UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Uniones de Extensores Absolutos y sus Aplicaciones

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
MATEMÁTICO

P R E S E N T A:

RUBÉN DANIEL VARELA VELASCO

DIRECTOR DE TESIS:
DR. SERGEY ANTONYAN

2004

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"Uniones de Extensores Absolutos y sus aplicaciones"

realizado por Rubén Daniel Varela Velasco

con número de cuenta 09757077-0 , quien cubrió los créditos de la carrera de:

Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario Dr. Sergey Antonyan

Propietario Dra. Patricia Pellicer Covarrubias Patricia Pellicer.

Propietario Dra. María Isabel Puga Espinosa

Suplente Dr. Fidel Casarrubias Segura

Suplente Dr. Rodolfo San Agustín Chi

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. Alejandro Bravo Mojica

CONSEJO DEPARTAMENTAL DE MATEMATICAS

Uniones de Extensores Absolutos y sus Aplicaciones

Rubén Daniel Varela Velasco

Agradecimientos

A la Universidad Nacional Autónoma de México haber permitido mi desarrollo profesional, y al apoyo otorgado por el proyecto PAPIIT número IN 105803-3 llamado "Topología Geométrica 2".

A mis papas, por el apoyo que he recibido de ellos, así como de sus consejos, conocimentos y paciencia que de ellos he obtenido.

A mi esposa Deirdre Ruiz y mis hijos Natalia y Ahkin por su apoyo, compañía y llenar de alegría mi vida.

A el Dr. Sergey Antonyan que ha dirigido este trabajo, y por sus valiosos consejos, comentarios, tiempo el conocimiento necesarios para la realización de esta tesis.

A mis sinodales por su valioso apoyo en las correcciones y tiempo dedicado.

Para Deirdre Ruiz,

Natalia y Ahkin.

Índice general

Introducción

En esta tesis se presentan algunos temas básicos de topología para poder entender el tema central de la misma, sin embargo se requiere un conocimiento previo de bases de topología para poder seguirlo completamente, ya que no pretende ser un libro de topología general.

En general, se presentan alguno aspectos de la teoría de retractos iniciada por K. Borsuk, en 1931. La idea general de la tesis es presentar los espacios topológicos que tienen la cualidad de que cualquier función continua definida en un subconjunto cerrado de un espacio de cierta clase, pueda extenderse a todo el espacio, o solo a una vecindad.

Dichos espacios, dependiendo de la propiedad que tengan, serán llamados como AE de Absolute Extensor y ANE de Absolute Neighborhood Extensor. Además, muy relacionada con estas porpiedades, se encuentra la propiedad de retracción que se refiere a que si hay un encaje del espacio, como un cerrado, dentro de otro en cierta clase de espacios, generalmente metrizables, entonces existe una retracción. A dicha propiedad se le conoce como AR de Absolute Retract o ANR de Absolute Neihborhood retract.

Más adelante, se ve que los dos conceptos coinciden en la clase de los espacios metrizables, es decir si un espacio es extensor absoluto (AE) y metrizable, entonces es retracto absoluto (AR).

Se verá que, el producto topológico preserva esta propiedad, y el tema central de la tesis es, estudiar cuándo las uniones de espacios con la propiedad, la preservan. En el libro de Tze Hu [Hu65] presentan demostraciones de que la unión finita de cerrados que tengan la propiedad, la preserva; así mismo, la unión finita de abiertos que poseean la propiedad, la preserva. Sin embargo dichas demostraciónes, son bastante largas tanto en los casos finitos como arbitrarios. En este trabajo aparecen tanto esas demostraciones en caso finito, como la demostración que dió S. Antonyan en [An∞] para la unión finita de extensores. Por otro lado, usando ésta, se puede obtener una demostración para generalizar a uniones infintitas de extensores, ver [An02] y [Dyd02].

Como aplicación, veremos que los complejos simpliciales con la topología métrica son un ejemplo de ANR's y como son métricos, entonces son un ejemplo de ANE's. Los complejos CW son una clase de espacios que pueden obtenerse a partir de uniones o de adjunciones a partir de espacios muy simples como son los D^n o bien discos rellenos en $\mathbb{R}^n$.

La clase de espacios de complejos simpliciales es una clase de espacios muy importante en las matamáticas, ya que son relativamente simples de trabajar, sin embargo pueden ser usados para aproximar espacios más complejos de diversas maneras, que son utilizadas con frecuencia en Topología Algebraica y pueden consultarse en algún texto relacionado con el tema.

Por otro lado, en las citadas demostraciones de las uniones, se utiliza el cono de un espacio, el cual es muy útil, ya que se demuestra que si el espacio es ANE, entonces su cono resulta ser AE, lo cual permite extender funciones a todo el espacio.

Caber remarcar que en las demostraciones de uniones de extensores, aparecen extensores absolutos para un clase, en vez de extesores absolutos para un espacio, lo cual quiere decir, que dichos teoremas son más fuertes, ya que el tenerlos para espacios es mejor, ya que hay más extensores para un espacio que extensores para toda una clase. Es decir, un extensor absoluto para una clase de espacios, es extensor absoluto para todos los espacios en la clase, mientras que un extensor absoluto para un espacio no necesariamente es extensor para otros espacios de la misma clase. Por lo tanto, si el teorema vale para los extensores de un espacio, en particular sirve para cada extensor que es extensor para todos los espacios dentro de una clase.

En el transcurso de la tesis, se va a considerar, a los axiomas de separación, regular, completamente regular y normal como T1 y la propiedad que los caracteriza, y utilizaremos de manera indistinta el nombre, como el número. Por otro lado, a menos que se indique lo contrario, en casi todos los casos, se usarán por lo menos espacios de Hausdorff, en especial cuando se trate de espacios compactos.

Simbología

- $\mathcal{C}$ para una clase débilmente hereditaria de espacios topológicos.
- $\mathcal{H}$ para la clase de los espacios de Hausdorff.
- $\mathcal{K}$ para la clase de los espacios compactos.
- $\mathcal{M}$ para la clase de los espacios metrizables.
- $\mathcal{P}$ para la clase de los espacios paracompactos.
- $\mathcal{N}$ para la clase de los espacios normales.
- AE para los extensores absolutos para la clase de los metrizables.
- $AE(\mathcal{C})$ para los extensores absolutos para la clase $\mathcal{C}$.
- ANE para los extensores absolutos de vecindad para la clase de los espacios metrizables.
- $ANE(\mathcal{C})$ para los extensores absolutos de vecindad para la clase $\mathcal{C}$.
- AR para los retractos absolutos en la clase de los metrizables.
- ANR para los retractos absolutos de vecindad en la clase de los metrizables.
- $\mathbb{R}$ para el conjunto de los números reales, con la topología usual.
- $\mathbb{N}$ para el conjunto de los números naturales.
- I para el intervalo $[0,1]$ con la topología inducida de $\mathbb{R}$.
- $X \sqcup Y$ para la unión disjunta de X con Y.

- $X \cup_f Y$ para la operación de adjunción entre los espacios X y Y, junto con la función continua $f : A \to Y$, donde A es un subconjunto cerrado de X.
- $Con(X)$ para el Cono de X, con la topología débil.
- $\setminus$ como la diferencia de conjuntos.
- $C(X,Y)$ como el conjunto de las funciones continuas de X a Y.
- $C(X)$ como el conjunto de las funciones continuas de X a $\mathbb{R}$.
- $C^*(X)$ como el conjunto de las funciones continuas acotadas de X a $\mathbb{R}$.
- $Conv(A)$ como la envoltura convexa de A, es decir $Conv(A) = \{x \in X \mid x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1,\ a_i \in A\}$.
- $Supp(f)$ como el soporte de la función f.

Capítulo 1

Conceptos Generales

Con el objeto de que este trabajo sea autocontenido, en esta sección damos las definiciones necesarias para desarrollar el tema central. Es importante enfatizar que sólo se introducen las definiciones, teoremas y proposiciones necesarias e importantes para que el lector tenga a la vista el material indispensable, sin que sea necesario un conocimiento profundo en el tema.

Para una mayor profundidad, se pueden consultar los siguientes textos [Eng89, Mun02, Dug66, GMT88]

1.1. Definiciones

Las definiciones que daremos a continuación son acerca de cubiertas de espacios y paracompacidad, que serán necesarias para desarrollar el tema principal, ya que la mayoría de los espacios que vamos a considerar serán al menos paracompactos.

Es importante notar, que de aqui en adelante, todas las vecindades serán vecindades abiertas a menos que se especifique lo contrario.

Como la noción de paracompacidad se relaciona con cubiertas, debemos introducir los siguientes conceptos.

Definición 1.1.1. Un espacio X es *localmente conexo en el punto* $x \in X$ si para cada vecindad U de x, existe una vecindad $V \subset U$ de x, tal que V es conexa.

Definición 1.1.2. Un espacio es *localmente conexo* si es localmente conexo en x en todo punto x de X.

Definición 1.1.3. Una familia de subconjuntos $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ de un espacio topológico X se llama *cubierta* de X si $X = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha$.

Definición 1.1.4. Una *cubierta es abierta* si todo elemento de la familia es abierto.

Definición 1.1.5. Una *subcubierta* $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ de una cubierta $\{U_\beta\}_{\beta\in\mathcal{B}}$ de un espacio topológico X, es una familia tal que $\mathcal{A}\subset\mathcal{B}$ y ademas, $\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} = X$. Es decir que la subcubierta está formada de algunos elementos de la cubierta original.

Definición 1.1.6. Una familia de subconjuntos $\mathcal{V} = \{V_s\}_{s\in S}$ es *refinamiento* de $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ si para cada $s \in S$ hay un $\alpha \in \mathcal{A}$ tal que $V_s \subset U_\alpha$.

En este caso decimos que $\mathcal{V}$ refina a $\mathcal{U}$. Además el hecho de que $\mathcal{V}$ refine a $\mathcal{U}$ no quiere decir que $\mathcal{V}$ cubra a X, sin embargo, en este trabajo siempre nos referiremos a refinamiento como una cubierta que refine a otra. Decimos que $\mathcal{V}$ es un *refinamiento abierto* si cada elemento de $\mathcal{V}$ es abierto en X.

Definición 1.1.7. Una familia de subconjuntos $\mathcal{U}$ de X se dice que es *localmente finita* si para cada punto x en X, existe una vecindad V de x, tal que V intersecta a lo más a un número finito de elementos de $\mathcal{U}$.

Definición 1.1.8. Una *familia* de subconjuntos $\{A_s\}_{s\in S}$ de un espacio topológico X es *discreta*, si para cada punto $x \in X$ existe una vecindad U_x tal que el conjunto $\{s \in S | U_x \cap A_s \neq \emptyset\}$ consta a lo más de un solo elemento.

Es importante notar que en la definición de familia localmente finita y familia discreta, no se pide nada para la familia de subconjuntos, es decir que cada elemento puede ser abierto, cerrado o ninguno de los dos. Tampoco se pide que la familia sea cubierta de X.

Definición 1.1.9. Un espacio topológico X se llama *compacto*, si toda cubierta abierta, posee una subcubierta finita.

Definición 1.1.10. Un espacio topológico X se llama *paracompacto* si es de Hausdorff y toda cubierta abierta tiene un refinamiento abierto localmente finito que cubre X.

Podemos notar que, normalmente, se considera que un espacio compacto es de Hausdorff para poder obtener teoremas conocidos importantes. Sin hacer la aclaración de que el espacio sea de Hausdorff. En muchos textos, se considera como parte de la definición de compacidad, requerir que el espacio sea de Hausdorff. Si el espacio es de Hausdorff, podemos notar que el concepto de paracompacidad es más débil que el de compacidad, ya que si un espacio es compacto, para cada cubierta abierta se tiene una subcubierta finita, la cual es un refinamiento localmente finito.

Definición 1.1.11. Sea X un conjunto y $f : X \to \mathbb{R}$ una función. Definimos al *soporte* de f como

$$Supp(f) = \{x \in X | f(x) \neq 0\}$$

Definición 1.1.12. Sea X un espacio topológico. Una familia de funciones $f_s : X \to I$, donde $I = [0,1]$, se llama *partición de unidad* si $\{Supp(f_s)\}_{s\in S}$ es localmente finito, y $\sum_{s\in S} f_i(x) = 1$ para todo $x \in X$.

De la definición anterior surgen preguntas como si la suma está bien definida. Esto se debe a que la familia de soportes es localmente finito, lo cual quiere decir que para todo punto hay una vecindad de él tal que sólo un número finito de soportes la intersectan. Esto implica que para cada $x \in X$ sólo un número finito de valores $f_s(x)$ son mayores que 0 en x, por lo que en realidad la suma es finita, y por eso está bien definida.

Definición 1.1.13. Decimos que una *partición de unidad* $\{f_s\}_{s\in S}$ está *subordinada* a una familia de subconjuntos $\{A_s\}_{s\in S}$ de X si para cada $s \in S$, $Supp(f_s) \subset A_s$.

Otra noción importante para el estudio de los espacios paracompactos, y en particular que nos ayudará para probar algunos teoremas importantes para el tema central, es la de cubierta canónica.

Definición 1.1.14. Sea X un espacio topológico y A un subespacio cerrado de X. Una cubierta abierta γ de $X \setminus A$ se llama *cubierta canónica* de $X \setminus A$ si y sólo si:

1. La familia γ es localmente finita, es decir, para cada punto x de $X \setminus A$, x tiene una vecindad que intersecta a lo más un número finito de elementos de γ.

2. Toda vecindad de cualquier punto frontera de A en X contiene un número infinito de elementos de γ.

3. Para toda vecindad V en X de un punto $a \in A$, hay una vecindad W en X de a contenida en V tal que todo abierto $U \in \gamma$ que intersecta a W esta contenida en V.

Definición 1.1.15. Sean X y Y espacios topológicos, $f : X \to Y$ y $g : X \to Y$ dos funciones continuas. Decimos que una función continua $h : I \times X \to Y$ es una *homotopía* entre f y g si $h|_{\{0\}\times X} = f$ y $h|_{\{1\}\times X} = g$.

Definición 1.1.16. Sea Y un espacio topológico. Decimos que $h : I \times Y \to Y$ es una *contracción* de Y si h es una homotopía entre la función identidad y la función constante, es decir $h(1, x) = x$ y $h(0, x) = y_0$ para algún $y_0 \in Y$.

Definición 1.1.17. Un espacio topológico Y se llama *contraíble* si existe una contracción de Y.

Definición 1.1.18. Un espacio X se llama *localmente contraíble en el punto* $x \in X$, si para cada vecindad U de x, existe una vecindad $V \subset U$ de x y una función continua $h : I \times V \to U$, tal que $h(0, x) = x$ y $h(1, x) = y_0$ para todo $x \in V$ y algún $y_0 \in U$. Decimos entonces que V es contraíble en U.

Definición 1.1.19. Un espacio X se llama *localmente contraíble* si es localmente contraíble en cada uno de sus puntos.

En adelante, presentaremos definiciones importantes relacionadas con el tema principal de este trabajo.

En adelante cualquier espacio topológico lo consideraremos por lo menos de Hausdorff, a menos que se indique lo contrario.

Definición 1.1.20. Sean X un espacio topológico, y A subconjunto de X. Decimos que A es *retracto* de X si existe una función continua $r : X \to A$, que llamaremos retracción, tal que $r|_A = Id_A$, es decir que $r(a) = a$ para todo $a \in A$.

Es claro que X es retracto de X con la función identidad en X como retracción. Y si A consta de un sólo punto, entonces la única función continua de X en A es una retracción.

Definición 1.1.21. Decimos que A es un *retracto absoluto* (AR) si A es metrizable, y para todo espacio X en el cual A sea un cerrado de X con la topología inducida, existe una retracción de X en A.

Definición 1.1.22. Decimos que A es un *retracto absoluto de vecindad* (ANR), si A es metrizable y para todo espacio X en el cual A sea un cerrado de X con la topología inducida, existe un abierto U de X que contiene a A y una retracción de U en A.

Ejemplo 1.1.23. La esfera S^n es un retracto de $D^n \setminus 0$, con la retracción $r : D^n \setminus 0 \to S^n$ dada por $r(x) = (x_1/||x||, ..., x_n/||x||)$.

Ejemplo 1.1.24. Si $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, y $f : X \to \mathbb{R} \times \{0\}$ dada por $f(x, y) = (x, 0)$ es una retracción.

Definición 1.1.25. Un subespacio cerrado A de X se dice que tiene la *propiedad de extensión* en X con respecto a un espacio Y, si toda función continua $f : A \to Y$ puede ser extendida sobre X, es decir si existe una función continua $g : X \to Y$ tal que $g|_A = f$.

Definición 1.1.26. Un subespacio cerrado A de X, se dice que tiene la *propiedad de extensión de vecindad* en X con respecto a Y, si toda $f : A \to Y$ puede ser extendida sobre algún subespacio abierto U de X que contenga a A.

Nota 1.1.27. Es importante observar que el subespacio abierto U depende de la función f, es decir que U varía para cada f dada.

Definición 1.1.28. Un espacio X tiene la *propiedad del punto fijo* si cada función continua $f : X \to X$ tiene punto fijo, es decir existe un $x \in X$ tal que $f(x) = x$.

Ejemplo 1.1.29. El disco unitario D^n, tiene la propiedad del punto fijo (por el teorema de Brouwer).

Podemos generalizar las definiciones anteriores para clases de espacios topológicos, de la siguiente manera:

Definición 1.1.30. Sea $\mathcal{C}$ una clase de espacios topológicos. Diremos que $\mathcal{C}$ es una *clase topológica débilmente hereditaria* si satisface:

1. $\mathcal{C}$ es topológica, es decir que si X es miembro de $\mathcal{C}$, entonces cualquier Y homeomorfo a X, es también miembro de $\mathcal{C}$.
2. $\mathcal{C}$ es débilmente hereditaria, es decir que si X es miembro de $\mathcal{C}$, entonces cualquier subespacio cerrado de X, es tambien miembro de $\mathcal{C}$.

Ejemplos.

