**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

# CARACTERIZACIONES EN VARIABLE REAL PARA ESPACIOS DE BERGMAN

TESINA
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRA EN CIENCIAS

PRESENTA:
CAROLINA ESPINOZA VILLALVA

DR. SALVADOR PÉREZ ESTEVA
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS - CUERNAVACA

MÉXICO, D. F. ABRIL 2013.

# Índice

# 1. Introducción

La teoría de los espacios de Bergman se remonta varias décadas atrás, iniciando con el estudio del matemático polaco Stefan Bergman sobre el núcleo reproductor descubierto por él mismo en 1922, el cual es hoy en día conocido como núcleo de Bergman. Esta teoría fue desarrollada principalmente durante los años 80's, sin embargo, durante los últimos años de la década de los 90's sufrió una notable metamorfosis. Problemas que antes eran considerados como intratables, han sido resueltos y se ha obtenido una teoría muy completa y rica para describir a los espacios de Bergman y sus operadores. Con el estudio de los espacios de Bergman generalizados se ha observado que éstos coinciden con una gran variedad de espacios de funciones holomorfas, tales como los espacios diagonales de Besov, los espacios de Sobolev y los espacios de Hardy-Sobolev.

A pesar de las similitudes que existen entre los espacios de Hardy y los espacios de Bergman, la teoría existente sobre éstos últimos se encuentra mucho menos desarrollada, incluso en el caso del disco unitario, ésta además incorpora nuevos elementos como la geometría hiperbólica y núcleos reproductores.

Es importante recordar que la primera caracterización en variable real para los espacios de Bergman fue presentada por Coifman y Weiss en los años 70's ([6]). Considerando la pseudo-métrica

$$\rho(z,w) = \begin{cases} ||z|-|w|| + \left|1 - \frac{1}{|z||w|}\langle z,w\rangle\right| & \text{si } z,w \in \mathbb{B}_n \setminus \{0\}, \\ |z|+|w| & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

Coifman y Weiss utilizaron técnicas de análisis armónico en espacios homogéneos para obtener una descomposición atómica para espacios de Bergman. Sin embargo, como la métrica de Bergman $\beta$ enfatiza la estructura geométrica compleja de la bola unitaria en $\mathbb{C}^n$, uno preferiría obtener caracterizaciones en variable real para los espacios de Bergman en términos de $\beta$.

Recientemente, Z. Chen y W. Ouyang establecieron caracterizaciones en variable real en términos de funciones maximales e integrales de área para los espacios de Bergman en la bola unitaria de $\mathbb{C}^n$, las cuales involucran la derivada radial, el gradiente complejo y el gradiente invariante. También definieron espacios de funciones holomorfas tipo tienda en la bola unitaria de $\mathbb{C}^n$ y demostraron que estos espacios coinciden con los espacios de Bergman.

En el presente trabajo, se presentan y demuestran los resultados elaborados por Z. Chen y W. Ouyang sobre caracterizaciones en variable real para espacios de Bergman. El texto consta de 4 secciones, las cuales están organizadas como sigue: en la segunda sección introducimos los espacios de Bergman, establecemos algunas nociones de diferenciación y enunciamos varios resultados básicos que nos serán útiles para el estudio que pretendemos realizar. En la tercera sección presentamos y demostramos una descomposición atómica en variable real para espacios de Bergman. Por último, en la cuarta sección formulamos caracterizaciones para los espacios de Bergman en términos de una función maximal, de funciones integrales de área y de espacios tipo tienda.

En adelante, denotaremos por $\mathbb{N}_0$ al conjunto que consta de los números naturales y el 0. Para dos cantidades no negativas $x$ y $y$, entendemos por $x \approx y$ que existen constantes positivas $C_1$ y $C_2$ tales que $C_1 x \leq y \leq C_2 x$. Así mismo, por $x \lesssim y$ queremos decir que existe una constante $C > 0$ tal que $x \leq Cy$. La demostración de los resultados mencionados en la segunda sección pueden ser encontrados en [8], además seguiremos la notación utilizada en dicho libro. Cualquier otra notación o terminología utilizada será aclarada más adelante.

# 2. Espacios de Bergman

Denotemos por $\mathbb{C}$ al conjunto de números complejos. Fijemos $n \in \mathbb{N}$ y denotemos por $\mathbb{B}_n$ a la bola unitaria en $\mathbb{C}^n$. Denotaremos a la frontera de $\mathbb{B}_n$ por $\mathbb{S}^n$. En $\mathbb{C}^n$ consideremos el producto interno

$$\langle z, w \rangle = z_1 \overline{w}_1 + \cdots + z_n \overline{w}_n$$

y definamos $|z| = \langle z, z \rangle^{\frac{1}{2}}$. Sea ahora $\{e_j\}_{j=1}^n$, la base estándar de $\mathbb{C}^n$. Diremos que una función $f : \mathbb{B}_n \to \mathbb{C}$ es holomorfa en $\mathbb{B}_n$ si para toda $z \in \mathbb{B}_n$ y $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ el límite

$$\frac{\partial f}{\partial z_j}(z) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(z + \lambda e_j) - f(z)}{\lambda}$$

existe y es finito. Es posible mostrar que una función $f$ es holomorfa en $\mathbb{B}_n$ si y sólo si

$$f(z) = \sum_m a_m z^m, \qquad z \in \mathbb{B}_n,$$

donde $m$ es un multi-índice y la serie converge absoluta y uniformemente en los conjuntos de la forma

$$r\mathbb{B}_n = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}, \qquad 0 < r < 1.$$

Para cada $l \in \mathbb{N}_0$ definamos

$$f_l(z) = \sum_{|m|=l} a_m z^m$$

donde $|m| = m_1 + \cdots + m_n$ si $m = (m_1, \ldots, m_n)$. Ahora podemos reescribir la serie de Taylor de $f$ como

$$f(z) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l(z).$$

La expresión anterior se conoce como la expansión homogénea de $f$.

Un mapeo $F : \mathbb{B}_n \to \mathbb{B}_n$ está definido por $n$ funciones de la siguiente manera:

$$F(z) = (f_1(z), \ldots, f_n(z)), \;\; z \in \mathbb{B}_n.$$

Decimos que $F : \mathbb{B}_n \to \mathbb{B}_n$ es holomorfa si cada $f_j$ es holomorfa en $\mathbb{B}_n$. Denotaremos por $Aut(\mathbb{B}_n)$ al conjunto de bi-holomorfirsmos de $\mathbb{B}_n$.

Para $z \in \mathbb{B}_n \setminus \{0\}$, definamos $\varphi_z : \mathbb{B}_n \to \mathbb{B}_n$ como

$$\varphi_z(w) = \frac{z - P_z(w) - \left(1 - |z|^2\right)^{\frac{1}{2}} Q_z(w)}{1 - \langle w, z \rangle},$$

donde $P_z(w) = \frac{\langle w,z\rangle}{|z|^2}z$ y $Q_z(w) = w - \frac{\langle w,z\rangle}{|z|^2}z$. Es fácil ver que $\varphi_z \circ \varphi_z(w) = w$ para todo $w \in \mathbb{B}_n$ y que $\varphi_z$ es un automorfismo de $\mathbb{B}_n$ que intercambia a los puntos $z$ y 0.

**Definición 2.1.** *Para $\alpha \in \mathbb{R}$ definimos la medida de Lebesgue pesada $v_\alpha$ en $\mathbb{B}_n$ como*

$$v_\alpha(z) = c_\alpha \left(1 - |z|^2\right)^\alpha v(z),$$

*donde $v$ es la medida de Lebesgue, $c_\alpha = 1$ si $\alpha \leq -1$ y $c_\alpha = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\Gamma(\alpha+1)}$ si $\alpha > -1$.*

Cuando $\alpha > -1$, $v_\alpha$ es una medida de probabilidad en $\mathbb{B}_n$. Denotaremos por $\tau$ a la medida resultante cuando $\alpha = -(n+1)$ y la llamaremos la medida invariante, puesto que $\tau \circ \varphi = \tau$ para todo $\varphi \in Aut(\mathbb{B}_n)$.

Para $p > 0$ denotaremos por $L^p_\alpha(\mathbb{B}_n)$ al espacio $L^p(\mathbb{B}_n, v_\alpha)$.

**Definición 2.2.** *Para $p > 0$ y $\alpha > -1$, definimos el espacio de Bergman pesado como $\mathcal{A}^p_\alpha = \mathcal{H}(\mathbb{B}_n) \cap L^p_\alpha(\mathbb{B}_n)$, donde $\mathcal{H}(\mathbb{B}_n)$ denota al espacio de funciones holomorfas en $\mathbb{B}_n$.*

Una quasi-norma en un espacio vectorial $X$ es una función $\rho : V \to \mathbb{R}$ que satisface los mismos axiomas que una norma, excepto el de la desigualdad del triángulo, el cual es reemplazado por la existencia de una costante $C > 1$ tal que $\rho(x+y) \leq C(\rho(x) + \rho(y))$ para todo par de vectores $x$ y $y$ en $X$. Decimos que un espacio vectorial $X$ es quasi-Banach si es metrizable, completo y su topología está dada por una quasi-norma en $X$.

