UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Tesis de Licenciatura en Actuaría

Medición y Análisis del VaR Histórico
Valuación de un portafolio de la Banca Múltiple

Juan Diego Amaya Figueroa

Asesorado por:
Dra. Nora Gavira Durón

México, D.F., Febrero-2014

Índice general

1. Introducción **5**

2. Administración de Riesgos **7**
2.1. Definición de Riesgo y la importancia de su estudio . . . 7
2.2. Clasificación de los Riesgos . . . 9
2.2.1. Riesgos Cuantificables . . . 10
2.2.2. Riesgos No cuantificables . . . 11
2.3. Gestión del Riesgo de acuerdo al Comité de Supervisión Bancaria de Basilea . . . 11
2.3.1. Basilea I - Convergencia Internacional de Medidas y Normas de Capital . . . 12
2.3.2. Basilea II (Tres Pilares) . . . 15
2.3.3. Basilea III . . . 18

3. Instrumentos Financieros **21**
3.1. Definición y marco de operación . . . 21
3.2. Clasificación por tipo de valoración . . . 23
3.2.1. Instrumentos Financieros de Renta Fija . . . 24
3.2.2. Instrumentos Financieros de Renta Variable . . . 27
3.2.3. Instrumentos Financieros Derivados . . . 28
3.3. Valuación de Instrumentos Financieros de Renta Fija . . . 32
3.3.1. Metodología General para la valuación de BONOS y CETES . . . 33
3.3.2. Medidas de Sensibilidad para BONOS . . . 36
3.3.3. Duración y Duración Modificada . . . 36
3.3.4. Convexidad . . . 39
3.4. Valuación de Instrumentos Financieros de Renta Variable . . . 40
3.5. Valuación de Productos Financieros Derivados . . . 44
3.5.1. Conceptos Preliminares . . . 44
3.5.2. Concepto de No Arbitraje como principio para la valuación de Derivados . . . 50
3.5.3. Construcción y Valuación de Opciones Plain Vanilla . . . 51
3.5.4. Teoría sobre la Valuación de Opciones Exóticas . . . 65
3.5.5. Estrategias de Cobertura con Productos Derivados . . . 65
3.5.6. Medidas de Sensibilidad para Opciones . . . 69

4. Valor en Riesgo (VaR) una medida para la gestión del Riesgo **75**
4.1. Concepto Básico del VaR . . . 75
4.2. Ventajas y Desventajas del uso del VaR . . . 76
4.3. Modelos para la Estimación del VaR . . . 78
4.3.1. Modelo Paramétrico (Varianzas y Covarianzas) . . . 79
4.3.2. Modelo Histórico . . . 82
4.3.3. Simulación Montecarlo . . . 84

5. Implementación del Método Histórico para el cálculo del VaR **87**
5.1. Composición del Sistema* por Mercado y Tipo de Instrumento 87
5.2. Análisis del VaR, Stress-VaR y VaR-Marginal por el Método Histórico 92
5.3. Proyección del VaR Histórico por el método de Mínimos Cuadrados Ordinarios 100

6. Conclusiones **105**

Capítulo 1

Introducción

Las crisis económicas y financieras que México ha tenido que enfrentar en los últimos 25 años han sido el primer punto de partida en la búsqueda de nuevas metodologías para la administración del riesgo.

Un claro ejemplo se presenta en la crisis de diciembre de 1994, en donde se derrumbó en pocas horas una de las economías más aparentemente exitosas y seguras[1] del mundo en desarrollo. Esta crisis tuvo un carácter especulativo-cambiario, resultante de la sobreexposición de una economía nacional con moneda sobrevaluada a los movimientos especulativos de una enorme masa móvil de inversión externa de cartera; la salida masiva del país de este tipo de capitales, agotó las reservas internacionales de divisas e impuso una macrodevaluación descontrolada del peso frente al dólar.
Entre el 15 y 30 de diciembre de 1994 el tipo de cambio pasó de 3.4606 pesos a 4.9995 pesos por dólar, y a principios de 1995 con el efecto de la libre fluctuación ascendió a 7.2 pesos por dólar; en el mismo periodo, la tasa CETES a 28 días subió del 13.75 % a 31 %.

En Agosto de 1998, Rusia experimentó una de las crisis con mayor impacto a escala local, entre las causas que provocaron esta depresión estuvieron la deuda pública de Rusia instigada por la crisis asiática de 1997, que empezó con la devaluación de la moneda tailandesa y que pronto tuvo efecto en otras divisas de Asia. El petróleo, el gas natural, los metales y la madera conformaban más del 80 % de las exportaciones rusas, dejando al país vulnerable a las oscilaciones de los precios mundiales; además, el petróleo era el recurso que generaba mayores ingresos al gobierno ruso.
En este periodo, las tasas nacionales (CETES, TIIE, Real) en el corto plazo aumentaron del 5.43 % a 19.67 % en promedio, en el mediano plazo un decremento del 12.47 % a 5.27 % y en el largo plazo de -4.67 % a -19.67 %.

Por otra parte, a finales de Julio y principios de Agosto del 2007 se presenta la crisis de las hipotecas “subprime”, la cual es un trance que se extendió por los mercados financieros y que se considera el detonante principal de la crisis financiera de 2008. Las hipotecas de alto riesgo, conocidas en Estados Unidos como créditos subprime, eran un tipo especial de hipoteca para la adquisición de vivienda, orientada principalmente a clientes con escasa solvencia. Dado que la deuda puede ser objeto de venta y transacción económica mediante compra de bonos o titularizaciones de crédito, las hipotecas subprime podían ser retiradas del activo del balance de la entidad concesionaria, siendo transferidas a fondos de inversión o planes de pensiones. El problema surgió cuando los inversionistas percibieron señales de alarma, donde la elevación progresiva de los tipos de interés por parte de la Reserva Federal se manifestaron, así como el incremento en las cuotas de los créditos, causaron un aumento en la tasa de morosidad y en el nivel de ejecuciones.

La evidencia de que las entidades bancarias y grandes fondos de inversión tenían comprometidos sus activos en hipotecas de alto riesgo, provocó una repentina contracción del crédito y una enorme volatilidad de los valores bursátiles, generándo en primer lugar desconfianza y pánico en el público inversionista, seguido de una repentina caída de las bolsas de valores de todo el mundo principalmente por la falta de liquidez.

[1] Esta es la opinión de la revista Euromoney en diciembre de 1993.

Al parecer, el origen común de una crisis financiera se encuentra en la incorrecta valoración de los riesgos, y que impacta directamente en el mercado de manera global y/o de manera local.

Esta tesis tiene como objetivo identificar la composición de los portafolios de las instituciones que operan en México, así los principales riesgos a los que se encuentran mayormente expuestos.

En el capítulo 2 *"Administración de Riesgos"* se describe la definición del riesgo así como su clasificación según el marco regulatorio de Basilea, no obstante, se describe la importancia de la gestión del riesgo bajo las normas de Basilea (I, II y III).

El siguiente capítulo *"Instrumentos Financieros"*, puede agruparse en dos subsecciones generales. La primera en la que se busca dar una breve introducción al tipo de instrumentos financieros que principalmente se operan en México, así como las características que los definen. El segundo subgrupo consiste en presentar la metodología general para la valuación de instrumentos financieros de renta fija (bonos y cetes), instrumentos financieros de renta variable (principalmente acciones) y finalmente, de instrumentos financieros derivados. En esta sección se presentan además algunas medidas de sensibilidad para cada uno de los diferentes tipos de instrumentos, permitiendo así un primer análisis parcial para la medición del riesgo.

El capítulo 4 *"Valor en Riesgo (VaR) una medida para la gestión del Riesgo"*, se presenta una de las métricas estándares para la medición del riesgo; siendo el VaR una medida universal y que bajo la cual la mayoría de las instituciones que actualmente operan en México pueden ser comparadas bajo diferentes tipos de riesgos.
En este apartado se presentan tres metodologías generales para la determinación del VaR, el enfoque paramétrico (Varianzas y Covarianzas), el enfoque historico y la simulación por el método Montecarlo; además, se describen las principales ventajas y desventajas para cada uno de los métodos.

Finalmente, en el capítulo 5 *"Implementación del Método Histórico para el Cálculo del VaR"* se analiza un portafolio que se compone por las carteras de siete instituciones representativas de la Banca Múltiple del Sistema Financiero Mexicano, adicionalmente se identifican los principales factores de riesgo a los que se encuentra expuesto este portafolio. Con informacion mensual de un año completo y bajo el supuesto de que el portafolio mantiene cierta estabilidad en el tiempo, se determina el VaR bajo el método histórico; lo que posteriormente pertime realizar una proyección del riesgo considerando un mercado relativamente estable.

Capítulo 2

Administración de Riesgos

2.1. Definición de Riesgo y la importancia de su estudio

El riesgo es un fenómeno de exposicion constante, siempre ha resultado riesgosa la interacción del hombre con la naturaleza pero desde los primeros tiempos el hombre se percató que era más ventajoso exponerse al riesgo; además el riesgo genera grandes polémicas, desde cómo hacerle frente hasta las posiciones que se deben de tomar cuando este se manifiesta.

El riesgo es tan antiguo como la propia existencia de la humanidad, el origen y desarrollo del comercio provocaron la aparición de determinadas formas de pago que introdujeron cierto temor ante la amenaza de que el obligado no cumpliese sus compromisos y, por consiguiente, la aparición de medidas para proteger sus propios intereses.

Etimológicamente el riesgo está asociado a la palabra del catalán antiguo *Recc* y la lengua de occitano antiguo *Resegué*, aunque se ha planteado que tiene el mismo origen que el castellano *Risco* (antiguamente Riesco) traducido como "peñasco escarpado", por el peligro que corre el que transita por estos lugares. Con el tiempo, el uso de esta palabra fue evolucionando para designar fenómenos en desequilibrio.

La acepción más divulgada y conocida actualmente como "peligro que corre", se propagó rápidamente y apareció por primera vez en 1570. Por consiguiente, el riesgo como fenómeno surge con el fin de caracterizar situaciones de peligro o advertencia que inducen a momentos de incertidumbre. Desde 1921 se inició la polémica en las definiciones que sobre riesgos comenzaron a dar diversos autores, sin embargo la mayoría coinciden en relacionar el riesgo con la incertidumbre.

Por otra parte, el Comité de Supervisión Bancaria de Basilea es una institución que fue creada en 1974 con la intención de fortalecer el sistema financiero internacional ante los serios problemas que acompañaron a la quiebra del Bankhaus Herstatt de Alemania. Es una asociación que se integra por los directores de bancos centrales de los países industrializados que conforman el G-10.[1]

Uno de sus principales objetivos consiste en lograr que los bancos sean más seguros por medio de una adecuada administración de sus riesgos. En 1988 el Comité introdujo un sistema de medición de capital, conocido como "Acuerdo de Capital de Basilea" en el que se proporcionó un marco para la medición del riesgo. Las normas del Comité de Basilea se aplican en la administración de riesgos por una gran parte de los bancos de todo el mundo.

En la actualidad existen varias agencias cuyo objetivo es administrar los riesgos de entidades, empresas y bancos, estas agencias se encargan de evaluar un sistema de prevención y análisis de los riesgos a los que están expuestas. Entre las agencias calificadoras de riesgos financieros más reconocidas destacan:

[1] G-10. Se refiere en realidad a sus 13 países miembros iniciales (Alemania, Bélgica, Canadá, España, Estados Unidos, Francia, Italia, Japón, Luxemburgo, Países Bajos, Suecia, Suiza y Reino Unido).

- Moodys. Fundada en 1900 por el norteamericano John Moody, cuyo objeto de análisis abarca los riesgos al otorgar créditos y adquirir títulos valores de corporaciones, entidades gubernamentales y países.

- Standard & Poor's (S&P). En 1860, Henry Varnum Poor publicó su "History of Railroads and Canals of the United States". En 1941 Standard Statistics se fusionó con Poor's Publishing Company para crear Standard & Poor's. Su función principal consiste en proporcionar información a los estrategas financieros en materia de calificaciones crediticias, índices, análisis, datos y evaluaciones de riesgo para la toma de decisiones sobre los mercados.

- Fitch Ratings. La firma fue fundada en 1913 por John Knowles Fitch, aunque es la agencia internacional de calificación mas pequeña (comparada con S&P y Moodys) al cubrir una parte más limitada del mercado, mantiene un objetivo similar a las anteriores, el cual consiste en proveer a los mercados de valores mundiales opiniones crediticias objetivas, oportunas, independientes y prospectivas.

- HR Ratings. Fundada por Alberto I. Ramos, quien actualmente tiene el cargo de Presidente y Director General. Es una calificadora sujeta a la supervisión y regulación de la Comisión Nacional Bancaria y de Valores (CNVB), y su objetivo principal consiste en emitir calificaciones sobre riesgos crediticios en México.

Definiciones de Riesgo

Una definición con un enfoque económico del Riesgo es el siguiente: "contingencia o eventualidad de un daño o de una pérdida como consecuencia de cualquier clase de actividad, y cuyo aseguramiento puede ser objeto de contrato".

En el lenguaje bancario: Riesgo es la probabilidad de que se presenten dificultades en la recuperación parcial o total en un crédito otorgado, debido a factores y variables que pueden afectar el futuro financiero del cliente, haciendo peligrar la inversión bancaria.

En el mercado de capitales: La imputación de riesgo de un activo financiero respecto al riesgo de una cartera diversificada depende de cómo reacciona el rendimiento de ese título a una subida o bajada general de todo el mercado.

Estas definiciones sugieren que en el caso de que dicha probabilidad sea desconocida, se dice que la inversión está en presencia de incertidumbre. Es importante tener claro que riesgo e incertidumbre no son el mismo concepto aunque sí están relacionados; la diferencia radica en el conocimiento del que toma las decisiones acerca de la probabilidad o posibilidad de que se obtenga el resultado esperado. El que toma las decisiones conoce la probabilidad de que se obtenga el resultado esperado, y en la incertidumbre ocurre lo contrario, no se puede pronosticar con exactitud el resultado del evento en particular.

Cuando se aborda la naturaleza del riesgo, se está haciendo referencia a los eventos o situaciones que pueden dar origen a él y además la forma en que estos riesgos se clasifican una vez que se manifiestan. Las causas que originan los riesgos son las siguientes:

- Probabilidad de ocurrencia de algún evento.

- Que dicho evento contenga cierta incertidumbre.

- La espera de un resultado por una inversión.

Finalmente, el riesgo por su repercusión es un tema de gran interés en el mundo de las finanzas, ya que un mal manejo y administración del mismo implica que no se obtengan los rendimientos esperados y como consecuencia casi siempre la generación de una gran pérdida. Es por ello que se dedican muchos recursos para la cobertura de los riesgos en las instituciones financieras, sin embargo, gran parte de estos recursos pueden ahorrarse si se estudia más a fondo el tema.

2.2. Clasificación de los Riesgos

Los riesgos pueden clasificarse bajo distintos criterios, según el tratamiento y el objetivo de estudio de los mismos.

Por los intereses que afectan

- Personales: Son riesgos que amenazan la integridad física de las personas.
- Reales: Se refieren a los riesgos que afectan la integridad de las cosas, pueden ser muebles o inmuebles.
- Patrimoniales: Son los riesgos que implican una pérdida económica.

Por la variabilidad del peligro

- Constantes: Se dice que el riesgo ocurre si la amenaza se presenta con la misma intensidad a través del tiempo.
- Progresivos: Son aquellos riesgos que en el transcurso de los días aumenta el peligro.
- Decrecientes: Son aquellos en los que a medida en que pasa el tiempo disminuye la intensidad de la amenaza.

Los riesgos también pueden clasificarse como "Puros" y "Especulativos", los primeros son aquellos en los que sólo existe la posibilidad de pérdidas y los especulativos son aquellos en los que el sujeto expuesto tiene la posibilidad de ganar o perder (los riesgos bancarios son considerados riesgos especulativos porque en ellos no se tiene la certeza de lo que ocurrirá).

Por otra parte, el Comité de Basilea clasifica los riesgos a los que se encuentran expuestas las Instituciones, así como sus Subsidiarias Financieras, de acuerdo al siguiente esquema.[2]

[2] "Disposiciones de Carácter General Aplicables a las Instituciones de Crédito", publicadas en el Diario Oficial de la Federación el 2 de diciembre de 2005 por la Comisión Nacional Bancaria y de Valores.

Cuadro 2.1 Clasificación de Riesgos

2.2.1. Riesgos Cuantificables

Son aquellos para los cuales es posible conformar bases estadísticas que permitan medir sus pérdidas potenciales.

⋆ **Riesgos Discrecionales**
Son aquellos resultantes de la toma de una posición de riesgo.

- **Riesgo de Crédito**
  Es la pérdida potencial por la falta de pago de un acreditado o contraparte en las operaciones que efectúan las Instituciones, incluyendo las garantías reales o personales que les otorguen, así como cualquier otro mecanismo de mitigación utilizado por las Instituciones.
- **Riesgo de Liquidez**
  Se define como la pérdida potencial por la imposibilidad o dificultad de renovar pasivos o de contratar otros en condiciones normales para la Institución, por la venta anticipada o forzosa de activos a descuentos inusuales para hacer frente a sus obligaciones, o bien, por el hecho de que una posición no pueda ser oportunamente enajenada, adquirida o cubierta mediante el establecimiento de una posición contraria equivalente.
- **Riesgo de Mercado**
  Es la pérdida potencial por cambios en los Factores de Riesgo que inciden sobre la valuación o sobre los resultados esperados de las operaciones activas, pasivas o causantes de pasivo contingente, tales como tasas de interés en moneda nacional y extranjera, tipos de cambio e índices de precios, así como las tasas reales o bien las sobretasas, entre otros.

⋆ **Riesgos No Discrecionales**
Son aquellos resultantes de la operación del negocio, pero que no son producto de la toma de una posición de riesgo.

- **Riesgo Operacional**
  Se define como la pérdida potencial por fallas o deficiencias en los controles internos, por errores en el procesamiento y almacenamiento de las operaciones o en la transmisión de información, así como por resoluciones administrativas y judiciales, fraudes o robos.
- **Riesgo Tecnolólogico**
  Es la pérdida potencial por daños, interrupción, alteración o fallas derivadas del uso o dependencia en el hardware, software, sistemas, aplicaciones, redes y cualquier otro canal de distribución de información en la prestación de servicios bancarios con los clientes de la Institución.

- **Riesgo Legal**
  Es la pérdida potencial por el incumplimiento de las disposiciones legales y administrativas aplicables, la emisión de resoluciones administrativas y judiciales desfavorables y la aplicación de sanciones, en relación con las operaciones que las Instituciones llevan a cabo.

2.2.2. Riesgos No cuantificables

Son aquellos derivados de eventos imprevistos para los cuales no se puede conformar una base estadística que permita medir las pérdidas potenciales (por ejemplo, el Riesgo Reputacional).

2.3. Gestión del Riesgo de acuerdo al Comité de Supervisión Bancaria de Basilea

El Comité de Supervisión Bancaria de Basilea (CSBB) es un organismo de supervisores bancarios procedente de 13 países miembros, fue fundado en 1974 para promover la cooperación internacional entre una serie de organismos supervisores, su objetivo es garantizar la seguridad y solvencia del sistema financiero.

En su primera publicación en 1988, titulada "Convergencia internacional de medidas y normas de capital" mejor conocida como Acuerdo de Capital de Basilea (Basilea I), dispone que "los supervisores bancarios deben definir requerimientos mínimos de capital prudentes y adecuados para todos los bancos".

Desde finales de la década de 1980, las autoridades de supervisión han hecho cada vez más hincapié en este objetivo, además han adoptado normas operativas y de capital basadas en las indicaciones del CSBB. Hasta el momento podemos diferenciar entre dos tipos de publicaciones:

1. El primer tipo de publicación tiene que ver con los requerimientos mínimos de capital que las autoridades supervisoras imponen a los bancos. Con la necesidad de garantizar que los bancos tengan capital y reservas suficientes para hacer frente a los riesgos derivados de sus actividades.

2. El segundo tipo se relaciona con las buenas prácticas en la gestión del riesgo bancario, el cual surge de la necesidad de garantizar que los bancos operen de manera segura y solvente.

Actualmente se dispone de tres herramientas principales para la medición y control del riesgo**(los tres pilares de regulación de Basilea II):**

I. *Requerimientos mínimos de capital.*

II. *Inspecciones y requerimientos de información*

III. *Divulgación pública y la disciplina de mercado*

En los siguientes sub-apartados se abordan estos tres pilares regulatorios, centrando la discusión en primera instancia sobre el Acuerdo de Basilea de 1988 y su Enmienda de 1996. El Acuerdo de Basilea de 1988 vinculado a los estándares mínimos de capital para el riesgo de crédito, fue extendido al riesgo de mercado en la Enmienda de 1996 cuyo principio básico es la medición del capital regulatorio bajo una condición de solvencia mínima.

2.3.1. Basilea I - Convergencia Internacional de Medidas y Normas de Capital

Las empresas junto con los bancos retienen capital como medida de protección en caso de pérdidas no esperadas y dentro de un marco económico desfavorable, sin embargo, una de las principales funciones de los bancos es la de participar en el mercado como intermediarios financieros; para desempeñar esta función es esencial la supervisión de sus actividades las cuales deben estar sujetas a licencias y normas específicas. Es precisamente, la supervisión de los bancos la que dió lugar al capital regulatorio.

El capital regulatorio es aquél que las autoridades de supervisión exigen mantener a los bancos con la finalidad de hacer frente a sus posibles pérdidas, de tal forma que aseguren su viabilidad y la protección del dinero de sus depositantes. La definición común de capital regulatorio fue establecida en 1988 (Basilea I) y se ha mantenido inclusive en el marco de Basilea II; esta definición establece los criterios de clasificación de los componentes de capital y garantiza que en mayor medida, tales criterios sean similares en todos los países que hayan adoptado Basilea I, lo cual ha facilitado la comparación entre bancos.

El capital regulatorio consta de tres niveles:

1 Capital de Nivel 1

Los únicos elementos que se pueden incluir en el capital de Nivel 1 son aquellos que pueden tener la mayor capacidad para absorber pérdidas a la vez que permiten que el banco siga funcionando de manera continua.

El capital de Nivel 1 normalmente hace referencia al capital ordinario (o acciones ordinarias). El capital ordinario es elegible sin ningún tipo de restricciones en tanto esté pagado íntegramente y, en consecuencia, esté disponible de forma permanente y total para absorber pérdidas potenciales. Esto se debe a que en el caso en que se presente una pérdida, son los accionistas ordinarios los que sufren primero estas pérdidas.

2 Capital de Nivel 2

El capital de Nivel 2 (o complementario) se compone de una amplia gama de instrumentos híbridos de capital o deuda y de componentes cercanos al capital ordinario. El Nivel 2 total no puede exceder del 100 % del Nivel 1.

El Nivel 2 se subdivide en dos categorías: Nivel 2 superior y Nivel 2 inferior.

2.1 Nivel 2 superior

El total del Nivel 2 superior se limita al 100 % del capital de Nivel 1. Las características de los elementos del Nivel 2 superior están más cerca del capital ordinario que de aquellos elementos elegibles para el Nivel 2 inferior. Esta categoría incluye, entre otros elementos, deuda subordinada perpetua.

2.2 Nivel 2 inferior

El total del Nivel 2 inferior no puede exceder del 50 % del capital de Nivel 1. Está formado por préstamos o valores cuyas características están más próximas a las de las deudas que a las del capital ordinario. También incluye varios tipos de reservas cuyo valor o disponibilidad son más inciertos que los de las reservas expresas.

La forma más habitual de los valores de esta categoría es la deuda subordinada no perpetua, que es objeto de restricciones específicas porque no es permanente.

3. **Capital de Nivel 3**

   Es el tercer nivel del capital regulatorio, el cual se agregó en 1996. Lo pueden usar los bancos de forma discrecional en el ámbito nacional pero sólo para satisfacer una proporción de los requisitos de capital por riesgo de mercado.

   Consta de instrumentos de deuda subordinada a corto plazo con características y limitaciones específicas.

   El capital regulatorio se refleja en la definición regulatoria del capital y en los coeficientes de solvencia, estos son coeficientes regulatorios cuya finalidad consiste en asegurar que los bancos sean capaces de absorber las pérdidas derivadas de sus actividades. Basilea I establece dos coeficientes indispensables para el marco del capital regulatorio, el primero y más conocido es el coeficiente mínimo de capital total del 8 % que relaciona el capital regulatorio del banco con sus activos ponderados por nivel de riesgo. El segundo es el coeficiente mínimo de capital de Nivel 1 del 4 %, que relaciona el capital regulatorio de mayor calidad con los activos ponderados por nivel de riesgo.

   Además de la definición del capital regulatorio, la composición de los requerimientos mínimos es a través de los activos ponderados por nivel de riesgo; es decir, todas las exposiciones tras su conversión en activos y tras haber aplicado las ponderaciones de riesgo supervisoras[3] en función de su nivel de riesgo.

   Desde mediados de la década de 1990, diversas organizaciones bancarias han desarrollado herramientas cada vez más sofisticadas para la gestión de riesgos y de capital. Lo cual dió lugar al surgimiento de conceptos como "capital económico" y "metodologías de capital económico"[4]. Los métodos de cálculo del capital económico intentan evaluar la cuantía de capital necesario para respaldar los diferentes conjuntos de actividades o riesgos. Su finalidad es traducir las evaluaciones de riesgo cuantitativas de diversos tipos de riesgo a un baremo común: el capital económico. Estos métodos se han convertido en una herramienta muy eficaz para la gestión del riesgo.

   Por lo general las metodologías del capital económico comparten las siguientes características:

   - *Distribución de pérdidas y niveles de confianza*

     Los tipos de distribuciones utilizadas con mayor frecuencia en las metodologías del capital económico son las distribuciones estadísticas de pérdidas. Estas reflejan las posibles pérdidas asociadas a un conjunto de riesgos.

     Una distribución de pérdidas puede utilizarse para estimar la probabilidad de que se exceda un determinado umbral de pérdidas en el transcurso de un periodo determinado (es decir, el nivel de confianza). Por ejemplo, puede definirse como capital económico la cuantía de capital necesaria para absorber pérdidas en 999 de 1,000 escenarios posibles en el periodo de un año. En este caso, el nivel de confianza porcentualmente sería del 99.99 %.

[3] Ponderación de riesgo – Es un porcentaje utilizado para convertir la cuantía nominal de una exposición crediticia en una cuantía de exposición al riesgo. La cantidad de capital que un banco debe mantener para cubrir las posibles pérdidas vinculadas a dicha exposición puede obtenerse multiplicando el activo ponderado por nivel de riesgo por el requerimiento mínimo de capital (es decir, el 8 %).

[4] El capital económico es el que los bancos mantienen como protección contra pérdidas potenciales. La cuantía del capital económico a mantener, la forma que adopta y las áreas de actividad del banco a las que respalda son factores que varían según cada banco.

- *Definiciones de pérdida y horizontes temporales*

  Las definiciones de pérdida establecen las condiciones bajo las cuales se estima que una pérdida ha ocurrido, estas definiciones de pérdida varían significativamente según las actividades, normas contables, política de gestión y orientación regulatoria, por ejemplo:

  - o En algunas actividades (como instrumentos negociables que se valoran con regularidad a precio de mercado), determinar el capital económico sería: la cantidad de capital que compensa las pérdidas resultantes de los cambios adversos en precios de mercado.
  - o En otro tipo de actividades, puede haber varias formas de definir las pérdidas, por ejemplo, tratándose de exposiciones crediticias: la gerencia de un banco puede elegir evaluar sólo el capital económico en casos de impago (cuando el prestatario deja de pagar).

  El horizonte temporal en consideración es también un componente importante. Los horizontes temporales de distintas actividades bancarias se diferencian significativamente dependiendo de categorías y/o instrumentos, por ejemplo:

  - o Las actividades mercantiles tienen horizontes temporales relativamente cortos en los que se pueden medir pérdidas económicas potenciales (para opciones el horizonte temporal es a lo mucho algunas horas, para instrumentos menos volátiles y/o líquidos pueden ser algunos días).
  - o Las actividades crediticias tienen horizontes temporales intermedios (varían desde tres meses hasta uno o dos años). Aunque los bancos adoptan por lo general un horizonte temporal de un año.
  - o Algunos tipos de riesgos operativos pueden tener asociados horizontes de tiempo más largos, estos suelen ser generalmente de varios años

- *Frecuencia de pérdida y severidad de la pérdida*

  La distribución de la pérdida para una cartera de exposiciones se caracteriza normalmente por dos elementos principales:

  1) Frecuencia de la pérdida: Es la frecuencia con la que es probable que ocurran los acontecimientos que desencadenan una pérdida (por ejemplo, un movimiento en los tipos de interés para riesgo de mercado, un impago por parte de un prestatario para el riesgo de crédito, o bien, un fraude para el riesgo operativo).
  2) Severidad de la pérdida: Es el tamaño o magnitud de la pérdida que se tiene que absorber una vez que el evento de pérdida ha ocurrido.

- *Tipos de pérdidas*

  Una vez que se adquiere el conocimiento básico sobre la frecuencia de pérdida y la severidad de la pérdida, es necesario conocer los tipos de pérdidas que se pueden dar en una cartera concreta y en un tipo de riesgo en particular.

  - ... Pérdidas esperadas: Son aquéllas que el banco espera experimentar por término medio.
  - ... Pérdidas no esperadas: Suceden cuando la pérdida real sobrepasa la media prevista o pérdida esperada.
  - ... Pérdidas extremas: Son aquéllas pérdidas que sobrepasan el nivel de confianza, no ocurren muy frecuentemente pero pueden llegar a ser muy altas en cuanto a su severidad.

- *Correlaciones y pruebas de estrés*

  Una de las principales dificultades que plantean los métodos de capital económico (la creación de modelos de riesgo) es el punto hasta el que los riesgos están correlacionados, ya que si bien, cualquier elemento que afecte a una o varias exposiciones repercutirá en las demás. Estas correlaciones se derivan de factores comunes que pueden afectar a los riesgos de distintas formas.

Una de las mayores limitaciones de los métodos de capital económico es que por lo regular se asume que dichas correlaciones son estables durante el horizonte de tiempo elegido para su estimación, lo cual puede resultar que las correlaciones estimadas sean inestables con el paso del tiempo o bajo condiciones extremas. Para atacar esta problemática se realizan pruebas de estrés con la finalidad de complementar sus métodos de capital económico.[5]

- *Asignaciones de capital*

  Una de las ventajas del capital económico es que se puede manejar como indicador común de riesgo, esto permite a la institución comparar los tipos de exposiciones (riesgos) y las líneas de negocio; además de que permite identificar en cualquier momento concreto qué línea de negocio puede proporcionar un rendimiento mayor y a su vez más estable para un nivel de riesgo determinado.

  La asignación del capital económico a las diferentes líneas de negocio se puede hacer en cantidades específicas (de acuerdo a las decisiones estratégicas de la propia institución), además, tales asignaciones pueden aumentar o disminuir con el paso del tiempo.

Los enfoques de capital regulatorio y de capital económico comparten un objetivo similar: "relacionar pérdidas potenciales con el capital de un banco para asegurar la continuidad de su funcionamiento". El capital regulatorio sigue definiciones estandarizadas y aceptadas internacionalmente, las cuales son aplicables a todos los bancos, mientras que la definición de capital económico es específica para cada banco y está diseñada a medida del mismo.

2.3.2. Basilea II (Tres Pilares)

Cuando un banco quiebra, las consecuencias pueden extenderse más allá del mismo y afectar a clientes e instituciones que hayan depositado fondos o incluso invertido capital en él. A pesar de que la regulación de los bancos por sí misma no puede impedir su quiebra, la aplicación de estándares sólidos de gestión del riesgo junto con el mantenimiento de niveles apropiados de capital, puede reducir su probabilidad de ocurrencia.

En junio de 1999, el Comité de Basilea divulgó una primera propuesta para complementar al Acuerdo de 1988 de tal modo que este fuera más sensible al riesgo y con el cual se deberían cubrir los riesgos de crédito, mercado y operativo. Tras varias propuestas modificadas el nuevo marco de suficiencia de capital (Basilea II) se presentó a mediados de 2004 con el fin de implementarse a finales de 2006.

El Acuerdo de Capital de Basilea II, establece una serie de métodos sensibles al riesgo para calcular los requerimientos mínimos de capital de los bancos y un proceso de supervisión para que los bancos mantengan el capital en niveles que guarden proporción con su perfil de riesgos. Además, fomenta la disciplina de mercado requiriendo la revelación de información pertinente.

El Acuerdo de Basilea II está estructurado en torno a tres pilares.

Pilar 1	**Requerimientos Mínimos de Capital**
Pilar 2	**Proceso de Supervisión**
Pilar 3	**Requerimientos de Información**

[5] Las pruebas de estrés consisten en desarrollar una o más situaciones adversas, mediante alguna simulación de escenarios extremos o incluyendo acontecimientos históricos desfavorables para la economía. Generalmente estas pruebas se centran en las pérdidas que la institución sufriría en dichas condiciones adversas.

⋆ **Pilar1**

Está relacionado con los requerimientos mínimos del capital que debe disponer cada banco para cubrir su exposición al riesgo crediticio, de mercado y operativo.

Según Basilea II, los bancos deben mantener como mínimo un 8 % de capital sobre los activos ponderados por riesgo.

En este contexto, el capital se subdivide en las siguientes áreas:

- **El capital de nivel 1:**
  Es el capital primario, es decir, las acciones ordinarias junto con las acciones preferentes perpetuas y no acumulativas, más las reservas declaradas, menos el fondo de comercio.

- **El capital de nivel 2**
  Consta de las reservas no declaradas, las reservas de revalorización de activos y las provisiones o reservas generales (para pérdidas por préstamos), así como los instrumentos híbridos de deuda y la deuda a plazo subordinada.

- **El capital de nivel 3**
  Sólo se utiliza para satisfacer una parte de los requerimientos de capital de un banco por riesgo de mercado. Consta de instrumentos de deuda subordinada a corto plazo, con características específicas.

Pilar1: Riesgo de Crédito
Basilea II admite que una institución financiera puede calcular el riesgo de crédito empleando uno de los dos métodos siguientes:

o **El método estándar (SA):** Permite a los bancos utilizar un sistema de ponderación por riesgo para medir el riesgo de crédito de los activos bancarios, dichas ponderaciones están vinculadas a las calificaciones que realizan las agencias externas de calificación crediticia.

o **El método basado en calificaciones internas (IRB):** Este método permite a los bancos utilizar sus propias calificaciones crediticias internas, lo que posibilita una mejor diferenciación del riesgo de distintas exposiciones y a su vez proporciona requerimientos de capital más ajustados al nivel de riesgo.

Pilar 1: Riesgo de mercado
Los requerimientos de capital bancario para el riesgo de mercado se establecen utilizando uno de los siguientes métodos.

o **El método estándar:** Adopta un enfoque de bloques de construcción (*building blocks*) para los instrumentos relacionados con el tipo de interés y las participaciones accionarias, que distingue los requerimientos de capital por riesgo específico, de los del riesgo de mercado general.

o **El método de modelos internos:** Permite que un banco utilice su propio método interno, que debe cumplir los criterios cualitativos y cuantitativos establecidos por el Comité de Basilea y está sujeto a la aprobación explícita de la autoridad supervisora de un banco. Adicionalmente, determina el requerimiento de capital como el más elevado entre el VaR[6] del día anterior o el promedio del VaR diario de los 60 días hábiles anteriores, multiplicado por un factor mínimo de tres. Los bancos deben calcular su VaR diariamente con:

[6] Valor en Riesgo (VaR) es una medida general de riesgo desarrollada para comparar el riesgo a través de productos y a su vez agregar el riesgo en una cartera. Suele interpretarse como la mayor pérdida esperada bajo un nivel de confianza específico y sobre un periodo de tiempo determinado.

I Un intervalo de confianza unilateral del 99 %

II Un periodo mínimo de tenencia de 10 días

III Un periodo mínimo de observación de un año

Un modelo interno de un banco también debe capturar con precisión los riesgos asociados a las opciones y en general a los instrumentos derivados.

Pilar 1: Riesgo Operativo
El Comité de Basilea define el riesgo operativo como el riesgo de pérdidas directas o indirectas resultantes de procesos, personas y sistemas inadecuados o erróneos, o de sucesos externos.

Existen tres métodos para definir los requerimientos de capital para el riesgo operativo.

- **El metodo del indicador básico:** Define un cargo para el riesgo operativo como un porcentaje fijo de los ingresos brutos (conocido como el factor α), a modo de aproximación a la exposición del banco al riesgo. En este método, el capital que un banco debe mantener para protegerse contra las pérdidas procedentes del riesgo operativo equivale a un porcentaje fijo de la media de los ingresos brutos anuales de los últimos tres años.

- **El método estándar:** Requiere que la institución desglose sus operaciones en ocho líneas estándar de negocio, por ejemplo, banca minorista, financiación a empresas, etc. El requerimiento de capital para cada línea de negocio se calcula multiplicando los ingresos brutos para dicha línea por un factor (llamado β) asignado a dicha línea de negocio. El factor beta puede ser distinto para cada línea de negocio.

