



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DETERMINACIÓN EXPERIMENTAL DE
LA DEPENDENCIA DEL MÓDULO DE
YOUNG CON LA TEMPERATURA:
MÉTODO DE RESONANCIA MECÁNICA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

PRESENTA:

AITOR LANDER DE ICAZA ASTIZ

DIRECTOR DE TESIS:

ANDRÉS VALENTÍN PORTA CONTRERAS



2014



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de Datos del Jurado

Alumno: De Icaza
Astiz
Aitor Lander
56 05 59 09
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Física
406096023

Tutor: Fís.
Andrés Valentín
Porta
Contreras

1^{er} Sinodal: Dr.
Stephen
Muhl
Saunders

2^o Sinodal: Dr.
Marcos
Ley
Koo

3^{er} Sinodal: Fís.
Raúl
Espejel
Paz

4^o Sinodal: Dr.
Enrique
Geffroy
Aguilar

Trabajo escrito: Determinación experimental de la dependencia del módulo de Young con la temperatura:
Método de resonancia mecánica
134 pp.
2014

Prefacio

El estudio de la propagación de ondas en medios sólidos no homogéneos es importante para caracterizar materiales y estructuras. Un material puede hacerse inhomogéneo, aún cuando su composición sea idéntica en cualquiera de sus partes. Por ejemplo, las inhomogeneidades en un sólido se pueden generar produciendo gradientes térmicos. Una estructura puede estar conformada por muchos materiales, por lo que es más común que no sea homogénea.

Se han realizado anteriormente a esta tesis experimentos que permiten verificar la generación de inhomogeneidades con la temperatura, que tienen como consecuencia la variación de las constantes elásticas del medio sólido empleado. Se quiere describir, a partir de datos experimentales, la relación de su variación con la temperatura. Se consideran medios con inhomogeneidades cuya dependencia es lineal o linealizable con la posición. Se ha seleccionado el aluminio como medio de propagación de estas ondas de esfuerzos por su baja pérdida de energía, sin embargo, la gran variedad de aleaciones comerciales no permite tener certidumbre sobre las características de las muestras empleadas en los experimentos. Por ello se desarrollan métodos y arreglos experimentales para la caracterización de las muestras empleadas.

Es importante que los métodos de detección de las ondas y vibraciones interactúen con el fenómeno lo menos posible para evitar que modifique su comportamiento, o enmascare los sucesos que se estudian.

Capítulo 1 Se revisan los conceptos básicos relativos a la teoría de deformaciones y esfuerzos en los diferentes medios y particularmente para el medio isotrópico. También se revisa la propagación de ondas en dicho medio. Se mencionan los objetivos de la tesis y se resaltan las hipótesis tomadas en cuenta.

Capítulo 2 Se aborda el problema de la propagación de ondas en varillas, empezando por tratar los comportamientos en las fronteras. Los diferentes tipos de vibraciones se analizan en su teoría más simple y a continuación se analizan con la teoría de Pochhammer-Chree. Se analiza la resonancia para ondas longitudinales. También se estudia la posible utilidad del método de perturbaciones en el problema concreto de esta tesis. Finalmente se discute cómo, con todos estos elementos, se construye el modelo teórico para analizar el problema que trata esta tesis, tomando en cuenta el cambio inhomogéneo de temperatura en la varilla.

Capítulo 3 Se discuten los diferentes métodos de medición que es posible usar. Se describe cómo se llevó a cabo el método elegido y se presentan los datos obtenidos con unos cuantos análisis previos.

Capítulo 4 Se discuten los resultados obtenidos y se encuentra la velocidad de propagación de una onda y el módulo de Young para la varilla de aluminio.

Agradecimientos

A mi asesor Andrés Valentín Porta Contreras que con su trabajo paciente y apoyo constante me permitió llevar a término este trabajo. Su disposición para discutir abiertamente las dificultades que se presentaron a lo largo del trabajo enriqueció ampliamente mi conocimiento. Su amistad también fue imprescindible para mí.

A mi familia que estuvo ahí para ayudarme. A mi papá y mamá que siempre buscan la manera de apoyarme. A mis hermanos con los que puedo contar en cualquier momento. A Dafne, cuyo apoyo y cariño me impulsaron a dar lo de mejor de mí. Sin todos ellos, estoy seguro que este trabajo no sería lo que es ahora.

A mi tía Luciana, que mostró su apoyo y ganas por verme ya titulado. Que no solo entendió con más visión lo que necesitaba para acabar esta tesis, sino para no verme estancado.

A mis amigos y compañeros de la facultad Mau, Nadia, Miguel Ángel, Lalo, Cuauhtli, Gilberto, Arenio, Javier, Gabriel, Migui, Giancarlo, Gus, Héctor, Minerva, Gina, Lucero, Giovani, Fernando, Joss, Talía, Gisela y Rafael que sin su buen sentido del humor y camaradería la carrera y facultad carecería de gran parte de su luz. A los andols Jiorgeleks, Jibus, Ozz, Dafne, Kat, Diana y Gaby. Su amistad es definitivamente parte de lo que da sentido a mi vida.

A todos los que se tomaron un tiempo para leer mi tesis. A los que proporcionaron un lugar y material para su realización. A los que tuvieron que soportar la agudeza de los 2450 Hz.

Finalmente, a mis abuelos, cuyo cariño no faltó.

A los que ya no están, a los que siguen y a los que estarán. A todos ustedes, gracias.

Aitor.

Índice general

| | |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Prefacio | I |
| Agradecimientos | III |
| Índice general | VI |
| Índice de figuras | VIII |
| Índice de tablas | X |
| Índice de símbolos | XI |
| I Introducción | 1 |
| I.1 Fundamentos | 2 |
| I.1.1 Materiales elásticos | 2 |
| I.1.2 Esfuerzos y deformaciones | 2 |
| I.1.3 Diferencia entre medio homogéneo, inhomogéneo, isotrópico, anisotrópico y aelotrópico | 5 |
| I.1.4 La estructura cristalina de los metales | 6 |
| I.1.5 El medio isotrópico y sus constantes | 7 |
| I.1.6 Expansión térmica | 9 |
| I.1.7 Características del aluminio | 9 |
| I.1.8 Ecuaciones de movimiento en un medio elástico | 10 |
| I.1.9 Tipos de onda en un medio elástico isotrópico | 12 |
| I.1.10 Propagación de una onda plana en un medio isotrópico | 14 |
| I.1.11 Integración de la ecuación de onda | 14 |
| I.1.12 Otros tipos de ondas | 15 |
| I.1.13 Propagación de ondas en un medio aelotrópico | 16 |
| I.1.14 Generación de ondas | 17 |
| I.2 Objetivos de la tesis | 18 |
| I.3 Hipótesis del trabajo y otras consideraciones | 18 |
| II El problema | 21 |
| II.1 Condiciones de frontera | 22 |
| II.1.1 Reflexión de una onda en una frontera libre | 22 |
| II.1.2 Reflexión y refracción de una onda en la frontera entre dos medios | 25 |
| II.1.3 La varilla con frontera libre y cargada con una masa | 28 |
| II.1.4 Nodos de desplazamiento impuestos | 30 |

| | | |
|------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| II.2 | Vibraciones longitudinales, torsionales y de flexión en una varilla | 30 |
| II.2.1 | Vibraciones longitudinales en una varilla | 31 |
| II.2.2 | Vibraciones de torsión en una varilla | 32 |
| II.2.3 | Vibraciones de flexión en una varilla | 33 |
| II.2.4 | Aproximación de Pochhammer-Chree | 34 |
| | Ondas longitudinales | 36 |
| | Ondas de torsión | 38 |
| | Ondas de flexión | 39 |
| II.3 | Ondas estacionarias y resonancia en una varilla para ondas longitudinales | 39 |
| II.4 | El método de perturbaciones | 43 |
| II.5 | Discusión del modelo | 44 |
| | II.5.1 Resonancia en una varilla cilíndrica para un patrón de temperaturas no uniforme | 46 |
| | II.5.2 Intervalos de validez y otros trabajos | 48 |
| III | El experimento | 51 |
| III.1 | Consideraciones experimentales | 52 |
| III.2 | Desarrollo experimental | 55 |
| | III.2.1 Descripción del arreglo experimental para detectar resonancias conforme se varía la temperatura en la varilla | 55 |
| | III.2.2 Método para medir las resonancias en la varilla | 57 |
| | III.2.3 Estructura de los hornos | 57 |
| | III.2.4 Caracterización de los hornos | 58 |
| | III.2.5 Análisis del comportamiento del control de temperatura del horno | 58 |
| | III.2.6 Análisis de la forma que varía la temperatura en una varilla | 58 |
| III.3 | Datos | 59 |
| | III.3.1 Medidas para analizar el comportamiento cualitativo del control de temperatura | 59 |
| | III.3.2 Distribución de sensores LM35 en la varilla de aluminio de 1.6 ± 0.0005 m de longitud y 8 mm de diámetro | 64 |
| | III.3.3 Perfil de temperaturas | 64 |
| | III.3.4 Características de los hornos | 66 |
| | III.3.5 Perfil de temperaturas en los hornos | 66 |
| | III.3.6 Cambio en la frecuencia de resonancia con la temperatura para una varilla de 100.1 ± 0.05 cm de longitud y 0.805 ± 0.005 cm de diámetro | 70 |
| IV | Discusión y conclusiones | 77 |
| | Apéndices | 97 |
| A | Características del amplificador | 97 |
| B | Características del sensor de temperatura LM35 | 101 |
| C | Otros datos | 105 |
| D | Diferentes ajustes a los datos experimentales del capítulo III | 109 |
| E | Manejo tensorial | 115 |
| | Referencias | 117 |

Índice de figuras

| | | |
|--------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| I.1 | Componentes de esfuerzo actuando en un paralelepípedo rectangular infinitesimal. | 3 |
| I.2 | Deformación cortante y rotación en dos dimensiones. | 4 |
| I.3 | Esfuerzos que actúan en un pequeño paralelepípedo rectangular. | 11 |
| II.1 | Reflexión de una onda dilatacional en la frontera libre de un medio elástico. | 23 |
| II.2 | Reflexión, refracción y transmisión de una onda dilatacional en la frontera entre dos medios elásticas. | 26 |
| II.3 | Imán en la frontera de una varilla. | 28 |
| II.4 | Fuerzas actuando en un elemento de varilla en movimiento longitudinal. | 31 |
| II.5 | Pareja de torques actuando en un elemento de varilla en movimiento de torsión. | 32 |
| II.6 | Pulsos reflejándose en (a) una frontera fija, y (b) una frontera libre. | 40 |
| II.7 | Primeros cuatro modos de vibración para una onda de esfuerzos. | 41 |
| II.8 | Primeros cuatro modos de vibración para una onda de desplazamientos. | 42 |
| III.1 | Arreglo experimental. | 56 |
| III.2 | Diagrama de bloques del arreglo experimental. | 56 |
| III.3 | Estructura de un horno. | 57 |
| III.4 | Gráfica de los datos de la tabla III.1 y ajuste lineal $y=0.728x+19.19$ con $R^2 = 0.9872$ | 59 |
| III.5 | Gráfica de los datos de la tabla III.2 y ajuste polinomial $y = -4.178 \times 10^{-5} x^3 + 8.716 \times 10^{-3} x^2 + 0.2221 x + 27.41$ con $R^2 = 0.9950$ | 60 |
| III.6 | Gráfica de los datos de la tabla III.3 y ajuste polinomial $y = 1.979 \times 10^{-7} x^4 - 1.093 \times 10^{-4} x^3 + 0.01703 x^2 - 0.2676 x + 34.16$ con $R^2 = 0.9946$ | 61 |
| III.7 | Gráfica de los datos de la tabla III.4 y ajuste polinomial $y = 4.808 \times 10^{-7} x^4 - 8.382 \times 10^{-5} x^3 + 1.258 \times 10^{-3} x^2 + 0.3882 x + 78.48$ con $R^2 = 0.9976$ | 62 |
| III.8 | Gráfica de los datos de la tabla III.5 y ajuste polinomial $y = -1.978 \times 10^{-10} x^5 + 2.248 \times 10^{-7} x^4 - 8.766 \times 10^{-5} x^3 + 0.01245 x^2 - 0.115 x + 25.30$ con $R^2 = 0.9946$ | 63 |
| III.9 | Gráfica de los datos de la tabla III.6. | 64 |
| III.10 | Gráfica de los datos de la tabla III.7 y ajuste polinomial $y = -4.937 \times 10^{-5} x^3 + 1.027 \times 10^{-2} x^2 - 0.69 x + 40.55$ con $R^2 = 0.9819$ | 65 |
| III.11 | Perfil de la temperatura en los hornos, cuando se mide $50 \pm 1^\circ\text{C}$ a 10 ± 0.05 cm del extremo derecho del horno 1. | 67 |
| III.12 | Perfil de la temperatura en los hornos, cuando se mide $100 \pm 1^\circ$ a 10 cm del extremo derecho del horno 1 | 68 |
| III.13 | Perfil de la temperatura en los hornos, cuando se mide $151 \pm 1^\circ\text{C}$ a 10 ± 0.05 cm del extremo derecho del horno 1 | 69 |
| III.14 | Experimento 1: Variación de la frecuencia de resonancia y del voltaje pico-pico de excitación del micrófono con la temperatura | 71 |
| III.15 | Experimento 2: Variación de la frecuencia de resonancia y del voltaje pico-pico de excitación del micrófono con la temperatura | 73 |

| | | |
|--------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| III.16 | Experimento 3: Variación de la frecuencia de resonancia y del voltaje pico-pico de excitación del micrófono con la temperatura | 75 |
| IV.1 | Funciones para los máximos y mínimos estimados de la temperatura en las 5 regiones. | 79 |
| IV.2 | Aproximación del valor de una integral por suma de rectángulos. | 80 |
| IV.3 | Variación con la temperatura promedio de la velocidad de fase para el experimento 1. | 88 |
| IV.4 | Variación con la temperatura promedio de la velocidad de fase para el experimento 2 | 90 |
| IV.5 | Variación con la temperatura promedio de la velocidad de fase para el experimento 3 . | 91 |
| C.1 | Variación con la frecuencia del voltaje pico-pico de salida. | 107 |
| C.2 | Variación con la frecuencia del voltaje pico-pico de entrada máximo en que no se presenta distorsión en los voltajes de salida. | 107 |

Índice de tablas

| | | |
|--------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| I.1 | Número de constantes independientes para describir las propiedades elásticas de los distintos sistemas de cristales y un material isotrópico. | 5 |
| I.2 | Propiedades físicas del aluminio. | 9 |
| I.3 | Velocidades de propagación en aluminio de varios tipos a 20 °C [1]. | 10 |
| I.4 | Velocidades de propagación en otros tipos de aluminio [17]. | 10 |
| III.1 | Temperaturas en el horno de 7.98 ± 0.005 cm con un control de temperatura. | 59 |
| III.2 | Segunda prueba de temperaturas en el horno de 7.98 ± 0.005 cm con un control de temperatura. | 60 |
| III.3 | Tercera prueba de temperaturas en el horno de 7.98 ± 0.005 cm con un control de temperatura. | 61 |
| III.4 | Cuarta prueba de temperaturas en el horno de 7.98 ± 0.005 cm con un control de temperatura. | 62 |
| III.5 | Quinta prueba de temperaturas en el horno de 7.98 ± 0.005 cm con un control de temperatura. | 63 |
| III.6 | Perfil de voltajes y sus correspondientes temperaturas en los sensores colocados a una distancia D . de la salida del horno en la varilla de 1.6 ± 0.0005 m con el horno de 7.98 ± 0.005 cm apagado. | 64 |
| III.7 | Perfil de voltajes y sus correspondientes temperaturas en los sensores colocados a una distancia D . de la salida del horno en la varilla de 1.6 ± 0.0005 m con el horno de 7.98 ± 0.005 cm encendido. | 65 |
| III.8 | Resistencia del arreglo final de los hornos. | 66 |
| III.9 | Perfil de la temperatura en los hornos, cuando se mide $50 \pm 1^\circ\text{C}$ a 10 ± 0.05 cm del extremo derecho del horno 1. | 67 |
| III.10 | Perfil de la temperatura en los hornos, cuando se mide $100 \pm 1^\circ$ a 10 ± 0.05 cm del extremo derecho del horno 1. | 68 |
| III.11 | Perfil de la temperatura en los hornos, cuando a 10 ± 0.05 cm del extremo derecho del horno 1 se miden $151 \pm 1^\circ\text{C}$ | 69 |
| III.12 | Primer experimento. | 70 |
| III.13 | Segundo experimento. | 72 |
| III.14 | Tercer experimento. | 74 |
| IV.1 | Interpolación lineal entre los valores de la integración para cada horno y las temperaturas de referencia (T_r). | 80 |
| IV.2 | Interpolación lineal entre el estimado máximo y las temperaturas de referencia (T_r) para la región I. | 81 |
| IV.3 | Interpolación lineal entre el estimado mínimo y las temperaturas de referencia (T_r) para la región I. | 82 |

| | | |
|-------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| IV.4 | Interpolación lineal entre el estimado máximo y las temperaturas de referencia (T_r) para la región V. | 82 |
| IV.5 | Interpolación lineal entre el estimado mínimo y las temperaturas de referencia (T_r) para la región V. | 82 |
| IV.6 | Interpolación lineal entre el estimado máximo y las temperaturas de referencia (T_r) para la región III. | 82 |
| IV.7 | Interpolación lineal entre el estimado mínimo y las temperaturas de referencia (T_r) para la región III. | 83 |
| IV.8 | Primer experimento. | 84 |
| IV.9 | Segundo experimento. | 85 |
| IV.10 | Tercer experimento. | 86 |
| IV.11 | Primer experimento: frecuencias de resonancia, longitudes efectivas y velocidades de fase a distintas temperaturas promedio. | 87 |
| IV.12 | Segundo experimento: frecuencias de resonancia, longitudes efectivas y velocidades de fase a distintas temperaturas promedio. | 89 |
| IV.13 | Tercer experimento: frecuencias de resonancia, longitudes efectivas y velocidades de fase a distintas temperaturas promedio. | 89 |
| IV.14 | Ajustes lineales usando los datos de las columnas 1 y 4 de las tablas IV.11, IV.12 y IV.13. | 92 |
| | | |
| C.1 | Características de los embobinados. | 105 |
| C.2 | Campos magnéticos que producen los embobinados 1 a 6 a distintas corrientes. | 106 |
| C.3 | Voltaje de salida (V.S.) y voltajes de rango sin distorsión (V.R.S.D.) a distintas frecuencias (f) con un voltaje de entrada pico-pico de 15 mV. | 106 |
| | | |
| D.1 | Ajustes a los datos de la tabla III.1 y coeficiente R^2 | 109 |
| D.2 | Ajustes a los datos de la tabla III.2 y coeficiente R^2 | 109 |
| D.3 | Ajustes a los datos de la tabla III.3 y coeficiente R^2 | 109 |
| D.4 | Ajustes a los datos de la tabla III.4 y coeficiente R^2 | 110 |
| D.5 | Ajustes a los datos de la tabla III.5 y coeficiente R^2 | 110 |
| D.6 | Ajustes a los datos de la tabla III.7 y coeficiente R^2 | 110 |
| D.7 | Ajustes a los datos de la tabla III.9 y coeficiente R^2 para el horno 1 | 110 |
| D.8 | Ajustes a los datos de la tabla III.9 y coeficiente R^2 para el horno 2 | 111 |
| D.9 | Ajustes a los datos de la tabla III.9 y coeficiente R^2 para el horno 2 invertido | 111 |
| D.10 | Ajustes a los datos de la tabla III.10 y coeficiente R^2 para el horno 1 | 111 |
| D.11 | Ajustes a los datos de la tabla III.10 y coeficiente R^2 para el horno 2 | 111 |
| D.12 | Ajustes a los datos de la tabla III.10 y coeficiente R^2 para el horno 2 invertido | 112 |
| D.13 | Ajustes a los datos de la tabla III.11 y coeficiente R^2 para el horno 1 | 112 |
| D.14 | Ajustes a los datos de la tabla III.11 y coeficiente R^2 para el horno 2 | 112 |
| D.15 | Ajustes a los datos de la tabla III.11 y coeficiente R^2 para el horno 2 invertido | 112 |
| D.16 | Ajustes a los datos de la primer y segunda columna de la tabla III.12 y coeficiente R^2 para las distintas combinaciones de las series de datos | 113 |
| D.17 | Ajuste lineal a los datos de la primer y segunda columna de la tabla III.13 y coeficiente R^2 | 113 |
| D.18 | Ajuste lineal a los datos de la primer y segunda columna de la tabla III.14 y coeficiente R^2 | 113 |
| D.19 | Ajustes a los datos de la primer y tercer columna de la tabla III.14 y coeficiente R^2 | 113 |
| | | |
| E.1 | Notación en índices de relaciones tensoriales y vectoriales. | 116 |

Índice de símbolos

| | |
|------------------|--------------------------------------------------------------------------|
| A | Factor de anisotropía, Amplitud, Área |
| a | Aceleración |
| Al | Símbolo químico del aluminio |
| c_0 | Velocidad de las ondas longitudinales en una varilla muy delgada |
| c_1 | Velocidad de las ondas de dilatación |
| c_2 | Velocidad de las ondas de distorsión |
| c_g | Velocidad de grupo |
| c_ω | Velocidad de fase de una onda |
| C_{ijkl} | Tensor de elasticidad |
| E | Módulo de Young o módulo elástico |
| f, f | Frecuencia |
| $J_0(x)$ | Función de Bessel de orden cero |
| $J_1(x)$ | Función de Bessel de primer orden |
| K | Módulo de compresibilidad |
| k | Número de onda |
| L | Longitud de la varilla |
| L_{ef} | Longitud efectiva |
| P | Presión |
| r | Radio vector en coordenadas esféricas |
| T | Temperatura, periodo |
| \bar{T} | Temperatura promedio |
| T_r | Temperatura de referencia |
| u_i | Desplazamiento en la dirección i |
| \mathbf{u} | Vector de desplazamiento |
| α | Coefficiente de expansión térmica |
| ϵ_{ij} | Deformación en la dirección i actuando en el plano perpendicular a j |
| Θ | Dilatación |
| Λ | Longitud de onda |
| λ | Constante de Lamé |
| μ | Módulo de rigidez, constante de Lamé |
| ν | Razón de Poisson |
| ρ | Densidad de masa |
| σ_{ij} | Esfuerzo en la dirección i actuando en el plano perpendicular a j |
| ω | Frecuencia angular |
| $\bar{\omega}_i$ | Componente de rotación |

Introducción

El concepto de un cuerpo elástico se describe en este capítulo, junto con la teoría y herramienta matemática necesaria para estudiarlo (I.1.1 y I.1.2). La descripción del comportamiento de un cuerpo elástico se hace a través de la ley de Hooke, que nos dice cómo se deforma un cuerpo en relación a los esfuerzos aplicados (I.1.2).

Existen varios tipos de medios elásticos y, según el grado de simetría que tengan, se necesita un mayor o menor número de constantes para describirlo (I.1.2 y I.1.3). Las estructuras cristalinas presentan diferentes tipos de simetrías. Estas estructuras cristalinas se presentan en los metales aunque por cúmulos. Dichas estructuras le dan a los metales sus propiedades mecánicas, eléctricas y térmicas. (I.1.4).

Un medio isotrópico es un medio que presenta el mayor grado de simetría, porque sus características son las mismas en cualquier punto y en cualquier dirección. La importancia del estudio de este medio radica en que ciertos metales, aunque son policristalinos, es posible describirlos como un medio isotrópico. Después describimos la expansión térmica de un medio isotrópico (I.1.5 y I.1.6). Como el aluminio se comporta como medio isotrópico se eligió para hacer los experimentos, indicando sus principales características. (I.1.7).

Es posible deducir cómo se propaga una deformación usando las leyes de Newton y de Hooke. Las más sencillas corresponden a las ecuaciones de movimiento para un medio isotrópico porque sólo dependen de dos parámetros. También, para un medio extendido isotrópico, sólo hay dos tipos diferentes de ondas que se propagan en él, cada una con diferentes velocidades de propagación. Una onda plana puede propagarse por un medio isotrópico con una u otra velocidad (I.1.8, I.1.9 y I.1.10).

También se recuerda brevemente qué tipo de soluciones cumplen con la ecuación de onda (I.1.11). Otras ondas de naturaleza ligeramente diferente se pueden propagar en las fronteras de un medio extendido (I.1.12). De forma breve se presenta la propagación de ondas planas en un medio aelotrópico y se ilustra la gran cantidad de constantes que es necesario conocer para determinar las tres velocidades con que se pueden propagar (I.1.13). Dos métodos de generación de ondas se estudian a continuación (I.1.14).

Finalmente, los objetivos de la tesis (I.2), las hipótesis del trabajo y otras consideraciones se presentan (I.3).

I.1. Fundamentos

I.1.1. Materiales elásticos

Un cuerpo elástico es aquél que tiene la propiedad de regresar a su estado original después de que se remueven las fuerzas que producen la deformación. Esta propiedad se debe a las fuerzas moleculares que resisten al cambio en la forma del cuerpo. Durante la deformación las fuerzas exteriores hacen trabajo, y éste se convierte completa o parcialmente en energía potencial de deformación. Se dice que un cuerpo es perfectamente elástico si recobra su forma original completamente después de retirar las fuerzas exteriores o es parcialmente elástico si la deformación no desaparece completamente. En el caso de un cuerpo parcialmente elástico, parte del trabajo hecho por las fuerzas externas durante la deformación se disipa en forma de calor, que se desarrolla en el cuerpo durante la deformación no elástica. Los experimentos muestran que materiales como el metal, la madera y la piedra pueden considerarse como perfectamente elásticos dentro de ciertos límites, que dependen de las propiedades del material (Timoshenko [29]). Ejemplos de cuerpos elásticos son una liga o una pelota de tenis.

Sin embargo, los sólidos reales nunca son perfectamente elásticos, por lo que cuando una perturbación se propaga a través de ellos una parte de la energía mecánica se convierte a calor, y los diferentes mecanismos por los que esto tiene lugar se llaman colectivamente fricción interna. Se ve a continuación cuál es la relación entre los esfuerzos y la deformación en un medio elástico, sin tomar en cuenta dichos efectos disipativos.

I.1.2. Esfuerzos y deformaciones

El esfuerzo en un elemento de superficie de un cuerpo sólido tiene componentes tanto normales como tangenciales a él. Si se refiere el cuerpo a tres ejes perpendiculares y se consideran los esfuerzos que actúan en los tres planos normales a estos ejes, que pasan por el punto P, hay 9 componentes de esfuerzo. Éstos se denotan por σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} , σ_{xy} , σ_{xz} , σ_{yz} , etc. siendo la primera letra en el subíndice la que indica la dirección del esfuerzo y la segunda define el plano en el que está actuando. Considerando un paralelepípedo rectangular infinitesimal alrededor de P, con sus caras perpendiculares a los ejes (ver figura I.1) y tomando momentos (Landau y Lifshitz [16, pp. 5 y 6]) puede verse que $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$, por lo que solo quedan 6 componentes de esfuerzo. De estas 6 componentes, es posible deducir el esfuerzo que actúa sobre cualquier otro elemento de superficie que pase por P, por lo que definen completamente el esfuerzo en el punto (Feynman et al. [9, sección 31-10]).

El desplazamiento de cualquier punto P en el cuerpo puede expresarse paralelo a los ejes x , y , y z en componentes u_1 , u_2 y u_3 respectivamente. Si las coordenadas del punto en la posición no desplazada son (x, y, z) , se convierten a $(x + u_1, y + u_2, z + u_3)$ en la posición desplazada. Para definir la deformación en el punto debe considerarse cómo cambia su posición relativa a puntos adyacentes. Considérese un punto muy cerca de P, que en la posición no desplazada tiene coordenadas $(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z)$, y que el desplazamiento que tiene es $(u_1 + \delta u_1, u_2 + \delta u_2, u_3 + \delta u_3)$, y si δx , δy , δz son suficientemente pequeños, puede escribirse

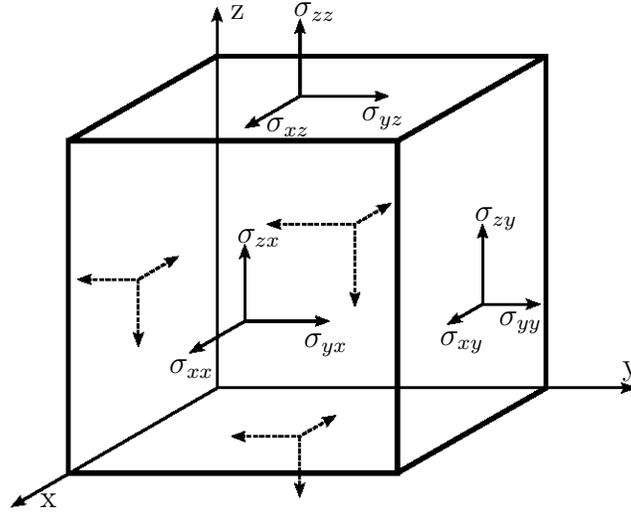


Figura I.1: Componentes de esfuerzo actuando en un paralelepípedo rectangular infinitesimal.

$$\begin{aligned}
 \delta u_1 &= \frac{\partial u_1}{\partial x} \delta x + \frac{\partial u_1}{\partial y} \delta y + \frac{\partial u_1}{\partial z} \delta z, \\
 \delta u_2 &= \frac{\partial u_2}{\partial x} \delta x + \frac{\partial u_2}{\partial y} \delta y + \frac{\partial u_2}{\partial z} \delta z, \\
 \delta u_3 &= \frac{\partial u_3}{\partial x} \delta x + \frac{\partial u_3}{\partial y} \delta y + \frac{\partial u_3}{\partial z} \delta z.
 \end{aligned} \tag{I.1}$$

Si x_1 , x_2 y x_3 representan a x , y y z , (I.1) puede escribirse simplemente como $\delta u_i = \partial u_i / \partial x_j \delta x_j$, usando la convención de suma sobre índices repetidos (ver apéndice E). Así, conociendo $\partial u_i / \partial x_j$, ($i, j=1, 2, 3$) en el punto, puede encontrarse el desplazamiento relativo de todos los puntos alrededor. Estas 9 cantidades por conveniencia se reagrupan y denotan como sigue:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u_1}{\partial x}, \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial u_2}{\partial y}, \quad \epsilon_{zz} = \frac{\partial u_3}{\partial z}, \tag{I.2a}$$

$$2\epsilon_{yz} = \frac{\partial u_3}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial z}, \quad 2\epsilon_{zx} = \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x}, \quad 2\epsilon_{xy} = \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}, \tag{I.2b}$$

$$2\bar{\omega}_x = \frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial z}, \quad 2\bar{\omega}_y = \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial x}, \quad 2\bar{\omega}_z = \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}. \tag{I.2c}$$

ϵ_{xx} , ϵ_{yy} , y ϵ_{zz} corresponden a expansiones y contracciones de elementos de línea infinitesimales que pasan por P y son paralelos a los ejes x , y y z , respectivamente. ϵ_{yz} , ϵ_{zx} , y ϵ_{xy} corresponden a componentes de deformación cortante en los planos que denotan sus subíndices. $\bar{\omega}_x$, $\bar{\omega}_y$ y $\bar{\omega}_z$ son las componentes de su rotación como un cuerpo rígido, y si $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, entonces

$$\frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u} = \bar{\omega}_x \mathbf{i} + \bar{\omega}_y \mathbf{j} + \bar{\omega}_z \mathbf{k}. \tag{I.3}$$

Puede notarse también que las expresiones (I.2a) y (I.2b) pueden escribirse en forma condensada como

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right). \tag{I.4}$$

El significado de estas cantidades para una deformación bidimensional se muestra en la figura I.2.

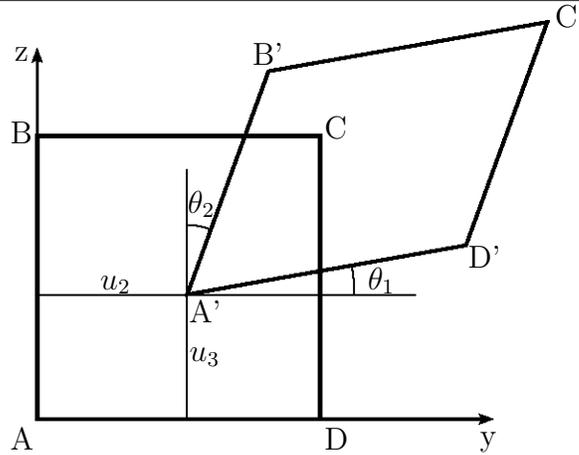


Figura I.2: Deformación cortante y rotación en dos dimensiones.

ABCD es un cuadrado infinitesimal que se ha desplazado y deformado en el rombo A'B'C'D', θ_1 y θ_2 son los ángulos que A'D' y A'B' hacen con los ejes y y z respectivamente. Como¹ $\tan \theta_1 = \frac{\partial u_3}{\partial y}$ y $\tan \theta_2 = \frac{\partial u_2}{\partial z}$ y para deformaciones suficientemente pequeñas los ángulos pueden aproximarse como sus tangentes, por lo que $2\epsilon_{yz} = \theta_1 + \theta_2$ y esto es por definición la deformación cortante. $\theta_1 - \theta_2 = 2\bar{\omega}_x$ es dos veces el ángulo que AC rota, como puede verse de la figura (θ_1 hace que suba el vértice C', y como se mantiene la forma romboide, lo que gira la diagonal A'C' es en realidad la mitad; θ_2 hace que baje el vértice C' y por lo ya dicho, lo que gira AC es en realidad la mitad). Las seis cantidades en I.2a y I.2b se llaman componentes de deformación. Cuando $2\bar{\omega}_x = 2\bar{\omega}_y = 2\bar{\omega}_z = 0$ la deformación es irrotacional y se describe como una deformación pura.

Se encuentra experimentalmente que, para la mayor parte de los sólidos, las deformaciones observadas son proporcionales a la carga aplicada, siempre que no se exceda un cierto valor que se conoce como el límite elástico. Así, matemáticamente se dice que cada una de las 6 componentes del esfuerzo es, en cualquier punto, una función lineal de las 6 componentes de deformación. Esta forma generalizada de la ley de Hooke puede escribirse con 6 ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= c_{11}\epsilon_{xx} + c_{12}\epsilon_{yy} + c_{13}\epsilon_{zz} + c_{14}\epsilon_{yz} + c_{15}\epsilon_{zx} + c_{16}\epsilon_{xy}, \\
 \sigma_{yy} &= c_{21}\epsilon_{xx} + c_{22}\epsilon_{yy} + c_{23}\epsilon_{zz} + c_{24}\epsilon_{yz} + c_{25}\epsilon_{zx} + c_{26}\epsilon_{xy}, \\
 \sigma_{zz} &= c_{31}\epsilon_{xx} + c_{32}\epsilon_{yy} + c_{33}\epsilon_{zz} + c_{34}\epsilon_{yz} + c_{35}\epsilon_{zx} + c_{36}\epsilon_{xy}, \\
 \sigma_{yz} &= c_{41}\epsilon_{xx} + c_{42}\epsilon_{yy} + c_{43}\epsilon_{zz} + c_{44}\epsilon_{yz} + c_{45}\epsilon_{zx} + c_{46}\epsilon_{xy}, \\
 \sigma_{zx} &= c_{51}\epsilon_{xx} + c_{52}\epsilon_{yy} + c_{53}\epsilon_{zz} + c_{54}\epsilon_{yz} + c_{55}\epsilon_{zx} + c_{56}\epsilon_{xy}, \\
 \sigma_{xy} &= c_{61}\epsilon_{xx} + c_{62}\epsilon_{yy} + c_{63}\epsilon_{zz} + c_{64}\epsilon_{yz} + c_{65}\epsilon_{zx} + c_{66}\epsilon_{xy}.
 \end{aligned} \tag{I.5}$$

Las ecuaciones (I.5) pueden escribirse en forma condensada como:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl}. \tag{I.6}$$

C_{ijkl} es el tensor de elasticidad, que como i, j, k, l toman los valores del 1 al 3, tiene $3^4 = 81$ términos, llamadas las constantes elásticas del material. Se toma la convención de que el subíndice 1 representa

¹Si se considera $u_3(y)$ como la función que muestra cómo cambia el lado AD a A'D', se observa que es una recta que tiene como pendiente $u'_3(y) = \tan \theta_1 \Rightarrow \frac{\partial u_3}{\partial y} = \tan \theta_1$. Análogamente, si $u_2(z)$ es la función que muestra cómo cambia el lado AB a A'B', se tiene $u'_2(z) = \tan \theta_2 \Rightarrow \frac{\partial u_2}{\partial z} = \tan \theta_2$.

a x , el subíndice 2 a y , y el subíndice 3 a z . Como C_{ijkl} relaciona los esfuerzos con las deformaciones, y tanto σ_{ij} como ϵ_{kl} son tensores simétricos, es decir, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ y $\epsilon_{kl} = \epsilon_{lk}$, se tienen, en realidad, 36 términos, los de la ecuación (I.5). Además, Love [18, p. 99] muestra que la condición para que la energía elástica sea una función univaluada de la deformación es que se cumpla que los coeficientes cumplan que $c_{rs} = c_{sr}$. Esto reduce el número de constantes a 21. En un material completamente anisotrópico, sin ninguna simetría en particular, (por ejemplo un cristal triclínico) los valores de 21 diferentes cantidades deben conocerse para definir las propiedades elásticas del medio. Cuando el material tiene ejes o planos de simetría el número de constantes elásticas independientes se reduce. Se muestra en la tabla I.1 el número de constantes elásticas independientes para distintos cristales.

Tabla I.1: *Número de constantes independientes para describir las propiedades elásticas de los distintos sistemas de cristales y un material isotrópico.*

| Tipo de cristal: | Número de constantes independientes |
|-------------------------|--------------------------------------------|
| Triclínico | 21 |
| Monoclínico | 13 |
| Ortorrómbico | 9 |
| Tetragonal | 7 |
| Tetragonal* | 6 |
| Trigonal* | 7 |
| Trigonal | 6 |
| Hexagonal | 5 |
| Cúbico | 3 |
| Isotrópico | 2 |

*Dependiendo de la clase de cristal.

A continuación se presentan las diferencias entre los medios homogéneo, inhomogéneo, isotrópico, anisotrópico y aelotrópico².

I.1.3. Diferencia entre medio homogéneo, inhomogéneo, isotrópico, anisotrópico y aelotrópico

Un medio homogéneo es el que está compuesto por una o más sustancias que da como resultado una sustancia de estructura y composición uniforme, que por lo tanto sus propiedades no varían con la posición. El medio inhomogéneo es un medio compuesto por una o más sustancias, pero que la sustancia no tiene la misma composición o estructura en alguna otra parte importante de él. Puede existir un cuerpo que tenga regiones homogéneas e inhomogéneas, y por ello se considere inhomogéneo como un todo.

La isotropía o anisotropía de un cuerpo depende de su composición, pero se hace un énfasis especial en sus propiedades. Por ejemplo, un medio isotrópico presenta las mismas propiedades en cualquier dirección. En un medio anisotrópico no.

Finalmente, conviene notar que un medio aelotrópico es un medio anisotrópico sin ninguna simetría.

²Aelotropic está traducido como aelotrópico en el Diccionario técnico: inglés-español, español-inglés de Federico Beigbeder Atienza

I.1.4. La estructura cristalina de los metales

La mayoría de los metales cristaliza en una de las siguientes tres estructuras: red cúbica centrada en el cuerpo (b.c.c. por las iniciales de body-centered cubic) en la que cada átomo está rodeado de 8 vecinos cercanos, la red cúbica centrada en las caras (f.c.c. por las iniciales face-centered cubic) en la que un átomo dado está rodeado de 12 vecinos cercanos, y la red hexagonal compacta (h.c.p. por las iniciales de hexagonal close packed), también con un número de 12 vecinos cercanos (Dekker [8]).

Algunos metales cristalizan en más de un tipo de estructura, siendo que cada estructura es estable en un determinado intervalo de temperaturas. La razón para que un metal particular cristalice en una estructura en especial, debe buscarse en el hecho de que la energía libre E-TS del sistema (E es la energía interna, T la temperatura, S la entropía) es más baja que para cualquier otra estructura. Lo mismo puede decirse con referencia a los metales que tienen distintas estructuras en diferentes regiones de temperatura (alotropía). Este fenómeno se exhibe especialmente por los metales con valencias de 3 y 4 y por los metales de transición. La termodinámica especifica únicamente la condición de equilibrio pero no da ninguna información de la velocidad de reacción o de los procesos involucrados para establecer el equilibrio (Dekker [8]).

En un metal la vinculación entre átomos no es entre átomos adyacentes, sino es una propiedad de todo el cristal. Los electrones de valencia no se comparten a un átomo o a un par de átomos, sino que se comparten a todo el cristal. Cada átomo contribuye con un electrón al ensamble de electrones que se encuentra entre los iones positivos de la red. El grupo de electrones mantiene los iones juntos como un pegamento.

Así en los metales, como no hay ninguna clase de enlace en una dirección particular, no hay una fuerte direccionalidad en su amarre. Sin embargo, son todavía cristalinos porque la energía total es menor cuando los iones atómicos se acomodan en una forma definida (Feynman et al. [9]).

A pesar de que el deslizamiento de capas en un metal puede darse de forma muy fácil, también es posible encontrar que sea un proceso difícil de realizar. En general depende de los procesos o manejos previos que se hayan llevado a cabo en el metal. La razón de fondo es que en el metal pueden haber diferentes tipos de dislocaciones. Las dislocaciones pueden moverse con relativa facilidad a lo largo del cristal, siempre y cuando el resto del cristal tenga una red perfecta. Pero pueden atorarse si encuentran otro tipo de imperfección en el cristal, que por ejemplo requiera mucha energía para pasarse. Así, el tratamiento previo de un metal puede introducir nuevas imperfecciones en su red y con ello volverlo muy duro.

Así, casi todos los metales comunes son policristales, entendiendo como policristal al material sólido conformado por muchos cristales o granos de cristales de tamaño y orientación variable. La variación de orientación puede ser aleatoria o dirigida, posiblemente por el crecimiento y condiciones de procesamiento.

Los cuerpos policristalinos cuyas componentes son suficientemente pequeños pueden tratarse como cuerpos isotrópicos, siempre y cuando se consideren las deformaciones pequeñas en regiones grandes comparadas con las dimensiones de los granos de cristal. Como cualquier cuerpo isotrópico, un policristal tiene solo dos módulos de elasticidad. Se puede pensar que éstos pueden obtenerse a partir de los módulos de los granos individuales del cristal simplemente promediándolos. Si se considera la deformación de un policristal como el resultado de la deformación de sus granos de cristal que lo componen, en principio es necesario resolver las ecuaciones de equilibrio para cada grano de cristal, tomando en cuenta las condiciones de frontera apropiadas en sus superficies de separación. Con esto se ve que la relación entre

las propiedades elásticas de toda la muestra y aquellas de sus granos de cristal componentes depende de la forma de estos últimos, así como de la correlación de las orientaciones entre ellos. Por lo tanto, no hay una relación general entre el módulo de elasticidad de un policristal y los módulos de elasticidad de un solo cristal de la misma substancia (Landau y Lifshitz [16, p. 40]).

Los módulos elásticos de un policristal isotrópico pueden calcularse a partir de los módulos de un solo cristal *solo* cuando las propiedades elásticas del cristal son casi isotrópicas. Para un cristal cúbico, se entiende que es casi isotrópico cuando la cantidad $C_{1111} - C_{2222} - 2C_{2323}$ es cercana a cero³. En una primera aproximación, para el módulo de elasticidad del policristal puede usarse la parte isotrópica del módulo de un cristal simple. En la siguiente aproximación aparecen términos que son cuadráticos en la parte anisotrópica de estos módulos que es pequeña (Landau y Lifshitz [16, pp. 40-42]).

Puede definirse (Pollard [24, p. 14]) un factor de anisotropía útil para discutir las propiedades de los materiales:

$$A = \frac{2C_{2323}}{C_{1111} - C_{2222}}. \quad (I.7)$$

Si $A=1$, entonces el material es elásticamente isotrópico. Puede notarse que si $A \approx 1$, entonces $C_{1111} - C_{2222} \approx 2C_{2323}$, que concuerda con pedir que $C_{1111} - C_{2222} - 2C_{2323}$ sea una cantidad pequeña.

I.1.5. El medio isotrópico y sus constantes

Para describir las propiedades elásticas de un medio isotrópico bastan tan solo 2 constantes. Esto puede verse de la siguiente manera. El tensor C_{ijkl} en la ley de Hooke para un medio isotrópico debe ser invariante ante cualquier orientación de los ejes. Este tensor a su vez puede expresarse en términos de los tres tensores independientes de cuarto orden: $\delta_{ij}\delta_{kl}$, $\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}$, $\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}$. Quedando

$$C_{ijkl} = \lambda_1\delta_{ij}\delta_{kl} + \lambda_2(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \lambda_3(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) = \lambda_1\delta_{ij}\delta_{kl} + (\lambda_2 + \lambda_3)\delta_{ik}\delta_{jl} + (\lambda_2 - \lambda_3)\delta_{il}\delta_{jk}. \quad (I.8)$$

Haciendo $\lambda = \lambda_1$, $\mu = \lambda_2 + \lambda_3$ y $\nu = \lambda_2 - \lambda_3$, se tiene $C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu\delta_{ik}\delta_{jl} + \nu\delta_{il}\delta_{jk}$. Además, como $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, se tiene

$$\begin{aligned} C_{ijkl} &= C_{jikl} \\ \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu\delta_{ik}\delta_{jl} + \nu\delta_{il}\delta_{jk} &= \lambda\delta_{ji}\delta_{kl} + \mu\delta_{jk}\delta_{il} + \nu\delta_{jl}\delta_{ik} \\ \mu\delta_{ik}\delta_{jl} + \nu\delta_{il}\delta_{jk} &= \mu\delta_{jk}\delta_{il} + \nu\delta_{jl}\delta_{ik} \\ \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{jk}\delta_{il}) &= \nu(\delta_{jl}\delta_{ik} - \delta_{il}\delta_{jk}) \\ \mu &= \nu \end{aligned}$$

Puede ahora escribirse $C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$. Usando ahora la ley de Hooke (I.6), se tiene

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl} &= [\lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})]\epsilon_{kl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl}\epsilon_{kl} + \mu\delta_{ik}\delta_{jl}\epsilon_{kl} + \mu\delta_{il}\delta_{jk}\epsilon_{kl} \\ &= \lambda\delta_{ij}\epsilon_{kk} + \mu\epsilon_{ij} + \mu\epsilon_{ji} = \lambda\delta_{ij}\epsilon_{kk} + 2\mu\epsilon_{ij}, \end{aligned} \quad (I.9)$$

ya que $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$. Como $\epsilon_{kk} = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} = \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = \Theta$, la última relación puede escribirse como

$$\sigma_{ij} = \lambda\Theta\delta_{ij} + 2\mu\epsilon_{ij}, \quad (I.10)$$

³En la referencia citada al final del párrafo no se menciona qué tan pequeña tiene que ser esta cantidad.

donde λ y μ son las conocidas constantes de Lamé que determinan completamente el comportamiento elástico del sólido isotrópico. Se observa también que Θ , la dilatación, representa el cambio en volumen de un cubo unitario.

Normalmente se usan 4 constantes que por supuesto están relacionadas entre sí y con las constantes de Lamé:

El módulo de Young E : Se define como la razón del esfuerzo aplicado y la extensión fraccionaria cuando un espécimen cilíndrico o prismático se somete a un esfuerzo uniforme sobre sus extremos planos y sus superficies laterales están libres de constricciones. Si el eje x se toma paralelo al eje del cilindro, σ_{xx} es el esfuerzo aplicado y las otras 5 componentes son cero. Las primeras tres ecuaciones son

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= (\lambda + 2\mu)\epsilon_{xx} + \lambda(\epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}), \\ 0 &= (\lambda + 2\mu)\epsilon_{xx} + \lambda(\epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}), \\ 0 &= (\lambda + 2\mu)\epsilon_{xx} + \lambda(\epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}),\end{aligned}$$

y resolviendo para ϵ_{xx} , ϵ_{yy} y ϵ_{zz} se tiene

$$\epsilon_{xx} = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)}\sigma_{xx} \quad y \quad \epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}\sigma_{xx}. \quad (\text{I.11})$$

En este caso $E = \sigma_{xx}/\epsilon_{xx}$ por lo que

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}. \quad (\text{I.12})$$

La razón de Poisson ν : Se define como la razón entre la contracción lateral y la extensión longitudinal del espécimen, con las superficies laterales de nuevo libres. Con el arreglo anterior

$$\nu = -\frac{\epsilon_{yy}}{\epsilon_{xx}} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}. \quad (\text{I.13})$$

El módulo de compresibilidad K : Se define como la razón entre la presión aplicada y el cambio fraccionario en volumen cuando el sólido está sujeto a compresión hidrostática uniforme. Bajo estas condiciones

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -P \quad y \quad \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = \sigma_{xy} = 0, \quad (\text{I.14})$$

y de (I.10), $\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = -P/(3\lambda + 2\mu)$.

El cambio fraccionario en volumen está dado por

$$-\Theta = -(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}),$$

por lo que

$$K = \frac{P}{-\Theta} = \lambda + \frac{2\mu}{3}. \quad (\text{I.15})$$

El módulo de compresibilidad también puede escribirse en términos del módulo de Young y la razón de Poisson.

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}. \quad (\text{I.16})$$

Esta forma alternativa permite ver que ν tiene que ser menor que $1/2$, porque de otra forma el módulo de compresibilidad es negativo, y con esto, el material se expande bajo el incremento de presión.

Finalmente, **el módulo cortante o módulo de rigidez** es μ y se define como la razón entre el esfuerzo cortante y la deformación cortante dadas por $\sigma_{yz} = \mu\epsilon_{yz}$, $\sigma_{zx} = \mu\epsilon_{zx}$, $\sigma_{xy} = \mu\epsilon_{xy}$, es decir, corresponde directamente a la constante de Lamé μ . Éste puede expresarse en términos del módulo de Young y la razón de Poisson como

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (\text{I.17})$$

El módulo cortante tiene que ser positivo, por lo que ν tiene que ser mayor que -1 . Así, ν está entre -1 y $1/2$; sin embargo, en la práctica siempre es mayor a cero (Feynman et al. [9, p. 38-5]).

I.1.6. Expansión térmica

La expansión térmica en cuerpos isotrópicos es la misma en cualquier dirección, por lo que el tensor de deformación en expansión térmica libre es $\epsilon_{ik} = \alpha(T - T_0)\delta_{ik}$, donde α es el coeficiente de expansión lineal térmica (Landau y Lifshitz [16]).