1. $\mathcal{H}$ la clase de todos los espacios de Hausdorff.
2. $\mathcal{R}$ la clase de todos los espacios regulares.
3. $\mathcal{CR}$ la clase de todos los espacios completamente regulares.
4. $\mathcal{M}$ la clase de todos los espacios metrizables.
5. $\mathcal{N}$ la clase de todos los espacios normales.
6. $\mathcal{P}$ la clase de todos los espacios paracompactos.

Nota 1.1.31. De aquí en adelante las funciones mencionadas serán continuas, y todas las clases serán clases topológicas débilmente hereditarias.

Definición 1.1.32. Diremos que Y es un *extensor absoluto para la clase* $\mathcal{C}$, si cada subespacio cerrado A de cualquier $X \in \mathcal{C}$ tiene la propiedad de extensión en X con respecto a Y.

Es decir, si para todo espacio en la clase y toda función continua definida de un cerrado del espacio, con valores en el extensor Y, puede ser extendida continuamente a todo el espacio.

Definición 1.1.33. Diremos que Y es un *extensor absoluto de vecindad para la clase* $\mathcal{C}$, si cada subespacio cerrado A de cualquier $X \in \mathcal{C}$ tiene la propiedad de extensión de vecindad en X con respecto a Y.

Es decir, si para todo espacio en la clase, y toda función continua definida de un cerrado del espacio a Y, puede ser extendida continuamente a una vecindad del cerrado.

Notación. En el caso de que Y sea extensor absoluto para la clase $\mathcal{C}$, diremos que Y es un AE para $\mathcal{C}$ o bien Y es un $AE(\mathcal{C})$. En el caso de que Y sea un extensor absoluto de vecindad para la clase $\mathcal{C}$ diremos que Y es un ANE para $\mathcal{C}$ o bien $ANE(\mathcal{C})$.

Definición 1.1.34. Diremos que un espacio Y es *extensor absoluto para un espacio* X, si cualquier cerrado A tiene la propiedad de extensión con respecto a Y.

Es decir, si toda función definida de un cerrado de X puede ser extendida a todo el espacio. En este caso se dice que Y es un $AE(X)$.

Definición 1.1.35. Diremos que un espacio Y es *extensor absoluto de vecindad para un espacio* X, si cualquier cerrado A tiene la propiedad de extensión de vecindad con respecto a Y.

Notación. En caso de que Y sea extensor absoluto para X, diremos que $Y \in AE(X)$, en caso de que Y sea extensor absoluto de vecindad para X, diremos que $Y \in ANE(X)$.

Definición 1.1.36. Sea X un espacio topológico. Consideremos el espacio $I \times X$, donde I denota el intervalo $[0,1]$, e identifiquemos todos los puntos de $\{0\} \times X$ en uno solo, así obtenemos el *Cono* de X, y lo denotaremos como $Con(X)$. Para facilidad en la notación, denotaremos a la imagen de la proyección canónica $p : I \times X \to Con(X)$ de (t,x) como tx y al punto especial (vértice) le llamaremos θ en vez de $0x$. En caso de querer escribir $p(A,B)$ escribiremos AB, donde $AB = \{p(a,b) | a \in A, b \in B\}$ y $A \subset I$, $B \subset X$. Para dotar de una topología al cono de X, podemos pensar en dos opciones. La primera es considerar la topología cociente, y la segunda se llama la topología débil, y se define como sigue:

Un subconjunto U en el Cono de X que no contenga al vértice, es abierto si y sólo si $p^{-1}(U)$ es abierto en $I \times X$. Si $\theta \in U$, entonces U es abierto si y sólo si $p^{-1}(U)$ es abierto y existe un $\epsilon > 0$ tal que $[0,\epsilon) \times X \subset p^{-1}(U)$.

Más adelante veremos que en caso de que el espacio X sea compacto, las dos topologías del cono de X coinciden. Y en el artículo [An02] se prueba que si X es metrizable, tambien coinciden ambas topologías

En este trabajo siempre consideraremos al cono de X con la topología débil, que por lo dicho anteriormente, preserva la metrizabilidad.

Además, probaremos que si el espacio Y es extensor absoluto de vecindad para un espacio X, entonces el cono de Y es tambien extensor absoluto para el espacio X, lo cual es muy útil para nuestro trabajo.

1.2. Espacios de Adjunción

Los espacios de adjunción se obtienen mediante operaciones que se pueden realizar entre espacios en donde se toma en cuenta una función continua. Con espacios obtenidos de esta forma, se puede ver claramente la relación que existe entre extensores y retractos y por ello son importantes para el trabajo. Además, de esta manera se pueden obtener otros espacios importantes, de los cuales se puede demostrar, por medio de estas operaciones, que son ANE para los espacios metrizables.

En esta sección presentaremos las definiciones principales y algunas propiedades que cumplen o preservan dichos espacios.

Dados dos espacios topológicos X y Y, consideremos $X \sqcup Y$ como la unión disjunta de X con Y y con la topología como sigue: $U \subset X \sqcup Y$ es abierto en $X \sqcup Y$ si y sólo si $U \cap X$ es abierto en X y $U \cap Y$ es abierto en Y.

Definición 1.2.1. Sean X y Y espacios topológicos, $A \subset X$ un cerrado de X y $f : A \to Y$ una función continua. Sea $Z = X \cup_f Y$ el espacio topológico obtenido identificando $a \in A$ con su respectivo $f(a)$ en $X \sqcup Y$. Al espacio Z se le llama *espacio de adjunción* de X con Y bajo f.

Proposición 1.2.2. *Denotaremos a $p : X \sqcup Y \to X \cup_f Y$ como la proyección natural.*

La restricción $p|_Y$ es un encaje, es decir, Y es homeomorfo a $p(Y)$. Ademas $p(Y)$ es cerrado en $X \cup_f Y$.

Demostración. Primero veremos que $p|_Y$ es biyectiva. Sean dos elementos distintos $y, z \in Y$ tales que $p(y) = p(z)$. Esto significa que existe un $a \in X$, tal que $f(a) = y$ y $f(a) = z$ de donde $z = y$. Por lo tanto $p|_Y$ es inyectiva.

Para ver que $p|_Y : Y \to p(Y)$ es continua y abierta, tomemos un $U \subset X \cup_f Y$ abierto. Por definición de la topología cociente, el conjunto $p^{-1}(U)$ es abierto en $X \sqcup Y$. Además tenemos que $p^{-1}(U) \cap Y = p|_Y^{-1}(U)$, por lo que $p|_Y^{-1}(U)$ es abierto y por lo tanto, $p|_Y$ es continua.

Para demostrar que $p|_Y$ es abierta, tomemos un abierto U en Y. Queremos ver que $p|_Y(U)$ es abierto en $X \cup_f Y$. Por la definición de la topología de la unión disjunta, (o suma discreta), tenemos que U es una abierto de $X \sqcup Y$. Ademas, como $p^{-1}(p|_Y(U)) \cap Y = U$ es abierto en $X \sqcup Y$, por la definición de la topología cociente, nos indica que $p|_Y(U)$ es abierto en $X \cup_f Y$. Lo que muestra que $p|_Y$ es abierta.

De lo anterior concluímos que $p|_Y$ es un encaje.

Como Y es cerrado en la unión disjunta, y $A \subset X$ es cerrado, entonces $p^{-1}p(Y) = A \cup Y$ y $p(Y)$ es cerrado en $X \cup_f Y$ □

Debido a que $p(Y)$ es homeomorfo a Y, según la demostración anterior, en este trabajo se usará indistintamente $p(Y)$ y Y.

Es importante notar que si tenemos un espacio de adjunción Z, obtenido mediante los espacios X y Y, junto con el cerrado $A \subset X$ y la función continua $f : A \to Y$, dichos elementos ya están fijos, aunque Z se pueda obtener de alguna otra manera. Por facilidad en la notación siempre que hagamos mención de un espacio de adjunción, pensaremos en X, Y, $A \subset X$ cerrado y $f : A \to Y$ como la manera de obtener el espacio, a menos que se indique alguna otra cosa.

Definición 1.2.3. Sea π una propiedad topológica. Diremos que el espacio de adjunción Z preserva la propiedad π si y sólo si Z tiene la propiedad π siempre y cuando X y Y tienen la propiedad π.

Proposición 1.2.4. *El espacio de adjunción Z preserva la propiedad de ser T_1.*

Demostración. Sea z un punto de Z. Si $z \in Y$, entonces $\{z\}$ es cerrado en Y. Como Y es cerrado en Z, $\{z\}$ es cerrado en Z. Si $z \notin Y$ entonces $p^{-1}(z)$ es un solo punto en $X \setminus A$ que es cerrado en X, por lo que es cerrado en $X \sqcup Y$ y, por lo tanto, en Z. □

Proposición 1.2.5. *El espacio de adjunción Z no siempre preserva las siguientes propiedades:*

1. *Hausdorff*

2. *Regular*

3. *Completamente Regular.*

Demostración. Sea X un espacio topológico completamente regular que no sea normal, y $Y = [0,1]$. Entonces X y Y son de Hausdorff, regulares y completamente regulares. Basta demostrar que hay un cerrado $A \subset X$ y una función $f : A \to Y$ continua, tal que el espacio de adjunción Z no es de Hausdorff. Para ello, tomemos dos cerrados disjuntos B y C de X que no tengan vecindades ajenas. Consideremos el cerrado $A = B \cup C$ de X y la función $f : A \to Y$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in B \\ 1, & \text{si } x \in C \end{cases}$$

Queremos ver que $Z = X \cup_f Y$ no es de Hausdorff. Supongamos por el contrario que Z es de Hausdorff. Como 0 y 1 son puntos distintos de Z, entonces existen dos vecindades ajenas U y V en Z tales que $0 \in U$

y $1 \in V$. Usando la proyección natural $p : X \sqcup Y \to Z$, obtenemos dos vecindades disjuntas $p^{-1}(U) \cap X$ y $p^{-1}(V) \cap X$ en X, que contienen a B y C respectivamente, lo que contradice el hecho de que B y C no tienen vecindades disjuntas. Por lo tanto Z no es de Hausdorff. □

En las siguientes proposiciones, veremos la relación entre problemas de extensión y problemas de retracción, es decir, a cada problema de extensión, le corresponde uno de retracción, y viceversa. Para probar dichas proposiciones de manera clara, es necesario usar los espacios de adjunción, ya que consideran los elementos necesarios, como un cerrado en un espacio y una función del cerrado al espacio.

Proposición 1.2.6. *Un subespacio A de un espacio X es retracto de X si y sólo si para cualquier espacio Y, y cada función continua $f : A \to Y$ se tiene una extensión de f sobre X.*

Demostración. Si A es retracto de X con retracción $r : X \to A$, entonces la función

$$f \circ r : X \to Y$$

es una extensión de f sobre X.

Recíprocamente tomemos $Y = A$, y la función identidad $i : A \to Y = A$. Entonces de la hipótesis tenemos que hay una extensión sobre X, pero una extensión de la identidad es una retracción. □

Proposición 1.2.7. *El subespacio $p(Y)$ del espacio de adjunción Z es retracto de Z si y sólo si la función $f : A \to Y$ tiene extensión sobre X.*

Demostración. Sea $r : Z \to p(Y)$ una retracción. Definimos una función continua $g : X \to Y$ tomando $g(x) = (p|_Y)^{-1}(r(p(x)))$ para cada punto $x \in X \subset X \sqcup Y$, donde p denota la proyección natural.

Para cada $x \in A$, tenemos que $g(x) = r(p(x)) = r(f(x)) = f(x)$, lo cual prueba que g es una extensión de f.

Ahora tomemos $g : X \to Y$ una extensión de la función f. Definimos $r : Z \to p(Y)$ como sigue: sea $z \in p(Y)$ un punto arbitrario de Z. Si $z \in p(Y)$, definimos $r(z) = z$. Si $z \notin p(Y)$, existe un único punto $x \in X \setminus A$ con $p(x) = z$. Definimos $r(z) = p(g(x))$. Si $K \subset p(Y)$ es cerrado, tenemos

$$r^{-1}(K) = K \cup p(g^{-1}(p^{-1}(K) \cap A))$$

y éste es también un subconjunto cerrado de Z. Por lo tanto, $r : Z \to p(Y)$ es una retracción.

□

Proposición 1.2.8. *El espacio de adjunción $X \cup_f Y$, preserva la propiedad de normalidad.*

Demostración. Basta ver que dados dos cerrados disjuntos existe una función continua de $X \cup_f Y \to I$ cuya imagen de los cerrados sea $\{1\}$ y $\{0\}$ respectivamente.

Sean C y D cerrados disjuntos en $X \cup_f Y$. Sea $a : Y \to I$ una función continua tal que $a(C \cap Y) \subset \{0\}$ y $a(D \cap Y) \subset \{1\}$. Sea $b : A \cup (p^{-1}(C) \cap X) \cup (p^{-1}(D) \cap X) \to I$ tal que b es igual a f en A, es 0 en $p^{-1}(C) \cap X$ y 1 en $p^{-1}(D) \cap X$. Por el teorema de extensión de Tietze, b existe una extensión continua $c : X \to I$. Por construcción, c y a son compatibles, y se pueden pegar para formar una función continua $d : X \cup_f Y \to I$ que cumple con las propiedades requeridas. $\square$

Capítulo 2

Propiedades

En este capítulo, presentaremos algunas propiedades tanto básicas, como avanzadas que nos servirán en los capítulos siguientes. La primera parte, presenta propiedades generales de los espacios paracompactos y de familias localmente finitas. Posteriormente, podremos encontrar propiedades más avanzadas acerca de las propiedades de los retractos, retractos absolutos, extensores y extensores absolutos, así como teoremas muy importantes (Tietze y Dugundji) acerca de extensores absolutos. Además, con estos teoremas podemos mostrar ejemplos de extensores absolutos a partir algunos conocidos. Al final, encontraremos teoremas igualmente importantes, que nos relacionan completamente los extensores con los retractos.

2.1. Familias Localmente Finitas

Los teoremas que se presentan a continuación, tienen mucho que ver con paracompacidad, puesto que usan familias localmente finitas. Estas características van a ser usadas más adelante en conjunto con la paracompacidad.

Teorema 2.1.1. *Si $\{A_s\}_{s\in S}$ es una familia localmente finita, entonces*

$$\overline{\cup_{s\in S} A_s} = \cup_{s\in S} \bar{A}_s$$

Demostración. Para cada $s \in S$ tenemos que $\bar{A}_s \subset \overline{\bigcup_{s\in S} A_s}$, por lo que $\bigcup_{s\in S} \bar{A}_s \subset \overline{\bigcup_{s\in s} A_s}$.

Como $\{A_s\}_{s\in S}$ es localmente finita, para cada $x \in \overline{\bigcup_{s\in s} A_s}$ existe una vecindad U, tal que $S_0 = \{s \in S | U \cap A_s \neq \emptyset\}$ es finito. De aquí tenemos que

$x \notin \overline{\bigcup_{s\in S\setminus S_0} A_s}$. Ahora bien, si

$$x \in \overline{\bigcup_{s\in S} A_s} = \overline{\bigcup_{s\in S_0} A_s} \cup \overline{\bigcup_{s\in S\setminus S_0} A_s}$$

entonces $x \in \overline{\bigcup_{s\in S_0} A_s} = \bigcup_{s\in S_0} \bar{A}_s \subset \bigcup_{s\in S} \bar{A}_s$. □

Corolario 2.1.2. *Sea $\mathcal{F}$ una familia localmente finita y $F = \cup\mathcal{F}$. Si todos los miembros de $\mathcal{F}$ son cerrados, entonces F también lo es. Si todos los miembros de $\mathcal{F}$ son cerrados y abiertos a la vez, entonces F es cerrado y abierto.*

Normalmente no es verdad que la unión arbitraria de cerrados sea cerrada, sin embargo, la finitud local de la familia juega un papel muy importante, ya que como localmente la familia es finita, entonces la unión se convierte en unión finita, y por lo tanto unión finita de cerrados es cerrado.

Teorema 2.1.3. *Si $\{A_s\}_{s\in S}$ es una familia localmente finita, entonces la familia $\{\bar{A}_s\}_{s\in S}$ es localmente finita.*

Demostración. Sea $x \in X$. Como $\{A_s\}_{s\in S}$ es localmente finita, hay una vecindad U de x, tal que intersecta a lo más un número finito de elementos de la familia; sin embargo, si $U \cap V = \emptyset$, entonces $U \cap \bar{V} = \emptyset$, si U es abierto.

Por lo tanto U intersecta a lo más un número finito de elementos de $\{\bar{A}_s\}_{s\in S}$. □

Lema 2.1.4. *Si toda cubierta abierta de un espacio regular X tiene un refinamiento localmente finito (no necesariamente abierto), entonces para cada cubierta abierta $\{U_s\}_{s\in S}$ de X, existe una cubierta cerrada localmente finita $\{F_s\}_{s\in S}$ tal que $F_s \subset U_s$ para cada $s \in S$*

En particular para cada cubierta abierta $\{U_s\}_{s\in S}$ de un espacio paracompacto, existe una cubierta abierta localmente finita $\{V_s\}_{s\in S}$ tal que $\bar{V}_s \subset U_s$ para cada $s \in S$.

Demostración. Como X es regular, entonces existe una cubierta $\mathcal{W}$ de X, tal que $\{\bar{W} | W \in \mathcal{W}\}$ es un refinamiento de $\{U_s\}_{s\in S}$. Tomamos un refinamiento localmente finito $\{A_t\}_{t\in T}$ de la cubierta $\mathcal{W}$. Para cada $t \in T$, escogemos un $s(t) \in S$, tal que $\bar{A}_t \subset U_{s(t)}$, y sea $F_s = \bigcup_{s(t)=s} \bar{A}_t$. De los teoremas 2.1.1 y 2.1.3 sigue que $\{F_s\}_{s\in S}$ es una cubierta cerrada localmente finita de X, y de la construcción de los F_s se tiene que $F_s \subset U_s$ para cada $s \in S$. □

Nota 2.1.5. Si la cubierta $\{A_t\}_{t\in T}$ es abierta, entonces $V_s = \bigcup_{s(t)=s} A_t$ es abierto y $\bar{V}_s = F_s$.

