



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
MAESTRÍA EN CIENCIAS (FÍSICA)
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

INCERTIDUMBRES EN LA EVOLUCIÓN DE LA CONSTANTE DE ACOPLAMIENTO DE QCD

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:
LEONARDO RENÉ DE LA CRUZ TRUJILLO

TUTOR PRINCIPAL
INSTITUTO DE FÍSICA
Dr. Jens Erler

MIEMBRO COMITÉ TUTOR
INSTITUTO DE FÍSICA
Dr. Genaro Toledo

MIEMBRO COMITÉ TUTOR
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES
Dr. Roelof Bijker

MÉXICO, D. F. FEBRERO 2014.



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

1. Introducción	5
1.1. Revisión general de QCD	7
1.1.1. Teorías de norma	7
1.1.2. Reglas de Feynman	8
1.2. Renormalización	9
1.2.1. Desacoplamiento en QCD	11
2. Constante de acoplamiento de QCD	13
2.1. Ecuación del Grupo de Renormalización	13
2.1.1. Masas de los quarks y la EGR	14
2.2. Soluciones a la EGR para la constante de acoplamiento	15
2.2.1. Parametrizaciones de la solución a dos lazos	15
2.2.2. Soluciones a ordenes mayores	20
2.2.3. Acercamiento a la incertidumbre	22
2.3. Cuatro lazos y más allá	27
2.3.1. Información parcial sobre la función beta, N_f grande y estimaciones de β_4	29
2.3.2. Equivalencia entre parametrizaciones con Λ_{QCD} y a_0	31
2.3.3. Resumen de las soluciones	33
3. Incertidumbres en QCD	35
3.1. La función beta y sus efectos en las incertidumbres	37
3.1.1. Corriendo en pasos pequeños	42
3.2. Masas de los quarks: definiciones y condiciones de coincidencia	42
3.2.1. Condiciones de coincidencia	44
3.3. Análisis global de incertidumbres	50
3.3.1. Evolución del acoplamiento hacia M_Z cruzando los umbrales m_b y m_c	53
4. Conclusiones	57
A. Apéndice	61
1.1. Independencia del esquema de renormalización de β_0 y β_1	61
1.2. Aproximantes de Padé	62
1.3. Estimación del valor constante de c_5 en las Condiciones de Coincidencia a 5-lazos	63
Bibliografía	67

Capítulo 1

Introducción

El modelo estándar de partículas (SM, por sus siglas en inglés) ha mostrado eficacia en la descripción de las interacciones fuertes, débiles y electromagnéticas. El SM se constituye de bloques conformados por teorías de campo, los cuáles describen cada una de las interacciones por medio de partículas de intercambio denominados bosones. Cada bloque del SM es descrito a través de una teoría campo que exhibe una simetría de norma, la cual es fundamental en la determinación de la dinámica.

El bloque que corresponde a las interacciones fuertes se denomina cromodinámica cuántica (QCD, por sus siglas en inglés), el cual se conforma de seis campos de quark (sabores) y ocho campos de gluones (mediadores de la interacción). QCD es una teoría no conmutativa, lo cual conlleva no linealidad así como interacción entre los bosones de norma, lo cual no ocurre, por ejemplo, en la electrodinámica cuántica QED.

Cuando las interacciones en una teoría de campos son consideradas débiles puede hacerse un tratamiento perturbativo codificado convenientemente en diagramas de Feynman, los cuales son traducidos a expresiones analíticas por medio de un conjunto de reglas. Cuando estos diagramas contienen lazos, las expresiones muchas veces divergen, por lo que es necesario introducir el proceso de regularización y renormalización, los cuales hacen consistente la teoría. Sin embargo, este proceso tiene cierto grado de arbitrariedad en la elección de la receta para renormalizar (esquema de renormalización). Para QCD el esquema más popular es el denominado sustracción mínima modificada, el cual remueve un par de constantes además de remover la divergencia.

La arbitrariedad en la elección del esquema de renormalización no debe modificar la Física, es decir, la teoría debe ser invariante ante la elección de este esquema, lo cual se denomina invariancia del grupo de renormalización [1]. En particular cuando se transforman infinitesimalmente los parámetros de la teoría, estos son descritos por una ecuación diferencial denominada Ecuación del Grupo de Renormalización (EGR).

En particular, para QCD, uno de estos parámetros es la constante de acoplamiento, la cual no es un observable por sí misma, ya que su determinación involucra el cálculo de tasas de decaimiento o secciones eficaces. Su determinación es de vital importancia puesto que a través de ella es posible llevar a cabo expansiones perturbativas. La constante de acoplamiento de QCD α_s es gobernada por la ecuación del grupo de renormalización de Callan-Zymanzik, en la cual figura la función beta de QCD $\beta(\alpha_s)$, cuyo coeficiente a un lazo condujo al descubrimiento de la libertad asintótica [2]. La solución de la ecuación del grupo de renormalización puede ser

encontrada perturbativamente usando distintas parametrizaciones, la más común emplea Λ , que corresponde a la escala donde el método perturbativo falla [3]; en este trabajo se propone emplear la parametrización con el valor inicial $\alpha_s(\mu_0)$, donde μ_0 corresponde a una escala de energía donde el acoplamiento es conocido.

La determinación de la función beta de QCD depende del esquema de renormalización empleado a partir del coeficiente a tres lazos. En los esquemas independientes de la masa, tales como el de sustracción mínima MS o el de sustracción mínima modificada $\overline{\text{MS}}$ la información sobre los campos de quark se codifica en el número de sabores activos n_f que figura en los coeficientes de la función beta. Adicionalmente QCD con seis sabores es raramente usado. Si el momento característico del proceso $p_i \ll m_h$ (m_h es la masa de un quark pesado) es preferible usar una teoría efectiva [4].

Lo anterior conduce al establecimiento de condiciones de coincidencia entre la teoría completa (con todos los quarks) y la teoría efectiva (quarks ligeros y correcciones $\mathcal{O}(1/m_h)$, siendo M la masa del quark pesado). En particular, para la constante de acoplamiento, las condiciones de coincidencia determinan de qué forma las masas de los quarks deben ser tomadas en cuenta cuando α_s es evolucionada. Esquemas tipo-MS en QCD requieren en general condiciones de coincidencia no triviales a ordenes más altos en la expansión perturbativa.

En este contexto este trabajo se propone estudiar de qué forma son generadas incertidumbres en la evolución de la constante de acoplamiento debida tanto a la EGR como a las condiciones de coincidencia en el umbral de la masa de un quark. En el primer caso la incertidumbre primaria proviene de que sólo se conocen los coeficientes de la función beta hasta 4-lazos, además la ecuación diferencial resultante es una ecuación diferencial no-lineal por lo cual su solución debe hacerse de forma iterativa. En el segundo caso, las condiciones de coincidencia tienen como parámetros a las masas de los quarks, y éstas se implementan a través de expansiones perturbativas, de las cuales sólo se conocen algunos coeficientes.

La dependencia en la masa de las condiciones de coincidencia nos conduce a un tema relevante acerca de este parámetro. Los quarks libres no han sido observados, este fenómeno conocido como *confinamiento* nos lleva a la pregunta sobre la definición *correcta* de la masa. La definición común de la masa, al menos, la que es considerada “natural”, es la denominada *masa del polo* (M_p) que se define como el polo del propagador, i.e., donde éste diverge [3]. Como las condiciones de coincidencia usan como umbrales a las masas de los quarks, la pregunta natural es: ¿cuál definición es la apropiada y si esta elección induce incertidumbres? Este trabajo explora la respuesta a esta pregunta.

La estimación apropiada de estas incertidumbres es de vital importancia considerando que del lado experimental se han realizado grandes avances obteniendo resultados cada vez más precisos y con mejor control de errores sistemáticos. Es por esto que es necesario que las expresiones teóricas equiparen este nivel de precisión de tal forma que sea posible examinar cada vez mejor las predicciones de la teoría.

Esta tesis esta organizada como se describe a continuación. En el resto de este Capítulo se introducen conceptos conocidos de QCD con el fin de introducir notación y convenciones que se utilizarán a lo largo del trabajo. El lagrangiano de QCD así como las reglas de Feynman son presentadas en la Sección 1.1. El concepto de regularización y renormalización se introduce en la primera parte de la Sección 1.2, finalizando con una introducción concisa sobre cómo surgen las condiciones de coincidencia entre parámetros de dos teorías (Sección 1.2.1)

En el Capítulo 2 comienza estableciendo la EGR (2.1) para posteriormente resolverla para la dimensión anómala de la masa (2.12). La segunda parte del mismo contiene la solución para

la constante de acoplamiento, que es el tema de interés de este trabajo. Se comienza con la solución a dos lazos para ejemplificar el tipo de soluciones que pueden surgir culminando con el Cuadro 2.1 que resume los resultados. Posteriormente se hace un primer estudio sobre la incertidumbre por truncamiento de la función beta considerando el problema de juguete en el cual se plantea un escenario donde β_2 no es conocido; este problema se estudia usando dos soluciones distintas del Cuadro 2.1. En la tercera parte del Capítulo se construye un algoritmo para construir las soluciones iterativas a N -lazos siendo (2.59), (2.60) el resultado fundamental de esa Sección. Se finaliza estudiando las estimaciones para el coeficiente β_4 , adicionalmente se estudia la equivalencia entre las parametrizaciones con Λ y $\alpha_s(\mu_0)$.

El Capítulo 3 contiene el estudio de las incertidumbres, el cual se separa en dos grandes grupos: en el primer grupo se consideran los efectos relacionados con el truncamiento de la función beta siendo el Cuadro 3.5 un condensado de los efectos estudiados ahí. En el segundo grupo se encuentran los efectos relacionados con las masas de los quarks y su aparición en las condiciones de coincidencia, en particular el papel que juegan como parámetros y en la elección de la escala de coincidencia; el proceso de evolución cuando las condiciones de coincidencia son implementadas se resume en (3.30). La parte final del Capítulo analiza los efectos en conjunto tanto en el esquema del polo (Ec. (3.39)) como en el esquema de sustracción mínima modificada (Ec. (3.44)). El resultado central de este trabajo se resume en el Cuadro 3.8.

Finalmente, en el Capítulo 4 se plantean las conclusiones del trabajo.

1.1. Revisión general de QCD

1.1.1. Teorías de norma

QCD es la teoría de las interacciones fuertes donde los campos son representaciones del grupo de Lie $SU(3)$. La teoría es un caso especial de un conjunto de teorías denominado teorías de Yang-Mills. En esta sección se basa en las referencias [5] y [1] que pueden ser consultadas para detalles.

Considérese un grupo G y una campo de materia ψ que transforma como

$$\psi(x) \rightarrow \exp(-ig\omega^\alpha(x)t_\alpha)\psi(x) = U(\omega(x))^{-1}\psi(x), \quad (1.1)$$

donde el campo ψ es una vector columna y las matrices hermiticas forman una representación del grupo con constantes de estructura $C^\alpha_{\beta\gamma}$ definidas a través de

$$[t_\alpha, t_\beta] = iC^\alpha_{\beta\gamma}t_\gamma. \quad (1.2)$$

Las matrices $U(\omega)$ forman una representación del grupo. Para construir una acción con invariancia de norma se define la derivada covariante:

$$D_\mu\psi \equiv (\partial_\mu + igA_\mu)\psi, \quad (1.3)$$

donde se ha introducido el potencial de norma A_μ y tiene la propiedad de que es un vector bajo transformaciones de Lorentz. El mismo símbolo será usado para denotar los componentes del potencial de norma, i.e.,

$$A_\mu = A_\mu^\alpha t_\alpha. \quad (1.4)$$

Se introduce aquí la notación de Einstein de índices a menos que se especifique lo contrario. A_μ transforma bajo el grupo de norma como:

$$A_\mu \rightarrow U(\omega(x))^{-1}[A_\mu(x) - ig^{-1}\partial_\mu]U(\omega(x)). \quad (1.5)$$

La dinámica de la teoría estará determinada por el lagrangiano:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{inv}} &= -(F_{\mu\nu}^\alpha)^2 + \bar{\psi}(i\not{D} - M)\psi \\ &= -\frac{1}{2}\text{tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) + \bar{\psi}(i\not{D} - M)\psi, \end{aligned} \quad (1.6)$$

donde la intensidad del campo está dada por:

$$F_{\mu\nu}^\alpha \equiv \partial_\mu A_\nu^\alpha - \partial_\nu A_\mu^\alpha - gC_{\beta\gamma}^\alpha A_\mu^\beta A_\nu^\gamma, \quad (1.7)$$

con g la constante de acoplamiento de la teoría. Se ha asumido la normalización convencional de los generadores, esto es, $\text{tr}(t_\alpha t_\beta) = \delta_\beta^\alpha$. Los campos de la teoría se transforman de acuerdo a:

$$\begin{aligned} \delta_\omega \psi &= -ig\omega^\alpha t_\alpha \psi \\ \delta_\omega \bar{\psi} &= ig\omega^\alpha \bar{\psi} t_\alpha \\ \delta_\omega A_\mu^\alpha &= \partial_\mu \omega^\alpha + gC_{\beta\gamma}^\alpha \omega^\beta A_\mu^\gamma \\ \delta_\omega F_{\mu\nu}^\alpha &= gC_{\beta\gamma}^\alpha \omega^\beta F_{\mu\nu}^\gamma \end{aligned} \quad (1.8)$$

La invariancia de norma impide usar el lagrangiano para obtener el propagador del gluon, para lo cual es necesario fijar la norma:

$$\mathcal{L}_{\text{norma}} = \mathcal{L}_{gc} + \mathcal{L}_{gf} = \partial^\mu \bar{c}^\alpha (\partial_\mu c_\alpha + g c_{\alpha\beta\gamma} c_\beta A_\mu^\gamma) - \frac{1}{2}\xi^{-1}(\partial^\mu A_\mu^\alpha)^2 \quad (1.9)$$

donde el termino \mathcal{L}_{gc} se conoce como el término de *Fantasma de Fadeev-Popov*, y el segundo es el término que fija la norma. Los fantasmas \bar{c}_α y c_α son campos escalares no físicos que anticonmutan y están acoplados a los gluones. El lagrangiano de QCD se expresa entonces como:

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^\alpha)^2 + \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi + \mathcal{L}_{gc} + \mathcal{L}_{gf}, \quad (1.10)$$

con el cual se deducen las Reglas de Feynman de la teoría.

1.1.2. Reglas de Feynman

En teoría de campos es común usar teoría de perturbaciones cuando las interacciones pueden ser consideradas débiles y las contribuciones a esta series perturbativa pueden ser dibujadas usando diagramas de Feynman, las cuales corresponden a expresiones analíticas que se pueden extraer usando reglas de Feynman. Si los diagramas contienen un lazos o varios es

necesario integrar sobre el momento o los momentos del lazo, lo que en muchas ocasiones conduce a integrales que divergen a momentos grandes resultando en un *divergencia ultravioleta*. Las reglas de Feynman estarán usadas usando como termino que fija la norma $\partial \cdot A^\alpha$.

La parte cuadrática de (1.9) dan los propagadores mostrados en los primeros tres renglones del Cuadro 1.1 para el quark, el gluón y el fantasma. Adicionalmente, los vértices gluon-quark, vértice de tres gluones, vértice de cuatro gluones y fantasma gluón son mostrados en ese orden.

1.2. Renormalización

La idea de la renormalización viene de que la re-definición de los parámetros de la teoría cancela las divergencias ultravioleta, la cuál consta de dos etapas: en la primera se “aíslan” términos divergentes por un proceso de regularización para después removerlos vía la elección de un esquema de renormalización. La regularización consiste en modificar \mathcal{L} , i.e., $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}_\epsilon$ tal que \mathcal{L}_ϵ produzca resultados finitos [6]. Muchos métodos de regularización existen, por ejemplo es posible introducir un corte Λ tal que la física se recupere cuando $\Lambda \rightarrow \infty$, pero este método complica la integración por partes. Un ejemplo de regularización se muestra a continuación, donde se modifica el propagador

$$\frac{1}{m^2 - k^2 - i\epsilon} \rightarrow \frac{1}{m^2 - k^2 - i - i\epsilon} - \frac{1}{M^2 - k^2 - i - i\epsilon}$$

tomando el límite $M \rightarrow \infty$, el cuál sin embargo no es muy bueno para teorías de norma, donde la introducción de este término rompe la simetría de norma. En términos generales un proceso de regularización es bueno cuando este preserva la mayor cantidades de simetrías de la teoría. El método más popular usado en cálculos de multilazos es la *regularización dimensional* donde los diagramas son calculados en un espaciotiempo D -dimensional. [7].

En la regularización dimensional se consideran integrales en un espacio D dimensional tal que:

$$\int d^4k \frac{d\alpha}{[k^2 + b^2]^2} \rightarrow \int d^Dk \frac{d\alpha}{[k^2 + b^2]^2} = i\pi^{\frac{D}{2}} \frac{\Gamma(2 - D/2)}{\Gamma(2)} \int_0^1 \frac{d\alpha}{(b^2)^{2-D/2}} \quad (1.11)$$

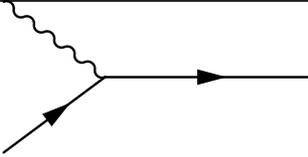
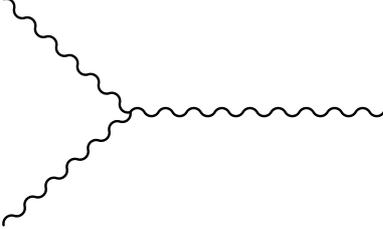
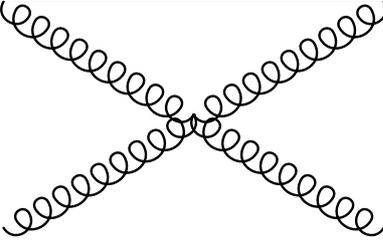
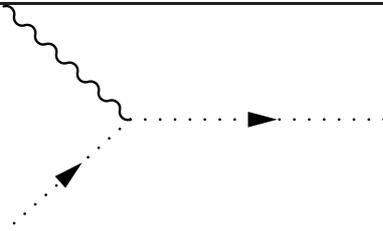
! integral finita para $D = 4 - \epsilon, \epsilon > 0$!

En el caso de QCD se obtendrán cantidades finitas a partir de \mathcal{L}_{QCD} reescalando los campos y los parámetros tal que:

$$\mathcal{L}_R\{\psi, \bar{\psi}, g, \mu\} = \mathcal{L}\{Z_3^{\frac{1}{2}} A_\mu^\alpha, Z_2^{\frac{1}{2}} \psi, Z_2^{\frac{1}{2}} \bar{\psi}, \tilde{Z}_3^{\frac{1}{2}} c_\alpha, \tilde{Z}_3^{\frac{1}{2}} \bar{c}_\alpha, Z_\xi \xi, Z_g g, Z_m m\} \quad (1.12)$$

La forma explícita de los Z 's depende del esquema de renormalización adoptado; en el caso de QCD es usual usar la regularización dimensional en conjunto con la sustracción mínima, donde entonces las divergencias UV aparecen como polos en los valores de la dimension espaciotemporal D y los contratérminos se definen como polos en el valor físico D , i.e., $D = 4$. Para ver como funciona tomemos la primera corrección al propagador del quark

$$S_{D\xi} = i \frac{1 - C_F g^2 A_{D\xi}(p^2)}{\not{p} - m[1 - C_F g^2 B_{D\xi}(p^2)]} \quad (1.13)$$

	$\frac{i}{\not{p} - M + i\epsilon}$
	$\frac{i\delta_{\alpha\beta}}{p^2 + i\epsilon} \left(-g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{p^2 + i\epsilon} (1 - \xi) \right)$
	$\frac{i\delta_{\alpha\beta}}{p^2 + i\epsilon}$
	$-ig\gamma^\mu t_\alpha$
	$-g c_{\alpha\beta\gamma} [(q_\kappa - r_\kappa) g_{\lambda\mu} + (q_\lambda - r_\lambda) g_{\mu\kappa} + (q_\mu - r_\mu) g_{\kappa\lambda}]$
	$\begin{aligned} & -ig^2 [c_{\alpha\beta\gamma} c_{\gamma\delta\epsilon} (g_{\kappa\mu} g_{\lambda\nu} - g_{\kappa\nu} g_{\lambda\mu}) \\ & + c_{\alpha\gamma\epsilon} c_{\beta\delta\epsilon} (g_{\kappa\lambda} g_{\mu\nu} - g_{\kappa\nu} g_{\lambda\mu}) \\ & + c_{\alpha\delta\epsilon} c_{\beta\gamma\epsilon} (g_{\kappa\lambda} g_{\mu\nu} - g_{\kappa\mu} g_{\lambda\nu})] \end{aligned}$
	$-g c_{\alpha\beta\gamma} p'^\mu$

Cuadro 1.1: Reglas de Feynman

con C_F definido a través de $\delta_{ij}C_F = t_{ij}^\alpha t_{ij}^\alpha$

$$\begin{aligned} A_{D\xi} &= \frac{1}{16\pi^2} \{(1 - \xi)N_\epsilon - 1 - \text{terminos finitos}\} \\ B_{D\xi} &= \frac{1}{16\pi^2} \{-3N_\epsilon + 1 + \text{terminos finitos}\} \\ N_\epsilon &= \frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi \end{aligned}$$

Se observan dos divergencias provenientes de $A_{D\xi}$ y $B_{D\xi}$ respectivamente, i.e.,

$$\begin{aligned} 1 - C_F \frac{g^2}{16\pi^2} (1 - \xi) N_\epsilon \\ 1 + 3C_F \frac{g^2}{16\pi^2} N_\epsilon \end{aligned}$$

se pueden sustraer el polo y adicionalmente las constantes $\gamma_E + \ln 4\pi$ proceso que se llama *sustracción mínima modificada* ($\overline{\text{MS}}$). Con lo que se obtiene:

$$\begin{aligned} Z_F &= 1 - C_F \frac{g^2}{16\pi^2} (1 - \xi) N_\epsilon \\ Z_m &= 1 - 3C_F \frac{g^2}{16\pi^2} N_\epsilon \end{aligned} \tag{1.14}$$

A lo largo de todo el trabajo si no es especificado lo contrario se usará el esquema de sustracción mínima modificada $\overline{\text{MS}}$, es usual etiquetar las cantidades en este esquema con una barra para distinguirlo en particular de las cantidades obtenidas con el esquema del polo. En particular algunas veces se especificará \overline{m} para hablar de la masa en $\overline{\text{MS}}$, y todas las veces la masa del polo se escribirá como M , en mayúsculas.

1.2.1. Desacoplamiento en QCD

Una situación común en Física es que la investigación de un fenómeno es una escala de distancia no se observa algún indicio que permita entender la física a distancias más pequeñas. En la situación clásica esta observación parece evidente. Por ejemplo cuando uno trata dinámica de los fluidos sin ningún conocimiento de la física atómica que genera las propiedades de este [1]. En Teoría Cuántica de Campos este *desacople* de la física a distancias pequeñas de la física de distancias grandes no es para nada evidente.

En QCD el problema se plantea de la siguiente forma: si el momento característico del proceso $p_i \ll M_h$, siendo M_h la masa de un sabor pesado h , es mejor usar una teoría efectiva de bajas energías sin h . El lagrangiano de esta teoría efectiva tiene la misma forma que la de QCD más correcciones en potencias de $1/M_h$ [4, 8, 9].

Considérese QCD con $n_l = n_f - 1$ sabores con masa cero q_i y un sabor pesado Q con masa m . El lagrangiano desnudo para esta teoría es entonces:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(g_0, m_0; \psi_0, G_\mu^{0,a}, c^{0,a}, h_0) &= -\frac{1}{4} (G_{\mu\nu}^{0,a})^2 + i\bar{\psi}_0 \not{D} \psi_0 + \bar{h}_0 (i\not{D} - m_0) h_0 \\ &+ \text{terminos con campos de fantasmas y el termino de norma} \end{aligned} \tag{1.15}$$

donde ψ , G_μ^a y c^a son los campos fermiónicos, gluónicos y fantasma respectivamente. Las condiciones de desacople relacionan cantidades en la teoría efectiva y la teoría completa. Cuando el momento característico del proceso de interés $p \ll M$ la teoría efectiva de bajas energías puede usarse en lugar de \mathcal{L} , conteniendo únicamente los campos ligeros, i.e., ahora

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(g_0, m_0; \psi_0, G_\mu^{0,a}, c^{0,a}, h_0) = & -\frac{1}{4}((G_\mu^{0,a})^2 + i\bar{\psi}_0 \not{D}\psi_0 + \mathcal{O}(\frac{1}{M^2})) \\ & + \text{terminos con campos de fantasmas y el termino de norma} \end{aligned} \quad (1.16)$$

de tal forma que los parámetros de la teoría completa y aquellos de la teoría efectiva están relacionados a través de

$$\begin{aligned} g^0 = \zeta_g^0, \quad m_q^0 = \zeta_m^0 m_q^0, \quad \xi^0 - 1 = \zeta_3^0(\xi^0 - 1), \\ \psi_1^0 = \sqrt{\zeta_2^0} \psi_q^0, \quad G_\mu^{0,a} = \sqrt{\zeta_3^0} G_\mu^a, \quad c^{0,a} = \sqrt{\tilde{\zeta}_3^0} c^{0,a} \end{aligned} \quad (1.17)$$

Adicionalmente, los términos renormalizados se obtienen en la manera usual multiplicando por las constantes de renormalización, i.e.,

$$\begin{aligned} g^0 = \mu^\epsilon Z_g g, \quad m_q^0 = Z_m m_q, \quad \zeta^0 - 1 = Z_3(\zeta - 1), \\ \psi_q^0 = \sqrt{Z_2} \psi_q, \quad G_\mu^{0,a} = \sqrt{Z_3} G_\mu^a, \quad c^{0,a} = \sqrt{\tilde{Z}_3} c^a \end{aligned} \quad (1.18)$$

con lo cual las constantes de las teorías efectiva y completa se relacionan de la siguiente forma:

$$\zeta_g = \frac{Z_g}{Z_g'} \zeta_g^0, \quad \zeta_3 = \frac{Z_3}{Z_3'} \zeta_3^0, \quad \tilde{\zeta}_3 = \frac{\tilde{Z}_3}{\tilde{Z}_3'} \tilde{\zeta}_3^0 \quad (1.19)$$

Esto nos conducirá posteriormente al tema de interés de este trabajo, la imposición de condiciones de coincidencia para el desacople de la constante de acoplamiento de QCD que es el tema principal de este trabajo. La precisión requerida para los cálculos deben ser consistentes, por lo cual los coeficientes Z_i deben conocerse con la misma precisión.

