



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN CIENCIA E INGENIERÍA DE LA COMPUTACIÓN

VIGILANCIA DEL EXTERIOR DE POLÍGONOS CON RADARES

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRA EN CIENCIAS (COMPUTACIÓN)

PRESENTA:

MARÍA DEL CARMEN CEDILLO CHAGOYA

DIRECTOR DE TESIS

DR. JORGE URRUTIA GALICIA
IMATE-UNAM

CODIRECTOR DE TESIS

DR. CARLOS BRUNO VELARDE VELÁZQUEZ
IIMAS-UNAM

MÉXICO, D. F. FEBRERO 2014



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Dedicatoria

*Para mi pequeña familia:
mi mamá, papá y hermana,
los que siempre están conmigo
y me apoyan incondicionalmente.*

Agradecimientos

Quiero expresar profunda gratitud a los doctores: Jorge Urrutia, Carlos Velarde y David Flores, por guiarme en esta investigación. Así como agradecer el entusiasmo que tienen por formar alumnos de calidad, día con día.

A mis compañeros y amigos del posgrado, los cuales fueron parte de esta difícil pero agradable experiencia, mil gracias por el apoyo profesional y personal que me brindaron.

También agradezco a aquellas personas que, aunque lejos, siempre me impulsaron y comprendieron que necesitaba espacio para concluir esta gran meta.

Lo reitero, ¡muchas gracias a todos ustedes!

Índice general

Agradecimientos	III
1. Introducción	1
2. Terminología Básica	5
2.1. Teoría de gráficas	5
2.1.1. Grado de un vértice	6
2.1.2. Subgráficas	7
2.1.3. Gráficas conexas	8
2.1.4. Gráficas bipartitas	11
2.1.5. Árboles	12
2.1.6. Coloración	13
2.1.7. Planaridad	14
2.2. Polígonos	17
2.2.1. Tipos de polígonos	17
2.3. Triangulación	18
3. Galerías de Arte	23
3.1. Variantes del problema de las galerías de arte	25
3.1.1. Tipos de guardias	25
3.1.2. Tipos de galerías	26
3.2. Galerías ortogonales	26
3.2.1. Vigilancia del interior de polígonos ortogonales	26
3.2.2. Vigilancia del exterior de polígonos ortogonales	32
3.3. Galerías ortogonales con hoyos	36
3.3.1. Vigilancia del interior de polígonos ortogonales con hoyos	36
3.3.2. Vigilancia del exterior de polígonos ortogonales con hoyos	39
3.4. Vigilancia con radares	41
3.4.1. Vigilancia de una recta en el plano	41
3.4.2. Vigilancia del plano	43
4. Vigilancia del exterior de polígonos ortogonales con radares	47
4.1. Introducción	47
4.2. Reglas dobles de iluminación	48

4.2.1. Alternancia de los radares en los vértices del polígono . . .	50
4.3. Resultados anteriores	51
4.3.1. Iluminación de un punto en el plano con radares	52
4.3.2. Vigilancia del interior de polígonos ortogonales con radares	52
4.4. Problema de la fortaleza con radares	54
4.5. Problema del patio de la prisión con radares	61
5. Conclusiones y problemas abiertos	65

Capítulo 1

Introducción

Resguardar el interior y/o exterior de edificios y recintos siempre ha sido primordial para protegerlos de posibles ataques. Algunas medidas de seguridad que se han tomado son la contratación de personal de vigilancia y la instalación de sistemas computarizados basados en cámaras o radares, lo cual se vuelve muy costoso si la estructura de los recintos es muy grande o muy sofisticada, ya que el número de vigilantes o radares requeridos incrementa. Por esta razón, es deseable saber el mínimo número de guardias que aseguren el resguardo de los recintos.

Este tipo de problemas se han tratado en el área de la geometría computacional. El más antiguo de ellos es el *problema de la galería de arte*, planteado por el profesor V. Klee en 1973, en el cual se requiere determinar el mínimo número de guardias que vigilen cualquier galería de arte de n muros. La interpretación geométrica que se le ha dado a este problema a través de los años, es representar a la galería como un polígono simple P y los guardias como puntos al interior de P .

En el año de 1975, V. Chavátal [8] presentó la solución al problema bajo el *teorema de la galería de arte de Chvátal*, el cual establece: “*Para vigilar un polígono simple P con n vértices son suficientes y en algunos casos necesarios $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ vértices guardia*”.

Este teorema fomentó diferentes variantes del problema de la galería de arte, surgiendo así muchos resultados publicados, los cuales han sido principalmente recopilados en tres compendios [29, 34, 32]. Ya que en este problema y en sus variantes son fundamentales los problemas de visibilidad, éstos tienen varias aplicaciones en distintas áreas de la computación, entre las cuales están: robótica [23, 31], planificación de movimiento [26, 38], reconocimiento de patrones [33, 36], visión computacional [35, 39], graficación por computadora [24, 37] y redes inalámbricas [11].

Dos de las variantes interesantes del problema de la galería de arte fueron propuestas independientemente por D. Wood y J. Malkelvitch, a los cuales Wood denominó *el problema de la fortaleza (The Fortress Problem)* y *el problema del patio de la prisión (The Prison Yard Problem)*. El primero requiere saber el número de guardias necesarios para vigilar el exterior de un polígono y el segundo el

número de guardias necesarios para vigilar el interior y el exterior de un polígono [29]. Muchos de los métodos para resolver este tipo de problemas en diferentes tipos de polígonos incluyen técnicas que se han utilizado para vigilar el interior de éstos.

En 1994, V. Estivill-Castro y J. Urrutia [13] resolvieron una variante del problema de la galería de arte en polígonos ortogonales, donde los guardias tienen la restricción de vigilar sólo un ángulo de $\frac{\pi}{2}$ y son llamados *reflectores ortogonales*. Ellos propusieron reglas que permiten colocar este tipo de reflectores en vértices de polígonos ortogonales de manera óptima, para mantener su interior completamente vigilado.

Por otra parte, E. Kranakis *et al.* [21] propusieron el uso de reflectores con ángulo α que giran a una velocidad angular constante, los cuales son llamados *radars*. Ellos establecieron el número de radares requeridos para vigilar continuamente una línea, un semiplano y el plano, así como el mínimo ángulo α y la configuración inicial de los radares para lograr estos objetivos.

Recientemente, trabajaron en colaboración un grupo de profesores y alumnos, [4], que basándose en las cuatro reglas para vigilar un polígono ortogonal P [13], eligieron de manera apropiada dos de estas reglas para colocar radares de ángulo $\frac{3\pi}{2}$, todos con la misma orientación, en los mismos vértices de P especificados por las dos reglas seleccionadas, consiguiendo así vigilar en todo momento el interior de P . Con las otras dos reglas consiguieron el mismo objetivo. Además probaron que $\frac{\pi}{2}$ radares son suficientes y en algunos casos necesarios para vigilar el interior de P . También mostraron que todo lo anterior es válido para el caso en el que P tiene hoyos.

Continuando con el uso de radares de ángulo $\frac{3\pi}{2}$, en la presente tesis se extiende el resultado presentado en [4], con el objetivo de vigilar el interior y el exterior de polígonos ortogonales, así como sólo el exterior de ellos. Ésto constituye nuevas variantes del problema del patio de la prisión y del problema de la fortaleza con el uso de radares. Para resolver ambos problemas, a las formas de vigilar a un polígono ortogonal mencionadas en el párrafo anterior, se les llamará *reglas dobles de iluminación*.

La solución para el problema de la fortaleza está basada en las reglas dobles de iluminación y en la vigilancia de semiplanos con radares de ángulo $\frac{3\pi}{2}$. Esta combinación permite que el exterior de un polígono ortogonal quede vigilado sólo colocando radares en sus vértices.

Mientras que la solución del problema del patio de la prisión con el uso de radares de ángulo $\frac{3\pi}{2}$, se restringe a la vigilancia del interior de un polígono ortogonal P y sólo la parte del exterior de P contenida en el interior de un rectángulo \mathcal{R} que encierra completamente a P . La solución también se basa en las reglas dobles de iluminación, por lo que los radares son colocados en vértices de P y en dos puntos fuera de P , llamados *puntos Steiner*.

Interesantemente, las mismas cotas obtenidas tanto para el problema de la fortaleza como para el problema del patio de la prisión, resuelven los problemas similares para polígonos ortogonales con hoyos.

La tesis está organizada de la siguiente manera: en el capítulo 2 se presenta la terminología básica, que incluye teoría de gráficas, polígonos y triangulación de

polígonos, la cual es usada a lo largo del desarrollo de la misma; en el capítulo 3 se muestran algunos resultados de distintas variantes de problemas de las galerías de arte, principalmente en polígonos ortogonales; en el capítulo 4 se da el análisis de vigilancia del interior de polígonos ortogonales y algunas observaciones de las reglas dobles de iluminación, además se presentan los resultados principales de la tesis; y por último en el capítulo 5 se presentan las conclusiones de esta investigación, así como algunos problemas abiertos en los que también se contempla el uso de radares.

Capítulo 2

Terminología Básica

Con la finalidad de presentar términos y resultados que ayudan a modelar soluciones para los *problemas de las galerías de arte*, en este capítulo se presentan definiciones básicas, notaciones y algunos resultados importantes de la teoría de gráficas, polígonos y triangulaciones de polígonos, los cuales pueden consultarse a detalle en [34, 16, 29, 9].

La teoría de gráficas suele utilizarse para abstraer problemas de la vida real a problemas matemáticos. Por lo cual es aplicada en una gran cantidad de áreas tales como en sociología, biología, química, física, lingüística y ciencias de la computación, entre otras. En particular juega un papel muy importante en el área de la geometría computacional, ya que ayuda a establecer y a fundamentar algoritmos para problemas reales, como por ejemplo, en problemas de las galerías de arte, donde las galerías son representadas por polígonos formados por un conjunto de vértices y aristas.

Así mismo, las triangulaciones de polígonos son muy útiles en el estudio de problemas de las galerías de arte, por esta razón, buscar propiedades importantes de ellas así como algoritmos eficientes para triangular han recibido mucha atención en la geometría computacional.

2.1. Teoría de gráficas

Una *gráfica* G es un conjunto finito no vacío V de objetos llamados *vértices* (también llamados nodos o puntos) y un conjunto E de subconjuntos de dos elementos de V llamados *aristas*. Para indicar que una gráfica G tiene un conjunto de vértices V y un conjunto de aristas E se escribe $G = (V, E)$. Para enfatizar que V es el conjunto de vértices de una gráfica G , denotamos a V como $V(G)$. Análogamente denotamos las aristas E como $E(G)$. El número de vértices de G es el *orden* de G y el número de aristas de G es el *tamaño* de G .

Si u y v pertenecen a V y si la arista $e = \{u, v\} \in E$, entonces se dice que u y v son *adyacentes*. La arista $e = \{u, v\}$ suele denotarse como uv .

Si uv y vw son aristas distintas de G , entonces uv y vw son *aristas incidentes*. Además se dice que el vértice u y la arista uv son *incidentes* entre sí.

Las gráficas típicamente son representadas por diagramas en los cuales cada vértice se representa por un punto o un círculo pequeño (abierto o sólido) y cada arista es representada por un segmento de línea o una curva uniendo los pequeños círculos correspondientes. Un diagrama que representa a una gráfica G es referido como la misma gráfica G y los pequeños círculos y líneas representando los vértices y aristas de G , respectivamente, son así mismo referidos como los vértices y aristas de G .

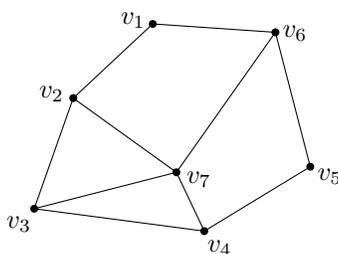


Figura 2.1: Gráfica G .

La figura 2.1 muestra una representación de la gráfica $G = (V, E)$ donde:

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$$

$$E = \{v_1v_2, v_1v_6, v_2v_3, v_2v_7, v_3v_4, v_3v_7, v_4v_5, v_4v_7, v_5v_6, v_5v_7\}$$

y el orden de la gráfica G es 7 y el tamaño es 10. Además las aristas v_1v_2 y v_1v_6 son incidentes y el vértice v_2 es incidente a la arista v_2v_3 , pero no lo es a la arista v_5v_6 .

2.1.1. Grado de un vértice

El *grado de un vértice* v en una gráfica G , denotado por $deg_G(v)$ o por $deg(v)$, es el número de vértices en G que son adyacentes a v . Mientras que la vecindad $N(v)$ define el conjunto de vértices adyacentes a v en la gráfica G . Equivalentemente el grado de v es el número de aristas de G incidentes con v . Un vértice con grado 0 es referido como un *vértice aislado* y un vértice con grado 1 es un *vértice final* o una *hoja*.

El grado mayor entre los vértices de G es llamado el *grado máximo* de G , denotado por $\Delta(G)$. El grado mínimo es denotado por $\delta(G)$. Entonces, si v es un vértice de una gráfica G de orden n , se tiene:

$$0 \leq \delta(G) \leq deg(v) \leq \Delta(G) \leq n - 1.$$

Por ejemplo, para la gráfica de la figura 2.1:

$$\deg(v_1) = 2, \deg(v_2) = 3, \deg(v_3) = 3, \deg(v_4) = 3, \deg(v_5) = 2, \deg(v_6) = 3 \text{ y} \\ \deg(v_7) = 4.$$

Así mismo $\delta(G) = 2$ y $\Delta(G) = 4$.

El siguiente teorema es considerado como el primer teorema de la teoría de gráficas y fue demostrado en el año de 1736 por Leonhard Euler [14]. En éste se trata la suma de los grados de los vértices de una gráfica:

Teorema 1. *Si G es una gráfica de tamaño m , entonces:*

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2m.$$

Demostración. Cuando sumamos los grados de los vértices de G , cada arista es contada dos veces, una vez por cada uno de sus dos vértices incidentes. \square

2.1.2. Subgráficas

Se dice que una gráfica H es una *subgráfica* de una gráfica G si $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$, donde si una arista $e = uv \in E(H)$, entonces los vértices u y v están en $V(H)$. Si H es una subgráfica de G entonces se dice que G es una *supergráfica* de H . Si $V(H) = V(G)$ entonces H es una *subgráfica generadora* de G . Si H es una subgráfica de G y si $V(H)$ es un subconjunto propio de $V(G)$ o $E(H)$ es un subconjunto propio de $E(G)$, entonces H es una *subgráfica propia* de G .

Para un subconjunto $S \neq \emptyset$ de $V(G)$, la subgráfica $G[S]$ de G *inducida* por S , tiene a S como el conjunto de vértices y dos vértices u y $v \in S$ son adyacentes en $G[S]$ si y sólo si u y v son adyacentes en G . Esta gráfica también es denotada por $\langle S \rangle_G$ o simplemente por $\langle S \rangle$.

Una subgráfica H de una gráfica G es llamada una *subgráfica inducida* si hay un subconjunto $S \neq \emptyset$ de $V(G)$ tal que $H = G[S]$. Así $G[V(G)] = G$. También, para un conjunto $X \neq \emptyset$ de aristas de G , la *subgráfica $G[X]$ inducida por X* , tiene a X como el conjunto de aristas y un vértice $v \in G[X]$ si v es incidente con al menos una arista en X . Una subgráfica H de G es *inducida por aristas* si hay un subconjunto $X \neq \emptyset$ de $E(G)$ tal que $H = G[X]$. Así $G[E(G)] = G$ si y sólo si G no tiene vértices aislados.

En la figura 2.2 se muestra una gráfica G y las subgráficas H_i con $1 \leq i \leq 5$. Todas estas gráficas son subgráficas propias de G , excepto G misma y H_1 . Ésta última porque la arista $v_1v_6 \notin E(G)$. H_2 es una subgráfica generadora de G ya que $V(H_2) = V(G)$. H_3 no es una subgráfica inducida de G debido a que la arista $v_1v_4 \notin V(H_3)$ y $v_1v_4 \in V(G)$. Por otro lado, las gráficas H_4 y H_5 son subgráficas inducidas de G por los subconjuntos $S_1 = \{v_1, v_3, v_4, v_5\}$ y $S_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$, respectivamente. Además la gráfica H_4 es inducida por aristas por el subconjunto $X = \{v_1v_4, v_3v_4, v_4v_5\}$.

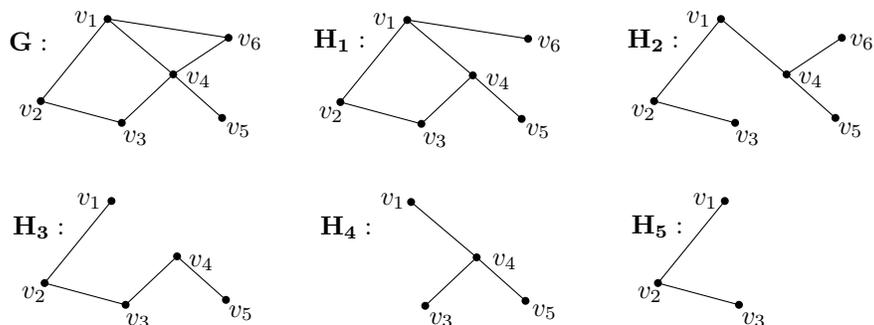


Figura 2.2: Ejemplos de subgráficas de una gráfica G .

2.1.3. Gráficas conexas

Sean u y v dos vértices (no necesariamente distintos) de una gráfica G . Entonces, se dice que un *camino* (u, v) en G es una secuencia de vértices v_0, v_1, \dots, v_k con $v_i v_{i+1} \in G$ para $0 \leq i \leq k-1$, donde $u = v_0$ y $v = v_k$.

Por otra parte, el número de aristas encontradas en un camino es llamado la *longitud* del camino. La distancia $d(u, v)$ de un vértice u a un vértice v en una gráfica G es la mínima longitud de los caminos (u, v) en G .

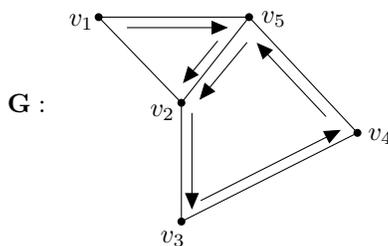


Figura 2.3: Camino (v_1, v_2) de la gráfica G .

En la figura 2.3 se muestra un camino de la gráfica G que va del vértice v_1 al vértice v_2 , el cual está definido como camino $(v_1, v_2) = (v_1, v_5, v_2, v_3, v_4, v_5, v_2)$ y tiene longitud 6. Mientras que la distancia $d(v_1, v_2) = 1$ se da por otro camino en

G , definido como camino- $(v_1, v_2) = (v_1, v_2)$.

Un camino cuyo vértice inicial y final son distintos es un *camino abierto*, de lo contrario es un *camino cerrado*. Es posible que un camino consista de un sólo vértice, en este caso se dice que es *camino trivial*, el cual es un camino cerrado.

Una *ruta*- (u, v) de una gráfica G es una secuencia de vértices distintos v_1, \dots, v_k tal que v_i y v_{i+1} ($1 \leq i \leq k-1, k \geq 2$) son adyacentes en G , donde $u = v_1$ y $v = v_k$. Mientras que un *ciclo*- (u, v) de G es una ruta v_1, \dots, v_k junto con la arista $v_k v_1$, $k \geq 3$.

Dos vértices u y v en una gráfica G son *conexos* si G tiene una ruta de u a v . Entonces, la gráfica G es *conexa* si cada dos vértices de G son conexos, de lo contrario G es *disconexa*. En la figura 2.4 se muestra un ejemplo de una gráfica conexa y de una gráfica desconexa.

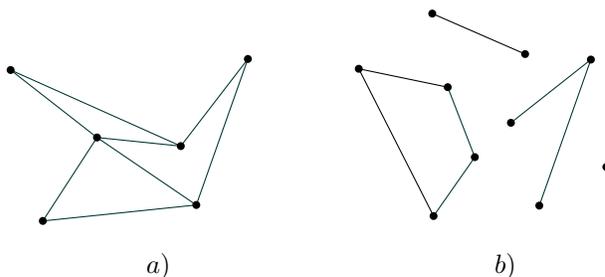


Figura 2.4: a) Gráfica conexa. b) Gráfica desconexa.

Una subgráfica conexa H de una gráfica G es un componente de G si H no es una subgráfica propia de una gráfica conexa de G . El número de componentes en una gráfica G es denotado por $k(G)$. Así, G es conexa si y sólo si $k(G) = 1$. En la gráfica G de la figura 2.5 se muestra que las subgráficas inducidas $G[S_1]$ y $G[S_2]$, donde $S_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ y $S_2 = \{v_8, v_9, v_{10}, v_{11}\}$ son las componentes de G . Por lo que, $k(G) = 2$.