Una diferencia de temperaturas homogénea de 200° y un coeficiente de 0.3×10^{-4} , en una varilla de aluminio (con el eje en la dirección x) de un metro da un alargamiento de $\Delta L = L\epsilon_{xx} = (100 \text{ cm})0.3 \times 10^{-4}(200) = 2(0.3) \approx 0.6 \text{ cm}$.

En el caso general se tiene que integrar en toda la longitud de la varilla

$$\Delta L = \int_0^L \epsilon_{xx} dx = \alpha \int_0^L (T(x) - T_0) dx. \quad (\text{I.18})$$

I.1.7. Características del aluminio

El aluminio tiene aproximadamente un tercio de la densidad del hierro, y algunos de sus aleaciones, como el duraluminio, son tan fuertes como el acero dulce. El aluminio se usa también, en lugar del cobre, como conductor de electricidad; su conductividad eléctrica $(3.65 \times 10^7 (\Omega \cdot \text{m})^{-1})$ (Kittel [14]) es alrededor del 80 % de la del cobre. Su resistividad es de $2.74 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ (Kittel [14]). Tiene también una concentración de electrones de $18.06 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$.

El metal es reactivo y cuando se calienta mucho se quema rápido en aire u oxígeno. El polvo de aluminio forma una mezcla explosiva con el aire. Sin embargo, bajo condiciones normales, el aluminio rápidamente adquiere una capa delgada y resistente de óxido de aluminio que lo protege de una corrosión ulterior. La tabla I.2 presenta varias propiedades del aluminio (Al) (tomadas de Pauling [23], Kittel [14], Lide, ed. [17]).

Tabla I.2: *Propiedades físicas del aluminio.*

| | Número atómico | Peso atómico | Densidad (g/cm^3) | Punto de fusión | Radio atómico | Radio iónico | Concentración en 10^{28} m^{-3} | Coeficiente lineal de expansión térmica (α) |
|----|----------------|--------------|------------------------------|---------------------|---------------|------------------|-------------------------------------------|------------------------------------------------------|
| Al | 13 | 26.9815 | 2.71 | 660°C | 1.43 | 0.50\AA | 6.02 | $23.1 \times 10^{-6}/^\circ\text{K}$ |

El aluminio cristaliza en la estructura cúbica centrada en las caras, en la que un átomo tiene doce vecinos cercanos. El parámetro “a” de la red cristalina a temperatura ambiente es de 4.05\AA , (Kittel [14]). La distancia más cercana (a 20°C) del átomo vecino más cercano es de 2.862\AA , (Dekker [8]).

También, según Dekker [8], $C_{1111} = 1.08$, $C_{1122} = 0.62$ y $C_{2323} = 0.28$ en 10^{11} N/m². En Kittel [14], a 0 °K, $C_{1111} = 1.143$, $C_{1122} = 0.619$ y $C_{2323} = 0.316$ en 10^{11} N/m² para Al con una densidad de 2.733 g/cm³; a 300 °K (26.85 °C), $C_{1111} = 1.068$, $C_{1122} = 0.607$ y $C_{2323} = 0.282$ en 10^{11} N/m² para Al con una densidad de 2.733 g/cm³. Con estas componentes del módulo de elasticidad del aluminio puede calcularse su módulo de anisotropía definido por la ecuación (I.7). Para los valores citados por la referencia [8], se tiene un valor de $A = 1.217$; para los valores citados por la referencia [14], a 0 °K, $A = 1.206$, y a a 300 °K, $A = 1.223$. Pollard [24] encuentra que $A = 1.2$. Con otros cristales cúbicos el grado de anisotropía está dado por los siguientes valores de A: Hierro 2.4; cobre 3.2; plomo 4.0; NaCl 0.7; KCl 0.36; LiF 1.6. Puede verse que el grado de anisotropía del aluminio no es muy grande pues el factor A es bastante cercano a 1, al menos en comparación con los otros cristales.

El módulo de compresibilidad (K) del aluminio es de 0.722×10^{11} N/m². Tiene una compresibilidad de 1.385×10^{-11} m²/N.

En la tabla I.3 se presentan las velocidades de propagación de una onda en un medio extendido de aluminio, a 20 °C.

Tabla I.3: Velocidades de propagación en aluminio de varios tipos a 20 °C [1].

| Velocidad de propagación en: | Onda longitudinal [m/s] | Onda transversal [m/s] |
|------------------------------|-------------------------|------------------------|
| Al | 6.32×10^3 | 3.13×10^3 |
| Al (1100 (2S)) | 6.31×10^3 | 3.08×10^3 |
| Al (1100-0 (2S0)) | 6.35×10^3 | 3.10×10^3 |
| Al (2014 (14S)) | 6.37×10^3 | 3.07×10^3 |
| Al (2024-T4 (24ST)) | 6.37×10^3 | 3.16×10^3 |
| Al (2117-T4 (17ST)) | 6.50×10^3 | 3.12×10^3 |

Adicionalmente, en el CRC Handbook of Chemistry and Physics, 90th Edition [17, Sec. 14-39], pueden encontrarse velocidades de propagación para ondas longitudinales (v_l) y ondas de corte (v_s) en un medio de extensión infinita (o de extensión finita, si todas las dimensiones son mucho más grandes que una longitud de onda). También para una varilla cilíndrica con diámetro mucho menor que una longitud de onda, la velocidad de ondas de extensión v_{ext} (“extensional waves”). (Las ondas de torsión en la varilla se propagan a la misma velocidad que las ondas cortantes en un medio infinito). Se muestran en la tabla I.4 estas velocidades de propagación para dos tipos de aluminio.

Tabla I.4: Velocidades de propagación en otros tipos de aluminio [17].

| Tipo de aluminio | v_l [m/s] | v_s [m/s] | v_{ext} [m/s] |
|-------------------|-------------|-------------|------------------------|
| Aluminio laminado | 6420 | 3040 | 5000 |
| Duraluminio 17S | 6320 | 3130 | 5150 |

I.1.8. Ecuaciones de movimiento en un medio elástico

Considérese la variación del esfuerzo a lo largo de un pequeño paralelepípedo con sus lados paralelos a un conjunto de ejes rectangulares. Las componentes del esfuerzo varían a lo largo de las caras. Para obtener una aproximación de la fuerza actuando en cada cara se toma el valor del esfuerzo en el centro de la misma y se multiplica su área.

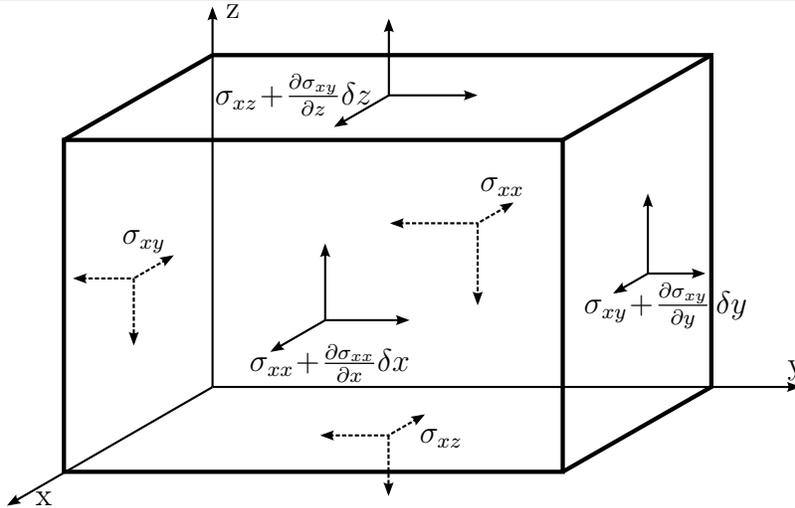


Figura I.3: Esfuerzos que actúan en un pequeño paralelepípedo rectangular.

En la figura I.3 puede verse la componente paralela al eje x, de cada una de las 6 fuerzas que actúan. La fuerza resultante en la dirección x es

$$\left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \delta x\right) \delta y \delta z - \sigma_{xx} \delta y \delta z + \left(\sigma_{xy} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \delta y\right) \delta x \delta z - \sigma_{xy} \delta x \delta z + \left(\sigma_{xz} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \delta z\right) \delta x \delta y - \sigma_{xz} \delta x \delta y, \quad (\text{I.19})$$

es decir,

$$\left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}\right) \delta x \delta y \delta z. \quad (\text{I.20})$$

Por la segunda ley de Newton, despreciando la gravedad y otras fuerzas de cuerpo, con ρ la densidad del elemento y u_1 el desplazamiento en la dirección x, se tiene que

$$(\rho \delta x \delta y \delta z) \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}\right) \delta x \delta y \delta z, \quad (\text{I.21})$$

lo que se reduce a

$$\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}. \quad (\text{I.22})$$

De forma similar

$$\rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} \quad (\text{I.23})$$

y

$$\rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}. \quad (\text{I.24})$$

Todas éstas pueden escribirse como

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}. \quad (\text{I.25})$$

Estas ecuaciones de movimiento son válidas para cualquier comportamiento entre esfuerzo y deformación del medio. Para resolverlas se tienen que usar las relaciones elásticas del medio. En el caso de un medio isotrópico éstas son las relaciones en la ecuación (I.10) y usándolas en la ecuación (I.25),

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial(\lambda\Theta\delta_{ij} + 2\mu\epsilon_{ij})}{\partial x_j} = \lambda \frac{\partial(\Theta\delta_{ij})}{\partial x_j} + 2\mu \frac{\partial\epsilon_{ij}}{\partial x_j}, \quad (\text{I.26})$$

usando la regla de la derivada del producto en el primer término del tercer miembro y la expresión para ϵ_{ij} en la ecuación

$$(I.4) \quad \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \lambda \left(\delta_{ij} \frac{\partial\Theta}{\partial x_j} + \Theta \frac{\partial\delta_{ij}}{\partial x_j} \right) + \frac{2}{2}\mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right). \quad (\text{I.27})$$

Como

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= \frac{\partial x_i}{\partial x_j}, \\ \delta_{ij} \frac{\partial\Theta}{\partial x_j} &= \frac{\partial\Theta}{\partial x_i}, \\ \frac{\partial\delta_{ij}}{\partial x_j} &= 0, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial\Theta}{\partial x_i},$$

se tiene

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \lambda \frac{\partial\Theta}{\partial x_i} + \mu \left(\frac{\partial\Theta}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \right) = (\lambda + \mu) \frac{\partial\Theta}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}, \quad (\text{I.28})$$

y así

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial\Theta}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}, \quad (\text{I.29})$$

o en su forma vectorial, tomando en cuenta que $\Theta = \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = \nabla \cdot \mathbf{u}$, tiene la forma

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (\text{I.30})$$

Éstas son las ecuaciones de movimiento de un sólido elástico isotrópico en el que no hay fuerzas de cuerpo presentes.

I.1.9. Tipos de onda en un medio elástico isotrópico

Derivando ambos miembros de la ecuación (I.29) con respecto a x_i :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left((\lambda + \mu) \frac{\partial\Theta}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \right) \\ \rho \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \right) &= (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_i \partial x_i} + \mu \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) \\ \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) &= (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_i \partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_j \partial x_j} \\ \rho \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_i \partial x_i} \end{aligned} \quad (\text{I.31})$$

donde se supuso que ρ no depende de x_i , y es válida la conmutabilidad del orden de las derivadas parciales porque son variables independientes. La última relación a la que se llega en (I.31) es la ecuación de onda y muestra que la dilatación Θ se propaga a través del medio con velocidad $[(\lambda + 2\mu)/\rho]^{1/2}$.

Si ahora se deriva (I.29) con respecto de x_k ($k \neq i$), y luego se multiplica por $\delta_{il}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{kl}$ con ($l \neq m$)

$$\begin{aligned} \left(\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right) (\delta_{il}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{kl}) &= \left((\lambda + \mu) \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_k \partial x_i} + \mu \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right) (\delta_{il}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{kl}) \\ \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_m} - \frac{\partial u_m}{\partial x_l}\right) &= (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_m \partial x_l} - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_l \partial x_m}\right) + \mu \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_m} - \frac{\partial u_m}{\partial x_l}\right), \end{aligned} \quad (\text{I.32})$$

y como

$$2\bar{\omega}_i = \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_m} - \frac{\partial u_m}{\partial x_l}\right) \quad i, l, m \text{ en permutación cíclica de } 123, \quad (\text{I.33})$$

(I.32) toma la forma

$$\rho \frac{\partial^2 \bar{\omega}_i}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 \bar{\omega}_i}{\partial x_j \partial x_j}. \quad (\text{I.34})$$

lo que muestra que la rotación $\bar{\omega}_i$ alrededor del eje i se propaga con velocidad $(\mu/\rho)^{1/2}$.

Si la dilatación $\Theta = 0$, la ecuación (I.29) se convierte a

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}. \quad (\text{I.35})$$

En notación vectorial toma la forma

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mu \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (\text{I.36})$$

La condición para un movimiento libre de rotación $\bar{\omega}_i = 0$, se satisface si el desplazamiento u_i es un gradiente:

$$u_i = \frac{\partial \phi}{\partial x_i}, \quad (\text{I.37})$$

es decir, ϕ es una función potencial. Entonces $\Theta = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_j}$ y $\frac{\partial \Theta}{\partial x_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}$.

Sustituyendo en la ecuación (I.29)

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} &= (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \\ &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}, \end{aligned} \quad (\text{I.38})$$

que en notación vectorial toma la forma

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (\text{I.39})$$

Se ve así que en un medio sólido elástico las ondas se propagan con dos diferentes velocidades. Las ondas sin rotación viajan con velocidad $[(\lambda + 2\mu)/\rho]^{1/2} = c_1$, mientras que las ondas sin dilatación viajan con velocidad $[\mu/\rho]^{1/2} = c_2$. El primer tipo de ondas se llaman ondas irrotacionales, dilatacionales, de compresión, primarias u ondas P. Éstas son ondas longitudinales como se ve en la siguiente sección. El segundo tipo de ondas se llaman ondas equivolumétricas (isócoras), de distorsión, rotacionales, solenoidales, cortantes, secundarias u ondas S.

I.1.10. Propagación de una onda plana en un medio isotrópico

Se muestra a continuación que cualquier onda plana que se propaga en un medio isotrópico elástico viaja con una u otra de las velocidades que se mencionaron en la sección anterior. Considérese sin pérdida de generalidad una onda plana que se propaga paralela al eje x , con una velocidad c . Con esto, los desplazamientos son función de un solo parámetro $\psi = x - ct$, lo que anula las derivadas de y y de z . Por la regla de la cadena se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial x} &= \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{du_i}{d\psi}, \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{du_i}{d\psi} \right) = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{d}{d\psi} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{du_i}{d\psi} \right) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 \frac{d^2 u_i}{d\psi^2} = (1)^2 \frac{d^2 u_i}{d\psi^2} = \frac{d^2 u_i}{d\psi^2}. \end{aligned}$$

Por cumplir con la ecuación de onda y de lo anterior, se tiene también

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = c^2 \frac{d^2 u_i}{d\psi^2} = c^2 u_i'' \quad (\text{I.40})$$

Sustituyendo lo anterior en la ecuación (I.29), y tomando en cuenta que $\Theta = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$

$$\rho c^2 u_i'' = (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) + \mu u_i'' \quad (\text{I.41})$$

De esta última se obtienen las tres ecuaciones

$$\rho c^2 u_1'' = (\lambda + 2\mu) u_1'' \quad (\text{I.42})$$

$$\rho c^2 u_2'' = \mu u_2'' \quad (\text{I.43})$$

$$\rho c^2 u_3'' = \mu u_3'' \quad (\text{I.44})$$

Las ecuaciones (I.42), (I.43), y (I.44) solo pueden satisfacerse de las siguientes dos maneras. Si $c^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$ y tanto u_2 como u_3 son cero, se tienen ondas longitudinales, pues el movimiento es a lo largo de la dirección de propagación. Y la otra manera es que $c^2 = \mu/\rho$ y u_1 sea cero, que representa una onda transversal, pues el movimiento es transversal y paralelo al frente de onda.

La velocidad de propagación de las ondas dilatacionales puede escribirse como $c^2 = (K + \frac{4}{3}\mu)/\rho$, y no puede escribirse únicamente con el módulo de compresibilidad K . Se espera entonces que en la propagación de la onda dilatacional no solo se tenga una simple compresión, sino una combinación de compresión y esfuerzos cortantes.

I.1.11. Integración de la ecuación de onda

La ecuación de onda tiene la forma

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \alpha \quad (\text{I.45})$$

Si una deformación es solo función de la coordenada x_i , la ecuación anterior toma la forma

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_i^2} \quad (\text{I.46})$$

La solución general de ésta es

$$\alpha = f(x_i - ct) + F(x_i + ct), \quad (\text{I.47})$$

donde f y F son funciones arbitrarias que dependen de las condiciones iniciales, f corresponde a una onda plana propagándose en la dirección positiva del eje x_i mientras que F a una onda plana propagándose en la dirección negativa.

Si se produce una perturbación en un punto, que se puede ubicar en el origen, la deformación depende solo del valor de r , el tamaño del radio vector, que cumple $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Expresando el laplaciano en la ecuación (I.45) en coordenadas esféricas y tomando en cuenta que no puede haber dependencia en la dirección de propagación de la deformación, se tiene la ecuación

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \alpha}{\partial r} \right) \quad \text{ó} \quad \frac{\partial^2 (r\alpha)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 (r\alpha)}{\partial r^2}. \quad (\text{I.48})$$

Ésta tiene la misma forma que la ecuación (I.46) y tiene como solución

$$r\alpha = f(r - ct) + F(r + ct). \quad (\text{I.49})$$

En este caso f/r representa una onda esférica que diverge del origen mientras que F/r , una que converge.

I.1.12. Otros tipos de ondas

En la interfaz entre dos medios pueden propagarse otros tipos de ondas. Por ejemplo, en la frontera libre de un sólido pueden propagarse las ondas de Rayleigh. Otros tipos de ondas incluyen las ondas de Love (ondas bidimensionales transversales que involucran una componente transversal a lo largo de la superficie con desplazamiento de partículas perpendicular a la dirección de propagación), ondas de Stoneley (ondas en la interfaz entre dos sólidos, siendo que el movimiento de la onda es del tipo de Rayleigh a cada lado), y ondas de Lamb que se propagan en una placa (Kolsky [15, pp. 23]).

Suponiendo que se tiene un sólido isotrópico semi infinito cuya frontera es el plano xy , z es positivo para el interior de él, y la onda plana se propaga en la dirección x , para las ondas de Rayleigh se encuentra lo siguiente (ver Kolsky [15, pp. 16-23]).

Los desplazamientos en las direcciones x y z están dados por

$$\begin{aligned} u_1 &= Af[e^{-qz} - 2qs(s^2 + f^2)^{-1}e^{-sz}] \sin(pt - fx), \\ u_3 &= Aq[e^{-qz} - 2f^2(s^2 + f^2)^{-1}e^{-sz}] \cos(pt - fx), \end{aligned} \quad (\text{I.50})$$

donde $p/2\pi$ es la frecuencia, $2\pi/f$ es su longitud de onda, A es un factor de amplitud, y s y q son dos factores de atenuación dados por

$$\begin{aligned} \frac{q^2}{f^2} &= 1 - \alpha_1^2 \kappa_1^2, \\ \frac{s^2}{f^2} &= 1 - \kappa_1^2, \end{aligned} \quad (\text{I.51})$$

donde $\alpha_1^2 = (1 - 2\nu)/(2 - 2\nu)$, y κ_1 se encuentra resolviendo la ecuación

$$\kappa_1^6 - 8\kappa_1^4 + (24 - 16\alpha_1)\kappa_1^2 + (16\alpha_1^2 - 16) = 0. \quad (\text{I.52})$$

κ_1 también da la razón entre la velocidad de propagación de las ondas superficiales y la velocidad de propagación de las ondas de distorsión. Así, como κ_1 depende de α_1^2 que a su vez depende de las

constantes elásticas, κ_1 depende de las constantes elásticas y es independiente de la frecuencia, y con ello la velocidad de propagación de las ondas superficiales solo depende de las constantes elásticas del medio.

I.1.13. Propagación de ondas en un medio aeotrópico

Para este caso, considérese una onda plana que se propaga con velocidad c a través de un medio elástico aeotrópico, tal que la normal a la onda tiene cosenos directores l , m y n . Los desplazamientos u_i son funciones de un solo parámetro ψ , donde

$$\psi = lx + my + nz - ct,$$

por lo que

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u_1}{\partial x} = l \frac{du_1}{d\psi}, \\ \epsilon_{yy} &= m \frac{du_2}{d\psi}, \quad \epsilon_{zz} = m \frac{du_3}{d\psi}, \quad \epsilon_{yz} = m \frac{du_3}{d\psi} + n \frac{du_2}{d\psi}, \\ \epsilon_{zx} &= n \frac{du_1}{d\psi} + l \frac{du_3}{d\psi}, \quad \text{y} \quad \epsilon_{yz} = l \frac{du_2}{d\psi} + m \frac{du_1}{d\psi}. \end{aligned}$$

Así, la primer ecuación en (I.5) toma la forma

$$\sigma_{xx} = (c_{11}l + c_{16}m + c_{15}n) \frac{du_1}{d\psi} + (c_{16}l + c_{12}m + c_{14}n) \frac{du_2}{d\psi} + (c_{15}l + c_{14}m + c_{13}n) \frac{du_3}{d\psi} \quad (\text{I.53})$$

y

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = l[(c_{11}l + c_{16}m + c_{15}n)u_1'' + (c_{16}l + c_{12}m + c_{14}n)u_2'' + (c_{15}l + c_{14}m + c_{13}n)u_3''], \quad (\text{I.54})$$

donde u_1'' , u_2'' , u_3'' denotan la segunda derivada respecto de ψ de u_1 , u_2 y u_3 . Pueden encontrarse ecuaciones similares para $\partial \sigma_{xy}/\partial y$ y $\partial \sigma_{xz}/\partial z$, y como $\partial^2 u_1/\partial t^2 = c^2 u_1''$, la primera ecuación de movimiento (I.25) puede escribirse como:

$$\rho c^2 u_1'' = Au_1'' + Hu_2'' + Gu_3'', \quad (\text{I.55})$$

y las otras dos ecuaciones toman la forma:

$$\rho c^2 u_2'' = Hu_1'' + Bu_2'' + Fu_3'', \quad (\text{I.56})$$

$$\rho c^2 u_3'' = Gu_1'' + Fu_2'' + Cu_3'', \quad (\text{I.57})$$

con A , B , C , F , G , H constantes que dependen de l , m y n y de las 21 constantes elásticas del medio aeotrópico.

El sistema de ecuaciones (I.55), (I.56) y (I.57) tiene solución para u_1'' , u_2'' y u_3'' distinta de cero solo si el determinante de sus coeficientes es cero. Así

$$\begin{vmatrix} (A - \rho c^2) & H & G \\ H & (B - \rho c^2) & F \\ G & F & (C - \rho c^2) \end{vmatrix} = 0. \quad (\text{I.58})$$

Ésta es una ecuación cúbica en c^2 que tiene tres raíces positivas para cualquier sólido elástico real. En general estas velocidades son diferentes y corresponden a tres distintas velocidades de propagación.

I.1.14. Generación de ondas

Hasta el momento se han analizado ondas de esfuerzos que ya están propagándose en un medio elástico. A continuación se discute cómo generarlas a partir de campos magnéticos y, en el caso de la generación por golpe, qué proceso ocurre en el medio elástico.

Un golpe en un medio elástico tiene el efecto de generar compresión en él. Dicha compresión puede suceder bastante rápido, pero en general depende de la cantidad de movimiento que trae consigo el elemento percutor y qué tanto del mismo se transmite. Suponiendo que el impacto genera una presión constante P en un corto intervalo de tiempo δt en el medio elástico, el momento total impartido es $P\delta t$. Si la velocidad de propagación en el medio es c_0 , en el momento en que se retira la fuerza compresora, se comprime una distancia $c_0\delta t$, y todo lo demás se mantiene en reposo y sin comprimir. La parte comprimida en el medio material depende de la geometría del percutor y también de la geometría del medio. Por ejemplo, si lo que golpea al medio es un clavo, el área de contacto es pequeña y la perturbación puede considerarse incluso puntual. O también, si lo que golpea es un martillo, y el medio es una varilla delgada que se golpea en un extremo, el martillo abarca toda la superficie del extremo de la varilla, y la perturbación puede considerarse plana. Si el medio no es dispersivo, el pulso de esfuerzos se mantiene de la misma longitud (y posiblemente no con la misma intensidad, debido a la geometría del medio elástico) y viaja a lo largo del medio con una velocidad c_0 . Si el medio es dispersivo,⁴ el ancho del pulso se incrementa sucesivamente.

Un pulso puede analizarse con ayuda de la transformada de Fourier. Por ejemplo, un pulso extremadamente corto pero de gran amplitud puede aproximarse por la función delta de Dirac. La aplicación de la transformada de Fourier a la función delta de Dirac $\delta(t)$ muestra que en dicho pulso todas las frecuencias están igualmente presentes.

Un caso más sencillo se da cuando las vibraciones son periódicas, por ejemplo, representadas por una función $f(t)$. En este caso es posible representar a $f(t)$ por la serie de armónicos

$$f(t) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (A_i \cos(i\omega t) + B_i \sin(i\omega t)), \quad (\text{I.59})$$

donde $\omega = 2\pi/T$, T es el periodo y A_i y B_i son constantes a determinarse. Éste es básicamente el teorema de Fourier (Williams [32]).

Desde luego, una oscilación expresada en términos de senos y cosenos es su misma serie de Fourier. Esto simplemente dice que directamente se tienen las frecuencias que componen a dicha señal.

Es posible generar ondas senoidales, entendiendo una onda *senoidal* como una onda que puede describirse como $A \sin(x + \delta)$, donde A y δ son números, por medio de campos magnéticos. El método en este caso se basa en que cierto material ferromagnético se expone a un campo magnético que cambia también de forma senoidal, que a su vez genera fuerzas senoidales en el material. Este material puede ser el mismo medio a analizar o bien puede fijarse al material en el que se quiere generar la onda.

Una serie de compresiones se generan por este método y su frecuencia es la del campo magnético, que puede generarse por un electroimán conectado a una fuente de voltaje que varíe de forma senoidal o a un generador de funciones.⁵ El electroimán está conformado por un núcleo y una bobina. La función del

⁴Un medio es dispersivo cuando la velocidad de propagación de una onda en él depende de la frecuencia.

⁵La bobina del electroimán debe escogerse de manera que el intervalo de frecuencias a utilizar esté lejos de la frecuencia de resonancia del circuito LC resultante de las capacitancias parásitas en la bobina. De otra forma la señal resultante puede distorsionarse y ya no ser senoidal.

núcleo es aumentar el campo magnético producido. Este campo es proporcional a la corriente que pasa por ella, por lo que si la corriente tiene forma senoidal, el campo producido también tiene esa forma. El campo así generado cambia los dipolos magnéticos del núcleo y crea una magnetización que cambia también de forma senoidal. La suma de los campos magnéticos que producen el núcleo y la bobina se suman para dar un campo magnético más intenso.

Se llaman ondas ultrasónicas o ultrasonido a las ondas cuya frecuencia es mayor a 20,000 Hz y se llaman ondas infrasónicas o infrasonido a aquellas cuya frecuencia es menor a 20 Hz (Kinsler et al. [13, p. 1]).

I.2. Objetivos de la tesis

- Detectar cambios en la velocidad de propagación de una onda longitudinal en una varilla cuando se ha impuesto una inhomogeneidad mediante un cambio de temperatura a lo largo de la varilla.
- Relacionar el cambio en la velocidad de propagación con el cambio en el módulo de Young del aluminio.

I.3. Hipótesis del trabajo y otras consideraciones

La primera es que las varillas con las que se trabaja están compuestas principalmente de aluminio y que tienen una gran homogeneidad a lo largo de ellas. La homogeneidad considerada se debe a que la composición de la varilla es tal que las constantes elásticas en una región de la varilla son las mismas que en cualquier otra, y que la posible variación de estas constantes elásticas con la temperatura se comporta exactamente de la misma manera en cualquier parte de la varilla. Por supuesto, tenemos que suponer que la ley de Hooke (I.6) se cumple y se sigue cumpliendo aún cuando hay cambios en la temperatura.

De hecho, en este trabajo se busca encontrar el cambio que la constante de Young podría tener con el cambio de temperatura.

Se explora el método de perturbaciones para ver cómo puede aproximarse el comportamiento de las constantes elásticas. Los cambios de temperatura a lo largo de la varilla hacen anisotrópico el material y también inhomogéneo, aunque solo en la dirección a lo largo del eje de la varilla. Entonces, considerar que el material es isotrópico solo se puede hacer localmente. El éxito del método de perturbaciones podría significar que se conserva en cierto grado la isotropía del medio.

Se supone también que el diámetro de la varilla es suficientemente pequeño con respecto a las longitudes de onda usadas para excitarla como para que no sean necesarias aproximaciones más refinadas como la que hace Pochhammer y Chree.

Para tratar la parte teórica del problema se supone que los cambios en la densidad son despreciables, aún cuando la temperatura cambia a lo largo de ella. También, la expansión de una varilla de un material isotrópico con el cambio en la temperatura es muy pequeña como se pudo ver en la sección I.1.6, por lo que puede esperarse que esto conlleve pocos cambios en el comportamiento físico del sistema. Sin embargo, como es posible calcular dicho cambio, éste se toma en cuenta para el cálculo de la velocidad de propagación.

Introducción

El aire alrededor de la varilla se supone que no tiene ningún efecto sobre sus movimientos. Puede suponerse esto porque la densidad del aluminio es muy alta comparada con la del aire ($\rho_{Al} = 2.71 \text{ g/cm}^3$, $\rho_{Aire} \sim 1.3 \times 10^{-3} \text{ g/cm}^3$). El efecto del aire que genera pérdidas de calor por convección solo se considera explícitamente en las regiones expuestas.

En la varilla se crean ondas estacionarias, por lo que se espera que no haya transmisión extra de calor a lo largo de la varilla.

Finalmente se supone que la onda que se crea y se propaga en la varilla es principalmente del tipo longitudinal.

El problema

Se estudia el comportamiento de una onda de esfuerzos cuando llega a una frontera (II.1.1 y II.1.2) y luego el caso en que una onda senoidal recorre una varilla con una frontera libre y una masa en el otro extremo (II.1.3 y II.1.4).

Para entender cómo se propagan las ondas en una varilla se hace un tratamiento elemental de los tres tipos de vibraciones que pueden ocurrir en ella. (II.2.1, II.2.2 y II.2.3). Los tres tratamientos son sólo aproximados y válidos para determinadas dimensiones de la varilla. Por ello, a continuación se analizan los tres tipos de vibraciones con más detalle a partir de la teoría de Pochhammer-Chree (II.2.4, II.2.4, II.2.4 y II.2.4).

Analizada la propagación de las ondas en una varilla se detalla la condición de resonancia (II.3). Luego se investiga cuán útil puede ser en este caso la teoría de perturbaciones si ciertas propiedades cambiaran para que la velocidad no sea constante a lo largo de ella (II.4).

Finalmente, se discute cómo entra todo esto en el desarrollo experimental de este trabajo, abordando el problema en que la temperatura ya no es uniforme (II.5 y II.5.1), discutiendo cuándo es válida la teoría desarrollada (II.5.2).

Generalmente se observan cambios en las propiedades de un material cuando éste cambia de temperatura. La estructura interna del material cambia y con ella hay cambios en las propiedades ópticas, magnéticas, mecánicas y eléctricas. Un cambio en estas propiedades se refleja en el cambio de los parámetros que caracterizan al material. Si, para una temperatura específica, las propiedades de un material dado no cambian, pueden considerarse constantes los parámetros.

En el caso de un medio elástico, se observa la variación de la velocidad de propagación de las ondas de esfuerzos en él al modificarse la temperatura. Esto puede comprobarse haciendo resonar una varilla de dicho material. Las causas de este cambio son diversas: cambian la longitud, la densidad, las constantes elásticas del material, etc. En la sección II.5.1 se analiza cuál de estos fenómenos es relevante para el cambio de velocidad y se concluye que el cambio de longitud y de la densidad de la varilla no bastan para explicar totalmente ese cambio. Se concluye que el cambio de frecuencia de resonancia, y con ello el cambio en la velocidad de propagación, se debe también al cambio en las constantes elásticas del material.

Al encontrar la nueva frecuencia de resonancia, puede determinarse, usando ciertas hipótesis, el cambio en la velocidad de la onda.

Si el cambio en la temperatura no es uniforme aún se presenta resonancia. Esto se analiza detalladamente más adelante. Primero se analiza qué aspectos permiten la resonancia en el problema de una varilla cilíndrica y luego se introduce al modelo el cambio en temperatura.

II.1. Condiciones de frontera

II.1.1. Reflexión de una onda en una frontera libre

En la reflexión de una onda en un medio isotrópico de cualquiera de los dos tipos mencionados en la sección I.1.9, puede haber reflexión de dos tipos de ondas. Si es una onda dilatacional, se reflejan tanto una onda dilatacional como una de distorsión. Si es una onda de distorsión cuyas vibraciones son paralelas a un vector perpendicular al plano en que se lleva a cabo la reflexión, se refleja solo una onda de distorsión. Si las vibraciones son perpendiculares a un vector perpendicular al plano en que se lleva a cabo la reflexión, se refleja una onda de distorsión y se refracta una onda dilatacional. Se analiza el primer caso de estos tres, porque las ondas que se tratan son de dilatación.

Tome la dirección de propagación de la onda en el plano xy , haciendo un ángulo α_1 con el eje x , y la frontera libre es el plano yz . Véase la figura II.1. Considere una onda armónica en que el desplazamiento normal a los frentes de ondas se denota por Φ_1 . Una onda que se propaga en la dirección negativa de y , que tiene una frecuencia angular ω y que tiene un vector de onda dado por

$$f_1 = \frac{\omega \cos \alpha_1}{c_1} \quad y \quad g_1 = \frac{\omega \operatorname{sen} \alpha_1}{c_1}, \quad (\text{II.1})$$

donde c_1 es la velocidad de propagación, entonces Φ_1 es

$$\Phi_1 = A_1 e^{i(f_1 x + g_1 y + \omega t)}, \quad (\text{II.2})$$

con A_1 la amplitud de la onda.

Si u_1 y v_1 son las magnitudes de los desplazamientos paralelos a las direcciones x y y respectivamente, se tiene

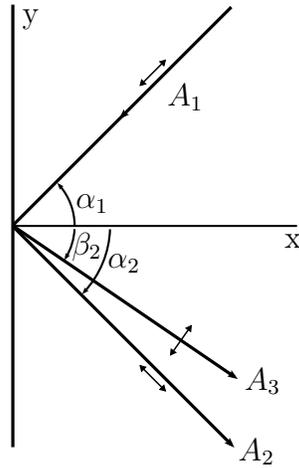


Figura II.1: Reflexión de una onda dilatacional en la frontera libre de un medio elástico.

$$u_1 = \Phi_1 \cos \alpha_1 \quad y \quad v_1 = \Phi_1 \sin \alpha_1. \quad (\text{II.3})$$

Si una onda de dilatación se refleja con un ángulo α_2 respecto del eje x , y su desplazamiento Φ_2 es normal al frente de onda, se tiene

$$\Phi_2 = A_2 e^{i(-f_2 x + g_2 y + \omega t + \delta_1)}, \quad (\text{II.4})$$

donde

$$f_2 = \frac{\omega \cos \alpha_2}{c_1}, \quad g_2 = \frac{\omega \sin \alpha_2}{c_1}, \quad (\text{II.5})$$

δ_1 una constante que permite cualquier cambio de fase en la reflexión de la onda, y A_2 es su amplitud. Si u_2 y v_2 son los desplazamientos producidos por la onda reflejada, se tiene

$$u_2 = \Phi_2 \cos \alpha_2 \quad y \quad v_2 = \Phi_2 \sin \alpha_2. \quad (\text{II.6})$$

Llamando β_2 al ángulo que forma la onda de distorsión con el eje x y c_2 la velocidad de propagación, tiene un cambio de fase δ_2 y un vector de onda

$$f_3 = \frac{\omega \cos \beta_2}{c_2} \quad y \quad g_3 = \frac{\omega \sin \beta_2}{c_2}, \quad (\text{II.7})$$

lo que corresponde con un desplazamiento:

$$\Phi_3 = A_3 e^{i(-f_3 x + g_3 y + \omega t + \delta_2)}, \quad (\text{II.8})$$

y desplazamientos en el eje x y y dado por:

$$u_3 = \Phi_3 \sin \beta_2 \quad y \quad v_3 = \Phi_3 \cos \beta_2. \quad (\text{II.9})$$

En la frontera libre ($x = 0$) no hay esfuerzos, por lo que σ_{xx} y σ_{xy} son cero para todos los valores de t y y , y si se llaman u y v los desplazamientos netos producidos por la onda incidente y las dos reflejadas, se tiene, de la ecuación (I.10)

$$\sigma_{xx} = \lambda \Theta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (\text{II.10})$$

$$\sigma_{yx} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (\text{II.11})$$

En la ecuación (II.10) se toma en cuenta que $\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$, ya que se supuso que no hay desplazamientos en la dirección z . También en este caso u equivale a u_1 en el capítulo anterior, y v a u_2 .

Tomando la condición para σ_{yx} , se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = g_1 \Phi_1 \cos \alpha_1 - g_2 \Phi_2 \cos \alpha_2 + g_3 \Phi_3 \sin \beta_2 + f_1 \Phi_1 \sin \alpha_1 - f_2 \Phi_2 \sin \alpha_2 - f_3 \Phi_3 \cos \beta_2 = \\ &= (f_1 \sin \alpha_1 + g_1 \cos \alpha_1) \Phi_1 - (f_2 \sin \alpha_2 + g_2 \cos \alpha_2) \Phi_2 - (f_3 \cos \beta_2 - g_3 \sin \beta_2) \Phi_3, \end{aligned} \quad (\text{II.12})$$

evaluada en $x = 0$.

Sustituyendo $f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3$, y Φ_1, Φ_2, Φ_3 evaluados en $x = 0$, se tiene

$$\frac{A_1}{c_1} \omega \sin 2\alpha_1 e^{i(g_1 y + \omega t)} - \frac{A_2}{c_1} \omega \sin 2\alpha_2 e^{i(g_2 y + \omega t + \delta_1)} - \frac{A_3}{c_2} \omega \cos 2\beta_2 e^{i(g_3 y + \omega t + \delta_2)} = 0, \quad (\text{II.13})$$

que solo puede ser satisfecha para todo y y t si $g_1 = g_2 = g_3$, y así

$$\frac{\sin \alpha_1}{c_1} = \frac{\sin \alpha_2}{c_1} = \frac{\sin \beta_2}{c_2}. \quad (\text{II.14})$$

Así

$$\alpha_1 = \alpha_2 \quad y \quad \frac{\sin \alpha_1}{\sin \beta_2} = \frac{c_1}{c_2}. \quad (\text{II.15})$$

δ_1 y δ_2 son iguales a 0 o π y, tomando el valor cero y sustituyendo $c_2/c_1 = \sin \beta_2 / \sin \alpha_1$, la ecuación (II.13) se transforma en

$$2(A_1 - A_2) \cos \alpha_1 \sin \beta_2 - A_3 \cos 2\beta_2 = 0. \quad (\text{II.16})$$

La condición (II.10) da otra relación entre las amplitudes, de donde se obtiene la amplitud de las ondas reflejadas.

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} = 0 &= \frac{A_1}{c_1} \omega (\lambda + 2\mu \cos^2 \alpha_1) e^{i(g_1 y + \omega t)} + \\ &+ \frac{A_2}{c_1} \omega (\lambda + 2\mu \cos^2 \alpha_2) e^{i(g_2 y + \omega t + \delta_1)} - \frac{A_3}{c_2} \omega (\mu \sin 2\beta_2) e^{i(g_3 y + \omega t + \delta_2)}. \end{aligned} \quad (\text{II.17})$$

De nuevo, ésta solo se satisface si $g_1 = g_2 = g_3$ y, $\delta_1 = \delta_2 = 0$ o $\delta_1 = \delta_2 = \pi$. Si $\delta_1 = \delta_2 = 0$, como antes, la ecuación (II.17) toma la forma

$$(A_1 + A_2)(\lambda + 2\mu \cos^2 \alpha_1) - A_3 \frac{c_1}{c_2} \mu \sin 2\beta_2 = 0. \quad (\text{II.18})$$

Sustituyendo $c_1^2/c_2^2 = (\lambda + 2\mu)/\mu = \sin^2 \alpha_1 / \sin^2 \beta_2$, se reescribe como

$$(A_1 + A_2) \cos 2\beta_2 \sin \alpha_1 - A_3 \sin \beta_2 \sin 2\beta_2 = 0. \quad (\text{II.19})$$

(II.16) y (II.19) dan la relación que hay entre amplitudes. Como estas relaciones sirven para cualquier onda armónica de cualquier frecuencia, también son ciertas para una onda de forma arbitraria.

En incidencia normal, $\alpha_1 = 0$ y con ello de la relación (II.19) se ve que $A_3 = 0$ y de (II.16) se ve que $A_1 = A_2$ y hay un cambio de fase de π en la reflexión.

Así, para un pulso moviéndose en la dirección negativa de x ($\alpha_1 = 0$) hacia una frontera libre en $x = 0$, que genera un desplazamiento de la forma

$$u_1 = F(c_1t + x), \quad (\text{II.20})$$

su amplitud al reflejarse no cambia en cada una de sus frecuencias componentes, y se muestra a continuación que su forma es la misma. En la reflexión, el pulso reflejado es

$$u_2 = f(c_1t - x), \quad (\text{II.21})$$

y los esfuerzos generados por cada pulso son

$$\sigma_{xx_1} = E \frac{\partial u_1}{\partial x} \quad y \quad \sigma_{xx_2} = E \frac{\partial u_2}{\partial x}, \quad (\text{II.22})$$

por lo que el esfuerzo resultante es

$$E \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) = E[F'(c_1t + x) - f'(c_1t - x)], \quad (\text{II.23})$$

donde la prima denota derivación respecto al argumento. Para $x = 0$ esta relación es

$$F'(c_1t) - f'(c_1t) = 0. \quad (\text{II.24})$$

Como $F'(c_1t) = f'(c_1t)$ para cualquier tiempo, la forma del pulso de presión reflejado es entonces la misma que la del pulso incidente, pero de signo opuesto. Así, un pulso de compresión es reflejado como un pulso similar de tensión. El desplazamiento de cualquier punto en la varilla está dado por $u_1 + u_2$, y en $x = 0$ es de $2F(c_1t)$, y por lo tanto la velocidad de las partículas en ese extremo es también del doble de su correspondiente valor cuando el pulso está viajando por el medio.

Si por ejemplo, el pulso tiene una forma senoidal

$$\tilde{A}e^{ik(c_1t+x)} = \tilde{A}e^{i\omega(t+x/c_1)}, \quad (\text{II.25})$$

el pulso reflejado tiene la forma

$$\tilde{A}e^{ik(c_1t-x)} = \tilde{A}e^{i\omega(t-x/c_1)}, \quad (\text{II.26})$$

(\tilde{A} una constante compleja), después de la reflexión, el desplazamiento en cada punto es

$$u_{tot} = \tilde{A}e^{i\omega t}(e^{i\omega x/c_1} + e^{-i\omega x/c_1}) = 2\tilde{A}e^{i\omega t} \cos(\omega x/c_1), \quad (\text{II.27})$$

y para $x = 0$

$$u_{tot}(x = 0) = 2\tilde{A}e^{i\omega t} \cos 0 = 2\tilde{A}e^{i\omega t}. \quad (\text{II.28})$$

Así, el extremo oscila con una frecuencia ω y su amplitud es el doble de la onda incidente.

II.1.2. Reflexión y refracción de una onda en la frontera entre dos medios

Cuando una onda elástica llega a la frontera entre dos medios usualmente se generan cuatro ondas más. Dos refractadas y dos reflejadas. Desde luego, la frontera no debe presentar deslizamientos. El tratamiento del problema es muy similar al tratado en la sección II.1.1 y no es tratado en detalle aquí.

En este caso, las condiciones en la frontera son de cuatro tipos diferentes. Se pide que los desplazamientos y esfuerzos, normales y tangenciales, sean continuos en la frontera.

Se tienen cinco contribuciones para cada desplazamiento, ya que hay cinco ondas en total. Si se considera una onda viajando en el plano xy , y se toma al plano yz como la interfase entre los dos medios, las condiciones en la frontera ($x = 0$) toman la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 \text{(I)} \quad & \sum u_{1a} = \sum u_{1b}, \\
 \text{(II)} \quad & \sum u_{2a} = \sum u_{2b} \text{ y } \sum u_{3a} = \sum u_{3b}, \\
 \text{(III)} \quad & \sum (\sigma_{xx})_a = \sum \left(\lambda\Theta + 2\mu \frac{\partial u_1}{\partial x} \right)_a = \sum (\sigma_{xx})_b = \sum \left(\lambda\Theta + 2\mu \frac{\partial u_1}{\partial x} \right)_b, \\
 \text{(IV)} \quad & \sum (\sigma_{xy})_a = \sum \left[\mu \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right]_a = \sum (\sigma_{xy})_b = \sum \left[\mu \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right]_b \text{ y} \\
 & \sum (\sigma_{zx})_a = \sum \left[\mu \left(\frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) \right]_a = \sum (\sigma_{zx})_b = \sum \left[\mu \left(\frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) \right]_b.
 \end{aligned}$$

El sufijo a (b) se refiere a las componentes y constantes en el primer (segundo) medio.

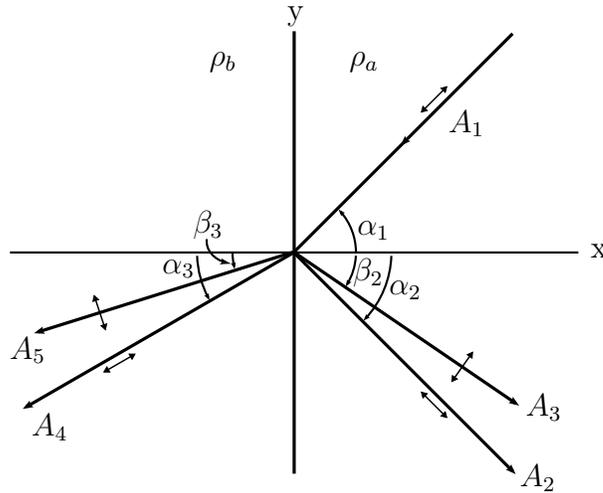


Figura II.2: Reflexión, refracción y transmisión de una onda dilatacional en la frontera entre dos medios elásticos.

Para el caso en que una onda de dilatación incide en la interfase con un ángulo α_1 (respecto del eje x), hay una onda de dilatación reflejada con un ángulo α_2 , una onda de distorsión reflejada con un ángulo β_2 , una onda de dilatación refractada con un ángulo α_3 y una onda de distorsión refractada con un ángulo β_3 . Ver la figura II.2. Se encuentra que las condiciones en la frontera se cumplen cuando

$$\frac{\text{sen } \alpha_1}{c_1} = \frac{\text{sen } \alpha_2}{c_1} = \frac{\text{sen } \beta_2}{c_2} = \frac{\text{sen } \alpha_3}{c_3} = \frac{\text{sen } \beta_3}{c_4}, \quad \text{(II.29)}$$

c_1 y c_2 son las velocidades de propagación de las ondas de dilatación y distorsión en el primer medio, mientras que c_3 y c_4 son las correspondientes velocidades en el segundo. Si la amplitud de la onda incidente de dilatación es A_1 , las amplitudes de las ondas reflejadas y refractadas A_2 y A_4 respectivamente, y las de distorsión reflejadas y refractadas A_3 y A_5 , la condición (I) toma la forma

$$(A_1 - A_2) \cos \alpha_1 + A_3 \text{sen } \beta_2 - A_4 \cos \alpha_3 - A_5 \text{sen } \beta_3 = 0. \quad \text{(II.30)}$$

Los desplazamientos en la dirección y (condición (II)) dan la ecuación

$$(A_1 + A_2) \text{sen } \alpha_1 + A_3 \cos \beta_2 - A_4 \text{sen } \alpha_3 + A_5 \cos \beta_3 = 0. \quad \text{(II.31)}$$

La condición (III) lleva a la ecuación

$$(A_1 + A_2)c_1 \cos 2\beta_2 - A_3c_2 \sin 2\beta_2 - A_4c_3(\rho_b/\rho_a) \cos 2\beta_3 - A_5c_4(\rho_b/\rho_a) \sin 2\beta_3 = 0, \quad (\text{II.32})$$

donde ρ_a y ρ_b son las densidades de los medios.

Finalmente la condición $\sum(\sigma_{yx})_a = \sum(\sigma_{yx})_b$ lleva a la relación

$$\rho_a c_2^2 [(A_1 - A_2) \sin 2\alpha_1 - A_3 (c_1/c_2) \cos 2\beta_2] - \rho_b c_4^2 [A_4 (c_1/c_3) \sin 2\alpha_3 - A_5 (c_1/c_4) \cos 2\beta_3] = 0. \quad (\text{II.33})$$

Sustituyendo la ecuación (II.29) en las ecuaciones (II.30), (II.31), (II.32), (II.33) se pueden encontrar las amplitudes en términos de la amplitud de la onda incidente de dilatación.

Para el caso de incidencia normal, $\alpha_1 = 0$, y de (II.29) todos los demás ángulos son cero. De la ecuación (II.31) se encuentra que $A_3 = A_5$, y de la ecuación (II.33) se concluye que $A_3 = A_5 = 0$. De las ecuaciones (II.30) y (II.32) se encuentra a A_2 y A_4

$$A_2 = A_1(\rho_b c_3 - \rho_a c_1)/(\rho_b c_3 + \rho_a c_1), \quad (\text{II.34})$$

$$A_4 = A_1 2\rho_a c_1/(\rho_b c_3 + \rho_a c_1). \quad (\text{II.35})$$

La amplitud de la onda de esfuerzo reflejada depende entonces del factor $(\rho_b c_3 - \rho_a c_1)$, y en incidencia normal si el producto de densidad por velocidad es el mismo para los dos medios no hay onda reflejada. El producto ρc se llama la impedancia característica del medio. Es claro, del factor $(\rho_b c_3 - \rho_a c_1)$, que cuando la impedancia característica del segundo medio es mayor que la del primero, la amplitud del desplazamiento en la reflexión es del mismo signo que el de la onda incidente. Como hay un cambio de dirección de propagación, esto corresponde a un cambio de fase de π en las vibraciones. Cuando la impedancia característica del segundo medio es menor que la del primero, la amplitud cambia de signo, por lo que no hay cambio de fase en la reflexión.