Capítulo 2

Constante de acoplamiento de QCD

Las Ecuaciones del Grupo de Renormalización (EGR) nos dicen de qué forma los parámetros que aparecen en el lagrangiano de una teoría cuántica de campo varían con respecto al parámetro de renormalización. La constante de acoplamiento de la teoría es uno de éstos parámetros cuyo comportamiento está determinado por la función beta de la teoría en cuestión. En este apartado se obtendrá la solución de la EGR para la función beta parametrizada a partir de un valor fijo α_0 , obtenido en una escala de referencia μ_0 , así como en función de Λ_{QCD} , mostrando su equivalencia.

2.1. Ecuación del Grupo de Renormalización

En comparación con el lagrangiano sin renormalizar, el renormalizado depende de un parámetro adicional μ , lo cual nos lleva a una restricción: *cualquier predicción física obtenida con el lagrangiano renormalizado NO debe depender del valor de μ .*

Si $P(\alpha_s, m, \mu)$ es una cantidad física calculada con el lagrangiano renormalizado \mathcal{L}_R entonces debe satisfacer [10]:

$$\mu^2 \frac{d}{d\mu^2} P(\alpha_s, m, \mu) = 0 \quad (2.1)$$

$$\mu^2 \frac{d}{d\mu^2} = \mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} + \pi \beta(\alpha_s) \frac{\partial}{\partial \alpha_s} + 2m^2 \gamma(\alpha_s) \frac{\partial}{\partial m^2} \quad (2.2)$$

con $\alpha_s = \frac{g^2}{4\pi}$ y $\beta(\alpha_s)$ es la función beta de QCD.

$$\mu^2 \frac{d}{d\mu^2} \left(\frac{\alpha_s}{\pi} \right) = \beta \left(\frac{\alpha_s}{\pi} \right). \quad (2.3)$$

$$\mu^2 \frac{d}{d\mu^2} \bar{m}(\mu) = \bar{m}(\mu) \gamma_m(\alpha_s) \quad (2.4)$$

Se define el acoplamiento $a_s = \frac{\alpha_s}{\pi}$. Expandiendo el lado derecho de (2.3) en potencias de a_s se tiene: $\beta \left(\frac{\alpha_s}{\pi} \right) = -(\beta_0 a_s^2 + \beta_1 a_s^3 + \dots)$. Los coeficientes β_0 , β_1 , β_2 y β_3 fueron calculados por [11, 12], [13, 14], [15], [16] respectivamente.

$$\begin{aligned}
\beta_0 &= \frac{1}{4} \left[11 - \frac{2}{3}n_f \right] \\
\beta_1 &= \frac{1}{16} \left[102 - \frac{38}{3}n_f \right] \\
\beta_2 &= \frac{1}{64} \left[\frac{2857}{2} - \frac{5033}{18}n_f + \frac{325}{5}n_f^2 \right] \\
\beta_3 &= \frac{1}{256} \left[\frac{149753}{6} + 3564\zeta_3 - \left(\frac{1078361}{162} + \frac{6508}{27}\zeta_3 \right) n_f + \left(\frac{50065}{162} + \frac{6472}{81}\zeta_3 \right) n_f^2 + \frac{1093}{729}n_f^3 \right].
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Definiendo $b_N = \frac{\beta_N}{\beta_0}$ se obtiene la función beta en la forma que se usará en las secciones posteriores de este trabajo.

$$\beta(a_s) = -\beta_0 a_s^2 (1 + b_1 a_s + b_2 a_s^2 + b_3 a_s^3 + \dots). \tag{2.6}$$

2.1.1. Masas de los quarks y la EGR

En la misma forma en que la constante de acoplamiento “corre” con la energía, lo hacen las masas de los quarks. Esta dependencia de las masas de los quarks m_q es gobernada por el coeficiente γ_m de la (2.4). Cuando γ es expandido en potencias de a_s , (2.4) se escribe como

$$\mu^2 \frac{d\bar{m}(\mu)}{d\mu^2} = \bar{m}(\mu) \gamma(a_s) = -\bar{m}(\mu) \sum_{i \geq 0} \gamma_{m,i} (a_s)^{i+1}, \tag{2.7}$$

o bien

$$\frac{d \ln \bar{m}(\mu)}{d\mu^2} = \gamma(a_s), \tag{2.8}$$

donde los coeficientes de γ_m en el esquema $\overline{\text{MS}}$ a 4-lazos están dados por [17], [18], [15], [19]

$$\begin{aligned}
\gamma_{m,0} &= 1, \\
\gamma_{m,1} &= \frac{1}{16} \left[\frac{202}{3} - \frac{20}{9}n_f \right], \\
\gamma_{m,2} &= \frac{1}{64} \left[1249 - \left(\frac{2216}{27} + \frac{160}{3}\zeta_3 \right) n_f - \frac{140}{81}n_f^2 \right], \\
\gamma_{m,3} &= \frac{1}{256} \left[\frac{4603055}{162} + \frac{135680}{27}\zeta_3 - 8800\zeta_5 - \left(\frac{91723}{27} + \frac{34192}{9}\zeta_3 - 880\zeta_4 - \frac{18400}{9}\zeta_5 \right) n_f \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{5242}{243} + \frac{800}{9}\zeta_3 - \frac{160}{3}\zeta_4 \right) n_f^2 - \left(\frac{332}{243} - \frac{64}{27}\zeta_3 \right) n_f^3 \right],
\end{aligned} \tag{2.10}$$

usando los (2.8) con los coeficientes de (2.10) se obtiene

$$\overline{m}(\mu) = \overline{m}(\mu_0) \exp \left[\int_{a_0}^{a_s} da \frac{\gamma_m(a)}{\beta(a)} \right] = \widehat{m} \exp \left[\int^{a_s} da \frac{\gamma_m(a)}{\beta(a)} \right], \quad (2.11)$$

donde formalmente se ha definido la masa invariante del grupo de renormalización como $\widehat{m} = \overline{m}(\mu_0) \exp \left[- \int^{a_0} da \frac{\gamma_m(a)}{\beta(a)} \right]$. Expandiendo (2.11) se encuentra la solución perturbativa dada por [19]

$$\overline{m}(\mu) = \widehat{m}(a_s)^{\gamma_0/\beta_0} \left[1 + A_1 a_s + \left(A_1^2 + A_2 \right) \frac{a_s^2}{2} + \left(\frac{1}{2} A_1^3 + \frac{3}{2} A_1 A_2 + A_3 \right) \frac{a_s^3}{3} + \mathcal{O}(a_s^4) \right], \quad (2.12)$$

donde

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{\beta_1 \gamma_0}{\beta_0^2} + \frac{\gamma_1}{\beta_0} \\ A_2 &= \frac{\gamma_0}{\beta_0^2} \left(\frac{\beta_1^2}{\beta_0} \right) - \frac{\beta_1 \gamma_1}{\beta_0^2} + \frac{\gamma_2}{\beta_0} \\ A_3 &= \left[\frac{\beta_1 \beta_2}{\beta_0} - \frac{\beta_1}{\beta_0} \left(\frac{\beta_1^2}{\beta_0} - \beta_2 \right) - \beta_3 \right] \frac{\gamma_0}{\beta_0^2} + \frac{\gamma_1}{\beta_0^2} \left(\frac{\beta_1^2}{\beta_0} - \beta_2 \right) - \frac{\beta_1 \gamma_2}{\beta_0^2} + \frac{\gamma_3}{\beta_0}. \end{aligned}$$

Esta expansión es apropiada para evolucionar la masa hasta la escala μ requerida en el proceso bajo estudio, ya que, como es fácil comprobar, el valor de referencia \widehat{m} hace que los coeficientes de la expansión sean pequeños a 3-4-lazos; por ejemplo, para \overline{m}_b

$$\overline{m}_b = \widehat{m}_b(a_s)^{12/23} (1 + 1.17549 a_s + 1.50071 a_s^2 + 0.172478 a_s^3). \quad (2.13)$$

El valor de referencia \widehat{m} no es único, como es de esperarse, de hecho, este puede ser tomado como $\overline{m}(\mu_0)$ y realizar la integral definida en (2.11). Una tercera opción resulta de resolver (2.8) usando la independencia de norma de las masas en $\overline{\text{MS}}$ escribiendo

$$\frac{\overline{m}(\mu)}{\overline{m}(\mu_0)} = \frac{c(a_s)}{c(a_0)}, \quad (2.14)$$

donde $c(x) = \exp \int^x dx' \frac{\gamma_m(x')}{\beta(x')}$, en completo acuerdo con (2.12) [20, 21].

2.2. Soluciones a la EGR para la constante de acoplamiento

2.2.1. Parametrizaciones de la solución a dos lazos

Se ha establecido entonces la ecuación de Callan-Zymanzik (2.3) cuya solución para la función beta permitirá determinar la dependencia de la constante de acoplamiento fuerte con la escala de renormalización.

Para resolver esta ecuación diferencial no lineal una técnica estándar consiste en truncar la función beta (2.6) a un determinado orden y resolver iterativamente; este método conduce a la solución bastante conocida parametrizada en términos de Λ_{QCD} [3]. En este tipo de soluciones

se trabaja en un rango de energía donde el número de sabores n_f es constante. Integrando (2.3) a 1-lazo, i.e., despreciando los términos de orden $\mathcal{O}(a_s^2)$ se llega a la siguiente integral:

$$\ln \frac{\mu^2}{\mu_0^2} = \int_{a_0}^{a_s} \frac{da}{\beta(a)} = \int_{a_0}^{a_s} \frac{da}{-\beta_0 a^2}, \quad (2.15)$$

con $a_s(\mu_0) \equiv a_0$. Se ha obtenido el resultado bastante conocido

$$a_s(\mu) = \frac{a_0}{1 + \beta_0 a_0 L} \equiv \frac{a_0}{1 + \beta_0 a_0 L}, \quad (2.16)$$

donde $L \equiv \ln \frac{\mu^2}{\mu_0^2}$. El término $a_s(\mu_0^2)L$ aparecerá frecuentemente en las iteraciones por lo cual para fines de claridad éste se definirá como $x = x(\mu) \equiv a_s(\mu_0^2)L$, entonces se escribe (2.16) de forma compacta como

$$a_s(\mu) = \frac{a_0}{1 + \beta_0 x}, \quad (2.17)$$

donde observamos que a 1-lazo a_s resume los logaritmos líderes (LL), i.e.,

$$a_s(\mu) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-\beta_0 a_0 L)^n = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-\beta_0 x)^n \quad (2.18)$$

La parametrización comúnmente usada está basada en el parámetro Λ_{MS} que caracteriza al punto donde a_s diverge, esto es:

$$\Lambda_{\text{MS}} \equiv \mu_0^2 \exp\left(-\frac{1}{\beta_0 a_0}\right), \quad (2.19)$$

de donde

$$a_\Lambda(\mu) = \frac{1}{\beta_0 \ln\left(\frac{\mu^2}{\Lambda}\right)} = \frac{1}{\beta_0 L_\Lambda}. \quad (2.20)$$

Para diferenciar ambas parametrizaciones se denotará a (2.17) como a_{it} y a (2.20) como a_Λ . Similarmente, despreciando términos de orden $\mathcal{O}(a^3)$, se tiene

$$\begin{aligned} \beta_0 L &= - \int_{a_0}^{a_{\text{it}}} \frac{da}{a^2(1 + b_1 a)} \\ &= - \int_{a_0}^{a_{\text{it}}} \frac{da}{a^2} (1 - b_1 a + b_1^2 a^2 - b_1^3 a^3 + \dots) \\ &= - \int_{a_0}^{a_{\text{it}}} da \left(\frac{1}{a^2} - \frac{b_1}{a} + \frac{b_1^2}{1 + b_1 a} \right) \end{aligned} \quad (2.21)$$

\Rightarrow

$$\beta_0 L = \frac{1}{a_{\text{it}}} - \frac{1}{a_0} - b_1 \ln \left(\frac{a_0}{a_{\text{it}}} \frac{1 + b_1 a_{\text{it}}}{1 + b_1 a_0} \right) \quad (2.22)$$

La ecuación anterior es trascendental, la solución se hará de forma iterativa (justificando la etiqueta en a_{it}), es decir, usando (2.17) se obtendrá la solución a 2-lazos insertándola en (2.24), entonces

$$a_{\text{it}}^{(2)}(\mu) = \frac{a_0}{1 + \beta_0 x + b_1 a_0 \ln\left(\frac{a_0}{a_s^{(1)}(\mu)} \frac{1+b_1 a_s^{(1)}(\mu)}{1+b_1 a_0}\right)} \quad (2.23)$$

donde $a_s^{(1)}$ es la solución a 1-lazo. Entonces

$$a_{\text{it}}^{(2)}(\mu) = \frac{a_0}{1 + \beta_0 x + b_1 a_0 \ln\left(\frac{1+\beta_0 x+b_1 a_0}{1+b_1 a_0}\right)}. \quad (2.24)$$

Se está denotando a $a_{\text{it}}^{(2)}$ como la solución iterativa a 2-lazos. En este punto vale la pena mencionar que en la obtención de (2.21) se han resumado los términos correspondientes a la expansión de $1/(1+b_1 a)$ lo cual no será posible para órdenes mayores. La resumación es usual en la solución a 2-lazos (ver por ejemplo [22] y [23]). Sin embargo, como alternativa es posible truncar (2.21) tal como se haría a ordenes mayores, es decir ahora

$$\begin{aligned} \beta_0 L &= - \int_{a_0}^{a'_{\text{it}}} \frac{da}{a^2} (1 - b_1 a) \\ \Rightarrow \beta_0 L &= \frac{1}{a'_{\text{it}}} - \frac{1}{a_0} - b_1 \ln\left(\frac{a_0}{a'_{\text{it}}}\right), \end{aligned} \quad (2.25)$$

que usando (2.17) se convierte en

$$a'_{\text{it}}{}^{(2)}(\mu) = \frac{a_0}{1 + \beta_0 x + b_1 a_0 \ln(1 + \beta_0 x)}, \quad (2.26)$$

lo cual es equivalente a (2.24) expandiendo $(1 + \beta_0 x + b_1 a_0)/(1 + b_1 a_0)$ en potencias de a_0 y despreciando términos de orden $\mathcal{O}(a_0^2)$. *A priori* no podemos elegir entre las soluciones a_{it} y a'_{it} ya que ninguna de ellas es exacta y su diferencia es de orden $\mathcal{O}(a_0^3)$. En este orden requerimos la solución a 3-lazos, motivo por el cual ambas son soluciones aceptables y por esta razón usaremos ambas soluciones de forma independiente.

Es interesante analizar a profundidad en qué sentido es válido usar ambas aproximaciones. La función beta es una expansión asintótica en potencias de a_s misma que podemos expresar alternativamente como

$$\beta(a) = -\beta_0 a^2 \left(\sum_{n=0}^{N+M} b_n a^n \right) = -\beta_0 a^2 \left(\frac{\sum_{m=0}^M c_m a^m}{\sum_{n=0}^N r_n a^n} \right) \quad (2.27)$$

expansión conocida como *Aproximante de Padé* (AP), cuya particularidad consiste en que la serie de Taylor asociada al aproximante $[M/N]$ coincide con la serie asintótica original [24] (Ver Apéndice p. 61)

Expresando a la función beta como un AP a 2-lazos

$$\beta(a) = -\beta_0 a^2 (1 + b_1 a) = -\beta_0 a^2 \left(\frac{1}{1 - b_1 a} \right) = -\beta_0 a^2 [0/1] \quad (2.28)$$

como se anticipó, las soluciones son equivalentes a 2-lazos, denominaremos al obtenido en (2.26) como $a_{[0/1]}^{(2)}$ o bien simplemente como $a_{\text{AP}}^{(2)}$. Tanto en (2.22) como en (2.25), se ha recurrido a

la iteración debido a que las ecuaciones resultantes son trascendentales, que de hecho, tienen soluciones analíticas en términos de la función multivaluada $W(\zeta)$ de Lambert definida como

$$W(x)e^{W(x)} = x, \quad (2.29)$$

si x real, entonces para $-1/e < x < 0$, hay dos posibles valores reales para $W(x)$. La rama que satisface $-1 \leq W(x)$ se denomina la rama principal de la función W , mientras que para $W(x) \leq -1$ esta se denota como $W_{-1}(x)$. Detalles sobre esta función pueden encontrarse en [25]. En [26] es encontrada la solución a dos lazos usando este tipo de funciones parametrizada con Λ_{QCD} , la cuál extenderemos para a_s parametrizada con a_0 . Se parte de (2.25) y con un poco de álgebra se encuentra

$$-\frac{e^{-1/(a_W b_1)}}{a_W b_1} = -\frac{e^{-(1/a_0 b_1 + \beta_0 L/b_1)}}{a_0 b_1}, \quad (2.30)$$

donde ahora

$$a_W \equiv a_W^{(2)} = -\frac{1}{b_1 W_{-1}(x)}, \quad x = -1/(a_0 b_1) e^{-(1/a_0 b_1 + \beta_0 L/b_1)}. \quad (2.31)$$

En este mismo sentido es posible encontrar la solución analítica para (2.21), se encuentra que está dada por

$$a_{W[1/0]}^{(2)} = -\frac{1}{b_1(1 + W_{-1}(x))}, \quad x = -(1 + 1/(b_1 a_0)) e^{-(1+1/a_0 b_1 + \beta_0 L/b_1)}. \quad (2.32)$$

Hemos entonces generado dos tipos de soluciones, a saber, las soluciones iterativas y las soluciones basadas en la función W , que difieren a orden $\mathcal{O}(a_s^3)$. Resta obtener la solución parametrizada con un Λ_{QCD} misma que puede ser resuelta también usando el AP. Resolviendo ahora (2.21)

$$\beta_0 \ln\left(\frac{\mu^2}{\mu_0^2}\right) = C + \frac{1}{a_\Lambda} + b_1 \ln(a_\Lambda) - b_1 \ln(1 + b_1 a_\Lambda) \quad (2.33)$$

$$\Rightarrow \beta_0 \ln\left(\frac{\mu^2}{\Lambda^2}\right) = \beta_0 L_\Lambda = \frac{1}{a_\Lambda} + b_1 \ln(\beta_0 a_\Lambda) - b_1 \ln(1 + b_1 a_\Lambda). \quad (2.34)$$

con $C = \beta_0 \ln(\frac{\Lambda^2}{\mu_0^2}) + b_1 \ln \beta_0$, la constante usada convencionalmente. Iterando (2.33) y expandiendo en potencias de $1/L_\Lambda$,

$$a_\Lambda^{(2)} = \frac{1}{\beta_0 L_\Lambda + b_1 \ln\left(\frac{1}{\beta_0 a_\Lambda^{(1)}} + \frac{b_1}{\beta_0}\right)} \quad (2.35)$$

donde $a_\Lambda^{(1)}$ es la solución a 1-lazo, finalmente, expandiendo la ecuación anterior

$$a_\Lambda^{(2)} = \frac{1}{\beta_0 L_\Lambda} - \frac{b_1}{\beta_0^2 L_\Lambda^2} \ln L_\Lambda + \mathcal{O}\left(\frac{1}{L_\Lambda}\right)^3. \quad (2.36)$$

Usando el AP [0/1] para re expresar la función beta, se tiene

$$\begin{aligned}
a_{\Lambda[0/1]}^{(2)} &= \frac{1}{\beta_0 L_\Lambda - b_1 \ln(\beta_0 a_\Lambda^{(1)})} \\
&= \frac{1}{\beta_0 L_\Lambda} - \frac{b_1}{\beta_0^2 L_\Lambda^2} \ln L_\Lambda + \mathcal{O}\left(\frac{1}{L_\Lambda}\right)^3
\end{aligned} \tag{2.37}$$

i.e., $a_{\Lambda[0/1]}^{(2)} = a_\Lambda^{(2)}$.

Adicionalmente es posible obtener la solución numérica de la función beta, en cuyo caso tendríamos una tercera clase de solución. Como primer paso en el camino hacia el estudio de las incertidumbres a mayor orden, en el Cuadro 2.1 se evoluciona a_s hasta $a_s(m_\tau)$ partiendo de $a_s(M_Z) = 0.1200$. Los resultados presentados son validos al orden deseado, sin embargo, es deseable que la solución a 2-lazos se reduzca a la solución a 1-lazo cuando $b_1 = 0$ por consistencia: esto no se satisface para los resultados en función de W , por lo cual en lo subsecuente acotaremos el análisis a las soluciones parametrizadas con a_0 y Λ .

Basado en	$\alpha_s(m_\tau)$
(2.24) $a_{\text{it}}^{(2)}(\mu) = \frac{a_0}{1 + \beta_0 x + b_1 a_0 \ln\left(\frac{1 + \beta_0 x + b_1 a_0}{1 + b_1 a_0}\right)}$	0.311743
(2.26) $a_{[0/1]}^{(2)}(\mu) = \frac{a_0}{1 + \beta_0 x + b_1 a_0 \ln(1 + \beta_0 x)}$	0.314128
(2.31) $a_W^{(2)} = -\frac{1}{b_1 W_{-1}(x)}$	0.318866
(2.32) $a_{W[1/0]}^{(2)} = -\frac{1}{b_1(1 + W_{-1}(x))}$	0.315525
(2.36) $a_\Lambda^{(2)} = \frac{1}{\beta_0 L_\Lambda} \left(1 - \frac{b_1}{\beta_0 L_\Lambda} \ln(L_\Lambda)\right)$	0.311820
Numerica	0.315536

Cuadro 2.1: Evolución de la constante de acoplamiento desde la escala de $M_Z = 91.18$ GeV hasta la escala de $m_\tau = 1.777$ GeV a 2-lazos usando como punto de referencia $a_s(\mu_0) = 0.12/\pi$. Las soluciones etiquetadas con W corresponden a las soluciones exactas en términos de la función de Lambert, mientras que las primeras dos son soluciones iterativas cuya diferencia radica en que en el segundo caso un AP fue empleado. El penúltimo renglón es la solución usual parametrizada con Λ y el último renglón es la solución numérica obtenida con *Mathematica* [27].

Las diferencias, como se esperaba, son de orden $\mathcal{O}(a_s^4)$, lo cual es posible demostrar expandiendo las soluciones iterativas en potencias de a_0 :

$$\begin{aligned}
a_{[0/1]}^{(2)}(\mu) &= a_0 - (\beta_0 L) a_0^2 + (\beta_0^2 L^2) a_0^3 + (-\beta_0^3 L^3) a_0^4 \\
&\quad - (b_1 \beta_0 L) a_0^3 + \left(\frac{5}{2} b_1 \beta_0^2 L^2\right) a_0^4 \\
&\quad + \mathcal{O}(a_0^5).
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Se ha escrito en esa forma escalonada para mostrar que a 2-lazos a_s resume los logaritmos líderes (LL, por sus siglas en inglés) y los siguientes-líderes (NLL), caracterizados por las potencias de L y a_0 . Las diferencias entre las potencias de los LL y a_0 es uno, mientras que

para los NLL es de dos y así sucesivamente. Se ha asegurado que las soluciones son distintas a $\mathcal{O}(a_0^4)$ y adicionalmente que éstas resuman los NLL, lo cual necesariamente implica que las expansiones deben coincidir en los terminos mostrados en (2.38). Expandiendo $a_{\text{it}}^{(2)}(\mu)$ se obtiene

$$\begin{aligned} a_{\text{it}}^{(2)}(\mu) = & a_0 - (\beta_0 L) a_0^2 + (\beta_0^2 L^2) a_0^3 + (-\beta_0^3 L^3) a_0^4 \\ & - (b_1 \beta_0 L) a_0^3 + \left(\frac{5}{2} b_1 \beta_0^2 L^2\right) a_0^4 \\ & + (b_1^2 \beta_0 L) a_0^4 + \mathcal{O}(a_0^5), \end{aligned} \quad (2.39)$$

que difiere de (2.38) el último término.

2.2.2. Soluciones a ordenes mayores

A ordenes mayores es posible obtener soluciones equivalentes expresando la función beta como un AP, o bien usando las funciones de Lambert. En [26] es calculada la solución analítica en términos de la función W de Lambert a tres-lazos parametrizada con Λ_{QCD} , mientras que en [28] son presentadas soluciones analíticas a 4 y 5 lazos con la misma parametrización, misma que presenta algunas desventajas: la primera de ellas es que, Λ_{QCD} es fijada a cada orden, por lo cual el valor depende tanto del orden como del número de sabores, lo cual no ocurre cuando se parametriza con a_0 . Se continuará con la parametrización basada en a_0 en lo subsecuente, en particular con las soluciones iterativas y en la parte final de esta sección se mostrara la equivalencia entre las soluciones parametrizadas con Λ_{QCD} y a_0 a 4-lazos.

