



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

REALIZACIÓN DE ÁRBOLES DE  
HUBBARD PARA POLINOMIOS  
POSTCRITICAMENTE FINITOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

PRESENTA:

PÉREZ VÁZQUEZ KARLA FARA

DIRECTOR DE TESIS:

DR. CARLOS ALFONSO CABRERA OCAÑAS



2014



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

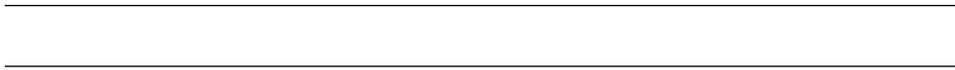
**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## Hoja de Datos Del Jurado

1. Datos del alumno  
Pérez  
Vázquez  
Karla Fara  
56830767  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Matemáticas  
305240646
  
2. Datos del tutor  
Dr.  
Carlos Alfonso  
Cabrera  
Ocañas
  
3. Datos del sinodal 1  
Dr.  
Peter  
Makienko
  
4. Datos del sinodal 2  
Dr.  
Guillermo Javier  
Sierra  
Loera
  
5. Datos del sinodal 3  
Dr.  
Aubin  
Arroyo  
Camacho
  
6. Datos del sinodal 4  
Dr.  
Jefferson Edwin  
King  
Dávalos
  
7. Datos del trabajo escrito  
Realización de árboles de Hubbard para polinomios postcríticamente finitos.  
77pp 2014



*Dedicado a  
Mis Padres, mis abuelos, Alberto y Alejandra*



---

## Agradecimientos

---

Tanto este trabajo como llegar hasta aquí no sería posible sin el apoyo de mis padres, quiero agradecer principalmente a ellos por todo lo que me han enseñado y por acompañarme siempre en todo camino con mucho cariño; agradezco a mi madre por enseñarme a ser una mujer fuerte y salir adelante, a luchar por mis sueños y cumplir metas; a mi papá por ser mi mejor amigo siempre, mi cómplice y mi guardián, mi compañero de camino y mi ejemplo a seguir. Gracias a ambos por el apoyo, el amor, la educación, la paciencia durante todo este tiempo y por permanecer unidos. Los quiero mucho. Gracias también a mi hermano Alberto, de quién aún tengo mucho que aprender y conocer.

Mi total agradecimiento y admiración al Dr. Carlos Cabrera, no pudo haber sido mejor guía, aprendí bastante y agradezco todas las consideraciones para conmigo, su hospitalidad, apoyo y sobretodo su enorme paciencia.

Gracias a mi familia que de alguna manera siempre me ha apoyado, a mis abuelos quienes siempre estuvieron al pendiente de mi y sé que aún me cuidan, a Lola quién me ha brindado su cariño incondicional, a mis tíos en especial a mi padrino, quién se preocupa por involucrarse en mi formación y siempre tiene charlas interesantes. Mis primos que son mis amigos de toda la vida.

A mis profesores que fueron marcando el rumbo, en especial al Dr. Carlos Alvarez, quién me ayudó a desarrollar mis capacidades.

Y agradezco a mis amigos, mis compañeros de aventura, a Andrés Rodríguez, Valente, Leonardo y Diego quienes desde el inicio me acompañaron y me empaparon de conocimiento, a Andrés Hernández por ser un gran amigo y complice, y a Javier un gran apoyo durante mucho tiempo y que a pesar de muchas cosas me ha tendido la mano en momentos difíciles.

<b>Agradecimientos</b>	<b>III</b>
<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Conceptos básicos</b>	<b>11</b>
1.1. Conjunto de Julia y Conjunto de Fatou . . . . .	11
1.1.1. Ejemplos de los conjuntos de Fatou y Julia . . . . .	15
1.2. Rayos externos . . . . .	24
1.3. Ángulos externos . . . . .	32
<b>2. Árboles de Hubbard y Secuencias de Tejido</b>	<b>37</b>
2.1. Árboles de Hubbard . . . . .	37
2.2. Descripción simbólica . . . . .	50
<b>3. Demostración</b>	<b>57</b>
3.1. Algoritmo 1: . . . . .	61
3.2. Algoritmo 2: . . . . .	69



---

## Introducción

---

El objetivo básico del estudio de los sistemas dinámicos es entender el comportamiento eventual o asintótico de un proceso de iteraciones. Si este proceso es una ecuación diferencial cuya variable independiente es el tiempo, entonces se pretende deducir el comportamiento de las soluciones de la ecuación en un futuro distante ( $t \rightarrow \infty$ ) o en un pasado remoto ( $t \rightarrow -\infty$ ). Si el proceso es discreto, como la iteración de una función, entonces el objetivo es comprender la conducta de los puntos  $x, f(x), f^2(x), \dots, f^n(x)$  conforme  $n$  crece. Por ejemplo, supongamos que en un momento de ocio usando una calculadora científica elegimos un número cualquiera y le aplicamos alguna de las funciones que se encuentran en la calculadora una, otra y otra vez, este proceso de iteraciones es un ejemplo de un sistema dinámico discreto; en concreto si aplicamos de forma repetida la función exponencial en nuestra calculadora para un número  $x$ , daremos lugar a la sucesión de números:

$$x, e^x, e^{e^x}, e^{e^{e^x}}, \dots,$$

es decir, estamos iterando la función exponencial; si repetimos este procedimiento haciendo diferentes elecciones de la  $x$  podremos ver que algunas de ellas tienden a infinito “más rápido que otras”, en otras palabras requieren de un número menor de iteraciones para que la calculadora no pueda seguir el cálculo, entonces dada una función  $f$  y un punto inicial  $x_0$  surge la siguiente pregunta: ¿qué es lo que sucede a la larga con las iteraciones:  $x_0, f(x_0), f(f(x_0)), \dots$ ?

Ahora cuando la función que determina el sistema dinámico es del tipo  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  y holomorfa, entonces estamos hablando de un sistema dinámico

complejo, que es justo el área en que trabajaremos, restringiéndonos a un caso sencillo y particular de función holomorfa, centraremos nuestro trabajo en polinomios la forma  $P_c(z) = z^2 + c$  con  $c$  un parámetro complejo. Para el estudio particular de las iteraciones de estos polinomios es importante entender el comportamiento de la órbita del punto crítico, puesto que esta determina en diversos sentidos la topología y los distintos comportamientos dinámicos de todas las demás órbitas. Por ejemplo, si  $C(P_c)$  denota el conjunto de puntos críticos de  $P_c$ , y  $\mathcal{K}(P_c)$  es el conjunto de puntos cuya órbita es acotada, entonces  $\mathcal{K}(P_c)$  es conexo si y sólo si  $C(P_c) \subset \mathcal{K}(P_c)$

La importancia de la órbita crítica en estos polinomios se hace más evidente cuando estas son finitas y entonces, dichos polinomios reciben el nombre de *postcríticamente finitos*. Los cuales presentan las siguientes características:

- Si la órbita crítica de  $P_c$  es periódica, el parámetro  $c$  es llamado centro.
- Si la órbita crítica de  $P_c$  es preperiódica, el parámetro  $c$  recibe el nombre de Mi-siurewicz.

Para cualquiera de estos polinomios se cumple que  $\mathcal{K}(P_c)$  es conexo y localmente conexo.

Ahora para saber cuando  $P_c : z \rightarrow z^2 + c$  es postcríticamente finito, consideramos los parámetros  $c$  para los que 0 es un punto periódico o preperiódico de  $P_c$ . Es decir en el primer caso,  $c$  debe de satisfacer la ecuación:

$$P_c^n(0) = 0$$

para alguna  $n \in \mathbb{N}$ , por ejemplo: para  $n = 2$ , las soluciones para  $c^2 + c = 0$  son  $c = 0$  y  $c = -1$ , de donde se obtiene que el polinomio  $P_{-1}(z) = z^2 - 1$  es postcríticamente finito, con órbita crítica finita de la forma  $\{-1, 0\}$ . Para el segundo caso  $c$  satisface la ecuación de la forma:

$$P_c^n(0) = P_c^k(0).$$

Dadas  $n$  y  $k$  la ecuación anterior puede tener varias soluciones. Por ejemplo para  $n = 2$  y  $k = 4$  una de las soluciones para  $P_c^2(0) = P_c^4(0)$ , es  $c = i$ , de donde el polinomio  $P_i(z) = z^2 + i$  tiene órbita crítica finita de la forma:  $i \rightarrow -1 + i \rightarrow -i \rightarrow -1 + i \rightarrow \dots$

Del estudio de estos polinomios surge el interés por hacer una clasificación de los mismos que distinga y haga una descripción en términos de la dinámica asociada. Una manera en que puede hacerse esta clasificación es diferenciando las dinámicas de cada polinomio  $P_c$  con la ayuda de modelos combinatorios; Douady y Hubbard mostraron en [1] que la geometría, la topología y la dinámica de un conjunto de Julia asociado a un polinomio  $P_c$  puede ser entendida en términos de combinatoria y dinámica simbólica. Los modelos combinatorios que se introducen y utilizan para describir la dinámica polinomial son los siguientes:

## Rayos externos y ángulos externos

Sea  $A_\infty(P_c)$  el conjunto de puntos cuya órbita converge a  $\infty$ . El conjunto  $A_\infty(P_c)$  se llama la *Cuenca de atracción de infinito* de  $P_c$ . Notemos que  $\mathbb{C} \setminus A_\infty(P_c) = \mathcal{K}(P_c)$ . Dado que estamos considerando polinomios postcríticamente finitos, se tiene que el conjunto de Julia  $\mathcal{J}_c$  es conexo y localmente conexo, esto permite construir un modelo combinatorio de  $P_c$  basado en rayos externos. Ahora describimos brevemente esta construcción.

Observemos que  $\infty$  es un punto fijo superatractor, es decir, se cumple que  $P_c(\infty) = \infty$  y  $P'_c(\infty) = 0$ . Puesto que  $P_c$  es postcríticamente finito, tenemos que  $A_\infty(P_c)$  es simplemente conexo. Además, por un Teorema de Böttcher, la dinámica de  $P_c$  en  $A_\infty(P_c)$  está conjugada a la función  $z \mapsto z^2$  en el complemento del disco unitario  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$ . La conjugación está realizada por un isomorfismo conforme  $\phi_c : A_\infty(P_c) \rightarrow \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$  que cumple la relación:

$$\phi_c \circ P_c \circ \phi_c^{-1} = z^2.$$

Si medimos los ángulos del disco unitario en “vueltas de círculo”, es decir, cada ángulo  $\theta$  con respecto al eje real en  $\mathbb{C}$  es un valor entre 0 y 1, podemos definir un *Rayo externo* con ángulo  $\theta$  como el conjunto:

$$\gamma_\theta = \{z \in A_\infty(P_c) : \text{Arg}(\phi_c(z)) = \theta\}.$$

En otras palabras, es la imagen inversa bajo  $\phi_c$  del conjunto

$$\{Re^{2\pi i\theta}, R > 1\}.$$

Aquí, el ángulo  $\theta$  es llamado *ángulo externo* de  $\gamma_\theta$ .

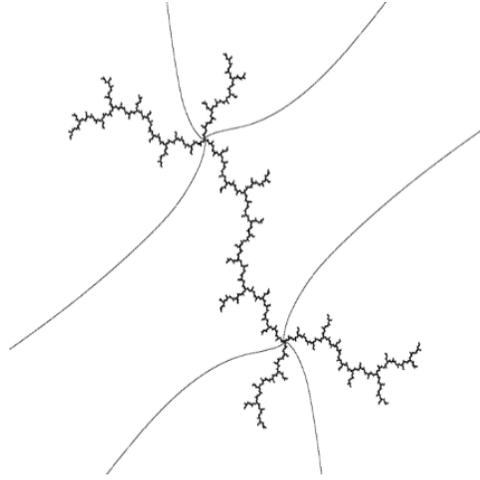


Figura 1: Se ilustran el conjunto de Julia de  $c = i$  y algunos rayos externos.

Cuando el límite

$$\lim_{r \rightarrow 1} \phi_c^{-1}(r e^{2\pi i \theta})$$

existe y es igual a  $z_0$ , decimos que el rayo  $\gamma_\theta$  aterriza en  $z_0$ . En este caso, el punto  $z_0$  pertenece a  $J_c$ . Puesto que  $J_c$  es localmente conexo, por un Teorema de Caratheodory, todos los rayos  $\gamma_\theta$  aterrizan en un único punto de  $J_c$ . De manera que la función  $\phi_c^{-1}$  se extiende de forma continua al círculo unitario  $\mathbb{S}^1$  y  $\phi_c^{-1}(\mathbb{S}^1) = J_c$ .

Es posible que más de un rayo aterrice en un punto de  $J_c$ . De hecho, si consideramos la relación de equivalencia en el círculo unitario  $\mathbb{S}^1$ , dada por  $\theta \sim \theta'$  si y sólo si los rayos  $\gamma_\theta$  y  $\gamma_{\theta'}$  aterrizan en el mismo punto, entonces el espacio cociente bajo esta relación es homeomorfo a  $J_c$ .

Cuando  $P_c$  es postcríticamente finito, uno puede describir a  $P_c$  por todos los conjuntos de ángulos que aterrizan en un sólo punto. Algo más interesante es que existe un punto  $p$  en el conjunto de Julia  $J_c$ , de tal forma que el parámetro  $c$  está determinado por el conjunto de ángulos que aterrizan en  $p$ . Es decir, esto nos da una descripción combinatoria mediante los rayos externos que es finita y eficiente. En este trabajo, damos por hecha esta construcción sin probar que es eficiente. Nos interesa en cambio, la relación entre distintos modelos combinatorios para  $P_c$ .

## Secuencias de tejido

Ahora, a partir del modelo de rayos externos construimos un modelo basado en dinámica simbólica. Si consideramos la acción de  $z \mapsto z^2$  en ángulos, esta acción se reduce a multiplicar el ángulo por dos:  $d(\theta) = 2\theta$ . Por otra parte, la función  $d$  está conjugada a la función de desplazamiento en un espacio infinito de dos símbolos.

Queremos asociar a cada ángulo  $\theta$  una sucesión, finita o infinita, de 0 y 1, de modo que la acción de la función que duplica  $d(\theta) = 2\theta$  se convierte en el desplazamiento. En otras palabras, queremos codificar la órbita del ángulo  $\theta$ .

Dado un polinomio  $P_c$  postcriticamente finito sea  $p$  el punto en  $J_c$  que definimos más arriba. El conjunto  $A$  de ángulos cuyos rayos correspondientes aterrizan en  $p$  determina el parámetro  $c$ . Este conjunto es finito, de forma que entre sus elementos hay dos cuya distancia angular es mínima. Sean  $\theta_1$  y  $\theta_2$  los ángulos en  $A$  de distancia mínima. Estos ángulos determinan dos sectores circulares  $U_0$  y  $U_1$  en  $\mathbb{S}^1$ , con el ángulo del rayo que aterriza en el valor crítico en  $U_1$ . Para cada  $\theta$  en  $\mathbb{S}^1$  escribimos una sucesión  $\{e_1(\theta), \dots, e_i(\theta), \dots\}$  dada por

$$e_i(\theta) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } d^{\circ(i-1)}(\theta) \in U_0 \\ 1 & \text{si } d^{\circ(i-1)}(\theta) \in U_1 \\ \star & \text{si } d^{\circ(i-1)}(\theta) \in \{\theta_1, \theta_2\} \end{array} \right\}.$$

En dónde  $d^{\circ(n)} = \underbrace{d \circ d \circ d \dots}_{n\text{-veces}}$

En el entendido que si para algún  $i$ ,  $e_i(\theta) = \star$  la secuencia se termina ahí y obtenemos una secuencia finita que termina en  $\star$ . En particular, si  $\theta_0$  es el mínimo ángulo cuyo rayo aterriza en  $p$ , entonces la *secuencia de tejido* de  $P_c$  es la secuencia asociada a  $\theta_0$ .

Como vimos en la sección anterior el conjunto de Julia asociado a  $P_i(z) = z^2 + i$  es topológicamente una dendrita y  $P_i$  tiene secuencia de tejido de la forma  $1\overline{10}$  puesto que los ángulos de los rayos externos que lo describen son  $\{1/7, 2/7, 4/7\}$ , los rayos externos que aterrizan en el punto crítico tiene ángulos  $1/12, 7/12$  y  $1/6$  es el ángulo del rayo que aterriza en el valor crítico.

A continuación presentamos el modelo que nos ocupa en esta tesis.

### Árboles de Hubbard

En general, un árbol es un espacio topológico arco-conexo y homeomorfo a la unión finita de copias del intervalo unitario. Douady y Hubbard introdujeron una descripción combinatoria de la dinámica de los polinomios postcríticamente finitos mediante la representación de cada conjunto de Julia como un árbol. Cuando  $P_c$  es postcríticamente finito, el conjunto relleno de Julia  $\mathcal{K}$  es conexo y localmente conexo. El *árbol de Hubbard* asociado a  $P_c$  es el único árbol topológico finito  $T$  contenido en  $\mathcal{K}$  que conecta todos los puntos de la órbita crítica y que es mínimo en el sentido de que no existe un subárbol con estas propiedades.

En otras palabras, el árbol de Hubbard  $\mathcal{H}(P_c)$  asociado a  $P_c$  se define como la envolvente conexa, en  $\mathcal{K}$  del conjunto de puntos que forman la órbita crítica, es decir  $\mathcal{H}(P_c) = [\Omega(P_c)]$  en donde la envolvente conexa  $[A]$  de un conjunto  $A \subset \mathcal{J}(P_c)$  se define como la cerradura conexa más pequeña de subconjunto de  $\mathcal{J}(P_c)$  que contiene a  $A$ . Veremos que con esta definición para cualesquiera par de puntos  $x, y \in \mathcal{J}(P_c)$  existe un único arco en  $\mathcal{J}(P_c)$  que une a  $x$  y  $y$ . Lo que implica que  $\mathcal{H}(P_c)$  es realmente un árbol topológico.

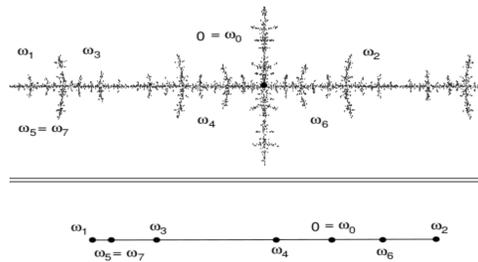


Figura 2: En esta figura tenemos el conjunto de Julia para  $P_c$  con  $c = -1,430357\dots$  y su árbol de Hubbard asociado.

Al árbol de Hubbard también lo podemos ver en términos combinatorios, olvidando el encaje en el conjunto de Julia, como una gráfica conexa y sin ciclos, en donde los vértices están formados por el conjunto de puntos críticos unión otros puntos que definiremos como puntos ramificados y las aristas están formadas por la cerradura de un arco en  $\mathcal{H}(P_c)$  que une dos

vértices consecutivos. Al árbol de Hubbard con la información dinámica y olvidando su encaje le llamamos árbol de Hubbard abstracto. Dos árboles de Hubbard abstractos  $T_1$  y  $T_2$  son equivalentes si las dinámicas son conjugadas.

Estos modelos, al menos en el caso de los polinomios cuadráticos, nos permiten hacer la distinción entre diferentes tipos de dinámicas en términos combinatorios, además de que ayudan a subdividir el plano de parámetros (el plano complejo) en “clases combinatorias”, es decir, en conjuntos con dinámica combinatoria equivalente.

Dado que cada modelo describe características distintas del sistema dinámico nos podemos preguntar acerca de las relaciones que hay entre ellos. Es decir: ¿Cómo es posible traducir un modelo combinatorio en otro? ¿Que tan eficiente puede hacerse esta traducción? En [3] se discuten estas preguntas aplicadas a los modelos arriba explicados y otros más. En esta tesis tenemos como objetivo principal describir la relación que existe entre los árboles de Hubbard y las Secuencias de tejido. Damos una manera de obtener una secuencia de tejido dado un árbol de Hubbard en particular describiremos la demostración del siguiente teorema:

**Teorema:** *“Cualesquiera dos árboles de Hubbard abstractos con la misma secuencia de tejido son equivalentes.”*

Es decir, si encontramos dos árboles de Hubbard cuya descripción simbólica asociada resulta ser la misma entonces necesariamente entre estos árboles existe una función biyectiva entre sus vértices que además preserve las adyacencias.

La manera en que vamos a trabajar es la siguiente:

En el Capítulo 1 explicamos los conceptos básicos, daremos las definiciones de los conjuntos de Julia y Fatou, algunos ejemplos y las principales propiedades y características de los mismos, las cuales serán de utilidad para lograr nuestro objetivo.

También introducimos los modelos correspondientes a los rayos externos y las secuencias de tejido dadas a partir de los ángulos externos.

Iniciamos el Capítulo 2 con la definición de los árboles de Hubbard, detallamos su construcción y demostramos las propiedades que necesitamos para

probar el teorema principal de la tesis. Este capítulo lo finalizamos dando una descripción simbólica de los árboles de Hubbard, veremos que a estos se les puede asociar una secuencia de tejido periódica o preperiódica, la cual describe ciertas características del árbol. Aquí demostraremos propiedades de la secuencia de tejido, al igual que mostraremos como es que esta hace la descripción de algunas propiedades del árbol.

Finalmente en el tercer Capítulo daremos la demostración del teorema principal con las herramientas obtenidas durante los capítulos anteriores.



# CAPÍTULO 1

---

## Conceptos básicos

---

### 1.1. Conjunto de Julia y Conjunto de Fatou

En esta sección definiremos formalmente los conjuntos de Julia y de Fatou para polinomios. Para esto necesitamos discutir el concepto de familias normales en el espacio de funciones holomorfas. En general, este concepto se puede definir para subconjuntos del espacio  $Map(X, Y)$  de funciones continuas de un espacio topológico  $X$  en otro  $Y$ . Dotado de la topología compacto abierta o de convergencia uniforme en compactos, el espacio  $Map(X, Y)$  es un espacio de Hausdorff.