Sea v un vértice y e una arista de una gráfica G , si $G-v$ tiene más componentes que G , entonces v es un *vértice de corte* de G . Mientras que si $G-e$ tiene más componentes que G , entonces e es un *punte* de G . En particular, si v es un vértice de corte de una gráfica conexa G , entonces $G-v$ es desconexa, y si e es un puente de una gráfica conexa G , entonces $G-e$ es desconexa, necesariamente una gráfica con exactamente dos componentes. En la figura 2.6 los vértices de corte de la gráfica G son v_2 y v_3 y v_5 , mientras que las aristas $v_2 v_7$, $v_3 v_5$ y $v_4 v_5$ son puentes.

Teorema 2. *Toda gráfica conexa con $n \geq 2$ vértices contiene por lo menos dos vértices que no son de corte.*

Demostración. Sean u y v vértices de una gráfica conexa G de $n \geq 2$ vértices y

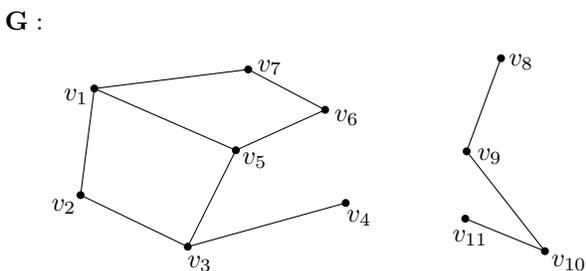


Figura 2.5: Componentes de la gráfica G con $k(G) = 2$.

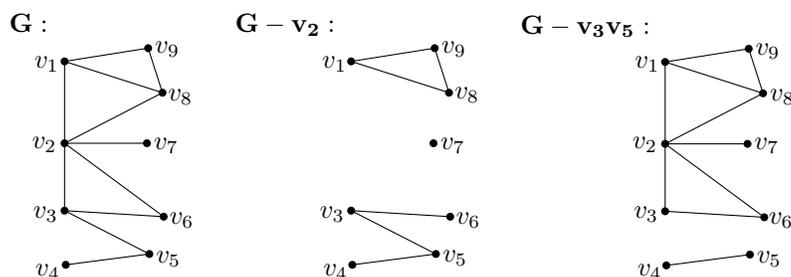


Figura 2.6: Vértices de corte y puentes de G .

sea P la ruta más larga en G . Supongamos que P es una ruta- (u, v) . Mostremos que u y v no son vértices de corte.

Supongamos lo contrario, que u es un vértice de corte de G . Entonces $G - u$ es disconexa y contiene dos o más componentes. Sea w el vértice adyacente a u en P y sea P' la subruta- (w, v) de P . Necesariamente, P' pertenece a una componente, sea G_1 , de $G - u$. Sea G_2 otro componente de $G - u$. Entonces G_2 contiene algún vértice x que es adyacente a u en G . Ésto produce una ruta- (x, v) en G que es más larga que P , lo cual es imposible.

Análogamente, v no es un vértice de corte de G . □

Un *corte de vértices* de una gráfica G es un conjunto S de vértices G tal que $G - S$ es disconexa. Un corte de vértices de cardinalidad mínima en G es llamado *mínimo corte de vértices* de G y su cardinalidad es llamada *conectividad* de G y

es denotada por $\kappa(G)$. Una gráfica G es k -conexa, $k \geq 1$, si $\kappa(G) \geq k$. Es decir, G es k -conexa si al eliminar menos de k vértices de G , ésta no resulta ser una gráfica desconexa o una gráfica con un sólo vértice.

De manera similar, un *corte de aristas* de una gráfica G es un subconjunto X de $E(G)$ tal que $G - X$ es desconexa. Un corte de aristas de cardinalidad mínima en G es llamado *mínimo corte de aristas* y su cardinalidad es llamada *conectividad de aristas* de G , la cual es denotada por $\lambda(G)$. Una gráfica G es k -conexa por aristas, $k \geq 1$, si $\lambda(G) \geq k$. Es decir, G es k -conexa por aristas si al eliminar menos de k aristas de G , ésta no resulta ser una gráfica desconexa o una gráfica con un sólo vértice.

2.1.4. Gráficas bipartitas

Una gráfica G de $n \geq 2$ vértices es una *gráfica bipartita* si es posible particionar a $V(G)$ en dos subconjuntos U y W , tal que cada arista de G une un vértice de U con un vértice de W . En la figura 2.7 a) se muestra una gráfica bipartita.

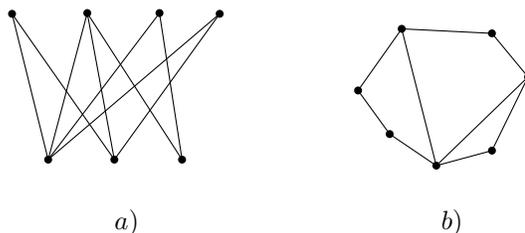


Figura 2.7: a) Gráfica bipartita. b) Gráfica que no es bipartita.

Teorema 3. Una gráfica G de $n \geq 2$ vértices es una gráfica bipartita si y sólo si G no contiene ciclos de longitud impar.

Demostración. Primero supongamos que G es una gráfica bipartita. Entonces, $V(G)$ puede ser particionado en dos subconjuntos U y W , por lo que cada arista de G une a un vértice de U con un vértice de W . Sean v_1 y v_k dos vértices de G y sea un ciclo $(v_1, v_k) = (v_1, v_2, \dots, v_k, v_1)$ de G con longitud k . Supongamos que $v_1 \in U$, así que $v_2 \in W$, $v_3 \in U$ y así sucesivamente. En particular, $v_i \in U$ para todo entero impar i con $1 \leq i \leq k$ y $v_j \in W$ para todo entero par j con $2 \leq j \leq k$. Ya que $v_1 \in U$, se sigue que $v_k \in W$ y entonces k es par.

La demostración de la otra implicación basta probarla para gráficas conexas. Entonces, sea G una gráfica conexa de $n \geq 2$ vértices que no tiene ciclos de

longitud impar. Sea u un vértice de G y sean los subconjuntos

$$U = \{x \in V(G) : d(u, x) \text{ es par}\}$$

$$W = \{x \in V(G) : d(u, x) \text{ es impar}\}$$

donde $u \in U$. Por lo que G es una gráfica bipartita con los subconjuntos U y W . Ahora sólo queda demostrar que dos vértices de U no son adyacentes y que tampoco lo son dos vértices de W . Procedamos por contradicción.

Supongamos que W contiene dos vértices adyacentes w_1 y w_2 . Sea C_1 el camino- (u, w_1) y C_2 el camino- (u, w_2) , ambos de longitud mínima, y sea z el último vértice que C_1 y C_2 tienen en común (posiblemente $z = u$). También sea C'_1 un camino- (z, w_1) y C'_2 un camino- (z, w_2) , ambos de longitud mínima. Notemos que las longitudes de C'_1 y C'_2 son de la misma paridad, por lo tanto, los caminos C'_1 y C'_2 junto con la arista w_1w_2 producen un ciclo impar, lo cual es una contradicción.

Análogamente se demuestra que dos vértices en U no son adyacentes. \square

La gráfica que se muestra en la figura 2.7 b) no es bipartita ya que contiene ciclos de longitud impar.

2.1.5. Árboles

Una gráfica G es llamada *árbol* si es conexa y no tiene ciclos. En la figura 2.8 se muestran algunos ejemplos de árboles.

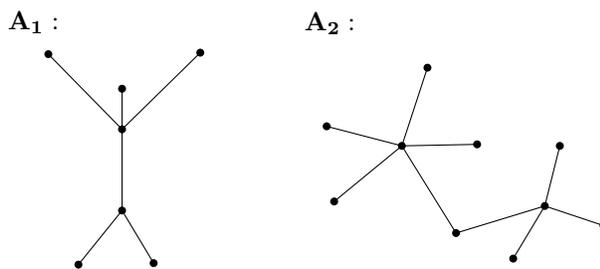


Figura 2.8: A_1 y A_2 ejemplos de árboles.

Teorema 4. Una gráfica G es un árbol si y sólo si cualquiera dos vértices de G son conexos por una única ruta.

Demostración. Primero, supongamos que G es un árbol y que u y v son vértices de G . Ya que G es conexa, ésta contiene por lo menos una ruta- (u, v) . Por otro

lado, si G tuviera por lo menos dos rutas $u - v$, la unión de éstas crearía un ciclo en G , lo cual es imposible porque contradeciría nuestra suposición. Por lo tanto, G contiene exactamente una ruta (u, v) .

Por lo contrario, sea G una gráfica en la que cualesquiera dos vértices son conexos por una única ruta. Entonces, ciertamente G es conexa. Si G tuviera un ciclo C , entonces cualesquiera dos vértices en C estarían conectados por dos rutas. Así, G no contiene ciclos y C es un árbol. \square

Mientras que todo vértice de grado mayor o igual a 2 en un árbol es un vértice de corte, los vértices de grado 1 (las hojas) no lo son. Dichas observaciones proveen un corolario del teorema 2:

Corolario 1. *Todo árbol con $n \geq 2$ vértices contiene por lo menos dos hojas.*

Teorema 5. *Si T es un árbol de orden n y tamaño m , entonces $m = n - 1$.*

Demostración. Procedamos por inducción en el orden de un árbol. Hay sólo un árbol de orden 1, llamado K_1 y no tiene aristas. Así que el paso básico de la inducción queda establecido.

Supongamos que el tamaño de todo árbol de orden $n - 1 \geq 1$ es $n - 2$ y sea T un árbol de orden n y tamaño m . Por el corolario 1, T tiene por lo menos dos hojas, así que supongamos que v es una de ellas. Como podemos observar, $T - v$ es un árbol de orden $n - 1$ que tiene tanto un vértice como una arista menos que T . Por la hipótesis de inducción, el tamaño de $T - v$ es $n - 2$. Así $m = (n - 2) + 1 = n - 1$. \square

Un árbol que es una subgráfica generadora de una gráfica conexa G es un *árbol generador* de G . Si G es una gráfica conexa de orden n y tamaño m , entonces $m \geq n - 1$. Si T es un árbol generador de G , entonces el tamaño de T es $n - 1$. Por eso, $m - (n - 1) = m - n + 1$ aristas deben ser eliminadas de G para obtener a T .

2.1.6. Coloración

Una *coloración propia de vértices* de una gráfica G es una asignación de colores a los vértices de G , un color para cada vértice, tal que vértices adyacentes sean de diferente color. Ésto es mejor conocido como una *coloración* de G .

Los “colores” usados pueden ser elementos de cualquier conjunto, colores (tales como: rojo, azul, verde y amarillo) son usados sólo cuando se requieren pocos, de lo contrario, enteros positivos (típicamente $1, 2, \dots, k$ para algún k entero positivo) son comúnmente usados como colores. Así, una coloración puede ser considerada como una función $c : V(G) \rightarrow \mathbb{N}$ (donde \mathbb{N} es el conjunto de enteros positivos) tal que $c(u) \neq c(v)$ si u y v son vértices adyacentes en G . Si el número de colores usados es k , entonces nos referimos a la coloración como una *k-coloración*.

Si c es una *k-coloración* de G , donde cada color es uno de los enteros $1, 2, \dots, k$ y V_i ($1 \leq i \leq k$) es el conjunto de vértices en G de color i (donde uno o más de esos conjuntos pueden ser vacíos), entonces cada conjunto no vacío V_i es llamado *clase cromática* y los elementos no vacíos de $\{V_1, V_2, \dots, V_k\}$ producen una partición de

$V(G)$. Cada clase cromática no vacía V_i es un conjunto independiente de vértices de G , porque c sólo asigna el mismo color a vértices no adyacentes.

G es k -coloreable si existe una k -coloración de G . En este caso a k se le llama el *número cromático* de G y es denotado por $\chi(G)$. Entonces, se dice que G con número cromático k es una *gráfica k -cromática*.

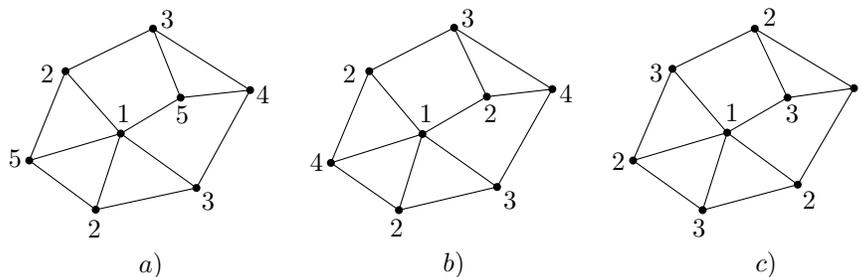


Figura 2.9: Tres coloraciones distintas de una gráfica G .

En la figura 2.9 se muestra una gráfica G con tres distintas coloraciones. $a)$ es una 5-coloración, $b)$ muestra una 4-coloración y $c)$ una 3-coloración. Ya que el orden de G es 9, la gráfica G es k -coloreable por los enteros k con $3 \leq k \leq 9$, ya que G es 3-coloreable, $\chi(G) \leq 3$. Sin embargo, no hay una 2-coloración de G porque G contiene triángulos y los tres vértices del triángulo deben de tener colores diferentes para evitar que vértices adyacentes en G tengan colores iguales. Por lo tanto, $\chi(G) \geq 3$ y entonces $\chi(G) = 3$.

2.1.7. Planaridad

Una gráfica G se dice que es *plana* si tiene una representación en el plano de manera que sus aristas no se intersecten más que sus vértices extremos.

Una gráfica plana G divide al plano en varias regiones conexas, a la cerradura de cada una de estas regiones se les llama *caras* de G . Se dice que dos caras son adyacentes si comparten una arista en su frontera. Además siempre se tiene una cara no acotada, llamada la *cara exterior*, mientras que el resto de las caras son llamadas *caras interiores*.

Para demostrar los siguientes dos teoremas, denotemos por f al número de caras de una gráfica plana G y por F_i ($1 \leq i \leq f$) a las caras de G . El primero de estos teoremas fue enunciado por Euler y es llamado *fórmula de Euler*, el cual define una relación entre el número de aristas, vértices y caras de una gráfica plana.

Teorema 6. *Para toda gráfica plana conexa de orden n , tamaño m y con f caras:*

$$n - m + f = 2.$$

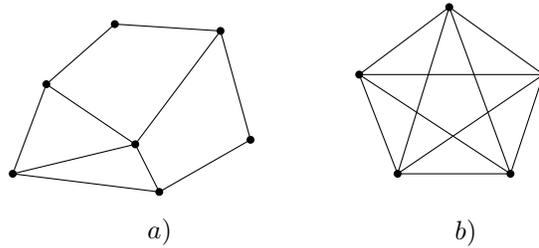


Figura 2.10: a) Ejemplo de gráfica plana. b) Ejemplo de gráfica no plana.

Demostración. Procedamos por inducción en el número m de una gráfica plana conexa. Hay una sola gráfica conexa de tamaño 0, llamada K_1 . En este caso, $n = 1$, $m = 0$ y $f = 1$. Ya que $n - m + f = 2$, el caso base de la inducción se cumple.

Supongamos un número positivo m tal que si H es una gráfica plana conexa de orden n' , tamaño m' tal que $m' < m$ y con f' caras, entonces $n' - m' + f' = 2$. Sea G una gráfica plana conexa de orden n , tamaño m y con f caras. Entonces, consideremos dos casos:

- Caso 1: G es un árbol. En este caso, $m = n - 1$ y $f = 1$. Así $n - m + f = n - (n - 1) + 1 = 2$, dando el resultado esperado.
- Caso 2: G no es un árbol. Ya que G es conexa y no es un árbol, G tiene una arista e tal que no es un puente. En G , la arista e es la frontera de dos caras. Entonces en $G - e$ esas dos caras se fusionan en una sola cara. Ya que $G - e$ tiene orden n de tamaño $m - 1$, $f - 1$ caras y $m - 1 < m$, por hipótesis de inducción que $n - (m - 1) + (f - 1) = 2$ y entonces $n - m + f = 2$.

□

Teorema 7. Si G es una gráfica plana de orden $n \geq 3$ y tamaño m , entonces:

$$m < 3n - 6.$$

Demostración. Ya que el tamaño de toda gráfica de orden 3 no puede exceder 3, la desigualdad es válida para $n = 3$. Entonces, podemos asumir que $n \geq 4$. Además podemos asumir que las gráficas planas bajo consideración son conexas. Supongamos que G es una gráfica plana conexa de orden $n \geq 4$ y con f caras. Por la identidad de Euler, $n - m + f = 2$. Sean F_1, F_2, \dots, F_f las caras de G y m_i el número de aristas de la frontera de F_i ($1 \leq i \leq f$), entonces $m_i \geq 3$. Ya que cada

arista de G está en la frontera de a lo más dos caras de G , se sigue que:

$$3f < \sum_{i=1}^f m_i \leq 2m.$$

Entonces por la fórmula de Euler se tiene:

$$n - m + \frac{2m}{3} \geq 2.$$

Siendo así:

$$m \leq 3n - 6.$$

□

Gráfica dual

Sea G una gráfica plana. La *gráfica dual* G^* de G es construida colocando un vértice por cada cara de G , siendo el conjunto de vértices $V(G^*)$. Dos vértices distintos de G^* son unidos con una arista por cada arista en la frontera de las caras correspondientes a esos vértices de G^* . Cada arista de G^* puede ser dibujada de tal manera que cruza la arista de G asociada pero no cruza otra arista de G o de G^* , por lo que G^* es una gráfica plana.

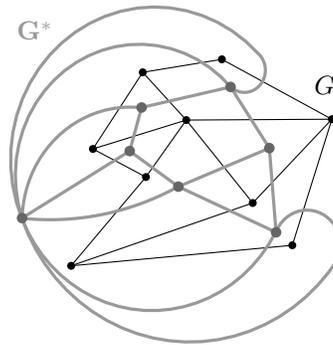


Figura 2.11: Dual G^* de una gráfica plana G .

2.2. Polígonos

Un *polígono* P es una secuencia ordenada de puntos $p_1, \dots, p_n, n \geq 3$, llamados *vértices* de P , junto con el conjunto de segmentos de recta que unen a p_i con p_{i+1} ($1 \leq i \leq n-1$) y p_n con p_1 , llamadas las *aristas* de P . En general, un vértice de P es llamado *convexo* si el ángulo interior que forman las dos aristas de P incidentes en dicho vértice es a lo más π , de lo contrario es llamado *cóncavo*.

2.2.1. Tipos de polígonos

Un polígono P es llamado *simple* si cualesquiera dos aristas no consecutivas no se intersectan. P divide el plano en dos regiones: *interior*(P) y *exterior*(P), las cuales son llamadas respectivamente, región acotada y región no acotada. Comúnmente el término “polígono” se usa para denotar polígonos simples con su interior (figura 2.12 a)).

Un polígono es *ortogonal* si los ángulos internos que forman sus aristas son de tamaño $\frac{\pi}{2}$ ó $\frac{3\pi}{2}$. Por simplicidad, a lo largo de este trabajo se considerarán polígonos ortogonales *isotéticos*, ésto es, que sus lados son paralelos al eje x o al eje y .

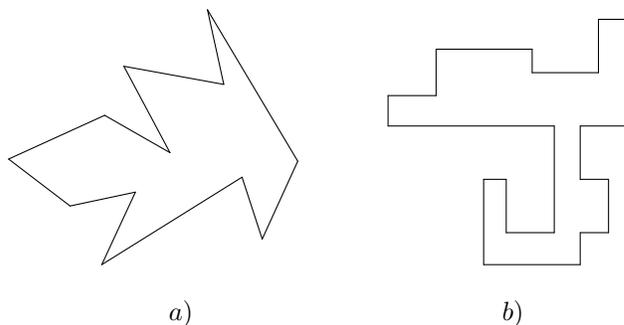


Figura 2.12: a) Polígono simple. b) Polígono ortogonal.

Un *polígono con hoyos* es un polígono P que encierra completamente a otros polígonos H_i ($1 \leq i \leq h$), los hoyos, donde ninguna de las fronteras de P y H_i se intersectan y cada uno de los hoyos es vacío. Entonces, P es la región comprendida al interior de P sin el interior de los polígonos H_i (figura 2.13 a)). Análogamente un *polígono ortogonal con hoyos* es un polígono ortogonal con hoyos ortogonales (figura 2.13 b)).

Se dice que dos puntos p y q en un polígono P son *visibles* si el segmento

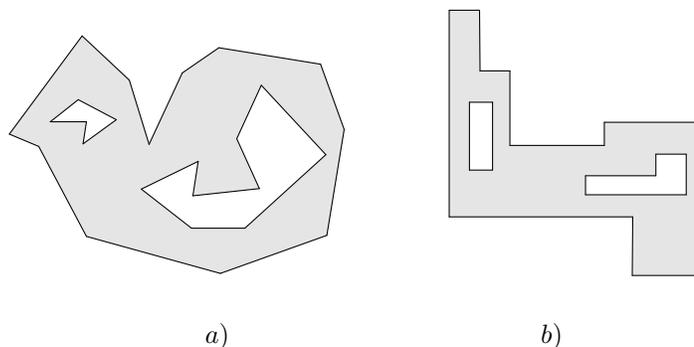


Figura 2.13: a) Polígono con hoyos. b) Polígono ortogonal con hoyos.

de línea \overline{pq} está totalmente contenido en P , entonces p ve a q . Así mismo, una *diagonal* es un segmento de línea que conecta dos vértices de P no consecutivos y la cual está en el interior de P .