**Observación 2.3.** *$(\mathcal{A}^p_\alpha, \|\cdot\|_{p,\alpha})$ es de Banach si $p \geq 1$ y quasi-Banach si $p < 1$, donde $\|\cdot\|_{p,\alpha}$ es la norma que $\mathcal{A}^p_\alpha$ hereda de $L^p_\alpha(\mathbb{B}_n)$ como subespacio vectorial.*

## 2.1. Algunas Nociones de Diferenciación

Para $f \in \mathcal{H}(\mathbb{B}_n)$ y $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{B}_n$ definimos

- La derivada radial de $f$ en $z$

$$\mathcal{R}f(z) = \sum_{j=1}^{n} z_j \frac{\partial f}{\partial z_j}(z).$$

- Para cada $t \in \mathbb{R}$, la derivada radial fraccional de $f$ en $z$

$$\mathcal{R}^t f(z) = \sum_{l=0}^{\infty} l^t f_l(z),$$

  donde $f(z) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l(z)$ es la expansión homogénea de $f$.

- El gradiente complejo de $f$ en $z$

$$\nabla f(z) = \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}(z), \ldots, \frac{\partial f}{\partial z_n}(z)\right).$$

- El gradiente invariante de $f$ en $z$

$$\tilde{\nabla} f(z) = \nabla(f \circ \varphi_z)(0).$$

Ahora estamos en condiciones de definir los espacios de Bergman generalizados: para $p > 0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ fijemos $k \in \mathbb{N}_0$ tal que $pk + \alpha > -1$ y definamos

$$\mathcal{A}^p_\alpha = \left\{ f \in \mathcal{H}(\mathbb{B}_n) : \left(1 - |z|^2\right)^k \mathcal{R}^k f(z) \in L^p_\alpha(\mathbb{B}_n) \right\}.$$

El espacio $\mathcal{A}^p_\alpha$ es independiente de la elección de $k$ y coincide con la definición original cuando $\alpha > -1$.

Sea $N = \text{mín}\{k \in \mathbb{N}_0 : pk + \alpha > -1\}$ y definamos

$$\|f\|_{\mathcal{A}^p_\alpha} = |f(0)| + \left( \int_{\mathbb{B}_n} \left(1 - |z|^2\right)^{Np} \left|\mathcal{R}^N f(z)\right|^p dv_\alpha(z) \right)^{\frac{1}{p}}, \quad f \in \mathcal{A}^p_\alpha.$$

De nuevo, $(\mathcal{A}^p_\alpha, \|\cdot\|_{\mathcal{A}^p_\alpha})$ es de Banach si $p \geq -1$ y quasi-Banach si $p < -1$.

## 2.2. Resultados Básicos

A partir de este momento, denotaremos por $D(z, \gamma)$ al conjunto $\{w \in \mathbb{B}_n : \beta(z, w) < \gamma\}$, donde $\beta$ es la métrica de Bergman y $\gamma > 0$. Se sabe que

$$\beta(z, w) = \frac{1}{2} \log \frac{1 + |\varphi_z(w)|}{1 - |\varphi_z(w)|}$$

y que $\beta$ es invariante bajo automorfismos de $\mathbb{B}_n$ (Para mayor información, puede consultarse [8]).

Antes de continuar, es conveniente enunciar algunos resultados básicos sobre la métrica de Bergman y funciones holomorfas en $\mathbb{B}_n$, los cuales pueden encontrarse en [8].

**Lema 2.4.** *Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\gamma > 0$ existe una constante $C_\gamma > 0$ tal que para toda $z \in \mathbb{B}_n$ se satisface*

$$C_\gamma^{-1} \left(1 - |z|^2\right)^{n+1+\alpha} \leq v_\alpha(D(z, \gamma)) \leq C_\gamma \left(1 - |z|^2\right)^{n+1+\alpha}.$$

**Lema 2.5.** *Sea $\gamma > 0$. Entonces*

*i) para toda $w \in \mathbb{B}_n$ y $z \in D(w, \gamma)$*

$$1 - |w|^2 \approx 1 - |z|^2 \approx |1 - \langle w, z \rangle| ;$$

*ii) para toda $z \in \overline{\mathbb{B}}_n$, $u$ y $v$ en la bola unitaria de $\mathbb{C}^n$ con $\beta(u, v) < \gamma$ se tiene*

$$|1 - \langle z, v \rangle| \approx |1 - \langle z, u \rangle| .$$

# 3. Descomposición Atómica

Antes de desarrollar una descomposición atómica en variable real para los espacios de Bergman, recordemos la descomposición atómica en variable compleja dada por Coifman y Rochberg [5].

**Teorema 3.1.** *Suponga que* $p > 0$, $\alpha > -1$ *y* $b > n \max\{1, 1/p\} + (\alpha+1)/p$. *Entonces existe una sucesión* $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ *en* $\mathbb{B}_n$ *tal que* $\mathcal{A}_\alpha^p$ *consiste exactamente de funciones de la forma*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{\left(1 - |a_k|^2\right)^{pb-n-1-\alpha}}{(1 - \langle z, a_k \rangle)^b},$$

*donde* $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^p$ *y la serie converge en la topología de* $\mathcal{A}_\alpha^p$ *inducida por* $\|\cdot\|_{p,\alpha}$. *Más aún*

$$\int_{\mathbb{B}_n} |f(z)|^p \, dv_\alpha(z) \approx \inf \left\{ \sum_k |c_k|^p \right\},$$

*donde el ínfimo corre sobre todas las descomposiciones posibles para* $f$.

Para establecer nuestra descomposición atómica es necesario dar algunas definiciones y notación nueva. Para $z, w \in \mathbb{B}_n$ definamos $d(z,w) = |1 - \langle z, w \rangle|^{\frac{1}{2}}$. La restricción de $d$ a $\mathbb{S}^n$ es una métrica y es conocida como la métrica no isotrópica.

Para cualquier $\xi \in \mathbb{S}^n$ y $r > 0$ el conjunto $Q_r(\xi) = \{z \in \mathbb{B}_n : d(z,\xi) < r\}$ es llamado tubo de Carleson con respecto a la métrica $d$. Cuando no sea necesario expresar explícitamente el centro o radio de un tubo de Carleson lo denotaremos por $Q$.

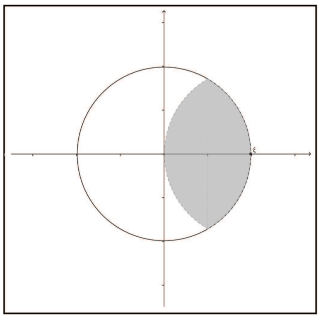

Figura 1: Tubo de Carleson de radio $r = 1$ y centro $\xi = 1$.

Definiremos nuestros átomos en términos de tubos de Carleson como sigue:

**Definición 3.2.** *Sea* $1 < q < \infty$. *Diremos que* $a \in L_\alpha^p(\mathbb{B}_n)$ *es un* $(1,q)_\alpha$*-átomo si* $a(z) = 1$ *para toda* $z \in \mathbb{B}_n$ *o si existe un tubo de Carleson* $Q$ *tal que*

*i)* *sop* $a \subseteq Q$.

*ii)* $\|a\|_{q,\alpha} \leq v_\alpha(Q)^{\frac{1}{q}-1}$.

*iii)* $\int\limits_{\mathbb{B}_n} a\, dv_\alpha = 0$.

Nótese que para cualquier $(1,q)_\alpha$-átomo se cumple

$$\|a\|_{1,\alpha} = \int_{\mathbb{B}_n} |a| \; dv_\alpha \leq \|a\|_{q,\alpha} v_\alpha(Q)^{1-\frac{1}{q}} \leq 1.$$

Supongamos por un momento que $\alpha > -1$. En $L^2_\alpha(\mathbb{B}_n)$ podemos definir la proyección ortogonal $P_\alpha$ sobre $\mathcal{A}^2_\alpha$ de la siguiente manera:

$$P_\alpha f(z) = \int_{\mathbb{B}_n} K^\alpha(z,w) f(w) dv_\alpha(w), \quad f \in L^2_\alpha(\mathbb{B}_n),$$

donde

$$K^\alpha(z,w) = \frac{1}{(1 - \langle z, w\rangle)^{n+1+\alpha}}.$$

Es posible extender $P_\alpha$ como una proyección acotada de $L^p_\alpha(\mathbb{B}_n)$ sobre $\mathcal{A}^p_\alpha$ para $1 < p < \infty$.