Enunciamos dos teoremas principales que caracterizan una familia normal de funciones: El Teorema de Arzelá-Ascoli y el Teorema de Montel. Estos teoremas son una herramienta fundamental para probar algunas propiedades de los conjuntos de Fatou y de Julia.

Una función holomorfa  $f : S \rightarrow S$  naturalmente induce una familia de funciones, ésta es, la familia de iteraciones  $\mathcal{I} = \{f^n\}$ , los conjuntos de Fatou y de Julia se definen como las regiones de normalidad y no normalidad de la familia  $\mathcal{I}$ .

También, introducimos los conceptos de órbita de un punto  $z \in S$ , en particular nos interesan las órbitas periódicas o ciclos. El principal inva-

riante de órbitas periódicas es el multiplicador, por lo que discutiremos la clasificación de estas órbitas respecto a su multiplicador. Con esto, daremos una definición equivalente del conjunto de Julia y de Fatou en términos de orbitas periódicas.

Denotemos por  $\mathcal{J}(f)$  el conjunto de Julia de  $f$ . En particular veremos que:

- $\mathcal{J}(f)$  es completamente invariante, es decir,  $f^{-1}(\mathcal{J}(f)) = \mathcal{J}(f)$ .
- El conjunto de Julia asociado a la  $k$ -ésima iteración coincide con el conjunto de Julia de  $f$ . En otras palabras  $\mathcal{J}(f^k) = \mathcal{J}(f)$ .
- Las órbitas atractoras periódicas pertenecen al conjunto de Fatou.
- $\mathcal{J}(f)$  es no vacío.

Una tercera definición de los conjuntos de Julia y Fatou involucra conjuntos invariantes, en este sentido queremos ver que el conjunto de Julia es el mínimo conjunto cerrado totalmente invariante con al menos 3 puntos. La última condición es necesaria por que pueden existir conjuntos excepcionales, es decir conjuntos completamente invariantes con dos puntos, sin embargo:

- $\mathcal{E}(f)$  el conjunto de puntos excepcionales tiene a lo más dos elementos los cuales, si es que existen, son puntos periódicos superatractores.

Daremos algunas propiedades dinámicas del conjunto de Julia. En particular, veremos que si tomamos un punto  $z_1 \in \mathcal{J}(f)$  y una vecindad  $N$  de  $z_1$ . La unión  $U$  de las imágenes progresivas de  $f^n(N)$  contiene a todo  $\mathcal{J}(f)$  y todo  $\hat{\mathbb{C}}$  excepto a lo más dos puntos.

De este teorema se desprenden cuatro corolarios que describen propiedades del conjunto de Julia:

- Si  $\mathcal{J}(f)$  tiene un punto interior entonces  $\mathcal{J}(f) = \hat{\mathbb{C}}$ .
- Si  $z \in \mathcal{J}(f)$  el conjunto de las preimágenes de  $z$  en cualquier iteración es denso.
- $\mathcal{J}(f)$  no tiene puntos aislados, es decir, es perfecto.

- Para una elección genérica de un punto  $z \in \mathcal{J}(f)$  la órbita progresiva de  $z$  es densa en  $\mathcal{J}(f)$ .

Ahora discutimos las propiedades básicas de las funciones holomorfas.

**Definición 1.1.** Sea  $V \subset \mathbb{C}$  un conjunto abierto, una función  $f : V \rightarrow \mathbb{C}$  es llamada holomorfa si la primera derivada

$$z \rightarrow f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

es una función de  $V$  a  $\mathbb{C}$  bien definida y continua.

Sea  $X$  un espacio localmente compacto y sea  $Y$  un espacio métrico, denotamos por  $Map(X, Y)$  al espacio de funciones continuas que van de  $X$  a  $Y$ .

**Definición 1.2.** Para cualquier  $f \in Map(X, Y)$  se define la familia  $N_{k, \epsilon}(f)$ , de vecindades básicas de  $f$ , como sigue:

Para cualquier subconjunto compacto  $K \subset X$  y cualquier  $\epsilon > 0$ , sea  $N_{k, \epsilon}$  el conjunto de todas las funciones  $g$  en  $Map(X, Y)$  que satisfacen la siguiente condición:

$$dist(f(x), g(x)) < \epsilon \quad \forall x \in K.$$

Un subconjunto  $U \subset Map(X, Y)$  se dice abierto si y sólo si, para toda  $f \in U$  existen  $K$  y  $\epsilon$  tales que la vecindad básica  $N_{k, \epsilon}$  está contenida en  $U$ .

Con esta topología el espacio  $Map(X, Y)$  es un espacio de Hausdorff bien definido.

Ahora introducimos la definición de convergencia uniforme y el concepto de familia normal de funciones.

**Definición 1.3.** Una sucesión de funciones  $f_k : S \rightarrow X$ ,  $k \in \mathbb{N}$  converge uniformemente en  $S$  a una función  $f : S \rightarrow X$  si dada  $\epsilon > 0$  existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  (que depende de  $\epsilon$ ) tal que para todo  $k \geq k_0$  y para todo  $z$  en  $S$  tenemos:

$$d_x(f_k(z), f(z)) < \epsilon.$$

La función  $f$  se dice que es el límite uniforme.

Así, con el concepto de convergencia uniforme damos la siguiente definición:

**Definición 1.4.** Una familia de funciones holomorfas  $\{f_i\}$  en una región  $U$  es normal si toda sucesión contiene una subsucesión que converge uniformemente en todo conjunto compacto  $E \subset U$  o una subsucesión que tiende uniformemente a  $\infty$  en todo conjunto compacto.

Si cada una de las funciones  $f_i$  las tomamos en el espacio topológico  $Hol(U, \mathbb{C})$ , es decir el espacio de funciones holomorfas de  $U$  en el plano  $\mathbb{C}$  y cuya topología es generada por la convergencia uniforme en compactos, tenemos una nueva caracterización de las familias normales dada mediante el Teorema de Arzelá-Azcoli, que se enuncia a continuación.

**Teorema 1.5** (Arzelá-Ascoli). Una familia  $\mathcal{I}$  de funciones continuas con valores en un espacio métrico  $S$  es normal en una región  $U$  del plano complejo si y sólo si:

1. La familia  $\mathcal{I}$  es equicontinua en todo compacto  $E \subset U$ .
2. Para todo  $z$  en  $U$  los valores  $f(z)$ , con  $f \in \mathcal{I}$ , están en un subconjunto compacto de  $S$ .

Otra manera de caracterizar las familias de funciones normales está dada por el Teorema de Montel, el cual nos dice que si una familia  $\mathcal{I}$  omite 3 valores distintos de  $\hat{\mathbb{C}}$ , entonces  $\mathcal{I}$  es normal. A continuación, enunciamos dicho teorema:

**Teorema 1.6** (Montel). Sea  $\mathcal{I}$  una colección de funciones holomorfas  $f : S \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  que omite 3 valores diferentes  $a, b, c \in \hat{\mathbb{C}}$ , es decir  $f(S) \subset \hat{\mathbb{C}} \setminus \{a, b, c\}$  para toda  $f \in \mathcal{I}$ . Entonces  $\mathcal{I}$  es una familia normal, esto es, la cerradura  $\bar{\mathcal{I}} \subset Hol(S, \hat{\mathbb{C}})$  es un conjunto compacto.

Consideremos la sucesión  $\{f^n\}$  de iteraciones de  $f$ , es decir:

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ f \circ \dots \circ f}_{n\text{-veces}}.$$

Con esta familia de funciones  $\{f^n\}$  podemos definir los conjuntos de Julia y Fatou.

**Definición 1.7.** Sea  $f : S \rightarrow S$  una función holomorfa no constante y sea  $f^n : S \rightarrow S$  su  $n$ -ésima iteración, el Conjunto de Julia de  $f$  es el conjunto:

$$\mathcal{J}(f) = \{z_0 \in \mathbb{C} \mid \text{para toda vecindad de } z_0, (f^n) \text{ no es una familia normal}\}.$$

Por otro lado, el dominio para el cual la colección de funciones  $\{f^n\}$  es una familia normal es llamado Conjunto de Fatou y lo denotamos por  $\mathcal{F} = S \setminus \mathcal{J}(f)$ .

**1.1.1. Ejemplos de los conjuntos de Fatou y Julia**

El ejemplo más sencillo es el que corresponde a  $f(z) = z^2$  pues entonces  $f^n(z) = z^{2^n}$  en donde tenemos que

$$z^{2^n} \rightarrow 0 \text{ para } |z| < 1$$

y tenemos también

$$z^{2^n} \rightarrow \infty \text{ para } |z| > 1$$

por lo tanto  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \text{ o } |z| > 1\}$  es el conjunto de puntos para el cual  $\{f^n\}$  es una familia normal; es decir corresponde al conjunto de Fatou  $\mathcal{F}$  asociado a  $f(z) = z^2$ .

Por otro lado, los puntos que pertenecen al círculo unitario cumplen que

$$|f^n(z)| = 1$$

pero  $f^n(z)$  para estos puntos no tiene límite uniforme.

Por lo tanto el círculo unitario  $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$  pertenece al conjunto  $\mathcal{J}(f)$ .

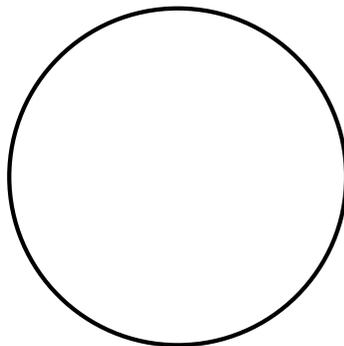


Figura 1.1: El círculo unitario  $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$  pertenece al conjunto  $\mathcal{J}(f)$ .

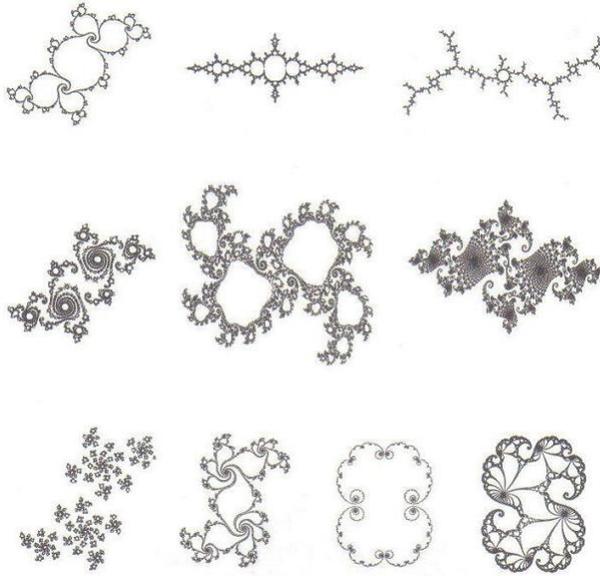


Figura 1.2: Algunos ejemplos de conjuntos de Julia.

Con la definición de estos conjuntos nos interesa saber cómo se comportan los puntos que pertenecen a cada uno de ellos, por lo cual se definen las órbitas y los multiplicadores, elementos que nos permitirán entender el comportamiento de los puntos y dar una descripción de estos conjuntos en términos de sus elementos.

**Definición 1.8.** Dado  $z \in \hat{\mathbb{C}}$  definimos la órbita de  $z$  bajo  $f$  como el conjunto:

$$O_f(z) = \{z_0, z_1, z_2, z_3, \dots\}$$

En donde  $z_n = f^n(z)$  para toda  $n \geq 0$ .

Si la órbita de un punto  $z_0$  es finita decimos que la órbita es periódica y que el punto  $z_0$  es periódico. El mínimo número  $m$  tal que  $f^m(z_0) = z_0$  se llama el período de  $z_0$ .

Sea  $z_0$  un punto periódico de período  $m$ . El valor  $\lambda = (f^m)'(z_0)$  se llama el multiplicador de  $z_0$ . Por la regla de la cadena tenemos que

$$\lambda = (f^m)'(z_0) = f'(z_1)f'(z_2)\dots f'(z_m).$$

De modo que  $\lambda = 0$  si y sólo si algún punto  $z_j$  de la órbita es un punto crítico de  $f$ . Las órbitas periódicas se clasifican de acuerdo a su multiplicador, entonces, una órbita periódica se llama atractora, repulsora o neutra, dependiendo si el módulo de su multiplicador sea menor, mayor o igual a 1 respectivamente. De forma más precisa:

**Definición 1.9.** *Una órbita periódica se dice que es:*

- Atractora si  $|\lambda| < 1$ .
- Repulsora si  $|\lambda| > 1$ .
- Neutra si  $|\lambda| = 1$ .

*Una órbita atractora se dice que es superatractora si  $\lambda = 0$ .*

A continuación demostraremos los lemas que nos dan algunas propiedades tanto del conjunto de Julia como del conjunto de Fatou.

**Definición 1.10.** *Un conjunto  $E$  es completamente invariante si tanto  $E$  como su complemento son invariantes. Cuando  $f$  es sobreyectiva  $E$  es invariante si y sólo si  $f^{-1}(E) = E$ .*

**Lema 1.11.** *El conjunto de Julia  $\mathcal{J}(f)$  de una función holomorfa  $f : S \rightarrow S$  es completamente invariante bajo  $f$ . En otras palabras  $z \in \mathcal{J}(f)$  si y sólo si  $f(z) \in \mathcal{J}(f)$ .*

*Demostración.* Probaremos que  $\mathcal{F}$  es completamente invariante de donde se desprende que  $\mathbb{C} \setminus \mathcal{F} = \mathcal{J}$  es completamente invariante.

Es decir probaremos que  $\mathcal{F} = f^{-1}(\mathcal{F})$ .

- Veamos que  $f^{-1}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}$ . Sea  $x \in f^{-1}(\mathcal{F})$  es decir  $f(x) \in \mathcal{F}$ . Sea  $w = f(x)$  para  $w$  se cumple que  $\{f^n\}$  tiene una subsucesión  $\{f^{n_j}\}$  que converge uniformemente en todo compacto  $E \subset U$  o que tiende uniformemente a  $\infty$ .

Tenemos que  $\{f^{n_j}(w)\} \subset \{f^n(w)\}$  y como  $w = f(x)$  entonces se cumple que  $\{f^{n_j}(w)\} = \{f^{n_j}(f(x))\} = \{f^{n_j+1}(x)\} \subset \{f^n(x)\}$ .

Podemos concluir entonces que  $\{f^n(x)\}$  tiene una subsucesión que converge en todo compacto  $E \subset U$  o tiende uniformemente a  $\infty$ .

Por lo tanto se cumple que  $x \in \mathcal{F}$ , de donde tenemos que  $f^{-1}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}$ .

- Por demostrar que  $f(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}$ .

Supongamos que  $z_0 \in \mathcal{F}$  y sea  $U$  una vecindad de  $z_0$  donde  $\{f^n\}$  forma una familia normal. Como  $f$  es holomorfa  $f(U) = W$  es abierto y por lo tanto  $\{f^{n+1}\} = \{f^n \circ f\}$  es normal en  $W$ .

Por lo tanto  $f(z_0) \in \mathcal{F}$  y entonces  $f(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}$  de donde obtenemos  $\mathcal{F} \subset f^{-1}(\mathcal{F})$  por lo tanto  $\mathcal{F} = f^{-1}(\mathcal{F})$ . De donde se sigue que  $\mathcal{F}$  es completamente invariante. Por complementos, el conjunto de Julia  $\mathcal{J}(f)$  también es completamente invariante.

□

**Lema 1.12.** *Para cualquier  $k > 0$ , el conjunto de Julia  $\mathcal{J}(f^k)$  correspondiente a la  $k$ -ésima iteración de  $f$  coincide con el conjunto de Julia  $\mathcal{J}(f)$ .*

*Demostración.* Usando complementos vamos a probar que el conjunto de Fatou para  $f$  y  $f^k$  es el mismo. En otras palabras, que  $\{f^n\}$  es normal en un conjunto abierto  $U$  si y sólo si  $\{f^{nk}\}$  es normal en  $U$ .

Supongamos  $\{f^n\}$  es normal en una vecindad  $U$  entonces  $\{f^n\}$  tiene una subsucesión  $\{f^{n_j}\}$  que converge uniformemente en cualquier compacto en  $U$  o tiende uniformemente a  $\infty$ .

Entonces  $\{f^{nk}\} \cap \{f^{n_j}\}$  es una subsucesión de  $\{f^{nk}\}$  que converge uniformemente o tiende uniformemente a  $\infty$  en  $U$ .

Por lo tanto  $\{f^{nk}\}$  es normal en  $U$ .

Recíprocamente, consideremos primero el caso particular cuando  $k = 2n$ .

Supongamos que  $z$  pertenece al conjunto de Fatou correspondiente a  $\{f^{2n}\}$ . Entonces para alguna vecindad  $U$  de  $z$  la colección de todas las iteraciones pares restringidas en  $U$ , es decir,  $\{f^{2n}|_U\}$  está contenida en algún subconjunto compacto  $K \subset Hol(U, \mathbb{C})$  esto por el Teorema 1.5.

Por otro lado  $f^{2n+1} = f^{2n} \circ f \subset f(K)$ . Dado que  $f$  es continua entonces  $f(K)$  es compacto. Por lo tanto tenemos que:

$$\{f^{2n+1}|_U\} \cup \{f^{2n}|_U\} \subset f(K) \cup K$$

y como  $f(K) \cup K$  es compacto podemos concluir que cualquier iteración de  $f$  restringida a  $U$  es normal.

Para el caso general basta observar que  $f^n(K)$  es compacto para toda  $n$  y  $K$  compacto, de nuevo se sigue por la continuidad de  $f$ , además  $\bigcup f^n(U)$  para toda  $n$  es compacto por lo tanto

$$\{f^{nk}(U)\} \cup \{f^{nk+1}(U)\} \cup \dots \cup \{f^{nk+n}(U)\} \subset \bigcup f^n(U)$$

por lo tanto  $f$  es normal en  $U$ .

De donde tenemos que los conjuntos  $\mathcal{J}(f)$  y  $\mathcal{J}(f^k)$  coinciden.  $\square$

Una órbita atractora está asociada a una vecindad abierta, su cuenca de atracción:

**Definición 1.13.** Si  $\vartheta$  es una órbita periódica atractora de período  $m$ , definimos la cuenca de atracción como el conjunto abierto  $A \subset S$  que consiste en todos los puntos  $z \in S$  para los cuales las iteraciones  $f^m(z), f^{2m}(z), \dots$  converge a algún punto de  $\vartheta$ .

Las cuencas atractoras pertenecen siempre al conjunto de Fatou como probamos a continuación.

**Lema 1.14.** Toda órbita periódica atractora está contenida en el conjunto de Fatou de  $f$ . De hecho toda la cuenca de atracción  $A$  de una órbita periódica atractora está contenida en el conjunto de Fatou. Por otro lado toda órbita periódica repulsora está contenida en el conjunto de Julia.

*Demostración.* Consideremos un punto fijo  $z_0 = f(z_0)$  con multiplicador  $\lambda$ . Hagamos primero el caso repulsor. Si  $|\lambda| > 1$  la sucesión de iteraciones de  $f$  no converge uniformemente cerca de  $z_0$ , pues la primera derivada de  $f^n$  es  $\lambda^n$  la cual diverge a infinito cuando  $z \rightarrow \infty$  y por el teorema de convergencia uniforme de Weierstrass, tenemos que  $f$  no converge uniformemente.

Por otro lado, en el caso atractor, si  $|\lambda| < 1$  en este caso podemos tomar al punto fijo como  $0 = f(0) \in \mathbb{C}$  con expansión de Taylor:

$$f(z) = \lambda z + O(z^2) \text{ cuando } z \rightarrow 0.$$

En otras palabras existen constantes  $r_0 > 0$  y  $C$  tales que:

$$|f(z) - \lambda z| \leq C|z^2| \text{ para todo } |z| < r_0.$$

Elegimos  $c$  y  $r$  con  $|\lambda| < c < 1$  y  $0 < r < r_0$  tales que  $|\lambda| + Cr < c$  para todo  $|z| < r$  de donde se sigue:

$$|f(z)| \leq |\lambda z| + C|z^2| \leq c|z|$$

y entonces

$$|f^n(z)| \leq c^n |z| \leq c^n r$$

que tiende uniformemente a 0 conforme  $n \rightarrow \infty$ .

Se cumple el resultado correspondiente para la cuenca  $A$ , pues por definición es el conjunto  $z \in S$  para los cuales las iteraciones  $f^m(z), f^{2m}(z), \dots$  converge a algún punto de  $\vartheta$ . Por lo tanto por Lema 1.12,  $\{f^n\}$  converge de manera uniforme para estos puntos y por lo tanto  $A \subset \mathcal{F}$ .

Este resultado para puntos fijos se generaliza inmediatamente para los puntos periódicos usando el Lema 1.12, puesto que un punto periódico de  $f$  es un punto fijo para alguna iteración  $f^n$ .

□

**Lema 1.15.** *Si  $f$  es racional de grado  $d \geq 2$ , entonces el conjunto de Julia  $\mathcal{J}(f)$  es no vacío.*

*Demostración.* Supongamos  $\mathcal{J}(f) = \emptyset$  entonces existe alguna subsucesión de iteradas  $\{f^{n_j}\}$  que converge uniformemente sobre toda la esfera a una función holomorfa  $g : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ .

Observamos que si  $f_j$  y  $g$  son funciones que están lo suficientemente cerca de tal manera que la distancia esférica  $\sigma(f_j(z), g(z))$  es uniformemente menor que la distancia  $\pi$  entre puntos antípodas, entonces podemos deformar  $f_j(z)$  en  $g(z)$  a lo largo de la geodésica más corta y entonces estas 2 funciones son homotópicas y tienen el mismo grado.

Por la observación anterior, tenemos que la función  $f^{n_j}$  para  $j$  lo suficientemente grande tiene el mismo grado de  $g$ . Pero el grado de  $f^n$  no puede ser igual al grado de  $g$  para  $n$  grande pues el grado de  $f^n$  es igual a  $d^n$  el cual diverge conforme  $n \rightarrow \infty$ .

Por lo tanto  $\mathcal{J}(f)$  es no vacío.

