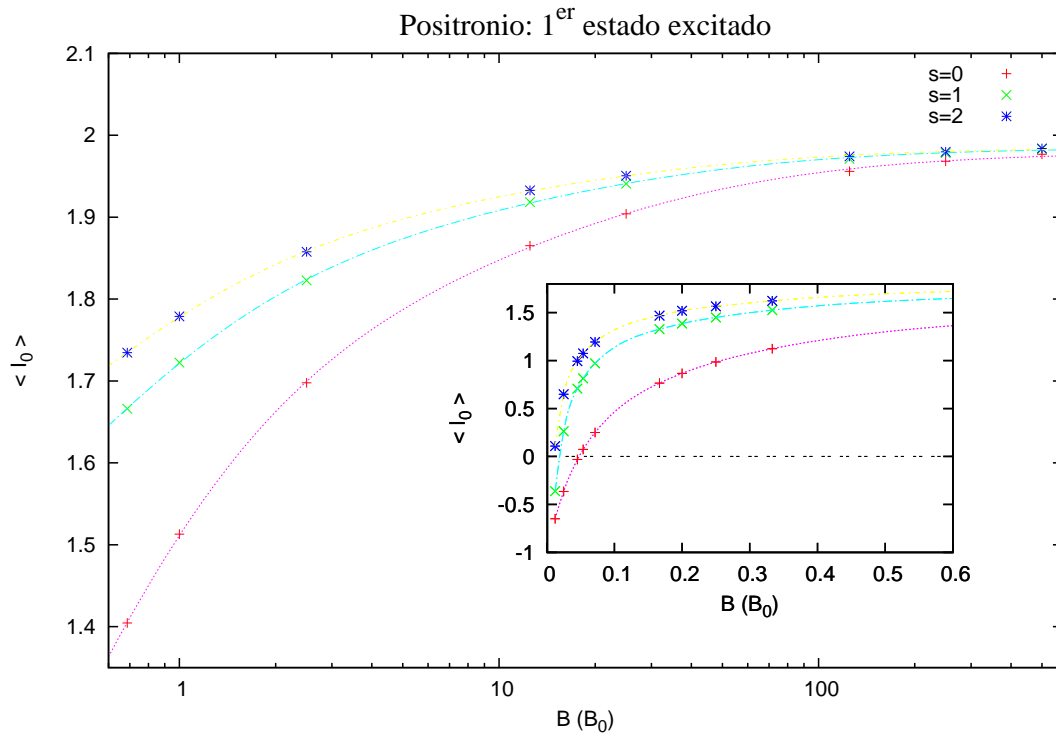


Figura 2.10: Valor de expectación  $\langle I_{0,|s|} \rangle$ , ver (2.44), con  $s = 0, 1, 2$  vs campo magnético  $B$  ( $B_0 = 2.3505 \times 10^9 G$ ).

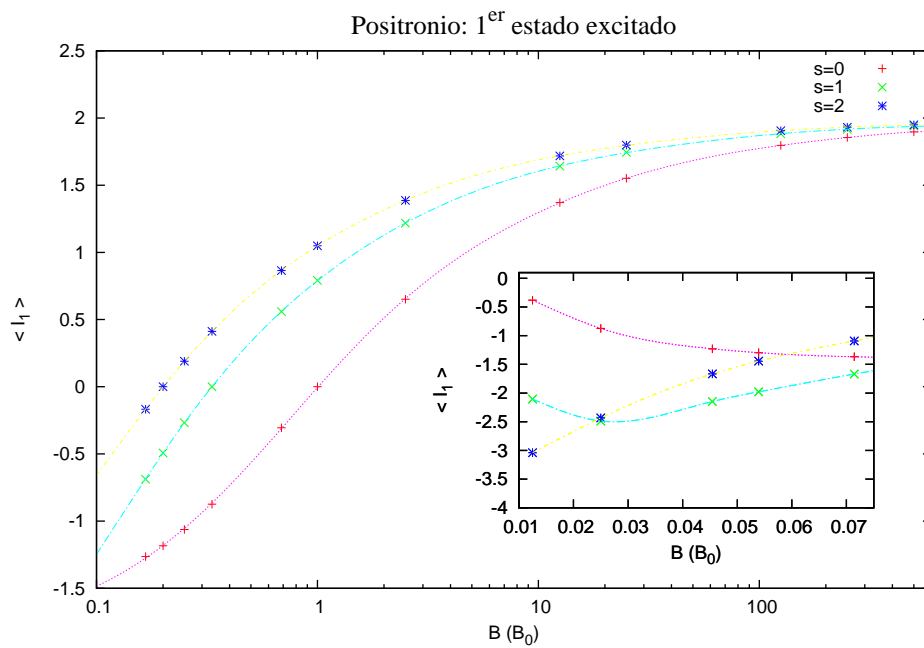


Figura 2.11: Valor de expectación  $\langle I_{1,|s|} \rangle$ , ver (2.44), con  $s = 0, 1, 2$  vs campo magnético  $B$ . Si  $B = \frac{1}{1+2|s|} B_0$ , existen soluciones analíticas en (2.39) con  $n = 1$  y por lo tanto  $\langle I_{1,|s|} \rangle$  se anula ( $B_0 = 2.3505 \times 10^9 G$ ).

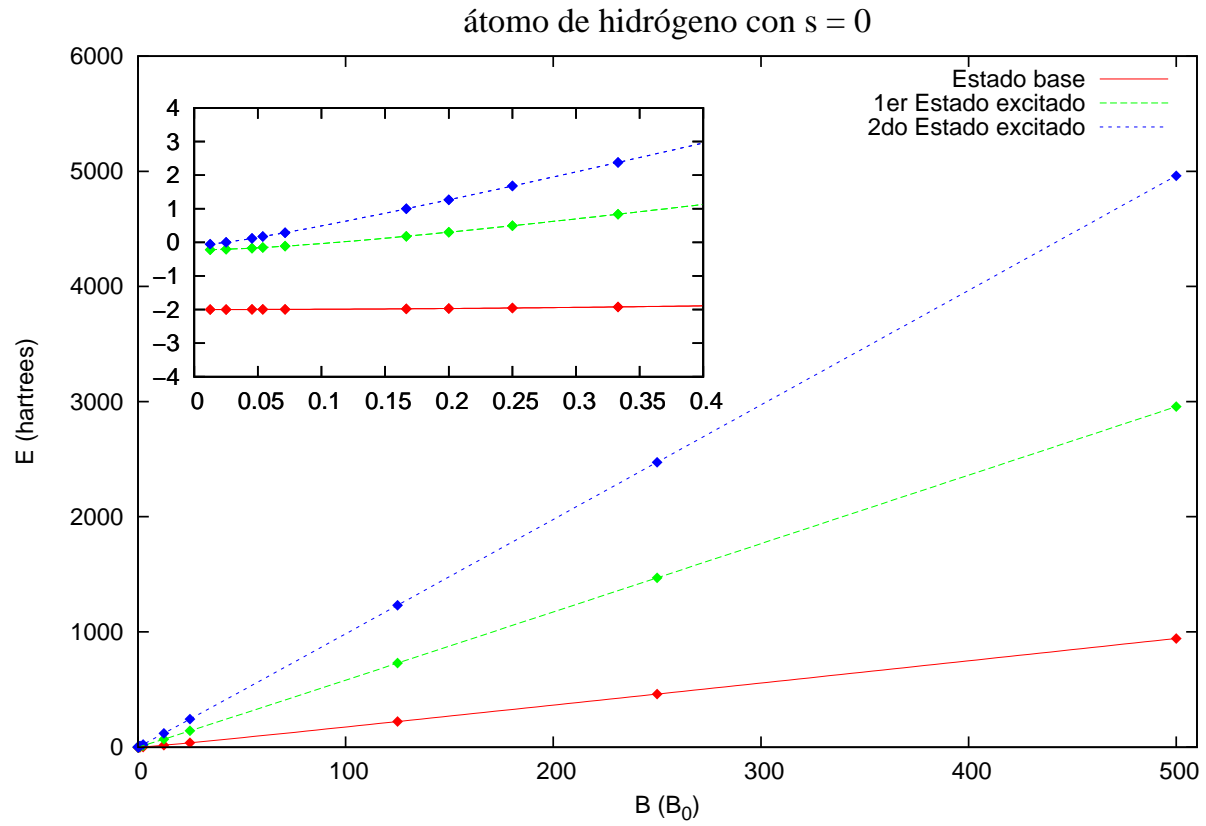


Figura 2.12: Átomo de hidrógeno: los tres niveles más bajos de energía, para  $s = 0$ , como función del campo magnético  $B$  ( $B_0 = 9.391766 \times 10^9 G$ ).

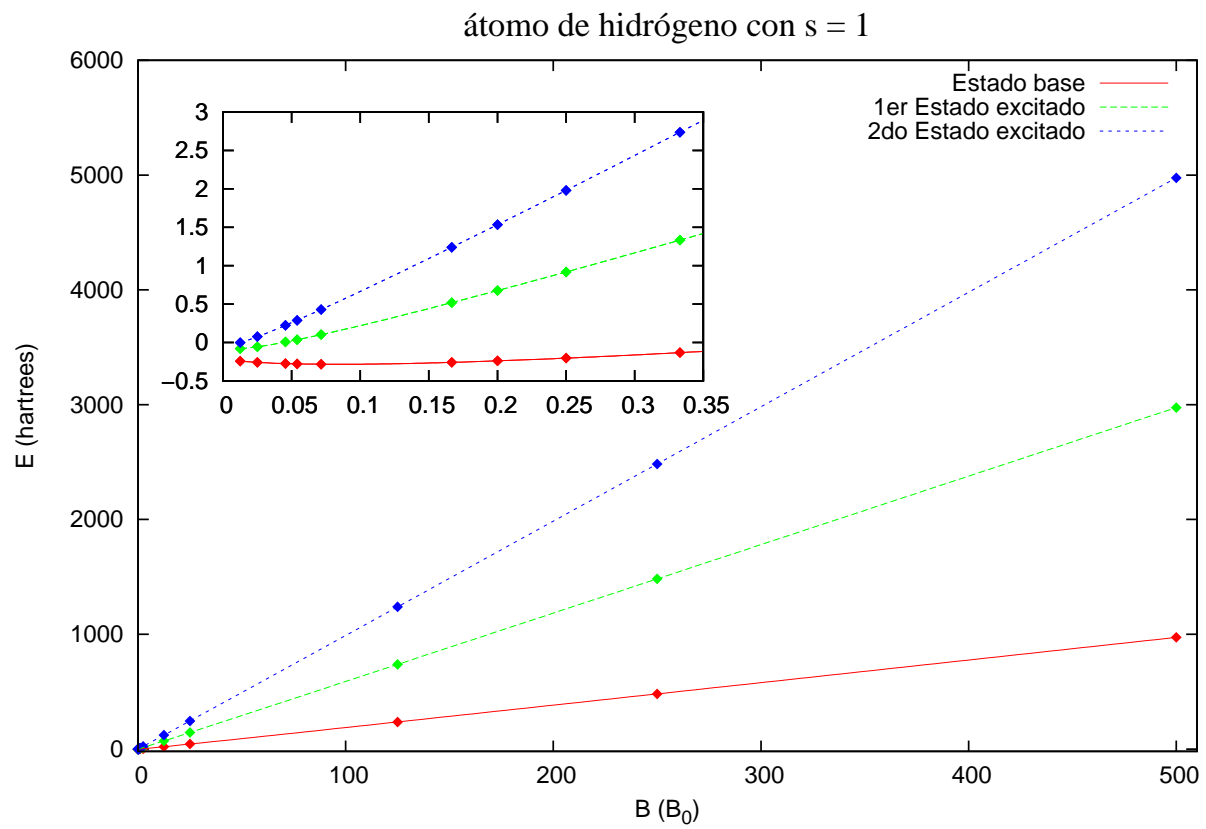


Figura 2.13: Átomo de hidrógeno: los tres niveles más bajos de energía, para  $s = 1$ , como función del campo magnético  $B$  ( $B_0 = 9.391766 \times 10^9 G$ ).



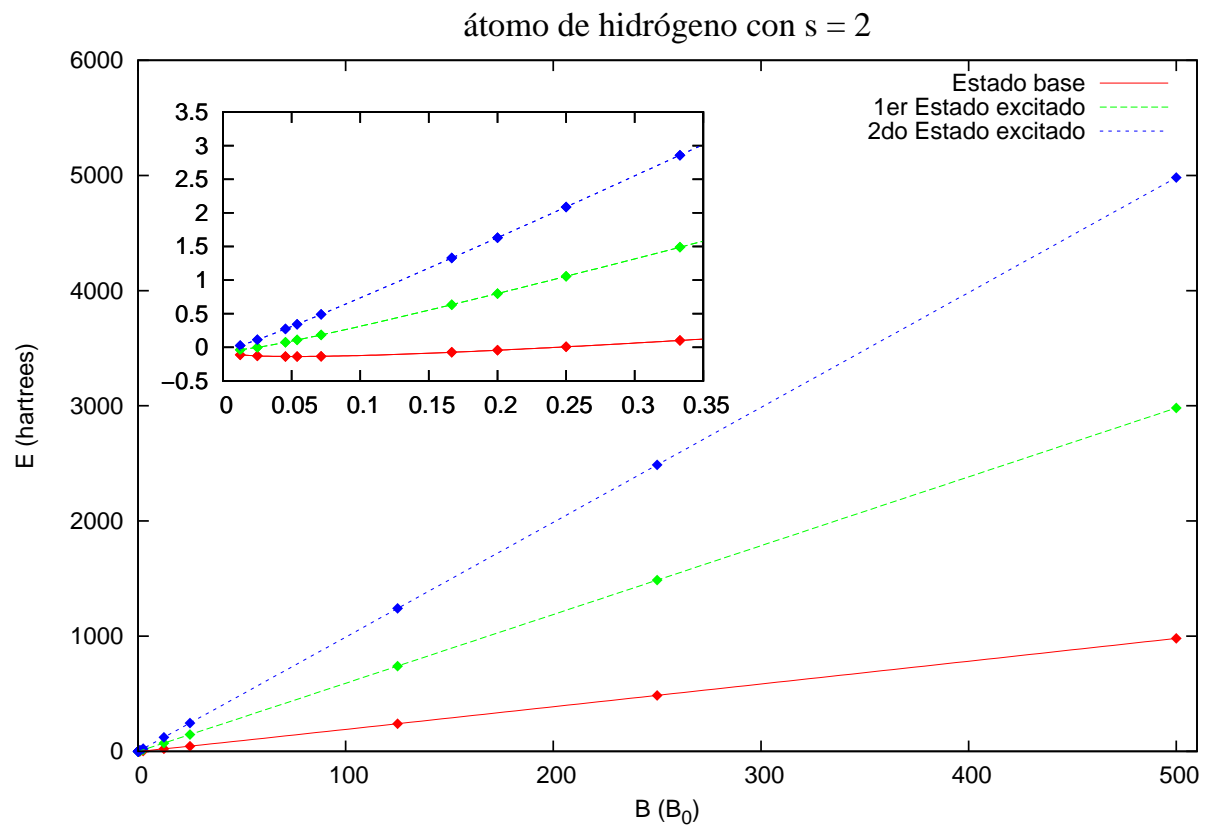


Figura 2.14: Átomo de hidrógeno: los tres niveles más bajos de energía, para  $s = 2$ , como función del campo magnético  $B$  ( $B_0 = 9.391766 \times 10^9 G$ ).

Átomo de Hidrógeno ( $q = 0$ ) con  $K = 0$ . Energía total  $E$

$B (B_0)$	$E$		
	$s = 0$	$s = 1$	$s = 2$
$\frac{1}{80}$	-1.99879415981(2)	-0.24362779(6)	-0.113195431(5)
$\frac{1}{40}$	-1.9984430154(9)	-0.259036915(9)	-0.1280256740(7)
$\frac{1}{22}$	-1.99736515(6)	-0.274591392(4)	-0.13667596638(9)
$\frac{1}{10+\sqrt{73}}$	-1.996736659(3)	-0.27845077(5)	-0.13709579369(7)
$\frac{1}{14}$	-1.99510269(8)	-0.282908684(7)	-0.13426953513(7)
$\frac{1}{6}$	-1.97852822(1)	-0.259169175(9)	-0.0744506106(7)
$\frac{1}{5}$	-1.96980803(9)	-0.239737216(2)	-0.0440478620(8)
$\frac{1}{4}$	-1.9540953(6)	-0.204134835(5)	0.0067791680(5)
$\frac{1}{3}$	-1.9214286(5)	-0.1324163386(5)	0.1013342701(0)
$\frac{1}{10-\sqrt{73}}$	-1.711958(5)	0.2635196563(2)	0.573818518(4)
1	-1.4587925(9)	0.6770274379(6)	1.040528063(2)
$\frac{5}{2}$	0.1847432(2)	2.952974280(0)	3.4998230(1)
$\frac{25}{2}$	15.3697251(5)	20.51777694(3)	21.69669571(0)
25	36.7079218(0)	43.69741030(5)	45.3617446(1)
125	221.14240736(2)	236.0651014(3)	239.881963(3)
250	459.4105028(2)	480.4001931(5)	485.939216(8)
500	942.73495448(3)	972.4683323(0)	980.60230(1)

Tabla 2.6: Energía  $E$  del estado base en Hartrees (ver (2.33)), la modificación debida a la segunda corrección  $E_2$  (B.6) se indica con un número en paréntesis; campo magnético en unidades atómicas efectivas,  $B_0 = 9.391766 \times 10^9 G$ .

Átomo de Hidrógeno ( $q = 0$ ) con  $K = 0$ . Energía total  $E$

$B (B_0)$	$E$		
	$s = 0$	$s = 1$	$s = 2$
$\frac{1}{80}$	-0.217635(9)	-0.0811667(6)	-0.0374540(5)
$\frac{1}{40}$	-0.2051751(6)	-0.0563387(9)	-0.00177977(5)
$\frac{1}{22}$	-0.171909(7)	0.0057230(7)	0.073899775(0)
$\frac{1}{10+\sqrt{73}}$	-0.154594(6)	0.0356050(1)	0.108450073(3)
$\frac{1}{14}$	-0.113832(9)	0.10207154(5)	0.183447316(5)
$\frac{1}{6}$	0.180603(3)	0.518754514(2)	0.633897911275(5)
$\frac{1}{5}$	0.30169(0)	0.676026877(6)	0.7995645073489*
$\frac{1}{4}$	0.4944103(1)	0.918148254(1)	1.05509437436(0)
$\frac{1}{3}$	0.837351(0)	1.3326075122*	1.4886452575(4)
$\frac{1}{10-\sqrt{73}}$	2.45501566(2)	3.178464838(5)	3.393569013(3)
1	3.997822536*	4.86961381(1)	5.1255935499(3)
$\frac{5}{2}$	11.8771174(3)	13.231202656(3)	13.6268591463(3)
$\frac{25}{2}$	68.152885(0)	71.078388655(1)	71.954727704(5)
25	140.356605(8)	144.459685385(0)	145.707155528(6)
125	728.412926(6)	737.576787437(2)	740.49341090(5)
250	1469.302175(1)	1482.36469154(6)	1486.6410268(2)
500	2956.17917(8)	2974.91385507(8)	2981.2724746(3)

Tabla 2.7: Energía  $E$  del primer estado excitado en Hartrees (ver (2.33)), la modificación debida a la segunda corrección  $E_2$  (B.6) se indica con un número en paréntesis; campo magnético en unidades atómicas efectivas,  $B_0 = 9.391766 \times 10^9 G$ . Las energías que corresponden a soluciones exactas se marcan con \* .