Lema 2.1.6. *Si para una cubierta abierta $\mathcal{U}$ de un espacio X, existe una partición de unidad $\{f_s\}_{s\in S}$ subordinada a ella, entonces $\mathcal{U}$ tiene un refinamiento abierto localmente finito.*

Demostración. Observemos que para toda función continua $g : X \to I$ y cualquier punto $x_0 \in X$ que satisface $g(x_0) > 0$ existe una vecindad U_0 del punto x_0 y un subconjunto finito $S_0 \subset S$ tal que

$$f_s(x) < g(x) \text{ para } x \in U_0 \text{ y } s \in S \setminus S_0 \qquad (2.1.1)$$

En efecto, es fácil ver que $S_0 = \{s_1, ..., s_k\} \subset S$ es tal que

$$1 - \sum_{i=1}^{k} f_{s_i}(x_0) < g(x_0)$$

y el abierto $U_0 = \{x \in X | 1 - \sum_{i=1}^{k} f_{s_i}(x) < g(x)\}$ satisfacen la ecuación (2.1.1).

Para cada $x \in X$, existe un $s(x) \in S$ tal que $f_{s(x)}(x) > 0$. Como $f_{s(x)}$ es una función continua, la observación anterior es válida tomando en cuenta a g como $f_{s(x)}$ en (2.1.1). Por lo que la fórmula $f(x) = \sup_{s\in S} f_s(x)$ define una función continua $f : X \to (0, 1]$.

Para cada $s \in S$, tenemos que el conjunto

$$V_s = \{x \in X | f_s(x) > \frac{1}{2} f(x)\}$$

es abierto, y por lo tanto la familia $\mathcal{V} = \{V_s\}_{s\in S}$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$. Considerando análogamente, a g como $\frac{1}{2}f$ en la observación, tenemos que $\mathcal{V}$ es localmente finita. □

Lema 2.1.7. *Sea X un espacio paracompacto y sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ una cubierta abierta de X. Entonces existe una cubierta abierta localmente finita $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ de X tal que $V_\alpha \subseteq U_\alpha$ para cada $\alpha \in \mathcal{A}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{W} = \{W_\beta\}_{\beta\in\mathcal{B}}$ una cubierta abierta localmente finita que refina a $\mathcal{U}$. Sea $f : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ una función tal que $W_\beta \subseteq U_{f(\beta)}$ para cada $\beta \in \mathcal{B}$. Sea V_α la unión de todos los W_β tales que $f(\beta) = \alpha$. Entonces $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ tiene las propiedades requeridas. □

El siguiente teorema es muy importante puesto que nos da una caracterízación de la paracompacidad, que podemos usar más adelante. La propiedad de tener partición de unidad subordinada a una cubierta es muy importante, ya que a partir de una cubierta, podemos tener una familia de funciones que cumplen con varias propiedades.

Teorema 2.1.8. *Si X es un espacio T_1, entonces son equivalentes:*

1. *X es paracompacto,*
2. *Toda cubierta abierta de X tiene una partición de unidad localmente finita subordinada a la cubierta,*
3. *Toda cubierta abierta de X tiene una partición de unidad subordinada a ella.*

Demostración. Supongamos que X es paracompacto y consideremos una cubierta abierta $\mathcal{A}$ de X. Sea $\mathcal{U} = \{U_s\}_{s\in S}$ un refinamiento localmente finito de $\mathcal{A}$; por el Lema 2.1.4 existe una cubierta cerrada $\{F_s\}_{s\in S}$ de X tal que $F_s \subset U_s$ para cada $s \in S$. Por el Lema de Urysohn, podemos escoger para cada $s \in S$ una función continua $g_s : X \to I$ tal que $g_s(x) = 0$ para $x \in X \setminus U_s$ y $g_s(x) = 1$ para $x \in F_s$. Como la familia $\mathcal{U}$ es localmente finita, podemos definir a $g : X \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \sum_{s\in S} g_s(x)$$

Como para todo $x \in X$, existe un $s \in S$ tal que $x \in U_s$, entonces $g_s(x) > 0$ y por lo tanto $g(x) > 0$ para todo x en el espacio X.

La familia $\{f_s : X \to I\}_{s\in S}$ donde $f_s(x) = g_s(x)/g(x)$ es una partición de unidad localmente finita subordinada a $\mathcal{A}$. Queda demostrado 1 a 2.

La implicación 2 a 3 es fácil, por lo que solo queda ver 3 a 1. A fin de mostrar esto, gracias al Lema 2.1.6 basta ver que todo espacio T_1, que cumpla 3, es de Hausdorff. Consideremos un par de puntos x, y distintos de X. La cubierta abierta $\mathcal{U} = \{X \setminus \{x\}, X \setminus \{y\}\}$ del espacio X tiene una partición de unidad f_s subordinada a $\mathcal{U}$. Sea $s_0 \in S$ tal que $f_{s_0}(x) = a > 0$. Como el conjunto $f_{s_0}^{-1}((0,1])$ esta contenido en $X \setminus \{y\}$, entonces tenemos que $f_{s_0}(y) = 0$. De aquí que los abiertos $f_{s_0}^{-1}([0,a/2))$ y $f_{s_0}^{-1}((a/2,1])$ son disjuntos y contienen a los puntos y y x, respectivamente, por lo tanto X es de Hausdorff. $\square$

Teorema 2.1.9 (Teorema de Stone). *Toda cubierta abierta de un espacio metrizable tiene un refinamiento abierto localmente finito.*

Demostración. Sea $\{U_s\}_{s\in S}$ una cubierta abierta de un espacio metrizable X, ρ una métrica compatible para X y $<$ una relación de buen orden para S.

Definimos inductivamente familias $\mathcal{V}_i = \{V_{s,i}\}_{s\in S}$ de subconjuntos de X como sigue:

$$V_{s,i} = \bigcup B(c, \frac{1}{2^i})$$

donde los puntos $c \in X$ cumplen con las siguientes condiciones:

1. s es el menor elemento de S, tal que $c \in U_s$,
2. $c \notin V_{t,j}$ para $j < i$ y $t \in S$,
3. $B(c, \frac{3}{2^i}) \subset U_s$.

De la definición se tiene que $V_{s,i}$ es abierto, y de 3 se tiene que $V_{s,i} \subset U_s$.

Sea x un punto de X. Sean $s \in S$ el menor elemento de S tal que $x \in U_s$ e $i \in \mathbb{N}$ tal que $B(x, \frac{3}{2^i}) \subset U_s$. Claramente, tenemos que $x \in V_{t,j}$ para un $j < i$ y un $t \in S$, o bien $x \in V_{s,i}$, por lo que $\mathcal{V} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{V}_i$ es un refinamiento abierto de $\{U_s\}_{s\in S}$.

Ahora tenemos que probar para cada i, que si $x_1 \in V_{s_1,i}$, $x_2 \in V_{s_2,i}$ y $s_1 \neq s_2$ entonces $\rho(x_1, x_2) > 1/2^i$, lo que mostrará que las familias $\mathcal{V}_i$ son discretas, ya que toda $1/2^{i+1}$-bola intersecta a lo más un elemento de $\mathcal{V}_i$. Supongamos que $s_1 < s_2$. Por la definición de $V_{s_1,i}$ y $V_{s_2,i}$, existen puntos c_1 y c_2, que satisfacen 1-3, tales que $x_k \in B(c_k, 1/2^i) \subset V_{s_k,i}$ para $k = 1, 2$. De 3 se sigue que $B(c_1, 3/2^i) \subset U_{s_1}$ y de 1 podemos ver que $c_2 \notin U_{s_1}$; entonces $\rho(c_1, c_2) \geq 3/2^i$. Por lo tanto:

$$\rho(x_1, x_2) \geq \rho(c_1, c_2) - \rho(c_1, x_1) - \rho(c_2, x_2) > 1/2^i$$

que prueba que las familias $\mathcal{V}_i$ son discretas.

Para concluir la prueba del teorema, es suficiente mostrar que para cada $t \in S$ y cualquier par de naturales k, j, si $B(x, 1/2^k) \subset V_{t,j}$ entonces $B(x, 1/2^{i+1}) \cap V_{s,i} = \emptyset$ para $i \geq j + k$ y $s \in S$.

Como para todo $x \in X$, existen k, j y t tales que $B(x, 1/2^k) \subset V_{t,j}$ entonces la bola $B(x, 1/2^{j+k})$ intersecta a lo más $j + k - 1$ miembros de $\mathcal{V}$. De 2 tenemos que los puntos c en la definición de $V_{s,i}$ no pertenecen a $V_{t,j}$

siempre que $i \geq j + k$. Como $B(x, 1/2^k) \subset V_{t,j}$, tenemos que $\rho(x, c) \geq \frac{1}{2^k}$ para todos los c dados. Las desigualdades $j + k \geq k + 1$ e $i \geq k + 1$, implican que $B(x, 1/2^{j+k}) \cap B(C, 1/2^i) = \emptyset$. Esto concluye la prueba del teorema. □

Corolario 2.1.10. *Todo espacio metrizable es paracompacto.*

Usaremos el siguiente lema más adelante para demostrar el Teorema de Dugundji, junto con la característica de paracompacidad en espacios métricos.

Lema 2.1.11. *Si X es metrizable y A es un cerrado de X, entonces existe una cubierta canónica γ de $X \setminus A$, que satisface $d(A, U) > 0$ para toda $U \in \gamma$*

Demostración. Ya que X es metrizable, sea $d : X \times X \to \mathbb{R}$ una función distancia compatible con la topología de X.

Para cada punto $x \in X \setminus A$, sea S_x el conjunto abierto dado por

$$S_x = \{y \in X | d(x, y) < \frac{1}{2} d(x, A)\}$$

Entonces obtenemos una cubierta abierta $\{S_x | x \in X \setminus A\}$ de $X \setminus A$. Como todo metrizable es paracompacto entonces $X \setminus A$ es paracompacto. Por lo tanto la cubierta $\{S_x\}$ tiene un refinamiento γ abierto localmente finito. Queremos ver que dicho refinamiento cumple las condiciones 2 y 3 de la Definición 1.1.14.

Sea V una vecindad en X de un punto $a \in A$. Entonces existe un real positivo k tal que para cada $y \in X$, el hecho de que $d(a, y) < 2k$ implica que $y \in V$. Sea W la vecindad de a dada por

$$W = \{y \in X | d(a, y) < \frac{1}{2} k\}$$

Para verificar la condición 3, supongamos que $U \in \gamma$ intersecta a W en algún punto $y \in X$. Como γ es un refinamiento de $\{S_x\}$, existe un $x \in X \setminus A$ con $y \in U \subset S_x$. Por definición de S_x, tenemos que

$$d(a, x) \leq d(a, y) + d(x, y) < \frac{1}{2} k + \frac{1}{2} d(x, A) \leq \frac{1}{2} k + \frac{1}{2} d(a, x)$$

Que nos dice que $d(a, x) < k$. Por lo tanto, para cualquier $z \in S_x$,

$$d(a, z) \leq d(a, x) + d(x, z) < \frac{3}{2} d(a, x) < 2k,$$

lo cual nos lleva a que $z \in V$. En consecuencia $U \subset S_x \subset V$, y se satisface la condición 3.

Para verificar la condición 2, supongamos que a es un punto frontera de A. Queremos ver que cada vecindad V de a contiene un número infinito de elementos de γ.

Basta ver que la vecindad V usada en el caso anterior, contiene un elemento U de γ y una vecindad $V\prime$ de a que no intersecta U. Como a es punto frontera de A, la vecindad W debe contener un punto $y \in X \setminus A$. Entonces hay un abierto $U \in \gamma$ que contiene a y. Por lo tanto hay un punto $x \in X \setminus A$ tal que $U \subset S_x \subset V$, $d(a, x) = k\prime < k$. Sea $V\prime$ la vecindad definida como sigue:

$$V\prime = \{z \in X | d(a, z) < \frac{1}{2}k\prime\}.$$

Entonces es claro que $V\prime \subset V$ y $V\prime \cap U = \emptyset$.

Por lo anterior γ es la cubierta canónica buscada. Y por la contrucción de los conjuntos S_x es claro que cumple la condición extra. □

2.2. Espacios de Funciones

En adelante, veremos teoremas más relacionados con los retractos y extensores. Empezaremos con el Cono, que es un espacio muy interesante, ya que probaremos más adelante que si X es ANE, entonces el Cono es AE. Como mencionamos anteriormente, nos interesa en especial la topología débil del Cono, porque conserva muchas de las propiedades del espacio "base". En casos especiales, cuando el espacio es compacto, la topología cociente coincide con la débil, pero en general no sucede esto.

Teorema 2.2.1. *Si X es un espacio topológico compacto, entonces la topología débil del cono de X coincide con la cociente.*

Demostración. Es claro que la topología débil está contenida en la topología cociente; falta verificar que la topología cociente está contenida en la débil.

Sea U un abierto en $Con(X)$ con la topología cociente. Podemos suponer que $\theta \in U$, ya que es claro que si $\theta \notin U$, U es abierto en la topología débil.

Queremos encontrar un $\epsilon > 0$ tal que $[0, \epsilon) \times X \subset p^{-1}(U)$. Como U es abierto en la topología cociente, entonces $V = p^{-1}(U)$ es abierto en $I \times X$. Para cada punto de la forma $(0, x)$ en U, como el punto es interior, podemos escoger un $N_x = [0, \epsilon_x) \times M_x$ abierto en la topología producto que lo contiene y esta totalmente contenido en V. Ahora bien, como $\{M_x\}_{x\in X}$ es cubierta abierta del espacio compacto $\{0\} \times X$, podemos escoger un numero finito n de M_{x_i} que cubren a $\{0\} \times X$. Si $\epsilon = \min_{i=1,\dots,n}\{\epsilon_i\}$, es claro que $[0,\epsilon) \times X \subset p^{-1}(U)$, que es lo que se quería demostrar. □

Definición 2.2.2. Sean X un espacio topológico, Y un espacio métrico y $f : X \to Y$ una función continua. Si d es una métrica compatible con la topología de Y. Se dice que f es acotada, si $Diam(f(X)) < \infty$, es decir:

$$Diam(f(X)) = \sup_{x,y\in X}\{d(f(x), f(y))\} < \infty$$

Teorema 2.2.3. *Sean X un espacio topológico, Y un espacio métrico y $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones de X a Y continuas y acotadas, tal que converge uniformemente a $f : X \to Y$. Entonces f es continua.*

Demostración. Sea $x_0 \in X$. Queremos ver que f es continua en x_0. Sea U abierto en Y vecindad de $f(x_0)$. Si ρ es una métrica compatible con la topología de Y y $\varepsilon > 0$ tal que $B(f(x_0), \varepsilon) \subset U$, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\rho(f_i(x), f(x)) < \varepsilon/3$, para todo $i \geq m$ y $x \in X$ (por la convergencia uniforme). En particular, $\rho(f_m(x), f(x)) < \varepsilon/3$ para todo $x \in X$.

Como f_m es continua, existe una vecindad V de x_0, tal que $f_m(V) \subset B(f_m(x_0), \varepsilon/3)$.

Sea $x \in V$, entonces:

$$\rho(f(x), f(x_0)) \leq \rho(f(x), f_m(x)) + \rho(f_m(x), f_m(x_0)) + \rho(f_m(x_0), f(x_0))$$

Como $\rho(f(x), f_m(x)) < \varepsilon/3$ para todo $x \in X$, y $f_m(V) \subset B(f_m(x_0), \varepsilon/3)$, entonces $\rho(f_m(x), f_m(x_0)) < \varepsilon/3)$, por lo que $\rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. Aplicando la desigualdad del triángulo, tenemos que $\rho(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$, que implica $f(V) \subset U$, que es lo que se quería probar. □

Teorema 2.2.4. *Si X es un espacio topológico, (Y, ρ) es un espacio métrico completo y $C^*(X, Y)$ es el espacio de funciones de X a Y continuas acotadas, entonces $(C^*(X, Y), d)$ es completo. Donde d denota la métrica del supremo en $C^*(X, Y)$.*

Demostración. Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy. Para cualquier $\varepsilon > 0$, existe una $m \in \mathbb{N}$ tal que $d(f_n, f_k) < \varepsilon$ si $n, k \geq m$. Por lo tanto, para todo $x \in X$, $\rho(f_n(x), f_k(x)) \leq d(f_n, f_k) < \varepsilon$. Esto quiere decir que $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$

es de Cauchy para todo $x \in X$. Como Y es completo, entonces, para cada punto x, la sucesión $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x) = lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

Queremos ver que la sucesión de funciones dada, converge uniformemente a f. Sea $\varepsilon > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(f_n, f_k) < \varepsilon/2$ si $n, k \geq N$. Por lo tanto $\rho(f_n(x), f_k(x)) < \varepsilon/2$ para todo $x \in X$. Usando el límite cuando $k \to \infty$, tenemos que $\rho(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon/2$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$ mayor que N y $x \in X$. Esto muestra la convergencia uniforme, y por lo tanto, gracias al Teorema 2.2.3 la función f es continua. Falta ver que es acotada.

Para ello, tomemos un $n \in \mathbb{N}$, tal que $d(f_n, f) < 1$.

Entonces $\rho(f_n(x), f(x)) < 1$ para todo $x \in X$. Como f_n es acotada, sea $K = Diam(f_n(X))$. Entonces para cada $y \in X$ se tiene:

$$\rho(f(x), f(y)) \leq \rho(f(x), f_n(x)) + \rho(f_n(x), f_n(y)) + \rho(f_n(y), f(y)) < 1 + K + 1$$

Esto muestra que f es acotada. □

Corolario 2.2.5. *El espacio de funciones continuas $C(X, \mathbb{R})$ es completo.*

Demostración. La demostración se sigue del teorema anterior, ya que $\mathbb{R}$ es completo. □

Si tenemos un espacio métrico (Y, d), siempre es posible considerar una métrica acotada que genere la misma topología como sigue:

Sea Y un espacio topológico metrizable y d^* una distancia compatible con la topología de Y. Podemos definir una función $d : Y \times Y \to \mathbb{R}$ dada por

$$d(a, b) = \inf\{d^*(a, b), 1\}$$

para cada par de puntos a, b en Y.