- **Método de medición avanzada:** En este método el requerimiento de capital regulatorio equivale a la medida del riesgo generada por el sistema interno del banco para la medición del riesgo operativo. El banco debe cumplir con los criterios cualitativos y cuantitativos establecidos en Basilea II, y el supervisor debe aprobarlo.

⋆ **Pilar2**

Define el proceso de revisión supervisora, su objetivo es asegurar que el nivel de capital del banco es suficiente para cubrir su riesgo global. Por lo que requiere que los bancos realicen pruebas de estrés para estimar el posible aumento de los requerimientos de capital durante una situación de estrés. Los bancos y los supervisores deben emplear los resultados de estas pruebas para asegurar que los bancos cuentan con suficiente margen de capital.

Este pilar cuenta con cuatro principios básicos:

- Principio 1:
  Los bancos deben disponer de procesos para evaluar la suficiencia global de capital en función de su perfil de riesgo, y de una estrategia para mantener los niveles de capital, incluyendo:

  ... Procesos para capturar todos los riesgos materiales.

  ... Procedimientos para vincular estrategias bancarias y niveles de capital con el riesgo.

  ... Controles y auditorías internas para garantizar la integridad del sistema de gestíon.

- Principio2:
  Los supervisores deben revisar y valorar las evaluaciones internas, así como su capacidad para vigilar y asegurar que se cumplen los coeficientes de capital regulatorio. Los supervisores deben tener en cuenta:

... El análisis de sensibilidad y pruebas de tensión realizadas por el banco y su relación con el capital del banco.

... Hasta qué punto la dirección del banco previene los eventos inesperados cuando se establecen los niveles de capital.

... Si la alta dirección revisa y vigila correctamente los coeficientes objetivo para el capital del banco.

- Principio 3:
  Los supervisores deben esperar que las entidades financieras operen por encima del coeficiente mínimo de capital regulatorio, y deben ser capaces de exigir a los bancos que mantengan capital en exceso sobre el mínimo.

- Principio 4:
  Los supervisores deben intervenir tempranamente para impedir que el capital descienda por debajo de los niveles mínimos requeridos y asegurar medidas correctoras urgentes si los niveles de capital no se mantienen.

  Si los supervisores creen que un banco no cumple los requerimientos mínimos de capital, deben considerar:

  ... Vigilar el banco más estrechamente.

  ... Exigir al banco que desarrolle e implante un plan de retorno a la suficiencia de capital.

  ... Exigir al banco que obtenga capital adicional.

  ... Restringir el pago de dividendos.

⋆ **Pilar3**

El Pilar 3 define los requerimientos de información a revelar, que permitirá a los participantes en el mercado evaluar datos clave sobre el ámbito de aplicación, el capital, exposiciones al riesgo, procesos de evaluación de riesgo y, consecuentemente, la suficiencia de capital de la institución.

2.3.3. Basilea III

En junio de 2004 se aprobó una serie de reformas conocida como Basilea II, donde se impone a los bancos requerimientos mínimos de capital más sensibles al riesgo (con respecto a su primera publicación - Basilea I). Esta segunda publicación incluye una medida mejorada del riesgo de crédito y la captación del riesgo operacional, refuerza dichos requerimientos introduciendo principios que ayudan a los bancos a determinar si su nivel de capital resulta suficiente para hacer frente a los riesgos que asumen y a los supervisores bancarios a corroborar dichas estimaciones. Además, refuerza la disciplina del mercado mejorando los requisitos de divulgación de información.

El plazo para la implementación del marco de Basilea II concluyó a finales de 2006, no obstante, en julio de 2009 el Comité de Basilea [7]introdujo una serie de mejoras al marco de Basilea II para dar respuesta a la crisis financiera de 2007. Dichas reformas se aplican a la medición de los riesgos para calcular el capital regulador en las posiciones de titulización y de la cartera de negociación (Primer Pilar), la gestión de riesgos y el examen supervisor (Segundo Pilar) y la divulgación de información (Tercer Pilar).

[7]El Comité de Supervisión Bancaria de Basilea actualmente está integrado por altos representantes de autoridades de supervisión bancaria y bancos centrales de Alemania, Arabia Saudita, Argentina, Australia, Bélgica, Brasil, Canadá, China, Corea, España, Estados Unidos, Francia, Hong Kong RAE, India, Indonesia, Italia, Japón, Luxemburgo, México, los Países Bajos, el Reino Unido, Rusia, Singapur, Sudáfrica, Suecia, Suiza y Turquía. Sus reuniones suelen celebrarse en la sede del Banco de Pagos Internacionales (BPI) en Suiza, donde está ubicada su Secretaría permanente.

En diciembre de 2010, el Comité publicó un conjunto de reformas bautizado como Basilea III, con el objetivo de elevar la resistencia de los bancos y complementar así los marcos de Basilea II en diversos enfoques. Basilea II abarca tanto los riesgos específicos de cada entidad como los riesgos sistémicos.

En enero de 2012 el Grupo de Gobernadores de Bancos Centrales y Jefes de Supervisión (GHoS)[8], aprobó el proceso integral propuesto por el Comité para realizar un seguimiento de la implementación de Basilea III por parte de sus miembros. Este proceso se compone principalmente de tres niveles de evaluación.

⋆ **Nivel 1: Adopción oportuna y puntual de Brasilea III**

El objetivo de la evaluación del nivel 1 es garantizar una adopción oportuna y puntual de Basilea III, sin embargo, esto no incluye un análisis del contenido ni del fondo de las normativas nacionales. Por su parte, el Instituto para la Estabilidad Financiera (FSI) del Banco de Pagos Internacionales realiza un seguimiento mediante encuestas de los países que no son miembros del Comité de Basilea y publica sus resultados.

⋆ **Nivel 2: Conformidad reguladora**

Tiene como objetivo garantizar la conformidad de la regulación con las normas de Basilea III, las evaluaciones del nivel 2 las llevan a cabo equipos de 6 o 7 especialistas con diferentes especialidades técnicas. Estas evaluaciones se realizan durante un periodo de seis meses e incluyen autoevaluaciones donde todos los miembros del Comité de Basilea deben ser evaluados.

⋆ **Nivel 3: Coherencia de los activos ponderados por riesgo**

Su finalidad es garantizar la coherencia de los cálculos (centrándose inicialmente en los activos ponderados por riesgo), donde se busca principalmente que los resultados de la aplicación de las normas concuerden con los objetivos de las políticas de los diversos bancos. Este nivel amplía el ámbito de los análisis en los niveles 1 y 2 centrándose en su aplicación supervisora en cada banco.

El Comité creó dos grupos de expertos, uno para la cartera de inversión y el otro para la cartera de negociación. Estos grupos identifican y analizan situaciones donde existen inconsistencias en el cálculo de los activos ponderados por riesgo. Dependiendo de los resultados obtenidos, esta labor puede dar lugar a recomendaciones para subsanar las fragilidades detectadas.

En concreto, el acuerdo de Basilea III:

- Eleva la *calidad*con énfasis en el capital ordinario, y la cantidad de capital para que los bancos sean más capaces de absorber pérdidas.
- Mejora la cobertura del riesgo en particular para las actividades en el mercado de capitales.
- Introduce *"colchones"* de capital, que deben dotarse en los momentos de coyuntura positiva para poder disponer de ellos en los momentos de tensión.
- Introduce un coeficiente de apalancamiento armonizado internacionalmente para apuntalar la media de capital basada en el riesgo y para contener la acumulación excesiva de apalancamiento en el sistema.
- Introduce niveles mínimos de liquidez global para mejorar la resistencia de los bancos frente a tensiones graves a corto plazo y para mejorar su financiación a largo plazo.

[8]Es el órgano de vigilancia del Comité de Basilea.

- Introduce colchones de capital adicionales para las instituciones de mayor importancia sistémica, con el fin de abordar el problema de las entidades *“demasiado grandes para dejarlas quebrar”*.

El periodo de implementación de los requerimientos de capital de Basilea III comenzó el 1 de enero de 2013 e incluye disposiciones transitorias hasta el 1 de enero de 2019. Dichas disposiciones tienen como objetivo dar tiempo a los bancos para que puedan cumplir las nuevas normas más estrictas.

Los requerimientos de liquidez, el coeficiente de apalancamiento y los suplementos sistémicos entrarán en vigor de forma escalonada a partir de 2015.

Capítulo 3

Instrumentos Financieros

3.1. Definición y marco de operación

Un instrumento financiero es un contrato que da lugar, simultáneamente, a un activo financiero para una empresa y a un pasivo financiero o instrumento de capital para otra; los instrumentos financieros tienen la función de transferir fondos entre agentes y además fungen como instrumentos de transferencia de riesgos.

Las características principales de los instrumentos financieros son su liquidez, riesgo y rentabilidad.

- Liquidez: Se refiere a la capacidad de transformar un activo financiero en un valor líquido (dinero en efectivo), es decir, la facilidad y certeza de su realización a corto plazo sin sufrir pérdidas.
- Riesgo: Es la solvencia del emisor del activo financiero para hacer frente a sus obligaciones, es decir, la probabilidad de que al vencimiento del activo financiero el emisor cumpla las cláusulas de amortización del mismo.
- Rentabilidad: Se refiere a la capacidad del instrumento para obtener intereses u otros rendimientos.

Algunos ejemplos de instrumentos financieros son las acciones (que constituyen el capital de una empresa), las obligaciones, los bonos o pagarés emitidos por el Estado y adquiridos por las empresas, los préstamos que una empresa concede a otras de su grupo o a sus trabajadores, las cuentas por cobrar de los clientes e incluso el efectivo mantenido en caja o en cuentas corrientes bancarias. En la práctica estos instrumentos financieros son *activos financieros* para la empresa que los adquiere, mientras que para la empresa que los emite son *pasivos financieros.*

- *Activos Financieros*: Son activos que otorgan derecho a la empresa de recibir efectivo o bien otros activos financieros, por ejemplo, una acción da derecho a recibir dividendos. Las formas que puede tomar un activo financiero son las siguientes:
    a) *Efectivo*, se refiere a aquellos instrumentos financieros con capacidad de cancelar deudas.
    b) Un *instrumento de capital de otra empresa*, como pueden ser las acciones o las participaciones en el capital de otras entidades.
    c) *Derecho contractual a recibir efectivo u otro activo financiero*, como las cuentas bancarias, las cuentas por cobrar, los préstamos generados por la empresa o los bonos del Estado, o un derecho contractual a intercambiar instrumentos financieros con otra empresa.
- *Pasivos Financieros*: Son compromisos que implican una obligación contractual de entregar efectivo u otro activo financiero, o bien de intercambiar instrumentos financieros con otra empresa. Por

ejemplo, una cuenta a pagar a un proveedor supone una obligación de entrega de efectivo en un plazo determinado, de la misma forma que la emisión de obligaciones supone una deuda que se tiene que cancelar en la fecha fijada en las condiciones de emisión. Las formas que puede adquirir un pasivo financiero son:

a) *Obligación contractual*, la cual consiste en entregar efectivo u otro activo financiero a otra entidad.

b) *Contrato que será liquidado con instrumentos de capital de la entidad*, ya sea un instrumento no derivado [1] que de a la entidad la obligación de entregar un número variable de sus instrumentos de capital.

Los instrumentos financieros se emiten y operan en diferentes mercados financieros, de manera general, se conforman por los mercados de deuda, de acciones, de derivados y el mercado cambiario.

Mercado de Deuda

El mercado de deuda es la infraestructura donde se emiten y negocian los instrumentos de deuda, como pueden ser, si en el mercado se negocian instrumentos de deuda que pagan una tasa fija, entonces se denomina mercado de renta fija.

En México las instituciones que emiten instrumentos de deuda son principalmente: Gobierno Federal, Instituto para la Protección al Ahorro Bancario, Empresas paraestatales e Instituciones Públicas, Banca Comercial, Empresas Privadas, Gobiernos Estatales y Municipales.

Mercado Accionario

En el mercado accionario una empresa no tiene la obligación como tal de pagar un interés como beneficio por el financiamiento otorgado, sino que se paga a los inversionistas únicamente cuando la empresa genera utilidades.

Las empresas se pueden clasificar de acuerdo a su capital: por un lado están las empresas privadas, en las que los dueños o accionistas son congregados solamente por invitación y ningún externo puede ser accionista; y por otro lado, las empresas públicas, donde cualquier persona puede comprar o vender las acciones de la compañía. En México se realizaron las primeras negociaciones de títulos accionarios en 1850, sin embargo, a partir de 1975 el mercado accionario cambió su nombre al que actualmente conserva, Bolsa Mexicana de Valores (BMV).

Mercado de Derivados

Dentro de la gama de instrumentos de inversión en el mundo financiero, se encuentran los productos derivados. Un derivado financiero es un producto cuyo valor se basa en el precio de otro instrumento, el cual puede ser cualquier activo (más adelante se aborda con más detalle los diferentes tipos de instrumentos derivados). La función principal de un mercado de derivados es la de brindar instrumentos financieros de inversión y cobertura que posibiliten una adecuada gestión del riesgo. Existen dos tipos de mercados, organizados y no organizados (OTC).
Los mercados over the counter (OTC) se utilizan en general para cubrir riesgos sobre tipos de interés o rentabilidad en ciertos productos, por ejemplo en fondos de inversión. Una de las mayores ventajas

[1] Instrumento Financiero Derivado - Es un instrumento financiero cuyo valor depende a su vez del valor de otro indicador económico o instrumento financiero denominado subyacente.

es que se tiene la libertad de fijar las condiciones del contrato entre las partes, es decir, se ajusta a sus necesidades; además de que no necesitan de un mercado establecido, no existen costes de intermediación y no existen limites en sus cláusulas. El inconveniente que se presenta al operar en este tipo de mercado, es que el comprador asume directamente el riesgo de insolvencia del emisor del contrato, sin ningún tipo de fondo o aval que respalde la operación.
En contraste, se encuentran los mercados organizados donde existe una regulación que normaliza los elementos del contrato (activos subyacentes, número de títulos, fechas de vencimiento, precios de ejercicio), existe una cámara de compensación a través de la cual se realizan las liquidaciones de los contratos evitando así, el contacto directo entre los compradores y vendedores; y lo más importante, la liquidez del mercado es garantizada ya que la sociedad intermediaria asume el riesgo de incumplimiento, por lo que exige la cobertura de garantías.

<u>Mercado Cambiario</u>

El mercado cambiario o de divisas es el mercado en el cual se negocian las distintas monedas extranjeras, los principales participantes del mercado cambiario son instituciones financieras como bancos comerciales, casas de cambio y las bolsas organizadas de comercio o de valores. Un banco central también puede participar como comprador y vendedor de divisas al mayoreo.

Una característica fundamental de los mercados cambiarios es que facilitan el comercio internacional, ya que permiten la transferencia del poder de compra de una moneda a otra. El mercado cambiario mexicano forma parte del mercado internacional de divisas, y la mayor parte de sus operaciones se realizan en el mercado peso-dólar ya que la actividad en los mercados con otras divisas es muy baja.

3.2. Clasificación por tipo de valoración

Existen diversas clasificaciones de los instrumentos financieros; sin embargo, la que se desarrolla a continuación se refiere al tipo de valoración donde prácticamente se puede dividir en tres grandes rubros: instrumentos financieros de renta fija, instrumentos financieros de renta variable e instrumentos financieros derivados.

<u>Instrumentos Financieros de Renta Fija</u>

Este tipo de instrumentos presenta tres características distinguibles de otras categorías de inversión.

1) Proporcionan un rendimiento preestablecido sobre un valor predeterminado a un plazo fijo.

2) Se trata de un préstamo que el inversionista (prestamista) hace al emisor del instrumento.

3) El inversionista presta un valor principal durante un plazo convenido y recibe a cambio un rendimiento predeterminado más la devolución del valor principal.

A su vez, estos instrumentos de renta fija se pueden subdividir en *instrumentos gubernamentales* y en *instrumentos privados y bancarios.*

<u>Instrumentos Financieros de Renta Variable</u>

Son aquellos instrumentos que no tienen ninguna de las tres características de los intrumentos de renta fija, es decir, que no tienen predeterminado su valor, el plazo ni el rendimiento. Los instrumentos más

conocidos de este tipo de renta son las acciones[2].
Por otra parte, el rendimiento de las acciones puede variar por dos razones importantes: en primer lugar debido a la variabilidad de las utilidades que genera la empresa y la decisión sobre los dividendos de la asamblea de accionistas de la empresa.

Es de suma importancia mencionar que el plazo de la acción no está determinado ya que el plazo de tenencia de una acción no se limita por el vencimiento del instrumento, sino por la decisión del mismo propietario de retenerla o venderla.

Instrumentos Financieros Derivados (Productos Derivados)

Se denominan productos derivados, a un conjunto de instrumentos financieros cuya característica principal es que su precio deriva del precio de otro instrumento denominado subyacente. La función principal de este tipo de instrumentos es la cobertura del riesgo (aunque algunos de ellos operan en el mercado con un fin especulativo), por ejemplo, la cobertura ante las fluctuaciones del precio de un determinado instrumento.

Los instrumentos derivados tienen un campo de aplicación sumamente amplio y éste puede ser tan complejo de acuerdo a las características que lo requiera el producto. Aunque su aplicación en México se centra principalmente en:

- Portafolios accionarios: Para inversionistas que requieran proteger sus portafolios de acciones contra los efectos de la volatididad.
- Obligaciones contraídas a tasa variable: Se dirigen a los deudores que buscan protegerse de variaciones adversas en las tasas de interés.
- Pagos o cobranzas en moneda extranjera a cierto plazo: Para importadores que requieran dar cobertura a sus compromisos de pago en divisas.

Los derechos y obligaciones que un instrumento derivado otorga a su tenedor, se cuantifican de acuerdo a las características establecidas en el propio instrumento derivado y al valor que el subyacente tome en el mercado al momento de la transacción. Las operaciones con instrumentos financieros derivados se realizan en las Bolsas y en los mercados OTC[3].

3.2.1. Instrumentos Financieros de Renta Fija

Los instrumentos financieros de renta fija son emisiones de deuda que realizan comúnmente los estados y las empresas. A diferencia de un préstamo bancario, en un instrumento de renta fija los prestamistas son una gran cantidad de inversores y la deuda se presenta mediante títulos valores negociables en el mercado de valores.

El principio fundamental es que los inversionistas están dispuestos a prestar su capital por un tiempo determinado a cambio de recibir al término del mismo un interés adicional al capital suministrado inicialmente. Es importante resaltar que el término renta fija se refiere al plazo de vencimiento de las

[2] Acciones - Son títulos que representan parte del capital social de una empresa que son colocados entre el gran público inversionista a través de la Bolsa Mexicana de Valores (BMV) para obtener financiamiento.

[3] OTC - Over The Counter. Negocia instrumentos financieros (aciones, bonos, materias primas, swaps o derivados exóticos) directamente entre dos partes. Los derivados OTC están documentados en acuerdos marcos. Un acuerdo marco es un acuerdo entre dos partes que indica las normas estándar que se aplican en todas las transacciones entre esas dos partes y con cada nueva transacción, las normas del acuerdo marco no necesitan ser renegociadas y se aplican automáticamente.

obligaciones y no al precio, mientras que la variación en los tipos de interés y en el propio riesgo crediticio de las empresas provoca movimientos en el valor de las obligaciones; sin embargo, el inversionista puede optar por mantener la deuda hasta su vencimiento y con ello recibir la rentabilidad acordada en la emisión del instrumento.

Asimismo, dentro de los instrumentos de renta fija existen aquellos que requieren intermediación financiera, por ejemplo:

- Depósitos a plazos o pagarés bancarios
- Efectos de comercio
- Pagarés descontables

En términos generales, los instrumentos de renta fija se caracterizan por tener asociado un nivel de riesgo bajo, muestran estabilidad en su precio, otorgan rentabilidades mayores que los depósitos a plazo y mantienen un nivel de liquidez alto. Lo que los considera como una alternativa para lograr una inversión segura para tiempos inciertos y además para diversificar los portafolios.

A continuación se describe de manera muy general algunos de los instrumentos de renta fija que se operan en el mercado de valores.

- Bonos a tasa fija: La tasa de interés está prefijada y es igual para toda la vida del bono.
- Bonos con tasa variable: La tasa de interés que paga en cada cupón es distinta ya que está indexada con relación a una tasa de interés de referencia como puede ser la Libor.
- Bonos cupón cero: No existen pagos periódicos, por lo que el capital se paga al vencimiento y no pagan intereses. Se venden con una tasa de descuento.
- Bonos con opciones incorporadas: Son bonos que incluyen opciones especiales.
- Bonos corporativos: Son aquellos que son emitidos por las empresas.

A partir de aquí nos concentraremos en los bonos con tasa de interés fija.
Los Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal con tasa de interés fija (Bonos) son emitidos y colocados a plazos mayores a un año, pagan intereses cada seis meses y la tasa de interés se determina en la emisión del instrumento manteniendo una tasa fija a lo largo de la vida del mismo.

Los títulos se colocan mediante subasta, en la cual los participantes presentan posturas por el monto que desean adquirir y el precio que están dispuestos a pagar. Cabe destacar que en muchas ocasiones el Gobierno Federal ofrece en las subastas primarias títulos emitidos con anterioridad a su fecha de colocación. En estos casos, las subastas se realizan a precio limpio[4] (sin intereses devengados), por lo que para liquidar estos títulos, se tiene que sumar al precio de asignación resultante en la subasta los intereses devengados del cupón vigente.

En la actualidad se pueden realizar operaciones de compra-venta en directo y en reporto[5], así como operaciones de préstamo de valores. Además, pueden ser utilizados como activo subyacente en los mercados

[4]Precio limpio - Es el precio que se paga por un bono al ser ofrecido por primera vez sin sus intereses. Los mediadores que cotizan precios de bonos por lo general cotizan precios limpios.

[5]La compra-venta en directo, se define como la operación en la que el inversionista adquiere un instrumento ofrecido en el mercado de valores con plazo menor a un año y asume los riesgos implícitos del propio instrumento; mientras que las operaciones de reporto son aquellas en las que una persona (reportador) adquiere de otra (reportado) títulos y asume el compromiso de devolverlos en un plazo determinado más un premio.

de instrumentos derivados (futuros y opciones) aunque no es muy común su implementación en estos instrumentos. La compra-venta en directo de estos títulos se puede realizar, ya sea cotizando su precio o su rendimiento al vencimiento. De hecho, la convención actual de mercado es cotizarlos a través de su rendimiento al vencimiento.

Debido a que cada emisión de estos títulos cuenta con una tasa de interés fija, los Bonos no pueden ser fungibles entre sí a menos de que paguen exactamente la misma tasa de interés. De manera general la clave de identificación de la emisión está constituida por ocho caracteres, el primero para identificar el título ("M"), el segundo para el plazo en años de la emisión, y los seis restantes para indicar su fecha de vencimiento (aa,mm,dd).
Un ejemplo de una clave de identificación de Bonos que se tienen el 27 de enero de 2000 a plazo de 3 años (1092 días) y que vencen el 23 de enero de 2003 es: **M3030123**

Algunos de los bonos de renta fija más comunes se enlistan a continuación:

- ⋆ **UDIBONOS:** Son títulos de deuda del Gobierno Federal cuya característica fundamental es la de proteger a sus tenedores contra el incremento de la inflación al mantener constante el valor real de su inversión, así mismo ofrecer rendimientos reales. Tienen un valor nominal[6] de 100 UDIS, por lo regular son emitidos a un plazo de tres años y pagan intereses semestrales a una tasa de interés fija.

- ⋆ **CETES:** Los Certificados de la Tesorería de la Federación son títulos de crédito al portador denominados en moneda nacional, dichos títulos pueden o no devengar intereses; tienen un valor nominal de 10 pesos y son adquiridos por inversionistas a un precio a descuento (comprando a un precio menor al valor nominal). Los CETES se pueden emitir a cualquier plazo siempre y cuando su fecha de vencimiento coincida con un jueves o la fecha que sustituya a éste en caso de que fuera inhábil. De hecho, estos titulos se han llegado a emitir a plazos mínimos para el caso de los seis meses.

- ⋆ **BONDES:** Son títulos de crédito nominativos y negociables emitidos por el Gobierno Federal, colocados a descuento por el Banco de México en moneda nacional y se pueden emitir en un plazo mayor de 6 meses. Son negociados con base en precio, a diferencia de los Cetes que se negocian para aplicar tasas de descuento. Además el rendimiento es pagadero por periodos de 28 días a la tasa promedio ponderada de Cetes y se emiten por lo regular a 364, 532 y 728 días, siendo su valor nominal el equivalente a 100 pesos.

- ⋆ **BPAs:** Los Bonos de Protección al Ahorro son obligaciones emitidas por el Instituto para la Protección al Ahorro Bancario (IPAB) y su principal agente financiero es el Banco de México, estos instrumentos se pueden emitir a cualquier plazo siempre y cuando corresponda a un múltiplo de 28 días llegando así a plazos de 3 y 5 años. Los títulos se colocan mediante subasta, en la cual los participantes presentan posturas por el monto que desean adquirir y el precio que están dispuestos a pagar. Cabe destacar que en muchas ocasiones el IPAB ofrece en las subastas primarias títulos emitidos con anterioridad a su fecha de colocación. En estos casos, las subastas se realizan a precio limpio (sin intereses devengados).

- ⋆ **UMS:** Se trata de bonos emitidos por el Gobierno Federal de los Estados Unidos Mexicanos en el extranjero y cotizados en moneda extranjera (United Mexican States), comúnmente, la negociación de estos valores es realizada en su mayor parte en los mercados OTC y en los mercados norteamericanos en donde los bancos e intermediarios extranjeros son los principales proveedores de liquidez. Estos bonos se conceptualizan como instrumentos de deuda de largo plazo con cargo

[6]Valor Nominal - Es aquél sobre el cual se emite un título o valor y cuyo importe figura escrito en el mismo.

al Gobierno Federal de los Estados Unidos Mexicanos, los cuales son emitidos en el extranjero y su vencimiento generalmente varía entre los 5 y 10 años.

- ⋆ **BORHIs:** Un Bono Respaldado por Hipotecas (BORHI) es un Certificado Bursátil producto de una bursatilización de un conjuto de créditos hipotecarios para vivienda originados por una SOFOL, SOFOM[7] o un banco comercial. Es un instrumento financiero de largo plazo, denominado en udis o en pesos y que paga mensualmente tanto intereses a una tasa fija como principal, sin ser el segundo una obligación excepto en la fecha de vencimiento.

- ⋆ **BONOS SUBORDINADOS:** Son obligaciones emitidas por empresas bancarias y financieras. Su plazo de vigencia debe ser inferior a cuatro años emitiéndose generalmente a dos. Su emisión es mediante oferta pública y no pueden ser pagados antes de su vencimiento. En caso de que la empresa emisora se encuentre en una situación financiera desfavorable, el directorio del Banco Central de Reserva puede darle al tenedor del bono la posibilidad de convertir dicho título en acciones de la misma empresa con la finalidad de capitalizarla.

- ⋆ **BONOS CUPON CERO:** Se trata de aquellas obligaciones en las que se acumulan los intereses que serán pagados en el momento del vencimiento del préstamo, o en las fechas previstas en que tenga lugar la amortización del principal.

- ⋆ **BONOS BASURA:** Son obligaciones que se caracterizan por tener un alto riesgo financiero y una alta rentabilidad, comúnente son conocidos en algunos países como “junk-bonds” y generalmente son ubicados en una categoría baja por las empresas calificadoras de riesgo.

- ⋆ **BONOS INTERNACIONALES SIMPLES:** Se caracterizan por ser emitidos en la moneda del país donde serán colocados, efectúandose dicha colocación a través de un prestatario extranjero. Este tipo de bonos toman diferentes denominaciones de acuerdo al país donde son colocados, por ejemplo en Estados Unidos se denominan “Yankee Bonds”, en Japón “Samurai”, en España “Matador”, en Gran Bretaña “Bulldog”, entre otros.

3.2.2. Instrumentos Financieros de Renta Variable

Un instrumento de renta variable es aquél que no ofrece ni garantiza pagos fijos periódicos, el instrumento representativo de este grupo son las acciones; sin embargo, se incorpora a todos aquellos instrumentos cuya rentabilidad depende de diversos factores ligados principalmente a las ganancias y a las expectativas sobre las empresas emisoras.

El valor de una acción depende de los flujos de efectivo que produce, la tasa de descuento que se les aplique y a su vez del momento en que se reciben dichos flujos. En el caso de los instrumentos de renta fija los flujos de efectivo son conocidos (con pequeñas variaciones), a diferencia de las acciones en donde los flujos corresponden a los dividendos que se reciben por poseer el título accionario (realmente una fracción del título), los cuales se relacionan su vez con las utilidades de la empresa así como la política de dividendos y retención de utilidades que la misma tenga.

Al considerar una inversión en el mercado variable se deben contemplar los siguientes componentes:

[7] SOFOL - Sociedad Financiera de Objeto Limitado, tiene por objeto otorgar créditos o financiamiento para la planeación, adquisición, desarrollo o construcción de todo tipo de bienes muebles e inmuebles, a sectores o actividades específicos, es decir, atienden a aquellos sectores que no han tenido acceso a los créditos ofrecidos por los intermediarios financieros tradicionales, como los bancos.
SOFOM - Sociedad Financiera de Objeto Múltiple, es una entidad financiera que a través del fondeo en instituciones financieras o emisiones públicas de deuda, obtienen recursos para otorgar crédito al público de diversos sectores, además realizan operaciones de arrendamiento y factoraje financiero.

- Horizonte de inversión: Generalmente se obtienen rendimientos al considerar un periodo entre uno y tres años en el mercado de acciones.

- Diversificación: No concentrar la inversión en una sola acción o en un único sector económico, es decir, abrir la posibilidad de distribuir la inversión en diferentes sectores.

- Riesgo: Por el simple hecho de invertir en el mercado accionario se asume automáticamente un riesgo (para nuestro interés riesgo de pérdida), el riesgo está altamente ligado al concepto de diversificación ya que al diversificar un portafolio de inversión se distribuye el riesgo asociado del mismo a cada acción que lo compone, evitando así la existencia de fluctuaciones extremas en el diferencial riesgo-rendimiento.

Por lo tanto, la rentabilidad que otorgan estos instrumentos es difícil de proyectar pues no depende del pago de tasas de interés, sino de factores financieros de la empresa y del mercado en el que pueden variar según el entorno económico. Es por ello que se debe hacer un análisis fundamental para elegir la cantidad y el tipo de acciones en las que se desea llevar a cabo la inversión; este análisis puede ser desagregado en tres secciones generales:

1. Nivel Empresa: Este análisis es de suma importancia ya que la empresa es la receptora de los fondos a invertir, por lo que se debe hacer estudios más específicos sobre su situación financiera así como la calidad en su administración.

2. Nivel industria: Las características específicas del entorno económico para una determinada industria o sector, afectan en forma similar a la mayoría de las empresas pertenecientes a esa rama de la economía. Es por ello que los factores demográficos y sociales, así como el ciclo de vida de la industria son factores que deben analizarse en esta etapa.

3. Economía Global: La mayoría de las acciones a largo plazo tienden a comportarse de manera similar entre ellas, esto es porque siguen los movimientos de la economía global y para los inversionistas es indispensable identificar cuáles de ellas siguen este patron. Algunos de los factores que son objeto de estudio de este rubro son las tasas de interés e inflación, la deuda pública y algunos indicadores macroeconómicos.

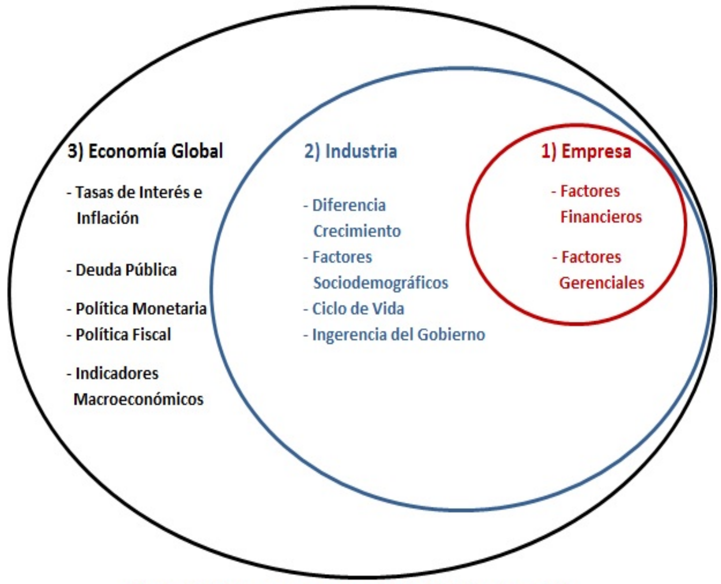
El siguiente cuadro representa los distintos factores de acuerdo al sector en estudio.

3.2.3. Instrumentos Financieros Derivados

Los instrumentos financieros derivados surgen como resultado de la necesidad de cobertura ante el riesgo, es por ello que su finalidad es distribuir el riesgo que resulta de movimientos inesperados en el precio del subyacente entre los participantes que quieren disminuirlo y aquellos que desean asumirlo. Los productos derivados que se operan en el mercado y los más conocidos se enlistan a continuación así como sus principales características.

- <u>Futuros</u>: Un contrato de futuros se dice que es un instrumento lineal [8], el cual obliga al propietario a comprar un activo específico a un precio de ejercicio especificado en el momento de vencimiento del contrato. Se llevan a cabo en un mercado altamente regulado y este tipo de contratos se pueden liquidar en cualquier momento antes de su vencimiento, al tomar la posición contraria a la inicialmente tomada.

[8] Al asumir la interacción entre dos partes en un instrumento financiero, se dice que es lineal si se cumple la relación de ganancia-pérdida; esto es, la ganancia de una parte debe ser equivalente a la pérdida de la otra parte y viceversa.



Cuadro 3.1 Factores por sector del Análisis Fundamental

- Warrant: Un Warrant es un instrumento bursátil por medio del cual el emisor otorga al tenedor del mismo contra el pago de una prima, el derecho de comprarle o venderle al propio emisor un número determinado de valores de referencia dentro de un plazo específico y a un precio establecido, comúnmente llamado precio de ejercicio. En un mercado primario existen dos partes en el warrant, el emisor y el tenedor; mientras que en un mercado secundario, el warrant puede ser vendido por el primer tenedor a un segundo tenedor y así sucesivamente.

  En México a diferencia de otros países, se tiene previsto que los warrants sólo pueden ser emitidos por Casas de Bolsa, Bancos y empresas sobre sus propias acciones, por lo que las demás personas físicas y morales sólo pueden comprar y vender los que hubiesen adquirido con anterioridad. Cabe mencionar que el warrant es un instrumento del mercado de capitales, el cual debe listarse y operarse exclusivamente en bolsa.

- Forward: El contrato forward obliga a su propietario a comprar un activo dada una fecha específica y un precio determinado al inicio del contrato, se opera usualmente entre dos instituciones financieras o entre una institución financiera y alguno de sus clientes. Además establece en el momento de suscripción, la cantidad y el precio de un activo subyacente que será intercambiado en una fecha posterior.

  En el forward una de las partes tomará una posición larga y acuerda con la otra comprar un activo subyacente a cierta fecha en el futuro a un precio especificado con anticipación; mientras que la contraparte está de acuerdo en asumir una posición corta y acuerda vender el activo a la misma fecha y al mismo precio. Si al vencimiento del contrato el precio actual es mayor al de ejercicio, el propietario tendrá una utilidad y si el precio es menor tendra una pérdida, por lo que al igual que el futuro se considera un instrumento financiero lineal.

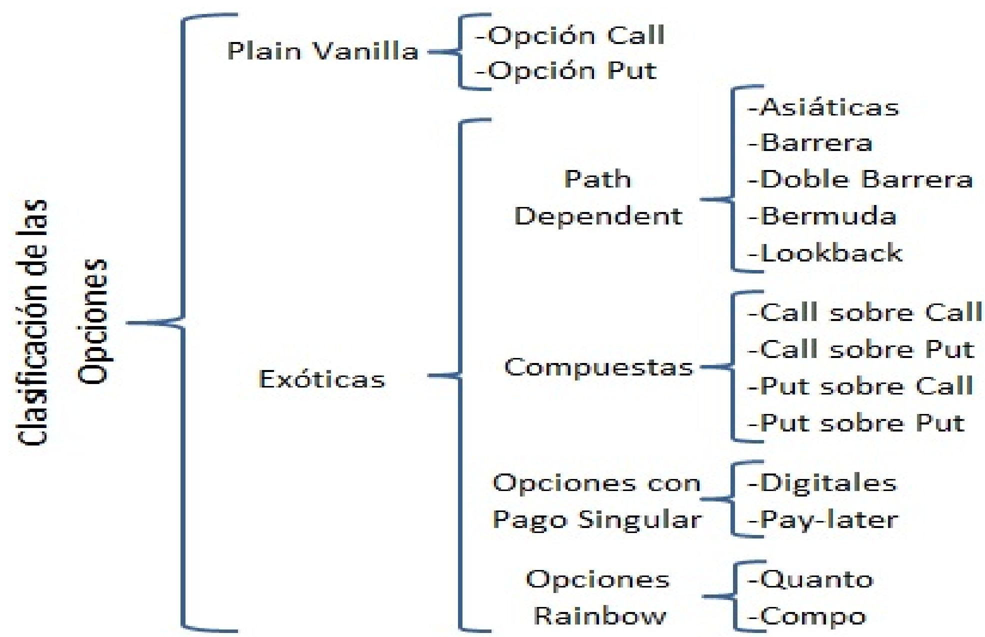
- Swaps: Se trata de una serie consecutiva de contratos adelantados convenidos conforme a las necesidades particulares de quienes lo celebran. Esta clase de contratos no necesariamente implican la entrega del subyacente del que depende el Swap, sino de compensaciones en efectivo. Aunque representan una serie de contratos forward, el riesgo crediticio asociado a un swap es menor que en un contrato forward del mismo plazo, y a su vez, mayor que un contrato de futuros.

