UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Centro de Ciencias Matemáticas UNAM Morelia

"LA FUNCIÓN ZETA DEL ANILLO DE BURNSIDE"

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

DOCTOR EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Presenta:

DAVID VILLA HERNÁNDEZ

Director de tesis:

Dr. Alberto Gerardo Raggi Cárdenas

UNAM Morelia

México D.F. Septiembre, 2011

El que no escatimó ni a su propio Hijo sino que lo entregó por todos nosotros, ¿cómo no nos dará también con él todas las cosas?

Romanos 8:32

Gracias Dios mío, por que siempre estuviste a mi lado, a lo largo de este trabajo, gracias por que incluso en mis sueños tú me revelaste las respuestas.

Esta pagina esta dedicada para agradecer a todas las personas que ayudaron a la realización de este trabajo.

Gracias Gerardo, por toda la confianza y todos los conocimientos que me has heredado, a lo largo de ya más de 10 años. Gracias por permitirme realizar las tesis de licenciatura, maestría y en esta ocasión de doctorado. Gracias por todos tus invaluables conocimientos y apoyo profesional.

Gracias Bere, por estar conmigo, en esta etapa de mi vida. Gracias por todo el amor y comprensión que me tienes y por ayudarme en la edición de esta tesis. ¡Te amo!

Gracias papá y mamá, por que ustedes son la base de lo que hoy en día soy, gracias por que desde la primaria ustedes me enseñaron las matemáticas que hoy forman parte de mi vida.

De manera especial quiero agradecer al Dr. Fernando Barrera por sus invaluables aportaciones a esta tesis. ¡Gracias por el apoyo incondicional!

Índice general

INTRODUCCIÓN

El objetivo principal de este trabajo es desarrollar la teoría para las funciones zeta en el anillo de Burnside de grupos finitos, a fin de obtener información sobre el comportamiento de estas, así como obtener algunas generalidades de estos objetos de estudio.

En el primer capítulo de este trabajo comenzaremos con el estudio de temas preliminares tales como el anillo de Burnside, la función Zeta y el producto fibrado, para los cuales daremos la definición y algunas de sus propiedades. Finalmente definiremos la función Zeta asociada a una función de Schwartz Bruhat y mencionaremos la ecuación funcional que ésta satisface.

De acuerdo con la definición dada por Solomon para la función zeta de un orden, se requiere del conocimiento de todos sus ideales de índice finito, lo cual puede ser complicado. En el segundo capítulo de esta tesis, se presentara un método empleado por C. J. Bushnell e I. Reiner, que sólo depende de la colección finita de las clases de isomorfismo de sus ideales de índice finito. Dicho método lo aplicaremos en los casos de la función zeta del anillo de Burnside para grupos cíclicos de orden un primo racional p y p^2. Los resultados anteriores, nos permitirán obtener un método recursivo para calcular la función zeta del anillo de Burnside para grupos cíclicos de orden p^n, con $n \in \mathbb{N}$, para los casos local y global. Posteriormente consideraremos los grupos de la forma $G = P \times Q$, es decir G es el producto directo de P y Q, en donde P es el p-subgrupo de Sylow de G. Para estos grupos, daremos una relación entre la función zeta del anillo de Burnside de G, con la función zeta del anillo de Burnside de P, para el caso local. Además, en base a los resultados anteriores, determinaremos la función zeta para el anillo de Burnside de cualquier grupo cíclico, en el caso local. Finalmente en este capítulo, se determinara explícitamente la función zeta para el anillo de Burnside de un grupo cíclico de orden pm en donde $p \nmid m$, para el caso local.

En el tercer capítulo, comenzaremos dando una ecuación funcional en el caso local, para la función zeta del anillo de Burnside de un grupo cíclico de orden pm en donde $p \nmid m$. Dicha ecuación recae en un caso particular del teorema principal de este capítulo, en el cual se determina una ecuación funcional para la función Zeta del anillo de Burnside $B_p\left(G\right)$ para un grupo finito G. Este teorema es basado en una restricción para las clases de isomorfismo de los ideales de índice finito de G, la cual se estudiara en los casos del anillo de Burnside de C_p y C_{p^2}. Además veremos que esta restricción siempre es satisfecha por el orden maximal de $B_p\left(G\right)$, el cual es una de las clases de isomorfismo de sus ideales de índice finito. Finalmente en este capítulo, determinaremos una ecuación funcional para la función $Z_{B_p\left(C_{p^n}\right)}\left(B_p\left(C_{p^n}\right);s\right)$.

En el capítulo cuarto de este trabajo, definiremos la función Zeta asociada a una función de Schwartz Bruhat y a un carácter dado. En base a los resultados obtenidos en el capítulo dos, para el anillo de Burnside de los grupos cíclicos de orden un primo racional p y p^2, obtendremos las funciones L correspondientes, para el caso local, a partir de las cuales, obtendremos un método recursivo para calcular funciones L en el anillo de Burnside para grupos cíclicos de orden p^n, con $n \in \mathbb{N}$. Posteriormente extenderemos la ecuación funcional dada en el capítulo anterior a una ecuación funcional para el caso de la función L del anillo de Burnside $B_p\left(G\right)$, para G un grupo finito y daremos un ejemplo para el orden maximal de $B_p\left(G\right)$, el cual es una de las clases de isomorfismo de sus ideales de índice finito. Finalmente en este capítulo, determinaremos una ecuación funcional para la función L del anillo de Burnside para grupos cíclicos de orden p^n, en el caso local.

En el quinto capítulo, obtendremos que la componente $B_p(G)e^p_{G,1}$ es isomorfa al anillo $B_p\left(C_p\right)$ en el caso de que $p\|\left|G\right|$, lo cual junto con las tablas de marcas y de acuerdo con la descomposición del anillo de Burnside en sus componentes solubles, nos facilitara los cálculos de las funciones zeta del anillo de Burnside para algunos grupos de simetría y alternantes, tales como S_3, S_4, A_4 y A_5, en los casos local y global.

ANTECEDENTES

El anillo de Burnside $B(G)$, es un invariante del grupo, el cual detecta solubilidad. Andreas Dress, probó que un grupo es soluble si y sólo si los únicos idempotentes de $B(G)$ son los triviales. También probó el teorema de inducción de Dress para $B(G)$, el cual, a partir del hecho de que $B(G)$ actúa en los funtores de Mackey, se tradujo en un teorema de inducción para cada uno de estos funtores, ver [**1**]. Además $B(G)$ tiene diversas aplicaciones en topología. Por otro lado la función zeta de Solomon, es un invariante del anillo que detecta la distribución de los ideales primos y es una generalización de la función zeta usual de Riemann.

A lo largo de este trabajo, $\mathbb{Z}_p$ denotará al anillo de los enteros p-ádicos.

Sea Γ un $\mathbb{Z}_p$-orden en una B-álgebra semisimple y de dimensión finita sobre el campo de los números p-ádicos $\mathbb{Q}_p$. Sea V un B módulo izquierdo y $A = End_B V$. Partiendo de la definición dada por Solomon en [**19**] para la función zeta de Γ, Bushnell y Reiner en [**10**, proposición 1] mediante la transición a ideles, obtienen una fórmula que relaciona a la función zeta de Γ con la suma de las funciones $Z(M; s)$, en donde la suma corre sobre M en los representantes de las clases de isomorfismo de los Γ-látices plenos en V y $Z(M; s)$ es una integral definida en las unidades de A. Posteriormente en [**10**, 5.1] definen las funciones $Z(\Phi; s)$ y $Z(\widehat{\Phi}; s)$ para Φ una función de Schwartz-Bruhat en B y $\widehat{\Phi}$ su transformada de Fourier. Para dichas funciones, obtienen una ecuación funcional la cual en la Tesis de Tate [**20**] se encuentra para el caso en el que B es un campo. Dicho resultado lo aplican en [**10**, 5.3] para obtener una ecuación funcional para la función zeta en el anillo de grupo para un grupo finito.

Dichos conocimientos motivan el estudio y la búsqueda de ecuaciones funcionales para las funciones ζ, Z y L en el anillo de Burnside de grupos finitos.

Capítulo 1

Preliminares.

Observación. A lo largo de este trabajo sólo consideraremos a G como un grupo finito.

En la sección 1.1 definiremos el Anillo de Burnside de un grupo finito G y veremos algunas de sus propiedades.

En la sección 1.2 definiremos la función zeta de un orden Λ y veremos algunas de sus propiedades. En 1.2.1 mencionaremos el teorema en el cual se relaciona la función zeta de un orden con la de su orden maximal.

En la sección 1.3 estudiaremos los ideales de un producto fibrado.

En la sección 1.4 mencionaremos la ecuación funcional que satisfacen las funciones de Zchwartz-Bruhat en el teorema 1.4.1.

1.1. El anillo de Burnside.

1.1.1. Observación. Un conjunto R es un semianillo, si para que sea un anillo sólo le falta que cada uno de sus elementos tenga inverso aditivo en R.

Para este trabajo consideraremos a G como un grupo finito. Sean X un G-conjunto finito y $\overline{X}$ su clase de isomorfismo como G-conjunto.

Definimos

$$B^{+}(G) := \left\{ \overline{X} \mid X \text{ un } G \text{ conjunto finito} \right\}.$$

Tenemos que $B^{+}(G)$ es un semianillo conmutativo con unidad, con las operaciones binarias de unión ajena y el producto cartesiano, las cuales denotaremos respectivamente por:

$$\overline{X} + \overline{Y} := \overline{X \uplus Y},$$

$$\overline{X} \cdot \overline{Y} := \overline{X \times Y}.$$

Además tenemos que $0 := \overline{\emptyset}$ y $1 := \overline{G/G}$.

1.1.2. Observación. Sean $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z} \in B^{+}(G)$, tenemos que si

$$\overline{X} + \overline{Z} = \overline{Y} + \overline{Z},$$

entonces $\overline{X} = \overline{Y}$.

Por otro lado, tenemos que la siguiente es una relación de equivalencia en

$$B^{+}(G) \times B^{+}(G) :$$

$$(\overline{X}_1, \overline{Y}_1) \sim (\overline{X}_2, \overline{Y}_2) \Longleftrightarrow \overline{X}_1 + \overline{Y}_2 = \overline{X}_2 + \overline{Y}_1,$$

para $(\overline{X}_1, \overline{Y}_1), (\overline{X}_2, \overline{Y}_2)$ dos elementos de $B^{+}(G) \times B^{+}(G)$.

1.1.3. Definición. Definimos el anillo de Burnside $B(G)$ de un grupo G como

$$B(G) := [(B^{+}(G) \times B^{+}(G))\diagup \sim],$$

el cual recibe el nombre de anillo de Grothendieck de $B^{+}(G)$.

Recordemos que el anillo de Grothendieck del conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ es el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$.

Observemos que como grupo abeliano, $B(G)$ es libre como $\mathbb{Z}$-módulo generado por los elementos de la forma $G\diagup H$, en donde H pertenece al conjunto de clases de conjugación de subgrupos de G, conjunto que denotaremos por $\mathcal{C}(G)$. Tenemos que:

$$B(G) = \bigoplus_{H \in \mathcal{C}(G)} \mathbb{Z}(G\diagup H).$$

Sean H y K subgrupos de G y sea ${}_H\mathcal{R}_K$ el conjunto de representantes de la partición inducida en G por las clases laterales dobles de la forma HgK. Sea K un subgrupo normal en G, entonces:

$$(G\diagup H) \cdot (G\diagup K) = \sum_{g \in {}_H\mathcal{R}_K} G\diagup (H \cap^{g} K).$$

Para más información sobre el Anillo de Burnside, ver [**2, 11, 12**].

Sea H un subgrupo de G y sea X un G-conjunto. Denotaremos al conjunto de puntos fijos de X bajo la acción de H mediante:

$$X^{H} = \{x \in X \mid h \cdot x = x, \; \forall\, h \in H\}.$$

1.1.4. Definición. Definimos la marca de H en X como el número de elementos de X^H y lo denotaremos por:

$$\varphi_H(X) := \mid X^H \mid .$$

Algunas de las propiedades que satisface φ_H, son las siguientes:

i).- $\varphi_H(X \uplus Y) = \varphi_H(X) + \varphi_H(Y)$ para X y Y dos G-conjuntos.

ii).- $\varphi_H(X \times Y) = \varphi_H(X)\varphi_H(Y)$ para X y Y dos G-conjuntos.

iii).- $\varphi_H(G/H) = \mid W(H) \mid$ el orden del grupo de Weyl de H, en donde

$$W(H) = N_G(H)/H,$$

para $N_G(H)$ el normalizador de H en G.

iv).- Sean H y K subgrupos de G en la misma clase de conjugación en $\mathcal{C}(G)$, entonces

$$\varphi_H(X) = \varphi_K(X),$$

para todo G-conjunto X.

v).- $\varphi_K(G/H) = 0 \Leftrightarrow K$ no es subconjugado de H en $\mathcal{C}(G)$.

vi).-$\varphi_K(G/H) = \mid W(H) \mid\mid \{E \leq G : \ E =_G H \text{ y } K \subseteq E\} \mid .$

Para más información sobre marcas, ver [**14**].

1.1.5. Definición. Sea X un G conjunto. Definimos

$$\widetilde{B}(G) := \prod_{H \in \mathcal{C}(G)} \mathbb{Z}.$$

Tenemos que la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & B^+(G) & \to & \widetilde{B}(G) \\ & \overline{X} & \to & (\varphi_H(X))_{H \in \mathcal{C}(G)}, \end{array}$$

es un morfismo de semianillos, el cual se extiende de manera única a un morfismo inyectivo de anillos

$$\varphi : B(G) \to \widetilde{B}(G).$$

1.1.6. Observación. Sea R un dominio entero. R es un Dominio de Ideales Principales (DIP) si todos sus ideales I son de la forma

$$I = \langle a \rangle\,,$$

para algún $a \in R$.

1.1.7. Definición. Sea R un DIP. Λ es un orden sobre R si:
i) Λ es una R-álgebra tal que $R \hookrightarrow \Lambda$.
ii) Λ es libre y f. g. como R-módulo.

1.1.8. Observación. Sea Λ un R-orden y K el campo de cocientes de R, tenemos que

$$\Lambda_k := K \bigotimes_R \Lambda,$$

es un álgebra de dimensión finita sobre K.

1.1.9. Definición. Λ es un R-orden máximal, si dado otro R-orden Λ' tal que $\Lambda \subseteq \Lambda' \subseteq \Lambda_k$, entonces $\Lambda = \Lambda'$.

1.1.10. Observación. Dado Λ un R-orden, existe Λ' un R-orden máximal tal que $\Lambda \subseteq \Lambda' \subseteq \Lambda_k$.

Notación. Sea $p \in Z$ un primo racional. Sea $\mathbb{Z}_p$ el anillo de los enteros p-ádicos.

Definimos los siguientes productos tensoriales

$$B_p(G) = \mathbb{Z}_p \bigotimes_{\mathbb{Z}} B(G) \cong \bigoplus_{H \in \mathcal{C}(G)} \mathbb{Z}_p(G/H),$$

$$\widetilde{B}_p(G) = \mathbb{Z}_p \bigotimes_{\mathbb{Z}} \widetilde{B}(G) \cong \prod_{H \in \mathcal{C}(G)} \mathbb{Z}_p,$$

en donde tenemos que $B_p(G)$ es un $\mathbb{Z}_p$-orden, para el cual $\widetilde{B}_p(G)$ es su orden maximal.

Para más información sobre ordenes, ver [**13, 14, 17**].

1.2. La función zeta ζ.

Definimos la función zeta del orden Λ, como sigue

$$\zeta_\Lambda(s) := \sum_{\substack{I \leq \Lambda, \text{ ideal} \\ (\Lambda : I) < \infty}} \mid \Lambda / I \mid^{-s},$$

la cual converge uniformemente en subconjuntos compactos del conjunto

$$\{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) > 1\},$$

para los casos de $B(G)$, $\widetilde{B}(G)$, $B_p(G)$ y $\widetilde{B}_p(G)$. Este resultado se puede ver en [**19**].

Algunas de las propiedades de la función zeta son:

i).- Si $\Lambda = \prod_{i=1}^{n} \Lambda_i$, tenemos que:

$$\zeta_\Lambda(s) = \prod_{i=1}^{n} \zeta_{\Lambda_i}(s).$$

ii).- Sea $\Lambda_p := \mathbb{Z}_p \bigotimes_{\mathbb{Z}} \Lambda$ entonces, tenemos el producto de Euler:

$$\zeta_\Lambda(s) = \prod_{p-\text{primo}} \zeta_{\Lambda_p}(s).$$

Este resultado se puede ver en [**19**, lema 6].

1.2.1. Teorema. Sea G un grupo finito y sea $B(G)$ su anillo de Burnside. Si p es un entero primo, tenemos que

$$\zeta_{B_q(G)}(s) = f_G(q^{-s})\zeta_{\widetilde{B}_q(G)}(s),$$

en donde $f_G(q^{-s})$ es un polinomio en $\mathbb{Z}[q^{-s}]$.

Este resultado se puede ver en [**10**, teorema 1].

1.2.2. Observación. Nótese que $B_q(G) \subseteq \widetilde{B}_q(G)$, por lo que si q no divide a $|G|$, tenemos que $|G|\, x \in B_q(G)$ para todo $x \in \widetilde{B}_q(G)$, de donde obtenemos que $x \in B_q(G)$ ya que $|G|$ es una unidad en $B_q(G)$, concluyendo que

$$B_q(G) = \widetilde{B}_q(G),$$

y por lo tanto tenemos que $f_G(q^{-s}) = 1$ siempre que q no divide a $|G|$.

Notación. Sea B_p una $\mathbb{Q}_p$-álgebra en el campo de los números p-ádicos.

Sea Γ_p un $\mathbb{Z}_p$-orden y V_p un B_p-módulo. Sean M_p, N_p dos Γ_p-látices plenos en V_p. Tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Q}_p & - & B_p & - & V_p \\ | & & | & & | \\ \mathbb{Z}_p & - & \Gamma_p & - & M_p, N_p. \end{array}$$

Definimos

$$Z_{\Gamma_p}(M_p; s) = \sum_{\substack{N_p \subseteq \Gamma_p \\ N_p \cong M_p}} (\Gamma_p : N_p)^{-s},$$

por lo que podemos expresar

$$\zeta_{\Gamma_p}(s) = \sum_{M_p} Z_{\Gamma_p}(M_p; s),$$

en donde la suma es finita y corre sobre los representantes de las clases de isomorfismo de los Γ_p-látices plenos en V_p.

Sean $A_p = End_{B_p} V_p$ y $\Lambda_p = End_{\Gamma_p} M_p$ de donde $A_p^* = Aut_{B_p} V_p$ y $\Lambda_p^* = Aut_{\Gamma_p} M_p$.

Definimos al conductor de M_p en N_p como

$$\{M_p : N_p\} = \{x \in A_p : M_p x \subseteq N_p\},$$

el cual resulta ser un $\mathbb{Z}_p$-látiz pleno en A_p.

Sean X, Y dos $\mathbb{Z}_p$-látices plenos en V_p, definimos

$$(X : Y) = \frac{(X : X \bigcap Y)}{(Y : X \bigcap Y)}.$$

Sea $x \in A_p^*$ y sea N_p un $\mathbb{Z}_p$-látiz pleno arbitrario en V_p. Definimos la siguiente norma

$$\|x\|_{V_p} = (N_p x : N_p),$$

la cual no depende de N_p y es multiplicativa. Además se puede ver que $\|x\|_{V_p} = 1$ siempre que x pertenezca a las unidades de algún $\mathbb{Z}_p$-orden en A_p.

Observemos que A_p adquiere una topología vista como $\mathbb{Q}_p$-espacio vectorial de dimensión finita, con la cual se satisface que:

1) Cualquier $\mathbb{Z}_p$-látiz en A_p es vecindad abierta y compacta del 0.
2) A_p^* es abierto compacto y localmente compacto con la topología de subconjunto.
3) Γ_p^* es abierto compacto para cualquier $\mathbb{Z}_p$-orden Γ_p.

1.2.3. Nota. Recordemos que dado un grupo localmente compacto, se puede probar que existe una única medida, salvo constantes, que es invariante bajo traslaciones del grupo, ver [**15**]

Sea d^*x una medida de Haar de A_p^*, tenemos que:

$$Z_{\Gamma_p}(M_p; s) = \mu^*\left(\Lambda_p^*\right)^{-1}(\Gamma_p : M_p)^{-s} \int\limits_{A_p^*} \Phi_{\{M_p:\Gamma_p\}}(x)\, \|x\|_{V_p}^s \, d^*x.$$

Los detalles de este resultado se pueden encontrar en [**10**, 2.1].
Para más información sobre la función zeta, ver [**3, 7, 9, 10, 16**].

1.3. El producto fibrado.

El siguiente es un diagrama de producto fibrado de anillos:

$$\begin{array}{ccccc} & & f_2 & & \\ & A & \longrightarrow & A_2 & \\ f_1 & \downarrow & & \downarrow & g_2 \\ & A_1 & \longrightarrow & \overline{A} & \\ & & g_1 & & \end{array}$$

en el cual todos las aplicaciones son suprayectivas y por definición:

$$A = \left\{ (a_1, a_2) : \ a_i \in A_i \text{ para } \ i = 1, 2 \ \text{ y } \ g_1 \left(a_1 \right) = g_2 \left(a_2 \right) \right\}.$$

Sea $I \leq A$ un ideal izquierdos e $I_i \leq A_i$ ideales izquierdos tales que

$$I_i = f_i \left(I \right),$$

para $i = 1, 2$.

1.3.1. Observación. Con la notación anterior, sea A_2 un DIP.

Por ser A_2 de ideales principales, tenemos que existe un elemento $\beta \in A_2$, tal que

$$I_2 = A_2 \beta.$$

Además, del producto fibrado tenemos que existe un elemento $\alpha \in I_1$ tal que $(\alpha, \beta) \in I$.

Sea $J = \left\{ c \in A_1 : \ (c, 0) \in I \right\}$, el cual es un ideal de A_1. Tenemos que los ideales de A son de la forma

$$I = A \left(\alpha, \beta \right) + \left(J, 0 \right),$$

en donde se satisface:

1. $f_2 \left(I \right) = A_2 \beta$,
2. $g_1 \left(J \right) = 0$,
3. $g_1 \left(\alpha \right) = g_2 \left(\beta \right)$.

Los detalles de este resultado se pueden encontrar en [**18**].

1.4. Ecuación funcional para $Z(\Phi;s)$.

Sea $\mathbb{Q}_p$ el campo de los números p-ádicos, con la topología p-ádica.

Sea W un espacio vectorial de dimensión finita sobre el campo $\mathbb{Q}_p$.

Una aplicación

$$\Phi : W \to \mathbb{C},$$

es una función de Schwartz-Bruhat si es localmente constante y es de soporte compacto en E, en donde

$$\text{soporte}(\Phi) = \{w \in W : \Phi(w) \neq 0\}.$$

Las funciones de Schwartz-Bruhat están generadas por las funciones características en

$$\left\{\Phi_{\left\{w+p^f X_0\right\}} : w \in W,\ 0 \leqq f \in \mathbb{Z},\ X_0 \text{ un } \mathbb{Z}_p\text{-látiz pleno}\right\}.$$

Sea B una $\mathbb{Q}_p$-álgebra simple de dimensión finita. Sea χ un carácter no trivial y continuo del grupo aditivo F, para F un subcampo del centro de B que contiene a $\mathbb{Q}_p$. Sea t la traza de $B \to F$ y sea Φ una función de Schwartz-Bruhat en B. Definimos $\widehat{\Phi}$ su transformada de Fourier por

$$\widehat{\Phi}(y) = \int_B \Phi(x)\chi(\lambda t(xy))dx,$$

la cual resulta ser otra función de Schwartz-Bruhat en B, en donde λ esta en las unidades de F y dx es una medida de Haar en B.

Definimos también la función zeta de Φ por

$$Z(\Phi;s) = \int_{B^*} \Phi(x)\left\|x\right\|_B^s d^*x,$$

para B^* las unidades de B y d^*x una medida de Haar en B^*.

1.4.1. Teorema. Sean Φ y Ψ funciones de Schwartz-Bruhat en B una $\mathbb{Q}_p$-álgebra simple de dimensión finita. Tenemos que se satisface la siguiente ecuación funcional:

$$\frac{Z(\Phi; s)}{Z(\widehat{\Phi}; 1-s)} = \frac{Z(\Psi; s)}{Z(\widehat{\Psi}; 1-s)}.$$

Este teorema se encuentra en la Tesis de Tate [**20**] para el caso en el que B es un campo. Este resultado se puede extender a Álgebras Semisimples y los detalles se pueden encontrar en [**10**, 5.1,5.2]. Para más información sobre la ecuación funcional para la función zeta, ver [**4, 8**].

Capítulo 2

Algunas Funciones ζ para $B(G)$.

En este capítulo, desarrollaremos los siguientes puntos, para los casos local y global:

En la sección 2.1 calcularemos explícitamente la función zeta del anillo de Burnside para grupos cíclicos de orden un primo racional p.

En la sección 2.2 calcularemos explícitamente la función zeta del anillo de Burnside para grupos cíclicos de orden p^2.

En la sección 2.3 y en base a los dos secciones anteriores, daremos un método recursivo para calcular la función zeta del anillo de Burnside para grupos cíclicos de orden p^n.

En la sección 2.4 estudiaremos la función zeta del anillo de Burnside de $G = P \times Q$, en donde P es el p-subgrupo de Sylow de G y Q es un subgrupo normal de G de orden primo relativo a p.

2.1. La función $\zeta_{B(C_p)}(s)$.

Sea $\Gamma_1 = B_p(C_p)$ el anillo de Burnside del grupo cíclico de orden p.

Las clases de conjugación de C_p son C_p y pC_p, de donde una base para Γ_1 es $\{1 = C_p/C_p,\ a = C_p/pC_p\}$, por lo que

$$\Gamma_1 = \mathbb{Z}_p \bigoplus \mathbb{Z}_p a,$$

para el cual se tiene que $a^2 = pa$. Además, su orden maximal es $\widetilde{\Gamma}_1 = \mathbb{Z}_p^2$.

También sabemos que

$$\varphi_H(C_p/K) = \begin{cases} |C_p/K| & \text{si H} \subseteq \text{K} \\ 0 & \text{si H} \nsubseteq \text{K} \end{cases}$$

por lo que para las clases de conjugación dadas en el siguiente orden

$$\{H_1 = C_p,\ H_2 = pC_p\},$$

tenemos que φ induce la siguiente inclusión

$$\begin{array}{ccc} & \varphi & \\ \Gamma_1 & \hookrightarrow & \widetilde{\Gamma}_1 \\ & & \\ 1 & \to & (1,1) \\ a & \to & (0,p) \end{array}$$

por lo que dentro de $\widetilde{\Gamma}_1$ podemos ver a

$$\Gamma_1 = \left\{(u, u+pv) \in \mathbb{Z}_p^2 : u, v \in \mathbb{Z}_p\right\},$$

o bien, reescribiendo obtenemos que

$$\Gamma_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{Z}_p^2 \colon\ (x-y) \in p\mathbb{Z}_p\right\} \subseteq \widetilde{\Gamma}_1,$$

al cual le podemos dar la siguiente estructura de producto fibrado:

$$\begin{array}{ccccccc} (x,y) & - & - & - & - & \to & y \\ | & & & f_2 & & & | \\ | & & \Gamma_1 & \to & \mathbb{Z}_p & & | \\ | & f_1 & \downarrow & & \downarrow & g_2 & | \\ | & & \mathbb{Z}_p & \to & \mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p & & | \\ \downarrow & & & g_1 & & & \downarrow \\ x & - & - & - & - & \to & \overline{x} = \overline{y}. \end{array}$$

Observemos que $\mathbb{Z}_p$ es un Dominio de Valuación Discreta, por lo que sus ideales son de la forma $p^t\mathbb{Z}_p$, para todo entero $t \geq 0$. De acuerdo con la estructura del producto fibrado y la observación 1.3.1, tenemos que los ideales de índice finito de Γ_1 son de la forma

$$I = \left(p^k, p^l\right)\Gamma_1 + \left(p^m\mathbb{Z}_p, 0\right),$$

en los cuales

$$1.\ g_1\left(p^m\mathbb{Z}_p\right) = 0,$$

$$2.\ g_1\left(p^k\right) = g_2\left(p^l\right).$$

Puesto que $\Gamma_1 = \left\{(x, x+py) \in \mathbb{Z}_p^2 \colon\ x, y \in \mathbb{Z}_p\right\}$, obtenemos que

$$I = \left\{\left(\left[p^k x + p^m z\right], \left[p^l\left(x+py\right)\right]\right) \in \mathbb{Z}_p^2 :\ x, y, z \in \mathbb{Z}_p\right\},$$

para los casos

$$1 \leq m \begin{cases} k = l = 0 \\ \text{ó} \\ 1 \leq k, l. \end{cases}$$

Reescribiendo, se puede ver que:

$$I = \begin{cases} I_1 = p^m\mathbb{Z}_p \bigoplus p^l\mathbb{Z}_p & \text{para } 1 \leq m, l \\ I_2 = \left\{\left(p^k u, p^l v\right) \in \mathbb{Z}_p^2 : (v-u) \in p\mathbb{Z}_p\right\} & \text{para } \begin{cases} k = l = 0 \\ \text{ó} \\ 1 \leq k, l \end{cases} \end{cases}$$

Tenemos que los ideales de la forma I_1 resultan del caso $m \leq k$ y estos son isomorfos a $\widetilde{\Gamma}_1$. Por otra parte, los ideales de la forma I_2 se obtienen del caso $k < m$ y estos son isomorfos a Γ_1. De lo anterior, concluimos que las únicas clases de isomorfismo de los ideales fraccionales de índice finito de Γ_1 son Γ_1 y $\widetilde{\Gamma}_1$, por lo cual:

$$\zeta_{\Gamma_1}(s) = Z_{\Gamma_1}\left(\Gamma_1; s\right) + Z_{\Gamma_1}\left(\widetilde{\Gamma}_1; s\right).$$

2.1.1. Observación. En lo siguiente consideraremos a d^*x como una medida de Haar en $\left(\mathbb{Q}_p^*\right)^2$ tal que $d^*x = \left(d^*\alpha\right)^2$, en donde $d^*\alpha$ es una medida de Haar en $\mathbb{Q}_p^*$, la cual es tal que $\int_{\mathbb{Z}_p^*} d^*\alpha = 1$, por lo que

$$\mu^*\left(\widetilde{\Gamma}_1^*\right) = 1.$$

Además tenemos que Γ_1 es local, teniendo que $rad\Gamma_1 = \left(p\mathbb{Z}_p\right)^2$ de donde obtenemos que:

$$\Gamma_1 = \Gamma_1^* \biguplus \left(p\mathbb{Z}_p\right)^2.$$

Recordemos que

$$Z_{\Gamma_1}(M;s) = \mu^*\left(\Lambda_p^*\right)^{-1}\left(\Gamma_1 : M\right)^{-s} \int\limits_{\left(\mathbb{Q}_p^*\right)^2} \Phi_{\{M:\Gamma_1\}}(x)\, \|x\|_{\mathbb{Q}_p^2}^s\, d^*x,$$

en donde $\Lambda_p^* = Aut_{\Gamma_1}M$, por lo que:

1). Para Γ_1 tenemos lo siguiente:

a) Sabemos que

$$End_{\Gamma_1}\Gamma_1 = \left\{(a,b) \in \mathbb{Q}_p^2 :\ \Gamma_1(a,b) \subseteq \Gamma_1\right\},$$

y puesto que Γ_1 es un orden, tenemos

$$End_{\Gamma_1}\Gamma_1 = \Gamma_1,$$

y por lo tanto:

$$Aut_{\Gamma_1}\Gamma_1 = \Gamma_1^*.$$

Finalmente obtenemos:

$$\mu^*\left(\Gamma_1^*\right)^{-1} = \left(\widetilde{\Gamma}_1^* : \Gamma_1^*\right) = p - 1.$$

b) Análogamente al inciso anterior y puesto que

$$\{\Gamma_1 : \Gamma_1\} = \left\{(a,b) \in \mathbb{Q}_p^2 :\ \Gamma_1(a,b) \subseteq \Gamma_1\right\},$$

obtenemos:

$$\{\Gamma_1 : \Gamma_1\} = \Gamma_1.$$

De los dos incisos anteriores obtenemos:

$$\boldsymbol{Z_{\Gamma_1}(\Gamma_1; s)} = (p-1) \int\limits_{\left(\mathbb{Q}_p^*\right)^2 \bigcap \left[\Gamma_1^* \biguplus \left(p\mathbb{Z}_p\right)^2\right]} \|x\|_{\mathbb{Q}_p^2}^s\, d^*x =$$

$$1+(p-1)\left(\int_{\biguplus_{t=1}^{\infty} p^t\mathbb{Z}_p^*} \|\alpha\|_{\mathbb{Q}_p}^s \, d^*\alpha\right)^2 = 1+(p-1)\left(\sum_{t=1}^{\infty}\left(p^{-s}\right)^t\right)^2 =$$

$$\boldsymbol{\left(1-2p^{-s}+p^{1-2s}\right)\zeta_{\widetilde{\Gamma}_1}(s)},$$

en donde

$$\boldsymbol{\zeta_{\widetilde{\Gamma}_1}(s) = 1/\left(1-p^{-s}\right)^2}.$$

2). Para $\widetilde{\Gamma}_1$ tenemos lo siguiente:

a) Sabemos que $End_{\Gamma_1}\widetilde{\Gamma}_1 = \left\{(a,b)\in\mathbb{Q}_p^2 : \widetilde{\Gamma}_1(a,b)\subseteq\widetilde{\Gamma}_1\right\}$, puesto que $\widetilde{\Gamma}_1$ es un orden, tenemos

$$End_{\Gamma_1}\widetilde{\Gamma}_1 = \widetilde{\Gamma}_1,$$

y por lo tanto:

$$Aut_{\Gamma_1}\widetilde{\Gamma}_1 = \widetilde{\Gamma}_1^*.$$

Finalmente obtenemos:

$$\mu^*\left(\widetilde{\Gamma}_1^*\right)^{-1} = 1.$$

b) Tenemos que

$$\left\{\widetilde{\Gamma}_1 : \Gamma_1\right\} = \left\{(a,b)\in\mathbb{Q}_p^2 : \widetilde{\Gamma}_1(a,b)\subseteq\Gamma_1\right\}.$$

Ahora, consideremos un elemento $(a,b)\in\mathbb{Q}_p^2$, tal que

$$(a,b)\in\left\{\widetilde{\Gamma}_1 : \Gamma_1\right\},$$

el cual aplicándolo a la base canónica de $\widetilde{\Gamma}_1$, implica:

$$(1,0)(a,b) = (a,0)\in\Gamma_1$$

$$(0,1)(a,b) = (0,b)\in\Gamma_1.$$

De las relaciones anteriores obtenemos respectivamente que $a\in p\mathbb{Z}_p$ y $b\in p\mathbb{Z}_p$ de donde es fácil ver:

$$\left\{\widetilde{\Gamma}_1 : \Gamma_1\right\} = \left(p\mathbb{Z}_p\right)^2.$$

c) Sabemos que

$$\left(\widetilde{\Gamma}_1 : \Gamma_1\right) = \left|N_{C_p}\left(C_p\right)/C_p\right|\left|N_{C_p}\left(pC_p\right)/pC_p\right| = p.$$

De los tres incisos anteriores obtenemos:

$$\boldsymbol{Z_{\Gamma_1}\left(\widetilde{\Gamma}_1; s\right)} = p^s \int\limits_{\left(\mathbb{Q}_p^*\right)^2 \bigcap (p\mathbb{Z}_p)^2} \|x\|_{\mathbb{Q}_p^2}^s \, d^*x =$$

$$p^s \left(\int\limits_{\biguplus_{t=1}^{\infty} p^t \mathbb{Z}_p^*} \|\alpha\|_{\mathbb{Q}_p}^s \, d^*\alpha \right)^2 = p^s \left(\sum_{t=1}^{\infty} \left(p^{-s}\right)^t \right)^2 =$$

$$\boldsymbol{p^{-s}\zeta_{\widetilde{\Gamma}_1}(s)}.$$

Finalmente:

$$\boldsymbol{\zeta_{\Gamma_1}(s) = \left(1 - p^{-s} + p^{1-2s}\right)\zeta_{\widetilde{\Gamma}_1}(s)},$$

Este resultado se obtuvo por medio del cálculo directo de todos los ideales de índice finito de Γ_1 en [**21**, sección 2].