**Definición 3.3.** *Sea $1 < q < \infty$, definimos $\mathcal{A}^{1,q}_\alpha$ como el espacio que consiste de todas las funciones $f \in \mathcal{A}^1_\alpha$ que admiten una descomposición de la forma*

$$f = \sum_j \lambda_j P_\alpha(a_j) \qquad \textit{con} \qquad \sum_j |\lambda_j| \leq C_q \|f\|_{1,\alpha},$$

*donde para cada $j$, $a_j$ es un $(1,q)_\alpha$-átomo y $\lambda_j \in \mathbb{C}$.*

Dotaremos al espacio $\mathcal{A}^{1,q}_\alpha$ de la siguiente norma:

$$\|f\|_{\mathcal{A}^{1,q}_\alpha} = \text{ínf} \left\{ \sum_j |\lambda_j| : f = \sum_j \lambda_j P_\alpha(a_j) \right\},$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las descomposiciones posibles para $f$. No es díficil comprobar que $(\mathcal{A}^{1,q}_\alpha, \|\cdot\|_{\mathcal{A}^{1,q}_\alpha})$ es un espacio de Banach.

En el siguiente teorema establecemos la existencia de una descomposición atómica para el espacio de Bergman $\mathcal{A}^1_\alpha$.

**Teorema 3.4.** *Suponga que $1 < q < \infty$ y $\alpha > -1$. Para toda $f \in \mathcal{A}^1_\alpha$ existe una sucesión $\{a_j\}_{j=1}^\infty$ de $(1,q)_\alpha$-átomos y una sucesión $\{\lambda_j\}_{j=1}^\infty$ de números complejos tales que*

$$f = \sum_j \lambda_j P_\alpha(a_j) \qquad y \qquad \sum_j |\lambda_j| \leq C_q \|f\|_{1,\alpha}.$$

*Más aún,*

$$\|f\|_{1,\alpha} \approx \text{ínf} \left\{ \sum_j |\lambda_j| : f = \sum_j \lambda_j P_\alpha(a_j) \right\},$$

*donde el ínfimo corre sobre todas las descomposiciones posibles para $f$ y “ $\approx$ ” depende sólo de $\alpha$ y $q$.*

Probaremos el teorema anterior por medio de dualidad, utilizando los siguientes lemas:

**Lema 3.5.** *Dado $\alpha > -1$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $z$ y $w$ en $\mathbb{B}_n$ y $\xi \in \mathbb{S}^n$ con $d(z,\xi) > \delta d(w,\xi)$ se tiene*

$$|K^\alpha(z,w) - K^\alpha(z,\xi)| \leq C_{\alpha,n} \frac{d(w,\xi)}{d(z,\xi)^{2(n+1+\alpha)+1}}.$$

*Demostración.* Notemos primero que

$$K^\alpha(z,w) - K^\alpha(z,\xi) = \int_0^1 \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{(1-\langle z,\xi\rangle - t\langle z, w-\xi\rangle)^{n+1+\alpha}}\right) dt,$$

por lo cual,

$$|K^\alpha(z,w) - K^\alpha(z,\xi)| \leq \int_0^1 \frac{(n+1+\alpha)\,|\langle z, w-\xi\rangle|}{|1-\langle z,\xi\rangle - t\langle z,w-\xi\rangle|^{n+2+\alpha}} dt.$$

Escribamos $z = z_1 + z_2$ y $w = w_1 + w_2$, donde $z_1$ y $w_1$ son paralelos a $\xi$, mientras que $z_2$ y $w_2$ son ortogonales a $\xi$. Con lo anterior, tenemos que

$$\langle z,w\rangle - \langle z,\xi\rangle = \langle z_2,w_2\rangle + \langle z_1, w_1-\xi\rangle,$$

y así

$$|\langle z,w\rangle - \langle z,\xi\rangle| \leq |z_2|\,|w_2| + |w_1-\xi|.$$

Observemos ahora que $|w_1-\xi| = |1-\langle w,\xi\rangle|$, pues

$$\begin{aligned}
|w_1-\xi|^2 &= \langle w_1-\xi, w_1-\xi\rangle \\
&= |w_1|^2 - \langle \xi, w_1\rangle - \langle w_1,\xi\rangle + |\xi|^2,
\end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned}
|1-\langle w,\xi\rangle|^2 &= (1-\langle w,\xi\rangle)(1-\langle \xi,w\rangle) \\
&= 1 - \langle w,\xi\rangle - \langle \xi,w\rangle + |\langle w,\xi\rangle|^2 \\
&= |\xi|^2 - \langle w,\xi\rangle - \langle \xi,w\rangle + |\langle w_1,\xi\rangle|^2 \\
&= |\xi|^2 - \langle w,\xi\rangle - \langle \xi,w\rangle + |w_1|^2.
\end{aligned}$$

También observemos que

$$\begin{aligned}
|z_2|^2 = |z|^2 - |z_1|^2 &\leq 1 - |z_1|^2 \\
&\leq 2|1-|z_1|| \\
&= 2|1-\langle z_1,\xi\rangle| \\
&= 2|1-\langle z,\xi\rangle|.
\end{aligned}$$

De forma análoga se tiene $|w_2|^2 \leq 2|1-\langle w,\xi\rangle|$. Por todo lo anterior, tenemos que

$$\begin{aligned}
|\langle z,w\rangle - \langle z,\xi\rangle| &\leq 2|1-\langle z,\xi\rangle|^{\frac{1}{2}}|1-\langle w,\xi\rangle|^{\frac{1}{2}} + |1-\langle w,\xi\rangle| \\
&\leq 2d(w,\xi)\left(d(z,\xi) + d(w,\xi)\right).
\end{aligned}$$

Elijamos $\delta > 0$ de forma que $2(1+1/\delta)1/\delta < 1/2$, de esta manera, tendremos que para todo $z, w \in \mathbb{B}_n$ y $\xi \in \mathbb{S}^n$ con $d(z,\xi) > \delta d(w,\xi)$

$$|\langle z, w\rangle - \langle z, \xi\rangle| \leq \frac{2}{\delta}\left(1+\frac{1}{\delta}\right) d^2(z,\xi) \leq \frac{1}{2}|1-\langle z,\xi\rangle|.$$

Bajo estas condiciones

$$\begin{aligned}
|1-\langle z,\xi\rangle - t\langle z, w-\xi\rangle| &\geq |1-\langle z,\xi\rangle| - t|\langle z, w-\xi\rangle| \\
&\geq |1-\langle z,\xi\rangle| - |\langle z, w-\xi\rangle| \\
&\geq \frac{1}{2}|1-\langle z,\xi\rangle|.
\end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}
|K^\alpha(z,w) - K^\alpha(z,\xi)| &\leq \frac{C(n+1+\alpha)d(w,\xi)\left(d(z,\xi)+d(w,\xi)\right)}{|1-\langle z,\xi\rangle|^{n+2+\alpha}} \\
&\leq \frac{C(n+1+\alpha)d(w,\xi)d(z,\xi)(1+1/\delta)}{d(z,\xi)^{2(n+2+\alpha)}} \\
&\leq \frac{2C(n+1+\alpha)d(w,\xi)}{d(z,\xi)^{2(n+1+\alpha)+1}}.
\end{aligned}$$

□

El siguiente lema proporciona una relación entre la medida de un tubo de Carleson y el radio de éste. Su demostración puede encontrarse en [8].

**Lema 3.6.** *Para todo $\alpha > -1$ existen constantes positivas, $C$ y $c$, tales que para cualquier $\xi \in \mathbb{S}^n$*

*i)* $cr^{2(n+1+\alpha)} \leq v_\alpha(Q_r(\xi))$ *para cualquier* $0 \leq r \leq \sqrt{2}$.

*ii)* $v_\alpha(Q_r(\xi)) \leq Cr^{2(n+1+\alpha)}$ *para todo* $r > 0$.

**Lema 3.7.** *Para $\alpha > -1$ y $1 < q < \infty$, existe una constante $C > 0$ que depende sólo de $\alpha, n$ y $q$, tal que para todo $(1,q)_\alpha$-átomo $a$, se satisface $\|P_\alpha(a)\|_{1,\alpha} \leq C$.*

*Demostración.* Supongamos que $a$ es un $(1,q)_\alpha$-átomo, que no es la función idénticamente uno, que tiene soporte en el tubo de Carleson $Q_r(\xi)$ y que $r\delta < \sqrt{2}$, con $\delta$ como en el Lema 3.5. Dado que $P_\alpha$ es acotado en $L^q_\alpha(\mathbb{B}_n)$ tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{Q_{\delta r}} |P_\alpha(a)|dv_\alpha &\leq \|P_\alpha(a)\|_{q,\alpha} v_\alpha(Q_{\delta r})^{1-\frac{1}{q}} \\
&\leq C(\delta r)^{2(n+1+\alpha)(1-\frac{1}{q})}\|P_\alpha\|\|a\|_{q,\alpha} \\
&\leq Cc\delta^{2(n+1+\alpha)(1-\frac{1}{q})}\|P_\alpha\|\|a\|_{q,\alpha} v_\alpha(Q_r)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\leq Cc\delta^{2(n+1+\alpha)(1-\frac{1}{q})}\|P_\alpha\|,
\end{aligned}$$

donde hemos utilizado el Lema 3.6. Por otro lado, si $d(z,\xi) \geq \delta r$ y usamos el Lema 3.5 obtenemos que