**Átomo de Hidrógeno ( $q = 0$ ) con  $K = 0$ . Nodo del primer estado  
excitado**

$B (B_0)$	$s = 0$	$s = 1$	$s = 2$
	$f_0 + f_1$	$f_0 + f_1$	$f_0 + f_1$
$\frac{1}{80}$	0.7(4)	3.59(9)	7.0209(8)
$\frac{1}{40}$	0.748222(0)	3.345(1)	5.770(3)
$\frac{1}{22}$	0.7439(9)	2.9812(6)	4.668(2)
$\frac{1}{10+\sqrt{73}}$	0.741(8)	2.85769(4)	4.3700(7)
$\frac{1}{14}$	0.736(8)	2.64302(1)	3.90417(1)
$\frac{1}{6}$	0.7041(9)	1.98125(0)	2.71431(0)
$\frac{1}{5}$	0.6922(5)	1.84704(2)	2.501361655*
$\frac{1}{4}$	0.674(7)	1.690022(6)	2.2604603(0)
$\frac{1}{3}$	0.6471(1)	1.500816993*	1.9802548(2)
$\frac{1}{10-\sqrt{73}}$	0.55581(3)	1.09590(5)	1.410159(8)
1	0.500270665*	0.92442(8)	1.178530(8)
$\frac{5}{2}$	0.36421(3)	0.6026555(7)	0.756376(0)
$\frac{25}{2}$	0.18375(4)	0.277029(6)	0.342891(7)
25	0.13337(8)	0.19713(2)	0.243231(3)
125	0.061673(2)	0.088898(2)	0.109234(6)
250	0.0439445(7)	0.0629836(7)	0.077317(1)
500	0.0312402(2)	0.0445976(4)	0.054709(7)

Tabla 2.8: Primer estado excitado: evolución del nodo  $f$  en a.u., la modificación debida a la primera corrección  $f_1$  (B.8) se indica por el número en paréntesis ( $B_0 = 9.391766 \times 10^9 G$ ).

Átomo de Hidrógeno ( $q = 0$ ) con  $K = 0$ . Energía total  $E$

$B (B_0)$	$E$		
	$s = 0$	$s = 1$	$s = 2$
$\frac{1}{80}$	-0.053761(8)	-0.00267077(7)	0.024860663(1)
$\frac{1}{40}$	0.001633(7)	0.07487168(0)	0.1125652633(1)
$\frac{1}{22}$	0.1176832(0)	0.22338150793(6)	0.2727766527706*
$\frac{1}{10+\sqrt{73}}$	0.17099053(2)	0.288844238(8)	0.3421829713(5)
$\frac{1}{14}$	0.2874008(8)	0.428493577359699*	0.489006320917(3)
$\frac{1}{6}$	0.9994556331*	1.2391284239(5)	1.3278640075(8)
$\frac{1}{5}$	1.2661322(1)	1.5333587264(7)	1.62980988910(9)
$\frac{1}{4}$	1.67605782(6)	1.9804015571(6)	2.087281521(1)
$\frac{1}{3}$	2.37806227(8)	2.7361449127(8)	2.8582812169(3)
$\frac{1}{10-\sqrt{73}}$	5.491528597*	6.01868884(1)	6.1903994984(6)
1	8.33980704(9)	8.978510103(0)	9.1840767428(4)
$\frac{5}{2}$	22.38619980(2)	23.39343405(5)	23.714702525(7)
$\frac{25}{2}$	119.183572(1)	121.409837831(9)	122.13070108(7)
25	241.762627(0)	244.90716668(6)	245.93830041(8)
125	1231.296005(7)	1238.4112545(8)	1240.854558(7)
250	2473.182285(5)	2483.3801579(9)	2486.9905782(9)
500	4961.309675(1)	4976.0258668(4)	4981.446188(9)

Tabla 2.9: Energía  $E$  del segundo estado excitado en Hartrees (ver (2.33)), la modificación debida a la segunda corrección  $E_2$  (B.6) está indicada por el número en paréntesis; campo magnético en unidades atómicas efectivas,  $B_0 = 9.391766 \times 10^9 G$ . Las energías que corresponden a soluciones exactas se denotan con \* .

Átomo de Hidrógeno ( $q = 0$ ) con  $K = 0$ . Nodos  $f^{a(b)}$  (a.u.) del  $2^{do}$  estado excitado

$B(B_0)$	$s = 0$		$s = 1$		$s = 2$	
	$f_0^a + f_1^a$	$f_0^b + f_1^b$	$f_0^a + f_1^a$	$f_0^b + f_1^b$	$f_0^a + f_1^a$	$f_0^b + f_1^b$
$\frac{1}{80}$	0.7(3)	4.1(1)	3.(1)	8.4(8)	5.(7)	11.(9)
$\frac{1}{40}$	0.723(2)	3.8(2)	2.87(8)	7.0(3)	4.7(9)	9.1(6)
$\frac{1}{20}$	0.7103(0)	3.441(0)	2.496(0)	5.7(3)	3.8437800*	7.162211258*
$\frac{1}{10+\sqrt{73}}$	0.704(3)	3.309(3)	2.377(4)	5.38(2)	3.593(2)	6.65(0)
$\frac{1}{14}$	0.6930(6)	3.080(3)	2.17831014*	4.82550249*	3.204(1)	5.87(5)
$\frac{1}{6}$	0.63431989828*	2.3673140886*	1.6039(5)	3.377(0)	2.220(6)	3.988(6)
$\frac{1}{5}$	0.6164(9)	2.2(1)	1.491(7)	3.1153(3)	2.045(6)	3.662(1)
$\frac{1}{4}$	0.5922(3)	2.0460(3)	1.3615(8)	2.818(3)	1.8480(3)	3.2961(5)
$\frac{1}{3}$	0.5574(6)	1.8335(6)	1.20614(6)	2.47198(8)	1.618(3)	2.87472(3)
$\frac{1}{10-\sqrt{73}}$	0.4589805381*	1.36608961752*	0.877202(9)	1.76412(8)	1.151(8)	2.02998(3)
1	0.40609(6)	1.162117(2)	0.739001(2)	1.475503(9)	0.9625(4)	1.69113(6)
$\frac{5}{2}$	0.287531(2)	0.769136(5)	0.480869(0)	0.948181(7)	0.617646(0)	1.079389(9)
$\frac{25}{2}$	0.14216347(3)	0.35840020(2)	0.22075161(6)	0.43031012(5)	0.2799747(5)	0.48685198(7)
25	0.102810770(2)	0.255806360(3)	0.157045454(6)	0.30531454(7)	0.19859894(7)	0.344944567(6)
125	0.0473384940(6)	0.11580464450(5)	0.070798731(0)	0.13715803759(9)	0.0891896671(3)	0.1546734540(4)
250	0.033700437982(7)	0.082119553759(6)	0.0501569017(7)	0.09708842652(6)	0.06312912347(2)	0.10943912950(2)
500	0.02394317182217(9)	0.0581835897196(9)	0.035513575575(7)	0.068703348311(1)	0.04467026830(5)	0.0774193669782(5)

Tabla 2.10: Nodos  $f^{a(b)}$  de la función. La modificación a la posición del nodo debida a la primera corrección  $f_1$  (B.8) se denota por el número en paréntesis.

$B$ (a.u.)	$E$	$E^{AIM}$
$\frac{1}{10}$	-1.999531	-1.999530
$\frac{1}{4}$	-1.997079	-1.997078
$\frac{107}{250}$	-1.991490	-1.991490
1	-1.955159	-1.955159

Tabla 2.11: Átomo de Hidrógeno con la masa del protón infinita: Energía  $E$  del estado base (en Hartrees) del presente trabajo en comparación con la energía  $E^{AIM}$  obtenida por A. Soylu *et al.* [51], con  $B_0 = 2.3505 \times 10^9 G$ .

### 2.2.3. Sistema con $q = 0$ : átomo en movimiento ( $\mathbf{K} \neq 0$ )

En esta sección se considera el caso de un sistema neutral (2.33) con Pseudomomento no nulo,  $\mathbf{K} \neq 0$ , i.e. , un átomo en movimiento. La primera observación es que para  $\mathbf{K} \neq 0$ , el momento angular relativo  $\hat{\ell}_z$  no se conserva. En consecuencia, el problema (2.33) no se reduce a uno unidimensional. No tiene lugar ni la factorización de las eigenfunciones de (2.33) ni la presencia de una estructura algebraica subyacente. La ecuación de Schrödinger del sistema viene dada por (2.33)

$$\left[ \frac{(\hat{\mathbf{p}} - e(\mu_2 - \mu_1) \mathbf{A}_\rho)^2}{2m_r} + \frac{(\mathbf{K} - e\mathbf{B} \times \boldsymbol{\rho})^2}{2M} - \frac{e^2}{\rho} \right] \psi_{\mathbf{K}}(\boldsymbol{\rho}) = E \psi_{\mathbf{K}}(\boldsymbol{\rho}). \quad (2.56)$$

#### 2.2.3.1. Teoría perturbativa: Efecto Zeeman

En primer lugar consideramos el caso de  $K$  pequeño y campos magnéticos débiles. En este régimen la interacción de las partículas con el campo magnético  $B$  es una perturbación a los estados hidrogenoides. Concentraremos el análisis en el estado base del sistema y escribimos la función de onda en la forma:

$$\psi = e^{-\Phi(\rho, \varphi)} \quad (2.57)$$

donde la fase  $\Phi(\rho, \varphi)$  no tiene singularidades en el plano real.

Sustituyendo (2.57) con el momento del centro de masa elegido a lo largo del eje  $y$ ,  $\mathbf{K} = (K, \frac{\pi}{2})$ , en la ecuación de Schrödinger (2.56) llegamos a una ecuación tipo Riccati

$$\frac{1}{2m_r} \Delta \Phi - \frac{i e B |\mu_2 - \mu_1|}{2m_r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} - \frac{1}{2m_r} (\nabla \Phi)^2 = \hat{E} - V, \quad (2.58)$$

con un potencial

$$V = \frac{e^2 B^2 \rho^2}{8m_r} - \frac{e B K \rho \cos \varphi}{M} - \frac{e^2}{\rho}, \quad (2.59)$$

donde  $\hat{E} = E - \frac{K^2}{2M}$ . Desarrollamos una teoría perturbativa para las cantidades  $\Phi$  y  $\hat{E}$  de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \Phi &= \sum_{n,k=0}^{\infty} B^n K^k \Phi_{nk}, \\ \hat{E} &= \sum_{n,k=0}^{\infty} B^n K^k \hat{E}_{nk}. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Sustituyendo (2.60) en (2.58) y recolectando los términos de orden  $B^n K^k$ , obtenemos la ecuación:

$$\frac{1}{2m_r} \Delta \Phi_{n,k} - \frac{i e B |\mu_2 - \mu_1|}{2m_r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \Phi_{n-1,k} - \frac{1}{m_r} 2 \nabla \Phi_{0,0} \nabla \Phi_{n,k} = \hat{E}_{nk} - Q_{n,k} \quad (2.61)$$

donde las cantidades  $Q_{n,k}$  desempeñan el papel de un potencial efectivo de perturbación, el cual está dado por las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} Q_{0,0} &= -\frac{e^2}{\rho}, & Q_{1,1} &= -\frac{e \rho \cos \varphi}{M}, & Q_{0,1} &= Q_{1,0} = 0, & Q_{2,0} &= \frac{e^2 \rho^2}{8m_r}, \\ Q_{n,k} &= \sum \nabla \phi_{m,p} \nabla \phi_{n-m,k-p}, \end{aligned} \quad (2.62)$$

la suma se realiza para todo  $m + p > 0$  y  $m + p < n + k$ .



Las ecuaciones (2.61) y (2.62) proporcionan todo lo que se necesita para el cálculo de las correcciones. El resultado final es:

$$\begin{aligned}
\hat{E} = & -2m_r + \frac{3}{64m_r^3} B^2 - \frac{21}{256m_r^3 M^2} B^2 K^2 - \frac{159(4m_r + M\mu^2)^2}{65536m_r^7 M^2} B^4 \\
& + \frac{3(115M\mu^2 - 2062m_r)}{131072m_r^7 M^3} B^4 K^2 + \frac{17877}{1048576m_r^7 M^4} B^4 K^4 \\
& - \frac{1293475M^2\mu^4 + 1624212m_r M\mu^2 - 1816848m_r^2}{805306368m_r^{11} M^4} K^2 B^6 + \dots
\end{aligned} \tag{2.63}$$

Aquí hemos puesto  $e = 1$  y  $\mu = \mu_1 - \mu_2$ . Ya que estamos trabajando dentro del marco de una teoría perturbativa, la región de aplicabilidad de los resultados obtenidos se limita al caso de  $K$  pequeños y campos magnéticos débiles.

$E$ (Hartrees)	H ( $M < \infty$ )	H ( $M \rightarrow \infty$ )	Ps ( $M = 2 a.u.$ )
$\hat{E}_{0,0}$	-1.9989	-2	-1
$\hat{E}_{2,0}$	0.04695	$\frac{3}{64}$	$\frac{3}{8}$
$\hat{E}_{4,0}$	-0.002435	$-\frac{159}{65536}$	$-\frac{159}{512}$
$\hat{E}_{2,2}$	$-2.4344 \times 10^{-8}$	0	$-\frac{21}{128}$
$\hat{E}_{4,2}$	$0.7735 \times 10^{-9}$	0	$-\frac{3093}{8192}$
$\hat{E}_{4,4}$	$1.502 \times 10^{-15}$	0	$\frac{17877}{131072}$

Tabla 2.12: Coeficientes  $\hat{E}_{i,j}$  de la energía  $\hat{E}$  (2.60) del estado base del átomo de Hidrógeno (H) y Positronio (Ps) siendo  $M$  la masa total del sistema. En el caso del hidrógeno se consideran ambos casos, masa del protón finita ( $M < \infty$ ) e infinita ( $M \rightarrow \infty$ ).

Los coeficientes de la fase  $\Phi = \sum_{n,k=0}^{\infty} B^n K^k \Phi_{nk}$ , vienen dados por

$$\begin{aligned} \Phi_{0,0} &= 2 m_r \rho , & \Phi_{1,1} &= -\frac{(3 + 4 m_r \rho) \rho \sin \varphi}{16 m_r M} \\ \Phi_{2,1} &= -\frac{i \mu (51 + 4 m_r \rho (17 + 8 m_r \rho)) \rho \cos \varphi}{1536 m_r^3 M} , & \Phi_{2,0} &= \frac{\rho^2 (4 m_r + M \mu^2)(9 + 8 m_r \rho)}{384 m_r^2 M} \\ \Phi_{0,2} &= \frac{\rho^2 (-99 - 40 m_r \rho + 3(11 + 8 m_r \rho) \cos 2\varphi)}{3072 m_r^2 M^2} . \end{aligned} \tag{2.64}$$

Ahora consideramos valores arbitrarios del campo magnético  $B$  y del Pseudomomento  $K$ .

### Relaciones de escalamiento

Presentamos otra fórmula que relaciona dos sistemas neutrales distintos,  $(e, m_1, m_2)$  y  $(\tilde{e}, \tilde{m}_1, \tilde{m}_2)$ . Haciendo una transformación de escala en (2.56),  $\rho \rightarrow a\rho$ , uno encuentra cierta relación entre los eigenestados. Si se cumplen tanto

$$a = \frac{\tilde{e}^2 \tilde{m}_r}{e^2 m_r},$$

como

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{B}}{\tilde{e}^3 \tilde{m}_r^2} &= \frac{B}{e^3 m_r^2} \\ \frac{\tilde{K}}{(\tilde{m}_1 + \tilde{m}_2) \tilde{e}^2} &= \frac{K}{(m_1 + m_2) e^2} \\ |\tilde{\mu}_2 - \tilde{\mu}_1| &= |\mu_2 - \mu_1|, \end{aligned}$$

entonces la siguiente relación emerge

$$\begin{aligned} \psi_{\mathbf{K}}(\tilde{e}, \tilde{m}_1, \tilde{m}_2, \tilde{B}, \tilde{P}; a\rho, \varphi) &= \psi_{\mathbf{K}}(e, m_1, m_2, B, P; \rho, \varphi), \\ \frac{1}{\tilde{e}^4 \tilde{m}_r} \hat{E}(\tilde{e}, \tilde{m}_1, \tilde{m}_2, \tilde{B}, \tilde{P}) &= \frac{1}{e^4 m_r} \hat{E}(e, m_1, m_2, B, P). \end{aligned} \quad (2.65)$$

### El potencial efectivo y la norma óptima

Ahora, analizamos brevemente el potencial  $V_{eff} = \frac{(\mathbf{K} - e\mathbf{B} \times \rho)^2}{2M} - \frac{e^2}{\rho}$  que aparece en (2.56). En coordenadas cartesianas, poniendo sin pérdida de generalidad  $\mathbf{K} = K \hat{y}$ , tenemos

$$V_{eff} = \frac{K^2}{2M} + \frac{e^2 B^2}{2M}(x^2 + y^2) - \frac{eBK}{M}x - \frac{e^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (2.66)$$

Para todo  $K$ ,  $x = y = 0$  es un mínimo del potencial  $V_{eff}$ , el mínimo de Coulomb. Sin embargo, dependiendo de  $K$ , el potencial puede desarrollar un segundo mínimo localizado a lo largo de la línea perpendicular a la dirección del Pseudomomento. En esta dirección,  $y = 0$ ,  $V_{eff}$  toma la forma

$$V_{eff} = \frac{K^2}{2M} + \frac{e^2 B^2}{2M}x^2 - \frac{eBK}{M}x - \frac{e^2}{|x|}. \quad (2.67)$$

Los puntos estacionarios  $x_0$  de (2.67) obedecen la ecuación cúbica

$$x_0^3 - \frac{K}{eB} x_0^2 + \text{sign}[x_0] \frac{M}{B^2} = 0 . \quad (2.68)$$

Soluciones físicas de (2.68) existen solamente si

$$K \geq K_{saddle} \equiv \left( \frac{27}{4} e^3 B M \right)^{\frac{1}{3}} . \quad (2.69)$$

En  $K_{saddle} = \left( \frac{27}{4} e^3 B M \right)^{\frac{1}{3}}$  ocurre un punto de inflexión en (2.67), el cual se localiza en  $x_{saddle} = \left( \frac{2M}{B^2} \right)^{\frac{1}{3}}$  (independientemente de la carga  $e > 0$  !). Para  $K > K_{saddle}$ , el potencial (2.67) posee dos extremos (ver Fig. 2.15). Para  $B$  fijo y  $K \rightarrow \infty$  se obtiene fácilmente de (2.68) la expresión

$$x_{0,min} \approx \frac{K}{eB} - \frac{e^2 M}{K^2} - \frac{2e^5 B M^2}{K^5} + \dots , \quad (2.70)$$

entonces,  $x_{0,min} \rightarrow \infty$  linealmente y  $V_{eff}(x_{0,min}, 0) \rightarrow 0$  como  $-\frac{B e^3}{K}$ . De manera similar tenemos que

$$x_{0,max} \approx \sqrt{\frac{eM}{KB}} + \frac{e^2 M}{2K^2} + \frac{5\sqrt{e^7 B M^3}}{8K^{\frac{7}{2}}} + \dots , \quad (2.71)$$

es decir,  $x_{0,max} \rightarrow 0$  como  $K^{-\frac{1}{2}}$  y  $V_{eff}(x_{0,max}, 0) \rightarrow \infty$  como  $\frac{K^2}{2M}$ .