Para proseguir con ordenes mayores se requiere ahora resolver la EGR con la función beta truncada a ordenes mayores que $\mathcal{O}(a^4)$. Como en el apartado anterior es posible usar una AP [1/1] tal que la función beta sea $\beta_{PA}(a) = -\beta_0 a^2 [1/1]$. Otra opción es usar el AP que coincide con la serie inversa de la función beta, i.e., $\beta_{PA}(a) = -\beta_0 a^2 [0/2]$ que es de hecho igual a la forma de la función beta invertida que se requiere a 3-lazos. Para observar de qué forma es esto, se tiene que la función beta en términos de los PA se reescribe de la siguiente forma

$$\beta(a) = -\beta_0 a^2 (1 + b_1 a + b_2 a^2) = -\beta_0 a^2 [0/2] = -\beta_0 a^2 [1/1] \quad (2.40)$$

con

$$\begin{aligned} [1/1] &= \left(\frac{1 + \frac{(b_1^2 - b_2)x}{b_1}}{1 - \frac{b_2 x}{b_1}} \right) \\ [0/2] &= \frac{1}{1 - ab_1 + a^2 (b_1^2 - b_2)}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Para obtener $a_{\text{it}}^{(3)}$ como se hizo para $a_{\text{it}}^{(2)}$ la integral que debe ser resuelta es

$$\begin{aligned} \beta_0 L &= - \int_{a_0}^{a_{\text{it}}} \frac{da}{a^2 (1 + b_1 a + b_2 a^2)} \\ &= - \int_{a_0}^{a_{\text{it}}} \frac{da}{a^2} (1 - b_1 a + (b_1^2 - b_2) a^2 + \mathcal{O}(a^3)), \end{aligned} \quad (2.42)$$

la cuál coincide con la integral requerida expresando $\beta_0(a)$ con el AP $[0/2]$. En este caso, a diferencia de 2-lazos no es posible una resumación de los términos de orden mayor a $\mathcal{O}(a^3)$, por lo cual se ha truncado la serie. Esto significa que a diferencia del resultado a 2-lazos, tanto a_{it} como el resultado basado en el PA $a_{[0/2]}$ al mismo resultado en la integral (Ecs. (2.41), (2.42))

Esto sucederá a ordenes mayores, es decir, la función beta expresada con AP $[0/m]$ corresponde con la truncación de la inversa de la función beta, .i.e.,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta(a)} &= \frac{1}{-\beta_0 a^2 (1 + b_1 a + b_2 a^2 + b_3 a^3 + \dots + b_N a^N)} \\ &= -\frac{1}{\beta_0 a^2} (1 + C_1 a + C_2 a^2 + C_3 a^3 + \dots + C_N a^N) \\ &= -\frac{1}{\beta_0 a^2} \frac{1}{[0/N]} \end{aligned} \quad (2.43)$$

con C_N los coeficientes de la función inversa de $\beta(a)$ y

$$\frac{1}{[0/N]} = 1 + C_1 a + C_2 a^2 + C_3 a^3 + \dots + C_N a^N. \quad (2.44)$$

El resultado anterior es fácilmente comprobable usando las fórmulas correspondientes para obtener los coeficientes de Padé y los respectivos de la inversa de una serie (Ver Apéndice A). Para ordenes mayores ($N > 1$) se tiene que las integrales usando PA y la serie inversa son equivalentes, pero las soluciones no lo són, porque éstas dependen de la solución a 2-lazos, donde $a_{it}^{(2)} \neq a_{[0/1]}^{(2)}$. Resolviendo (2.42)

$$\beta_0 L = \frac{1}{a_s} - \frac{1}{a_0} - b_1 \ln \left(\frac{a_0}{a_s} \right) + C_2 (a_s - a_0) \quad (2.45)$$

con $C_2 = (b_2 - b_1^2)$, se llega a la expresión en términos de $a_s^{(2)}$

$$a_s^{(3)}(\mu) = \frac{a_0}{1 + \beta_0 x + b_1 a_0 \ln \left(\frac{a_0}{a_s^{(2)}} \right) + a_0 C_2 (a_0 - a_s^{(2)})} \quad (2.46)$$

usando (2.24) y (2.26) se obtienen dos soluciones aproximadas iterativas, .i.e,

$$\begin{aligned} a_{it}^{(3)}(x) &= \frac{a_0}{1 + \beta_0 x + b_1 a_0 \ln(1 + K_2(x)) + C_2 a_0^2 \left[\frac{K_2(x)}{1 + K_2(x)} \right]} \\ K_2(x) &\equiv \beta_0 x + a_0 b_1 \ln \left(\frac{1 + \beta_0 x + a_0 b_1}{1 + a_0 b_1} \right), \end{aligned} \quad (2.47)$$

y

$$\begin{aligned} a_{[0/2]}^{(3)}(x) &= \frac{a_0}{1 + \beta_0 x + b_1 a_0 \ln(1 + K_2'(x)) + C_2 a_0^2 \left[\frac{K_2'(x)}{1 + K_2'(x)} \right]} \\ K_2'(x) &\equiv \beta_0 x + a_0 b_1 \ln(1 + \beta_0 x). \end{aligned} \quad (2.48)$$

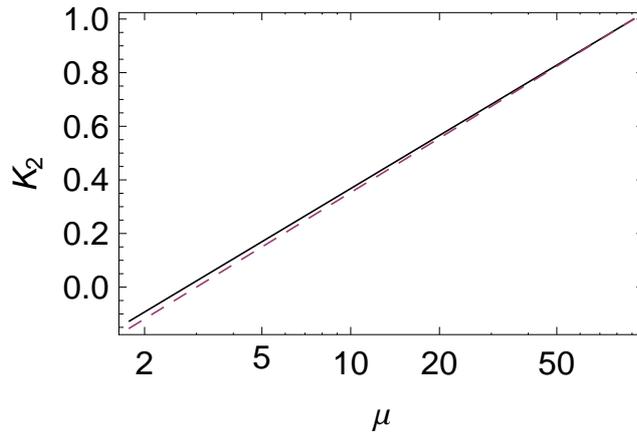


Figura 2.1: Comportamiento de K_2 (continuo) y K_2' (línea desvanecida) variando μ desde $M_z = 91.18$ GeV hasta $m_\tau = 1.777$ GeV

Lo que se aprende con las últimas dos ecuaciones es que difieren en los términos K , los cuales contienen la información de la solución a dos lazos con la cual se iteró. Recordando que $x = a_0 \ln[\mu/\mu_0]$, en la Figura 2.1 observamos el comportamiento de K_2 y K_2' , para la evolución desde $\mu_0 = M_z$ hasta m_τ con $n_f = 5$. Es notable el hecho de que ambas tienden al mismo valor a energías altas, lo cual es reflejo de que para $\mu \gg \mu_0$, se puede aproximar $(1 + \beta_0 x + a_0 b_1)/(1 + a_0 b_1) \approx 1 + \beta_0 x$, de hecho, expandiendo el término logarítmico en (2.47) se tiene que

$$K_2 \approx 1 + \beta_0 x - L b_1 \beta_0 a_0^2, \quad (2.49)$$

despreciando ordenes $\mathcal{O}(a^2)$ (equivalente a no incluir términos de orden $\mathcal{O}(a^3)$ en el denominador) se convierte en K_2' , indicando que ambas soluciones resumen los LL, NLL, NNLL, lo cual es fácil de ver expandiendo una vez más ambas soluciones.

2.2.3. Acercamiento a la incertidumbre

Antes de proseguir con la obtención de la solución que es de mayor interés para el trabajo, a saber, la solución a 4-lazos, es interesante analizar la incertidumbre de estas soluciones con respecto a la función beta. Considérese el escenario en donde el coeficiente a 4-lazos, i.e., β_3 no es conocido. Esto significaría que tanto (2.47) como (2.48) son soluciones que resuelven la EGR con precisión limitada, que puede ser mejorada usando métodos numéricos, o analíticos vía la función W de Lambert. Con este razonamiento, la pregunta que debe ser respondida es: ¿Cuál es la precisión de las soluciones a 2-lazos (se tienen al menos 5 equivalentes)? Un indicio importante es la observación de la resumación de los Logaritmos Líderes (LL) a 1-lazo, y de los Sigüientes LL (NLL).

En el mismo sentido que se compararon los coeficientes de la expansión para observar la resumación de los LL, procedemos de la misma forma pero en lugar de comparar dos soluciones en el mismo orden en la función beta, se compararán soluciones a distintos ordenes. Se quiere determinar la incertidumbre de la suposición $\beta_2 = 0$ en la solución a 2-lazos. Puesto que (2.39) resume los NLL y (2.47) resume los NNLL, esta incertidumbre debe ser de orden $\mathcal{O}(a^4)$. En

el Cuadro 2.2 se muestran los coeficientes de la expansión para las soluciones iterativas hasta orden $\mathcal{O}(a^6)$ correspondientes a los logaritmos líderes (LL), los Sigüientes-Líderes (NLL), y así sucesivamente. En el caso de los LL cada coeficiente está multiplicado por $(\beta_0 L)^n (a_0)^{n+1}$, comenzando con $n = 0$. Los NLL son multiplicados por $(\beta_0 L)^n (a_0)^{n+2}$, comenzado con $n = 1$, y así sucesivamente.

		Coeficientes de la expansión					
		$\mathcal{O}(a)$	$\mathcal{O}(a^2)$	$\mathcal{O}(a^3)$	$\mathcal{O}(a^4)$	$\mathcal{O}(a^5)$	$\mathcal{O}(a^6)$
LL	$a_s^{(2)}$	1	-1	1	-1	1	-1
	$a_s^{(3)}$	1	-1	1	-1	1	-1
NLL	$a_s^{(2)}$	0	0	$-b_1$	$\frac{5}{2}b_1$	$-\frac{13}{3}b_1$	$\frac{77}{12}b_1$
	$a_s^{(3)}$	0	0	$-b_1$	$\frac{5}{2}b_1$	$-\frac{13}{3}b_1$	$\frac{77}{12}b_1$
NNLL	$a_s^{(2)}$	0	0	0	$-b_1^2$	$\frac{9}{2}b_1^2$	$-\frac{142}{12}b_1^2$
	$a_s^{(3)}$	0	0	0	$-b_2$	$\frac{3}{2}b_1^2 + 3b_2$	$-\frac{70}{12}b_1^2 - \frac{72}{12}b_2$
NNNLL	$a_s^{(2)}$	0	0	0	0	b_1^3	$-\frac{18}{12}b_1^3$
	$a_s^{(3)}$	0	0	0	0	$2b_1^3 - b_1b_2$	$-\frac{96}{12}b_1^3 + \frac{78}{12}b_1b_2$

Cuadro 2.2: Expansión en potencias de a_0 de las soluciones iterativas a 2,3-lazos. Los coeficientes de $a_0^{n+1}(\beta_0 L)^n$ corresponden a los LL. En el caso de los NLL los coeficientes mostrados multiplican a $a_0^{n+2}(\beta_0 L)^n$ comenzando con $n = 1$.

La primera observación comprueba la afirmación acerca del orden de la incertidumbre entre ambas soluciones, es decir, que ésta es de $\mathcal{O}(a^4)$, correspondiente a donde la solución a 3-lazos resume los NNLL usando b_2 , mientras que la solución a 2-lazos no lo hace. Otra observación interesante es que la suma de los subíndices de los LL es constante. Considérese la suma de los subíndices de los coeficientes en los NNNLL; escribiendo $b_1^3 = b_1b_1b_1$ observamos que ésta es igual a tres en cada coeficiente, similarmente para cada LL. Esta observación indica que a cada orden el coeficiente del N^n LL será b_n .

En $a_{it}^{(3)}$ se induce una incertidumbre de orden $\mathcal{O}(a^4)$ en la resumación de los NNLL, que aparecen en términos de ordenes mayores a $\mathcal{O}(a)$ en el denominador de (2.24). Incorporar esta incertidumbre significa agregar un término $\mathcal{O}(a^2)$ en este mismo denominador de tal forma que en la expansión este término cuantifique la incertidumbre en b_2 , esto se traduce en considerar una incertidumbre en b_1 , tal que $b_1 \rightarrow b_1 \pm a_0\delta b_1$, de tal forma que ahora consideramos explícitamente la incertidumbre contenida en (2.24) como:

$$\Delta a_{it}^{(2)} = |a_0 \frac{\partial a_{it}^{(2)}}{\partial b_1} \delta b_1| \quad (2.50)$$

La tarea siguiente es obtener una aproximación a δb_1 , misma que sencillamente puede obtenerse comparando la nueva expansión de $a_{it}^{(2)}$ dada la transformación $b_1 \rightarrow b_1 \pm a_0\delta b_1$ y comparar con la solución a tres lazos $a_{it}^{(3)}$. Para $a_{it}^{(2)}$ expandida se obtiene:

$$\begin{aligned}
a_{\text{it}}^{(3)} &= a_0 - L\beta_0 a_0^2 + (-Lb_1\beta_0 + L^2\beta_0^2) a_0^3 \\
&+ \left(-L\delta b_1\beta_0 - Lb_1^2\beta_0 + \frac{5}{2}L^2b_1\beta_0^2 - L^3\beta_0^3 \right) a_0^4 \\
&+ \left(-2L\delta b_1b_1\beta_0 + Lb_1^3\beta_0 + \frac{5}{2}L^2\delta b_1\beta_0^2 + \frac{9}{2}L^2b_1^2\beta_0^2 - \frac{13}{3}L^3b_1\beta_0^3 + L^4\beta_0^4 \right) a_0^5 \\
&+ \frac{1}{12} \left(-12L\delta b_1^2\beta_0 + 36L\delta b_1b_1^2\beta_0 - 12Lb_1^4\beta_0 + 108L^2\delta b_1b_1\beta_0^2 - 18L^2b_1^3\beta_0^2 - 52L^3\delta b_1\beta_0^3 \right. \\
&\quad \left. - 142L^3b_1^2\beta_0^3 + 77L^4b_1\beta_0^4 - 12L^5\beta_0^5 \right) a_0^6 + \mathcal{O}(a_0^7)
\end{aligned} \tag{2.51}$$

que comparando con el Cuadro 2.2 para el coeficiente NNLL a $\mathcal{O}(a_0^4)$, se observa que ahora $-b_1^2 \rightarrow -b_1^2 - \delta b_1$ y similarmente a $\mathcal{O}(a_0^5)$, $\frac{9}{2}b_1^2 \rightarrow \frac{9}{2}b_1^2 + \frac{5}{2}\delta b_1$. Es fácil ahora leer de estos coeficientes la incertidumbre a cada orden:

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}(a_0^4) &\quad \delta b_1 = b_2 - b_1^2 \\
\mathcal{O}(a_0^5) &\quad \delta b_1 = \frac{6}{5}(b_2 - b_1^2) \\
\mathcal{O}(a_0^6) &\quad \delta b_1 = \frac{72}{52}(b_2 - b_1^2)
\end{aligned} \tag{2.52}$$

Este resultado, por la forma en que lo hemos deducido, tiene una dependencia en b_2 como es de esperarse, es decir, para conocer la incertidumbre debida al truncamiento de b_2 se requiere información acerca del coeficiente. Lo importante en este caso es que éste resultado es proporcional al coeficiente $C_2 = b_2 - b_1^2$ de la solución a 3-lazos, lo cual es consecuencia de que los coeficientes en los términos que resumen los NNLL son tales que la suma de sus índices es 2. En el Cuadro 2.3 se muestran los factores que acompañan a C_2 a ordenes mayores $\mathcal{O}(a_0^6)$.

Del Cuadro es fácil ver que los coeficientes son del mismo orden y no se observa que éstos aumenten drásticamente, de hecho, se aprecia un crecimiento lineal y ya que a 2-lazos la contribución significativa corresponde al $\mathcal{O}(a_0^4)$ se aproximará la incertidumbre debida a b_2 en la solución a 2-lazos como $\delta b_1 = b_2 - b_1^2$, entonces:

$$\Delta a_{\text{it}}^{(2)} = \left| a_0 \frac{\partial a_{\text{it}}^{(2)}}{\partial b_1} (b_2 - b_1^2) \right| = \left| a_0 \frac{\partial a_{\text{it}}^{(2)}}{\partial b_1} C_2 \right| \tag{2.53}$$

En el caso de la solución a 2-lazos, puesto que b_2 es conocido este resultado está completamente definido, similarmente para la solución a 3-lazos que obtendremos de forma análoga. Sin embargo, debido a que para b_4 solo existen estimaciones, esto significará un problema. Sin embargo, la suposición inicial en el tratamiento de la incertidumbre es que la solución a $n + 1$ -lazos considera al coeficiente $b_n = 0$, esto nos conduce a la pregunta ¿qué tanto difiere la incertidumbre calculada a través de (2.53) haciendo $b_2 = 0$?

Antes de responder a la pregunta anterior, para que la incertidumbre obtenida en (2.53) sea consistente, debe tener su análogo en todos los ordenes. A 1-lazo la incertidumbre requiere información sobre el coeficiente b_1 , y esta debe aparecer en este caso en la resumación de los NLL, lo cual se traduce en una incertidumbre en el coeficiente β_0 , i.e., $\beta_0 \rightarrow \beta_0 \pm \beta_0 \delta \beta_0$. En el mismo sentido discutido anteriormente, puesto que $a_{\text{it}}^{(1)}$ resume todos los LL, por lo

$\mathcal{O}(a_0^n)$	$b_2 - b_1^2$
$\mathcal{O}(a_0^4)$	1
$\mathcal{O}(a_0^5)$	$\frac{6}{5} = 1.2$
$\mathcal{O}(a_0^6)$	$\frac{18}{13} \approx 1.44$
$\mathcal{O}(a_0^7)$	$\frac{120}{77} \approx 1.554$
$\mathcal{O}(a_0^8)$	$\frac{50}{29} \approx 1.72$
$\mathcal{O}(a_0^9)$	$\frac{420}{223} \approx 1.88$
$\mathcal{O}(a_0^{10})$	$\frac{980}{481} \approx 2.03$
$\mathcal{O}(a_0^{11})$	$\frac{10080}{4609} \approx 2.18$
$\mathcal{O}(a_0^{12})$	$\frac{11340}{4861} \approx 2.33$
$\mathcal{O}(a_0^{13})$	$\frac{138600}{55991} \approx 2.47$
$\mathcal{O}(a_0^{14})$	$\frac{152460}{58301} \approx 2.61$
$\mathcal{O}(a_0^{15})$	$\frac{2162160}{785633} \approx 2.75$

Cuadro 2.3: Coeficientes de C_2 que resultan de analizar las diferencias término a término en las expansiones de la solución a 2-lazos y a 3-lazos para obtener explícitamente δb_1 . A todos los ordenes $\delta b_1 \propto C_2$.

n_f	$\alpha_s^{(1)}$	$\Delta\alpha_s^{(1)}$	$\alpha_s^{(2)}$	$\Delta\alpha_s^{(2)}; \delta b_1 = C_2 $	$\Delta\alpha_s^{(2)}; b_2 = 0$
3	0.3714	0.05283	0.4708	0.00316	0.00762
4	0.3215	0.03175	0.3744	0.00094	0.0033
5	0.2834	0.01859	0.3117	0.0001	0.00139
6	0.2534	0.00999	0.2676	0.00068	0.00051

Cuadro 2.4: Evolución de α_s desde $M_Z = 91.18$ GeV hasta $m_\tau = 1.777$ GeV con $\alpha_s(M_Z) = 0.12$. La incertidumbre a 1-lazo $\Delta\alpha_s^{(1)}$ se calcula con $\delta\beta_0 = |b_1\beta_0|$. A 2-lazos usamos $\delta b_1 = |C_2|$ usando el valor conocido de b_2 y en la siguiente columna se hace $b_2=0$.

tanto la incertidumbre debe aparecer en los terminos correspondiente a los NLL, es decir, comparamos los coeficientes de los factores $(\beta_0 L)^n a_0^{n+2}$ comenzando con $n = 1$. Esto se traduce en $\delta\beta_0 = kb_1\beta_0$, con $k = 1, 5/4, 13/9, 77/48$ a ordenes $\mathcal{O}(a_0^3)$, $\mathcal{O}(a_0^4)$, $\mathcal{O}(a_0^5)$, respectivamente. Los coeficientes son del mismo orden y no se observa un aumento drástico en ellos, por lo cual tomamos $k = 1$. La forma en que se han obtenido las estimaciones, es decir, en función de los coeficientes de la función beta, necesariamente tienen una dependencia en el número de quarks activos, n_f . Para evaluar los resultados se evolucionará a_s desde M_z hasta m_τ variando el número de quarks, los resultados se muestran en el Cuadro 2.4 para los valores de interés en este trabajo ¹.

En el Cuadro se observa que la incertidumbre calculada con $b_2 = 0$ es visiblemente más estable y que además da una estimación considerablemente más grande que con la inclusión de b_2 . Por supuesto, en estos casos donde el siguiente coeficiente de la función beta es conocido la estimación más confiable es usando su valor conocido. Sin embargo, en el escenario donde éste es desconocido, la estimación con el coeficiente $b_n = 0$ deberá ser tomada en cuenta.

¹El valor de α_s está tomado del valor con $n_f = 5$, por lo cual, en principio se requiere implementar condiciones de coincidencia de las cuales se hablará posteriormente, se ha usado el valor con n_f con impunidad ya que estas condiciones son triviales a 1 y 2 lazos como se verá en el siguiente capítulo.

$\mathcal{O}(a_0^n)$	$b_1 b_1$	b_2
$\mathcal{O}(a_0^4)$	0	1
$\mathcal{O}(a_0^5)$	$\frac{1}{5} = 0.2$	$\frac{6}{5} = 1.2$
$\mathcal{O}(a_0^6)$	$\frac{11}{26} \approx 0.42$	$\frac{36}{26} \approx 1.4$
$\mathcal{O}(a_0^7)$	$\frac{51}{77} \approx 0.66$	$\frac{120}{77} \approx 1.6$
$\mathcal{O}(a_0^8)$	$\frac{53}{58} \approx 0.91$	$\frac{100}{58} \approx 1.7$
$\mathcal{O}(a_0^9)$	$\frac{262}{223} \approx 1.2$	$\frac{420}{223} \approx 1.9$
$\mathcal{O}(a_0^{10})$	$\frac{1339}{962} \approx 1.4$	$\frac{1960}{962} \approx 2.0$
$\mathcal{O}(a_0^{11})$	$\frac{7925}{4609} \approx 1.7$	$\frac{10080}{4609} \approx 2.2$
$\mathcal{O}(a_0^{12})$	$\frac{19451}{9722} \approx 2.0$	$\frac{22680}{9722} \approx 2.3$
$\mathcal{O}(a_0^{13})$	$\frac{128046}{55991} \approx 2.3$	$\frac{138600}{55991} \approx 2.5$
$\mathcal{O}(a_0^{14})$	$\frac{300533}{116602} \approx 2.6$	$\frac{304920}{116602} \approx 2.6$
$\mathcal{O}(a_0^{15})$	$\frac{2256191}{785633} \approx 2.9$	$\frac{2162160}{785633} \approx 2.8$

Cuadro 2.5: Coeficientes de δb_1 en $a_{[0/1]}^{(2)}$ obtenido expandiendo las soluciones a 1,2-lazos usando AP e insertando δb_1 explícitamente en la solución a 2 lazos y comparando término a término las expansiones. En este caso $\delta b_1 \propto k_1 b_1 b_1 + k_2 b_2$; siendo k_1 la primera columna y k_2 la segunda.

En la obtención de las estimaciones se ha usado la solución a_{it} , pero este procedimiento basado en las resumaciones de los LL debe aplicarse de forma similar para la soluciones donde la función beta ha sido re expresada como un AP. Siguiendo el mismo camino, es decir, expandiendo en potencias de a_0 la solución y comparando uno a uno los coeficientes en las soluciones $a_s^{(1)}$, $a_{[0/1]}^{(2)}$ se obtiene $\delta b_1 = \beta_0 b_1$ en la incertidumbre a 1-lazo. El resultado ahora no es proporcional a C_2 , sino una combinación entre los coeficientes b_1 y b_2 , que satisface que la suma de los índices es dos, i.e., $b_1 b_1$ y b_2 . En analogía con los casos anteriores, los coeficientes que resuman los NLL para las soluciones $a_{[0/1]}^{(2)}$, son mostrados en el Cuadro 2.5.

Ahora se observa que a órdenes menores a $\mathcal{O}(a_0^{10})$ las contribuciones de b_2 son significativamente mayores, por lo cual se debe ser cuidadoso en la elección del factor que acompañará a la incertidumbre. Un camino para determinar este factor consiste en notar que un término típico que resuma NNLL es proporcional a $(\beta_0 L)^7 a_0^{10}$, el cual ésta fuera del orden de magnitud de la precisión deseada para la solución a 2-lazos, por lo cual se propone que el factor tomado sea simplemente 1 para ambos coeficientes. Con esto, la incertidumbre debido al truncamiento de la función beta a 2-lazos es: $\Delta a_{[0/1]}^{(2)} = |a_0 \frac{\partial a_{[0/1]}^{(2)}}{\partial b_1} \delta b_1|$ con $\delta b_1 = b_1^2 + b_2$. Similarmente a $a_{it}^{(2)}$, una estimación aceptable que sobre-estima esta incertidumbre se obtiene tomando $b_2 = 0$. En el cuadro 2.6 se resumen los resultados para la evolución de α_s a 2-lazos.

En conclusión, el efecto de reexpresar a la función beta como un AP es el cambio en un signo en la estimación de la incertidumbre. La pregunta natural es la posibilidad de descartar los factores que lucen poco naturales de b_1 y tomar simplemente $\delta b_1 = b_2$. Esto conduce a estimar la incertidumbre en $\delta a_s^{(2)} = |a_0 \frac{\partial a_s^{(2)}}{\partial b_1} b_2|$, que es la estimación sugerida por [29], obtenida, sin embargo con consideraciones distintas. En la referencia la estimación esta basada en los coeficientes que acompañan a los factores de grupo en la función beta y su distribución, se volverá a este punto una vez que sea posible comparar con la referencia citada, esto es, cuando la estimación de la incertidumbre a 4-lazos se lleve a cabo.

Para continuar requerimos las soluciones a 4-lazos y la correspondiente a 5-lazos que nos

n_f	$\alpha_s^{(2)}$	$\Delta\alpha_s^{(2)}; \delta b_1 = b_1^2 + b_2$	$\Delta\alpha_s^{(2)}; b_2 = 0$
3	0.4870	0.02486	0.010
4	0.3806	0.0094	0.0041
5	0.3141	0.0032	0.0016
6	0.2684	0.00037	0.00056

Cuadro 2.6: Evolución de α_s desde $M_z = 91.18$ GeV hasta $m_\tau = 1.777$ GeV con $\alpha_s(M_z) = 0.12$ usando $a_{[0/1]}^{(2)}$. En analogía con el Cuadro 2.4, se estima la incertidumbre a 2 lazos usando $\delta b_1 = b_1^2 + b_2$ en un caso y en el otro se hace $b_2=0$.

permitirá estimar la incertidumbre debida a b_3 y b_4 respectivamente; en este punto es importante mencionar que la evolución requiere información adicional, a saber, la información de las masas de los quarks que no han jugado un papel hasta ahora y que será el tema del siguiente capítulo.

2.3. Cuatro lazos y más allá

El propósito ahora es establecer un algoritmo que permita obtener las soluciones a n -lazos desde un punto de vista formal, es decir, en la obtención de esta solución asumimos que es posible encontrar los coeficientes de la función beta al orden deseado. Como señalamos anteriormente, este tipo de soluciones son la alternativa a la solución analítica en términos de la función W de Lambert y considerablemente más sencilla de obtener. Además, recordando que la dependencia a 1-lazo aparece iterada en las soluciones a n -lazos, tendremos dos posibles formas de resumir los NLL, es decir, vía $a_{\text{it}}^{(2)}$ o $a_{[0/1]}^{(1)}$ que de ahora en adelante se etiquetará como $a_{\text{AP}}^{(1)}$. El procedimiento se describe a continuación:

- La integral genérica con el N -ésimo orden considerado es :

$$\beta_0 L = \int_{a_0}^{a_s} \frac{da}{a^2} (-1 + C_1 a + C_2 a^2 + C_3 a^3 + \dots + C_N a^N) \quad (2.54)$$

con C_N los coeficientes de la función inversa o bien los coeficientes del AP $[0/N]$ de $\frac{\beta(a)}{\beta_0 a^2} = -(1 + b_1 a + b_2 a^2 + \dots + b_N a^N)$, algunos coeficientes se muestran en el Cuadro 2.7

- Resolviendo (2.54), se obtiene la solución general iterativa

$$a_s^{(n)}(\mu) = \frac{a_0}{1 + \beta_0 x + a_0 b_1 \ln\left(\frac{a_0}{a_s^{(n-1)}}\right) + \sum_{k=2} \frac{C_k}{k-1} a_0 \left(a_0^{k-1} - (a_s^{(n-1)})^{k-1}\right)} \quad (2.55)$$

recordando la definición de $x = a_0 L$ se obtiene la solución en términos de esta variable:

$$a_s^{(n)}(x) = a_0 \left\{ 1 + \beta_0 x + a_0 b_1 \ln \left(1 + \beta_0 x + a_0 b_1 \ln(1 + \beta_0 x + a_0 b_1 \ln(\dots)) \right) \right. \quad (2.56)$$

$$\left. + \sum_{k=2} \frac{C_k}{k-1} a_0 \left[a_0^{k-1} - \left(\frac{a_0}{1 + \beta_0 x + \ln(1 + \dots) + \dots} \right)^{k-1} \right] \right) \quad (2.57)$$

$$\left. + \sum_{k=2} \frac{C_k}{k-1} a_0 \left[a_0^{k-1} - \left(\frac{a_0}{1 + \beta_0 x + \ln(1 + \dots) + \dots} \right)^{k-1} \right]^{-1} \right\}, \quad (2.58)$$

donde los puntos se refieren a subsecuentes iteraciones.