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{B}_n} \frac{a(w)}{(1-\langle z,w\rangle)^{n+1+\alpha}} dv_\alpha(w)\right| &= \left|\int_{\mathbb{B}_n} a(w)\left[\frac{1}{(1-\langle z,w\rangle)^{n+1+\alpha}} - \frac{1}{(1-\langle z,\xi\rangle)^{n+1+\alpha}}\right] dv_\alpha(w)\right| \\ &\leq C \int\limits_{Q_r(\xi)} |a(w)| \frac{d(w,\xi)}{d(z,\xi)^{2(n+1+\alpha)+1}} dv_\alpha(w) \\ &\leq \frac{Cr}{d(z,\xi)^{2(n+1+\alpha)+1}}.\end{aligned}$$

En consecuencia

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{B}_n\setminus Q_{\delta r}(\xi)} |P_\alpha(a)| dv_\alpha(z) &\leq Cr \int\limits_{\mathbb{B}_n\setminus Q_{\delta r}(\xi)} \frac{dv_\alpha(z)}{d(z,\xi)^{2(n+1+\alpha)+1}} \\ &= Cr \sum_{j=0}^{\infty} \int\limits_{2^j\delta r\leq d(z,\xi)<2^{j+1}\delta r} \frac{dv_\alpha(z)}{d(z,\xi)^{2(n+1+\alpha)+1}} \\ &\leq Cr \sum_{j=0}^{\infty} \frac{v_\alpha(Q_{2^{j+1}\delta r})}{(2^j\delta r)^{2(n+1+\alpha)+1}} \\ &\leq C'r \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(2^{j+1}\delta r)^{2(n+1+\alpha)}}{(2^j\delta r)^{2(n+1+\alpha)+1}} \\ &\leq \frac{C' 2^{2(n+1+\alpha)+1}}{\delta}.\end{aligned}$$

Con todo lo anterior, obtenemos que

$$\int_{\mathbb{B}_n} |P_\alpha(a)| dv_\alpha = \int\limits_{\mathbb{B}_n\setminus Q_{\delta r}(\xi)} |P_\alpha(a)| dv_\alpha + \int\limits_{Q_{\delta r}(\xi)} |P_\alpha(a)| dv_\alpha \leq C_{\alpha,n,q}.$$

Nótese que si $r\delta \geq \sqrt{2}$, entonces $Q_{\delta r} = \mathbb{B}_n$ y como $v_\alpha$ es una medida de probabilidad en $\mathbb{B}_n$, la estimación se obtiene fácilmente. $\square$

Del Lema 3.7 podemos deducir que $\mathcal{A}^{1,q}_\alpha \subset \mathcal{A}^1_\alpha$ continuamente.

Definimos el espacio de Bloch $\mathcal{B}$, como el espacio que consiste de todas las funciones $f \in \mathcal{H}(\mathbb{B}_n)$ tales que $\|f\|_{\mathcal{B}} = \sup\{|\tilde{\nabla} f(z)| : z \in \mathbb{B}_n\}$ es finito. A pesar de que $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ es una seminorma, podemos dotar a $\mathcal{B}$ de la norma

$$\|f\| = |f(0)| + \|f\|_{\mathcal{B}},$$

con la cual $\mathcal{B}$ es un espacio de Banach. Es bien sabido que $\mathcal{B}$ se puede identificar con el espacio dual de $\mathcal{A}^1_\alpha$ mediante el par integral

$$\langle f,g\rangle_\alpha = \lim_{r\to 1^{-1}} \int_{\mathbb{B}_n} f(rz)\overline{g(z)} dv_\alpha(z), \qquad f \in \mathcal{A}^p_\alpha, g \in \mathcal{B}.$$

El siguiente lema establece una caracterización para el espacio de Bloch $\mathcal{B}$ y puede encontrarse en [1].

**Teorema 3.8.** *Suponga que $\alpha > -1$ y $1 \le p < \infty$, entonces para toda $f \in \mathcal{H}(\mathbb{B}_n)$ se cumple que $f \in \mathcal{B}$ si y sólo si existe una constante positiva $C_{\alpha,p}$ tal que*

$$\frac{1}{v_\alpha(Q_r(\xi))} \int\limits_{Q_r(\xi)} |f - f_{Q_r(\xi)}|^p dv_\alpha \le C_{\alpha,p},$$

*para todo $r > 0$ y $\xi \in \mathbb{S}^n$, donde*

$$f_{Q_r(\xi)} = \frac{1}{v_\alpha(Q_r(\xi))} \int\limits_{Q_r(\xi)} f(z) dv_\alpha(z).$$

*Más aún,*

$$\|f\|_{\mathcal{B}} \approx \sup_{r>0, \xi\in\mathbb{S}^n} \frac{1}{v_\alpha(Q_r(\xi))} \left( \int\limits_{Q_r(\xi)} |f - f_{Q_r(\xi)}|^p dv_\alpha \right)^{\frac{1}{p}},$$

*donde " $\approx$ " depende sólo de $\alpha, n$ y $p$.*

**Proposición 3.9.** *$(\mathcal{A}_\alpha^{1,q})^* = \mathcal{B}$ isométricamente para cualquier $\alpha > -1$ y $1 < q < \infty$.*

*Demostración.* Tomemos $p > 0$ con $1/p + 1/q = 1$. Mostraremos primero que $\mathcal{B} \subset (\mathcal{A}_\alpha^{1,q})^*$. Sea $g \in \mathcal{B}$. Para cualquier $(1,q)_\alpha$-átomo $a$ con soporte en el tubo de Carleson $Q$

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{B}_n} P_\alpha(a) \overline{g} dv_\alpha \right| &= |\langle P_\alpha(a), g\rangle_\alpha| \\
&= \left| \int_{\mathbb{B}_n} a\overline{g} dv_\alpha \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{B}_n} a(\overline{g - g_Q}) dv_\alpha \right| \\
&\le \left( \int_Q |a|^q dv_\alpha \right)^{\frac{1}{q}} \left( \int_Q |g - g_Q|^p dv_\alpha \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\le \left( \frac{1}{v_\alpha(Q)} \int_Q |g - g_Q|^p dv_\alpha \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\le C\|g\|_{\mathcal{B}},
\end{aligned}$$

donde en la última desigualdad hemos usado el Lema 3.8. Si ahora consideramos $a \equiv 1$, tendremos que $P_\alpha(a) \equiv 1$ y en consecuencia

$$\left| \int_{\mathbb{B}_n} P_\alpha(a)\overline{g} dv_\alpha \right| = \left| \int_{\mathbb{B}_n} g(z) dv_\alpha(z) \right| = \left| \int_{\mathbb{B}_n} \frac{g(z)}{(1 - \langle 0, z\rangle)^{n+1+\alpha}} dv_\alpha(z) \right| = |g(0)|.$$

Hasta aquí, hemos probado que si $f$ es una combinación lineal finita de $(1,q)_\alpha$-átomos, entonces

$$\left|\int_{\mathbb{B}_n} f(z)\overline{g(z)}dv_\alpha(z)\right| \leq C\|f\|_{\mathcal{A}^{1,q}_\alpha}(|g(0)|+\|g\|_{\mathcal{B}}).$$

Tenemos así, que $g$ define un funcional lineal continuo $\psi_g$ en un subespacio denso de $\mathcal{A}^{1,q}_\alpha$, el cual puede extenderse continuamente a $\mathcal{A}^{1,q}_\alpha$ con la propiedad de que para toda $f \in \mathcal{A}^{1,q}_\alpha$

$$|\psi_g(f)| \leq C\|f\|_{\mathcal{A}^{1,q}_\alpha}(|g(0)|+\|g\|_{\mathcal{B}}).$$

Con lo anterior tenemos que $\mathcal{B} \subset (\mathcal{A}^{1,q}_\alpha)^*$.