□

**Definición 1.16.** *Definimos la órbita distinguida de un punto  $z$  bajo  $f : S \rightarrow S$  como el conjunto  $GO(z, f)$  que consiste en todos los puntos  $z' \in S$  cuya órbita eventualmente interseca a la órbita de  $z$ . Es decir:*

$$GO(z, f) = \{z' \in S \mid O_f(z) \cap O_f(z') \neq \emptyset\}$$

*Un punto  $z \in S$  es llamado excepcional bajo  $f$  si su órbita distinguida es finita. Al conjunto que contiene a los puntos excepcionales lo denotamos por  $\mathcal{E}(f)$*

**Lema 1.17.** *Si  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  es racional de grado  $d \geq 2$  entonces el conjunto  $\mathcal{E}(f)$  tiene a lo más 2 elementos.*

*Estos puntos excepcionales, si es que existen, deben ser siempre puntos periódicos superatractores de  $f$  y entonces pertenecen al conjunto de Fatou.*

*Demostración.* Veamos que  $\mathcal{E}(f)$  tiene a lo más 2 puntos.

Ya que si existieran 3 puntos distinguidos, entonces la unión de sus órbitas distinguidas formaría un conjunto finito cuyo complemento  $U$  en  $\hat{\mathbb{C}}$  sería hiperbólico con  $f(U) = U$ . Además el conjunto de iteraciones de  $f$  restringidas a  $U$  deberá de ser normal por el Teorema 1.6. Entonces  $U$  y su complemento están contenidos en el conjunto de Fatou, lo cual es una contradicción con el Lema 1.15.

Por lo tanto  $\mathcal{E}(f)$  tiene, a lo más, 2 puntos. □

**Teorema 1.18.** *Sea  $z_1$  un punto arbitrario del conjunto de Julia  $\mathcal{J}(f) \subset \mathbb{C}$  y sea  $N$  una vecindad cualquiera de  $z_1$ . La unión  $U$  de las imágenes progresivas de  $f^n(N)$  contiene a todo el conjunto de Julia y todo  $\hat{\mathbb{C}}$  excepto a lo más 2 puntos.*

*Más preciso, si  $N$  es suficientemente pequeña entonces  $U$  es el complemento del conjunto de puntos excepcionales  $\mathcal{E}(f)$ , es decir,  $U = \hat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{E}(f)$ .*

*Demostración.* Notemos primero que  $\hat{\mathbb{C}} \setminus U$  puede contener a lo más 2 puntos, de lo contrario ya que  $f(U) \subset U$  se sigue del Teorema 1.6 que  $U$  debe de estar contenido en el conjunto de Fatou, lo cual es imposible pues  $U \cap \mathcal{J}(f) = z_1$ .

Nuevamente haciendo uso de que  $f(U) \subset U$  tenemos que cualquier preimagen de un punto  $z \in \hat{\mathbb{C}} \setminus U$  debe pertenecer al conjunto  $\hat{\mathbb{C}} \setminus U$ . Como  $\hat{\mathbb{C}} \setminus U$  es finito tenemos que alguna preimagen iterada de  $z$  es periódica, entonces

$z$  es periódico y excepcional.

Como por definición se tiene que  $\mathcal{E}(f) \cap \mathcal{J}(f) = \emptyset$  se sigue que  $\mathcal{J}(f) \subset U$ .

Finalmente si  $N$  es suficientemente pequeño tal que  $N \subset \hat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{E}(f)$ , se sigue que  $U = \hat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{E}(f)$ .  $\square$

**Corollario 1.19.** *Si el conjunto de Julia contiene un punto interior entonces este conjunto es igual a toda la esfera de Riemann.*

*Demostración.* Si  $\mathcal{J}(f)$  tiene un punto interior  $z_1$  entonces elegimos una vecindad  $N \subset \mathcal{J}(f)$  de  $z_1$ , la unión  $U \subset \mathcal{J}(f)$  de todas las imágenes progresivas de  $N$  es denso, por lo tanto  $\bar{U} = \hat{\mathbb{C}}$  y como  $\mathcal{J}(f)$  es un conjunto cerrado se sigue que  $\mathcal{J}(f) = \hat{\mathbb{C}}$ .  $\square$

**Corollario 1.20.** *Si  $z_0$  es un punto cualquiera del conjunto de Julia, entonces el siguiente conjunto:*

$$\left\{ z \in \hat{\mathbb{C}} \mid f^n(z) = z_0 \text{ para algún } n \geq 0 \right\}$$

*es decir, el conjunto de las preimágenes de  $z_0$  correspondientes a cada una de las iteraciones de  $f$ , es denso en  $\mathcal{J}(f)$ .*

*Demostración.* Como  $z_0 \notin \mathcal{E}(f)$  por el Teorema 1.18 se tiene que todo punto  $z_1 \in \mathcal{J}(f)$  puede ser aproximado arbitrariamente cerca por puntos cuya órbita progresiva contiene a  $z_0$ .  $\square$

Con el siguiente corolario veremos que  $\mathcal{J}(f)$  para  $f$  con grado  $d \geq 2$  es perfecto, es decir, no tiene puntos aislados.

**Corollario 1.21.** *Si  $f$  tiene grado 2 o más, entonces  $\mathcal{J}(f)$  no tiene puntos aislados.*

*Demostración.* Notemos que  $\mathcal{J}(f)$  debe de ser un conjunto infinito, si  $\mathcal{J}(f)$  fuera finito entonces consistiría en una órbita distinguida, contradiciendo el Lema 1.17. Entonces  $\mathcal{J}(f)$  contiene al menos un punto límite  $z_0$ . De donde tenemos que las preimágenes de cada una de las iteraciones de  $z_0$  forman un conjunto denso de puntos no aislados en  $\mathcal{J}(f)$ .  $\square$

Para el siguiente corolario necesitamos dar la definición de espacios de Baire al igual que el Teorema con el mismo nombre:

**Definición 1.22.**  $X$  es llamado un espacio de Baire si toda intersección contable de subconjuntos abiertos y densos de  $X$  es de nuevo denso.

**Teorema 1.23** (De Baire). *Todo espacio métrico completo es un espacio de Baire, también todo espacio localmente compacto es un espacio de Baire.*

Cabe mencionar que una propiedad de los puntos en un espacio de Baire  $X$  es cierta para los puntos genericos  $x \in X$  si es cierta para todos los puntos de alguna intersección contable de subconjuntos abiertos y densos de  $X$ .

Con ayuda de está observación demostraremos el siguiente corolario:

**Corolario 1.24.** *Para una elección genérica de un punto  $z \in \mathcal{J}(f)$  la órbita progresiva:*

$$\{z, f(z), f^2(z), \dots\}$$

*es densa en  $\mathcal{J}(f)$ .*

*Demostración.* Para cada entero  $j > 0$  podemos cubrir el conjunto de Julia  $\mathcal{J}(f)$  por un número finito de conjuntos abiertos  $N_{jk}$  de diámetro menor que  $1/j$  usando la métrica esférica.

Para cada  $N_{jk}$  sea  $U_{jk}$  la unión de preimágenes de cada iteración de  $f^{-n}(N_{jk})$  por Corolario 1.20 la cerradura  $\overline{U_{jk} \cap \mathcal{J}(f)}$  es igual al conjunto de Julia. En otras palabras  $U_{jk} \cap \mathcal{J}(f)$  es un subconjunto abierto y denso del conjunto de Julia.

Ahora, si  $z$  pertenece a la intersección de estos conjuntos abiertos y densos, la órbita progresiva de  $z$  interseca cada una de las  $N_{jk}$  y entonces es denso en  $\mathcal{J}(f)$ . □

**Corolario 1.25.** *Si  $A \subset \mathbb{C}$  es la cuenca de atracción para alguna órbita atractora periódica, entonces la frontera topológica  $\delta A = \bar{A} \setminus A$  es igual a todo el conjunto de Julia. Toda componente conexa del conjunto de Fatou  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{J}(f)$  coincide con alguna componente conexa de la cuenca  $A$  o es disjunto de  $A$ .*

*Demostración.* Si  $N$  es una vecindad de un punto que pertenece al conjunto de Julia entonces por el Teorema 1.18 alguna vecindad  $f^n(N)$  interseca a  $A$ , entonces  $N$  misma interseca a  $A$ . Esto prueba que  $\mathcal{J}(f) \subset \bar{A}$ . Pero  $\mathcal{J}(f)$  es disjunto de  $A$  entonces  $\mathcal{J}(f) \subset \delta A$ .

Por otro lado si  $N$  es una vecindad de un punto en  $\delta A$ , entonces cualquier limite de las iteraciones  $f^n|_N$  debe de tener un salto de discontinuidad entre  $A$  y  $\delta A$ , entonces  $\delta A \subset \mathcal{J}(f)$ . Por lo tanto  $\mathcal{J}(f) = \delta A$ .

Finalmente observamos que cualquier componente conexa del conjunto de Fatou que intersecta a  $A$ , como no puede intersectar la frontera debe coincidir con alguna componente de  $A$ .  $\square$

## 1.2. Rayos externos

Una forma bastante general para entender la dinámica en el conjunto de Julia son los rayos externos, esto se hace en términos de los ángulos dobles en  $\mathbb{S}^1$  y se puede aplicar siempre y cuando el conjunto de Julia sea conexo.

Mostraremos la construcción de los rayos externos junto con sus propiedades, las cuales describen y ayudan a entender el conjunto de Julia. En esta sección la función  $f$  será uniformizada para que tome la siguiente forma:

$$f(z) = a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \dots$$

con  $a_n \neq 0$  y grado local  $n \geq 2$ .

Si trabajamos con esta función, podemos introducir el Teorema de Böttcher, el cual nos asegura que existe una aplicación conforme que conjuga  $f(z)$  con  $w^n$ , esto nos va a permitir definir a los rayos externos.

Sin embargo, antes de introducir esta definición, daremos lugar a la definición del conjunto Relleno de Julia  $\mathcal{K}$  el cual contiene a los puntos cuya órbita es acotada; veremos que este conjunto es compacto, con frontera topológica igual al conjunto de Julia y con complemento conexo, esto mediante un lema que nos indica, también, que  $\mathcal{K}$  es igual a la unión de todas las componentes acotadas del conjunto de Fatou unión el conjunto de Julia mismo.

A partir de este punto nos restringimos al estudio de los polinomios cuadráticos de la forma  $P_c(z) = z^2 + c$  con  $c$  un parámetro complejo. Veremos que esta restricción se puede hacer ya que existe un homeomorfismo  $h$  mediante el cual dada  $F$  una función cuadrática cualquiera se cumple:  $F \circ h = h \circ P_c$ , es decir, tenemos que la dinámica de  $F$  es equivalente a la dinámica de un polinomio de la forma  $P_C(z) = z^2 + c$ . Con esta restricción

y haciendo uso del Teorema de Böttcher mostraremos la construcción de los rayos externos.

Al término de este capítulo, demostraremos dos teoremas, uno que describe las propiedades de los rayos externos y otro que da la relación entre rayos externos y el conjunto de Julia.

Al inicio de la sección anterior definimos las funciones holomorfas, ahora introduciremos un nuevo concepto que corresponde a las funciones cuya primera derivada no se anula. Demos paso, entonces, a la definición de funciones conformes y al concepto de isomorfismo conforme.

**Definición 1.26.** *Una función holomorfa decimos que es conforme si su derivada  $f'(z)$  nunca se anula.*

**Definición 1.27.** *Sean  $\Omega_1$  y  $\Omega_2 \subset \mathbb{C}$  se dice que  $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  es un isomorfismo conforme de  $\Omega_1$  sobre  $\Omega_2$  si  $f$  es holomorfa y biyectiva.*

A partir de este momento trabajaremos con un punto fijo súper atractor con multiplicador  $\lambda = 0$  esto nos permitirá uniformizar la función  $f$  mediante un parámetro local de uniformización  $z = 0$  para escribirla de la siguiente manera:

$$f(z) = a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \dots,$$

con  $n \geq 2$  y  $a_n \neq 0$ , donde el entero  $n$  es llamado el grado local.

Con esta uniformización podemos hacer uso del Teorema de Böttcher, el cual nos dice que existe una aplicación conforme  $w = \phi(z)$  definida en una vecindad de 0 que conjuga  $f(z)$  con  $w^n$ , la conjugación es única salvo multiplicación por una  $(n-1)$ -ésima raíz de la unidad. Veámoslo de manera formal.

**Teorema 1.28.** *Böttcher*

*Con  $f$ , como se definió anteriormente ( $f(z) = a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \dots$ ), existe un cambio local de coordenadas homeomorfo  $w = \phi(z)$ , con  $\phi(0) = 0$  que conjuga  $f$  con la  $n$ -ésima potencia, la cual manda  $w \rightarrow w^n$ , a través de alguna vecindad de cero. Además,  $\phi$  es única salvo multiplicación por una  $(n-1)$ -ésima raíz de la unidad.*

Entonces cerca de cualquier punto crítico fijo,  $f$  es conjugada con una función de la forma:

$$\phi \circ f \circ \phi^{-1} : w \rightarrow w^n$$

con  $n \geq 2$ .

Este teorema tiene una importante aplicación para la dinámica polinomial, dado que cualquier función polinomial  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  de grado  $d \geq 2$  extiende a una función racional de  $\hat{\mathbb{C}}$  la cual tiene un punto fijo superatractor en el infinito con grado local  $n = d$ .

Un concepto importante corresponde al conjunto relleno de Julia, el cual consiste en los puntos cuya órbita es acotada. Este conjunto tiene gran importancia para entender la dinámica del conjunto de Julia, por ejemplo, si nos restringimos al comportamiento de los puntos críticos veremos que  $K$  es conexo (y entonces  $\mathcal{J}(f)$  también lo es) si los puntos críticos son elementos de  $K$  mismo. Definamos entonces el conjunto Relleno de Julia.

**Definición 1.29.** *Nuevamente sea  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  un polinomio mónico de la forma:*

$$f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$$

para  $n \geq 2$ .

Al conjunto de  $z \in \hat{\mathbb{C}}$  tales que su órbita es acotada bajo iteración es decir:

$$\left\{ z \in \hat{\mathbb{C}} \mid O_f(z) \text{ es acotada} \right\}$$

se conoce como el conjunto relleno de Julia  $\mathcal{K}(f) = \mathcal{K}$ .

Con el siguiente lema veremos que  $\mathcal{K}$  está compuesto por la unión de todas las componentes acotadas del conjunto de Fatou unión el conjunto de Julia  $\mathcal{J}(f)$ .

**Lema 1.30.** *Para cualquier función polinomial  $f$  con grado  $d \geq 2$ , el conjunto Relleno de Julia  $\mathcal{K} \subset \mathbb{C}$  es compacto con complemento conexo, con frontera topológica  $\delta\mathcal{K}$  igual al conjunto de Julia  $\mathcal{J}(f)$  y con interior igual a la unión de todas las componentes acotadas  $U$  del conjunto de Fatou  $\mathbb{C} \setminus \mathcal{J}(f)$ . Entonces  $\mathcal{K}$  es igual a la unión de todas las  $U$  junto con  $\mathcal{J}(f)$  mismo. Y cualquiera de estas componentes  $U$  es necesariamente simplemente conexa.*

*Demostración.* El cociente  $\frac{f(z)}{z^d}$  converge al límite  $a_d$  cuando  $|z| \rightarrow \infty$  asumimos por convención que  $a_d = 1$ , podemos elegir una constante  $r_0 \geq 2$  tal que

$$\left| \frac{f(z)}{z^d} - 1 \right| < 1/2$$

para  $|z| > r_0$  y de esto se sigue

$$|f(z)| > |z^d|/2 > 2|z| \text{ para } |z| > r_0$$

Esto muestra que cualquier  $z$  con  $|z| > r_0$  pertenece a la cuenca de atracción  $A = A(\infty)$  de puntos al infinito.  $\mathcal{K}$  puede ser identificada con el complemento de  $\hat{\mathbb{C}} \setminus A$ . Por consiguiente  $\mathcal{K}$  es compacto y por el corolario 1.25 tenemos que  $\delta\mathcal{K} = \delta A$  que es igual al conjunto de Julia.

Debemos mostrar que  $A$  es conexo. Sea  $U$  una componente acotada del conjunto de Fatou  $\mathbb{C} \setminus \mathcal{J}(f)$  entonces  $|f^d(z)| \leq r_0$  para todo  $z \in U$  y toda  $n \geq 0$ , de lo contrario por el principio de módulo máximo, debería de suceder que  $\hat{z} \in \delta U \subset \mathcal{J}(f)$  con  $|f^d(\hat{z})| > r_0$ , pero esto implica que  $\hat{z} \in A$  lo cual es imposible. Entonces toda componente acotada de  $\mathbb{C} \setminus \mathcal{J}(f)$  está contenida en el conjunto relleno de Julia  $\mathcal{K}$  y la única componente no acotada puede identificarse con  $\mathbb{C} \setminus \mathcal{K} = \mathbb{C} \cap A(\infty)$ .

De igual manera si  $\Gamma$  es una curva simple cerrada en una componente acotada  $U$  y si  $V$  es una componente acotada de  $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ , entonces, de nuevo, por el principio del módulo máximo  $V \subset \mathcal{K}$ , en particular  $V$  no puede contener puntos de  $\mathcal{J}(f) = \delta\mathcal{K}$  entonces  $V \subset U$ . Esto muestra que  $U$  es simplemente conexo. □

Para la construcción de los rayos externos y otros resultados que presentaremos más adelante a partir de este momento nos vamos a restringir al estudio de la dinámica de la familia de polinomios cuadráticos complejos  $P_c(z) = z^2 + c$  en donde  $c$  es un parámetro complejo. Podemos hacer esta restricción pues la dinámica de cualquier función cuadrática es equivalente a la de alguna de la familia  $P_c$ . Es decir dada una función cuadrática cualquiera  $F$  puede ser conjugada con un polinomio de la forma  $P_c(z) = z^2 + c$ .

Para ver que lo anterior es cierto damos la siguiente definición:

**Definición 1.31.** *Decimos que dos funciones  $F, G : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  son conjugadas si existe un homeomorfismo  $h : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  tal que:*

$$h \circ F = G \circ h$$

De donde se sigue que:

$$h \circ F^n = G^n \circ h$$

Es decir,  $h$  manda órbitas de  $F$  en órbitas de  $G$ , de igual manera  $h^{-1}$  manda órbitas de  $G$  en órbitas de  $F$ . Entonces la conjugación  $h$  da una correspondencia uno a uno entre órbitas de  $F$  y  $G$ . En el caso cuadrático tenemos la siguiente proposición:

**Proposición 1.32.** *Supóngase  $F(z) = \alpha z^2 + \beta z + \gamma$  con  $\alpha \neq 0$ ,  $\beta, \gamma \in \mathbb{C}$ , entonces  $F$  es conjugado de  $P_c(z) = z^2 + c$  para algun  $c \in \mathbb{C}$ .*

*Demostración.* Sea  $H$  la conjugación afín  $H(z) = \alpha z + \beta/2$

En dónde

$$\begin{aligned} (H \circ F)(z) &= \alpha(\alpha z^2 + \beta z + \gamma) + \beta/2 \\ &= \alpha^2 z^2 + \alpha\beta z + \alpha\gamma + \beta/2 \\ &= \alpha^2 z^2 + \alpha\beta z + \beta^2/4 - \beta^2/4 + \beta/2 + \alpha\gamma \\ &= (\alpha z + \beta/2)^2 + \alpha\gamma + \beta/2 - \beta^2/4 \\ &= P_c(\alpha z + \beta/2) = (P_c \circ H)(z) \end{aligned}$$

en donde  $c = \alpha\gamma + \beta/2 + \beta^2/4$ .

□

Podemos trabajar, entonces, con la familia  $P_c$  y el Teorema de Böttcher, que nos garantiza que existe  $R > 0$  y una vecindad  $U_R$  de  $\infty$  para la cual existe un homeomorfismo analítico:

$$\phi_c : U_R \rightarrow \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}_R$$

con  $\mathbb{D}_R = \{z \mid |z| < R\}$ . Este homeomorfismo conjuga  $P_c$  con la función  $P_0(z) = z^2$ . En otras palabras para cada  $z \in U_R$  se cumple que:

$$\phi_c(P_c(z)) = (\phi_c(z))^2$$

**Definición 1.33.** *Mediante la función  $\phi_c$ , podemos asignar coordenadas polares en el conjunto  $U_R$ . Para un ángulo fijo  $\theta_*$ , consideramos un rayo de la forma  $re^{i\theta_*}$ , con  $\arg(z) = \theta_*$  y  $r > R$ , denotamos las preimágenes  $\phi_c^{-1}(re^{i\theta_*})$  por  $\gamma_{\theta_*}$ . La curva  $\gamma_{\theta_*}$  es llamada rayo externo.*

Sea  $\rho_{r_*} = \phi_c^{-1}(|z| = r_*)$  para  $r_* > R$  entonces  $r_*$  y  $\theta_*$ , asignan coordenadas polares en  $U_R$ .

Podemos extender el dominio de definición de estas coordenadas polares. Supongamos  $z \in \mathbb{C} \setminus U_R$  y que  $P_c(z) \in U_R$ . Entonces  $|\phi_c(P_c(z))| > R$  y suponemos que  $\arg(\phi_c(P_c(z))) = \theta$  y  $|\phi_c(P_c(z))| = r$ . Existen dos puntos en  $\mathbb{C}$  de la forma  $\pm w$  cuyo cuadrado es  $\phi_c(P_c(z))$ . Sea  $w$  tal que  $w^2 = \phi_c(P_c(z))$  y  $\arg(w) = \theta/2$ . Entonces  $\arg(-w) = \theta/2 + \pi$ .

Con la finalidad de extender  $\phi_c$ , debemos definir  $\phi_c(z)$  como  $+w$  o  $-w$ . Para hacer esta elección, supongamos que  $c \notin \gamma_\theta$ . Entonces  $P_c^{-1}(\gamma_\theta)$  consiste en dos curvas disjuntas, una que contiene a  $\gamma_{\theta/2}$  y otra que contiene a  $\gamma_{\pi+\theta/2}$ . Entonces definimos  $\phi_c(z) = w$  si  $z \in \gamma_{\theta/2}$  o  $\phi_c(z) = -w$  si  $z \in \gamma_{\pi+\theta/2}$ .