- Para hacer el resultado útil, observemos que ahora los terminos residuales que contienen iteraciones se han movido a las sumas, luego, definiendo

$$K_n(x) = \beta_0 x + b_1 a_0 \ln[1 + K_{n-1}] + \sum_{k=2} \frac{C_k}{k-1} a_0^k \left[1 - \left(\frac{1}{1 + K_{n-1}} \right)^{k-1} \right], \quad (2.59)$$

con lo cual (2.58) se escribe como:

$$a_s^{(n)}(x) = a_0 \left[1 + \beta_0 x + a_0 b_1 \ln(1 + K_{n-1}(x)) + \sum_{k=2}^{n-1} a_0^k \frac{C_k}{k-1} \left(1 - \left(\frac{1}{1 + K_{n-1}(x)} \right)^{k-1} \right) \right]^{-1}. \quad (2.60)$$

Entonces, el problema se ha reducido a encontrar K_{n-1} , mismo que puede encontrarse usando (2.59). Podemos usar el mismo resultado para las soluciones que denominamos iterativas y para aquellas de Padé, si usamos con cuidado las K_n para $n < 2$. Recordando (2.24) y (2.26), observamos que la segunda requiere $K_1 = \beta_0 x \Rightarrow K_0 = 0$, la primera

C_1	$+b_1$
C_2	$-b_1^2 + b_2$
C_3	$+b_1^3 - 2b_1 b_2 + b_3$
C_4	$-b_1^4 + 3b_1^2 b_2 - b_2^2 - 2b_1 b_3 + b_4$
C_5	$+b_1^5 - 4b_1^3 b_2 + 3b_1 b_2^2 + 3b_1^2 b_3 - 2b_2 b_3 - 2b_1 b_4 + b_5$
C_6	$-b_1^6 + 5b_1^4 b_2 - 6b_1^2 b_2^2 + b_2^3 - 4b_1^3 b_3 + 6b_1 b_2 b_3 - b_3^2 + 3b_1^2 b_4 - 2b_2 b_4 - 2b_1 b_5 + b_6$
C_7	$+b_1^7 - 6b_1^5 b_2 + 10b_1^3 b_2^2 - 4b_1 b_2^3 + 5b_1^4 b_3 - 12b_1^2 b_2 b_3 + 3b_2^2 b_3 + 3b_1 b_3^2 - 4b_1^3 b_4 + 6b_1 b_2 b_4 - 2b_3 b_4 + 3b_1^2 b_5 - 2b_2 b_5 - 2b_1 b_6 + b_7$

Cuadro 2.7: Coeficientes del AP $[0/N]$ para obtener las soluciones hasta 7-lazos. Estos pueden ser fácilmente generados invirtiendo la función beta.

$K_1 = \beta_0 x / (1 + b_1 a_0)$ y $K_0 = 0$, luego, podemos usar (2.60) para ambas resumaciones, siempre y cuando se tenga en mente que K_1 es distinta en cada resumación, resumiendo:

$$\begin{aligned} K_0^{\text{it}}(x) &= 0 \\ K_1^{\text{it}}(x) &= \frac{\beta_0 x}{1 + b_1 a_0} \\ K_n^{\text{it}}(x) &= \beta_0 x + b_1 a_0 \ln[1 + K_{n-1}] + \sum_{k=2} \frac{C_k}{k-1} a_0^k \left[1 - \left(\frac{1}{1 + K_{n-1}} \right)^{k-1} \right] \quad n > 1, \end{aligned} \quad (2.61)$$

$$\begin{aligned} K_0^{\text{AP}}(x) &= 0 \\ K_1^{\text{AP}}(x) &= \beta_0 x \\ K_n^{\text{AP}}(x) &= \beta_0 x + b_1 a_0 \ln[1 + K_{n-1}] + \sum_{k=2} \frac{C_k}{k-1} a_0^k \left[1 - \left(\frac{1}{1 + K_{n-1}} \right)^{k-1} \right] \quad n > 1. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Para ejemplificar se obtendrá la solución a 4-lazos, es decir, $n = 4$, en (2.60) y usaremos la resumación en AP, luego,

$$a_{\text{AP}}^{(4)}(x) = \frac{a_0}{1 + \beta_0 x + b_1 a_0 \ln[1 + K_3^{\text{AP}}(x)] + a_0^2 C_2 \left[\frac{K_3^{\text{AP}}(x)}{1 + K_3^{\text{AP}}(x)} \right] + a_0^3 \frac{C_3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{1 + K_3^{\text{AP}}(x)} \right)^2 \right)} \quad (2.63)$$

$$K_3^{\text{AP}}(x) = \beta_0 x + b_1 a_0 \ln[1 + K_2^{\text{AP}}] + C_2 a_0^2 \left[1 - \left(\frac{1}{1 + K_2^{\text{AP}}} \right)^2 \right] \quad (2.64)$$

2.3.1. Información parcial sobre la función beta, N_f grande y estimaciones de β_4

Una pregunta natural cuando una expansión asintótica es usada, consiste en determinar la precisión de esta y su rango de aplicabilidad, la cual es sencilla de responder cuando todos los coeficientes de la expansión son conocidos. En general se espera que la inclusión de más términos reduzca la incertidumbre en la cantidad estudiada. Esto es un problema en el caso de una expansión perturbativa en teoría de campos, ya que la inclusión de coeficientes adicionales en la expansión involucra el cálculo de numerosas integrales. Para obtener el coeficiente β_3 de QCD en el esquema $\overline{\text{MS}}$ es necesario el cálculo de al menos ¡203580 integrales! [30].

Hasta la realización de este trabajo, el coeficiente β_4 no ha sido calculado, sin embargo, existe información relevante sobre éste. En particular, con N_f suficientemente grande, la libertad asintótica será perdida y entonces esta se parecerá a una teoría de norma abeliana [31]. Esto

permite introducir la expansión $\mathcal{O}(1/N_f)$, con N_f el número de campos fundamentales, vía esta expansión es posible calcular los exponentes críticos en un punto fijo d -dimensional de la función beta a medida que $N_f \rightarrow \infty$ [32]. Con este método J.A. Gracey fue capaz de calcular los coeficientes a_n de la función beta en el orden líder para N_f , resultando en

$$\beta(g) = (d-4)g + \left(\frac{2}{3}T(R)N_f - \frac{11}{6}C_2(G)\right)g^2 + \sum_{r=2}^{\infty} a_r [T(R)N_f]^{r-2} g^{r+1}, \quad (2.65)$$

donde

$$\begin{aligned} a_4 &= -[154C_2(R) + 53C_2(G)]/3888, \\ a_5 &= [(288\zeta(3) + 214)C_2(R) + (480\zeta(3) - 229)C_2(G)]/31104, \\ a_6 &= [(864\zeta(4) - 1056\zeta(3) + 502)C_2(R) + (1440\zeta(4) - 1264\zeta(3) - 453)C_2(G)]/233280, \\ a_7 &= [(3456\zeta(5) - 3168\zeta(4) - 2464\zeta(3) + 1206)C_2(R) \\ &\quad + (5760\zeta(5) - 3792\zeta(4) - 848\zeta(3) - 8858)C_2(G)]/1679616, \end{aligned} \quad (2.66)$$

donde $C_2(R)$, $C_2(G)$ y $T(R)$ es el operador de Casimir de la representación fundamental del Álgebra de Lie, el operador de Casimir de la representación adjunta y el factor de normalización de la traza en la representación fundamental, respectivamente. Haciendo sustituciones adecuadas, es decir, dado que en [32] $g = \frac{e^2}{4\pi^2}$, y recordando que $a_s = \frac{g_{QCD}^2}{4\pi^2}$ se encuentra que los coeficientes a_n de (2.65) se relacionan con la función beta de QCD de (2.5) como:

$$\beta_n = 2^{4n-1} a_{n-1} \quad (2.67)$$

Los coeficientes a_2 y a_3 son los valores conocidos de β_1 y β_2 respectivamente con los factores descritos arriba. Esta información valiosa permite conjeturar la forma del coeficiente a 5-lazos.

Un método para usar esta información es a través de los Aproximantes de Padé AP, introducidos en el Capítulo 2, los cuales permitirán estimar el coeficiente a 5-lazos. Los AP se construyen de forma tal en que su expansión en serie reproduce los términos conocidos $\mathcal{O}(a^n)$ (Ver A): el término a orden $\mathcal{O}(a^{n+1})$ se denomina predicción del Aproximante de Padé PAP. En Ec. (2.41), por ejemplo, se escribió la función beta a 2-lazos en forma racional con los AP $[0, 2]$, $[1, 1]$, cuyas expansiones son iguales a la función beta. Sin embargo, si la expansión se realiza a $\mathcal{O}(a^3)$ se obtiene para $[1, 1]$

$$\beta(a) = -\beta_0^2 a^2 [1/1] = -\beta_0^2 a^2 \left(1 + b_1 a + b_2 a^2 + \frac{b_2^2 a^3}{b_1} + \mathcal{O}(a^4) \right), \quad (2.68)$$

i.e., el PAP es

$$b_3^{\text{PAP}} = \frac{b_2^2}{b_1}. \quad (2.69)$$

Adicionalmente, es posible usar la forma asintótica de la función beta [33] modificando la fórmula anterior a través de un factor δ_n con lo cual se obtiene la predicción asintótica de Padé (APAP)

$$b_3^{\text{APAP}} = \frac{b_3^{\text{PAP}}}{1 + \delta_3}. \quad (2.70)$$

donde

$$\delta_{N+M+1} \approx -\frac{M!A^M}{(N + M + aM + b)^M}, \quad (2.71)$$

para un AP $[N/M]$, con A, a, b constantes por determinar [34]. La predicción para b_3 resultó sorprendentemente precisa cuando esta era comparada omitiendo los términos de Casimir cuárticos [35], lo cual condujo al autor a proponer una modificación pesada de los Aproximantes Asintóticos de Padé (WAPAP, por sus siglas en inglés) donde sorprendentemente los errores relativos en comparación con los exactos ¡son menores al 1%!

Aunque *a posteriori* los errores relativos son alentadores, la estimación de la incertidumbre suele ser complicada puesto que la única información disponible es el coeficiente para N_f grande. Por esta razón usaremos la predicción del AP de manera cuidadosa, en particular, consideraremos al coeficiente entero como la incertidumbre, i.e.,

$$\beta_3 = 0 \pm \beta_3^{\text{APAP}} \quad (2.72)$$

para β_3 , mientras que para el coeficiente aún desconocido β_4 se empleará el aproximante pesado

$$\beta_4 = 0 \pm \beta_4^{\text{WAPAP}}. \quad (2.73)$$

Con esto en mente el valor de β_4 es

$$\beta_4 = 0 \pm (A_4 + B_4 N_f + C_4 N_f^2 + D_4 N_f^3 + E_4 N_f^4) \quad (2.74)$$

$$A_4 = \frac{94875}{128}, \quad B_4 = -\frac{6875}{32}, \quad C_4 = \frac{4925}{256}, \quad D_4 = -\frac{938}{10240}, \quad E_4 = -\frac{203}{102400}$$

La importancia de tener estimaciones para β_4 y en el caso de β_5 el coeficiente de la expansión con N_f grande radica en que el método que se ha usado para la estimación de la incertidumbre en la EGR involucra este coeficiente. Como hemos visto esta estimación es una de muchas e incluso haciendo $\beta_4 = 0$ se podrá tener la estimación de la incertidumbre, pero si es posible acceder a información sobre este coeficiente se podrá tener más confianza en éstas.

2.3.2. Equivalencia entre parametrizaciones con Λ_{QCD} y a_0

Hasta ahora se han considerado las soluciones con $a_0 = a_s(\mu_0)$ porque esta nos permite elaborar un criterio de incertidumbre basado justamente en este parámetro. Un requerimiento que debe satisfacer es que el parámetro en el cual está basado muestre independencia del orden, es decir, que no sufra modificaciones a medida que resolvemos la EGR a ordenes mayores. La parametrización con Λ_{QCD} tiene este inconveniente y es por esta razón que es convencional citar el valor del acoplamiento en una escala dada, usualmente en M_Z .

Por otro lado, estas parametrizaciones deben ser equivalentes y deben conducir a la misma Física, con lo cual surge la pregunta sobre la equivalencia entre las parametrizaciones y el efecto

en la incertidumbre de usar una u otra. Es en este contexto que nos proponemos establecer esta equivalencia, primeramente revisando el método de solución cuando Λ_{QCD} es usado, el cual denotaremos desde ahora simplemente como Λ .

Para hacerlo se integra (2.3) a n -lazos tal que

$$\beta_0 \ln\left(\frac{\mu^2}{\Lambda}\right) = \int \frac{da}{\beta(a)} = \int \frac{da}{a^2}(-1 + b_1 a + C_2 a^2 + C_3 a^3 + \dots) \quad (2.75)$$

cuya solución general es la siguiente:

$$\beta_0 \ln\left(\frac{\mu^2}{\Lambda}\right) = \frac{1}{a} + b_1 \ln a + C_2 a + \frac{C_3}{2} a^3 + \dots + K \quad (2.76)$$

donde K es una constante que ordinariamente se elige como $K = b_1/\beta_0 \ln \beta_0$ para evitar la aparición de términos $\text{const.}/L^2$ en la solución una vez que es iterada y expandida en potencias de $\mathcal{O}(1/L^n)$, [36], [37]. Con esta elección de constante se obtienen las soluciones a 3,4-lazos:

$$a_s^{(3)}(\mu) = \frac{1}{\beta_0 L_\Lambda} \left\{ 1 - \frac{b_1}{\beta_0 L_\Lambda} \ln L_\Lambda + \left(\frac{1}{\beta_0 L_\Lambda} \right)^2 (b_1^2 (\ln^2 L_\Lambda - \ln L_\Lambda - 1) + b_2) \right\} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{L_\Lambda^4}\right) \quad (2.77)$$

$$\begin{aligned} a_s^{(4)}(\mu) = & \frac{1}{\beta_0 L_\Lambda} \left\{ 1 - \frac{b_1}{\beta_0 L_\Lambda} \ln L_\Lambda + \left(\frac{1}{\beta_0 L_\Lambda} \right)^2 (b_1^2 (\ln^2 L_\Lambda - \ln L_\Lambda - 1) + b_2) \right. \\ & + \left(\frac{1}{\beta_0 L_\Lambda} \right)^3 (b_1^3 (-\ln^3 L_\Lambda + \frac{5}{2} \ln^2 L_\Lambda + 2 \ln L_\Lambda - \frac{1}{2}) \\ & \left. - 3b_1 b_2 \ln L_\Lambda + \frac{b_3}{2}) \right\} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{L_\Lambda^5}\right) \end{aligned} \quad (2.78)$$

Con la intuición que se ha adquirido con respecto a los índices de los coeficientes de la función beta y sus combinaciones, se observa que a cada orden en $1/(\beta_L)$ resuma los logaritmos líderes (LL) a primer orden en $1/(\beta_L)$, los NLL a segundo y así sucesivamente.

Es claro que una elección de K corresponderá con la parametrización a_0 , la cual de hecho permitirá expresar $\Lambda(\mu_0, a_0)$. Adicionalmente se tiene una forma directa de mostrar esta equivalencia, usando $\mu = \mu_0$ en (2.78) y sustrayendo ambas ecuaciones se obtiene el resultado:

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{\mu^2}{\Lambda^2}\right) - \ln\left(\frac{\mu_0^2}{\Lambda^2}\right) &= \frac{1}{\beta_0} \left[\frac{1}{a_s} - \frac{1}{a_0} + b_1 \ln\left(\frac{a_s}{a_0}\right) \right. \\ & \quad \left. + (b_2 - b_1^2)(a_s - a_0) + \left(\frac{b_3}{2} - b_1 b_2 + \frac{b_1^3}{2}\right)(a_s^2 - a_0^2) \right] \\ \ln\left(\frac{\mu^2}{\mu_0^2}\right) &= \frac{1}{\beta_0} \left[\frac{1}{a_s} - \frac{1}{a_0} + b_1 \ln\left(\frac{a_s}{a_0}\right) + C_2(a_s - a_0) + \frac{C_3}{2}(a_s^2 - a_0^2) \right] \end{aligned} \quad (2.79)$$

la cual corresponde al punto de partida para la obtención de la solución a 4-lazos dada en la (2.54) y simplemente refleja que ambas integrales son equivalentes. Lo interesante ahora es

justamente encontrar la K que nos permite comparar ambas soluciones en una expansión en potencias de $1/L$. De hecho basta encontrar esta constante para el caso de 2-lazos, puesto que esta es la que es usada para construir soluciones y si se logra encontrar la equivalencia a este orden esta sera a todos los ordenes. Esto es consecuencia de que para obtener las soluciones a ordenes mayores en la expansión la elección de la constante no se modifica, i.e., (2.77) y (2.78) son construidas usando la misma constante de integración. Considérese la expansión de (2.76) a 2-lazos dejando explícita la constante de integración, i.e.,

$$a_{\Lambda}^{(2)} = \frac{1}{\beta_0 L} + \frac{-K - \ln(\beta_0) b_1 + \ln\left(\frac{1}{L}\right) b_1}{\beta_0^2 L^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{L}\right)^3 \quad (2.80)$$

donde se observa explícitamente el termino const/L^2 , en la expansión. Similarmente para la solución iterativa se obtiene:

$$a_{\text{it}}^{(2)} = \frac{1}{\beta_0 L} + \frac{-1 - \ln(a_0 \beta_0) a_0 b_1 + \ln\left(\frac{1}{L}\right) a_0 b_1}{a_0 \beta_0^2 L^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{L}\right)^3 \quad (2.81)$$

\Rightarrow

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{a_0} + b_1 \ln(a_0) \\ \tilde{\Lambda}^2 &= \mu_0^2 \end{aligned} \quad (2.82)$$

con lo cual concluimos que las constantes Λ obtenida de la forma estándar, i.e., con $K = b_1 \ln(\beta_0)$ y Λ se relacionan como:

$$\Lambda^2 = \tilde{\Lambda}^2 \exp\left[-\frac{1}{\beta_0 a_0} - \frac{b_1}{\beta_0} \ln \beta_0 a_0\right]. \quad (2.83)$$

Lo que se ha ganado hasta ahora es observar que el efecto total de modificar la constante es modificar la definición de Λ , en particular, la elección de la constante que permite identificar las parametrizaciones con respecto a su expansión $1/L^n$ implica la redefinición de Λ . Luego usando (2.83) en (2.26) se obtiene con un poco de álgebra:

$$a_{\text{it}}^{(2)} = \frac{1}{\beta_0 \ln(\mu^2/\Lambda^2) + b_1 \ln(L - C)} \quad (2.84)$$

con $C = -\frac{b_1}{\beta_0} \ln a_0 \beta_0$, cuya expansión reproduce el resultado deseado a orden $\mathcal{O}(1/L^2)$. Como se enfatizó con esta elección de K y la consecuente re-definición de Λ obtenemos la equivalencia entre las parametrizaciones.

2.3.3. Resumen de las soluciones

Para finalizar el apartado conviene comparar las soluciones que se han obtenido con respecto al resultado numérico de la EGR usando únicamente los coeficientes conocidos de la función

beta. Estimaremos el *error* debido a usar nuestra solución que como se verá claramente en el siguiente Capitulo es de orden mayor a la incertidumbre debida al truncamiento. Este error se puede obtener simplemente con el valor absoluto de la diferencia entre el resultado numérico las soluciones estudiadas. Para ejemplificar se evolucionará la constante de acoplamiento desde $a_0 = 0.12/\pi$ desde la escala de M_Z hasta m_τ tal y como se hizo para las soluciones a 2-lazos. Los resultados se muestran en el Cuadro 2.8. En el Cuadro se observa que las soluciones iterativas, tanto las que se basan en K_n^{AP} como en K_n^{it} se aproximan mejor a los resultados numéricos.

Lazos	α_{num}	α_Λ	$\Delta\alpha_\Lambda$	α_{PA}	$\Delta\alpha_{\text{PA}}$	α_{it}	$\Delta\alpha_{\text{it}}$
1	0.2834	0.2834	8.1×10^{-6}	0.2834	8.1×10^{-6}	0.2834	8.1×10^{-6}
2	0.3155	0.3237	0.0081	0.3141	0.0014	0.3117	0.0038
3	0.3184	0.3168	0.0015	0.3180	0.0003	0.3177	0.0006
4	0.3197	0.3219	0.0022	0.3197	3.21×10^{-6}	0.3196	0.00004

Cuadro 2.8: Comparación entre las constantes de acoplamiento obtenidas usando las soluciones analizadas en este trabajo. Los errores se obtienen tomando como punto de referencia el valor obtenido numéricamente resolviendo la EGR a 4 lazos.

Adicionalmente se observa que la solución iterativa muestra mejor convergencia por lo cual la usaremos en el siguiente apartado mayoritariamente. En la Figura 2.2 observamos la evolución de la constante de acoplamiento usando el valor de $a_0 = 0.12/\pi$ para las soluciones iterativas hasta 4-lazos usando una escala logarítmica.

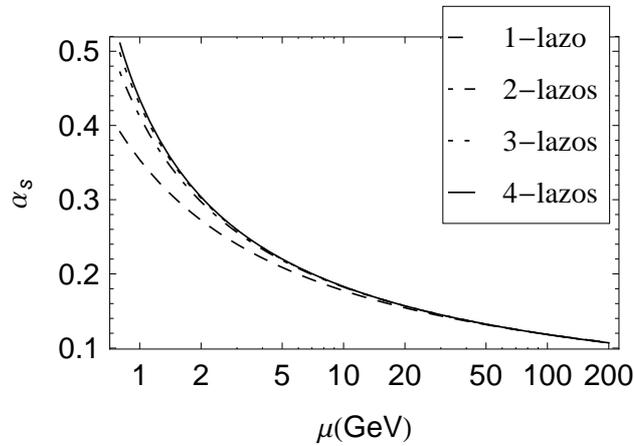


Figura 2.2: Evolución de la constante de acoplamiento hasta cuatro lazos con la solución tomando $\mu_0 = 91.18$ GeV y $a_0 = 0.1200/\pi$

Capítulo 3

Incertidumbres en QCD

La determinación de incertidumbres en Física de Altas Energías (HEP, por sus siglas en inglés) es un problema abierto, tanto en el terreno experimental como en el fenomenológico. Desde el punto de vista experimental, las fuentes de incertidumbre provienen genéricamente como consecuencia de *errores en la medición*¹. En el lado teórico las incertidumbres surgen de que la teoría es no determinista y, adicionalmente, es posible que no se conozca la información completa sobre el sistema o que esté influenciado por factores externos tales como condiciones de frontera o incertidumbres experimentales.

Es el objetivo de este trabajo tratar con las incertidumbres cuya fuente proviene de la escasez de información en parámetros de la teoría, o bien, en la incertidumbre propagada a través de valores de entrada en los cálculos. Para satisfacer este objetivo conviene definir el concepto de incertidumbre y la teoría en la cual esta basada su obtención; la teoría de la probabilidad, en la cual es posible adoptar dos puntos de vista, a saber, frecuentista o Bayesiano. La diferencia entre uno y otro radica en la interpretación de probabilidad. Este problema ha conducido al establecimiento de la “Teoría de la Incertidumbre” que actualmente es una rama de las matemáticas, basada en grados de credibilidad, cuando no es posible asociar una distribución de probabilidad a una variable aleatoria [38].

En HEP, es posible usar una u otra interpretación para lidiar con el tipo de incertidumbres de interés. De hecho, estas interpretaciones son usadas conjuntamente en los análisis; por ejemplo, uno podría usar los métodos Bayesianos para tratar a las incertidumbres sistemáticas y los métodos frecuentistas para evaluar el modelo estadístico. Asimismo, para muchos problemas de inferencia, ambos acercamientos conducen a resultados numéricos similares [3].

Conviene entonces, aclarar con qué tipo de incertidumbres nos encontraremos en el análisis de la evolución de la constante de acoplamiento de QCD. Desde el origen de la Teoría Cuántica de Campos (TCC) se observó que el radio de convergencia de las expansiones perturbativas no convergen debido a que típicamente los diagramas de Feynman requeridos a enésimo orden crecen como $n!$ [5]. Se espera que estas expansiones sean asintóticas y, por tanto, algunos de los métodos matemáticos desarrollados para este tipo de expansiones resultan ser útiles para la determinación de incertidumbres aun cuando, en general, sólo se conocen algunos coeficientes. Aunado a la asintoticidad, se observa que las expansiones están acompañadas por factores logarítmicos que surgen debido a los esquemas de regularización empleados. En particular, los logaritmos en el esquema $\overline{\text{MS}}$ provienen de la forma en que la regularización dimensional

¹Se ha usado deliberadamente la palabra error cuya definición no será precisada por ahora.

“aisla” los términos divergentes.

Lo anterior introduce una fuente primaria de incertidumbre, a saber, el desconocimiento de los coeficientes en la expansión perturbativa. La forma convencional de estimar las incertidumbres en expansiones asintóticas parametrizadas con la escala de renormalización consiste en tomar como la incertidumbre el último coeficiente conocido en la expansión, asimismo tomar el valor medio cercano a la escala de energía en la cual se está interesado es un criterio popular que tiene como base la independencia de los observables físicos del parámetro de renormalización, o bien, como en [39] definir el grado de credibilidad de una expansión asintótica usando los coeficientes conocidos recurriendo a los métodos Bayesianos. Sin embargo, en el caso de la función beta contamos con información relevante que puede ser de utilidad en la estimación de la incertidumbre; por ejemplo, los coeficientes para N_f grande. Adicionalmente, es posible usar la información de la resumación de los Logaritmos Líderes (LL) para estimar esta incertidumbre, por lo cual antes de recurrir a los métodos Bayesianos es necesario analizar toda la información disponible.