Observemos ahora que $\mathcal{A}^q_\alpha \subset \mathcal{A}^{1,q}_\alpha$, pues si $f \in \mathcal{A}^q_\alpha$ y $Q = Q_r(\xi)$ con $r > \sqrt{2}$ y $\xi \in \mathbb{S}^n$

$$f = \frac{(f - f_Q)\chi_Q}{2\|f\|_{q,\alpha}} + f_Q.$$

Es sabido que $(\mathcal{A}^q_\alpha)^* = \mathcal{A}^p_\alpha$. Si $\psi \in (\mathcal{A}^{1,q}_\alpha)^*$, entonces $\psi \in (\mathcal{A}^q_\alpha)^*$ y en consecuencia existe una función $g \in \mathcal{A}^p_\alpha$ tal que

$$\psi(f) = \int_{\mathbb{B}_n} f\bar{g}dv_\alpha, \qquad \forall f \in \mathcal{A}^q_\alpha.$$

Sea $Q_r(\xi)$ un tubo de Carleson, para cualquier $f \in L^q_\alpha(\mathbb{B}_n)$ la función

$$a_f = \frac{(f - f_{Q_r(\xi)})\chi_{Q_r(\xi)}}{2\|f\|_{q,\alpha}(v_\alpha(Q_r(\xi)))^{\frac{1}{p}}}$$

es un $(1,q)_\alpha$-átomo. Se sigue del Lema 3.7 que $|\psi(P_\alpha(a_f))| \leq C\|\psi\|$, consecuentemente

$$|\psi(P_\alpha([f - f_{Q_r(\xi)}]\chi_{Q_r(\xi)}))| \leq 2C\|\psi\|\|f\|_{q,\alpha}v_\alpha(Q_r(\xi))^{\frac{1}{p}}.$$

Así, para cualquier $f \in L^q_\alpha(\mathbb{B}_n)$

$$\begin{aligned}
\left|\int_{Q_r(\xi)} f(\overline{g - g_{Q_r(\xi)}})dv_\alpha\right| &= \left|\int_{Q_r(\xi)} (f - f_{Q_r(\xi)})\bar{g}dv_\alpha\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{B}_n} (f - f_{Q_r(\xi)})\chi_{Q_r(\xi)}\bar{g}dv_\alpha\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{B}_n} P_\alpha([f - f_{Q_r(\xi)}]\chi_{Q_r(\xi)})\bar{g}dv_\alpha\right| \\
&= |\psi(P_\alpha([f - f_{Q_r(\xi)}]\chi_{Q_r(\xi)}))| \\
&\leq 2C\|\psi\|\|f\|_{q,\alpha}v_\alpha(Q_r(\xi))^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

y en consecuencia

$$\left(\frac{1}{v_\alpha(Q_r(\xi))}\int_{Q_r(\xi)} |g - g_{Q_r(\xi)}|^p dv_\alpha\right)^{\frac{1}{p}} \leq 2\|\psi\|.$$

De lo anterior y del Lema 3.8 se sigue que $g \in \mathcal{B}$ y $\|g\|_{\mathcal{B}} \leq C\|\psi\|$. $\square$

Ahora la demostración del Teorema 3.4 es simple: el Lema 3.7 asegura que $\mathcal{A}^{1,q}_\alpha \subset \mathcal{A}^1_\alpha$ continuamente y la proposición anterior afirma que $(\mathcal{A}^{1,q}_\alpha)^* = (\mathcal{A}^1_\alpha)^*$, por lo cual se puede concluir que $\mathcal{A}^{1,q}_\alpha = \mathcal{A}^1_\alpha$.

Es importante notar que la prueba anterior no puede extenderse para $0 < p < 1$, de hecho, hasta el momento no se ha encontrado una descomposición atómica en términos de tubos de Carleson para $\mathcal{A}^p_\alpha$ con $0 < p < 1$.

# 4. Caracterizaciones en Variable Real

## 4.1. Función Maximal

Una de las caracterizaciones que presentaremos en esta sección esta dada por la siguiente función maximal:

**Definición 4.1.** *Para cada $\gamma > 0$ y $f \in \mathcal{H}(\mathbb{B}_n)$ definimos*

$$(M_\gamma f)(z) = \sup_{w \in D(z,\gamma)} |f(w)|, \qquad z \in \mathbb{B}_n.$$

Antes de iniciar con la caracterización de $\mathcal{A}^p_\alpha$ en términos de la función maximal, debemos enunciar los siguientes lemas que nos serán de utilidad mas adelante:

**Lema 4.2.** *Suponga que $\gamma > 0$, $0 < p < \infty$ y $\alpha > -1$, entonces existe una constante positiva $C$ tal que*

$$|f(z)|^p \leq \frac{C}{(1-|z|^2)^{n+1+\alpha}} \int\limits_{D(z,\gamma)} |f(w)|^p dv_\alpha(w), \qquad z \in \mathbb{B}_n$$

*para toda $f \in \mathcal{H}(\mathbb{B}_n)$.*

**Lema 4.3.** *Para $r > 0$ fijo, existe $N \in \mathbb{N}$ y una sucesión $\{a_j\}$ de números complejos en $\mathbb{B}_n$ tal que*

*i)* $\mathbb{B}_n \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} D(a_j, r)$.

*ii) Cada $z \in \mathbb{B}_n$ pertenece a lo más a $N$ discos de la forma $D(a_j, 3r)$.*

Procedamos ahora a formular la caracterización de $A^p_\alpha$ en términos de $M_\gamma$.

**Teorema 4.4.** *Suponga que $\gamma > 0$ y $\alpha > -1$. Sea $0 < p < \infty$, entonces para toda $f \in \mathcal{H}(\mathbb{B}_n)$ se tiene que $f \in \mathcal{A}^p_\alpha$ si y sólo si $M_\gamma f \in L^p_\alpha(\mathbb{B}_n)$. Más aún,*

$$\|f\|_{p,\alpha} \approx \|M_\gamma f\|_{p,\alpha},$$

*donde "$\approx$" depende sólo de $\gamma, \alpha, n$ y $p$.*

*Demostración.* Es claro que para cualquier $\gamma > 0$ $\|f\|_{p,\alpha} \leq \|M_\gamma f\|_{p,\alpha}$. Para obtener la desigualdad contraria notemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{B}_n} |M_\gamma f(z)|^p dv_\alpha(z) &\leq \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{D(a_j,\gamma)} \sup_{w\in D(z,\gamma))} |f(w)|^p dv_\alpha(z) \\
&\leq C_1 \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{D(a_j,\gamma)} \left( \sup_{w\in D(z,\gamma)} \frac{1}{(1-|w|^2)^{n+1+\alpha}} \int_{D(w,\gamma)} |f(u)|^p dv_\alpha(u) \right) dv_\alpha(z) \\
&\leq C_2 \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{D(a_j,\gamma)} \frac{1}{(1-|z|^2)^{n+1+\alpha}} \int_{D(a_j,3\gamma)} |f(u)|^p dv_\alpha(u) dv_\alpha(z) \\
&\leq C_3 \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{D(a_j,\gamma)} \frac{1}{(1-|a_j|^2)^{n+1+\alpha}} \int_{D(a_j,3\gamma)} |f(u)|^p dv_\alpha(u) dv_\alpha(z) \\
&\leq C_4 \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{D(a_j,3\gamma)} |f(u)|^p dv_\alpha(u) \\
&\leq C_4 N \int_{\mathbb{B}_n} |f(u)|^p dv_\alpha(u),
\end{aligned}$$

con lo cual queda demostrado el resultado. □

Como consecuencia inmediata del teorema anterior, obtenemos una caracterización en términos de funciones maximales para los espacios generalizados de Bergman.

**Corolario 4.5.** *Sean $\gamma > 0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Suponga que $0 < p < \infty$ y elijamos $k \in \mathbb{N}_0$ de forma que $pk + \alpha > -1$, entonces para cualquier $f \in \mathcal{H}(\mathbb{B}_n)$ se tiene que $f \in \mathcal{A}^p_\alpha$ si y sólo si $M^k_\gamma f \in L^p_\alpha(\mathbb{B}_n)$, con*

$$(M^k_\gamma f)(z) = \sup\left\{(1-|w|^2)^k \mathcal{R}^k f(w) : w \in D(z,\gamma)\right\}, \qquad z \in \mathbb{B}_n.$$

*Más aún,*

$$\|f\|_{p,\alpha} \approx |f(0)| + \|M^k_\gamma f\|_{p,\alpha},$$

*donde "$\approx$" depende sólo de $\gamma, \alpha, n, k$ y $p$.*

*Demostración.* Para probar el resultado, basta notar que $f \in \mathcal{A}^p_\alpha$ si y sólo si $\mathcal{R}^k f \in L^p_{pk+\alpha}(\mathbb{B}_n)$. Como $\mathcal{R}^k f$ es holomorfa y $pk + \alpha > -1$, se sigue del teorema anterior que $\mathcal{R}^k f \in \mathcal{A}^p_{pk+\alpha}$ si y sólo si $M_\gamma \mathcal{R}^k f \in L^p_{pk+\alpha}(\mathbb{B}_n)$, es decir $M^k_\gamma f \in L^p_\alpha(\mathbb{B}_n)$. □

## 4.2. Funciones Integrales de Área

Fijemos $\gamma > 0$ y $0 < q < \infty$. Para cada $f \in \mathcal{H}(\mathbb{B}_n)$ y $z \in \mathbb{B}_n$ definamos *a*) La función integral de área radial:

$$A^{(q)}_{\gamma,\mathcal{R}}(f)(z) = \left( \int\limits_{D(z,\gamma)} |(1-|w|^2)\mathcal{R}f(w)|^q d\tau(w) \right)^{\frac{1}{q}}.$$

*b*) La función integral de área del gradiente complejo:

$$A^{(q)}_{\gamma,\nabla}(f)(z) = \left( \int\limits_{D(z,\gamma)} |(1-|w|^2)\nabla f(w)|^q d\tau(w) \right)^{\frac{1}{q}}.$$

*c*) La función integral de área del gradiente invariante:

$$A^{(q)}_{\gamma,\tilde{\nabla}}(f)(z) = \left( \int\limits_{D(z,\gamma)} |\tilde{\nabla} f(w)|^q d\tau(w) \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Antes de continuar, es conveniente presentar tres resultados que nos ayudaran a demostrar una segunda caracterización para los espacios de Bergman $\mathcal{A}^p_\alpha$. El siguiente lema, puede encontrarse en [8]:

**Lema 4.6.** *Sea $1 < p < \infty$. Suponga que $\alpha > -1$ y $1/p = (1-\theta)/p'$ para $\theta \in (0,1)$ y $1 \leq p' < \infty$. Entonces*

$$A^p_\alpha = \left[A^{p'}_\alpha, \mathcal{B}\right]_\theta$$

*con normas equivalentes, donde $\left[A^{p'}_\alpha, \mathcal{B}\right]_\theta$ es el espacio de interpolación compleja entre $A^{p'}_\alpha$ y $\mathcal{B}$.*

Necesitaremos también la siguiente caracterización para medidas de tipo Carleson en espacios de Bergman, la cual puede encontrarse en [7].