Además podemos observar que se cumplen las siguientes relaciones:

1. $\dfrac{Z_{\Gamma_1}(M; s)}{Z_{\Gamma_1}(M; 1-s)} = (\widetilde{\Gamma}_1 : \Gamma_1)^{1-2s} \dfrac{\zeta_{\widetilde{\Gamma}_1}(s)}{\zeta_{\widetilde{\Gamma}_1}(1-s)}$ para $M = \Gamma_1, \widetilde{\Gamma}_1$.

2. $\dfrac{\zeta_{\Gamma_1}(s)}{\zeta_{\Gamma_1}(1-s)} = (\widetilde{\Gamma}_1 : \Gamma_1)^{1-2s} \dfrac{\zeta_{\widetilde{\Gamma}_1}(s)}{\zeta_{\widetilde{\Gamma}_1}(1-s)}.$

Finalmente del producto de Euler obtenemos:

$$\zeta_{B(C_p)}(s) = \prod_{q\text{-primo}} \zeta_{B_q(C_p)}(s) =$$

$$\left(1 - p^{-s} + p^{1-2s}\right)\left[\zeta_{\mathbb{Z}}(s)\right]^2,$$

en donde

$$\zeta_{\mathbb{Z}}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{q\text{-primo}} \left(\frac{1}{1-q^{-s}}\right) = \zeta_{B(\{e\})}(s)$$

es la función zeta usual de Riemann.

2.2. La función $\zeta_{B\left(C_{p^2}\right)}(s)$.

Sea $\Gamma_2 = B_p\left(C_{p^2}\right)$ el anillo de Burnside del grupo cíclico de orden p^2.

Las clases de conjugación de C_{p^2} son C_{p^2}, pC_{p^2} y $p^2C_{p^2}$, de donde una base para Γ_2 es

$$\left\{1 = C_{p^2}/C_{p^2},\ a = C_{p^2}/pC_{p^2},\ b = C_{p^2}/p^2C_{p^2}\right\},$$

por lo que

$$\Gamma_2 = \mathbb{Z}_p \bigoplus \mathbb{Z}_p a \bigoplus \mathbb{Z}_p b,$$

para el cual se tiene que $a^2 = pa,\ ab = pb$ y $b^2 = p^2 b$. Además, su orden maximal es $\widetilde{\Gamma}_2 = \mathbb{Z}_p^3$.

También sabemos que

$$\varphi_H\left(C_{p^2}/K\right) = \begin{cases} \left|C_{p^2}/K\right| & \text{si H} \subseteq \text{K} \\ 0 & \text{si H} \nsubseteq \text{K} \end{cases}$$

por lo que para las clases de conjugación dadas en el siguiente orden

$$\left\{C_{p^2},\ pC_{p^2},\ p^2C_{p^2}\right\},$$

tenemos que φ induce la siguiente inclusión

$$\begin{array}{ccc} & \varphi & \\ \Gamma_2 & \hookrightarrow & \widetilde{\Gamma}_2 \\ & & \\ 1 & \to & (1,1,1) \\ a & \to & (0,p,p) \\ b & \to & (0,0,p^2) \end{array}$$

por lo que dentro de $\widetilde{\Gamma}_2$ podemos ver a

$$\Gamma_2 = \left\{\left(u, u+pv, u+pv+p^2w\right) \in \mathbb{Z}_p^3 : u,v,w \in \mathbb{Z}_p\right\},$$

o bien, reescribiendo obtenemos

$$\Gamma_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{Z}_p^3\colon\ (y-x) \in p\mathbb{Z}_p, (z-y) \in p^2\mathbb{Z}_p\right\} \subseteq \widetilde{\Gamma}_2$$

al cual le podemos dar la siguiente estructura de producto fibrado:

$$\begin{array}{ccccccc}
(x,y,z) & - & - & - & - & \rightarrow & z \\
| & & & f_2 & & & | \\
| & & \Gamma_2 & \rightarrow & \mathbb{Z}_p & & | \\
| & f_1 & \downarrow & & \downarrow & g_2 & | \\
| & & \Gamma_1 & \rightarrow & \mathbb{Z}_p/p^2\mathbb{Z}_p & & | \\
\downarrow & & & g_1 & & & \downarrow \\
(x,y) & - & - & - & - & \rightarrow & \overline{y}=\overline{z}.
\end{array}$$

Observemos que $\mathbb{Z}_p$ es un Dominio de Valuación Discreta, por lo que sus ideales son de la forma $p^t\mathbb{Z}_p$, para todo entero $t \geq 0$. De acuerdo con la estructura del producto fibrado y la observación 1.3.1, tenemos que los ideales de índice finito de Γ_2 son de la forma

$$I = \left(\alpha, p^t\right)\Gamma_2 + (J,0)\,,$$

para α en algún ideal de Γ_1 y J un ideal de Γ_1, tales que

$$\begin{array}{c} 1.\ g_1(J) = 0 \\ 2.\ g_1(\alpha) = g_2\left(p^t\right). \end{array}$$

Recordemos que los ideales de Γ_1 son de la forma

$$J = \begin{cases} p^k\mathbb{Z}_p \bigoplus p^l\mathbb{Z}_p & \text{para } 1 \leq k,l \\ \left\{\left(p^k u, p^l v\right) \in \mathbb{Z}_p^2 : (v-u) \in p\mathbb{Z}_p\right\} & \text{para } \begin{cases} k=l=0 \\ \text{ó} \\ 1 \leq k,l \end{cases} \end{cases}$$

por lo que si $\alpha = (p^m u_0, p^n)$ y considerando

$$\Gamma_2 = \left\{\left(x, x+py, x+py+p^2z\right) \in \mathbb{Z}_p^3 : x,y,z \in \mathbb{Z}_p\right\},$$

obtenemos:

$$I = \left\{\left(p^m u_0 x + p^k u,\ p^n(x+py) + p^l v,\ p^t(x+py+p^2z)\right) \in \mathbb{Z}_p^3 : x,y,z \in \mathbb{Z}_p, *\right\}$$

$$
*\left\{\begin{array}{l}
\text{i)}\left\{\begin{array}{l}
\text{a) } u,v\in\mathbb{Z}_p,\ 1\le k,\ 2\le l\\[2ex]
\text{b) } u,v\in\mathbb{Z}_p,\ \text{tales que } (v-u)\in p\mathbb{Z}_p,\ 1\le k,\ 2\le l
\end{array}\right.\\[4ex]
\text{ii)}\left\{\begin{array}{l}
\text{a) } (u_0-1)\in p\mathbb{Z}_p,\ n=m=t=0\\[2ex]
\text{b) } \mathrm{u_0\in\mathbb{Z}_p,\ n=t=1,\ 1\le m}\\[2ex]
\text{c) } \mathrm{(u_0-1)\in p\mathbb{Z}_p,\ n=t=1,\ 1\le m}\\[2ex]
\text{d) } u_0\in\mathbb{Z}_p,\ 2\le n,t,\ 1\le m\\[2ex]
\text{e) } (u_0-1)\in p\mathbb{Z}_p,\ 2\le n,t,\ 1\le m
\end{array}\right.
\end{array}\right.
$$

en donde la parte i) se obtiene a partir de que $g_1(J)=0$ y la parte ii) se obtiene de la relación $g_1(\alpha)=g_1(p^t)$.

A partir de lo anterior estudiaremos los siguientes diez casos, para poder determinar las clases de isomorfismo de ideales fraccionales de $B_p(C_{p^2})$:

Caso 1. Considerando el inciso a) de i) junto con el inciso a) de ii) obtenemos que:

$$I\cong\Gamma_2.$$

Caso 2. Considerando el inciso a) de i) junto con el inciso b) de ii) obtenemos que:

$$
I\cong\begin{cases}
\mathbb{Z}_p\bigoplus\Gamma_1 & \text{para } l=2\\[2ex]
\left\{(u,v,w)\in\mathbb{Z}_p^3:(w-v)\in p^2\mathbb{Z}_p\right\} & \text{para } 2<l
\end{cases}
$$

Caso 3. Considerando el inciso a) de i) junto con el inciso c) de ii) obtenemos que:

$$I \cong \begin{cases} \begin{cases} \left\{(u,v,w) \in \mathbb{Z}_p^3 : (v-u),(w-v) \in p\mathbb{Z}_p\right\} & \text{para } l=2;\ m<k \\ \mathbb{Z}_p \bigoplus \Gamma_1 & \text{para } l=2;\ k \leq m \end{cases} \\ \begin{cases} \Gamma_2 & \text{para } 2<l;\ m<k \\ \left\{(u,v,w) \in \mathbb{Z}_p^3 : (w-v) \in p^2\mathbb{Z}_p\right\} & \text{para } 2<l;\ k \leq m \end{cases} \end{cases}$$

Caso 4. Considerando el inciso a) de i) junto con el inciso d) de ii) obtenemos que:

$$I \cong \begin{cases} \widetilde{\Gamma}_2 & \text{para } l \leq n \\ \mathbb{Z}_p \bigoplus \Gamma_1 & \text{para } l=n+1 \\ \left\{(u,v,w) \in \mathbb{Z}_p^3 : (w-v) \in p^2\mathbb{Z}_p\right\} & \text{para } n+1<l \end{cases}$$

Caso 5. Considerando el inciso a) de i) junto con el inciso e) de ii) obtenemos que:

$$I \cong \begin{cases} \begin{cases} \widetilde{\Gamma}_2 & \text{para } k \leq m;\ l \leq n \\ \mathbb{Z}_p \bigoplus \Gamma_1 & \text{para } k \leq m;\ l=n+1 \\ \left\{(u,v,w) \in \mathbb{Z}_p^3 : (w-v) \in p^2\mathbb{Z}_p\right\} & \text{para } k \leq m;\ n+1<l \end{cases} \\ \begin{cases} \left\{(u,v,w) \in \mathbb{Z}_p^3 : (w-u) \in p\mathbb{Z}_p\right\} & \text{para } m<k;\ l \leq n \\ \left\{(u,v,w) \in \mathbb{Z}_p^3 : (v-u),(w-v) \in p\mathbb{Z}_p\right\} & \text{para } m<k;\ l=n+1 \\ \Gamma_2 & \text{para } m<k;\ n+1<l \end{cases} \end{cases}$$

Caso 6. Considerando el inciso b) de i) junto con el inciso a) de ii) obtenemos que:

$$I \cong \Gamma_2.$$

Caso 7. Considerando el inciso b) de i) junto con el inciso b) de ii) obtenemos que:

$$I \cong \begin{cases} \begin{cases} \mathbb{Z}_p \bigoplus \Gamma_1 & \text{para } l=2;\ m \leq k \\ \left\{(u,v,w) \in \mathbb{Z}_p^3 : pu+(w-v) \in p^2\mathbb{Z}_p\right\} & \text{para } l=2;\ k<m \end{cases} \\ \left\{(u,v,w) \in \mathbb{Z}_p^3 : (w-v) \in p^2\mathbb{Z}_p\right\} & \text{para } 2<l \end{cases}$$

Caso 8. Considerando el inciso b) de i) junto con el inciso c) de ii) obtenemos que:

$$I \cong \begin{cases} \begin{cases} \left\{(u,v,w) \in \mathbb{Z}_p^3 : (v-u),(w-v) \in p\mathbb{Z}_p\right\} & \text{para } l=2;\ m<k \\ \mathbb{Z}_p \bigoplus \Gamma_1 & \text{para } l=2;\ m=k \\ \left\{(u,v,w) \in \mathbb{Z}_p^3 : pu+(w-v) \in p^2\mathbb{Z}_p\right\} & \text{para } l=2;\ k<m \end{cases} \\ \begin{cases} \Gamma_2 & \text{para } 2<l;\ m<k \\ \left\{(u,v,w) \in \mathbb{Z}_p^3 : (w-v) \in p^2\mathbb{Z}_p\right\} & \text{para } 2<l;\ k\leq m \end{cases} \end{cases}$$

Caso 9. Considerando el inciso b) de i) junto con el inciso d) de ii) obtenemos que:

$$I \cong \begin{cases} \begin{cases} \Gamma_1 \bigoplus \mathbb{Z}_p & \text{para } k<m;\ l<n \\ \left\{(u,v,w) \in \mathbb{Z}_p^3 : u+w-v \in p\mathbb{Z}_p\right\} & \text{para } k<m;\ n=l \\ \left\{(u,v,w) \in \mathbb{Z}_p^3 : pu+(w-v) \in p^2\mathbb{Z}_p\right\} & \text{para } k<m;\ n+1=l \end{cases} \\ \begin{cases} \widetilde{\Gamma}_2 & \text{para } m\leq k;\ l\leq n \\ \mathbb{Z}_p \bigoplus \Gamma_1 & \text{para } m\leq k;\ n+1=l \end{cases} \\ \left\{(u,v,w) \in \mathbb{Z}_p^3 : (w-v) \in p^2\mathbb{Z}_p\right\} \quad \text{para } n+1<l \end{cases}$$

Caso 10. Considerando el inciso b) de i) junto con el inciso e) de ii) obtenemos que:

$$I \cong \begin{cases} \begin{cases} \left\{(u,v,w) \in \mathbb{Z}_p^3 : (w-u) \in p\mathbb{Z}_p\right\} & \text{para } m<k;\ l \leq n \\ \left\{(u,v,w) \in \mathbb{Z}_p^3 : (v-u),(w-v) \in p\mathbb{Z}_p\right\} & \text{para } m<k;\ n+1=l \\ \Gamma_2 & \text{para } m<k;\ n+1<l \end{cases} \\ \begin{cases} \left\{(u,v,w) \in \mathbb{Z}_p^3 : u-v+w \in p\mathbb{Z}_p\right\} & \text{para } m=k;\ l<n \\ \Gamma_1 \bigoplus \mathbb{Z}_p & \text{para } m=k;\ l=n \\ \mathbb{Z}_p \bigoplus \Gamma_1 & \text{para } m=k;\ n+1 \leq l \end{cases} \\ \begin{cases} \Gamma_1 \bigoplus \mathbb{Z}_p & \text{para } k<m;\ l<n \\ \left\{(u,v,w) \in \mathbb{Z}_p^3 : u-v+w \in p\mathbb{Z}_p\right\} & \text{para } k<m;\ l=n \\ \left\{(u,v,w) \in \mathbb{Z}_p^3 : pu-v+w \in p^2\mathbb{Z}_p\right\} & \text{para } k<m;\ n+1=l \\ \left\{(u,v,w) \in \mathbb{Z}_p^3 : (w-v) \in p^2\mathbb{Z}_p\right\} & \text{para } k<m;\ n+1<l \end{cases} \end{cases}$$

De los diez casos anteriores, podemos reescribir los elementos de I en la forma

$$I = \left\{\left(p^\alpha x, p^\beta y, p^\gamma z\right) \in \mathbb{Z}_p^3 : **\right)\right\}$$

en donde α, β y γ son las potencias más grandes de p que se pueden extraer de cada coordenada, a partir de lo cual podemos tomar

$$I \cong \left\{(x,y,z) \in \mathbb{Z}_p^3 : **\right\}$$

en donde $**$ son relaciones que deben de satisfacer $x, y, z \in \mathbb{Z}_p$.

De lo anterior obtenemos que las únicas clases de isomorfismo de ideales fraccionales de Γ_2 son:

$M_1 = \Gamma_2,$
$M_2 = \widetilde{\Gamma}_2,$
$M_3 = \mathbb{Z}_p \bigoplus \Gamma_1,$
$M_4 = \Gamma_1 \bigoplus \mathbb{Z}_p,$
$M_5 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{Z}_p^3\text{: } (z-x) \in p\mathbb{Z}_p\right\},$
$M_6 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{Z}_p^3\text{: } (y-x) \in p\mathbb{Z}_p, (z-y) \in p\mathbb{Z}_p\right\},$
$M_7 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{Z}_p^3\text{: } (z-y) \in p^2\mathbb{Z}_p\right\},$
$M_8 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{Z}_p^3\text{: } px-y+z \in p^2\mathbb{Z}_p\right\},$

$M_9 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{Z}_p^3 \colon x-y+z \in p\mathbb{Z}_p\right\}$, por lo cual obtenemos que

$$\zeta_{\Gamma_2}(s) = \sum_{i=1}^{9} Z_{\Gamma_2}(M_i;s).$$

2.2.1. Observación. En lo siguiente consideraremos a d^*x como una medida de Haar de $\left(\mathbb{Q}_p^*\right)^3$ tal que $d^*x = (d^*\alpha)^3$, en donde $d^*\alpha$ es una medida de Haar de $\mathbb{Q}_p^*$, la cual es tal que $\int_{\mathbb{Z}_p^*} d^*\alpha = 1$, de donde:

$$\mu^*\left(\widetilde{\Gamma}_2^*\right) = 1.$$

Además tenemos que Γ_2 es local, para el cual se tiene que $rad\Gamma_2 = p\mathbb{Z}_p \bigoplus p\Gamma_1$, obteniendo:

$$\Gamma_2 = \Gamma_2^* \biguplus \left(p\mathbb{Z}_p \bigoplus p\Gamma_1\right).$$

Recordemos que

$$Z_{\Gamma_2}(M;s) = \mu\left(\Lambda_p^*\right)^{-1}(\Gamma_2 : M)^{-s} \int\limits_{\left(\mathbb{Q}_p^*\right)^3} \Phi_{\{M:\Gamma_2\}}(x)\, \|x\|_{\mathbb{Q}_p^3}^s d^*x,$$

en donde $\Lambda_p^* = Aut_{\Gamma_2}M$. Además del ejemplo anterior tenemos

$$\int\limits_{\left(\mathbb{Q}_p^*\right)^2 \bigcap \Gamma_1} \|\beta\|_{\mathbb{Q}_p^2}^s d^*\beta = \frac{\left(1-2p^{-s}+p^{1-2s}\right)}{(p-1)\left(1-p^{-s}\right)^2},$$

por lo que:

1). Para Γ_2 tenemos lo siguiente:
a) Sabemos que

$$End_{\Gamma_2}\Gamma_2 = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{Q}_p^3 : \Gamma_2(a,b,c) \subseteq \Gamma_2\right\}.$$

Puesto que Γ_2 es un orden se puede ver que $End_{\Gamma_2}\Gamma_2 = \Gamma_2$ y entonces

$$Aut_{\Gamma_2}\Gamma_2 = \Gamma_2^*.$$

Finalmente obtenemos

$$\mu^*\left(\Gamma_2^*\right)^{-1} = \left(\widetilde{\Gamma}_2^* : \Gamma_2^*\right) = p(p-1)^2,$$

ya que tenemos el siguiente morfismo suprayectivo

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\Gamma}_2^* & \to & (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* \times \left(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}\right)^* \\ (a,b,c) & \to & \left(a^{-1}b, b^{-1}c\right) \end{array}$$

cuyo núcleo es precisamente Γ_2^*.

b) Análogamente al inciso anterior y puesto que

$$\{\Gamma_2 : \Gamma_2\} = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{Q}_p^3 : \Gamma_2(a,b,c) \subseteq \Gamma_2\right\}$$

obtenemos:

$$\{\Gamma_2 : \Gamma_2\} = \Gamma_2.$$

De los dos incisos anteriores tenemos:

$$\boldsymbol{Z_{\Gamma_2}(\Gamma_2; s)} = p(p-1)^2 \int\limits_{\left(\mathbb{Q}_p^*\right)^3 \bigcap [\Gamma_2^* \biguplus (p\mathbb{Z}_p \bigoplus p\Gamma_1)]} \|x\|_{\mathbb{Q}_p^3}^s d^*x =$$

$$1 + p(p-1)^2 \left(\int\limits_{\biguplus_{t=1}^{\infty} p^t \mathbb{Z}_p^*} \|\alpha\|_{\mathbb{Q}_p}^s d^*\alpha \right) \left(p^{-2s} \int\limits_{\left(\mathbb{Q}_p^*\right)^2 \bigcap \Gamma_1} \|\beta\|_{\mathbb{Q}_p^2}^s d^*\beta \right) =$$

$$1 + p(p-1)^2 \left(\sum_{t=1}^{\infty} \left(p^{-s}\right)^t \right) \left(\frac{p^{-2s}\left(1 - 2p^{-s} + p^{1-2s}\right)}{(p-1)\left(1-p^{-s}\right)^2} \right) =$$

$$\boldsymbol{\frac{\left[1 - 3p^{-s} + 3p^{-2s} + \left(-1 - p + p^2\right)p^{-3s} + \left(2p - 2p^2\right)p^{-4s} + (p-1)p^2p^{-5s}\right]}{\left(1-p^{-s}\right)^3}},$$

en donde $\zeta_{\widetilde{\Gamma}_2}(s) = 1/\left(1-p^{-s}\right)^3$

2). Para $\widetilde{\Gamma}_2$ tenemos lo siguiente:
a) Sabemos que $End_{\Gamma_2}\widetilde{\Gamma}_2 = \left\{(a,b,c)\in \mathbb{Q}_p^3 : \widetilde{\Gamma}_2(a,b,c) \subseteq \widetilde{\Gamma}_2\right\}$.

Puesto que $\widetilde{\Gamma}_2$ es un orden se puede ver que $End_{\Gamma_2}\widetilde{\Gamma}_2 = \widetilde{\Gamma}_2$ y por lo tanto

$$Aut_{\Gamma_2}\widetilde{\Gamma}_2 = \widetilde{\Gamma}_2^*.$$

Finalmente obtenemos:

$$\mu^*\left(\widetilde{\Gamma}_2^*\right)^{-1} = 1.$$

b) Tenemos que

$$\left\{\widetilde{\Gamma}_2 : \Gamma_2\right\} = \left\{(a,b,c)\in \mathbb{Q}_p^3 : \widetilde{\Gamma}_2(a,b,c) \subseteq \Gamma_2\right\}.$$

Sea $(a,b,c) \in \mathbb{Q}_p^3$, un elemento tal que

$$(a,b,c) \in \left\{\widetilde{\Gamma}_2 : \Gamma_2\right\},$$

el cual al aplicarlo a la base canónica de $\widetilde{\Gamma}_2$, obtenemos:

$$\begin{array}{c} (1,0,0)(a,b,c) = (a,0,0) \in \Gamma_2 \\ (0,1,0)(a,b,c) = (0,b,0) \in \Gamma_2 \\ (0,0,1)(a,b,c) = (0,0,c) \in \Gamma_2. \end{array}$$

De estas tres relaciones obtenemos respectivamente que $a \in p\mathbb{Z}_p$ y $b,c\in p^2\mathbb{Z}_p$, de donde es fácil ver que

$$\left\{\widetilde{\Gamma}_2 : \Gamma_2\right\} = \left(p,p^2,p^2\right)\widetilde{\Gamma}_2.$$

c) Sabemos que

$$\left(\widetilde{\Gamma}_2 : \Gamma_2\right) =$$

$$\left|N_{C_{p^2}}\left(C_{p^2}\right)/C_{p^2}\right|\left|N_{C_{p^2}}\left(pC_{p^2}\right)/pC_{p^2}\right|\left|N_{C_{p^2}}\left(p^2C_{p^2}\right)/p^2C_{p^2}\right| = p^3$$

De los tres incisos anteriores obtenemos:

$$\boldsymbol{Z_{\Gamma_2}\left(\widetilde{\Gamma}_2; s\right)} = p^{3s} \int\limits_{\left(\mathbb{Q}_p^*\right)^3 \bigcap (p,p^2,p^2)\widetilde{\Gamma}_2} \|x\|_{\mathbb{Q}_p^3}^s d^*x =$$

$$p^{-2s}\left(\int\limits_{\biguplus_{t=0}^{\infty}p^t\mathbb{Z}_p^*}\|\alpha\|_{\mathbb{Q}_p}^s d^*\alpha\right)^3 = p^{-2s}\left(\sum_{t=0}^{\infty}\left(p^{-s}\right)^t\right)^3 =$$

$$\boldsymbol{p^{-2s}\zeta_{\widetilde{\Gamma}_2}(s)}.$$

3). Para $M_3=\mathbb{Z}_p\bigoplus\Gamma_1$ tenemos lo siguiente:
a) Sabemos que

$$End_{\Gamma_2}M_3=\left\{(a,b,c)\in\mathbb{Q}_p^3 : M_3(a,b,c)\subseteq M_3\right\}.$$

Consideremos un elemento $(a,b,c)\in\mathbb{Q}_p^3$, tal que

$$(a,b,c)\in End_{\Gamma_2}M_3,$$

el cual, al aplicarlo a la base de M_3, obtenemos

$$\begin{array}{rl}(1,0,0)(a,b,c)= & (a,0,0)\in M_3\\ (0,1,1)(a,b,c)= & (0,b,c)\in M_3\\ (0,0,p)(a,b,c)= & (0,0,pc)\in M_3.\end{array}$$

De las tres relaciones anteriores, obtenemos que $a\in\mathbb{Z}_p$ y $(b,c)\in\Gamma_1$, de donde es fácil ver

$$End_{\Gamma_2}M_3=M_3,$$

y por lo tanto

$$Aut_{\Gamma_2}M_3=M_3^*.$$

Finalmente obtenemos:

$$\mu^*\left(M_3^*\right)^{-1}=\left(\widetilde{\Gamma}_2^*:M_3^*\right)=p-1.$$

b) Tenemos que

$$\{M_3:\Gamma_2\}=\left\{(a,b,c)\in\mathbb{Q}_p^3 : M_3(a,b,c)\subseteq\Gamma_2\right\}.$$

Consideremos un elemento $(a,b,c)\in\mathbb{Q}_p^3$, tal que

$$(a,b,c)\in\{M_3:\Gamma_2\},$$

el cual, al aplicarlo a la base de M_3, obtenemos:

$$\begin{array}{rl}(1,0,0)(a,b,c)= & (a,0,0)\in\Gamma_2\\ (0,1,1)(a,b,c)= & (0,b,c)\in\Gamma_2\\ (0,0,p)(a,b,c)= & (0,0,pc)\in\Gamma_2.\end{array}$$

De las tres relaciones anteriores, obtenemos respectivamente que $a \in p\mathbb{Z}_p$, $c \in p\mathbb{Z}_p$ y $(b-c) \in p^2\mathbb{Z}_p$, de donde es fácil ver:

$$\{M_3 : \Gamma_2\} = (p,p)\, M_3.$$

c) Sabemos que $\left(\widetilde{\Gamma}_2 : \Gamma_2\right) = p^3$ y $\left(\widetilde{\Gamma}_2 : M_3\right) = p$ de donde:

$$(M_3 : \Gamma_2) = p^2.$$

De los tres incisos anteriores obtenemos:

$$\boldsymbol{Z_{\Gamma_2}\left(M_3; s\right)} = (p-1)p^{2s} \int\limits_{\left(\mathbb{Q}_p^*\right)^3 \bigcap (p,p,p)M_3} \|x\|_{\mathbb{Q}_p^3}^s d^*x =$$

$$(p-1)p^{2s}\left(p^{-s}\int\limits_{\biguplus_{t=0}^{\infty} p^t\mathbb{Z}_p^*} \|\alpha\|_{\mathbb{Q}_p}^s\, d^*\alpha\right)\left(p^{-2s}\int\limits_{\left(\mathbb{Q}_p^*\right)^2\bigcap \Gamma_1} \|\beta\|_{\mathbb{Q}_p^2}^s d^*\beta\right) =$$

$$(p-1)p^{-s}\left(\sum_{t=0}^{\infty}\left(p^{-s}\right)^t\right)\left(\frac{\left(1-2p^{-s}+p^{1-2s}\right)}{(p-1)\left(1-p^{-s}\right)^2}\right) =$$

$$\boldsymbol{p^{-s}\left(1-2p^{-s}+p^{1-2s}\right)\zeta_{\widetilde{\Gamma}_2}(s)}.$$

4). Para $M_4 = \Gamma_1 \bigoplus \mathbb{Z}_p$ tenemos lo siguiente:
a) Sabemos que

$$End_{\Gamma_2}M_4 = \left\{(a,b,c)\in \mathbb{Q}_p^3 : M_4(a,b,c) \subseteq M_4\right\}.$$

Consideremos un elemento $(a,b,c)\in \mathbb{Q}_p^3$, tal que

$$(a,b,c) \in End_{\Gamma_2}M_4,$$

el cual, al aplicarlo a la base de M_4, obtenemos:

$$\begin{aligned}(1,1,0)(a,b,c) &= \ (a,b,0) \in M_4\\ (0,p,0)(a,b,c) &= (0,pb,0) \in M_4\\ (0,0,1)(a,b,c) &= \ (0,0,c) \in M_4.\end{aligned}$$