Es fácil anticipar que el tipo de incertidumbres típicas que surgen con la evolución de α_s son debidas al truncamiento de las expansiones perturbativas, pero éstas no son únicas. Una fuente adicional se debe al parámetro de masa de los quarks, cuyo valor puede ser especificado con el esquema de renormalización, y no sólo eso; la evolución de α_s entre masas de los quarks, i.e., con $m_q \ll \mu$ se hace con la Ec. (2.64) tomando en cuenta el número de quarks activos, es decir, aquellos por debajo de la escala de interés. Cuando en un intervalo requiere cruzar un umbral de quark se tendrá un número distinto de quarks activos lo cual introduce el concepto de desacoplamiento que es implementado a través de las denominadas *condiciones de coincidencia* (Sección 1.2.1).

Las condiciones de coincidencia (CC) permiten expresar las constantes de acoplamiento en una teoría efectiva donde un campo fermiónico h cuya masa es mucho mayor a la escala de energía de interés es integrado. Las CC nos permiten entonces, desacoplar el quark pesado para así obtener una constante de acoplamiento efectiva válida en energías por debajo de la masa del quark pesado, la cuál se relaciona con la constante de acoplamiento de la teoría completa a través de una expansión perturbativa en potencias de α_s . El desconocimiento de todos los términos en esta expansión es, entonces, una fuente adicional de incertidumbre al truncamiento de la serie para la función beta.

Adicionalmente las CC son expresadas en términos de logaritmos que incluyen a las masas de los quark, donde las masas de los quarks están sujetas a una definición que depende del esquema de renormalización empleado; la conveniencia de uno u otro depende en gran medida de la aplicación de interés. La definición “natural” en QED es la denominada *masa del polo*, la cual es definida como el polo del propagador del campo asociado.

El esquema de sustracción mínima MS es el estándar en QCD perturbativo debido a que éste emplea el método de regularización dimensional que entre muchas virtudes, preserva la invariancia ante transformaciones de Lorentz. En este esquema reside entonces la definición de masa de interés primordial para este trabajo. Es posible, en general, encontrar relaciones entre las definiciones de masa de forma perturbativa en potencias de α_s con lo cual se tiene una fuente más de incertidumbre.

De esta forma observamos que las incertidumbres de interés se pueden clasificar en dos grandes grupos de acuerdo a la fuente primaria de incertidumbre, a saber, aquellas relacionadas con el truncamiento de la función beta y las fuentes asociadas a la masa de los quarks, ya sea porque la masa de los quarks intervienen como parámetros de entrada en las CC, o bien,

porque estas pueden ser definidas en varios esquemas de renormalización que se relacionan vía expansiones perturbativas.

3.1. La función beta y sus efectos en las incertidumbres

En el Capítulo anterior se encontró la solución iterativa a_{it} a la EGR que resultó tener mejor convergencia en comparación con las otras soluciones analizadas (Ver Cuadro 2.8). En el caso de la función beta se encontró que es posible obtener soluciones alternativas expresando la función beta como un aproximante de Padé AP que, en general, difería en los términos $(N + 1)^n$ -LL, cuando dos soluciones a N -lazos eran encontradas.

Adicionalmente, se construyó un algoritmo para construir soluciones a más lazos finalizando con las Ecs. (2.60) y (2.59). El argumento primigenio para estimar la incertidumbre está basado en que la *influencia* del coeficiente desconocido afecta las resumaciones de los N^n -LL y por tanto este coeficiente aparece en la estimación de la incertidumbre.

Se quiere ahora extender este argumento para el caso de importancia, a saber, la incertidumbre debida al truncamiento de la función beta a 4-lazos. Recuérdese que un punto importante en el tratamiento es que podemos construir la solución formal a N -Lazos, y que por tanto, se puede determinar la incertidumbre debida a truncar el coeficiente b_N en la función beta analizando las expansiones en las soluciones con N -lazos y $N - 1$ -lazos coeficiente a coeficiente; derivando en una expresión explícita para δb_N (Ver Ecs. (2.53) y los Cuadros 2.3, 2.5).

La resumación de los logaritmos N^n LL es el punto medular de este procedimiento, puesto que como se observó, las soluciones a N -lazos resumará los N^{N-1} LL, mientras que la solución a $N - 1$ lazos no lo hará. Este hecho condujo a considerar explícitamente esta diferencia haciendo la sustitución $b_n \rightarrow b_n \pm a_0 \delta b$, de tal forma que al expandir en potencias de a_0 sea posible encontrar δb .

Se quiere extender el procedimiento a ordenes mayores para lo cual, considérese la expansión en potencias de a_0 en las soluciones a 3,4,5-lazos. En el Cuadro 3.1 se muestran los términos donde las soluciones diferirán, a saber, $a_s^{(3)}$ y $a_s^{(4)}$ resumen los N^2 LL pero difieren en N^3 LL. Similarmente para $a_s^{(4)}$ y $a_s^{(5)}$, donde ahora difieren en los términos N^4 LL.

Recuérdese que habiendo notado los términos que difieren, el siguiente paso consiste en incluir explícitamente $b_N \rightarrow b_N + a_0 \delta b$ en la solución de interés; esto significa que a 4-lazos se requiere $b_3 \rightarrow b_3 + a_0 \delta b$ en $a_s^{(4)}$. Expandiendo la solución con la inclusión del término adicional generará los coeficientes correctos en el Cuadro 3.1 más términos adicionales que codifican la incertidumbre debida a b_4 . Esto se mostró a 2-lazos en el Capítulo anterior (Cuadro 2.5). A 3-lazos se encuentra que la dependencia es de la forma:

$$\delta b = l_1 b_1^3 + l_2 b_1 b_2 + l_3 b_3, \quad (3.1)$$

mientras que a 4-lazos se tiene:

$$\delta b = k_1 b_1^4 + k_2 b_1^2 b_2 + k_3 b_2 b_2 + k_3 b_1 b_3 + k_5 b_4 \equiv \sum_{i=1}^5 \eta_i k_i \quad (3.2)$$

$\eta_1 = b_1^4$, $\eta_2 = b_1^2 b_2$, etc. A partir de ahora nos centraremos en la solución a 4-lazos.

		Coeficientes de la expansión (a_0^n)			
		a_0^4	a_0^5	a_0^6	a_0^7
N ² LL ($\beta_0 L$) ^{$n-3$}	$a_s^{(3)}$	$-b_2$	$\frac{1}{4}(6b_1^2 + 12b_2)$	$-\frac{35b_1^2}{6} - 6b_2$	$\frac{85b_1^2}{6} + 10b_2$
	$a_s^{(4)}$	$-b_2$	$\frac{1}{4}(6b_1^2 + 12b_2)$	$-\frac{35b_1^2}{6} - 6b_2$	$\frac{85b_1^2}{6} + 10b_2$
	$a_s^{(5)}$	$-b_2$	$\frac{1}{4}(6b_1^2 + 12b_2)$	$-\frac{35b_1^2}{6} - 6b_2$	$\frac{85b_1^2}{6} + 10b_2$
N ³ LL ($\beta_0 L$) ^{$n-4$}	$a_s^{(3)}$	0	$2b_1^3 - b_1 b_2$	$-8b_1^3 + \frac{13b_1 b_2}{2}$	$\frac{107b_1^3}{6} - \frac{64b_1 b_2}{3}$
	$a_s^{(4)}$	0	$-b_3$	$\frac{7}{2}(b_1 b_2 + b_3)$	$\frac{1}{6}(-15b_1^3 - 92b_1 b_2 - 48b_3)$
	$a_s^{(5)}$	0	$-b_3$	$\frac{7}{2}(b_1 b_2 + b_3)$	$\frac{1}{6}(-15b_1^3 - 92b_1 b_2 - 48b_3)$
N ⁴ LL ($\beta_0 L$) ^{$n-5$}	$a_s^{(3)}$	0	0	$-2b_1^4 + b_1^2 b_2$	$\frac{7b_1^4}{2} - 2b_1^2 b_2 + b_2^2$
	$a_s^{(4)}$	0	0	$b_1^4 + 2b_1^2 b_2 - b_2^2 - b_1 b_3$	$-6b_1^4 - 8b_1^2 b_2 + 6b_2^2 + \frac{15b_1 b_3}{2}$
	$a_s^{(5)}$	0	0	$-b_4$	$2(b_2^2 + 2(b_1 b_3 + b_4))$

Cuadro 3.1: Coeficientes de la expansión a 3,4,5-lazos de las soluciones iterativas. Los coeficientes de la expansión de orden $\mathcal{O}(a_0^n)$, $n < 4$ se muestran en el Cuadro 2.2 del Capítulo anterior. Los Logaritmos Líderes están caracterizados por la diferencia en las potencias de $\beta_0 L$ y a_0 , la cual es de 3, 4 y 5 para los N²LL, N³LL y N⁴LLLL respectivamente.

La observación fundamental en los coeficientes k_i es que no hay crecimiento factorial, de hecho el crecimiento en magnitud es estrictamente lineal (Cuadro 3.2), al igual que ocurrió en la solución a 2-lazos. Es fácil ver que en este caso no podemos tomar ningún valor específico representativo para los coeficientes l_n o k_n ; por lo que asociaremos a estas variables aleatorias X_i a la cual podemos asociar una distribución *a priori*. Este acercamiento al problema es inherentemente Bayesiano [40] y tiene su espíritu en considerar esta incertidumbre como sistemática.

Las combinaciones de b_N son conocidas, mientras que los coeficientes de estas varían a cada orden, por lo tanto, asociaremos a b_3 con una variable aleatoria tal que $Y = b_3 \pm a_0 \sigma_{\text{sys}}(Y)$, donde $\sigma_{\text{sys}}(Y)$ es una incertidumbre sistemática que depende de las combinaciones de los coeficientes de la función beta, los que se definieron como η_i conocidos. A su vez esta se relaciona con las variables asociadas a los coeficientes k_i que ahora escribimos como X_i para enfatizar que ahora son variables aleatorias. La transformación $k_i \rightarrow X_i$ implican que ahora se asocia una probabilidad a X_i , cuya dependencia con respecto a Y es:

$$Y(X_i) = \sum_i \eta_i X_i \quad (3.3)$$

con lo cual,

$$\sigma_{\text{sys}}(Y) = \sum_i \eta_i \sigma(X_i). \quad (3.4)$$

Nótese que las incertidumbres se han combinado linealmente, debido a que, con es evidente del Cuadro 3.2 los coeficientes están correlacionados, e.g., $X_3 = -X_5$.

Es fácil ver ahora que la información que nos falta es la función de densidad de probabilidad para X_i que se obtendrá con estimadores para μ y $\sigma(X)$, que denotaremos con un gorro, i.e., $\hat{\mu}$

$\mathcal{O}(a_0^n)$	l_1	l_2	l_3	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
$\mathcal{O}(a_0^5)$	2	-1.00	1	-	-	-	-	-
$\mathcal{O}(a_0^6)$	2.67	-1.00	1.17	1	2.00	-1.00	-1.00	1
$\mathcal{O}(a_0^7)$	3.39	-1.00	1.33	1.71	2.29	-1.14	-1.00	1.14
$\mathcal{O}(a_0^8)$	4.16	-1.00	1.50	2.50	2.63	-1.29	-1.02	1.29
$\mathcal{O}(a_0^9)$	4.97	-1.00	1.67	3.35	3.00	-1.44	-1.06	1.44
$\mathcal{O}(a_0^{10})$	5.82	-1.00	1.83	4.26	3.40	-1.60	-1.10	1.60
$\mathcal{O}(a_0^{11})$	6.70	-1.00	2.00	5.22	3.82	-1.76	-1.15	1.76
$\mathcal{O}(a_0^{12})$	7.60	-1.00	2.17	6.23	4.25	-1.92	-1.21	1.92
$\mathcal{O}(a_0^{13})$	8.54	-1.00	2.33	7.28	4.69	-2.08	-1.27	2.08
$\mathcal{O}(a_0^{14})$	9.50	-1.00	2.50	8.37	5.14	-2.24	-1.33	2.24
$\mathcal{O}(a_0^{15})$	10.5	-1.00	2.67	9.50	5.60	-2.40	-1.40	2.40

Cuadro 3.2: Coeficientes de δb en $a_{it}^{(3)}$ (izquierda) y δb en $a_{it}^{(4)}$ (derecha). A los coeficientes k_n se les han asociado con variables aleatorias X_n cuyas distribuciones se asumirán *a priori* con base en que estos tienen menor influencia en el resultado final a medida que la expansión se hace a ordenes mayores. El acercamiento es inherentemente Bayesiano puesto que asumimos *a priori* una distribución para X_i y consideramos a esta incertidumbre como sistemática.

y $\hat{\sigma}(X)$ respectivamente. Existe una industria para obtener estos estimadores en la cual no se invertirá mucho tiempo, en esta parte se seguirá el punto de vista frecuentista de [41], mientras que por el lado de Bayes se seguirá el tratamiento de [40].

La estimación inmediata $\hat{\mu}$ es simplemente tomar el valor medio aritmético, mientras que para $\hat{\sigma}(X)$ la estimación más simple consiste en obtener la desviación estándar muestral no sesgada, i.e.,

$$\begin{aligned}\hat{\mu} &= \bar{x} = \sum_i \frac{x_i}{N} \\ s^2 &= \frac{1}{N-1} \sum_i (x_i - \bar{x})^2\end{aligned}\quad (3.5)$$

En el tratamiento Bayesiano asumimos una distribución de probabilidad *a priori* para X_i y a partir de ella se obtienen las estimaciones para la desviación estándar y el valor medio. En principio, de los datos para X_i no se puede extraer sin interpretaciones ulteriores sobre las probabilidades de que ocurra cada dato. Sin embargo para este tipo de incertidumbres es típico asociar distribuciones triangulares, uniformes o gaussianas. Se usará la uniforme puesto que no es obvio que alguno de ellos sea más probable que otro, para este tipo distribución: $\mu = x_0$, $\sigma(X) = \frac{(b-a)}{\sqrt{12}}$, donde $a = \min(x_i)$ y $b = \max(x_i)$.

Un punto importante a discutir corresponde al coeficiente $\eta_5 X_5$, es decir, $\eta_5 = b_4$ que es desconocido, aunque no completamente. Se cuenta además con la estimación de Padé, dada por $\beta_4 = 0 \pm \beta_4^{\text{WAPAP}}$, luego σ_{sys} tiene una incertidumbre intrínseca debido al coeficiente a 4-lazos, i.e.,

$$\sigma_{\text{sys}} = \sigma_{\text{sys}}^0 \pm \sigma_{\beta_4} \quad (3.6)$$

Como se adoptó un punto de vista conservador con respecto a la validez del aproximante de Padé, el segundo término será el dominante lo cual es fácil ver considerando la magnitud de las combinaciones de coeficientes η_i , lo cual se observa en el Cuadro 3.3. En él se observa que en todos los casos el coeficiente b_4^{WAPAP} es la contribución más grande, lo cual simplemente nos dice que $\sigma_{\beta_4} \geq \sigma_{\text{sys}}^0$, lo cual se traducirá en que para los fines de este trabajo $\sigma_{\text{sys}} \equiv \sigma_{\beta_4}$.

n_f	$ b_1^4 $	$ b_1^2 b_2 $	$ b_2^2 $	$ b_1 b_3 $	$ b_4^{\text{WAPAP}} $
1	21.82	32.63	48.79	74.20	131.68
2	15.46	22.71	33.36	54.43	97.42
3	9.99	14.13	19.99	37.32	71.97
4	5.62	7.23	9.29	23.20	57.21
5	2.53	2.34	2.17	12.40	55.68

Cuadro 3.3: Coeficientes de las combinaciones η_i , cuya suma de índices es cuatro. El término dominante es la combinación con b_4^{WAPAP} .

Con las consideraciones anteriores se tiene lo necesario para estimar la incertidumbre debida al truncamiento de la función beta. Para obtener la incertidumbre a 4-lazos para una evolución en la constante de acoplamiento con $n_f = 5$ sabores activos desde la escala de M_Z hasta la escala de m_τ , tomando el valor central en las masas para considerar únicamente efectos de la función beta y usando $\alpha_0 = 0.1200$, usaremos (3.4) con δb dada por (3.2).

En el Cuadro 3.4 se muestran los valores necesarios para obtener la incertidumbre en $Y = b_3 \pm a_0 \sigma_{\text{sys}}(Y)$ con $b_4 = b_4^{\text{WAPAP}}$.

i	η_i	$E[X_i]$	$\sigma^2(X_i)$	$\hat{\mu}$	s^2
1	b_1^4	5.25	6.02	4.94	8.30
2	$b_1^2 b_2$	3.8	1.08	3.68	1.51
3	b_2^2	-1.7	0.163	-1.69	0.225
4	$b_1 b_3$	-1.2	0.013	-1.15	0.0206
5	b_4	1.7	0.163	1.69	0.225
		$a_0 \sigma(Y) = 1.0055$	$a_0 \hat{\sigma}_Y = 1.2898$		

Cuadro 3.4: Coeficientes de $\sigma^2(Y)$ en (3.4) asumiendo una distribución uniforme ($E(X_i)$, $\sigma^2(X_i)$) y usando estimadores convencionales ($\hat{\mu}$, s^2). El coeficiente b_4 es la estimación de Padé pesada.

La elección de b_4 es un punto importante y los resultados no deben modificarse considerablemente si el método que se propone es consistente. Para comprobarlo evaluemos el resultado cuando se elige un valor constante de b_4 , en particulares se elegirá la propuesta de [29], donde $\beta_4 = 0 \pm 579$. Con estas entradas se obtiene $a_0 \hat{\sigma}(Y) = 5.76$, $a_0 \sigma(Y) = 2.54$ para los estimadores convencionales y para una distribución *a priori*, respectivamente. La incertidumbre aumenta por un factor de 5 y 2 aproximadamente, lo cual indica que a pesar de que estos valores cambien, realmente no modifican el orden de magnitud con lo cual se gana información relevante. Esto será útil cuando se propongan otros métodos para estimar la incertidumbre por truncamiento, en particular si se propone analizar el error relativo entre las solución iterativa

a 4-lazos con respecto a la solución a 5-lazos usando b_4^{WAPAP} .

Finalizaremos esta sección resumiendo el método que se ha construido basado en la solución iterativa de la EGR para la constante de acoplamiento. El escenario supone que se desconoce el coeficiente a $N + 1$ -lazos y se requiere analizar la incertidumbre en la evolución debida a esto. El algoritmo se describe a continuación:

- Construir la solución a $N + 1$ lazos con la Ec. (2.60) considerando explícitamente el coeficiente desconocido b_N .
- En la solución a N -lazos la incertidumbre se introduce explícitamente en el coeficiente b_{N-1} como $Y = b_{N-1} \pm a_0 \sigma_{\text{sys}}$.
- Expandiendo ambas soluciones y comparando orden a orden se encuentra σ_{sys} construyendo un Cuadro (Ver Cuadros 2.5, 3.2) con los coeficientes de la combinaciones de coeficientes b_N que resultan aumentar linealmente. Verificar que estas combinaciones satisfagan que la suma de sus subíndices es N .
- Para obtener $\mu(X)$, $\sigma(X_i)$ se puede optar por usar los valores mínimo y máximo en el Cuadro que se obtuvo en el punto anterior y asumir una distribución uniforme, o bien, usar otro estimador ($\hat{\mu}$, s^2 , inferencia, etc.)
- Para i_{max} , i.e., el último coeficiente de la combinación de coeficientes b_N se debe usar la información conocida sobre el coeficiente b_N , o bien, usarlo como variable aleatoria por sí misma.

El método es generalizable a todos los ordenes, puesto que formalmente siempre es posible construir la solución y se cuenta con los coeficientes para N_f grande. Es fácil ver las combinaciones entre los coeficientes que conforman los η_i corresponderán a información conocida con excepción de i_{max} que será b_N y los demás serán combinaciones cuya suma de índices sea precisamente N . Usando el método establecido en conjunto con la estimación usando AP para el coeficiente β_4 en [35] (con/sin términos de Casimir CC) y el de GAPP [29], se encuentran para una evolución de la constante de acoplamiento desde $M_z = 91.1876$ hasta $m_\tau = 1.77682$ con $a_0 = 0.12/\pi$ y $n_f = 5$, los valores del Cuadro 3.5. En él se observa que en todos los casos la incertidumbre debida al truncamiento es un orden de magnitud más grande que la debida sólo al proceso de iterar. La incertidumbre debida a esto es fácil de cuantificar si se resuelve numéricamente la EGR a 4-lazos y se compara con la solución (2.60), i.e., $\Delta a_s = |a_{\text{it}}^{(4)} - a_{\text{num}}^{(4)}|$.

b_4	$\alpha_s^{(4)}(m_\tau)$	$\Delta \alpha_s (s^2, \mu)$	$\Delta \alpha_s (E(X), \sigma(X))$	$\Delta \alpha_s$ (iteración)
PADE CC	0.31967	0.00026	0.00019	0.00004
PADE SC	0.31967	0.00018	0.00013	0.00004
GAPP	0.31967	0.00082	0.00067	0.00004

Cuadro 3.5: Incertidumbres en la evolución del acoplamiento desde $M_Z = 91.1876$ GeV hasta $m_\tau = 1.77682$ GeV con la solución iterativa y la incertidumbre obtenida usando la Ec. (3.4) para distintos valores de β_4 . Se usó en el caso Bayesiano una distribución uniforme. Adicionalmente se muestra el error debido a la solución iterativa obtenida como la diferencia entre la solución numérica de la EGR y la solución $a_{\text{it}}^{(4)}$.

3.1.1. Corriendo en pasos pequeños

Hasta ahora se ha evolucionado la constante de acoplamiento en un paso, es decir, dado el acoplamiento en una escala μ_0 lo obtenemos a una escala μ_1 . Es posible hacer esto en intervalos pequeños δ_k , tal que sorteemos la no linealidad de la función beta. Hacer la evolución en pequeños pasos permite concebir un conjunto de formas de estimar la incertidumbre en la función beta: uno de ellos es analizar la diferencia absoluta entre la solución iterativa a 4-Lazos y a 5-Lazos, usando una de las opciones que se tienen para β_4 (AP con o sin términos de Casimir, GAAP, etc). Esto implica obtener en cada paso una estimación del error de la solución a 4-Lazos.

Sea $\delta_k = (\mu - \mu_0)/N$ la *longitud* del paso, donde N es el número de pasos, tal que el error en el k -ésimo paso está dado por

$$\Delta_\beta = |\alpha_{\text{it}}^{(5)}(\delta_k) - \alpha_{\text{it}}^{(4)}(\delta_k)|. \quad (3.7)$$

En el mismo camino surge la posibilidad de estimar este error como

$$\Delta_\beta = |\alpha_{\text{it}}^{(5)}(\delta_k) - \alpha_{\text{it}}^{(5)}|_{\beta_4=0}(\delta_k)|, \quad (3.8)$$

donde ahora ambas soluciones son a 5-lazos. Como es fácil anticipar estas dos posibilidades no son únicas ya que, por ejemplo, se podrían usar las soluciones numéricas en combinación con la evolución iterativa a 4-Lazos. Usaremos estas dos en conjunto con la propuesta $b_3 \rightarrow b_3 + a_0 \delta b$ analizada páginas atrás, con lo cual se tienen tres opciones distintas para estimar la incertidumbre por truncamiento de la función beta, cada una de ellas con sus respectivas variantes (debido a que hay al menos tres estimaciones para β_4).

3.2. Masas de los quarks: definiciones y condiciones de coincidencia

En el tratamiento de la incertidumbre de la función beta las masas de los quarks no han jugado un papel relevante puesto que hemos asumido que sólo un número de ellos esta activo a lo largo de la evolución. Es decir, la información de la masa en la evolución del acoplamiento se encuentra en la dependencia en n_f de los coeficientes de la función beta. Sin embargo, cuando el umbral de la masa de un quark es cruzado son necesarias Condiciones de Coincidencia (CC).

La dimensión anómala de la masas de los quarks γ controla la dependencia de ésta con el parámetro de renormalización a través de la Ecuación (2.12), cuya relación es conocida a 4-lazos, que en analogía con la función beta, refleja el hecho de que al igual que el acoplamiento la masa “correrá” con la energía.

Sin embargo, recuérdese que los quarks libres no se ha observado, lo cuál nos conduce a la pregunta: ¿qué se quiere decir por masa de un quark? Es de hecho, una construcción teórica que depende del esquema de renormalización empleado. Los esquemas que son particularmente útiles para definir la masa son dos: la masa en el esquema de sustracción mínima modificada $\overline{\text{MS}}$ que es útil a distancias pequeñas y la masa del polo M_p que suele ser útil para quarks pesados en comparación con la escala de energía [42]. La masa del polo M_p se define como la posición del polo en el propagador del quark renormalizado.

Como veremos, las masas de los quarks aparecen en la determinación de las condiciones de coincidencia, las cuáles codifican los acoplamientos en dos teorías: una de la cuales es efectiva con n_l quarks sin masa y la otra con n_f .

Antes de tratar con las Condiciones de Coincidencia (CC) es conveniente presentar algunas de las definiciones de masa más comunes. La definición de masa que encontramos a través de la EGR es la masa en el esquema $\overline{\text{MS}}$, cuya utilidad para los fines del trabajo, consistirá en relacionar las masas en distintas escalas. Con base en esta, es posible construir una masa que sea independiente de la escala denominada *masa invariante de escala* μ_m que es independiente de μ y se obtiene por iteración de la solución de (2.7), con lo cual $\mu_m = m(\mu_m)$. Cuando se requiere obtener las relaciones entre un esquema de renormalización se observa que

$$\begin{aligned} m_0 &= Z_A m_A, \\ m_0 &= Z_B m_B, \end{aligned} \quad (3.9)$$

donde m_0 es la masa desnuda, mientras que Z_A, Z_B son los factores de renormalización en los esquemas A y B respectivamente. La relación entre ambas se expresa como

$$\frac{m_A}{m_B} = \frac{Z_B}{Z_A}. \quad (3.10)$$

Entonces el objetivo se alcanza cuando se encuentran los factores de renormalización en ambos esquemas al mismo orden en teoría de perturbaciones. En particular, cuando se requiere obtener la relación entre los esquema $\overline{\text{MS}}$ y el esquema OS, esto conduce [42] a

$$\frac{\overline{m}(M_p)}{M_p} = 1 - \frac{4}{3}a_s + (1.0414n_l - 14.3323)a_s^2 + (-0.65269n_l^2 + 29.9239n_l - 198.7068)a_s^3, \quad (3.11)$$

y la relación inversa está dada por

$$\frac{M_p}{\overline{m}(\overline{m})} = 1 + \frac{4}{3}\overline{a}_s + (-1.0414n_l + 13.4434)\overline{a}_s^2 + (0.65269n_l^2 - 26.655n_l + 190.595)\overline{a}_s^3, \quad (3.12)$$

con $\overline{a}_s \equiv a_s(\overline{m})$. Es posible, en general, encontrar estas relaciones perturbativas entre las distintas definiciones de masa. En la obtención de las CC se usarán mayoritariamente las definiciones de masa del polo M_P , la masa invariante de escala $\overline{m}(\overline{m})$ y la masa $\overline{\text{MS}}$ $\overline{m}(\mu)$.