  Un swap obliga a dos partes a intercambiar flujos específicos de efectivo en intervalos de tiempo, el más común es el swap de tasas de interés donde el subyacente asociado corresponde a la tasa de interés.

- Opciones: Se trata de un instrumento no lineal, ya que este contrato da al propietario un derecho (más no la obligación) para comprar un activo "*opción call*" o vender un activo "*opción put*" en un futuro a un precio pactado en la fecha de suscripción. De manera muy general y de acuerdo con los derechos que otorgan las opciones, existen dos tipos:

  1) Opción de Compra (Call): Permite al adquiriente beneficiarse si aumenta el precio del activo subyacente, limitando al mismo tiempo su pérdida al monto de la prima si dicho precio disminuye.
  2) Opción de Venta (Put): Permite al adquiriente beneficiarse si disminuye el precio del activo subyacente, limitando al mismo tiempo su pérdida al monto de la prima si dicho precio aumenta.

  El mundo de las opciones tiene una gran diversidad en el mercado, sin embargo es posible hacer una clasificación general de las opciones.



Cuadro 3.2 Clasificación de Opciones

Opciones Path Dependent: En este tipo de opciones el valor de la opción al vencimiento depende no sólo del valor que alcance el subyacente al vencimiento, sino también de su evolución.

- **Opciones Asiáticas**: Son opciones en las que su valor intrínseco[9] al vencimiento está en función del promedio de los valores alcanzados por el subyacente durante toda o parte de la vida de la opción.
- **Opciones Barrera**: Se refiere a las opciones en las que su posibilidad de ejercicio dependerá de que el subyacente alcance o no un determinado nivel (barrera) durante un cierto periodo de tiempo. Si esto ocurre, la opción condicional se convierte en una opción de compra o de venta simple.
- **Opciones Lookback**: El valor de la opción dependerá del precio máximo o mínimo alcanzado por el subyacente durante un periodo determinado. La finalidad de estos contratos es que el poseedor de la opción pueda beneficiarse de las cotizaciones pasadas según le sean más favorables.
- **Opciones Bermuda**: Este tipo de opciones se sitúan entre una opción europea, cuyo ejercicio sólo puede ser al vencimiento, y una americana, con ejercicio en cualquier momento antes de la fecha de vencimiento. Las opciones bermudas sólo pueden ser ejercidas de forma anticipada en determinadas fechas a lo largo de su vida, suele utilizarse en emisiones de *warrants* sobre acciones, y una de sus características es que su precio de ejercicio puede ir aumentando con el paso del tiempo.
  Además, si cotizan en mercados organizados se denominan *opciones japonesas* (son opciones sobre índices bursátiles).

Opciones Compuestas: Se trata de opciones que tienen como subyacente el valor de otra opción, se les conoce también como *Split fee options* porque hay un pago debido a la opción en sí y otro por la opción subyacente. Se plantean básicamente cuatro combinaciones: call sobre call, call sobre put, put sobre call y put sobre put.
Es importante mencionar que el precio de las opciones compuestas resulta ser inferior al de las opciones tradicionales *(plain Vanilla)*, pero que si son ejercidas a vencimiento, el costo total es mayor debido a la suma de las dos primas. Este tipo de opciones suelen utilizarse en la cobertura de riesgos cuando la probabilidad de ocurrencia es baja.

Opciones con Pago Singular:

- **Opciones Digitales**: También llamadas opciones apuestas u opciones binarias, son opciones con pago singular y con rendimiento discontinuo. El tipo más sencillo de opciones binarias es la de todo o nada *"cahs or nothing option"*.
- **Opciones pay-later**: Son opciones cuya prima es pagada al vencimiento únicamente si se cumplen ciertos requisitos, pertenecen al grupo de pago singular con pago de primas diferido. La prima es pagada al momento de ser ejercidas, estando el comprador obligado a ejercerlas siempre que la opción se encuentre *"in the money"*, aunque materialice una pérdida como consecuencia del pago diferido de la prima.
  En el caso contrario, es decir, si al vencimiento la opción esta *"out the money"* el comprador no tendrá que pagar cantidad alguna por la opción.

[9] El valor intrínseco de una opción es la ganancia que resulte de ejercer la opción, este valor es positivo cuando la opción está in the money. La relación entre el precio spot (precio del subyacente) y el precio strike (precio de ejercicio) determina el estado en que se encuentra la opción, por ejemplo, una opción call se encuentra "in the money" cuando el spot es mayor al stike. Si en la opción call el precio spot es igual al strike, se dice que la opción está "at the money"; si por el contrario, el spot es inferior al strike se dice que la opción está "out the money".

Opciones Rainbow: Se refiere a aquellas opciones que tienen más de un activo subyacente. Se distinguen dos tipos básicos de opciones rainbow, en caso de que no actúe el tipo de cambio entre divisas se denominan opciones rainbow con correlación de primer orden, y en caso contrario, se llaman opciones rainbow con correlación de segundo orden.

1) En las opciones rainbow con correlación de primer orden, su valoración depende directamente de los coeficientes de correlación entre los diferentes activos subyacentes.
   Dentro de este tipo de opciones destacan las siguientes:

   Opciones Exchange: Son opciones sobre activos intercambiables, ya que permiten al poseedor cambiar un activo por otro activo.

   Opciones "el mejor de dos": Se refiere a las opciones que entregan el mejor de dos activos, es decir, al vencimiento entregan a su comprador el activo que presente mayor valor.

   Opciones "el peor de dos": Se refiere a las opciones que entregan el peor de dos activos, es decir, al vencimiento entregan a su comprador el activo de menor valor.

   "Opciones Spread": Se les conoce también como opciones diferenciales, ya que son opciones con variaciones sobre el tipo de subyacente, constituidas por un diferencial entre dos parámetros. Su función de pago[10] vendrá dado por la diferencia de rentabilidad, precios o cualquier otro parámetro entre dos activos.

2) Por otra parte, dentro de las opciones rainbow con correlación de segundo orden se desarrollan las opciones conocidas como **quanto**[11]. Se trata de opciones denominadas sobre una determinada divisa y que generan rendimiento en otra moneda. Los resultados son iguales que los de una opción estándar pero con la diferencia de hacerlo en una divisa que no es la misma en la que se expresa el subyacente, es por lo que este tipo de opciones permite aislar riesgos asociados al tipo de cambio.

   Opciones quanto con tipo de cambio variable: Son opciones quanto en las que el valor del subyacente y el precio de ejercicio están denominados en una divisa extranjera,pero el pago final de la opción a la fecha de vencimiento se realiza en una moneda doméstica al tipo de cambio vigente en ese momento.

   Opciones quanto con tipo de cambio fijo: Su principal característica es que el tipo de cambio aplicable al vencimiento de la opción se fija desde su emisión, éstas son las primeras opciones quanto que surgieron en el mercado (true quanto).

   Opciones compo: Se trata de opciones quanto cuyo subyacente es extranjero y denominado en su divisa, pero convertido en el momento de expirar la opción, a la moneda nacional al tipo de cambio vigente.

3.3. Valuación de Instrumentos Financieros de Renta Fija

Existe un gran número de metodologías para valorar las inversiones que corresponden a los títulos de renta fija, en esta sección se presenta una valuación del precio para BONOS de tasa de interés fija así como para los denominados CETES.

Es importante mencionar que a diferencia de los BONOS, los Certificados de la Tesorería no devengan intereses debido a que su valor cupón es cero. Sin embargo, la tasa de interés del título está implícita en la relación que existe entre su precio de adquisición, el valor nominal del título y su plazo a vencimiento.

[10] Función de pago - Se refiere al valor de la opción a fecha de vencimiento, comúnmente se le conoce como payoff.

[11] Quanto - Es una síntesis del nombre completo de este tipo de opciones *"quanty adjusting options"*.

La metodología trascendental es la referida a la valuación de BONOS, donde posteriormente se tiene como caso particular la técnica de valuación de los Certificados de Tesorería (CETES).

3.3.1. Metodología General para la valuación de BONOS y CETES

Los Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal con tasa de interés fija (BONOS) son préstamos por parte del inversionista al estado, un BONO se compone principalmente por los siguientes elementos.

- Valor Nominal (VN)
- Plazo: Se refiere a la temporalidad a la que son emitidos los títulos, se pueden emitir a cualquier plazo siempre y cuando este sea múltiplo de 182 días.
- Periodo de Interés: Los títulos devengan intereses en pesos cada seis meses. Esto es, cada 182 días o al plazo que sustituya a éste en caso de días inhábiles.
- Tasa de Interés: La tasa de interés que pagan estos títulos es fijada por el Gobierno Federal en la emisión de la serie y es dada a conocer al público inversionista en la Convocatoria a la Subasta de Valores Gubernamentales y en los anuncios ("esquelas") que se publican en los principales diarios cada vez que se emite una nueva serie.
- Pago de Intereses: Los intereses se calculan considerando los días efectivamente transcurridos entre las fechas de pago de los mismos, tomando como base años de 360 días, y se liquidan al finalizar cada uno de los periodos de interés (comúnmente se le conoce como Pago Cupón).

La expresión general para valuar un BONO es la siguiente:

$$P = \sum_{j=1}^{k} (C_j F_j) + (F_k VN) - \left(C_1 \frac{d}{N_1} \right) \tag{3.1}$$

Donde:

- P: Precio limpio del BONO
- VN: Valor nominal del título
- K: Número de cupones por liquidar, incluyendo el vigente
- d: Número de días transcurridos del cupón vigente
- N_j: Plazo en días del cupón j
- TC: Tasa de interés anual del cupón
- r_j: Tasa de interés para descontar el cupón j
- C_j: Cupón j, el cual se obtiene de la siguiente manera:

$$C_j = VN \frac{N_j TC}{360}$$

- F_j: Factor de descuento para el flujo de efectivo j, el cual se obtiene como:

$$F_j = \frac{1}{\left(1 + r_j \frac{N_j}{360}\right)^{j - \frac{d}{N_1}}}$$

De la ecuacion (3.1) se desprende que el precio de los BONOS está compuesto por tres elementos diferentes: **el valor presente de los cupones, el valor presente del principal, y los intereses devengados del cupón vigente**. Asimismo, se puede observar que cada uno de los cupones, así como el principal están descontados por una tasa de interés diferente, por lo que es necesario conocer o poder estimar una tasa de interés para cada factor de descuento.

Como se mencionó anteriormente las subastas de los bonos se realizaron a precio limpio, por lo que para liquidar estos títulos se tienen que considerar los intereses devengados del cupón vigente.

$$I_{dev_i} = VN \frac{dTC}{360}$$

Donde:

- I_{dev_i}: Son los intereses devengados (redondeados comúnmente a 12 decimales) durante el periodo i
- d: Se refiere a los días transcurridos entre la fecha de emisión o último pago de intereses $(i-1)$, según corresponda y la fecha de valuación

Para determinar el precio limpio del BONO a través del rendimiento a vencimiento del mismo, una vez que su rendimiento a vencimiento es un valor conocido, es necesario descontar con la misma tasa r_j todos los flujos de efectivo del instrumento (cupones y principal). En otras palabras, si se conoce el rendimiento a vencimiento del título, la ecuación (3.1) se simplifica considerablemente debido a que las tasas r_j para descontar los diferentes flujos a valor presente pasan a ser la misma en todos los factores de descuento.
Por lo que si se tiene que el plazo en días de todos los cupones es el mismo, la ecuación 3.1 puede ser expresada de la siguiente forma:

$$P = \left(\frac{C + C\left[\frac{1}{R} - \frac{1}{R(1+R)^{k-1}}\right] + \frac{VN}{(1+R)^{k-1}}}{[1+R]^{(1-\frac{d}{182})}} \right) - C\frac{d}{182} \tag{3.2}$$

Donde:

$C = VN\frac{182TC}{360}$

$R = r\frac{182}{360}$ con r: rendimiento a vencimiento anual

Por otra parte, el precio de un CETE se puede determinar con la ecuación (3.1) con la particularidad de que no se pagan cupones ($C = 0$); sin embargo, es posible calcular su precio a partir de su tasa de rendimiento o de su tasa de descuento llegando al mismo resultado.

Si se considera la tasa de rendimiento del Certidifado de Tesorería, su precio corresponde al valor nominal descontado a la fecha de valuación, esto es:

$$P = \frac{VN}{\left(1 + \frac{rt}{360}\right)} \tag{3.3}$$

Donde:

- P: Precio del CETE (comúnmente se redondea a 7 decimales)

- VN: Valor nominal del titulo en pesos

- r: Tasa de rendimiento anual

- t: Plazo en días del CETE

Al considerar una tasa de descuento b, la relación entre la tasa de descuento y de rendimiento se expresa como sigue:

$$b = \frac{r}{1 + \frac{rt}{360}}$$

Despejando r:

$$r = \frac{b}{1 - \frac{bt}{360}} \tag{3.4}$$

Al sustituir la ecuación (3.4) en la ecuación (3.3) se obtiene la fórmula para calcular el precio de un CETE a partir de su tasa de descuento:

$$P = VN\left(1 - \frac{bt}{360}\right) \tag{3.5}$$

<u>Prueba de (3.2)</u>

Partimos de la expresión general para valuar un BONO (3.1)

$$P \;=\; \sum_{j=1}^{k}(C_jF_j) + (F_kVN) - \left(C_1\frac{d}{N_1}\right)$$

Que puede reescribirse como sigue:

$$P \;=\; \sum_{j=1}^{k}\left(\frac{C_j}{\left(1 + r_j\frac{N_j}{360}\right)^{j-\frac{d}{N_1}}}\right) + \left(\frac{VN}{\left(1 + r_k\frac{N_k}{360}\right)^{k-\frac{d}{N_1}}}\right) - \left(C_1\frac{d}{N_1}\right)$$

Donde el valor del cupón se determina con la expresión $C_j = VN\frac{N_jTC}{360}$; sin embargo al suponer que el rendimiento al vencimiento del bono es conocido y además el plazo en días es el mismo para todos los cupones del bono, se hace lo siguiente:

Sean $N_j = N$ *y* $r_j = r \Rightarrow C_j$ *es constante*

Al denotar: $R = r_j\frac{N_j}{360} = r\frac{N}{360}$ *y* $C = C_j = VN\frac{NTC}{360}$, *el precio del Bono se determina bajo las siguientes equivalencias.*

$$
\begin{aligned}
P &= C\sum_{j=1} k\,(1+R)^{\frac{d}{N}-j} + VN\,(1+R)^{\frac{d}{N}-k} - \left(C\frac{d}{N}\right)\\
&= C\,(1+R)^{\frac{d}{N}}\sum_{j=1} k\,(1+R)^{-j} + VN\,(1+R)^{\frac{d}{N}-k} - \left(C\frac{d}{N}\right)\\
&= C\,(1+R)^{\frac{d}{N}}\,(1+R)^{-1}\left(\frac{1-(1+R)^{-k}}{1-(1+R)^{-1}}\right) + VN\,(1+R)^{\frac{d}{N}-k} - \left(C\frac{d}{N}\right)\\
&= (1+R)^{\frac{d}{N}-1}\left[C\left(\frac{1-(1+R)^{-k}}{\frac{R}{1+R}}\right) + VN\,(1+R)^{-k+1}\right] - \left(C\frac{d}{N}\right)\\
&= (1+R)^{\frac{d}{N}-1}\left[\frac{C\,(1+R)}{R}\left(1-(1+R)^{-k}\right) + VN\,(1+R)^{-(k-1)}\right] - \left(C\frac{d}{N}\right)\\
&= (1+R)^{\frac{d}{N}-1}\left[\frac{C}{R}\left(R+1-(1+R)^{-(k-1)}\right) + VN\,(1+R)^{-(k-1)}\right] - \left(C\frac{d}{N}\right)\\
&= \left(\frac{C + C\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R(1+R)^{k-1}}\right) + \frac{VN}{(1+R)^{k-1}}}{(1+R)^{1-\frac{d}{N}}}\right) - \left(C\frac{d}{N}\right) \blacksquare
\end{aligned}
$$

3.3.2. Medidas de Sensibilidad para BONOS

Las medidas de sensibilidad son valores que permiten estimar los cambios en el precio de los instrumentos cuando cambian los factores de riesgo. Al tratarse de instrumentos financieros de renta fija como lo son los Bonos, la Duración y la Convexidad son dos medidas de sensibilidad para estos instrumentos.

Por un lado la duración muestra el cambio porcentual del precio de un Bono ante cambios en la tasa de rendimiento, mientras que la convexidad se utiliza cuando se desea estimar de manera más precisa los cambios del precio ante cambios en las tasas de rendimiento, principalmente cuando los cambios en la tasa de rendimiento son de mayor magnitud.

Es importante estudiar los conceptos de duración y convexidad debido a que la variabilidad de las tasas de interés modifica el valor de una posición en renta fija. Por ejemplo, cuando se incrementan los réditos los tenedores de bonos sufren pérdidas ya que la relación entre el interés y el precio del Bono es inversa. La importancia económica de esta relación emerge cuando se piensa que la inversión se incrementa cuando se tienen tasas de interés bajas, entre otros factores.

Así la duración y la convexidad son dos medidas que sirven para estimar las variaciones en los valores de los portafolios de Bonos y de ahí que sean una herramienta en la administración del riesgo de tasas de interés.

3.3.3. Duración y Duración Modificada

El precio P de un Bono es el agregado de los valores presentes de los flujos futuros de efectivo más el valor nominal, al suponer que dicho precio depende únicamente de la tasa de mercado al vencimiento

r, este queda determinado por la siguiente expresión:

$$P = P(r) = \sum_{t=1}^{k} C_t \left(1 + r\frac{N}{360}\right)^{-t} + VN \left(1 + r\frac{N}{360}\right)^{-k} \tag{3.6}$$

Donde:

- P: Precio del bono
- VN: Valor nominal o facial del bono
- k: Número de cupones que paga el bono
- C_t: Cupón pagado en el periodo t, $1 \leq t \leq k$
- r: Tasa de mercado al vencimiento
- N: Días de un periodo de pago de cupón (plazo del cupón)

Como se mencionó anteriormente, la duración indica la sensibilidad de los cambios relativos en el precio de un instrumento de renta fija ante cambios en la tasa de interés de mercado. Este grado de sensibilidad es consecuencia de la aplicación del teorema de Taylor.

$$dP = \frac{dP}{dr}(r - r_0) + o\left(r^2\right)$$

Que aplicado a la ecuacion (3.6) se tiene:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{N}{360}\sum_{t=1}^{k} tC_t \left(1 + r\frac{N}{360}\right)^{-t-1} - \frac{N}{360}kVN\left(1 + r\frac{N}{360}\right)^{-k-1} \tag{3.7}$$

Considerando despreciable el error $o(r^2)$ se tiene la siguiente aproximación:

$$dP = \left[-\frac{N}{360}\sum_{t=1}^{k} tC_t \left(1 + r\frac{N}{360}\right)^{-t-1} - \frac{N}{360}kVN\left(1 + r\frac{N}{360}\right)^{-k-1}\right] \cdot [r - r_0] \tag{3.8}$$

El polinomio de Taylor indica una aproximación local de los valores funcionales. Es decir, se tienen estimaciones de la función $P(r)$ alrededor de la tasa inicial r_0. Mientras mayor sea la distancia entre r y r_0, se tendrá menor exactitud en la aproximación.

Luego, si se divide el cambio del precio dP entre el precio entonces se obtiene el cambio relativo en el valor del bono y con ello se llega a la definición de duración.

$$D = \frac{dP}{P} = -\frac{1}{P}\frac{d}{360}\left[\sum_{t=1} ktC_t \left(1 + r\frac{N}{360}\right)^{-t-1} + kVN\left(1 + r\frac{N}{360}\right) - k - 1\right] \cdot [r - r_0] \tag{3.9}$$

Duración modificada

Esta medida alternativa se define como:

$$D^* = -\frac{1}{P}\frac{dP}{dr}$$

En el caso del bono en estudio se tiene lo siguiente:

$$D^* = \frac{1}{P}\frac{d}{360}\left[\sum_{t=1}^{k} tC_t \left(1+r\frac{N}{360}\right) -t-1 + kVN\left(1+r\frac{N}{360}\right) -k-1\right] \tag{3.10}$$

Entonces los cambios relativos en el valor de un bono son de la forma:

$$\frac{dP}{P} = -D^*[r-r_0]$$

Duración de Frederick Robertson Macaulay

El concepto de *duración* fue desarrollado por Frederick Macaulay en 1938 y hace referencia al vencimiento promedio de la corriente de pagos de un bono. En realidad, consideramos al bono como una cartera formada por pagos individuales y dado que se desea calcular el rendimiento de esta cartera, la solución se determina a través de la media ponderada por los rendimientos de los títulos que la componen.

En este caso la duración es de la forma:

$$D = -\frac{1}{P}\frac{dP}{dr}\left[1+r\frac{N}{360}\right] \tag{3.11}$$

Donde es fácil notar que la duración modificada es la duración de Macaulay descontada un periodo.

<u>Prueba de (3.11)</u>

Sea $N^* = 1, 2, ..., k$ el conjunto de los periodos de pago de cupón (si los cupones son semestrales entonces N^*=*1 semestre, 2 semestres, ..., k semestres*). Nos interesa encontrar el porcentaje en que contribuye cada flujo de efectivo al valor del bono. Consideremos el conjunto F el cual se compone de las siguientes contribuciones.

$$F = \left\{\frac{1}{P}C_t\left[1+r\frac{N}{360}\right]^{-t}, t = 1, 2, ..., k\right\} \cup \left\{\frac{1}{P}VN\left[1+r\frac{N}{360}\right]^{-k}\right\}$$

Al ponderar cada elemento del conjunto N^* con el elemento correspondiente del conjunto F se obtiene el promedio ponderado al cual denotaremos como D_k.

$$D_k = \sum_{t=1}^{k}\frac{1}{P}C_t\left[1+r\frac{N}{360}\right]^{-t} t + kVN\left[1+r\frac{N}{360}\right]^{-k-1}$$

Nótese que el valor de D_k está en términos de los periodos de pago por lo que debe anualizarse multiplicándose por $\frac{N}{360}$.

$$\frac{d}{360}D_k = \frac{\left[1+r\frac{N}{360}\right]}{P}\cdot\frac{N}{360}\sum_{t=1}^{k} tC_t\left[1+r\frac{N}{360}\right]^{-t-1} + kVN\frac{N}{360}\left[1+r\frac{N}{360}\right]^{-k-1} = D$$

Reescribiendo la expresión anterior y usando la ecuación (3.7) se tiene:

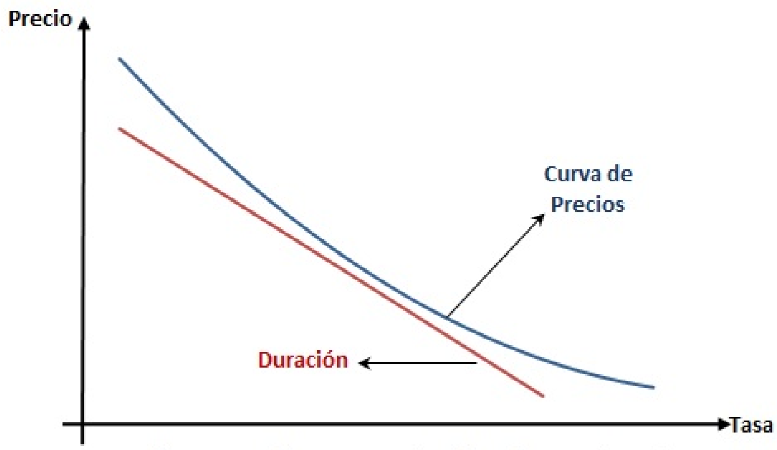
$$\Rightarrow D = -\frac{1}{P}\frac{dP}{dr}\left[1+r\frac{N}{360}\right] \blacksquare$$

De esta manera puede darse la definición de la duración de Macaulay como el indicador del tiempo promedio en el que el tenedor del bono obtiene los beneficios del mismo.

La duración presenta propiedades que en ocasiones dependen de las características del bono como se muestran en el siguiente listado:

1. La duración es menor o igual que el plazo al vencimiento del bono. La igualdad se presenta cuando el bono no paga cupones (bono cupón cero).
2. A mayor tiempo al vencimiento mayor será la duración.
3. A menor valor del cupón se tendrá una duración mayor.

En la siguiente gráfica se muestra el precio de un bono a distintos niveles de tasa de rendimiento y su aproximación a través de la Duración Modificada.



Gráfica 3.1 Duración como aproximación a la Curva de Precios

3.3.4. Convexidad

Cuando las tasas de interés varían en demasiados puntos base [12], la duración deja de ser una buena medida de sensibilidad y se recurre a la convexidad; lo anterior debido a que la duración es en realidad una aproximación lineal. Cuando se tienen fluctuaciones bruscas en el tipo de interés, el resultado que arroja la duración pierde efectividad por lo que la alternativa es estimar el valor del bono bajo un enfoque cuadrático.
Para ello, se considera el polinomio de Taylor de segundo orden como se muestra.

$$dP = \frac{dP}{dr}(r - r_0) + \frac{1}{2}\frac{d^2P}{dr^2}(r - r_0)^2 + o(r^3)$$

Al considerar $o(r^3)$ despreciable y desarrollando la expresión anterior de acuerdo a la ecuación (3.6) se obtiene lo siguiente:

$$\frac{d^2P}{dr^2} = \sum_{t=1}^{k} t\,(t+1)\,C_t\left(1 + r\frac{N}{360}\right)^{-t-2}\left(\frac{N}{360}\right)^2 + k\,(k+1)\,VN\left(1 + r\frac{N}{360}\right)^{-k-2}\left(\frac{N}{360}\right)^2 \tag{3.12}$$

[12]En el lenguaje financiero suele utilizarse el término puntos base cuando se hace referencia a movimientos porcentuales en la tasa de interés, 100 puntos base equivalen a 1 %.

Nótese que de la ecuación (3.7) $P(r)' < 0$ por lo que el precio es una función decreciente, mientras que de la ecuación (3.12) sucede que $P(r)'' > 0$ lo que significa que $P(r)$ es una fución convexa. La convexidad entonces se define de la siguiente manera:

$$C = \frac{1}{P}\frac{d^2P}{dr^2} = \frac{1}{P}\left(\frac{N}{360}\right)^2\left[\sum_{t=1}^{k} t\,(t+1)\,C_t\left(1+r\frac{N}{360}\right)^{-t-2} + k\,(k+1)\,VN\left(1+r\frac{N}{360}\right)^{-k-2}\right] \quad (3.13)$$

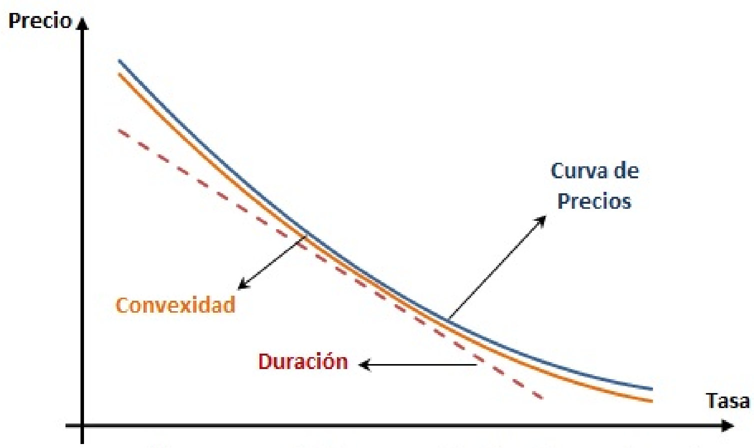
Al igual que la duración, la convexidad cuenta con algunas propiedades relevantes:

1. La convexidad varía de forma inversa con la tasa de mercado. Es decir si la tasa se incrementa la convexidad disminuye y viceversa.

2. La convexidad aumenta cuando disminuye el cupón manteniendo fijos el plazo y la tasa de mercado.

3. Dadas la tasa de mercado y la duración modificada, a menor tasa cupón menor será la convexidad. Esto implica que los bonos cupón cero serán aquellos que tengan la menor convexidad dada una duración modificada.

El siguiente gráfico muestra el precio de un bono a distintos niveles de tasa de rendimiento y su aproximación a través de la Convexidad.



Gráfica 3.2 Convexidad como aproximación a la Curva de Precios

3.4. Valuación de Instrumentos Financieros de Renta Variable

Como se describió anteriormente, la valoración de una acción implica el análisis de factores económicos globales, industriales y de la misma empresa. Lo cual la mayoría de las veces es difícil de hacer, ya que deben considerarse elementos cualitativos que se orientan hacia la gestión y administración de la propia empresa, así como la toma de decisión por parte de los expertos de acuerdo a su experiencia, además de los objetivos y el enfoque que tome el negocio.

A partir de este momento y mientras se trate de las acciones, se considera que estas cotizan en un mercado profundo[13], y realmente lo que se busca valuar es un portafolio compuesto de acciones cuya finalidad es diversificar el riesgo asumido por el inversionista. Para ello se considera un portafolio que contiene n acciones distintas que cotizan en el mercado, donde cada una de ellas se asocia implícitamente a un rendimiento y a una volatilidad; es indispensable que haya una correcta estimación de estos parámetros ya que en la metodología que se presenta, estos se suponen conocidos (que han sido estimados anteriormente).

$$P = w_1X_1 + w_2X_2 + w_3X_3 + \ldots + w_nX_n$$

Donde:

- X_i: Se refiere al activo X_i que compone al portafolio P
- w_i: Corresponde al porcentaje a invertir en el activo X_i

Al suponer que se tiene información de la acción X_i hasta el instante t_i, la estimación de su rendimiento correspondiente puede ser (bajo la ley de los grandes números) como sigue:

$$r_i = E[X_i] = \frac{1}{t_i}\sum_{j=1}^{i-1} R_{X_{t_{j+1}}} = \frac{1}{t_i}\sum_{j=1}^{i-1} ln\left(\frac{X_{t_{i+1-j}}}{X_{t_{i-j}}}\right)$$

Para estimar la volatilidad σ_i de la serie de precios de una acción, comúnmente se considera la desviación estándar muestral de los rendimientos $R_{X_{t_i}}$, en el caso donde la volatilidad no es constante se puede estimar bajo algún modelo auto-regresivo (ARIMA, ARCH, GARCH, entre otros).

Entonces el rendimiento y volatilidad del portafolio quedan determinados por las siguientes expresiones:

$$r_p = E[P] = E\left[\sum_{i=1}^{n} w_iX_i\right] = \sum_{i=1}^{n} w_iE[X_i] = \sum_{i=1}^{n} w_ir_i \tag{3.14}$$

$$\sigma_p^2 = Var(P) = Var\left(\sum_{i=1}^{n} w_iX_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_iw_j\sigma_{ij} \tag{3.15}$$

Partiendo del supuesto en que los parámetros rendimiento r_i y volatilidad σ_i son conocidos para cada acción X_i que compone el portafolio P; el inversor al tomar una posición racional busca obtener el mayor rendimiento posible al menor riesgo asociado al mismo, de tal manera que se plantea la siguiente función de riesgo-rendimiento:

$$\begin{array}{llcl}
min & \sigma_p^2 & = & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_iw_j\sigma_{ij} \\
s.a. & & & \\
 & r_p & = & \sum_{i=1}^{n} w_ir_i = r^* \\
 & \sum_{i=1}^{n} & = & 1 \ ; \ w_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1,2,3,...,n\}
\end{array}$$

[13]Mercado profundo - Se refiere a un mercado cuya principal característica consiste en mantener una riqueza alta en cuanto a la variedad de instrumentos (en nuestro caso renta variable) que se operan en el mismo, además de que son activos que no presentan problemas de liquidez.

Donde:

- σ_p: Volatilidad del portafolio P

- σ_{ij}: Covarianza entre las acciones X_i y X_j

- r_p: Rendimiento del activo P

- r_i: Rendimiento del activo X_i

- r^*: Rendimiento inicial deseado (valor raíz conocido)

- w_i: Porcentaje de inversión asociado a la acción X_i

- n: Número de acciones que conforman el portafolio

Para encontrar la solución al problema asociado a la función anterior, se recurre al método de multiplicadores de Lagrange[14] ya que se trata de un problema de optimización. Con lo que es equivalente a resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial w_i}\left(\sigma_p^2 - \lambda G\left(w_i, r_i, r^*\right)\right) \\ \\ \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\sigma_p^2 - \lambda G\left(w_i, r_i, r^*\right)\right) \end{array} \right\} = 0$$

Donde:

- $G(w_i, r_i, r^*)$: Es el conjunto de restricciones al que se encuentra la función objetivo σ_p^2

De acuerdo con las ecuaciones (3.14) y (3.15) se desarrolla el sistema de ecuaciones anterior.

$$\frac{\partial}{\partial w_k}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} - \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} w_i r_i - r^*\right) - \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} w_i - 1\right)\right) = 0 \tag{3.16}$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} - \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} w_i r_i - r^*\right) - \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} w_i - 1\right)\right) = 0 \tag{3.17}$$

De la expresión (3.16) se obtiene:

$$2\sum_{j=1}^{n} w_j \sigma_{jk} - \lambda r_k - \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad w_1\sigma_1^2 + w_2\sigma_2^2 + w_3\sigma_3^2 + \cdots + w_n\sigma_n^2 = \lambda\left(1 + r_k\right)$$

[14]Este método se usa principalmente en problemas de optimización, donde se desea encontrar los máximos y/o mínimos de funciones de varias variables las cuales están sujetas a una serie de restricciones, en esencia se pasa de un problema restringido con n variables a uno sin restricciones de $n+k$ variables donde k es el número de restricciones.

Al variar el índice k desde 1 hasta n se genera un nuevo sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
w_1\sigma_1^2 + w_2\sigma_2^2 + w_3\sigma_3^2 + \cdots + w_n\sigma_n^2 &= \frac{\lambda}{2}(1+r_1) \\
w_1\sigma_1^2 + w_2\sigma_2^2 + w_3\sigma_3^2 + \cdots + w_n\sigma_n^2 &= \frac{\lambda}{2}(1+r_2) \\
w_1\sigma_1^2 + w_2\sigma_2^2 + w_3\sigma_3^2 + \cdots + w_n\sigma_n^2 &= \frac{\lambda}{2}(1+r_3) \\
&\vdots \\
w_1\sigma_1^2 + w_2\sigma_2^2 + w_3\sigma_3^2 + \cdots + w_n\sigma_n^2 &= \frac{\lambda}{2}(1+r_k) \\
&\vdots \\
w_1\sigma_1^2 + w_2\sigma_2^2 + w_3\sigma_3^2 + \cdots + w_n\sigma_n^2 &= \frac{\lambda}{2}(1+r_n)
\end{aligned}$$

El cual puede reescribirse en forma matricial como sigue:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_3^2 & \cdots & \sigma_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \sigma_{n3} & \cdots & \sigma_n^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \left(\frac{\lambda}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1+r_1 \\ 1+r_2 \\ 1+r_3 \\ \vdots \\ 1+r_n \end{pmatrix} \Rightarrow V_{n\times n} \cdot w_{n\times 1} = \left(\frac{\lambda}{2}\right) \cdot f_{n\times 1}$$

$$\therefore \quad w_{n\times 1} = \left(\frac{\lambda}{2} \cdot V_{n\times n}^{-1} \cdot f_{n\times 1}\right) \tag{3.18}$$

Por otro lado, de la expresión (3.17) se deriva:

$$r^* - \sum_{i=1}^{n} w_i r_i + 1 - \sum_{i=1}^{n} w_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} w_i (1+r_i) = 1 + r^*$$

Que también puede expresarse en forma matricial resultando:

$$(1+r_1, 1+r_2, 1+r_3, \cdots, 1+r_n) \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = 1 + r^* \quad \Rightarrow \quad f_{1\times n} \cdot w_{n\times 1} = 1 + r^* \tag{3.19}$$

Finalmente de las expresiones (3.18) y (3.19) es posible determinar el valor de λ, y una vez que se obtiene el valor de este parámetro los valores que corresponden a los porcentajes a invertir son calculados mediante (3.18).

$$1 + r^* = f'_{1\times n} \cdot \left(\frac{\lambda}{2}\right) \cdot V_{n\times n}^{-1} \cdot f_{n\times 1} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{2\,(1+r^*)}{f'_{1\times n} \cdot V_{n\times n}^{-1} \cdot f_{n\times 1}} \tag{3.20}$$

3.5. Valuación de Productos Financieros Derivados

Los instrumentos derivados son contratos que generan derechos u obligaciones para las partes involucradas, su objetivo principal consiste en eliminar o reducir los riesgos financieros que la administración de la compañía no puede controlar. Este tipo de riesgos se generan por la incertidumbre o inseguridad económica que tiene lugar sobre todo en los países con una economía inestable.
Los derivados resultan ser esenciales para la administración de riesgos ya que pueden reducir los costos, mejorar los rendimientos, y permitir a los inversionistas manejar los riesgos con mayor certidumbre y precisión; cuando son usados con fines especulativos resultan ser instrumentos muy riesgosos, puesto que tienen un alto grado de apalancamiento y son a menudo más volátiles que el propio instrumento subyacente.