La función d define una distancia para Y y es compatible con la topología de Y.[Fair71]

Sea $L = C(Y)$ el conjunto de todas las funciones acotadas $f : Y \to \mathbb{R}$. Entonces L es un espacio lineal sobre los reales si definimos:

$$(f + g)(y) = f(y) + g(y)$$

y

$$(\alpha f)(y) = \alpha[f(y)]$$

para cualesquiera f, g en $C(Y)$, $y \in Y$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Podemos definir para cada f en $C(Y)$ una norma dada por

$$||f|| = \sup_{y\in Y} |f(y)|.$$

Es fácil comprobar que con la suma, el producto con escalares y la norma definidos, el espacio L es en espacio vectorial normado. Es claro que la distancia que definimos está generada por la norma, por lo que es completo. A un espacio de este tipo, se le llama espacio de Banach.

Observemos por lo anterior d puede considerarse acotada.

Para cualquier punto $a \in Y$, consideremos la función continua $f_a : Y \to \mathbb{R}$ definida como sigue:

$$f_a(y) = d(a, y)$$

para cada $y \in Y$. Como observamos anteriormente, podemos suponer que d es acotado. Denotamos por $\chi : Y \to L$ la función dada por $\chi(a) = f_a$ para cada $a \in Y$. A χ le llamaremos encaje canónico de Y en L.

Lema 2.2.6. *El encaje canónico $\chi : Y \to L$ es una isometría.*

Demostración. Sean dos puntos arbitrarios a, b en Y. Entonces

$$d(a, b) = |f_a(b) - f_b(b)| \leq ||f_a - f_b|| = \sup_{y \in Y} |d(a, y) - d(b, y)| \leq d(a, b)$$

De aquí que $d\prime(\chi(a), \chi(b)) = ||f_a - f_b|| = d(a, b)$. Por lo tanto χ es un encaje isométrico. □

A continuación veremos el Teorema de Eilemberg-Wojdyslawski que es muy importante para el resto del trabajo. De que de esta manera podemos hacer una compleción de X, tomando la cerradura de la imagen de X en L. Además por el hecho de que el encaje es isométrico, conserva las distancias.

Teorema 2.2.7. *La imagen $\chi(Y)$ del encaje isométrico canónico $\chi : Y \to L$ de un espacio métrico acotado Y en el espacio de Banach $L = C(Y)$ de las funciones continuas reales en Y, es un subconjunto cerrado en la envoltura convexa Z de $\chi(Y)$ en L. Si además Y es separable, entonces Z lo es.*

Demostración. Para ver que $\chi(Y)$ es cerrado en Z, veremos que $Z \setminus \chi(Y)$ es abierto en Z. Para ello, sea g un punto en $Z \setminus \chi(Y)$. Como Z es la envoltura convexa de $\chi(Y)$, hay un número finito de puntos $a_1, ..., a_n$ en Y, tales que

$$g = \sum_{i=1}^{n} t_i f_i, \quad f_i = \chi(a_i),$$

donde $t_i \geq 0$ y $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$. Como g no está en $\chi(Y)$, tenemos que $g \neq f_i$ para cada $i = 1, ..., n$.

Sea $0 < \delta < \frac{1}{2}\rho(g, f_i)$ para cada $i = 1, ..., n$, donde ρ es la función distancia de $L = C(Y)$ que define la norma. Sea V_δ la vecindad de g en Z definida por

$$V_\delta = \{\phi \in Z | \rho(g, \phi) < \delta\}$$

y afirmamos que V_δ está contenido en $Z \setminus \chi(Y)$. Para ello supongamos que hay un punto $y \in Y$ tal que $f = \chi(y) \in V_\delta$. Por la elección de δ, tenemos que

$$\rho[\chi(a_i), \chi(y)] = \rho(f_i, f) > \delta$$

para cada $i = 1, ..., n$.

Como χ es un encaje isométrico, $f_i(y) = d(a_i, y) > \delta$ para cada $i = 1, ..., n$. Así pues obtenemos que:

$$\rho(g, f) = ||g - f|| \geq |g(y) - f(y)| = |g(y)| = \sum_{i=1}^{n} t_i f_i(y) > \left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right) \delta = \delta$$

Esto contradice la suposición de que f está en V_δ. Por lo tanto $V_\delta \subset Z \setminus \chi(Y)$. Lo que prueba que $\chi(Y)$ es cerrado en Z.

Para probar la segunda parte del teorema, vamos a suponer que Y es separable. Como $\chi(Y)$ es un cerrado de Z, $\chi(Y)$ es separable. Sea C un subconjunto denso numerable de $\chi(Y)$. Los subconjuntos finitos de C forman una familia numerable Γ. Sea $\gamma = (c_1, ..., c_n)$ cualquier subconjunto finito de C. La envoltura convexa $H(\gamma)$ de γ en L es una unión finita de simplejos con vértices $c_1, ..., c_n$, y por lo tanto separable. Como la envoltura convexa $Q = H(C)$ de C en L es la unión:

$$Q = H(C) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} H(\gamma)$$

de una familia numerable de conjuntos separables, Q es separable. Sea D un subconjunto denso numerable de Q. Probaremos que D es denso en Z.

Sea $z \in Z$ y $\delta > 0$ arbitrarios. Entonces hay un número finito de puntos $x_1, ..., x_m$ de $\chi(Y)$ tales que

$$z = \sum_{i=1}^{m} t_i x_i$$

donde $t_i \geq 0$ y $\sum_{i=1}^{m} t_i = 1$. Como C es denso en $\chi(Y)$, hay $c_1, ..., c_m$ en C tales que

$$\rho(x_i, c_i) < \frac{1}{2}\delta$$

para cada $i = 1, ..., m$. Sea p el punto de Q tal que $p = \sum_{i=1}^{m} t_i c_i$, entonces

$$\rho(z,p) \leq \sum_{i=1}^{m} t_i \rho(x_i, c_i) < \left(\sum_{i=1}^{m} t_i\right) \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2}$$

Como p esta en Q y D es denso en Q, hay un punto $a \in D$ con

$$\rho(p,a) < \frac{\delta}{2}$$

Por lo tanto:

$$\rho(z,a) \leq \rho(z,p) + \rho(p,a) < \delta,$$

lo que prueba que D es denso en Z, y por lo tanto Z es separable. □

Corolario 2.2.8. *Todo espacio métrico (X, d) tiene compleción.*

Demostración. Por el Teorema 2.2.7 todo espacio métrico puede encajarse en el espacio de funciones continuas $C(X, \mathbb{R})$. Por el corolario anterior, dicho espacio es completo. Si tomamos entonces $\overline{\chi(X)}$, obtenemos un subespacio cerrado de un espacio completo, por lo tanto completo; más aún, como estamos tomando la cerradura, entonces $\chi(X)$ es denso. Además χ es una isometría. Por lo que $\overline{\chi(X)}$ cumple con los requerimientos para ser una compleción de X. □

2.3. Retractos y Extensores

En esta sección presentaremos algunas de las propiedades básicas acerca de extensores y retractos, que nos van a llevar a establecer la bases para las partes finales.

Primero se presentan propiedades que cumplen los extensores y retractos y posteriormente las correspondientes a ANE's y AE's, de tal manera que podemos ir construyendo condiciones que deben cumplir los AE's o ANE's, lo cual nos da criterios para ver cuándo un espacio es o no ANE o AE. Además algunas propiedades pueden restringir la clase con la que estamos trabajando.

Teorema 2.3.1. *Todo retracto de un espacio de Hausdorff X, es cerrado en X.*

Demostración. Sea A un retracto de X. Queremos ver que el complemento $B = X \setminus A$ es abierto en X.

Sea $b \in B$. Tomemos una retracción $r : X \to A$. Entonces $r(b)$ es un punto a en A.

Como $a \in A$ y $b \in B$, es claro que $a \neq b$, y como X es un espacio de Hausdorff, podemos escoger dos vecindades ajenas U y V para a y para b respectivamente. Como U es vecindad de a, entonces $U \cap A$ es un abierto en A; por la continuidad de r, la imagen inversa $r^{-1}(U \cap A)$ es un abierto en X que contiene a b.

Sea $W = r^{-1}(U \cap A) \cap V$. Entonces W es una vecindad de b. Falta ver que $W \subset X \setminus A$. Para ello, tomemos un punto $x \in W$. Como $x \in r^{-1}(U \cap A)$ entonces $r(x) \in U \cap A$, sin embargo $U \cap V = \emptyset$, por lo tanto $x \neq r(x)$. Esto quiere decir que $x \notin A$, (si estuviera en A, entonces $x = r(x)$). Por lo tanto $x \in X \setminus A$.

De acuerdo a lo anterior encontramos una vecindad W de $b \in B$ de tal forma que $W \subset X \setminus A$. En consecuencia, A es cerrado. □

Las proposiciones qeu presentaremos a continuación, nos dicen algunas de las propiedades topológicas que conservan los retractos, tales como tener punto fijo, ser contraíble, localmente contraíble y localmente conexo.

Proposición 2.3.2. *La propiedad de tener punto fijo se preserva bajo la retracción.*

Demostración. Supongamos que X es un espacio que tiene la propiedad del punto fijo y A es un retracto de X con retracción $r : X \to A$. Queremos ver que A tiene la propiedad del punto fijo.

Sea $f : A \to A$ una función continua y sea $g = h \circ f \circ r$, donde h es la inclusión de A en X. Como X tiene la propiedad del punto fijo, entonces g debe tener un punto fijo x, es decir que $g(x) = x$. Como $g(x) = h(f(r(x)))$ y $x \in A$ (ya que $g(y) \subset X$ para todo $y \in A$), entonces $x = g(x) = h(f(r(x))) = h(f(x)) = f(x)$, ya que $h(y) = y$ para todo $y \in A$. Por lo tanto, $x = f(x)$ es punto fijo de f, y A tiene la propiedad del punto fijo. □

Ejemplo 2.3.3. El disco unitario D^2 en $\mathbb{R}^2$ tiene la propiedad del punto fijo (T. Brouwer). El intervalo $I \times \{0\}$ es un retracto de D^2. Entonces $I \times \{0\}$ tiene la propiedad de punto fijo.

Proposición 2.3.4. *Todo retracto de un espacio contraíble, es contraíble.*

Demostración. Supongamos que X es contraíble y que A es un retracto de X, con retracción $r : X \to A$. Queremos ver que A es contraíble. Como X es contraíble, existe una homotopía $h : I \times X \to X$, tal que $h(0,x) = x_0$ y $h(1,x) = x$ para toda $x \in X$. Usando la retracción r y la inclusión $i : A \to X$, podemos definir una homotopía $k : I \times A \to A$ dada por $k = r \circ h \circ (id_I \times i)$.

Entonces, si $x \in A$ se tiene $k(0,x) = r(h(0,i(x))) = r(h(0,x)) = r(x_0) = a_0$, es decir que $h(0,x)$ es constante. Ahora, para cada $x \in A$, $k(1,x) = r(h(1,i(x))) = r(h(1,x)) = r(x) = x$ es decir que $k(1,x)$ es la identidad en A. Por lo que h es una homotopía, y A es contraíble. □

Como consecuencia de lo anterior, deducimos que S^{n-1} no es retracto de E^n, donde S^{n-1} denota la esfera de dimensión $n-1$ (la frontera de la bola unitaria de dimensión n) y E^n denota la bola unitaria de dimensión n, ya que E^n es contraíble y S^{n-1} no lo es.

Proposición 2.3.5. *Todo retracto de un espacio localmente contraíble es localmente contraíble.*

Demostración. Supongamos que X es localmente contraíble y que A es un retracto de X con retracción $r : X \to A$. Queremos ver que A es localmente contraíble.

Sea a un punto en A y N una vecindad de a en A. Como r es continua y $r(a) = a$, entonces la imagen inversa $U = r^{-1}(N)$ es una vecindad de a en X.

Como X es localmente contraíble, para el punto a y la vecindad U de a, existe una vecindad V contenida en U y una homotopía $h : I \times V \to U$, tal que $h(0,x) = x_0$ para todo $x \in V$ y algún $x_0 \in U$ y $h(1,x) = x$ para todo $x \in V$.

Entonces $M = V \cap A$ es una vecindad de a en A, y como $M = r(M) \subset r(V) \subset r(U) = N$, tenemos que $M \subset N$. Definimos una homotopía $k : I \times M \to N$ tomando $k(t,x) = r(h(t,x))$ para cada $x \in M$ y $t \in I$.

Falta verificar que k es la homotopía buscada.

En efecto, $k(0,x) = r(h(0,x)) = r(x_0) = a_0 \in A$, por lo que $k(t,x)$ es constante, si $t = 0$. Ahora $k(1,x) = r(h(1,x)) = r(x) = x$ porque $x \in M \subset A$. Por tanto, A es localmente contraíble en el punto a. Como a fue un punto arbitrario de A, A es localmente contraíble. □

Proposición 2.3.6. *Todo retracto de un espacio localmente conexo, es localmente conexo.*

Demostración. Supongamos que X es localmente conexo y A es un retracto de X con retracción $r : X \to A$. Queremos ver que A es localmente conexo.

Sean a un punto en A y N vecindad de a en A. Como r es continua y $r(a) = a$, entonces la imagen inversa $r^{-1}(N) = U$ es una vecindad de a en X. Como X es localmente conexo, entonces hay una vecindad V de x en X, tal que V es conexa y $V \subset U$. Sea $M = r(V)$. Como M es imagen continua de un conexo, M es conexo y $M = r(V) \subset r(U) = N$.

Por lo anterior, A es localmente conexo en a, pero como a fue arbitrario, entonces A es localmente conexo. □

A partir de aquí, mostraremos proposiciones para extensores absolutos y de vecinda. Las siguientes proposiciones son claras y no las vamos a probar.

Proposición 2.3.7. *Todo AE para $\mathcal{C}$ es un ANE para $\mathcal{C}$.*

Proposición 2.3.8. *Si $\mathcal{B}$ es una clase contenida en $\mathcal{C}$, entonces cada AE o ANE para $\mathcal{C}$ es AE o ANE para $\mathcal{B}$ respectivamente.*

Proposición 2.3.9. *Si Y consta de un solo punto, entonces Y es un AE para cualquier clase $\mathcal{C}$.*

La proposición siguiente es muy importante, ya que nos restringe la clase para la cual tengamos ANE's y AE's. Esto es en el sentido de que si los espacios contenidos en la clase no son normales, entonces los AE's o ANE's para la clase que cumplan ser Hausdorff, resultan ser triviales. Por tanto de aquí en adelante, las clases que tomemos en cuenta contendrán únicamente espacios normales.

El enunciado es el siguiente:

Proposición 2.3.10. *Si la clase $\mathcal{C}$ contiene un espacio X que no es normal, entonces cualquier ANE Hausdorff para $\mathcal{C}$ consiste en un solo punto.*

Demostración. Supongamos que Y es un ANE para $\mathcal{C}$, de Hausdorff y tiene más de un punto. Sean p, q puntos distintos en Y. Entonces existen dos abiertos U, V con $p \in U$, $q \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.

Sea $X \in \mathcal{C}$ un espacio no normal, entonces existen B y C cerrados disjuntos en X que no tienen vecindades ajenas.

Consideremos $A = B \cup C$ y sea $f : A \to Y$ dada por,

$$f(x) = \begin{cases} p & \text{si } x \in B \\ q & \text{si } x \in C \end{cases}$$

Como Y es ANE para $\mathcal{C}$, entonces existe una vecindad W de A tal que f tiene extensión $g : W \to Y$. Entonces,

$$g^{-1}(U) \cap g^{-1}(V) = \emptyset$$

y

$$B \subset g^{-1}(U), \quad C \subset g^{-1}(V)$$

es decir, que B y C sí tienen vecindades ajenas en W, que es abierto en X, y por lo tanto B y C tienen vecindades ajenas en X, lo cual contradice la elección de B y C. □

La proposición sólo menciona ANE's, sin embargo, si un espacio Y es de Hausdorff y AE para la clase $\mathcal{C}$, entonces es ANE para la clase $\mathcal{C}$, por lo que de haber un espacio que no sea normal en la clase $\mathcal{C}$, por la proposición anterior, Y tendría un solo punto, lo cual no es interesante.

Proposición 2.3.11. *Cualquier producto topológico de extensores absolutos para una clase $\mathcal{C}$, es un extensor absoluto para $\mathcal{C}$.*

Demostración. Sean $\{Y_\mu\}_{\mu \in M}$ extensores absolutos para $\mathcal{C}$, Y su producto topológico y $p_\mu : Y \to Y_m u$ las proyecciones naturales.

Veamos que Y es un extensor absoluto para $\mathcal{C}$. Sea $X \in \mathcal{C}$ y $f : A \subset X \to Y$, con A cerrado. Queremos ver que f tiene una extensión $g : X \to Y$.

Para cada $\mu \in M$, sean $f_\mu = p_\mu \circ f : A \to Y_\mu$. Como Y_μ es AE para $\mathcal{C}$, f_μ tiene extensión $g_\mu : X \to Y_\mu$.

Definimos a $g : X \to Y$ dada por, $p_\mu[g(x)] = g_\mu(x)$, $\forall x \in X$.

Es claro que $g|_A = f$, y que g es continua, entonces g es la extensión buscada. □

El Teorema de Tietze, nos dice que el intervalo I es un extensor absoluto para la clase de los espacios normales, por lo que, por el corolario siguiente, cualquier potencia de I es extensor absoluto para dicha clase. Más adelante demostraremos el Teorema de Tietze.

Primero nos enfocaremos a dar características que cumplen los extensores absolutos, y qué operaciones con espacios topológicos preservan la propiedad de ser extensor absoluto o extensor absoluto de vecindad. Los Teoremas de Tietze y de Dugundji nos darán la manera de generar dichos espacios.

Corolario 2.3.12. *Cualquier potencia del intervalo I es un extensor absoluto para $\mathcal{N}$, la clase de todos los espacios normales. En particular, el cubo de Tychonoff es un extensor absoluto para la clase $\mathcal{N}$.*

Proposición 2.3.13. *Cualquier producto topológico* $Y = \prod_{\mu \in M} Y_\mu$ *de una colección finita de extensores absolutos de vecindad para una clase* $\mathcal{C}$ *(es decir* M *finito, y para cada* $\mu \in M$, Y_μ *es extensor absoluto de vecindad para la clase* $\mathcal{C}$*) es un extensor absoluto de vecindad para la clase* $\mathcal{C}$.