Los valores obtenidos para la masa serán parámetros en la evolución de la constante de acoplamiento que por sí mismos presentan una incertidumbre, por lo cual es importante tener esta en cuenta este efecto. La obtención de estos parámetros se dividen en dos grupos, a saber, las masas de quarks ligeros aquellos para los cuales $m_q > \Lambda_\chi$ donde la simetría quiral de QCD es rota espontáneamente y quarks pesados, aquellos en los cuáles $m_q < \Lambda_\chi$ donde la simetría quiral es rota explícitamente por los quarks [3]. Con esta clasificación los quarks ligeros (extrañeza, arriba, abajo) y los pesados (encanto, belleza, verdad) tienen masas cuyo valor aparece en el Cuadro 3.6 tomados del Particle Data Group (PDG).²

² Se citan las masas en el esquema $\overline{\text{MS}}$, en particular para \overline{m}_t el valor es tomado de mediciones de secciones eficaces.

m_q	m	Δm_q
m_s	95 MeV	$^{+5}_{-5}$ MeV
m_u	2.3 MeV	$^{+0.7}_{-0.5}$ MeV
m_d	4.8 MeV	$^{+0.5}_{-0.3}$ MeV
\overline{m}_c	1.274 GeV	$^{+0.030}_{-0.035}$ GeV
\overline{m}_b	4.199 GeV	± 0.024 GeV
\overline{m}_t	160 GeV	$^{+5}_{-4}$ GeV

Cuadro 3.6: Valores numéricos para las masas de los quarks y sus respectivas incertidumbres. Las masas de los quarks u, d y s son estimaciones en un esquema de sustracción independiente de la masa como $\overline{\text{MS}}$ evaluadas a una escala de $\mu = 2$ GeV. Las masas de los quarks, c, b y t $m = m(m)$ son las masas $\overline{\text{MS}}$ evaluadas en su propia escala.

3.2.1. Condiciones de coincidencia

Las masas de los quarks son distintas en magnitud y en muchas aplicaciones de QCD un quark es más pesado que la escala característica del proceso. En particular, para $\overline{\text{MS}}$ esta diferencia en las escalas tiene como consecuencia la aparición de logaritmos grandes. De acuerdo con el teorema de Appelquist-Carazzone los efectos debidos a campos que tienen masa mucho mayor a la escala característica, se desacoplan de la física de energías bajas. Sin embargo, este teorema no puede ser aplicado directamente para cantidades no observables como la constante de acoplamiento [43].

El problema se resuelve construyendo una teoría efectiva integrando el quark pesado [44]. Por construcción, el lagrangiano de QCD no incluirá el campo del quark pesado y esto permitirá encontrar una relación entre los acoplamientos, i.e., QCD con n_f sabores y QCD con $n_l = n_f - 1$ están relacionadas por una *condición de coincidencia*

$$a'_s = \zeta_g(\mu, a_s, m) a_s \quad (3.13)$$

con $a' \equiv a^{(n_l)}(\mu^{(n_l)})$, $a \equiv a^{(n_f)}(\mu^{(n_f)})$ y m_h es la masa en el esquema $\overline{\text{MS}}$. El coeficiente $\zeta_g(\mu, a_s, m_h)^2$ se puede escribir formalmente en una expansión en potencias de a_s como

$$\zeta_g(\mu, a_s, m_h)^2 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} k_n(l) a_s^n, \quad (3.14)$$

tal que

$$a'_s = a_s \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} k_n(l) a_s^n \right) \quad (3.15)$$

donde $l \equiv \ln \frac{\mu^2}{m_h^2}$. Imponiendo la EGR, así como la relación para la masa, es posible obtener los coeficientes con dependencia logarítmica fácilmente; no es el caso para los coeficientes

constantes que requieren ser evaluados para cada esquema en particular, así como funciones de Green en las teorías efectiva y completa. Haciendo esto se obtiene

$$\begin{aligned}
 k_1 &= -\frac{l}{6} \\
 k_2 &= \frac{l^2}{36} - \frac{11}{24}l + c_2 \\
 k_3 &= -\frac{l^3}{216} + l^2 \left(\frac{53}{576} - \frac{n_l}{36} \right) + l \left(-\frac{955}{576} + \frac{67}{576}n_l \right) + c_3 \\
 k_4 &= \left\{ \frac{l^4}{1296} + l^3 \left(-\frac{1883}{10368} - \frac{127}{5184}n_l + \frac{n_l^2}{324} \right) + l^2 \left(\frac{2177}{3456} - \frac{1483}{10368}n_l - \frac{77}{20376}n_l^2 \right) \right. \\
 &\quad \left. + l \left[\frac{7391699}{746496} - \frac{2529743}{165888}\zeta_3 + n_l \left(-\frac{110341}{373248} + \frac{110779}{82944}\zeta_3 \right) + \frac{6865}{186624}n_l^2 \right] \right\} + c_4, \quad (3.16)
 \end{aligned}$$

donde ζ es la función Zeta de Riemann ($\zeta_3 = 1.2020569\dots$, $\zeta_4 = 1.0823232\dots$, $\zeta_5 = 1.0369278\dots$). Es importante mencionar que para llegar a estas expresiones se evaluaron las constantes de integración con los resultados conocidos de c_i [45] dados por

$$\begin{aligned}
 c_2 &= \frac{11}{72}, \\
 c_3 &= \frac{564731}{124416} + \frac{2633n_l}{31104} - \frac{82043}{27648}\zeta_3, \\
 c_4 &= \frac{291716893}{6123600} - \frac{2362581983}{87091200}\zeta_3 - \frac{76940219}{2177280}\zeta_4 + \frac{9318467}{362880}\zeta_4 \ln(2) - \frac{12057583}{483840}\zeta_5 \\
 &\quad + \frac{3031309}{435456}a_4 + \frac{340853}{90720}a_5 + n_l \left(-\frac{4770941}{2239488} + \frac{3645913}{995328}\zeta_3 - \frac{541549}{165888}\zeta_4 + \frac{115}{576}\zeta_5 + \frac{685}{41472}a_4 \right) \\
 &\quad + n_l^2 \left(-\frac{271883}{4478976} + \frac{167}{5184}\zeta_3 \right), \quad (3.17)
 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
 a_4 &= \left(-2\zeta(2) + \frac{\ln^2 2}{3} \right) \ln^2 2 + 8\text{Li}_4 \left(\frac{1}{2} \right) \\
 a_5 &= \left(2\zeta(2) - \frac{\ln^2 2}{5} \right) \ln^3 2 + 8\text{Li}_5 \left(\frac{1}{2} \right), \quad (3.18)
 \end{aligned}$$

siendo $\text{Li}_n(z) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^n}$ la función Poli-logaritmo. Aún cuando el coeficiente β_4 no es conocido, es posible obtener los términos logarítmicos del siguiente coeficiente de (3.15) expresando en función de β_4 . Recordando que β_4 tiene contribuciones hasta n_f^4 , donde solo el último coeficiente es conocido

$$\beta_4 = A + Bn_f + Cn_f^2 + Dn_f^3 + En_f^4. \quad (3.19)$$

El coeficiente k_4 se obtendrá en términos de estos coeficientes, los cuales, están conformados por factores invariantes de grupo. El cálculo arroja

$$\begin{aligned}
k_5 = l & \left[B + C + D + \frac{119167860533}{293932800} - \frac{23419052939}{130636800} \zeta_3 - \frac{6819556291}{26127360} \zeta_4 - \frac{1124196887}{5806080} \zeta_5 \right. \\
& + \frac{829343563}{4354560} \zeta_4 \ln(2) + \frac{30335917}{16329600} q_1 - \frac{269786501}{15676416} q_2 \\
& + n_l \left(2C + 3D - \frac{115547911931}{2351462400} + \frac{73014629921}{2090188800} \zeta_3 - \frac{385724831}{69672960} \zeta_4 + \frac{16066483}{967680} \zeta_5 \right. \\
& \left. - \frac{9318467}{725760} \zeta_4 \ln(2) - \frac{340853}{2721600} q_1 + \frac{11698481}{10450944} q_2 \right) \\
& + n_l^2 \left(3D + \frac{33688277}{53747712} + \frac{518509}{331776} \zeta_4 + \frac{685}{248832} q_2 - \frac{2943353}{1990656} \zeta_3 - \frac{115}{1152} \zeta_5 \right) \\
& \left. + n_l^3 \left(\frac{270407}{8957952} - \frac{211}{10368} \zeta_3 \right) \right] \\
& + l^2 \left[\frac{420181099}{5971968} - \frac{24011461}{442368} \zeta_3 + n_l \left(-\frac{3878161}{373248} + \frac{8514563}{995328} \zeta_3 \right) + n_l^2 \left(\frac{1093451}{2239488} - \frac{28297}{110592} \zeta_3 \right) \right. \\
& \left. - \frac{481}{62208} n_l^3 \right] \\
& + l^3 \left[-\frac{148021}{124416} + n_l \frac{2843}{124416} + n_l^2 \frac{1883}{248832} + n_l^3 \frac{77}{124416} \right] \\
& + l^4 \left[-\frac{125293}{497664} - n_l \frac{2297}{62208} + n_l^2 \frac{1141}{124416} - n_l^3 \frac{1}{2592} \right] \\
& - \frac{l^5}{7776} + c_5 \tag{3.20}
\end{aligned}$$

$$q_1 = 10\zeta_2 \ln^3(2) - \ln^5(2) + 120\text{Li}_5(1/2) \tag{3.21}$$

$$q_2 = 6\zeta_2 \ln^2(2) - \ln^4(2) - 24\text{Li}_4(1/2) \tag{3.22}$$

En el Apéndice 1.3 se lleva a cabo una estimación para el coeficiente c_5 , usando el valor de Padé para β_4 con base en la convergencia aparente más rápida (FAC, por sus siglas en inglés), el cual arroja:

$$\begin{aligned}
\bar{c}_5 = 0 \pm 15.5988_\beta \pm 4.82143_\tau - (0 \pm 5.69388_\beta \pm 1.9050913)n_l - (0 \pm 0.224139_\beta \pm 0.10262635_\tau)n_l^2 \\
- (0.000638990_\beta \pm 0.00076964441_\tau)n_l^3 \tag{3.23}
\end{aligned}$$

Usando la relación apropiada, es posible obtener los coeficientes en otro esquema, e.g., la Ec. (3.11) insertada en produce los coeficientes en el esquema del polo. En términos generales se tienen entonces relaciones a orden $\mathcal{O}(a_s^4)$

$$(\zeta_g^{MS})^2 = 1 + k_1 a_s + k_2 a_s^2 + k_3 a_s^3 + k_4 a_s^4 + \mathcal{O}(a_s^5) \tag{3.24}$$

$$(\zeta_g^{OS})^2 = 1 + d_1 a_s + d_2 a_s^2 + d_3 a_s^3 + d_4 a_s^4 + \mathcal{O}(a_s^5) \tag{3.25}$$

$$(\zeta_g^{SI})^2 = 1 + e_1 a_s + e_2 a_s^2 + e_3 a_s^3 + e_4 a_s^4 + \mathcal{O}(a_s^5) \quad (3.26)$$

donde $(\zeta_g^{\text{MS}})^2$, $(\zeta_g^{\text{OS}})^2$ relacionan los acoplamientos en términos de la masa $\overline{\text{MS}}$, la masa del polo OS y usando la masa invariante de escala, respectivamente. En particular, para la masa del polo dada la masa invariante de escala esta dada por (3.12), de donde los coeficientes de (3.25) son fácilmente encontrados [9, 45, 8].

La utilización de estas condiciones en la evolución del acoplamiento y su análisis a 3-lazos se remonta a [46] donde se analiza detalladamente la implementación de estas condiciones para evitar efectos de logaritmos grandes debidas a cruzar el umbral de m_h e inducir una dependencia virtual en la escala de coincidencia μ_{th} . Es decir, este efecto debería ser imperceptible yendo a altas energías, lo cual fue comprobado por [2] a 4-lazos y años atrás por [45] a 5-lazos³. En estos trabajos se ha considerado la evolución desde m_τ hasta M_Z , cruzando el umbral del quark m_b .

Para fines de este trabajo nos interesará el análisis en el sentido opuesto, es decir, la evolución desde M_z hasta m_τ cruzando los umbrales de quark m_b y m_c independientemente y el efecto conjunto de cruzar ambos umbrales. Para llevar a cabo esta tarea, usaremos en conjunto la solución propuesta en este trabajo (2.60), en conjunto con las CC a 4-lazos (3.2.1). El valor de referencia para a_0 que se usará en (2.60) será un valor que no coincide con el valor promedio de [47] sino el que hemos usado en los cálculos hasta ahora, i.e., $a_0(M_Z) = 0.12/\pi$ debido a que nos interesa analizar únicamente los efectos de evolucionar el acoplamiento e implementar CC.

En el rango $m_b < \mu < m_t$ las CC no son requeridas, lo mismo en otros intervalos entre masas de quarks, donde el número de sabores activos es el mismo, y la información se codifica en los coeficiente de la función beta. El proceso de implementar CC cruzando el umbral de quark se puede visualizar en regiones entre quarks como se muestra en la Figura 3.1

Usaremos la notación $R(a_0, \mu_b, \mu_c)$ para representar la cantidad que depende de los umbrales alrededor de las masas de los quarks y que nos lleva desde $\alpha_s(M_z)$ hasta $\alpha_s(m_\tau)$, i.e,

$$a_s^{(3)}(m_\tau) \equiv R(a_0, m_\tau, \mu_b, \mu_c), \quad (3.27)$$

donde los extremos M_Z , m_τ son fijos y el superíndice se refiere al número de quarks. Adicionalmente consideraremos las masas en (3.2.1) constantes y tomaremos los valores centrales del Cuadro 3.6, por lo cual $R(a_0, m_\tau, \mu_b, \mu_c)$ sólo dependerá de donde exactamente se realice la coincidencia. La constante de acoplamiento se evolucionará usando la solución iterativa a 4-lazos ((2.60) con $n = 4$, $K_1 = K_1^{\text{it}}$) que se encontró en el Capitulo anterior:

$$a_{\text{it}}^{(nf)}(x) = \frac{a_0}{1 + \beta_0 x + b_1 a_0 \ln[1 + K_3^{\text{it}}(x)] + a_0^2 C_2 \left[\frac{K_3^{\text{it}}(x)}{1 + K_3^{\text{it}}(x)} \right] + a_0^3 \frac{C_3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{1 + K_3^{\text{it}}(x)} \right)^2 \right)} \quad (3.28)$$

$$K_3^{\text{it}}(x) = \beta_0 x + b_1 a_0 \ln[1 + K_2^{\text{it}}] + C_2 a_0^2 \left[1 - \left(\frac{1}{1 + K_2^{\text{it}}} \right)^2 \right], \quad (3.29)$$

³Usando las estimación de β_4 de los AP.

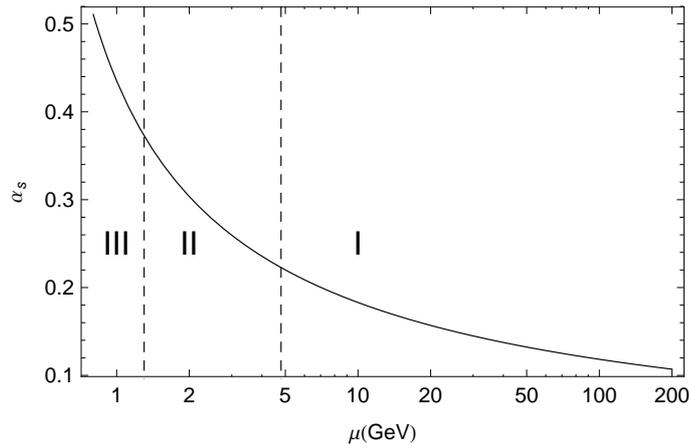


Figura 3.1: Regiones consideradas en la evolución. La región I tiene 5 quarks activos y está por debajo de la escala del quark top, en la Región II el número de quarks activos es 4 y para evolucionar α_s en este intervalo usamos CC, mientras que en la región III es la región de acoplamiento fuerte.

con $x = a_0 \ln(\mu/\mu_0)$ y ahora $a_{\text{it}}^{(n_f)}$ se refiere al número de quarks activos. La idea de proponer R es resumir el camino para obtener $a_s^{(3)}(m_\tau)$ en una teoría con 3 sabores partiendo de una teoría con 5 sabores $a_s^{(5)}(M_z)$ que se obtiene de la siguiente forma:

1. Usando la solución iterativa de la EGR a 4-lazos se obtiene $\alpha_s^{(5)}(\mu_b)$
2. Para obtener el acoplamiento con 4 sabores $\alpha_s^{(4)}(\mu_b)$ usamos las CC a 4-lazos ((3.2.1) con $a_s = \alpha_s^{(5)}(\mu_b)/\pi$).
3. Usando nuevamente (3.29) a 4-lazos se construye $\alpha_s^{(4)}(\mu_b, \mu_c)$ ($a_0 = \alpha_s^{(4)}(\mu_b)/\pi$).
4. Las CC son usadas para calcular ahora $\alpha_s^{(3)}(\mu_b, \mu_c)$ con $a_s = \alpha_s^{(4)}(\mu_b, \mu_c)$ en (3.2.1).
5. Finalmente usando (3.29) para obtener $\alpha_s^{(3)}(m_\tau)$ con $a_0 = \alpha_s^{(4)}(\mu_b, \mu_c)/\pi$

El último paso de la evolución permite definir la R , que por sí misma es una evolución que dependerá de los parámetros donde las CC fueron evaluadas, i.e.,

$$\begin{aligned}
 R(\mu_b, \mu_c) &= \pi a_{\text{it}}^{(3)}(m_\tau) \\
 &= \alpha_s^{(4)}(\mu_b, \mu_c) \times \\
 &\quad \left[1 + \beta_0 x + b_1 \frac{\alpha_s^{(4)}(\mu_b, \mu_c)}{\pi} \ln[1 + K_3^{\text{it}}(x)] + \left(\frac{\alpha_s^{(4)}(\mu_b, \mu_c)}{\pi} \right)^2 C_2 \left[\frac{K_3^{\text{it}}(x)}{1 + K_3^{\text{it}}(x)} \right] \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{\alpha_s^{(4)}(\mu_b, \mu_c)}{\pi} \right)^3 \frac{C_3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{1 + K_3^{\text{it}}(x)} \right)^2 \right) \right]^{-1}
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

con $x = \frac{\alpha_s^{(4)}(\mu_b, \mu_c)}{\pi} \ln(m_\tau/\mu_c)$ y $K_3^{\text{it}}(x)$ definida como en (3.29). En la Figura 3.2 se observa el efecto de cruzar los umbrales de quark de forma independiente manteniendo $\mu_{th} = m_c$ fijo (línea continua) y $\mu_{th} = m_b$ fijo (línea punteada) variando $\mu = 1 - 30$. Observamos que al variar el umbral m_b muestra independencia con respecto a μ_b . Por otro lado, para μ_c la variación entre los resultados finales es notable, lo cual es comprensible si tomamos en cuenta que la coincidencia en el caso de μ_c debe ser $\mathcal{O}(1)$, esto es $\mu_c/\mu_b = \mathcal{O}(1)$ lo cual requiere que la coincidencia sea en un valor de μ_c cercano a 1 y estamos variando μ hasta 30 GeV.

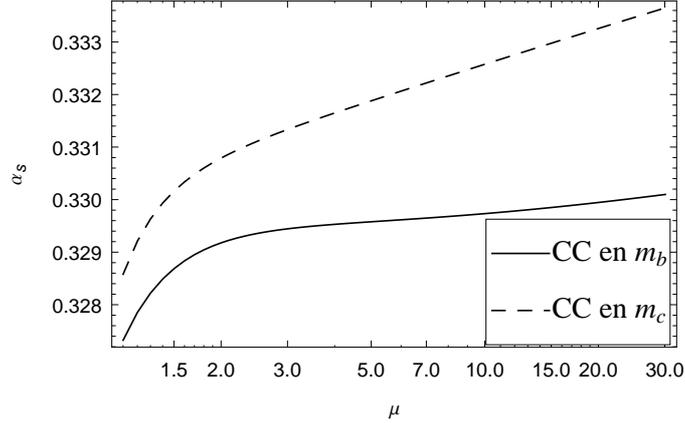


Figura 3.2: Dependencia de α_s con respecto a μ_{th} en los umbrales de m_b (sólido) y m_c (punteado)

Si en lugar variamos al mismo tiempo los umbrales, obtenemos que el valor del acoplamiento es ahora una superficie prácticamente plana cuando son variados μ_b y μ_c . Esto se muestra en la Figura 3.3.

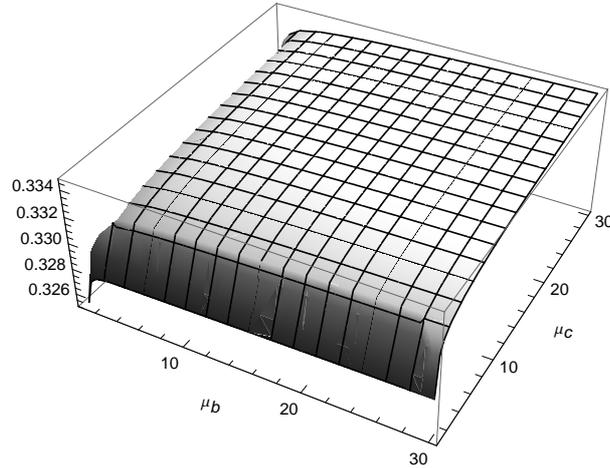


Figura 3.3: Dependencia de α_s con respecto a μ_{th} en m_b y m_c variados simultáneamente.

Las CC inducen incertidumbres en dos frentes: por un lado conocemos completamente sólo los coeficientes de la expansión a 4-lazos y, adicionalmente, el parámetro de masa del

quark tiene una incertidumbre asociada. Para estimar la incertidumbre asociada al cruzar el umbral se usara el último coeficiente usado para implementar la coincidencia, el cual, para una evolución a 4-lazos es k_3 , i.e.,

$$\Delta_{\text{th}} = \pi |(a_s)^4 k_3(l)|. \quad (3.31)$$

La incertidumbre originada por las masas se calcula como

$$\Delta_m = \frac{da'_s}{dm} \sigma_m. \quad (3.32)$$

3.3. Análisis global de incertidumbres

Una vez establecidas las fuentes de incertidumbre las analizaremos de forma global en todo el proceso de evolución. Para fines de claridad listaremos las fuentes de incertidumbre:

- Truncamiento de la función beta.
- Truncamiento de las Condiciones de Coincidencia.
- Masas de los quarks.
- Incertidumbre en la solución iterativa con respecto a la solución numérica.

Las primeras dos en esta lista son incertidumbres de tipo sistemático, mientras que en el caso de las masas de los quarks, estos tienen componente de tipo estadístico. La propuesta de este trabajo consiste en calcular esta incertidumbre como

$$\Delta_\beta = \left| \frac{d\alpha_s}{dY} \sigma_{\text{sys}}(Y) \right| \quad (3.33)$$

con $\sigma_{\text{sys}}(Y)$ dada en la Ec. (3.4). Adicionalmente se tienen dos estimaciones para esta fuente de incertidumbre dadas por las Ecs. (3.7)-(3.8), las cuales nos servirán para analizar la validez de nuestra propuesta. En el caso de la incertidumbre por truncamiento de las CC, la estimación que se propone consiste en tomar al coeficiente k_3 en (3.15) como incertidumbre sistemática tal que esta se estima con la Ec. (3.31). En el caso de las masas la incertidumbre se obtiene con la Ec. (3.32).

En otro sentido la solución iterativa propuesta (3.29) esta sujeta a una incertidumbre en comparación con la solución numérica, por lo cual estimaremos esta incertidumbre como la diferencia absoluta entre (3.29) y el resultado numérico, i.e.,

$$\Delta_{\text{it}} = |\alpha_{\text{it}} - \alpha_{\text{num}}| \quad (3.34)$$

Para evitar en la medida de lo posible los efectos no lineales, la evolución se llevará a cabo en pequeños pasos (usaremos 200) tal como se describió en la Sección 3.1.1. Con estas consideraciones evolucionaremos el acoplamiento en un ejemplo ilustrativo, donde la evolución desde la escala de M_Z con 5 sabores hasta la escala de m_τ con 3 sabores es implementada. En este ejemplo se usarán las masas del polo dadas por [48]

$$\begin{aligned} M_c &= (1.65 \pm 0.15)\text{GeV} \\ M_b &= (4.75 \pm 0.20)\text{GeV}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

La evolución en pequeños pasos desde la escala de $M_Z = 91.1876\text{GeV}$ hasta $M_b = 4.75\text{GeV}$ arroja

$$\alpha_{s,1}^{(5)}(M_b) = 0.22344 \pm (5.78 \times 10^{-5})_\beta \pm (3.8 \times 10^{-6})_{\text{it}} \quad (3.36)$$

donde $\alpha_s^{(n_f)}$ es el acoplamiento con n_f sabores y la incertidumbre por truncamiento se obtuvo con (3.8). En este punto usamos las CC dadas por (3.25) y se obtiene el acoplamiento con 4 sabores

$$\begin{aligned} \alpha_{s,1}^{(4)}(M_b) &= 0.22279 \pm (5.78 \times 10^{-5})_\beta \pm (9.37 \times 10^{-6})_{\text{it}} \pm (3.22 \times 10^{-4})_{\text{th}} \\ &\pm (3.22 \times 10^{-4})_{M_b} \end{aligned} \quad (3.37)$$

Nos interesa el acoplamiento en la escala de m_τ por lo cual evolucionaremos a_s hasta esa escala y luego compararemos con el resultado con 3 sabores. Esto es porque se ha sugerido por [49] que un procedimiento válido es usar CC una vez se llega a m_τ sin evolucionar a M_c . En la escala de $m_\tau = 1.7768\text{ GeV}$

$$\begin{aligned} \alpha_{s,1}^{(4)}(m_\tau) &= 0.33711 \pm (5.18 \times 10^{-4})_\beta \pm (1.44 \times 10^{-4})_{\text{it}} \pm (7.96 \times 10^{-4})_{\text{th}}^{M_b} \\ &\pm (7.94 \times 10^{-4})_{M_b} \end{aligned} \quad (3.38)$$

donde las contribución de la función beta y la contribución por la iteración se han combinado linealmente y evaluado en m_τ , y $(\)_{\text{th}}^{M_b}$ se refiere a la incertidumbre por truncamiento de las CC en M_b . En este punto es posible usar CC (puesto que $M_c = 1.65$ y $m_\tau \approx 1.78$) con lo cual

$$\begin{aligned} \alpha_{s,1}^{(3)}(m_\tau) &= 0.33260 \pm (5.18 \times 10^{-4})_\beta \pm (1.44 \times 10^{-4})_{\text{it}} \pm (7.96 \times 10^{-4})_{\text{th}}^{M_b} \\ &\pm (2.03 \times 10^{-3})_{\text{th}}^{M_c} \pm (7.94 \times 10^{-4})_{M_b} \pm (1.89 \times 10^{-3})_{M_c} \end{aligned} \quad (3.39)$$

donde se observa que la incertidumbre debida al umbral del quark M_c ahora es la contribución más grande, de hecho, está en el orden de las incertidumbres experimentales, por lo cual ahora se evolucionará hasta M_c para usar las CC. En este paso requerimos “regresar” al punto de partida, lo cual nos dice que en este proceso las incertidumbres generadas por el truncamiento de la función beta, así como la incertidumbre por iteración deben tener una contribución positiva ($m_\tau \rightarrow M_c$) y una contribución negativa ($M_c \rightarrow m_\tau$) y estaremos interesados sólo en la diferencia entre estas cantidades. Con esto en mente, la incertidumbre debida a evolucionar y regresar a m_τ (evaluada en m_τ)

$$\Delta_{m_\tau \rightleftharpoons M_c} = \pm(6.67 \times 10^{-6})_\beta \pm (2.12 \times 10^{-5})_{\text{it}} \pm (1.89 \times 10^{-3})_{\text{th}}^{M_c} \pm (1.91 \times 10^{-3})_{M_c} \quad (3.40)$$

donde se observa que la incertidumbre por cruzar el umbral de M_c se reduce en un 7% y el efecto del parámetro de masa aumenta en un 1%, mientras que como se espera, los efectos de evolución no se incrementan notablemente. Las incertidumbres por efectos en la masa del quark M_c parecen ser los más importantes, lo cual se debe a que las masas del polo son conocidas con limitada precisión. Adicionalmente en (3.25) $d_3 \approx -5.3239 + 0.2625nl$, mientras que en $\overline{\text{MS}}$, $k_3 \approx 0.9721 - 0.0846nl$.