El comportamiento de la altura del potencial  $\Delta V = V_{eff}(x_{0,max}, 0) - V_{eff}(x_{0,min}, 0)$  está dada por

$$\Delta V = \frac{K^2}{2M} - \sqrt{\frac{4B e^3 K}{M}} + \frac{3B e^3}{2K} + \sqrt{\frac{B^3 e^9 M}{16 K^5}} + \dots \quad (2.72)$$

Para  $K = 0$  el segundo mínimo del potencial  $V_{eff}$  de (2.67) no existe y el potencial tiene simetría azimutal. En este caso la elección de la norma simétrica resulta natural.

Para  $K \neq 0$  la simetría azimutal desaparece y, en consecuencia, la elección más apropiada de la norma no es evidente.

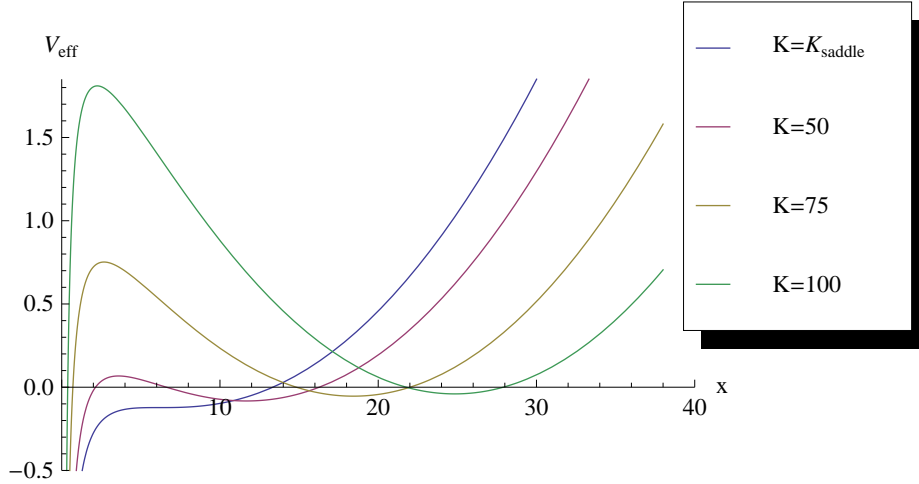


Figura 2.15: Átomo de hidrógeno: perfil del potencial  $V_{eff} = V_{eff}(x, 0)$  (ver 2.67) para distintos valores del Pseudomomento  $K = K_{saddle}, 50, 75, 100$ , el punto de inflexión aparece en  $K_{saddle} = 36.728$  ( $B = B_0 = 9.3918 \times 10^9 G$ ).

Dado que vamos a utilizar un método aproximado para resolver la ecuación de Schrödinger con el Hamiltoniano (2.33), nuestras aproximaciones a la energía bien pueden depender de la norma (únicamente las soluciones exactas son independientes de la norma). Por ende, podemos elegir la forma del potencial vectorial de cierta manera óptima. Con este fin, introducimos la función

$$\chi = e^{i e (\mu_2 - \mu_1) \mathbf{A}_{\rho_0} \cdot \boldsymbol{\rho}} \psi_{\mathbf{K}}, \quad (2.73)$$

donde

$$\boldsymbol{\rho}_0 = \frac{\xi K}{e B} \hat{\mathbf{x}}, \quad (2.74)$$

y  $0 \leq \xi \leq 1$  es un parámetro variacional.

La ecuación de Schrödinger para  $\chi$  corresponde a una norma lineal del potencial vectorial

$$\mathbf{A}(x, y) = \frac{B}{2} (-(y - y_0), x - x_0). \quad (2.75)$$

La posición del cero de la norma, donde  $\mathbf{A}(x, y) = 0$ , se localiza en  $y = y_0$ ,  $x = \frac{\xi K}{e B}$ . Para  $K > K_{saddle}$  esperamos que el cero de la norma se localice

sobre el eje  $x$ , es decir, a lo largo de la línea que une los dos mínimos del potencial que están en  $x = 0$  y  $x = x_{0,min}$ , respectivamente, (ver 2.70).

El potencial vectorial puede ser considerado como una función variacional de  $(\chi, x_0, y_0)$  y puede escogerse mediante un procedimiento de minimización asumiendo que  $\psi_{\mathbf{K}}$  es real.

### Comportamiento asintótico.

Escribiendo  $\psi_{\mathbf{K}} = e^{-\varphi}$ , es fácil ver que para  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$  tenemos que

$$\varphi = \frac{eB}{4} \rho^2 + \dots \quad (2.76)$$

que no es otra cosa sino la expansión WKB. Asumiendo que (2.68) y (2.69) se satisfacen, vemos que para  $x \rightarrow x_0$ ,

$$\varphi = \alpha_2 (x - x_0)^2 + \alpha_3 (x - x_0)^3 + \alpha_4 (x - x_0)^4 + \dots + \beta_2 y^2 + \beta_4 y^4 + \dots + \gamma_3 (x - x_0) y^2 + \dots \quad (2.77)$$

con

$$\alpha_2 = E_x m_r, \quad \alpha_3 = \frac{e^2}{6 E_x x_0^4}, \quad \alpha_4 = \frac{1}{6} m_r \left( 2 E_x^2 m_r - \frac{e^2 B^2}{2M} + \frac{e^2}{x_0^3} \right), \quad \beta_2 = E_y m_r, \\ \beta_4 = \frac{1}{6} m_r \left( 2 E_y^2 m_r - \frac{e^2 B^2}{2M} - \frac{e^2}{2 x_0^3} \right), \quad \gamma_3 = -\frac{e^2}{2 E_x x_0^4} \text{ y } E = E_x + E_y.$$

Similarmente, para  $\rho \rightarrow 0$ ,

$$\varphi = 2 m_r \rho + \dots \quad (2.78)$$

donde los siguientes términos en  $\rho$  son de orden mayor a uno.

### 2.2.3.2. Aproximaciones: funciones variacionales

Haciendo la interpolación entre la expansión WKB (2.76) y la teoría perturbativa cerca de los mínimos del potencial (2.77)-(2.78) construimos una expresión para el estado base

$$\psi_{\mathbf{k}} = C_1 e^{-\phi_c} + C_2 e^{-\phi_m}, \quad (2.79)$$

donde

$$\phi_c = \frac{A_0 + A_1 \rho + A_2 x \rho + A_3^2 \rho^3}{\sqrt{1 + A_4 x + A_5^2 \rho^2}} - \frac{\alpha_c}{2} \log(1 + A_4 x + A_5^2 \rho^2), \quad (2.80)$$

$$\phi_m = \frac{D_0 + D_1 \tilde{x}^2 + D_2 y^2 + D_3^2 \varrho^4}{\sqrt{1 + D_4 \tilde{x}^2 + D_5 y^2 + D_6^2 \varrho^4}},$$

con  $\tilde{x} = x - x_m$ ,  $\varrho^2 = \tilde{x}^2 + y^2$  y los  $A$ 's,  $C$ 's,  $D$ 's,  $\alpha_c$  y  $x_m$  son parámetros que se determinan variacionalmente.

A diferencia del caso con  $K = 0$ , debido a la no-separación de variables la expansión WKB de la solución a la ecuación eikonal no puede ser construida de una manera unificada ya que depende de la forma en la que uno se acerca al infinito.

### 2.2.3.3. Resultados

En el caso del átomo de hidrógeno, los resultados obtenidos con la función (2.79) para distintos valores del campo magnético  $0 < B < 1000$  y del Pseudomomento  $0 \leq K < 200$  se presentan en la Tabla 2.13. La energía crece como función del campo magnético así como del Pseudomomento. Para  $B$  fijo, la energía como función de  $K$  tiende al valor  $E_{free} = \frac{eB}{2m_r}$ , la energía más baja de dos partículas en un campo magnético que no interactúan entre si. Como resultado de la minimización de la energía variacional, existe un Pseudomomento crítico  $K_c > K_{saddle}$  tal que para  $K < K_c$  los parámetros  $C_1 = 1$ ,  $C_2 = 0$ ,  $\xi \approx 0$  y por lo tanto la función de onda se localiza cerca de la singularidad de Coulomb (estados centrados). Para  $K > K_c$  sucede lo contrario, con los parámetros  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = 1$  y  $\xi \approx 1$  la función de onda se localiza cerca del segundo mínimo (estados descentrados), (ver Fig. 2.20). El valor óptimo de la energía corresponde a  $x_m = x_{0,min}$ . El comportamiento de  $K_c$  como función del campo magnético se muestra en la Fig. 2.17. Vemos que  $K_c$  es una función creciente de  $B$ . La transición de los estados centrados a los estados descentrados se refleja en el valor de expectación  $\langle \rho \rangle$  (ver Tabla 2.15).

Los parámetros óptimos  $A$ 's,  $D$ 's y  $\alpha_c$  varían suavemente con el campo magnético, como se muestra en las Tablas F.20-F.21. El valor óptimo del parámetro de la norma  $\xi$  (ver (2.74)) se presenta en la Tabla 2.14.

Nuestros resultados están en excelente acuerdo con los de otros métodos [49], [50]. La comparación con resultados perturbativos en el límite de campos magnéticos fuertes (donde se considera la interacción de Coulomb como una perturbación) se presenta en la Tabla 2.16.

Usando el método de la malla, basado en la propuesta de Vincke-Baye [49], obtuvimos los resultados para  $B = 1$  que aparecen en la Tabla 2.17.

Para todos los valores de  $B$  y  $K$  que estudiamos, nuestra energía variacional y la energía del método de malla resultaron coincidir en no menos de 5 cifras significativas. La comparación con un trabajo anterior llevado a cabo por Lozovik *et al.* [50] para excitones en GaAs/Al<sub>0,33</sub>Ga<sub>0,67</sub>As CQW's con  $\epsilon = 12.1$  (constante dieléctrica) y  $B = 2T$  muestra que las energías que obtuvimos son sistemáticamente mejores. Para  $K = 0$ , de la Fig. 2.19 del presente trabajo y de la Fig. 5 de [50], notamos que la diferencia relativa en energías es alrededor del 10%.



átomo de Hidrógeno. Energía  $E$

$K$	$E$				
	$B = 0.1$	$B = 1$	$B = 10$	$B = 100$	$B = 1000$
0	-1.9914	-1.4587	11.299	174.124	1918.98
1	-1.9912	-1.4585	11.299	174.124	1918.98
25	-1.8213	-1.2887	11.468	174.291	1919.15
50	-1.3110	-0.7787	11.976	174.794	1919.63
75	-0.4604	0.0713	12.823	175.631	1920.44
100	0.19589 <sup>d</sup>	1.261	14.009	176.803	1921.57
125	0.19669 <sup>d</sup>	1.966 <sup>d</sup>	15.534	178.310	1923.02
150	0.19722 <sup>d</sup>	1.972 <sup>d</sup>	17.398	180.152	1924.80
175	0.19760 <sup>d</sup>	1.976 <sup>d</sup>	19.600	182.329	1926.90
200	0.19789 <sup>d</sup>	1.978 <sup>d</sup>	19.788 <sup>d</sup>	184.840	1929.32

Tabla 2.13: Energía  $E$  del estado base en Hartrees; campo magnético en unidades efectivas con  $B_0 = 9.3917 \times 10^9 G$ . Las energías que corresponden a estados descentrados se indican con <sup>d</sup> (ver texto).

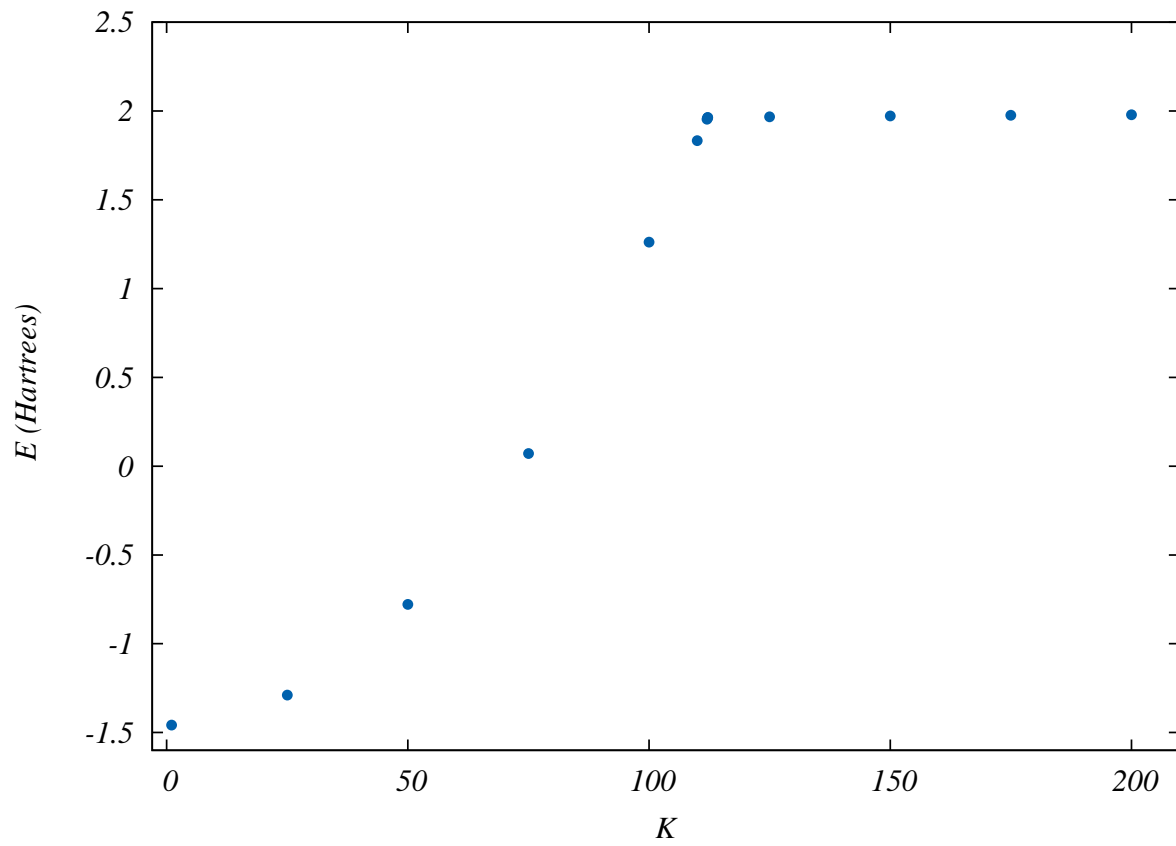


Figura 2.16: Átomo de hidrógeno: energía *vs*  $K$ , con campo magnético  $B = 1$  en unidades efectivas ( $B_0 = 9.3917 \times 10^9 G$ ).

### Átomo de Hidrógeno. Parámetro $\xi$

$K$	$\xi$				
	$B = 0.1$	$B = 1$	$B = 10$	$B = 100$	$B = 1000$
$K < K_c$	0	0.0005	0.004	0.0156	0.051
$K > K_c$	1	1	0.985	—	—

Tabla 2.14: Parámetro  $\xi$  óptimo de la norma (ver (2.74)); campo magnético en unidades efectivas ( $B_0 = 9.3917 \times 10^9 G$ ).

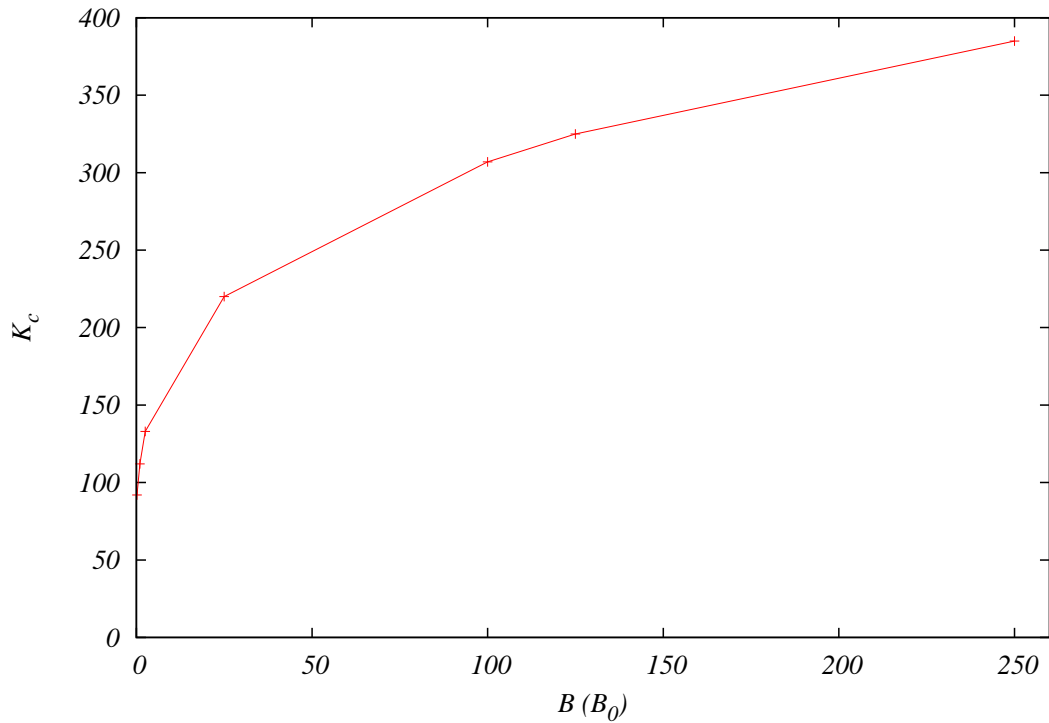


Figura 2.17: Átomo de hidrógeno: comportamiento de  $K_c$  vs  $B$ . Para  $K < K_c$  el electrón se localiza cerca del mínimo de Coulomb (cerca del próton) y se le denomina un estado centrado; si  $K > K_c$  el electrón *salta* al mínimo magnético que corresponde a un estado descentrado. La separación de ambos mínimos es proporcional a  $K B^{-1}$ , por lo que para campos magnéticos pequeños la transición de un mínimo al otro se refleja en un cambio muy pronunciado en el valor de expectación de la distancia entre las partículas.

### Átomo de Hidrógeno. Valor de expectación $\langle \rho \rangle$

$K$	$\langle \rho \rangle$		
	$B = 0.1$	$B = 1$	$B = 10$
0	0.49	0.39	0.175
75	0.49	0.39	0.175
100	$250^d$	0.39	0.175
125	$312^d$	$31^d$	0.175
150	$375^d$	$37^d$	0.175
175	$437^d$	$43^d$	0.175
200	$500^d$	$50^d$	$4.9^d$

Tabla 2.15: Valor de expectación  $\langle \rho \rangle$ ; campo magnético en unidades efectivas con  $B_0 = 9.3917 \times 10^9 G$ . Para  $B = 100, 1000$ ,  $\langle \rho \rangle \approx 0.06, 0.019$ , respectivamente. Los estados descentrados se indican con  $^d$  (ver texto). Para  $K < K_c$ ,  $\langle \rho \rangle \approx 0$  mientras que para  $K > K_c$ ,  $\langle \rho \rangle \approx \langle x \rangle \approx x_{0,min} \propto K$ .