A partir de la definición de visibilidad en un polígono, se definen dos clases especiales de polígonos simples: convexos y en forma de estrella. Un polígono simple es llamado *convexo* si todo par de puntos en P son mutuamente visibles, es decir, cuando los ángulos internos de todos los vértices del polígono son convexos (figura 2.14 a)). Por otra parte, se dice que un polígono simple es llamado en *forma de estrella*, si existe un punto z dentro de P tal que todos los puntos de P son visibles desde z . El conjunto de todos los puntos con esta propiedad, se definen como el *núcleo* de P (figura 2.14 b)).

2.3. Triangulación

Una *triangulación* T de un polígono P es una partición del mismo en un conjunto de triángulos con parejas de interiores disjuntos, de tal manera que las aristas de esos triángulos sólo son aristas o diagonales de P (figura 2.15).

Teorema 8. *Cualquier polígono simple admite una triangulación, además cualquier triangulación de un polígono P con n vértices contiene exactamente $n - 2$ triángulos.*

Demostración. Procedamos a demostrar por inducción en el número de vértices de P . Cuando $n = 3$ el polígono es un triángulo y el teorema es trivialmente cierto.

Sea P con n vértices, tal que $n > 3$. Asumamos que el teorema se cumple para toda $m < n$.

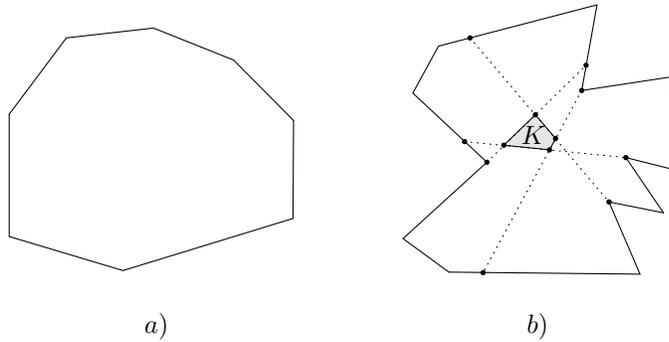


Figura 2.14: a) Polígono convexo. b) Polígono en forma de estrella con núcleo K .

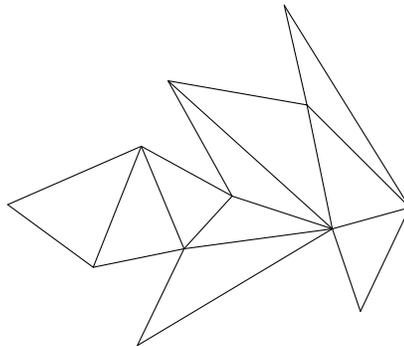


Figura 2.15: Triangulación de un polígono.

Primero demostremos la existencia de una diagonal en P . Sea v el vértice de P con menor coordenada x (si hay más de uno de estos, tomamos el vértice que tiene menor coordenada en y) y sean u y w los vértices vecinos de v . Si el segmento \overline{uw} está contenido en P , hemos encontrado la diagonal (figura 2.16 a)). De lo contrario, hay uno o más vértices dentro del triángulo uvw , o en la diagonal \overline{uw} . De esos vértices, sea v' el más alejado del segmento \overline{uw} . Entonces, el segmento que conecta v' a v no puede intersectar una arista de P porque dicha arista tendría un vértice extremo dentro del triángulo que está más lejos del segmento \overline{uw} , contradiciendo la definición de v' (figura 2.16 b)). Por lo tanto, $\overline{vv'}$ es una diagonal.

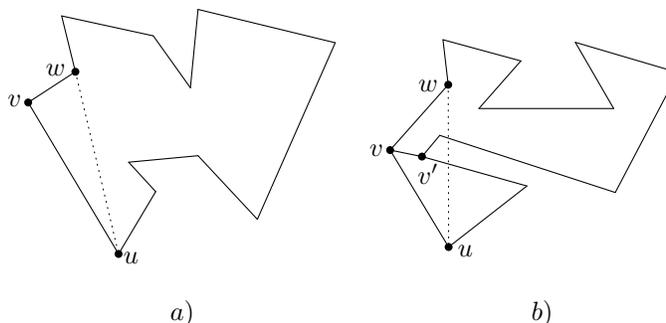


Figura 2.16: a) El segmento \overline{uw} está dentro de P . b) El segmento \overline{uw} no está dentro de P .

La diagonal exhibida corta a P en dos subpolígonos simples P_1 y P_2 . Consideremos que m_1 es el número de vértices de P_1 y m_2 es el número de vértices de P_2 . Ambos, m_1 y m_2 , deben ser menores que n , entonces por inducción P_1 y P_2 pueden ser triangulados. Por lo tanto, P también puede ser triangulado.

Ahora, sólo falta probar que cualquier triangulación de P consiste de $n - 2$ triángulos. Para ésto, consideremos una diagonal arbitraria en alguna triangulación T de P . Esta diagonal corta a P en dos subpolígonos con m_1 y m_2 vértices, respectivamente. Todo vértice de P ocurre en exactamente uno de los dos subpolígonos, excepto los vértices que definen la diagonal, los cuales pertenecen a ambos subpolígonos. Entonces, $m_1 + m_2 = n + 2$. Por inducción, cualquier triangulación de P_i consiste de $m_i - 2$ triángulos, lo cual implica que T consiste de $(m_1 - 2) + (m_2 - 2) = m_1 + m_2 - 4 = (n + 2) - 4 = n - 2$ triángulos. \square

Dada una triangulación T de un polígono P , definimos la gráfica $GT(P)$ tal que los vértices de $GT(P)$ son los vértices de P y dos vértices de $GT(P)$ son adyacentes si son conectados por una arista de T .

El *dual de una triangulación* T de un polígono P , es una gráfica $G(T)$ cuyos vértices son los triángulos de T y donde dos vértices son adyacentes si sus triángulos correspondientes comparten una arista en T (figura 2.17). Ya que un triángulo tiene tres lados, el grado de los vértices de la gráfica dual es a lo más tres. Por otra parte, debido a que cualquier diagonal corta a P en dos, el remover una arista de $G(T)$ divide a la gráfica en dos. Entonces, $G(T)$ es un árbol.

Con las obervaciones anteriores del dual de una triangulación es fácil probar el *teorema de dos orejas* de Meister [25]. Se dice que tres vértices consecutivos v_1, v_2 y v_3 de un polígono P , forman una *oreja* (considerada como la región encerrada por el triángulo $v_1v_2v_3$) en el vértice v_2 si el segmento $\overline{v_1v_3}$ está completamente en el interior de P . Además se dice que dos orejas *no se superponen* si sus regiones internas son disjuntas, de lo contrario éstas *se superponen*.

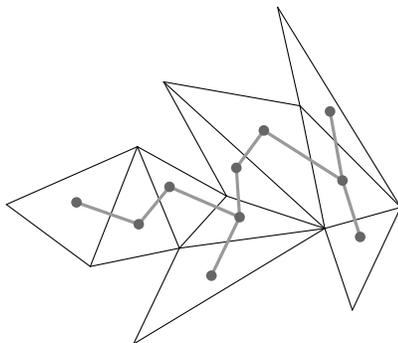


Figura 2.17: Gráfica dual de la triangulación de un polígono.

Teorema 9. *Todo polígono P de $n \geq 4$ vértices tiene al menos dos orejas que no se superponen.*

Demostración. Una hoja en el dual de una triangulación T de un polígono P corresponde a una oreja. Por otra parte, ya que un árbol con dos o más vértices contiene al menos dos hojas, entonces P tiene dos orejas que no se superponen. \square

Teorema 10. *Sea P un polígono simple sin hoyos y T una triangulación de P . Entonces, la gráfica $GT(P)$ es 3-coloreable.*

Demostración. Sea P un polígono simple de n vértices y T una triangulación de P . Procedamos por inducción en el número de vértices de P .

Cuando $n = 3$, T tiene un sólo triángulo, entonces para que cada dos vértices adyacentes tengan diferente color, a cada vértice se le asigna un color distinto. Entonces, la gráfica $GT(P)$ es 3-coloreable.

Si $n \geq 4$. Ya que el teorema 9 garantiza la existencia de una oreja, se aplica la hipótesis inductiva al polígono P' resultante de quitar una oreja a $GT(P)$ para obtener una 3-coloración de P' . Si unimos a P' la oreja que quitamos, entonces a la gráfica $GT(P)$ se le añade un vértice, el cual debe ser coloreado por el color distinto al que tienen sus vértices adyacentes para obtener así una 3-coloración de $GT(P)$ (figura 2.18). \square

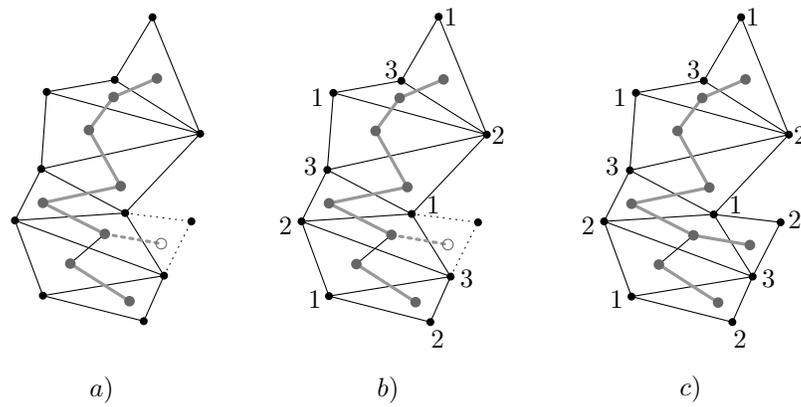


Figura 2.18: Muestra el paso inductivo de la demostración del teorema 10. *a)* Selección de una oreja en P . *b)* 3-coloración de P' , polígono resultante de quitarle a P una oreja. *c)* 3-coloración de P .

Capítulo 3

Galerías de Arte

En el año de 1973, Victor Klee planteó el problema para el mínimo número de guardias que se requieren para vigilar el interior de una galería de arte con n muros, el cual es conocido como el *problema de la galería de arte*.

La galería de arte es representada geoméricamente como un polígono simple P con n vértices y los guardias como puntos en P (usualmente son vértices de P). Mantener completamente vigilada la galería, es interpretado como que todo punto $p \in P$ debe ser vigilado por algún guardia. Siendo así, lo que se busca es un conjunto de vértices G tal que cualquier punto $p \in P$ sea visto por algún guardia $g \in G$. Donde la expresión “visto por algún guardia” se refiere a la visibilidad de puntos en un polígono, lo cual significa, que el segmento de línea \overline{pq} debe de estar contenido en P . Por lo tanto, se dice que G vigila a P . Equivalentemente, también se usa el término G ilumina completamente a P si seguimos la noción de colocar en los vértices de G una lámpara que emite luz a todas las direcciones. Debido a ésto, los problemas de las galerías de arte también son conocidos como problemas de iluminación. Por lo que usar los términos iluminar y vigilar, así como lámparas y guardias, respectivamente, son equivalentes.

Poco tiempo después de haberse planteado el problema de la galería de arte, en 1975 Chvátal [8] respondió la pregunta con lo que se conoce como el *teorema de la galería de arte de Chvátal*, el cual dice lo siguiente:

Teorema 11. *Para vigilar un polígono simple P de n vértices son suficientes y en algunos casos necesarios $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ vértices guardia.*

Demostración. Sea P un polígono simple con n vértices y T una triangulación de P . Consideremos la gráfica $GT(P)$ generada por T .

Por el teorema 10, sabemos que los vértices de $GT(P)$ pueden ser coloreados usando tres colores distintos, sean estos $\{1, 2, 3\}$, tal que cualesquiera dos vértices adyacentes reciben colores diferentes. Esta coloración da una partición del conjunto de vértices de P en tres clases cromáticas, que denotaremos por C_1, C_2 y C_3 , donde una de ellas, digamos C_1 , tiene a lo más $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ vértices. Ya que cada triángulo tiene colores diferentes, en cada uno de ellos hay un vértice de color 1, por lo que si colocamos un guardia en estos vértices, P es completamente vigilado.

Para ver que $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ guardias son ocasionalmente necesarios, consideremos el polígono llamado *peine* $Comb_m$ con $n = 3m$ vértices mostrado en la figura 3.1. Entonces, para vigilar a P_m se necesitan al menos m guardias. \square

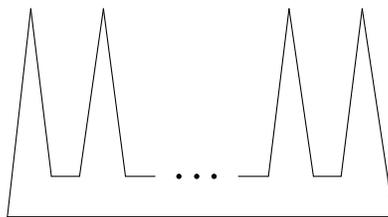


Figura 3.1: Polígono $Comb_m$, el cual necesita de $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ vértices guardia para ser vigilado.

La demostración anterior fue dada por Fisk [15] y es menos complicada de la que dió Chvátal. Por otra parte, el algoritmo de Chazelle [7] triangula un polígono simple en tiempo lineal en el número de vértices, lo cual permite que la prueba de Fisk induzca un algoritmo en tiempo lineal que busque el conjunto de a lo más $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ guardias que vigilan a P .

Desde la publicación del teorema de Chvátal surgió una gran cantidad de investigación de problemas respecto a galerías de arte ó iluminación. En 1987, O'Rourke [29] publicó el primer libro en la historia dedicado al estudio de problemas de iluminación de polígonos en el plano, el cual lleva por nombre *Art Gallery Theorems and Algorithms*. A partir de la publicación de este libro crece aún más el estudio de este tipo de problemas y muchas variantes del problema original son estudiadas. Después surgen dos compendios más que también contienen una gran colección de resultados sobre variantes del problema de la galería de arte, el primero en el año de 1992 por Shermer [32] y el segundo en el año de 1996 por Urrutia [34].

Algunas de las variantes del problema de la galería de arte han surgido por colocar restricciones y/o ventajas, que se apegan a ciertas necesidades, ya sea a los guardias y/o a las galerías sobre los cuales se desea vigilar su interior. Otros tipos de variantes se han basado en iluminar el exterior de una galería, e incluso, iluminar al mismo tiempo el interior y el exterior de la misma. En este capítulo se presenta la descripción de diferentes variantes que se han establecido, así como algunos de los problemas de iluminación de las galerías que han enriquecido a los problemas de las galerías de arte.

3.1. Variantes del problema de las galerías de arte

En esta sección se presentan las principales variantes del problema de la galería de arte que han surgido respecto a distintas restricciones en guardias y en galerías de arte.

3.1.1. Tipos de guardias

Originalmente en el teorema de la galería de arte, los guardias fueron colocados en vértices de un polígono P bajo la característica de tener un ángulo de visión de 2π y con alcance ilimitado. Posteriormente, bajo distintas restricciones surgieron varios tipos de guardias, donde algunas de éstas se basaron en cambio de posición de los guardias, cambio de ángulo de visión o iluminación e incluso rotación de ellos. A continuación mencionamos las principales variantes en tipos de guardias:

- **Vértices guardia:** Estos guardias son colocados sólo en los vértices del polígono. También son nombrados *lámparas* si lo que se requiere es iluminar un polígono.
- **Puntos guardia:** En contraste a los vértices guardia, estos guardias no tienen restricción en su localización, por lo que pueden ser colocados en cualquier punto dentro o fuera del polígono.
- **Aristas guardia:** Fueron sugeridos por Toussaint, los cuales son guardias que se mueven a lo largo de un segmento dentro de un polígono P . Se dice que un punto $x \in P$ es visto por una arista $s \in P$ si hay algún punto $y \in s$ tal que el segmento $\overline{xy} \in P$. Ésta es la noción de *visibilidad débil* de una arista, propuesto por Avis y Toussaint en 1981 [5].
- **Guardias móviles:** Son aquellos guardias que se mueven sobre diagonales de un polígono. Fueron propuestos por O'Rourke [28].
- **Modems:** Los guardias se ven como módems inalámbricos cuya visión puede penetrar un cierto número k de paredes de un polígono P . Entonces, se dice que un k -módem m vigila un punto $p \in P$ si el segmento de línea \overline{mp} atraviesa a lo más k paredes. Fueron propuestos por Aichholzer *et al.* [3].
- **Puntos y Vértices reflectores:** Son lámparas restringidas a un cierto ángulo de iluminación α , que son colocadas en cualquier punto p dentro o fuera de un polígono P y en vértices de P , respectivamente. Fueron propuestos por Urrutia. Su motivación se basa en las restricciones a cierto ángulo de visibilidad que tienen varios dispositivos de vigilancia.
- **Radars:** Son reflectores con cierto ángulo de iluminación α que rotan a velocidad angular constante. Si se tiene un conjunto de n radares, ellos giran a la misma velocidad y hacia la misma dirección. Fueron propuestos por Kranakis *et al.* [21], donde son llamados como *antenas direccionales*.

Se considera que todos estos tipos de guardias tienen un alcance ilimitado de vigilancia o iluminación. Aunque también se han propuesto algunos tipos de ellos con un alcance finito [30, 12].

3.1.2. Tipos de galerías

Las galerías de arte comúnmente se realizan en diferentes lugares, estados o países, por lo que las estructuras de los edificios donde se presentan suelen ser diferentes. Ésto implica, que distintos estructuras de edificios deben ser contemplados para asegurar que en todo momento las galerías estén completamente vigiladas o iluminadas, surgiendo así variantes interesantes del problema original de la galería de arte, las cuales son:

- **Galerías Tradicionales:** Estas galerías se consideran tradicionales ya que su estructura se basa en un conjunto de habitaciones contiguas rectangulares dentro de un edificio rectangular, donde se asume que cualesquiera dos habitaciones están conectadas por una puerta [20].
- **Galerías ortogonales:** Tienen la estructura de un polígono ortogonal. Éstas son más frecuentes debido a que las construcciones de edificios suelen ser ortogonales.
- **Galerías ortogonales con hoyos:** Tal como lo dice el nombre, son aquellas galerías que tienen la estructura de un polígono ortogonal con hoyos, donde el interior de los hoyos se considera parte del exterior de la galería.
- **Jardín de esculturas:** Son galerías sin paredes. Fueron propuestas por Eppstein *et al.* [11], basándose en una aplicación de redes inalámbricas. En esta aplicación, los guardias son vistos como transmisores, los cuales emiten señales que generan una fórmula booleana con ciertas características para establecer si un punto está dentro o fuera de la galería.

3.2. Galerías ortogonales

En esta sección se muestran algunos resultados interesantes de variantes en problemas de iluminación de galerías ortogonales, las cuales son representadas geoméricamente por un polígono ortogonal, donde bajo distintos tipos de guardias se busca vigilar su interior, exterior o ambos a la vez.

3.2.1. Vigilancia del interior de polígonos ortogonales

El *teorema de las galerías de arte ortogonales* fue propuesto y probado por Khan, Klawe y Kleitman en 1980 [19]. Para probarlo, ellos establecieron una partición de polígonos en cuadriláteros convexos a partir del teorema siguiente:

Teorema 12. *Todo polígono ortogonal P (con o sin hoyos) admite una cuadrilaterización convexa.*

Con el teorema 12 es fácil probar la suficiencia del teorema de galerías de arte ortogonales, el cual dice lo siguiente:

Teorema 13. *Para vigilar el interior de un polígono ortogonal P de n vértices, son suficientes y en algunos casos necesarios $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ vértices guardia.*

Demostración. De manera similar a la prueba que propone Fisk en el teorema de la galería de arte, para probar la suficiencia se obtiene una cuadrangulación convexa Q de un polígono ortogonal P de n vértices, en la cual si se añaden dos diagonales que conecten a cada vértice opuesto en cada cuadrilátero de Q , como se muestra en la figura 3.2, se genera una gráfica G .

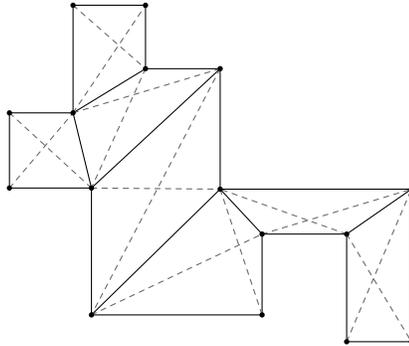


Figura 3.2: Una gráfica 4-coloreable obtenida de la cuadrilaterización añadiendo diagonales en los cuadriláteros.

Para probar que G es 4-coloreable, se considera la gráfica dual Q^* de Q , donde los vértices son los cuadriláteros de Q y dos vértices son adyacentes si sus cuadriláteros correspondientes comparten una arista en Q . Claramente Q^* es un árbol. Si ahora, removemos de Q un cuadrilátero que corresponda a una hoja de Q^* , esto produce una subgráfica G' de G , la cual por un argumento inductivo, se asume que es 4-coloreable. Notemos que es fácil extender una 4-coloración para G de tal manera que todos los vértices de cualquier cuadrilátero de Q reciban colores diferentes.

Esta coloración da una partición del conjunto de vértices de P en cuatro clases cromáticas que vigilan a P , donde una de ellas tiene a lo más $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$.