De las tres relaciones anteriores obtenemos que $c \in \mathbb{Z}_p$ y $(a,b) \in \Gamma_1$, de donde es fácil ver

$$End_{\Gamma_2}M_4 = M_4,$$

y por lo tanto

$$Aut_{\Gamma_2}M_4 = M_4^*.$$

Finalmente obtenemos:

$$\mu^*\left(M_4^*\right)^{-1} = \left(\widetilde{\Gamma}_2^* : M_4^*\right) = p-1.$$

b) Tenemos que

$$\{M_4 : \Gamma_2\} = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{Q}_p^3 : \; M_4(a,b,c) \subseteq \Gamma_2\right\}.$$

Consideremos un elemento $(a,b,c) \in \mathbb{Q}_p^3$, tal que

$$(a,b,c) \in \{M_4 : \Gamma_2\},$$

el cual, al aplicarlo a la base de M_4, obtenemos:

$$\begin{aligned}(1,1,0)(a,b,c) &= \quad (a,b,0) \in \Gamma_2\\ (0,p,0)(a,b,c) &= (0,pb,c) \in \Gamma_2\\ (0,0,1)(a,b,c) &= \quad (0,0,c) \in \Gamma_2.\end{aligned}$$

De las tres relaciones anteriores, obtenemos que $a \in p\mathbb{Z}_p$ y $b,c \in p^2\mathbb{Z}_p$, de donde es fácil ver:

$$\{M_4 : \Gamma_2\} = \left(p,p^2,p^2\right)\widetilde{\Gamma}_2$$

c) Sabemos que $\left(\widetilde{\Gamma}_2 : \Gamma_2\right) = p^3$ y $\left(\widetilde{\Gamma}_2 : M_4\right) = p$ de donde

$$(M_4 : \Gamma_2) = p^2.$$

De los tres incisos anteriores obtenemos:

$$\boldsymbol{Z_{\Gamma_2}\left(M_4; s\right)} =$$

$$(p-1)p^{2s} \int\limits_{\left(\mathbb{Q}_p^*\right)^3 \bigcap (p,p^2,p^2)\widetilde{\Gamma}_2} \|x\|_{\mathbb{Q}_p^3}^s d^*x =$$

$$(p-1)p^{-3s}\left(\int\limits_{\biguplus_{t=0}^{\infty} p^t\mathbb{Z}_p^*} \|\alpha\|_{\mathbb{Q}_p}^s d^*\alpha\right)^3 = (p-1)p^{-3s}\left(\sum_{t=0}^{\infty}\left(p^{-s}\right)^t\right)^3 =$$

$$\boldsymbol{(p-1)p^{-3s}\zeta_{\widetilde{\Gamma}_2}(s)}.$$

5). Para el caso $M_5 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{Z}_p^3 \colon\ (z-x) \in p\mathbb{Z}_p\right\}$ tenemos lo siguiente:

a) Sabemos que

$$End_{\Gamma_2} M_5 = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{Q}_p^3 : M_5(a,b,c) \subseteq M_5\right\}.$$

Consideremos un elemento $(a,b,c) \in \mathbb{Q}_p^3$, tal que

$$(a,b,c) \in End_{\Gamma_2} M_5,$$

el cual, al aplicarlo a la base de M_5, obtenemos:

$$\begin{aligned} (1,0,1)(a,b,c) &= \ \ (a,0,c) \in M_5 \\ (0,0,p)(a,b,c) &= (0,0,pc) \in M_5 \\ (0,1,0)(a,b,c) &= \ \ (0,b,0) \in M_5. \end{aligned}$$

De las tres relaciones anteriores, obtenemos que $b \in \mathbb{Z}_p$ y $(a,c) \in \Gamma_1$, de donde es fácil ver

$$End_{\Gamma_2} M_5 = M_5,$$

y por lo tanto

$$Aut_{\Gamma_2} M_5 = M_5^*.$$

Finalmente obtenemos:

$$\mu^*\left(M_5^*\right)^{-1} = \left(\widetilde{\Gamma}_2^* : M_5^*\right) = p-1.$$

b) Tenemos que

$$\{M_5 : \Gamma_2\} = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{Q}_p^3 :\ M_5(a,b,c) \subseteq \Gamma_2\right\}.$$

Consideremos un elemento $(a,b,c) \in \mathbb{Q}_p^3$, tal que

$$(a,b,c) \in \{M_5 : \Gamma_2\},$$

el cual, al aplicarlo a la base de M_5, obtenemos:

$$\begin{aligned} (1,0,1)(a,b,c) &= \ \ (a,0,c) \in \Gamma_2 \\ (0,0,p)(a,b,c) &= (0,0,pc) \in \Gamma_2 \\ (0,1,0)(a,b,c) &= \ \ (0,b,0) \in \Gamma_2. \end{aligned}$$

De las tres relaciones anteriores, obtenemos que $a \in p\mathbb{Z}_p$ y $b,c \in p^2\mathbb{Z}_p$, de donde es fácil ver

$$\{M_5 : \Gamma_2\} = \left(p,p^2,p^2\right)\widetilde{\Gamma}_2$$

c) Sabemos que $\left(\widetilde{\Gamma}_2 : \Gamma_2\right) = p^3$ y $\left(\widetilde{\Gamma}_2 : M_5\right) = p$ por lo que

$$(M_5 : \Gamma_2) = p^2.$$

De los tres incisos anteriores obtenemos:

$$\boldsymbol{Z_{\Gamma_2}\left(M_5;s\right)} = (p-1)p^{2s} \int\limits_{\left(\mathbb{Q}_p^*\right)^3 \bigcap (p,p^2,p^2)\widetilde{\Gamma}_2} \|x\|_{\mathbb{Q}_p^3}^s d^*x =$$

$$(p-1)p^{-3s}\left(\int\limits_{\biguplus_{t=0}^{\infty} p^t\mathbb{Z}_p^*} \|\alpha\|_{\mathbb{Q}_p}^s d^*\alpha\right)^3 = (p-1)p^{-3s}\left(\sum_{t=0}^{\infty}\left(p^{-s}\right)^t\right)^3 =$$

$$\boldsymbol{(p-1)p^{-3s}\zeta_{\widetilde{\Gamma}_2}(s)}.$$

6). Para $M_6 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{Z}_p^3\colon\ (y-x),(z-y) \in p\mathbb{Z}_p\right\}$ tenemos lo siguiente:

a) Sabemos que

$$End_{\Gamma_2}M_6 = \left\{(a,b,c)\in \mathbb{Q}_p^3 : M_6(a,b,c) \subseteq M_6\right\}.$$

Consideremos un elemento $(a,b,c)\in \mathbb{Q}_p^3$, tal que

$$(a,b,c) \in End_{\Gamma_2}M_6,$$

el cual, al aplicarlo a la base de M_6, obtenemos

$$\begin{array}{r} (1,1,1)(a,b,c) = \quad (a,b,c) \in M_6 \\ (0,p,0)(a,b,c) = (0,pb,0) \in M_6 \\ (0,0,p)(a,b,c) = (0,0,pc) \in M_6. \end{array}$$

De las tres relaciones anteriores, obtenemos que $(a,b,c) \in M_6$, de donde es fácil ver

$$End_{\Gamma_2}M_6 = M_6,$$

y por lo tanto

$$Aut_{\Gamma_2}M_6 = M_6^*.$$

Finalmente obtenemos:

$$\mu^*\left(M_6^*\right)^{-1} = \left(\widetilde{\Gamma}_2^* : M_6^*\right) = (p-1)^2$$

ya que tenemos el siguiente morfismo suprayectivo

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_2'^{*} & \rightarrow & (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{*} \times (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{*} \\ (a,b,c) & \rightarrow & \left(a^{-1}b, b^{-1}c\right) \end{array}$$

cuyo núcleo es precisamente M_6^*.

b) Tenemos que

$$\{M_6 : \Gamma_2\} = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{Q}_p^3 : M_6(a,b,c) \subseteq \Gamma_2\right\}.$$

Consideremos un elemento $(a,b,c) \in \mathbb{Q}_p^3$, tal que

$$(a,b,c) \in \{M_6 : \Gamma_2\},$$

el cual, al aplicarlo a la base de M_6, obtenemos:

$$\begin{array}{rl} (1,1,1)(a,b,c) = & (a,b,c) \in \Gamma_2 \\ (0,p,0)(a,b,c) = & (0,pb,0) \in \Gamma_2 \\ (0,0,p)(a,b,c) = & (0,0,pc) \in \Gamma_2. \end{array}$$

De las tres relaciones anteriores, obtenemos respectivamente que $a \in p\mathbb{Z}_p$, $b, c \in p\mathbb{Z}_p$ y $(b-c) \in p^2\mathbb{Z}_p$, de donde es fácil ver:

$$\{M_6 : \Gamma_2\} = (p,p,p)\, M_3$$

c) Sabemos que $\left(\widetilde{\Gamma}_2 : \Gamma_2\right) = p^3$ y $\left(\widetilde{\Gamma}_2 : M_6\right) = p^2$, de donde

$$(M_6 : \Gamma_2) = p.$$

De los tres incisos anteriores obtenemos:

$$\boldsymbol{Z_{\Gamma_2}\left(M_6; s\right)} = (p-1)^2 p^s \int\limits_{\left(\mathbb{Q}_p^*\right)^3 \bigcap (p,p,p) M_3} \|x\|_{\mathbb{Q}_p^3}^s d^*x =$$

$$(p-1)^2 p^{-2s} \left(\int\limits_{\biguplus_{t=0}^{\infty} p^t \mathbb{Z}_p^*} \|\alpha\|_{\mathbb{Q}_p}^s\, d^*\alpha \right) \left(\int\limits_{\left(\mathbb{Q}_p^*\right)^2 \bigcap \Gamma_1} \|\beta\|_{\mathbb{Q}_p^2}^s\, d^*\beta \right) =$$

$$(p-1)^2 p^{-2s} \left(\sum_{t=0}^{\infty} \left(p^{-s}\right)^t \right) \left(\frac{\left(1 - 2p^{-s} + p^{1-2s}\right)}{(p-1)\left(1-p^{-s}\right)^2} \right) =$$

$$\boldsymbol{(p-1)p^{-2s}\left(1-2p^{-s}+p^{1-2s}\right)\zeta_{\widetilde{\Gamma}_2}(s)}.$$

7). Para el caso $M_7 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{Z}_p^3\colon (z-y) \in p^2\mathbb{Z}_p\right\}$ tenemos lo siguiente:

a) Sabemos que

$$End_{\Gamma_2}M_7 = \left\{(a,b,c)\in \mathbb{Q}_p^3 : M_7(a,b,c) \subseteq M_7\right\}.$$

Consideremos un elemento $(a,b,c)\in \mathbb{Q}_p^3$, tal que

$$(a,b,c) \in End_{\Gamma_2}M_7,$$

el cual, al aplicarlo a la base de M_7, obtenemos:

$$\begin{array}{rl} (1,0,0)(a,b,c) = & (a,0,0) \in M_7 \\ (0,1,1)(a,b,c) = & (0,b,c) \in M_7 \\ (0,0,p^2)(a,b,c) = & (0,0,p^2c) \in M_7. \end{array}$$

De las tres relaciones anteriores, obtenemos que $a \in \mathbb{Z}_p$ y $(b-c) \in p^2\mathbb{Z}_p$, de donde es fácil ver

$$End_{\Gamma_2}M_7 = M_7,$$

y por lo tanto

$$Aut_{\Gamma_2}M_7 = M_7^*.$$

Finalmente obtenemos

$$\mu^*\left(M_7^*\right)^{-1} = \left(\widetilde{\Gamma}_2^* : M_7^*\right) = p\,(p-1)$$

ya que tenemos el siguiente morfismo suprayectivo

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\Gamma}_2^* & \to & \left(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}\right)^* \\ \\ (a,b,c) & \to & \left(b^{-1}c\right) \end{array}$$

cuyo núcleo es precisamente M_7^*.

b) Tenemos que

$$\{M_7 : \Gamma_2\} = \left\{(a,b,c)\in \mathbb{Q}_p^3 : M_7(a,b,c) \subseteq \Gamma_2\right\}.$$

Consideremos un elemento $(a,b,c)\in \mathbb{Q}_p^3$, tal que

$$(a,b,c) \in \{M_7 : \Gamma_2\},$$

el cual, al aplicarlo a la base de M_7, obtenemos:

$$\begin{aligned} (1,0,0)(a,b,c) &= \quad (a,0,0) \in \Gamma_2 \\ (0,1,1)(a,b,c) &= \quad (0,b,c) \in \Gamma_2 \\ (0,0,p^2)(a,b,c) &= (0,0,p^2c) \in \Gamma_2. \end{aligned}$$

De las tres relaciones anteriores, obtenemos respectivamente que $a \in p\mathbb{Z}_p$, $b, c \in p\mathbb{Z}_p$ y $(b-c) \in p^2\mathbb{Z}_p$, de donde es fácil ver:

$$\{M_7 : \Gamma_2\} = (p,p,p)\, M_3.$$

c) Sabemos que $\left(\widetilde{\Gamma}_2 : \Gamma_2\right) = p^3$ y $\left(\widetilde{\Gamma}_2 : M_7\right) = p^2$, de donde

$$(M_7 : \Gamma_2) = p.$$

De los tres incisos anteriores obtenemos:

$$\boldsymbol{Z_{\Gamma_2}\left(M_7; s\right)} = p(p-1)p^s \int\limits_{\left(\mathbb{Q}_p^*\right)^3 \bigcap (p,p,p)M_3} \|x\|_{\mathbb{Q}_p^3}^s d^*x =$$

$$p(p-1)p^{-2s}\left(\int\limits_{\biguplus_{t=0}^{\infty} p^t\mathbb{Z}_p^*} \|\alpha\|_{\mathbb{Q}_p}^s\, d^*\alpha\right)\left(\int\limits_{\left(\mathbb{Q}_p^*\right)^2 \bigcap \Gamma_1} \|\beta\|_{\mathbb{Q}_p^2}^s\, d^*\beta\right) =$$

$$p(p-1)p^{-2s}\left(\sum_{t=0}^{\infty}\left(p^{-s}\right)^t\right)\left(\frac{\left(1-2p^{-s}+p^{1-2s}\right)}{(p-1)\left(1-p^{-s}\right)^2}\right) =$$

$$\boldsymbol{p^{1-2s}\left(1-2p^{-s}+p^{1-2s}\right)\zeta_{\widetilde{\Gamma}_2}(s)}.$$

8). Para $M_8 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{Z}_p^3 \colon px - y + z \in p^2\mathbb{Z}_p\right\}$ tenemos:
a) Sabemos que

$$End_{\Gamma_2} M_8 = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{Q}_p^3 : M_8(a,b,c) \subseteq M_8\right\}.$$

Consideremos un elemento $(a,b,c) \in \mathbb{Q}_p^3$, tal que

$$(a,b,c) \in End_{\Gamma_2} M_8,$$

el cual, al aplicarlo a la base de M_8, obtenemos:

$$\begin{aligned} (p,0,0)(a,b,c) &= (pa,0,0) \in M_8 \\ (1,p,0)(a,b,c) &= (a,pb,0) \in M_8 \\ (0,1,1)(a,b,c) &= \quad (0,b,c) \in M_8. \end{aligned}$$

De las tres relaciones anteriores, obtenemos que $(b-a)\in p\mathbb{Z}_p$ y $(b-c)\in p^2\mathbb{Z}_p$, de donde es fácil ver

$$End_{\Gamma_2}M_8=\Gamma_2,$$

y por lo tanto,

$$Aut_{\Gamma_2}M_8=\Gamma_2^*.$$

Finalmente obtenemos:

$$\mu^*\left(\Gamma_2^*\right)^{-1}=\left(\widetilde{\Gamma}_2^*:\Gamma_2^*\right)=p\left(p-1\right)^2$$

b) Tenemos que

$$\left\{M_8:\Gamma_2\right\}=\left\{(a,b,c)\in\mathbb{Q}_p^3:M_8(a,b,c)\subseteq\Gamma_2\right\}.$$

Consideremos un elemento $(a,b,c)\in\mathbb{Q}_p^3$, tal que

$$(a,b,c)\in\left\{M_8:\Gamma_2\right\},$$

el cual, al aplicarlo a la base de M_8, obtenemos:

$$\begin{aligned}(p,0,0)(a,b,c)&=(pa,0,0)\in\Gamma_2\\(1,p,0)(a,b,c)&=(a,pb,0)\in\Gamma_2\\(0,1,1)(a,b,c)&=\ (0,b,c)\in\Gamma_2.\end{aligned}$$

De las tres relaciones anteriores, obtenemos respectivamente que $a\in p\mathbb{Z}_p$, $b,c\in p\mathbb{Z}_p$ y $(b-c)\in p^2\mathbb{Z}_p$, de donde es fácil ver:

$$\left\{M_8:\Gamma_2\right\}=(p,p,p)\,M_3$$

c) Sabemos que $\left(\widetilde{\Gamma}_2:\Gamma_2\right)=p^3$ y $\left(\widetilde{\Gamma}_2:M_8\right)=p^2$, de donde

$$(M_8:\Gamma_2)=p.$$

De los tres incisos anteriores obtenemos:

$$\boldsymbol{Z_{\Gamma_2}\left(M_8;s\right)}=p(p-1)^2p^s\int\limits_{\left(\mathbb{Q}_p^*\right)^3\bigcap(p,p,p)M_3}\|x\|_{\mathbb{Q}_p^3}^s d^*x=$$

$$p(p-1)^2p^{-2s}\left(\int\limits_{\biguplus_{t=0}^{\infty}p^t\mathbb{Z}_p^*}\|\alpha\|_{\mathbb{Q}_p}^s\,d^*\alpha\right)\left(\int\limits_{\left(\mathbb{Q}_p^*\right)^2\bigcap\Gamma_1}\|\beta\|_{\mathbb{Q}_p^2}^s\,d^*\beta\right)=$$

$$p(p-1)^2p^{-2s}\left(\sum_{t=0}^{\infty}\left(p^{-s}\right)^t\right)\left(\frac{\left(1-2p^{-s}+p^{1-2s}\right)}{(p-1)\left(1-p^{-s}\right)^2}\right)=$$

$$\boldsymbol{(p-1)p^{1-2s}\left(1-2p^{-s}+p^{1-2s}\right)\zeta_{\widetilde{\Gamma}_2}(s)}.$$

9). Para el caso $M_9=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{Z}_p^3\colon x-y+z\in p\mathbb{Z}_p\right\}$ tenemos lo siguiente:

a) Sabemos que $End_{\Gamma_2}M_9=\left\{(a,b,c)\in\mathbb{Q}_p^3: M_9(a,b,c)\subseteq M_9\right\}$.

Consideremos un elemento $(a,b,c)\in\mathbb{Q}_p^3$, tal que

$$(a,b,c)\in End_{\Gamma_2}M_9,$$

el cual, al aplicarlo a la base de M_9, obtenemos:

$$\begin{array}{rl}(1,1,0)(a,b,c)= & (a,b,0)\in M_9\\ (p,0,0)(a,b,c)= & (pa,0,0)\in M_9\\ (0,1,1)(a,b,c)= & (0,b,c)\in M_9.\end{array}$$

De las tres relaciones anteriores, obtenemos que $(b-a),(c-b)\in p\mathbb{Z}_p$, de donde es fácil ver

$$End_{\Gamma_2}M_9=M_6,$$

y por lo tanto

$$Aut_{\Gamma_2}(M_9)=M_6^*.$$

Finalmente obtenemos:

$$\mu^*\left(M_6^*\right)^{-1}=\left(\widetilde{\Gamma}_2^*:M_6^*\right)=(p-1)^2.$$

b) Tenemos que $\{M_9:\Gamma_2\}=\left\{(a,b,c)\in\mathbb{Q}_p^3: M_9(a,b,c)\subseteq\Gamma_2\right\}$.

Consideremos un elemento $(a,b,c)\in\mathbb{Q}_p^3$, tal que

$$(a,b,c)\in\{M_9:\Gamma_2\},$$

el cual, al aplicarlo a la base de M_9, obtenemos:

$$\begin{array}{rl}(1,1,0)(a,b,c)= & (a,b,0)\in\Gamma_2\\ (p,0,0)(a,b,c)= & (pa,0,0)\in\Gamma_2\\ (0,1,1)(a,b,c)= & (0,b,c)\in\Gamma_2.\end{array}$$

De las tres relaciones anteriores, obtenemos respectivamente que $a\in p\mathbb{Z}_p$, $b,c\in p^2\mathbb{Z}_p$, de donde es fácil ver

$$\{M_9:\Gamma_2\}=\left(p,p^2,p^2\right)\widetilde{\Gamma}_2.$$

c) Sabemos que $\left(\widetilde{\Gamma}_2:\Gamma_2\right)=p^3$ y $\left(\widetilde{\Gamma}_2:M_9\right)=p$, de donde

$$(M_9:\Gamma_2)=p^2.$$

De los tres incisos anteriores obtenemos:

$$\boldsymbol{Z_{\Gamma_2}(M_9;s)} = (p-1)^2 p^{2s} \int\limits_{\left(\mathbb{Q}_p^*\right)^3 \bigcap (p,p^2,p^2)\widetilde{\Gamma}_2} \|x\|_{\mathbb{Q}_p^3}^s d^*x =$$

$$(p-1)^2 p^{-3s} \left(\int\limits_{\biguplus_{t=0}^{\infty} p^t \mathbb{Z}_p^*} \|\alpha\|_{\mathbb{Q}_p}^s d^*\alpha \right)^3 =$$

$$\boldsymbol{(p-1)^2 p^{-3s} \zeta_{\widetilde{\Gamma}_2}(s)}.$$

De los 9 puntos anteriores, finalmente obtenemos:

$$\boldsymbol{\zeta_{\Gamma_2}(s) =}$$

$$\boldsymbol{\frac{1-2p^{-s}+(1+p+p^2)p^{-2s}-2pp^{-3s}+(p-p^2+p^3)p^{-4s}+(p-1)p^2p^{-5s}}{(1-p^{-s})^3}},$$

en donde

$$\boldsymbol{\zeta_{\widetilde{\Gamma}_2}(s) = \frac{1}{(1-p^{-s})^3}}.$$

Este resultado se obtuvo por medio del cálculo directo de todos los ideales de índice finito de Γ_1 en [**21**, sección 3].

Además podemos observar que se cumplen las siguientes relaciones:

1. $\dfrac{Z_{\Gamma_2}(M_i;s)}{Z_{\Gamma_2}(M_i;1-s)} = (\widetilde{\Gamma}_2 : \Gamma_2)^{1-2s} \dfrac{\zeta_{\widetilde{\Gamma}_2}(s)}{\zeta_{\widetilde{\Gamma}_2}(1-s)}$ para $i = 4,5,6,7,8,9$.

2. $\dfrac{Z_{\Gamma_2}(M_j;s)}{Z_{\Gamma_2}(M_j;1-s)} = \left(p^2\right)^{1-2s} \dfrac{\zeta_{\widetilde{\Gamma}_2}(s)}{\zeta_{\widetilde{\Gamma}_2}(1-s)}$ para $j = 2,3$.

Finalmente del producto de Euler obtenemos:

$$\boldsymbol{\zeta_{B\left(C_{p^2}\right)}(s) =}$$

$$\left[1-2p^{-s}+(1+p+p^2)p^{-2s}-2pp^{-3s}+(p-p^2+p^3)p^{-4s}+(p-1)p^2p^{-5s}\right]\left[\zeta_{\mathbb{Z}}(s)\right]^3.$$

2.3. La función $\zeta_{B(C_{p^n})}(s)$.

Sea $n \in \mathbb{N}$ y $\Gamma_n = B_p(C_{p^n})$ el anillo de Burnside del grupo cíclico de orden p^n. Las clases de conjugación de C_{p^n} son

$$\left\{C_{p^n},\ pC_{p^n},\ p^2C_{p^n}, \ldots,\ p^nC_{p^n}\right\},$$

de donde una base para Γ_n es

$$\{1 = C_{p^n}/C_{p^n},\ a_1 = C_{p^n}/pC_{p^n}, \ldots, a_n = C_{p^n}/p^nC_{p^n}\},$$

por lo que

$$\Gamma_n = \mathbb{Z}_p \bigoplus \mathbb{Z}_p a_1 \bigoplus \ldots \bigoplus \mathbb{Z}_p a_n,$$

además, su orden maximal es $\widetilde{\Gamma}_n = \mathbb{Z}_p^{(n+1)}$.

Por otro lado sabemos que

$$\varphi_H(C_{p^n}/K) = \begin{cases} |C_{p^n}/K| & \text{si } \mathrm{H} \subseteq \mathrm{K} \\ 0 & \text{si } \mathrm{H} \not\subseteq \mathrm{K} \end{cases}$$

por lo que para las clases de conjugación dadas en el orden

$$\mathcal{C}(G) = \left\{C_{p^n},\ pC_{p^n},\ p^2C_{p^n}, \ldots,\ p^nC_{p^n}\right\},$$

tenemos que φ induce la siguiente inclusión:

$$\begin{array}{ccc} & \varphi & \\ \Gamma_n & \hookrightarrow & \widetilde{\Gamma}_n \\ X & \to & (\varphi_H(X))_{H\in\mathcal{C}(G)} \\ & & \\ a_0 = 1 & \to & (1, ..., 1) \\ a_1 & \to & (0, p, \ldots, p) \\ a_2 & \to & (0, 0, p^2, \ldots, p^2) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & \to & (0, \ldots 0, p^n) \end{array}$$

por lo que dentro de $\widetilde{\Gamma}_n$ podemos ver a

$$\Gamma_n = \left\{\sum_{i=0}^{n} x_i a_i \in \mathbb{Z}_p^{(n+1)} :\ x_i \in \mathbb{Z}_p \text{ para } i = 0, \ldots, n\right\},$$

o bien, reescribiendo obtenemos que

$$\Gamma_n = \left\{(u_0, \ldots, u_n) \in \mathbb{Z}_p^{(n+1)}\colon\ (u_l - u_{l-1}) \in p^l\mathbb{Z}_p \text{ para } l = 1, \ldots, n\right\},$$

al cual le podemos dar la siguiente estructura de producto fibrado:

$$\begin{array}{ccccccc}
(u_0,\ldots,u_n) & - & - & - & - & \rightarrow & u_n \\
| & & & f_2 & & & | \\
| & & \Gamma_n & \rightarrow & \mathbb{Z}_p & & | \\
| & f_1 & \downarrow & & \downarrow & g_2 & | \\
| & & \Gamma_{n-1} & \rightarrow & \mathbb{Z}_p/p^n\mathbb{Z}_p & & | \\
\downarrow & & & g_1 & & & \downarrow \\
(u_0,\ldots,u_{n-1}) & - & - & - & - & \rightarrow & \overline{u_{n-1}} = \overline{u_n}.
\end{array}$$

Observemos que $\mathbb{Z}_p$ es un Dominio de Valuación Discreta, por lo que sus ideales son de la forma $p^t\mathbb{Z}_p$, para todo entero $t \geq 0$. De acuerdo con la estructura del producto fibrado y la observación 1.3.1, tenemos que los ideales de índice finito de Γ_n son de la forma

$$I = \left(\alpha, p^t\right)\Gamma_n + (J, 0),$$

para α en algún ideal de Γ_{n-1} y J un ideal de Γ_{n-1}, tales que:

1. $g_1(J) = 0$,
2. $g_1(\alpha) = g_2(p^t)$.

2.3.1. Observación. De acuerdo con la observación dada en 1.3.1, la estructura de producto fibrado anterior nos provee un método recursivo para obtener los ideales de índice finito de Γ_n, en base a los ideales de índice finito Γ_{n-1}. Una vez obtenidos los ideales de índice finito de Γ_n, lo cual no necesariamente es fácil, se pueden encontrar las clases de isomorfismo correspondientes de estos ideales, de forma similar a los ejemplos vistos en 2.1 y 2.2. Finalmente con dichas clases de isomorfismo, se puede obtener la función ζ correspondiente de Γ_n, en los casos local y global, por medio de cálculos directos.

2.4. La función $\zeta_{B_p(P\times Q)}(s)$.

2.4.1. Lema. Sea $G = P \times Q$, el producto directo de P y Q, en donde P es el p-subgrupo de Sylow de G y Q es un subgrupo normal de G de orden primo relativo a p. Tenemos el siguiente isomorfismo de anillos

$$B_p(G) \cong \prod_{H\in\mathcal{C}(Q)} B_p(P),$$

en donde el producto corre sobre todas las clases de conjugación de los subgrupos de Q.

Demostración. Sabemos que

$$B_p(G) = \prod_{\substack{K\in\mathcal{C}(G)\\ O^p(K)=K}} B_p(G)\,e^p_{G,K},$$

en donde $e^p_{G,K}$ son los idempotentes primitivos de $B_p(G)$. Además para cada subgrupo $K \leq G$, tenemos que $K = T \times H$ para $T \leq P$ y $H \leq Q$. Puesto que $O^p(K)$ es el mínimo subgrupo normal de K tal que $K/O^p(K)$ es $p-$grupo, de la condición $O^p(K) = K$ obtenemos que $K = \{1\} \times H$, subgrupo que denotaremos simplemente por H. De lo anterior, obtenemos

$$B_p(G) = \prod_{H\in\mathcal{C}(Q)} B_p(G)\,e^p_{G,H},$$

por lo cual, para esta demostración basta con demostrar que hay un isomorfismo de anillos entre $B_p(G)\,e^p_{G,H}$ y $B_p(P)$, para cada $H \in \mathcal{C}(Q)$.

Recordemos que

$$B_p(P) = \bigoplus_{L\in\mathcal{C}(P)} \mathbb{Z}_p(P/L).$$

Por otro lado de [**22**, Theorem 3.1] tenemos que

$$B_p(G)\,e^p_{G,H} = \bigoplus_{\substack{M\in\mathcal{C}(G)\\ O^p(M)=H}} \mathbb{Z}_p(G/M)\,e^p_{G,H},$$

además, la condición $O^p(M) = H$ implica que $M = T \times H$ para $T \in \mathcal{C}(P)$, obteniendo

$$B_p(G)\, e^p_{G,H} = \bigoplus_{T\in\mathcal{C}(P)} \mathbb{Z}_p(G/(T\times H))\, e^p_{G,H},$$

por lo que para concluir esta demostración basta ver que el siguiente es un isomorfismo de anillos:

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{T\in\mathcal{C}(P)} \mathbb{Z}_p(G/(T\times H))\, e^p_{G,H} & \overset{\alpha}{\cong} & \bigoplus_{L\in\mathcal{C}(P)} \mathbb{Z}_p(P/L) \\ (G/(T\times H))\, e^p_{G,H} & \to & w_Q(H)(P/T) \end{array}$$

en donde $w_Q(H) = |N_Q(H)/H|$. Es claro que α es una biyección de grupos abelianos, por lo que sólo falta ver que manda el uno en el uno y abre el producto.

Primero veamos que α manda el uno en el uno:

Recordemos que para un subgrupo N de G tenemos que

$$\varphi_N\left(e^p_{G,H}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } O^p(N) = H \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

de donde

$$\varphi_K\left(w_Q(H)\, e^p_{G,H}\right) = w_Q(H)\,\varphi_K\left(e^p_{G,H}\right) \neq 0$$

siempre que $K = T \times H$. Por otro lado para esta misma K tenemos que

$$\varphi_K\left((G/(P\times H))\, e^p_{G,H}\right) = \varphi_H(Q/H)\,\varphi_K\left(e^p_{G,H}\right) = w_Q(H)\,\varphi_K\left(e^p_{G,H}\right),$$

y por lo tanto

$$w_Q(H)\, e^p_{G,H} = (G/(P\times H))\, e^p_{G,H},$$

ya que ambos elementos tienen las mismas marcas para todo subgrupo de G y entonces

$$\alpha\left(w_Q(H)\, e^p_{G,H}\right) = w_Q(H)(P/P),$$

de donde es claro que

$$\alpha\left(e^p_{G,H}\right) = (P/P),$$

ya que $w_Q(H)$ es una unidad en $\mathbb{Z}_p$.