Las masas del polo no reflejan un hecho importante en QCD, a saber, que sus valores también varían con respecto a la escala de renormalización, es decir: las masas de los quarks “corren” y están también sujetas a CC para las masas, lo cual se mencionó al inicio de este trabajo (Sección 1.2.1). Es por esta razón que conviene analizar el proceso con las masas $\overline{\text{MS}}$. El procedimiento es análogo al que hicimos con las masas del polo, por lo cual no se abundará en ello. Las masas de los quarks evaluadas en su propia escala están dadas en el Cuadro 3.6, y usaremos (3.24) para implementar las CC, con lo cual se obtiene

$$\alpha_{s,2}^{(5)}(m_b) = 0.23204 \pm (7.06 \times 10^{-5})_\beta \pm (5.85 \times 10^{-6})_{\text{it}} \quad (3.41)$$

con 5 sabores. Usando CC en $\mu_{th} = m_b$ se tiene

$$\begin{aligned} \alpha_{s,2}^{(4)}(m_b) &= 0.23229 \pm (7.06 \times 10^{-5})_\beta \pm (5.85 \times 10^{-6})_{\text{it}} \pm (5.13 \times 10^{-5})_{\text{th}}^{m_b} \\ &\pm (4.05 \times 10^{-5})_{m_b} \end{aligned} \quad (3.42)$$

donde inmediatamente se observa que los efectos de incertidumbre son menores en el caso de m_b por un factor de seis (Ec. (3.37)). Análogamente en la escala de m_τ con 4 sabores se obtiene

$$\begin{aligned} \alpha_{s,2}^{(4)}(m_\tau) &= 0.33689 \pm (5.21 \times 10^{-4})_\beta \pm (1.41 \times 10^{-4})_{\text{it}} \pm (1.16 \times 10^{-4})_{\text{th}}^{m_b} \\ &\pm (9.13 \times 10^{-5})_{m_b}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Usando la masa $\overline{\text{MS}}$ el valor central del acoplamiento en la escala de m_τ es menor en un 0.04%, pero las incertidumbres son notablemente más pequeñas en la misma escala, tanto la incertidumbre por el cruce del umbral m_b como por el efecto del parámetro de masa. Usando CC en m_τ sin evolucionar hacia m_c , con $m_c(m_\tau) = 1.1255$ GeV se obtiene

$$\begin{aligned} \alpha_{s,2}^{(3)}(m_\tau) &= 0.33025 \pm (5.21 \times 10^{-4})_\beta \pm (1.41 \times 10^{-4})_{\text{it}} \pm (1.16 \times 10^{-4})_{\text{th}}^{m_b} \\ &\pm (9.13 \times 10^{-5})_{m_b} \pm (1.97 \times 10^{-4})_{\text{th}}^{m_c} \pm (4.33 \times 10^{-4})_{m_c} \end{aligned} \quad (3.44)$$

Para simplificar se ha usado $\sigma_{m_c} = 0.035$, en tratamientos posteriores se incluirá la asimetría en esta incertidumbre. Resta comparar el valor obtenido usando CC en m_τ con el proceso de evolucionar hasta m_c y regresar a m_τ . Es importante remarcar que este proceso contiene dos contribuciones en la incertidumbre por efectos de la función beta, y dos por efectos de la solución iterativa; pero los efectos tienen un signo relativo, por lo cual estamos interesados en la diferencia. Esta diferencia está dada por

$$\Delta_{m_\tau \rightleftharpoons m_c} = \pm(3.26 \times 10^{-4})_\beta \pm (1.08 \times 10^{-4})_{\text{it}} \pm (3.51 \times 10^{-4})_{\text{th}}^{m_c} \pm (2.28 \times 10^{-4})_{m_c} \quad (3.45)$$

donde observamos que las contribuciones pro iteración y truncamiento de la función beta son mayores a las obtenidas para el caso de masa del polo, cuya fuente se relaciona con que $M_c > m_c$, es decir, evolucionamos un tramo $\delta = M_c - m_b$ hacia bajas energías. Es claro que evolucionando hacia m_c , evitamos los efectos de logaritmos en las CC sin introducir efectos que modifiquen el valor central del acoplamiento. El valor central en m_τ es de 0.33009 que es menor al obtenido en (3.44) en un 0.04%.

La lección aprendida de evolucionar el acoplamiento de M_Z hacia m_τ cruzando por los umbrales de los quarks charm y bottom, con masas en el polo y $\overline{\text{MS}}$, consistió en que para evitar incertidumbres de tipo teórico comparables con las incertidumbres experimentales (10^{-3}) es conveniente usar masas $\overline{\text{MS}}$ en conjunto con CC en este mismo esquema. Adicionalmente se observó que cruzar el umbral del quark m_c en $\mu_{\text{th}} = m_c$ es conveniente para reducir en casi un 50% la incertidumbre por el parámetro de masa (Ecs. (3.44)-(3.45)), por lo cual es la sugerencia de este trabajo evolucionar primero hacia m_c y regresar a m_τ .

Hasta ahora, se ha usado la estimación más simple para el truncamiento de la función beta (3.8). En la siguiente Sección, donde el problema más interesante de evolucionar hasta M_Z es estudiado, usaremos las otras estimaciones propuestas para tener una mejor idea de cuál es la incertidumbre por truncamiento.

3.3.1. Evolución del acoplamiento hacia M_Z cruzando los umbrales m_b y m_c

La metodología desarrollada es completamente general, es decir, la obtención de las incertidumbres no se modifica si la evolución se lleva a cabo de m_τ a M_Z . Sin embargo, ahora el orden en el cual se cruzan los umbrales es distinto, puesto que primero debe cruzar el umbral de m_c y después el de m_b . Adicionalmente se debe notar que la evolución sigue el camino $m_\tau \rightarrow m_c \rightarrow m_\tau \rightarrow m_b \rightarrow M_Z$, es decir, una cancelación entre las incertidumbres por la evolución debe ocurrir, para hacerlo claro, usaremos como punto intermedio la escala de m_τ . El proceso se llevará a cabo usando CC con parámetros de masa $\overline{\text{MS}}$ cuyas etapas se describen a continuación:

1. Se usa la solución iterativa de la EGR a 4-lazos para obtener $\alpha_s^{(3)}(m_c)$.
2. Se evoluciona hacia m_c donde las CC a 3-lazos son usadas de tal forma que se obtiene $\alpha_s^{(4)}(m_c)$.
3. Usamos una vez más la solución de la EGR para obtener $\alpha_s^{(4)}(m_\tau)$. Es en este punto donde evaluaremos el efecto de incertidumbre por “ir” hacia m_c y “regresar” hacia m_τ , así como el efecto debido a cruzar el umbral m_c .
4. Se usa la solución a la EGR para obtener $\alpha_s^{(4)}(m_b)$.
5. Se implementan condiciones de coincidencia en m_b para obtener $\alpha_s^{(5)}(m_b)$.
6. Finalmente se obtiene $\alpha_s^{(5)}(M_Z)$ con la EGR y se obtienen las incertidumbres por el proceso de “ir” hacia m_b y luego hacia M_Z así como por implementar CC.

Es necesario enfatizar que la evolución se realizará en intervalos pequeños como se explicó anteriormente, esto debido a que se quieren minimizar efectos de no-linealidad. Vale la pena observar explícitamente cómo varía el resultado a medida que el número de intervalos es

Intervalos N	$\alpha_s^{(3)}(m_c)$	$ (a_s^N - a_s^1) $	%
1	0.41539941	-	
10	0.41559471	0.04702	
10^2	0.41561589	0.05211	
10^3	0.41561801	0.05262	
10^4	0.41561822	0.05267	
10^5	0.41561824	0.05268	

Cuadro 3.7: Evolución de la constante de acoplamiento con $n_f = 3$ desde $m_\tau = 1.7768$ GeV hasta $m_c = 1.274$ donde se ha calculado el porcentaje de error como la diferencia entre el acoplamiento con N intervalos y el acoplamiento con 1 intervalo.

incrementado, tomando como base la evolución para calcular el porcentaje de diferencia, se evoluciona desde $m_{tau} = 1.7768$ GeV hasta $m_c = 1.274$ GeV con $n_f = 3$. El cuadro 3.7 condensa los resultados, donde se observa que la diferencia entre el acoplamiento con un intervalo y 100 000 es de 0.05268 %. Se observa del Cuadro que a partir de 100 intervalos el error entre α_s calculado con 1 intervalo y el calculado comienza a converger, por lo cual para evolucionar fijaremos el número de intervalos en 200. En esta región la diferencia en escalas es pequeña, pero es en esta región donde se esperan efectos mayores por no linealidad.

Es claro que si la evolución se hace en pequeños pasos, la evaluación de las incertidumbres debe hacerse en pequeños pasos también, lo cual se traduce en que los errores se propagaran en el mismo número de pasos.

Recordemos que tenemos tres formas de obtener la incertidumbre por truncamiento de la función beta: obteniendo la diferencia absoluta entre la evolución a 5-lazos con $\alpha_{it}^{(5)}|_{\beta_4}$ (usando para β_4 una estimación o bien un valor fijo, digamos 100) y la evolución a 5-lazos con $\beta_4 = 0$ (3.8); la diferencia absoluta entre la evolución a 5-lazos con $\alpha_{it}^{(5)}|_{\beta_4}$ y la evolución a 4-lazos $\alpha_{it}^{(4)}$ y una estimación adicional dada por la ecuación (3.33). Estas estimaciones dependen del valor de β_4 que conocemos parcialmente, por lo cual todas las estimaciones mencionadas son conservadoras.

Para fines de claridad se reescribirañ las fórmulas para estimar las incertidumbres por truncamiento:

$$\Delta_\beta^1 = |\alpha_{it}^{(5)}(\delta_k) - \alpha_{it}^{(5)}(\delta_k)|, \quad (3.46)$$

$$\Delta_\beta^2 = |\alpha_{it}^{(5)}(\delta_k) - \alpha_{it}^{(4)}(\delta_k)|, \quad (3.47)$$

$$\Delta_\beta^3 = \left| \frac{d\alpha_s(\delta_k)}{dY} \sigma_{sys}(Y) \right| \quad (3.48)$$

donde $\alpha_s(\delta_k)$ indica que la evolución y los cálculos se han realizado en intervalos δ_k . el método para obtener $\sigma_{sys}(Y)$ se discutió en la primera Sección de este Capítulo.

Con lo anterior se tiene lo necesario para realizar la evolución partiendo de $m_\tau = 1.7768$ GeV hasta M_Z cruzando por los umbrales de $m_c = 1.274$ y $m_b = 4.199$. Para hacerlo, fijamos el acoplamiento en $\alpha_s^{(n_f=3)}(m_\tau) = 0.33$ (recuérdese que estamos tomando un valor fijo ya que nos interesan sólo los efectos de evolución y no el error experimental), con lo cual se obtiene

$$\begin{aligned} \alpha_s^{(nf=4)}(m_c) &= 0.41381 \pm (5.44 \times 10^{-4})_{\beta}^1 \pm (6.911 \times 10^{-4})_{\text{th}}^{m_c} \pm (2.148 \times 10^{-4})_{\text{th}}^{m_b} \\ &\quad + \left(\begin{array}{c} +6.422 \\ -7.492 \end{array} \times 10^{-4} \right)_{m_c} \pm (1.442 \times 10^{-4})_{m_b} \pm (1.285 \times 10^{-4})_{\text{it}} \end{aligned} \quad (3.49)$$

donde los errores del umbral en m_b se ha evaluado en la escala de m_c y, tal como se enfatizó la incertidumbre por efectos de la función beta y por la solución iterativa reflejan sólo la diferencia entre evolucionar hasta m_c y regresar a m_τ . Además se ha estimado la incertidumbre con (3.46), fijando $\beta_4 = 100$. Es claro que el efecto más importante es el relacionado tanto con el cruce el umbral m_b como el parámetro m_c mismo.

El siguiente paso consiste en la evolución a m_τ con 4 sabores, cuyo valor es

$$\begin{aligned} \alpha_s^{(nf=4)}(m_\tau) &= 0.3367 \pm (2.854 \times 10^{-4})_{\beta}^1 \pm (4.136 \times 10^{-4})_{\text{th}}^{m_c} \pm (1.341 \times 10^{-4})_{\text{th}}^{m_b} \\ &\quad + \left(\begin{array}{c} +4.008 \\ -4.676 \end{array} \times 10^{-4} \right)_{m_c} \pm (0.914 \times 10^{-4})_{m_b} \pm (0.923 \times 10^{-4})_{\text{it}} \end{aligned} \quad (3.50)$$

donde la diferencia con respecto al valor inicial es de 2%, cuya fuente es tanto el cambio en n_f en la función beta, como la diferencia producida por la coincidencia. Evolucionando hacia m_b , implementando CC para finalmente evolucionar hacia M_Z con $n_f = 5$ arroja

$$\begin{aligned} \alpha_s^{(nf=5)}(M_Z) &= 0.11998 \pm (1.919 \times 10^{-4})_{\beta}^1 \pm (0.303 \times 10^{-4})_{\text{th}}^{m_c} \pm (0.151 \times 10^{-4})_{\text{th}}^{m_b} \\ &\quad + \left(\begin{array}{c} +0.451 \\ -0.527 \end{array} \times 10^{-4} \right)_{m_c} \pm (0.103 \times 10^{-4})_{m_b} \pm (0.317 \times 10^{-4})_{\text{it}} \end{aligned} \quad (3.51)$$

El resultado con respecto a los umbrales es optimista con respecto [50], donde la estimación se hace variando el umbral en un intervalo arbitrario usando CC con las masas invariantes de escala. Adicionalmente una estimación de la contribución por truncamiento no es presentada.

Es posible repetir el cálculo con las opciones distintas para estimar el efecto de la función beta, en total se tienen tres opciones cada una con varias posibilidades para β_4 . Se usará la estimación educada para β_4 en términos de Aproximantes de Padé presentados en la Sección 2.3.1, con lo cual se tendrá una mejor idea acerca de esta contribución.

En el Cuadro 3.8 se condensan los resultados con las distintas estimaciones para la incertidumbre por truncamiento de la función beta, donde se ha tomado el promedio entre la estimación más grande y la más pequeña de las seis opciones como la incertidumbre por truncamiento. Además se han combinado en cuadratura los efectos de truncamiento, cruce de umbrales e iteración, escribiendo de forma separada las contribuciones por las masas, esto porque, la incertidumbre en las masas contienen partes puramente estadísticas. Entonces se encuentra que el acoplamiento en la escala de $M_z = 91.1876$ GeV es

$$\alpha_s^{(nf=5)}(M_Z) = 0.11998 \pm (1.679 \times 10^{-4})_{\text{tot}}^1 + \left(\begin{array}{c} +0.451 \\ -0.527 \end{array} \times 10^{-4} \right)_{m_c} \pm (0.103 \times 10^{-4})_{m_b} \quad (3.52)$$

donde la primera contribución en la incertidumbre es la combinación en cuadratura de los efectos de cruce de umbrales, función beta e iteración.

μ	$n_f=3$		$n_f=4$		$n_f=5$
	m_τ	m_c	m_τ	m_b	M_Z
$\alpha_s^{(n_f)}(\mu)$	0.33	0.41562	0.33672	0.23221	0.11998
$\alpha_s^{(n_f+1)}(\mu)$		0.41381		0.23196	
$\Delta_\beta \times 10^{-4}$	$\beta_4 = 100$				
	Δ_β^1	5.440	2.854	4.862	1.919
	Δ_β^2	5.388	2.950	3.928	1.575
	Δ_β^3	1.946	0.756	3.299	1.260
	β_4^{AP}				
	Δ_β^1	3.184	1.330	4.875	1.968
	Δ_β^2	3.133	1.424	3.942	1.625
	Δ_β^3	0.922	0.067	3.317	1.287
$\Delta_{\text{th}} \times 10^{-4}$	$\Delta_{\text{th}}(m_c)$	6.911	4.316	1.911	0.303
	$\Delta_{\text{th}}(m_b)$	2.148	1.341	0.594	0.151
$\Delta_{\text{m}} \times 10^{-4}$	Δ_{m_c}	+6.422 -7.492	+4.008 -4.676	+1.775 -2.071	+0.451 -0.527
	Δ_{m_b}	1.442	0.914	0.405	0.103
$\Delta_{\text{it}} \times 10^{-4}$		1.285	0.923	1.073	0.317
		± 8.009	± 4.853	± 4.675	± 1.679
$\Delta_{\text{tot}} \times 10^{-4}$		+6.422 -7.492 ± 1.442	+4.008 -4.676 ± 0.914	+1.775 -2.071 ± 0.405	+0.451 -0.527 ± 0.317

Cuadro 3.8: Evolución de la constante de acoplamiento desde $\alpha_s(m_\tau) = \alpha_s^{(3)}(1.7768\text{GeV}) = 0.3300$ hasta la escala de $M_Z=91.1876$ GeV. n_f etiqueta el número de quarks activos en cada etapa de la evolución del acoplamiento y separa las regiones de evolución hacia m_c y de vuelta a m_τ . μ es la escala donde se evalúa el acoplamiento antes $\alpha_s^{(n_f)}(\mu)$ y después $\alpha_s^{(n_f+1)}(\mu)$ de implementar condiciones de coincidencia CC. En μ se evalúan también las incertidumbres.

Los renglones etiquetados por Δ_x 's son las contribuciones a la incertidumbre, siendo Δ_{tot} la incertidumbre acumulada absoluta. Para Δ_β son presentadas tres estimaciones cada una con una variante dada por el valor del coeficiente desconocido β_4 donde se eligió un valor constante y otro dado por la estimación usando Aproximantes de Padé. La estimación final se obtuvo como la mitad de la suma de los valores mayor y menor. Las incertidumbres debidas al cruce de los umbrales de quark Δ_{th} se calcularon usando el coeficiente k_3 en las CC (3.24).

Δ_{m} es la incertidumbre cuya fuente es el parámetro de masa del quark pesado en las CC.

Δ_{it} es la incertidumbre producida por el uso de la solución iterativa y se obtuvo como la diferencia absoluta entre el resultado numérico y la solución iterativa α_{it} . Finalmente se tiene la incertidumbre total compuesta por la incertidumbre por efectos sistemáticos (primer renglón en Δ_{tot}), la incertidumbre en las masas del quark m_c (segundo renglón en Δ_{tot}) y m_b (tercer renglón en Δ_{tot}).

Capítulo 4

Conclusiones

Las fuentes de incertidumbre originadas por la evolución de la constante de acoplamiento de QCD cuando umbrales de quark son cruzados se estudiaron en este trabajo. El primer paso hacia la determinación de estas incertidumbres consistió en resolver la Ecuación del Grupo de Renormalización EGR en el esquema de sustracción mínima modificada $\overline{\text{MS}}$. La solución propuesta está parametrizada con una escala de referencia μ_0 con acoplamiento $\alpha_s(\mu_0)$ el cuál se obtiene experimentalmente. Se estableció el algoritmo para obtener formalmente la solución a N -lazos (2.60), cuya versión a 4-lazos (donde los coeficientes de la función beta son conocidos) mostró ser más precisa (además de mostrar mejor convergencia) con respecto a la parametrización usual con Λ_{QCD} tomando como referencia la solución numérica de la EGR (Cuadro 2.8). Adicionalmente la solución iterativa, en conjunto con el hecho de que es posible generarla a N -lazos, ayudó en la estimación de la incertidumbre por truncamiento de la función beta.

En la determinación de la incertidumbre por el truncamiento se ha estudiado de qué forma las soluciones a cada lazo resuman los logaritmos tomando como base la solución a 1-Lazo, la cuál resume los Logaritmos Líderes LL. Posteriormente se impone esta resumación como base para estimar el efecto del truncamiento, es decir, el efecto de no resumar no sólo los LL, sino los Sigüientes Logaritmos Líderes NLL. Se encontró que la incertidumbre es de orden $\mathcal{O}(\alpha_s^{n+2})$ cuando la solución a N -lazos es usada, lo cual es consecuencia directa del truncamiento. Sigüiendo este camino se encontró explícitamente la diferencia entre la solución a N y a $N + 1$ lazos, una vez que éstas se expanden en potencias del parámetro $\alpha_s(\mu_0)$ donde se comprobó el resultado conocido de que las diferencias entre éstas son observadas en los N^{n+1} LL (Sigüiente ^{N} Logaritmo Líder) [51], que a su vez permitió ganar intuición en la forma en que estas soluciones implementan la resumación de las series perturbativas, cuya base estriba en el Grupo de Renormalización.

En este contexto fue posible obtener orden a orden en a_0 la contribución “faltante” debida a que, aunque las soluciones pueden formalmente ser obtenidas a todos los lazos, los coeficientes de la función beta se conocen únicamente a 4-lazos. Esta contribución se etiquetó con δb obtenida haciendo $\beta_3 \rightarrow b_3 + a_0 \delta b$ en la solución a 4-lazos, la cual estuvo conformada por combinaciones de los coeficientes conocidos y uno desconocido. Una de las características de δb fue que la suma de los subíndices de los términos que la conformaban era constante, siendo esta suma igual al número de lazos de la solución correspondiente. Este resultado estuvo acompañado por la observación de que los coeficientes de éstas combinaciones no mostraban

un crecimiento considerable a cada orden en a_0 , de hecho eran estrictamente del mismo orden para $i < 16$ en $\mathcal{O}(a_0^n)!$ con un crecimiento lineal. Para δb se encontró $\delta b = \sum_n k_n \eta_n$ donde los k_n 's, η_n 's son los coeficientes estrictamente del mismo orden y las combinaciones con suma de índices constante.

La dependencia en β_4 en η_5 motivó el estudio de la información parcial sobre este coeficiente, en específico en el contexto de teorías con el número de sabores N_f grande, donde usando la función beta en puntos fijos es posible obtener exponentes críticos, los cuales permiten deducir los coeficientes a orden $\mathcal{O}(1/N_f)$ de la función beta [52]. Esa información incompleta sobre β_4 , sin embargo, dio luz en la validez de estimaciones basadas en los Aproximantes de Padé que resultaron ser útiles, no sólo en la generación de una clase de soluciones de la EGR (2.64), sino en una estimación educada del coeficiente β_4 [35], el cual fue usado para determinar la incertidumbre debida al truncamiento. En este contexto es posible asociar variable aleatorias a los coeficientes η_i , los cuáles son parámetros desconocidos sistemáticos, es decir, encajan en la definición de incertidumbre sistemática tipo B propugnada por [53]. Es así como la incertidumbre asociada al truncamiento que se introdujo explícitamente en el coeficiente b_3 de la solución a cuatro lazos vía $Y = b_3 \pm a_0 \sigma_{\text{sys}}(Y)$ se asoció a η_i resultando en: $\sigma_{\text{sys}} = \sum_i \eta_i \sigma(X_i)$ donde $k_i = X_i$. Para β_4 se uso el resultado de [35] de forma conservadora vía $\beta_4 = 0 \pm \beta_4^{\text{WAPAP}}$. Este tratamiento nos introduce en la discusión sobre el acercamiento Bayesiano para incertidumbres y de la inferencia. Ante la carencia de repetibilidad en tratamientos teóricos y el desconocimiento de parámetros de la teoría el acercamiento Bayesiano de inferencia parece ser adecuado, cuando de truncamiento se habla, como recientemente se ha propuesto en la construcción de grados de confianza para la sección eficaz total de $(e^+e^- \rightarrow \gamma \rightarrow \text{hadrones})$ [39].

La propuesta de este trabajo para lidiar con la incertidumbre por truncamiento se comparó con la idea sencilla de obtener esta como la diferencia absoluta entre la evolución a 5-lazos usando algún valor arbitrario razonable de β_4 y la evolución a 4-lazos, comparándola con la idea planteada en este trabajo $\delta_b \rightarrow \delta_b + a_0 \sigma_{\text{sys}}$ siendo ambas equiparables y distintas por un factor de tres. Esta diferencia se puede trazar en el hecho de que nuestra propuesta toma en cuenta no sólo la influencia de β_4 , sino también en combinación específica de los coeficientes que acompañan la solución iterativa, los cuales portan la información acerca de la resumación de los LL, estas combinaciones están caracterizadas por la suma de los índices.