Para probar la necesidad, consideremos la familia de polígonos parecidos al $Comb_m$ pero con lenguas ortogonales (figura 3.3), donde por cada lengua se necesita un vértice guardia. \square

Otra prueba alternativa para la suficiencia de la cota de $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ guardias la dió O'Rourke [27] donde se basó en particionar un polígono ortogonal en sub-

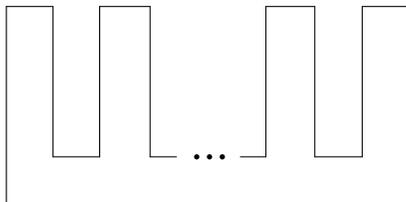


Figura 3.3: Polígono que necesita $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ vértices guardia para ser vigilado.

polígonos en forma de L . Notemos que un polígono ortogonal en forma de L es vigilado con un sólo guardia.

La prueba que dió O'Rourke fue expresada en términos del número de vértices cóncavos r , en lugar de n , que es número total de vértices de un polígono ortogonal, ya que existe una relación entre r y n [29], la cual se muestra en el siguiente lema:

Lema 1. *En un polígono ortogonal de n vértices, donde r vértices son cóncavos, $n = 2r + 4$.*

Demostración. Sea c el número de vértices convexos, claramente $n = c + r$. Ya que la suma de los ángulos internos de un polígono simple es $(n - 2)\pi$, entonces:

$$(n - 2)\pi = c\left(\frac{\pi}{2}\right) + r\left(\frac{3\pi}{2}\right).$$

Resolviendo para c y sustituyendo en $n = c + r$ nos lleva a que $n = 2r + 4$. \square

Ya que $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor = \lfloor \frac{2r+4}{4} \rfloor = \lfloor \frac{r}{2} \rfloor + 1$, entonces el teorema 13 puede ser formulado como:

Teorema 14. *Para vigilar el interior de un polígono ortogonal P de r vértices cóncavos son suficientes y en algunos casos necesarios $\lfloor \frac{r}{2} \rfloor + 1$ guardias.*

O'Rourke estableció que la necesidad que expresa este teorema está dada por la familia de polígonos que se muestran en la figura 3.3. Mientras que para la suficiencia, particionó a un polígono ortogonal en subpolígonos en forma de L y en los vértices cóncavos de cada L colocó un guardia [29].

Posteriormente Edelsbrumer, O'Rourke y Welzl propusieron un algoritmo que en tiempo $O(n)$ en el número de vértices del polígono ortogonal, obtiene los $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ puntos guardia que vigilan el interior de un polígono, basado en la partición en subpolígonos en forma de L [10].

Vigilancia del interior de polígonos ortogonales con reflectores

Como mencionamos anteriormente, los reflectores son lámparas restringidas a un ángulo de iluminación α , los cuales en el resto del documento serán denotados *reflectores- α* .

Lo que se busca es iluminar el interior de un polígono ortogonal P con reflectores- $\frac{\pi}{2}$ (llamados *reflectores ortogonales*) colocados en vértices de P . Estivill-Castro y Úrrutia [13] establecieron el siguiente resultado:

Teorema 15. *Para vigilar el interior de un polígono ortogonal P de n vértices, son suficientes y en algunos casos necesarios $\lfloor \frac{3n-4}{8} \rfloor$ reflectores ortogonales.*

La demostración del teorema 15 se basa en una notación de vértices y aristas, la cual indica que dado un polígono ortogonal P , una arista e de P es una *arista norte* (denotada como arista- N), si el interior del polígono está inmediatamente abajo de e . Las aristas este (arista- E), oeste (arista- O) y sur (arista- S) se definen análogamente. Por otra parte, un vértice es un *vértice noreste* (denotado como vértice- NE), si las aristas del polígono que inciden al vértice son aristas- N y aristas- E . Los vértices- NO , vértices- SE y vértices- SO son definidos análogamente.

Dado que un polígono ortogonal tiene vértices cóncavos y convexos, en total se tienen ocho tipos de vértices (figura 3.4). La denotación que se toma para la distinción de éstos es:

- Vértices cóncavos: El *vértice cóncavo noreste* se denota vértice- NE_r . Los vértices- NO_r , vértices- SE_r y vértices- SO_r se definen análogamente.
- Vértices convexos: El *vértice convexo noreste* se denota vértice- NE_c . Los vértices- NO_c , vértices- SE_c y vértices- SO_c se definen análogamente.

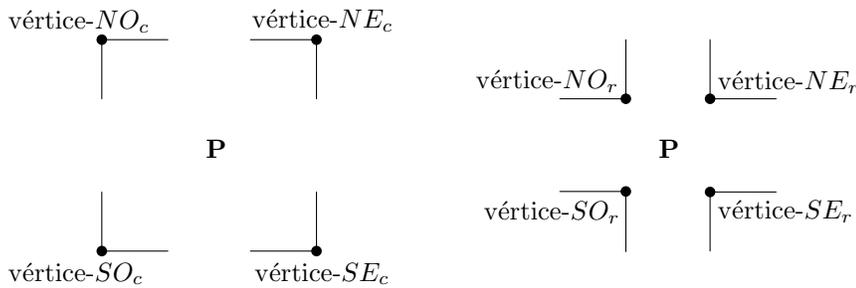


Figura 3.4: Clasificación de vértices en un polígono ortogonal P .

Estivill-Castro y Úrrutia definieron las reglas de posicionamiento de reflectores ortogonales en un polígono ortogonal.

Definición 1. Regla de posicionamiento noreste (regla-NE):

1. Para cada arista norte e del polígono, colocar un reflector alineado con la arista e en el vértice este de e .
2. Para cada arista este e del polígono, colocar un reflector alineado con la arista e en el vértice norte de e (al menos que ya haya sido colocado en el paso anterior).

Lema 2. La regla-NE produce una asignación de reflectores ortogonales que iluminan el interior de P .

Demostración. Sea q un punto al interior del polígono P y h el rayo horizontal que va de q hacia el este y que está totalmente contenido en P (figura 3.5 a)).

Desplacemos h hacia el norte hasta encontrar un vértice de P contenido en el extremo derecho de h (figura 3.5 b)) o hasta que h coincida con una arista norte de P (figura 3.5 c)). En el primer caso, q es iluminado por el reflector colocado en el vértice encontrado, mientras en que en el segundo caso, q es iluminado por el reflector ubicado en el vértice este de la arista norte que coincide con h . \square

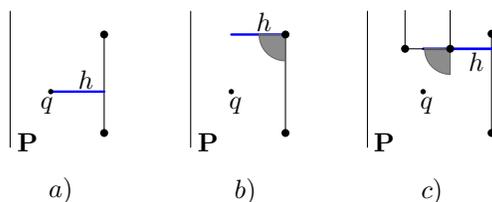


Figura 3.5: Los reflectores ortogonales colocados por la regla-NE iluminan cualquier punto q al interior del polígono P .

Análogamente, se puede definir y demostrar que la regla-NO, la regla-SE y la regla-SO producen una asignación de reflectores ortogonales que iluminan el interior del polígono ortogonal.

Demostración teorema 15. Para la suficiencia consideremos iluminar a un polígono ortogonal P de n vértices con las cuatro reglas mencionadas anteriormente. Entonces en cada vértice convexo es colocado un reflector, mientras que en los vértices cóncavos son colocados dos reflectores, los cuales son puestos por reglas distintas (figura 3.6). Dado que un polígono ortogonal tiene $\frac{n-4}{2}$ vértices cóncavos y $\frac{n+4}{2}$ vértices convexos [29], en total se han colocado

$$2\left(\frac{n-4}{2}\right) + \frac{n+4}{2} = \frac{3n-4}{2}$$

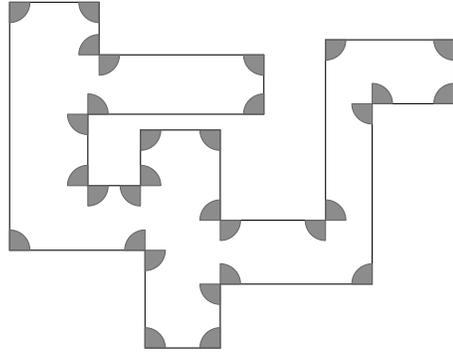


Figura 3.6: Asignación de reflectores ortogonales a un polígono ortogonal mediante las cuatro reglas de iluminación.

reflectores en P . Lo cual nos lleva a que alguna regla coloca a lo más $\frac{3n-4}{8}$ reflectores en vértices de un polígono ortogonal para que éste sea iluminado.

Para la necesidad, consideremos el polígono P con 12 vértices mostrado en la figura 3.7 a), el cual necesita $4 = \frac{3(12)-4}{8}$ reflectores ortogonales para ser iluminado. Si pegamos copias del polígono P a él mismo como se muestra en la figura 3.7 b), generamos una familia de polígonos con $12 + 8k$ vértices, donde $k \geq 0$, los cuales requieren de $\frac{3(12+8k)-4}{8} = 4 + 3k$ reflectores en vértices del mismo para que sea iluminado [34]. \square

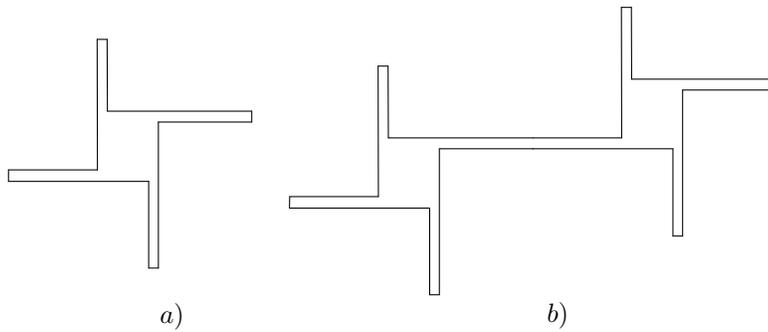


Figura 3.7: Familia de polígonos que necesitan $\lfloor \frac{3n-4}{8} \rfloor$ reflectores ortogonales colocados en sus vértices para ser iluminados.

Observemos que aplicar las reglas de iluminación lleva directamente a un algoritmo de tiempo lineal en el número de vértices de un polígono ortogonal, que es mucho más simple que los algoritmos que requieren de cuadrilaterización o descomposición en subpolígonos en forma de L para vigilar a los polígonos.

Este algoritmo consiste de un recorrido de la frontera del polígono ortogonal que cuenta el número de vértices de cada tipo de acuerdo a la clasificación presentada en la figura 3.4, por lo que calcula el número de reflectores ortogonales requeridos por cada una de las cuatro reglas, determinando cual de ellas se usará. Por último, con un segundo recorrido de la frontera del polígono, coloca los reflectores en sus respectivos vértices.

3.2.2. Vigilancia del exterior de polígonos ortogonales

Wood y Malkelitch propusieron independientemente dos variantes interesantes del problema de la galería de arte, a los cuales Wood denominó *el problema de la fortaleza* y *el problema del patio de la prisión*. El primero pregunta por el número de guardias que se necesitan para ver el exterior de un polígono y el segundo pregunta el número de guardias que se necesitan para ver el interior y exterior de un polígono [29].

Consideremos que un punto q al exterior de un polígono P es visto por un guardia en un vértice v si y sólo si el segmento \overline{vq} no intersecta el interior de P .

Problema de la fortaleza en polígonos ortogonales

La cota de guardias para vigilar el exterior de un polígono ortogonal P de n vértices, difiere ligeramente con la vigilancia del interior de los mismos: $\lceil \frac{n}{4} \rceil + 1$ vértices guardia para el exterior contra $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ vértices guardia para el interior. Esta cota para el exterior fue establecida en 1983 por Aggarwal [2]:

Teorema 16. *Para vigilar el exterior de un polígono ortogonal de n vértices son suficientes y necesarios $\lceil \frac{n}{4} \rceil + 1$ vértices guardia.*

Demostración. Primero procedamos a demostrar la suficiencia, la cual se sigue casi directamente de particionar un polígono en subpolígonos en forma de L [29]. Dado un polígono ortogonal P de n vértices, removamos la arista horizontal e con coordenada mayor en el eje y (o cualquiera con coordenada mayor en el eje y en caso de que existan varias), extendamos hacia arriba las dos aristas adyacentes a e y encerremos completamente a P con un rectángulo, como se muestra en la figura 3.8. Notemos que ahora el interior de este nuevo polígono ortogonal P' de $n + 4$ vértices, coincide con el exterior inmediato que rodea a P , excepto por el rectángulo Q en la figura 3.8, el cual es exterior tanto de P como de P' .

La observación fundamental es la colocación de los guardias en vértices cóncavos que se establece en la partición de polígonos ortogonales en subpolígonos en forma de L . Ya que los seis nuevos vértices de P' son convexos, los guardias que vigilan el interior de P' son localizados en vértices de P , entonces es claro ver que vigilar el exterior inmediato de P con los vértices guardia implica vigilar todo el exterior de P , porque: cada arista del rectángulo más pequeño que encierra a P

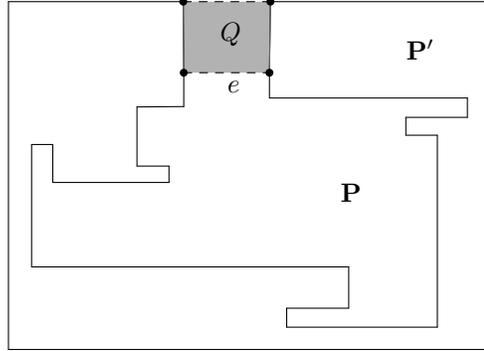


Figura 3.8: El exterior de un polígono ortogonal puede ser convertido en el interior de otro polígono si eliminamos la arista con ordenada mayor, e , y lo encerramos dentro de un rectángulo.

debe de tener un guardia en cada una de ellas y esos guardias vigilan el plano infinito que se encuentra fuera de este rectángulo. Por el teorema 14, el interior de P' es vigilado con $\lfloor \frac{n+4}{4} \rfloor$ guardias, mientras que la región Q necesita su propio guardia, llevando a un total de $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 2$ guardias. Cuando $n \equiv 2 \pmod{4}$, esta fórmula es idéntica a $\lceil \frac{n}{4} \rceil + 1$.

Si $n \equiv 0 \pmod{4}$, tenemos la libertad de aumentar a P' dos vértices sin incrementar el número de guardias, esto debido a la presencia de la función piso en el teorema 14. Por lo tanto, se modifica P' para que tenga $n + 6$ vértices como se muestra en la figura 3.9. Notemos que ahora el interior de P' y el exterior inmediato de P coinciden exactamente, lo que implica que Q ha sido eliminado. Entonces P' puede ser vigilado con $\lfloor \frac{n+6}{4} \rfloor = \lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 1$ ya que $n \equiv 0 \pmod{4}$.

Por otra parte, para probar la necesidad, consideremos el polígono ortogonal P en forma de espiral de $n = 4m$ vértices que es mostrado en la figura 3.10. Comenzando desde el interior del espiral, es claro ver que los vértices etiquetados por $1, 4, 8, 12, 16, \dots, 4(m-3)$ es una manera óptima de elegir la localización de los guardias; una segunda elección óptima es $7, 11, 15, \dots, 4m - 1$. En el brazo exterior hay una opción para colocar los últimos guardias. La primera secuencia puede continuar en una de las dos formas: ya sea $\dots, 4(m-2), 4(m-1), 4m$ (representada por los vértices sólidos en la figura 3.10) o $\dots, 4(m-2), 4(m-2) + 2, 4(m-1) + 2, 4m - 1$ (representada por los vértices vacíos en la figura 3.10). En cualquiera de los casos $m + 1$ guardias son usados. Un razonamiento similar muestra que $m + 1$ guardias se requieren para otras opciones de localización de guardias.

Si al espiral se le añaden dos vértices más, $n = 4m + 2$, entonces $m + 2$ guardias son requeridos. Por lo que en todos los casos $\lceil \frac{n}{4} \rceil + 1$ guardias son necesarios. \square

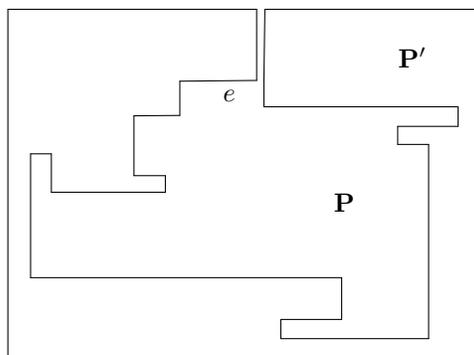


Figura 3.9: Una estrategia alternativa usada cuando n es divisible por 4.

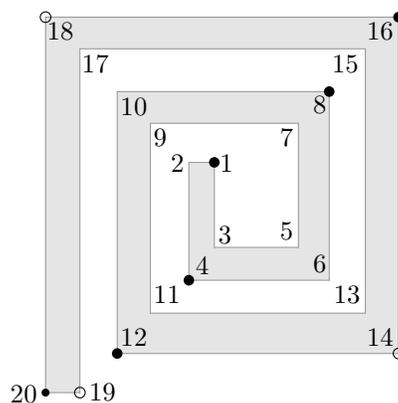


Figura 3.10: Polígono ortogonal en forma de espiral que requiere de $\lceil \frac{n}{4} \rceil + 1$ vértices guardia (vértices sólidos) para vigilar su exterior.

Problema del patio de la prisión en polígonos ortogonales

Es evidente que separar los resultados de la visibilidad del interior y del exterior para un polígono ortogonal (teoremas 13 y 16) pueden ser combinados para producir la suficiencia de $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor + \lceil \frac{n}{4} \rceil + 1 \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$ vértices guardia. Interesantemente la demostración emplea ambos métodos usados para vigilar el interior de polígonos ortogonales, vistos en la prueba del teorema 16. O'Rourke [28] estableció el siguiente resultado:

Teorema 17. *Para vigilar el interior y el exterior de un polígono ortogonal P de n vértices son suficientes $\lfloor \frac{7n}{16} \rfloor + 5$ vértices guardia.*

Demostración. Sea P un polígono ortogonal de n vértices.

Primero consideremos vigilar el exterior de P con $\lceil \frac{n}{4} \rceil + 1$ guardias conforme al teorema 16. Ahora particionemos el interior de P en cuadriláteros convexos como se garantizó en el teorema 12 y descartemos todas las aristas que tengan un guardia en uno de sus vértices extremos. Ésto puede desconectar la gráfica, pero el número total de vértices no es más que $n - (\lceil \frac{n}{4} \rceil + 1)$, como se puede ver en la figura 3.11. Además eliminemos todos los vértices y aristas que no son parte de algún cuadrilátero, ésto es justificado ya que los guardias vigilan todos los lados de dichas aristas y alrededor de todos esos vértices.

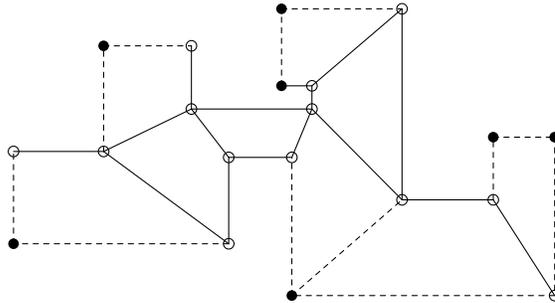


Figura 3.11: Las aristas punteadas son adyacentes a vértices guardia (vértices sólidos)

Por último, hacemos una 4-coloración de los cuadriláteros (como fue hecho en la demostración del teorema 13) y colocamos a los guardias en el color que se utiliza con menos frecuencia. Cada cuadrilátero tiene n_i vértices que necesitarán no más que $\lfloor \frac{n_i}{4} \rfloor$ guardias, note que $n_i \geq 4$. El número total de guardias usados es:

$$\lceil \frac{n}{4} \rceil + 1 + \lfloor \frac{n - \lceil \frac{n}{4} \rceil - 1}{4} \rfloor.$$

La expresión no es más grande que $\lfloor \frac{7n}{16} \rfloor + 5$; la constante 5 puede ser reducida para ciertos valores de $n \bmod 16$. \square

Por otra parte, Hoffmann y Kriegel en 1993 [18] dieron una cota de puntos guardia para vigilar el interior y exterior de polígonos ortogonales basándose en el siguiente teorema que es interesante por sí mismo.

Teorema 18. *Sea G una gráfica plana bipartita 2-conexa. Entonces, G se puede triangular de tal manera que la gráfica resultante es 3-coloreable.*

Hoffmann y Kriegel establecieron el siguiente teorema:

Teorema 19. *Para vigilar el interior y exterior de un polígono ortogonal de n vértices (posiblemente con hoyos) son suficientes $\lfloor \frac{n+4}{3} \rfloor$ puntos guardia.*

Demostración. Sea P un polígono ortogonal de n vértices y R el rectángulo que encierra a P . Consideremos a R junto con P como un polígono P' , el cual tiene a P como un hoyo.