Demostración. Sean $\{Y_\mu\}_{\mu \in M}$ extensores absolutos de vecindad para $\mathcal{C}$, Y su producto topológico y $p_\mu : Y \to Y_\mu$ las proyecciones naturales, con M finito.

Veamos que Y es un extensor absoluto de vecindad para $\mathcal{C}$. Sea $X \in \mathcal{C}$ y $f : A \subset X \to Y$, con A cerrado. Queremos ver que existe U vecindad de A en donde f tiene una extensión $g : U \to Y$.

Para cada $\mu \in M$, sean $f_\mu = p_\mu \circ f : A \to Y_\mu$. Como Y_μ es ANE para $\mathcal{C}$, entonces existe una vecindad V_μ de A en Y en donde f_μ tiene extensión $g_\mu : V_\mu \to Y_\mu$.

Ya que el producto es finito, si definimos $U = \bigcap_{\mu \in M} V_\mu$, entonces U es una vecindad de A y podemos definir una función $g : U \to Y$ dada por, $p_\mu [g(x)] = g_\mu(x)$, para toda x en X.

Es claro que g es continua y que $g|_A = f$, por tanto g es la extensión buscada.

□

Proposición 2.3.14. *Todo retracto de un AE para* $\mathcal{C}$ *es un AE para* $\mathcal{C}$.

Demostración. Sean Z un AE para $\mathcal{C}$ y Y un retracto de Z, con retracción $r : Z \to Y$. Probemos que Y es un AE para $\mathcal{C}$.

Sean $X \in \mathcal{C}$, A cerrado en X y $f : A \to Y$ continua. Consideremos $\phi = \imath \circ f : A \to Z$ donde $\imath$ denota la inclusión $Y \subset Z$. Como Z es un AE para $\mathcal{C}$, ϕ tiene extensión $\psi : X \to Z$ y la composición $g = r \circ \psi : X \to Y$ es la extensión buscada.

Ya que $g(a) = r \circ \psi(a) = r \circ \phi(a) = r \circ \imath \circ f(a) = r \circ f(a)$, como $f(a) \subset Y$, entonces $r(f(a)) = f(a)$, por lo que $g(a) = f(a)$. □

Proposición 2.3.15. *Todo retracto de vecindad de un ANE para* $\mathcal{C}$ *es un ANE para* $\mathcal{C}$.

Demostración. Sean Z un ANE para $\mathcal{C}$ y Y un retracto de vecindad de Z. Entonces existe un subespacio abierto $W \supset Y$ de Z con una retracción $r : W \to Y$. Probemos que Y es un ANE para $\mathcal{C}$.

Sean $X \in \mathcal{C}$, A cerrado en X y $f : A \to Y$ una función continua. Consideremos $\phi = \imath \circ f : A \to Z$, donde $\imath$ es la inclusión de Y en Z.

Como Z es ANE para $\mathcal{C}$, entonces existe V vecindad de A en donde ϕ tiene extensión $\psi : V \to Z$.

Sea $U = \psi^{-1}(W)$, que es abierto (ψ continua) y contiene a A.

Sea $g : U \to Y$ dada por

$$g(x) = r[\psi(x)]$$

para toda $x \in U$. Por lo tanto g es continua y si $a \in A$, entonces $g(a) = r[\psi(a)] = r[\phi(a)] = r[\imath(f(a))] = r[f(a)] = f(a)$, pues $f(a) \in Y$ y r es retracción, por lo que g es extensión de f sobre U.

De lo anterior, tenemos que Y es un ANE para $\mathcal{C}$ □

Proposición 2.3.16. *Todo subespacio abierto de un ANE para la clase $\mathcal{C}$ es un ANE para $\mathcal{C}$.*

Demostración. Sea Y un ANE para $\mathcal{C}$ y W un subespacio abierto de Y. Probemos que W es un ANE para $\mathcal{C}$.

Sean $X \in \mathcal{C}$, A un cerrado en X y $f : A \to W$ una función continua. Como Y es un ANE para $\mathcal{C}$, entonces la función $\phi = \imath \circ f : A \to Y$, donde $\imath$ denota la inclusión $W \subset Y$, tiene extensión $\psi : V \to Y$ sobre alguna vecindad V de A en X.

Sea $U = \psi^{-1}(W)$ en V, como U es abierto en V y V es abierto en X, entonces U es abierto en X y $A \subset U$.

Por lo anterior, si definimos $g : U \to W$ dada por $g(x) = \psi(x)$ para toda $x \in U$ es una extensión de f en U, ya que si $a \in A$, entonces $g(a) = \psi(a) = \phi(a) = \imath(f(a)) = f(a)$, lo que prueba que g es extensión de f sobre U. □

De lo anterior podemos concluir que I es AE para la clase de los espacios normales, por lo que cualquier producto $I^{\mathcal{A}}$ es AE para la clase de los normales, más aun, I es AE para la clase de los normales, entonces I es ANE para la clase de los normales. Sabemos que $(0, 1)$ es subespacio abierto de I, por lo que $(0, 1)$ es ANE para la clase de los normales, así $\mathbb{R}$ es ANE para la clase de los normales, y cualquier producto finito de $\mathbb{R}$ es ANE para la clase de los normales.

Teorema 2.3.17. *Si un espacio contraíble Y es un ANE para $\mathcal{C}$, entonces Y es un AE para $\mathcal{C}$.*

Demostración. Como Y es contraíble, existen $y_0 \in Y$ y $h : Y \times I \to Y$ tales que para toda $y \in Y$, se tiene que $h(y, 0) = y$ y $h(y, 1) = y_0$.

Sea $f : A \to Y$, con A cerrado en $X \in \mathcal{C}$. Como Y es ANE para $\mathcal{C}$, f tiene una extensión $g : U \to Y$, U vecindad de A.

Como X es normal[1], existe un abierto V tal que

$$A \subset V \subset \bar{V} \subset U$$

y por el Lema de Urysohn existe $j : X \to I$ tal que $j(X \setminus V) = \{0\}$ y $j(A) = \{1\}$. Sea $f^* : X \to Y$ dada por,

$$f^*(x) = \begin{cases} h[g(x), j(x)] & x \in \bar{V} \\ y_0 & x \in X \setminus V \end{cases}$$

f^* es continua debido a la contracción h, y es claro que $f^*|_A = f$ Por lo tanto Y es AE para $\mathcal{C}$ □

El siguiente teorema, Teorema de Tietze, nos dice que el segmento I es un AE para la clase de los espacios normales, lo cual es un hecho muy importante, y además, considerando lo dicho anteriormente, cualquier potencia de I es AE.

Teorema 2.3.18 (Tietze-Urysohn). *El intervalo cerrado $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$ es AE para $\mathcal{N}$, la clase de todos los espacios normales.*

Demostración. Sean X un espacio normal, $A \subset X$ cerrado y $f : A \to I$ una función continua. Queremos ver que A tiene la propiedad de extensión con respecto a I.

Para B y C cerrados disjuntos en X, consideremos la función $\chi_{B,C} : X \to I$ dada por:

$$\chi_{B,C}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in B \\ 1 & \text{si } x \in C \end{cases}$$

cuya existencia nos garantiza el Lema de Urysohn.

Construiremos para cada $n \in \mathbb{N}$, funciones continuas $f_n : A \to I$ y $g_n : X \to I$.

Sea $f_0 = f$ y supongamos que f_n ya está definida, entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos los subconjuntos cerrados de A como sigue:

$$B_n = \left\{ x \in A, \quad f_n(x) \leq \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^n \right\}$$

[1] Recordemos que la clase $\mathcal{C}$ tiene espacios por lo menos normales

y

$$C_n = \left\{ x \in A, \quad f_n(x) \geq \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^n \right\}.$$

Dado que A es cerrado, entonces B_n y C_n son cerrados en X, y podemos definir la función g_n dada por,

$$g_n(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n \chi_{B_n,C_n}(x)$$

para cada $x \in X$.

Ahora veamos que

$$0 \leq f_n(x) - g_n(x) \leq 1. \tag{2.3.1}$$

Si $x \in B_n$, entonces $g_n(x) = 0$. Si $x \in A \setminus B_n$, entonces tenemos que

$$f_n(x) > \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

y

$$g_n(x) \leq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

y por lo tanto la ecuación (2.3.1) se cumple.

Ahora definamos f_{n+1} dada por $f_{n+1}(x) = f_n(x) - g_n(x)$ para cada $x \in A$, que por la ecuación (2.3.1), tenemos que $0 \leq f_{n+1}(x) \leq 1$ para todo $x \in A$.

Como $0 \leq \chi_{B_n,C_n}(x) \leq 1$, para cada $x \in X$, tenemos que

$$0 \leq g_n(x) \leq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n \tag{2.3.2}$$

para toda $x \in X$. Por otro lado, probaremos por inducción sobre n, que

$$0 \leq f_n(x) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \tag{2.3.3}$$

es válida para todo $x \in A$.

Si $n = 0$, entonces la ecuación (2.3.3) se cumple trivialmente, ya que $f_0 = f$. Ahora supongamos que se cumple para alguna $n > 0$.

De las ecuaciones (2.3.2) y (2.3.3), tenemos que

$$
\begin{aligned}
f_{n+1}(x) = f_n(x) - g_n(x) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n &= \\
= \left(\frac{2}{3}\right)^n \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^n \left(\frac{2}{3}\right) &= \\
= \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}
\end{aligned}
$$

y por lo tanto,

$$0 \leq f_{n+1}(x) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

para toda $x \in A$. Lo que completa la prueba inductiva.

Por la ecuación (2.3.2), tenemos que

$$0 \leq \sum_{i=0}^{n} g_i(x) \leq \frac{1}{3}\left[\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^i\right] < 1$$

es válida para toda $x \in X$ y $n \geq 0$.

Por lo tanto, podemos definir para cada n, una función continua $S_n : X \to I$ dada por

$$S_n(x) = \sum_{i=0}^{n} g_i(x)$$

para toda $x \in X$.

De la ecuación (2.3.2), se sigue que $\sum g_n(x)$ es uniformemente convergente en X. Como g_n es continua para toda n, entonces $\lim_{n\to\infty} S_n(x)$ existe para toda $x \in X$ y como converge uniformemente podemos definir a la función continua (Ver Teorema 2.2.3) $g : X \to I$ dada por $g(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$ para todo punto $x \in X$.

De la definición de f_{n+1}, se sigue que $g_n(x) = f_n(x) - f_{n+1}(x)$ para todo punto $x \in A$, por lo que $S_n(x) = f(x) - f_{n+1}(x)$, y como $f_n(x)$ tiende a 0, entonces $g(x) = f(x)$ para todo $x \in A$.

Lo anterior muestra que g es una extensión continua de f, definida en todo X. □

Teorema 2.3.19 (Dugundji). *Si $f : A \to L$ es una función continua definida en un subespacio cerrado A de un espacio topológico metrizable X*

a un espacio topológico lineal localmente convexo L. Entonces f puede ser extendida a una función $F : X \to L$ tal que $F(X)$ está contenida en la envoltura convexa $Conv(f(A))$ de $f(A)$.

Demostración. Sean X un espacio metrizable, A un subespacio cerrado de X, L un espacio topológico lineal localmente conexo y $f : A \to L$ una función contiuna.

Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ una cubierta canónica de $X \setminus A$ (Lema 2.1.11). Por el Teorema de Stone (2.1.9), X es paracompacto y por lo tanto existe una partición de unidad $\mathcal{F} = \{\phi_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ subordinada a $\mathcal{U}$ (Teorema 2.1.8).

Para cada $\alpha \in \mathcal{A}$ escogemos dos puntos $x_\alpha \in U_\alpha$ y $a_\alpha \in A$ tales que $d(a_\alpha, x_\alpha) < 2d(x_\alpha, A)$, donde la distancia de un punto a un conjunto se define como $d(y, B) = \inf\{d(y, b) | b \in B\}$. Podemos escoger dichos puntos ya que para todo $\varepsilon > 0$, hay puntos $a \in A$ tal que $d(x_\alpha, a) < d(x_\alpha, A) + \varepsilon$, por lo que si $\varepsilon = d(x_\alpha, A)$, entonces podemos escoger un a_α con las propiedades requeridas.

Con lo anterior podemos definir una función $F : X \to L$ dada por

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \phi_\alpha(x) f(a_\alpha) & \text{si } x \in X \setminus A \end{cases}$$

Dicha función está bien definida ya que si $x \notin A$, como $\mathcal{U}$ es una cubierta canónica, entonces existe una vecindad V de x, tal que $\{\alpha \in \mathcal{A} | U_\alpha \cap V \neq \emptyset\}$ es finito. Sean $\alpha_1, ..., \alpha_n$ los elementos de $\mathcal{A}$ tales que $U_{\alpha_i} \cap V \neq \emptyset$.

Como $\mathcal{F}$ es una partición de unidad subordinada a $\mathcal{U}$, entonces para cualquier α diferente de α_i con $i = 1, ..., n$, se tiene que $\phi_\alpha(x) = 0$. Por lo tanto $\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \phi_\alpha(x) f(a_\alpha)$ es en realidad la suma finita $\sum_{i=1}^{n} \phi_{\alpha_i}(x) f(a_{\alpha_i})$. Además como $\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \phi_\alpha(x) = 1$ para todo $x \in X \setminus A$, $F(x)$ es una combinación convexa, por lo que $F(x)$ está contenido en $Conv(f(A))$.

Sólo falta ver que F es continua. Para ello observemos que para cualquier $x \in X \setminus A$, existe una vecindad V tal que intersecta un número finito de elementos de $\mathcal{A}$, y para todo $y \in V$, V es una vecindad de y que intersecta un número finito de elementos de $\mathcal{A}$, por lo que la función F evaluada en el punto y, sólo depende de un número finito de índices, entonces $F(y) = \sum_{i=1}^{n} \phi_{\alpha_i}(x) f(a_{\alpha_i})$ para todo $y \in V$. Como $F|_V$ es suma y producto de funciones continuas, $F|_V$ es continua, por lo que F es continua en x.

Para ver la continuidad en puntos de A, tomemos un punto $a \in A$, y una vecindad convexa U de $f(a)$ en L, (se puede ya que L es localemente convexo, entonces para cualquier vecindad de a hay una vecindad convexa contenida en la primera). Como f es continua en A, entonces hay un $\varepsilon > 0$ tal que la imagen de la bola $O = B(a, \varepsilon)$ está contenida en U. Sea $\delta < \frac{\varepsilon}{10}$. Para $B(a, \delta)$ hay una vecindad V de a tal que cada vez que un elemento M de la cubierta $\mathcal{U}$ intersecte a V, se tiene que $M \subset B(a, \delta)$.

Afirmamos que V es una vecindad de a que nos sirve para probar la continuidad de F, es decir que $F(V) \subset U$.

Sea $y \in V$; si $y \in A$ es claro que $F(y) = f(y) \in U$. Si $y \notin A$, entonces para y hay una vecindad W de y, tal que intersecta un número finito de elementos de $\mathcal{U}$, y por lo tanto y sólo está en un número finito de elementos de $\mathcal{U}$. Como $y \in V$, cada elemento de $\mathcal{U}$ que contiene a y, digamos U_{α_i}, intersecta V, por lo que cada $U_{\alpha_i} \subset B(a, \delta)$. Recordemos que para cada $\alpha \in \mathcal{A}$ escogimos $x_\alpha \in U_\alpha$ y a_α, por lo tanto $d(x_{\alpha_i}, a) < \delta$ y $d(x_{\alpha_i}, a_{\alpha_i}) < 2d(x_{\alpha_i}, A)$.

Como $d(x_{\alpha_i}, a) < \delta$, entonces $d(x_{\alpha_i}, A) < \delta$, por lo tanto $d(x_{\alpha_i}, a_{\alpha_i}) < 2\delta$.

En consecuencia $d(a, a_{\alpha_i}) < d(a, x_{\alpha_i}) + d(x_{\alpha_i}, a_{\alpha_i}) < 3\delta < \frac{3\varepsilon}{10}$ por lo que $f(a_{\alpha_i}) \in U$ y la combinación convexa $F(y)$ esta en U.

De aquí se tiene que F es continua en X y es extensión de f. □

Una manera muy importante de obtener AE's a partir de ANE's es por medio del cono del espacio; de esta manera, podemos demostrar otros teoremas muy importantes de una manera sencilla.

Proposición 2.3.20. *Sea $\mathcal{K}$ alguna de las clases $\mathcal{M}$, $\mathcal{P}$ o $\mathcal{N}$. Si Y es un ANE($\mathcal{K}$), entonces $Con(Y)$ es un AE($\mathcal{K}$).*

Demostración. Sean $X \in \mathcal{K}$, A un cerrado de X y $f : A \to Con(Y)$ una función continua. Sea f_1 la composición de f y la proyección $\pi_1 : Con(Y) \to [0, 1]$, es decir $f_1 : A \to [0, 1]$. Usando la normalidad de X podemos extender f_1 a una función $\phi : X \to [0, 1]$. Sea $U = \phi^{-1}((0, 1])$. Afirmamos que $U \in \mathcal{K}$. En caso de que $\mathcal{K}$ sea la clase de los metrizables es claro. Si $X \in \mathcal{N}$ (respectivamente $\mathcal{P}$) entonces U es normal (resp. paracompacto), ya que es un F_σ-conjunto de X. Por lo que $U \in \mathcal{K}$

Sea $f_2 = \pi_2 \circ f|_{U \cap A}$, donde $\pi_2 : (0, 1] \times Y \to Y$ es la proyección del cono a Y. Como $U \in \mathcal{K}$, $U \cap A$ es un cerrado de U y $Y \in ANE(\mathcal{K})$, entonces f_2 tiene una extensión $F_2 : V \to X$ donde V es una vecindad de $A \cap U$ en U.

Sea $\lambda : U \to [0, 1]$ una función continua tal que $\lambda|_{U \setminus V} = 0$ y $\lambda_{B \cap U} = f_2$.