Los activos subyacentes pueden ser de distinta naturaleza, dependiendo de las características y necesidades de los compradores y vendedores de derivados; por lo que el subyacente puede estar referido a una acción que cotiza en bolsa, una canasta de acciones, tasas de interés, o bien, indicadores como los índices bursátiles y los inflacionarios. Asimismo, el subyacente puede estar referido a bienes (commodities) como el oro, la gasolina, el trigo, el cafe, etc.

Antes de presentar algunas de las metodologías más comúnes para la valuación de los productos derivados, es importante conocer algunos conceptos básicos para que faciliten su entendimiento, los cuales se presentan en el siguiente sub-apartado.

3.5.1. Conceptos Preliminares

Variable Aleatoria[15]

Al considerar un experimento aleatorio sobre una muestra en el espacio D, una *variable aleatoria* X es una función que asigna un valor real a cada elemento en D. Se dice entonces que para algún conjunto de números reales A, la probabilidad de que X asuma un valor contenido en el conjunto A es igual a la probabilidad de que el resultado del experimento esté contenido en $X^{-1}(A)$; esto es

$$P\{X \in A\} = P(X^{-1}(A))$$

donde $X^{-1}(A)$ es el evento resultante de todos los puntos $d \in D$ tales que $X(d) \in A$.

La *función de distrubución* F de una variable aleatoria X se define para algún número real x por

$$F(x) = P\{X \leq x\} = P\{X \in (-\infty, x]\}$$

Una variable aleatoria X se dice que es *discreta* si el conjunto de sus valores posibles es numéricamente contable, en este caso la función de distribución cumple la siguiente relación

$$F(x) = \sum_{y \leq x} P\{X = y\}$$

Por otro lado, se dice que una variable aleatoria X es *continua* si existe una función $f(x)$ (*función de densidad de probabilidad*), tal que para cualquier conjunto B

$$P\{X \in B\} = \int_B f(x) d_x$$

[15] Las siguientes definiciones corresponden a "Stochastic Processes" de Sheldon M. Ross.

Entonces $F(x) = \int_{\infty}^{\infty} f(x)d_x$, de lo cual se tiene que $f(x) = \frac{d}{dx}F(x)$

La *función de distribución conjunta* F de dos variables aleatorias X y Y se define como

$$F(x,y) = P\{X \leq x, Y \leq y\}$$

Las funciones de distribución de X y Y pueden obtenerse a partir de $F(x,y)$

$$F_x(x) = P\{X \leq x\} = \lim_{y\to\infty} F(x,y) \quad \text{y} \quad F_y(y) = P\{Y \leq y\} = \lim_{x\to\infty} F(x,y)$$

Valor Esperando, Varianza, Covarianza y Esperanza Condicional

El *valor esperado* o *media* de una variable aleatoria X, denotado por $E[X]$ se define como

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} xdF(x) \\ &= \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx & \text{si} X \text{es continua} \\ \sum_x xP\{X = x\} & \text{si} X \text{es discreta} \end{cases} \end{aligned}$$

De manera general, el valor esperado de una función $h(x)$, donde X es una variable aleatoria se expresa como sigue

$$E[h(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} xdF_h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)dF(x)$$

Así mismo, la *varianza* de una variable aleatoria X se define como

$$\begin{aligned} Var(X) &= E\left[(X - E[X])^2\right] \\ &= E[X^2] - E^2[X] \end{aligned}$$

Finalmente, la *covarianza* de dos variables aleatorias X y Y se obtiene

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= E\left[(X - E[X]) \cdot (Y - E[Y])\right] \\ &= E[XY] - E[X]E[Y] \end{aligned}$$

Se dice que dos variables aleatorias X y Y son no-correlacionadas si su covarianza es cero, es decir, $E[XY] = E[X]E[Y]$.

Si X y Y son variables aleatorias discretas, la probabilidad condicional de la función de X dado que $Y = y$, se define para todo y tal que $P\{Y = y\} > 0$ por

$$P\{X = x|Y = y\} = \frac{P\{X = x, Y = y\}}{P\{Y = y\}}$$

La función de distribución condicional de X dado que $Y = y$ se define

$$F(x|y) = P\{X \leq x|Y = y\}$$

Por lo que la *esperanza condicional* de X dado que $Y = y$ se obtiene como

$$E[X|Y=y] = \begin{cases} \int x dF(x|y) & \text{si } X \text{ y } Y \text{ son variables aleatorias continuas} \\ \sum_x xP\{X=x, Y=y\} & \text{si } X \text{ y } Y \text{ son variables aleatorias continuas} \end{cases}$$

Si X y Y tienen una función de densidad de probabilidad conjunta $f(x,y)$, la función de densidad de probabilidad condicional de X dado $Y = y$, se define para todo y tal que $f_y(y) > 0$ por

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_y(y)}$$

y la función de distribución de probabilidad condicional de X dado $Y = y$ para el caso continuo

$$F(x|y) = P\{X \leq x|Y=y\} = \int_{-\infty}^{x} f(x|y)dx$$

Por lo que la esperanza condicional de X dado $Y = y$ en este caso se reescribe como

$$E[X|Y=y] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x|y)dx$$

Una propiedad de la esperanza condicional sumamente importante es que al obtener el valor esperado sobre todos los valores de $Y = y$ de la esperanza condicional $E[X|Y = y]$, resulta equivalente a obtener el valor esperado de la variable X

$$E[X] = E\left[E[X|Y=y]\right] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} E[X|Y=y]f(y)dy & \text{si } X \text{ y } Y \text{ son variables aleatorias continuas} \\ \sum_y E[X|Y=y]P\{Y=y\} & \text{si } X \text{ y } Y \text{ son variables aleatorias discretas} \end{cases}$$

Definición de un Proceso Estocástico

Un *proceso estocástico* $\overline{X} = \{X(t), t \in T\}$ es una colección de variables aleatorias, es decir, para cada t en el conjunto T, $X(t)$ es una variable aleatoria. Donde comúnmente t resulta interpretarse como el tiempo y $X(t)$ el estado del proceco al tiempo t.

Si T es un conjunto numerable se dice que $\overline{X}$ es un proceso estocástico en tiempo discreto, mientras que $\overline{X}$ es un proceso estocástico en tiempo continuo cuando T sea un conjunto continuo.

Un proceso estocástico en tiempo continuo $X\{X(t), t \in T\}$ se dice que tiene *incrementos independientes* si para todo $t_0 < t_1 < t_2 \cdots < t_n$, las variables aleatorias $X(t_1) - X(t_0), X(t_2) - X(t_1), \ldots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ son independientes.

Además se dice que el proceso tiene *incrementos estacionarios* si $X(t+s) - X(t)$ tiene la misma distribución para todo $t \in T$.

Movimiento Browniano y Movimiento Browniano Geométrico con Tendencia

El proceso estocástico $W = (W_t : t \geq 0)$ es un **P**-movimiento browniano si y solo si se cumplen las siguientes tres condiciones:

(i) W_t es continua y $W_0 = 0$

(ii) $W_t \sim N(0,t)$ bajo $\mathbf{P}$

(iii) El incremento $W_{s+t} - W_s \sim N(o,t)$ bajo $\mathbf{P}$ y es independiente de $\Im_s$, la σ-álgebra generada por W_j con $j \leq s$

El movimiento browniano es un fractal y a pesar de que las trayectorias de W son continuas (casi seguramente - c.s.), éstas no son diferenciables (c.s.).

El Movimiento Browniano Geométrico S_t queda expresado con la siguiente expresión:

$$S_t = e^{\sigma W_t + \mu t}$$

Donde

W_t : Es un Movimiento Browniano

σ : Es un factor escalar del proceso W_t

μt : Refleja el crecimiento nominal del proceso W_t (tendencia del proceso).

Lema de Íto

El lema de íto es un famoso resultado derivado por el matemático japonés K. Íto en 1951, hablando en términos generales, se puede considerar la regla de la cadena del cálculo estocástico. En finanzas, el lema de Íto se utiliza frecuentemente para derivar el proceso estocástico seguido por el precio de un título derivado. Por ejemplo, si el activo subyacente sigue la moción geométrica browniana, entonces el lema demuestra que un título derivado cuyo precio es una función del precio del activo subyacente y del tiempo también sigue la moción geométrica browniana. De hecho, los dos valores presentarán la misma fuente de riesgo, dando así a entender que una combinación apropiada de los dos valores puede eliminar el riesgo. Este resultado llevó al desarrollo del modelo "Black-Scholes-Merton" asi como al de muchas teorías y aplicaciones de cobertura modernas, el cual consiste en lo siguiente:

Sea $f : \Re \to \Re$ de tal forma que $f \in C^2$.
Al considerar el proceso estocástico $\{X_t\}_{t \in T}$ con espacio de estados T tal que cumpla la ecuación diferencial $dX_t = \mu d_t + \sigma dW_t$ donde W_t es un movimiento browniano bajo una medida P, entonces:

$$df(X_t) = \left[\mu f'(X_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 f''(X_t)\right] d_t + \sigma f'(X_t) dW_t$$

Lo anterior puede ser visto como una expansión de Taylor para f donde $d^2 X_t = d_t$, es decir, que el término de segundo orden del polinomio no es despreciable como ocurre comúnmente al derivar una variable en el cálculo newtoniano.

$$df(X_t) = f'(X_t)dX_t + \frac{1}{2!}f''(X_t) = d_t + o(dX_t) \quad \text{donde} \quad o(dX_t) \to 0$$

El lema de Íto se aplica de la siguiente forma:

1) Si tenemos que el proceso X_t se describe con la ecuación $X_t = e^{\mu t + \sigma W_t}$, al considerar a Y_t como $Y_t = \mu t + \sigma W_t$ entonces se cumple que $dY_t = \mu d_t + \sigma dW_t$

   Sea $f(x) = e^x$ entonces de acuerdo al lema de Íto se obtiene:

$$dX_t = \left[\mu X_t + \frac{1}{2}\sigma^2 X_t\right] d_t + \sigma X_t dW_t = X_t \left[\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right) d_t + \sigma dW_t\right]$$

2) Si ahora se tiene la ecuación $X_t = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W_t}$, y nuevamente al considerar a Y_t como $Y_t = -\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W_t$ donde se cumple la relación $dY_t = -\frac{1}{2}\sigma d_t + \sigma dW_t$ y de nuevo $f(x) = e^x$ se obtiene:

$$dX_t = \left[-\frac{1}{2}\sigma^2 X_t + \frac{1}{2}\sigma^2 X_t\right] d_t + \sigma X_t dW_t = X_t \sigma dW_t$$

3) Finalmente si $X_t = e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t}$ y al tomar $Y_t = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma W_t$ donde nuevamente se cumple que $dY_t = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) d_t + \sigma dW_t$, al considerar $f(x) = e^x$ el lema resulta:

$$dX_t = \left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) X_t + \frac{1}{2}\sigma^2 X_t\right] d_t + \sigma X_t dW_t = X_t \left(\mu d_t + \sigma dW_t\right)$$

Definición de "Equivalencia" y La Derivada de Radon-Nikodym

Equivalencia - Dos medidas **P** y **Q** son equivalentes si operan en el mismo espacio muestral y concuerdan en lo que es posible. Si A es cualquier evento en el espacio muestral (Ω),

$$P(A) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad Q(A) > 0$$

En otras palabras, si A es posible bajo **P** entonces también es posible bajo **Q**, y si A es imposible bajo **P** entonces es imposible bajo **Q**, y viceversa.

Derivada de Radon-Nikodym - Se suponen **P** y **Q** dos medidas equivalentes. Dada una trayectoria ω para cada partición $\{t_1, \ldots, t_n\}$ (con $t_n = T$), se define x_i como el valor de $W_{t_i}(\omega)$-Movimiento Browniano, y cuando la partición se vuelve densa en $[0, T]$ la derivada $\frac{dQ}{dP}$ hasta el tiempo T es definida como el límite de los cocientes de verosimilitud

$$\frac{dQ}{dP}(\omega) = \lim_{n\to\infty} \frac{f_Q^n(x_1, \ldots, x_n)}{f_P^n(x_1, \ldots, x_n)}$$

donde

$$f_P^n(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi \Delta t_i}} e^{-\frac{(\Delta x_i)^2}{2\Delta t_i}} \qquad \text{con} \qquad \Delta x_i = x_i - x_{i-1} \text{ y } \Delta t_i = t_i - t_{i-1}$$

Esta derivada $\frac{dQ}{dP}$ satisface:

(i) $E_Q(X_T) = E_P\left(\frac{dQ}{dP} X_T\right)$

(ii) $E_Q(X_t|\Im_s) = \zeta_s^{-1} E_P\left(\zeta_t X_t|\Im_s\right)$ con $s \leq t \leq T$

donde ζ_t es el proceso $E_P\left(\frac{dQ}{dP}|\Im_t\right)$, y X_t es cualquier proceso adaptado a $\Im_t$.

Teorema - Cameron Martin Girsanov (C.M.G)

Si W_t en un **P**-movimiento browniano y γ_t es un proceso $\Im$-previsible que satisface $E_P\left[exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \gamma_t^2 dt\right)\right] < \infty$, entonces existe una medida **Q** tal que:

(i) **Q** es equivalente a **P**

(ii) $\dfrac{dQ}{dP} = exp\left(-\int_0^T \gamma_t dW_t - \dfrac{1}{2}\int_0^T \gamma_t^2 dt\right)$

(iii) $\widetilde{W}_t = W_t + \int_0^T \gamma_s ds$ es un **Q**-movimiento browniano

El teorema anterior puede enunciarse de la siguiente forma: Si W_t es un **P**-movimiento browniano y **Q** una medida equivalente a **P**, entonces existe un proceso $\Im$-previsible γ_t tal que

$$\widetilde{W}_t = W_t + \int_0^T \gamma_s ds$$

es un **Q**-movimiento browniano. Es decir, W_t más la tendencia γ_t es **Q**-movimiento browniano. De manera adicional tenemos que la derivada de Radon-Nikodym de **Q** con respecto a **P** (al tiempo T) es

$$exp\left(-\int_0^T \gamma_t dW_t - \frac{1}{2}\int_0^T \gamma_t^2 dt\right)$$

Martingala

Un proceso estocastico $\{Z_n, n \geq 1\}$ se dice que es un *proceso martingala* si cumple las siguientes dos condiciones:

$$\begin{aligned} &1) \qquad E[|Z_n|] < \infty \qquad \forall n \\ &2) \quad E[Z_{n+1}|Z_1, Z_2, \cdots, Z_n] = Z_n \end{aligned} \tag{3.21}$$

En palabras coloquiales, un proceso martingala es aquel que cumple que dada la información hasta un instante de tiempo, su valor esperado al siguiente tiempo inmediato corresponde al valor del mismo proceso al último tiempo dado.
Para ilustrar la definición anterior, se listan algunos ejemplos de procesos martingalas:

1. Sean $X_1, X_2, \cdots$ variables aleatorias independientes con media 0, al considerar $Z_n = \sum_{i=1}^n X_i$, entonces $\{Z_n, \geq 1\}$ es un proceso martingala ya que,

$$\begin{aligned} E[Z_{n+1}|Z_1, \cdots, Z_n] &= E[Z_n + X_{n+1}|Z_1, \cdots, Z_n] \\ &= E[Z_n|Z_1, \cdots, Z_n] + E[X_{n+1}|Z_1, \cdots, Z_n] \\ &= Z_n + E[X_{n+1}] \\ &= Z_n \end{aligned}$$

2. Si $X_1, X_2, \cdots$ son variables aleatorias independientes con $E[X_i] = 1$, entonces $\{Z_n, n \geq 1\}$ es un proceso martingala donde $Z_n = \prod_{i=1}^n X_i$.

$$\begin{aligned} E[Z_{n+1}|Z_1, \cdots, Z_n] &= E[Z_n X_{n+1}|Z_1, \cdots, Z_n] \\ &= Z_n E[X_{n+1}|Z_1, \cdots, Z_n] \\ &= Z_n E[X_{n+1}] \\ &= Z_n \end{aligned}$$

3. Sean $X, Y_1, Y_2, \cdots$ variables aleatorias tal que $E[|X|] < \infty$, y sea $Z_n = E[X|Y_1, \cdots, Y_n]$, entonces se tiene que $\{Z_n, n \geq 1\}$ es una martingala.

$$\begin{aligned} E[Z_{n+1}|Y_1, \cdots, Y_n] &= E\left[E[X|Y_1, \cdots, Y_n, Y_{n+1}]|Y_1, \cdots, Y_n\right] \\ &= E[X|Y_1, \cdots .Y_n] \\ &= Z_n \end{aligned}$$

4. Al considerar una suma parcial de variables aleatorias independientes con media en común 0, es una martingala. Sean $X_1, X_2, \cdots$,, al definir $Y_i = X_i - E[X_i|X_1, \cdots, X_{i-1}], i \geq 1$ se tiene que $E[Y_i] = 0$; por lo que $Z_n = \sum_{i=1}^{n}\{Y_i\}$ es un proceso martingala.

$$\begin{aligned} E[Z_{n+1}|X_1, \cdots, X_n] &= E[Z_n + X_{n+1} - E[X_{n+1}|X_1, \cdots, X_n]|X_1, \cdots, X_n] \\ &= Z_n + E[X_{n+1}|X_1, \cdots, X_n] - E[X_{n+1}|X_1, \cdots, X_n] \\ &= Z_n \end{aligned}$$

Teorema de la Representación Martingala (T.R.M.)

Sea $\{M_t\}$ es una $\mathbf{Q}$-martingala cuya volatilidad σ_t satisface la condición adicional de ser diferente de cero (c.s.), si $\{N_t\}$ es cualquier otra $\mathbf{Q}$-martingala, existe un único proceso $\Im$-previsible α tal que:

$$\int_0^T \alpha_t^2 \sigma_t^2 dt < \infty \quad \text{c.s.}$$

y N puede ser escrita como $N_t = N_0 + \int_0^t \alpha_s dM_s$.

Teorema Adicional (T.A.)

Si $dX_t = \sigma_t X_t dW_t$ para algún proceso $\Im$-previsible σ_t, si

$$E\left(exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \sigma_s^2 ds\right)\right) < \infty \quad \Rightarrow \quad X \text{ es una martingala}$$

3.5.2. Concepto de No Arbitraje como principio para la valuación de Derivados

Para entender el concepto de No-Arbitraje es necesario definir en primera instancia lo que se denomina "*Oportunidad de Arbitraje*". Una oportunidad de arbitraje, es una estrategia de inversión que garantiza un resultado positivo (una ganancia "*segura*") con respecto a cierta contingencia con ninguna posibilidad de obtener un resultado negativo (una posible "*pérdida*") y sin realizar inversión alguna.Así, las oportunidades de arbitraje pueden surgir al hacer una serie de inversiones sin ninguna obligación actual y esperar obtener un beneficio positivo dadas las condiciones del mercado.
Todos los métodos de valoración de productos financieros derivados utilizan la noción de arbitraje; esto es, los precios de los activos se obtienen en condiciones de mercado tales que evitan oportunidades de arbitraje "*No-Arbitraje*". En los métodos de valoración-equilibrio, la ausencia de oportunidades de arbitraje es parte de las condiciones del equilibrio general en el mercado.

Valuación de un Forward

Para poder valuar un contrato derivado forward, es importante identificar dos aspectos esenciales:

1. Características de un contrato forward
2. Supuesto de no arbitraje en el mercado

El primero de ellos se refiere en el sentido en que en un contrato forward una parte asume una postura estricta de compra, mientras que la contraparte toma una postura estricta de venta; lo cual genera que la ganancia de uno sea la pérdida del otro y viceversa. Además, el forward tiene la peculiaridad de no tener costo en su precio de ejercicio (precio forward), es decir, que entrar corto o largo [16] en un forward no genera costo alguno por lo que la prima debe valer cero.

Para determinar el valor de un contrato forward sobre un subyacente S, se consideran los siguientes portafolios [17].

A: Una determinada cantidad α de subyacente S_t.

B: K unidades en cuenta corriente y el contrato forward F_t

En el momento en que el contrato forward madura y se hace efectivo, el emisor debe ser capaz de replicar y liquidar la obligación adquirida por lo que el payoff [18] de los portafolios deberían ser equivalentes:

$$Payoff(A) = Payoff(B) \quad \Rightarrow \quad \alpha S_T = K + F_T = KB(T,T) + F_T$$

Donde:

$B(t,T)$: Denota el valor de un peso en fecha de vencimiento descontado con una tasa de interés i al tiempo t, de tal manera que $B(T,T) = 1$

Con lo anterior y bajo el supuesto de no arbitraje, es decir, si dos portafolios a fecha de vencimiento son iguales entonces en cualquier momento deberían ser equivalentes:

$$\alpha S_t = KB(t,T) + F_t \quad \Rightarrow \quad F_t = \alpha S_t - KB(t,T) \tag{3.22}$$

Sin embargo, al tratarse de un contrato forward se tiene que su valor por ejercicio es cero, de ahí se deriva que su precio forward es:

$$0 = \alpha S_t - KB(t,T) \quad \Rightarrow \quad f_t = \alpha S_t \cdot B^{-1}(t,T) \tag{3.23}$$

3.5.3. Construcción y Valuación de Opciones Plain Vanilla

Las opciones americanas y europeas son las más comunes y se conocen como "*Opciones Plain-Vanilla*", las cuales abarcan los cuatro tipos básicos de operaciones con opciones, es decir, opción call comprada, opcion call vendida, opción put comprada y opción put vendida.

[16] Se dice que una posición está corta en un contrato derivado cuando asume la postura de compra en el mismo, mientras que la posición se dice que está larga cuando ésta asume una postura de venta en el contrato.

[17] Para fines ilustrativos se supone que el subyacente no paga dividendos.

[18] Payoff - Es el valor del contrato derivado a fecha de vencimiento, se refiere a lo que contractualmente se debe operar o liquidar por parte de los participantes; se le conoce además como función de pago.

Las **opciones americanas**, son aquellas que pueden ser ejercidas en cualquier momento entre el día de emisión y el día de vencimiento del contrato; mientras que las **opciones europeas** sólo pueden ser ejercidas en el momento en que vence el contrato de la opción, es decir, el tiempo de maduración.

Una **opción call** es aquella que dá al comprador el derecho más no la obligación de adquitir determinado activo subyacente a un precio específico y a una fecha determinada. Por su parte el vendedor de la opción call cuenta con la obligación de vender el activo subyacente en caso de que el comprador quiera ejercer el derecho a comprar.

- *Compra de una opción Call:* La compra de una Opción Call ("*Long-Call*") se realiza cuando se tienen expectativas alcistas con respecto al activo subyacente, es decir, si se piensa que el mercado va a subir durante el periodo que abarca el contrato. Cuando se compra una opción call se adquiere la accion a un precio fijo, el cual es determinado por el comprador; además, el valor del activo subyacente en el mercado menos el precio pagado por la prima constituyen las ganancias para el comprador de la opción, a lo que se le conoce como "Diferencial de la Opción".

- *Venta de una opción Call:* Durante la venta de una Opción Call ("*Short-Call"*), el vendedor recibe una prima (el precio de la opción) y tiene la obligación de vender el activo subyacente al precio fijado (precio de ejercicio) si el comprador llega a ejercer la opción de compra. En este caso, la ganancia del vendedor es la prima del comprador más la posible diferencia entre el precio de ejercicio y el precio estipulado.

Se definen las **opciones put** como aquellas que le dan al poseedor el derecho más no la obligación de vender un activo subyacente a un precio predeterminado hasta una fecha dada, así el vendedor de la opción put cuenta con la obligación de comprar el activo en caso de que el que posee el título decida ejercer su derecho a venderlo.

- *Compra de una opción Put:* Es posible afirmar que una opción put es básicamente un derecho a vender, lo que significa que la compra de una opción put ("*Long-Put*") es la adquisición del derecho a vender.

- *Venta de una opción Put:* Durante la venta de una Opción Put ("*Short-Call"*), el vendedor está realizando la venta de un derecho por el cual cobra una prima. Al vender ese derecho, al mismo tiempo adquiere la obligación de comprar el activo subyacente en caso de que el comprador de la opción put desee ejercer su derecho a vender. Este tipo de operacion se realiza cuando se considera que el precio de un activo se mantendrá en un periodo de mayor estabilidad.

Valuación de Opciones Europeas (Call - Put)

Modelo Binomial

El modelo Binomial se basa en una idea muy simple, para comenzar el análisis se considera que la ventana temporal es de un periodo, además de suponer que el valor del subyacente S en un periodo inmediato a la fecha de valuación t tomará dos posibles valores, el primero será mayor al valor del mismo en la fecha de valuación, esto es $S_{t+1} > S_t$ en cuyo caso se denota como S_u, mientras que el otro escenario base S_d es que ocurra lo contrario, es decir que $S_{t+1} \leq S_t$.

Al definir a q como la probabilidad de que el subyacente al tiempo $t+1$ aumente con respecto a su valor anterior en el tiempo t,se tendrá entonces lo siguiente:

$$q = P(S_{t+1} > S_t) \quad \Rightarrow \quad 1 - q = P(S_{t+1} \leq S_t)$$

Como se mencionó anteriormente, el valor de un derivado es en forma general el valor esperado de su función de pago (conocida como payoff) dada la información a un instante de tiempo y descontado a una tasa de interés determinada; con lo anterior se tiene que al tiempo $t+1$ el derivado tendrá asociado dos posibles casos para su función de pago:

$$g(S_{t+1}) = \begin{cases} g_u & \text{si } S_{t+1} > S_t \\ g_d & \text{si } S_{t+1} \leq S_t \end{cases}$$

En la expresión anterior g_u y g_d dependen del valor del subyacente en el tiempo $t+1$, y en cuyo caso representan si el valor de éste sube o baja.

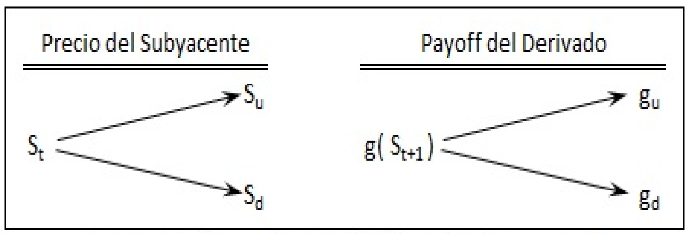


Diagrama 3.1 Escenarios Modelo Binomial de un periodo

Lo que se desea es que a la fecha de vencimiento del contrato (en nuestro caso ocurre en $t+1$ ya que se trata de un árbol de un periodo) se pueda replicar el contrato y así tener la capacidad de pagar la obligación pactada, para obtener dicho efecto se supone que el derivado se conforma inicialmente con una cantidad α de subyacente S_t y un monto β en cuenta corriente, por lo que su valor V_t queda determinado por:

$$V_t = \alpha S_t + \beta$$

A fecha de vencimiento $T = t+1$ el valor del subyacente evoluciona generando dos escenarios posibles y la cuenta en efectivo cambia su valor, con lo que se obtiene un sistema de ecuaciones de dos variables con dos incógnitas (α, β).

$$V_{t+1} = g(S_{t+1}) = \begin{cases} g_u = \alpha S_u + \beta B^{-1}(t,T) & \text{con probabilidad } q \\ g_d = \alpha S_d + \beta B^{-1}(t,T) & \text{con probabilidad } 1-q \end{cases}$$

Al resolver el sistema anterior se cumple

$$\Rightarrow g_u - g_d = \alpha(S_u - S_d)$$

Por lo que

$$\alpha = \frac{g_u - g_d}{S_u - S_d} \quad \text{y} \quad \beta = \left[g_u - \left(\frac{g_u - g_d}{S_u - S_d} \right) S_u \right] B(t,T) \tag{3.24}$$

Así que el valor del derivado V_t será el siguiente:

$$V_t = \left(\frac{g_u - g_d}{S_u - S_d} \right) S_t + \left[g_u - \left(\frac{g_u - g_d}{S_u - S_d} \right) S_u \right] B(t,T) \tag{3.25}$$

Si se desarrolla la ecuación (3.25) se puede interpretar mejor el resultado:

$$
\begin{aligned}
V_t &= \left(\frac{g_u - g_d}{S_u - S_d}\right) S_t + (g_u \cdot B(t,T)) - \left(\frac{g_u - g_d}{S_u - S_d}\right) S_u B(t,T) \\
&= g_u \left(\frac{S_t}{S_u - S_d} + B(t,T) - \frac{S_u B(t,T)}{S_u - S_d}\right) - g_d \left(\frac{S_t}{S_u - S_d} - \frac{S_u B(t,T)}{S_u - S_d}\right) \\
&= g_u \left(B(t,T) + \frac{S_t - S_u B(t,T)}{S_u - S_d}\right) - g_d \left(\frac{S_t - S_u B(t,T)}{S_u - S_d}\right) \\
&= g_u \cdot B(t,T) \cdot \left(1 + \frac{S_t B^{-1}(t,T) - S_u}{S_u - S_d}\right) - g_d \cdot B(t,T) \cdot \left(\frac{S_t B^{-1}(t,T) - S_u}{S_u - S_d}\right) \\
&= B(t,T) \left[g_u \left(\frac{S_t B^{-1}(t,T) - S_d}{S_u - S_d}\right) + g_d \left(\frac{S_u - S_t B^{-1}(t,T)}{S_u - S_d}\right)\right] \\
&= B(t,T) \left[g_u \left(\frac{S_t B^{-1}(t,T) - S_d}{S_u - S_d}\right) + g_d \left(1 - \frac{S_t B^{-1}(t,T) - S_d}{S_u - S_d}\right)\right]
\end{aligned}
$$

Al definir a $q = \frac{S_t B^{-1}(t,T) - S_d}{S_u - S_d}$ se simplifica la expresión anterior

$$V_t = B(t,T)[g_u \cdot q + g_d(1-q)] = B(t,T) \cdot E[g(S_{t+1})] = B(t,T) \cdot E[g(S_{t+1})|\Im_t] \tag{3.26}$$

Es decir, el valor del derivado es el valor esperado de la función de pago (payoff) dada la información al instante de valuación t y descontado a una tasa determinada descrita bajo el proceso $B(t,T)$.

Considerar un modelo de un periodo es poco eficiente y adaptativo en el mundo real, por lo que a partir de este momento se contempla un árbol binomial de dos o más periodos bajo los siguientes supuestos:

- El número de periodos N son uniformemente espaciados entra la fecha de valuación t y la fecha de vencimiento T, de tal forma que cada sub-intervalo $nd = (T-t)/N$ donde $n \in \{0, 1, 2, \ldots, N\}$.
- Se considera un árbol binomial multiplicativo con la finalidad de que el modelo sea mucho más eficiente, ya que se generan $(N+1)$ nodos finales al tiempo Nd en lugar de 2^N para el caso de un árbol binomial simple (ver diagrama 3.2).

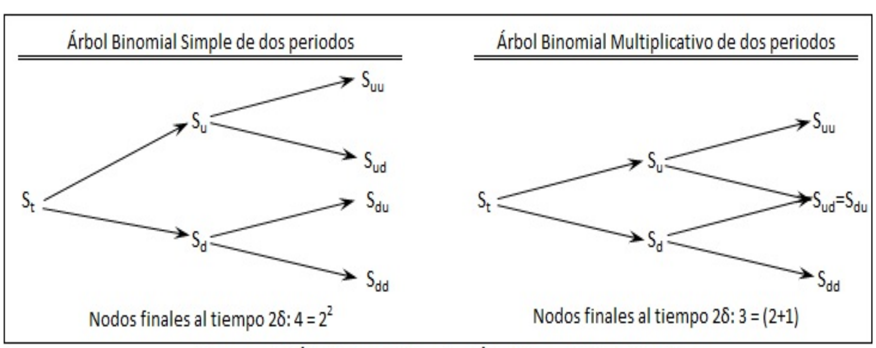


Diagrama 3.2 Árbol Binomial Simple y Árbol Binomial Multiplicativo

Como primer paso se toma el caso base (árbol de un periodo) para definir a q_t como la probabilidad de subida o bajada del subyacente al tiempo t de acuerdo a la ecuación (3.26), de tal forma que (ver el diagrama 3.3)

$$q_t = \frac{S_t B^{-1}(t,T) - S_d}{S_u - S_d} \quad \text{donde} \quad t \in \{0d, 1d, 2d, \ldots, Nd\} \quad \text{y } Nd = T$$

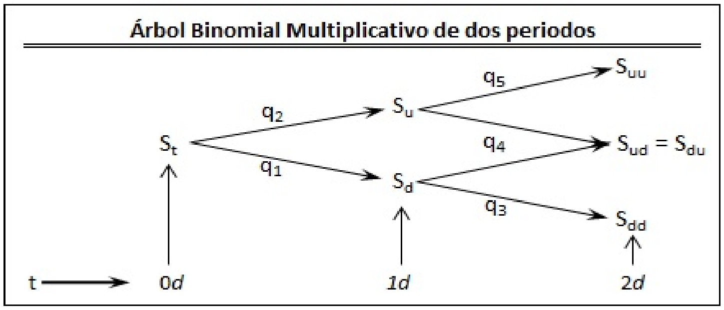


Diagrama 3.3 Distribución de probabilidades q_t

Al tratarse de un árbol multiplicatio, existen u y $d \in \Re$ tales que:

$$\begin{array}{l} S_u = uS_t \\ S_d = dS_t \end{array} \quad \text{y en general se cumple} \quad S_{u^j d^{n-j}} = u^j d^{n-j} S_t$$

Lo cual simplifica la expresión para q_t

$$q_t = \frac{B{-}1(t,T) - d}{u - d} \tag{3.27}$$

Así la manera más intuitiva de valuar el derivado es hacia atrás, esto es, una vez que se determinan los valores de q_t para cada $t \in \{0d, 1d, 2d, \ldots, Nd\}$ y los payoff asociados $g(S_{Nd})$, es posible determinar las funciones de pago $g(S_{(N-1)d})$ en el tiempo anterior y así sucesivamente hasta $0d$ donde se determina el valor del derivado $V_t = B(t,T) \cdot E[g(S_T)|\Im_t]$.

Para ilustrar el párrafo anterior manejaremos un árbol binoial multiplicativo de tres periodos (como el del diagrama 3.3).

Los valores de q_t se determinan con la expresión (3.27) y en el tiempo $2d = T$ (fecha de vencimiento) las funciones de pago son $(g(S_{uu}), g(S_{ud}), g(S_{dd}))$; de acuerdo a la expresión (3.26) el valor del derivado al tiempo $1d$ tiene los siguientes valores posibles:

$$V_{1d} = B(1d, 2d) \cdot [q_3 g(S_{dd}) + q_4 g(S_{ud})] \quad \text{si} \quad S_{t+1} < S_t \;\; \text{al tiempo } 1d(\text{ si ocurre } S_d)$$

$$V_{1d} = B(1d, 2d) \cdot [q_4 g(S_{ud}) + q_5 g(S_{uu})] \quad \text{si} \quad S_{t+1} > S_t \;\; \text{al tiempo } 1d(\text{ si ocurre } S_u)$$

El valor del derivado al tiepo $t = 0d$, se determina trabajando el árbol binomial hacia atrás un periodo más, donde los nodos corresponden a los escenarios encontrados para V_{1d}.

$$\begin{aligned} V_t &= B(0d, 1d) \cdot [q_1 + g(S_d) + q_2 g(S_u)] \\ &= B(0d, 1d) \cdot [q_1 q_3 g(S_{dd}) + q_1 q_4 g(S_{ud}) + q_2 q_4 g(S_{ud}) + q_2 q_5 g(S_{uu})] \end{aligned} \tag{3.28}$$

Donde una vez más el precio del derivado se calcula como la esperanza bajo la medida de riesgo neutral de su payoff, descontado el número de periodos que compongan el árbol binomial.

Un caso particular ocurre al suponer que la tasa de descuento es constante a lo largo de la vida del derivado, en cuyo caso el proceso $B(t,T) = B$ es determinista y además $q_t = q$ para cualquier tiempo t. De acuerdo a la expresión (3.28) y bajo las consideraciones anteriores se resuelve:

$$V_t = B(0d, 2d) \cdot [q_2 g(S_{dd}) + 2q(1-q) g(S_{ud}) + (1-q)^2 g(S_{uu})]$$

De forma general queda expresado como:

$$V_t = B(0d, Nd) \cdot \sum_{j=0}^{N} \binom{N}{j} q^j (1-q)^{N-j} g(S_t u^j d^{N-j}) \tag{3.29}$$

Así el precio de un derivado se reduce al valor descontado de la esperanza de una variable aleatoria binomial con parámetros (N, q).

Finalmente, para valuar una opción call o una opción put con el método binomial se requiere determinar el valor del payoff de la opción a la fecha de valuación (en el caso de un árbol multiplicativo), o en su defecto el valor esperado de su función de pago en cada instante de tiempo hasta su vencimiento (cuando se considere un árbol simple).

Modelo de Black & Sholes (Caso Discreto)

Se considera un subyacente S_t que no paga dividendos bajo un modelo binomial multiplicativo de N periodos, la idea principal consiste en que el número de periodos N sea lo suficientemente grande de tal forma que cada periodo $n\delta$ sea tan pequeño como sea posible.