Después particionamos en cuadriláteros convexos a P' así como a P . Siendo así, la gráfica resultante G cumple con el requisito del teorema 18, entonces G es 3-coloreable. Por lo que los guardias son colocados en el color que se utiliza con menos frecuencia. \square

3.3. Galerías ortogonales con hoyos

En esta sección se muestran algunos resultados de variantes en problemas de las galerías ortogonales con hoyos, donde bajo distintos tipos de guardias se busca vigilar su interior, exterior o ambos a la vez.

3.3.1. Vigilancia del interior de polígonos ortogonales con hoyos

En 1982, O'Rourke [29] demostró que el interior de cualquier polígono ortogonal de n vértices y h hoyos siempre es vigilado con $\lfloor \frac{n+2h}{4} \rfloor$ guardias y estableció la siguiente conjetura:

Conjetura 1. *Para vigilar cualquier polígono ortogonal P de n vértices y h hoyos son suficientes $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ puntos guardia, independientemente del número de hoyos que tenga P .*

Aggarwal [2] estableció que esta conjetura es cierta para $h = 1$ y $h = 2$, permaneciendo abierta para un número arbitrario de hoyos hasta el año de 1990, cuando Hoffmann [17] estableció la cota para vigilar el interior de polígonos ortogonales con hoyos a través del siguiente teorema:

Teorema 20. *Para vigilar el interior de cualquier polígono ortogonal de n vértices y h hoyos son siempre suficientes $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ puntos guardia.*

La cota superior con vértices guardia se mantiene en $\lfloor \frac{n+2h}{4} \rfloor$, sin embargo, la figura 3.12 hizo que Shermer [32] conjeturara que $\lfloor \frac{n+h}{4} \rfloor$ vértices guardia siempre bastan para vigilar un polígono ortogonal con n vértices y h hoyos.

En el año de 1993, Hoffman y Kreigel [18] dieron una cota para vigilar polígonos ortogonales con h hoyos, donde h toma valores grandes:

Teorema 21. *Para vigilar el interior de cualquier polígono ortogonal P de n vértices y h hoyos son suficientes $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ vértices guardia.*

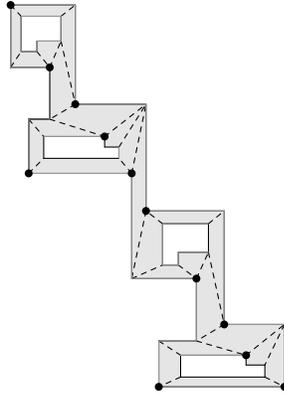


Figura 3.12: Polígono ortogonal de 44 vértices y 4 hoyos que requiere de 12 vértices guardia para ser vigilado.

Para demostrar este teorema, se basaron en el teorema 18. Primero consideraron dividir el interior de un polígono ortogonal P con hoyos en cuadriláteros convexos y después en obtener una triangulación de la gráfica resultante, de tal manera que los vértices tuvieran grado par. Después tomaron en cuenta que cualquier gráfica plana que tenga vértices con grado par es 3-coloreable. Por lo que los guardias se colocan en la clase cromática que es utilizada con menos frecuencia.

Vigilancia del interior de polígonos ortogonales con hoyos por medio de reflectores

Ahora veremos la extensión del teorema 15 a polígonos ortogonales con hoyos que establecieron Abello *et al.* [1].

Lema 3. *Sea P un polígono ortogonal con hoyos. La regla-NE produce una asignación de reflectores ortogonales que ilumina el interior de P .*

Demostración. Se prueba de igual manera que en el lema 2. □

Por lo que cualquiera de las reglas de iluminación produce una asignación de reflectores ortogonales que ilumina el interior de un polígono ortogonal con hoyos.

Teorema 22. *Para iluminar el interior de un polígono ortogonal P de n vértices y h hoyos son suficientes y en algunos casos necesarios $\lfloor \frac{3n+4(h-1)}{8} \rfloor$ reflectores ortogonales.*

La demostración del teorema 22 se sigue de los dos lemas mencionados a continuación, el primero prueba la suficiencia y el segundo la necesidad.

Lema 4. Para iluminar el interior de un polígono ortogonal P de n vértices y h hoyos son suficientes $\lfloor \frac{3n+4(h-1)}{8} \rfloor$ reflectores ortogonales.

Demostración. Sea P un polígono ortogonal de n vértices y h hoyos. Iluminemos a P con cada una de las cuatro reglas propuestas anteriormente. Denotemos con $\|X\|$ al número de reflectores ortogonales usados por la regla- X . Además, notemos que cada arista del polígono recibe dos reflectores ya que por ejemplo, en una arista- N se coloca un reflector en el vértice este por la regla- NE y uno en el vértice oeste por la regla- NO . También notemos que los conjuntos de reflectores de cualquier par de reglas son ajenos y que en la regla- NE un vértice- NE_c recibe sólo un reflector. Así que el número de reflectores $\|NE\|$ usados por la regla- NE está dado por

$$\|NE\| = \|SE\|_r + \|NO\|_r + \|NE\|_c$$

donde $\|SE\|_r$, $\|NO\|_r$ y $\|NE\|_c$ son el número de vértices- SE_r , vértices- NO_r y vértices- NE_c , respectivamente. Entonces, el número total de reflectores ortogonales usados por las cuatro reglas de iluminación es

$$\|NE\| + \|NO\| + \|SE\| + \|SO\| = 2r + c$$

donde r es el número de vértices cóncavos y c es el número de vértices convexos en P . Ya que para un polígono ortogonal sin hoyos $c = \frac{n+4}{2}$ y $r = \frac{n-4}{2}$ y como para un polígono ortogonal con hoyos los vértices convexos y cóncavos en el hoyo son respectivamente vértices cóncavos y convexos en el polígono, tenemos que la regla de iluminación que utiliza el menor número de reflectores asigna

$$\lfloor \frac{2r+c}{4} \rfloor = \lfloor \frac{2(r_0+c_1+\dots+c_n)+c_0+r_1+\dots+r_h}{4} \rfloor$$

reflectores, donde $c_i+r_i=n_i$ y c_i es el número de vértices convexos en el i -ésimo hoyo. Debido a que $n = \sum_{n=0}^h n_i$, se tiene que $\lfloor \frac{2r+c}{4} \rfloor$ es

$$\lfloor \frac{2[\frac{n_0-4}{2} + \sum_{i=1}^h \frac{n_i+4}{2}] + \frac{n_0+4}{2} + \sum_{i=0}^h \frac{n_i-4}{2}}{4} \rfloor = \lfloor \frac{3n+4(h-1)}{8} \rfloor.$$

Lo cual completa la prueba. \square

Lema 5. Para iluminar el interior de un polígono ortogonal P de n vértices y h hoyos son en algunos casos necesarios $\lfloor \frac{3n+4(h-1)}{8} \rfloor$ reflectores ortogonales.

Demostración. Consideremos el polígono P mostrado en la figura 3.13 a), el cual tiene 32 vértices y un hoyo. P requiere 12 reflectores ortogonales, uno para cada una de las ocho lenguas y uno por cada uno de los cuatro callejones. Verificando en $\lfloor \frac{3n+4(h-1)}{8} \rfloor$ con $n = 32$ y $h = 1$, tenemos que es igual a 12. Para valores más grandes de h , peguemos a la arista que está más a la derecha de P una copia de él mismo como se ve en la figura 3.13 b), esto genera un nuevo polígono de 60 vértices y dos hoyos que requiere de 23 reflectores. Si repetimos este último proceso h veces, se obtienen polígonos con $32 + 28(h-1)$ vértices y h hoyos, los cuales necesitan $12 + 11(h-1)$ reflectores ortogonales. \square

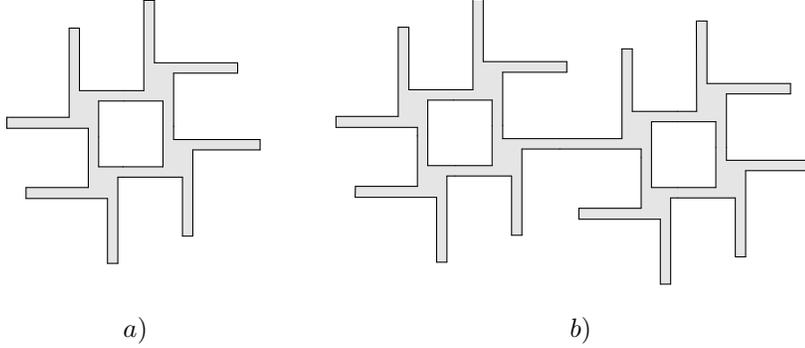


Figura 3.13: Familia de polígonos que necesitan $\lfloor \frac{3n-4(h-1)}{8} \rfloor$ reflectores ortogonales colocados en sus vértices para ser iluminados.

3.3.2. Vigilancia del exterior de polígonos ortogonales con hoyos

Problema de la fortaleza en polígonos ortogonales con hoyos por medio de reflectores

Abello *et al.* [1] demostraron el siguiente teorema para iluminar el exterior de polígonos ortogonales con hoyos:

Teorema 23. *Para vigilar el exterior de un polígono ortogonal P de n vértices y h hoyos, son suficientes y en algunos casos necesarios $\frac{n}{2} + 2$ reflectores ortogonales colocados en vértices o en la frontera de P .*

Demostración. Primero demosetremos la suficiencia. Sea P un polígono ortogonal de n vértices y h hoyos. Sea n_0 el número de vértices en la frontera de P y n_i ($0 \leq i \leq h$) el número de vértices en el i -ésimo hoyo. Notemos que al iluminar el exterior de P se requiere iluminar el interior de cada hoyo de P . Por otra parte, ya que P se considera simplemente conexo, los hoyos no tienen hoyos en su interior, así, por los resultados vistos respecto a la vigilancia del interior de polígonos ortogonales con hoyos a través de reflectores, sabemos que el i -ésimo hoyo puede ser iluminado con menos que $\frac{n_i}{2}$ reflectores ortogonales.

Recordemos que un conjunto S en el plano es *ortogonalmente convexo* si cualquier segmento de línea horizontal o vertical intersecta a S en un conjunto conexo. Mientras que el *polígono ortogonal conexo* $C(S)$ es el conjunto ortogonalmente convexo más pequeño que contiene a S .

Consideremos el polígono P' definido por los n_0 vértices de la frontera de P y el polígono ortogonal conexo de P' . Entonces la frontera de $C(P')$ es compuesta por a lo más cuatro escaleras (y posiblemente menos). Sin embargo, si $C(P')$ tiene

k vértices su exterior puede ser iluminado con $\frac{k}{2} + 2$ vértices, por medio de un recorrido alrededor de la frontera de $C(P')$ que coloca un reflector en cada vértice cóncavo de cada escalera y uno en cada arista que se encuentre más al norte, sur, este y oeste. Observemos que en cada arista donde incide un vértice que es agregado por $C(P')$, hay un vértice de P' que no pertenece a $C(P')$. Por lo que el reflector colocado en cada uno de los nuevos vértices resuelve un vértice para P' y los reflectores no son colocados en vértices en los cuales ya haya sido colocado otro reflector.

Sólo queda iluminar las *bahías* de P' , la cuales son polígonos ortogonales que se forman entre P' y $C(P')$, como se puede ver en la figura 3.14 estas tienen todas sus aristas grises excepto una que es negra. Ya que las bahías pueden tener un vértice que no pertenece a P' , cada una de ellas debe ser iluminada con alguna de las reglas de iluminación (regla-*NE*, regla-*NO*, regla-*SE*, regla-*SO*) presentadas en la sección 3.2.1, que no coloque reflectores en ese vértice y que coloque el menor número de reflectores. Entonces por el teorema 15, cada bahía es iluminada con $\lfloor \frac{3m-4}{8} \rfloor$ reflectores ortogonales, donde m es el número de vértices que conforma a cada una de ellas.

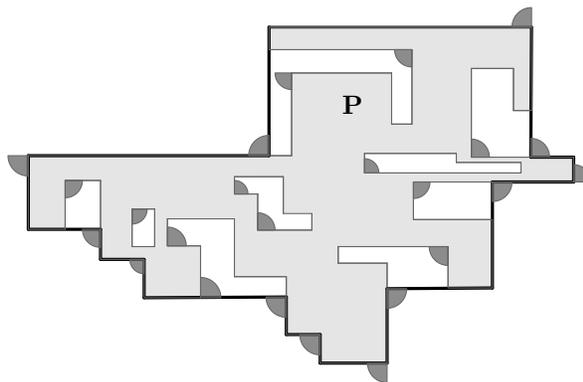


Figura 3.14: Colocación de reflectores ortogonales para iluminar el exterior del polígono ortogonal P con hoyos.

Por otra parte, la necesidad es probada con un polígono ortogonalmente convexo. \square

Observemos que la demostración del teorema 23 induce un algoritmo lineal, en el número de vértices de un polígono ortogonal, que no requiere de partición de polígonos por lo que es simple y práctico.

Problema del patio de la prisión en polígonos ortogonales con hoyos

Hoffmann y Kriegel [18] también demostraron el siguiente resultado para polígonos ortogonales con hoyos:

Teorema 24. *Para vigilar el interior y exterior de un polígono ortogonal de n vértices y h hoyos son suficientes $\lfloor \frac{5n-4h}{12} \rfloor + 2$ vértices guardia.*

La demostración de este teorema se basa en construir una gráfica G a partir de los vértices y aristas de un polígono ortogonal P de n vértices y h hoyos, a la que de cierta manera, también se le agregan nuevas aristas y vértices para que G cumpla con el requisito establecido en el teorema 18. Siendo así, G tendrá a lo más $\lfloor \frac{5n-4h}{4} \rfloor + 5$ vértices. Entonces G es 3-coloreable, por lo que los guardias se colocan en el color que se utiliza con menos frecuencia, lo cual establece la cota de $\lfloor \frac{5n-4h}{12} \rfloor + 2$ vértices guardia.

3.4. Vigilancia con radares

Kranakis *et al.* [22] establecieron resultados interesantes con el uso de radares. Para facilitar la notación en la presentación de estos resultados propusieron las siguientes definiciones:

Definición 2. *Sea P un conjunto de puntos en el plano y \mathcal{R} una región en el plano. Sea $\Phi(P, \mathcal{R})$ el ínfimo sobre todos los ángulos $\phi \leq 2\pi$, tal que si radares de ángulo ϕ son localizados en los puntos P , entonces existe una orientación inicial de los radares de tal forma que toda la región \mathcal{R} es vigilada todo el tiempo.*

Definición 3. *Sea \mathcal{R} una región en el plano. Sea $\Phi(n, \mathcal{R})$ el ínfimo sobre todos los $\Phi(P, \mathcal{R})$ donde P es un conjunto de n radares en el plano.*

Definición 4. *Considerando un radar de ángulo ϕ colocado en un punto K que gira en sentido positivo, definimos al sector vigilado por el radar en el tiempo t , de la siguiente manera:*

- Denotemos $F_K(\rho; 0)$ al sector inicial definido por el radar cuando su orientación es ρ ; éste es el sector circular definido en un círculo de radio infinito, centrado en K y delimitado por los radios KK_ρ y $KK_{\rho+\phi}$.
- En el tiempo t el radar rotará un ángulo de t radianes. Denotemos $F_K(\rho; t)$ al sector circular en el tiempo t el cual es definido en un círculo de radio infinito, centrado en K y delimitado por los radios $KK_{\rho-t}$ y $KK_{\rho-t+\phi}$.

En lo que sigue se muestran los resultados con radares establecidos en [22].

3.4.1. Vigilancia de una recta en el plano

Teorema 25. *Para cualquier conjunto P de $n \geq 2$ radares en una recta \mathcal{L} tenemos que $\Phi(P, \mathcal{L}) = \frac{3\pi}{n}$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad supongamos que la recta \mathcal{L} que va a ser vigilada, es horizontal. Sea $P = R_{p_0}, R_{p_1}, \dots, R_{p_{n-1}}$ el conjunto de radares en \mathcal{L} , donde el radar R_{p_i} está en el punto p_i , tal que la coordenada x de R_{p_i} es menor que la de $R_{p_{i+1}}$, para $i = 0, 1, \dots, n-2$.

Primero probemos que el ángulo de $\frac{3\pi}{n}$ es siempre suficiente. Sea $F_{R_{p_i}}(\frac{i3\pi}{n}; 0)$, para $i = 0, 1, \dots, n-1$, la orientación inicial del radar en p_i (figura 3.15).

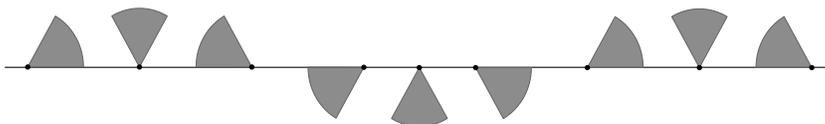


Figura 3.15: Orientación inicial de los radares en \mathcal{L} .

Definamos el dual del plano como sigue: cada radar i es el sector circular de un círculo unitario C delimitado por $\frac{i3\pi}{n}$ y $\frac{(i+1)3\pi}{n}$, y en el tiempo t , la recta \mathcal{L} es representada como un segmento de recta $\vec{\mathcal{L}}$ tal que cruza el centro de C y la cabeza de $\vec{\mathcal{L}}$ forma un ángulo t con el eje horizontal (figura 3.16 a)).

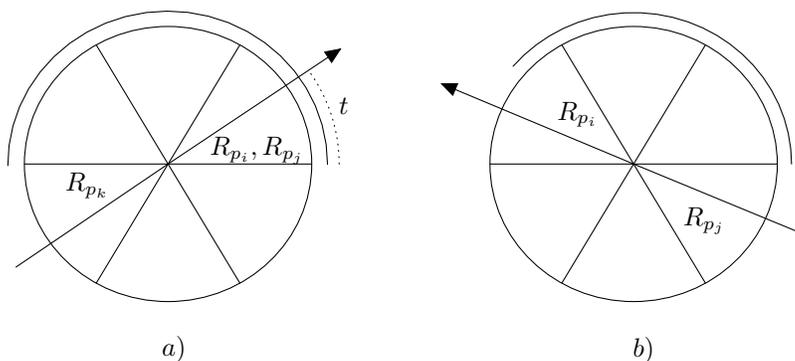


Figura 3.16: a) Orientación en el tiempo t . b) Si $\Phi(n, \mathcal{L}) < \frac{3\pi}{n}$, \mathcal{L} no siempre es vigilada totalmente.

En el plano dual, los radares son estáticos mientras que \mathcal{L} rota todo el tiempo. La orientación $\vec{\mathcal{L}}$ de \mathcal{L} preserva la rotación en el plano original. Consideremos que la cabeza de $\vec{\mathcal{L}}$ representa ∞ , mientras que la cola representa $-\infty$ en el plano original.

Ya que la suma de los ángulos es 3π , el sector circular $[0, \pi)$ de C en el plano dual siempre es vigilada por dos conjuntos $S_1, S_2 \subseteq P$ de radares, mientras que el sector circular $[\pi, 2\pi)$ de C en el dual es vigilado por un conjunto $S_3 \subseteq P$ de radares. Observemos que cada radar en S_3 está entre S_1 y S_2 en el plano original.

Sean $R_{p_i} \in S_1$, $R_{p_j} \in S_2$ y $R_{p_k} \in S_3$ los radares que vigilan al segmento $\vec{\mathcal{L}}$ al tiempo t , en el plano dual. Si R_{p_i} y R_{p_j} vigilan la cabeza de $\vec{\mathcal{L}}$, R_{p_k} vigila la cola. Por lo tanto, \mathcal{L} es vigilada totalmente por R_{p_k} y R_{p_j} en el plano original. Análogamente, si R_{p_i} y R_{p_j} vigilan la cola de $\vec{\mathcal{L}}$, R_{p_k} vigila la cabeza. Entonces, \mathcal{L} es totalmente vigilada por R_{p_i} y R_{p_k} en el plano original.

Ahora, probemos que el ángulo de $\frac{3\pi}{n}$ siempre es necesario. Supongamos lo contrario, tal que la suma de los ángulos es menor que 3π . Por lo tanto, existe un tiempo t cuando sólo dos radares, digamos R_{p_i} y R_{p_j} , vigilan el segmento $\vec{\mathcal{L}}$ en el plano dual como se muestra en la figura 3.16 b). Supongamos que R_{p_i} vigila la cola y que R_{p_j} vigila la cabeza de $\vec{\mathcal{L}}$ en el plano dual. Por lo tanto \mathcal{L} es totalmente vigilado en el plano original. Sin embargo, en el tiempo $t + \pi$, R_{p_i} vigila la cabeza y R_{p_j} vigila la cola de $\vec{\mathcal{L}}$. Entonces, el segmento $\overline{p_i p_j}$ de \mathcal{L} en el plano original no es vigilado. Por lo que ésto contradice la suposición. \square

3.4.2. Vigilancia del plano

Lema 6. Sean R_a y R_b dos radares de ángulo ϕ , respectivamente en los puntos a y b en una recta horizontal. Supongamos que la orientación inicial de R_a y R_b son $F_{R_a}(\pi; 0)$ y $F_{R_b}(\pi - \phi; 0)$ respectivamente. Además, supongamos que la coordenada en x de a es menor que la coordenada x de b . Si $0 \leq t \leq \pi$, la intersección de los radares vigila el sector circular 2ϕ . Si $\pi \leq t \leq 2\pi$, ellos dejan un corredor sin vigilar.