El único caso en que este procedimiento falla sucede cuando  $c \in \gamma_\theta$  para este caso las preimágenes de  $P_c^{-1}(\gamma_\theta)$  cortan en 0. Entonces, si la órbita de 0 no tiende a  $\infty$  no encontramos problema y podemos repetir el proceso de forma indefinida.

Con todo lo anterior hemos dado gran parte de la demostración de la siguiente proposición:

**Proposición 1.34.** *Supongamos que  $P_c^n(0) \rightarrow \infty$ . Sea  $U_1 = \{z | P_c^n(z) \rightarrow \infty\} = \mathbb{C} \setminus \mathcal{K}$ . Entonces existe un homeomorfismo analítico :*

$$\phi_c : \mathbb{C} \setminus \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}_1$$

tal que  $\phi_c(P_c(z)) = (\phi_c(z))^2$ . Además  $\mathcal{J}(P_c)$  es la frontera de  $U_1$ .

*Demostración.* Falta probar que cualquier órbita que escapa está en  $U_1$ .

Si  $P_c^n(z) \rightarrow \infty$  entonces existe una  $N$  pequeña para la cual  $P_c^N(z) \in U_R$ . Entonces podemos aplicar la construcción anterior  $N$  veces a lo largo de la órbita de  $z$  para definir  $P_c(z)$ .

Como  $\mathcal{J}(f)$  es la frontera común de  $\mathcal{K}$  y el conjunto de órbitas que tienden a  $\infty$  se sigue el resultado.

□

**Definición 1.35.** Consideremos el siguiente límite:

$$\gamma(\theta) = \lim_{r \rightarrow 1} \phi^{-1} r e^{2\pi i \theta}$$

cuando este límite existe diremos que el rayo  $\gamma_\theta$  aterriza en el punto  $\gamma(\theta)$ , el cual necesariamente pertenece al conjunto de Julia  $\mathcal{J}(f) = \delta\mathcal{K}$ .

**Observación 1.36.**  $\gamma_\theta$  es la imagen inversa de la función de Böttcher  $\phi^{-1}$  de la línea media, que consiste en todo los productos de la forma  $re^{2\pi i \theta} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$  con  $r > 1$ . Notamos la identidad:

$$f(\gamma_\theta) = \gamma_{n\theta}.$$

En particular si el ángulo  $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  es periódico salvo multiplicación por  $n$ , entonces el rayo  $\gamma_\theta$  es periódico. Por ejemplo si  $n^p \theta \equiv \theta \pmod{\mathbb{Z}}$ , entonces se sigue que  $f^p$  manda el rayo  $\gamma_\theta$  en sí mismo.

**Lema 1.37.** Si  $\gamma_\theta$  aterriza en un punto sencillo  $\gamma(\theta)$  del conjunto de Julia, entonces el rayo  $\gamma_{n\theta}$  aterriza en el punto  $\gamma(n\theta) = f(\gamma(\theta))$ . Además cada uno de los  $n$  rayos de la forma  $\gamma_{\frac{\theta+i}{n}}$  aterriza en uno de los puntos en  $f^{-1}(\gamma(\theta))$  y todo punto en  $f^{-1}(\gamma(\theta))$  es el punto de aterrizaje de al menos uno de estos rayos.

*Demostración.* Si  $z \in \mathcal{J}(f)$  no es un punto crítico la función  $f$  manda alguna vecindad  $N$  de  $z$  mediante un difeomorfismo en una vecindad  $N'$  de  $f(z)$  que lleva cualquier rayo  $\gamma_s \cap N$  en un rayo  $\gamma_{ns} \cap N'$ . Entonces si  $\gamma_s$  aterriza en  $z$  entonces  $\gamma_{ns}$  aterriza en  $f(z)$ , mientras que si  $R_\theta$  aterriza en  $f(z)$  entonces para alguna  $s$  únicamente determinada y de la forma  $\frac{\theta+i}{n}$  el rayo  $\gamma_s$  debe aterrizar en  $z$ .

Si  $z$  es un punto crítico, se tiene la misma situación, excepto que  $N$  es mandada en  $N'$  por una función cubriente, esto es, cada rayo que aterriza en  $f(z)$  está cubierto por dos o más rayos que aterrizan en  $z$ .

□

Antes de introducir el teorema que nos da cuatro condiciones equivalentes para saber cuándo el conjunto de Julia es localmente conexo con la ayuda de los rayos externos, daremos un lema y un teorema que nos serán útiles para dar la demostración de dicho teorema.

**Lema 1.38.** *Si  $f$  es continua y va de un espacio localmente compacto y conexo  $X$  en un espacio de Hausdorff  $Y$ , entonces  $Y$  también es compacto y localmente conexo.*

*Demostración.*  $f(X) = Y$  es compacto debido a que  $f$  es continua. Por otro lado, dado  $y \in Y$  y una vecindad abierta  $N \subset Y$ , podemos considerar el conjunto compacto  $f^{-1}(y) \subset X$  con vecindad abierta  $f^{-1}(N)$ . Sea  $V_\alpha$  el rango de todo los subconjuntos conexos abiertos de  $f^{-1}(N)$  que intersectan a  $f^{-1}(y)$ . Entonces la unión  $\bigcup f(V_\alpha)$  es un subconjunto conexo de  $N$ . Ésta es también una vecindad de  $y$ , que contiene la vecindad abierta  $Y \setminus f(X \setminus \bigcup V_\alpha)$  de  $y$ , por lo tanto  $Y$  es localmente conexo.  $\square$

Ahora enunciaremos el Teorema de Caratheodry, un teorema que, además de ayudarnos con la demostración del Teorema 1.40, nos será muy útil en el próximo capítulo para dar la definición de Arboles de Hubbard.

**Teorema 1.39** (Carathéodory). *Sea  $U \subset S^2$  un conjunto abierto isomorfo a  $\mathbb{D}$  y  $\psi : \mathbb{D} \rightarrow U$  un isomorfismo. Si  $\delta U$  es localmente conexa, entonces  $\psi$  tiene una extensión continua  $\Psi : \bar{\mathbb{D}} \rightarrow \bar{U}$ .*

Ahora si, veamos el teorema que nos da las 4 equivalencias para que el conjunto de Julia sea localmente conexo.

**Teorema 1.40.** *Para cualquier  $f$  dada, con conjunto de Julia conexo, las siguientes 4 condiciones son equivalentes:*

1. *Todo punto externo  $\gamma_\theta$  aterriza en un punto  $\gamma(\theta)$ , el cual depende de la forma continua en el ángulo  $\theta$ .*
2. *El conjunto de Julia  $\mathcal{J}(f)$  es localmente conexo.*
3. *El conjunto Relleno de Julia  $\mathcal{K}$  es localmente conexo.*
4. *La inversa de la función de Böttcher  $\phi^{-1} : \mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \mathcal{K}$  se extiende continuamente sobre la frontera y esta función extendida manda cada  $re^{2\pi i\theta} \in \delta\mathbb{D}$  a  $\gamma(\theta)$  en el conjunto  $\mathcal{J}(f)$ .*

*Además donde quiera que esta condición sea satisfecha, la función resultante  $\Gamma : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{J}(f)$  satisface la identidad de semiconjugación  $\Gamma(n\theta) = f(\Gamma(\theta))$*

*Demostración.* Supongamos que  $\Gamma : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow J(f)$  está definida y es continua. La imagen  $\Gamma(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$  es un subconjunto no vacío de  $J(f)$ . Iniciando con un punto arbitrario, digamos  $\Gamma(0)$  inductivamente usando el Lema 1.37 se tiene que todas las preimágenes iteradas pertenecen a  $\Gamma(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ . Entonces por el Corolario 1.20 la imagen  $\Gamma(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$  es todo el conjunto de Julia y por Lema 1.38  $J(f)$  es localmente conexo.

Para probar la última parte de este teorema aplicamos el Teorema 1.39 al isomorfismo conforme  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \hat{\mathbb{D}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{K}$  con lo que terminamos la demostración.  $\square$

### 1.3. Ángulos externos

Por la sección anterior sabemos que para un conjunto compacto, conexo y relleno  $K \subset \mathbb{C}$ , el teorema de la función de Riemann proporciona un único isomorfismo  $\phi$  que va de  $\mathbb{C} \setminus K$  en  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}_R$  sujeto a la condición de normalización:  $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\phi(z)}{z} = 1$ .

La función inversa de la función de Riemann nos permite transportar coordenadas polares al exterior de  $K$ , las imágenes de líneas radiales son llamadas ángulos externos, de igual manera las imágenes de círculos concéntricos son llamadas equipotenciales.

**Definición 1.41.** Para un punto  $z \in \mathbb{C} \setminus K$  con  $\phi(z) = re^{2\pi i\theta}$ , el número  $\theta$  es llamado ángulo externo y  $\log(r)$  es llamado el potencial de  $z$ . Los ángulos externos se encuentran en  $\mathbb{S}^1$  y siempre los vamos a medir en giros completos, es decir veremos a  $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ .

Sabemos que un rayo externo en el ángulo  $\theta$  se dice que aterriza en un punto  $z$  si

$$\lim_{r \rightarrow \log(r)} re^{2\pi i\theta}$$

existe y es igual a  $z$ . En general, para un conjunto compacto, conexo y relleno  $K$ , no todo rayo externo aterriza necesariamente, pero el conjunto de ángulos externos  $\theta$  tal que  $\gamma_\theta$  aterriza tiene medida completa, es decir, su complemento tiene medida cero; y como vimos anteriormente por el Teorema de Carathéodory, la conexidad local de  $K$  es equivalente al aterrizaje de todos los rayos, con los puntos de aterrizaje dependiendo continuamente del ángulo externo.

Un rayo externo es periódico o preperiódico siempre y cuando su ángulo externo sea periódico o preperiódico bajo la función de ángulo doble en  $\mathbb{S}^1$ . Los ángulos periódicos o preperiódicos son exactamente los ángulos racionales. De forma más precisa un ángulo racional es periódico si y sólo si el denominador es impar; si el denominador es par entonces el ángulo es preperiódico. Se sabe también, que los rayos externos del conjunto Relleno de Julia  $\mathcal{K}$ , cuando es conexo, siempre aterrizan si sus ángulos externos son racionales. Los puntos de aterrizaje de rayos periódicos son puntos periódicos en órbitas repulsoras o parabólicas. Recíprocamente todo punto parabólico o repulsor, periódico o preperiódico en el conjunto relleno de Julia  $\mathcal{K}$  es el punto de aterrizaje de uno o más rayos externos racionales, los períodos o preperíodos de los rayos que aterrizan en un mismo puntos son iguales.

Cuando  $\mathcal{J}(f)$  es localmente conexo, la inversa de la función de Riemann se extiende de forma continua a una función:

$$\phi^{-1} : \bar{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D} \rightarrow (\bar{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{K}) \cup \mathcal{J}(f)$$

y restringida a  $\mathbb{S}^1$  nos da una función continua y sobreyectiva:

$$\phi|_{\mathbb{S}^1}^{-1} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathcal{J}(f).$$

La cual semiconjuga la dinámica  $\phi^{-1}(e^{2\pi i(2\theta)}) = P_c(\phi^{-1}(e^{2\pi i\theta}))$ . Ésta nos ayuda a entender la dinámica de  $P_c$  en el conjunto de Julia  $\mathcal{J}$  y obtenemos un modelo topológico para el conjunto de Julia como cociente de  $\mathbb{S}^1$  bajo la relación de equivalencia:

$$\theta \sim \theta' \text{ si y sólo si } \gamma_\theta \text{ y } \gamma_{\theta'} \text{ aterrizan en el mismo punto.}$$

Este cociente dinámico en  $\mathbb{S}^1$  es localmente conexo y provee un modelo ho-meomorfo de  $\mathcal{J}(f)$  si y sólo si  $\mathcal{J}(f)$  también es localmente conexo. De hecho resulta que la topología y dinámica de este modelo puede ser construida en términos de sólo un ángulo externo correspondiente al rayo externo que aterriza en el valor crítico.

El punto más importante es que la topología y la dinámica en  $\mathcal{J}(f)$ , cuando es conexo, puede describirse en términos de uno de los casos más simples de dinámica simbólica, la función de rotación doble en  $\mathbb{S}^1$ .

Para esto a los ángulos externos se les puede asignar un itinerario y una secuencia de tejido. De forma intuitiva para un ángulo  $\theta \in \mathbb{S}^1$  podemos asociar una secuencia de tejido como sigue: dividimos  $\mathbb{S}^1$  en dos partes en  $\theta/2$  y  $(\theta+1)/2$  (las imágenes inversas de  $\theta$  bajo la función de ángulo doble); la parte abierta que contiene al ángulo cero la etiquetamos 0, la otra parte es etiquetada con 1 y la frontera recibe el nombre de  $\star$ . La secuencia de tejido del ángulo  $\theta$  es la secuencia de etiquetas correspondientes a los ángulos  $\theta, 2\theta, 4\theta, 8\theta, \dots$ . Se puede observar que la primera posición siempre es 1 para  $\theta \neq 0$ . De manera formal:

**Definición 1.42.** Sea  $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , el espacio de ángulos externos. Dado un ángulo externo  $\theta \in \mathbb{S}^1$  para cualquier  $\varphi \in \mathbb{S}^1$ , definimos  $\nu_\theta(\varphi) = \nu_1, \nu_2, \dots$  el itinerario de  $\varphi$  con  $\nu_i \in \{0, 1, \star\}$  asignados de la siguiente manera:

$$\nu_i = \begin{cases} 0 & \text{si } (\theta+1)/2 < 2^{i-1}\varphi < \theta/2 \\ 1 & \text{si } \theta/2 < 2^{i-1}\varphi < (\theta+1)/2 \\ \star & \text{si } 2^{i-1}\varphi \in \{\theta/2, (\theta+1)/2\} \end{cases}$$

En donde las desigualdades se interpretan respecto al orden cíclico.

Podemos distinguir un itinerario en particular, el itinerario  $\nu_\theta(\theta)$ , es decir, el itinerario de  $\theta$  con respecto a sí mismo:

**Definición 1.43.** Una secuencia de tejido  $k(\theta) = \nu(\theta) = \nu_\theta(\theta)$  es el itinerario de  $\theta$  con respecto a sí mismo. Esta secuencia  $k(\theta)$  contiene una  $\star$  en la posición  $n$  si y sólo si  $\theta$  es periódico con período  $n$ . Decimos que la secuencia de tejido es  $\star$ -periódica de período  $n$  si  $\nu = \overline{\nu_1, \dots, \nu_{n-1}\star}$ . con  $\nu_1 = 1$  y  $\nu_i \in \{0, 1\}$  para  $1 < i < n$ .

El símbolo  $\star$  ocurre únicamente para ángulos periódicos, sin embargo, puede suceder que un ángulo irracional tenga una secuencia de tejido periódica. Conforme el ángulo  $\theta$  va variando, las entradas de las secuencias de tejido en cualquier posición  $n$  cambian exactamente en los valores de  $\theta$  para los cuales  $2^{n-1}\theta$  está en la frontera de la partición, es decir, en donde la secuencia de tejido tiene la entrada  $\star$ . Esto sucede si y sólo si el ángulo  $\theta$  es periódico y su período es exactamente  $n$  o divide a  $n$ .

Por otro lado tenemos que los límites puntuales:

$$k_-(\theta) := \lim_{\theta' \nearrow \theta} k(\theta')$$

y

$$k_+(\theta) := \lim_{\theta' \searrow \theta} k(\theta')$$

existen para todo  $\theta$ .

Si  $\theta$  es periódico entonces  $k_{\pm}(\theta)$  es también periódico con el mismo período. Ambos límites de la secuencia de tejido coinciden con  $k(\theta)$  en todas partes, excepto que todos los símbolos  $\star$  son reemplazados por 0 en una de las dos secuencias y por 1 en la otra. La razón es porque si  $\theta'$  es muy cercano de  $\theta$ , entonces las órbitas bajo duplicación así como la partición en la secuencia de tejido están cerca una de otra y todo símbolo 0 o 1 en cualquier posición finita no será modificado siempre que  $\theta'$  este cercano a  $\theta$ .

Sin embargo si el período de  $\theta$  es  $n$  tal que  $2^{n-1}\theta$  está en la frontera de la partición en la secuencia de tejido, entonces  $2^{n-1}\theta'$  apenas se perderá la frontera en su partición y la  $\star$  será reemplazada por 0 o 1. Así pues, mientras la órbita de  $\theta'$  esté cerca de la órbita de  $\theta$ , todos los símbolos  $\star$  serán reemplazados por el mismo símbolo.

Por lo tanto, en este capítulo hemos introducido los conceptos de los Conjuntos de Julia  $\mathcal{J}(f)$  y Fatou  $\mathbb{C} \setminus \mathcal{J}(f)$ , describimos sus características y propiedades. Definimos el conjunto relleno de Julia  $\mathcal{K}$  y finalmente explicamos brevemente el modelo correspondiente a los rayos externos para entender la dinámica de  $\mathcal{J}(f)$ .



---

### Árboles de Hubbard y Secuencias de Tejido

---

#### 2.1. Árboles de Hubbard

Uno de los arreglos combinatorios que se utiliza para describir y entender al conjunto  $\mathcal{J}(P)$ , en donde  $P$  es un polinomio postcríticamente finito, es el que corresponde a un árbol de Hubbard, en este arreglo se hace uso de un árbol topológico finito, el cual se define como un espacio topológico que es únicamente arco-conexo y homeomorfo a la unión de varias copias del intervalo unitario.

Mostraremos que el conjunto definido como envolvente admisible para un conjunto finito de puntos,  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , es un árbol topológico finito, para llegar a este resultado daremos las definiciones de arco admisible, conjunto admisible conexo y envolvente admisible; en donde, para definir arco admisible, usaremos un corolario que se desprende del teorema de Caratheódory, el cual ya mencionamos en el capítulo anterior.

Veremos que en un espacio  $K$  relleno, localmente conexo y compacto, cualesquiera dos puntos son unidos por un único arco admisible, además la unión (bajo algunas condiciones) y la intersección de arcos admisibles resulta ser también un arco admisible; de lo anterior se obtiene la definición de los conjuntos admisibles conexos y se desprende un resultado que indica que la unión e intersección de conjuntos admisibles conexos resulta ser, también,

un conjunto admisible conexo. Teniendo ya estos conceptos, vamos a definir la envolvente admisible de un conjunto y probaremos que la envolvente admisible que corresponde al conjunto  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  es un árbol topológico.

Con estas herramientas veremos que un árbol de Hubbard se define como la envolvente admisible de un conjunto de puntos muy particulares, los que pertenecen a la órbita crítica en  $\mathcal{K}$ .

Ahora, si vemos el árbol de Hubbard de manera combinatoria, es decir como una gráfica conexa y sin ciclos, diremos qué puntos juegan el papel de vértices, para lo cual introduciremos el concepto de valencia que también nos permitirá ver cuando un punto es final o ramificado. Así mismo analizaremos qué propiedades y características se desprenden de restringir la función  $f$ , tanto en su dominio como en su imagen, tan sólo al conjunto correspondiente al árbol de Hubbard para poder observar la dinámica en el mismo. Estas características y propiedades nos serán útiles tanto en la siguiente sección de dinámica simbólica como en el capítulo 3, en la demostración principal de la tesis.

Para introducir el concepto de árbol de Hubbard para polinomios postcríticamente finitos requerimos de algunas definiciones y teoremas que a continuación presentamos de manera general.

**Definición 2.1.** *Sea  $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  polinomio, decimos que es postcríticamente finito si sus órbitas críticas son finitas, i.e., las órbitas de todo los puntos críticos son periódicas o eventualmente periódicas.*

**Definición 2.2.** *Un arco es un homeomorfismo sobre su imagen:*

$$\Gamma : I = [0, 1] \rightarrow X.$$

*El espacio  $X$  es arco-conexo si cualesquiera dos puntos  $x$  y  $y$  en  $X$  pueden ser unidos por un arco, tal que  $\Gamma(0) = x$  y  $\Gamma(1) = y$ .*

En el capítulo anterior se enunció el Teorema de Carathéodory, para poder dar la demostración del Teorema 1.40, ahora en este capítulo usaremos un corolario que se desprende directamente del Teorema de Carathéodory, y que nos permitirá definir los arcos admisibles.

**Corollario 2.3** (Carathéodory). *Supongamos  $U \subset \mathbb{C}$  un conjunto abierto, acotado y simplemente conexo y sea  $\psi : \mathbb{D} \rightarrow U$  un isomorfismo, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- $\psi$  tiene una extensión continua  $\bar{\mathbb{D}} \rightarrow \bar{U}$ ;
- $\delta U$  es localmente conexo;
- $\mathbb{C} \setminus U$  es localmente conexo;
- Existe  $L$  localmente conexo con  $\delta U \subset L \subset \mathbb{C} \setminus U$ ;
- Existe  $\gamma : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \delta U$  sobreyectiva.

**Proposición 2.4.** *Sea  $K \subset \mathbb{C}$  un conjunto relleno, localmente conexo y compacto, denotamos por  $(U_i)_{i \in I}$  la familia de componentes conexas del  $\text{int}(K)$ , para estas componentes se tienen las siguiente propiedades:*

1.  $\forall i, \bar{U}_i$  es homeomorfa a la cerradura del disco unitario
2.  $\text{Diam}(U_i) \rightarrow 0$ , es decir, el conjunto de las  $i$  tales que  $\text{Diam}(U_i) > \epsilon$  es finito.