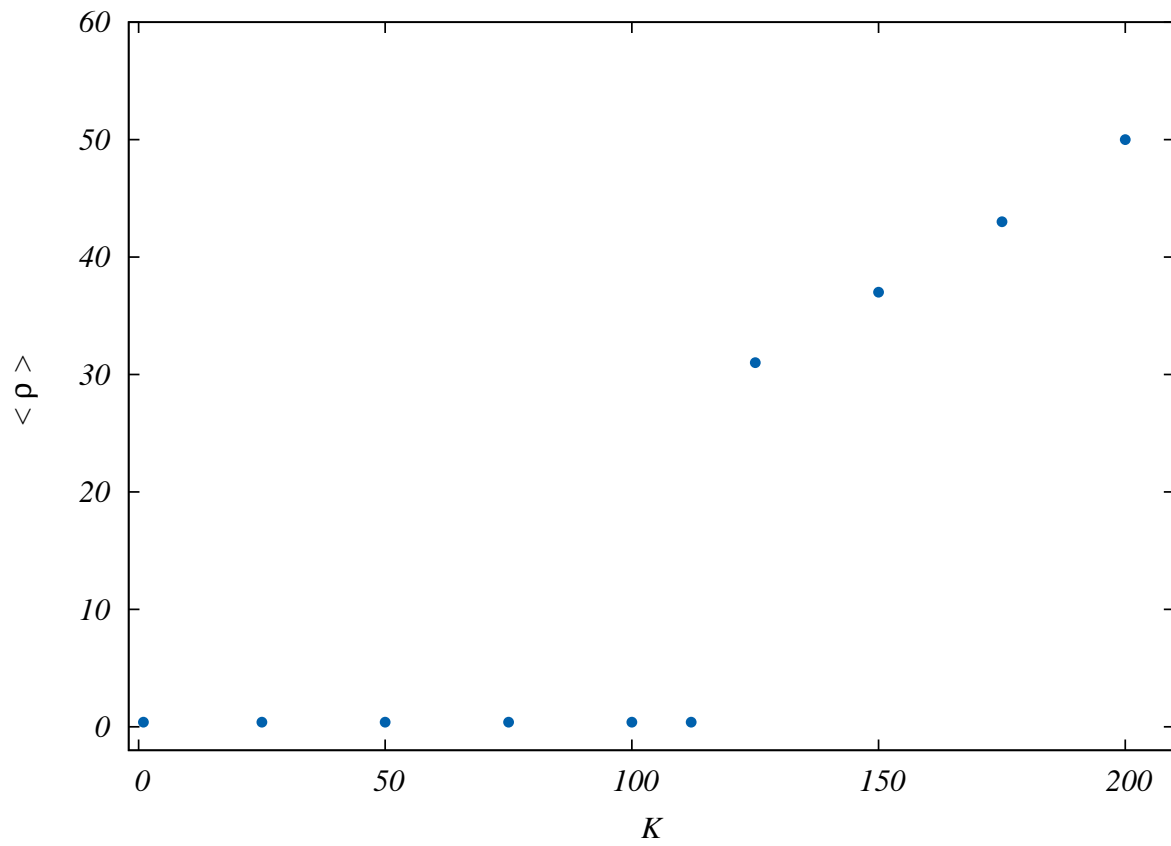


Figura 2.18: Átomo de hidrógeno: valor de expectación  $\langle \rho \rangle$  vs  $K$ ; campo magnético  $B = 1$  en unidades efectivas con  $B_0 = 9.3917 \times 10^9 G$ .

### Átomo de Hidrógeno. Energía $E$

$B$	$E$	
	$E_0$	$E_0^L$
0.1	-1.9914	-0.592
1	-1.4587	-0.506
10	11.299	12.066
100	174.124	174.83
1000	1918.98	1919.68

Tabla 2.16: Energía del estado base en Hartrees. la energía  $E_0$  del presente trabajo y  $E_0^L$  obtenida a partir de una teoría perturbativa. Campo magnético en unidades efectivas con  $B_0 = 9.3917 \times 10^9 G$ .

### Átomo de Hidrógeno. Energía $E$

$K$	$E$	
	$E_0$	$E_0^{mesh}$
0	-1.45879	-1.45879
1	-1.45852	-1.45852
25	-1.28877	-1.28877
50	-0.77872	-0.77871
75	0.07136	0.07137
100	1.26149	1.26149

Tabla 2.17: Energía del estado base para  $B = B_0$ . El  $E_0$  es tomado del presente trabajo y  $E_0^{mesh}$  se obtuvo con el método de malla ( $\xi$  se toma de los resultados variacionales). Campo magnético en unidades efectivas con  $B_0 = 9.3917 \times 10^9 G$ .



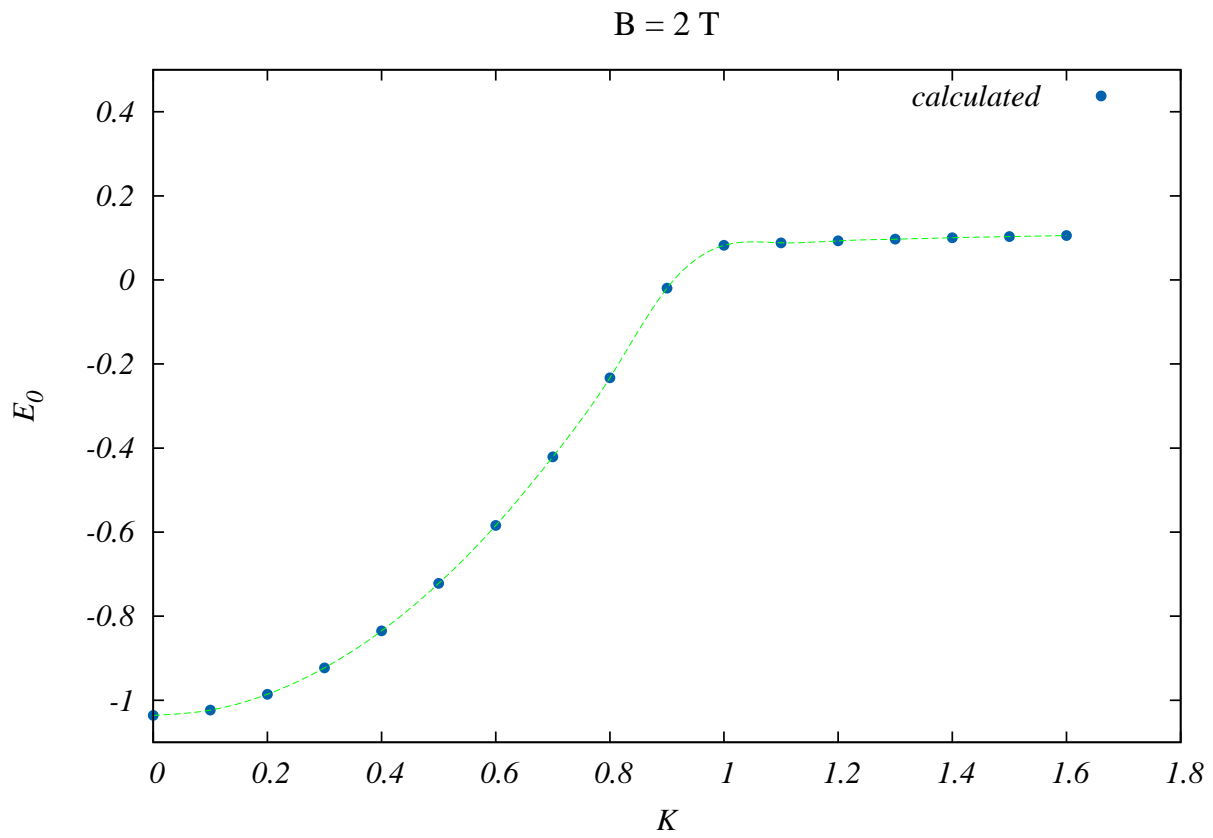


Figura 2.19: Energía del estado base *vs*  $K$ . Excitones en GaAs/Al<sub>0.33</sub>Ga<sub>0.67</sub>As CQW's con  $\epsilon = 12,1$  para  $B = 2T$  estudiados en [50]. Aquí el sistema de unidades es el de [50].

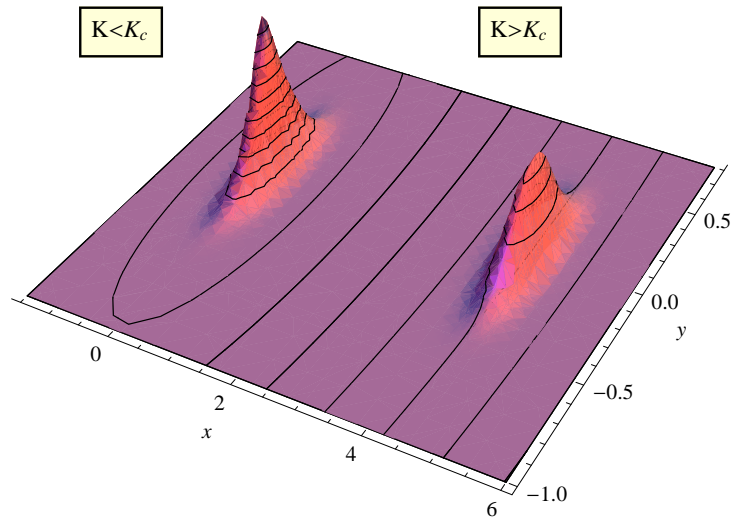


Figura 2.20: Átomo de hidrógeno: densidad electrónica  $|\psi_{\mathbf{k}}|^2$  del estado base del Hamiltoniano (2.56). Para  $K < K_c$  tenemos un estado centrado mientras que para  $K > K_c$  uno descentrado ( $B = 10 B_0$ ).

# Conclusiones

El punto central de este trabajo fue el estudio, clásico y cuántico, de sistemas no-relativistas de dos cargas puntuales,  $(e_1, m_1)$  y  $(e_2, m_2)$ , confinadas a moverse en un plano en presencia de un campo magnético externo  $B$  constante, uniforme y perpendicular al plano.

**En los sistemas clásicos** hemos presentado una clasificación de parejas de partículas cargadas para las cuales, bajo ciertas condiciones iniciales, se presentan trayectorias especiales, las Configuraciones I-V. Estas trayectorias representan círculos de radio finito e infinito. Su característica principal es que la distancia entre las partículas permanece constante durante el proceso de evolución. Esta característica corresponde a la aparición de una constante *particular* de movimiento

$$I = (\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{p}),$$

donde  $\boldsymbol{p}$  es el momento canónico relativo (ver 1.4), la cual se conserva a lo largo de las trayectorias especiales (Configuraciones  $I - V$ )

$$I = 0,$$

a diferencia del Pseudomomento total  $\mathbf{K}$  y el momento angular total  $\mathbf{L}_z^T$  (2.5) que son cantidades conservadas para *cualquier* trayectoria.

Estas trayectorias especiales están caracterizadas por más constantes de movimiento en comparación con el caso genérico. Hay tres sistemas muy importantes que admiten tales trayectorias especiales:

- $q = 0$  (sistema neutro): admite trayectorias especiales de todas las Configuraciones con excepción de la Configuración III. Vale la pena enfatizar que para todas las trayectorias circulares con  $q = 0$  se cumple

$$\mathbf{K} = 0.$$

Para  $\mathbf{K} = 0$ , el sistema es *particularmente* integrable, y las cantidades  $(\mathcal{H}, \mathbf{K}, L_z^T)$  son constantes de movimiento en involución.

- $e_c = 0$  (cargas del mismo signo y con la misma frecuencia de Larmor): estos sistemas son completamente-integrables, sin embargo, las trayectorias no son cerradas en general. Únicamente ocurren trayectorias especiales de las Configuraciones I y II. Además, la Configuración I se presenta sólo para partículas idénticas.
- $e_1 = -1, e_2 = 2$ : ocurren trayectorias especiales de todas las Configuraciones con excepción de la Configuración IV. No se encontró que estos sistemas sean *particularmente* integrables.

En los **sistemas cuánticos** se mostró que los casos con  $e_c = 0$  y  $q = 0$  presentan propiedades excepcionales. Estas propiedades son más visibles en coordenadas polares del centro de masa CMS  $(R, \phi)$  y coordenadas polares del movimiento relativo  $(\rho, \varphi)$ : (i) las eigenfunciones son factorizables y todos los factores, con excepción de uno que depende de  $\rho$ , fueron encontrados analíticamente. Las eigenfunciones tienen momento angular relativo definido; (ii) la dinámica en la dirección  $\rho$  es la misma para ambos sistemas, corresponde a un potencial tipo embudo (funnel-type potential) y posee una álgebra escondida  $sl_2$ . Para un conjunto discreto de valores del campo magnético (iii) aparecen integrales *particulares*; (iv) el álgebra escondida  $sl_2$  emerge en una representación irreducible de dimensión finita, por lo tanto, el sistema se vuelve *cuasi-exactamente soluble* y (v) un número finito de eigenfunciones polinomiales en  $\rho$  ocurren. Se presentaron nueve familias de eigenfunciones explícitamente.

El caso con  $e_c = 0$  es completamente integrable (existen cuatro integrales de movimiento que conmutan mutuamente) y superintegrable (existe una integral global de movimiento extra). Para ciertos valores del campo magnético encontramos dos integrales *particulares*. Por lo tanto, para estos valores del campo magnético el sistema se vuelve máximamente superintegrable.

El sistema con  $q = 0$  no es completamente integrable. Sin embargo, actuando en el subespacio de eigenfunciones con eigenvalor cero del Pseudomomento el sistema es completamente integrable. Como en el caso con  $e_c = 0$ , para ciertos valores del campo magnético aparecen dos integrales *particulares*: los momentos angulares (unitariamente transformados) del centro de masa y de la variable relativa  $\hat{L}_z, \hat{\ell}_z$ , respectivamente, e  $\mathcal{I}_n(\rho)$ . Entonces, para estos valores del campo magnético el sistema se vuelve máximamente superintegrable.

Se construyeron aproximaciones uniformes de diferentes estados ligados para números cuánticos magnéticos  $s = 0, 1, 2$  de los sistemas con  $e_c = 0$  y  $q = 0$  ( $K = 0$ , átomo en reposo). El elemento clave es construir una interpolación entre la expansión WKB a largas distancias y la teoría perturbativa a pequeñas distancias. Las interpolaciones incorporan la forma que tienen las soluciones exactas encontradas que aparecen para ciertos valores del campo magnético y representan una solución aproximada del problema espectral de estos sistemas.

- En el caso con  $q = 0$ , las aproximaciones corresponden al estado base **global** y primeros estados excitados del átomo. En el caso con  $e_c = 0$ , las aproximaciones corresponden al estado base local (para una  $s$  dada) y primeros estados excitados locales.
- Se mostraron resultados concretos para la energía en el caso de dos electrones y el átomo de hidrógeno. En el marco de una teoría perturbativa convergente se obtuvieron las correcciones a las aproximaciones propuestas, las cuales indican que los resultados presentados se obtuvieron con 7 – 9 cifras significativas para la energía (eigenvalor). Se presentó la evolución de los nodos como función del campo magnético.
- Para el sistema con  $q = 0$  ( $K \neq 0$ , átomo en movimiento) también se construyó una interpolación para el estado base entre la expansión WKB a largas distancias y la teoría perturbativa alrededor del mínimo del potencial. Para campos magnéticos pequeños y  $K$  intermedios encontramos un fenómeno: la energía del sistema como función del momento del centro de masa  $E = E(K)$  presenta un comportamiento similar al de una transición de fase de primer orden, ocurre un cambio muy agudo en su estructura para un momento del centro de masa específico.
- Finalmente se calcularon las correcciones de masa finita en el efecto Zeeman mediante la teoría perturbativa de no-linealización.

# Apéndice

# Apéndice A

## Soluciones polinomiales de la ec. (2.22)

Presentamos los resultados analíticos para  $\lambda_n$  ( $\epsilon = \sqrt{\omega_c m_r \lambda_n}$ ) (ver 2.25) y las correspondientes eigenfunciones polinomiales  $p_n$  para  $n = 1, \dots, 8$ .

- $n = 0$

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= 0, \\ p_0 &= 1.\end{aligned}\tag{A.1}$$

Esta solución corresponde ya sea a un campo magnético infinito o a la ausencia de la interacción Coulombiana. En el caso de dos electrones, con  $N = n = 0$ , la eigenfunción total  $\Psi$  (2.15) coincide exactamente con la solución propuesta por R. Laughlin en el efecto Hall cuántico [2].

- $n = 1$

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 1 + 2|s|, \\ p_1(\rho) &= 1 + \frac{\sqrt{\lambda_1}}{1 + 2|s|} \rho.\end{aligned}\tag{A.2}$$

La función  $p_1$  corresponde a un estado base: no tiene nodos para  $\rho \geq 0$ . Aparece para campos magnéticos

$$b_1 = \frac{1}{1 + 2|s|},$$

donde  $b_1$  se expresa en unidades del campo característico  $B_0$ , ver (2.25). Se



nota que  $b = 1$  ( $s = 0$ ) es el campo magnético máximo donde existe una solución analítica.

- $n = 2$

$$\begin{aligned}\lambda_2 &= 6 + 8|s|, \\ p_2(\rho) &= 1 + \frac{\sqrt{\lambda_2}}{1 + 2|s|} \rho + \frac{\lambda_2 - 2 - 4|s|}{4 + 12|s| + 8|s|^2} \rho^2.\end{aligned}\tag{A.3}$$

Debido a que  $p_2$  no tiene nodos para  $\rho \geq 0$ , corresponde a un estado base con  $\epsilon_2 > 0$ . Ocurre para campos magnéticos

$$b_2 = \frac{1}{6 + 8|s|}.$$

Sucede que  $b_2$  toma su valor máximo  $b_{2,max} = \frac{1}{6}$  en  $s = 0$ .

- $n = 3$

Existen dos soluciones polinomiales distintas  $p_{3,j}$ ,  $j = 1, 2$ , de tercer grado con  $\epsilon_3 > 0$ , sin nodos y con un nodo positivo, respectivamente. Corresponden a

$$\lambda_{3,j} = 10 + 10|s| - (-1)^j \sqrt{73 + 128|s| + 64|s|^2}, \quad j = 1, 2, \tag{A.4}$$

$$p_{3,j} = 1 + \frac{\sqrt{\lambda_{3,j}}}{1 + 2|s|} \rho + \frac{\lambda_{3,j} - 3 - 6|s|}{4 + 12|s| + 8|s|^2} \rho^2 + \frac{\sqrt{\lambda_{3,j}} (\lambda_{3,j} - 11 - 14|s|)}{12(1 + |s|)(1 + 2|s|)(3 + 2|s|)} \rho^3.\tag{A.5}$$

Estas eigenfunciones aparecen para campos magnéticos

$$b_{3,j} = \frac{1}{10 + 10|s| - (-1)^j \sqrt{73 + 128|s| + 64|s|^2}},$$

respectivamente. En el caso del estado base  $j = 1$ ,  $b_3$  toma su máximo valor  $b_{3,1,max} = \frac{1}{10 + \sqrt{73}}$  en  $s = 0$ .

- $n = 4$

Existen dos soluciones polinomiales distintas  $p_{4,j}$ ,  $j = 1, 2$ , de cuarto grado con  $\epsilon_4 > 0$ , sin nodos y con un nodo positivo, respectivamente. Corresponden a

$$\lambda_{4,j} = 25 + 20|s| + (-1)^{j+1} 3\sqrt{33 + 40|s| + 16|s|^2}, \tag{A.6}$$

$$\begin{aligned}
p_{4,j} = & 1 + \frac{\sqrt{\lambda_{4,j}}}{1+2|s|} \rho + \frac{\lambda_{4,j} - 4 - 8|s|}{4+12|s|+8|s|^2} \rho^2 + \frac{\sqrt{\lambda_{4,j}}(\lambda_{4,j} - 16 - 20|s|)}{12(1+|s|)(1+2|s|)(3+2|s|)} \rho^3 \\
& + \frac{\lambda_{4,j}^2 - \lambda_{4,j}(34+32|s|) + 24(3+8|s|+4|s|^2)}{96(1+|s|)(2+|s|)(1+2|s|)(3+2|s|)} \rho^4 .
\end{aligned} \tag{A.7}$$

Estas soluciones se presentan para campos magnéticos

$$b_{4,j} = \frac{1}{25 + 20|s| + (-1)^{j+1} 3\sqrt{33 + 40|s| + 16|s|^2}} ,$$

respectivamente. En el caso del estado base  $j = 1$ ,  $b_4$  toma su máximo valor  $b_{4,1,max} = \frac{1}{25+3\sqrt{33}}$  en  $s = 0$ .