Demostración. Sea a_1, b_1, a_2 y b_2 los lados derechos e izquierdos que definen los ángulos de los radares que están en los puntos a y b respectivamente. Sea h el eje horizontal. En el tiempo t , $\angle(b_2, h) = \pi - t$.

Observemos que $\angle(a_1, b_1) = -\phi$ y $\angle(b_2, a_2) = \phi$. Por lo tanto, cuando $\pi < t < 2\pi$, los lados a_1 y b_1 no se intersectan, es decir, $F_{R_a}(\pi, t) \cap F_{R_b}(\pi - \phi; t) = \emptyset$ ya que la coordenada x de a es menor que la coordenada x de b . Consideremos la intersección de un punto x entre a_1 y b_2 ; como se muestra en la figura 3.17. No es difícil ver que a_2 y b_1 determinan un ángulo de vigilancia incidente en x de tamaño 2ϕ . \square

Teorema 26. Sea \mathcal{P} el plano. Entonces, $\Phi(3, \mathcal{P}) = \pi$.

Demostración. Sea R_p, R_q y R_r tres radares de ángulo π en el plano, sobre los puntos p, q y r respectivamente. Si los radares son colineales, entonces la configuración inicial mostrada en la figura 3.18 es fácilmente de ver que es correcta.

Por lo tanto, podemos asumir sin pérdida de generalidad, que los tres radares no son colineales. Además supongamos que el segmento de recta \overline{pr} es horizontal y que R_q se encuentra arriba de \overline{pr} . Sea C el circuncírculo de p, q y r . Orientemos

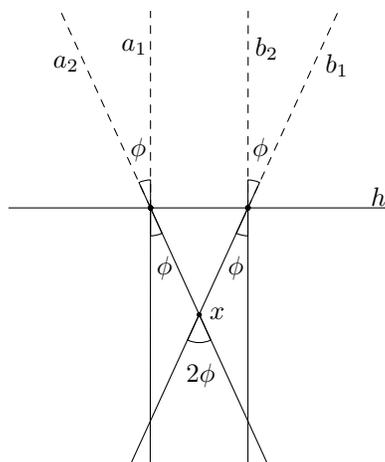


Figura 3.17: Dos radares de ángulo ϕ .

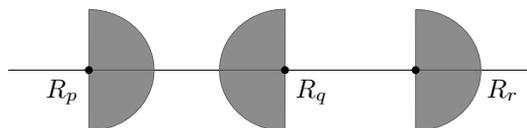


Figura 3.18: Orientación inicial de los tres radares de ángulo π cuando están colocados en puntos colineales.

R_p como $F_{R_p}(l; 0)$, donde l es el ángulo de la tangente de C en p , R_q como $F_{R_q}(\pi + \angle pqr; 0)$ y R_r como $F_{R_r}(0; 0)$, tal como se muestra en la figura 3.19 a).

Consideremos cualquier punto a en el circuncírculo C de pqr . Observemos que el ángulo que forma cada radar con a es igual en el arco (figura 3.19 b)). Por lo tanto, se intersectan en a . Ésto es verificado cuando a está en el arco pr ya que los radares R_q y R_r dejan un ángulo sin vigilar con vértice en a . Sin embargo, R_p vigila este ángulo no vigilado. Por otra parte, cuando a está en el arco rq , los roles cambian a que R_p y R_q dejan un ángulo de sombra que es cubierta por R_r y cuando a está en el arco qp , los roles cambian a que R_p y R_q dejan un ángulo de sombra que es cubierta por R_q . Ésto prueba la cota si los puntos no son colineales.

Ahora supongamos que p, q, r son colineales. Sin pérdida de generalidad supongamos que ellos están en una recta horizontal y que la coordenada x de q es más grande que la coordenada x de p y que es más pequeña que la coordenada x

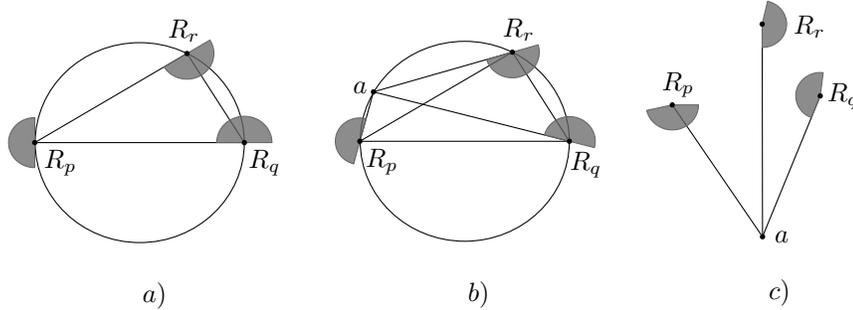


Figura 3.19: *a)* Orientación inicial de los radares de ángulo π cuando no son colineales para vigilar todo el plano. *b)* R_q vigila el área que deja de vigilar R_p y R_q . *c)* Los tres radares de ángulo π no vigilan continuamente si su ángulo es $\pi - \varepsilon$.

de r . Orientemos a R_p, R_q y R_r como $F_{R_p}(0;0)$, $F_{R_q}(\pi;0)$ y $F_{R_r}(0;0)$, respectivamente. Por el lema 6 sabemos que R_p y R_q vigilan el plano en el tiempo $t < \pi$ y que R_q y R_r vigilan el plano en el tiempo $\pi \leq t < 2\pi$.

Para probar que la cota es justa, supongamos por contradicción que $\Phi(3, \mathcal{P}) = \pi - \varepsilon$. Supongamos que en el tiempo t los radares vigilan el plano. Entonces existe un punto a en el área vigilada de R_p donde se intersectan un lado del radar R_q con otro del radar R_r , como se muestra en la figura 3.19 *c)*. Sin embargo, a no es vigilado en el tiempo $t + \pi$ ya que $\Phi(3, \mathcal{P}) = \pi - \varepsilon$. \square

Capítulo 4

Vigilancia del exterior de polígonos ortogonales con radares

Supongamos que en una prisión de la Ciudad de México se han presentado varias fugas de reos en los últimos meses. Como solución a tal hecho, el director del recinto desea colocar un sistema computarizado de radares, con un ángulo de vigilancia de $\frac{3\pi}{2}$, para que el exterior de la cárcel sea vigilado. Él se pregunta, *¿cuántos radares se necesitan para tal propósito y de qué manera se colocarán?*.

Suponiendo que la prisión tiene diseño de un polígono ortogonal, la respuesta a la pregunta anterior se basa en la extensión del resultado recientemente establecido en [4].

4.1. Introducción

Como mencionamos en el capítulo anterior, los *radares* son lámparas restringidas a un ángulo de iluminación α con alcance ilimitado que giran a una velocidad angular constante, a los cuales denotaremos radares- α . Nombraremos *sombra* de un radar- α al sector del plano que no está iluminado por él. Observemos que dicha región es una zona angular de tamaño β , donde β es el ángulo conjugado de α , ésto es $\beta = \pi - \alpha$, además notemos que los lados del ángulo β no pertenecen a la sombra del radar.

En este capítulo, se considerarán radares de ángulo $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ colocados en vértices de un polígono ortogonal P y que girarán en sentido positivo con la misma velocidad. Además, los lados a_1 y a_2 que determinan el ángulo α cuando se va de a_1 a a_2 en sentido positivo, serán llamados *primer lado* y *segundo lado*, respectivamente (figura 4.1). Por otra parte, se considerará que las aristas de los polígonos ortogonales son obstáculos que limitan el alcance de los radares.

En [4] se prueba que $\frac{n}{2}$ radares- $\frac{3\pi}{2}$ colocados en vértices de un polígono ortogo-

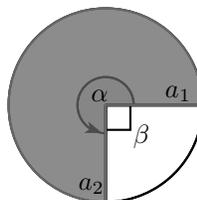


Figura 4.1: Radar de ángulo $\alpha = \frac{3\pi}{2}$, con sombra $\beta = \frac{\pi}{2}$.

nal P (con o sin hoyos) de n vértices son suficientes y en algunos casos necesarios para vigilar a P . Para esta prueba se establecen dos conjuntos disjuntos de las cuatro reglas de iluminación presentadas en la sección 3.2.1, donde las reglas que conforman a cada uno de ellos colocan radares- $\frac{3\pi}{2}$ con la misma orientación en vértices de un polígono ortogonal para vigilar su interior.

Basándonos en este resultado, en la presente tesis se extiende el análisis y se establece una cota para *el problema de la fortaleza* y para *el problema del patio de la prisión* en polígonos ortogonales con el uso de radares- $\frac{3\pi}{2}$. El primero pregunta el número de radares- $\frac{3\pi}{2}$ para vigilar el exterior de un polígono ortogonal P , mientras que el segundo pregunta el número de radares- $\frac{3\pi}{2}$ para vigilar el interior y el exterior de P . En el segundo problema, nos restringimos a vigilar parte del exterior de P contenido en el interior de un rectángulo isotético que encierra completamente a P y permitimos que algunos radares- $\frac{3\pi}{2}$ sean colocados en puntos que no pertenecen a P , llamados *puntos Steiner*. También se extienden los resultados de ambos problemas a polígonos ortogonales con hoyos.

Antes de presentar los resultados de esta tesis, en la sección 4.2 se hace un análisis de los conjuntos de reglas de iluminación establecidos en [4] y se realizan observaciones importantes que facilitan algunas pruebas posteriores. En la sección 4.3 se presenta el resultado principal de [4]. Después, en las secciones 4.4 y 4.5, respectivamente se resuelven el problema de la fortaleza y el problema del patio de la prisión con radares- $\frac{3\pi}{2}$ en polígonos ortogonales con y sin hoyos.

4.2. Reglas dobles de iluminación

En [4] se basaron en el conjunto {regla- NE , regla- NO , regla- SE , regla- SO } de reglas de iluminación para el interior de polígonos ortogonales con reflectores, presentadas en la sección 3.2.1, y lo separaron en dos conjuntos, {regla- NE , regla- SO } y {regla- NO , regla- SE }, a los que denotaremos respectivamente regla- (NE,SO) y regla- (NO,SE) y llamaremos *reglas dobles de iluminación*.

Definición 5. Regla de posicionamiento NE-SO (regla-(NE,SO)).

Colocar radares- $\frac{3\pi}{2}$ en cada uno de los vértices de un polígono ortogonal indicados en seguida, todos con la misma orientación y no más de uno por vértice:

1. En el vértice este de cada arista norte.
2. En el vértice norte de cada arista este.
3. En el vértice oeste de cada arista sur.
4. En el vértice sur de cada arista oeste.

Notemos que los pasos 1 y 2 colocan radares- $\frac{3\pi}{2}$ en los mismos vértices que la regla-NE coloca reflectores ortogonales. La misma relación se guarda entre la regla-SO y los pasos 3 y 4.

Lema 7. La regla-(NE,SO) produce una asignación de radares- $\frac{3\pi}{2}$ que iluminan en todo momento el interior de un polígono ortogonal P .

Demostración. Sea P un polígono ortogonal. Coloquemos en P radares- $\frac{3\pi}{2}$ con la asignación de la regla-(NE,SO). Sea t_0 el instante de tiempo en que la sombra de los radares tiene una orientación igual a la del cuarto cuadrante del plano cartesiano (figura 4.2 a)).

Observemos que a partir del tiempo t_0 , por un intervalo de π segundos el ángulo de cada reflector ortogonal que posicionaría la regla-NE queda contenido en el ángulo de un radar- $\frac{3\pi}{2}$, colocado en el mismo vértice de P (figura 4.2 a)). Por lo cual, los radares- $\frac{3\pi}{2}$ mantienen iluminado a P durante dicho intervalo.

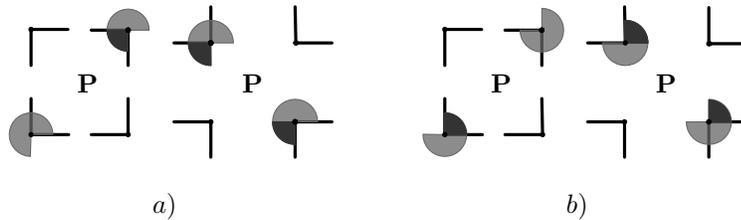


Figura 4.2: Orientación de los radares- $\frac{3\pi}{2}$ debidos a la regla-(NE,SO) en el instante t_0 (a)) y en $t_0 + \pi$ (b)). En ambos casos, el área más oscura superpuesta a la de los radares muestra a los reflectores ortogonales correspondientes a la regla-NE (a)) y a la regla-SO (b)).

En el instante $t_0 + \pi$ los radares- $\frac{3\pi}{2}$ tendrán una orientación como la que se muestra en la figura 4.2 b). De manera similar a la expuesta en el párrafo anterior, durante el siguiente intervalo de π segundos, el ángulo de cada reflector ortogonal

que colocaría la regla- SO queda contenido en el ángulo de un radar- $\frac{3\pi}{2}$, colocado en el mismo vértice de P . Entonces, estos radares iluminarán a P .

Por lo tanto, los radares- $\frac{3\pi}{2}$ que asigna la regla- (NE,SO) iluminan continuamente el interior de P . \square

Análogamente se define la regla- (NO,SE) , así como también se demuestra que la asignación de radares- $\frac{3\pi}{2}$ que produce ilumina en todo momento el interior de un polígono ortogonal.

El siguiente lema establece que las reglas dobles de iluminación también colocan radares- $\frac{3\pi}{2}$ que iluminan el interior de un polígono ortogonal con hoyos.

Lema 8. *Si la regla- (NE,SO) se aplica a un polígono ortogonal con hoyos, entonces produce una asignación de radares- $\frac{3\pi}{2}$ que iluminan en todo momento el interior de tal polígono.*

Demostración. Debido a que tanto la regla- NE y la regla- SO asignan reflectores ortogonales que iluminan el interior de polígonos ortogonales con hoyos (como se vió en la lema 3), entonces, el mismo argumento usado para la demostración del lema 7 prueba que la regla- (NE,SO) produce una asignación de radares- $\frac{3\pi}{2}$ que iluminan en todo momento el interior de un polígono ortogonal con hoyos. \square

Análogamente se prueba que la regla- (NO,SE) asigna radares- $\frac{3\pi}{2}$ que iluminan en todo momento el interior de polígonos ortogonales con hoyos.

4.2.1. Alternancia de los radares en los vértices del polígono

Aquí veremos que las reglas dobles de iluminación posicionan los radares- $\frac{3\pi}{2}$ de manera alternada en los vértices de un polígono ortogonal P con o sin hoyos. La prueba se basa en las siguientes observaciones y lemas que resultan de aplicar la regla- (NE,SO) a P .

Lema 9. *Al aplicar la regla- (NE,SO) quedan sin radar- $\frac{3\pi}{2}$ los siguientes vértices de P :*

1. *El vértice oeste de cada arista norte.*
2. *El vértice sur de cada arista este.*
3. *El vértice este de cada arista sur.*
4. *El vértice norte de cada arista oeste.*

Demostración. Sea ν una arista norte de P tal que u es su vértice oeste. Consideremos la otra arista incidente en u que puede ser una arista este u oeste (figura 4.3). En el primer caso, por el paso 2 de la definición 5, correspondiente a la colocación de un radar en la arista este, no se pone ningún radar en u . Mientras que en el segundo caso, tampoco se coloca un radar en u , debido al paso 4 de dicha definición.

De manera similar se prueban los incisos 2, 3 y 4 enunciados en el lema. \square

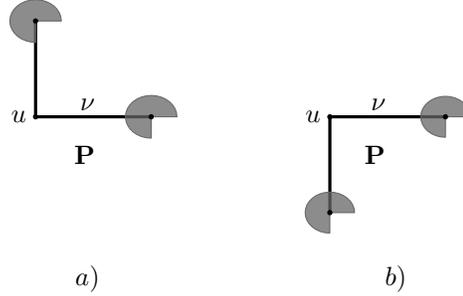


Figura 4.3: La segunda arista incidente en el vértice oeste u de una arista norte ν sólo puede ser una arista este (a) u oeste (b)). Por lo que los pasos 1, 2 y 4 de la regla- (NE,SO) colocan radares- $\frac{3\pi}{2}$ como se ilustra, dejando al vértice u sin radar.

Observación 1. *Exactamente un vértice de cada arista de P queda con un radar- $\frac{3\pi}{2}$.*

Ésto es consecuencia del lema 9 y de la definición 5.

Lema 10. *Los vértices de P en los que hay un radar- $\frac{3\pi}{2}$ colocado por la regla- (NE,SO) se alternan con los vértices restantes.*

Demostración. Supongamos lo contrario. Entonces existiría una arista de P con un radar- $\frac{3\pi}{2}$ en cada uno de sus vértices o bien una arista sin radar alguno en sus vértices, lo cual en ambos casos contradice a la observación 1. \square

Teorema 27. *Las reglas dobles de iluminación colocan radares- $\frac{3\pi}{2}$ alternados en los vértices de un polígono ortogonal P con o sin hoyos.*

Demostración. En el caso de la regla- (NE,SO) el resultado se sigue del lema 10. Para el caso de la regla- (NO,SE) se procede de manera análoga. \square

Corolario 2. *Sea P un polígono ortogonal de n vértices, con o sin hoyos. Entonces, cualquiera de las dos reglas dobles de iluminación colocan radares- $\frac{3\pi}{2}$ en $\frac{n}{2}$ de los vértices de P .*

Demostración. Es consecuencia inmediata del teorema 27. \square

4.3. Resultados anteriores

El análisis de iluminación del interior de polígonos ortogonales ha sido estudiado en [4], donde se establecen los resultados presentados a continuación.

4.3.1. Iluminación de un punto en el plano con radares

Teorema 28. Sean a y b dos puntos distintos en el plano y sean R_a y R_b dos radares- $\frac{3\pi}{2}$ situados en ellos, respectivamente. Sea q otro punto tal que $q \neq a$. Entonces, R_a no es suficiente para mantener continuamente iluminado al punto q , mientras que R_a y R_b juntos si son suficientes para ello.

Demostración. Consideremos la posición donde R_a está justo antes de dejar de iluminar al punto q , es decir, cuando el primer lado de R_a está sobre q . Es claro ver que después de que R_a gire un cierto $\varepsilon < \frac{\pi}{2}$, q quedará en la sombra de R_a por lo que no estará iluminado (figura 4.4 a)).

Ahora consideremos la configuración inicial de R_a y R_b tal que el primer lado de R_a está sobre q y R_b está iluminando a q justo cuando comienza su periodo de iluminación, es decir, cuando el segundo lado de R_b está sobre q (figura 4.4 b)). Por un intervalo de $\frac{3\pi}{2}$, q estará continuamente iluminado por R_b , alcanzándose la posición mostrada en la figura 4.4 c). Entonces, R_b dejará de iluminar a q durante los restantes $\frac{\pi}{2}$ seguidos del periodo, pero R_a lo estará iluminando durante ese lapso. Así habrá una vuelta completa y los radares R_a y R_b se encontrarán en la configuración inicial dada, otra vez iluminando continuamente a q . \square

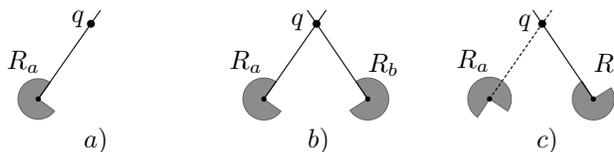


Figura 4.4: a) Muestra que un radar- $\frac{3\pi}{2}$ no es suficiente para iluminar continuamente un punto q por un periodo de 2π . b) y c) Muestran que un punto q es iluminado continuamente en un periodo de 2π por dos radares- $\frac{3\pi}{2}$.

4.3.2. Vigilancia del interior de polígonos ortogonales con radares

Considerando radares- $\frac{3\pi}{2}$ colocados en vértices de un polígono ortogonal P , se establece el siguiente teorema:

Teorema 29. Para iluminar el interior de un polígono ortogonal P de n vértices son suficientes y en algunos casos necesarios $\frac{n}{2}$ radares- $\frac{3\pi}{2}$ colocados en vértices de P .

Demostración. La suficiencia del teorema se sigue por el lema 7 y el corolario 2.

Para probar la necesidad, consideremos el polígono P de la figura 4.5 a). Sin pérdida de generalidad, también consideremos los puntos a y b , así como las regiones A y B en P , donde a y b son vistos desde cualquier punto en A y B , respectivamente.

Por el teorema 28 y por la restricción de que los radares deben ser colocados en vértices de P , a y b para ser iluminados requieren de dos radares- $\frac{3\pi}{2}$ colocados en dos vértices de P que pertenezcan a las regiones A y B , respectivamente (figura 4.5 a)). Como ambas regiones no comparten vértices de P , en cualquier selección de vértices que se tome será necesario utilizar cuatro de los ocho vértices de P para posicionar apropiadamente a los radares- $\frac{3\pi}{2}$ y así mantener su interior completamente iluminado.