*Demostración.*   ▪ Si  $\Gamma$  es una curva de Jordan en  $U_i$ , el dominio acotado por  $\Gamma$  está contenido en  $K$ , así en  $U_i$ . De donde se sigue que la componente  $U_i$  es simplemente conexa, entonces es isomorfa a  $\mathbb{D}$  o  $\mathbb{C}$ . Dado que  $U_i$  es acotada, entonces tenemos que es isomorfa a  $\mathbb{D}$ . Sea  $\psi : \mathbb{D} \rightarrow U_i$  un isomorfismo. Tenemos, además, que  $\delta U_i \subset \delta K \subset \bar{\mathbb{C}} \setminus U_i$  y  $\delta K$  es localmente conexo. Por lo tanto, por el teorema de Carathéodory  $\psi$  se extiende a una función continua  $\psi : \bar{\mathbb{D}} \rightarrow \bar{U}_i$

Ahora necesitamos ver que  $\psi|_{\delta \mathbb{D}}$  es inyectiva:

- $\alpha$ ) Parte analítica: Para toda  $x \in \delta U_i$  tenemos que  $\psi^{-1}(x)$  tiene interior vacío en  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ . Esto se sigue por el Principio de Reflexión de Schwarz <sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>El Principio de Reflexión de Schwarz se basa en la observación de que si  $u(z)$  es una función armónica entonces  $\overline{u(\bar{z})}$  es, de igual manera, armónica y si  $f(z)$  es una función analítica entonces  $\overline{f(\bar{z})}$  es también analítica. De forma más precisa si  $u(z)$  es armónica y  $f(z)$  es analítica en una región, entonces  $u(\bar{z})$  es armónica y  $\overline{f(\bar{z})}$  es analítica como función de  $z$  en la región  $\Omega^*$ , obtenida mediante la reflexión de  $\Omega$  en el eje real, esto es  $z \in \Omega^*$  si y sólo si  $\bar{z} \in \Omega$ . Supongamos que  $f$  es una función analítica, la cual esta definida en la mitad superior del disco  $\{|z|^2 < 1, \text{Im}[z] > 0\}$  y además, supongamos que  $f$  se extiende a una función continua en el eje real y toma valores reales en el mismo. Entonces  $f$  puede ser extendida a una función analítica en todo el disco por la formula:  $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$  en donde los valores para los  $z$  reflejados a través del eje real son las reflexiones de  $f(z)$  a través del eje real. Se puede observar que esta función es diferenciable en el interior de la mitad inferior del disco. Lo que vale la pena observar es que la función resultante debe de ser analítica a lo largo del eje real a pesar de no supuestos de diferenciableidad.

- $\beta$ ) Parte topológica: Para todo  $x \in \delta U_i$ ,  $\psi^{-1}(x)$  es conexa. Ya que si este no fuera el caso, podríamos encontrar  $t_1, t_2, u_1, u_2$  tales que  $u_1$  y  $u_2$  no pertenecen a la misma componente conexa de  $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \setminus \{t_1, t_2\}$  con  $\psi(t_1) = \psi(t_2) = x$ ,  $\psi(u_1) \neq x$  y  $\psi(u_2) \neq x$ . Sean  $A$  y  $B$  en  $C^1$  arcos con extremos en  $(t_1, t_2)$  y  $(u_1, u_2)$  que se intersectan transversalmente en un punto. Entonces  $\psi(A)$  es una curva de Jordan  $\Gamma \subset K$  y  $\psi(B)$  la intersecta transversalmente en un punto. Entonces alguno de los dos puntos  $\psi(u_1)$  o  $\psi(u_2)$  pertenecen al dominio acotado por  $\Gamma$  y el otro está fuera del dominio. Pero no puede haber un punto de  $\delta U_i \subset \delta K$  en el dominio acotado por  $\Gamma$ . Por lo tanto  $\psi^{-1}(x)$  es conexa. Y tenemos que el resultado se sigue de  $\alpha$  y  $\beta$ . Por tanto  $\psi|_{\mathbb{D}}$  es inyectiva, de donde tenemos que para toda  $i$  cada  $\bar{U}_i$  es homeomorfa a la cerradura del disco unitario.
  
- Supongamos  $n > 0$  y  $\{U_{i_v}\}$  una subsección de componentes del  $\text{int}(K)$  tales que  $\text{diam}(U_{i_v}) > m$ . En cada componente  $U_{i_v}$  sea  $(x_v, y_v)$  una pareja de puntos tales que  $|x_v - y_v| \geq m$ . Extraemos una subsección, si es necesario podemos asumir que  $x_v \rightarrow x$  y  $y_v \rightarrow y$ . Tenemos  $x \in K$  y  $y \in K$  con  $|y - x| \geq m$ . Sean  $A_1$  y  $A_2$  dos vecindades conexas y disjuntas de  $x$  y  $y$  respectivamente en  $K$ . Sea  $k$  tal que  $x_k$  y  $x_{k+1}$  están en  $A_1$  y  $y_k$  junto con  $y_{k+1}$  están en  $A_2$ . Tomamos  $H_1$  un arco que va de  $x_k$  a  $x_{k+1}$  en  $A_1$ ,  $H_2$  un arco de  $y_k$  a  $y_{k+1}$  en  $A_2$ ,  $J_1$  un arco que va de  $x_k$  a  $y_k$  en una componente  $U_{i_k}$  y  $J_2$  un arco que va de  $x_{k+1}$  a  $y_{k+1}$  en una componente  $U_{i_{k+1}}$ . Véase Figura 2.1. Observamos el arco de Jordan  $\Gamma \subset H_1 \cup H_2 \cup J_1 \cup J_2$  con  $\Gamma \cap J_1 \neq \emptyset$  y  $\Gamma \cap J_2 \neq \emptyset$ . Entonces, tenemos que  $\Gamma \subset K$  y el dominio acotado por  $\Gamma$  está contenido en  $\text{int}(K)$ , entonces está en alguna componente conexa de  $\text{int}(K)$  e intersecta a las componentes  $U_{i_k}$  y  $U_{i_{k+1}}$ , lo cual es una contradicción.

Por lo tanto  $\text{diam}(U_i) \rightarrow 0$ .

□

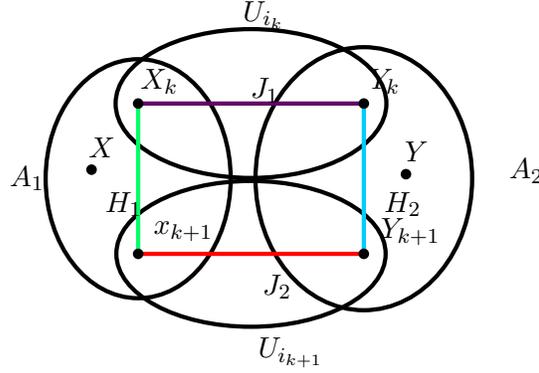


Figura 2.1: El arco de Jordan  $\Gamma \subset H_1 \cup H_2 \cup J_1 \cup J_2$

La proposición anterior nos permite dar la definición de arco admisible, para ello tomamos nuevamente  $K \subset \mathbb{C}$  conexo, relleno, localmente conexo y compacto y sea  $(U_i)_{i \in I}$  la familia de componentes conexas en el interior de  $K$ . En cada una de estas componentes elegimos un punto  $w_i$  el cual determina, salvo multiplicación por  $\lambda$  módulo 1, un homeomorfismo  $\phi_i : \bar{U}_i \rightarrow \bar{\mathbb{D}}$  que induce un isomorfismo  $\mathbb{C}$ -analítico entre  $U_i$  y  $\mathbb{D}$  tal que  $\phi_i(w_i) = 0$ . Con este isomorfismo podemos determinar cuándo un arco es admisible, veamos la siguiente definición:

**Definición 2.5.** Sea  $\Gamma \subset K$  un arco, es llamado admisible si para todo  $i \in I$  se tiene que  $\phi_i(\Gamma \cap \bar{U}_i)$  está contenida en la unión de dos rayos de  $\bar{\mathbb{D}}$ .

**Lema 2.6.** Sean  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  dos arcos admisibles, entonces  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$  es conexo.

*Demostración.* Supongamos que  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$  es desconexa, sea  $(v, u)_{\Gamma_1}$  una componente conexa de  $\Gamma_1 \setminus (\Gamma_1 \cap \Gamma_2)$ . Entonces  $[u, v]_{\Gamma_1} \cup [u, v]_{\Gamma_2}$  es una curva de Jordan  $J$ .

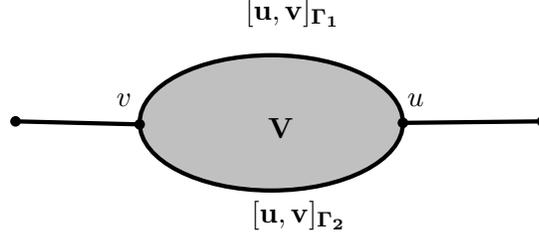


Figura 2.2:  $[u, v]_{\Gamma_1} \cup [u, v]_{\Gamma_2}$  curva de Jordan  $J$ .

Sea  $V$  el dominio acotado por  $J$ . Entonces tenemos que  $V \subset K$  y también  $V \subset \text{int}(K)$ , entonces existe una  $i$  tal que  $V \subset U_i$  y  $J \subset \bar{U}_i$ . Los arcos  $[u, v]_{\Gamma_1}$  y  $[u, v]_{\Gamma_2}$  son arcos distintos entre  $u$  y  $v$  en  $\bar{U}_i$ , lo cual no es posible, pues cada  $U_i$  es simplemente conexa.

Por lo tanto  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$  es conexo.

□

**Proposición 2.7.** Sean  $x$  y  $y$  dos puntos distintos de  $K$ . Existe un único arco admisible  $\Gamma$  que une a  $x$  con  $y$ .

*Demostración.* Si  $x$  y  $y$  están en la misma  $\bar{U}_i$ , si  $\phi_i(x)$  y  $\phi_i(y)$  tienen el mismo argumento, entonces  $\phi_i(\gamma)$  es el segmento  $[x, y]$  en otro caso es  $[x, 0] \cup [0, y]$ .

En general sea  $\gamma$  una trayectoria inyectiva entre  $x$  y  $y$ . Ordenamos los elementos de  $I$  en una sucesión  $\{i_n\}$  de tal manera que  $\gamma^{-1}(\bar{U}_{i_n})$  tiene, a lo más, dos puntos y denotamos por  $\gamma_n$  a la trayectoria obtenida modificando  $\gamma$  en  $\gamma^{-1}(\bar{U}_{i_1}) \dots \gamma^{-1}(\bar{U}_{i_n})$  para que se convierta en admisible en estos intervalos. Se sigue de la proposición 2.4 que  $\gamma_n$  converge uniformemente a una trayectoria  $\gamma^*$  (pues  $\text{diam}(U_i) \rightarrow 0$ ). Tenemos, entonces, que  $\gamma^*$  es una trayectoria inyectiva y su imagen es un arco admisible.

La unicidad se sigue como consecuencia del Lema 2.6

Por lo tanto  $\gamma^*$  es un arco admisible que une  $x$  con  $y$ .

□

Los arcos admisibles tienen la siguiente propiedad:

**Proposición 2.8.** Sean  $x, y, z$  tres puntos de  $K$ . Entonces  $[x, y]_K \cap [y, z]_K$  es de la forma  $[y, c]_K$ , se denota por  $c(x, y, z)$  al punto obtenido de esa manera.

Se tiene que para cualesquiera pareja de puntos:  $(x, y)$ ,  $(x, z)$ ,  $(y, z)$ ; el arco que los une se puede escribir como la unión de dos arcos, en donde se utiliza como punto en común a  $c$ ; por ejemplo:  $[x, y]_K = [x, c] \cup [c, y]$ .

En particular si  $[x, y]_K \cap [y, z]_K = \{y\}$  el arco  $[x, y]_K \cup [y, z]_K$  es admisible.

**Definición 2.9.** Se dice que un subconjunto  $X \subset K$  es admisible conexo si para  $x$  y  $y$  en  $X$  se tiene  $[x, y]_K \subset X$ .

**Proposición 2.10.** Un par de propiedades útiles de los conjuntos admisibles conexos son las siguientes:

1. La unión de una familia de subconjuntos admisibles conexos cuya intersección es un punto es admisible conexa.
2. La intersección de una familia de subconjuntos admisibles conexos es admisible conexa.

*Demostración.* Sea  $(F_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset K$  una familia de subconjuntos admisibles conexos. Es decir para toda  $i \in \mathbb{N}$  y para cualesquiera  $x_i, y_i \in F_i$ , se cumple que  $[x_i, y_i]_k \subset F_i$

1.- Basta con demostrar que  $F_1 \cup F_2$  es admisible conexa.

Sean  $x, y \in F_1 \cup F_2$ , si  $x, y \in F_i$  con  $i \in \{1, 2\}$  supongamos sin pérdida de generalidad  $[x, y]_k \subset F_1$  entonces se cumple que  $[x, y]_k \subset F_1 \cup F_2$ .

Si este no es el caso, supongamos sin pérdida de generalidad  $x \in F_1$  y  $y \in F_2$  por hipótesis se tiene que  $F_1 \cap F_2 = \{c\}$ , por lo tanto  $[x, c]_k \subset F_1$  y  $[c, y]_k \subset F_2$ , entonces  $[x, c]_k \cup [c, y]_k \subset F_1 \cup F_2$  y por la Proposición 2.8,  $[x, c]_k \cup [c, y]_k$  es arco admisible pues  $[x, c]_k \cap [c, y]_k = \{c\}$  por lo tanto  $F_1 \cup F_2$  es admisible conexa.

2.- De igual manera, basta demostrar que  $F_1 \cap F_2$  es admisible conexa.

Sean  $x, y \in F_1 \cap F_2 \Rightarrow x, y \in F_1$  y  $x, y \in F_2$ , entonces  $[x, y]_k \subset F_1$  y  $[x, y]_k \subset F_2 \Rightarrow [x, y]_k \subset F_1 \cap F_2$ .

Por lo tanto,  $F_1 \cap F_2$  es admisible conexa.  $\square$

**Definición 2.11.** Sea  $A \subset K$  se define la envolvente admisible  $[A]$  como la intersección de todos los subconjuntos admisibles conexos de  $K$  que contienen a  $A$ .

**Proposición 2.12.** Sean  $x_1, x_2, \dots, x_n$  puntos de  $K$  entonces la envolvente admisible  $[x_1, \dots, x_n]$  del conjunto  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  es un árbol topológico finito.

*Demostración.* Probaremos, por inducción, que  $[x_1, \dots, x_n]$  es un árbol finito, recordando que un árbol topológico es un espacio topológico arco-conexo y homeomorfo a la unión de varias copias del intervalo unitario.

Para  $n = 1$  es únicamente un punto  $\{x_1\}$  lo que corresponde a un árbol trivial.

Para  $n = 2$  tenemos  $[x_1, x_2]$  el arco admisible  $[x_1, x_2]_K$  que sabemos que existe por la Proposición 2.7, tenemos  $[x_1, x_2]_K = [x_1, x_2]$ , que además por ser un arco es homeomorfo al intervalo unitario y es arco conexo. Por lo tanto  $[x_1, x_2]$  es un árbol.

Supongamos cierto para  $n$ , es decir,  $[x_1, \dots, x_n]$  es un árbol finito y sea  $x_{n+1} \in K$ , sea  $a \in [x_1, \dots, x_n]$  un punto arbitrario, por la Proposición 2.7 existe el arco admisible  $[x_{n+1}, a]_K$  tómesese  $c \in [x_{n+1}, a]_K$  tal que  $c$  es el primer punto en  $[x_{n+1}, a]_K$  que pertenece a  $[x_1, \dots, x_n]$ , entonces  $[x_1, \dots, x_{n+1}] = [x_1, \dots, x_n] \cup [c, x_{n+1}]$  y  $[x_1, \dots, x_n] \cap [c, x_{n+1}] = \{c\}$ .

Por lo tanto  $[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}]$  es un árbol topológico finito, puesto que es arco-conexo y homeomorfo a varias copias del intervalo unitario.  $\square$

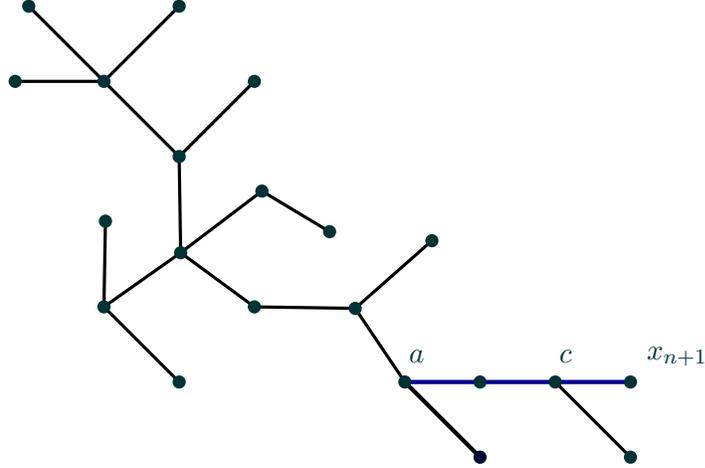


Figura 2.3: Envoltente admisible correspondiente al conjunto  $\{x_1, \dots, x_{n+1}\}$ .

De la proposición anterior tenemos que, para el conjunto de puntos  $\{x_1, \dots, x_n\} \subset K$  la envoltente admisible  $[x_1, \dots, x_n]$  es un árbol topológico; esto fue visto de manera general para cualquier conjunto  $K$  relleno, localmente conexo y compacto, veamos ahora el caso particular cuando  $K$  es el conjunto relleno de Julia  $\mathcal{K}$ , en donde podemos definir los árboles de Hubbard.

Sea  $f$  un polinomio de grado  $d \geq 2$  tal que todo punto crítico es periódico o preperiódico. Si la envoltente admisible corresponde al conjunto de puntos críticos de  $P$  junto con sus órbitas obtenemos, entonces, un árbol de Hubbard, veamos al definición.

**Definición 2.13.** Sea  $C(f)$  el conjunto de todos los puntos críticos de  $f$  y sea  $\Omega(f) = \cup_{w \in C(f)} \vartheta_f(w)$ , en donde  $\vartheta_f(w)$  denota la órbita del punto  $w$ .

Se llama árbol de Hubbard de  $f$  a la envoltente admisible  $H_f$  de  $\Omega(f)$ , es decir:

$$H_f = [\Omega(f)]$$

**Observación 2.14.** En este caso tenemos sólo un punto crítico, el 0, y como estamos trabajando con polinomios Postcríticamente finitos, la órbita

del cero es finita y por lo tanto de la forma  $\{0, c_1, c_2, \dots\}$  y por la Proposición 2.12 se cumple que  $[0, c_1, \dots]$  es un árbol topológico.

Un árbol también puede ser visto como un arreglo combinatorio correspondiente a una gráfica, es decir, un conjunto de vértices o puntos que se encuentran relacionados por pares mediante líneas o aristas. Para que esta gráfica sea un árbol, es necesario que sea conexa y sin ciclos. Veamos cómo definimos los vértices y las aristas para un árbol de Hubbard.

**Definición 2.15.** Si  $T$  es un árbol, la valencia de  $x$  se define como el número de componentes de  $T - \{x\}$ . Un punto de valencia 1 es llamado punto final, mientras que un punto con valencia mayor que 2 es llamado un punto ramificado. Denotaremos a la valencia de un punto  $x$  como  $val(x)$ .

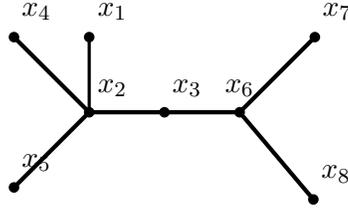


Figura 2.4: En este árbol de Hubbard los puntos  $x_2$  y  $x_6$  son ramificados con valencia 3, mientras que los puntos  $x_1, x_4, x_5, x_8$  son puntos finales del árbol.

Se define conjunto de vértices de  $H_f$  como:

$$V(f) = \Omega(f) \cup \{v \in H(f) \mid v \text{ es un punto ramificado}\}$$

La cerradura de un arco en  $H_f$  que une dos vértices consecutivos es llamada arista.

Con respecto al punto crítico y al valor crítico introduciremos la siguiente notación:

- El punto crítico se denota por  $c_0 = 0$  y su órbita por  $Orb_f(0) = \{0, c_1, c_2, \dots\}$
- El valor crítico  $c_1$  es la imagen del punto crítico  $f(c_0) = c_1$ .

Ya sabemos cómo se define un árbol de Hubbard formado por el punto crítico y los elementos de su órbita, todos ellos contenidos en  $\mathcal{K}$ , ahora veamos las características que tiene la diámica de  $f$  si se restringe, tanto en su dominio como en su imagen tan sólo en el árbol de Hubbard  $T$ , es decir, si se considera  $f : T \rightarrow T$  tenemos que se cumplen las siguientes propiedades:

1.  $f : T \rightarrow T$  es continua y sobreyectiva.
2. Todo punto en  $T$  tiene a lo más dos imágenes inversas bajo  $f$ .
3. En todo punto, distinto del punto crítico, la función  $f$  es un homeomorfismo local sobre su imagen, es decir, para cada punto  $x$  de  $T - \{0\}$  existe un abierto  $U$  con  $x \in U$  tal que  $f(U)$  es un abierto de  $T$  y  $f|_U : U \rightarrow f(U)$  es un homeomorfismo.
4. Todos los puntos finales de  $T$  están en la órbita crítica.
5. El punto crítico es periódico o preperiódico, pero no fijo.
6. (*Expansibilidad*) si  $x$  y  $y \in T$  con  $x \neq y$  son *puntos ramificados* o *puntos en la órbita crítica*, entonces existe una  $n \geq 0$  tal que  $f^{cn}([x, y])$  contiene al punto crítico.

Si hacemos uso de la caracterización anterior de los árboles de Hubbard, podemos demostrar las propiedades que se enuncian en el siguiente lema:

**Lema 2.16.** *Las siguiente son propiedades básicas de los árboles de Hubbard:*

- *El valor crítico  $c_1$  es un punto final, el punto crítico  $0$  divide el árbol en a lo más dos componentes.*
- *Cada punto ramificado es periódico o preperiódico, nunca es mandado en el punto crítico y el número de valencia es constante a lo largo de la parte periódica de su órbita.*
- *Cualquier arco que no contiene al punto crítico en su interior es mandado de forma homeomorfa en su imagen.*

*Demostración.*   ▪ Recordando que  $f$  es un homeomorfismo local fuera del punto crítico. Supongamos que  $c_1$  no es un punto final, es decir, tiene valencia mayor o igual a 2, entonces los puntos  $c_2, c_3, \dots$  también tienen valencia al menos 2, esto siempre y cuando  $f$  siga siendo un homeomorfismo local, cuando esto ya no sucede es porque la órbita ha

regresado a 0, el punto crítico, cuya imagen es  $c_1$ , con lo que tenemos que todos los puntos de la órbita crítica son ramificados, lo cual es una contradicción pues se tiene que todos los puntos finales están en la órbita crítica.