Por último, veamos que α abre el producto:

Primero consideremos los siguientes elementos $(G/(T_1\times H))\,e^p_{G,H}$ y $(G/(T_2\times H))\,e^p_{G,H}$. Tenemos que

$$\alpha\left((G/(T_i\times H))\,e^p_{G,H}\right)=w_Q(H)\,(P/T_i)\,,$$

para $i=1,2$, de donde

$$\alpha\left((G/(T_1\times H))\,e^p_{G,H}\right)\alpha\left((G/(T_2\times H))\,e^p_{G,H}\right)=$$

$$w_Q^2(H)\sum_{g\in T_1\backslash P/T_2}\left(P/(T_1\cap^g T_2)\right).$$

Por otro lado sabemos que

$$(G/(T_1\times H))\,e^p_{G,H}\,(G/(T_2\times H))\,e^p_{G,H}=$$

$$\left[\sum_{(s,t)\in(T_1\backslash P/T_2)\times(H\backslash Q/H)}\left(G/\left[(T_1\cap^s T_2)\times\left(H\cap^t H\right)\right]\right)\right]\left(e^p_{G,H}\right).$$

Además observemos que $\varphi_L\left(e^p_{G,H}\right)\neq 0$ siempre que $L=T\times H$ y cero en otro caso. Suponiendo que $t\notin N_Q(H)$, entonces $H\cap^t H<H$. Es claro que L no puede ser subconjugado de $(T_1\cap^s T_2)\times(H\cap^t H)$, pues de lo contrario tendríamos que un conjugado de H estaría contenido en $H\cap^t H$ lo que a su vez implicaría que $H\cap^t H=H$, lo cual es una contradicción, concluyendo

$$\varphi_L\left(G/\left[(T_1\cap^s T_2)\times\left(H\cap^t H\right)\right]\right)=0,$$

por lo que todas las marcas de $(G/[(T_1\cap^s T_2)\times(H\cap^t H)])\,e^p_{G,H}$ son cero, con lo cual obtenemos

$$\left(G/\left[(T_1\cap^s T_2)\times\left(H\cap^t H\right)\right]\right)e^p_{G,H}=0,$$

siempre que $t\notin N_Q(H)$, concluyendo:

$$(G/(T_1\times H))\,e^p_{G,H}\,(G/(T_2\times H))\,e^p_{G,H}=$$

$$\left[\sum_{(s,t)\in(T_1\backslash P/T_2)\times(W_Q(H))} (G/\left[(T_1\cap^s T_2)\times(H)\right])\right]\left(e^p_{G,H}\right) =$$

$$w_Q(H)\left[\sum_{s\in(T_1\backslash P/T_2)} (G/\left[(T_1\cap^s T_2)\times(H)\right])\right]\left(e^p_{G,H}\right).$$

Finalmente obtenemos:

$$\alpha\left((G/(T_1\times H))\, e^p_{G,H}\, (G/(T_2\times H))\, e^p_{G,H}\right) =$$

$$w_Q^2(H)\left[\sum_{s\in(T_1\backslash P/T_2)} (P/\left[(T_1\cap^s T_2)\right])\right],$$

por lo que α es multiplicativa, con lo cual concluimos esta demostración.

■

2.4.2. Corolario. Sea $G = P\times Q$, el producto directo de P y Q, en donde P es el p-subgrupo de Sylow de G y Q es un subgrupo normal de G de orden primo relativo a p. Tenemos que se cumple la siguiente relación:

$$\zeta_{B_p(G)}\ (s) = \prod_{H\in\mathcal{C}(Q)} \zeta_{B_p(P)}(s).$$

La demostración de este corolario es clara del lema anterior 2.4.1 y de las propiedades de la función zeta dadas en 1.2.

■

2.4.3. Observación. Como un caso particular del corolario 2.4.2, sea C un grupo cíclico de orden $p^n m$ en donde $n, m\in\mathbb{N}$ y $p\in\mathbb{Z}$ es un primo racional, tal que $p\nmid m$. Sea $m = q_1^{\alpha_1}\cdots q_r^{\alpha_r}$ la factorización de m en potencias de primos. Sea $\Gamma = B_p(C)$ el anillo de Burnside de C. Sea C_{p^n} es el grupo cíclico de orden p^n y sea $\Gamma_n = B_p(C_{p^n})$ su anillo de Burnside. Tenemos que se cumplen los siguientes isomorfismos de anillos:

1. $\Gamma \cong \Gamma_n^{\prod_{i=1}^r(\alpha_i+1)}$,
2. $\widetilde{\Gamma} \cong \mathbb{Z}_p^{(n+1)\prod_{i=1}^r(\alpha_i+1)}$.

Además

$$\zeta_\Gamma(s) = \left[\zeta_{\Gamma_n}(s)\right]^{\prod_{i=1}^r(\alpha_i+1)}.$$

Capítulo 3

Ecuación Funcional para $\zeta_{B_p(G)}(s)$.

A lo largo de este capítulo estudiaremos las ecuaciones funcionales que satisfacen las funciones zeta del anillo de Burnside, para el caso local.

En la sección 3.1 daremos explícitamente la ecuación funcional que satisface la función zeta del anillo de Burnside para los grupos cíclicos de orden pm, en donde $p \nmid m$.

En la sección 3.2 veremos el teorema principal de este capítulo en 3.2.2, en el cual veremos la ecuación funcional que satisface la función zeta del anillo de Burnside de un grupo finito G. Además daremos algunos ejemplos.

En la sección 3.3 calcularemos una ecuación funcional para $Z_{\Gamma_n}(\Gamma_n; s)$.

3.1. Ecuación funcional para $\zeta_{B_p(C_{pm})}(s)$.

3.1.1. Corolario. Sea C un grupo cíclico de orden pm, en donde $p \in \mathbb{Z}$ es un primo racional tal que $p \nmid m$, para $m \in \mathbb{N}$. Sea $m = q_1^{\alpha_1} \cdots q_r^{\alpha_r}$ la factorización de m en potencias de primos. Sea $\Gamma = B_p(C)$ el anillo de Burnside de C y sea $\widetilde{\Gamma}$ su orden maximal. Sea $\Gamma_1 = B_p(C_p)$ el anillo de Burnside de C_p y sea $\widetilde{\Gamma}_1$ su orden maximal. Tenemos que para M en los representantes de las clases de isomorfismo de los ideales fraccionales de índice finito en Γ, se cumple lo siguiente

1. $$\boldsymbol{\frac{Z_\Gamma(M;s)}{Z_\Gamma(M;1-s)} = (\widetilde{\Gamma}:\Gamma)^{1-2s}\frac{\zeta_{\widetilde{\Gamma}}(s)}{\zeta_{\widetilde{\Gamma}}(1-s)}},$$

además

2. $$\boldsymbol{\frac{\zeta_\Gamma(s)}{\zeta_\Gamma(1-s)} = (\widetilde{\Gamma}:\Gamma)^{1-2s}\frac{\zeta_{\widetilde{\Gamma}}(s)}{\zeta_{\widetilde{\Gamma}}(1-s)}}.$$

Demostración. De la observación anterior 2.4.3, tenemos:

$$\Gamma \cong \Gamma_1^{\prod_{i=1}^r(\alpha_i+1)} \quad y \quad \widetilde{\Gamma} \cong \left(\widetilde{\Gamma}_1\right)^{\prod_{i=1}^r(\alpha_i+1)}.$$

Recordemos que las únicas clases de isomorfismo de ideales bilaterales de Γ_1 son $\widetilde{\Gamma}_1$ y Γ_1, para los cuales se tiene:

$$Z_{\Gamma_1}(\Gamma_1;s) = \left(1-2p^{-s}+p^{1-2s}\right)\zeta_{\widetilde{\Gamma}_1}(s),$$

y

$$Z_{\Gamma_1}\left(\widetilde{\Gamma}_1;s\right) = p^{-s}\zeta_{\widetilde{\Gamma}_1}(s),$$

de donde obtenemos que $M = \left(\widetilde{\Gamma}_1\right)^l \times (\Gamma_1)^r$, para $l, r \in \mathbb{N}$ tales que $l + r = \prod_{i=1}^r(\alpha_i+1)$.

De lo anterior, obtenemos:

$$\boldsymbol{(i) \quad Z_\Gamma(M;s) = \left(p^{-s}\right)^l\left(1-2p^{-s}+p^{1-2s}\right)^r\zeta_{\widetilde{\Gamma}}(s)}.$$

Por otro lado tenemos

$$\zeta_{\Gamma_1}(s) = \left(1-p^{-s}+p^{1-2s}\right)\zeta_{\widetilde{\Gamma}}(s),$$

de donde es claro que

$$\boldsymbol{(ii) \quad \zeta_\Gamma(s) = \left(1-p^{-s}+p^{1-2s}\right)^{\prod_{i=1}^r(\alpha_i+1)}\zeta_{\widetilde{\Gamma}}(s)}.$$

Finalmente por medio de un cálculo directo se pueden obtener ambos resultados de este corolario, respectivamente de (i) y (ii). ■

3.2. Ecuación funcional para $\zeta_{B_p(G)}(s)$.

3.2.1. Notación. Sea G un grupo finito. Sea $\Gamma = B_p(G)$ el anillo de Burnside de G y sea $\widetilde{\Gamma} = \prod_{H\in\mathcal{C}(G)} \mathbb{Z}_p$ su orden maximal. Sean M y N representantes en las clases de isomorfismo de los ideales fraccionales de índice finito en Γ y sea $\{M : \Gamma\}$ el conductor de M en Γ. Sea $A = \prod_{H\in\mathcal{C}(G)} \mathbb{Q}_p$ y sea $t : A \to \mathbb{Q}_p$, el mapeo tal que

$$t\left((y_H)_{H\in\mathcal{C}(G)}\right) = \sum_{H\in\mathcal{C}(G)} y_H,$$

para cada $(y_H)_{H\in\mathcal{C}(G)} \in A$. Tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} A & \overset{t}{\to} & \mathbb{Q}_p \\ | & & | \\ \Gamma \subseteq \widetilde{\Gamma} & \to & \mathbb{Z}_p. \end{array}$$

Denotaremos por

$$\overline{M} = \{a \in A : t(xa) \in \mathbb{Z}_p \quad \forall\, x \in \{M : \Gamma\}\}.$$

Elijamos $\chi : \mathbb{Q}_p \to S^1$ el carácter aditivo y continuo en $\mathbb{Q}_p$, definido por

$$\chi\left(p^{-n}\right) = \exp\left(\frac{2\pi i}{p^n}\right),$$

el cual resulta trivial en $\mathbb{Z}_p$, pero no en p^{-1}.

Lema 1. Dada la función característica $\Psi(x) = \Phi_{\widetilde{\Gamma}}(x)$. Tenemos que la transformada de Fourier de Ψ es

$$\widehat{\Psi}(x) = \left(\widetilde{\Gamma} : \Gamma\right) \Psi(x).$$

Demostración. Por definición, sabemos que

$$\widehat{\Psi}(y) = \int_{x\in A} \Psi(x)\chi\left(t\left(xy\right)\right) dx,$$

para cada $y \in A$ o bien

$$\widehat{\Psi}(y) = \int\limits_{x \in \widetilde{\Gamma}} \chi\left(t\left(xy\right)\right) dx.$$

Observemos que si $y \in \widetilde{\Gamma}$, tenemos que $xy \in \widetilde{\Gamma}$ para toda $x \in \widetilde{\Gamma}$, de donde se puede ver que $\widehat{\Psi}(y) = \mu\left(\widetilde{\Gamma}\right)$ para toda $y \in \widetilde{\Gamma}$.

Podemos considerar $\mu\left(\Gamma\right) = 1$ y entonces

$$\mu\left(\widetilde{\Gamma}\right) = \left(\widetilde{\Gamma} : \Gamma\right),$$

por lo que $\widehat{\Psi}(y) = \left(\widetilde{\Gamma} : \Gamma\right)$ para toda $y \in \widetilde{\Gamma}$.

Por otro lado, sea $y = \left(y_H\right)_{H \in \mathcal{C}(G)}$ tal que $y \in A \diagdown \widetilde{\Gamma}$. Tenemos que existe $H \in \mathcal{C}(G)$ tal que $y_H = p^{-n} x_H$ para algún $x_H \in \mathbb{Z}_p$ y $n \in \mathbb{N}$. Consideremos el elemento $a = (0, ...0, 1, 0, ..., 0) \in A$ con el uno en la coordenada $H-$ésima. Tenemos que $t(ay) = y_H$, por lo que

$$\chi\left(t\left(xy\right)\right) \neq 1,$$

de donde con el cambio de variable $x \to a + x$ obtenemos:

$$\widehat{\Psi}(y) = \int\limits_{x \in \widetilde{\Gamma}} \chi\left(t\left(ay\right) + t\left(xy\right)\right) dx = \int\limits_{x \in \widetilde{\Gamma}} \chi\left(t\left(ay\right)\right) \chi\left(t\left(xy\right)\right) dx =$$

$$\chi\left(t\left(ay\right)\right) \int\limits_{x \in \widetilde{\Gamma}} \chi\left(t\left(xy\right)\right) dx,$$

lo cual implica que $\widehat{\Psi}(y) = \chi\left(t\left(ay\right)\right) \widehat{\Psi}(y)$ y puesto que $\chi\left(t\left(xy\right)\right) \neq 1$, entonces $\widehat{\Psi}(y) = 0$ para $y \in A \diagdown \widetilde{\Gamma}$, con lo cual queda demostrado este lema.

3.2.2. Teorema. Con la notación anterior de 3.2.1, tenemos que si M satisface la condición

$$(*) \quad \overline{M} = \alpha\{N : \Gamma\} \text{ para algún } \alpha \in A^*$$

entonces, se cumple la siguiente ecuación funcional:

$$\boldsymbol{\frac{Z_{\Gamma}(M;s)}{Z_{\Gamma}(N;1-s)} = \left[\frac{\mu^*(Aut_{\Gamma}N)\left(\overline{M}:\{N:\Gamma\}\right)^{1-s}(\Gamma:M)^{-s}(\Gamma:N)^{1-s}}{\mu^*(Aut_{\Gamma}M)\left(\widetilde{\Gamma}:\{M:\Gamma\}\right)}\right]\frac{\zeta_{\widetilde{\Gamma}}(s)}{\zeta_{\widetilde{\Gamma}}(1-s)}}.$$

Demostración. Sea dx una medida de Haar en A y d^*x una medida de Haar en A^*, de tal manera que si $E \subseteq A$ y $E' \subseteq A^*$, denotaremos a las medidas de E y de E' respectivamente por

$$\mu(E) = \int\limits_{E} dx$$

y

$$\mu^*(E') = \int\limits_{E'} d^*x.$$

Para esta demostración consideraremos la ecuación funcional dada en 1.4 para los casos especiales de $\Psi = \Phi_{\widetilde{\Gamma}}$ y $\Phi = \Phi_{\{M:\Gamma\}}$ las funciones características de $\widetilde{\Gamma}$ y del conductor de M en Γ respectivamente.

(i) Sea $\Psi(x) = \Phi_{\widetilde{\Gamma}}(x)$. Por definición tenemos que

$$(1) \qquad Z(\Psi;s) = \int\limits_{A^*} \Phi_{\widetilde{\Gamma}}(x)\,\|x\|_A^s\,d^*x.$$

Por otro lado sabemos que

$$(2) \qquad \zeta_{\widetilde{\Gamma}}(s) = \mu^*\left(\widetilde{\Gamma}^*\right)^{-1}\int\limits_{A^*} \Phi_{\widetilde{\Gamma}}(x)\,\|x\|_A^s\,d^*x.$$

Podemos considerar $\mu^*\left(\widetilde{\Gamma}^*\right) = 1$ lo cual implica que

$$\mu^*\left(\Gamma^*\right)^{-1} = \left(\widetilde{\Gamma}^* : \Gamma^*\right),$$

por lo que de (1) y (2) obtenemos

$$(3) \qquad Z(\Psi;s) = \zeta_{\widetilde{\Gamma}}(s).$$

Ahora consideremos la transformada de Fourier de Ψ. Sabemos que

$$(4) \qquad \widehat{\Psi}(y) = \int\limits_{x \in \widetilde{\Gamma}} \chi\left(t\left(xy\right)\right) dx,$$

para cada $y \in A$.

Del lema 1, tenemos que

$$(5) \qquad \widehat{\Psi}(x) = \left(\widetilde{\Gamma} : \Gamma\right) \Psi(x),$$

por lo que obtenemos que

$$Z(\widehat{\Psi}; s) = \left(\widetilde{\Gamma} : \Gamma\right) \int\limits_{A^*} \Psi(x) \left\|x\right\|_A^s d^*x,$$

obteniendo de (2) que

$$Z(\widehat{\Psi}; s) = \left(\widetilde{\Gamma} : \Gamma\right) \zeta_{\widetilde{\Gamma}}(s)$$

de donde:

$$(6) \qquad Z(\widehat{\Psi}; 1-s) = \left(\widetilde{\Gamma} : \Gamma\right) \zeta_{\widetilde{\Gamma}}(1-s).$$

Finalmente de (3) y (6) obtenemos:

$$(\mathrm{I}) \qquad \boldsymbol{\frac{Z(\Psi; s)}{Z(\widehat{\Psi}; 1-s)} = \left(\widetilde{\Gamma} : \Gamma\right)^{-1} \frac{\zeta_{\widetilde{\Gamma}}(s)}{\zeta_{\widetilde{\Gamma}}(1-s)}}.$$

(ii) Sea $\Phi(x) = \Phi_{\{M:\Gamma\}}(x)$, por definición tenemos:

$$Z(\Phi; s) = \int\limits_{A^*} \Phi_{\{M:\Gamma\}}(x) \left\|x\right\|_A^s d^*x.$$

Por otro lado sabemos que

$$(7) \qquad Z_\Gamma(M; s) = \mu^* \left(Aut_\Gamma M\right)^{-1} \left(\Gamma : M\right)^{-s} \int\limits_{A^*} \Phi_{\{M:\Gamma\}}(x) \left\|x\right\|_A^s d^*x,$$

obteniendo que:

$$(8) \qquad Z(\Phi; s) = \mu^* \left(Aut_\Gamma M\right) \left(\Gamma : M\right)^s Z_\Gamma(M; s).$$

Ahora consideremos la transformada de Fourier de Φ, dada por

$$\widehat{\Phi}(y) = \int\limits_{x\in A} \Phi_{\{M:\Gamma\}}(x)\chi\left(t\left(xy\right)\right)dx,$$

para cada $y \in A$ o bien

$$\widehat{\Phi}(y) = \int\limits_{x\in\{M:\Gamma\}} \chi\left(t\left(xy\right)\right)dx.$$

Tenemos que $\mu\left(\{M:\Gamma\}\right) = \left(\{M:\Gamma\}:\Gamma\right)$ y de manera similar a la demostración del lema 1, se puede ver que $\widehat{\Phi}(x) = \left(\{M:\Gamma\}:\Gamma\right)\Phi_{\overline{M}}(x)$. Por hipótesis obtenemos que $\widehat{\Phi}(x) = \left(\{M:\Gamma\}:\Gamma\right)\Phi_{\alpha\{N:\Gamma\}}(x)$, o bien

$$\widehat{\Phi}(x) = \left(\{M:\Gamma\}:\Gamma\right)\Phi_{\{N:\Gamma\}}(\alpha^{-1}x),$$

de donde obtenemos

$$Z(\widehat{\Phi};s) = \left(\{M:\Gamma\}:\Gamma\right)\int\limits_{A^*} \Phi_{\{N:\Gamma\}}(\alpha^{-1}x)\left\|x\right\|_A^s d^*x,$$

y entonces

$$Z(\widehat{\Phi};s) = \left(\{M:\Gamma\}:\Gamma\right)\left\|\alpha\right\|_A^s\int\limits_{A^*} \Phi_{\{N:\Gamma\}}(x)\left\|x\right\|_A^s d^*x,$$

por lo que de (7) obtenemos

$$Z(\widehat{\Phi};s) = \left(\{M:\Gamma\}:\Gamma\right)\left\|\alpha\right\|_A^s\mu^*\left(Aut_\Gamma N\right)\left(\Gamma:N\right)^s Z_\Gamma(N;s),$$

lo cual implica que:

$$(9)\qquad Z(\widehat{\Phi};1-s) =$$

$$\left(\{M:\Gamma\}:\Gamma\right)\left\|\alpha\right\|_A^{1-s}\mu^*\left(Aut_\Gamma N\right)\left(\Gamma:N\right)^{1-s} Z_\Gamma(N;1-s).$$

Finalmente de (8), (9) y puesto que

$$\left\|\alpha\right\|_A = \left(\overline{M}:\{N:\Gamma\}\right)$$

obtenemos:

$$(\mathrm{II})\qquad \frac{\boldsymbol{Z(\Phi;s)}}{\boldsymbol{Z(\widehat{\Phi};1-s)}} =$$

$$\left[\frac{\boldsymbol{\mu^*\left(Aut_\Gamma M\right)\left(\overline{M}:\{N:\Gamma\}\right)^{-1+s}(\Gamma:M)^s(\Gamma:N)^{-1+s}}}{\boldsymbol{\mu^*\left(Aut_\Gamma N\right)\left(\{M:\Gamma\}:\Gamma\right)}}\right]\frac{\boldsymbol{Z_\Gamma(M;s)}}{\boldsymbol{Z_\Gamma(M;1-s)}}.$$

Es claro que (I) y (II) más la ecuación funcional en 1.4.1 implican el resultado de este teorema.

■

3.2.3. Observación: (a) Recordemos el ejemplo visto en 2.1 de este trabajo, en el cual se estudió el caso de $\Gamma_1 = B_p(C_p)$. Sabemos que las únicas clases de isomorfismo de sus ideales fraccionales son $M_1 = \Gamma_1$ y su orden maximal $M_2 = \widetilde{\Gamma}_1$. Además, se tiene que $\{\Gamma_1 : \Gamma_1\} = \Gamma_1$ y $\left\{\widetilde{\Gamma}_1 : \Gamma_1\right\} = (p,p)\,\widetilde{\Gamma}_1$, por lo que tenemos lo siguiente:

1). Sea $\overline{M}_1 = \left\{(a,b) \in \mathbb{Q}_p^2 : t\left(x\left(a,b\right)\right) \in \mathbb{Z}_p \;\forall\; x \in \Gamma_1\right\}$.

Consideremos un elemento $(a,b) \in \mathbb{Q}_p^2$ tal que $(a,b) \in \overline{M}_1$. Al aplicar este elemento a una base de Γ_1 obtenemos

$$(0,p)\,(a,b) = (o,pb) \;\overset{t}{\to}\; pb \in \mathbb{Z}_p$$
$$(1,1)\,(a,b) = (a,b) \;\overset{t}{\to}\; a+b \in \mathbb{Z}_p$$

lo cual implica que $b \in p^{-1}\mathbb{Z}_p$ y $a = -b + c$ para algún $c \in \mathbb{Z}_p$. Es fácil ver

$$\overline{M}_1 = \left(p^{-1}, -p^{-1}\right)\Gamma_1,$$

o bien

$$\overline{M}_1 = \left(p^{-1}, -p^{-1}\right)\{\Gamma_1 : \Gamma_1\}.$$

2). Sea

$$\overline{M}_2 = \left\{(a,b) \in \mathbb{Q}_p^2 :\; t\left(x\left(a,b\right)\right) \in \mathbb{Z}_p \;\forall\; x \in (p,p)\,\widetilde{\Gamma}_1\right\}.$$

Consideremos un elemento $(a,b) \in \mathbb{Q}_p^2$ tal que $(a,b) \in \overline{M}_2$. Al aplicar este elemento a una base de $(p,p)\,\widetilde{\Gamma}_1$ obtenemos

$$(p,0)\,(a,b) = (pa,0) \;\overset{t}{\to}\; pa \in \mathbb{Z}_p$$
$$(0,p)\,(a,b) = (0,pb) \;\overset{t}{\to}\; pb \in \mathbb{Z}_p$$

lo cual implica que $a, b \in p^{-1}\mathbb{Z}_p$. Es fácil ver que

$$\overline{M}_2 = \left(p^{-1}, p^{-1}\right) \widetilde{\Gamma}_1,$$

o bien

$$\overline{M}_2 = \left(p^{-2}, p^{-2}\right) \left\{\widetilde{\Gamma}_1 : \Gamma_1\right\}.$$

Podemos observar que en este caso la condición (*) del teorema 3.2.2, se satisface para todas las clases de isomorfismo de los ideales fraccionales de Γ_1. Además las ecuaciones funcionales que se deducen del teorema 3.2.2 para este caso, son las dadas al final de 2.1

(b) Ahora recordemos el ejemplo visto en 2.2 de este trabajo, en el cual se estudió el caso de $\Gamma_2 = B_p\left(C_{p^2}\right)$ y para el cual se obtuvo que sus únicas clases de isomorfismo de sus ideales fraccionales son:

$M_1 = \Gamma_2$,
$M_2 = \widetilde{\Gamma}_2$,
$M_3 = \mathbb{Z}_p \bigoplus \Gamma_1$,
$M_4 = \Gamma_1 \bigoplus \mathbb{Z}_p$,
$M_5 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{Z}_p^3\text{:}\ (z - x) \in p\mathbb{Z}_p\right\}$,
$M_6 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{Z}_p^3\text{:}\ (y - x) \in p\mathbb{Z}_p, (z - y) \in p\mathbb{Z}_p\right\}$,
$M_7 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{Z}_p^3\text{:}\ (z - y) \in p^2\mathbb{Z}_p\right\}$,
$M_8 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{Z}_p^3\text{:}\ px - y + z \in p^2\mathbb{Z}_p\right\}$,
$M_9 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{Z}_p^3\text{:}\ x - y + z \in p\mathbb{Z}_p\right\}$, para los cuales se tiene:

1). Para M_i con $i = 2, 4, 5$ y 9, se tiene que

$$\{M_i : \Gamma_2\} = \left(p, p^2, p^2\right) M_2.$$

De lo anterior se tiene que:

$$\overline{M}_i = \left\{(a, b, c) \in \mathbb{Q}_p^3 :\ t\left(x\left(a, b, c\right)\right) \in \mathbb{Z}_p \ \forall\ x \in \left(p, p^2, p^2\right) M_2\right\}.$$

Ahora, consideremos un elemento $(a, b, c) \in \mathbb{Q}_p^3$ tal que $(a, b, c) \in \overline{M}_i$.

Al aplicar este elemento a una base de $\left(p,p^2,p^2\right)M_2$, obtenemos que

$$\begin{array}{rcl}
(p,0,0)(a,b,c)=(pa,0,0) & \overset{t}{\to} & pa\in\mathbb{Z}_p\\
\left(0,p^2,0\right)(a,b,c)=\left(0,p^2b,0\right) & \overset{t}{\to} & p^2b\in\mathbb{Z}_p\\
\left(0,0,p^2\right)(a,b,c)=\left(0,0,p^2c\right) & \overset{t}{\to} & p^2c\in\mathbb{Z}_p
\end{array}$$

lo cual implica que $a\in p^{-1}\mathbb{Z}_p$ y $b,c\in p^{-2}\mathbb{Z}_p$. Es fácil ver

$$\overline{M}_i=\left(p^{-1},p^{-2},p^{-2}\right)M_2,$$

o bien

$$\overline{M}_i=\left(p^{-2},p^{-4},p^{-4}\right)\{M_2:\Gamma_2\}.$$

2). Para M_j con $j=3,6,7$ y 8, se tiene que

$$\{M_j:\Gamma_2\}=(p,p,p)M_3.$$

De lo anterior tenemos:

$$\overline{M}_j=\left\{(a,b,c)\in\mathbb{Q}_p^3:\ t\left(x\left(a,b,c\right)\right)\in\mathbb{Z}_p\ \forall\ x\in(p,p,p)M_3\right\}.$$

Ahora, consideremos un elemento $(a,b,c)\in\mathbb{Q}_p^3$ tal que $(a,b,c)\in\overline{M}_j$. Al aplicar este elemento a una base de $(p,p,p)M_3$, obtenemos

$$\begin{array}{rcl}
(p,0,0)(a,b,c) & =(pa,0,0) \overset{t}{\to} & pa\in\mathbb{Z}_p\\
(0,p,p)(a,b,c) & =(0,pb,pc) \overset{t}{\to} & p\left(b+c\right)\in\mathbb{Z}_p\\
\left(0,0,p^2\right)(a,b,c) & =\left(0,0,p^2c\right) \overset{t}{\to} & p^2c\in\mathbb{Z}_p
\end{array}$$

lo cual implica que $a\in p^{-1}\mathbb{Z}_p$, $c\in p^{-2}\mathbb{Z}_p$ y $b=-c+p^{-1}b_1$ para algún $b_1\in\mathbb{Z}_p$. Es fácil ver que

$$\overline{M}_j=\left(p^{-1},p^{-2},-p^{-2}\right)M_3,$$

o bien

$$\overline{M}_j=\left(p^{-2},p^{-3},p^{-3}\right)\{M_3:\Gamma_2\}.$$

3). Para el caso M_1 se tiene que $\{M_1:\Gamma_2\}=M_1$.
Por lo que $\overline{M}_1=\left\{(a,b,c)\in\mathbb{Q}_p^3:\ t\left(x\left(a,b,c\right)\right)\in\mathbb{Z}_p\ \forall\ x\in M_1\right\}.$

Ahora, consideremos un elemento $(a,b,c) \in \mathbb{Q}_p^3$ tal que $(a,b,c) \in \overline{M}_1$. Al aplicar este elemento a una base de M_1 obtenemos

$$\begin{array}{llcr} (1,1,1)\,(a,b,c) & = (a,b,c) & \overset{t}{\rightarrow} & a+b+c \in \mathbb{Z}_p \\ (0,p,p)\,(a,b,c) & = (0,pb,pc) & \overset{t}{\rightarrow} & p\,(b+c) \in \mathbb{Z}_p \\ \left(0,0,p^2\right)(a,b,c) & = \left(0,0,p^2c\right) & \overset{t}{\rightarrow} & p^2c \in \mathbb{Z}_p \end{array}$$

lo cual implica que $c \in p^{-2}\mathbb{Z}_p$ y

$$b = -c + p^{-1}b_1$$

$$a = -p^{-1}b_1 + a_1$$

para algún $b_1 \in \mathbb{Z}_p$ y $a_1 \in \mathbb{Z}_p$, de donde es fácil ver:

$$\overline{M}_1 = \left(p^{-1}, -p^{-2}, p^{-2}\right) M_8.$$

De los tres puntos anteriores se puede ver que para M_k con $k = 2,3,...,9$, se cumple la condición (*). Además las ecuaciones funcionales deducidas del teorema 3.2.2, son las dadas al final de 2.2. Por otro lado, el caso M_1 no satisface la condición (*). De lo anterior deducimos que la condición (*) no es trivial ya que en general esta no se satisface para todas las clases de isomorfismo de los ideales fraccionales de $\Gamma = B_p(G)$. Sin embargo, si $\widetilde{\Gamma}$ es el orden maximal de Γ, este siempre es un representante en las clases de isomorfismo de los ideales fraccionales de Γ para todo grupo finito G, para el cual siempre se satisface la condición (*) como se muestra en la siguiente proposición.

3.2.4. Proposición. Sea G un grupo finito y $\Gamma = B_p(G)$ el anillo de Burnside de G. Sea $\widetilde{\Gamma} = \prod_{H\in\mathcal{C}(G)} \mathbb{Z}_p$ el orden maximal de Γ y sea $A = \prod_{H\in\mathcal{C}(G)} \mathbb{Q}_p$. Se cumple que:

$$\overline{\widetilde{\Gamma}} = \alpha^{-2}\left\{\widetilde{\Gamma} : \Gamma\right\}.$$

Demostración. Observemos que $\left\{\widetilde{\Gamma}:\Gamma\right\}$ es un $\widetilde{\Gamma}$-látiz, por lo que obtenemos que

$$\left\{\widetilde{\Gamma}:\Gamma\right\}=\alpha\widetilde{\Gamma},$$

para algún $\alpha\in A^{*}$. De lo anterior obtenemos:

$$\overline{\overline{\widetilde{\Gamma}}}=\left\{a\in A:\ t\left(xa\right)\in\mathbb{Z}_p\ \forall\ x\in\alpha\widetilde{\Gamma}\right\}.$$

Supongamos que $a\in\alpha^{-1}\widetilde{\Gamma}$. Tenemos que $xa\in\widetilde{\Gamma}$ para toda $x\in\alpha\widetilde{\Gamma}$, por lo que $t\left(xa\right)\in\mathbb{Z}_p$, de donde:

$$\alpha^{-1}\widetilde{\Gamma}\subseteq\overline{\overline{\widetilde{\Gamma}}}.$$

Ahora, supongamos que $b\in A\setminus\alpha^{-1}\widetilde{\Gamma}$. Tenemos que $\alpha b\notin\widetilde{\Gamma}$. Sea $\alpha b=\left(y_H\right)_{H\in\mathcal{C}(G)}$, entonces existe $H_0\in\mathcal{C}\left(G\right)$ tal que $y_{H_0}=p^{-n}x_{H_0}$ para $n\in\mathbb{N}$ y $x_{H_0}\in\mathbb{Z}_p$. Sea $e_{H_0}\in\widetilde{\Gamma}$ el elemento con coordenadas cero y un uno en la coordenada H_0-ésima, tenemos que $t\left(\alpha e_{H_0}b\right)=p^{-n}x_{H_0}\notin\mathbb{Z}_p$.