Sea $r(n\delta)\Delta$ la tasa continua equivalente que va del periodo $n\delta$ a $(n+1)\delta$ de tal manera que

$$B^{-1}(0\delta, (n+1)\delta) = B^{-1}(0\delta, n\delta) \cdot e^{r(n\delta)\Delta}$$

Además se supone que $r(n\delta)\Delta$ es equivalente si ocurre $S\left((n+1)\delta\right) = S(n\delta) \cdot e^{r(n\delta)\Delta}$ lo cual puede reescribirse como:

$$r(n\delta)\Delta = ln\left(S((n+1)\delta)\right) - ln\left(S(n\delta)\right)$$

Entonces, el valor del subyacente al tiempo $k\delta$ queda expresado como sigue:

$$S(k\delta) = S(n\delta) \cdot e^{\sum_{j=1}^{k-1} r(j\delta)\Delta}$$

Como se mencionaba anteriormente, al considerar $\Delta \approx 0$ entonces S_t se restringe a dos valores posibles (S_u y S_d en el modelo binomial). Si $r(n\delta)\Delta$ comparte una media $\mu\Delta$ y varianza $\sigma^2\Delta$ comunes y ambas proporcionales al tamaño del periodo, los posibles valores que tomará el subyacente al tiempo $(n+1)\delta$ pueden escribirse de la siguiente manera:

$$S_u = S_n \cdot e^{(\mu\Delta + \sigma\Delta)} \qquad \text{y} \qquad S_d = S_n \cdot e^{(\mu\Delta - \sigma\Delta)}$$

De acuerdo con el modelo binomial, al suponer que la tasa $r(n\delta)\Delta = r\Delta$ es constante por periodo, automáticamente el valor de $q_t = q$ se mantiene de forma única para cada tiempo $n\delta$; y además al tratarse de un árbol binomial multiplicativo su valor se simplifica a:

$$q = \frac{e^{r\Delta} - d}{u - d} = \frac{e^{r\Delta} - e^{\mu\Delta - \sigma\Delta}}{e^{\mu\Delta + \sigma\sqrt{\Delta}} - e^{\mu\Delta - \sigma\sqrt{\Delta}}} = \frac{e^{(r-\mu)\Delta + \sigma\sqrt{\Delta}} - 1}{e^{2\sigma\sqrt{\Delta}} - 1} \tag{3.30}$$

Al analizar ¿qué sucede cuando $\Delta \to 0$?, se tiene lo siguiente (de acuerdo al Teorema de L'Hopital[19])

[19] L'Hopital - Es una consecuencia del Teorema del valor medio de Cauchy, que se presenta para las indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$.
Sean f y g dos funciones definidas en el intervalo $[a, b]$ y sean $f(c) = g(c) = 0$ donde $c \in (a, b)$ y $g'(x) \neq 0$ $\forall x \neq c$. Si f y g son diferenciables en (a, b), entonces se cumple que $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

$$
\begin{aligned}
\lim_{\Delta\to 0} q &= \lim_{\Delta\to 0} \frac{\left(r-\mu+\frac{\sigma}{s\sqrt{\Delta}}\right)\cdot e^{(r-\mu)\Delta+\sigma\sqrt{\Delta}}}{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{\Delta}}\right)\cdot e^{2\sigma\sqrt{\Delta}}} \\
&= \lim_{\Delta\to 0} \left(\frac{2\Delta(r-\mu)+\sigma\sqrt{\Delta}}{2\sigma\sqrt{\Delta}}\cdot e^{(r-\mu)\Delta-\sigma\sqrt{\Delta}}\right) \\
&= \lim_{\Delta\to 0} \left(\left(\frac{(r-\mu)\sqrt{\Delta}}{\sigma}+\frac{1}{2}\right)\cdot e^{(r-\mu)\Delta-\sigma\sqrt{\Delta}}\right)\approx \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Así la expresión (3.30) puede reescribirse como:

$$
q=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{\Delta}\frac{\mu-r+\frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}\right)+o(\Delta)^{20} \tag{3.31}
$$

Al considerar el tiempo $t=n\Delta$ en el que se han subido j veces y bajado $(n-j)$ veces en el árbol binomial, el valor del subyacente al tiempo t se puede expresar de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
S(t) &= S(n\Delta) \\
&= S(0\Delta)\cdot e^{\left(j\mu\Delta+j\sigma\sqrt{\Delta}+(n-j)\mu\Delta+(n-j)\sigma\sqrt{\Delta}\right)} \\
&= S(0\Delta)\cdot e^{\left(n\mu\Delta+(2j-n)\sigma\sqrt{\Delta}\right)} \\
&= S(0\Delta)\cdot e^{\left(\mu t+(2j-n)\sigma\sqrt{\Delta}\right)}
\end{aligned} \tag{3.32}
$$

El siguiente paso es analizar ¿qué ocurre cuando $n\to\infty$?, para lo cual se considera $Y(n)$ una variable aleatoria que indica el número de veces en subir en el árbol en n pasos, de tal forma que

$$
Y(n)=\sum_{i=1}^{n} I(i) \quad \text{donde} \quad I(i)=\begin{cases} 0 & con \quad p=\dfrac{1}{2} \\ \\ 1 & con \quad p=\dfrac{1}{2} \end{cases}
$$

Inicialmente se supone que la probabilidad de subir o bajar en el árbol en cada paso es $\frac{1}{2}$, enseguida se calculan su esperanza y varianza obteniendo.

$$
E\left[Y(n)\right]=\frac{n}{2} \quad \text{y} \quad Var\left(Y(n)\right)=\frac{n}{4} \quad \Rightarrow \quad E\left[\frac{Y(n)}{n}\right]=\frac{1}{2} \quad \text{y} \quad Var\left(\frac{Y(n)}{n}\right)=\frac{1}{4n}
$$

Lo cual induce por el Teorema del Límite Central a:

$$
\frac{\frac{Y(n)}{n}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}}=\frac{2Y(n)-n}{\sqrt{n}}\longrightarrow N(0,1)
$$

Por otro lado, si $t=\Delta\cdot n \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\Delta}=\dfrac{\sqrt{t}}{\sqrt{n}}$

[20] $o(\Delta)$ se refiere a los términos de orden Δ desarrollados en la expresión, que cuando $\Delta\to 0$ éste término es despreciable, es decir, $o(\Delta)\to 0$.

Con lo que se cumple que $(2Y(n)-n)\,\sigma\sqrt{\Delta}=\sigma\sqrt{t}\left(\frac{2Y(n)-n}{\sqrt{n}}\right)$, en nuestro caso $\sigma\sqrt{t}\left(\frac{2j-n}{\sqrt{n}}\right)$ una equivalencia para la expresión (3.32), lo que resulta a $S(t)=S(0\Delta)\cdot e^{\left(\mu t+\sigma\sqrt{t}\left(\frac{2Y(n)-n}{\sqrt{n}}\right)\right)}$ y si ocurre que $n\to\infty$ es decir $\Delta\to 0$, se tiene el siguiente resultado:

$$S(t)=S(0\Delta)\cdot e^{\mu t+\sigma\sqrt{t}Z}\quad \text{donde}\quad Z\sim N(0,1)$$

O bien,

$$ln\left(S(t)\right)-ln\left(S(0\Delta)\right)\sim N\left(\mu t,\sigma^2 t\right) \tag{3.33}$$

Así que al definir a $Y(n)$ conforme a la probabilidad q de la ecuación (3.31), y al ser una variable aleatoria con distribución binomial con parametros (n,q) se tiene:

$$E\left[\frac{2Y(n)-n}{\sqrt{n}}\right]=(2q-1)\sqrt{n}\approx-\sqrt{\Delta}\cdot\sqrt{n}\left(\frac{\mu-r+\frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}\right)=-\sqrt{t}\left(\frac{\mu-r+\frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}\right)$$

$$Var\left(\frac{2Y(n)-n}{\sqrt{n}}\right)=\frac{4}{n}\left(nq(1-q)\right)=4\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(\sqrt{\Delta}\cdot\frac{\mu-r+\frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}\right)^2\right)\approx 1\quad\text{cuando }\Delta\to 0$$

Por lo que:

$$S(t)=S(0\Delta)\cdot e^{\mu t+\sigma\sqrt{t}Z}\quad \text{donde}\quad Z\sim N\left(\sqrt{t}\left(\frac{r-\mu-\frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}\right),1\right)$$

O bien,

$$S(t)=S(0\Delta)\cdot e^{\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t+\sigma\sqrt{t}Z'}\quad \text{donde}\quad Z'\sim N(0,1) \tag{3.34}$$

De acuerdo a la ecuación (3.34), el valor del derivado al tiempo t queda determinado por la siguiente expresión:

$$g\left(S(t)\right)=e^{-r(T-t)}\int_{-\infty}^{\infty}g\left(S(t)e^y\right)\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\left(T-t\right)}}e^{-\frac{\left(y-\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right)^2}{2\sigma^2(T-t)}}dy \tag{3.35}$$

Cuando se particulariza a una opción *Call* y *Put*, se obtienen las fórmulas de Black & Scholes. El payoff de una Call C_t con precio de ejercicio K cuyo vencimiento ocurre en T, queda de la siguiente forma:

$$g\left(S(t)\right)=max\{S(t)-K;0\}$$

Sea $\tau=T-t$

$$C_t==e^{-r\tau}\int_{-\infty}^{\infty}max\{S(t)e^y-K;0\}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}}e^{-\frac{\left(y-\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau\right)^2}{2\sigma^2\tau}}dy$$

La función $max\{S(t)e^y-K;0\}$ toma valores diferentes a 0 cuando ocurre que $S(t)e^y>K$ o bien cuando $y<ln\left(\frac{K}{S(t)}\right)$, al considerar $K^*=ln\left(\frac{K}{S(t)}\right)$ la expresión anterior se reescribe como sigue:

$$C_t=e^{-r\tau}\int_{K^*}^{\infty}\frac{S(t)e^y}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}}e^{-\frac{\left(y-\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau\right)^2}{2\sigma^2\tau}}dy-e^{-r\tau}\int_{K^*}^{\infty}\frac{K}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}}e^{-\frac{\left(y-\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau\right)^2}{2\sigma^2\tau}}dy \tag{3.36}$$

Al sumar los exponentes de las funciones exponenciales que se encuentran dentro del primer integrando, se puede expresar de una forma alternativa:

$$
\begin{aligned}
y - \frac{\left[y - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau\right]^2}{2\sigma^2\tau} &= \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau + \frac{1}{2}\sigma^2\tau - \left[\frac{\left[y - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau\right]^2}{2\sigma^2\tau} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau - y + \frac{1}{2}\sigma^2\tau\right] \\
&= \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau + \frac{1}{2}\sigma^2\tau - \left[\frac{y^2 - 2y\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2\tau^2}{2\sigma^2\tau}\right] \\
&\quad - \left[\frac{2\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau^2\sigma^2 - 2y\sigma^2\tau + \left(\sigma^2\tau\right)^2}{2\sigma^2\tau}\right] \\
&= \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau + \frac{1}{2}\sigma^2\tau - \left[\frac{y^2 - 2y\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau + \sigma^2\tau\right) + \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau + \sigma^2\tau\right)^2}{2\sigma^2\tau}\right] \\
&= \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau + \frac{1}{2}\sigma^2\tau - \frac{\left[y - \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau + \sigma^2\tau\right)\right]^2}{2\sigma^2\tau} \qquad (3.37)
\end{aligned}
$$

Entonces al utilizar la ecuación (3.37) en (3.36) el valor de la opción C_t equivale a:

$$
C_t = e^{-r\tau}\int_{K^*}^{\infty} \frac{S(t)}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau + \frac{1}{2}\sigma^2\tau - \frac{\left[y-\left(\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau+\sigma^2\tau\right)\right]^2}{2\sigma^2\tau}} dy - e^{-r\tau}\int_{K^*}^{\infty} \frac{K}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} e^{-\frac{\left(y-\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau\right)^2}{2\sigma^2\tau}} dy
$$

Sean:

$$
\begin{aligned}
u &= \frac{y - \left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau + \sigma^2\tau\right]}{\sigma\sqrt{\tau}} &&\Rightarrow \qquad d_u \cdot \sigma\sqrt{\tau} = d_y \\
v &= \frac{y - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} &&\Rightarrow \qquad d_v \cdot \sigma\sqrt{\tau} = d_y \\
d_1 &= \frac{K^* - \left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau + \sigma^2\tau\right]}{\sigma\sqrt{\tau}} &&\text{y} \qquad d_2 = \frac{K^* - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}
\end{aligned}
$$

Se tiene la equivalencia,

$$
\begin{aligned}
C_t &= S(t)e^{-r\tau + \left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau + \frac{1}{2}\sigma^2\tau}\int_{d_1}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \cdot \sigma\sqrt{\tau} \cdot e^{-\frac{u^2}{2}} d_u - Ke^{-r\tau}\int_{d_2}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \sigma\sqrt{\tau} \cdot e^{-\frac{v^2}{2}} d_v \\
&= S(t)\int_{d_1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} d_u - Ke^{-r\tau}\int_{d_2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2}} d_v \\
&= S(t)N(d_1) - Ke^{-r\tau}N(d_2) \qquad (3.38)
\end{aligned}
$$

Donde: $N(d)$ se refiere a la probabilidad acumulada de una distribución normal estándar hasta el punto

d, y además

$$\begin{aligned}
d_1 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left[ln\left(\frac{K}{S(t)}\right) - \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau\right] = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left[ln\left(\frac{S(t)}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau\right] \\
d_2 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left[ln\left(\frac{K}{S(t)}\right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau\right] = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left[ln\left(\frac{S(t)}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau\right] - \sigma\sqrt{\tau} = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}
\end{aligned}$$

En el caso de una opción *Put* para una posición larga se tiene que $g\left(S(t)\right) = max\{K - S(t); 0\}$ por lo que de manera muy similar se obtiene:

$$P_t = Ke^{-r\tau}N(-d_2) - S(t)N(-d_1)$$

Una estrategia común para cubrirse es asumir una posición larga en una opción *Call*, y a su vez bajo las mismas condiciones del contrato de compra una posición corta en una opción *Put*, a dicha estrategia se le conoce como la **paridad *Put-Call***.

$$\begin{aligned}
C\left[S_t, K, t, T\right] - P\left[S_t, K, t, T\right] &= \big(S(t)N(d_1) - Ke^{-r\tau}N(d_2)\big) - \big(Ke^{-r\tau}N(-d_2) - S(t)N(-d_1)\big) \\
&= S(t)\left[N(d_1) + N(-d_1)\right] - Ke^{-r\tau}\left[N(d_2) - N(-d_2)\right] \\
&= S(t)\left[N(d_1) + 1 - N(d_1)\right] - Ke^{-r\tau}\left[N(d_2) + 1 - N(d_2)\right] \\
&= S(t) - Ke^{-r\tau} \qquad (3.39)
\end{aligned}$$

De la ecuación (3.39) se obtiene que para opciones *plain vanilla*, entrar largo a una opción *Call* y a su vez entrar corto a una opción *Put*, equivale a asumir una posición larga en un forward con los mismos parámetros en cada uno de ellos.

Valuación de Opciones Americanas (Call - Put)

En términos generales, un producto derivado de tipo americano es aquel en el que su condición de ejercicio ocurre previo al contrato. Dicha cláusula permite al comprador o vendedor del producto derivado, reclamar el valor intrínseco [21] definido en el contrato en el momento en que decida hacerlo siempre y cuando esto ocurra antes de la fecha de vencimiento del contrato.
Así una **opción americana** es un instrumento derivado que da opcionalidad (más no la obligación) de ejercer el contrato en un tiempo previo al de maduración.

Una opción con cláusula de ejercicio previo puede resultar muy atractiva a los inversionistas, ya que al considerar la volatilidad inherente a los mercados bursátiles, es razonable pensar que algún inversionista desee tomar ventaja de fluctuaciones del precio del activo subyacente; reclamando el flujo asociado al producto derivado inmediatamente sin tener que esperar a la terminación del contrato.
Además, una opción americana ofrece al menos las ventajas que las de una opción de tipo europeo (donde la cláusula de ejercicio del derivado ocurre al tiempo de maduración).

Antes de valuar una opción de tipo americano, es necesario considerar que el tiempo t en que se ejercerá la opción es desconocido y aleatorio; de hecho t es lo que se denomina un *tiempo de paro* [22] con respecto al proceso estocástico que genera los precios del subyacente.
Para obtener el valor del producto derivado de tipo americano sobre un árbol binomial, se requieren las siguientes definiciones:

[21] El precio de un derivado tiene 2 componentes. *Valor Intrínseco*: Es el valor del derivado al momento de su ejercicio (payoff), y *Valor en el tiempo*: Se refiere a la diferencia entre el costo de la prima y el valor intrínseco.

[22] Tiempo de paro - "*Stochastic Processes*" de Sheldon M. Ross: Un tiempo aleatorio T es un **tiempo de paro** si $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists\ A_n \subset E^{n+1}$ tal que $\{T = n\} = \{(X_0, \ldots, X_n) \in A_n\}$. Intuitivamente un tiempo de paro es un tiempo que obtenemos de observar la trayectoria hasta que se cumpla una condición. El instante en que se cumple es el tiempo de paro.

V_t^i: Valor de la opción dado el estado (i) en el tiempo (t).

I_t^i: Valor de dejar vivir la opción dado el estado (i) en el tiempo (t).

C_t^i: Valor de ejercer la opción al tiempo (t) dado el estado (i).

Así el valor del derivado al tiempo (t) dada la trayectoria del subyacente (i) se determina como:

$$V_t^i = Max\{I_t^i; C_t^i\}$$

Para fines ilustrativos, se considera un árbol binomial multiplicativo de 3 periodos y que recombina valores de acuerdo al siguiente diagrama.

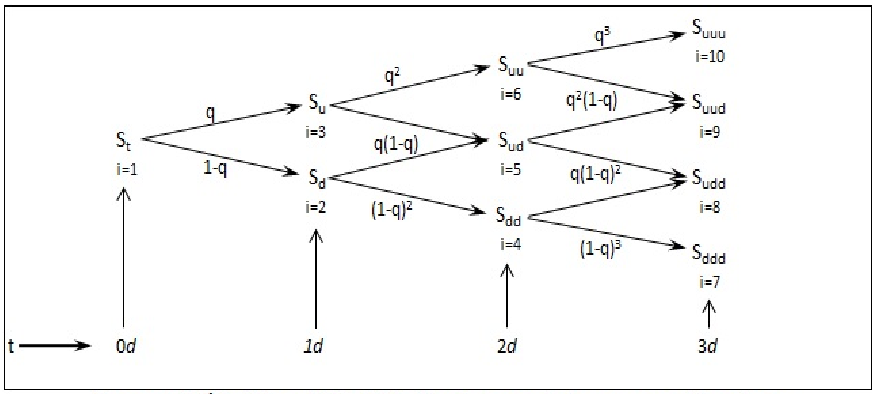


Diagrama 3.4 Árbol Binomial Multiplicativo de tres periodos que recombina valores

La idea fundamental consiste en trabajar el árbol binomial de manera recursiva hacia atrás (tal y como se hizo en el caso de un derivado de tipo europeo), la diferencia radica en que ahora se valúa en cada iteración la función V_t^i.

A fecha de vencimiento $(t = 3d = T)$ ocurre que $I_t^i = C_t^i \ \forall i \in \tilde{I}$, donde $\tilde{I}$ se refiere al conjunto de todas las posibles trayectorias del valor del subyacente; por lo que el valor del derivado equivale al payoff de la opción $V_t^i = g(S_t^i) = g(S_T^i)$.

El valor de la opción al tiempo $t = 2d$ se determina como $V_{2d}^i = Max\{I_{2d}^i; C_{2d}^i\}$ para todas las posibles trayectorias de (i), en este caso se refiere a $i \in \{4, 5, 6\}$.

i=4)

$$I_{2d}^4 = B(2d, 3d)E\left[g(S_{2d})|\Im_{2d}, i = 4\right]$$
$$. \quad = B(2d, 3d)\left[q \cdot g(S_{ud^2}) + (1-q) \cdot g(S_{d^3})\right]$$

$$C_{2d}^4 = g(S_{d^2})$$

i=5)

$$I_{2d}^5 = B(2d, 3d)E\left[g(S_{2d})|\Im_{2d}, i = 5\right]$$
$$. \quad = B(2d, 3d)\left[q \cdot g(S_{u^2d}) + (1-q) \cdot g(S_{ud^2})\right]$$

$$C_{2d}^5 = g(S_{ud})$$

i=6)

$$I_{2d}^6 = B(2d, 3d)E\left[g(S_{2d})|\Im_{2d}, i = 6\right]$$
$$. \quad = B(2d, 3d)\left[q \cdot g(S_{u^3}) + (1-q) \cdot g(S_{u^2d})\right]$$

$$C_{2d}^6 = g(S_{u^2})$$

En la siguiente iteración, al tiempo $t = 1d$ el valor de la opción corresponde a $V_{1d}^i = Max\{I_{1d}^i; C_{1d}^i\}$ para cada $i \in \tilde{I}$, es decir, $i \in \{2, 3\}$.

i=2)

$$\begin{aligned}
I_{1d}^2 &= B(1d,2d)E\left[g(S_{1d})|\Im_{1d}, i=2\right]\\
. \quad &= B(1d,2d)\left[q \cdot I_{2d}^5 + (1-q) \cdot I_{2d}^4\right]\\
. \quad &= B(1d,2d)\left\{qB(2d,3d)\left[q \cdot g(S_{u^2d}) + (1-q) \cdot g(S_{ud^2})\right] + (1-q)B(2d,3d)\left[q \cdot g(S_{ud^2}) + (1-q) \cdot g(S_{d^3})\right]\right\}\\
. \quad &= B(1d,2d) \cdot B(2d,3d)\left[q^2 \cdot g(S_{u^2d}) + 2q(1-q) \cdot g(S_{ud^2}) + (1-q)^2 \cdot g(S_{d^3})\right]\\
. \quad &= B(1d,3d) \cdot \textstyle\sum_{j=0}^{2} \binom{2}{j} q^j (1-q)^{2-j} \cdot g(S_{u^j d^{3-j}})
\end{aligned}$$

$$C_{1d}^2 = g(S_d)$$

i=3)

$$\begin{aligned}
I_{1d}^3 &= B(1d,2d)E\left[g(S_{1d})|\Im_{1d}, i=3\right]\\
. \quad &= B(1d,2d)\left[q \cdot I_{2d}^6 + (1-q) \cdot I_{2d}^5\right]\\
. \quad &= B(1d,2d) \cdot B(2d,3d)\left[q^2 \cdot g(S_{u^3}) + 2q(1-q) \cdot g(S_{u^2d}) + (1-q)^2 \cdot g(S_{ud^2})\right]\\
. \quad &= B(1d,3d) \cdot \textstyle\sum_{j=0}^{2} \binom{2}{j} q^{2-j} (1-q)^{j} \cdot g(S_{u^{3-j} d^{j}})
\end{aligned}$$

$$C_{1d}^3 = g(S_u)$$

Finalmente, al tiempo $t = 0d$ el valor del derivado se obtiene como $V_{0d}^i = Max\{I_{0d}^i; C_{0d}^i\}$ para cada $i \in \tilde{I}$.

i=1)

$$\begin{aligned}
I_{0d}^1 &= B(0d,1d)E\left[g(S_{0d}|\Im_{0d}, i=1)\right]\\
. \quad &= B(0d,1d)E\left[q \cdot I_{1d}^3 + (1-q) \cdot I_{1d}^2\right]\\
. \quad &= B(0d,1d)\left\{qB(1d,3d) \cdot \textstyle\sum_{j=0}^{2} \binom{2}{j} q^{2-j}(1-q)^j \cdot g\left(S_{u^{3-j}d^j}\right)\right\}\\
. \quad &+ B(0d,1d)\left\{(1-q)B(1d,3d) \cdot \textstyle\sum_{j=0}^{2} \binom{2}{j} q^{j}(1-q)^{2-j} \cdot g\left(S_{u^{j}d^{3-j}}\right)\right\}\\
. \quad &= B(0d,1d)B(1d,3d)\left[\textstyle\sum_{j=0}^{2} \binom{2}{j} q^{3-j}(1-q)^j \cdot g\left(S_{u^{3-j}d^j}\right) + \textstyle\sum_{j=0}^{2} \binom{2}{j} q^{j}(1-q)^{3-j} \cdot g\left(S_{u^{j}d^{3-j}}\right)\right]\\
. \quad &= B(0d,3d) \cdot \textstyle\sum_{j=0}^{3} (3j)\, q^j(1-q)^{3-j} \cdot g\left(S_{u^j d^{3-j}}\right)
\end{aligned}$$

$$C_{0d}^1 = g(S_0)$$

Por lo que en general, el valor de un derivado de tipo americano al instante t es:

$$V_t = Max\left\{B(0d,Nd) \cdot \sum_{j=0}^{N} (Nj)\, q^j(1-q)^{N-j} \cdot g\left(S_{u^j d^{N-j}}\right);\ \ g\left(S_t\right)\right\}; \quad t \in \{0d, 1d, \ldots, Nd\} \tag{3.40}$$

Al igual que para las opciones Europeas, el portafolio de cobertura $(\alpha_t; \beta_t)$ se compone de:

α_t : Cantidad en subyacente S_t al tiempo (t).

β_t : Dinero en efectivo al tiempo (t).

Donde:

$$\alpha_t^i = \frac{g\left(S_{u^i d^{N-i}}\right) - g\left(S_{u^{i-1} d^{N-i-1}}\right)}{S_{u^i d^{N-i}} - S_{u^{i-1} d^{N-i-1}}} \qquad y \qquad \beta_t^i = B(t,T)\left[g\left(S_{u^i d^{N-i}}\right) - \alpha_t^i S_{u^i d^{N-i}}\right] \tag{3.41}$$

Modelo de Black & Sholes (Caso Continuo)

Al suponer el precio del subyacente $S_t = S_0 e^{\mu t + \sigma W_t}$ con r la tasa de interés sin riesgo, μ la tendencia del activo subyacente, σ la volatilidad del subyacente, W_t **P**-Movimiento Browniano, y $B_t^{-1} = e^{-rt}$ el proceso de descuento al tiempo t.

Sea $Z_t = B_t^{-1} S_t$, al considerar $Y_t = ln(Z_t)$ se tiene que $Y_t = \mu t - rt + \sigma W_t$ de donde $dY_t = (\mu - r)dt + \sigma dW_t$. Al aplicar el lema de Íto la Ecuacion Diferencial Estocástica (EDE) que satisface Z_t es:

$$dZ_t = Z_t\left(\left(\mu - r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dW_t\right)$$

Para que Z_t sea una martingala es necesario eliminar la tendencia en esta EDE (de acuerdo al T.A.), para ello es necesario considerar $\gamma_t = \frac{\mu - r + \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}$. Luego al ser γ_t una función constante,

$$\int_0^T \gamma_t^2 = \left(\frac{\mu - r + \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}\right)^2 \cdot T \quad \Rightarrow \quad E_P\left[exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \gamma_t^2 dt\right)\right] < \infty$$

por lo que al aplicar el teorema C.M.G. existe **Q** medida equivalente a la medida original **P** y $\widetilde{W}_t$ un **Q**-movimiento browniano tal que $dZ_t = \sigma Z_t d\widetilde{W}_t$, y entonces Z_t es ahora bajo **Q** una martingala.

Enseguida es necesario un proceso que sea **Q**-martingala y al mismo tiempo coincida con el payoff descontado al tiempo T, para ello se considera $N_t = E_Q(B_T^{-1} X | \Im_t)$ y por el teorema T.R.M. existe un proceso previsible $\{\alpha_t\}$ tal que $dN_t = \alpha_t dZ_t$. Ahora el valor del portafolio al tiempo T tiene las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned} \alpha_T S_T + b_T B_T &= \alpha_T S_T + (N_T - \alpha_T Z_T) B_T \\ &= \alpha_T S_T + (B_T^{-1} X_T - \alpha_T B_T^{-1} S_T) B_T \\ &= X_T \end{aligned}$$

Lo cual indica que la estrategia de replicado es:

1. Mantener α_t unidades de subyacente al tiempo t
2. Mantener $b_t = N_t - \alpha_t Z_t$ unidades del bono

Así el valor del portafolio (α_t, b_t) está dado por: $V_t = \alpha_t S_t + b_t B_t = B_t N_t$

Por otro lado, se dice que un portafolio (α_t, b_t) es auto-financiado $\quad \Leftrightarrow \quad dV_t = \alpha_t dS_t + b_t dB_t$

Y además, si B_t es un proceso con volatilidad cero y X_t cualquier proceso estocástico, entonces $d(B_t X_t) = B_t dX_t + X_t dB_t$

Así que,

$$\begin{aligned} dV_t &= B_t dN_t + N_t dB_t \\ &= \alpha_t B_t dZ_t + N_t dB_t \\ &= \alpha_t B_t dZ_t + (\alpha_t Z_t + b_t) dB_t \\ &= \alpha_t (B_t dZ_t + Z_t dB_t) + b_t dB_t \\ &= \alpha_t d(B_t Z_t) + b_t dB_t \\ &= \alpha_t dS_t + b_t dB_t \end{aligned}$$

Por lo tanto, (α_t, b_t) es auto-financiado.

En el caso donde $S_t = S_0 e^{\mu t + \sigma W_t}$ y $B_t = e^{rt}$, el precio de no-arbitraje del contingente X_t al tiempo $t \leq T$ está dado por

$$V_t = B_t E_Q(B_T^{-1} X | \Im_t) = e^{-r(T-t)} E_Q(X | \Im_t)$$

donde $\mathbf{Q}$ es la medida martingala para el proceso descontado $B_t^{-1} S_t$.

Si bien el valor de la opción está dado por $e^{-rT} E_Q[X|\Im_t] = E_Q[g(S_T)|\Im_t]$, donde $\mathbf{Q}$ es la medida martingala para $Z_t = B_t^{-1} S_t$ y bajo la cual $dZ_t = \sigma Z_t d\widetilde{W}_t$ con $\widetilde{W}_t$ un $\mathbf{Q}$-movimiento browniano. Entonces se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} dZ_t &= \sigma Z_t d\widetilde{W}_t \\ d(B_t^{-1} S_t) &= \sigma B_t^{-1} S_t d\widetilde{W}_t \\ B_t^{-1} dS_t + S_t dB_t^{-1} &= \sigma B_t^{-1} S_t d\widetilde{W}_t \\ e^{-rt} dS_t + S_t de^{-rt} &= \sigma e^{-rt} S_t d\widetilde{W}_t \\ e^{-rt} dS_t + S_t(-r) e^{-rt} dt &= \sigma e^{-rt} S_t d\widetilde{W}_t \\ dS_t - r S_t dt &= \sigma S_t d\widetilde{W}_t \end{aligned}$$

Con lo que

$$dS_t = r S_t dt + \sigma S_t d\widetilde{W}_t$$

Al utilizar el lema de Íto se obtiene que

$$d\left(ln(S_t)\right) = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma d\widetilde{W}_t$$

de donde

$$ln(S_t) = ln(S_0) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma \widetilde{W}_t$$

por lo que finalmente,

$$S_t = S_0 \cdot exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma \widetilde{W}_t\right) \quad \text{donde} \quad \widetilde{W}_t \sim N(0,t) \tag{3.42}$$

3.5.4. Teoría sobre la Valuación de Opciones Exóticas

Los mercados OTC (Over The Counter) son una fuente constante de innovaciones financieras, que intentan adaptar las características de los diferentes instrumentos, a las necesidades específicas de cobertura de riesgos de los agentes económicos. En el caso de las opciones, las más interesantes que han aparecido en los últimos años son las de tipo exotico, las cuales pueden dividirse a su vez en cuatro tipos:

- *Opciones Compuestas u Opciones sobre Opciones*: Son opciones cuyo subyacente es otro contrato de opción (Call sobre Call, Call sobre Put, Put sobre Call, Put sobre Put) y pueden ser del tipo europeas o americanas.
- *Opciones Path-Dependents*: Se trata de aquellas opciones cuyo valor depende de la evolución histórica del activo subyacente, entre las más comúnes destacan las Opciones LookBack, Opciones Barrera o Doble Barrera, así como las Asiáticas.
- *Opciones Condicionales*: Son opciones en las que se incorpora una condición para ejecutar el pago a vencimiento (Opciones Forward Start, Opciones con Vencimiento Extensible, Opciones Binarias, Opciones Choose, etc).
- *Opciones sobre varios Subyacentes*: Dentro de este apartado existen numerosos tipos de opciones, las más usuales son las opciones sobre el intercambio de dos activos, sobre dos activos correlacionados, sobre el máximo y el mínimo de dos activos.

La valoración de este tipo de opciones es relativamente compleja aunque en algunos casos es posible aplicar el modelo de "*Black-Scholes*". Sin embargo, su operación en México no es significativa, por lo que el desarrollo y estudio de nuevas metodologías para la valuación de estos instrumentos queda abierta a la investigación.

3.5.5. Estrategias de Cobertura con Productos Derivados

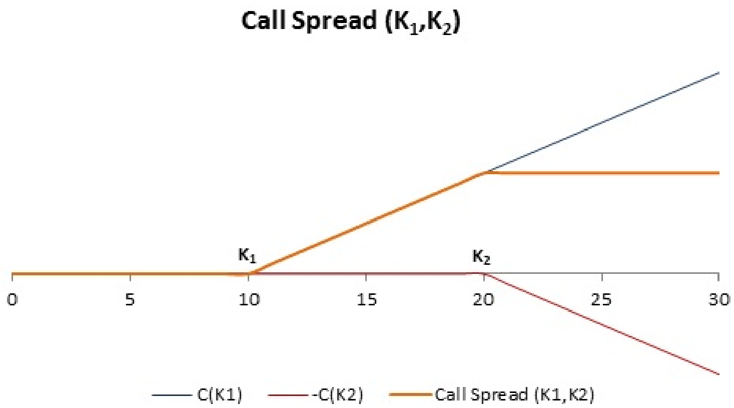
En este apartado se describen varias estrategias con opciones, para ello es indispensable analizar los pagos al vencimiento (payoff) según sea el valor del activo subyacente. La clave para utilizar las opciones de forma exitosa, es mediante la habilidad que se tenga para combinar una estrategia apropiada con un objetivo en particular y en un determinado momento; naturalmente, es muy poco probable que una persona use todas las estrategias posibles con opciones por la simple razón de que la probabilidad de que tenga la necesidad de usar cada estrategia es casi nula.

- *Call Spread:* Se trata de un producto cuya cobertura es mucho más barata que la de un Call Tradicional donde el cliente se protege de la subida del subyacente con la compra de un Call, pero que a su vez limita su ganancia mediante la venta de otro Call con un Strike (precio de ejercicio) mayor; la volatilidad, el vencimiento así como la tasa libre de riesgo son equivalentes para ambos instrumentos.

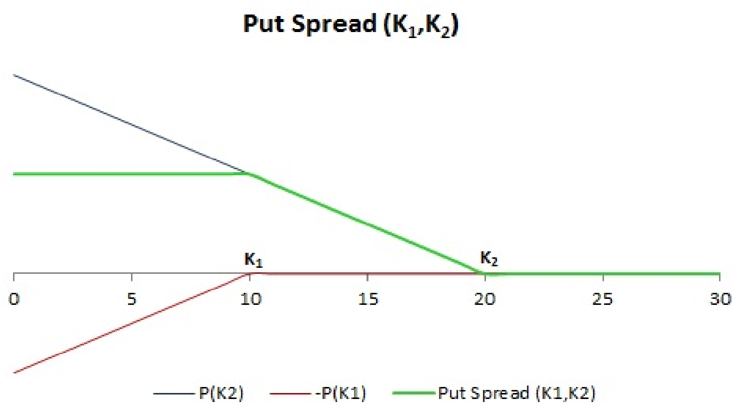
$$CallSpread(K_1, K_2) := LongCall(K_1) + ShortCall(K_2) = C(K_1) - C(K_2) \quad \text{donde } K_2 > K_1$$

- *Put Spread:* Es un producto derivado en la que el cliente se protege de la bajada del subyacente con la compra de una opción Put, mientras que a su vez limita su ganancia mediante la venta de otro Put con las mismas características que el primero pero con un precio de ejercicio menor.

$$PutSpread(K_1, K_2) := LongPut(K_1) + ShortPut(K_2) = P(K_2) - P(K_1) \quad \text{donde } K_1 < K_2$$



Gráfica 3.3 Estrategía de Cobertura Call Spread



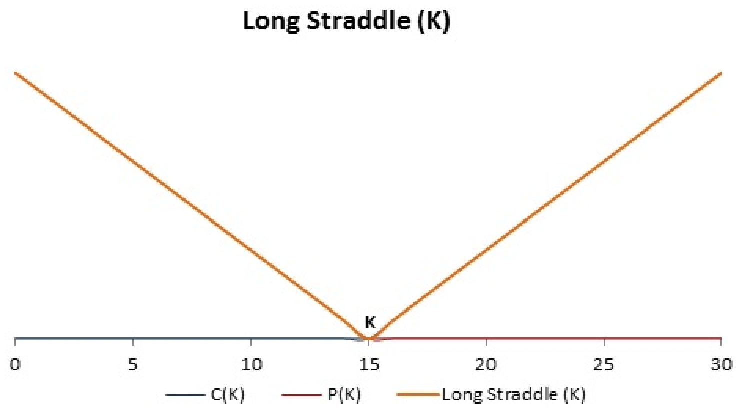
Gráfica 3.4 Estrategía de Cobertura Put Spread

- *Long Straddle:* Es una estrategia que se realiza ante expectativas de un aumento de la volatilidad en el futuro y de cambios bruscos en el precio, siendo irrelevante la direccion que vaya a tomar el mismo. Para su construcción se considera la compra de una opción call y una opción put (ambos con el mismo precio de ejercicio y fecha de vencimiento).