Entonces  $val(c_1) = 1$  y  $val(0) \leq 2$ , de otra manera su imagen no podría ser un punto final.

- Como fuera del punto crítico  $f$  es un homeomorfismo local, la valencia de la imagen de un punto  $x$  es mayor o igual que la valencia de dicho punto, es decir:

$$val(x) \leq val(f(x))$$

y en general por la misma razón se cumple que:

$$val(f^n(x)) \leq val(f^{n+1}(x)).$$

Se tiene ya que el punto crítico tiene valencia 2, entonces por lo anterior si  $x$  es un punto ramificado, el punto crítico no puede ser imagen de  $x$ .

Dado que el árbol es finito tenemos que el conjunto de puntos ramificados también lo es; por lo tanto, estos puntos son periódicos o preperiódicos y toda su órbita consiste en puntos ramificados; la parte periódica de la órbita de estos puntos es de la forma  $\{f^j(x), f^{j+1}(x), \dots, f^{j+k}(x)\}$  cuyo período es  $k$ , por lo que se cumple:  $f^{j+k}(x) = f^j(x)$ . Y como se observó anteriormente tenemos que:

$$val(f^j(x)) \leq val(f^{j+1}(x)) \leq \dots \leq val(f^{k+j}(x)) = val(f^j(x))$$

Por lo tanto el número de la valencia es constante a lo largo de la parte periódica de la órbita.

- En esta parte veremos que si el arco no es mandado en su imagen de manera homeomorfa, entonces el punto crítico está en el interior del arco.

Sea  $\Gamma$  un arco dentro del árbol, como  $f$  no puede ser constante en  $\Gamma$  y no hay ciclos en el árbol, entonces el subárbol  $f(\Gamma)$  tiene al menos

2 puntos finales, si un punto final de  $f(\Gamma)$  no es imagen de un punto final de  $\Gamma$ , entonces debe de ser la imagen del punto crítico, pues  $f$  es un homeomorfismo local en todo los puntos del árbol excepto el punto crítico y por lo tanto, el punto crítico esta en el interior de  $\Gamma$ .

□

**Observación 2.17.** *Por como se definieron los vértices del árbol  $H_f$ , observamos que todos tienen valencia distinta de 2 a excepción de las veces que el punto crítico tiene este valor, pero aún en este caso es el único punto con esta valencia.*

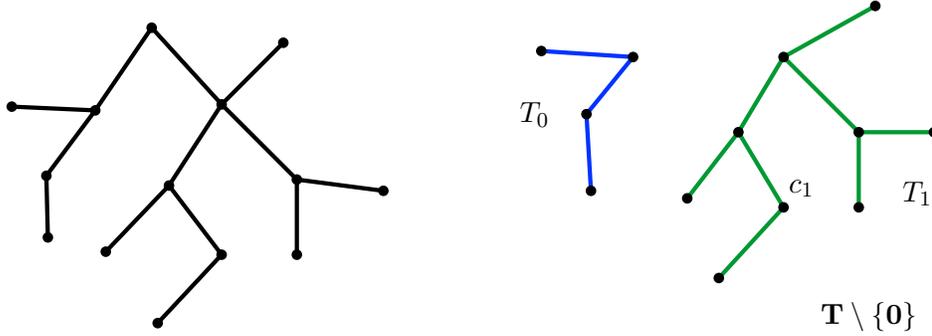
## 2.2. Descripción simbólica

En general el fundamento de la dinámica simbólica estriba en el hecho de que en muchas ocasiones no es necesario conocer el valor numérico de la sucesión de iteraciones  $(f^n(x))$  de un punto  $x$ , sino que es suficiente saber si estos puntos están a la derecha o a la izquierda del punto crítico.

Podemos dar una descripción de un árbol de Hubbard mediante una sucesión de iteraciones de su órbita crítica, es decir, haciendo uso de la idea de la dinámica simbólica que consiste en partir el espacio para dar una sucesión que indique, de manera ordenada, la ubicación de cada uno de los elementos de la órbita de un punto  $x$ . A esta sucesión le llamaremos itinerario y a una sucesión particular que corresponde al itinerario del valor crítico la llamaremos secuencia de tejido.

En este capítulo demostraremos más propiedades de los vértices de un árbol de Hubbard con ayuda de sus itinerarios; veremos que  $T_1$ , la componente conexa que contiene al valor crítico, tiene un único punto fijo, resultado que, junto con otros más que se enuncian en esta sección, nos ayudarán en la demostración de nuestro teorema principal.

La manera de dividir nuestro espacio, el árbol de Hubbard, en a lo más un par de componentes conexas es el siguiente: como ya vimos el punto crítico tiene valencia a lo más 2, es decir  $T \setminus \{0\}$  tiene a lo más 2 componentes a las cuales podemos nombrar  $T_0$  y  $T_1$  pidiendo que  $T_1$  sea tal que  $c_1 \in T_1$ ; observamos que  $T_0$  puede ser vacío.



Árbol de Hubbard  $T$

Figura 2.5: Del lado derecho podemos ver representada de color azul la componente  $T_0$  y de verde la componente  $T_1$

Ya que tenemos la partición del árbol de Hubbard, podemos obtener para cada punto  $x \in T$  una sucesión que nos indique, de forma ordenada, la posición de cada uno de los puntos de la órbita de  $x$  en  $T$ , tal sucesión recibe el nombre de itinerario y lo definimos a continuación.

**Definición 2.18.** Sea  $T$  un árbol de Hubbard, para cualquier punto  $x \in T$  el itinerario de  $x$  esta dado por la sucesión infinita:

$$e_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } f^{\circ(i-1)}(x) \in T_0 \\ \star & \text{si } f^{\circ(i-1)}(x) = 0 \\ 1 & \text{si } f^{\circ(i-1)}(x) \in T_1 \end{cases}$$

Tenemos que  $e_n(x)$  nos indica en qué componente se encuentra la imagen correspondiente a la iteración  $n - 1$  de  $x$ .

Para el caso particular, cuando el itinerario corresponde al del valor crítico  $c_1$ , éste recibe el nombre de secuencia de tejido y lo definimos como sigue:

**Definición 2.19.** El itinerario  $e(c_1) =: \nu = \nu_1, \nu_2, \nu_3, \dots$  de  $c_1$  es llamado secuencia de tejido.

**Observación 2.20.** Si para algún  $z \in T$  se tiene que

$$\begin{aligned} e_i(z) = \star &\Rightarrow f^{\circ(i-1)}(z) = 0 \\ &\Rightarrow f^{\circ(i)}(z) = c_1 \\ &\Rightarrow e_{i+1}(z) = \nu_1 \end{aligned}$$

y en general  $e_{i+j}(z) = \nu_j \forall j \geq 1$

**Definición 2.21.** Si existe  $n$  minimal tal que  $\nu_n = \star$ , entonces  $\nu$  es de la forma  $\nu = \overline{\nu_1, \dots, \nu_{n-1}, \star}$ . Tal secuencia de tejido es llamada  $\star$ -periódica

**Lema 2.22.** Si  $\sigma$  denota un desplazamiento a la derecha se cumple que:

$$e \circ f(z) = \sigma \circ e(z)$$

*Demostración.* Veamos que  $e_j(f(z)) = e_{j+1}(z)$ , pues  $e_j(f(z))$  esta dado por la ubicación del punto  $f^{j-1}(f(z)) = f^j(z)$  que nos da la entrada  $e_{j+1}(z)$ .

Por lo tanto

$$e \circ f(z) = e_1(f(z)), e_2(f(z)), e_3(f(z)) \dots = e_2(z), e_3(z), e_4(z) \dots = \sigma \circ e(z)$$

□

**Observación 2.23.** No hay 2 vértices con el mismo itinerario. Esto es porque si  $x$  y  $y$  tienen el mismo itinerario, entonces  $f^n[x, y]$  siempre estaría contenido en alguna de las componentes de  $T - \{0\} \forall n \geq 0$  lo cual nos llevaría a que no se cumple la condición de expansibilidad.

**Lema 2.24.** Supongamos  $z$  y  $z'$  son dos puntos en un árbol de Hubbard tales que  $e_i(z) = e_i(z')$  para toda  $i < n$ , entonces toda  $w \in [z, z']$  tienen  $e_i(w) = e_i(z) = e_i(z') \forall i < n$ .

*Demostración.* Se tiene por definición que 0 es el único punto en  $T$  tal que  $e_1(0) = \star$  por lo tanto  $z \neq 0$  y  $z' \neq 0$  y entonces  $z$  y  $z'$  están en alguna de las componentes de  $T - \{0\}$ , supongamos sin pérdida de generalidad  $z, z' \in T_1$ , se tiene que  $e_1(z) = e_1(z') = 1$  y  $[z, z'] \subset T_1$  de donde se sigue que  $w \in [z, z'] \subset T_1$  entonces  $e_1(w) = 1$ .

Por lo tanto se cumple que  $e_1(w) = e_1(z) = e_1(z')$ .

Recordamos que  $f$  es un homeomorfismo local para todo punto diferente del punto crítico, entonces el arco  $[z, z']$  es mandado de forma homeomorfa en  $f([z, z'])$  es decir  $f(w) \in f([z, z']) \forall w \in [z, z']$  y  $f([z, z'])$  es un arco que une  $f(z)$  con  $f(z')$ , como  $e_2(z) = e_2(z') \Rightarrow f([z, z'])$  está en una de las componentes de  $T - \{0\}$  y sólo en esa. Repitiendo este argumento se tiene que  $f^i([z, z'])$  está totalmente contenida en una de las componentes de  $T - \{0\} \forall i < n$  y  $f^i(w) \in f^i([z, z'])$ .

Por lo tanto  $e_i(w) = e_i(z) = e_i(z') \forall i < n$

□

**Lema 2.25.** *Existe un único punto fijo en  $T_1$ , el cual se encuentra en el interior del arco  $[0, c_1]$ .*

*Demostración. Existencia*

Como  $c_1$  es un punto final, la intersección  $[0, c_1] \cap f([0, c_1]) = [x, c_1]$  es un arco no degenerado, esto es  $x \neq c_1$ .

Si  $x = 0$  entonces  $f$  manda al arco  $[0, c_1]$  en el mismo invirtiendo la orientación, entonces hay punto fijo en  $[0, c_1]$ .

Si  $x \in (0, c_1)$  tenemos dos opciones:

1.  $f([0, c_1]) \subset [0, c_1]$  entonces como en el caso anterior tenemos un punto fijo en  $(c_1, x)$

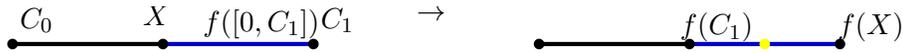


Figura 2.6:  $f$  manda el arco  $[x, c_1]$  en sí mismo invirtiendo la orientación y entonces hay un punto fijo en este arco.

2. Si no se cumple lo anterior quiere decir que  $f([0, c_1])$  se ramifica de  $[0, c_1]$  en  $x$ . Sea  $y = f(x)$ , observamos que  $y$  no puede estar en  $(0, x)$  porque el arco  $f([0, c_1])$  inicia en  $c_1$  y se ramifica en  $x$  antes de llegar a  $(0, x)$ , si  $y \in [x, c_1]$  entonces  $f$  manda  $[x, c_1]$  en  $[y, c_2]$  y  $f$  tiene un punto fijo en  $[x, y]$

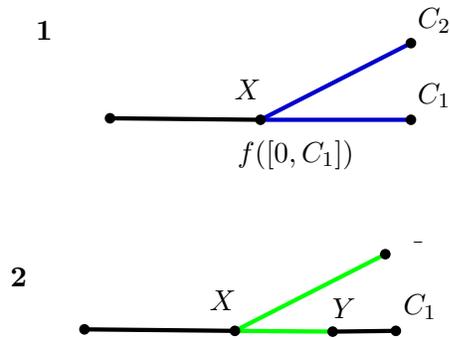


Figura 2.7: 1. En esta parte tenemos el arco  $f([0, c_1])$  el cual se ramifica de  $[0, c_1]$  en  $x$ . 2. Vemos la imagen del arco  $[x, c_1]$  la cual es igual al arco  $[y, c_2]$ .

Otra posibilidad es que  $y \in (x, c_2]$ , pero veremos que esto no puede ocurrir:

Sea  $T'$  la componente conexa de  $T - \{0\}$  que contiene a  $y$ . Tenemos que  $x$  no está en la imagen de  $T'$ , i.e.  $x \notin f(T')$  porque una de las 2 imágenes inversas de  $x$  está en  $[0, x]$  y la otra esta separada de  $x$  por el punto crítico.

Dado que  $x$  es mandado a  $T'$  y ningún punto de  $T'$  es enviado a  $x$ , todos los puntos de  $T'$  son mandados estrictamente en  $T'$  bajo  $f$ . Pero esto rompe con la condición de expansibilidad.

Por lo tanto  $y \notin (x, c_2]$  y en todos los casos posibles se cumple que existe un punto fijo en el interior del arco  $[0, c_1]$ .

### Unicidad

Sea  $\alpha$  el punto fijo en  $T_1$  supongamos que no es único. Dado que  $f$  manda  $T_1$  de forma homeomorfa en su imagen  $f$  debe fijar una componente  $G$  de  $T_1 - \{\alpha\}$ . Ésta no es la componente con 0 como frontera, porque  $\alpha$  separa 0 de  $c_1 = f(0)$ . Sea  $z$  el punto final de esta componente  $G$ . Entonces  $\alpha$  y  $z$  son dos vértices con el mismo itinerario  $\bar{1}$ , lo cual ya vimos que no es posible.

Por lo tanto existe un único punto fijo en  $T_1$  que está en  $(0, c_1)$ .

□

Para la siguiente proposición es necesario, previamente, recordar que un punto  $z \in T$  es (pre)periódico si  $f^{ol}(z) = f^{o(l+m)}(z)$  para alguna  $l \geq 0$ ,  $m \geq 1$ . Tomamos  $l$  y  $m$  mínimos con esta propiedad. Entonces  $m$  es el *período exacto* de  $z$  y  $l$  es el *preperíodo*.

**Lema 2.26.** *El período exacto y preperíodo de cualquier vértice (pre)periódico es igual al período exacto y preperíodo de su itinerario.*

*Demostración.* Supongamos que  $z$  es periódico de período  $m$  y sea  $m'$  el período de  $e(z)$ . Esto es:

$$f^m(z) = z$$

y

$$e_{m'}(z) = z$$

Tenemos que  $m' \leq m$  esto es debido a que, como observamos anteriormente,  $f^m(z)$  da la entrada  $e_{m+1}(z)$  de  $e$ , por lo tanto si  $m$  es el período de  $f$  tenemos que la entrada  $e_{m+1} = e_1$  en general  $e_{m+j} = e_j$  para toda  $j \leq m$  por lo tanto  $m' \leq m$ .

Supongamos, entonces, que  $m \neq m'$  entonces  $z$  y  $f^{m'}(z)$  son vértices distintos con el mismo itinerario, lo cual ya hemos visto que no es posible.

Por lo tanto  $m = m'$ .

De igual manera se puede demostrar para el caso preperiódico.  $\square$

**Lema 2.27.** *Si un árbol de Hubbard contiene un punto periódico con itinerario periódico  $\tau$ , entonces contiene un punto periódico  $p$  con itinerario  $\tau$  tal que el período exacto de  $p$  coincide con  $\tau$ .*

*Demostración.* Sea  $T' \subset T$  un conjunto de puntos con itinerario  $\tau$ . Por el Lema 2.24  $T'$  es conexo, es decir es un subárbol conexo de  $T$ .

Sea  $n$  el período de  $\tau$ . Entonces  $f^n$  manda  $T'$  de manera homeomorfa en su imagen en  $T'$ , es decir,  $f^n : T' \rightarrow f^n(T')$  es un homeomorfismo.

Por la propiedad de expansibilidad de los árboles de Hubbard, todos los vértices en  $T$  tienen distintos itinerarios por lo tanto  $T'$  contiene, a lo más, un vértice, de lo contrario tendría 2 vértices con el mismo itinerario. Ahora

si  $T'$  contiene un vértice por el Lema 2.26 el período de este punto marcado coincide con el período de su itinerario y entonces es el punto  $p$  que buscamos.

En otro caso  $T'$  es un punto (por lo que habríamos terminado pues este punto tiene período exacto igual al período de  $\tau$ ) o  $T'$  es homeomorfo a un intervalo. Si  $f^n$  manda  $T'$  en sí misma revirtiendo la orientación, tenemos un único punto fijo en el interior de  $T'$  y entonces dicho punto es el punto que cumple con la afirmación y habremos encontrado a  $p$  de nuevo.

Supongamos ahora que  $f^n$  preserva la orientación de  $T$ . Si  $f^n : T' \rightarrow T'$  no es suprayectiva, entonces para al menos un punto final  $x$ , tenemos que  $f^n(x)$  está en el interior de  $T'$ . Si  $x$  es un punto ramificado o un punto final de  $T$ , es un vértice y nuevamente tenemos que  $x$  es el punto buscado. En otro caso  $x$  tiene una vecindad en  $T$  que es homeomorfa a un intervalo abierto pero sólo un lado de la vecindad tiene itinerario  $\tau$ . Esto implica que  $x$  después de un número finito de iteraciones va a dar al punto crítico. Entonces  $T'$  nuevamente contiene un vértice con período  $n$ .

El último caso es cuando  $f^n$  manda  $T'$  de manera homeomorfa en sí mismo, preservando la orientación y fijando dos puntos. Entonces la afirmación se cumple para alguno de los dos puntos finales de  $T'$  que no sea mandado en el punto crítico en su órbita progresiva. Si ambos puntos fueron mandados en el punto crítico después de  $k$  y  $m$  iteraciones con  $k$  y  $m$  mínimos y  $k < m$ , entonces  $f^{k+1}(T')$  y  $f^{m+1}(T')$  son dos intervalos con  $c_1$  como punto final y que no contienen puntos ramificados de  $T$  y  $m - k < n$ . Por lo tanto  $f^{(m-k)}$  debe mandar  $T'$  en sí mismo cambiando la orientación, entonces fija algún punto en  $T'$  el cual debe de tener itinerario con período divisor de  $n$ , lo cual es una contradicción.

Por lo tanto existe un punto periódico  $p$  dentro del árbol de Hubbard con itinerario  $\tau$  y de período  $n$ .

□

## CAPÍTULO 3

---

### Demostración

---

Tenemos, hasta ahora, las definiciones del conjunto de Julia y Fatou, introducidas en el capítulo 1, al igual que sus propiedades y características. Hemos explicado, también, los modelos combinatorios que sirven para entender la dinámica del conjunto de Julia comenzando por los rayos externos en el primer capítulo; mientras que en el capítulo 2 describimos el modelo correspondientes a los árboles de Hubbard, dando su definición, sus características y demostrando las propiedades útiles para el objetivo principal de la tesis, de igual manera damos una descripción simbólica de los árboles de Hubbard mediante su secuencia de tejido.

Ahora con todas estas herramientas podemos proceder a enunciar y desarrollar la demostración del teorema principal de esta tesis:

“ Cualesquiera dos árboles de Hubbard con la misma secuencia de tejido  $\star$ -periódica o periódica son equivalentes ”

Primero daremos las definiciones de tríada, tríada formal y la función de tríada formal, herramientas que serán necesarias para la demostración, al igual que los conceptos de voto mayoritario y voto minoritario. Por lo tanto, en lo que sigue damos la definición de tríada:

**Definición 3.1.** *Una tríada es un conjunto compacto y conexo, homeomorfo a un subconjunto de la letra Y. Es degenerada si es homeomorfo a un arco o a un punto.*

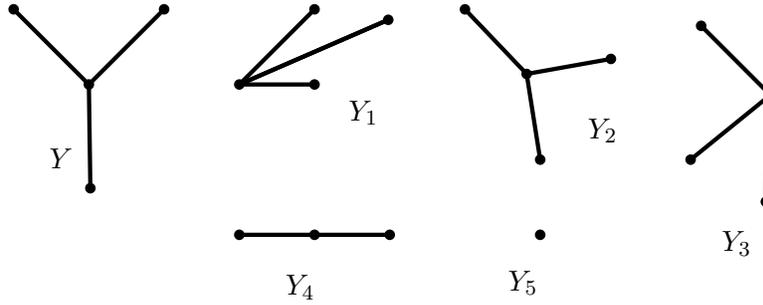


Figura 3.1: Las tríadas  $Y$ ,  $Y_1, Y_2, Y_3$  son tríadas no degeneradas, mientras que las tríadas  $Y_4$  y  $Y_5$  son tríadas degeneradas.

Veamos la siguiente notación para dar lugar a la definición de tríada formal.