De lo anterior obtenemos

$$\overline{\overline{\widetilde{\Gamma}}}=\alpha^{-1}\widetilde{\Gamma},$$

o bien

$$\overline{\overline{\widetilde{\Gamma}}}=\alpha^{-2}\left\{\widetilde{\Gamma}:\Gamma\right\},$$

con lo cual concluimos esta demostración.

■

3.2.5. Ejemplo. Como un caso particular de la proposición 3.2.4, sea Γ_n el anillo de Burnside del grupo cíclico de orden p^n con $n\in\mathbb{N}$ y sea $\widetilde{\Gamma}_n$ su orden maximal. De 2.3 tenemos

$$\Gamma_n=\left\{(u_0,\ldots,u_n)\in\mathbb{Z}_p^{(n+1)}:\ (u_l-u_{l-1})\in p^l\mathbb{Z}_p\ \text{para}\ l=1,\ldots,n\right\}$$

y

$$\widetilde{\Gamma}_n=\mathbb{Z}_p^{(n+1)}.$$

Sea $a=(a_0,...,a_n)\in\left\{\widetilde{\Gamma}_n:\Gamma_n\right\}$ y sea $\{e_i:\ i=0,...,n\}$ la base canónica de $\widetilde{\Gamma}_n$. Tenemos que la condición

$$e_ia\in\Gamma_n,$$

implica que $a_i \in p^{i+1}\mathbb{Z}_p$ para $i = 0, ..., (n-1)$ y $a_n \in p^n\mathbb{Z}_p$. Es fácil ver

$$\left\{\widetilde{\Gamma}_n : \Gamma_n\right\} = \left(p, p^2, ..., p^{n-1}, p^n, p^n\right) \widetilde{\Gamma}_n,$$

por lo que de la demostración de 3.2.3, obtenemos:

$$\overline{\overline{\Gamma}}_n = \left(p^{-2}, p^{-4}, ..., p^{-2(n-1)}, p^{-2n}, p^{-2n}\right) \left\{\widetilde{\Gamma}_n : \Gamma_n\right\}.$$

Además, del teorema anterior se puede obtener la siguiente ecuación funcional

$$\frac{Z_{\Gamma_n}\left(\widetilde{\Gamma}_n; s\right)}{Z_{\Gamma_n}\left(\widetilde{\Gamma}_n; 1-s\right)} = \left[\frac{\left(\overline{\overline{\Gamma}}_n : \left\{\widetilde{\Gamma}_n : \Gamma_n\right\}\right)^{1-s} (\Gamma_n : \widetilde{\Gamma}_n)^{1-2s}}{(\widetilde{\Gamma}_n : \left\{\widetilde{\Gamma}_n : \Gamma_n\right\})}\right] \frac{\zeta_{\widetilde{\Gamma}_n}(s)}{\zeta_{\widetilde{\Gamma}_n}(1-s)},$$

de donde es fácil ver que:

$$\boldsymbol{\frac{Z_{\Gamma_n}\left(\widetilde{\Gamma}_n; s\right)}{Z_{\Gamma_n}\left(\widetilde{\Gamma}_n; 1-s\right)} = [p^n]^{1-2s} \frac{\zeta_{\widetilde{\Gamma}_n}(s)}{\zeta_{\widetilde{\Gamma}_n}(1-s)}}.$$

3.3. Ecuación funcional para $Z_{\Gamma_n}(\Gamma_n; s)$.

Sea $\Gamma_n = B_p(C_{p^n})$ el anillo de Burnside del grupo cíclico de orden p^n, para $2 \leq n \in \mathbb{N}$. Sea $\widetilde{\Gamma}_n = \mathbb{Z}_p^{n+1}$ el orden maximal de Γ_n y $A_n = \mathbb{Q}_p^{n+1}$. En lo siguiente consideraremos a d^*x como una medida de Haar en A_n^* tal que $d^*x = (d^*\alpha)^{n+1}$, en donde $d^*\alpha$ es una medida de Haar en $\mathbb{Q}_p^*$, la cual es tal que $\int_{\mathbb{Z}_p^*} d^*\alpha = 1$. De 2.3 sabemos que

$$\Gamma_n = \left\{(u_0, \ldots, u_n) \in \mathbb{Z}_p^{(n+1)} \colon\ (u_l - u_{l-1}) \in p^l\mathbb{Z}_p \text{ para } l = 1, \ldots, n\right\}$$

o bien

$$\Gamma_n =$$

$$\left\{(x_0, x_0 + px_1, \ldots, x_0 + px_1 + ... + p^n x_n) \in \mathbb{Z}_p^{(n+1)} \colon x_i \in \mathbb{Z}_p \,\forall\, i \in \mathbb{N}\right\}.$$

Además tenemos que Γ_n es local, de donde $\Gamma_n = \Gamma_n^* \biguplus rad\Gamma_n$.

Observemos que un elemento de la forma

$$(x_0, x_0 + px_1, \ldots, x_0 + px_1 + ... + p^n x_n)$$

es unidad de Γ_n si y sólo si $p \nmid x_0$. De lo anterior, se puede ver

$$rad\Gamma_n =$$

$$\left\{(px_0, px_0 + px_1, \ldots, px_0 + px_1 + ... + p^n x_n) \in \mathbb{Z}_p^{(n+1)} \colon x_i \in \mathbb{Z}_p \,\forall\, i \in \mathbb{N}\right\}$$

o bien,

$$rad\Gamma_n = (p, ..., p)\left[\mathbb{Z}_p \bigoplus \Gamma_{n-1}\right],$$

obteniendo que:

$$(10) \quad \Gamma_n = \Gamma_n^* \biguplus (p, ..., p)\left[\mathbb{Z}_p \bigoplus \Gamma_{n-1}\right].$$

Por otro lado tenemos que $End_{\Gamma_n}\Gamma_n = \Gamma_n$, ya que este es un orden, de donde $Aut_{\Gamma_n}\Gamma_n = \Gamma_n^*$. Además se puede ver que Γ_n^* es el kernel del siguiente morfismo

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\Gamma}_n^* & \rightarrow & (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* \times \left(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}\right)^* \times ... \times (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^* \\ (u_0, ..., u_n) & \rightarrow & \left(u_0^{-1}u_1, u_1^{-1}u_2, ..., u_{n-1}^{-1}u_n,\right) \end{array}$$

y puesto que podemos considerar $\mu^*\left(\widetilde{\Gamma}_n^*\right) = 1$, obtenemos

$$\mu^*\left(\Gamma_n^*\right)^{-1} = \prod_{i=1}^{n} \left|\left(\mathbb{Z}\diagup p^i\mathbb{Z}\right)^*\right|,$$

y por lo tanto:

$$\text{(11)} \quad \frac{\mu^*\left(\Gamma_n^*\right)^{-1}}{\mu^*\left(\Gamma_{n-1}^*\right)^{-1}} = \left|\left(\mathbb{Z}\diagup p^n\mathbb{Z}\right)^*\right| = p^{n-1}\left(p-1\right).$$

Recordemos que

$$Z_{\Gamma_n}\left(\Gamma_n; s\right) = \mu^*\left(\Gamma_n^*\right)^{-1} \int\limits_{A_n^*} \Phi_{\Gamma_n}\left(x\right) \left\|x\right\|_{A_n}^s d^*x,$$

de donde obtenemos lo siguiente:

$$\text{(12)} \quad \int\limits_{A_{n-1}^*} \Phi_{\Gamma_{n-1}}\left(y\right) \left\|y\right\|_{A_{n-1}}^s d^*y = \mu^*\left(\Gamma_{n-1}^*\right) Z_{\Gamma_{n-1}}\left(\Gamma_{n-1}; s\right).$$

Finalmente de (10), (11) y (12) obtenemos:

$$Z_{\Gamma_n}\left(\Gamma_n; s\right) =$$

$$\mu^*\left(\Gamma_n^*\right)^{-1}\left[\int\limits_{\Gamma_n^*} \left\|x\right\|_{A_n}^s d^*x + \int\limits_{A_n^* \bigcap (p,\ldots,p)\left[\mathbb{Z}_p \bigoplus \Gamma_{n-1}\right]} \left\|x\right\|_{A_n}^s d^*x\right] =$$

$$1 + \mu^*\left(\Gamma_n^*\right)^{-1} p^{-(n+1)s}\left[\int\limits_{\mathbb{Q}_p^* \bigcap \mathbb{Z}_p} \left\|\alpha\right\|_{\mathbb{Q}_p}^s d^*\alpha\right]\left[\int\limits_{A_{n-1}^* \bigcap \Gamma_{n-1}} \left\|y\right\|_{A_{n-1}}^s d^*y\right] =$$

$$1 + \frac{\mu^*\left(\Gamma_n^*\right)^{-1} p^{-(n+1)s}}{\mu^*\left(\Gamma_{n-1}^*\right)^{-1}\left(1-p^{-s}\right)} Z_{\Gamma_{n-1}}\left(\Gamma_{n-1}; s\right),$$

de donde:

$$\text{(13)} \quad Z_{\Gamma_n}\left(\Gamma_n; s\right) = 1 + \frac{\left(p-1\right) p^{-2} p^{(n+1)(1-s)}}{\left(1-p^{-s}\right)} Z_{\Gamma_{n-1}}\left(\Gamma_{n-1}; s\right).$$

Observemos que si $Z_{\Gamma_n}(\Gamma_n; s) = f_n(p^{-s})\,\zeta_{\widetilde{\Gamma}_n}(s)$, en donde $f_n(p^{-s})$ es un polinomio en $\mathbb{Z}[p^{-s}]$, de la relación anterior obtenemos que el grado de éste polinomio esta dado por

$$\partial\left(f_n\left(p^{-s}\right)\right) = (n+1) + \partial\left(f_{n-1}\left(p^{-s}\right)\right),$$

y puesto que $\partial(f_1(p^{-s})) = 2$, obtenemos que el grado del polinomio $f_n(p^{-s})$ es:

$$\partial\left(f_n\left(p^{-s}\right)\right) = \sum_{i=2}^{n+1} i = \frac{n(n+3)}{2}. \tag{14}$$

Por otro lado, al aplicar (13) a Γ_{n-1} y sustituyendo el resultado en (13), obtenemos

$$Z_{\Gamma_n}(\Gamma_n; s) =$$

$$1 + \frac{(p-1)\,p^{-2}p^{(n+1)(1-s)}}{(1-p^{-s})}\left[1 + \frac{(p-1)\,p^{-2}p^{(n)(1-s)}}{(1-p^{-s})} Z_{\Gamma_{n-2}}(\Gamma_{n-2}; s)\right],$$

ahora, aplicando este razonamiento para Γ_{n-2} y así sucesivamente hasta llegar a Γ_1, obtenemos:

$$Z_{\Gamma_n}(\Gamma_n; s) =$$

$$\sum_{i=0}^{n-2}\left[\frac{(p-1)\,p^{-2}}{(1-p^{-s})}\right]^i \left(p^{1-s}\right)^{\frac{\left(2ni-i^2+3i\right)}{2}} + \left[\frac{(p-1)\,p^{-2}}{(1-p^{-s})}\right]^{n-1}\left(p^{1-s}\right)^{\frac{\left(n^2+3n-4\right)}{2}} Z_{\Gamma_1}(\Gamma_1; s).$$

De 2.1 sabemos que

$$Z_{\Gamma_1}(\Gamma_1; s) = 1 + \frac{(p-1)\,p^{-2s}}{(1-p^{-s})^2},$$

de donde

$$Z_{\Gamma_n}(\Gamma_n; s) = \tag{15}$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}\left[\frac{(p-1)\,p^{-2}}{(1-p^{-s})}\right]^i \left(p^{1-s}\right)^{\frac{\left(2ni-i^2+3i\right)}{2}} + \left[(p-1)\,p^{-2}\right]^n \left(p^{1-s}\right)^{\frac{\left(n^2+3n\right)}{2}} \zeta_{\widetilde{\Gamma}_n}(s),$$

o bien si se prefiere tenemos la expresión:

$$Z_{\Gamma_n}(\Gamma_n; s) = \tag{16}$$

$$\left\{\sum_{i=0}^{n-1}\left[\frac{(p-1)\,p^{-2}}{(1-p^{-s})}\right]^{i}\left(1-p^{-s}\right)^{n+1}\left(p^{1-s}\right)^{\frac{\left(2ni-i^{2}+3i\right)}{2}}+\left[(p-1)\,p^{-2}\right]^{n}\left(p^{1-s}\right)^{\frac{\left(n^{2}+3n\right)}{2}}\right\}\zeta_{\widetilde{\Gamma}_n}(s).$$

Finalmente de (15) se obtiene la siguiente ecuación funcional para $Z_{\Gamma_n}(\Gamma_n; s)$:

$$\boldsymbol{\frac{Z_{\Gamma_n}(\Gamma_n;s)-\sum_{i=0}^{n-1}\left[\frac{(p-1)p^{-2}}{\left(1-p^{-s}\right)}\right]^{i}\left(p^{1-s}\right)^{\frac{\left(2ni-i^{2}+3i\right)}{2}}}{Z_{\Gamma_n}(\Gamma_n;1-s)-\sum_{i=0}^{n-1}\left[\frac{(p-1)p^{-2}}{\left(1-p^{-1+s}\right)}\right]^{i}\left(p^{s}\right)^{\frac{\left(2ni-i^{2}+3i\right)}{2}}}=\left(p^{1-2s}\right)^{\frac{n(n+3)}{2}}\frac{\zeta_{\widetilde{\Gamma}_n}(s)}{\zeta_{\widetilde{\Gamma}_n}(1-s)}}.$$

Capítulo 4

Ecuación Funcional para $L_{B_p(G)}(M,s,\psi)$.

Dentro de este capítulo estudiaremos las ecuaciones funcionales que satisfacen las funciones L para el anillo de Burnside, en el caso local.

En la sección 4.1, definiremos la función L y veremos algunas de sus propiedades.

En la sección 4.2, estudiaremos funciones L en el anillo de Burnside, para grupos cíclicos de orden p^n.

En la sección 4.3, mencionaremos una generalización de la ecuación funcional dada en 1.4.1 para funciones de Schwartz-Bruhat.

En la sección 4.4 veremos el teorema principal de este capítulo en 4.4.2, en el cual daremos la ecuación funcional que satisface la función L del anillo de Burnside de un grupo finito G. Además daremos algunos ejemplos.

En la sección 4.5 calcularemos una ecuación funcional para $L_{\Gamma_n}(\Gamma_n,s,\psi)$.

4.1. La función L.

Sea A una $\mathbb{Q}_p$-álgebra semisimple de dimensión finita en el campo de los números p-ádicos. Sea Γ un $\mathbb{Z}_p$-orden en A, con el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Q}_p & - & A \\ | & & | \\ \mathbb{Z}_p & - & \Gamma \end{array}$$

Sean M, X ideales izquierdos de índice finito en Γ. Sea $\psi : A^* \to S^1$ un carácter continuo de orden finito y trivial en $Aut_\Gamma M$. Definimos la L-función local como sigue:

$$L_\Gamma(M, s, \psi) = \sum_{\substack{X \leq \Gamma \\ X \cong M}} \psi(X) (\Gamma : X)^{-s},$$

en donde ψ esta definida por $\psi(X) = \psi(x)$ para cualquier $x \in A^*$, tal que $X = Mx$.

Recordemos que la norma

$$\|x\| = (Xx : X)$$

es multiplicativa. Además $\|x\| = 1$ siempre que x pertenezca a las unidades de algún $\mathbb{Z}_p$-orden en A. Sea d^*x una medida de Haar en A^*.

Se puede ver que

$$L_\Gamma(M, s, \psi) = \mu(Aut_\Gamma M)^{-1} (\Gamma : M)^{-s} \int_{A^*} \Phi_{\{M:\Gamma\}}(x) \psi(x) \|x\|^s d^*x.$$

Para más información sobre la función L y los detalles de este último resultado, ver [**5**].

4.2. Funciones L en $B_p\left(C_{p^n}\right)$.

4.2.1. Funciones L en $B_p\left(C_p\right)$.

Sea $\Gamma_1 = B_p\left(C_p\right)$ el anillo de Burnside del grupo cíclico de orden p.

De la sección 2.1 de este trabajo, sabemos que dentro de $\widetilde{\Gamma}_1$ podemos ver a

$$\Gamma_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{Z}_p^2\colon\ (x-y) \in p\mathbb{Z}_p\right\} \subseteq \widetilde{\Gamma}_1,$$

para el cual, las únicas clases de isomorfismo de sus ideales fraccionales de índice finito son

$$\Gamma_1 \text{ y } \widetilde{\Gamma}_1.$$

Observación. En lo siguiente, sea d^*x una medida de Haar en $\left(\mathbb{Q}_p^*\right)^2$ tal que $d^*x = \left(d^*\alpha\right)^2$, en donde $d^*\alpha$ es una medida de Haar en $\mathbb{Q}_p^*$, la cual es tal que $\int_{\mathbb{Z}_p^*} d^*\alpha = 1$, por lo que

$$\mu^*\left(\widetilde{\Gamma}_1^*\right) = 1.$$

Sea $\psi = \left(\psi_{t_1}, \psi_{t_2}\right) : \mathbb{Q}_p^2 \to S^1$ un carácter continuo de orden finito y trivial en $\left(\mathbb{Z}_p^*\right)^2$, en donde

$$\psi_t : \mathbb{Q}_p \to S^1$$

es tal que $\psi_t\left(p\right) = \exp\left(\frac{2\pi i}{t}\right)$, para t un entero positivo y además

$$\psi\left(a,b\right) = \psi_{t_1}\left(a\right)\psi_{t_2}\left(b\right).$$

Sabemos que $\widetilde{\Gamma}_1 = \mathbb{Z}_p^2$. Por definición tenemos que

$$L_{\widetilde{\Gamma}_1}\left(\widetilde{\Gamma}_1, s, \psi\right) =$$

$$\mu\left(Aut_{\widetilde{\Gamma}_1}\widetilde{\Gamma}_1\right)^{-1}\left(\widetilde{\Gamma}_1 : \widetilde{\Gamma}_1\right)^{-s} \int\limits_{\left(\mathbb{Q}_p^*\right)^2} \Phi_{\left\{\widetilde{\Gamma}_1 : \widetilde{\Gamma}_1\right\}}\left(x\right)\psi(x)\left\|x\right\|_{\mathbb{Q}_p^2}^s d^*x$$

de donde

$$L_{\widetilde{\Gamma}_1}\left(\widetilde{\Gamma}_1, s, \psi\right) =$$

$$\mu\left(\widetilde{\Gamma}_1^*\right)^{-1} \int\limits_{\left(\mathbb{Q}_p^*\right)^2} \Phi_{\widetilde{\Gamma}_1}\left(x\right)\psi(x)\left\|x\right\|_{\mathbb{Q}_p}^s d^*x = \int\limits_{\mathbb{Z}_p^2 \setminus \{0\}} \psi(x)\left\|x\right\|_{\mathbb{Q}_p^2}^s d^*x =$$

$$\left[\int\limits_{\biguplus_{n=0}^{\infty} p^n\mathbb{Z}_p^*} \psi_{t_1}(\alpha)\,\|\alpha\|_{\mathbb{Q}_p}^s\, d^*\alpha\right]\left[\int\limits_{\biguplus_{m=o}^{\infty} p^m\mathbb{Z}_p^*} \psi_{t_2}(\alpha)\,\|\alpha\|_{\mathbb{Q}_p}^s\, d^*\alpha\right] =$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left[\psi_{t_1}(p)p^{-s}\right]^n\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty}\left[\psi_{t_2}(p)p^{-s}\right]^m\right),$$

obteniendo que

$$\boldsymbol{L_{\widetilde{\Gamma}_1}\left(\widetilde{\Gamma}_1, s, \psi\right) = \frac{1}{\left(1-\psi_{t_1}(p)p^{-s}\right)\left(1-\psi_{t_2}(p)p^{-s}\right)}}.$$

1). De 2.1 sabemos que $\Gamma_1 = \Gamma_1^* \biguplus (p\mathbb{Z}_p)^2$, además de que

a) $Aut_{\Gamma_1}\Gamma_1 = \Gamma_1^*$,
b) $\mu\left(\Gamma_1^*\right)^{-1} = p-1$ y
c) $\{\Gamma_1 : \Gamma_1\} = \Gamma_1$.

Por lo que para Γ_1 tenemos que

$$L_{\Gamma_1}\left(\Gamma_1, s, \psi\right) =$$

$$\mu\left(Aut_{\Gamma_1}\Gamma_1\right)^{-1}\left(\Gamma_1 : \Gamma_1\right)^{-s}\int\limits_{\left(\mathbb{Q}_p^*\right)^2} \Phi_{\{\Gamma_1:\Gamma_1\}}(x)\,\psi(x)\,\|x\|_{\mathbb{Q}_p^2}^s d^*x =$$

$$(p-1)\int\limits_{\left[\Gamma_1^*\biguplus(p\mathbb{Z}_p)^2\right]\setminus\{0\}} \psi(x)\,\|x\|_{\mathbb{Q}_p^2}^s d^*x =$$

$$1+(p-1)\left[\int\limits_{\biguplus_{n=1}^{\infty} p^n\mathbb{Z}_p^*} \psi_{t_1}(\alpha)\,\|\alpha\|_{\mathbb{Q}_p}^s\, d^*\alpha\right]\left[\int\limits_{\biguplus_{m=1}^{\infty} p^m\mathbb{Z}_p^*} \psi_{t_2}(\alpha)\,\|\alpha\|_{\mathbb{Q}_p}^s\, d^*\alpha\right] =$$

$$1+\frac{(p-1)\,\psi_{t_1}(p)\psi_{t_2}(p)p^{-2s}}{\left(1-\psi_{t_1}(p)p^{-s}\right)\left(1-\psi_{t_2}(p)p^{-s}\right)}$$

de donde

$$\boldsymbol{L_{\Gamma_1}\left(\Gamma_1, s, \psi\right) =}$$

$$\left[\mathbf{1}-\boldsymbol{\psi_{t_1}(p)p^{-s}}-\boldsymbol{\psi_{t_2}(p)p^{-s}}+\boldsymbol{\psi_{t_1}(p)\psi_{t_2}(p)p^{1-2s}}\right]\boldsymbol{L_{\widetilde{\Gamma}_1}\left(\widetilde{\Gamma}_1,s,\psi\right)}.$$

Veamos algunos casos particulares:

$\boldsymbol{t_1}$	$\boldsymbol{\psi_{t_1}(p)}$	$\boldsymbol{t_2}$	$\boldsymbol{\psi_{t_2}(p)}$	$\boldsymbol{L_{\Gamma_1}(\Gamma_1,s,\psi)}$	$\boldsymbol{L_{\widetilde{\Gamma}_1}\left(\widetilde{\Gamma}_1,s,\psi\right)}$
2	-1	2	-1	$\frac{1+2p^{-s}+p^{1-2s}}{(1+p^{-s})^2}$	$\frac{1}{(1+p^{-s})^2}$
2	-1	4	i	$\frac{1+p^{-s}-ip^{-s}-ip^{1-2s}}{(1+p^{-s})(1-ip^{-s})}$	$\frac{1}{(1+p^{-s})(1-ip^{-s})}$
4	i	4	i	$\frac{1-2ip^{-s}-p^{1-2s}}{(1-ip^{-s})^2}$	$\frac{1}{(1-ip^{-s})^2}$

Podemos observar que

$$L_{\Gamma_1}\left(\Gamma_1,1-s,\overline{\psi}\right)=$$

$$\left[1-\psi_{t_1}^{-1}(p)p^{-1+s}-\psi_{t_2}^{-1}(p)p^{-1+s}+\psi_{t_1}^{-1}(p)\psi_{t_2}^{-1}(p)p^{-1+2s}\right]L_{\widetilde{\Gamma}_1}\left(\widetilde{\Gamma}_1,1-s,\overline{\psi}\right),$$

por lo que se satisface la siguiente relación:

$$\frac{\boldsymbol{L_{\Gamma_1}(\Gamma_1,s,\psi)}}{\boldsymbol{L_{\Gamma_1}\left(\Gamma_1,1-s,\overline{\psi}\right)}}=\left[\boldsymbol{\psi_{t_1}(p)\psi_{t_2}(p)p^{1-2s}}\right]\frac{\boldsymbol{L_{\widetilde{\Gamma}_1}\left(\widetilde{\Gamma}_1,s,\psi\right)}}{\boldsymbol{L_{\widetilde{\Gamma}_1}\left(\widetilde{\Gamma}_1,1-s,\overline{\psi}\right)}}.$$

2). De 2.1 para $\widetilde{\Gamma}_1$ sabemos lo siguiente:

a) $Aut_{\Gamma_1}\widetilde{\Gamma}_1=\widetilde{\Gamma}_1{}^*$,
b) $\left\{\widetilde{\Gamma}_1:\Gamma_1\right\}=(p\mathbb{Z}_p)^2$ y
c) $\left(\widetilde{\Gamma}_1:\Gamma_1\right)=p$.

De los tres incisos anteriores tenemos que

$$L_{\Gamma_1}\left(\widetilde{\Gamma}_1,s,\psi\right)=$$

$$\mu\left(Aut_{\Gamma_1}\widetilde{\Gamma}_1\right)^{-1}\left(\Gamma_1:\widetilde{\Gamma}_1\right)^{-s}\int\limits_{\left(\mathbb{Q}_p^*\right)^2}\Phi_{\left\{\widetilde{\Gamma}_1:\Gamma_1\right\}}(x)\,\psi(x)\,\|x\|_{\mathbb{Q}_p^2}^s d^*x=$$

$$p^s \int\limits_{(p\mathbb{Z}_p)^2 \diagdown \{0\}} \psi(x) \left\|x\right\|_{\mathbb{Q}_p^2}^s d^*x =$$

$$\psi_{t_1}(p)\psi_{t_2}(p)p^{-s} \int\limits_{(\mathbb{Z}_p)^2 \diagdown \{0\}} \psi(x) \left\|x\right\|_{\mathbb{Q}_p^2}^s d^*x$$

de donde

$$\boldsymbol{L_{\Gamma_1}\left(\widetilde{\Gamma}_1, s, \psi\right) = \left[\psi_{t_1}(p)\psi_{t_2}(p)p^{-s}\right] L_{\widetilde{\Gamma}_1}\left(\widetilde{\Gamma}_1, s, \psi\right)}.$$

Veamos algunos casos particulares:

$\boldsymbol{t_1}$	$\boldsymbol{\psi_{t_1}(p)}$	$\boldsymbol{t_2}$	$\boldsymbol{\psi_{t_2}(p)}$	$\boldsymbol{L_{\Gamma_1}\left(\widetilde{\Gamma}_1, s, \psi\right)}$	$\boldsymbol{L_{\widetilde{\Gamma}_1}\left(\widetilde{\Gamma}_1, s, \psi\right)}$
2	-1	2	-1	$\frac{p^{-s}}{(1+p^{-s})^2}$	$\frac{1}{(1+p^{-s})^2}$
2	-1	4	i	$\frac{-ip^{-s}}{(1+p^{-s})(1-ip^{-s})}$	$\frac{1}{(1+p^{-s})(1-ip^{-s})}$
4	i	4	i	$\frac{-p^{-s}}{(1-ip^{-s})^2}$	$\frac{1}{(1-ip^{-s})^2}$

Podemos observar que

$$L_{\Gamma_1}\left(\widetilde{\Gamma}_1, 1-s, \overline{\psi}\right) = \left[\psi_{t_1}^{-1}(p)\psi_{t_2}^{-1}(p)p^{-1+s}\right] L_{\widetilde{\Gamma}_1}\left(\widetilde{\Gamma}_1, 1-s, \overline{\psi}\right),$$

por lo que se satisface la siguiente relación:

$$\frac{L_{\Gamma_1}\left(\widetilde{\Gamma}_1, s, \psi\right)}{L_{\Gamma_1}\left(\widetilde{\Gamma}_1, 1-s, \overline{\psi}\right)} = \left[\psi_{t_1}^2(p)\psi_{t_2}^2(p)p^{1-2s}\right] \frac{L_{\widetilde{\Gamma}_1}\left(\widetilde{\Gamma}_1, s, \psi\right)}{L_{\widetilde{\Gamma}_1}\left(\widetilde{\Gamma}_1, 1-s, \overline{\psi}\right)}.$$

4.2.2. Funciones L en $B_p(C_{p^2})$.

Sea $\Gamma_2 = B_p(C_{p^2})$ el anillo de Burnside del grupo cíclico de orden p^2.