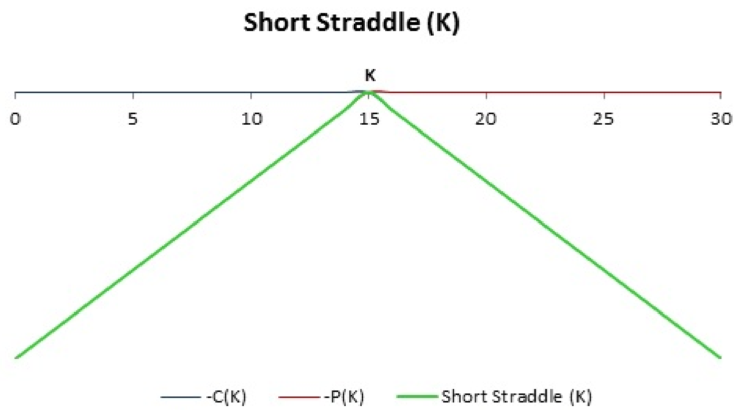
$$LongStraddle(K) := LongCall(K) + LongPut(K) = C(K) + P(K)$$

- *Short Straddle:* Esta estrategia se utiliza ante expectativas de un aumento de la volatilidad y cambios bruscos en el precio, siendo irrelevante la dirección que vaya a tomar. Para ello es necesario vender una opción call junto con una opción put, ambos con las mismas características (strike, vencimiento, subyacente, etc).

$$ShortStraddle(K) := ShortCall(K) + ShortPut(K) = -C(K) - P(K)$$



Gráfica 3.5 Estrategía de Cobertura Long Straddle



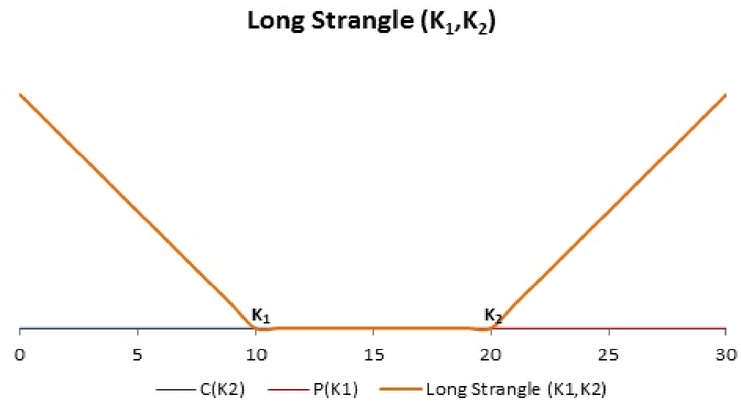
Gráfica 3.6 Estrategía de Cobertura Short Straddle

- *Long Strangle:* Es un producto cuya característica es la cobertura ante un aumento en la volatilidad así como variaciones abruptas en el precio del activo subyacente, a diferencia de un "long straddle", este presenta dos precios de ejercicio para la opción call y put. Se construye comprando un call y una opción put con un strike menor al precio del call (ambos con el mismo tiempo de maduración).

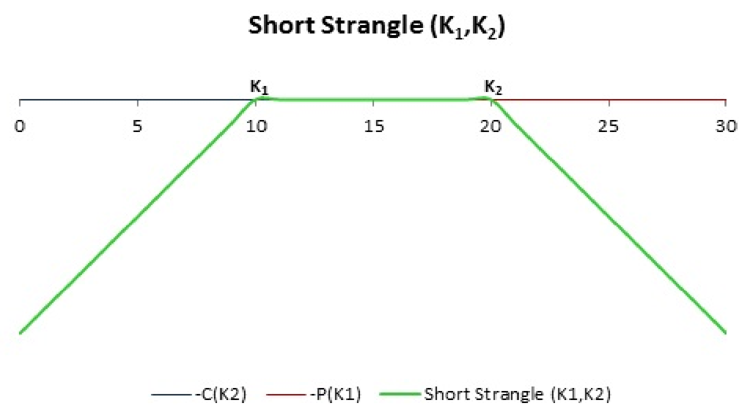
$$LongStrange(K_1, K_2) := LongCall(K_2) + LongPut(K_1) = C(K_2) + P(K_1) \quad \text{donde } K_1 > K_2$$

- *Short Strangle:* Estrategia que se realiza ante expectativas de un aumento de la volatilidad y grandes variaciones en el precio del subyacente, a diferencia de un "short strangle", se vende una opcion call junto con una opción put donde el precio de ejercicio del put es menor al del call.

$$ShortStrangle(K_1, K_2) := ShortCall(K_2) + ShortPut(K_1) = -C(K_2) - C(K_1) \quad \text{donde } K_1 < K_2$$



Gráfica 3.7 Estrategía de Cobertura Long Strangle



Gráfica 3.8 Estrategía de Cobertura Short Strangle

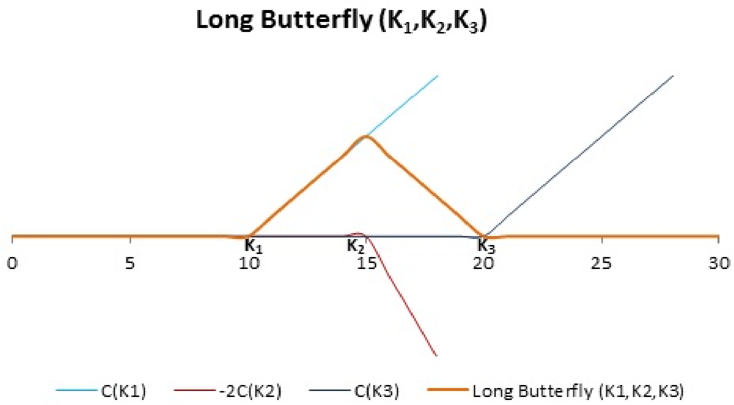
- *Long Butterfly:* Se trata de una estrategia neutral en cuanto al valor del precio, por lo que apuesta a la estabilidad del subyacente donde el escenario de valuación se supone poco volátil. En términos generales es la combinación de dos "call spreads" (uno bajista y otro alcista), se puede construir mediante opciones call o bien opciones put.

  a) Composición por Calls

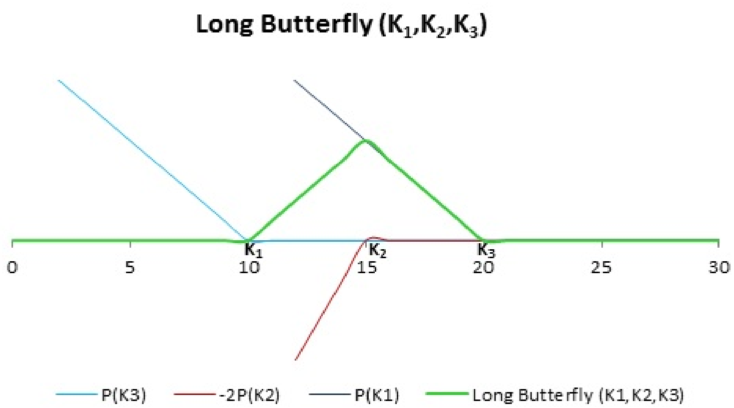
$$LongButterfly(K_1, K_2, K_3) := C(K_1) - 2C(K_2) + C(K_3)$$

  b) Composición por Puts

$$LongButterfly(K_1, K_2, K_3) := P(K_3) - 2P(K_2) + P(K_1)$$



Gráfica 3.9 Estrategía de Cobertura Long Butterfly compuesta por Calls



Gráfica 3.10 Estrategía de Cobertura Long Butterfly compuesta por Puts

3.5.6. Medidas de Sensibilidad para Opciones

Como bien se mencionó anteriormente, el valor de una opción depende de diferentes factores principalmente el activo subyacente así como su volatilidad, el plazo de vencimiento y los tipos de interés. Las **griegas** son un conjunto de medidas que describen la sensibilidad del precio del derivado a dichos factores, por lo que resultan ser una herramienta muy útil para la gestión del riesgo de estos instrumentos. A continuación se describen las más comunes para el caso de una opción (Call/Put) europea.

Delta - Δ

Esta medida describe el cambio del valor de la opción (C) como consecuencia de movimientos en el activo subyacente (S), implícitamente se asume que el resto de los factores que influyen en el precio del instrumento permanecen constantes. Además, la delta de una opción se puede interpretar como la cobertura frente a los cambios en el spot subyacente, es decir, la posición en el spot que garantiza que las pérdidas/ganancias de la opción se compensan con los de la posición spot.

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S}$$

Al considerar un movimiento en el activo subyacente, el precio de la opción cambia a C_2 así como la posición del inversionista $(C - C_2)$ generando una ganancia o pérdida, la cual resulta ser directamente proporcional al nivel de Δ de la opción y al cambio en su precio.

Si el activo subyacente no paga dividendos, la Δ de una opción Europea Call (Plain Vanilla) corresponde a $\Delta = N(d_1)$ donde $N(d_1)$ se refiere a la definida en la ecuación 3.38, mientras que para una opción Europea Put es $\Delta = N(d_2) - 1$.

La delta de una opción Call siempre es positiva, mientras que la delta de una opcion Put se mantiene negativa.

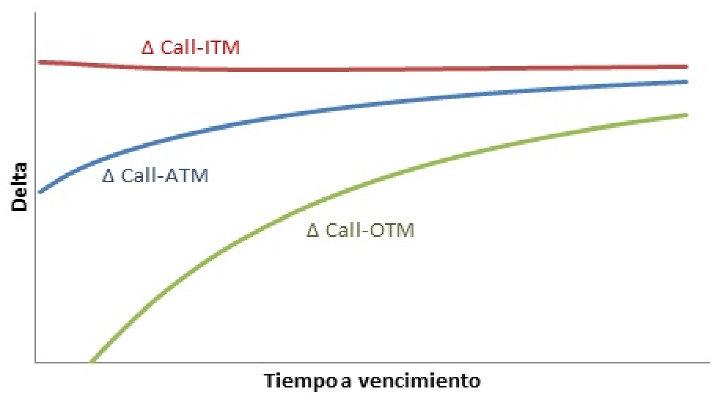
Si el subyacente paga dividendos, la delta correspondiente para una opción Call y Put son:

$$\Delta_{Call} = e^{-q\tau}N(d_1) \qquad \text{y} \qquad \Delta_{Put} = e^{-r\tau}[N(d_2) - 1]$$

donde q se refiere a la tasa que paga el activo subyacente.

1) Si el activo S_t es sobre una moneda, q será la tasa libre de riesgo foránea (r_f).

2) Si el activo S_t es un contrato futuro, q corresponde a la tasa libre de riesgo doméstica (r).



Gráfica 3.11 Delta de una opción Call Europea cuyo subyacente no paga dividendos

Δ - Forward

El valor de un forward está dado por $S_0 - Ke^{r\tau}$, al suponer que S_t cambia a δS (manteniendo el resto de las variables constantes) el valor del contrato también cambia δS y con ello la delta del contrato forward se mantiene constante ($\Delta_{fwd} = 1$). Lo cual indica que una posición larga en el contrato forward siempre puede ser cubierta por una posición corta, y una posición corta puede cubrirse con una posición larga.

1) Si el activo S_t paga dividendos a una tasa de interes q, la delta del contrato forward es $\Delta_{fwd} = e^{-q\tau}$.

2) Si el activo es sobre una moneda, la delta del contrato es igual a la tasa libre de riesgo foránea $\Delta_{fwd} = r_f$

Δ - Futuro

El precio de un futuro que no paga dividendos es $S_0e^{r\tau}$ donde τ es el tiempo de maduración del contrato, si el precio del stock (S_t) presenta un cambio por δS (con el resto de los parámetros fijos) entonces el precio del futuro cambia por $\delta Se^{r\tau}$, por lo que la delta de un futuro corresponde a $\Delta_{fut} = e^{r\tau}$.

1) Si el activo subyacente paga dividendos a una tasa q, la delta del futuro se calcula como $\Delta_{fut} = e^{(r-q)\tau}$.

Cuando las tasas de interés son constantes y los precios del Futuro y del Forward son iguales, sus deltas resultan ser parcialmente semejantes, razón por la cual suele utilizarse un futuro y asumir una posición de riesgo-neutral.

T: Maduración del contrato

H_A: Posición requerida en el activo para la cobertura de la delta.

H_F: Posición alternativa en el contrato Futuro para la cobertura de la delta.

1. Si el activo subyacente no paga dividendos se tiene que $H_F = e^{-r\tau} H_A$

2. Si el activo subyacente paga dividendos a una tasa q entonces $H_F = e^{-(r-q)\tau} H_A$

Δ - Portafolio

Finalmente, la delta de un portafolio de opciones (Δ_Π) puede ser calculada a partir de las deltas de cada una de las opciones, es decir, si un portafolio se conforma por w_i opciones con $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ la delta de está dada por:

$$\Delta_\pi = \sum_{i=1}^{n} w_i \Delta_i \quad \text{donde } \Delta_i \text{ es la delta de la i-ésima opción}$$

Theta - Θ

Esta medida describe el cambio en el valor de la opción conforme el transcurso del tiempo y el resto de los factores se asumen constantes, este cambio proviene del hecho de que el plazo de una opción se reduce con el paso del tiempo hasta su vencimiento. La theta algunas ocasiones se refiere al decaimiento del tiempo del portafolio.

Para una opción Call-Europea (que no paga dividendos) y de acuerdo al modelo de Black-Scholes la theta se expresa como:

$$\Theta = -\frac{S_0 N(d_1)\sigma}{2\sqrt{\tau}} - rKe^{-r\tau} N(d_2)$$

Para una opción Put-Europea que no paga dividendos:

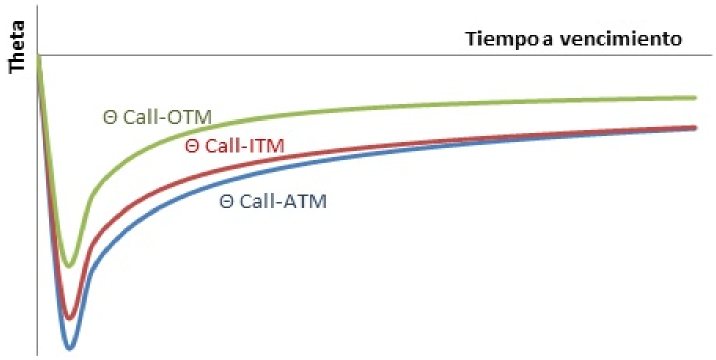
$$\Theta = -\frac{S_0 N(d_1)\sigma}{2\sqrt{\tau}} + rKe^{-r\tau} N(-d_2)$$

Si el activo subyacente paga dividendos a una tasa q:

1. Opción Call $---> \Theta = -\frac{S_0 N(d_1)\sigma e^{-q\tau}}{2\sqrt{\tau}} + qS_0 N(d_1)e^{-q\tau} - rKe^{-r\tau} N(d_2)$

2. Opción Put $---> \Theta = -\frac{S_0 N(d_1)\sigma e^{-q\tau}}{2\sqrt{\tau}} - qS_0 N(-d_1)e^{-q\tau} + rKe^{-r\tau} N(-d_2)$

La Theta es por lo regular negativa a excepción de que la opción sea Put-Europea que no pague dividendos y se encuentre *in-the-money* (ITM), o bien una opción Call-Europea cuyo subyacente sea una moneda con una tasa de interés muy alta. Esto se debe a que la maduración decrece con respecto al tiempo (se suponen el resto de los parámetros constantes a lo largo del tiempo) y con lo que la opción comienza a ser cada vez menos valuable.

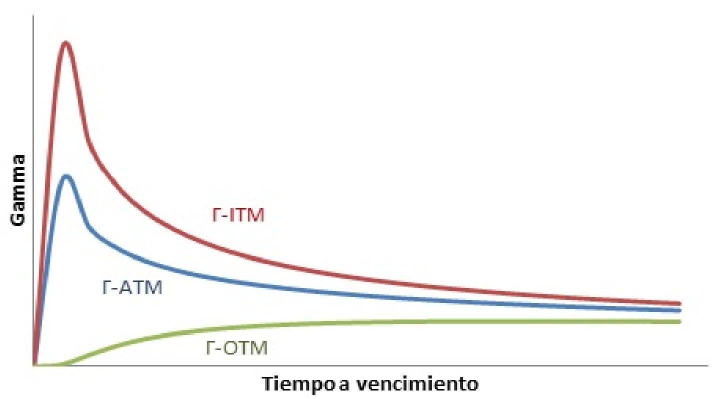


Gráfica 3.12 Theta de una opción Call Europea cuyo subyacente no paga dividendos

Gamma - Γ

Describe cómo cambia la delta del portafolio bajo movimientos del activo subyacente y cómo debería ser la cobertura para mantener una posición delta neutral cuando cambia el spot. Es importante mencionar que los calls y puts tienen una gamma positiva, y además, esta medida de sensibilidad ofrece al inversionista una visión adicional sobre la volatilidad del activo subyacente ya que una posición larga denota expectativas de un mercado volátil, mientras que una corta indica que aguarda un mercado en calma.

$$\Gamma = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial S^2}$$



Gráfica 3.13 Gamma de una opción Call Europea cuyo subyacente no paga dividendos

Si la gamma es pequeña, los cambios en la delta así como los ajustes necesarios para tener un portafolio delta neutral son relativamente poco significativos; sin embargo, al tener una gamma mayor en términos absolutos, la delta es más sensible al precio del activo subyacente. Al considerar δS como el cambio en el precio del subyacente durante un intervalo de tiempo relativamente pequeño (δt) y $\delta\Pi$ el cambio en el portafolio, entonces un portafolio delta-neutral cumple la siguiente relación:

$$\delta\Pi = \Theta\delta t + \frac{1}{2}\Gamma\delta S^2$$

La gamma de una opción Call o Put cuyo subyacente no paga dividendos se obtiene como:

$$\Gamma = \frac{N(d_1)}{S_0\sigma\sqrt{\tau}}$$

En este caso, la gama siempre es positiva y las variaciones con respecto a S_0 se comportan de acuerdo a la gráfica 3.13

Es importante mencionar que para una opción *at-the-money* (ATM) la gamma crece conforme el tiempo a vencimiento es menor, lo cual indica que las opciones (ATM) con una "vida corta" son más sensibles a cambios en el precio del stock.

Si por el contrario, la gamma de una opción Call o Put cuyo subyacente paga dividendos a una tasa q se calcula como:

$$\Gamma = \frac{N(d_1)e^{-q\tau}}{S_0\sigma\sqrt{\tau}}$$

Relación entre Delta, Theta y Gamma (Δ, Θ, Γ)

El precio de un derivado cuyo subyacente no paga dividendos satisface la ecuación diferencial

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf \quad \text{donde } f \text{ es el precio de la opción}$$

Análogamente, ocurre para un portafolio (Π) de opciones

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} + rS\frac{\partial \Pi}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial S^2} = r\Pi$$

donde:

$$\Theta = \frac{\partial \Pi}{\partial t}, \Delta = \frac{\partial \Pi}{\partial S}, \Gamma = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial S^2}$$

por lo que

$$r\Pi = \Theta + rS\Delta + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \Gamma$$

Vega - *V*

Hasta el momento la volatilidad de un activo subyacente se ha considerado constante, sin embargo, en la práctica la volatilidad cambia en el tiempo; por lo que el valor de un derivado es suceptible a movimientos en la volatilidad, a cambios en el precio del subyacente y al transcurso del tiempo.
La Vega de un portafolio de derivados (V) es la tasa de cambio del portafolio con respecto a la volatilidad del activo subyacente, por lo que representa la amplitud entre las variaciones en el valor del subyacente; así a mayores variaciones en la volatilidad se indica que es más probable que el activo adquiera valores extremos en su valor incrementando el valor de la opción.

$$V = \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma}$$

Si la vega en términos absolutos es alta, el valor del portafolio es muy sensible a pequeñas variaciones en la volatilidad; si por el contrario, el valor de la vega es pequeño entonces el impacto en el portafolio será relativamente inferior en su valor.

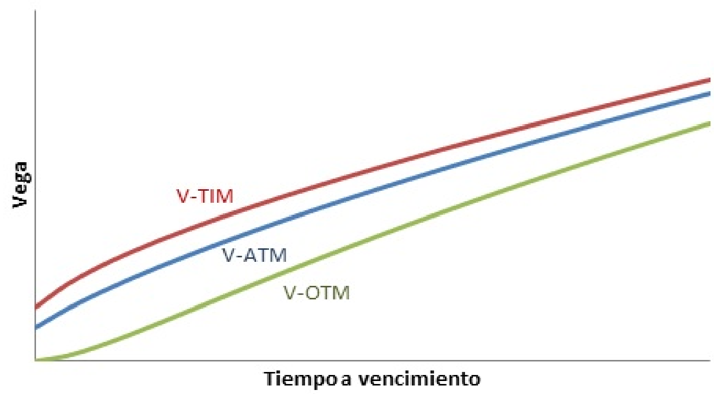
La vega para una opción Call o Put cuyo subyacente no paga dividendos está dada por

$$V = S_0\sqrt{\tau}N(d_1)$$

Si el activo subyacente paga dividendos a una tasa de interés q, la vega de la opción Put será

$$V = S_0\sqrt{\tau}N(d_1)e^{-q\tau}$$

La vega de una opción Europea/Américana resulta ser siempre positiva, la gráfica bajo variaciones del activo subyacente (S_0) es:



Gráfica 3.14 Vega de una opción Call Europea cuyo subyacente no paga dividendos

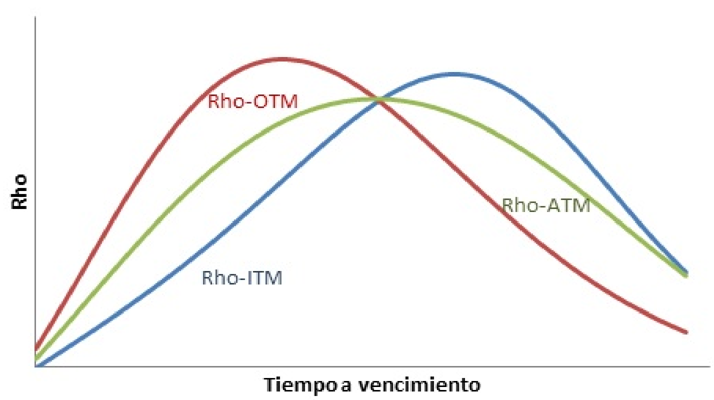
Rho - *Rho*

La rho de un portafolio de opciones ($Rho\ _{\Pi}$), representa la sensibilidad del precio de la opción (en base al modelo de Black-Scholes) con respecto a los cambios en el tipo de interés.

$$Rho_{\Pi} = \frac{\partial \Pi}{\partial r} \quad \text{donde } r \text{ es la tasa de interés}$$

Esta mide la sensibilidad del valor del portafolio a movimientos en la tasa de interés.

1. La rho de una opción Call Europea correspode a $Rho = -K\tau e^{-r\tau}N(d_2)$
2. La rho de una opción Put Europea es $Rho = -K\tau e^{-r\tau}N(-d_2)$



Gráfica 3.15 Rho de una opción Call Europea cuyo subyacente no paga dividendos

Es importante hacer énfasis que esta medida no incluye el impacto que pueden llegar a tener las tasas sobre el tipo de cambio.

Capítulo 4

Valor en Riesgo (VaR) una medida para la gestión del Riesgo

Durante los últimos años las instituciones financieras han presentado varios cambios en la forma de evaluar sus riesgos, continuamente se busca mejorar la relación entre el capital regulatorio y la disposición de los riesgos que una empresa adopte. Así las regulaciones han mostrado un gran avance en el desarrollo de técnicas y modelos para la medición del riesgo; los cuales se han convertido en estándares para la medición, administración y control del riesgo a nivel externo y principalmente a nivel interno.

Esta sección se enfoca principalmente en la obtención del VaR[1] como medida del riesgo de mercado, para los requerimientos de capital así como de la administración del riesgo interno. Además se describen tres metodologías generales para la obtención del VaR (Paramétrico, Histórico y Simulación Montecarlo), donde se analizan las ventajas teóricas y prácticas de cada una de ellas así como las limitaciones que presentan al momento de su implementación.

4.1. Concepto Básico del VaR

“La Enmienda” de 1996 proporciona un enfoque alternativo para la medición del requerimiento de capital del riesgo de mercado (MRR), el cual consiste en utilizar modelos internos para determinar la pérdida total de una institución. Estos modelos son a su vez objeto para algunos requerimientos cuantitativos y cualitativos.

Los requerimientos cuantitativos incluyen: la estimación de los parámetros del modelo, la presencia de técnicas rigurosas para su validación, además de un número mínimo de factores de riesgo y una longitud mínima del periodo de datos históricos.

Los requerimientos cualitativos incluyen: la existencia de una función de gestión de riesgo independiente para la auditoría y control, así como un exhaustivo y riguroso programa de pruebas de estrés sobre las posiciones de la empresa.

Aunque estos modelos pueden tener como base principal el análisis de escenarios, muchas instituciones evalúan su MRR usando un modelo de Valor en Riesgo. El VaR se define como la pérdida esperada dada una probabilidad específica sobre un horizonte de tiempo fijo, a causa de movimientos adversos en el mercado. Por lo que el VaR puede ser medido como el percentil más bajo de una distribución de pérdidas y ganancias teórica que surge de posibles movimientos de los factores de riesgo de mercado sobre un horizonte de tiempo determinado.

Al considerar un portafolio que es gestionado en un horizonte de tiempo de h días, la pérdida o ganancia

[1] Aunque el VaR fue introducido en el contexto del riesgo de mercado, en la actualidad se ha extendido a otros tipos de riesgo como el VaR de crédito y el VaR operacional.

del portafolio se expresa de la siguiente forma:

$$\Delta_h P_t = P_{t+h} - P_t$$

En primera instancia se desconoce el movimiento futuro de los factores de riesgo[2], sin embargo, los posibles movimientos de estos factores se pueden explicar bajo una distribución inicial y con esta a su vez obtener una distribución de $\Delta_h P_t$, ya que cada conjunto de posibles valores de los factores de riesgo se introducen en los modelos del precio del portafolio, ponderados por sus probabilidades conjuntas.

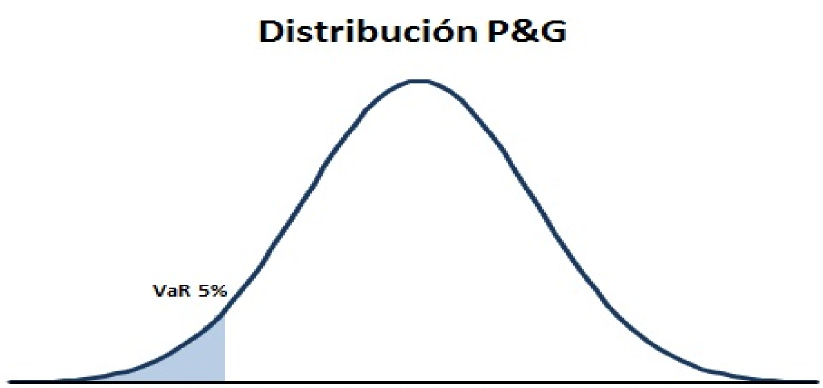
La probabilidad de asociación con una medición del VaR (el nivel de significancia) corresponde a la frecuencia con la cual un nivel dado de pérdida es esperado; por lo tanto, un VaR de un día a un nivel de significancia del 5 % corresponde a un nivel de pérdida que se espera superar (bajo circunstancias normales de mercado), en 1 de 20 días. Y un VaR de un día a un nivel de significancia del 1 % se refiere al nivel de pérdida que se puede dar en 1 de 100 días[3].

Con lo anterior la definición del VaR puede ser reformulada de la siguiente forma:

– El VaR al $100\alpha\,\%$ de h días es, el número x tal que la probabilidad de que la pérdida sea al menos la cantidad x en los siguientes h días es igual a $100\alpha\,\%$. En lenguaje matemático se refiere a lo siguiente.

$$VaR\,100\alpha\,\% \;\; \text{(h dias) es la cantidad } x \text{ tal que:} \quad Prob(\Delta_h P_t < -x) = \alpha$$

Algunas ocasiones suele utilizarse la notación $VaR_{\alpha,h}$ para enfatizar la dependencia de la medición del VaR con los dos parámetros, α el nivel de significancia y h el periodo de tiempo en estudio.



Gráfica 4.1 Distribución de Pérdidas y Ganancias Teórica

Normalmente los modelos de VaR producen mediciones más realistas del riesgo de capital que las que se obtienen con un enfoque estandarizado. Los modelos VaR tienen muchas ventajas y un potencial considerable para la medición y control del riesgo interno como externo, sin embargo, como toda metodología tiene sus limitaciones y desventajas que deben ser consideradas al momento de su implementación.

4.2. Ventajas y Desventajas del uso del VaR

Desde que los reguladores han impuesto requerimientos mínimos de capital para hacer frente al riesgo de mercado basado principalmente en los modelos internos, el VaR pasó a ser de una medida estándar

[2]Los factores de riesgo de mercado principalmente son: el tipo de cambio, las tasas de interés nacionales y extranjeras, la volatilidad y la sobretasa, entre otros.

[3]A esto se le conoce como medidas del VaR al 95 % y 99 %

a una medida universal para la mitigación del riesgo, en gran parte debido a la jerarquía favorable de sus ventajas; sin embargo, el uso de esta metodología también puede presentar algunas desventajas.

A continuación se describen las ventajas y desventajas del uso del VaR, las cuales se resumen en la **tabla 4.1**.

⋆ **Ventajas del VaR**

- Puede ser usado para comparar los riesgos de mercado de todos los tipos de actividades dentro de la empresa.
- Provee una medida única, fácil de comprender e interpretar.
- Puede ser extendido a otros tipos de riesgo, como pueden ser al riesgo de crédito y operacional.
- Considera las correlaciones y las coberturas entre varias categorías de activos o factores de riesgo.
- Se puede calcular bajo una gran cantidad de métodos distintos, lo cual incita al desarrollo de nuevas metodologias así como a sus mejoras.
- Permite cuantificar una pérdida en condiciones normales de mercado y bajo escenarios extremos.

⋆ **Desventajas del VaR**

- No distingue la liquidez entre diferentes posiciones de mercado.
- Únicamente captura el riesgo en periodos cortos y en circunstancias normales de mercado.
- Estos modelos suelen aplicarse bajo supuestos injustificados.
- El costo de su implementación puede ser muy grande y poco eficiente en cuanto a tiempo de respuesta.

La medición del VaR puede variar de acuerdo a la composición del portafolio en estudio; por ejemplo, una medida tradicional de riesgo para un portafolio de renta fija[4] (que puede ser representado como un mapa de flujos de efectivo) es la medida estándar "duración[5]", la cual es un vencimiento medio ponderado del valor presente de los flujos en efectivo.

Ahora bien, la medida tradicional de una cartera de renta variable se basa en sensibilidades a los factores de riesgo, sin embargo, el riesgo de mercado de un portafolio de renta variable se atribuye principalmente a tres fuentes:

1) Las varianzas y covarianzas de los factores de riesgo subyacentes.
2) Sensibilidades a los factores de riesgo.
3) La varianza específica del riesgo residual[6].

[4]Un portafolio de renta fija es aquel que se compone de instrumentos financieros de renta fija, tales como BONOS o préstamos gubernamentales (CETES).
[5]Duración. Ver Capítulo 3. Instrumentos Financieros, Sección 3.3.2. Medidas de Sensibilidad para BONOS.
[6]Se refiere al riesgo remanente y potencial que resulta después de aplicar las medidas de seguridad al tratamiento del riesgo.

Por lo tanto, esta medida de riesgo únicamente contempla la parte no diversificable del riesgo ya que ignora la presencia del riesgo proveniente de movimientos en los factores de riesgo del subyacente y los riesgos específicos del propio portafolio. Es por ello que una de las mayores ventajas del VaR es que este no ignora dichas fuentes del riesgo.

En general las medidas de riesgo tradicionales no pueden ser comparadas entre sí, por ejemplo, en el caso de la "duración" de un portafolio compuesto por bonos (comúnmente medida en meses o años) no puede ser comparada con la "delta" de un portafolio de opciones para determinar un nivel de riesgo en común. En primer lugar ambas miden cambios de primer orden en un portafolio, sin embargo, no es posible decidir que instrumento tiene asociado un mayor riesgo de acuerdo a un nivel de delta y duración dados, por lo que se tendría que recurrir a análisis adicionales para la toma de decisión.

Lo anterior muestra otra gran ventaja del VaR, la cual es que se considera las volatilidades de los factores de riesgo, por lo que es una medida comparable a través de diferentes clases de instrumentos financieros. Mientras que las medidas de riesgo basadas sólo en sensibilidad tienen una mayor cantidad de limitaciones, entre ellas se encuentran las siguientes:

- No pueden ser comparadas a través de diferentes actividades para identificar un área determinada con mayor riesgo.

- No pueden ser agregadas y con ello obtener una exposición total a través de todos los productos y divisas.

- No indican de manera directa cuánto se podría perder, ya sea en condiciones normales de mercado o bajo escenarios extremos.

Ventajas	Desventajas
Fácil de comprender	Indistinción de Liquidez
Interpretación directa	Horizontes de tiempo cortos
Extensión a otros tipos de riesgos	Costo de implementación puede ser excesivo
Considera las correlaciones de los factores de riesgo	
Aplicación bajo distintos métodos	
Medida comparable entre diferentes tipos de activos	
Permite cuantificar una pérdida en condiciones normales y bajo escenarios extremos	
Motivación al desarrollo de nuevos métodos	

Cuadro 4.1: Cuadro comparativo - Ventajas y Desventajas del VaR

4.3. Modelos para la Estimación del VaR

La medición del riesgo de mercado permite a los inversionistas visualizar de manera general el estado en que se encuentra una determinada empresa, o bien el comportamiento de un instrumento financiero dentro de un mercado; además permite hacer comparaciones de los rendimientos del riesgo de mercado en sus diferentes áreas, así como para su regulación.

Existen diversas metodologías para la medición del VaR, en este apartado se mencionan los tres modelos estándares más simples, el VaR Paramétrico, el VaR Histórico y el VaR por Simulación Montecarlo; de ahí es posible desarrollar modelos más sofisticados, lo que los hace más robustos y más complejos.

4.3.1. Modelo Paramétrico (Varianzas y Covarianzas)

El modelo paramétrico se basa principalmente en la varianza y en la correlación que existe entre los diferentes activos del portafolio de inversión[7] , el supuesto trascendental bajo este método es la suposición de una distribución normal.

Esto es, si P_t denota el valor del portafolio al tiempo t y se considera su valor al transcurrir un periodo h, su rendimiento (variación del portafolio) se expresa de la siguiente manera:

$$\Delta_h P_t = P_{t+h} - P_t$$

Entonces la variación $\Delta_h P_t \sim N(\mu_t, \sigma_t^2)$

Por lo que si se desea calcular el VaR al $100\alpha\,\%$ con un horizonte temporal de h-días ($VaR_{\alpha,h}$), se busca entonces que la probabilidad de que la variación del valor del portafolio entre el tiempo t y $t+h$ sea inferior al valor en riesgo deseado sea igual al nivel de confianza (α).
En términos matemáticos es lo siguiente:

$$P[\Delta_h P_t < VaR_{\alpha,h}] = \alpha^8$$

Donde:$\Delta_h P_t \sim N(\mu_t, \sigma_t^2)$

Entonces se cumplen las siguientes igualdades:

$$\alpha = P[\Delta_h P_t < VaR_{\alpha,h}] = P\left[\frac{\Delta_h P_t - \mu_t}{\sigma_t} < \frac{VaR_{\alpha,h} - \mu_t}{\sigma_t}\right] = P\left[Z_t < \frac{VaR_{\alpha,h} - \mu_t}{\sigma_t}\right]$$

Donde: $Z_t \sim N(0,1)$

Por lo que

$$\frac{VaR_{\alpha,h} - \mu_t}{\sigma_t} = -Z_\alpha$$

Donde Z_α corresponde al percentil $100\alpha\,\%$ de la función normal estándar.

Reescribiendo la expresión anterior,

$$VaR = -Z_\alpha \cdot \sigma_t + \mu_t \tag{4.1}$$

En la práctica por simplicidad suele asumirse $\mu_t = 0$ y Z_α es conocido dado el nivel de confianza $100\alpha\,\%$, por lo que basta con estimar el valor de σ_t^2.