Con la estimación de la incertidumbre debida al truncamiento de la función beta determinado, se emprendió el estudio de las incertidumbres debidas al parámetro de masa en las condiciones de coincidencia (CC), las cuales relacionan parámetros en dos teorías, una con n_f y otra con $n_l = n_f - 1$ campos de quark. Las incertidumbres en estas CC aparecieron en dos distintos frentes: el primero como resultado de que estas condiciones aparecen en una expansión perturbativa dependiente de un parámetro de coincidencia μ_{th} cuyo valor exacto no introduce una incertidumbre considerablemente más grande que la debida a la función beta; el segundo frente es debido a que las CC dependen de la masa del quark pesado m_h que ha sido integrado en la teoría efectiva con N_f quarks cuyo valor induce una incertidumbre. La ambigüedad en la elección de μ_{th} resulta ser un indicador del efecto del truncamiento de las CC, puesto que a medida que la evolución se hace a un mayor número de lazos se observa la independencia del valor final con respecto a μ_{th} [2].

La ambigüedad en la elección de μ_{th} se trató como una incertidumbre sistemática cuya estimación consistió en tomar el coeficiente k_3 de las CC. Hasta ahora, la propuesta para lidiar

con esta incertidumbre es variar μ_{th} entre algún intervalo apropiado, e.g., en [54] $0.3m_h \leq \mu \leq 0.7m_h$ mientras que en [50], $\mu = (1 - 4)\text{Gev}$ para el umbral del quark m_c y $\mu = (2 - 20)\text{Gev}$. Esta estimación está de acuerdo con la presentada en este trabajo cuando el resultado se propaga a la escala de M_Z (Cuadro 3.8).

Habiendo estudiado las contribuciones individualmente se describió el procedimiento general para evolucionar la constante de acoplamiento cruzando dos umbrales de quark y separando las contribuciones. La evolución se componía de tres etapas en las cuales la incertidumbre por truncamiento de la función beta se calculaba en cada punto donde las CC eran implementadas (Cuadro 3.8) Cuando la evolución se hacía de M_Z a m_τ los puntos de referencia fueron las escalas de los quarks m_b y m_c , donde adicionalmente se agregaban incertidumbres debidas a que las masas de los quarks no son exactas. Cada punto de referencia dividía a la evolución en regiones caracterizadas por un número de quarks activos.

La separación en regiones permite también visualizar las contribuciones en cada etapa, en particular, evaluar la incertidumbre total por la evolución hacia m_c y el “regreso” a m_τ , proceso en el cuál la incertidumbre esta correlacionada, por lo cual se debe ser cuidadoso en esta región donde sólo la diferencia entre las dos evoluciones refleja el efecto de implementar CC y regresar. Con las distintas formas de obtener la incertidumbre en esta región el valor máximo fue de 5.440×10^{-4} mientras que el valor mínimo fue de 0.922×10^{-4} ; promediando ambas se estimó la incertidumbre total. Adicionalmente el efecto de usar nuestra solución iterativa, en comparación con una solución numérica fue estudiado, el cuál resultó ser máximo en la región con $n_f = 3$, siendo 1.442×10^{-4} .

La metodología propuesta es válida cuando se desea usar la masa de los quarks en otro esquema, e.g., el esquema del polo, siempre y cuando se posean las expresiones perturbativas entre la masa $\overline{\text{MS}}$ y el esquema deseado. Sin embargo, cuando comparamos las incertidumbres intrínsecas en las masas, las masas del polo resultan ser mayores, por lo cual se sugiere usar la masa $\overline{\text{MS}}$.

Finalmente, los resultados se aplicaron para el caso de más interés fenomenológico, a saber, la evolución hasta la escala de M_Z desde m_τ , con $\alpha_s(\mu_0) = \alpha_s(m_\tau)$. Las contribuciones en cada etapa muestran que las incertidumbres por cruzar el umbral del quark m_c son notablemente más grandes que las generadas por el cruce de m_b cuando éstas son estimadas como el coeficiente a 3-lazos en las CC. Adicionalmente se comparó la propuesta sugerida en [46] donde las CC de coincidencia son implementadas sin evolucionar a m_c en contraste con la evolución a m_c , donde las condiciones de coincidencia son implementadas; la diferencia en el valor central del acoplamiento fue menor al 1% sin introducir efectos adicionales debidas a la función beta.

Adicionalmente, se comprobó la afirmación de que la solución iterativa propuesta Ec. (2.60) permite tener más control en la evolución, siendo la incertidumbre $\Delta_{\text{it}} = 0.0001$ notablemente más pequeña que aquella debida a μ_{th} .

El acoplamiento en la escala de M_Z obtenido en este trabajo es $\alpha_s(M_Z) = 0.11998 \pm 0.00017_{\text{sys}} \left(\begin{smallmatrix} +0.00045 \\ -0.00053 \end{smallmatrix} \right)_{m_c} \pm 0.00010_{m_b}$, en donde se ha optado por separar las contribuciones por efectos sistemáticos y las generadas por una combinación de otros, por ejemplo estadísticos, los cuales están implícitos en la incertidumbre de entrada de las masas. Este resultado se encuentra dentro del intervalo del promedio obtenido por [55]. Es también digno de mencionar que la incertidumbre teórica obtenida está dominada por las incertidumbres experimentales; la colaboración CMS [56], usando eventos de producción de quarks top, obtiene experimentalmente $\alpha_s(M_Z) = 0.1151^{+0.0033}_{-0.0032}$.

Apéndice A

Apéndice

1.1. Independencia del esquema de renormalización de β_0 y β_1

Sea R un esquema de renormalización y Γ_R la función de Green renormalizada. La relación con la función de green desnuda será $\Gamma_R = Z(R)\Gamma$. Si ahora suponemos otro esquema de renormalización R' , entonces $\Gamma_{R'} = Z(R')\Gamma$

Luego, debe existir una relación entre ambos esquemas de renormalización, es decir

$$\Gamma_{R'} = Z(R', R)\Gamma_R \quad (\text{A.1})$$

donde $Z(R', R) = \frac{Z(R')}{Z(R)}$. Considérese ahora el conjunto de las posibles $Z(R'', R)$ para R, R'' arbitrario, entre los elementos de este conjunto se encontrará la ley de composición.

$$Z(R'', R) = Z(R'', R')Z(R', R) \quad (\text{A.2})$$

Entre el conjunto se encontrará también un inverso $Z^{-1}(R', R) = Z(R, R')$ tal que se satisface

$$Z(R, R) = 1 \quad (\text{A.3})$$

Con lo anterior se observa que distintos esquemas de renormalización están relacionados por una redefinición finita de los parámetros. De esta forma podemos relacionar los coeficientes del EGR en distintos esquemas tomando la teoría en la dimensión física del espacio-tiempo ($D=4$) y calculando $\mu^2 \frac{d}{d\mu^2}$ en un esquema en términos de $\mu^2 \frac{d}{d\mu^2}$ en otro esquema con la ayuda de la regla de la cadena. Partiendo de:

$$\beta'(a'_s) = \beta(a_s) \frac{\partial a'_s(a_s)}{\partial a_s} \quad (\text{A.4})$$

Expandiendo perturbativamente

$$a'_s = a_s + l_0 a_s^2 + l_1 a_s^3 + l_2 a_s^4 + \dots \quad (\text{A.5})$$

$$\beta(a_s) = -\beta_0 a_s^2 - \beta_1 a_s^3 - \beta_2 a_s^4 + \dots \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \\ \beta'(a'_s) &= \beta'(a_s + l_0 a_s^2 + l_1 a_s^3 + l_2 a_s^4 + \dots) \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned} \beta'(a'_s) &= -\beta'_0 (a_s + l_0 a_s^2 + l_1 a_s^3 + l_2 a_s^4 + \dots)^2 - \beta'_1 (a_s + l_0 a_s^2 + l_1 a_s^3 + l_2 a_s^4 + \dots)^3 \\ &\quad - \beta'_2 (a_s + l_0 a_s^2 + l_1 a_s^3 + l_2 a_s^4 + \dots)^4 + \dots \\ &= a_s^2 (-\beta'_0) + a_s^3 (-2\beta'_0 - \beta'_1) + a_s^4 (-2\beta'_0 l_0 - \beta_0 l_0^2 - 3l_0 \beta'_1 - \beta'_2) + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

$$\beta(a_s) \frac{\partial a'_s(a_s)}{\partial a_s} = a_s^2 (-\beta_0) + a_s^3 (-2l_0 \beta_0 - \beta_1) + a_s^4 (-3\beta_0 l_1 - 2\beta_1 l_0 - \beta_2) + \dots \quad (\text{A.9})$$

i.e., $\beta'_0 = \beta_0$ y $\beta'_1 = \beta_1$.

1.2. Aproximantes de Padé

En muchos problemas como el que se trata en este trabajo sólo algunos coeficientes de la expansión perturbativa son conocidos. La esperanza es que más términos darán una descripción cuantitativa cuando el parámetro perturbativo no es tan pequeño [57]. Una forma de usar los coeficientes conocidos para obtener información cuantitativa es usar un Aproximante de Padé (AP) $[M/N]$ que tiene la forma de un polinomio de grado M dividido entre otro de grado N

$$[M/N] \equiv \frac{c_0 + c_1 a + \dots + c_M a^M}{1 + d_1 a + \dots + d_N a^N} : \quad M + N = L \quad (\text{A.10})$$

cuyos coeficientes están relacionados con la serie perturbativa $S(a)$

$$S(a) = b_0 + b_1 a + b_2 a^2 + \dots + b_L a^L \quad (\text{A.11})$$

tal que $[M/N]$ tiene una serie de Taylor que coincide con la serie original, i.e.,

$$[N/M] = S(a) + \mathcal{O}(a^{N+M+1}) \quad (\text{A.12})$$

Con esta premisa, el término $\mathcal{O}(a^{N+M+1})$ en esta expansión se ha usado para estimar el coeficiente líder desconocido, i.e., el término S_{N+M+1} , el cual se conoce como Predicción del Aproximante de Padé PAP [35, 33]. En particular se ha usado para estimar β_4 mostrando resultados notables cuando las contribuciones de Casimir cuánticas no se toman en cuenta, lo cual es un revés en cuanto a la estimación de la incertidumbre del procedimiento.

1.3. Estimación del valor constante de c_5 en las Condiciones de Coincidencia a 5-lazos

Es posible hacer una estimación educada del coeficiente c_5 en las Condiciones de Coincidencia partiendo del hecho de que es posible elegir $\mu_{\text{th}} = m_h(\mu)$, con lo cual los términos logarítmicos se hacen cero. Las CC se escriben en una expansión perturbativa en unidades de masa \overline{MS} como

$$a'_s = a_s \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} k_n(l) a_s^n \right) \quad (\text{A.13})$$

que es posible obtener en términos de la masa del polo usando la relación perturbativa apropiada. Los coeficientes son función de $l = \ln(\mu^2/m(\mu)^2)$, donde la estructura de cada coeficiente es

$$\begin{aligned} k_n(l) &= c_n + l(\dots) + l^2(\dots) + l^3(\dots) + \dots \\ &= C(l) + P(l)n_l + Q(l)n_l^2 + R(l)n_l^3 + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

donde c_n es el término constante cuya obtención involucra el cálculo de funciones de Green y es dependiente del esquema, además los factores $C(l)$, $P(l)$, $Q(l)$, etc son polinomios de grado n , $n-1$, $n-2, \dots$, respectivamente. Los términos constantes de cada polinomio corresponden al coeficiente c_n , i.e.,

$$c_n = C(l)|_{l=0} + n_l P(l)|_{l=0} + n_l^2 Q(l)|_{l=0} + \dots \quad (\text{A.15})$$

Esta estructura nos conduce a la siguiente proposición: encontrando las raíces de los polinomios de cada coeficiente k_{n-1} se puede estimar el coeficiente c_n del coeficiente k_n igualando este con cero. Estudiemos la validez de esta proposición para el caso de k_3 dado k_2 , donde

$$k_2(l) = C(l) = \frac{11}{72} - \frac{11l}{24} + \frac{l^2}{36} \quad (\text{A.16})$$

resolviendo $C(l) = 0$ se encuentran las raíces

$$\begin{aligned} l_1 &= 0.340354 \\ l_2 &= 16.159646 \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

donde la primera es la raíz significativa (puesto que nos interesa estimar el valor de c_n). Usando esta raíz en los términos logarítmicos de k_3 , i.e.,

$$k_3(l) = c_3 + \left(l \left(-\frac{955}{576} + \frac{67n_l}{576} \right) + l^2 \left(\frac{53}{576} - \frac{n_l}{36} \right) \right) \Big|_{l=l_1} = 0. \quad (\text{A.18})$$

Para que la expresión anterior sea consistente y sea posible obtener el coeficiente c_n , es claro que este debe tener un término constante más un término con n_l , i.e.,

$$c_3^{\text{est}} = c_{3,1} + n_l c_{3,2} = 0.553826 - 0.036372n_l. \quad (\text{A.19})$$

El coeficiente real es $c_3 = 0.972057 - 0.084651n_l$, es decir, la estimación es menor por un factor de aproximadamente dos, lo cual significa que ésta únicamente nos da una idea del valor real de este coeficiente. Para k_4 dado $k_3 = C(l) + n_l P(l)$, se obtienen para $Q(l)$

$$\begin{aligned} l_1 &= 0.60605002 \\ l_2 &= 9.63447 + 15.9256i \\ l_3 &= 9.63447 - 15.9256i \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

mientras que para $P(l)$

$$\begin{aligned} l_1 &= 0.937750 \\ l_2 &= 3.249750, \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

una vez más las raíces l_1 son las adecuadas, luego evaluando en ellas se obtienen

$$c_4^{\text{est},1} = c_{4,1} + n_l c_{4,2} + n_l^2 c_{4,3} = 7.49968 - 1.08231n_l - 0.033775n_l^2, \quad (\text{A.22})$$

$$c_4^{\text{est},2} = c_{4,1} + n_l c_{4,2} + n_l^2 c_{4,3} = 4.917445 - 0.735832n_l - 0.02161680n_l^2, \quad (\text{A.23})$$

que comparando con el resultado exacto

$$c_4 = 5.17035 - 1.00993n_l - 0.0219784n_l^2, \quad (\text{A.24})$$

resulta impresionante la mejora en la estimación $c_4^{\text{est},2}$, donde el error más grande es de 27 % en el factor independiente de n_l , mientras que el error en el término n_l^2 ¡es menor al 2%! Ahora, ¿cuál de las dos estimaciones es la correcta? Por ahora ambas son posibilidades, hasta que analicemos las otras raíces. Continuando con k_4 para estimar c_5 , se tienen tres polinomios cuyas raíces reales son

$$\begin{aligned} l_1 &= 0.638244, \\ l_2 &= 232.05936, \\ l_3 &= 0.616177 \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Recuérdese que los términos logarítmicos que conforman k_5 sólo son conocidos completamente hasta $\mathcal{O}(l^2)$, donde los ordenes más bajos son función de los coeficientes de la función beta desconocidos. Empleando la socorrida estimación de la función beta con Aproximantes de Padé, recordando que la estimación para $\beta_4 = 0 \pm \beta_4^{\text{WAPAP}}$ se obtiene

1.3. ESTIMACIÓN DEL VALOR CONSTANTE DE c_5 EN LAS CONDICIONES DE COINCIDENCIA A 5-

$$c_5^{\text{est}} = 15.83824 - 5.788567nl - 0.229251nl^2 - 0.000599nl^3 \quad (\text{A.26})$$

donde la primera raíz de (A.25) ha sido evaluada. La observación empírica consiste en que los logaritmos pertinentes para la estimación son los encontrados en el intervalo $(0, 1)$, lo cual sugiere tomar una media de los valores que se han obtenido hasta ahora:

$$\bar{l} = 0.627715 \pm 0.211785 \quad (\text{A.27})$$

Además el coeficiente depende los valores precisos de B, C, D en (2.74), conocidos únicamente a través de los AP, explícitamente esto se ve de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \bar{c}_5 = & -70.01 - 0.6277(B + C + D) + n_l(14.30 - 1.255C - 1.883D) \\ & + n_l^2(-0.3354 - 1.883D) + n_l^3(-0.0006390) \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

usando el valor central de \bar{l} . Los primeros dos términos son críticos ya que son susceptibles de cancelaciones debido a que en las predicciones $|B| > |C| > |D|$ para $SU(3)$ [35], por lo cual seguiremos el camino conservador y tomaremos al coeficiente como incertidumbre, i.e.,

$$\begin{aligned} \bar{c}_5 = & 0 \pm 15.5988_\beta \pm 4.82143_\gamma - (0 \pm 5.69388_\beta \pm 1.9050913)n_l - (0 \pm 0.224139_\beta \pm 0.10262635_\gamma)n_l^2 \\ & - (0.000638990_\beta \pm 0.00076964441_\gamma)n_l^3 \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

donde x_β, y_γ se refieren a las incertidumbres por los coeficientes desconocidos de la función beta y el originado por \bar{l} , respectivamente. Nótese que el último coeficiente de (A.29) sólo tiene una contribución en \bar{l} puesto que en él no figuran B, C ni D . Para finalizar, es posible ir un paso adelante y obtener las raíces introduciendo la estimación para c_5 . Por simplicidad se usará (A.26) en el cálculo, obteniendo las raíces en el intervalo $(0, 1)$

$$l_1 = 0.61333082$$

$$l_2 = 0.77706972$$

$$l_3 = 0.12613272$$

$$l_4 = 0.63821667$$

No se quiere desea aventurar una conclusión puesto que son muchas las incógnitas, sin embargo el proceso da luz sobre una posible justificación en lo referente a la elección del umbral μ_{th} donde las Condiciones de Coincidencia deben ser implementadas.

Bibliografía

- [1] John Collins. *Renormalization*. Cambridge University Press, Great Britain, 1984.
- [2] K.G. Chetyrkin, Bernd A. Kniehl, and M. Steinhauser. Strong coupling constant with flavor thresholds at four loops in the \overline{MS} scheme. *Phys.Rev.Lett.*, 79:2184–2187, 1997.
- [3] J. Beringer et al. Review of Particle Physics (RPP). *Phys.Rev.*, D86:010001, 2012.
- [4] Andrey Grozin. Decoupling in QED and QCD. *Int.J.Mod.Phys.*, A28:1350015, 2013.
- [5] Steven Weinberg. *The Quantum Theory of Fields: Modern Applications*. Cambridge University Press, Great Britain, 1996.
- [6] Francisco J. Ynduráin. *The theory of Quark and gluon interactions*. Springer, USA, 2006.
- [7] Andrey Grozin. *Lectures on QED and QCD. Practical Calculation and Renormalization of One- and Multi-Loop Feynman Diagrams*. World Scientific Publishing, Singapore, 2007.
- [8] Y. Schroder and M. Steinhauser. Four-loop decoupling relations for the strong coupling. *JHEP*, 0601:051, 2006.
- [9] K.G. Chetyrkin, Johann H. Kuhn, and Christian Sturm. QCD decoupling at four loops. *Nucl.Phys.*, B744:121–135, 2006.
- [10] K.G. Chetyrkin, J.H. Kühn, and A. Kwiatkowski. QCD corrections to the e^+e^- cross-section and the z boson decay rate: concepts and results. *Physics Reports*, 277(4):189–281, 1996.
- [11] David J. Gross and Frank Wilczek. Ultraviolet behavior of non-abelian gauge theories. *Phys. Rev. Lett.*, 30:1343–1346, Jun 1973.
- [12] H. David Politzer. Reliable perturbative results for strong interactions? *Phys. Rev. Lett.*, 30:1346–1349, Jun 1973.
- [13] G. 't Hooft and M. Veltman. Regularization and renormalization of gauge fields. *Nuclear Physics B*, 44(1):189 – 213, 1972.
- [14] C.G. Bollini and J.J. Giambiagi. Lowest order “divergent” graphs in v-dimensional space. *Physics Letters B*, 40(5):566 – 568, 1972.
- [15] S.A. Larin and J.A.M. Vermaseren. The three-loop QCD β -function and anomalous dimensions. *Physics Letters B*, 303(3–4):334 – 336, 1993.

- [16] T. van Ritbergen, J.A.M. Vermaseren, and S.A. Larin. The four-loop β -function in quantum chromodynamics. *Physics Letters B*, 400(3–4):379 – 384, 1997.
- [17] R. Tarrach. The pole mass in perturbative qcd. *Nucl.Phys.*, B183:384, 1981.
- [18] O.V. Tarasov. Anomalous dimensions of quark masses in three loop approximation. *Dubna Joint Institute for Nuclear Research Preprint No. JINR-P2-82-900*, 1982.
- [19] J.A.M. Vermaseren, S.A. Larin, and T. van Ritbergen. The four loop quark mass anomalous dimension and the invariant quark mass. *Phys.Lett.*, B405:327–333, 1997.
- [20] Enrico Franco and Vittorio Lubicz. Quark mass renormalization in the \overline{ms} and \overline{ri} schemes up to the \overline{nnl} order. *Nucl.Phys.*, B531:641–651, 1998.
- [21] K.G. Chetyrkin and A. Retey. Renormalization and running of quark mass and field in the regularization invariant and \overline{ms} schemes at three loops and four loops. *Nucl.Phys.*, B583:3–34, 2000.
- [22] R. Tarrach P.Pascual. *QCD: Renormalization for the Practitioner*. Springer-Verlag, Germany, 1984.
- [23] G.M. Prosperini, M. Raciti, and C. Simolo. On the running coupling constant in QCD. *Prog.Part.Nucl.Phys.*, 58:387–438, 2007.
- [24] E.J. Hinch. *Perturbation Methods*. Cambridge University Press, EUA, 1991.
- [25] D. E. G. Hare D. J. Jeffrey D. E. Knuth R. M. Corless, G. H. Gonnet. On the lambert w function. *Advances in Computational Mathematics*, V 5, 5(1):329–359, 1996.
- [26] Einan Gardi, Georges Grunberg, and Marek Karliner. Can the QCD running coupling have a causal analyticity structure? *JHEP*, 9807:007, 1998.
- [27] Wolfram Research Inc. Mathematica, version 7.0, 2008.
- [28] Gorazd Cvetič and Igor Kondrashuk. Explicit solutions for effective four- and five-loop QCD running coupling. *JHEP*, 1112:019, 2011.
- [29] J. Erler. Global Fits to Electroweak Data Using GAPP. *ArXiv High Energy Physics - Phenomenology e-prints*, 2000.
- [30] M. Czakon. The four-loop qcd beta-function and anomalous dimensions. *Nucl.Phys.*, B710:485–498, 2005.
- [31] B. Holdom. Large n flavor beta-functions: a recap. *Phys.Lett.*, B694:74–79, 2010.
- [32] J.A. Gracey. The QCD Beta function at $O(1/N(f))$. *Phys.Lett.*, B373:178–184, 1996.
- [33] John R. Ellis, Marek Karliner, and Mark A. Samuel. A prediction for the four loop beta function in qcd. *Phys.Lett.*, B400:176–181, 1997.
- [34] F. Chishtie, V. Elias, and Thomas G. Steele. Asymptotic pade approximant predictions for renormalization group functions of massive ϕ^4 scalar field theory. *Phys.Lett.*, B446:267–271, 1999.

- [35] John R. Ellis, I. Jack, D.R.T. Jones, M. Karliner, and M.A. Samuel. Asymptotic pade approximant predictions: Up to five loops in qcd and sqcd. *Phys.Rev.*, D57:2665–2675, 1998.
- [36] William A. Bardeen, A.J. Buras, D.W. Duke, and T. Muta. Deep inelastic scattering beyond the leading order in asymptotically free gauge theories. *Phys.Rev.*, D18:3998, 1978.
- [37] W. Furmanski and R. Petronzio. Lepton - hadron processes beyond leading order in quantum chromodynamics. *Z.Phys.*, C11:293, 1982.
- [38] Baoding Liu. *Uncertainty Theory*,. Springer, Berlin, 2007.
- [39] Matteo Cacciari and Nicolas Houdeau. Meaningful characterisation of perturbative theoretical uncertainties. *JHEP*, 1109:039, 2011.
- [40] G. D’Agostini and M. Raso. Uncertainties due to imperfect knowledge of systematic effects: General considerations and approximate formulae. 2000.
- [41] Roger J. Barlow. *Statistics: a guide to the use of statistical methods in the physical sciences*. Wiley, Great Britain, 1989.
- [42] Kirill Melnikov and Timo van Ritbergen. The Three loop relation between the MS-bar and the pole quark masses. *Phys.Lett.*, B482:99–108, 2000.
- [43] K.G. Chetyrkin, Johann H. Kuhn, and M. Steinhauser. RunDec: A Mathematica package for running and decoupling of the strong coupling and quark masses. *Comput.Phys.Commun.*, 133:43–65, 2000.
- [44] K.G. Chetyrkin, Bernd A. Kniehl, and M. Steinhauser. Decoupling relations to $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$ and their connection to low-energy theorems. *Nucl.Phys.*, B510:61–87, 1998.
- [45] B.A. Kniehl, A.V. Kotikov, A.I. Onishchenko, and O.L. Veretin. Strong-coupling constant with flavor thresholds at five loops in the $\overline{\text{MS}}$ scheme. *Phys.Rev.Lett.*, 97:042001, 2006.
- [46] German Rodrigo and Arcadi Santamaria. QCD matching conditions at thresholds. *Phys.Lett.*, B313:441–446, 1993.
- [47] Siegfried Bethke. The 2009 World Average of $\alpha(s)$. *Eur.Phys.J.*, C64:689–703, 2009.
- [48] Johann H. Kuhn, Matthias Steinhauser, and Christian Sturm. Heavy Quark Masses from Sum Rules in Four-Loop Approximation. *Nucl.Phys.*, B778:192–215, 2007.
- [49] Werner Bernreuther. Threshold effects on the qcd coupling $\alpha(m_s)$. 1994.
- [50] German Rodrigo, Antonio Pich, and Arcadi Santamaria. $\alpha_s(m(z))$ from tau decays with matching conditions at three loops. *Phys.Lett.*, B424:367–374, 1998.
- [51] Bertrand Delamotte. A Hint of renormalization. *Am.J.Phys.*, 72:170–184, 2004.
- [52] J.A. Gracey. QCD and QED renormalization group functions: A Large N(f) approach. *Nucl.Phys.Proc.Suppl.*, 51C:24–29, 1996.

- [53] International Organization for Standardization (ISO). Guide to the expression of uncertainty in measurement. Technical report, Geneva, 2008.
- [54] Michel Davier, Andreas Hocker, and Zhiqing Zhang. The Physics of hadronic tau decays. *Rev.Mod.Phys.*, 78:1043–1109, 2006.
- [55] Siegfried Bethke. World summary of α_s (2012). *Nucl.Phys.Proc.Suppl.*, 234:229–234, 2013.
- [56] Serguei Chatrchyan et al. Determination of the top-quark pole mass and strong coupling constant from the $t\bar{t}$ production cross section in pp collisions at $\sqrt{s} = 7$ tev. 2013.
- [57] Marek Karliner. Precise estimates of high orders in QCD. *Acta Phys.Polon.*, B29:1505–1520, 1998.