De la sección 2.2 de este trabajo, sabemos que dentro de $\widetilde{\Gamma}_2$ podemos ver a

$$\Gamma_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{Z}_p^3 \colon \ (y-x) \in p\mathbb{Z}_p,\ (z-y) \in p^2\mathbb{Z}_p\right\} \subseteq \widetilde{\Gamma}_2,$$

para el cual, las únicas clases de isomorfismo de sus ideales fraccionales de índice finito son:

$M_1 = \Gamma_2,$
$M_2 = \widetilde{\Gamma}_2,$
$M_3 = \mathbb{Z}_p \bigoplus \Gamma_1,$
$M_4 = \Gamma_1 \bigoplus \mathbb{Z}_p,$
$M_5 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{Z}_p^3 \colon\ (z-x) \in p\mathbb{Z}_p\right\},$
$M_6 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{Z}_p^3 \colon\ (y-x) \in p\mathbb{Z}_p, (z-y) \in p\mathbb{Z}_p\right\},$
$M_7 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{Z}_p^3 \colon\ (z-y) \in p^2\mathbb{Z}_p\right\},$
$M_8 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{Z}_p^3 \colon px - y + z \in p^2\mathbb{Z}_p\right\},$
$M_9 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{Z}_p^3 \colon x - y + z \in p\mathbb{Z}_p\right\},$

Observación. En lo siguiente, sea d^*x una medida de Haar en $\left(\mathbb{Q}_p^*\right)^3$ tal que $d^*x = (d^*\alpha)^3$, en donde $d^*\alpha$ es una medida de Haar en $\mathbb{Q}_p^*$, la cual es tal que $\int_{\mathbb{Z}_p^*} d^*\alpha = 1$, por lo que

$$\mu^*\left(\widetilde{\Gamma}_2^*\right) = 1.$$

Sea $\psi = (\psi_{t_1}, \psi_{t_2}, \psi_{t_3}) : \mathbb{Q}_p^3 \to S^1$ un carácter continuo de orden finito y trivial en $\left(\mathbb{Z}_p^*\right)^3$, en donde

$$\psi_t : \mathbb{Q}_p \to S^1$$

es tal que$\psi_t(p) = \exp\left(\frac{2\pi i}{t}\right)$, para t un entero positivo y además

$$\psi(a,b,c) = \psi_{t_1}(a)\,\psi_{t_2}(b)\,\psi_{t_3}(c).$$

Sabemos que $\widetilde{\Gamma}_2 = \mathbb{Z}_p^3$. Por definición tenemos que

$$L_{\widetilde{\Gamma}_2}\left(\widetilde{\Gamma}_2, s, \psi\right) =$$

$$\mu\left(Aut_{\widetilde{\Gamma}_2}\widetilde{\Gamma}_2\right)^{-1}\left(\widetilde{\Gamma}_2:\widetilde{\Gamma}_2\right)^{-s}\int\limits_{\left(\mathbb{Q}_p^*\right)^3}\Phi_{\left\{\widetilde{\Gamma}_2:\widetilde{\Gamma}_2\right\}}(x)\,\psi(x)\,\|x\|_{\mathbb{Q}_p^3}^s d^*x$$

de donde

$$L_{\widetilde{\Gamma}_2}\left(\widetilde{\Gamma}_2,s,\psi\right)=$$

$$\mu\left(\widetilde{\Gamma}_2^*\right)^{-1}\int\limits_{\left(\mathbb{Q}_p^*\right)^3}\Phi_{\widetilde{\Gamma}_2}(x)\,\psi(x)\,\|x\|_{\mathbb{Q}_p^3}^s\,d^*x=\int\limits_{\mathbb{Z}_p^3\setminus\{0\}}\psi(x)\,\|x\|_{\mathbb{Q}_p^3}^s\,d^*x=$$

$$\prod_{k=1}^3\left[\int\limits_{\biguplus_{n_k=0}^\infty p^{n_k}\mathbb{Z}_p^*}\psi_{t_k}(\alpha)\,\|\alpha\|_{\mathbb{Q}_p}^s\,d^*\alpha\right]=\prod_{k=1}^3\left(\sum_{n_k=0}^\infty\left[\psi_{t_k}(p)p^{-s}\right]^{n_k}\right),$$

obteniendo que

$$L_{\widetilde{\Gamma}_2}\left(\widetilde{\Gamma}_2,s,\psi\right)=\frac{1}{\left(1-\psi_{t_1}(p)p^{-s}\right)\left(1-\psi_{t_2}(p)p^{-s}\right)\left(1-\psi_{t_3}(p)p^{-s}\right)}.$$

1). De 2.2 para Γ_2 tenemos lo siguiente:
a) $\Gamma_2=\Gamma_2^*\biguplus\left(p\mathbb{Z}_p\bigoplus p\Gamma_1\right)$
b) $Aut_{\Gamma_2}\Gamma_2=\Gamma_2^*$ y $\mu^*\left(\Gamma_2^*\right)^{-1}=p(p-1)^2$.
c) $\{\Gamma_2:\Gamma_2\}=\Gamma_2$.
De los tres incisos anteriores tenemos:

$$L_{\Gamma_2}\left(\Gamma_2,s,\psi\right)=$$

$$\mu\left(Aut_{\Gamma_2}\Gamma_2\right)^{-1}\left(\Gamma_2:\Gamma_2\right)^{-s}\int\limits_{\left(\mathbb{Q}_p^*\right)^3}\Phi_{\{\Gamma_2:\Gamma_2\}}(x)\,\psi(x)\,\|x\|_{\mathbb{Q}_p^3}^s d^*x=$$

$$p(p-1)^2\int\limits_{\left(\mathbb{Q}_p^*\right)^3\bigcap\left[\Gamma_2^*\biguplus\left(p\mathbb{Z}_p\bigoplus p\Gamma_1\right)\right]}\psi(x)\,\|x\|_{\mathbb{Q}_p^3}^s d^*x=$$

$$1+p(p-1)^2\psi_{t_1}(p)\psi_{t_2}(p)\psi_{t_3}(p)p^{-3s}\left(\int\limits_{\left(\mathbb{Q}_p^*\right)^3\bigcap\left(\mathbb{Z}_p\bigoplus\Gamma_1\right)}\psi(x)\,\|x\|_{\mathbb{Q}_p^3}^s d^*x\right)=$$

$$1+\left(\frac{p(p-1)^2\psi_{t_1}(p)\psi_{t_2}(p)\psi_{t_3}(p)p^{-3s}}{\left(1-\psi_{t_1}(p)p^{-s}\right)}\right)\left(\frac{1-\left(\psi_{t_2}(p)+\psi_{t_3}(p)\right)p^{-s}+\psi_{t_2}(p)\psi_{t_3}(p)p^{1-2s}}{(p-1)\left(1-\psi_{t_2}(p)p^{-s}\right)\left(1-\psi_{t_3}(p)p^{-s}\right)}\right)=$$

$$\boldsymbol{\left[1-\left(\sum_{\nu=1}^{3}\psi_{t_\nu}(p)\right)p^{-s}+\left(\psi_{t_1}(p)\psi_{t_2}(p)+\psi_{t_1}(p)\psi_{t_3}(p)+\psi_{t_2}(p)\psi_{t_3}(p)\right)p^{-2s}+\right.}$$
$$\boldsymbol{\left(\prod_{\nu=1}^{3}\psi_{t_\nu}(p)\right)\left(p^2-p-1\right)p^{-3s}+\left(\prod_{\nu=1}^{3}\psi_{t_\nu}(p)\right)\left(\psi_{t_2}(p)+\psi_{t_3}(p)\right)\left(p-p^2\right)p^{-4s}+}$$
$$\boldsymbol{\left.\psi_{t_1}(p)\psi_{t_2}^2(p)\psi_{t_3}^2(p)\left(p^3-p^2\right)p^{-5s}\right]L_{\widetilde{\Gamma}_2}\left(\widetilde{\Gamma}_2,s,\psi\right)}.$$

Veamos un par de casos particulares:

$\boldsymbol{t_k}$	$\psi_{\mathbf{t_k}}(\mathbf{p})$	$\mathbf{L}_{\boldsymbol{\Gamma_2}}\left(\boldsymbol{\Gamma_2},\mathbf{s},\psi\right)$
2	-1	$\frac{1+3p^{-s}+3p^{-2s}-\left(p^2-p-1\right)p^{-3s}+2\left(p-p^2\right)p^{-4s}-\left(p^3-p^2\right)p^{-5s}}{\left(1+p^{-s}\right)^3}$
4	i	$\frac{1-3ip^{-s}-3p^{-2s}-i\left(p^2-p-1\right)p^{-3s}+2\left(p-p^2\right)p^{-4s}+i\left(p^3-p^2\right)p^{-5s}}{\left(1-ip^{-s}\right)^3}$.

2). De 2.2 para $\widetilde{\Gamma}_2$ tenemos lo siguiente:
a) $Aut_{\Gamma_2}\widetilde{\Gamma}_2=\widetilde{\Gamma}_2^*$ y $\mu\left(\widetilde{\Gamma}_2^*\right)^{-1}=1$.
b) $\left\{\widetilde{\Gamma}_2:\Gamma_2\right\}=\left(p,p^2,p^2\right)\widetilde{\Gamma}_2$.
c) $\left(\widetilde{\Gamma}_2:\Gamma_2\right)=p^3$.
De los tres incisos anteriores obtenemos:

$$L_{\Gamma_2}\left(\widetilde{\Gamma}_2,s,\psi\right)=$$

$$\mu\left(Aut_{\Gamma_2}\widetilde{\Gamma}_2\right)^{-1}\left(\Gamma_2:\widetilde{\Gamma}_2\right)^{-s}\int\limits_{A^*}\Phi_{\left\{\widetilde{\Gamma}_2:\Gamma_2\right\}}(x)\,\psi(x)\,\|x\|_{\mathbb{Q}_p^3}^s d^*x=$$

$$p^{3s}\int\limits_{\left(\mathbb{Q}_p^*\right)^3\bigcap\left(p,p^2,p^2\right)\widetilde{\Gamma}_2}\psi(x)\,\|x\|_{\mathbb{Q}_p^3}^s d^*x=$$

$$\psi_{t_1}(p)\psi_{t_2}^2(p)\psi_{t_3}^2(p)p^{-2s}\int\limits_{\left(\mathbb{Q}_p^*\right)^3\bigcap\widetilde{\Gamma}_2}\psi(x)\,\|x\|_{\mathbb{Q}_p^3}^s d^*x,$$

obteniendo que

$$\boldsymbol{L_{\Gamma_2}\left(\widetilde{\Gamma}_2, s, \psi\right) = \left[\psi_{t_1}(p)\psi_{t_2}^2(p)\psi_{t_3}^2(p)p^{-2s}\right] L_{\widetilde{\Gamma}_2}\left(\widetilde{\Gamma}_2, s, \psi\right)}.$$

Veamos un par de casos particulares:

$\boldsymbol{t_k}$	$\psi_{\mathbf{t_k}}(\mathbf{p})$	$\mathbf{L_{\Gamma_2}\left(\widetilde{\Gamma}_2, s, \psi\right)}$
2	-1	$\frac{-p^{-2s}}{(1+p^{-s})^3}$
4	i	$\frac{ip^{-2s}}{(1-ip^{-s})^3}$.

Podemos observar que

$$L_{\Gamma_2}\left(\widetilde{\Gamma}_2, 1-s, \overline{\psi}\right) = \left[\psi_{t_1}^{-1}(p)\psi_{t_2}^{-2}(p)\psi_{t_3}^{-2}(p)p^{-2+2s}\right] L_{\widetilde{\Gamma}_2}\left(\widetilde{\Gamma}_2, 1-s, \overline{\psi}\right),$$

por lo que se satisface la siguiente relación:

$$\boldsymbol{\frac{L_{\Gamma_2}\left(\widetilde{\Gamma}_2, s, \psi\right)}{L_{\Gamma_2}\left(\widetilde{\Gamma}_2, 1-s, \overline{\psi}\right)} = \left[\psi_{t_1}^2(p)\psi_{t_2}^4(p)\psi_{t_3}^4(p)p^{2-4s}\right] \frac{L_{\widetilde{\Gamma}_2}\left(\widetilde{\Gamma}_2, s, \psi\right)}{L_{\widetilde{\Gamma}_2}\left(\widetilde{\Gamma}_2, 1-s, \overline{\psi}\right)}}.$$

3). De 2.2 para $M_3 = \mathbb{Z}_p \bigoplus \Gamma_1$ tenemos lo siguiente:
a) $Aut_{\Gamma_2}M_3 = M_3^*$ y $\mu^*\left(M_3^*\right)^{-1} = p-1$.
b) $\{M_3 : \Gamma_2\} = (p,p,p)\, M_3$.
c) $(M_3 : \Gamma_2) = p^2$.

De los tres incisos anteriores obtenemos:

$$\boldsymbol{L_{\Gamma_2}\left(M_3, s, \psi\right) =}$$

$$\mu\left(Aut_{\Gamma_2}M_3\right)^{-1}\left(\Gamma_2 : M_3\right)^{-s} \int\limits_{A^*} \Phi_{\{M_3:\Gamma_2\}}(x)\, \psi(x)\, \|x\|_{\mathbb{Q}_p^3}^s d^*x =$$

$$(p-1)p^{2s} \int\limits_{\left(\mathbb{Q}_p^*\right)^3 \bigcap (p,p,p)M_3} \psi(x)\, \|x\|_{\mathbb{Q}_p^3}^s d^*x =$$

$$(p-1)\psi_{t_1}(p)\psi_{t_2}(p)\psi_{t_3}(p)p^{-s}\int\limits_{\left(\mathbb{Q}_p^*\right)^3\bigcap M_3}\psi(x)\left\|x\right\|_{\mathbb{Q}_p^3}^s d^*x=$$

$$(p-1)\psi_{t_1}(p)\psi_{t_2}(p)\psi_{t_3}(p)p^{-s}\left(\frac{1-\left(\psi_{t_2}(p)+\psi_{t_3}(p)\right)p^{-s}+\psi_{t_2}(p)\psi_{t_3}(p)p^{1-2s}}{(p-1)\left(1-\psi_{t_1}(p)p^{-s}\right)\left(1-\psi_{t_2}(p)p^{-s}\right)\left(1-\psi_{t_3}(p)p^{-s}\right)}\right),$$

obteniendo que

$$\boldsymbol{L_{\Gamma_2}\left(M_3,s,\psi\right)=}$$

$$\boldsymbol{\left[\prod_{k=1}^{3}\psi_{t_k}(p)\right]p^{-s}\left[1-\left(\psi_{t_2}(p)+\psi_{t_3}(p)\right)p^{-s}+\psi_{t_2}(p)\psi_{t_3}(p)p^{1-2s}\right]L_{\widetilde{\Gamma}_2}\left(\widetilde{\Gamma}_2,s,\psi\right).}$$

Veamos un par de casos particulares:

$\boldsymbol{t_k}$	$\psi_{\mathbf{t_k}}(\mathbf{p})$	$\mathbf{L_{\Gamma_2}\left(M_3,s,\psi\right)}$
2	-1	$\frac{\left[-p^{-s}\left(1+2p^{-s}+p^{1-2s}\right)\right]}{\left(1+p^{-s}\right)^3}$
4	i	$\frac{\left[-ip^{-s}\left(1-2ip^{-s}-p^{1-2s}\right)\right]}{\left(1-ip^{-s}\right)^3}$.

Podemos observar que

$$L_{\Gamma_2}\left(M_3,1-s,\overline{\psi}\right)=$$

$$\left[\frac{p^{-1+s}}{\prod_{k=1}^{3}\psi_{t_k}(p)}\right]\left[1-\left(\psi_{t_2}^{-1}(p)+\psi_{t_3}^{-1}(p)\right)p^{-1+s}+\psi_{t_2}^{-1}(p)\psi_{t_3}^{-1}(p)p^{-1+2s}\right]L_{\widetilde{\Gamma}_2}\left(\widetilde{\Gamma}_2,1-s,\overline{\psi}\right),$$

por lo que se satisface la siguiente relación:

$$\boldsymbol{\frac{L_{\Gamma_2}\left(M_3,s,\psi\right)}{L_{\Gamma_2}\left(M_3,1-s,\overline{\psi}\right)}=\left[\psi_{t_1}^2(p)\psi_{t_2}^3(p)\psi_{t_3}^3(p)p^{2-4s}\right]\frac{L_{\widetilde{\Gamma}_2}\left(\widetilde{\Gamma}_2,s,\psi\right)}{L_{\widetilde{\Gamma}_2}\left(\widetilde{\Gamma}_2,1-s,\overline{\psi}\right)}}.$$

4). De 2.2 para $M_4 = \Gamma_1 \bigoplus \mathbb{Z}_p$ tenemos lo siguiente:
a) $Aut_{\Gamma_2} M_4 = M_4^*$ y $\mu^*\left(M_4^*\right)^{-1} = p-1$.
b) $\{M_4 : \Gamma_2\} = \left(p, p^2, p^2\right)\widetilde{\Gamma}_2$
c) $\left(M_4 : \Gamma_2\right) = p^2$.
De los tres incisos anteriores obtenemos:

$$\boldsymbol{L_{\Gamma_2}\left(M_4, s, \psi\right) =}$$

$$\mu\left(Aut_{\Gamma_2} M_4\right)^{-1}\left(\Gamma_2 : M_4\right)^{-s} \int\limits_{A^*} \Phi_{\{M_4:\Gamma_2\}}(x)\,\psi(x)\,\|x\|_{\mathbb{Q}_p^3}^s d^*x =$$

$$(p-1)p^{2s} \int\limits_{\left(\mathbb{Q}_p^*\right)^3 \bigcap (p,p^2,p^2)\widetilde{\Gamma}_2} \psi(x)\,\|x\|_{\mathbb{Q}_p^3}^s d^*x =$$

$$(p-1)\psi_{t_1}(p)\psi_{t_2}^2(p)\psi_{t_3}^2(p)p^{-3s}\left(\int\limits_{\left(\mathbb{Q}_p^*\right)^3 \bigcap \widetilde{\Gamma}_2} \psi(x)\,\|x\|_{\mathbb{Q}_p^3}^s d^*x\right),$$

obteniendo que

$$\boldsymbol{L_{\Gamma_2}\left(M_4, s, \psi\right) = \left[(p-1)\psi_{t_1}(p)\psi_{t_2}^2(p)\psi_{t_3}^2(p)p^{-3s}\right] L_{\widetilde{\Gamma}_2}\left(\widetilde{\Gamma}_2, s, \psi\right)}.$$

Veamos un par de casos particulares:

$\boldsymbol{t_k}$	$\psi_{\mathbf{t_k}}(\mathbf{p})$	$\mathbf{L_{\Gamma_2}\left(M_4, s, \psi\right)}$
2	-1	$\frac{\left[-(p-1)p^{-3s}\right]}{\left(1+p^{-s}\right)^3}$
4	i	$\frac{\left[(p-1)ip^{-3s}\right]}{\left(1-ip^{-s}\right)^3}$.

Podemos observar que

$$L_{\Gamma_2}\left(M_4, 1-s, \overline{\psi}\right) = \left[(p-1)\psi_{t_1}^{-1}(p)\psi_{t_2}^{-2}(p)\psi_{t_3}^{-2}(p)p^{-3+3s}\right] L_{\widetilde{\Gamma}_2}\left(\widetilde{\Gamma}_2, 1-s, \overline{\psi}\right),$$

por lo que se satisface la siguiente relación:

$$\frac{L_{\Gamma_2}(M_4,s,\psi)}{L_{\Gamma_2}\left(M_4,1-s,\overline{\psi}\right)}=\left[\psi_{t_1}^2(p)\psi_{t_2}^4(p)\psi_{t_3}^4(p)p^{3-6s}\right]\frac{L_{\widetilde{\Gamma}_2}\left(\widetilde{\Gamma}_2,s,\psi\right)}{L_{\widetilde{\Gamma}_2}\left(\widetilde{\Gamma}_2,1-s,\overline{\psi}\right)}.$$

5). De 2.2 para $M_5=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{Z}_p^3\colon\ (z-x)\in p\mathbb{Z}_p\right\}$ tenemos lo siguiente:

a) $Aut_{\Gamma_2}M_5=M_5^*$ y $\mu^*\left(M_5^*\right)^{-1}=p-1$.

b) $\{M_5:\Gamma_2\}=\left(p,p^2,p^2\right)\widetilde{\Gamma}_2$.

c) $(M_5:\Gamma_2)=p^2$.

De los tres incisos anteriores obtenemos:

$$\boldsymbol{L_{\Gamma_2}(M_5,s,\psi)=}$$

$$\mu\left(Aut_{\Gamma_2}M_5\right)^{-1}(\Gamma_2:M_5)^{-s}\int\limits_{A^*}\Phi_{\{M_5:\Gamma_2\}}(x)\,\psi(x)\,\|x\|_{\mathbb{Q}_p^3}^s d^*x=$$

$$(p-1)p^{2s}\int\limits_{\left(\mathbb{Q}_p^*\right)^3\bigcap(p,p^2,p^2)\widetilde{\Gamma}_2}\psi(x)\,\|x\|_{\mathbb{Q}_p^3}^s d^*x=$$

$$(p-1)\psi_{t_1}(p)\psi_{t_2}^2(p)\psi_{t_3}^2(p)p^{-3s}\left(\int\limits_{\left(\mathbb{Q}_p^*\right)^3\bigcap\widetilde{\Gamma}_2}\psi(x)\,\|x\|_{\mathbb{Q}_p^3}^s d^*x\right),$$

obteniendo que

$$\boldsymbol{L_{\Gamma_2}(M_5,s,\psi)=\left[(p-1)\psi_{t_1}(p)\psi_{t_2}^2(p)\psi_{t_3}^2(p)p^{-3s}\right]L_{\widetilde{\Gamma}_2}\left(\widetilde{\Gamma}_2,s,\psi\right).}$$

Veamos un par de casos particulares:

$\boldsymbol{t_k}$	$\psi_{\mathbf{t_k}}(\mathbf{p})$	$\mathbf{L_{\Gamma_2}(M_5,s,}\psi)$
2	-1	$\frac{\left[-(p-1)p^{-3s}\right]}{\left(1+p^{-s}\right)^3}$
4	i	$\frac{\left[(p-1)ip^{-3s}\right]}{\left(1-ip^{-s}\right)^3}$.

Podemos observar que

$$L_{\Gamma_2}\left(M_5, 1-s, \overline{\psi}\right) = \left[(p-1)\psi_{t_1}^{-1}(p)\psi_{t_2}^{-2}(p)\psi_{t_3}^{-2}(p)p^{-3+3s}\right] L_{\widetilde{\Gamma}_2}\left(\widetilde{\Gamma}_2, 1-s, \overline{\psi}\right),$$

por lo que se satisface la siguiente relación:

$$\boldsymbol{\frac{L_{\Gamma_2}\left(M_5, s, \psi\right)}{L_{\Gamma_2}\left(M_5, 1-s, \overline{\psi}\right)} = \left[\psi_{t_1}^2(p)\psi_{t_2}^4(p)\psi_{t_3}^4(p)p^{3-6s}\right] \frac{L_{\widetilde{\Gamma}_2}\left(\widetilde{\Gamma}_2, s, \psi\right)}{L_{\widetilde{\Gamma}_2}\left(\widetilde{\Gamma}_2, 1-s, \overline{\psi}\right)}}.$$

6). De 2.2 para $M_6 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{Z}_p^3: \quad (y-x), (z-y) \in p\mathbb{Z}_p\right\}$, tenemos lo siguiente:

a) $Aut_{\Gamma_2}(M_6) = M_6^*$ y $\mu^*(M_6^*)^{-1} = (p-1)^2$.

b) $\{M_6 : \Gamma_2\} = (p,p,p)\, M_3$.

c) $(M_6 : \Gamma_2) = p$.

De los tres incisos anteriores obtenemos:

$$\boldsymbol{L_{\Gamma_2}\left(M_6, s, \psi\right) =}$$

$$\mu\left(Aut_{\Gamma_2}M_6\right)^{-1}\left(\Gamma_2 : M_6\right)^{-s} \int_{A^*} \Phi_{\{M_6:\Gamma_2\}}(x)\, \psi(x)\, \|x\|_{\mathbb{Q}_p^3}^s d^*x =$$

$$(p-1)^2 p^s \int_{\left(\mathbb{Q}_{\{p\}}^*\right)^3 \bigcap (p,p,p)M_3} \psi(x)\, \|x\|_{\mathbb{Q}_p^3}^s d^*x =$$

$$(p-1)^2\psi_{t_1}(p)\psi_{t_2}(p)\psi_{t_3}(p)p^{-2s} \int_{\left(\mathbb{Q}_p^*\right)^3 \bigcap M_3} \psi(x)\, \|x\|_{\mathbb{Q}_p^3}^s d^*x =$$

$$(p-1)^2\psi_{t_1}(p)\psi_{t_2}(p)\psi_{t_3}(p)p^{-2s}\left(\frac{1-\left(\psi_{t_2}(p)+\psi_{t_3}(p)\right)p^{-s}+\psi_{t_2}(p)\psi_{t_3}(p)p^{1-2s}}{(p-1)\left(1-\psi_{t_1}(p)p^{-s}\right)\left(1-\psi_{t_2}(p)p^{-s}\right)\left(1-\psi_{t_3}(p)p^{-s}\right)}\right),$$

obteniendo que

$$\boldsymbol{L_{\Gamma_2}\left(M_6, s, \psi\right) =}$$

$$\boldsymbol{\left[\frac{(p-1)\prod_{k=1}^3 \psi_{t_k}(p)}{p^{2s}}\right]\left[1-\left(\psi_{t_2}(p)+\psi_{t_3}(p)\right)p^{-s}+\psi_{t_2}(p)\psi_{t_3}(p)p^{1-2s}\right] L_{\widetilde{\Gamma}_2}\left(\widetilde{\Gamma}_2, s, \psi\right)}.$$

Veamos un par de casos particulares:

$\boldsymbol{t_k}$	$\psi_{\mathbf{t_k}}(\mathbf{p})$	$\mathbf{L_{\Gamma_2}\left(M_6, s, \psi\right)}$
2	-1	$\frac{\left[-(p-1)p^{-2s}\left(1+2p^{-s}+p^{1-2s}\right)\right]}{\left(1+p^{-s}\right)^3}$
4	i	$\frac{\left[-i(p-1)p^{-2s}\left(1-2ip^{-s}-p^{1-2s}\right)\right]}{\left(1-ip^{-s}\right)^3}$.

Podemos observar que

$$L_{\Gamma_2}\left(M_6, 1-s, \overline{\psi}\right) =$$

$$\left[\frac{(p-1)\,p^{-2+2s}}{\prod_{k=1}^{3}\psi_{t_k}(p)}\right]\left[1-\left(\psi_{t_2}^{-1}(p)+\psi_{t_3}^{-1}(p)\right)p^{-1+s}+\psi_{t_2}^{-1}(p)\psi_{t_3}^{-1}(p)p^{-1+2s}\right]L_{\widetilde{\Gamma}_2}\left(\widetilde{\Gamma}_2, 1-s, \overline{\psi}\right),$$

por lo que se satisface la siguiente relación:

$$\boldsymbol{\frac{L_{\Gamma_2}\left(M_6, s, \psi\right)}{L_{\Gamma_2}\left(M_6, 1-s, \overline{\psi}\right)} = \left[\psi_{t_1}^2(p)\psi_{t_2}^3(p)\psi_{t_3}^3(p)p^{3-6s}\right]\frac{L_{\widetilde{\Gamma}_2}\left(\widetilde{\Gamma}_2, s, \psi\right)}{L_{\widetilde{\Gamma}_2}\left(\widetilde{\Gamma}_2, 1-s, \overline{\psi}\right)}}.$$

7). De 2.2 para el caso $M_7 = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{Z}_p^3: \quad (z-y)\in p^2\mathbb{Z}_p\right\}$, tenemos lo siguiente:

a) $Aut_{\Gamma_2}\left(M_7\right) = M_7^*$ y $\mu^*\left(M_7^*\right)^{-1} = p\left(p-1\right)$.

b) $\{M_7 : \Gamma_2\} = (p,p,p)\,M_3$.

c) $(M_7 : \Gamma_2) = p$.

De los tres incisos anteriores obtenemos:

$$\boldsymbol{L_{\Gamma_2}\left(M_7, s, \psi\right) =}$$

$$\mu\left(Aut_{\Gamma_2}M_7\right)^{-1}\left(\Gamma_2 : M_7\right)^{-s}\int\limits_{A^*}\Phi_{\{M_7:\Gamma_2\}}\left(x\right)\psi(x)\left\|x\right\|_{\mathbb{Q}_p^3}^s d^*x =$$

$$(p-1)pp^s\int\limits_{\left(\mathbb{Q}_p^*\right)^3\bigcap(p,p,p)M_3}\psi(x)\left\|x\right\|_{\mathbb{Q}_p^3}^s d^*x =$$

$$(p-1)\psi_{t_1}(p)\psi_{t_2}(p)\psi_{t_3}(p)p^{1-2s}\int\limits_{\left(\mathbb{Q}_p^*\right)^3\bigcap M_3}\psi(x)\left\|x\right\|_{\mathbb{Q}_p^3}^s d^*x =$$

$$(p-1)\psi_{t_1}(p)\psi_{t_2}(p)\psi_{t_3}(p)p^{1-2s}\left(\frac{1-\left(\psi_{t_2}(p)+\psi_{t_3}(p)\right)p^{-s}+\psi_{t_2}(p)\psi_{t_3}(p)p^{1-2s}}{(p-1)\left(1-\psi_{t_1}(p)p^{-s}\right)\left(1-\psi_{t_2}(p)p^{-s}\right)\left(1-\psi_{t_3}(p)p^{-s}\right)}\right),$$

obteniendo que

$$\boldsymbol{L_{\Gamma_2}\left(M_7, s, \psi\right) =}$$

$$\boldsymbol{\left[\prod_{k=1}^{3}\psi_{t_k}(p)\right]p^{1-2s}\left[1-\left(\psi_{t_2}(p)+\psi_{t_3}(p)\right)p^{-s}+\psi_{t_2}(p)\psi_{t_3}(p)p^{1-2s}\right]L_{\widetilde{\Gamma}_2}\left(\widetilde{\Gamma}_2, s, \psi\right).}$$

Veamos un par de casos particulares:

t_k	$\psi_{\mathbf{t_k}}(\mathbf{p})$	$\mathbf{L_{\Gamma_2}\left(M_7, s, \psi\right)}$
2	-1	$\frac{\left[-p^{1-2s}\left(1+2p^{-s}+p^{1-2s}\right)\right]}{\left(1+p^{-s}\right)^3}$
4	i	$\frac{\left[-ip^{1-2s}\left(1-2ip^{-s}-p^{1-2s}\right)\right]}{\left(1-ip^{-s}\right)^3}$.

Podemos observar que

$$L_{\Gamma_2}\left(M_7, 1-s, \overline{\psi}\right) =$$

$$\left[\frac{p^{-1+2s}}{\prod_{k=1}^{3}\psi_{t_k}(p)}\right]\left[1-\left(\psi_{t_2}^{-1}(p)+\psi_{t_3}^{-1}(p)\right)p^{-1+s}+\psi_{t_2}^{-1}(p)\psi_{t_3}^{-1}(p)p^{-1+2s}\right]L_{\widetilde{\Gamma}_2}\left(\widetilde{\Gamma}_2, 1-s, \overline{\psi}\right),$$

por lo que se satisface la siguiente relación:

$$\boldsymbol{\frac{L_{\Gamma_2}\left(M_7, s, \psi\right)}{L_{\Gamma_2}\left(M_7, 1-s, \overline{\psi}\right)} = \left[\psi_{t_1}^2(p)\psi_{t_2}^3(p)\psi_{t_3}^3(p)p^{3-6s}\right]\frac{L_{\widetilde{\Gamma}_2}\left(\widetilde{\Gamma}_2, s, \psi\right)}{L_{\widetilde{\Gamma}_2}\left(\widetilde{\Gamma}_2, 1-s, \overline{\psi}\right)}.}$$

8). De 2.2 para $M_8=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{Z}_p^3\colon px-y+z\in p^2\mathbb{Z}_p\right\}$ tenemos lo siguiente:

a) $Aut_{\Gamma_2}(M_8)=\Gamma_2^*$ y $\mu^*(\Gamma_2^*)^{-1}=p(p-1)^2$.

b) $\{M_8:\Gamma_2\}=(p,p,p)M_3$.

c) $(M_8:\Gamma_2)=p$.

De los tres incisos anteriores obtenemos:

$$\boldsymbol{L_{\Gamma_2}(M_8,s,\psi)=}$$

$$\mu\left(Aut_{\Gamma_2}M_8\right)^{-1}(\Gamma_2:M_8)^{-s}\int\limits_{A^*}\Phi_{\{M_8:\Gamma_2\}}(x)\,\psi(x)\,\|x\|_{\mathbb{Q}_p^3}^s d^*x=$$

$$(p-1)^2p^{1+s}\int\limits_{\left(\mathbb{Q}_p^*\right)^3\bigcap(p,p,p)M_3}\psi(x)\,\|x\|_{\mathbb{Q}_p^3}^s d^*x=$$

$$(p-1)^2\psi_{t_1}(p)\psi_{t_2}(p)\psi_{t_3}(p)p^{1-2s}\int\limits_{\left(\mathbb{Q}_p^*\right)^3\bigcap M_3}\psi(x)\,\|x\|_{\mathbb{Q}_p^3}^s d^*x=$$

$$(p-1)^2\left[\prod_{k=1}^3\psi_{t_k}(p)\right]p^{1-2s}\left(\frac{1-(\psi_{t_2}(p)+\psi_{t_3}(p))\,p^{-s}+\psi_{t_2}(p)\psi_{t_3}(p)p^{1-2s}}{(p-1)\left(1-\psi_{t_1}(p)p^{-s}\right)\left(1-\psi_{t_2}(p)p^{-s}\right)\left(1-\psi_{t_3}(p)p^{-s}\right)}\right),$$

obteniendo que

$$\boldsymbol{L_{\Gamma_2}(M_8,s,\psi)=}$$

$$\boldsymbol{\left[\frac{(p-1)\prod_{k=1}^3\psi_{t_k}(p)}{p^{-1+2s}}\right]\left[1-(\psi_{t_2}(p)+\psi_{t_3}(p))\,p^{-s}+\psi_{t_2}(p)\psi_{t_3}(p)p^{1-2s}\right]L_{\widetilde{\Gamma}_2}\left(\widetilde{\Gamma}_2,s,\psi\right).}$$

Veamos un par de casos particulares:

$\boldsymbol{t_k}$	$\psi_{\mathbf{t_k}}(\mathbf{p})$	$\mathbf{L}_{\boldsymbol{\Gamma_2}}(\mathbf{M_8},\mathbf{s},\psi)$
2	-1	$\frac{\left[-(p-1)p^{1-2s}\left(1+2p^{-s}+p^{1-2s}\right)\right]}{(1+p^{-s})^3}$
4	i	$\frac{\left[-i(p-1)p^{1-2s}\left(1-2ip^{-s}-p^{1-2s}\right)\right]}{(1-ip^{-s})^3}$.

Podemos observar que

$$L_{\Gamma_2}\left(M_8, 1-s, \overline{\psi}\right) =$$

$$\left[\frac{(p-1)\,p^{-1+2s}}{\prod_{k=1}^{3}\psi_{t_k}(p)}\right]\left[1-\left(\psi_{t_2}^{-1}(p)+\psi_{t_3}^{-1}(p)\right)p^{-1+s}+\psi_{t_2}^{-1}(p)\psi_{t_3}^{-1}(p)p^{-1+2s}\right]L_{\widetilde{\Gamma}_2}\left(\widetilde{\Gamma}_2, 1-s, \overline{\psi}\right),$$

por lo que se satisface la siguiente relación:

$$\boldsymbol{\frac{L_{\Gamma_2}\left(M_8, s, \psi\right)}{L_{\Gamma_2}\left(M_8, 1-s, \overline{\psi}\right)} = \left[\psi_{t_1}^2(p)\psi_{t_2}^3(p)\psi_{t_3}^3(p)p^{3-6s}\right]\frac{L_{\widetilde{\Gamma}_2}\left(\widetilde{\Gamma}_2, s, \psi\right)}{L_{\widetilde{\Gamma}_2}\left(\widetilde{\Gamma}_2, 1-s, \overline{\psi}\right)}.}$$

9). De 2.2 para el caso $M_9 = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{Z}_p^3:\quad x-y+z\in p\mathbb{Z}_p\right\}$, tenemos lo siguiente:

a) $Aut_{\Gamma_2}(M_9) = M_6^*$ y $\mu^*\left(M_6^*\right)^{-1} = (p-1)^2$.

b) $\{M_9:\Gamma_2\} = \left(p,p^2,p^2\right)\widetilde{\Gamma}_2$.

c) $(M_9:\Gamma_2) = p^2$.