**Notación:**

Tomamos  $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$  y denotaremos a nuestros espacios simbólicos de la siguiente manera:

$$\Sigma^1 := \left\{ \nu \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}^*} : \text{la primer entrada de } \nu \text{ es } 1 \right\}.$$

$$\Sigma^* := \Sigma^1 \cup \{\text{todas las secuencias } \star\text{-periódicas}\}.$$

**Definición 3.2.** Para una sucesión  $\nu \in \Sigma^*$ , sea  $\star\nu$  el símbolo  $\star$  seguido por  $\nu$  definimos el conjunto:

$$S(\nu) := \{\star\nu, \nu, \sigma(\nu), \sigma^2(\nu)\}$$

Tenemos  $S(\nu)$  resulta ser la órbita de  $\star\nu$ , con  $\nu \in \Sigma^*$ , bajo un desplazamiento a la derecha. Y entonces, se cumple que  $\sigma(S(\nu)) \subset S(\nu)$  y además si  $1\nu \in S(\nu)$  o  $0\nu \in S(\nu)$  se tiene que  $\nu$  es periódica pero no  $\star$ -periódica, por lo tanto, para toda  $\nu$  periódica o  $\star$ -periódica se cumple que

$$S(\nu) \cap \{0\nu, 1\nu\} = \emptyset$$

Ahora que hemos definido el conjunto  $S(\nu)$  podemos dar el concepto de triada formal:

**Definición 3.3.** *Cualesquiera 3 sucesiones  $s, t, u \in S(\nu) \cup \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ , diferentes dos a dos, forman la triada  $[s, t, u]$  que recibe el nombre de triada formal.*

**Definición 3.4.** *Si  $\{s, t, u\} \cap \{0\nu, 1\nu\} = \emptyset$  definimos la función de triada como sigue:*

$$\varphi[s, t, u] := \left\{ \begin{array}{lll} [\sigma(s), \sigma(t), \sigma(u)] & si & s_1 = t_1 = u_1 \in \{0, 1\} \\ Stop & si & \{s_1, t_1, u_1\} = \{0, 1, \star\} \\ [\sigma(s), \sigma(t), \nu] & si & s_1 = t_1 \neq u_1 \\ [\sigma(s), \nu, \sigma(u)] & si & s_1 = u_1 \neq t_1 \\ [\nu, \sigma(t), \sigma(u)] & si & t_1 = u_1 \neq s_1 \end{array} \right\}$$

Observamos que el dominio de esta función abarca todos los casos posibles de triadas formales, ya que por construcción la única sucesión que inicia con  $\star$  es  $\star\nu$  entonces a lo más una de las sucesiones  $s, t, u$  puede iniciar con  $\star$ ; si una de ellas lo hace y las otras dos tienen la primer entrada diferente la una de la otra, entonces estamos en el caso que indica la línea dos; en otro caso si dos sucesiones tienen la primer entrada igual estamos en alguna de las líneas 3-5, mientras que la línea uno cubre el caso en el que las sucesiones coinciden en su primer entrada ya sea que todas la tengan igual a 0 o igual a 1.

Veamos ahora que en todos los casos diferentes a la línea 2 (el caso stop) la imagen  $\varphi([s, t, u])$ , de la función  $\varphi$ , corresponde a tres sucesiones en  $S(\nu) \cup \{0, 1\}^{\mathbb{N}\star}$ , que forman de nuevo una triada formal, es decir, todas las sucesiones son diferentes dos a dos:

Para la línea uno en cada una de las sucesiones únicamente damos un desplazamiento a la derecha, las sucesiones resultantes son diferentes dos a dos, de no ser así desde un principio  $s, t, u$  serían iguales, lo cual es una contradicción. En las siguientes líneas, el hecho de que se obtengan sucesiones diferentes dos a dos se desprende de que  $s, t, u$  son diferentes de  $0\nu$  y  $1\nu$ .

Para utilizar de forma más libre a la función  $\varphi$ , nos será de ayuda especificar el significado de votos mayoritarios y minoritarios, al igual que el corte de brazos de triadas, los cuales definimos a continuación:

**Definición 3.5.** *El voto mayoritario de 3 sucesiones  $s, t, u$  es el símbolo que ocurre con más frecuencia entre la primer entrada de cada una de estas sucesiones, es decir, en  $\{s_1, t_1, u_1\}$ . Si dos de estos símbolos son iguales y el tercero es diferente, se llama mayoría 2 a 1 y entonces el símbolo diferente es el voto minoritario.*

**Definición 3.6.** *Dada la tríada  $[s, t, u]$  con mayoría 2 a 1 la versión de corte es la tríada en la cual la sucesión de voto minoritario es remplazada por  $\star\nu$ . Es decir, supongamos que el voto minoritario de la tríada  $[s, t, u]$  es la sucesión  $t$ , entonces la versión de corte de la tríada  $[s, t, u]$  es la tríada  $[s, \star\nu, u]$ .*

Con las definiciones anteriores, entonces, podemos decir que en las últimas tres líneas de la función  $\varphi$  tenemos que  $u, t, s$  respectivamente son cortados de la tríada y remplazados por  $\star\nu$  y entonces la imagen  $\varphi([s, t, u])$  corresponde al desplazamiento a la derecha de la versión de corte de  $[s, t, u]$  en cada caso. Si alguna de las sucesiones es igual a  $\star\nu$ , entonces esa sucesión es cortada y reemplazada por ella misma, y el resultado es el mismo.

Ahora sí, podemos dar paso a la demostración del teorema principal de la tesis, para eso lo enunciamos a continuación y la demostración la obtendremos como resultado de los lemas que demostraremos en lo que sigue:

**Teorema 3.7.** *Cualesquiera dos árboles de Hubbard con la misma secuencia de tejido  $\star$ -periódica o preperiódica son equivalentes.*

La idea de la demostración es la siguiente, tomaremos cualesquiera dos árboles de Hubbard  $T$  y  $T'$  con la misma secuencia de tejido, probaremos que cualesquier par de tríadas  $[c_k, c_l, c_m] \in T$  y  $[c'_k, c'_l, c'_m] \in T'$  son ambas degeneradas o no-degeneradas en el mismo sentido.

Para esto decidiremos si una tríada es degenerada mediante su iteración; lo haremos con el siguiente algoritmo, el cual, dada una tríada  $[c_k, c_l, c_m]$  nos indica si esta es degenerada o no-degenerada.

### 3.1. Algoritmo 1:

Sea  $[c_k, c_l, c_m]$  una triada de  $T$ .

1. Si la triada  $[c_k, c_l, c_m]$  no contiene al 0 en su interior es mandada de mane-ra homeomorfa en su imagen, entonces tomamos ahora su ima-gen y le aplicamos el algoritmo.

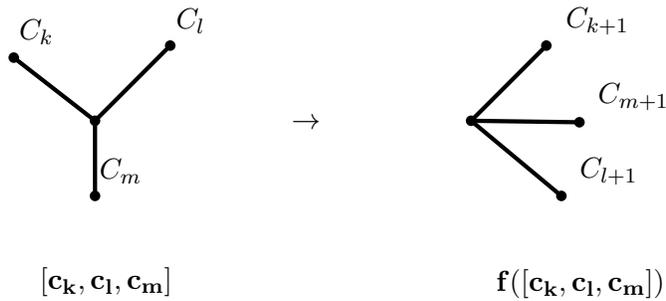


Figura 3.2: En este paso sólo tomamos la imagen de la triada  $[c_k, c_l, c_m]$  y volvemos a iterar.

2. Si 0 pertenece al interior de  $[c_k, c_l, c_m]$  y 0 no es alguno de los  $c_k, c_l, c_m$ , es decir  $0 \notin \{c_k, c_l, c_m\}$ , en este caso tomamos la componente  $[c_k, c_l, c_m] \setminus \{0\}$  que contiene 2 de los 3 puntos  $c_k, c_l, c_m$  y tomamos la cerradura de su ima-gen como la nueva triada.

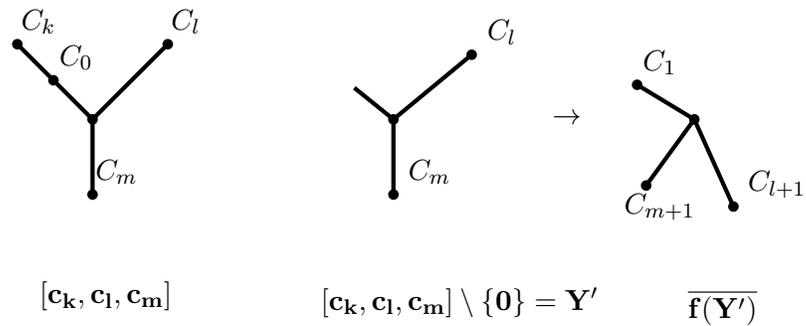


Figura 3.3: Observemos que en este paso el corte de la tríada se hace en el 0 y supongamos que  $c_k$  es el punto cortado, tendremos que la cerradura de la imagen, que corresponde a la siguiente tríada, tiene como puntos finales a  $[c_1, c_{l+1}, c_{m+1}]$ .

3. Si 0 pertenece al interior de  $[c_k, c_l, c_m]$  y 0 es igual a uno de los puntos digamos  $0 = c_k$ , entonces el algoritmo termina, la tríada es degenerada y  $c_k$  es un punto interior de  $[c_k, c_l, c_m]$ .



Figura 3.4: tríada degenerada  $[c_k, c_l, c_m]$  con  $c_k = c_0$

Siguiendo con este procedimiento, dado que la órbita crítica es finita, el algoritmo debe terminar o eventualmente alcanza un ciclo.

Observamos que el algoritmo termina únicamente cuando el 0 está en el interior de  $[c_k, c_l, c_m]$  y además es igual a uno de los puntos  $c_k, c_l$  o  $c_m$ . Entonces cuando el algoritmo no termina es porque el 0 está en el interior de  $[c_k, c_l, c_m]$  pero no es ninguno de estos puntos o cuando 0 no pertenece al interior de  $[c_k, c_l, c_m]$ . Veamos que información se puede obtener de esto:

**Lema 3.8.** *Cuando el algoritmo anterior no termina tenemos que al menos dos puntos finales deben de ser cortados durante la iteración de la tríada o al menos dos puntos finales deben de tener el mismo itinerario.*

*Demostración.* Supongamos que durante la iteración a lo más es cortado un punto final tenemos dos casos:

- Caso 1. Si ningún punto final es cortado tenemos que 0 no se encuentra en el interior de  $f^n([c_k, c_l, c_m])$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ , por lo tanto, para  $[c_k, c_l, c_m]$  se tiene que  $c_k, c_l, c_m$  tienen el mismo itinerario.
- Caso 2. En este caso tenemos que durante el algoritmo es cortado sólo uno de los puntos finales de la tríada, supongamos  $c_k$ , por lo tanto la cerradura de la imagen de  $[c_k, c_l, c_m] \setminus \{0\}$  es de la forma  $[c_1, c_{l+1}, c_{m+1}]$ . Como  $c_{l+1}$  y  $c_{m+1}$ , no son cortados tenemos que  $0 \notin f^n([c_1, c_{l+1}, c_{m+1}])$  para toda  $n \in \mathbb{N}$  y por lo tanto los puntos finales  $c_l, c_m$  tienen el mismo itinerario.

Por lo tanto en ambos casos se cumple que al menos dos puntos finales tienen el mismo itinerario.  $\square$

**Corollario 3.9.** *Cuando al menos dos puntos finales de la tríada tienen el mismo itinerario entonces la tríada es degenerada.*

*Demostración.* Cuando los 3 puntos tienen el mismo itinerario, se tiene que  $c_k, c_l, c_m$  son el mismo punto, esto es porque son puntos en la órbita crítica y entonces, son vértices de  $T$  que por la propiedad de expansibilidad no pueden tener el mismo itinerario. Por lo tanto la tríada es degenerada y consiste en un punto.

En el caso en que son sólo dos puntos con el mismo itinerario, de igual manera por la propiedad de expansibilidad, tenemos que estos dos puntos son iguales y la tríada corresponde a un arco y entonces es una tríada degenerada.  $\square$

Ahora veremos un par de lemas que nos permitirán ver cuando una tríada es degenerada o no lo es, en el caso en que el algoritmo no termine.

**Lema 3.10.** *Si cada uno de los 3 puntos de la tríada es cortado en algún paso del algoritmo la tríada debe de ser no-degenerada.*

*Demostración.* Supongamos que la tríada es degenerada, en este caso por como se eligió la tríada no puede ser un punto. Por lo tanto, si la tríada es degenerada es un arco, es decir, es de la forma  $[c_k, c_l, c_m]$  con  $c_l$  punto interior.

Ahora para que alguno de sus puntos finales, supongamos  $c_m$ , sea cortado, 0 debe de estar en el interior de alguna iteración de  $[c_k, c_l, c_m]$ , supongamos  $0 \in f^n([c_k, c_l, c_m])$  para alguna  $n \in \mathbb{N}$ , por lo tanto, debemos de trabajar ahora con la tríada de la forma  $[c_{k+n+1}, c_{l+n+1}, c_1]$  que corresponde a la cerradura de la imagen de  $[c_{k+n}, c_{l+n}, c_{m+n}] \setminus \{0\}$ .

Sea  $k + n + 1 = k'$  y  $l + n + 1 = l'$  podemos escribir, entonces, la nueva tríada de la forma  $[c_{k'}, c_{l'}, c_1]$ .

Nuevamente como otro punto de la tríada debe de ser cortado, 0 debe de estar en el interior de  $f^j([c_{k'}, c_{l'}, c_1])$  para alguna  $j \in \mathbb{N}$ , si procedemos como indica el algoritmo ahora debemos de trabajar con una tríada de que corresponde a la cerradura de la imagen de  $[c_{k'}, c_{l'}, c_1] \setminus \{0\}$  que supongamos es de la forma  $[c_1, c_{l'+j+1}, c_{j+2}]$ , (en este caso suponemos fue cortado el punto  $c_{k'}$ ).

Sean  $l' + j + 1 = l''$  y  $j + 2 = j'$  escribimos, entonces, a la tríada  $[c_1, c_{l'+j+1}, c_{j+2}]$  como  $[c_1, c_{l''}, c_{j'}]$ . Ahora si 0 se encuentra de nuevo en el interior de  $f^i([c_1, c_{l''}, c_{j'}])$  para alguna  $i \in \mathbb{N}$  el algoritmo nos indica que debemos de cortar a  $c_{i+1}$  o a  $c_{j'+1}$ , y tenemos que  $c_{l''} \in [c_{i+1}, c_{l''+i}, c_{j'+1}] \setminus \{0\}$ .

De hecho algún punto de la órbita de  $c_l$  siempre va a permanecer en la tríada como punto interior, lo cual es una contradicción a la hipótesis de que cada uno de los 3 puntos de la tríada debe de ser cortado.

De donde concluimos que la tríada es no-degenerada. □

Con la demostración del lema anterior, también hemos dado la demostración del siguiente lema:

**Lema 3.11.** *Si uno de los puntos de la tríada nunca es cortado entonces la tríada es degenerada y el punto que no es cortado se encuentra en medio.*

En resumen de lo anterior, mediante una serie de pasos podemos ver si una tríada es no-degenerada o degenerada a partir de su iteración. En este

algoritmo el único paso que nos indica que éste ha terminado es el paso 3, en cuyo caso la tríada es degenerada de la forma correspondiente a un arco que tiene al punto  $c_n = 0$  como punto interior, para  $n \in \{k, l, m\}$ . En los demás casos debemos seguir iterando. Tenemos que cuando el algoritmo no termina sucede que al menos 2 puntos finales son cortados o al menos 2 puntos finales tienen el mismo itinerario, de ésta última opción tenemos un corolario que nos indica que, entonces, la tríada es degenerada: si dos puntos tienen igual itinerario la tríada es un segmento y si todos los puntos tienen igual itinerario, entonces la tríada es un único punto.

Por otra parte si cada uno de los 3 puntos finales de la tríada es cortado en algún paso del algoritmo la tríada debe de ser no degenerada, mientras que, si tan sólo son cortados dos puntos finales de la tríada tenemos que la tríada es degenerada y el punto que nunca fue cortado es un punto interior.

**Observación 3.12.** *En el primer paso la tríada únicamente es mandada de forma homeomorfa a su imagen, puesto que  $0 \notin \text{int}([c_k, c_l, c_m])$ . Es importante notar que puede suceder el caso en que  $0 \in [c_k, c_l, c_m]$  y  $0 \notin \text{int}([c_k, c_l, c_m])$  lo cual implica que 0 es un punto final de la tríada, pero a diferencia del paso 3 tenemos que la tríada puede ser de alguna de las siguientes formas:*

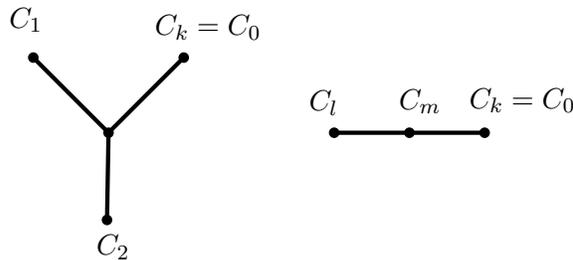


Figura 3.5: tríadas tales que  $0 \in \{c_k, c_l, c_m\}$  pero  $0 \notin \text{Int}([c_k, c_l, c_m])$

*En ambos casos su imagen corresponde a  $[c_1, c_{l+1}, c_{m+1}]$ , suponiendo  $c_k = 0$ .*

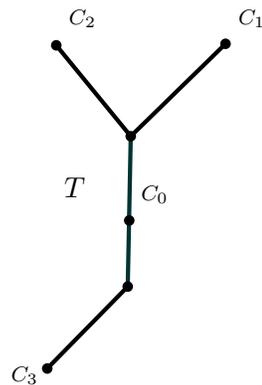
**Observación 3.13.** *En el paso dos hacemos un corte de la tríada cortamos el arco admisible de la forma  $[0, c_n]$ , con  $n \in \{k, l, m\}$ , es decir, nos quedamos con la componente de  $Y \setminus \{0\}$  que contiene dos elementos de  $\{c_k, c_l, c_m\}$ . Sea  $Y'$  tal componente, tomamos la cerradura de la imagen de la misma, es decir, trabajamos con  $\overline{f(Y')}$  como la nueva tríada y continuamos la iteración del algoritmo. La nueva tríada es de la forma  $[c_1, c_{l+1}, c_{m+1}]$ , asumiendo que el arco cortado era  $[0, c_k]$ , ya que el corte fue hecho en el cero.*

**Ejemplo:** Veamos como funciona este algoritmo en el siguiente ejemplo:

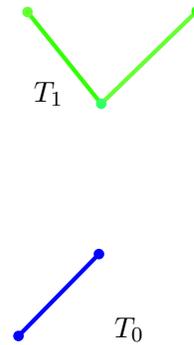
Para  $P_i(z) = z^2 + i$ , cuya órbita es de la forma  $\{i, -1+i, -i\}$  y con secuencia de tejido dada por  $1\bar{1}\bar{0}$ .

Tenemos que en la Figura 3.1 del lado izquierdo el árbol de Hubbard asociado al polinomio  $z^2 + i$  y a la izquierda está el mismo árbol dividido en sus componentes conexas  $T_0$  y  $T_1$ .

Con esta división que del árbol en sus componentes  $T_0$  y  $T_1$  obtenemos la secuencia de tejido asociada a este árbol, dada por  $1\bar{1}\bar{0}$ .

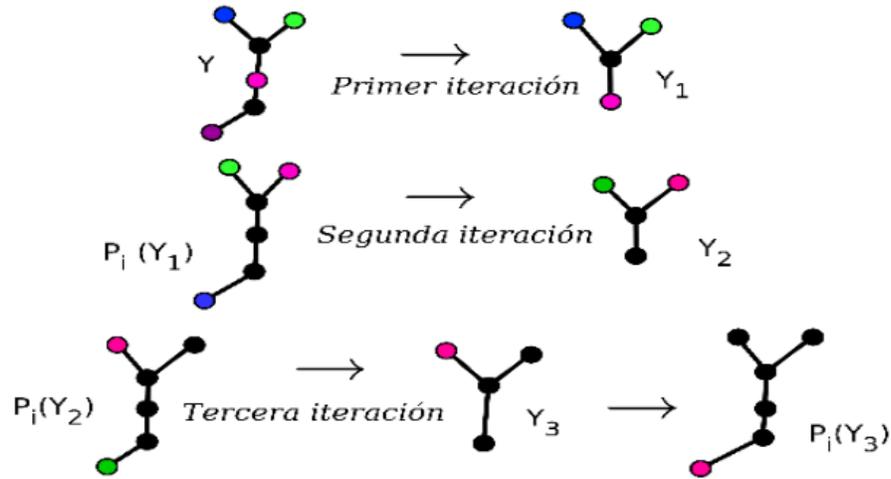


Árbol de Hubbard asociado a  $z^2 + i$



Componentes conexas de  $T$

Tenemos que todo el árbol forma la tríada  $[c_1, c_2, c_3]$ , por lo tanto será a esta tríada a la que apliquemos el algoritmo. Observemos como es que funciona el algoritmo con la descripción de la siguiente figura:



En el primer renglón de esta imagen en la triada  $Y$  el vértice verde corresponde a  $c_1$ , el azul a  $c_2$ , el morado a  $c_3$  y el rosa a  $0$ . No perdamos de vista que la idea es ver como es la órbita de cada uno de estos vértices conforme vamos iterando el algoritmo, por lo tanto pongamos atención en el color que corresponde a cada uno.

En esta triada tenemos que  $0$  se encuentra en la triada  $[c_1, c_2, c_3]$ , es decir,  $0 \in [c_1, c_2, c_3]$ , pero no es ninguno de los vértices finales, en otras palabras,  $0 \notin \{c_1, c_2, c_3\}$  por lo tanto debemos aplicar el paso dos del algoritmo anterior, y considerar ahora  $Y \setminus \{0\} = Y_1$ . Hemos cortado entonces a  $c_3$  el vértice morado de esta triada.

En el segundo renglón iniciamos de nuevo el algoritmo con la triada que resulta de aplicar  $P_i$  a  $Y_1$ , en la cual tenemos que  $0$  nuevamente es un elemento de la misma pero no es un vértice final, por lo tanto debemos de realizar de nuevo el paso dos de este algoritmo y en este caso al quedarnos con la componente  $P_i(Y_1) \setminus \{0\} = Y_2$  de donde hemos cortado a  $c_2$ , el vértice azul.

Ahora para  $P_i(Y_2)$  representada en el tercer renglón, se nos presenta el mismo caso que en los anteriores,  $0 \in P_i(Y_2)$  pero no es un vértice final de la triada por lo tanto, analogo a las iteraciones previas hay que hacer un corte en esta triada y obtener así  $Y_3 = P_i(Y_2) \setminus \{0\}$  en dónde hemos cortado a  $c_3$  el último vertice de la triada original, el vértice verde. Si seguimos con este procedimiento podemos deducir que el algoritmo no termina puesto que siempre haremos un corte y al aplicar  $P_i$  tendremos una triada homeomorfa a  $Y$ .