Si se destina un capital M a un portafolio lineal[9] y por simplicidad se considera que está compuesto por dos activos, el portafolio P tiene la siguiente estructura:

$$P = M \cdot w_1 \cdot X_1 + M \cdot w_2 \cdot X_2 = M[w_1 \cdot X_1 + w_2 \cdot X_2]$$

Donde:
- M: Se refiere al Monto invertido en el portafolio

[7] A dicha relación se le conoce como Matriz de Varianzas y Covarianzas (MVC).
[8] Recordemos que la distribución normal estándar tiene la propiedad de simetría, de la cual se deriva que el percentil $Z_{(1-\alpha)}$ es equivalente al percentil $-Z_\alpha$.
[9] Un portafolio lineal es aquel que presenta variaciones lineales o de primer orden, mientras que un portafolio no-lineal mantiene variaciones de al menos segundo orden.

- $X_{1,2}$: Los activos 1 y 2 que conforman el portafolio.
- $w_{1,2}$: Corresponden a los pesos asignados al activo 1 y 2 de tal manera que sumen la unidad.

El rendimiento del portafolio es:

$$\begin{aligned} R_p &= E[P] \\ &= E[M(w_1 \cdot X_1 + w_2 \cdot X_2)] \\ &= M[w_1 \cdot E(X_1) + w_2 \cdot E(X_2)] \\ &= M[w_1 \cdot R_1 + w_2 \cdot R_2] \end{aligned} \tag{4.2}$$

Donde:

- R_p: Es el rendimiento esperado del portafolio.
- R_1: Es el rendimiento esperado del activo 1.
- R_2: Es el rendimiento esperado del activo 2.

Ahora se estima la volatilidad esperada del portafolio a través de la varianza

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= Var(P) \\ &= VaR\left(M(w_1 \cdot X_1 + w_2 \cdot X_2)\right) \\ &= M^2\left[w_1^2 \cdot Var(X_1) + w_1^2 \cdot Var(X_2) + 2w_1w_2 \cdot Cov(X_1, X_2)\right] \\ &= M^2\left[w_1^2 \cdot \sigma_1^2 + w_2^2 \cdot \sigma_2^2 + 2w_1w_2 \cdot \sigma_{12}\right] \end{aligned} \tag{4.3}$$

Donde:

- σ_p^2: Se refiere a la volatilidad del portafolio.
- σ_1^2: Representa la volatilidad del activo 1.
- σ_2^2: Representa la volatilidad del activo 2.
- σ_{12}: Es la covarianza que existe entre el activo 1 y el activo 2.

La ecuación (4.3) se puede reescribir en forma matricial, considerando por el momento que M=1:

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= w_1^2 \cdot \sigma_1^2 + w_2^2 \cdot \sigma_2^2 + 2w_1w_2 \cdot \sigma_{12} \\ &= (w_1^2 \cdot \sigma_1^2 + w_1w_2 \cdot \sigma_{12}) + (w_1w_2 \cdot \sigma_{12} + w_2^2 \cdot \sigma_2^2) \\ &= w_1(w_1 \cdot \sigma_1^2 + w_2 \cdot \sigma_{12}) + w_2(w_1 \cdot \sigma_{12} + w_2 \cdot \sigma_2^2) \\ &= (w_1, w_2) \cdot \begin{pmatrix} w_1\sigma_1^2 + w_2\sigma_2^2 \\ w_1\sigma_{12} + w_2\sigma_2^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \\ \therefore \sigma_p^2 &= w^T \cdot V \cdot w \end{aligned} \tag{4.4}$$

Además es posible expresar la volatilidad del portafolio P en función de la matriz de correlaciones:

1) Al expresar la correlación como $\rho_{12} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \cdot \sigma_2}$, lo cual implica que $\sigma_{12} = \rho_{12} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2$

2) Además se cumple que $\rho_{11} = \sigma_1\sigma_1 = \sigma_1^2$

Entonces

$$\begin{aligned}
\sigma_p^2 &= w_1^2\rho_{11}\sigma_1\sigma_1 + w_2^2\rho_{22}\sigma_2\sigma_2 + 2w_1w_2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 \\
&= w_1\sigma_1\rho_{11}w_1\sigma_1 + w_1\sigma_1\rho_{12}w_2\sigma_2 + w2\sigma_2\rho_{12}w_1\sigma_1 + w2\sigma_2\rho_{22}w_2\sigma_2 \\
&= \begin{pmatrix} w_1\sigma_1 & w_2\sigma_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{12} & \rho_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1\sigma_1 \\ w_2\sigma_2 \end{pmatrix} \\
\therefore \sigma_p^2 &= v^T \cdot C \cdot v \qquad (4.5)
\end{aligned}$$

En la ecuación (4.5) el vector v corresponde a los pesos asignados a cada uno de los activos, multiplicados cada uno de ellos por su correspondiente desviación estándar.

En el caso general donde el portafolio se compone de n activos, el valor de $\hat{\sigma_p^2}$ corresponde a lo siguiente:

$$\hat{\sigma_p^2} = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & \cdots & w_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \cdots & \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \cdots & \rho_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

O bien,

$$\hat{\sigma_p^2} = w^T \cdot \Sigma \cdot w$$

Para determinar la matriz Σ_{nxn} se utiliza la factorización de Cholesky, la cual consiste en representar a Σ como AA^T donde A corresponde a una matriz triangular inferior. Para ello Σ debe ser una matriz definida positiva, lo que garantiza que A sea una matriz única.

En este caso se desea resolver

$$\Sigma = A \cdot A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

De manera recursiva se obtiene

$$\begin{aligned}
a_{ij} &= \frac{1}{a_{ii}}\left[\Sigma_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} a_{ki}\cdot a_{kj}\right], \quad j < i \qquad (4.6) \\
a_{ii} &= \left(\Sigma_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} a_{ki}^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad i = 2, \ldots, n \qquad (4.7) \\
a_{11} &= \sqrt{\Sigma_{11}} \qquad (4.8)
\end{aligned}$$

Luego, de la ecuacion (4.1) se tiene que $VaR \sim N(\mu_t, AA^T)$.

Ventajas y Desventajas

Al aplicar esta metodología, en esencia el portafolio es descompuesto en sus constituyentes los cuales dependen de los factores de riesgo. Una ventaja de ello es que el riesgo total del portafolio se obtiene mediante la agregación de los factores de riesgo y sus respectivas correlaciones.

La aproximación de varianzas y covarianzas permite varias formas de valuación de los activos, lo que motiva al desarrollo de otros métodos como lo es el método delta-gama. Éste método permite valorar el cambio en el valor del portafolio debido a cambios en los factores de riesgo mediante la aproximación de sensibilidades de primer y segundo orden.[10].

Sin embargo, una de las principales problemáticas a los que se enfrenta este enfoque, se refiere al supuesto de distribución normal en los precios, ya que esta condición es muy difícil de cumplir con información de mercado. Es por ello que en su implementación muchas veces se pasa por alto este supuesto, con lo que se subestima el riesgo de pérdidas debido a las colas pesadas que se tienen en las distribuciones muestrales.

4.3.2. Modelo Histórico

Este modelo surge ante la problemática de suponer una distribución normal en los rendimientos de los precios (principalmente de las acciones), aunque para muchos activos tales como bonos o inclusive instrumentos financieros más sofisticados como las opciones, la normalidad es un supuesto altamente cuestionable.

Como una solución alternativa a lo anterior, el modelo de simulación bajo un enfoque histórico muestra varias ventajas sobre el modelo paramétrico; la primera de ellas es que su implementación es muy sencilla, la segunda que no requiere la suposición de rendimientos normales, y finalmente no se necesitan obtener las correlaciones o las desviaciones estándar de los rendimientos de los activos (sólo basta con conocer su historia).

La idea consiste en revaluar el portafolio original en base a los precios (rendimientos) actuales, sobre los activos que lo componen desde el momento de su elaboración. Es común utilizar una ventana de tiempo de 500 días[11] atrás para la implementación del modelo, para así poder calcular el 1 % de los casos donde se identifique un mayor movimiento adverso (circunstancia que podría generar una mayor pérdida).

Esto es que basándose en la información histórica más reciente y principalmente en la propia experiencia del mercado, únicamente en 6 de 520 días el valor del portafolio generará pérdidas (con un nivel de confianza del 1 %).

A continuación se describe la metodología general bajo el enfoque histórico:

1) Al suponer un portafolio P compuesto por n activos al tiempo t, de tal manera que:

$$P_t = w_1 X_1(t) + w_1 X_2(t) + \cdots + w_n X_n(t)$$

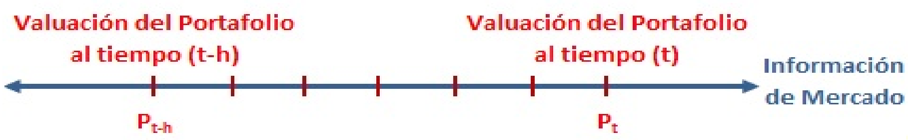
El rendimiento del portafolio se puede expresar como una combinación lineal de los rendimientos de cada activo X_i en el instante t como sigue

$$R_{p,t} = w_1 R_1(t) + w_2 R_2(t) + \cdots + w_n R_n(t)$$

[10] En en el caso de las opciones, se refiere a la aproximación Delta-Gamma $r\Pi = rS\Delta + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \Gamma$ (ver Sección 3.5.6 Medidas de Sensibilidad para Opciones del Capítulo 3).

[11] Por lo regular basta con tomar dos años de historia (cada uno con 252 días hábiles). Sin embargo, al obtener el VaR es necesario calcular el α % de 504 días, generando un error por redondeo. Este problema se corrige al cerrar el número de escenarios a 500.

2) Si se desea determinar el Valor en Riesgo del portafolio con un horizonte de h días a un nivel de confianza del $100\alpha\,\%$ ($VaR_{\alpha,h}$), se debe valuar el portafolio con la información histórica del mercado en cada instante de tiempo entre (t) y $(t-h)$.



3) Posteriormente se obtienen los rendimientos $\{R_{p,t}, R_{p,t-1}, R_{p,t-2}, \ldots, R_{p,t-h}\}$ como una medida de sensibilidad para cada una de las valuaciones descritas en el paso anterior. Para finalizar se deben ordenar los rendimientos de mayor a menor, y así el $VaR_{\alpha,h}$ corresponderá al valor del rendimiento ordenado posicionado en el lugar (1-$\alpha\,\%$)h+1 (Ver Cuadro 4.2).

Medida de Sensibilidad			
Valor del Portafolio	**Rendimiento del Portafolio**	**Rendimiento Ordenado**	**VaR$_{\alpha,h}$**
P_t	$R_{p,t}$	$R^{Ord}_{p,1}$	
P_{t-1}	$R_{p,t-1}$	$R^{Ord}_{p,2}$	
P_{t-2}	$R_{p,t-2}$	$R^{Ord}_{p,3}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
		$R_{p,(1-\alpha\%)h+1}$	$(1-\alpha\,\%)h$
		$\vdots$	
P_{t-h}	$R_{p,t-h}$	$R^{Ord}_{p,h}$	

Cuadro 4.2: Proceso para el cálculo del VaR Histórico

Ventajas y Desventajas

Entre las ventajas de este enfoque las más relevantes son:

- Simple de implementar. Una vez que se obtienen los datos históricos, el cálculo del VaR se realiza de manera directa evitando así la obtención de la matriz de covarianzas, por lo que si se trata de una cartera grande su implementación sigue siendo sencilla.

- Valuación completa. Toma en cuenta las no linealidades de ciertos contratos y además no es necesario hacer supuestos de distribuciones de probabilidad.

- Horizonte temporal. Los rendimientos se calculan únicamente dentro del periodo de tiempo elegido para el cálculo del VaR, con ello se hace redundante la agregación temporal de la volatilidad.

Las desventajas que presenta este método son las siguientes:

- Historia insuficiente. No siempre se cuenta con suficiente información histórica, lo cual repercute a estimaciones no muy precisas del VaR.

- Única muestra. Los datos históricos permiten realizar sólo una simulación, suponiendo que el pasado representa el futuro; es decir, se supone que el ciclo de un periodo futuro se comporta de la misma manera que el del pasado.

- Ponderación de la muestra. Este enfoque pondera de manera equitativa a todos los datos de la muestra, cuando en realidad puede presentarse que esta ponderación requiera de un decaimiento exponencial.

4.3.3. Simulación Montecarlo

La estimación del VaR bajo la herramienta Monte Carlo, involucra la generación de diversos escenarios de precios para valuar los activos de un portafolio sobre un rango de posibles condiciones de mercado; el portafolio es entonces revaluado usando todos esos escenarios de precios para que finalmente, se seleccione el nivel de confianza requerido para el cálculo del VaR.

Una de las mayores ventajas del modelo Monte Carlo es la habilidad que posee para valuar opciones, incluyendo instrumentos derivados mucho más complejos y sofisticados; por lo que puede considerarse como uno de los métodos más poderosos del cálculo del VaR.

Su implementación se puede seguir generalmente en cinco etapas básicas:

1. Elección del proceso que describe el riesgo.
2. Generar escenarios a través de una secuencia de variables aleatorias $\{X_1, X_2, X_3, \cdots, X_t\}$, a partir de las cuales se obtienen los precios $\{S_{t+1}, S_{t+2}, S_{t+3}, \cdots, S_{t+n}\}$.
3. Calcular el valor del portafolio $F_t(S_t)$ para cada escenario de precios.
4. Repetir los pasos 2 y 3 tantas veces como sea necesario[12].
5. Reordenar los resultados para la determinación del VaR al nivel $100\alpha\,\%$ de confianza deseado.

Ventajas y Desventajas

Los métodos de simulación Monte Carlo frecuentemente son más poderosos y flexibles para aproximar el VaR, puesto que pueden no suponer una distribución conocida de los rendimientos y considerar fluctuaciones (aleatorias) que se pudiesen dar en el mercado.

Permite que la valuación de opciones y de cualquier tipo de instrumento derivado exótico sea mucho más sencilla; además, debido al gran número de simulaciones de escenarios, la herramienta de Monte Carlo tiene mayor confiabilidad en sus estimaciones en comparación con los modelos estándares (paramétrico e histórico). No obstante, estos procedimientos no restringen su aplicación al cálculo del VaR sino que su pueden extender en otras áreas de investigación.

Otro aspecto favorable es, si en la estimación del VaR se realiza la simulación de la distribución, se pueden generar una gran variedad de estadísticas que pueden ser de gran uso para la gestión del riesgo. Entre las cuales son la obtención de intervalos de confianza, valores esperados de pérdida así como la curtosis y asimetría; esto con la finalidad de presentar los resultados con una mayor precisión y certeza.

Sin embargo, los procedimientos de simulación Monte Carlo tienden a ser intensivos en términos del tiempo de cálculo y recursos humanos necesarios para obtenerlos, principalmente cuando se requiere un alto grado de precisión y se tiene una cartera amplia. Además, no generan un precio exacto y preciso de los activos (sólo producen estimaciones).
Finalmente es importante mencionar que el error asociado a la estimación de un parámetro, es cada

[12] Suele recomendarse en múltiplos de 10,000 el número de iteraciones para cada simulación

vez menos significativo conforme el número (n) de simulaciones aumenta, lo anterior se explica con la siguiente relación,

$$Error\ Estándar = \frac{\sigma_{MC}}{\sqrt{n}}$$

Donde:

σ_{MC} Se refiere a la varianza del método Monte Carlo.

Una alternativa para solucionar esta problemática es reducir la varianza, y para ello se desarrollan técnicas de reducción de varianza, las cuales consisten principalmente en considerar sólo el número de muestras necesarias para generar y estimar el (los) parámetro(s) dentro de un nivel de error determinado. A continuación se muestra una breve descripción de las más comunes:

- *Variaciones Antitéticas*:
  Dos simulaciones paralelas son ejecutadas (una para desviaciones positivas y otra para negativas), produciendo dos distribuciones para el activo subyacente. La media aritmética de las medias de las dos distribuciones es calculada. La idea consiste en usar pares antitéticos que sirvan de contrapeso para un valor grande y uno pequeño. El promedio de los dos valores debería estar más cerca al valor buscado (valor real).
  En otras palabras, dada una muestra estadística la media sobre los pares antitéticos siempre es igual a la media poblacional de cero, pero la media sobre un número finito de muestras independientes es casi seguramente distinta de cero.

- *Variables Aleatorias de Control*:
  La idea básica de las variables aleatorias de control es replicar la evaluación de una esperanza desconocida con la evaluación de la diferencia entre la cantidad desconocida y otra esperanza cuyo valor es conocido. Sobre este enfoque, el error estándar de una simulación Monte Carlo es estimado por la comparación del valor desconocido para ser calculado contra un valor que proviene de la muestra (analíticamente conocido).

- *Importacia del Muestreo*:
  Para un proceso estocástico, las variables son usualmente definidas en funciones de distribución de probabilidad. El cálculo asociado con funciones de distribución de probabilidad puede ser difícil para resolver analíticamente, pero a través de aproximaciones Monte Carlo, básicamente se convierte la integración del cálculo a sumas algebraicas. La precisión de la aproximación depende del número de muestras extraídas.
  Esta es una técnica que puede reducir el número de veces a las necesidades de un modelo en particular para ser resuelto mediante un procedimiento de estimación. La intuición detrás del método es generar más muestras para el área que es más importante para la pregunta en cuestión. En muchos casos, la importancia del muestreo ha llevado a avances espectaculares en eficiencia computacional.

- *Reducción de la Varianza por Martingala (MVR)*:
  Este método involucra las simulaciones generadas de martingalas con la trayectoria de precios simulados. Las variantes del MVR son combinadas linealmente y después substraídas desde el precio simulado. Como las variaciones promedio son cero, no afectan el valor estimado de la simulación Monte Carlo. Sin embargo, si la combinación lineal es cuidadosamente seleccionada, el error estándar de la estimación será reducida.

- *Secuencias de baja discrepancia*:
  La discrepancia mide la uniformidad de una secuencia de puntos, una discrepancia baja significa

puntos igualmente espaciados. Este método hace uso de puntos igualmente espaciados en lugar de puntos aleatorios, los cuales son después perdidos en simulaciones Monte Carlo debido a la agrupación. Si los puntos son pre-seleccionados de forma determinista de manera que sean uniformes, la simulación puede ser acelerada significativamente.

Capítulo 5

Implementación del Método Histórico para el cálculo del VaR

En los capítulos anteriores se desarrollaron metodologías generales para la valuación de los instrumentos que operan en el mercado financiero, así como tres métodos estándares para la determinación del VaR como medida para la gestión y administración del riesgo de mercado.

Como base de información se consideran los portafolios al cierre de mes, de siete instituciones representativas de la Banca Múltiple del Sistema Financiero Mexicano, lo que llamaremos de aquí en adelante **Sistema*** y cuyo periodo de análisis comprende de Mayo 2012 a Junio 2013.

El Método Paramétrico se desecha porque en primer lugar el portafolio del *Sistema** se compone de instrumentos de renta fija, variable y derivados, lo cual hace difícil la determinación de las correlaciones que existe entre instrumentos y/o a través de los diferentes tipos de instrumentos. Además, de que el modelo supone el comportamiento de la distribución normal, lo que no necesariamente se cumple con los datos reales.

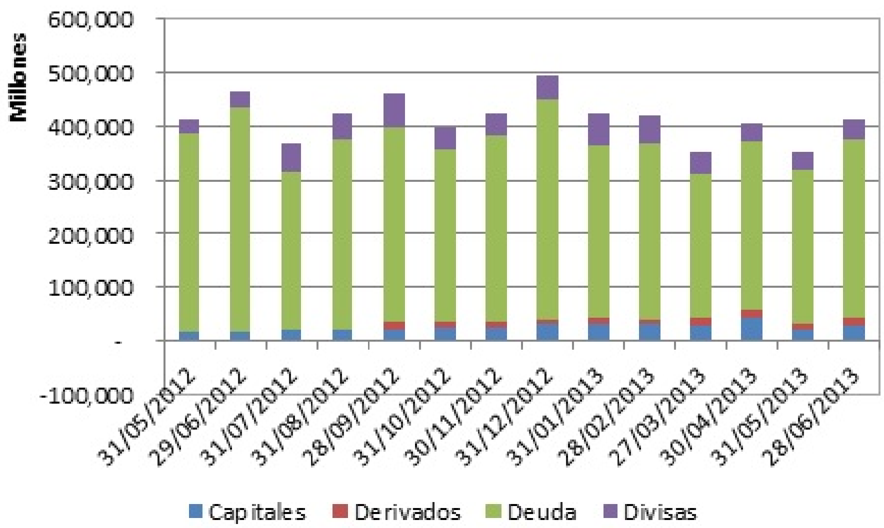
El Método por Simulación Montecarlo, a pesar de ser uno de los métodos más ricos y poderosos para la estimación del VaR, no se utiliza en este ejercicio porque el portafolio que se valúa tiene una gran dimensión (alrededor de 24,500 instrumentos para cada periodo histórico) y más aún cuando cada iteración para algunos instrumentos requiere de al menos 10,000 simulaciones para reducir el error y asegurar convergencia en la estimación, además de que el proceso se repetiría para 15 periodos de información, lo cual resulta ser en conjunto muy costoso en tiempo y ejecución.

Para obtener el valor en riesgo del *Sistema** se recurre al **Método Histórico**, ya que en un principio se busca mostrar la estabilidad histórica del portafolio, y en base a ello extender el análisis a una proyección del riesgo sin suponer alguna distribución empírica. Conjuntamente a lo anterior, se busca estimar y analizar la evolución de la pérdida real, identificar los principales instrumentos que conforman dicho portafolio, así como los factores de riesgo a los que se encuentra expuesto y, finalmente, cuantificar la pérdida en que incurriría bajo algún escenario de estrés o bajo movimientos abruptos en algunos de los factores de riesgo.

5.1. Composición del Sistema* por Mercado y Tipo de Instrumento

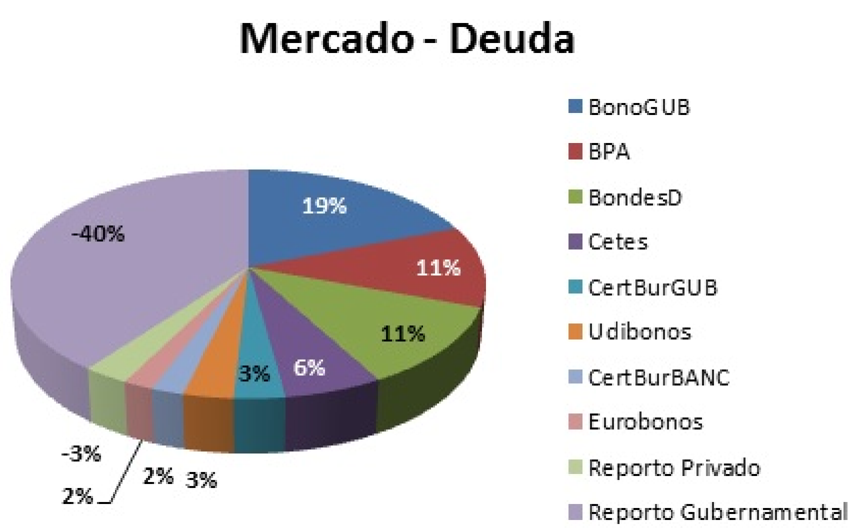
El portafolio del *Sistema** se conforma por Instrumentos de *Deuda, Derivados, Divisas y Capitales*. El valor a mercado del Sistema es de 414,854 mdp en promedio, no obstante las operaciones que mayor participación tienen corresponden al mercado de Deuda (81.7 %), seguidas de las Divisas (10.4 %), Capitales (6.0 %) y Derivados (1.9 %) en promedio.

La evolución del valor a mercado (MtM) por mercado se ilustra en la gráfica 5.1.



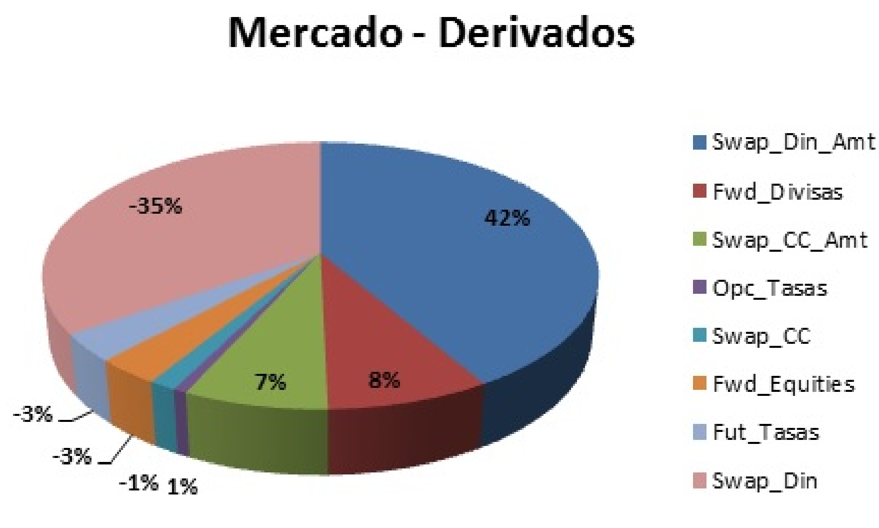
Gráfica 5.1 Composición del Sistema por Mercado

En el mercado de Deuda se agrupan los instrumentos de renta fija como son los Bonos Gubernamentales, Bonos BPA, BondesD, Cetes, Reportos Gubernamentales, Eurobonos, Udibonos, Certificados Bursátiles, Gubernamentales y Corporativos, entre otros. En general son los Reportos Gubernamentales quienes hacen la cobertura con el resto de los instrumentos de deuda, principalmente con los Bonos Gubernamentales, BPAs, BondesD y Cetes.



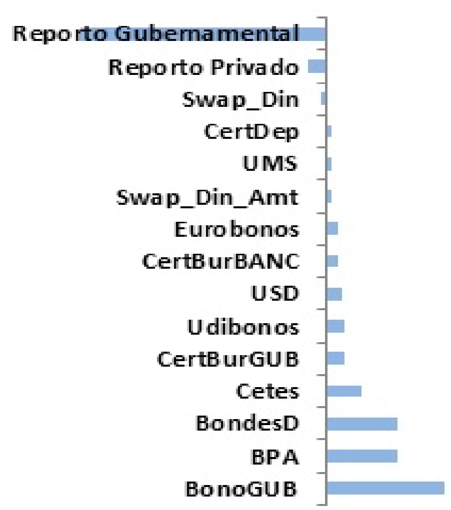
Gráfica 5.2 Composición por MtM del Mercado de Deuda

El mercado de Derivados se compone principalmente por Swaps de Tasas (SwapDin), Forwards de Divisas, Swaps Cross Currency (SwapCC), Opciones Europeas y Futuros sobre Tasas. Por valor a mercado parte de los Swaps de Tasas se cubren con los Swaps de Tasas Amortizables.



Gráfica 5.3 Composición por MtM del Mercado de Derivados

En el mercado de Capitales destacan las Acciones, ETFs, Acciones SIC, Tracks Extranjeros, ADRs, FIBRAs, entre otros; mientras que en el mercado de Divisas la moneda que mayor operación presenta es la de los dólares.
Del valor a mercado promedio por tipo de instrumento del *Sistema**, destacan los Reportos Gubernamentales, los cuales realizan una acción de cobertura con los Bonos Gubernamentales, le siguen los BondesD junto con los BPAs, en seguida los Cetes, Reportos Privados, Certificados Bursátiles, Udibonos, Eurobonos, Divisas (dólares), Swaps de Tasas, UMS y Certificados de Depósito principalmente. (Ver gráfica 5.4).

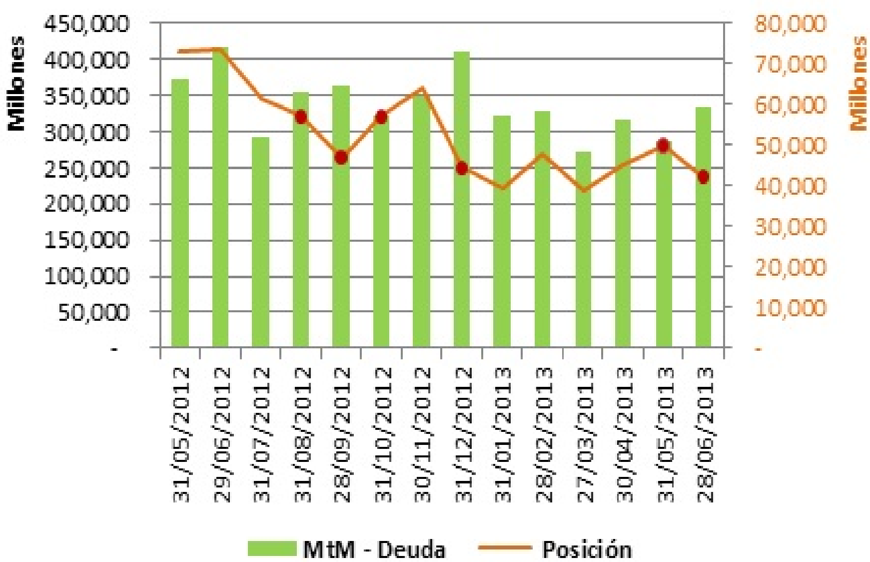


Gráfica 5.4 MtM por Tipo de Instrumento

Las variaciones del MtM se pueden explicar por dos razones, en primer lugar por algún aumento o disminución de la posición en determinado(s) tipo(s) de instrumento(s), o bien, por movimientos en

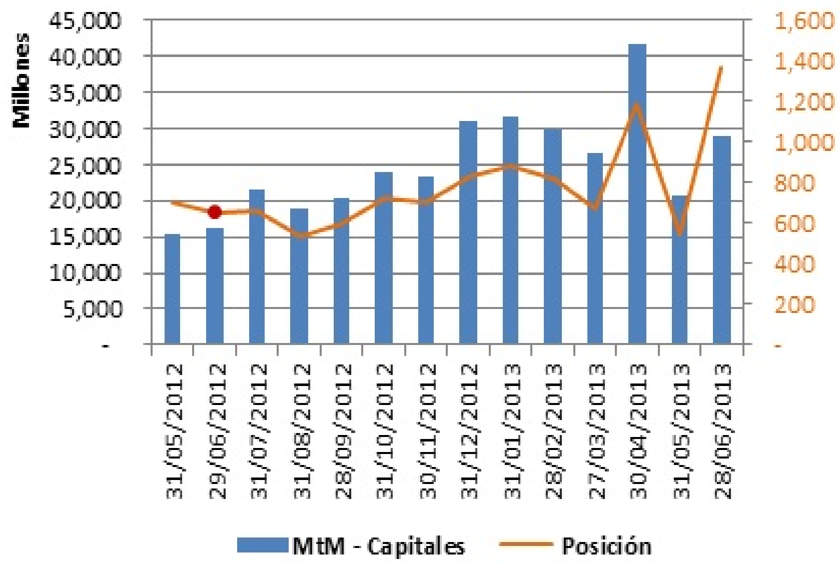
los factores de riesgo. Por otra parte, las variaciones en el VaR están directamente relacionadas con movimientos en el valor a mercado, por lo que de la misma manera el VaR puede explicarse ante cambios en la posición de los instrumentos que conforman el portafolio, o por cambios drásticos en los factores de riesgo.
Los principales factores de riesgo a los que está expuesto un portafolio son el tipo de cambio (FX), movimientos en las tasas de interes en moneda nacional (IRNOM) o tasas de interes en moneda extranjera (IREXT), las sobretasas (IRST), variaciones en las tasas reales (IRUDI) y movimientos en el mercado de capitales (MKT).

Con la finalidad de ilustrar los párrafos anteriores, se analizan las variaciones del MtM para los tres mercados (Deuda, Derivados y Capitales) así como la evolución de la posición de los instrumentos que los conforman.



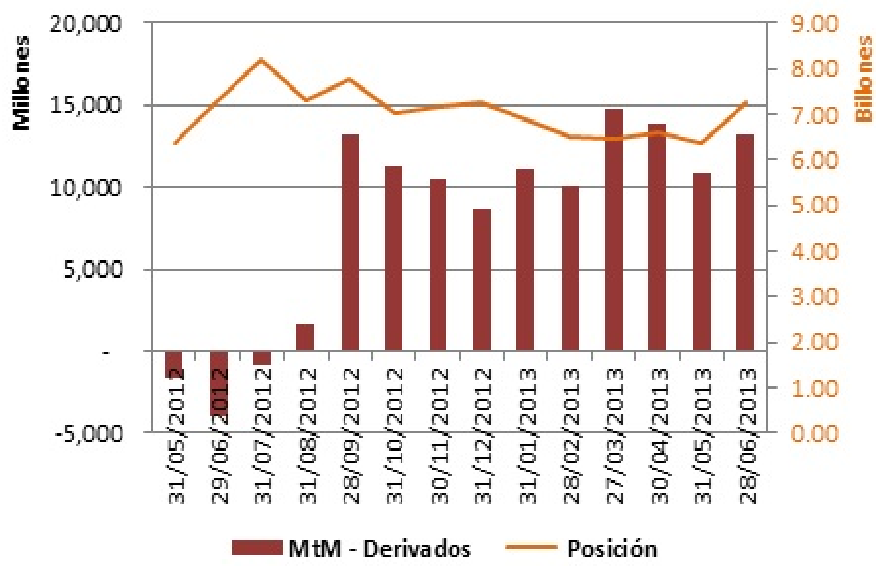
Gráfica 5.5 Evolución del MtM de Deuda

El MtM de deuda en general se explica bajo variaciones de la posición de sus instrumentos que lo conforman, a excepción de los periodos de Agosto, Septiembre, Octubre y Diciembre de 2012 junto con Mayo y Junio de 2013. El MtM en estos periodos se puede explicar claramente por movimientos en los factores de riesgo, por ejemplo, en Mayo 2013 se presentó un incremento de al menos 43 puntos base respecto al mes de Abril en las curvas de tasas Reales, Cetes y TIIE principalmente en los nodos cuyo vencimiento corresponde a un plazo mayor a 3 años.



Gráfica 5.6 Evolución del MtM de Capitales

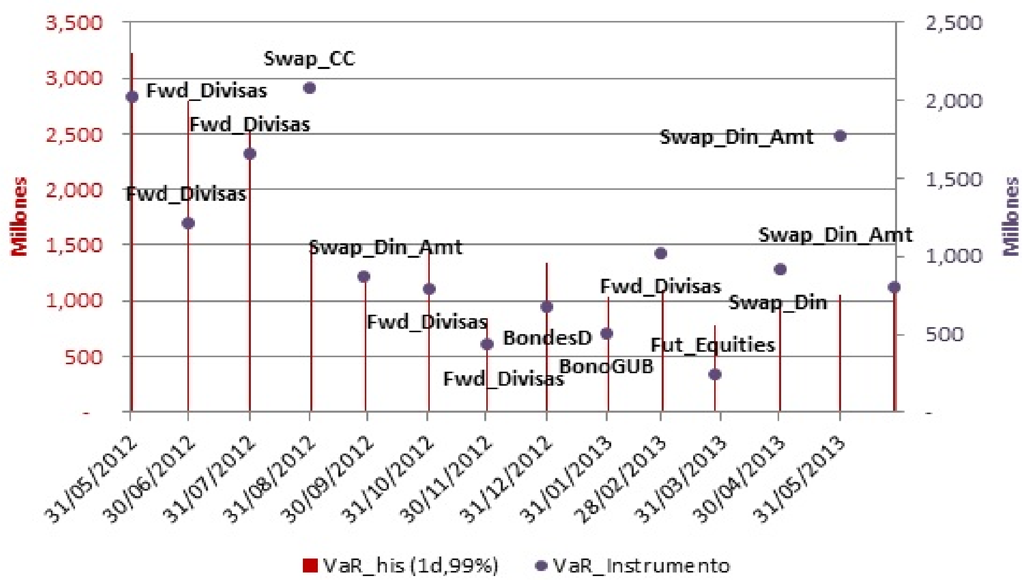
El MtM del mercado de capitales se explica casi siempre ante variaciones en la posición de las acciones según la orientación y objetivo del fondo en los que se encuentren invertidas. Finalmente, el MtM del mercado de derivados es el más volátil y con mayor exposición desde pequeñas hasta grandes variaciones en los diferentes factores de riesgo, por lo que no basta con analizar el cambio en la posición de sus instrumentos para describir el comportamiento del valor a mercado global. (Ver gráfica 5.7).



Gráfica 5.7 Evolución del MtM de Derivados

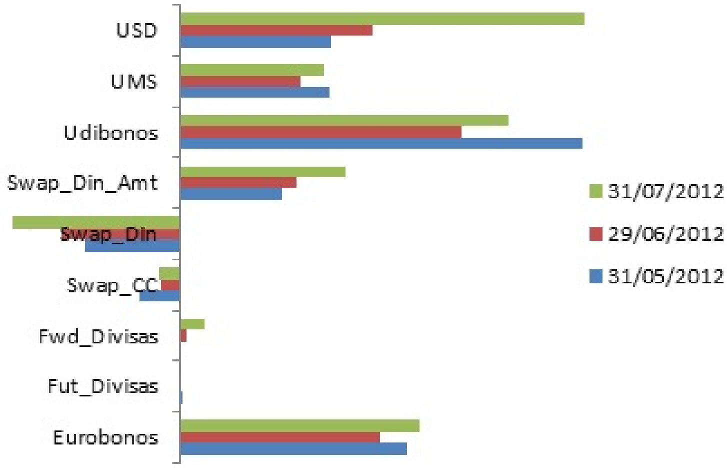
5.2. Análisis del VaR, Stress-VaR y VaR-Marginal por el Método Histórico

Como se definió en el capítulo 4.1, el VaR es la máxima pérdida esperada en un horizonte de tiempo fijo y a un nivel de confianza determinado. Para obtener el VaR histórico del *Sistema** se considera un horizonte de 1 día y un nivel de confianza del 99 %, su cálculo conidera la variación histórica de todos los factores de riesgo mencionados en el apartado anterior, con información de 500 días hábiles hacia atrás para cada periodo de análisis.
La evolución del VaR del *Sistema** se resume en la siguiente gráfica, donde los Forwards de Divisas junto con los Swaps de Tasas son los instrumentos que por lo regular generan la pérdida correspondiente al VaR del portafolio con un 99 % de confianza.