Si una onda senoidal $F = A_1 e^{i\omega(t-x/c_1)}$ incide de forma normal en la interfaz entre dos medios, una parte pasa y la otra se refleja. La amplitud de la onda reflejada es $A_2 = A_1(\rho_b c_3 - \rho_a c_1)/(\rho_b c_3 + \rho_a c_1)$, por lo que el desplazamiento de las partículas en el medio donde incide la onda es

$$u_a = A_1 e^{i\omega(t-x/c_1)} + A_1 \frac{\rho_b c_3 - \rho_a c_1}{\rho_b c_3 + \rho_a c_1} e^{i\omega(t+x/c_1)}. \quad (\text{II.36})$$

La onda en el otro medio es $F = [A_1 2\rho_a c_1/(\rho_b c_3 + \rho_a c_1)] e^{i\omega(t-x/c_1)}$.

Para el desarrollo experimental de esta tesis, se pega un imán a una varilla, por lo que si se piensa que el medio b es el imán, muy pronto se refleja de vuelta la onda que se refractó y se tiene otra onda refractándose en el medio a y otra reflejándose en el medio b . Por comodidad se llama A'_1 a $[A_1 2\rho_a c_1/(\rho_b c_3 + \rho_a c_1)]$. Se vio en la sección anterior que una onda reflejada en el vacío se refleja con la misma amplitud. Entonces, la amplitud de la onda de desplazamientos que regresa a la interfaz entre los dos medios es también A'_1 . Se llama a la amplitud de la onda reflejada A'_2 y a la de la onda refractada A'_4 . La onda refractada tiene una amplitud de

$$A'_4 = A'_1 \frac{2\rho_b c_3}{\rho_a c_1 + \rho_b c_3} = A_1 \frac{2\rho_a c_1}{\rho_b c_3 + \rho_a c_1} \frac{2\rho_b c_3}{\rho_a c_1 + \rho_b c_3}. \quad (\text{II.37})$$

La onda reflejada tiene una amplitud de

$$A'_2 = A'_1 \frac{\rho_a c_1 - \rho_b c_3}{\rho_a c_1 + \rho_b c_3} = A_1 \frac{2\rho_a c_1}{\rho_b c_3 + \rho_a c_1} \frac{\rho_a c_1 - \rho_b c_3}{\rho_a c_1 + \rho_b c_3}. \quad (\text{II.38})$$

Esta onda reflejada se vuelve a reflejar en la superficie libre y se vuelve a reflejar y refractar en la frontera entre los dos medios. Se puede notar que en cada reflexión y refracción, la amplitud se modifica por

cierto factor característico. Si una onda incide desde el medio a en la interfaz que lo separa del medio b , se llama R_{ab} al factor que multiplica a la amplitud en la reflexión, y T_{ab} al factor que multiplica a la amplitud en la refracción. Si la onda incide desde el medio b en la interfaz que lo separa del medio a , se llama al factor R_{ba} en la reflexión, y T_{ba} al factor en la refracción. Con todo esto las relaciones anteriores se simplifican:

$$A_2 = A_1 R_{ab}, \quad (\text{II.39})$$

$$A_4 = A_1 T_{ab} = A'_1, \quad (\text{II.40})$$

$$A'_2 = A'_1 R_{ba} = A_1 T_{ab} R_{ba}, \quad (\text{II.41})$$

$$A'_4 = A'_1 T_{ba} = A_1 T_{ab} T_{ba}. \quad (\text{II.42})$$

La onda que se queda en el imán mantiene este proceso hasta que ya no tiene energía. Se encuentra la amplitud de la siguiente onda que reincide en el medio a multiplicando A'_2 por el factor T_{ba} . Se nota así que la amplitud de cada onda que en lo sucesivo se refleja y luego refracta de vuelta al medio a está multiplicada por el factor $R_{ba} T_{ba}$. La primera onda que reincide en el medio a lo hace después de un tiempo $t_1 = 2l_i/c_3$, con l_i la longitud del imán. La segunda onda que reincide en el medio a lo hace después de un tiempo $t_2 = t_1 + 2l_i/c_3 = 4l_i/c_3$. La n -ésima onda que reincide en el medio a lo hace después de un tiempo $t_n = 2nl_i/c_3$.

Después de un tiempo $t_n < 2L/c_1$, la onda de desplazamientos en la varilla, debido a lo que se quedó en el imán es

$$u_i(t_n) = \sum_{j=0}^n A_1 T_{ab} R_{ba}^j T_{ba} e^{i\omega(t+x/c_1)}. \quad (\text{II.43})$$

Con esto, para un tiempo $t_n < 2L/c_1$ la onda de desplazamientos total en la varilla es

$$u_{\text{total}} = u_a + u_i = A_1 e^{i\omega(t-x/c_1)} + A_1 R_{ab} e^{i\omega(t+x/c_1)} + A_1 T_{ab} T_{ba} e^{i\omega(t+x/c_1)} \sum_{j=0}^n R_{ba}^j. \quad (\text{II.44})$$

II.1.3. La varilla con frontera libre y cargada con una masa

Por cuestiones prácticas, a veces es necesario añadir algún peso en uno de los extremos de una varilla. Por ejemplo, poner un imán que sirva de excitador. La varilla se coloca de tal manera que su extremo libre está en $x = 0$ y su extremo con una carga m en $x = L$. Idealmente esta masa se considera puntual, porque de otra manera no se mueve como una unidad sino que tiene ondas propagándose a través de ella. Un imán delgado puede aproximarse por esta masa ideal.

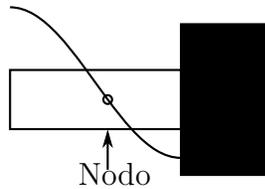


Figura II.3: Imán en la frontera de una varilla.

Para el extremo y la masa debe cumplirse que tengan la misma aceleración. Si $u(x, t)$ representa los desplazamientos en la varilla, la condición toma la forma

$$f_L = -m \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_{x=L}, \quad (\text{II.45})$$

con f_L las fuerzas longitudinales en la varilla, y el signo negativo aparece porque una fuerza de tensión (aquí, por convención una fuerza es de tensión si $f_L > 0$ y de compresión si $f_L < 0$) jalaría a la masa m a la izquierda, y una de compresión a la derecha.

Como $\sigma_{xx} = E\epsilon_{xx} = E(\partial u/\partial x)$, y $\sigma_{xx} = f_L/S$ con S el área de la sección transversal, $f_L = SE(\partial u/\partial x)$, y así se tiene

$$SE \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=L} = -m \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_{x=L}. \quad (\text{II.46})$$

Para el extremo libre no hay una fuerza elástica interna y, por lo tanto, $f_L = 0$. De $f_L = SE(\partial u/\partial x)$ se tiene la condición

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (\text{II.47})$$

Los desplazamientos en la varilla están dados por

$$u(x, t) = \tilde{A}e^{i(\omega t - kx)} + \tilde{B}e^{i(\omega t + kx)}, \quad (\text{II.48})$$

donde \tilde{A} y \tilde{B} son constantes de amplitud compleja y $k = \omega/c$ es el número de onda. De la condición (II.47) aplicada al punto $x = 0$ se tiene

$$\begin{aligned} 0 = \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} &= -ik\tilde{A}e^{i(\omega t - kx)}|_{x=0} + ik\tilde{B}e^{i(\omega t + kx)}|_{x=0} = -ik\tilde{A}e^{i\omega t} + ik\tilde{B}e^{i\omega t} \\ 0 &= ike^{i\omega t}(-\tilde{A} + \tilde{B}) \\ &\Rightarrow \tilde{A} = \tilde{B}, \end{aligned}$$

y con ello

$$u(x, t) = \tilde{A}e^{i(\omega t - kx)} + \tilde{A}e^{i(\omega t + kx)} = \tilde{A}e^{i\omega t}[e^{-ikx} + e^{ikx}] = 2\tilde{A}e^{i\omega t} \cos kx. \quad (\text{II.49})$$

De la condición II.46 se obtiene

$$\begin{aligned} SE \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=L} &= -m \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_{x=L} \\ SE \left(\frac{\partial (2\tilde{A}e^{i\omega t} \cos kx)}{\partial x} \right)_{x=L} &= -m \left(\frac{\partial^2 (2\tilde{A}e^{i\omega t} \cos kx)}{\partial t^2} \right)_{x=L} \\ -2k\tilde{A}e^{i\omega t} SE \sin kx|_{x=L} &= -i^2 2m\tilde{A}\omega^2 e^{i\omega t} \cos kx|_{x=L} \\ -2k\tilde{A}e^{i\omega t} SE \sin kL &= 2m\tilde{A}\omega^2 e^{i\omega t} \cos kL \\ \Rightarrow \tan kL &= -\frac{m\omega^2}{kSE} \end{aligned}$$

o como $k = \omega/c$

$$\tan kL = -\frac{m\omega c}{SE}. \quad (\text{II.50})$$

La ecuación (II.50) es una ecuación trascendental y se tiene que resolver por métodos numéricos o gráficos. Sin embargo, puede verse que para masas pequeñas $m \approx 0$, y con ello $\tan(kL) \approx 0$ o $kL = n\pi$, que es la condición para las frecuencias naturales de una varilla con ambas fronteras libres. Por razones que se explican en la sección II.2.4, se toma $E = \rho c^2$. También se toma $m_v = \rho SL$ como la masa de la varilla. La ecuación (II.50), se expresa como

$$\tan kL = -\frac{m}{m_v}kL. \quad (\text{II.51})$$

Las soluciones de la ecuación (II.51) son los distintos valores de k , el número de onda, para los que una onda estacionaria se puede producir en la varilla. Otro efecto es que los nodos se desplazan porque éstos ocurren cuando se cumple que

$$\cos(kx) = 0, \quad (\text{II.52})$$

y si el modo fundamental cumplía que

$$kL = N_f \quad \text{ó} \quad k = \frac{N_f}{L}, \quad (\text{II.53})$$

se tiene un nodo en

$$N_f x/L = \pi/2 \quad \text{ó} \quad x = \pi L/2N_f. \quad (\text{II.54})$$

II.1.4. Nodos de desplazamiento impuestos

En un nodo de desplazamiento los desplazamientos son cero. Es decir, la condición que se cumple en ese punto es

$$u(x, t)|_{x=aL} = 0, \quad 0 \leq a \leq 1. \quad (\text{II.55})$$

Por ello, se suprime cualquier modo de vibración que *no tenga* algún nodo en ese punto. Una varilla que se sostiene rígidamente en un punto puede mantener todos los modos de vibración que tengan un nodo en ese punto.

II.2. Vibraciones longitudinales, torsionales y de flexión en una varilla

Hay tres tipos diferentes de vibraciones que ocurren en barras delgadas o varillas: longitudinales, de torsión y laterales. En las longitudinales, los elementos en la barra se extienden y contraen, pero no hay desplazamientos laterales del eje de la barra. En las vibraciones de torsión, cada región transversal de la varilla permanece en su propio plano y gira alrededor de su centro y su eje se mantiene sin distorsiones. Las vibraciones laterales corresponden a la flexión de porciones de la barra, y elementos del eje central se mueven lateralmente durante el movimiento. Se discute brevemente la teoría elemental para cada tipo de vibración y en la sección II.2.4 se vuelve a discutir cada tipo bajo la teoría de Pochhammer-Chree, en la cual se usan las ecuaciones de movimiento en coordenadas cilíndricas.

II.2.1. Vibraciones longitudinales en una varilla

Considerando que cada sección transversal se mantiene plana durante el movimiento y que el esfuerzo sobre ella es uniforme, se puede obtener la ecuación de movimiento directamente.

Considere un pequeño elemento PQ de longitud δx , con un área de sección transversal de la varilla A (ver figura II.4). Si el esfuerzo a través del plano que pasa por P es σ_{xx} el esfuerzo en Q está dado por $\sigma_{xx} + (\partial\sigma_{xx}/\partial x)\delta x$, y si el desplazamiento del elemento está dado por u y ρ es la densidad de la varilla, se tiene por la segunda ley de movimiento de Newton:

$$ma = \rho A \delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F = A \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \delta x \quad (\text{II.56})$$

o

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}. \quad (\text{II.57})$$

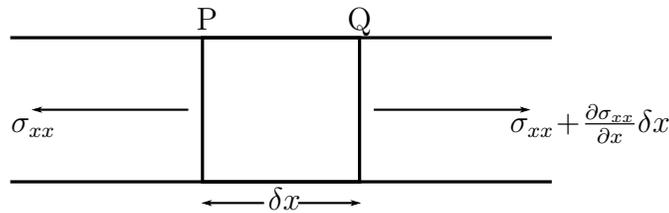


Figura II.4: Fuerzas actuando en un elemento de varilla en movimiento longitudinal.

Como la razón entre σ_{xx} y $\frac{\partial u}{\partial x}$ es el módulo de Young, se tiene

$$\sigma_{xx} = E \frac{\partial u}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (\text{II.58})$$

De la ecuación (II.57) y (II.58) se sigue

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (\text{II.59})$$

Esta ecuación es una ecuación de onda como (I.46) y corresponde a ondas longitudinales que se propagan a lo largo de la varilla con velocidad $\sqrt{(E/\rho)} = c_0$.

La solución a la ecuación (II.59) se expresa como

$$u = f(c_0 t - x) + F(c_0 + x), \quad (\text{II.60})$$

con F y f dos funciones arbitrarias que dependen de las condiciones iniciales. La función f corresponde a una onda viajando en la dirección en que crece x , y F una función que corresponde a una onda viajando en la dirección contraria. La ecuación (II.59) se aplica para barras delgadas o varillas de cualquier sección transversal uniforme.

Sin embargo, el tratamiento anterior es solo aproximado porque se supuso que las secciones transversales de la varilla se mantienen planas cuando pasa la onda de esfuerzos, y el esfuerzo actúa uniformemente en cada sección. Las expansiones y contracciones longitudinales, necesariamente resultan en contracciones y expansiones laterales. Recuérdese que la razón entre las deformaciones laterales y longitudinales están dadas por la razón de Poisson ν . Los movimientos laterales dan como resultado que la distribución de esfuerzos en las secciones de la varilla no sean uniformes, y las secciones transversales se distorsionan.

La ecuación (II.60) puede usarse cuando las ondas elásticas que se propagan tienen una longitud de onda mucho más grande comparada con las dimensiones laterales de la varilla. En este caso, por simplicidad, se toma una onda propagándose en la dirección en la que crece x

$$u = f(c_0t + x). \quad (\text{II.61})$$

Derivando ambos lados de (II.61) respecto de x se tiene

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'(c_0t + x), \quad (\text{II.62})$$

donde f' denota la derivación respecto del argumento $(c_0t + x)$. Si ahora se deriva (II.61) respecto de t ambos lados

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_0 f'(c_0t + x), \quad (\text{II.63})$$

y de (II.62) y (II.63)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_0 \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (\text{II.64})$$

Como $\partial u / \partial x = \sigma_{xx} / E$

$$\sigma_{xx} = \left(\frac{E}{c_0} \right) \frac{\partial u}{\partial t} = \rho c_0 \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (\text{II.65})$$

La ecuación (II.65) muestra que hay una relación lineal entre el esfuerzo en cualquier punto y la velocidad de la partícula, con una constante de proporcionalidad de ρc_0 , correspondiente a la impedancia característica.

Como la velocidad de propagación c_0 es independiente de la frecuencia de la onda de esfuerzos, un pulso de esfuerzos cuyos componentes de Fourier importantes tienen longitudes de onda grandes comparadas con el diámetro de la varilla viajan por ella sin dispersión.

II.2.2. Vibraciones de torsión en una varilla

En las vibraciones de torsión de una varilla cilíndrica, cada sección transversal se mantiene en su propio plano y gira alrededor de su centro. La ecuación de movimiento se encuentra considerando las fuerzas actuando en un pequeño elemento infinitesimal PQ de longitud δx (ver figura II.5).

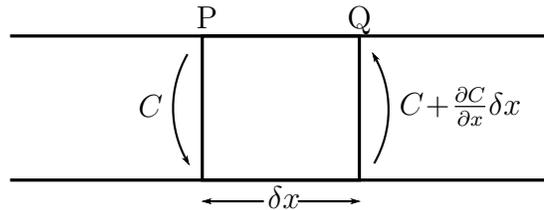


Figura II.5: Pareja de torques actuando en un elemento de varilla en movimiento de torsión.

Supóngase que el torque que actúa en la sección que pasa por P es C , y el torque opuesto de torsión en la sección que pasa por Q es $C + (\partial C / \partial x) \delta x$. Si el ángulo promedio a través del cual gira un elemento alrededor de su eje es θ , se puede igualar el torque total al producto del momento de inercia del elemento I' y su aceleración angular. Así se tiene

$$\left(C + \frac{\partial C}{\partial x} \delta x - C \right) = \frac{\partial C}{\partial x} \delta x = I' \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}. \quad (\text{II.66})$$

Si dos torques opuestos, cada uno de magnitud C , actúan en extremos opuestos de un cilindro de longitud x' y radio r , producen una rotación angular relativa entre las caras en los extremos de θ' , donde

$$C = \frac{1}{2} \pi \mu r^4 \theta' / x'. \quad (\text{II.67})$$

(Feynman et al. [9, pp. 38-6, 38-7]). Para la sección PQ, si la rotación relativa entre las secciones a través de P y Q es $\delta\theta$, se encuentra a partir de la relación (II.67) en el límite que

$$C = \frac{1}{2} \pi \mu r^4 \frac{\partial \theta}{\partial x}. \quad (\text{II.68})$$

El momento de inercia I' del elemento cilíndrico PQ alrededor del eje está dado por

$$I' = \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 (\rho \delta x)(r) dr d\theta = \rho \delta x \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^3 dr = 2\pi \rho \delta x \frac{r^4}{4} = \frac{1}{2} \pi \rho r^4 \delta x. \quad (\text{II.69})$$

Substituyendo C e I' de (II.68) y (II.69) en la ecuación (II.66)

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial x} \delta x &= I' \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \\ \frac{1}{2} \pi \mu r^4 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \delta x &= \frac{1}{2} \pi \rho r^4 \delta x \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \end{aligned}$$

lo que da la ecuación

$$\mu \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}. \quad (\text{II.70})$$

Ésta es también una ecuación de onda como (I.46), y muestra que las ondas de torsión se propagan en una varilla cilíndrica con una velocidad $\sqrt{(\mu/\rho)}$, que es idéntica a la velocidad de propagación de ondas de distorsión en un medio infinito.

II.2.3. Vibraciones de flexión en una varilla

En la teoría más simple de vibraciones de flexión de varillas de sección transversal uniforme pero de perfil arbitrario, se supone que el movimiento de cada elemento de la varilla es puramente uno de translación en una dirección perpendicular al eje de la varilla.

La ecuación obtenida (Morse y Ingard [21, p. 178]) para este tipo de ondas es

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = -c_0^2 K^2 \frac{\partial^4 u_3}{\partial x^4}, \quad (\text{II.71})$$

donde K es el radio de giro de la sección transversal alrededor de un eje en la superficie neutra¹ perpendicular al eje de la varilla por lo que el momento de inercia I está dado por $I = K^2 A$, donde A es su área transversal, u_3 los desplazamientos en la dirección z y $c_0 = \sqrt{(E/\rho)}$. Para una varilla cilíndrica de radio a , $K = a/2$. La ecuación (II.71) es la ecuación de onda para vibraciones de flexión. Puede verse, haciendo la sustitución directa, que en general una solución de la forma $u_3 = f(x - ct)$ o

¹La superficie neutra es una superficie cuyos elementos o se estiran ni se contraen.

$u_3 = f(x + ct)$ no satisface esta ecuación. Así, una perturbación flexural de forma arbitraria se propaga a lo largo de la varilla con dispersión.

Ahora, si ondas de flexión senoidales se propagan a lo largo de la varilla con velocidad c' , se tiene

$$u_3 = D \cos(\omega t - kx), \quad (\text{II.72})$$

con D su amplitud, $\omega = 2\pi c'/\Lambda$ la frecuencia angular, $k = 2\pi/\Lambda$, donde Λ es su longitud de onda. Usando esta última expresión en (II.71), se obtiene para la velocidad de fase c' que

$$c' = \frac{2\pi c_0 K}{\Lambda}. \quad (\text{II.73})$$

De esta ecuación, se ve que ondas con longitud de onda muy pequeña, viajarían con una velocidad muy grande. Para determinar la velocidad con la que un pulso flexural propaga energía se tiene que encontrar la velocidad de grupo c'_g . Ésta se define como la velocidad con la que un paquete de ondas se propaga, y cuyas longitudes de onda que componen al paquete son cercanas a Λ . La relación entre c'_g y c' es

$$c'_g = c' - \Lambda \frac{dc'}{d\Lambda}. \quad (\text{II.74})$$

De esta ecuación y la anterior se ve que $c'_g = 2c'$. La velocidad de propagación de la energía puede ser incluso más grande que la velocidad límite en el medio. La ecuación (II.73), y que la velocidad de grupo sea el doble de la de fase solo son válidas cuando la longitud de onda es grande comparada con K , el radio de giro de la varilla.

Las razones por las que el tratamiento anterior ya no es válido cuando la longitud de onda es comparable con las dimensiones laterales (el radio de giro está relacionado con las dimensiones de la varilla) de la varilla son:

- I La suposición de que el movimiento es puramente de translación en la dirección z es injustificado para longitudes de onda cortas porque el movimiento rotacional debe tomarse en cuenta.
- II La suposición de que las secciones longitudinales de elementos de la varilla se mantienen rectangulares en forma durante el movimiento no está justificada para longitudes de onda comparables con el grosor de la varilla.

Cuando se toman en cuenta I y II, de la ecuación (II.71) se sigue

$$c_0^2 K^2 \frac{\partial^4 u_3}{\partial x^4} - K^4 (1 + \epsilon') \frac{\partial^4 u_3}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\epsilon' K^2}{c_0^2} \frac{\partial^4 u_3}{\partial t^4} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = 0, \quad (\text{II.75})$$

con $\epsilon' = 2(1 + \nu)/R'$, ν la razón de Poisson y R' una constante que depende de la forma de la sección transversal de la varilla, que en el caso de una varilla de sección transversal circular vale $R' = 10/9$. Un tratamiento más completo puede verse en Kolsky [15, pp. 48-54].

II.2.4. Aproximación de Pochhammer-Chree

Las ecuaciones de movimiento (I.30) sirven para resolver cualquier problema de vibración o propagación de esfuerzos si se insertan las condiciones de frontera apropiadas al problema. En la práctica, no han podido encontrarse soluciones exactas incluso para el caso de un cilindro de longitud finita, aunque en este caso particular se pueden encontrar soluciones que den resultados muy cercanos a la realidad,

siempre y cuando la longitud del cilindro sea grande comparada con su diámetro (Kolsky [15]). El problema fue investigado primero por Pochhammer (1876) en términos de las ecuaciones elásticas generales e independientemente por Chree (1889).

Las ecuaciones de movimiento para un medio isotrópico (I.30), en coordenadas cilíndricas r , θ y z , con sus correspondientes desplazamientos u_r , u_θ y u_z toman la forma

$$\rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Theta}{\partial r} - \frac{2\mu}{r} \frac{\partial \bar{\omega}_z}{\partial \theta} + 2\mu \frac{\partial \bar{\omega}_\theta}{\partial z}, \quad (\text{II.76})$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} - 2\mu \frac{\partial \bar{\omega}_r}{\partial z} + 2\mu \frac{\partial \bar{\omega}_z}{\partial r}, \quad (\text{II.77})$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Theta}{\partial z} - \frac{2\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \bar{\omega}_\theta) + \frac{2\mu}{r} \frac{\partial \bar{\omega}_r}{\partial \theta}, \quad (\text{II.78})$$

donde

$$\Theta = \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (\text{II.79})$$

y $\bar{\omega}_r$, $\bar{\omega}_\theta$ y $\bar{\omega}_z$ son las componentes de rotación alrededor de las tres direcciones ortogonales en las coordenadas cilíndricas, es decir, una dirección es a lo largo de la dirección del radio vector r , otra es perpendicular al plano rz y la otra es paralela al eje z respectivamente. Las tres componentes están dadas por

$$\left. \begin{aligned} 2\bar{\omega}_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z}, \\ 2\bar{\omega}_\theta &= \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}, \\ 2\bar{\omega}_z &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r u_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.80})$$

Para usar las relaciones (II.76), (II.77) y (II.78) en las vibraciones de un cilindro circular, se toma el eje z a lo largo del eje del cilindro. También, en la superficie del cilindro las tres componentes del esfuerzo que actúan radialmente sea anulan. Esto, claro, bajo la suposición de que su superficie está libre de esfuerzos. Por analogía con los símbolos usados en coordenadas cartesianas, las componentes de esfuerzo que actúan de forma radial se denotan por σ_{rr} , $\sigma_{r\theta}$ y σ_{rz} , y la relación entre ésta y las deformaciones está dada por las siguientes ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} &= \lambda \Theta + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r}, \\ \sigma_{r\theta} &= \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) \right], \\ \sigma_{rz} &= \mu \left[\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.81})$$

Considérese ahora la propagación de un tren infinito de ondas senoidales a lo largo de un cilindro sólido tal que los desplazamientos en cada punto son una función armónica simple de z , así como de t . Entonces

$$\left. \begin{aligned} u_r &= U e^{i(kz + \omega t)}, \\ u_\theta &= V e^{i(kz + \omega t)}, \\ u_z &= W e^{i(kz + \omega t)}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.82})$$

donde U , V y W son funciones de r y θ .

La frecuencia de las ondas está dada por $\mathfrak{f} = \omega/2\pi$, y su longitud de onda por $\Lambda = 2\pi/k$, por lo que la velocidad de fase está dada por ω/k . Substituyendo las expresiones (II.82) en las ecuaciones (II.76), (II.77) y (II.78), e insertando las condiciones de frontera, que las tres componentes de esfuerzos (II.81) son nulas en la superficie del cilindro ($r = a$), se encuentran expresiones para la velocidad de fase de ondas de una frecuencia dada.

Las ondas longitudinales se discuten con más detalle, pues son las que más importan para el problema particular de esta tesis.

Ondas longitudinales

Se supone a continuación que los desplazamientos u_θ son cero, es decir, que cada partícula vibra en el plano rz , y que además el movimiento es simétrico alrededor del eje del cilindro, por lo que U y W son independientes de θ . Así, de (II.80), $\bar{\omega}_r$ y $\bar{\omega}_z$ son ambas cero y como, de las ecuaciones (II.82), $\partial u_\gamma / \partial t = i\omega u_\gamma$, $\partial u_\gamma / \partial z = iku_\gamma$, donde γ es r , θ o z , las ecuaciones (II.76) y (II.78) se convierten en

$$-\rho\omega^2 u_r = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Theta}{\partial r} + i2\mu k \bar{\omega}_\theta, \quad (\text{II.83})$$

$$-\rho\omega^2 u_z = i(\lambda + 2\mu)k\Theta - \frac{2\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\bar{\omega}_\theta). \quad (\text{II.84})$$

Usando (II.79) y (II.80) se puede eliminar o $\bar{\omega}_\theta$ o Θ de (II.83) y (II.84). Con esto se tienen las dos ecuaciones

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial r} + h'^2 \Theta = 0, \quad (\text{II.85})$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\omega}_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\omega}_\theta}{\partial r} - \frac{\bar{\omega}_\theta}{r^2} + \kappa'^2 \bar{\omega}_\theta = 0, \quad (\text{II.86})$$

donde

$$h'^2 = \rho\omega^2 / (\lambda + 2\mu) - k^2, \quad (\text{II.87})$$

$$\kappa'^2 = \rho\omega^2 / \mu - k^2. \quad (\text{II.88})$$

Cambiando la variable en la ecuación (II.85) de r a $h'r$ se obtiene la ecuación de orden cero de Bessel, por lo que la solución finita en el eje es

$$\Theta = GJ_0(h'r). \quad (\text{II.89})$$

También, si se cambia la variable a $\kappa'r$ en (II.86), se convierte en la ecuación de orden uno, por lo que

$$\bar{\omega}_\theta = HJ_1(\kappa'r), \quad (\text{II.90})$$

donde G y H son funciones de z y t , y son independientes de r . Substituyendo u_r y u_z de (II.82) en (II.79) y (II.80), se obtienen

$$\Theta = \left[\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} + ikW \right] e^{i(kz + \omega t)}, \quad (\text{II.91})$$

$$2\bar{\omega}_\theta = \left[ikU - \frac{\partial W}{\partial r} \right] e^{i(kz + \omega t)}. \quad (\text{II.92})$$

Para satisfacer las ecuaciones (II.89), (II.90), (II.91) y (II.92), U y W deben tener la forma

$$U = A \frac{\partial}{\partial r} J_0(h'r) + Ck J_1(\kappa'r), \quad (\text{II.93})$$

$$W = Aik J_0(h'r) + \frac{Ci}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r J_1(\kappa'r)], \quad (\text{II.94})$$

donde A y C son constantes.

Sustituyendo (II.93) y (II.94) en las expresiones para σ_{rr} y σ_{rz} dadas por (II.81), y la condición de su anulaci3n en la frontera del cilindro ($r = a$), se obtiene

$$A \left[2\mu \frac{\partial^2}{\partial r^2} J_0(h'r) \Big|_{r=a} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \omega^2 \rho J_0(h'r) \Big|_{r=a} \right] + 2C\mu k \frac{\partial}{\partial r} J_1(\kappa'r) \Big|_{r=a} = 0 \quad (\text{II.95})$$

$$2Ak \frac{\partial}{\partial r} J_0(h'r) \Big|_{r=a} + C \left(2k^2 - \frac{\omega^2 \rho}{\mu} \right) J_1(\kappa'r) \Big|_{r=a} = 0. \quad (\text{II.96})$$

De estas dos ecuaciones, se eliminan A y C para obtener una que involucra la frecuencia y longitud de onda de las vibraciones, el radio del cilindro a , las constantes elásticas λ y μ , y la densidad ρ . A la ecuaci3n as3 obtenida se le conoce como la *ecuaci3n de frecuencia*. De 3sta puede obtenerse la velocidad de fase de las ondas senoidales de cualquier frecuencia a lo largo de un cilindro infinitamente largo. Estas soluciones no son exactas para un cilindro de longitud finita, pues no pueden obedecerse las condiciones de que los extremos est3n libres de tracciones para soluciones de este tipo. Sin embargo, cuando la longitud del cilindro es grande comparada con a , los esfuerzos residuales son muy peque1os.

Desarrollando las funciones de Bessel en series de potencias, se obtiene una aproximaci3n para la velocidad de fase en t3rminos de los dem3s par3metros. Estos desarrollos son

$$J_0(h'a) = 1 - \frac{1}{4}(h'a)^2 + \frac{1}{64}(h'a)^4 - \dots, \quad (\text{II.97})$$

$$J_1(\kappa'a) = \frac{1}{2}(\kappa'a) - \frac{1}{16}(\kappa'a)^3 + \dots. \quad (\text{II.98})$$

De (II.87) y (II.88), si el radio del cilindro es suficientemente peque1o para que $h'a$ y $\kappa'a$ sean peque1os comparados con la unidad, se encuentra que la longitud de onda de las vibraciones debe ser grande comparada con el radio del cilindro. Adem3s se puede aproximar la ecuaci3n de frecuencia usando los desarrollos de las funciones de Bessel a primer orden. Esto lleva a la expresi3n

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{(\lambda + \mu)\rho} = \frac{E}{\rho}. \quad (\text{II.99})$$

3sta 3ltima da la velocidad de fase, el mismo valor que se obtiene del tratamiento elemental.

Si ahora se toman en cuenta t3rminos de orden a^2 en la ecuaci3n, se obtiene una mejor aproximaci3n para la velocidad de fase:

$$\frac{\omega}{k} = \left(\frac{E}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{4} \nu^2 k a^2 \right). \quad (\text{II.100})$$

3sta 3ltima se conoce tambi3n como f3rmula de Rayleigh que 3l obtuvo de consideraciones de la energ3a asociada con los movimientos laterales de la varilla. Se expresa tambi3n en forma adimensional

$$\frac{c_\omega}{c_0} = 1 - \nu^2 \pi^2 \left(\frac{a}{\Lambda} \right)^2, \quad (\text{II.101})$$

donde $c_\omega = \omega/k$ es la velocidad de fase de las ondas, $c_0 = \sqrt{(E/\rho)}$ es la velocidad de ondas infinitamente grandes en una varilla, y $\Lambda = 2\pi/k$ la longitud de onda. De la ecuación (II.101), puede verse que la velocidad de fase se va haciendo más pequeña para longitudes de onda decrecientes, y que en $\Lambda = \nu\pi a$ la velocidad se hace cero. Esto muestra que la ecuación no es confiable para longitudes de onda comparables al radio de la varilla.

La velocidad de grupo, calculada con la ecuación (II.74) a partir de la ecuación (II.101), está dada por

$$\frac{c_g}{c_0} = 1 - 3\nu^2\pi^2 \left(\frac{a}{\Lambda}\right)^2, \quad (\text{II.102})$$

que se anula para una longitud de onda de $\pi\nu a\sqrt{3}$.

La ecuación de frecuencia obtenida de las ecuaciones (II.95) y (II.96) depende de seis parámetros: λ , μ , ρ , a , ω y k . En forma adimensional depende de las variables (c_ω/c_0) , (a/Λ) y ν . Así, conocida ν , se obtiene una ecuación que solo involucra a (c_ω/c_0) y a (a/Λ) . Esta ecuación tiene múltiples raíces que corresponden a diferentes modos de vibración de la varilla.

El modo particular de vibración depende de las condiciones iniciales, y de forma experimental se encuentra que usualmente el primer modo es el excitado.

Un límite superior razonable en que la velocidad de fase del primer modo se puede considerar como $c_0 = \sqrt{(E/\rho)}$ ocurre cuando $a/\Lambda \geq \frac{1}{6}$ (Pollard [24]).

Ondas de torsión

En este caso debe encontrarse una solución para las ecuaciones (II.76), (II.77) y (II.78), para las cuales no haya desplazamientos longitudinales o laterales, y que el movimiento sea simétrico alrededor del eje del cilindro, es decir, u_r y u_z son cero y u_θ es independiente de θ .

Un procedimiento análogo (Kolsky [15, pp. 65-68]) al que se hizo para vibraciones longitudinales lleva a la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{J_1(\kappa' r)}{r} \right] \Big|_{r=a} = 0, \quad \text{es decir,} \quad \frac{\kappa' a J_0(\kappa' a)}{J_1 \kappa' a} = 2. \quad (\text{II.103})$$

Las raíces de (II.103) son un conjunto de valores distintos de $\kappa' a$ que corresponden a distintos modos de vibración de torsión más complejos que involucran cilindros nodales. Si se denota una de estas raíces por K_1 , se obtiene de (II.88)

$$K_1^2 = a^2 \kappa'^2 = a^2 \left(\frac{\omega^2 \rho}{\mu} - k^2 \right), \quad (\text{II.104})$$

cuya forma adimensional es

$$\frac{c_t}{c_2} = \left(K_1^2 \frac{(\Lambda/a)^2}{4\pi^2} + 1 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{II.105})$$

con $c_t = \omega/k$, la velocidad de fase de las ondas torsionales y $c_2 = \sqrt{(\mu/\rho)}$. La ecuación (II.105) da la relación entre las velocidades de fase y la longitud de onda de las ondas de torsión para los diferentes valores de K_1 . Puede verse que en todos estos modos hay dispersión y que la velocidad de fase se vuelve infinita para longitudes de onda muy grandes e igual a c_2 para longitudes de onda muy pequeñas. La velocidad de grupo para estas ondas es c_2^2/c_t , por lo que ésta empieza en cero para longitudes de onda muy grandes y se acerca a c_2 asintóticamente para longitudes de onda más y más pequeñas.

La raíz $\kappa' = 0$ de la ecuación (II.103) debe considerarse aparte. Mientras que para valores de $\kappa' \neq 0$ la solución para V (ver la ecuación (II.82)) es de la forma $B J_1(\kappa' r)$, cuando $\kappa' = 0$ la solución es $V = B' r$, con B y B' constantes. Con la última expresión para V , ahora no solo σ_{rr} y σ_{rz} son cero, sino también $\sigma_{r\theta}$, por lo que se satisfacen las condiciones a la frontera. Como la amplitud de u_θ es proporcional a r , y u_r y u_z son ambas cero, el movimiento correspondiente a esta solución es una rotación de cada sección transversal del cilindro como un todo alrededor de su centro. En este caso como $\kappa'^2 = \rho\omega^2/\mu - k^2 = 0$, se tiene

$$\frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (\text{II.106})$$

Para este modo de propagación no hay dispersión y las velocidades de fase y de grupo son ambas iguales a la velocidad de las ondas de distorsión en un medio infinito.

Ondas de flexión

En este caso, si se toma el eje sin perturbar de la varilla como el eje z y se supone que las vibraciones tienen lugar en el plano que contiene este eje y la línea desde la que se mide θ , se proponen soluciones de la forma

$$\left. \begin{aligned} u_r &= U' \cos \theta e^{i(kz+\omega t)}, \\ u_\theta &= V' \sin \theta e^{i(kz+\omega t)}, \\ u_z &= W' \cos \theta e^{i(kz+\omega t)}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.107})$$

con U' , V' y W' funciones solo de r .

Se encuentra que U' , V' y W' deben cumplir las siguientes relaciones

$$\left. \begin{aligned} U' &= A \frac{\partial}{\partial r} J_1(h'r) + Bk \frac{\partial}{\partial r} J_1(\kappa'r) + \frac{C}{r} J_1(\kappa'r), \\ V' &= \frac{A}{r} J_1(h'r) - \frac{Bk}{r} J_1(\kappa'r) - C \frac{\partial}{\partial r} J_1(\kappa'r), \\ W' &= Aik J_1(h'r) - Bi\kappa'^2 J_1(\kappa'r). \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.108})$$

para que (II.107) cumpla con las relaciones obtenidas de las ecuaciones de movimiento (II.76), (II.77) y (II.78). A , B y C son constantes y h' y κ' están dados por las relaciones (II.87) y (II.88), respectivamente.

Las expresiones (II.107), tomando en cuenta las expresiones (II.108), se insertan en las ecuaciones (II.81), que deben anularse en la superficie del cilindro ($r = a$). Esto lleva a tres ecuaciones simultáneas que involucran las constantes A , B y C , que se eliminan para obtener la ecuación de frecuencia.

II.3. Ondas estacionarias y resonancia en una varilla para ondas longitudinales

Considere una onda de desplazamientos propagándose en la dirección en que x decrece en una varilla cuyo eje también está en el eje x . Como se vio al final de la sección II.1.1, un pulso de este tipo se refleja en una frontera libre como muestra el inciso (b) de la figura II.6 pues el desplazamiento de las partículas está dado por $u_1 + u_2$; u_1 corresponde a un pulso viajando en una dirección y u_2 a otro de

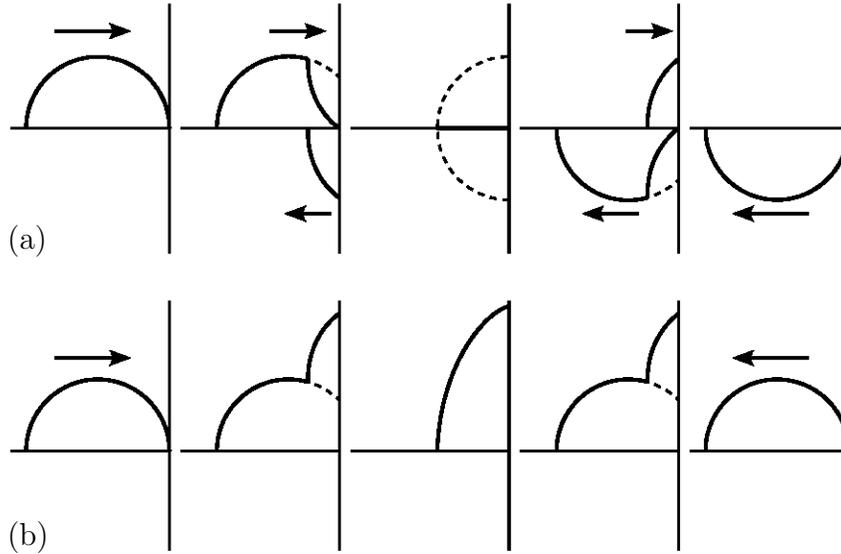


Figura II.6: Pulsos reflejándose en (a) una frontera fija, y (b) una frontera libre.

la misma forma, pero viajando en la dirección opuesta. Para el pulso correspondiente de presión, su reflexión en una frontera libre es como se muestra en el inciso (a) de la figura II.6.

Como se vio en la sección II.1.3, una onda senoidal en una varilla con una pequeña masa en un lado y el otro lado libre para mantener una onda senoidal tiene que cumplir que $k = N_f/L$, tal que N_f son las raíces de la ecuación (II.51).

Si una onda senoidal se propaga en una varilla con ambas fronteras libres, de acuerdo con la condición (II.24), se cumple que la suma de esfuerzos dada por la ecuación (II.23) para $x = L$ es

$$\begin{aligned}
 E[F'(c_1t + L) - f'(c_1t - L)] &= iE\tilde{A}[e^{ik(c_1t+L)} - e^{ik(c_1t-L)}] = 0 \\
 e^{ik(c_1t+L)} - e^{ik(c_1t-L)} &= 0 \\
 e^{ikc_1t}[e^{ikL} - e^{-ikL}] &= 0 \\
 e^{ikL} - e^{-ikL} &= 0 \\
 2\operatorname{sen}(kL) &= 0.
 \end{aligned}$$

Así, se tiene que cumplir que

$$\operatorname{sen}(kL) = 0, \quad \text{es decir, } kL = n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (\text{II.109})$$

Como $k = \omega/c_1$, solo a ciertas frecuencias es posible que la varilla tenga ondas senoidales en ella. Estas frecuencias están dadas por

$$\omega_n = kc_1 = n\pi c_1/L, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (\text{II.110})$$

o como $\omega_n = 2\pi f_n = 2\pi c_1/\Lambda_n$,

$$\Lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{II.111})$$

Claramente, la velocidad de fase de la onda propagándose está dada por

$$c_{1,n} = f_n \Lambda_n = \frac{2f_n L}{n}. \quad (\text{II.112})$$

La forma de la onda de esfuerzos está dada por

$$\sigma_{tot}(x, t) = \sigma_1 + \sigma_2 = 2iE\tilde{A}e^{in\pi c_1 t/L} \text{sen}(n\pi x/L). \quad (\text{II.113})$$

La onda presente en la varilla tiene la importante característica de que sus partes tienen una dependencia senoidal con el tiempo, que es característica del sistema de la varilla y sus fronteras. También, en cualquier instante, la forma de los esfuerzos tiene un comportamiento senoidal, que se mantiene fijo, pero que cambia de amplitud con el tiempo. Existen distintos tipos de modos de propagación que corresponden a los diferentes valores de n . Se muestran en la figura II.7 los cuatro primeros modos en que la onda de esfuerzos puede estar presente.

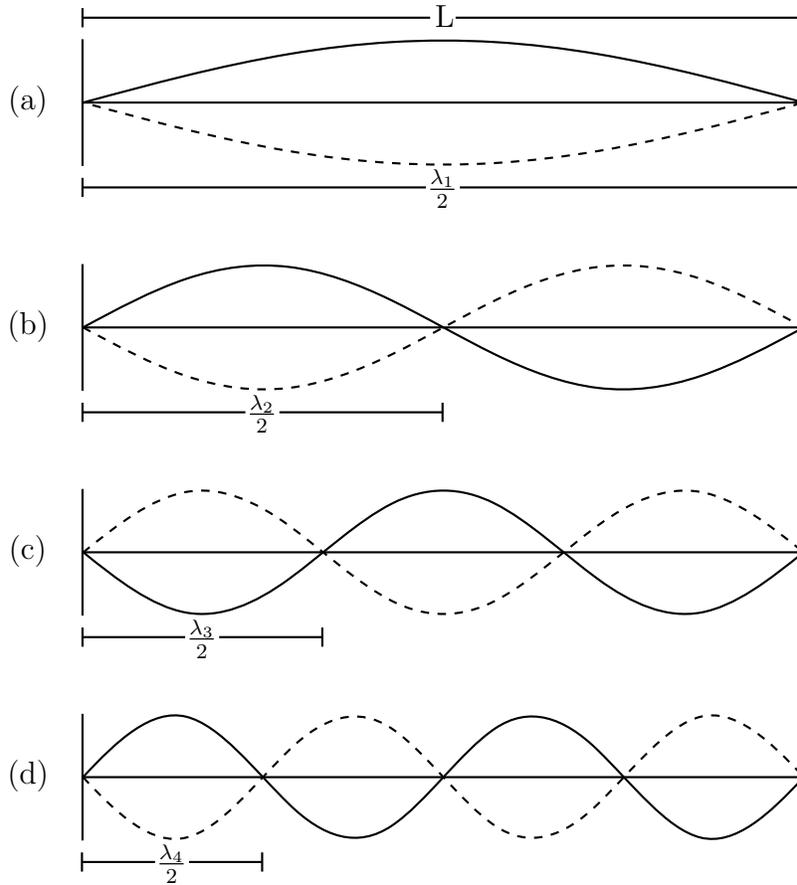


Figura II.7: Primeros cuatro modos de vibración para una onda de esfuerzos.

Los desplazamientos cumplen que

$$u_{tot}(x, t) = u_1 + u_2 = 2\tilde{A}e^{in\pi c_1 t/L} \cos(n\pi x/L). \quad (\text{II.114})$$

La figura II.8 muestra los cuatro primeros modos en que una onda de desplazamientos puede estar presente en una varilla.

La reflexión continua de una onda, de determinada frecuencia, en las fronteras de la varilla tiene como resultado la presencia de no solo dos ondas, como el tratamiento anterior supone, sino de múltiples ondas reflejadas. Si la velocidad de propagación de la onda es c_1 y la longitud de la varilla es L , hay una nueva onda reflejada cada L/c_1 segundos. Es aquí cuando se presenta la resonancia. En una situación de este estilo, la amplitud de las ondas de esfuerzos y las ondas de desplazamientos deberían crecer indefinidamente. Esto no sucede porque hay disipación de energía en la varilla. Desde luego, la parte que se transmite al aire es importante porque de otra forma no se detectaría la resonancia por medio

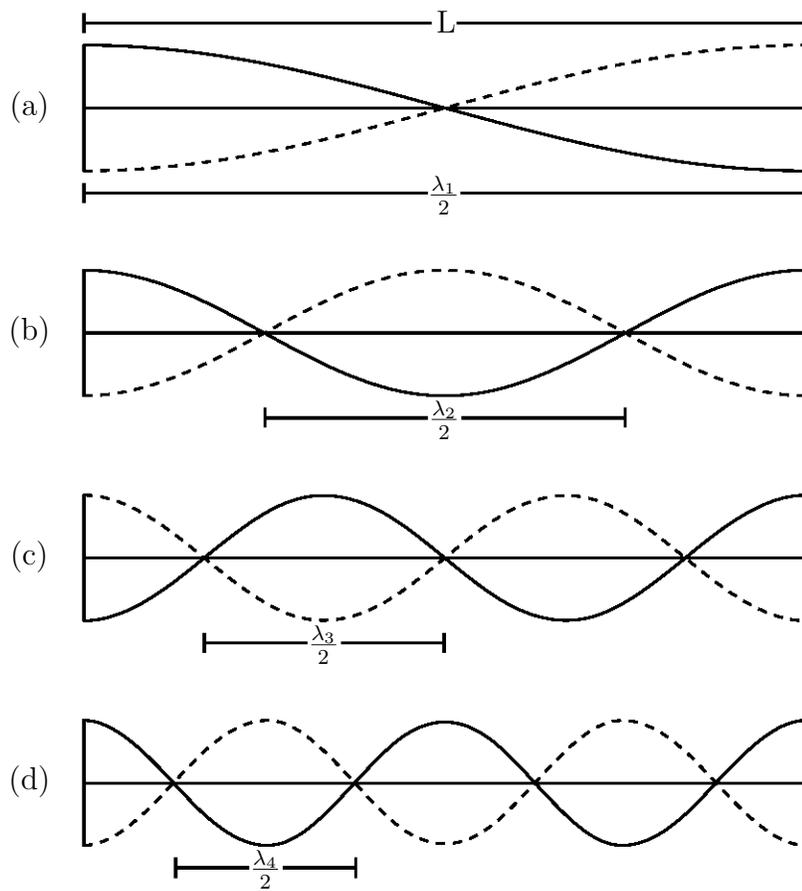


Figura II.8: Primeros cuatro modos de vibración para una onda de desplazamientos.

de un micrófono. Como hay pérdida de energía en las reflexiones, los nodos en la varilla no son reales ya que la onda reflejada no tiene la misma amplitud que la que está presente en la varilla.

II.4. El método de perturbaciones

La idea central detrás del método de perturbaciones, del cual hay muchas variantes, es usar la solución al problema no perturbado como el punto de inicio para desarrollar una corrección a ella, y así mejorar la descripción del sistema perturbado. Este método se puede usar para resolver ecuaciones algebraicas, diferenciales, integrales, integro-diferenciales, etc. Uno o varios términos en una ecuación dada pueden considerarse “pequeños”, usualmente proporcionales a un parámetro pequeño ε , que se incluye por conveniencia en la ecuación. Estos términos también se suponen nulos fuera del intervalo en que interesa resolver el problema o al menos despreciables, y se les conoce como términos de perturbación. La ecuación que no contiene estos términos se conoce como la ecuación no perturbada, y sus soluciones como las soluciones no perturbadas del problema. A continuación, se supone que la solución al problema, $\psi(x)$, se expresa como

$$\psi(x) = \phi_0(x) + \phi_1(x) + \phi_2(x) + \dots, \quad (\text{II.115})$$

donde $\phi_k(x)$ ($k=1, 2, 3, \dots$), son funciones del orden de magnitud de ε^k . En este caso, $\phi_0(x)$ es la solución no perturbada, y todos los demás términos son parte de la solución perturbada. Para esta solución se hace explícita la dependencia con el parámetro ε , con lo que se escribe la solución como

$$\psi(x) = \psi_0(x) + \varepsilon\psi_1(x) + \varepsilon^2\psi_2(x) + \dots. \quad (\text{II.116})$$

Ahora, las funciones $\psi_k(x)$ ($k=1, 2, 3, \dots$) dependen exclusivamente de la variable x . Esta solución se inserta en la ecuación y se reagrupan los términos en potencias de ε . La solución no perturbada cumple la ecuación no perturbada, con lo que es posible simplificar la ecuación obtenida. Los coeficientes de las distintas potencias de ε tienen que ser iguales cada uno a cero. Con esto se obtienen las ecuaciones que tienen que cumplir cada función $\psi_k(x)$ ($k=1, 2, 3, \dots$). Yépez-Martínez et al. [34], trabajan una expresión para la solución perturbativa de n-ésimo orden para la ecuación de onda para el medio inhomogeneo, suponiendo que la velocidad puede escribirse como

$$v^2(x) = (k_0^2 + k_1^2x) + \varepsilon k_2^2x^2 + \varepsilon^2 k_3^2x^3 + \dots, \quad (\text{II.117})$$

en la ecuación de onda

$$v^2(x) \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial t^2}, \quad (\text{II.118})$$

y que su solución puede desarrollarse en sus componentes de Fourier $\Psi(x, t) = \psi(x)e^{-i\omega t}$, donde $\psi(x)$ se desarrolla en términos del parámetro ε

$$\psi(x) = \psi_0(x) + \varepsilon\psi_1(x) + \varepsilon^2\psi_2(x) + \dots, \quad (\text{II.119})$$

donde $\psi_0(x)$ es la solución a la ecuación

$$(k_0^2 + k_1^2x) \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -\omega^2\psi(x). \quad (\text{II.120})$$

La aproximación de primer orden es

$$\psi_1(u) = -\left(u \left(\frac{1}{3}au^2 + \frac{b}{2}\right)\right) [C_1 J_1(u) + C_2 Y_1(u)] + \frac{1}{2} \left(-c + cu^2 + \frac{1}{3}au^4\right) [C_1 J_0(u) + C_2 Y_0(u)], \quad (\text{II.121})$$

con a , b y c dadas por

$$a = -\frac{k_2^2}{4k_0^2k^2}, \quad b = \frac{2k_2^2k_0^2}{k_1^4}, \quad c = -\frac{4k^2k_0^6k_2^2}{k_1^8}, \quad (\text{II.122})$$

y la variable u está dada por

$$u = 2\sqrt{\frac{k_0^2k^2}{k_1^4}}\sqrt{k_0^2 + k_1^2x}, \quad (\text{II.123})$$

y k es el número de onda, relacionado con la frecuencia angular ω por $\omega^2 = k_0^2k^2$. La primera aproximación introduce una dependencia lineal en la función de velocidad. Este trabajo se puede utilizar cuando la dependencia es pequeña. En particular, algún patrón de temperaturas puede lograr este tipo de dependencia de la velocidad con la posición.