De los tres incisos anteriores obtenemos:

$$\boldsymbol{L_{\Gamma_2}\left(M_9, s, \psi\right) =}$$

$$\mu\left(Aut_{\Gamma_2}M_9\right)^{-1}\left(\Gamma_2:M_9\right)^{-s}\int\limits_{A^*}\Phi_{\{M_9:\Gamma_2\}}(x)\,\psi(x)\,\|x\|_{\mathbb{Q}_p^3}^s d^*x =$$

$$(p-1)^2p^{2s}\int\limits_{\left(\mathbb{Q}_p^*\right)^3\bigcap(p,p^2,p^2)\widetilde{\Gamma}_2}\psi(x)\,\|x\|_{\mathbb{Q}_p^3}^s d^*x =$$

$$(p-1)^2\psi_{t_1}(p)\psi_{t_2}^2(p)\psi_{t_3}^2(p)p^{-3s}\left(\int\limits_{\left(\mathbb{Q}_p^*\right)^3\bigcap\widetilde{\Gamma}_2}\psi(x)\,\|x\|_{\mathbb{Q}_p^3}^s d^*x\right),$$

obteniendo que

$$\boldsymbol{L_{\Gamma_2}\left(M_9, s, \psi\right) = \left[(p-1)^2\psi_{t_1}(p)\psi_{t_2}^2(p)\psi_{t_3}^2(p)p^{-3s}\right]L_{\widetilde{\Gamma}_2}\left(\widetilde{\Gamma}_2, s, \psi\right).}$$

Veamos un par de casos particulares:

$\boldsymbol{t_k}$	$\psi_{\mathbf{t_k}}(\mathbf{p})$	$\mathbf{L}_{\boldsymbol{\Gamma}_\mathbf{2}}\left(\mathbf{M_9}, \mathbf{s}, \psi\right)$
2	-1	$\frac{\left[-(p-1)^2p^{-3s}\right]}{\left(1+p^{-s}\right)^3}$
4	i	$\frac{\left[i(p-1)^2p^{-3s}\right]}{\left(1-ip^{-s}\right)^3}$.

Podemos observar que

$$L_{\Gamma_2}\left(M_9, 1-s, \overline{\psi}\right) = \left[(p-1)^2\psi_{t_1}^{-1}(p)\psi_{t_2}^{-2}(p)\psi_{t_3}^{-2}(p)p^{-3+3s}\right] L_{\widetilde{\Gamma}_2}\left(\widetilde{\Gamma}_2, 1-s, \overline{\psi}\right),$$

por lo que se satisface la siguiente relación:

$$\frac{\boldsymbol{L_{\Gamma_2}\left(M_9, s, \psi\right)}}{\boldsymbol{L_{\Gamma_2}\left(M_9, 1-s, \overline{\psi}\right)}} = \boldsymbol{\left[\psi_{t_1}^2(p)\psi_{t_2}^4(p)\psi_{t_3}^4(p)p^{3-6s}\right]} \frac{\boldsymbol{L_{\widetilde{\Gamma}_2}\left(\widetilde{\Gamma}_2, s, \psi\right)}}{\boldsymbol{L_{\widetilde{\Gamma}_2}\left(\widetilde{\Gamma}_2, 1-s, \overline{\psi}\right)}}.$$

4.2.3. Observación. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $\Gamma_n = B_p\left(C_{p^n}\right)$ el anillo de Burnside del grupo cíclico de orden p^n. Recordemos que 2.3, proporciona un método recursivo para obtener los ideales de índice finito en el anillo de Burnside de $B_p\left(C_{p^n}\right)$ y con esto sus clases de isomorfismo, con lo cual, finalmente se pueden obtener las funciones L correspondientes.

4.3. Ecuación funcional para $Z(\Phi, s, \psi)$.

Sea A una $\mathbb{Q}_p$-álgebra simple de dimensión finita y sea C el centro de A. Sea θ un carácter no trivial y continuo del grupo aditivo de A, definido por

$$\theta(x) = exp\left(2\pi i\left(tr_{\frac{A}{\mathbb{Q}_p}} x\right)\right),$$

para $x \in A$ y $tr_{\frac{A}{\mathbb{Q}_p}} x = Tr_{\frac{C}{\mathbb{Q}_p}}\left(tr_{\frac{A}{C}} x\right)$. Sea Φ una función de Schwartz-Bruhat en A. Definimos $\widehat{\Phi}$ su transformada de Fourier con respecto a θ como

$$\widehat{\Phi}(y) = \int_A \Phi(x)\theta(xy)dx,$$

la cual resulta ser otra función de Schwartz-Bruhat en A, en donde dx es una medida de Haar en A.

Sea $\psi : A^* \to S^1$ un carácter continuo. Definimos la integral zeta de Φ como

$$Z(\Phi, s, \psi) = \int_{A^*} \Phi(x)\psi(x) \|x\|^s \, d^*x,$$

en donde A^* son las unidades de A y d^*x es una medida de Haar en A^*.

4.3.1. Teorema. Sean Φ y Ψ funciones de Schwartz-Bruhat en una $\mathbb{Q}_p$-álgebra simple de dimensión finita A. Sea $\psi : A^* \to S^1$ un carácter continuo y $\overline{\psi}$ su complejo conjugado. Tenemos que se satisface la siguiente ecuación funcional:

$$Z(\Phi, s, \psi)Z(\widehat{\Psi}, 1 - s, \overline{\psi}) = Z(\Psi, s, \psi)Z(\widehat{\Phi}, 1 - s, \overline{\psi}).$$

Para más información sobre la ecuación funcional para la función $Z(\Phi, s, \psi)$ y detalles de este teorema ver [**6**, Teorema 10.7].

4.4. Ecuación funcional para $L_{B_p(G)}(M,s,\psi)$.

4.4.1. Notación. Sea G un grupo finito. Sea $\Gamma = B_p(G)$ el anillo de Burnside de G y sea $\widetilde{\Gamma} = \prod_{H\in\mathcal{C}(G)} \mathbb{Z}_p$ su orden maximal. Sean M y N representantes en las clases de isomorfismo de los ideales fraccionales de índice finito en Γ y sea $\{M : \Gamma\}$ el conductor de M en Γ. Sea $A = \prod_{H\in\mathcal{C}(G)} \mathbb{Q}_p$ y sea $t : A \to \mathbb{Q}_p$, el mapeo tal que

$$t\left((y_H)_{H\in\mathcal{C}(G)}\right) = \sum_{H\in\mathcal{C}(G)} y_H,$$

para cada $(y_H)_{H\in\mathcal{C}(G)} \in A$. Tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} A & \overset{t}{\rightarrow} & \mathbb{Q}_p \\ | & & | \\ \Gamma \subseteq \widetilde{\Gamma} & \rightarrow & \mathbb{Z}_p. \end{array}$$

Denotaremos por

$$\overline{M} = \{a \in A : t(xa) \in \mathbb{Z}_p \quad \forall\, x \in \{M : \Gamma\}\}.$$

Ahora elijamos $\theta : \mathbb{Q}_p \to S^1$ como el carácter aditivo y continuo en $\mathbb{Q}_p$. Definimos $\theta(a) = \exp(2\pi i a_0)$, en donde a_0 es la parte principal de a, es decir, si $a = \frac{b_{-m}}{p^m} + ... + \frac{b_{-1}}{p} + b_0 + pb_1 + p^2 b_2 + ...$ entonces $a_0 = \frac{b_{-m}}{p^m} + ... + \frac{b_{-1}}{p}$. Observemos que θ resulta trivial en $\mathbb{Z}_p$, pero no en p^{-1}.

Dada una función de Zchwartz-Bruhat Φ definida en A, definimos su transformada de Fourier como:

$$\widehat{\Phi}(y) = \int_{x\in A} \Phi(x)\,\theta(t(xy))\,dx.$$

Lema 2. Dada la función característica $\Psi(x) = \Phi_{\widetilde{\Gamma}}(x)$. Tenemos que la transformada de Fourier de Ψ, es

$$\widehat{\Psi}(x) = \left(\widetilde{\Gamma} : \Gamma\right) \Psi(x).$$

Demostración. Por definición sabemos que

$$\widehat{\Psi}(y) = \int\limits_{x\in A} \Psi(x)\theta\left(t\left(xy\right)\right)dx,$$

para cada $y \in A$ o bien

$$\widehat{\Psi}(y) = \int\limits_{x\in\widetilde{\Gamma}} \theta\left(t\left(xy\right)\right)dx.$$

Observemos que si $y \in \widetilde{\Gamma}$, tenemos que $xy \in \widetilde{\Gamma}$ para toda $x \in \widetilde{\Gamma}$, de donde se puede ver que $\widehat{\Psi}(y) = \mu\left(\widetilde{\Gamma}\right)$ para toda $y \in \widetilde{\Gamma}$.

Podemos considerar $\mu\left(\Gamma\right) = 1$ y entonces

$$\mu\left(\widetilde{\Gamma}\right) = \left(\widetilde{\Gamma} : \Gamma\right),$$

por lo que $\widehat{\Psi}(y) = \left(\widetilde{\Gamma} : \Gamma\right)$ para toda $y \in \widetilde{\Gamma}$.

Por otro lado, sea $y = (y_H)_{H\in\mathcal{C}(G)}$ tal que $y \in A\diagdown\widetilde{\Gamma}$. Existe $H \in \mathcal{C}(G)$ tal que $y_H = p^{-n}x_H$ para algún $x_H \in \mathbb{Z}_p$ y $n \in \mathbb{N}$. Consideremos el elemento $a = (0,...0,1,0,...,0) \in A$, en donde el uno se encuentra en la coordenada $H-$ésima. Obtenemos que $t(ay) = y_H$, de donde

$$\theta\left(t\left(xy\right)\right) \neq 1.$$

Con el cambio de variable $x \to a + x$ obtenemos

$$\widehat{\Psi}(y) = \int\limits_{x\in\widetilde{\Gamma}} \theta\left(t\left(ay\right) + t\left(xy\right)\right)dx = \int\limits_{x\in\widetilde{\Gamma}} \theta\left(t\left(ay\right)\right)\theta\left(t\left(xy\right)\right)dx =$$

$$\theta\left(t\left(ay\right)\right)\int\limits_{x\in\widetilde{\Gamma}} \theta\left(t\left(xy\right)\right)dx,$$

de donde, $\widehat{\Psi}(y) = \theta\left(t\left(ay\right)\right)\widehat{\Psi}(y)$ y puesto que $\theta\left(t\left(xy\right)\right) \neq 1$, tenemos que $\widehat{\Psi}(y) = 0$ para $y \in A\diagdown\widetilde{\Gamma}$, con lo cual queda demostrado este lema.

4.4.2. Teorema. Con la notación anterior de 4.4.1, tenemos que si M satisface la condición

$$(*)\ \ \overline{M}=\alpha\left\{N:\Gamma\right\}\ \text{ para algún } \alpha\in A^*$$

entonces se cumple la siguiente ecuación funcional:

$$\boldsymbol{\frac{L_{\Gamma}\left(M,s,\psi\right)}{L_{\Gamma}\left(N,1-s,\overline{\psi}\right)}=\left[\frac{\mu^*\left(Aut_{\Gamma}N\right)\|\alpha\|^{1-s}\left(\Gamma:N\right)^{1-s}\overline{\psi}\left(\alpha\right)}{\mu^*\left(Aut_{\Gamma}M\right)\left(\widetilde{\Gamma}:\left\{M:\Gamma\right\}\right)\left(\Gamma:M\right)^s}\right]\frac{L_{\widetilde{\Gamma}}\left(\widetilde{\Gamma},s,\psi\right)}{L_{\widetilde{\Gamma}}\left(\widetilde{\Gamma},1-s,\overline{\psi}\right)}}.$$

Demostración. Sea $\psi:=A^*\to S^1$ un carácter continuo.

En lo siguiente consideraremos a dx como una medida de Haar en A y a d^*x como una medida de Haar en A^*. Sean $E\subseteq A$ y $E'\subseteq A^*$, denotaremos a las medidas de E y de E' respectivamente por

$$\mu(E)=\int\limits_{E}dx\quad\text{y}\quad\mu^*(E')=\int\limits_{E'}d^*x.$$

Para esta demostración consideraremos la ecuación funcional dada en 4.2 para los casos especiales de $\Psi=\Phi_{\widetilde{\Gamma}}$ y $\Phi=\Phi_{\{M:\Gamma\}}$, las funciones características de $\widetilde{\Gamma}$ y del conductor de M en Γ respectivamente.

(i) Sea $\Psi(x)=\Phi_{\widetilde{\Gamma}}(x)$, por definición tenemos que

$$(17)\qquad Z(\Psi,s,\psi)=\int\limits_{A^*}\Phi_{\widetilde{\Gamma}}(x)\psi(x)\left\|x\right\|_A^s d^*x.$$

Por otro lado sabemos:

$$(18)\qquad L_{\widetilde{\Gamma}}\left(\widetilde{\Gamma},s,\psi\right)=\mu^*\left(\widetilde{\Gamma}^*\right)^{-1}\int\limits_{A^*}\Phi_{\widetilde{\Gamma}}(x)\psi(x)\left\|x\right\|_A^s d^*x.$$

Podemos considerar $\mu^*\left(\widetilde{\Gamma}^*\right)=1$, lo cual implica que

$$\mu^*\left(\Gamma^*\right)^{-1}=\left(\widetilde{\Gamma}^*:\Gamma^*\right),$$

por lo que de (17) y (18) obtenemos

$$(19)\qquad Z(\Psi,s,\psi)=L_{\widetilde{\Gamma}}\left(\widetilde{\Gamma},s,\psi\right).$$

Ahora consideremos la transformada de Fourier de Ψ, dada por

$$\widehat{\Psi}(y)=\int\limits_{x\in A}\Psi(x)\theta\left(t\left(xy\right)\right)dx,$$

para cada $y\in A$ o bien

$$\widehat{\Psi}(y)=\int\limits_{x\in\widetilde{\Gamma}}\theta\left(t\left(xy\right)\right)dx. \tag{20}$$

Del Lema 2, tenemos que

$$\widehat{\Psi}(x)=\left(\widetilde{\Gamma}:\Gamma\right)\Psi(x), \tag{21}$$

por lo que obtenemos que

$$Z(\widehat{\Psi},s,\psi)=\left(\widetilde{\Gamma}:\Gamma\right)\int\limits_{A^*}\Psi(x)\psi(x)\left\|x\right\|_A^s d^*x,$$

obteniendo de (18) que

$$Z(\widehat{\Psi},s,\psi)=\left(\widetilde{\Gamma}:\Gamma\right)L_{\widetilde{\Gamma}}\left(\widetilde{\Gamma},s,\psi\right)$$

de donde:

$$Z(\widehat{\Psi},1-s,\overline{\psi})=\left(\widetilde{\Gamma}:\Gamma\right)L_{\widetilde{\Gamma}}\left(\widetilde{\Gamma},1-s,\overline{\psi}\right). \tag{22}$$

Finalmente de (19) y (22) tenemos que

$$\boldsymbol{\frac{Z(\Psi,s,\psi)}{Z(\widehat{\Psi},1-s,\overline{\psi})}=\left(\widetilde{\Gamma}:\Gamma\right)^{-1}\frac{L_{\widetilde{\Gamma}}\left(\widetilde{\Gamma},s,\psi\right)}{L_{\widetilde{\Gamma}}\left(\widetilde{\Gamma},1-s,\overline{\psi}\right)}}. \tag{III}$$

(ii) Sea $\Phi(x)=\Phi_{\{M:\Gamma\}}(x)$. Por definición tenemos:

$$Z(\Phi,s,\psi)=\int\limits_{A^*}\Phi_{\{M:\Gamma\}}(x)\psi(x)\left\|x\right\|_A^s d^*x.$$

Por otro lado sabemos que

$$L_\Gamma(M,s,\psi)=\mu^*\left(Aut_\Gamma M\right)^{-1}\left(\Gamma:M\right)^{-s}\int\limits_{A^*}\Phi_{\{M:\Gamma\}}(x)\psi(x)\left\|x\right\|_A^s d^*x, \tag{23}$$

y por lo tanto:

$$(24) \qquad Z(\Phi,s,\psi)=\mu^*\left(Aut_\Gamma M\right)(\Gamma:M)^s\,L_\Gamma(M,s,\psi).$$

Ahora consideremos la transformada de Fourier de Φ, dada por

$$\widehat{\Phi}(y)=\int\limits_{x\in A}\Phi_{\{M:\Gamma\}}(x)\theta\left(t\left(xy\right)\right)dx,$$

para cada $y\in A$ o bien

$$\widehat{\Phi}(y)=\int\limits_{x\in\{M:\Gamma\}}\theta\left(t\left(xy\right)\right)dx.$$

Tenemos que $\mu\left(\{M:\Gamma\}\right)=\left(\{M:\Gamma\}:\Gamma\right)$. De manera similar a la demostración del Lema 2, se puede ver que $\widehat{\Phi}(x)=\left(\{M:\Gamma\}:\Gamma\right)\Phi_{\widetilde{M}}(x)$. Además, por hipótesis obtenemos

$$\widehat{\Phi}(x)=\left(\{M:\Gamma\}:\Gamma\right)\Phi_{\alpha\{N:\Gamma\}}(x),$$

o bien

$$\widehat{\Phi}(x)=\left(\{M:\Gamma\}:\Gamma\right)\Phi_{\{N:\Gamma\}}(\alpha^{-1}x),$$

y entonces

$$Z(\widehat{\Phi},s,\psi)=\left(\{M:\Gamma\}:\Gamma\right)\int\limits_{A^*}\Phi_{\{N:\Gamma\}}(\alpha^{-1}x)\psi(x)\left\|x\right\|_A^s d^*x,$$

o bien:

$$Z(\widehat{\Phi},s,\psi)=\left(\{M:\Gamma\}:\Gamma\right)\left\|\alpha\right\|_A^s\psi(\alpha)\int\limits_{A^*}\Phi_{\{N:\Gamma\}}(x)\psi(x)\left\|x\right\|_A^s d^*x.$$

De (23) tenemos

$$Z(\widehat{\Phi},s,\psi)=\left(\{M:\Gamma\}:\Gamma\right)\left\|\alpha\right\|_A^s\psi(\alpha)\mu^*\left(Aut_\Gamma N\right)(\Gamma:N)^s\,L_\Gamma(N,s,\psi),$$

de donde:

$$(25) \qquad Z(\widehat{\Phi};1-s,\overline{\psi})=$$

$$\left(\{M:\Gamma\}:\Gamma\right)\left\|\alpha\right\|_A^{1-s}\overline{\psi}(\alpha)\mu^*\left(Aut_\Gamma N\right)(\Gamma:N)^{1-s}\,L_\Gamma(N,1-s,\overline{\psi}).$$

Finalmente de (24) y (25) obtenemos:

$$\text{(IV)}\quad \frac{\boldsymbol{Z(\Phi,s,\psi)}}{\boldsymbol{Z(\widehat{\Phi};1-s,\overline{\psi})}} =$$

$$\left[\frac{\boldsymbol{\mu^*\left(Aut_\Gamma M\right)\|\alpha\|^{-1+s}\left(\Gamma:M\right)^s\left(\Gamma:N\right)^{-1+s}}}{\boldsymbol{\mu^*\left(Aut_\Gamma N\right)\left(\{M:\Gamma\}:\Gamma\right)\overline{\psi}(\alpha)}}\right]\frac{\boldsymbol{L_\Gamma(M,s,\psi)}}{\boldsymbol{L_\Gamma(N,1-s,\overline{\psi})}}.$$

Es claro que (III) y (IV) más la ecuación funcional en 4.3.1 implican el resultado de este teorema.

■

4.4.3. Observación: La condición

$$(*)\quad \overline{M}=\alpha\left\{N:\Gamma\right\},$$

para algún $\alpha\in A^*$, es la misma que la dada en el teorema 3.2.2.

Por otro lado, de la observación 3.2.3 tenemos que:

(a) Para el caso de $\Gamma_1=B_p\left(C_p\right)$, tenemos que:

$$\overline{\Gamma}_1=\left(p^{-1},-p^{-1}\right)\left\{\Gamma_1:\Gamma_1\right\}.$$

$$\overline{\overline{\Gamma}}_1=\left(p^{-2},p^{-2}\right)\left\{\widetilde{\Gamma}_1:\Gamma_1\right\}.$$

De donde se puede ver que las ecuaciones funcionales que se deducen del teorema 4.4.2 para este caso, son las dadas en 4.2.1.

(b) Para el caso de $\Gamma_2=B_p\left(C_{p^2}\right)$, tenemos que:

$$\overline{M_i}=\left(p^{-2},p^{-4},p^{-4}\right)\left\{M_i:\Gamma_2\right\}\ \text{para } i=2,4,5,9.$$

$$\overline{M_J}=\left(p^{-2},p^{-3},p^{-3}\right)\left\{M_j:\Gamma_2\right\}\ \text{para } j=3,6,7,8.$$

De donde se puede ver que las ecuaciones funcionales que se deducen del teorema 4.4.2 para este caso, son las dadas en 4.2.2.

4.4.4. Ejemplo. Sea Γ_n en anillo de Burnside del grupo cíclico de orden p^n con $2 < n \in \mathbb{N}$ y sea $\widetilde{\Gamma}_n$ su orden maximal. Sea

$$\psi = \left(\psi_{t_1}, ..., \psi_{t_{n+1}}\right).$$

De 3.2.5 tenemos:

a) $\left(\widetilde{\Gamma}_n : \Gamma_n\right) = \prod_{k=1}^{n} p^k$.

b) $\left\{\widetilde{\Gamma}_n : \Gamma_n\right\} = \left(p, p^2, ..., p^{n-1}, p^n, p^n\right)\widetilde{\Gamma}_n$.

c) $\overline{\widetilde{\Gamma}}_n = \left(p^{-2}, p^{-4}, ..., p^{-2(n-1)}, p^{-2n}, p^{-2n}\right)\left\{\widetilde{\Gamma}_n : \Gamma_n\right\}$.

Además, del teorema 4.4.2, se puede obtener la siguiente ecuación funcional

$$\frac{L_{\Gamma_n}\left(\widetilde{\Gamma}_n, s, \psi\right)}{L_{\Gamma_n}\left(\widetilde{\Gamma}_n, 1-s, \overline{\psi}\right)} = \left[\frac{\|\alpha\|^{1-s}\left(\Gamma_n : \widetilde{\Gamma}_n\right)^{1-2s}\overline{\psi}\left(\alpha\right)}{\left(\widetilde{\Gamma}_n : \left\{\widetilde{\Gamma}_n : \Gamma_n\right\}\right)}\right]\frac{L_{\widetilde{\Gamma}_n}\left(\widetilde{\Gamma}_n, s, \psi\right)}{L_{\widetilde{\Gamma}_n}\left(\widetilde{\Gamma}_n, 1-s, \overline{\psi}\right)},$$

de donde es fácil ver que:

$$\boldsymbol{\frac{L_{\Gamma_n}\left(\widetilde{\Gamma}_n, s, \psi\right)}{L_{\Gamma_n}\left(\widetilde{\Gamma}_n, 1-s, \overline{\psi}\right)} = \left[\psi_{t_{n+1}}^{2n}\left(p\right)\prod_{k=1}^{n}\psi_{t_k}^{2k}\left(p\right)\right]\left[p^n\right]^{1-2s}\frac{L_{\widetilde{\Gamma}_n}\left(\widetilde{\Gamma}_n, s, \psi\right)}{L_{\widetilde{\Gamma}_n}\left(\widetilde{\Gamma}_n, 1-s, \overline{\psi}\right)}}.$$

4.5. Ecuación funcional para $L_{\Gamma_n}(\Gamma_n, s, \psi)$.

Sea $\Gamma_n = B_p(C_{p^n})$ el anillo de Burnside del grupo cíclico de orden p^n, para $2 \leq n \in \mathbb{N}$. Sea $\widetilde{\Gamma}_n = \mathbb{Z}_p^{n+1}$ el orden maximal de Γ_n y $A_n = \mathbb{Q}_p^{n+1}$. En lo siguiente consideraremos a d^*x como una medida de Haar en A_n^* tal que $d^*x = (d^*\alpha)^{n+1}$, en donde $d^*\alpha$ es una medida de Haar en $\mathbb{Q}_p^*$, la cual es tal que $\int_{\mathbb{Z}_p^*} d^*\alpha = 1$. Sea $\psi = \left(\psi_{t_1}, ..., \psi_{t_{n+1}}\right)$ y $\psi' = \left(\psi_{t_2}, ..., \psi_{t_{n+1}}\right)$.

De 3.3 sabemos que

a) $\Gamma_n = \Gamma_n^* \biguplus (p, ..., p)[\mathbb{Z}_p \bigoplus \Gamma_{n-1}]$.

b) $\mu^*(\Gamma_n^*)^{-1} = \prod_{i=1}^n \left|\left(\mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}\right)^*\right|$.

Además

$$L_{\Gamma_n}(\Gamma_n, s, \psi) = \mu^*(\Gamma_n^*)^{-1} \int\limits_{A_n^*} \Phi_{\Gamma_n}(x)\, \psi(x)\, \|x\|_{A_n}^s\, d^*x,$$

de donde obtenemos para $n-1$:

$$\int\limits_{A_{n-1}^*} \Phi_{\Gamma_{n-1}}(y)\, \psi(y)\, \|y\|_{A_{n-1}}^s\, d^*y = \mu^*(\Gamma_{n-1}^*)\, L_{\Gamma_{n-1}}(\Gamma_{n-1}, s, \psi),$$

y por consiguiente

$$L_{\Gamma_n}(\Gamma_n, s, \psi) =$$

$$\mu^*(\Gamma_n^*)^{-1}\left[\int\limits_{\Gamma_n^*} \psi(x)\, \|x\|_{A_n}^s\, d^*x + \int\limits_{A_n^* \bigcap (p,...,p)[\mathbb{Z}_p \bigoplus \Gamma_{n-1}]} \psi(x)\, \|x\|_{A_n}^s d^*x\right] =$$

$$1 + \frac{\left[\prod_{k=1}^{n+1} \psi_{t_k}(p)\right]}{\mu^*(\Gamma_n^*)\, p^{(n+1)s}}\left[\int\limits_{\mathbb{Q}_p^* \bigcap \mathbb{Z}_p} \psi_{t_1}(\alpha)\, \|\alpha\|_{\mathbb{Q}_p}^s\, d^*\alpha\right]\left[\int\limits_{A_{n-1}^* \bigcap \Gamma_{n-1}} \psi'(y)\, \|y\|_{A_{n-1}}^s\, d^*y\right] =$$

$$1 + \frac{\mu^*(\Gamma_n^*)^{-1}\left[\prod_{k=1}^{n+1} \psi_{t_k}(p)\right] p^{-(n+1)s}}{\mu^*\left(\Gamma_{n-1}^*\right)^{-1}(1 - \psi_{t_1}(p)\, p^{-s})} L_{\Gamma_{n-1}}(\Gamma_{n-1}, s, \psi'),$$

de donde finalmente tenemos que:

$$L_{\Gamma_n}(\Gamma_n, s, \psi) = 1 + \frac{(p-1)\left[\prod_{k=1}^{n+1} \psi_{t_k}(p)\right] p^{-2} p^{(n+1)(1-s)}}{(1-\psi_{t_1}(p)\, p^{-s})} L_{\Gamma_{n-1}}(\Gamma_{n-1}, s, \psi').$$

Aplicando el resultado anterior a Γ_{n-1} y sustituyendo el resultado en la expresión anterior obtenemos que

$$L_{\Gamma_n}(\Gamma_n, s, \psi) =$$

$$1 + \frac{(p-1)\left[\prod_{k=1}^{n+1} \psi_{t_k}(p)\right]}{(1-\psi_{t_1}(p)\, p^{-s})\, p^{2+(n+1)(-1+s)}} \left[1 + \frac{(p-1)\left[\prod_{k=2}^{n+1} \psi_{t_k}(p)\right]}{(1-\psi_{t_2}(p)\, p^{-s})\, p^{2+(n)(-1+s)}} L_{\Gamma_{n-2}}(\Gamma_{n-2}, s, \psi'')\right],$$

ahora, aplicando este razonamiento para Γ_{n-2} y así sucesivamente hasta llegar a Γ_1, obtenemos:

$$\boldsymbol{L_{\Gamma_n}(\Gamma_n, s, \psi) =}$$

$$1 + \sum_{j=1}^{n-2} \frac{\left[(p-1)\, p^{-2}\right]^j \left[\prod_{\nu=1}^{j} \prod_{k=\nu}^{n+1} \psi_{t_k}(p)\right]}{\left[\prod_{k=1}^{j} (1-\psi_{t_k}(p)\, p^{-s})\right]} \left(p^{1-s}\right)^{\frac{\left(2nj-j^2+3j\right)}{2}} +$$

$$\frac{\left[(p-1)\, p^{-2}\right]^{n-1} \left[\prod_{\nu=1}^{n-1} \prod_{k=\nu}^{n+1} \psi_{t_k}(p)\right]}{\left[\prod_{k=1}^{n-1} (1-\psi_{t_k}(p)\, p^{-s})\right]} \left(p^{1-s}\right)^{\frac{\left(n^2+3n-4\right)}{2}} L_{\Gamma_1}\left(\Gamma_1, s, \left(\psi_{t_n}, \psi_{t_{n+1}}\right)\right).$$

De 4.2.1 sabemos que

$$L_{\Gamma_1}\left(\Gamma_1, s, \left(\psi_{t_n}, \psi_{t_{n+1}}\right)\right) = 1 + \frac{(p-1)\, \psi_{t_n}(p)\, \psi_{t_{n+1}}(p)\, p^{-2s}}{(1-\psi_{t_n}(p)\, p^{-s})\left(1-\psi_{t_{n+1}}(p)\, p^{-s}\right)},$$

de donde

$$\boldsymbol{L_{\Gamma_n}(\Gamma_n, s, \psi) =}$$

$$1 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\left[(p-1)\, p^{-2}\right]^j \left[\prod_{\nu=1}^{j} \prod_{k=\nu}^{n+1} \psi_{t_k}(p)\right]}{\left[\prod_{k=1}^{j} (1-\psi_{t_k}(p)\, p^{-s})\right]} \left(p^{1-s}\right)^{\frac{\left(2nj-j^2+3j\right)}{2}} +$$

$$\frac{\left[(p-1)\,p^{-2}\right]^{n}\psi_{t_n}(p)\,\psi_{t_{n+1}}(p)\left[\prod_{\nu=1}^{n-1}\prod_{k=\nu}^{n+1}\psi_{t_k}(p)\right]}{\left[\prod_{k=1}^{n+1}\left(1-\psi_{t_k}(p)\,p^{-s}\right)\right]}\left(p^{1-s}\right)^{\frac{\left(n^2+3n\right)}{2}},$$

o bien

$$\boldsymbol{L_{\Gamma_n}\left(\Gamma_n, s, \psi\right) =}$$

$$1+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\left[(p-1)\,p^{-2}\right]^{j}\left[\prod_{\nu=1}^{j}\prod_{k=\nu}^{n+1}\psi_{t_k}(p)\right]}{\left[\prod_{k=1}^{j}\left(1-\psi_{t_k}(p)\,p^{-s}\right)\right]}\left(p^{1-s}\right)^{\frac{\left(2nj-j^2+3j\right)}{2}}+$$

$$\left[(p-1)\,p^{-2}\right]^{n}\psi_{t_n}^{n}(p)\,\psi_{t_{n+1}}^{n}(p)\left[\prod_{\nu=1}^{n-1}\prod_{k=\nu}^{n-1}\psi_{t_k}(p)\right]\left(p^{1-s}\right)^{\frac{\left(n^2+3n\right)}{2}}L_{\widetilde{\Gamma}_n}\left(\widetilde{\Gamma}_n, s, \psi\right).$$

Finalmente se obtiene la siguiente ecuación funcional para $Z_{\Gamma_n}(\Gamma_n; s)$:

$$\boldsymbol{\frac{L_{\Gamma_n}\left(\Gamma_n, s, \psi\right)-1-\sum_{j=1}^{n-1}\frac{(p-1)^{j}\left[\prod_{\nu=1}^{j}\prod_{k=\nu}^{n+1}\psi_{t_k}(p)\right]}{p^{2j}\left[\prod_{k=1}^{j}\left(1-\psi_{t_k}(p)p^{-s}\right)\right]}\left(p^{1-s}\right)^{\frac{\left(2nj-j^2+3j\right)}{2}}}{L_{\Gamma_n}\left(\Gamma_n, 1-s, \overline{\psi}\right)-1-\sum_{j=1}^{n-1}\frac{(p-1)^{j}\left[\prod_{\nu=1}^{j}\prod_{k=\nu}^{n+1}\psi_{t_k}^{-1}(p)\right]}{p^{2j}\left[\prod_{k=1}^{j}\left(1-\psi_{t_k}^{-1}(p)p^{-1-s}\right)\right]}\left(p^{s}\right)^{\frac{\left(2nj-j^2+3j\right)}{2}}} =}$$

$$\boldsymbol{\psi_{t_n}^{2n}(p)\,\psi_{t_{n+1}}^{2n}(p)\left[\prod_{\nu=1}^{n-1}\prod_{k=\nu}^{n-1}\psi_{t_k}^{2}(p)\right]\left(p^{1-2s}\right)^{\frac{n(n+3)}{2}}\frac{L_{\widetilde{\Gamma}_n}\left(\widetilde{\Gamma}_n, s, \psi\right)}{L_{\widetilde{\Gamma}_n}\left(\widetilde{\Gamma}_n, 1-s, \overline{\psi}\right)}.}$$

Capítulo 5

Funciones ζ en $B(G)$ para grupos S_n y A_n.