•  $n = 5$

En este caso existen tres soluciones polinomiales distintas  $p_{5,j}$ ,  $j = 1, 2, 3$ , de quinto grado con  $\epsilon_5 > 0$ , sin nodos, con un nodo y con dos nodos positivos, respectivamente. Corresponden a

$$\lambda_{5,j} = \frac{4}{3} \sqrt{1251 + 448|s|(3+|s|)} \cos\left(\frac{\theta + 2(j-1)\pi}{3}\right) + \frac{35}{3}(3+2|s|) , \tag{A.8}$$

donde

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{20(3+2|s|)(531+384|s|+128|s|^2)}{[1251+448|s|(3+|s|)]^{\frac{3}{2}}}\right) ,$$

y

$$\begin{aligned}
p_{5,j} = & 1 + \frac{\sqrt{\lambda_{5,j}}}{1+2|s|} \rho + \frac{\lambda_{5,j} - 5 - 10|s|}{4+12|s|+8|s|^2} \rho^2 + \frac{\sqrt{\lambda_{5,j}}(\lambda_{5,j} - 21 - 26|s|)}{12(1+|s|)(1+2|s|)(3+2|s|)} \rho^3 \\
& + \frac{\lambda_{5,j}^2 - 4\lambda_{5,j}(12+11|s|) + 45(3+8|s|+4|s|^2)}{96(1+|s|)(2+|s|)(1+2|s|)(3+2|s|)} \rho^4 \\
& + \frac{\sqrt{\lambda_{5,j}}[\lambda_{5,j}^2 - \lambda_{5,j}(80+60|s|) + 807+1528|s|+596|s|^2]}{480(1+|s|)(2+|s|)(1+2|s|)(3+2|s|)(5+2|s|)} \rho^5 .
\end{aligned} \tag{A.9}$$

Estas eigenfunciones ocurren para campos magnéticos

$$b_{5,j} = \frac{1}{\lambda_{5,j}} ,$$

respectivamente.

•  $n = 6$

Existen tres soluciones polinomiales distintas  $p_{6,j}$ ,  $j = 1, 2, 3$ , de quinto grado con  $\epsilon_5 > 0$ , sin nodos, con un nodo y con dos nodos positivos, respectivamente. Corresponden a

$$\lambda_{6,j} = \frac{4}{3} \sqrt{3211 + 392|s|(7 + 2|s|)} \cos\left(\frac{\theta + 2(j-1)\pi}{3}\right) + \frac{28}{3}(7 + 4|s|), \quad (\text{A.10})$$

donde

$$\begin{aligned} \theta &= \cos^{-1}\left(\frac{8(7 + 4|s|)(1939 + 1001|s| + 286|s|^2)}{[3211 + 392|s|(7 + 2|s|)]^{\frac{3}{2}}}\right), \\ p_{6,j} &= 1 + \frac{\sqrt{\lambda_{6,j}}}{1 + 2|s|} \rho + \frac{\lambda_{6,j} - 6 - 12|s|}{4 + 12|s| + 8|s|^2} \rho^2 + \frac{\sqrt{\lambda_{6,j}}(\lambda_{6,(j)} - 26 - 32|s|)}{12(1 + |s|)(1 + 2|s|)(3 + 2|s|)} \rho^3 \\ &+ \frac{\lambda_{6,j}^2 - \lambda_{6,(j)}(62 + 56|s|) + 72(3 + 8|s| + 4|s|^2)}{96(1 + |s|)(2 + |s|)(1 + 2|s|)(3 + 2|s|)} \rho^4 \\ &+ \frac{\sqrt{\lambda_{6,j}}[\lambda_{6,j}^2 - \lambda_{6,j}(110 + 80|s|) + 24(61 + 114|s| + 44|s|^2)]}{480(1 + |s|)(2 + |s|)(1 + 2|s|)(3 + 2|s|)(5 + 2|s|)} \rho^5 \\ &+ \frac{\lambda_{6,j}^3 - 2\lambda_{6,j}^2(80 + 50|s|) + 4\lambda_{6,j}[1141 + 2|s|(847 + 272|s|)] - 720(1 + 2|s|)(3 + 2|s|)(5 + 2|s|)}{5760(1 + |s|)(2 + |s|)(3 + |s|)(1 + 2|s|)(3 + 2|s|)(5 + 2|s|)} \rho^6. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Estas soluciones aparecen para campos magnéticos

$$b_{6,j} = \frac{1}{\lambda_{6,j}},$$

respectivamente.

•  $n = 7$

Existen cuatro soluciones polinomiales distintas  $p_{7,j}$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$  de séptimo grado con  $\epsilon_7 > 0$ , sin nodos, con un nodo, con dos nodos y con tres nodos positivos, respectivamente. Corresponden a

$$\begin{aligned} \lambda_{7,1} &= 42(2 + |s|) + \sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}, \\ \lambda_{7,2} &= 42(2 + |s|) + \sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}, \\ \lambda_{7,3} &= 42(2 + |s|) - \sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}, \\ \lambda_{7,4} &= 42(2 + |s|) - \sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}, \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

donde

$$\begin{aligned}
z_i &= \sqrt{12 [A_1 + 896|s|(4 + |s|)\{281 + 32|s|(4 + |s|)\}]} \cos\left(\frac{\theta + 2i\pi}{3}\right) + f_s, \quad i = 1, 2, 3 \\
f_s &= 2287 + 448|s|(4 + |s|), \\
\theta &= \cos^{-1} \left[ \frac{9\sqrt{3}[A_2 + 64|s|(4 + |s|)(A_3 + 64|s|(4 + |s|)\{843 + 64|s|(4 + |s|)\})]}{[A_1 + 896|s|(4 + |s|)\{281 + 32|s|(4 + |s|)\}]^{\frac{3}{2}}} \right], \\
A_1 &= 571527, \quad A_2 = 24416241, \quad A_3 = 246083, \\
p_{7,j} &= 1 + \frac{\sqrt{\lambda_{7,j}}}{1 + 2|s|} \rho + \frac{\lambda_{7,j} - 7 - 14|s|}{4 + 12|s| + 8|s|^2} \rho^2 + \frac{\sqrt{\lambda_{7,j}}(\lambda_{7,j} - 31 - 38|s|)}{12(1 + |s|)(1 + 2|s|)(3 + 2|s|)} \rho^3 \\
&+ \frac{\lambda_{7,j}^2 - 2\lambda_{7,j}(38 + 34|s|) + 315 + 840|s| + 420|s|^2}{96(1 + |s|)(2 + |s|)(1 + 2|s|)(3 + 2|s|)} \rho^4 \\
&+ \frac{\sqrt{\lambda_{7,j}}[\lambda_{7,j}^2 - \lambda_{7,j}(140 + 100|s|) + (2299 + 4264|s| + 1636|s|^2)]}{480(1 + |s|)(2 + |s|)(1 + 2|s|)(3 + 2|s|)(5 + 2|s|)} \rho^5 + \\
&\frac{\lambda_{7,j}^3 - 5\lambda_{7,j}^2(43 + 26|s|) + \lambda_{7,j}[7999 + 4|s|(2911 + 919|s|)] - 1575(1 + 2|s|)(3 + 2|s|)(5 + 2|s|)}{5760(1 + |s|)(2 + |s|)(3 + |s|)(1 + 2|s|)(3 + 2|s|)(5 + 2|s|)} \rho^6 \\
&+ \frac{\sqrt{\lambda_{7,j}}(\lambda_{7,j}^3 - 7\lambda_{7,j}^2(41 + 22|s|) + 28\lambda_{7,j}|s|(793 + 217|s|) + \lambda_{7,j}18079 + F_s)}{40320(1 + |s|)(2 + |s|)(3 + |s|)(1 + 2|s|)(3 + 2|s|)(5 + 2|s|)(7 + 2|s|)} \rho^7, \\
\end{aligned} \tag{A.13}$$

donde

$$F_s = -189153 - 6|s|(72439 + 46138|s| + 8644|s|^2).$$

Estas eigenfunciones ocurren para campos magnéticos

$$b_{7,j} = \frac{1}{\lambda_{7,j}},$$

respectivamente.

•  $n = 8$

Existen cuatro soluciones polinomiales distintas  $p_{8,j}$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$  de octavo grado con  $\epsilon_8 > 0$ , sin nodos, con un nodo, con dos nodos y con tres nodos positivos, respectivamente. Corresponden a

$$\begin{aligned}
\lambda_{8,1} &= 15(9 + 4|s|) + \sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}, \\
\lambda_{8,2} &= 15(9 + 4|s|) + \sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}, \\
\lambda_{8,3} &= 15(9 + 4|s|) - \sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}, \\
\lambda_{8,4} &= 15(9 + 4|s|) - \sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}, \\
\end{aligned} \tag{A.14}$$

donde

$$z_i = \sqrt{12 [A_1 + 4528|s|(9 + 2|s|)\{97 + 4|s|(9 + 2|s|)\}]} \cos \left( \frac{\theta + 2i\pi}{3} \right) + f_s, \quad i = 1, 2, 3$$

$$f_s = 4671 + 344|s|(9 + 2|s|),$$

$$\theta = \cos^{-1} \left[ \frac{9\sqrt{3}[A_2 + 8|s|(9 + 2|s|)(A_3 + 1976|s|(9 + 2|s|)\{291 + 8|s|(9 + 2|s|)\})]}{[A_1 + 4528|s|(9 + 2|s|)\{97 + 4|s|(9 + 2|s|)\}]^{\frac{3}{2}}} \right],$$

$$A_1 = 2750247, \quad A_2 = 246596481, \quad A_3 = 7243319,$$

$$\begin{aligned} p_{8,j} = & 1 + \frac{\sqrt{\lambda_{8,j}}}{1 + 2|s|} \rho + \frac{\lambda_{8,j} - 8 - 16|s|}{4 + 12|s| + 8|s|^2} \rho^2 + \frac{\sqrt{\lambda_{8,j}}(\lambda_{8,j} - 36 - 44|s|)}{12(1 + |s|)(1 + 2|s|)(3 + 2|s|)} \rho^3 \\ & + \frac{\lambda_{8,j}^2 - \lambda_{8,j}(90 + 80|s|) + 144(3 + 8|s| + 4|s|^2)}{96(1 + |s|)(2 + |s|)(1 + 2|s|)(3 + 2|s|)} \rho^4 \\ & + \frac{\sqrt{\lambda_{8,j}}[\lambda_{8,j}^2 - \lambda_{8,j}(170 + 120|s|) + (3312 + 6112|s| + 2336|s|^2)]}{480(1 + |s|)(2 + |s|)(1 + 2|s|)(3 + 2|s|)(5 + 2|s|)} \rho^5 + \\ & \frac{\lambda_{8,j}^3 - 10\lambda_{8,j}^2(27 + 16|s|) + 8\lambda_{8,j}[1539 + |s|(2214 + 692|s|)] - 2880(1 + 2|s|)(3 + 2|s|)(5 + 2|s|)}{5760(1 + |s|)(2 + |s|)(3 + |s|)(1 + 2|s|)(3 + 2|s|)(5 + 2|s|)} \rho^6 \\ & + \frac{\sqrt{\lambda_{8,j}}(\lambda_{8,j}^3 - 14\lambda_{8,j}^2(27 + 14|s|) + 7\lambda_{8,j}|s|(657 + 176|s|) + \lambda_{8,j}30672 + F_s)}{40320(1 + |s|)(2 + |s|)(3 + |s|)(1 + 2|s|)(3 + 2|s|)(5 + 2|s|)(7 + 2|s|)} \rho^7 \\ & + \frac{\lambda_{8,j}^4 - 28\lambda_{8,j}^3(17 + 8|s|) + 4\lambda_{8,j}^2[14283 + 224|s|(67 + 16|s|)] + 16\lambda_{8,j}G_s + D_s}{645120(1 + |s|)(2 + |s|)(3 + |s|)(4 + |s|)(1 + 2|s|)(3 + 2|s|)(5 + 2|s|)(7 + 2|s|)} \rho^8, \end{aligned} \tag{A.15}$$

con

$$F_s = -400896 - 576|s|(1583 + 1000|s| + 186|s|^2),$$

$$G_s = -100467 - 4|s|(46755 + 25226|s| + 4096|s|^2),$$

$$D_s = 40320(1 + 2s)(3 + 2s)(5 + 2s)(7 + 2s).$$

Finalmente, estas soluciones aparecen para campos magnéticos

$$b_{8,j} = \frac{1}{\lambda_{8,j}},$$

respectivamente.

# Apéndice B

## Teoría Perturbativa de no-linealización

Después de realizar un estudio variacional surge la pregunta natural acerca de la precisión de los resultados. En particular, qué tan cercana es la función de prueba a la solución exacta del problema o qué tan precisa es la energía variacional. Con el fin de contestar estas preguntas, llevamos a cabo una teoría perturbativa (convergente) en la ecuación de Schrödinger respecto a la diferencia entre el potencial original y el potencial de prueba. En los siguientes párrafos se explica en detalle este esquema.

Consideremos la ecuación de Schrödinger

$$(\Delta_\rho + V - E) \psi = 0 , \quad (\text{B.1})$$

donde  $\Delta_\rho = \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho}$ ,  $V = V(\rho)$  y construyamos la teoría perturbativa denominada procedimiento de no linealización [16]. Primero escogemos una función de prueba  $\psi_0(\rho)$  que no tenga nodos. Por construcción esta función es el estado base del potencial  $V_0 \equiv \frac{\Delta_\rho \psi_0}{\psi_0}$  con eigenvalor cero,  $E_0 = 0$ . Después escribimos el potencial original  $V = V_0 + \lambda V_1$  para  $\lambda$  y  $V_1 = V - V_0$ . Enseguida, desarrollamos una teoría perturbativa en potencias de  $\lambda$

$$E = \sum \lambda^j E_j \quad , \quad \psi = \psi_0 e^{-\sum \lambda^j \phi_j} . \quad (\text{B.2})$$

Convirtamos la ecuación (B.1) en una ecuación de Riccati (asumiendo por simplicidad  $m_r = \frac{1}{2}$ ) introduciendo  $\psi = e^{-\phi}$ ,

$$y' - y^2 + \frac{y}{\rho} = E - V_0 - \lambda V_1 , \quad y = \phi' . \quad (\text{B.3})$$

Para  $\lambda = 0$  la solución de (B.3) es  $y_0 = (\log \psi_0)'$  con  $E_0 = 0$ .

Fácilmente se encuentra la ecuación para la corrección  $j$ -ésima  $y_j = (\phi_j)'$ ,

$$y_j' - (2y_0 - \frac{1}{\rho})y_j = E_j - V_j, \quad (\text{B.4})$$

donde  $V_j = \sum_{i=1}^{j-1} y_i y_{j-i}$  para  $j > 1$ . Su solución tiene la forma

$$y_j = \frac{1}{\rho \psi_0^2(\rho)} \int_0^\rho (E_j - V_j(x)) \psi_0^2(x) x dx, \quad (\text{B.5})$$

con

$$E_j = \frac{\int_0^\infty V_j \psi_0^2(\rho) \rho d\rho}{\int_0^\infty \psi_0^2(\rho) \rho d\rho}, \quad (\text{B.6})$$

como consecuencia de las condiciones de frontera,

$$y_j \rho \psi_0^2(\rho) \rightarrow 0 \text{ cuando } \rho \rightarrow \infty.$$

En el caso de estados excitados esta teoría se ve ligeramente modificada. Primero, para el  $n$ -ésimo estado excitado podemos escribir la eigenfunción como

$$\psi^{(n)}(\rho) = \prod_{i=1}^n (\rho - f^{(i)}) e^{-\phi}, \quad (\text{B.7})$$

donde  $f^{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, n$  son los nodos. Entonces, expandemos separadamente la energía,

$$E = \sum \lambda^j E_j,$$

la fase,

$$\phi = - \sum \lambda^j \phi_j,$$

y los nodos,

$$f^{(i)} = \sum \lambda^j f_j^{(i)}, \quad (\text{B.8})$$

(cf. (B.2)). Las fórmulas explícitas para las correcciones pueden ser obtenidas fácilmente (cf. [16]). En particular, para el primer estado excitado la primera corrección al nodo es  $f^{(1)}$ ,

$$f_1^{(1)} = \frac{1}{\rho_0 e^{-2\phi_0(\rho_0)}} \int_0^{\rho_0} (V_1 - E_1) \psi_0^2(\rho) \rho d\rho, \quad \rho_0 = f_0^{(1)}.$$

La condición para que la teoría perturbativa sea convergente requiere que el potencial de perturbación  $V_1$  sea acotado:

$$|V_1(\rho)| < C ,$$

donde  $C$  es una constante. Obviamente, la tasa de convergencia aumenta para valores más pequeños de  $C$ . Es claro que la perturbación  $V_1(\rho)$  es acotada si  $\phi_0(\rho)$  es una función suave que reproduce exactamente todos los términos crecientes para  $\rho$  tendiendo a infinito incluyendo el término logarítmico  $\sim \beta \log \rho$  que se obtiene en la expansión (2.49). Eventualmente escogemos  $\phi_0$  multiplicado por un factor-(2.50), (2.51), (2.52), respectivamente- lo cual reproduce el término logarítmico de la expansión de la fase para  $\rho \rightarrow \infty$ . Por lo tanto, la teoría perturbativa que emerge debe ser convergente.

Como se muestra en [16], la energía variacional calculada con la función de prueba  $\psi_{trial}$  es igual a la suma de los dos primeros términos de la teoría perturbativa en la que  $\psi_{trial}$  se toma como la aproximación a orden cero,  $E_{variational} = E_0 + E_1$ . Si esta teoría con  $\psi_0 = \psi_{trial}$  es convergente, entonces la primera corrección  $\psi_1$  a la función de prueba caracteriza la desviación respecto de la eigenfunción exacta, mientras que  $E_2$  da una estimación de la precisión de la energía variacional.



# Apéndice C

## Soluciones cuasi-exactamente solubles

### Álgebra $sl_2$

El álgebra  $sl_2$  es realizada con los operadores diferenciales de primer orden

$$\begin{aligned}\hat{J}_n^+ &= \rho^2 \partial_\rho - n \rho, \\ \hat{J}_n^0 &= \rho \partial_\rho - \frac{n}{2}, \\ \hat{J}_n^- &= \partial_\rho,\end{aligned}\tag{C.1}$$

donde  $\partial_\rho \equiv \frac{d}{d\rho}$  y  $n$  es un parámetro arbitrario. Estos operadores son los elementos generadores de la transformación de Möbius. Si  $n$  es un entero no negativo, el álgebra  $sl_2$  posee una representación irreducible de dimensión  $(n + 1)$  realizada en el conjunto de polinomios de grado no mayor que  $n$ ,

$$\mathcal{P}_{n+1} = \langle 1, \rho, \rho^2, \dots, \rho^n \rangle.\tag{C.2}$$

# Apéndice D

## El Método Variacional

Para un sistema físico descrito por el Hamiltoniano  $\hat{\mathcal{H}}$  definimos el funcional de energía

$$E(\psi) = \frac{\int \psi^* \hat{\mathcal{H}} \psi d^3x}{\int \psi^* \psi d^3x}, \quad (\text{D.1})$$

donde  $\psi = \psi(\mathbf{x})$  es un autoestado normalizable (estado ligado) de  $\hat{\mathcal{H}}$ . El método de multiplicadores de Lagrange establece que en un punto crítico existe una constante  $\lambda$  tal que

$$\delta \int \psi^* \hat{\mathcal{H}} \psi d^3x + \lambda \delta \left( \int \psi^* \psi d^3x - 1 \right) = 0. \quad (\text{D.2})$$

Identificando  $\lambda = E$  la ecuación anterior se puede escribir como

$$\delta \int \psi^* (\hat{\mathcal{H}} - E) \psi d^3x = 0. \quad (\text{D.3})$$

Al aplicar en (D.3) la variación sobre  $\psi^*$  se obtiene la ecuación de Schrödinger  $\hat{\mathcal{H}} \psi = E \psi$ , mientras que si la variación es sobre  $\psi$  y considerando la Hermiticidad de  $\hat{\mathcal{H}}$  se obtiene la ecuación compleja conjugada  $\hat{\mathcal{H}} \psi^* = E \psi^*$ . Así la energía resulta ser un multiplicador de Lagrange y  $\psi$  la función de onda que minimiza el funcional de energía (D.1).