II.5. Discusión del modelo

Una de las hipótesis de este trabajo es que las ondas que se propagan en la varilla son longitudinales. En la sección II.2.4 se discutieron los tres tipos de vibraciones en una varilla cilíndrica y en el tratamiento elemental se encontró que las velocidades de propagación son $c_0 = \sqrt{(E/\rho)}$, $c_t = \sqrt{(\mu/\rho)}$ y $c_f = \pi c_0 a / \Lambda$. Cuando el diámetro de la varilla es pequeño comparado con la longitud de onda, estas velocidades se aproximan a la velocidad de cada tipo de onda. Las velocidades de propagación son razonablemente distintas para cada tipo de onda, por lo que es fácil distinguir en resonancia un tipo de onda con otro.

La generación de la onda juega un papel importante en el problema. En las secciones II.1.1 y II.1.2, se vio que una onda que no incide normalmente a la superficie entre los dos medios tiende a crear una onda de distorsión.

Las ondas en la varilla tienen que cumplir con las condiciones en la frontera para permanecer en ella y no atenuarse rápidamente. Particularmente, en el experimento se trata la varilla con una frontera libre y un imán en el otro extremo. Se encontró en la sección II.1.3 que los nodos de desplazamiento se corren y, para determinar el corrimiento, es necesario obtener los valores de kL para los cuales se cumple la ecuación $\tan kL = -(m/m_v)kL$. En este caso $m = 1.59 \pm 0.005$ g y $m_v = 136.20 \pm 0.005$ g, por lo que el cociente $m/m_v = 0.012$. El primer valor en que se cumple la ecuación es 3.10535.² Usando la ecuación (II.54), con $L = 100.1$ cm, se encuentra que $x = 0.506L = 50.7$ cm. Es decir, el nodo central se corre 7 mm.

Para las vibraciones longitudinales en una varilla cilíndrica se utilizan las ecuaciones (II.82), con U y W dadas por las ecuaciones (II.93) y (II.94), y la velocidad de fase se encuentra a partir de las ecuaciones (II.95) y (II.96). Al tratarse de una varilla cilíndrica finita de longitud L , adicionalmente se pide que $\sigma_{zz} = 0$ y $\sigma_{zr} = 0$ en los planos $z = 0$ y $z = L$ que delimitan la varilla.³ En Love [18, p. 290] se encuentran soluciones de la forma

²El valor fue encontrado con la ayuda del programa gnuplot, graficando $\tan(kL)$ y $(1.59/136.2)kL$, y encontrando el primer punto de intersección.

³Aquí no se toma en cuenta la presencia del imán en el extremo de la varilla, pero si el imán es suficientemente delgado no hace falta refinar este tratamiento más allá de lo que se hizo en el párrafo anterior.

$$u_r = \left[A_n \frac{\partial}{\partial r} J_0(h'r) + \frac{n\pi}{\Lambda} C_n J_1(\kappa'r) \right] \text{sen} \left(\frac{n\pi z}{\Lambda} \right) \cos(\omega_n t + \delta), \quad (\text{II.124})$$

$$u_z = \left[\frac{n\pi}{\Lambda} A_n J_0(h'r) + \frac{C_n}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r J_1(\kappa'r)] \right] \cos \left(\frac{n\pi z}{\Lambda} \right) \cos(\omega_n t + \delta), \quad (\text{II.125})$$

la razón entre A_n y C_n se conoce de las condiciones en $r = a$, y ω_n es la frecuencia para el n -ésimo modo de vibración. Estas soluciones satisfacen la condición $\sigma_{zz} = 0$ tanto en $z = 0$ como en $z = L$, pero no satisfacen la condición $\sigma_{zr} = 0$ en estas superficies. Pero, como $\sigma_{zr} = 0$ para la superficie $r = a$ para todos los valores de z , los esfuerzos son muy pequeños en $z = 0$ y $z = L$ cuando a es pequeño comparado con Λ .

Si una vibración se refleja en la frontera libre de la varilla, los desplazamientos totales son $u_z(z) + u_z(-z)$ y $u_r(z) + u_r(-z)$. Si en la reflexión no se pierde energía, los desplazamientos radiales son nulos dado que la función seno es una función impar de z , mientras que los desplazamientos longitudinales son el doble, porque el coseno es una función par en z , como se encontró al final de la sección II.1.1, suponiendo que no se pierde energía.

Se encontró en la sección II.2.4 la aproximación de Rayleigh, en forma no dimensional, para la velocidad de fase de una onda

$$\frac{c_\omega}{c_0} = 1 - \nu^2 \pi^2 \left(\frac{a}{\Lambda} \right)^2. \quad (\text{II.126})$$

Para una varilla de $L = 100.1$ cm, $\Lambda = 200.2$ cm, $a = 0.4$ cm, $\nu = 1/2$,⁴ $c_0 = 500000$ cm/s, el error cometido si no se considera el segundo término en el lado derecho de la ecuación anterior es

$$\varepsilon \approx c_0 \nu^2 \pi^2 \left(\frac{a}{\Lambda} \right)^2 \approx (500000) \left(\frac{1}{4} \right) (10) \left(\frac{0.4}{200.2} \right)^2 \approx \frac{5}{4} 10^6 (2 \times 10^{-3})^2 = \frac{5}{4} 10^6 (4 \times 10^{-6}) = 5 \text{ cm/s}. \quad (\text{II.127})$$

Si se considera $c_\omega = c_0$ se comete un error porcentual de 0.001 %.

Todo lo anterior apunta a que puede considerarse el problema como si fuera unidimensional y que la velocidad de propagación de las ondas longitudinales está dada por c_0 .

La hipótesis fundamental del trabajo es que no solo la densidad y longitud de la varilla cambian sino también las constantes elásticas del material y, por lo tanto, la velocidad.

Aún cuando la razón de Poisson se vea modificada por la temperatura, en la fórmula de Rayleigh se ve que no altera considerablemente el valor de c_ω . Por ello se considera que el único cambio se da en el primer término, es decir, en $c_0 = \sqrt{(E/\rho)}$.

La densidad de la varilla original es $\rho = m_v / \pi r^2 L$. Como cada dimensión se estira en la misma proporción, el radio cambia a lo más $\Delta r = \alpha(200)r = 3 \times 10^{-5}(200)(0.4) = 2.4 \times 10^{-3}$ cm, es decir, pueden despreciarse los cambios en la dimensión radial. Para el cálculo anterior se tomó una diferencia de temperaturas máxima de 200°C y un coeficiente de expansión lineal mayor que el del aluminio, y aún en ese caso el cambio de dimensión fue despreciable. Para el cambio en la longitud de la varilla estrictamente se tiene que usar la fórmula (I.18), pero como el coeficiente de expansión lineal térmica para el aluminio es $\alpha = 0.231 \times 10^{-4}$, se toma el máximo de temperatura sin temor a cometer un error muy grande. El cambio aproximado en densidad está dado por

$$\rho = \frac{m_v}{\pi r^2 (L + \Delta L)} = \frac{m_v}{\pi r^2 (L + \alpha \Delta T L)}. \quad (\text{II.128})$$

⁴En la sección I.1.5 se vio que ν no puede ser mayor que 1/2.

Ya que la estimación de la densidad no presenta mucha dificultad, puede tomarse en cuenta en los cálculos finales para tener un mejor resultado.

La conductividad térmica además puede repercutir en la velocidad de propagación y en la absorción en ondas planas según Bhatia [4, pp. 266-268]. Se hace ahí un tratamiento termodinámico que considera las constantes isotérmicas e isobáricas del material. Los datos obtenidos en el experimento y los disponibles no permiten una buena comparación, por lo que este tratamiento se deja de lado.

Los distintos cambios que trae el cambio de temperatura a lo largo de la varilla hacen que el problema de la resonancia en la varilla no sea tan fácil de abordar.

II.5.1. Resonancia en una varilla cilíndrica para un patrón de temperaturas no uniforme

Una varilla resonando a una frecuencia determinada, cuando se calienta, pierde la resonancia. Sin embargo, es posible encontrar de nuevo otra frecuencia de resonancia. En los experimentos realizados se encuentra que esto sucede incluso para perfiles de temperatura no homogéneos. La razón de esto se explica con el cambio de la velocidad de propagación de las ondas en la varilla, pues la longitud de la varilla no cambia de forma que se explique totalmente el cambio de frecuencia de resonancia, y la relación $c = f\Lambda$ tiene que seguir cumpliéndose. Se vio en la sección I.1.6 que estos cambios de longitud en la varilla eran del orden de décimas de centímetros para una varilla de 1 metro, sometida a un gradiente de 200°C. Considerando un caso en que los cambios en la longitud de onda son de 1.2 cm, para conservar el valor de la velocidad de propagación, f debe cambiar.

$$\begin{aligned} f_1\Lambda &= f_2(\Lambda + \Delta\Lambda) \\ \frac{\Lambda}{\Lambda + \Delta\Lambda} &= \frac{f_2}{f_1} \\ \frac{f_2}{f_1} &= \frac{200}{201.2} \approx 0.994 \end{aligned}$$

Así, la frecuencia de resonancia a una temperatura mayor es siempre menor que a temperatura ambiente. Considerando una frecuencia $f_1 = 2466$ Hz, se tiene $f_2 \approx 2451.29$ Hz. La comparación de este valor con los datos debe mostrar que el cambio de frecuencias es diferente al esperado de solo haber un cambio en la longitud de la varilla. De hecho, es el caso, y se hace la suposición que la modificación en la frecuencia también se debe al cambio de la velocidad de propagación de la onda. Por ejemplo, en la tabla IV.11 puede verse que para una temperatura promedio de 116.8°C, la frecuencia de resonancia medida es de 2402.5 Hz, esto es, la frecuencia de resonancia es menor aún que la esperada en un cálculo muy holgado.⁵

En las ecuaciones (II.124) y (II.125), este cambio en la velocidad de propagación da como resultado las nuevas ecuaciones

$$u_r = U(r, T, n) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi z}{\Lambda_T} \right) \cos(\omega_{n,T}t + \delta), \quad (\text{II.129})$$

$$u_z = W(r, T, n) \cos \left(\frac{n\pi z}{\Lambda_T} \right) \cos(\omega_{n,T}t + \delta), \quad (\text{II.130})$$

⁵Incluso considerando las longitudes efectivas $f_2 \approx 2460.67$ Hz, y de nuevo la frecuencia de resonancia es menor.

donde $U(r, T, n)$ y $W(r, T, n)$ son funciones que dependen solo de el radio r , de la temperatura en cada punto T y del modo n . La longitud de onda Λ_T cambia debido a que la longitud de la varilla también cambia con el patrón de temperatura no uniforme en la varilla. Finalmente, la frecuencia angular $\omega_{n,T}$ también se ve afectada por el cambio de temperatura.

Estos cambios recorren la resonancia para otra frecuencia de excitación $\omega_{n,T}$, y modifican las amplitudes $U(r, T, n) \cos(\omega_{n,T}t + \delta)$ y $W(r, T, n) \cos(\omega_{n,T}t + \delta)$ para cada punto del eje z donde se encuentra la varilla. El cambio en la función que depende de z para cada uno de los desplazamientos solo se acopla al cambio de longitud de la varilla y se mantiene el resultado de que en la reflexión, de no existir pérdidas de energía, los desplazamientos en la dirección r se anulan, y los desplazamientos en la dirección z son el doble. Una hipótesis usada es que la onda promedia los cambios de temperatura y de propiedades en la varilla, cambiando su amplitud y velocidad. Esta suposición parece posible porque la longitud de onda es de aproximadamente dos metros, y las perturbaciones (que se creen pequeñas) ocurren en unos cuantos centímetros.

Una alternativa a esta hipótesis es que la velocidad de fase de la onda se modifique respecto a su posición, pues la temperatura varía respecto a la posición. Se puede imaginar la varilla dividida en distintas regiones con distintas temperaturas, y en cada región constantes elásticas determinadas por la temperatura. Entre regiones, la continuidad de la onda no debe romperse, pero conserva la misma frecuencia, aunque no la misma velocidad. La longitud de onda en esa región debe entonces cambiar, puesto que $c = f\Lambda$. Este tratamiento se vuelve complicado porque las regiones no están delimitadas claramente y los cambios en las propiedades y en las temperaturas son continuos. Un tratamiento adecuado para este problema es la teoría de perturbaciones, bajo el supuesto que los cambios generados en las propiedades del material no son muy grandes. En el artículo de Yépez-Martínez et al. [34] se investiga, con el método de perturbaciones, el problema en el que las velocidades cambian a lo largo de una distancia x . En este caso no es posible utilizar esa herramienta para obtener información de las velocidades porque se desconoce el valor de amplitudes a lo largo de la varilla, y la velocidad cambia siempre de la misma forma (a primer orden de aproximación, el cuadrado de la velocidad cambia con el cuadrado de la posición). Podría abordarse el problema por regiones de nuevo, y podrían estar mejor definidas.

En la hipótesis presentada en el párrafo anterior, la resonancia todavía es posible. Si una onda de desplazamientos de la forma $A(r, T(x), n)e^{i(k(x)x + \omega_T t + \delta)}$ se propaga en la varilla, con $T(x)$ la función de la temperatura con respecto a la posición, r el radio de la varilla, δ una fase, n el modo de vibración y $k(T)$ el número de onda como función de la temperatura (o de la posición, si se tiene en cuenta que $T = T(x)$), y en la frontera libre se refleja como $A(r, T(x), n)e^{i(k(x)x - \omega_T t + \delta)}$, la superposición de estas dos ondas da como resultado

$$\begin{aligned} A(r, T(x), n)e^{i(k(T)x - \omega_T t + \delta)} + A(r, T(x), n)e^{i(k(T)x + \omega_T t + \delta)} &= A(r, T(x), n)e^{i(k(T)x + \delta)}(e^{-i(\omega_T t)} + e^{i\omega_T t}) \\ &= A(r, T(x), n)e^{i(k(T)x + \delta)}2 \cos \omega_T t. \end{aligned}$$

Tomando la parte real se ve que los desplazamientos tienen la forma $2A(r, T(x), n) \cos(k(T)x + \delta) \cos \omega_T t$. Cada desplazamiento es entonces el doble de lo que era antes. La frecuencia angular ω_T en este caso no tiene una relación tan directa como en la hipótesis anterior ($c = (\omega_T/k) = \Lambda_T \omega_T / 2\pi$). Se tiene una velocidad de fase local tal que $c = \omega_T / k(T)$. Las condiciones de frontera y en el nodo central determinan las constantes en la función $k(T)$, y el valor de δ . Sin embargo, de esta deducción no está claro qué pasa con los desplazamientos y particularmente en el centro de la varilla, pues para obtenerlos se tiene que dividir entre el módulo de Young (que cambia con la posición) e integrar. Cada parte en la varilla oscila con una frecuencia $\omega_T / 2\pi$, pero las condiciones en la frontera y el nodo central podrían volver imposible

que se mantenga una onda estacionaria en la varilla. De existir una resonancia, alguna parte en la varilla tiene que oscilar con una frecuencia $\omega_T/2\pi$ con una amplitud resultante distinta de cero, y debe ser una función creciente con el tiempo en los primeros instantes.

La primera aproximación en la teoría de perturbaciones permitiría tratar el problema, pero el patrón de temperaturas tiene que ser uno muy especial, que permita que la velocidad cambie linealmente con la posición.

II.5.2. Intervalos de validez y otros trabajos

Desde luego, uno de los intervalos en que es válida la teoría está marcado por el límite de elasticidad del aluminio. Fuera de este intervalo la ley de Hooke no es válida. En esos casos, la deformación resultado de un esfuerzo es muy grande y puede llevar a dislocaciones o fracturas en la varilla. Por lo tanto, la intensidad de la onda en el material no debe ser muy grande porque ya no se cumple la ley de Hooke.

Como las dimensiones de la varilla ya están dadas, la validez de la aproximación de la velocidad de propagación de la onda longitudinal por el valor $\sqrt{E/\rho}$ está dada por la elección de la frecuencia de la onda en la varilla y también por el cociente D/L , con D el diámetro de la varilla y L su longitud. De la fórmula de Rayleigh adimensional (II.101), puede verse que, para longitudes de onda del orden del radio de la varilla, el segundo término ya no es despreciable. También, el cociente mencionado, al menos en varillas de acero, tiene que ser menor que 0.31 (Bayón et al. [3]). En esta última referencia, concretamente se encuentra que para dos varillas cilíndricas circulares, con distinto cociente D/L , pero menor que 0.4, las velocidades de propagación difieren en 5%. Anteriormente Bancroft [2] afirmaba que si D/L era menor que 0.4 el error involucrado sería menor que el 0.05%.

Los procesos de preparación de la varilla de aluminio son importantes porque determinan su grado de isotropía. Por ejemplo, Booker y Sagar [5] encuentran que para varillas de latón había variaciones importantes entre los resultados experimentales y teóricos para las velocidades de propagación, pero se debían a una orientación preferida de los granos en el material. Sullivan y Papadakis [28] dicen que el tiempo de propagación de una onda en un material policristalino es proporcional a la fracción de cristales orientados, y que una onda ultrasónica transversal propagándose en un metal policristalino tiene una sola velocidad si la orientación de los granos es completamente aleatoria, y dos velocidades distintas si los granos están alineados. La velocidad de propagación de ondas de dilatación también cambia con la temperatura (Raggio et al. [25]). En el ajuste lineal hecho en esta referencia se encuentra una pendiente de $-0.642 m/(s^\circ C)$, para barras de acero. También, Zemanek y Rudnick [35] atribuyen la mejor correlación de los datos con la aproximación de Rayleigh que a la teoría exacta de Pochhammer-Chree en el experimento realizado al proceso de fabricación de la varilla.

Calthrop y Miller [6] suponen la dependencia del módulo de Young en la temperatura de la forma $E = E_0 e^{KT}$, con $K = 19 \times 10^{-5}$ en el caso del aluminio (de E_0 no se dice nada), y en el experimento encuentran que es razonable esta suposición. También, Bhatia [4, pp. 37, 38] observa que las constantes elásticas del sodio y del cloruro de sodio decrecen con la temperatura. Para el sodio, el cambio llega a ser de $7.69 \times 10^6 \text{ N/m}^2\text{K}$; para el NaCl llega a ser de $3.27 \times 10^7 \text{ N/m}^2\text{K}$. Otras variaciones en las constantes elásticas podrían darse. Por ejemplo, Zemanek y Rudnick [35] proponen que las constantes elásticas podrían variar con la frecuencia.

Hay varios artículos en los que se mide o calcula el módulo de Young ([3], [5], [10], [11], [26], [30], [33], [35]), y en algunos de ellos ([3], [5], [10], [11], [30], [33], [35]) lo hacen generando ondas en el material. La resonancia en varillas se usa para encontrar distintas propiedades del material del que están hechas,

y tiene la ventaja de que asegura una razón grande entre la señal y el ruido (Garrett [11]). En la sección de introducción del artículo de Daw y Liefeld [7] se encuentran varias referencias más. En esta última referencia hay un ejemplo en el cuál los campos magnéticos se usan para generar la resonancia en la varilla y se menciona que la corriente se mantiene controlada para evitar saturaciones en el amplificador que producirían formas distorsionadas en las ondas. Es posible utilizar otros métodos de excitación y detección, como el de corrientes parasitarias para la excitación y la medición de la capacitancia entre la varilla y una placa (Morales et al. [20], Simpson y Wolfe [27]). También se utilizan métodos de percusión (Bayón et al. [3], Velasco et al. [31]). Un micrófono puede usarse para la detección de las ondas que resuenan una vez que pasan al aire (Velasco et al. [31]), porque éstas no se disipan tan rápidamente como las que no resuenan.⁶ Sin embargo, Bayón et al. [3] y Velasco et al. [31] comprueban que la percusión genera no solo vibraciones longitudinales, sino también vibraciones de flexión. El método de detección puede generar también otros tipos de vibraciones. Esto se ve en la referencia de Morales et al. [20], donde al usar un piezoeléctrico como detector se detectan además de vibraciones longitudinales, vibraciones de flexión, para el caso cuando la excitación debiera generar solo vibraciones longitudinales. Para evitar esto, la detección usada por Bayón et al. [3] parece una de las formas que menos perturban en la medición pues se usan técnicas de interferencia (Speckle interferometry). Una excitación electrostática también se ha usado (Zemanek y Rudnick [35]) para generar modos longitudinales, y una detección electrostática también se ha usado.

El módulo de Young puede obtenerse de forma dinámica o estática. Wilson y Lord [33] concluyen que es posible encontrar que el módulo de Young dinámico sea mayor al estático para algunos materiales debido a que ciertos movimientos mecánicos internos, que producen parte de las deformaciones, tardan un tiempo finito en ocurrir. Así, si no hay suficiente tiempo para que la deformación ocurra totalmente durante la fuerza dinámica, la deformación es más pequeña y el módulo parece más grande.

En general el módulo de Young puede considerarse complejo (Jimeno-Fernandez et al. [12], Madigosky y Lee [19]). La parte real corresponde al módulo de Young dinámico, y el cociente de la parte imaginaria y la parte real es el factor de pérdida. La parte imaginaria es importante cuando el material es viscoelástico (Jimeno-Fernandez et al. [12]).

⁶Ellos graban 6 segundos después de golpear la barra y trabajan solo los últimos 4.5 segundos.

CAPÍTULO III

El experimento

Se presenta en las siguientes páginas una discusión breve sobre los distintos métodos considerados y qué cuidados es necesario tomar para cada caso (III.1).

En la sección III.2 se describe el arreglo experimental para las diferentes mediciones y en particular el utilizado para detectar las resonancias cuando se cambia la temperatura a lo largo de la varilla (III.2.1). A continuación se describe qué metodología se siguió para encontrar y medir alguna propiedad consecuencia de la resonancia en la varilla (III.2.2). Para simplificar el lenguaje, se dice que se mide la resonancia. La construcción y caracterización de los hornos utilizados se presenta (III.2.3, III.2.4). Se analiza el comportamiento del control de temperatura y la forma en que varía la temperatura en la varilla en las regiones alejadas a los hornos (III.2.5, III.2.6).

Finalmente se presentan en la sección III.3 los datos obtenidos.

III.1. Consideraciones experimentales

Como se mencionó en la sección I.2 del capítulo I, uno de los objetivos del experimento es detectar cambios en la velocidad de propagación de una onda en la varilla cuando se ha producido una inhomogeneidad, que en este experimento consiste en un gradiente de temperatura a lo largo de la misma.

Una forma de medir los cambios locales de velocidad de propagación de la onda consiste en colocar dos sensores de flexión con una separación fija y detectar la diferencia de tiempos de arribo de la onda en los puntos donde están los sensores.¹ Si la separación entre ambos transductores es pequeña puede obtenerse el valor de la velocidad local por cálculo directo, a partir de la definición de rapidez. Muestreando a lo largo de la varilla, se obtiene un perfil de variación de la rapidez con la que se propaga la onda en el medio.

En el experimento se manda un pulso a lo largo de la varilla y éste se detecta en los dos sensores de flexión. Estos sensores idealmente podrían detectar la intensidad de la onda al pasar. Si no hay dispersión se espera que el pulso conserve su forma a lo largo de todo el medio y entonces el tiempo que tarda en llegar de un sensor a otro puede medirse simplemente midiendo la separación entre dos máximos, de los pulsos detectados por los sensores piezoeléctricos, en un osciloscopio. Si el medio presenta dispersión se tiene que optar por un pulso que tenga pocas frecuencias componentes o al menos conocidas, pues así la forma del pulso no cambiará mucho. También en ambos casos podría medirse la diferencia temporal entre que se detecta la llegada del pulso en el primer sensor y la llegada del pulso al segundo sensor. Conocida esta diferencia temporal y la distancia que separa a los sensores puede encontrarse la velocidad media de propagación de la onda.

Las limitaciones que tiene este método son de varios tipos. La primera es que el tamaño de los sensores limita qué tan cerca pueden colocarse. Otra limitación es la precisión con que se pueden medir diferencias temporales, pues para detectar cambios del 10 % en la velocidad de propagación de una onda como la que se presenta en medios sólidos,² al menos se necesita una precisión de décimas de microsegundo. Por ejemplo, si se considera una velocidad de propagación de 6000 m/s y otra de 6600 m/s, la onda recorre dos centímetros en $3.33 \mu\text{s}$ y $3.03 \mu\text{s}$ respectivamente. Sin la precisión de décimas de microsegundo éstas son indistinguibles. Si hay ruido presente éste fácilmente enmascara cuándo llega a uno y otro sensor, por lo que la precisión de este método puede verse seriamente afectada. Además los sensores deben colocarse de forma tal que no induzcan nodos en el medio a analizar, junto con las complicaciones que pueda tener el colocarlos en la posición requerida. Que se induzcan nodos al colocar los transductores es consecuencia directa de que su colocación cambie las condiciones de frontera del material a analizar, ya sea limitando su movimiento o modificando la presión en dicho lugar.

Las complicaciones que pueden presentarse son: que los sensores no puedan colocarse donde se quiere por el tamaño que ocupan, o colocar los sensores para que sientan la misma intensidad o que al menos los dos registren la onda.

Otra manera para medir la velocidad de propagación de una onda es encontrar la frecuencia en la cual la varilla de aluminio resuena. Los métodos considerados para lograr esto fueron los siguientes:

- Golpear la varilla con un martinete.

¹Los sensores de flexión son piezoeléctricos que reaccionan a la flexión de una pequeña placa metálica. Los cristales del piezoeléctrico probado son de Sal de Rochelle.

²En la tabla I.3 puede verse la velocidad que tiene una onda al propagarse en aluminio de varios tipos

- Excitando un imán que se fija en un extremo de la varilla.

El primer método se basa en que una perturbación de ese tipo está conformada por muchas frecuencias,³ y en particular por las frecuencias de resonancia que pueda tener la varilla. Qué frecuencias son las de resonancia depende, entre otros factores, de cómo esté sujeta la varilla y de las dimensiones específicas de la varilla.

Para este método es importante que la dirección de movimiento del martinete mantenga una dirección constante a lo largo del experimento y que además sea perpendicular a la superficie en que percute. De otra forma el pulso no es reproducible y el experimento se hace más complejo, pues de no pegar el martinete de forma normal a la superficie genera también ondas transversales. Desde luego es deseable la reproducibilidad del pulso, pero lo que es más importante es que las componentes de la frecuencia de resonancia que interesa tengan una componente apreciable, pero esto es algo que tiene que someterse a prueba antes de escoger definitivamente este tipo de excitación. Además, en el caso general, no es posible elegir una sola frecuencia de resonancia por lo que la observación en el osciloscopio de las amplitudes puede ser engañosa.

También cambios en las temperaturas a lo largo de la varilla, y en particular en los extremos de la varilla podrían hacer no reproducible la perturbación incluso si es en la misma región. Por ejemplo, podrían modificar el tipo de colisión de la varilla con el martinete a que tuviera una mayor componente elástica que inelástica o viceversa.

Desde luego pueden encontrarse alternativas para que el tipo de colisión no varíe, por ejemplo, pegar en un extremo una pequeña pieza de material cuyas características no permitan dichos cambios con la temperatura. En este caso hay que tener en cuenta que el pegamento usado puede afectar la transmisión de la onda, y más aún, puede cambiar la forma en que afecta conforme cambia la temperatura en el extremo de la varilla.

En el segundo método se excita un imán por medio de campos magnéticos. Dichos campos magnéticos pueden producirse con un electroimán. La forma de la excitación está determinada por la manera en que varían las corrientes en el embobinado del imán como se dijo en la sección I.1.14. Más aún, la forma de los campos generados es idéntica a la variación de la corriente excepto en amplitud, al menos en las proximidades del electroimán. La respuesta del electroimán a las frecuencias de la corriente es un factor a considerar. Sin embargo, en este caso el núcleo del electroimán es una ferrita⁴, que responde razonablemente bien a altas frecuencias.

La intensidad del campo magnético producido por el electroimán debe ser tal que la perturbación sea observable. La inercia que pueda tener el medio a estudiar determina cuánta fuerza debe aplicarse. La varilla en este sentido es más fácil de trabajar porque su masa por unidad de longitud no es muy grande, y perturbar uno de sus extremos no necesita una aplicación de una fuerza demasiado importante. La intensidad deseada se obtiene eligiendo el electroimán y amplificando la corriente que pasa por éste.

La elección de cómo se pone el imán es un factor a tomar en cuenta. Dos posibilidades son: la incrustación del imán en la varilla o pegar el imán a la misma. La incrustación en la varilla puede ser perjudicial en el sentido de que las condiciones de frontera cambian de manera más abrupta. Por ejemplo, podría pasar que la onda reflejada pierda mucha intensidad y la resonancia termine sin detectarse. También, un

³Esto puede comprobarse porque el pulso generalmente sufre dispersión (Kolsky [15, p. 47]), a menos que la longitud del pulso sea mucho mayor al diámetro de la varilla (Kolsky [15, p. 88])

⁴La ferrita usada está compuesta por níquel, zinc, manganeso y óxido férrico, es del tipo # 33, y tiene una permeabilidad relativa de 800. Mide 8.99 ± 0.005 cm de largo y tiene un diámetro de 1.00 ± 0.005 cm.

cambio en la temperatura en el extremo podría dilatar el imán incrustado más que el mismo aluminio y aumentar el esfuerzo en esa región de la varilla, cambiando significativamente la condición en la frontera. En caso de que el aluminio se dilate más que el imán, la excitación puede verse amortiguada por la disminución del contacto entre el imán y el aluminio. Que pase una u otra situación depende de las características específicas del imán.

Pegar el imán a la varilla también tiene sus limitaciones. Un pegamento muy plástico puede amortiguar el movimiento del imán y por tanto disminuir considerablemente la intensidad de la onda transmitida. En un caso extremo puede causar que la onda no se transmita. También, las propiedades del pegamento pueden cambiar con la temperatura, de forma permanentemente o no, pero esto hace que la intensidad medida no sea confiable. Por esto es importante limitar el intervalo de temperaturas a considerar.

Al pegar el imán al extremo de la varilla tiene que tratarse el problema de la reflexión, transmisión y refracción de una onda en la interfase entre dos medios en contacto. Si la incidencia de la onda en esta interfase es normal, como se vio en la sección II.1.2 la amplitud de la onda reflejada depende de la cantidad $(\rho_b c_3 - \rho_a c_1)$, si ρ_b y c_3 se refieren a la densidad y velocidad de propagación de la onda en el imán, y ρ_a y c_1 en el aluminio. Encontrar c_1 es parte de los objetivos del experimento, así que esta cantidad es incalculable por el momento. Sin embargo, como lo que se requiere es que se presente reflexión, simplemente se busca un imán cuyas propiedades hagan que la diferencia $(\rho_b c_3 - \rho_a c_1)$ sea distinta de cero. Nótese que la onda que se transmite al imán se reflejará en la frontera libre y una parte se retransmitirá a la varilla de aluminio y la otra se reflejará de nuevo en dirección a la frontera libre para repetir el proceso varias veces más. Es deseable que la energía transmitida al imán sea pequeña, porque la onda transmitida se retransmite de vuelta a la varilla de aluminio con un cambio de fase debido a que la velocidad de propagación en el imán es diferente. Algo a tener en cuenta es que pegar un imán muy pesado equivale a poner el extremo en un soporte rígido Kinsler et al. [13, p. 74]. Un imán menos pesado recorre los nodos de desplazamiento, como se vio en la sección II.1.3.

También el imán puede sufrir desmagnetización si las temperaturas son suficientemente altas. La temperatura de Curie para el imán puede ser relativamente baja si se considera que está conformado por varios materiales. Otro inconveniente con el cambio en la temperatura es que éste puede cambiar las propiedades del pegamento usado, lo que obliga ya sea a alejar el imán de los hornos o a no subir tanto la temperatura en los hornos.

La elección del método determina qué clase de equipo se necesita para hacer las medidas. Con el primer método un micrófono y un osciloscopio son suficientes porque lo único que se tendría que hacer es encontrar cuál es la frecuencia que produce la máxima intensidad en la señal de respuesta del micrófono. La desventaja en este caso es que la intensidad de la excitación no puede mantenerse de forma regular por lo que el experimentador tiene que ser muy metódico a la hora de tomar datos, es decir, debe tener cuidado en cuándo tomar las medidas.

El segundo método necesita de una forma razonablemente controlada de obtener la excitación a efectuar sobre el imán. Dos aspectos son fundamentales al respecto. Que la excitación sea realmente periódica y que dicho periodo sea controlable con cierta precisión. Un generador de funciones del tipo *SRS-Stanford Research Systems*, modelo DS360 *Ultra low distortion function generator* cumple con esas características y fue finalmente el que se usó.

Adicionalmente, la manera en que se sostiene la varilla es muy importante. Sostenerla en un nodo es indispensable para no interferir con los modos de vibración que compartan ese nodo. El nodo central es una buena idea pues es más fácil equilibrar la varilla. Desde luego, el nodo debe sostenerse sin abarcar mucha área. En el experimento llevado a cabo se optó por usar un alambre grueso que se enredó en el

centro de la varilla. De las tres espiras del alambre, la espira central se presiona con el tornillo de una doble nuez para sujetarla. Las otras dos espiras se abren ligeramente para que en ellas no haya presión y sólo mantengan el equilibrio de la varilla. Es importante que el soporte central sea relativamente pesado y de otro material del que se prueba pues éste puede empezar a resonar y retroalimentar a la varilla analizada. Por sí solo esto no es pernicioso a menos que la resonancia de la varilla que soporta varíe las condiciones de soporte y saque de resonancia la varilla analizada.⁵

III.2. Desarrollo experimental

III.2.1. Descripción del arreglo experimental para detectar resonancias conforme se varía la temperatura en la varilla

De los métodos discutidos en la sección III.1 se eligió el de fijar un imán delgado en el extremo de una varilla de aluminio con el objeto de perturbarlo con un electroimán. La varilla usada para este procedimiento mide 100.1 ± 0.05 cm de longitud, 0.805 ± 0.005 cm de diámetro, tiene una masa de 136.20 ± 0.005 g y tiene, por lo tanto, una densidad de 2.67 ± 0.04 g/cm³.

Se lijaron los dos extremos de la varilla, ubicando y marcando su centro. Luego se enrolló un alambre galvanizado de hierro dulce con una capa de zinc como se discutió en la sección III.1. La varilla se sostuvo en un soporte universal de fierro mediante una doble nuez. El imán, un cilindro de diámetro de 1.17 ± 0.005 cm, y 0.30 ± 0.005 cm de altura, masa de 1.59 ± 0.005 g, densidad de 4.93 ± 0.14 g/cm³, conformado por aluminio, níquel, cobalto y óxidos férricos sinterizados, se pegó con Kola Loka[®] al extremo derecho de la varilla.

Dos hornos cilíndricos (cuyas características se mencionan más adelante) se colocan de uno y otro lado de la varilla a una distancia del centro que se escoge según el caso. Se tuvo cuidado de que la varilla de aluminio quede lo más centrada posible, respecto al eje de los hornos, con lo que se garantiza una mayor uniformidad en la temperatura y evita que haga contacto con los hornos. Los dos hornos se conectan en serie y al control de temperatura. Este control de temperatura tiene un termistor (de óxidos de metales de transición), que sirve para tomar la referencia que usa el control de temperaturas. El termistor se coloca en contacto con el exterior de uno de los hornos y aislado con cartón de asbesto para que no se afecte por posibles corrientes de aire. Se coloca a continuación el electroimán lo más cerca posible sin que haya contacto con el imán pegado en la varilla, cuidando también que estén bien alineados.

En el extremo izquierdo de la varilla, a un milímetro de distancia, se coloca un micrófono de electreto. El micrófono de electreto debe alimentarse con una fuente de voltaje, así como el amplificador de la señal que se manda al electroimán. Esta señal se obtiene del generador de funciones DS360 y es introducida directamente al amplificador conectando la salida del generador a la entrada del amplificador. El osciloscopio se conecta al micrófono de electreto y también a los extremos del electroimán. Finalmente se colocó un termopar tipo K (Cromel (aleación de Ni-Cr) / Alumel (aleación de Ni-Al)) en el mismo horno (horno 1) en que se fijó el termistor del control de temperatura, cuya punta se situó a diez centímetros de la orilla derecha. Cabe aclarar que el horno del lado izquierdo se etiquetó como *horno 1* y el derecho como *horno 2*, convención que se mantiene aquí. (ver figura III.2)

⁵En el experimento esto sucedió y se tuvo que cambiar la varilla de aluminio que estaba como soporte por una de hierro.

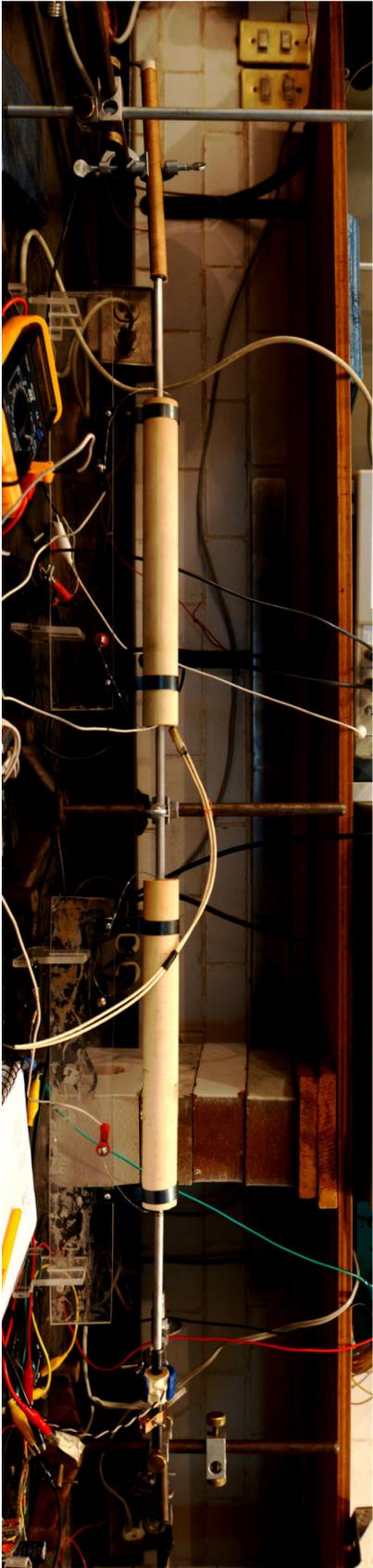


Figura III.1: Arreglo experimental.

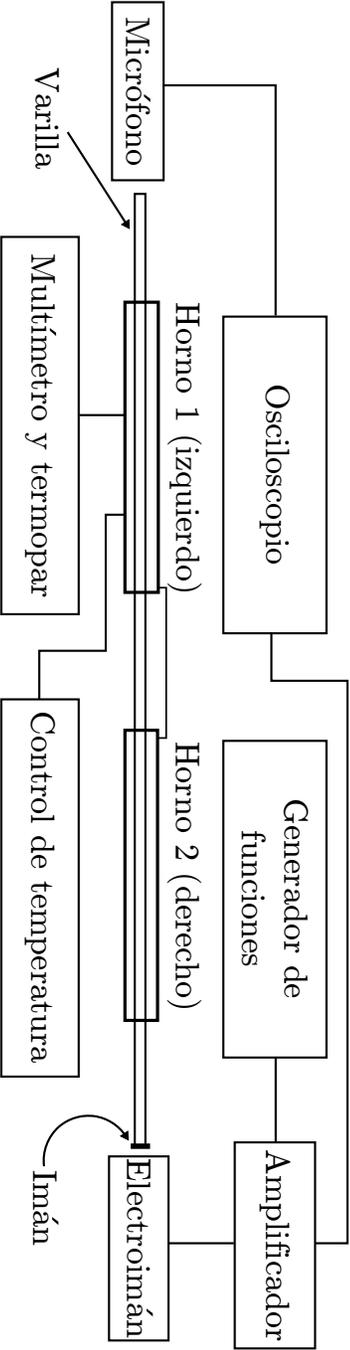


Figura III.2: Diagrama de bloques del arreglo experimental.

III.2.2. Método para medir las resonancias en la varilla

Es recomendable verificar que todo esté conectado correctamente antes de empezar a hacer las medidas con variaciones de temperatura. En el generador de funciones se ajusta la amplitud, la frecuencia y la forma de la onda. Se escoge una onda senoidal, que se amplifica después por un circuito (ver apéndice A), hecho que debe tomarse en cuenta al ajustar la amplitud en el generador de funciones. Finalmente se sintoniza aquella frecuencia que produce resonancia.⁶ Incluso, es posible escuchar esa onda habiendo elegido los parámetros adecuados. En este momento es conveniente ajustar las distancias del micrófono a la varilla y del electroimán a la varilla, y tomar nota de la separación para que a lo largo del experimento éstas se reajusten conforme aumenta la temperatura y la varilla se elongue. Con esto es posible empezar a variar la temperatura a lo largo de la varilla, pero es necesario que esté suficientemente estable para tomar datos significativos.

III.2.3. Estructura de los hornos

Los hornos están compuestos por dos materiales: un alambre de nicromel de $5.4 \Omega/m$ (con un grosor de 0.05 ± 0.005 cm) y un material cerámico de alumina (Al_2O_3).

Cada horno fue construido de la siguiente forma. El alambre de nicromel fue devanado en un tubo cilíndrico cerámico que poseía cuerda moldeada en su exterior. A este tubo se le hicieron cuatro agujeros, dos a dos centímetros de cada extremo, que servían para fijar el alambre de nicromel. La separación entre cada par de agujeros fue de 0.6 ± 0.05 cm. Este tubo se cubre con otro tubo cilíndrico cerámico. Los extremos del alambre de nicromel se colocan en bornes (ver la tabla III.8), uno de los cuales se usa para conectar los hornos en serie, mientras que el otro se conecta al control de temperatura. Además, cada horno se sostiene con un par de láminas de 1.29 ± 0.005 cm. En la sección III.3.4 pueden verse las dimensiones de los hornos. En la figura III.3 se muestra la estructura de un horno.

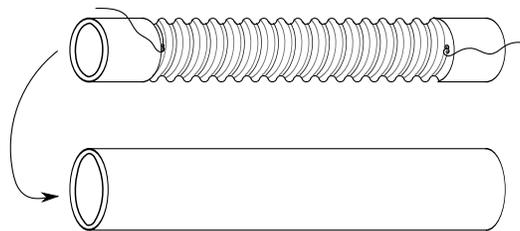


Figura III.3: Estructura de un horno.

Para otras pruebas se usó otro horno, de estructura más sencilla, pues consta únicamente de un cilindro cerámico, al cual se le devanó un alambre de nicromel. Éste se sostiene mediante dos alambres de cobre gruesos. Su longitud es de 7.98 ± 0.005 cm, con diámetros exterior 2.86 ± 0.005 cm e interior de 2.06 ± 0.005 cm y un grosor que varía entre 0.40 y 0.43 ± 0.005 cm. La resistencia total del alambre de nicromel es de $48 \pm 1.5 \Omega$.

⁶Antes de empezar a buscar la frecuencia de resonancia con el generador se recomienda dar un golpecito a la varilla, lo que produce varias ondas que se registran en el micrófono, cuyas frecuencias pueden determinarse con ayuda del osciloscopio. En este experimento se usa la de mayor amplitud posible que corresponde al primer armónico.

III.2.4. Caracterización de los hornos

Para caracterizar los hornos se utilizó el termopar del multímetro, que se introdujo en cada horno mediante un alambre más rígido que tenía marcas cada centímetro. El alambre se acopló al termopar por medio de 4 alambres de cobre muy delgados (calibre 24, de 0.511 mm de diámetro y 0.2 mm^2 de área de la sección transversal). Para tomar en cuenta el calor guardado o disipado se mantuvo la varilla dentro del horno para medir la temperatura. También la referencia tomada para estabilizar la temperatura en ellos fue la temperatura que tenía el horno 1 (izquierdo) a $10 \pm 0.05 \text{ cm}$ de su extremo derecho. Una vez que se estabilizó la temperatura de los hornos se midió la temperatura cada centímetro para cada una de tres temperaturas de referencia (50°C , 100°C y 151°C). Los datos tomados se presentan en la sección de datos y corresponden a las tablas III.9, III.10 y III.11.

III.2.5. Análisis del comportamiento del control de temperatura del horno

El control de temperatura se conectó al horno de $7.98 \pm 0.005 \text{ cm}$. El termistor del control de temperatura y un termopar de un multímetro se colocaron en el centro de este horno, amarrados con un alambre delgado a la varilla de $1.6 \pm 0.0005 \text{ m}$ por medio de un alambre delgado.

A continuación se procedió a encender el horno y tomar las temperaturas registradas cada 10 segundos (cada 15 segundos en la primer prueba. Véase tabla III.1). Los datos tomados se presentan en las tablas III.2, III.3, III.4 y III.5.

III.2.6. Análisis de la forma que varía la temperatura en una varilla

De nuevo el control de temperatura se conectó al horno de $7.98 \pm 0.005 \text{ cm}$, colocando el termistor del control de temperatura y un termopar de un multímetro en el centro de este horno, fijándolos con un alambre delgado a la varilla de $1.6 \pm 0.0005 \text{ m}$.

Previamente se pegaron sensores LM35 en la varilla (ver apéndice B para más información de sus características), cuidando que su parte lisa esté en contacto directo con la varilla usando pegamento (solo una pequeña cantidad alrededor de los sensores) de alta temperatura.

Se pusieron a funcionar el horno y el control de temperatura, ajustando primero a que llegara a una temperatura de alrededor de 100°C . Esta temperatura se escogió para que los sensores no fueran sobrecalentados causando en ellos un mal funcionamiento. Tomando el voltaje entre el colector (V_S) y base (GND) puede conocerse la temperatura de la varilla pues estos sensores se comportan de manera lineal. Por cada 10 mV medidos se tiene un grado centígrado.

Los datos tomados se presentan en la tabla III.6.

III.3. Datos

III.3.1. Medidas para analizar el comportamiento cualitativo del control de temperatura

En los siguientes experimentos, el control de temperatura utilizado funciona con un control de lazo cerrado proporcional a la integral de modulación por anchura de pulso (o PWM: Pulse Width Modulation), con un triac (TIC 226) como elemento de control de potencia eléctrica, es decir, se controla el tiempo en que se suministra corriente alterna al horno.

Tabla III.1: Temperaturas en el horno de 7.98 ± 0.005 cm con un control de temperatura.

| Tiempo ± 1 [s] | Temperatura ± 1 [°C] |
|--------------------|--------------------------|
| 0 | 26.5 |
| 15 | 31 |
| 30 | 39.2 |
| 45 | 47.8 |
| 60 | 59 |
| 75 | 70 |
| 90 | 83.7 |
| 105 | 95.8 |
| 120 | 108.6 |
| 135 | 121.7 |

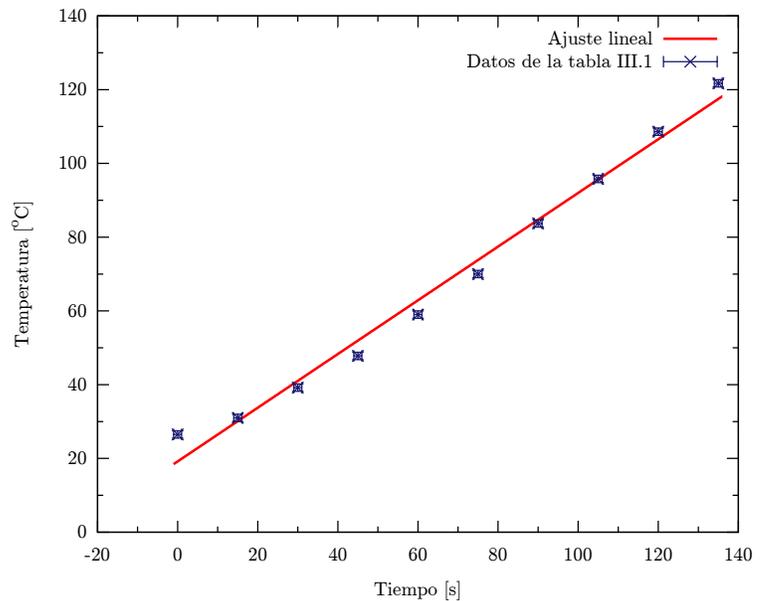


Figura III.4: Gráfica de los datos de la tabla III.1 y ajuste lineal $y=0.728x+19.19$ con $R^2 = 0.9872$.

Otras interpolaciones para los datos de la tabla III.1 pueden verse en el apéndice D.

Las siguientes medidas fueron tomadas con cronómetro de mano y con el termopar K y con un multímetro MU118.