Ahora podemos definir la función

$$F(x) = \begin{cases} \lambda(x) F_2(x), & \text{si } x \in V \\ \theta, & \text{si } x \in X \setminus V \end{cases}$$

La continuidad de F es consecuencia de la definición de la topología débil en el $Con(Y)$. □

Los teoremas a continuación nos dicen que en realidad es lo mismo hablar de extensores absolutos que hablar de retractos absolutos, cuando éstos están en la clase dada.

Teorema 2.3.21. *Sea Y un espacio en una clase topológica débilmente hereditaria $\mathcal{C}$. Si Y es un AE (resp ANE) para la clase $\mathcal{C}$, entonces Y es un AR (resp. ANR) para la clase $\mathcal{C}$.*

Demostración. Consideremos un homeomorfismo arbitrario $h : Y \to Z_0$ de Y a un subespacio cerrado Z_0 de un espacio Z en la clase $\mathcal{C}$. Como Y es un ANE para la clase $\mathcal{C}$, entonces la función continua $f = h^{-1} : Z_0 \to Y$ tiene una extensión $g : U \to Y$ sobre una vecindad de Z_0 de Z. Entonces la función $r = h \circ g : U \to Z_0$ es una retracción y por lo tanto Y es un ANR para la clase $\mathcal{C}$.

De manera similar puede probarse que si Y es un AE, entonces es un AR. □

Teorema 2.3.22. *Sea $\mathcal{C}$ una de las siguientes clases:*

1. *espacios normales*
2. *espacios de Hausdorff compactos*
3. *espacios metrizables*
4. *espacios metrizables separables*
5. *espacios metrizables compactos*

entonces todo AR (resp. ANR) para $\mathcal{C}$ es un AE (resp. ANE) para $\mathcal{C}$

Demostración. La prueba de que todo AR para $\mathcal{C}$ es AE para $\mathcal{C}$, es un caso particular que la que se hace a continuación, por lo que se deja al lector dicha demostración.

Sea Y un ANR para la clase $\mathcal{C}$. Para probar que Y es ANE para $\mathcal{C}$, consideremos cualquier función continua $f : A \to Y$ definida de un subespacio cerrado A de un espacio X en la clase $\mathcal{C}$. Basta ver que f puede ser extendida sobre una vecindad U de A en X.

Caso 1 Supongamos que $\mathcal{C}$ es la clase de los espacios normales o de los espacios de Hausdorff compactos.

Consideremos el espacio de adjunción Z obtenido adjuntando X a Y con la función continua f. Por la Proposición 1.2.8, Z es un espacio en $\mathcal{C}$. Consideremos la proyección natural $p : W \to Z$ de la suma topológica $W = X + Y$ en Z y sus restricciones $i = p|_Y$ y $j = p|_X$. Entonces $i : Y \to Z_0$ es un homeomorfismo de Y en un subespacio cerrado Z_0 de Z.

Como Y es un ANR para $\mathcal{C}$, entonces hay una vecindad V de Z_0 en Z, y una retracción $r : V \to Z_0$. La imagen inversa $U = j^{-1}(V)$ de $j : X \to Z$ es una vecindad de A en X. Definimos $g : U \to Y$ dada por

$$g(x) = (i^{-1} \circ r)[j(x)]$$

para cada $x \in U$. Entonces g es una extensión de f sobre U.

Caso 2 Supongamos que $\mathcal{C}$ es la clase de los espacios metrizables o la clase de los espacios separables metrizables. En este caso Y es un espacio metrizable. Consideremos una métrica acotada para Y y el encaje canónico $\chi : Y \to L$ en el espacio de Banach $L = C(Y)$. Por el Teorema 2.2.7, la imagen $Z_0 = \chi(Y)$ es un cerrado en la envoltura convexa Z de $\chi(Y)$. Como Z es un subespacio de un espacio métrico L, entonces, Z es metrizable. Si $\mathcal{C}$ es la clase de los separables metrizables, entonces Y es separable, y por lo tanto Z es separable. Por lo que Z está en la clase $\mathcal{C}$. Como Y es un ANR para $\mathcal{C}$, existe una vecindad V de Z_0 en Z junto con una retracción $r : V \to Z_0$. Por otro lado, sigue del Teorema de Dugundji 2.3.19, que la función $\phi = \chi \circ f : A \to L$ tiene una extensión $\psi : X \to L$, tal que $\psi(X)$ está contenido en la envoltura convexa de $\phi(A) \subset \chi(Y)$. Por lo que $\psi(X) \subset Z$. Entonces la imagen inversa $U = \psi^{-1}(V)$ es una vecindad de A en X. Definimos $g : U \to Y$ por

$$g(x) = \chi^{-1}[r(\psi(x))]$$

para cada $x \in U$. Entonces g es una extensión de f sobre U.

Caso 3 Finalmente, supongamos que $\mathcal{C}$ es la clase de los espacios compactos metrizables. Como Y es un espacio metrizable compacto, entonces existe un homeomorfismo $h : Y \to Z_0$ de Y en un subespacio cerrado Z_0 del cubo de Hilbert $Z = I^\omega$. Como I^ω es compacto metrizable y como Y es ANR para dicha clase, entonces hay una vecindad V de Z_0 en I^ω junto con una retracción $r : V \to Z_0$. Por otro lado, debido a que I^ω es AE para $\mathcal{N}$, que la función compuesta $\phi = h \circ f : A \to I^\omega$, tiene una extensión $\psi : X \to I^\omega$. La imagen inversa $U = \psi^{-1}(V)$ es una vecindad de A en X. Definimos $g : U \to Y$ tomando

$$g(x) = (h^{-1} \circ r)[\psi(X)]$$

para cada $x \in U$. Entonces g es una extensión de f sobre U.

□

Capítulo 3

Unión de Extensores

En este capítulo presentaremos el tema central de este trabajo, y veremos la demostración que dió Hu[Hu65] referente a las uniones de extensores cerrados y abiertos, y la demostración que dió Dydak en [Dyd02] que es mucho más corta y usa una técnica muy importante, que se puede extender, por medio del cono a extensores absolutos de vecindad de una manera muy simple. Sólo presentaremos la demostración de Hu para casos finitos, ya que la demostración para el caso infinito es demasiado larga. Además, en el articulo [An∞] se muestra de una manera más simple el caso finito. El método que usa Dydak, es el de ir construyendo funciones parciales que extienden a la función que nos interesa extender, de tal manera que puedan ser pegadas entre si para construir la función que extiende a la original.

3.1. Unión de Extensores Abiertos

Proposición 3.1.1. *Sean Y_1 y Y_2 subespacios abiertos de un espacio Y tales que $Y = Y_1 \cup Y_2$. Si Y_1 y Y_2 son ANEs para $\mathcal{C}$, entonces Y es ANE para $\mathcal{C}$.*

Demostración. Sean $X \in \mathcal{C}$, A un subespacio cerrado de X y $f : A \to Y$ una función continua. Queremos ver que f posee una extensión continua sobre una vecindad de A en X.

El subespacio A de X, esta cubierto por los subconjuntos abiertos $f^{-1}(Y_1)$ y $f^{-1}(Y_2)$. El espacio X esta cubierto por los abiertos $W_1 = f^{-1}(Y_1) \cup X \setminus A$ y $W_2 = f^{-1}(Y_2) \cup X \setminus A$. Como X es normal entonces existen cerrados $X_1 \subset W_1$ y $X_2 \subset W_2$ del espacio X tales que $X = X_1 \cup X_2$. Sean $A_1 = X_1 \cap A$

y $A_2 = X_2 \cap A$, por lo que $A = A_1 \cap A_2$ y $f(A_1) \subset Y_1$, $f(A_2) \subset Y_2$, $f(A_1 \cap A_2) \subset Y_1 \cap Y_2$.

Como $Y_1 \cap Y_2$ es abierto de Y_1 y de Y_2, entonces es ANE para $\mathcal{C}$ y como $A_1 \cap A_2$ es cerrado en $X_1 \cap X_2$ que esta en $\mathcal{C}$, entonces la función continua parcial $f|_{A_1 \cap A_2}$ tiene una extensión

$$\phi : M \to Y_1 \cap Y_2 \tag{3.1.1}$$

sobre un abierto M de $X_1 \cap X_2$. Como $X_1 \cap X_2$ es normal, existe un abierto N de $X_1 \cap X_2$ tal que

$$A_1 \cap A_2 \subset N \subset \bar{N} \subset M \subset X_1 \cap X_2$$

Consideremos $A \cap \bar{N}$, entonces tenemos que

$$A_1 \cap A_2 \subset \bar{N} \cap A \subset X_1 \cap X_2 \cap A = A_1 \cap A_2$$

por lo que $\bar{N} \cap A = A_1 \cap A_2$. Por lo que podemos definir una función continua $g : \bar{N} \cap A \to Y$ dada por

$$g(x) = \begin{cases} \phi(x), & \text{si } x \in \bar{N} \subset M \\ f(x), & \text{si } x \in A \end{cases}$$

Como $g(\bar{N} \cap A_1) \subset Y_1$ y Y_1 es un ANE para $\mathcal{C}$, entonces la función parcial $g|_{\bar{N} \cap A_1}$ tiene extensión $h_1 : V_1 \to Y_1$ sobre alguna vecindad V_1 de $\bar{N} \cap A_1$ en X_1.

De la misma manera podemos obtener una extensión $h_2 : V_2 \to Y_2$ de $g|_{\bar{N} \cap A_2}$ sobre una vecindad V_2 de $\bar{N} \cap A_2$ en X_2.

Para $i = 1, 2$, de la normalidad de X_i, existen abiertos Q_i tales que

$$\bar{N} \cup A_i \subset Q_i \subset \bar{Q}_i \subset V_i \subset X_i$$

Por otro lado, como $(X_1 \cap X_2) \setminus N$ y A son cerrados disjuntos en un espacio normal X, hay dos abiertos disjuntos D y E tales que

$$(X_1 \cap X_2) \setminus N \subset D, \quad A \subset E$$

Consideremos los cerrados $J_1 = \overline{(Q_1 \setminus X_2)} \cap \bar{E}$ y $J_2 = \overline{(Q_2 \setminus X_1)} \cap \bar{E}$ de X.

Entonces tenemos que $J_1 \subset V_1$, $J_2 \subset V_2$ y $J_1 \cap J_2 \subset N$. Sean $K_1 = J_1 \cup \bar{N}$ y $K_2 = J_2 \cup \bar{N}$, entonces K_1 y K_2 son cerrados de X con $K_i \subset V_i$ y $K_1 \cap K_2 \subset \bar{N}$.

Como $h_1|_{\tilde{N}} = g|_{\tilde{N}} = h_2|_{\tilde{N}}$, podemos definir una función continua $h : K \to Y$ en el subespacio $K = K_1 \cup K_2$ de X tomando

$$h(x) = \begin{cases} h_1(x), & \text{si } x \in K_1 \\ h_2(x), & \text{si } x \in K_2 \end{cases}$$

Entonces h es una extensión de f. Falta ver que K contiene una vecindad de A en X.

Consideremos $G = ((Q_1 \setminus X_2) \cup (Q_2 \setminus X_1) \cup N) \cap E$. Entonces $A \subset G \subset K$. Como E es abierto en X falta ver que $H = (Q_1 \setminus X_2) \cup (Q_2 \setminus X_1) \cup N)$ es abierto en X. Por las definiciones de N, Q_1 y Q_2, hay abiertos B_0, B_1 y B_2 tales que

$$N = B_0 \cap X_1 \cap X_2, \quad Q_1 = B_1 \cap X_1, \quad Q_2 = B_2 \cap X_2$$

de lo cual sigue que

$$Q_1 \setminus X_2 = B_1 \setminus X_2, \quad Q_2 \setminus X_1 = B_2 \setminus X_1$$

son abiertos de X. Como $N \subset Q_1$ y $N \subset Q_2$, tenemos que

$$N \subset B_0 \cap B_1 \cap B_2$$

Por otro lado, sea $x \in B_0 \cap B_1 \cap B_2$. Si $x \in X_1 \cap X_2$, tenemos que $x \in N$. Si $x \in X \setminus X_2$, entonces

$$x \in B_1 \cap (X \setminus X_2) = B_1 \setminus X_2$$

De la misma manera, si $x \in X \setminus X_1$, entonces $x \in B_2 \setminus X_1$, por lo que $B_0 \cap B_1 \cap B_2 \subset H$.

De lo anterior tenemos que

$$H = (B_1 \setminus X_2) \cup (B_2 \setminus X_1) \cup (B_0 \cap B_1 \cap B_2)$$

Lo que prueba que H es abierto en X. □

Corolario 3.1.2. *Si un espacio Y es unión de una colección finita de subespacios abiertos donde cada uno es ANE para $\mathcal{C}$, entonces Y es ANE para $\mathcal{C}$.*

Proposición 3.1.3. *Sean Y_1 y Y_2 dos subespacios abiertos de Y tales que $Y = Y_1 \cup Y_2$. Si Y_1, Y_2 y $Y_1 \cap Y_2$ son AE para la clase $\mathcal{C}$, entonces Y es AE para la clase $\mathcal{C}$.*

La prueba de esta proposición es mucho más simple que la prueba anterior, por lo que la hemos omitido.

En general un subespacio cerrado de un ANE para la clase $\mathcal{C}$ no siempre es ANE para la clase $\mathcal{C}$. Por ejemplo si $\mathcal{C}$ contiene el intervalo cerrado I, entonces cada subespacio cerrado de I que no sea localmente conexo no es ANE para $\mathcal{C}$.

3.2. Unión de Extensores Cerrados

Proposición 3.2.1. *Sean Y_1 y Y_2 subespacios cerrados de Y, tales que $Y_1 \cup Y_2 = Y$. Si $Y_1 \cap Y_2$ y Y son ANE para $\mathcal{C}$, entonces Y_1 y Y_2 son ANE para $\mathcal{C}$.*

Demostración. Basta ver que Y_1 es un ANE para la clase $\mathcal{C}$. Para ello, sean X un espacio en la clase $\mathcal{C}$, A un cerrado de X y $f : A \to Y_1$ una función continua. Queremos ver que f tiene una extensión sobre alguna vecindad de A en X.

Como Y es un ANE, la composición $\phi = i \circ f : A \to Y$ de f y la inclusión $i : Y_1 \to Y$ tiene una extensión $\phi^* : U \to Y$ sobre algún subespacio abierto U vecindad de A en X. Como X es normal, existe un abierto V de X tal que $A \subset V \subset \bar{V} \subset U$. Sea $\psi = \phi^*|_{\bar{V}}$ y consideremos las imágenes inversas $B_1 = \psi^{-1}(Y_1)$ y $B_2 = \psi^{-1}(Y_2)$, entonces B_1 y B_2 son cerrados en $\bar{V}$ por lo tanto cerrados en X. Además tenemos que

$$\bar{V} = B_1 \cup B_2, \quad A \subset B_1, \quad \psi(B_1 \cap B_2) \subset Y_1 \cap Y_2$$

Como B_2 es un cerrado de X, B_2 esta en $\mathcal{C}$. Como $B_1 \cap B_2$ es cerrado en B_2 y $Y_1 \cap Y_2$ es ANE para $\mathcal{C}$, entonces la restricción $\psi|_{B_1 \cap B_2}$ tiene extensión

$$\kappa : N \to Y_1 \cap Y_2$$

sobre un subespacio abierto N de B_2 que contiene a $B_1 \cap B_2$. Como B_2 es normal, entonces existe un abierto M en B_2 que satisface

$$B_1 \cap B_2 \subset M \subset \bar{M} \subset N \subset B_2$$

Como B_1 y $\bar{M}$ son cerrados en X y

$$B_1 \cap \bar{M} = B_1 \cap \bar{M} \cap B_2 = B_1 \cap B_2$$

podemos definir una función continua $g : B_1 \cup \bar{M} \to Y_1$ dada por

$$g(x) = \begin{cases} \psi(x), & \text{si } x \in B_1 \\ \kappa(x), & \text{si } x \in \bar{M} \end{cases}$$

Entonces g es extensión de f sobre $B_1 \cup \bar{M}$. Falta ver que $B_1 \cup \bar{M}$ contiene una vecindad abierta de A. Consideremos $W = B_1 \cup M \cap V$. Como $A \subset W \subset B_1 \cup \bar{M}$, basta ver que W es abierto en X.

Consideremos $W = (B_1 \cap M) \cap V$. Como $A \subset W \subset B_1 \cap \bar{M}$, es suficiente probar que W es abierto en X.

Como $B_1 \cap B_2 \subset M$ y $\bar{V} = B_1 \cup B_2$ tenemos que $W = ((\bar{V} \setminus B_2) \cup M) \cap V = (V \setminus B_2) \cup (M \cap V)$.

Como M es abierto en B_2, existe un abierto Q de X tal que $M = Q \cap B_2$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned} M \cap V \subset Q \cap V &= Q \cap \bar{V} \cap V \\ &= Q \cap (B_1 \cup B_2) \cap V \subset (B_1 \cup (Q \cap B_2)) \cap V \\ &= (B_1 \cup M) \cap V = W \end{aligned}$$

De aqui se sigue que $W = (V \setminus B_2) \cup (Q \cap V)$, lo cual implica que W es abierto en X. □

Proposición 3.2.2. *Si Y_1 y Y_2 son subespacios cerrados de Y que es AE para $\mathcal{C}$, tales que $Y_1 \cup Y_2 = Y$ y $Y_1 \cap Y_2$ es AE para $\mathcal{C}$, entonces tanto Y_1 com Y_2 son AE para la clase $\mathcal{C}$.*

Definición 3.2.3. Se dice que un espacio topológico es *Completamente Normal* si para cualesquiera dos subconjuntos A y B tales que $\bar{A} \cap B = \emptyset$ y $A \cap \bar{B} = \emptyset$, tienen vecindades desjuntas.

Para las siguientes proposiciones supondremos que todo espacio en la clase $\mathcal{C}$ es completamente normal.

Proposición 3.2.4. *Sean Y_1 y Y_2 dos subespacios cerrados de Y, donde $Y = Y_1 \cup Y_2$. Si Y_1, Y_2 y $Y_1 \cap Y_2$ son ANE para la clase $\mathcal{C}$, entonces Y es ANE para $\mathcal{C}$.*

Demostración. Sean X un espacio en la clase $\mathcal{C}$, A un subespacio cerrado de X y $f : A \to Y$ una función continua. Queremos ver que f tiene extensión continua sobre alguna vecindad de A.