Lo anterior queda resumido en el siguiente teorema:

**Teorema I:** Sea  $\hat{\mathcal{H}}$  el Hamiltoniano de un sistema, entonces el funcional de energía

$$E(\psi) = \frac{\int \psi^* \hat{\mathcal{H}} \psi d^3x}{\int \psi^* \psi d^3x}, \quad (\text{D.4})$$

es minimizado por la función del estado base  $\psi$  de  $\hat{\mathcal{H}}$ .

En la práctica al aplicar este método de aproximación a un problema específico se toman funciones denominadas funciones de prueba<sup>1</sup>  $\psi_p = \psi_p(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots)$  las cuales dependen de ciertos parámetros, los parámetros variacionales,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ . El funcional de energía depende de los valores que toman estos parámetros. Para una  $\psi_p$  dada, la energía (D.1) toma el valor  $E_{var}$

$$E_{var}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots) = \frac{\int \psi_p^* \hat{\mathcal{H}} \psi_p d^3x}{\int \psi_p^* \psi_p d^3x}. \quad (\text{D.5})$$

Lo que resta es obtener el mínimo de  $E_{var}$  como función de los parámetros  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ . El Teorema I implica que  $E_{var}$  será mayor, o en el mejor de los casos muy cercana, al valor exacto de la energía del estado base.

Un punto interesante de la energía variacional es el siguiente: consideremos el Hamiltoniano  $\hat{\mathcal{H}} = -\Delta + V$ , donde  $\Delta$  es el operador Laplaciano y  $V$  el potencial; la ecuación de Schrödinger correspondiente toma la forma  $\hat{\mathcal{H}} \psi = E \psi$ . Ahora, dada la función de prueba  $\psi_p$  existe un Hamiltoniano  $\hat{\mathcal{H}}_p = -\Delta + V_p$ , con potencial  $V_p = \frac{\Delta \psi_p}{\psi_p} + E_p$ , para el cual  $\psi_p$  es una eigenfunción exacta,  $\hat{\mathcal{H}}_p \psi_p = E_p \psi_p$ . Por lo tanto

$$\begin{aligned} E_{var} &= \frac{\int \psi_p^* \hat{\mathcal{H}} \psi_p d^3x}{\int \psi_p^* \psi_p d^3x} \\ &= \frac{\int \psi_p^* \hat{\mathcal{H}}_p \psi_p d^3x}{\int \psi_p^* \psi_p d^3x} + \frac{\int \psi_p^* (\hat{\mathcal{H}} - \hat{\mathcal{H}}_p) \psi_p d^3x}{\int \psi_p^* \psi_p d^3x} \\ &= E_p + \frac{\int \psi_p^* (V - V_p) \psi_p d^3x}{\int \psi_p^* \psi_p d^3x}. \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

---

<sup>1</sup>Lo más adecuado es elegir estas funciones en base a las propiedades físicas relevantes del sistema que se considera.

Esta última ecuación muestra que la energía variacional consiste de los dos primeros términos en una teoría perturbativa, donde el potencial perturbativo es  $(V - V_p)$  y  $V_p$  el potencial no perturbado. Desde este punto de vista, lo más importante es encontrar funciones de prueba  $\psi_p$  cuyos potenciales  $V_p$  reproduzcan el potencial original lo más cercanamente posible, es decir, que el potencial perturbativo  $(V - V_p)$  sea en cierto sentido pequeño y conduzca a una teoría perturbativa convergente.

### Las funciones de prueba

Para elegir las funciones de prueba, consideramos los siguientes criterios:

- La función de prueba  $\psi_p$  la elegimos de tal manera que el potencial de prueba  $V_p = \frac{\Delta\psi_p}{\psi_p} + E_p$ , para el que  $\psi_p$  es eigenfunción exacta de  $\hat{\mathcal{H}}_p = -\Delta + V_p$  con eigenvalor  $E_p$ , reproduzca lo más posible la forma del potencial original  $V$  cerca de las singularidades que pudiera tener así como su comportamiento a grandes distancias.
- Las funciones de prueba deben codificar las simetrías propias del sistema.
- Si el estado base es estudiado, las funciones de prueba no deben anularse en todo el dominio de definición.

# Apéndice E

## Integrabilidad particular

Supongamos que  $\varphi_0$  es una eigenfunción de dos operadores algebraicamente independientes  $\hat{A}$  y  $\hat{B}$ ,  $\hat{A}\varphi_0 = a_0\varphi_0$  y  $\hat{B}\varphi_0 = b_0\varphi_0$ . Es evidente que  $[\hat{A}, \hat{B}]\varphi_0 = 0$ . Un ejemplo muy conocido es el oscilador armónico en la representación de segunda cuantización,  $\hat{H}(\hat{p}, x) = \{a^+, a^-\}_+ \equiv A$ , donde  $\hat{B}(\hat{p}, x) = a^-$  conmuta con  $\hat{H}$  al actuar sobre el vacío,  $[\hat{H}, \hat{B}]|0\rangle = 0$ . Considerando directamente la contraparte clásica  $\hat{H}(\hat{p}, x) \rightarrow H(p, x)$  y  $\hat{B}(\hat{p}, x) \rightarrow B(p, x)$ , se puede hacer la pregunta de si existe una trayectoria para la cual el paréntesis de Poisson  $\{H, B\}$  se anula. Esta trayectoria existe y corresponde al punto  $p = x = 0$ , cuando la partícula permanece en el mínimo del potencial. Para esta trayectoria la energía  $E$  y  $B$  son iguales a cero. No es una trayectoria periódica a diferencia del resto de las trayectorias. Tal trayectoria la llamamos *especial*.

Si para los operadores  $\hat{A}$  y  $\hat{B}$  que actúan sobre el espacio vectorial  $V$  existe un subespacio  $V_p \subset V$  tal que el conmutador  $[\hat{A}, \hat{B}] : V_p \rightarrow \{0\}$ , es decir, tanto  $\hat{A}$  como  $\hat{B}$  tienen a  $V_p$  como subespacio invariante  $\hat{A}(\hat{B}) : V_p \rightarrow V_p$ , entonces  $\hat{A}$  y  $\hat{B}$  se denominan integrales *particulares*. Si la dimensión de  $V_p$  es finita,  $\dim V_p < \infty$ , entonces los operadores son *cuasi-exactamente-solubles*, para los cuales es posible encontrar explícitamente un número finito de eigenfunciones por medios puramente algebraicos. Vale la pena mencionar el caso cuando  $\hat{A} : V_p \rightarrow V_p$  y  $\hat{B} : V_p \rightarrow \{0\}$ , donde  $V_p$  es el kernel o el espacio de los modos cero de  $\hat{B}$ . Si las eigenfunciones comunes forman una base de  $V$ ,  $V_p = V$ , entonces  $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$ . Esta situación corresponde a la integrabilidad estándar. La contraparte clásica de la integrabilidad *particular* implica que el paréntesis de Poisson  $\{A, B\}$  se anula a lo largo de algunas trayectorias *especiales*.

Estas trayectorias pueden ser denominadas superintegrables: ellas están caracterizadas por un número de integrales de movimiento más grande que las trayectorias genéricas.

# Apéndice F

## Parámetros variacionales

Sistema de dos electrones: estado base con  $s = 0$

$B (B_0)$	$s = 0$				
	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$\alpha_0$
$\frac{1}{80}$	0.73069048150	0.11352086851	0.00329387952	0.33448575716	2.48914494545
$\frac{1}{40}$	0.90393228890	0.19349468586	0.00858843322	0.39472245347	1.95903115408
$\frac{1}{22}$	1.07788117579	0.29986594388	0.01891655382	0.44891388876	1.59102478821
$\frac{1}{10+\sqrt{73}}^*$	1.15139513432	0.35035682803	0.02439364782	0.48374435255	1.5
$\frac{1}{14}$	1.21241188809	0.40179168491	0.03264474466	0.47503926267	1.35649917519
$\frac{1}{6}^*$	1.18395830286	0.35062033906	0.03065946420	0.18394776923	1.0
$\frac{1}{5}$	1.23169135936	0.37677799774	0.03246018429	0.16591237842	0.93898540503
$\frac{1}{4}$	1.33950395841	0.46363666539	0.04440960165	0.18510115390	0.86726689689
$\frac{1}{3}$	1.45558282846	0.55429399392	0.05430954753	0.17684325132	0.78308152607
$\frac{1}{10-\sqrt{73}}$	1.88109839971	0.95130715967	0.07428465067	0.07028142468	0.55227357557
$1^*$	2.00233287748	1.00466573717	0.00233291883	0.00233290420	0.5
$\frac{5}{2}$	2.87971236464	2.27379362775	0.12791184651	0.08858165756	0.35804785154
$\frac{25}{2}$	5.44700707757	8.39620461236	1.18327992258	0.46039187600	0.20044101268
25	7.33132806269	15.22216486922	2.69052944542	0.72531163952	0.15131154618
125	14.73959734851	60.52070085298	15.74706528767	2.30469933318	0.08040144733
250	19.92143022861	109.14516935078	26.89587283299	3.97229447029	0.06268852653
500	28.21774482392	219.63571308992	0.00148475648	10.00316971681	0.05483006787

Tabla F.1: Parámetros variacionales de la interpolación  $p_0(\rho)$  (2.50), ver (2.20). Las soluciones cuasi-exactamente solubles se indican con (\*), ver texto.

Sistema de dos electrones: estado base con  $s = 1$

$B (B_0)$	$s = 1$				
	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$\alpha_0$
$\frac{1}{80}$	0.87742154167	0.11304067288	0.00274849049	0.69461922877	2.08210369192
$\frac{1}{40}$	6.62952206671	1.34999143979	0.05112207908	6.26865884599	1.56937554306
$\frac{1}{22}$	7.30110012755	1.93283029587	0.10505270295	6.99846367623	1.21695625982
$\frac{1}{10+\sqrt{73}}$	9.00594641209	2.58202058051	0.15542491983	8.69253550240	1.13034722527
$\frac{1}{14}$	15.10317935144	4.94708366186	0.35167519457	14.76924534815	0.99999147334
$\frac{1}{6}$	16.54889227502	7.86886165094	0.89800489580	16.07869442544	0.68600663590
$\frac{1}{5}$	17.41018328555	8.98314182241	1.13146774441	16.89519041474	0.63167198489
$\frac{1}{4}$	18.13683641107	10.34229714199	1.46762806328	17.56030708514	0.57061619097
$\frac{1}{3}^*$	20.85818223282	13.57212202309	2.24352253308	20.19143311935	0.5
$\frac{1}{10-\sqrt{73}}$	26.21497345875	23.80091998578	5.72638871533	25.25800309313	0.35701680118
1	25.66651582560	27.65259723833	8.05059492410	24.52159270387	0.29893839685
$\frac{5}{2}$	24.59363406376	40.22783593191	18.51562727547	22.82711159078	0.19272136196
$\frac{25}{2}$	12.82910080240	38.09839900753	36.29104549100	9.01399104265	0.08773140534
25	11.34381451019	39.83372736495	48.38068811886	5.97643470050	0.06221120168
125	17.37261823744	104.43834966436	223.65563107536	5.40280778530	0.02785160800
250	21.39746148454	155.98591494664	378.25194916881	4.37069925277	0.01956750084
500	29.79505084365	301.17471463458	996.84969549285	5.69068112757	0.01382115750

Tabla F.2: Parámetros variacionales de la interpolación  $p_0(\rho)$  (2.50), ver (2.20). Las soluciones cuasi-exactamente solubles se indican con (\*), ver texto.



Sistema de dos electrones: estado base con  $s = 2$

$B (B_0)$	$s = 2$				
	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$\alpha_0$
$\frac{1}{80}$	2.18764540274	0.23230909845	0.00505527451	2.02987109847	1.78281902836
$\frac{1}{40}$	4.61143108900	0.68287536890	0.02212337746	4.43046023874	1.31163238633
$\frac{1}{22}^*$	4.99717063407	0.96852536842	0.04361065045	4.79718201211	1.0
$\frac{1}{10+\sqrt{73}}$	6.94665995582	1.46731877366	0.07266682200	6.73497425198	0.92447596843
$\frac{1}{14}$	7.74004506221	1.86172101514	0.10727588524	7.50199325250	0.81173927025
$\frac{1}{6}$	10.79376412346	3.85865963773	0.34783695313	10.43024334286	0.54526072463
$\frac{1}{5}^*$	10.38325985340	4.03330401882	0.39933036471	9.98325268904	0.5
$\frac{1}{4}$	10.10487071927	4.34708313999	0.48247132432	9.65696971411	0.44949025076
$\frac{1}{3}$	9.58158656062	4.69696829720	0.60317622392	9.06496685747	0.39156261941
$\frac{1}{10-\sqrt{73}}$	6.62961352919	4.40891870610	0.80615232968	5.89953434904	0.27603978433
1	5.89291502878	4.56077956974	0.99681486979	5.01772641070	0.22985944328
$\frac{5}{2}$	3.86131838620	3.89165955227	1.23712253517	2.49466006607	0.14658826879
$\frac{25}{2}$	8.13403322136	17.86115519378	12.61734766014	5.10275367177	0.06610729935
25	11.44014535838	35.41647989069	35.38830443894	7.16156137173	0.04683985379
125	17.13237967348	96.75663579100	188.46945797503	7.59338405613	0.02098022898
250	23.89401565642	189.11337455681	515.84386878083	10.43037671992	0.01485553227
500	31.55501124192	335.53478653932	1245.11526801046	12.46962586375	0.01048882115

Tabla F.3: Parámetros variacionales de la interpolación  $p_0(\rho)$  (2.50), ver (2.20). Las soluciones cuasi-exactamente solubles se indican con (\*), ver texto.

Sistema de dos electrones: 1er estado excitado con  $s = 0$

$B (B_0)$	$s = 0$			
	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$\alpha_1$
$\frac{1}{80}$	0.232502035	0.004470275	0.038602322	3.076064100
$\frac{1}{40}$	0.335579346	0.009697067	0.059867204	2.521212212
$\frac{1}{22}$	0.451420177	0.019106876	0.087112570	2.120856949
$\frac{1}{10+\sqrt{73}}$	0.489695968	0.023289381	0.096913125	2.017214650
$\frac{1}{14}$	0.558328895	0.032455977	0.115419785	1.855577961
$\frac{1}{6}$	0.812123717	0.089023617	0.194540010	1.441576036
$\frac{1}{5}$	0.876821744	0.109578414	0.217447727	1.368548433
$\frac{1}{4}$	0.961817576	0.140347026	0.249047951	1.286574073
$\frac{1}{3}$	1.082304214	0.191102185	0.296362256	1.191923413
$\frac{1}{10-\sqrt{73}}^*$	1.456171812	0.399153261	0.456171727	1.0
1	1.703818174	0.577219698	0.568611697	0.921390826
$\frac{5}{2}$	2.532097967	1.398406152	0.961294206	0.775468706
$\frac{25}{2}$	5.297519312	6.628326691	2.321850292	0.627472858
25	7.368209513	13.047879177	3.351656826	0.590883130
125	16.107569682	63.759081869	7.713762289	0.541092408
250	22.656561345	126.791042134	10.986429861	0.529131733
500	31.918422304	252.542875362	15.616061049	0.520636752

Tabla F.4: Parámetros variacionales de la interpolación  $p_1(\rho)$  (2.51), ver (2.20). Las soluciones cuasi-exactamente solubles se indican con (\*), ver texto.

Sistema de dos electrones: 1er estado excitado con  $s = 1$

$B (B_0)$	$s = 1$			
	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$\alpha_1$
$\frac{1}{80}$	0.140196289	0.002923479	0.037619619	2.520051898
$\frac{1}{40}$	0.191807643	0.006147578	0.057572513	1.995110086
$\frac{1}{22}$	0.250592028	0.011507539	0.082457242	1.643810846
$\frac{1}{10+\sqrt{73}}$	0.270502616	0.013730913	0.091242709	1.558285646
$\frac{1}{14}$	0.306857720	0.018319028	0.107618835	1.430386292
$\frac{1}{6}$	0.450786420	0.043107533	0.175069694	1.126945503
$\frac{1}{5}$	0.490218758	0.051729010	0.193985019	1.075244037
$\frac{1}{4}$	0.543512307	0.064625113	0.219726847	1.017484079
$\frac{1}{3}$	0.621424464	0.086047064	0.257630945	0.951162776
$\frac{1}{10-\sqrt{73}}$	0.873868062	0.176360863	0.381711618	0.818620121
1	1.045517210	0.255992379	0.466664888	0.765524722
$\frac{5}{2}$	1.627318599	0.635539693	0.755974770	0.669646767
$\frac{25}{2}$	3.582300645	3.150873609	1.731901855	0.576629627
25	5.046897732	6.287354806	2.463823212	0.554316499
125	11.227411519	31.335885796	5.553570703	0.524369944
250	15.858501757	62.622286134	7.868993720	0.517245406
500	22.407821749	125.173714241	11.143567644	0.512201037

Tabla F.5: Parámetros variacionales de la interpolación  $p_1(\rho)$  (2.51), ver (2.20).

Sistema de dos electrones: 1er estado excitado con  $s = 2$

$B (B_0)$	$s = 2$			
	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$\alpha_1$
$\frac{1}{80}$	0.105020627	0.002055249	0.035490818	2.211837462
$\frac{1}{40}$	0.144170288	0.004185847	0.053255598	1.746906079
$\frac{1}{22}$	0.190011423	0.007668829	0.074897082	1.443437862
$\frac{1}{10+\sqrt{73}}$	0.205743830	0.009108657	0.082444341	1.370438069
$\frac{1}{14}$	0.234654580	0.012079260	0.096417748	1.261916116
$\frac{1}{6}$	0.350447752	0.028181456	0.153149860	1.007691905
$\frac{1}{5}$	0.382373137	0.033802358	0.168911735	0.964866790
$\frac{1}{4}$	0.425594469	0.042225047	0.190297363	0.917205020
$\frac{1}{3}$	0.488887352	0.056245792	0.221684751	0.862726508
$\frac{1}{10-\sqrt{73}}$	0.694413082	0.115592508	0.323928061	0.754685650
1	0.834346372	0.168086476	0.393686115	0.711735004
$\frac{5}{2}$	1.309024068	0.419098625	0.630648081	0.634677092
$\frac{25}{2}$	2.904948827	2.089177232	1.428244880	0.560563288
25	4.100720282	4.175072108	2.026042659	0.542881458
125	9.146995022	20.852452560	4.549064344	0.519211884
250	12.928246200	41.694007039	6.439660113	0.513590123
500	18.275720021	83.371637202	9.113381731	0.509613291

Tabla F.6: Parámetros variacionales de la interpolación  $p_1(\rho)$  (2.51), ver (2.20).