Tabla III.2: Segunda prueba de temperaturas en el horno de 7.98 ± 0.005 cm con un control de temperatura.

| Tiempo ± 1 [s] | Temperatura ± 1 [°C] | Tiempo ± 1 [s] | Temperatura ± 1 [°C] |
|--------------------|--------------------------|--------------------|--------------------------|
| 0 | 29.6 | 100 | 98.3 |
| 10 | 30.4 | 110 | 105.4 |
| 20 | 34.2 | 120 | 109.2 |
| 30 | 39.5 | 130 | 110.9 |
| 40 | 45.8 | 140 | 111.9 |
| 50 | 54.3 | 150 | 112.2 |
| 60 | 61.9 | 160 | 112 |
| 70 | 70.8 | 170 | 110.9 |
| 80 | 80.0 | 180 | 110.6 |
| 90 | 89.2 | | |

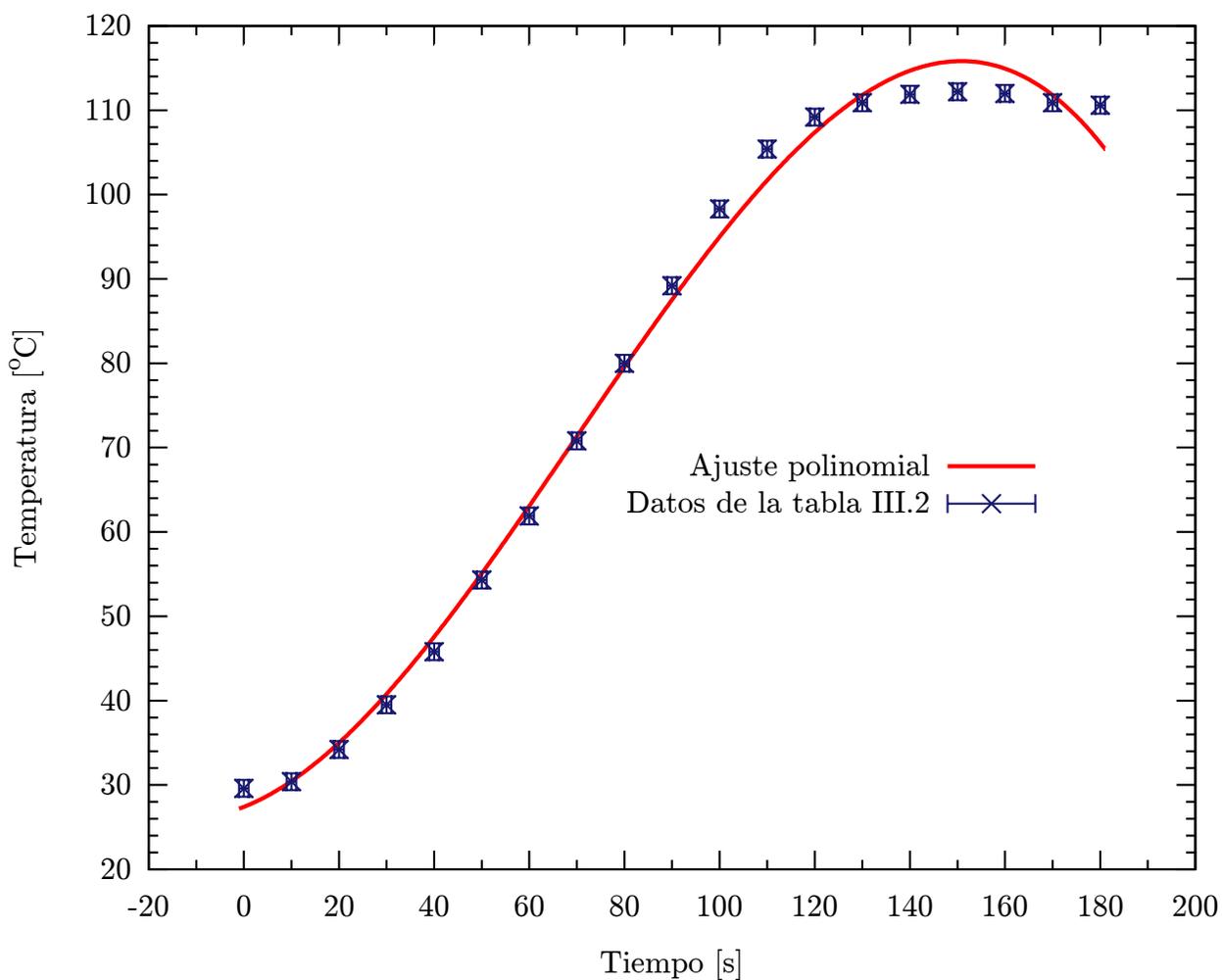


Figura III.5: Gráfica de los datos de la tabla III.2 y ajuste polinomial $y = -4.178 \times 10^{-5} x^3 + 8.716 \times 10^{-3} x^2 + 0.2221 x + 27.41$ con $R^2 = 0.9950$.

Tabla III.3: Tercera prueba de temperaturas en el horno de 7.98 ± 0.005 cm con un control de temperatura.

| Tiempo ± 1 [s] | Temperatura ± 1 [°C] | Tiempo ± 1 [s] | Temperatura ± 1 [°C] |
|--------------------|--------------------------|--------------------|--------------------------|
| 10 | 34.4 | 140 | 106.3 |
| 20 | 35.2 | 150 | 106.7 |
| 30 | 38.3 | 160 | 106.8 |
| 40 | 43.2 | 170 | 106.6 |
| 50 | 49.5 | 180 | 106.0 |
| 60 | 57.0 | 190 | 105.1 |
| 70 | 64.6 | 200 | 103.4 |
| 80 | 73.0 | 210 | 102.5 |
| 90 | 82.5 | 220 | 101.6 |
| 100 | 90.4 | 230 | 100.0 |
| 110 | 97.9 | 240 | 98.9 |
| 120 | 102.3 | 250 | 97.2 |
| 130 | 105.4 | 260 | 96.2 |

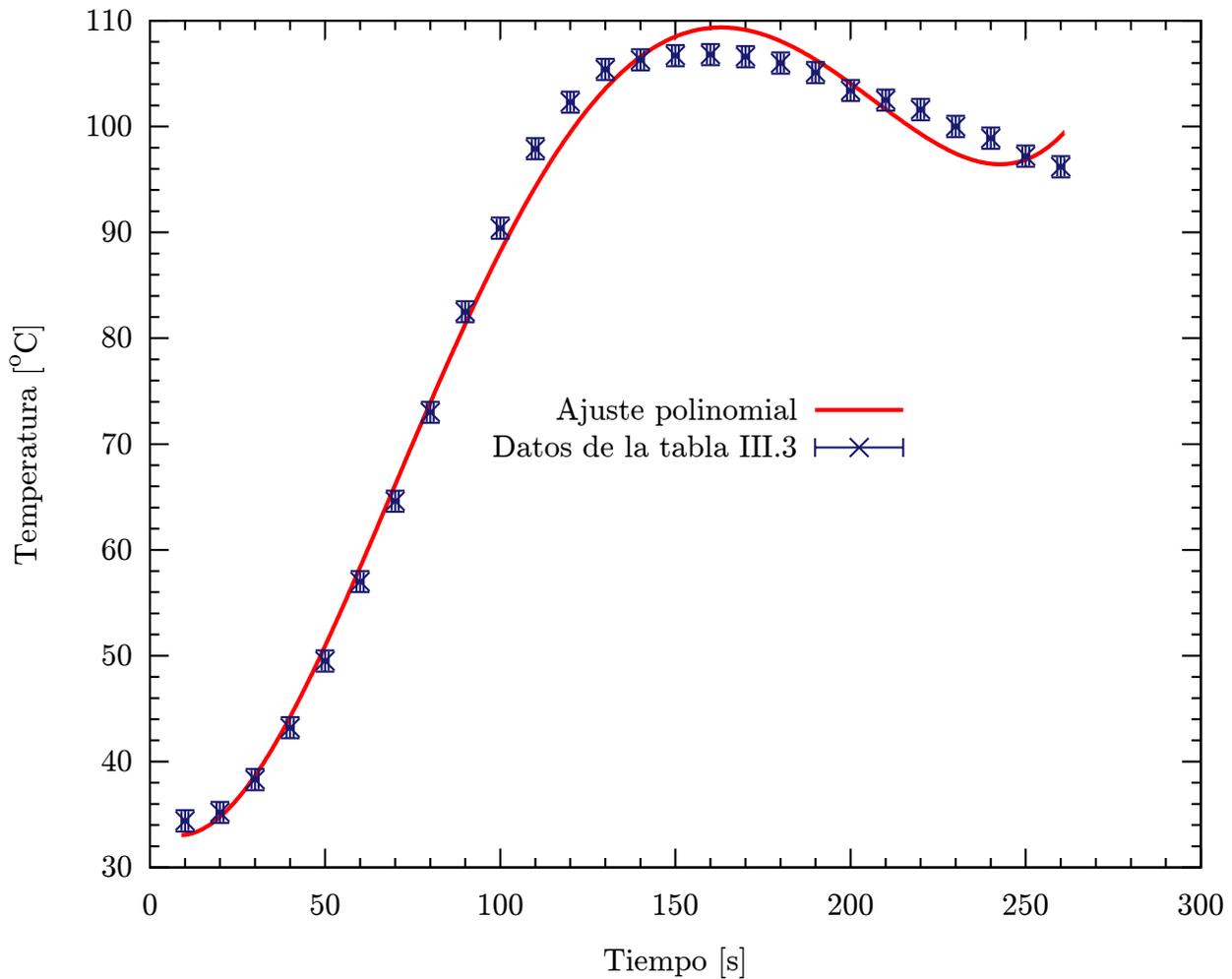


Figura III.6: Gráfica de los datos de la tabla III.3 y ajuste polinomial $y = 1.979 \times 10^{-7} x^4 - 1.093 \times 10^{-4} x^3 + 0.01703 x^2 - 0.2676 x + 34.16$ con $R^2 = 0.9946$.

Tabla III.4: Cuarta prueba de temperaturas en el horno de 7.98 ± 0.005 cm con un control de temperatura.

| Tiempo ± 1 [s] | Temperatura ± 1 [°C] |
|--------------------|--------------------------|
| 0 | 78.7 |
| 10 | 81.9 |
| 20 | 86.3 |
| 30 | 89.5 |
| 40 | 92.3 |
| 50 | 93.3 |
| 60 | 94.3 |
| 70 | 94.4 |
| 80 | 94.5 |
| 90 | 94.3 |
| 100 | 94.0 |

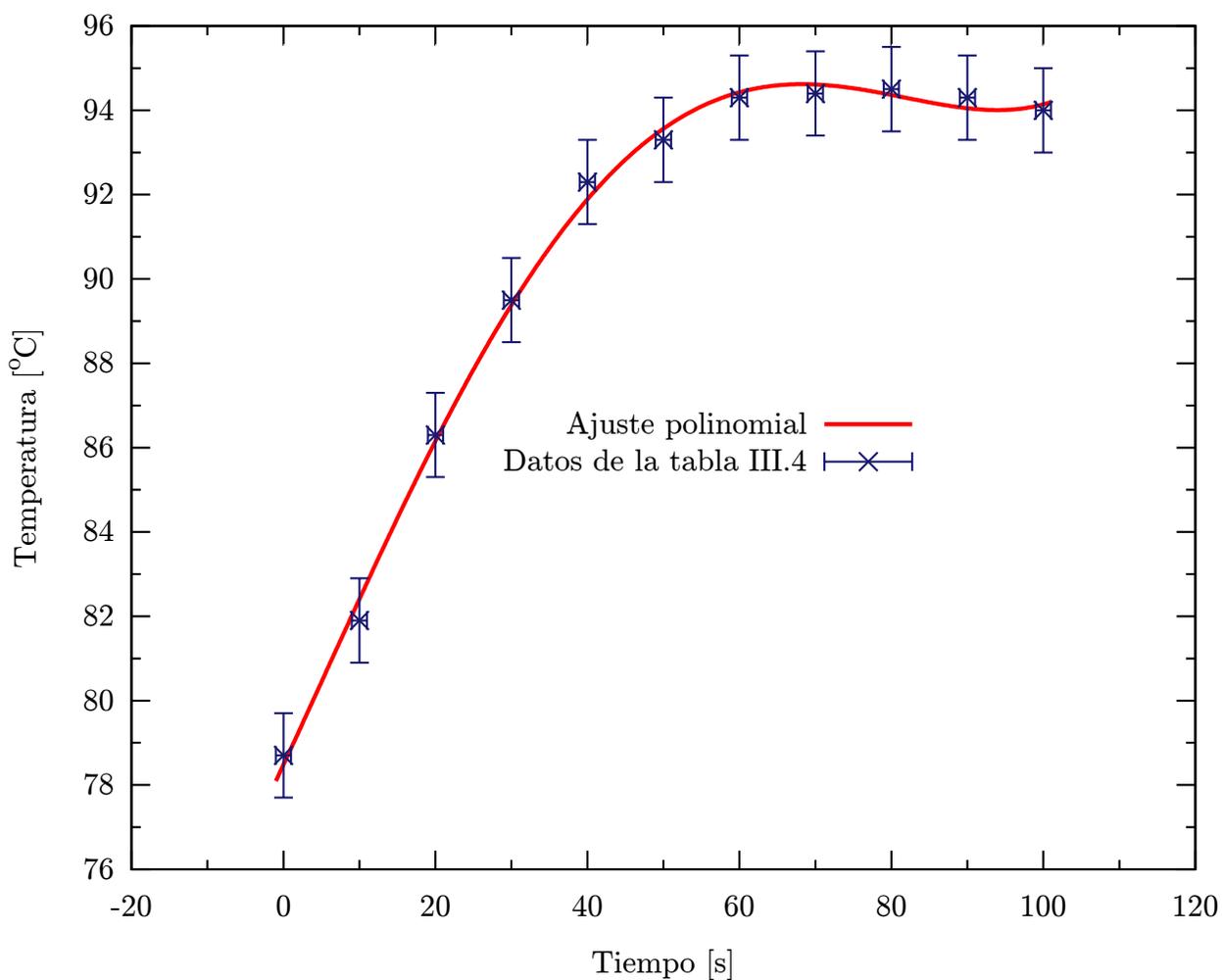


Figura III.7: Gráfica de los datos de la tabla III.4 y ajuste polinomial $y = 4.808 \times 10^{-7} x^4 - 8.382 \times 10^{-5} x^3 + 1.258 \times 10^{-3} x^2 + 0.3882 x + 78.48$ con $R^2 = 0.9976$.

Tabla III.5: Quinta prueba de temperaturas en el horno de 7.98 ± 0.005 cm con un control de temperatura.

| Tiempo ± 1 [s] | Temperatura ± 1 [°C] | Tiempo ± 1 [s] | Temperatura ± 1 [°C] | Tiempo ± 1 [s] | Temperatura ± 1 [°C] |
|--------------------|--------------------------|--------------------|--------------------------|--------------------|--------------------------|
| 0 | 25.2 | 150 | 92.3 | 300 | 84.3 |
| 10 | 26.2 | 160 | 93.3 | 310 | 84.1 |
| 20 | 28.6 | 170 | 93.7 | 320 | 85.1 |
| 30 | 30.9 | 180 | 94 | 330 | 86 |
| 40 | 35.5 | 190 | 94 | 340 | 86.4 |
| 50 | 39.9 | 200 | 93.7 | 350 | 86.7 |
| 60 | 44.7 | 210 | 93.1 | 360 | 86.9 |
| 70 | 50.5 | 220 | 92.2 | 370 | 86.8 |
| 80 | 57.7 | 230 | 91.3 | 380 | 86.4 |
| 90 | 65.1 | 240 | 90.2 | 390 | 86.1 |
| 100 | 71.7 | 250 | 89.2 | 400 | 86.1 |
| 110 | 78.8 | 260 | 88.3 | 410 | 86.3 |
| 120 | 84.4 | 270 | 87.2 | 420 | 86.6 |
| 130 | 87.5 | 280 | 85.7 | 430 | 86.8 |
| 140 | 90.5 | 290 | 84.7 | | |

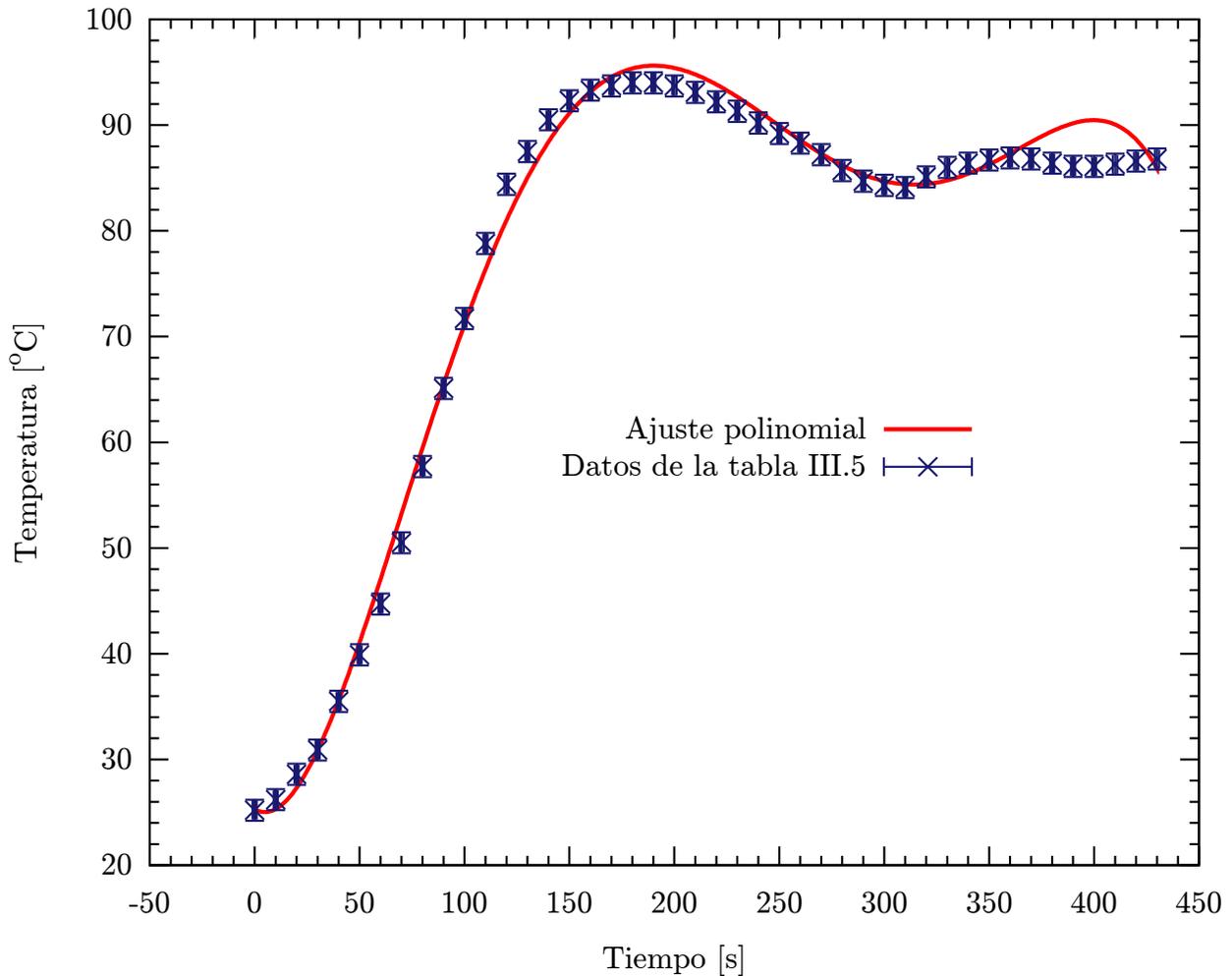


Figura III.8: Gráfica de los datos de la tabla III.5 y ajuste polinomial $y = -1.978 \times 10^{-10} x^5 + 2.248 \times 10^{-7} x^4 - 8.766 \times 10^{-5} x^3 + 0.01245 x^2 - 0.115 x + 25.30$ con $R^2 = 0.9946$.

III.3.2. Distribución de sensores LM35 en la varilla de aluminio de 1.6 ± 0.0005 m de longitud y 8 mm de diámetro

Los sensores LM35 (ver apéndice B) fueron distribuidos a 1.2, 3.2, 6.1, 9.8, 13.7, 17.6, 21.4, 25.5, 29.4, 34.5, 39.4, 49.6, 60.2, 70.1, 80.3 y 100.4 centímetros de la salida del horno en la varilla de 1.6 ± 0.0005 m. La salida del horno coincide con una marca hecha en la varilla. Dicha marca está a 15.2 ± 0.05 centímetros del extremo de la varilla que se introduce en el horno. El centro del horno usado en este caso está a 9.9 centímetros del extremo de la varilla.

III.3.3. Perfil de temperaturas

Se presentan a continuación el perfil de temperaturas en la varilla de 1.6 ± 0.0005 m, con los sensores colocados como se describió en la sección anterior, cuando el horno de 7.98 ± 0.005 cm está apagado.

Tabla III.6: Perfil de voltajes y sus correspondientes temperaturas en los sensores colocados a una distancia D . de la salida del horno en la varilla de 1.6 ± 0.0005 m con el horno de 7.98 ± 0.005 cm apagado.

| D. | Voltaje ± 0.0036 [V] | Temp. ± 0.75 [°C] |
|-------|--------------------------|-----------------------|
| 1.2 | 0.2579 | 25.79 |
| 3.2 | 0.2551 | 25.51 |
| 6.1 | 0.2535 | 25.35 |
| 9.8 | 0.2619 | 26.19 |
| 13.7 | 0.2587 | 25.87 |
| 17.6 | 0.2554 | 25.54 |
| 21.4 | 0.2602 | 26.02 |
| 25.5 | 0.2502 | 25.02 |
| 29.4 | 0.2526 | 25.26 |
| 34.5 | 0.2559 | 25.59 |
| 39.4 | 0.2483 | 24.83 |
| 49.6 | 0.2499 | 24.99 |
| 60.2 | 0.2487 | 24.87 |
| 70.1 | 0.2544 | 25.44 |
| 80.3 | 0.2508 | 25.08 |
| 100.4 | 0.2499 | 24.99 |

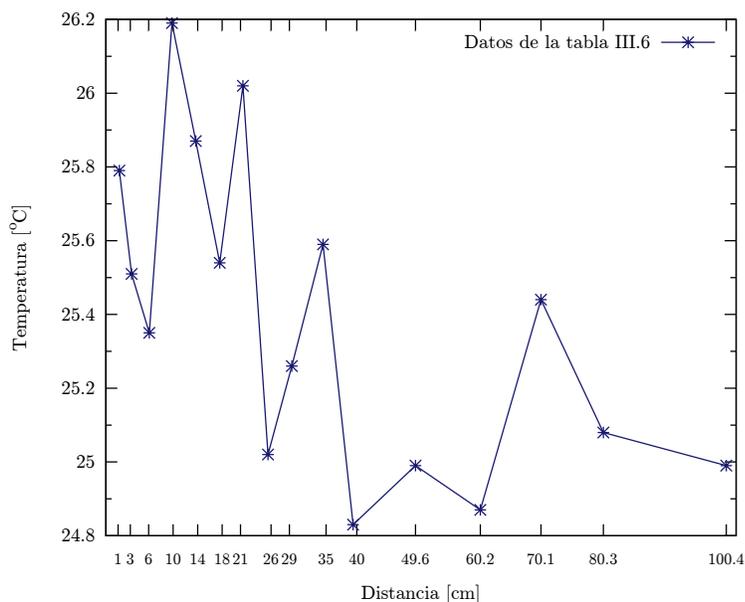


Figura III.9: Gráfica de los datos de la tabla III.6.

La línea que une los puntos en la figura III.9 se añadió como ayuda visual.

Se presentan ahora el perfil de temperaturas en la varilla de 1.6 ± 0.0005 m, con los sensores colocados como se describió en la sección anterior, cuando el horno de 7.98 ± 0.005 cm está encendido.

Tabla III.7: Perfil de voltajes y sus correspondientes temperaturas en los sensores colocados a una distancia D . de la salida del horno en la varilla de 1.6 ± 0.0005 m con el horno de 7.98 ± 0.005 cm encendido.

| $D. \pm 0.05$ [cm] | Voltaje [V] | \bar{V} [V] | $D. \pm 0.05$ [cm] | Voltaje [V] | \bar{V} [V] |
|--------------------|------------------------|---------------------|--------------------|------------------------|---------------------|
| 1.2 | 0.4037, 0.4184, 0.4225 | 0.4149 ± 0.0112 | 29.4 | 0.2697, 0.2762, 0.2791 | 0.2750 ± 0.0053 |
| 3.2 | 0.3682, 0.3823, 0.3847 | 0.3784 ± 0.0102 | 34.5 | 0.2705, 0.2771, 0.2808 | 0.2761 ± 0.0056 |
| 6.1 | 0.3449, 0.3568, 0.3611 | 0.3543 ± 0.0094 | 39.4 | 0.2585, 0.2636, 0.2668 | 0.2630 ± 0.0045 |
| 9.8 | 0.3413, 0.3541, 0.3602 | 0.3519 ± 0.0106 | 49.6 | 0.2553, 0.2593, 0.2620 | 0.2589 ± 0.0036 |
| 13.7 | 0.3141, 0.3258, 0.3319 | 0.3239 ± 0.0098 | 60.2 | 0.2513, 0.2537, 0.2556 | 0.2535 ± 0.0036 |
| 17.6 | 0.2985, 0.3108, 0.3161 | 0.3085 ± 0.0100 | 70.1 | 0.2560, 0.2575, 0.2590 | 0.2575 ± 0.0036 |
| 21.4 | 0.2942, 0.3055, 0.3101 | 0.3033 ± 0.0091 | 80.3 | 0.2520, 0.2527, 0.2539 | 0.2529 ± 0.0035 |
| 25.5 | 0.2755, 0.2851, 0.2889 | 0.2832 ± 0.0077 | 100.4 | 0.2509, 0.2511, 0.2518 | 0.2513 ± 0.0035 |

El horno fue ajustado para que alcanzara 100°C

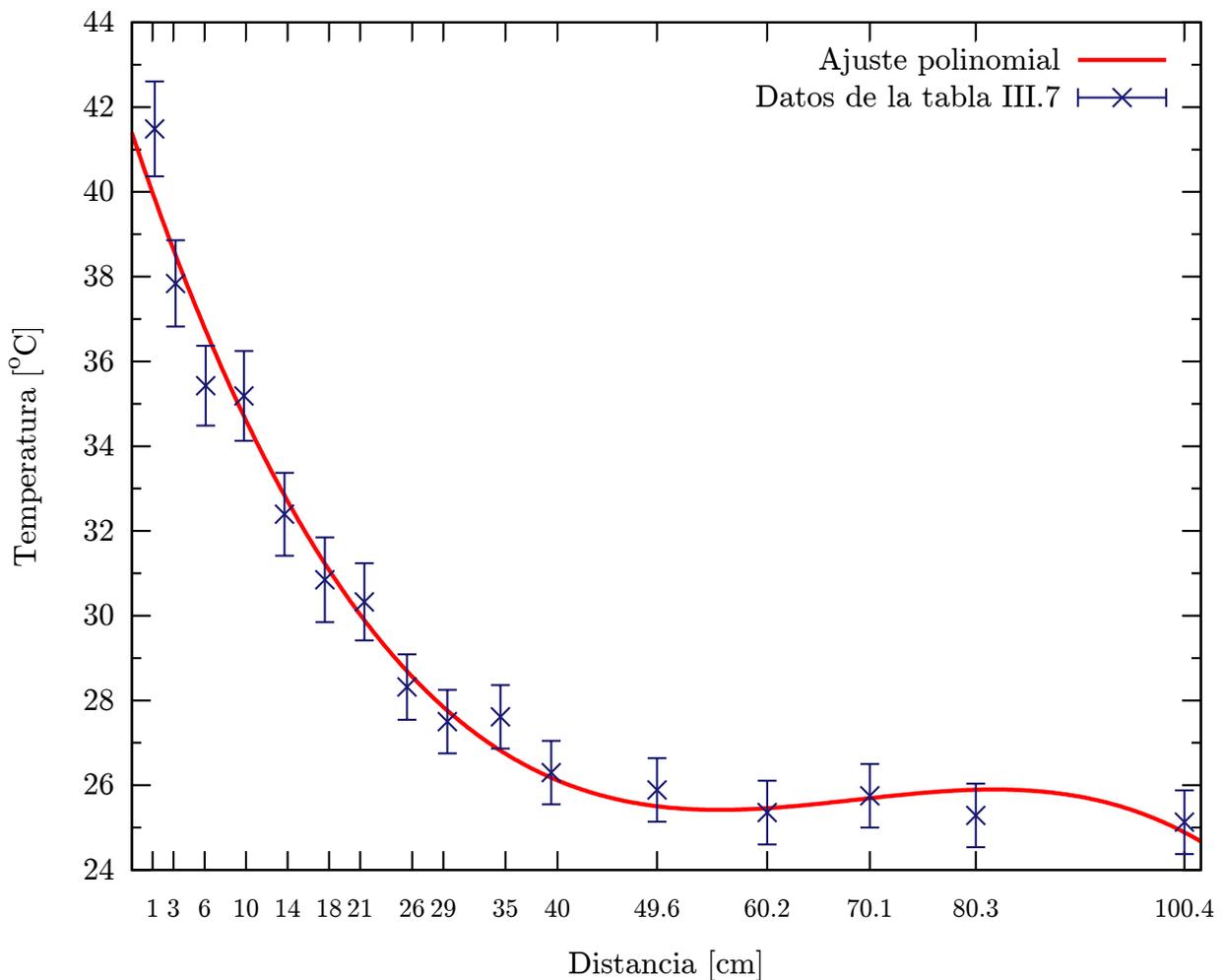


Figura III.10: Gráfica de los datos de la tabla III.7 y ajuste polinomial $y = -4.937 \times 10^{-5} x^3 + 1.027 \times 10^{-2} x^2 - 0.69 x + 40.55$ con $R^2 = 0.9819$.

III.3.4. Características de los hornos

Tabla III.8: Resistencia del arreglo final de los hornos.

| Resistencia | Horno 1, ± 1.2 [Ω] | Horno 2, ± 1.2 [Ω] |
|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| Entre extremos del alambre | 22.7~22.8 | 22.7~22.8 |
| Entre extremos del horno | 21.4~21.5 | 21.1~21.2 |
| Entre perforaciones en el horno | 20.9~21 | 20.7~20.8 |

Un horno tiene un tubo central cilíndrico de diámetros interior 1.62 ± 0.005 cm y exterior 2.52 ± 0.005 cm, con un grosor de 0.45 ± 0.005 cm, mientras que el diámetro exterior en la parte con rosca es de 2.30 ± 0.005 cm.

Este tubo está cubierto con otro cuyos diámetros interior de 2.61 ± 0.005 cm y exterior de 3.18 ± 0.005 cm. El grosor de este tubo se pudo constatar que varía entre 0.26 a 0.29 ± 0.005 cm. El otro horno tiene dimensiones muy similares, y la variación es de dos o tres décimas de milímetro. La longitud de los hornos es de 30.2 ± 0.05 cm.

III.3.5. Perfil de temperaturas en los hornos

Las distancias a las que se miden las temperaturas para el horno a la izquierda (horno 1) se miden desde el extremo izquierdo y para el horno a la derecha (horno 2) se miden desde el extremo derecho. También la separación entre los hornos fue de 13 ± 0.05 cm. 6.5 ± 0.05 cm del centro de la varilla de 100.1 ± 0.05 cm de longitud y 0.805 ± 0.005 cm de diámetro. Este último valor fue obtenido del promedio de las siguientes medidas tomadas en distintos lugares de la varilla: 0.80, 0.81, 0.81 y 0.80 centímetros.

El perfil de temperaturas en los hornos, cuando a diez centímetros del extremo derecho del horno 1 se miden $50 \pm 1^\circ\text{C}$ se presenta en la tabla III.9.

Tabla III.9: Perfil de la temperatura en los hornos, cuando se mide $50 \pm 1^\circ\text{C}$ a $10 \pm 0.05\text{ cm}$ del extremo derecho del horno 1.

| Horno 1 | | | | | | | | | | | | | | | | |
|------------------------------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Distancia ± 0.05 [cm] | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| Temperatura ± 1 [$^\circ\text{C}$] | 30 | 31 | 34 | 38 | 40 | 42 | 45 | 45 | 46 | 47 | 48 | 48 | 49 | 48 | 49 | 48 |
| Distancia ± 0.05 [cm] | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | |
| Temperatura ± 1 [$^\circ\text{C}$] | 49 | 49 | 50 | 50 | 50 | 50 | 50 | 49 | 49 | 49 | 48 | 46 | 44 | 41 | 38 | |
| Horno 2 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Distancia ± 0.05 [cm] | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| Temperatura ± 1 [$^\circ\text{C}$] | 30 | 31 | 35 | 36 | 37 | 39 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 47 | 47 | 47 | 48 | 48 |
| Distancia ± 0.05 [cm] | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | |
| Temperatura ± 1 [$^\circ\text{C}$] | 48 | 48 | 49 | 49 | 49 | 48 | 48 | 48 | 48 | 47 | 47 | 46 | 44 | 41 | 38 | |

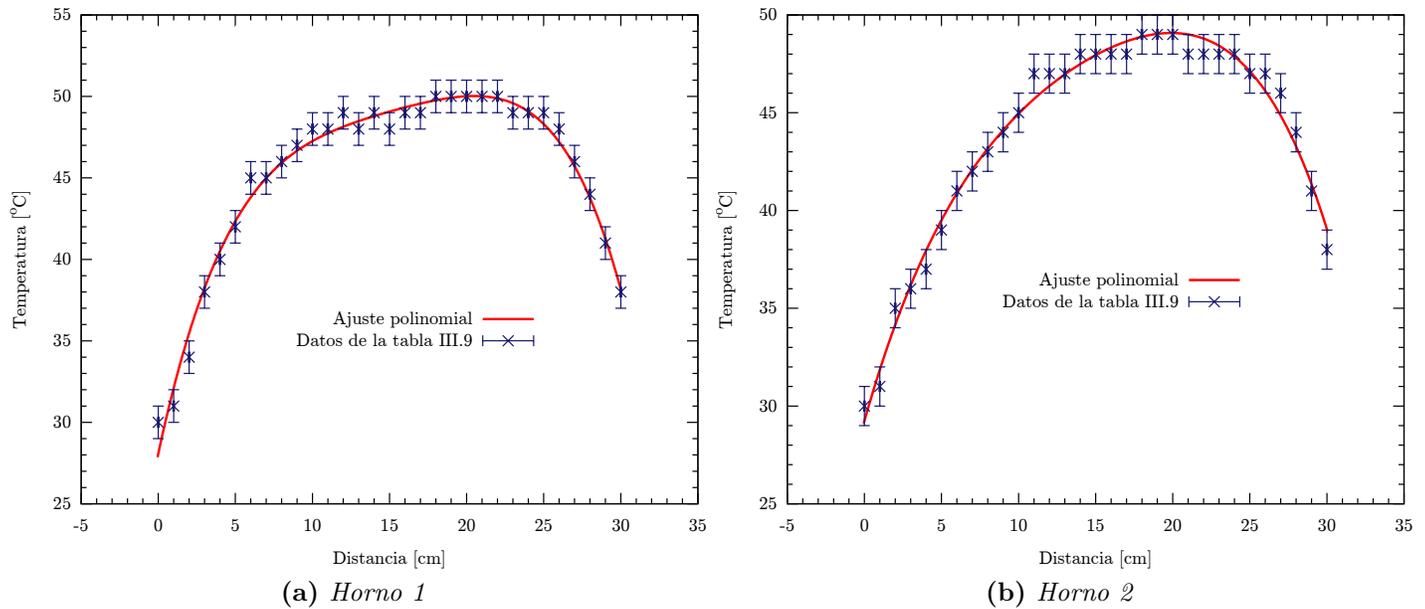


Figura III.11: Perfil de la temperatura en los hornos, cuando se mide $50 \pm 1^\circ\text{C}$ a $10 \pm 0.05\text{ cm}$ del extremo derecho del horno 1: a) Se mide desde el extremo izquierdo del horno 1. El ajuste polinomial es $y = -2.673 \times 10^{-4} x^4 + 1.634 \times 10^{-2} x^3 - 0.3852 x^2 + 4.403 x + 28.08$ con $R^2 = 0.9857$. b) Se mide desde el extremo derecho del horno 2. El ajuste polinomial es $y = -1.204 \times 10^{-4} x^4 + 6.795 \times 10^{-3} x^3 - 0.1775 x^2 + 2.787 x + 29.24$ con $R^2 = 0.9868$.

El perfil de la temperatura en los hornos, cuando se mide $100 \pm 1^\circ$ a diez centímetros del extremo derecho del horno 1 se presenta en la tabla III.10.

Tabla III.10: Perfil de la temperatura en los hornos, cuando se mide $100 \pm 1^\circ$ a 10 ± 0.05 cm del extremo derecho del horno 1.

| Horno 1 | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---------------------------|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Distancia ± 0.05 [cm] | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| Temperatura ± 1 [°C] | 40 | 46 | 54 | 58 | 61 | 64 | 66 | 69 | 74 | 81 | 84 | 88 | 89 | 91 | 93 | 95 |
| Distancia ± 0.05 [cm] | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | |
| Temperatura ± 1 [°C] | 96 | 101 | 103 | 103 | 100 | 100 | 101 | 96 | 97 | 95 | 94 | 91 | 86 | 79 | 70 | |
| Horno 2 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Distancia ± 0.05 [cm] | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| Temperatura ± 1 [°C] | 39 | 43 | 50 | 57 | 65 | 71 | 75 | 79 | 80 | 83 | 89 | 88 | 90 | 91 | 93 | 95 |
| Distancia ± 0.05 [cm] | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | |
| Temperatura ± 1 [°C] | 96 | 97 | 98 | 100 | 100 | 100 | 100 | 98 | 95 | 93 | 92 | 89 | 82 | 74 | 69 | |

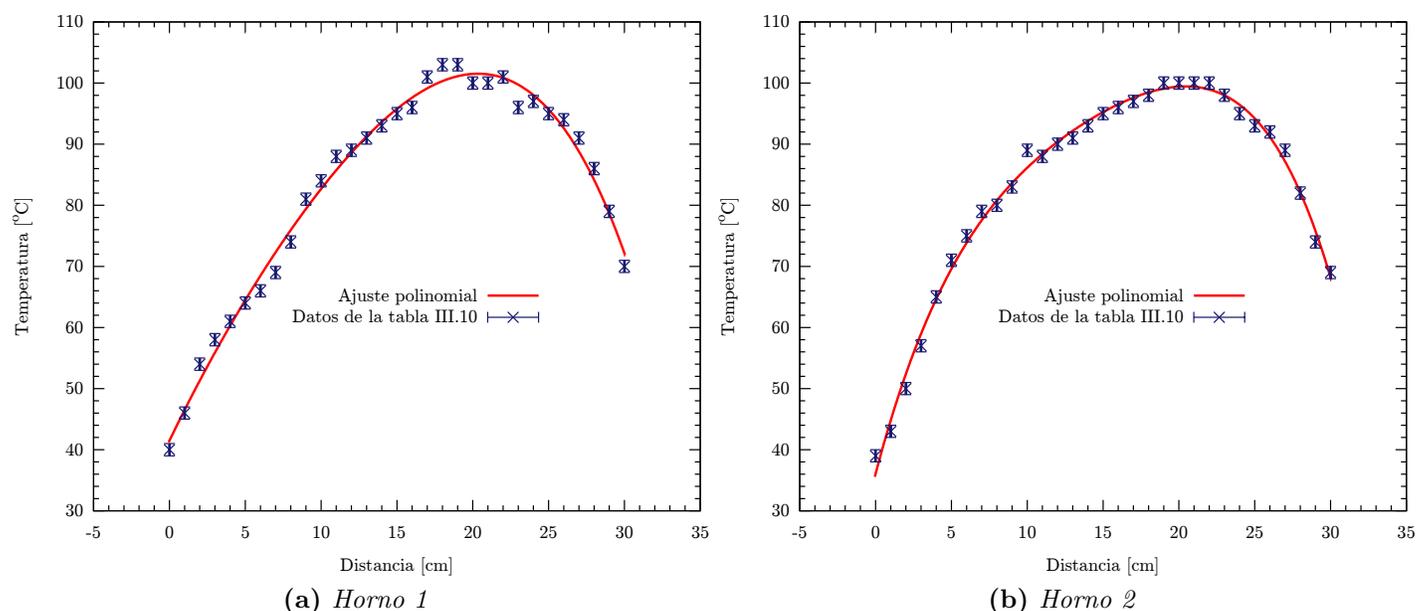
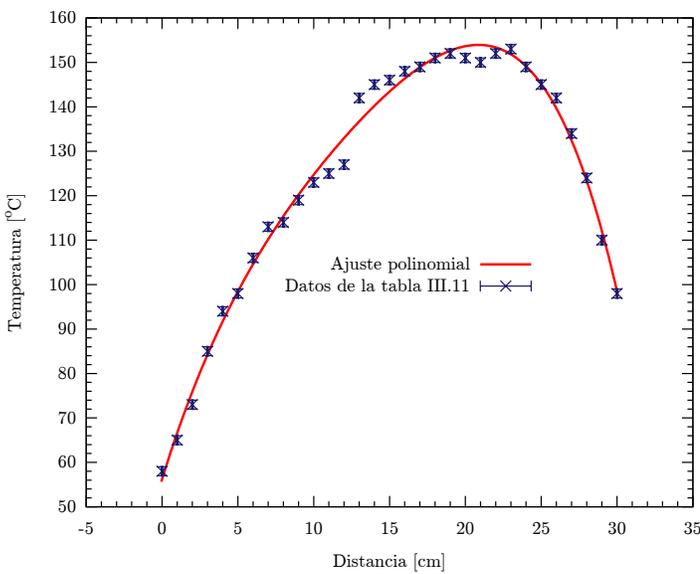


Figura III.12: Perfil de la temperatura en los hornos, cuando se mide $100 \pm 1^\circ$ a 10 cm del extremo derecho del horno 1: a) Se mide desde el extremo izquierdo del horno 1. El ajuste polinomial es $y = -1.291 \times 10^{-4} x^4 + 3.442 \times 10^{-3} x^3 - 0.1247 x^2 + 5.151 x + 41.48$ con $R^2 = 0.9898$. b) Se mide desde el extremo derecho del horno 2. El ajuste polinomial es $y = -4.655 \times 10^{-4} x^4 + 2.665 \times 10^{-2} x^3 - 0.6578 x^2 + 9.389 x + 36.04$ con $R^2 = 0.9941$.

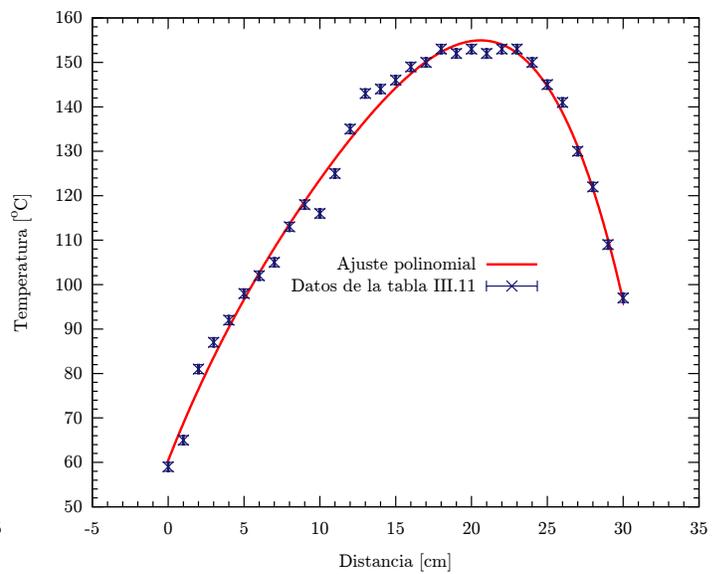
El perfil de la temperatura en los hornos, cuando se mide $151 \pm 1^\circ\text{C}$ a diez centímetros del extremo derecho del horno 1 se presenta en la tabla III.11.

Tabla III.11: Perfil de la temperatura en los hornos, cuando a 10 ± 0.05 cm del extremo derecho del horno 1 se miden $151 \pm 1^\circ\text{C}$.

| Horno 1 | | | | | | | | | | | | | | | | |
|------------------------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Distancia ± 0.05 [cm] | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| Temperatura ± 1 [$^\circ\text{C}$] | 58 | 65 | 73 | 85 | 94 | 98 | 106 | 113 | 114 | 119 | 123 | 125 | 127 | 142 | 145 | 146 |
| Distancia ± 0.05 [cm] | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | |
| Temperatura ± 1 [$^\circ\text{C}$] | 148 | 149 | 151 | 152 | 151 | 150 | 152 | 153 | 149 | 145 | 142 | 134 | 124 | 110 | 98 | |
| Horno 2 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Distancia ± 0.05 [cm] | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| Temperatura ± 1 [$^\circ\text{C}$] | 59 | 65 | 81 | 87 | 92 | 98 | 102 | 105 | 113 | 118 | 116 | 125 | 135 | 143 | 144 | 146 |
| Distancia ± 0.05 [cm] | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | |
| Temperatura ± 1 [$^\circ\text{C}$] | 149 | 150 | 153 | 152 | 153 | 152 | 153 | 153 | 150 | 145 | 141 | 130 | 122 | 109 | 97 | |



(a) Horno 1



(b) Horno 2

Figura III.13: Perfil de la temperatura en los hornos, cuando se mide $151 \pm 1^\circ\text{C}$ a 10 ± 0.05 cm del extremo derecho del horno 1: a) Se mide desde el extremo izquierdo del horno 1. El ajuste polinomial es $y = -6.194 \times 10^{-4} x^4 + 2.975 \times 10^{-2} x^3 - 0.6571 x^2 + 11.07 x + 56.19$ con $R^2 = 0.9920$. b) Se mide desde el extremo derecho del horno 2. El ajuste polinomial es $y = -4.505 \times 10^{-4} x^4 + 1.743 \times 10^{-2} x^3 - 0.3677 x^2 + 8.705 x + 60.42$ con $R^2 = 0.9908$.

III.3.6. Cambio en la frecuencia de resonancia con la temperatura para una varilla de 100.1 ± 0.05 cm de longitud y 0.805 ± 0.005 cm de diámetro

Tabla III.12: Primer experimento.

| Temperatura ± 1 [°C] | Frecuencia ± 0.07 [Hz] | Vpp [mV] |
|--------------------------|----------------------------|--------------|
| Serie A* | | |
| 22 | 2465.44 | 332 ± 13 |
| 25 | 2464.48 | 340 ± 13 |
| 30 | 2462.27 | 340 ± 13 |
| 38 | 2459.01 | 352 ± 13 |
| 46 | 2454.57 | 340 ± 13 |
| 55 | 2451.14 | 360 ± 13 |
| 60 | 2448.04 | 216 ± 9 |
| 68 | 2445.77 | 232 ± 10 |
| 74 | 2442.47 | 240 ± 10 |
| 83 | 2439.84 | 256 ± 10 |
| 90 | 2439.66 | 260 ± 10 |
| 98 | 2437.01 | 264 ± 10 |
| 106 | 2434.98 | 248 ± 10 |
| 114 | 2433.09 | 252 ± 10 |
| 122 | 2430.4 | 256 ± 10 |
| 131 | 2425.33 | 264 ± 10 |
| 139 | 2421.45 | 208 ± 9 |
| 146 | 2420.54 | 216 ± 9 |
| 154 | 2416.84 | 216 ± 9 |
| Serie B* | | |
| 163 | 2413.79 | 228 ± 9 |
| 170 | 2409.09 | 256 ± 10 |
| 166 | 2410.11 | 224 ± 9 |
| 176 | 2407.09 | 232 ± 10 |
| 182 | 2402.5 | 140 ± 7 |
| 21 | 2466.29 | 352 ± 13 |
| Serie C*: No estables | | |
| 170 | 2411.71 | 216 ± 9 |
| 180 | 2406.37 | 236 ± 10 |
| 176 | 2408.06 | 232 ± 10 |
| 188 | 2402.1 | 156 ± 7 |
| 185 | 2401.28 | 160 ± 7 |

*Los datos de la serie A corresponden a datos tomados cuando la estabilidad de los hornos se mantenía al menos por dos minutos. Los datos de la serie B corresponden a datos al día siguiente, y la estabilidad de los hornos se mantenía también al menos por dos minutos. Los datos de la serie C corresponden a datos tomados cuando la estabilidad de los hornos se mantenía menos de un minuto.

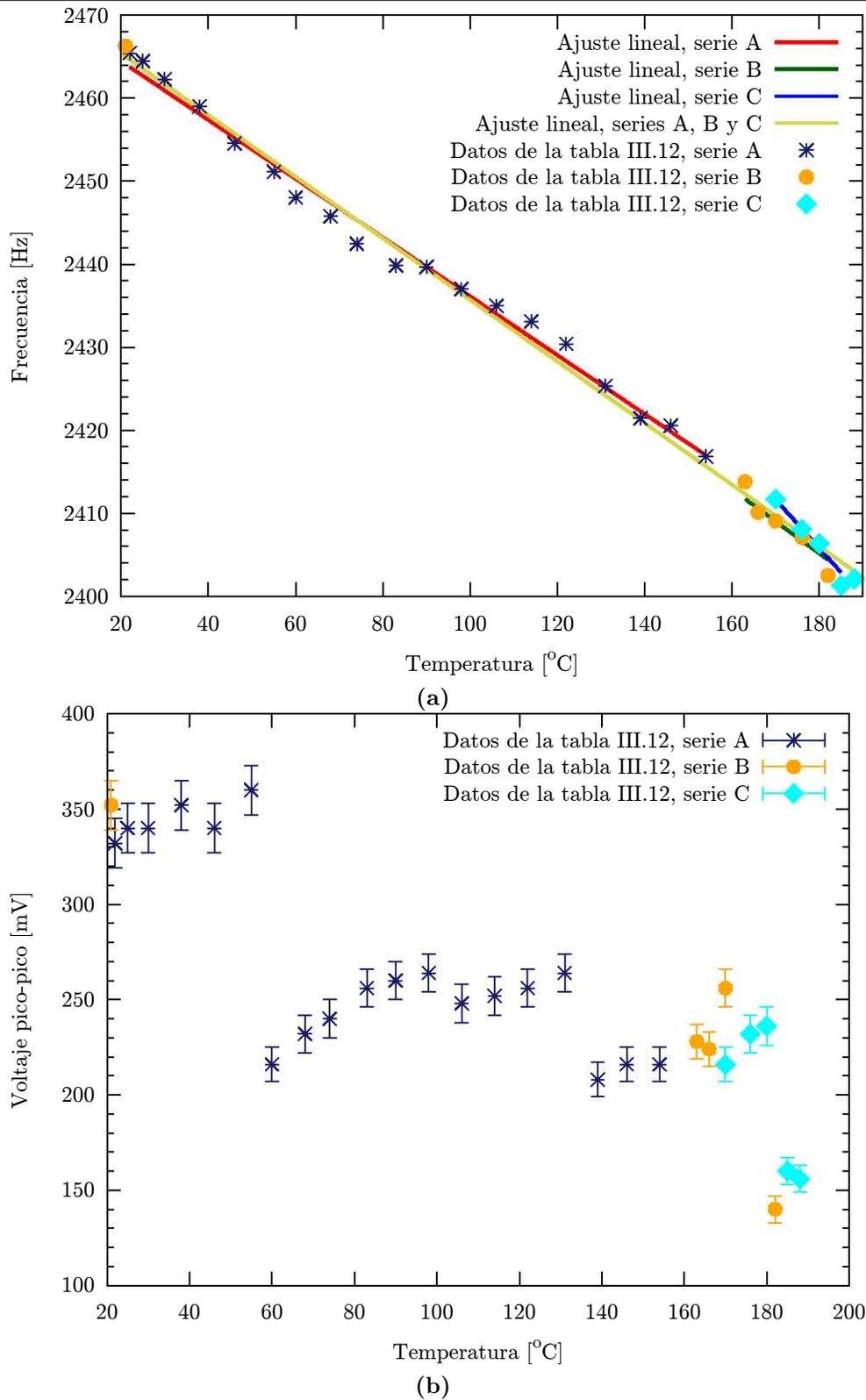


Figura III.14: Experimento 1: a) Variación con la temperatura de la frecuencia de resonancia. El ajuste para la serie A es $y = -0.3544x + 2471.6$ con $R^2 = 0.9899$, para la serie B es $y = -0.3859x + 2474.6$ con $R^2 = 0.9971$, para la serie C es $y = -0.5871x + 2511.5$ con $R^2 = 0.9484$, para las series A y B es $y = -0.3695x + 2472.7$ con $R^2 = 0.9932$, para las series A y C es $y = -0.3657x + 2472.3$ con $R^2 = 0.9932$ y para las series A, B y C es $y = -0.3711x + 2472.8$ con $R^2 = 0.9942$. b) Variación con la temperatura del voltaje pico-pico de excitación del micrófono.