Consideremos las imágenes inversas $A_1 = f^{-1}(Y_1)$ y $A_2 = f^{-1}(Y_2)$ en A. Entonces A_1 y A_2 son cerrados en A y por lo tanto en X. Sus diferencias $A_1 \setminus A_2$ y $A_2 \setminus A_1$ son tales que

$$(\overline{(A_1 \setminus A_2)} \cap (A_2 \setminus A_1)) \cup ((A_1 \setminus A_2) \cap \overline{(A_2 \setminus A_1)}) = \emptyset$$

Como X es completamente normal, existe un abierto U de X tal que

$$A_1 \setminus A_2 \subset U \subset \bar{U} \subset X \setminus (A_2 \setminus A_1) = (X \setminus A_2) \cup (A_1 \cap A_2)$$

ahora definimos dos cerrados X_1 y X_2 en X por

$$X_1 = \bar{U} \cup (A_1 \cap A_2), \quad X_2 = (X \setminus U) \cup (A_1 \cap A_2).$$

Entonces $X_1 \cap A = A_1$, $X_2 \cap A = A_2$ y $X_1 \cup X_2 = X$

Como $Y_1 \cap Y_2$ es ANE para $mathcalC$ y $A_1 \cap A_2$ es cerrado en $X_1 \cap X_2$ que esta en $\mathcal{C}$, la función parcial $f|_{A_1 \cap A_2}$ tiene extensión

$$\phi : M \to Y_1 \cap Y_2$$

sobre un subespacio abierto M de $X_1 \cap X_2$.

El final de la demostración es análoga a la demostración de la Proposición 3.1.1 a partir de ϕ en la ecuación 3.1.1.

□

Proposición 3.2.5. *Sean Y_1 y Y_2 subespacios cerrados de Y tales que $Y = Y_1 \cup Y_2$. Si Y_1, Y_2 y $Y_1 \cap Y_2$ son AE para la clase $\mathcal{C}$, entonces Y es AE para $\mathcal{C}$.*

Es importante resaltar que la condición de que todo espacio en la clase $\mathcal{C}$ sea completamente normal es imprescindible. Por ejemplo, si $X = I \times X$, donde I es el intervalo cerrado $[0,1]$ y T es un cubo de Tychonoff ($T = I^\alpha$, con α no numerable). Entonces los cerrados $Y_1 = I \times \{\theta\}$ y $Y_2 = \{0\} \times T$, donde θ denota el origen de T. Sea $Y = Y_1 \cup Y_2$, por lo tanto $Y_1 \cap Y_2$ es un solo punto. Los espacios Y_1, Y_2 y $Y_1 \cap Y_2$ son AE para la clase $\mathcal{N}$ de todos los espacios normales, por lo tanto es AE para la clase de todos los espacios compactos de Hausdorff $\mathcal{KH}$. Pero $Y_1 \cup Y_2$ NO es ANE para la clase $\mathcal{KH}$, si lo fuera, entonces la identidad $i : Y \to Y$ tendría extensión continua $r : U \to Y$ sobre un abierto U de X, lo cual contradice el hecho de que Y_1 y Y_2 no tienen vecindades ajenas. (Y no es normal)

3.3. Unión de Extensores

En esta seccion presentamos las demostraciones que aparecen en [An∞] y en [Dyd02]. Que están hechas con una técnica diferente y mucho más eficiente. Por otro lado, estas demostraciones son más generales, ya que no solamente son para el caso finito, sino para uniones arbitrarias. Es importante notar que dichas demostraciones son considerando extensores para un espacio X paracompacto, no con extensores para una clase $\mathcal{C}$, por lo que son más generales, que las presentadas anteriormente.

Teorema 3.3.1. *Sea X un espacio Paracompacto. Si Y es unión de dos abiertos, tales que Y_1 y Y_2 son ANE para X, entonces Y es ANE para X.*

Demostración. Sea $f : A \to Y$ una función continua, donde A es un cerrado de X. Queremos ver que f tiene una extensión continua para una vecindad de A. Los conjuntos $V_1 = f^{-1}(Y_1) \cup (X \setminus A)$ y $V_2 = f^{-1}(Y_2) \cup (X \setminus A)$ forman una cubierta abierta de X. Como X es normal, entonces hay dos cerrados X_1 y X_2 tales que $X = X_1 \cup X_2$. Como $Y_1 \cap Y_2$ es un abierto de Y_1 y Y_1 es ANE para X, entonces $Y_1 \cap Y_2$ es un ANE para X. Si consideramos al $Con(Y_1 \cap Y_2)$ es un AE para X, por lo que existe una extensión $f_0 : X_1 \cap X_2 \to Con(Y_1 \cap Y_2)$ de la restricción $f|_{A\cap(X_1\cap X_2)}$. Podemos pegar f_0 y $f|_{(A\cap X_1)}$ en $h : A\cap X_1 \to Con(Y_1)$. Como $Con(Y_1)$ es AE para X, entonces hay una extensión $h_1 : X_1 \to Con(Y_1)$ de h. Análogamente, hay una extensión $h_2 : X_2 \to Con(Y_2)$ de h. Como h_1 y h_2 son extensiones de h, se pueden pegar para formar $H : X \to Con(Y)$. Como $H|_A = f$ y $H^{-1}(\theta) \cap A = \emptyset$ entonces $U = X \setminus H^{-1}(\theta)$ es una vecindad de A en X. La restricción de $H|_U$ es una extensión de f a U vecindad de A. □

Teorema 3.3.2. *Sea X un espacio paracompacto. Supongamos que Y es un espacio tal que es la unión de subespacios $\{Y_s\}_{s\in S}$ que tienen las siguientes propiedades.*

1. *Cada Y_s es extensor absoluto de X.*
2. *Para cualesquiera elementos s, t de S, hay un $u \in S$ tal que, $Y_s \cup Y_t \subset Y_u$.*

Si $f : A \to Y$ es una función continua de un subespacio cerrado A de X a Y tal que

$$A = \bigcup_{s\in S} Int_A(f^{-1}(Y_s))$$

entonces, f se puede extender a una función continua sobre todo X.

Demostración. Definimos para cada $s \in S$, el abierto $U_s = (X \setminus A) \cup Int_A(f^{-1}(Y_s))$. Como $X = \bigcup_{s \in S} U_s$ y X es paracompacto, entonces existe una partición de unidad localmente finita $\{g_s\}_{s \in S}$ tal que $g_s^{-1}(0,1] \subset U_s$ para cada $s \in S$, cada vecindad U_s contiene al soporte de la correspondiente función g_s.Para cada subconjunto finito T de S definimos $B_T = \{x \in X | g_s(x) > 0, \text{para todo } s \in T\}$. Queremos construir por inducción elementos $a(T)$ de S y funciones $f_T : B_T \to Y_{a(T)}$ de tal manera en que se cumplan las siguientes condiciones,

1. $Y_{a(F)} \subset Y_{a(T)}$ para cada $F \subset T$
2. $f_T|_{B_F} = f_F$ para cada $F \subset T$
3. $f_T|_{A \cap B_T} = f|_{A \cap B_T}$

Para los subconjuntos de un sólo elemento, $T = \{s\}$. Notemos que $B_s = g_s^{-1}(1)$[1] para cada $s \in S$.

Es importante notar que cada B_T puede ser expresado, como $B_T = \bigcap_{t \in S \setminus T} g_t^{-1}(0)$, por lo que claramente cada B_T es un cerrado de X. $\{B_s\}_{s \in S}$ es una familia discreta y $f(A \cap B_s) \subset Y_s$ para cada $s \in S$. Entonces podemos extender cada $f|_{A \cap B_s}$ a $f_s : B_s \to Y_s$ y definir $a(s) = s$.

Ahora supongamos que f_T y $a(T)$ ya están definidos para todos los subconjuntos con menos de $n+1$ elementos de S. Queremos construir a f_T y $a(T)$ para T con exactamente $n+1$ elementos de S.

Dado T con exactamente $n+1$ elementos de S, sea $s \in S$ tal que Y_s contenga a todos los $Y_{a(F)}$ para todo F subconjunto propio de T. Sea $a(T) = s$, entonces todas las funciones f_F donde F es subconjunto propio de T, pueden ser pegadas y producir una función h de un cerrado B de B_T, con valores en Y_s y extendiendo a f en $A \cap B$.

Como $f(A \cap B_T) \subset Y_s$, h se puede extender sobre B_T, ya que B es un cerrado de B_T, y B_T es un cerrado de X, entonces la extensión buscada puede darse para todo X y luego restringir a B_T, produciendo $f_T : B_t \to Y_{(a_T)}$ con las propiedades pedidas.

Ahora como $B_T \cap B_F = B_{T \cap F}$ todas las f_T pueden ser pegadas para producir la función $f\prime : X \to Y$ que extiende a f. Cualquier punto $x \in X$, tiene una vecindad U que intersecta sólamente un número finito de $g^{-1}(0,1]$,

[1] Ya que g_s es partición de unidad, $g_s^{-1}(1)$ implica que $g_t(x) = 0$ para todo $t \neq s$

lo que significa que hay un subconjunto finito T de S tal que $U \subset B_T$. como $f\prime|_{B_T}$ es continua, entonces $f\prime|_U$ también lo es. □

Corolario 3.3.3. *Sea X un espacio paracompacto. Supongamos que Y es un espacio de Hausdorff, unión de una familia de subespacios $\{Y_s\}_{s\in S}$ con las siguientes propiedades,*

1. *Cada Y_s es extensor absoluto de vecindad de X.*

2. *Para cualesquiera dos elementos s y t de S, hay un u en S tal que $Y_s \cup Y_t \subset Y_u$.*

Si $f : A \to Y$ es una función continua de un cerrado A de X a Y, tal que $A = \bigcup_{s\in S} Int_A(f^{-1}(Y_s))$, entonces f se puede extender sobre una vecindad de A en X

Demostración. Sea $Z = Con(Y)$ con vértice v y $Z_s = Con(Y_s)$ para cada $s \in S$. Entonces, f considerado como una función continua de A a Z satisface las hipótesis del teorema anterior, y tiene extensión continua sobre X. Sea $g : X \to Z$ una extensión de f sobre X y sea $U = g^{-1}(Z \setminus \{v\})$. Entonces hay una retracción $r : Z \setminus \{v\} \to Y$, lo cual significa que la composición de $g|_U$ y r produce una extensión $f\prime : U \to Y$ de f. □

Capítulo 4

Complejos Simpliciales

4.1. Complejos simpliciales con la topología CW

Definición 4.1.1. Un *complejo simplicial abstracto* es un conjunto V, junto con una colección K de subconjuntos finitos $S \subseteq V$ tales que

1. Para cada $v \in V$, $\{v\} \in K$.

2. Si $S \in K$ y $S' \subseteq S$ entonces $S' \in K$.

A los elementos v de V se les llama *vértices* y a los elementos S de K *simplejos*. Si $S = \{v_0, ..., v_n\}$, entonces $\dim S = n$. Un *subcomplejo* M de K es un complejo cuyo conjunto de vértices $W \subseteq V$ y cada simplejo de M es simplejo de K.

Con cada complejo simplicial abstracto (V, K) se asocia un *complejo simplicial geométrico* denotado por K como sigue:

Se encaja V en un espacio vectorial real L como un conjunto en posición general, es decir, de tal manera en que para cada $n+1$ puntos $v_0, ..., v_n \in V \subseteq L$ los vectores $v_1 - v_0, ..., v_n - v_0$ sean linealmente independientes. Se le da a V, un orden parcial tal que para todo subconjunto $S \subseteq V$ con $S \in K$, esté totalmente ordenado. Para todo n-simplejo abstracto ordenado $S = (v_0, ..., v_n)$ se define una función continua φ_S del n-simplejo estándard $\Delta_n = \{t \in \mathbb{R}^{n+1} : t_i \geq 0, \sum_{i=0}^{n} t_i = 1\}$ en L por la fórmula

$$\varphi_S(t) = \sum_{i=0}^{n} t_i v_i$$

Se denotará cada $\varphi_S(\Delta_n) \subseteq L$ por $\bar{S}$ y se llamará *n-simplejo cerrado* de K. El correspondiente *n-simplejo abierto* es el subconjunto $\varphi_S(\mathring{\Delta}_n)$, donde

$$\mathring{\Delta}_n = \{t \in \mathbb{R}^{n+1} : t_i > 0, \sum_{i=0}^{n} t_i = 1\}$$

A cada n-simplejo cerrado $\bar{S} \subseteq L$ se le dá la topología de tal manera en que $\varphi_S : \Delta \to \bar{S}$ sea homeomorfismo. El *portador* $|K|$ de un simplejo simplicial K es el espacio $X = |K| = \bigcup_{S \in K} \bar{S}$ con la topología débil, es decir, un conjunto $U \subset |K|$ es abierto (cerrado) si y sólo si $U \cap \bar{S}$ es abierto (cerrado) en $\bar{S}$ para todo simplejo $S \in K$. A ésta topología se le llama *Topología CW*. Claramente, el portador $|M|$ de cada subcomplejo M es un cerrado de $|K|$.

La colección de todos los simplejos $S \in K$ de dimensión menor o igual a n, forma un subcomplejo de K llamado el *n-esqueleto* K^n de K. Si $X^n = |K^n|$, entonces $X^0 \subseteq X^1 \subseteq \ldots \subseteq X$ y $X = \cup X^n$. Los n-simplejos S son componentes de $X^n \setminus X^{n-1}$ y los simplejos cerrados $\bar{S}$ son sus cerraduras. $X^0 = V$ y es discreto.

Cada espacio Hausdorff X, que es portador de un complejo simplicial se llama *CW-espacio simplicial.*

Nota 4.1.2. Sea $X = |K|$ un CW-complejo simplicial. Una función $f : X \to Y$ es continua si y sólo si la función $f|_{\bar{S}}$ es continua para todo simplejo $S \in K$

Lema 4.1.3. *Sea $X = |K|$ un complejo simplicial y Z un espacio topológico. Una función $f : X \times I \to Z$ es continua si y sólo si $f|_{\bar{S}\times I}$ es continua para todo simplejo $S \in K$.*

Lema 4.1.4. *Sea $X = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ un espacio topológico cuya topología es débil con respecto a $X_{\alpha \alpha \in A}$. Sea Y un espacio localmente compacto y Z un espacio topológico. Si una función $f : X \times Y \to Z$ tiene la propiedad de que $f|_{X_\alpha \times Y}$ es continua para cada $\alpha \in A$, entonces f es continua.*

Demostración. Sea $(x_0, y_0) \in X \times Y$, $z_0 = f(x_0, y_0)$ y sea W una vecindad de z_0 en Z. Como $f|_{\{x_0\}\times Y}$ es continua, existe una vecindad compacta Y_0 de y_0 en Y tal que $f(\{x_0\} \times Y_0) \subseteq W$. Sea $U \subseteq X$ el conjunto de todos los puntos $x \in X$ tales que $f(\{x\} \times Y_0) \subseteq W$.

Claramente $x_0 \in U$ y $f(U \times Y_0) \subseteq W$.

Es suficiente ver que U es abierto en X, es decir que $U_\alpha = U \cap X_\alpha$ es abierto en X_α. Si $x \in U_{\alpha'}$ entonces $f(\{x\} \times Y_0) \subseteq W$. Como $f_\alpha = f|_{X_\alpha \times Y_0}$ es continua, $f_\alpha^{-1}(W)$ es abierto en $X_\alpha \times Y_0$, que contiene a $\{x\} \times Y_0$. Por lo tanto, existe[1]una vecindad V_α de x en X_α tal que $V_\alpha \times Y_0 \subset f_\alpha^{-1}(W)$, es decir $f(V_\alpha \times Y_0) \subseteq W$. Por lo tanto $V_\alpha \subseteq U \cap X_\alpha = U_{\alpha'}$ lo cual prueba que x es un punto interior de U_α con respecto a X_α. Entonces U_α es un abierto de X_α. $\square$

4.2. Complejos simpliciales con la topología métrica

A un simplejo abierto S con vértices $v_0, ..., v_n$ lo denotaremos por $S =< v_0, ..., v_n >$ y su cerradura por $\bar{S} = [v_0, ..., v_n]$. Para todo punto $x \in< v_0, ..., v_n >$ hay un sólo punto $t = (t_0, ..., t_n) \in \mathring{\Delta}_n$ tal que $\varphi_{\{v_0,...,v_n\}}(t) = x$. Notemos que $x = \sum_{i=0}^{n} t_i v_i \in L$. A los $t_i, i = 0, ..., n$ los llamaremos *coordenadas baricéntricas* de x. Además $t_i > 0$ para $i = 0, ..., n$.

Definamos ahora para cada $v \in V$ una función $\lambda_v : X \to [0,1]$ como sigue: $\lambda_{v_i}(x) = t_i, i = 0, .., n$ como la i-ésima coordenada baricéntrica de x. Si $x \in< v_0, ..., v_n >$, $\lambda_v(x) = 0$ para cualquier otra $v \in V \setminus \{v_0, ..., v_n\}$. La *estrella* $St(x, K) = \{x \in X : \lambda_v(x) > 0\}$ es la unión de todos los simplejos que tienen a v como vértice.

Nota 4.2.1. Las coordenadas baricéntricas λ_v, son continuas con respecto a la topología CW, ya que la función $\lambda_v|_{[v_0,...,v_n]}$ es continua para todo simplejo $S = \{v_0, ..., v_n\} \in K$.

Ahora definimos una métricaen $X = |K|$ por la fórmula:

$$d(x, y) = \sum_{v \in V} |\lambda_v(x) - \lambda_v(y)| \tag{4.2.1}$$

Denotaremos al espacio X con la métrica dada, como X_m y a el espacio X con la topología CW, como X_{CW}.

Nota 4.2.2. Como $|\lambda_v(x) - \lambda_v(y)| \leq d(x, y)$, las coordenadas baricéntricas y las funciones $\lambda_v : X_m \to [0,1]$, son continuas.