Gráfica 5.8 Evolución del VaR y sus Instrumentos con mayor pérdida

El portafolio del *Sistema** presenta el mayor VaR en los primeros tres periodos de análisis, su posición en valor a mercado además de los Bonos Gubernamentales, se compone principalmente por Eurobonos, Swaps de Tasas Amortizables y no-Amortizables, UMS, Forwards de Divisas, así como posición en dólares. (Ver gráfica 5.9).



Gráfica 5.9 MtM del Sistema* en Mayo, Junio y Julio del 2012.

Para explicar detalladamente el VaR y poder identificar el tipo de instrumentos a los que esta expuesto el portafolio, es necesario analizar el VaR-Marginal por los diferentes factores de riesgos. Al igual que el VaR corresponde a la máxima pérdida esperada en un horizonte dado con un nivel de confianza específico, la diferencia radica en que en el VaR-Marginal se considera la variación histórica de sólo un tipo de riesgo en específico, mientras que el resto se mantienen fijos.

$$VaR_{Marginal} = \frac{\partial VaR_p}{\partial F_j}$$

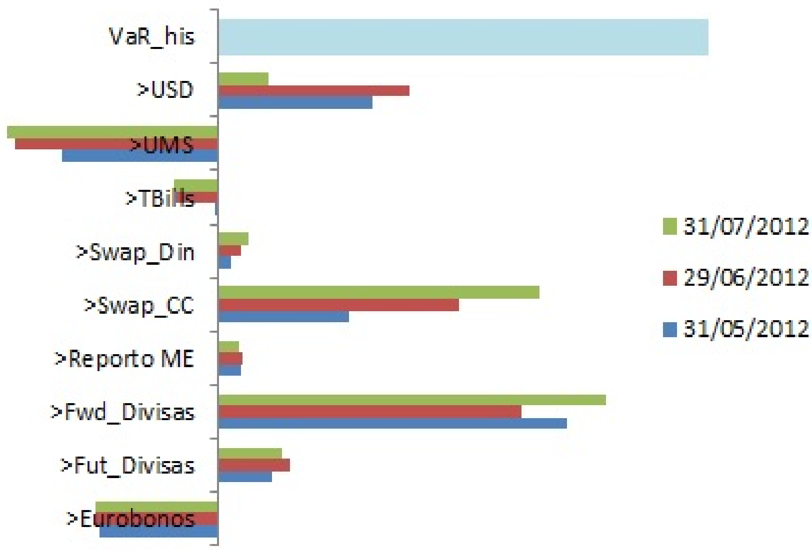
Donde:

- F_j: Corresponde al factor de riesgo j-ésimo (FX, IREXT, IRNOM, IRST, IRUDI, MKT).

Así que los distintos VaR marginales que se consideran en el análisis se enlistan en la siguiente tabla.

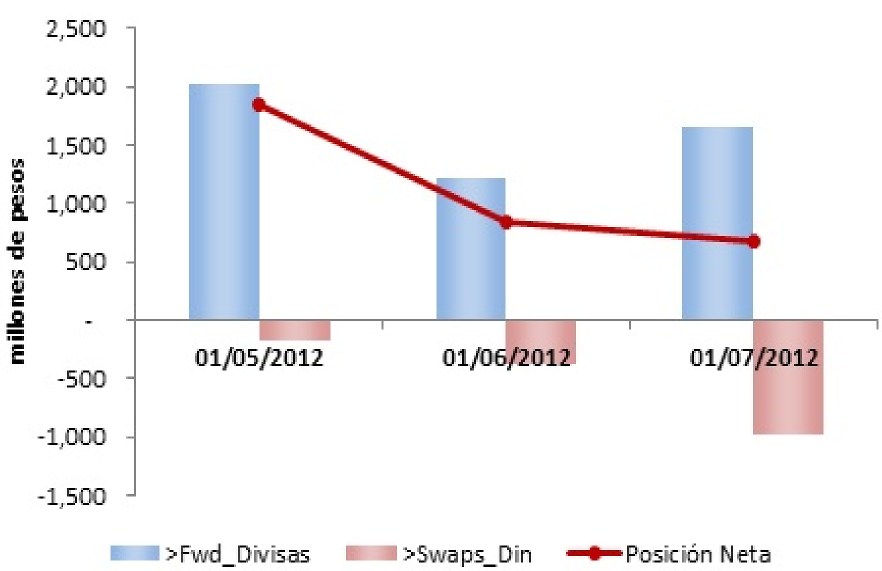
VaR-Marginal	Tipo de Riesgo Asociado
VaR_{FX}	VaR expuesto al tipo de cambio
VaR_{IREXT}	VaR expuesto a las tasas de interés en moneda extranjera
VaR_{IRNOM}	VaR expuesto a las tasas de interés en moneda nacional
VaR_{IRST}	VaR expuesto a las sobretasas
VaR_{IRUDI}	VaR expuesto a movimientos en las tasas reales
VaR_{MKT}	VaR expuesto a variaciones en capitales

Regresando al análisis de los periodos de Mayo, Junio y Julio del 2012, el portafolio del *Sistema** presenta un mayor riesgo al tipo de cambio (VaR_{FX}) y los instrumentos con mayor exposicion son los UMS, Forwards de Divisas, y Swap CC en los que se intercambia principalmente pesos por dólares y viceversa.



Gráfica 5.10 Cobertura en el VaR_FX para Mayo, Junio y Julio 2012

El VaR en Mayo-2012 asciende a 3,219 mdp, de los cuales 2,023 mdp corresponden a los Forwards de Divisas y -167 mdp a Swaps de Tasas. En Junio-2012 el VaR disminuye 13.4 % respecto a Mayo (2,788 md), donde los Forwards de Divisas aportan con 1,215 mdp y los Swaps de Tasas con -371 mdp; finalmente, en Julio-2012 el VaR asciende a 2,531 mdp con 1,657 mdp en Forwards de Divisas y -985 mdp en Swaps de Tasas.
La razón por la que el VaR sigue una tendencia bajista en estos tres meses, se debe principalmente al decremento en la posición neta entre los Forwards de Divisas y los Swaps de Tasas, es decir, al aumento en la cobertura entre estos instrumentos.



Gráfica 5.11 Cobertura en el VaR_his para Mayo, Junio y Julio 2012

De aquí se desprende que la Cobertura es inversamente proporcional al comportamiento del VaR, esto es, a mayor cobertura en el portafolio menor será el Valor en Riesgo. El recíproco no necesariamente ocurre, ya que puede presentarse un incremento en el VaR y explicarse por alguna variación drástica en los factores de riesgo (por ejemplo en las tasas de interés), y no tanto por la cobertura que se haya presentado, pues la composición del portafolio pudo mantenerse de manera constante respecto a los periodos anteriores.

Como consecuencia del párrafo anterior, destaca la importancia de calzar lo mejor posible un portafolio de inversión ya que de lo contrario el riesgo al que está expuesto puede resultar mayor. Por ejemplo, si una institución de deshace de alguna posición que realizaba una acción de cobertura importante en su portafolio, o si adquiere un nuevo instrumento que quede descubierto, la cuantificación del riesgo asociado a dicho descalce le costaría millones o miles de millones de pesos según el tipo de instrumento que se trate y las condiciones del mercado que se presenten en ese momento.

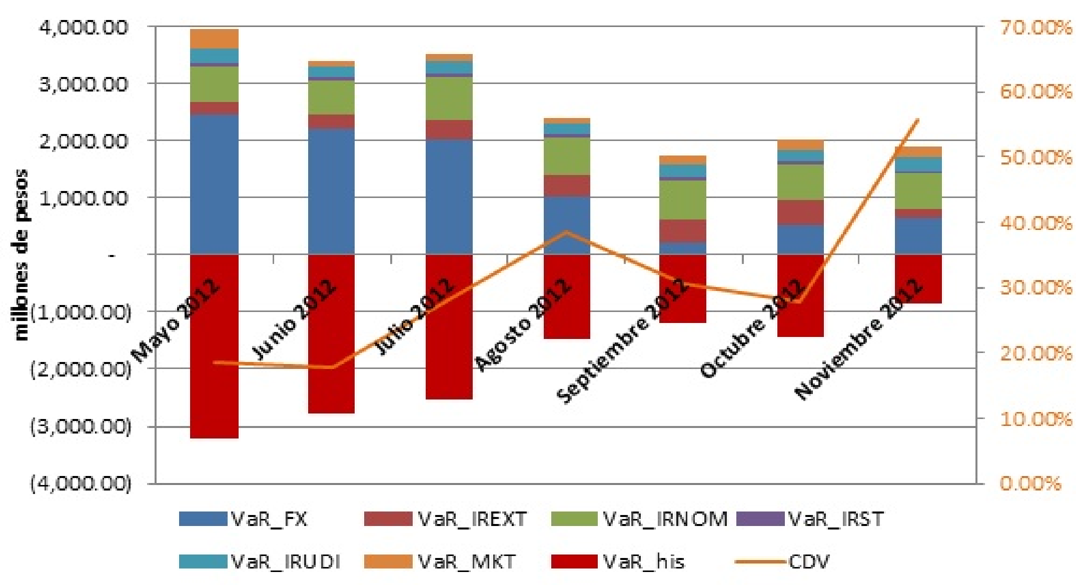
Otro elemento importante en la administración y análisis del riesgo de mercado, es en primera instancia la diversificación de un portafolio, ya que una buena diversificación conlleva a una menor exposición a las condiciones adversas del mercado, y como consecuencia a una pérdida menor. Bajo esta lógica, medir el grado de diversificación en una pérdida esperada como lo es el VaR, puede resultar significativo para identificar situaciones de riesgo y poder hacer alguna toma de decisión.

Es por ello que se incluye la cobertura en el VaR para este análisis, una vez que se identifican las principales exposiciones del portafolio a los distintos factores de riesgo por separado ($VaR_{Marginal}$), así como en su conjunto (VaR_{his}), se define el coeficiente de diversificación (CDV) como sigue:

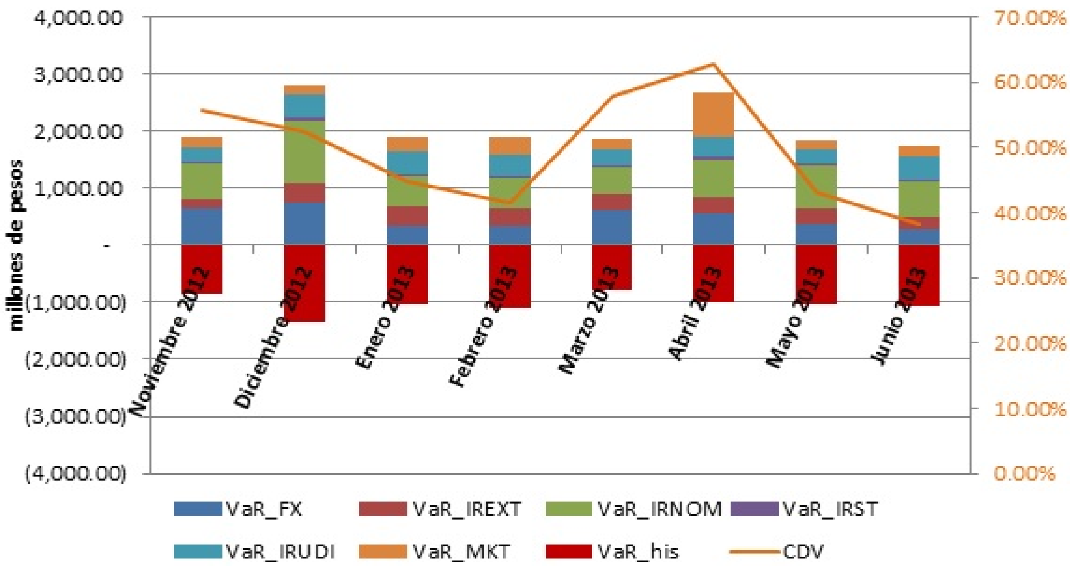
$$CDV = 1 - \frac{VaR_{his}}{\sum_{j=1}^{n} VaR_{F_j}}$$

Donde claramente el CDV se encuentra entre 0 y 1.

En las gráficas 5.12 y 5.13 se muestra la relación entre el VaR histórico y el coeficiente de diversificación (CDV), así como los principales factores de riesgo a los que se encuentra expuesto el portafolio del *Sistema**.



Gráfica 5.12 Evolución del VaR_his, VaR-Marginal y CDV (Mayo-2012 a Noviembre-2012)

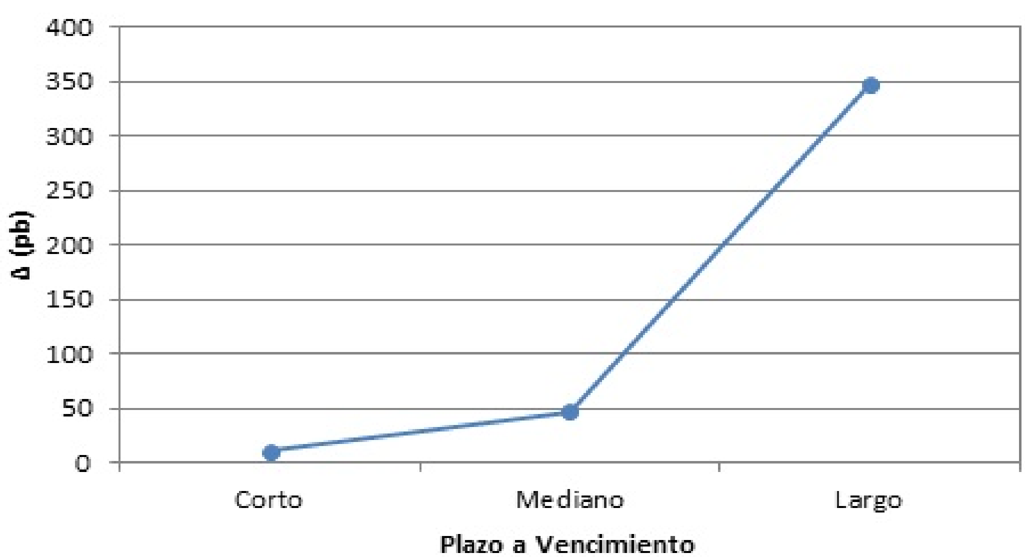


Gráfica 5.13 Evolución del VaR_his, VaR-Marginal y CDV (Noviembre-2012 a Junio-2013)

Como se puede apreciar, el coeficiente de diversificación oscila entre el 20 % y el 60 %; mientras que el VaR histórico se encuentra entre 500 mdp y 1,500 mdp excluyendo los periodos de Mayo, Junio y Julio del 2012, donde su máxima pérdida esperada fue de 3,219 md, 2,788 mdp y 2,531 mdp respectivamente.

El VaR-Marginal que mayor proporción representa en el *Sistema** es el VaR_{FX} hasta Noviembre del 2012, sin embargo, a partir de Diciembre 2012 el que toma mayor presencia es el VaR_{IRNOM}. Lo que significa que a partir del año 2013 el portafolio del *Sistema** está expuesto principalmente a movimientos en las tasas de interés en moneda nacional.

Tal y como es el caso de Abril y Mayo del 2013, donde las curvas de las tasas CETES, TIIE y tasa Real aumentaron drásticamente sus niveles.



Gráfica 5.14 Incremento en la curva CETES de Abril a Mayo 2013

La exposición parcial del portafolio del *Sistema** a los factores de riesgo, puede también analizarse a través del concepto de **"Elasticidad"**. Este concepto fue introducido por el economista Alfred R. Marshall con el objeto de poder determinar cuantitativamente cómo los cambios de una variable pueden influir sobre otra que dependa de la primera.
En términos generales, la Elasticidad (E) es una medida del grado de respuesta del cambio de una variable debido al cambio de otra y está dada por la variación porcentual de la variable dependiente en estudio con respecto a la variación porcentual de la variable independiente con que se le relacione.

$$E = \frac{\Delta Y}{\Delta X}$$

Donde:

- Y: Se refiere a la variable dependiente en estudio

- X: Corresponde a la variable independiente a relacionar

- E: Indica la Elasticidad entre las variables X y Y

Una elasticidad igual a 1 indica que el cambio porcentual en la variable dependiente (Y) es igual al cambio porcentual en la variable independiente (X), en este caso se dice que la elasticidad es unitaria; si la elasticidad es mayor que 1, entonces el cambio porcentual en Y es mayor al cambio porcentual en X, lo que significa que la relación entre las variables es elástica. Si por el contrario la elasticidad resulta inferior a 1, se dice que se presenta inelasticidad entre las variables.
La ventaja principal de esta medida es que su resultado es puramente un número, lo que permite hacer comparaciones entre distintos conceptos independientemente de cualquier unidad de medida que por sí mismos tengan.

En nuestro estudio se considera el VaR histórico (VaR_{his}) como la variable dependiente y cada uno de los VaR marginales (VaR_{F_j}) como las variables independientes, con el objeto de medir e identificar la exposición del portafolio del *Sistema** ante variaciones en los diferentes factores de riesgo; posteriormente se consideran las variaciones porcentuales entre un mes y el siguiente obteniéndo como resultado la siguiente matríz de elasticidades.

Sistema	VaR_FX	VaR_IREXT	VaR_IRNOM	VaR_IRST	VaR_IRUDI	VaR_MKT	Mayor Elasticidad
29/06/2012	0.97	0.64	0.96	0.92	1.10	3.04	VaR_MKT
31/07/2012	0.99	0.68	0.70	0.95	0.77	0.76	VaR_FX
31/08/2012	1.15	0.58	0.66	0.55	0.67	0.69	VaR_FX
28/09/2012	3.70	0.72	0.80	0.86	0.75	0.52	VaR_FX
31/10/2012	0.52	1.10	1.34	1.34	1.16	1.11	VaR_IRNOM
30/11/2012	0.47	1.69	0.56	0.65	0.48	0.58	VaR_IREXT
31/12/2012	1.40	0.66	0.90	1.70	0.97	1.72	VaR_MKT
31/01/2013	1.74	0.83	1.59	0.99	0.81	0.50	VaR_FX
28/02/2013	1.01	1.18	1.10	1.03	1.12	0.86	VaR_IREXT
27/03/2013	0.40	0.74	0.79	0.79	0.95	1.18	VaR_MKT
30/04/2013	1.39	1.33	0.87	1.41	0.98	0.30	VaR_IRST
31/05/2013	2.10	1.47	0.82	1.40	1.60	1.44	VaR_FX
28/06/2013	2.03	1.54	1.16	1.10	0.93	4.94	VaR_MKT

Tabla 5.1 Matriz Histórica de Elasticidades entre el VaR histórico y el VaR marginal

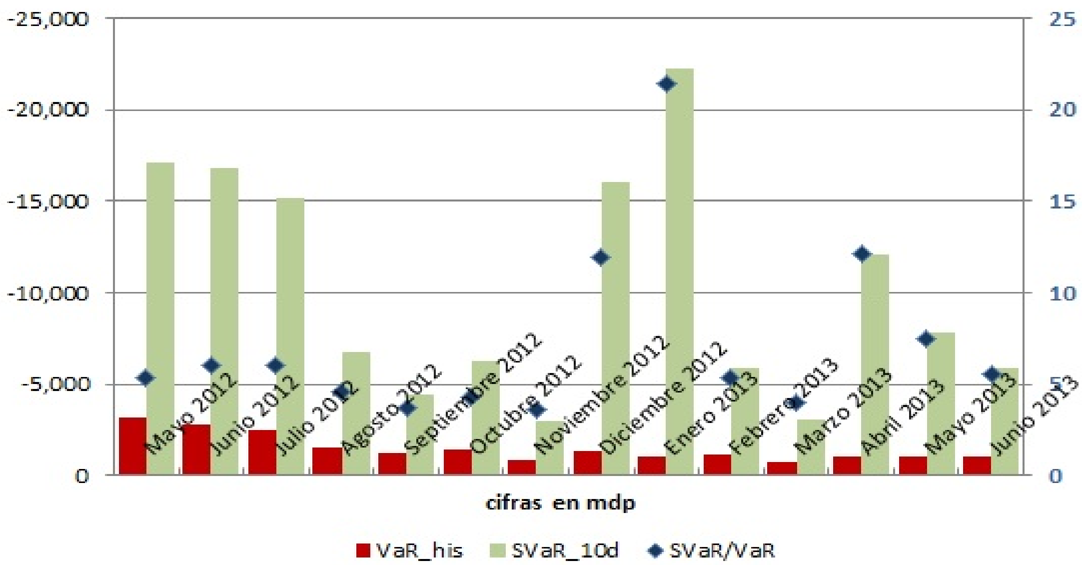
De acuerdo a los resultados anteriores, podemos decir que pequeñas variaciones en el tipo de cambio, muestran un mayor impacto en el VaR principalmente en el tercer trimestre del 2012; mientras que a lo largo del 2013 son las variaciones en los capitales (MKT) y en el tipo de cambio (FX) las que presentan una mayor elasticidad.

Hasta el momento se tiene la composición del portafolio a lo largo del tiempo, así como su VaR(1d,99 %) en base a 500 escenarios junto con los factores de riesgo a los que se expone principalmente el portafolio mediante el análisis del VaR marginal; pero surge la cuestión sobre cómo le impactaría al portafolio la presencia de variaciones abruptas en alguno o varios factores de riesgo tal y como se ha dado en crisis financieras en el pasado. Es por ello que adicionalmente se implementa el cálculo del Stress-VaR, donde se considera un periodo histórico que abarca de Enero-2008 hasta la fecha en estudio (Junio-2013); se consideran variaciones de 10 días en los factores de riesgo (entre f_t y f_{t+10} con $t \in \{1, 2, \ldots, 500\}$) para crear una ventana con 500 variaciones y así obtener una distribución de pérdidas y ganancias ($P\&G_1$), enseguida se construye otra ventana móvil a un día de diferencia con dimensión de 500 días (entre f_t y f_{t+10} con $t \in \{2, 3, 4, \ldots, 501\}$ para generar otra distribución ($P\&G_2$), así sucesivamente hasta llegar a la última ventana ($P\&G_k$) con variaciones entre f_t y f_{t+10} y $t \in \{n-500, n-409, n-408, \ldots, n\}$ donde n corresponde al número de días hábiles entre el 01-Enero-2008 y el 30-Junio-2013.

A cada una de las distribuciones $P\&G_j$ se les calcula el VaR histórico al 99 % de confianza, obteniendo así una serie histórica del VaR del portafolio $\{VaR(1d, 99\,\%)\}_{i=1}^{k}$ con el efecto de los factores de riesgo a lo largo de un ciclo completo (un ciclo donde se incluye una de las crisis que mayor repercutió en México y a nivel mundial); finalmente, se define el Stress-VaR como el VaR máximo en la serie histórica construida en el paso anterior, lo que se explica con mantener siempre un enfoque conservador.

$$SVaR = Max\{VaR_1, VaR_2, VaR_3, \ldots, VaR_k\}$$

La gráfica (5.15) muestra el comparativo entre las dos medidas principales en estudio, por un lado la evolución del VaR histórico en el último año (Mayo 2012 - Junio 2013) y por otra parte, el SVaR calculado en cada mes correspondiente al mismo periodo de análisis. Además, se presenta puntualmente el número de veces que el SVaR representa del VaR para cada periodo, lo que responde al efecto máximo esperado que causarían movimientos adversos en el mercado en el portafolio del *Sistema**, es decir, la máxima pérdida esperada en caso de que se presentara una situación de crisis.



Gráfica 5.15 Evolución del VaR y SVaR (Mayo-2012 a Junio-2013)

En general se puede concluir que el portafolio de inversión del *Sistema** presenta una estabilidad en el tiempo, ya que su mayor exposición se da en el mercado de deuda, el cual por composición se mantiene constante en el tiempo; no obstante, el *Sistema** presenta mayor exposición a movimientos en el tipo de cambio y tasas de interés en moneda nacional (CETES, TIIE y Real).

Por otra parte, hay más diversificación en los últimos meses lo que indica un nivel de VaR adecuado y un nivel de riesgo menor; adicionalmente si se presentara alguna situación adversa en el mercado, esperaríamos un incremento en la pérdida esperada (VaR) de hasta 7 veces en promedio, lo que representaría alrededor del 3 % de la posición total del *Sistema**.

5.3. Proyección del VaR Histórico por el método de Mínimos Cuadrados Ordinarios

Del capítulo anterior, se prueba la hipótesis de que el portafolio del *Sistema** mantiene una estabilidad histórica que comprende el segundo semestre del 2012 y el primero del 2013; lo cual puede motivar a realizar un análisis detallado de la composición histórica del portafolio y en base a ello proponer un modelo para proyectar el VaR.

En esta sección se presenta un método para estimar el valor en riesgo a través de la composición histórica del portafolio del *Sistema**, posteriormente se muestra una proyección del modelo considerando los siguientes tres periodos consecutivos (Julio, Agosto y Septiembre del 2013), al mismo tiempo en que se calibra al comparar los resultados obtenidos con el VaR histórico real para estos tres periodos.

Se propone la estimación del VaR a través del método de Mínimos Cuadrados Ordinarios, donde el supuesto base es que el portafolio del *Sistema** mantiene estabilidad en el tiempo; ya que de lo contrario la historia de las variables del modelo (en nuestro caso la composición histórica por cada tipo de instrumento) no podría ser tomada para explicar el comportamiento del VaR, con lo que el modelo pierde automáticamente sentido en la estimación y predicción del valor en riesgo.

El método consiste en explicar una variable dependiente Y a través de un conjunto de variables independientes X_i de forma lineal, de tal manera que se tenga la siguiente relación:

$$Y = \beta + \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X2 + \cdots + \alpha_n X_n + \epsilon$$

Donde

- β: Se rerefiere al termino constante lineal del modelo.
- α_i: Son los coeficientes asociados a las variables X_i, y miden la influencia que las variables explicativas tienen sobre la variable dependiente.
- ϵ: Es el error entre la estimación y los datos reales.

El modelo tiene los siguientes supuestos como hipótesis:

1. La esperanza de los errores es cero, es decir, $E(\epsilon_i) = 0$.
2. Los errores tienen la misma varianza constante (Homocedasticidad), $VaR(\epsilon_i) = \sigma^2$.
3. Las covarianzas entre las distintas perturbaciones en los errores son nulas, esto es, $Cov(\epsilon_i, \epsilon_j) = 0$ para todo $i \neq j$.
4. Los errores tienen una distribución normal con media cero y varianza constante, $\epsilon \sim N(0, \sigma^2)$.

Para determinar los instrumentos que pueden explicar la evolución histórica del VaR, se consideran aquellos con mayor exposición a nivel portafolio, esto es, para los que el valor absoluto del valor a mercado promedio es superior a 2 %. Además, la seleccion se restringe a los tipos de instrumentos que presenten mayor correlación con el VaR, por lo que se toma un nivel de correlación mayor a 0.3 en escala absoluta.

$$|\rho| > 0{,}3 \quad y \quad |\%MtM_{prom}| > 2\,\%$$

Los tipos de instrumentos que resultan al final para el modelo, así como el nivel de correlación y su %MtM se presentan en la siguiente tabla.

Tipo de Instrumento	%MtM (Prom)	Correlación (ρ)
CertBurGUB	14.80%	-0.58307385
Udibonos	14.34%	-0.46953808
BondesD	41.03%	-0.44583337
BPA	41.84%	-0.44229967
USD	14.47%	-0.4377326
Reporto Privado	-11.12%	-0.32631266
Eurobonos	6.69%	-0.34093081
Cetes	28.31%	0.3016447
Reporto Gubernamental	-153.35%	0.33355667
BonoGUB	73.09%	0.4813252
CertDep	4.13%	0.51967964

Tabla 5.2. Selección de Instrumentos para el modelo de estimación del VaR

Para realizar el análisis de regresión se considera información mensual correspondiente a Mayo-2012 y Junio-2013, y una vez que se estiman los parámetros α_i y β, el modelo muestra los siguientes resultados:

Estadísticas del Modelo	
Coeficiente R^2	0.99287612
R^2 ajustado	0.9536948
Observaciones	14

Parámetros	Coeficientes
Intercepción	- 702
CertDep	54,918
BonoGUB	1,353
ReportoGUB	2,009
Cetes	1,113
Eurobonos	- 2,811
ReportoPrivado	- 20,801
BPA	2,731
BondesD	1,059
Udibonos	- 7,052
CertBurGUB	167

Tabla 5.3. Resultados del modelo y de la estimación de los parámetros.

En general el modelo resulta confiable, ya que mantiene un nivel de R^2 ajustado mayor al 95 % y el coeficiente estimado de la constante β del modelo es adecuada respecto a los coeficientes de los instrumentos, es decir, el efecto del VaR se captura completamente con la composición del portafolio principalmente en los instrumentos que tienen una mayor posición en el mismo.

Para validar la aplicación del método, basta con verificar que los errores entre los datos observados y los estimados siguen una distribución normal con media cero y varianza muestral, para ello se realiza la prueba de Anderson-Darling.

Esta prueba es aplicada para evaluar el ajuste a cualquier distribución de probabilidades. Se basa en la comparación de la distribución de probabilidades acumulada empírica con la distribución de probabilidades acumulada teórica. La hipótesis de la prueba es la siguiente:

$H0$: La variable X_i sigue una distribución normal (μ, σ^2)

$H1$: La variable X_i no sigue una distribución normal (μ, σ^2)

El estadístico de prueba se obtiene mediante la siguiente expresión.

$$T = -n - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(2i-1)\left[lnF(Y_i) + ln(1 - F(Y_{n-i+1}))\right]$$

Donde

- n: Es el número de observaciones.

- $F(\cdot)$: Se refiere a la distribución de probabilidades acumulada normal con media y varianza especificadas a partir de la muestra.

- Y_i: Son los datos "ordenados"de menor a mayor obtenidos de la muestra.

Finalmente, la hipótesis nula se rechaza con un nivel de significancia α si el estadístico T es mayor que el valor crítio T^*, el cual se obtiene de la tabla 5.4.

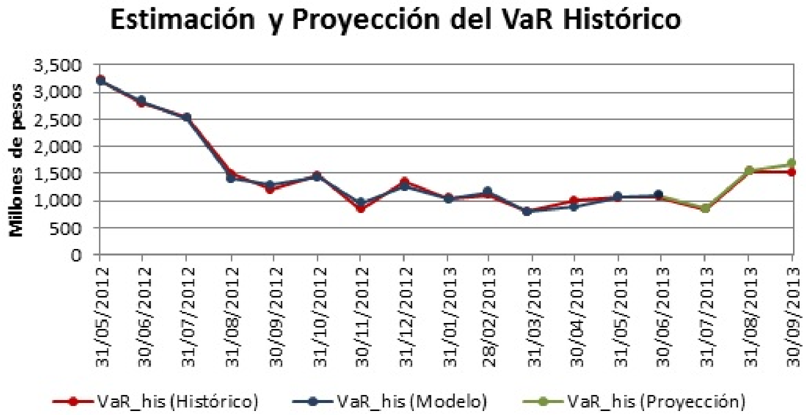
Nivel de confianza (α)	0.1	0.05	0.025	0.01
Valor crítico (T*)	0.631	0.752	0.873	1.035

Tabla 5.4. Estadístico de prueba Anderson-Darling a la distribución normal.

Al calcular el ejercicio de prueba de normalidad en los errores, el valor del estadístico (T) corresponde a 0.23954583, de acuerdo a la tabla 5.3 y con un nivel de confianza del 99 %, resulta que en efecto los errores siguen una distribución normal con media cero y varianza 3,943.51[1].

Para calibrar el modelo se realizó una proyección tomando la composición del portafolio del *Sistema** para los siguientes tres meses (Julio, Agosto y Septiembre 2013), para finalmente comparar el VaR proyectado con el VaR Histórico real asociado a cada periodo.

[1]La varianza se estima como $\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}{n-1}$ y la media como $\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$.



Fecha - Análisis	VaR_his (Histórico)	VaR_his (Modelo)
31/05/2012	3,219.15	3,200.06
29/06/2012	2,788.41	2,837.35
31/07/2012	2,531.23	2,511.46
31/08/2012	1,482.22	1,403.56
28/09/2012	1,201.58	1,289.90
31/10/2012	1,455.63	1,433.78
30/11/2012	841.54	955.23
31/12/2012	1,338.90	1,252.38
31/01/2013	1,040.17	1,024.08
28/02/2013	1,104.38	1,148.72
27/03/2013	788.16	790.26
30/04/2013	997.09	882.41
31/05/2013	1,046.97	1,071.91
28/06/2013	1,066.47	1,100.79
31/07/2013	832.51	858.19
31/08/2013	1,528.48	1,553.79
30/09/2013	1,512.84	1,675.54
31/10/2013	1,401.47	2,342.54

Cifras en mdp.

En general el modelo proporciona una idea del nivel de riesgo en el mercado, el cual depende absolutamente de la composición estable en el portafolio, así como la cobertura que existe principalmente entre instrumentos del mercado de deuda y de derivados.

Es importante mencionar que en ningún momento se considera el efecto de la volatilidad, lo cual enriquecería considerablemente el análisis y se ganaría un mayor poder predictivo a nivel global. Sin embargo, bajo la hipótesis de estabilidad en el mercado (hecho que se prueba en este trabajo), puede ser un punto de partida para extender el análisis y presentar mejoras u otro tipo de estudio.

Capítulo 6

Conclusiones

Se analizó un portafolio conformado por una muestra de siete instituciones representativas de la Banca Múltiple denominado *Sistema**, con un horizonte temporal de 14 periodos con periodicidad mensual. Como primer paso se probó empíricamente la estabilidad del portafolio del *Sistema**, y que se compone principalmente por instrumentos de deuda; el siguiente paso consistió en analizar el VaR Histórico para cada periodo explicando la relación que existe entre el VaR y el cambio en la posición de los instrumentos así como en los factores de riesgo.

Enseguida se presentaron algunas variaciones del concepto VaR como son el VaR-Marginal, la Elasticidad, el Coeficiente de Diversificación (CDV) y el Stress-VaR (SVaR), de donde resultó que el *Sistema** presenta mayor exposición a movimientos en las Tasas de Interés en moneda nacional principalmente y al tipo de cambio peso-dólar. Además, el estudio muestra que el portafolio del *Sistema** muestra una mayor diversificación a partir del 2013 en contraste a lo que sucedió en la segunda mitad del 2012, con lo que no se identifica alguna señal de alarma.

Este último punto queda reforzado al estimar la máxima pérdida esperada en base al comportamiento de los factores de riesgo en un escenario de crisis, ya que se esperaría una pérdida de 7 veces el nivel de VaR actual en promedio, el cual representa el 3 % de la posición total del *Sistema*.

Finalmente, bajo el supuesto de que el *Sistema* mantiene estabilidad en el tiempo, se presenta una estimación del VaR Histórico a través de la composición de su portafolio y posteriormente una proyección del mismo. Los resultados del modelo estimado y proyectado resultan favorables para determinar el nivel de riesgo del *Sistema*, aunque claramente, la estimación mejoraría considerablemente si considerara el efecto de la volatilidad principalmente en los instrumentos con mayor posición dentro del portafolio.

Bibliografía

[1] Hull, John C., *"Options Futures and Other Derivatives"*, Octava Edición.

[2] Philippe Jorion, *"Value at Risk"*, Editorial Mc Graw-Hill, Tercera Edición 2007.

[3] Robert L. McDonald, *"Derivatives Markets"*, Editorial Addison Wesley, Segunda Edición 2006.

[4] Carol Alexander, *"Market Models. A Guide to Financial Data Analysis"*, Editorial John W. & Sons L., 2001.

[5] Fabozzi, Frank (2000), *Bond Markets Analysis and Strategies*, Editorial Prentice Hall.

[6] Anthony Saunders y Marcia Millon C., *"Financial Institutions Management. A Risk Management Approach"*, Editorial Mc Graw-Hill 2006.

[7] CNBV, *"Disposiciones de Carácter General Aplicables a las Instituciones de Crédito"*, Diario Oficial de la Federación 2005.

[8] Sheldon M. Ross, *"Stochastic Processes"*, Segunda Edición 1996.

[9] Gonzalo Angulo Jose A., *"Instrumentos Financieros (Monografías sobre las Noras Internacionales de Inforación Financiera)"*, Monografía 11.

[10] Paul Wilmott, *"Paul Wilmott On Quantitative Finance"*, Editorial John W. & Sons L., Segunda Edición 2006.

[11] Diego Rivera García, *"Tesis: Valor en Riesgo. Metodologías para su estimación"*, Texcoco, Edo. de México 2010.