Tabla III.13: Segundo experimento.

| Temperatura ± 1 [°C] | Frecuencia ± 0.07 [Hz] | Vpp [mV] |
|--------------------------|----------------------------|---------------|
| 165 | 2405.59 | 436 \pm 16 |
| 158 | 2409.1 | 448 \pm 16 |
| 149 | 2412.5 | 476 \pm 17 |
| 142 | 2416.2 | 476 \pm 17 |
| 134 | 2420.34 | 480 \pm 17 |
| 127 | 2423.35 | 480 \pm 17 |
| 120 | 2428.86 | 504 \pm 18 |
| 112 | 2432.17 | 496 \pm 17 |
| 104 | 2435.17 | 504 \pm 18 |
| 97 | 2438.57 | 480 \pm 17 |
| 89 | 2441.23 | 460 \pm 16 |
| 80 | 2444.27 | 444 \pm 16 |
| 72 | 2447.51 | 440 \pm 16 |
| 64 | 2449.87 | 436 \pm 16 |
| 56 | 2452.8 | 424 \pm 15 |
| 48 | 2455.51 | 416 \pm 15 |
| 23 | 2466.66 | 1040 \pm 34 |

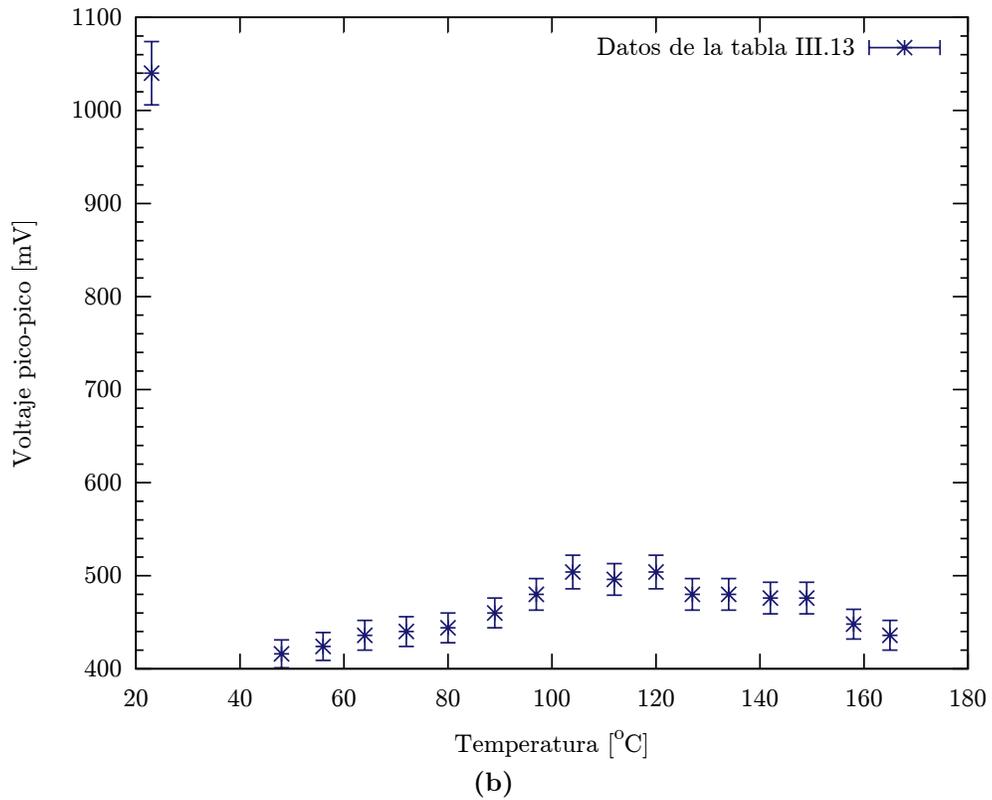
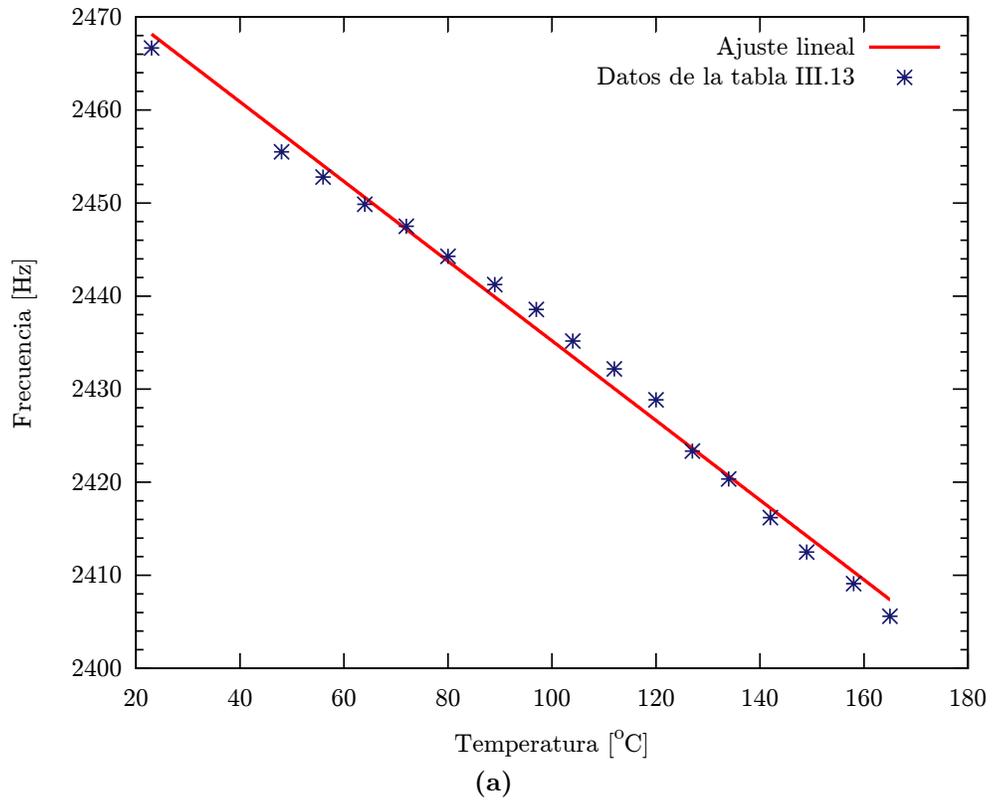


Figura III.15: Experimento 2: a) Variación de la frecuencia de resonancia con la temperatura (ajuste lineal $y = -0.4280x + 2478$ con $R^2 = 0.9929$). b) Variación del voltaje pico-pico de excitación del micrófono con la temperatura.

Para lo siguiente, el arreglo es con el horno del lado izquierdo desplazado 11.5 ± 0.05 cm del centro y el otro está a 6.5 ± 0.05 cm del centro.

Tabla III.14: Tercer experimento.

| Temperatura ± 1 [°C] | Frecuencia ± 0.07 [Hz] | Vpp [mV] |
|--------------------------|----------------------------|--------------|
| 171 | 2412.62 | 432 \pm 16 |
| 164 | 2415.63 | 432 \pm 16 |
| 157 | 2418.07 | 436 \pm 16 |
| 151 | 2420.37 | 432 \pm 16 |
| 142 | 2424.06 | 436 \pm 16 |
| 135 | 2426.31 | 436 \pm 16 |
| 128 | 2428.85 | 432 \pm 16 |
| 120 | 2431.08 | 428 \pm 15 |
| 112 | 2434.62 | 448 \pm 16 |
| 104 | 2437.08 | 432 \pm 16 |
| 94 | 2440 | 468 \pm 17 |
| 85 | 2442.91 | 472 \pm 17 |
| 76 | 2446.31 | 472 \pm 17 |
| 68 | 2449.09 | 484 \pm 17 |
| 62 | 2451.92 | 480 \pm 17 |
| 53 | 2454.87 | 472 \pm 17 |
| 44 | 2457.47 | 504 \pm 18 |
| 36 | 2460.25 | 548 \pm 19 |
| 28 | 2462.93 | 564 \pm 19 |
| 23 | 2465.82 | 624 \pm 21 |

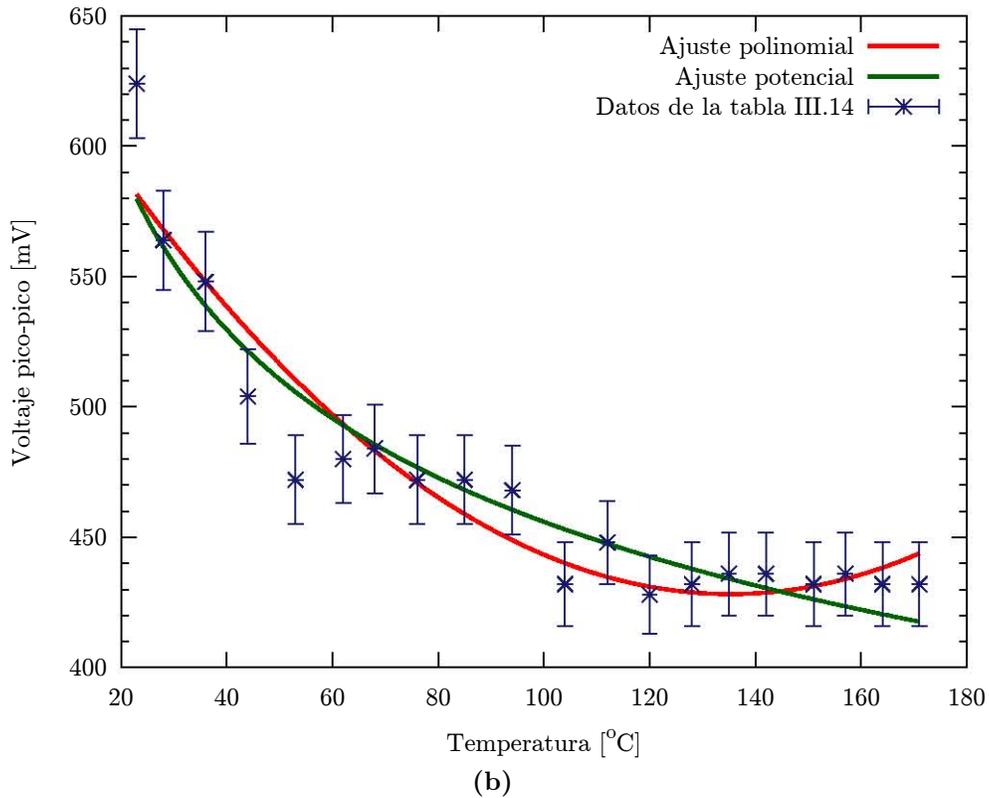
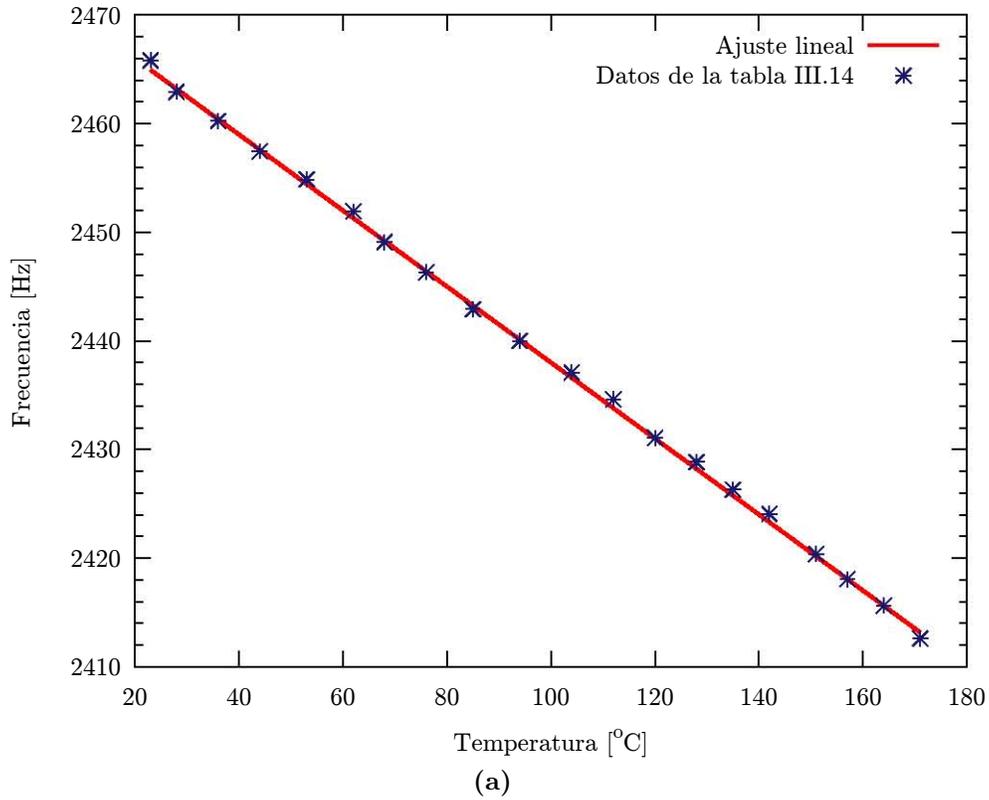


Figura III.16: Experimento 3: a) Variación de la frecuencia de resonancia con la temperatura (ajuste lineal $y = -0.3499x + 2473$ con $R^2 = 0.9994$). b) Variación del voltaje pico-pico de excitación del micrófono con la temperatura (ajuste polinomial $y = 0.01217x^2 - 3.291x + 650.7$ con $R^2 = 0.9013$, ajuste potencial $y = 968.0x^{-0.1635}$ con $R^2 = 0.9060$).

Discusión y conclusiones

En este capítulo se discuten los datos obtenidos, los métodos usados para analizarlos y se comenta qué tan eficientes resultaron los arreglos experimentales.

También se discute la corrección a las velocidades, consistente en una longitud efectiva, indispensable para poder descartar la perturbación producida por el imán sobre el sistema.

Se estima también el intervalo de valores que la integral $\int_0^{L(T_0)} T(x) dx$ puede tener. El cálculo de dicha integral es necesario para conocer la temperatura promedio \bar{T} , que es una medida más general de cómo están la temperatura a lo largo de la varilla. También se usa para estimar el cambio de longitud de la varilla y para calcular la longitud efectiva correspondiente.

El cálculo de dicha integral supone que es posible interpolar linealmente los datos medidos para obtener la temperatura promedio correspondiente a la temperatura de referencia. También fue necesario suponer comportamientos de la variación de temperatura en algunas regiones de la varilla.

Se determina el cambio en la velocidad de fase en la varilla de la onda resonante como función de la temperatura promedio con base en un ajuste de mínimos cuadrados. También se encuentra el módulo de Young como función de la temperatura promedio. Se comparan los valores de la velocidad de propagación y el módulo de Young a temperatura ambiente con los obtenidos en la literatura.

Finalmente se sugieren mejoras a los experimentos y análisis realizados y se resalta las ventajas del método usado.

Una parte de las mediciones previas al experimento principal permitió conocer cómo se comportan los elementos que se tenían a la mano. Tal es el caso de las 5 primeras tablas (ver tablas III.1, III.2, III.3, III.4 y III.5), que muestran cómo se estabiliza la temperatura dentro de un horno. Específicamente, dichos datos muestran cómo se comporta el control de temperatura aplicado al horno. Se observa un gran incremento en los primeros 60 a 150 segundos, en donde se alcanza una máxima temperatura. A continuación se observa un comportamiento oscilatorio, y éste se establece después de un tiempo en una temperatura. El tiempo de la estabilización puede variar y puede ser muy largo. Por ejemplo, en la figura III.8 puede verse que de principio a fin hay un intervalo de 440 segundos para que se alcance una estabilización razonable. Esto muestra que se tiene que esperar un tiempo considerable para que se estabilice la temperatura a lo largo de la varilla.

Una vez estabilizada la temperatura, se procede a ver cómo se distribuye a lo largo de la varilla para observar cómo decrece la temperatura en la región que no cubre el horno. El horno se coloca en uno de los extremos y se toma la temperatura a distancias determinadas. Esto permite tener una idea clara de qué regiones en la varilla cambian su temperatura como consecuencia de que el horno esté encendido.

Se probaron y caracterizaron varias bobinas para la parte relativa a la excitación y se escogió la que proveyera un campo magnético suficientemente intenso, pero cuya región de resonancia fuera lejana a las frecuencias de excitación.

El método de excitación es eficiente aunque dista de ser ideal ya que el imán en uno de los extremos constituye una perturbación al sistema que se quiere estudiar. Puede estimarse el tamaño de la perturbación, pero se desconoce qué tan buena es. Para medir qué tan grande es la perturbación se puede poner a resonar la varilla con otro método que no involucre agregar algo o modificar la varilla. Dos métodos con estas características son la percusión en uno de los extremos y el otro es el uso de las corrientes parasitarias. El primer método tiene la desventaja de generar varios modos de vibración. El segundo método parece bastante adecuado, siempre y cuando las alineaciones pertinentes se lleven a cabo (Morales et al. [20]). Para el caso en que hay un imán pegado, se tiene una longitud efectiva, L_{ef} . Ésta puede obtenerse duplicando el valor de x dado por $x = \pi L/2N_f$ (ec. (II.54)) que da el lugar donde ocurre el nodo central para el modo fundamental cuando se coloca una masa en el extremo de una varilla.

La longitud efectiva da correcciones en las velocidades de propagación conforme se calienta la varilla, pero esta longitud efectiva se modifica ligeramente debido al cambio de longitud de la varilla por expansión térmica. El valor de N_f depende solo del cociente entre las masas de la varilla y el imán, por lo que la longitud efectiva puede calcularse para cada caso sustituyendo la longitud final después de la expansión térmica en

$$L_{ef} = \frac{\pi L(T)}{N_f}. \quad (IV.1)$$

La longitud final de la varilla puede obtenerse a partir de

$$L(T) = L(T_0) + \alpha \int_0^{L(T_0)} (T(x) - T_0) dx = L(T_0) + \alpha \int_0^{L(T_0)} T(x) dx - \alpha T_0 L(T_0), \quad (IV.2)$$

con $L(T_0)$ la longitud de la varilla a la temperatura T_0 . A continuación se calcula la integral $\int_0^{L(T_0)} T(x) dx$ ya que la temperatura promedio se obtiene a partir de $\bar{T} = \frac{1}{L(T_0)} \int_0^{L(T_0)} T(x) dx$ y para obtener la longitud debido a la expansión térmica es necesario conocer su valor.

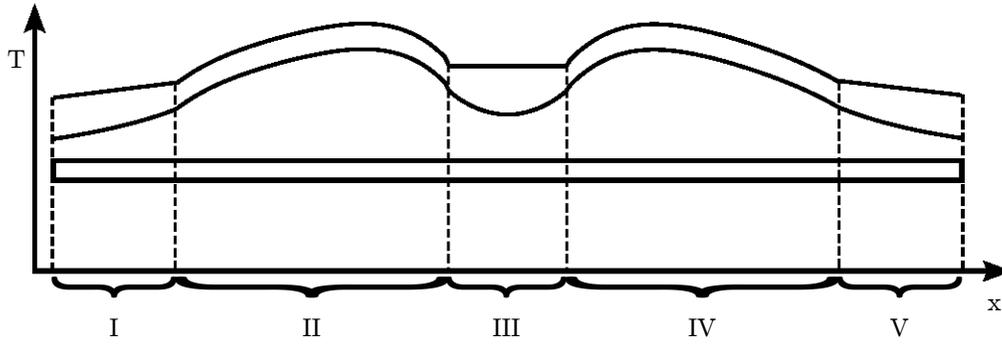


Figura IV.1: Funciones para los máximos y mínimos estimados de la temperatura en las 5 regiones.

Dado que en el experimento hay 5 regiones con comportamientos distintos, a saber, las dos regiones en que están los hornos (II y IV), la parte intermedia entre los hornos (III) y dos regiones más en los extremos (I y V). (Véase la figura IV.1). La integral $\int_0^{L(T_0)} T(x) dx$ puede dividirse en cinco integrales. Para calcularlas es útil recordar que una integral da el área bajo la curva, por lo que alternativamente puede calcularse el área bajo la curva para conocer el valor de la integral correspondiente. Si en la región i se tiene una función $f_i(x)$, la función $T(x)$ estará dada por

$$T(x) = \begin{cases} f_1(x), & x_0 < x < x_1 & \text{(Región I)} \\ f_2(x), & x_1 < x < x_2 & \text{(Región II)} \\ f_3(x), & x_2 < x < x_3 & \text{(Región III)} \\ f_4(x), & x_3 < x < x_4 & \text{(Región IV)} \\ f_5(x), & x_4 < x < x_5 & \text{(Región V)} \end{cases} \quad \text{(IV.3)}$$

y la integral se calcula ($x_0 = 0$ y $x_5 = L(T_0)$)

$$\int_0^{L(T_0)} T(x) dx = \int_0^{x_1} f_1(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f_2(x) dx + \int_{x_2}^{x_3} f_3(x) dx + \int_{x_3}^{x_4} f_4(x) dx + \int_{x_4}^{L(T_0)} f_5(x) dx. \quad \text{(IV.4)}$$

Con el fin de tener un valor confiable para esta integral, se estiman los valores máximo y mínimo que podría tener y se promedian dichos valores. Esto es necesario porque para las regiones I, III y V se carecen de bases experimentales para realizar los cálculos de las integrales en esas regiones.

El perfil de temperaturas para las regiones de los hornos (regiones II y IV) se determinó experimentalmente para tres temperaturas de referencia (ver tablas III.9, III.10, III.11). A partir de estos tres perfiles es posible hacer una interpolación lineal entre los tres valores de temperatura en cada punto y los tres valores de temperatura de referencia. Se obtiene una relación lineal diferente para cada punto en la varilla. Así, puede calcularse la temperatura en cualquier otro punto en la región de los hornos para una temperatura de referencia determinada.¹

Construidos los perfiles de temperatura en la región de los hornos para cualquier temperatura de referencia se procede a calcular el valor de la integral correspondiente. Alternativamente puede calcularse el valor de la integral para los tres perfiles medidos experimentalmente, e interpolar linealmente entre

¹Para simplificar los cálculos, esto solo se realiza para los puntos en que se tomó temperaturas y no para puntos intermedios, que requieren que se ajuste un polinomio a cada perfil de temperaturas, se encuentren las tres temperaturas para los puntos en cuestión y se haga la interpolación lineal entre estos puntos y los de las temperaturas de referencia.

los tres valores obtenidos y las tres temperaturas de referencia. Se comprobó que ambos procedimientos llevan al mismo resultado, siempre y cuando se usen los mismos métodos de cálculo en las interpolaciones lineales y en la integración. Se seleccionó la segunda alternativa por ser más rápida y requerir menos cálculos.

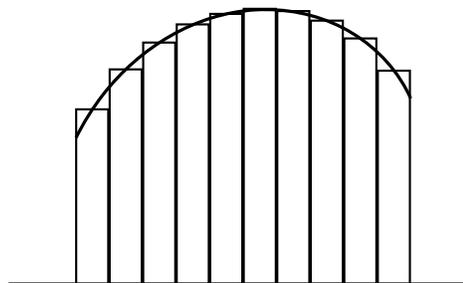


Figura IV.2: Aproximación del valor de una integral por suma de rectángulos.

Para la interpolación lineal se promedió entre los valores obtenidos para las pendientes entre cada par de puntos y entre los valores obtenidos de las ordenadas al origen. Para la integración se consideraron dos alternativas. Hacer la integración a partir del polinomio ajustado a los perfiles de temperatura, y alternativamente, sumar el área de los 30 rectángulos de base un centímetro con altura correspondiente a la temperatura promediada de los dos valores medidos de temperatura que abarca el rectángulo (ver figura IV.2). Por ejemplo, para el rectángulo con base de $x=10$ cm a $x=11$ cm, la temperatura medida en $x=10$ cm puede ser de 42°C y la temperatura en $x=11$ cm puede ser de 43°C , por lo que la altura de dicho rectángulo sería de $(42+43)/2=42.5^{\circ}\text{C}$. Los resultados no difieren mucho. Por ejemplo, para el perfil de temperatura en el horno 1 con temperatura de referencia de 50° , haciendo la integración del polinomio (de cuarto orden) ajustado da un valor de 1367.5 y haciendo la suma de rectángulos da un valor de 1366; para una temperatura de referencia de 100° se obtiene un valor de 2509.2 con la integración del polinomio y la suma de rectángulos da 2510; para una temperatura de referencia de 151° la integración del polinomio ajustado da 3763 y la suma de rectángulos da 3765.9.

Se presentan en la tabla IV.1 los valores obtenidos para la interpolación lineal entre los valores de la integración para cada horno y las temperaturas de referencia. La integral en uno de los hornos se obtiene calculando $mT_r + b$.

Tabla IV.1: Interpolación lineal entre los valores de la integración para cada horno y las temperaturas de referencia (T_r).

| T_r | Horno 1 | Horno 2 | | Horno 1 | Horno 2 |
|-------|---------|---------|-----------|---------|---------|
| 50 | 1366 | 1324 | Pendiente | 23.73 | 24.12 |
| 100 | 2510 | 2517 | Ordenada | 151.5 | 109.6 |
| 151 | 3763 | 3760 | | | |

Como las temperaturas medidas tienen una incertidumbre de $\pm 1^{\circ}\text{C}$, el estimado máximo para el valor de la integral se obtiene sumando 30 unidades y el estimado mínimo restando 30 unidades. Esto es así porque la longitud de cada horno es de 30 cm y al sumar o restar un grado a cada temperatura se modifica el área en más o menos 30 unidades.

Para las regiones I y V en el estimado máximo para la integral se supone un comportamiento lineal en estas regiones, con una pendiente de magnitud $0.6^{\circ}\text{C}/\text{cm}$. Esta pendiente se escoge para que en 15 cm el

decremento (o incremento) en la temperatura sea de 9°C . Comparando con los datos de la tabla III.7 no parece una suposición muy mala para el valor de la pendiente. Así, la temperatura decrece de forma lineal en la dirección que se aleja del horno hacia el extremo de la varilla. Decrece desde una temperatura que se toma como la temperatura en el extremo del horno correspondiente más una unidad. Para el estimado mínimo de las mismas regiones se supuso un comportamiento exponencial decreciente en dirección a los extremos de la varilla, decreciendo desde la temperatura que se toma como la temperatura en el extremo del horno correspondiente menos una unidad hasta la temperatura ambiente medida menos una unidad. Por supuesto, la elección de las funciones como funciones decrecientes se debe a que la varilla pierde calor en estas regiones. Estas pérdidas de calor son por conducción, convección y por radiación. La parte correspondiente a la radiación es suficientemente pequeña por lo que puede ignorarse.

Las pérdidas de calor por conducción son proporcionales al área por la que se transmite el calor y al gradiente de temperaturas. En una sección determinada en la varilla el calor fluye a una sección adyacente a menor temperatura por conducción y por lo tanto pierde calor. Las pérdidas de calor por convección son proporcionales a la diferencia de temperaturas entre el aire circundante y la superficie de la varilla. Como finalmente las pérdidas de calor son proporcionales a cuánto calor hay en una determinada sección de la varilla, es razonable pensar que el decaimiento es exponencial (Necati [22]). Un decaimiento menos rápido lo da un decaimiento lineal y por ello se escoge este tipo de comportamiento para el estimado máximo. Se calcula el valor de la integral para las funciones de temperatura construidas tomando las temperaturas que se midieron en los extremos de los hornos para las temperaturas de referencia y la correspondiente temperatura ambiente.

Esto permite de nuevo construir una interpolación lineal entre los valores calculados y las temperaturas de referencia. Sin embargo, para algunas temperaturas (menores a 50°C en los dos primeros experimentos, y menores a 30° en el tercer experimento) el comportamiento lineal supuesto de la interpolación queda por abajo del comportamiento exponencial supuesto de la otra interpolación. Una solución a esto es cambiar la pendiente para el comportamiento lineal. Otra solución es invertir el comportamiento supuesto para esas temperaturas. Se optó por la segunda opción, pero haciendo un simple intercambio de los valores obtenidos de las interpolaciones. El intercambio de valores lleva por supuesto un error porque los parámetros asociados al comportamiento lineal son los del estimado máximo y los parámetros asociados al comportamiento exponencial son los del estimado mínimo. Pero el error es despreciable, por lo que se ignoran los cambios que esto pudiera traer. Se presentan a continuación las interpolaciones obtenidas tanto para el estimado máximo como para el estimado mínimo para cada experimento en las regiones I (tablas IV.2 y IV.3) y V (tablas IV.4 y IV.5).

Tabla IV.2: Interpolación lineal entre el estimado máximo y las temperaturas de referencia (T_r) para la región I.

| T_r | Exp. 1 | Exp. 2 | Exp. 3 | | Exp. 1 | Exp. 2 | Exp. 3 |
|-------|--------|--------|--------|-----------|--------|--------|--------|
| 50 | 365.0 | 365.0 | 243.1 | Pendiente | 3.75 | 3.75 | 2.37 |
| 100 | 500.5 | 500.5 | 328.6 | Ordenada | 143.0 | 143.0 | 103.0 |
| 151 | 744.4 | 744.4 | 482.5 | | | | |

Para la región III se supuso un perfil que corresponde a la superposición de varios comportamientos. Para el estimado máximo se considera una superposición de dos funciones. La primera debe decaer linealmente a partir del extremo de un horno y la segunda es igual pero respecto del otro. Se supuso que las pendientes son iguales pero de signo contrario, con lo que la suma de estas funciones da un valor constante, igual al promedio de temperaturas más una unidad. Para estimar el mínimo se considera algo análogo, en este caso con exponenciales que decaen conforme se alejan del extremo del horno

Tabla IV.3: Interpolación lineal entre el estimado mínimo y las temperaturas de referencia (T_r) para la región I.

| T_r | Exp. 1 | Exp. 2 | Exp. 3 | | Exp. 1 | Exp. 2 | Exp. 3 |
|-------|--------|--------|--------|-----------|--------|--------|--------|
| 50 | 335.8 | 343.3 | 207.1 | Pendiente | 1.51 | 1.53 | 0.94 |
| 100 | 394.0 | 402.3 | 243.3 | Ordenada | 248.9 | 255.2 | 153.0 |
| 151 | 488.5 | 498.2 | 302.1 | | | | |

Tabla IV.4: Interpolación lineal entre el estimado máximo y las temperaturas de referencia (T_r) para la región V.

| T_r | Exp. 1 | Exp. 2 | Exp. 3 | | Exp. 1 | Exp. 2 | Exp. 3 |
|-------|--------|--------|--------|-----------|--------|--------|--------|
| 50 | 365.0 | 365.0 | 365.0 | Pendiente | 3.88 | 3.88 | 3.88 |
| 100 | 486.9 | 486.9 | 486.9 | Ordenada | 123.0 | 123.0 | 123.0 |
| 151 | 757.9 | 757.9 | 757.9 | | | | |

Tabla IV.5: Interpolación lineal entre el estimado mínimo y las temperaturas de referencia (T_r) para la región V.

| T_r | Exp. 1 | Exp. 2 | Exp. 3 | | Exp. 1 | Exp. 2 | Exp. 3 |
|-------|--------|--------|--------|-----------|--------|--------|--------|
| 50 | 335.8 | 343.3 | 328.2 | Pendiente | 1.56 | 1.58 | 1.54 |
| 100 | 388.4 | 396.7 | 380.0 | Ordenada | 241.1 | 247.3 | 234.8 |
| 151 | 493.5 | 503.2 | 483.6 | | | | |

respectivo. Se procede a calcular la integral para las funciones construidas para las temperaturas de referencia y se obtienen tres valores con los que se puede hacer nuevamente una interpolación lineal para una determinada temperatura de referencia. De nuevo en ciertas temperaturas en el experimento 1 la interpolación da menores valores para el estimado máximo que para el estimado mínimo, por lo que se intercambian esos valores. También, en esta región se encuentra el soporte de la varilla. La energía que se pudiera presentar por conducción es muy pequeña puesto que el área efectiva de contacto también era muy pequeña y por ello se ignora el efecto que el soporte pudiera tener. Se presentan a continuación las interpolaciones obtenidas tanto para el estimado máximo como para el estimado mínimo para cada experimento en la región III (ver tablas IV.6 y IV.7).

Tabla IV.6: Interpolación lineal entre el estimado máximo y las temperaturas de referencia (T_r) para la región III.

| T_r | Exp. 1 | Exp. 2 | Exp. 3 | | Exp. 1 | Exp. 2 | Exp. 3 |
|-------|--------|--------|--------|-----------|--------|--------|--------|
| 50 | 507 | 507 | 702 | Pendiente | 7.66 | 7.66 | 10.08 |
| 100 | 916.5 | 916.5 | 1269 | Ordenada | 141.5 | 141.5 | 240.1 |
| 151 | 1280.5 | 1280.5 | 1719 | | | | |

A partir de las pendientes y ordenadas encontradas en las tablas IV.1, IV.2, IV.3, IV.4, IV.5, IV.6, IV.7 se determina el valor de las integrales para cualquier temperatura de referencia y también para las temperaturas medidas en los experimentos, como puede verse en las tablas IV.8, IV.9 y IV.10, donde el subíndice S (I) indica que los cálculos se realizan con la estimación del máximo (mínimo), \bar{I} representa el valor promedio de I , la longitud efectiva L_{ef} está calculada a partir de la ecuación (IV.1)

Tabla IV.7: Interpolación lineal entre el estimado mínimo y las temperaturas de referencia (T_r) para la región III.

| T_r | Exp. 1 | Exp. 2 | Exp. 3 | | Exp. 1 | Exp. 2 | Exp. 3 |
|-------|--------|--------|--------|-----------|--------|--------|--------|
| 50 | 461.5 | 464.2 | 634.8 | Pendiente | 5.48 | 5.55 | 7.48 |
| 100 | 771.6 | 778.5 | 1058.2 | Ordenada | 211.7 | 211.2 | 293.5 |
| 151 | 1014.2 | 1024.1 | 1389.9 | | | | |

y la temperatura promedio \bar{T} está definida por

$$\bar{T} = \frac{1}{L(T_0)} \int_0^{L(T_0)} T(x) dx = \frac{1}{L(T_0)} \bar{\mathcal{I}}. \quad (\text{IV.5})$$

Se marca con asterisco los valores que fueron intercambiados. La incertidumbre de la temperatura de referencia T_r es de $\pm 1^\circ\text{C}$, y la incertidumbre de la longitud efectiva es de ± 0.1 cm.

La velocidad de fase puede calcularse a partir de (II.112) ($c_{1,n} = f_n \Lambda_n = \frac{2f_n L}{n}$), sustituyendo L por la longitud efectiva L_{ef} y tomando $n = 1$. Se tiene

$$c_{1,1} = f_1 \Lambda_1 = 2f_1 L_{ef}. \quad (\text{IV.6})$$

Las frecuencias son las correspondientes a cada temperatura promedio para cada temperatura de referencia (ver tablas III.12, III.13 y III.14). Se presentan las velocidades correspondientes a cada temperatura promedio para cada uno de los tres experimentos en las tablas IV.11, IV.12 y IV.13.

Tabla IV.8: *Primer experimento.*

| T_r | I_s | I_I | II_s | II_I | III_s | III_I | IV_s | IV_I | V_s | V_I | \mathcal{I}_s | \mathcal{I}_I | \bar{I} | \bar{T} | L_{ef} |
|----------------------|--------|--------|--------|--------|---------|---------|--------|--------|--------|--------|-----------------|-----------------|---------------|-----------|----------|
| Serie A | | | | | | | | | | | | | | | |
| 22 | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 2202.2±100.1 | 22±1 | 101.3 |
| 25 | 286.6* | 236.7* | 774.7 | 714.7 | 348.6* | 333.0* | 742.5 | 682.5 | 280.1* | 220.0* | 2432.5 | 2186.9 | 2309.7±122.8 | 23.1±1.2 | 101.3 |
| 30 | 294.1* | 255.4* | 893.3 | 833.3 | 376.0* | 371.3* | 863.1 | 803.1 | 287.9* | 239.4* | 2714.4 | 2502.6 | 2608.5±105.9 | 26.1±1.1 | 101.3 |
| 38 | 306.2* | 285.4* | 1083.1 | 1023.1 | 432.6 | 419.8 | 1056.1 | 996.1 | 300.3* | 270.5* | 3178.3 | 2994.9 | 3086.6±91.7 | 30.8±0.9 | 101.3 |
| 46 | 318.3* | 315.4* | 1272.9 | 1212.9 | 493.9 | 463.6 | 1249.0 | 1189.0 | 312.8* | 301.5* | 3646.9 | 3482.5 | 3564.7±82.2 | 35.6±0.8 | 101.3 |
| 55 | 349.2 | 331.9 | 1486.5 | 1426.5 | 562.9 | 512.9 | 1466.0 | 1406.0 | 336.5 | 326.8 | 4201.0 | 4004.2 | 4102.6±98.4 | 41.0±1.0 | 101.3 |
| 60 | 367.9 | 339.4 | 1605.1 | 1545.1 | 601.2 | 540.3 | 1586.6 | 1526.6 | 355.9 | 334.6 | 4516.7 | 4286.1 | 4401.4±115.3 | 44.0±1.2 | 101.3 |
| 68 | 397.9 | 351.5 | 1794.9 | 1734.9 | 662.5 | 584.1 | 1779.6 | 1719.6 | 386.9 | 347.1 | 5021.8 | 4737.2 | 4879.5±142.3 | 48.7±1.4 | 101.3 |
| 74 | 420.4 | 360.6 | 1937.3 | 1877.3 | 708.4 | 617.0 | 1924.3 | 1864.3 | 410.2 | 356.4 | 5400.6 | 5075.5 | 5238.1±162.5 | 52.3±1.6 | 101.3 |
| 83 | 454.2 | 374.1 | 2150.9 | 2090.9 | 777.4 | 666.3 | 2141.3 | 2081.3 | 445.1 | 370.4 | 5968.9 | 5583.0 | 5775.9±192.9 | 57.7±1.9 | 101.4 |
| 90 | 480.4 | 384.7 | 2316.9 | 2256.9 | 831.0 | 704.6 | 2310.1 | 2250.1 | 472.3 | 381.3 | 6410.8 | 5977.8 | 6194.3±216.5 | 61.9±2.2 | 101.4 |
| 98 | 510.4 | 396.8 | 2506.8 | 2446.8 | 892.3 | 748.5 | 2503.1 | 2443.1 | 503.4 | 393.8 | 6915.9 | 6428.9 | 6672.4±243.5 | 66.7±2.4 | 101.4 |
| 106 | 540.4 | 408.9 | 2696.6 | 2636.6 | 953.6 | 792.3 | 2696.0 | 2636.0 | 534.4 | 406.2 | 7421.0 | 6880.0 | 7150.5±270.5 | 71.4±2.7 | 101.4 |
| 114 | 570.4 | 420.9 | 2886.4 | 2826.4 | 1014.9 | 836.1 | 2889.0 | 2829.0 | 565.4 | 418.7 | 7926.1 | 7331.1 | 7628.6±297.5 | 76.2±3.0 | 101.4 |
| 122 | 600.4 | 433.0 | 3076.2 | 3016.2 | 1076.2 | 879.9 | 3081.9 | 3021.9 | 596.5 | 431.2 | 8431.2 | 7782.2 | 8106.7±324.5 | 81.0±3.2 | 101.4 |
| 131 | 634.1 | 446.6 | 3289.8 | 3229.8 | 1145.2 | 929.2 | 3298.9 | 3238.9 | 631.4 | 445.2 | 8999.4 | 8289.7 | 8644.6±354.9 | 86.4±3.5 | 101.4 |
| 139 | 664.1 | 458.7 | 3479.6 | 3419.6 | 1206.5 | 973.0 | 3491.9 | 3431.9 | 662.5 | 457.6 | 9504.5 | 8740.8 | 9122.7±381.9 | 91.1±3.8 | 101.4 |
| 146 | 690.4 | 469.2 | 3645.7 | 3585.7 | 1260.1 | 1011.4 | 3660.7 | 3600.7 | 689.6 | 468.5 | 9946.5 | 9135.5 | 9541.0±405.5 | 95.3±4.1 | 101.4 |
| 154 | 720.4 | 481.3 | 3835.5 | 3775.5 | 1321.4 | 1055.2 | 3853.6 | 3793.6 | 720.7 | 481.0 | 10451.6 | 9586.6 | 10019.1±432.5 | 100.1±4.3 | 101.5 |
| Serie B | | | | | | | | | | | | | | | |
| 163 | 754.1 | 494.9 | 4049.0 | 3989.0 | 1390.3 | 1104.5 | 4070.7 | 4010.7 | 755.6 | 495.0 | 11019.8 | 10094.1 | 10557.0±462.8 | 105.5±4.6 | 101.5 |
| 170 | 780.4 | 505.5 | 4215.1 | 4155.1 | 1444.0 | 1142.8 | 4239.5 | 4179.5 | 782.8 | 505.9 | 11461.8 | 10488.8 | 10975.3±486.5 | 109.6±4.9 | 101.5 |
| 166 | 765.4 | 499.4 | 4120.2 | 4060.2 | 1413.3 | 1120.9 | 4143.0 | 4083.0 | 767.3 | 499.7 | 11209.2 | 10263.3 | 10736.2±473.0 | 107.3±4.7 | 101.5 |
| 176 | 802.9 | 514.5 | 4357.5 | 4297.5 | 1489.9 | 1175.7 | 4384.2 | 4324.2 | 806.1 | 515.3 | 11840.6 | 10827.2 | 11333.9±506.7 | 113.2±5.1 | 101.5 |
| 182 | 825.4 | 523.6 | 4499.8 | 4439.8 | 1535.9 | 1208.5 | 4528.9 | 4468.9 | 829.4 | 524.6 | 12219.4 | 11165.5 | 11692.4±527.0 | 116.8±5.3 | 101.5 |
| Serie C: No estables | | | | | | | | | | | | | | | |
| 170 | 780.4 | 505.5 | 4215.1 | 4155.1 | 1444.0 | 1142.8 | 4239.5 | 4179.5 | 782.8 | 505.9 | 11461.8 | 10488.8 | 10975.3±486.5 | 109.6±4.9 | 101.5 |
| 180 | 817.9 | 520.6 | 4452.4 | 4392.4 | 1520.6 | 1197.6 | 4480.7 | 4420.7 | 821.6 | 521.5 | 12093.1 | 11052.7 | 11572.9±520.2 | 115.6±5.2 | 101.5 |
| 176 | 802.9 | 514.5 | 4357.5 | 4297.5 | 1489.9 | 1175.7 | 4384.2 | 4324.2 | 806.1 | 515.3 | 11840.6 | 10827.2 | 11333.9±506.7 | 113.2±5.1 | 101.5 |
| 188 | 847.9 | 532.6 | 4642.2 | 4582.2 | 1581.9 | 1241.4 | 4673.6 | 4613.6 | 852.6 | 534.0 | 12598.2 | 11503.8 | 12051.0±547.2 | 120.4±5.5 | 101.5 |
| 185 | 836.6 | 528.1 | 4571.0 | 4511.0 | 1558.9 | 1225.0 | 4601.3 | 4541.3 | 841.0 | 529.3 | 12408.8 | 11334.7 | 11871.7±537.1 | 118.6±5.4 | 101.5 |

Tabla IV.9: Segundo experimento.

| T_r | I_S | I_I | II_S | II_I | III_S | III_I | IV_S | IV_I | V_S | V_I | \mathcal{I}_S | \mathcal{I}_I | \bar{I} | \bar{T} | L_{ef} |
|-------|--------|--------|--------|--------|---------|---------|--------|--------|--------|--------|-----------------|-----------------|---------------|-----------|----------|
| 165 | 761.6 | 507.7 | 4096.5 | 4036.5 | 1405.7 | 1126.8 | 4118.9 | 4058.9 | 763.4 | 507.9 | 11146.1 | 10237.8 | 10691.9±454.1 | 106.8±4.5 | 101.5 |
| 158 | 735.4 | 497.0 | 3930.4 | 3870.4 | 1352.0 | 1087.9 | 3950.1 | 3890.1 | 736.2 | 496.9 | 10704.1 | 9842.3 | 10273.2±430.9 | 102.6±4.3 | 101.5 |
| 149 | 701.6 | 483.2 | 3716.8 | 3656.8 | 1283.1 | 1038.0 | 3733.1 | 3673.1 | 701.3 | 482.7 | 10135.9 | 9333.8 | 9734.8±401.1 | 97.3±4.0 | 101.4 |
| 142 | 675.4 | 472.5 | 3550.7 | 3490.7 | 1229.4 | 999.1 | 3564.2 | 3504.2 | 674.1 | 471.6 | 9693.9 | 8938.2 | 9316.1±377.9 | 93.1±3.8 | 101.4 |
| 134 | 645.4 | 460.3 | 3360.9 | 3300.9 | 1168.1 | 954.7 | 3371.3 | 3311.3 | 643.1 | 459.0 | 9188.8 | 8486.2 | 8837.5±351.3 | 88.3±3.5 | 101.4 |
| 127 | 619.1 | 449.5 | 3194.8 | 3134.8 | 1114.5 | 915.9 | 3202.5 | 3142.5 | 615.9 | 447.9 | 8746.9 | 8090.7 | 8418.8±328.1 | 84.1±3.3 | 101.4 |
| 120 | 592.9 | 438.8 | 3028.8 | 2968.8 | 1060.9 | 877.1 | 3033.7 | 2973.7 | 588.7 | 436.9 | 8304.9 | 7695.2 | 8000.0±304.9 | 79.9±3.0 | 101.4 |
| 112 | 562.9 | 426.6 | 2838.9 | 2778.9 | 999.6 | 832.7 | 2840.7 | 2780.7 | 557.7 | 424.2 | 7799.8 | 7243.2 | 7521.5±278.3 | 75.1±2.8 | 101.4 |
| 104 | 532.9 | 414.3 | 2649.1 | 2589.1 | 938.3 | 788.3 | 2647.8 | 2587.8 | 526.6 | 411.6 | 7294.7 | 6791.1 | 7042.9±251.8 | 70.4±2.5 | 101.4 |
| 97 | 506.7 | 403.6 | 2483.0 | 2423.0 | 884.7 | 749.4 | 2479.0 | 2419.0 | 499.5 | 400.5 | 6852.8 | 6395.6 | 6624.2±228.6 | 66.2±2.3 | 101.4 |
| 89 | 476.7 | 391.4 | 2293.2 | 2233.2 | 823.4 | 705.1 | 2286.0 | 2226.0 | 468.4 | 387.9 | 6347.7 | 5943.6 | 6145.6±202.0 | 61.4±2.0 | 101.4 |
| 80 | 442.9 | 377.6 | 2079.7 | 2019.7 | 754.4 | 655.1 | 2069.0 | 2009.0 | 433.5 | 373.7 | 5779.5 | 5435.1 | 5607.3±172.2 | 56.0±1.7 | 101.3 |
| 72 | 412.9 | 365.4 | 1889.9 | 1829.9 | 693.1 | 610.7 | 1876.0 | 1816.0 | 402.4 | 361.1 | 5274.4 | 4983.0 | 5128.7±145.7 | 51.2±1.5 | 101.3 |
| 64 | 382.9 | 353.1 | 1700.0 | 1640.0 | 631.8 | 566.3 | 1683.1 | 1623.1 | 371.4 | 348.4 | 4769.3 | 4531.0 | 4650.1±119.1 | 46.5±1.2 | 101.3 |
| 56 | 352.9 | 340.9 | 1510.2 | 1450.2 | 570.5 | 521.9 | 1490.2 | 1430.2 | 340.3 | 335.8 | 4264.2 | 4079.0 | 4171.6±92.6 | 41.7±0.9 | 101.3 |
| 48 | 328.6* | 322.9* | 1320.4 | 1260.4 | 509.2 | 477.6 | 1297.2 | 1237.2 | 323.2* | 309.3* | 3778.6 | 3607.4 | 3693.0±85.6 | 36.9±0.9 | 101.3 |
| 23 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | 2302.3±100.1 | 23±1 | 101.3 |

Tabla IV.10: Tercer experimento.