**Lema 4.7.** *Suponga que $n+1+\alpha > 0$ y que $\mu$ es una medida de Borel positiva en $\mathbb{B}_n$. Entonces existe una constante positiva $C$ tal que*

$$\mu(Q_r(\xi)) \leq C r^{n+1+\alpha} \qquad \forall \xi \in \mathbb{S}^n \text{ y } r > 0,$$

*si y sólo si para cada $s > 0$ existe una constante positiva $C'$ tal que*

$$\int_{\mathbb{B}_n} \frac{(1-|z|^2)^s}{|1-\langle z,w\rangle|^{n+1+\alpha+s}} d\mu(w) \leq C' \qquad \forall z \in \mathbb{B}_n.$$

Por último, enunciamos un lema demostrado en [8], el cual relaciona la derivada radial con el gradiente complejo y el gradiente invariante.

**Lema 4.8.** *Para cualquier $f \in \mathcal{H}(\mathbb{B}_n)$ y para toda $z \in \mathbb{B}_n$ se satisface* *i)* $|(1-|z|^2)\mathcal{R}f(z)| \leq |(1-|z|^2)\nabla f(z)| \leq |\tilde{\nabla} f(z)|$.

*ii)* $|\tilde{\nabla} f(z)|^2 = (1-|z|^2)(|\nabla f(z)|^2 - |\mathcal{R}f(z)|^2)$.

Ahora estamos en condiciones de enunciar una caracterización para espacios de Bergman en términos de funciones integrales de área.

**Teorema 4.9.** *Suponga que $\gamma > 0$, $\alpha > -1$ y que $1 < q < \infty$. Sea $0 < p < \infty$, entonces para cualquier $f \in \mathcal{H}(\mathbb{B}_n)$ las siguientes afirmaciones son equivalentes*

*i)* $f \in \mathcal{A}^p_\alpha$.

*ii)* $A^{(q)}_{\gamma,\mathcal{R}} f \in L^p_\alpha(\mathbb{B}_n)$.

*iii)* $A^{(q)}_{\gamma,\nabla} f \in L^p_\alpha(\mathbb{B}_n)$.

*iv)* $A^{(q)}_{\gamma,\tilde{\nabla}} f \in L^p_\alpha(\mathbb{B}_n)$.

*Más aún, las cantidades*

$$|f(0)| + \|A^{(q)}_{\gamma,\mathcal{R}} f\|_{p,\alpha},\, |f(0)| + \|A^{(q)}_{\gamma,\nabla} f\|_{p,\alpha} \text{ y } |f(0)| + \|A^{(q)}_{\gamma,\tilde{\nabla}} f\|_{p,\alpha},$$

*son comparables con $\|f\|_{p,\alpha}$ y "$\approx$" depende sólo de $\gamma, \alpha, n, p$ y $q$.*

*Demostración.* Como consecuencia inmediata del inciso *i)* del Lema 4.8 se tiene que *iv)* implica *iii)* y que *iii)* implica *ii)*, por lo cual sólo necesitamos mostrar que *ii)* implica *i)* y que *i)* implica *iv)*.

Veamos primero que *ii)* implica *i)*: como $\mathcal{R}f$ es holomorfa, se sigue del Lema 4.2 que

$$|\mathcal{R}f(z)| \leq \left( \frac{C}{(1-|z|^2)^{n+1+\alpha}} \int\limits_{D(z,\gamma)} |\mathcal{R}f(w)|^q dv_\alpha(w) \right)^{\frac{1}{q}} \leq C' \left( \int\limits_{D(z,\gamma)} |\mathcal{R}f(w)|^q d\tau(w) \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Por lo anterior

$$\begin{aligned} (1-|z|^2)|\mathcal{R}f(z)| &\leq C'(1-|z|^2) \left( \int\limits_{D(z,\gamma)} |\mathcal{R}f(w)|^q d\tau(w) \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq C'' \left( \int\limits_{D(z,\gamma)} |(1-|w|^2)\mathcal{R}f(w)|^q d\tau(w) \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= C'' A^{(q)}_{\gamma,\mathcal{R}} f(z). \end{aligned}$$

En consecuencia, si $A^{(q)}_{\gamma,\mathcal{R}} f \in L^p_\alpha(\mathbb{B}_n)$ entonces $(1-|z|^2)|\mathcal{R}f(z)| \in L^p_\alpha(\mathbb{B}_n)$, por lo tanto $f \in \mathcal{A}^p_\alpha$ (Teorema 2.16 en [8]).

Procedamos ahora a probar que $i)$ implica $iv)$. Supongamos primero que $0 < p \leq 1$, tomemos $f \in \mathcal{A}^p_\alpha$, consideremos la descomposición atómica dada por el Teorema 3.1 y escribamos

$$f_k(z) = \frac{(1-|a_k|^2)^{(pb-n-1-\alpha)/p}}{(1-\langle z, a_k\rangle)^b}.$$

Notemos que

$$\frac{\partial f_k}{\partial z_j}(z) = \frac{b\bar{a}_{k,j}(1-|a_k|^2)^{(pb-n-1-\alpha)/p}}{(1-\langle z, a_k\rangle)^{b+1}},$$

por lo cual

$$\nabla f_k(z) = \frac{b\bar{a}_k,(1-|a_k|^2)^{(pb-n-1-\alpha)/p}}{(1-\langle z, a_k\rangle)^{b+1}},$$

$$\mathcal{R}f_k(z) = \frac{b\langle z, a_k\rangle(1-|a_k|^2)^{(pb-n-1-\alpha)/p}}{(1-\langle z, a_k\rangle)^{b+1}}.$$

Aplicando $ii)$ del Lema 4.8 a $f_k$ obtenemos

$$\begin{aligned}
|\tilde{\nabla} f_k(z)|^2 &= (1-|z|^2)(|\nabla f_k(z)|^2 - |\mathcal{R}f_k|^2) \\
&= \frac{b^2(1-|z|^2)(1-|a_k|^2)^{2(pb-n-1-\alpha)/p}(|a_k|^2 - |\langle z, a_k\rangle|^2)}{|1-\langle z, a_k\rangle|^{2(b+1)}} \\
&\leq C\frac{b^2(1-|a_k|^2)^{2(pb-n-1-\alpha)/p}}{|1-\langle z, a_k\rangle|^{2b}},
\end{aligned}$$

así

$$\begin{aligned}
A^{(q)}_{\gamma,\tilde{\nabla}} f_k(z) &= \left(\int\limits_{D(z,\gamma)} |\tilde{\nabla} f_k(w)|^q d\tau(w)\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq Cb(1-|a_k|^2)^{(pb-n-1-\alpha)/p}\left(\int\limits_{D(z,\gamma)} \frac{d\tau(w)}{|1-\langle w, a_k\rangle|^{bq}}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \frac{C'b(1-|a_k|^2)^{(pb-n-1-\alpha)/p}}{|1-\langle z, a_k\rangle|^b}.
\end{aligned}$$

Como $v_\alpha(Q_r(\xi)) \leq Cr^{2(n+1+\alpha)}$ para todo $r > 0$ y $\xi \in \mathbb{S}^n$, podemos tomar $s = pb-n-1-\alpha > 0$ en el Lema 4.7 para obtener que

$$\int_{\mathbb{B}_n} |A^{(q)}_{\gamma,\tilde{\nabla}} f_k(z)|^p dv_\alpha(z) \leq Cb^p \int_{\mathbb{B}_n} \frac{(1-|a_k|^2)^{pb-n-1-\alpha}}{|1-\langle z, a_k\rangle|^{pb}} dv_\alpha(z) \leq C_{p,\alpha}.$$