Sistema de dos electrones: 2do estado excitado con  $s = 0$

$B (B_0)$	$s = 0$				
	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$d_4$	$\alpha_2$
$\frac{1}{80}$	0.203210413	0.003274952	0.076729065	0.001383337	3.544460388
$\frac{1}{40}$	0.289983125	0.006969769	0.118715322	0.003275102	2.981820798
$\frac{1}{22}$	0.384590781	0.013018000	0.172314634	0.006828648	2.594104862
$\frac{1}{10+\sqrt{73}}$	0.415259820	0.015504658	0.191550238	0.008412058	2.497025304
$\frac{1}{14}$	0.469813737	0.020664104	0.227815496	0.011836488	2.347828816
$\frac{1}{6}$	0.678361587	0.051503730	0.382062694	0.032744668	1.950508093
$\frac{1}{5}$	0.734801338	0.063404332	0.426490205	0.040654674	1.873956576
$\frac{1}{4}$	0.810333453	0.081766219	0.487614210	0.052907055	1.786372580
$\frac{1}{3}$	0.919002213	0.112928576	0.578805347	0.074123266	1.684532888
$\frac{1}{10-\sqrt{73}}$	1.260896975	0.245528631	0.884379908	0.170691536	1.481157893
1	1.488839788	0.361909867	1.097660529	0.261224875	1.400321545
$\frac{5}{2}$	2.253435394	0.911342863	1.835985859	0.720798404	1.255191465
$\frac{25}{2}$	4.809127804	4.508647998	4.366659842	4.011685268	1.115063239
25	6.722621238	8.973500157	6.274241159	8.246323309	1.081519749
125	14.797467380	44.519148433	14.341217771	42.819852064	1.036549323
250	20.848148770	88.855705179	20.390033168	86.427721924	1.025859133
500	29.405151634	177.445160107	28.945723389	173.986827840	1.018292802

Tabla F.7: Parámetros variacionales de la interpolación  $p_2(\rho)$  (2.52), ver (2.20).

Sistema de dos electrones: 2do estado excitado con  $s = 1$

$B (B_0)$	$s = 1$				
	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$d_4$	$\alpha_2$
$\frac{1}{80}$	0.129447927	0.002339603	0.074598765	0.001312372	2.971027986
$\frac{1}{40}$	0.177307790	0.004887957	0.113735724	0.003025175	2.446522151
$\frac{1}{22}$	0.232339353	0.009132566	0.162252034	0.006114183	2.097867722
$\frac{1}{10+\sqrt{73}}$	0.251065898	0.010897032	0.179319733	0.007454190	2.013470735
$\frac{1}{14}$	0.285339153	0.014544422	0.211066546	0.010296691	1.887721987
$\frac{1}{6}$	0.421629996	0.034350843	0.341186976	0.026695524	1.592173670
$\frac{1}{5}$	0.459064616	0.041264990	0.377552534	0.032641874	1.542293747
$\frac{1}{4}$	0.509695606	0.051623782	0.426984258	0.041679031	1.486753759
$\frac{1}{3}$	0.583768355	0.068861545	0.499676482	0.056965607	1.423245695
$\frac{1}{10-\sqrt{73}}$	0.824009688	0.141770848	0.737151704	0.123467261	1.297233109
1	0.987463926	0.206219906	0.899497667	0.183522126	1.247118993
$\frac{5}{2}$	1.541707237	0.514180892	1.451743502	0.476509449	1.157193654
$\frac{25}{2}$	3.404641066	2.561416816	3.312745939	2.473213299	1.070689344
25	4.800386126	5.117458291	4.708029752	4.991360935	1.050051242
125	10.690479050	25.548822141	10.597505234	25.262760763	1.022423375
250	15.103983599	51.078475465	15.010866661	50.672603479	1.015862711
500	21.345613427	102.129650679	21.252389185	101.554189115	1.011219778

Tabla F.8: Parámetros variacionales de la interpolación  $p_2(\rho)$  (2.52), ver (2.20).

Sistema de dos electrones: 2do estado excitado con  $s = 2$

$B (B_0)$	$s = 2$				
	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$d_4$	$\alpha_2$
$\frac{1}{80}$	0.099824691	0.001768136	0.070177835	0.001169820	2.655672995
$\frac{1}{40}$	0.137328482	0.003593163	0.104914529	0.002601111	2.198772779
$\frac{1}{22}$	0.181391483	0.006580606	0.147070492	0.005091950	1.902751160
$\frac{1}{10+\sqrt{73}}$	0.196534917	0.007816797	0.161744876	0.006152774	1.831868334
$\frac{1}{14}$	0.224381533	0.010369071	0.188887735	0.008378569	1.726754337
$\frac{1}{6}$	0.336043896	0.024227592	0.298874912	0.020899495	1.481892678
$\frac{1}{5}$	0.366850247	0.029070877	0.329396195	0.025369466	1.440854600
$\frac{1}{4}$	0.408564405	0.036331606	0.370792002	0.032123001	1.395258412
$\frac{1}{3}$	0.469661516	0.048424511	0.431524300	0.043470656	1.343243204
$\frac{1}{10-\sqrt{73}}$	0.668107143	0.099658257	0.629243830	0.092272809	1.240426137
1	0.803241869	0.145008623	0.764089262	0.135962710	1.199682858
$\frac{5}{2}$	1.261691489	0.362012437	1.222018950	0.347322763	1.126781574
$\frac{25}{2}$	2.803185362	1.807065173	2.763012239	1.773371706	1.056910637
25	2.803185362	1.807065173	2.763012239	1.773371706	1.056910637
125	8.832516741	18.051661341	8.792061346	17.943546252	1.018033555
250	12.484917759	36.097860592	12.444424197	35.944667431	1.012755246
500	17.650185422	72.187853753	17.609666300	71.970969988	1.009021318

Tabla F.9: Parámetros variacionales de la interpolación  $p_2(\rho)$  (2.52), ver (2.20).

Átomo de Hidrógeno ( $K = 0$ ): estado base con  $s = 0$

$B (B_0)$	$s = 0$				
	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$\alpha_0$
$\frac{1}{80}$	0.050318641	0.000958692	0.000007010	0.000959968	-40.497657916
$\frac{1}{40}$	0.099198462	0.003712594	0.000052203	0.001668577	-20.495314866
$\frac{1}{22}$	0.179485631	0.012215236	0.000317594	0.005540661	-11.491491740
$\frac{1}{10+\sqrt{73}}$	0.212095505	0.017071348	0.000525815	0.007332930	-9.761914891
$\frac{1}{14}$	0.277387330	0.029178856	0.001163295	0.010401493	-7.486662740
$\frac{1}{6}$	0.650367263	0.163513869	0.017798889	0.074186194	-3.469408776
$\frac{1}{5}$	0.767751399	0.227560814	0.029285153	0.093217091	-2.963601144
$\frac{1}{4}$	0.936595684	0.337918832	0.053063853	0.122343487	-2.455159682
$\frac{1}{3}$	1.200673235	0.553300052	0.111086287	0.171126890	-1.941856383
$\frac{1}{10-\sqrt{73}}$	2.145290986	1.744700032	0.613051579	0.365511544	-1.123490697
1	2.829220384	3.012852317	1.373738857	0.517130528	-0.864896782
$\frac{5}{2}$	5.232289204	10.139528354	8.193749730	1.078863566	-0.481515614
$\frac{25}{2}$	13.48240859	66.052142628	129.99299799	3.089522075	-0.192438070
25	19.68684997	140.13517519	396.57824766	4.617873405	-0.132720848
125	45.89200417	756.29372132	4883.621737	11.095141629	-0.057474289
250	65.53018054	1539.49902530	14120.828184	15.952954309	-0.040339274
500	93.32396890	3118.65843014	40593.951288	22.844518293	-0.028375787

Tabla F.10: Parámetros variacionales de la interpolación  $p_0(\rho)$  (2.52), ver (2.37).



Átomo de Hidrógeno ( $K = 0$ ): estado base con  $s = 1$

$B (B_0)$	$s = 1$				
	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$\alpha_0$
$\frac{1}{80}$	0.141119280	0.007648427	0.000173243	0.017166468	-5.375209697
$\frac{1}{40}$	0.261097061	0.025969600	0.001099455	0.045554362	-3.091779985
$\frac{1}{22}$	0.423925272	0.067485194	0.004545766	0.092437878	-2.011075230
$\frac{1}{10+\sqrt{73}}$	0.481961149	0.086830574	0.006574754	0.109845931	-1.791601155
$\frac{1}{14}$	0.590728941	0.129464369	0.011778789	0.143476647	-1.490719701
$\frac{1}{6}$	1.038344585	0.391759279	0.058998008	0.288297423	-0.888965501
$\frac{1}{5}$	1.162868807	0.489470695	0.081588911	0.329247493	-0.799834740
$\frac{1}{4}$	1.331357626	0.638804246	0.120265502	0.384608017	-0.704246020
$\frac{1}{3}$	1.577607354	0.892469956	0.195930265	0.465231560	-0.599366346
$\frac{1}{10-\sqrt{73}}$	2.368300949	1.991516260	0.634781202	0.718311021	-0.404026847
1	2.893061394	2.961132896	1.136579716	0.877120361	-0.330650952
$\frac{5}{2}$	5.130402352	9.114343862	6.110512867	1.865383741	-0.204541734
$\frac{25}{2}$	12.410740636	52.243282695	82.562050566	4.927541528	-0.089420956
25	17.794315242	106.89105408	242.028298746	7.124136648	-0.062787894
125	40.508824187	549.11045290	2891.3602867	16.141662572	-0.027612646
250	59.236261939	1156.2426098	9031.9468076	24.239278365	-0.019338151
500	85.342098441	2367.1911037	27454.599401	34.827742554	-0.013501000

Tabla F.11: Parámetros variacionales de la interpolación  $p_0(\rho)$  (2.52), ver (2.37).

Átomo de Hidrógeno ( $K = 0$ ): estado base con  $s = 2$

$B (B_0)$	$s = 2$				
	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$\alpha_0$
$\frac{1}{80}$	0.191970936	0.013734912	0.000411045	0.047291281	-2.765141696
$\frac{1}{40}$	0.311023561	0.035357755	0.001604487	0.086469198	-1.780954046
$\frac{1}{22}$	0.464770437	0.077500527	0.005041122	0.145233261	-1.252127247
$\frac{1}{10+\sqrt{73}}$	0.516732776	0.095397262	0.006815278	0.164506203	-1.135922402
$\frac{1}{14}$	0.610837831	0.132529062	0.010982941	0.198470607	-0.970199333
$\frac{1}{6}$	1.071938805	0.395186826	0.054686933	0.416821560	-0.611736742
$\frac{1}{5}$	1.173285455	0.473601721	0.071298217	0.451471436	-0.555089816
$\frac{1}{4}$	1.343541404	0.617047765	0.105142355	0.530940414	-0.493217140
$\frac{1}{3}$	1.601606129	0.868938614	0.173821281	0.655803896	-0.423957902
$\frac{1}{10-\sqrt{73}}$	2.453066010	1.997251006	0.591790488	1.073482588	-0.291016833
1	3.064771525	3.079555375	1.120183444	1.388421893	-0.239726300
$\frac{5}{2}$	9.423176121	19.660799053	13.664666438	6.673980744	-0.149827076
$\frac{25}{2}$	24.887679902	120.971106865	197.404809707	18.398221228	-0.065829738
25	43.921515505	314.011565904	759.019138527	34.102722047	-0.046135485
125	143.79519102	2380.4929346	14827.035086	113.50560777	-0.019974764
250	245.59778300	5742.0816044	56114.546557	187.90683488	-0.013796110
500	390.37095634	12537.04580	200991.28620	276.66789474	-0.009431800

Tabla F.12: Parámetros variacionales de la interpolación  $p_0(\rho)$  (2.52), ver (2.37).

Átomo de Hidrógeno ( $K = 0$ ): 1er estado excitado con  $s = 0$

$B (B_0)$	$s = 0$			
	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$\alpha_1$
$\frac{1}{80}$	0.103132484	0.003674308	1.333307606	-6.430208607
$\frac{1}{40}$	0.181502480	0.010834632	1.336501508	-3.643309997
$\frac{1}{22}$	0.296556202	0.028936317	1.344147757	-2.201781704
$\frac{1}{10+\sqrt{73}}$	0.338203127	0.037537464	1.348084811	-1.918613174
$\frac{1}{14}$	0.416648215	0.056593118	1.357252270	-1.535050869
$\frac{1}{6}$	0.748507656	0.176670925	1.420143684	-0.770678518
$\frac{1}{5}$	0.843989821	0.222664438	1.444629070	-0.654628939
$\frac{1}{4}$	0.975556771	0.294209652	1.482192434	-0.528029043
$\frac{1}{3}$	0.975556771	0.294209652	1.482192434	-0.528029043
$\frac{1}{10-\sqrt{73}}$	1.836351846	0.989232300	1.799173918	-0.108510037
$1^*$	0.0	0.0	1.998911268	1.0
$\frac{5}{2}$	3.914278260	4.231156205	2.745655222	0.190494308
$\frac{25}{2}$	9.416491564	23.285921825	5.442069437	0.365396552
25	13.552303632	47.581240294	7.497506506	0.405529069
125	31.018820985	244.521339587	16.214499912	0.458186598
250	44.109334479	492.124288112	22.755961843	0.470507384
500	62.622811891	988.576190622	32.010033094	0.479182697

Tabla F.13: Parámetros variacionales de la interpolación  $p_1(\rho)$  (2.51), ver (2.37). Las soluciones cuasi-exactamente solubles se indican con (\*), ver texto.

Átomo de Hidrógeno ( $K = 0$ ): 1er estado excitado con  $s = 1$

$B (B_0)$	$s = 1$			
	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$\alpha_1$
$\frac{1}{80}$	0.133555800	0.005843354	0.277867667	-2.898540903
$\frac{1}{40}$	0.220876252	0.015577766	0.298952572	-1.656233918
$\frac{1}{22}$	0.328375767	0.033291960	0.335429855	-1.003548545
$\frac{1}{10+\sqrt{73}}$	0.365952474	0.040915316	0.349932977	-0.861147357
$\frac{1}{14}$	0.435528509	0.056947896	0.378354627	-0.658760543
$\frac{1}{6}$	0.717272918	0.146930326	0.504731466	-0.224675645
$\frac{1}{5}$	0.795302471	0.178902298	0.541405741	-0.156671570
$\frac{1}{4}$	0.901028782	0.227086668	0.591707924	-0.082613532
$\frac{1}{3}^*$	0	0	0.666303756	0
$\frac{1}{10-\sqrt{73}}$	1.559294016	0.652836817	0.912487874	0.157686418
1	1.902023468	0.960257071	1.081750028	0.218204192
$\frac{5}{2}$	3.064487407	2.440331291	1.659322747	0.323846179
$\frac{25}{2}$	6.972052342	12.368186880	3.609720928	0.422068377
25	9.899614895	24.808598484	5.072717407	0.445032928
125	22.253874140	124.505762615	11.248807247	0.475499940
250	31.511025999	249.225747812	15.877126338	0.482688798
500	44.602522130	498.747943087	22.422704783	0.487766079

Tabla F.14: Parámetros variacionales de la interpolación  $p_1(\rho)$  (2.51), ver (2.37). Las soluciones cuasi-exactamente solubles se indican con (\*), ver texto.

Átomo de Hidrógeno ( $K = 0$ ): 1er estado excitado con  $s = 2$

$B (B_0)$	$s = 2$			
	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$\alpha_1$
$\frac{1}{80}$	0.140913905	0.006230616	0.142430338	-1.817309200
$\frac{1}{40}$	0.217121574	0.014134888	0.173297911	-1.038784714
$\frac{1}{22}$	0.307771142	0.027343711	0.214210568	-0.601027818
$\frac{1}{10+\sqrt{73}}$	0.339026077	0.032849757	0.228828572	-0.502775312
$\frac{1}{14}$	0.396561476	0.044260536	0.256136108	-0.361321199
$\frac{1}{6}$	0.627570393	0.106711795	0.368417617	-0.049902120
$\frac{1}{5}^*$	0	0	0.399782253	0
$\frac{1}{4}$	0.777666688	0.161576353	0.442387719	0.054721476
$\frac{1}{3}$	0.904119980	0.217414655	0.504985496	0.116126213
$\frac{1}{10-\sqrt{73}}$	1.314865561	0.450189980	0.709139403	0.235127525
1	1.594554085	0.657564130	0.848513988	0.281272867
$\frac{5}{2}$	2.543360439	1.652440533	1.322093193	0.362527271
$\frac{25}{2}$	5.733454056	8.298227358	2.916371802	0.438877578
25	8.123697124	16.612411166	4.111310245	0.456837877
125	18.210747835	83.163264868	9.154599494	0.480732544
250	25.769121841	166.373575857	12.933729583	0.486381627
500	36.458233409	332.811380708	18.278257126	0.490373828

Tabla F.15: Parámetros variacionales de la interpolación  $p_1(\rho)$  (2.51), ver (2.37). Las soluciones cuasi-exactamente solubles se indican con (\*), ver texto.

Átomo de Hidrógeno ( $K = 0$ ): 2do estado excitado con  $s = 0$

$B (B_0)$	$s = 0$				
	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$d_4$	$\alpha_2$
$\frac{1}{80}$	0.134587992	0.005913396	1.614184828	0.333851390	-2.849792421
$\frac{1}{40}$	0.224850920	0.016063285	1.643946440	0.361034733	-1.573480790
$\frac{1}{22}$	0.339254418	0.035238810	1.698348136	0.409063030	-0.883482537
$\frac{1}{10+\sqrt{73}}$	0.380089576	0.043707282	1.721091534	0.428725858	-0.729042373
$\frac{1}{14}$	0.456827672	0.061854046	1.767442171	0.468358231	-0.505557540
$\frac{1}{6}^*$	0	0	1.998908495	0.665945559	0
$\frac{1}{5}$	0.873759930	0.209211892	2.072549309	0.730667968	0.084194956
$\frac{1}{4}$	1.001342701	0.270026808	2.177295518	0.825270183	0.178011059
$\frac{1}{3}$	1.191224628	0.373832889	2.339236733	0.978336453	0.285552928
$\frac{1}{10-\sqrt{73}}$	1.823637270	0.831445155	2.910728795	1.594855423	0.499999348
1	2.261872000	1.247779093	3.322973968	2.118956169	0.585482571
$\frac{5}{2}$	3.765435567	3.285608741	4.778043201	4.521803327	0.738339861
$\frac{25}{2}$	8.859833015	17.162791401	9.824332687	19.626539454	0.883544841
25	12.682909566	34.639314838	13.635814369	38.023321313	0.917777787
125	28.822344423	175.145848987	29.759689618	182.414595430	0.963309353
250	40.916919714	351.161379116	41.850572538	361.341525833	0.974070004
500	58.021516940	703.526819977	58.952537549	717.823720822	0.981671673

Tabla F.16: Parámetros variacionales de la interpolación  $p_2(\rho)$  (2.52), ver (2.37). Las soluciones cuasi-exactamente solubles se indican con (\*), ver texto.