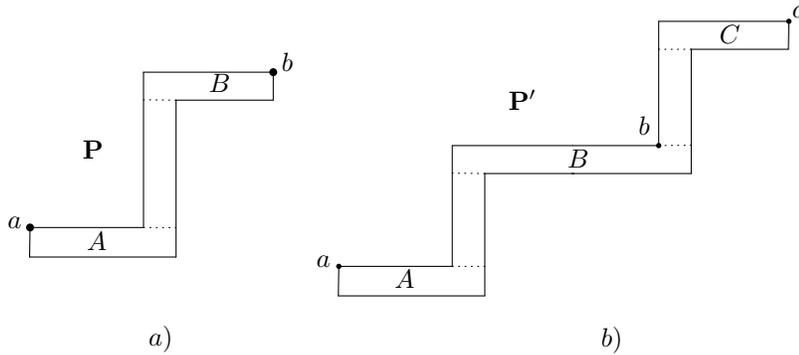


Figura 4.5: Familia de polígonos que necesitan al menos $\frac{n}{2}$ para iluminar su interior.

Ahora consideremos el polígono P' de la figura 4.5 b), el cual es formado si pegamos una copia de P a él mismo. Sin pérdida de generalidad, tomemos en cuenta los puntos a, b y c , así como las regiones A, B y C en P' . El análisis hasta el punto b se mantiene igual como se hizo anteriormente, mientras que para c se realiza de manera similar, ya que éste sólo es iluminado si se colocan apropiadamente dos radares- $\frac{3\pi}{2}$ en cualesquiera dos vértices de P' que pertenezcan a la región C . Como C no comparte vértices con las demás regiones, será necesario utilizar otros dos vértices de P' .

Notemos que para formar P' se agregaron cuatro vértices, de los cuales fue necesario utilizar dos de ellos para iluminar completamente a P' . Entonces es claro que si seguimos pegando polígonos P a ellos mismos como se muestra en la figura 4.5 b), será necesario utilizar por lo menos $\frac{n}{2}$ vértices para iluminar al nuevo polígono generado. \square

4.4. Problema de la fortaleza con radares

Analicemos la vigilancia de un semiplano con radares- $\frac{3\pi}{2}$, resultado que nos ayudará a formular la solución para vigilar el exterior de polígonos ortogonales.

Lema 11. Sean u y v puntos que pertenecen a una recta horizontal dirigida \mathcal{L} de u a v , la cual divide al plano en dos, semiplano superior S y el semiplano inferior I . Y sean R_u y R_v radares- $\frac{3\pi}{2}$, el primero con su sombra dirigida inicialmente al sureste y el segundo hacia el suroeste, colocados respectivamente en u y v (figura 4.6). Entonces S se mantiene completamente vigilado por un periodo de 2π .

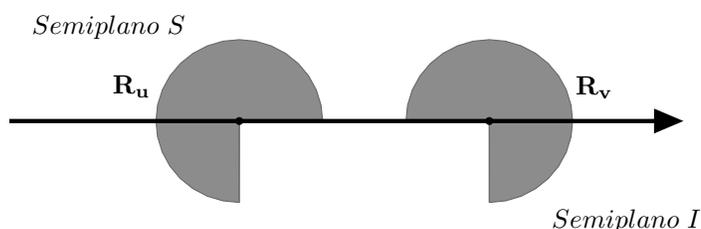


Figura 4.6: Configuración inicial de los dos radares- $\frac{3\pi}{2}$ para mantener vigilado el semiplano S por un periodo de 2π .

Demostración. Sean u_1 y u_2 los lados del radar R_u y v_1 y v_2 los lados del radar R_v , los cuales determinan su ángulo de iluminación.

Para analizar que el semiplano S en todo momento es vigilado por los radares R_u y R_v , consideremos que el periodo 2π es dividido en tres etapas, donde la primera de ellas comienza con la configuración inicial de los radares.

- Etapa 1: El radar R_v mantiene continuamente vigilado al semiplano S durante un periodo de $\frac{\pi}{2}$. Por lo que la posición final de los radares en este periodo es tal que el lado u_2 de R_u y el lado v_1 de R_v están colocados sobre la recta \mathcal{L} dirigidos hacia el este.
- Etapa 2: Es posterior a la etapa 1. Entonces si los radares giran cierto ángulo γ , donde $0 < \gamma \leq \pi$, los lados u_2 y v_1 se desplazan γ grados en el semiplano S , causando que R_u cubra el ángulo de sombra de R_v en el semiplano superior (figura 4.7).

La posición final de los radares después de este periodo, es tal que el lado u_2 de R_u y el lado v_1 de R_v están colocados sobre la recta \mathcal{L} dirigidos hacia el oeste.

- Etapa 3: Es posterior a la etapa 2, por lo que el radar R_u mantiene continuamente vigilado al semiplano S durante un periodo de $\frac{\pi}{2}$. Al termino de

este periodo, los radares se posicionan en la configuración inicial de la etapa 1.

Por lo tanto, por un periodo de 2π el semiplano superior S se mantiene completamente vigilado. \square

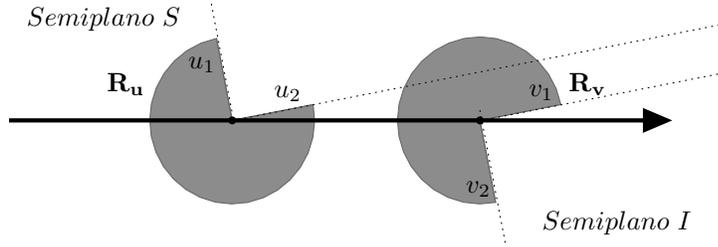


Figura 4.7: R_u cubre la sombra de R_v en el semiplano S .

El lema 11 nos permite probar el siguiente teorema:

Teorema 30. *Sea P un polígono ortogonal con cuatro vértices. Si se coloca un radar- $\frac{3\pi}{2}$ en cada uno de los vértices de P , tal que su configuración inicial posiciona completamente la sombra de cada uno de ellos al interior del polígono, entonces el exterior de P se mantiene vigilado en todo momento.*

Demostración. Sean v_1, v_2, v_3 y v_4 los vértices del polígono ortogonal P . Posicionemos radares- $\frac{3\pi}{2}$ en los vértices de P de tal manera que su sombra quede completamente al interior de P , como se muestra en la figura 4.8. Si colocamos rectas sobre cada una de las aristas de P , el exterior del polígono se divide en cuatro semiplanos, sean estos S_1, S_2, S_3 y S_4 localizados respectivamente, arriba, a la izquierda, abajo y a la derecha de P .

Notemos que los radares colocados en los vértices v_1 y v_4 tienen la configuración inicial establecida en el lema 11, por lo que mantienen vigilado el semiplano S_1 . Así mismo, el radar en el vértice v_1 junto con que está en v_2 , se encuentran bajo la misma configuración inicial pero respecto a S_2 , y dado que todos los radares giran hacia la misma dirección y con la misma velocidad angular, entonces los radares en v_1 y v_2 vigilan a S_2 por un periodo de 2π . Por este último argumento, los semiplanos S_3 y S_4 también están vigilados por los radares que están en v_2, v_3 y v_3, v_4 , respectivamente.

Por lo tanto, los cuatro semiplanos se encuentran vigilados por un periodo de 2π , asegurando que el exterior de P es vigilado en todo momento. \square

Si ahora consideramos iluminar el exterior de cualquier polígono ortogonal P con radares- $\frac{3\pi}{2}$ y con las restricciones de que éstos sólo sean posicionados en vértices del P y sólo un radar por vértice, tenemos el siguiente resultado:

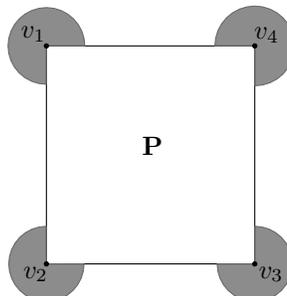


Figura 4.8: Configuración inicial de los radares para mantener en todo momento vigilado el exterior de un polígono ortogonal P de cuatro vértices.

Teorema 31. *Para mantener vigilado el exterior de un polígono ortogonal P de n vértices, son suficientes y en algunos casos necesarios $\frac{n}{2} + 2$ radares- $\frac{3\pi}{2}$ colocados en vértices de P .*

La demostración de este teorema se sigue por los dos lemas presentados a continuación, el primero prueba la suficiencia y el segundo la necesidad.

Lema 12. *Son suficientes $\frac{n}{2} + 2$ radares- $\frac{3\pi}{2}$ para vigilar el exterior de un polígono ortogonal P de n vértices, donde los radares son colocados en vértices de P .*

Demostración. Sea un polígono ortogonal P de n vértices. Sea B la caja delimitadora isotética (en inglés, *bounding box*) con vértices b_i ($1 \leq i \leq 4$) que encierra completamente a P (figura 4.9).

La caja B divide el exterior de P en dos regiones:

1. $exterior(P) \cap exterior(B)$: Debido a que $P \subseteq B$, esta región coincide con el exterior de B , es decir, de un polígono ortogonal con cuatro vértices.
2. $exterior(P) \cap interior(B)$: Dicha área es una colección de polígonos ortogonales \mathcal{P}_m . Donde los conjuntos de vértices de los polígonos son mutuamente ajenos ya que son separados por al menos una de las aristas de P contenidas en la frontera de B .

Para asegurar que todo el exterior de P queda vigilado, se requiere vigilar el exterior de B y el interior de cada uno de los polígonos de \mathcal{P}_m , con la restricción de que los radares sólo sean colocados en vértices de P .

Sea C_1 el conjunto de vértices de B que también pertenecen a P y C_2 el conjunto de los otros vértices de B . Coloquemos un radar- $\frac{3\pi}{2}$ en los vértices b_i para que en todo momento el exterior de B esté vigilado, como se establece en el teorema 30. Además coloquemos otro radar- $\frac{3\pi}{2}$ en cada vértice de C_2 con la

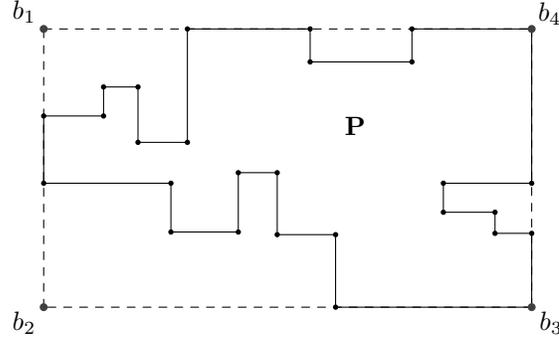


Figura 4.9: Exterior de un polígono ortogonal P , dentro y fuera de la caja delimitadora B .

misma posición inicial del otro radar que ya se encuentra ahí, sobre los radares colocados anteriormente.

Desplacemos horizontalmente hacia P uno de los radares colocados en cada vértice de C_2 , hasta posicionarlos sobre el primer vértice de P que se encuentre. Del mismo modo, desplacemos verticalmente hacia P el otro radar también colocado en cada vértice de C_2 . Por otra parte, los radares- $\frac{3\pi}{2}$ colocados en vértices del conjunto C_1 se mantienen donde inicialmente fueron colocados. De esta manera se mantienen vigilados los semiplanos, cuya unión es igual al exterior de B , con radares posicionados en vértices de P (figura 4.10).

Ahora consideremos un vértice $u \in C_2$ y los vértices v_i y v_j de P a los cuales fueron desplazados los radares- $\frac{3\pi}{2}$ colocados inicialmente en u . Observemos que los segmentos uv_i y uv_j no son aristas de P pero sí de un polígono \mathcal{P}_i de la colección \mathcal{P}_m , donde \mathcal{P}_i tiene n_i vértices, con $n_i - 1$ vértices que pertenecen a P . Entonces para que \mathcal{P}_i esté vigilado con radares- $\frac{3\pi}{2}$ colocados en vértices de P se tiene que asegurar que ningún radar es colocado en u .

Tomando en cuenta los tipos de vértices de un polígono ortogonal vistos en la sección 3.2.1, u es un vértice convexo en \mathcal{P}_i . Siendo así, u puede ser un vértice- NO_c , vértice- NE_c , vértice- SO_c o un vértice- SE_c .

En caso de que u sea un vértice- NE_c o un vértice- SO_c , la regla doble de iluminación que vigila el interior de \mathcal{P}_i y que debe usarse para evitar colocar un radar en u , es la regla- (NO, SE) , ya que ésta coloca radares- $\frac{3\pi}{2}$ en vértices- NE_r , vértices- SO_r , vértices- NO_c y en vértices- SE_c . De lo contrario, si u es un vértice- NO_c o vértice- SE_c , entonces la regla- (NE, SO) es la que debe usarse para vigilar a \mathcal{P}_i .

En cualquiera de estos casos, la orientación de los radares- $\frac{3\pi}{2}$ debe ser igual a la de los radares colocados anteriormente en v_i y v_j , los cuales tienen la misma

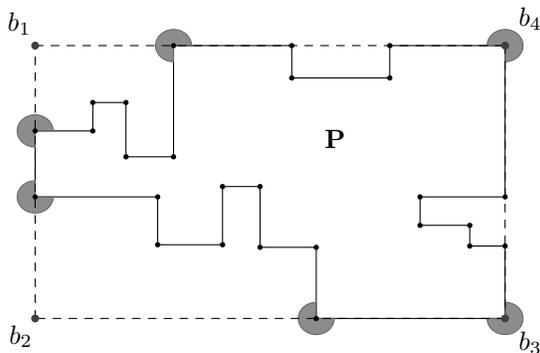


Figura 4.10: Posicionamiento de radares- $\frac{3\pi}{2}$ en vértices de un polígono ortogonal P para vigilar la intersección de los cuatro semiplanos que intersectan su exterior.

configuración como se ve en la figura 4.10. De este modo, los radares en v_i y v_j ayudan a vigilar el interior de \mathcal{P}_i y al mismo tiempo a los semiplanos donde fueron asignados inicialmente.

Bajo el análisis anterior, cada polígono de la colección \mathcal{P}_m que tenga un vértice de C_2 se mantiene vigilado posicionando radares en vértices de P . Mientras que los polígonos de \mathcal{P}_m que no tengan vértices en C_2 , se vigilan utilizando cualquiera de las reglas dobles de iluminación con cualquier posición inicial de los radares- $\frac{3\pi}{2}$. Por lo tanto, aseguramos vigilar el interior de cada polígono \mathcal{P}_m utilizando sólo vértices de P (figura 4.11).

Ahora demostremos que $\frac{n}{2} + 2$ radares- $\frac{3\pi}{2}$ son suficientes para vigilar el exterior de P .

Debido a que los polígonos de la colección \mathcal{P}_m están formados por conjuntos de vértices mutuamente ajenos y que los vértices de C_1 no forman parte de algún polígono de \mathcal{P}_m mientras que los vértices del conjunto C_2 sí, el total de vértices que se tiene para vigilar el interior de estos polígonos es $n - |C_1| + |C_2|$. Entonces, por el teorema 29 se puede asegurar que

$$\frac{|P_1|}{2} + \frac{|P_2|}{2} + \dots + \frac{|P_m|}{2} = \frac{n - |C_1| + |C_2|}{2}$$

es el número de vértices usados para colocar radares- $\frac{3\pi}{2}$ y así vigilar el interior de los polígonos \mathcal{P}_m .

Considerando los radares- $\frac{3\pi}{2}$ en los vértices de C_1 , tenemos que

$$\frac{n - |C_1| + |C_2|}{2} + |C_1| = \frac{n + |C_1| + |C_2|}{2}$$

donde $|C_1| + |C_2| = |B| = 4$. Lo cual nos lleva que en $\frac{n}{2} + 2$ vértices de P se han colocado radares- $\frac{3\pi}{2}$ para vigilar en todo momento el exterior de P . \square

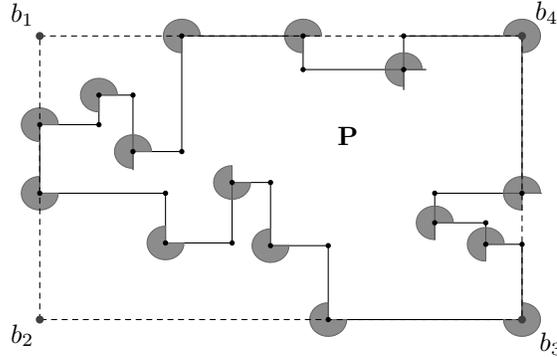


Figura 4.11: Posicionamiento de radares- $\frac{3\pi}{2}$ en vértices de un polígono ortogonal P para vigilar su exterior.

Lema 13. *Existen polígonos ortogonales de $n = 4 + 4k$ vértices, donde $k \geq 1$, para los cuales en $\frac{n}{2} + 2$ de sus vértices es necesario colocar radares- $\frac{3\pi}{2}$ para vigilar su exterior.*

Demostración. Sea $k = 1$, entonces consideremos el polígono ortogonal P de ocho vértices mostrado en la figura 4.12 a), donde su exterior está formado por la intersección de cuatro semiplanos y por el interior del polígono ortogonal P_i . También consideremos los puntos a, b, d y e en el exterior de P .

Tomando en cuenta la restricción de que los radares sólo pueden colocarse en vértices de P y que para vigilar a un punto se requiere de dos radares- $\frac{3\pi}{2}$ (teorema 28), los puntos a, b y c sólo pueden ser vigilados colocando radares- $\frac{3\pi}{2}$ en los conjuntos de vértices $\{1, 8\}$, $\{1, 2\}$ y $\{2, 3\}$, respectivamente, donde el radar- $\frac{3\pi}{2}$ posicionado en el vértice 1 vigila tanto al punto a como al punto b , mientras que el radar- $\frac{3\pi}{2}$ colocado en el vértice 2 también vigila tanto al punto b como al punto c . Observemos que el punto d también es vigilado por los radares anteriormente colocados en los vértices 3 y 8. Por último, para vigilar al punto e se requieren de dos radares- $\frac{3\pi}{2}$ colocados en cualesquiera dos vértices de los cuatro que forman a P_i . Lo cual nos lleva que se han utilizado $6 = \frac{8}{2} + 2$ radares- $\frac{3\pi}{2}$ para vigilar el exterior de P .

Si $k \geq 2$, entonces consideremos el polígono P' de la figura 4.12 b), el cual tiene $4 + 4k$ vértices. Al igual que en el caso anterior el exterior de P' está formado por la intersección de cuatro semiplanos y por el interior de los polígonos ortogonales P_1, \dots, P_k . También tomemos en cuenta los puntos a, b, c y d en el exterior de P' . Notemos que el análisis para vigilar a estos puntos se mantiene como en el caso anterior. Por otra parte, un punto dentro de cada polígono P_1, \dots, P_k requiere de dos radares- $\frac{3\pi}{2}$ para ser vigilados. Entonces, para mantener vigilado el exterior de P' se requiere posicionar radares- $\frac{3\pi}{2}$ en $4 + \frac{4k}{2} = \frac{4+4k}{2} + 2$ vértices de P' . \square

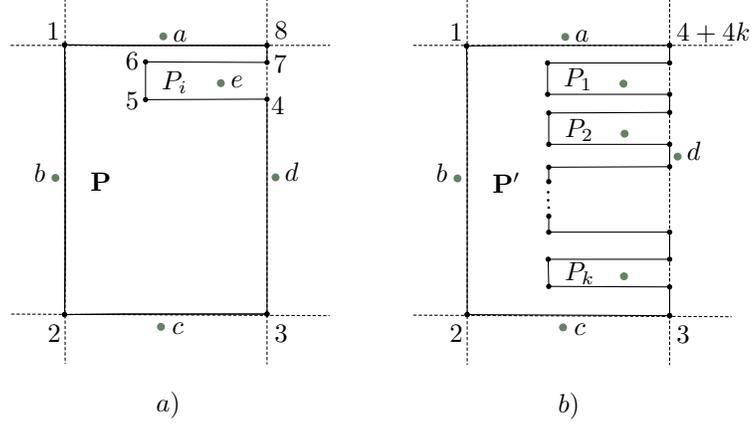


Figura 4.12: Familia de polígonos ortogonales para los que en $\frac{n}{2} + 2$ vértices se necesita posicionar radares- $\frac{3\pi}{2}$ para mantener vigilado su exterior.

El teorema anterior es extendido a polígonos ortogonales con hoyos con el teorema siguiente:

Teorema 32. *Para mantener vigilado el exterior de un polígono ortogonal P de n vértices y h hoyos, son suficientes y en algunos casos necesarios $\frac{n}{2} + 2$ radares- $\frac{3\pi}{2}$ colocados en vértices de P .*

Demostración. Sea P un polígono ortogonal de n vértices y h hoyos. Debido a que el interior de los h hoyos se consideran como parte del exterior de P , la demostración de la suficiencia se sigue por la demostración del lema 12. Siendo así, los h hoyos están integrados a los polígonos de la colección \mathcal{P}_m (mencionada en el lema 12). Además como los hoyos están formados por vértices de P , no se agrega ningún vértice al total de vértices que se tienen para vigilar a cada polígono en \mathcal{P}_m , por lo cual se sigue manteniendo que $\frac{n}{2} + 2$ radares- $\frac{3\pi}{2}$ colocados en vértices de P vigilan el exterior de éste en todo momento.