Ahora, si $f \in \mathcal{A}^p_\alpha$ con $0 < p \leq 1$ y $f = \sum_{k\in\mathbb{N}} c_k f_k$ con $\sum_{k\in\mathbb{N}} |c_k|^p < \infty$ obtenemos

$$\int_{\mathbb{B}_n} |A^{(q)}_{\gamma,\tilde{\nabla}} f(z)|^p d\tau(z) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} |c_k|^p \int_{\mathbb{B}_n} |A^{(q)}_{\gamma,\tilde{\nabla}} f_k(z)|^p d\tau(z) \leq C_{p,\alpha} \sum_{k\in\mathbb{N}} |c_k|^p,$$

y en consecuencia

$$\int_{\mathbb{B}_n} |A^{(q)}_{\gamma,\tilde{\nabla}} f(z)|^p d\tau(z) \leq C_{p,\alpha} \text{ínf} \sum_{k\in\mathbb{N}_0} |c_k|^p \leq C_{p,\alpha}\|f\|^p_{p,\alpha}.$$

Con lo anterior, el resultado queda demostrado para $0 < p \leq 1$. Veamos qué sucede cuando $1 < p < \infty$. Sea $E = L^q(\mathbb{B}_n, \chi_{D(0,\gamma)}d\tau; \mathbb{C}^n)$ y

$$L^\infty(\mathbb{B}_n; E) = \left\{ F : \mathbb{B}_n \to E : \sup_{z\in\mathbb{B}_n} \|F(z)\|_E < \infty \right\}.$$

Consideremos ahora $T : \mathcal{B} \to L^\infty(\mathbb{B}_n; E)$ tal que $f \mapsto Tf$ con $Tf : \mathbb{B}_n \to E$ y para cada $z \in \mathbb{B}_n$, $Tf(z) : \mathbb{B}_n \to \mathbb{C}^n$ con $w \mapsto \tilde{\nabla} f(\varphi_z(w))$.

Notemos ahora que $\varphi_z(D(0,\gamma)) = D(z,\gamma)$, y como $d\tau$ es invariante bajo $\varphi_z$ se tiene

$$\begin{aligned}
\|Tf(z)\|_E &= \left( \int_{\mathbb{B}_n} |\tilde{\nabla} f(\varphi_z(w))|^q \chi_{D(0,\gamma)}(w) d\tau(w) \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left( \int_{D(z,\gamma)} |\tilde{\nabla} f(w)|^q d\tau(w) \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= A^{(q)}_{\gamma,\tilde{\nabla}} f(z),
\end{aligned}$$

por lo cual

$$\sup_{z\in\mathbb{B}_n} \|Tf(z)\|_E \leq C\|f\|_{\mathcal{B}}.$$

Por todo lo anterior, $T$ es acotado de $\mathcal{B}$ en $L^\infty(\mathbb{B}_n; E)$ y por el caso anterior, tambien es acotado de $\mathcal{A}^1_\alpha$ en $L^1(\mathbb{B}_n; E)$. Por el Lema 4.6 sabemos que $\mathcal{A}^p_\alpha = [\mathcal{A}^1_\alpha, \mathcal{B}]_\theta$ con $\theta = 1 - 1/p$ y es un hecho conocido que para la misma $\theta$

$$L^p_\alpha(\mathbb{B}_n; E) = \left[ L^1_\alpha(\mathbb{B}_n; E), L^\infty_\alpha(\mathbb{B}_n; E) \right]_\theta,$$

por lo cual podemos concluir que $T$ tambien es acotado de $\mathcal{A}^p_\alpha$ en $L^\infty_\alpha(\mathbb{B}_n; E)$ para todo $1 < p < \infty$.

Hemos probado así, que para toda $p > 0$ y $f \in \mathcal{A}^p_\alpha$

$$\|A^{(q)}_{\gamma,\tilde{\nabla}} f\|_{p,\alpha} \leq C\|f\|_{p,\alpha},$$

con $C$ dependiente sólo de $\alpha, \gamma, n, p$ y $q$. □

Como corolario al teorema anterior, obtenemos una nueva caracterización para los espacios de Bergman generalizados.

**Corolario 4.10.** *Suponga que $\gamma > 0$, $1 < q < \infty$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Sea $0 < p < \infty$ y $k \in \mathbb{N}_0$ de forma que $pk + \alpha > -1$. Entonces para toda función holomorfa $f$ en $\mathbb{B}_n$ se tiene que $f \in \mathcal{A}^p_\alpha$ si y sólo si $A^{(q)}_{\gamma,k+1}(f) \in L^p_\alpha(\mathbb{B}_n)$, donde*

$$A^{(q)}_{\gamma,k}(f)(z) = \left( \int_{D(z,\gamma)} |(1-|w|^2)^k \mathcal{R}^k f(w)|^q dv_\alpha(w) \right)^{\frac{1}{q}}.$$

*Más aún,*

$$\|f\|_{p,\alpha} \approx |f(0)| + \|A^{(q)}_{\gamma,k+1}(f)\|_{p,\alpha},$$

*donde "* $\approx$ *" depende sólo de* $\gamma, \alpha, q, p, k$ *y* $\gamma$.

*Demostración.* Basta notar que $f \in \mathcal{A}^p_\alpha$ si y sólo si $\mathcal{R}^k f \in L^p_{pk+\alpha}(\mathbb{B}_n)$, y por el teorema anterior, esto sucede si y sólo si $A^{(q)}_{\alpha,\mathcal{R}}(\mathcal{R}^k f) \in L^p_{pk+\alpha}(\mathbb{B}_n)$, esto es, si y sólo si $A^{(q)}_{\gamma,k+1}(f) \in L^p_\alpha(\mathbb{B}_n)$. □

## 4.3. Espacios Tienda

Sea $\gamma > 0$ y para $1 < q < \infty$ definamos

$$A^{(q)}_\gamma f(z) = \left( \int\limits_{D(z,\gamma)} |f(w)|^q d\tau(w) \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Para $q = \infty$ definamos

$$A^{(\infty)}_\gamma f(z) = \sup_{w \in D(z,\gamma)} |f(w)|.$$

Los mapeos definidos anteriormente envían funciones de $\mathbb{B}_n$ en funciones en $\mathbb{B}_n$. Definiremos al espacio de funciones holomorfas tipo tienda $\mathcal{T}^p_{\alpha,q}$ como sigue

$$\mathcal{T}^p_{\alpha,q} = \left\{ f \in \mathcal{H}(\mathbb{B}_n) : A^{(q)}_\gamma(f) \in L^p_\alpha(\mathbb{B}_n) \right\},$$

donde $0 < p \leq \infty$, $\alpha > -1$, $\gamma > 0$ y $1 < q \leq \infty$. Dotaremos a estos espacios de la norma (o quasi-norma cuando $0 < p < 1$) $\|f\|_{\mathcal{T}^p_{\alpha,q}} = \|A^{(q)}_\gamma(f)\|_{p,\alpha}$, con la cual $\mathcal{T}^p_{\alpha,q}$ es un espacio de Banach, si $p \geq 1$.

En secciones anteriores hemos estudiado el caso $q = \infty$ y encontramos que $\mathcal{T}^p_{\alpha,\infty}$ coincide con el espacio de Bergman $\mathcal{A}^p_\alpha$. Por otro lado, haciendo uso del Teorema 3.8 se puede ver que $\mathcal{T}^\infty_{\alpha,q}$ está encajado en $\mathcal{B}$ para todo $1 < q < \infty$.

En esta sección, además de las funciones de área que hemos definido, usaremos una variante de la función maximal no centrada de Hardy-Littlewood en los espacios de Lebesgue $L^p_\alpha(\mathbb{B}_n)$, a decir

$$M^{(q)}_\gamma f(z) = \sup_{D(w,\gamma) \ni z} \left( \frac{1}{v_\alpha(D(w,\gamma))} \int\limits_{D(w,\gamma)} |f(u)|^q dv_\alpha(u) \right)^{\frac{1}{q}},$$

donde $\gamma > 0$ y $0 < q < \infty$. Cuando $q = 1$ escribiremos $M_\gamma$ en lugar de $M^{(1)}_\gamma$.

**Teorema 4.11.** *Suponga que* $\gamma > 0$, $1 < q < \infty$ *y* $\alpha > -1$. *Sea* $0 < p < \infty$, *entonces para cuaquier* $f \in \mathcal{H}(\mathbb{B}_n)$ *son equivalentes*

*i)* $f \in \mathcal{A}^p_\alpha$.

*ii)* $A_\gamma^{(q)}(f) \in L^p_\alpha(\mathbb{B}_n)$.

*iii)* $M_\gamma^{(q)}(f) \in L^p_\alpha(\mathbb{B}_n)$.