Átomo de Hidrógeno ( $K = 0$ ): 2do estado excitado con  $s = 1$

$B (B_0)$	$s = 1$				
	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$d_4$	$\alpha_2$
$\frac{1}{80}$	0.146107901	0.006631573	0.429465956	0.036704961	-1.615603149
$\frac{1}{40}$	0.230547766	0.015659107	0.489322201	0.049323828	-0.765699471
$\frac{1}{22}$	0.333644451	0.031249553	0.574802647	0.069780234	-0.273786864
$\frac{1}{10+\sqrt{73}}$	0.369562034	0.037828746	0.606378542	0.078118228	-0.161918634
$\frac{1}{14}^*$	0	0	0.6663037561	0.0951344347	0
$\frac{1}{6}$	0.704362086	0.127216860	0.919587654	0.184617360	0.359498891
$\frac{1}{5}$	0.778653995	0.153889801	0.991369371	0.215184651	0.417409682
$\frac{1}{4}$	0.879315236	0.193987334	1.089255515	0.260588198	0.480985689
$\frac{1}{3}$	1.026826397	0.260968547	1.233623412	0.335394217	0.552542755
$\frac{1}{10-\sqrt{73}}$	1.506176947	0.546132587	1.706839964	0.646204652	0.691003223
1	1.832646234	0.799452460	2.030912765	0.917095824	0.744798880
$\frac{5}{2}$	2.940186220	2.015722027	3.134217981	2.193216574	0.839572590
$\frac{25}{2}$	6.663841023	10.147857922	6.853883460	10.527240359	0.928663060
25	9.453787123	20.324972019	9.642893888	20.855813324	0.949625472
125	21.227550171	101.810101525	21.415406565	102.980089078	0.977511940
250	30.049760520	203.704286119	30.237324448	205.353370431	0.984105384
500	42.526231736	407.526623327	42.713577430	409.852602024	0.988763852

Tabla F.17: Parámetros variacionales de la interpolación  $p_2(\rho)$  (2.52), ver (2.37). Las soluciones cuasi-exactamente solubles se indican con (\*), ver texto.

Átomo de Hidrógeno ( $K = 0$ ): 2do estado excitado con  $s = 2$

$B (B_0)$	$s = 2$				
	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$d_4$	$\alpha_2$
$\frac{1}{80}$	0.143598267	0.006040791	0.253113168	0.014225676	-1.018409786
$\frac{1}{40}$	0.216882488	0.013053664	0.317856472	0.022763998	-0.377096094
$\frac{1}{22}^*$	0	0	0.399782253	0.036324056898	0
$\frac{1}{10+\sqrt{73}}$	0.334244102	0.029472081	0.428648388	0.041840364	0.086301430
$\frac{1}{14}$	0.389690706	0.039447566	0.482282240	0.053113814	0.211609150
$\frac{1}{6}$	0.612505742	0.093897368	0.701017240	0.112897588	0.491803108
$\frac{1}{5}$	0.674036522	0.112990404	0.761884369	0.133480343	0.537236782
$\frac{1}{4}$	0.757369838	0.141647515	0.844488282	0.164162844	0.587224340
$\frac{1}{3}$	0.879448417	0.189445205	0.965743834	0.214937060	0.643626300
$\frac{1}{10-\sqrt{73}}$	1.276047186	0.392449846	1.360745558	0.427654346	0.753206133
1	1.546147172	0.572484962	1.630223900	0.614324065	0.795945080
$\frac{5}{2}$	2.462519354	1.435579087	2.545498977	1.499967514	0.871470224
$\frac{25}{2}$	5.543814795	7.196090939	5.625762910	7.336419795	0.942740082
25	7.852583596	14.400071483	7.934289912	14.597340756	0.959547957
125	17.595916878	72.051201057	17.677294648	72.488593442	0.981930514
250	24.896742426	144.125386717	24.978048997	144.743013654	0.987226969
500	35.221664192	288.283271932	35.302918788	289.155732958	0.990970085

Tabla F.18: Parámetros variacionales de la interpolación  $p_2(\rho)$  (2.52), ver (2.37). Las soluciones cuasi-exactamente solubles se indican con (\*), ver texto.



Átomo de Hidrógeno ( $K \neq 0$ ): parámetro  $A_0$

$K$	$A_0$			
	$B = 0.1$	$B = 10$	$B = 100$	$B = 1000$
1	0.48	8.04	12.09	203.00
25	-0.05	3.36	2.10	172.15
50	-0.50	0.21	-15.37	120.62
75	-1.05	-2.01	-47.10	72.75
100	-	-5.16	-87.06	28.66
125	-	-8.59	-122.12	-25.26
150	-	-9.69	-167.36	-82.73
175	-	-10.41	-214.00	-139.71
200	-	-	-269.18	-184.02

Tabla F.19: Estado base: parámetro  $A_0$  (ver 2.80) con  $B_0 = 9.3917 \times 10^9 G$ . Para  $B = 1$  y  $0 \leq K \leq 200$ , éste parámetro toma el valor  $A_0 = 0.81$ .

**Átomo de Hidrógeno ( $K \neq 0$ ): parámetro  $A_1$**

$B$	$A_1$
0.1	1.998
1	1.998
10	1.982
100	1.965
1000	1.938

Tabla F.20: Estado base: parámetro  $A_1$  (ver 2.80) para valores del Pseudomomento  $0 \leq K \leq 200$ . El parámetro  $A_1$  desempeña el papel de una carga efectiva (es el factor de la fase enfrente del término lineal en  $\rho$ ). Si  $B = 0$  (átomo de hidrógeno) la solución exacta corresponde a  $A_1 = 2$  ( $B_0 = 9.3917 \times 10^9 G$ ).

Átomo de Hidrógeno ( $K \neq 0$ ): parámetro  $A_2$

$K$	$A_2$			
	$B = 1$	$B = 10$	$B = 100$	$B = 1000$
1	0	-0.001	-0.001	-0.019
25	-0.02	-0.047	-0.141	-0.194
50	-0.04	-0.094	-0.276	-1.086
75	-0.07	-0.141	-0.398	-1.725
100	-0.09	-0.187	-0.504	-2.363
125	—	-0.235	-0.613	-3.233
150	—	-0.282	-0.705	-3.881
175	—	-0.330	-0.798	-4.373
200	—	—	-0.891	-4.959

Tabla F.21: Estado base: parámetro  $A_2$  (ver 2.80). Para  $B = 0.1$  y  $0 \leq K \leq 200$ ,  $A_2 = 0$  con  $B_0 = 9.3917 \times 10^9 G$ .

Átomo de Hidrógeno ( $K \neq 0$ ): parámetro  $A_3$

$K$	$A_3$		
	$B = 0.1$	$B = 100$	$B = 1000$
1	0.12	6.40	18.476
25	0.1	6.38	21.031
50	0.1	6.30	23.004
75	0.1	6.14	23.587
100	–	5.97	24.107
125	–	5.85	24.906
150	–	5.71	24.930
175	–	5.61	24.510
200	–	5.52	24.282

Tabla F.22: Estado base: parámetro  $A_3$  (ver 2.80). Para  $B = 1, 10$  y  $0 \leq K \leq 200$ ,  $A_3 = 0.75, 2.02$ , respectivamente ( $B_0 = 9.3917 \times 10^9 G$ ).

Átomo de Hidrógeno ( $K \neq 0$ ): parámetro  $A_4$

$K$	$A_4$			
	$B = 1$	$B = 10$	$B = 100$	$B = 1000$
1	0	0	0	-0.0003
25	-0.01	-0.004	-0.003	-0.0099
50	-0.02	-0.007	-0.0058	-0.0156
75	-0.03	-0.011	-0.0073	-0.0202
100	-0.04	-0.014	-0.0080	-0.0253
125	—	-0.017	-0.0087	-0.0308
150	—	-0.02	-0.0089	-0.0334
175	—	-0.0235	-0.0090	-0.0347
200	—	—	-0.0090	-0.0369

Tabla F.23: Estado base: parámetro  $A_4$  (ver 2.80). Para  $B = 0.1$  y  $0 \leq K \leq 200$ ,  $A_4 = 0$  ( $B_0 = 9.3917 \times 10^9 G$ ).

Átomo de Hidrógeno ( $K \neq 0$ ): parámetro  $A_5$

$K$	$A_5$		
	$B = 10$	$B = 100$	$B = 1000$
1	0.755	1.254	4.039
25	0.720	1.221	3.850
50	0.706	1.153	3.445
75	0.693	1.053	3.198
100	0.677	0.955	3.100
125	0.666	0.891	3.058
150	0.663	0.820	2.904
175	0.661	0.764	2.736
200	—	0.7144	2.637

Tabla F.24: Estado base: parámetro  $A_5$  (ver 2.80). Para  $B = 0.1, 10$  y  $0 \leq K \leq 200$ ,  $A_5 = 0.1, 0.58$ , respectivamente ( $B_0 = 9.3917 \times 10^9 G$ ).

Átomo de Hidrógeno ( $K \neq 0$ ): parámetro  $\alpha$

$K$	$\alpha$		
	$B = 10$	$B = 100$	$B = 1000$
1	32.42	126.13	321.74
25	30.20	122.58	302.54
50	28.14	119.72	283.12
75	26.94	115.05	261.19
100	25.20	110.43	229.17
125	22.74	104.93	180.53
150	21.93	100.99	145.58
175	21.44	95.12	117.62
200	—	85.00	92.93

Tabla F.25: Estado base: parámetro  $\alpha$  (ver 2.80). Para  $B = 0.1, 1$  y  $0 \leq K \leq 200$ ,  $\alpha = 1, 2.45$ , respectivamente ( $B_0 = 9.3917 \times 10^9 G$ ).

Átomo de Hidrógeno ( $K \neq 0$ ): parámetros  $D$ 's

$D$	$B = 0.1$	$B = 1$	$B = 10$
$D_0$	1.39	0.93	-0.998
$D_1$	0.89	1.76	9.014
$D_2$	0.89	1.76	9.014
$D_3$	0.2384	0.9066	3.1228
$D_4$	1.13	1.65	1.952
$D_5$	1.13	1.64	1.952
$D_6$	0.5692	0.8228	0.97624

Tabla F.26: Estado base: los parámetros  $D$ 's (ver 2.80) para  $K_c < K < 200$  con  $B_0 = 9.3917 \times 10^9 G$ .



# Bibliografía

- [1] M. Taut, *Two electrons in a homogeneous magnetic field: particular analytical solutions*, Phys. Rev. A **48** (1993) 3561.
- [2] R. Laughlin, *Quantized motion of three two-dimensional electrons in a strong magnetic field*, Phys. Rev. **27** (1983) 3383 - 3389.
- [3] R. Blümel and W .P. Reinhardt, *Chaos in Atomic Physics*, Cambridge: Cambridge University Press (1997).
- [4] O. Bohigas, M-J Giannoni and C. Schmit, *Lecture Notes in Physics* **263**, Berlin: Springer (1986).
- [5] M. Robnik, *Hydrogen atom in a strong magnetic field: on the existence of the third integral of motion*, J. Phys. A: Math. Gen. **14** (1981) 3195-3216.
- [6] Yu. E. Lozovic, I. V. Ovchinnikov, S. Yu. Volkov, L. V. Butov, and D. S. Chemla, *Quasi-two dimensional excitons in finite magnetic fields*, Physical Review B **65** (2002) 235304.
- [7] R. J. Elliot and R. Loudon, *Theory of the absorption edge in semiconductors in a high magnetic field*, J. Phys. Chem. Solids **15** (1960) 196.
- [8] H. Hasegawa and R. E. Howard, *Optical absorption spectrum of hydrogenic atoms in a strong magnetic field*, J. Phys. Chem. Solids **21** (1961) 179.
- [9] L.P. Gorkov and I.E. Dzyaloshinskii, *Contribution to the theory of the Mott exciton in a strong magnetic field*, Sov. Phys. JETP **26** (1968) 449.

- [10] L. A. Burkova, I.E. Dzyaloshinskii, G. F. Drukarev, and B. S. Monozon, *Hydrogen-like system in crossed electric and magnetic fields*, Sov. Phys. JETP **44** (1976) 276.
- [11] I.E. Dzyaloshinskii, *Effects of the finite proton mass in a Hydrogen-atom in crossed magnetic and electric fields: A state with a giant electric-dipole moment*, Phys. Lett. A (1992) 165:69.
- [12] D. Baye, *Separation of centre-of-mass motion for a charged 2-body system in a homogeneous magnetic field*, J. Phys. A (1983) 16:3207.
- [13] D. Baye, *An approximate constant of motion for the problem of an atomic ion in a homogeneous magnetic-field*, J. Phys. B (1982) 15:L795.
- [14] P. Schmelcher and L. S. Cederbaum, *2-body effects of the Hydrogen-atom in crossed electric and magnetic fields*, Chem. Phys. Lett. (1993) 208:548.
- [15] P. Schmelcher, *Giant dipole states of multielectron atoms in crossed electric and magnetic fields*, Phys. Rev. A (2001) 64:063412.
- [16] A.V. Turbiner, *A New Approach to Finding Levels of Energy of Bound States in Quantum Mechanics: Convergent Perturbation Theory*, Soviet Phys. Pisma ZhETF **30**, (1979) 379-383. JETP Lett. **30**, (1979) 352-355 (English Translation);  
*The Problem of Spectra in Quantum Mechanics and the 'Non-Linearization' Procedure*, Soviet Phys. – Usp. Fiz. Nauk. **144**, (1984) 35-78, Sov. Phys. Uspekhi **27**, (1984) 668-694 (English Translation)
- [17] A.V. Turbiner, *Anharmonic Oscillator and Double-Well Potential: Approximating Eigenfunctions*, Letters in Mathematical Physics **74** (2005) 169-180.
- [18] A.V. Turbiner and H. Olivares-Pilón, *The  $H_2^+$  molecular ion: a solution*, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **45** (2012) 119501.
- [19] W. Becker and G. Pavlov, *Pulsars and isolated neutron stars*, in The Century of Space Science Vol. 1 Edited by Johan A. M. Bleeker, Johannes Geiss and Martin C. E. Huber, Kluwer Academic Publishers (2001) astro-ph/208356.

- [20] D. Sanwal, G. G. Pavlov, V. E. Zavlin, and M. A. Teter, *Discovery of absorption features in the X-ray spectrum of an isolated neutron star*, *Astrophys. J.* **574** (2002) L61-L64 astro-ph/0206195.
- [21] B.B. Kadomtsev, V.S. Kudryavtsev, *Molecules in an ultrastrong magnetic field*, *Pis'ma ZhETF [Sov. Phys.-JETP Lett.]* **13** (1) (1971) 15-19.
- [22] M. Ruderman, *Matter in superstrong magnetic fields: the surface of a neutron star*, *Phys. Rev. Lett.* **27** (1971) 1306-1308.
- [23] A. V. Turbiner and J. C. López Vieyra, *One-electron molecular systems in a strong magnetic field*, *Phys. Repts.* **424** (2006) 309.
- [24] P.A. Maksym, Tapash Chakraborty, *Quantum Dots in a Magnetic Field: Role of Electron-Electron Interactions*, *Phys. Rev. Lett.* **65** (1990) 108.
- [25] A. Harju, V.A. Sverdlov, B. Barbiellini, R.M. Nieminen, *Variational wave function for a two-electron quantum dot*, *Physica B* **225** (1998) 145.
- [26] B.S. Kandemir, *Variational study of two-electron quantum dots*, *Phys. Rev. B* **72** (2005) 165350.
- [27] M. Dineykhan, R.G. Nazmitdinov, *Two-electron quantum dot in magnetic field: Analytical Results*, *Phys. Rev. B* **55** (1997) 13707.
- [28] L. Jacak, P. Hawrylak and A. Wojs, *Quantum Dots*, Springer, Berlin (1998) .
- [29] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Quantum Mechanics, Non-relativistic Theory (Course of Theoretical Physics vol 3)*, 3rd edn (Oxford: Pergamon Press) (1977) .
- [30] E. McSween and P. Winternitz, *Integrable and superintegrable Hamiltonian systems in magnetic fields*, *J.Math.Phys.* **41** (2000) 2957 - 2967.
- [31] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, Pergamon Press (1971) .
- [32] W.Miller Jr., E.G.Kalnins and G.S.Pogosyan., *Exact and quasi exact solvability of second order superintegrable quantum systems. I. Euclidean space preliminaries*, *Journal of Math Physics* **47** (2006) 033502 ArXiv:

math-ph/0412035

*Exact and quasi-exact solvability of second order superintegrable quantum systems. II. Relations to separation of variables*, *Journal of Math Physics* **48**, (2007) 023503

- [33] S. Post, P. Winternitz, *An infinite family of superintegrable deformations of the Coulomb potential*, *Journal of Physics* **A43** (2010) 222001.
- [34] D. Pinheiro and R.S. Mackay, *Interaction of two charges in a uniform magnetic field I: planar case*, *Nonlinearity* **19** 1713 - 1745 (2006).
- [35] S. Curilef and F. Claro, *Dynamics of Two Interacting Particles in a Magnetic Field in Two Dimensions*, *American Journal of Physics* **65** 244 - 250 (1997).
- [36] M. Taut, *Two particles with opposite charge in a homogeneous magnetic field: particular analytical solutions of the two-dimensional Schrödinger equation*, *J. Phys. A: Math. Gen.* **32** (1999).
- [37] M.A. Escobar-Ruiz and A.V. Turbiner, *Two charges on a plane in a magnetic field: special trajectories*, *Journal of Math Physics* **54** (2013) 022901.
- [38] A.V. Turbiner and M.A. Escobar-Ruiz, *Two charges on a plane in a magnetic field: hidden algebra, (particular) integrability, polynomial eigenfunctions*, *J. Phys. A:* **46** (2013) 295204.
- [39] M.A. Escobar-Ruiz and A.V. Turbiner, *Two charges on a plane in a magnetic field I: "Quasi - equal" charges and neutral quantum system at rest cases*, *Annals of Physics* **340**(2014) 37-59.
- [40] A.V. Turbiner, *Quantum mechanics: problems intermediate between exactly solvable and completely unsolvable*, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 94, 33 (1988) [*Sov. Phys. JETP* 67 230 (1988)].
- [41] A.V. Turbiner, *Quasi-exactly-solvable problems and  $sl(2)$  algebra*, *Comm. Math. Phys.* 118, 467 (1988).
- [42] A.V. Turbiner, *Lie-algebras and polynomials*, *J. Phys. A* **25** L1087 (1992).

- [43] A.V. Turbiner, Preprint ITEF-117 (1979) .
- [44] C. K. Au. Y. Aharonov, *New approach to Perturbation Theory*, Phys. Rev. Lett. **42**, 1582 (1979) .
- [45] A.V. Turbiner, Doctor of Sciences Thesis Analytic Methods in Strong Coupling Regime (large perturbation) in Quantum Mechanics, ITEP, Moscow (1989) (unpublished) .
- [46] A.V. Turbiner, *Particular Integrability and (Quasi)-exact-solvability Journal of Physics A* **45** 025203 (9pp) (2013) [math-ph arXiv:1206.2907](#)
- [47] Tempesta P., Turbiner A.V. and P. Winternitz P., *Exact Solvability of Superintegrable Systems*, [hep-th/0011209 Journal of Math Physics](#) **42**, 4248-4257 (2001)
- [48] W. Kohn, *Cyclotron Resonance and de Haas-van Alphen Oscillations of an Interacting Electron Gas*, Phys. Rev. **123** (1961)
- [49] Vincke M. and Baye D., *Hydrogen molecular ion in an aligned strong magnetic field by the Lagrange-mesh method*, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **39** 2605 - 18 (2006)
- [50] Yu. E. Lozovik, I. V. Ovchinnikov, S. Yu. Volkov, L. V. Butov, and D. S. Chemla, *Quasi-two-dimensional excitons in finite magnetic fields*, Phys. Rev. B **65**, 235304 (2002)
- [51] A. Soylu, O. Bayrak and I. Boztosun, *The Energy Eigenvalues of the Two Dimensional Hydrogen Atom in a Magnetic Field*, Int. J. Mod. Phys. E **15**, 1263 (2006)