| T_r | I_s | I_I | II_s | II_I | III_s | III_I | IV_s | IV_I | V_s | V_I | \mathcal{I}_s | \mathcal{I}_I | \bar{I} | \bar{T} | L_{ef} |
|-------|--------|--------|--------|--------|---------|---------|--------|--------|--------|--------|-----------------|-----------------|---------------|-----------|----------|
| 171 | 507.6 | 313.5 | 4238.8 | 4178.8 | 1963.3 | 1572.9 | 4263.6 | 4203.6 | 786.7 | 497.4 | 11760.1 | 10766.3 | 11263.2±496.9 | 112.5±5.0 | 101.5 |
| 164 | 491.0 | 307.0 | 4072.7 | 4012.7 | 1892.8 | 1520.6 | 4094.8 | 4034.8 | 759.5 | 486.6 | 11310.9 | 10361.7 | 10836.3±474.6 | 108.3±4.7 | 101.5 |
| 157 | 474.5 | 300.4 | 3906.7 | 3846.7 | 1822.2 | 1468.2 | 3926.0 | 3866.0 | 732.3 | 475.9 | 10861.7 | 9957.1 | 10409.4±452.3 | 104.0±4.5 | 101.5 |
| 151 | 460.3 | 294.7 | 3764.3 | 3704.3 | 1761.8 | 1423.3 | 3781.3 | 3721.3 | 709.0 | 466.7 | 10476.7 | 9610.3 | 10043.5±433.2 | 100.3±4.3 | 101.5 |
| 142 | 439.0 | 286.3 | 3550.7 | 3490.7 | 1671.1 | 1356.0 | 3564.2 | 3504.2 | 674.1 | 452.9 | 9899.2 | 9090.1 | 9494.6±404.5 | 94.9±4.0 | 101.4 |
| 135 | 422.4 | 279.7 | 3384.7 | 3324.7 | 1600.5 | 1303.6 | 3395.4 | 3335.4 | 647.0 | 442.1 | 9450.0 | 8685.5 | 9067.7±382.3 | 90.6±3.8 | 101.4 |
| 128 | 405.9 | 273.2 | 3218.6 | 3158.6 | 1530.0 | 1251.2 | 3226.6 | 3166.6 | 619.8 | 431.4 | 9000.8 | 8280.9 | 8640.8±360.0 | 86.3±3.6 | 101.4 |
| 120 | 386.9 | 265.6 | 3028.8 | 2968.8 | 1449.4 | 1191.3 | 3033.7 | 2973.7 | 588.7 | 419.1 | 8487.5 | 7818.5 | 8153.0±334.5 | 81.4±3.3 | 101.4 |
| 112 | 368.0 | 258.1 | 2838.9 | 2778.9 | 1368.8 | 1131.5 | 2840.7 | 2780.7 | 557.7 | 406.8 | 7974.1 | 7356.1 | 7665.1±309.0 | 76.6±3.1 | 101.4 |
| 104 | 349.1 | 250.6 | 2649.1 | 2589.1 | 1288.1 | 1071.6 | 2647.8 | 2587.8 | 526.6 | 394.5 | 7460.8 | 6893.7 | 7177.2±283.5 | 71.7±2.8 | 101.4 |
| 94 | 325.4 | 241.2 | 2411.8 | 2351.8 | 1187.4 | 996.8 | 2406.6 | 2346.6 | 487.8 | 379.2 | 6819.1 | 6315.7 | 6567.4±251.7 | 65.6±2.5 | 101.4 |
| 85 | 304.1 | 232.8 | 2198.3 | 2138.3 | 1096.7 | 929.5 | 2189.6 | 2129.6 | 452.9 | 365.3 | 6241.5 | 5795.5 | 6018.5±223.0 | 60.1±2.2 | 101.4 |
| 76 | 282.8 | 224.3 | 1984.8 | 1924.8 | 1006.0 | 862.1 | 1972.5 | 1912.5 | 418.0 | 351.5 | 5664.0 | 5275.2 | 5469.6±194.4 | 54.6±1.9 | 101.3 |
| 68 | 263.9 | 216.8 | 1794.9 | 1734.9 | 925.3 | 802.3 | 1779.6 | 1719.6 | 386.9 | 339.2 | 5150.7 | 4812.8 | 4981.8±168.9 | 49.8±1.7 | 101.3 |
| 62 | 249.7 | 211.2 | 1652.6 | 1592.6 | 864.9 | 757.4 | 1634.9 | 1574.9 | 363.6 | 330.0 | 4765.7 | 4466.0 | 4615.9±149.8 | 46.1±1.5 | 101.3 |
| 53 | 228.4 | 202.7 | 1439.0 | 1379.0 | 774.2 | 690.0 | 1417.8 | 1357.8 | 328.7 | 316.2 | 4188.1 | 3945.8 | 4067.0±121.2 | 40.6±1.2 | 101.3 |
| 44 | 207.1 | 194.3 | 1225.5 | 1165.5 | 683.5 | 622.7 | 1200.8 | 1140.8 | 302.4* | 293.8* | 3619.3 | 3417.0 | 3518.1±101.1 | 35.1±1.0 | 101.3 |
| 36 | 188.2 | 186.8 | 1035.7 | 975.7 | 602.9 | 562.8 | 1007.8 | 947.8 | 290.1* | 262.7* | 3124.7 | 2935.8 | 3030.2±94.4 | 30.3±0.9 | 101.3 |
| 28 | 179.3* | 169.3* | 845.9 | 785.9 | 522.2 | 503.0 | 814.9 | 754.9 | 277.8* | 231.7* | 2640.1 | 2444.7 | 2542.4±97.7 | 25.4±1.0 | 101.3 |
| 23 | 174.6* | 157.4* | 727.2 | 667.2 | 471.8 | 465.6 | 694.3 | 634.3 | 270.2* | 212.3* | 2338.1 | 2136.8 | 2237.4±100.7 | 22.4±1.0 | 101.3 |
| 21 | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 2102.1±100.1 | 21±1 | 101.3 |

Tabla IV.11: Primer experimento: frecuencias de resonancia, longitudes efectivas y velocidades de fase a distintas temperaturas promedio.

| \bar{T} [°C] | $f \pm 0.07$ [Hz] | L_{ef} | c [m/s] |
|----------------------|-------------------|----------|------------|
| Serie A | | | |
| 22±1 | 2465.44 | 101.3 | 4993.4±3.1 |
| 23.1±1.2 | 2464.48 | 101.3 | 4991.6±3.1 |
| 26.1±1.1 | 2462.27 | 101.3 | 4987.5±3.1 |
| 30.8±0.9 | 2459.01 | 101.3 | 4981.4±3.0 |
| 35.6±0.8 | 2454.57 | 101.3 | 4973.0±3.0 |
| 41.0±1.0 | 2451.14 | 101.3 | 4966.6±3.0 |
| 44.0±1.2 | 2448.04 | 101.3 | 4960.7±3.0 |
| 48.7±1.4 | 2445.77 | 101.3 | 4956.6±3.1 |
| 52.3±1.6 | 2442.47 | 101.3 | 4950.4±3.1 |
| 57.7±1.9 | 2439.84 | 101.4 | 4945.6±3.1 |
| 61.9±2.2 | 2439.66 | 101.4 | 4945.7±3.2 |
| 66.7±2.4 | 2437.01 | 101.4 | 4940.9±3.2 |
| 71.4±2.7 | 2434.98 | 101.4 | 4937.3±3.2 |
| 76.2±3.0 | 2433.09 | 101.4 | 4934.1±3.2 |
| 81.0±3.2 | 2430.4 | 101.4 | 4929.1±3.3 |
| 86.4±3.5 | 2425.33 | 101.4 | 4919.5±3.3 |
| 91.1±3.8 | 2421.45 | 101.4 | 4912.1±3.3 |
| 95.3±4.1 | 2420.54 | 101.4 | 4910.8±3.3 |
| 100.1±4.3 | 2416.84 | 101.5 | 4903.8±3.4 |
| Serie B | | | |
| 105.5±4.6 | 2413.79 | 101.5 | 4898.2±3.4 |
| 109.6±4.9 | 2409.09 | 101.5 | 4889.2±3.4 |
| 107.3±4.7 | 2410.11 | 101.5 | 4891.0±3.4 |
| 113.2±5.1 | 2407.09 | 101.5 | 4885.5±3.4 |
| 116.8±5.3 | 2402.5 | 101.5 | 4876.6±3.5 |
| Serie C: No estables | | | |
| 109.6±4.9 | 2411.71 | 101.5 | 4894.5±3.4 |
| 115.6±5.2 | 2406.37 | 101.5 | 4884.3±3.5 |
| 113.2±5.1 | 2408.06 | 101.5 | 4887.5±3.4 |
| 120.4±5.5 | 2402.1 | 101.5 | 4876.2±3.5 |
| 118.6±5.4 | 2401.28 | 101.5 | 4874.3±3.5 |

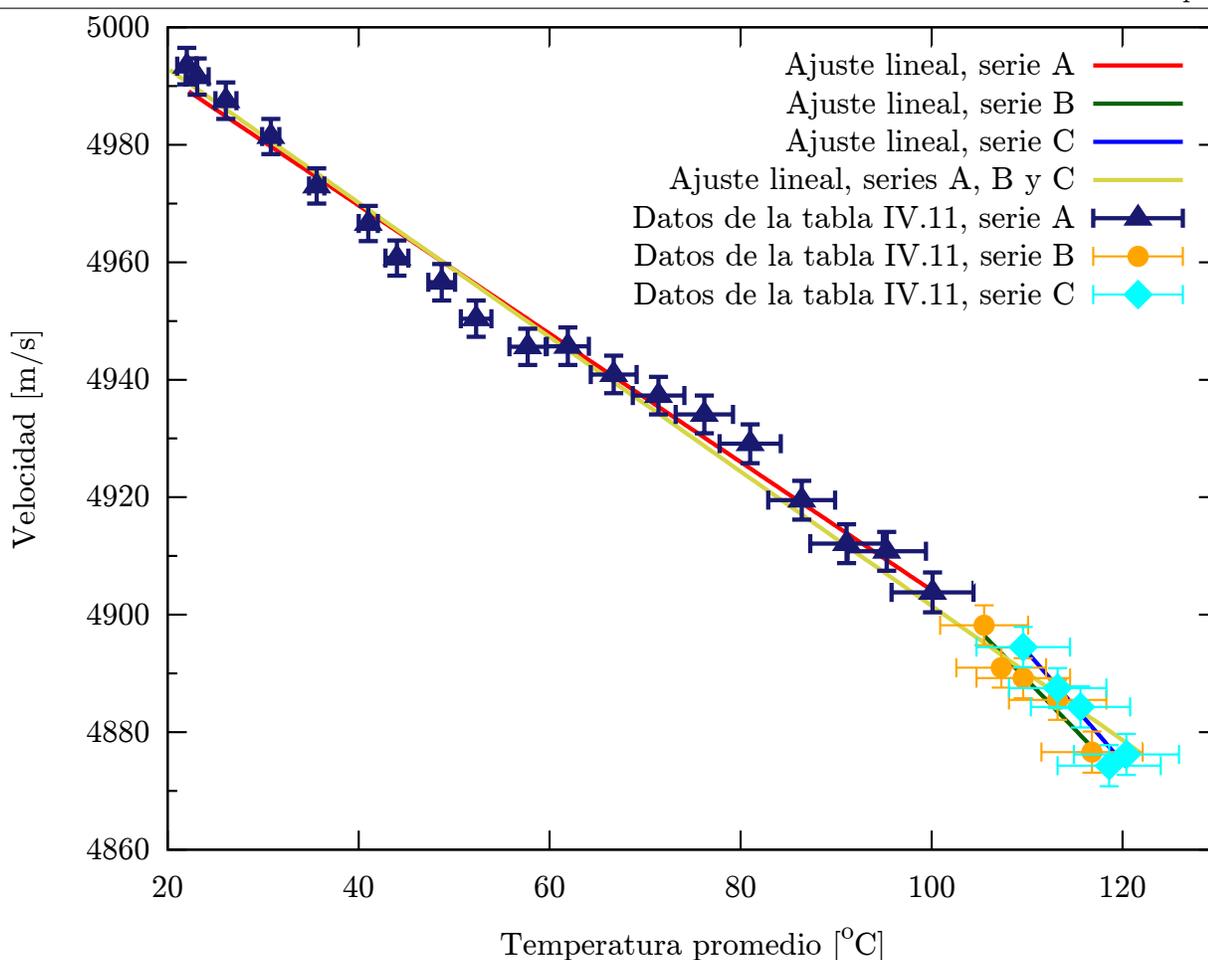


Figura IV.3: Variación con la temperatura promedio de la velocidad de fase para el experimento 1. El ajuste para la serie A es $y = -1.092x + 5013.33$ con $R^2 = 0.9873$, para la serie B es $y = -1.680x + 5073.71$ con $R^2 = 0.9427$, para la serie C es $y = -1.883x + 5100.86$ con $R^2 = 0.9425$, para las series A y B es $y = -1.137x + 5015.48$ con $R^2 = 0.9910$, para las series A y C es $y = -1.130x + 5015.22$ con $R^2 = 0.9917$ y para las series A, B y C es $y = -1.144x + 5015.88$ con $R^2 = 0.9923$.

Tabla IV.12: Segundo experimento: frecuencias de resonancia, longitudes efectivas y velocidades de fase a distintas temperaturas promedio.

| \bar{T} [°C] | $f \pm 0.07$ [Hz] | L_{ef} | c [m/s] |
|----------------|-------------------|----------|------------|
| 106.8±4.5 | 2405.59 | 101.5 | 4881.6±3.4 |
| 102.6±4.3 | 2409.1 | 101.5 | 4888.3±3.4 |
| 97.3±4.0 | 2412.5 | 101.4 | 4894.6±3.3 |
| 93.1±3.8 | 2416.2 | 101.4 | 4901.6±3.3 |
| 88.3±3.5 | 2420.34 | 101.4 | 4909.5±3.3 |
| 84.1±3.3 | 2423.35 | 101.4 | 4915.1±3.3 |
| 79.9±3.0 | 2428.86 | 101.4 | 4925.8±3.2 |
| 75.1±2.8 | 2432.17 | 101.4 | 4932.0±3.2 |
| 70.4±2.5 | 2435.17 | 101.4 | 4937.5±3.2 |
| 66.2±2.3 | 2438.57 | 101.4 | 4943.9±3.2 |
| 61.4±2.0 | 2441.23 | 101.4 | 4948.8±3.1 |
| 56.0±1.7 | 2444.27 | 101.3 | 4954.3±3.1 |
| 51.2±1.5 | 2447.51 | 101.3 | 4960.3±3.1 |
| 46.5±1.2 | 2449.87 | 101.3 | 4964.6±3.1 |
| 41.7±0.9 | 2452.8 | 101.3 | 4970.0±3.0 |
| 36.9±0.9 | 2455.51 | 101.3 | 4974.9±3.0 |
| 23±1 | 2466.66 | 101.3 | 4995.9±3.1 |

Tabla IV.13: Tercer experimento: frecuencias de resonancia, longitudes efectivas y velocidades de fase a distintas temperaturas promedio.

| \bar{T} [°C] | $f \pm 0.07$ [Hz] | L_{ef} | c [m/s] |
|----------------|-------------------|----------|------------|
| 112.5±5.0 | 2412.62 | 101.5 | 4896.8±3.4 |
| 108.3±4.7 | 2415.63 | 101.5 | 4902.4±3.4 |
| 104.0±4.5 | 2418.07 | 101.5 | 4906.9±3.4 |
| 100.3±4.3 | 2420.37 | 101.5 | 4911.1±3.4 |
| 94.9±4.0 | 2424.06 | 101.4 | 4918.0±3.3 |
| 90.6±3.8 | 2426.31 | 101.4 | 4922.1±3.3 |
| 86.3±3.6 | 2428.85 | 101.4 | 4926.7±3.3 |
| 81.4±3.3 | 2431.08 | 101.4 | 4930.7±3.3 |
| 76.6±3.1 | 2434.62 | 101.4 | 4937.3±3.3 |
| 71.7±2.8 | 2437.08 | 101.4 | 4941.8±3.2 |
| 65.6±2.5 | 2440 | 101.4 | 4947.0±3.2 |
| 60.1±2.2 | 2442.91 | 101.4 | 4952.2±3.2 |
| 54.6±1.9 | 2446.31 | 101.3 | 4958.5±3.1 |
| 49.8±1.7 | 2449.09 | 101.3 | 4963.6±3.1 |
| 46.1±1.5 | 2451.92 | 101.3 | 4968.9±3.1 |
| 40.6±1.2 | 2454.87 | 101.3 | 4974.3±3.1 |
| 35.1±1.0 | 2457.47 | 101.3 | 4978.9±3.0 |
| 30.3±0.9 | 2460.25 | 101.3 | 4984.0±3.0 |
| 25.4±1.0 | 2462.93 | 101.3 | 4988.8±3.0 |
| 22.4±1.0 | 2465.82 | 101.3 | 4994.3±3.1 |

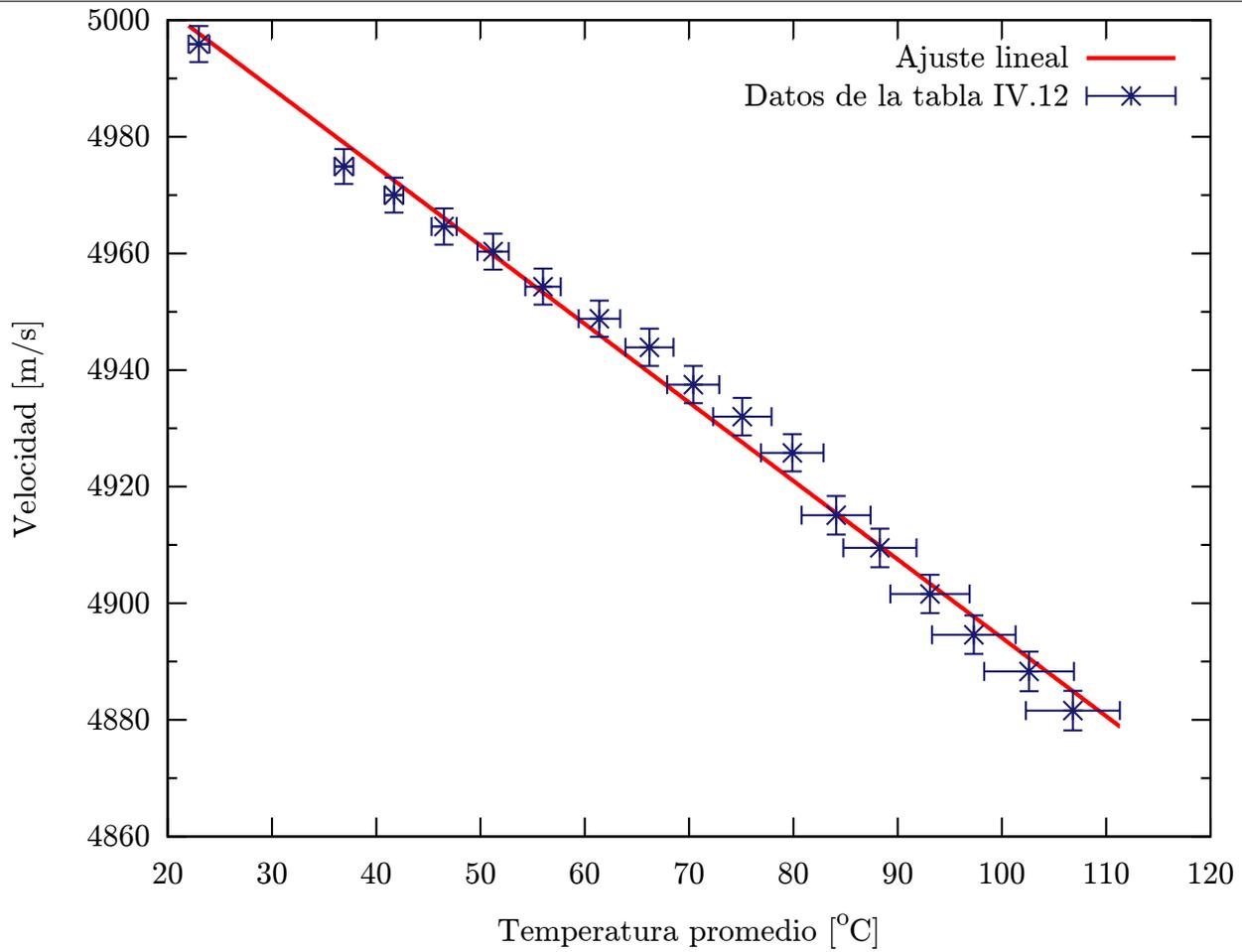


Figura IV.4: Variación con la temperatura promedio de la velocidad de fase para el experimento 2 con ajuste lineal $y = -1.346x + 5028.64$ con $R^2 = 0.9920$.

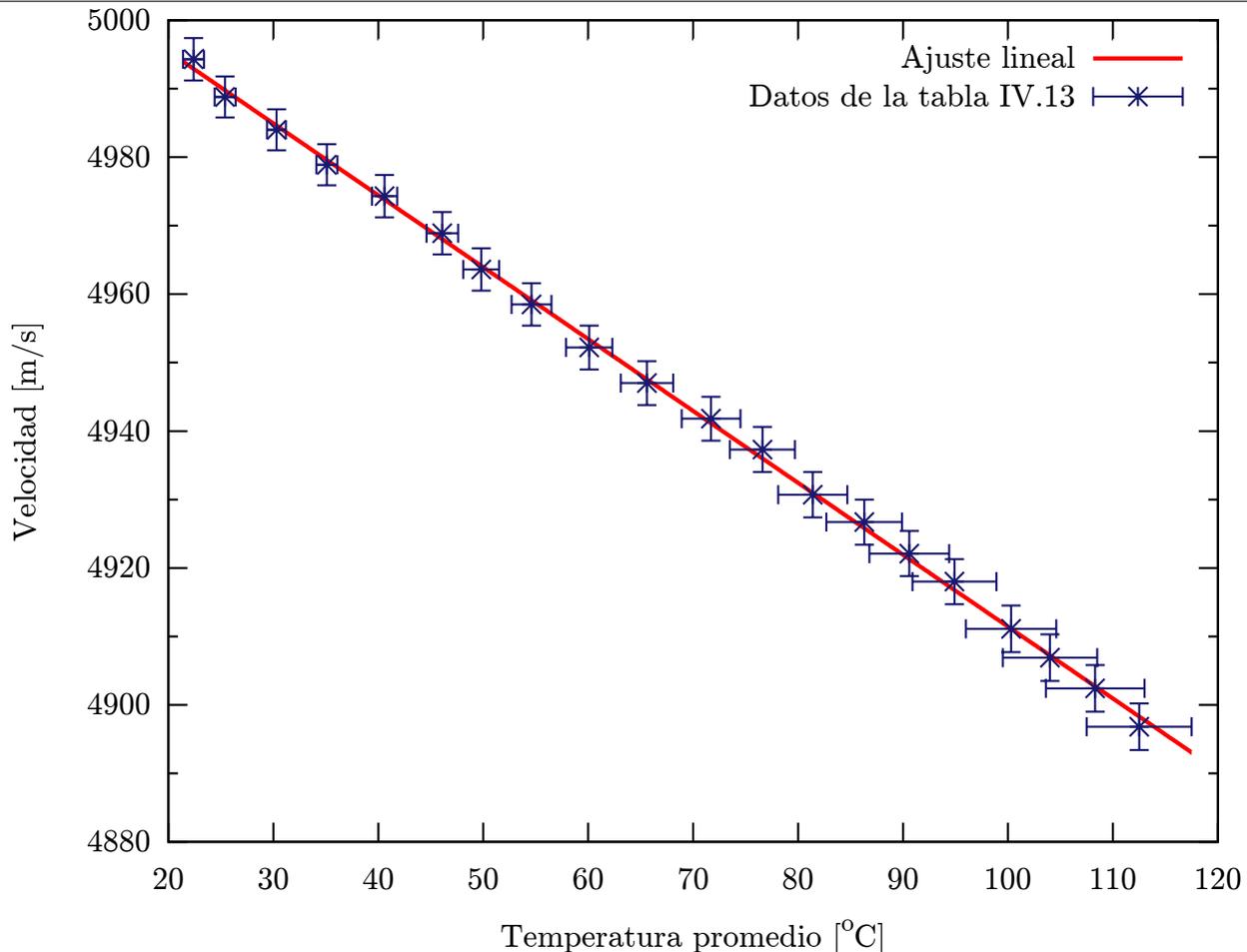


Figura IV.5: Variación con la temperatura promedio de la velocidad de fase para el experimento 3 con ajuste lineal $y = -1.050x + 5016.44$ con $R^2 = 0.9992$.

En las tablas IV.11, IV.12 y IV.13 puede verse que la velocidad de fase calculada para la onda a temperatura ambiente es cercana a los 5000 m/s.² Según la tabla I.4 en el aluminio laminado una onda extensional se propaga con esa velocidad. La referencia I.4, sin embargo, no indica la precisión. Daw y Liefeld [7] reportan una velocidad de propagación de 5125.0 en promedio para varios modos de vibración, aunque tienen ciertas dudas sobre el tipo de aluminio usado, y su varilla fue combinada con un segmento de níquel. Observando la tabla I.4 puede verse que el duraluminio tiene una velocidad de propagación de 5150. Morales et al. [20] usan una varilla de aluminio de 6.3 mm de radio y 91 cm de largo, de sección transversal circular, y encuentran que el primer pico de resonancia está en 2.8 kHz. Es decir, una velocidad de fase de $c = 2(0.91)(2800) = 5096$ m/s. Zemanek y Rudnick [35] encuentran en una varilla de aleación de aluminio (24ST) (sin cocer), de 120 pulgadas (304.8 cm) de largo y media pulgada (1.27 cm) de diámetro, que su frecuencia de resonancia fundamental es de 840 Hz. Esto da una velocidad de $c = 2(3.048)(840) = 5120.64$ m/s. En la referencia de Booker y Sagar [5], una varilla de aluminio de 8.884 cm de longitud, 0.5918 cm de diámetro, 6.6261 g de masa (2711.5 kg/m^3), y un módulo de Young de $7.020 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ (a 25°C), bajo la suposición de que es suficientemente delgada, para frecuencias no muy grandes, da una velocidad de 5088.19 m/s. También, en una varilla de aluminio (24ST) con una longitud de 8.884 cm, 0.6340 cm de diámetro, 7.8374 g de masa (2794.44 kg/m^3), y módulo de Young de $7.370 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$, da una velocidad de 5135.54 m/s. Finalmente Bayón et al.

²La velocidad de fase es por supuesto una velocidad promedio.

[3] encuentra que una varilla de aluminio de 160.2 mm de largo, 5.00 mm de radio y una densidad de $2.79 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ tiene una frecuencia de resonancia fundamental de 15234 Hz, por lo que tiene una velocidad de 4880.97 m/s; también, que una varilla de 160.65 mm de longitud y 26.20 mm de radio, tiene una frecuencia de resonancia fundamental de 16064 Hz, por lo que tiene una velocidad de propagación de 5161.36 m/s. No se sabe la composición ni el tipo de aluminio del que está hecha la varilla, pero la velocidad de propagación encontrada sugiere que se trata de aluminio laminado. En ese caso se tiene una diferencia porcentual máxima del 0.2 %.

Las pendientes encontradas para los ajustes lineales del cambio de la velocidad de fase con la temperatura promedio no son todas iguales. Se presenta en la tabla IV.14 los ajustes encontrados para los tres experimentos realizados.

Tabla IV.14: Ajustes lineales usando los datos de las columnas 1 y 4 de las tablas IV.11, IV.12 y IV.13.

| Experimento | Ecuación | R ² |
|-------------|-----------------------------------------|----------------|
| 1A | $c(\bar{T}) = -1.092 \bar{T} + 5013.33$ | 0.9873 |
| 1B | $c(\bar{T}) = -1.680 \bar{T} + 5073.71$ | 0.9427 |
| 1C | $c(\bar{T}) = -1.883 \bar{T} + 5100.86$ | 0.9425 |
| 1(A+B) | $c(\bar{T}) = -1.137 \bar{T} + 5015.48$ | 0.9910 |
| 1(A+C) | $c(\bar{T}) = -1.130 \bar{T} + 5015.22$ | 0.9917 |
| 1(A+B+C) | $c(\bar{T}) = -1.144 \bar{T} + 5015.88$ | 0.9923 |
| 2 | $c(\bar{T}) = -1.346 \bar{T} + 5028.64$ | 0.9920 |
| 3 | $c(\bar{T}) = -1.050 \bar{T} + 5016.44$ | 0.9992 |

Comparando la pendiente de los experimentos 1A, 2 y 3, puede verse que la del tercero difiere de la del experimento 1A en un 3.8 %. En cambio, las pendientes de los experimentos 2 y 1A difieren en un 23.3 %. Ésta es una diferencia bastante significativa. La razón de esta gran diferencia puede deberse a la estabilidad de la temperatura que había para la medición. Por ejemplo, puede verse que la magnitud de las pendientes para el experimento 1B (-1.68 m/s°C) y 1C (-1.88 m/s°C) son bastante más grandes. Tomando en cuenta estos datos no muy estables, la pendiente calculada aumenta de magnitud. Véanse las pendientes de los experimentos 1(A+B+C), 1(A+B) y 1(A+C) por ejemplo. La presencia de datos en el experimento 2 donde no estuviera totalmente estabilizada la temperatura puede ser la razón de este aumento de la magnitud de la pendiente. En cuanto a la ordenada al origen, de nuevo se encuentra que entre el experimento 3 y el 1A son muy similares. La diferencia porcentual es de 0.06 %. Entre la ordenada del experimento 2 y la del experimento 1A hay una diferencia del .3 %. La diferencia porcentual entre la ordenada del experimento 1A y la del experimento 1C es del 1.7 %. Puede notarse que las ordenadas de los experimentos 1(A+B+C), 1(A+B) y 1(A+C) se estabilizan cerca del valor 5015. Es razonable pensar que las temperaturas en el experimento 2 no estuvieron suficientemente estables porque en dicho experimento se empezó a hacer mediciones de temperaturas mayores a menores, por lo que de no esperar el tiempo suficiente la temperatura promedio en la varilla será mayor de la temperatura promedio estimada. El método de mínimos cuadrados no considera las incertidumbres en la variable independiente, por lo que la pendiente obtenida del método no debe considerarse como un número sino un intervalo. Dada la pequeña diferencia es posible que la pendiente real se aproxime un poco más a los datos en los otros experimentos.

El experimento 3 no sufre de esta dificultad porque los datos fueron tomados con mayor cuidado. En todo caso muestran que la temperatura promedio *todavía podía ser un poco mayor* que la temperatura promedio estimada para el experimento 1 en que se empieza desde temperaturas más bajas.

Que las pendientes de cada ajuste deban ser iguales es consecuencia de suponer que la velocidad varía linealmente con la temperatura promedio. De no ser así, podrían encontrarse velocidades fuera de la recta ajustada. No parece ser el caso porque todos los coeficientes R^2 están arriba de 0.9425. De hecho, cuando sí hay una cantidad razonable de datos para hacer el ajuste, el coeficiente mínimo encontrado es de 0.9873.

Raggio et al. [25] encuentran un comportamiento lineal para el cambio de velocidad con la temperatura en una varilla de acero y que la recta ajustada tiene una pendiente de $-0.642 \text{ m/s}^\circ\text{C}$. Puede verse que el aluminio es más susceptible de reducir la velocidad de propagación de una onda con el cambio de temperatura.

A partir de las velocidades encontradas en las tablas se puede deducir cómo cambia el módulo de Young con la temperatura. Si la varilla es suficientemente delgada³ respecto de su longitud puede usarse que $c = \sqrt{E/\rho}$ (ver secciones II.2.1, II.2.4 y II.5), con E el módulo de Young y ρ la densidad de la varilla dada por la ecuación (II.128), para calcular cómo varía el módulo de Young. Según lo visto arriba la velocidad de propagación varía de forma lineal con la temperatura promedio, por lo que $c = m\bar{T} + b$, y el módulo de Young tiene la siguiente expresión

$$E = \rho c^2 = \rho(m\bar{T} + b)^2 = \frac{m_v}{\pi r^2 L(T)}(m^2\bar{T}^2 + 2mb\bar{T} + b^2). \quad (\text{IV.7})$$

Para una temperatura de 25°C , la velocidad medida en el experimento 1A es 4986 m/s , para el experimento 2 es de 4995 m/s , y para el experimento 3 es de 4990 m/s . Como la densidad es de $2.67 \pm 0.04 \text{ g/cm}^3$ a 22°C , y no cambia apreciablemente con un cambio pequeño en la temperatura (aproximadamente un 0.2%), puede considerarse constante y se obtiene para el experimento 1A, $E_{1A} = 6.6378 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$, para el experimento 2, $E_2 = 6.6617 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$, y para el experimento 3, $E_1 = 6.6488 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$. Estas tres promedian un valor de $E = (6.6494 \pm 0.0123) \times 10^{10} \text{ N/m}^2$. Tyagi y Lord [30] encuentran que el módulo de Young para el aluminio tiene un valor de $6.9 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$, y en esa misma referencia dicen que en el libro de R. Skinner titulado *Mechanics*, publicado en 1969, pag. 538, se dice que es de $7 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$. Zemanek y Rudnick [35] encuentran un módulo de Young de $7.336 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ para aluminio (24ST). Booker y Sagar [5] encuentran para aluminio a 25°C un módulo de Young de $7.020 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ y para aluminio (24ST) a 25.3°C un módulo de Young de $7.370 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$. En la referencia de Bayón et al. [3] con los datos presentados ($L_1=160.20 \text{ mm}$, $R_1=5.00 \text{ mm}$, $f_1=15234 \text{ Hz}$, $L_2=160.65 \text{ mm}$, $R_2=26.20 \text{ mm}$, $f_2=16064 \text{ Hz}$, $\rho = 2.79 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$) se calculan dos módulos de Young: $E_1 = 6.6469 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ y $E_2 = 7.4325 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$. El resultado obtenido difiere un máximo de 10.5% y un mínimo de 0.03% . Típicamente la diferencia es mayor cuando se trata de aluminios (24ST), aunque la mayor de todas las diferencias ($E_2 = 7.4325 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$) se encuentra en una varilla de aluminio puro.

Naturalmente, si la velocidad de fase depende del cociente entre el diámetro y la longitud, como encuentran Bayón et al. [3] para varillas de acero y aluminio, la comparación solo tiene sentido para varillas con un cociente diámetro/longitud comparable y del mismo tipo de aluminio. Las dos únicas referencias donde hay una varilla con un cociente diámetro/longitud comparable al usado en esta tesis son las de Morales et al. [20], y Bayón et al. [3]. La segunda referencia de hecho da el valor más cercano ($E_1 = 6.6469 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$) al módulo de Young aquí encontrado. La primera referencia no menciona la densidad de la varilla, por lo que el cálculo del módulo de Young no puede realizarse. Además, la frecuencia de resonancia quizá se redondeó, reportando así una frecuencia de 2.8 kHz . Una frecuencia

³Qué tan delgado tenga que ser el diámetro de la varilla se desconoce con precisión, pero se cree que en este caso no importa porque el cociente entre el diámetro y la longitud de la varilla es $d/L = 0.8/100.1 \approx 0.008$. (Véase la sección II.5.2).

de resonancia de 2750 Hz (la varilla mide 0.91 m) da una velocidad de fase de 5005 m/s, y suponiendo una densidad de 2700 kg/m³, se calcula un módulo de Young de 6.76×10^{10} N/m², más parecido a lo que se obtuvo.

Si en la ecuación (IV.7) se sustituyen los valores $m=-1.050$ y $b=5016.44$, se obtiene

$$E = \rho(-1.050\bar{T} + 5016.44)^2. \quad (IV.8)$$

Puede verse que $E = 0$ cuando $\bar{T} = 4776.65$. Entonces, para el rango usual de temperaturas, E decrece conforme aumenta la temperatura promedio. Por la definición del módulo de Young ($E = \sigma_{xx}/\epsilon_{xx}$), para que disminuya, o la deformación en la dirección del esfuerzo aumenta, o el esfuerzo disminuye, o una combinación de ambos.

Para la realización del análisis anterior se supuso el comportamiento de la temperatura en tres regiones. Para futuros trabajos se sugiere que se determinen con precisión los perfiles de temperatura correspondientes para reducir el rango de incertidumbre, además de que reduciría la cantidad de cálculos. También, un mayor número de perfiles de temperatura puede ayudar a mejorar la interpolación lineal. La interpolación lineal es una suposición de cómo cambia la temperatura, así que un mayor número de perfiles de temperatura comprobaría si efectivamente puede hacerse dicha interpolación. Pero si las pérdidas de calor son proporcionales a las diferencias de temperaturas de la varilla con la temperatura ambiente debido a la convección, es razonable pensar que la temperatura promedio en la varilla cambia linealmente con la temperatura de referencia. De ser posible, es deseable contar con algún aparato para medir la temperatura con mayor precisión.

Un experimento en que toda la varilla esté a una misma temperatura puede también corroborar los ajustes realizados. Por ejemplo, si toda la varilla se calentara a 50°C y se midiera la frecuencia de resonancia, ésta debe coincidir con la correspondiente para la temperatura promedio. Se buscaron trabajos en que se hiciera esto pero no se encontraron.

Un segundo método de excitación y medición siempre es deseable para corroborar los resultados obtenidos, pero el desconocimiento de los límites respecto al parámetro obtenido del cociente diámetro a longitud para los cuales es válido aproximar la velocidad por la expresión $c = \sqrt{E/\rho}$ y los distintos tipos de aluminio hacen complicada la comparación con otras fuentes.

Se hace notar que el procedimiento empleado en esta tesis permite evitar el tener que cubrir toda la varilla con un horno o tener que calentarla uniformemente, al costo de tener que medir la temperatura en cada lugar de la varilla.

Un procedimiento análogo puede usarse a continuación para calcular la variación de la razón de Poisson con la temperatura, pero las frecuencias usadas tienen que ser mayores. Con una frecuencia cien veces mayor (ya fuera del audible por lo que el método de detección tiene que cambiar) la contribución del segundo término en la fórmula de Rayleigh

$$c_{\omega} = c_0 - c_0\nu^2\pi^2\left(\frac{a}{\Lambda}\right)^2,$$

es 10,000 veces mayor, por lo que el cambio en la velocidad será del 10%. La diferencia entre estas velocidades y las que se obtuvieron en las frecuencias cien veces menores dan un número que depende de la razón de Poisson, que deben variar aproximadamente como $c_0\nu^2\pi^2(a/\Lambda)^2$.

En este trabajo, se ha deducido que el módulo de Young depende de la temperatura promedio en la varilla de forma parecida a la relación $E = \rho c^2 = \rho(-1.050\bar{T} + 5016.44)^2$, y que la velocidad de fase promedio

lo hace de forma parecida a la relación $c(\bar{T}) = -1.050\bar{T} + 5016.44$ (ver la tabla IV.14). A 25°C las relaciones encontradas dan una velocidad promedio de 4990.5 ± 9 m/s y un módulo de Young promedio de $6.6494 \pm 0.0123 \times 10^{10}$ N/m². Finalmente, se sugiere la realización del procedimiento propuesto más arriba para encontrar la razón de Poisson ν , alternando entre la frecuencia de resonancia encontrada en este trabajo y una frecuencia de resonancia cien veces más grande, sometiendo a la varilla al mismo perfil de temperatura, y así tener la dependencia con la temperatura de las dos constantes que determinan las propiedades mecánicas del aluminio.

Características del amplificador

La amplificación del pulso mandado al electroimán está determinada en gran medida por el componente LM383. Se presenta en las páginas siguientes unas páginas de su manual.

Podemos ver en la página con gráficas que la distorsión que presenta es muy pequeña y no sobrepasa el 2%. En particular, para frecuencias entre 2 kHz y 5 kHz, apenas si llega a una distorsión del 1%. Esto es importante porque así no hay manera de confundir una resonancia con una amplificación en la potencia del electroimán.

LM383/LM383A 7W Audio Power Amplifier

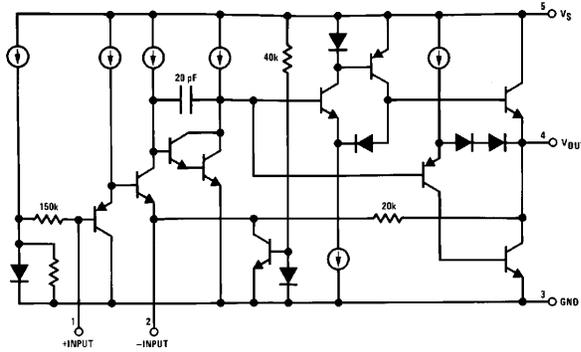
General Description

The LM383 is a cost effective, high power amplifier suited for automotive applications. High current capability (3.5A) enables the device to drive low impedance loads with low distortion. The LM383 is current limited and thermally protected. High voltage protection is available (LM383A) which enables the amplifier to withstand 40V transients on its supply. The LM383 comes in a 5-pin TO-220 package.

Features

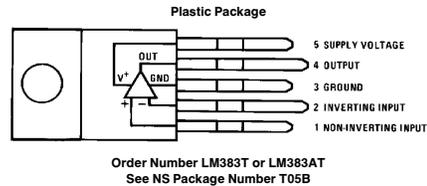
- High peak current capability (3.5A)
- Large output voltage swing
- Externally programmable gain
- Wide supply voltage range (5V–20V)
- Few external parts required
- Low distortion
- High input impedance
- No turn-on transients
- High voltage protection available (LM383A)
- Low noise
- AC short circuit protected

Equivalent Schematic



TL/H/7145-1

Connection Diagram



TL/H/7145-2

Absolute Maximum Ratings

If Military/Aerospace specified devices are required, please contact the National Semiconductor Sales Office/Distributors for availability and specifications.

| | |
|-----------------------------|------|
| Peak Supply Voltage (50 ms) | |
| LM383A (Note 2) | 40V |
| LM383 | 25V |
| Operating Supply Voltage | 20V |
| Output Current | |
| Repetitive | 3.5A |
| Non-repetitive | 4.5A |

| | |
|---------------------------------------|-----------------|
| Input Voltage | ±0.5V |
| Power Dissipation (Note 3) | 15W |
| Operating Temperature | 0°C to +70°C |
| Storage Temperature | -60°C to +150°C |
| Lead Temperature (Soldering, 10 sec.) | 260°C |

Electrical Characteristics

$V_S = 14.4V$, $T_{TAB} = 25^\circ C$, $A_V = 100$ (40 dB), $R_L = 4\Omega$, unless otherwise specified

| Parameter | Conditions | Min | Typ | Max | Units |
|--------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|-------------------------------------------------------------------------|-----|-----------------------------------------------------|
| DC Output Level | | 6.4 | 7.2 | 8 | V |
| Quiescent Supply Current | Excludes Current in Feedback Resistors | | 45 | 80 | mA |
| Supply Voltage Range | | 5 | | 20 | V |
| Input Resistance | | | 150 | | k Ω |
| Bandwidth | Gain = 40 dB | | 30 | | kHz |
| Output Power | $V_S = 13.2V$, $f = 1$ kHz $R_L = 4\Omega$, THD = 10% $R_L = 2\Omega$, THD = 10% $V_S = 13.8V$, $f = 1$ kHz $R_L = 4\Omega$, THD = 10% $R_L = 2\Omega$, THD = 10% $V_S = 14.4V$, $f = 1$ kHz $R_L = 4\Omega$, THD = 10% $R_L = 2\Omega$, THD = 10% $R_L = 1.6\Omega$, THD = 10% $V_S = 16V$, $f = 1$ kHz $R_L = 4\Omega$, THD = 10% $R_L = 2\Omega$, THD = 10% $R_L = 1.6\Omega$, THD = 10% | | 4.7 7.2 5.1 7.8 4.8 5.5 8.6 9.3 7 10.5 11 | | W W W W W W W W W W W |
| THD | $P_O = 2W$, $R_L = 4\Omega$, $f = 1$ kHz $P_O = 4W$, $R_L = 2\Omega$, $f = 1$ kHz | | 0.2 0.2 | | % % |
| Ripple Rejection | $R_S = 50\Omega$, $f = 100$ Hz $R_S = 50\Omega$, $f = 1$ kHz | 30 | 40 44 | | dB dB |
| Input Noise Voltage | $R_S = 0$, 15 kHz Bandwidth | | 2 | | μV |
| Input Noise Current | $R_S = 100$ k Ω , 15 kHz Bandwidth | | 40 | | pA |

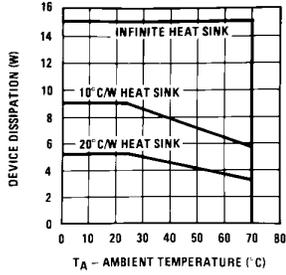
Note 1: A 0.2 μF capacitor in series with a 1 Ω resistor should be placed as close as possible to pins 3 and 4 for stability.

Note 2: The LM383 shuts down above 25V.

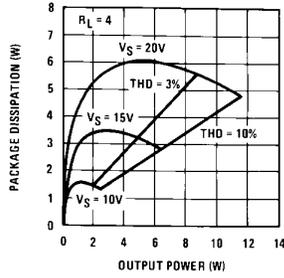
Note 3: For operating at elevated temperatures, the device must be derated based on a 150°C maximum junction temperature and a thermal resistance of 4°C/W junction to case.

Typical Performance Characteristics

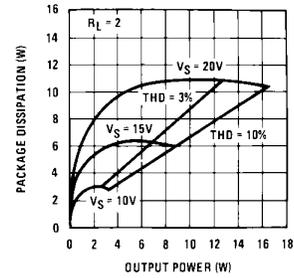
Device Dissipation vs Ambient Temperature



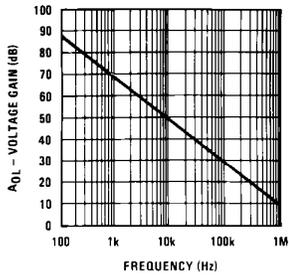
Power Dissipation vs Output Power



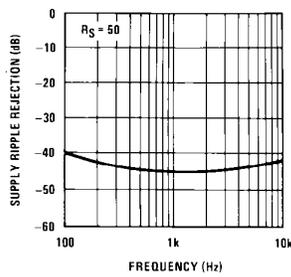
Power Dissipation vs Output Power



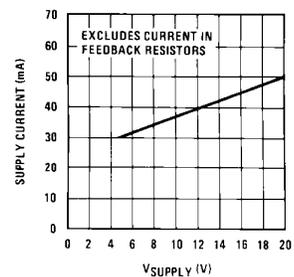
Open Loop Gain vs Frequency



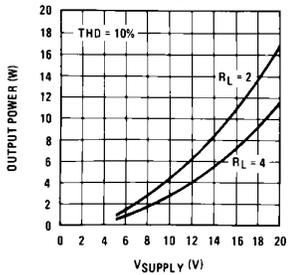
Supply Ripple Rejection vs Frequency



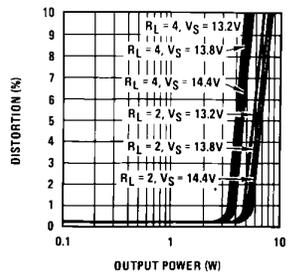
Supply Current vs Supply Voltage



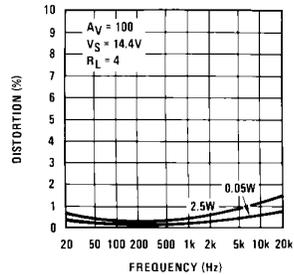
Output Power vs Supply Voltage



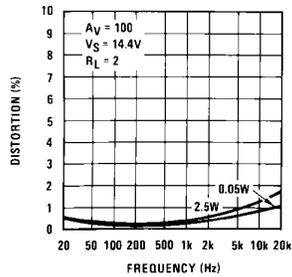
Distortion vs Output Power



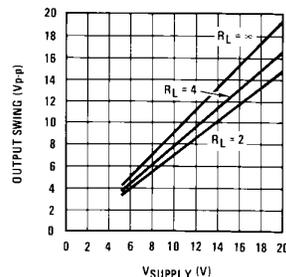
Distortion vs Frequency



Distortion vs Frequency



Output Swing vs Supply Voltage



TL/H/7145-4

Características del sensor de temperatura LM35

De las páginas del manual presentado en las siguientes páginas, podemos ver que el sensor utilizado puede trabajar linealmente en el rango de 0 a 125 °C. El factor de escala lineal en este intervalo es de 10 mV/°C, por lo que una lectura de, por ejemplo, 0.2579 V corresponde a 25.79 °C. El sensor utilizado tiene el encapsulado plástico correspondiente a un transistor TO-92. Así, para medir voltajes de dicho transductor es necesario tomar el voltaje entre la salida V_{OUT} y la salida GND. Es necesario alimentar al transductor con una diferencia de potencial entre la salida V_S y la salida GND, con entre 4 y 30 Volts. La incertidumbre a 25°C es de $\pm 1/4^\circ\text{C}$ y en un rango de -55° a 150°C de $\pm 3/4^\circ\text{C}$.

LM35 Precision Centigrade Temperature Sensors

General Description

The LM35 series are precision integrated-circuit temperature sensors, whose output voltage is linearly proportional to the Celsius (Centigrade) temperature. The LM35 thus has an advantage over linear temperature sensors calibrated in ° Kelvin, as the user is not required to subtract a large constant voltage from its output to obtain convenient Centigrade scaling. The LM35 does not require any external calibration or trimming to provide typical accuracies of $\pm 1/4^\circ\text{C}$ at room temperature and $\pm 3/4^\circ\text{C}$ over a full -55 to $+150^\circ\text{C}$ temperature range. Low cost is assured by trimming and calibration at the wafer level. The LM35's low output impedance, linear output, and precise inherent calibration make interfacing to readout or control circuitry especially easy. It can be used with single power supplies, or with plus and minus supplies. As it draws only $60\ \mu\text{A}$ from its supply, it has very low self-heating, less than 0.1°C in still air. The LM35 is rated to operate over a -55° to $+150^\circ\text{C}$ temperature range, while the LM35C is rated for a -40° to $+110^\circ\text{C}$ range (-10° with improved accuracy). The LM35 series is available pack-

aged in hermetic TO-46 transistor packages, while the LM35C, LM35CA, and LM35D are also available in the plastic TO-92 transistor package. The LM35D is also available in an 8-lead surface mount small outline package and a plastic TO-220 package.

Features

- Calibrated directly in ° Celsius (Centigrade)
- Linear + 10.0 mV/°C scale factor
- 0.5°C accuracy guaranteeable (at $+25^\circ\text{C}$)
- Rated for full -55° to $+150^\circ\text{C}$ range
- Suitable for remote applications
- Low cost due to wafer-level trimming
- Operates from 4 to 30 volts
- Less than $60\ \mu\text{A}$ current drain
- Low self-heating, 0.08°C in still air
- Nonlinearity only $\pm 1/4^\circ\text{C}$ typical
- Low impedance output, $0.1\ \Omega$ for 1 mA load

Typical Applications

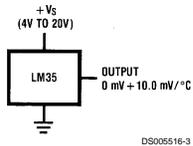
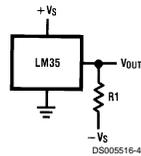


FIGURE 1. Basic Centigrade Temperature Sensor ($+2^\circ\text{C}$ to $+150^\circ\text{C}$)



Choose $R_1 = -V_S/50\ \mu\text{A}$
 $V_{OUT} = +1,500\ \text{mV}$ at $+150^\circ\text{C}$
 $= +250\ \text{mV}$ at $+25^\circ\text{C}$
 $= -550\ \text{mV}$ at -55°C

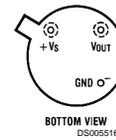
FIGURE 2. Full-Range Centigrade Temperature Sensor

LM35 Precision Centigrade Temperature Sensors

LM35

Connection Diagrams

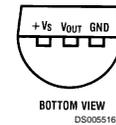
TO-46
Metal Can Package*



*Case is connected to negative pin (GND)

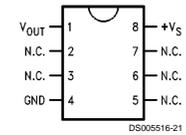
Order Number LM35H, LM35AH, LM35CH, LM35CAH or LM35DH
 See NS Package Number H03H

TO-92
Plastic Package



Order Number LM35CZ, LM35CAZ or LM35DZ
 See NS Package Number Z03A

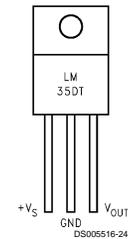
SO-8
Small Outline Molded Package



N.C. = No Connection

Order Number LM35DM
 See NS Package Number M08A

TO-220
Plastic Package*



*Tab is connected to the negative pin (GND).