Teorema 4.2.3. *Sea Y un espacio topológico. Una función $f : Y \to X_m$ es continua si y sólo si las funciones $\lambda_v \circ f : Y \to [0,1]$ son continuas para cada vértice.*

[1]Sean X espacio topológico, $A \subset X$, Z compacto y U vecindad de $A \times Z$ en $X \times Z$. Entonces existe una vecindad V de A en X, tal que $V \times Z \subset U$

Demostración. Si $\lambda_v \circ f$ son continuas, entonces todos los conjuntos de la forma

$$\{y \in Y : |(\lambda_v f)(y) - (\lambda_v f)(y_0)\} < \delta$$

para todo $\delta > 0$, son vecindades abiertas de $y_0 \in Y$.

Por lo tanto la continuidad de f en y_o es consecuencia del siguiente lema.

□

Lema 4.2.4. *Sean $x_0 \in < v_0, ..., v_n > \in K$ y $\varepsilon > 0$. Si*

$$|\lambda_{v_i}(x) - \lambda_{v_i}(x_0)| < \delta, \quad i = 0, ..., n \tag{4.2.2}$$

y

$$\delta < \frac{\varepsilon}{2(n+1)} \tag{4.2.3}$$

entonces

$$d(x, x_0) < \varepsilon$$

Demostración. Notemos que $\lambda_v(x_0) = 0$ para $v \neq v_0, ..., v_n$, entonces

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_{v_i}(x_0) = 1 \tag{4.2.4}$$

por (4.2.1), (4.2.2) y (4.2.4) se obtiene

$$d(x, x_0) = \sum_{i=0}^{n} |\lambda_{v_i}(x) - \lambda_{v_i}(x_0)| + \sum_{v \neq v_0, ..., v_n} \lambda_v(x) < (n+1)\delta + \sum_{v \neq v_0, ..., v_n} \lambda_v(x) \tag{4.2.5}$$

sin embargo, por (4.2.2)

$$\sum_{v \neq v_0, ..., v_n} \lambda_v(x) = 1 - \sum_{i=0}^{n} \lambda_{v_i}(x) < 1 + \sum_{i=0}^{n} (\delta - \lambda_{v_i}(x_0)) = (n+1)\delta \tag{4.2.6}$$

en consecuencia, por (4.2.5), (4.2.6) y (4.2.3),

$$d(x, x_0) < 2(n+1)\delta < \varepsilon$$

□

Corolario 4.2.5. *La función identidad $X_{CW} \to X_m$ es continua*

Demostración. Por la nota 4.2.2 tenemos que $\lambda_v i = \lambda_v$ y por lo tanto es continua. □

Definición 4.2.6. Decimos que K es *localmente finito* si para cada vértice $v \in V$, éste pertenece a lo más a un número finito de simplejos en K.

Para los complejos localmente finitos K, el espacio X_{CW} es localmente compacto, ya que $\overline{St(v,K)}$ es una vecindad compacta para cualquier $x \in St(x,K)$. En este caso $i : X_{CW} \to X_m$ es un homeomorfismo.

Ejemplo 4.2.7. Sea $V = \{v_0, ...\} \in K$ puntos distintos. Sean los simplejos de dimensión 1 dados por $\{v_0, v_i\}$ para $i = 1, 2, ...$ y sea $K = K^1$. Entonces la función identidad de $X_m \to X_{CW}$ no es continua, ya que si $x_n = \frac{n}{n+1}v_0 + \frac{1}{n+1}v_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to v_0$ en X_m, pero no en X_{CW}, pues $\{x_n\}$ es cerrado en X_{CW} que no contiene a v_0, por lo que $i : X_{CW} \to X_m$ no es homeomorfismo.

Además, X_{CW} no es metrizable porque en el punto v_0 no tiene una base numerable. Ya que si $U_1, U_2, ...$ es cualquier sucesión de vecindades de v_0, se puede elegir una vecindad V_i de v_0 en $[v_0, v_i]$ de tal manera en que exista un punto $x_i \in ([v_0, v_i] \cap U_i) \setminus V_i$. Entonces $V = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} V_i$ es un abierto en X_{CW} y $x_i \in U_i \setminus V_i \neq \emptyset$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $\{U_i\}$ no es base local de v_0.

4.3. Los complejos simpliciales métricos son ANR's

Definición 4.3.1. Decimos que un complejo simplicial K es *completo*, si cada subconjunto finito de vértices de K es un simplejo en K.

Teorema 4.3.2. *Si K es un complejo simplicial completo, entonces su portador $X = |K|_m$ es un AR.*

Demostración. Por el teorema de Dugundji es suficiente encajar a X como un subconjunto convexo en un espacio vectorial normado L. Tomemos por L al espacio $\ell_1(V) = \{f : V \to \mathbb{R} : \sum_{v\in V} |f(v)| < \infty\}$. Con norma definida por

$$||f|| = \sum_{v\in V} |f(v)|$$

Sea $\Phi : X \to \ell_1(V)$ dada por

$$(\Phi(x))(v) = \lambda_v(x) \quad x \in X, v \in V$$

Entonces

$$||\Phi(x) - \Phi(y)|| = \sum_{v \in V} |\lambda_v(x) - \lambda_v(y)| = d(x, y)$$

Por lo que Φ es un encaje isométrico de X.

Para mostrar el conjunto $\Phi(X)$ es convexo en $\ell_1(V)$, consideremos dos puntos $x, y \in X$ y $\mu, \nu \geq 0$, con $\mu + \nu = 1$. Tenemos que mostrar un punto $z \in X$ tal que

$$\mu\Phi(x) + \nu\Phi(y) = \Phi(z) \tag{4.3.1}$$

Notemos que

$$\mu\lambda_v(x) + \nu\lambda_v(y) \geq 0, \quad v \in V \tag{4.3.2}$$

y

$$\sum_{v \in V} (\mu\lambda_v(x) + \nu\lambda_v(y)) = \mu + \nu = 1$$

Además, $\mu\lambda_v(x) + \nu\lambda_v(y) = 0$ para todo $v \in V$ excepto para $v_0, ..., v_n$. Como K es completo dichos vértices forman un simplejo en K. Por lo que se puede interpretar los números en (4.3.2) para $v = v_0, ..., v_n$ como coordenadas baricéntricas de un punto $z \in X$, es decir

$$\lambda_v(z) = \mu\lambda_v(x) + \nu\lambda_v(y), \quad v \in V \tag{4.3.3}$$

Claramente

$$(\Phi(z))(v) = \lambda_v(z) \tag{4.3.4}$$

como además

$$(\mu\Phi(x) + \nu\Phi(y))(v) = \mu\lambda_v(x) + \nu\lambda_v(y) \tag{4.3.5}$$

Las ecuaciones (4.3.3), (4.3.4) y (4.3.5) implican (4.3.1). Que quiere decir que X es convexo. □

Por lo anterior, sabemos que cualquier complejo simplicial completo métrico es un AR, sin embargo queremos generalizar el resultado anterior, obteniendo que cualquier complejo simplicial métrico es un ANR. Para ello, necesitamos el siguiente lema,

Lema 4.3.3. *Si L es un subcomplejo de un complejo simplicial K, entonces la métrica d_L en $|L|$ es la restricción de la métrica d_K a $|L| \times |L|$. Por lo tanto $|L|_m$ es un subespacio de $|K|_m$.*

Demostración. Sea V el conjunto de los vértices de K y $V' \subseteq V$ el conjunto de vértices de L. Si $x \in < v_0, ..., v_n > \in L$, entonces sus coordenadas baricéntricas $\lambda_{v_i}(x)$ son las mismas con respecto a L que con K. Todas las demás son en ambos casos 0. Entonces para $v \in V'$, $\lambda_v^L = \lambda_v^K|_{|L|}$. Más aún, si $x \in |L|$, entonces $\lambda_v^K(x) = 0$ para $v \in V \setminus V'$. Por lo que para dos puntos $x, y \in |L|$,

$$d_K(x,y) = \sum_{v \in V'} |\lambda_v^K(x) - \lambda_v^K(y)| = \sum_{v \in V'} |\lambda_v^L(x) - \lambda_v^L(y)| = d_L(x,y)$$

□

Lema 4.3.4. *Todo complejo simplicial L es subcomplejo de un complejo simplicial completo K.*

Demostración. Sea V el conjunto de vértices de L. Sea K el complejo simplicial abstracto tal que V es su conjunto de vértices, y cada subconjunto finito de V es un simplejo S de K. Claramente, K es completo y L es un subcomplejo de K. □

Teorema 4.3.5. *Todo complejo simplicial con la topología métrica es un ANR.*

Demostración. Por el Lema 4.3.4 cualquier complejo simplicial L puede ser considerado un subcomplejo de un complejo simplicial completo K. Por el Lema 4.3.4 $Y = |L|_m$ es un subespacio de $X = |K|_m$.

Por el Teorema 4.3.10, que veremos a continuación, Y es un retracto de vecindad de X y por el Teorema 4.3.2, X es un AR. Como un retracto de vecindad de un AR es además ANR, entonces $Y \in ANR$. □

Definición 4.3.6. Llamaremos a un subcomplejo $L \subseteq K$ completo, si se tiene que siempre que $< v_0, ..., v_n > \in K$ y los vértices $v_0, ..., v_n \in L$, entonces $< v_0, ..., v_n > \in L$.

Lema 4.3.7. *Sea $L \subseteq K$ un subcomplejo completo de K. Entonces $Y = |L|$ es un retracto de vecindad de $X = |K|_m$.*

Demostración. Tenemos que mostrar que Y es un retracto de su vecindad $U = \bigcup_{v \in L^0} St(v, K)$, donde L^0 denota al conjunto de los vértices de L. Definimos una retracción $r : U \to Y$ como sigue

$$\lambda_v r(x) = \frac{\lambda_v(x)}{\sum_{v \in L^0} \lambda_v(x)} \qquad x \in U, v \in L^0.$$

Por la definición de U para cada $x \in U$ existe al menos un $v \in L^0$ tal que $\lambda_v(x) > 0$. Por lo que $\sum_{v\in L^0} \lambda_v(x) > 0$ y por lo tanto, $\lambda_v r(x)$ está bien definida.

Si $< v_0, ..., v_i, v_{i+1}, ..., v_n >\in K$ es el portador de $x \in U$, entonces por definición de U al menos un vértice pertenece a L^0, por lo que $\sum_{v\in L^0} \lambda_v(x) > 0$. Sea $i \geq 1$ tal que $v_0, ..., v_i \in L^0$ y $v_{i+1}, ..., v_n \in K^0 \setminus L^0$. Entonces $\lambda_{v_0}(x) > 0, ..., \lambda_{v_i}(x) > 0$ y $\lambda_v(x) = 0$ para todos los otros $v \in L^0$. Por lo que

$$\sum_{j=0}^{i} \lambda_{v_j} r(x) = \frac{\sum_{j=0}^{i} \lambda_{v_j}(x)}{\sum_{v\in L^0} \lambda_v(x)} = 1.$$

Además $< v_0, ..., v_i >\in L$, y vemos que el punto $r(x) \in< v_0, ..., v_i >\subseteq |L|$ está bien definida. Si $x \in |L|$, entonces $i = n$ y $\lambda_v(x) = 0$ para $v \neq v_0, ..., v_n$ y $\sum_{v\in L^0} \lambda_v(x) = \sum_{v\in K^0} \lambda_v(x) = 1$. Entonces $\lambda_v r(x) = \lambda_v(x)$ para $v \in \{v_0, ..., v_n\}$ y $\lambda_v r(x) = 0$ para $v \in L^0 \setminus \{v_0, ..., v_n\}$. Entonces $r(x) = x$.

Para probar la continuidad de r (por el Teorema 4.2.3) basta probar la continuidad de la función $\phi : U \to [0, 1]$ dada por

$$\phi(x) = \sum_{v\in L^0} \lambda_v(x), \quad x \in U.$$

Para $x, y \in U$ tenemos

$$\begin{aligned}|\phi(x) - \phi(y)| &= \sum_{x\in L^0} \lambda_v(x) - \lambda_v(y)| \\ &\leq \sum_{v\in L^0} |\lambda_v(x) - \lambda_v(y)| \leq \sum_{v\in K^0} |\lambda_v(x) - \lambda_v(y)| = d(x, y),\end{aligned}$$

lo que muestra que ϕ es continua. □

Para reducir el caso general con cualquier subcomplejo $L \subseteq K$ al caso de un subcomplejo completo, debemos usar subdivisiones baricéntricas.

Definición 4.3.8. A cada complejo simplicial abstracto asociamos un nuevo complejo K', que llamaremos la *subdivisión baricéntrica* de K. Los vértices de K' son todos los simplejos $S \in K$ y los simplejos de K' son todas las colecciones finitas $\{S_0, ..., S_n\}$ de simplejos de K tales que forman una cadena, es decir $S_0 \leq S_1 \leq ... \leq S_n$. Si K se realiza geométricamente en un espacio vectorial L, entonces se obtiene la realización de K' en L, realizando $S =$

$\{v_0, ..., v_n\}$ como el baricentro $w_S = (\frac{1}{(n+1)}) \sum_{i=0}^{n} v_i \in L$. Se puede demostrar que $|K'| = |K|$ y que cada simplejo de K' esta contenido en un simplejo de K, entonces tenemos una subdivisión.

Lema 4.3.9. *Sea $L \subseteq K$ un subcomplejo de K. Entonces $L' \subseteq K'$ es un subcomplejo completo.*

Demostración. Sean $S_0, ..., S_n$ vértices de L', es decir, $S_0, ..., S_n \in L$. Si estos vértices son un simplejo en K', entonces, podemos suponer que $S_0 \subseteq S_1 \subseteq ... \subseteq S_n$. Lo cual significa que $S_0, ..., S_n$ es un simplejo en L'. □

Teorema 4.3.10. *Sea K un complejo simplicial y sea $X = |K|_m$. Para cada subcomplejo $L \subseteq K$, el subespacio $Y = |L|$ es un retracto de vecindad de X.*

Demostración. Sea K un complejo simplicial y $L \subseteq K$ un subcomplejo. Por el Lema 4.3.9, L' es un subcomplejo completo de K'. Por el Lema 4.3.7, $|L'|$ es un retracto de vecindad de $|K'|_{d'}$ (el subíndice d' o d significa que a $|K'|$ se le dá la topología métrica inducida por d' o d respectivamente). Como $|L| = |L'|$, y $|K| = |K'|$ y por el Teorema 4.3.12 que mencionamos en la siguiente sección, $|K'|_{d'} = |K|_d$. Entonces $|L|$ es un retracto de vecindad de $|K|_d$. □

Nota 4.3.11. El Teorema 4.3.12 se demuestra fácilmente en el caso en que K es un complejo localmente finito. Entonces $|K|_{CW} = |K'|_{CW}$ y por la nota 4.2.6, $|K|_d = |K|_{CW}$, $|K'|_{d'} = |K'|_{CW}$.

Para completar la prueba del Teorema 4.3.10 es necesario el siguiente resultado.

Teorema 4.3.12. *Sean K un complejo simplicial y K' su subdivisión baricéntrica. Sean d y d' las métricas inducidas en $|K| = |K'|$. Entonces d y d' son equivalentes topológicamente.*

La prueba de este teorema puede encontrarse en [MS82], el mismo teorema con respecto a la topología CW tambien tiene lugar, y puede encontrarse en [MS82].

Conclusiones

En esta tesis se presenta una introducción al tema referente a Extensores Absolutos en sus diferentes variantes y en especial a su comportamiento con respecto a las uniones, de tal manera que quién desee tener un conocimiento en general del tema, pueda estudiarlo tomando como base este trabajo ya que no supone un conocimiento profundo del tema. Únicamente se requieren bases de topología general para poder seguirlo. A finalizar la lectura, el lector puede dirigirse a otras fuentes relacionadas, conociendo los elementos necesarios para una lectura más avanzada.

En cada una de las demostraciones, se llevaron a cabo algunas técnicas importantes que pueden ser generalizadas con hipótesis extras, considerando acciones de grupos en espacios topológicos.

En este campo, se puede generalizar la teoría que se ha visto en esta tesis, de tal manera que permite plantear problemas o preguntas aún abiertas en la matemática moderna.

Es interesante resaltar que la técnica presentada sigue funcionando con pocas modificaciones en el campo mencionado, por lo que este trabajo es de utilidad para quienes, con algún conocimiento de topología, tenga una idea cercana de los métodos de trabajo en este campo.

Con respecto a las aplicaciones que este trabajo presenta, se establece que los CW complejos son ANE's. Como se menciona en la introdución, dichos espacios son importantes para algunas ramas de la matemática.

Índice alfabético

Bibliografía

[AGP] M. Aguilar, S. Gitler, C. Prieto, "Topología Algebraica, un enfoque homotópico", McGraw-Hill, 1998.

[An02] S.A. Antonyan, "Universal proper G-spaces", Topol. Appl., 117, (2002), pp. 23-43.

[An∞] S.A. Antonyan, "Orbit Spaces and Unions of Equivariant Absolute Neighborhood Extensors", Topology and its Applications, por aparecer.

[Bor67] Karol Borsuk, "Theory of Retracts", Polska Akademia Nauk, Monografie Matematyczne, Tom.44 Warszawa 1967.

[Dug51] J. Dugundji, "An Extension of Tietze's Theorem", Pacific J. Math, Vol.1 (1951) pp.353-367.

[Dug66] J. Dugundji, "Topology", Allyn and Bacon Inc, Boston, 1966.

[Dyd02] Jerzy Dydak, "Extension Dimension for Paracompact Spaces", Preprint (2002).

[Eng89] R. Engelking, "General Topology", Helderman Verlag Berlin, 1989.

[Fair71] Fairchild, W.W, Ionescu, C.T., "Topology", W.B. Saunders Company, Philadelphia, 1971. pp.112.

[GMT88] A. García-Maynez, A. Tamariz, "Topología General", Porrua, 1988.

[Hu65] S.T. Hu, "Theory of Retracts", Wayne State University Press, 1965.

[MS82] S. Mardešić., J. Segal, "Shape Theory, the inverse system approach", North Holland Publishing Company, 1982.

[Mun02] J.R. Munkres, "Topología", Prentice Hall, 2a. Ed., 2002.