Para demostrar la necesidad, consideremos el polígono P con $4 + 8h$ vértices y h hoyos mostrado en la figura 4.13, donde $h \geq 1$. Bajo el mismo análisis de la demostración del lema 13, los puntos a, b, c y d en el exterior de P se vigilan colocando radares- $\frac{3\pi}{2}$ en los vértices 1, 2, 3 y $4 + 8h$. Mientras que por el teorema 28, un punto en el interior de cada polígono ortogonal P_1, \dots, P_k y de cada hoyo h_1, \dots, h_h requiere de dos radares- $\frac{3\pi}{2}$. Entonces, para mantener vigilado el exterior de P se requiere posicionar radares- $\frac{3\pi}{2}$ en $4 + \frac{4h}{2} + \frac{4h}{2} = \frac{4+8h}{2} + 2$ vértices de P . \square

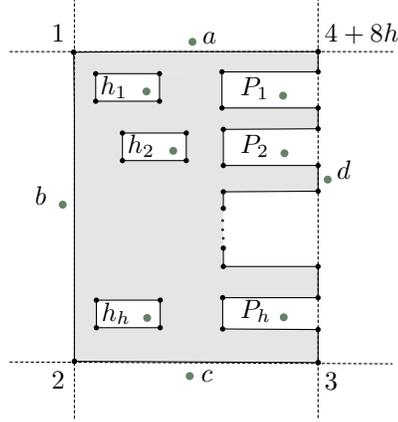


Figura 4.13: Familia de polígonos ortogonales de $4 + 8h$ vértices y con h hoyos, donde $h \geq 1$, para los que en $\frac{n}{2} + 2$ vértices se necesita posicionar radares- $\frac{3\pi}{2}$ para mantener vigilado su exterior.

4.5. Problema del patio de la prisión con radares

Definición 6. Sea \mathcal{R} un rectángulo y P un polígono ortogonal contenido en el interior de \mathcal{R} , ambos con aristas horizontales paralelas. Al conjunto $E_{\mathcal{R}}(P) = \mathcal{R} - \text{interior}(P)$ le llamaremos exterior inmediato de P limitado por \mathcal{R} .

Teorema 33. Sea \mathcal{R} un rectángulo y P un polígono ortogonal de n vértices contenido en el interior de \mathcal{R} , ambos con aristas horizontales paralelas. Entonces, para vigilar el interior de P y $E_{\mathcal{R}}(P)$, son suficientes y en algunos casos necesarios $\frac{n}{2} + 2$ radares- $\frac{3\pi}{2}$, donde todos los radares excepto a lo más dos son colocados en vértices de P .

La demostración de este teorema se sigue de los lemas siguientes, el primero prueba la suficiencia y el segundo la necesidad.

Lema 14. Sea \mathcal{R} un rectángulo y P un polígono ortogonal de n vértices contenido en el interior de \mathcal{R} , ambos con aristas horizontales paralelas. Entonces, son suficientes $\frac{n}{2} + 2$ radares- $\frac{3\pi}{2}$ para vigilar el interior de P y $E_{\mathcal{R}}(P)$, donde todos los radares excepto a lo más dos son colocados en vértices de P .

Demostración. Sea P un polígono ortogonal de n vértices contenido al interior de un rectángulo \mathcal{R} , ambos con aristas horizontales paralelas. Sin pérdida de generalidad, vigilemos el interior de P con la regla- (NO, SE) , la cual posiciona radares- $\frac{3\pi}{2}$ en los vértices- NO_c , vértices- SE_c , vértices- NE_r y en los vértices- SO_r (figura 4.14 a)).

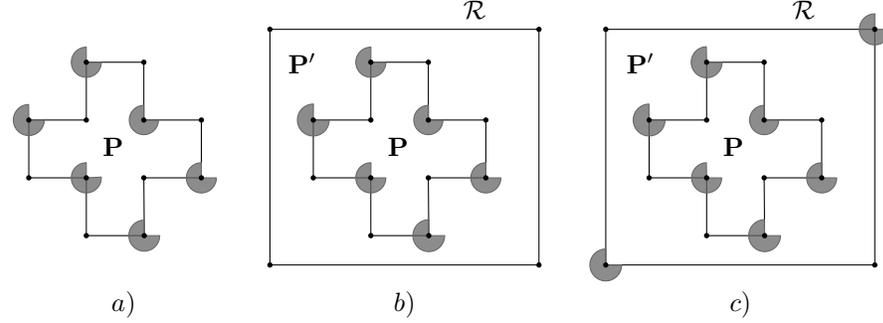


Figura 4.14: Posición de radares- $\frac{3\pi}{2}$ en vértices del polígono P y en vértices del rectángulo isotético que lo encierra completamente, los cuales vigilan el interior y el exterior inmediato de P limitado por un rectángulo \mathcal{R} , $E_{\mathcal{R}}(P)$.

Observemos en la figura 4.14 b), que $P' = \mathcal{R} - P$ es un polígono ortogonal de $n + 4$ vértices con un hoyo, P , tal que su interior coincide con el exterior inmediato de P , $E_{\mathcal{R}}(P)$.

Ahora notemos que las aristas- N , aristas- S , aristas- E y las aristas- O de P son aristas- S , aristas- N , aristas- O y aristas- E de P' , respectivamente. Además que los vértices cóncavos y convexos de P son vértices convexos y cóncavos en P' , respectivamente. Ésto nos indica que la regla- (NO, SE) utilizada para vigilar el interior de P , respecto al polígono P' , ha colocado radares- $\frac{3\pi}{2}$ en los vértices- SE_r , vértices- NO_r , vértices- SO_c y en vértices- NE_c , los cuales son vértices que utiliza la regla- (NE, SO) , como se puede ver en la figura 4.2.

Entonces, si completamos la regla- (NE, SO) en P' , por la observación 8, la cual indica que las reglas dobles iluminan el interior de un polígono ortogonal con hoyos, el polígono P' también es vigilado. Notemos que ésto coloca dos radares- $\frac{3\pi}{2}$ en dos de los vértices de \mathcal{R} , los cuales se consideran puntos Steiner fuera de P (figura 4.14 c)).

Siendo así, por el teorema 29, en $\frac{n}{2}$ vértices de P se colocan radares- $\frac{3\pi}{2}$ para vigilar el interior de P . Mientras que para vigilar a $E_{\mathcal{R}}(P)$, se agregan dos radares- $\frac{3\pi}{2}$ posicionados en vértices de \mathcal{R} . Por lo tanto, $\frac{n}{2} + 2$ radares- $\frac{3\pi}{2}$ en total han sido utilizados. \square

Lema 15. *Existen polígonos ortogonales P_k de $n = 4 + 4k$ vértices con $k \geq 1$, cada uno contenido en un rectángulo isotético \mathcal{R} , tales que necesitan de $\frac{n}{2} + 2$ radares- $\frac{3\pi}{2}$ para la vigilancia de su interior y la de $E_{\mathcal{R}}(P)$ con todos los radares excepto a lo más dos colocados en sus vértices.*

Demostración. Sea el polígono ortogonal P con $4 + 4k$ vértices con $k \geq 1$, mostrado en la figura 4.15. Consideremos que P es encerrado completamente por un

rectángulo isotético \mathcal{R} , tal que P queda contenido en el interior de \mathcal{R} . Por el lema 13, sabemos que P requiere de al menos $\frac{n}{2} + 2$ radares- $\frac{3\pi}{2}$ para vigilar su exterior, por lo que en particular $E_{\mathcal{R}}(P)$ requiere al menos $\frac{n}{2} + 2$ radares- $\frac{3\pi}{2}$ para ser vigilado. \square

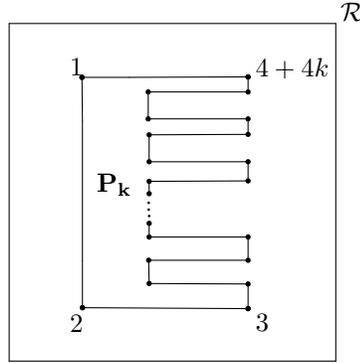


Figura 4.15: Familia de polígonos ortogonales de $4 + 4k$ vértices, $k \geq 1$, que requieren al menos de $\frac{n}{2} + 2$ radares- $\frac{3\pi}{2}$ para vigilar su interior y exterior inmediato limitado por un rectángulo isotético \mathcal{R} .

El teorema anterior es extendido a polígonos ortogonales con hoyos a través del siguiente teorema:

Teorema 34. *Sea \mathcal{R} un rectángulo y P un polígono ortogonal de n vértices y h hoyos contenido en el interior de \mathcal{R} , ambos con aristas horizontales paralelas. Entonces, para vigilar el interior y $E_{\mathcal{R}}(P)$, son suficientes y en algunos casos necesarios $\frac{n}{2} + 2$ radares- $\frac{3\pi}{2}$, donde todos los radares excepto a lo más dos son colocados en vértices de P .*

Demostración. Sea P un polígono ortogonal de n vértices y h hoyos contenido al interior de un rectángulo isotético \mathcal{R} , ambos con aristas horizontales paralelas.

Primero probemos la suficiencia. Observemos que si colocamos radares- $\frac{3\pi}{2}$ en vértices de P y de \mathcal{R} como se estableció en la demostración del lema 14, sólo faltaría vigilar el interior de los hoyos, ya que se considera como parte del exterior de P , y en particular, del exterior inmediato de P limitado por \mathcal{R} , $E_{\mathcal{R}}(P)$.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que el interior de P fue inicialmente vigilado con la regla- (NO,SE) . De igual manera que en la demostración del lema 14, notemos que las aristas- N , aristas- S , aristas- E y aristas- O de P son aristas- S , aristas- N , aristas- O y aristas- E en cada hoyo h de P . Además que los vértices cóncavos y convexos de P en cada hoyo h de P son vértices convexos y cóncavos, respectivamente. Por dichas razones, la regla- (NO,SE) respecto a cada hoyo de P ,

posiciona radares- $\frac{3\pi}{2}$ en vértices que utiliza la regla- (NE,SO) . Entonces, ya que cada hoyo se considera como un polígono ortogonal, la regla- (NE,SO) vigila el interior de cada hoyo h en P . Por lo tanto, el interior y el exterior inmediato de P limitado por \mathcal{R} , se mantienen en todo momento vigilados con $\frac{n}{2} + 2$ radares- $\frac{3\pi}{2}$, donde dos de ellos son colocados en dos puntos Steiner fuera de P y el resto en vértices de P .

Ahora probemos la necesidad. Consideremos la familia de polígonos de $n = 4 + 8h$ vértices, con $h \geq 1$. Además consideremos que cada polígono está contenido al interior de un rectángulo isotético \mathcal{R} , como se muestra en la figura 4.16. Por el teorema 32, sabemos que para vigilar el exterior de cada uno de estos polígonos se requiere de al menos $\frac{n}{2} + 2$ radares- $\frac{3\pi}{2}$, por lo que en particular el exterior inmediato limitado por \mathcal{R} de cada uno de ellos, requiere al menos $\frac{n}{2} + 2$ radares- $\frac{3\pi}{2}$ para ser vigilado. \square

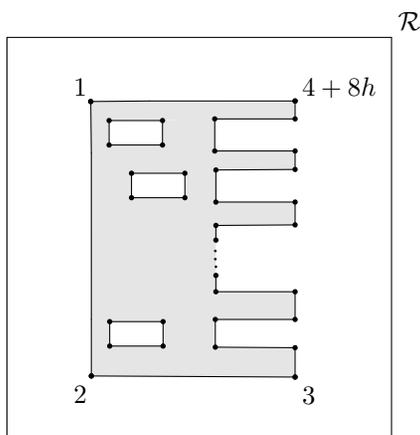


Figura 4.16: Familia de polígonos ortogonales de $n = 4 + 8h$ vértices y con h hoyos, $h \geq 1$, que requieren al menos de $\frac{n}{2} + 2$ radares- $\frac{3\pi}{2}$ para vigilar su interior y exterior inmediato limitado por un rectángulo isotético \mathcal{R} .

Capítulo 5

Conclusiones y problemas abiertos

En esta investigación, con el uso de radares- $\frac{3\pi}{2}$ que giran a una misma velocidad angular constante, se analizó en polígonos ortogonales el problema de la fortaleza y el problema del patio de la prisión. En ambos problemas se obtuvieron cotas justas al número de radares suficientes y en ocasiones necesarios para mantener siempre vigilada la región correspondiente. Interesantemente, considerando estos problemas en polígonos ortogonales con hoyos, se mantuvieron las mismas cotas justas del número de radares- $\frac{3\pi}{2}$ en ambos resultados.

Las demostraciones de que las cotas superiores son correctas para estos problemas, por ser constructivas, inducen algoritmos para el posicionamiento y configuración inicial de los radares en vértices de polígonos ortogonales, llevándonos a los resultados presentados en la siguiente tabla.

Problema	Número de radares- $\frac{3\pi}{2}$ suficientes	Complejidad del algoritmo
Fortaleza		
ortogonal	$\frac{n}{2} + 2$	$O(n)$
ortogonal con hoyos	$\frac{n}{2} + 2$	$O(n)$
Patio de la prisión		
ortogonal	$\frac{n}{2} + 2$	$O(n)$
ortogonal con hoyos	$\frac{n}{2} + 2$	$O(n)$

Tabla 5.1: Número de radares suficientes para vigilar la región correspondiente de los problemas mencionados. Así como la complejidad de los algoritmos para la colocación inicial de los radares, donde n es en número de vértices de los polígonos ortogonales.

Debido a que en la solución del problema del patio de la prisión con radares, se consideró que un polígono ortogonal P (con o sin hoyos) está contenido en el interior de un rectángulo isotético \mathcal{R} , entonces sólo se vigila el exterior inmediato de P limitado por \mathcal{R} , más no todo el exterior de P . Por esta razón, queda abierta la siguiente pregunta: ¿será posible vigilar continuamente el interior y exterior de P con la restricción de que los radares sólo sean colocados en vértices de P ?

Por otra parte, también quedan abiertos ambos problemas, el problema de la fortaleza y el problema del patio de la prisión con el uso de radares, en polígonos simples con y sin hoyos. Así como el análisis del ángulo de vigilancia que requieren los radares para cumplir con los objetivos de estos problemas.

Bibliografía

- [1] J. Abello, V. Estivill-Castro, T. Shermer, and J. Urrutia, *Illumination of orthogonal polygons with orthogonal floodlights*, International Journal of Computational Geometry and Applications **8** (1998), 25–38.
- [2] A. Aggarwal, *The art gallery theorem: its variations, applications, and algorithmic aspects*, Ph.D. thesis, Johns Hopkins University (1984).
- [3] O. Aichholzer, R. Fabila-Monroy, D. Flores-Peñaloza, T. Hackl, J. Urrutia C.Huemer, and B. Vogtenhuber, *Modern illumination of monotone polygons*, In Proceedings 25th European Workshop on Computational Geometry EuroCG '09 (2009), Brussels, Belgium.
- [4] I. Aldana-Galván, C. Velarde, D. Flores-Peñaloza, and J. Urrutia, *Vigilancia de galerías de arte con reflectores giratorios*, Master's thesis. Universidad Nacional Autónoma de México (2013), México, DF.
- [5] D. Avis and G. Toussaint, *An optimal algorithm for determining the visibility of a polygon from an edge*, IEEE Trans. Comput **C-30** (1981), 910–914.
- [6] G. Chartrand and P. Zhang, *Chromatic graph theory*, CRC Press (2009).
- [7] B. Chazelle, *Triangulating a simple polygon in linear time*, Discrete & Computational Geometry **6** (1991), 485–524.
- [8] V. Chvátal, *A combinatorial theorem in plane geometry*, J. Combin Theory Ser B **18** (1975), 39–41.
- [9] M. de Berg, O. Cheong, M. van Kreveld, and M. Overmars, *Computational geometry (algorithms and applications)*, Springer (2008), Tercera Edition.
- [10] H. Edelsbrunner, J. O'Rourke, and E. Welzl, *Stationing guards in rectilinear art galleries*, Computer Vision, Graphics and Image Processing **27** (1984), 167–176.
- [11] D. Eppstein, M. T. Godrich, and N. Sitchinava, *Guard placement for efficient point-in-polygon proofs*, In Proceedings 23rd Annual ACM Symposium on Computational Geometry (2007), 27–36.

-
- [12] V. Estivill-Castro and V. Raman, *Visibility in finitely oriented polygons*, Proceedings of the 2nd Canadian Conference on Computational Geometry (1990), 181–185, Ottawa, Canada.
- [13] V. Estivill-Castro and J. Urrutia, *Optimal floodlight illumination of orthogonal art galleries*, Proceedings of the Sixth Canadian Conference in Computational Geometry (1994), 81–86.
- [14] L. Euler, *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*, Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae **8** (1741), 128–140.
- [15] S. Fisk, *A short proof of chvátal’s watchman theorem*, Journal of Combinatorial Theory Series B **247** (1978), 374.
- [16] S. Ghosh, *Visibility algorithms in the plane*, Cambridge University Press (2007), The Edinburgh Building, Cambridge CB2 8RU, UK.
- [17] F. Hoffmann, *On the rectilinear art gallery problem*, In Proceedings ICALP, Springer Verlag Lecture Notes in Computer Science **90** (1990), 717–728.
- [18] F. Hoffmann and K. Kriegel, *A graph coloring result and its consequences for the polygon guarding problems*, Technical Report B 93-08, Freie Universität Berlin (1993).
- [19] J. Kahn, M. Klawe, and D. Kleitman, *Traditional galleries require fewer watchmen*, SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods **4** (1983), 194–206.
- [20] J. Kahn M. Klawe and D. Kleitman, *Traditional galleries require fewer watchmen*, SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods **4** (1983), 194–206.
- [21] E. Kranakis, F. MacQuarie, O. Morales-Ponce, and J. Urrutia, *Uninterrupted coverage of a planar region with rotating directional antennae*, In Proceedings of 11th International Conference on Ad Hoc Networks and Wireless (ADHOC-NOW) (2011), Belgrade, Serbia.
- [22] E. Kranakis, F. MacQuarie, O. Morales Ponce, and J. Urrutia, *Uninterrupted coverage of a planar region with rotating directional antennae*, In proceedings of 11th International Conference on Ad Hoc Networks and Wireless (ADHOC-NOW) (2011).
- [23] R. Kuc and M. Siegel, *Efficient representation of reflecting structures for a sonar navigation model*, En Proceedings 1987 IEEE International Conference on Robotics and Automation (1987), 1916–1923.
- [24] M. McKenna, *Worst-case optimal hidden-surface removal*, ACM Transactions on Graphics **6** (1987), 19–28.
- [25] G. Meisters, *Polygons have ears*, The American Mathematical Monthly **82** (1975), 648–651.

-
- [26] J. Mitchell, *An algorithmic approach to some problems in terrain navigation*, In Geometric Reasoning, D. Kapur and J. Mundy, Editors, Cambridge, MA: MIT Press (1988), 171–201.
- [27] J. O’Rourke, *An alternate proof of the rectilinear art gallery theorem*, Journal of Geometry **21** (1983), 118–130.
- [28] J. O’Rourke, *Galleries need fewer mobile guards: a variation on chvatal’s theorem*, Geometriae Dedicata **14** (1983), 273–283.
- [29] J. O’Rourke, *Art gallery theorems and algorithms*, Oxford University Press (1987).
- [30] G.J.E Rawlins, *Explorations in restricted-orientation geometry*, Univ. Waterloo (1987), Waterloo, ON.
- [31] T. Calvert S. Xie and B. Bhattacharya, *Planning views for the incremental construction of body models*, En Proceedings International Conference on Pattern Recognition (1986), 154–157.
- [32] T. Shermer, *Recent results in art galleries*, Proceedings IEEE **80** (1992), 1384–1399.
- [33] G. Toussaint, *Pattern recognition and geometrical complexity*, In Proceedings 5th IEEE International Conference on Pattern Recognition (1980), 1324–1347.
- [34] J. Urrutia, *Art gallery and illumination problems*, Handbook on Computational Geometry, Elsevier Science Publishers, J.R. Sack and J. Urrutia editors (2000), 973–1027.
- [35] J. Stenstrom y C. Connolly, *Building wire frames for multiple range views*, In Proceedings 1986 IEEE International Conference on Robotics and Automation **3** (1986), 615–620.
- [36] D. Avis y H. ElGindy, *A combinatorial approach to polygon similarity*, IEEE Transactions on Information Theory **IT-29** (1983), 148–150.
- [37] B. Chazelle y J. Incerpi, *Triangulation and shape-complexity*, ACM Transactions on Graphics **3** (1984), 135–152.
- [38] T. Lozano-Pérez y M. Wesley, *An algorithm for planning collision-free paths among polyhedral obstacles*, Communications of the ACM **22** (1979), 560–570.
- [39] M. Yachida, *3-d data acquisition by multiple views*, In 3rd International Symposium on Robotics Research (1986), 11–18.