En este capítulo estudiaremos funciones zeta en el anillo de Burnside para grupos alternantes y de simetría en los casos local y global.

En la sección 5.1 estudiaremos las componentes solubles del anillo de Burnside.

En la sección 5.2 calcularemos la función zeta del anillo de Burnside para el grupo de simetría S_3.

En la sección 5.3 calcularemos la función zeta del anillo de Burnside para el grupo alternante A_4.

En la sección 5.4 calcularemos la función zeta del anillo de Burnside para el grupo alternante A_5.

En la sección 5.5 calcularemos la función zeta del anillo de Burnside para el grupo de simetría S_4, para el caso local $p = 3$.

5.1. Componentes solubles de $B_p(G)$.

Notación. Dado un subgrupo $H \leq G$ y $p \in \mathbb{Z}$ un primo racional, denotaremos por $O^p(H)$ al mínimo subgrupo normal $K \trianglelefteq H$, tal que H/K es p-grupo. En el caso particular de que $O^p(H) = H$ diremos que H es p-perfecto. Podemos observar que si $p \nmid |H|$, entonces H es p-perfecto.

Sea $N_G(H)$ el normalizador de H en G, denotaremos por $W_G(H) = N_G(H)/H$ al grupo de Weyl de H en G.

Por último, denotaremos por $e^p_{G,H}$ a los idempotentes primitivos de $B(G)$.

Con la notación anterior, podemos obtener de [**22**, teorema 3.1] en el caso particular cuando $\Pi = \{p\}$, la siguiente relación entre el anillo de Burnside $B_p(G)$ y sus componentes solubles

$$B_p(G) \cong \prod_{\substack{H \in \mathcal{C}(G) \\ O^p(H) = H}} B_p(W_G(H))e^p_{W_G(H),1} \tag{26}$$

en donde además, para cada componente soluble tenemos que

$$B_p(W_G(H))e^p_{W_G(H),1} = \bigoplus_{\substack{T \in \mathcal{C}(W_G(H)) \\ T - p \quad \text{grupo}}} \mathbb{Z}_p\left(W_G(H)/T\right). \tag{27}$$

En lo siguiente de este capítulo, utilizaremos estas dos expresiones para el cálculo de $B_p(G)$.

5.1.1. Proposición. Sea G un grupo tal que $p \| \, |G|$, es decir que p divide al orden de G pero p^2 no, tenemos que:

$$B_p(G)e^p_{G,1} \cong B_p\left(C_p\right).$$

Demostración. Sea P el p-subgrupo de Sylow de G, de (27) tenemos que

$$B_p(G)e^p_{G,1} = \mathbb{Z}_p\left(G/\langle 1\rangle\right)\bigoplus \mathbb{Z}_p\left(G/P\right),$$

en donde sabemos que $(G/\langle 1\rangle)(G/\langle 1\rangle) = |G|\,(G/\langle 1\rangle)$. Definamos:

$$a = \frac{p}{|G|}\left(G/\langle 1\rangle\right),$$

de donde tenemos que $a^2 = pa$, además podemos ver

$$\langle\left(G/\langle 1\rangle\right),\left(G/P\right)\rangle = \langle 1, a\rangle,$$

en donde $1 \in \langle\left(G/\langle 1\rangle\right),\left(G/P\right)\rangle$. Por último, observemos que

$$B_p\left(C_p\right) \cong \langle 1, a\rangle,$$

con lo cual queda demostrada esta proposición.

5.2. La función $\zeta_{B(S_3)}(s)$.

Sea S_3 el grupo de simetría de orden 6. Las clases de conjugación de los subgrupos de S_3 son

$$C(S_3) = \{1; \langle(12)\rangle \cong C_2; \langle(123)\rangle \cong C_3; S_3\},$$

en donde tenemos las siguientes contenciones:

$$\langle 1\rangle \trianglelefteq \begin{cases} C_2 \leq S_3 \\ \\ C_3 \trianglelefteq S_3. \end{cases}$$

Además tenemos:

$$\begin{array}{lll} O^2(1) \;\;= 1, & O^3(1) \;\;= 1, & W_{S_3}(1) \;\;= S_3/1 \;\;\cong S_3 \\ O^2(C_2) = 1, & O^3(C_2) = C_2, & W_{S_3}(C_2) = C_2/C_2 \cong 1 \\ O^2(C_3) = C_3, & O^3(C_3) = 1, & W_{S_3}(C_3) = S_3/C_3 \cong C_2 \\ O^2(S_3) = C_3, & O^2(S_3) = S_3, & W_{S_3}(S_3) = S_3/S_3 \cong 1 \end{array}$$

De (26) y de la tabla anterior, tenemos

$$B_2(S_3) = B_2(S_3)e^2_{s_3,1} \prod B_2(C_2)e^2_{C_2,1},$$

por lo que de la proposición 5.1.1 obtenemos que

$$B_2(S_3) = [B_2(C_2)]^2,$$

además del resultado obtenido en 2.1 para $p = 2$, obtenemos

$$\boldsymbol{\zeta_{B_2(S_3)}(s) = \left[1 - 2^{-s} + 2^{1-2s}\right]^2 \zeta^4_{\mathbb{Z}_2}(s)}, \tag{28}$$

para la cual podemos observar que se cumple la relación:

$$\frac{\zeta_{B_2(S_3)}(s)}{\zeta_{B_2(S_3)}(1-s)} = \left[2^{1-2s}\right]^2 \frac{\zeta^4_{\mathbb{Z}_2}(s)}{\zeta^4_{\mathbb{Z}_2}(1-s)}.$$

Por otro lado, de (26) y la tabla anterior, tenemos que

$$B_3(S_3) = B_3(S_3)e^3_{s_3,1} \prod \left[B_3(1)e^3_{1,1}\right]^2,$$

por lo que de la proposición 5.1.1 y (27), obtenemos:

$$B_3(S_3) = B_3(C_3) \prod \mathbb{Z}^2_3.$$

Además del resultado obtenido en 2.1 para $p = 3$, obtenemos que

$$\zeta_{B_3(S_3)}(s) = \left[1 - 3^{-s} + 3^{1-2s}\right] \zeta^4_{\mathbb{Z}_3}(s), \tag{29}$$

para la cual podemos observar que se cumple la relación:

$$\frac{\zeta_{B_3(S_3)}(s)}{\zeta_{B_3(S_3)}(1-s)} = \left[3^{1-2s}\right] \frac{\zeta^4_{\mathbb{Z}_3}(s)}{\zeta^4_{\mathbb{Z}_3}(1-s)}.$$

Finalmente, del producto de Euler junto con (28) y (29) obtenemos

$$\zeta_{B(S_3)}(s) = \left[1 - 2^{-s} + 2^{1-2s}\right]^2 \left[1 - 3^{-s} + 3^{1-2s}\right] \zeta^4_{\mathbb{Z}}(s),$$

para la cual se cumple la siguiente relación:

$$\frac{\zeta_{B(S_3)}(s)}{\zeta_{B(S_3)}(1-s)} = \left[2^{1-2s}\right]^2 \left[3^{1-2s}\right] \frac{\zeta^4_{\mathbb{Z}}(s)}{\zeta^4_{\mathbb{Z}}(1-s)}.$$

5.3. La función $\zeta_{B(A_4)}(s)$.

Sea A_4 el grupo alternante de orden 12. De [**23**] tenemos que las clases de conjugación de los subgrupos de A_4 son

$$C(A_4) = \{1; \langle(12)(34)\rangle \cong C_2; \langle(243)\rangle \cong C_3; \langle(13)(24); (12)(34)\rangle \cong V; A_4\},$$

en donde tenemos las siguientes contenciones:

$$\langle 1 \rangle \trianglelefteq \begin{cases} C_2 \trianglelefteq V \trianglelefteq A_4 \\ \\ C_3 \leq A_4. \end{cases}$$

Además tenemos:

$$\begin{array}{lll} O^2(1) = 1, & O^3(1) = 1, & W_{A_4}(1) = A_4/1 \cong A_4 \\ O^2(C_2) = 1, & O^3(C_2) = C_2, & W_{A_4}(C_2) = V/C_2 \cong C_2 \\ O^2(C_3) = C_3, & O^3(C_3) = 1, & W_{A_4}(C_3) = C_3/C_3 \cong 1 \\ O^2(V) = 1, & O^3(V) = V, & W_{A_4}(V) = A_4/V \cong C_3 \\ O^2(A_4) = A_4, & O^3(A_4) = V, & W_{A_4}(A_4) = A_4/A_4 \cong 1. \end{array}$$

De (26) y la tabla anterior, tenemos

$$B_2(A_4) = B_2(A_4)e^2_{A_4,1} \prod \left[B_2(1)e^2_{1,1}\right]^2,$$

por lo que de (27) obtenemos que

$$B_2(A_4) = B_2(A_4)e^2_{A_4,1} \prod [\mathbb{Z}_2]^2.$$

Además

$$B_2(A_4)e^2_{A_4,1} = \mathbb{Z}_2(A_4/1) \bigoplus \mathbb{Z}_2(A_4/C_2) \bigoplus \mathbb{Z}_2(A_4/V),$$

para el cual se tiene que la tabla de marcas respecto a la base ordenada $\{(A_4/1); (A_4/C_2); (A_4/V)\}$ es

$$\begin{pmatrix} 12 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a la cual si le aplicamos operaciones elementales en columnas, usando elementos en $\mathbb{Z}_2$ obtenemos que:

Multiplicando la primera y la tercera columna por $\frac{1}{3}$ obtenemos que la tabla de marcas es equivalente a

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y al restarle la primera columna a la segunda columna, obtenemos que la tabla de marcas es equivalente a

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la cual se corresponde con la tabla de marcas de $B_2(C_4)$, y por lo tanto

$$B_2(A_4) = B_2(C_4) \prod [\mathbb{Z}_2]^2,$$

por lo que de 2.2 para el caso $p = 2$, obtenemos:

$$(30) \qquad \boldsymbol{\zeta_{B_2(A_4)}(s) =}$$

$$\boldsymbol{\left[1 - (2)^{1-s} + 7(2)^{-2s} - (2)^{2-3s} + 3(2)^{1-4s} + (2)^{2-5s}\right] \zeta_{\mathbb{Z}_2}^5(s).}$$

Por otro lado, de (26) y la tabla anterior, tenemos que

$$B_3(A_4) = B_3(A_4)e^3_{A_4,1} \prod B_3(C_2)e^3_{C_2,1} \prod B_3(C_3)e^3_{C_3,1}$$

por lo que de la proposición 5.1.1 y (27), obtenemos

$$B_3(A_4) = B_3(C_3) \prod \mathbb{Z}_3 \prod B_3(C_3).$$

Además del resultado obtenido en 2.1 para $p = 3$, tenemos que

$$(31) \qquad \boldsymbol{\zeta_{B_3(A_4)}(s) = \left[1 - 3^{-s} + 3^{1-2s}\right]^2 \zeta_{\mathbb{Z}_3}^5(s),}$$

para la cual podemos observar que se cumple la relación:

$$\frac{\zeta_{B_3(A_4)}(s)}{\zeta_{B_3(A_4)}(1-s)} = \left[3^{1-2s}\right]^2 \frac{\zeta_{\mathbb{Z}_3}^5(s)}{\zeta_{\mathbb{Z}_3}^5(1-s)}.$$

Finalmente, del producto de Euler junto con (30) y (31) obtenemos:

$$\boldsymbol{\zeta_{B(S_3)}(s) =}$$

$$\boldsymbol{\left[1-(2)^{1-s}+7(2)^{-2s}-(2)^{2-3s}+3(2)^{1-4s}+(2)^{2-5s}\right]\left[1-3^{-s}+3^{1-2s}\right]^2\zeta_{\mathbb{Z}}^5(s)\,.}$$

5.4. La función $\zeta_{B(A_5)}(s)$.

Sea A_5 el grupo alternante de orden 60. De [**23**] tenemos que las clases de conjugación de los subgrupos de A_5 son

$$C(A_5) = \{1; C_2; C_3; C_5; V; S_3; D_{10}; A_4; A_5\}$$

en donde
$C_2 \cong \langle (23)(45) \rangle$,
$C_3 \cong \langle (345) \rangle$,
$C_5 \cong \langle (12345) \rangle$,
$V \cong \langle (23)(45); (24)(35) \rangle$,
$S_3 \cong \langle (345); (12)(45) \rangle$,
$D_{10} \cong \langle (12345); (25)(34) \rangle$, para las cuales tenemos las siguientes contenciones:

$$\langle 1 \rangle \trianglelefteq \begin{cases} C_2 \begin{cases} \leq S_3 \leq A_5 \\ \trianglelefteq V \trianglelefteq A_4 \leq A_5 \\ \leq D_{10} \leq A_5 \end{cases} \\ C_3 \trianglelefteq S_3 \leq A_5 \\ C_5 \trianglelefteq D_{10} \leq A_5. \end{cases}$$

Además tenemos:

$$
\begin{array}{llll}
O^2(1) = 1, & O^3(1) = 1, & O^5(1) = 1, & W_{A_5}(1) = A_5 \\
O^2(C_2) = 1, & O^3(C_2) = C_2 & O^5(C_2) = C_2 & W_{A_5}(C_2) = C_2 \\
O^2(C_3) = C_3, & O^3(C_3) = 1, & O^5(C_3) = C_3 & W_{A_5}(C_3) = C_2 \\
O^2(C_5) = C_5, & O^3(C_5) = C_5 & O^5(C_5) = 1, & W_{A_5}(C_5) = C_2 \\
O^2(S_3) = C_3, & O^3(S_3) = S_3 & O^5(S_3) = S_3 & W_{A_5}(S_3) = 1 \\
O^2(V) = 1, & O^3(V) = V & O^5(V) = V & W_{A_5}(V) = C_3 \\
O^2(D_{10}) = C_5, & O^3(D_{10}) = D_{10} & O^5(D_{10}) = D_{10} & W_{A_5}(D_{10}) = 1, \\
O^2(A_4) = A_4, & O^3(A_4) = V & O^5(A_4) = A_4 & W_{A_5}(A_4) = 1, \\
O^2(A_5) = A_5, & O^3(A_5) = A_5 & O^5(A_5) = A_5 & W_{A_5}(A_5) = 1.
\end{array}
$$

De (26) y la tabla anterior, tenemos

$$B_2(A_5) = B_2(A_5)e^2_{A_5,1} \prod \left[B_2(C_2)e^2_{C_2,1}\right]^2 \prod \left[B_2(1)e^2_{1,1}\right]^2,$$

por lo que de 5.1.1 junto con (27) obtenemos que

$$B_2(A_5) = B_2(A_5)e^2_{A_5,1} \prod \left[B_2(C_2)\right]^2 \prod \left[\mathbb{Z}_2\right]^2.$$

Además

$$B_2(A_5)e^2_{A_5,1} = \mathbb{Z}_2(A_5/1) \bigoplus \mathbb{Z}_2(A_5/C_2) \bigoplus \mathbb{Z}_2(A_5/V),$$

para el cual se tiene que la tabla de marcas respecto a la base ordenada $\{(A_5/1);(A_5/C_2);(A_5/V)\}$ es

$$\begin{pmatrix} 60 & 30 & 15 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a la cual si le aplicamos operaciones elementales en columnas, usando elementos en $\mathbb{Z}_2$ obtenemos que:

Multiplicando la primer columna por $\frac{1}{15}$ y la tercer columna por $\frac{1}{3}$, obtenemos que la tabla de marcas es equivalente a

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y al restarle la primera columna a la segunda y a la tercer columna, obtenemos que la tabla de marcas es equivalente a

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la cual se corresponde con la tabla de marcas de $B_2(C_4)$, y por lo tanto

$$B_2(A_5) = B_2(C_4) \prod [B_2(C_2)]^2 \prod [\mathbb{Z}_2]^2,$$

por lo que de 2.2 y 2.1 para el caso $p = 2$, obtenemos que:

$$(32) \qquad \boldsymbol{\zeta_{B_2(A_5)}(s) =}$$

$$\boldsymbol{\left[1 - (2)^{1-s} + 7(2)^{-2s} - (2)^{2-3s} + 3(2)^{1-4s} + (2)^{2-5s}\right]\left[1 - 2^{-s} + 2^{1-2s}\right]^2 \zeta^9_{\mathbb{Z}_2}(s).}$$

Por otro lado, de (26) y la tabla anterior, tenemos

$$B_3(A_5) = B_3(A_5)e^3_{A_5,1} \prod \left[B_3(C_2)e^3_{C_2,1}\right]^2 \prod B_3(C_3)e^3_{C_3,1} \prod \left[B_3(1)e^3_{1,1}\right]^3,$$

por lo que de la proposición 5.1.1 y (27), obtenemos que

$$B_3(A_5) = [B_3(C_3)]^2 \prod \mathbb{Z}_3^5$$

además del resultado obtenido en 2.1 para $p = 3$, obtenemos

$$(33) \qquad \boldsymbol{\zeta_{B_3(A_5)}(s) = \left[1 - 3^{-s} + 3^{1-2s}\right]^2 \zeta^9_{\mathbb{Z}_3}(s),}$$

para la cual podemos observar que se cumple la relación:

$$\frac{\zeta_{B_3(A_5)}(s)}{\zeta_{B_3(A_5)}(1-s)} = \left[3^{1-2s}\right]^2 \frac{\zeta^9_{\mathbb{Z}_3}(s)}{\zeta^9_{\mathbb{Z}_3}(1-s)}.$$

De la misma forma, de (26) y la tabla anterior, tenemos

$$B_5(A_5) = B_5(A_5)e^5_{A_5,1} \prod \left[B_5(C_2)e^5_{C_2,1}\right]^2 \prod B_5(C_3)e^5_{C_3,1} \prod \left[B_5(1)e^5_{1,1}\right]^4$$

por lo que de la proposición 5.1.1 y (27), obtenemos

$$B_5(A_5) = B_5(C_5) \prod \mathbb{Z}_5^9.$$

Además del resultado obtenido en 2.1 para $p = 5$, obtenemos que

$$\boldsymbol{\zeta_{B_5(A_5)}(s) = \left[1 - 5^{-s} + 5^{1-2s}\right] \zeta_{\mathbb{Z}_5}^{9}(s)} \tag{34}$$

para la cual podemos observar que se cumple la relación:

$$\frac{\zeta_{B_5(A_5)}(s)}{\zeta_{B_5(A_5)}(1-s)} = \left[5^{1-2s}\right] \frac{\zeta_{\mathbb{Z}_5}^{9}(s)}{\zeta_{\mathbb{Z}_5}^{9}(1-s)}.$$

Finalmente, del producto de Euler junto con (32), (33) y (34) tenemos:

$$\boldsymbol{\zeta_{B(A_5)}(s) = f_{C_4}\left(2^{-s}\right) f_{C_2}^{2}\left(2^{-s}\right) f_{C_3}^{2}\left(3^{-s}\right) f_{C_5}\left(5^{-s}\right) \zeta_{\mathbb{Z}}^{9}(s)},$$

en donde

$$f_{C_4}(2^{-s}) = \left[1 - (2)^{1-s} + 7(2)^{-2s} - (2)^{2-3s} + 3(2)^{1-4s} + (2)^{2-5s}\right],$$
$$f_{C_2}(2^{-s}) = \left[1 - 2^{-s} + 2^{1-2s}\right],$$
$$f_{C_3}(3^{-s}) = \left[1 - 3^{-s} + 3^{1-2s}\right] \text{ y}$$
$$f_{C_5}(5^{-s}) = \left[1 - 5^{-s} + 5^{1-2s}\right].$$

5.5. La función $\zeta_{B_3(S_4)}(s)$.

Sea S_4 el grupo simétrico de orden 24. De [**23**] tenemos que las clases de conjugación de los subgrupos de S_4 son

$$C(S_4) = \{1; C_2; C_2'; C_3; (C_2 \times C_2); C_4; V; S_3; D_8; A_4; S_4\}$$

en donde

$C_2 \cong \langle(34)\rangle = \langle(34)\rangle = \langle(13)\rangle^{(14)}$,
$C_2' \cong \langle(13)(24)\rangle = \langle(12)(34)\rangle^{(14)}$
$C_3 \cong \langle(243)\rangle$,
$C_2 \times C_2 \cong \langle(12);(34)\rangle = \langle(24);(13)\rangle^{(14)}$,
$C_4 \cong \langle(1324)\rangle = \langle(1432)\rangle^{(14)}$,
$V \cong \langle(14)(23);(13)(24)\rangle$,
$S_3 \cong \langle(34);(243)\rangle$,
$D_8 \cong \langle(1234);(13)\rangle$,
$A_4 \cong \langle(13)(24);(14)(23);(243)\rangle$, teniendo las siguientes contenciones:

$$\langle 1\rangle \trianglelefteq \begin{cases} C_2 \begin{cases} \trianglelefteq C_2 \times C_2 \trianglelefteq D_8 \leq S_4 \\ \leq S_3 \leq S_4 \end{cases} \\ C_2' \trianglelefteq \begin{cases} C_2 \times C_2 \trianglelefteq D_8 \leq S_4 \\ C_4 \trianglelefteq D_8 \leq S_4 \\ V \trianglelefteq \begin{cases} D_8 \leq S_4 \\ A_4 \trianglelefteq S_4 \end{cases} \end{cases} \\ C_3 \begin{cases} \trianglelefteq S_3 \leq S_4 \\ \leq A_4 \trianglelefteq S_4 \end{cases} \end{cases}$$

en donde tenemos que $C_2' \trianglelefteq D_8$ y $V \trianglelefteq S_4$, por lo que tenemos:

$$
\begin{array}{lll}
O^2(1) = 1 & O^3(1) = 1 & W_{S_4}(1) = S_4 \\
O^2(C_2) = 1 & O^3(C_2) = C_2 & W_{S_4}(C_2) = C_2 \\
O^2(C_2') = 1 & O^3(C_2') = C_2' & W_{S_4}(C_2') = C_2 \times C_2 \\
O^2(C_3) = C_3 & O^3(C_3) = 1 & W_{S_4}(C_3) = C_2 \\
O^2(C_2 \times C_2) = 1 & O^3(C_2 \times C_2) = C_2 \times C_2 & W_{S_4}(C_2 \times C_2) = C_2' \\
O^2(C_4) = 1 & O^3(C_4) = C_4 & W_{S_4}(C_4) = C_2 \\
O^2(V) = 1 & O^3(V) = V & W_{S_4}(V) = S_3 \\
O^2(D_8) = 1 & O^3(D_8) = D_8 & W_{S_4}(D_8) = 1 \\
O^2(S_3) = C_3 & O^3(S_3) = S_3 & W_{S_4}(S_3) = 1 \\
O^2(A_4) = A_4 & O^3(A_4) = V & W_{S_4}(A_4) = C_2 \\
O^2(S_4) = A_4 & O^3(S_4) = S_4 & W_{S_4}(S_4) = 1
\end{array}
$$

De (26) y la tabla anterior, obtenemos:

$$B_3(S_4) = \prod_H B_3(H)e^3_{H,1} \prod \left[B_3(1)e^3_{1,1}\right]^3 \prod \left[B_3(C_2)e^3_{C_2,1}\right]^2,$$

en donde H corre sobre el conjunto $\{S_4; (C_2 \times C_2); C_2'; S_3\}$, por lo que de la proposición 5.1.1 y (27), obtenemos

$$B_3(S_4) = [B_3(C_3)]^2 \prod \mathbb{Z}_3^7.$$

Además del resultado obtenido en 2.1 para $p = 3$, obtenemos que

$$(35) \qquad \boldsymbol{\zeta_{B_3(S_4)}(s) = \left[1 - 3^{-s} + 3^{1-2s}\right]^2 \zeta^{11}_{\mathbb{Z}_3}(s)},$$

para la cual podemos observar que se cumple la relación:

$$\frac{\zeta_{B_3(S_4)}(s)}{\zeta_{B_3(S_4)}(1-s)} = \left[3^{1-2s}\right]^2 \frac{\zeta^{11}_{\mathbb{Z}_3}(s)}{\zeta^{11}_{\mathbb{Z}_3}(1-s)}.$$

Conclusiones.

En este trabajo, se logró obtener las funciones zeta para los anillos de Burnside de grupos cíclicos, así como para grupos pequeños tales como S_3, S_4, A_4 y A_5, en los capítulos 2 y 5 respectivamente.

Por otro lado, se logró obtener una ecuación funcional para la función zeta del anillo de Burnside para ciertos grupos, así como una ecuación funcional para funciones L la cual es una generalización de la anterior, en los capítulos 3 y 4 respectivamente.

Se espera poder decifrar la restricción que se tiene para las ecuaciones funcionales dadas en los teoremas en 3.2.2 y 4.4.2, además de obtener resultados para las funciones zeta de anillos que tengan cierto tipo de tablas de marcas.

Nomenclatura.

G Grupo finito.
$\mathbb{N}$ Los números naturales.
$\mathbb{Z}$ El anillo de los números enteros.
$\mathbb{Q}$ El campo de los números racionales.
$\mathbb{C}$ El campo de los números complejos.
$\mathbb{Z}_p$ El anillo de los enteros p-ádicos.
$\mathbb{Q}_p$ El campo de los números p-ádicos.
$\sim$ Relación de equivalencia.
$\bigoplus$ Suma directa.
$\bigotimes$ Producto tensorial.
$H \leq G$, H subgrupo de G.
$H \trianglelefteq G$, H subgrupo normal de G.
$G \diagup H$ El conjunto de clases laterales izquierdas de H en G.
$\overline{H}$ Clase de conjugación de H.
$\mathcal{C}(G)$ El conjunto de clases de conjugación de los subgrupos de G
X^H El conjunto de puntos fijos de X bajo la acción de H.
$\varphi_H(X)$ La marca de H en X.
$N_G(H)$ El normalizador de H en G.
$W(G)$ El grupo de Weyl de G.
$\langle x \rangle$ El conjunto generado por el elemento x.
$|X|$ Número de elementos del conjunto X.
$(\Lambda : I)$ Índice de I en Λ.
$\{M : N\}$ El conductor de M en N.
$\|x\|_V$ La norma de x en V.
Φ_ΛLa función característica.
$\widehat{\Phi}$ La transformada de Fourier de Φ.
DIP Dominio de Ideales principales.
$B(G)$ El anillo de Burnside de G.
$\tilde{B}(G)$ Producto cartesiano de $\mathbb{Z}$ tantas veces como elementos en $\mathcal{C}(G)$.
$B_p(G)$ Producto tensorial en $\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}_p$ con $B(G)$.
$\tilde{B}_p(G)$ Producto tensorial en $\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}_p$ con $\tilde{B}(G)$.
$\zeta_\Lambda(s)$ La función ζ del orden Λ.
$Z_\Lambda(M, s)$ La función Z de M en el orden Λ.
$Z(\Phi, s)$ La función Z asociada a Φ.
$L_\Lambda(M, s, \psi)$ La función L de M y ψ, en el orden Λ.
$Z(\Phi, s, \psi)$ La función Z asociada a Φ y ψ.
$O^p(H)$ Mínimo subgrupo normal de H, tal que $H/O^p(H)$ es p-grupo.
$e^p_{G,H}$ Idempotentes primitivos de $B(G)$.
A_n Grupo alternante.

S_nGrupo de simetría.

Bibliografía

[1] Andreas Dress. (1973). Contributions to the theory of induced representations. Lecture Notes in Math. Algebraic K-theory (Springer-Verlag), 342:183–240

[2] Bouc, S. Burnside rings. (2000). Handbook of algebra, vol 2, 739-804, North-Holland, Amsterdam.

[3] Bushnell, C. J., Reiner, I. (1980a). Zeta functions of orders. K. Roggenkamp, ed., Lecture Notes in Mathematics, vol. 882, Springer Verlag, N. Y., 1980, pp.159-173.

[4] Bushnell, C. J., Reiner I. (1980b). Solomon's conjectures and the local functional equation for zeta functions of orders. American Mathematical Society, Vol. 2, N. 2, march

[5] Bushnell, C. J., Reiner I. (1981a). L-functions of aritmetic orders and asymptotic distribution of ideals , J. reine angew. Math. 327 . pp.156-183.

[6] Bushnell, C. J., Reiner I. (1981b). Functional ecuations for L-functions of aritmetic orders, J. reine angew. Math. 329. pp.88-123.

[7] Bushnell, C. J., Reiner, I. (1984). Analytic continuation of partial zeta functions of arithmetic orders. J. Reine Angew. Math. vol. 349, pp. 160-178.

[8] Bushnell, C. J., Reiner, I. (1986). Functional equations for Hurwitz series and partial zeta functions of orders. J. Reine Angew. Math. vol. 364, pp. 130-148.

[9] Bushnell, C. J., Reiner, I. (1987a). Zeta functions and composition factors for arithmetic orders. Math. Z. 194, 415-428.

[10] Bushnell, C. J., Reiner, I. (1987b). Zeta functions of arithmetic orders and Solomon's conjectures. Math. Z. 173, 135-161.

[11] Carlsson, G. (1984). Equivariant stable homotopy and Segal's Burnside ring conjecture. Ann. of Math. (2) 120, num. 2, 189-224.

[12] Carlsson, G. (1987). Segal's Burnside ring conjecture and related problems in topology. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1,2 (Berkeley, Calif., 1986), 574-579, Amer. Math. Soc., Providence, RI.

[13] Curtis, C. W., Reiner, I. (1981). Methods of representation theory with applications to finite groups and orders. Vol. 1, Chapter 3. Wiley-Interscience, New York, N. Y.

[14] Curtis, C. W., Reiner, I. (1987). Methods of representation theory with applications to finite groups and orders. Vol. 2, Chapter 2. Wiley-Interscience, New York, N. Y.

[15] Janusz, G. (1979). Abstract Harmonic Analysis. Springer-Verlag.

[16] Raggi, C. A. G. (1986). Zeta functions of tow-sided ideals in arithmetic orders. Math. Z. 192, 353-382.

[17] Reiner, I.(1975). Maximal Orders, London-New York. Academic Press.

[18] Reiner, I. (1980). Zeta functions of integral representations. Communication in Algebra 8, pp.911-925

[19] Solomon, L. (1977). Zeta Functions and Integral Representation Theory. Advances in Mathematics 26, 306-326.

[20] Tate, J. T. (1967). Fourier analysis in local fields and Hecke's zeta functions . Tesis. Algebraic Number Theory , pp 305-347, London: Acadmic Press.

[21] Villa-Hernández D. (2009). Zeta functions of Burnside rings of grups of order p and p^2. Communications in Algebra, 37. pp 1758-1786.

[22] Wolfgang Kimmerle, Florian Luca and Gerardo Raggi (2008). Irreducible components and isomorphisms of the Burnside ring. Journal of Group Theory, Vol. 11, Number 6. pp 831-844.

[23] The GAP Group. (2008) GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.4.12. (http://www.gap-system.org)