Sabemos entonces que en el caso en que el algoritmo no termina y son cortados los 3 vértices de la triada en algun iteración podemos deducir que la triada es no degenerada. Por lo tanto este árbol es una tirada no degenerada.

Veamos ahora que la clave para la demostración de nuestro teorema es que la forma de las tríadas puede ser leída mediante el itinerario de sus puntos finales, en terminos de la función de tríada. La tríada  $[c_k, c_l, c_m]$ , con  $c_k, c_l, c_m$  elementos de la órbita crítica, es representada por la tríada formal:

$$(\sigma^{\circ(k-1)}(\nu), \sigma^{\circ(l-1)}(\nu), \sigma^{\circ(m-1)}(\nu))$$

con  $\nu$  la secuencia de tejido que por hipótesis pertenece tanto a  $T$  como a  $T'$  pues ambos tienen la misma secuencia de tejido.

Recordamos que  $\sigma^{\circ(n-1)}(\nu)$  nos da la posición del punto  $c_n$  con respecto a las componentes  $T_1$  y  $T_0$  de  $T$ , con  $n \in \{k, l, m\}$ . Y tenemos que la tríada de la imagen, es decir la tríada  $f([c_k, c_l, c_m])$  tiene puntos finales representados por  $\varphi[\sigma^{\circ(k-1)}(\nu), \sigma^{\circ(l-1)}(\nu), \sigma^{\circ(m-1)}(\nu)]$ .

Ahora, trabajaremos un nuevo algoritmo que mediante la iteración de la tríada formal  $(\sigma^{\circ(k-1)}(\nu), \sigma^{\circ(l-1)}(\nu), \sigma^{\circ(m-1)}(\nu))$  bajo  $\varphi$  determina cuando la tríada  $[c_k, c_l, c_m]$  es degenerada o no-degenerada, a partir de la tríada formal  $(\sigma^{\circ(k-1)}(\nu), \sigma^{\circ(l-1)}(\nu), \sigma^{\circ(m-1)}(\nu))$  que la representa.

### 3.2. Algoritmo 2:

Sea  $(\sigma^{\circ(k-1)}(\nu), \sigma^{\circ(l-1)}(\nu), \sigma^{\circ(m-1)}(\nu))$  una tríada formal.

1. Si las primeras entradas de  $\sigma^{\circ(k-1)}(\nu)$ ,  $\sigma^{\circ(l-1)}(\nu)$  y  $\sigma^{\circ(m-1)}(\nu)$  son las mismas, donde contamos a  $\star$  como 0 si las otras entradas son 0 o como 1 si las entradas iguales son 1. Realizamos un triple desplazamiento, el cual, representa la tríada imagen  $[c_{k+1}, c_{l+1}, c_{m+1}]$  y corresponde a la línea 1 de la función de tríada.
2. Si tenemos que dos de las sucesiones  $\sigma^{\circ(k-1)}(\nu)$ ,  $\sigma^{\circ(l-1)}(\nu)$  y  $\sigma^{\circ(m-1)}(\nu)$  tienen su primer entrada igual digamos que ambas son 0 y la otra sucesión tiene su primer entrada diferente, digamos 1, entonces tomamos el desplazamiento a la derecha de las sucesiones que inician con cero y reemplazamos la sucesión restante por  $\nu$ . Esto corresponde a los casos de las líneas 3 -5 de la función  $\varphi$  y representa el corte de uno de los brazos de la tríada.

3. Si la unión de la primer entradas de cada  $\sigma^{\circ(k-1)}(\nu), \sigma^{\circ(l-1)}(\nu), \sigma^{\circ(m-1)}(\nu)$  es igual al conjunto  $\{0, 1, \star\}$  entonces no tenemos definida a

$$\varphi[\sigma^{\circ(k-1)}(\nu), \sigma^{\circ(l-1)}(\nu), \sigma^{\circ(m-1)}(\nu)],$$

la iteración termina, la tríada representada por:

$$(\sigma^{\circ(k-1)}(\nu), \sigma^{\circ(l-1)}(\nu), \sigma^{\circ(m-1)}(\nu))$$

es degenerada y la sucesión que inicia con  $\star$  representa un punto interior en la tríada.

En este segundo algoritmo estamos relacionando cada tríada de la forma  $[c_k, c_l, c_m]$  con una tríada formal:  $(\sigma^{\circ(k-1)}(\nu), \sigma^{\circ(l-1)}(\nu), \sigma^{\circ(m-1)}(\nu))$ , en donde, a cada punto lo representamos por su itinerario, el cual, para cada  $c_n$  por ser puntos de la órbita crítica, corresponde al  $n - 1$  desplazamiento a la derecha sobre  $\nu$ , es decir, equivale a aplicar  $n - 1$  veces  $\sigma$  a  $\nu$ .

Este algoritmo termina sólo cuando se presenta la situación que se menciona en el paso 3, en otras palabras, termina cuando la unión de la primer entrada de cada  $\sigma^{\circ(k-1)}(\nu), \sigma^{\circ(l-1)}(\nu), \sigma^{\circ(m-1)}(\nu)$  forman el conjunto  $\{0, 1, \star\}$ . En este caso la tríada es degenerada y el punto cuyo itinerario tiene la primer entrada  $\star$  es un punto interior; pero justo el único punto cuyo itinerario inicia con  $\star$  es el cero, por lo tanto, como en el algoritmo 1, este algoritmo termina cuando se encuentra una tríada degenerada con el cero como punto interior y en los demás casos seguimos iterando.

Como en el algoritmo anterior, para el algoritmo 2 dado que el número de puntos en la órbita crítica es finito, debe de terminar o eventualmente caemos en un ciclo.

**Observación 3.14.** *El paso 1 lo aplicamos cuando todas las sucesiones tienen su primer entrada igual. Puede provocar un poco de confusión que este paso se aplique incluso cuando dos de las sucesiones coincidan en su primer entrada y la restante tenga su primer elemento igual a  $\star$ , pues que su primer entrada sea  $\star$  implica que corresponde al itinerario de 0. A diferencia del paso 3 de este algoritmo y como en el algoritmo 1, el cero no es un punto interior de la tríada sino que es un punto final de la misma por lo tanto tenemos que en estos casos la tríada es de alguna de las formas:*

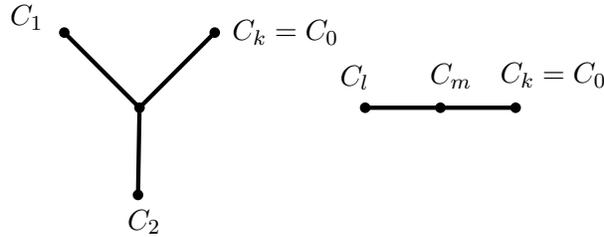


Figura 3.6: tríadas tales que  $0 \in \{c_k, c_l, c_m\}$  pero  $0 \notin \text{Int}([c_k.c_l.c_m])$

**Observación 3.15.** *Para aplicar el paso dos necesitamos dos sucesiones con la primer entrada igual y una con la primer entrada diferente a las anteriores y a  $\star$ , en este caso  $\varphi$  nos indica que debemos hacer un desplazamiento a la derecha de las sucesiones que coinciden en la primer entrada y cambiar la sucesión restante por  $\nu$ .*

*En este caso cuando la primer entrada de la sucesión de un punto y la de los otros dos difieren, entonces el primero se encuentra en una componente diferente a la de los dos restantes, por lo tanto el cero se encuentra en el interior de la tríada que está siendo representada y no corresponde a ningún punto final de la misma, como sucede en el paso 2 del primer algoritmo, al aplicar la función  $\varphi$  a la tríada formal  $(\sigma^{\circ(k-1)}(\nu), \sigma^{\circ(l-1)}(\nu), \sigma^{\circ(m-1)}(\nu))$ , en donde suponemos  $\sigma^{\circ(l-1)}(\nu)$  difiere de las otras dos sucesiones en la primer entrada, obtenemos como imagen la tríada formal:  $(\sigma^{\circ(k)}(\nu), \nu, \sigma^{\circ(m)}(\nu))$ , que representa a la tríada  $[c_{k+1}, c_1, c_{m+1}]$ , la cual, es la misma tríada que se obtiene en el algoritmo 1.*

La ventaja que tiene el algoritmo 2 sobre el algoritmo 1 es que al trabajar con secuencias de tejido estamos trabajando con las tríadas tanto del árbol  $T$  como del árbol  $T'$  ya que comparten secuencias de tejido. Por lo tanto, si la tríada  $[c_k, c_l, c_m]$  es degenerada (o no-degenerada) la tríada  $[c'_k, c'_l, c'_m]$  también lo es.

A diferencia del algoritmo 1, en el algoritmo anterior desde el inicio estamos eliminando las posibilidades de tener tríadas degeneradas que consistan en un solo vértice o en un arco en el que dos de los vértices de la tríada sean el mismo, puesto que en las tríadas formales cada una de las sucesiones es diferente, por lo tanto no podemos asociar a estas tríadas formales, tríadas

que tengan puntos iguales. Tenemos, entonces, que las únicas tríadas degeneradas que puede detectar el algoritmo son las que forman un arco que tiene como extremos dos puntos finales de la tríada y el punto restante es un punto en el interior del arco. Cuando el algoritmo no termina, la tríada formal representa una tríada no degenerada en el caso de que los 3 puntos finales que son representados sean cortados y es degenerada en el caso en el que sólo dos puntos finales, de los que se representan con la tríada formal, sean cortados, entonces el punto que no es cortado está en el interior de la tríada.

Por lo tanto, la secuencia de tejido completa nos sirve para obtener median-te  $\varphi$  información acerca de los puntos de la órbita crítica, así podemos saber que puntos de ésta se encuentran entre cuales otros en el árbol y cuales son puntos finales. Es decir, si la tríada  $[c_k, c_l, c_m]$  resulta ser una tríada degenerada, tras aplicarle el algoritmo 2, en donde  $\sigma^{\circ(k-1)}(\nu) = \star$ , nos indica que el punto  $c_k$  está entre los puntos  $c_l$  y  $c_m$ . Mientras que si para las iteraciones de todas las posibles tríadas en donde se puede encontrar el punto  $c_k$  éste no resulta ser un punto interior en una tríada degenerada, entonces  $c_k$  es un punto final.

Veamos ahora como para cada tríada no degenerada  $\varphi$  codifica el itinerario del punto ramificado, al interior de la tríada, mediante el voto mayoritario de las primeras entradas de las sucesiones  $\sigma^{\circ(k-1)}(\nu)$ ,  $\sigma^{\circ(l-1)}(\nu)$  y  $\sigma^{\circ(m-1)}(\nu)$  en cada paso.

Primero que nada como la tríada es no degenerada en ningún momento de la iteración del algoritmo se cumplirán las condiciones del paso 3, por lo tanto siempre tendremos que al menos 2 de las primeras entradas de cada  $\sigma^{\circ(k-1)}(\nu)$ ,  $\sigma^{\circ(l-1)}(\nu)$  y  $\sigma^{\circ(m-1)}(\nu)$  son iguales y justo la entrada correspondiente al itinerario del punto ramificado interior, digámselo  $p$ , coincide con el voto mayoritario de la tríada  $(\sigma^{\circ(k-1)}(\nu), \sigma^{\circ(l-1)}(\nu), \sigma^{\circ(m-1)}(\nu))$ , esto pues, si todas las sucesiones tienen su primer entrada igual, necesariamente el punto  $p$  también debe de tener esa entrada en su itinerario igual a la de estas por pertenecer a la misma componente de  $T \setminus \{0\}$ .

Ahora si tenemos una mayoría 2 a 1 en la tríada  $(\sigma^{\circ(k-1)}(\nu), \sigma^{\circ(l-1)}(\nu), \sigma^{\circ(m-1)}(\nu))$ , la entrada correspondiente en el itinerario del punto  $p$  también coincide con la mayoría, supongamos que el punto  $c_k$  es corresponde al itinerario con el voto minoritario entonces  $0 \in (p, c_k)$ , por lo tanto  $p, c_l$  y  $c_m$  pertenecen a una componente distinta de la que tiene a  $c_k$  y por lo tanto la primer entrada

del itinerario de  $p$  coincide con la primer entrada de  $\sigma^{o(l-1)}(\nu)$  y  $\sigma^{o(m-1)}(\nu)$ .

Por lo tanto, tenemos que a los puntos ramificados al interior de las triadas no degeneradas, la función  $\varphi$  junto con el voto mayoritario les codifican un itinerario relacionado con la secuencia de tejido y tenemos que en los dos árboles  $T$  y  $T'$  esta codificación es igual en los puntos pertenecen a triadas representadas por triadas formales iguales, es decir, el punto ramificado interior de la triada no degenerada  $[c_k, c_l, c_m]$  tiene asociado un itinerario igual al del punto ramificado interior de la triada no degenerada  $[c'_k, c'_l, c'_m]$ . Por otro lado, sabemos que los puntos ramificados tienen itinerarios distintos de  $0\nu$  y  $1\nu$  puesto que son vértices y sus imágenes son distintas del valor crítico. Por lo tanto el algoritmo anterior puede ser aplicado a las triadas cuyos puntos finales son vértices arbitrarios, con lo cual obtendríamos de igual manera una descripción de que puntos se encuentran entre cuales otros mediante la secuencia de tejido.

### Ejemplo:

Continuando con el polinomio del ejemplo anterior  $P_i(z) = z^2 + i$ , con secuencia de tejido dada por  $\nu = 1\bar{1}0$ . La triada  $[c_1, c_2, c_3]$  está representada por la triada formal  $(\nu, \sigma(\nu), \sigma^2(\nu))$  en dónde:

$$\begin{aligned}\nu &= 110101010101010\dots \\ \sigma(\nu) &= 101010101010\dots \\ \sigma^2(\nu) &= 01010101010101\dots\end{aligned}$$

En esta triada tenemos que la primer entrada de cada una de las sucesiones son 1, 1 y 0, respectivamente, por lo tanto tenemos una mayoría dos a uno, en dónde el voto minoritario es 0; el algoritmo nos indica que debemos hacer un corte de triada y aplicar  $\sigma$  a este corte con lo que obtenemos una nueva triada formal de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\sigma(\nu) &= 101010101010\dots \\ \sigma^2(\nu) &= 01010101010101\dots \\ \nu &= 110101010101010\dots\end{aligned}$$

En esta nueva triada de igual manera hay una mayoría dos a uno, pero ahora el voto minoritario se encuentra en la segunda sucesión, por lo tanto está deberá de ser cortada, siguiendo la segunda condición del algoritmo anterior, y debemos aplicar  $\sigma$  a la versión de corte de la triada, de donde resulta la siguiente triada:

$$\begin{aligned}\sigma^2(\nu) &= 01010101010101\dots \\ \nu &= 11010101010101\dots \\ \sigma(\nu) &= 101010101010\dots\end{aligned}$$

Al hacer la siguiente iteración del algoritmo 2 volvemos a utilizar el segundo caso del mismo, puesto que tenemos una mayoría dos a uno, debemos cortar la sucesión que inicia con 0, sustituirla por  $\star\nu$  y aplicar  $\sigma$  a esta versión de corte de triada, con lo cual obtenemos:

$$\begin{aligned}\nu &= 11010101010101\dots \\ \sigma(\nu) &= 101010101010\dots \\ \sigma^2(\nu) &= 01010101010101\dots\end{aligned}$$

Que si observamos es igual a la triada con la que comenzamos, de donde podemos asegurar que este algoritmo no termina puesto que podemos seguir repitiendo este procedimiento de forma infinita; sabemos que en este caso, dado que cada una de las sucesiones fue cortada en algún paso del algoritmo, la triada es no degenerada. Es decir, obtuvimos el mismo resultado que al aplicar el algoritmo 1.

Con todas las herramientas que tenemos podemos ver que si  $T$  y  $T'$  tienen la misma secuencia de tejido, entonces son equivalentes. Para esto veamos que quiere decir que dos árboles de Hubbard sean equivalentes:

Dos árboles de Hubbard  $T$  y  $T'$  son equivalentes si existe una biyección entre sus vértices y si se preservan las adyacencias, esto es que si la biyección entre los vértices de  $T$  y los de  $T'$  está dada por  $g$  y para  $v_1, v_2 \in T$  tenemos que  $g(v_1) = v'_1$  y  $g(v_2) = v'_2$  con  $v'_1, v'_2 \in T'$  entonces, si  $v_1$  y  $v_2$  son adyacentes en  $T$  se cumple que  $v'_1$  y  $v'_2$  también son adyacentes en  $T'$ .

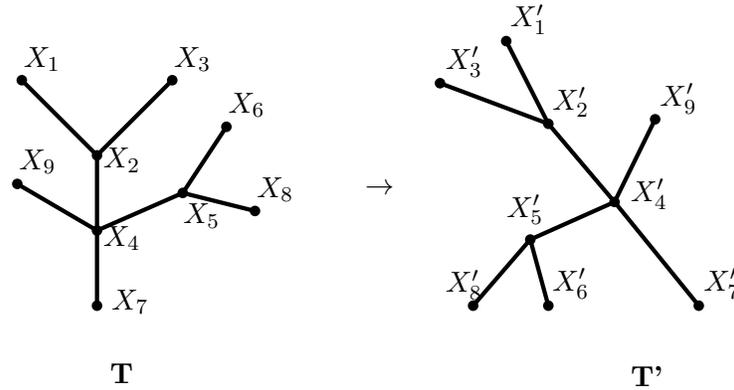


Figura 3.7: los árboles  $T$  y  $T'$  son equivalentes, existe una biyección entre sus vértices, la cual manda a cada  $X_j \in T$  en  $X'_j \in T'$  y preserva adyacencias.

Por lo tanto, como queremos ver que  $T$  y  $T'$  son equivalentes, sabiendo que tienen la misma secuencia de tejido daremos una función biyectiva que mande vértices de  $T$  en vértices de  $T'$  y que preserve adyacencias.

Primero reetiquetamos a todos los vértices del árbol  $T$  supongamos que la cardinalidad de la órbita crítica es  $m$  entonces hacemos:

$$c_0 = v_0, c_1 = v_1, \dots, c_m = v_m$$

por otro lado sean  $v_{m+1}, v_{m+2}, \dots, v_n$  las etiquetas correspondientes a los puntos ramificados que no pertenecen a la órbita crítica. Y definimos  $\mu_i$  como el itinerario asociado a cada  $v_i$ . En el caso de que  $0 \leq i \leq m$  observamos que  $\mu_i = \sigma^{o_i-1}(\nu)$  y para  $m+1 \leq i \leq n$  esta  $\mu_i$  se obtiene de  $\nu$  a partir de  $\varphi$  y el voto mayoritario.

Analogamente hacemos esta notación en  $T'$ , con las etiquetas  $v'_0, \dots, v'_m$ , para los puntos de la órbita crítica, mientras que para los puntos que pertenecen al interior de las triadas no degeneradas, como vimos tienen un itinerario asociado a la secuencias de tejido mediante  $\varphi$  y el voto mayoritario, por lo tanto a cada vértice ramificado que se encuentre al interior de una triada en el árbol  $T'$  le ponemos el mismo subíndice que tiene el vértice en  $T$  con el que

coincide el itinerario, en otras palabras, dado  $v' \in T'$  con itinerario igual a  $\mu_j$ , con  $m + 1 \leq j \leq n$  reetiquetamos a  $v'$  como  $v'_j$ .

Ahora daremos la biyección entre los vértices de  $T$  y  $T'$ , y veremos que se preservan las adyacencias:

Sea  $\Psi : V(T) \rightarrow V(T')$  tal que

$$\Psi(v_j) = v'_j \text{ para } 0 \leq j \leq n$$

Entonces  $\Psi$  manda vértices de  $T$  en vértices de  $T'$  que tienen en mismo itinerario  $\mu_j$ .  $\Psi$  es biyectiva por la propiedad de expansibilidad, que garantiza que no existen dos vértices con el mismo itinerario y porque  $\#V(T) = \#V(T')$ .

Ahora si aplicamos el algoritmo 2 a las tríadas formales de la forma  $(\mu_k, \mu_l, \mu_m)$  que representa a la tríada  $[v_k, v_l, v_m] \in T$  y a la tríada  $[\Psi(v_k), \Psi(v_l), \Psi(v_m)] \in T'$ , este algoritmo nos indicará que vértices se encuentran entre cuales otros en ambas tiradas y tendremos entonces que se preservan las adyacencias, pues de nuevo estamos trabajando con tríadas que comparten itinerarios; por ejemplo si la tríada formal  $(\mu_k, \mu_l, \mu_m)$  resulta ser degenerada con el punto representado por  $\mu_l$  como punto interior, tenemos que  $v_l$  es adyacente a  $v_k$  y a  $v_m$ , al igual que  $\Psi(v_l)$  es adyacente a  $\Psi(v_k)$  y a  $\Psi(v_m)$ . Por lo tanto  $\Psi$  preserva las adyacencias y es biyectiva, de donde concluimos que  $T$  y  $T'$  son equivalentes.

Hemos visto, entonces, que si dos árboles de Hubbard comparten la misma secuencia de tejido periódica o  $\star$ -periódica, entonces son equivalentes.

---

## Bibliografía

---

- [1] Adrien Douady, John Hubbard, *Études dynamique des polynômes complexes I* Publ.Math.Orsay.(1984-85)(The Orsay notes).
- [2] Henk Bruin, Alexandra Kaffl y Dierk Schleicher *Existence of Quadratic Hubbard Trees* preprint 2007.
- [3] Henk Bruin, Dierk Schleicher, *Symbolic dynamics of quadraic polynomials* En proceso, una versión preliminar (preprint 2002) puede encontrarse en la página web del *Mittag-Leffler institute*:

*[https://www.mittag-leffler.se/preprints/meta/BruinThu\\_Jun\\_13\\_13\\_59\\_29.rdf.html](https://www.mittag-leffler.se/preprints/meta/BruinThu_Jun_13_13_59_29.rdf.html)*

- [4] John Milnor, *Dynamics in one complex variable* Tercera edición. Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2006.
- [5] Robert L. Devaney *The complex dynamics of quadratic polynomials* Proc. of Symp. Appl. Math 49 *Complex dynamical systems:the mathemtics behind the Mandelbrot and Julia sets* (1994) 1-27