*Más aún,*

$$\|f\|_{p,\alpha} \approx \|f\|_{\mathcal{T}^p_{\alpha,q}} \approx \|M_\gamma^{(q)}\|_{p,\alpha},$$

*donde " $\approx$ " depende sólo de $\gamma, \alpha, p, q$ y $n$.*

*Demostración.* Sabemos que para toda $z \in \mathbb{B}_n$

$$|f(z)| \lesssim \left( \frac{1}{(1-|z|^2)^{n+1+\alpha}} \int\limits_{D(z,\gamma)} |f|^q dv_\alpha \right)^{\frac{1}{q}} \lesssim A_\gamma^{(q)} f(z) \lesssim M_\gamma^{(q)} f(z),$$

por lo cual, tenemos que *iii)* implica *ii)* y que *ii)* implica *i)*.

El Lema 4.1 en [4] asegura que $M_\gamma$ es acotado en $L^p_\alpha(\mathbb{B}_n)$ para $1 < p < \infty$. Usando este resultado y que $M_\gamma^{(q)}(f) = (M_\gamma(|f|^q))^{1/q}$ se obtiene que $M_\gamma^{(q)}$ es acotado en $L^p_\alpha(\mathbb{B}_n)$ para toda $q < p < \infty$.

Por otro lado

$$\begin{aligned} M_\gamma^{(q)} f(z) &= \sup_{D(w,\gamma)\ni z} \left( \frac{1}{v_\alpha(D(w,\gamma))} \int\limits_{D(w,\gamma)} |f|^q dv_\alpha \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\approx \sup_{D(w,\gamma)\ni z} \left( \frac{1}{(1-|w|^2)^{n+1+\alpha}} \int\limits_{D(w,\gamma)} |f|^q dv_\alpha \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\approx \sup_{D(w,\gamma)\ni z} \left( \int\limits_{D(w,\gamma)} |f|^q d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\lesssim \left( \int\limits_{D(z,2\gamma)} |f|^q dv_\tau \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= A_{2\gamma}^{(q)} f(z). \end{aligned}$$

Por lo cual, bastará probar que $\|A_\gamma^{(q)}(f)\|_{p,\alpha} \leq \|f\|_{p,\alpha}$ para $0 < p \leq q$. Dividiremos la prueba en dos casos.

Supongamos primero que $0 < p \leq 1$: Si $f \in \mathcal{A}^p_\alpha$, podemos usar la descomposición del

Teorema 3.1 para obtener

$$
\begin{aligned}
A_\gamma^{(q)} f(z) &\le \left( \int\limits_{D(z,\gamma)} |f(w)|^q d\tau(w) \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\le \sum_{j\in\mathbb{N}} |c_j|(1-|a_j|^2)^{(pb-n-1-\alpha)/p} \left( \int\limits_{D(z,\gamma)} \frac{1}{|1-\langle w,a_j\rangle|^{qb}} d\tau(w) \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\lesssim \sum_{j\in\mathbb{N}} |c_j| \frac{(1-|a_j|^2)^{(pb-n-1-\alpha)/p}}{|1-\langle z,a_j\rangle|^b},
\end{aligned}
$$

en consecuencia, para cualquier descomposición de $f$ se tiene

$$
\int_{\mathbb{B}_n} |A_\gamma^{(q)} f(z)|^p dv_\alpha(z) \le \sum_{j\in\mathbb{N}} |c_j|^p \int_{\mathbb{B}_n} \frac{(1-|a_j|^2)^{pb-n-1-\alpha}}{|1-\langle z,a_j\rangle|^{pb}} dv_\alpha(z) \lesssim \sum_{j\in\mathbb{N}} |c_j|^p,
$$

donde en la última desigualdad, hemos usado el Lema 4.7. Por lo anterior se puede concluir que para toda $f \in \mathcal{A}_\alpha^p$ con $0 < p \le 1$

$$
\int_{\mathbb{B}_n} |A_\gamma^{(q)} f(z)|^p dv_\alpha(z) \lesssim \text{ínf} \sum_{j\in\mathbb{N}} |c_j|^p \lesssim \|f\|_{p,\alpha}^p.
$$

Para el caso $1 < p \le q$ usaremos interpolación compleja. Sea $E = L^q(\mathbb{B}_n, \chi_{D(0,\gamma)} d\tau)$ y consideremos el operador $T : A_\alpha^q \to L_\alpha^q(\mathbb{B}_n; E)$ tal que $f \mapsto Tf$ con $Tf(z) : \mathbb{B}_n \to \mathbb{C}$ y $Tf(z)(w) = f(\varphi_z(w))$.

Nótese que $\varphi_z(D(0,\gamma)) = D(z,\gamma)$. Como $d\tau$ es invariante bajo automorfismos de $\mathbb{B}_n$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
\|Tf(z)\|_E &= \left( \int_{\mathbb{B}_n} |f(\varphi_z(w))|^q \chi_{D(0,\gamma)}(w) d\tau(w) \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left( \int\limits_{D(z,\gamma)} |f(w)|^q d\tau(w) \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= A_\gamma^{(q)} f(z).
\end{aligned}
$$

Consecuentemente

$$
\|Tf\|_{L_\alpha^q(\mathbb{B}_n;E)}^q = \int_{\mathbb{B}_n} \|Tf(z)\|_E^q dv_\alpha(z) = \int_{\mathbb{B}_n} |A_\gamma^{(q)} f(z)|^q dv_\alpha(z) \approx \int_{\mathbb{B}_n} |f(z)|^q dv_\alpha(z).
$$

Hasta aquí, hemos probado que $T$ es acotado de $A_\alpha^q$ en $L_\alpha^p(\mathbb{B}_n; E)$, combinando esto con el caso $p = 1$ y usando interpolación compleja concluimos que $T$ es acotado de $A_\alpha^p$ en $L_\alpha^p(\mathbb{B}_n; E)$ para $1 < p \le q$. En consecuencia, para $1 < p \le q$ se tiene

$$
\|A_\gamma^{(q)}(f)\|_{p,\alpha} \le C\|f\|_{p,\alpha}, \qquad \forall f \in \mathcal{A}_\alpha^p.
$$

$\square$

Como resultado final, presentamos el siguiente corolario, el cual establece una caracterización en términos de la función de área y la función maximal para los espacios de Bergman generalizados.

**Corolario 4.12.** *Suponga que* $\gamma > 0$, $1 < q < \infty$ *y* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Sea* $0 < p < \infty$ *y* $k \in \mathbb{N}_0$ *de forma que* $pk + \alpha > -1$. *Entonces para toda función holomorfa* $f$ *en* $\mathbb{B}_n$ *son equivalentes*

*i)* $f \in \mathcal{A}^p_\alpha$.

*ii)* $A^{(q)}_{\gamma,k}(f) \in L^p_\alpha(\mathbb{B}_n)$.

*iii)* $M^{(q)}_{\gamma,k}(f) \in L^p_\alpha(\mathbb{B}_n)$.

*con*

$$A^{(q)}_{\gamma,k}f(z) = \left( \int\limits_{D(z,\gamma)} |(1-|w|^k)\mathcal{R}^k f(w)|^q d\tau(w) \right)^{\frac{1}{q}}, \text{ y}$$

$$M^{(q)}_{\gamma,k}f(z) = \sup_{D(w,\gamma)\ni z} \left( \frac{1}{v_\alpha(D(w,\gamma))} \int\limits_{D(w,\gamma)} |(1-|u|^k)\mathcal{R}^k f(u)|^q dv_\alpha(u) \right)^{\frac{1}{q}}.$$

*Además*

$$\|f\|_{p,\alpha} \approx |f(0)| + \|A^{(q)}_{\gamma,k}(f)\|_{p,\alpha} \approx |f(0)| + \|M^{(q)}_{\gamma,k}(f)\|_{p,\alpha},$$

*donde* “ $\approx$ ” *depende sólo de* $\gamma, \alpha, p, q, n$ *y* $k$.

La demostración de este resultado es similar a la de los Corolarios 4.5 y 4.10.

# Referencias


[1] D. Bélloké, C. Berger, L. Coburn y K. Zhu, *BMO in the Bergman metric on bounded symetric domains*, J. Funct. Anal. 93 (1990), 310-350.

[2] Z. Chen y W. Ouyang, *Maximal and area integral characterizations of Bergman spaces in the unit ball of* $\mathbb{C}^n$, arXiv:1005.2936.

[3] Z. Chen y W. Ouyang, *Real-Variable characterizations of Bergman spaces*, arXiv:1104.3960.

[4] Z. Chen y W. Ouyang, *Tent spaces and the Littlewood-Paley g-functions associated with Bergman spaces in the unit ball of* $\mathbb{C}^n$, arXiv:1103.6122.

[5] R. Coifman y R. Rochberg, *Representation theorems for holomorphic and harmonic functions in* $L^p$, Asterisque 77 (1980), 11-66.

[6] R. Coifman y G. Weiss, *Extensions of Hardy spaces and their use in analysis*, Bull. Amer. Math. Soc. 83 (1977), 569-643.

[7] R.Zhao y K. Zhu, *Theory of Bergman spaces in the unit ball of* $\mathbb{C}^n$, Memoires de la Soc. Math. France 115 (2008), 103.

[8] K. Zhu, *Spaces of Holomorphic Functions in the Unit Ball*, Springer-Verlag, New York (2005).