Note: The LM35DT pinout is different than the discontinued LM35DP.

Order Number LM35DT
 See NS Package Number TA03F

| Electrical Characteristics | | | | | | | | | Absolute Maximum Ratings (Note 10) | | TO-92 and TO-220 Package, (Soldering, 10 seconds) | | | | | | | | | | | | | | | |
|----------------------------------------------------|-----------------------------------------------|---------|-----------------------------|-----------------------------|--------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------|-----------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|----------------------|-------------------------------|---------------------------------|------|-----|-----|------|-----|-----|----|
| (Notes 1, 6) | | | | | | | | | If Military/Aerospace specified devices are required, please contact the National Semiconductor Sales Office/ Distributors for availability and specifications. | | 260°C | | | | | | | | | | | | | | | |
| Parameter | Conditions | LM35 | | | LM35C, LM35D | | | Units (Max.) | Supply Voltage | | SO Package (Note 12) | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | Typical | Tested Limit (Note 4) | Design Limit (Note 5) | Typical | Tested Limit (Note 4) | Design Limit (Note 5) | | +35V to -0.2V | Vapor Phase (60 seconds) | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Accuracy, LM35, LM35C (Note 7) | $T_A = +25^\circ\text{C}$ | ±0.4 | ±1.0 | | ±0.4 | ±1.0 | | °C | +6V to -1.0V | | Infrared (15 seconds) | | | | | | | | | | | | | | | |
| | $T_A = -10^\circ\text{C}$ | ±0.5 | | | ±0.5 | | ±1.5 | °C | 10 mA | | 220°C | | | | | | | | | | | | | | | |
| | $T_A = T_{\text{MAX}}$ | ±0.8 | ±1.5 | | ±0.8 | | ±1.5 | °C | Storage Temp.: | | 2500V | | | | | | | | | | | | | | | |
| | $T_A = T_{\text{MIN}}$ | ±0.8 | | ±1.5 | ±0.8 | | ±2.0 | °C | LM35, LM35A | | Specified Operating Temperature Range: T_{MIN} to T_{MAX} (Note 2) | | | | | | | | | | | | | | | |
| Accuracy, LM35D (Note 7) | $T_A = +25^\circ\text{C}$ | | | | ±0.6 | ±1.5 | | °C | TO-46 Package, TO-92 Package, SO-8 Package, TO-220 Package, | | LM35C, LM35CA | | | | | | | | | | | | | | | |
| | $T_A = T_{\text{MAX}}$ | | | | ±0.9 | | ±2.0 | °C | -60°C to +180°C | | -55°C to +150°C | | | | | | | | | | | | | | | |
| | $T_A = T_{\text{MIN}}$ | | | | ±0.9 | | ±2.0 | °C | -60°C to +150°C | | -40°C to +110°C | | | | | | | | | | | | | | | |
| Nonlinearity (Note 8) | $T_{\text{MIN}} \leq T_A \leq T_{\text{MAX}}$ | ±0.3 | | ±0.5 | ±0.2 | | ±0.5 | °C | -65°C to +150°C | | LM35D | | | | | | | | | | | | | | | |
| Sensor Gain (Average Slope) | $T_{\text{MIN}} \leq T_A \leq T_{\text{MAX}}$ | +10.0 | +9.8, +10.2 | | +10.0 | | +9.8, +10.2 | mV/°C | Lead Temp.: | | 0°C to +100°C | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | TO-46 Package, (Soldering, 10 seconds) | | 300°C | | | | | | | | | | | | | | | |
| Load Regulation (Note 3) $0 \leq I_L \leq 1$ mA | $T_A = +25^\circ\text{C}$ | ±0.4 | ±2.0 | | ±0.4 | ±2.0 | | mV/mA | Electrical Characteristics (Notes 1, 6) | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | $T_{\text{MIN}} \leq T_A \leq T_{\text{MAX}}$ | ±0.5 | | ±5.0 | ±0.5 | | ±5.0 | mV/mA | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Line Regulation (Note 3) | $T_A = +25^\circ\text{C}$ | ±0.01 | ±0.1 | | ±0.01 | ±0.1 | | mV/V | Parameter | Conditions | LM35A | | | LM35CA | | | Units (Max.) | | | | | | | | | |
| | $4V \leq V_S \leq 30V$ | ±0.02 | | ±0.2 | ±0.02 | | ±0.2 | mV/V | | | Typical | Tested Limit (Note 4) | Design Limit (Note 5) | Typical | Tested Limit (Note 4) | Design Limit (Note 5) | | | | | | | | | | |
| Quiescent Current (Note 9) | $V_S = +5V, +25^\circ\text{C}$ | 56 | 80 | | 56 | 80 | | µA | Accuracy (Note 7) | $T_A = +25^\circ\text{C}$ $T_A = -10^\circ\text{C}$ $T_A = T_{\text{MAX}}$ $T_A = T_{\text{MIN}}$ | ±0.2 ±0.3 ±0.4 ±0.4 | ±0.5 ±0.5 ±1.0 ±1.0 | | ±0.2 ±0.3 ±0.4 ±0.4 | ±0.5 ±0.5 ±1.0 ±1.0 | ±1.0 ±1.0 ±1.5 ±1.5 | °C °C °C °C | | | | | | | | | |
| | $V_S = +5V$ | 105 | 158 | 91 | 82 | 138 | 141 | µA | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | $V_S = +30V, +25^\circ\text{C}$ | 56.2 | 82 | 56.2 | 82 | 138 | 141 | µA | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | $V_S = +30V$ | 105.5 | 161 | 91.5 | 82 | 141 | 141 | µA | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Change of Quiescent Current (Note 3) | $4V \leq V_S \leq 30V, +25^\circ\text{C}$ | 0.2 | 2.0 | | 0.2 | 2.0 | | µA | Nonlinearity (Note 8) | $T_{\text{MIN}} \leq T_A \leq T_{\text{MAX}}$ | ±0.18 | | ±0.35 | ±0.15 | | ±0.3 | °C | | | | | | | | | |
| | $4V \leq V_S \leq 30V$ | 0.5 | | 3.0 | 0.5 | | 3.0 | µA | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Temperature Coefficient of Quiescent Current | | +0.39 | | +0.7 | +0.39 | | +0.7 | µA/°C | Sensor Gain (Average Slope) | $T_{\text{MIN}} \leq T_A \leq T_{\text{MAX}}$ | +10.0 | +9.9, +10.1 | | +10.0 | | +9.9, +10.1 | mV/°C | | | | | | | | | |
| Minimum Temperature for Rated Accuracy | In circuit of <i>Figure 1</i> , $I_L = 0$ | +1.5 | | +2.0 | +1.5 | | +2.0 | °C | Load Regulation (Note 3) $0 \leq I_L \leq 1$ mA | $T_A = +25^\circ\text{C}$ $T_{\text{MIN}} \leq T_A \leq T_{\text{MAX}}$ | ±0.4 ±0.5 | ±1.0 | ±3.0 | ±0.4 ±0.5 | ±1.0 | ±3.0 | mV/mA mV/mA | | | | | | | | | |
| Long Term Stability | $T_J = T_{\text{MAX}}$, for 1000 hours | ±0.08 | | | ±0.08 | | | °C | Line Regulation (Note 3) | $T_A = +25^\circ\text{C}$ $4V \leq V_S \leq 30V$ | ±0.01 ±0.02 | ±0.05 | ±0.1 | ±0.02 | ±0.1 | ±0.1 | mV/V mV/V | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | Quiescent Current (Note 9) | $V_S = +5V, +25^\circ\text{C}$ | 56 | 67 | 131 | 56 | 67 | 114 | µA |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | $V_S = +5V$ | 105 | 158 | 131 | 91 | 131 | 114 | µA |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | $V_S = +30V, +25^\circ\text{C}$ | 56.2 | 68 | 133 | 56.2 | 68 | 116 | µA |
| $V_S = +30V$ | 105.5 | 161 | 133 | 91.5 | 161 | 116 | µA | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Change of Quiescent Current (Note 3) | $4V \leq V_S \leq 30V, +25^\circ\text{C}$ | 0.2 | 1.0 | | 0.2 | 1.0 | | µA | Temperature Coefficient of Quiescent Current | | +0.39 | | +0.5 | +0.39 | | +0.5 | µA/°C | | | | | | | | | |
| Minimum Temperature for Rated Accuracy | In circuit of <i>Figure 1</i> , $I_L = 0$ | +1.5 | | +2.0 | +1.5 | | +2.0 | °C | Long Term Stability | $T_J = T_{\text{MAX}}$, for 1000 hours | ±0.08 | | | ±0.08 | | | °C | | | | | | | | | |

Note 1: Unless otherwise noted, these specifications apply: $-55^\circ\text{C} \leq T_J \leq +150^\circ\text{C}$ for the LM35 and LM35A; $-40^\circ\text{C} \leq T_J \leq +110^\circ\text{C}$ for the LM35C and LM35CA; and $0^\circ\text{C} \leq T_J \leq +100^\circ\text{C}$ for the LM35D. $V_S = +5\text{Vdc}$ and $I_{\text{LOAD}} = 50 \mu\text{A}$, in the circuit of *Figure 2*. These specifications also apply from $+2^\circ\text{C}$ to T_{MAX} in the circuit of *Figure 1*. Specifications in **boldface** apply over the full rated temperature range.

Note 2: Thermal resistance of the TO-46 package is 400°C/W, junction to ambient, and 24°C/W junction to case. Thermal resistance of the TO-92 package is 180°C/W junction to ambient. Thermal resistance of the small outline molded package is 220°C/W junction to ambient. Thermal resistance of the TO-220 package is 90°C/W junction to ambient. For additional thermal resistance information see table in the Applications section.

Note 3: Regulation is measured at constant junction temperature, using pulse testing with a low duty cycle. Changes in output due to heating effects can be computed by multiplying the internal dissipation by the thermal resistance.

Note 4: Tested Limits are guaranteed and 100% tested in production.

Note 5: Design Limits are guaranteed (but not 100% production tested) over the indicated temperature and supply voltage ranges. These limits are not used to calculate outgoing quality levels.

Note 6: Specifications in **boldface** apply over the full rated temperature range.

Note 7: Accuracy is defined as the error between the output voltage and 10mV/°C times the device's case temperature, at specified conditions of voltage, current, and temperature (expressed in °C).

Note 8: Nonlinearity is defined as the deviation of the output-voltage-versus-temperature curve from the best-fit straight line, over the device's rated temperature range.

Note 9: Quiescent current is defined in the circuit of *Figure 1*.

Note 10: Absolute Maximum Ratings indicate limits beyond which damage to the device may occur. DC and AC electrical specifications do not apply when operating the device beyond its rated operating conditions. See Note 1.

Note 11: Human body model, 100 pF discharged through a 1.5 kΩ resistor.

Note 12: See AN-450 "Surface Mounting Methods and Their Effect on Product Reliability" or the section titled "Surface Mount" found in a current National Semiconductor Linear Data Book for other methods of soldering surface mount devices.

Otros datos

Características de las posibles bobinas a usar

Varios embobinados fueron probados. Sus características se muestran en la tabla C.1. También se muestra los campos magnéticos que producen distintas bobinas a 50 mA y 100 mA de corriente y la diferencia de potencial medida entre los extremos del alambre de los embobinados en la tabla C.2.

Tabla C.1: *Características de los embobinados.*

| Embobinado | Resistencia [Ω] | Inductancia [mH] | Factor de disipación |
|------------|--------------------------|-------------------------------------------------------|----------------------|
| 1 | 7.8 | $L_{\text{ferrita}}=18.98$ | 0.065 |
| 2 | 7.8 | 3.98 | 0.31 |
| 3 | 22.9 | $L=19.9$ $L_{\text{ferrita}}=128.2$ $L_{Fe}=70.2$ | 0.181 |
| 4 | 83 | $L=65.4$ $L_{\text{ferrita}}=194.6$ $L_{Fe}=133.2$ | 0.201 |
| 5 | 113 | $L=64.9$ $L_{\text{ferrita}}=344$ $L_{Fe}=223$ | 0.276 |
| 6 | 855 | $L_{Fe}=242$ | 0.53 |
| 7 | 2.47 | 1.055 | 0.370 |

Excepto en los embobinados 1 y 6, todos los factores de disipación fueron medidos sin núcleo.

Análisis de la distorsión para el sistema del circuito amplificador y del generador de funciones DS360

Es necesario analizar en qué intervalos el circuito amplificador funciona adecuadamente en conjunto con el generador de funciones DS360. Para ello se realizó una prueba en la que el generador de funciones proporcionaba una onda senoidal con una amplitud pico-pico de 15 mV, y se variaba la frecuencia. La onda así obtenida se introducía en el circuito amplificador y la salida se conectaba a un osciloscopio. Para frecuencias escogidas se observaba la pureza de la señal, es decir, que fuera una onda senoidal.

Tabla C.2: Campos magnéticos que producen los embobinados 1 a 6 a distintas corrientes.

| Embobinado | Campo magnético a 50 mA [gauss] | Campo magnético a 100 mA [gauss] | Voltaje [V] |
|------------|------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|
| 1 | $B_{\text{ferrita}}=35$ | $B_{\text{ferrita}}=85\sim 90$ | 1 |
| 2 | - | 20.6 | 1 |
| 3 | | $B_{\text{sin núcleo}}=15$ $B_{\text{ferrita}}=142$ $B_{Fe}=100$ | 1.5 |
| 4 | $B_{\text{sin núcleo}}=16$ $B_{\text{ferrita}}=190$ $B_{Fe}=180$ (44)* | $B_{\text{sin núcleo}}=18$ (7.5) $B_{\text{ferrita}}=255$ $B_{Fe}=306$ (60) | 1.25 y 2 respectivamente |
| 5 | - | $B_{\text{sin núcleo}}=25$ $B_{\text{ferrita}}=48$ $B_{Fe}=240$ | 7.5 |
| 6 | - | $B_{Fe}=540$ | - |

*Las medidas indicadas entre paréntesis para el cuarto embobinado son las tomadas en el extremo obstruido del mismo embobinado

Para un voltaje fijo de entrada y una frecuencia determinada se observaba qué voltaje pico-pico de salida se obtenía. También, se variaba el voltaje de entrada para esa misma frecuencia, y se observaba cuándo aparecía alguna distorsión, si acaso. De aquí se obtenía un valor que establecía un rango desde 0 mV a ese valor para el cuál no se observaba una distorsión importante en la onda.

Tabla C.3: Voltaje de salida (V.S.) y voltajes de rango sin distorsión (V.R.S.D.) a distintas frecuencias (f) con un voltaje de entrada pico-pico de 15 mV.

| f [Hz] | V.S.[V] | VRSD.[mV] | f [Hz] | V.S.[V] | VRSD.[mV] | f [Hz] | V.S.[V] | VRSD.[mV] |
|-----------|------------|-----------|-----------|-----------|-----------|------------|-----------|-----------|
| 1±0.01 | .064±0.004 | 110±6 | 1536±0.04 | 8.52±0.36 | 39.3±4 | 5496±0.14 | 7.04±0.31 | 47.3±4 |
| 2±0.01 | .42±0.015 | 120±6 | 2048±0.06 | 8.24±0.35 | 39.3±4 | 5696±0.15 | 7.0±0.31 | 47.3±4 |
| 4±0.01 | 1.43±0.14 | 80±5 | 2560±0.07 | 8.12±0.34 | 40.3±4 | 5896±0.15 | 6.88±0.31 | 47.3±4 |
| 8±0.01 | 3.8±0.21 | 50±4 | 2760±0.07 | 8.04±0.34 | 41.3±4 | 6096±0.16 | 6.84±0.31 | 47.3±4 |
| 16±0.01 | 6.76±0.30 | 41±4 | 2960±0.08 | 7.96±0.34 | 41.3±4 | 6496±0.17 | 6.6±0.3 | 43.3±4 |
| 32±0.01 | 8.6±0.36 | 35±4 | 3072±0.08 | 7.96±0.34 | 41.3±4 | 6896±0.18 | 6.44±0.29 | 44.3±4 |
| 64±0.01 | 8.88±0.37 | 35.6±4 | 3496±0.09 | 7.84±0.34 | 42.3±4 | 7096±0.18 | 6.24±0.29 | 44.3±4 |
| 69±0.01 | 8.88±0.37 | 35.4±4 | 3584±0.09 | 7.84±0.34 | 42.3±4 | 7496±0.19 | 6.16±0.28 | 52.3±4 |
| 77±0.01 | 8.88±0.37 | 35.9±4 | 3696±0.10 | 7.8±0.33 | 42.3±4 | 7896±0.20 | 6.12±0.28 | 53.3±4 |
| 80±0.01 | 8.88±0.37 | 35.9±4 | 3896±0.10 | 7.68±0.33 | 42.3±4 | 8296±0.21 | 5.88±0.28 | 54.3±4 |
| 90±0.01 | 8.68±0.36 | 36.3±4 | 4096±0.11 | 7.6±0.33 | 43.3±4 | 8696±0.22 | 5.76±0.27 | 56.3±4 |
| 103±0.01 | 8.72±0.36 | 36.5±4 | 4296±0.11 | 7.56±0.33 | 43.3±4 | 9096±0.23 | 5.6±0.27 | 58.3±4 |
| 116±0.01 | 8.64±0.36 | 37±4 | 4496±0.12 | 7.48±0.32 | 44.3±4 | 9496±0.24 | 5.48±0.26 | 59.3±4 |
| 128±0.01 | 8.6±0.36 | 36.8±4 | 4696±0.12 | 7.44±0.32 | 45.3±4 | 9896±0.25 | 5.36±0.26 | 61.3±4 |
| 256±0.01 | 8.48±0.35 | 32.8±3 | 4896±0.13 | 7.32±0.32 | 45.3±4 | 10296±0.26 | 5.24±0.26 | 62.3±4 |
| 512±0.02 | 8.48±0.35 | 29.8±3 | 5096±0.13 | 7.24±0.32 | 45.3±4 | | | |
| 1024±0.03 | 8.44±0.35 | 32.8±3 | 5296±0.14 | 7.12±0.31 | 46.3±4 | | | |

Todos los voltajes medidos son pico-pico

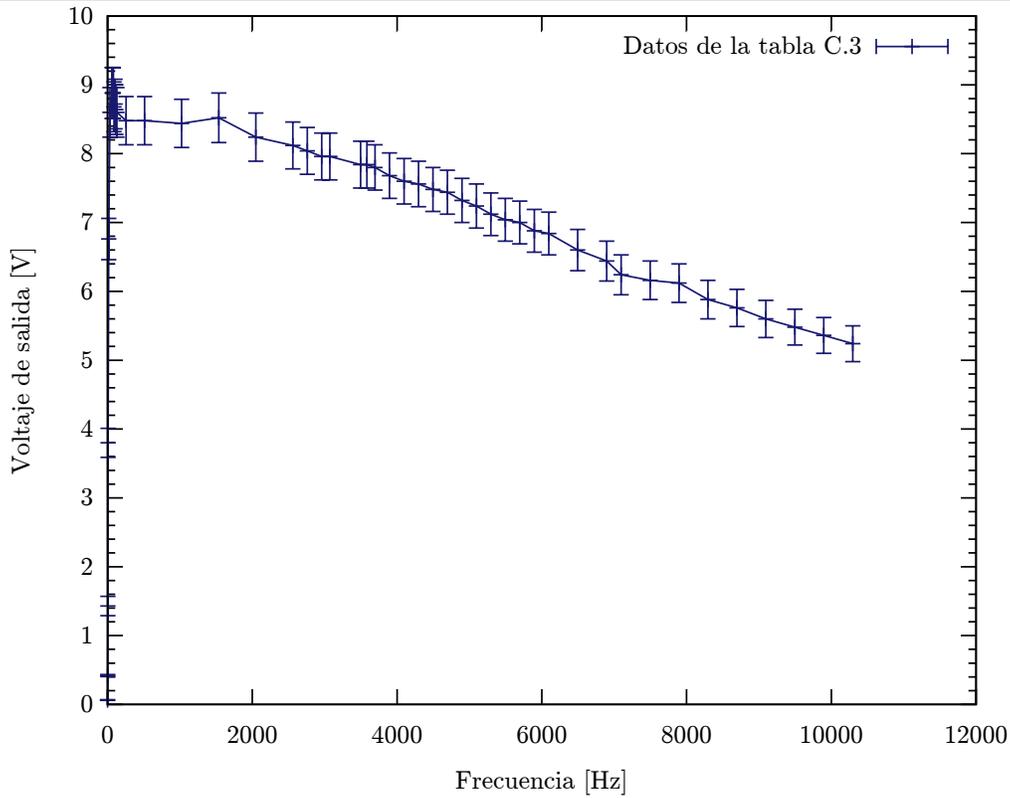


Figura C.1: Variación con la frecuencia del voltaje pico-pico de salida.

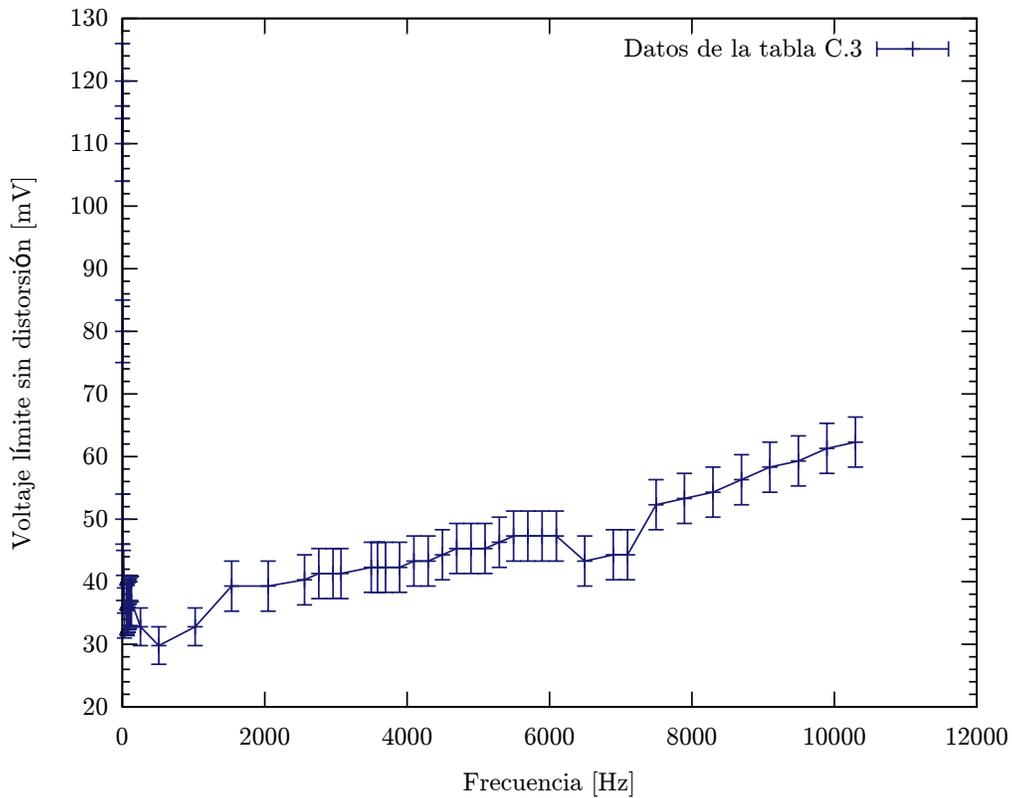


Figura C.2: Variación con la frecuencia del voltaje pico-pico de entrada máximo en que no se presenta distorsión en los voltajes de salida.

APÉNDICE D

Diferentes ajustes a los datos experimentales del capítulo III

Tabla D.1: Ajustes a los datos de la tabla III.1 y coeficiente R^2

| Ecuación | R^2 |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| $f(x) = 0.728x + 19.19$ | 0.9872 |
| $f(x) = 2.069 \times 10^{-3}x^2 + 0.4486x + 24.78$ | 0.9987 |
| $f(x) = -1.807 \times 10^{-5}x^3 + 5.728 \times 10^{-3}x^2 + 0.2612x + 26.32$ | 0.9999 |
| $f(x) = 5.151 \times 10^{-8}x^4 - 3.198 \times 10^{-5}x^3 + 6.898 \times 10^{-3}x^2 + 23.00x + 26.43$ | 0.9999 |
| $f(x) = 40.96 \ln x - 96.19$ | 0.8656 |
| $f(x) = 27.64 e^{0.01164x}$ | 0.9900 |
| $f(x) = 4.683 x^{0.6423}$ | 0.9595 |

Tabla D.2: Ajustes a los datos de la tabla III.2 y coeficiente R^2

| Ecuación | R^2 |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| $f(x) = 0.5509x + 30.27$ | 0.9191 |
| $f(x) = -2.565 \times 10^{-3}x^2 + 1.013x + 17.18$ | 0.9665 |
| $f(x) = -4.178 \times 10^{-5}x^3 + 8.716 \times 10^{-3}x^2 + 0.2221x + 27.41$ | 0.9950 |
| $f(x) = 3.171 \times 10^{-7}x^4 - 1.559 \times 10^{-4}x^3 + 2.170 \times 10^{-2}x^2 - 0.2663x + 30.74$ | 0.9986 |
| $f(x) = 36.548 \ln x - 75.54$ | 0.9050 |
| $f(x) = 34.47 e^{8.213 \times 10^{-3}x}$ | 0.8794 |
| $f(x) = 6.898 x^{0.5544}$ | 0.9509 |

Tabla D.3: Ajustes a los datos de la tabla III.3 y coeficiente R^2

| Ecuación | R^2 |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| $f(x) = 0.2780x + 47.51$ | 0.6723 |
| $f(x) = -2.747 \times 10^{-3}x^2 + 1.020x + 12.90$ | 0.9662 |
| $f(x) = -2.436 \times 10^{-6}x^3 - 1.760 \times 10^{-3}x^2 + 0.9110x + 15.57$ | 0.9672 |
| $f(x) = 1.979 \times 10^{-7}x^4 - 1.093 \times 10^{-4}x^3 + 0.01703x^2 - 0.2676x + 34.16$ | 0.9946 |
| $f(x) = 28.39 \ln x - 47.23$ | 0.8414 |
| $f(x) = 45.95 e^{4.105 \times 10^{-3}x}$ | 0.6597 |
| $f(x) = 10.72 x^{0.4313}$ | 0.8740 |

Tabla D.4: Ajustes a los datos de la tabla III.4 y coeficiente R^2

| Ecuación | R^2 |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|
| $f(x) = 0.1477x + 82.93$ | 0.7623 |
| $f(x) = -2.901 \times 10^{-3}x^2 + 0.4378x + 78.58$ | 0.9916 |
| $f(x) = 1.233 \times 10^{-5}x^3 - 4.751 \times 10^{-3}x^2 + 0.5084x + 78.14$ | 0.9946 |
| $f(x) = 4.808 \times 10^{-7}x^4 - 8.382 \times 10^{-5}x^3 + 1.258 \times 10^{-3}x^2 + 0.3882x + 78.48$ | 0.9976 |
| $f(x) = 5.648 \ln x + 69.94$ | 0.9270 |
| $f(x) = 82.87 e^{1.684 \times 10^{-3}x}$ | 0.7518 |
| $f(x) = 71.70 x^{6.362 \times 10^{-2}}$ | 0.9235 |

Tabla D.5: Ajustes a los datos de la tabla III.5 y coeficiente R^2

| Ecuación | R^2 |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|
| $f(x) = 0.1159x + 52.00$ | 0.4855 |
| $f(x) = -9.176 \times 10^{-4}x^2 + 0.5105x + 24.38$ | 0.8772 |
| $f(x) = 3.583 \times 10^{-6}x^3 - 3.228 \times 10^{-3}x^2 + 0.9034x + 11.12$ | 0.9511 |
| $f(x) = 1.209 \times 10^{-8}x^4 - 6.815 \times 10^{-6}x^3 - 3.757 \times 10^{-4}x^2 + 0.6380x + 16.23$ | 0.9614 |
| $f(x) = -1.978 \times 10^{-10}x^5 + 2.248 \times 10^{-7}x^4 - 8.766 \times 10^{-5}x^3 + 0.01245x^2 - 0.115x + 25.30$ | 0.9946 |
| $f(x) = 19.89 \ln x - 23.89$ | 0.7589 |
| $f(x) = 46.41 e^{2.081 \times 10^{-3}x}$ | 0.4842 |
| $f(x) = 11.96 x^{0.3564}$ | 0.7923 |

Tabla D.6: Ajustes a los datos de la tabla III.7 y coeficiente R^2

| Ecuación | R^2 |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|
| $f(x) = -0.1402x + 34.97$ | 0.6657 |
| $f(x) = 3.106 \times 10^{-3}x^2 - 0.4296x + 38.76$ | 0.9261 |
| $f(x) = -5.179 \times 10^{-5}x^3 + 1.070 \times 10^{-2}x^2 - 0.7089x + 40.67$ | 0.9817 |
| $f(x) = 6.177 \times 10^{-7}x^4 - 1.742 \times 10^{-4}x^3 + 1.823 \times 10^{-2}x^2 - 0.8598x + 41.28$ | 0.9857 |
| $f(x) = -1.243 \times 10^{-8}x^5 + 3.635 \times 10^{-6}x^4 - 4.293 \times 10^{-4}x^3 + 2.710 \times 10^{-2}x^2 - 0.9733x + 41.59$ | 0.9865 |
| $f(x) = -4.094 \ln x + 42.59$ | 0.9687 |
| $f(x) = 34.84 e^{-4.575 \times 10^{-3}x}$ | 0.7110 |
| $f(x) = 44.04 x^{-0.1288}$ | 0.9627 |

Tabla D.7: Ajustes a los datos de la tabla III.9 y coeficiente R^2 para el horno 1

| Ecuación | R^2 |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|
| $f(x) = -6.536 \times 10^{-2}x^2 + 2.276x + 30.96$ | 0.9424 |
| $f(x) = 3.068 \times 10^{-4}x^3 - 7.916 \times 10^{-2}x^2 + 2.439x + 30.59$ | 0.9433 |
| $f(x) = -2.673 \times 10^{-4}x^4 + 1.634 \times 10^{-2}x^3 - 0.3852x^2 + 4.403x + 28.08$ | 0.9857 |
| $f(x) = -1.09 \times 10^{-5}x^5 + 5.521 \times 10^{-4}x^4 - 5.342 \times 10^{-3}x^3 - 0.1468x^2 + 3.444x + 28.82$ | 0.9899 |
| $f(x) = 1.141 \times 10^{-6}x^6 - 1.136 \times 10^{-4}x^5 + 4.033 \times 10^{-3}x^4 - 0.06017x^3 + 0.2497x^2 + 2.360x + 29.35$ | 0.9926 |

Tabla D.8: Ajustes a los datos de la tabla III.9 y coeficiente R^2 para el horno 2

| Ecuación | R^2 |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| $f(x) = -5.902 \times 10^{-2} x^2 + 2.131 x + 29.85$ | 0.9753 |
| $f(x) = -4.303 \times 10^{-4} x^3 - 3.966 \times 10^{-2} x^2 + 1.902 x + 30.37$ | 0.9773 |
| $f(x) = -1.204 \times 10^{-4} x^4 + 6.795 \times 10^{-3} x^3 - 0.1775 x^2 + 2.787 x + 29.24$ | 0.9868 |
| $f(x) = -1.21 \times 10^{-5} x^5 + 7.854 \times 10^{-4} x^4 - 1.718 \times 10^{-2} x^3 + 8.607 \times 10^{-2} x^2 + 1.727 x + 30.06$ | 0.9924 |
| $f(x) = -7.44 \times 10^{-7} x^6 + 5.486 \times 10^{-5} x^5 - 1.484 \times 10^{-3} x^4 + 0.01856 x^3 - 0.1724 x^2 + 2.434 x + 29.71$ | 0.9936 |

Tabla D.9: Ajustes a los datos de la tabla III.9 y coeficiente R^2 para el horno 2 invertido

| Ecuación | R^2 |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| $f(x) = -5.902 \times 10^{-2} x^2 + 1.411 x + 40.65$ | 0.9753 |
| $f(x) = 4.303 \times 10^{-4} x^3 - 7.839 \times 10^{-2} x^2 + 1.639 x + 40.13$ | 0.9773 |
| $f(x) = -1.204 \times 10^{-4} x^4 + 7.655 \times 10^{-3} x^3 - 0.2163 x^2 + 2.524 x + 38.99$ | 0.9868 |
| $f(x) = 1.208 \times 10^{-5} x^5 - 1.026 \times 10^{-3} x^4 + 0.03163 x^3 - 0.4799 x^2 + 3.584 x + 38.17$ | 0.9924 |
| $f(x) = -7.44 \times 10^{-7} x^6 + 7.902 \times 10^{-5} x^5 - 3.296 \times 10^{-3} x^4 + 0.06737 x^3 - 0.7383 x^2 + 4.291 x + 37.83$ | 0.9936 |

Tabla D.10: Ajustes a los datos de la tabla III.10 y coeficiente R^2 para el horno 1

| Ecuación | R^2 |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| $f(x) = -0.1705 x^2 + 6.487 x + 37.45$ | 0.9700 |
| $f(x) = -4.302 \times 10^{-3} x^3 + 2.305 \times 10^{-2} x^2 + 4.202 x + 42.69$ | 0.9887 |
| $f(x) = -1.291 \times 10^{-4} x^4 + 3.442 \times 10^{-3} x^3 - 0.1247 x^2 + 5.151 x + 41.48$ | 0.9898 |
| $f(x) = -3.50 \times 10^{-6} x^5 + 1.331 \times 10^{-4} x^4 - 3.496 \times 10^{-3} x^3 - 0.04845 x^2 + 4.844 x + 41.71$ | 0.9898 |
| $f(x) = -4.01 \times 10^{-6} x^6 + 3.574 \times 10^{-4} x^5 - 1.210 \times 10^{-2} x^4 + 0.1892 x^3 - 1.442 x^2 + 8.654 x + 39.86$ | 0.9936 |

Tabla D.11: Ajustes a los datos de la tabla III.10 y coeficiente R^2 para el horno 2

| Ecuación | R^2 |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| $f(x) = -0.1823 x^2 + 6.646 x + 38.86$ | 0.9780 |
| $f(x) = -1.277 \times 10^{-3} x^3 - 0.1249 x^2 + 5.968 x + 40.41$ | 0.9798 |
| $f(x) = -4.655 \times 10^{-4} x^4 + 2.665 \times 10^{-2} x^3 - 0.6578 x^2 + 9.389 x + 36.04$ | 0.9941 |
| $f(x) = -7.73 \times 10^{-6} x^5 + 1.143 \times 10^{-4} x^4 + 0.01131 x^3 - 0.4891 x^2 + 8.7103 x + 36.56$ | 0.9942 |
| $f(x) = 2.555 \times 10^{-6} x^6 - 2.376 \times 10^{-4} x^5 + 7.908 \times 10^{-3} x^4 - 0.1115 x^3 + 0.3986 x^2 + 6.2830 x + 37.74$ | 0.9956 |

Tabla D.12: Ajustes a los datos de la tabla III.10 y coeficiente R^2 para el horno 2 invertido

| Ecuación | R^2 |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| $f(x) = -0.1823x^2 + 4.293x + 74.14$ | 0.9780 |
| $f(x) = 1.277 \times 10^{-3}x^3 - 0.2398x^2 + 4.972x + 72.59$ | 0.9798 |
| $f(x) = -4.655 \times 10^{-4}x^4 + 2.921 \times 10^{-2}x^3 - 0.7728x^2 + 8.393x + 68.21$ | 0.9939 |
| $f(x) = 7.730 \times 10^{-6}x^5 - 1.045 \times 10^{-3}x^4 + 0.04455x^3 - 0.9415x^2 + 9.071x + 67.69$ | 0.9942 |
| $f(x) = 2.555 \times 10^{-6}x^6 - 2.222 \times 10^{-4}x^5 + 6.749 \times 10^{-3}x^4 - 0.07821x^3 - 0.05373x^2 + 6.644x + 68.87$ | 0.9956 |

Tabla D.13: Ajustes a los datos de la tabla III.11 y coeficiente R^2 para el horno 1

| Ecuación | R^2 |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| $f(x) = -0.2816x^2 + 10.45x + 52.98$ | 0.9598 |
| $f(x) = -7.418 \times 10^{-3}x^3 + 5.218 \times 10^{-2}x^2 + 6.514x + 62.01$ | 0.9825 |
| $f(x) = -6.194 \times 10^{-4}x^4 + 2.975 \times 10^{-2}x^3 - 0.6571x^2 + 11.07x + 56.19$ | 0.9920 |
| $f(x) = -8.14 \times 10^{-6}x^5 - 8.76 \times 10^{-6}x^4 + 0.01359x^3 - 0.4794x^2 + 10.35x + 56.75$ | 0.9921 |
| $f(x) = -2.01 \times 10^{-6}x^6 + 1.729 \times 10^{-4}x^5 - 6.144 \times 10^{-3}x^4 + 0.1102x^3 - 1.178x^2 + 12.26x + 55.82$ | 0.9925 |

Tabla D.14: Ajustes a los datos de la tabla III.11 y coeficiente R^2 para el horno 2

| Ecuación | R^2 |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| $f(x) = -0.2837x^2 + 10.49x + 52.97$ | 0.9481 |
| $f(x) = -9.598 \times 10^{-3}x^3 + 0.01482x^2 + 5.3939x + 64.66$ | 0.9858 |
| $f(x) = -4.505 \times 10^{-4}x^4 + 1.743 \times 10^{-2}x^3 - 0.3677x^2 + 8.705x + 60.42$ | 0.9908 |
| $f(x) = 1.320 \times 10^{-5}x^5 - 1.440 \times 10^{-3}x^4 + 0.04363x^3 - 0.6558x^2 + 9.864x + 59.53$ | 0.9910 |
| $f(x) = -4.83 \times 10^{-6}x^6 + 4.482 \times 10^{-4}x^5 - 1.619 \times 10^{-2}x^4 + 0.2759x^3 - 2.335x^2 + 14.46x + 57.29$ | 0.9930 |

Tabla D.15: Ajustes a los datos de la tabla III.11 y coeficiente R^2 para el horno 2 invertido

| Ecuación | R^2 |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| $f(x) = -0.2837x^2 + 6.533x + 112.4$ | 0.9481 |
| $f(x) = 9.598 \times 10^{-3}x^3 - 0.7157x^2 + 11.63x + 100.7$ | 0.9858 |
| $f(x) = -4.505 \times 10^{-4}x^4 + 3.663 \times 10^{-2}x^3 - 1.232x^2 + 14.94x + 96.44$ | 0.9908 |
| $f(x) = -1.32 \times 10^{-5}x^5 + 5.393 \times 10^{-4}x^4 + 0.01043x^3 - 0.9435x^2 + 13.78x + 97.33$ | 0.9910 |
| $f(x) = -4.83 \times 10^{-6}x^6 + 4.218 \times 10^{-4}x^5 - 1.421 \times 10^{-2}x^4 + 0.2427x^3 - 2.623x^2 + 18.38x + 95.1$ | 0.9930 |

Tabla D.16: Ajustes a los datos de la primer y segunda columna de la tabla III.12 y coeficiente R^2 para las distintas combinaciones de las series de datos

| Series de datos usados | Ecuación | R^2 |
|------------------------|----------------------------|--------|
| A | $f(x) = -0.3544x + 2471.6$ | 0.9899 |
| B | $f(x) = -0.3859x + 2474.6$ | 0.9971 |
| C | $f(x) = -0.5871x + 2511.5$ | 0.9484 |
| A+B | $f(x) = -0.3695x + 2472.7$ | 0.9932 |
| A+C | $f(x) = -0.3657x + 2472.3$ | 0.9932 |
| A+B+C | $f(x) = -0.3711x + 2472.8$ | 0.9942 |

Tabla D.17: Ajuste lineal a los datos de la primer y segunda columna de la tabla III.13 y coeficiente R^2

| Ecuación | R^2 |
|--------------------------|--------|
| $f(x) = -0.4280x + 2478$ | 0.9929 |

Tabla D.18: Ajuste lineal a los datos de la primer y segunda columna de la tabla III.14 y coeficiente R^2

| Ecuación | R^2 |
|--------------------------|--------|
| $f(x) = -0.3499x + 2473$ | 0.9994 |

Tabla D.19: Ajustes a los datos de la primer y tercer columna de la tabla III.14 y coeficiente R^2

| Ecuación | R^2 |
|------------------------------------------------------------------------------|--------|
| $f(x) = -0.9375x + 563.2$ | 0.7144 |
| $f(x) = 0.01217x^2 - 3.291x + 650.7$ | 0.9013 |
| $f(x) = -1.307 \times 10^{-4}x^3 + 5.008 \times 10^{-2}x^2 - 6.470x + 721.7$ | 0.9343 |
| $f(x) = -81.77 \ln x + 834.1$ | 0.8852 |
| $f(x) = 968.0x^{-0.1635}$ | 0.9060 |

Manejo tensorial

En la notación tensorial es útil trabajar sólo con componentes. Un vector puede escribirse usando una sola letra que represente bajo sustitución la coordenada particular a tratar. Por ejemplo, podemos referirnos a un vector \mathbf{u} , escribiendo u_i . El subíndice i puede tomar los valores 1, 2 y 3, que en coordenadas cartesianas corresponderán a las componentes x , y y z . Para referirnos a la coordenada x del vector \mathbf{u} , simplemente escribimos u_1 ; para la coordenada y , u_2 , etc.

También, en la notación tensorial, seguido es conveniente usar la *convención de sumas*. Esta convención dice que cuando existe un subíndice repetido, se está indicando que se debe hacer una suma en los valores 1, 2 y 3 para ese sufijo. El sufijo usado se considera un subíndice mudo porque no importa que letra sea, si está repetida indicará suma para ese sufijo. Esta notación es útil para ahorrarnos signos de suma. Por ejemplo, para la dilatación tenemos que $\Theta = \sum \epsilon_{ii} = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}$. Usando la convención de sumas podemos escribir simplemente ϵ_{ii} o también, por ejemplo, ϵ_{kk} . Esta notación puede usarse también para derivadas, como por ejemplo en la ecuación

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}. \quad (\text{E.1})$$

A continuación se presenta una tabla en la que se muestra la notación vectorial y la notación en índices para distintas operaciones. Los vectores se representan en negritas y los tensores con una doble raya debajo de ellos.

En la tabla E.1 aparece el tensor alternante ε_{ijk} , este se define

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{si dos de los índices } i, j \text{ o } k \text{ son iguales,} \\ 1 & \text{si } i, j, k \text{ son distintos y aparecen en orden cíclico,} \\ -1 & \text{si } i, j, k \text{ son distintos y no están en orden cíclico.} \end{cases} \quad (\text{E.2})$$

Por ejemplo, $\varepsilon_{112} = 0$, $\varepsilon_{231} = 1$, y $\varepsilon_{321} = -1$.

El tensor δ_{ij} es un tensor unitario, y se define de la siguiente manera

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si dos de los índices } i \neq j, \\ 1 & \text{si } i = j. \end{cases} \quad (\text{E.3})$$

A δ_{ij} se le conoce también como el tensor de sustitución, porque bajo contracción (hacer dos índices de un tensor iguales y llevar a cabo la suma), corresponde a hacer una sustitución del subíndice que queda apareado de la delta con el que no quedó apareado.

Tabla E.1: Notación en índices de relaciones tensoriales y vectoriales.

| Notación tensorial | Notación en índices |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| \mathbf{v} | v_i |
| $\underline{\underline{\sigma}}$ | σ_{ij} |
| $\alpha = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ | $\alpha = u_k v_k$ |
| $\mathbf{w} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \mathbf{u}$ | $w_i = \sigma_{ij} u_j$ |
| $\mathbf{w}^T = \mathbf{v}^T \cdot \underline{\underline{\sigma}}$ | $w_i = \sigma_{ji} v_j$ |
| $\alpha = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\tau}}$ | $\alpha = \sigma_{ij} \tau_{ij}$ |
| $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ | $w_i = \varepsilon_{ijk} u_j v_k$ |
| $\mathbf{u} = \nabla \alpha$ | $u_i = \frac{\partial \alpha}{\partial x_i}$ |
| $\alpha = \nabla \cdot \mathbf{u}$ | $\alpha = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$ |
| $\underline{\underline{e}} = \nabla \mathbf{u}$ | $e_{ij} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$ |
| $\mathbf{v} = \nabla^2 \mathbf{u}$ | $v_i = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} u_i$ |
| $\mathbf{u} = \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}$ | $u_i = \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ji}$ |
| $\underline{\underline{\tau}} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{e}}$ | $\tau_{ij} = \sigma_{ik} e_{kj}$ |
| $\underline{\underline{A}} = \mathbf{u} \mathbf{v}$ | $A_{ij} = u_i v_j$ |

Referencias

- [1] INC. Sperry Products Division Automation Industries. *Condensed reference series for ultrasonic Nondestructive testing vol. 2. Velocity tables*. Automation Industries, INC. Sperry Products Division, 1965.
- [2] D. Bancroft. The velocity of longitudinal waves in cylindrical bars. *Physical Review*, 59:588–593, 1941.
- [3] A. Bayón, A. Varadé, y F. Gascón. On the acoustical longitudinal vibration modes of finite cylinders. *J. Acoust. Soc. Am.*, 96:1539–1548, 1994.
- [4] A. B. Bhatia. *Ultrasonic Absorption: An Introduction to the Theory of Sound Absorption and Dispersion in Gases, Liquids and Solids*. Dover, 1985.
- [5] R. E. Booker y F. H. Sagar. Velocity dispersion of the lowest-order longitudinal mode in finite rods of circular cross section. *J. Acoust. Soc. Am.*, 49:1491–1498, 1971.
- [6] J. E. Calthrop y J. T. Miller. A simple method for studying the variation with temperature of young's modulus for certain metals. *American Journal of Physics*, 3:131–132, 1935.
- [7] H. A. Daw y R. J. Liefeld. Driven singing aluminum rods. *American Journal of Physics*, 66: 639–641, 1998.
- [8] A. J. Dekker. *Solid State Physics*. The Macmillan Press LTD, 1975.
- [9] R. P. Feynman, R. B. Leighton, y M. Sands. *The Feynman Lectures on Physics. Volume 2*. Addison-Wesley Publishing Company, 1975.
- [10] P. F. Gaehr. Young's modulus by vibrations. *American Journal of Physics*, 4:130–131, 1936.
- [11] S. L. Garrett. Resonant acoustic determination of elastic moduli. *J. Acoust. Soc. Am.*, 88:210–221, 1990.
- [12] I. Jimeno-Fernandez, H. Überall, W. M. Madigosky, y R. B. Fiorito. Resonance decomposition for the vibratory response of a viscoelastic rod. *J. Acoust. Soc. Am.*, 91:2030–2033, 1992.
- [13] L. E. Kinsler, A. R. Frey, A. B. Coppens, y J. V. Sanders. *Fundamentals of Acoustics*. John Wiley & Sons, Inc., 2000.
- [14] C. Kittel. *Introduction to Solid State Physics*. John Wiley And Sons, Inc., 1971.

- [15] H. Kolsky. *Stress Waves in Solids*. Dover, 1965.
- [16] L. D. Landau y E. M. Lifshitz. *Theory of Elasticity. Volume 7 of Course of Theoretical Physics*. Pergamon Press, 1959.
- [17] D. R. Lide, ed. *CRC Handbook of Chemistry and Physics, 90th Edition (CD-ROM Version 2010)*. CRC Press/Taylor and Francis, Boca Raton, FL, 2010.
- [18] A. E. H. Love. *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. Dover, 1944.
- [19] W. M. Madigosky y G. F. Lee. Improved resonance technique for materials characterization. *J. Acoust. Soc. Am.*, 73:1374–1377, 1983.
- [20] A. Morales, L. Gutiérrez, y J. Flores. Improved eddy current driver-detector for elastic vibrations. *American Journal of Physics*, 69:517–522, 2001.
- [21] P. M. Morse y K. U. Ingard. *Theoretical Acoustics*. McGraw-Hill Book Company, 1968.
- [22] M. Necati. *Transferencia de calor*. McGraw-Hill, 1980.
- [23] L. Pauling. *General Chemistry*. Dover, 1988.
- [24] H. F. Pollard. *Sound Waves in Solids*. Pion Limited, 1977.
- [25] L. I. Raggio, J. Etcheverry, y N. Sánchez, G. Bonadeo. Error analysis of the impulse excitation of vibration measurement of acoustic velocities in steel samples. *Physics Procedia*, 3:297–303, 2010.
- [26] B. Scott. Inexpensive measurements of the elastic constants of steel. *American Journal of Physics*, 45:45–47, 1977.
- [27] H. M. Simpson y P. J. Wolfe. Young's modulus and internal damping in a vibrating rod. *American Journal of Physics*, 43:506–508, 506.
- [28] P. F. Sullivan y E. P. Papadakis. Ultrasonic double refraction in worked metals. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 33:1622–1624, 1961.
- [29] S. Timoshenko. *Strength of Materials. Part I: Elementary Theory and Problems*. D. Van Nostrand Company, Inc., 1944.
- [30] S. Tyagi y A. E. Lord. Simple and inexpensive apparatus for young's modulus measurement. *American Journal of Physics*, 48:205–206, 1980.
- [31] S. Velasco, F. L. Román, y J. A. White. A simple experiment for measuring bar longitudinal and flexural vibration frequencies. *American Journal of Physics*, 78:1425–1434, 2010.
- [32] W. E. Williams. *Series de Fourier y problemas con valores en la frontera*. Limusa, 1975.
- [33] F. Wilson y A. E. Lord. Young's modulus determination via simple, inexpensive static and dynamic measurements. *American Journal of Physics*, 41:653–656, 1973.
- [34] H. Yépez-Martínez, A. Porta, y E. Yépez. n-order perturbative solution of the inhomogeneous wave equation. *Revista Mexicana de Física*, 54:168–174, 2008.
- [35] J. Zemanek, Jr. y I. Rudnick. Attenuation and dispersion of elastic waves in a cylindrical bar. *J. Acoust. Soc. Am.*, 33:1283–1288, 1961.